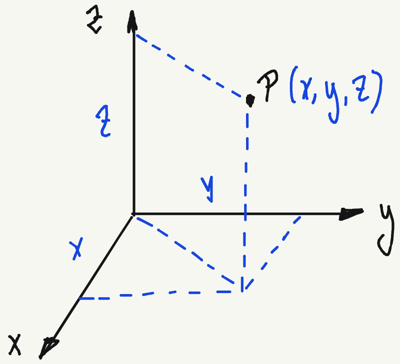
SISTEMAS DE COORDENADAS : CARTESIANAS

- **COORDENADAS** → Indicar la posición de un punto en el espacio

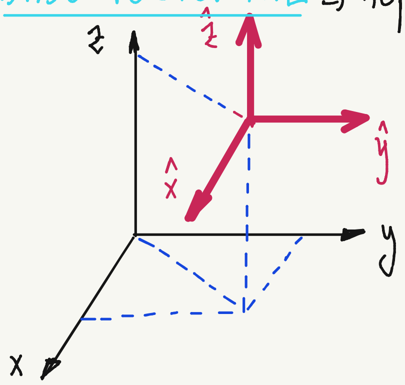


- Sistema de referencia formado por 3 ejes ⊥ entre sí (x, y, z) que se cortan en el origen
- $P = (x, y, z)$

  x, y, z : distancias ortogonales a 3 planos principales

  $x = 0$ (plano YZ), $y = 0$ (plano XZ), $z = 0$ (plano XY)

- **BASE VECTORIAL** → Representan vectores (necesitamos indicar módulo y dirección)

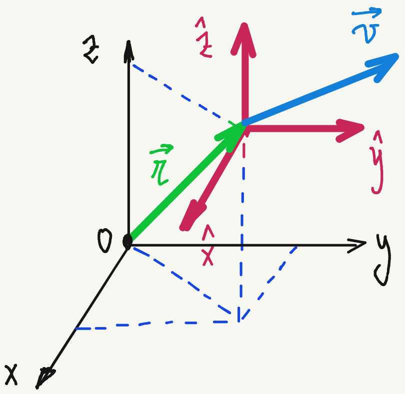


- 3 vectores unitarios ortogonales // ejes de coordenadas

  $\hat{x}$ $\hat{y}$ $\hat{z}$

  $\vec{i}$ $\vec{j}$ $\vec{k}$

  $\hat{e}_x$ $\hat{e}_y$ $\hat{e}_z$



- Un vector $\vec{v}$ cualquiera se escribe :

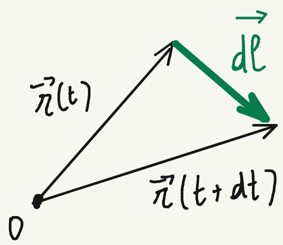
$$\vec{v} = v_x(x,y,z)\,\hat{x} + v_y(x,y,z)\,\hat{y} + v_z(x,y,z)\,\hat{k}$$

$v_x, v_y, v_z \Rightarrow$ COMPONENTES CARTESIANAS

$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} \Rightarrow$ MÓDULO

- Vector de posición en cartesianas

$$\vec{r} = x\,\hat{x} + y\,\hat{y} + z\,\hat{z}$$



- Vector desplazamiento infinitesimal

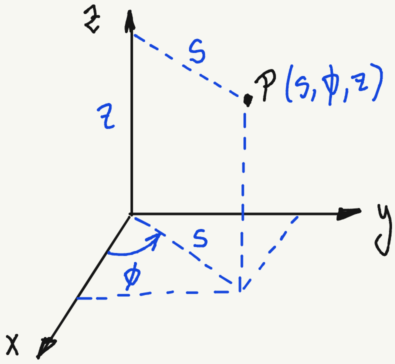
$$\vec{dl} = \vec{r}(t+dt) - \vec{r}(t) =$$

$$= (x+dx,\, y+dy,\, z+dz) - (x, y, z) =$$

$$= dx\,\hat{x} + dy\,\hat{y} + dz\,\hat{z}$$

SISTEMAS DE COORDENADAS: CILÍNDRICAS

• COORDENADAS



• $P = (s, \phi, z)$

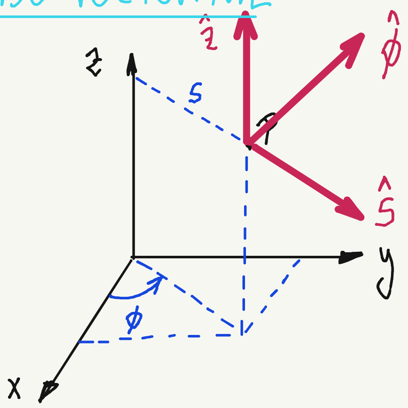
$s \rightarrow$ distancia al eje z (también se usa r, ρ)

$\phi \in [0, 2\pi) \rightarrow$ ACIMUT (ángulo con eje x +)

$z \rightarrow$ ALTURA

CIL → CAR	CAR → CIL
$x = s\cos\phi$	$s = \sqrt{x^2 + y^2}$
$y = s\sin\phi$	$\phi = \operatorname{atan}\frac{y}{x}$
$z = z$	$z = z$

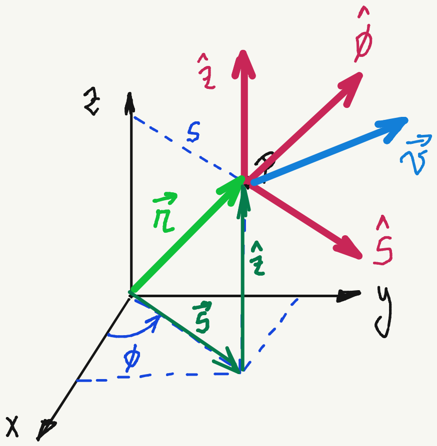
• BASE VECTORIAL



• $\hat{s} \Rightarrow$ contenido en plano horizontal // a plano XY, del eje z a P

• $\hat{\phi} \Rightarrow$ contenido en plano horizontal tangente a superficie cilíndrica que pasa por P en sentido creciente de ϕ

• $\hat{z} \Rightarrow$ paralelo al eje z



• Un vector $\vec{v}$ cualquiera se escribe:

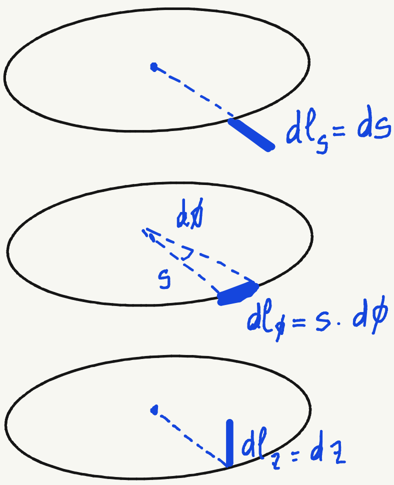
$$\vec{v} = v_s(s,\phi,z)\,\hat{s} + v_\phi(s,\phi,z)\,\hat{\phi} + v_z(s,\phi,z)\,\hat{k}$$

$v_s, v_\phi, v_z \Rightarrow$ componentes cilíndricas

$v = \sqrt{v_s^2 + v_\phi^2 + v_z^2} \Rightarrow$ módulo

• Vector de posición en cilíndricas

$\vec{r} = s\,\hat{s} + z\,\hat{k} \Rightarrow$ Está en plano SZ, no tiene componente $\hat{\phi}$



• Vector desplazamiento infinitesimal

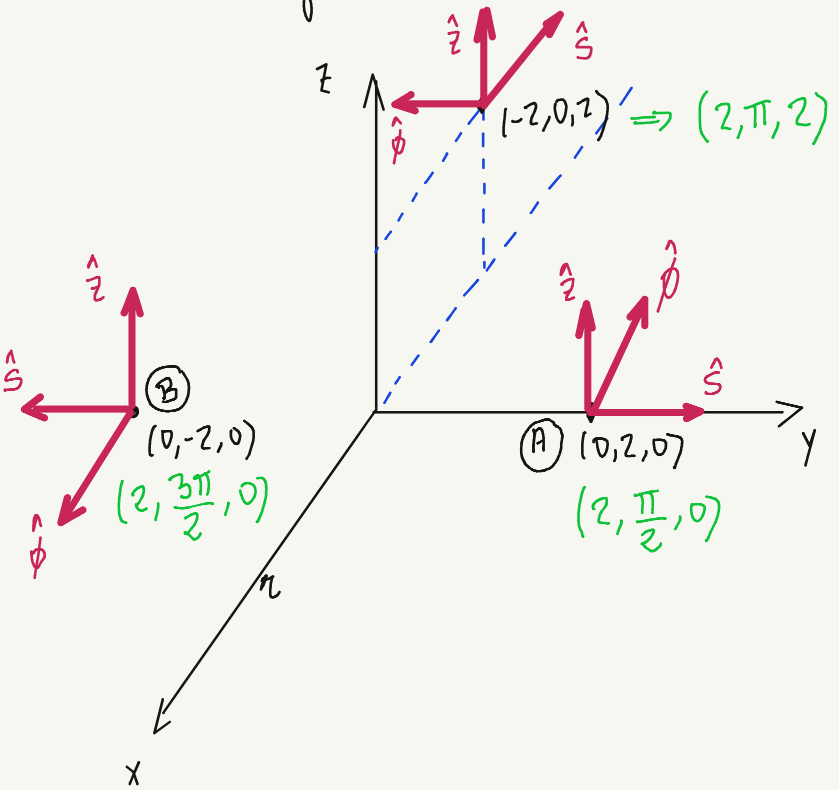
$$\vec{dl} = dl_s\,\hat{s} + dl_\phi\,\hat{\phi} + dl_z\,\hat{z} =$$

$$= ds\,\hat{s} + s\,d\phi\,\hat{\phi} + dz\,\hat{z}$$

Ejemplo 1 - Pasar de cartesianas a cilíndricas las coordenadas de

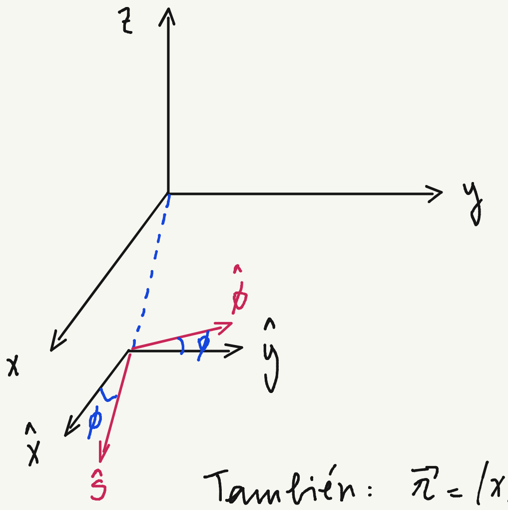
$A=(0,2,0)$
$B=(0,-2,0)$
$C=(-2,0,2)$

Dibujar los vectores unitarios de c. cilíndricas en A, B, C



En el eje z ($s=0$)
ϕ no está definido

- RELACIÓN VECTORES BASE CILÍNDRICA - BASE CARTESIANA



CAR → CIL	CIL → CAR
$\hat{s} = \cos\phi\,\hat{x} + \sin\phi\,\hat{y}$	$\hat{x} = \cos\phi\,\hat{s} - \sin\phi\,\hat{\phi}$
$\hat{\phi} = -\sin\phi\,\hat{x} + \cos\phi\,\hat{y}$	$\hat{y} = \sin\phi\,\hat{s} + \cos\phi\,\hat{\phi}$
$\hat{z} = \hat{z}$	$\hat{z} = \hat{z}$

También: $\vec{r} = (x,y,z) = (s\cos\phi, s\sin\phi, z)$

- $\hat{s} = \dfrac{1}{\left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial s}\right|}\dfrac{\partial \vec{r}}{\partial s} = (\cos\phi, \sin\phi, 0)$, $\quad \left|\dfrac{\partial \vec{r}}{\partial s}\right| = \sqrt{\cos^2\phi + \sin^2\phi} = 1$

- $\hat{\phi} = \dfrac{1}{\left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial \phi}\right|}\dfrac{\partial \vec{r}}{\partial \phi} = (-\sin\phi, \cos\phi, 0)$, $\quad \left|\dfrac{\partial \vec{r}}{\partial \phi}\right| = \sqrt{s^2\left((-\sin\phi)^2 + (\cos\phi)^2\right)} = s$

- $\hat{z} = \dfrac{1}{\left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial z}\right|}\dfrac{\partial \vec{r}}{\partial z} = (0,0,1)$, $\quad \left|\dfrac{\partial \vec{r}}{\partial z}\right| = 1$

- MATRIZ CAMBIO DE BASE : CAR $\longrightarrow$ CIL

Si tenemos vector en cartesianas $\vec{v} = v_x\,\hat{x} + v_y\,\hat{y} + v_z\,\hat{z}$ sustituimos vectores de la base cartesiana escritos en función de la base cilíndrica y agrupamos

$$\vec{v} = \underbrace{(v_x\cos\phi + v_y\sin\phi)}_{v_s}\,\hat{s} + \underbrace{(-v_x\sin\phi + v_y\cos\phi)}_{v_\phi}\,\hat{\phi} + \underbrace{v_z}_{v_z}\,\hat{z}$$

$$\begin{pmatrix} v_s \\ v_\phi \\ v_z \end{pmatrix} = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi & 0 \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \quad\hat{x} \qquad\quad \hat{y} \qquad \hat{z} \end{array} \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}$$

MATRIZ CAMBIO DE BASE $\Rightarrow$ Vectores de la base vieja en función de la nueva en columnas

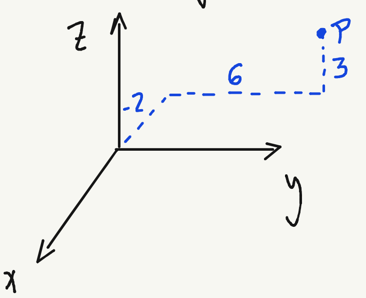
- MATRIZ CAMBIO DE BASE : CIL $\longrightarrow$ CAR

Conocemos $\vec{v} = v_s\,\hat{s} + v_\phi\,\hat{\phi} + v_z\,\hat{z} = \underbrace{(v_s\cos\phi - v_\phi\sin\phi)}_{v_x}\,\hat{x} + \underbrace{(v_s\sin\phi + v_\phi\cos\phi)}_{v_y}\,\hat{y} + \underbrace{v_z}_{v_z}\,\hat{k}$

$$\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & 0 \\ \sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \quad\hat{s} \qquad\quad \hat{\phi} \qquad \hat{z} \end{array} \begin{pmatrix} v_s \\ v_\phi \\ v_z \end{pmatrix}$$

Ejemplo 2 _ En el punto $P = (x,y,z) = (-2,6,3)$ las componentes cartesianas de un campo vectorial son $\vec{A} = (A_x, A_y, A_z) = (6,1,0) = 6\hat{x} + \hat{y}$ ¿$\vec{A}$ en cilíndricas?

- Primero hay que encontrar P en cilíndricas, ¿$P = (s,\phi,z)$?



$s = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{4+36} = 6'32$

$\phi = \operatorname{atan}\frac{y}{x} = \operatorname{atan}\frac{6}{-2} = \cancel{-71'56^\circ}$ / $108^\circ \Rightarrow$ P está en 2º cuadrante

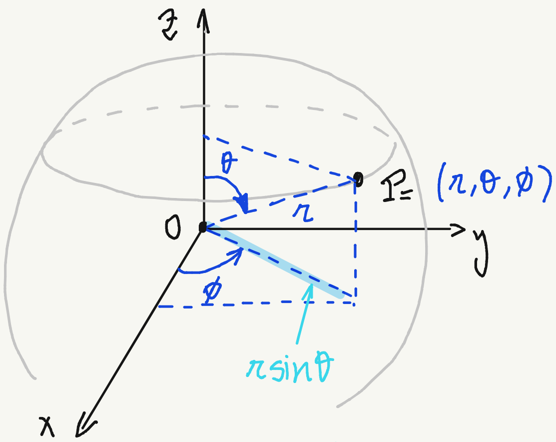
$z = 3$

- ¿$\vec{A} = A_s\,\hat{s} + A_\phi\,\hat{\phi} + A_z\,\hat{z}$?

$$\begin{pmatrix} A_s \\ A_\phi \\ A_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 108^\circ & \sin 108^\circ & 0 \\ -\sin 108^\circ & \cos 108^\circ & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0'9 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{\vec{A} = -0'9\,\hat{s} - 6\,\hat{\phi}}$$

SISTEMAS DE COORDENADAS : ESFÉRICAS

• COORDENADAS



• $P = (r, \theta, \phi)$

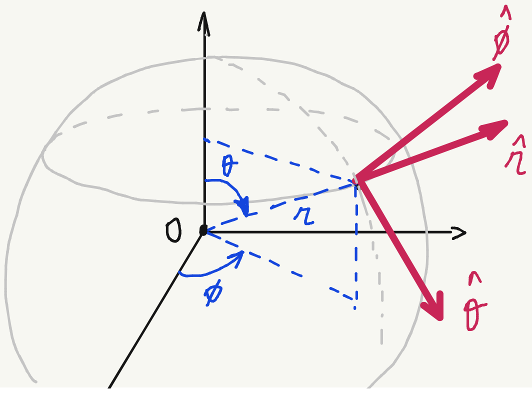
$r \to$ distancia de P a O

$\theta \in [0, \pi] \to$ COLATITUD (ángulo con eje $z+$)

$\phi \in [0, 2\pi) \to$ ACIMUT (ángulo con eje $x+$)

ESF $\to$ CAR	CAR $\to$ ESF
$x = r \sin\theta \cos\phi$	$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$
$y = r \sin\theta \sin\phi$	$\theta = \mathrm{acos}\,\frac{z}{r}$
$z = r \cos\theta$	$\phi = \mathrm{atan}\,\frac{y}{x}$

• BASE VECTORIAL



$\hat{r} \to \perp$ a superficie esférica que pasa por P con centro en O, hacia afuera

$\hat{\theta} \to$ Contenido en plano tangente a superficie esférica que pasa por P, en sentido creciente de θ

$\hat{\phi} \to$ Contenido en plano tangente a superficie esférica que pasa por P, en sentido creciente de ϕ

• Un vector $\vec{v}$ cualquiera se escribe:

$$\vec{v} = v_r(r,\theta,\phi)\,\hat{r} + v_\theta(r,\theta,\phi)\,\hat{\theta} + v_\phi(r,\theta,\phi)\,\hat{\phi}$$

$v_r, v_\theta, v_\phi \Rightarrow$ componentes esféricas

$v = \sqrt{v_r^2 + v_\theta^2 + v_\phi^2} \Rightarrow$ módulo

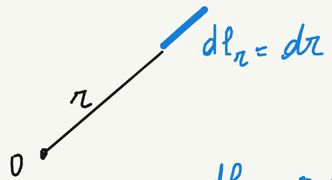
• Vector de posición en esféricas

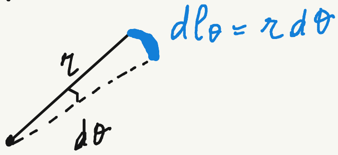
$$\vec{r} = r\,\hat{r}$$

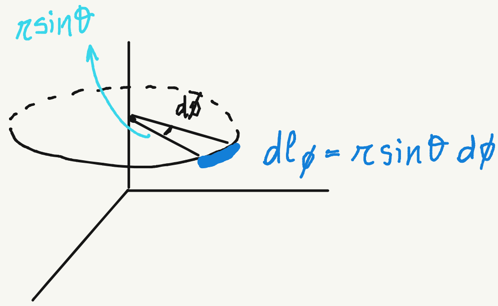
• Vector desplazamiento infinitesimal

$$\vec{dl} = dl_r\,\hat{r} + dl_\theta\,\hat{\theta} + dl_\phi\,\hat{\phi} =$$

$$= dr\,\hat{r} + r\,d\theta\,\hat{\theta} + r\sin\theta\,d\phi\,\hat{\phi}$$

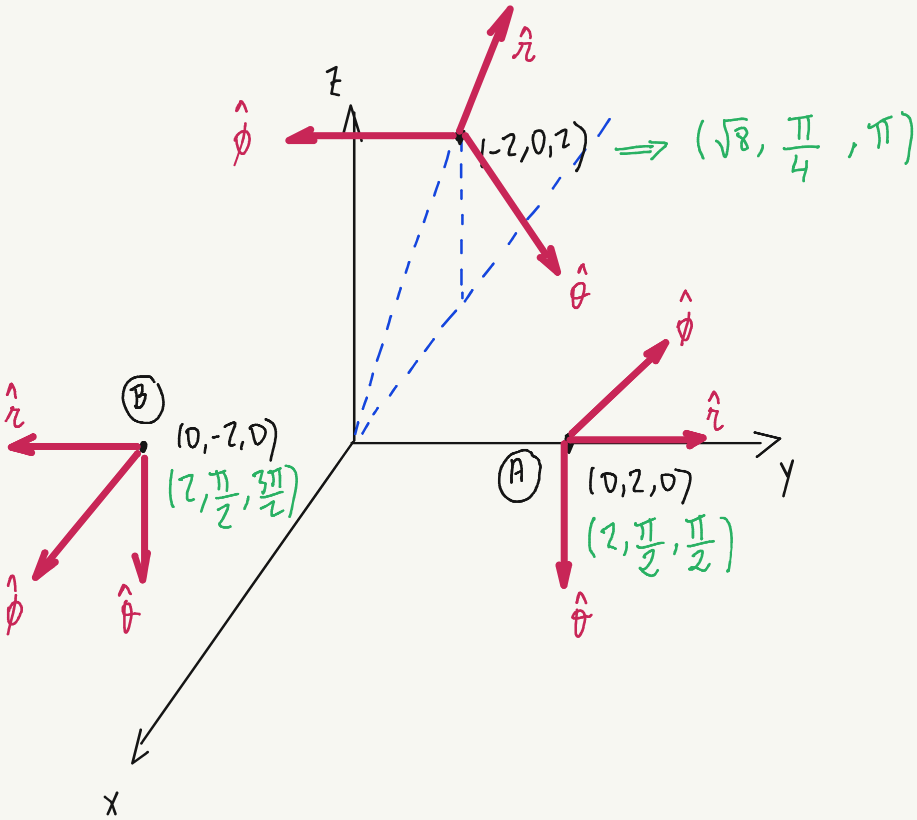






Ejemplo 3 - Pasar de cartesianas a esféricas las coordenadas de $A = (0,2,0)$, $B = (0,-2,0)$, $C = (-2,0,2)$

Dibujar los vectores unitarios de c. esféricas en A, B, C



En $\theta = 0$ y $\theta = \pi$

ϕ no está definido

- **RELACIÓN VECTORES BASE ESFÉRICA - BASE CARTESIANA**

ESF → CAR	CAR → ESF
$\hat{x} = \sin\theta\cos\phi\,\hat{r} + \cos\theta\cos\phi\,\hat{\theta} - \sin\phi\,\hat{\phi}$	$\hat{r} = \sin\theta\cos\phi\,\hat{x} + \sin\theta\sin\phi\,\hat{y} + \cos\theta\,\hat{z}$
$\hat{y} = \sin\theta\sin\phi\,\hat{r} + \cos\theta\sin\phi\,\hat{\theta} + \cos\phi\,\hat{\phi}$	$\hat{\theta} = \cos\theta\cos\phi\,\hat{x} + \cos\theta\sin\phi\,\hat{y} - \sin\theta\,\hat{z}$
$\hat{z} = \cos\theta\,\hat{r} - \sin\theta\,\hat{\theta}$	$\hat{\phi} = -\sin\phi\,\hat{x} + \cos\phi\,\hat{y}$

$$\vec{r} = r(\sin\theta\cos\phi,\ \sin\theta\sin\phi,\ \cos\theta)$$

$$\hat{r} = \frac{1}{\left|\frac{\partial\vec{r}}{\partial r}\right|}\frac{\partial\vec{r}}{\partial r} = (\sin\theta\cos\phi, \sin\theta\sin\phi, \cos\theta), \quad \left|\frac{\partial\vec{r}}{\partial r}\right| = 1$$

$$\hat{\theta} = \frac{1}{\left|\frac{\partial\vec{r}}{\partial\theta}\right|}\frac{\partial\vec{r}}{\partial\theta} = (\cos\theta\cos\phi, \cos\theta\sin\phi, -\sin\theta), \quad \left|\frac{\partial\vec{r}}{\partial\theta}\right| = r$$

$$\hat{\phi} = \frac{1}{\left|\frac{\partial\vec{r}}{\partial\phi}\right|}\frac{\partial\vec{r}}{\partial\phi} = \frac{1}{\sin\theta}(-\sin\theta\sin\phi, \sin\theta\cos\phi, 0) = (-\sin\phi, \cos\phi, 0), \quad \left|\frac{\partial\vec{r}}{\partial\phi}\right| = r\sin\theta$$

- **MATRIZ CAMBIO DE BASE : CAR $\to$ ESF**

Conocemos $\vec{v}$ en cartesianas, $\vec{v} = v_x\,\hat{x} + v_y\,\hat{y} + v_z\,\hat{z}$ ... ¿$\vec{v}$ en esféricas?

$$\begin{pmatrix} v_r \\ v_\theta \\ v_\phi \end{pmatrix} = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\phi & \sin\theta\sin\phi & \cos\theta \\ \cos\theta\cos\phi & \cos\theta\sin\phi & -\sin\theta \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{ccc} \hat{x} & \qquad\quad \hat{y} & \qquad\quad \hat{z} \end{array} \end{array} \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}$$

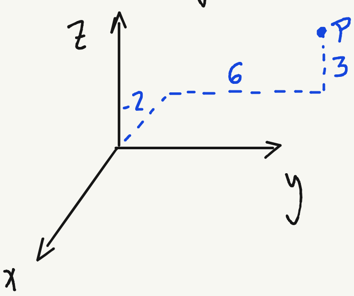
- **MATRIZ CAMBIO DE BASE : ESF $\to$ CAR**

Conocemos $\vec{v}$ en esféricas, $\vec{v} = v_r\,\hat{r} + v_\theta\,\hat{\theta} + v_\phi\,\hat{\phi}$ ... ¿$\vec{v}$ en cartesianas?

$$\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\phi & \cos\theta\cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\theta\sin\phi & \cos\theta\sin\phi & \cos\phi \\ \cos\theta & -\sin\theta & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{ccc} \hat{r} & \qquad\quad \hat{\theta} & \qquad\quad \hat{\phi} \end{array} \end{array} \begin{pmatrix} v_r \\ v_\theta \\ v_\phi \end{pmatrix}$$

Ejemplo 4 – En el punto $P = (x,y,z) = (-2,6,3)$ las componentes cartesianas de un campo vectorial son $\vec{A} = (A_x, A_y, A_z) = (6,1,0) = 6\hat{x} + \hat{y}$ ¿$\vec{A}$ en esféricas?

- Primero hay que encontrar P en esféricas, ¿$P = (r, \theta, \phi)$?



$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = 7$$

$$\theta = \operatorname{acos}\frac{z}{r} = \operatorname{acos}\frac{3}{7} = \begin{cases} 64'6^\circ \\ \cancel{-64'6^\circ} \end{cases}$$

$$\phi = \operatorname{atan}\frac{y}{x} = \operatorname{atan}\frac{6}{-2} = \begin{cases} 108'5^\circ \\ \cancel{-71'5^\circ} \end{cases}$$

- ¿$\vec{A} = A_r\,\hat{r} + A_\theta\,\hat{\theta} + A_\phi\,\hat{\phi}$?

$$\begin{pmatrix} A_r \\ A_\theta \\ A_\phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin 64\,\cos 108 & \sin 64 \cdot \sin 108 & \cos 64 \\ \cos 64\,\cos 108 & \cos 64 \cdot \sin 108 & -\sin 64 \\ -\sin 108 & \cos 108 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0'76 \\ -0'39 \\ -6 \end{pmatrix}$$