

Señales y Sistemas. Problemas de clase.

Ciencia e Ingeniería de Datos

9 de septiembre de 2024

# Índice general

<b>I</b>	<b>Señales y sistemas en el dominio temporal (o espacial)</b>	<b>4</b>
1	Señales y Sistemas	5
2	Señales básicas. Propiedades de señales.	11
3	Convolución	15
4	Sistemas lineales y temporalmente invariantes (LTI)	21
5	Correlación	25
<b>II</b>	<b>Señales y sistemas de tiempo continuo en el dominio frecuencial</b>	<b>28</b>
1	Transformada de Fourier de señales analógicas (CTFT)	29
2	Muestreo	39
<b>III</b>	<b>Señales y sistemas de tiempo discreto en el dominio frecuencial</b>	<b>43</b>
1	Transformada de Fourier de secuencias (DTFT)	44
2	Análisis frecuencial	50
3	Diezmado e interpolación	53
4	Transformada de Fourier discreta (DFT)	57
<b>IV</b>	<b>Representación, análisis y diseño de filtros lineales</b>	<b>76</b>
1	Transformada Z (TZ)	77
2	Diseño de filtros	82

<i>ÍNDICE GENERAL</i>	3
<b>V ANEXO: Problemas de ingeniería (para programar)</b>	<b>87</b>
1 Cancelación de eco	88
2 Vocoder	90
3 Síntesis de voz con cuatro sinusoides	94

# Tema I

## Señales y sistemas en el dominio temporal (o espacial)

## I. 1

# Señales y Sistemas

1. Comprueba que los siguientes sistemas definidos por su relación entrada-salida son lineales e invariantes.

~~a)~~ Amplificador:  $y[n] = Cx[n]$

~~b)~~ Retardador ( $n_0 > 0$ ):  $y[n] = x[n - n_0]$

~~c)~~ Acumulador:  $y[n] = \sum_{k=-\infty}^n x[k] = x[n] + y[n - 1]$

d) Integrador  $y(t) = \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau$

~~e)~~ Promediador  $y[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=n-N+1}^n x[k]$

f)  $y[n] = x[n] - ay[n - 1]$  (considera condiciones iniciales nulas, es decir,  $y[-1]=0$ ).

g)  $y(t) = \int_{t-4}^{t+8} e^{-(t-\tau)} x(\tau - 1) d\tau$

h)  $y(t) = \int_{-\infty}^t (e^{-3(t-\tau)} + e^{-5(t-\tau)}) x(\tau - 2) d\tau$

i)  $y[n] = \sum_{k=-\infty}^n a^{-(n-k)} x[k - 2]$

2. Determina si los siguientes sistemas son lineales, invariantes, causales y/o estables

~~a)~~  $y[n] = \sum_{k=0}^{\infty} x[k - n]$

~~b)~~  $y(t) = \int_{-\infty}^{2t} x(\tau) d\tau$

c)  $y[n] = n \log(x[n])$

d)  $y[n] = x[3n]u[-n] + x[n]u[n]$

e)  $y(t) = x(t) \cos(2\pi t + \theta)$

- ~~3.~~ Sea la señal  $x(t) = \Delta(t)$ . Dibuja el resultado de las siguientes transformaciones:

a)  $x(3t)$

b)  $x(3t + 2)$

c)  $x(-2t - 1)$

d)  $x(2t + 4)$

Para el caso concreto b),

- a) si se aplica primero un escalado a la variable independiente y después un adelanto de  $t_0$  segundos, ¿cuál debería ser el valor de  $t_0$ ?
- b) ¿Cuál sería el valor de  $t_0$  si primero se aplica un adelanto y después un escalado a la variable independiente?

**Nota:** En la asignatura, utilizaremos la notación  $\Delta(t)$  para denotar un pulso triangular de área 1 centrado en  $t = 0$ . Es decir,  $\Delta(t) = 1 - |t|$  si  $|t| < 1$  y  $\Delta(t) = 0$  si  $|t| > 1$ .

4. En la figura 1.1 se muestran distintas señales  $x_1(t), \dots, x_5(t)$  obtenidas al hacer una transformación de la variable independiente a la señal  $x(t)$ . Determina  $a$  y  $t_0$  para obtener las señales  $x_i(t) = x(at - t_0)$ .

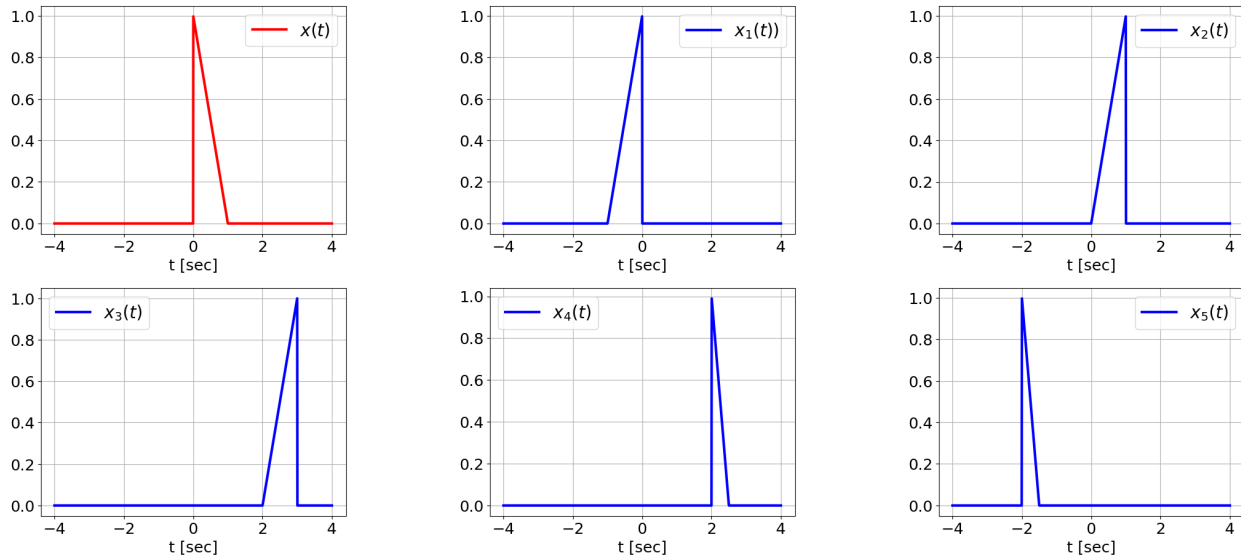


Figura 1.1

5. Calcula la salida para cada posible combinación de retardo, giro y diezmado:

$$x[n] \rightarrow [z^{-3}] \rightarrow [\text{giro}] \rightarrow [\downarrow 2] \rightarrow y_1[n]$$

$$x[n] \rightarrow [\downarrow 2] \rightarrow [z^{-3}] \rightarrow [\text{giro}] \rightarrow y_2[n]$$

$$x[n] \rightarrow [\text{giro}] \rightarrow [\downarrow 2] \rightarrow [z^{-3}] \rightarrow y_3[n]$$

Nota: En general la conexión de sistemas no es conmutativa. Sí es conmutativa si los sistemas son lineales y temporalmente invariantes.

## Soluciones y/o comentarios de los ejercicios

### 1. Sistemas lineales y temporalmente invariantes.

Todos los sistemas analizados en este ejercicio son lineales y temporalmente invariantes. A continuación se incluye la demostración para algunos de ellos.

- Promediador. Es más fácil trabajar con la expresión de la salida en forma de sumatorio. Llamaremos  $y_1 = T\{x_1\}$ ,  $y_2 = T\{x_2\}$ ,  $y = T\{x\}$ , siendo  $y[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=n-N+1}^n x[k]$ .

El promediador es lineal. Se comprueba viendo que los dos resultados siguientes son iguales:

- para  $x[n] = ax_1[n] + bx_2[n]$ ,  $y[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=n-N+1}^n (ax_1[k] + bx_2[k])$
- $ay_1[n] + by_2[n] = a \frac{1}{N} \sum_{k=n-N+1}^n x_1[k] + b \frac{1}{N} \sum_{k=n-N+1}^n x_2[k]$

El promediador es temporalmente invariante. Se comprueba viendo que los dos resultados siguientes son iguales:

$$x[n] \rightarrow [T] \rightarrow y[n] \rightarrow [z^{-n_0}] \rightarrow \sum_{k=n-n_0-N+1}^{n-n_0} x[k]$$

$$x[n] \rightarrow [z^{-n_0}] \rightarrow x[n-n_0] \rightarrow [T] \rightarrow \sum_{k=n-N+1}^n x[k-n_0] = \sum_{k'=n-N+1-n_0}^{n-n_0} x[k']$$

- $y[n] = x[n] - ay[n-1]$  (condiciones iniciales nulas).

Debido a la recurrencia, demostramos la linealidad e invarianza de forma algo distinta que para los otros sistemas (no recurrentes) de este ejercicio.

- Lineal: Si  $y_1[n] = x_1[n] - ay_1[n]$ ,  $y_2[n] = x_2[n] - ay_2[n]$ . La entrada  $x[n]$  que verifica la ecuación  $\alpha y_1[n] + \beta y_2[n] = x[n] - a(\alpha y_1[n-1] + \beta y_2[n-1])$  es  $x[n] = \alpha y_1[n] + \beta y_2[n] + a(\alpha y_1[n-1] + \beta y_2[n-1]) = \alpha x_1[n] + \beta x_2[n]$ .
- Invariante: Análogamente, si  $y[n] = x[n] - ay[n-1]$ , la entrada para la que  $y[n-n_0]$  verifica la ecuación es  $x[n-n_0]$ .

### 2. Propiedades de sistemas

- a)**  $y[n] = \sum_{k=0}^{\infty} x[k-n]$ : Lineal, variante, no causal, inestable.
- b)**  $y(t) = \int_{-\infty}^{2t} x(\tau) d\tau$ : Lineal, variante, no causal, inestable.
- c)**  $y[n] = n \log(x[n])$ : No Lineal, variante, causal, inestable
- d)**  $y[n] = x[3n]u[-n] + x[n]u[n]$  Lineal, variante, ~~no-causal~~ causal, estable
- e)**  $y(t) = x(t) \cos(2\pi f_0 t + \phi)$ : Lineal, variante, causal, estable.

**Resolución detallada:**

**a)** Llamaremos  $y_1 = T\{x_1\}$ ,  $y_2 = T\{x_2\}$ ,  $y = T\{x\}$ , siendo  $y[n] = \sum_{k=0}^{\infty} x[k - n]$ .

Este sistema gira la señal  $x[n]$  y, a partir de  $x[-n]$ , se generan infinitas réplicas retardadas  $k = 0, 1, 2, 3, \dots$  muestras ( $x[-(n - k)] = x[k - n]$ ) que se suman.

- El sistema es lineal. Se comprueba viendo que los dos resultados siguientes son iguales:
  - para  $x[n] = ax_1[n] + bx_2[n]$ ,  $y[n] = \sum_{k=0}^{\infty} (ax_1[k - n] + bx_2[k - n])$
  - $ay_1[n] + by_2[n] = a \sum_{k=0}^{\infty} x_1[k - n] + b \sum_{k=0}^{\infty} x_2[k - n]$
- El sistema es variante. Se comprueba viendo que los dos resultados siguientes son diferentes:

$$x[n] \rightarrow \boxed{T} \rightarrow y[n] \rightarrow \boxed{z^{-n_0}} \rightarrow y[n - n_0] = \sum_{k=0}^{\infty} x[k - (n - n_0)]$$

$$x[n] \rightarrow \boxed{z^{-n_0}} \rightarrow x[n - n_0] \rightarrow \boxed{T} \rightarrow T\{x[n - n_0]\} = \sum_{k=0}^{\infty} x[(k - n) - n_0]$$

Son diferentes, porque el signo de  $n_0$  es diferente en las dos expresiones finales. Nota: Si el sumatorio fuese desde  $-\infty$  sí que sería invariante. Se puede ver con un cambio de variable ( $k' = k + n_0$  en la primera expresión y  $k' = k - n_0$  en la segunda). Como el sumatorio empieza en  $k = 0$  no son equivalentes las expresiones.

También se puede ver que es variante con un ejemplo:  $x[n] = \delta[n]$ ,  $x[-n] = \delta[n]$ ,  $y[n] = u[n]$ ,  $y[n - 1] = u[n - 1]$ . Si ahora hacemos:  $x[n - 1] = \delta[n - 1]$ , girada:  $\delta[n + 1]$ ,  $y[n] = u[n + 1]$ .

- No causal: Basta con encontrar un ejemplo para ver que no es causal. Por ejemplo, para  $y[3] = \sum_{k=0}^{\infty} x[k - 3]$  necesitamos muestras en índices mayores que 3.
  - Inestable: Basta con encontrar un ejemplo para ver que no es estable. Por ejemplo, para  $x[n] = 1$  (acotada para todo  $n$ ),  $y[n] = \sum_{k=0}^{\infty} 1 = \infty$  no está acotada.
- b)** Llamaremos  $y_1 = T\{x_1\}$ ,  $y_2 = T\{x_2\}$ ,  $y = T\{x\}$ , siendo  $y(t) = \int_{-\infty}^{2t} x(\tau) d\tau$ .

- El sistema es lineal. Se comprueba viendo que los dos resultados siguientes son iguales:
  - para  $x(t) = ax_1(t) + bx_2(t)$ ,  $y(t) = \int_{-\infty}^{2t} (ax_1(\tau) + bx_2(\tau)) d\tau$
  - $ay_1(t) + by_2(t) = a \int_{-\infty}^{2t} x_1(\tau) d\tau + b \int_{-\infty}^{2t} x_2(\tau) d\tau$
- El sistema es variante. Se comprueba viendo que los dos resultados siguientes son diferentes:
  - $y(t - t_0) = \int_{-\infty}^{2(t-t_0)} x(\tau) d\tau$
  - $T\{x(t - t_0)\} = \int_{-\infty}^{2t} x(\tau - t_0) d\tau = \int_{-\infty}^{2t-t_0} x(\tau') d\tau'$

En el último paso se ha hecho el cambio de variable:  $\tau' = \tau - t_0 \Rightarrow d\tau' = d\tau$

- No causal: Necesito valores de la entrada hasta  $2t$ . Cuando  $t > 0$  son valores futuros.



- Inestable: Basta con encontrar un ejemplo para ver que no es estable. Si  $x(t) = 1$  (acotada para todo  $t$ ),  $y(t) = \int_{-\infty}^{2t} d\tau$  que diverge.
- c) Llamaremos  $y_1 = T\{x_1\}$ ,  $y_2 = T\{x_2\}$ ,  $y = T\{x\}$ , siendo  $y[n] = n \log(x[n])$ .
- No Lineal: la suma de logaritmos no es igual que el logaritmo de la suma. La transformación no cumple la propiedad de aditividad (superposición), ni tampoco la de homogeneidad.
  - El sistema es variante. Se comprueba viendo que los dos resultados siguientes son diferentes:
    - $y[n - n_0] = (n - n_0) \log(x[n - n_0])$
    - $T\{x[n - n_0]\} = n \log(x[n - n_0])$
  - Causal: para calcular la salida en un instante  $n_0$ , no necesitamos valores futuros de la entrada (de hecho solo necesitamos el valor  $x[n_0]$  de la entrada, por lo que es un sistema sin memoria).
  - Inestable: Basta con encontrar un ejemplo para ver que no es estable. La salida diverge si  $x[n] = 0$ .
- d) Llamaremos  $y_1 = T\{x_1\}$ ,  $y_2 = T\{x_2\}$ ,  $y = T\{x\}$ , siendo  $y[n] = x[3n]u[-n] + x[n]u[n]$ .
- El sistema es lineal. Se comprueba viendo que los dos resultados siguientes son iguales:
    - para  $x[n] = ax_1[n] + bx_2[n]$ ,  $y[n] = (ax_1[3n] + bx_2[3n])u[-n] + (ax_1[n] + bx_2[n])u[n]$
    - $ay_1[n] + by_2[n] = ax_1[3n]u[-n] + ax_1[n]u[n] + bx_2[3n]u[-n] + bx_2[n]u[n]$
  - El sistema es variante. Se comprueba viendo que los dos resultados siguientes son diferentes:
    - $y[n - n_0] = x[3n - 3n_0]u[-n + n_0] + x[n - n_0]u[n - n_0]$
    - $T\{x[n - n_0]\} = x[3n - n_0]u[-n] + x[n - n_0]u[n]$
  - El sistema es causal, ya que:
    - para  $n < 0$ ,  $y[n] = x[3n]$ , por tanto para una  $n_0 < 0$  cualquiera necesitamos el valor de la entrada en  $3n_0$ . Son valores pasados al ser  $n < 0$ .
    - para  $n > 0$ ,  $y[n] = x[n]$ . No necesitamos valores futuros.
  - Estable: si  $|x[n]| \leq B$  para todo  $n$ ,  $y[n] \leq (B + B) = 2B$  para todo  $n$ , ya que al multiplicar por el escalón y diezmar únicamente eliminamos muestras.
- e) Llamaremos  $y_1 = T\{x_1\}$ ,  $y_2 = T\{x_2\}$ ,  $y = T\{x\}$ , siendo  $y(t) = x(t) \cos(2\pi f_0 t + \phi)$ .
- El sistema es lineal. Se comprueba viendo que los dos resultados siguientes son iguales:
    - para  $x(t) = ax_1(t) + bx_2(t)$ ,  $y(t) = (ax_1(t) + bx_2(t)) \cos(2\pi f_0 t + \phi)$
    - $ay_1(t) + by_2(t) = ax_1(t) \cos(2\pi f_0 t + \phi) + bx_2(t) \cos(2\pi f_0 t + \phi)$
  - Variante: la transformación y el retardo no conmutan.
 
$$x(t) \rightarrow [T] \rightarrow y(t) \rightarrow [\text{Retardo } t_0] \rightarrow y(t - t_0) = x(t - t_0) \cos(2\pi f_0(t - t_0) + \phi)$$

$$x(t) \rightarrow [\text{Retardo } t_0] \rightarrow x(t - t_0) \rightarrow [T] \rightarrow T\{x(t - t_0)\} = x(t - t_0) \cos(2\pi f_0 t + \phi)$$

- Causal: para calcular la salida en un instante  $t_0$ , no necesitamos valores futuros de la entrada (de hecho solo necesitamos el valor de  $x(t)$  en el instante  $t_0$ , por lo que es un sistema sin memoria).
- Estable: Si  $|x(t)| \leq B \Rightarrow |x(t) \cos(2\pi f_0 t + \phi)| = |x(t)| |\cos(2\pi f_0 t + \phi)| \leq B$  ya que el coseno está acotado por 1.

3. Para conseguir  $x(3t + 2)$ , partiendo de  $x(t)$ , podemos:

- a) Comprimir en  $t$ ,  $x(3t)$ , y adelantar  $t_0$ ,  $x(3(t + t_0)) = x(3 + 3t_0)$ . Necesitamos,  $t_0 = \frac{2}{3}$ .
- b) Adelantar,  $x(t + t_0)$ , y comprimir,  $x(3t + t_0)$ . En este caso, necesitamos  $t_0 = 2$

La clave para no equivocarse cuando se aplican transformaciones de la variable independiente: cada vez que se aplica una transformación se cambia **SOLO** la variable independiente  $t$ , es decir, se sustituye  $t$  por  $t - t_0$  (retardo), o por  $t + t_0$  (adelanto), o por  $at$  (compresión por  $a$ ), o por  $-t$  (giro). Idem para  $n$ .

4.  $x_1(t) = x(-t)$ ,  $x_2(t) = x(1 - t)$ ,  $x_3(t) = x(3 - t)$ ,  $x_4(t) = x(2t - 4)$ ,  $x_5(t) = x(2t + 4)$ .

5. Hazlo así:

- Si retardamos 3 muestras  $s[n]$ , sustituimos solo la variable independiente  $n$  por  $n - 3$ , obteniendo  $s[n - 3]$
- Si giramos  $s[n]$ , sustituimos solo la variable independiente  $n$  por  $-n$ , obteniendo  $s[-n]$
- Si diezmamos por 2  $s[n]$ , sustituimos solo la variable independiente  $n$  por  $2n$ , obteniendo  $s[2n]$

Para la primera combinación obtendríamos:  $x[n] \rightarrow x[n - 3] \rightarrow x[-n - 3] \rightarrow x[-2n - 3]$ .

$$y_1[n] = x[-2n - 3],$$

$$y_2[n] = x[-2n - 6],$$

$$y_3[n] = x[-2n + 6].$$

## I. 2

# Señales básicas. Propiedades de señales.

1. Dibuja las siguientes señales

~~a)~~  $x(t) = \Delta(\frac{t}{2})u(-t) + \sum_{n=1}^2 \Pi(\frac{t-n/2}{n}) - \Delta(\frac{t-3}{4})u(t-3)$

b)  $x(t) = \text{sinc}(\frac{t}{\tau}) + \text{sinc}(\frac{t-\tau}{\tau}) = \frac{\tau^2 \text{sinc}^2(\frac{\pi t}{\tau})}{\pi t(\tau-t)}$  con  $\tau = 2$  segundos.

c)  $x(t) = \delta(3t)\Pi(3t) + \int_{-\infty}^{\infty} \Delta(\tau)\delta(t-\tau)d\tau + \Delta(0,5)\delta(-t-2)$

~~d)~~  $x[n] = p_4[3-n] + \delta[-n-2] + u[n-1] - u[n-5]$

e)  $x[n] = (n-1)p_3[n+1] + \delta[n+1] + 2u[n-2] - 2u[n-4] + \delta[-n+4]$

2. Dibuja el módulo y la fase de:

a)  $x(t) = \text{sinc}(t)$

b)  $x(t) = 2j \sin(\pi t)e^{-j\pi t}$

c)  $x(t) = \frac{1}{1-ae^{-j2\pi t}}$

3. Energía y potencia:

a) Calcule la energía de  $\Delta(t)$

b) Calcule la potencia media de  $x[n] = u[n]$

4. Para cada una de las combinaciones de señales periódicas mostradas a continuación, determina si  $f(t)$  es periódica y, si lo es, su periodo

~~a)~~  $f(t) = \sin(2\pi 3t) + \sin(2\pi 7t)$ .

~~b)~~  $f(t) = \sin(2\pi 7t) + \sin(2\pi 4,2t)$

~~c)~~  $f(t) = \cos(t) + \cos(\sqrt{2}t)$

5. Para cada una de las secuencias mostradas a continuación, determina si  $f[n]$  es periódica y, si lo es, su periodo

- a)  $f[n] = \sin(2\pi n/7) + \sin(2\pi 3n/7)$ .
- b)  $f[n] = \sin(2\pi 3n/7) + \sin(2\pi 2n/15)$
- c)  $f[n] = \cos(n) + \cos(2\pi n/13)$
- d)  $f[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} p_8[n - 3k]$

## Soluciones y/o comentarios de los ejercicios

1. La solución del ejercicio se muestra en la figura 2.1. Comentarios:

- a)  $x(t) = \Delta(\frac{t}{2})u(-t) + \sum_{n=1}^2 \Pi(\frac{t-n/2}{n}) - \Delta(\frac{t-3}{4})u(t-3)$ . Recuerda que cuando multiplicamos por  $u(-t)$  ponemos a cero los valores de la señal para  $t > 0$ . Cuando multiplicamos por  $u(t-3)$  ponemos a cero los valores de la señal para  $t < 3$ .
- b)  $x(t) = \text{sinc}(\frac{t}{\tau}) + \text{sinc}(\frac{t-\tau}{\tau}) = \frac{\tau^2 \text{sinc}^2(\frac{\pi t}{\tau})}{\pi t(\tau-t)}$  con  $\tau = 2$  segundos. En la gráfica se presentan en trazo fino  $\text{sinc}(\frac{t}{\tau})$  y  $\text{sinc}(\frac{t-\tau}{\tau})$ , y en trazo grueso el resultado de la suma (el dibujo se puede obtener, por ejemplo, usando <https://www.desmos.com/calculator?lang=es>)
- c)  $x(t) = \delta(3t)\Pi(3t) + \int_{-\infty}^{\infty} \Delta(\tau)\delta(t-\tau)d\tau + \Delta(0,5)\delta(-t-2)$ . Recuerda que:
  - $\delta(3t) = \frac{1}{3}\delta(t)$  (escalado de la variable independiente en la  $\delta(t)$ )
  - $\delta(t)\Pi(3t) = \delta(t)\Pi(0)$  (multiplicación de una señal por  $\delta(t)$ )
  - $\int_{-\infty}^{\infty} \Delta(\tau)\delta(t-\tau)d\tau = \Delta(t)$  (descomposición lineal de una señal)
  - $\delta(-t-2) = \delta(t+2)$  (paridad)
- d)  $x[n] = p_4[3-n] + \delta[-n-2] + u[n-1] - u[n-5]$  Recuerda que
  - $p_4[3-n]$  es un pulso de longitud 4, girado y retardado 3 muestras
  - $u[n-1] - u[n-5]$  es un pulso que empieza en  $n = 1$  y acaba en  $n = 4$ , es decir,  $p_4[n-1]$ .

2. La solución del ejercicio se muestra en la figura 2.2. Comentarios:

- a)  $x(t) = \text{sinc}(t) = \frac{\sin(\pi t)}{\pi t}$ . Es igual a 1 (valor máximo) para  $t = 0$  y 0 para valores de  $t$  enteros. La fase:  $x(t)$  toma valores reales para todo  $t$ , por tanto, si  $x(t) > 0$  la fase es 0 y si  $x(t) < 0$  la fase es  $\pi (=180^\circ)$ .
- b)  $x(t) = 2j \sin(\pi t)e^{-j\pi t}$  toma valores complejos (no reales). Sabemos que el producto de números complejos tiene módulo igual al producto de los módulos y fase igual a la suma de las fases:
  - Módulo:  $|x(t)| = 2|j||\sin(\pi t)||e^{-j\pi t}| = 2 \cdot 1 \cdot |\sin(\pi t)| \cdot 1 = 2|\sin(\pi t)|$
  - Fase:  $\angle x(t) = \frac{\pi}{2} + a - \pi t$ , con  $a = 0$  para  $\sin(\pi t) > 0$  y  $a = \pi$  para  $\sin(\pi t) < 0$ . Por tanto, cada vez que  $x(t)$  pasa por 0, la fase presenta un salto de valor  $\pi$ .
- c)  $x(t) = \frac{1}{1-ae^{-j2\pi t}}$ . Supondremos  $a$  un número real (el dibujo está hecho para  $a = 0.5$ ). Denotaremos  $x^*(t)$  al complejo conjugado de  $x(t)$ . Para dibujar esta función, podemos hacer:



Por tanto, el valor máximo de  $|x(t)|$  es  $\frac{1}{|1-a|}$  y el valor mínimo de  $|x(t)|$  es  $\frac{1}{|1+a|}$ .

- $\angle x(t) = \angle 1 - \angle \{1 - a \cos(2\pi t) + ja \sin(2\pi t)\} = -\angle \{1 - a \cos(2\pi t) + ja \sin(2\pi t)\}$ .  
Como  $1 - a \cos(2\pi t)$  es siempre positivo, mientras que  $a \sin(2\pi t)$  puede ser positivo o negativo,  $\angle x(t)$  no será inferior a  $-\frac{\pi}{2}$  ni superior a  $\frac{\pi}{2}$  (dibujar el plano complejo).

3. a)  $E = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} \Delta^2(t) dt = \int_{-1}^1 (1 - |t|)^2 dt = 2 \int_0^1 (1 - t)^2 dt = \frac{2}{3}$

b)  $P_m = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{-N}^N |x(t)|^2 = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{-N}^N u^2[n] = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N+1} \sum_0^N 1 = \frac{1}{2}$

4. Periodicidad de suma de sinusoides analógicas: a)  $T = 1$ , b)  $T = \frac{5}{7}$ , c) No es periódica.

5. Periodicidad de secuencias:

a)  $N_1 = 7$ ,  $N_2 = 7$ , el periodo de la suma es  $N = 7$

b)  $N_1 = 7$ ,  $N_2 = 15$ , el periodo de la suma es  $N = m.c.m(7, 15) = 105$

c)  $\cos(n)$  no es periódica. La suma no es periódica

d)  $f[n] = \{\dots, 3, 3, 2, 3, 3, 2, \underline{3}, 3, 2, 3, 3, 2, \dots\}$ , que es periódica de periodo  $N = 3$

## I. 3

# Convolución

1. Sabiendo que  $y(t) = x(t) * h(t)$  o bien  $y[n] = x[n] * h[n]$ , determina si cada una de las siguientes relaciones es verdadera o falsa.

**a)**  $x(t - t_0) * h(t - t_0) = y(t - t_0)$

**b)**  $x(at) * h(at) = y(at)$

**c)**  $x(t) * h(t) * \delta(1 - t) = y(t - 1)$

**d)**  $x[-n] * h[-n] = y[-n]$

**e)**  $x[n] * h[n] * \delta[-n] = y[-n]$

**f)**  $x[n] * h[n] * \delta[1 - n] = y[n - 1]$

2. Sea una señal  $x[n]$  que se aplica a dos sistemas lineales e invariantes en cascada con respuestas impulsionales  $h_1[n]$  y  $h_2[n]$  con  $x[n] = \delta[n] - a\delta[n - 1]$ ,  $h_1[n] = \sin(8n)$  y  $h_2[n] = a^n u[n]$ .

Encuentra la salida  $y[n] = x[n] * h_1[n] * h_2[n]$ . Nota: utiliza las propiedades asociativa y conmutativa de la convolución para realizar las convoluciones en el orden más simple posible.

3. Dados los sistemas LI caracterizados por sus repuestas impulsionales,  $h_1[n] = u[n]$ ,  $h_2[n] = \delta[n] - \delta[n - 1]$  y  $h_3[n] = p_6[n]$ , se pide:

**a)** Para cada sistema, calcula y dibuja la salida cuando a la entrada se aplica  $x[n] = p_6[n]$

**b)** Para cada sistema, calcula y dibuja la salida cuando a la entrada se aplica  $x[n] = u[n]$ .

**c)** Determina la causalidad y la estabilidad de los tres sistemas.

**d)** Como ya sabes, si una secuencia tiene duración  $N$  puntos y otra  $M$  puntos, su convolución tiene  $N + M - 1$  puntos. Determina en la convolución de las dos señales de duración finita  $x[n] = p_6[n]$  y  $h_2[n] = \delta[n] - \delta[n - 1]$  la relación entre las muestras de inicio y final de las mismas con las de la secuencia resultante de la convolución, así como las relaciones de la duración.

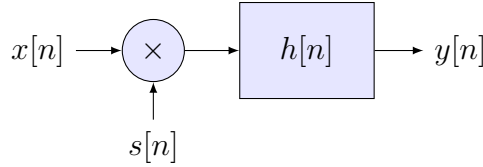


Figura 3.1

4. Dada la siguiente señal  $x[n] = \cos(\pi \frac{5}{3}n)$ ,
- Justifica que la señal  $x[n]$  es periódica y puede escribirse como  $x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_b[n - kL]$ , indicando el valor de  $L$  y los valores de la secuencia  $x_b[n]$ . Nota:  $\cos(\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2}$ .
  - Si la señal  $x[n]$  pasa por un sistema lineal e invariante, definido por su respuesta impulsional  $h[n]$ , obteniéndose  $y[n]$ , expresa  $y[n]$  en función de  $x_b[n]$ ,  $h[n]$  y  $L$ .
  - Calcula la convolución de  $y_b[n] = x_b[n] * p_L[n]$ , siendo  $p_L[n]$  un pulso rectangular de  $L$  muestras con  $L$  el valor obtenido en el apartado a). Se recomienda hacer la convolución a partir de los valores de las dos secuencias  $x_b[n]$  y  $p_L[n]$ .
  - Indica cuál será la secuencia  $y[n] = x[n] * p_L[n]$  (calculando todos sus valores) haciendo uso de la convolución obtenida en el apartado anterior y del resultado del apartado b).
5. Sea el sistema de la figura 3.1 con  $s[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (p_4[n - 8k] - p_4[n - 4 - 8k])$  y  $h[n]$  la respuesta impulsional de un sistema LTI (lineal y temporalmente invariante), causal y estable. Recuerda que  $p_L[n] = \sum_{m=0}^{L-1} \delta[n - m]$ . Se pide:
- Encuentra  $y[n]$  y compruebe las propiedades de linealidad, invariancia, estabilidad y causalidad del sistema global de la figura 3.1.
  - Dibuja  $s[n]$ , ¿se trata de una señal de energía finita o de potencia media finita? Calcule la energía y la potencia media.
  - Calcula y dibuja la salida para  $h[n] = p_4[n + 1]$  y  $x[n] = p_8[n]$
6. Calcula  $y(t) = x(t) * h(t)$  para:
- $x(t) = u(t)$ ,  $h(t) = \alpha e^{-\alpha t} u(t)$
  - $x(t) = u(t) - u(t - T) = \Pi(\frac{t - \frac{T}{2}}{T})$ ,  $h(t) = \alpha e^{-\alpha t} u(t)$
  - $x(t) = \Pi(\frac{t - \frac{T_1}{2}}{T_1})$ ,  $h(t) = \Pi(\frac{t - \frac{T_2}{2}}{T_2})$
7. Supongamos que tenemos un alisador analógico con la siguiente relación entrada-salida
- $$y(t) = T\{x(t)\} = \frac{1}{T} \int_{t - \frac{T}{2}}^{t + \frac{T}{2}} x(\tau) d\tau$$
- ¿Es el sistema lineal e invariante? ¿Cuál es su respuesta impulsional  $h(t)$ ?
  - ¿Es el sistema causal?



- c)** Partiendo de los resultados del ejercicio anterior, calcula y dibuja la salida del sistema  $y(t)$  cuando la entrada es un pulso rectangular  $x(t) = \Pi\left(\frac{t}{T_1}\right)$ , suponiendo  $T \geq T_1$ . ¿Cómo sería el resultado si  $T \leq T_1$ ?
- d)** La salida  $y(t)$  calculada es evidentemente la convolución  $x(t) * y(t)$ . Observa que la forma de  $y(t)$  depende de  $T$  y  $T_1$  e indica la relación de estas dos duraciones en la señal de salida.
- e)** Demuestra que la salida del sistema  $y(t)$  cuando la entrada es una senoide de periodo  $T_1$ ,  $x(t) = A \cos(\frac{2\pi}{T_1}t)$  es  $y(t) = A \frac{T_1}{\pi T} \sin(\frac{\pi T}{T_1}) \cos(\frac{2\pi}{T_1}t)$ .
- f)** ¿Qué condición debe cumplirse entre  $T$  y  $T_1$  en el caso anterior para que la salida sea nula, es decir,  $y(t) = 0$ ?

## Soluciones y/o comentarios de los ejercicios

1.
  - a) Falso
  - b) Falso
  - c) Verdadero
  - d) Verdadero
  - e) Falso
  - f) Verdadero
2.  $y[n] = \sin(8n)$
3.
  - $(g * u)[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} g[k]u[nk] = \sum_{k=-\infty}^n g[k]$ .
  - $g[n] * (\delta[n] - \delta[n-1]) = g[n] - g[n-1]$ . Aproximación de la derivada.
  - $(g * p_6)[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} g[k]p_6[nk] = \sum_{k=n-5}^n g[k]$ .
  - a)  $x[n] = p_6[n]$ 
    - $y_1[n] = \sum_{k=-\infty}^n p_6[k] = \{..., 0, \underline{1}, 2, 3, 4, 5, 6, 6, 6, \dots\}$
    - $y_2[n] = x[n] - x[n-1] = 0, \underline{1}, 0, 0, 0, 0, -1, 0, \dots$
    - $y_3[n] = x[n] + x[n-1] + x[n-2] + x[n-3] + x[n-4] + x[n-5] = 0, \underline{1}, 2, 3, 4, 5, 6, 5, 4, 3, 2, 1, 0, \dots$
  - b)  $x[n] = u[n]$ 
    - $y_1[n] = (n+1)u[n]$
    - $y_2[n] = u[n] - u[n-1] = \delta[n]$
    - Ya está hecho.
  - c) El primer sistema es inestable, el segundo y tercero estables. Los tres son causales.
4.
  - a) Periodo  $L = 6$ ,  $x_b[n] = \{\underline{1}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\}$
  - b)  $y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} y_b[n-kL]$ , siendo  $y_b[n] = (x_b * h)[n]$
  - c)  $y_b[n] = \{\underline{1}, \frac{3}{2}, 1, 0, -\frac{1}{2}, 0, -1, -\frac{3}{2}, -1, 0, \frac{1}{2}\}$
  - d)  $y[n] = 0$  para todo  $n$
5.
  - a) Lineal, variante, estable, causal
  - b) Señal de potencia media finita.  $E = \infty$ ,  $P_m = 1$
  - c)  $y[n] = \{..., 0, 1, \underline{2}, 3, 4, 2, 0, -2, -4, -3, -2, -1, 0, \dots\}$
6.
  - a)  $y(t) = (1 - e^{-\alpha t}) u(t)$ :
    - para  $t < 0$ ,  $y(t) = 0$ ;
    - para  $t \geq 0$ ,  $y(t) = 1 - e^{-\alpha t}$ , exponencial creciente que empieza valiendo 0 para  $t = 0$  y tiende a 1 para  $t \rightarrow \infty$ .

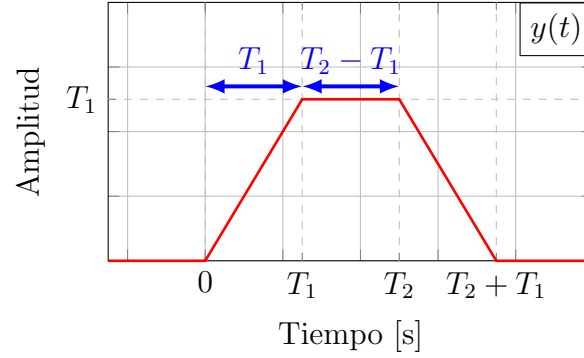


Figura 3.2: Resultado de la convolución de dos pulsos,  $y(t) = \Pi\left(\frac{t-\frac{T_1}{2}}{T_2}\right) * \Pi\left(\frac{t-\frac{T_2}{2}}{T_2}\right)$ , suponiendo  $T_1 \leq T_2$ . Nótese que, debido al retardo igual a la mitad de la duración del pulso, los dos pulsos empiezan en  $t = 0$  y, por tanto, también su convolución.

**b)**  $y(t) = (1 - e^{-\alpha t}) u(t) - (1 - e^{-\alpha(t-T)}) u(t - T)$ :

- para  $t < 0$ ,  $y(t) = 0$ ;
- para  $0 \leq t < T$ ,  $y(t) = 1 - e^{-\alpha t}$ , exponencial creciente que empieza valiendo 0 para  $t = 0$  y tiende a 1 para  $t \rightarrow \infty$ ;
- para  $t \geq T$ ,  $y(t) = (1 - e^{-\alpha T}) e^{-\alpha(t-T)}$ , exponencial decreciente que empieza valiendo  $(1 - e^{-\alpha T})$  en  $t = T$  y tiende a 0 para  $t \rightarrow \infty$ .

**c)** El resultado de la convolución,  $y(t) = x(t) * h(t)$ , es un trapecio. La figura 3.2 muestra el resultado para  $T_1 \leq T_2$ . Si  $T_2 \leq T_1$  simplemente intercambiamos roles entre  $T_1$  y  $T_2$ .

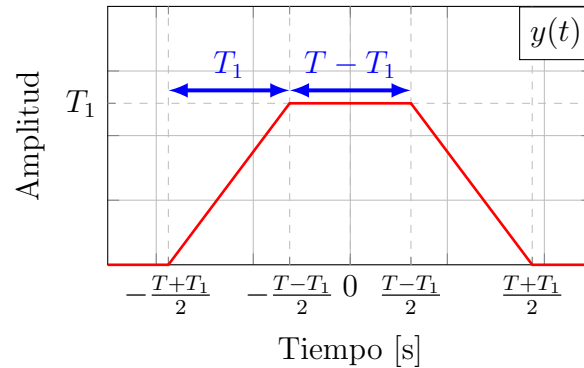


Figura 3.3: Resultado de la convolución de dos pulsos,  $y(t) = \Pi\left(\frac{t}{T_1}\right) * \Pi\left(\frac{t}{T}\right)$ , suponiendo  $T_1 \leq T$

Para hacer el cálculo podemos aplicar el procedimiento explicado en clase:

- 1) Renombramos el eje de tiempos como  $\tau$
- 2) Uno de los dos pulsos (más fácil si cogemos el de menor duración) se gira y se retarda  $t$
- 3) Para cada valor de  $t$  se multiplican los pulsos y se integra el resultado

En este caso tenemos que:

- Para  $t < 0$ , no hay solape,  $y(t) = 0$ .
- Para  $0 < t < T_1$ , el pulso pequeño aún no está totalmente dentro. Por tanto,  $y(t) = t$  (el producto es distinto de cero solo para  $\tau \in (0, t)$  donde vale 1: la integral será el área de un rectángulo de anchura  $t$  y altura 1).
- Para  $T_1 < t < T_2$ , el pulso pequeño está totalmente dentro,  $y(t) = T_1$
- Para  $T_2 < t < T_1 + T_2$ , el pulso pequeño empieza salir,  $y(t) = T_2 - (t - T_1) = T_1 + T_2 - t$
- Para  $T_1 + T_2 < t$ , no hay solape,  $y(t) = 0$ .

Podéis encontrar una explicación visual de la convolución en:

<https://en.wikipedia.org/wiki/Convolution>

7. **a)** El sistema es lineal y temporalmente invariante,  $h(t) = \frac{1}{T}\Pi\left(\frac{t}{T}\right)$
- b)** El sistema no es causal
- c)** El resultado de la convolución,  $y(t) = x(t) * h(t)$ , suponiendo  $T_1 \leq T$ , se muestra en la figura 3.3. Si  $T \leq T_1$  simplemente intercambiamos roles entre  $T$  y  $T_1$ .
- d)** Suponiendo  $T_1 \leq T$ , la duración de los flancos de subida y bajada es  $T_1$  (duración del pulso más estrecho). La duración total es  $T + T_1$  y el valor máximo de la salida es  $T_1$  (área del pulso más estrecho).
- e)**
- f)**  $T = kT_1$  con  $k \in \mathbb{N}$

## I. 4

# Sistemas lineales y temporalmente invariantes (LTI)

1. Para los siguientes sistemas lineales e invariantes, calcula sus respuesta impulsional  $h(t) = T\{\delta(t)\}$  o  $h[n] = T\{\delta[n]\}$  y a partir de ella determine los que son causales y los que son estables.

*a)* Amplificador  $y[n] = Cx[n]$

*b)* Retardador  $n_0 > 0$ :  $y[n] = x[n - n_0]$

*c)* Acumulador  $y[n] = \sum_{k=-\infty}^n x[k] = x[n] + y[n - 1]$  (condiciones iniciales nulas)

*d)* Integrador  $y(t) = \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau$

*e)* Promediador  $y[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=n-N+1}^n x[k]$

*f)*  $y[n] = x[n] - ay[n - 1]$  (condiciones iniciales nulas)

*g)*  $y(t) = \int_{t-4}^{t+8} e^{-(t-\tau)} x(\tau - 1) d\tau$

*h)*  $y(t) = \int_{-\infty}^t (e^{-3(t-\tau)} + e^{-5(t-\tau)}) x(\tau - 2) d\tau$

*i)*  $y[n] = \sum_{k=-\infty}^n a^{-(n-k)} x[k - 2]$

**Nota:** la respuesta impulsional (respuesta a un impulso unitario) se puede calcular para cualquier sistema. Ahora bien, únicamente si el sistema es lineal y temporalmente invariante, la respuesta impulsional da toda la información necesaria para calcular la respuesta a una entrada cualquiera, es decir, caracteriza completamente el sistema.

## 2. Cuestiones generales extraídas del final del curso 2018-2019.

- a)** Determina si cada uno de los siguientes enunciados relacionados con los sistemas Lineales e invariantes (LI) es verdadero o falso. Justifica la respuesta.
- 1) Si  $h(t)$  es la respuesta impulsional de un sistema LI, y  $h(t)$  es periódica y diferente de cero, el sistema es inestable.
  - 2) Si  $|h[n]| \leq K$  para todo  $n$ , donde  $K$  es un número dado, entonces el sistema LI con respuesta impulsional  $h[n]$  es estable.
  - 3) Si un sistema LI es causal, es estable.
  - 4) Un sistema LI es estable si y sólo si la respuesta al escalón  $s(t) = u(t) * h(t)$  es absolutamente integrable, esto es,  $\int_{-\infty}^{\infty} |s(t)| dt$
- b)** Considera un sistema LI con entrada  $x(t)$  y salida  $y(t)$ . Demuestra que si  $x(t)$  es periódica también lo es  $y(t)$ .

## 3. Dado el sistema de la figura 4.1.

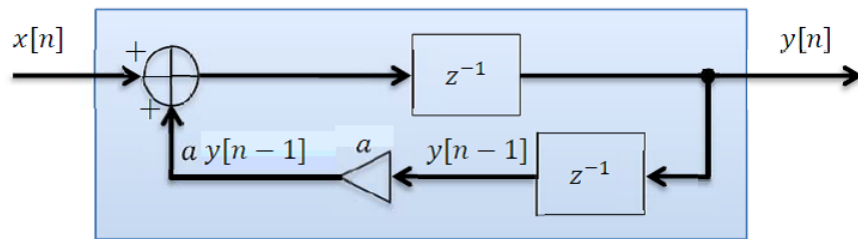


Figura 4.1

- a)** Escribe la relación entrada-salida.
- b)** Calcula la respuesta impulsional y dibújala.
- c)** Determina los valores de  $a$  para los que el sistema es estable.
- d)** Se conecta en serie a este sistema otro de respuesta impulsional  $h_I[n] = 1$  para  $n = 0$ ,  $h_I[n] = -a$  para  $n = 2$ ,  $h_I[n] = 0$  para el resto de valores de  $n$ . ¿Cómo se comporta el sistema global? Justifica la respuesta.

## Soluciones y/o comentarios de los ejercicios

1. **a)** Amplificador:  $h[n] = C\delta[n]$   
**b)** Retardador:  $h[n] = \delta[n - n_0]$   
**c)** Acumulador:  $h[n] = \sum_{k=-\infty}^n \delta[k] = u[n]$   
**d)** Integrador:  $h(t) = \int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau = u(t)$   
**e)** Promediador:  $h[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=n-N+1}^n \delta[k] = \frac{1}{N} p_N[n]$ .  
**f)** Reverberador discreto  $y[n] = x[n] - ay[n - 1]$ :  $h[n] = (-a)^n u[n]$ .  
 Para  $y[n] = x[n] - ay[n - N]$ :  $h[n] = \sum_{k=0}^{\infty} (-a)^k \delta[n - kN]$ , ya que  $h[n] \neq 0$  solo si  $n$  es múltiplo de  $N$ .  
**g)**  $h(t) = \int_{t-4}^{t+8} e^{-(t-\tau)} \delta(\tau - 1) d\tau = \int_{t-4}^{t+8} e^{-(t-1)} \delta(\tau - 1) d\tau = e^{-(t-1)} \prod(\frac{t+1}{12})$ .  
**h)**  $h(t) = e^{-3(t-2)} u(t-2) + e^{-5(t-2)} u(t-2)$   
**i)**  $h[n] = a^{-(n-2)} u[n-2]$ 
  - Causales son aquellos que  $h[n] = 0$  para  $n < 0$ . Son todos excepto el g) ya que  $h(t) = e^{-(t-1)} \prod(\frac{t+1}{12})$  no es cero para  $t < 0$ .
  - Estables son aquellos cuya respuesta impulsional es absolutamente sumable:
    - No son estables el acumulador y el integrador.
    - El reverberador,  $h[n] = (-a)^n u[n]$ , es estable si  $|a| < 1$ . En ese caso:  $\sum_{n=0}^{\infty} |a|^n = \frac{1}{1-|a|}$ .
    - $h[n] = a^{-n+2} u[n-2] = b^{n-2} u[n]$ , con  $b = 1/a$ ; es estable si  $|a| > 1, |b| < 1$ ,  $\sum_{n=2}^{\infty} |b|^{n-2} = \frac{1}{1-|b|}$ .
2. **a)** 1) Verdadero, porque  $\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)| dt = \infty$  ya que la señal no se atenúa con el tiempo.  
 2) Falso. Con  $h[n] = u[n]$  se tiene  $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]| = \sum_{n=0}^{\infty} 1 = \infty$ .  
 3) Falso.  $h[n] = u[n]$  es un sistema causal pero no estable.  
 4) Falso.  $h(t) = \delta(t)$  es estable pero  $s(t) = u(t) * \delta(t) = u(t)$  no es absolutamente integrable.  
**b)** Una señal periódica siempre admite una representación como:  

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_b(t - nT_0) = x_b(t) * \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_0).$$
 Llamando  $y(t) = h(t) * x(t)$  se tiene:  

$$y(t) = h(t) * x_b(t) * \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_0) = y_b(t) * \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_0) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y_b(t - nT_0),$$
 que es la expresión de una señal periódica.
3. **a)** Sobre el dibujo: a la salida del sumador tenemos  $x[n] + ay[n - 1]$ . Retardamos una muestra para obtener  $y[n]$ . Por tanto:  $y[n] = x[n - 1] + ay[n - 2]$ .

**b)**  $h[n] = \delta[n - 1] + ah[n - 2]$ .

Hacemos:  $h[0] = 0$ ,  $h[1] = 1$ ,  $h[2] = 0$ ,  $h[3] = a$ ,  $h[4] = 0$ ,  $h[5] = a^3$ , ...

Observamos que  $h[n]$  toma valores diferentes de cero solo para valores de  $n$  positivos e impares. Por tanto:  $h[n] = \sum_{k=0}^{\infty} a^k \delta[n - (2k + 1)]$ .

Dibujo: en posiciones impares de  $n$  dibujamos  $1, a, a^2, \dots$ .

**c)**  $\sum_{n=0}^{\infty} |h[n]| = 1 + |a| + |a|^2 + |a|^3 + \dots = \frac{1}{1-|a|}$  sólo si  $|a| < 1$  y no estará acotado en otro caso. Por tanto, será estable sólo si  $|a| < 1$ .

**d)**  $h_I[n] = \delta[n] - a\delta[n - 2]$  y  $h[n] * h_I[n] = h[n] - ah[n - 2] = \delta[n - 1]$ .

Se puede ver representando  $h[n]$  y  $ah[n - 2]$  y restando.

Si queremos verlo analíticamente:

$$h_{eq}[n] = \sum_{k=0}^{\infty} a^k \delta[n - (2k + 1)] - \sum_{k=0}^{\infty} a^{k+1} \delta[n - 2 - (2k + 1)]$$

Haciendo un cambio de variable  $k' = k + 1$  (equivalentemente  $k = k' - 1$ ) el segundo sumatorio queda  $\sum_{k'=1}^{\infty} a^{k+1} \delta[n - 2 - 2(k' - 1) - 1] = \sum_{k'=1}^{\infty} a^{k+1} \delta[n - 2k' - 1]$ , que contiene todos los términos del primer sumatorio excepto el primero.



# I. 5

## Correlación

### 1. Adaptación del problema 2 del examen final de 2019-2020

La secuencia  $x[n]$  contiene las muestras correspondientes a un segmento de 32 ms de una señal periódica **real**. La frecuencia de muestreo es 8 kHz. La figura 5.1 representa el resultado de  $z[n] = x[n] * x[L - 1 - n]$ , siendo  $L$  la longitud de la secuencia  $x[n]$ .

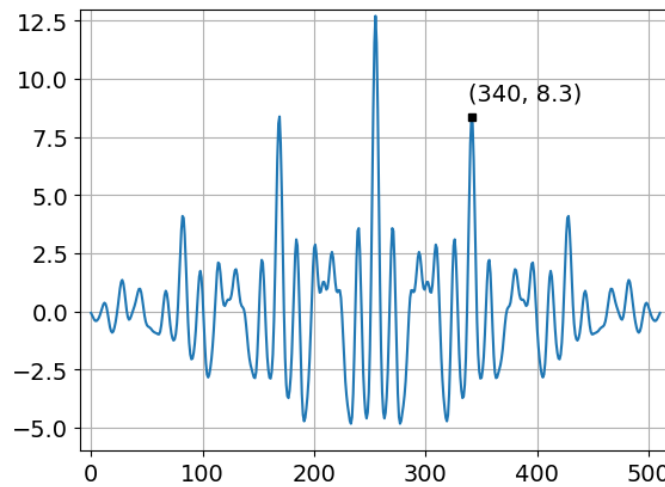


Figura 5.1: Representación de  $z[n] = x[n] * x[L - 1 - n]$

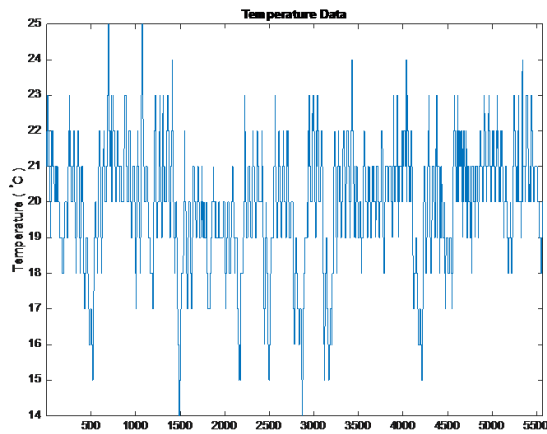
- Calcula el valor de  $L$ . Encuentra la relación entre  $z[n]$  y  $r_{xx}[n]$  e indica, a partir de la figura 5.1, el valor de la energía de  $x[n]$ .
- Considera por simplicidad que  $x[n] = x_0[n] + x_0[n - P] + x_0[n - 2P]$ , siendo  $x_0[n]$  un periodo de la señal periódica y  $P$  la longitud en muestras de un periodo. Demuestra que  $r_{xx}[n] = ar_{x_0x_0}[n] + br_{x_0x_0}[n - P] + br_{x_0x_0}[n + P] + cr_{x_0x_0}[n - 2P] + cr_{x_0x_0}[n + 2P]$  y diga cuánto valen  $a$ ,  $b$  y  $c$ .  
Nota: puede serle útil utilizar que si  $c[n] = a[n] * b[n] \Rightarrow c[-n] = a[-n] * b[-n]$ .
- De acuerdo con el resultado obtenido en el apartado anterior, calcula el valor de  $P$  a partir de la figura 5.1.

## 2. Problema 4 del parcial de 2019-2020

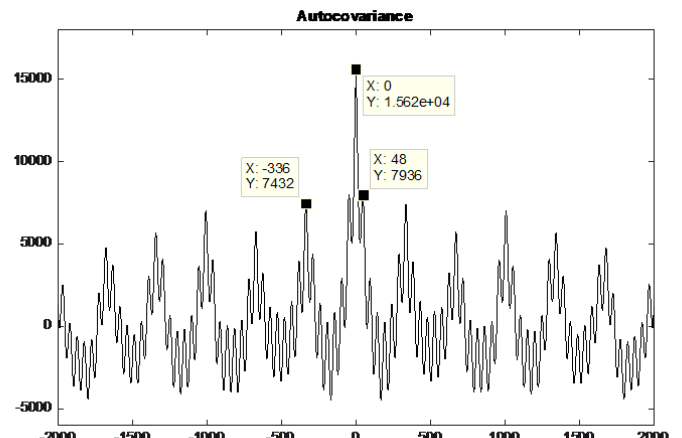
Contesta sólo una opción.

- OPCIÓN A: En la figura 5.2(a) se muestra la serie temporal  $x[n]$  de duración 5568 muestras en la que se ve la evolución de la temperatura ambiente de una oficina (en °C) a lo largo de 116 días. En la figura 5.2(b) se muestra la autocovarianza de la señal  $x[n]$ , que se calcula como la autocorrelación,  $c_x[n]$ , de  $x[n]$  pero restando previamente el valor medio  $\mu$  de la señal  $x[n]$ :

$$c_x[n] = \sum_{k=0}^{5568-1} (x[k] - \mu)(x[k-n] - \mu); \quad \text{con } \mu = \frac{1}{5568} \sum_{n=0}^{5568-1} x[n] \quad (5.1)$$



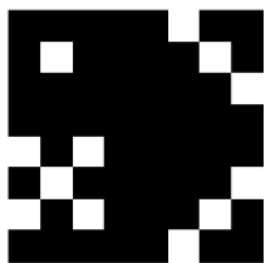
(a) Representación de la secuencia  $x[n]$



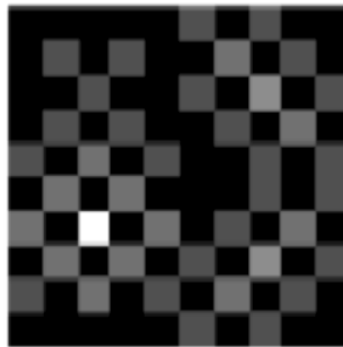
(b) Representación de la autocovarianza  $c_x[n]$

Figura 5.2

- ¿Cuál es la frecuencia de muestreo (muestras por unidad de tiempo) de la secuencia  $x[n]$ ?
  - Explica el significado de los picos positivos de la función de autocovarianza en  $n = \pm 48$  y  $n = \pm 336$ .
- OPCIÓN B: Se quiere detectar un patrón en la imagen binaria  $x[m, n]$  en la que 0 es el nivel de negro y 1 el nivel del blanco. Para ello se calcula la correlación cruzada entre la imagen  $x[m, n]$  (de tamaño 8x8) y el patrón  $t[m, n]$  (de tamaño 3x3). El resultado es la matriz  $r_{xt}[m, n]$  de dimensiones 10x10. Deduce **justificadamente** cuál es el patrón  $t[m, n]$  utilizado.



(a)  $x[m, n]$



(b)  $r_{xt}[m, n]$

0	0	0	0	0	1	0	1	0	0
0	1	0	1	0	0	2	0	1	0
0	0	1	0	0	1	0	3	0	1
0	1	0	1	0	0	1	0	2	0
1	0	2	0	1	0	0	1	0	1
0	2	0	2	0	0	0	1	0	1
2	0	5	0	2	0	1	0	2	0
0	2	0	2	0	1	0	3	0	1
1	0	2	0	1	0	2	0	1	0
0	0	0	0	0	1	0	1	0	0

(c)  $r_{xt}[m, n]$

Figura 5.3

## Tema II

# Señales y sistemas de tiempo continuo en el dominio frecuencial

## II. 1

# Transformada de Fourier de señales analógicas (CTFT)

### Propiedades de la TF

1. Dada una señal  $x(t)$  de la que se conoce su transformada de Fourier  $X(f) = e^{-2|f|}$  se pide que, sin evaluar de forma explícita  $x(t)$ , contesta las siguientes preguntas:

**a)** ¿Cuál es el valor del área de  $x(t)$ ?

$$A_x = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) dt$$

**b)** ¿Cuánto vale la energía de  $x(t)$ ?

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt$$

**c)** Discute la característica par o impar de la señal  $x(t)$

**d)** Sea  $X_1(f)$  el resultado de la convolución:

$$X_1(f) = X(f) * \left( \frac{\delta(f)}{2} + \frac{1}{j2\pi f} \right)$$

¿Cuánto vale  $X_1(0)$ ?

**e)** Indica el resultado de la siguiente integral:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot \frac{(-1)}{\pi t} dt$$

2. Sean los diagramas de bloques de la figura 1.1

**a)** Encuentra la expresión de  $y(t)$  e  $Y(f)$  en función de  $x(t)$  y  $X(f)$  respectivamente



Figura 1.1

- b)** Encuentra la expresión de  $z(t)$  y  $Z(f)$  en función de  $x(t)$  y  $X(f)$  respectivamente  
**c)** Si  $x(t)$  es par, ¿dónde está el eje de simetría de  $y(t)$ ? ¿y el de  $z(t)$ ?

**3.** Demuestra

- a)**  $\int_{-\infty}^{\infty} x(t)y(-t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} X(f)Y(f)df$   
**b)**  $\int_{-\infty}^{\infty} x(t)Y(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} X(f)y(f)df$   
**c)**  $\int_{-\infty}^{\infty} t^2 x(t)dt = -\frac{1}{(2\pi)^2} \frac{d^2 X(f)}{df^2} \Big|_{f=0}$   
**d)**  $\int_{-\infty}^{\infty} t^2 |x(t)|^2 dt = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{dX(f)}{df} \right|^2 df$

## Modulación y filtrado

- 4.** Para transmitir el mensaje  $x(t)$  de ancho de banda  $B$ ,  $X(f) = 0$  para  $|f| > B$ , un sistema de comunicaciones utiliza una modulación de amplitud y transmite la señal  $x_M(t) = x(t) \cos(2\pi f_0 t)$  con  $f_0 \gg B$ . El receptor se muestra en la figura 1.2. La señal de entrada al receptor se aplica a un multiplicador por  $f(t)$  y el producto se filtra mediante un filtro de respuesta frecuencial  $H(f) = \Pi\left(\frac{f}{2B}\right)$

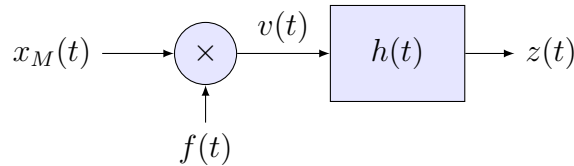


Figura 1.2

- a)** Encuentra  $X_M(f)$  en función de  $X(f)$ . Dibuja  $X_M(f)$  suponiendo  $X(f) = \Delta\left(\frac{f}{B}\right)$ .  
**b)** Demuestra que si  $f(t) = 2 \cos(2\pi f_0 t)$  entonces  $z(t) = x(t)$ .  
 Considera a partir de ahora que el oscilador  $f(t)$  tiene una deriva de frecuencia, es decir,  $f(t) = 2 \cos(2\pi(f_0 + \Delta_f)t)$  con  $\Delta_f \ll f_0$ .  
**c)** Encuentra la entrada al filtro  $v(t)$  y calcule y dibuje su transformada de Fourier  $V(f)$  suponiendo  $\Delta_f = \frac{B}{4}$  y  $X(f) = \Delta\left(\frac{f}{B}\right)$   
**d)** Calcula  $z(t)$ . ¿Es posible recuperar  $x(t)$  con este esquema? Justifica la respuesta. Considera ahora la señal  $x(t) = \cos(2\pi f_x t)$  y  $f_x = 3$  kHz,  $B = 4$  kHz,  $\Delta_f = 50$  Hz y  $f_0 = 50$  KHz.

- e)** Calcula la entrada al filtro  $v(t)$  y dibuja su transformada de Fourier  $V(f)$ .  
**f)** Calcula la salida del filtro  $z(t)$  y calcula su Transformada de Fourier  $Z(f)$ .

Nota:  $\cos(a) \cdot \cos(b) = \frac{1}{2} \cos(a + b) + \frac{1}{2} \cos(a - b)$

## Análisis de sistemas en el dominio frecuencial

5. Se desea medir la respuesta frecuencial de un sistema analógico. Para ello se dispone de las señales  $x(t)$  e  $y(t)$  según el esquema de la figura 1.3a. Una solución es calcular la transformada de Fourier de la entrada y la salida y hacer el cociente:

$$H_0(f) = \frac{Y(f)}{X(f)}$$

Considera todas las señales reales y de energía finita en todo el ejercicio. Sea  $S_{xy}(f)$  la transformada de Fourier de  $r_{xy}(t)$  (correlación cruzada entre  $x(t)$  y  $y(t)$ ).

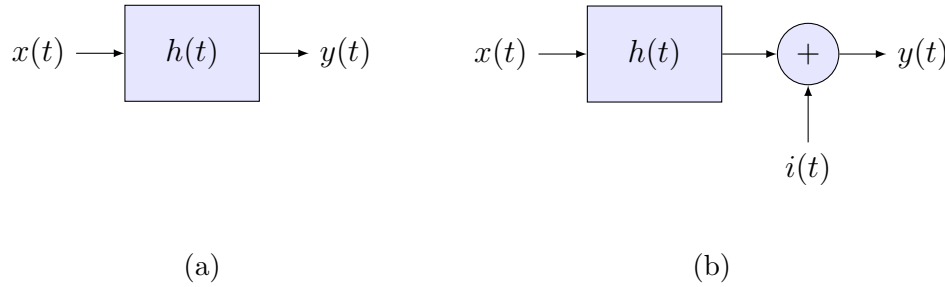


Figura 1.3

- a)** Demuestra que las siguientes alternativas también son válidas

$$H_1(f) = \frac{S_{yx}(f)}{S_{xx}(f)}, \quad H_2(f) = \frac{S_{yy}(f)}{S_{xy}(f)}$$

- b)** Considera que la medida de  $y(t)$  se realiza de forma que se introduce una interferencia  $i(t)$  como se muestra en la figura 1.3b. Calcule  $S_{yx}(f)$ ,  $S_{yy}(f)$  y  $S_{xy}(f)$  en función de  $H(f)$ ,  $S_{xx}(f)$  y  $S_{xi}(f)$ .  
**c)** Si  $S_{xi}(f) = 0$ , ¿qué método elegirías para calcular  $H(f)$ ? Razona la respuesta.

$$H_0(f) = \frac{Y(f)}{X(f)}, \quad H_1(f) = \frac{S_{yx}(f)}{S_{xx}(f)}, \quad H_2(f) = \frac{S_{yy}(f)}{S_{xy}(f)}$$

6. Una señal se transmite a través de una sala mal acondicionada de manera que la señal recibida está formada por 3 ecos:  $y(t) = \alpha_0 x(t) + \alpha_1 x(t - T_1) + \alpha_2 x(t - T_2)$ . Se quiere eliminar los ecos y recuperar la señal  $x(t)$  mediante un receptor apropiado (véase figura 1.4).

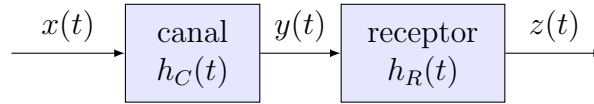


Figura 1.4

- a)** Calcula la respuesta frecuencial de la sala  $H_C(f) = \frac{Y(f)}{X(f)}$
- b)** ¿Cuál debería ser la respuesta frecuencial del receptor,  $H_R(f)$ , para que  $z(t) = x(t)$ ?

Para el receptor se propone un diagrama de bloques como el mostrado en la figura 1.5.

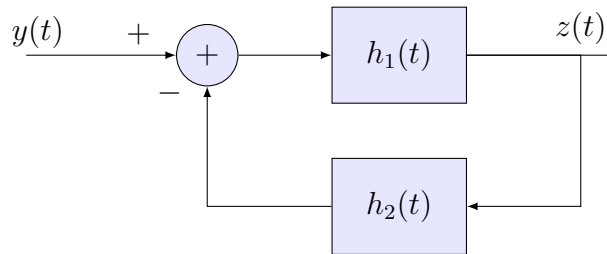


Figura 1.5: Diagrama de bloques del receptor

- c)** Calcula la respuesta frecuencial del receptor,  $H_R(f)$ , en función de  $H_1(f)$  y  $H_2(f)$ .
- d)** Indica cuáles deberían ser las respuestas frecuenciales,  $H_1(f)$  y  $H_2(f)$ , e impulsionales  $h_1(t)$  y  $h_2(t)$ , para obtener la  $H_R(f)$  indicada en el apartado b). Propón una solución de manera que  $h_1(t)$  y  $h_2(t)$  estén formadas únicamente por un número finito de impulsos tipo  $\delta(t)$ .

## Señales periódicas

**7.** Considera la señal periódica:  $x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Delta\left(\frac{t-nT}{\tau}\right)$ . Se pide:

- a)** Dibuja la señal  $x(t)$  e indica su periodo.
- b)** Expresa la señal  $x(t)$  como la convolución de una señal básica  $x_b(t)$  y un tren de deltas.
- c)** Calcula la transformada de Fourier de  $x(t)$  y dibújela.
- d)** Con  $\tau = 2$  s y  $T = 6$  s, si la señal se hace pasar por un filtro de respuesta frecuencial  $H(f) = \Pi(f-1) + \Pi(f+1)$  calcula la salida. Expresa la salida como suma de cosenos determinando sus amplitudes, frecuencias y fases.

**8.** Ejercicio 1 del examen de re-evaluación del curso 2018-2019



Para generar una amplia variedad de señales periódicas se propone la utilización de un generador de un tren de pulsos rectangulares. El tren de pulsos se aplica a un filtro lineal e invariante de respuesta impulsional  $h(t)$  como se indica en la figura. Cambiando el filtro se pueden obtener diferentes señales.

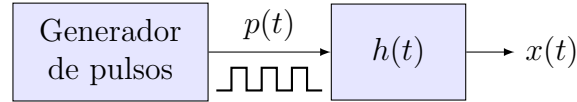


Figura 1.6

Supón que la señal formada por pulsos rectangulares es  $p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Pi\left(\frac{t-nT}{\tau}\right)$ , siendo el parámetro  $\tau$  ajustable. Para este ejercicio suponga  $\tau = \frac{T}{4}$ . Responde a las siguientes preguntas:

- a)** Calcula  $P(f)$  y dibújala.
  - b)** Considera  $h(t) = \Pi\left(\frac{t}{t_1}\right)$ . Dibuja detalladamente  $x(t)$  para los casos  $t_1 = \tau$  y  $t_1 = \frac{\tau}{2}$ .
  - c)** Calcula  $X(f)$  para  $h(t) = \Pi\left(\frac{t}{t_1}\right)$  con  $t_1 = \tau$ . Dibuja  $|X(f)|$ .
  - d)** Encuentra  $h(t)$  para que  $x(t) = \cos(2\pi f_0 t)$  con  $f_0 = \frac{1}{T}$ .
9. Si una señal tiene como módulo de su transformada de Fourier el representado en la figura 1.7



Figura 1.7

- a)** ¿Se trata de una señal periódica? Y si la respuesta es afirmativa, ¿cuál es su periodo?
- b)** Si esta señal pasa por un sistema lineal e invariante, ¿la salida del sistema será periódica? Y si la respuesta es afirmativa, ¿de qué periodo?

## Soluciones y/o comentarios a los ejercicios

1. a)  $A_x = 1$ , b)  $E_x = \frac{1}{2}$ , c)  $x(t)$  es par, d)  $X_1(0) = \frac{1}{2}$ , e) Es cero, por ser  $x(t) \cdot \frac{(-1)}{\pi t}$  impar.

Nota: formalmente en e) calcularíamos  $\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{-\infty}^{-\epsilon} g(t)dt + \int_{\epsilon}^{\infty} g(t)dt$  siendo  $g(t) = x(t) \cdot \frac{(-1)}{\pi t}$ .

2. La conexión de sistemas es conmutativa si los sistemas son lineales e invariantes, y el sistema que realiza un escalado de la variable independiente no lo es. De hecho, la transformación  $s(t) = x(at)$  es **lineal pero no invariante**.

a)  $y(t) = x(a(t - t_0))$ ,  $Y(f) = \frac{1}{|a|} X\left(\frac{f}{a}\right) e^{-j2\pi f t_0}$

b)  $z(t) = x(at - t_0)$ ,  $Y(f) = \frac{1}{|a|} X\left(\frac{f}{a}\right) e^{-j2\pi f \frac{t_0}{a}}$

c) Para  $y(t)$  es  $t_0$ , para  $z(t)$  es  $\frac{t_0}{a}$

3.

4. a)  $x_M(t) = x(t) \cdot \cos(2\pi f_0 t) \leftrightarrow X_M(f) = \frac{X(f+f_0)}{2} + \frac{X(f-f_0)}{2}$

b)  $v(t) = x(t) \cdot \cos(2\pi f_0 t) \cdot 2 \cos(2\pi f_0 t) = x(t) \cdot 2 \frac{1+\cos(2\pi 2f_0 t)}{2} = x(t) + x(t) \cdot \cos(2\pi 2f_0 t)$   
 $V(f) = X(f) + \frac{X(f+2f_0)}{2} + \frac{X(f-2f_0)}{2}$

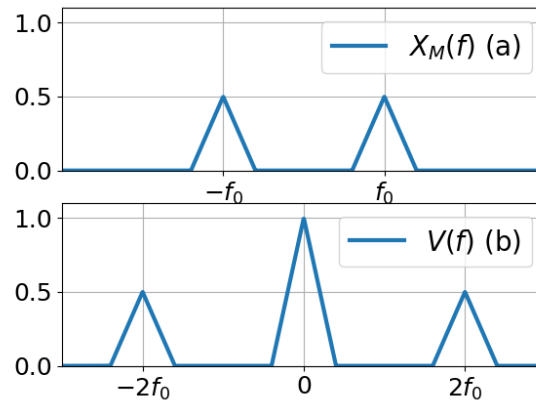


Figura 1.8

c) Con deriva de frecuencia:

$$v(t) = x(t) \cdot \cos(2\pi f_0 t) \cdot 2 \cos(2\pi(f_0 + \Delta_f)t) = x(t) \cdot 2 \frac{\cos(2\pi \Delta_f t) + \cos(2\pi(2f_0 + \Delta_f)t)}{2} \Rightarrow$$

$$v(t) = x(t) \cos(2\pi(\Delta_f)t) + x(t) \cdot \cos(2\pi(2f_0 + \Delta_f)t)$$

$$V(f) = \frac{X(f-\Delta_f)}{2} + \frac{X(f+\Delta_f)}{2} + \frac{X(f-2f_0-\Delta_f)}{2} + \frac{X(f+2f_0+\Delta_f)}{2}$$

d)  $Z(f) = V(f) \cdot H(f) = \left( \frac{X(f-\Delta_f)}{2} + \frac{X(f+\Delta_f)}{2} \right) H(f)$

$z(t) = (x(t) \cdot \cos(2\pi \Delta_f t)) * 2B \text{sinc}(2Bt)$  Vemos que  $z(t)$  no permite recuperar sin ambigüedad la señal original debido al solape de transformadas de Fourier

y también porque el filtro ha eliminado algunas componentes frecuenciales de la señal.

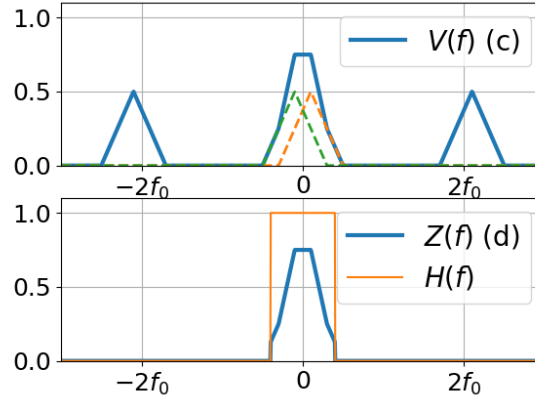


Figura 1.9

5. Utilizaremos  $x(t) \leftrightarrow X(f)$ ,  $y(t) \leftrightarrow Y(f)$  y  $y(t) = x(t) * h(t) \leftrightarrow Y(f) = X(f)H(f)$ .

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad \frac{S_{yx}}{S_{xx}} &= \frac{YX^*}{XX^*} = \frac{Y}{X} = H \\ \frac{S_{yy}}{S_{xy}} &= \frac{YY^*}{XY^*} = \frac{Y}{X} = H \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b)} \quad S_{yx} &= YX = (XH + I)X^* = S_{xx}H + S_{ix} \\ S_{yy} &= (XH + I)(XH + I)^* = S_{xx}|H|^2 + S_{xi}H + S_{ix}H^* + S_{ii} \\ S_{xy} &= X(XH + I)^* = S_{xx}H^* + S_{xi} \end{aligned}$$

c) Elegiría  $H_1(f) = \frac{S_{yx}(f)}{S_{xx}(f)}$  porque proporciona  $H(f)$  exactamente para  $S_{ix}(f) = S_{xi}^*(f) = 0$ .

6. a)  $h_C(t) = \alpha_0\delta(t) + \alpha_1\delta(t - T_1) + \alpha_2\delta(t - T_2) \leftrightarrow H_C(f) = \alpha_0 + \alpha_1e^{-j2\pi fT_1} + \alpha_2e^{-j2\pi fT_2}$

b) Queremos  $h_C(t) * h_R(t) = \delta(t)$  o, equivalentemente,  $H_C(f)H_R(f) = 1$ . Por tanto,

$$H_R(f) = \frac{1}{H_C(f)} = \frac{1}{\alpha_0 + \alpha_1e^{-j2\pi fT_1} + \alpha_2e^{-j2\pi fT_2}} \quad (1.1)$$

c) En frecuencia:  $Z = (Y - ZH_2)H_1$ . Despejando  $Z$  y dividiendo por  $Y$ :

$$H_R(f) = \frac{Z(f)}{Y(f)} = \frac{H_1(f)}{1 + H_2(f)H_1(f)} \quad (1.2)$$

d) La ecuación (1.1) se puede escribir:

$$H_R(f) = \frac{\frac{1}{\alpha_0}}{1 + \frac{\alpha_1}{\alpha_0}e^{-j2\pi fT_1} + \frac{\alpha_2}{\alpha_0}e^{-j2\pi fT_2}}$$

Comparando con la ecuación (1.2):  $H_1(f) = \frac{1}{\alpha_0}$ ,  $H_2(f) = \alpha_1 e^{-j2\pi f T_1} + \alpha_2 e^{-j2\pi f T_2}$ .  
O equivalentemente:

$$h_1(t) = \frac{1}{\alpha_0} \delta(t) \text{ y } h_2(t) = \alpha_1 \delta(t - T_1) + \alpha_2 \delta(t - T_2)$$

7. a)  $T$ , b)  $x(t) = \Delta\left(\frac{t}{\tau}\right) * \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$ , c)  $X(f) = \frac{\tau}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \text{sinc}^2\left(\tau \frac{k}{T}\right) \cdot \delta\left(f - \frac{k}{T}\right)$

8. **a)**  $p(t) = \Pi\left(\frac{t}{\tau}\right) * \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$ .  
 $P(f) = \tau \text{sinc}(\tau f) \cdot \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(f - \frac{k}{T}\right) = \frac{\tau}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \text{sinc}\left(\tau \frac{k}{T}\right) \cdot \delta\left(f - \frac{k}{T}\right)$ , que se muestra en la figura 1.10.

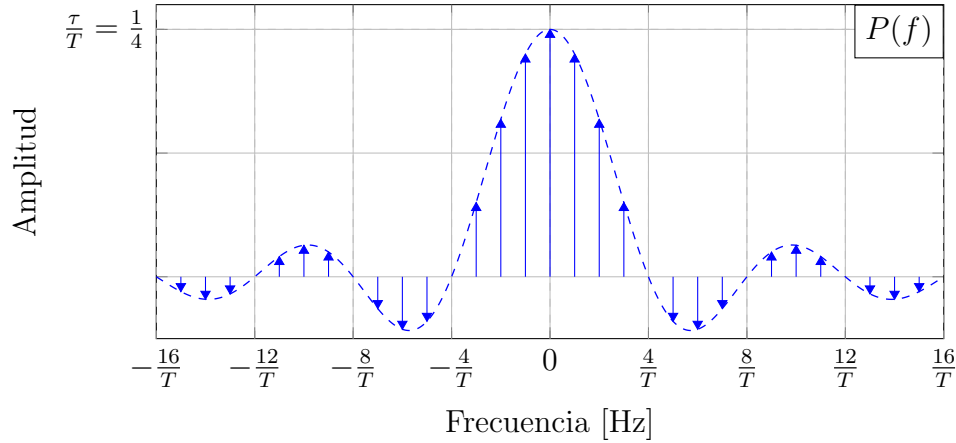


Figura 1.10: Transformada de Fourier de  $p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Pi\left(\frac{t-nT}{\tau}\right)$ .

**b)**  $x(t) = h(t) * p(t) = \Pi\left(\frac{t}{t_1}\right) * \Pi\left(\frac{t}{\tau}\right) * \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$ .

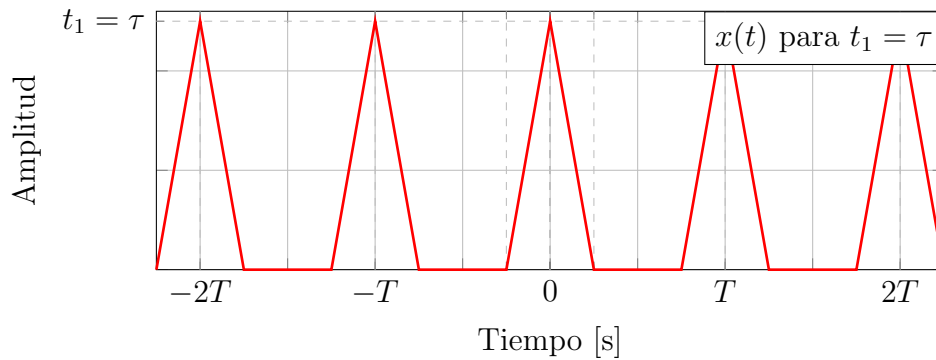


Figura 1.11: Resultado de  $x(t) = \Pi\left(\frac{t}{t_1}\right) * \Pi\left(\frac{t}{\tau}\right) * \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$  con  $t_1 = \tau$ .

Obtenemos  $x(t)$  repitiendo  $x_b(t) = \Pi\left(\frac{t}{t_1}\right) * \Pi\left(\frac{t}{\tau}\right)$  cada  $T$  segundos. Ni para  $t_1 = \tau$  (figura 1.11) ni para  $t_1 = \frac{\tau}{2}$  (figura 1.12) hay solape de réplicas.

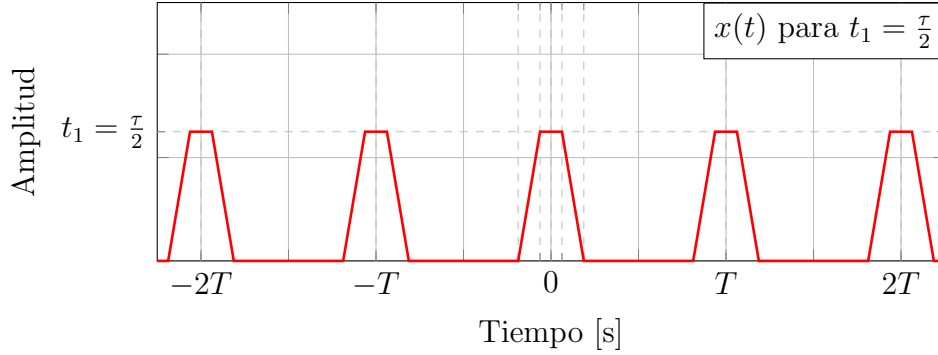


Figura 1.12: Resultado de  $x(t) = \Pi\left(\frac{t}{t_1}\right) * \Pi\left(\frac{t}{\tau}\right) * \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$  con  $t_1 = \frac{\tau}{2}$ .

**c)** Para  $t_1 = \tau$ , tenemos que

$$X(f) = \tau \text{sinc}(\tau f) \cdot \tau \text{sinc}(\tau f) \cdot \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(f - \frac{k}{T}) = \frac{\tau^2}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \text{sinc}^2(\tau \frac{k}{T}) \cdot \delta(f - \frac{k}{T}),$$

que se muestra en la figura 1.13 .

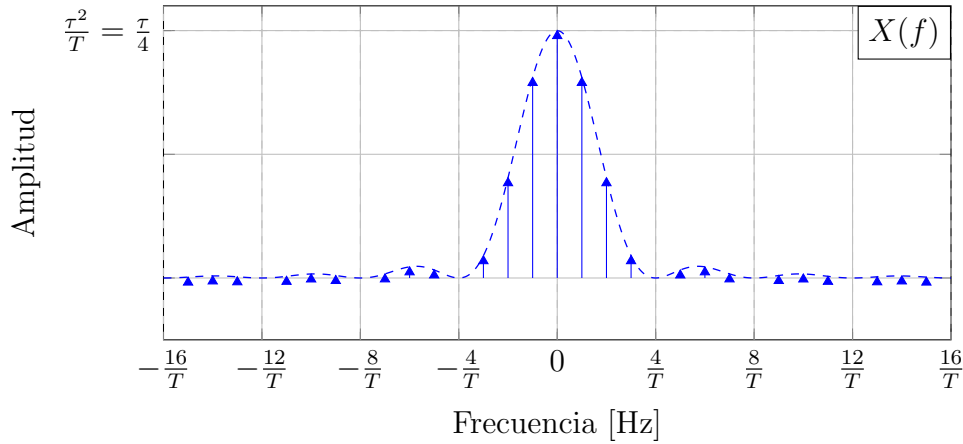


Figura 1.13: Transformada de Fourier de  $x(t) = \Pi\left(\frac{t}{\tau}\right) * \Pi\left(\frac{t}{\tau}\right) * \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$ .

**d)** Para seleccionar el armónico fundamental, necesitamos un filtro paso banda centrado en  $f_0 = \frac{1}{T}$  y de anchura  $B < 2f_0$ . Para que la señal de salida tenga amplitud 1, escogemos la ganancia del filtro para  $G \frac{\tau}{T} \text{sinc}\left(\frac{\tau}{T}\right) = \frac{1}{2}$ , es decir,  $G = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$  (véase expresión de  $P(f)$  en el apartado a). Tomando por ejemplo  $B = f_0$ :

$$H(f) = G \Pi\left(\frac{f + f_0}{f_0}\right) + G \Pi\left(\frac{f - f_0}{f_0}\right),$$

que en el dominio del tiempo el filtro es:

$$h(t) = G f_0 \text{sinc}(f_0 t) e^{j2\pi f_0 t} + G f_0 \text{sinc}(f_0 t) e^{-j2\pi f_0 t} = \frac{2G}{T} \text{sinc}\left(\frac{t}{T}\right) \cos\left(2\pi \frac{t}{T}\right).$$

9. La señal es periódica de frecuencia fundamental  $f_0 = 0,1$  Hz, ya que cualquiera de las componentes frecuenciales que contiene la señal se puede escribir como un múltiplo de  $f_0$ , es decir, como  $kf_0$  siendo  $k \neq 0 \in \mathbf{Z}$ . Un sistema lineal e invariante no generará componentes frecuenciales nuevas, pero sí puede eliminar algunas (en ese caso, la frecuencia fundamental de la salida podría ser mayor que 0,1 Hz )

**Nota:** Aún siendo la TF de la señal una suma de deltas, **podría ser que la señal no fuese periódica**. Por ejemplo, si tenemos 4 deltas en  $\pm\sqrt{2}, \pm 3$  Hz, es decir  $x(t) = \cos(2\pi\sqrt{2}t) + \cos(2\pi 3t)$ , la señal no sería periódica, aunque cada coseno por separado sí lo sea. Esto es, porque las frecuencias  $\pm\sqrt{2}, \pm 3$  no pueden escribirse como múltiplos enteros de una frecuencia fundamental.

## II. 2

# Muestreo

### Reconstrucción de una señal analógica a partir de sus muestras

1. Una forma de obtener una función continua,  $y(t)$ , a partir de una secuencia  $x[n] = x(t)|_{t=nT}$  es uniendo las muestras mediante rectas, tal y como se muestra en la 2.1. A esta operación se le llama interpolación lineal y se puede expresar analíticamente de la siguiente forma:

$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \Delta \left( \frac{t - nT}{T} \right) \quad (2.1)$$

donde se pone de manifiesto que  $y(t)$  puede obtenerse como suma de triángulos (líneas discontinuas de la figura 2.1) de altura igual al valor de las muestras. Se pide:

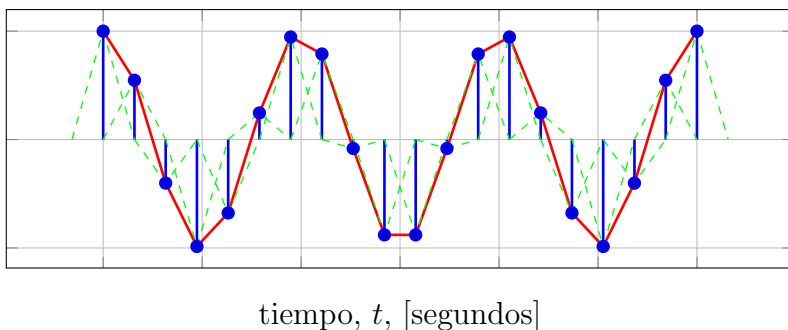


Figura 2.1

- a)** Justifica que la operación de la ecuación 2.1 es equivalente a (y por tanto modelable como) el esquema de la figura 2.2, indicando la expresión temporal del filtro  $h(t)$ .
- b)** Calcula la transformada de Fourier (TF) del filtro  $h(t)$  y también de la señal a la entrada y salida del filtro en función de  $X(f) = \text{TF}\{x(t)\}$ .
- c)** Dibuja la TF  $x(t)$ ,  $v(t)$ ,  $h(t)$  e  $y(t)$  suponiendo  $x(t) = \cos(2\pi \frac{1}{4T}t)$ .

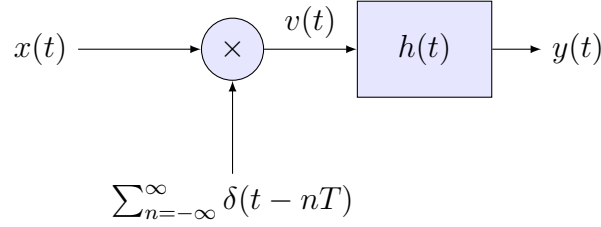


Figura 2.2

**2. Problema 1 del examen final del curso 2019-2020**

Supón que  $x(t)$  es una señal de banda limitada,  $X(f) = 0$  para  $|f| \geq 1$ . Según el teorema de muestreo para recuperar  $x(t)$  a partir de sus muestras es preciso muestrear con  $f_m \geq 2$  Hz. En este ejercicio vamos a comprobar que también es posible muestrear con  $f_m = 1$  Hz si además se conocen los valores de su derivada  $x'(t)$  para  $t = n$  entero,  $x'(n)$ , ya que la señal reconstruida:

$$x_{\text{reconstr.}}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)h(t-n) + \sum_{n=-\infty}^{\infty} x'(n)g(t-n)$$

es igual a  $x(t)$  escogiendo  $h(t)$  y  $g(t)$  apropiados. Su objetivo es encontrarlos.

Llamaremos  $z(t) = x'(t) = \frac{dx(t)}{dt}$ ,  $x_p(t) = x(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-n)$  y  $z_p(t) = z(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-n)$ .

- a)** Encuentra las TF de  $z(t)$ ,  $x_p(t)$  y  $z_p(t)$  en función de  $X(f)$ .
- b)** Justifica que  $X_p(f) = X(f) + X(f-1)$  en el intervalo  $(0, 1)$  y que  $X_p(f) = X(f) + X(f+1)$  en el intervalo  $(-1, 0)$ . Encuentra  $Z_p(f)$  en el intervalo  $(0, 1)$  y en el intervalo  $(-1, 0)$ .
- c)** Usando los resultados anteriores, demuestra que para  $-\infty < f < \infty$

$$X(f) = \Delta(f)X_p(f) - \frac{1}{j2\pi}\Delta'(f)Z_p(f)$$

con

$$\Delta(f) = \begin{cases} 1-f & \text{si } 0 \leq f \leq 1 \\ 1+f & \text{si } -1 \leq f \leq 0 \\ 0 & \text{si } |f| > 1 \end{cases} \text{ y } \Delta'(f) = \begin{cases} -1 & \text{si } 0 \leq f \leq 1 \\ 1 & \text{si } -1 \leq f \leq 0 \\ 0 & \text{si } |f| > 1 \end{cases}$$

- d)** Escribe justificadamente  $x_{\text{reconstr.}}(t)$  en función de  $x_p(t)$ ,  $z_p(t)$ ,  $h(t)$  y  $g(t)$ . Encuentra  $h(t)$  y  $g(t)$  para que  $x_{\text{reconstr.}}(t) = x(t)$  y particulariza la fórmula de interpolación (eq. 2.2) para ese  $h(t)$  y ese  $g(t)$ .



## Soluciones y/o comentarios de los ejercicios

1. **a)** A partir del esquema de la figura 2.2 tenemos que:

$$v(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t - nT) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\delta(t - nT) \Rightarrow$$

$$y(t) = h(t) * \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\delta(t - nT) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]h(t - nT),$$

La expresión final es igual a la ecuación (2.1) si  $h(t) = \Delta\left(\frac{t}{T}\right)$ .

Nota: en clase llamamos  $x_m(t)$  (muestreo ideal) a  $v(t)$ .

- b)** Llamando  $f_m = \frac{1}{T}$ , tenemos:

$$H(f) = T \text{sinc}^2(fT) = \frac{1}{f_m} \text{sinc}^2\left(\frac{f}{f_m}\right)$$

$$V(f) = f_m \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(f - kf_m)$$

$$Y(f) = H(f)V(f) = \text{sinc}^2\left(\frac{f}{f_m}\right) \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(f - kf_m)$$

- c)**  $x(t)$  coseno de periodo  $4T$ , o equivalentemente, frecuencia  $\frac{1}{4T} = \frac{f_m}{4}$ .

En el dominio frecuencial:

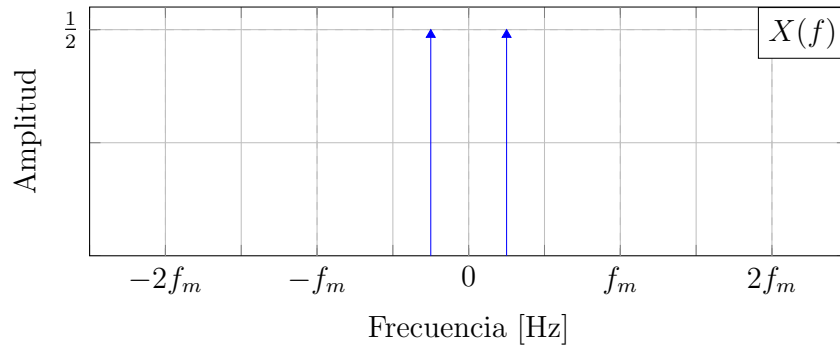


Figura 2.3:  $X(f) = \frac{1}{2}\delta\left(f - \frac{f_m}{4}\right) + \frac{1}{2}\delta\left(f + \frac{f_m}{4}\right)$

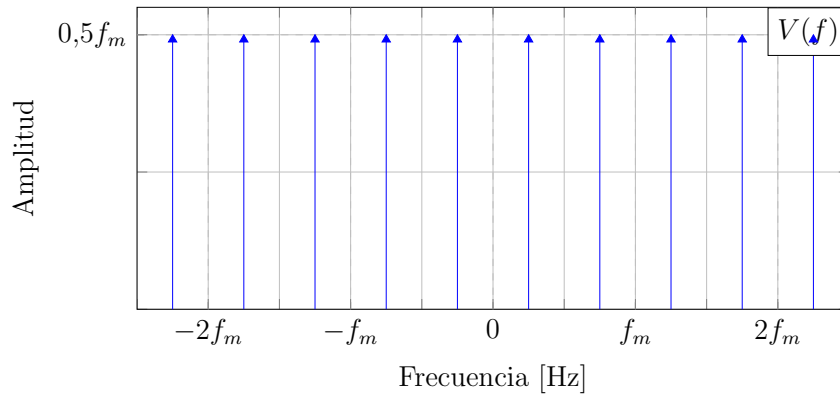


Figura 2.4:  $V(f) = X_m(f) = \frac{f_m}{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(f \pm \frac{f_m}{4} - kf_m\right)$

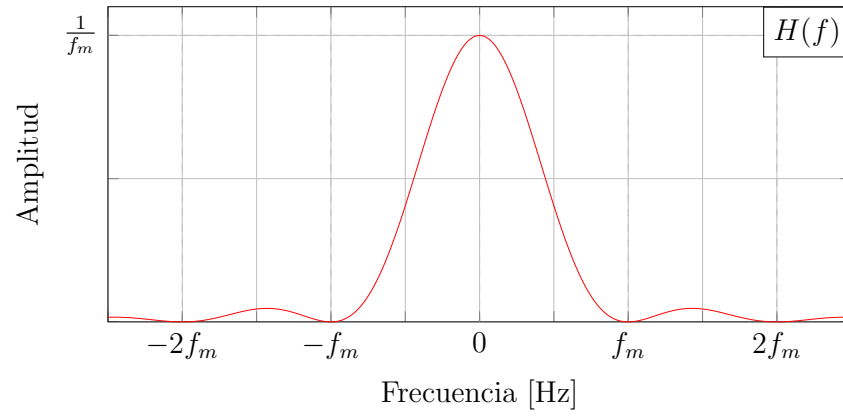


Figura 2.5:  $H(f) = \frac{1}{f_m} \text{sinc}^2\left(\frac{f}{f_m}\right)$

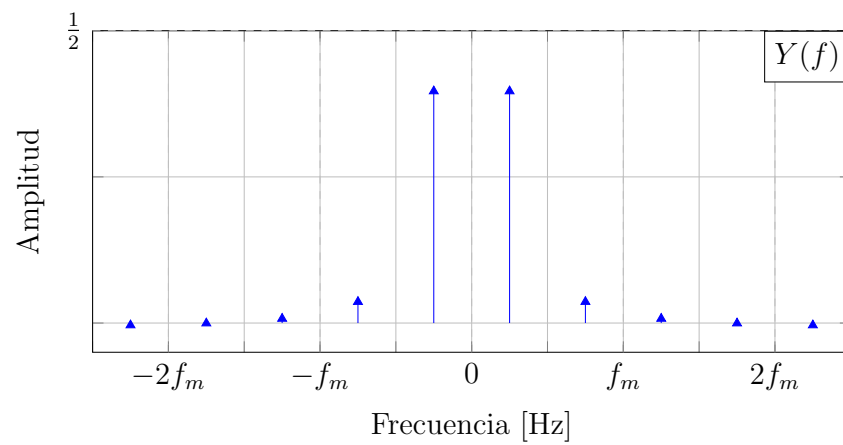


Figura 2.6:  $Y(f) = \frac{1}{2} \text{sinc}^2\left(\frac{f}{f_m}\right) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(f \pm \frac{f_m}{4} - k f_m\right)$

## **Tema III**

# **Señales y sistemas de tiempo discreto en el dominio frecuencial**

## III. 1

# Transformada de Fourier de secuencias (DTFT)

Se recomienda revisar los ejercicios marcados con (\*).

### Preliminares

1. Demuestra que las señales de periodo  $N$  (en  $n$ )  $\Phi_k[n] = e^{j2\pi \frac{k}{N}n}$ ,  $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  son periódicas en  $k$  de periodo  $N$ , es decir  $\Phi_0[n] = \Phi_N[n]$ ,  $\Phi_1[n] = \Phi_{N+1}[n]$ , y que por tanto solo hay  $N$  señales diferentes del conjunto  $\Phi_k[n]$ .

### Propiedades de la transformada de Fourier

2. (\*) Sea la secuencia  $x[n] = \{\dots, 0, -2, -1, 2, -1, -1, 0, -1, -1, 2, -1, -2, 0, 0, \dots\}$ . Sin calcular explícitamente  $X(F)$ , calcula

a)  $X(0)$

b)  $\int_{-0,5}^{0,5} X(F) dF$

c)  $X(F)$  ¿tiene fase lineal (con posibles saltos de  $\pi$ )?

d)  $X(0,5)$

e)  $\int_{-0,5}^{0,5} |X(F)|^2 dF$

3. Adaptación del problema 2 del examen final de 2019-2020

La correlación cruzada entre dos señales reales se define como

$$r_{xy}[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k+n]y[k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]y[k-n]$$

De las siguientes igualdades indica la que es correcta:

1)  $r_{xy}[n] = x[n] * y[n]$ ,      2)  $r_{xy}[n] = x[-n] * y[n]$ ,      3)  $r_{xy}[n] = x[n] * y[-n]$

y en base a ello calcula el módulo y la fase de la TF de la autocorrelación,  $S_{xx}(F) = \text{TF}\{r_{xx}[n]\}$ , en función de  $X(F)$ .

## Cálculo de la transformada de Fourier de secuencias básicas

4. Calcula la transformada de Fourier de las siguientes secuencias:

- a)  $\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n+1]$
- b) (\*)  $\left(\frac{1}{2}\right)^n (u[n+4] - u[n-2])$
- c)  $|a|^n u[n] \cdot \sin(2\pi F_0 n)$
- d)  $\left(\frac{1}{4}\right)^n u[n] \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta[n-3k]$
- e) (\*)  $\delta[4-2n]$

5. (\*) Sea la secuencia:  $x[n] = \begin{cases} 1, & |n| \leq \frac{N}{2} \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$

Escribe y dibuja la transformada de Fourier de  $y[n] = x[n] \cdot \cos(2\pi F_0 n)$  con  $F_0 < 0,5$

6. (\*) Dada la señal  $x[n] = \cos(2\pi F_0 n) \cos(2\pi F_1 n)$

- a) Escribe la transformada de Fourier de  $x[n]$
- b) Representa el resultado si  $F_0 = 0,2$  y  $F_1 = 0,25$  en el intervalo  $0 \leq F \leq 0,5$
- c) Representa el resultado si  $F_0 = 0,2$  y  $F_1 = 0,4$  en el intervalo  $0 \leq F \leq 0,5$

## Respuesta frecuencial de sistemas discretos

7. (\*) *Adaptación del problema 3 del examen final de 2019-2020*

Para suavizar las variaciones en una secuencia,  $x[n]$ , uno de los métodos utilizados es el alisado temporal que calcula la salida en el instante  $n$  como la media de  $N$  muestras:

$$y_1[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x[n-k].$$

Otro método consiste en utilizar una memoria mayor ponderando las muestras más próximas a  $n$  con un valor más alto:

$$y_2[n] = \beta \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k x[n-k],$$

siendo  $\alpha$  y  $\beta$  constantes reales y positivas.

- a) Calcula la respuesta frecuencial del primer sistema,  $H_1(F) = \frac{Y_1(F)}{X(F)}$ . Dibuje  $|H_1(F)|$  para  $N = 7$ .

- b) Para  $0 < \alpha < 1$ , calcula la respuesta frecuencial del segundo sistema,  $H_2(F) = \frac{Y_2(F)}{X(F)}$ . Dibuja  $|H_2(F)|$ .
- c) Para  $N = 7$ , calcula el valor de  $\alpha$  y  $\beta$  para que la respuesta frecuencial en  $F = 0$  y para  $F = 0,5$  sea la misma para ambos sistemas. Indica qué tipo de filtro son.

### Relación entre la TF de una secuencia y la TF de la señal analógica de procedencia

8. (\*) Una señal  $x_a(t)$  real de ancho de banda  $B$  Hz se digitaliza con un conversor A/D que trabaja a una frecuencia de muestreo  $f_m = 2B$ , y se obtiene la secuencia  $x[n] = x_a(nT_m)$  con  $T_m = \frac{1}{f_m}$ . La secuencia  $x[n]$  se procesa digitalmente obteniéndose  $y[n] = (-1)^n x[n]$ , y el resultado se pasa por un conversor D/A. Se pide:
- a) Considera la señal  $x_m(t) = x(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_m)$  (muestreo ideal). Encuentra y dibuja la transformada de Fourier de  $x_m(t)$ . Para la representación, supón un dibujo sencillo para la  $X_a(f)$  (TF de  $x_a(t)$ ), por ejemplo, un triángulo. Especifica en tu dibujo las frecuencias y amplitudes más significativas.
- b) Dibuja  $X(F)$ , la transformada de Fourier de la secuencia  $x[n]$ . Especifica en tu dibujo los valores de  $F$  y amplitudes más significativas.
- c) Calcula y dibuja la transformada de Fourier de la secuencia  $y[n] = (-1)^n x[n]$ , en función de  $X(F)$ . Nota que  $(-1)^n = e^{j\pi n} = e^{j2\pi \frac{1}{2}n}$ .
- d) La secuencia  $y[n]$  se utiliza para generar una señal analógica  $y_a(t)$ . Suponiendo un conversor D/A ideal, es decir,  $y_a(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y[n] \text{sinc}\left(\frac{t-nT_m}{T_m}\right)$ , dibuja la transformada de Fourier de  $y_a(t)$ . ¿Qué efecto ha producido todo el procedimiento sobre  $x_a(t)$ ?
9. Sea  $x_a(t) = A \cos(2\pi f_0 t) + B \cos(2\pi f_1 t)$  con  $f_0 = 0,5f_1$ . Se desea eliminar el tono (coseno) de frecuencia  $f_0$ . Para ello se utiliza el esquema de la figura 1.1: se digitaliza la señal mediante un conversor A/D, se filtra adecuadamente y se recupera la señal resultante con un conversor D/A. El conversor D/A utiliza un Sample & Hold (también llamado ZOH), que genera la señal resultante manteniendo constante el valor de una muestra hasta la siguiente muestra.

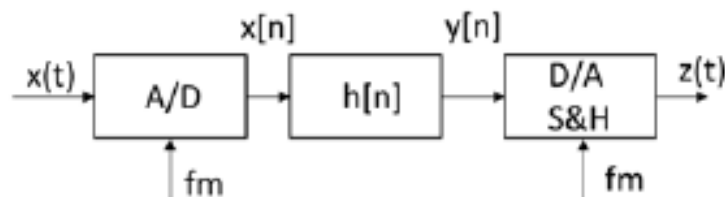


Figura 1.1

Se pide:

- a)** Mínima frecuencia de muestreo para representar exactamente  $x_a(t)$ .

Considera a partir de ahora la frecuencia de muestreo  $f_m = 10f_1$  Hz

- b)** Expresión de la señal  $x[n]$  a la salida del conversor A/D.
- c)** Expresión de  $X(F)$ , la transformada de Fourier de  $x[n]$ . Dibújela.
- d)** Se desea realizar un filtro digital para que a la salida de todo el sistema se haya cancelado el tono a la frecuencia  $f_1$ , especifica el ancho de banda de un filtro paso bajo ideal discreto que le permita realizar esa cancelación. Dibuja  $H(F)$  en el intervalo  $-1 < F < 1$
- e)** Respuesta impulsional del filtro diseñado.
- f)** Expresión de  $y[n]$ , la señal de salida del filtro.
- g)** Expresión de  $z(t)$  la señal a la salida del conversor D/A.

## Soluciones y/comentarios a los ejercicios

1.  $e^{j2\pi \frac{k+N}{N}n} = e^{j2\pi \frac{k}{N}n} e^{j2\pi n} = e^{j2\pi \frac{k}{N}n}$
2. **a)**  $X(0) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] = -6$   
**b)**  $\int_{-0,5}^{0,5} X(F) dF = x[0] = 2$   
**c)** Para que  $X(F)$  tenga fase lineal,  $x[n]$  ha de tener simetría par o impar respecto a la muestra central (en este caso la situada en  $n = 3$ ). Dado que  $x[n]$  es simétrica respecto a  $n = 3$ ,  $X(F)$  tendrá fase lineal de pendiente  $-6\pi$  + saltos de  $\pi$ .  
**d)**  $X(0,5) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n x[n] = 2$   
**e)**  $\int_{-0,5}^{0,5} |X(F)|^2 dF = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 = 22$
3.  $S_{xx}(f) = X(F)X^*(F) = |X(F)|^2$ . El módulo es  $|X(F)|^2$ . La fase es 0.
4. **a)**  $\sum_{n=-1}^{\infty} (\frac{1}{2}e^{-j2\pi F})^n = \frac{2e^{j2\pi F}}{1-\frac{1}{2}e^{-j2\pi F}}$   
 Alternativo 1:  $(\frac{1}{2})^n u[n+1] = 2\delta[n+1] + (\frac{1}{2})^n u[n] \leftrightarrow 2e^{j2\pi F} + \frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-j2\pi F}}$   
 Alternativo 2:  $x[n] = 2(\frac{1}{2})^{(n+1)} u[n+1] \leftrightarrow X(F) = 2\frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-j2\pi F}} e^{j2\pi F}$   
**b)**  $X(F) = \sum_{n=-4}^1 (\frac{1}{2})^n e^{-j2\pi F n} = \frac{(\frac{1}{2})^{-4} e^{j8\pi F} - \frac{1}{4} e^{-j4\pi F}}{1-\frac{1}{2}e^{-j2\pi F}}$   
**c)**  $|a|^n u[n] \sin(2\pi F_0 n) = \frac{|a|^n u[n] e^{j2\pi F_0 n} - |a|^n u[n] e^{-j2\pi F_0 n}}{2j} \leftrightarrow \frac{1}{2j} \frac{1}{1-|a|e^{-j2\pi(F-F_0)}} - \frac{1}{2j} \frac{1}{1-|a|e^{-j2\pi(F+F_0)}}$   
**d)**  $(\frac{1}{4})^n u[n] \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta[n-3k] \leftrightarrow \frac{1}{1-\frac{1}{4}e^{-j2\pi F}} * \frac{1}{3} \sum_{k=0}^2 \delta(F - \frac{k}{3})$   
**e)**  $\delta[4-2n] = \delta[n-2] \leftrightarrow e^{-j4\pi F}$
5. La convolución periódica,  $\otimes$ , entre  $X(F)$  y  $\frac{1}{2} \sum_{r=-\infty}^{\infty} (\delta(F-F_0-r) + \delta(F+F_0-r))$  se puede calcular como:  

$$Y(F) = X(F) * \frac{1}{2} (\delta(F-F_0) + \delta(F+F_0)) = \frac{1}{2} X(F-F_0) + \frac{1}{2} X(F+F_0)$$
 Dado que  $x[n]$  es un pulso rectangular de duración  $N+1$  centrado en el origen,  $X(F) = \frac{\sin(\pi F(N+1))}{\sin(\pi F)}$ .  
 De forma que:  $Y(F) = \frac{1}{2} \left( \frac{\sin(\pi(F-F_0)(N+1))}{\sin(\pi(F-F_0))} + \frac{\sin(\pi(F+F_0)(N+1))}{\sin(\pi(F+F_0))} \right)$
6. **a)**  $x[n] = \cos(2\pi F_0 n) \cos(2\pi F_1 n) = \frac{1}{2} \cos(2\pi(F_0 + F_1)n) + \frac{1}{2} \cos(2\pi(F_0 - F_1)n)$   

$$X(F) = \frac{1}{4} \sum_{r=-\infty}^{\infty} (\delta(F \pm (F_0 + F_1) - r)) + \frac{1}{4} \sum_{r=-\infty}^{\infty} (\delta(F \pm (F_0 - F_1) - r))$$
  
**b)** Una delta en 0.45 y otra en 0.05 ambas de área  $\frac{1}{4}$ .  
**c)**  $F_0 + F_1 = 0.6 > 0.5$  Habrá una delta en  $1-0.6 = 0.4$  y otra en 0.2 ambas de área  $\frac{1}{4}$ .
7. Ver examen.



8. **a)**  $X_m(f) = f_m \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(f - nf_m)$

**b)**

**c)**  $Y(F) = X\left(F - \frac{1}{2}\right)$

**d)** Es un inversor de bandas.

9. **a)**  $f_m > 2f_1$

**b)** Con  $T_m = \frac{1}{f_m}$  tenemos:

$$x[n] = A \cos(2\pi f_0 n T_m) + B \cos(2\pi f_1 n T_m) = A \cos\left(2\pi \frac{f_0}{f_m} n\right) + B \cos\left(2\pi \frac{f_1}{f_m} n\right) = A \cos(2\pi 0,05n) + B \cos(2\pi 0,1n)$$

**c)**  $X(F) = \frac{A}{2} \sum_{r=-\infty}^{\infty} (\delta(F \pm F_0 - r)) + \frac{B}{2} \sum_{r=-\infty}^{\infty} (\delta(F \pm F_1 - r))$ , con  $F_0 = 0,05$  y  $F_1 = 0,1$ .

**d)** Eliminamos el tono a la frecuencia  $F_1$ . Basta un filtro paso bajo de ancho de banda  $F_0 < B_h < F_1$ . Elegimos  $B_h = 0,07$ .

**e)**  $H(F) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} \Pi\left(\frac{F-r}{2B_h}\right)$

**f)**  $h[n] = 2B_h \text{sinc}(2B_h n)$

**g)**  $y[n] = A \cos(2\pi F_0 n) = A \cos\left(2\pi \frac{f_0}{f_m} n\right)$

**h)** El Sample&Hold mantiene la muestra hasta la siguiente:

$$z(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A \cos\left(2\pi \frac{f_0}{f_m} n\right) \Pi\left(\frac{t - nT_m - \frac{T_m}{2}}{T_m}\right)$$

## III. 2

# Análisis frecuencial

### Transformada de Fourier de ventanas

1. Contesta las siguientes preguntas:

- a) Si expresamos la ventana triangular de  $L$  muestras  $t_L[n]$  como la convolución de dos ventanas rectangulares de  $N$  muestras. ¿Cuál es la relación entre la longitud de la ventana triangular  $L$  y la longitud de la ventana rectangular  $N$ ?
- b) Dibuja aproximadamente el módulo de la transformada de Fourier de la ventana triangular de  $L$  muestras  $T_L(F)$  indicando claramente el valor en  $F = 0$  y la posición de los ceros.
- c) ¿Cuál es el ancho del lóbulo principal de la ventana triangular en función de  $L$ ? Compáralo con una ventana rectangular de la misma longitud.
- d) Para detectar líneas espectrales separadas 200 Hz, determina aproximadamente la longitud  $L$  que ha de tener la ventana triangular (considere que dos líneas espectrales se pueden distinguir si están separadas el ancho del lóbulo principal de la ventana). Considera que la frecuencia de muestreo es  $f_m = 20$  kHz.

### Transformada de Fourier de sinusoides enventanadas

2. Se adquieren  $L$  muestras de una señal sinusoidal mediante un conversor A/D, trabajando a una frecuencia de muestreo de 8000 muestras/seg. Se calcula la transformada de Fourier de la secuencia obtenida y se obtiene el módulo que se representa en la figura 2.1 en el intervalo frecuencial  $[0, 0.5]$ .

Encuentra el número de muestras de la secuencia, la frecuencia normalizada de la secuencia sinusoidal, la duración temporal de la señal sinusoidal original, así como los parámetros, amplitud y frecuencia de esta señal temporal original.

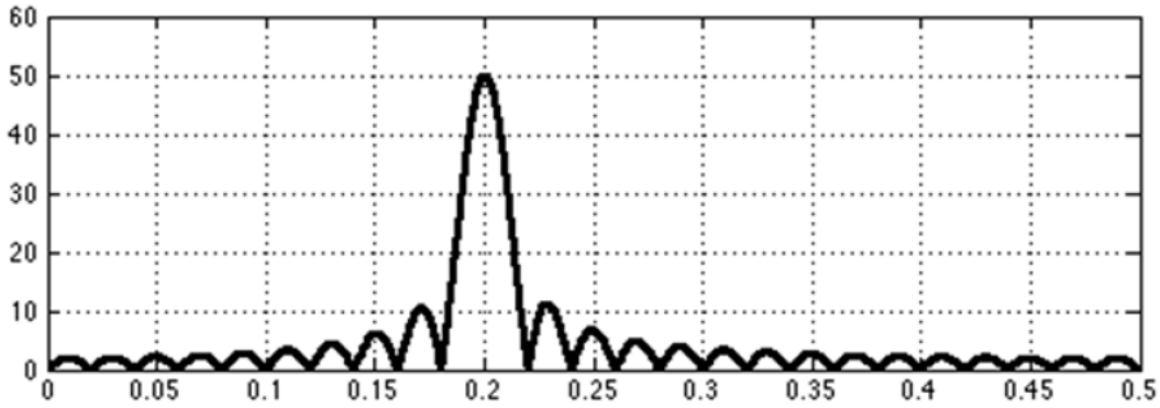


Figura 2.1: Representación en el intervalo  $[0, 0.5]$  del módulo de la transformada de Fourier de una senoide envetanaada

## Soluciones y/comentarios a los ejercicios

1. **a)**  $t_L[n] = p_N[n] * p_N[n]$ . Por tanto,  $L = 2N - 1$ .
- b)**  $T_L(F) = P_N(F) \cdot P_N(F)$ , con  $P_N(F) = e^{-j\pi F(N-1)} \cdot \frac{\sin(\pi FN)}{\sin(\pi F)}$ . Tomando módulos:

$$|T_L(F)| = \frac{\sin^2(\pi FN)}{\sin^2(\pi F)}$$

En  $F = 0$ , la transformada de la ventana rectangular toma valor  $P_N(0) = N$ , por tanto  $T_L(0) = N^2$ . Los ceros de la transformada de la ventana rectangular ocurren para  $F = \frac{k}{N}$ , por tanto para la transformada de la ventana triangular ocurren para  $F = \frac{2k}{L+1}$

- c)** La anchura del lóbulo principal de la transformada de la ventana triangular será  $\Delta_F = \frac{4}{L+1}$ . Para una ventana rectangular de longitud  $L$ , la anchura del lóbulo principal de su transformada es  $\Delta_F = \frac{2}{L}$ .

- d)**  $\Delta_F = \frac{4}{L+1} \leq \frac{f}{f_m}$ . Por consiguiente,  $L \geq 4\frac{f_m}{f} - 1 = 399$ .

2. La figura del enunciado representa el módulo de la TF de  $x[n] \cdot p_L[n]$  en el intervalo  $[0, 0.5]$ .

$$x[n] \cdot p_L[n] \leftrightarrow X(F) \otimes P_L(F) = P_L(F) * \frac{A}{2} (\delta(F - F_0) + \delta(F + F_0)) = \frac{A}{2} P_L(F - F_0) + \frac{A}{2} P_L(F + F_0)$$

siendo:

$$P_L(F) = \frac{\sin(\pi FL)}{\sin(\pi F)} e^{-j\pi F(L-1)}$$

$P_L(F - F_0)$  tiene un máximo de valor  $L$  en  $F = F_0$ . La anchura del lóbulo principal (centrado en  $F_0$ ) es  $\Delta_F = \frac{2}{L}$ .

En  $|\frac{A}{2}P_L(F - F_0) + \frac{A}{2}P_L(F + F_0)|$  tenemos máximos en  $F \approx \pm F_0 + k$  (no es exacto ya que  $P_L(F - F_0)$  y  $P_L(F + F_0)$  se interfieren entre sí, si no se interfiriesen los máximos sí estarían exactamente en  $\pm F_0 + k$ ). El valor de cada máximo es  $\approx \frac{A}{2}L$  y la anchura de los lóbulos principales centrados  $\pm F_0$  es  $\approx \Delta_F = \frac{2}{L}$ .

- $L$ : los ceros de la figura están espaciados  $\frac{1}{L}$ , salvo los del lóbulo principal que están separados  $\frac{2}{L}$ . En el intervalo  $[0.1, 0.2]$  vemos que  $0.2 - 0.1 = \frac{5}{L}$ . Por tanto,  $L = 50$  muestras.
- $F_0$ : El lóbulo principal de la sinc está centrado en 0.2, por tanto  $F_0 = 0.2$
- $T$ : La duración temporal será  $T = \frac{L}{f_m} = \frac{50}{8000} = 6.25$  ms
- $A$ : La amplitud de  $X(F)$  para  $F = F_0$  es  $A\frac{L}{2} = 50 \Rightarrow A = 2$
- $f_0 = F_0 f_m = 1600$  Hz

Finalmente, tenemos que  $x[n] = A \cos(2\pi F_0 n)$  y  $x(t) = A \cos(2\pi 1600 t)$ .

## III. 3

# Diezmado e interpolación

### Diezmado

1. Sea  $x[n]$  una secuencia discreta cuya transformada de Fourier es  $X(F) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \Delta\left(\frac{F-k}{0,1}\right)$ .
  - a) Dibuja  $X(F)$  en el intervalo  $0 \leq F < 1$ .
  - b) Dibuja la transformada de Fourier de  $v[n] = x[n] \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta[n-5k]$  en el intervalo  $0 \leq F < 1$ .
  - c) Dibuja la transformada de Fourier de la secuencia diezmada  $y[n] = v[5n] = x[5n]$  en el intervalo  $0 \leq F < 1$ .
2. Sea  $x[n] = \cos(2\pi F_0 n)$  una sinuoside de frecuencia discreta  $F_0 = 0,4$ .
  - a) Dibuja la transformada de Fourier de  $x[n]$  en el intervalo  $0 \leq F < 1$ . b) Dibuja la transformada de Fourier de  $v[n] = x[n] \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta[n-2k]$  en el intervalo  $0 \leq F < 1$ .
  - b) Dibuja la transformada de Fourier de la secuencia diezmada  $y[n] = v[2n] = x[2n]$  en el intervalo  $0 \leq F < 1$ .
  - c) Comprueba que  $y[n] = x[2n] = \cos(2\pi F'_0 n)$  y calcula el valor de  $F'_0$  en el intervalo  $0 \leq F < 0,5$ .
  - d) Discute por qué no se cumple que  $F'_0 = 2F_0$ . Indica el valor máximo de  $F'_0$  que verificaría la igualdad anterior.

### Interpolación

3. Contamos con una señal analógica de voz  $x_a(t)$  de ancho de banda 4 kHz. Dicha señal se aplica a la entrada del esquema de interpolación de la figura 3.1:
  - a) ¿Cuál ha de ser la frecuencia de muestreo  $f_{M_2}$  a la que trabaje el conversor D/A?
  - b) Supón un dibujo sencillo para la transformada de Fourier de  $x_a(t)$  (por ejemplo, un triángulo entre  $-4 \leq f \leq 4$  kHz). Dibuja las transformadas de Fourier de  $x[n]$

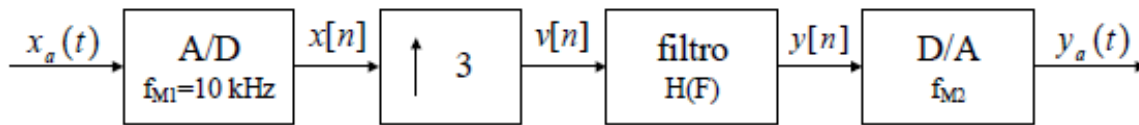


Figura 3.1

y  $v[n]$  (es decir,  $X(F)$  y  $V(F)$ ) indicando claramente frecuencias y amplitudes.  
 ¿Se produce aliasing en el muestreo de  $x_a(t)$ ? ¿Por qué?

A continuación, y por poner un ejemplo, suponga  $x[n] = [\dots, 0, -3, \underline{3}, 6, 0, \dots]$

**c) Interpolación discreta ideal**

La interpolación ideal se lleva a cabo mediante un filtro digital paso bajo,  $H(F) = M \sum_{r=-\infty}^{\infty} \Pi\left(\frac{F-r}{2F_c}\right)$ .

- 1) Dibuja la respuesta frecuencial del filtro en el intervalo  $-0,5 \leq F < 0,5$
- 2) Indica el margen de valores posibles para la frecuencia de corte  $F_c$ .
- 3) Indica cuál es la respuesta impulsional del filtro ideal  $h[n]$  para una frecuencia de corte concreta tomada del intervalo anterior.

**d) Interpolación discreta de orden 0**

Como el filtro anterior no es implementable, se propone usar otro con la respuesta impulsional  $h[n] = p_3[n]$ :

- 1) Dibuja las muestras de la señal  $y[n]$  tomando las muestras  $x[n] = [\dots, 0, -3, \underline{3}, 6, 0, \dots]$
- 2) Calcula y dibuja el módulo de la respuesta frecuencial  $|H(F)|$  del filtro cuya respuesta impulsional es  $h[n] = p_3[n]$ .
- 3) Dibuja aproximadamente el módulo de la transformada de Fourier de  $y[n]$ .  
 ¿Qué problemas se observan? Justifica la respuesta comparando la respuesta frecuencial del filtro considerado con la del caso del interpolador ideal.
- 4) En el apartado anterior se han identificado una serie de problemas. Explica qué propondría hacer para solucionar dichos problemas.

## Soluciones y/comentarios a los ejercicios

1. **a)** Representación de  $X(F)$ : triángulos centrados en  $F = 0, 1, 2, \dots$

Cada uno de base 0.2 y altura 1.

- b)**  $V(F) = \frac{1}{5} \sum_{k=0}^4 X\left(F - \frac{k}{5}\right)$ .

Ahora tenemos triángulos centrados en  $F = 0, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, \dots$ . Cada uno de base 0.2 y altura  $\frac{1}{5}=0.2$

- c)**  $Y(F) = V(\frac{F}{5}) = \frac{1}{5} \sum_{k=0}^4 X(\frac{F-k}{5})$ . El dibujo es el mismo que el del apartado anterior cambiando los valores del eje de frecuencias (expansión frecuencial por 5): lo que antes ocurría en  $F=0.2$  ahora lo tendremos en  $F=1$ ,  $F=0.4$  pasa a ser  $F=2$ , etc.
- 2.** El problema es muy similar al anterior, con la única precaución de aplicar correctamente el escalado de la delta. Así, al hacer una expansión del eje frecuencial por 2, el área de la delta se multiplica por el factor de expansión:  $\delta(\frac{F}{2}) = 2\delta(F)$ .
- a)**  $X(F) = \frac{1}{2} \sum_{r=-\infty}^{\infty} \delta(F \pm F_0 - r)$ .  
El dibujo de  $X(F)$  en el intervalo  $[0,1)$  presenta deltas de Dirac de área  $\frac{1}{2}$  en  $F=F_0=0.4$  y  $F=1-F_0=0.6$ .
- $$V(F) = \frac{1}{4} \sum_{r=-\infty}^{\infty} \delta(F \pm F_0 - r) + \frac{1}{4} \sum_{r=-\infty}^{\infty} \delta(F - \frac{1}{2} \pm F_0 - r)$$
- El dibujo de  $V(F)$  en el intervalo  $[0,1)$  presenta deltas de Dirac en  $F=0.4$  y  $F=0.6$  y también en  $F=0.5-0.4=0.1$  y  $F=0.5+0.4=0.9$  (centradas en  $F=0.5$ ). El área de las deltas es  $\frac{1}{4}$ .
- b)**  $Y(F) = V(\frac{F}{2})$   
El dibujo es el que teníamos para  $V(F)$ , pero haciendo una expansión frecuencial por 2. Por tanto, las deltas aparecen en  $F=0.2, 0.8, 1.2, 1.8$ , etc. Su área, además, se multiplica por 2. Analíticamente:
- $$Y(F) = \frac{1}{2} \sum_{r=-\infty}^{\infty} \delta(F \pm 2F_0 - r)$$
- c)**  $y[n] = x[2n] = \cos(2\pi F_0 n) = \cos(2\pi 0.8n) = \cos(2\pi 0.2n)$ , cuya TF en el intervalo  $[0,1)$  presenta deltas en 0.2 y 0.8 de área  $\frac{1}{2}$  ¡Todo cuadra!
- d)** Porque  $F_0 > \frac{1}{2N}$ , siendo  $N$  el factor de diezmado. El valor máximo sería  $F_0 = \frac{1}{2N} = \frac{1}{4}$  que daría  $F'_0 = \frac{1}{2}$  (máxima frecuencia normalizada para no tener aliasing).
- 3. a)** 30 kHz
- b)** No se produce aliasing en el muestro de  $x_a(t)$  porque la frecuencia de muestro  $f_{M1} = 10$  kHz es mayor que 8 kHz (que es el doble del ancho de banda de  $x_a(t)$ ).  
Dibujo de  $X(F)$ : triángulos centrados en  $F=0, 1, 2, 3, \dots$  de base 0.8.  
 $V(F) = X(3F)$  (compresión frecuencial por 3): cambiamos los valores del eje de frecuencias el 1 pasa a ser  $\frac{1}{3}$ , el 2 pasa a ser  $\frac{2}{3}$ , el 3 pasa a ser  $\frac{3}{3}$ , etc.
- c)** El interpolador ideal:
- 1)  $H(F) = H(0)$  para  $|F| < F_c$  y 0 en otro caso.
  - 2) Para este problema concreto se podría escoger  $0.4/3 < F_c < 0.6/3$ .
  - 3) Lo habitual es, para  $N=3$ ,  $H(F) = N=3$  y  $F_c=0.5/N=1/6$ . En ese caso,  $h[n] = \text{sinc}(\frac{n}{3})$  (IIR, inestable y no causal).
- d)** Interpolación discreta de orden 0.
- 1)  $y[n] = [\dots, 0, 0, 0, -3, -3, -3, 3, 3, 3, 6, 6, 6, 0, 0, 0, \dots]$
  - 2)  $H(F) = e^{-j2\pi F \frac{\sin(3\pi F)}{\sin(\pi F)}}$ . Vemos que  $H(0) = 3$ .

- 3) Este filtro no es un paso bajo ideal. No elimina completamente el alias centrado en  $1/3$  (por culpa de la presencia de lóbulos secundarios) y además distorsiona el alias principal (por culpa de que el lóbulo principal no tiene amplitud constante).
- 4) Una solución sería añadir un filtro analógico a la salida del conversor D/A. Ese filtro analógico tendrá que eliminar los alias residuales y además debería corregir la distorsión de amplitud del alias principal.



### III. 4

## Transformada de Fourier discreta (DFT)

### Cuestiones de la DFT

1. Sea la señal  $x[n] = \delta[n] - \delta[n-1] + \delta[n-3] + \delta[n-4]$ . Se realiza una DFT de  $N$  puntos y se realiza una DFT inversa de  $N$  muestras. Escribe la secuencia resultante para los tres casos siguientes: a)  $N = 6$ , b)  $N = 4$ , c)  $N = 3$ .
2. Sea  $x[n]$  una secuencia cualquiera,  $X(F)$  su Transformada de Fourier,  $X_N[k]$  su DFT de  $N$  puntos. Justifica si se puede afirmar que

**a)**  $x[n] = \text{DFT}_N^{-1}\{X(F)|_{F=k/N}\}$ , para  $0 \leq n \leq N-1$

**b)** Para  $x[n] = p_N[n]$ ,  $|X(F)|_{F=k/N} = N\delta[k]$ , para  $0 \leq n \leq N-1$

**c)** Para  $x[n]$  real,  $X(F)|_{F=k/N}$  real

**d)**  $\text{DFT}_N^{-1}\{X_N[k]e^{-j2\pi\frac{k}{N}}\} = \begin{cases} x[N-1], & n = 0. \\ x[n-1], & 1 \leq n \leq N-1. \end{cases}$

3. Sean las secuencias:

$$x_1[n] = \{\dots, 0, \underline{1}, 1, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 1, 0, \dots\},$$

$$x_2[n] = \{\dots, 0, \underline{0}, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 0, \dots\}$$

$$y[n] = \text{DFT}_N^{-1}\{X_1[k]X_2[k]\}$$

donde  $X_1[k]$  y  $X_2[k]$  son las DFT de 9 puntos correspondientes a  $x_1[n]$  y  $x_2[n]$  respectivamente. Encuentra la secuencia  $y[n]$ .

4. Sea la secuencia de longitud  $L = 9$  muestras impar:

$$x[n] = \{\dots, 0, 0, -4, -3, -2, -1, \underline{0}, 1, 2, 3, 4, 0, 0, \dots\}$$

Encuentra  $N = 13$  muestras de  $X(F)$  mediante la DFT.

5. Sea una secuencia  $x[n]$  de longitud  $L = 6$  puntos (con  $x[n] = 0$  para  $n < 0$  y  $n \geq L$ ) de valores  $x[n] = [\underline{a}, b, c, d, e, f]$  (el subrayado indica el valor que está en  $n = 0$ ). Se realiza una DFT de  $N = 6$  puntos y se obtiene  $X[k] = [A, B, C, D, E, F]$ . Marca la respuesta correcta para cada subapartado

**a)** La  $\text{DFT}_6[a^*, b^*, c^*, d^*, e^*, f^*]$  es:

- 1)  $[A^*, B^*, C^*, D^*, E^*, F^*]$
- 2)  $[A^*, E^*, D^*, C^*, B^*, A^*]$
- 3)  $[A^*, F^*, E^*, D^*, C^*, B^*]$
- 4)  $[-F^*, -E^*, -D^*, -C^*, -B^*, -A^*]$
- 5)  $[F^*, E^*, D^*, A^*, B^*, C^*]$

**b)** La  $\text{DFT}_6[a, -b, c, -d, e, -f]$  es

- 1)  $[A, -B, C, -D, E, -F]$
- 2)  $[D, E, F, A, B, C]$
- 3)  $[A, B, C, F, E, D]$
- 4)  $[A + D, B + E, C + F, A^* + D^*, B^* + E^*, C^* + F^*]$
- 5) Ninguna de las anteriores

**c)** La  $\text{DFT}_3^{-1}[A, C, E]$

- 1)  $[a, c, e]$
- 2)  $[a + d, b + e, c + f]$
- 3)  $[a, 0, b, 0, c, 0]$
- 4)  $[a, b, c]$
- 5) Ninguna de las anteriores

**d)** La  $\text{DFT}_6[a, f, e, d, c, b]$  es

- 1)  $[A, -B, C, -D, E, -F]$
- 2)  $[A, F, E, D, C, B]$
- 3)  $[A, B, C, F, E, D]$
- 4)  $[A + D, B + E, C + F, A^* + D^*, B^* + E^*, C^* + F^*]$
- 5) Ninguna de las anteriores

**e)** Si  $x[n]$  es real, la  $\text{DFT}_6[a, b, c, d, e, f]$  es

- 1)  $[A, B, C, D, C, B]$
- 2)  $[A, B, C, D, C^*, B^*]$
- 3)  $[A, B, C, C^*, B^*, A^*]$
- 4)  $[A, B, C, D, -C^*, -B^*]$
- 5)  $[A, B, C, -C^*, -B^*, -A^*]$

## DFT de ventanas y sinusoides (Relación entre la DFT y la Transformada de Fourier)

6. Las figuras 4.1 y 4.2 muestran la DFT de  $N = 100$  muestras de dos ventanas (ambas de duración  $L$ ). Se pide:
- Justifica a qué ventana (rectangular o de Hamming) corresponde cada DFT.
  - ¿Qué duración  $L$  tienen las ventanas?
  - Razona la sensibilidad y resolución de las ventanas.
  - Si se utiliza la ventana rectangular para enventanar un coseno a frecuencia  $F_0 = \frac{1}{4}$ ,  $x[n] = \cos(2\pi F_0 n)$ . Justifica razonadamente en qué muestra estará el máximo en la transformada de Fourier del coseno enventanado y cuál será el valor de la transformada en ese punto (considere  $N = 100$ )

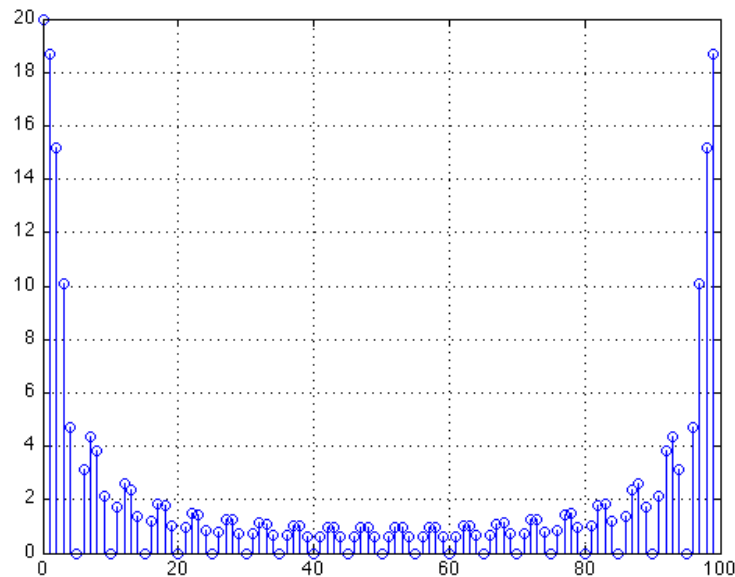


Figura 4.1

7. Sea una señal compuesta por la suma de varias senoides de amplitudes y frecuencias diferentes, enventanada con una ventana rectangular. La duración de cada senoide excede la longitud de la ventana, de duración 512 muestras. En la figura 4.3 se presenta el módulo de la DFT de 512 muestras de la señal. Se pide:
- Indica el número de sinusoides presentes en la señal.
  - Indica de forma justificada las frecuencias aproximadas de las sinusoides y la amplitud de cada una (expresa el resultado en forma de fracción, lo más reducida posible).

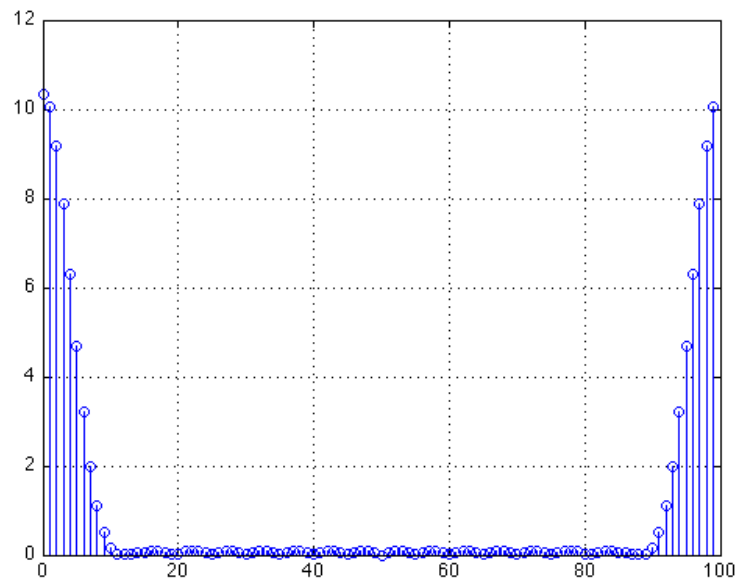


Figura 4.2

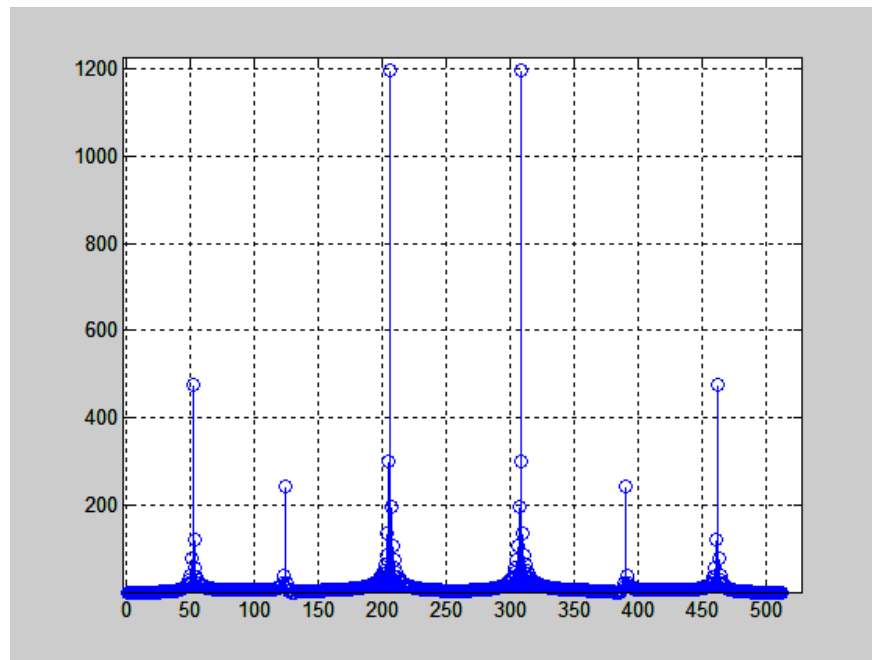


Figura 4.3

8. La señal  $x[n]$  está compuesta por una combinación lineal de sinusoides, cuya mayor amplitud es la unidad. En la figura 4.4 se representan todas las muestras de su DFT calculada con  $N = 100$ . ¿ $x[n]$  podría ser la suma de 2 sinusoides de frecuencias 0.1 y 0.4?
9. Sean  $x[n]$  un pulso de 5 muestras,  $x[n] = p_5[n]$ ,  $y[n]$  un pulso de 3 muestras,  $y[n] =$

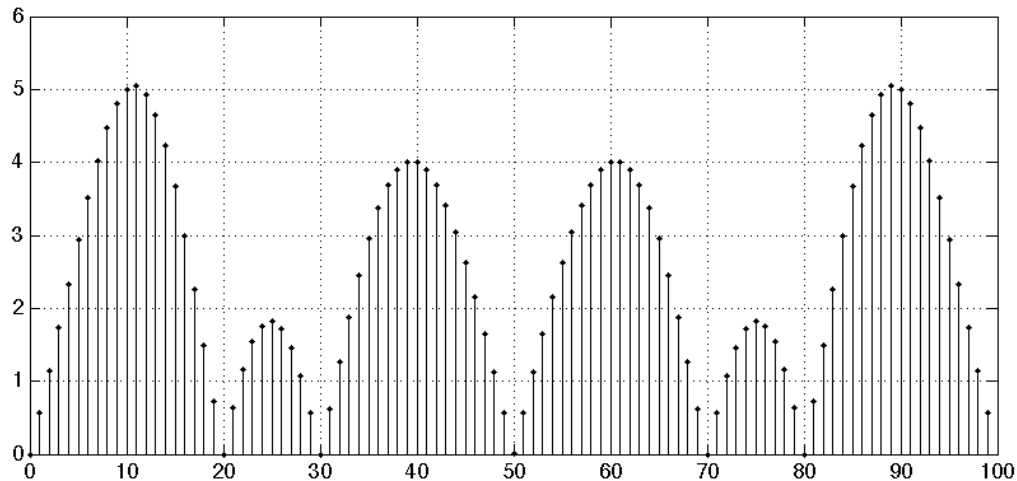


Figura 4.4

$p_3[n]$ , ambos causales, y  $X_N[k]$  e  $Y_N[k]$  sus respectivas DFT de  $N$  muestras. Indica si consideras cierta o falsa la afirmación siguiente:  $\text{DFT}_3\{x[n-2]\} = Y_3[k]$

10. Considera la siguiente señal discreta:  $x[n] = A_1 \cos(2\pi F_1 n) p_{L_1}[n-n_1] + A_2 \cos(2\pi F_2 n) p_{L_2}[n-n_2]$  donde  $p_{L_1}$  y  $p_{L_2}$  son pulsos rectangulares de amplitud unitaria y duración  $L_1$  y  $L_2$  respectivamente. Considera  $F_1 > F_2$ . Se pide:

a) Encuentra la expresión de la transformada de Fourier de  $x[n]$ .

Calculamos la DFT de  $N = 256$  muestras de la secuencia  $x[n] \cdot v[n]$  donde  $v[n]$  es una ventana rectangular de amplitud 1 y duración 200 muestras. Las 128 primeras muestras del módulo de la DFT se muestran en la figura 4.5. En la figura 4.6 se ha calculado el espectrograma discreto de  $x[n]$  utilizando una ventana rectangular de duración  $L$  muestras que se desplaza sin solapamiento en saltos de  $L$  muestras.

b) Determina el valor aproximado de  $F_1$ ,  $F_2$ ,  $L_1$ ,  $L_2$ ,  $A_1$  y  $A_2$ .

c) Encuentra la duración,  $L$ , de la ventana que se ha usado para calcular el espectrograma de la figura 4.6.

d) Encuentra el valor de  $n_1$  y  $n_2$

## Muestreo en frecuencia

11. Sea la secuencia  $x[n] = \delta[n] - \delta[n-1] + \delta[n-3] + \delta[n-4]$  Se toman  $N$  muestras equiespaciadas de su transformada de Fourier y se realiza una DFT inversa de  $N$  muestras. Encuentra la secuencia resultante para los tres casos siguientes: a)  $N = 6$ , b)  $N = 4$ , c)  $N = 3$ .

12. Problema 3 del examen final del curso 2020-2021

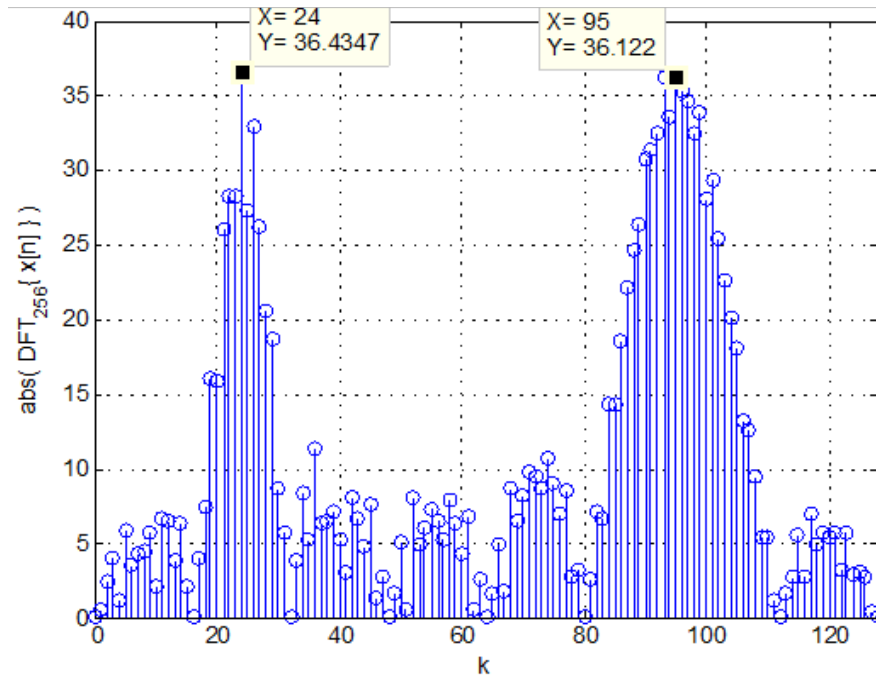


Figura 4.5

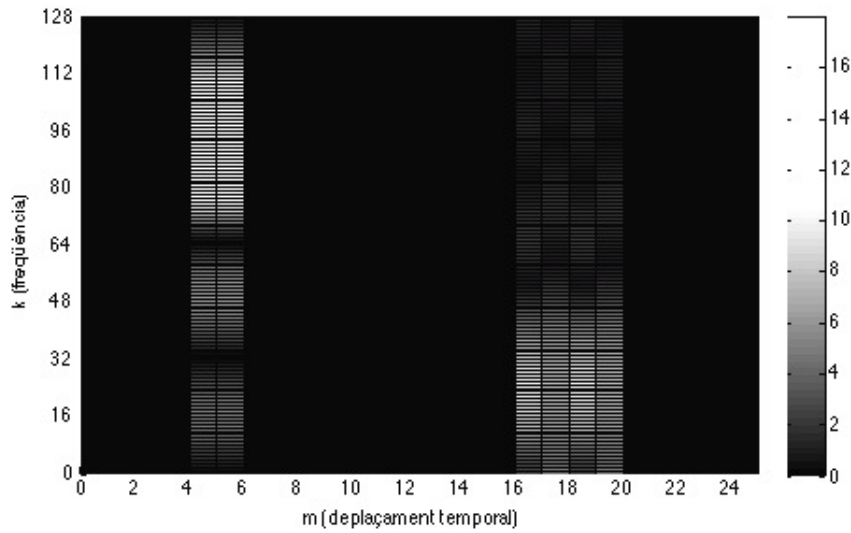


Figura 4.6

- a)** Sea  $x[n]$  una secuencia de longitud  $L_x$  puntos definida en el intervalo  $0 \leq n \leq L_x - 1$ . Sea  $X(F)$  la transformada de Fourier de  $x[n]$ . Se toman  $N$  puntos equiespaciados de  $X(F)$  en el intervalo  $[0, 1)$  y se forma la secuencia  $X[k] = X(F)|_{F=\frac{k}{N}}$ , para  $0 \leq k \leq N - 1$ . Demuestra que

$$\text{DFT}_N^{-1}\{X[k]\} = \sum_{r=-\infty}^{\infty} z[n - rN], \quad 0 \leq n \leq N - 1,$$

relacionando adecuadamente  $z[n]$  con  $x[n]$ . Si lo necesitas, puedes hacer uso de la siguiente expresión  $t[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} e^{j2\pi \frac{k}{N}n} = \sum_{r=-\infty}^{\infty} \delta[n - rN]$ .

Para los apartados b) y c): Sea la secuencia  $x = [1, 2, 3, 0, -1, 3, 4]$  con transformada de Fourier  $X(F)$ .

- b)** Se realiza una DFT de  $N$  puntos de  $x[n]$  y a continuación una DFT inversa también de  $N$  puntos:

$$y[n] = \text{DFT}_N^{-1}\{\text{DFT}_N\{x[n]\}\}, \quad 0 \leq n \leq N-1.$$

Se pide  $y[n]$  para  $N = 10$  y  $N = 3$ .

- c)** Se toman  $N$  puntos equiespaciados de  $X(F)$  en el intervalo  $[0, 1)$  y se forma la secuencia continuación, se realiza una DFT inversa también de  $N$  puntos.

$$y[n] = \text{DFT}_N^{-1}\{X[k]\}, \quad 0 \leq n \leq N-1.$$

Se pide  $y[n]$  para  $N = 10$  y  $N = 3$ .

- d)** En lenguajes de alto nivel (Python, MATLAB) es común hallar en las librerías de procesamiento de señal funciones como la que se comenta a continuación. Este ejemplo es de MATLAB pero en Python se puede encontrar una versión parecida. La función  $y = \text{datawrap}(x, N)$  'enrosca' los datos de entrada  $x$  según módulo  $N$  y los suma. La operación consiste en dividir el vector (o array)  $x$  en segmentos de duración  $N$  y sumarlos para obtener una versión 'enroscada' de  $x$ . Por ejemplo, para la secuencia  $x = [1, 2, 3, 4, 5]$  y  $N = 3$  la función  $y = \text{datawrap}(x, 3)$  da como resultado  $y = [1, 2, 3] + [4, 5, 0] = [5, 7, 3]$ .

En la web, un usuario hace el siguiente comentario sobre la función *datawrap*:

*Las funciones como SPECTROGRAM tienen la opción de especificar el número de puntos de salida (puntos de la T.F.) a través de una variable de entrada que normalmente se llama NFFT. Investigué en el código y descubrí que lo que hacen estas funciones cuando NFFT es más pequeño que el número de puntos de la secuencia, es 'enroscar' los datos. Esto significa que la matriz de datos se corta en trozos más pequeños que luego se promedian juntos. Esto no está documentado en la función de ayuda y me pregunto si es una buena práctica.*

*Cesare*

Parece que Cesare no entiende porqué se utiliza el enroscado previo al cálculo de la FFT de NFFT puntos cuando  $NFFT < L_x$ , la longitud de la secuencia de entrada. La respuesta que recibe no le acaba de despejar las dudas. ¿Podrías responder tú a Cesare?

## Cálculo de convolución o correlación mediante DFT

- 13.** Se desea hallar  $s[n] = x[n] * y[n]$ , con  $x[n] = \delta[n] - \delta[n-2] + \delta[n-4]$  e  $y[n] = p_3[n]$ , utilizando la DFT. Para ello se realizan los siguientes pasos:

- Cálculo de  $X_N[k] = \text{DFT}_N\{x[n]\}$
- Cálculo de  $Y_N[k] = \text{DFT}_N\{y[n]\}$
- Cálculo de  $Z_N[k] = X_N[k] \cdot Y_N[k]$
- Finalmente  $z[n] = \text{DFT}_N^{-1}\{Z_N[k]\}$ ,  $0 \leq n \leq N - 1$

Se pide:

- a) Calcula y dibuja  $s[n]$
- b) Calcula y dibuja  $z[n]$  eligiendo  $N = 10$
- c) Calcula y dibuja  $z[n]$  eligiendo  $N = 3$

**14. Adaptación del problema 2 del examen final del curso 2019-2020**

El cálculo de la autocorrelación de la señal discreta  $x[n]$  de  $L$  muestras como  $R_{xx}[m] = x[m] * x[-m] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]x[k-m]$  requiere del orden de  $L^2$  multiplicaciones. Por existir un algoritmo rápido para su cálculo, el uso de DFT (y DFT inversa) para obtener  $R_{xx}[m]$  es computacionalmente ventajoso a partir de un cierto valor de  $L$ .

- a) Para calcular  $R_{xx}[m]$  mediante DFT se hace lo siguiente: a) se calcula la DFT de tamaño  $N$  de  $x[n]$ , b) a partir de ella se obtienen  $N$  muestras de  $S_{xx}(F)$ , y c) se hace la DFT inversa de tamaño  $N$  de  $S_{xx}[k]$ . Indica el valor mínimo de  $N$  para que los datos proporcionados por este algoritmo sean correctos.
- b) Supón ahora  $x[n] = (1, 1, 1, 1)$ . Calcula la autocorrelación  $R_{xx}[m]$ .
- c) Indica, para  $N = 8$  y  $N = 4$ , la salida del algoritmo basado en DFT con la secuencia del apartado anterior.

## Cambio de la frecuencia de muestreo

- 15.** Se dispone de un conjunto de señales de voz muestreadas sin aliasing. Algunas de ellas están muestreadas a 44100 Hz y otras a 11025 Hz. Las figuras 4.7 y 4.8 muestran la DFT (*Discrete Time Fourier Transform*) de  $N = 4096$  puntos obtenidas para una señal de cada tipo. El valor del eje de abscisas  $k$  indica el índice de la DFT, que corresponde a la frecuencia  $F = \frac{k}{N}$ .

- a) Indica justificadamente qué frecuencia de muestreo se ha utilizado en cada caso.
- b) Nos interesa que todas las señales en nuestra base de datos tengan la misma frecuencia de muestreo. Escoge una frecuencia de muestreo y propón un diagrama de bloques apropiado para cambiar la frecuencia de muestreo no escogida.
- c) Indica la expresión analítica de la TF de la secuencia de salida de cada bloque del apartado b en función de la secuencia original  $X(F)$ .



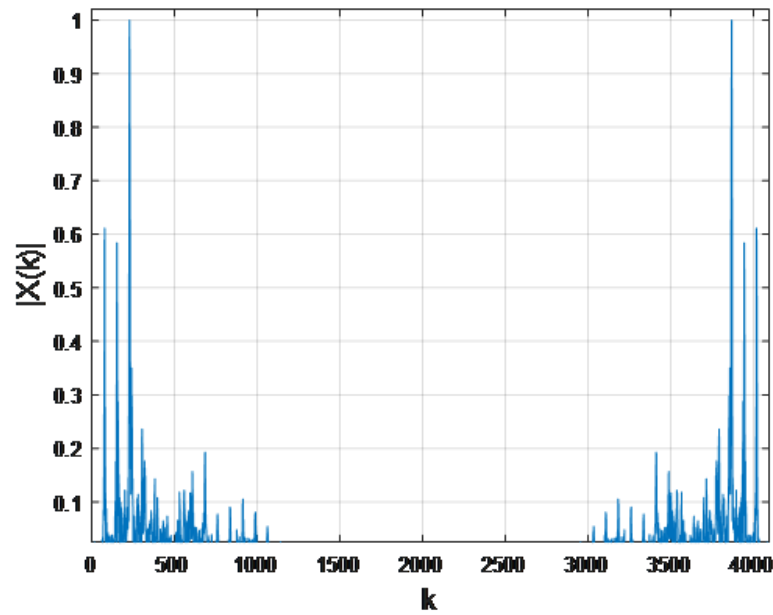


Figura 4.7

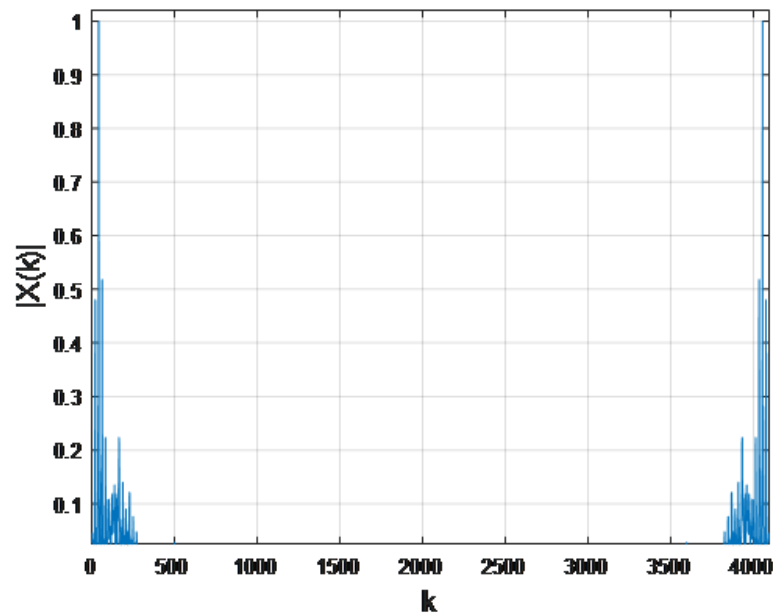


Figura 4.8

### Análisis frecuencial de señales mediante DFT

16. Se desea realizar una monitorización de un paciente para detectar posibles arritmias, es decir, variaciones en su ritmo cardiaco. La señal del electrocardiograma (ECG) tomada

por un sensor, es prácticamente periódica y se puede expresar según:

$$x(t) = \sum_{m=1}^M c_m \cos(2\pi m f_0 t + \theta_m)$$

donde  $f_0$  es la frecuencia fundamental que queremos detectar (en Hz) y el ritmo cardiaco  $R_c$  medido será  $R_c = 60f_0$  (en latidos/min). Para el análisis se utiliza el esquema de la figura 4.9:

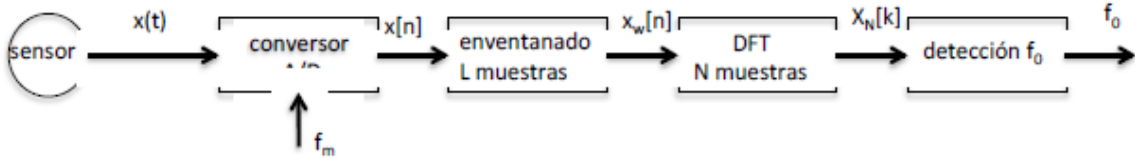


Figura 4.9

- a) El ancho de banda que maneja el sensor está limitado a  $B_x = 200$  Hz. ¿Qué debe cumplir la frecuencia de muestreo para que no haya aliasing?
- b) Expresión de la señal  $x[n]$  a la salida del convertor A/D.
- c) Expresión de la transformada de Fourier de  $x[n]$  para el caso concreto de  $M = 2$ ,  $c_1 = c_2 = 1$ ,  $f_0 = 1$  Hz,  $\theta_1 = 0$ ,  $\theta_2 = \frac{\pi}{4}$  y  $f_m = 500$  Hz. Dibuje  $|X(F)|$  en el intervalo  $0 \leq F \leq 0,5$ .
- d) El enventanado se realiza con una ventana rectangular  $w_L[n]$  con transformada de Fourier  $W_L(F)$ , justifica que la transformada de Fourier de la señal a analizar  $x_w[n] = x[n]w_L[n]$  es:

$$X_w(f) = \sum_{m=1}^M \frac{c_m}{2} e^{j\theta_m} W_L(F - mF_0) + \sum_{m=1}^M \frac{c_m}{2} e^{-j\theta_m} W_L(F + mF_0)$$

- e) La señal se muestrea con  $f_m = 500$  Hz y se analiza por tramos de  $T = 6$  seg para hacer un análisis frecuencial. Este se realiza por medio de una DFT de  $N = 4000$  puntos. La figura 4.10 muestra la  $DFT_N\{x_w[n]\}$  de una señal con  $M = 5$ , en el intervalo  $0 \leq k \leq 51$ . Los máximos locales de las figuras están en las posiciones  $k = 8, 17, 25, 33$  y  $41$ . Estime el valor de  $F_0$ , el valor de  $f_0$  y el ritmo cardiaco del paciente en latidos/min.
  - f) Por el hecho de usar la DFT está haciendo un muestreo en frecuencia de  $X_w(F)$  cada  $\Delta_F$ . Este valor influye en la estimación de  $F_0$  y en definitiva de  $f_0$  y en la del ritmo cardiaco  $R_c$  del paciente. ¿Qué error, en latidos/min, tiene el sistema en la estimación del ritmo cardiaco del paciente?
17. Se desea medir la frecuencia del sonido emitido por una cuerda al hacerla vibrar. El sonido se puede simular como un tono (coseno) que se va atenuando lentamente:

$$x(t) = e^{-\alpha t} u(t) \cos(2\pi f_0 t)$$

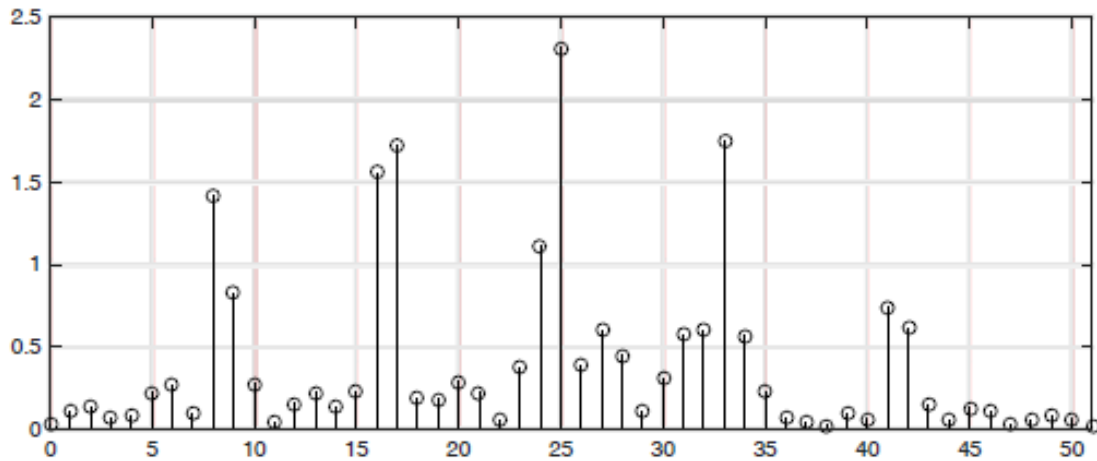


Figura 4.10

Para medir la frecuencia  $f_0$  se dispone del sistema de la figura 4.11 que consiste en un conversor A/D, un enventanado y un sistema que calcula la DFT de la señal y muestra su módulo en pantalla.

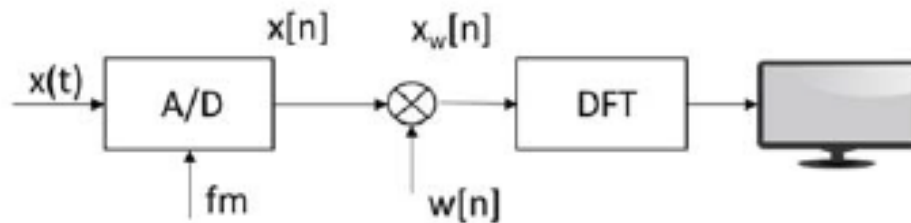


Figura 4.11

El conversor A/D trabaja con una frecuencia de muestreo  $f_m$ , la señal se enventana con una ventana rectangular de  $L$  muestras y la DFT calcula  $N$  muestras frecuenciales. Se pide:

- Expresión de la señal de salida del conversor A/D,  $x[n]$
- Calcule la transformada de Fourier de  $x[n]$ . Si te resulta más cómodo, puedes dejarla en función de  $a = e^{-\frac{\alpha}{f_m}}$ . Responde a esta pregunta detallando todos los pasos necesarios para llegar al resultado.
- Supón ahora  $\alpha = 100$ ,  $f_m = 8000$  Hz. La figura 4.12 muestra el módulo de la DFT con  $N = 1000$  de la señal enventanada con  $L = 40$  y  $L = 500$  en el intervalo  $0 \leq k \leq 500$ . ¿Qué figura se corresponde con  $L = 40$  y con  $L = 500$ ? Razona la respuesta.

- d) El máximo de la figura 4.12 a) se encuentra en  $k = 126$  y el máximo de la figura 4.12 b) se encuentra en  $k = 125$ . ¿Qué frecuencia (en Hz) ha emitido la cuerda según cada gráfica? ¿Cuál te parece más exacta? Justifica la respuesta.

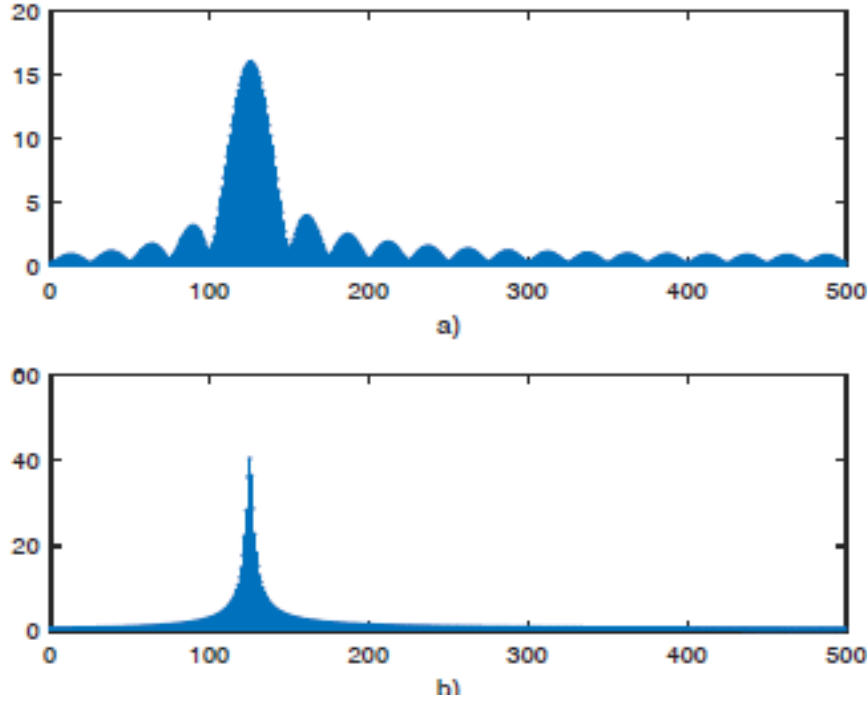


Figura 4.12

18. *Ejercicio 2 del examen de reevaluación del curso 2018-2019*

Un modelo simplificado de la señal analógica correspondiente a una nota producida por un instrumento corresponde a la expresión:

$$s_{nota}(t) = \sum_{k=1}^K A_k \cos(2\pi k f_0 t + \theta_k)$$

donde  $f_0$  es la frecuencia fundamental, ‘la nota’, los armónicos están a las frecuencias  $k f_0$  y las correspondientes amplitudes,  $A_k$ , y desfases,  $\theta_k$ , dependen del instrumento. Por simplicidad, supondremos que todas las fases  $\theta_k$  son iguales a cero. Supón que  $f_0 = 261,6$  Hz (Do) y que  $s_{nota}(t)$  se filtra con un filtro paso bajo de frecuencia de corte  $f_c = 500$  Hz. A continuación se muestrea a  $f_m = \frac{1}{T_m} = 1000$  Hz, obteniéndose la siguiente señal discreta:

$$s[n] = A_1 \cos(2\pi f_0 n T_m) = A_1 \cos(2\pi F_0 n)$$

Para estudiar la señal en el dominio frecuencial, primero se enventana, utilizando, por ejemplo, una ventana rectangular de longitud  $L$ ,  $p_L[n]$ .

- a)** Calcula la transformada de Fourier de  $p_L[n]$ . ¿Cuál es la anchura del lóbulo principal? ¿Cuál es la amplitud del lóbulo principal de la ventana?
- b)** Calcula la transformada de Fourier de la secuencia  $s[n]p_L[n]$ . Representa aproximadamente el módulo de la transformada de Fourier obtenida.

Teniendo en cuenta lo anterior, se quiere desarrollar un software para determinar automáticamente la secuencia de acordes tocados por un pianista. Los acordes (triadas) están formados por 3 notas cualesquiera de la tabla adjunta (por simplicidad se considera sólo la octava central). Los acordes están enlazados (no hay silencios) y no se repiten. El primer acorde empieza en la muestra  $n = 0$ .

Do	261,626 Hz	Fa#	369,994 Hz
Do#	277,183 Hz	Sol	391,995 Hz
Re	293,665 Hz	Sol#	415,305 Hz
Re#	311,127 Hz	La	440,000 Hz
Mi	329,628 Hz	La#	466,164 Hz
Fa	349,228 Hz	Si	493,883 Hz

La señal se registra con un micrófono, se filtra paso bajo (frecuencia de corte:  $f_c = 500\text{Hz}$ ) y se muestrea a  $f_m = \frac{1}{T_m} = 1000\text{ Hz}$ . Para cada nota, el filtro paso bajo elimina todos los armónicos, excepto el fundamental. Para analizar la secuencia  $x[n]$  resultante, se toman bloques consecutivos (y disjuntos) de  $L$  muestras y para cada bloque se hace una DFT de tamaño  $N$ .

- c)** ¿Cuál es el valor mínimo de  $L$  para que se puedan distinguir frecuencialmente las 12 notas de la tabla? Nota: la menor diferencia frecuencial entre notas es de 15,56 Hz.

En la figura 4.13 se representa el módulo la DFT de tamaño  $N = 2048$  para tres tramos consecutivos de señal. En las figuras sólo se representan las primeras 1024 muestras de la DFT.

- d)** Sabiendo que  $L = 256$ , determina el primer acorde tocado.
- e)** A la vista de las gráficas, ¿qué puede decir sobre la duración aproximada en segundos del primer acorde?
- f)** A partir de la secuencia  $x[n]$ , se obtiene la secuencia  $y[n] = x[2n]$  eliminando 1 de cada dos muestras. Justifica porqué este procedimiento es equivalente a haber muestreado la señal original con una frecuencia de 500 Hz.
- g)** ¿Cómo quedarían las frecuencias del primer acorde en  $y[n]$ ?

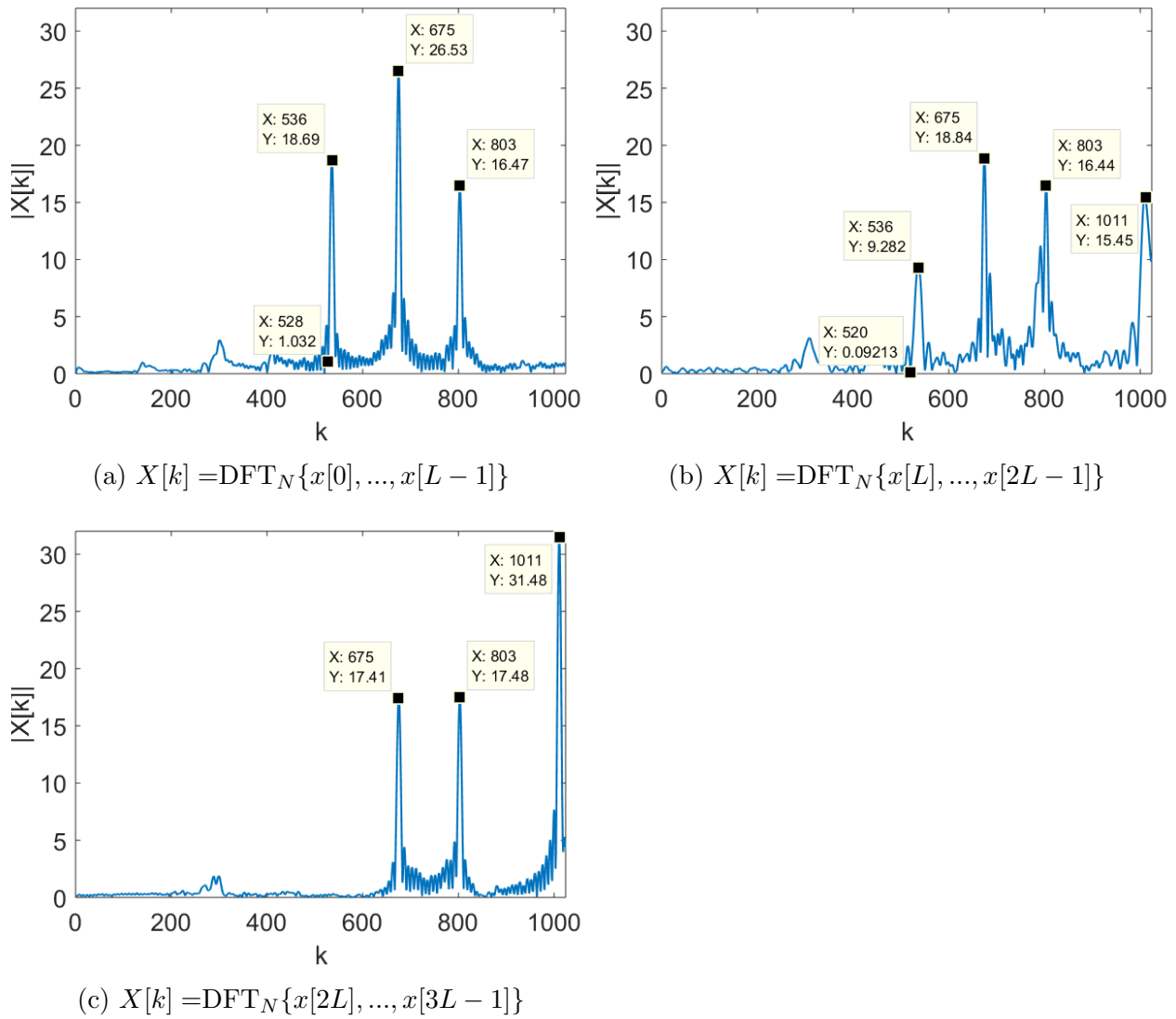


Figura 4.13

## Soluciones y/comentarios a los problemas

1. a)  $N=6$ :  $[1, -1, 0, 1, 1, 0]$ , b)  $N=4$ :  $[1, -1, 0, 1]$ , c)  $N=3$ :  $[1, -1, 0]$
2. **a)** Falso, la  $\text{DFT}_N$  inversa de  $X(F)|_{F=\frac{k}{N}}$  devuelve  $\sum_{r=-\infty}^{\infty} x[n-rN]$  (señal periódica) evaluada en el intervalo  $[0, \dots, N-1]$ . El resultado coincidirá con  $x[n]$  sólo si  $x[n]$  tiene todas sus muestras no nulas en el intervalo  $[0, \dots, N-1]$ .  
**b)** Verdadero porque  $X(F)$  tiene ceros cada  $\frac{1}{N}$  excepto en el origen.  
**c)** Falso,  $X(F)$  tiene simetría hermitica, solo será real si  $x[n]$  es real y, además, par.  
**d)** Verdadero, es un retardo circular de una muestra. La muestra  $x[N-1]$  aparece en el origen.

3.  $y[n] = x_1[n] \textcircled{N} x_2[n] = x_{1,N}[n] * x_{2,N}[n] * \sum_{r=-\infty}^{\infty} \delta[n - rN]$  con  $N = 9$

$$x_1[n] * x_2[n] = [0, 0, 1, 2, 3, 4, 4, 3, 3, 3, 3, 3, 2, 1]$$

Para periodificar dividimos la secuencia en trozos de 9 elementos, los superponemos y sumamos. El resultado es:  $y[n] = [3, 3, 4, 5, 5, 5, 4, 3, 3]$

4. Periodificamos  $x[n]$  con  $N = 13$  y nos quedamos con el periodo  $[0, \dots, N-1]$ :

... 0, 0, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 0, 0, 0, 0, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 0, 0, 0, 0, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 0, ...

Las muestras de  $X(F)$  vienen dadas por la  $\text{DFT}_{13}$  de la secuencia

$$[0, 1, 2, 3, 4, 0, 0, 0, 0, -4, -3, -2, -1]$$

5. a)3; b)2; c)2 Es un muestreo de 3 puntos de  $X(F)$ , su DFT inversa será un periodo de la secuencia original periodificada con tres puntos; d)2; e)2.

6. a) rectangular = a; hamming = b

b) Primer cero de la rectangular en  $F = \frac{1}{L} = 5/100$ , por tanto  $L = 20$ .

c) Resolución: Rectangular =  $1/10$ ; hamming =  $2/10$ ; Sensibilidad: rectangular = 13dB, hamming = 41dB

d) Muestra 25; valor = 10

7. a) Tres sinuosides

b)  $F_1 = \frac{50}{512} \approx \frac{1}{10}$ .  $A_1 \frac{N}{2} = 500$ ,  $A_1 = 2$ .

c)  $F_2 = \frac{125}{512} \approx \frac{1}{4}$ .  $A_2 \frac{N}{2} = 250$ ,  $A_2 = 1$ .

d)  $F_1 = \frac{225}{512} \approx \frac{2}{5}$ .  $A_3 \frac{N}{2} = 1200$ ,  $A_3 = 5$ .

8. Cierto

9. Falso

10. a) 
$$X(F) = \frac{A_1}{2} e^{-j\pi(F-F_1)(L_1+2n_1-1)} \frac{\sin(\pi(F-F_1)L_1)}{\sin(\pi(F-F_1))} + \frac{A_2}{2} e^{-j\pi(F-F_2)(L_2+2n_2-1)} \frac{\sin(\pi(F-F_2)L_2)}{\sin(\pi(F-F_2))} + \frac{A_1}{2} e^{-j\pi(F+F_1)(L_1+2n_1-1)} \frac{\sin(\pi(F+F_1)L_1)}{\sin(\pi(F+F_1))} + \frac{A_2}{2} e^{-j\pi(F+F_2)(L_2+2n_2-1)} \frac{\sin(\pi(F+F_2)L_2)}{\sin(\pi(F+F_2))}$$

b)  $F_1 \approx 24/256$ ;  $F_2 \approx 95/256$  (Nota: realmente  $F_2 = 96/256$ ) Mirando la sinc centrada en la frecuencia  $F_2$ , se deduce que  $A_2 L_2 / 2 \approx 36$  (amplitud sinc) y, contando muestras, que  $2N/L_2 + 1 = 33$  (anchura lóbulo principal de la sinc). Por lo tanto, se obtiene que  $L_2 = 16$  y  $A_2 4,5$ . (Nota: realmente  $A_2 = 4,4$ ) Mirando la sinc centrada en la frecuencia  $F_1$ , se deduce que  $A_1 L_1 / 2 \approx 36$  (amplitud sinc) y, contando muestras, que  $2N/L_1 + 1 = 17$  (anchura lóbulo principal de la sinc). Por lo tanto, se obtiene que  $L_1 = 32$  y  $A_1 \approx 2,25$ . (Nota: realmente  $A_1 = 2$ )

c) Mirando la figura 2 se observa que  $L_2 = 2L$  y  $L_1 = 4L$ . Por lo tanto,  $L = 8$ .

- d)** Mirando la figura 2, se observa que la frecuencia  $F_1$  se detecta por primera vez en la ventana con desplazamiento  $m = 16$  (antes la STFT es estrictamente cero). Por lo tanto,  $n_1 = 16 \cdot 8 = 128$ . De la misma forma, la frecuencia  $F_2$  se detecta en la ventana con desplazamiento  $m = 4$  y  $n_2 = 4 \cdot 8 = 32$ .

**11.** a)  $N=6$ :  $x[n] = [1, -1, 0, 1, 1, 0]$ , b)  $N=4$ :  $[2, -1, 0, 1]$ , c)  $N=3$ :  $x[n] = [2, 0, 0]$

**12.** Ver examen

**13.** **a)**  $s[n] = [1, 0, -1, 0, 1] * [1, 1, 1] = [1, 1, 0, -1, 0, 1, 1]$ ,  $L_s = L_x + L_y - 1 = 7$

**b)** Para  $N = 10$ :

Como  $N \geq L_x$  y  $N \geq L_y$ , las DFTs de  $N$  puntos de  $x[n]$  e  $y[n]$  son muestras de  $X(F)$  y  $Y(F)$  respectivamente. Su producto son muestras de  $S(F)$  por tanto al hacer DFT inversa se tiene  $z[n] = \sum_{r=-\infty}^{\infty} s[n - rN]$ , evaluada en  $n = 0, \dots, N - 1$ . Como  $N > L_s$ , al periodificar no hay superposición de réplicas por lo que

$$z[n] = [1, 1, 0, -1, 0, 1, 1, 0, 0, 0]$$

**c)** Para  $N = 3$ :

Como  $N < L_x$ , la DFT de  $N$  puntos de  $x[n]$  no son muestras de  $X(F)$  sino de la secuencia truncada a 3 puntos:  $[1, 0, -1]$ .

La convolución lineal será:  $v[n] = [1, 0, -1] * [1, 1, 1] = [1, 1, 0, -1, -1]$  y el producto de  $X_N[k]$  e  $Y_N[k]$  serán muestras de  $V(F)$ . Por tanto, al hacer DFT inversa  $z[n] = \sum_{r=-\infty}^{\infty} v[n - rN]$ , evaluada en  $n = 0, \dots, N - 1$ .

Para periodificar dividimos la secuencia en trozos de 3 elementos, los superponemos y sumamos. En este caso, al periodificar sí hay superposición. Obtenemos

$$z[n] = [0, 0, 0]$$

**14.** Ver examen

- 15.** **a)** La frecuencia normalizada máxima de la señal de voz es  $F_{max} = \frac{f_{max}}{f_m}$ . Por tanto, cuanto mayor sea la frecuencia de muestreo más alejada estará  $F_{max}$  del 0.5. Figura 1: 11.025 kHz, Figura 2: 44.1 kHz.

**b)** Dos posibles respuestas válidas:

- 1) Para convertir los archivos de 11.025 kHz a 44.1 kHz necesitamos interpolar por 4. Por tanto, primero insertaremos ceros y después filtraremos con un filtro interpolador de frecuencia de corte  $F_c = \frac{1}{8}$  y amplificación en continua  $|H(0)| = 4$ .
- 2) Para convertir los archivos de 44.1kHz a 11.025 kHz necesitamos diezmar por 4 (eliminar 3 de cada 4 muestras):  $y[n] = x[4n]$

**c)** Dos posibles respuestas válidas:

- 1) Interpolación por 4: después de insertar ceros tenemos  $V(F) = X(4F)$ , después de filtrar tenemos  $Y(F) = X(4F) \cdot H(F)$ .



2) Diezmado por 4:  $Y(F) = \frac{1}{4} \sum_{k=0}^3 X\left(\frac{F-k}{4}\right)$

16. a)  $f_m > 2B_x = 400$  Hz

b) Al muestrear tomamos muestras cada  $T_m = \frac{1}{f_m}$  segundos:

$$x[n] = \sum_{m=1}^M c_m \cos\left(2\pi m f_0 \frac{n}{f_m} + \phi_m\right) = \sum_{m=1}^M c_m \cos(2\pi m F_0 n + \phi_m)$$

con  $F_0 = \frac{f_0}{f_m}$ .

c)  $x[n] = \cos\left(2\pi \frac{1}{500}n\right) + \cos\left(2\pi \frac{2}{500}n + \frac{\pi}{4}\right)$

$$\begin{aligned} X(F) &= \frac{1}{2} \sum_{r=-\infty}^{\infty} (\delta(F - F_0 - r) + \delta(F + F_0 - r)) + \\ &\quad \frac{1}{2} \sum_{r=-\infty}^{\infty} (e^{j\frac{\pi}{4}} \delta(F - 2F_0 - r) + e^{-j\frac{\pi}{4}} \delta(F + 2F_0 - r)), \end{aligned}$$

con  $F_0 = \frac{f_0}{f_m} = \frac{1}{500}$

Dibujo: una delta en  $F = \frac{1}{500}$  y otra delta en  $F = \frac{2}{500}$ .

d)  $X_w(F) = W_L(F) \circledast X(F)$ .

Siguiendo un procedimiento análogo al del apartado anterior tenemos:

$$X(F) = \frac{1}{2} \sum_{r=-\infty}^{\infty} \sum_{m=1}^M (c_m e^{j\phi_m} \delta(F - mF_0 - r) + c_m e^{-j\phi_m} \delta(F + mF_0 - r))$$

La convolución es equivalente a la convolución lineal de la periódica  $W_L(F)$  con un periodo de  $X(F)$ . Tomamos el intervalo  $[0, 1)$ , es decir, el sumando con  $r = 0$ :

$$\begin{aligned} X_w(F) &= W_L(F) * \frac{1}{2} \sum_{m=1}^M (c_m e^{j\phi_m} \delta(F - mF_0) + c_m e^{-j\phi_m} \delta(F + mF_0)) = \\ &\quad \frac{1}{2} \sum_{m=1}^M (c_m e^{j\phi_m} W_L(F - mF_0) + c_m e^{-j\phi_m} W_L(F + mF_0)) \end{aligned}$$

Vemos que  $X_w(F)$  corresponde a la TF de la ventana,  $W_L(F)$ , trasladada a las posiciones de los armónicos de  $X(F)$  ( $F_0, 2F_0, \dots, MF_0$ ) como muestra el esbozo (muy aproximado) en azul de la figura 4.14. Las posiciones de los picos coinciden con las frecuencias de los armónicos.

La DFT lo que hace es tomar muestras equiespaciadas y no necesariamente van a coincidir con los picos de  $X_w(F)$ . Fijándonos en la DFT, las posiciones  $k = 8, 17, 25, 33$  y  $41$  nos dan los valores de la DFT más próximos a los picos.

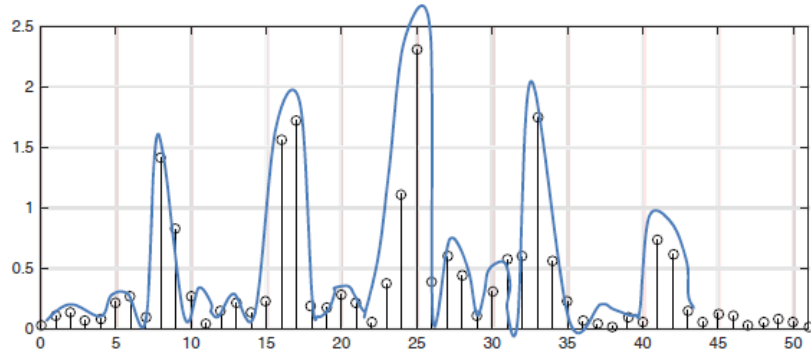


Figura 4.14

Para estimar  $F_0$ , si nos fijamos en el primer pico diríamos que una estimación de  $F_0$  sería  $\hat{F}_0 = \frac{8}{N} = \frac{8}{4000}$ . Si nos fijamos en el quinto armónico, la estimación sería  $\hat{F}_0 = \frac{8}{5 \cdot 4000}$ .

(Siempre se pueden aplicar otros métodos que están fuera del alcance de esta asignatura).

- Con la estimación del primer armónico se tiene que:  $\hat{f}_0 = f_m \hat{F}_0 = 1$ ,  $\hat{R}_c = 60$  latidos/minuto.
- Con la estimación del quinto armónico se tiene que:  $\hat{f}_0 = f_m \hat{F}_0 = 1,025$ ,  $\hat{R}_c = 61,5$  latidos/minuto.

e)  $\Delta F = \frac{1}{N}$ ,  $\Delta f = \frac{f_m}{N}$ ,  $\Delta R = 60 \frac{f_m}{N} = 60 \frac{500}{4000} = 7,5$ .

Al decidir por un valor de  $F_0$ , el error que se comete es  $\pm \Delta \frac{F}{2}$ . Si la estimación la hacemos por la posición del primer pico, el error es  $\pm \frac{7,5}{2}$  latidos por minuto. Si la hacemos por el quinto armónico será 5 veces menor.

17. a)  $x[n] = a^n \cos(2\pi F_0 n) u[n]$ , con  $a = e^{-\frac{\alpha}{f_m}}$  and  $F_0 = \frac{f_0}{f_m}$ .
18. a)  $P_L(F) = e^{-j\pi F(L-1)} \frac{\sin(\pi FL)}{\sin(\pi F)}$  que es periódica de periodo 1. Anchura del lóbulo principal:  $\Delta_F = \frac{2}{L}$ . Amplitud del lóbulo principal:  $L$ .
- b)  $X(F) = P_L(F) \otimes \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left( \frac{A}{2} \delta(F + F_0 - k) + \frac{A}{2} \delta(F - F_0 - k) \right) = X(F) = P_L(F) * \left( \frac{A}{2} \delta(F + F_0) + \frac{A}{2} \delta(F - F_0) \right) = \frac{A}{2} P_L(F + F_0) + \frac{A}{2} P_L(F - F_0)$   
Esta señal es periódica de periodo 1.
- c) La duración mínima es 129 muestras.
- d) Para saber los acordes hemos de convertir el índice de la DFT a frecuencia analógica:  $f_x = \frac{k}{N} f_m$ . En la primera ventana sólo está presente el primer acorde: que corresponde a Do, Mi, Sol.
- e) Observamos que en la segunda ventana están las mismas frecuencias que en la primera ventana más una adicional (corresponde a la nota Si). Como cada acorde tiene tres notas, ello indica que en la segunda ventana está presente el final del primer acorde y el inicio del siguiente. En la tercera ventana solo está presente el segundo acorde. La única nota del primer acorde que no forma parte del segundo

es el Do (frecuencia 261,7 Hz). El primer acorde dura  $D = 1,5L = 1,5 \cdot 256$  muestras. Dividiendo por la frecuencia de muestreo obtenemos  $D \approx 0,4$  segundos.

- f)** En  $x[n]$  la separación entre muestras es  $T_m = 1$  ms. En  $y[n]$  se elimina una de cada dos muestras, por lo que la separación entre muestras es  $T'_m = 2$  ms que equivale a una frecuencia de muestreo  $f'_m = 500$  Hz.
- g)** Las frecuencias del primer acorde son  $f_1 = 261,7$  Hz (Do),  $f_2 = 329,6$  Hz (Mi) y  $f_3 = 392$  Hz (Sol). Si la frecuencia de muestreo es 500 Hz tendremos aliasing para las tres frecuencias. Al hacer el análisis frecuencial las observaremos cambiadas, concretamente veremos los picos en  $f'_1 = 238,3$  Hz,  $f'_2 = 170,4$  Hz y  $f'_3 = 500 - 392 = 108$  Hz.

Nota adicional: Aunque no se pedía, estas frecuencias corresponden a una escala inferior, y quedan entre medio de dos notas. Así  $f'_1$  queda en medio de  $la_2$  y  $si_2$ ,  $f'_2$  queda en medio de  $mi_2$  y  $fa_2$  y  $f'_3$  queda en medio de  $sol_1$  y  $la_1$ .

## **Tema IV**

# **Representación, análisis y diseño de filtros lineales**

## IV. 1

### Transformada Z (TZ)

1. Calcula la transformada Z para las siguientes respuestas impulsionales  $a^n u[n]$ ,  $u[n]$ ,  $r^n \cos(2\pi F_0 n) u[n]$  y  $p_L[n]$ . Calcula los ceros y polos de cada  $H(z)$ . Indica la región de convergencia en cada caso y si el sistema es o no estable.
2. La figura 1.1 muestra el diagrama de polos y ceros de 4 filtros digitales **causales**. Para cada una de las siguientes condiciones, indica **de forma justificada** si hay algún filtro que la cumpla y, de ser así, indique cuál/es. a) Es un filtro FIR. b) Es un filtro banda eliminada. c) Es un filtro estable.

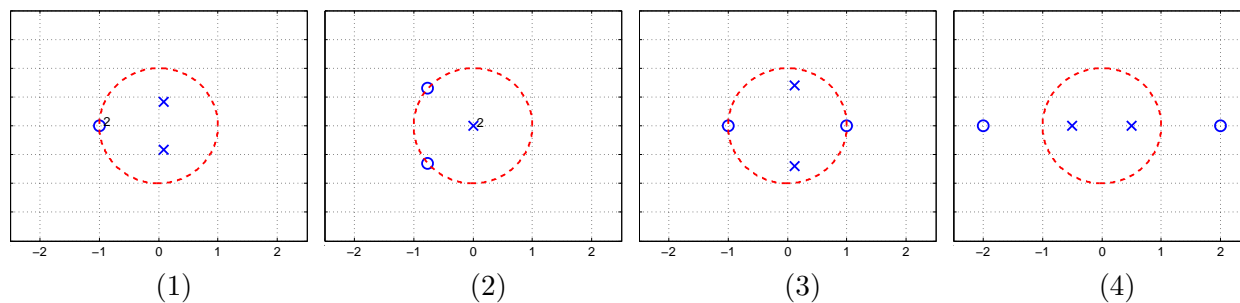


Figura 1.1

3. Relaciona cada diagrama de polos y ceros con una respuesta impulsional y una respuesta en frecuencia entre las indicadas en la figura 1.2. Nota: el polo en  $z = 0$  del diagrama (4) tiene multiplicidad 2.

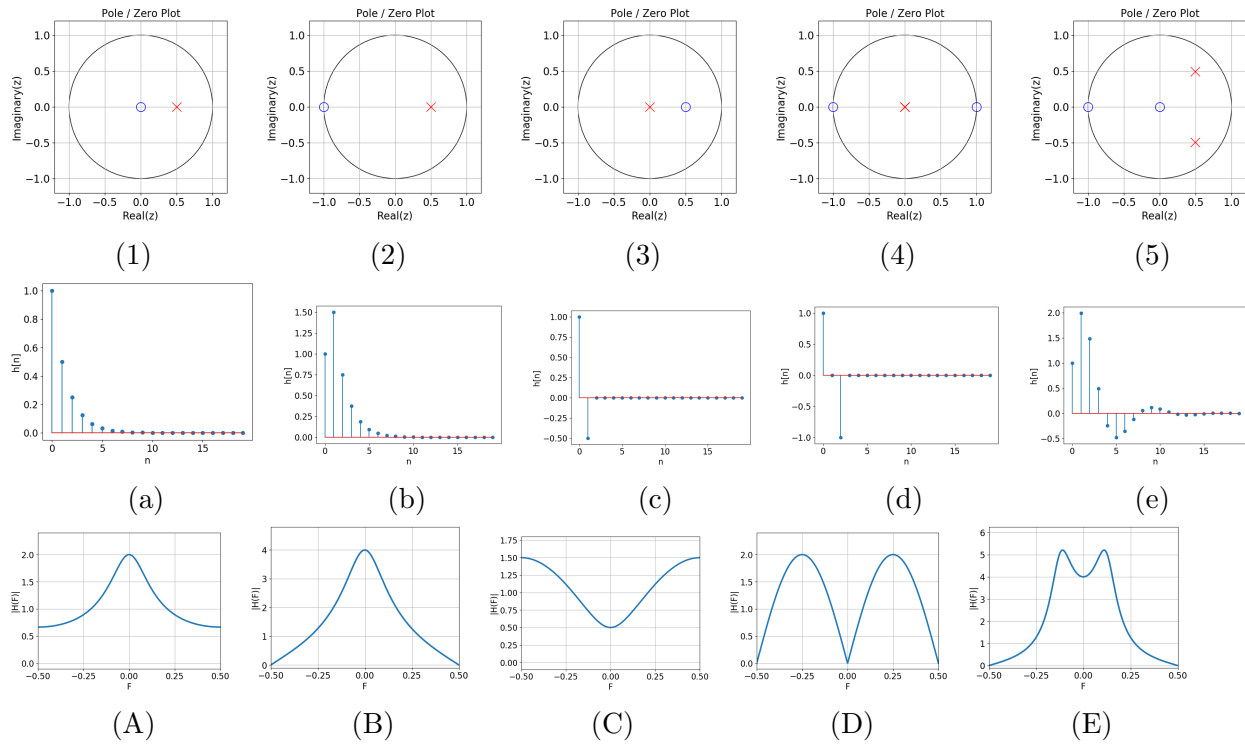


Figura 1.2

4. Dado el esquema de la figura 1.3 se pide:

- Relación entrada-salida
- Función de transferencia  $H(z)$  y diagrama de polos y ceros.
- Respuesta impulsional
- Respuesta frecuencial  $H(F)$ . Dibujo aproximado a partir del diagrama de polos y ceros.

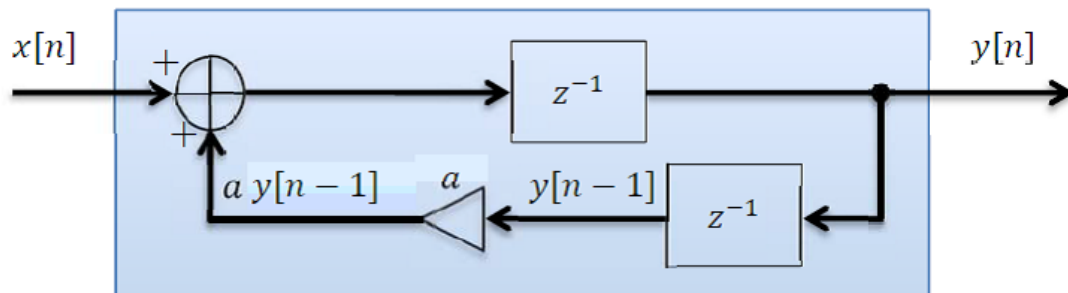


Figura 1.3

5. Dada la ecuación en diferencias  $y[n] = 0,2 \cdot (x[n] - x[n - 5]) + y[n - 1]$ , se pide:
- Función de transferencia  $H(z)$  y diagrama de polos y ceros.
  - Respuesta impulsional.
  - Respuesta frecuencial  $H(F)$ . Dibújela y relacione las posiciones de los ceros de  $H(z)$  con la respuesta frecuencial dibujada.
  - Hallar la salida si a la entrada se aplica  $x[n] = 1 + \cos(2\pi 0,1n) + \cos(2\pi 0,4n)$ .
6. Para detectar la presencia de señal en un micrófono, se sigue la envolvente de la señal y se monotoriza el nivel de ésta. El seguidor de envolvente consta de un cancelador de continua, un rectificador y un filtro paso bajo (ver figura 1.4). El esquema para el bloqueo de continua y el filtro paso bajo se muestran en la figura 1.5 y 1.6 respectivamente, siendo  $a$  y  $b$  valores reales y positivos.

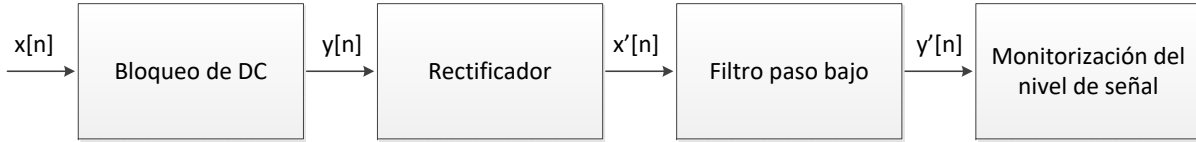


Figura 1.4

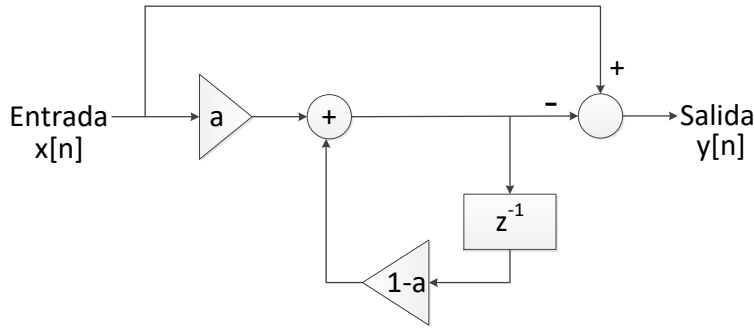


Figura 1.5: Esquema para el bloqueo de continua

Sabiendo que la función de transferencia del esquema de la figura 1.5 es  $H(z) = (1 - a) \frac{1 - z^{-1}}{1 - (1-a)z^{-1}}$ , con  $0 < a < 1$ :

- Dibuja el diagrama de ceros y polos del esquema de la figura 1.5 e indica la ROC del sistema.
- Discute la estabilidad del sistema de la figura 1.5.
- Calcula la respuesta,  $y[n]$ , del sistema de la figura 1.5 para  $x[n] = 3 + 2 \cos(\frac{\pi}{2}n) + 3(-1)^n$ , con  $a = 1/10$ .
- Para el filtro paso bajo de la figura 1.6, encuentra la función de transferencia y la ecuación en diferencias finitas.

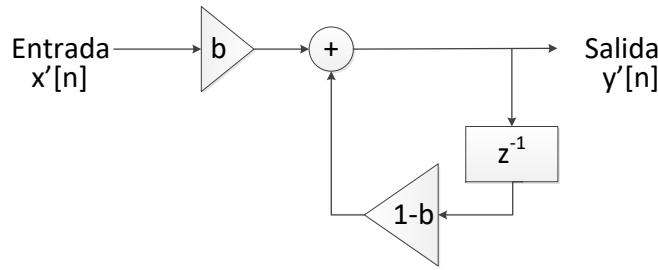


Figura 1.6: Filtro paso bajo

## Soluciones y/o comentarios a los problemas

1. **a)**  $x[n] = a^n u[n]$ ,  $X(z) = \frac{1}{1-az^{-1}}$ , ROC:  $|z| > |a|$   
**b)**  $x[n] = u[n]$ ,  $X(z) = \frac{1}{1-z^{-1}}$ , ROC:  $|z| > 1$ .  
 Vemos que la ROC no contiene  $z = e^{j2\pi F}$  (círculo unidad)  
**c)**  $x[n] = r^n \cos(2\pi F_0 n) u[n] = \frac{(re^{j2\pi F_0})^n + (re^{-j2\pi F_0})^n}{2} u[n]$ , con  $r > 0$  (módulo del polo).  
 $X(z) = \frac{1-r \cos(2\pi F_0) z^{-1}}{1-2r \cos(2\pi F_0) z^{-1} + r^2 z^{-2}}$ , ROC:  $|z| > r$   
**d)**  $x[n] = p_L[n]$ ,  $X(z) = \frac{1-z^{-L}}{1-z^{-1}} = 1 + z^{-1} + \dots + z^{-(L-1)}$ , ROC:  $|z| > 0$ .  
 Nota (no es necesaria para hacer este ejercicio):  
 $X(z) = \frac{z^{-L}(z^L-1)}{z^{-1}(z-1)} = \frac{z^{L-1}}{z^{(L-1)}(z-1)}$   
 Ceros:  $z^L = 1 = e^{j2\pi k} \Rightarrow z = e^{j2\pi \frac{k}{L}}$ , con  $k = 0, 1, \dots, L-1$ .  
 Polos: Un polo en  $z = 1$  y  $L-1$  polos en  $z = 0$ .  
 El polo y el cero en  $z = 1$  se cancelan: solo quedan los polos en  $z = 0$ .
2. **a)** Un filtro FIR tiene todos los polos en el origen: (2).  
**b)** Un filtro banda eliminada tiene cero/s de transmisión a frecuencia/s diferente de cero y diferente de  $F = 0,5$  (frecuencia discreta más alta): (2).  
**c)** Todos son estables porque tienen todos los polos dentro del círculo unidad. Por tanto, la ROC contiene  $|z| = 1$ .
3. 1 a A, 2 b B, 3 c C, 4 d D, 5 e E.
4. **a)**  $y[n] = x[n-1] + ay[n-2]$   
**b)**  $H(z) = \frac{z^{-1}}{1-az^{-2}} = \frac{z}{z^2-a}$ . Ceros:  $z = 0$ , polos  $z = \pm\sqrt{a}$   
**c)**  $H(z) = \frac{A}{1-\sqrt{a}z^{-1}} + \frac{B}{1+\sqrt{a}z^{-1}}$ . Por tanto:  $h[n] = A \cdot (\sqrt{a})^n u[n] + B \cdot (-\sqrt{a})^n u[n]$
5. **a)**  $H(z) = 0,2 \frac{1-z^{-5}}{1-z^{-1}}$ . Ceros:  $z = e^{j2\pi \frac{k}{5}}$ , con  $k = 0, 1, \dots, 4$ . Un polo en  $z = 1$  y 4 polos en  $z = 0$ . El polo y el cero en  $z = 1$  se cancelan.  
**b)**  $h[n] = 0,2 \cdot p_5[n]$



**c)** Respuesta frecuencial

**d)** Como  $H(F = 0) = 1$  la amplitud de la continua queda igual.  $F = 0,4$  coincide con un cero, por tanto  $H(F = 0,4) = 0$ , esa componente se anula. Para  $F = 0,1$ , se calcula el módulo y la fase de  $H(F = 0,1)$  que afectarán respectivamente a la amplitud y la fase de  $\cos(2\pi 0,1n)$ .

**6. a)** El sistema tiene un cero en  $z = 1$  y un polo en  $z = 1 - a < 1$  ( $a$  es real, positivo y menor que 1). Dado que el sistema es causal, la ROC es  $|z| > 1 - a$ .

**b)** La ROC ( $|z| > 1 - a$ ) incluye  $|z|=1$  ya que  $1 - a$  es menor que 1. Por tanto, el sistema es estable.

Siendo el sistema causal, también se puede argumentar la estabilidad viendo que el polo  $1 - a$  está dentro del círculo unidad.

**c)** La señal contiene tres frecuencias,  $F = 0$ ,  $F = \frac{1}{4}$  y  $F = \frac{1}{2}$ . Por tanto, para calcular la respuesta a cada una hemos de calcular:

$$H(z)|_{z=1} = 0$$

$$H(z)|_{z=e^{j2\pi\frac{1}{4}}=j} = (1-a)\frac{1-\frac{1}{j}}{1-(1-a)\frac{1}{j}} = 0,9\frac{1+j}{1+0,9j} = 0,95e^{j0,05}$$

$$H(z)|_{z=-1} = (1-a)\frac{1+1}{1+(1-a)} = 0,9\frac{2}{1,9} = 0,95.$$

Finalmente,

$$y[n] = 3 \cdot 0 + 2 \cdot 0,95 \cos(2\pi \frac{1}{4}n + 0,05) + 3 \cdot 0,95(-1)^n = 1,9 \cos(2\pi \frac{1}{4}n + 0,05) + 2,85(-1)^n$$

**d)**  $X'b + Y'z^{-1}(1-b) = Y' \Rightarrow X'b = Y'(1 - (1-b)z^{-1}) \Rightarrow H'(z) = \frac{Y'(z)}{X'(z)} = \frac{b}{1-(1-b)z^{-1}}$   
 $y'[n] = bx'[n] + (1-b)y'[n-1].$

## IV. 2

# Diseño de filtros

### 1. Problema 3 del examen de reevaluación del curso 2018-2019

Se desea transmitir la información de  $M = 5$  canales de forma simultánea para después procesarla en el receptor. Cada canal  $m$  contiene una señal  $x_m(t)$  de ancho de banda  $B_m = 1$  kHz, ( $X_m(f) = 0$ ,  $|f| > B_m$ ). Para transmitir las señales se opta por multiplexarlas en frecuencia formando la señal:

$$x(t) = \sum_{m=0}^{M-1} x_m(t) \cos(2\pi m f_0 t)$$

de forma que cada canal está centrado en frecuencia alrededor de la frecuencia  $m f_0$ . El sistema de comunicaciones dispone de un ancho de banda  $B_s = 25$  kHz, por lo que la señal  $x(t)$  se genera de manera que  $X(f)$  ocupe desde  $f = 0$  hasta la frecuencia máxima  $f = 25$  kHz.

- a)** Encuentra y dibuja  $X(f)$  en función de  $X_m(f)$ . Supón un dibujo simple para cada  $X_m(f)$ , por ejemplo, un triángulo.
- b)** Determina  $f_0$  para que  $X(f)$  ocupe desde  $f = 0$  hasta la frecuencia máxima  $f = 25$  kHz.
- c)** Con la  $f_0$  elegida en el apartado anterior, determina la distancia frecuencial  $f_g$  (se denomina banda de guarda) que hay entre  $X_m(f)$  y  $X_{m+1}(f)$  para  $0 \leq m < M$ .
- d)** El receptor se realiza con tecnología discreta. ¿Cuál es la mínima frecuencia de muestreo a la que se debe muestrear  $x(t)$  para no perder información?

El sistema muestrea la señal a  $f_s = 100$  kHz. Para recuperar  $x_m[n]$  se utiliza el siguiente esquema donde el oscilador genera un coseno a la frecuencia  $m \frac{f_0}{f_s} = m F_0$ .

- e)** Especifica  $H(F)$  suponiendo que puede ser un filtro ideal.
- f)** En caso de que  $H(F)$  sea un filtro realizable de Chebychev, completa la plantilla de especificaciones del filtro ( $\alpha_a, \alpha_p, F_p, F_a$ ) suponiendo  $\alpha_p = 1$ dB,  $\alpha_a = 40$ dB.
- g)** Utilizando la gráfica de la figura 2.2, determina el orden del filtro.

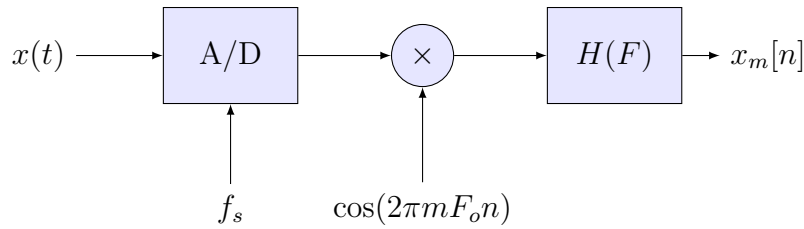


Figura 2.1

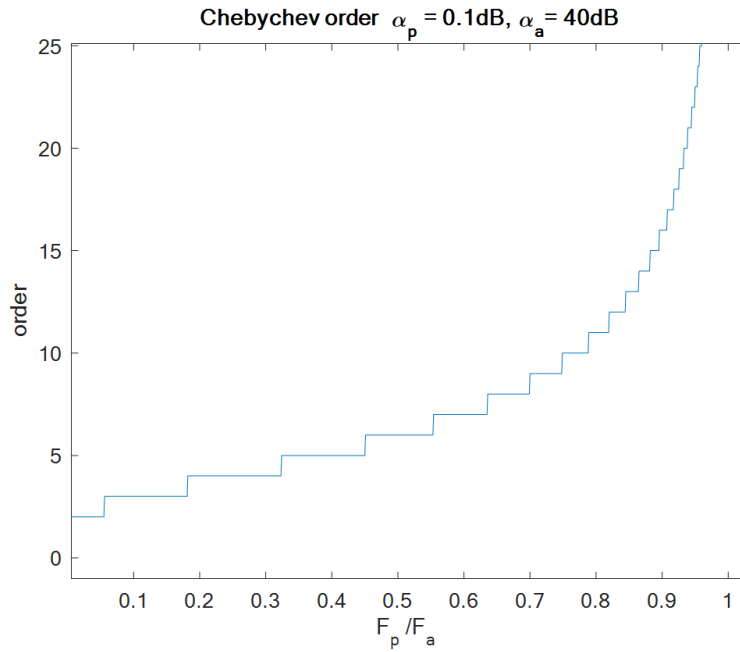


Figura 2.2

- h)** Si el número de canales a transmitir fuera  $M = 12$ , rehaz la parte necesaria del ejercicio para determinar la plantilla de especificaciones y el orden del filtro necesario para recuperar las señales  $x_m[n]$  con la misma calidad que en el caso  $M = 5$ .
- 2.** Una señal capturada en un entorno ruidoso se digitaliza a 8000 Hz. Suponiendo que la señal contiene información entre 0 y 2200 Hz, se procede a diseñar un filtro paso bajo IIR o FIR para reducir el ruido entre 2200 Hz y el límite de Nyquist (frecuencia 4000 Hz).

Considera en primer lugar un filtro IIR de orden 2 y tipo Chebyshev (con rizado en la banda de paso igual a 0.02 dB). Su curva de amplificación y desfase se muestra en la figura 2.3 y 2.4. Se pide:

- a)** Calcula la función de transferencia  $H(z)$ , sabiendo que la estructura considerada para el filtro IIR es la de la figura 2, con  $a_1 = 0,76$ ,  $a_2 = 0,29$ ,  $b_0 = 0,5$ ,  $b_1 = 1$  y  $b_2 = 0,5$ .
- b)** Indica la región de convergencia de  $H(z)$ .

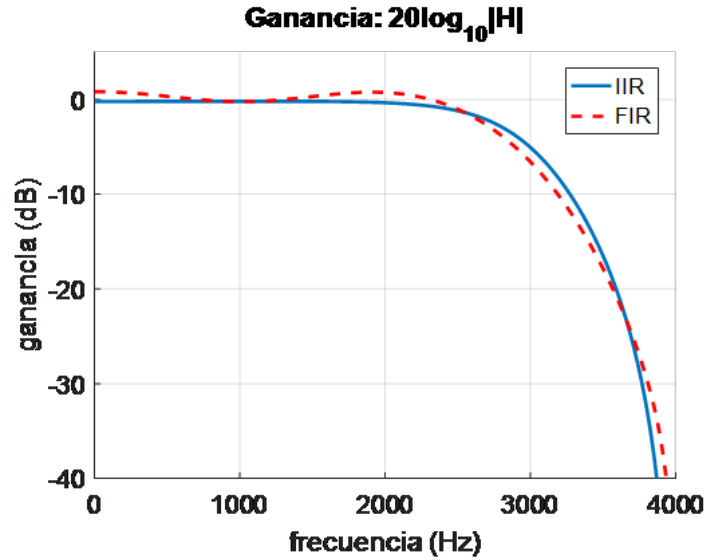


Figura 2.3: Curva de amplificación del filtro IIR y FIR considerados

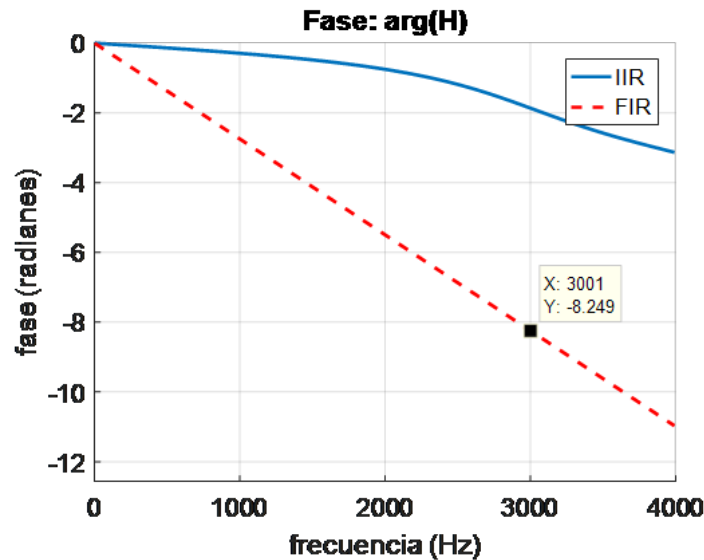


Figura 2.4: Curva de desfase del filtro IIR y FIR considerados

- c)* Dibuja el diagrama de polos y ceros y discute la estabilidad del filtro.
- d)* Calcula la respuesta para la entrada  $x[n] = 1 + \cos(2\pi 0,25n) + (-1)^n$  a partir de  $H(z)$ .

Considera ahora el filtro FIR. El filtro FIR es de orden 7. Su curva de amplificación y desfase se muestra en la figura 2.3 y 2.4. Se pide:

- e)* ¿Qué puedes decir de la curva de desfase del filtro?
- f)* Discute la estabilidad del filtro FIR y comenta cómo podría afectar a la estabilidad la cuantificación de los coeficientes del filtro.

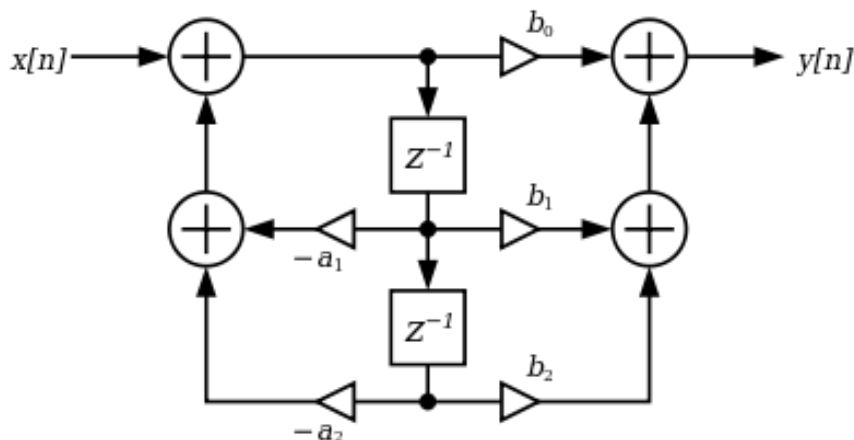


Figura 2.5: Implementación del filtro IIR

## Soluciones y/o comentarios a los problemas

1. **a)** Transformada de Fourier de  $x(t)$

$$X(f) = \frac{1}{2} \sum_{m=0}^{M-1} X_m(f + mf_0) + \frac{1}{2} \sum_{m=0}^{M-1} X_m(f - mf_0)$$

Los triángulos tendrán base 2 kHz. Dibujaremos 5 centrados en  $m f_0$  para  $m = 0, 1, 2, 3, 4$ . Suponiendo simetría hermitica, también podemos representar el espectro para las frecuencias negativas.

- b) La última señal estará centrada en  $4f_0$ . Como tiene 1 kHz de ancho de banda, la frecuencia más alta será  $4f_0 + 1 = 25 \Rightarrow 4f_0 = 24 \Rightarrow f_0 = 6$  kHz.
- c)  $f_g = (nf_0 - 1) - ((n - 1)f_0 + 1) = f_0 - 2 = 4$  kHz.
- d)  $f_s = 50$  kHz.
- e)  $H(F) = \prod \left( \frac{F}{2 \frac{B_m}{f_s}} \right)$  para  $-0,5 \leq F < 0,5$
- f) Las zonas prohibidas de la plantilla son: entre 0 y  $F_p$  la atenuación no puede ser superior a 1dB. De  $F_a$  en adelante la atenuación no puede ser inferior a 40 dB.  
 $F_p = \frac{1}{100}$  y  $F_a = \frac{B_m + f_g}{f_s} = \frac{5}{100}$ .
- g)  $\frac{F_p}{F_a} = \frac{f_p}{f_a} = \frac{1}{5} = 0,2$ . Necesitamos orden 5, de acuerdo con la gráfica 1.9.
- h) Si el número de canales es  $M = 12$ , la frecuencia  $11f_0 + 1 = 25 \Rightarrow 4f_0 = 24 \Rightarrow f_0 = 2,18$  kHz,  $F_p = \frac{1}{100}$ ,  $F_a = \frac{B_m + f_g}{f_s} = \frac{1,18}{100}$  y  $\frac{F_p}{F_a} = \frac{1}{1,18} = 0,8475$ . Necesitamos orden 13, de acuerdo con la gráfica 1.9.

- 2. a)**  $V_1 = (X - a_1V_1 - a_2V_2)z^{-1}$ ;  $V_2 = V_1z^{-1}$   
 Sustituyendo  $V_2$  en  $V_1$ , tenemos:  $V_1 = Xz^{-1} - a_1V_1z^{-1} - a_2V_1z^{-2} \Leftrightarrow V_1 = z^{-1}/(1 + a_1z^{-1} + z^{-2})X$

Calculamos ahora la salida:  $Y = b_0 V_1 z + b_1 V_1 + b_2 V_1 z^{-1} = (b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}) / (1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}) X \Leftrightarrow H(z) = (b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}) / (1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}) = (0,5 + z^{-1} + 0,5 z^{-2}) / (1 + 0,76 z^{-1} + 0,29 z^{-2})$

- b)** El sistema es causal (la salida solo depende de muestras en el instante  $n$  y/o instantes anteriores), por lo que la ROC será el exterior de una circunferencia que debe excluir los polos.

Calculamos los polos:  $p_{1,2} = \frac{-0,76 \pm \sqrt{0,76^2 - 4 \cdot 0,29}}{2} = -0,38 \pm j0,38 = 0,54 e^{\pm j\pi/4}$  Por tanto, ROC:  $|z| > 0,54$ .

- c)** Los polos están calculados en el apartado anterior y los ceros son:  $c_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot 0,25}}{2 \cdot 0,5} = -1$ . Estabilidad: dado que  $|z| = 1$  está incluido en la ROC el sistema es estable.
- d)** Las frecuencias presentes a la entrada son:  $F_1 = 0 \Rightarrow z = e^{j2\pi 0} = 1, F_2 = \frac{1}{4} \Rightarrow z = e^{j2\pi \frac{1}{4}} = j, F_3 = \frac{1}{2} \Rightarrow z = e^{j2\pi \frac{1}{2}} = -1$ .
- e)** Fase lineal de pendiente negativa:  $e^{-j2\pi F \alpha}$ . El valor de la pendiente expresado en muestras ( $\alpha$ ) nos da el retardo:  $\alpha = 3,5$ .
- f)** Un filtro FIR tiene todos los polos en el origen, independientemente del valor de los coeficientes. Por tanto, la cuantificación nunca afectará a la estabilidad.

## Parte V

### ANEXO: Problemas de ingeniería (para programar)

# Problema 1

## Cancelación de eco

*Asunción Moreno*

Se ha grabado una señal en una sala que desgraciadamente produce un eco. El objetivo de este problema es eliminar el eco de la señal grabada.

### Modelo del sistema

La señal con el eco, que llamaremos  $y(t)$ , es el resultado de grabar una señal  $x(t)$  (la llamaremos señal directa) más una señal añadida producida al reflejarse en algún punto de la sala y que llega al micrófono algo más tarde y más atenuada que la señal directa porque el camino a recorrer hasta el micrófono es mayor. Se puede modelar como la salida de un Sistema LTI a cuya entrada se aplica la señal  $x(t)$  y a su salida se obtiene

$$y(t) = x(t) + ax(t - T)$$

donde  $a$  es la atenuación producida en la señal reflejada por tener un camino más largo que recorrer hasta llegar al micrófono ( $0 < a < 1$ ) y  $T$  es el retardo con el que llega el eco.

Al muestrear la señal con una frecuencia de muestreo  $f_s$  se obtiene la secuencia

$$y[n] = x[n] + ax[n - N] \quad (1.1)$$

donde, por simplicidad, supondremos que  $N = Tf_s$  y entero.

1. La ecuación entrada-salida descrita en (1.1) se corresponde con un sistema LTI. Encuentre la respuesta impulsional  $h_1[n]$ .

### Cancelador

Para cancelar el eco se propone utilizar el sistema caracterizado por la ecuación

$$z[n] = y[n] + bz[n - N] \quad (1.2)$$



2. Calcule la respuesta impulsional  $h_2[n]$  del sistema descrito en (1.2) e indique si se trata de un sistema FIR o IIR.

Nota: Observe que, en la transformación descrita por la ecuación (1.2), la entrada es  $y[n]$  y la salida es  $z[n]$ .

3. ¿Qué ecuación deben cumplir  $h_1[n]$  y  $h_2[n]$  para que  $z[n] = x[n]$  es decir, se cancele totalmente el eco?
4. Calcule  $b$  en función de  $a$  para cancelar el eco.

### Estimación de los parámetros del eco

Para calcular  $a$  y  $N$  vamos a utilizar la función de autocorrelación de la señal  $y[n]$ .

5. Encuentre  $r_{yy}[n]$  en función de  $r_{xx}[n]$ ,  $a$  y  $N$ .
6. Suponga que la correlación  $r_{xx}[N] \ll r_{xx}[0]$ . En ese caso  $r_{yy}[n]$  presentará máximos en  $n = 0$  y  $n = \pm N$ . ¿Qué ecuaciones debería resolver para determinar  $a$  y  $N$  a partir de  $r_{yy}[N]$ ? Recuerde que  $0 < a < 1$ .

### Aplicación a un caso real

7. Aplicando este método determine  $a$  y  $N$  de la señal `ecox.wav`
8. Elimine el eco de la señal `ecox.wav`

# Problema 2

## Vocoder

*Asunción Moreno*

### Introducción

La producción de la señal de voz se realiza mediante un flujo de aire expelido por los pulmones que pasa a través de las cuerdas vocales, el tracto vocal y, en su caso, el tracto nasal en paralelo. Si durante el paso del aire las cuerdas vocales vibran producen una oclusión intermitente del paso del aire y la voz resultante es aproximadamente periódica y se denomina 'sonora'. Si por el contrario las cuerdas vocales no vibran, el sonido resultante no es periódico y se denomina 'sordo'. Por poner algunos ejemplos: fonemas sonoros son las vocales y algunas consonantes (b, d, g, ...), fonemas sordos (f, s, p, t, k, ...), fonemas que utilizan el tracto nasal y son sonoras (n, m, ...).

Un modelo matemático muy simplificado para representar el sistema de producción de voz consiste en representar el aire expelido por los pulmones como un tren de pulsos si la señal es sonora, o ruido si la señal es sorda. Por su parte, el tracto vocal se puede modelar por un filtro autorregresivo de orden  $P$  ( $P + 1$  coeficientes).

Para representar adecuadamente los fonemas, la excitación y los filtros deben variar con el tiempo. Para ello la señal se analiza en fragmentos denominados tramas. Una variación adecuada se puede realizar cada 15ms y un fonema puede durar típicamente entre 40 ms y 100 ms.

Para ver cómo este modelo puede producir voz, la señal en una trama se genera de la siguiente forma:

$$y[n] = bx[n] - \sum_{i=1}^P a_i y[n-i], \quad n = 0, \dots, L_S - 1 \quad (2.1)$$

donde  $b$  es la ganancia del filtro,  $x[n]$  es la secuencia de excitación de la trama que será un tren de pulsos si la trama a generar es sonora y ruido si la trama a generar es sorda,  $a_i$  son los coeficientes del filtro con  $a_0 = 1$  y  $L_S$  es la longitud de la trama a sintetizar. Para im-

plementar (2.1) en Python puede usar directamente la función: `scipy.signal.lfilter(b, a, x, axis=-1, zi=None)`

En este problema se propone:

**A:** Analizar una señal de voz en fragmentos de 30 ms ( $L_A = 240$  muestras) solapados 15 ms (120 muestras).

**B:** A partir de los parámetros obtenidos como resultado del análisis, generar voz sintética.

**C:** Realizar modificaciones sobre la señal sintética.

Se utilizará una señal de voz concreta, `f1.wav`, que ha sido grabada y muestreada a una frecuencia de muestreo  $f_m = 8$  kHz obteniéndose un flujo de muestras separadas  $T_m = \frac{1}{8}$  ms. Para leer el fichero puede hacer:

```
from scipy.io import wavfile
samplerate, señal = wavfile.read('f1.wav')
señal = señal / 2**15 #Normaliza y convierte a float64
```

## Parte A. Análisis

Para cada una de las tramas analizadas, determinaremos si la trama bajo análisis es sonora o sorda y si es sonora su periodicidad. En este problema buscaremos la periodicidad por el método de autocorrelación, que busca el parecido entre una señal y ella misma desplazada. Se pide:

1. Suponga un pulso  $f[n]$ . Su autocorrelación es  $r_{ff}[n]$ . Para la señal  $s[n] = f[n] + f[n - N] + f[n - 2N]$ , demuestre que su autocorrelación es  $r_{ss}[n] = 3r_{ff}[n] + 2r_{ff}[n - N] + 2r_{ff}[n + N] + r_{ff}[n - 2N] + r_{ff}[n + 2N]$
2. La autocorrelación tiene un máximo en el origen. Compruebe que si  $r_{ff}[n]$  decrece rápidamente,  $r_{ss}[n]$  presenta máximos en  $n = \pm N$  y  $n = \pm 2N$ .

Una trama sonora contiene unos cuantos periodos de la señal. Según lo visto en el apartado anterior, su autocorrelación presentará un máximo en el origen y a múltiplos del periodo  $N$ . Para determinar el periodo de la trama, basta calcular la autocorrelación de la señal en esa trama y buscar la distancia entre el origen y el primer máximo absoluto después del origen. Desarrolle esta idea para buscar la periodicidad de cada trama de análisis. Para calcular la autocorrelación de la trama puede utilizar `np.correlate('array1', 'array2', 'full')`. Asegúrese de restar al segmento su media (`np.mean('array')`) antes de calcular la correlación.

Tenga en cuenta que, en este caso, el vector resultante de calcular la correlación está entre 0 y  $2L_A - 1$  siendo el valor correspondiente a la correlación en el origen el valor que se obtiene en el centro del vector. Por otra parte, si la trama es sorda, no encontrará esta periodicidad; si la relación entre  $r_{ss}[N]/r_{ss}[0] < 0,5$  considere la señal sorda. Se pide:

3. Visualice la trama 100 y su correlación. Indique si la trama es sorda o sonora y si es sonora cuál es su periodo,  $N_{100}$ . ¿Cuánto vale la energía de la trama?
4. Analice las primeras 401 tramas del fichero `f1.wav` y guarde para cada trama la información anterior.

El análisis de la señal de voz cada 15 ms debería incluir el cálculo de los coeficientes  $b$  y  $a_i$  de la ecuación (2.1), algo que excede los objetivos docentes del momento. Por ello, estos parámetros se le proporcionan en el fichero `'coeficientes.npz'` para las primeras 401 tramas. Puede leer los datos como sigue:

```
coef = np.load('coeficientes.npz')
a = coef['a'] # coeficientes  $a_i$  ( $i=0, \dots, P$ ) con  $P = 10$  y  $a_0 = 1$ 
b = coef['b']
```

5. Para familiarizarse con estos parámetros, represente la respuesta impulsional del filtro correspondiente a la trama 100. Para ello deberá aplicar a la entrada del filtro la secuencia  $x[n] = \{1, 0, 0, 0, 0, \dots\}$ . ¿Qué duración tiene la secuencia de entrada que ha aplicado? ¿Y la de salida?

## Parte B. Síntesis

6. Genere la señal de excitación  $x[n]$  para cada una de las tramas. Tenga en cuenta que, para mantener la duración de la señal original, cada trama de síntesis debe tener longitud  $L_S = 120$ .
  - En el caso de una trama sonora, con los periodos  $N_m$  calculados para cada trama  $m$  genere una secuencia de excitación con deltas separadas  $N_m$  muestras y de amplitud  $\sqrt{N_m}$ .  
Una dificultad que puede encontrar al generar la excitación es que la primera delta de la trama  $m$ -ésima no tiene que empezar en  $n = 0$  sino que debe empezar en la posición  $N_m$ —número de muestras entre la última delta y  $L_S$ .
  - Si la señal es sorda utilice un generador de ruido de varianza 1. Por ejemplo, gaussiano blanco: `np.random.normal`.
7. Obtenga y represente la salida de la trama 100 utilizando su correspondiente excitación y filtro.
8. Realice la síntesis completa filtrando todas las tramas con sus excitaciones correspondientes y concatenando las salidas hasta lograr tener la señal sintética total.
9. Compruebe que, en algunos segmentos, la señal sintetizada cambia bruscamente a cero o tiene segmentos cortos de valor cero.

Los sistemas caracterizados por ecuaciones en diferencias se dicen que están en reposo cuando las condiciones iniciales  $y[-P], \dots, y[-1]$  son nulas. En este caso, al pasar de una trama a otra, si ponemos las condiciones iniciales nulas vemos que algunos segmentos contienen muestras nulas que no deberían estar ahí, los segmentos deberían seguir la forma de onda de la trama anterior.

10. Sintetice ahora las tramas pero al cambiar de trama mantenga las condiciones iniciales del filtro, es decir, el vector `zi` debe tener los valores de las últimas muestras de la salida de la trama anterior que `lfilter` devuelve en `zf`. Verifique que no quedan trozos de señal sintética con ceros.
11. Escuche y compare las señales generadas en 8) y en 10). Para escuchar puede usar

```
from IPython.display import Audio
speech = speech.astype(np.float32)
wavfile.write('speech.wav', 8000, speech)
Audio('speech.wav', autoplay=False)
```

## Parte C. Modificación de la señal sintética

12. Genere la excitación de las tramas periódicas modificando la longitud de las tramas de síntesis. También puede modificar el valor del periodo encontrado en cada trama, por ejemplo, incrementándolo o decrementándolo un 20 % (y pasándolo a entero) o ser muy creativo. Sintetice la señal y escuche el resultado.

## Problema 3

# Síntesis de voz con cuatro sinusoides

*Asunción Moreno, Olga Muñoz*

La señal de voz es una señal con mucha redundancia, lo que en nuestro lenguaje de procesado de señal se traduce en una señal con mucha correlación. Las muestras de una señal de voz muestran una correlación 'próxima' entre muestras contiguas, lo que como os demostrarán el curso que viene, se traduce en que es fácilmente identificable el tracto vocal con unos pocos parámetros (los coeficientes  $a_i$  del problema del vocoder), y tiene una alta correlación a largo plazo porque es una señal quasi periódica al producir sonidos 'sonoros' (los valores en un instante  $t$  son muy parecidos a los valores en  $t + T$  donde  $T$  es el periodo). Esto nos ha llevado a usar el vocoder con el que trabajamos anteriormente y donde el modelo que usábamos para representar una trama respondía a

$$y[n] = bx[n] - \sum_{i=1}^P a_i y[n-i], \quad n = 0, \dots, L-1 \quad (3.1)$$

y únicamente usábamos un orden  $P = 10$ . Es decir,  $P + 1$  coeficientes para sintetizar una señal. La excitación de las tramas sonoras estaba formada por deltas separadas el periodo (llamado *pitch* en inglés) de la señal en la trama. El *pitch* lo analizábamos usando la correlación de la señal. Este modelo puede sofisticarse mucho más para llegar a obtener una calidad próxima a la natural.

Hay otros muchos modelos, por ejemplo, el basado en descomposición de sinusoides donde la señal de voz para tramas sonoras se construye a partir de la suma de varias sinusoides. Cada sinusoide representa un armónico de la señal periódica que va variando en amplitud, frecuencia y fase a lo largo del tiempo (para tener una idea, para un *pitch* promedio de 100 Hz y  $f_m = 8$  kHz, la suma se realiza sobre 40 armónicos). La calidad puede aproximarse a la voz natural.

En este ejercicio vamos a realizar una síntesis basada únicamente en la suma de tres o cuatro sinusoides elegidas haciendo un seguimiento de los formantes de la señal de voz. Evidentemente no esperamos que la calidad sea buena, no hay información de *pitch*, el tracto vocal no está bien representado, pero el resultado no deja de sorprender por su simplicidad

y nos hace ver la capacidad del oído y el cerebro para procesar información.

**Objetivo:** Realizar una síntesis de una señal de voz a partir de sus cuatro primeros formantes. La señal de voz sintetizada será de la forma

$$\hat{x}[n] = \sum_{f=1}^4 A_f[n] \cos(\phi_f[n]), \quad 0 \leq n \leq N_T \quad (3.2)$$

donde  $A_f[n]$  y  $\phi_f[n]$  muestran, respectivamente, la evolución de la amplitud y de la fase instantánea relacionada con el formante  $f$ -ésimo y  $N_T$  es la longitud total de la señal a sintetizar. La relación entre  $\phi_f[n]$  y frecuencia del formante  $F_f[n]$  es  $\phi_f[n] = \sum_{k=0}^n 2\pi F_f[k]$  (en tiempo, la frecuencia instantánea es la derivada de la fase instantánea).

Los cuatro primeros formantes están normalmente en frecuencias  $f < 4$  kHz, por esta razón, en este problema vamos a usar señales muestreadas a  $f_m = 8$  kHz (muestreo con filtro antialiasing de frecuencia de corte 4 kHz).

## Parte A. Análisis

La señal de voz decae muy rápidamente en frecuencias altas y la estimación de las altas componentes frecuenciales se puede degradar. Para paliar este efecto se aplica un preprocesado a la señal de voz consistente en un filtro de preénfasis que enfatiza la señal en altas frecuencias y, a continuación, se hace un análisis frecuencial por tramas. Se pide:

1. Filtre la señal a analizar con el filtro de pre-enfásis  $H(F) = 1 - 0,9e^{-j2\pi F}$ . Para ello puede usar la función `lfilter` del paquete `scipy.signal` (ver anexo).
2. Segmente la señal filtrada en tramas de 30 ms (*frame length*  $L = 240$  muestras) solapadas 15 ms (*frame delay*  $D = 120$  muestras).
3. Para cada trama, inventanada con una ventana de Hamming, realice un análisis LPC, es decir, obtenga los coeficientes  $a_i$  y la ganancia  $b$  que simulan el tracto vocal mediante la ecuación (3.1) en la que  $L$  es la longitud de la trama de análisis  $\mathbf{x}$ . Para ello utilice la función `lpc` proporcionada, `(ai, G) = lpc(x, P)`. La ganancia  $G$  es el cuadrado del coeficiente  $b$  de la ecuación (3.1).

Para calcular los formantes usaremos un orden  $P = 8$ . Para otras aplicaciones, con  $f_m = 8$  kHz, el orden puede ser 10 ó 12.

## Parte B. Cálculo de formantes

La función de transferencia de un filtro autorregresivo como el planteado en ecuación (3.1) es:

$$H(z) = \frac{b}{1 + \sum_{i=1}^P a_i z^{-i}} = \frac{\dots}{(1 - p_1 z^{-1})(1 - p_2 z^{-1}) \dots (1 - p_P z^{-1})} \quad (3.3)$$

Las raíces,  $p_i$  con  $i = 1, \dots, P$ , del polinomio del denominador  $A(z) = 1 + \sum_{i=1}^P a_i z^{-i}$  se denominan polos. Dado que los coeficientes de  $A(z)$  son reales, sus raíces serán reales o aparecerán en pares complejos conjugados.

Sustituyendo  $z = e^{j2\pi F}$  en  $H(z)$  se obtiene la respuesta frecuencial:  $H(F) = H(z)|_{z=e^{j2\pi F}}$ .

En el ejemplo de la figura 3.1 aparece un diagrama de ceros (valores de  $z$  para los que  $H(z) = 0$ , marcados con 'o') y polos (valores de  $z$  para los que  $H(z) = \infty$ , marcados con 'x') y el módulo de la respuesta frecuencial correspondiente. Si un punto del círculo de radio unidad,  $z = e^{j2\pi F_0}$ , está próximo a un polo  $p_i$ , el valor de  $|1 - p_i z^{-1}|$  es pequeño y, por tanto,  $|H(F_0)|$  es grande.

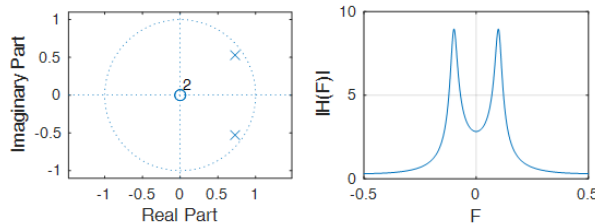


Figura 3.1

Vemos que la posición de los picos  $|H(F)|$  en frecuencia está relacionada con las fases de los polos. Por otra parte, cuanto más cerca del círculo unidad esté el módulo del polo, mayor será la amplitud del pico.

4. Para cada trama, halle las amplitudes y frecuencias de 4 formantes. Como estamos usando un filtro de orden  $P = 8$ , tendremos 4 pares de polos  $p_i$  complejos conjugados o menos si alguna raíz es real. Siga el siguiente procedimiento (aunque en la literatura puede encontrar otros métodos de selección también válidos):

- a) Para cada trama, halle las raíces del polinomio  $A(z)$  (polos),  $p_i = |p_i|e^{j\arg p_i} = |p_i|e^{j2\pi F_i}$ ,  $i = 1, \dots, P$ .
- b) Elija los polos de parte imaginaria positiva.
- c) Ordene los polos escogidos según su fase.
- d) La frecuencia de los formantes estará determinada por las fases de los polos elegidos  $\hat{F}_i = \frac{\arg(p_i)}{2\pi}$ . En Hz,  $\hat{f}_i = \hat{F}_i \cdot f_m$ .
- e) Las amplitudes correspondientes a las frecuencias seleccionadas serán  $\hat{A}_i \approx \frac{b}{1-|p_i|}$

## Parte C. Generación de la señal sintética

En el apartado anterior hemos obtenido las amplitudes y frecuencias de cada formantes en cada trama  $k$ , pero las tramas se van a sintetizar cada  $D$  muestras. Por tanto, hay que interpolar los valores de la trama  $k$  con los de la trama  $k + 1$  y esto se realiza mediante una



interpolación lineal. Debemos asegurarnos que las frecuencias y amplitudes de los formantes para cada trama están **ordenadas** de menor a mayor según el orden de frecuencias para no cometer el error de interpolar el primer formante de una trama con otro formante de otra trama.

$$F_f^{(k)}[n] = \frac{D-n}{D} \hat{F}_f^{(k)} + \frac{n}{D} \hat{F}_f^{(k+1)}, \quad 0 \leq n \leq D-1$$

$$A_f^{(k)}[n] = \frac{D-n}{D} \hat{A}_f^{(k)} + \frac{n}{D} \hat{A}_f^{(k+1)}, \quad 0 \leq n \leq D-1$$

$$F_f = \text{concatenar}(F_f^{(1)}[n], F_f^{(2)}[n], F_f^{(k)}[n], \dots); \quad A_f = \text{concatenar}(A_f^{(1)}[n], A_f^{(2)}[n], A_f^{(k)}[n], \dots)$$

Nota: es posible que en algunas tramas solo se detecten dos o tres formantes. En ese caso las amplitudes de la trama  $k$  para el formante  $f$  no detectado debería ponerse a cero sin interpolar.

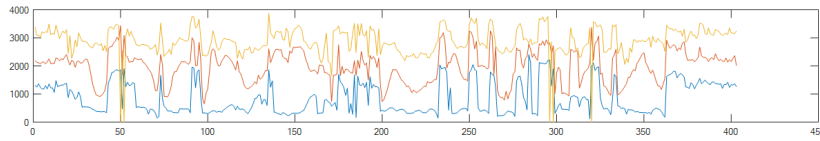


Figura 3.2: Evolución de los formantes

A continuación, las fases se obtienen acumulando los valores de las frecuencias ( $N_T$  es la longitud total de la señal a sintetizar):

$$\phi_f[n] = \sum_{m=0}^n 2\pi F_f[m], \quad 0 \leq n \leq N_T$$

5. Sintetice la señal sintética de acuerdo con la ecuación (3.2) y escuche el resultado.

## Parte D. Representación de las señales

Para visualizar como evoluciona el contenido frecuencial de una señal, una posibilidad sería hacer una representación gráfica 3D. A modo de ejemplo, las siguientes figuras representan la evolución del contenido frecuencial de la señal f1.wav, para las tramas que van de la 110 a la 130. El eje frecuencial está en Hz. La figura 3.3a muestra el módulo de la TF de la señal (obtenida a partir de una fft de cada trama enventanada con  $N = 512$  puntos,  $f = F \cdot f_m = \frac{k}{N} f_m$ ) y la figura 3.3b el módulo de la TF del filtro (obtenida a partir de la fft de los coeficientes LPC con orden  $P = 8$ , es decir, de la secuencia  $a_i$  con  $i = 0, \dots, P$ ).

No obstante, la forma habitual de visualizar cómo varían las características frecuenciales de una señal en función del tiempo es por medio de lo que se denomina espectrograma. Es una representación en dos dimensiones (tiempo-frecuencia) y las amplitudes se muestran con una escala de color. Por ejemplo, para la señal f1.vaw, los espectrogramas obtenidos se muestran en la figura 3.4, donde el eje de abcisas corresponde al eje temporal en segundos, y el eje de

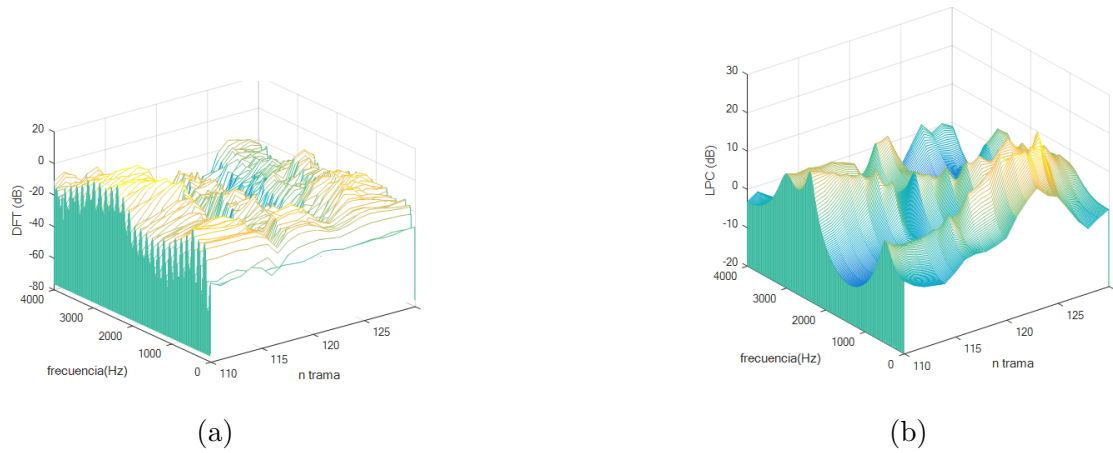


Figura 3.3

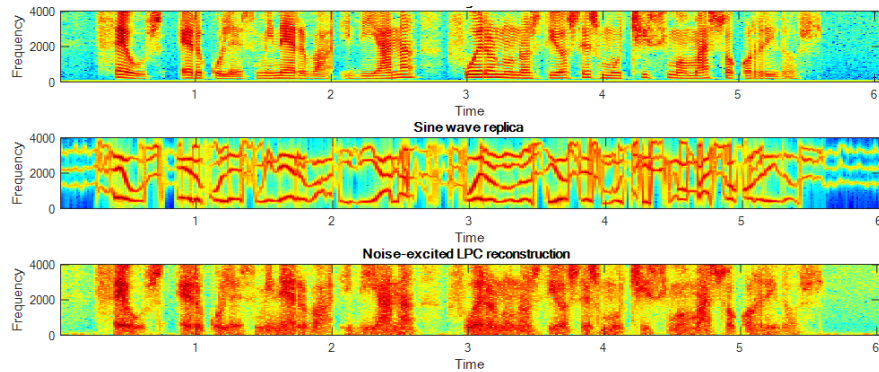


Figura 3.4

ordenadas al eje frecuencial en Hz (teniendo en cuenta que  $f = F \cdot f_m$ ). La escala de colores muestra las amplitudes según el color (rojo valor alto, azul valor bajo).

La mayoría de programas de procesamiento de señal de alto nivel tienen una rutina que realiza el espectrograma de una señal donde hay que pasar como datos: las muestras de la señal temporal, la longitud de análisis ( $L$ ), el desplazamiento entre tramas ( $D$ ), y posiblemente el número de muestras de cada fft y la frecuencia de muestreo  $f_m$  para tener una representación en Hz.

6. Represente el espectrograma de la señal original, de la señal sintetizada con las sinusoides y de una señal sintética mediante un vocoder lpc de orden 10 excitado únicamente con ruido gaussiano, tal y como la generaba en el trabajo del vocoder.
7. Comente las particularidades que encuentre tanto al escuchar las señales como al comparar los espectrogramas.

## Referencias

Dutoit, F. Marques. Applied Signal Processing. A MATLAB proof of concept Springer 2009

T Dan Ellis. Sinewave Speech Analysis/Synthesis in Matlab. Sinewave Speech Analysis/Synthesis in Matlab.

## Anexo: librerías y funciones de utilidad con ejemplos de uso

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy.signal import hamming, lfilter, spectrogram
from scipy.io import wavfile
from IPython.display import Audio
from lpc import lpc #lpc en Atenea, de https://github.com/cournape/talkbox con modificaciones

#Lectura del fichero
samplerate, x = wavfile.read('m1.wav')
x = x / 2**15 #IMPORTANTE: normaliza y convierte a float los datos

#Pre-emphasis
pre = np.array([1, -0.9])
x = lfilter(pre, 1, x)

#Coeficientes lpc para una trama
a, e, k = lpc(y>window, p)
b = np.array([np.sqrt(e)]) #la función lfilter da problemas si b es un escalar

#Estimación de formates
rts = np.roots(a)
rts = rts[np.imag(rts)>0] #solo fases positivas
idx = np.argsort(np.angle(rts))
rts = rts[idx]
Frqs = np.angle(rts)/(2*np.pi) #frecuencia normalizada de cada formante
Mags = b/(1-abs(rts))

#Escuchar voz sintetizada
speech = []
for k in range(Nframes-1):
    ...
speech.append(formantspeech)
speech = np.concatenate(speech) #concatena todos los elementos de la lista speech
speech = speech.astype(np.float32) #IMPORTANTE: SI NO, NO SE OYE
wavfile.write('speech.wav', 8000, speech)
Audio('speech.wav', autoplay=False)
```

```
#Espectrograma
L, R, N = 240, 120, 1024
plt.subplot(3,1,1)
#de la original con preenfasis
f1, t1, spectrogram1 = spectrogram(x, window = hamming(L), nperseg=L, noverlap=R,
nfft=N)
plt.pcolormesh(t1, f1*fs, 10*np.log10(np.abs(spectrogram1)+1e-10), cmap='jet')
plt.ylabel('f', fontsize=16)
plt.xlabel('n', fontsize=16)
```