CÁLCULO DE VOLÚMENES DE SÓLIDOS: DISCOS, ARANDELAS Y CASQUETES

Una de las aplicaciones de la integral definida, consiste en hallar el volumen de sólidos de revolución, que son aquellos que se generan al girar una región plana alrededor de determinada recta.

El método a seguir para hallar volúmenes de sólidos de revolución es el siguiente:

1. Se rebana o se corta el sólido en pequeños pedazos; tomemos como ejemplo el sólido de la figura 1, con la propiedad de que su sección transversal perpendicular a una recta dada tiene área conocida. En particular, se supone que la recta es el eje x, y que el área de la sección transversal en x es $A(x)$, en el intervalo $[a, b]$

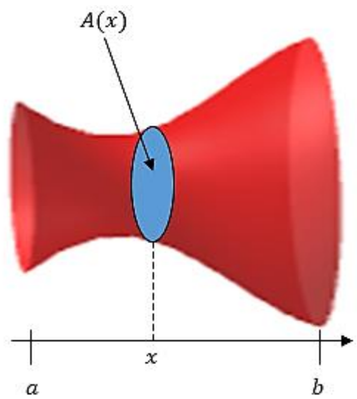


Figura 1. *En la ilustración se muestra como se rebana el sólido*

Ahora se divide el intervalo $[a, b]$ insertando los puntos

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{i-1} < x_i < \cdots < x_n = b$$

Después a través de esos puntos, se pasan sendos planos perpendiculares al eje x, con lo que se rebana el sólido en capas delgadas o rebanadas.

(Recuerde que $\bar{x}_i$ denominado *punto muestra*, es cualquier número en el intervalo $[x_{i-1}, x_i]$

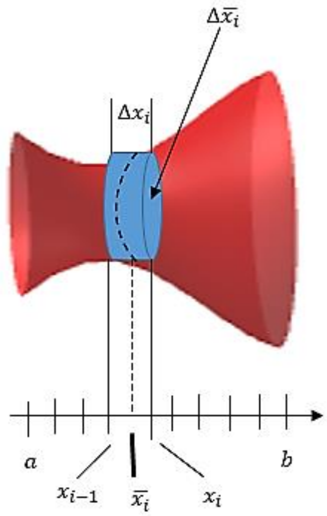


Figura 2. *Forma como se rebana el sólido mediante dos planos*

2. Se aproxima cada pedazo o rebanada. El volumen ΔV_i de una rebanada debe ser aproximadamente el volumen de un cilindro:

$$\Delta V_i \approx A(\overline{x_i})\Delta x_i$$

Esta ecuación se da, porque el volumen del sólido (cilindro) se define como el área *A* de la base por la altura *h*; esto es,

$$Vc = A \cdot h$$

Donde $A = \pi r^2$ (área del circulo que es la figura plana de la base del cilindro)

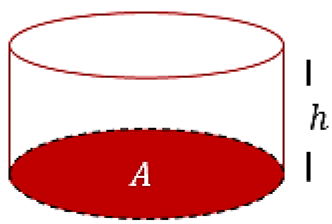


Figura 3. *Cálculo del volumen de un cilindro*

Por lo anterior, el "volumen" V del sólido debe estar dado, de manera aproximada, por una suma de Riemann.

$$V \approx \sum_{i=1}^{n} A(\overline{x_i})\Delta x_i$$

Es decir, todas las sumas de las áreas de las rebanadas son aproximadamente el volumen del sólido.

3. Cuando se hace que la norma de la partición tienda a cero, se obtiene una integral definida; ésta integral se define como el volumen del sólido

$$V = \int_a^b A(x)\, dx$$

Existen tres métodos para determinar el volumen de un sólido de revolución: discos, arandelas y casquetes.

1. Método de los discos

Este método se usa cuando se hace girar el área bajo una curva alrededor de un eje. En este caso se obtiene un cilindro, el volumen de un cilindro está dado por la ecuación:

$$v = \pi r^2 h$$

Existen dos casos particulares:

i. Cuando el eje del sólido está sobre el eje x.

Dada una función $f(x)$, cuya gráfica se puede observar en la figura 4

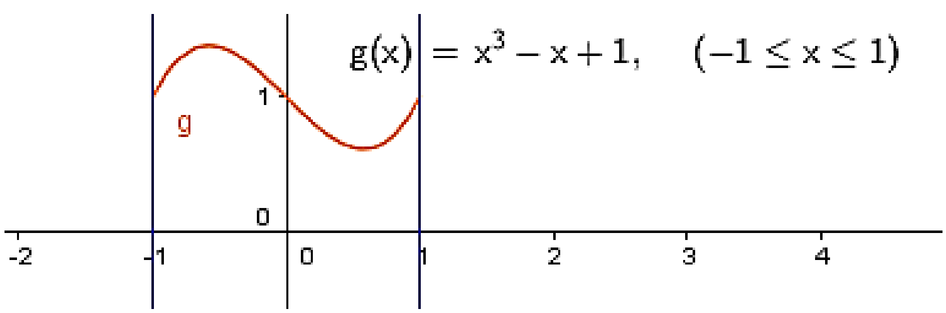


Figura 4. *Gráfica de la función g(x)*

Si se gira la región plana R, comprendida entre la función $g(x)$ y el eje entre

$x = -1$ y $x = 1$; se obtiene el sólido de revolución de la figura 5

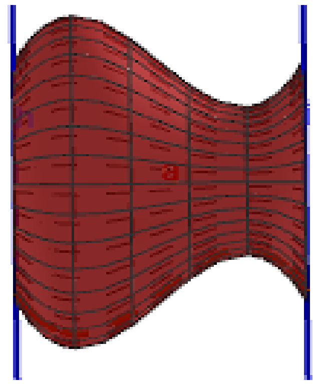


Figura 5. *Sólido obtenido al Rotar la región R*

Ahora, si se divide el sólido en n partes o rebanadas iguales de altura Δx, como se muestra en la figura 6, se puede observar la forma como se forma un cilindro.

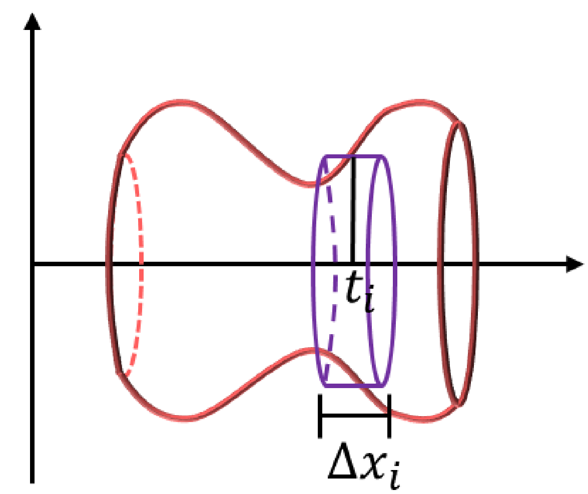


Figura 6. *División del sólido de revolución*

Donde $t_i = radio\ de\ la\ base = f(x_i)$

Posterior, se calcula el volumen de cada sólido y se obtiene el volumen total como la suma de los n volúmenes, mediante la ecuación:

$$V \approx \sum_{i=1}^{n} \pi[f(x_i)]^2 \Delta x_i$$

Si se hace que el número de sólidos sea más pequeños, la suma tiende al infinito y se obtiene el volumen exacto del sólido

$$V = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{\infty} \pi[f(x_i)]^2 \Delta x_i = \lim_{\Delta x\to\infty} \sum_{a}^{b} \pi[f(x_i)]^2 \Delta x_i$$

La expresión anterior se convierte en:

$$V = \pi \int_a^b [f(x_i)]^2 dx$$

ii. Cuando el eje del sólido está sobre el eje de y, la ecuación es la siguiente:

$$V = \pi \int_c^d [f(y_i)]^2 dy$$

Ejemplos:

- Hallar el volumen del sólido generado al hacer girar alrededor del eje x la región R formada por la función $f(x) = x^2$ y el eje x entre $x = 0 \;\; y \;\; x = 1$

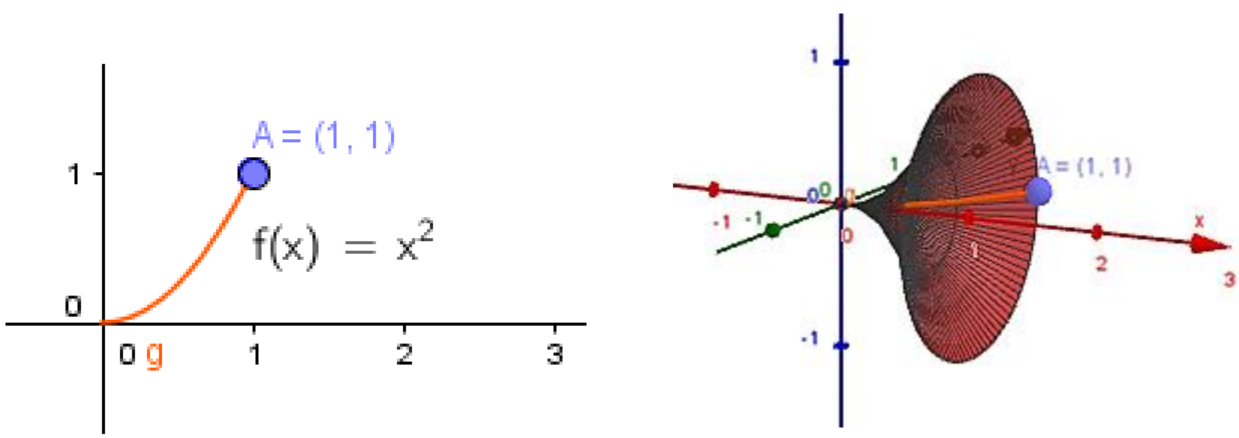


Figura 7. *Gráfica de la función f(x) y su respectivo sólido de revolución*

Para determinar el volumen del sólido se debe plantear la integral definida de la función y elevarla al cuadrado; posterior se realiza la integración:

$$v = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx$$

$$v = \pi \int_0^1 [x^2]^2 dx$$

$$v = \pi \int_0^1 x^4 \, dx \; v = \pi \left[\frac{x^5}{5}\right]_0^1$$

$$v = \pi \left[\frac{1^5}{5} - \frac{0^5}{5}\right]$$

$$v = \frac{1}{5}\pi$$

- Calcular el volumen del sólido generado al girar alrededor del eje y; y la región R limitada por la función $x = \sqrt{y}$ y el eje y entre $y = 0 \; y \; y = 4.$

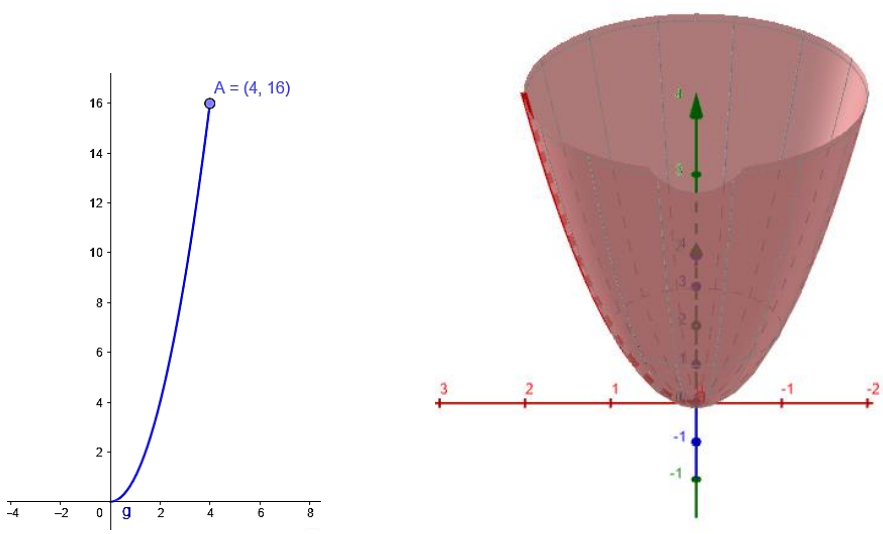


Figura 8.*Gráfica de la función y su respectivo sólido de revolución en la región de y.*

Como la región gira en torno al eje y, para hallar el volumen se realiza el mismo proceso; sólo que se cambia la variable:

$$V = \pi \int_c^d [f(y_i)]^2 dy$$

$$V = \pi \int_0^4 [\sqrt{y}]^2 dy$$

$$V = \pi \int_0^4 y \, dy = \pi \left[\frac{y^2}{2}\right]_0^4$$

$$v = \pi \left[\frac{4^2}{2} - \frac{0^2}{2} \right] = 8\pi$$

2. Método de las arandelas

Algunas veces, al rebanar un sólido de revolución se obtienen discos con agujeros en medio; a estos se le llaman arandelas.

La ecuación para hallar el volumen de estos discos es:

$$V = A \cdot h$$

$$V = \pi(r_2^2 - r_1^2) \cdot h$$

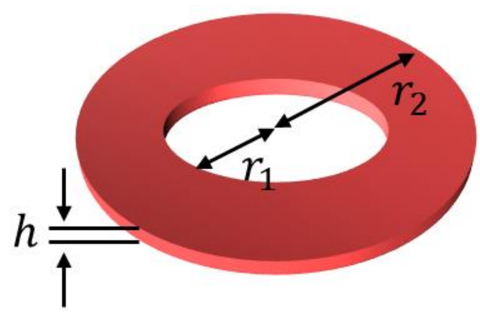


Figura 9. *Determinación del volumen de una arandela*

Este método se utiliza cuando se hace girar el área entre dos curvas alrededor de un eje.
El método de arandelas, es una extensión del método de discos para sólidos huecos. Donde se tiene un radio interno r_1 y un radio externo r_2 de la arandela.

Si la región gira alrededor del eje x, se tiene que:

$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx - \pi \int_a^b [g(x)]^2 dx$$
$$V = \pi \int_a^b \{[f(x)]^2 - [g(x)]^2\} dx$$

Donde la función $f(x)$ está por encima de la función $g(x)$

Si la región gira alrededor del eje y, se tiene que:

$$V = \pi \int_a^b [f(y)]^2 dx - \pi \int_a^b [g(y)]^2 dy$$
$$V = \pi \int_a^b \{[f(y)]^2 - [g(y)]^2\} dy$$

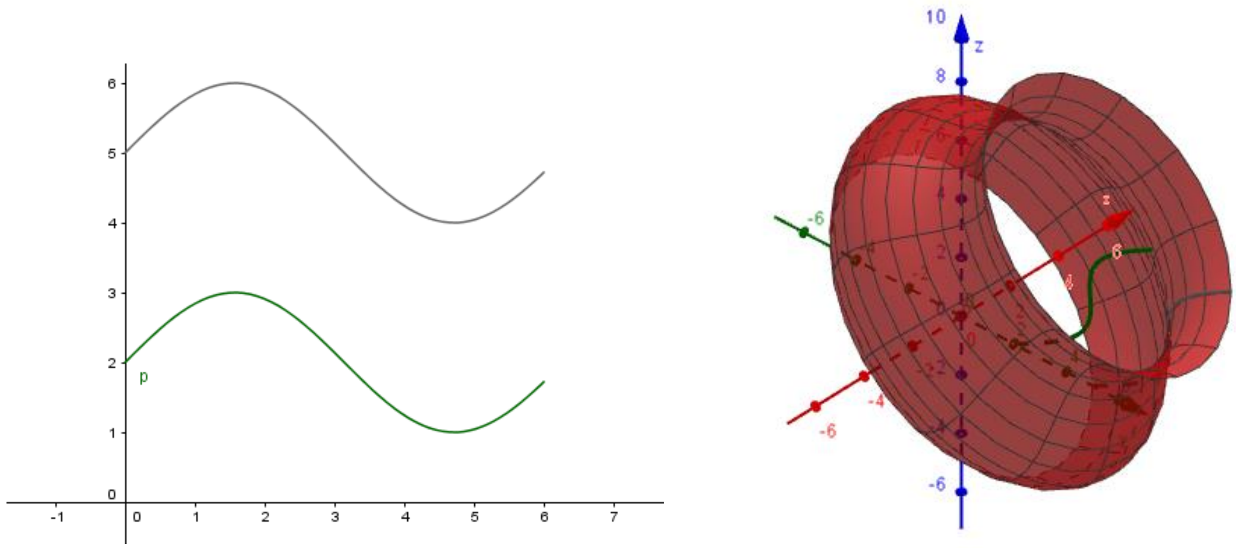


Figura 10. *Gráfica obtenida a partir de las dos funciones y su respectivo sólido de revolución*

Ejemplos:

- Encontrar el volumen del sólido que se genera al girar alrededor del eje x la región R formada por las curvas $x = y^2$ y $y = x^2$.

Solución:
Es conveniente escribir la función $x = y^2$ despejando la y, esto es:

$$x = y^2 \rightarrow y^2 = x$$

$$y = \pm\sqrt{x}$$

$$f(x) = \pm\sqrt{x}$$

La otra se puede nombrar como:

$$g(x) = x^2$$

Para determinar los límites de la región R, es necesario encontrar los puntos de corte de ambas funciones, para ello se debe plantear y solucionar la ecuación:

$$f(x) = g(x)$$

$$\pm\sqrt{x} = x^2$$

Para eliminar la raíz se eleva ambos términos de la ecuación al cuadrado así:

$$\left(\pm\sqrt{x}\right)^2 = (x^2)^2$$
$$x = x^4$$

Luego se igualan a cero

$$x^4 - x = 0$$

Se factorizan los términos:

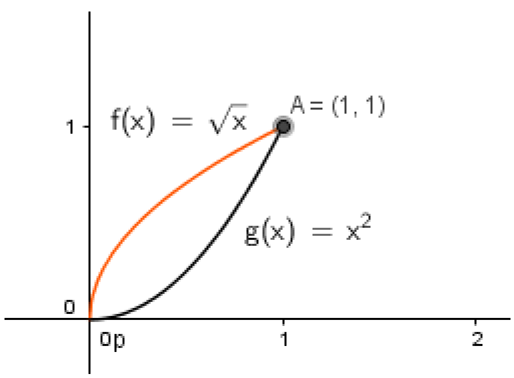
$$x(x^3 - 1) = 0$$

Se iguala cada factor a cero:

$$x = 0 \quad \vee \quad x^3 - 1 = 0$$

Se despeja *la variable* x de la segunda ecuación:

$$x^3 = 1$$
$$x = \sqrt[3]{1}$$
$$x = 1$$



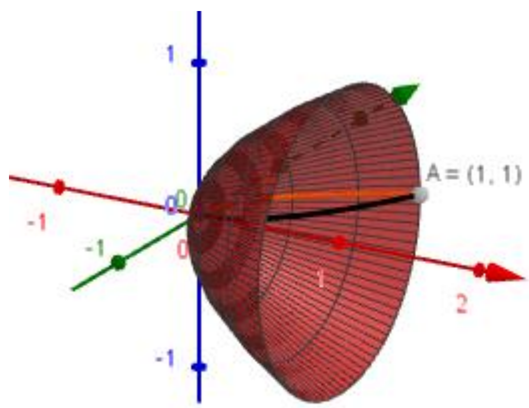


Figura 11. *Gráfica obtenida a partir de las funciones f(x) y g(x) y el respectivo sólido de revolución generado*

Como se puede observar en la figura 11, la función f(x) está por encima de la función $g(x)$, por lo tanto para hallar el volumen se debe plantear y solucionar de la siguiente forma:

$$V = \pi \int_a^b \{[f(x)]^2 - [g(x)]^2\} dx$$
$$V = \pi \int_0^1 \left\{\left[\sqrt{x}\right]^2 - [x^2]^2\right\} dx$$

$$V = \pi \int_0^1 (x - x^4)dx$$

$$V = \pi \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^5}{5}\right)\begin{matrix}1\\0\end{matrix}$$

$$V = \pi \left\{\frac{1^2}{2} - \frac{1^5}{5} - \left[\frac{0^2}{2} - \frac{0^5}{5}\right]\right\}$$

$$V = \pi \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5}\right)$$

$$V = \frac{3}{10}\pi\ unidades\ cúbicas.$$

- Encontrar el volumen del sólido generado al hacer girar la región acotada por las parábolas $y = x^2$ y $y^2 = 8x$ en torno al eje x.

Solución:

Es conveniente escribir la función $y^2 = 8x$ y despejar la variable y, esto es:

$$y^2 = 8x$$

$$y = \pm\sqrt{8x}$$

$$y = \pm\sqrt{8x}$$

$$f(x) = \pm\sqrt{8x}$$

La otra función se puede definir como:

$$g(x) = x^2$$

Para determinar los límites de la región R, es necesario encontrar los puntos de corte de ambas funciones, para ello se debe plantear y solucionar la ecuación:

$$f(x) = g(x)$$

$$\left(\pm\sqrt{8x}\right)^2 = (x^2)^2$$

$$8x = x^4$$

Se iguala a cero

$x^4 - 8x = 0$

Se factoriza, usando factor común

$x(x^3 - 8) = 0$

Se iguala a cero cada factor

$x = 0 \quad \vee \quad x^3 - 8 = 0$

Se despeja la variable x de la segunda ecuación

$x^3 - 8 = 0$

$x^3 = 8$

$x = \sqrt[3]{8}$

$x = 2$

Los límites de integración serían 0 y 2.

Las palabras clave siguen siendo, rebane, aproxime e integre.

Como se puede ver que la función f(x) está por encima de la función $g(x)$, por lo tanto se procede a integrar

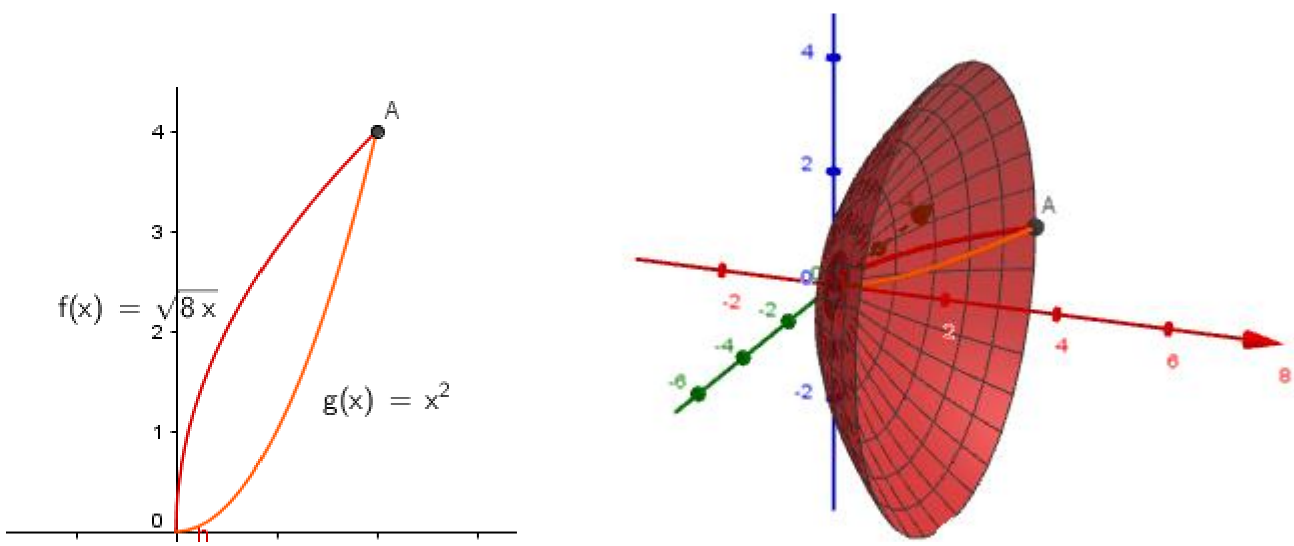


Figura 12. *Gráfica obtenida a partir de las funciones f(x) y g(x) y el respectivo sólido de revolución generado*

Para hallar el volumen se debe plantear y solucionar de la siguiente manera:

$$V = \pi \int_a^b \{[f(x)]^2 - [g(x)]^2\} dx$$

$$V = \pi \int_0^2 \left\{\left(\sqrt{8x}\right)^2 - (x^2)^2\right\} dx$$

$$V = \pi \int_0^2 (8x - x^4)\ dx$$

$$V = \pi \left(\frac{8x^2}{2} - \frac{x^5}{5}\right)\begin{matrix}2\\0\end{matrix}$$

$$V = \pi \left(4x^2 - \frac{x^5}{5}\right)\begin{matrix}2\\0\end{matrix}$$

$$V = \pi \left\{\left(4(2)^2 - \frac{2^5}{5}\right) - \left(4(0)^2 - \frac{0^5}{5}\right)\right\}$$

$$V = \pi \left(4(4) - \frac{32}{5}\right)$$

$$V = \pi \left(16 - \frac{32}{5}\right)$$

$$V = \frac{48}{5}\pi$$

3. Métodos de los casquetes

Existe otro método para encontrar el volumen de un sólido de revolución denominado el método de los cascarones cilíndricos o casquetes. Para muchos problemas, es más fácil de aplicar que el método de los discos o el de las arandelas.
Un cascarón cilíndrico es un sólido acotado por dos cilindros circulares rectos concéntricos. Si el radio interno es r_1, el radio externo es r_2 y la altura es h, entonces su volumen está dado por:

$$V = (\acute{a}rea\ de\ la\ base) \cdot (altura)$$

$$V = (\pi r_2^2 - \pi r_1^2) \cdot h$$

$$V = \pi(r_2 + r_1)(r_2 - r_1) \cdot h$$

$$V = 2\pi \left(\frac{r_2 + r_1}{2}\right) h(r_2 - r_1)$$

La expresión $\left(\frac{r_2+r_1}{2}\right)$ que se denota como r, es el promedio de r_1 y r_2, por lo tanto,

$$V = 2\pi \cdot (radio\ promedio) \cdot (altura) \cdot (grosor)$$

$V = 2\pi rh\,\Delta_r$

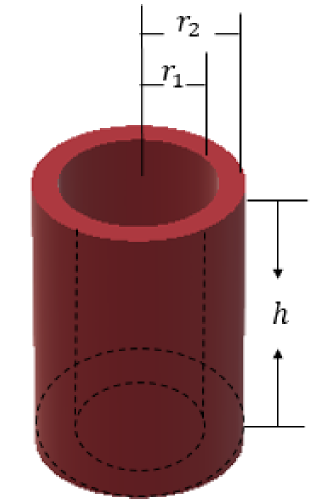


Figura 13. *Cálculo del volumen de un casquete cilíndrico*

He aquí una buena forma de recordar esta ecuación: si el cascarón fuera muy delgado y flexible (como papel), se puede cortar por un lado y abrirlo para formar una hoja rectangular y después calcular su volumen, suponiendo que esta hoja forma una delgada caja rectangular de largo $2\pi r$, altura h, y grosor Δ_r.

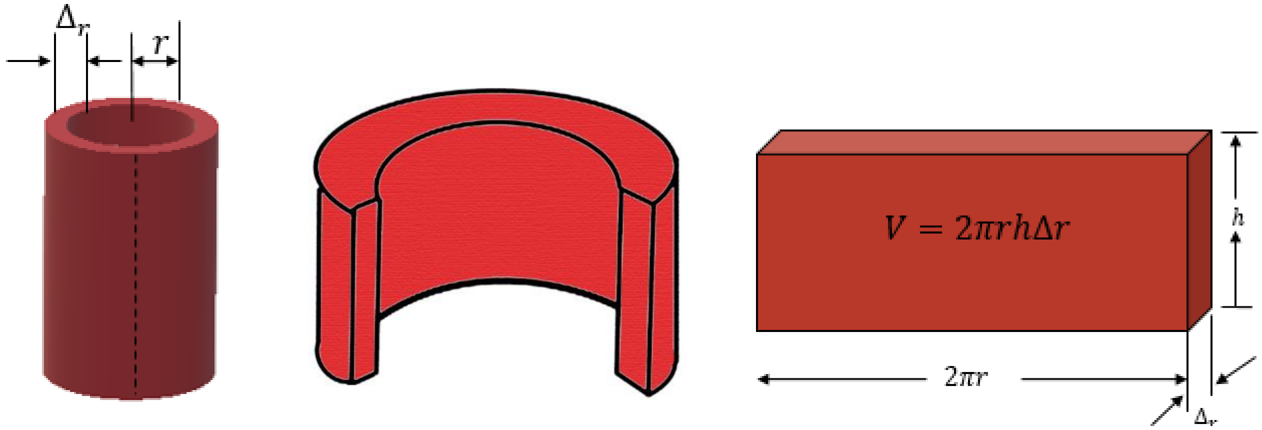


Figura 14. *Corte de un casquete cilíndrico para convertirlo en un paralelepípedo rectangular*

Ahora, se puede considerar una región del tipo que se muestra en la figura 15. Rebanada de manera vertical.

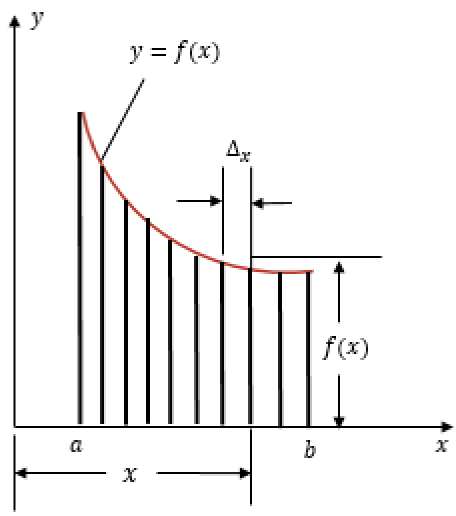


Figura 15. *Gráfica que muestra la forma como se puede rebanar la función f(x)*

Ahora se hace girar en torno al eje *y*; generará un sólido de revolución y cada rebanada generará una pieza que es aproximadamente un cascarón cilíndrico.

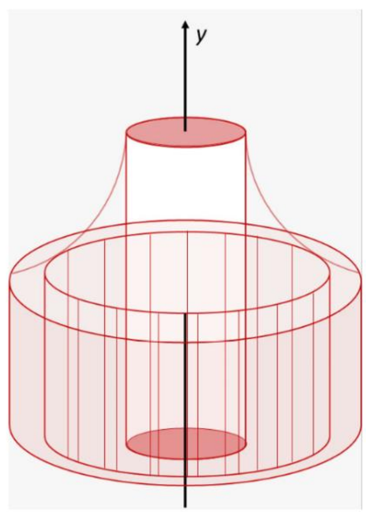


Figura 16. *Cascarones cilíndricos formados en torno al eje de y*

Para obtener el volumen de este sólido, se calcula el volumen ΔV de un cascarón representativo, se suma y se toma el límite cuando el grosor de los cascarones tiende a cero. Por supuesto, lo último es una integral. De nuevo, la estrategia es rebane, aproxime, integre.

$$\Delta V \approx 2\pi\, x f(x) \Delta x$$

$$V = 2\pi \int_a^b x\, f(x) dx$$

Ejemplos

- La región acotada por $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$, el eje x, $x = 1$ y $x = 4$ se hace girar en torno al eje y. Encuentre el volumen del sólido resultante

Con base en la figura anterior, se puede observar que el volumen del cascarón que se genera por la rebanada es:

$$\Delta V \approx 2\pi x\, f(x)\Delta x$$

Que, para $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$, se convierte en:

$$\Delta V \approx 2\pi x \frac{1}{\sqrt{x}} \Delta x$$

Entonces, el volumen se encuentra por medio de la integración:

$$V = 2\pi \int_1^4 x \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx$$

$$V = 2\pi \int_1^4 x \frac{1}{x^{1/2}}\, dx$$

$$V = 2\pi \int_1^4 x x^{-1/2}\, dx$$

$$V = 2\pi \int_1^4 x^{\frac{1}{2}}\, dx$$

$$V = 2\pi \left[\frac{x^{3/2}}{\frac{3}{2}}\right]\begin{matrix}4\\1\end{matrix}$$

$$V = 2\pi \left[\frac{2}{3}x^{3/2}\right]\begin{matrix}4\\1\end{matrix}$$

$$V = 2\pi \left(\frac{2}{3}4^{3/2} - \frac{2}{3}1^{3/2}\right)$$

$$V = 2\pi \left(\frac{2}{3}\sqrt{4^3} - \frac{2}{3}\sqrt{1^3}\right)$$

$$V = 2\pi \left(\frac{2}{3}\cdot 8 - \frac{2}{3}\cdot 1\right)$$

$$V = 2\pi\left(\frac{16}{3} - \frac{2}{3}\right)$$

$$V = 2\pi\left(\frac{14}{3}\right)$$

$$V = \frac{28}{3}\pi$$

- La región acotada por la recta $y = \left(\frac{r}{h}\right)x$, el eje x, y $x = h$ se hace girar alrededor del eje x, y por ello se genera un cono. Encuentre su volumen por el método de los discos y por el método de los casquetes.

Solución:

Método de los discos

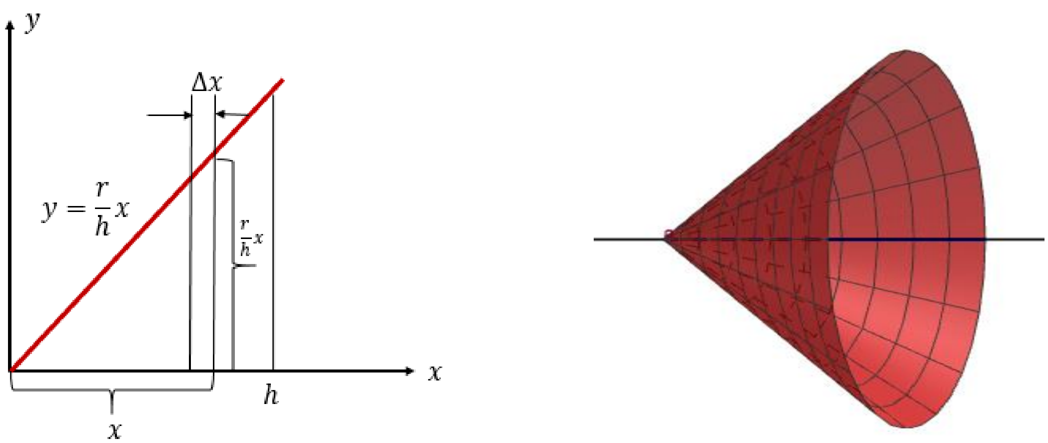


Figura 17. *Sólido de revolución generado a partir de la función f(x) por medio del método de los discos*

$$V = \pi\frac{r^2}{h^2}\int_0^h x^2\,dx$$

$$V = \pi\frac{r^2}{h^2}\left(\frac{x^3}{3}\right)\begin{matrix}h\\0\end{matrix}$$

$$V = \pi\frac{r^2}{h^2}\left(\frac{h^3}{3} - \frac{0^3}{3}\right)$$

$$V = \frac{\pi r^2 h^3}{3h^2}$$

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

Métodos de los casquetes

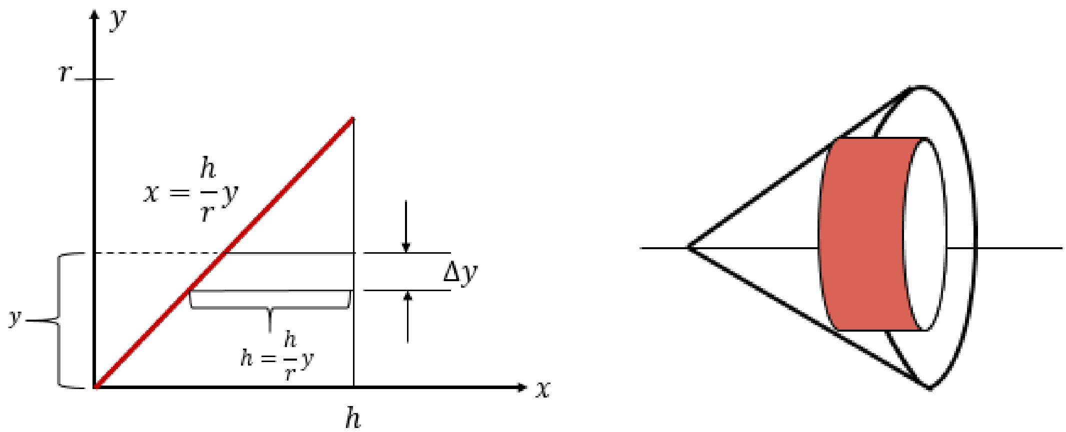


Figura 18._Sólido de revolución generado a partir de la función f(x) por medio del método de los casquetes_

$$\Delta V \approx 2\pi y\left(h - \frac{h}{r}y\right)\Delta y$$

$$V = \int_0^r 2\pi y\left(h - \frac{h}{r}y\right)\, dy$$

$$V = 2\pi h\int_0^r \left(y - \frac{1}{r}y^2\right)\, dy$$

$$V = 2\pi h\left[\frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3r}\right]\begin{matrix} r \\ 0 \end{matrix}$$

$$V = 2\pi h\left[\frac{r^2}{2} - \frac{r^2}{3}\right]$$

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$