LICENCIATURA EN SISTEMAS

DEPARTAMENTO DE DESARROLLO PRODUCTIVO Y TECNOLÓGICO

MATEMÁTICA 2

(Guía de estudio y trabajos prácticos)

Docente a cargo: Vanesa Plaul

Año 2021

Trabajo Práctico N° 1 (Límite-Asíntotas)

1. **Optativo.** Pruebe los siguientes límites aplicando la definición. (Busque la definición en la bibliografía)
   a) $\lim\limits_{x\to 3}(2x-1)=5$ b) $\lim\limits_{x\to -1}(5x+8)=3$
2. **Optativo.** Pruebe los siguientes límites aplicando la definición, en los intervalos indicados.
   a) $\lim\limits_{x\to 4}(x^2-x+5)=17$ si $x\in[2;6]$ b) $\lim\limits_{x\to 3}(x^3-3x^2+4x)=12$ si $x\in(1;5)$
3. Calcule los siguientes límites.
   a) $\lim\limits_{x\to -1}(5x^3-3x^2+4x)$ b) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{x+3}$ c) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{5x^3-3x+1}{2x+1}\right)^{3x+5}$
4. Calcule los siguientes límites.
   a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x^2-3x}{9x}$ b) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{x-3}$ c) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-6x+8}{x-2}$ d) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-2x-3}{x^2+x-12}$
   e) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x^2-x^3}{x^5-2x^2}$ f) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{64-8x^3}{4-2x}$ g) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sqrt{x}}$ h) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}$
   i) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{x-2}$ j) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{4-x^2}{3-\sqrt{x^2+5}}$ k) $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49}$ l) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-\sqrt{x+2}}{\sqrt{4x+1}-3}$
   ll) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{\sqrt{x}-\sqrt{2}}$ m) $\lim\limits_{x\to \pi/2}\dfrac{sen^2x+3senx-4}{sen^2x-3senx+2}$ Hágase: $senx=t$ $\begin{cases}x\to\pi/2\\ t\to 1\end{cases}$

   <u>Resolución punto ll)</u>:
   $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{\sqrt{x}-\sqrt{2}}=$ se trata de una indet. de la forma $\dfrac{0}{0}$
   $$\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{\sqrt{x}-\sqrt{2}}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)\left(\sqrt{x}+\sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{x}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{2}\right)}=\lim_{x\to 2}\left(\sqrt{x}+\sqrt{2}\right)=2\sqrt{2}$$
5. Calcule los siguientes límites.
   a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{sen5x}{sen3x}$ b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{sen^2x}{x}$ c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{sen2x}$
   d) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg3x}{2x}$ e) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{senx}{x^2-x}$ f) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{1-\cos x}$

   <u>Resolución punto e)</u>:
   $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{senx}{x^2-x}=$ Se trata de una indet. de la forma $\dfrac{0}{0}$
   $$\lim_{x\to 0}\frac{senx}{x^2-x}=\lim_{x\to 0}\frac{senx}{x(x-1)}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{senx}{x}\cdot\frac{1}{x-1}\right)=1.(-1)=-1$$
6. Limites infinitos.
   a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}$ b) $\lim\limits_{x\to 0}-\dfrac{1}{x}$ c) $\lim\limits_{x\to 0^-}-\dfrac{3}{x}$ d) $\lim\limits_{x\to -1^+}\dfrac{x}{x+1}$
   e) $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x}{x-x^2}$ f) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2}{(x-3)^2}$ g) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x^8-2x^4}{4x^7-x^5}$ h) $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}-1}$

7. Límites en infinito.

a) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{a}{x}$ b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{a}\ \ a>0$ c) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x}{a}\ \ a<0$ d) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{4x+1}{3x-2}$

e) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{-2x+1}{3x+5}$ f) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{5x^2+2x}{-3x^2-2x+3}$ g) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{5x+1}{3x^2+5x}$ h) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{5x^3+x}{3x^2+5}$

Los siguientes límites los debe poder resolver sin efectuar ningún cálculo:

i) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{(5x-1)^3}{(3x^2-x)^2}$ j) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{(2x^2-3)(x^2+1)}{(3x^2-x)^2}$ k) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^3+1}+2}{\sqrt{x^2+1}-3}$

Resolución punto f):

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{5x^2+2x}{-3x^2-2x+3} = \text{Se trata de una indet. de la forma } \frac{+\infty}{-\infty}$$

Dividimos numerador y denominador por *x* con su mayor exponente.

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{5+\frac{2}{x}}{-3-\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}} = -\frac{5}{3}$$

8. Calcule los siguientes límites.

a) $\lim\limits_{x\to1} \left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x^2-1}\right)$ b) $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\sqrt{x^2+1}+x\right)$ c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2+2}\right)$

d) $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\sqrt{x^2+x+1}+x\right)$ e) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x}(x^2+x)$ f) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x^2}(x^2+x)$

g) $\lim\limits_{x\to0} \frac{1}{x}(x^2+x)$

Resolución punto a):

-

$\lim\limits_{x\to1} \left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x^2-1}\right) =$ Se trata de una indeterminación de la forma $(+\infty-\infty)$ ó $(-\infty+\infty)$, según *x* tienda a 1 por la derecha o a 1 por la izquierda.

$$\lim_{x\to1} \left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x^2-1}\right) = \lim_{x\to1} \frac{x+1-1}{x^2-1} = \lim_{x\to1} \frac{x}{x^2-1} = \pm\infty$$

9. Calcule los siguientes límites.

a) $\lim\limits_{x\to0^+} 3^{\frac{1}{x}}$ b) $\lim\limits_{x\to0^-} 3^{\frac{1}{x}}$ c) $\lim\limits_{x\to0^+} e^{-\frac{1}{x}}$ d) $\lim\limits_{x\to0^-} e^{-\frac{1}{x}}$

e) $\lim\limits_{x\to0^+} \frac{1-3^{\frac{1}{x}}}{2+3^{\frac{1}{x}}}$ f) $\lim\limits_{x\to0^-} \frac{1-3^{\frac{1}{x}}}{2+3^{\frac{1}{x}}}$ g) $\lim\limits_{x\to0^+} \frac{5^{\frac{1}{x}}-2}{3+5^{\frac{1}{x}}}$ h) $\lim\limits_{x\to0^-} \frac{5^{\frac{1}{x}}-2}{3+5^{\frac{1}{x}}}$

Resolución punto e):

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1-3^{\frac{1}{x}}}{2+3^{\frac{1}{x}}} = \text{Se trata de una indeterminación de la forma } \frac{-\infty}{+\infty} \text{ pués } \lim_{x\to 0^+} 3^{\frac{1}{x}} = +\infty$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1-3^{\frac{1}{x}}}{2+3^{\frac{1}{x}}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{3^{\frac{1}{x}}} - \frac{3^{\frac{1}{x}}}{3^{\frac{1}{x}}}}{\frac{2}{3^{\frac{1}{x}}} + \frac{3^{\frac{1}{x}}}{3^{\frac{1}{x}}}} = \frac{0-1}{0+1} = -1$$

Resolución punto f):

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{1-3^{\frac{1}{x}}}{2+3^{\frac{1}{x}}} = \frac{1-0}{2+0} = \frac{1}{2}$$

10. El número "e" como límite. (Indet. forma $1^{\pm\infty}$). Calcule los siguientes límites sabiendo que:

$$\lim_{u\to\pm\infty} \left(1+\frac{1}{u}\right)^{u} = e \quad \text{y} \quad \lim_{u\to 0} (1+u)^{\frac{1}{u}} = e$$

a) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \left(1+\frac{3}{x}\right)^{5x}$ b) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \left(1-\frac{3}{x}\right)^{5x}$ c) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \left(\frac{2x+1}{2x-3}\right)^{x+5}$ d) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \left(\frac{3x+2}{3x-1}\right)^{2x}$

e) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \left(\frac{5x+1}{5x+3}\right)^{2x-1}$ f) $\lim\limits_{x\to 0} (1+3x)^{\frac{5}{x}}$ g) $\lim\limits_{x\to 0} (1-3x)^{\frac{5}{x}}$ h) $\lim\limits_{x\to 0} (1+mx)^{\frac{n}{x}}$

Resolución punto c):

$$\lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{2x+1}{2x-3}\right)^{x+5} = \text{Se trata de una indeterminación de la forma:} 1^{\pm\infty}.$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{2x+1}{2x-3}\right)^{x+5} = \lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{2x-3+4}{2x-3}\right)^{x+5} = \lim_{x\to\pm\infty} \left(1+\frac{4}{2x-3}\right)^{x+5} = \lim_{x\to\pm\infty} \left[\left(1+\frac{1}{\frac{1}{2}x-\frac{3}{4}}\right)^{\left(\frac{1}{2}x-\frac{3}{4}\right)}\right]^{\frac{x+5}{\frac{1}{2}x-\frac{3}{4}}}$$

Como el límite de una potencia es el límite de la base elevado al límite del exponente y el límite de la base es el maravilloso número "*e*", nos queda: $e^{\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{x+5}{\frac{1}{2}x-\frac{3}{4}}} = e^{2}$

11. **Miscelánea**. Calcule los siguientes límites.

a) $\underset{x\to 3}{lím}\dfrac{x^2-6x+9}{x^3-7x^2+15x-9}$ b) $\underset{x\to 0}{lím}\dfrac{\cos^2 x+3\cos x-4}{\cos^2 x-1}$ c) $\underset{x\to 0}{lím}\dfrac{xsenx}{\cos x-1}$

d) $\underset{x\to 0}{lím}\left(tg 2x.\text{cosec} 4x\right)$ e) $\underset{x\to\pm\infty}{lím}\left(\dfrac{2x+5}{2x-7}\right)^{\frac{3x+5}{2x+3}}$ f) $\underset{x\to 0}{lím}\dfrac{x^2-x+1}{\cos x-1}$

g) Calcular k / $\underset{x\to+\infty}{lím}\dfrac{(x+k)^{2x}}{\left(x^2+5\right)^x}=e^5$

12. **Optativo.**

a) Calcule el monto producido por un capital de $300000, colocado durante un año y medio, con capitalización mensual, a una tasa del 24% anual.
b) ¿Qué tiempo se requiere para que un capital C se triplique, colocado al 27% anual con composición mensual?
c) Supongamos que se coloca $1 en el banco al 100% anual, durante un año. ¿Cuál será el monto obtenido si la capitalización es: i) anual, ii) semestral, iii) cuatrimestral, iv) trimestral, v) bimestral, vi) mensual, vii) diaria?
d) ¿Nos haremos millonarios si se aumentan infinitamente los períodos de capitalización?
e) Calcule el mayor monto a interés compuesto que se puede obtener con un capital de $500000, colocado durante dos años al 30% anual.

13. Un fabricante de productos eléctricos, mediante un estudio estadístico, calcula que el porcentaje de aparatos que se mantiene en buenas condiciones de funcionamiento, después de x años, responde aproximadamente a la ley $p(x)=100e^{-0,5x}$.
a) ¿Qué porcentaje de aparatos puede esperarse que funcionen durante dos años?
b) ¿A qué valor límite tiende ese porcentaje cuando el número de años aumente indefinidamente?

14. Como resultado de los avances tecnológicos en la producción de computadoras, cada vez más poderosas y compactas, cae el precio de las que existen hoy día en el mercado. Suponga que dentro de x meses el precio de cierto modelo será $p(x)=20000+\dfrac{3000}{x+1}\cdot$
a) ¿Cuál será el precio dentro de 5 meses?
b) ¿En cuánto bajará el precio en el quinto mes?
c) ¿Cuándo el precio será de $20250?
d) ¿Qué le sucederá al precio a largo plazo?

15. Hacia un tanque de agua que contiene agua pura , fluye agua salada de modo que la concentración de sal en un tiempo t está dada por la función $c(t)=\dfrac{t}{10t+100}$ $t>0\cdot$ Grafique $c(t)$, analice el comportamiento de la función cuando $t\to+\infty$ e interprete su significado.

16. Indique las asíntotas de las siguientes funciones.

a) $f(x)=\dfrac{x+1}{x-1}$ b) $f(x)=\dfrac{3-2x}{3x-2}$ c) $f(x)=\dfrac{-x-4}{-x-1}$

d) $f(x)=\dfrac{5x+1}{x^2-3}$ e) $f(x)=\dfrac{x^3-4x^2+3x}{x^2+2x}$

f) $f(x)=\dfrac{x^3-3x^2-x+3}{x^2+x}$ g) $f(x)=\dfrac{x^2+4}{x-2}$ h) $f(x)=\dfrac{5x^2+3}{x^2-4}$

i) $f(x)=\dfrac{1}{2}\sqrt{x^2+16}+\dfrac{1}{2}x$ j) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-4}{x} & \text{si } x<0\\ \dfrac{1}{x} & \text{si } x>0\end{cases}$

<u>Resolución punto e)</u>: $f(x)=\dfrac{x^3-4x^2+3x}{x^2+2x}$

<u>Asíntota horizontal</u>
Se trata de una función racional (cociente de polinomios) y por ser el numerador un polinomio de mayor grado que el denominador, el límite para $x\to\pm\infty$ **siempre** es infinito, positivo o negativo, pero infinito al fin. Por lo tanto la gráfica de la función <u>no posee asíntota horizontal</u>.

<u>Asíntota vertical</u>
Buscamos asíntotas verticales en los puntos en que se anula el denominador y calculamos los límites en esos puntos. En nuestro caso el denominador se anula en $x=-2$ y en $x=0$.

$\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x^3-4x^2+3x}{x^2+2x}=\dfrac{-30}{0}=\pm\infty$, como el límite se hace infinito, hay una A.V. en $x=-2$

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^3-4x^2+3x}{x^2+2x}=\dfrac{0}{0}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x(x^2-4x+3)}{x(x+2)}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(x^2-4x+3)}{(x+2)}=\dfrac{3}{2}$, luego, $\boxed{\text{en } x=0 \text{ no hay A.V.}}$

<u>Asíntotas oblicuas</u>
Por ser el polinomio del numerador, **exactamente un grado mayor** al del denominador, la gráfica presenta asíntota oblicua.

Hacemos: $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{f(x)}{x}=m=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x^3-4x^2+3x}{x^3+2x^2}=1$, luego $m=1$ es la pendiente de la A.O.

Hacemos: $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left[f(x)-mx\right]=b=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\dfrac{x^3-4x^2+3x}{x^2+2x}-1x\right)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x^3-4x^2+3x-x^3-2x^2}{x^2+2x}=-6$,

luego $b=-6$ y la ecuación de la asíntota oblicua queda: $y=x-6$

<u>Respuestas</u>

1. a) $\delta=\dfrac{\varepsilon}{2}$ b) $\delta=\dfrac{\varepsilon}{5}$ 2. a) $\delta=\dfrac{\varepsilon}{9}$ b) $\delta=\dfrac{\varepsilon}{29}$ 3. a) -12 b) 0 c) 1

4. a) -1/3 b) 6 c) -2 d) 4/7 e) -1 f) 48 g) 0
   h) 0 i) $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$ j) 6 k) -1/56 l) 9/8 ll) $2\sqrt{2}$ m) -5

5. a) 5/3 b) 0 c)1/2 d) 3/2 e) -1 f) 2

6. a) $\pm\infty$ b) $\pm\infty$ c) $+\infty$ d) $-\infty$ e) $+\infty$ f) $+\infty$ g) $\pm\infty$ h) $-\infty$

7. a) 0 b) $+\infty$ c) $+\infty$ d) 4/3 e) -2/3 f) -5/3
g) 0 h) $\pm\infty$ i) 0 j) 2/9 k) $+\infty$

8. a) $\pm\infty$ b) 0 c) 0 d) -1/2 e) $\pm\infty$ f) 1 g) 1

9. a) $+\infty$ b) 0 c) 0 d) $+\infty$ e) -1 f) 1/2 g) 1 h) -2/3

10 .a) e^{15} b) e^{-15} c) e^{2} d) e^{2} e) $e^{-4/5}$ f) e^{15} g) e^{-15} h) $e^{m\cdot n}$

11. a) 1/2 b) 5/2 c) -2 d) 1/2 e) 1 f) $-\infty$ g) $k=\dfrac{5}{2}$

12 a) $428473,87 b) 4 años y dos meses e) $911059,4

13. a) Aprox. 37% b) 0%

14. a) $20500 b) $p(0)-p(5)=2500$ c) 11 meses d) Será de $20000

16. a) $\text{A.V}: x=1;\ \text{A.H}: y=1$ b) $\text{A.V}: x=\dfrac{2}{3};\ \text{A.H}: y=-\dfrac{2}{3}$

c) $\text{A.V}: x=-1;\ \text{A.H}: y=1$ d) $\text{A.V}: x=\pm\sqrt{3};\ \text{A.H}: y=0$

e) $\text{A.V}: x=-2;\ \text{A.O}: y=x-6$ f) $\text{A.V}: x=0;\ \text{A.O}: y=x-4$

g) $\text{A.V}: x=2;\ \text{A.O}: y=x+2$ h) $\text{A.V}: x=\pm 2;\ \text{A.H}: y=5$

i) $\text{A.H}: y=0;\ \text{A.O}: y=x$ j) $\text{A.H}: y=0;\ \text{A.V}: x=0;\ \text{A.O}: y=x$