LICENCIATURA EN SISTEMAS

DEPARTAMENTO DE DESARROLLO PRODUCTIVO Y TECNOLÓGICO

MATEMÁTICA 2

(Guía de estudio y trabajos prácticos)

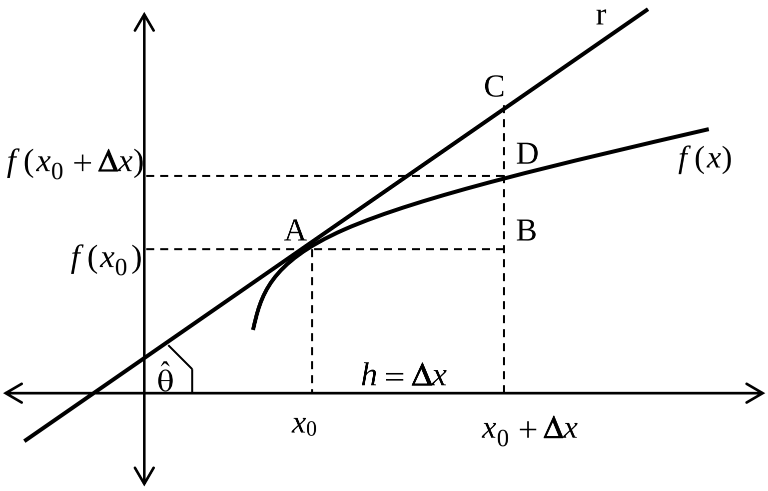
Trabajo práctico Nº 5: Diferenciales – L'Hopital

Año 2021

Trabajo práctico Nº 5 (Diferenciales. Propiedades de las funciones derivables: Rolle, Lagrange, L'Hopital.)

Comencemos con algunos conceptos teóricos…

Diferencial



En la figura, la recta r es tangente a la curva en $A=(x_0;f(x_0))$. Le damos un incremento Δx a la variable en el punto x_0 y obtenemos el nuevo punto $x_0+\Delta x$.
En el triángulo ABC, queremos calcular la medida del lado BC.
Por trigonometría elemental:

$$\operatorname{tg}\hat{\theta}=\frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{AB}}$$

De donde: $\mathrm{BC}=f'(x_0).\Delta x$ ¿Por qué?

A esta última expresión se la denomina diferencial de la función en el punto x_0.

Definición de diferencial:

Si $f(x)$ es derivable en x_0 : $\quad df(x_0)=f'(x_0).\Delta x$

Si x_0 es un punto cualquiera x de la función en el que es derivable, tenemos el (la) diferencial en forma genérica: Si $f(x)$ es derivable en x : $\quad df(x)=f'(x).\Delta x$

Algunos ejemplos:

a) $d(\operatorname{sen}x)=\cos x.\Delta x$
b) $d\left(e^x+2x^3\right)=\left(e^x+6x^2\right).\Delta x$
c) $d\left(x^3\right)=3x^2.\Delta x$
d) $d(x)=1.\Delta x$

De acuerdo a esta última expresión, el (la) diferencial de la función identidad siempre coincide con Δx. Es una costumbre escribir $d(x)$ como dx. De esta forma nos quedaría:

$df(x)=f'(x).dx$ o lo que es lo mismo. $dy=f'(x).dx\Rightarrow\dfrac{dy}{dx}=f'(x)$. Esta es otra forma de escribir la derivada, **como cociente de diferenciales**. Se lee: "derivada de *y* respecto de *x*". Esta notación es de gran importancia en el cálculo integral y en la resolución de ecuaciones diferenciales.

Si $y = at^2 - 3t$, la expresión $\frac{dy}{dt}$ nos indica que la variable es t $\Rightarrow \frac{dy}{dt} = 2at - 3$

Si $y = ae^u + b\ln u$, la expresión $\frac{dy}{du}$ nos indica que la variable es u $\Rightarrow \frac{dy}{du} = ae^u + b.\frac{1}{u}$

En general, para un incremento de la variable, interesa conocer el incremento de la función: $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$, esto es lo que se suele necesitar en la práctica. Si los incrementos son pequeños, la variación que sufre la función coincide aproximadamente con el (la) diferencial. (Observe el gráfico). El diferencial es bastante más simple de calcular que el Δy, entonces se lo puede utilizar para obtener buenas aproximaciones. Esto realmente era práctico y útil hace muchos años atrás, cuando todavía no habían aparecido las calculadoras y ni hablar de las modernas computadoras. Hoy en día, no es necesario, pues, con una simple calculadora de bolsillo, el cálculo no se hace engorroso y da lo mismo calcular uno u otro. **No tiene sentido aproximar la variación de una función con un diferencial.** Entre otras, la gran importancia del diferencial se verá en el cálculo integral.

Relación entre derivabilidad y continuidad.

Teorema: Si una función tiene derivada finita en un punto (es derivable), entonces es continua en ese punto.

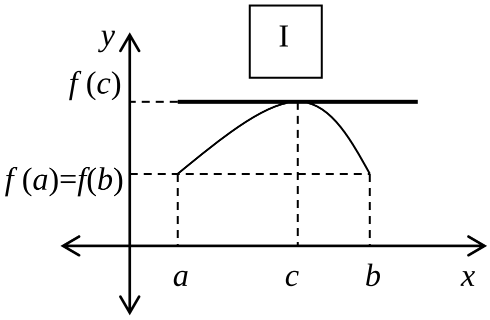
$$\boxed{\textbf{Derivabilidad} \Rightarrow \textbf{Continuidad}}$$

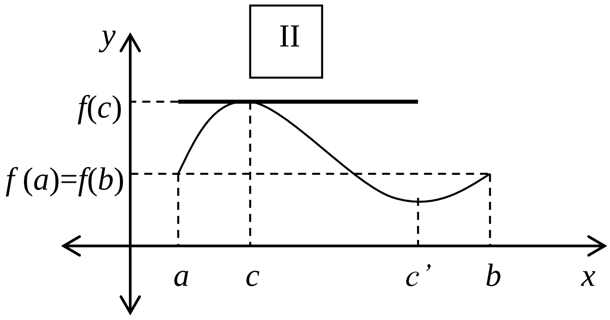
El recíproco **no** es cierto. En general, demostrar un teorema o propiedad, en Matemática, suele ser bastante “complejo”, pero, demostrar que un enunciado es falso es bastante más simple, alcanza con encontrar un contraejemplo.

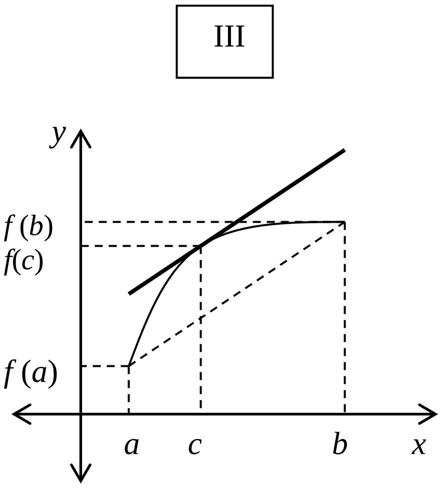
La función $f(x) = |\, x \,|$ es continua en $x_0 = 0$, pero no es derivable en ese punto **(demuéstrelo)**.

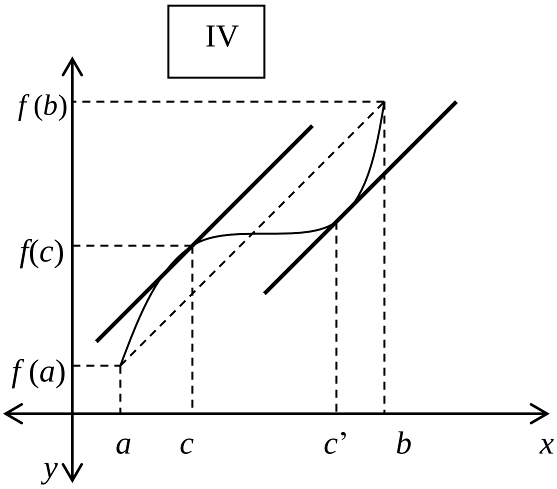
Esto nos alcanza para decir que **continuidad no implica derivabilidad**. Podemos encontrar una, diez, cien, miles, un googol de funciones que sean continuas en un punto y derivables en ese punto, pero…basta encontrar **una** que no lo sea para asegurar que la propiedad no es verdadera.

Si dibujamos la curva correspondiente a una función derivable en un cierto intervalo $[a\,;\,b]$, se puede ver geométricamente que: si trazamos la cuerda que une los extremos de la curva, es posible encontrar un punto interior al intervalo donde la tangente a la curva es paralela a dicha cuerda.









Las figuras I y II corresponden al caso particular en que la función alcanza valores iguales en los extremos del intervalo. Las figuras III y IV corresponden al caso general. Los dos primeros se demuestran con el teorema de Rolle, los otros dos con el teorema del valor medio o teorema de Lagrange.

<u>Teorema de Rolle</u>: Si $y = f(x)$ es una función continua en un intervalo $[a\,;b]$, derivable en el intervalo $(a\,;b)$ y además, $f(a) = f(b) \Rightarrow \exists$ un punto $"c"$ perteneciente al intervalo $(a\,;b)$, donde $f'(c) = 0$

<u>Teorema del valor medio del cálculo diferencial</u> (<u>Teorema de Lagrange</u>): Si $y = f(x)$ es una función continua en un intervalo $[a\,;b]$ y derivable en el intervalo $(a\,;b)$ $\Rightarrow \exists$ un punto $"c"$ perteneciente al intervalo $(a\,;b)$ donde $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$

<u>Nota</u>: Ambos teoremas son válidos si la función no es derivable en un punto, pero tiene tangente vertical en ese punto, es decir, se trata de una curva "suave", que es como se denomina a las curvas que tienen recta tangente en todos sus puntos.

En realidad el teorema del valor medio es el caso general y contempla al anterior. La importancia del primero radica en que se lo utiliza para poder demostrar el segundo.

Como consecuencia del teorema del valor medio surge el teorema de Cauchy (que no enunciamos) y como consecuencia de este: el teorema de L'Hôpital, también conocida como **regla de L'Hôpital**. Esta es de una gran utilidad para el cálculo de límites.

Regla de L'Hôpital: Sean $f(x)$ y $g(x)$ dos funciones derivables en un entorno reducido de un punto "a". Si $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0,\ \lim\limits_{x\to a} g(x)=0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$. Siempre y cuando este último límite exista o sea infinito.

De acuerdo a lo visto, la regla de L'Hôpital sólo sería válida para límites cuando $x\to a$ de indeterminaciones del tipo $\dfrac{0}{0}$. También se demuestra que esto es válido en indeterminaciones de la forma $\dfrac{\pm\infty}{\pm\infty}$ y por último, la regla también es aplicable cuando $x\to-\infty$ o $x\to+\infty$.

Veamos algunos ejemplos de esta importante propiedad:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$, sabemos que este límite es 1, como se justificó en su momento. Por ser una indeterminación de la forma $\dfrac{0}{0}$, hacemos: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sen} x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x}{1}=\ 1$

b) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x-2}=\dfrac{0}{0}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x}{1}=\ 4$

c) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{5x^3-3x^2+5x-3}{4x^3+2x^2-7x+2}=\dfrac{\pm\infty}{\pm\infty}$. Por ser una indeterminación de la forma $\dfrac{\pm\infty}{\pm\infty}$ podemos aplicar L'Hôpital.

$\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{5x^3-3x^2+5x-3}{4x^3+2x^2-7x+2}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{15x^2-6x+5}{12x^2+4x-7}=\dfrac{+\infty}{+\infty}$, volvemos a aplicar L'Hôpital.

$\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{15x^2-6x+5}{12x^2+4x-7}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{30x-6}{24x+4}=\dfrac{\pm\infty}{\pm\infty}$, nuevamente aplicamos L'Hôpital.

$\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{30x-6}{24x+4}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{30}{24}=\dfrac{30}{24}=\ \dfrac{5}{4}$

Por supuesto no era necesario aplicar la regla de L'Hôpital para resolver este límite. Se ha hecho sólo como ejemplo.

d) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x^3}=\dfrac{+\infty}{+\infty}=\quad \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{3x^2}=\dfrac{+\infty}{+\infty}=\quad \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{6x}=\dfrac{+\infty}{+\infty}=\quad \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{6}=\dfrac{+\infty}{6}=\ +\infty$

e) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(2-x)e^x-(x+2)}{x^3}=\dfrac{0}{0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-e^x+(2-x)e^x-1}{3x^2}=\dfrac{0}{0}\cdots$ Termínelo usted solo/a, el resultado es: $-\dfrac{1}{6}$

1. Encontrar dy en las siguientes funciones.

   a) $y = x^3 + 3x$ b) $y = \cos^2 2x + \text{sen}3x$ c) $y = e^{3x} + x$

   Respuestas

   a) $dy = \left(3x^2 + 3\right)dx$ b) ………. c) ……..

2. Calcular Δy y dy para:

   a) $y = \sqrt{x}$ en $x = 4$ para $\Delta x = 10^{-4}$

   b) $y = x^2 - x$ en $x = 2$ para $\Delta x = 10^{-2}$

   c) $y = x^3 + x$ en $x = 5$ para $\Delta x = 10^{-2}$

   Resolución punto a): $y = \sqrt{x}$ en $x = 4$ para $\Delta x = 10^{-4}$

   $$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) \Rightarrow$$
   $$\Delta y = f(4 + 0{,}0001) - f(4) \Rightarrow \Delta y = \sqrt{4{,}0001} - 2 \Rightarrow \Delta y = 0{,}00002499 = 2{,}499.10^{-5}$$

   $$dy = f'(x).dx \Rightarrow dy = \frac{1}{2\sqrt{x}}.dx \Rightarrow$$
   $$dy = \frac{1}{2\sqrt{4}}.0{,}0001 \Rightarrow dy = 0{,}000025 = 2{,}5.10^{-5}$$

   Respuestas

   a) $\Delta y = 0{,}00002499 = 2{,}499.10^{-5}$ $dy = 0{,}000025 = 2{,}5.10^{-5}$

   b) $\Delta y = 0{,}0301 = 3{,}01.10^{-2}$ $dy = 0{,}03 = 3.10^{-2}$

   c) $\Delta y = 0{,}7615$ $dy = 0{,}76$

3. Siendo: $y = ae^t + u^2$, calcular: $\dfrac{dy}{da}$, $\dfrac{dy}{dt}$, $\dfrac{dy}{du}$

   Respuestas

   $\dfrac{dy}{da} = e^t$ $\dfrac{dy}{dt} = \text{………}$ $\dfrac{dy}{du} = \text{………}$

4. Hallar "c" correspondiente al teorema de Rolle para:

   a) $f(x) = 3 + 2x - x^2$ en $[-2\,;4]$

   b) $f(x) = \sqrt[3]{x}(x-7)^2$ en $[0\,;7]$

   c) $f(x) = x^4 - 4x^3 + 10$ en $[0\,;4]$

   d) $f(x) = x - \dfrac{1}{x}$ en $[-1;1]$

   e) $f(x) = x^2 + 3x + 5$ en $[\text{-}1;2]$

Resolución punto a): $f(x)=3+2x-x^2$ en $[-2\,;4]$

Verificamos que se cumplan las hipótesis del teorema de Rolle.
$f(-2)=-5$ y $f(4)=-5$
La función es continua en $[-2\,;4]$ y derivable en $(-2\,;4)$.
Como se cumplen las hipótesis, buscamos el punto c. Pueden ser varios, el teorema asegura la existencia de al menos uno.
$f'(x)=2-2x \Rightarrow 2-2x=0$. De donde $x=1$. Por lo tanto: $c=1$
El punto pertenece al intervalo. $[-2\,;4]$

Respuestas

a) $c=1$ b) $c=1$ c) $c=3$
d) El teorema no es aplicable. ¿Por qué?
e) El teorema no es aplicable. ¿Por qué?

5. Hallar "c" correspondiente al teorema del valor medio (Lagrange) para:
 a) $f(x)=\sqrt{x-1}$ en $[1;3]$ b) $f(x)=\sqrt[3]{x^2}$ en $[0\,;1]$
 c) $f(x)=\dfrac{2x}{x^2+1}$ en $[-1;3]$ d) $f(x)=8x^3-6x^2+9x$ en $[1;4]$

Resolución punto d): $f(x)=8x^3-6x^2+9x$ en $[1;4]$

Verificamos que se cumplan las hipótesis del teorema de Lagrange.

La función es continua en $[1;4]$ y derivable en $(1\,;4)$.
$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\Rightarrow f'(c)=\frac{f(4)-f(1)}{4-1}=\frac{452-11}{3}=147$$
$$f'(x)=24x^2-12x+9\Rightarrow 24x^2-12x+9=147$$
Resolviendo esta última ecuación queda: $x_1=\dfrac{1+\sqrt{93}}{4}$ y $x_2=\dfrac{1-\sqrt{93}}{4}$.

Como el segundo punto no pertenece al intervalo $[1;4]$. La solución es $c=\dfrac{1+\sqrt{93}}{4}$

Respuestas

a) $c=\dfrac{3}{2}$ b) $c=\dfrac{8}{27}$ c) $c_1=\sqrt{\dfrac{\sqrt{65}-7}{2}}$; $c_2=-\sqrt{\dfrac{\sqrt{65}-7}{2}}$ d) $c=\dfrac{1+\sqrt{93}}{4}$

6. Calcular los siguientes límites aplicando la regla de L'Hôpital. $\left(\dfrac{0}{0}\right)$

 a) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+x-6}{x^2-4}$ b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+\operatorname{sen}2x}{x-\operatorname{sen}2x}$ c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x^2}$

d) $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{e^x + e^{-x} - x^2 - 2}{\operatorname{sen} x - x^2}$ e) $\displaystyle \lim_{x\to 1} \frac{x^3 - x^2 - x + 1}{x^3 - 2x^2 + x}$ f) $\displaystyle \lim_{x\to \pi^+} \frac{\operatorname{sen} x}{\sqrt{x-\pi}}$

g) $\displaystyle \lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{x-1}$ h) $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x - x}{x - \operatorname{sen} x}$

Respuestas

a) $\frac{5}{4}$ b) -3 c) $\pm\infty$ d) 0 e) 2   f) 0   g) 1   h)2

7. Calcular los siguientes límites aplicando la regla de L'Hôpital. $\left(\frac{\pm\infty}{\pm\infty}\right)$

a) $\displaystyle \lim_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{x^4}$ b) $\displaystyle \lim_{x\to +\infty} \frac{e^x}{x^2}$ c) $\displaystyle \lim_{x\to +\infty} \frac{x + \ln x}{x \ln x}$

d) $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{cotg} 2x}{\operatorname{cotg} x}$ e) $\displaystyle \lim_{x\to +\infty} \frac{x^n}{e^x} \quad n \in \mathbf{Z}^+$

Respuestas

a) 0   b) $+\infty$ c) 0 d) $\frac{1}{2}$ e) 0

8. Calcular los siguientes límites aplicando la regla de L'Hôpital. $(0 \cdot \pm\infty)$

a) $\displaystyle \lim_{x\to 0^+} (x \ln x)$ b) $\displaystyle \lim_{x\to 0} \left[x \operatorname{cotg}\left(\frac{\pi}{2} x\right)\right]$

c) $\displaystyle \lim_{x\to \pm\infty} \left(x \operatorname{sen} \frac{1}{x}\right)$ d) $\displaystyle \lim_{x\to 0^+} \left[(x - \operatorname{sen} x) \ln x \right]$

Resolución punto a): $\displaystyle \lim_{x\to 0^+} (x \ln x)$

Para poder aplicar L'Hôpital necesitamos transformar la expresión en una indeterminación de la forma $\frac{0}{0}$ o $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$

$\displaystyle \lim_{x\to 0^+} (x \ln x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \frac{-\infty}{+\infty}$. Ahora podemos aplicar L'Hôpital.

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0^+} (-x) = 0$$

Podríamos haber hecho: $\displaystyle \lim_{x\to 0^+} (x \ln x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{\frac{1}{\ln x}}$, transformando la expresión en una indeterminación de la forma $\frac{0}{0}$. Termínelo por este camino para comprobar que se llega al mismo resultado. Note que el primero simplifica los cálculos.

Respuestas

a) 0 b) $\frac{2}{\pi}$ c) 1 d) 0

9. Calcular los siguientes límites aplicando la regla de L'Hôpital. $(+\infty-\infty)$

a) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right)$ b) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\operatorname{cotg} x\right)$

c) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}-\frac{1}{x^2}\right)$ d) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\left(\sec 3x-\operatorname{tg} x\right)$

Resolución punto a): $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right)$

Se trata de una indeterminación de la forma $(+\infty-\infty)$ o $(-\infty+\infty)$ según $x\to 1^+$ o $x\to 1^-$.

$\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right)=\lim\limits_{x\to 1}\frac{\ln x-x+1}{(x-1)\ln x}=\frac{0}{0}$. Ahora podemos aplicar L'Hôpital.

$$\lim_{x\to 1}\frac{\ln x-x+1}{(x-1)\ln x}=\lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{x}-1}{\ln x+\frac{x-1}{x}}=\lim_{x\to 1}\frac{1-x}{x\ln x+x-1}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 1}\frac{-1}{\ln x+1+1}=-\frac{1}{2}$$

Respuestas

a) $-\frac{1}{2}$ b) 0 c) $\frac{1}{3}$ d) $\pm\infty$

10. Calcular los siguientes límites aplicando la regla de L'Hôpital. $\left(1^{\pm\infty}\ ;\ 0^0\ ;\ (\pm\infty)^0\right)$

a) $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\operatorname{cotg} x}$ b) $\lim\limits_{x\to 0}\left(2x+e^x\right)^{\frac{1}{\operatorname{sen} x}}$

c) $\lim\limits_{x\to 1^+}(x-1)^{x-1}$ d) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{\frac{3}{4+\ln x}}$

e) $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}\right)^{\ln(x+1)}$ f) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(x^2-2\right)^{\frac{1}{\ln x}}$ g) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^x$

Resolución punto a): $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\operatorname{cotg} x}$

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\operatorname{cotg} x}=L\Rightarrow \ln\left[\lim_{x\to 0}(1+x)^{\operatorname{cotg} x}\right]=\ln L\Rightarrow \lim_{x\to 0}\left[\ln (1+x)^{\operatorname{cotg} x}\right]=\ln L\Rightarrow$$

$$\lim_{x\to 0}\left[\operatorname{cotg} x\ln(1+x)\right]=\ln L\Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{\operatorname{tg} x}=\ln L$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{\operatorname{tg} x}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x}}{\sec^2 x}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos^2 x}{1+x}=1$$

Por lo tanto, tenemos que $\ln L=1\Rightarrow L=e$

Respuestas

a) e b) e^3 c) 1 d) e^3 e) 1 f) e^2 g) 1

11. **Miscelánea**

a) La función $f(x) = x^{\frac{1}{3}}$, ¿satisface las hipótesis del teorema del valor medio en el intervalo $[-1\,;8]$? De ser así encuentre un punto "*c*" que verifique el teorema.

b) La función $f(x) = \begin{cases} 2x+2 & \text{si } -0{,}5 \le x < 1 \\ 5-(x-2)^2 & \text{si } 1 \le x \le 4 \end{cases}$ ¿cumple las hipótesis del teorema de Rolle?, de ser así, ¿dónde cumple la tesis?

c) Calcular *a* y *b* para que la función $f(x) = \begin{cases} x^2+2x+a & \text{si } x \le 0 \\ -x^2+\mathrm{b}x & \text{si } x > 0 \end{cases}$ cumpla las hipótesis del teorema del valor medio en el intervalo $[-3\,;2]$, ¿dónde cumple la tesis?

d) Calcule los siguientes límites:

i) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} (\operatorname{tg} x)^{\frac{1}{\cos 2x}}$ ii) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2}{\operatorname{sen} x - \cos x}$ iii) $\lim\limits_{x\to 0} (\cos 2x)^{-2/x^2}$

e) ¿Es posible calcular el siguiente límite aplicando la regla de L'Hôpital?

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

f) **Para los más audaces…**

La función $f(x) = \left|x^2-5\right|$ verifica que $f(1)=4$ y que $f(3)=4$, por lo tanto $f(1) = f(3)$. Sin embargo su derivada no se anula en ningún punto entre 1 y 3. ¿Cómo se explica?

Respuestas a miscelánea

a) $x=1$ b) $x=2$

c) $a=0$; $b=2$; $c_1=-1{,}3$; $c_2=1{,}3$ d) i) e^{-1} ii) 0 iii) e^4

e) No es posible, ¿por qué?