LICENCIATURA EN SISTEMAS

DEPARTAMENTO DE DESARROLLO PRODUCTIVO Y TECNOLÓGICO

MATEMÁTICA 2

(TRABAJO PRÁCTICO N° 3)
DERIVADAS

Docente a cargo:

Vanesa Plaul

Año 2023

Trabajo práctico Nº 3 (Derivada)

1. Aplicando la definición, halle la derivada de las siguientes funciones en los puntos indicados. a) $f(x) = x^2$ en $x_0 = \frac{1}{2}$ b) $f(x) = 3x - 2$ en $x_0 = -1$

   c) $f(x) = \sqrt{x}$ en $x_0 = 4$ d) $f(x) = \frac{1}{x}$ en $x_0 = 2$ y en $x_0 = -2$.

   Se pide además, encontrar las ecuaciones de las rectas tangentes en dichos puntos, graficar la curva y las rectas halladas.

   e) $f(x) = \frac{x}{x-1}$ en $x_0 = -3$ f) $f(x) = \frac{2x-1}{x^2+1}$ en $x_0 = 0$

<u>Resolución punto c)</u>: $f(x) = \sqrt{x}$ en $x_0 = 4$

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \Rightarrow f'(4) = \lim_{h \to 0} \frac{f(4+h) - f(4)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{4+h} - \sqrt{4}}{h}$$

Se trata de una indeterminación de la forma $\frac{0}{0}$. Multiplicamos por el conjugado del numerador.

$$f'(4) = \lim_{h \to 0} \left(\frac{\sqrt{4+h} - 2}{h} \cdot \frac{\sqrt{4+h} + 2}{\sqrt{4+h} + 2} \right) = \lim_{h \to 0} \frac{h}{h\left(\sqrt{4+h} + 2\right)} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{\sqrt{4+h} + 2} = \frac{1}{4}$$

2. Obtener a partir de la definición, la función derivada de cada una de las siguientes funciones. a) $f(x) = x$ b) $f(x) = x^2$ c) $f(x) = x^3$

   d) $f(x) = 5x^3$ e) $f(x) = x^2 - 1$ f) $f(x) = \frac{1}{x^2}$ g) $f(x) = \sqrt[3]{x}$

   h) $f(x) = \frac{1}{2}$

<u>Resolución punto g)</u>: $f(x) = \sqrt[3]{x}$

$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \Rightarrow f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt[3]{x+h} - \sqrt[3]{x}}{h}$. Se trata de una indeterminación de la forma $\frac{0}{0}$. Para resolver este límite hacemos las sustituciones: $x + h = p^3$ y $x = q^3$

La expresión $\frac{\sqrt[3]{x+h} - \sqrt[3]{x}}{h}$ queda: $\frac{\sqrt[3]{p^3} - \sqrt[3]{q^3}}{p^3 - q^3} = \frac{p-q}{p^3 - q^3} = \frac{1}{p^2 + pq + q^2}$ ¿Por qué?

Con esto hacemos: $\lim_{h \to 0} \frac{1}{p^2 + pq + q^2} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{\sqrt[3]{(x+h)^2} + \sqrt[3]{x+h} \cdot \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x^2}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$

3. Encontrar en todos los casos la función derivada.

a) $f(x) = x^4 - 3x^2 + 2$ b) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{4}$ c) $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$

d) $f(x) = \frac{1}{x^3}$ e) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ f) $f(x) = (2x-1)^2$

g) $f(x) = x - \sqrt{x}$ h) $f(x) = 3x^9 - 2\sqrt{x} + senx$

i) $f(x) = 4x^3 - x^2 - \cos x$ j) $f(x) = (3x+5)(2x-1)$ k) $f(x) = (x-2)^3$

l) $f(x) = \frac{(3x-1)^2}{2} - \ln x$

4. Encontrar en todos los casos la función derivada.

a) $f(x) = \operatorname{sen}(5x^2 + 3x)$ b) $f(x) = \cos\sqrt{x}$

c) $f(x) = (\operatorname{sen} x + \cos 3x)^5$ d) $f(x) = (1-x)^4$ e) $f(x) = \left(1 - \frac{x}{3}\right)^2 + \left(1 + \frac{x}{3}\right)^2$

f) $f(x) = \sqrt{4x^2 - 25}$ g) $f(x) = \sqrt{x^2 + a^2}$ h) $f(x) = \sqrt{\operatorname{sen} x^2}$

i) $f(x) = \ln x^2$ j) $f(x) = \ln\sqrt{x}$ k) $f(x) = 2\ln(\cos x) + x^3$

l) $f(x) = \sqrt{\ln(\operatorname{sen} x)}$ ll) $f(x) = \ln\sqrt{\operatorname{sen} x}$ m) $f(x) = \sqrt{1 + \sqrt{x}}$

n) $f(x) = \frac{5}{(2x+3)^2}$ ñ) $f(x) = \sqrt[3]{(2x-1)^2}$

5. Encontrar en todos los casos la función derivada.

a) $f(x) = x^2 \cos x$ b) $f(x) = (3x+5)(2x-1)$ c) $f(x) = \sqrt[3]{x}\ln x$

d) $f(x) = (x-1)(x-2)(x-3)$ e) $f(x) = \frac{x}{1-x}$ f) $f(x) = \frac{2x+3}{3x+2}$

g) $f(x) = \frac{1-\cos x}{1+\cos x}$ h) $f(x) = \frac{2x^2 \ln x}{(1-x)^2}$ i) $f(x) = \frac{(1-3x)^3}{3x\ln x}$

<u>Resolución punto h)</u>: $f(x) = \frac{2x^2 \ln x}{(1-x)^2}$

$$f'(x) = \frac{\left(2x^2 \ln x\right)'(1-x)^2 - \left(2x^2 \ln x\right)\left[(1-x)^2\right]'}{\left[(1-x)^2\right]^2} =$$

$$= \frac{\left(4x\ln x + 2x^2 \frac{1}{x}\right)(1-x)^2 - \left(2x^2 \ln x\right)2(1-x)(-1)}{(1-x)^4} = \frac{\left(4x\ln x + 2x\right)(1-x) + 4x^2 \ln x}{(1-x)^3} \Rightarrow$$

$$f'(x) = \frac{4x\ln x + 2x - 2x^2}{(1-x)^3} = \frac{2\left(2x\ln x + x - x^2\right)}{(1-x)^3}$$

6. Encontrar en todos los casos la función derivada.

a) $f(x)=e^{x}$ b) $f(x)=e^{-x}$ c) $f(x)=a^{x}$

d) $f(x)=2^{\sqrt{x}}$ e) $f(x)=5^{\ln(x^2+3)}$ f) $f(x)=\operatorname{sen} a^{x}$

g) $f(x)=e^{\operatorname{tg} x^3}$ h) $f(x)=\ln x+e^{x}\operatorname{sen} x^2$ i) $f(x)=\dfrac{a^{x}}{x^{a}}$

j) $f(x)=\operatorname{sh} x$ k) $f(x)=\operatorname{ch} x$ l) $f(x)=\operatorname{th} x$

<u>Resolución punto j)</u>: $f(x)=\operatorname{sh} x$

$$f(x)=\operatorname{sh} x=\frac{e^{x}-e^{-x}}{2}\Rightarrow f'(x)=\frac{e^{x}+e^{-x}}{2}\Rightarrow f'(x)=\operatorname{ch} x$$

7. Encontrar en todos los casos la función derivada.

a) $f(x)=\operatorname{arcsen} x$ b) $f(x)=\arccos x$ c) $f(x)=\operatorname{arctg} x$

d) $f(x)=\operatorname{argsh} x$ e) $f(x)=\operatorname{argch} x$ f) $f(x)=\operatorname{arg\,th} x$

<u>Resolución punto a)</u>: $f(x)=\operatorname{arcsen} x \quad -1\le x\le 1,\ -\dfrac{\pi}{\mathbf{2}}\le y\le\dfrac{\pi}{2}$

Si $y=\operatorname{arcsen} x\Rightarrow x=\operatorname{sen} y$. Si derivamos respecto de x nos queda: $1=\cos y.y'$ ya que se trata

de una función compuesta. "Despejando": $y'=\dfrac{1}{\cos y}$ $\quad\mathbf{I}$

Sabemos por la relación pitagórica que:

$\operatorname{sen}^2 y+\cos^2 y=1$ y como $\operatorname{sen} y=x$, nos queda: $\cos^2 y=1-x^2\Rightarrow\cos y=\pm\sqrt{1-x^2}$

En esta última expresión debemos tomar sólo la raíz positiva ¿por qué?

Reemplazando en $\mathbf{I}$ nos queda: $y'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

8. Encontrar la función derivada aplicando logaritmos.

a) $f(x)=x^{x}$ b) $f(x)=x^{\sqrt{x}}$ c) $f(x)=\left(\dfrac{1}{n}x\right)^{nx}$

d) $f(x)=\left(\dfrac{2}{x}\right)^{x}$ e) $f(x)=x^{\left(x^{x}\right)}$ f) $f(x)=\left(x^{x}\right)^{x}$

<u>Resolución punto b)</u>: $y=x^{\sqrt{x}}$

$$\ln y = \sqrt{x}\ln x, \textbf{ derivando: } \frac{y'}{y} = \frac{1}{2\sqrt{x}}\ln x + \sqrt{x}\frac{1}{x} \Rightarrow y' = \left(\frac{\ln x}{2\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}}{x}\right)x^{\sqrt{x}}$$

9. <u>Miscelánea.</u> Encontrar en todos los casos la función derivada.

a) $f(x) = \ln\dfrac{x^2}{1-x^2}$ b) $f(x) = \ln\dfrac{1-x}{1+x}$ c) $f(x) = \ln\sqrt{\dfrac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+2}}$

d) $f(x) = \sqrt{\operatorname{arcsen}\left(5x^2\right)}$ e) $f(x) = \operatorname{arctg}\dfrac{x^2+1}{x^2-1}$ f) $f(x) = \cos\left(\operatorname{arcsen} x^2\right)$

g) $f(x) = \sec\dfrac{1+x}{x}$ h) $f(x) = \operatorname{arcsen}\dfrac{1}{x}$ i) $f(x) = \operatorname{sh}^2 x + \operatorname{th}^3 x$

j) $f(x) = 2^{\operatorname{tg} x}\operatorname{arctg} 2x$ k) $f(x) = \operatorname{argsh}\left(x^3+1\right)$ l) $f(x) = \operatorname{argth}(\operatorname{sen} x)$

ll) $f(x) = x^{\ln x}$

<u>Resolución punto a</u>: $f(x) = \ln\dfrac{x^2}{1-x^2}$

Si primero aplicamos propiedades de los logaritmos, se simplifican los cálculos:

$$f(x) = \ln x^2 - \ln\left(1-x^2\right) \Rightarrow f'(x) = \frac{2x}{x^2} - \frac{-2x}{1-x^2} \Rightarrow f'(x) = \frac{2}{x\left(1-x^2\right)}$$

10. Encontrar las derivadas de orden cuatro de las siguientes funciones.

a) $f(x) = e^{3x}$ b) $f(x) = \operatorname{sen} x$ c) $f(x) = x^4 - 3x^3 + 2x - 5$

11. Derivar las siguientes funciones dadas en forma implícita.

a) $x^2 - 6xy + y^2 = 0$ b) $x^2 + xy = 1$ c) $y^2 - x\sqrt{x^2+1} = 0$

d) $x^2 = \dfrac{x-y}{x+y}$ e) $\operatorname{sen} 2x + \cos 2y = 2xy$ f) $2x^3 - 3xy + y = 5$

g) $\sqrt{x} - 4y + y^3x = 6$ h) $x + \dfrac{x^3}{y} - \dfrac{y^3}{x} = 2$ i) $e^{x+y} - e^{x-y} = 2$

<u>Resolución punto a)</u>: $x^2 - 6xy + y^2 = 0$

$$2x - 6(y + y'x) + 2yy' = 0 \Rightarrow 2x - 6y - 6y'x + 2yy' = 0$$

$$y'(2y - 6x) = 6y - 2x \Rightarrow y' = \frac{3y - x}{y - 3x}$$

<u>Respuestas</u>

1. a) 1 b) 3 c) $\frac{1}{4}$ d) $f'(2)=-\frac{1}{4}$ $f'(-2)=-\frac{1}{4}$. Las ecuaciones de las rectas tangentes quedan: $y=-\frac{1}{4}x+1$ e $y=-\frac{1}{4}x-1$ e) $-\frac{1}{16}$ f) 2

2. a) $f'(x)=1$ b) $f'(x)=2x$ c) $f'(x)=3x^2$ d) $f'(x)=15x^2$
   e) $f'(x)=2x$ f) $f'(x)=-\frac{2}{x^3}$ g) $f'(x)=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$ h) $f'(x)=0$

3. a) $f'(x)=4x^3-6x$ b) $f'(x)=x^2-x$ c) $f'(x)=\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$ d) $f'(x)=\frac{-3}{x^4}$
   e) $f'(x)=\frac{-1}{2\sqrt{x^3}}$ f) $f'(x)=4(2x-1)$ g) $f'(x)=1-\frac{1}{2\sqrt{x}}$
   h) $f'(x)=27x^8-\frac{1}{\sqrt{x}}+\cos x$ i) $f'(x)=12x^2-2x+senx$
   j) $f'(x)=12x+7$ k) $f'(x)=3(x-2)^2$ l) $f'(x)=3(3x-1)-\frac{1}{x}$

4. a) $f'(x)=(10x+3)\cos\left(5x^2+3x\right)$ b) $f'(x)=-\frac{\operatorname{sen}\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$
   c) $f'(x)=5(\operatorname{sen}x+\cos 3x)^4(\cos x-3\operatorname{sen}3x)$ d) $f'(x)=-4(1-x)^3$ e) $f'(x)=\frac{4}{9}x$
   f) $f'(x)=\frac{4x}{\sqrt{4x^2-25}}$ g) $f'(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}$ h) $f'(x)=\frac{x\cos x^2}{\sqrt{\operatorname{sen}x^2}}$
   i) $f'(x)=\frac{2}{x}$ j) $f'(x)=\frac{1}{2x}$ k) $f'(x)=3x^2-2\operatorname{tg}x$

   l) $f'(x)=\frac{\operatorname{cotg}x}{2\sqrt{\ln(\operatorname{sen}x)}}$ ll) $f'(x)=\frac{1}{2}\operatorname{cotg}x$ m) $f'(x)=\frac{1}{4\sqrt{x+x\sqrt{x}}}$
   n) $f'(x)=\frac{-20}{(2x+3)^3}$ ñ) $f'(x)=\frac{4}{3\sqrt[3]{2x-1}}$

5. a) $f'(x)=2x\cos x-x^2\operatorname{sen}x$ b) $f'(x)=12x+7$ c) $f'(x)=\frac{\ln x+3}{3\sqrt[3]{x^2}}$
   d) $f'(x)=3x^2-12x+11$ e) $f'(x)=\frac{1}{(1-x)^2}$ f) $f'(x)=\frac{-5}{(3x+2)^2}$
   g) $f'(x)=\frac{2\operatorname{sen}x}{(1+\cos x)^2}$ h) $f'(x)=\frac{2\left(2x\ln x+x-x^2\right)}{(1-x)^3}$
   i) $f'(x)=\frac{-(1-3x)^2\left[9x\ln x+(1-3x)(\ln x+1)\right]}{3(x\ln x)^2}$

6. a) $f'(x)=e^x$ b) $f'(x)=-e^{-x}$ c) $f'(x)=a^x\ln a$ d) $f'(x)=\dfrac{\ln 2}{2\sqrt{x}}2^{\sqrt{x}}$

e) $f'(x)=\dfrac{2x5^{\ln(x^2+3)}\ln 5}{x^2+3}$ f) $f'(x)=\cos a^x.a^x.\ln a$ g) $f'(x)=3x^2.\sec^2 x^3.e^{\operatorname{tg} x^3}$

h) $f'(x)=\dfrac{1}{x}+e^x.\operatorname{sen} x^2+\cos x^2.2x.e^x$ i) $f'(x)=\dfrac{a^x\left(\ln a.x^a-ax^{a-1}\right)}{x^{2a}}$

j) $f'(x)=\operatorname{ch} x$ k) $f'(x)=\operatorname{sh} x$ l) $f'(x)=\dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x}=\operatorname{sech}^2 x$

7. a) $f'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ b) $f'(x)=\dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$ c) $f'(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$

d) $f'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ e) $f'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ f) $f'(x)=\dfrac{1}{1-x^2}$

8. a) $f'(x)=(\ln x+1)x^x$ b) $f(x)'=\left(\dfrac{\ln x}{2\sqrt{x}}+\dfrac{\sqrt{x}}{x}\right)x^{\sqrt{x}}$

c) $f'(x)=n\left[\ln\left(\dfrac{x}{n}\right)+1\right]\left(\dfrac{x}{n}\right)^{nx}$ d) $f'(x)=\left[\ln\left(\dfrac{2}{x}\right)-1\right]\left(\dfrac{2}{x}\right)^x$

e) $f'(x)=x^{\left(x^x\right)}x^x\left[(\ln x+1)\ln x+\dfrac{1}{x}\right]$ f) $f'(x)=\left(x^x\right)^x\left(2x\ln x+x\right)$

9. a) $f'(x)=\dfrac{2}{x\left(1-x^2\right)}$ b) $f'(x)=\dfrac{-2}{1-x^2}$ c) $f'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}(x-4)}$

d) $f'(x)=\dfrac{5x}{\sqrt{\operatorname{arcsen}\left(5x^2\right)}\sqrt{1-25x^4}}$ e) $f'(x)=\dfrac{-2x}{x^4+1}$ f) $f'(x)=\dfrac{-2x^3}{\sqrt{1-x^4}}$

g) $f'(x)=\dfrac{-1}{x^2}\operatorname{tg}\left(\dfrac{1+x}{x}\right).\sec\left(\dfrac{1+x}{x}\right)$ h) $f'(x)=\dfrac{-1}{x\sqrt{x^2-1}}$

i) $f(x)=\operatorname{sh}2x+3\operatorname{th}^2 x.\operatorname{sech}^2 x$ j) $f'(x)=2^{\operatorname{tg} x}\left(\ln 2.\sec^2 x.\operatorname{arctg} 2x+\dfrac{2}{1+4x^2}\right)$

k) $f'(x)=\dfrac{3x^2}{\sqrt{1+\left(x^3+1\right)^2}}$ l) $f'(x)=\sec x$ ll) $f'(x)=\dfrac{2\ln x}{x}x^{\ln x}$

11. a) $y'=\dfrac{3y-x}{y-3x}$ b) $y'=-\dfrac{2x+y}{x}$ c) $y'=\dfrac{2x^2+1}{2y\sqrt{x^2+1}}$

d) $y'=\dfrac{y}{x}-(x+y)^2$ e) $y'=\dfrac{\cos 2x-y}{\operatorname{sen} 2y+x}$ f) $y'=\dfrac{3\left(2x^2-y\right)}{3x-1}$

g) $y'=\dfrac{y^3+\dfrac{\sqrt{x}}{2x}}{4-3y^2x}$ h) $y'=\dfrac{3x^4y+x^2y^2+y^5}{x^5+3xy^4}$ i) $y'=\dfrac{-e^{x+y}+e^{x-y}}{e^{x+y}+e^{x-y}}$