

Trabajo práctico N° 7 (integral definida)

1. Calcule las siguientes integrales aplicando la Regla de Barrow.

a) $\int_{-1}^5 (x+1)dx$ b) $\int_{-1}^{-3} (x^2 - 7x + 2)dx$ c) $\int_1^4 x(\sqrt{x} - 3)dx$
 d) $\int_0^1 xe^x dx$ e) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(5x)dx$ f) $\int_0^5 \sqrt{25-x^2} dx$

Respuestas:

a) 18 b) $-\frac{122}{3}$ c) $-\frac{101}{10}$ d) 1 e) $\frac{\pi}{4}$ f) $\frac{25\pi}{4}$

2. Sabiendo que $\int_a^c f(x)dx = 1,5$ y $\int_b^c f(x)dx = -1$ calcule $\int_a^b f(x)dx$

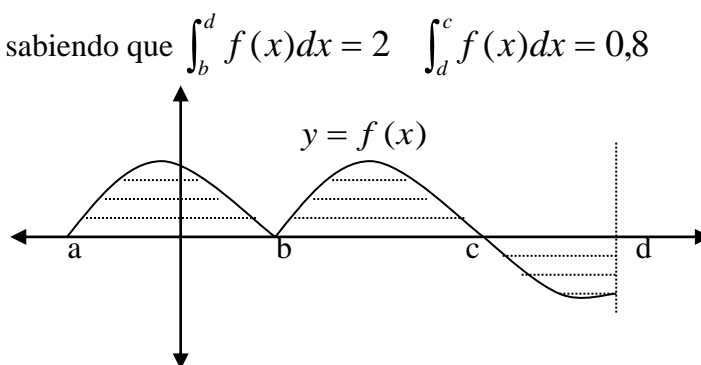
Resp: 2,5

3. **Optativo.** Calcule el área de la figura sabiendo que $\int_b^d f(x)dx = 2$ $\int_d^c f(x)dx = 0,8$

$\int_a^b f(x)dx = \int_b^c f(x)dx$

¿Cuánto vale $\int_a^d f(x)dx$

¿Por qué la diferencia?



Respuestas: 6,4 y 4,8

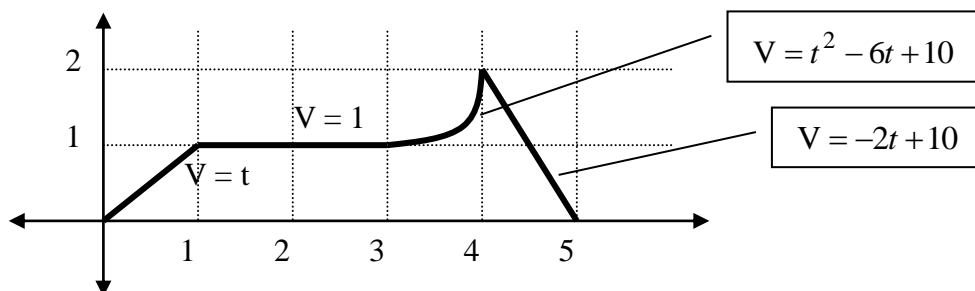
4. **Optativo.**

La velocidad de un móvil varía según la ecuación $V(t) = 0,5t$ medida en m/s. Grafique.

Sabiendo que en $t = 0$, $x = 2$, ¿qué distancia recorrió el móvil entre los 3 segundos y los 8 segundos? Compare los resultados obtenidos con el área bajo la curva de la función velocidad.

5. **Optativo.**

Analice la distancia recorrida por un móvil cuya función velocidad viene dada por esta gráfica:



6. Calcule el área del recinto limitado como se indica y grafique.

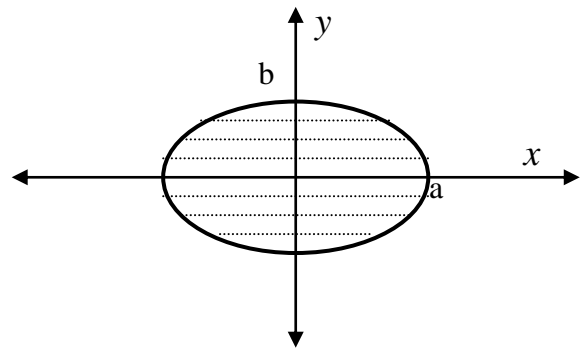
- a) La senoide y el eje x en un período completo.
 b) $f(x) = \ln x$ y las rectas $x = 1$ y $x = e$.

- c) El eje x , la curva $y = x^2 + 2$, la recta $x = 2$ y el eje de las ordenadas.
- d) El eje x , la curva $y = 2\sqrt{x}$ entre $x = 4$ y $x = 9$.
- e) La curva $y = x^2$, la recta $y = 4$ y el eje y .
- f) La parábola $y = x^2 - 2x + 2$, su recta tangente en $x = 3$ y los ejes coordenados.
- g) La curva $y = \sqrt{2x - 1}$, su recta tangente en $x = 3$ y los ejes coordenados.
- h) La parábola $y = x^2 - 4x + 3$ y las rectas $x = 0$ $y = 0$ $y = -x + 7$.
- i) Área de la elipse definida por: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.
- j) La curva $y = \frac{1}{1 - x^2}$, el eje x entre $x = 0$ y $x = \frac{1}{2}$.

Solución punto i):

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow y = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$$

$$A = 4 \int_0^a \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2} dx = 4 \frac{b}{a} \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx.$$



$$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{1}{2} \left(x \sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \arcsen \frac{x}{a} \right) \text{ (Integral que sacamos de la tabla)}$$

$$\text{Nos queda: } A = 4 \frac{b}{a} \cdot \frac{1}{2} \left(x \sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \arcsen \frac{x}{a} \right) \Big|_0^a = 2 \frac{b}{a} \left(a^2 \frac{\pi}{2} - 0 \right) \Rightarrow A = ab\pi$$

Si los semiejes son iguales $a = b = r$, nos queda el área de un círculo: $A = \pi \cdot r^2$

Respuestas:

- | | | | | |
|-------------------|-----------------------------|-------------------|-------------------|----------------------|
| a) 4 | b) 1 | c) $\frac{20}{3}$ | d) $\frac{76}{3}$ | e) $\frac{16}{3}$ |
| f) $\frac{23}{8}$ | g) $\frac{13}{30} \sqrt{5}$ | h) $\frac{52}{3}$ | i) $A = ab\pi$ | j) $\frac{\ln 3}{2}$ |

7. Calcule las siguientes áreas y grafique:

- a) Área limitada por $f(x) = \sqrt{x}$ y $g(x) = x^2$.
- b) Área limitada por $f(x) = -x^2 + 8$ y $g(x) = x - 4$.
- c) Área limitada por $f(x) = x^3 - x$ y $g(x) = x^2$.

d) Área limitada por $f(x) = x^2 + 2x - 1$ y $g(x) = -x + 1$.

e) Área limitada por $f(x) = x^2 - 2x - 2$ y $g(x) = x + 2$.

f) Área limitada por $y^2 = 2x$ y $x^2 = 2y$.

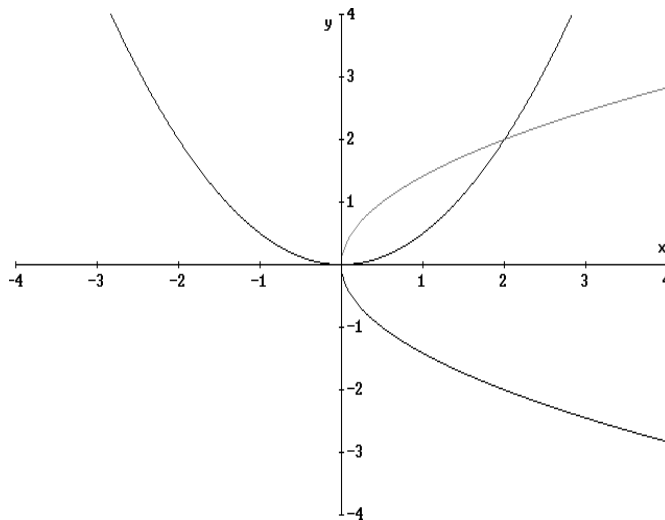
g) Área limitada por las parábolas de eje horizontal $y^2 = 8(x + 2)$ e $y^2 = 32(8 - x)$.

h) Área limitada por $f(x) = \frac{3}{x}$ y $g(x) = -2x + 7$

Solución punto f): $y^2 = 2x$ y $x^2 = 2y$ de la primera $y = \pm\sqrt{2x}$, de la segunda $y = \frac{x^2}{2}$.

Con esto encontramos primero las abscisas de los puntos de intersección

$$\frac{x^2}{2} = \pm\sqrt{2x} \Rightarrow \frac{x^4}{4} = 2x \Rightarrow \frac{x^4}{4} - 2x = 0 \Rightarrow x_1 = 0; x_2 = 2$$



Teniendo en cuenta que la curva que está por "encima" es $y = \sqrt{2x}$

$$A = \int_0^2 \left(\sqrt{2x} - \frac{x^2}{2} \right) dx = \left[\frac{2}{3} \sqrt{2x^3} - \frac{x^3}{6} \right]_0^2 = \frac{8}{3} - \frac{4}{3} \Rightarrow A = \frac{4}{3}$$

Respuestas:

- | | | | |
|--------------------|--------------------|--------------------|-----------|
| a) $\frac{1}{3}$ | b) $\frac{343}{6}$ | c) 1,0833 | d) 11,682 |
| e) $\frac{125}{6}$ | f) $\frac{4}{3}$ | g) $\frac{320}{3}$ | h) 3,37 |

8. Dada $f(x) = \ln\left(\frac{x}{2} - 3\right)$ calcule el área de la región encerrada por la curva dada, el eje x y

las rectas $x = 7$ y $x = 9$. Grafique.

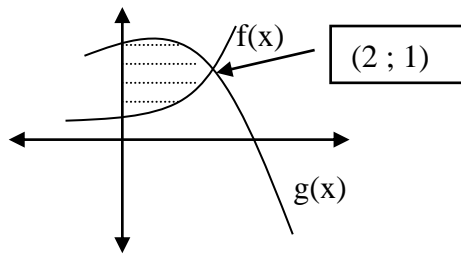
Resp: 0,5232

9. Calcule el área limitada por $y = 2^x$, $y = 2^{-x}$ y $x = 4$. Grafique.

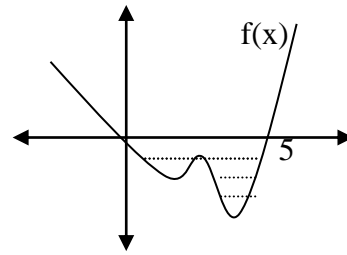
Resp: 20,2878

10. Exprese mediante integrales el área de las regiones sombreadas.

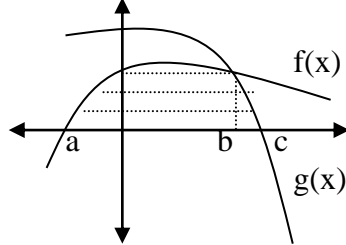
a)



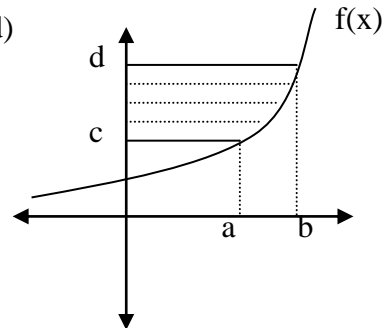
b)



c)

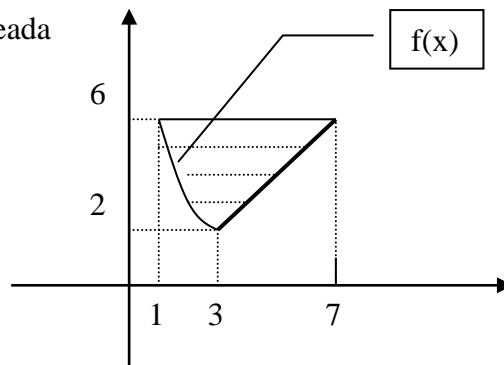


d)



11. Sabiendo que el área de la región sombreada vale 10, calcule $\int_1^3 f(x) dx$.

Resp: A=10



12. Rectificación de arcos.

La rectificación de arcos resulta una de las aplicaciones de las integrales. Basta con utilizar la siguiente fórmula para poder hallar la longitud de una curva entre dos puntos a y b considerados

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$$

- Calcule la longitud del segmento de recta $y = x$, entre $x = 0$ y $x = 1$. Grafique, verifique el resultado geoméricamente.
- Calcule la longitud de una circunferencia de radio R .
- Calcule la longitud del arco correspondiente a la parábola $y = x^2$ desde el origen hasta el punto $x = 4$.
- Calcule la longitud del arco correspondiente al gráfico de $f(x) = x^{\frac{3}{2}}$ entre los puntos $(0; 0)$ y $(4; 8)$.
- Calcule la longitud del arco correspondiente al gráfico de $9y^2 = (x^2 + 2)^3$ desde el origen hasta $x = 2$.

f) Calcule la longitud total de la astroide $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$.

Solución punto f): $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$

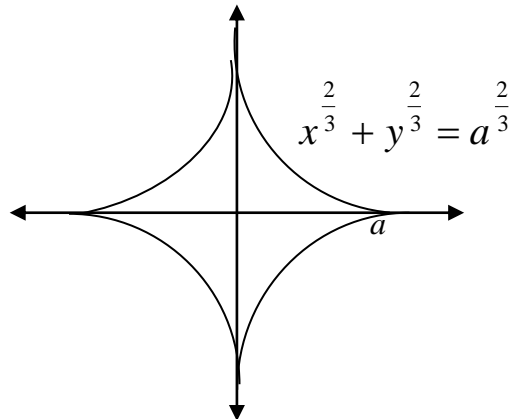
$$L = 4 \int_0^a \sqrt{1 + f'(x)^2} dx$$

$$y = \left(a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}} \right)^{\frac{3}{2}} \Rightarrow y' = - \frac{\left(a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}} \right)^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{3}}}$$

$$(y')^2 = \frac{a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}} \Rightarrow (y')^2 = \frac{a^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}} - 1$$

Reemplazando en la integral queda:

$$L = 4 \int_0^a \sqrt{\frac{a^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}}} dx \Rightarrow L = 4 \int_0^a \frac{a^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}} dx \Rightarrow L = 4a^{\frac{1}{3}} \left[\frac{3}{2} x^{\frac{2}{3}} \right]_0^a \Rightarrow L = 6a$$



Respuestas:

- c) 16,8186 d) 9,0734 e) $\frac{14}{3}$ f) $L = 6a$

13. **Área de superficies de revolución.**

Al igual que en el caso anterior, mediante la fórmula que se muestra a continuación, es posible aplicar integrales al cálculo de áreas de superficies de revolución

$$A = 2\pi \cdot \int_a^b f(x) \cdot \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$$

- a) Calcule el área de una esfera de radio R.
- b) Calcule el área de la superficie de revolución generada en la rotación alrededor del eje x de $y^2 = 12x$ entre $x = 0$ y $x = 3$.
- c) Ídem si $y = 3x$ desde $x = 0$ hasta $x = 1$.
- d) Ídem alrededor del eje y.
- e) Área alrededor del eje y de $x = y^3$ entre $y = 0$ e $y = 1$.

f) Área alrededor del eje x de $y = 2\sqrt{x}$ entre $x = 0$ y $x = 4$.

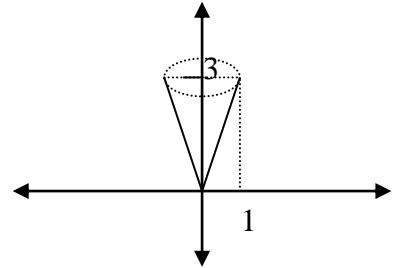
g) Área de la elipse $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$ alrededor del eje x .

h) Área de la astroide $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ al girar alrededor de uno de los ejes.

Solución punto d):

Consideramos $x = f(y) \Rightarrow x = \frac{1}{3}y$

$\begin{cases} \text{Si } x = 0 \Rightarrow y = 0 \\ \text{Si } x = 1 \Rightarrow y = 3 \end{cases}$ Estos son los límites de integración.



$$A = 2\pi \int_0^3 f(y) \sqrt{1 + f'(y)^2} dy = 2\pi \int_0^3 \frac{1}{3}y \sqrt{1 + \left(\frac{1}{3}\right)^2} dy$$

$$A = \frac{2}{9}\pi\sqrt{10} \left[\frac{y^2}{2} \right]_0^3 \Rightarrow A = \pi\sqrt{10}$$

Respuestas:

- | | | | |
|--------------------------------------|------------------------------------|--|--------------------------|
| a) $4\pi R^2$ | b) $24\pi(2\sqrt{2} - 1)$ | c) $3\pi\sqrt{10}$ | d) $\pi\sqrt{10}$ |
| e) $\frac{\pi}{27}(10\sqrt{10} - 1)$ | f) $\frac{8}{3}\pi(5\sqrt{5} - 1)$ | g) $8\pi\left(\frac{4}{9}\sqrt{3}\pi + 1\right)$ | h) $\frac{12}{5}\pi a^2$ |

14. Optativo. Volumen de sólidos de revolución.

$$V = \pi \cdot \int_a^b [f(x)]^2 dx$$

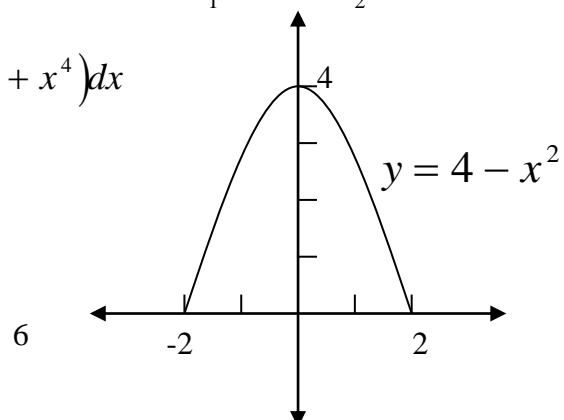
- a) Calcule el volumen de una esfera.
 b) Calcule el volumen engendrado por un arco de senoide al girar alrededor del eje x .
 c) Calcule el volumen engendrado por $y = 4 - x^2$ al girar alrededor del eje x .
 d) Ídem para la astroide $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$.
 e) Ídem para $y = \frac{1}{x}$ entre $x = 1$ y $x = 3$.

Solución punto c): $y = 4 - x^2$

Determinamos los límites de integración: $4 - x^2 = 0 \Rightarrow x_1 = -2 \quad x_2 = 2$

$$V = \pi \int_{-2}^2 (4 - x^2)^2 dx = \pi \int_{-2}^2 (16 - 8x^2 + x^4) dx$$

$$V = \pi \left[16x - \frac{8}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 \right]_{-2}^2$$



$$V = \frac{512}{15} \pi$$

Respuestas:

- a) $\frac{4}{3} \pi R^3$ b) $\frac{1}{2} \pi^2$ c) $\frac{512}{15} \pi$ d) $\frac{32}{105} \pi a^3$ e) $\frac{2}{3} \pi$

15. Integrales impropias

a) Calcule: $\int_1^{+\infty} e^{-x} dx$. Interprete geoméricamente el resultado.

b) Calcule: $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx$. Interprete geoméricamente el resultado.

c) Calcule: $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$. Interprete geoméricamente el resultado.

d) Calcule: $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^x}{1+e^{2x}} dx$. Interprete geoméricamente el resultado.

Solución punto d): $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^x}{1+e^{2x}} dx$

Como el integrando es una función continua, la integral impropia se resuelve haciendo:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^x}{1+e^{2x}} dx = \int_{-\infty}^a \frac{e^x}{1+e^{2x}} dx + \int_a^{+\infty} \frac{e^x}{1+e^{2x}} dx.$$

Ahora resolvemos la integral: $\int \frac{e^x}{1+e^{2x}} dx = \int \frac{e^x}{1+(e^x)^2} dx =$

Con la sustitución $t = e^x$, nos queda $= \int \frac{e^x}{1+t^2} \frac{dt}{e^x} = \int \frac{1}{1+t^2} dt = \arctg e^x + c$

Elegimos $a = 0$ y tenemos: $\left[\arctg e^x \right]_{-\infty}^0 + \left[\arctg e^x \right]_0^{+\infty} =$

$$\left[\arctg 1 - \lim_{x \rightarrow -\infty} \arctg e^x \right] + \left[\lim_{x \rightarrow +\infty} \arctg e^x - \arctg 1 \right] = \left[\frac{\pi}{4} - 0 \right] + \left[\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right] = \frac{\pi}{2}$$

Nota: $\lim_{x \rightarrow -\infty} \arctg e^x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \arctg e^{-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \arctg \frac{1}{e^x} = \arctg 0 = 0$

Respuestas

a) $\frac{1}{e}$

b) $+\infty$

c) π

d) $\frac{\pi}{2}$