TEMA 7: RECURSIVIDAD

ALGORITMOS Y ESTRUCTURAS DE DATOS

M. Colebrook Santamaría
J. Riera Ledesma
J. Hernández Aceituno

Objetivos

- Concepto de recursividad
- Diseño de algoritmos recursivos
- Ejecución de un módulo recursivo
- Ejemplo de funciones recursivas
- Ejemplos más complejos
- Simulación de recursividad mediante una pila
- ¿Recursividad o iteración?

Concepto de recursividad (1)

- La recursividad constituye una de las herramientas más potentes en programación.
- Una función que se llama a sí misma se denomina **recursiva.**
- Por ejemplo, tenemos la siguiente definición recursiva para calcular el **factorial** de un número entero:

$$n! = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ n \cdot (n - 1)! & \text{si } n > 0 \end{cases}$$

- **Ventaja**: no es necesario definir la secuencia de pasos exacta para resolver el problema.
- **Desventaja**: podría ser menos eficiente.

Concepto de recursividad (2)

- Para que una **definición recursiva** esté completamente identificada es necesario tener un **caso base**, que no se calcule utilizando casos anteriores, y que la división del problema converja a ese caso base.

- En el ejemplo anterior del factorial, el caso base es: $0! = 1$

- Si aplicamos la definición recursiva del factorial a $n = 4$, obtenemos la siguiente traza:

$$
\begin{aligned}
4! &= 4 \cdot 3! \\
&= 4 \cdot 3 \cdot 2! \\
&= 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1! \\
&= 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 0! \\
&= 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 \\
&= 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \\
&= 4 \cdot 3 \cdot 2 \\
&= 4 \cdot 6 \\
&= 24
\end{aligned}
$$

Concepto de recursividad (3)

- Otro ejemplo:

$$x^n = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ x \cdot x^{n-1} & \text{si } n > 0 \end{cases}$$

- Si aplicamos esta definición con $x = 2$, y $n = 4$, tenemos que:

$$\begin{aligned} 2^4 &= 2 \cdot 2^3 \\ &= 2 \cdot 2 \cdot 2^2 \\ &= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2^1 \\ &= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2^0 \\ &= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1 \\ &= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \\ &= 2 \cdot 2 \cdot 4 \\ &= 2 \cdot 8 \\ &= 16 \end{aligned}$$

Diseño de algoritmos recursivos (1)

- Para poder resolver un problema de forma recursiva, el primer paso será el diseño de un **algoritmo recursivo**.
- Para ello, hay que descomponer el problema de forma que su solución quede definida en **función de ella misma**, pero para un tamaño menor, además de incluir la tarea para el **caso base**.
- Por tanto, tendremos que diseñar:
    - Caso base
    - Caso general
    - Solución en términos de dichos casos

Diseño de algoritmos recursivos (2)

- **Caso base**: son los casos del problema que se resuelven con un segmento de código **sin** recursividad.

Siempre debe existir **al menos** un caso base

El número y forma de los casos base son arbitrarios. La solución será mejor cuanto más simple y eficiente resulte el conjunto de casos seleccionados.

Diseño de algoritmos recursivos (3)

- **Casos generales**: si el problema es suficientemente complejo, la solución se expresa de forma recursiva como la **unión** de:
    1. La solución de **uno o más subproblemas**, de igual naturaleza pero **menor tamaño**.
    2. Un conjunto de pasos adicionales. Estos pasos adicionales, junto con las soluciones a los subproblemas, componen la solución al problema general que queremos resolver.

> Los casos generales siempre deben **avanzar** hacia un caso base.

Diseño de algoritmos recursivos (4)

```
unsigned int factorial(unsigned int n)
{
  unsigned int resultado;

  // caso base
  if (n == 0) resultado = 1;
  // caso general
  else        resultado = n * factorial(n - 1);

  return resultado;
}
```

Diseño de algoritmos recursivos (5)

```
unsigned int factorial(unsigned int n)
{
  // caso base
  if (n == 0) return 1;
  // caso general
  else        return n * factorial(n - 1);
}
```

- ¿Se puede simplificar aún más este código?

Ejecución de un módulo recursivo (1)

- En general, en la **pila del sistema** se almacena el entorno asociado a las distintas funciones que se van activando.
- En particular, en un **módulo recursivo**, cada llamada recursiva genera una **nueva zona de memoria** en la **pila del sistema**, la cual es independiente del resto de llamadas.

Ejecución de un módulo recursivo (1)

- Por ejemplo, la ejecución del factorial:
  1. Dentro del factorial, cada llamada del tipo:

     ```
     n * factorial(n - 1)
     ```

     genera una nueva zona de memoria en la pila del sistema.
  2. El proceso anterior se repite hasta que la condición del caso base se cumple:
     - Se ejecuta la sentencia de retorno del valor `1`.
     - Empieza la vuelta atrás de la recursión, se evalúan las expresiones y se ejecutan los **`return`** que estaban pendientes.

Ejecución de un módulo recursivo (2)

```
factorial(3); // n = 3

return 3 * factorial(2); // n = 2

           return 2 * factorial(1); // n = 1

                      return 1 * factorial(0); // n = 0
                                 return 1;

                      // 1 * 1 = 1

           // 2 * 1 = 2

// 3 * 2 = 6
```

```
factorial(3)   = 3 * factorial(2)
               = 3 * 2 * factorial(1)
               = 3 * 2 * 1 * factorial(0)
               = 3 * 2 * 1 * 1 = 6
```

Ejemplos de funciones recursivas (1)

- Cálculo de la potencia:

$$x^n = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ x \cdot x^{n-1} & \text{si } n > 0 \end{cases}$$

Ejemplos de funciones recursivas (1)

- Cálculo de la potencia:

$$x^n = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ x \cdot x^{n-1} & \text{si } n > 0 \end{cases}$$

```
float potencia(const float base, const unsigned int expo)
{
  if (expo == 0) return 1;
  else           return base * potencia(base, expo - 1);
}
```

Ejemplos de funciones recursivas (2)

- Cálculo del producto de un entero *a* por otro entero no negativo *b*:

$$\text{producto}(a, b) = \begin{cases} 0 & \text{si } b = 0 \\ a + \text{producto}(a, b - 1) & \text{si } b > 0 \end{cases}$$

Ejemplos de funciones recursivas (2)

- Cálculo del producto de un entero *a* por otro entero no negativo *b*:

$$\text{producto}(a, b) = \begin{cases} 0 & \text{si } b = 0 \\ a + \text{producto}(a, b - 1) & \text{si } b > 0 \end{cases}$$

```
int producto(const int a, const unsigned int b)
{
  if (b == 0) return 0;
  else        return a + producto(a, b - 1);
}
```

Ejemplos de funciones recursivas (3)

- Suma recursiva de los elementos de un vector:

$$\sum_{i = 0}^{n - 1} V[i] = \text{sumatorio}(V, n) = \begin{cases} V[0] & \text{si } n = 1 \\ V[n - 1] + \text{sumatorio}(V, n - 1) & \text{si } n > 1 \end{cases}$$

Ejemplos de funciones recursivas (3)

- Suma recursiva de los elementos de un vector:

$$\sum_{i=0}^{n-1} V[i] = \text{sumatorio}(V, n) = \begin{cases} V[0] & \text{si } n = 1 \\ V[n-1] + \text{sumatorio}(V, n-1) & \text{si } n > 1 \end{cases}$$

```
int sumatorio(const int *V, const unsigned int n) {
  if (n == 1) return V[0];
  else        return V[n - 1] + sumatorio(V, n - 1);
}
```

```
int n = 10, *V = new int[n];
// rellenar V
cout << sumatorio(V, n) << endl;
delete[] V;
```

Ejemplos de funciones recursivas (4)

- Búsqueda recursiva del máximo elemento de un vector:

$$\text{máximo}(V, n) = \begin{cases} V[0] & \text{si } n = 1 \\ \max(V[n-1], \text{máximo}(V, n-1)) & \text{si } n > 1 \end{cases}$$

Ejemplos de funciones recursivas (4)

- Búsqueda recursiva del máximo elemento de un vector:

$$\text{máximo}(V, n) = \begin{cases} V[0] & \text{si } n = 1 \\ \max(V[n - 1], \text{máximo}(V, n - 1)) & \text{si } n > 1 \end{cases}$$

```
int maximo(int *V, unsigned int n) {
  if (n == 1) return V[0];
  else        return max(V[n - 1], maximo(V, n - 1));
}
```

Ejemplos de funciones recursivas (5)

- Sucesión de Fibonacci:

$$\mathrm{Fib}(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n \leq 1 \\ \mathrm{Fib}(n - 1) + \mathrm{Fib}(n - 2) & \text{si } n > 1 \end{cases}$$

Ejemplos de funciones recursivas (5)

- Sucesión de Fibonacci:

$$\mathrm{Fib}(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n \leq 1 \\ \mathrm{Fib}(n-1) + \mathrm{Fib}(n-2) & \text{si } n > 1 \end{cases}$$

```
unsigned fib(unsigned n) {
  if (n <= 1) return 1;
  else        return fib(n-1) + fib(n-2);
}
```

Ejemplos de funciones recursivas (6)

```
unsigned fib(unsigned n) { // enfoque recursivo
  if (n <= 1) return 1;
  else        return fib(n-1) + fib(n-2);
}

unsigned fib(unsigned n) { // enfoque iterativo
  unsigned anterior1 = 1, anterior2 = 1, actual = 1;
  for (unsigned i = 2; i <= n; i++) {
    actual = anterior1 + anterior2;
    anterior1 = anterior2;
    anterior2 = actual;
  }
  return actual;
}
```

Ejemplos de funciones recursivas (7)

- Coeficiente binomial:

$$C(n, k) = \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} = \begin{cases} 1 & \text{si } k = 0 \text{ ó } k = n \\ C(n - 1, k - 1) + C(n - 1, k) & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Ejemplos de funciones recursivas (7)

- Coeficiente binomial:

$$C(n, k) = \binom{n}{k} = \begin{cases} 1 & \text{si } k = 0 \text{ ó } k = n \\ C(n - 1, k - 1) + C(n - 1, k) & \text{en otro caso} \end{cases}$$

```
unsigned int C(unsigned int n, unsigned int k) {
  if (k == 0 || k == n) return 1;
  else                  return C(n-1, k-1) + C(n-1, k);
}
```

Ejemplos más complejos: BBR (1)

- **Búsqueda binaria recursiva (BBR)**: dado un vector <u>ordenado</u> **`v`** de forma ascendente, la búsqueda de un elemento **`x`** entre dos posiciones (**`i`**: izquierda, **`d`**: derecha) se puede realizar comparando el valor buscado **`x`** con el elemento central **`c`** `= (i+d)/2`.
  - Si **`v[c] == x`**, se devuelve la posición **`c`**.
  - Si **`x < v[c]`**, la búsqueda continúa en el subvector izquierdo **`v[i..c-1]`**.
  - Si **`v[c] < x`**, la búsqueda continúa en el subvector derecho **`v[c+1..d]`**.

Ejemplos más complejos: BBR (2)

- La función de BBR retorna la **posición** en el vector **`v`** en la que se encuentra **`x`** o, si no se encuentra, retorna **`-1`**. La cabecera de la función es:

```
int BBR(int v[], int i, int d, int x)
```

- Por tanto, el algoritmo recursivo debería ser:

1. Si **`i ≤ d`**, calcular la posición **`c = ⌊(i+d)/2⌋`**.
2. Si **`v[c] == x`**, retornar **`c`** (caso base de **éxito**).
3. Si **`x < v[c]`**, buscar **`x`** en el subvector izquierdo:
   `BBR(v, i, c-1, x)`
4. Si **`v[c] < x`**, buscar **`x`** en el subvector derecho:
   `BBR(v, c+1, d, x)`
5. Si **`i > d`**, retornar -1 (caso base de **fracaso**)

Ejemplos más complejos: BBR (3)

- Vamos a aplicar el algoritmo anterior a este vector **v** para encontrar el valor **`x = 21`**.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
`v:`	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89
`v[c] < x:`	i				c					d
`x < v[c]:`						i		c		d
`v[c] < x:`						c=i	d			
ÉXITO:							c=i=d			

Ejemplos más complejos: BBR (4)

- Si volvemos a aplicar el mismo algoritmo para buscar el valor **`x = 22`**, nos retornaría **`-1`**.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
`v:`	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89
`v[c] < x:`	i				c					d
`x < v[c]:`						i		c		d
`v[c] < x:`						c=i	d			
`v[c] < x:`							c=i=d			
FRACASO:							d	i		

Ejemplos más complejos: BBR (5)

```
int BBR(int v[], int i, int d, int x)
{
  if (i > d) return -1;
  int c = (i + d) / 2;
  if (v[c] == x) return c;
  if (x < v[c])  return BBR(v, i, c - 1, x);
  if (v[c] < x)  return BBR(v, c + 1, d, x);
}
```

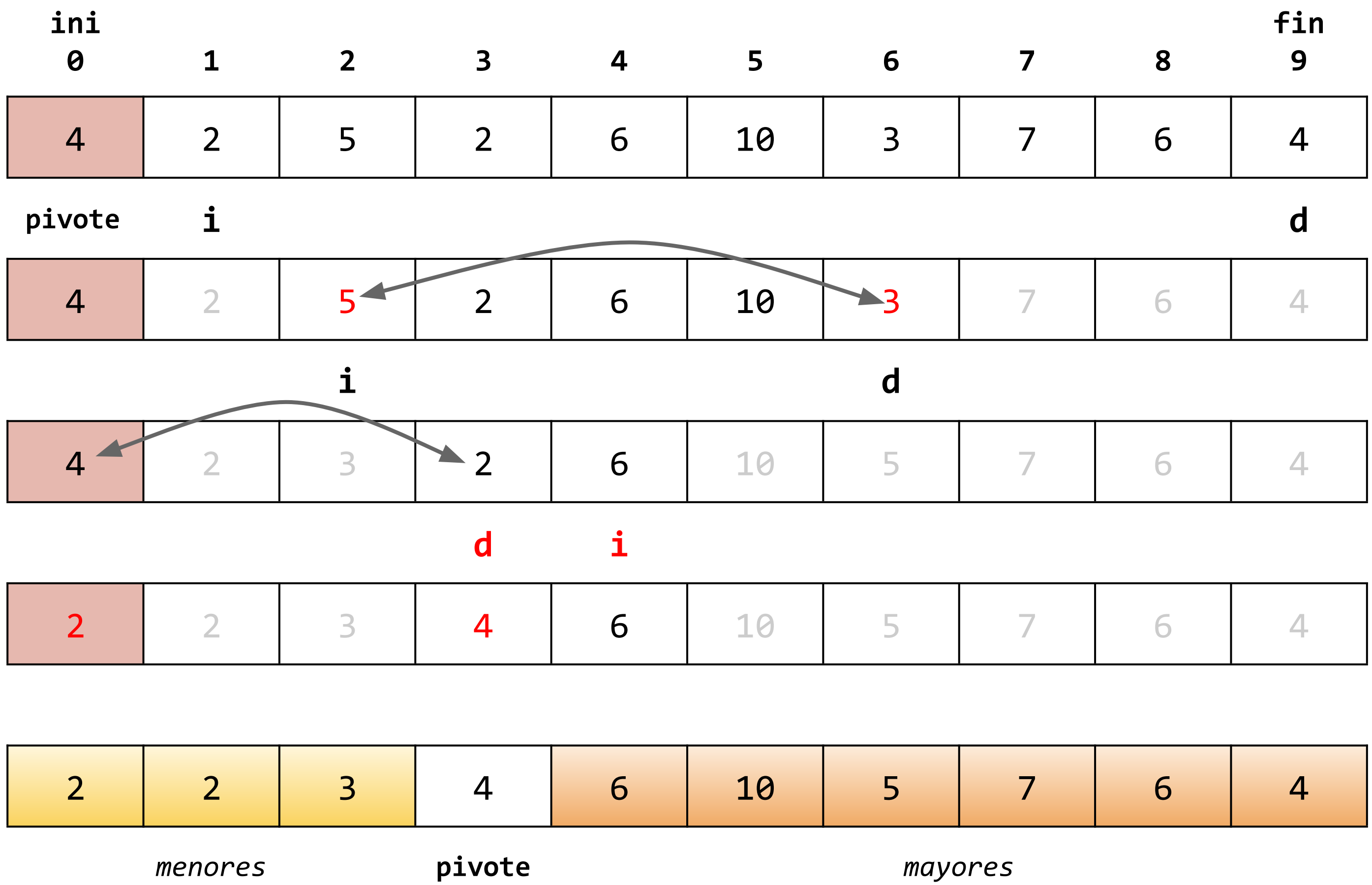
Ejemplos más complejos: OR (1)

- **Ordenación Rápida (OR)**:

1. Se toma un **elemento arbitrario** del vector, al que denominaremos **pivote**. Sea **p** su valor.
2. Se recorre el vector de **izquierda a derecha** hasta encontrar un elemento situado en una posición **`i`** tal que **`v[i] > p`**.
3. Se recorre el vector de **derecha a izquierda** hasta encontrar un elemento situado en una posición **`d`** tal que **`v[d] < p`**.
4. Una vez localizados, se intercambian los elementos situados en las casillas **`i`** y **`d`**, de forma que los valores quedarían **`v[i] < p < v[d]`**.
5. Repetir hasta que los dos recorridos se encuentren (**`d < i`**).
6. Finalmente, colocamos el pivote en el sitio que le corresponde (si se tomó **`v[0]`** como **`p`**, basta intercambiarlo con **`v[d]`**). El vector queda dividido en dos subvectores, a los que se aplicaría el mismo proceso.

Ejemplos más complejos: OR (2)

- Ejemplo:



Ejemplos más complejos: OR (3)
Implementación iterativa

```
int partir(int *v, int ini, int fin) {
int i = ini + 1, d = fin, p = v[ini];
  while (i <= d) {
    while (i <= d && v[i] <= p) i++;
    while (i <= d && p <= v[d]) d--;
    if (i < d) swap(v[i++], v[d--]);
  }
  swap(v[ini], v[d]);
  return d;
}
```

Ejemplos más complejos: OR (4)

Implementación Recursiva

```
void OR(int *v, int i, int d) {
   if (i < d) {
       int pivote = partir(v, i, d);
       OR(v, i, pivote - 1);
       OR(v, pivote + 1, d);
     }
   }
int *v = new int[n];
// cargar datos en v
OR(v, 0, n - 1);
// usar los datos de v
delete[] v;
```

Simulación de recursividad mediante una pila (1)

```
unsigned factorial(unsigned n) {
  unsigned resultado, siguiente;
  if (n == 0) resultado = 1;
  else {
    cout << "push " << n << endl;
    siguiente = factorial(n - 1);
    cout << "pop " << siguiente << endl;
    cout << "pop " << n << endl;
    resultado = n * siguiente;
  }
  cout << "push " << resultado << endl;
  return resultado;
}
```

```
factorial(3):
   push 3
   push 2
   push 1
   push 1
   pop 1
   pop 1
   push 1
   pop 1
   pop 2
   push 2
   pop 2
   pop 3
   push 6
```

- ¿Cómo puedo simular este código con una pila?

Simulación de recursividad mediante una pila (2)

```
unsigned factorial(unsigned n) {
  stack_t<unsigned> pila;
  unsigned resultado;
  while (n > 0)
    pila.push(n--);
  pila.push(1);  // factorial(0)
  while (!pila.empty()) {
    resultado = pila.top(); pila.pop();  // siguiente
    if (!pila.empty()) {
      n = pila.top(); pila.pop();
      pila.push(n * resultado);
  } }
  return resultado;
}
```

¿Recursividad o iteración?

A la hora de diseñar un algoritmo recursivo, debemos tener en cuenta:

- El **coste computacional** (tiempo+espacio) asociado a una llamada a una función y el retorno a la función que hace la llamada.
- Algunas soluciones recursivas pueden hacer que la solución para un determinado tamaño del problema se calcule **varias veces**.
- Muchos problemas recursivos tienen como caso base la resolución del problema para un tamaño muy reducido. En ocasiones resulta **excesivamente** pequeño.
- La **solución iterativa** (igual de eficiente) puede ser muy compleja de encontrar.
- La **solución recursiva** es muy concisa, legible y elegante.

Referencias

★ Olsson, M. (2018), “C++ 17 Quick Syntax Reference”, Apress. Disponible en PDF en la BBTK-ULL: https://doi.org/10.1007/978-1-4842-3600-0

★ Stroustrup, B. (2002), “El Lenguaje de Programación C++”, Addison Wesley.

★ C++ Syntax Highlighting (código en colores): tohtml.com/cpp

★ Ecuaciones editadas con: s1.daumcdn.net/editor/fp/service_nc/pencil/Pencil_chromestore.html