Minimización de funciones booleanas

Tema 7

Universidad de La Laguna

Contenido

- Métodos de minimización
- Mapas de Karnaugh
  - 2 variables
  - 3 variables
  - 4 variables
  - 5 variables
  - 6 variables y más

Métodos de minimización

- Destacan:
  - Método algebraico
    - Es un método teórico poco operativo
  - Método de Quine-McCluscкey
    - Método potente de gran valor computacional, pero de laboriosa aplicación a mano
  - Método de los mapas de Karnaugh
    - Método gráfico poco potente, pero de fácil aplicación manual

Karnaugh, Maurice (November 1953) [1953-04-23, 1953-03-17]. "The Map Method for Synthesis of Combinational Logic Circuits" (PDF). Transactions of the American Institute of Electrical Engineers, Part I: Communication and Electronics. 72 (5): 593–599.

Universidad de La Laguna

Mapas de Karnaugh

› Para 2 variables (a,b):

	ab	m_i	M_i
0	00	$\bar{a}\bar{b}$	$a+b$
1	01	$\bar{a}b$	$a+\bar{b}$
2	10	$a\bar{b}$	$\bar{a}+b$
3	11	ab	$\bar{a}+\bar{b}$

b \ a	0	1
0	0	2
1	1	3

b \ a	0	1
0	$\bar{a}\bar{b}$ 0	$a\bar{b}$ 2
1	$\bar{a}b$ 1	ab 3

b \ a	0	1
0	$a+b$ 0	$\bar{a}+b$ 2
1	$a+\bar{b}$ 1	$\bar{a}+\bar{b}$ 3

Mapas de Karnaugh

› Para 2 variables (a,b): ejemplo 1

	ab	m_i	M_i	F
0	00	$\bar{a}\bar{b}$	$a+b$	0
1	01	$\bar{a}b$	$a+\bar{b}$	1
2	10	$a\bar{b}$	$\bar{a}+b$	1
3	11	ab	$\bar{a}+\bar{b}$	1

b \ a	0	1
0	0 (0)	1 (2)
1	1 (1)	1 (3)

b \ a	0	1
0	$\bar{a}\bar{b}$ (0)	$a\bar{b}$ (2)
1	$\bar{a}b$ (1)	ab (3)

b \ a	0	1
0	$a+b$ (0)	$\bar{a}+b$ (2)
1	$a+\bar{b}$ (1)	$\bar{a}+\bar{b}$ (3)

$$F(a,b) = a + b$$

$$F(a,b) = a\bar{b} + ab + \bar{a}b + ab = a(\bar{b}+b) + b(\bar{a}+a) = a + b$$

Los mapas de Karnaugh aplican: $XY + X\bar{Y} = X$ $\quad (X+Y)(X+\bar{Y}) = X$

$$X + X = X \qquad X \cdot X = X$$

b \ a	0	1
0	$\bar{a}\bar{b}$ 0	$a\bar{b}$ 2
1	$\bar{a}b$ 1	ab 3

Mapas de Karnaugh

› Para 2 variables (a,b): ejemplo 2

	ab	m_i	M_i	G
0	00	$\bar{a}\bar{b}$	$a+b$	1
1	01	$\bar{a}b$	$a+\bar{b}$	1
2	10	$a\bar{b}$	$\bar{a}+b$	0
3	11	ab	$\bar{a}+\bar{b}$	0

b \ a	0	1
0	1 (0)	0 (2)
1	1 (1)	0 (3)

$$G(a,b) = \bar{a}\bar{b} + \bar{a}b = \bar{a}(\bar{b}+b) = \bar{a}$$

Universidad de La Laguna

Mapas de Karnaugh

› Para 3 variables (a,b,c)

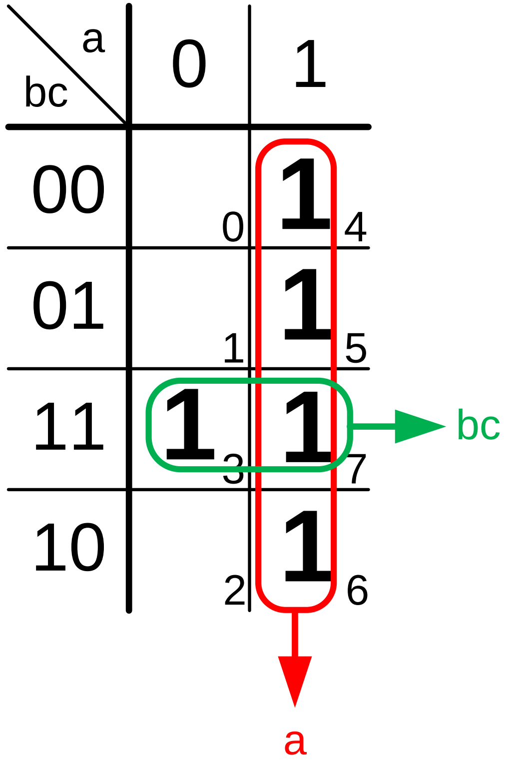
– Las últimas dos filas se permutan para conservar la adyacencia

	abc	m_i	Minitérmino	M_i	Maxitérmino
0	000	m_0	$\bar{a}\bar{b}\bar{c}$	M_0	$a+b+c$
1	001	m_1	$\bar{a}\bar{b}c$	M_1	$a+b+\bar{c}$
2	010	m_2	$\bar{a}b\bar{c}$	M_2	$a+\bar{b}+c$
3	011	m_3	$\bar{a}bc$	M_3	$a+\bar{b}+\bar{c}$
4	100	m_4	$a\bar{b}\bar{c}$	M_4	$\bar{a}+b+c$
5	101	m_5	$a\bar{b}c$	M_5	$\bar{a}+b+\bar{c}$
6	110	m_6	$ab\bar{c}$	M_6	$\bar{a}+\bar{b}+c$
7	111	m_7	abc	M_7	$\bar{a}+\bar{b}+\bar{c}$

bc \ a	0	1
00	0	4
01	1	5
11	3	7
10	2	6

Ejemplo 1

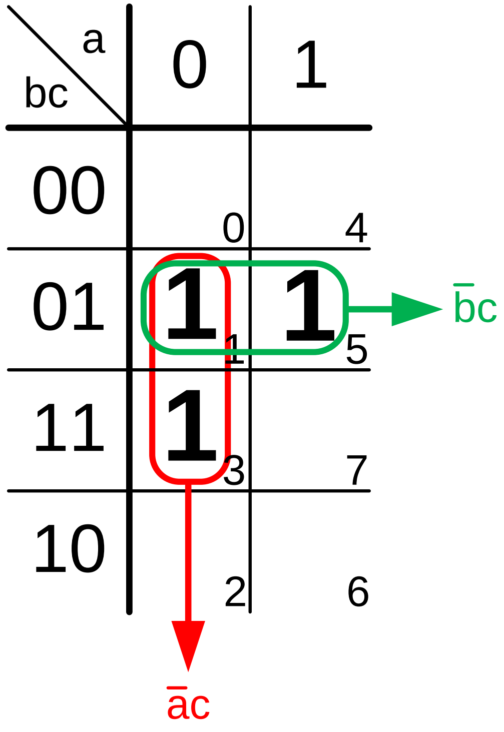
$$f(a,b,c) = \sum m(3,4,5,6,7) = m_3 + m_4 + m_5 + m_6 + m_7$$



$$f(a,b,c) = a + bc$$

Ejemplo 2

$$f(a,b,c) = m_1 + m_3 + m_5$$



$$f(a,b,c) = \bar{a}c + \bar{b}c$$

Ejemplo 3

$$f(a,b,c) = \sum m(2,3,6,7)$$

bc \ a	0	1
00	$_{0}$	$_{4}$
01	$_{1}$	$_{5}$
11	**1** $_{3}$	**1** $_{7}$
10	**1** $_{2}$	**1** $_{6}$

b

$$f(a,b,c) = b$$

Ejemplo 4

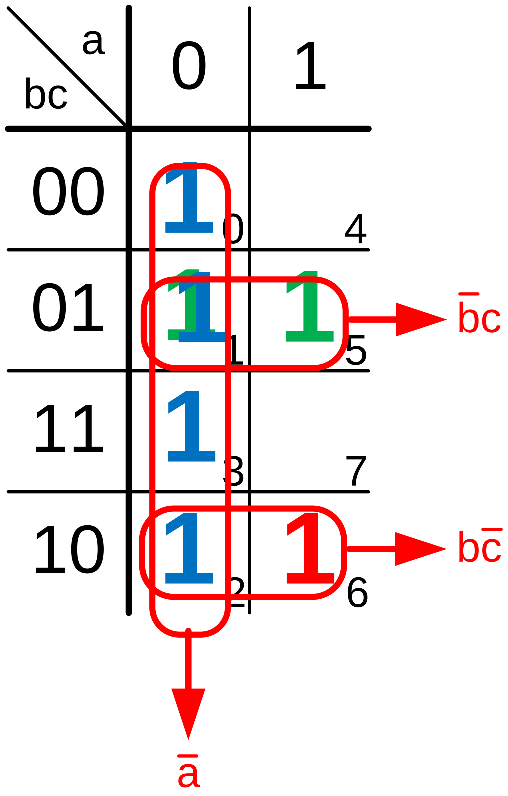
$$f(a,b,c) = \prod M(0,1,2,3,5,7) = \sum m(4,6)$$

bc \ a	0	1
00	$_{0}$	**1** $_{4}$
01	$_{1}$	$_{5}$
11	$_{3}$	$_{7}$
10	$_{2}$	**1** $_{6}$ → $a\bar{c}$

$$f(a,b,c) = a\bar{c}$$

Ejemplo 5

$$f(a,b,c) = ab\bar{c} + \bar{b}c + \bar{a}$$



$$f(a,b,c) = \bar{a} + \bar{b}c + b\bar{c}$$

Ejemplo 6: varias formas simples

$$f(a,b,c) = \sum m(0,1,2,5,6,7)$$

bc \ a	0	1
00	1 (0)	(4)
01	1 (1)	1 (5)
11	(3)	1 (7)
10	1 (2)	1 (6)

$\bar{a}\bar{c}$

$\bar{b}c$

ab

$$f(a,b,c) = \bar{a}\bar{c} + \bar{b}c + ab$$

bc \ a	0	1
00	1 (0)	(4)
01	1 (1)	1 (5)
11	(3)	1 (7)
10	1 (2)	1 (6)

$\bar{a}\bar{b}$

ac

$b\bar{c}$

$$f(a,b,c) = \bar{a}\bar{b} + ac + b\bar{c}$$

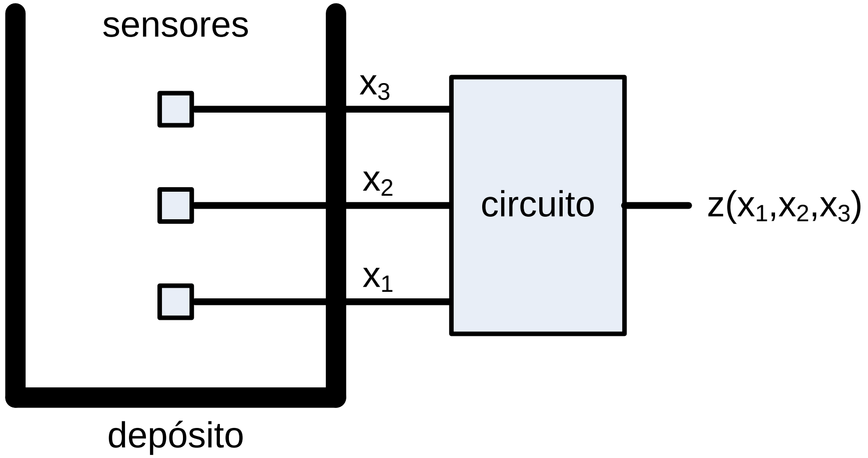
Ejemplo 7:

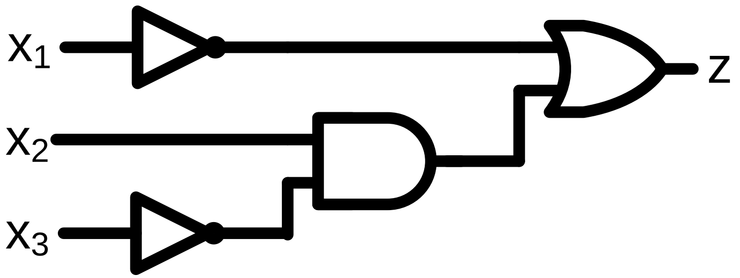
- Diseñar un circuito que produce señal 1 cuando el líquido de un depósito está por debajo del nivel x1 o bien entre x2 y x3:

x_1	x_2	x_3	z
0	0	0	1
0	0	1	X
0	1	0	X
0	1	1	X
1	0	0	0
1	0	1	X
1	1	0	1
1	1	1	0

x_2x_3 \ x_1	0	1
00	**1** $_0$	**0** $_4$
01	**X** $_1$	**X** $_5$
11	**X** $_3$	**0** $_7$
10	**X** $_2$	**1** $_6$

$\overline{x_1}$ $x_2\overline{x_3}$





$$z(x_1, x_2, x_3) = \sum m(0,6) + \sum d(1,2,3,5) = x_1 + x_2\overline{x_3}$$

Universidad de La Laguna

Mapas de Karnaugh

› Para 4 variables (a,b,c,d):

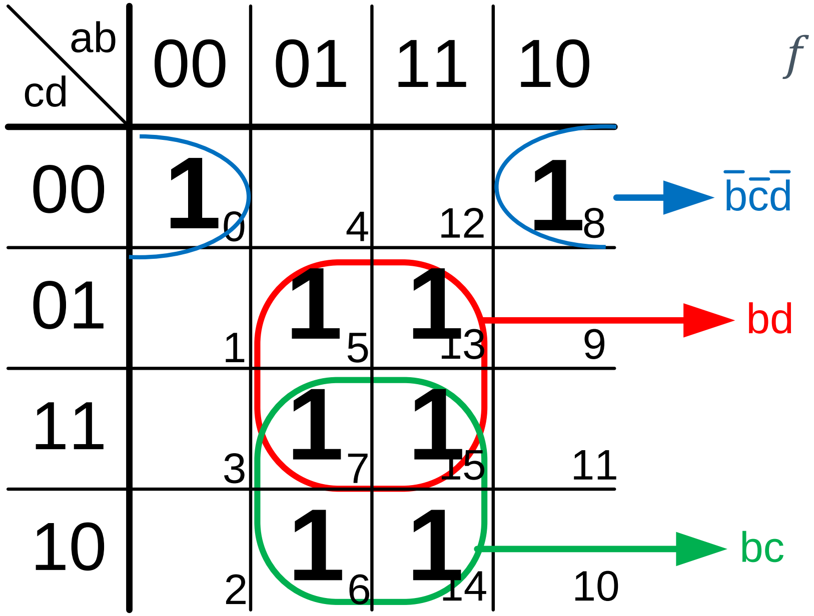
– Se permutan las 2 últimas filas y las 2 últimas columnas para conservar la adyacencia

– Adyacencias de hasta tercer orden (agrupaciones de 8 casillas para simplificar 3 variables)

cd \ ab	00	01	11	10
00	0	4	12	8
01	1	5	13	9
11	3	7	15	11
10	2	6	14	10

Ejemplo 1

$$f(a,b,c,d) = \sum m(0,5,6,7,8,13,14,15)$$



$$f(a,b,c,d) = bd + bc + \bar{b}\bar{c}\bar{d}$$

Ejemplo 2

$$f(a,b,c,d) = \sum m(0,2,4,5,6,7,8,10,11,12,14,15)$$

cd \ ab	00	01	11	10
00	1_{0}	1_{4}	1_{12}	1_{8}
01	$_{1}$	1_{5}	$_{13}$	$_{9}$
11	$_{3}$	1_{7}	1_{15}	1_{11}
10	1_{2}	1_{6}	1_{14}	1_{10}

$\bar{d}$

ac

$\bar{a}b$

$$f(a,b,c,d) = \bar{d} + \bar{a}b + ac$$

Ejemplo 3

$$f(a,b,c,d) = \sum m(1,3,4,5,10,12,13)$$

cd \ ab	00	01	11	10
00	0	1 (4)	1 (12)	8
01	1 (1)	1 (5)	1 (13)	9
11	1 (3)	7	15	11
10	2	6	14	1 (10)

$b\bar{c}$

$\bar{a}\bar{b}d$

$a\bar{b}c\bar{d}$

$$f(a,b,c,d) = b\bar{c} + \bar{a}\bar{b}d + a\bar{b}c\bar{d}$$

Ejemplo 4

$$f(a,b,c,d)=\sum m(0,2,3,5,6,7,8,10,11,14,15)$$

cd \ ab	00	01	11	10
00	1_{0}	$_{4}$	$_{12}$	1_{8}
01	$_{1}$	1_{5}	$_{13}$	$_{9}$
11	1_{3}	1_{7}	1_{15}	1_{11}
10	1_{2}	1_{6}	1_{14}	1_{10}

$\bar{b}\bar{d}$

$\bar{a}bd$

c

$$f(a,b,c,d)=c+\bar{b}\bar{d}+\bar{a}bd$$

Ejemplo 5

$$f(a,b,c,d) = \sum m(1,3,5,7,9) + \sum d(6,12,13)$$

cd \ ab	00	01	11	10
00	0	4	X 12	8
01	1 1	1 5	X 13	1 9
11	1 3	1 7	15	11
10	2	X 6	14	10

$\bar{c}d$

$\bar{a}d$

$$f(a,b,c,d) = \bar{a}d + \bar{c}d$$

Ejemplo 6: producto de sumas mínimo

$$f(a,b,c,d) = \sum m(0,2,3,4,8,10,11,15) = \prod M(1,5,6,7,9,12,13,14)$$

cd \ ab	00	01	11	10
00	1_0	1_4	0_{12}	1_8
01	0_1	0_5	0_{13}	0_9
11	1_3	0_7	1_{15}	1_{11}
10	1_2	0_6	0_{14}	1_{10}

$c+\bar{d}$

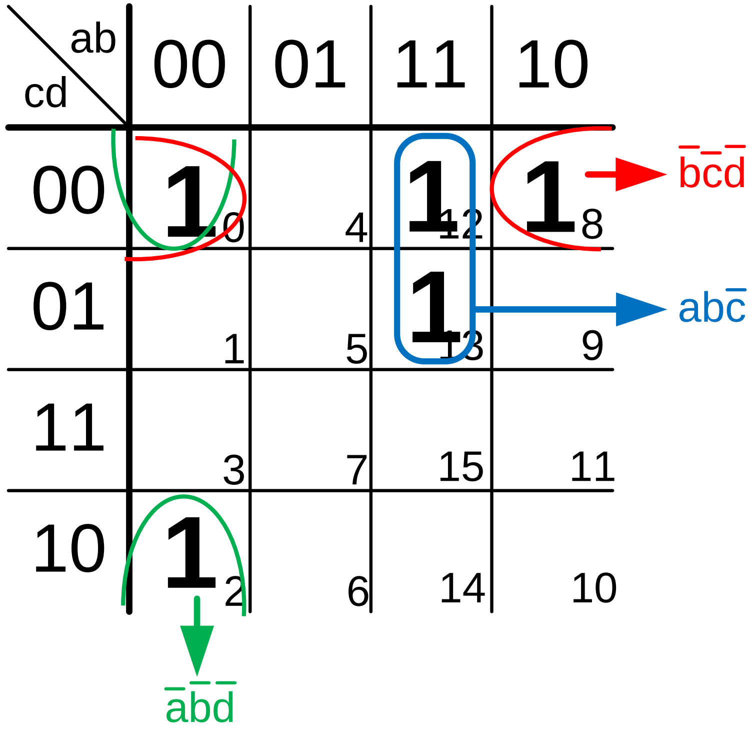
$a+\bar{b}+\bar{c}$

$\bar{a}+\bar{b}+d$

$$f(a,b,c,d) = (c+\bar{d})(a+\bar{b}+\bar{c})(\bar{a}+\bar{b}+d)$$

Ejemplo 7:

› Simplificar $f(a,b,c,d) = \sum m(0,2,8,12,13)$ mediante POS y SOP. ¿Qué realización es más económica?



$$f(a,b,c,d) = ab\bar{c} + \bar{b}\bar{c}\bar{d} + \bar{a}\bar{b}\bar{d}$$

3 AND y 1 OR

Ejemplo 7:

› Simplificar $f(a,b,c,d) = \sum m(0,2,8,12,13)$ mediante POS y SOP. ¿Qué realización es más económica?

cd \ ab	00	01	11	10
00	(0)	**0** (4)	(12)	(8)
01	**0** (1)	**0** (5)	(13)	**0** (9)
11	**0** (3)	**0** (7)	**0** (15)	**0** (11)
10	(2)	**0** (6)	**0** (14)	**0** (10)

$b+\bar d$

$\bar a+\bar c$

$a+\bar b$

$$f(a,b,c,d) = ab\bar c + \bar b\bar c\bar d + \bar a\bar b\bar d$$

3 AND y 1 OR

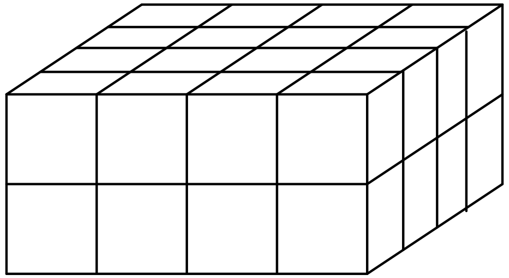
$$f(a,b,c,d) = (b+\bar d)(\bar a+\bar c)(a+\bar b)$$

3 OR y 1 AND

La segunda emplea menos transistores al tener las puertas lógicas menor número de entradas

Mapas de Karnaugh

- Para 5 variables (a,b,c,d,e):
  - 2 mapas de 4 variables
  - Adyacencias de hasta cuarto orden



a=0

de \ bc	00	01	11	10
00	0	4	12	8
01	1	5	13	9
11	3	7	15	11
10	2	6	14	10

a=1

de \ bc	00	01	11	10
00	16	20	28	24
01	17	21	29	25
11	19	23	31	27
10	18	22	30	26

Ejemplo 1

$$f(a,b,c,d,e) = \sum m(0,2,3,8,10,14,24,31)$$

$$f(a,b,c,d,e) = \bar{a}\bar{c}\bar{e} + \bar{a}\bar{b}\bar{c}d + \bar{a}bd\bar{e} + b\bar{c}\bar{d}\bar{e} + abcde$$

a=0

de \ bc	00	01	11	10
00	1 (0)	(4)	(12)	1 (8)
01	(1)	(5)	(13)	(9)
11	1 (3)	(7)	(15)	(11)
10	1 (2)	(6)	1 (14)	1 (10)

a=1

de \ bc	00	01	11	10
00	(16)	(20)	(28)	1 (24)
01	(17)	(21)	(29)	(25)
11	(19)	(23)	1 (31)	(27)
10	(18)	(22)	(30)	(26)

$\bar{a}\bar{c}\bar{e}$

$\bar{a}\bar{b}\bar{c}d$

$\bar{a}bd\bar{e}$

$b\bar{c}\bar{d}\bar{e}$

$abcde$

Ejemplo 2

$$f(a,b,c,d,e) = \sum m(1,3,5,7,9,10,11,12,14,16,18) + \sum d(20,22,24,26,28,30)$$

$$f(a,b,c,d,e) = a\bar{e} + \bar{a}\bar{b}e + \bar{a}\bar{c}e + bc\bar{e} + bd\bar{e}$$

a=0

de \ bc	00	01	11	10
00	$_{0}$	$_{4}$	1_{12}	$_{8}$
01	1_{1}	1_{5}	$_{13}$	1_{9}
11	1_{3}	1_{7}	$_{15}$	1_{11}
10	$_{2}$	$_{6}$	1_{14}	1_{10}

a=1

de \ bc	00	01	11	10
00	1_{16}	X_{20}	X_{28}	X_{24}
01	$_{17}$	$_{21}$	$_{29}$	$_{25}$
11	$_{19}$	$_{23}$	$_{31}$	$_{27}$
10	1_{18}	X_{22}	X_{30}	X_{26}

$bc\bar{e}$

$a\bar{e}$

$\bar{a}\bar{b}e$

$\bar{a}\bar{c}e$

$bd\bar{e}$

Mapas de Karnaugh

› Para 6 variables (a,b,c,d,e,f):
  – 4 mapas de 4 variables
  – Adyacencias de hasta quinto orden

ab=00

ef \ cd	00	01	11	10
00	0	4	12	8
01	1	5	13	9
11	3	7	15	11
10	2	6	14	10

ab=01

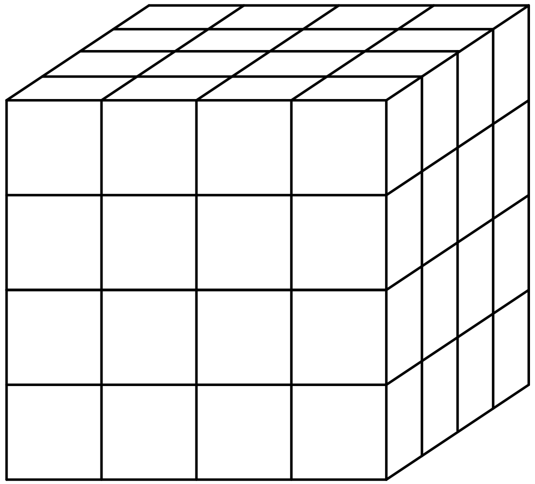
ef \ cd	00	01	11	10
00	16	20	28	24
01	17	21	29	25
11	19	23	31	27
10	18	22	30	26

ab=10

ef \ cd	00	01	11	10
00	32	36	44	40
01	33	37	45	41
11	35	39	47	43
10	34	38	46	42

ab=11

ef \ cd	00	01	11	10
00	48	52	60	56
01	49	53	61	57
11	51	55	63	59
10	50	54	62	58



Universidad de La Laguna

Mapas de Karnaugh

› Y más…