Escuela Superior de Ingeniería y Tecnología
Universidad de La Laguna

Tema 9.
Problemas de Flujos en Redes.
Flujo máximo en una red

Dpto. de Matemáticas, Estadística e Investigación Operativa. Universidad de La Laguna.

¿Dónde tienen lugar los Flujos en Redes?

Transporte

- Transporte de bienes sobre redes de comunicación.
- Planificación de flotas de aviones: Redes espacio-temporales.

Manufacturado

- Planificación de productos de manufacturado
- Flujo de items manufacturados dentro de sistemas de inventario

Comunicación

- Diseño y expansión de sistemas de comunicación
- Flujo de información a través de las redes

Asignación de personal

- Asignación de la tripulación a los vuelos de una compañia
- Asignación de conductores a vehículos

Analogía Redes Físicas-Grafos

Aplicaciones	Analogía física de Nodos	Analogía física de Arcos	Bien
Sistemas de Comunicación	Centrales telefónicas, Computadoras, Satélites	Cable de Cobre, coaxial, fibra óptica, microondas	Voz, Datos, Transmisiones de video
Sistemas Hidráulicos	Estaciones de bombeo, lagos, depósitos	Cañerías	Agua, Gas, Crudo
Circuitos Integrados	Puertas, Registros, Procesadores	Uniones	Corriente eléctrica
Sistemas de Transporte	Intersecciones, aeropuertos, estaciones	Carreteras, rutas aéreas, ferrocarriles	Pasajeros, Carga, Vehículos

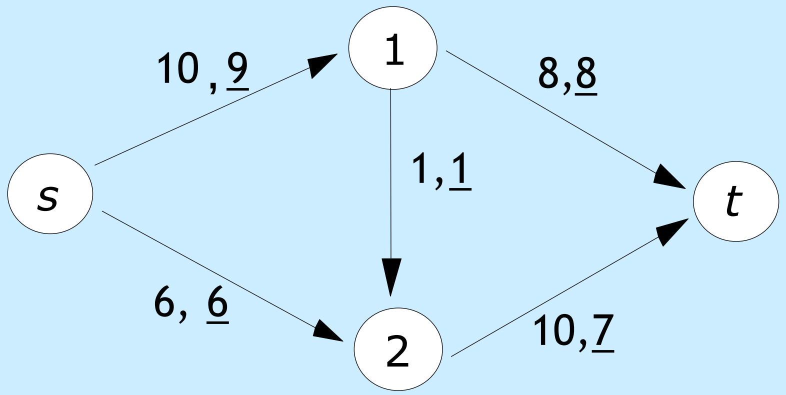
Además, existen problemas que en apariencia no tienen que ver con redes, pero que se pueden formular a través de ellas.

El problema de Flujo Máximo

- Grafo Dirigido $G = (V, A)$
  - Nodo Fuente s
  - Nodo Sumidero t
  - Capacidades u_{ij} sobre el arco (i,j)
  - x_{ij} = cantidad de flujo enviada sobre (i, j)
  - Maximizar el flujo que sale de s, sujeto a:

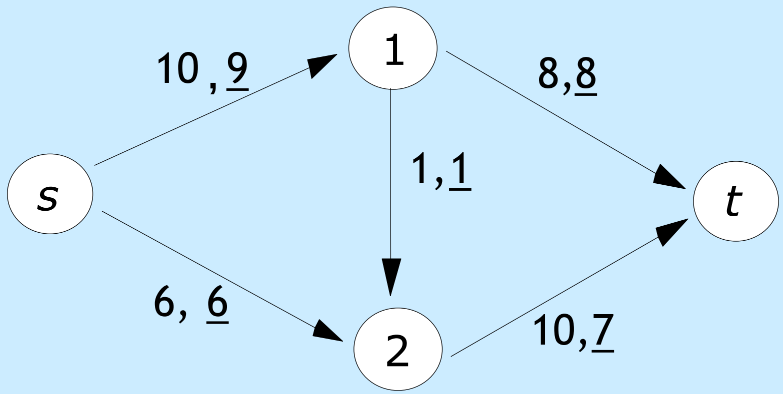
(1) El flujo sobre el arco (i,j) no puede superar el valor u_{ij}

(2) Flujo que sale de i = flujo que llega a i, para $\forall\ i \neq s$ o t



Una red con capacidades y flujos en los arcos

Formulación del problema de Flujo Máximo como un LP



Flujo que sale de i – Flujo que llega a i = 0 para $i \neq s$ o t

max v

s.a $x_{s1} + x_{s2} = v$

$-x_{s1} + x_{12} + x_{1t} = 0$

$-x_{s2} - x_{12} + x_{2t} = 0$

$-x_{1t} - x_{2t} = -v$

$0 \leq x_{ij} \leq u_{ij} \;\; \forall (i,j)$

max v

s.a $\sum_j x_{sj} = v$

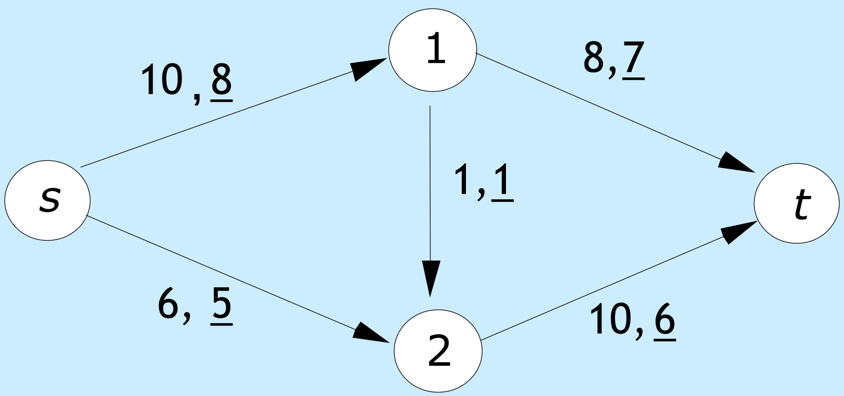
$\sum_j x_{ij} - \sum_j x_{ji} = 0$

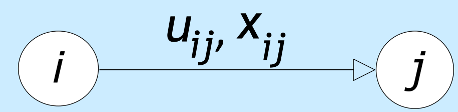
$\forall i \neq s \text{ o } t$

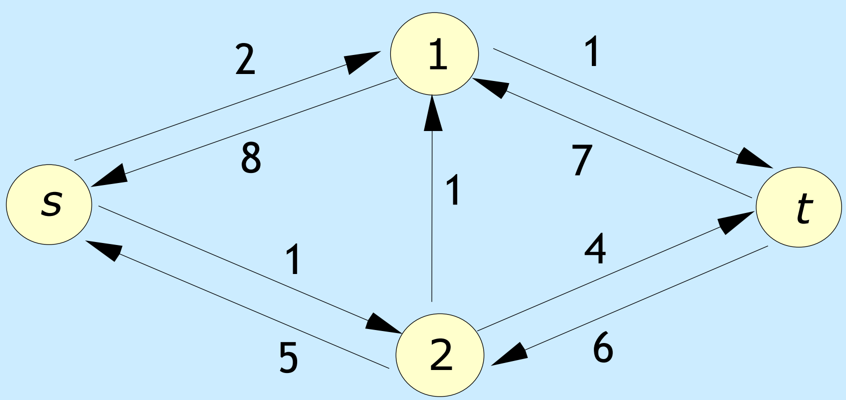
$-\sum_i x_{it} = -v$

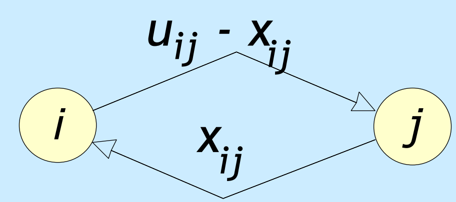
$0 \leq x_{ij} \leq u_{ij} \; \forall (i,j)$

La Red Residual









La *Red Residual* $G(x)$

r_{ij} denota la *capacidad residual* del arco (i,j)

Una Idea útil: Caminos Incrementales

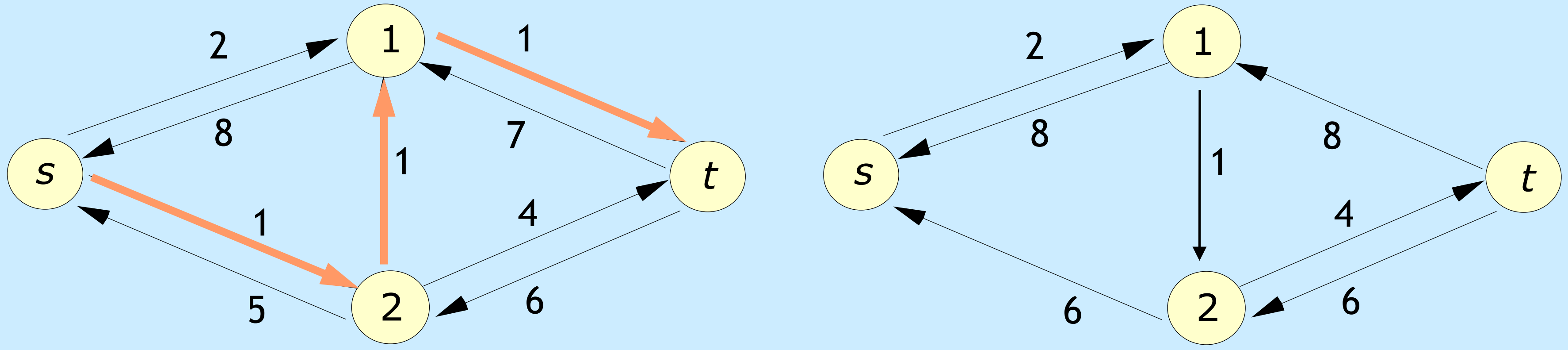
Un *Camino Incremental* es un camino de *s* a *t* en la red residual.

La *capacidad residual* de un camino incremental *P* es

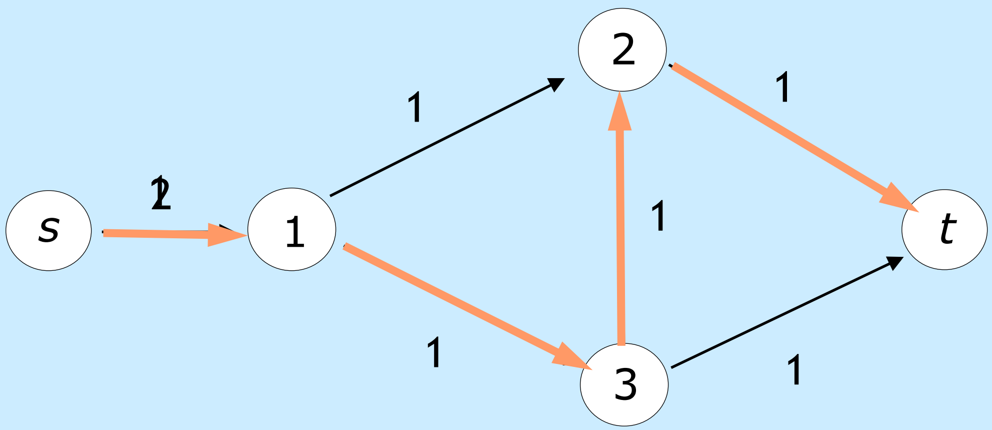
$$\delta(P) = \min\{r_{ij} : (i,j) \in P\}$$

Para *enviar* $\delta(P)$ *unidades de flujo através de P* se realiza

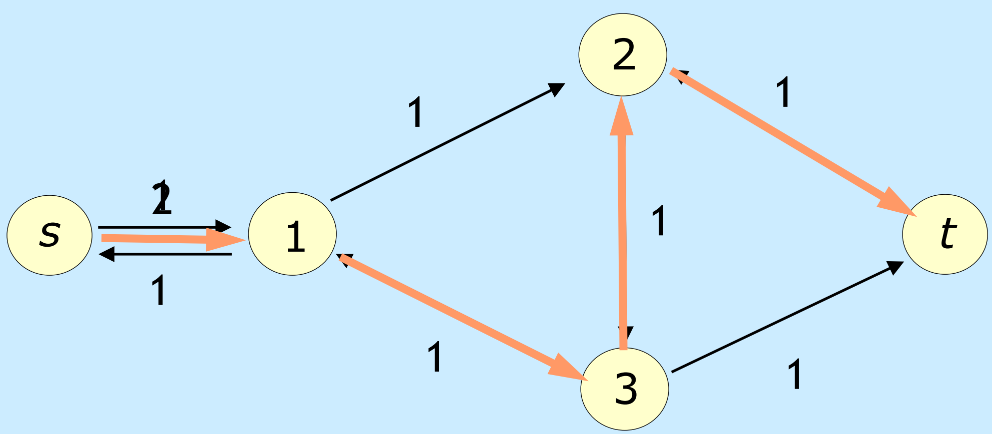
$$r_{ij} = r_{ij} - \delta(P) \text{ y } r_{ji} := r_{ji} + \delta(P) \quad \forall\ (i,j) \in P.$$



¿Por qué trabajar en la Red Residual?



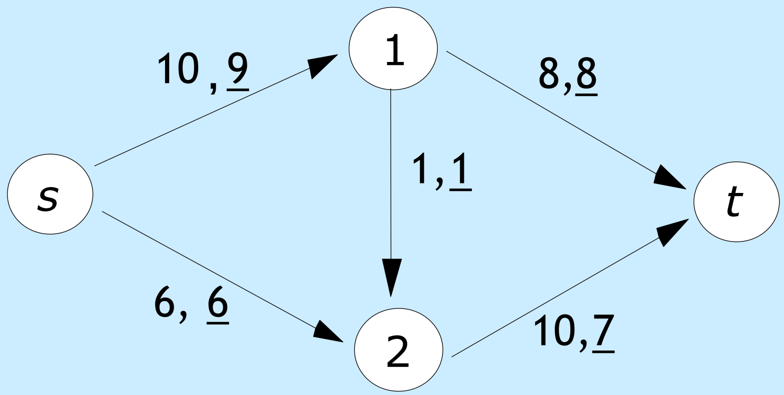
$v = 1$



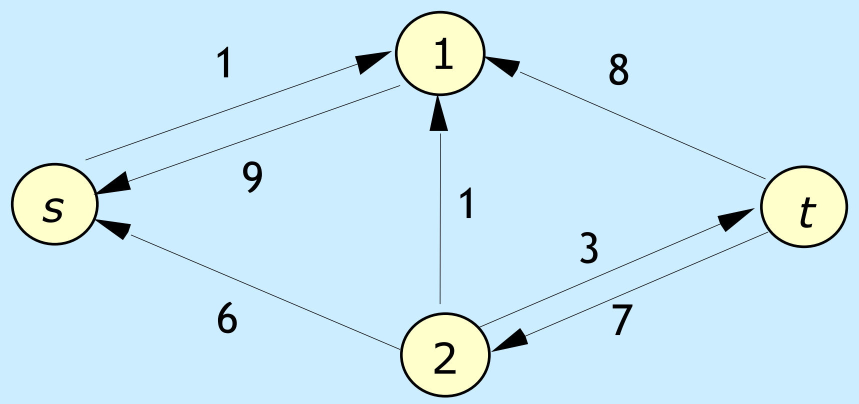
$v = 1$

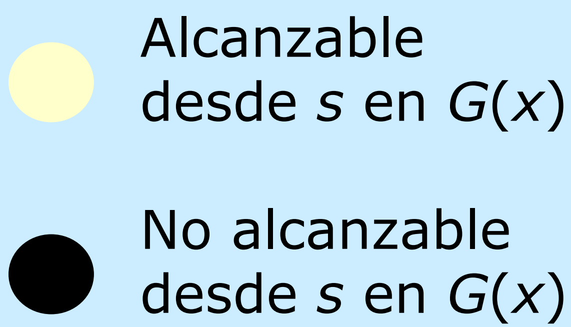
Pasar de un patrón de flujo a otro factible mejorando la función objetivo requiere, a veces, deshacer acciones previas

¿Cuándo sabemos si un flujo es óptimo?



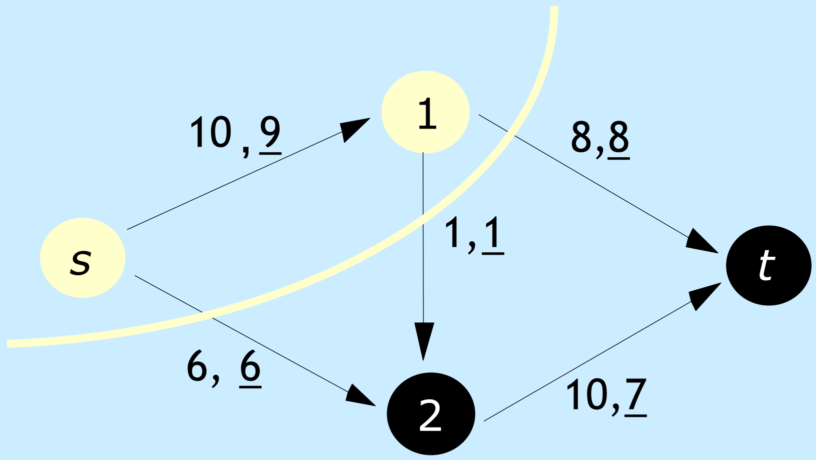
MÉTODO 1. No hay camino incremental en $G(x)$.





Cuándo sabemos si un flujo es óptimo?

MÉTODO 2. Método del Corte Mínimo



Un *(s,t)-corte* en una red $G = (N, A)$ es una partición de N en dos conjuntos disjuntos S y T tal que $s \in S$ y $t \in T$, e.g., $S = \{ s, 1 \}$ y $T = \{ 2, t \}$.

La *capacidad* de un corte (S,T) es

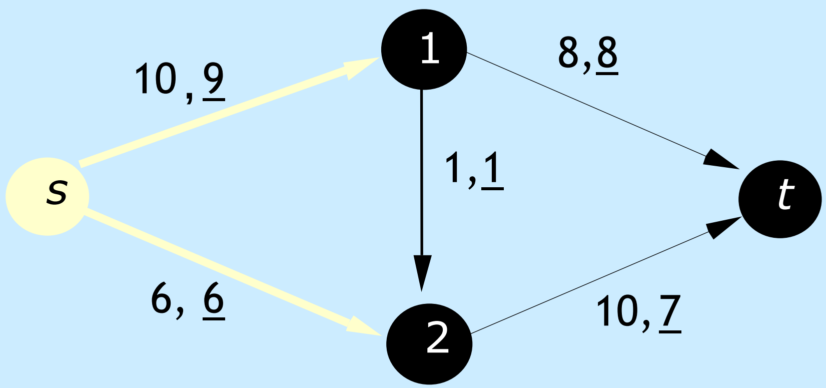
$$\mathrm{CAP}(S,T) = \sum_{i \in S} \sum_{j \in T} u_{ij}$$

Teorema dual débil para el problema de Flujo Máximo

Teorema. *Si x es un flujo factible y (S, T) es un (s, t)-corte, entonces el flujo neto, v, de la fuente al sumidero en x es a lo sumo CAP(S,T).*

Definimos *el flujo a través de un corte* (*S*, *T*) como

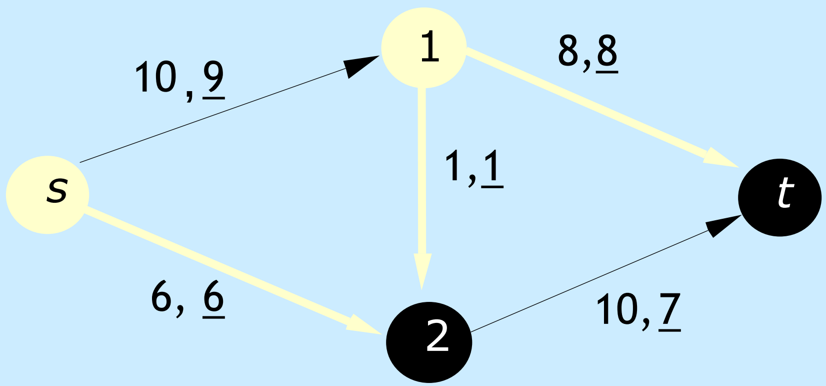
$$F_x(S,T) = \sum_{i\in S}\sum_{j\in T} x_{ij} - \sum_{i\in S}\sum_{j\in T} x_{ji}$$



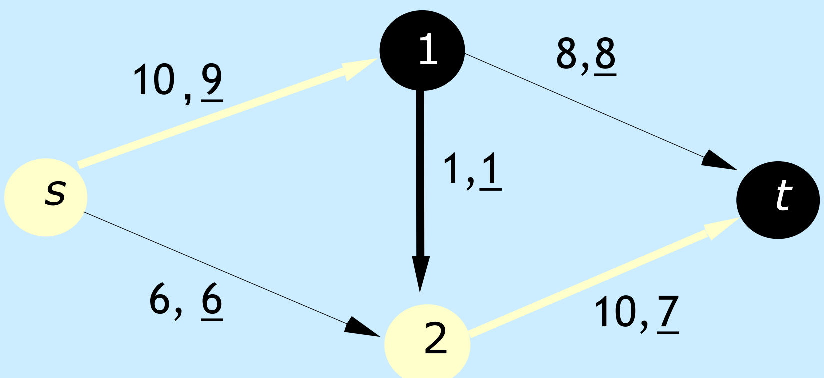
si $S = \{s\}$ entonces

$F_X(S, T) = 9 + 6 = 15.$

Flujos a través de cortes



Si $S = \{s,1\}$, entonces
$F_X(S, T) = 8+1+6 = 15$.



Si $S = \{s,2\}$, entonces
$F_X(S, T) = 9+7-1 = 15$.

Más sobre flujos a través de cortes

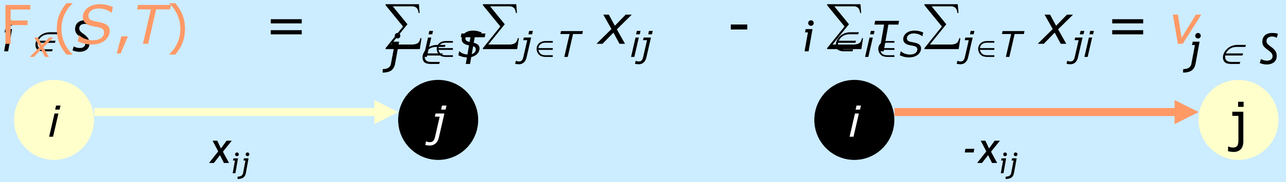
Lema: *Sea (S,T) cualquier s-t corte. Entonces $F_x(S,T)$ = v = flujo que llega a t.*

Dem. Suma las restricciones de conservación de flujo para cada nodo $i \in S - \{s\}$ a la restricción del nodo s. La igualdad resultante es $F_x(S,T) = v$.

$$\sum_j x_{ij} - \sum_k x_{ki} = 0 \qquad \text{para cada } i \in S \backslash s$$

$$\sum_j x_{sj} = v$$

$$F_x(S,T) = \sum_{i \in S} \sum_{j \in T} x_{ij} - \sum_{i \in T} \sum_{j \in S} x_{ji} = v$$



Más sobre flujos a través de cortes

Lema: El flujo a través de (S,T) es a lo sumo la capacidad de un corte

$$F_x(S,T) = \sum_{i\in S}\sum_{j\in T} x_{ij} - \sum_{i\in S}\sum_{j\in T} x_{ji}$$

$$\leq \sum_{i\in S}\sum_{j\in T} u_{ij} - \sum_{i\in S}\sum_{j\in T} 0 = CAP(S,T)$$

En resumen, hemos demostrado que

$$v = F_x(S,T) \leq CAP(S,T)$$

Teorema de Flujo Máximo Corte Mínimo

Teorema. (Condiciones de optimalidad para el flujo máximo). Las siguientes sentencias son equivalentes.

1. *Un flujo x es máximo.*
2. *No existe camino incremental en G(x).*
3. *Existe un s-t corte (S, T) cuya capacidad es el valor del flujo de x.*

Corolario. (Máximo-flujo Mínimo-Corte). El valor del flujo máximo coincide con el valor del corte mínimo.

Dem. $1 \Rightarrow 2$. (no $2 \Rightarrow$ no 1)

Supongamos que existe camino incremental en G(*x*). Entonces *x* no es máximo.

Continuación de la demostración

2 $\Rightarrow$ 3. No existe camino incremental en $G(x)$.

Sea S el conjunto de nodos alcanzables desde s en $G(x)$.
Sea $T = N\backslash S$. Entonces no hay arcos en $G(x)$ de S to T.

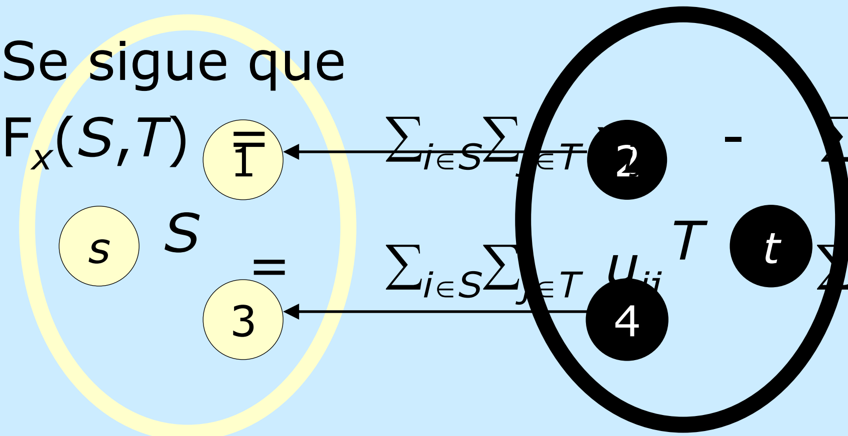
Así, $\quad i \in S$ y $j \in T \quad \Rightarrow \quad r_{ij} = 0 \Rightarrow x_{ij} = u_{ij}$

$\quad i \in T$ y $j \in S \quad \Rightarrow \quad r_{ji} = 0 \Rightarrow x_{ij} = 0$

Se sigue que

$$F_x(S,T) = \sum_{i\in S}\sum_{j\in T} x_{ij} - \sum_{i\in S}\sum_{j\in T} x_{ji}$$

$$= \sum_{i\in S}\sum_{j\in T} u_{ij} - \sum_{i\in S}\sum_{j\in T} 0 = \text{CAP}(S,T)$$



$r_{12} = 0 \Rightarrow x_{12} = u_{12}$

$r_{34} = 0 \Rightarrow x_{43} = 0$

3 $\Rightarrow$ 1. Sea $v = F_x(S, T)$ el flujo de s a t. Por hipótesis, v = CAP(S, T). Del teorema débil dual, el flujo máximo es a lo sumo CAP(S, T). Así v es máximo.

Algoritmo de Ford y Fulkerson (1956)

Begin

$x := 0$;

Construir la red residual $G(x)$;

$r_{ij} = u_{ij}$ y $r_{ji} := 0 \ \forall \ (i,j) \in A$;

Mientras existe camino incremental de s a t en $G(x)$

begin

Sea P el camino incremental de s a t en $G(x)$;

$\Delta := \delta(P)$;

Envía Δ unidades de flujo a lo largo de P;

$r_{ij} = r_{ij} - \Delta$ y $r_{ji} := r_{ji} + \Delta \ \forall \ (i,j) \in P$

Actualiza las capacidades residuales de los arcos de P;

end

End {el flujo x es ahora máximo}.

Animación del algoritmo de Ford-Fulkerson

Teorema: El Algoritmo de Ford y Fulkerson es finito

Asumimos que todos los datos son enteros, y por tanto:

Dem. La capacidad de cada camino incremental es al menos 1.

Lema: En cada iteración todas las capacidades residuales son enteras.

El envío de flujo reduce la capacidad de algún arco (s, j) y no incrementa la capacidad residual de los arcos (s, i) para todo $i \neq j$.

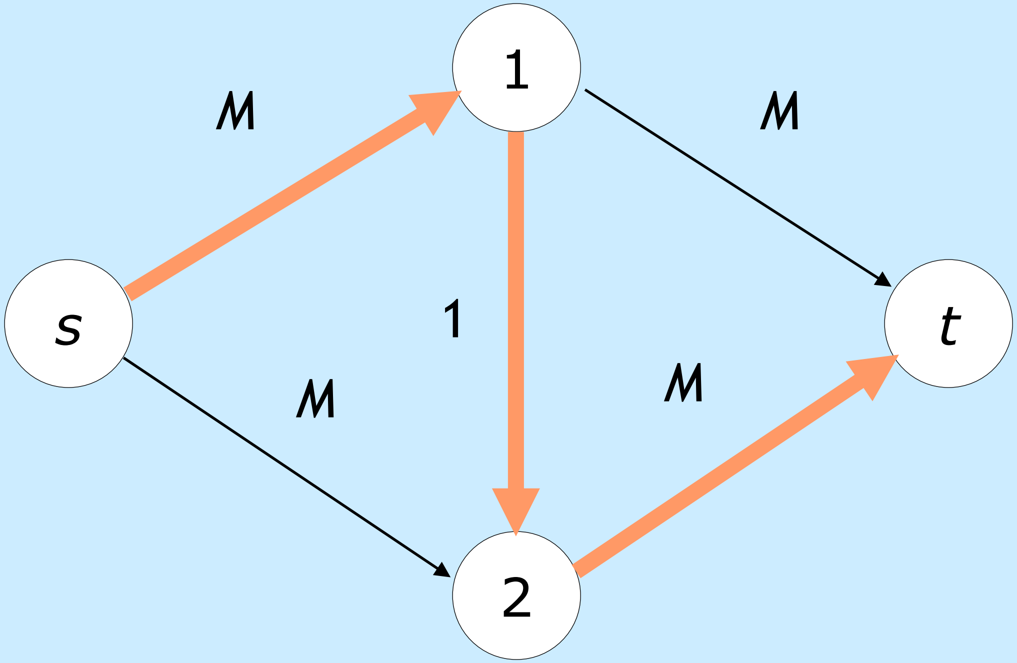
Así, la suma de las capacidades residuales de los arcos que salen de s decrecen, y está acotada inferiormente por 0.

Por otro lado la capacidad del corte $S=\{s\}$ está acotada superiormente por nU. *En este caso,* $v \leq CAP(S,T) \leq nU$.

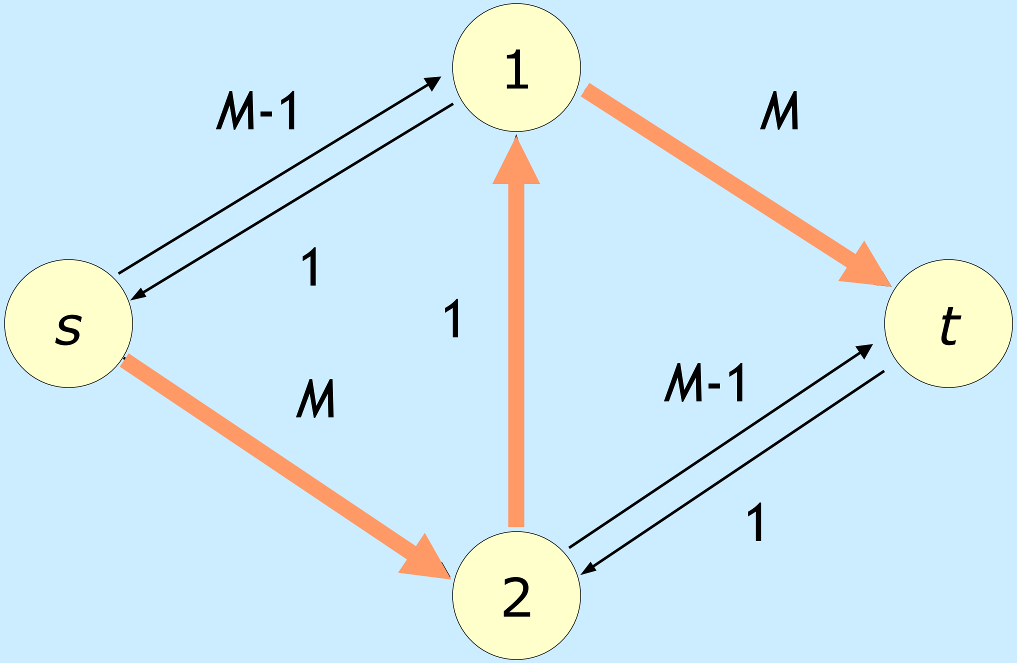
Se sigue que el número de envíos de flujo es $O(nU)$.

Así, la complejidad de algoritmo en el peor caso es el producto de nU por lo que cuesta identificar un camino incremental, es decir, $O(nmU)$

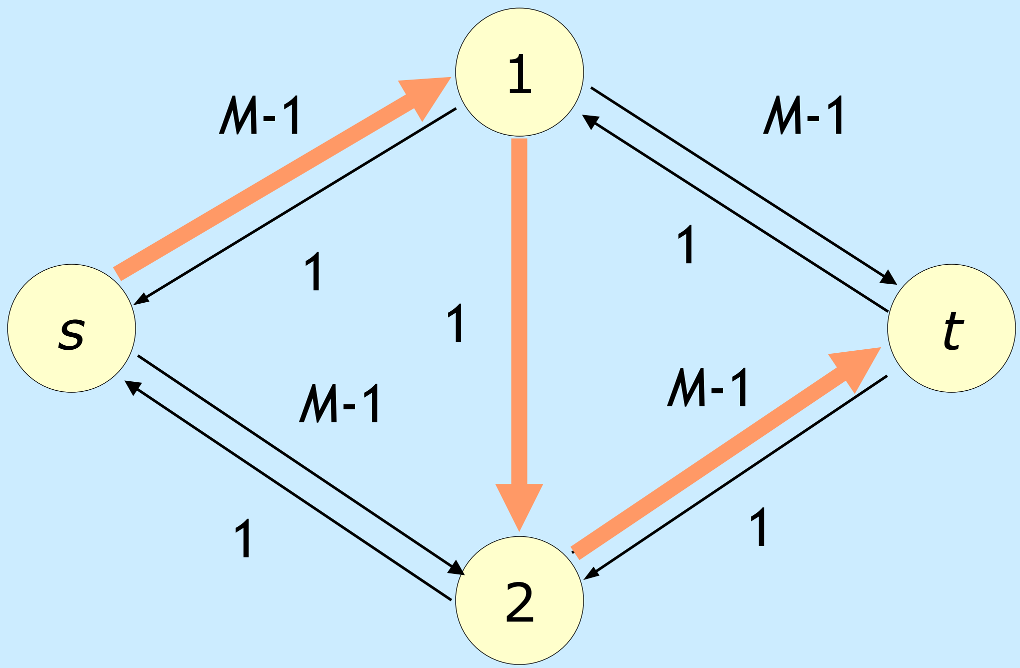
Muy mala cota. Un ejemplo simple y aclaratorio



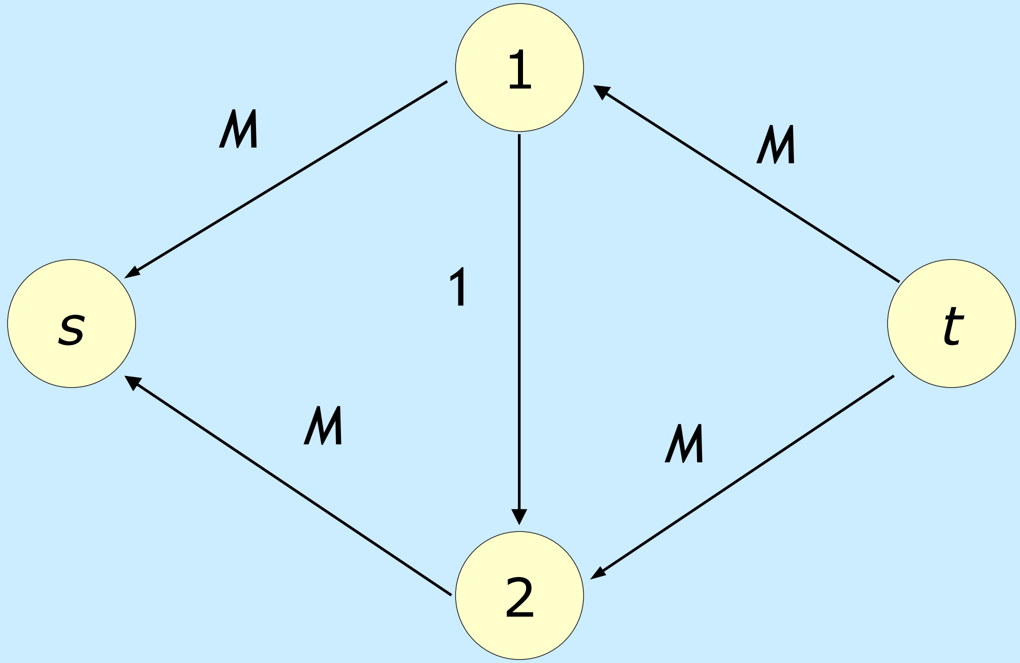
Después de 1 envío



Después de 2 envíos



Después de 2M envíos



… y además

El algoritmo podría no converger a la solución óptima

si $u_{ij} = \infty$ o si las capacidades son irracionales.

entonces, ¿no existe nada mejor?

Algoritmo de Edmonds y Karp (1972)

Begin

$x := 0$;

Construir la red residual $G(x)$;

Mientras existe camino incremental de s a t en $G(x)$

begin

Sea P el camino incremental de s a t de menor longitud en $G(x)$;

$\Delta := \delta(P)$;

Envía Δ unidades de flujo a lo largo de P;

Actualiza las capacidades residuales de los arcos de P;

end

End {el flujo x es ahora máximo}.

Requiere a lo sumo $\frac{1}{2}nm$ de envíos

y, por tanto, de complejidad $O(nm^2)$

Más y mejores algoritmos

#	Año	Autores	Complejidad Teórica
13	1989	Cheriyan & Maheshwari	$O(n^2\sqrt{m})$
14	1989	Ahuja & Orlin	$O(nm + n^2 \log U)$
15	1990	Alon	$O(nm + n^{8/3} \log n)$
16	1991	Ahuja & Orlin	$O(nm \log U)$ $O(n^2 m)$
17	1992	King, Rao & Tarjan	$O(nm + n^{2+\varepsilon})$
18	1993	Phillips & Westbrook	$O(nm(\log_{m/n} n + \log^{2+\varepsilon} n))$
19	1994	King, Rao & Tarjan	$O(nm(\log_{m/n\log n} n))$
20	1996	Cheriyan, Hagerup & Melhorn	$O(n^3 / \log n)$
21	1998	Golberg & Rao	$O(\min\{n^{2/3}, \sqrt{m}\}\, m \log \frac{n^2}{m} \log U)$
22	2000	Sedeño-Noda & González-Martín	$O(nm \log \frac{U}{n})$
23	2003	Fujishige	$O(nm \log U)$

#	Año	Autores	Complejidad Teórica
1	1956	Ford & Fulkerson	$O(nmU)$
2	1970	Dinic (Dinitz)	$O(n^2 m)$
			$O(nm^2)$
3	1972	Edmonds & Karp	$O(nm^2 \log U)$