TEMA 8: ALGORITMOS SOBRE CONJUNTOS

ALGORITMOS Y ESTRUCTURAS DE DATOS

M. Colebrook Santamaría
J. Riera Ledesma

Objetivos

- Representación de conjuntos.
- Inserción de elementos en un conjunto.
- Eliminación de elementos en un conjunto.
- Pertenencia de elementos a un conjunto.
- Operaciones:
  - Complemento
  - Unión de conjuntos
  - Intersección de conjuntos
  - Diferencia de conjuntos
  - Diferencia simétrica de conjuntos

Representación de conjuntos (1)

- En Matemáticas e Ingeniería Informática, el término **conjunto** (*set*) se refiere a una colección no ordenada de objetos denominados **elementos o miembros** del conjunto.
- Un conjunto se denota normalmente mostrando la lista de elementos encerrados entre llaves, { y }.
- Por ejemplo, el conjunto de todos los números primos entre 1 y 20 es { 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19 }.
- En un problema que involucra conjuntos, los elementos se seleccionan de algún conjunto dado denominado el **conjunto universal U**.
- Por ejemplo, si el conjunto universal U es el conjunto de nombres de los meses del año, entonces el conjunto de meses de con 30 días o menos sería { febrero, abril, junio, septiembre, noviembre }.

Representación de conjuntos (2)

- Los conjuntos cuyos elementos se escogen de un **conjunto universal finito U** pueden ser representados en memoria usando **bits**, cuyo número será igual a la cardinalidad de U.
- Cada **bit** corresponde exactamente con un **elemento** del conjunto universal U.
- Cada conjunto se representa como un *string* de bits, en el que cada bit corresponde con un elemento del conjunto U. Si el bit **i** está a 1, significa que ese elemento está en el conjunto.

Representación de conjuntos (3)

- Como ilustración, supongamos que U es el conjunto de **letras mayúsculas**. Por tanto, cualquier conjunto se puede representar usando 26 bits.
- Por ejemplo, el conjunto de las vocales mayúsculas

  { A, E, I, O, U }

  se pueden representar como:

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0

Representación de conjuntos (4)

- En nuestro caso, vamos a simplificar la representación para poder implementar **conjuntos de números enteros sin signo** dentro del dominio $0..2^n-1$, con $n>3$.
- Por ejemplo, si U es el conjunto de números entre 0 y 15, con $|U| = 16$, podemos representar cualquier conjunto con **16 bits** (2 bytes).
- Es decir, el conjunto A = { 2, 3, 5, 7, 11 } podemos representarlo de la siguiente forma:

	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0
A:	0	0	0	0	**1**	0	0	0	**1**	0	**1**	0	**1**	**1**	0	0

Inserción de elementos en un conjunto

- Para cualquier elemento $x \in U$, su inserción en un conjunto se realiza usando los **operadores binarios:**

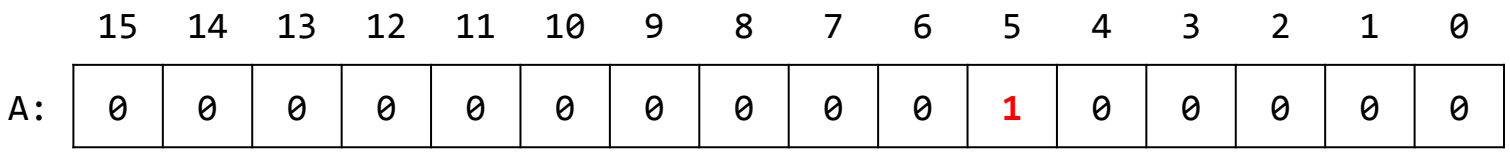
  | (OR) y << (SHIFT: desplazamiento).

- Como |U| = 16, cualquier conjunto se representa como:

```
typedef unsigned short conjunto_t;
conjunto_t A = 0;
```

- Por tanto, si **i = 5** es el valor a añadir al conjunto A:

```
conjunto_t uno = 1;
A |= (uno << i);// uno << 5 = 0000000000100000
```



Eliminación de elementos en un conjunto

- Para eliminar un elemento de un conjunto usaremos los **operadores binarios &** (AND), **~** (NOT) y **<<** (SHIFT).
- Por ejemplo, dado el conjunto A = { 5, 7, 11 }

	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0
A:	0	0	0	0	**1**	0	0	0	**1**	0	**1**	0	0	0	0	0

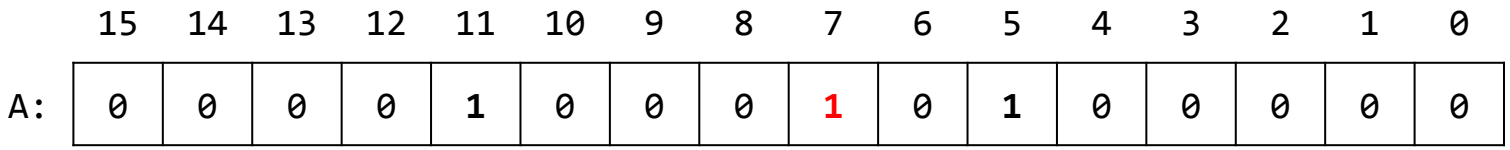
podemos eliminar el valor **i = 7** de la siguiente forma:

```
conjunto_t          uno          =          1;
uno <<= i; //   uno << 7 = 0000000010000000
A &= ~uno; // ~uno       = 1111111101111111
```

	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0
A:	0	0	0	0	**1**	0	0	0	**0**	0	**1**	0	0	0	0	0

Pertenencia de elementos a un conjunto ∈

- La pertenencia (∈) de un elemento **x** a un conjunto **A**, se desarrolla usando los operadores binarios **&** (AND) y **<<** (SHIFT).
- Por ejemplo, dado el conjunto A = { 5, 7, 11 }, podemos comprobar eficientemente si el elemento **i = 7** pertenece al conjunto.

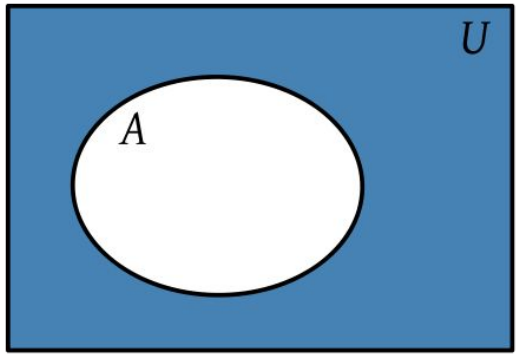



```
A=0000100010100000
  0000000010000000
conjunto_t uno = 1;
uno <<= i;
if ((A & uno) != 0) cout << i << "∈A";
else cout << i << "∉A";
```

Operaciones: Complemento ^{c}

- El **complemento de un conjunto A** es el conjunto **A**^{c} que contiene todos los elementos que **no** pertenecen a A.

$$A^c = \{x : x \in U \wedge x \notin A\}$$



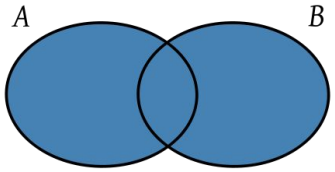
- Esta operación se implementa con el **operador binario** ~ (NOT).

```
conjunto_t Ac = ~A;
```

Operaciones: Unión de conjuntos ∪

- La **unión de conjuntos** A ∪ B es el conjunto de todos los elementos que pertenecen al menos a uno de los conjuntos A y B.

$$A \bigcup B = \{x : x \in A \vee x \in B\}$$



- Sea A = { 5, 7, 11 } y B = { 1, 3, 5 }, A ∪ B = { 1, 3, 5, 7, 11 }

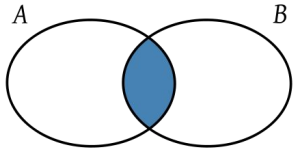
	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0
A:	0	0	0	0	**1**	0	0	0	**1**	0	**1**	0	0	0	0	0
B:	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	**1**	0	**1**	0	**1**	0
C:	0	0	0	0	**1**	0	0	0	**1**	0	**1**	0	**1**	0	**1**	0

```
conjunto_t A, B, C;
C = A | B;
```

Operaciones: Intersección de conjuntos ∩

- La **intersección de conjuntos** A ∩ B es el conjunto de todos los elementos comunes a A y B.

$$A \bigcap B = \{x : x \in A \wedge x \in B\}$$



- Sea A = { 5, 7, 11 } y B = { 1, 3, 5 }, A ∩ B = { 5 }

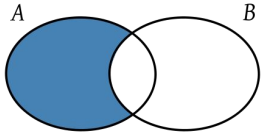
	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0
A:	0	0	0	0	**1**	0	0	0	**1**	0	**1**	0	0	0	0	0
B:	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	**1**	0	**1**	0	**1**	0
C:	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	**1**	0	0	0	0	0

```
conjunto_t A, B, C;
C = A & B;
```

Operaciones: Diferencia de conjuntos \

- La **diferencia de conjuntos** A \ B es el conjunto que resulta de eliminar de A cualquier elemento que esté en B.

$$A \setminus B = \{x : x \in A \wedge x \notin (A \cap B)\}$$



- Sea A = { 5, 7, 11 } y B = { 1, 3, 5 }, A \ B = { 7, 11 }

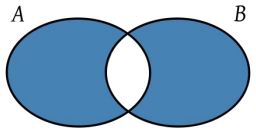
	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0
A:	0	0	0	0	**1**	0	0	0	**1**	0	**1**	0	0	0	0	0
B:	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	**1**	0	**1**	0	**1**	0
C:	0	0	0	0	**1**	0	0	0	**1**	0	0	0	0	0	0	0

```
conjunto_t A, B, C;
C = A & ~B;
```

Operaciones: Diferencia simétrica de conjuntos △

- La **diferencia simétrica** A △ B es el conjunto con todos los elementos que pertenecen, o bien a A, o bien a B, pero no a ambos a la vez.

$$A \triangle B = \{x : (x \in A \vee x \in B) \wedge x \notin (A \cap B)\}$$



- Sea A = { 5, 7, 11 } y B = { 1, 3, 5 }, A △ B = { 1, 3, 7, 11 }

	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0
A:	0	0	0	0	**1**	0	0	0	**1**	0	**1**	0	0	0	0	0
B:	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	**1**	0	**1**	0	**1**	0
C:	0	0	0	0	**1**	0	0	0	**1**	0	0	0	**1**	0	**1**	0

```
conjunto_t A, B, C;
C = (A | B) & ~(A & B);
```

Referencias

- Olsson, M. (2018), “C++ 17 Quick Syntax Reference”, Apress. Disponible en PDF en la BBTK-ULL: https://doi.org/10.1007/978-1-4842-3600-0
- Stroustrup, B. (2002), “El Lenguaje de Programación C++”, Addison Wesley.
- C++ Syntax Highlighting (código en colores): tohtml.com/cpp
- Ecuaciones editadas con: s1.daumcdn.net/editor/fp/service_nc/pencil/Pencil_chromestore.html