Resolución Tarea de Programación Lineal

Dado el siguiente problema de Programación Lineal de máximo:

$$
\begin{aligned}
\max\ & 4x_1 + 3x_2 \\
s.a:\ & 2x_1 + 3x_2 \le 8 \\
& -6x_1 + x_2 \le -4 \\
& x_1 \ge 0, x_2 \ge 0
\end{aligned}
\qquad (1)
$$

a) Encontrar una solución óptima aplicando el Método Simplex Primal.

b) Formular el problema dual. Determinar una solución óptima para el problema dual a partir de la tabla óptima determinada en a).

c) ¿Cómo afecta a la optimalidad detectada en a) si se añade la restricción $x_1 \le 3$? (resolver).

d) ¿Cómo afecta a la optimalidad detectada en a) si simultáneamente cambia el valor del primer recurso de 8 a 10 unidades y el beneficio de x_1 se incrementa en 2 unidades? (resolver).

e) Supón que el coste de la variable x_1 pasa a valer 2 y sus coeficientes tecnológicos son ahora 2 en la primera restricción y 4 en la segunda ¿sigue siendo óptima la solución detectada en a)? (resolver).

Tarea

a) Encontrar una solución óptima aplicando el Método Simplex Primal.

Dado que tenemos que usar el simplex primal. Deberos multiplicar por -1 la segunda restricción. Obtenemos:

$$\begin{aligned} \max\ & 4x_1 + 3x_2 \\ s.a:\ & 2x_1 + 3x_2 \leq 8 \\ & 6x_1 - x_2 \geq 4 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{aligned} \qquad (2)$$

El problema no está en forma estándar. Añadimos dos variables de holgura h1 y h2 a cada una de las restricciones, obteniendo

$$\begin{aligned} \max\ & 4x_1 + 3x_2 \\ s.a:\ & 2x_1 + 3x_2 + h_1 = 8 \\ & 6x_1 - x_2 - h_2 = 4 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, h_1 \geq 0, h_2 \geq 0 \end{aligned} \qquad (3)$$

Ahora ya podemos aplicar el Simplex Primal. Dado que no disponemos de una base factible inicial, ya que nos falta una variable con columna (0, 1), añadimos una variable artificial a_1 en la segunda restricción. Aquí podemos Aplicar el método de las dos fases o el método de penalización.

Tarea

Método de las dos fases, problema de la Fase 1:

$$
\begin{aligned}
\min \quad & a_1 \\
s.a: \quad & 2x_1 + 3x_2 + h_1 = 8 \\
& 6x_1 - x_2 - h_2 + a_1 = 4 \\
& x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, h_1 \ge 0, h_2 \ge 0, a_1 \ge 0
\end{aligned}
$$

La tabla inicial es:

V.B.	x_1	x_2	h_1	h_2	a_1	-W	Ctes
h_1	2	3	1	0	0	0	8
a_1	6	-1	0	-1	1	0	4
-W	0	0	0	0	1	1	0

Calculando los cotes reducidos para poder empezar (multiplicamos la segunda fila por -1 y el resultado es sumado a la fila –W):

V.B.	x_1	x_2	h_1	h_2	a_1	-W	Ctes
h_1	2	3	1	0	0	0	8
a_1	6	-1	0	-1	1	0	4
-W	-6	1	0	1	0	1	-4

Tarea

La anterior tabla no es óptima, aplicando el criterio de Dantzig entra x_1 y sale la variable a_1 debido a que min{8/2,4/6}= 2/3. La tabla siguiente sería:

V.B.	x_1	x_2	h_1	h_2	a_1	-W	Ctes
h_1	0	10/3	1	1/3	-1/3	0	20/3
x_1	1	-1/6	0	-1/6	1/6	0	2/3
-W	0	0	0	0	1	1	0

Esta tabla es óptima y como W=0, tenemos una solución básica factible para el problema (3). Pasamos a la Fase 2.

V.B.	x_1	x_2	h_1	h_2	-Z	Ctes
h_1	0	10/3	1	1/3	0	20/3
x_1	1	-1/6	0	-1/6	0	2/3
-Z	4	3	0	0	1	0

Calculando los cotes reducidos para poder empezar (multiplicamos la segunda fila por -4 y el resultado es sumado a la fila –Z):

V.B.	x_1	x_2	h_1	h_2	-Z	Ctes
h_1	0	10/3	1	1/3	0	20/3
x_1	1	-1/6	0	-1/6	0	2/3
-Z	0	11/3	0	2/3	1	-8/3

Tarea

La anterior tabla no es óptima para un problema de máximo, aplicando el criterio de Dantzig entra x_2 y sale la variable h_1, pero como ya fue comentado en clase para adelantar un pivoteo en este ejemplo, realizamos el siguiente pivoteo: entra h_2 y sale h_1.

V.B.	x_1	x_2	h_1	h_2	$-Z$	Ctes
h_2	0	10	3	1	0	20
x_1	1	3/2	1/2	0	0	4
$-Z$	0	-3	-2	0	1	-16

Esta Tabla es Óptima e Identifica la solución de (3) $x_1 = 4$ y $h_2 = 20$, el resto de variables toma el valor 0. La función objetivo máxima es $Z=16$.

Tarea

b) Formular el problema dual. Determinar una solución óptima para el problema dual a partir de la tabla óptima determinada en a).

$$\begin{aligned} \max\ & 4x_1 + 3x_2 \\ s.a:\ & 2x_1 + 3x_2 \leq 8 \\ & 6x_1 - x_2 \geq 4 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

(2) $\longrightarrow$

$$\begin{aligned} \min\ & 8y_1 + 4y_2 \\ s.a:\ & 2y_1 + 6y_2 \geq 4 \\ & 3y_1 - y_2 \geq 3 \\ & y_1 \geq 0, y_2 \leq 0 \end{aligned}$$

Dual

Para obtener una solución óptima del problema Dual usamos la expresión: $y^t = c_B^t B^{-1}$ donde B son las columnas de (3) de las variables básicas óptimas de la tabla última del apartado a), es decir, las columnas de h_2 y x_1:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 6 \end{pmatrix} \text{ y por tanto, } B^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix} \text{ y } c_B^t = (0,4)$$

Por tanto, $y^t = c_B^t B^{-1} = (0,4)\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix} = (2,0)$. Así, una solución óptima del problema dual es $y_1 = 2$ e $y_2 = 0$ con valor objetivo 16 (que claramente coincide con el valor óptimo del primal)

Tarea

c) ¿Cómo afecta a la optimalidad detectada en a) si se añade la restricción $x_1 \leq 3$? (resolver). Se trata del caso de añadir una inecuación. Comprobamos si la solución óptima hallada en el apartado a) la satisface y observamos que $x_1 = 4 > 3$, por tanto debemos añadir la inecuación como ecuación de la forma

$x_1 + h_3 = 3$, donde h_3 es la variable de holgura correspondiente. Esto implica añadir una nueva fila y columna en la tabla óptima de a). Aquí h_3 es la variable básica asociada a la nueva fila. La tabla es:

V.B.	x_1	x_2	h_1	h_2	h_3	$-Z$	Ctes
h_2	0	10	3	1	0	20	20
x_1	1	3/2	1/2	0	0	4	4
h_3	1	0	0	0	1	0	3
$-Z$	0	-3	-2	0	0	1	-16

Restituyendo el carácter básico de la variable básica x_1, es decir, poniendo el correspondiente cero, obtenemos la siguiente tabla:

V.B.	x_1	x_2	h_1	h_2	h_3	$-Z$	Ctes
h_2	0	10	3	1	0	0	20
x_1	1	3/2	1/2	0	0	0	4
h_3	0	-3/2	-1/2	0	1	0	-1
$-Z$	0	-3	-2	0	0	1	-16

Tarea

La anterior la tabla es factible Dual, así que aplicamos el simplex Dual. Sale h_3 y la sustituye la variable x_2 ya que es el argumento del valor más cercano a cero de {-3/(-3/2),-2/(-1/2)} = {2, 4}. La tabla resultante es:

V.B.	x_1	x_2	h_1	h_2	h_3	$-Z$	Ctes
h_2	0	0	-1/3	1	20/3	0	40/3
x_1	1	0	0	0	1	0	3
x_2	0	1	1/3	0	-2/3	0	2/3
$-Z$	0	0	-1	0	-2	1	-14

Esta Tabla es Óptima e Identifica la solución del problema modificado $x_1 = 3$, $x_2 = 2/3$ y $h_2 = 40/3$, el resto de variables toma el valor 0. La función objetivo máxima es Z=14.

Tarea

d) ¿Cómo afecta a la optimalidad detectada en a) si simultáneamente cambia el valor del primer recurso de 8 a 10 unidades y el beneficio de x_1 se incrementa en 2 unidades? (resolver). Se trata de dos casos que ocurren simultáneamente. Debemos proceder en orden. Por ejemplo, el primer recurso en el problema (1) cambia a un valor 10. Esto quiere decir, que en el problema (2), el vector de recursos ahora es:

$$B^{-1}b = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 10 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 26 \\ 5 \end{pmatrix} \text{ y que } -c_B^t B^{-1}b = -(0,4)\begin{pmatrix} 26 \\ 5 \end{pmatrix} = -20$$

V.B.	x_1	x_2	h_1	h_2	-Z	Ctes
h_2	0	10	3	1	0	26
x_1	1	3/2	1/2	0	0	5
-Z	0	-3	-2	0	1	-20

Tras aplicar este primer cambio, la base óptima de a) sigue siendo óptima por que es factible primal (no hay que aplicar el simplex dual). Enfrentamos el segundo cambio, es decir, escribimos en la fila –Z los costes del problema modificado, el resultado es el siguiente:

V.B.	x_1	x_2	h_1	h_2	-Z	Ctes
h_2	0	10	3	1	0	26
x_1	1	3/2	1/2	0	0	5
-Z	6	3	0	0	1	0

Tarea

Calculamos los costes relativos. El resultado es:

V.B.	x_1	x_2	h_1	h_2	$-Z$	Ctes
h_2	0	10	3	1	0	26
x_1	1	3/2	1/2	0	0	5
$-Z$	0	-6	-3	0	1	-30

Esta Tabla es Óptima e Identifica la solución del problema modificado $x_1 = 5$, y $h_2 = 26$, el resto de variables toma el valor 0. La función objetivo máxima es Z=30.

Tarea

e) Supón que el coste de la variable x_1 pasa a valer 2 y sus coeficientes tecnológicos son ahora 2 en la primera restricción y 4 en la segunda ¿sigue siendo óptima la solución detectada en a)? (resolver). Se trata de la modificación de los coeficientes una variable básica. Procedemos manteniendo a la variable x_1 como básica, pero ahora es una variable artificial y tiene coste -M . Añadimos una variable nueva x_3 que simula a x_1 con coste 2 y coeficientes (2,-4) para el problema (2). Es decir, resolvemos el siguiente problema penalizado:

$$\begin{aligned}
\max\quad & -Mx_1 + 3x_2 + 2x_3 \\
s.a:\quad & 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + h_1 = 8 \\
& 6x_1 - x_2 - 4x_3 \quad -h_2 = 4 \\
& x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, h_1 \geq 0, h_2 \geq 0
\end{aligned}$$

Así, partiendo de la tabla óptima de a) añadimos una nueva columna para la variable x_3 donde la columna se puede obtener de la manera alternativa a la explicación en los apuntes como:

$$B^{-1}a^{x_3} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 1 \end{pmatrix}$$

V.B.	x_1	x_2	x_3	h_1	h_2	$-Z_M$	Ctes
h_2	0	10	10	3	1	0	20
x_1	1	3/2	1	1/2	0	0	4
$-Z_M$	$-M$	3	2	0	0	1	0

Costes del problema penalizado

Tarea

Calculando los cotes reducidos para poder empezar (multiplicamos la segunda fila por M y el resultado es sumado a la fila $-Z_M$):

V.B.	x_1	x_2	x_3	h_1	h_2	$-Z_M$	Ctes
h_2	0	10	10	3	1	0	20
x_1	1	3/2	1	1/2	0	0	4
$-Z_M$	0	$3+(3/2)M$	$2+M$	$(1/2)M$	0	1	$4M$

Aplicamos el simplex primal: Entra x_2 y sale h_2. La tabla resultante es:

V.B.	x_1	x_2	x_3	h_1	h_2	$-Z_M$	Ctes
x_2	0	1	1	3/10	1/10	0	2
x_1	1	0	-1/2	1/20	-3/20	0	1
$-Z_M$	0	0	$-1-(1/2)M$	$-9/10+(1/20)M$	$-3/10-(3/20)M$	1	$M-6$

Ahora entra h_1 y sale x_2. La tabla resultante es:

V.B.	x_1	x_2	x_3	h_1	h_2	$-Z_M$	Ctes
h_1	0	10/3	10/3	1	1/3	0	20/3
x_1	1	-1/6	-2/3	0	-1/6	0	2/3
$-Z_M$	0	$3-(1/6)M$	$2-(2/3)M$	0	$-(1/6)M$	1	$-(2/3)M$

Tarea

La anterior tabla es óptima ya que tos los costes relativos son negativos. Por tanto, tenemos la solución óptima del problema penalizado.

Que podemos decir del problema modificado. En este caso observamos que la variable artificial x_1 está en la base con un valor mayor que cero. Esto implica que el problema modificado es no factible.