Álgebra de Boole

Temas 1 y 2

Universidad de La Laguna

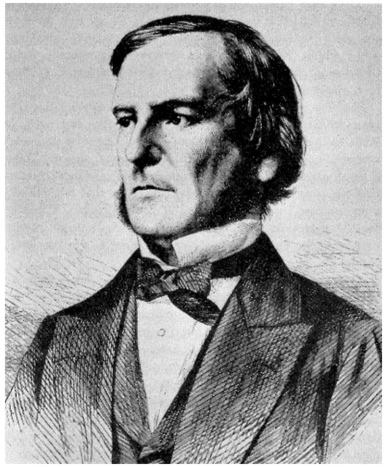
Grado en Ingeniería Informática

Contenido

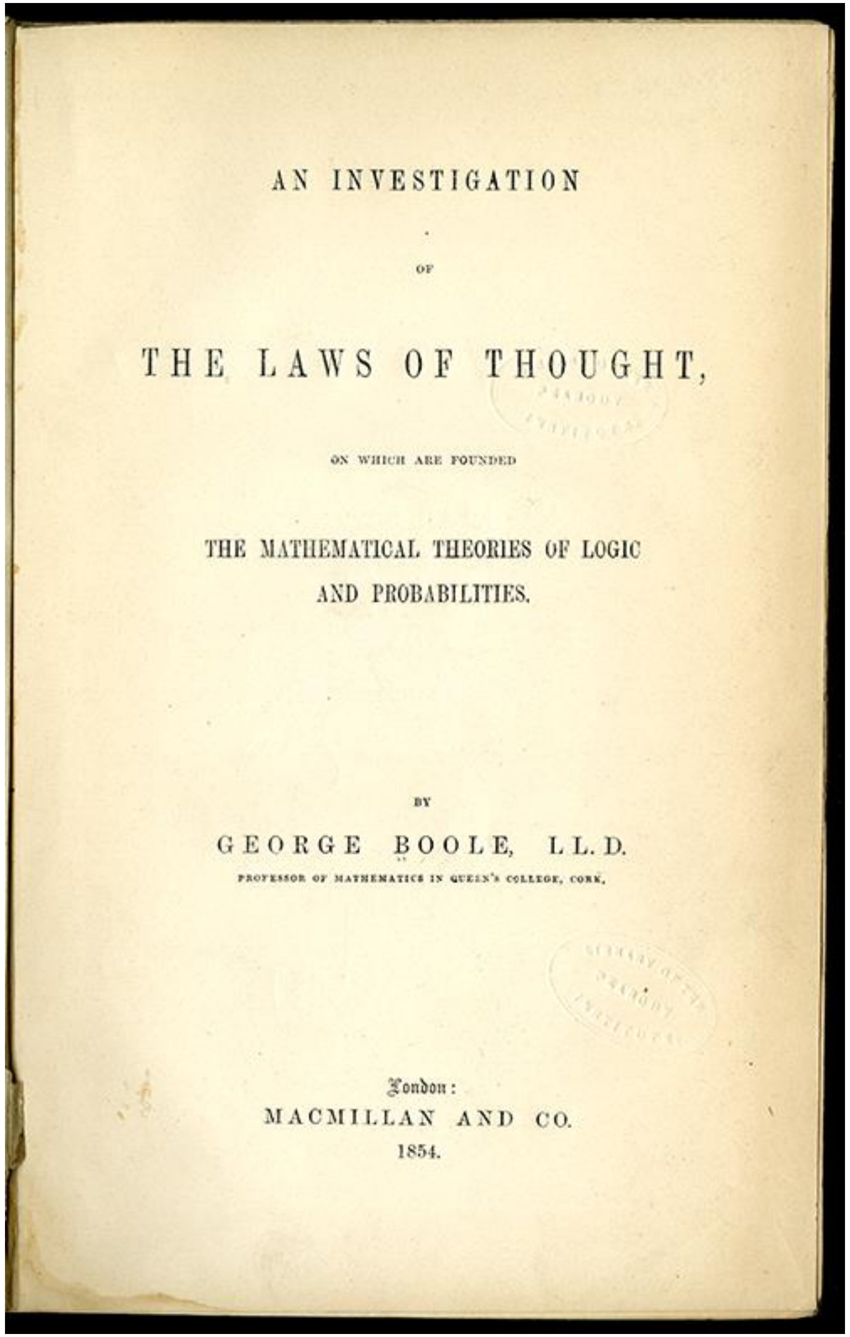
- Antecedentes
- Postulados y teoremas fundamentales
- Operaciones lógicas. Funciones booleanas
- Síntesis algebraica de funciones
- Síntesis de funciones con lógica NAND y NOR

Antecedentes

› George Boole



- Filósofo y matemático inglés (s. XIX)
- *An investigation of the laws of thought*, 1854:
  › Teoría matemática de manejo de variables con sólo 2 valores posibles: V-F, 0-1
- Supuso un marco de manipulación simbólica, de tipo algebraico, del razonamiento lógico, es decir, un modelo matemático para la lógica proposicional



AN INVESTIGATION

OF

THE LAWS OF THOUGHT,

ON WHICH ARE FOUNDED

THE MATHEMATICAL THEORIES OF LOGIC AND PROBABILITIES.

BY

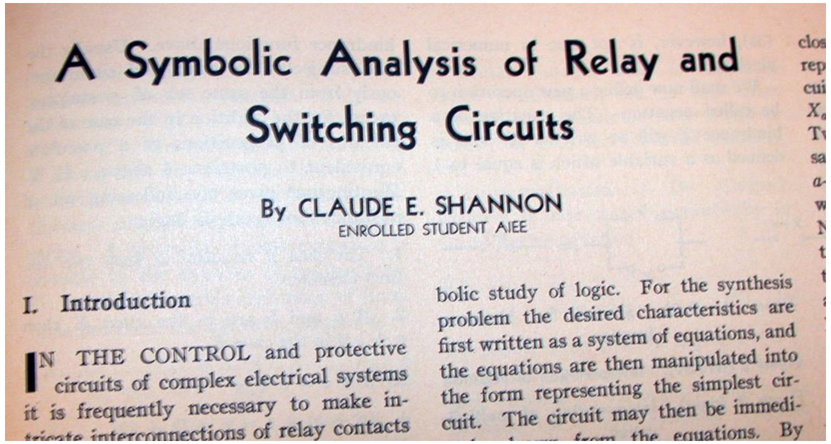
GEORGE BOOLE, LL.D.

PROFESSOR OF MATHEMATICS IN QUEEN'S COLLEGE, CORK.

London:
MACMILLAN AND CO.
1854.

Antecedentes

› Claude E. Shannon



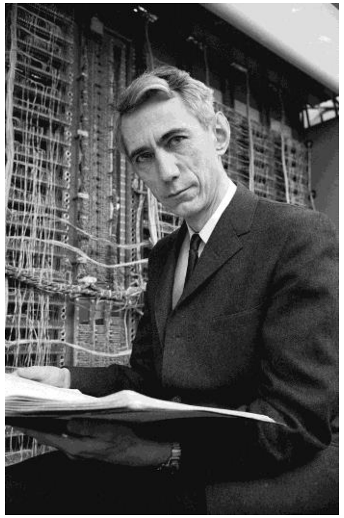
A Symbolic Analysis of Relay and Switching Circuits

By CLAUDE E. SHANNON
ENROLLED STUDENT AIEE

I. Introduction

IN THE CONTROL and protective circuits of complex electrical systems it is frequently necessary to make in-

bolic study of logic. For the synthesis problem the desired characteristics are first written as a system of equations, and the equations are then manipulated into the form representing the simplest circuit. The circuit may then be immedi-



- Ingeniero electrónico del MIT
- A symbolic analysis of relay and switching circuits, 1938:
  - › "El álgebra de Boole constituye una formalización algebraica apropiada para el estudio de los circuitos electrónicos de conmutación con sólo 2 estados posibles" (como relevadores electromecánicos)

› El álgebra de Boole ha sido, y es, desde entonces la herramienta matemática en el análisis y diseño de sistemas digitales, <u>independiente del campo de aplicación y de la tecnología aplicada</u>

Definición del álgebra de Boole

› El álgebra de Boole es un conjunto cerrado en que se definen las operaciones A={X,¯,+,·} con X={0,1}

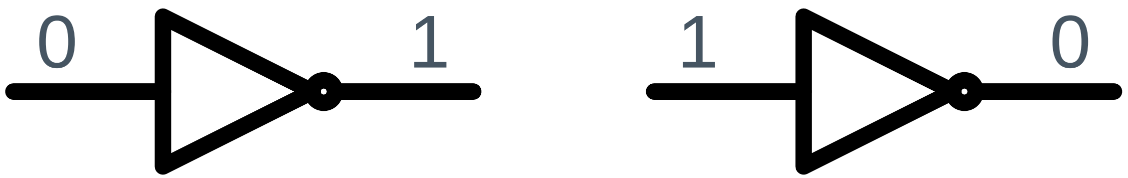
– ¯ → Operación monaria (una sola variable),

– +, · → Operación binaria (entre 2 objetos del conjunto)

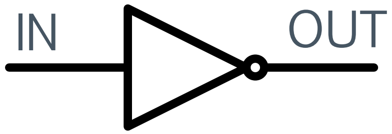
› Reglas:

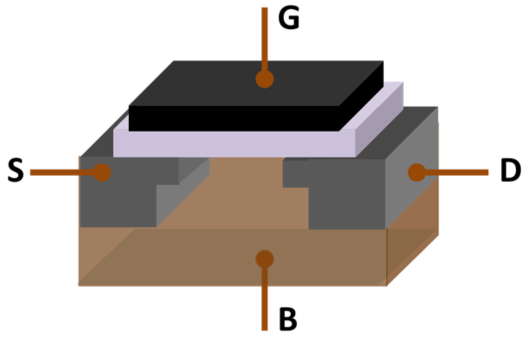
1. $\forall x \in X \Leftrightarrow x = 0 \lor x = 1$
2. Operación complemento o negación (**NOT**)

- $\overline{0} = 1$
- $\overline{1} = 0$

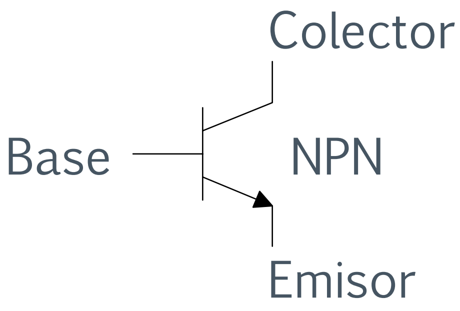


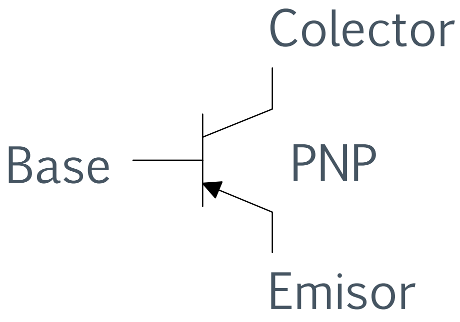
Anexo: puerta NOT con transistores



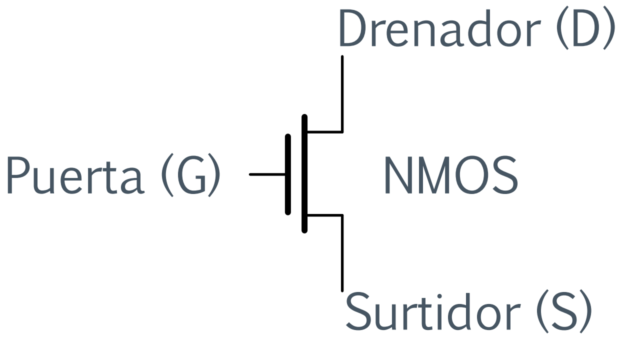


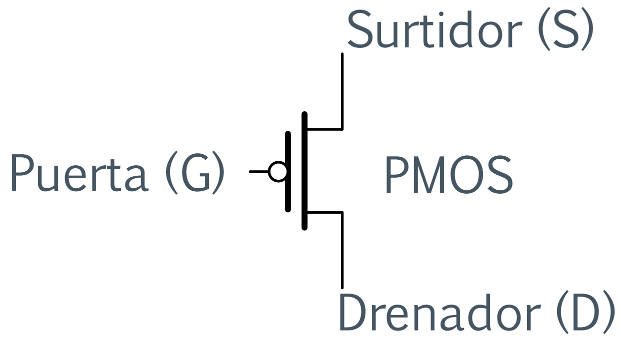
TRANSISTORES BJT



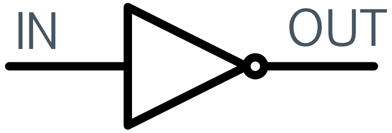


TRANSISTORES CMOS

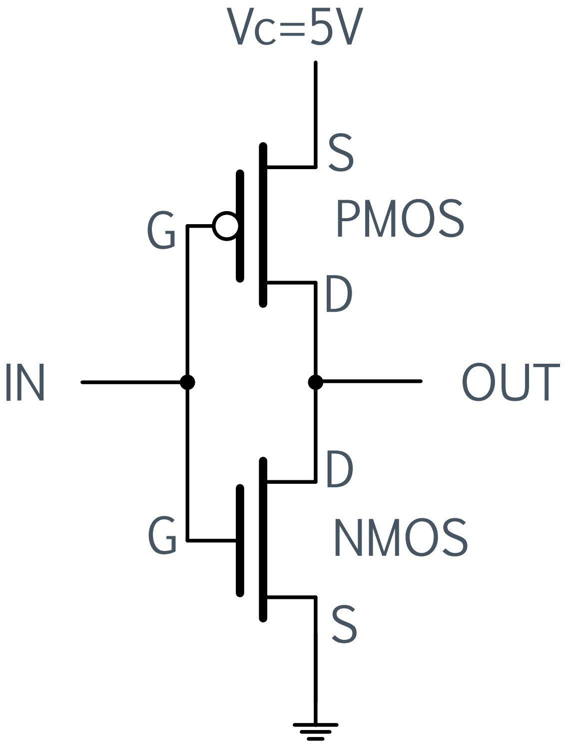


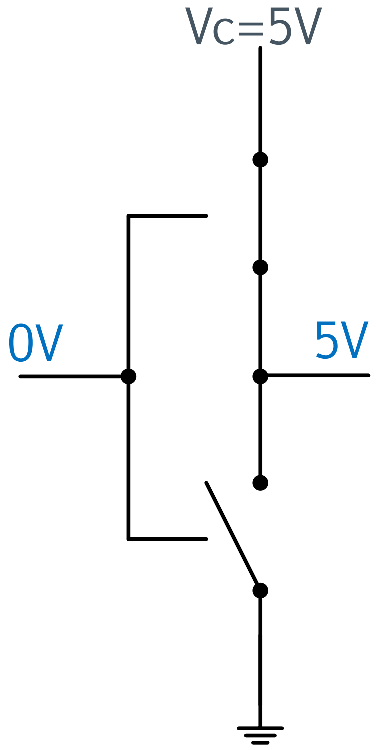


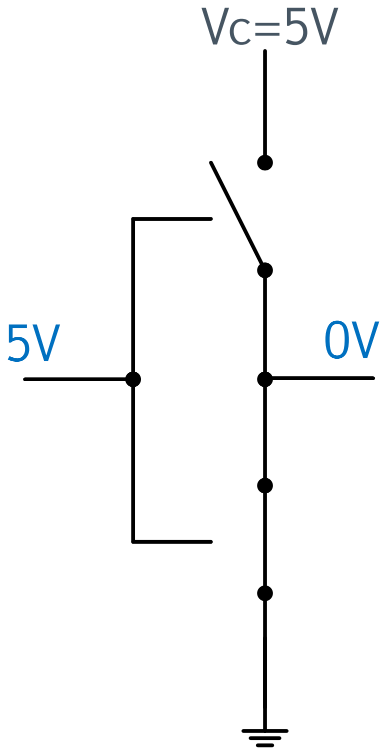
Anexo: puerta NOT con transistores



IN	OUT
0	1
1	0







Universidad de La Laguna

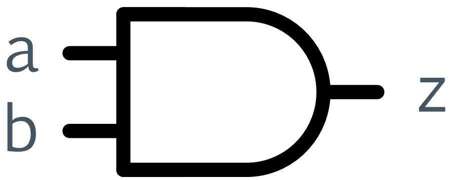
Definición del álgebra de Boole

› Reglas:

3. Operación producto booleano o producto lógico (**AND**)

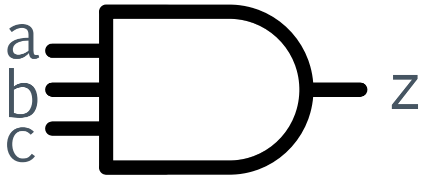
a	·	b	=	z
0	·	0	=	0
0	·	1	=	0
1	·	0	=	0
1	·	1	=	1

$z=a\cdot b$



Extensible a cualquier número de entradas:

$z=a\cdot b\cdot c$



a	b	c	z
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

Universidad de La Laguna

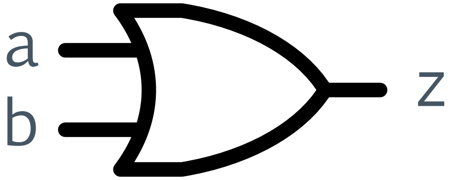
Definición del álgebra de Boole

› Reglas:

4. Operación producto booleano o producto lógico (**OR**)

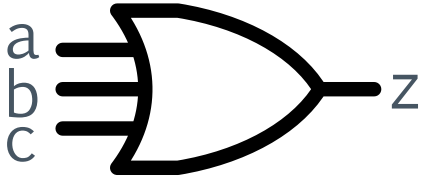
a + b = z
0 + 0 = 0
0 + 1 = 1
1 + 0 = 1
1 + 1 = 1

z=a+b



Extensible a cualquier número de entradas:

z=a+b+c



a	b	c	z
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

Definición del álgebra de Boole

- Reglas:
  5. El producto lógico es precedente respecto a la suma lógica
     - $f = ab + c = (ab) + c$
     - $f = ab + c \neq a(b + c)$

Definición del álgebra de Boole

› Postulados:

Postulado		Postulado dual	
(P1)	$x = 0 \Leftrightarrow x \neq 1$	(P1D)	$x = 1 \Leftrightarrow x \neq 0$
(P2)	$Si x = 0 \Rightarrow \overline{x} = 1$	(P2D)	$Si x = 1 \Rightarrow \overline{x} = 0$
(P3)	$0 \cdot 0 = 0$	(P3D)	$1 + 1 = 1$
(P4)	$1 \cdot 1 = 1$	(P4D)	$0 + 0 = 0$
(P5)	$1 \cdot 0 = 0 \cdot 1 = 0$	(P5D)	$0 + 1 = 1 + 0 = 1$

(Principio de dualidad)

Teoremas del álgebra de Boole

(T1) Propiedad conmutativa	$x + y = y + x$	$x \cdot y = y \cdot x$
(T2) Elemento identidad	$0 + x = x$	$1 \cdot x = x$
(T3) Propiedad distributiva	$x(y + z) = x \cdot y + x \cdot z$	$x + (y \cdot z) = (x + y)(x + z)$
(T4) Elemento complementario	$x + \overline{x} = 1$	$x \cdot \overline{x} = 0$
(T5) Propiedad de idempotencia	$x + x = x$	$x \cdot x = x$
(T6) Elemento nulo	$x + 1 = 1$	$x \cdot 0 = 0$
(T7) Ley de convolución	$\overline{\overline{x}} = x$	
(T8) Ley de absorción	$x + xy = x$	$x(x + y) = x$
(T9) Propiedad asociativa	$x(yz) = (xy)z$	$x + (y + z) = (x + y) + z$

Universidad de La Laguna

Teoremas del álgebra de Boole

(T10) Teorema del consenso

$$xy + \overline{x}z = xy + \overline{x}z + yz \qquad (x+y)(\overline{x}+z) = (x+y)(\overline{x}+z)(y+z)$$

$$xy + \bar{x}z + yz = xy + \bar{x}z$$

$$\begin{aligned}
xy + \bar{x}z + yz &= xy + \bar{x}z + 1 \cdot yz \\
&= xy + \bar{x}z + (x + \bar{x})yz \\
&= xy + \bar{x}z + xyz + \bar{x}yz \\
&= xy + xyz + \bar{x}z + \bar{x}yz \\
&= xy(1 + z) + \bar{x}z(1 + y) \\
&= xy \cdot 1 + \bar{x}z \cdot 1 \\
&= xy + \bar{x}z
\end{aligned}$$

Teoremas del álgebra de Boole

(T11) Teorema de Morgan

Primera ley *Segunda ley*

$$\overline{x+y} = \overline{x} \cdot \overline{y} \qquad \overline{xy} = \overline{x} + \overline{y}$$

Todo producto puede expresarse como suma negada y viceversa

Para 3 variables:

$$\overline{x+y+z} = \overline{x} \cdot \overline{y} \cdot \overline{z} \qquad \overline{xyz} = \overline{x} + \overline{y} + \overline{z}$$

Para n variables:

$(X_1 + X_2 + X_3 + \cdots + X_n)' = X_1'X_2'X_3' \cdots X_n'$

$(X_1X_2X_3 \cdots X_n)' = X_1' + X_2' + X_3' + \cdots + X_n'$

$$\overline{f}(x_i, +, \cdot) = f(\overline{x_i}, \cdot, +)$$

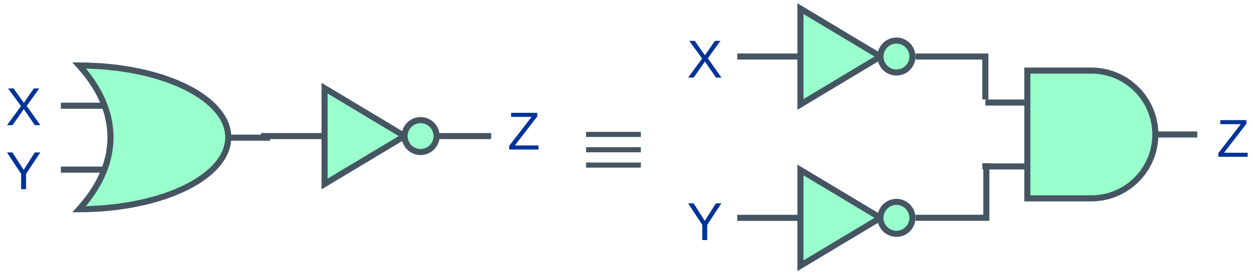
Universidad de La Laguna

Teoremas del álgebra de Boole

(T11) Teorema de Morgan

Primera ley

$$\overline{x+y} = \overline{x} \cdot \overline{y}$$



El complemento de la suma es igual al producto de los complementos.

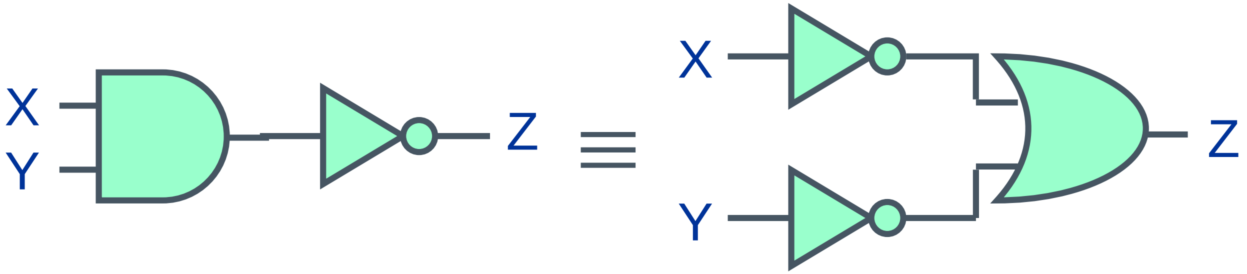
X	Y	X+Y	(X+Y)’	X’	Y’	X’Y’
0	0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	1	0	0
1	0	1	0	0	1	0
1	1	1	0	0	0	0

Teoremas del álgebra de Boole

(T11) Teorema de Morgan

Segunda ley

$$\overline{xy} = \overline{x} + \overline{y}$$



El complemento del producto es igual a la suma de los complementos.

X	Y	XY	(XY)'	X'	Y'	X' + Y'
0	0	0	1	1	1	1
0	1	0	1	1	0	1
1	0	0	1	0	1	1
1	1	1	0	0	0	0

Ejemplo:

› Expresa el complemento $\overline{f(w,x,y,x)}$ de la siguiente función en forma simplificada

$$f(w,x,y,z) = wx\overline{(\bar{y}z + y\bar{z})}$$

$$\begin{aligned}\overline{f(w,x,y,z)} &= \overline{wx\overline{(\bar{y}z + y\bar{z})}} \\ &= \overline{wx} + \overline{\overline{(\bar{y}z + y\bar{z})}} \\ &= \overline{wx} + \bar{y}z + y\bar{z} \\ &= \bar{w} + \bar{x} + \bar{y}z + y\bar{z}\end{aligned}$$

Teoremas del álgebra de Boole

(T12) Teorema de Shannon

Para toda función f que relacione variables booleanas:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_{n-1}, x_n) = x_i \cdot f(x_1, x_2, \ldots, 1, \ldots, x_{n-1}, x_n) + \overline{x_i} \cdot f(x_1, x_2, \ldots, 0, \ldots, x_{n-1}, x_n)$$

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_{n-1}, x_n) = (x_i + f(x_1, x_2, \ldots, 0, \ldots, x_{n-1}, x_n)) \cdot (\overline{x_i} + f(x_1, x_2, \ldots, 1, \ldots, x_{n-1}, x_n))$$

Ejemplo:

$$f(x, y, z) = xy + \overline{x}z + \overline{y}\,\overline{z}$$

$$f(x, y, z) = xf(1, y, z) + \overline{x}f(0, y, z) = x(y + \overline{y}\,\overline{z}) + \overline{x}(z + \overline{y}\,\overline{z})$$

Universidad de La Laguna

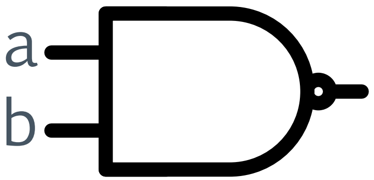
Principio de Dualidad

- Si una igualdad o teorema es verdadero, su dual también lo es.
- Es dual aquel en el que se cambian productos por sumas y vicerversa y 1's por 0's y viceversa

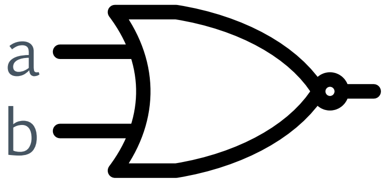
$$f_1 = f_2 \Leftrightarrow f_1^D = f_2^D$$

Ojo: $f \neq f^D$

Puertas NAND y NOR

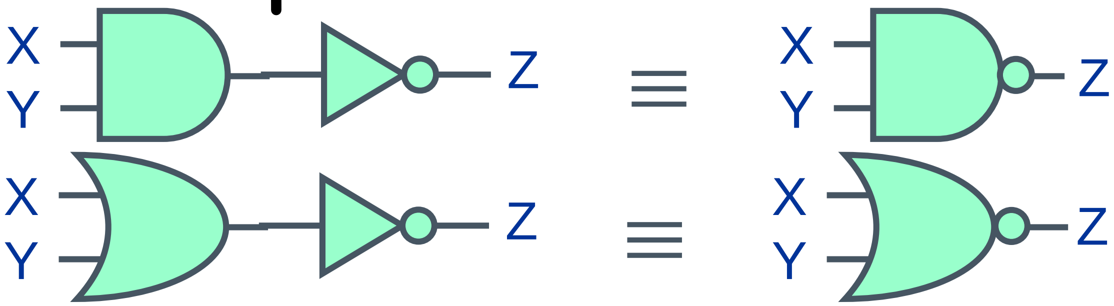


$$z = \overline{ab}$$

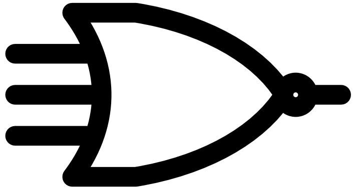


$$z = \overline{a + b}$$

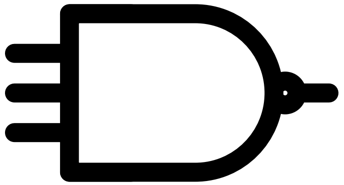
a	b	AND	NAND	OR	NOR
0	0	0	1	0	1
0	1	0	1	1	0
1	0	0	1	1	0
1	1	1	0	1	0



Extensible a cualquier número de entradas:



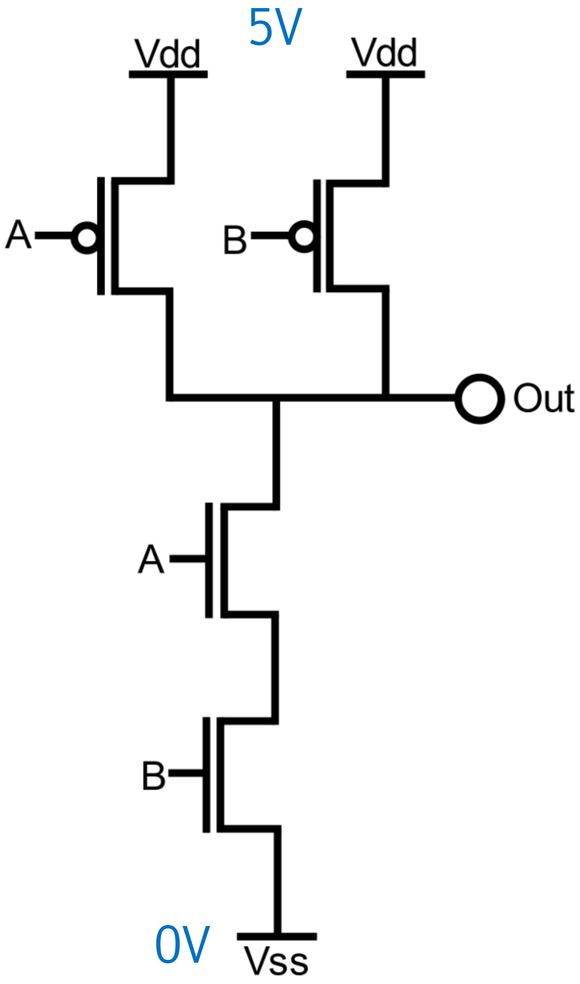
$$z = \overline{abc}$$



$$z = \overline{a + b + c}$$

a	b	c	AND	NAND	OR	NOR
0	0	0	0	1	0	1
0	0	1	0	1	1	0
0	1	0	0	1	1	0
0	1	1	0	1	1	0
1	0	0	0	1	1	0
1	0	1	0	1	1	0
1	1	0	0	1	1	0
1	1	1	1	0	1	0

Anexo: puerta NAND con transistores

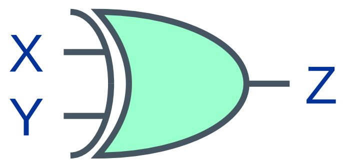


a	b	NAND
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Universidad de La Laguna

Puerta XOR

$X \oplus Y = XY' + X'Y$



X	Y	Z
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Si X=1 **OR** Y=1, pero no ambos, entonces C=1

$X \oplus 0 = X$

$X \oplus 1 = X'$

$X \oplus X = 0$

$X \oplus X' = 1$

Ley Conmutativa:
$X \oplus Y = Y \oplus X$

Ley Asociativa:
$(X \oplus Y) \oplus Z = X \oplus (Y \oplus Z) = X \oplus Y \oplus Z$

Ley Distributiva:
$X(Y \oplus Z) = XY \oplus XZ$

Universidad de La Laguna

Puerta XOR

Ley del Complemento:

$(X \oplus Y)' = X \oplus Y' = X' \oplus Y$

X	Y	X'	Y'	X⊕Y	(X⊕Y)'	X⊕Y'	X'⊕Y
0	0	1	1	0	1	1	1
0	1	1	0	1	0	0	0
1	0	0	1	1	0	0	0
1	1	0	0	0	1	1	1

Prueba algebraica:

$$
\begin{aligned}
(X \oplus Y)' &= (XY' + X'Y)' \\
&= (XY')'(X'Y)' \\
&= (X' + Y)(X + Y') \\
&= X'X + X'Y' + XY + YY' \\
&= 0 + X'Y' + XY + 0 \\
&= X'Y' + XY \quad = X' \oplus Y \\
&= XY + X'Y' \quad = X \oplus Y'
\end{aligned}
$$

Resumen puertas básicas

a	b	AND	NAND	OR	NOR	XOR	XNOR
0	0	0	1	0	1	0	1
0	1	0	1	1	0	1	0
1	0	0	1	1	0	1	0
1	1	1	0	1	0	0	1