Título de la Práctica: Combinatoria.

Profesor Responsable: Antonio Sedeño Noda.

Práctica número: 1

- **Objetivo**

En esta práctica repasamos las técnicas básicas de recuento (Combinatoria), descritas en las clases teóricas, mediante ejemplos y problemas. Para ello, se utilizará el motor computacional de conocimiento denominado **Wolfram Alpha (W|A)**, cuyo núcleo de cálculo está basado en el aplicativo de cálculo simbólico Mathematica. Los contenidos de la práctica son los siguientes:

- Repaso de combinatoria.
- Introducción a W|A.
- Comandos de W|A para recuento básico.
- Comandos de W|A para las técnicas de recuento avanzado.
- Problemas de recuento básico.
- Cuestionario tipo test que indicará la nota final de la práctica.

1. Repaso de Combinatoria

- *Regla o principio del producto (informal)*. Si una tarea se realiza en dos etapas, donde la primera se puede realizar de *m* formas posibles y, *si para cada una de ellas* la segunda etapa se puede realizar de *n* distintas formas, entonces la tarea completa se puede arrojar *mn* formas posibles.

- *Regla o principio del producto (Conjuntista)*. Se tienen *k* conjuntos de elementos con $n_1, \ldots, n_k$ elementos en cada uno. Deseamos tomar una muestra de *k* elementos de forma que seleccionamos un único elemento de cada conjunto. El número total de muestras distintas coincide con el producto del número de elementos de cada conjunto $n_1 \cdot n_2 \cdots n_k$.

  Ejemplo: ¿De cuántas formas diferentes podemos seleccionar un menú en el que podemos elegir entre dos primeros platos, cuatro segundos platos y tres postres?

- *Variaciones sin repetición de n elementos tomados de k en k*. Sea *A* un conjunto de *n* elementos distintos. Si tomamos *k* elementos de *A* donde importa el orden y no se pueden repetir ($k \leq n$), el número total de muestras diferentes es:

$$V_n^k = n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

  Ejemplo: De los 25 profesores del grado de Matemáticas, ¿de cuántas formas diferentes se puede nombrar un equipo directivo (formado por decano, vicedecano y secretario)?

- *Variaciones con repetición de n elementos tomados de k en k*. Sea *A* un conjunto de *n* elementos distintos. Si tomamos *k* elementos de *A* donde importa el orden y se pueden repetir, el número total de maneras diferentes de hacerlo es:

$$VR_n^k = \underbrace{n \cdot n \cdots n}_{k} = n^k$$

Ejemplo: ¿Cuántos números distintos de 8 dígitos se pueden escribir en binario?

- *<u>Permutaciones de n elementos</u>.* Son el caso particular de las variaciones sin repetición en el que *k* = *n*. Sea *A* un conjunto de *n* elementos distintos. Si tomamos los *n* elementos de *A* donde importa el orden y se pueden repetir, el número total de maneras diferentes de hacerlo es (ó el número de formas de ordenar *n* objetos):

$$P_n = V_n^k = n(n-1)\cdots 1 = n!$$

Ejemplo: ¿De cuántas formas diferentes se pueden sentar 6 personas en 6 sillas?

- *<u>Permutaciones con repetición o con objetos indistinguibles</u>.* Sea *A* un conjunto de *n* elementos distintos que se repiten $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$. Sea $m=\alpha_1+\cdots+\alpha_n$ el número total de objetos que hay. Entonces, el número de formas diferentes de ordenar estos *m* objetos es:

$$PR_m^{\alpha_1,\ldots,\alpha_n} = \frac{m!}{\alpha_1!\cdots\alpha_n!}$$

Ejemplo: ¿Cuántas palabras diferentes (con o sin sentido) podemos formar con tres aes, dos eses una o y una t?

- *<u>Combinaciones de n elementos tomados de k en k</u>.* Sea *A* un conjunto de *n* elementos distintos. Si tomamos *k* elementos de *A* donde no importa el orden y no se pueden repetir ($k \le n$), el número total de muestras (subconjuntos) diferentes es:

$$C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{V_n^k}{P_k}$$

Ejemplo: ¿Cuántos conjuntos diferentes de 4 de alumnos se pueden formar de una clase de 30 alumnos?

- *<u>Combinaciones con repetición de n elementos tomados de k en k</u>.* Sea *A* un conjunto de *n* elementos distintos. Si tomamos *k* elementos de *A* donde no importa el orden y se pueden repetir, el número total de muestras (subconjuntos) diferentes es:

$$CR_n^k = \binom{n+k-1}{k} = C_{n+k-1}^k$$

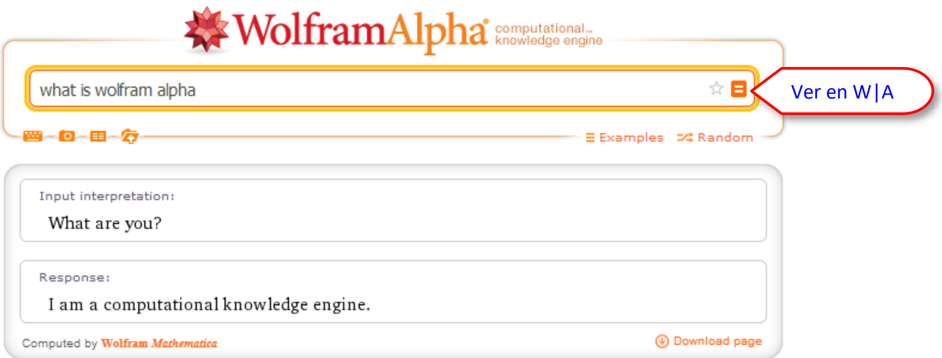
Ejemplo: ¿De cuántas formas diferentes podemos poner en una urna 16 bolas si disponemos de bolas blancas, rojas y negras? ($x_B + x_R + x_N = 16$)

Tabla Resumen de Combinatoria

A={a_1,..., a_n} con *n* elementos diferentes	¿Influye el orden?	¿Pueden repetirse los elementos?	Número total de elementos seleccionados	Fórmula
Variaciones sin repetición	Sí	No	$k \leq n$	$V_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$
Variaciones con repetición	Sí	Sí	k	$VR_n^k = n^k$
Permutaciones	Sí	No	n	$P_n = n!$
Permutaciones con repetición	Sí	a_i se repite α_i veces	$m = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$	$PR_m^{\alpha_1,\ldots,\alpha_n} = \frac{m!}{\alpha_1! \cdots \alpha_n!}$
Combinaciones	No	No	$k \leq n$	$C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{V_n^k}{P_k}$
Combinaciones con repetición	No	Sí	k	$CR_n^k = \binom{n+k-1}{k} = C_{n+k-1}^k$

- **¿Qué es W|A?**

La URL de W|A es www.wolframalpha.com, donde podemos preguntarle directamente qué es:

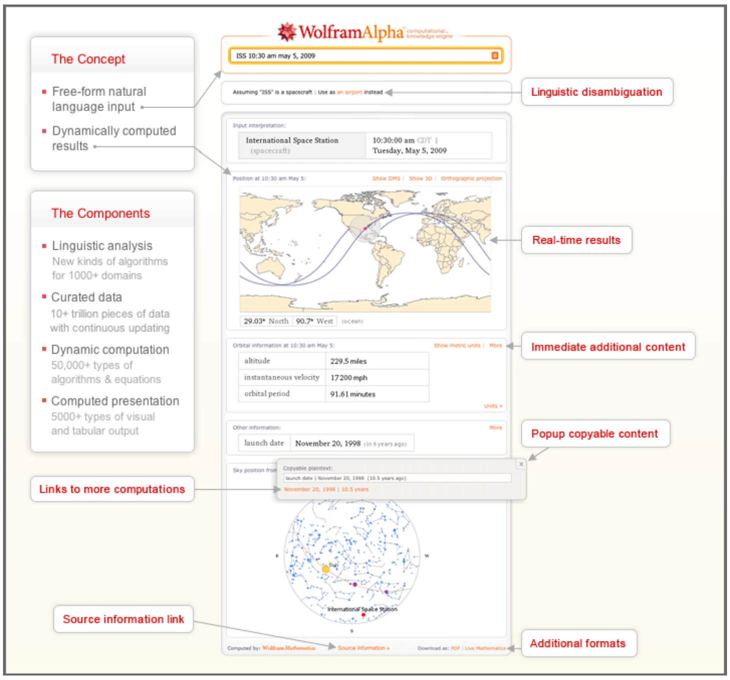


A lo cual responde: *"Soy un motor de conocimiento computacional*". Realmente, W|A no pretende ser un simple buscador (como Google), sino más bien una aplicación web que genera datos a partir de su propia base de conocimiento interna, sin tener que buscar en Internet para devolver los enlaces relacionados. Las principales ventajas de W|A son:

- Es de uso gratuito para fines no comerciales.
- Fácil de usar (como un buscador de internet) por cualquier persona.
- Muestra cientos de ejemplos relacionados con infinidad de tópicos tanto científicos como culturales y/o sociales.
- Permite desarrollar aplicativos sencillos, y expone toda su potencia de cálculo para ser consumida mediante servicios web (WS).

El motor de cálculo que hay detrás de W|A es la aplicación **Mathematica**, la cual, mediante su lenguaje simbólico matemático, proporciona el marco de trabajo sobre el que todo el conocimiento de W|A está representado, y sobre el que se implementan todas sus capacidades.

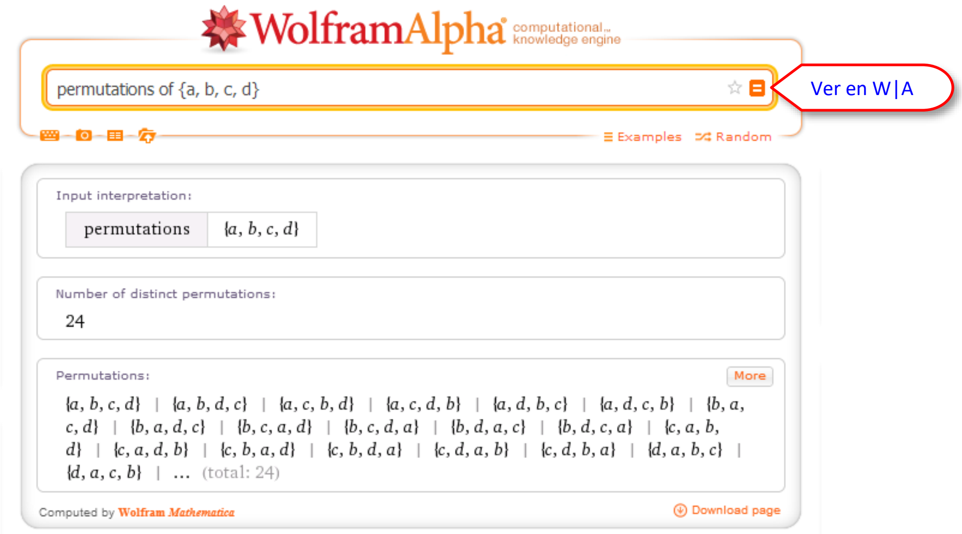
La web principal de W|A es muy simple, y se describe en la siguiente figura. Indicar que cada parte independiente que aparece en la web de W|A se denomina un ***pod*** o ***subpod***.



- **Técnicas de recuento**

Permutaciones de *n* elementos

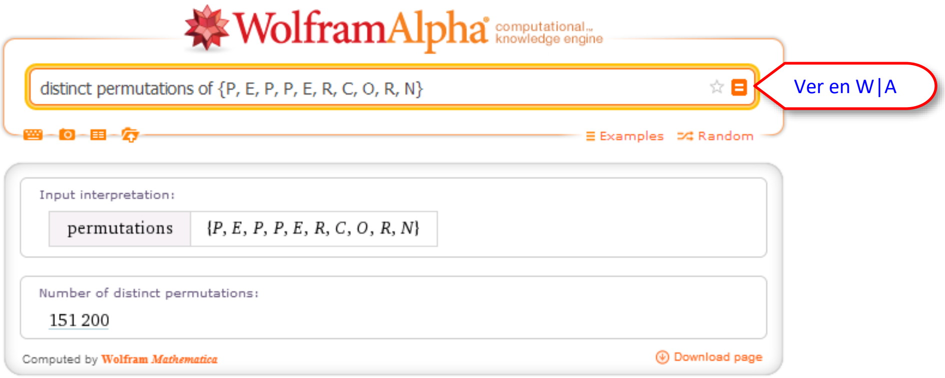
Podemos preguntarle por las permutaciones de un conjunto de elementos.



También se podría poner **Permutations[{a, b, c, d}]**, y con el comando **Lenght[·]** aplicado al resultado anterior obtendríamos el número total de permutaciones. O simplemente, calcular el número de permutaciones con **4! = 24**.

Permutaciones con objetos indistinguibles

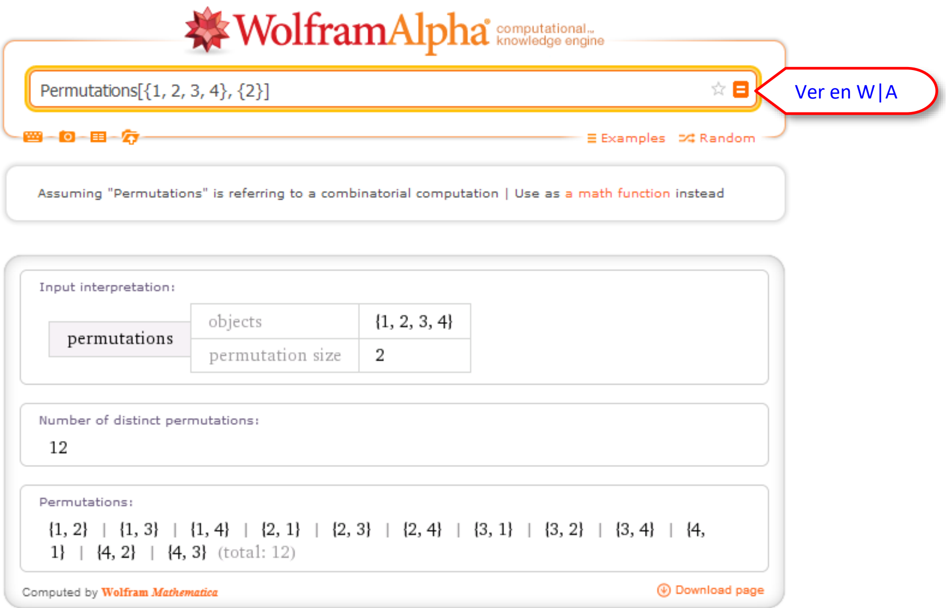
¿Cuántas cadenas distintas se pueden formar con las letras de la palabra PEPPERCORN si se utilizan todas las letras?



Si sólo queremos el número de permutaciones con repetición podemos usar el comando **MultinomialCoefficient(n_1, n_2,…,n_k),** en este ejemplo sería MultinomialCoefficient(3,2,2,1,1,1).

Variaciones sin repetición de *n* elementos tomados de *k* en *k*

¿Cuántos números de dos cifras sin repetir dígitos se pueden formar con el conjunto {1, 2, 3, 4}?

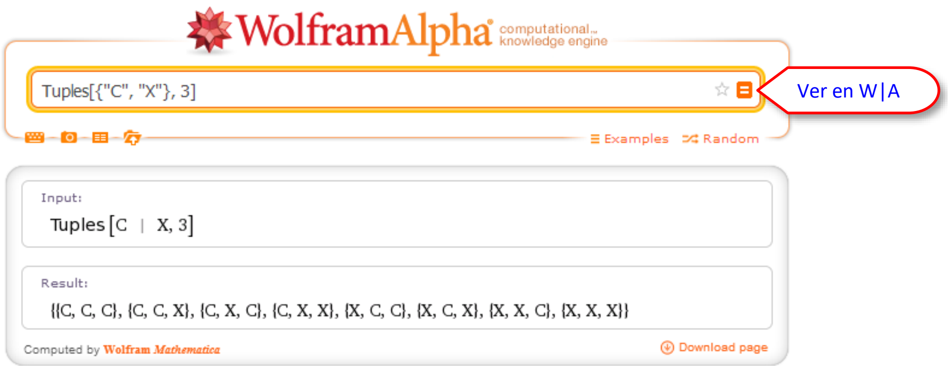


El número total de variaciones se obtiene aplicando el comando **Lenght[·]** al resultado anterior, o usar los comandos **P(*n*,*k*)** o ***nPk***, que en este caso particular sería P(4,2) ó 4P2.

Variaciones con repetición de *n* elementos tomados de *k* en *k*

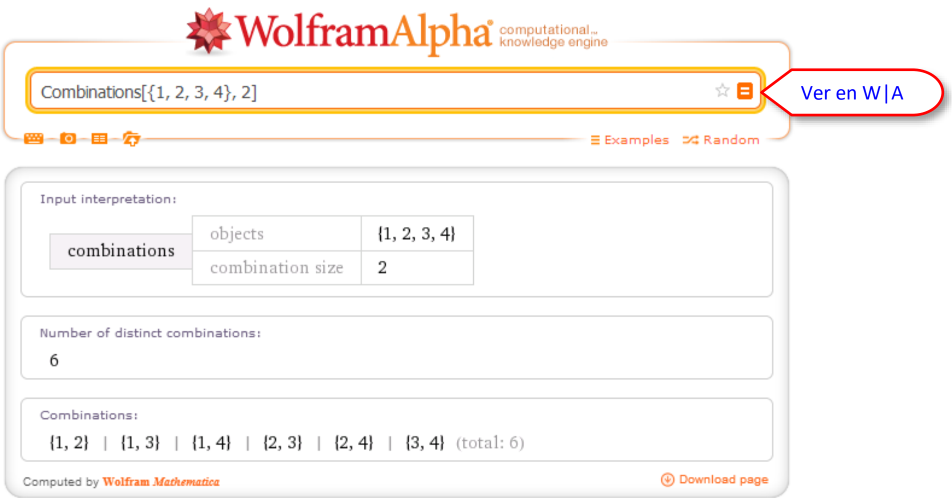
¿Cuántos sucesos distintos se pueden dar si se tira una moneda {C, X} tres veces?

Los sucesos se pueden obtener con el comando **Tuples[{“C”,”X”},3]**.



Combinaciones sin repetición de *n* elementos tomados de *k* en *k*

¿Cuántos grupos de dos alumnos distintos se pueden construir con los números {1, 2, 3, 4} asignados a dichos alumnos?



Si sólo queremos el número de combinaciones podemos usar el comando ***n* choose *k***. También se puede usar el comando **C(*n*,*k*)** o ***nCk***.

Combinaciones con repetición de *n* elementos tomados de *k* en *k*

¿De cuántas formas se pueden escoger 6 objetos de entre 10 si no se ordenan y se pueden repetir?

- **Problemas de recuento básico y avanzado**

En esta sección vamos a repasar los conceptos mediante la resolución de algunos de los problemas vistos en clase.

[1] ¿De cuántas formas se pueden escoger 6 objetos de entre 10 diferentes si:

a) los objetos escogidos se ordenan y no se pueden repetir?

Variaciones sin repetición: P(10,6) = 151 200

b) los objetos escogidos se ordenan y sí se pueden repetir?

Variaciones con repetición: 10^6 = 1 000 000

c) los objetos escogidos no se ordenan y no se pueden repetir?

Combinaciones: C(10,6) = 210

d) los objetos escogidos no se ordenan y sí se pueden repetir?

Combinaciones con repetición: C(10 + 6 – 1, 6) = 5005

[2] Un examen de tipo test contiene 100 preguntas con respuestas de VERDADERO o FALSO. ¿De cuántas formas distintas se puede responder al examen si las preguntas se pueden dejar sin contestar?

Variaciones con repetición de 3 elementos tomados de 100 en 100:

3^100 = 515 377 520 732 011 331 036 461 129 765 621 272 702 107 522 001 formas

[3] ¿Qué posibilidad tengo de acertar en los siguientes juegos de azar?

a) Acertar los 14 resultados en la **Quiniela de Fútbol** en una sola apuesta simple:

Variaciones con repetición: 3^14 = 4 782 969

b) Acertar la combinación ganadora de **La Primitiva** eligiendo 6 números del 1 al 49 en una sola apuesta simple:

Combinaciones: C(49,6) = 13 983 816

c) Acertar la combinación ganadora del **Euro Millones** eligiendo 5 números del 1 al 50, y 2 estrellas del 1 al 11 en una sola apuesta simple:

Combinaciones: C(50,5) * C(11,2) = 116 531 800

- **Cuestionario tipo test**

Para evaluar el rendimiento de la práctica, tienes que realizar un pequeño cuestionario tipo test, de 20 minutos de duración, que está accesible en el Campus Virtual ULL de Optimización. El cuestionario se puntúa de 0 a 5.