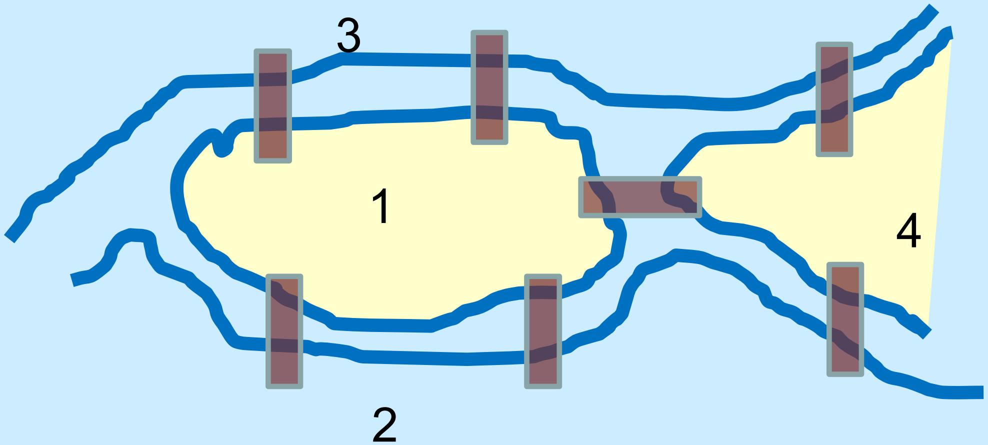
Escuela Superior de Ingeniería y Tecnología
Universidad de La Laguna

# Tema 5. GRAFOS y REDES

- Formalización de Modelos.
- Definiciones y Terminología Básica.
- Tipos de Grafos.
- Representación de los Grafos
- Problemas de coloración.

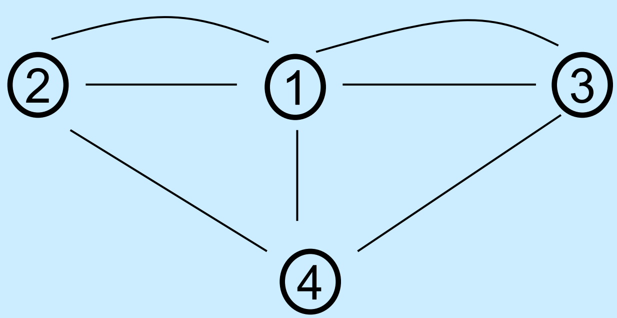
# Formalización de Modelos



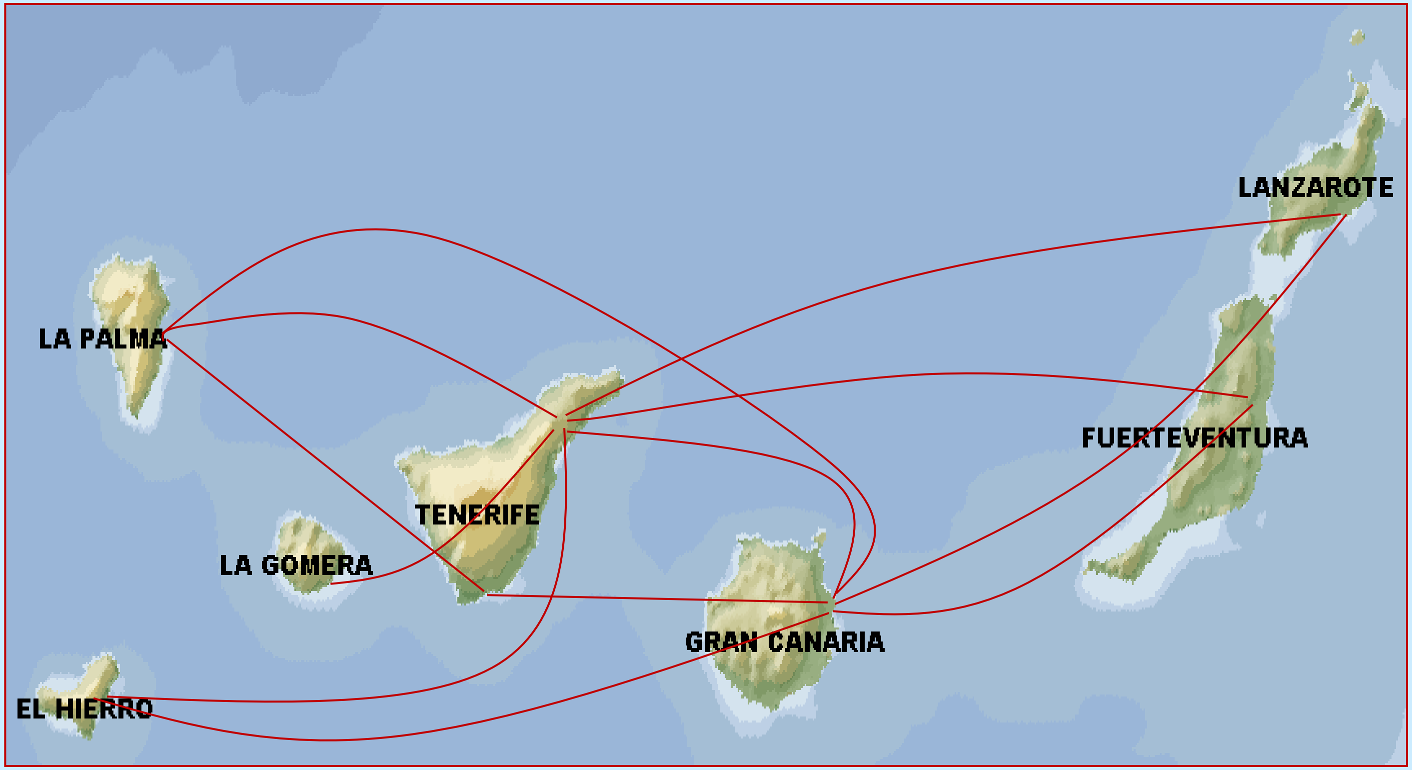

El **problema** de los siete puentes de Köenisgberg:

¿Es posible salir y llegar a un determinado punto pasando sólo una vez por cada uno de los puentes?

**Leonhard Euler** publicó en 1736 la solución a este problema apoyándose el modelo de un grafo:



# Formalización de Modelos




*Red de comunicaciones aéreas y marítimas en las Islas Canarias*

Su **abstracción** es un **grafo (Multigrafo)**

# Definiciones y terminología básica

**Grafos Dirigidos**

Un *grafo dirigido G*=(*V*, *A*) está definido por un conjunto *V* de ***nodos*** o ***vértices*** y un conjunto *A* cuyos elementos, denominados ***arcos,*** son pares ordenados de nodos.

Denotamos por $|V| = n$ al número de nodos de un Grafo, denominando orden del grafo al valor de n.
Denotamos por $|A| = m$ al número de arcos de un Grafo dirigido.

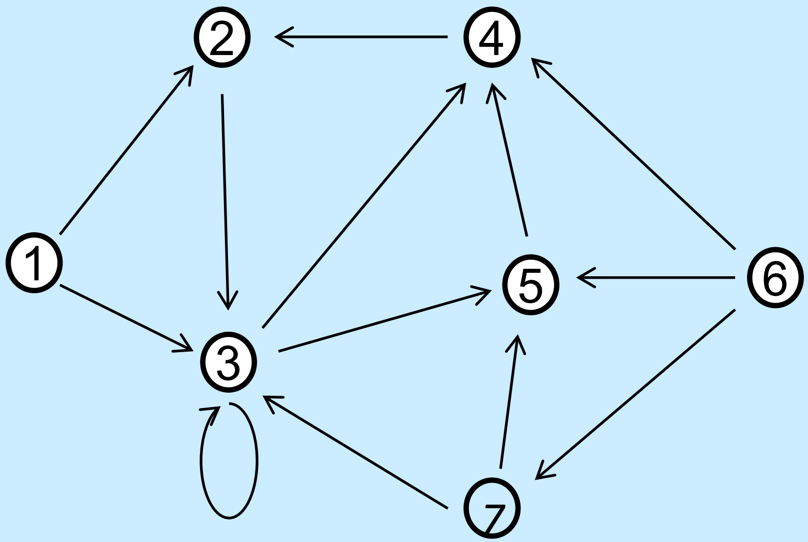
Si $a = (i, j) \in A$ es un arco de G, entonces *i* es el nodo inicial y *j* el nodo final de *a*. Un arco cuyo nodo inicial y final coinciden se denomina **bucle o lazo**.

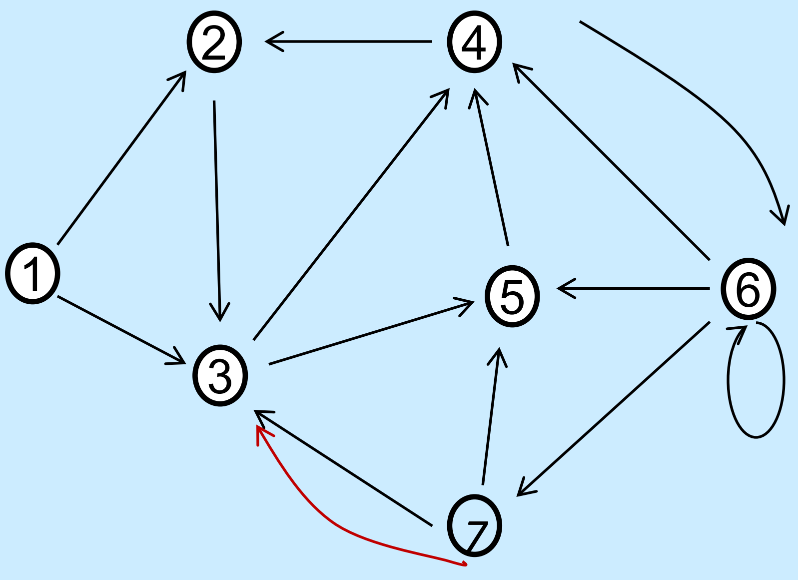
Un ***p-grafo*** es un grafo que contiene no más de *p* arcos (*i*, *j*) entre cualquier par de nodos *i* y *j* en este orden. Un ***1-grafo*** contiene a lo sumo un arco (*i*, *j*) para todo par de nodos *i* y *j*.

Un grafo es ***simple*** si es un 1-grafo y no contiene bucles. Para los modelos de optimización de esta asignatura, usaremos grafos simples.

# Definiciones y terminología básica

Grafo dirigido o 1-grafo de orden 7



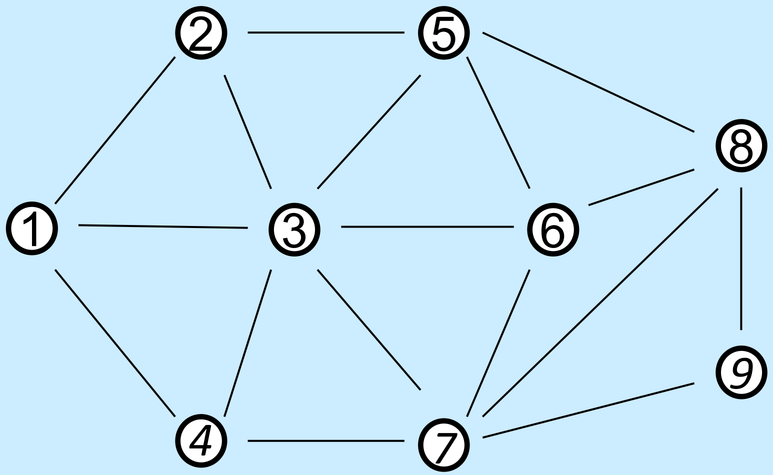

2-grafo dirigido de orden 7

# Definiciones y terminología básica

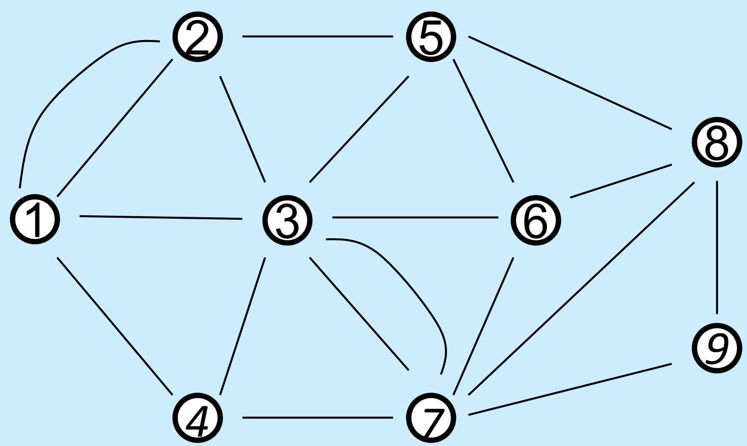
**Grafos No Dirigidos**

Un *grafo no dirigido G*=(*V*,*A*) está definido por un conjunto *V* de ***nodos*** o ***vértices*** y un conjunto *A* cuyos elementos denominados ***aristas*** son pares no ordenados de nodos. Denotamos por |A|=m al número de aristas de un grafo no dirigido.

Un **multigrafo** es un grafo que posee más de un arco entre algún par de nodos.




Grafo no dirigido simple




Multigrafo no dirigido

# Definiciones y terminología básica

Dado un grafo dirigido G=(V, A):

Decimos que *j* es un ***sucesor*** de *i* si existe el arco (*i*,*j*) en A.

Decimos que *i* es un ***predecesor*** de *j* si existe el arco (*i*,*j*) en A.

Por tanto, definimos:

$\Gamma_i^+ = \{ j \in V \mid (i, j) \in A \}$ es el ***conjunto de los sucesores*** del nodo *i o la lista de adyacencia de los sucesores de i.*

$\Gamma_j^- = \{ i \in V \mid (i, j) \in A \}$ es el ***conjunto de los predecesores*** del nodo *i o la lista de adyacencia de los predecesores de i.*

Dado un grafo no dirigido G=(V, E):
Decimos que dos nodos i, y j, son adyacentes si existe la arista (i, j) en E.

Se definen los nodos adyacentes del nodo i por $\Gamma_i = \{ j \in V \mid (i, j) \in E \}$

# Definiciones y terminología básica

Dado un grafo dirigido
El ***grado de salida*** de un nodo $i$ es $\delta^{+}(i) = \left|\Gamma_i^{+}\right|$.
El ***grado de entrada*** de un nodo $i$ es $\delta^{-}(i) = \left|\Gamma_i^{-}\right|$.
El ***grado*** de un nodo $i$ es $\delta(i) = \delta^{+}(i) + \delta^{-}(i)$.

$$\sum_{i \in V} \delta^{+}(i) = \sum_{i \in V} \delta^{-}(i) = m$$

Dado un grafo no dirigido $\delta(i) = \left|\Gamma_i\right|$

$$\sum_{i \in V} \delta(i) = 2m - n^{o}\, bucles$$

***Subgrafo***: Un grafo $G' = (V', A')$ es un **subgrafo** de $G=(V,A)$ si $V' \subseteq V$ y $A' \subseteq A$. Diremos que $G' = (V', A')$ es el **subgrafo** de $G$ **inducido** por $V'$ si $A'$ contiene cada arco de $A$ con ambos extremos en $V'$. Un grafo $G' = (V', A')$ es un **subgrafo generador** de $G=(V,A)$ si $V' = V$ y $A' \subseteq A$.

# Definiciones y terminología básica

Una ***cadena*** de longitud *q* es una secuencia de *q* aristas, $C=\{e_1, \ldots, e_q\}$, tal que una arista $e_r$ de la secuencia, $1<r<n$, tiene un extremo común con la arista anterior, $e_{r-1}$, y el otro con la siguiente, $e_{r+1}$. Los vértices libres de la primera y última arista se llaman **extremos de la cadena**.

Una ***cadena simple*** es una cadena que no atraviesa una arista cualquiera más de una vez. Una ***cadena elemental*** es una cadena que no atraviesa ningún vértice más de una vez. O, de otro modo, una cadena en la que sus vértices no tienen grado mayor que 2. Toda cadena elemental es simple.

Un ***ciclo*** es una cadena en la que en la que sus extremos coinciden.

Un grafo se dice ***acíclico*** si no contiene ciclos.

…toda cadena simple, ¿es elemental?

# Definiciones y terminología básica

Un ***camino*** de longitud $q$ es una secuencia de $q$ arcos orientados $P=\{e_1,\ldots,e_q\}$ con:

$$e_1=(i_1, i_2) \quad e_2=(i_2, i_3) \quad \ldots \quad e_q=(i_q, i_{q+1})$$

El vértice $i_1$ se denomina ***vértice inicial*** y el vértice $i_{q+1}$ ***vértice final***.

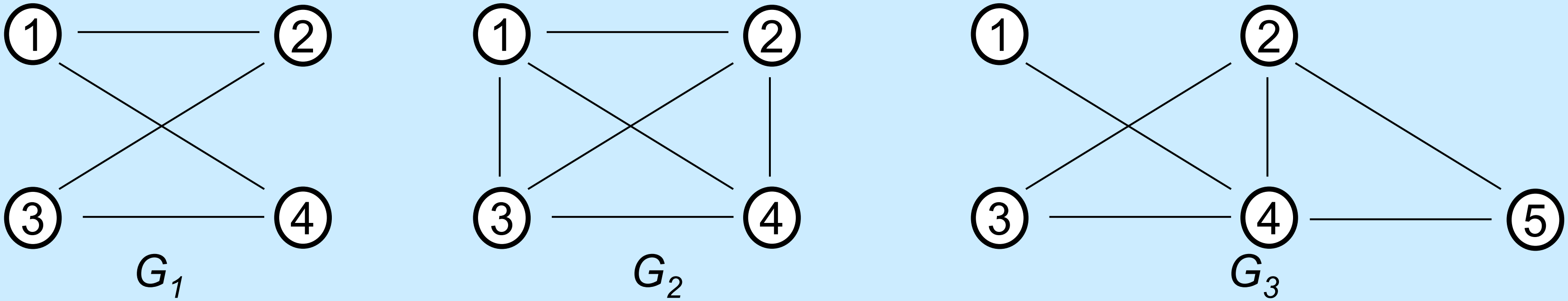
Un ***camino simple*** es el que no atraviesa ningún arco del grafo más de una vez. Un ***camino elemental*** es un camino en el que no se repite ningún vértice. También se puede definir como un camino en el que sus vértices no tienen grado mayor que 2. Es evidente que cada camino elemental también es simple.

Un ***circuito o ciclo dirigido*** es un camino que contiene al menos un arco y en el que los vértices inicial y final coinciden. Un circuito es ***elemental*** si todos sus vértices tienen grado 2.

Un grafo se dice ***sin circuitos o acíclico dirigido*** si no contiene circuitos.

# Definiciones y terminología básica

Un ***camino euleriano*** de un grafo no dirigido *G* es una cadena simple que contiene todas las aristas de *G.*
Un ***circuito euleriano*** de un grafo no dirigido *G* en un circuito simple que contiene todas las aristas de *G*.




$G_1$ tiene un circuito euleriano, $G_2$ no tiene un circuito euleriano ni camino euleriano. $G_3$ tiene un camino euleriano.

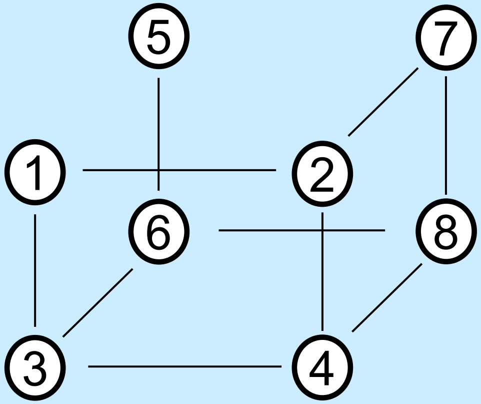
**Propiedad 1.** Un multigrafo no dirigido tiene un circuito euleriano sí, y sólo si, cada uno de sus vértices tiene grado par.

**Propiedad 2.** Un multigrafo no dirigido tiene un camino euleriano pero no un circuito euleriano sí, y sólo si, tiene, exactamente, dos vértices de grado impar.

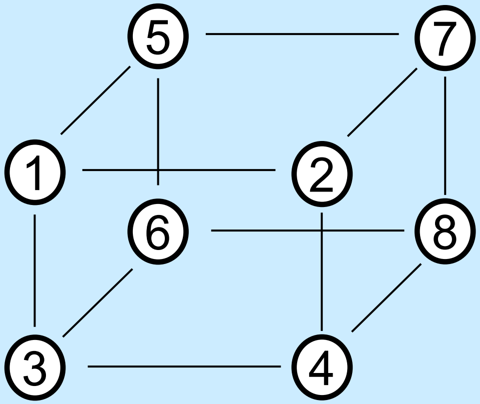
***Problema del cartero chino***

# Definiciones y terminología básica

Un ***camino hamiltoniano*** de un grafo no dirigido *G* es aquel que pasa exactamente una vez por cada uno de los vértices de *G*.
Un ***circuito hamiltoniano*** de un grafo no dirigido *G* es aquel que pasa exactamente una vez por cada uno de los vértices de *G*




$G_1$




$G_2$

$G_1$ tiene un camino hamiltoniano pero no un circuito hamiltoniano,
$G_2$ tiene un circuito hamiltoniano.

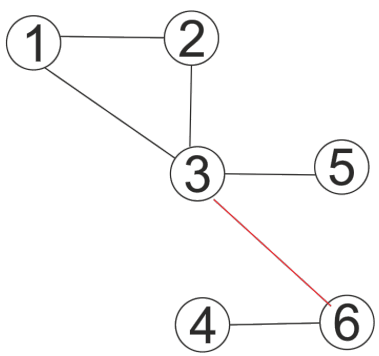
La determinación de circuitos hamiltonianos motiva uno de los problemas más importantes en optimización: EL PROBLEMA DEL VIAJANTE (TSP)

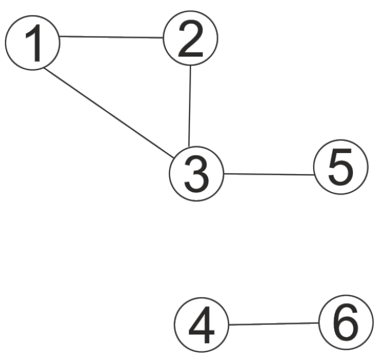
# Definiciones y terminología básica

**Conectividad**: decimos que dos nodos *i* y *j* de un grafo no dirigido están conectados si existe una cadena que los une, esto es, existe una cadena de extremos *i y j*.

Un grafo no dirigido es **conexo** si cualquier par de nodos están conectados; en otro caso, diremos que el grafo es **no conexo**. Llamaremos **componentes conexas** a los subgrafos conexos de un grafo no conexo.

*En la figura siguiente, mostramos un grafo conexo, y un grafo no conexo y sus dos componente conexas.*



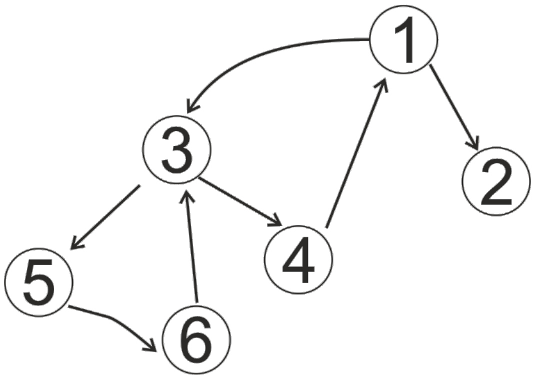



# Definiciones y terminología básica

**Conectividad fuerte**: decimos que un grafo dirigido es fuertemente conexo si para cualesquiera par de nodos *i* y *j*, *existe un camino con origen en i y destino en j*.

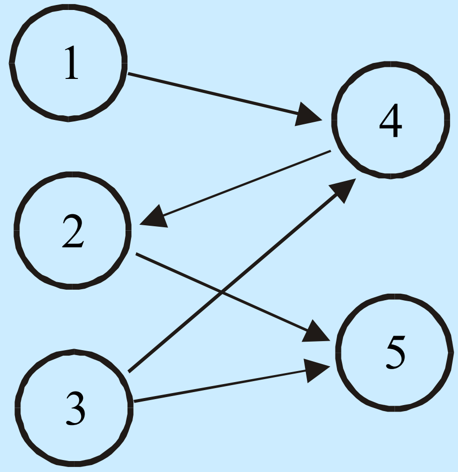
Llamaremos **componentes fuertemente conexas** de un grafo dirigido, a los subgrafos que sean fuertemente conexos.

*En la figura siguiente, mostramos un grafo no dirigido: ¿es fuertemente conexo?¿cuántas componentes fuertemente conexas tiene?.*



# Tipos de Grafos

***Grafo bipartito***: un grafo $G=(V,A)$ es un grafo bipartito si podemos dividir su conjunto de nodos en dos subconjuntos $V_1$ y $V_2$ tal que cada arco $(i,j) \in A$ tiene un extremo en $V_1$ y el otro en $V_2$. La Figura muestra un grafo bipartito con $V_1=\{1,2,3\}$ y $V_2=\{4,5\}$. La siguiente propiedad caracteriza a los grafos bipartitos: Un grafo $G$ es bipartito si y sólo si todo ciclo en $G$ contiene un número par de arcos.




*Grafo bipartito.*

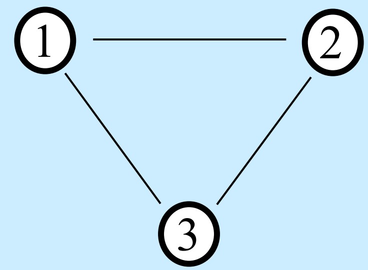
# Tipos de Grafos

Un grafo $G$=($V$, $E$) se dice ***completo*** si cada par de vértices es adyacente.

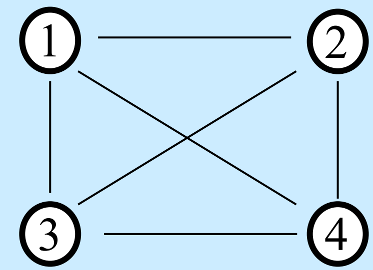
Un grafo simple y completo con $N$ vértices se denota por $K_N$.


$K_1$


$K_2$

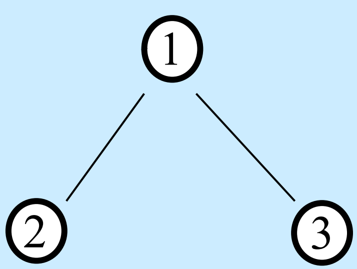



$K_3$

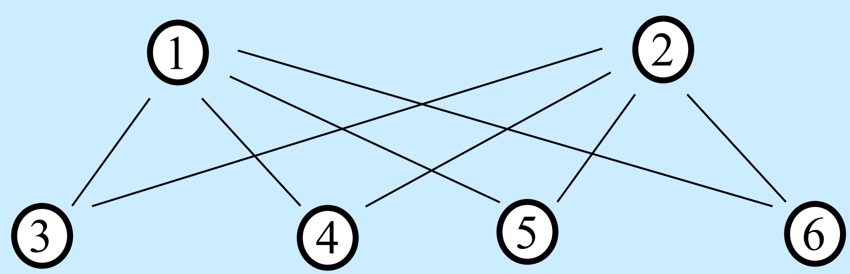



$K_4$

Un grafo bipartito $G$=($U \cup V$, $E$) se dice ***completo*** si cada par de vértices de los conjuntos $U$ y $V$ son adyacentes. Un grafo bipartito simple y completo con $n,m$ vértices se denota por $K_{n,m}$.



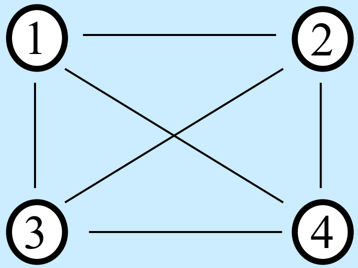

$K_{1,2}$



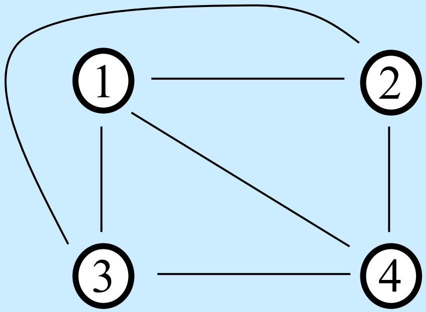

$K_{2,4}$

# Tipos de Grafos

**Grafos planares**
Un grafo es planar si se puede representar en el plano de forma que sus aristas no se corten.
Por tanto, pueden existir formas alternativas de representación de un grafo que lo transformen en plano.




$G_1$




$G_2$

$G_2$ es la representación planar de $G_1$

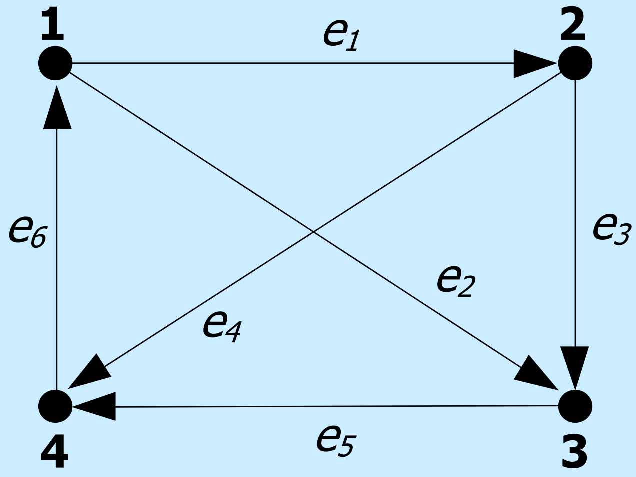
Para determinar si un grafo es **no** planar se utilizan las siguientes Propiedades:

Propiedad 1. Si G es conexo y planar con $n \geq 3$ entonces $m \leq 3n - 6$

Propiedad 2. Si G es conexo, bipartito y planar con $n \geq 3$, entonces $m < 2n - 4$

**Matriz de incidencia vértice–arco**

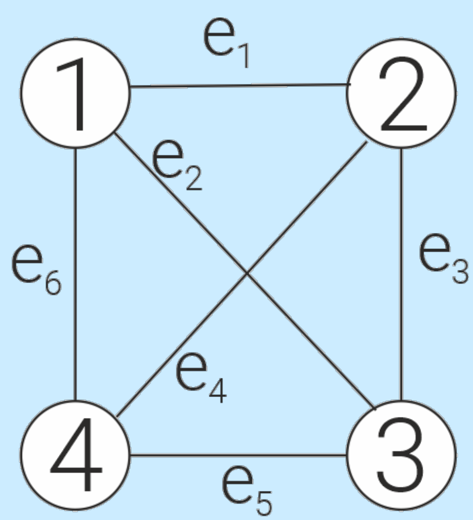
La matriz de incidencia vértice–arco de un grafo dirigido $G=(V, A)$ es una matriz $A=(a_{ve})$, con $v=1,\ldots,n$ y $e=1,\ldots,m$. El elemento $a_{ve}$ es de la forma $a_{ve}=+1$ si $v$ es vértice inicial del arco $e$, $a_{ve}=-1$ si $v$ es vértice final de la arco $e$, y $a_{ve}=0$ en otro caso.




$$A = \begin{pmatrix} +1 & +1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & +1 & +1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & +1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & +1 \end{pmatrix}$$

## Matriz de incidencia vértice–arista

La matriz de incidencia vértice–arista de un grafo no dirigido $G=(V, E)$ una matriz $B=(b_{ve})$, con $v=1,\ldots,n$ y $e=1,\ldots,m$. El elemento $b_{ve}$ es de la forma $b_{ve}=1$ si $v$ es un vértice extremo de la arista $e$, y $b_{ve}=0$ en otro caso.

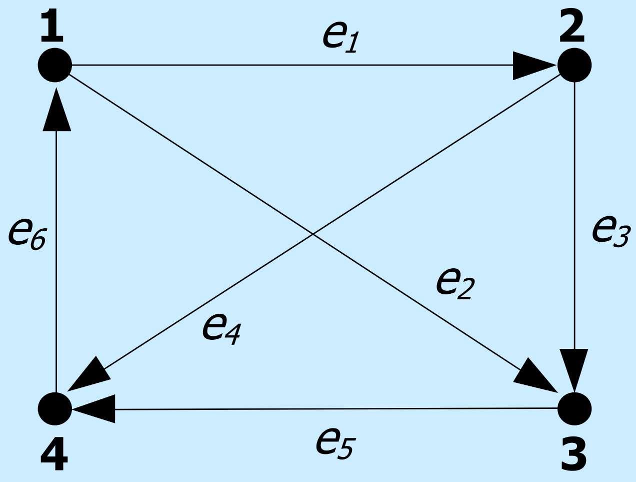



$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

# Representación de Grafos

**Matriz de adyacencia o matriz de incidencia vértice–vértice**

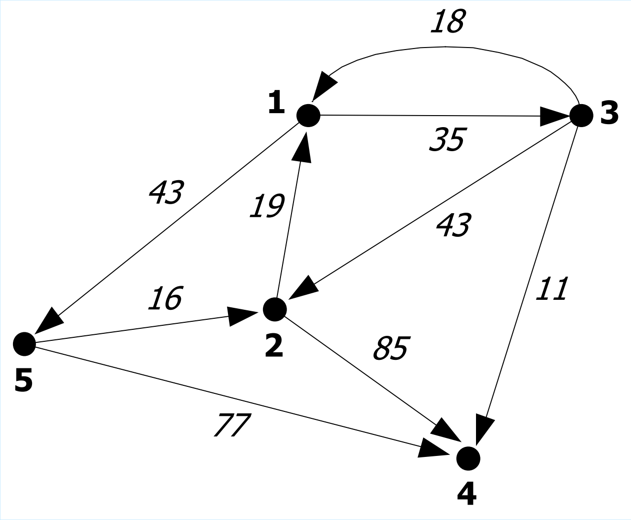
Sea $G=(V, A)$ un 1–grafo dirigido (no existe más de un arco entre dos vértices $i$ y $j$). La matriz de adyacencia, o matriz de incidencia vértice–vértice, es una matriz $A=(a_{ij})$ cuyos elementos son de la forma $a_{ij}=1$ si existe el arco $(i, j)$, y $a_{ij}=0$ en caso contrario. Si el grafo es no dirigido, la matriz de adyacencia asociada a su grafo dirigido es simétrica.




$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

# Representación de Grafos

**Matriz de costos:** Los grafos suelen llevar asociado en cada arco un número que puede indicar, una longitud, un coste, un peso, un tiempo, etc. La forma más simple de representar un grafo con costos en los arcos *A* es la matriz de pesos o costos, la cual es una matriz $W=(w_{ij})$ en la que cada elemento $w_{ij}$ es igual al costo del arco $(i, j)$. Si no existe el arxo $(i, j)$ en el grafo *G*, $w_{ij}=\infty$. Los elementos de la diagonal $w_{ii}$ se suele establecer a cero, infinito, (o a otro valor según el algoritmo).

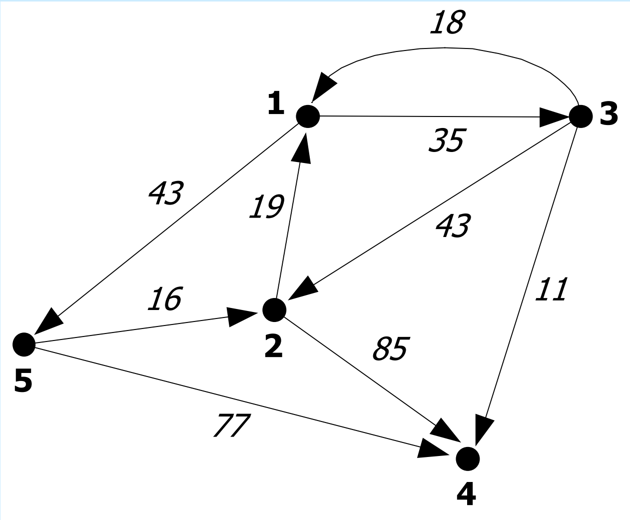



$$W = \begin{pmatrix} 0 & \infty & 35 & \infty & 43 \\ 19 & 0 & \infty & 85 & \infty \\ 18 & 43 & 0 & 11 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & 0 & \infty \\ \infty & 16 & \infty & 77 & 0 \end{pmatrix}$$

# Representación de Grafos en un ordenador

**- Lista de arcos o aristas**

La representación del grafo se puede almacenar en tres listas de forma que las dos primeras listas $T=(i_1, i_2,...,i_m)$ y $H=(f_1, f_2,...,f_m)$ contienen los vértices extremos de cada arco (arista) $(i, j)$, y la tercera $C=(c_1, c_2,...,c_m)$ contiene los costos de cada una de ellas. Por ejemplo, para el grafo de la figura anterior tenemos la siguientes listas:




$T=(1, 1, 2, 2, 3, 3, 3, 5, 5)$

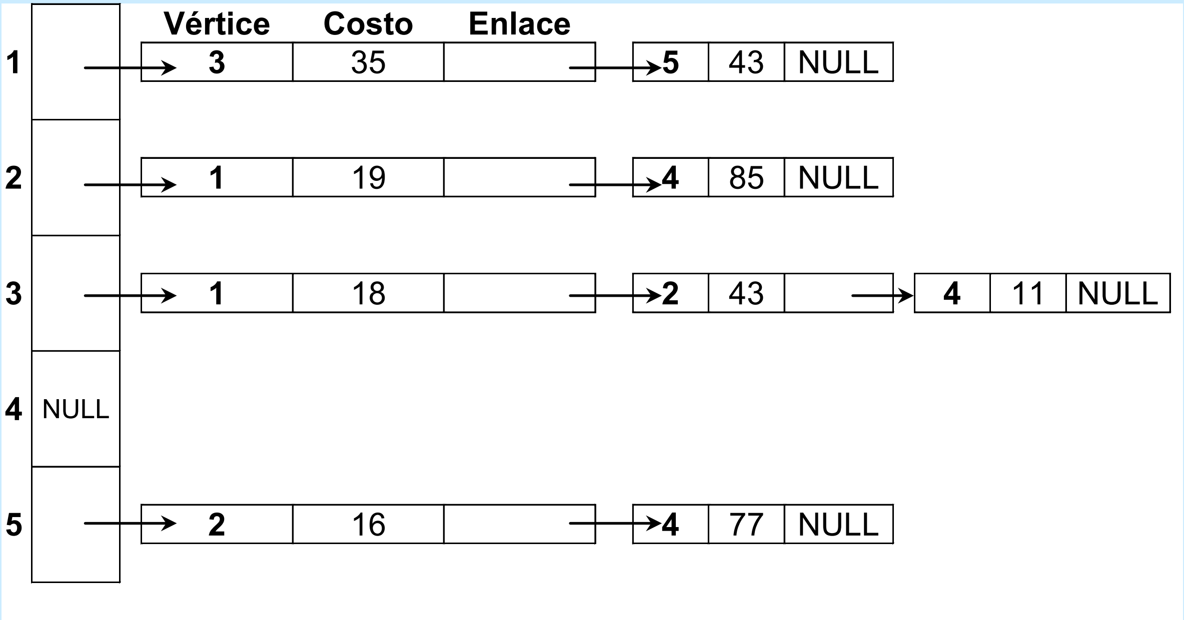
$H=(3, 5, 1, 4, 1, 2, 4, 2, 4)$

$C=(35, 43, 19, 85, 18, 43, 11, 16, 77)$

# Representación de Grafos en un ordenador

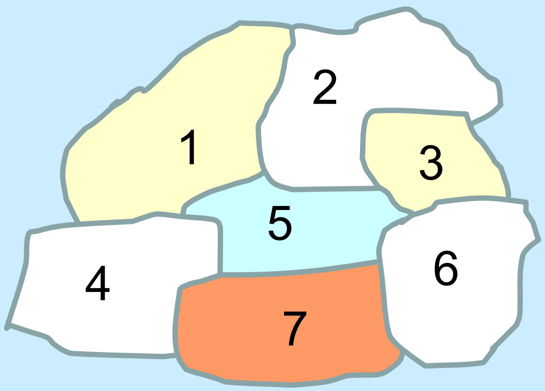
## - Lista de adyacencia enlazada

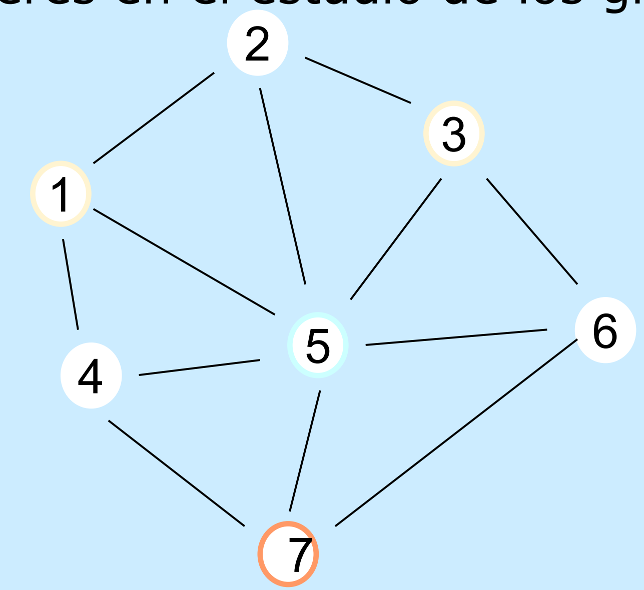
En muchas ocasiones, la representación de un grafo es más eficiente si todas los arcos que emanan de un vértice se agrupan juntas. En esta representación se guardan *n* listas enlazadas (una por cada vértice), con el origen de cada lista dentro de un array. Para cada sucesor de un vértice se guarda la información del vértice destino, del costo del arco (arista) y un puntero al siguiente adyacente dentro de la lista.



# Problemas de Coloración de Grafos

La construcción de mapas, en los que regiones limítrofes deben tener colores distintos, es un problema de interés en el estudio de los grafos.




Una ***coloración de un grafo*** simple implica la asignación de colores a los vértices de forma que dos vértices adyacentes tengan colores distintos. El ***Número cromático*** *de un grafo* es el mínimo de colores necesarios para realizar una coloración.

**Propiedad:** El número cromático de un grafo planar es, como máximo, cuatro.