1.– El proceso productivo de una empresa engloba tres actividades (I, II y III) con la utilización de dos recursos (A y B). Los datos relativos a los consumos de recursos, los niveles de disponibilidad de estos y los beneficios por unidad producida aparecen en la tabla siguiente:

	I	II	III	DISPONIB.
CONS. DE	2	1	1	10 (A)
RECURSOS	4	3	2	22 (B)
BFCIO/UDAD	4	3	3	

i) Formalizar el correspondiente modelo de Programación Lineal y encontrar una solución óptima que maximice los beneficios globales.

ii) ¿Qué ocurre en la optimalidad detectada previamente si el costo asociado a la segunda actividad se incrementa en 5 unidades y el nivel de recursos tipo B desciende hasta 14?

iii) Si se plantea la posibilidad de considerar una nueva actividad (IV) cuyos consumos de recursos son iguales a 3 y 4 (respectivamente) y con beneficio por unidad igual a 5, ¿interesa incluirla en el proceso productivo?

Solución

i) Si $x_i =$ unidades producidas del tipo i ($i = 1, 2, 3$ corresponde, respectivamente, a I, II y III), el problema que se plantea es:

$$\begin{aligned} \max\ & 4x_1 + 3x_2 + 3x_3 \\ s.a:\ & 2x_1 + x_2 + x_3 \leq 10 \\ & 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leq 22 \\ & x_j \geq 0,\ j = 1, 2, 3 \end{aligned}$$

Expresado en la forma estándar, este problema se convierte en:

$$\begin{aligned} \max\ & 4x_1 + 3x_2 + 3x_3 \\ s.a:\ & 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10 \\ & 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_5 = 22 \\ & x_j \geq 0,\ j = 1, \dots, 5 \end{aligned}$$

La tabla inicial será:

V. B.	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$-z$	Ctes.
x_4	2	1	1	1	0	0	10
x_5	4	3	2	0	1	0	22
$-z$	4	3	3	0	0	1	0

La variable x_1 debe entrar en la base sustituyendo a x_4. La nueva tabla será:

V. B.	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$-z$	Ctes.
x_1	1	1/2	1/2	1/2	0	0	5
x_5	0	1	0	–2	1	0	2
$-z$	0	1	1	–2	0	1	–20

La segunda variable se convierte en básica sustituyendo a x_5. La nueva tabla es:

V. B.	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$-z$	Ctes.
x_1	1	0	1/2	3/2	–1/2	0	4
x_2	0	1	0	–2	1	0	2
$-z$	0	0	1	0	–1	1	–22

La variable x_3 entra en la base y sale la variable x_1. Se obtiene la tabla óptima:

V. B.	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$-z$	Ctes.
x_3	2	0	1	3	–1	0	8
x_2	0	1	0	–2	1	0	2
$-z$	–2	0	0	–3	0	1	–30

ii) Si incrementamos 5 unidades el beneficio asociado a la segunda variable, el nuevo problema sería:

$$\begin{aligned}
&\max\ 4x_1 + 8x_2 + 3x_3 \\
&s.a:\ 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10 \\
&\qquad 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_5 = 22 \\
&\qquad x_j \geq 0,\ j = 1,\ldots,5
\end{aligned}$$

Para encontrar la correspondiente solución óptima, utilizamos la tabla óptima obtenida en el apartado anterior cambiando la fila asociada a la nueva función objetivo. Obtenemos:

V. B.	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$-z$	Ctes.
x_3	2	0	1	3	–1	0	8
x_2	0	1	0	–2	1	0	2
$-z$	4	8	3	0	0	1	0

Calculando los costos relativos:

V. B.	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$-z$	Ctes.
x_3	2	0	1	3	–1	0	8
x_2	0	1	0	–2	1	0	2
$-z$	–2	0	0	7	–5	1	–40

Se observa que la variable x_4 debe convertirse en básica, sustituyendo a x_3. Se obtiene:

V. B.	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$-z$	Ctes.
x_4	2/3	0	1/3	1	–1/3	0	8/3
x_2	4/3	1	2/3	0	1/3	0	22/3
$-z$	–20/3	0	–7/3	0	–8/3	1	–176/3

Si, en el problema anterior, hacemos el segundo recurso igual a 14, el problema que tenemos es:

$$\begin{aligned} &\max\ 4x_1 + 8x_2 + 3x_3 \\ &s.a:\ 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10 \\ &\qquad 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_5 = 14 \\ &\qquad x_j \geq 0,\ j = 1,\dots,5 \end{aligned}$$

Actualizando los valores de las constantes a partir de la tabla anterior, obtenemos:

V. B.	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$-z$	Ctes.
x_4	2/3	0	1/3	1	–1/3	0	16/3
x_2	4/3	1	2/3	0	1/3	0	14/3
$-z$	–20/3	0	–7/3	0	–8/3	1	–112/3

Esta tabla es óptima.

iii) El nuevo problema sería:

$$\begin{aligned} &\max\ 4x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 5x_6 \\ &s.a:\ 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + 3x_6 = 10 \\ &\qquad 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_5 + 4x_6 = 22 \\ &\qquad x_j \geq 0,\ j = 1,\dots,6 \end{aligned}$$

Partiendo de la tabla óptima obtenida en el apartado i), tenemos la tabla:

V. B.	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	$-z$	Ctes.
x_3	2	0	1	3	–1	5	0	8
x_2	0	1	0	–2	1	–2	0	2
$-z$	–2	0	0	–3	0	–4	1	–30

Por tanto, esta tabla es óptima para el problema modificado. Por ello, la actividad IV no interesa incluirla en el sistema productivo.

2.– La siguiente tabla es óptima para un problema de programación lineal de la forma max $c^t x,$ s. a: $Ax \leq b,\ x \geq 0$, donde $c_1 = 7, c_2 = 5,\ c_3 = -1$ y $c_4 = c_5 = 0$:

V.B.	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	–z	ctes.
x_3	1/2	0	1	1/2	–1/2	0	1
x_2	3/2	1	0	1/2	1/2	0	5
–z	0	0	0	–2	–3	1	-24

Sabiendo que las variables x_4 y x_5 son, por este orden, las variables básicas iniciales (por ser de holgura asociadas a restricciones del tipo ≤):

i) ¿Cómo afecta a la optimalidad actual un incremento de 10 unidades en el costo de la primera variable en el problema original?¿ Cuál es el rango de optimalidad asociado al costo de esta variable?

ii) Supongamos que, en el problema original, el costo de la segunda variable se cambia por 20 y que los coeficientes de las restricciones son (2,–2). ¿Cómo afecta esto a la optimalidad inicial?

iii) Se considera una nueva restricción de la forma $3x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 6$. ¿Cómo afecta esto a la optimalidad inicial?

Solución

i) Si $c_1 = 17$, el costo relativo correspondiente sería $\bar{c}_1 = 10$. La correspondiente tabla sería:

V.B.	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	–z	ctes.
x_3	1/2	0	1	1/2	–1/2	0	1
x_2	3/2	1	0	1/2	1/2	0	5
–z	10	0	0	–2	–3	1	–24

La variable x_1 debe ser básica en sustitución de x_3. La nueva tabla es:

V.B.	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	–z	ctes.
x_1	1	0	2	1	–1	0	2
x_2	0	1	–3	–1	2	0	2
–z	0	0	–20	–12	7	1	–44

Se observa que x_5 debe ser básica en lugar de x_2. Obtenemos la tabla:

V.B.	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$-z$	ctes.
x_1	1	1/2	1/2	1/2	0	0	3
x_5	0	1/2	–3/2	–1/2	1	0	1
$-z$	0	–7/2	–19/2	–17/2	0	1	–51

Esta tabla es óptima.
Si cambiamos c_1 por $c_1+\lambda$, el costo relativo de la variable x_1 será igual a λ. Por tanto, el rango de optimalidad del costo asociado a esta variable es $\{\lambda \in R / \lambda \leq 0\}$

ii) Si c_2 se cambia por $c_2 = 20$ y a^2 por $a^2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$, como x_2 es una variable básica en la solución óptima inicial, tenemos que considerar que al problema planteado se le añade una nueva variable x_6, con costo igual al nuevo c_2 y coeficientes tecnológicos dados por la nueva columna a^2, y la variable básica x_2 pasa a ser considerada artificial y, por lo tanto, debe ser eliminada (si fuera posible) de la base. Para ello planteamos la siguiente tabla en la que se contempla el correspondiente problema penalizado:

V.B.	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	$-z_M$	ctes.
x_3	1/2	0	1	1/2	–1/2	2	0	1
x_2	3/2	1	0	1/2	1/2	0	0	5
$-z_M$	7	$-M$	–1	0	0	20	1	0

Si calculamos los costos relativos, obtenemos:

V.B.	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	$-z_M$	ctes.
x_3	1/2	0	1	1/2	–1/2	2	0	1
x_2	3/2	1	0	1/2	1/2	0	0	5
$-z_M$	$15/2+3M/2$	0	0	$1/2+M/2$	$-1/2+M/2$	22	1	$1+5M$

La variable x_1 debe ser básica en lugar de x_3. Obtenemos:

V.B.	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	$-z_M$	ctes.
x_1	1	0	2	1	–1	4	0	2
x_2	0	1	–3	–1	2	–6	0	2
$-z_M$	0	0	$-15-3M$	$-7-M$	$7+2M$	$-8-6M$	1	$-14+2M$

La variable x_5 entra en la base y sale de ella x_2. Obtenemos la nueva tabla:

V.B.	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	$-z_M$	ctes.
x_1	1	1/2	1/2	1/2	0	1	0	3
x_5	0	1/2	–3/2	–1/2	1	–3	0	1
$-z_M$	0	$-7/2-M$	–9/2	–7/2	0	13	1	–21

La variable x_6 entra en la base y sale la variable x_1. La nueva tabla es:

V.B.	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	$-z_M$	ctes.
x_6	1	1/2	1/2	1/2	0	1	0	3
x_5	3	2	0	1	1	0	0	10
$-z_M$	0	$-10-M$	–2	–3	0	0	1	–60

iii) Como la nueva restricción no es satisfecha por la solución óptima dada, debemos incorporar dicha restricción a la tabla óptima. Obtenemos:

V.B.	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	–z	ctes.
x_3	1/2	0	1	1/2	–1/2	0	0	1
x_2	3/2	1	0	1/2	1/2	0	0	5
x_6	3	2	1	0	0	1	0	6
–z	0	0	0	–2	–3	0	1	–24

Si restituimos el carácter de variables básicas para x_2 y x_3, obtenemos:

V.B.	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	–z	ctes.
x_3	1/2	0	1	1/2	–1/2	0	0	1
x_2	3/2	1	0	1/2	1/2	0	0	5
x_6	–1/2	0	0	–3/2	–1/2	1	0	–5
–z	0	0	0	–2	–3	0	1	–24

Aplicando el Método Simplex Dual, la variable x_6 sale de la base y entra x_1. La nueva tabla es:

V.B.	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	–z	ctes.
x_3	0	0	1	–1	–1	1	0	–4
x_2	0	1	0	–4	–1	3	0	–10
x_1	1	0	0	3	1	–2	0	10
–z	0	0	0	–2	–3	0	1	–24

La variable x_2 debe salir de la base y será sustituida por x_4. Resulta:

V.B.	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	$-z$	ctes.
x_3	0	–1/4	1	0	3/4	1/4	0	–3/2
x_4	0	–1/4	0	1	1/4	–3/4	0	5/2
x_1	1	3/4	0	0	1/4	1/4	0	5/2
–z	0	–1/2	0	0	–7/2	–3/2	1	–19

Una nueva aplicación del Método Simplex Dual hace que salga de la base la variable x_3 y entre en su lugar x_2. Se obtiene la tabla:

V.B.	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	$-z$	ctes.
x_2	0	1	–4	0	–3	–1	0	6
x_4	0	0	–1	1	–1/2	–2	0	4
x_1	1	0	3	0	5/2	1	0	–2
–z	0	0	–2	0	–5	–2	1	–16

De esta última tabla se obtiene que el problema modificado es no factible.

3.– La siguiente tabla es óptima para un problema de programación lineal de la forma min $c^t x$, s. a: $Ax \le b$, $x \ge 0$, donde $c_1 = -6, c_2 = -10$, $c_3 = -23$ y $c_4 = c_5 = 0$:

V.B.	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$-z$	ctes.
x_1	1	0	1	2	–1	0	1
x_2	0	1	2	–1	1	0	1
–z	0	0	3	2	4	1	16

Sabiendo que las variables x_4 y x_5 son, por este orden, las variables básicas iniciales:

i) ¿Cómo afecta a la optimalidad actual un incremento de 8 unidades en el costo de la tercera variable en el problema original? Determinar, para el costo asociado a esta variable, el rango de optimalidad.

ii) Supongamos que, en el problema original, el costo de la primera variable se cambia por –12 y que los coeficientes de las restricciones son (–1,7). ¿Cómo afecta esto a la optimalidad inicial?

iii) Se considera una nueva restricción de la forma $3x_1 + 2x_2 - 5x_3 \le 4$. ¿Cómo afecta esto a la optimalidad dada inicialmente?

Solución

i) Es evidente que si se cambia $c_3 = -23$ por $c_3 = -15$, entonces $\bar{c}_3 = 11$. De esta forma, si el cambio es por $c_3 = -23 + \lambda$, el costo relativo cambia en la forma $\bar{c}_3 = 3 + \lambda$.

Tenemos entonces que el conjunto de valores de λ que hacen que la solución actual siga siendo óptima, viene dado por $[-3,\infty)$.

ii) Consideramos que añadimos una nueva variable, con los costos y los coeficientes de las restricciones especificados, que sustituye a x_1. Esta última variable se considerará artificial y, por ello, debe eliminarse. La tabla de partida es:

V.B.	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	$-z$	ctes.
x_1	1	0	1	2	–1	–9	0	1
x_2	0	1	2	–1	1	8	0	1
$-z$	M	–10	–23	0	0	–12	1	0

Si calculamos los costos relativos, obtenemos:

V.B.	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	$-z$	ctes.
x_1	1	0	1	2	–1	–9	0	1
x_2	0	1	2	–1	1	8	0	1
$-z$	0	0	$-3-M$	$-10-2M$	$10+M$	$68+9M$	1	$10-M$

La variable x_4 se convierte en básica sustituyendo a x_2. La nueva tabla es:

V.B.	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	$-z$	ctes.
x_4	1/2	0	1/2	1	–1/2	–9/2	0	1/2
x_2	1/2	1	5/2	0	1/2	7/2	0	3/2
$-z$	$5+M$	0	2	0	5	23	1	15

Esta tabla es óptima.

iii) La solución óptima actual no verifica la nueva restricción. Por tanto, hemos de incorporar dicha restricción a la tabla óptima dada, es decir:

V.B.	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	$-z$	ctes.
x_1	1	0	1	2	–1	0	0	1
x_2	0	1	2	–1	1	0	0	1
x_6	3	2	–5	0	0	1	0	4
$-z$	0	0	3	2	4	0	1	16

Arreglando la tabla para restituir el carácter de básicas de las dos primeras variables, obtenemos:

V.B.	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	$-z$	ctes.
x_1	1	0	1	2	–1	0	0	1
x_2	0	1	2	–1	1	0	0	1
x_6	0	0	–12	–4	1	1	0	–1
–z	0	0	3	2	4	0	1	16

Aplicando el Método Simplex Dual, la variable x_6 sale de la base y entra en ella x_3. La tabla que se obtiene es:

V.B.	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	$-z$	ctes.
x_1	1	0	0	5/3	–11/12	1/12	0	11/12
x_2	0	1	0	4/3	7/6	1/6	0	5/6
x_3	0	0	1	1/3	–1/12	–1/12	0	1/12
–z	0	0	0	1	15/4	51/12	1	63/4

Esta tabla es óptima.

Ejercicio recomendado.

Dado el siguiente problema:

$$\begin{aligned} \max\ & 4x_1 - 3x_2 \\ s.a:\ & 2x_1 - 2x_2 \le 16 \\ & 6x_1 + x_2 \le 24 \\ & x_1 \ge 0, x_2 \le 0 \end{aligned}$$

a) Encontrar una solución óptima aplicando el Método Simplex Primal.
b) Formular el problema dual. Determinar una solución óptima para el problema dual a partir de la tabla óptima determinada en a).
c) ¿Cómo afecta a la optimalidad detectada en a) si se añade la restricción $x_1 \le 4$?
d) ¿Cómo afecta a la optimalidad detectada en a) si simultáneamente cambia el valor del primer recurso de 16 a 32 unidades y el beneficio de x_2 disminuye en 2 unidades?
e) Supón que el coste de la variable x_2 pasa a valer -2 y sus coeficientes tecnológicos son ahora -2 en la primera restricción y 4 en la segunda ¿sigue siendo óptima la solución detectada en a)? (resolver).