

# Применение больших языковых моделей к решению математических задач

Изуткина А.М. ФН12-71Б

Научный руководитель: Фетисов Д.А.  
Московский Государственный Технический Университет им. Н.Э.Баумана  
Кафедра ФН12 «Математическое моделирование»

2024г

# Постановка задачи

Цель работы: Изучить принципы и подходы, лежащие в основе больших языковых моделей (LLM), с их помощью написать программу генерации решений математических задач.

- 1 Рассмотреть механизм внимания (Attention) в искусственных нейронных сетях.
- 2 Изучить основные архитектуры LLM.
- 3 Изучить подходы дообучения (Fine-Tuning).
- 4 Реализовать класс датасета, эффективный цикл обучения, валидацию.
- 5 Оценить результаты.

# QKV Attention

Создание матриц Q, K и V: Каждый входной вектор преобразуется в три различных вектора с помощью обучаемых матриц  $W_Q$ ,  $W_K$ ,  $W_V$ :

$$\mathbf{Q} = \mathbf{X}W_Q,$$

$$\mathbf{K} = \mathbf{X}W_K,$$

$$\mathbf{V} = \mathbf{X}W_V.$$

Вычисление оценок:

$$\text{scores} = \frac{\mathbf{Q} \cdot \mathbf{K}^T}{\sqrt{d_k}} \quad (1)$$

где  $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{n \times d_k}$ ,  $\mathbf{K} \in \mathbb{R}^{n \times d_k}$ ,  $\mathbf{V} \in \mathbb{R}^{n \times d_v}$ .

Применение софтмакса для нормализации:

$$\text{attention weights} = \text{softmax}(\text{scores}), \quad (2)$$

Вычисление контекстного вектора:

$$\text{output} = \text{attention weights} \cdot \mathbf{V} \quad (3)$$

# MultiHead Attention

1. Каждая голова выполняет свой собственный механизм самовнимания:

$$\text{head}_i = \text{Attention}(Q_i, K_i, V_i)$$

2. Результаты всех голов конкатенируются:

$$Z = \text{Concat}(\text{head}_1, \dots, \text{head}_h)$$

3. Итоговая матрица проходит через линейный слой для объединения информации:

$$\text{MultiHead}(Q, K, V) = ZW_O$$

где  $W_O$  — матрица весов для объединяющего слоя.

# Основные компоненты трансформера

- Эмбеддинги: Каждое слово преобразуется в векторное представление, что позволяет модели захватывать семантические отношения.
- Механизм внимания: Позволяет модели фокусироваться на различных частях входного текста, учитывая контекст при генерации следующего слова.
- Обучение с учителем: Модель обучается на больших объемах текстовых данных, что позволяет ей предсказывать вероятные последовательности слов.

Кросс-энтропийная функция потерь:

$$L(y, \hat{y}) = - \sum_{i=1}^C y_i \log(\hat{y}_i) \quad (4)$$

где  $y_i \in \{0, 1\}$  — истинные метки,  $\hat{y}_i$  — предсказанные вероятности, а  $C$  — количество классов.

# Parameter-Efficient Fine-Tuning (LoRA)

PEFT позволяет адаптировать большие языковые модели, минимизируя количество настраиваемых параметров.

В методе LoRA обновления весов представляются в виде двух матриц низкого ранга  $A$  и  $B$ :

Исходные веса модели  $W_0$  остаются замороженными. Обновление весов представляется как:

$$W = W_0 + AB \tag{5}$$

где:  $A \in \mathbb{R}^{d \times r}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{r \times d}$ ,  $r < d$  — ранг, который определяет размерность обновления.

- Тип задач: Задачи охватывают широкий спектр тем, включая алгебру, геометрию и комбинаторику. В сумме 12 тыс. задач.
- Формат данных: Каждая запись в наборе данных содержит текст задачи и соответствующее решение, представленное в виде шагов.



## MATH Dataset (Ours)

**Problem:** Tom has a red marble, a green marble, a blue marble, and three identical yellow marbles. How many different groups of two marbles can Tom choose?

**Solution:** There are two cases here: either Tom chooses two yellow marbles (1 result), or he chooses two marbles of different colors ( $\binom{4}{2} = 6$  results). The total number of distinct pairs of marbles Tom can choose is  $1 + 6 = \boxed{7}$ .

**Problem:** If  $\sum_{n=0}^{\infty} \cos^{2n} \theta = 5$ , what is  $\cos 2\theta$ ?

**Solution:** This geometric series is

$$1 + \cos^2 \theta + \cos^4 \theta + \dots = \frac{1}{1 - \cos^2 \theta} = 5. \text{ Hence,}$$

$$\cos^2 \theta = \frac{4}{5}. \text{ Then } \cos 2\theta = 2 \cos^2 \theta - 1 = \boxed{\frac{3}{5}}.$$

**Problem:** The equation  $x^2 + 2x = i$  has two complex solutions. Determine the product of their real parts.

**Solution:** Complete the square by adding 1 to each side.

Then  $(x + 1)^2 = 1 + i = e^{\frac{i\pi}{4}} \sqrt{2}$ , so  $x + 1 = \pm e^{\frac{i\pi}{8}} \sqrt[4]{2}$ .

The desired product is then

$$\begin{aligned} & (-1 + \cos(\frac{\pi}{8}) \sqrt[4]{2}) (-1 - \cos(\frac{\pi}{8}) \sqrt[4]{2}) = \\ & 1 - \cos^2(\frac{\pi}{8}) \sqrt{2} = 1 - \frac{(1 + \cos(\frac{\pi}{4}))}{2} \sqrt{2} = \boxed{\frac{1 - \sqrt{2}}{2}}. \end{aligned}$$

Рис.: Пример из датасета MATH

1) Кросс-энтропия  $H(p, q)$  между двумя распределениями  $p$  (истинное распределение) и  $q$  (предсказанное распределение) определяется как:

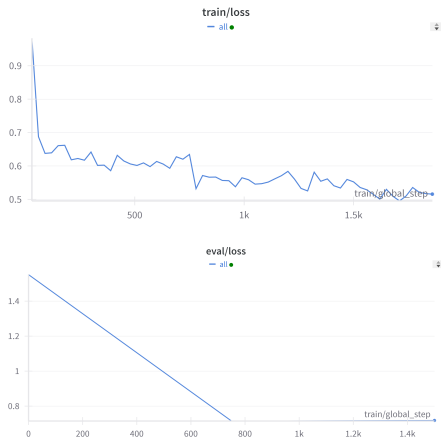
$$H(p, q) = - \sum_i p(i) \log(q(i))$$

$$2) \text{Accuracy} = \frac{TP + TN}{TP + TN + FP + FN}$$

3) BLEU - изначально разработана для оценки качества машинного перевода, но также широко используемая для оценки генерации текстов. Она измеряет степень совпадения между сгенерированным текстом и одним или несколькими эталонными текстами.

- Gemini 1.5 Pro от DeepMind
- o1-preview от OpenAI
- Qwen2.5-Math, DeepSeekMath и другие.

- 0.5 миллиарда обучаемых параметров.
- специально обучена для выполнения задач, связанных с пониманием и выполнением инструкций.
- Qwen2.5-Math показывает высокие результаты в решении математических задач.
- Использует ряд передовых технологий, включая:
  - RoPE (Rotary Positional Encoding): Позволяет улучшить обработку последовательностей с длинным контекстом.
  - SwiGLU: Функция активации, которая сочетает в себе преимущества различных функций активации для повышения производительности модели.
  - RMSNorm: Нормализация, которая помогает улучшить стабильность обучения.
  - Attention с учетом QKV Bias: Улучшает механизм внимания, позволяя модели более эффективно обрабатывать входные данные.



- В процессе дообучения Cross-entropy Loss упал с 1.6 до 0.7
- average BLEU: 0.2108
- part of correct answers: 0.2213

Multiplying both sides of the equation,  $\frac{2x + 2}{x} = \frac{94}{x}$ .  
Subtracting  $\frac{2}{x}$  from both sides gives  $\frac{2x}{x} = \frac{14}{x}$ ,  
and  $x = \boxed{8}$ .

The  $k > 0$ , the  $f(x)$  is increasing on the interval  $[1, \infty)$ .  
can that  $f(1) = 1^k = 1$  and as  $x$  increases,  $f(x) = x^k$  increases.  
bound. Therefore Therefore, the the interval  $[1, \infty)$ ,  $f(x)$  takes  
on all values in than or equal to  $1$ .  
and means that range of  $f(x)$  is  $\boxed{[1, \infty)}$ .

- Полезные библиотеки: `unsloth.FastLanguageModel`, `trl.SFTTrainer`

- Попробовать другие методы PEFT;
- Генерировать решения в виде python-кода;
- Для узко специализированных задач использовать методы RAG;