



Politechnika Wrocławska

Wydział Matematyki

Kierunek studiów: Matematyka

Specjalność: Matematyka finansowa i ubezpieczeniowa

Praca dyplomowa – magisterska

**WYCENA OPCJI AMERYKAŃSKICH O
DYSKONTOWANIU ZALEŻNYM OD CEN AKCJI
W MODELU BLACKA-SCHOLESZA ZA POMOCĄ
METOD MONTE CARLO**

Marta Janik

słowa kluczowe:

Opcje amerykańskie typu omega clock, Model Blacka-Scholesa, Metoda Broadie Glassermana

krótkie streszczenie:

Opcje typu omega clock zostały po raz pierwszy zaproponowane przez N. Rodosthenousa i H. Zhanga w 2017. Ten instrument różni się od dotychczas znanych derywatów tym, że przy wycenie występuje zmienna stopa procentowa zależna od ceny instrumentu podstawowego. Celem pracy jest wyznaczenie ceny tej opcji. Do wyceny użyto metod Monte Carlo, a dokładnie algorytmu zaproponowanego przez Broadiego i Glassermana. Jest to pierwsza w historii wycena opcji typu omega clock.

Opiekun pracy dyplomowej	prof. dr hab. Zbigniew Palmowski
	Tytuł/stopień naukowy/imię i nazwisko	ocena	podpis

*Do celów archiwalnych pracę dyplomową zakwalifikowano do:**

a) kategorii A (akta wieczyste)

b) kategorii BE 50 (po 50 latach podlegające ekspertyzie)

** niepotrzebne skreślić*

pieczęć wydziałowa

Wrocław, rok 2019



Wrocław University
of Science and Technology

Faculty of Pure and Applied Mathematics

Field of study: Mathematics

Specialty: Financial and Actuarial Mathematics

Master's Thesis

PRICING OF AMERICAN OPTION TYPE OMEGA CLOCK

Marta Janik

keywords:

American option type omega clock, Black-Scholes model, Broadie Glasserman method

short summary:

Option type Omega clock were first proposed by N. Rodosthenous and H. Zhang in 2017. This instrument differ from others derivatives with discounting during pricing, the interest rate depend from price of option. The main goal of this thesis is finding the price of this option. To pricing was used Monte Carlo method, exactly Broadie Glasserman's algorithm. It is the first valuation of option type Omega clock in history.

Supervisor	prof. dr hab. Zbigniew Palmowski
	Title/degree/name and surname	grade	signature

*For the purposes of archival thesis qualified to:**

a) category A (perpetual files)

b) category BE 50 (subject to expertise after 50 years)

** delete as appropriate*

stamp of the faculty

Wrocław, 2019

Spis treści

Wstęp	7
1 Wiadomości wstępne	9
1.1 Opcje	9
1.2 Ruch Browna	10
1.2.1 Historia	10
1.2.2 Definicja	11
1.2.3 Geometryczny ruch Browna	11
1.2.4 Proces ceny akcji	12
1.3 Model Blacka-Scholesa	12
1.3.1 Historia	13
1.3.2 Założenia	13
1.3.3 Definicje	14
1.4 Metody Monte Carlo	15
2 Opcje typu <i>Omega clock</i>	17
3 Metoda Broadie-Glassermana	19
3.1 Historia	19
3.2 Opis algorytmu	19
3.3 Notacja	22
3.4 Estymatory	22
3.4.1 Estymator górny Θ	22
3.4.2 Estymator dolny Φ	24
3.5 Własności estymatorów	27
4 Analiza numeryczna	29
4.1 Waniliowa opcja amerykańska	29
4.2 Opcje typu omega clock	31
4.2.1 Dane rzeczywiste	31
4.2.2 Wyniki	32
Podsumowanie	35
Dodatek	37

Spis rysunków

3.1	Przykład drzewa cenowego z przykładowymi stopami procentowymi zależnymi od cen akcji (zapisane wzorem (2.3)).	20
3.2	Wybór gałęzi	21
3.3	Przykład wyjaśniający obliczanie Θ	23
3.4	Przykład wyjaśniający obliczanie Φ	25
4.1	Tygodniowe ceny zamknięcia dla akcji Apple Inc. Dane zostały wzięte z giełdy amerykańskiej od 11.06.2018 do 10.06.2019.	31
4.2	Wycena amerykańskiej opcji sprzedaży typu omega clock dla zmiennej wartości progu x do zmiany oprocentowania zgodnie ze wzorem 2.2. Wartość progu $x \in [130, 250]$	33
4.3	Wycena amerykańskiej opcji sprzedaży typu omega clock dla zmiennych wartości oprocentowania r_1 i r_2 ze wzoru 2.2. Wartości tych stóp procentowych $r_1 \in [0, 2.25\%]$, $r_2 \in [2.25\%, 4.5\%]$	33

Spis tablic

1.1	Funkcje wypłaty opcji waniliowych	10
4.1	Porównanie wyestymowanej i 'prawdziwej' ceny standardowej opcji amerykańskiej sprzedaży dla różnych cen wykonania K	30
4.2	Porównanie estymatorów i wyestymowanej ceny standardowej opcji amerykańskiej sprzedaży dla różnych ilości gałęzi b	30
4.3	Dane dla Apple na dzień 07.06.2019	32
4.4	Porównanie wyestymowanej i 'prawdziwej' ceny opcji amerykańskiej sprzedaży typu omega clock dla różnych ilości gałęzi b	32

Wstęp

Opcje nie są nowym instrumentem finansowym. Ich historia sięga czasów starożytnej Grecji - pierwsze informacje dotyczące opcji można znaleźć w I księdze *Polityki* Arystotelesa, który opisał historię znanego matematyka Talesa z Miletu. Przewidział on obfite zbiory oliwek w następującym roku. Spodziewając się związanego z tym dużego popytu na wykorzystywanie pras do oliwek, przed sezonem zbiorów wykupił prawo ich używania. Spekulacja okazała się słuszną - zbiory były obfite, co umożliwiło Talesowi odnajmowanie pras po wyższej cenie¹. Pierwszy stosunkowo dobrze rozwinięty rynek instrumentów pochodnych powstał w XVII w. w Holandii. Pomimo tak długiej historii rynków opcyjnych praw nimi rządzących zaczęto szukać dopiero w XIX wieku. Przełomowym wydarzeniem było wprowadzenie modelu do wyceny europejskiej opcji standardowej na akcje spółek niewypłacających dywidendy wyprowadzonego przez Fishera Blacka i Myrona Scholesa w 1973 roku. Od tego czasu powstało wiele rozszerzeń i modyfikacji tego modelu do wyceny derywatywów innych niż standardowe.

Rynek opcji wciąż intensywnie się rozwija, o czym świadczy wprowadzanie nowych instrumentów pochodnych. Jednym z takich przykładów są opcje typu omega clock. Zostały one po raz pierwszy zaproponowane przez N. Rodosthenousa i H. Zhanga w 2017. Ten instrument różni się od dotychczas znanych derywatywów tym, że przy wycenie występuje zmienna stopa procentowa zależna od ceny instrumentu podstawowego.

Do ustalania ceny niektórych opcji istnieją powszechnie znane narzędzia analityczne, jednak wiele z nich ma skomplikowaną funkcję wypłaty i jest wycenianych za pomocą metod numerycznych. W tej pracy do wyceny opcji typu omega clock użyto metod Monte Carlo, a dokładnie algorytmu opartego na metodzie zaproponowanej przez Broadiego-Glassermana w 1997 roku. Ta metoda estymuje premię opcji używając drzewa cenowego, które wyznacza i powiela możliwe trajektorie ceny instrumentu podstawowego. W wyniku otrzymuje się górne i dolne estymatory, które zbiegają do prawdziwych cen opcji.

Celem pracy jest wyznaczenie po raz pierwszy w historii ceny amerykańskiej opcji typu omega clock na akcje. W pracy znajdują się teoretyczne wzory na estymatory premii opcji i estymowanej ceny, a także wyniki przeprowadzonych symulacji dla danych rzeczywistych.

Przy pisaniu pracy korzystano z literatury źródłowej dotyczącej opcji i ich wyceny. Szczególnie zostały wykorzystane książki: Paula Glassermana „*Monte Carlo Methods in Financial Engineering*”, Johna Hulla „*Kontrakty terminowe i opcje. Wprowadzenie*”, Aleksandra Werona i Rafała Werona „*Inżynieria finansowa*”, a także artykuł Marka Broadiego i Paula Glassermana „*Pricing American-style securities using simulation*”.

Praca składa się ze wstępu i czterech rozdziałów. W pierwszym przedstawiono wszystkie podstawowe informacje potrzebne do zrozumienia pracy. Zawiera on informacje o opcjach, ich podstawowy podział i funkcje wypłaty dla opcji standardowych. Następnie opisano ruch Browna, który został wykorzystany do prognozy cen akcji. W tym rozdziale opisano

¹Arystoteles, *Polityka*, Warszawa 1964

również model Blacka-Scholesa, który został wykorzystany do wyceny, a także metody Monte Carlo, których użyto do analizy numerycznej. W drugim rozdziale opisano opcje typu omega clock, które są wyceniane w tej pracy. Przedstawiono model, według którego będzie wyceniana. Rozdział trzeci zawiera pełny opis metody Broadiego-Glassermana oraz jej zastosowanie dla przykładowego drzewa cenowego. Rozdział czwarty, za razem ostatni i najważniejszy, przedstawia analizę numeryczną. Najpierw porównano ceny waniliowej opcji amerykańskiej wyznaczonej za pomocą zaimplementowanego algorytmu i za pomocą sprawdzonych metod, by sprawdzić poprawność metody. Następnie pokazano wycenę amerykańskiej opcji sprzedaży typu omega clock dla danych rzeczywistych.

Wszystkie analizy numeryczne mają na celu uzasadnienie poprawności zaimplementowanego algorytmu do wyceny opartego na metodzie Broadiego Glassermana i doprowadzenie do wyznaczenia sprawiedliwej premii opcji amerykańskiej sprzedaży typu omega clock.

Rozdział 1

Wiadomości wstępne

W tym rozdziale znajdują się informacje potrzebne do zrozumienia pracy dotyczące teorii opcji, ich wyceny i metod numerycznych.

Najpierw zostały opisane opcje, następnie sposób wyznaczania przyszłej ceny instrumentu podstawowego, model wykorzystywany do wyceny derywatów oraz podstawowe informacje dotyczące metod numerycznych użytecznych do wyceny, a dokładnie metod Monte Carlo.

1.1 Opcje

Opcja to instrument finansowy, który można zdefiniować jako umowę pomiędzy sprzedawcą a nabywcą, która daje nabywcy prawo do kupna lub sprzedaży (w zależności od rodzaju instrumentu finansowego) określonej ilości pewnego dobra bazowego w ustalonym terminie po wyznaczonej cenie. Innymi słowy, opcja to umowa z ustalonymi warunkami, która daje nabywcy pewną możliwość. Najstarsze kontrakty opcyjne opiewały na akcje. Obecnie instrumentami podstawowymi opcji w obrocie giełdowym są zazwyczaj: waluty obce, indeksy giełdowe czy kontrakty *futures*. Na rynkach pozagiełdowych opcje są zazwyczaj dostosowywane do indywidualnych potrzeb klientów, zatem dobro podstawowe jest praktycznie dowolne.

Opcje można podzielić na wiele sposobów, biorąc pod uwagę różne kryteria. Pierwsze i najważniejsze rozróżnienie to podział na opcje:

- kupna - *call*, która daje jej posiadaczowi prawo do kupna instrumentu bazowego,
- sprzedaży - *put*, która daje posiadaczowi prawo do sprzedaży tego dobra.

Drugi podział występuje ze względu na rozróżnienie terminu wygaśnięcia i wykonania opcji. Taki podstawowy podział to opcje:

- europejskie, które można wykonać jedynie w terminie wygaśnięcia,
- amerykańskie, które mogą być wykonane przez cały okres ważności finansowego instrumentu pochodnego, tj. w każdym momencie od nabycia do czasu wygaśnięcia opcji.

Nazwy te mają pochodzenie historyczne i w żaden sposób nie są związane z miejscem obrotu. Warto zauważyć również, że na rynku światowym większy obrót mają opcje

amerykańskie, co wynika z faktu, że opcje europejskie są podatne na manipulacje w czasie bliskim terminowi wygaśnięcia. Te dwie opcje to opcje standardowe, w żargonie finansowym nazywane również opcjami waniliowymi. Nazwa ta pochodzi od lodów waniliowych, które są *najprostszym* smakiem lodów, czyli bez żadnych dodatków. Inne opcje nazywane są opcjami egzotycznymi (np. opcja azjatycka).

Premia opcji Aby stać się posiadaczem opcji należy za nią zapłacić. Taka cena jest nazywana *premią opcji*. Na jej wysokość ma wpływ wiele czynników, jednak najważniejszym jest funkcja wypłaty. Ta funkcja określa wysokość wypłaty jaką otrzyma nabywca w momencie jej wykonania. Funkcje wypłaty opcji podstawowych przedstawia poniższa tabela, w której T - termin wygaśnięcia, S_t - cena dobra bazowego w chwili t ($0 \leq t \leq T$), K - cena wykonania opcji (zawarta w kontrakcie).

Tabela 1.1: Funkcje wypłaty opcji waniliowych

Opcja	Kupna	Sprzedaży
europejska	$f_T^C = \max(S_T - K, 0)$	$f_T^P = \max(K - S_T, 0)$
amerykańska	$f_t^C = \max(S_t - K, 0)$	$f_t^P = \max(K - S_t, 0)$

Funkcja wypłaty związana jest z wartością wewnętrzną opcji. Natomiast na wartość zewnętrzną opcji, nazywanej inaczej czasową, mają wpływ trzy podstawowe czynniki:

- czas pozostający do wygaśnięcia opcji,
- wolna od ryzyka stopa procentowa r ,
- zmienność ceny akcji σ , czyli miara niepewności co do przyszłych zmian cen instrumentu podstawowego.

Premia opcji to suma jej wartości wewnętrznej i zewnętrznej.

1.2 Ruch Browna

Do wyznaczenia funkcji wypłaty, a co za tym idzie również premii opcji, potrzebna jest znajomość ceny instrumentu podstawowego S_t ($t \in [0, T]$). Do tego wykorzystywany jest geometryczny ruch Browna.

1.2.1 Historia

W 1900 roku Louis Bachelier, przez wielu uważany za ojca matematyki finansów, jako pierwszy użył matematyki do przewidywania zmian ceny na rynku. W swojej pracy doktorskiej *Theorie de la speculation* skupił się na prawdopodobieństwie fluktuacji cen instrumentów finansowych na giełdzie paryskiej. Do jego opisu wykorzystał ruch Browna, który został tak nazwany od nazwiska botanika Roberta Browna, który w 1827 roku zaobserwował ruch cząsteczek i go opisał. Bachelier użył tego ruchu ponieważ uznał, że zmiany ceny dobra bazowego są równie chaotyczne i nieprzewidywalne, co ruchy cząsteczek pyłku. Podstawowe własności ruchu Browna zostały udowodnione w 1905 roku przez Alberta Einsteina i równolegle w 1906 przez Mariana Smoluchowskiego, dzięki czemu ruch ten wszedł na stałe do użytku w fizyce. Dopiero Norbert Wiener (w 1927) i Paul Levy

(w 1939) doprowadzili do wprowadzenia ruchu Browna do matematyki. Proces Wienera (matematyczna nazwa ruchu Browna) stał się jednym z najważniejszych modeli losowych. W ekonomii znalazł on zastosowanie do konstrukcji modeli cen giełdowych.

1.2.2 Definicja

Aby przedstawić formalną definicję procesu Wienera trzeba wprowadzić pewne pojęcia i założenia.

Przestrzeń, na której przeprowadzane są rozważania probabilistyczne, oznacza trójka probabilistyczna $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, gdzie Ω to zbiór wszystkich możliwych wyników, \mathcal{F} to σ -ciało podzbiorów Ω , \mathbb{P} to miara prawdopodobieństwa na \mathcal{F} . Wprowadzono również oznaczenia na przedział życia opcji, a dokładniej $\mathbb{T} = [0, T]$, gdzie T - moment wygaśnięcia opcji.

Formalnie proces Wienera to rodzina zmiennych losowych $(W_t)_{t \in \mathbb{T}}$ określonych na jednej przestrzeni probabilistycznej $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ jest to zatem pewien proces stochastyczny. Dla pewnych ustalonych $\omega \in \Omega$ funkcja $t \rightarrow W_t(\omega)$ jest trajektorią procesu. Definicja procesu Wienera to:

Definicja 1.1 (proces Wienera).¹ Standardowym procesem Wienera lub krótko procesem Wienera nazywamy proces stochastyczny W z czasem ciągłym, spełniający następujące warunki:

1. $W_0 = 0$;
2. Przyrosty procesu W są niezależne, czyli dla dowolnego n i dowolnego ciągu $0 < t_1 < \dots < t_n$ zmienne losowe

$$W_{t_1}, W_{t_2} - W_{t_1}, \dots, W_{t_n} - W_{t_{n-1}}$$

są niezależne;

3. Dla dowolnych $0 \leq s < t$ przyrost $W_t - W_s$ ma rozkład gaussowski, a dokładniej

$$W_t - W_s \sim N(0, t - s);$$

4. Proces W jest ciągły, tzn. prawie wszystkie trajektorie procesu W są funkcjami ciągłymi.

1.2.3 Geometryczny ruch Browna

Niezależność przyrostów procesu Wienera, ciągłość jego trajektorii i inne jego własności, a także jego nieprzewidywalność (jak zauważył Bachelier) skłaniają do wykorzystania tego procesu do poszukiwania prawdopodobnej przyszłej ceny dobra podstawowego, jednak standardowy proces Wienera okazuje się mało użyteczny w finansach, dlatego w inżynierii finansowej wykorzystuje się jego różne modyfikacje. Najbardziej popularne można przedstawić za pomocą poniższego stochastycznego równania różniczkowego

$$dX_t = \mu(X_t, t)dt + \sigma(X_t, t)dW_t, \quad (1.1)$$

¹J. Jakubowski, A. Palczewski, M. Rutkowski, Ł. Stettner, *Matematyka finansowa. Instrumenty pochodne*, Warszawa 2018

gdzie μ - to współczynnik dryfu (przesunięcia), σ - współczynnik zmienności (dyfuzji), a X_t - nowy proces stochastyczny.

Louis Bachelier do oszacowania prawdopodobieństwa fluktuacji cen na giełdzie paryskiej wykorzystał arytmetyczny ruch Browna, czyli we wzorze (1.1) przyjął zerowe oprocentowanie $\mu \equiv 0$ i stałą zmienność σ . Wówczas wzór na cenę przyjmuje postać

$$S_t = S_0 + \sigma W_t,$$

jednak bazuje on na nierealistycznym założeniu, że stopa procentowa jest zerowa oraz dopuszcza ujemne ceny. W latach 1955-59 Paul Samuelson i M.F.M. Osborne niezależnie od siebie poprawili pomysł Bachelier, przyjmując w równaniu (1.1) $\mu(X_t, t) = \mu X_t$ i $\sigma(X_t, t) = \sigma X_t$. Stochastyczne równanie różniczkowe na cenę dobra bazowego przyjmuje wówczas postać

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t \quad (1.2)$$

a taki proces S_t nazwano geometrycznym (inaczej eksponencjalnym) ruchem Browna.

Własności Tak zmodyfikowany proces Wienera ma wiele własności, które pozwalają dobrze kształtować ceny, a dokładnie, jeśli przyjmiemy, że X_t jest eksponencjalnym ruchem Browna, wówczas:

- Jeśli $X_0 > 0$, to proces X_t pozostaje dodatni;
- Na poziomie zero proces X_t ma barierę absorbującą, czyli jeśli w pewnym momencie t osiągnie zero, to już taki pozostanie;
- Proces X_t ma rozkład lognormalny, tzn. $\ln X_t$ ma rozkład normalny z odpowiednimi parametrami średniej i wariancji (łatwo to pokazać wykorzystując postać geometrycznego ruchu Browna, postulat procesu Wienera o gaussowskich przyrostach i własności procesu normalnego).

1.2.4 Proces ceny akcji

Rozwiązując stochastyczne równanie różniczkowe (1.2) można łatwo wyznaczyć postać ceny S_t :

$$S_t = S_0 \exp\left(\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma W_t\right). \quad (1.3)$$

Łatwo pokazać, że

$$\ln S_t \sim N\left(\ln S_0 + \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t, \sigma^2 t\right). \quad (1.4)$$

Do późniejszej wyceny będziemy używać wzoru (1.3).

1.3 Model Blacka-Scholesa

Wycena opcji sprowadza się do wyznaczenia jej premii. W poprzednim podrozdziale pokazano, że proces ceny S_t można opisać geometrycznym ruchem Browna, skąd łatwo można wyznaczyć już funkcje wypłaty f_t dla opcji standardowych. Jednak wyznaczenie sprawiedliwej premii nie może składać się z jednej obserwacji, gdyż nie byłoby to miarodajne.

Pierwszym i do tej pory najbardziej podstawowym modelem wyceny jest model Blacka-Scholesa. W pracy będzie wyceniana amerykańska opcja sprzedaży akcji, dla której model w chwili t przyjmuje postać

$$\pi_t(X) = \sup_{\tau \in \mathcal{T}} \Lambda_\tau \{ \mathbb{E}^\mathbb{Q} [\Lambda_\tau^{-1} \max(K - S_\tau, 0) | \mathcal{F}_\tau] \}, \quad (1.5)$$

gdzie $\pi_t(X)$ - premia opcji X w chwili t , τ - moment stopu, \mathcal{T} - rodzina wszystkich możliwych momentów stopu, Λ_t - czynnik dyskontujący w chwili t , \mathbb{Q} - miara martyngałowa, \mathcal{F}_t - filtracja. Wszystkie potrzebne definicje zostaną przedstawione później.

1.3.1 Historia

Podstawą rynku opcyjnego jest wyznaczanie sprawiedliwych cen opcji, dlatego ciekawy jest fakt, że choć pierwszy rynek instrumentów pochodnych powstał w Holandii w XVII wieku, to praw nim rządzącym zaczęto szukać dopiero dwa wieki później. Jednak dopiero w 1973 roku nastąpił przełom, gdy Fisher Black i Myron Scholes przedstawili model wyceny waniliowych opcji europejskich na akcje spółek niewypłacających dywidendy. Było to ważne odkrycie, ponieważ do tego roku nikt nie potrafił wyznaczyć sprawiedliwej ceny opcji, co miało duży wpływ na małą płynność rynku i zmienność cen. Model Blacka-Scholesa jest pierwszym matematycznie wyprowadzonym modelem wyceny opcji na akcje.

Idea modelu Blacka-Scholesa opiera się o pozbawiony ryzyka portfel, składający się z pozycji w opcji i pozycji w akcji bazowej dla tej opcji.²

1.3.2 Założenia

W pracy będę przeprowadzać wycenę zgodnie z modelem Blacka-Scholesa, jednak żeby to było możliwe trzeba najpierw przyjąć pewne założenia:

1. Brak możliwości arbitrażu (nie ma możliwości zarobienia bez ponoszenia ryzyka);
2. Wolna od ryzyka, krótkoterminowa stopa procentowa jest stała w czasie życia opcji;
3. Nie uwzględnia się kosztów transakcji ani podatków;
4. Istnieje możliwość zakupu każdej, nawet ułamkowej, ilości akcji;
5. Akcje nie wypłacają dywidendy;
6. Brak kary za zajmowanie krótkiej pozycji (np. opcja sprzedaży na akcje, których się nie ma)).

W modelu Blacka-Scholesa przyjmujemy, że cenę dobra bazowego S_t w dowolnej chwili t opisuje geometryczny ruch Browna ze stałą zmiennością σ i stałym dryfem μ opisany za pomocą stochastycznego równania różniczkowego (1.2). Ma ona rozkład lognormalny przedstawiony wzorem (1.4).

²J. Hull, *Kontrakty terminowe i opcje. Wprowadzenie*, Warszawa 1997

1.3.3 Definicje

W tej pracy będzie wyceniana opcja amerykańska, czyli taka, którą posiadacz może wykorzystać w całym czasie życia opcji. Z tego powodu potrzebujemy zaznajomić się z pojęciem momentów stopu.

Definicja 1.2 (Filtracja). Filtracją nazywamy niemalejącą rodzinę σ -ciał

$$\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{T}},$$

tzn. $\mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{F}$ dla $s < t$ i $s, t \in \mathbb{T}$

Definicja 1.3 (Naturalna filtracja). Niech $(X_t)_{t \in \mathbb{T}}$ będzie procesem stochastycznym. Wówczas naturalna filtracja \mathbb{F}^X to

$$\mathcal{F}_t^X = \sigma(X_s : s \leq t).$$

Od tego momentu przyjmujemy również, że filtracja będzie spełniała zwykłe warunki, tzn. jest prawostronnie ciągła, a dokładniej dla każdego t zachodzi równość $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_{t+}$, gdzie $\mathcal{F}_{t+} = \bigcap_{s > t} \mathcal{F}_s$, oraz jest zupełna, tzn. każde σ -ciało \mathcal{F}_t jest zupełne.

Zdefiniujmy teraz moment stopu.

Definicja 1.4 (Moment stopu). Zmienna losowa τ , \mathcal{F} -mierzalna, $\tau : \Omega \rightarrow \mathbb{T} \cup \{\infty\}$ jest momentem stopu względem filtracji $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{T}}$, gdy $\forall t \in \mathbb{T}$

$$\{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t.$$

Rodzinę momentów stopu będziemy oznaczać przez \mathcal{T} .

W pracy używamy modelu Blacka-Scholesa, który przyjmuje postać pewnej warunkowej wartości oczekiwanej względem miary martyngałowej. Aby zrozumieć definicję takiej miary, zdefiniujmy najpierw martyngał - jedną z najważniejszych klas procesów stochastycznych.

Definicja 1.5 (Martyngał). Rodzina $(X_t, \mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{T}}$ jest martyngałem, jeśli dla $s \leq t$, $s, t \in \mathbb{T}$

$$\mathbb{E}(X_t | \mathcal{F}_s) = X_s.$$

Mówiąc o \mathbb{P} -martyngałach sprawdzamy wartość oczekiwaną względem miary \mathbb{P} .

Definicja 1.6 (Miara martyngałowa). Miara \mathbb{Q} , względem której $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}(X_t | \mathcal{F}_s)$ jest martyngałem, jest miarą martyngałową względem procesu X_t .

Taką miarę w literaturze nazywa się prawdopodobieństwem neutralizującym ryzyko.

We wzorze (1.5) występuje również czynnik dyskontujący w chwili t oznaczony przez Λ_t . Służy on do znajdowania bieżącej wartości ceny dobra mając daną jego przyszłą wartość. Zazwyczaj dany on jest przez $\Lambda_t = e^{-\int_0^t r(t)dt}$, gdzie $r(t)$ jest daną funkcją oprocentowania.

W tym momencie znamy już wszystkie potrzebne definicje do wzoru na model Blacka-Scholesa przedstawionego we wstępie do tego rozdziału (wzór (1.5)).

1.4 Metody Monte Carlo

W pracy będziemy używać metod numerycznych. W modelu Blacka-Scholesa do wyliczenia ceny opcji trzeba znaleźć wartość oczekiwaną zdyskontowanych wypłat (funkcji wypłaty) względem pewnej miary martyngałowej, a do tego posłużą metody Monte Carlo.

Metody Monte Carlo są metodami obliczania wielkości dających się przedstawić w postaci wartości oczekiwanych pewnych rozkładów probabilistycznych.³ Bazują one na Mocnym Prawie Wielkich Liczb:

Twierdzenie 1.7 (Mocne Prawo Wielkich Liczb). *Niech X_1, \dots, X_n będą niezależnymi zmiennymi losowymi o tym samym rozkładzie i skończonej wartości oczekiwanej (tzn. $\mathbb{E}(X_i) < \infty$, dla $i = 1, \dots, n$). Wtedy*

$$\mathbb{P}\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \mathbb{E}(X)\right) = 1.$$

Zatem korzystając z twierdzenia (1.7) łatwo wywnioskować, że za oszacowanie wartości oczekiwanej X można przyjąć średnią empiryczną z pewną, odpowiednio dobraną liczbą obserwacji n .

³A.Weron, R.Weron, *Inżynieria finansowa. i coś dalej*

Rozdział 2

Opcje typu *Omega clock*

Głównym celem pracy jest wycena opcji o dyskontowaniu zależnym od cen akcji, na które opiewa opcja, w chwili t , po angielsku zwaną *Option type omega clock*, dlatego będziemy dalej używać spolszczonej nazwy angielskiej *opcja typu Omega clock*.

Funkcję wypłaty opcji kupna typu omega clock (odpowiednio sprzedaży typu omega clock) za równo europejską i amerykańską opisują wzory zawarte w tabeli (1.1). Zmiana względem opcji waniliowych następuje przy wycenie. We wzorze (1.5) za czynnik dyskontujący przyjmuje się zazwyczaj $\Lambda_t = e^{-\int_0^t r(s)ds}$. Dla opcji standardowych przyjmuje się, że $r(t)$ jest stałą wybraną stopą oprocentowania r . Zatem model Blacka-Scholesa (zadany wzorem 1.5) dla amerykańskiej opcji sprzedaży X w chwili 0 przyjmuje postać

$$\pi_0(X) = \sup_{\tau \in \mathcal{T}} \{e^{-r\tau} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\max(K - S_\tau, 0)]\},$$

Natomiast dla opcji typu *omega clock* czynnik dyskontujący Λ_t jest zależny od ceny instrumentu podstawowego S_t . Za granicę, przy której będzie się zmieniać stopa procentowa dyskontowania, bierzemy $S_t = x$ i nazywamy tą wartość progiem zmiany oprocentowania. Formalnie wzór (1.5) dla amerykańskiej opcji sprzedaży typu omega clock X przedstawia się następująco

$$\pi_0(X) = \sup_{\tau \in \mathcal{T}} \{\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[e^{-\int_0^\tau \omega(S_s)ds} \max(K - S_\tau, 0)]\}, \quad (2.1)$$

gdzie

$$\omega(S_t) = \begin{cases} r_1, & \text{jeśli } S_t < x, \\ r_2, & \text{jeśli } S_t \geq x, \end{cases} \quad \text{ i } r_1 \leq r_2 \quad (2.2)$$

Przykładowo w pracy do teoretycznej wyceny będziemy przyjmować cenę wykonania $K = 100$, próg zmiany $x = 95$. Wówczas funkcja $\omega(\cdot)$ przyjmuje postać

$$\omega(S_t) = \begin{cases} 0.05, & \text{jeśli } S_t < 95, \\ 0.1, & \text{jeśli } S_t \geq 95. \end{cases} \quad (2.3)$$

Rozdział 3

Metoda Broadie-Glassermana

Nie ma żadnych wyznaczonych wprost wzorów na wycenę opcji o zdyskontowaniu zależnym od cen akcji w chwili t , dlatego w pracy zostanie przeprowadzona analiza numeryczna.

W celu znalezienia sprawiedliwej ceny opcji typu *omega clock* wykorzystamy algorytm oparty na metodach Monte Carlo do wyceny opcji amerykańskich zaproponowany przez Broadiego i Glassermana, który zostanie szczegółowo opisany w tym rozdziale.

3.1 Historia

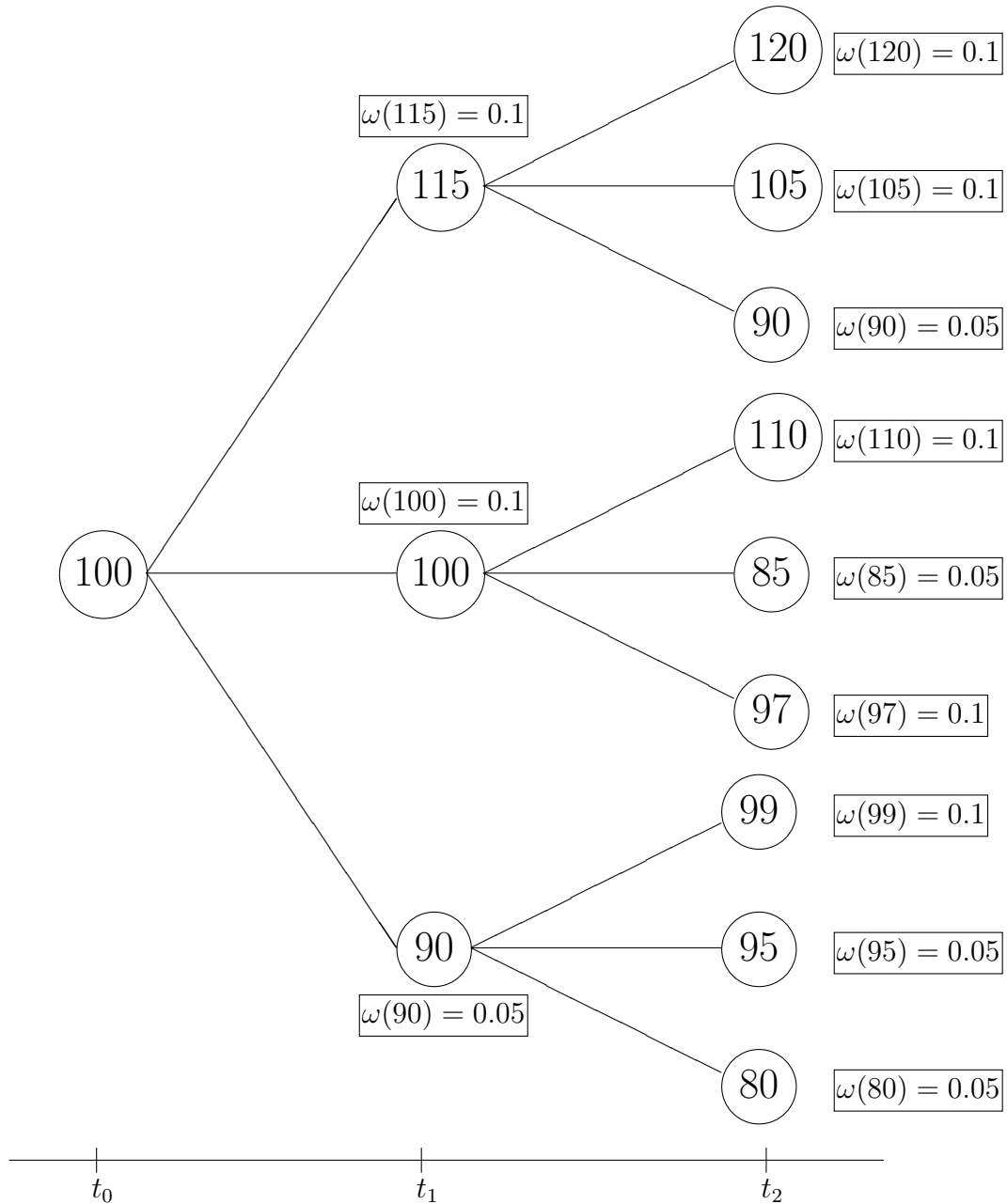
Mark Broadie i Paul Glasserman w 1997 roku w artykule *Pricing American-style securities using simulation*, który ukazał się w *Journal of Economic Dynamics and control*, przedstawili nową metodę do wyceny opcji amerykańskich. Zaproponowany przez nich algorytm do estymacji sprawiedliwej ceny instrumentu pochodnego ma wiele zalet, ponieważ może być stosowany do modeli z wieloma zmiennymi, w tym z tymi zależnymi od trajektorii ceny. Jest on specjalnie zaprojektowany do radzenia sobie z zabezpieczeniami typu amerykańskiego tzn. z możliwością wcześniejszego wykonania opcji niż w momencie wygaśnięcia.

Broadie i Glasserman wykazali, że nie istnieje ogólna metoda do wyznaczenia nieobciążonego estymatora na cenę opcji amerykańskiej, dlatego aby obejść tę trudność zasymulowali dwa estymatory ceny oparte na losowych próbkach przyszłych cen i skorzystali również z coraz lepszych przybliżeń optymalnego wykonania opcji. Jeden estymator jest *obciążony górną* (w dalszej części pracy nazywany *estymatorem górnym*), a drugi *obciążony dolną* (dalej nazywany *estymatorem dolnym*). Oba są asymptotycznie nieobciążone i zbiegają do teoretycznej premii opcji.

3.2 Opis algorytmu

Algorytm Broadiego-Glassermana bazuje na tak zwanym drzewie cenowym, które ilustruje zachowanie ceny w czasie. Takie drzewo jest parametryzowane za pomocą liczby węzłów n i liczby gałęzi przypadających na dany węzeł - oznaczany przez b , na przykład dla $n = 2$, $b = 3$ i $S_0 = 100$ otrzymujemy drzewo przedstawione na rysunku (3.1).

Symulacji komputerowych nie da się przeprowadzić dla czasu ciągłego, dlatego wprowadzamy dyskretyzację czasu. Wybieramy pewną skończoną i dodatnią liczbę n . Niech



Rysunek 3.1: Przykład drzewa cenowego z przykładowymi stopami procentowymi zależnymi od cen akcji (zapisane wzorem (2.3)).

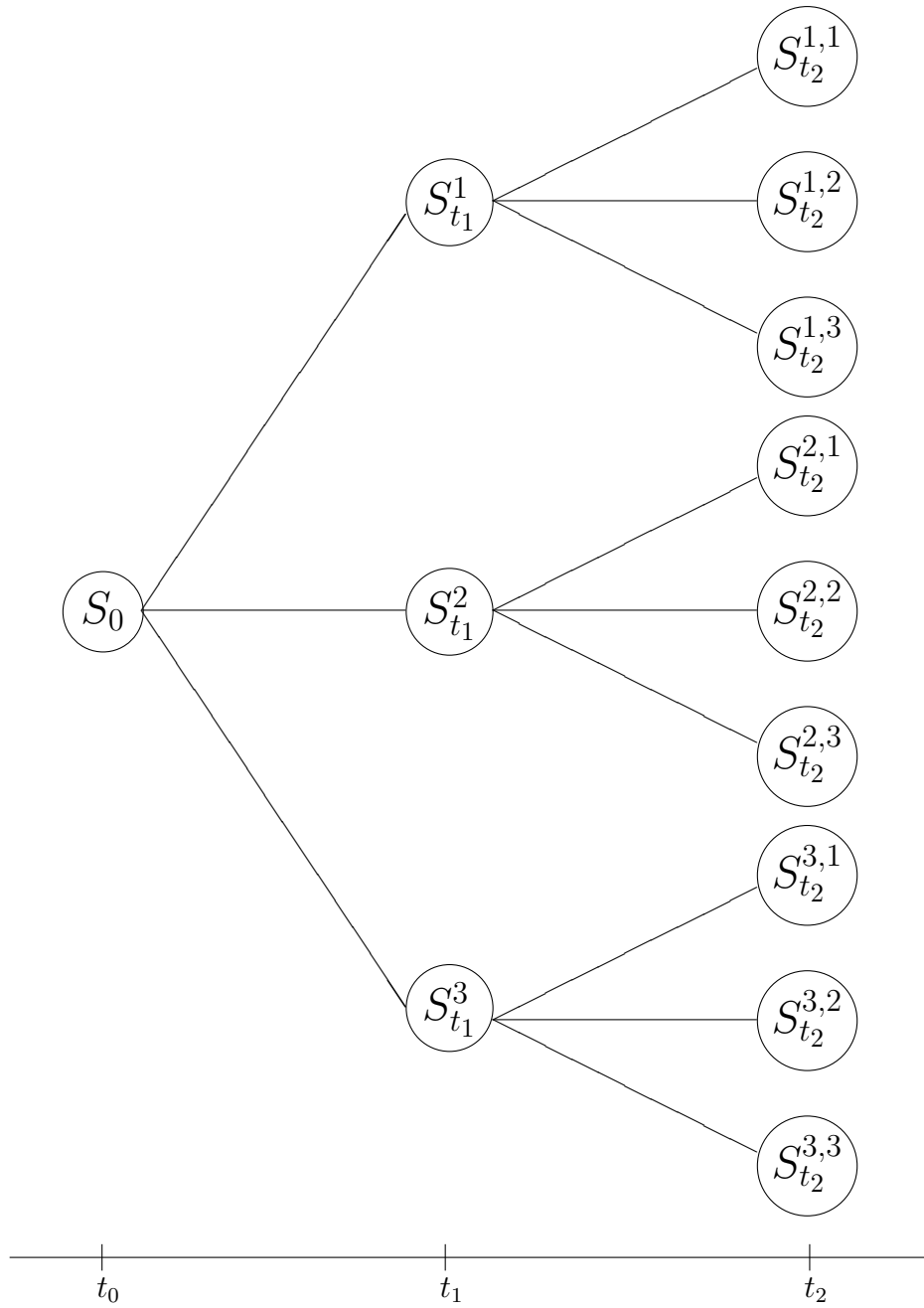
sekwencja $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$ będzie dyskretyzacją ciągłego przedziału $[0, T]$, zatem ten przedział dzielimy na równe podprzedziały $t_i = i \frac{T}{n}$, gdzie $i = 0, 1, \dots, n$.

Przez

$$S_{t_i}^{b_1, \dots, b_i}, \text{ gdzie } i = 1, 2, \dots, n, \quad b_i = 1, 2, \dots, b$$

oznaczamy cenę instrumentu podstawowego w chwili t_i . Wyrażenie b_1, \dots, b_i opisuje wybór gałęzi danej ceny do chwili t_i (zilustrowane na rysunku (3.2)), tzn. wybór gałęzi w każdym z węzłów drzewa. Pozwala to nam jednoznacznie określić ścieżkę ceny akcji do chwili t_i .

Wycena instrumentów pochodnych wymaga dyskontowania. W poprzednim rozdziale we wzorze Blacka-Scholesa do wyceny opcji typu omega clock (2.1) czynnik dyskontujący



Rysunek 3.2: Wybór gałęzi

opisany jest za pomocą $e^{-\int_0^t \omega(S_s) ds}$, gdzie $\omega(S_t)$ opisana jest wzorem (2.3). W przypadku dyskretnym czynnik dyskontujący między chwilami t_i a t_{i+1} przyjmuje postać $e^{-\frac{1}{n}\omega(S_{t_{i+1}}^{b_1, \dots, b_{i+1}})}$, ponieważ wartość funkcji $\omega(\cdot)$ nie zależy bezpośrednio od t (przyjmuje wartości stałe na dwóch poziomach zależnych od ceny akcji), a czas między tymi chwilami różni się o $\frac{1}{n}$. W dalszej części tego rozdziału odpowiednie dyskontowanie będzie oznaczać

$$e^{-\frac{1}{n}\omega(S_{t_i}^{b_1, \dots, b_i})}, \text{ gdzie } \omega(S_{t_i}^{b_1, \dots, b_i}) = \begin{cases} 0.1 & , \text{ dla } S_{t_i}^{b_1, \dots, b_i} > 95 \\ 0.05 & , \text{ dla } S_{t_i}^{b_1, \dots, b_i} \leq 95. \end{cases}$$

Przykładowe wyznaczenie stóp procentowych jest zaznaczone na wykresie (3.1).

3.3 Notacja

Do opisu estymatorów przydatne jest wprowadzenie kilku dodatkowych oznaczeń.

Funkcję natychmiastowego wykonania opcji sprzedaży typu omega clock w chwili t_i dla ceny akcji $S_{t_i}^{b_1, \dots, b_i}$ oznaczamy przez

$$h_i(S_{t_i}^{b_1, \dots, b_i}) = \max(K - S_{t_i}^{b_1, \dots, b_i}, 0).$$

Natomiast oczekiwaną wartość przetrzymania opcji od momentu t_i do t_{i+1} dla danej wartości ceny instrumentu podstawowego $S_{t_i}^{b_1, \dots, b_i}$ określamy funkcją

$$g_i(S_{t_i}^{b_1, \dots, b_i}) = \mathbb{E}[e^{-\frac{1}{n}\omega(S_{t_{i+1}}^{b_1, \dots, b_{i+1}})} f_{i+1}(S_{t_{i+1}}^{b_1, \dots, b_{i+1}}) | S_{t_i}^{b_1, \dots, b_i}],$$

$$\text{gdzie } f_i(S_{t_i}^{b_1, \dots, b_i}) = \max\{h_i(S_{t_i}^{b_1, \dots, b_i}), g_i(S_{t_i}^{b_1, \dots, b_i})\}.$$

Funkcja $f_i(S_{t_i}^{b_1, \dots, b_i})$ jest wartością wypłaty opcji w chwili t_i dla ceny akcji $S_{t_i}^{b_1, \dots, b_i}$.

Funkcja g w czasie dyskretnym zgodnie z Mocnym Prawem Wielkich Liczb (twierdzenie 1.7), gdy $b \rightarrow \infty$ przyjmuje postać

$$g_i(S_{t_i}^{b_1, \dots, b_i}) = \frac{1}{b} \sum_{j=1}^b e^{-\frac{1}{n}\omega(S_{t_{i+1}}^{b_1, \dots, b_i, j})} f_{i+1}(S_{t_{i+1}}^{b_1, \dots, b_i, j}), \quad (3.1)$$

od tego momentu wzór (3.1) będzie używany do obliczania oczekiwanej wartości przetrzymania opcji, czy inaczej mówiąc kontynuacji opcji.

3.4 Estymatory

W tym podrozdziale znajdują się formalne wzory na dwa estymatory: Θ i Φ , które odpowiednio zawyżają lub zaniżają prawdziwą premię opcji. W dalszej części zostaną przedstawione dwa twierdzenia, pokazujące, że oba estymatory są asymptotycznie nieobciążone i oba zbiegają do prawdziwej ceny opcji typu omega clock.

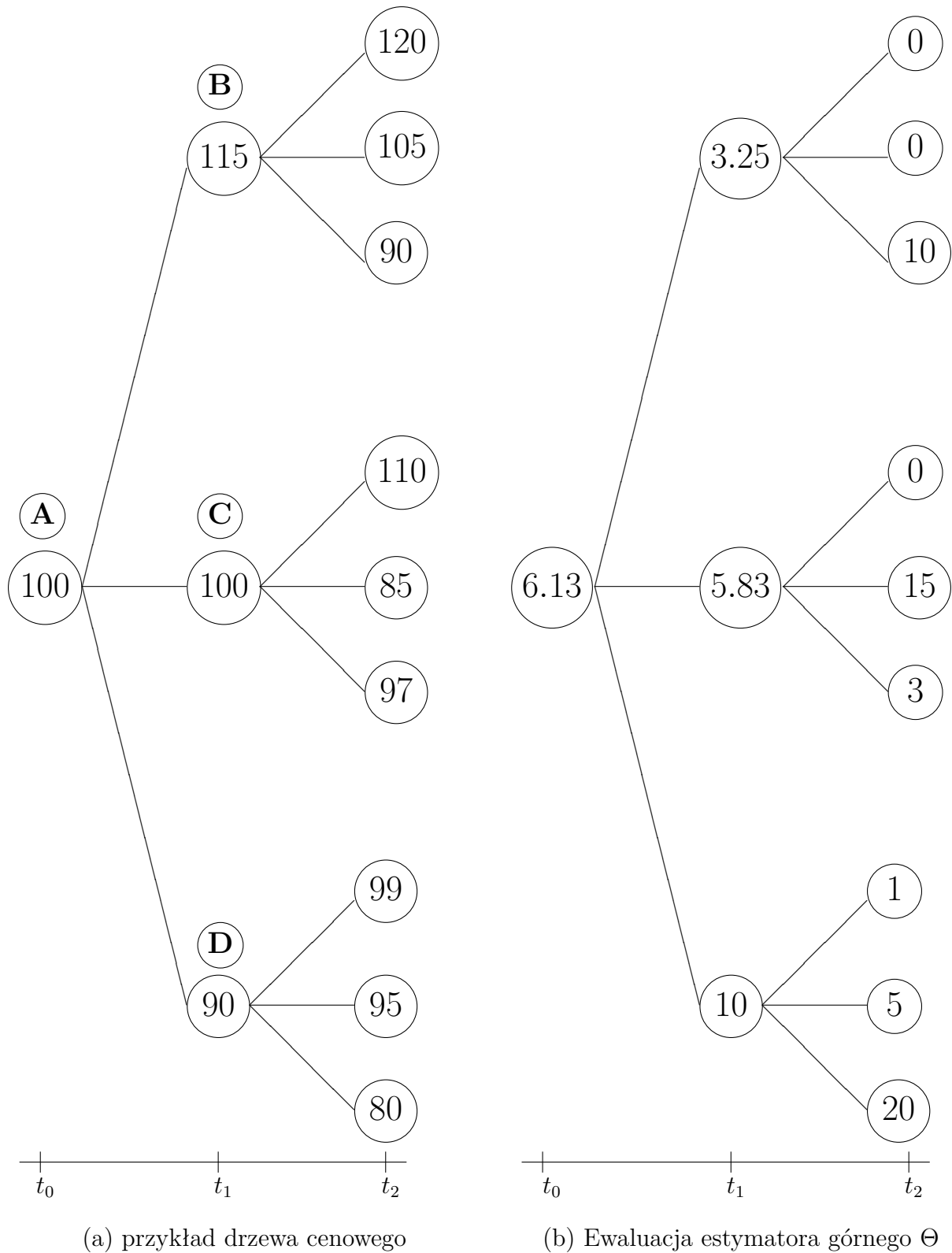
3.4.1 Estymator górny Θ

Wzór na estymator górny Θ jest rekurencyjny i wygląda następująco

$$\Theta_{t_i} = \begin{cases} \max[h_i(S_{t_i}^{b_1, \dots, b_i}), \frac{1}{b} \sum_{j=1}^b e^{-\frac{1}{n}\omega(S_{t_{i+1}}^{b_1, \dots, b_i, j})} \Theta_{t_{i+1}}^{b_1, \dots, b_i, j}] & \text{dla } i = 0, \dots, n-1, \\ f_T(S_T) & \text{dla } i = n, \text{ (bo } T = t_n). \end{cases} \quad (3.2)$$

Estymator Θ , w każdym węźle drzewa cenowego, liczymy wybierając większą wartość spośród:

- funkcji wcześniejszej wypłaty w chwili t_i , czyli wartości $h_i(S_{t_i}^{b_1, \dots, b_i})$,
- oczekiwanej wartości przetrzymania opcji, tzn. średnią arytmetyczną odpowiednio zdyskontowanych funkcji wypłaty z następujących bezpośrednio węzłów po węźle, dla którego jest liczony estymator, czyli wartości $g_i(\Theta_{t_i}^{b_1, \dots, b_i})$.

Rysunek 3.3: Przykład wyjaśniający obliczanie Θ

Ilustracja (3.3) przedstawia, jak wartość estymatora Θ jest otrzymywana z danego drzewa cenowego. Poniżej są również przedstawione wszystkie potrzebne obliczenia.

Obliczenia dla kolejnych węzłów (zaznaczonych odpowiednio na rysunku (3.3(a)), wy-

korzystające powyższy wzór (3.2), znajdują się poniżej. Wartość maksymalna spośród wyliczonych, czyli wartość estymatora Θ , została podkreślona. Użyto danych podanych wcześniej w rozdziale 2, tzn. cena wykonania $K = 100$, czas wygaśnięcia $T = 1$, liczba węzłów $n = 2$, liczba gałęzi $b = 3$, a stopę procentową zależną od S_t przedstawia wzór (2.3).

$$\textcircled{\mathbf{B}} = \begin{cases} \text{wartość wykonania:} & 0 \\ \text{wartość przetrzymania:} & \frac{1}{3}[(0 + 0)e^{-0.1 \times 0.5} + 10e^{-0.05 \times 0.5}] = \underline{3.25} \end{cases}$$

$$\textcircled{\mathbf{C}} = \begin{cases} \text{wartość wykonania:} & 0 \\ \text{wartość przetrzymania:} & \frac{1}{3}[(0 + 3)e^{-0.1 \times 0.5} + 15e^{-0.05 \times 0.5}] = \underline{5.83} \end{cases}$$

$$\textcircled{\mathbf{D}} = \begin{cases} \text{wartość wykonania:} & \frac{10}{3} \\ \text{wartość przetrzymania:} & \frac{1}{3}[(1e^{-0.1 \times 0.5} + (5 + 20)e^{-0.05 \times 0.5}]] = 8.44 \end{cases}$$

Po wyliczeniu wartości estymatora Θ dla wszystkich węzłów w chwili t_1 możemy policzyć wartość dla węzła w chwili t_0 .

$$\textcircled{\mathbf{A}} = \begin{cases} \text{wartość wykonania:} & 0 \\ \text{wartość przetrzymania:} & \frac{1}{3}[(3.25 + 5.83)e^{-0.1 \times 0.5} + 10e^{-0.05 \times 0.5}] = \underline{6.13} \end{cases}$$

Wartość estymatora $\Theta_0 = 6.13$ wyliczona w węźle $\textcircled{\mathbf{A}}$ jest ostateczną zawyżoną wysokością premii opcji.

3.4.2 Estymator dolny Φ

Estymator Φ , podobnie jak estymator Θ , jest definiowany rekurencyjnie. Jednak zanim podamy wzór przyjmijmy nowe oznaczenie pomocnicze ξ .

$$\xi_{t_i}^{b_1, \dots, b_i} = \begin{cases} h_i(S_{t_i}^{b_1, \dots, b_i}), & \text{gdy } h_i(S_{t_i}^{b_1, \dots, b_i}) \geq g_i(\Phi_{t_i}^{b_1, \dots, b_i}) \\ e^{-\frac{1}{n}\omega(S_{t_{i+1}}^{b_1, \dots, b_i, j})} \Phi_{t_{i+1}}^{b_1, \dots, b_i, j}, & \text{gdy } h_i(S_{t_i}^{b_1, \dots, b_i}) < g_i(\Phi_{t_i}^{b_1, \dots, b_i}) \end{cases} \quad (3.3)$$

gdzie

$$g_i(\Phi_{t_i}^{b_1, \dots, b_i}) = \frac{1}{b-1} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^b e^{-\frac{1}{n}\omega(S_{t_{i+1}}^{b_1, \dots, b_i, j})} \Phi_{t_{i+1}}^{b_1, \dots, b_i, k} \quad \text{dla } j = 1, \dots, b$$

Teraz można przejść do definicji estymatora Φ :

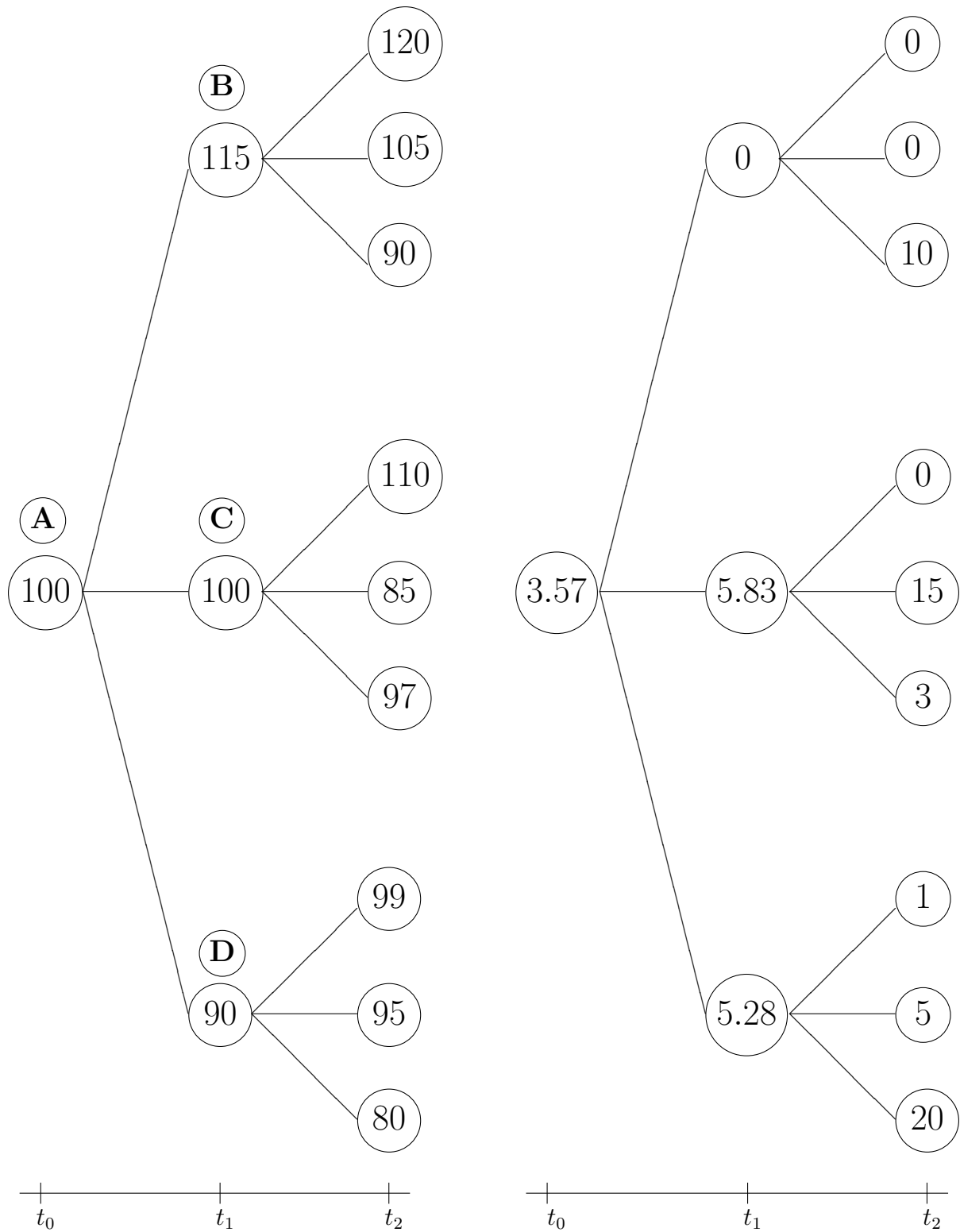
$$\begin{cases} \Phi_{t_i}^{b_1, \dots, b_i} = \frac{1}{b} \sum_{j=1}^b \xi_{t_i}^{b_1, \dots, b_i, j} & \text{dla } i = 1, \dots, n-1 \\ \Phi_T = f_T(S_T) & \text{dla } i = n. \end{cases} \quad (3.4)$$

Ilustracja (3.4) przedstawia, jak wartość estymatora Φ jest obliczana z danego drzewa cenowego. Sposób jego obliczania jest bardziej złożony niż estymatora Θ , dlatego oprócz wyliczeń estymatora wytłumaczono dokładnie sposób jego otrzymywania.

Do wyliczenia korzystamy z tych samych danych, co w przypadku estymatora Θ . Poniżej za pomocą tabel pokazano sposób obliczania estymatora Φ .

Dla węzła $\textcircled{\mathbf{B}}$:

wartość wykonania: $h_1(S_{t_1}^1) = 0$



(a) przykład drzewa cenowego

(b) Ewaluacja estymatora dolnego Φ Rysunek 3.4: Przykład wyjaśniający obliczanie Φ

	Oczekiwana wartość przetrzymania		wartość opcji dla galezi j
$j = 1$	$\frac{1}{2}(0 \cdot e^{-0.1 \times 0.5} + 10 \cdot e^{-0.05 \times 0.5}) = 4.88$	$\rightarrow 0 < 4.88 \rightarrow$	$0 \cdot e^{-0.1 \times 0.5}$
$j = 2$	$\frac{1}{2}(0 \cdot e^{-0.1 \times 0.5} + 10 \cdot e^{-0.05 \times 0.5}) = 4.88$	$\rightarrow 0 < 4.88 \rightarrow$	$0 \cdot e^{-0.1 \times 0.5}$
$j = 3$	$\frac{1}{2}(0 + 0) \cdot e^{-0.1 \times 0.5} = 0$	$\rightarrow 0 \geq 0 \rightarrow$	0

Przez j ($j = 1, \dots, b$) oznaczane są kolejne gałęzie. Najpierw należy wyliczyć wartość wcześniejszego wykonania opcji, tzn. w tym przypadku funkcję

$$h_1(S_{t_1}^1) = \max(K - S_{t_1}^1, 0) = \max(100 - 115, 0) = 0.$$

Następnie następują wyliczenia dla każdej gałęzi osobno.

Dla $j = 1$ bierzemy odpowiednio zdyskontowane wartości z dwóch pozostałych gałęzi, aby ustalić czy korzystniejsze jest przetrzymanie opcji (w tabeli druga kolumna *Oczekiwana wartość przetrzymania*) czy jej wcześniejsze wykorzystanie (wyплата opcji $\equiv h_1(S_{t_1}^1)$). W trzeciej kolumnie tabeli następuje porównanie, skąd łatwo wywnioskować, że wcześniejsze wykonanie jest nieoptymalne ($0 < 4.88$), zatem powinno się przetrzymać opcję i w ten sposób otrzymujemy $\xi_{t_1}^1 = 0 \cdot e^{-0.1 \times 0.5}$, czyli odpowiednio zdyskontowaną wypłatę opcji ceny dla instrumentu podstawowego $S_{t_2}^{1,1}$, odpowiadającą pierwszej gałęzi.

Dla $j = 2$ postępujemy podobnie jak ostatnio. Znow nie jest optymalne wcześniejsze wykonanie opcji, więc wartość wypłaty dla tej gałęzi jest $\xi_{t_1}^2 = 0 \cdot e^{-0.1 \times 0.5}$.

Dla $j = 3$ obie wartości (funkcja wypłaty wcześniejszego wykonania i oczekiwana wartość przetrzymania) są równe 0. Zatem, korzystając ze wzoru (3.3) $\xi_{t_1}^3$ jest równa wartości funkcji wcześniejszej wypłaty, czyli $\xi_{t_1}^3 = 0$

Wartość estymatora dla węzła $\textcircled{\text{B}}$ jest średnią arytmetyczną $\xi_{t_1}^j$ ze wszystkich gałęzi (wzór (3.4)), zatem

$$\Phi_{t_1}^1 = \frac{1}{3} \sum_{j=1}^3 \xi_{t_1}^j = 0.$$

Podobnie postępuje się dla kolejnych węzłów:

Dla węzła $\textcircled{\text{C}}$:

wartość wykonania: $h_1(S_{t_1}^2) = 0$

	Oczekiwana wartość przetrzymania		wartość opcji dla gałęzi j
$j = 1$	$\frac{1}{2}(15 \cdot e^{-0.05 \times 0.5} + 3 \cdot e^{-0.1 \times 0.5}) = 8.74$	$\rightarrow 0 < 8.74 \rightarrow$	$0 \cdot e^{-0.1 \times 0.5}$
$j = 2$	$\frac{1}{2}(0 + 3) \cdot e^{-0.1 \times 0.5} = 1.43$	$\rightarrow 0 < 1.43 \rightarrow$	$15 \cdot e^{-0.05 \times 0.5}$
$j = 3$	$\frac{1}{2}(0 \cdot e^{-0.1 \times 0.5} + 15 \cdot e^{-0.05 \times 0.5}) = 7.31$	$\rightarrow 0 < 7.31 \rightarrow$	$3 \cdot e^{-0.1 \times 0.5}$

W tym przypadku, wartość estymatora dla węzła $\textcircled{\text{C}}$ jest równa $\Phi_{t_1}^2 = 5.83$.

Dla węzła $\textcircled{\text{D}}$:

wartość wykonania: $h_1(S_{t_1}^3) = 10$

	Oczekiwana wartość przetrzymania		wartość opcji dla gałęzi j
$j = 1$	$\frac{1}{2}(5 + 20) \cdot e^{-0.05 \times 0.5} = 12.19$	$\rightarrow 10 < 12.19 \rightarrow$	$1 \cdot e^{-0.1 \times 0.5}$
$j = 2$	$\frac{1}{2}(1 \cdot e^{-0.1 \times 0.5} + 20 \cdot e^{-0.05 \times 0.5}) = 10.23$	$\rightarrow 10 < 10.23 \rightarrow$	$5 \cdot e^{-0.05 \times 0.5}$
$j = 3$	$\frac{1}{2}(1 \cdot e^{-0.1 \times 0.5} + 5 \cdot e^{-0.05 \times 0.5}) = 2.91$	$\rightarrow 10 \geq 2.91 \rightarrow$	10

W tym przypadku, wartość estymatora dla węzła $\textcircled{\text{D}}$ jest równa $\Phi_{t_1}^3 = 5.28$.

Dla węzła $\textcircled{\text{A}}$:

wartość wykonania: $h_0(S_0) = 0$

	Oczekiwana wartość przetrzymania		wartość opcji dla galezi j
$j = 1$	$\frac{1}{2}(5.83 \cdot e^{-0.1 \times 0.5} + 5.28 \cdot e^{-0.05 \times 0.5}) = 5.35$	$\rightarrow 0 < 5.35 \rightarrow$	$0 \cdot e^{-0.1 \times 0.5}$
$j = 2$	$\frac{1}{2}(0 \cdot e^{-0.1 \times 0.5} + 5.28 \cdot e^{-0.05 \times 0.5}) = 2.57$	$\rightarrow 0 < 2.57 \rightarrow$	$5.83 \cdot e^{-0.1 \times 0.5}$
$j = 3$	$\frac{1}{2}(0 + 5.83) \cdot e^{-0.1 \times 0.5} = 2.77$	$\rightarrow 0 < 2.77 \rightarrow$	$5.28 \cdot e^{-0.05 \times 0.5}$

Zatem wartość estymatora dla węzła $\textcircled{\text{A}}$ jest równa

$$\Phi_0 = \frac{1}{3}((0 + 5.83) \cdot e^{-0.1 \times 0.5} + 5.28 \cdot e^{-0.05 \times 0.5}) = 3.57$$

Jest to ostateczna wartość estymatora dolnego Φ , więc jest to zaniżona wysokość premii opcji.

3.5 Własności estymatorów

W tej części przytoczymy fakty dotyczące własności estymatorów Φ i Θ , których dowiedli Broadie i Glasserman¹.

Twierdzenie 3.1. Θ i Φ są zgodnymi/zwartymi (*ang. consistent*) i asymptotycznie nieobciążonymi estymatorami premii opcji. Oba zbiegają do prawdziwej ceny opcji, gdy ilość odgałęzień b drzewa cenowego dąży do nieskończoności. Dla skończonego b :

- obciążenie estymatora Θ jest zawsze dodatnie, tzn.

$$\mathbb{E}[\Theta_0(b)] \geq f_0(S_0).$$

- obciążenie estymatora Φ jest zawsze ujemne, tzn.

$$\mathbb{E}[\Phi_0(b)] \leq f_0(S_0).$$

Zatem prawidłowe są nazwy: górny estymator Θ i dolny estymator Φ . Ponadto ważne jest porównanie tych estymatorów.

Twierdzenie 3.2. Dla każdej realizacji drzewa cenowego estymator dolny Φ jest zawsze mniejszy bądź równy estymatorowi górnemu Θ , tzn.

$$\mathbb{P}(\Phi_{t_i}^{b_1, \dots, b_i} \leq \Theta_{t_i}^{b_1, \dots, b_i}) = 1.$$

Za pomocą wartości estymatorów można również wyliczyć sprawiedliwą cenę opcji w chwili 0. Wzór w postaci jawnej podany jest w poniższym fakcie.

¹Dowody znajdują się w artykule: M.Broadie, P.Glasserman, *Pricing American-style securities using simulation*

Fakt 3.3. *Cenę opcji X w chwili $t = 0$ można wyznaczyć ze wzoru*

$$\pi_0(X) = \frac{1}{2} \max\{\max(K - S_0, 0), \Phi\} + \frac{1}{2}\Theta$$

Korzystając z tego faktu i wcześniej wyznaczonych wartości estymatorów Θ i Φ dla drzewa cenowego na rysunku (3.1) możemy wyliczyć sprawiedliwą premię opcji dla tego przykładu.

$$\pi_0(X) = \frac{1}{2} \max 0, 3.57 + \frac{1}{2} 6.13 = 4.85.$$

Zatem ostatecznie wyznaczona cena opcji dla cen akcji przebiegających zgodnie z drzewem (3.1) wynosi 4.85.

Rozdział 4

Analiza numeryczna

W tym rozdziale zostały zaprezentowane wyniki analizy numerycznej. Najpierw użyto teoretycznego algorytmu Broadiego-Glassermana do wyceny *teoretycznej* standardowej opcji amerykańskiej sprzedaży z wyznaczonymi parametrami, aby porównać wartości estymowane z innymi już sprawdzonymi metodami wyceny. To pozwala sprawdzić poprawność użytej metody Monte Carlo.

Następnie pokazano wycenę amerykańskiej opcji sprzedaży typu omega clock dla danych rzeczywistych dla różnych wartości poszczególnych parametrów.

W ostatniej części tego rozdziału porównano premie waniliowych opcji amerykańskich sprzedaży z premiami odpowiadających im opcji typu omega clock dla danych rzeczywistych ze zmiennym progiem zmiany oprocentowania x i różnymi stopami procentowymi r_1 i r_2 ze wzoru 2.2.

Wszystkie symulacje i wyliczenia przeprowadzono za pomocą programu *Python*.

W całym rozdziale będziemy wyceniać opcje na akcje w modelu Blacka-Scholesa zatem ceny zachowują się zgodnie ze stochastycznym równaniem różniczkowym zadany wzorem (1.2), którego rozwiązanie przedstawia wzór (1.3). Wykorzystując te wzory i fakt, że proces Wienera ma rozkład normalny $W_t \sim N(0, t)$ otrzymujemy prosty wzór do symulacji ceny akcji w momencie t_i mając daną $S_{t_{i-1}}$:

$$S_{t_i} = S_{t_{i-1}} \exp\left\{\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(t_i - t_{i-1}) + \sigma\sqrt{t_i - t_{i-1}}Z\right\},$$

gdzie $Z \sim N(0, 1)$. Zmienne Z są generowane jako liczby pseudolosowe z rozkładu normalnego.

4.1 Waniliowa opcja amerykańska

W literaturze nigdy przedtem nie wyceniano opcji typu omega clock, dlatego nie wiemy, czy nasze wyniki są poprawne. W celu sprawdzenia zaimplementowanego algorytmu wyznaczonego z metody Broadiego-Glassermana zastosujemy go najpierw dla standardowej opcji amerykańskiej i porównamy z wynikami wyceny inną metodą. W ten sposób można będzie potwierdzić czy nasze estymacje są poprawne.

Wyniki zostaną zaprezentowane w dwóch tabelach. Pierwsza zawiera wyniki dla zmiennej wartości K - ceny wykonania, a druga dla różnych wartości b - liczby odgałęzień. Cena estymowana jest wyznaczana za pomocą wzoru zawartego w fakcie 3.3. Błąd estymacji

wyznaczany jest za pomocą błędu względnego, a zatem oznaczając przez P cenę prawdziwą (liczoną za pomocą sprawdzonych algorytmów), a przez \hat{P} cenę estymowaną obliczany jest za pomocą

$$\left| \frac{P - \hat{P}}{P} \right|.$$

Liczbę węzłów bierzemy tylko $n = 3$. Wynika to z faktu, że w chwili t_n jest aż b^n różnych wartości ceny na drzewie cenowym. Zatem wymagania obliczeniowe algorytmu Broadiego-Glassermana wzrastają wykładniczo wraz ze wzrostem ilości węzłów. Jest to główna wada tego algorytmu. Pomimo to, zdaniem Glassermana, nawet dla takiej małej liczby n algorytm ten jest efektywny¹. Zgodnie z metodami Monte Carlo, aby otrzymać dobre estymatory nie można korzystać z jednej symulacji (w tym przypadku jednego drzewa cenowego), dlatego generujemy N drzew i następnie wyliczamy z nich średnią empiryczną.

Tabela 4.1: Porównanie wyestymowanej i 'prawdziwej' ceny standardowej opcji amerykańskiej sprzedaży dla różnych cen wykonania K .

K	Dolny est. Φ	Górny est. Θ	Cena estymowana	Cena rzeczywista	Błąd bezwzględny
85	1.384	1.401	1.393	1.415	1.60%
90	2.428	2.460	2.444	2.473	1.16%
95	3.926	3.989	3.958	4.026	1.70%
100	5.969	6.055	6.0122	6.110	1.60%
105	8.553	8.677	8.615	8.752	1.56%
110	11.648	11.836	11.742	11.974	1.94%
115	15.146	15.616	15.381	15.774	2.49%

Pozostałe parametry: $S_0 = 100$, $r = 0.05$, $\sigma = 0.2$, $T = 1$ oraz $b = 100$, $N = 100$.

Czasy potencjalnego wykonania to: 0 , $\frac{T}{3}$, $\frac{2T}{3}$ i T .

Wyniki w tabeli 4.1 są zgodne z teoretycznymi założeniami w poprzednim rozdziale. Rzeczywiście w każdym momencie $\Phi \leq \Theta$. Dla naszych symulacji i tych parametrów błąd waha się pomiędzy 1.16% a 2.49%. Nie jest to duży błąd, więc uznajemy że zaimplementowana metoda jest poprawna.

Tabela 4.2: Porównanie estymatorów i wyestymowanej ceny standardowej opcji amerykańskiej sprzedaży dla różnych ilości gałęzi b .

b	Dolny est. Φ	Górny est. Θ	Cena estymowana
25	3.909	4.097	4.00
50	3.771	3.869	3.820
75	3.888	3.958	3.923
100	3.926	3.989	3.958
125	3.854	3.896	3.875

Pozostałe parametry: $S_0 = 100$, $r = 0.05$, $\sigma = 0.2$, $T = 1$, $K = 95$ oraz $N = 100$.

Czasy potencjalnego wykonania to: 0 , $\frac{T}{3}$, $\frac{2T}{3}$ i T .

W tabeli 4.2 warto zauważyć, że im większe b , tym wartości estymatorów są bliższe

¹por. Glasserman, P., *Monte Carlo Methods in Financial Engineering*

sobie, więc zachowują się zgodnie ze stwierdzeniem w twierdzeniu 3.1. Gdy b dąży do nieskończoności oba estymatory zbiegają do prawdziwej ceny opcji.

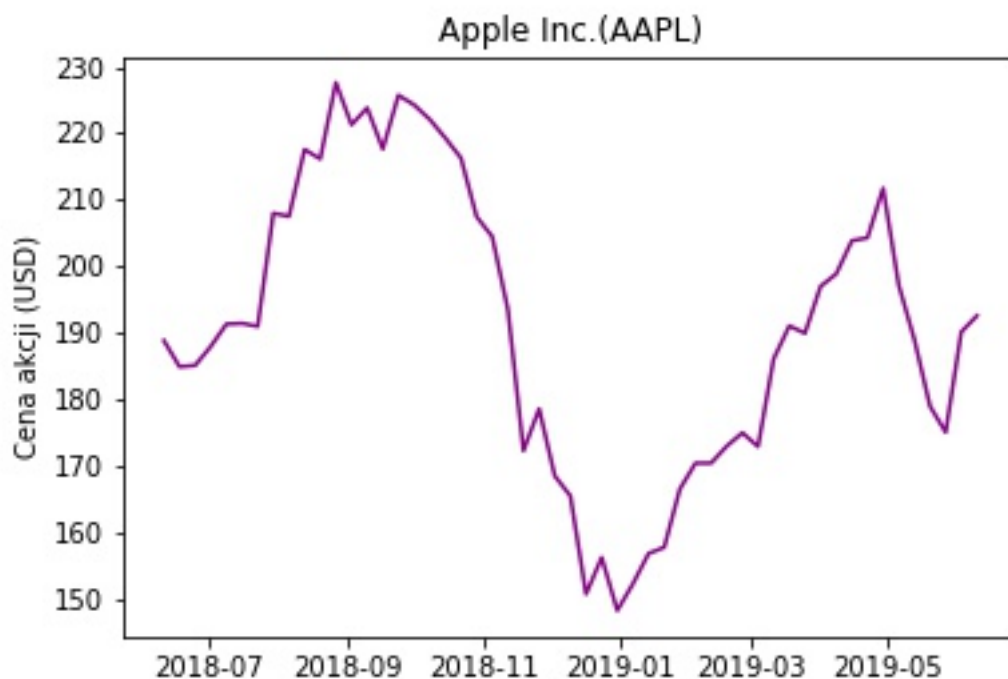
4.2 Opcje typu omega clock

W tym podrozdziale zajmiemy się analizą wyników symulacji przeprowadzonych dla amerykańskich opcji sprzedaży typu omega clock na jedną akcję. Wyceniane opcje opiewają na akcje Apple Inc. (AAPL.)

W analizie zostaną przedstawione: jedna tabela i dwa wykresy. W tabeli przeprowadzona jest analiza estymatorów i estymowanej ceny dla zmiennej ilości odgałęzień b , a na wykresach zależność premii opcji kolejno od prognozy zmiany oprocentowania użytego do dyskontowania przy wycenie i wartości stóp procentowych użytych do dyskontowania.

4.2.1 Dane rzeczywiste

Wszystkie parametry wejściowe do wyceny opcji, takie jak S_0 , zmienność i stopa procentowa są brane z rynku dla Apple Inc. Wysokości cen akcji na przestrzeni roku, notowanych tygodniowo, przedstawiono na wykresie 4.1.



Rysunek 4.1: Tygodniowe ceny zamknięcia dla akcji Apple Inc. Dane zostały wzięte z giełdy amerykańskiej od 11.06.2018 do 10.06.2019.

Następne symulacje przeprowadzono dla danych z 07.06.2019. Zostały one zaprezentowane w tabeli 4.3.

Tabela 4.3: Dane dla Apple na dzień 07.06.2019

Parametr	Wartość
S_0	190.15
K	195
σ	15.50%
r	2.25%

4.2.2 Wyniki

W tabeli 4.4 przeprowadzono analizę dla różnych wartości b , aby zobaczyć czy estymatory zbiegają do siebie wraz ze wzrostem ilości gałęzi. Pozostałe dane wzięte z tabeli 4.3, a $r_1 = 1\%$ i $r_2 = 3\%$, a próg zmiany oprocentowania został ustalony na poziomie 180.

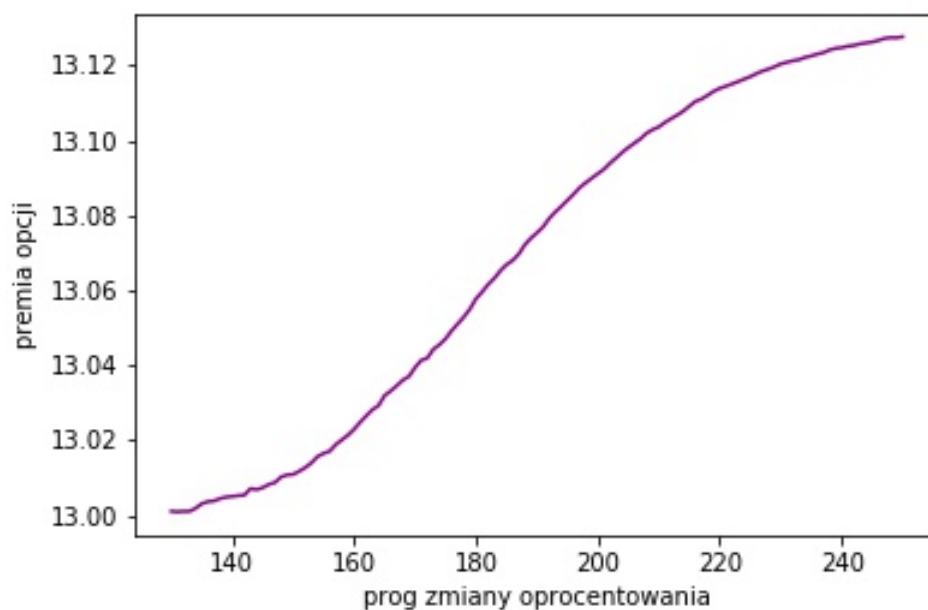
Tabela 4.4: Porównanie wyestymowanej i 'prawdziwej' ceny opcji amerykańskiej sprzedaży typu omega clock dla różnych ilości gałęzi b .

b	Dolny estymator Φ	Górny estymator Θ	Cena estymowana
25	12.876	13.554	13.215
50	12.683	13.066	12.874
75	12.73	13.019	12.875
100	12.842	13.077	12.959
125	12.744	12.978	12.876

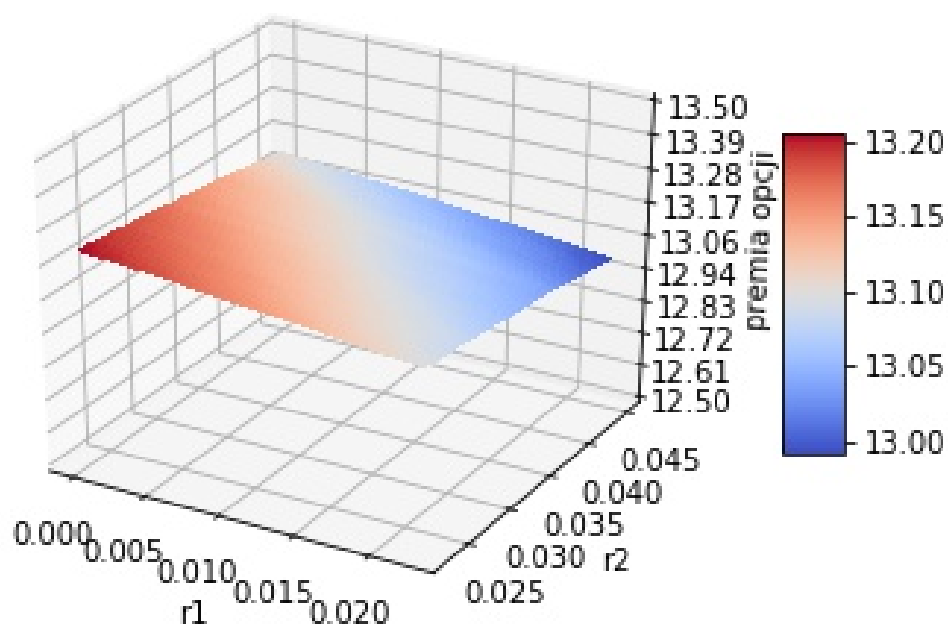
Wnioski z tabeli 4.4 są podobne jak z tabeli 4.2. Również w tym przypadku wartości estymatorów dolnego i górnego są bliższe sobie wraz ze wzrostem b , zatem są coraz bliższe jednej cenie. Można zatem wnioskować, że zbiegają do faktycznej sprawiedliwej premii opcji.

Na kolejnych wykresach przedstawiono zależność premii opcji wraz ze zmianą progu zmiany ceny x ze wzoru (2.2) w przedziale $[130, 250]$, a także zależność premii opcji dla zmiennych r_1 i r_2 (ze wzoru (2.2)) brane odpowiednio w przedziałach $[0, 2.25\%]$ i $[2.25\%, 4.25\%]$.

Na podstawie wykresu 4.3 wnioskujemy, że cena maleje wraz ze wzrostem stóp procentowych, co jest zgodne z intuicją.



Rysunek 4.2: Wycena amerykańskiej opcji sprzedaży typu omega clock dla zmiennej wartości prog x do zmiany oprocentowania zgodnie ze wzorem 2.2. Wartość prog $x \in [130, 250]$.



Rysunek 4.3: Wycena amerykańskiej opcji sprzedaży typu omega clock dla zmiennych wartości oprocentowania r_1 i r_2 ze wzoru 2.2. Wartości tych stóp procentowych $r_1 \in [0, 2.25\%]$, $r_2 \in [2.25\%, 4.5\%]$.