



Politechnika Wrocławska

Wydział Matematyki

Kierunek studiów: Matematyka

Specjalność: Matematyka finansowa i ubezpieczeniowa

Praca dyplomowa – magisterska

**WYCENA OPCJI AMERYKAŃSKICH O  
DYSKONTOWANIU ZALEŻNYM OD CEN AKCJI  
W MODELU BLACKA-SCHOLESZA ZA POMOCĄ  
METOD MONTE CARLO**

Marta Janik

słowa kluczowe:  
tutaj podajemy najważniejsze słowa kluczowe (łącznie nie powinny być dłuższe niż 150 znaków).

krótkie streszczenie:

Tutaj piszemy krótkie streszczenie pracy (nie powinno być dłuższe niż 530 znaków).

Opiekun pracy dyplomowej	prof. dr hab. Zbigniew Palmowski	.....	.....
	Tytuł/stopień naukowy/imię i nazwisko	ocena	podpis

*Do celów archiwalnych pracę dyplomową zakwalifikowano do:\**

*a) kategorii A (akta wieczyste)*

*b) kategorii BE 50 (po 50 latach podlegające ekspertyzie)*

*\* niepotrzebne skreślić*

pieczęćka wydziałowa

Wrocław, rok 2019





Wrocław University  
of Science and Technology

Faculty of Pure and Applied Mathematics

Field of study: Mathematics

Specialty: Financial and Actuarial Mathematics

Master's Thesis

## PRICING OF AMERICAN OPTION TYPE OMEGA CLOCK

Marta Janik

keywords:

tutaj podajemy najważniejsze słowa kluczowe w języku angielskim (łącznie nie powinny być dłuższe niż 150 znaków)

short summary:

Tutaj piszemy krótkie streszczenie pracy w języku angielskim (nie powinno być dłuższe niż 530 znaków).

Supervisor	prof. dr hab. Zbigniew Palmowski	.....	.....
	Title/degree/name and surname	grade	signature

*For the purposes of archival thesis qualified to:\**

*a) category A (perpetual files)*

*b) category BE 50 (subject to expertise after 50 years)*

*\* delete as appropriate*

stamp of the faculty

Wrocław, 2019



# Spis treści

<b>Wstęp</b>	<b>3</b>
<b>1 Wiadomości wstępne</b>	<b>5</b>
1.1 Opcje . . . . .	5
1.2 Ruch Browna . . . . .	6
1.2.1 Historia . . . . .	6
1.2.2 Definicja . . . . .	7
1.2.3 Geometryczny ruch Browna . . . . .	7
1.2.4 Proces ceny akcji . . . . .	8
1.3 Model Blacka-Scholesa . . . . .	8
1.3.1 Historia . . . . .	9
1.3.2 Założenia . . . . .	9
1.3.3 Definicje . . . . .	10
1.3.4 Wyprowadzenie modelu . . . . .	10
1.4 Metody Monte Carlo . . . . .	11
<b>2 Opcje typu <i>Omega clock</i></b>	<b>13</b>
<b>3 Metoda Broadie-Glassermana</b>	<b>15</b>
3.1 Historia . . . . .	15
3.2 Opis algorytmu . . . . .	15
3.3 Notacja . . . . .	18
3.4 Estymatory . . . . .	18
3.4.1 Estymator górny $\Theta$ . . . . .	18
3.4.2 Estymator dolny $\Phi$ . . . . .	20
3.5 Własności estymatorów . . . . .	23
<b>4 Analiza numeryczna</b>	<b>25</b>
<b>Podsumowanie</b>	<b>27</b>
<b>Dodatek</b>	<b>29</b>



# Wstęp

We wstępie zapowiadamy, o czym będzie praca. Próbujemy zachęcić czytelnika do dalszej lektury, np. krótko informując, dlaczego wybraliśmy właśnie ten temat i co nas w nim zainteresowało.





# Rozdział 1

## Wiadomości wstępne

W tym rozdziale znajdują się informacje potrzebne do zrozumienia pracy dotyczące teorii opcji, ich wyceny i metod numerycznych.

Najpierw zostały opisane opcje, następnie sposób wyznaczania przyszłej ceny instrumentu podstawowego, model wykorzystywany do wyceny derywatów oraz podstawowe informacje dotyczące metod numerycznych użytecznych do wyceny, a dokładnie metod Monte Carlo.

### 1.1 Opcje

Opcja to instrument finansowy, który można zdefiniować jako umowę pomiędzy sprzedawcą a nabywcą, która daje nabywcy prawo do kupna lub sprzedaży (w zależności od rodzaju instrumentu finansowego) określonej ilości pewnego dobra bazowego w ustalonym terminie po wyznaczonej cenie. Innymi słowy, opcja to umowa z ustalonymi warunkami, która daje nabywcy pewną możliwość. Najstarsze kontrakty opcyjne opiewały na akcje. Obecnie instrumentami podstawowymi opcji w obrocie giełdowym są zazwyczaj: waluty obce, indeksy giełdowe czy kontrakty *futures*. Na rynkach pozagiełdowych opcje są zazwyczaj dostosowywane do indywidualnych potrzeb klientów, zatem dobro podstawowe jest praktycznie dowolne.

Opcje można podzielić na wiele sposobów, biorąc pod uwagę różne kryteria. Pierwsze i najważniejsze rozróżnienie to podział na opcje:

- kupna - *call*, która daje jej posiadaczowi prawo do kupna instrumentu bazowego,
- sprzedaży - *put*, która daje posiadaczowi prawo do sprzedaży tego dobra.

Drugi podział występuje ze względu na rozróżnienie terminu wygaśnięcia i wykonania opcji. Taki podstawowy podział to opcje:

- europejskie, które można wykonać jedynie w terminie wygaśnięcia,
- amerykańskie, które mogą być wykonane przez cały okres ważności finansowego instrumentu pochodnego, tj. w każdym momencie od nabycia do czasu wygaśnięcia opcji.

Nazwy te mają pochodzenie historyczne i w żaden sposób nie są związane z miejscem obrotu. Warto zauważyć również, że na rynku światowym większy obrót mają opcje

amerykańskie, co wynika z faktu, że opcje europejskie są podatne na manipulacje w czasie bliskim terminowi wygaśnięcia. Te dwie opcje to opcje standardowe, w żargonie finansowym nazywane również opcjami waniliowymi. Nazwa ta pochodzi od lodów waniliowych, które są *najprostszym* smakiem lodów, czyli bez żadnych dodatków. Inne opcje nazywane są opcjami egzotycznymi (np. opcja azjatycka).

**Premia opcji** Aby stać się posiadaczem opcji należy za nią zapłacić. Taka cena jest nazywana *premią opcji*. Na jej wysokość ma wpływ wiele czynników, jednak najważniejszym jest funkcja wypłaty. Ta funkcja określa wysokość wypłaty jaką otrzyma nabywca w momencie jej wykonania. Funkcje wypłaty opcji podstawowych przedstawia poniższa tabela, w której  $T$  - termin wygaśnięcia,  $S_t$  - cena dobra bazowego w chwili  $t$  ( $0 \leq t \leq T$ ),  $K$  - cena wykonania opcji (zawarta w kontrakcie).

Tabela 1.1: Funkcje wypłaty opcji waniliowych

Opcja	Kupna	Sprzedaży
europejska	$f_T^C = \max(S_T - K, 0)$	$f_T^P = \max(K - S_T, 0)$
amerykańska	$f_t^C = \max(S_t - K, 0)$	$f_t^P = \max(K - S_t, 0)$

Funkcja wypłaty związana jest z wartością wewnętrzną opcji. Natomiast na wartość zewnętrzną opcji, nazywanej inaczej czasową, mają wpływ trzy podstawowe czynniki:

- czas pozostający do wygaśnięcia opcji,
- wolna od ryzyka stopa procentowa  $r$ ,
- zmienność ceny akcji  $\sigma$ , czyli miara niepewności co do przyszłych zmian cen instrumentu podstawowego.

Premia opcji to suma jej wartości wewnętrznej i zewnętrznej.

## 1.2 Ruch Browna

Do wyznaczenia funkcji wypłaty, a co za tym idzie również premii opcji, potrzebna jest znajomość ceny instrumentu podstawowego  $S_t$  ( $t \in [0, T]$ ). Do tego wykorzystywany jest geometryczny ruch Browna.

### 1.2.1 Historia

W 1900 roku Louis Bachelier, przez wielu uważany za ojca matematyki finansów, jako pierwszy użył matematyki do przewidywania zmian ceny na rynku. W swojej pracy doktorskiej *Theorie de la speculation* skupił się na prawdopodobieństwie fluktuacji cen instrumentów finansowych na giełdzie paryskiej. Do jego opisu wykorzystał ruch Browna, który został tak nazwany od nazwiska botanika Roberta Browna, który w 1827 roku zaobserwował ruch cząsteczek i go opisał. Bachelier użył tego ruchu ponieważ uznał, że zmiany ceny dobra bazowego są równie chaotyczne i nieprzewidywalne, co ruchy cząsteczek pyłku. Podstawowe własności ruchu Browna zostały udowodnione w 1905 roku przez Alberta Einsteina i równolegle w 1906 przez Mariana Smoluchowskiego, dzięki czemu ruch ten wszedł na stałe do użytku w fizyce. Dopiero Norbert Wiener (w 1927) i Paul Levy

(w 1939) doprowadzili do wprowadzenia ruchu Browna do matematyki. Proces Wienera (matematyczna nazwa ruchu Browna) stał się jednym z najważniejszych modeli losowych. W ekonomii znalazł on zastosowanie do konstrukcji modeli cen giełdowych.

## 1.2.2 Definicja

Aby przedstawić formalną definicję procesu Wienera trzeba wprowadzić pewne pojęcia i założenia.

Przestrzeń, na której przeprowadzane są rozważania probabilistyczne, oznacza trójka probabilistyczna  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ , gdzie  $\Omega$  to zbiór wszystkich możliwych wyników,  $\mathcal{F}$  to  $\sigma$ -ciało podzbiorów  $\Omega$ ,  $\mathbb{P}$  to miara prawdopodobieństwa na  $\mathcal{F}$ . Wprowadzono również oznaczenia na przedział życia opcji, a dokładniej  $\mathbb{T} = [0, T]$ , gdzie  $T$  - moment wygaśnięcia opcji.

Formalnie proces Wienera to rodzina zmiennych losowych  $(W_t)_{t \in \mathbb{T}}$  określonych na jednej przestrzeni probabilistycznej  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  jest to zatem pewien proces stochastyczny. Dla pewnych ustalonych  $\omega \in \Omega$  funkcja  $t \rightarrow W_t(\omega)$  jest trajektorią procesu. Definicja procesu Wienera to:

**Definicja 1.1** (proces Wienera).<sup>1</sup> Standardowym procesem Wienera lub krótko procesem Wienera nazywamy proces stochastyczny  $W$  z czasem ciągłym, spełniający następujące warunki:

1.  $W_0 = 0$ ;
2. Przyrosty procesu  $W$  są niezależne, czyli dla dowolnego  $n$  i dowolnego ciągu  $0 < t_1 < \dots < t_n$  zmienne losowe

$$W_{t_1}, W_{t_2} - W_{t_1}, \dots, W_{t_n} - W_{t_{n-1}}$$

są niezależne;

3. Dla dowolnych  $0 \leq s < t$  przyrost  $W_t - W_s$  ma rozkład gaussowski, a dokładniej

$$W_t - W_s \sim N(0, t - s);$$

4. Proces  $W$  jest ciągły, tzn. prawie wszystkie trajektorie procesu  $W$  są funkcjami ciągłymi.

## 1.2.3 Geometryczny ruch Browna

Niezależność przyrostów procesu Wienera, ciągłość jego trajektorii i inne jego własności, a także jego nieprzewidywalność (jak zauważył Bachelier) skłaniają do wykorzystania tego procesu do poszukiwania prawdopodobnej przyszłej ceny dobra podstawowego, jednak standardowy proces Wienera okazuje się mało użyteczny w finansach, dlatego w inżynierii finansowej wykorzystuje się jego różne modyfikacje. Najbardziej popularne można przedstawić za pomocą poniższego stochastycznego równania różniczkowego

$$dX_t = \mu(X_t, t)dt + \sigma(X_t, t)dW_t, \quad (1.1)$$

---

<sup>1</sup>J. Jakubowski, A. Palczewski, M. Rutkowski, Ł. Stettner, *Matematyka finansowa. Instrumenty pochodne*, Warszawa 2018

gdzie  $\mu$  - to współczynnik dryfu (przesunięcia),  $\sigma$  - współczynnik zmienności (dyfuzji), a  $X_t$  - nowy proces stochastyczny.

Louis Bachelier do oszacowania prawdopodobieństwa fluktuacji cen na giełdzie paryskiej wykorzystał arytmetyczny ruch Browna, czyli we wzorze (1.1) przyjął zerowe oprocentowanie  $\mu \equiv 0$  i stałą zmienność  $\sigma$ . Wówczas wzór na cenę przyjmuje postać

$$S_t = S_0 + \sigma W_t,$$

jednak bazuje on na nierealistycznym założeniu, że stopa procentowa jest zerowa oraz dopuszcza ujemne ceny. W latach 1955-59 Paul Samuelson i M.F.M. Osborne niezależnie od siebie poprawili pomysł Bachelier, przyjmując w równaniu (1.1)  $\mu(X_t, t) = \mu X_t$  i  $\sigma(X_t, t) = \sigma X_t$ . Stochastyczne równanie różniczkowe na cenę dobra bazowego przyjmuje wówczas postać

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t \quad (1.2)$$

a taki proces  $S_t$  nazwano geometrycznym (inaczej eksponencjalnym) ruchem Browna.

**Własności** Tak zmodyfikowany proces Wienera ma wiele własności, które pozwalają dobrze kształtować ceny, a dokładnie, jeśli przyjmiemy, że  $X_t$  jest eksponencjalnym ruchem Browna, wówczas:

- Jeśli  $X_0 > 0$ , to proces  $X_t$  pozostaje dodatni;
- Na poziomie zero proces  $X_t$  ma barierę absorbującą, czyli jeśli w pewnym momencie  $t$  osiągnie zero, to już taki pozostanie;
- Proces  $X_t$  ma rozkład lognormalny, tzn.  $\ln X_t$  ma rozkład normalny z odpowiednimi parametrami średniej i wariancji (łatwo to pokazać wykorzystując postać geometrycznego ruchu Browna, postulat procesu Wienera o gaussowskich przyrostach i własności procesu normalnego).

### 1.2.4 Proces ceny akcji

Rozwiązując stochastyczne równanie różniczkowe (1.2) można łatwo wyznaczyć postać ceny  $S_t$ :

$$S_t = S_0 \exp\left(\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma W_t\right). \quad (1.3)$$

Łatwo pokazać, że

$$\ln S_t \sim N\left(\ln S_0 + \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t, \sigma^2 t\right). \quad (1.4)$$

Do późniejszej wyceny będziemy używać wzoru (1.3).

## 1.3 Model Blacka-Scholesa

Wycena opcji sprowadza się do wyznaczenia jej premii. W poprzednim podrozdziale pokazano, że proces ceny  $S_t$  można opisać geometrycznym ruchem Browna, skąd łatwo można wyznaczyć już funkcje wypłaty  $f_t$  dla opcji standardowych. Jednak wyznaczenie sprawiedliwej premii nie może składać się z jednej obserwacji, gdyż nie byłoby to miarodajne.

Pierwszym i do tej pory najbardziej podstawowym modelem wyceny jest model Blacka-Scholesa. W pracy będzie wyceniana amerykańska opcja sprzedaży akcji, dla której model w chwili  $t$  przyjmuje postać

$$\pi_t(X) = \sup_{\tau \in \mathcal{T}} \Lambda_\tau \{ \mathbb{E}^\mathbb{Q} [\Lambda_\tau^{-1} \max(K - S_\tau, 0) | \mathcal{F}_\tau] \}, \quad (1.5)$$

gdzie  $\pi_t(X)$  - premia opcji  $X$  w chwili  $t$ ,  $\tau$  - moment stopu,  $\mathcal{T}$  - rodzina wszystkich możliwych momentów stopu,  $\Lambda_t$  - czynnik dyskontujący w chwili  $t$ ,  $\mathbb{Q}$  - miara martyngałowa,  $\mathcal{F}_t$  - filtracja. Wszystkie potrzebne definicje zostaną przedstawione później.

### 1.3.1 Historia

Podstawą rynku opcyjnego jest wyznaczanie sprawiedliwych cen opcji, dlatego ciekawy jest fakt, że choć pierwszy rynek instrumentów pochodnych powstał w Holandii w XVII wieku, to praw nim rządzącym zaczęto szukać dopiero dwa wieki później. Jednak dopiero w 1973 roku nastąpił przełom, gdy Fisher Black i Myron Scholes przedstawili model wyceny waniliowych opcji europejskich na akcje spółek niewypłacających dywidendy. Było to ważne odkrycie, ponieważ do tego roku nikt nie potrafił wyznaczyć sprawiedliwej ceny opcji, co miało duży wpływ na małą płynność rynku i zmienność cen. Model Blacka-Scholesa jest pierwszym matematycznie wyprowadzonym modelem wyceny opcji na akcje.

Idea modelu Blacka-Scholesa opiera się o pozbawiony ryzyka portfel, składający się z pozycji w opcji i pozycji w akcji bazowej dla tej opcji.<sup>2</sup>

### 1.3.2 Założenia

W pracy będę przeprowadzać wycenę zgodnie z modelem Blacka-Scholesa, jednak żeby to było możliwe trzeba najpierw przyjąć pewne założenia:

1. Brak możliwości arbitrażu (nie ma możliwości zarobienia bez ponoszenia ryzyka);
2. Wolna od ryzyka, krótkoterminowa stopa procentowa jest stała w czasie życia opcji;
3. Nie uwzględnia się kosztów transakcji ani podatków;
4. Istnieje możliwość zakupu każdej, nawet ułamkowej, ilości akcji;
5. Akcje nie wypłacają dywidendy;
6. Brak kary za zajmowanie krótkiej pozycji (np. opcja sprzedaży na akcje, których się nie ma)).

W modelu Blacka-Scholesa przyjmujemy, że cenę dobra bazowego  $S_t$  w dowolnej chwili  $t$  opisuje geometryczny ruch Browna ze stałą zmiennością  $\sigma$  i stałym dryfem  $\mu$  opisany za pomocą stochastycznego równania różniczkowego (1.2). Ma ona rozkład lognormalny przedstawiony wzorem (1.4).

---

<sup>2</sup>J. Hull, *Kontrakty terminowe i opcje. Wprowadzenie*, Warszawa 1997

### 1.3.3 Definicje

W tej pracy będzie wyceniana opcja amerykańska, czyli taka, którą posiadacz może wykorzystać w całym czasie życia opcji. Z tego powodu potrzebujemy zaznajomić się z pojęciem momentów stopu.

**Definicja 1.2** (Filtracja). Filtracją nazywamy niemalejącą rodzinę  $\sigma$ -ciał

$$\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{T}},$$

tzn.  $\mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{F}$  dla  $s < t$  i  $s, t \in \mathbb{T}$

**Definicja 1.3** (Naturalna filtracja). Niech  $(X_t)_{t \in \mathbb{T}}$  będzie procesem stochastycznym. Wówczas naturalna filtracja  $\mathbb{F}^X$  to

$$\mathcal{F}_t^X = \sigma(X_s : s \leq t).$$

Od tego momentu przyjmujemy również, że filtracja będzie spełniała zwykłe warunki, tzn. jest prawostronnie ciągła, a dokładniej dla każdego  $t$  zachodzi równość  $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_{t+}$ , gdzie  $\mathcal{F}_{t+} = \bigcap_{s > t} \mathcal{F}_s$ , oraz jest zupełna, tzn. każde  $\sigma$ -ciało  $\mathcal{F}_t$  jest zupełne.

Zdefiniujmy teraz moment stopu.

**Definicja 1.4** (Moment stopu). Zmienna losowa  $\tau$ ,  $\mathcal{F}$ -mierzalna,  $\tau : \Omega \rightarrow \mathbb{T} \cup \{\infty\}$  jest momentem stopu względem filtracji  $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{T}}$ , gdy  $\forall t \in \mathbb{T}$

$$\{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t.$$

Rodzinę momentów stopu będziemy oznaczać przez  $\mathcal{T}$ .

W pracy używamy modelu Blacka-Scholesa, który przyjmuje postać pewnej warunkowej wartości oczekiwanej względem miary martyngałowej. Aby zrozumieć definicję takiej miary, zdefiniujmy najpierw martyngał - jedną z najważniejszych klas procesów stochastycznych.

**Definicja 1.5** (Martyngał). Rodzina  $(X_t, \mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{T}}$  jest martyngałem, jeśli dla  $s \leq t$ ,  $s, t \in \mathbb{T}$

$$\mathbb{E}(X_t | \mathcal{F}_s) = X_s.$$

Mówiąc o  $\mathbb{P}$ -martyngałach sprawdzamy wartość oczekiwaną względem miary  $\mathbb{P}$ .

**Definicja 1.6** (Miara martyngałowa). Miara  $\mathbb{Q}$ , względem której  $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}(X_t | \mathcal{F}_s)$  jest martyngałem, jest miarą martyngałową względem procesu  $X_t$ .

Taką miarę w literaturze nazywa się prawdopodobieństwem neutralizującym ryzyko.

We wzorze (1.5) występuje również czynnik dyskontujący w chwili  $t$  oznaczony przez  $\Lambda_t$ . Służy on do znajdowania bieżącej wartości ceny dobra mając daną jego przyszłą wartość. Zazwyczaj dany on jest przez  $\Lambda_t = e^{-\int_0^t r(t)dt}$ , gdzie  $r(t)$  jest daną funkcją oprocentowania.

W tym momencie znamy już wszystkie potrzebne definicje do wzoru na model Blacka-Scholesa przedstawionego we wstępie do tego rozdziału (wzór (1.5)).

## 1.4 Metody Monte Carlo

W pracy będziemy używać metod numerycznych. W modelu Blacka-Scholesa do wyliczenia ceny opcji trzeba znaleźć wartość oczekiwaną zdyskontowanych wypłat (funkcji wypłaty) względem pewnej miary martyngałowej, a do tego posłużą metody Monte Carlo.

Metody Monte Carlo są metodami obliczania wielkości dających się przedstawić w postaci wartości oczekiwanych pewnych rozkładów probabilistycznych.<sup>3</sup> Bazują one na Mocnym Prawie Wielkich Liczb:

**Twierdzenie 1.7** (Mocne Prawo Wielkich Liczb). *Niech  $X_1, \dots, X_n$  będą niezależnymi zmiennymi losowymi o tym samym rozkładzie i skończonej wartości oczekiwanej (tzn.  $\mathbb{E}(X_i) < \infty$ , dla  $i = 1, \dots, n$ ). Wtedy*

$$\mathbb{P}\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \mathbb{E}(X)\right) = 1.$$

Zatem korzystając z twierdzenia (1.7) łatwo wywnioskować, że za oszacowanie wartości oczekiwanej  $X$  można przyjąć średnią empiryczną z pewną, odpowiednio dobraną liczbą obserwacji  $n$ .

---

<sup>3</sup>A.Weron, R.Weron, *Inżynieria finansowa. i coś dalej*





## Rozdział 2

### Opcje typu *Omega clock*

Głównym celem pracy jest wycena opcji o dyskontowaniu zależnym od ceny instrumentu podstawowego, na który opiewa opcja, w chwili  $t$ , po angielsku zwaną krótką *Option type omega clock*, dlatego będziemy dalej używać spolszczonej nazwy angielskiej *opcja typu Omega clock*.

Funkcja wypłaty opcji kupna typu omega clock (odpowiednio sprzedaży typu omega clock) za równo europejską i amerykańską opisują wzory zawarte w tabeli (1.1). Zmiana względem opcji waniliowych następuje przy wycenie. We wzorze (1.5) za czynnik dyskontujący dla opcji standardowych przyjmuje się  $\Lambda_t = e^{-rt}$  ze stałą wybraną stopą oprocentowania  $r$ . Natomiast dla opcji typu *omega clock* czynnik dyskontujący  $\Lambda_t$  jest zależny od ceny dobra podstawowego w chwili  $t$ .

Od teraz w pracy będziemy przyjmować, że cena wykonania opcji to  $K = 100$ , a za granicę, przy której będzie się zmieniać stopa procentowa dyskontowania, bierzemy  $S_t = 95$ . Formalnie wzór (1.5) dla opcji sprzedaży typu omega clock  $X$  wygląda teraz

$$\pi_0(X) = \sup_{\tau \in \mathcal{T}} \{ \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} [e^{-\int_0^{\tau} \omega(S_s) ds} \max(K - S_{\tau}, 0)] \}, \quad (2.1)$$

gdzie

$$\omega(S_t) = \begin{cases} 0.05, & \text{jeśli } S_t < 95, \\ 0.1, & \text{jeśli } S_t \geq 95 \end{cases} \quad (2.2)$$



# Rozdział 3

## Metoda Broadie-Glassermana

Nie ma żadnych wyznaczonych wprost wzorów na wycenę opcji o zdyskontowaniu zależnym od cen akcji w chwili  $t$ , dlatego w pracy zostanie przeprowadzona analiza numeryczna.

W celu znalezienia sprawiedliwej ceny opcji typu *omega clock* wykorzystamy algorytm oparty na metodach Monte Carlo do wyceny opcji amerykańskich zaproponowany przez Broadiego i Glassermana, który zostanie szczegółowo opisany w tym rozdziale.

### 3.1 Historia

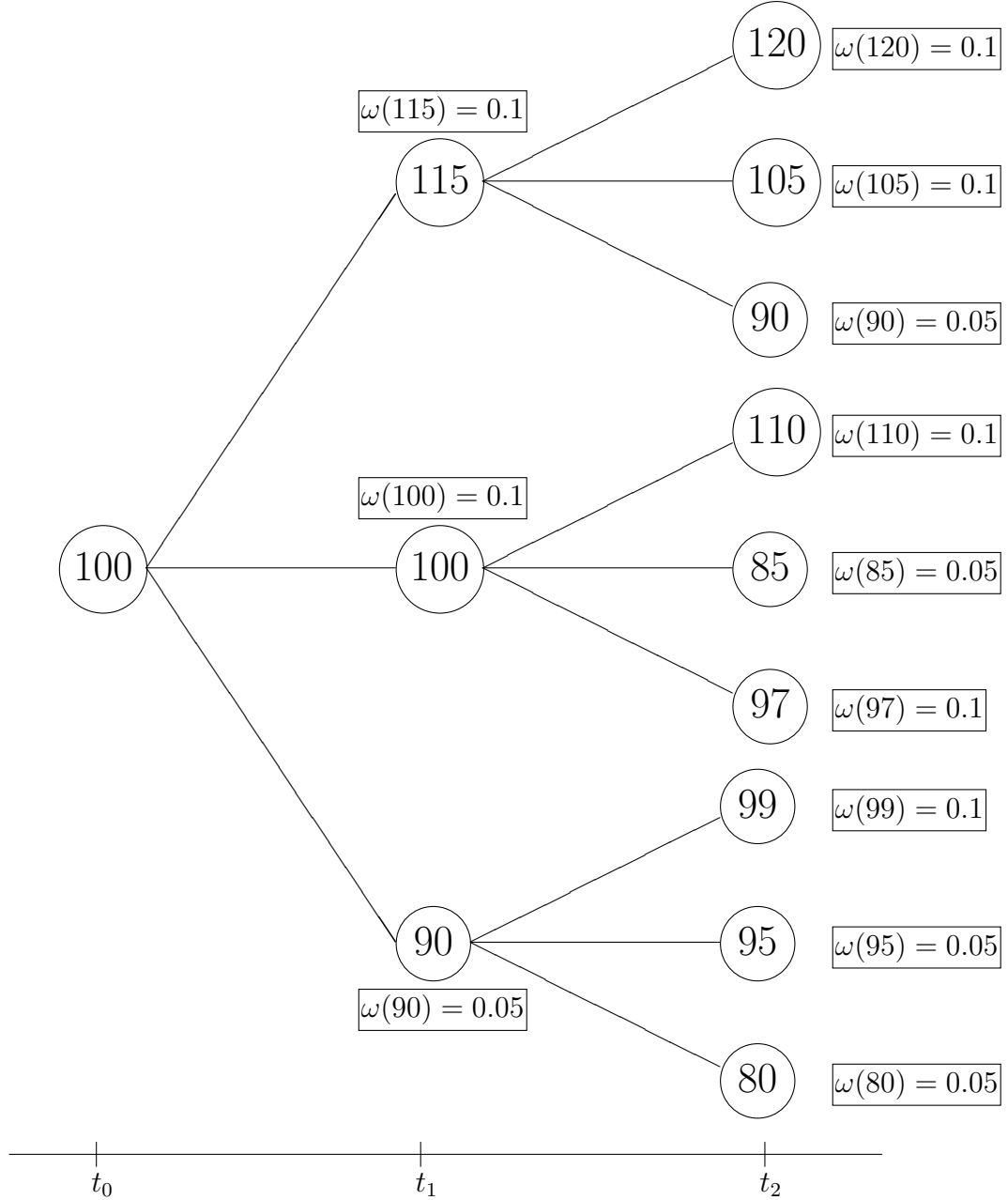
Mark Broadie i Paul Glasserman w 1997 roku w artykule *Pricing American-style securities using simulation*, który ukazał się w *Journal of Economic Dynamics and control*, przedstawili nową metodę do wyceny opcji amerykańskich. Zaproponowany przez nich algorytm do estymacji sprawiedliwej ceny instrumentu pochodnego ma wiele zalet, ponieważ może być stosowany do modeli z wieloma zmiennymi, w tym z tymi zależnymi od trajektorii ceny. Jest on specjalnie zaprojektowany do radzenia sobie z zabezpieczeniami typu amerykańskiego tzn. z możliwością wcześniejszego wykonania opcji niż w momencie wygaśnięcia.

Broadie i Glasserman wykazali, że nie istnieje ogólna metoda do wyznaczenia nieobciążonego estymatora na cenę opcji amerykańskiej, dlatego aby obejść tę trudność zasymulowali dwa estymatory ceny oparte na losowych próbkach przyszłych cen i skorzystali również z coraz lepszych przybliżeń optymalnego wykonania opcji. Jeden estymator jest *obciążony górną* (w dalszej części pracy nazywany *estymatorem górnym*), a drugi *obciążony dolną* (dalej nazywany *estymatorem dolnym*). Oba są asymptotycznie nieobciążone i zbiegają do teoretycznej premii opcji.

### 3.2 Opis algorytmu

Algorytm Broadiego-Glassermana bazuje na tak zwanym drzewie cenowym, które ilustruje zachowanie ceny w czasie. Takie drzewo jest parametryzowane za pomocą liczby węzłów  $n$  i liczby gałęzi przypadających na dany węzeł - oznaczany przez  $b$ , na przykład dla  $n = 2$ ,  $b = 3$  i  $S_0 = 100$  otrzymujemy drzewo przedstawione na rysunku (3.1).

Symulacji komputerowych nie da się przeprowadzić dla czasu ciągłego, dlatego wprowadzamy dyskretyzację czasu. Wybieramy pewną skończoną i dodatnią liczbę  $n$ . Niech



Rysunek 3.1: Przykład drzewa cenowego z przykładowymi stopami procentowymi zależnymi od cen akcji (zapisane wzorem (2.2)).

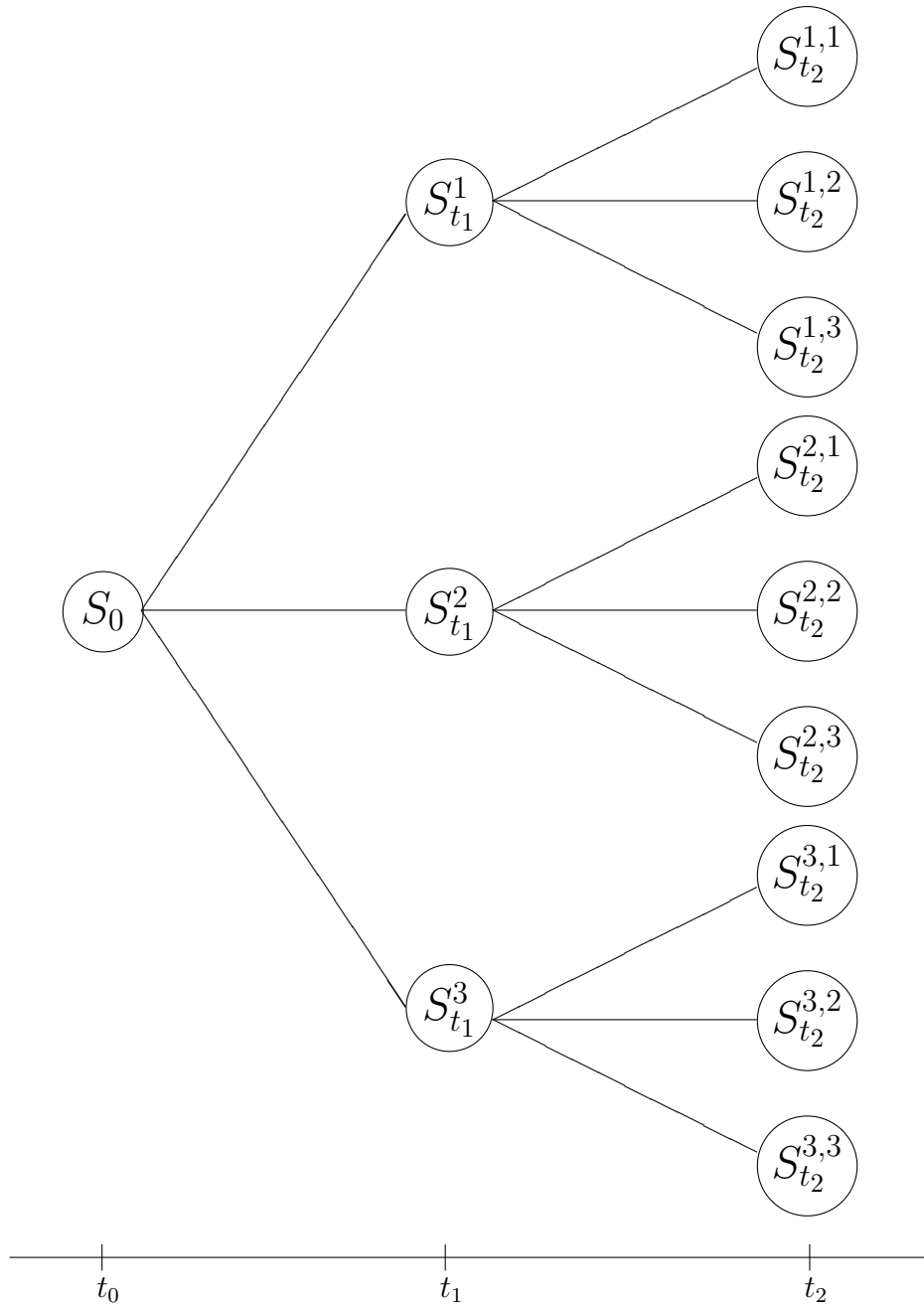
sekwencja  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$  będzie dyskretyzacją ciągłego przedziału  $[0, T]$ , zatem ten przedział dzielimy na równe podprzedziały  $t_i = i \frac{T}{n}$ , gdzie  $i = 0, 1, \dots, n$ .

Przez

$$S_{t_i}^{b_1, \dots, b_i}, \text{ gdzie } i = 1, 2, \dots, n, \quad b_i = 1, 2, \dots, b$$

oznaczamy cenę instrumentu podstawowego w chwili  $t_i$ . Wyrażenie  $b_1, \dots, b_i$  opisuje wybór gałęzi danej ceny do chwili  $t_i$  (zilustrowane na rysunku (3.2)), tzn. wybór gałęzi w każdym z węzłów drzewa. Pozwala to nam jednoznacznie określić ścieżkę ceny akcji do chwili  $t_i$ .

Wycena instrumentów pochodnych wymaga dyskontowania. W poprzednim rozdziale we wzorze Blacka-Scholesa do wyceny opcji typu omega clock (2.1) czynnik dyskontujący



Rysunek 3.2: Wybór gałęzi

opisany jest za pomocą  $e^{-\int_0^t \omega(S_s) ds}$ , gdzie  $\omega(S_t)$  opisana jest wzorem (2.2). W przypadku dyskretnym czynnik dyskontujący między chwilami  $t_i$  a  $t_{i+1}$  przyjmuje postać  $e^{-\frac{1}{n}\omega(S_{t_{i+1}}^{b_1, \dots, b_{i+1}})}$ , ponieważ wartość funkcji  $\omega(\cdot)$  nie zależy bezpośrednio od  $t$  (przyjmuje wartości stałe na dwóch poziomach zależnych od ceny akcji), a czas między tymi chwilami różni się o  $\frac{1}{n}$ . W dalszej części pracy odpowiednie dyskontowanie będzie oznaczać

$$\omega(S_{t_i}^{b_1, \dots, b_i}) = \begin{cases} e^{\frac{1}{n} \times 0.1} & , \text{ dla } S_{t_i}^{b_1, \dots, b_i} > 95 \\ e^{\frac{1}{n} \times 0.05} & , \text{ dla } S_{t_i}^{b_1, \dots, b_i} \leq 95. \end{cases}$$

Przykładowe wyznaczenie stóp procentowych jest zaznaczone na wykresie (3.1).

### 3.3 Notacja

Do opisu estymatorów przydatne jest wprowadzenie kilku dodatkowych oznaczeń.

Funkcję natychmiastowego wykonania opcji sprzedaży typu omega clock w chwili  $t_i$  dla ceny akcji  $S_{t_i}^{b_1, \dots, b_i}$  oznaczamy przez

$$h_i(S_{t_i}^{b_1, \dots, b_i}) = \max(K - S_{t_i}^{b_1, \dots, b_i}, 0).$$

Natomiast oczekiwaną wartość przetrzymania opcji od momentu  $t_i$  do  $t_{i+1}$  dla danej wartości ceny instrumentu podstawowego  $S_{t_i}^{b_1, \dots, b_i}$  określamy funkcją

$$g_i(S_{t_i}^{b_1, \dots, b_i}) = \mathbb{E}[e^{-\frac{1}{n}\omega(S_{t_{i+1}}^{b_1, \dots, b_{i+1}})} f_{i+1}(S_{t_{i+1}}^{b_1, \dots, b_{i+1}}) | S_{t_i}^{b_1, \dots, b_i}],$$

$$\text{gdzie } f_i(S_{t_i}^{b_1, \dots, b_i}) = \max\{h_i(S_{t_i}^{b_1, \dots, b_i}), g_i(S_{t_i}^{b_1, \dots, b_i})\}.$$

Funkcja  $f_i(S_{t_i}^{b_1, \dots, b_i})$  jest wartością wypłaty opcji w chwili  $t_i$  dla ceny akcji  $S_{t_i}^{b_1, \dots, b_i}$ .

### 3.4 Estymatory

W tym podrozdziale znajdują się formalne wzory na dwa estymatory:  $\Theta$  i  $\Phi$ , które odpowiednio zawyżają lub zaniżają prawdziwą premię opcji. W dalszej części zostaną przedstawione dwa twierdzenia, pokazujące, że oba estymatory są asymptotycznie nieobciążone i oba zbiegają do prawdziwej ceny opcji typu omega clock.

#### 3.4.1 Estymator górny $\Theta$

Wzór na estymator górny  $\Theta$  jest rekurencyjny i wygląda następująco

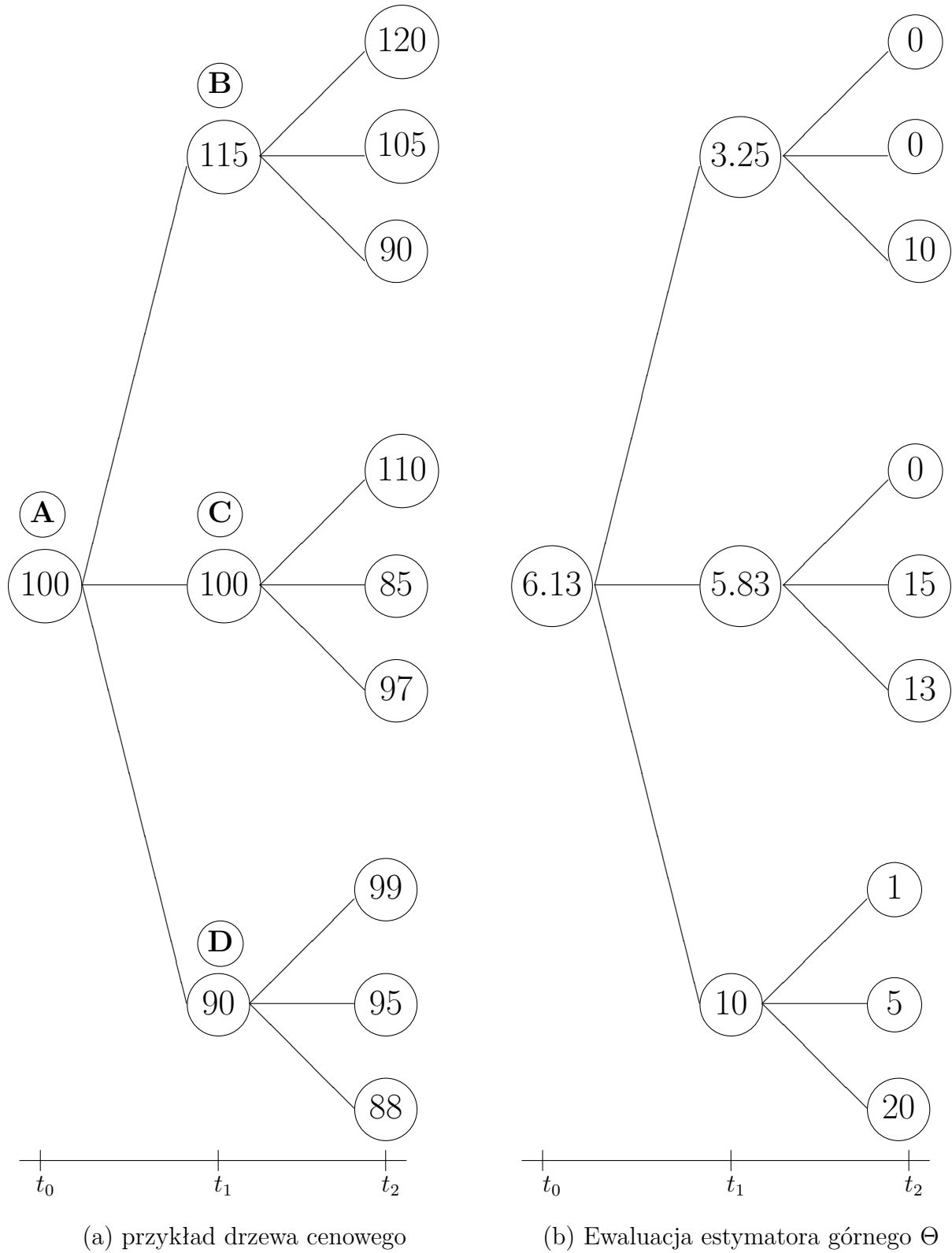
$$\Theta_{t_i} = \begin{cases} \max[h_i(S_{t_i}^{b_1, \dots, b_i}), \frac{1}{b} \sum_{j=1}^b e^{-\frac{1}{n}\omega(S_{t_{i+1}}^{b_1, \dots, b_{i+1}, j})} \Theta_{t_{i+1}}^{b_1, \dots, b_{i+1}, j}] & \text{dla } i = 0, \dots, n-1, \\ f_T(S_T) & \text{dla } i = n, \text{ (bo } T = t_n). \end{cases} \quad (3.1)$$

Estymator  $\Theta$ , w każdym węźle drzewa cenowego, liczymy wybierając większą wartość spośród:

- funkcji wcześniejszej wypłaty w chwili  $t_i$ , czyli wartości  $h_i(S_{t_i}^{b_1, \dots, b_i})$ ,
- oczekiwanej wartości przetrzymania opcji, tzn. średnią arytmetyczną odpowiednio zdyskontowanych funkcji wypłaty z następujących bezpośrednio węzłów po węźle, dla którego jest liczony estymator.

Ilustracja (3.3) przedstawia, jak wartość estymatora  $\Theta$  jest otrzymywana z danego drzewa cenowego. Poniżej są również przedstawione wszystkie potrzebne obliczenia.

Obliczenia dla kolejnych węzłów (zaznaczonych odpowiednio na rysunku (3.3(a))), wykorzystujące powyższy wzór (3.1), znajdują się poniżej. Wartość maksymalna spośród wyliczonych, czyli wartość estymatora  $\Theta$ , została podkreślona. Użyto danych podanych wcześniej w rozdziale 2, tzn. cena wykonania  $K = 100$ , czas wygaśnięcia  $T = 1$ , liczba węzłów  $n = 2$ , liczba gałęzi  $b = 3$ , a stopę procentową zależną od  $S_t$  przedstawia wzór (2.2).

Rysunek 3.3: Przykład wyjaśniający obliczanie  $\Theta$ 

$$\textcircled{\mathbf{B}} = \begin{cases} \text{wartość wykonania:} & 0 \\ \text{wartość przetrzymania:} & \frac{1}{3}[(0 + 0)e^{-0.1 \times 0.5} + 10e^{-0.05 \times 0.5}] = \underline{3.25} \end{cases}$$

$$\textcircled{\mathbf{C}} = \begin{cases} \text{wartość wykonania:} & 0 \\ \text{wartość przetrzymania:} & \frac{1}{3}[(0 + 3)e^{-0.1 \times 0.5} + 15e^{-0.05 \times 0.5}] = \underline{5.83} \end{cases}$$

$$\textcircled{\mathbf{D}} = \begin{cases} \text{wartość wykonania:} & \frac{10}{3} \\ \text{wartość przetrzymania:} & \frac{1}{3}[(1e^{-0.1 \times 0.5} + (5 + 20)e^{-0.05 \times 0.5}] = 8.44 \end{cases}$$

Po wyliczeniu wartości estymatora  $\Theta$  dla wszystkich węzłów w chwili  $t_1$  możemy policzyć wartość dla węzła w chwili  $t_0$ .

$$\textcircled{\mathbf{A}} = \begin{cases} \text{wartość wykonania:} & 0 \\ \text{wartość przetrzymania:} & \frac{1}{3}[(3.25 + 5.83)e^{-0.1 \times 0.5} + 10e^{-0.05 \times 0.5}] = \underline{6.13} \end{cases}$$

Wartość estymatora  $\Theta_0 = 6.13$  wyliczona w węźle  $\textcircled{\mathbf{A}}$  jest ostateczną zawyżoną wysokością premię opcji.

### 3.4.2 Estymator dolny $\Phi$

Estymator  $\Phi$ , podobnie jak estymator  $\Theta$ , jest definiowany rekurencyjnie. Jednak zanim podamy wzór przyjmujemy nowe oznaczenie pomocnicze  $\xi$ .

$$\xi_{t_i}^{b_1, \dots, b_i} = \begin{cases} h_i(S_{t_i}^{b_1, \dots, b_i}), & \text{gdy } h_i(S_{t_i}^{b_1, \dots, b_i}) \geq \frac{1}{b-1} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^b e^{-\frac{1}{n}\omega(S_{t_{i+1}}^{b_1, \dots, b_i, j})} \Phi_{t_{i+1}}^{b_1, \dots, b_i, k} \\ e^{-\frac{1}{n}\omega(S_{t_{i+1}}^{b_1, \dots, b_i, j})} \Phi_{t_{i+1}}^{b_1, \dots, b_i, j}, & \text{gdy } h_i(S_{t_i}^{b_1, \dots, b_i}) < \frac{1}{b-1} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^b e^{-\frac{1}{n}\omega(S_{t_{i+1}}^{b_1, \dots, b_i, j})} \Phi_{t_{i+1}}^{b_1, \dots, b_i, k} \end{cases} \quad (3.2)$$

dla  $j = 1, \dots, b$ . Teraz można przejść do definicji estymatora  $\Phi$ :

$$\begin{cases} \Phi_{t_i}^{b_1, \dots, b_i} = \frac{1}{b} \sum_{j=1}^b \xi_{t_i}^{b_1, \dots, b_i, j} & \text{dla } i = 1, \dots, n-1 \\ \Phi_T = f_T(S_T) & \text{dla } i = n. \end{cases} \quad (3.3)$$

Ilustracja (3.4) przedstawia, jak wartość estymatora  $\Phi$  jest obliczana z danego drzewa cenowego. Sposób jego obliczania jest bardziej złożony niż estymatora  $\Theta$ , dlatego oprócz wyliczeń estymatora wytłumaczono dokładnie sposób jego otrzymywania.

Do wyliczenia korzystamy z tych samych danych, co w przypadku estymatora  $\Theta$ . Poniżej za pomocą tabel pokazano sposób obliczania estymatora  $\Phi$ .

**Dla węzła  $\textcircled{\mathbf{B}}$ :**

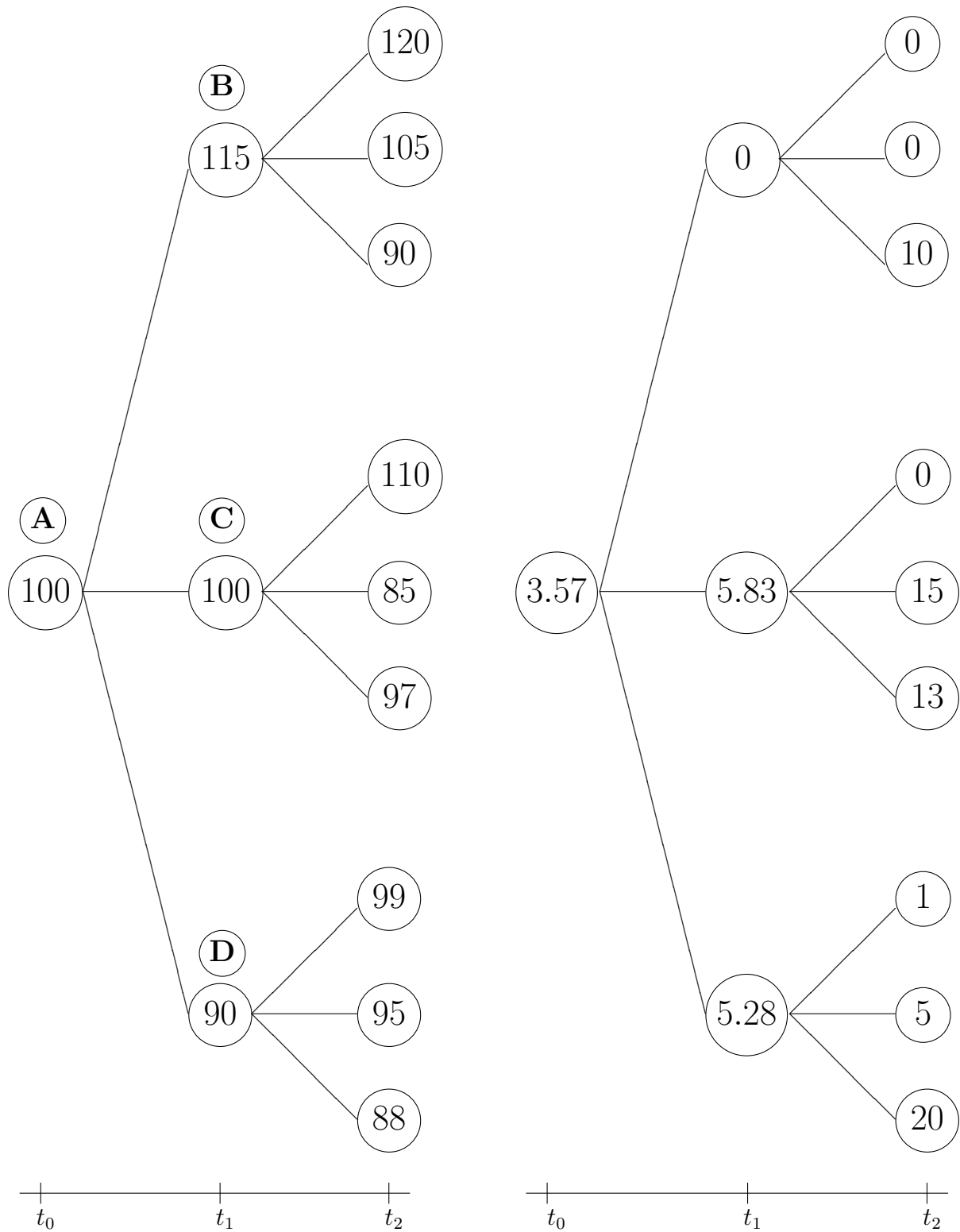
wartość wykonania:  $h_1(S_{t_1}^1) = 0$

	Oczekiwana wartość przetrzymania		wartość opcji dla galezi $j$
$j = 1$	$\frac{1}{2}(0 \cdot e^{-0.1 \times 0.5} + 10 \cdot e^{-0.05 \times 0.5}) = 4.88$	$\rightarrow 0 < 4.88 \rightarrow$	$0 \cdot e^{-0.1 \times 0.5}$
$j = 2$	$\frac{1}{2}(0 \cdot e^{-0.1 \times 0.5} + 10 \cdot e^{-0.05 \times 0.5}) = 4.88$	$\rightarrow 0 < 4.88 \rightarrow$	$0 \cdot e^{-0.1 \times 0.5}$
$j = 3$	$\frac{1}{2}(0 + 0) \cdot e^{-0.1 \times 0.5} = 0$	$\rightarrow 0 \geq 0 \rightarrow$	0

Przez  $j$  ( $j = 1, \dots, b$ ) oznaczane są kolejne gałęzie. Najpierw należy wyliczyć wartość wcześniejszego wykonania opcji, tzn. w tym przypadku funkcję

$$h_1(S_{t_1}^1) = \max(K - S_{t_1}^1, 0) = \max(100 - 115, 0) = 0.$$





(a) przykład drzewa cenowego

(b) Ewaluacja estymatora dolnego  $\Phi$ Rysunek 3.4: Przykład wyjaśniający obliczanie  $\Phi$ 

Następnie następują wyliczenia dla każdej gałęzi osobno.

Dla  $j = 1$  bierzemy odpowiednio zdyskontowane wartości z dwóch pozostałych gałęzi, aby

ustalić czy korzystniejsze jest przetrzymanie opcji (w tabeli druga kolumna *Oczekiwana wartość przetrzymania*) czy jej wcześniejsze wykorzystanie (wyплата opcji  $\equiv h_1(S_{t_1}^1)$ ). W trzeciej kolumnie tabeli następuje porównanie, skąd łatwo wywnioskować, że wcześniejsze wykonanie jest nieoptymalne ( $0 < 4.88$ ), zatem powinno się przetrzymać opcję i w ten sposób otrzymujemy  $\xi_{t_1}^1 = 0 \cdot e^{-0.1 \times 0.5}$ , czyli odpowiednio zdyskontowaną wypłatę opcji ceny dla instrumentu podstawowego  $S_{t_2}^{1,1}$ , odpowiadającą pierwszej gałęzi.

Dla  $j = 2$  postępujemy podobnie jak ostatnio. Znowu nie jest optymalne wcześniejsze wykonanie opcji, więc wartość wypłaty dla tej gałęzi jest  $\xi_{t_1}^2 = 0 \cdot e^{-0.1 \times 0.5}$ .

Dla  $j = 3$  obie wartości (funkcja wypłaty wcześniejszego wykonania i oczekiwana wartość przetrzymania) są równe 0. Zatem, korzystając ze wzoru (3.2)  $\xi_{t_1}^3$  jest równa wartości funkcji wcześniejszej wypłaty, czyli  $\xi_{t_1}^3 = 0$

Wartość estymatora dla węzła  $\textcircled{\text{B}}$  jest średnią arytmetyczną  $\xi_{t_1}^j$  ze wszystkich gałęzi (wzór (3.3)), zatem

$$\Phi_{t_1}^1 = \frac{1}{3} \sum_{j=1}^3 \xi_{t_1}^j = 0.$$

Podobnie postępuje się dla kolejnych węzłów:

**Dla węzła  $\textcircled{\text{C}}$ :**

wartość wykonania:  $h_1(S_{t_1}^2) = 0$

	Oczekiwana wartość przetrzymania		wartość opcji dla gałęzi $j$
$j = 1$	$\frac{1}{2}(15 \cdot e^{-0.05 \times 0.5} + 3 \cdot e^{-0.1 \times 0.5}) = 8.74$	$\rightarrow 0 < 8.74 \rightarrow$	$0 \cdot e^{-0.1 \times 0.5}$
$j = 2$	$\frac{1}{2}(0 + 3) \cdot e^{-0.1 \times 0.5} = 1.43$	$\rightarrow 0 < 1.43 \rightarrow$	$15 \cdot e^{-0.05 \times 0.5}$
$j = 3$	$\frac{1}{2}(0 \cdot e^{-0.1 \times 0.5} + 15 \cdot e^{-0.05 \times 0.5}) = 7.31$	$\rightarrow 0 < 7.31 \rightarrow$	$3 \cdot e^{-0.1 \times 0.5}$

W tym przypadku, wartość estymatora dla węzła  $\textcircled{\text{C}}$  jest równa  $\Phi_{t_1}^2 = 5.83$ .

**Dla węzła  $\textcircled{\text{D}}$ :**

wartość wykonania:  $h_1(S_{t_1}^3) = 10$

	Oczekiwana wartość przetrzymania		wartość opcji dla gałęzi $j$
$j = 1$	$\frac{1}{2}(5 + 20) \cdot e^{-0.05 \times 0.5} = 12.19$	$\rightarrow 10 < 12.19 \rightarrow$	$1 \cdot e^{-0.1 \times 0.5}$
$j = 2$	$\frac{1}{2}(1 \cdot e^{-0.1 \times 0.5} + 20 \cdot e^{-0.05 \times 0.5}) = 10.23$	$\rightarrow 10 < 10.23 \rightarrow$	$5 \cdot e^{-0.05 \times 0.5}$
$j = 3$	$\frac{1}{2}(1 \cdot e^{-0.1 \times 0.5} + 5 \cdot e^{-0.05 \times 0.5}) = 2.91$	$\rightarrow 10 \geq 2.91 \rightarrow$	10

W tym przypadku, wartość estymatora dla węzła  $\textcircled{\text{D}}$  jest równa  $\Phi_{t_1}^3 = 5.28$ .

**Dla węzła  $\textcircled{\text{A}}$ :**

wartość wykonania:  $h_0(S_0) = 0$

	Oczekiwana wartość przetrzymania		wartość opcji dla galezi $j$
$j = 1$	$\frac{1}{2}(5.83 \cdot e^{-0.1 \times 0.5} + 5.28 \cdot e^{-0.05 \times 0.5}) = 5.35$	$\rightarrow 0 < 5.35 \rightarrow$	$0 \cdot e^{-0.1 \times 0.5}$
$j = 2$	$\frac{1}{2}(0 \cdot e^{-0.1 \times 0.5} + 5.28 \cdot e^{-0.05 \times 0.5}) = 2.57$	$\rightarrow 0 < 2.57 \rightarrow$	$5.83 \cdot e^{-0.1 \times 0.5}$
$j = 3$	$\frac{1}{2}(0 + 5.83) \cdot e^{-0.1 \times 0.5} = 2.77$	$\rightarrow 0 < 2.77 \rightarrow$	$5.28 \cdot e^{-0.05 \times 0.5}$

Zatem wartość estymatora dla węzła  $\textcircled{A}$  jest równa

$$\Phi_0 = \frac{1}{3}((0 + 5.83) \cdot e^{-0.1 \times 0.5} + 5.28 \cdot e^{-0.05 \times 0.5}) = 3.57$$

Jest to ostateczna wartość estymatora dolnego  $\Phi$ , więc jest to zaniżona wysokość premii opcji.

### 3.5 Własności estymatorów

W tej części przytoczymy fakty dotyczące własności estymatorów  $\Phi$  i  $\Theta$ , których dowiedli Broadie i Glasserman<sup>1</sup>.

**Twierdzenie 3.1.**  $\Theta$  i  $\Phi$  są zgodnymi/zwartymi (ang. consistent) i asymptotycznie nieobciążonymi estymatorami premii opcji. Oba zbiegają do prawdziwej ceny opcji, gdy ilość odgałęzień  $b$  drzewa cenowego dąży do nieskończoności. Dla skończonego  $b$ :

- obciążenie estymatora  $\Theta$  jest zawsze dodatnie, tzn.

$$\mathbb{E}[\Theta_0(b)] \geq f_0(S_0).$$

- obciążenie estymatora  $\Phi$  jest zawsze ujemne, tzn.

$$\mathbb{E}[\Phi_0(b)] \leq f_0(S_0).$$

Zatem prawidłowe są nazwy: górny estymator  $\Theta$  i dolny estymator  $\Phi$ . Ponadto ważne jest porównanie tych estymatorów.

**Twierdzenie 3.2.** Dla każdej realizacji drzewa cenowego estymator dolny  $\Phi$  jest zawsze mniejszy bądź równy estymatorowi górnemu  $\Theta$ , tzn.

$$\mathbb{P}(\Phi_{t_i}^{b_1, \dots, b_i} \leq \Theta_{t_i}^{b_1, \dots, b_i}) = 1.$$

Za pomocą wartości estymatorów można również wyliczyć sprawiedliwą cenę opcji w chwili 0. Wzór w postaci jawnej podany jest w poniższym fakcie.

**Fakt 3.3.** Cenę opcji  $X$  w chwili  $t = 0$  można wyznaczyć ze wzoru

$$\pi_0(X) = \frac{1}{2} \max\{\max(K - S_0, 0), \Phi\} + \frac{1}{2}\Theta$$

Korzystając z tego faktu i wcześniej wyznaczonych wartości estymatorów  $\Theta$  i  $\Phi$  dla drzewa cenowego na rysunku (3.1) możemy wyliczyć sprawiedliwą premię opcji dla tego przykładu.

$$\pi_0(X) = \frac{1}{2} \max 0, 3.57 + \frac{1}{2} 6.13 = 4.85.$$

Zatem ostatecznie wyznaczona cena opcji dla cen akcji przebiegających zgodnie z drzewem (3.1) wynosi 4.85.

<sup>1</sup>Dowody znajdują się w artykule: M.Broadie, P.Glasserman, *Pricing American-style securities using simulation*



# Rozdział 4

## Analiza numeryczna



# Podsumowanie

Podsumowanie w pracach matematycznych nie jest obligatoryjne. Warto jednak na zakończenie krótko napisać, co udało nam się zrobić w pracy, a czasem także o tym, czego nie udało się zrobić.





# Dodatek

Dodatek w pracach matematycznych również nie jest wymagany. Można w nim przedstawić np. jakiś dłuższy dowód, który z pewnych przyczyn pominęliśmy we właściwej części pracy lub (np. w przypadku prac statystycznych) umieścić dane, które analizowaliśmy.