AKADEMIA GÓRNICZO-HUTNICZA
IM. STANISŁAWA STASZICA W KRAKOWIE

WYDZIAŁ ELEKTROTECHNIKI AUTOMATYKI INFORMATYKI
I INŻYNIERII BIOMEDYCZNEJ

KIERUNEK AUTOMATYKA I ROBOTYKA
SPECJALIZACJA INFORMATYKA W STEROWANIU I ZARZĄDZANIU

Modele kolejkowe w IT

Ruch samochodowy

Grupa: ***2 (pt. 8.00 – 9.30)***

L.p.	Członkowie grupy:	Nr. albumu	Adres email
1	Dominik Czyżyk	401858	czyzyk@student.agh.edu.pl
2	Norbert Podgórski	402111	npodgorski@student.agh.edu.pl
3	Bartosz Sroka	400490	srokab@student.agh.edu.pl

Spis treści

1. Wstęp ... 2
2. Opis zagadnienia ... 2
   2.1 Założenia wstępne ... 2
   2.2 Opis modelu $MM1|FIFO|\infty$ ... 2
3. Rozwiązanie ... 3
   3.1 Rozwiązanie analityczne ... 3
   3.2 Symulacja ... 4
4. Wyniki Porównawcze: ... 6
5. Dodatki ... 7
6. Podsumowanie ... 10

1. Wstęp

Celem projektu jest stworzenie dwóch modelów systemu kolejkowego, rozwiązanych metodą analityczną oraz symulacją dla ruchu drogowego. Ruch drogowy złożony jest z jezdni, która jest kanałem obsługi oraz zgłoszeń, czyli samochodów, które ustawiają się kolejce. Samochody obsługiwane są w kolejności ich pojawienia, która odbywa się losowo z rozkładem Poissona. Czas obsługi wyznacza czas potrzebny pojazdowi na przejechanie jednego segmentu drogi, zgodnie z rozkładem wykładniczym.

2. Opis zagadnienia

2.1 Założenia wstępne

Problem zostaje zrealizowany dla modelu kolejki $M|M|n|FIFO|\infty$. Samochody przyjeżdżają z częstotliwością λ oraz są obsługiwane zgodnie z parametrem μ. Wartości tych parametrów zostaje wyznaczone na podstawie podstawowych parametrów charakteryzujących analizowany obszar ruchu samochodowego.

Przyjmujemy, że maksymalne zagęszczenie ruchu na jezdni można określić jako odwrotność minimalnej długości potrzebnej samochodowi przebywającego na drodze. W naszych rozwiązaniach przyjmujemy, że samochód ma długość $4.9\ m$ co odpowiada wartości średniej dla samochodów osobowych. Dodatkowo przyjmujemy, że minimalny odstęp między samochodami powinien wynosić $0.3\ m$ aby zachować bezpieczeństwo na drodze. Dla przyjętych wartości, maksymalne zagęszczenie ruchu – C jest równe:

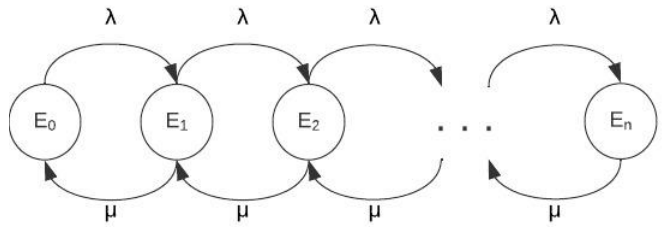
$$C = \frac{1}{4.9 + 0.3}\left[\frac{car}{m}\right] = \frac{1}{0.0052}\left[\frac{car}{km}\right] \cong 192.31\ \left[\frac{car}{km}\right]$$

Dodatkowo w naszym rozwiązaniu zakładamy, że samochody na drodze mogą się poruszać z prędkością nominalna v_{nom} równą $140\,\frac{km}{h}$, co odpowiada prędkości na autostradzie w Polsce.

Oczywiście powyższe parametry są możliwe do zmiany jednak są to wstępne założenia dla których przeprowadziliśmy obliczenia oraz doświadczenia.

2.2 Opis modelu $M|M|1|FIFO|\infty$

Graf stanu:



Analizowany problem jest bardzo prosty. Na jezdni auta ustawione są w kolejce i mogą przejechać wyłącznie po opuszczeniu kolejki przez poprzedni samochód. Czas obsługi może być związany z czasem uruchomienia pojazdu i dojechaniem do punktu, w którym pojazdy opuszczają korek.

Wymagane jest, aby $\lambda < \mu$ czyli $\rho < 1$ aby był stan ustalony. Ten warunek zapewnia nam przyjęcie gęstości ruchu nie większego od maksymalnej gęstości ruchu na drodze.

3. Rozwiązanie

Zagadnienie zrealizowano z wykorzystaniem dwóch notatników – jupyter notebooks. Pierwszy z nich *analythical_solution.jpynb* zawiera obliczenia parametrów kolejki na podstawie dostępnych wzorów. Natomiast drugi plik *simulation_solution.jpynb,* zawiera symulacje oraz obliczenie parametrów, które mogą zostać porównane z rozwiązaniem analitycznym.

Początkowe obliczenia są identyczne dla obu zagadnień tj. obliczenie parametrów λ, μ. Obliczenia przeprowadzone są dla wybranej gęstości ruchu E na drodze z zakresu od 0 do C.

```
 traffic_density = random.uniform(1, maximum_traffic_density)
_lambda = (nominal_speed / 3600) * traffic_density
_mu = (nominal_speed / 3600) * maximum_traffic_density
_rho = _lambda / _mu
```

Ze względu na krótkie odstępy między zdarzeniami, zdecydowaliśmy się przyjąć czasy w sekundach, natomiast prędkość pozostawiliśmy w jednostce $\frac{km}{h}$ bo jest ona dla nas bardziej interpretowalna w kontekście poruszających się samochodów.

Wartości μ oraz λ dla problemu 100 samochodów na przyjętej jezdni są równe:

$$\lambda = 3.89\ \left[\frac{car}{s}\right], \mu = 7.48\ \left[\frac{car}{s}\right]$$

3.1 Rozwiązanie analityczne

Parametry prędkości względnej oraz efektywnej zostały obliczone ze wzorów.

$$v_{ef} = \frac{\frac{1}{C}}{T}$$

$$v_w = \frac{v_{ef}}{v_{nom}} = \frac{\frac{1}{C}}{T \cdot v_{nom}}$$

Przyjmując, że czas przebywania w systemie obliczymy jako odwrotność różnicy częstotliwości obsługi i przyjścia samochodów w kolejce:

$$T = \frac{1}{\mu - \lambda} = \frac{1}{v_{nom}(C - E)}$$

Powyższe wzory można przedstawić jako:

$$v_{ef} = v_{nom} \cdot (1 - \rho)$$

$$v_w = \frac{v_{ef}}{v_{nom}} = 1 - \rho$$

Jednakże dla naszego problemu przyjęliśmy czas jako:

$$T = \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{m \cdot \mu}$$

Gdzie m jest ilością kanałów obsługi co pozwoli na obliczenie wartości prawdopodobieństwa dla większej ilości kanałów obsługi niż w modelu $M|M|1|FIFO|\infty$.

Do dalszych obliczeń przyjęliśmy dostępne wzory:

Prawdopodobieństwo π_0 wyliczone z warunku normalizującego:

$$\pi_0 = \frac{1}{\sum_{k=0}^{m-1} \frac{\rho^k}{k!} + \frac{\rho^m}{(m-1)!\,(m-\rho)}}$$

Prawdopodobieństwo, że długość kolejki jest równa r:

$$p_{m+r} = \frac{\frac{\rho^{m+r}}{m!\,m^r}}{\sum_{k=0}^{m-1} \frac{\rho^k}{k!} + \frac{\rho^m}{(m-1)!\,(m-\rho)}}$$

Obliczenia zostały przeprowadzone dla wartości od $r = 0$ do $r = 100$ czyli 100 samochodów. Nie obliczaliśmy prawdopodobieństwa zajętości n kanałów, ponieważ pierwotnie zajęliśmy się wyłącznie jednym kanałem.

Średnia liczba zgłoszeń w systemie wynosi:

$$\bar{K} = \rho + \frac{\rho^{m+1}}{(m-\rho)^2(m-1)!}\pi_0$$

Średnia długość kolejki:

$$\bar{Q} = \frac{\rho^{m+1}}{(m-\rho)^2(m-1)!}\pi_0$$

Średnie czasy oczekiwania w kolejce:

$$\bar{W} = \frac{\bar{Q}}{\lambda}$$

Średni czas przebywania zgłoszenia w systemie:

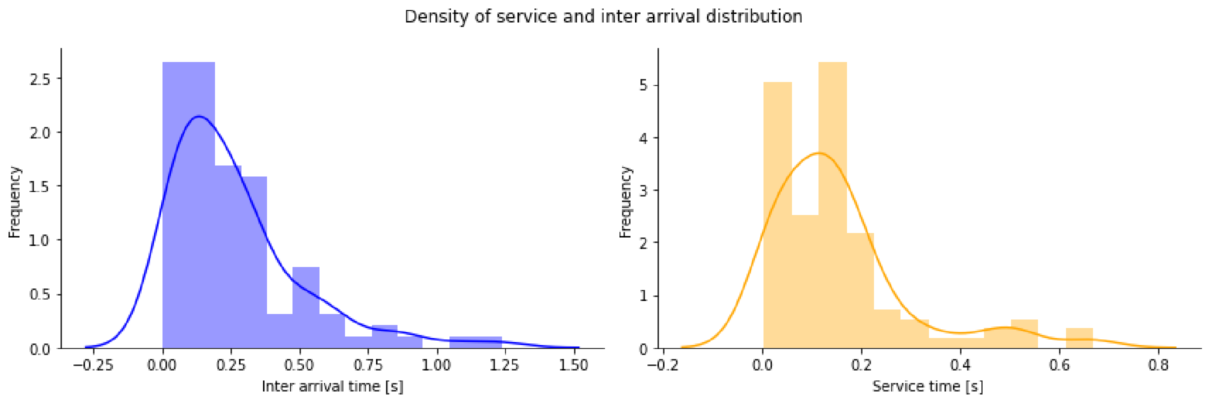
$$\bar{T} = \frac{\bar{K}}{\lambda}$$

3.2 Symulacja

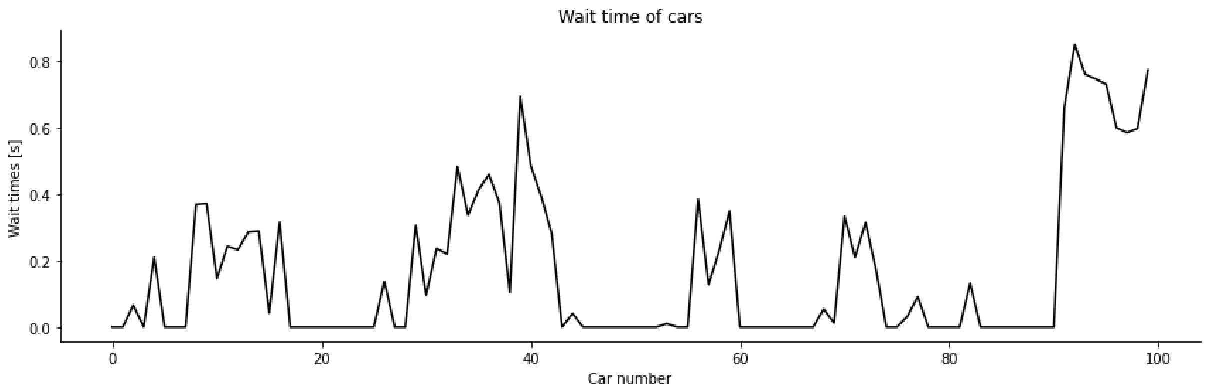
Symulacja została przeprowadzona dla przyjętych w rozwiązaniu analitycznym parametrów opisujących model kolejki. Kod symulacji znajduje się w pliku *simulation_solution.jpynb*, możliwe jest do sparametryzowania parametry tak jak w przypadku rozwiązania analitycznego.

Przez ilość potrzebnych zmian wszelkie statystyki wyznaczyliśmy wyłącznie dla pojedynczego kanału obsługi. Dodatkowo dla symulacji obliczyliśmy wykorzystanie systemu i mogliśmy stworzyć wykresy czasów oczekiwania samochodów w kolejce oraz ilości samochodów w kolejce.

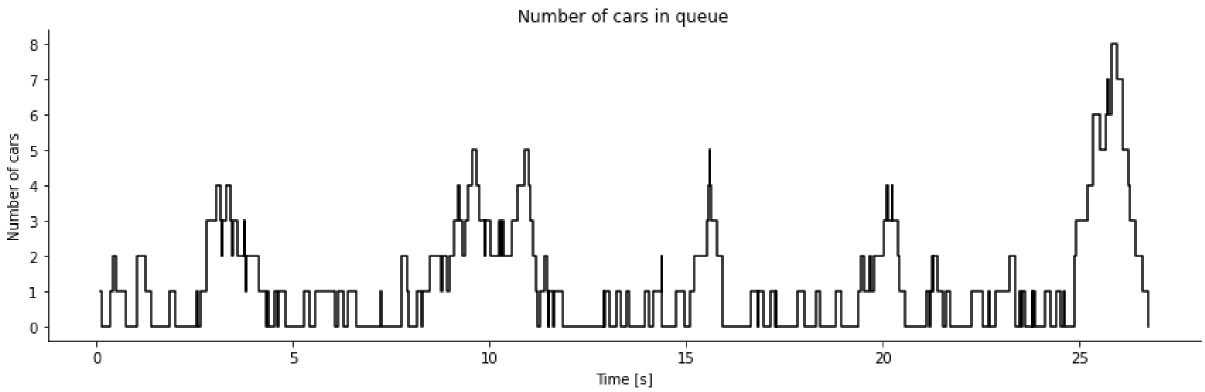
Przedstawione poniżej wykresy są przykładami przebiegów, które można otrzymać dla symulacji przy założeniu gęstości ruchu na poziomie 100 samochodów na km. Poniższe wykresy przedstawiają rozkłady międzyczasów przyjazdu samochodów oraz obsługi samochodów.



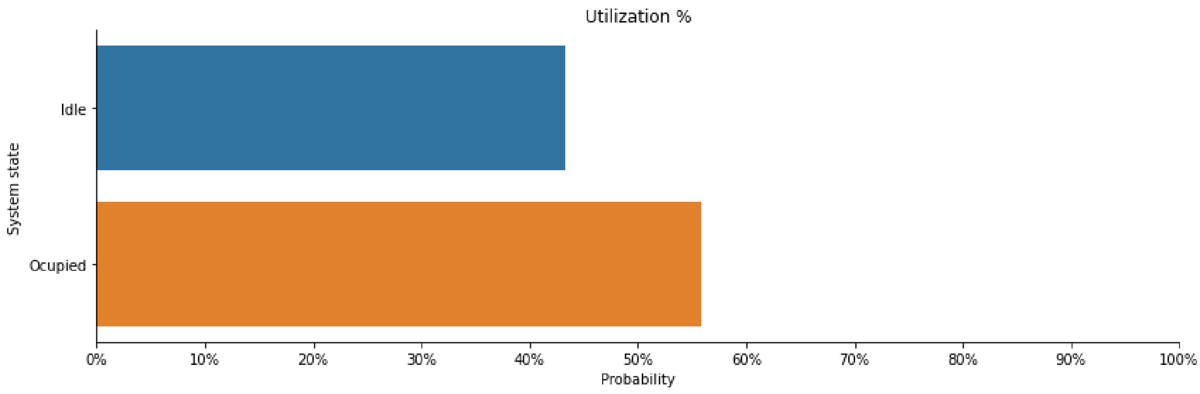
Na podstawie wygenerowanych wartości przebieg symulacji w dziedzinie czasu spędzonego w kolejce dla kolejnych samochodów wygląda następująco:



Natomiast w dziedzinie ilości samochodów przebieg przedstawia się na poniższym wykresie:



Największa liczba samochodów pojawiła się pod koniec kolejki i osiągnęła kolejkę równą 8 samochodów co jednocześnie wpływa na czas spędzony w kolejce. Przez większość czasu dla przyjętej gęstości ruchu równej 100 przejeżdża w minimalnej kolejce lub bez.

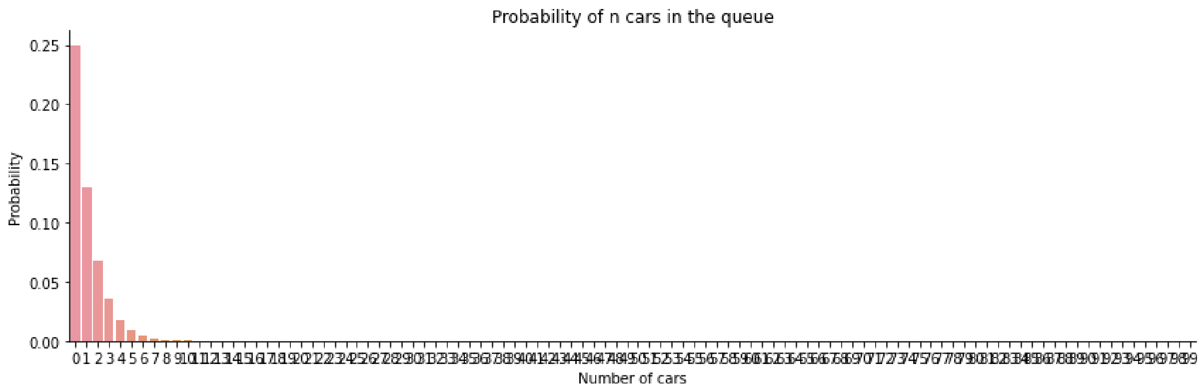


Wykorzystanie systemu jest na poziomie 43%. Przy użyciu 100% nie będzie samochodu, który przejedzie system bez kolejki.

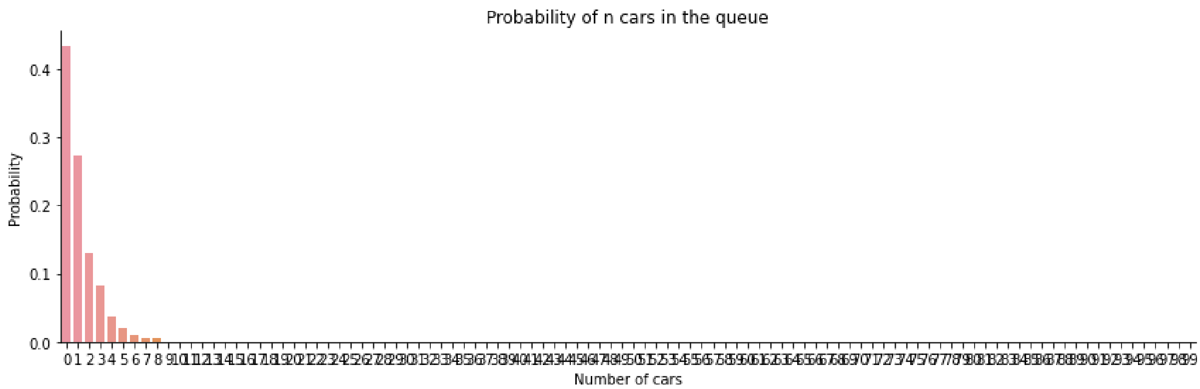
4. Wyniki Porównawcze:

Analiza porównawcza została przeprowadzona dla systemu z jednym serwerem. W pierwszej kolejności policzono prawdopodobieństwo, że w kolejce jest n samochodów.

Wyniki dla rozwiązania analitycznego:



Wyniki dla symulacji:



Wykresy prawdopodobieństwa są do siebie bardzo zbliżone, maksymalnie w kolejce jest 8 samochodów. Różnice przedstawione na tych wykresach mogą być związane z losowością generowania rozkładów czasów przyjazdów i obsługi i stosunkowo małej próby 100 samochodów.

Dodatkowo dla przypadku systemu z jednym serwerem (kanałem obsługi) obliczono możliwe do policzenia statystyki.

Statystyki dla rozwiązania analitycznego:

```
Output:
  Średni czas przybywania samochodów : 0.26 [s]
  Średni czas obsługi samochodów: 0.13 [s]

  Średni czas oczekiwania w kolejce: 0.14 [s]
  Średni czas przebywania samochodów w systemie 0.39 [s]

  Średnia liczba zgłoszeń w systemie: 1.08 [car]
  Średnia długość kolejki: 0.56 [car]

  Efektywna prędkość 47.89 [km/h]
```

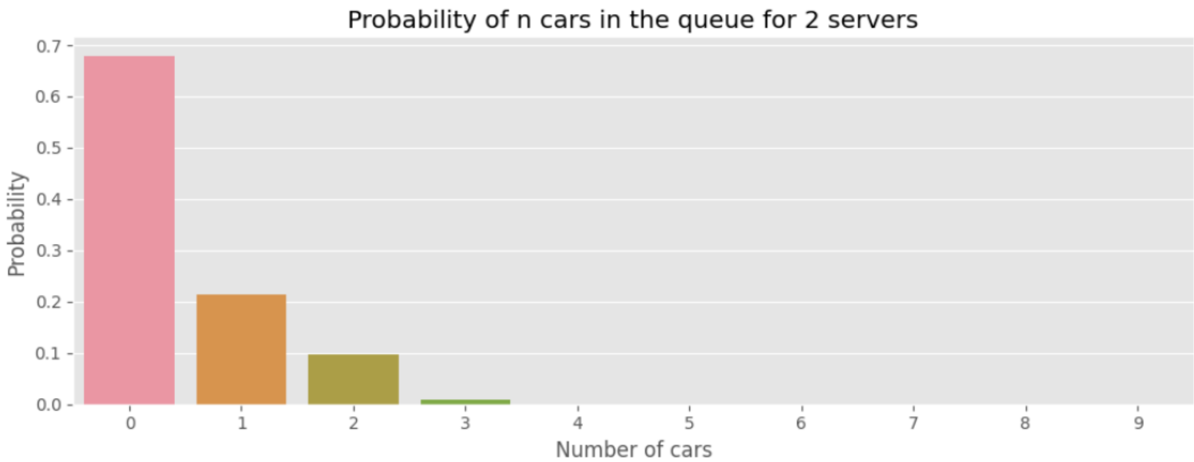
Statystyki obliczone z symulacji:

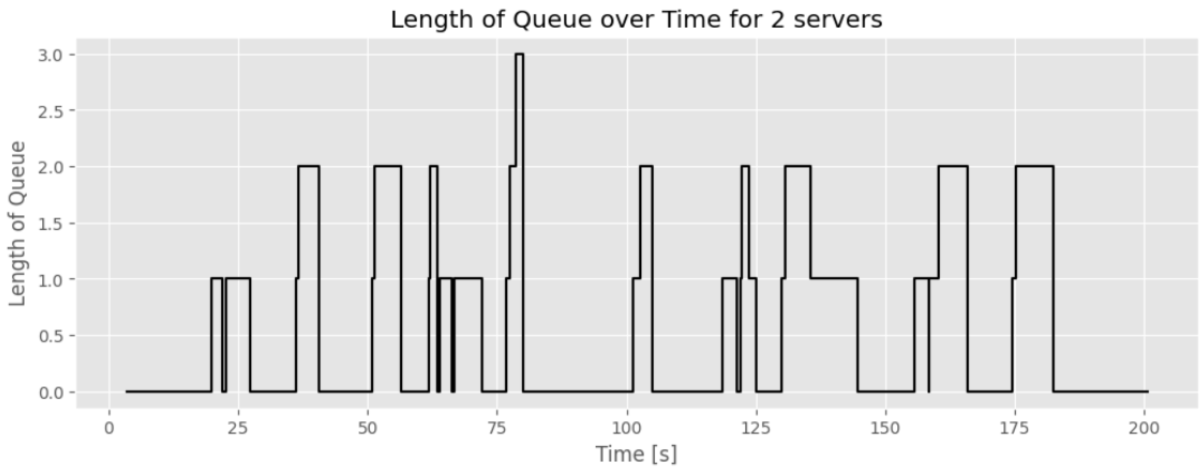
```
Output:
  Średni czas przybywania samochodów : 0.26 [s]
  Średni czas obsługi samochodów: 0.15 [s]

  Efektywna prędkość: 59.0 [km/h]

  Średni czas oczekiwania w kolejce: 0.16 [s]
  Średni czas przebywania samochodów w systemie: 0.31 [s]

  Średnia długość kolejki: 1.68 [car]
  Użycie systemu: 55.9%
```

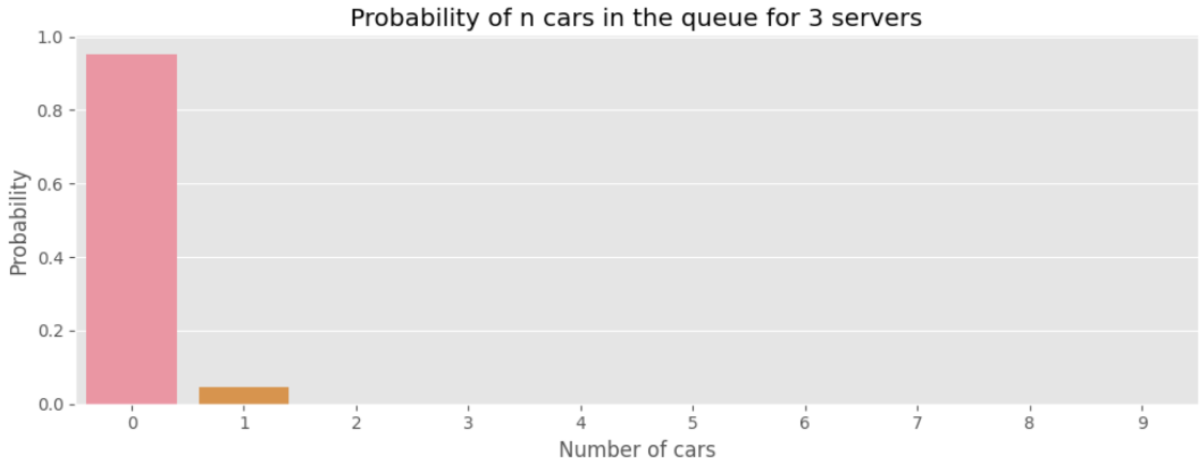
Na podstawie wyników widać, że czasy przybywania samochodów i ich obsługi oraz czasy oczekiwania w kolejce są bardzo zbliżone. Prędkość efektywna również jest porównywalna. Znacząca różnica pojawia się na poziomie średniej długości kolejki, która dla symulacji jest znacznie dłuższa od rozwiązania analitycznego, co może świadczyć zarówno o błędnie zastosowanym wzorze analitycznym jak również nieoprawnym sposobie symulacji.

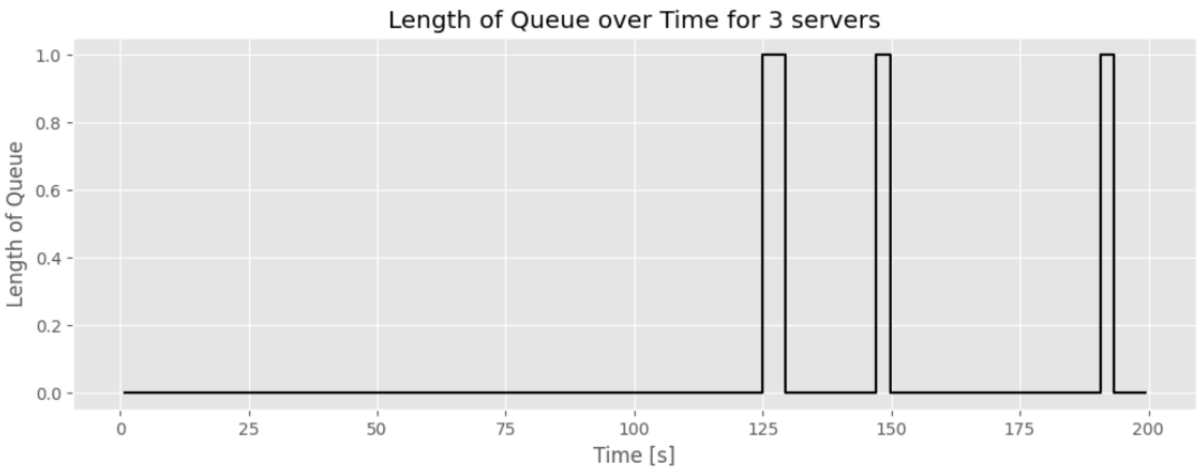
5. Dodatki

Dodatkowo przeprowadzono symulację dla większej ilości serwerów niż 1.



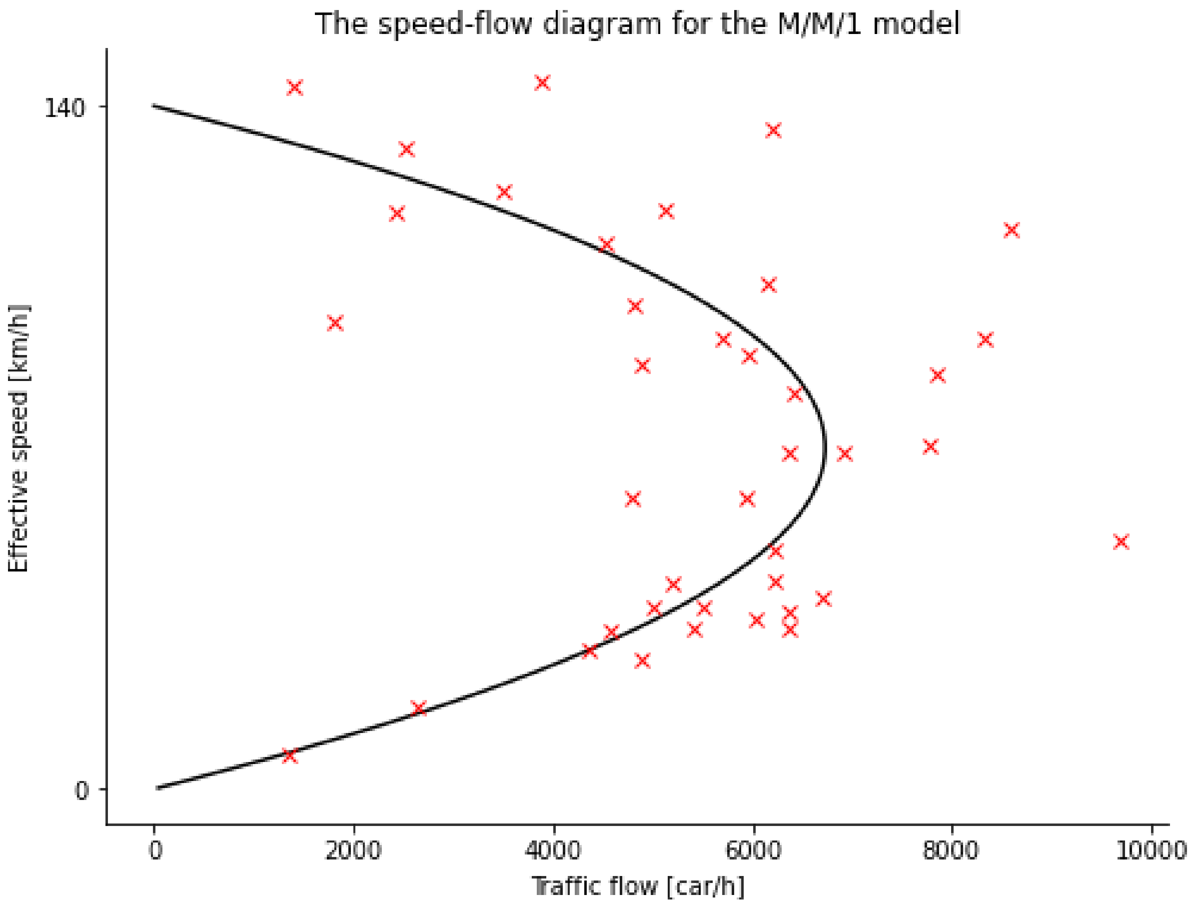


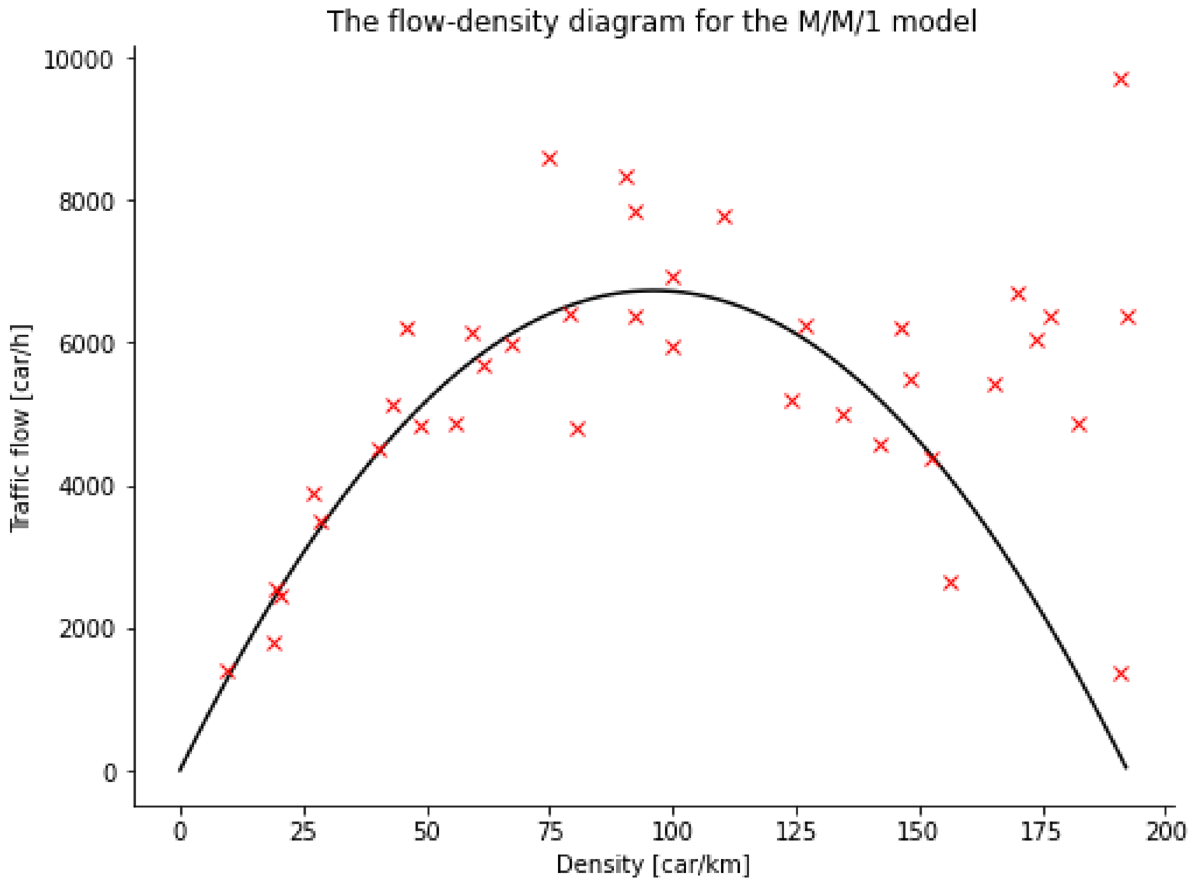




Dla więcej niż 3 serwery kolejka nigdy się nie tworzy.

Dla systemu $M|M|1|FIFO|\infty$, wykreślono wykres prędkości efektywnej względem przepływu oraz przepływu względem gęstości na drodze. Dla analizowanej długości kolejki pomiary rozmywają się od wynikowej trajektorii, natomiast zauważalna jest tendencja, która zgadza się z wykresem analitycznym.


The speed-flow diagram for the M/M/1 model
Effective speed [km/h]
Traffic flow [car/h]
140
0
0
2000
4000
6000
8000
10000


The flow-density diagram for the M/M/1 model
Traffic flow [car/h]
Density [car/km]
10000
8000
6000
4000
2000
0
0
25
50
75
100
125
150
175
200

6. Podsumowanie

Implementacja modelu analitycznego dla znajomego problemu jest proste, jednak ze względu na skomplikowanie podstawowych wzorów na obliczenie prędkości dla układów z większą liczbą kanałów zdecydowaliśmy się na przedstawienie wyników dla kolejnych liczności kanałów obsługi wyłącznie dla symulacji.

Symulacja jest wyłącznie symulacją więc w zależności od uruchomienia uzyskiwane są trochę inne wyniki, które są zbliżone do rozwiązania analitycznego.

Napisanie własnego kodu tworzącego model kolejki pozwala o wiele bardziej zrozumieć jakie zdarzenia w niej występują i jak można obliczyć odpowiednie normy.