Examen Session 1

Durée 1h30. Les documents, la calculatrice, les téléphones portables, tablettes, ordinateurs ne sont pas autorisés. Une feuille A4 manuscrite avec votre fiche de révision est autorisée. La qualité de la rédaction sera prise en compte.

Exercice 1.

On considère la matrice M suivante : $M = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

1. Remarquer que M s'écrit $3I_3 + N$, où N est une matrice nilpotente (c'est-à-dire qu'il existe une puissance de N qui est la matrice nulle).
2. En utilisant la formule du binôme, donner une expression de M^p en fonction de $p \geq 3$.
   Rappel : La formule du binôme permet d'exprimer la puissance d'une somme :

$$(a+b)^p = \sum_{k=0}^{p} C_p^k a^k b^{p-k}, \text{ avec } C_p^k = \frac{p!}{k!(p-k)!}.$$

Exercice 2.

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ -3 & -5 & -3 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Que vaut $det(A)$? En déduire le noyau de A.
2. À l'aide du Pivot de Gauss, inversez A si cela est possible.
3. Calculer le polynôme caractéristique $P_A(\lambda)$ et les racines de ce polynôme.
4. Diagonaliser A si cela est possible, sinon trigonalisez A.

Exercice 3.

On se place dans $\mathbb{R}^3$. L'objectif est de trouver une matrice de rotation qui transforme le plan (P) d'équation $x + 2y + 2z = 0$ en le plan horizontal (H) (d'équation $z = 0$).

1. Donnez un vecteur n normal au plan (P), de norme 1.
2. Trouvez u un vecteur de coordonnées $(a, b, 0)$, de norme 1, et orthogonal à n.
3. Complétez (n, u) en une base orthonormale directe (n, u, v) de $\mathbb{R}^3$.
4. Soit M la matrice dont les colonnes sont (u, v, n). Justifiez le fait que (u, v, n) est également une base orthonormale directe.
5. On rappelle qu'une matrice de rotation Q est une matrice orthogonale de déterminant 1 (donc telle que $Q^\top Q = QQ^\top = I_n$ et $det(Q) = 1$. Montrez que M transforme le vecteur $(0, 0, 1)$ en n. En déduire une matrice de rotation transformant (P) en (H).

Exercice 4.

On considère la matrice suivante représentant un nuage de points (chaque ligne correspond à un point) : $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$. Le barycentre des données (ou moyenne) est : $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$.

1. Calculer le barycentre des données pour ce nuage de points.
2. Pour calculer la matrice de covariance, on doit d'abord « centrer » le nuage de point, c'est-à-dire soustraire le barycentre à chaque vecteur de données. Quelle est l'expression de cette opération sous forme matricielle ? Et son résultat M' ?

Examen Session 2

Durée 1h30. Les documents, la calculatrice, les téléphones portables, tablettes, ordinateurs ne sont pas autorisés. Une feuille A4 manuscrite avec votre fiche de révision est autorisée. La qualité de la rédaction sera prise en compte.

Exercice 1.

On considère la matrice M suivante : $M = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Calculer M^2 et M^3.
2. Démontrer, à l'aide d'un raisonnement par l'absurde, que M n'est pas inversible.
3. Donner une expression de M^n pour tout entier $n \geq 1$. On pourra raisonner par récurrence.

Exercice 2.

1. Soit $J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer J^2 et J^3, en déduire J^{-1}.
2. Montrer que l'ensemble $\mathcal{M}$ des matrices :

$$\begin{pmatrix} a & c & b \\ b & a & c \\ c & b & a \end{pmatrix}$$

où a, b, c sont des réels, est un sous espace vectoriel de dimension 3 de l'espace vectoriel des matrices carrées de taille 3. Que peut-on dire du produit de deux matrices de $\mathcal{M}$?

Exercice 3.

Parmi les matrices carrées suivantes, indiquer celles qui sont inversibles et déterminer leur inverse :

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$. $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$. $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & x \end{pmatrix}$ (en fonction de x).

Exercice 4.

Soit $m \in \mathbb{R}$ et A la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 1+m & 1+m & 1 \\ -m & -m & -1 \\ m & m-1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Factoriser le polynôme caractéristique de A et montrer que les valeurs propres de A sont -1 et 1.
2. Pour quelles valeurs de m la matrice est-elle diagonalisable ? (justifier).

Exercice 5.

L'espace est muni d'un repère orthonormé. Calculer la distance du point $M(-1;0;1)$ à la droite D dont une représentation paramétrique est :

$$(D) : \begin{cases} x = -1 + t \\ y = 5t \\ z = 3t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}).$$