HAI816I Logiques pour le génie logiciel et l'intelligence artificielle
Épreuve de contrôle continu du 13 avril 15h. Salle 36.412.
Durée 1 heure. Tiers temps 1h20.

A Exercice abstrait : somme disjointe de modèles de Kripke

Soit $\mathcal{M}^p = \langle (\mathfrak{m}_i^p)_{i\in I^p}, R^p, \Vdash_0^p \}$, pour $p \in J$ une famille de modèles de Kripke.
On définit un nouveau modèles de Kripke

$$\mathcal{M} = \uplus_{p\in J}\mathcal{M}^p = \langle (\mathfrak{m}_i^p)_{p\in J, i\in I^p}, R = \cup_{p\in J} R^p, \Vdash^0 = \cup_{p\in J} \Vdash_0^p \rangle$$

soit, en français, le modèle de Kripke $\mathcal{M}$ est la juxtaposition (l'union disjointe) des modèles de Kripke $\mathcal{M}^p$:

les mondes possibles sont la réunion des mondes possibles,

deux mondes sont en relation si et seulement s'ils proviennent tous les deux du même modèles M^p et s'ils étaient en relation dans M^p,

et un monde $\mathfrak{m}$ de $\mathcal{M}$ force la variable propositionnelle a, $\mathfrak{m} \Vdash_0^p a$, si et seulement si ce monde $\mathfrak{m}$ provient du modèle $\mathcal{M}^p$ et si dans $\mathcal{M}^p$ on avait $\mathfrak{m} \Vdash_0^p a$.

1. Soient les deux modèles de Kripke
   $\mathcal{M}^1 = \langle \{\mathfrak{m}_1^1, \mathfrak{m}_2^1\}; R^1 = (\mathfrak{m}_1^1, \mathfrak{m}_2^1); \Vdash_0^1 = \{\mathfrak{m}_1^1 \Vdash_0^1 a, \mathfrak{m}_2^1 \Vdash_0 a, \mathfrak{m}_2^1 \Vdash_0 b\}\rangle$.
   $\mathcal{M}^2 = \langle \{\mathfrak{m}_1^2\}; R^2 = (\mathfrak{m}_1^2, \mathfrak{m}_1^2); \Vdash_0^2 = \{\mathfrak{m}_1^2 \Vdash_0^1 b\}\rangle$.
   (a) Dessinez $\mathcal{M}^1$ et $\mathcal{M}^2$ puis $\mathcal{M}^{12} = \mathcal{M}^1 \uplus \mathcal{M}^2$.
   (b) Montrer que $\mathfrak{m}_1^1 \Vdash^1 \Box a$, $\mathfrak{m}_1^2 \Vdash^2 \Box b$, et que dans $\mathcal{M}^{12} = \mathcal{M}^1 \uplus \mathcal{M}^2$ on a $\mathfrak{m}_1^1 \Vdash^{12} \Box a$ ($\Vdash^{12}$ désigne le forcing dans $\mathcal{M}^{12} = \mathcal{M}^1 \uplus \mathcal{M}^2$).
2. Soit $\mathcal{M}^p = \langle (\mathfrak{m}_i^p)_{i\in I^p}, R^p, \Vdash_0^p \rangle$, pour $p \in J$ une famille de modèles de Kripke et $\mathcal{M} = \uplus_{p\in J}\mathcal{M}^p$ comme défini ci-dessus. Soit $\mathfrak{m}_i^p$ un monde du modèle $\mathcal{M}^p$ et donc de $\mathcal{M}$. Montrez que pour toute formule H, $\mathfrak{m}_i^p \Vdash^p H$ si et seulement si $\mathfrak{m}_i^p \Vdash H$ ($\Vdash$ est le forcing dans $\mathcal{M} = \uplus_{p\in J}\mathcal{M}^p$). On procédera par induction sur la formule H. On étudiera le cas de base (H est une variable propositionnelle), le cas où H est une implication, le cas où H est une négation, et le cas où H est une formule nécessaire ($\Box$).
3. On souhaite définir une modalité A dans les modèles de Kripke par $\mathfrak{m}_i \Vdash \mathsf{A}G$ si et seulement si $\mathfrak{m} \Vdash G$ pour tout monde $\mathfrak{m}$ de ce modèle.
   (a) Montrer en reprenant les exemples $\mathcal{M}^1$, $\mathcal{M}^2$ et $\mathcal{M}^{12}$ ci-dessus que $\mathfrak{m}_1^1 \Vdash^1 \mathsf{A}\,a$ et que $\mathfrak{m}_1^1 \nVdash^{12} \mathsf{A}\,a$ ($\Vdash^{12}$ désigne le forcing dans $\mathcal{M}^{12} = \mathcal{M}^1 \uplus \mathcal{M}^2$).
   (b) En déduire que $\mathsf{A}G$ ne peut pas s'exprimer par une formule de la logique modale habituelle $\Box, \rightarrow, \neg$.
4. Expliquer en quelques lignes pourquoi c'est un cas de bissimulation. On donnera les deux modèles en bissimulation et on précisera la relation de bissimulation.

B Exercice concret : un passage à niveau en LTL

Dans cette section, on considère une interprétation particulière des modalités. L'ensemble des formules linéaires est définie par la grammaire suivante :

$$\mathsf{F} := \mathtt{At} \mid \neg \mathsf{F} \mid \mathsf{F} \wedge \mathsf{F} \mid \Diamond \mathsf{F} \mid \circ \mathsf{F} \mid \mathsf{F} \,\mathcal{U}\, \mathsf{F} \mid \mathsf{F} \,\mathcal{W}\, \mathsf{F}$$

La modalité $\circ$ est appelée *next*.

Le connecteur $\mathcal{U}$ est appelé "... jusqu'à ...".

Le connecteur $\mathcal{W}$ est appelé "... jusqu'à ... faiblement".

On peut définir $\Box A$ par $\neg\Diamond\neg A$, $A \to B$ par $\neg(A \wedge \neg B)$ et $A \vee B$ par $\neg(\neg A \wedge \neg B)$, mais on pourra utiliser directement les connecteurs $\to, \wedge$.

Une *Interprétation linéaire* est la donnée d'une séquence infinie d'états

$$\mathcal{S} = s_0, s_1, s_2, \ldots, sn, \ldots$$

et d'une fonction f qui associe à chaque état un ensemble de formules atomiques. La notion de satisfaction d'une formule dans un état d'un modèle linéaire est définie comme suit :

- $s_i \Vdash p$ ssi $p \in f(s_i)$
- $s_i \Vdash \neg A$ ssi $s_i \nVdash A$
- $s_i \vdash A \wedge B$ ssi $s_i \Vdash A$ et $s_i \Vdash B$
- $s_i \vdash \Diamond A$ ssi il existe $j \geqslant i$ tel que $s_j \vdash A$
- $s_i \Vdash \circ A$ ssi $s_{i+1} \Vdash A$
- $s_i \Vdash A \mathcal{U} B$ ssi il existe $n \geqslant i$ tel que $s_n \Vdash B$ et pour tout j tel que $i \leqslant j < n$ $s_j \Vdash A$.
- $s_i \Vdash A \mathcal{W} B$ ssi $s_i \Vdash \Box A$ or $s_i \Vdash A \mathcal{U} B$.

finalement on dit qu'une interprétation linéaire $\mathcal{S} = s_0, s_1, s_2, \ldots s_n \ldots$ est un **modèle** d'une formule A si le premier état du modèle s_0 satisfait A.

On considère les formules atomiques suivantes :

- a = un train approche ;
- p = un train passe ;
- c = le gyrophare clignote ;
- b la barrière est baissée.

Exprimer les phrases qui suivent en utilisant les formules de la logique temporelle linéaire, et pour chaque phrase/formule dessiner deux interprétations, une dans laquelle elle est fausse, une dans laquelle elle est vraie. **À tout instant** :

1. Si un train approche alors le feu clignote.
2. Le feu ne clignote pas toujours, et n'est pas toujours éteint non plus.
3. Si la barrière est levée et le feu ne clignote pas alors aucun train n'approche ni ne passe.
4. Quand un train approche, un train passera.
5. Quand un train approche et que la barrière est baissé alors la barrière reste baissée tant que le train n'est pas passé.
6. Quand un train finit de passer, la barrière se relève ensuite.