Logique - Calculabilité - Complexité

Université de Montpellier
Partiel de calculabilité - 2023
29 novembre 2023

Durée 1h30
Aucun document n'est autorisé
Pas de calculatrice, téléphone portable, montre programmable, appel à un ami, consultation de l'avis du public, *etc.*

Justifiez vos réponses avec grand soin !

Exercice 5 existence des modèles

On rappelle le "Model Existence Lemma" : si une théorie est cohérente, alors elle admet un modèle.

1. Enoncez le théorème de complétude de Gödel.
2. En utilisant le "Model Existence Lemma", prouvez le théorème de complétude.
3. Enoncez le théorème de compacité.
4. En utilisant le théorème de complétude, prouvez le théorème de compacité.
5. En utilisant le théorème de complétude et le théorème de compacité, prouvez le "Model Existence Lemma".

Exercice 6 preuves de l'absurde

Soit T une théorie sur le langage $\mathcal{L}_T$ et g une formule de $\mathcal{L}_T$.

1. Montrez que $T \vdash g$ si et seulement si $T \cup \{\neg g\} \vdash g \wedge \neg g$.
2. Montrez que si T est cohérente, alors il en est de même d'au moins une des extensions $T \cup \{g\}$ et $T \cup \{\neg g\}$

Exercice 7 les théories

1. Qu'est-ce qu'une théorie cohérente ?
2. Donnez un exemple de théorie non cohérente et de théorie cohérente.
3. Soient T_a, T_b deux théories. Montrer que si $T_a \subseteq T_b$ alors les modèles de T_b sont aussi des modèles de T_a.
4. Soit T une théorie cohérente. On note $\mathcal{M}_a$ et $\mathcal{M}_b$ deux modèles de T. Définir l'équivalence élémentaire entre $\mathcal{M}_a$ et $\mathcal{M}_b$.
5. Soit $\mathcal{M}$ un modèle. Est-ce que la théorie $\mathrm{th}(\mathcal{M})$ est cohérente ?

Exercice 8 prouvabilité

On dit qu'un programme b est total s'il calcule une fonction $[b|.]$ totale et on dit qu'il est *prouvablement* total si $\mathsf{PA} \vdash \forall x \exists t\ \mathrm{step}(b, x, t) \neq 0$ (plus précisément, si $\mathsf{PA} \vdash \forall x \exists t\ \neg\varphi(b, x, t, 0)$ où $\varphi(b, x, t, v)$ est une formule qui exprime $\mathrm{step}(b, x, t) = v$).

1. Montrez que l'ensemble des programmes prouvablement totaux est énumérable.
2. Montrez (calculabilité - réduction) que l'ensemble des programmes totaux n'est pas énumérable.
3. En déduire qu'il existe des programmes totaux dont on ne peut prouver la totalité.

Logique - Calculabilité - Complexité

Université de Montpellier
Examen de LCC - 2023-2024
16 janvier 2024

Durée 2h
Aucun document n'est autorisé
Pas de calculatrice, téléphone portable, montre programmable, appel à un ami, consultation d'internet, de Moodle *etc.*

Justifiez vos réponses avec grand soin !

Dans tout ce qui suit, comme dans le cours, le symbole $\prec$ désigne la *réduction many-one* ; les ensembles considérés sont des ensembles d'entiers, qu'ils contiennent des données ou des programmes. L'expression $[a|b]$ représente le calcul du programme a sur l'entrée b et $[a|b]\downarrow$ exprime que ce calcul s'arrête.

Les exercices sont indépendants et peuvent être traités dans n'importe quel ordre.

Exercice 1 énumérations

Considérons $A = \{x, [x|2x]\downarrow\}$.

1. Montrez que A est un ensemble énumérable.
2. Montrez que A n'est pas récursif.

Soit g une fonction récursive totale et $B = \{x, [x|g(x)]\downarrow\}$

3. Montrez que B est un ensemble énumérable.
4. Montrez que B n'est pas récursif.

Exercice 2 réductions

Soit D l'ensemble des programmes qui convergent sur au moins une entrée, divergent sur au moins une entrée et, sur toutes les entrées où ils convergent donnent des résultats tous différents.

1. Ecrivez A sous la forme d'une formule du type $A = \{x, \ \dots \}$.
2. En utilisant avec soin le théorème de Rice, montrez que A n'est pas récursif.
3. Montrez que $\mathbb{K} \prec A$.
4. Montrez que $\mathbb{K} \prec \overline{A}$ (où $\overline{A}$ est le complémentaire de A).
5. Montrez que ni A ni $\overline{A}$ ne sont énumérables.

Exercice 3 points fixes

On suppose qu'on dispose d'un transformateur de programmes F (la fonction F est récursive totale) et d'un entier x vérifiant $[F(x)|\cdot] = [x|\cdot]$.

1. Montrez qu'il existe $y \neq x$ tel que $[F(y)|\cdot] = [y|\cdot]$.
2. Si on dispose de x et du code de F, peut-on calculer y ?