Logique - Calculabilité - Complexité

Université de Montpellier
Partiel de logique - 2022
2 décembre 2022

Durée 1h30
Aucun document n'est autorisé
Pas de calculatrice, téléphone portable, montre programmable,
appel à un ami, consultation de l'avis du public, *etc.*

Justifiez vos réponses avec grand soin!

Nous nous plaçons dans le cadre de la logique classique du premier ordre, avec égalité.

Exercice 1 cohérences et modèles

Soit T une théorie cohérente et A et B deux formules closes.
On suppose que $T \vdash A$ et $T \vdash \neg B$.
Existe-t-il un modèle de T noté $\mathcal{M}$ tel que $\mathcal{M} \models (B \vee \neg A)$?
Justifiez soigneusement en explicitant les théorèmes du cours utilisés.

Exercice 2 la cohérence et la preuve

Soit T une théorie et f une formule.

1. Montrez que $T \vdash f$ si et seulement si $T \cup \{\neg f\}$ est incohérente.
2. Montrez que si T est cohérente, alors il en est de même d'au moins une des extensions $T \cup \{f\}$ et $T \cup \{\neg f\}$

Exercice 3 les constantes

Soit T une théorie, f une formule à une seule variable libre et c un symbole de constante n'apparaissanit ni dans f ni dans T.

1. Montrez que $T \vdash f(c)$ entraine $T \vdash \forall x\, f(x)$.
2. Montrez que si $T \cup \{\exists x\, f(x)\}$ est cohérent, alors il en est de même de $T \cup \{f(c)\}$

Exercice 4 tailles des modèles

Soit T une théorie sur le langage $\mathcal{L}$ admettant des modèles de taille arbitrairement grande (on rappelle que la taille d'un modèle est la taille de son univers). Soit $\mathcal{L}'$ le langage obtenu en ajoutant à $\mathcal{L}$ les symboles de constante $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Soit T' la théorie obtenue en ajoutant à T les formules $c_i \neq c_j$ pour $i < j$.

1. Soit $\mathcal{M}$ un modèle de T sur le langage $\mathcal{L}$. comment faut-il modifier $\mathcal{M}$ pour construire $\mathcal{M}'$ qui soit un modèle de T sur le langage $\mathcal{L}'$.
2. Soit T_f une partie finie (quelconque) de la théorie T. Montrez en utilisant la question précédente qu'elle a un modèle dans le langage $\mathcal{L}'$.
3. Replaçons-nous dans le langage $\mathcal{L}$. Montrez que soit il existe un entier naturel n tel que tous les modèles de T ont une taille bornée par n, soit T a des modèles infinis.

Exercice 5 (in)-complétude

Soit T une théorie énumérable assez puissante (hypothèse du théorème de Gödel). Soit g une formule close quelconque. On considère maintenant les ensembles de formules $T_1 = T \cup \{g\}$ et $T_2 = T \cup \{\neg g\}$.

1. Supposons que $T \nvdash g$. Est-ce qu'il existe un modèle $\mathcal{M}$ tel que $\mathcal{M} \models T_2$?
2. Soit g une formule indécidable de Gödel. Montrez que si T est cohérente alors les théories T_1 et T_2 ont chacune un modèle. Peuvent-elles avoir le même ?

On considère le programme a qui ignore son entrée, énumère les théorèmes d'un côté, les énoncés réfutables de l'autre (ces deux processus en parallèle), et si jamais il trouve un énoncé à la fois prouvable et réfutable, s'arrête. On remarque que ce programme s'arrête si et seulement si la théorie est incohérente.

3. En utilisant le lemme de codage de Gödel (pour la fonction step) montrez qu'il existe une formule ψ qui exprime que a ne s'arrête pas.

On considère le programme b qui prend un entier n en entrée, énumère les théorèmes et les énoncés réfutables comme le faisait a mais seulement sur n pas. Ensuite, il donne en sortie la formule de plus petit numéro qui n'a pas ainsi été énumérée.

4. Montrez que $[b|.]$ est une fonction croissante (au sens large).
5. Est-ce que $[b|.]$ tend vers l'infini ? est bornée ? (justifiez).