HAI816I Logique pour le génie logiciel et l'IA
2^e Contrôle Continu Mercredi 5 avril 2023 15h–16h30

durée : 1h30 (tiers temps 2h)
sujet et rappels de cours : 4 pages
aucun document n'est autorisé

salle 36.405: IA-SD — salle 36.406: algo et al.

Il est dans votre intérêt de lire tout le sujet avant de commencer à le traiter.
Vous veillerez à la qualité de la rédaction de vos réponses ; en particulier vos justifications doivent être claires et convaincantes.
Le barème est sur 24. Nous laisserons la note sur 20, tant pis pour ceux qui auront plus que 20 ;-) La note de session 1 sera : $(2*CC1+3*CC2+5*EX)/10$

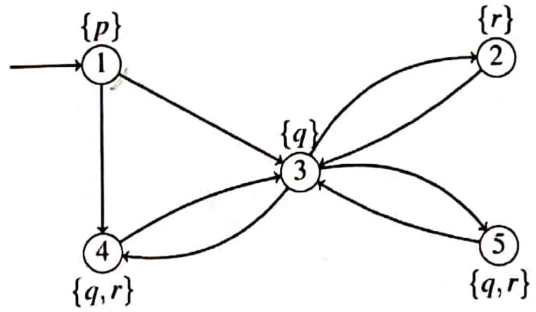
Exercice 1 (2 points). *Donner des formules LTL φ_1, φ_2, φ_3 et φ_4 qui traduisent les phrases suivantes :*

1. *La propriété p arrivera à un instant.*
2. *La propriété p est toujours vraie.*
3. *La propriété p se produira infiniment souvent.*
4. *La propriété p se produira infiniment souvent, à moins que chaque occurrence de p ne soit immédiatement suivie d'une occurrence de q.*

Exercice 2 (2 point). *Montrer que les deux formules LTL qui suivent sont équivalentes.*

1. $\mathsf{X}(\varphi \,\mathsf{U}\, \psi)$
2. $(\mathsf{X}\varphi)\,\mathsf{U}\,(\mathsf{X}\psi)$

Exercice 3 (4 points). *Soit $\mathcal{T}$ le système de transitions ci-dessous :*



Et soient $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ et φ_4 les formules suivantes :

$\varphi_1 = \mathsf{F}\mathsf{G}r$

$\varphi_2 = \mathsf{G}\mathsf{F}r$

$\varphi_3 = \mathsf{X}r \to \mathsf{X}\mathsf{X}r$

$\varphi_4 = p\mathsf{U}\mathsf{G}(q \vee p)$

Pour chaque i, déterminer si $\mathcal{T} \models_\forall \varphi_i$. Si c'est le cas, aucune justification n'est demandée. Si c'est n'est pas le cas, donner chemin ρ sur $\mathcal{T}$ (qui part de 1) tel que $\mathcal{L}(\rho)$ n'est pas un modèle linéaire de φ_i.

Exercice 4 (2 points). *Soit* $\mathsf{Ap} = \{p\}$

1. *Donner un automate de Buchi qui reconnaît tout mot infini sur $2^{\mathsf{Ap}} = \{\emptyset, \{p\}\}$ ayant uniquement un nombre fini (éventuellement nul) de positions qui vérifient p.*
2. *Donner une formule LTL φ qui caractérise le langage reconnu par l'automate de la question précédente. On rappelle qu'une formule LTL caractérise un langage quand l'ensemble des modèles de la formule est égal à l'ensemble de mots du langage.*

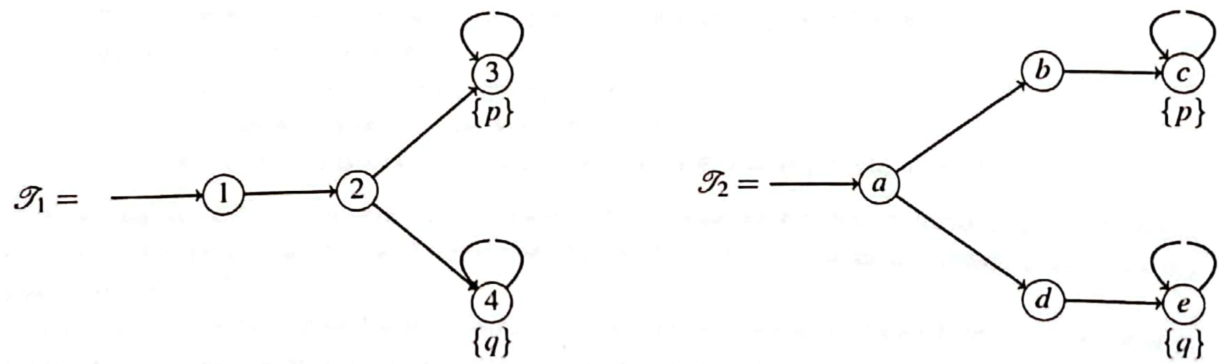
Exercice 5 (4 points). *Si φ est une formule LTL, on écrit $\mathsf{X}^n\varphi$ pour dénoter la formule $\overbrace{\mathsf{X}\cdots\mathsf{X}}^{n}\varphi$ autrement dit, φ précédé $n \geq 1$ fois par l'opérateur "X" (next). Étant donnés Γ un ensemble de formules et π un modèle LTL, on écrit $\pi \models \Gamma$ (π satisfait Γ) lorsque $\pi \models \varphi$ pour tout $\varphi \in \Gamma$. Considérons l'ensemble infini de formules Γ défini par :*

$$\Gamma = \{p, \mathsf{F}\mathsf{G}\neg p, \mathsf{X}p, \mathsf{X}^2p, \mathsf{X}^3p, \ldots, \mathsf{X}^np, \ldots\}$$

montrer que

1. *Il n'existe pas de modèle linéaire π telle que $\pi \models \Gamma$*
2. *Pour tout sous-ensemble fini Δ de Γ il existe un modèle linéaire π telle que $\pi \models \Delta$.*

Exercice 6 (5 points). *Si $\mathcal{T} = \langle S, S_I, R, \mathcal{L}\rangle$ est un système de transition et ψ une formule CTL, on écrit $\mathcal{T} \models \psi$ lorsque $\mathcal{T}, s \models \psi$ pour tout état initial $s \in S_I$. Soient $\mathcal{T}_1$ et $\mathcal{T}_2$ les deux systèmes suivants :*



1. *Montrer que* $\mathcal{T}_1 \models \mathsf{EX}(\mathsf{EX}\,p \wedge \mathsf{EX}\,q)$
2. *Montrer que* $\mathcal{T}_2 \not\models \mathsf{EX}(\mathsf{EX}\,p \wedge \mathsf{EX}\,q)$
3. *Montrer que* $Ex(\mathcal{T}_1) = Ex(\mathcal{T}_2)$.
4. *Soit* ψ *une formule CTL. On dit que* ψ *est exprimable en LTL quand il existe une formule LTL* ψ' *tel que* $\mathcal{T} \models \psi$ *ssi* $\mathcal{T} \models_{\forall} \psi'$. *Déduire, par le point 1,2 et 3 que* $\mathsf{EX}(\mathsf{EX}\,p \wedge \mathsf{EX}\,q)$ *n'est pas exprimable en LTL.*

Exercice 7 (5 points). *Soit* $\mathcal{T}$ *un système de transition. On définit la sémantique de l'operateur* ER *par la clause suivante*

> $\mathcal{T}, s \models \mathsf{E}(\varphi \,\mathsf{R}\, \psi)$ *ssi il existe un chemin* ρ *tel que* $\rho_1 = s$ *et soit* $\mathcal{T}, \rho_i \models \psi$ *pour tout nombre naturel* $i \geq 1$ *ou bien il existe un nombre naturel* $j \geq 1$ *tel que* $\mathcal{T}, \rho_j \models \varphi$ *et* $\mathcal{T}, \rho_k \models \psi$ *pour tout* $1 \leq k \leq j$.

Montrer que :

1. $\mathsf{E}(\varphi \,\mathsf{R}\, \psi) \equiv \psi \wedge (\varphi \vee \mathsf{EX}(\varphi \,\mathsf{R}\, \psi))$
2. $[\![(\varphi \,\mathsf{R}\, \psi)]\!]^{\mathcal{T}}$ *est un point fixe de la fonction monotone* $\mathsf{R}_{\varphi,\psi} : 2^S \to 2^S$ *définie par* $\mathsf{R}_{\varphi,\psi}(A) = [\![\psi]\!]^{\mathcal{T}} \cap ([\![\varphi]\!]^{\mathcal{T}} \cup Pre(A))$
3. $[\![(\varphi \,\mathsf{R}\, \psi)]\!]^{\mathcal{T}}$ *est le plus grand point fixe de la fonction monotone* $\mathsf{R}_{\varphi,\psi}$

1 Rappels sur LTL

Soit Ap un ensemble de formules atomiques. Une *interprétation* (ou modèle) linéaire est une fonction $\pi : \mathbb{N} \to 2^{Ap}$, autrement dit un mot ou séquence infini $\pi = \pi_1, \pi_2, \ldots$ d'ensembles de formules atomiques.

Soit π une interprétation linéaire, $i \in \mathbb{N}$ un nombre naturel et φ une formule LTL. Nous écrivons $\pi, i \models \varphi$ pour dénoter que φ est vraie à la position i dans le modèle π. Cette notion est définie par induction sur la structure de φ comme il suit :

- $\pi, i \models \top$ pour toute position i ;
- $\pi, i \models p$ ssi $p \in \pi_i$ pour toute formule atomique p ;
- $\pi, i \models \varphi \wedge \psi$ ssi $\pi, i \models \varphi$ et $\pi, i \models \psi$;
- $\pi, i \models \neg\varphi$ ssi c'est n'est pas le cas que $\pi, i \models \varphi$ (dénoté par $\pi, i \not\models \varphi$) ;
- $\pi, i \models \mathsf{X}\,\varphi$ ssi $\pi, i+1 \models \varphi$;
- $\pi, i \models \mathsf{F}\,\varphi$ ssi il existe $j \geq i$ tel que $\pi, j \models \varphi$;
- $\pi, i \models \mathsf{G}\,\varphi$ ssi pour tout $j \geq i$ on a que $\pi, j \models \varphi$;
- $\pi, i \models \varphi \,\mathsf{U}\, \psi$ ssi il existe $k \geq i$ tel que $\pi, k \models \psi$ et $\pi, j \models \varphi$ pour tout $i \leq j < k$.

Nous disons qu'une formule φ est **vraie** dans un modèle linéaire π lorsque $\pi_1 \models \varphi$. Nous dénotons cette notion par $\pi \models \varphi$. L'ensemble des modèles linéaires dont la formule φ est vraie est dénoté par $Mod(\varphi)$.

Une formule φ est **valide** lorsqu'elle est vraie dans tout modèle. φ. Deux formules φ et ψ sont équivalents (dénoté par $\varphi \equiv \psi$) lorsque pour toute interprétation π on a que $\pi \models \varphi$ ssi $\pi \models \psi$.

Si $\mathcal{T} = \langle S, S_I, R, \mathcal{L} \rangle$ est un système de transition, et $\rho = s_1, s_2, s_3 \ldots$ est un chemin sur $\mathcal{T}$, on rappelle que $\mathcal{L}(\rho)$ dénote la séquence infinie d'ensemble de proposition atomique obtenue en appliquant la fonction $\mathcal{L}$ à chaque état de ρ. C'est-à-dire $\mathcal{L}(\rho) = \mathcal{L}(s_1), \mathcal{L}(s_2), \mathcal{L}(s_3), \ldots$. On appelle ce type de séquences infinies **exécutions**

Si φ est une formule LTL, on écrit $\mathcal{T} \models_\forall \varphi$ ssi pour tout état initial, $s \in S_i$ pour tout chemin ρ sur $\mathcal{T}$ qui commence à s on a que $\mathcal{L}(\rho) \models \psi$.

Si $\mathcal{T}$ est un système de transition, alors $Ex(\mathcal{T})$ dénote l'ensemble des exécutions sur $\mathcal{T}$. C'est-à-dire $Ex(\mathcal{T}) = \{\mathcal{L}(\rho) \mid \rho$ est un chemin sur $\mathcal{T}$ et ρ commence à un état initial$\}$

2 Rappels sur CTL

Soit $\mathcal{T} = \langle S, S_I, R, \mathcal{L} \rangle$ un système de transition. Comme d'habitude, un chemin (dans $\mathcal{T}$) est une séquence infinie $s_1, s_2, s_3, \ldots$ d'états telle que $(s_i, s_{i+1}) \in R$ pour tout nombre naturel i. Comme d'habitude pour tout $i \in \mathbb{N}$, ρ_i désigne le i-ème élément du chemin. On définit "$\mathcal{T}$ satisfait φ à l'état s" (écrit $\mathcal{T}, s \models \varphi$) par induction sur la structure de φ

- $\mathcal{T}, s \models \top$ pour tout $s \in S$;
- $\mathcal{T}, s \models p$ ssi $p \in \mathcal{L}(s)$;
- $\mathcal{T}, s \models \neg\varphi$ ssi c'est n'est pas le cas que $\mathcal{T}, s \models \varphi$;
- $\mathcal{T}, s \models \varphi \wedge \psi$ ssi $\mathcal{T}, s \models \varphi$ et $\mathcal{T}, s \models \psi$
- $\mathcal{T}, s \models \mathsf{EX}\,\varphi$ ssi il existe un chemin ρ tel que $\rho_1 = s$ et $\mathcal{T}, \rho_2 \models \varphi$
- $\mathcal{T}, s \models \mathsf{AX}\,\varphi$ ssi pour tout chemin ρ tel que $\rho_1 = s$ on a que $\mathcal{T}, \rho_2 \models \varphi$
- $\mathcal{T}, s \models \mathsf{EF}\,\varphi$ ssi, il existe un chemin ρ tel que $\rho_1 = s$ et il existe $j \geq 1$ tel que $\mathcal{T}, \rho_j \models \varphi$
- $\mathcal{T}, s \models \mathsf{AF}\,\varphi$ ssi, pour tout chemin ρ tel que $\rho_1 = s$ il existe $j \geq 1$ tel que $\mathcal{T}, \rho_j \models \varphi$
- $\mathcal{T}, s \models \mathsf{EG}\,\varphi$ ssi il existe un chemin ρ tel que $\rho_1 = s$ et pour tout $j \geq 1$ on a que $\mathcal{T}, \rho_j \models \varphi$
- $\mathcal{T}, s \models \mathsf{AG}\,\varphi$ ssi pour tout chemin ρ tel que $\rho_1 = s$ et pour tout $j \geq 1$ on a que $\mathcal{T}, \rho_j \models \varphi$
- $\mathcal{T}, s \models \mathsf{E}\,\varphi\,\mathsf{U}\,\psi$ ssi il existe un chemin ρ tel que $\rho_1 = s$ et il existe $j \geq 1$ tel que $T, \rho_j \models \psi$ et $\mathcal{T}, \rho_k \models \varphi$ pour tout $1 \leq k < j$ $\mathcal{T}, \rho_j \models \varphi$
- $\mathcal{T}, s \models \mathsf{A}\,\varphi\,\mathsf{U}\,\psi$ ssi pour tout chemin ρ tel que $\rho_1 = s$ il existe $j \geq 1$ tel que $T, \rho_j \models \psi$ et $\mathcal{T}, \rho_k \models \varphi$ pour tout $1 \leq k < j$

Si $\mathcal{T}$ est un système de transition et φ une formule CTL, alors $[\![\varphi]\!]^{\mathcal{T}}$ dénote l'ensemble d'états de $\mathcal{T}$ qui satisfont φ. C'est-à-dire $[\![\varphi]\!]^{\mathcal{T}} = \{s \in S \mid \mathcal{T}, s \models \varphi\}$.

Si X est un sous-ensemble de S alors $Pre(X) = \{s \in S \mid$ il existse $s' \in X$ tel que $\langle s, s' \rangle \in R\}$. On rappelle que pour toute formule φ et tout système de transition $\mathcal{T}$ on obtient que :

$$[\![\mathsf{EX}\,\varphi]\!]^{\mathcal{T}} = Pre([\![\varphi]\!]^{\mathcal{T}})$$

Si $\mathcal{T}$ est un système de transition et $f : 2^S \to 2^S$ est une fonction, on dit qu'un sous-ensemble A de S est un **point fixe** de f si, $f(A) = A$. De plus, X est le plus petit point fixe de f si A est contenu dans tout autre pointe fixe B. Si tout autre point fixe B de f est contenu dans A alors A est le plus grand point fixe de f.