UE HAI816I Logique pour l'Intelligence Artificielle et le Génie Logiciel
Examen du mercredi 10 mai 2023 — 13h durée 2h — FDS Amphi 5.02B
Aucun document n'est autorisé, mais il ya des rappels de cours à la fin du sujet.

Lisez tout le sujet attentivement avant de commencer à répondre aux questions.

On rappelle que $A \to (B \to C) \equiv (A \,\&\, B) \to C$ et que $i \models A \to (B \to C)$ ssi $i \models (A \,\&\, B) \to C$. C'est simple, mais ça peut être utile ! Pensez aussi à mettre les quantificateurs en tête des formules, ça peut aider.

EXERCICE 1. Les axiomes T, B, 4 et 5 sont donnés dans les rappels de cours.

Question 1.a Exprimer que les axiomes T, B, 4 et 5 sont vrais en chaque monde possible d'un modèle de Kripke en utilisant la traduction de la logique modale dans la logique du premier ordre.

Question 1.b Montrer que "la traduction au premier ordre de l'axiome (T) est vraie en chaque x_i du modèle du premier ordre" lorsque que l'accessibilité est réflexive. La réciproque n'est pas demandée.

Question 1.c Montrer que "la traduction au premier ordre de l'axiome (4) est vraie en chaque x_i du modèle du premier ordre" lorsque l'accessibilité est transitive. La réciproque n'est pas demandée.

Question 1.d Montrer que "la traduction au premier ordre de l'axiome (B) est vraie en chaque x_i du modèle du premier ordre" lorsque l'accessibilité est symétrique. La réciproque n'est pas demandée.

Question 1.e Montrer que "la traduction au premier ordre de l'axiome (5) est vraie en chaque x_i du modèle du premier ordre" lorsque l'accessibilité est euclidienne. La réciproque n'est pas demandée.

Question 1.f Soit KT5 la collection des cadres qui sont réflexifs et euclidiens et soit KT4B la collection des cadres qui sont réflexifs, transitifs et symétriques. Montrer que les formules valides dans tous les modèles de cadre KT5 sont les mêmes qui sont valides dans tous les cadres de KT4B.

Question 1.g Donner un système déductif qui permette d'obtenir toutes les formules valides dans tous les modèles dont le cadre est dans KT4B.

EXERCICE 2 (Le puzzle des enfants sales)**.** Quatre enfants a, b, c, d ont joué dehors dans la boue. Chacun d'entre eux peut avoir de la boue sur le front ou pas. Chaque enfant sait si chacun des trois autres a ou non de la boue sur le front, mais il ne sait pas si lui-même en a ou non. L'enfant x a de la boue sur le front sera noté X (la même lettre en majuscule), et le fait que l'enfant x sache que la formule H est vraie sera notée $\mathsf{K}_x H$.

La logique de la connaissance adaptée à décrire ce genre de situations où les propositions de base sont en petit nombre et les formules complexes peu pertinentes est S5. Pour S5 les relations d'accessibilité (une par agent) sont des relations d'équivalence R^x *et* $mR^x n$ *signifie l'agent x ne peut pas distinguer les mondes m et n. Les axiomes de S5 sont, pour toutes formules G et H :*

(κ) : $\mathsf{K}_x(G \to H) \to (\mathsf{K}_x G \to \mathsf{K}_x H)$
(T) : $(\mathsf{K}_x G) \to G$
(B) : $p \to \Box\Diamond p$
(4) : $(\mathsf{K}_x G) \to (\mathsf{K}_x \mathsf{K}_x G)$
(5) : $(\neg \mathsf{K}_x G) \to (\mathsf{K}_x \neg \mathsf{K}_x G)$

(i). Le père leur dit
— Au moins l'un de vous a de la boue sur le front.

(ii). Ensuite le père leur demande :
— L'un d'entre vous sait-il s'il a ou non de la boue sur le front ?

(iii). Les quatre enfants répondent qu'ils ne savent pas s'ils ont de la boue sur le front ou non.

(iv). Le père repose la même question :
— L'un de vous sait-il s'il a ou non de la boue sur le front ?

(v). Les enfants a et b répondent qu'ils savent s'ils ont ou non de la boue sur le front, sans dire s'ils en ont ou pas.

(vi). Après cette réponse de a et b, les enfants c et d répondent qu'il savent aussi.

Question 2.a Dans S5 est il possible d'avoir à la fois $m \models \mathsf{K}_b B$ et $m \models \mathsf{K}_b \neg B$ pour un même monde m ? Oui ? Non ? Pourquoi ?

Question 2.b Avant que le père n'intervienne, quelles sont les situations possibles (mondes possibles) ? On donnera à chaque situation un nom judicieux en fonction des enfants sales dans cette situtation.

Question 2.c Dessiner le modèle de Kripke initial, vant que le père n'intervienne. On notera les relations d'accessibilité $\xrightarrow{a}$ pour R^a, $\xrightarrow{b}$ pour R^b, $\xrightarrow{c}$ pour R^c et $\xrightarrow{d}$ pour R^d (ou avec des couleurs différentes explicitées dans une légende). Il est conseillé de dessiner les mondes possibles par strates correspondant chacune à un nombre d'enfants sales.

Question 2.d Dans ce modèle initial, notez sur chaque monde m la formule $\mathsf{K}_x X$ lorsque cette formule est vraie dans le monde m (c'est-à-dire lorsque $m \models \mathsf{K}_x X$).

Question 2.e Dessinez le modèle de Kripke après (i). Expliquez en une phrase ou deux comment vous l'avez obtenu à partir du modèle de Kripke de départ. Notez de nouveau sur chaque monde m la formule $\mathsf{K}_x X$ ou $\mathsf{K}_x \neg X$, si cette formule est vraie dans le monde m (c'est-à-dire lorsque $m \models \mathsf{K}_x X$ ou $m \models \mathsf{K}_x \neg X$).

Question 2.f Modèle de Kripke après (iii). Expliquez en une phrase ou deux comment vous l'avez obtenu à partir du modèle de Kripke précédent. Notez sur chaque monde m la formule $\mathsf{K}_x X$ ou $\mathsf{K}_x \neg X$, si cette formule est vraie dans le monde m (c'est-à-dire lorsque $m \models \mathsf{K}_x X$ ou $m \models \mathsf{K}_x \neg X$.

Question 2.g Modèle de Kripke après (v). Expliquez en une phrase ou deux comment vous l'avez obtenu à partir du modèle de Kripke précédent. Notez sur chaque monde m la formule $\mathsf{K}_x X$ ou $\mathsf{K}_x \neg X$, si cette formule est vraie dans le monde m (c'est-à-dire lorsque $m \models \mathsf{K}_x X$ ou $m \models \mathsf{K}_x \neg X$.

Question 2.h Sait-on qui est sale après (iii) ? si oui quels enfants sont sales ? Lesquels ne le sont pas. Justifiez votre réponse.

Question 2.i Sait-on qui est sale après (v) ? si oui quels enfants sont sales ? Lesquels ne le sont pas ? Justifiez votre réponse.

Question 2.j Qu'apporte l'étape (vi) ? Expliquez.

EXERCICE 3 (Logiques de description). On se donne un unique rôle "parent" (dont le premier argument est le parent et le second l'enfant) et on se donne deux concept de base : "homme" et "femme". On se donne également des concepts individuels : albert,jean,paul, bertrand, edgar, sophie, simone, germaine, christiane, marie, madeleine.

Pour fixer les idées, on peut se donner la ABox suivante :

parent(albert,jean).
parent(jean,paul).
parent(paul,bertrand).
parent(paul,sophie).
parent(jean,simone).
parent(louis,benoit).
parent(paul,edgar).
parent(germaine,jean).
parent(christiane,simone).
parent(christiane,paul).

parent(simone,benoit).
parent(marie,bertrand).
parent(marie,sophie).
parent(madeleine,edgar).

homme(albert).
homme(jean).
homme(paul).
homme(bertrand).
homme(louis).
homme(benoit).
homme(edgar).

femme(germaine). femme(simone). femme(sophie).
femme(christiane). femme(marie). femme(madeleine).

Question 3.a Ecrire en ALC, en logique du premier ordre et en logique modale avec les modalités $[r]$ et $\langle r\rangle$ pour chaque rôle r :

1. avoir une petite fille nommée sophie
2. être une grand-mère de sophie
3. avoir au moins une fille
4. n'avoir que des fils

Question 3.b La notation $R \circ S$ désigne la composition de deux relations binaires : $(x,y) \in R \circ S$ ssi $\exists (x,u) \in R \; \& \; (u,y) \in S$ (attention à l'ordre, pour lorsque f et g sont deux fonctions on définit souvent $f \circ g$ avec l'autre ordre).

Si on impose que l'interprétation de R (notée comme R) satisfasse $(R \circ R) \subset R$ que cela signifie-t-il du point de vue de la logique modale et du modèle de Kripke associé ? Comment imposer cela en restant à l'intérieur de la logique modale ?

Question 3.c On s'autorise maintenant à référer à la clôture transitive et à l'inverse d'un rôle. Exprimer les concepts et contraintes suivantes, en ALC étenue pas ces opérations * et $^-$ sur les rôles, en précisant à chaque fois si on peut ou non définir ces concepts en logique du premier ordre ou en logique modale, et en donnant ces formulations lorsqu'elles existent.

1. être un parent de jean ?
2. être un ancêtre de jean ?
3. être un descendant de jean ?
4. être un demi frère de jean ?

EXERCICE 4 (Équivalences de point-fixe). Cet exercice porte sur CTL.

Question 4.a Soient φ et ψ deux formules CTL quelconques. Montrer que

$$\mathsf{EG}\varphi \equiv \varphi \wedge \mathsf{EXEG}\varphi$$

Question 4.b Soit $\mathcal{T}$ un système de transitions et φ, ψ deux formules CTL. Considérons la fonction EG_{φ} définie par

$$\mathsf{EG}(X) = [\![\varphi]\!]^{\mathcal{T}} \cap (Pre(X))$$

Montrez que

$$[\![\mathsf{EG}\varphi]\!]^{\mathcal{T}}$$

est le plus grand point fixe de la fonction EG_{φ}.

EXERCICE 5. Nous disons qu'une logique L est compacte lorsque pour tout ensemble de formules Γ de L on a que Γ est satisfiable si et seulement si tout sous ensemble fini de Γ l'est.

Question 5.a Montrer que la logique CTL n'est pas compacte. Pour le faire, trouvez un ensemble infini de formules de CTL qui n'est pas satisfiable mais dont tous les sous ensembles finis sont statisfiables.

QUELQUES RAPPELS DE COURS

FORMULES MODALES ET MODÈLES DE KRIPKE

Les formules modales sont définies à partir d'un ensemble de propositions $\mathcal{P}$ par les connecteurs unaires $\neg, \Box, \Diamond$ et les connecteurs binaires $\vee, \&, \rightarrow$. On a les équivalence usuelles :

$A \rightarrow B \equiv \neg A \vee B$

$\neg(A \vee B) \equiv \neg A \& \neg B$

$\neg(A \& B) \equiv \neg A \vee \neg B$

$\neg\Diamond A \equiv \Box\neg A$

$\neg\Box A \equiv \Diamond\neg A$

$\neg\neg A \equiv A$

Definition 1 (Cadre). Un *cadre* $\langle \mathcal{M}, \mathsf{R}\rangle$ est constitué

— d'un ensemble non vide $\mathcal{M} = \{\mathfrak{m}_i \,|\, i \in I\}$ dont les membres sont généralement appelés mondes possibles ou situations,

— d'une relation binaire R sur $\mathcal{M}$, c'est-à-dire un sous ensemble R de $\mathcal{M} \times \mathcal{M}$ appelée accessibilité.

Lorsque $\mathfrak{m}_i \mathsf{R} \mathfrak{m}_j$ nous dirons que le monde $\mathfrak{m}_j$ est accessible depuis le monde $\mathfrak{m}_i$.

Definition 2. [Modèle de Kripke] Étant donné un cadre $\langle \mathcal{M}, \mathsf{R}\rangle$ un modèle de Kripke de cadre $\langle \mathcal{M}, \mathsf{R}\rangle$ s'obtient par la donnée d'une relation binaire $\Vdash_0$ appelée *forcing atomique*, entre mondes possibles et atomes (on dit aussi variables propositionnelles, lettres) de $\mathcal{P}$: $\models_0$ est un sous ensemble de $\mathcal{M} \times \mathcal{P}$. Comme souvent pour une relation binaire, on notera $\mathfrak{m}_i \models p_k$ pour $(\mathfrak{m}_i, p_k)$ appartient à $\models_0$.

Definition 3 (Vérité en un monde possible dans un modèle). Soit $< \mathcal{M}, \mathsf{R}, \models_0 >$ un modèle de Kripke. Nous étendons la relation $\models_0$ à toutes les formules du langage, en définissant $\mathfrak{m}_i \models A$ par induction sur la formule A.

1. lorsque $p \in \mathcal{P}$ est une variable propositionnelle $\mathfrak{m}_i \models p$ si et seulement si $\mathfrak{m}_i \models_0 p$;
2. $\mathfrak{m}_i \models \neg A$ si et seulement si $\mathfrak{m}_i \not\models A$;
3. $\mathfrak{m}_i \models A \wedge B$ si et seulement si ($\mathfrak{m}_i \models A$ et $\mathfrak{m}_i \models B$) ;
4. $\mathfrak{m}_i \models A \rightarrow B$ si et seulement si ($\mathfrak{m}_i \models A$ implique $\mathfrak{m}_i \models B$) ;
5. $\mathfrak{m}_i \models A \vee B$ si et seulement si ($\mathfrak{m}_i \models A$ ou $\mathfrak{m}_i \models B$) ;
6. $\mathfrak{m}_i \models \Box A$ si et seulement si $\mathfrak{m}_j \models A$ pour tout j tel que $\mathfrak{m}_i \mathsf{R} \mathfrak{m}_j$;
7. $\mathfrak{m}_i \models \Diamond A$ si et seulement si $\mathfrak{m}_j \models A$ pour au moins un j tel que $\mathfrak{m}_i \mathsf{R} \mathfrak{m}_j$.

Definition 4. Une formlule G est dite valide dans un modèle de Kripke $\mathcal{M}$ lorsque $\mathfrak{m}_i \models G$ pour tout $\mathfrak{m}_i$ de $\mathcal{M}$.

AXIOMES ET PROPRIÉTÉS DES CADRES

— une relation R est dite *réflexive* lorsque pour tout x du domaine $x\mathsf{R}x$

— une relation R est dite *transitive* lorsque pour tout x, y, z du domaine si $x\mathsf{R}y$ et $y\mathsf{R}z$ alors $x\mathsf{R}z$.

— une relation R est dite *symétrique* lorsque pour tous x, y du domaine si $x\mathsf{R}y$ alors $x\mathsf{R}y$

— une relation R est dite *euclidienne* lorsque pour tous x, y, z du domaine tels que $x\mathsf{R}y$ et $x\mathsf{R}z$ on a $y\mathsf{R}z$ et $z\mathsf{R}y$ — attention, x, y et z peuvent être égaux.

Le schéma d'axiome *nom* décrit par la formule *axiome* est satisfait dans toute interprétation de cadre $\langle(\mathfrak{m}_i)_{i\in I}, \mathsf{R}\rangle$ si et seulement si l'accessibilité R est une relation ayant la propriété indiqué dans le tableau que voici :

nom	*axiome*	*accessibilité*
T	$\Box p \rightarrow p$	réflexive
4	$\Box p \rightarrow \Box\Box p$	transitive
B	$p \rightarrow \Box\Diamond p$	symétrique
5	$\Diamond p \rightarrow \Box\Diamond p$	euclidienne

RAPPELS SUR CTL

Soit $\mathcal{T} = \langle S, S_I, R, \mathcal{L}\rangle$ un système de transition. Comme d'habitude, un chemin (dans $\mathcal{T}$) est une séquence infinie $s_1, s_2, s_3, \ldots$ d'états telle que $(s_i, s_{i+1}) \in R$ pour tout nombre naturel i. Comme d'habitude pour tout $i \in \mathbb{N}$, ρ_i désigne le i-ème élément du chemin. On définit "$\mathcal{T}$ satisfait φ à l'état s" (écrit $\mathcal{T}, s \models \varphi$) par induction sur la structure de φ

- $\mathcal{T}, s \models \top$ pour tout $s \in S$;
- $\mathcal{T}, s \models p$ ssi $p \in \mathcal{L}(s)$;
- $\mathcal{T}, s \models \neg\varphi$ ssi c'est n'est pas le cas que $\mathcal{T}, s \models \varphi$;
- $\mathcal{T}, s \models \varphi \wedge \psi$ ssi $\mathcal{T}, s \models \varphi$ et $\mathcal{T}, s \models \psi$
- $\mathcal{T}, s \models \mathsf{EX}\varphi$ ssi il existe un chemin ρ tel que $\rho_1 = s$ et $\mathcal{T}, \rho_2 \models \varphi$
- $\mathcal{T}, s \models \mathsf{AX}\varphi$ ssi pour tout chemin ρ tel que $\rho_1 = s$ on a que $\mathcal{T}, \rho_2 \models \varphi$
- $\mathcal{T}, s \models \mathsf{EF}\varphi$ ssi, il existe un chemin ρ tel que $\rho_1 = s$ et il existe $j \geq 1$ tel que $\mathcal{T}, \rho_j \models \varphi$
- $\mathcal{T}, s \models \mathsf{AF}\varphi$ ssi, pour tout chemin ρ tel que $\rho_1 = s$ il existe $j \geq 1$ tel que $\mathcal{T}, \rho_j \models \varphi$
- $\mathcal{T}, s \models \mathsf{EG}\varphi$ ssi il existe un chemin ρ tel que $\rho_1 = s$ et pour tout $j \geq 1$ on a que $\mathcal{T}, \rho_j \models \varphi$
- $\mathcal{T}, s \models \mathsf{AG}\varphi$ ssi pour tout chemin ρ tel que $\rho_1 = s$ et pour tout $j \geq 1$ on a que $\mathcal{T}, \rho_j \models \varphi$
- $\mathcal{T}, s \models \mathsf{E}\varphi\mathsf{U}\psi$ ssi il existe un chemin ρ tel que $\rho_1 = s$ et il existe $j \geq 1$ tel que $T, \rho_j \models \psi$ et $\mathcal{T}, \rho_k \models \varphi$ pour tout $1 \leq k < j$ $\mathcal{T}, \rho_j \models \varphi$
- $\mathcal{T}, s \models \mathsf{A}\varphi\mathsf{U}\psi$ ssi pour tout chemin ρ tel que $\rho_1 = s$ il existe $j \geq 1$ tel que $T, \rho_j \models \psi$ et $\mathcal{T}, \rho_k \models \varphi$ pour tout $1 \leq k < j$

Si $\mathcal{T}$ est un système de transition et φ une formule CTL, alors $[\![\varphi]\!]^{\mathcal{T}}$ dénote l'ensemble d'états de $\mathcal{T}$ qui satisfont φ. C'est-à-dire $[\![\varphi]\!]^{\mathcal{T}} = \{s \in S \mid \mathcal{T}, s \models \varphi\}$.

Si X est un sous-ensemble de S alors $Pre(X) = \{s \in S \mid$ il existse $s' \in X$ tel que $\langle s, s'\rangle \in R\}$. On rappelle que pour toute formule φ et tout système de transition $\mathcal{T}$ on obtient que :

$$[\![\mathsf{EX}\varphi]\!]^{\mathcal{T}} = Pre([\![\varphi]\!]^{\mathcal{T}})$$

Si $\mathcal{T}$ est un système de transition et $f : 2^S \to 2^S$ est une fonction, on dit qu'un sous-ensemble A de S est un **point fixe** de f si, $f(A) = A$. De plus, X est le plus petit point fixe de f si A est contenu dans tout autre pointe fixe B. Si tout autre point fixe B de f est contenu dans A alors A est le plus grand point fixe de f.

TRADUCTION DE LA LOGIQUE MODALE EN LOGIQUE DU PREMIER ORDRE

Soit $\mathcal{P} = \{p_1, \ldots, p_n, \ldots\}$ un ensemble de lettres propositionnelles d'un langage modal. Pour chacune de ces lettres propositionnelles, on se donne un symbole de prédicat unaire $P_1, \ldots P_n, \ldots$ dans un langage du premier ordre. Soit R un symbole de prédicat binaire.

Etant donnée une variable x on associe à chaque formule modale F une formule du premier ordre $\mathsf{fol}_x(F)$ dans le langage R et $P_1, \ldots P_n, \ldots$, la traduction de F en x.

$$\begin{array}{rcl}
\mathsf{fol}_x(p_i) & = & P_i(x) \\
\mathsf{fol}_x(\neg A) & = & \neg\mathsf{fol}_x(A) \\
\mathsf{fol}_x(A \wedge B) & = & \mathsf{fol}_x(A) \wedge \mathsf{fol}_x(B) \\
\mathsf{fol}_x(A \vee B) & = & \mathsf{fol}_x(A) \vee \mathsf{fol}_x(B) \\
\mathsf{fol}_x(A \to B) & = & \mathsf{fol}_x(A) \to \mathsf{fol}_x(B) \\
\mathsf{fol}_x(\Box A) & = & \forall y\,(R(x,y) \to \mathsf{fol}_y(A)) \\
\mathsf{fol}_x(\Diamond A) & = & \exists y\,(R(x,y) \wedge \mathsf{fol}_y(A))
\end{array}$$

Étant donné un modèle de Kripke $\mathfrak{M} =< \mathcal{M}, \mathsf{R}, \Vdash_0>$, on peut définir une interprétation du premier ordre $\mathfrak{M}' = (M', -^{\mathfrak{M}'})$ pour le langage du premier ordre mentionné ci-haut en posant :

- La base de modèle du premier ordre est l'ensemble des mondes du modèle de Kripke, c'est-à-dire $M' = \mathcal{M}$.
- pour tout P_i l'interprétation de P_i dans $\mathfrak{M}'$ est donné par l'ensemble des mondes qui sont en relation de forcing avec p_i, c'est-à-dire $P_i^{\mathfrak{M}'} = \{w \in M' \mid w \Vdash_0 p_i\}$
- L'interprétation du symbole binaire de prédicat R est donnée par l'ensemble de couples de mondes qui sont en relation par R, c'est-à-dire $R^{\mathfrak{M}'} = \{(w, w') \mid w\mathsf{R}w' \textit{ dans } \mathcal{M}\}$

On peut prouver la proposition suivante par induction sur la formule :