# Examen

*Durée 1h30. Les téléphones portables, tablettes, ordinateurs ne sont pas autorisés. Sont autorisés : une feuille A4 manuscrite, une calculatrice type collège ou lycée en mode examen. La qualité de la rédaction sera prise en compte.*

## Exercice 1.

On considère l'endomorphisme $f$ de $\mathbb{R}^3$ défini par $f : (x, y, z) \to (3x - z, 2x + 4y + 2z, -x + 3z)$.

1. Déterminer la matrice $A = Mat(f)_B$ de $f$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer le polynôme caractéristique de $f$. En déduire les valeurs propres de $f$.
3. Déterminer une base pour chaque espace propre de $f$. L'endomorphisme $f$ est-il diagonalisable ?
4. Trouver une matrice $P$ telle que $A = PDP^{-1}$, où $D$ est une matrice diagonale que l'on explicitera.
5. Déterminer la matrice $A^n$, pour tout $n \geq 1$.

## Exercice 2.

L'espace est muni d'un repère orthonormé. Calculer la distance du point $M(-1; 0; 1)$ à la droite $D$ dont une représentation paramétrique est :

$$(D) : \begin{cases} x = -1 + t \\ y = 5t \\ z = 3t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

## Exercice 3.

Soit $A$ une matrice carrée de taille $n \times n$. On suppose que $A$ est inversible et que $\lambda \in \mathbb{R}$ est une valeur propre de $A$.

1. Démontrer que $\lambda \neq 0$.
2. Démontrer que si $x$ est un vecteur propre de $A$ pour la valeur propre $\lambda$ alors il est vecteur propre de $A^{-1}$ de valeur propre $\frac{1}{\lambda}$.

## Exercice 4.

Pour quelles valeurs de $t \in \mathbb{R}$ les vecteurs $\{(1, 0, t), (1, 1, -t), (t, 0, 1)\}$ forment-ils une base de $\mathbb{R}^3$ ? Inverser la matrice de ces vecteurs dans la base canonique, lorsque c'est possible.

## Exercice 5.

On munit le plan $\mathbb{R}^2$ d'une structure d'espace vectoriel avec la base canonique $\{e_1, e_2\}$. Soit $\mathcal{R}$ la rotation du plan de centre $O$ et d'angle $\theta$.

1. Montrer que $\mathcal{R}$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$.
2. Si $\theta$ n'est pas un multiple de $\pi$, montrer que $\mathcal{R}$ n'admet aucun vecteur propre.
3. Si $\theta = \pi$, déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de $\mathcal{R}$.
4. Si $\theta = 2\pi$, déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de $\mathcal{R}$.