HAI816I Logique pour le génie logiciel et l'intelligence artificielle
Épreuve de contrôle continu du mercredi 15 février 2023 14:45
durée 1h (tiers temps: 1h30)

Vous trouverez des rappels de cours à la fin du sujet : en particulier uen formule G est valide dans un modèle de Kripke lorsqu'elle est vraie en chacun des mondes possibles : $\forall \mathfrak{m}_i \in \mathscr{M}\ \mathfrak{m}_i \models G$.

Exercice 1 Vérification de formule dans un modèle de Kripke donné Soit le modèle de Kripke défini par :

1. Mondes possibles : $\mathscr{M} = \{\mathfrak{m}_0, \mathfrak{m}_1\}$
2. Accessibilité : $\mathfrak{m}_0 R \mathfrak{m}_1$ et $\mathfrak{m}_1 R \mathfrak{m}_1$.
3. Forcing atomique : $\mathfrak{m}_1 \models p$ (et $\mathfrak{m}_0 \not\models p$).

Question 1.a Dessinez ce modèle de Kripke.

Question 1.b Montrez que p n'est pas valide dans ce modèle.

Question 1.c Montrez que $\Box p$ est valide dans ce modèle.

Question 1.d Montrez que $\Diamond p$ est valide dans ce modèle.

Question 1.e Montrez que tout formule $\Box \cdots \Box p$ ($n \geq 1$ fois la modalité $\Box$) est valide dans ce modèle.

Question 1.f Montrez que tout formule $\Diamond \cdots \Diamond p$ ($n \geq 1$ fois la modalité $\Box$) est valide dans ce modèle.

Question 1.g Montrez que tout formule $\circ \cdots \circ p$ ($n \geq 1$ fois une modalité qui est $\Diamond$ ou $\Box$ c'est-à-dire $\circ = \Box$ ou $\circ = \Diamond$) est valide dans ce modèle.

Exercice 2 Construction de modèles de Kripke Pour donner un modèle de Kripke, un dessin clair suffit.

Question 2.a Construire un modèle de Kripke où $\Box p \to \Box\Box p$ est fausse en au moins un monde possible — on précisera lequel.

Question 2.b Construire un modèle de Kripke où $\Box\Box p \to \Box p$ est fausse en au moins un monde possible — on précisera lequel.

Question 2.c Construire un modèle de Kripke où $\Diamond p \wedge \Diamond \neg p$ est vraie en au moins un monde possible — on précisera lequel.

Question 2.d Construire un modèle de Kripke où $\Diamond p \wedge \Diamond \neg p$ est vraie en chacun des mondes possibles.

Exercice 3 Bissimulation Etant donnés deux modèles de Kripke

$\mathscr{M}^a = \langle \mathrm{m}_i^a, R^a, \models_0^b \rangle$ et $\mathscr{M}^b = \langle \mathrm{m}_i^a, R^a, \models_0^b \rangle$

et une relation de bissimulation B entre les deux (définition dans les rappels), montrez par induction sur la formule G que

$Biss(G)$: pour toute paire de mondes possibles bissimilaires,
c'est-à-dire pour tous $\mathrm{m}_i^a \in \mathscr{M}^a$ et $\mathrm{m}_j^b \in \mathscr{M}^b$ avec $\mathrm{m}_i^a B \mathrm{m}_j^b$
on a $\mathrm{m}_i^a \models G$ si et seulement si $\mathrm{m}_j^b \models G$.

On procèdera par induction sur la formule G.

Question 3.a On commencera par montrer que $Biss(p)$ pour p une variable propositionnelle.

On montrera ensuite que

Question 3.b $Biss(G_1)$ entraîne $Biss(\neg G_1)$,

Question 3.c $Biss(G_1)$ et $Biss(G_2)$ entraînent $Biss(G_1 \& G_2)$.

Question 3.d $Biss(G_1)$ entraîne $Biss(\Diamond G_1)$,

Question 3.e On concluera en explicitant le type d'induction utilisé.

Rappels : définitions Modèles de Kripke, bissimulation Les formules modales sont définies à partir d'un ensemble de propositions $\mathscr{P}$ par les connecteurs unaires $\neg, \Box, \Diamond$ et les connecteurs binaires $\vee, \&, \rightarrow$. En raison des identités :

$A \rightarrow B \equiv \neg A \vee B$
$\neg(A \vee B) \equiv \neg A \& \neg B$
$\neg(A \& B) \equiv \neg A \vee \neg B$
$\neg \Diamond A \equiv \Box \neg A$
$\neg \Box A \equiv \Diamond \neg A$
$\neg\neg A \equiv A$

On peut n'utiliser que de la négation et un symbole binaire et d'une modalité pour exprimer toutes les formules (dans les définitions ci-après ne changent pas en remplaçant une formule par une formule équivalente).

Afin de définir l'interprétation d'une formule modale, nous supposerons donné un langage modal $\mathscr{L}$ défini à partir d'un ensemble de propositions $\mathscr{P}$, du connecteur unaire négation $\neg$, des connecteurs logiques binaires $\wedge, \vee, \rightarrow$ et des modalités $\Box, \Diamond$.

La première notion nécessaire est celle de cadre.

Définition 1 (Cadre). *Un* cadre $\langle \mathscr{M}, R \rangle$ *est constitué*

— *d'un ensemble non vide* $\mathscr{M} = \{\mathfrak{m}_i \,|\, i \in I\}$ *dont les membres sont généralement appelés mondes possibles ou situations,*

— *d'une relation binaire* R *sur* $\mathscr{M}$*, c'est-à-dire un sous ensemble* R *de* $\mathscr{M} \times \mathscr{M}$ *appelée accessibilité.*

On notera que R est une relation binaire quelconque. Il est tout à fait possible que $\mathfrak{m}_i R \mathfrak{m}_i$, que R ait des points sans successeur, des points sans prédécesseur, etc.

Lorsque $\mathfrak{m}_i R \mathfrak{m}_j$ nous dirons que le monde $\mathfrak{m}_j$ est accessible depuis le monde $\mathfrak{m}_i$.

Définition 2. *[Modèle de Kripke] Étant donné un cadre* $\langle \mathscr{M}, R \rangle$ *un modèle de Kripke de cadre* $\langle \mathscr{M}, R \rangle$ *s'obtient par la donnée d'une relation binaire* $\Vdash_0$ *appelée* forcing atomique, *entre mondes possibles et atomes (on dit aussi variables propositionnelles, lettres) de* $\mathscr{P}$ *:* $\models_0$ *est un sous ensemble de* $\mathscr{M} \times \mathscr{P}$*. Comme souvent pour une relation binaire, on notera* $\mathfrak{m}_i \models p_k$ *pour* $(\mathfrak{m}_i, p_k)$ *appartient à* $\models_0$.

Définition 3 (Vérité en un monde possible dans un modèle). *Soit* $<\mathcal{M}, R, \models_0>$ *un modèle de Kripke. Nous étendons la relation* $\models_0$ *à toutes les formules du langage, en définissant* $\mathfrak{m}_i \models A$ *par induction sur la formule* A.

1. *lorsque* $p \in \mathcal{P}$ *est une variable propositionnelle* $\mathfrak{m}_i \models p$ *si et seulement si* $\mathfrak{m}_i \models_0 p$ *;*
2. $\mathfrak{m}_i \models \neg A$ *si et seulement si* $\mathfrak{m}_i \not\models A$ *;*
3. $\mathfrak{m}_i \models A \wedge B$ *si et seulement si* ($\mathfrak{m}_i \models A$ *et* $\mathfrak{m}_i \models B$)*;*
4. $\mathfrak{m}_i \models A \rightarrow B$ *si et seulement si* ($\mathfrak{m}_i \models A$ *implique* $\mathfrak{m}_i \models B$)*;*
5. $\mathfrak{m}_i \models A \vee B$ *si et seulement si* ($\mathfrak{m}_i \models A$ *ou* $\mathfrak{m}_i \models B$)*;*
6. $\mathfrak{m}_i \models \Box A$ *si et seulement si* $\mathfrak{m}_j \models A$ *pour tout* j *tel que* $\mathfrak{m}_i R \mathfrak{m}_j$ *;*
7. $\mathfrak{m}_i \models \Diamond A$ *si et seulement si* $\mathfrak{m}_j \models A$ *pour au moins un* j *tel que* $\mathfrak{m}_i R \mathfrak{m}_j$.

Définition 4. *Une formlule* G *est dite valide dans un modèle de Kripke* $\mathcal{M}$ *lorsque* $\mathfrak{m}_i \models G$ *pour tout* $\mathfrak{m}_i$ *de* $\mathcal{M}$.

Définition 5. *Soient* $\mathcal{M}^a = \langle \mathfrak{m}_i^a, R^a, \models_0^b \rangle$ *et* $\mathcal{M}^b = \langle \mathfrak{m}_i^a, R^a, \models_0^b \rangle$ *deux modèles de Kripke. Une relation binaire* B *entre* $(\mathfrak{m}_i^a)_{i \in I}$ *et* $(\mathfrak{m}_j^b)_{j \in J}$ *est une bissimulation lorsque :*

— *Pour toute variable propositionnelle* p*, pour tous mondes* $\mathfrak{m}_i^a$ *et* $\mathfrak{m}_j^b$ *tels que* $\mathfrak{m}_i^a B \mathfrak{m}_j^b$, $\mathfrak{m}_i^a \models_0^a p$ *si et seulement si* $\mathfrak{m}_j^b \models_0^b p$.

— *Pour tous mondes* $\mathfrak{m}_i^a$ *et* $\mathfrak{m}_j^b$ *tels que* $\mathfrak{m}_i^a B \mathfrak{m}_j^b$*, s'il existe un monde* $\mathfrak{m}_{i'}^a$ *de* $\mathcal{M}^a$ *tel que* $\mathfrak{m}_i^a R^a \mathfrak{m}_{i'}^a$ *alors il existe un monde* $\mathfrak{m}_{j'}^b$ *de* $\mathcal{M}^b$ *tel que* $\mathfrak{m}_{i'}^a B \mathfrak{m}_{j'}^b$ *et* $\mathfrak{m}_j^b R^b \mathfrak{m}_{j'}^b$.

— *Pour tous mondes* $\mathfrak{m}_i^a$ *et* $\mathfrak{m}_j^b$ *tels que* $\mathfrak{m}_i^a B \mathfrak{m}_j^b$*, s'il existe un monde* $\mathfrak{m}_{j'}^b$ *de* $\mathcal{M}^b$ *tel que* $\mathfrak{m}_j^b R^b \mathfrak{m}_{j'}^b$ *alors il existe un monde* $\mathfrak{m}_{i'}^a$ *de* $\mathcal{M}^a$ *tel que* $\mathfrak{m}_{i'}^a B \mathfrak{m}_{j'}^b$ *et* $\mathfrak{m}_i^a R^a \mathfrak{m}_{i'}^a$.