Examen (avec correction succinte)

Exercice 1 (Homomorphismes) - 1 pt

Soient deux ensembles d'atomes, où a est la seule constante :
$Q_1 = \{p(a, x_1), q(x_1, y_1)\}$
$Q_2 = \{p(x_2, y_2), q(y_2, z_2), q(z_2, u_2)\}$

Question 1 Existe-t-il un homomorphisme de Q_1 dans Q_2? De Q_2 dans Q_1?

Non : car la constante a n'apparait pas dans Q_2.
Oui : $x_2 \mapsto a$, $y_2 \mapsto x_1$, $z_2 \mapsto y_1$, $u_2 \mapsto x_1$.

Question 2 Si Q_1 et Q_2 représentent des requêtes conjonctives booléennes, a-t-on $Q_1 \sqsubseteq Q_2$? $Q_2 \sqsubseteq Q_1$?

Rappel: Etant données deux requêtes conjonctives booléennes Q et Q', la notation $Q \sqsubseteq Q'$ signifie que toute base de faits qui répond oui à Q répond aussi oui à Q'.

$Q \sqsubseteq Q'$ *ssi il y a un homomorphisme de* Q' *dans* Q. *On a donc* $Q_1 \sqsubseteq Q_2$ *et* $Q_2 \not\sqsubseteq Q_1$.

Exercice 2 (Chase) - 4,5 pts

Soit la base de connaissances $\mathcal{K} = (F, \mathcal{R} = \{R_1, R_2\})$ avec :
$F = \{p(a, b), r(a)\}$
$R_1 = p(x, y) \rightarrow \exists z\ p(y, z)$
$R_2 = r(x) \wedge p(x, y) \rightarrow p(y, y)$.

Nous allons considérer trois variantes du chase :

- l'*oblivious* chase, qui effectue toutes les applications de règles possibles ;
- le *restricted* chase, qui n'effectue l'application d'une règle $R = B \rightarrow H$ selon un homomorphisme h de B dans la base de faits courante F que si h ne *s'étend pas* à un homomorphisme de $B \cup H$ dans F ;
- le *core* chase, qui applique les règles comme le restricted chase, mais calcule le *core* de la base de faits obtenue après chaque application de règle.

Question 1 L'*oblivious chase* s'arrête-t-il sur cette base de connaissances ? Pourquoi ? (On ne vous demande pas de donner le résultat du chase).

Cette saturation est infinie :

$$\{p(a, b), r(a), p(b, z_0), p(b, b), p(b, z_1)\} \cup \{p(z_i, z_{i+2}) | i \geq 0\}$$

Question 2 Définir le résultat obtenu par le *restricted chase*. Si l'ordre d'application des règles change le résultat, considérez les différents cas possibles.

Selon qu'on applique d'abord R_2 ou R_1, la saturation est finie ou infinie :
- R_2 d'abord : on obtient $\{p(a, b), r(a), p(b, b)\}$ par R_2, ce qui rend l'application de R_1 redondante.
- R_1 d'abord : on obtient "une chaine infinie" (au lieu de 2 avec l'oblivious chase) :
$\{p(a, b), r(a), p(b, z_0), p(b, b)\} \cup \{p(z_i, z_{i+1}) | i \geq 0\}$

Question 3 Définir le résultat obtenu par le *core chase.*

On obtient $\{p(a,b), r(a), p(b,b)\}$. *L'ordre d'application des règles est indifférent : même si on commence par* R_1, *l'atome ajouté* $p(b, z_0)$ *est supprimé par le calcul du core après l'application de* R_2.

Question 4 La base de connaissances $\mathcal{K}$ possède-t-elle un modèle universel fini ?

Oui, notamment celui calculé par le core chase, cf. Q3.

Question 5 L'ensemble de règles $\mathcal{R}$ assure-t-il que *pour toute base de faits* F, $(F, \mathcal{R})$ a un modèle universel fini?

Non. Par exemple, si l'on prend $F = \{p(a,b)\}$, *seule* R_1 *est applicable et le core chase est infini (donc la KB n'a pas de modèle fini).*

Exercice 5 (OWA/CWA) - 2,5 pts

On considère des bases de faits et requêtes conjonctives munies de la négation. On se place dans un premier temps en monde ouvert, autrement dit dans le cadre de la logique classique.

Soit la base de faits $F = \{q(a), q(b), p(a,a), \neg p(b,b)\}$ où a et b sont des constantes.

Question 1. Soit $Q_1() = \exists x \exists y \exists z\ (p(x,y) \wedge q(z) \wedge \neg p(y,z))$. Déterminer $Q_1(F)$, l'ensemble des réponses à Q_1 sur F.
Tout modèle de F *rend vrai* $p(a,b)$ *ou* $\neg p(a,b)$. *Dans le premier cas, on a la "bonne affectation"* $\{x \mapsto a, y \mapsto b, z \mapsto b\}$, *dans le second cas, on a la "bonne affectation"* $\{x \mapsto a, y \mapsto a, z \mapsto b\}$. *Donc tout modèle de* F *est un modèle de* Q_1. *Donc* F *répond oui à* Q_1, *autrement dit* $Q_1(F) = \{()\}$.

Question 2. Même question avec $Q_2(x) = \exists y \exists z\ (p(x,y) \wedge q(z) \wedge \neg p(y,z))$.
$Q_2(F) = \{(a)\}$ *car dans tous les modèles de* F *l'une des deux bonnes affectations précédentes envoie* x *sur* a. *Autrement dit,* $F \models Q_2[x \mapsto a]$ *où* $Q_2[x \mapsto a]$ *est la requête booléenne* $\exists y \exists z\ (p(a,y) \wedge q(z) \wedge \neg p(y,z))$.

Question 3. Même question avec $Q_3(y) = \exists x \exists z\ (p(x,y) \wedge q(z) \wedge \neg p(y,z))$.
$Q_3(F) = \emptyset$ *car aucune des requêtes booléennes obtenues en remplaçant* y *par une constante n'est conséquence logique de* F.

Question 4. On considère la base de faits $F' = \{q(a), q(b), p(a,a)\}$ et on fait l'hypothèse du monde clos. Quelles sont alors les réponses à Q_1, Q_2 et Q_3 sur F' ?
Soit $Q^+ = \{p(x,y), q(z)\}$ *et* $Q^- = \{p(y,z)\}$. *Il y a un seul homomorphisme* h *de* Q^+ *dans* F' *tel que* $h(Q^-) \cap F' = \emptyset$: $x \mapsto a, y \mapsto a, z \mapsto b$. *On en conclut que* $Q_1(F') \neq \emptyset$, $Q_2(F') = Q_3(F') = \{(a)\}$.