Міністерство освіти і науки України
Чернівецький національний університет
імені Юрія Федьковича

# Математичні моделі
# мікроекономіки
## Теорія споживання та виробництва

Методичні рекомендації та практичні завдання

Чернівці
Чернівецький національний університет
2017

ББК 22.18я73
УДК 519.86 : 330.101.542 (075.8)
М34

М34
**Математичні моделі мікроекономіки. Теорія споживання та виробництва:** Методичні рекомендації та практичні завдання / Укл.: Г.П.Івасюк. – Чернівці: Рута, 2010. – 36 с.

Методичні вказівки містять практичні завдання до лабораторних робіт з курсу "Математичні моделі мікро- та макроекономіки" та рекомендації до їх виконання.

Для студентів вищих навчальних закладів зі спеціальностей напряму „Комп'ютерні науки".

ББК 22.18я73
УДК 519.86 : 330.101.542 (075.8)

Підписано до друку 20.10. 2017. Формат 60х84/16.
Папір газетний. Друк офсетний. Ум. друк. арк. 1.97. Обл.- вид. арк. 2.18. Зам. 514. Тираж 20 прим.

Видавничий дім «Родовід», м. Чернівці, вул. Заводська, 26

## Вступ

Успішна реалізація досягнень науково-технічного прогресу та вирішення завдань, які ставить ринкова економіка, тісно пов’язані з використанням математичних методів та моделей при вирішенні багатьох проблем із різноманітних областей людської діяльності. У зв’язку з цим для студентів необхідні знання як можливостей застосування математичних методів та моделей у практичній діяльності, так і розуміння необхідності їх використання.

Методичні вказівки містять завдання до лабораторних робіт з математичних моделей мікроекономіки, які дають змогу студентам самостійно засвоїти здобуті знання. Кожне з лабораторних завдань розраховано на 2 години аудиторної роботи та роботи у позааудиторний час. До кожного завдання лабораторної роботи надаються детальні пояснення щодо ходу розв’язання типових завдань, що дає змогу самостійно виконати роботу.

До кожної лабораторної роботи студент вдома повинен підготувати у текстовому редакторі MS Word **звіт**, який має таку структуру: тема лабораторної роботи; мета; завдання; результат виконання завдання та висновки.

Матеріали методичних вказівок можуть бути корисними студентам різних спеціальностей всіх форм навчання як для розв’язання типових задач, так і для самостійного вивчення теоретичного матеріалу, а також як допоміжний засіб при організації дистанційного навчання.

## Мета та завдання навчальної дисципліни “Математичні моделі мікро- та макроекономіки”

***Мета курсу:*** ознайомлення студентів з основами теорії споживання, теорії виробництва, теорії рівноваги, основними економічними показниками та чинниками, які на них впливають, основними принципами побудови найпростіших моделей мікро- та макроекономіки.

***Студент повинен знати:*** основні поняття та твердження з програмного матеріалу даного курсу.

***Студент повинен вміти:*** використовувати вивчений матеріал при розв’язуванні конкретних задач, застосовувати теоретичні знання на практиці.

***Форма контролю та засоби діагностики:*** виконання лабораторних робіт, тестових завдань, ІНДЗ, завдання підсумкового контролю.

## Лабораторна робота № 1

**Тема:** Порядкові функції корисності

**Мета:** Вивчити властивості порядкових функцій корисності та кривих байдужості споживача, набути навиків роботи в пакеті MathCad.

**Завдання №1.** Для заданих функцій корисності перевірити засобами MathCad виконання властивостей монотонності та строгої опуклості вгору та вказати області де вони виконуються.

**Завдання № 2.** Побудувати графіки заданих функцій корисності та кривих байдужості споживача.

### Методичні рекомендаціїї

**1.** Для перевірки властивостей монотонності та строгої опуклості вгору заданих функцій корисності споживача засобами MathCad необхідно:

- описати функцію корисності, для цього, спочатку, в круглих дужках вказують всі аргументи та параметри (якщо вони є) далі використовують кнопку (присвоєння) на панелі **Калькулятор** або **Подсчеты** чи комбінацію клавіш **Shift + :** і , використовуючи знаки арифметичних дій та інші кнопки панелі **Калькулятор**, задають відповідну функцію;
- за допомогою кнопки  на панелі **Калькулус**, знайти всі частинні похідні заданої функції корисності і перевірити виконання умови монотонності:

$$\frac{\partial U(x)}{\partial x_i} > 0, \;\; i \in \{1, \ldots, n\};$$

- за допомогою кнопки  на панелі **Калькулус**, знайти всі частинні похідні другого порядку заданої функції корисності і перевірити виконання умови строгої опуклості вгору: *знаки головних мінорів матриці Гессе функції корисності споживача чергуються, починаючи з від'ємного, тобто*

$$\frac{\partial^2 U(x)}{\partial x_i^2} < 0,\ i \in \{1,\dots,n\},\ \frac{\partial^2 U(x)}{\partial x_1^2} \cdot \frac{\partial^2 U(x)}{\partial x_2^2} - \left(\frac{\partial^2 U(x)}{\partial x_1 \partial x_2}\right)^2 > 0,\ \dots;$$

**2.** Для того, щоб побудувати графік заданої функції корисності споживача засобами MathCad необхідно:

- враховуючи умови монотонності та строгої опуклості вгору заданих функцій корисності споживача, знайти діапазон зміни кількості кожного товару;
- за допомогою вбудованої функції

  ***S := CreateMesh(****U, x1, x2, y1, y2, mesh****),***

  де *U* – функція, що задає поверхню, *x1, x2* – початкове та кінцеве значення першої зміннної, *y1, y2* – початкове та кінцеве значення другої зміннної, *mesh* – масштаб, будуємо матрицю значень функції корисності споживача;
- використовуючи кнопку  на панелі **Графики** або комбінацію клавіш **Shift** + **2**, будуємо при *n=2* графік функції корисності;
- для побудови кривих байдужості споживача можна використати кнопку  на панелі **Графики** або комбінацію клавіш **Shift** + **5.**

## Варіанти завдань

**1. Квадратична функція корисності**

$$U(x_1, x_2) = a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_{11} x_1^2 + a_{12} x_1 x_2 + a_{22} x_2^2,\ (x_1, x_2) \in R_+^2,$$

| **Варіант** | $a_1$ | $a_2$ | $a_{11}$ | $a_{12}$ | $a_{22}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| **1** | 2 | 1 | -2 | 2 | -3 |
| **2** | 4 | 3 | -4 | 1 | -3 |
| **3** | 8 | 1 | -1 | 2 | -10 |
| **4** | 3 | 0 | -5 | 3 | -4 |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| **5** | 4 | 3 | -2 | 2 | -5 |
| **Варіант** | $a_1$ | $a_2$ | $a_{11}$ | $a_{12}$ | $a_{22}$ |
| **6** | 8 | 6 | -5 | 4 | -8 |
| **7** | 4 | 2 | -4 | 3 | -3 |
| **8** | 5 | 2 | -7 | 6 | -6 |
| **9** | 4 | 5 | -8 | 4 | -5 |
| **10** | 9 | 3 | -6 | 4 | -4 |

Варіанти 11 – 20 формуються з варіантів 1 – 10 шляхом заміни значень $a_2$ та $a_{12}$ на відповідні значення, взяті з варіантів 10 –1.

**2. Мультиплікативна функція корисності**

$$U(x_1,x_2)=A\cdot x_1^{\alpha}\cdot x_2^{\beta},\ \ (x_1,x_2)\in R_+^2,$$

| **Варіант** | $A$ | $\alpha$ | $\beta$ | **Варіант** | $A$ | $\alpha$ | $\beta$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **1** | 0,2 | 1/2 | 3/8 | **11** | 0,8 | 1/4 | 1/2 |
| **2** | 2,2 | 1/4 | 1/8 | **12** | 5,6 | 1/5 | 3/5 |
| **3** | 2,5 | 2/3 | 1/6 | **13** | 4,1 | 1/2 | 1/4 |
| **4** | 0,5 | 1/8 | 3/8 | **14** | 1,5 | 4/5 | 1/10 |
| **5** | 1,2 | 4/7 | 2/7 | **15** | 5,4 | 2/3 | 1/6 |
| **6** | 4,1 | 2/5 | 1/5 | **16** | 2 | 4/11 | 5/11 |
| **7** | 5,2 | 1/9 | 3/5 | **17** | 2 | 5/6 | 1/12 |
| **8** | 6 | 4/7 | 1/7 | **18** | 3 | 3/4 | 1/8 |
| **9** | 2 | 1/2 | 1/4 | **19** | 3,5 | 7/15 | 1/3 |
| **10** | 2,3 | 3/5 | 1/5 | **20** | 4,5 | 2/9 | 5/9 |

**3. Логарифмічна функція корисності (Бернуллі)**

$$U(x_1,x_2)=a_1\log_b(x_1-c_1)+a_2\log_b(x_2-c_2),\ (x_1,x_2)\in R_+^2,$$

| Варіант | $a_1$ | $a_2$ | $b$ | $c_1$ | $c_2$ |
|---|---|---|---|---|---|
| **1** | 2 | 1 | 2 | 2 | 0,5 |
| **2** | 5 | 0,8 | 3 | 3 | 5 |
| **3** | 3,4 | 7 | 4 | 5 | 10 |
| **4** | 2,5 | 10 | 2 | 4 | 4 |
| **5** | 3 | 7,8 | 2 | 7 | 0,8 |
| **6** | 7 | 1,5 | 4 | 2 | 6,9 |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| **7** | 8,8 | 2,5 | 5 | 6 | 7 |
| **8** | 4,2 | 4,8 | 6 | 8 | 2,5 |
| **9** | 2,2 | 8 | 4 | 5 | 2 |
| **10** | 9 | 1,5 | 8 | 7 | 4 |

Варіанти 11 – 20 формуються з варіантів 1 – 10 шляхом заміни значень $a_1$ та $a_2$ на відповідні значення $c_1$ та $c_2$, і навпаки.

**4. Функція корисності зі сталою еластичністю**

$$U(x_1, x_2) = \frac{a_1}{1-b_1}\cdot(x_1 - c_1)^{1-b_1} + \frac{a_2}{1-b_2}\cdot(x_2 - c_2)^{1-b_2}, \ (x_1, x_2) \in R_+^2,$$

| Варіант | $a_1$ | $a_2$ | $b_1$ | $b_2$ | $c_1$ | $c_2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **1** | 2,2 | 1 | 0,2 | 0,5 | 2 | 7 |
| **2** | 6,5 | 5,3 | 0,3 | 0,6 | 3 | 8 |
| **3** | 4 | 7,5 | 0,2 | 0,2 | 5 | 6 |
| **4** | 2,8 | 1,4 | 0,6 | 0,4 | 2 | 11 |
| **5** | 6,8 | 2,6 | 0,8 | 0,8 | 5 | 2 |
| **6** | 7 | 8,5 | 0,7 | 0,4 | 7 | 2 |
| **7** | 12 | 11 | 0,4 | 0,6 | 9 | 2,5 |
| **8** | 9,8 | 8,7 | 0,5 | 0,7 | 1 | 1,5 |
| **9** | 3,5 | 4 | 0,2 | 0,5 | 11 | 2 |
| **10** | 4,6 | 8,3 | 0,1 | 0,8 | 5 | 8,5 |

Варіанти 11 – 20 формуються з варіантів 1 – 10 шляхом заміни значень $a_1$ та $a_2$ на відповідні значення $c_1$ та $c_2$, і навпаки.

## Контрольні питання

1. Що називають набором торарів?
2. Що називають простором торарів?
3. Аксіоми відношення переваги
4. Що таке поверхня байдужості?
5. Дайте означення поля переваг.
6. Що називають функцією корисності споживача?
7. Як знайти граничну корисність *i*-того товару?
8. Як перевітири умову монотонності функцій корисності? Економічна інтерпритація.

9. Як перевітири умову опуклості вгору функцій корисності? Економічна інтерпритація.
10. Властивості кривих байдужості.

## Лабораторна робота № 2

**Тема:** Неокласична модель поведінки споживача. Функції попиту

**Мета:** Навчитись знаходити оптимальний набір товарів за відомою функцією корисності та бюджетними обмеженнями споживача; вивчити властивості функцій попиту на товар; навчитись розв'язувати системи рівнянь та будувати графіки функцій засобами пакета MathCad.

**Завдання №1.** За допомогою пакета MathCad знайти оптимальний набір товарів $(x^*,\ y^*)$ та рівень найвищої корисності споживача $U_{\max} = U(x^*, y^*)$, якщо функція корисності $U(x,\ y) = Ax^{\alpha}y^{\beta}$, бюджетні обмеження – $I$ (споживчий доход), $p_1$ (ціна на перший товар), $p_2$ (ціна на другий товар) (конкретні значення $A, \alpha, \beta,\ I$, $p_1$, $p_2$ див. у таблиці).

**Завдання № 2.** Засобами пакета MathCad побудувати графік бюджетної прямої та кривої байдужості, яка відповідає найвищому рівню корисності споживача та позначити на графіку точку, яка відповідає оптимальному наборові $(x^*,\ y^*)$.

**Завдання № 3.** Знайти функції попиту на перший та другий товар, дослідити залежність їх від кожного з параметрів, побудувати їхні графіки та дати економічну інтерпритацію.

### Методичні рекомендаціїї

**1.** Неокласична модель поведінки споживача має вигляд

$$U(x, y) = A \cdot x^{\alpha} y^{\beta} \to \max,$$

$$p_1 x + p_2 y \le I, \quad (x,\ y) \in R_+^2.$$

Розв’язок цієї задачі задовольняє систему

$$\begin{cases} p_1 x + p_2 y = I, \\ p_1 \cdot \dfrac{\partial U(x,y)}{\partial y} = p_2 \dfrac{\partial U(x,y)}{\partial x}. \end{cases}$$

Щоб знайти розв’язок системи рівнянь в пакеті MathCad використовують дерективу *Given* та функцію *Find.*

Приклад

$x := 1 \qquad y := 1$ ( деякі початкові значення)

Given

$p1 \cdot x + p2 \cdot y = I$

$$p1 \cdot \left(\frac{d}{dy}U(x,y,A,\alpha,\beta)\right) - p2 \cdot \left(\frac{d}{dx}U(x,y,A,\alpha,\beta)\right) = 0$$

$\mathrm{find}(x,y) \rightarrow$

**2.** Рівняння кривої байдужості, яка відповідає найвищому рівню корисності має вигляд

$$U(x,y) = U_{\max},$$

де $U_{\max}$ – стала, яка відповідає найвищому рівню корисності. Щоб побудувати її графік засобами MathCad потрібно, спочатку виразити змінну $y$ через $x$, для цього можна використати дерективу *Given* та функцію *Find*, приклад:

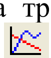
$y := 1$

Given

$U(x,y,A,\alpha,\beta) = Umax$

$\mathrm{Find}(y) \rightarrow$

а потім кнопку  на панелі **Графіки.** За аналогічною схемою можна побудувати графік бюджетної прямої.

**3.** Щоб знайти функції попиту на перший та другий товар потрібно знайти розв’язок системи із завдання №1, при цьому $I$, $p_1$, $p_2$ вважати змінними параметрами. Для того, щоб дослідити вплив кожного параметра, необхідно два із них фіксувати конкретними значеннями, а третій змінювати. Для побудови графіків використати кнопку  на панелі **Графіки.**

## Варіанти завдань

| Варіант | A | $\alpha$ | $\beta$ | $p_1$ | $p_2$ | I |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **1** | 5 | 1/2 | 1/4 | 3 | 5 | 100 |
| **2** | 8 | 1/3 | 2/9 | 7 | 8 | 110 |
| **Варіант** | **A** | $\alpha$ | $\beta$ | $p_1$ | $p_2$ | **I** |
| **3** | 6 | 1/2 | 3/7 | 6 | 4 | 120 |
| **4** | 7 | 5/8 | 1/4 | 10 | 8 | 200 |
| **5** | 9 | 2/7 | 3/7 | 2 | 8 | 140 |
| **6** | 10 | 1/5 | 3/5 | 5 | 10 | 130 |
| **7** | 11 | 3/11 | 7/11 | 3 | 4 | 110 |
| **8** | 22 | 4/9 | 4/9 | 5 | 8 | 140 |
| **9** | 12 | 1/8 | 5/8 | 7 | 6 | 80 |
| **10** | 14 | 1/10 | 3/10 | 3 | 10 | 190 |
| **11** | 18 | 1/4 | 1/4 | 8 | 9 | 100 |
| **12** | 21 | 5/9 | 1/9 | 6 | 9 | 90 |
| **13** | 15 | 1/7 | 1/7 | 2 | 8 | 210 |
| **14** | 19 | 3/7 | 2/7 | 1 | 7 | 170 |
| **15** | 20 | 1/5 | 1/5 | 4 | 5 | 90 |
| **16** | 17 | 1/2 | 3/8 | 3 | 9 | 100 |
| **17** | 28 | 2/9 | 2/9 | 4 | 2 | 150 |
| **18** | 24 | 1/4 | 1/8 | 10 | 4 | 120 |
| **19** | 16 | 1/6 | 1/3 | 6 | 8 | 220 |
| **20** | 27 | 2/5 | 2/5 | 4 | 1 | 190 |

## Контрольні питання

1. Сформулюйте неокласичну задачу споживання.
2. Що називають оптимальним набором торарів?
3. Який вигляд має бюджетне обмеження.
4. Сформулюйте теорему існування та єдиності розв’язку неокласичної задачі споживання .
5. Дайте означення Вальрасівської (звичайної) функції попиту.
6. Яку криву називають кривою Енгела для *i*-го товару? Що вона відображає?

7. Яку криву називають кривою “дохід-споживання” (“ціна-споживання”) ? Що вона відображає?
8. Яку функцію називають прямою (звичайною) функцією попиту для *i*-го товару?
9. Яку функцію називають перехресною функцією попиту для *i*-го товару?

## Лабораторна робота № 3

**Тема:** Дослідження статики споживання. Класифікація товарів

**Мета:** Навчитись визначати зміну попиту на товари при компенсованому зростанні якоїсь із цін; знаходити еластичність попиту за цінами та доходом, граничну норму заміщення товарів та здійснювати класифікацію товарів.

**Завдання №1.** Виписати рівняння Слуцького для функцій попиту на товари, знайдені в лабораторній роботі №2. Знайти граничну зміну попиту на кожен товар при компенсованому зростанні якоїсь із цін.

**Завдання №2.** Здійснити класифікацію товарів та визначити граничну норму заміщення першого товару другим.

**Завдання №3.** Визначити коефіцієнти еластичності функцій попиту за цінами та споживчим доходом. Перевірити таку властивість функцій попиту: сума всіх еластичностей за цінами дорівнює від’ємній еластичності за доходом.

**Завдання №4.** Перевірити виконання умов агрегації Енгеля і Курно, дати їх економічну інтерпретацію.

## Методичні рекомендації

**1.** Граничну зміна попиту на *i*-тий товар при компенсованому зростанні *j*-тої ціни можна одержати з рівнянь Слуцького, тобто

$$\frac{\partial x_i^{comp}(p,I)}{\partial p_j}=\frac{\partial x_i(p,I)}{\partial p_j}+\frac{\partial x_i(p,I)}{\partial I}\cdot x_j(p,I),\ \{i,j\}\subset\{1,2\},$$

де $p := (p_1, p_2)$. Для цього, спочатку, в пакеті Mathcad задаємо функції попиту на товари та, за допомогою кнопки  на панелі **Калькулус,** знаходимо їх похідні по цінах та доходу, потім описуємо функції $\frac{\partial x_i^{comp}(p,I)}{\partial p_j}$ та знаходимо їх значення при заданих цінах та споживчому доході.

**2.** Товар $i$ називають *цінним* ( *малоцінним* ), якщо при збільшенні доходу попит на цей товар зростає ( спадає ), тобто

$$\frac{\partial x_i(p,I)}{\partial I}>0\ \left(\frac{\partial x_i(p,I)}{\partial I}<0\right),\ i\in\{1,2\}.$$

Товар $i$ називають *нормальним* ( *товаром Гіффена* ), якщо при збільшенні ціни на товар попит на цей товар спадає ( зростає ), тобто

$$\frac{\partial x_i(p,I)}{\partial p_i}<0\ \left(\frac{\partial x_i(p,I)}{\partial p_i}>0\right),\ i\in\{1,2\}.$$

Товари $i$ та $j$ називають *взаємозамінними* (*взаємодоповняльними* ), якщо компенсоване зростання ціни на один з них призводить до збільшення (зменшення) попиту на інший, тобто

$$\frac{\partial x_i^{comp}(p,I)}{\partial p_j}>0\ \left(\frac{\partial x_i^{comp}(p,I)}{\partial p_j}<0\right),\ i\in\{1,2\}.$$

*Граничною нормою заміщення* товарів називається кількість товару $x_2$, від якої споживач готовий відмовитися в обмін на додаткову одиницю товару $x_1$ при незмінному загальному рівні корисності. Граничну норму заміщення першого товару другим можна обчислити за формулою

$$M_{x_2x_1} := \frac{\partial U(x_1, x_2)}{\partial x_1} \Big/ \frac{\partial U(x_1, x_2)}{\partial x_2}.$$

***3.**Еластичністю (коефіцієнтом еластичності)* функції $f(x)$, $x \in D$, називається границя відношення відносних приростів функції і аргумента при прямуванні абсолютного приросту аргумента до нуля. Позначається $E_f(x)$, обчислюється за формулою

$$E_f(x) := \frac{x}{f(x)} \cdot f'(x).$$

***4.***Умова агрегації Енгела при $n = 2$ має вигляд

$$p_1 \cdot \frac{\partial x_1(p, I)}{\partial I} + p_2 \cdot \frac{\partial x_2(p, I)}{\partial I} = 1,$$

тобто всі товари з кошика споживача одночасно не можуть бути малоцінними.

Умова агрегації Курно при $n = 2$ має вигляд

$$x_i(p, I) = -\left( p_1 \cdot \frac{\partial x_1(p, I)}{\partial p_i} + p_2 \cdot \frac{\partial x_2(p, I)}{\partial p_i} \right), \; i \in \{1, 2\}.$$

Значення попиту на деякий товар дорівнює від’ємній зваженій сумі змін значень попиту стосовно ціни на даний товар, у якій за ваги взято ціни.

## Контрольні питання

1. Як визначити граничну зміну попиту на товари при компенсованому зростанні якоїсь із цін?
2. Що називають компенсованими функціями попиту?
3. Які товари називають цінними (малоцінними)?
4. Які товари називають нормальними?
5. Які товари називають товарами Гіффена?

6. Які товари називають взаємозамінними (взаємодоповняльними)?
7. Що називають граничною нормою заміщення? Як її визначити?
8. Як визначити еластичність попиту? Яку вона має властивість?
9. Умова агрегації Ангеля. Її економічна інтерпретація.
10. Умови агрегації Курно. Їх економічна інтерпретація.

## Лабораторна робота № 4

**Тема**: Виробничі функції

**Мета:** Ознайомитись з поняттям виробничої функції та одним із методів знаходження її параметрів; навчитись перевіряти гіпотези, які задовольняють неокласичні виробничі функції, а також визначати основні числові характеристики виробничого процесу.

**Завдання №1.** Для неокласичної степеневої виробничої функції

$$f(x_1, x_2) = Ax_1^{\alpha} x_2^{\beta}, \; A, \alpha, \beta > 0, \; \alpha + \beta < 1,$$

знайти числові значення параметрів $A, \alpha, \beta$, користуючись даними з таблиць згідно варіантів.

**Завдання №2.** Для конкретизованої виробничої функції перевірити гіпотези про «відсутність рогу достатку», монотонність, опуклість вгору, однорідність та дати їм економічну інтерпритацію.

**Завдання №3.** Для конкретизованої виробничої функції визначити основні характеристики виробничого процесу та граничну норму заміщення ресурсів. Дати економічну інтерпретацію отриманим результатам.

## Методичні рекомендації

**1.** Задача ідентифікації параметрів $A, \alpha, \beta$ розв'язується наступним чином. Прологарифмувавши $f(x_1, x_2)$, перейдемо від функції $f(x_1, x_2) = A{x_1}^{\alpha}{x_2}^{\beta}$ до еквівалентного співвідношення

$$F = B + \alpha X_1 + \beta X_2,$$

де $F = \ln f$, $B = \ln A$, $X_1 = \ln x_1$, $X_2 = \ln x_2$. Параметри $\alpha, \beta, B$ (а значить і $A = e^B$) знаходимо, розв'язуючи систему лінійних алгебраїчних рівнянь (вона випливає з методу найменших квадратів):

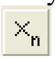
$$\begin{cases} nB + \left(\sum\limits_{i=1}^{n} \overline{X}_1^{(i)}\right)\alpha + \left(\sum\limits_{i=1}^{n} \overline{X}_2^{(i)}\right)\beta = \sum\limits_{i=1}^{n} \overline{F}^{(i)}, \\ \left(\sum\limits_{i=1}^{n} \overline{X}_1^{(i)}\right)B + \left(\sum\limits_{i=1}^{n} \left(\overline{X}_1^{(i)}\right)^2\right)\alpha + \left(\sum\limits_{i=1}^{n} \overline{X}_1^{(i)}\overline{X}_2^{(i)}\right)\beta = \sum\limits_{i=1}^{n} \overline{X}_1^{(i)}\overline{F}^{(i)}, \\ \left(\sum\limits_{i=1}^{n} \overline{X}_2^{(i)}\right)B + \left(\sum\limits_{i=1}^{n} \overline{X}_1^{(i)}\overline{X}_2^{(i)}\right)\alpha + \left(\sum\limits_{i=1}^{n} \left(\overline{X}_2^{(i)}\right)^2\right)\beta = \sum\limits_{i=1}^{n} \overline{X}_2^{(i)}\overline{F}^{(i)}, \end{cases}$$

де $\overline{F}^{(i)} = \ln \bar{f}^{(i)}$, $\overline{X}_1^{(i)} = \ln \bar{x}_1^{(i)}$, $\overline{X}_2^{(i)} = \ln \bar{x}_2^{(i)}$ $(i = \overline{1, n})$ (під час проведення числових розрахунків взяти $n = 10$). Як відомо дана система називається системою нормальних рівнянь і має єдиний розв'язок, оскільки її головний визначник відмінний від нуля.

Для того, щоб знайти розв'язок цієї системи за допомогою пакету Mathcad потрібно:

- задати вектор-стовпчики $\bar{x}_1$, $\bar{x}_2$, $\bar{f}$, використавши кнопку  на панелі **Матриці** або комбінацію кнопок **Ctrl+M** і вказавши відповідну розмірність у діалоговому вікні (рядків – 10, стовпчиків – 1),
- ввести заміну $F = \ln f$, $B = \ln A$, $X_1 = \ln x_1$, $X_2 = \ln x_2$,
- матричним методом розв'язати систему, тобто

$$\begin{pmatrix} B\\ \alpha\\ \beta\end{pmatrix} := \begin{bmatrix} 10 & \sum X & \sum Y \\ \sum X & \sum_{i=0}^{9}(X_{i,0})^2 & \sum_{i=0}^{9}(X_{i,0}\cdot Y_{i,0}) \\ \sum Y & \sum_{i=0}^{9}(X_{i,0}\cdot Y_{i,0}) & \sum_{i=0}^{9}(Y_{i,0})^2\end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix}\sum F\\ \sum_{i=0}^{9}(X_{i,0}\cdot F_{i,0})\\ \sum_{i=0}^{9}(F_{i,0}\cdot Y_{i,0})\end{bmatrix}$$

при цьому зауважимо, що для того щоб задати обернену матрицю використовують кнопку  на панелі **Матриці,** нижній індекс – кнопка  (номер рядка та стовпчика вказується через кому).

**2.** Для неокласичних виробничих функцій правильні наступні гіпотези.

**$A_1$ (відсутність "рогу достатку").** За відсутності всіх ресурсів виробництво неможливе: $f(0,0)=0$.

**$A_2$ (монотонність).** Існує множина $\varepsilon \subset R_+^2$, яка називається *економічною областю*, в якій збільшення якогось виду витрат не призводить до зменшення випуску продукції:

$$\forall x \in \varepsilon : \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} \geq 0,\ i \in \{1,\ 2\}.$$

**$A_3$ (опуклість).** Існує опукла підмножина $D \subset \varepsilon$, яка називається *особливою областю*, на якій виробнича функція $f$ опукла вгору. Аксіома відображає економічний закон спадання віддачі. Якщо функція $f = f(x),\ x \in R_+^2$, є двічі неперервно диференційовною за сукупністтю змінних на особливій області $D \subset \varepsilon$, то опуклість функції $f$ вгору рівносильна від'ємній визначеності *матриці Гессе*

$$H_f = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} \end{pmatrix}$$

у кожній точці $x \in D$.

Для перевірки виконання вище вказаних гіпотез в пакеті Mathcad використовують кнопки  та  на панелі **Калькулус,** описуючи відповідні умови, та аналізують одержані результати.

**$A_4$ (однорідність).** Розширення масштабу виробництва дає пропорційну віддачу випуску, тобто виробнича функція є однорідною з деяким показником $\gamma > 0$:

$$\forall x \in R_+^2 \;\; \forall a > 0: f(ax) = a^{\gamma} f(x),$$

якщо $\gamma = 1$, то говорять, що виробнича функція характеризується *сталою віддачею* від розширення масштабу виробництва; якщо $\gamma \in (0,1)$, то говорять про *спадаючу віддачу* від розширення масштабу виробництва; якщо $\gamma > 1$, то говорять про *зростаючу віддачу*.

Для знаходження показника $\gamma$ (його ще називають масштабним множником виробництва) в пакеті Mathcad досить описати його при будь-якому фіксованому значенні *a*, тобто

$$\gamma = \log_a \left( \frac{f(ax)}{f(x)} \right), \; a > 0 .$$

**3.** Основні числові характеристики виробничих функцій.
1. Середня ефективність і-го ресурсу (вказує кількість одиниць випущеної продукції на одну одиницю і-го ресурсу):

$$P_i^{(c)}(x) = \frac{f(x)}{x_i}, i \in \{1, \; 2\}, x \in X .$$

2. Гранична ефективність і-го ресурсу (вказує на скільки одиниць збільшиться випуск продукції при збільшенні на одну одиницю і-го ресурсу):

$$p_i^{(гп)}(x) = \frac{\partial f(x)}{\partial x_i}, i \in \{1,.2\}, x \in X .$$

3. Еластичність випуску за і-им ресурсом або коефіцієнт еластичності і-го ресурсу (вказує на скільки відсотків збільшиться випуск продукції при збільшенні використання на однин відсоток і-го ресурсу):

$$e_i(x) := \frac{x_i}{f(x)} \cdot \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} = \frac{1}{p_i^{(c)}(x)} \cdot p_i^{(гр)}(x), i \in \{1,2\}, x \in X .$$

Еластичність випуску у довільній точці є сумою еластичностей випуску за всіма ресурсами у цій точці:

$$\varepsilon_f(x) = \sum_{i=1}^{n} e_i(x).$$

4. Гранична норма заміщення j-того ресурсу *i*-тим, при збереженні кількості інших ресурсів (вказує яку кількість *j*-того ресурсу можна замінити на одну додаткову одиницю *i*-того при незмінному випуску):

$$M_{x_i x_j}(x) := -\left.\frac{dx_i}{dx_j}\right|_{f=const} = \frac{\partial f(x)/\partial x_j}{\partial f(x)/\partial x_i}, x \in D .$$

## Варіанти завдань

| **Варіант 1** | | | **Варіант 2** | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $\bar{x}_1$ | $\bar{x}_2$ | $\bar{f}$ | $\bar{x}_1$ | $\bar{x}_2$ | $\bar{f}$ |
| 5,1 | 16,1 | 23,3 | 51,1 | 16,1 | 73,3 |
| 5,2 | 15,1 | 25,5 | 52,2 | 15,1 | 71,5 |
| 5,3 | 10,7 | 18,8 | 51,3 | 10,7 | 68,8 |
| 5,4 | 15,8 | 25,1 | 55,4 | 15,8 | 75,1 |
| 5,5 | 20,9 | 27,4 | 51,5 | 20,9 | 77,4 |
| 5,8 | 20,1 | 28,3 | 54,8 | 20,1 | 78,3 |
| 6,7 | 20,2 | 29,1 | 60,7 | 20,2 | 79,1 |
| 6,6 | 20,3 | 27,8 | 61,6 | 20,3 | 85,8 |
| 6,9 | 20,4 | 28,1 | 56,9 | 20,4 | 80,1 |
| 6,1 | 30,5 | 37,1 | 56,1 | 30,5 | 87,1 |

| **Варіант 3** | | | **Варіант 4** | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $\bar{x}_1$ | $\bar{x}_2$ | $\bar{f}$ | $\bar{x}_1$ | $\bar{x}_2$ | $\bar{f}$ |
| 63,3 | 51,1 | 110,5 | 6,3 | 5,1 | 105,5 |
| 51,5 | 52,2 | 120,1 | 5,5 | 5,2 | 110,1 |
| 68,8 | 51,3 | 110,7 | 6,8 | 5,3 | 111,7 |
| 75,1 | 45,4 | 115,8 | 7,1 | 4,4 | 115,8 |
| 77,4 | 51,5 | 120,9 | 7,4 | 5,5 | 90,9 |
| 78,3 | 54,8 | 120,1 | 8,3 | 5,8 | 121,1 |
| 79,1 | 50,7 | 120,2 | 9,1 | 9,7 | 110,2 |
| 65,8 | 61,6 | 144,2 | 6,8 | 9,6 | 114,2 |
| 70,1 | 56,9 | 140,8 | 7,1 | 8,9 | 110,8 |
| 77,1 | 46,1 | 157,5 | 8,1 | 4,1 | 107,5 |

| Варіант 5 | | | Варіант 6 | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $\bar{x}_1$ | $\bar{x}_2$ | $\bar{f}$ | $\bar{x}_1$ | $\bar{x}_2$ | $\bar{f}$ |
| 36,3 | 25,1 | 32,2 | 26,3 | 45,1 | 92,2 |
| 45,5 | 35,2 | 48,3 | 25,5 | 35,2 | 78,3 |
| 36,8 | 25,3 | 44,5 | 26,8 | 45,3 | 94,5 |
| 47,1 | 34,4 | 44,6 | 27,1 | 34,4 | 84,6 |
| 37,4 | 35,5 | 28,4 | 27,4 | 35,5 | 88,4 |
| 48,3 | 25,8 | 38,2 | 28,3 | 45,8 | 98,2 |
| 39,1 | 29,7 | 42,5 | 29,1 | 49,7 | 102,5 |
| 46,8 | 29,6 | 40,7 | 26,8 | 39,6 | 90,7 |
| 37,1 | 28,9 | 38,8 | 27,1 | 38,9 | 88,8 |
| 38,1 | 24,2 | 37,5 | 28,1 | 34,1 | 77,5 |

| Варіант 7 | | | Варіант 8 | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $\bar{x}_1$ | $\bar{x}_2$ | $\bar{f}$ | $\bar{x}_1$ | $\bar{x}_2$ | $\bar{f}$ |
| 56,3 | 15,1 | 82,2 | 5,3 | 15,1 | 22,2 |
| 45,5 | 25,2 | 78,3 | 4,5 | 15,2 | 28,3 |
| 56,8 | 15,3 | 74,5 | 5,8 | 15,3 | 34,5 |
| 47,1 | 24,4 | 84,6 | 4,1 | 14,4 | 24,6 |
| 57,4 | 25,5 | 88,4 | 5,4 | 15,5 | 18,4 |
| 58,3 | 25,8 | 88,2 | 5,3 | 15,8 | 28,2 |
| 49,1 | 19,7 | 72,5 | 4,1 | 19,7 | 22,5 |
| 56,8 | 29,6 | 80,7 | 6,8 | 19,6 | 30,7 |
| 47,1 | 28,9 | 78,8 | 7,1 | 18,9 | 38,8 |
| 48,1 | 24,1 | 77,5 | 8,1 | 14,1 | 27,5 |

| Варіант 9 | | | Варіант 10 | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $\bar{x}_1$ | $\bar{x}_2$ | $\bar{f}$ | $\bar{x}_1$ | $\bar{x}_2$ | $\bar{f}$ |
| 22,2 | 85,1 | 9,3 | 65,1 | 42,2 | 98,3 |
| 28,3 | 75,2 | 8,5 | 55,2 | 38,3 | 88,3 |
| 34,5 | 85,3 | 9,8 | 65,3 | 44,5 | 99,8 |
| 24,6 | 74,4 | 8,1 | 64,4 | 34,6 | 81,9 |
| 18,4 | 75,5 | 8,4 | 55,5 | 38,4 | 84,8 |
| 28,2 | 85,8 | 9,3 | 65,8 | 48,2 | 99,4 |
| 22,5 | 79,7 | 9,1 | 69,7 | 42,5 | 91,4 |
| 30,7 | 79,6 | 9,8 | 59,6 | 40,7 | 97,8 |
| 38,8 | 78,9 | 9,8 | 68,9 | 48,8 | 99,5 |
| 27,5 | 84,1 | 8,1 | 64,1 | 47,5 | 91,7 |

| Варіант 11 | | | Варіант 12 | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $\bar{x}_1$ | $\bar{x}_2$ | $\bar{f}$ | $\bar{x}_1$ | $\bar{x}_2$ | $\bar{f}$ |
| 42,8 | 22,2 | 42,5 | 42,1 | 42,1 | 128,2 |
| 43,5 | 28,3 | 48,8 | 41,8 | 41,2 | 128,3 |
| 45,3 | 24,5 | 39,9 | 39,1 | 40,7 | 124,5 |
| 46,4 | 24,5 | 45,2 | 42,2 | 46,1 | 134,5 |
| 38,4 | 23,8 | 41,3 | 41,3 | 39,3 | 123,8 |
| 38,2 | 28,2 | 44,2 | 41,2 | 38,2 | 128,2 |
| 42,5 | 25 | 41,5 | 41,8 | 42,1 | 126,2 |
| 40,7 | 20,7 | 40,6 | 39,6 | 42,2 | 120,7 |
| 38,5 | 18,5 | 39 | 39 | 38,1 | 121,5 |
| 37,8 | 27,1 | 41,7 | 40,4 | 37,1 | 128,1 |

| Варіант 13 | | | Варіант1 4 | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $\bar{x}_1$ | $\bar{x}_2$ | $\bar{f}$ | $\bar{x}_1$ | $\bar{x}_2$ | $\bar{f}$ |
| 4,1 | 2,1 | 12,8 | 74,2 | 21,1 | 14,2 |
| 1,8 | 1,2 | 10,3 | 71,8 | 12,2 | 11,3 |
| 3,1 | 1,7 | 14,5 | 73,6 | 17,1 | 13,1 |
| 2,2 | 4,6 | 13,4 | 72,2 | 46,2 | 28,1 |
| 1,3 | 3,9 | 13,8 | 71,2 | 39,1 | 12,1 |
| 1,2 | 3,8 | 12,8 | 73,5 | 38,1 | 20,2 |
| 1,8 | 4,2 | 12,6 | 71,8 | 42,3 | 14,2 |
| 3,6 | 2,2 | 12,7 | 33,6 | 22,4 | 10,1 |
| 3,9 | 3,1 | 21,5 | 73,4 | 31,2 | 14,1 |
| 4,4 | 3,7 | 28,1 | 74,1 | 37,2 | 18,6 |

| Варіант 15 | | | Варіант 16 | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $\bar{x}_1$ | $\bar{x}_2$ | $\bar{f}$ | $\bar{x}_1$ | $\bar{x}_2$ | $\bar{f}$ |
| 37,2 | 101,1 | 152,1 | 67,1 | 103,1 | 152,1 |
| 38,1 | 102,4 | 155,3 | 68,1 | 101,4 | 153,2 |
| 37,6 | 107,1 | 154,8 | 67,4 | 104,1 | 154,1 |
| 37,2 | 106,1 | 153,1 | 67,3 | 104,1 | 153,1 |
| 38,5 | 103,3 | 152,2 | 68,4 | 105,3 | 154,2 |
| 37,3 | 103,8 | 152,7 | 67,1 | 101,8 | 150,2 |
| 37,8 | 102,3 | 152,6 | 67,7 | 103,3 | 152,1 |
| 37,6 | 101,2 | 151,7 | 67,9 | 101,2 | 151,7 |
| 37,4 | 100,2 | 150,2 | 67,2 | 101,2 | 150,1 |
| 37,1 | 113,7 | 158,1 | 67,1 | 110,7 | 155,5 |

| Варіант 17 | | | Варіант 18 | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $\bar{x}_1$ | $\bar{x}_2$ | $\bar{f}$ | $\bar{x}_1$ | $\bar{x}_2$ | $\bar{f}$ |
| 63,5 | 52,1 | 97,5 | 45,5 | 72,1 | 187,5 |
| 61,4 | 55,8 | 98,2 | 48,4 | 71,6 | 191,2 |
| 64,4 | 53,1 | 97,9 | 45,4 | 73,2 | 192,5 |
| 64,2 | 51,5 | 97,4 | 46,2 | 78,1 | 195,1 |
| 65,5 | 56,2 | 98,4 | 44,5 | 76,4 | 190,4 |
| 61,8 | 52,2 | 97,5 | 42,8 | 72,3 | 187,5 |
| 61,3 | 50,1 | 97,3 | 40,3 | 72,7 | 188,3 |
| 61,1 | 53,7 | 97,9 | 42,1 | 79,4 | 197,4 |
| 61,8 | 51,1 | 97,4 | 41,8 | 79,8 | 197,6 |
| 60,7 | 51 | 97,2 | 40,7 | 71,5 | 187,2 |

| Варіант 19 | | | Варіант 20 | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $\bar{x}_1$ | $\bar{x}_2$ | $\bar{f}$ | $\bar{x}_1$ | $\bar{x}_2$ | $\bar{f}$ |
| 85,5 | 92,1 | 167,5 | 161,5 | 95,1 | 294,2 |
| 88,4 | 91,6 | 171,2 | 170,2 | 98,2 | 293,4 |
| 85,4 | 93,2 | 172,5 | 171,5 | 95,3 | 293,3 |
| 86,2 | 98,1 | 175,1 | 174,1 | 96,4 | 295,7 |
| 84,5 | 96,4 | 170,4 | 173,4 | 94,1 | 294,1 |
| 82,8 | 92,3 | 167,5 | 170,5 | 92,4 | 293,6 |
| 80,3 | 92,7 | 168,3 | 168,3 | 90,1 | 291,4 |
| 82,1 | 99,4 | 177,4 | 174,4 | 92,5 | 295,1 |
| 81,8 | 99,8 | 177,6 | 172,6 | 91,1 | 294,8 |
| 80,7 | 91,5 | 167,2 | 169,2 | 90,8 | 291,5 |

## Контрольні питання

1. Що називають виробничою функцією?
2. Як перевірити виконання гіпотези «рогу достатку»? Її економічна інтерпритація.
3. Як перевірити виконання гіпотези монотонності (опуклості вгору)? Її економічна інтерпритація
4. Як знайти масштабний множник пропорційного збільшення виробництва?
5. Що називають середньою ефективністю і-того ресурсу, як її визначити?
6. Що називають граничною ефективністю і-того ресурсу, як її визначити?
7. Що називають коефіцієнтом еластичності і-того ресурсу, як її визначити?
8. Як визначити еластичність виробництва?
9. Гранична норма заміщення ресурсів.
10. Що називають економічної (особливою) областю виробничої функції?

## Лабораторна робота № 5

**Тема:** Найпростіша модель однопродуктової фірми. Функція пропозиції. Моделі встановлення рівноважної ціни

**Мета:** Навчитись знаходити функції попиту на витрати виробництва та функцію пропозиції на продукцію; визначати область прибутковості та збитковості фірми; встановлювати рівноважну ціну.

**Завдання № 1.** Користуючись неокласичною довгостроковою моделлю однопродуктової фірми в умовах досконалої конкуренції, знайти функції попиту на витрати виробництва, $i \in \{1, 2\}$, де $p$ – ціна продукції, $w = (w_1, w_2)$ – вектор цін на ресурси, та функцію пропозиції продукції $y^* = y^*(p, w)$ для фірми з виробничою функцією Кобба-Дугласа з двома видами виробничих витрат $f(x_1, x_2) = Ax_1^{\alpha} x_2^{\beta}$.

**Завдання № 2.** Записати рівняння ізокости та ізокванти, які відповідають оптимальному випуску $y^*$, побудувати їх графіки, визначити області збитковості та прибутковості фірми при заданих цінах на продукцію та виробничі ресурси.

**Завдання № 3.** Нехай задані функція попиту на товар $d(p),\ p > 0$ та функція пропозиції однопродуктової фірми $s(p),\ p > 0$. Визначити рівноважну ціну на товар, використовуючи модель Самуельсона з дискретним часом, побудувати послідов-ність цін, збіжну до рівноважної ціни (за початкову ціну $p_0$ взяти будь-яке додатне число).

**Завдання № 4*.** Побудувати алготитм і визначити рівноважну ціну на дану продукцію, використовуючи павутиноподібну модель з дискретним часом (за початкову ціну $p_0$ взяти будь-яке додатне число).

## Методичні рекомендації

**1.** Спочатку, опишіть виробничу функцію

$$f(x_1, x_2) = Ax_1^{\alpha} x_2^{\beta},\ A, \alpha, \beta > 0,\ \alpha + \beta < 1,$$

далі побудуйте неокласичну довгострокову модель однопродуктової фірми в умовах досконалої конкуренції

$$\Pi(x_1, x_2) = p \cdot y - w_1 \cdot x_1 - w_2 \cdot x_2 \to \max,\ (x_1, x_2) \in R_+^2,$$

де $y = f(x_1, x_2)$, $(x_1, x_2) \in R_+^2$ – виробнича функція Кобба-Дугласа з двома видами виробничих витрат, конкретизована за варіантами.

Коли ціна $p$ на продукцію фірми змінюється на деякому проміжку $[p_1, p_2]$, а вектор цін на виробничі ресурси $w$ змінюється у деякій області $W \in R_+^2$, то функції попиту на виробничі витрати можна одержати як розв’язок системи

$$p \cdot \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_i} - w_i = 0,\ i \in \{1, 2\},$$

відносно невідомих $x_1$, $x_2$. Вони визначають оптимальні набори витрат як функції від цін продукції та виробничих факторів, тобто $x_1^* = x_1^*(p, w)$, $x_2^* = x_2^*(p, w)$ – функції попиту на витрати виробництва.

Щоб знайти функції попиту на витрати виробництва $x_1^* = x_1^*(p, w)$, $x_2^* = x_2^*(p, w)$ засобами пакету Mathcad, потрібно виконати наступні кроки:

$$f(x1, x2) := A \cdot x1^{\alpha} \cdot x2^{\beta}$$

$$\Pi(x1, x2, p, w1, w2) := p \cdot f(x1, x2) - w1 \cdot x1 - w2 \cdot x2$$

$$\Pi x1(x1, x2, p, w1, w2) := \frac{d}{dx1}\Pi(x1, x2, p, w1, w2)$$

$$\Pi x2(x1, x2, p, w1, w2) := \frac{d}{dx2}\Pi(x1, x2, p, w1, w2)$$

$x1 := 1 \quad x2 := 1$

Given

$$\Pi x1(x1, x2, p, w1, w2) = 0$$

```
Пх2(x1 ,x2 ,p ,w1 ,w2) = 0
find(x1 ,x2) →
```

Підставляючи функції попиту на витрати виробництва $x_i^* = x_i^*(p,w)$, $i \in \{1,2\}$ у виробничу функцію $f$, отримаємо обсяг випуску продукції як функцію цін продукції та виробничих факторів

$$y^* = f\left(x_1^*(p,w), x_2^*(p,w)\right) := y^*(p,w).$$

Функцію $y^* = y^*(p,w)$ називають *функцією пропозиції випуску продукції.*

***2.*** Ізокванта – це крива сталого випуску продукції, тобто

$$f(x_1, x_2) = Q = const,\ (x_1, x_2) \in R_+^2.$$

Оскільки в умові потрібно виписати ізокванту, яка відповідає оптимальному випуску $y^*$, то спочатку, підставивши значення $\boldsymbol{p}$ та $w = (w_1, w_2)$ у функцію пропозиції $y^* = y^*(p,w)$, знайдемо оптимальний випуск продукції $Q$, тоді з рівності $f(x_1, x_2) = Q$ виразимо змінну $x_2$ через $x_1$. Для цього в пакеті Mathcad можна виконати наступні кроки:

```
Q := y(p ,w1 ,w2)
x2 := 1
Given
f(x1 ,x2) = Q
find(x2) →
```

.

Ізокоста – це крива сталих витрат фірми, тобто

$$x_1 w_1 + x_2 w_2 = C = const,\ (x_1, x_2) \in R_+^2.$$

Для того, щоб записати рівняння ізокости, яка відповідає оптимальному випуску $y^*$ при фіксованих значеннях цін на продукцію та виробничі витрати, потрібно спочатку знайти загальні витрати на виробництво продукції $C$ ($C = w_1 x_1^* + w_2 x_2^*$), які відповідають $y^*$, тоді з рівності $x_1 w_1 + x_2 w_2 = C$, виразити змінну $x_2$ через $x_1$.

Для цього в пакеті Mathcad можна виконати наступні кроки:

```
C := w1 · x1(p, w1, w2) + w2 · x2(p, w1, w2)
x2 := 1
Given
w1 · x1 + w2 · x2 = C
find(x2) →
```

Щоб побудувати графіки ізокости та ізокванти використайте кнопку  на панелі **Графіки.**

Область прибутковості фірми – це область, де її прибуток додатний, та, відповідно, область збитковості фірми – це область, в якій її прибуток від'ємний. Щоб визначити їх при фіксованих цінах $p$ та $w = (w_1, w_2)$, потрібно виразити прибуток фірми $\Pi(x_1, x_2) = p \cdot y - w_1 \cdot x_1 - w_1 \cdot x_1$, як функцію лише від випуску продукції $\Pi(y)$ та знайти проміжки, на яких $\Pi(y) > 0$ (область прибутковості) та $\Pi(y) < 0$ (область збитковості).

Для цього в пакеті Mathcad можна виконати наступні кроки:

```
Π(x1, x2, y, p, w1, w2) := p · y − w1 · x1 − w2 · x2
Π(x1(p, w1, w2), x2(p, w1, w2), y, p, w1, w2) →
```

Тут `x1(p, w1, w2), x2(p, w1, w2)` – функції попиту на виробничі фактори, знайдені в завданні №1. Далі, вказавши значення $p$ та $w = (w_1, w_2)$, одержимо функцію $\Pi(y)$.

**3.** Модель П.Самуельсона з дискретним часом, як і багато інших моделей встановлення рівноважної ціни, базується на такому припущенні: зміна ціни пропорційна різниці між попитом і пропозицією:

$$p_{t+1} = p_t + \lambda\left(d(p_t) - s(p_t)\right), \; t \in N \cup \{0\},$$

де $p_0 > 0$ – довільне наближення, число $\lambda > 0$ називається *коефіцієнтом підлаштовування ціни*.

Зауважимо, що у випадку лінійних функцій попиту $d$ і пропозиції $s$ дану модель запропонував Еванс.

## Варіанти завдань

| **Варіант** | **A** | $\alpha$ | $\beta$ |
|---|---|---|---|
| **1** | 55 | 0,5 | 0,15 |
| **2** | 62 | 0,1 | 0,8 |
| **3** | 41 | 0,2 | 0,4 |
| **4** | 52 | 0,3 | 0,1 |
| **5** | 14 | 0,4 | 0,12 |
| **6** | 45 | 0,6 | 0,32 |
| **7** | 62 | 0,7 | 0,14 |
| **8** | 41 | 0,04 | 0,5 |
| **9** | 45 | 0,2 | 0,3 |
| **10** | 53 | 0,8 | 0,17 |
| **11** | 35 | 0,4 | 0,25 |
| **12** | 63 | 0,24 | 0,6 |
| **13** | 47 | 0,04 | 0,56 |
| **14** | 64 | 0,08 | 0,2 |
| **15** | 29 | 0,2 | 0,4 |
| **16** | 48 | 0,4 | 0,3 |
| **17** | 31 | 0,5 | 0,2 |
| **18** | 60 | 0,09 | 0,4 |
| **19** | 58 | 0,2 | 0,5 |
| **20** | 44 | 0,5 | 0,2 |

| **Варіант** | $P$ | $w_1$ | $w_2$ |
|---|---|---|---|
| **1** | 11 | 2 | 1 |
| **2** | 14 | 3 | 9 |
| **3** | 25 | 5 | 3 |
| **4** | 32 | 2 | 6 |
| **5** | 22 | 4 | 5 |
| **6** | 10 | 2 | 3 |
| **7** | 12 | 3 | 2 |
| **8** | 30 | 5 | 4 |
| **9** | 50 | 3 | 10 |
| **10** | 10 | 6 | 1 |
| **11** | 24 | 2 | 3 |
| **12** | 25 | 1 | 5 |
| **13** | 15 | 4 | 3 |
| **14** | 45 | 3 | 8 |
| **15** | 42 | 5 | 7 |
| **16** | 32 | 4 | 6 |
| **17** | 35 | 2 | 8 |
| **18** | 28 | 3 | 9 |
| **19** | 48 | 5 | 10 |
| **20** | 34 | 4 | 8 |

| **Варіант** | $\lambda$ | $d(p)$ | $s(p)$ |
|---|---|---|---|
| **1** | 0,12 | $(p^2+4)/p^3$ | $\sqrt{p}+3$ |
| **2** | 0,2 | $(p+1)/(2p^2)$ | $\sqrt[3]{p^2}+p+1$ |
| **3** | 0,24 | $(2p^2+7)/p^4$ | $\sqrt{p^3}+\sqrt{p}+2$ |
| **4** | 0,1 | $(p+9)/p^3$ | $\sqrt[3]{p}+2p+0{,}5$ |
| **5** | 0,18 | $(3p^2+5)/(4p^3)$ | $\ln(p+1)$ |

| | | | |
|---|---|---|---|
| **6** | 0,21 | $\left(3p^4+1\right)/\left(7p^6\right)$ | $4\sqrt[3]{p}+2p+1{,}3$ |
| **7** | 0,11 | $\left(p+14\right)/\left(3p^3\right)$ | $\sqrt{p}+3p+1{,}4$ |
| **8** | 0,22 | $\left(4p^2+9\right)/\left(8p^3\right)$ | $\sqrt[3]{p^2}+p+3$ |
| **9** | 0,12 | $\left(7p+4\right)/p^4$ | $2\sqrt{p}+3p+1{,}4$ |
| **10** | 0,14 | $\left(p^2+p+4\right)/p^4$ | $\sqrt[4]{p}+4p+1{,}7$ |
| **11** | 0,18 | $\left(p^3+6\right)/\left(2p^5\right)$ | $4\ln(2p+1)$ |
| **12** | 0,21 | $\left(p+10\right)/p$ | $\sqrt[3]{p}+7\sqrt{p}+0{,}3$ |
| **13** | 0,15 | $\left(p^2+4\right)/p^3$ | $\sqrt[4]{p^3}+2p+1{,}1$ |
| **14** | 0,19 | $\left(p^2+4\right)/p^3$ | $\sqrt[3]{p}+4$ |
| **15** | 0,22 | $\left(p^2+p\right)/\left(p^3+1\right)$ | $5\sqrt{3p}+3p$ |
| **16** | 0,17 | $\left(3p+4\right)/p^2$ | $\sqrt[5]{p^2}+4p+2{,}1$ |
| **17** | 0,18 | $\left(p+12\right)/\left(5p^3\right)$ | $\lg(4p+3)$ |
| **18** | 0,24 | $\left(p^4+8\right)/\left(4p^5\right)$ | $\sqrt[5]{p}+4p+1{,}5$ |
| **19** | 0,16 | $\left(2p^2+6\right)/\left(7p^3\right)$ | $\sqrt[4]{p}+2\sqrt{p}+0{,}4$ |
| **20** | 0,12 | $\left(3p^2+p\right)/\left(8p^3\right)$ | $\sqrt[3]{3p^2}+4p+0{,}1$ |

## Контрольні питання

1. Що розуміють під оптимальним випуском продукції? Як його знайти?
2. Що називають функціями попиту на виробничі фактори?
3. Що називають функцією пропозиції?
4. Яку криву називають ізоквантою? Яку властивість мають точки, що лежать на ній?
5. Яку криву називають ізокостою? Яку властивість мають точки, що лежать на ній?
6. Що називають областю прибутковості (збитковості) фірми?
7. Дайте означення рівноважної ціни.
8. У чому полягає павутиноподібна модель встановлення рівноважної ціни з дискретним часом.
9. У чому полягає модель Самуельсона встановлення рівноважної ціни з дискретним часом.
10. У чому полягає модель Самуельсона встановлення рівноважної ціни з неперервним часом.

# Література


1. *Колемаев В.А.* Математическая экономика: Учебник для вузов. – М.: ЮНИТИ, 1998.– 240 с.
2. *Лавренюк С.П.* Математичні основи мікроекономіки. Теорія споживання: Текст лекцій. – Львів: Видавничий центр ЛНУ ім. Івана Франка, 1999.– 80 с.
3. *Лавренюк С.П.* Математичні основи мікроекономіки. Теорія виробництва: Текст лекцій. – Львів: Видавничий центр ЛНУ ім. Івана Франка, 2000.– 70 с.
4. *Лавренюк С.П.* Математичні основи мікроекономіки. Теорія рівноваги: Текст лекцій. – Львів: Видавничий центр ЛНУ ім. Івана Франка, 2000.– 104 с.
5. *Ляшенко І.М., Коробова М.В., Столяр А.М.* Основи математичного моделювання економічних, екологічних та соціальних процесів: Навч.пос. – Тернопіль: Навчальна книга – Богдан, 2006. – 304 с.
6. Мікроекономіка і макроекономіка. Підручник. / *Будаговська С.М., Кілієвич О.І., Луніна І.О. та ін.* – К.: Основи, 1998. – 518с.
7. *Пономаренко О.І., Перестюк М.О., Бурим В.М.* Основи математичної економіки.– К.: Інформтехніка, 1995. – 320с.
8. *Розанов Н.М., Шаститко А.Е.* Теория спроса и предложения: Учебное пособие. – М.: Анкил, 1995. – 96с.
9. *Григорків В.С.* Основи математичної економіки: вибрані завдання для тематичного контролю. Навчальний посібник. – Чернівці: Рута, 2003. – 92с.
10. *Дьяконов В.П., Абраменкова И.В.* MathCAD 7.0 в математике, физике и в Internet.– М.: “Нолидж”, 1998. – 352с.

# Зміст

Навчальне видання

# Математичні моделі мікроекономіки
## Теорія споживання та виробництва

Методичні рекомендації та практичні завдання


Укладачі:
***Івасюк Галина Петрівна,***
*кандидат фізико-математичних наук,*
*доцент кафедри математичного моделювання*



Комп’ютерний набір ***Івасюк Г.П.***