R4.21 Modélisation des robots manipulateurs articulés

II. Modèle Dynamique des Robots Articulés

José de Jesus CASTILLO ZAMORA

Maître de conférences,
IUT de Béziers,
Université de Montpellier,
LIRMM

Licence professionnelle
Robotique & Intelligence Artificielle

Introduction

Modèle dynamique

- L'objectif du modèle dynamique d'un robot est de comprendre la relation entre le mouvement du robot et les forces impliquées dans ce mouvement.
- Le modèle dynamique est souvent complexe et doit donc être résolu de manière itérative à l'aide d'une procédure numérique.

Introduction

Modèle dynamique

Ce modèle relie mathématiquement :

- La position du robot définie par ses variables articulaires (ou les coordonnées de l'outil), ainsi que ses vitesses et ses accélérations.
- Les forces et les couples appliqués aux articulations (ou à l'extrémité du robot).
- Les paramètres dimensionnels du robot tels que les longueurs, les masses et les inerties de ses éléments.

Introduction

Modèle dynamique

Le modèle dynamique du robot est essentiel pour atteindre les objectifs suivants :

- Simulation des mouvements
- Conception et évaluation de la structure mécanique
- Dimensionnement des actionneurs
- **Conception et évaluation du contrôle dynamique**

Le modèle dynamique complet d'un robot doit inclure la dynamique des systèmes de transmission, des actionneurs et des équipements de contrôle électrique. Cela augmente la complexité.

Sommaire

Sommaire

1. Modèle dynamique de la structure mécanique d'un robot rigide

Formulation Newton-Euler

L'obtention du modèle dynamique d'un mécanisme repose sur l'approche de l'équilibre des forces exposée dans la deuxième loi de Newton, ou son équivalent pour le mouvement de rotation, connu sous le nom de loi d'Euler :

$$\sum F = m\dot{v} \tag{1}$$

$$\sum T = I\dot{\omega} + \omega \times (I\omega) \tag{2}$$

1. Modèle dynamique de la structure mécanique d'un robot rigide

Formulation Newton-Euler

Dans le cas simple d'un robot à une seule articulation (Fig. 1), l'équilibre force-couple se traduit par l'équation suivante :

$$\begin{aligned}\tau &= I\frac{d^2\theta}{dt^2} + MgL\cos(\theta) = \\ &= ML^2\ddot{\theta} + MgL\cos(\theta) \qquad (3)\end{aligned}$$

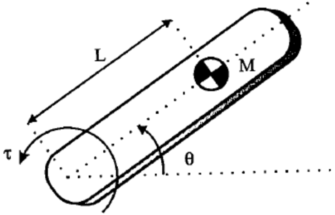

Figure 1 – Robot articulaire à un seul degrée de liberté

1. Modèle dynamique de la structure mécanique d'un robot rigide

Types de modèles dynamiques

- **Modèle dynamique direct** : exprime l'évolution temporelle des coordonnées des articulations du robot en fonction des forces et des couples impliqués.
- **Modèle dynamique inverse** : exprime les forces et les couples impliqués en fonction de l'évolution des coordonnées des articulations et de leurs dérivées.

1. Modèle dynamique de la structure mécanique d'un robot rigide

Considération

En plus de la gravité et des forces d'inertie, pour un robot avec plusieurs DDL (Fig. 2), il y aura des forces de Coriolis (dues au mouvement relatif entre les liaisons) et des forces centripètes qui dépendent de la configuration instantanée du manipulateur.

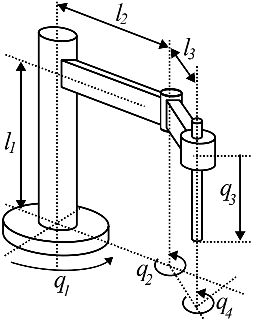

Figure 2 – Robot SCARA (4 DDL)

1. Modèle dynamique de la structure mécanique d'un robot rigide

Formulation Euler-Lagrange

- Une autre approche consiste à utiliser la formulation lagrangienne.
- Le modèle qui peut être obtenu grâce à cette méthodologie coïncide avec celui établi précédemment grâce à la formulation de Newton-Euler (Eq. (3)).
- La formulation lagrangienne énonce l'équation suivante.

1. Modèle dynamique de la structure mécanique d'un robot rigide

Formulation Euler-Lagrange

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = \tau \quad \text{with} \quad \mathcal{L} = K - U \tag{4}$$

- q_i : Coordonnées généralisées (articulaires)
- τ : Vecteur des forces et des couples appliqués aux q_i
- $\mathcal{L}$: Lagrangian
- K : Énergie cinétique
- U : Énergie potentielle

1. Modèle dynamique de la structure mécanique d'un robot rigide

À résoudre

Obtenir le modèle dynamique du robot sur la Figure 3 au moyen des deux méthodologies décrites précédemment.

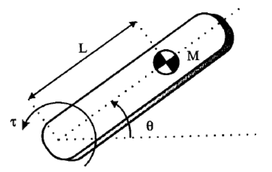

Figure 3 – Robot articulaire à un seul degrée de liberté

Sommaire

2. Modèle dynamique : Méthode Euler-Lagrange

Description

- Cette méthode utilise les matrices ${}^{i-1}A_i$ obtenues selon l'algorithme DH.
- Il s'agit d'une méthode inefficace sur le plan informatique : le nombre d'opérations (dont certaines sont redondantes) augmente exponentiellement avec le nombre de degrés de liberté.
- Elle conduit à des équations bien structurées où les différents couples et forces impliqués dans le mouvement sont clairement représentés.

2. Modèle dynamique : Méthode Euler-Lagrange

Step 1

Attribuer à chaque liaison un repère selon les normes D-H.

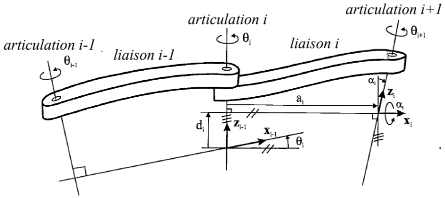

Figure 4 – Paramètres D-H d'une liaison tournante

2. Modèle dynamique : Méthode Euler-Lagrange

Step 2

Obtenir les matrices de transformation ${}^{0}A_i$ pour chaque élément i.

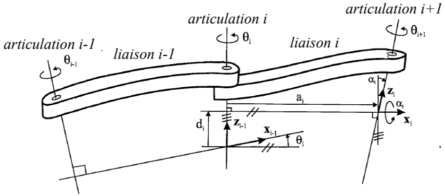

Figure 5 – Paramètres D-H d'une liaison tournante

2. Modèle dynamique : Méthode Euler-Lagrange

Step 3

Obtenir les matrices U_{ij} définies par :

$$U_{ij} = \frac{\partial {}^0A_i}{\partial q_j} \tag{5}$$

La dérivée de la matrice ${}^0A_i$ par rapport à la coordonnée q_j peut être facilement obtenue par ordinateur, au moyen de l'expression :

$$\frac{\partial {}^0A_i}{\partial q_j} = \begin{cases} {}^0A_{j-1} Q_j {}^{j-1}A_i & \text{si } j \leq i \\ \mathbf{0} & \text{si } j > i \end{cases} \tag{6}$$

2. Modèle dynamique : Méthode Euler-Lagrange

Step 3

Avec :

$$Q_j = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{si l'articulation j est de rotacion} \tag{7}$$

$$Q_j = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{si l'articulation j est de traslation} \tag{8}$$

2. Modèle dynamique : Méthode Euler-Lagrange

Step 4

Obtenir les matrices U_{ijk} définies par :

$$U_{ijk} = \frac{\partial U_{ij}}{\partial q_k} \tag{9}$$

De la même manière :

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_{ij}}{\partial q_k} &= \frac{\partial}{\partial q_k}\left(\frac{\partial^0 A_i}{\partial q_j}\right) = \\ &= \begin{cases} {}^0A_{j-1} Q_j {}^{j-1}A_{k-1} Q_k {}^{k-1}A_i & \text{si } i \geq k \geq j \\ {}^0A_{k-1} Q_k {}^{k-1}A_{j-1} Q_j {}^{j-1}A_i & \text{si } i \geq j \geq k \\ \mathbf{0} & \text{si } k > i \text{ ou } j > i \end{cases} \end{aligned} \tag{10}$$

2. Modèle dynamique : Méthode Euler-Lagrange

Step 5

Obtenir les matrices de pseudo-inertie J_i pour chaque élément, qui sont définies par :

$$J_i = \begin{pmatrix} \int x_i^2 dm & \int x_i y_i dm & \int x_i z_i dm & \int x_i dm \\ \int y_i x_i dm & \int y_i^2 dm & \int y_i z_i dm & \int y_i dm \\ \int z_i x_i dm & \int z_i y_i dm & \int z_i^2 dm & \int z_i dm \\ \int x_i dm & \int y_i dm & \int z_i dm & \int dm \end{pmatrix} \tag{11}$$

où les intégrales sont étendues à l'élément i considéré, et $(x_i \ y_i \ z_i)$ sont les coordonnées de la différentielle de masse dm par rapport au repère de l'élément.

2. Modèle dynamique : Méthode Euler-Lagrange

Step 6

Obtenir la matrice d'inertie $D = [d_{ij}]$ dont les éléments sont définis par (où n, c'est le nombre de degrés de liberté) :

$$d_{ij} = \sum_{k=(\max\ i,j)}^{n} \text{Trace}\left(U_{kj} J_k U_{ki}^T\right)\ ;\ i,j = 1,2,\ldots,n \qquad (12)$$

Step 7

Obtenir les termes h_{ikm} définis par :

$$h_{ikm} = \sum_{j=\max(i,k,m)}^{n} \text{Trace}\left(U_{jkm} J_j U_{ji}^T\right)\ ;\ i,k,m = 1,2,\ldots,n \quad (13)$$

2. Modèle dynamique : Méthode Euler-Lagrange

Step 8

Obtenir la matrice colonne des forces de Coriolis et centripètes, $H = [h_i]^T$, dont les éléments sont définis par :

$$h_i = \sum_{k=1}^{n} \sum_{m=1}^{n} h_{ikm} \dot{q}_k \dot{q}_m \tag{14}$$

2. Modèle dynamique : Méthode Euler-Lagrange

Step 9

Obtenir la matrice colonne des forces gravitationnelles $C = [c_i]^T$ dont les éléments sont définis par :

$$c_i = \sum_{j=1}^{n} \left(-m_j \mathbf{g} U_{ji} {}^j r_j \right) \; ; \; i = 1, 2, \ldots, n \tag{15}$$

- $\mathbf{g}$ est le vecteur de gravité exprimé dans le repère de la base $\{S_0\}$ et s'exprime par $(g_{x0} \; g_{y0} \; g_{z0} \; 0)$
- ${}^j r_j$ est le vecteur des coordonnées homogènes du centre de masse de l'élément j exprimé dans le repère de l'élément.

2. Modèle dynamique : Méthode Euler-Lagrange

Step 10

L'équation dynamique du système sera la suivante :

$$\tau = D\ddot{q} + H + C \tag{16}$$

où τ est le vecteur des forces et des couples effectifs appliqués à chaque coordonnée q_i.

2. Modèle dynamique : Méthode Euler-Lagrange

Considérations

- Les matrices J_i et D sont symétriques et semi-définies positives.
- Le terme h_{ikm} représente l'effet, en termes de force ou de couple, produit sur la liaison i par le mouvement relatif entre les liaisons k et m. On vérifie que $h_{ikm} = h_{imk}$ et que $h_{iii} = 0$.
- Pour obtenir les matrices de pseudo-inertie J_i, les intégrales sont étendues à l'élément i, de sorte qu'elles sont évaluées pour chaque point de masse de l'élément dm et de coordonnées $(x_i \ y_i \ z_i)$ par rapport au repère de l'élément.

Sommaire

3. Modèle dynamique : Méthode Newton-Euler

Description

- C'est une formulation récursive dans laquelle la position, la vitesse et l'accélération de la liaison i par rapport à la base du robot sont obtenues à partir des celles de la liaison $i-1$, ainsi que du mouvement relatif de l'articulation i.
- Les forces et les couples agissant sur la liaison i référencée à la base du robot sont obtenus à partir de ceux correspondant à la liaison $i+1$.
- Cet algorithme est basé sur des opérations vectorielles, ce qui le rend plus efficace que la formulation Lagrangienne. Sa complexité de calcul dépend directement du nombre de degrés de liberté.

3. Modèle dynamique : Méthode Newton-Euler

Step 1

Attribuer à chaque liaison un repère selon les normes D-H.

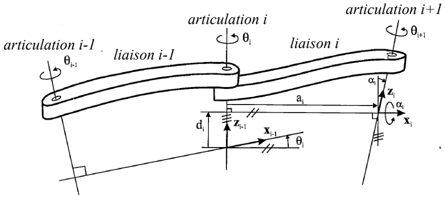

Figure 6 – Paramètres D-H d'une liaison tournante

3. Modèle dynamique : Méthode Newton-Euler

Step 2

Obtenir les matrices de rotation ${}^{i-1}R_i$ et les matrices inverses ${}^{i}R_{i-1} = \left({}^{i-1}R_i\right)^{-1} = \left({}^{i-1}R_i\right)^{T}$, avec :

$$
{}^{i-1}R_i = \begin{pmatrix} C_{\theta_i} & -C_{\alpha_i}S_{\theta_i} & S_{\alpha_i}S_{\theta_i} \\ S_{\theta_i} & C_{\alpha_i}C_{\theta_i} & -S_{\alpha_i}C_{\theta_i} \\ 0 & S_{\alpha_i} & C_{\alpha_i} \end{pmatrix} \tag{17}
$$

3. Modèle dynamique : Méthode Newton-Euler

Step 3

Établir les conditions initiales.

Pour le repère de la base $\{S_0\}$:

- ${}^0\omega_0 = (0\ 0\ 0)^T$ vitesse angulaire
- ${}^0\dot{\omega}_0 = (0\ 0\ 0)^T$ accélération angulaire
- ${}^0v_0 = (0\ 0\ 0)^T$ vitesse linéaire
- ${}^0\dot{v}_0 = (g_x\ g_y\ g_z)^T$ accélération linéaire

${}^0\omega_0$, ${}^0\dot{\omega}_0$ et ${}^0v_0$ sont généralement nulles, sauf si la base du robot est en mouvement.

3. Modèle dynamique : Méthode Newton-Euler

Step 3

Pour l'extrémité du robot, la force et le couple extérieurs, ${}^{n+1}f_{n+1}$ et ${}^{n+1}n_{n+1}$, sont connus.

- $z_0 = (0\ 0\ 1)^T$
- ${}^{i}p_i = (a_i\ d_iS_{\theta_i}\ d_iC_{\theta_i})^T$ coordonnées de l'origine du système $\{S_i\}$ par rapport à $\{S_{i-1}\}$
- ${}^{i}s_i$ Coordonnées du centre de masse du lien i par rapport au repère $\{S_i\}$
- ${}^{i}I_i$ Matrice d'inertie de la liaison i par rapport à son centre de masse exprimée en $\{S_i\}$

Pour $i = 1, \ldots, n$, effectuer les steps 4 à 7.

3. Modèle dynamique : Méthode Newton-Euler

Step 4

Obtenir la vitesse angulaire du repère $\{S_i\}$.

$$
{}^{i}\omega_i = \begin{cases} {}^{i}R_{i-1}\left({}^{i-1}\omega_{i-1} + z_0\dot{q}_i\right) & \text{si le lien } i \text{ est de rotation} \\ {}^{i}R_{i-1}{}^{i-1}\omega_{i-1} & \text{si le lien } i \text{ est de translation} \end{cases} \tag{18}
$$

Step 5

Obtenez l'accélération angulaire du repère $\{S_i\}$.

$$
{}^{i}\dot{\omega}_i = \begin{cases} {}^{i}R_{i-1}\left({}^{i-1}\dot{\omega}_{i-1} + z_0\ddot{q}_i\right) + {}^{i-1}\omega_{i-1} \times z_0\dot{q}_i & \text{lien } i \text{ de rotation} \\ {}^{i}R_{i-1}{}^{i-1}\dot{\omega}_{i-1} & \text{lien } i \text{ de translation} \end{cases}
$$

3. Modèle dynamique : Méthode Newton-Euler

Step 6

Selon le lien, obtenir l'accélération linéaire du repère $\{S_i\}$:

$$
{}^i\dot{v}_i = \begin{cases} {}^i\dot{\omega}_i \times {}^ip_i + {}^i\omega_i \times ({}^i\omega_i \times {}^ip_i) + {}^iR_{i-1}{}^{i-1}\dot{v}_{i-1} & \text{si rotation} \\ {}^iR_{i-1}\left(z_0\ddot{q}_i + {}^{i-1}\dot{v}_{i-1}\right) + {}^i\dot{\omega}_i \times {}^ip_i + & \\ 2{}^i\omega_i \times ({}^iR_{i-1}z_0\dot{q}_i) + {}^i\omega_i \times ({}^i\omega_i \times {}^ip_i) & \text{si translation} \end{cases}
$$

Step 7

Obtenez l'accélération linéaire du centre de gravité de la liaison i :

$$
{}^ia_i = {}^i\dot{\omega}_i \times {}^is_i + {}^i\omega_i \times \left({}^i\omega_i \times {}^is_i\right) + {}^i\dot{v}_i \qquad (19)
$$

Pour $i = n, \ldots, 1$, effectuer les steps 8 à 10.

3. Modèle dynamique : Méthode Newton-Euler

Step 8

Pour obtenir la force exercée sur la liaison i :

$$^{i}f_i = {}^{i}R_{i+1}{}^{i+1}f_{i+1} + m_i{}^{i}a_i \tag{20}$$

Step 9

Obtenir le couple exercé sur la liaison i :

$$\begin{aligned} {}^{i}n_i \quad = \quad & {}^{i}R_{i+1}\left[{}^{i+1}n_{i+1} + \left({}^{i+1}R_i{}^{i}p_i\right) \times {}^{i+1}f_{i+1}\right] + \\ & \left({}^{i}p_i + {}^{i}s_i\right) \times m_i{}^{i}a_i + {}^{i}I_i{}^{i}\dot{\omega}_i + {}^{i}\omega_i \times \left({}^{i}I_i{}^{i}\omega_i\right) \end{aligned} \tag{21}$$

3. Modèle dynamique : Méthode Newton-Euler

Step 10

Obtenir la force ou le couple appliqué à l'articulation i.

$$\tau_i = \begin{cases} {}^i n_i^T {}^i R_{i-1} z_0 & \text{si le lien } i \text{ est de rotation} \\ {}^i f_i^T {}^i R_{i-1} z_0 & \text{si le lien } i \text{ est de translation} \end{cases} \tag{22}$$

Où τ est le couple ou la force effective (couple moteur moins les couples de frottement ou les perturbations).

Sommaire

4. Variantes du Modèle dynamique

Le modèle dynamique

L'équation :

$$\tau = D\ddot{q} + H + C \tag{23}$$

établit les couples et les forces qui doivent être fournis par les actionneurs pour que les variables articulaires suivent une trajectoire donnée $q(t)$.
La définition des matrices et des vecteurs qui composent cette équation se trouve dans la section 2.

4. Variantes du Modèle dynamique

Le vecteur τ

Le vecteur des couples généralisés, τ, présuppose des couples effectifs, donc s'il y a des couples perturbateurs ou des couples de frottement, ils doivent être pris en compte :

$$\tau = \tau_{moteur} - \tau_{perturbation} - \tau_{frottement} \tag{24}$$

L'équation (23) est non linéaire, et il n'est pas trivial d'obtenir la trajectoire suivie en conséquence de l'application de certaines valeurs de τ.

Sommaire

4. Variantes du Modèle dynamique

1. Modèle dynamique en variables d'état

Variables d'état

- Pour obtenir un modèle dynamique plus simple, il peut être pratique d'exprimer le modèle de l'équation (23) en variables d'état.
- Les variables d'état du système seront les positions et les vitesses de chacune des articulations, le vecteur d'état étant $(q\ \dot{q})^T$.

4. Variantes du Modèle dynamique

1. Modèle dynamique en variables d'état

Modèle dynamique en variables d'état

L'équation (23) peut être exprimée comme suit :

$$\begin{aligned} &\tau = D\ddot{q} + H + C \rightarrow \tau = D\ddot{q} + N \rightarrow \\ &\ddot{q} = D^{-1}(\tau - N) \end{aligned} \tag{25}$$

avec $N = H + C$ et :

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} q \\ \dot{q} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & I_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} q \\ \dot{q} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ I_1 \end{pmatrix} u = A\begin{pmatrix} q \\ \dot{q} \end{pmatrix} + Bu \tag{26}$$

$$u = D^{-1}(\tau - N) \tag{27}$$

4. Variantes du Modèle dynamique

1. Modèle dynamique en variables d'état

Modèle dynamique en variables d'état

Il s'agit d'une équation d'état linéaire. La non-linéarité a été transférée à l'entrée u. La Figure 7 montre le schéma fonctionnel. Le premier bloc est non linéaire et dépend de l'état $\begin{pmatrix} q^T & \dot{q}^T \end{pmatrix}^T$.

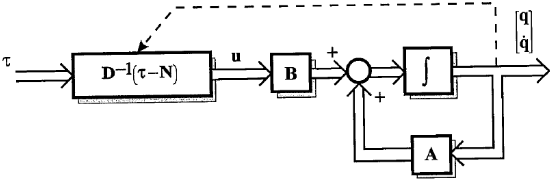

Figure 7 – Schéma de la dynamique d'un robot dans l'espace d'état

4. Variantes du Modèle dynamique

2. Modèle dynamique dans l'espace de travail

Espace de gravail

- Il est parfois pratique d'exprimer le modèle dynamique sous la forme d'une relation entre la trajectoire de l'extrémité du robot et les forces et les couples qui lui sont appliqués, le tout référencé à un repère fixe quelque part dans l'environnement de travail.
- Lorsque les données sont fournies dans les coordonnées correspondantes, on dit que l'on travaille dans l'espace de travail.

4. Variantes du Modèle dynamique

2. Modèle dynamique dans l'espace de travail

Expressions de base

Pour exprimer le modèle dans l'espace de travail, nous partons de l'équation (23) et de l'expression :

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \\ \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{pmatrix} = J \begin{pmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \dot{q}_{n-1} \\ \dot{q}_n \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad J = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_x}{\partial q_1} & \cdots & \frac{\partial f_x}{\partial q_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_\psi}{\partial q_1} & \cdots & \frac{\partial f_\psi}{\partial q_n} \end{pmatrix} \tag{28}$$

$$\dot{j} = J\dot{q} \tag{29}$$

4. Variantes du Modèle dynamique

2. Modèle dynamique dans l'espace de travail

Vecteur des vitesses cartésiennes

$\dot{j} = \left(\dot{x}\ \dot{y}\ \dot{z}\ \dot{\phi}\ \dot{\theta}\ \dot{\psi}\right)^T$ représente le vecteur des vitesses cartésiennes de la pointe du robot par rapport au système de coordonnées associé à sa base. En dérivant cette expression par rapport au temps, on obtient :

$$\ddot{j} = \dot{J}\dot{q} + J\ddot{q} \rightarrow \tag{30}$$

$$\ddot{q} = J^{-1}\left(\ddot{j} - \dot{J}\dot{q}\right) \tag{31}$$

qui relient directement et inversement les accélérations cartésiennes et articulaires.

4. Variantes du Modèle dynamique

2. Modèle dynamique dans l'espace de travail

Relation de puissances

D'autre part, en supposant que la puissance consommée par le robot doive être la même qu'elle soit évaluée dans l'espace cartésien ou dans l'espace articulaire, on a :

$$\text{Puissance} = (\text{Couple})\,(\text{vitesse}) \rightarrow T^T \dot{j} = \tau^T \dot{q} \tag{32}$$

Où T^T est le vecteur des forces et des couples exercés à l'extrémité du robot exprimé dans le système de coordonnées de base et τ^T est le vecteur des forces et des couples exercés aux articulations.

4. Variantes du Modèle dynamique

2. Modèle dynamique dans l'espace de travail

Relation de couples

Les expressions précédentes permettent d'obtenir les résultats suivants :

$$T^T \dot{j} = \tau^T \dot{q} \rightarrow T^T J \dot{q} = \tau^T \dot{q} \rightarrow T^T J = \tau^T \rightarrow \tag{33}$$

$$\tau = J^T T \tag{34}$$

qui relie les couples généralisés exercés à l'extrémité du robot à ceux exercés au niveau des différentes articulations.

4. Variantes du Modèle dynamique

2. Modèle dynamique dans l'espace de travail

Modèle dynamique dans l'espace de travail

Nous pouvons obtenir le modèle dynamique en coordonnées cartésiennes (ou dans l'espace de travail) à partir du modèle dynamique dans l'espace des articulations et de la matrice jacobienne, comme suit :

$$T = D_j \ddot{j} + H_j + C_j \tag{35}$$

avec

$$D_j = \left(J^T\right)^{-1} D J^{-1} \quad ; \quad C_j = \left(J^T\right)^{-1} C \quad ; \tag{36}$$

$$H_j = \left(J^T\right)^{-1} \left(H - D J^{-1} \dot{J} \dot{q}\right) \tag{37}$$