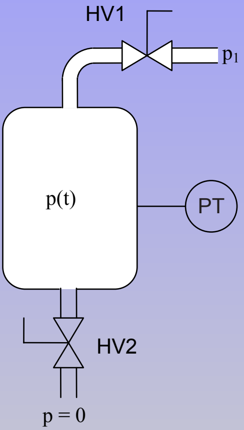
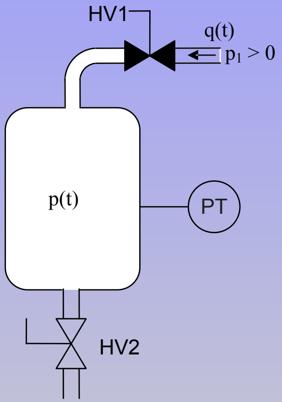
Procédés du premier ordre

LR

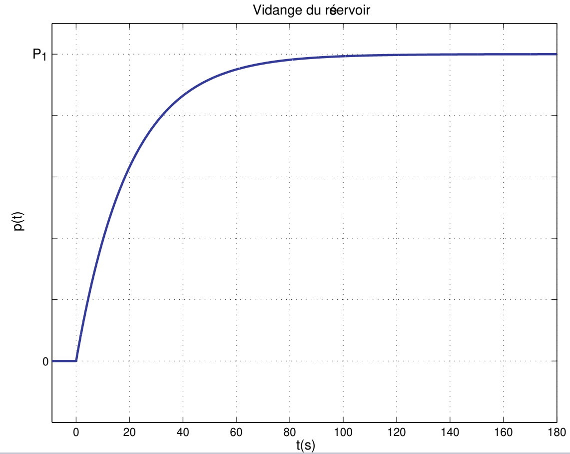
IUT de Béziers

Programme de l'exposé

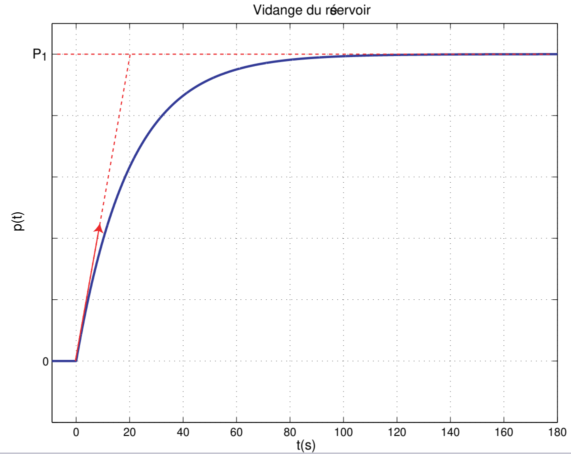

HV1
p1
p(t)
PT
HV2
p = 0


HV1
q(t)
p1 > 0
p(t)
PT
HV2

Evolution de la pression lors du remplissage



Evolution de la pression lors du remplissage



Evolution de la pression lors du remplissage

propriétés de la courbe $p(t)$

Evolution de la pression lors du remplissage

propriétés de la courbe $p(t)$

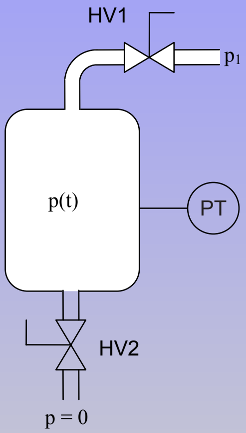
- La courbe admet une asymptote $p(t) = p_1$.

Evolution de la pression lors du remplissage

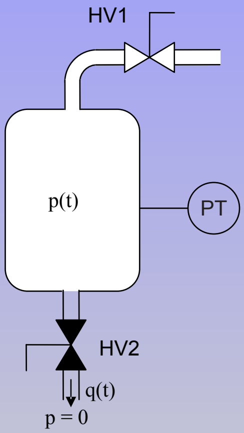
propriétés de la courbe $p(t)$

- La courbe admet une asymptote $p(t) = p_1$.
- La tangente de cette courbe à $t = 0$ est non-nulle.

Evolution de la pression lors de la vidange



Evolution de la pression lors de la vidange



Evolution de la pression lors de la vidange

Propriétés de la courbe

Evolution de la pression lors de la vidange

Propriétés de la courbe

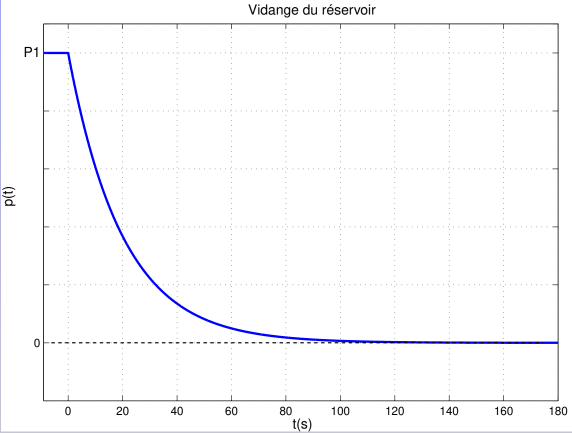
- La courbe admet une asymptote $p(t) = 0$.

Evolution de la pression lors de la vidange

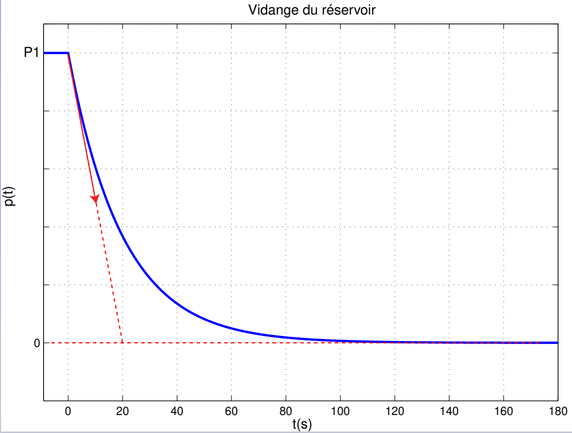
Propriétés de la courbe

- La courbe admet une asymptote $p(t) = 0$.
- La tangente de cette courbe à $t = 0$ est non nulle.

Evolution de la pression lors de la vidange



Evolution de la pression lors de la vidange



Analogie électrique

Analogies

pression $p(t) \leftrightarrow$ tension $u(t)$

débit $q(t) \leftrightarrow$ intensité $i(t)$

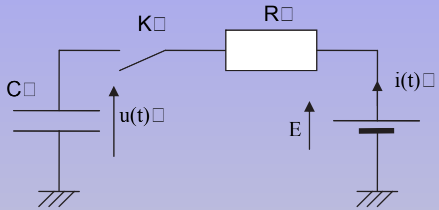
Analogies

pression $p(t) \leftrightarrow$ tension $u(t)$
débit $q(t) \leftrightarrow$ intensité $i(t)$

Equation de la charge

$$u(t) + \tau \frac{du(t)}{dt} = E$$

, avec $\tau = RC$ homogène à un temps.



Analogies

pression $p(t) \leftrightarrow$ tension $u(t)$
débit $q(t) \leftrightarrow$ intensité $i(t)$

Equation de la charge

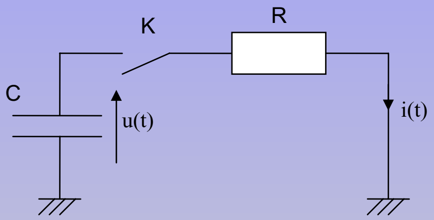
$$u(t) + \tau \frac{du(t)}{dt} = E$$

, avec $\tau = RC$ homogène à un temps.

Equation de la décharge

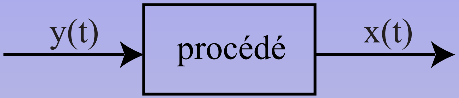
$$u(t) + \tau \frac{du(t)}{dt} = 0$$

, avec $\tau = RC$ homogène à un temps.



1° ordre : Equation différentielle

$$x(t) + \tau \frac{dx(t)}{dt} = K.y(t) \qquad (1)$$



réponse à un échelon $y(t) = \Delta Y \cdot u(t)$

$$x(t) + \tau \frac{dx(t)}{dt} = K \cdot \Delta Y \tag{2}$$

réponse à un échelon $y(t) = \Delta Y \cdot u(t)$

$$x(t) + \tau \frac{dx(t)}{dt} = K \cdot \Delta Y \qquad (2)$$

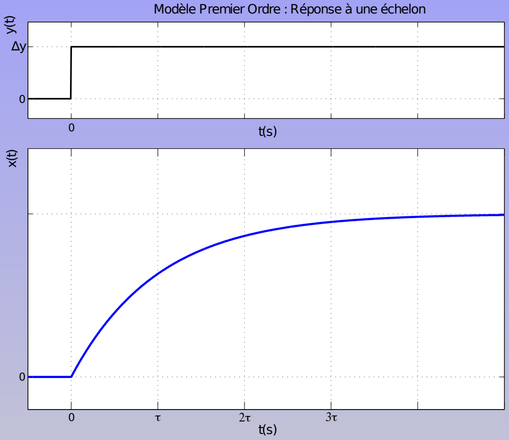
Solution de l'équation différentielle

$$x(t) = K \cdot \Delta Y(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$$

Détail

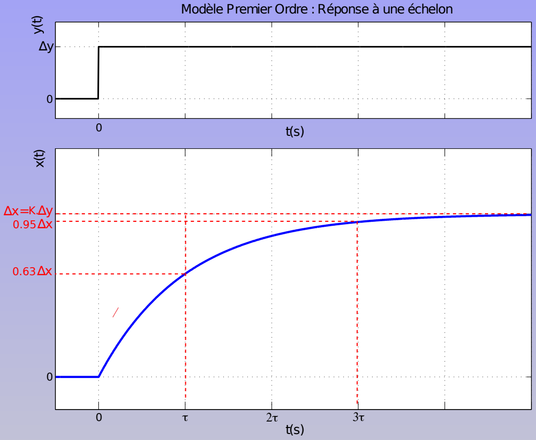
Propriétés graphiques

- $x(\tau) =$
- $x(3\tau) =$
- $x'(t) =$



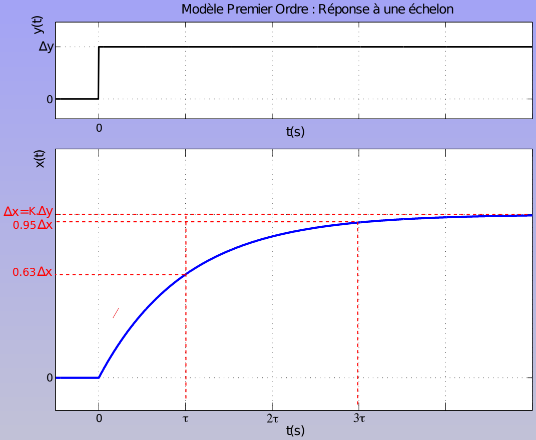
Propriétés graphiques

- $x(\tau) = K \cdot \Delta Y(1 - e^{-1}) = 0,63 \cdot K \cdot \Delta Y$
- $x(3\tau) =$
- $x'(t) =$



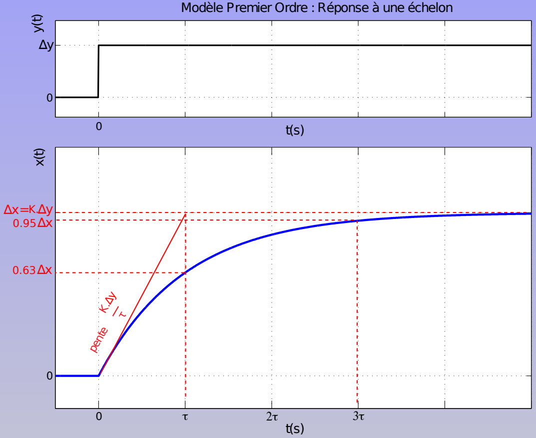
Propriétés graphiques

- $x(\tau) = K \cdot \Delta Y(1 - e^{-1}) = 0,63 \cdot K \cdot \Delta Y$
- $x(3\tau) = K \cdot \Delta Y(1 - e^{-3}) = 0,95 \cdot K \cdot \Delta Y$
- $x'(t) =$



Propriétés graphiques

- $x(\tau) = K \cdot \Delta Y(1 - e^{-1}) = 0,63 \cdot K \cdot \Delta Y$
- $x(3\tau) = K \cdot \Delta Y(1 - e^{-3}) = 0,95 \cdot K \cdot \Delta Y$
- $x'(t) = \frac{K \cdot \Delta Y}{\tau}(e^{-\frac{t}{\tau}})$ donc $x'(0) = \frac{K \cdot \Delta Y}{\tau}$ c'est la pente de la tangente à l'origine.



Impulsion de Dirac

$$y(t) = \delta(t)$$

Impulsion de Dirac

$$y(t) = \delta(t)$$

Réponse Impulsionnelle

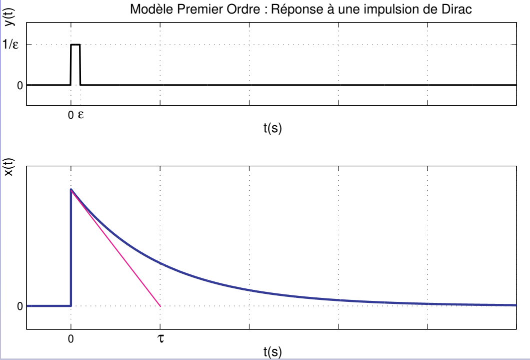
$$x(t) = \frac{K}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Impulsion de Dirac

$$y(t) = \delta(t)$$

Réponse Impulsionnelle

$$x(t) = \frac{K}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}}$$

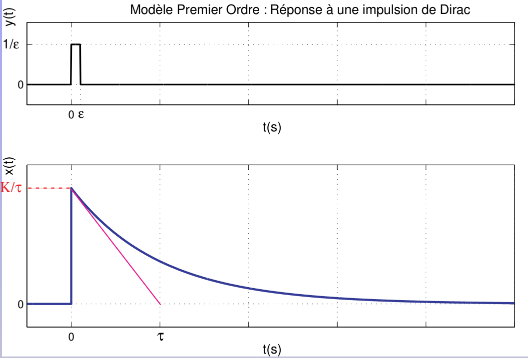


Impulsion de Dirac

$$y(t) = \delta(t)$$

Réponse Impulsionnelle

$$x(t) = \frac{K}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}}$$



Rampe

$$y(t) = a \cdot t$$

Rampe

$$y(t) = a \cdot t$$

Réponse à une rampe

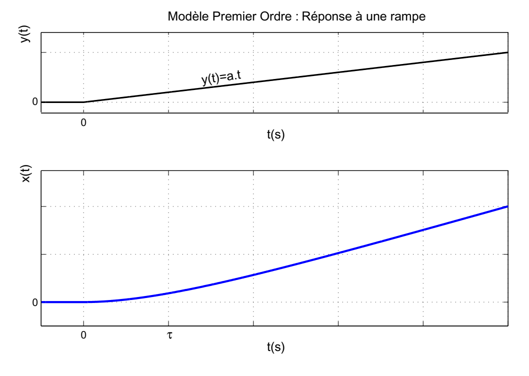
$$x(t) = K \cdot a \cdot t - K \cdot a \cdot \tau(1 - e^{\frac{-t}{\tau}})$$

Rampe

$$y(t) = a \cdot t$$

Réponse à une rampe

$$x(t) = K \cdot a \cdot t - K \cdot a \cdot \tau(1 - e^{\frac{-t}{\tau}})$$



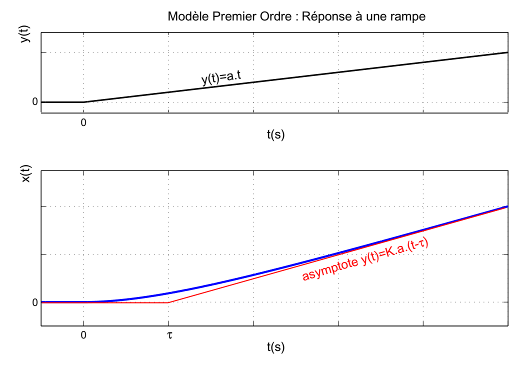
Rampe

$$y(t) = a \cdot t$$

Réponse à une rampe

$$x(t) = K \cdot a \cdot t - K \cdot a \cdot \tau(1 - e^{\frac{-t}{\tau}})$$

- la courbe admet une asymptote d'équation $x_{asympt}(t) = K \cdot a\,(t - \tau)$



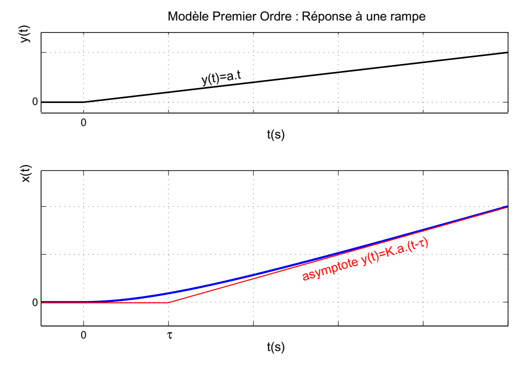
Rampe

$$y(t) = a \cdot t$$

Réponse à une rampe

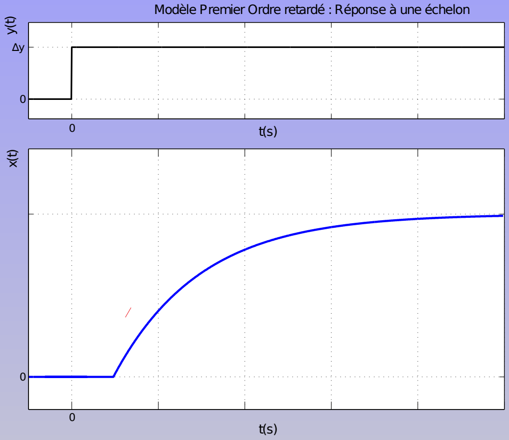
$$x(t) = K \cdot a \cdot t - K \cdot a \cdot \tau(1 - e^{\frac{-t}{\tau}})$$

- la courbe admet une asymptote d'équation $x_{asympt}(t) = K \cdot a\,(t - \tau)$
- l'asymptote coupe l'axe des abscisses à $t = \tau$



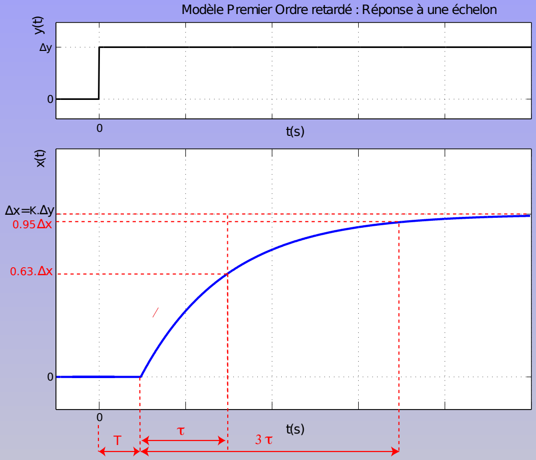
Propriétés graphiques

- $x(\tau + T) =$
- $x(3\tau + T) =$
- $x'(t) =$



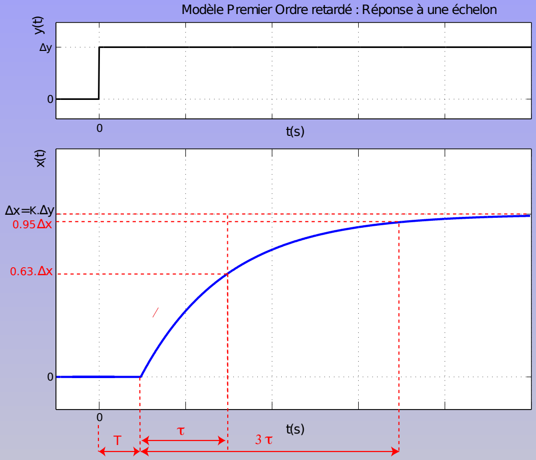
Propriétés graphiques

- $x(\tau + T) = 0,63 \cdot K \cdot \Delta Y$
- $x(3\tau + T) =$
- $x'(t) =$



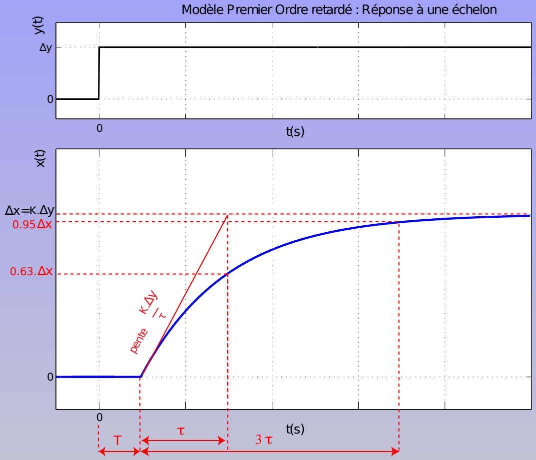
Propriétés graphiques

- $x(\tau + T) = 0,63 \cdot K \cdot \Delta Y$
- $x(3\tau + T) = 0,95 \cdot K \cdot \Delta Y$
- $x'(t) =$



Propriétés graphiques

- $x(\tau + T) = 0,63 \cdot K \cdot \Delta Y$
- $x(3\tau + T) = 0,95 \cdot K \cdot \Delta Y$
- $x'(t) =$La pente de la tangente au décollement de la courbe vaut $x'(T) = \frac{K \cdot \Delta Y}{\tau}$



réponse à un échelon d'amplitude Δy

$$x(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < T \\ K \cdot \Delta y(1 - e^{-\frac{t-T}{\tau}}) & \text{si } t \geq T \end{cases} \tag{3}$$

1° ordre intégrateur : Equation différentielle

$$\frac{dx(t)}{dt} = k.y(t) \tag{4}$$

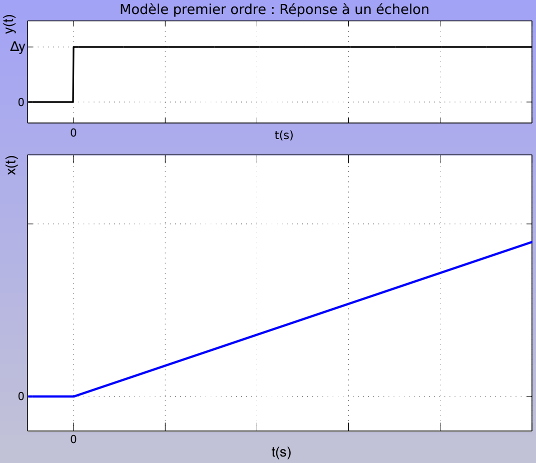
1° ordre intégrateur : Equation différentielle

$$\frac{dx(t)}{dt} = k.y(t) \tag{4}$$

k est le gain dynamique exprimé en s^{-1}

réponse à un échelon
$y(t) = \Delta Y \cdot u(t)$

$$\frac{dx(t)}{dt} = k \cdot \Delta Y \qquad (5)$$

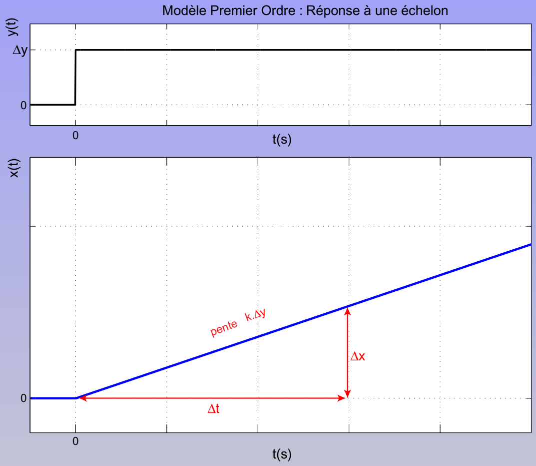


réponse à un échelon $y(t) = \Delta Y \cdot u(t)$

$$\frac{dx(t)}{dt} = k \cdot \Delta Y \qquad (5)$$

Solution de l'équation différentielle

$$x(t) = k \cdot \Delta Y \cdot t$$



réponse à un échelon
$y(t) = \Delta Y \cdot u(t)$

$$\frac{dx(t)}{dt} = k \cdot \Delta Y \qquad (5)$$

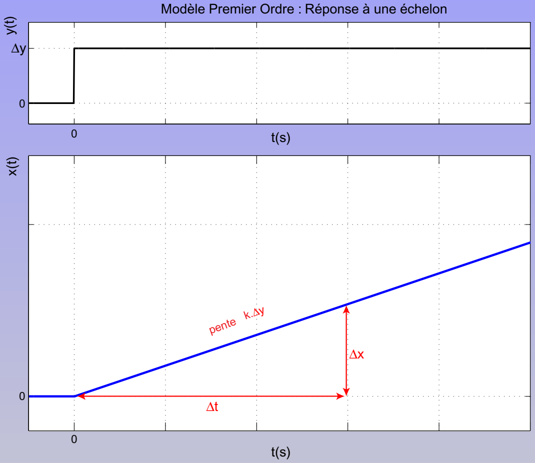
Solution de l'équation différentielle

$$x(t) = k \cdot \Delta Y \cdot t$$

Propriétés graphiques

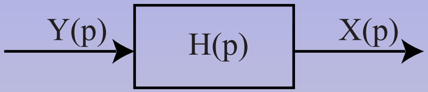
$k \cdot \Delta Y = \frac{\Delta X}{\Delta t}$

donc, $k = \frac{1}{\Delta Y} \cdot \frac{\Delta X}{\Delta t}$



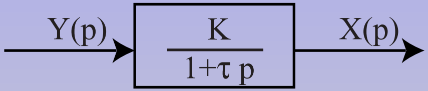
Fonction de transfert

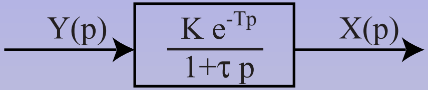
$$H(p) = \frac{X(p)}{Y(p)}$$



Fonction de transfert d'un premier ordre sans retard

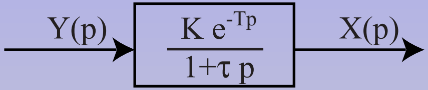
$$H(p) = \frac{K}{1 + \tau \cdot p} \tag{6}$$




Y(p)
K e^-Tp / 1+τ p
X(p)

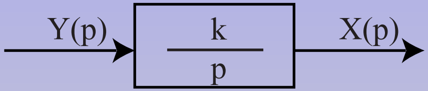
Fonction de transfert d'un premier ordre retardé

$$H(p) = \frac{K \cdot e^{-T \cdot p}}{1 + \tau \cdot p} \quad (7)$$



Fonction de transfert d'un premier ordre intégrateur

$$H(p) = \frac{k}{p} \tag{8}$$



Résolution de l'équation différentielle du premier ordre

L'équation à résoudre est :

$$x(t) + \tau \frac{dx(t)}{dt} = K.\Delta Y \tag{9}$$

Cette équation peut aussi s'écrire : $x(t) - K.\Delta Y + \tau \frac{dx(t)}{dt} = 0$. Si on pose :

$$f(t) = x(t) - K.\Delta Y \tag{10}$$

On peut remarquer que $\dfrac{df(t)}{dt} = \dfrac{dx(t)}{dt}$. L'équation 9 peut donc s'écrire :

$$f(t) + \tau \frac{df(t)}{dt} = 0$$

ce qui équivault à :

$$\frac{df}{f} = -\frac{dt}{\tau}$$

donc,

$$\int \frac{df}{f} = -\frac{1}{\tau} \int dt$$

donc,

$$\ln f = -\frac{t}{\tau} + C$$

où C est une constante réelle.

Résolution de l'équation différentielle du premier ordre (suite)

$$f(t) = A.e^{-\frac{t}{\tau}} \quad \text{où, } A = e^C$$

En revenant à la définition 10 de $f(t)$, il vient :

$$x(t) = f(t) + K.\Delta Y = A.e^{-\frac{t}{\tau}} + K.\Delta Y$$

Pour déterminer la valeur de la constante A, il faut connaître une solution particulière de $x(t)$. Or, à $t = 0$, on a la condition initiale $x(0) = 0$, et donc :

$$A + K.\Delta Y = 0 \quad \text{donc,} \quad A = -K.\Delta Y$$

$$\text{finalement,} \quad x(t) = K.\Delta Y(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$$