

R417-CRS1 / Analyse Fréquentielle des Procédés

LR

IUT de Béziers

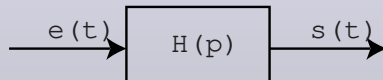
Programme de l'exposé

- 1 Procédés d'ordre 1
 - Réponse temporelle à différents signaux d'entrée (rappels)
 - Réponse à un échelon
 - Réponse à une impulsion de Dirac
 - Réponse à une rampe
 - Analyse fréquentielle
 - Fonction de transfert isomorphe
 - Fonction de transfert isochrone
 - Module et phase
 - Diagramme de Bode
 - Diagramme de Nyquist
- 2 Procédés d'ordre 2
 - Etude temporelle
 - Equation différentielle
 - Réponse à un échelon
 - Premier dépassement et pseudo-période
 - Analyse fréquentielle
 - Fonction de transfert isomorphe
 - Fonction de transfert isochrone
 - Module et Phase
 - Diagramme de Bode
 - diagrammes de Nyquist et de Black
- 3 Modèles de Broïda et Strejc stables
 - Modèle de Broïda
 - Modèle de Strejc

Procédés d'ordre 1

1^o ordre : Equation différentielle

$$s(t) + \tau \frac{ds(t)}{dt} = K.e(t) \quad (1)$$



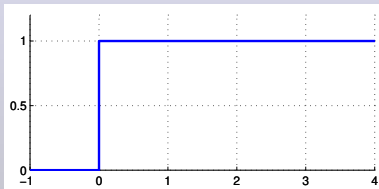
Echelon d'entrée

$$e(t) = u(t)$$

[► Détail](#)

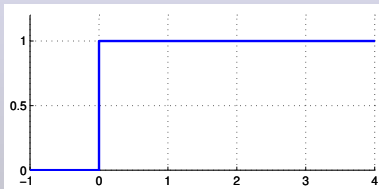
Echelon d'entrée

$$e(t) = u(t)$$



Echelon d'entrée

$$e(t) = u(t)$$



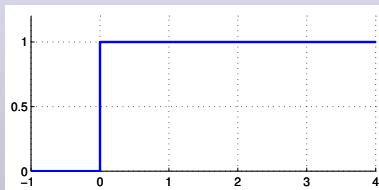
Réponse indicielle

$$s(t) = K.(1 - e^{\frac{-t}{\tau}})$$

[▶ Détail](#)

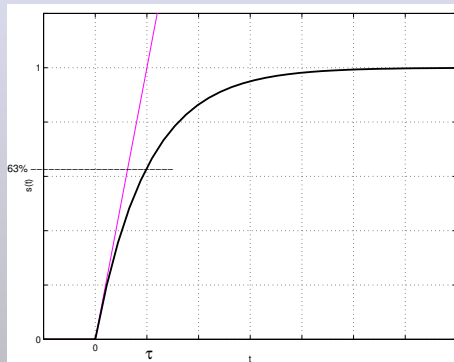
Echelon d'entrée

$$e(t) = u(t)$$



Réponse indicielle

$$s(t) = K \cdot (1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$$

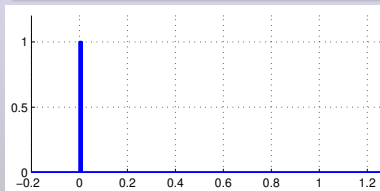


Impulsion de Dirac

$$e(t) = \delta(t)$$

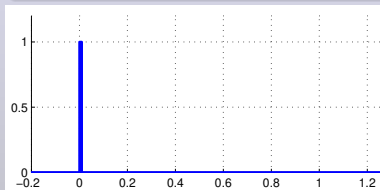
Impulsion de Dirac

$$e(t) = \delta(t)$$



Impulsion de Dirac

$$e(t) = \delta(t)$$

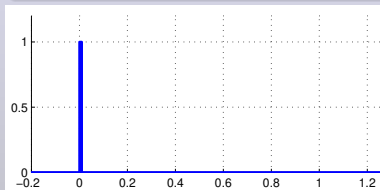


Réponse Impulsionnelle

$$s(t) = \frac{K}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} \cdot u(t)$$

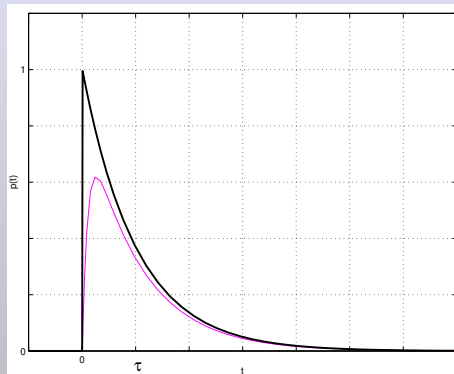
Impulsion de Dirac

$$e(t) = \delta(t)$$



Réponse Impulsionnelle

$$s(t) = \frac{K}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} \cdot u(t)$$

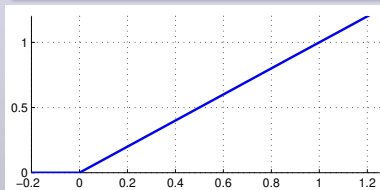


Rampe

$$e(t) = kt.u(t)$$

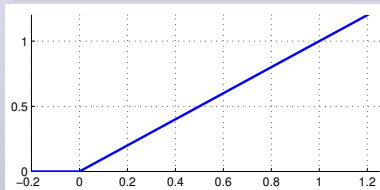
Rampe

$$e(t) = kt.u(t)$$



Rampe

$$e(t) = kt.u(t)$$

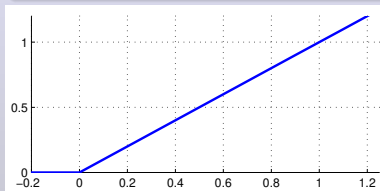


Réponse à une rampe

$$s(t) = Kk\tau(e^{\frac{-t}{\tau}} - 1).u(t) + Kkt.u(t)$$

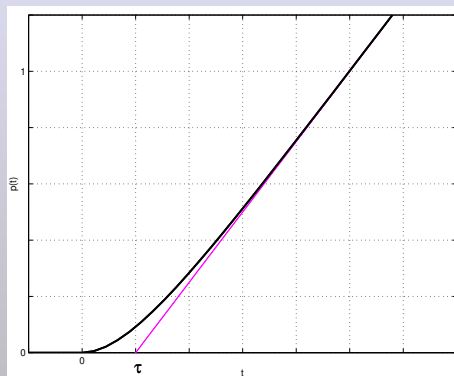
Rampe

$$e(t) = kt.u(t)$$



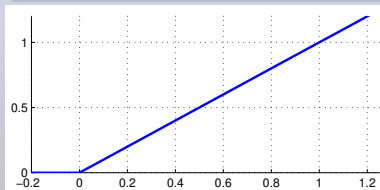
Réponse à une rampe

$$s(t) = Kk\tau(e^{-\frac{t}{\tau}} - 1).u(t) + Kkt.u(t)$$

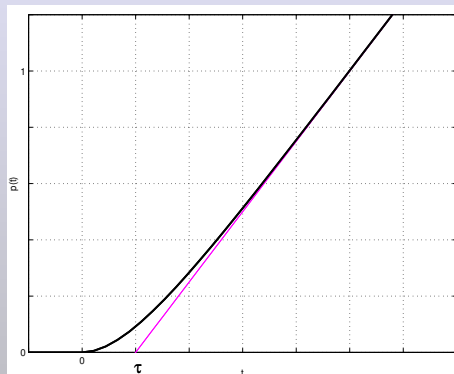


Rampe

$$e(t) = kt.u(t)$$

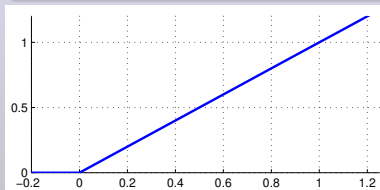


- la courbe admet une asymptote d'équation $y(t) = Kk(t - \tau)$

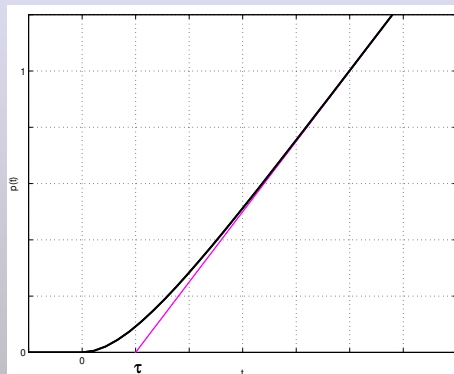


Rampe

$$e(t) = kt.u(t)$$



- la courbe admet une asymptote d'équation $y(t) = Kk(t - \tau)$
- l'asymptote coupe l'axe des abscisses à $t = \tau$



Fonction de transfert isomorphe

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{K}{1 + \tau p} \quad (2)$$

Fonction de transfert isochrone

$$H(j\omega) = \frac{\underline{S}}{\underline{E}} = \frac{K}{1 + \tau j\omega} \quad (3)$$

Module et Phase

Module et Phase

- module de la fonction de transfert

$$H = \frac{K}{\sqrt{1 + \tau^2 \omega^2}} \quad (4)$$

Module et Phase

- module de la fonction de transfert

$$H = \frac{K}{\sqrt{1 + \tau^2 \omega^2}} \quad (4)$$

- argument de la fonction de transfert

$$\varphi = -\arctan \tau \omega \quad (5)$$

Procédés d'ordre 1

○○○○○○○●○○○

Analyse fréquentielle

Procédés d'ordre 2

○○○○○○○○○○○○○○○○

Modèles de Broïda et Strejc stables

○○○○○○

Modèles de Broïda et Strejc instables

○○○○○

Expression du module en dB

$$H_{dB} = 20 \log H$$

Expression du module en dB

$$H_{dB} = 20 \log H$$

En fonction de ω

Expression du module en dB

$$H_{dB} = 20 \log H$$

En fonction de ω

- $\omega \ll \omega_c$: $H_{dB} = 20 \log K$. La phase φ tend vers 0.

Expression du module en dB

$$H_{dB} = 20 \log H$$

En fonction de ω

- $\omega \ll \omega_c$: $H_{dB} = 20 \log K$. La phase φ tend vers 0.
- $\omega = \omega_c$: $H_{dB} = 20 \log K - 3dB$ et $\varphi = -\arctan(1) = -45^\circ$

Expression du module en dB

$$H_{dB} = 20 \log H$$

En fonction de ω

- $\omega \ll \omega_c$: $H_{dB} = 20 \log K$. La phase φ tend vers 0.
- $\omega = \omega_c$: $H_{dB} = 20 \log K - 3dB$ et $\varphi = -\arctan(1) = -45^\circ$
- $\omega \gg \omega_c$: $H_{dB} = 20 \log K + 20 \log(\omega_c) - 20 \log(\omega)$. -20dB par décade lorsque $\omega \rightarrow \infty$. La phase φ tend vers -90° .

Bode Diagrams

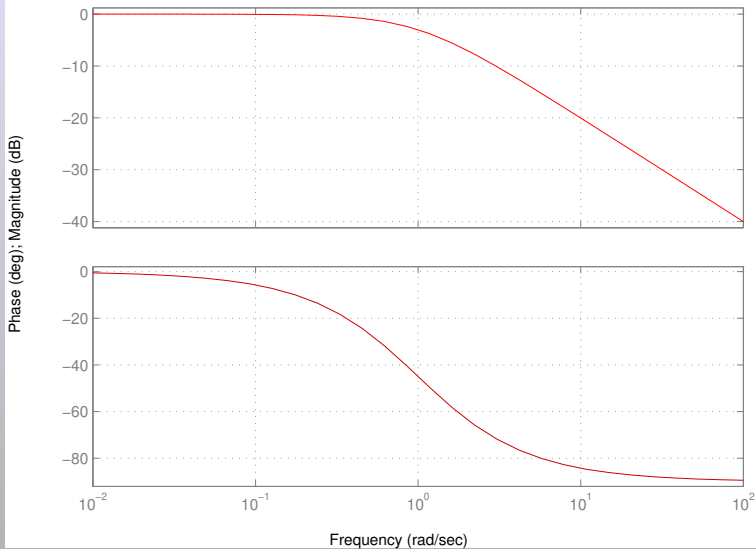


Diagramme de Bode

Diagramme de Bode

- La pulsation de coupure ω_c

Diagramme de Bode

- La pulsation de coupure ω_c
- L'atténuation de 3dB à la pulsation de coupure

Diagramme de Bode

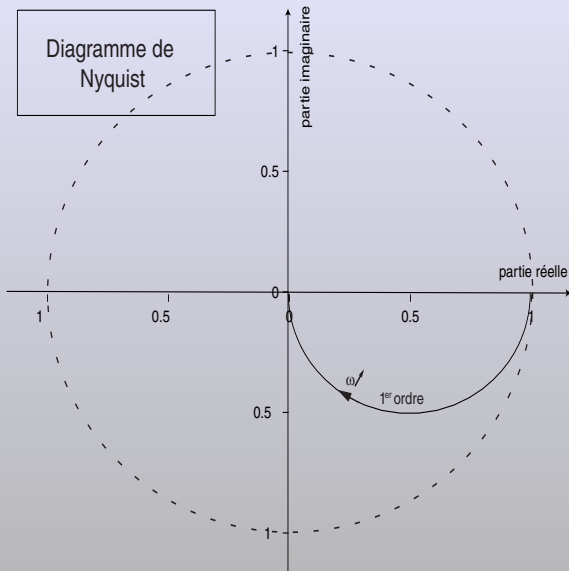
- La pulsation de coupure ω_c
- L'atténuation de 3dB à la pulsation de coupure
- L'asymptote de la courbe quand $\omega \rightarrow 0$

Diagramme de Bode

- La pulsation de coupure ω_c
- L'atténuation de 3dB à la pulsation de coupure
- L'asymptote de la courbe quand $\omega \rightarrow 0$
- L'asymptote de la courbe quand $\omega \rightarrow \infty$ et la pente de -20dB/décade.

$$x \rightarrow \Re(H(j\omega))$$

$$y \rightarrow \Im(H(j\omega))$$



Procédés d'ordre 2

equation différentielle

$$\frac{1}{\omega_0^2} \cdot \frac{d^2 s(t)}{dt^2} + \frac{2\lambda}{\omega_0} \cdot \frac{ds(t)}{dt} + s(t) = K \cdot e(t) \quad (6)$$

avec, ω_0 , *pulsation propre* du système, en $rad.s^{-1}$,
 λ , *coefficient d'amortissement* du système (sans unités),
 K , *gain statique* du système (sans unités).

polynôme caractéristique associé à
l'équation sans second membre :

$$\frac{1}{\omega_0^2} \cdot x^2 + \frac{2\lambda}{\omega_0} \cdot x + 1 = 0$$

discriminant :

$$\Delta' = \frac{\lambda^2}{\omega_0^2} - \frac{1}{\omega_0^2} = \frac{1}{\omega_0^2} \cdot (\lambda^2 - 1)$$

Réponse indicielle

3 cas suivant la valeur de λ :

Réponse indicielle

3 cas suivant la valeur de λ :

- **cas où $\lambda > 1$, régime *apériodique*.** [► Détail](#)

Réponse indicielle

3 cas suivant la valeur de λ :

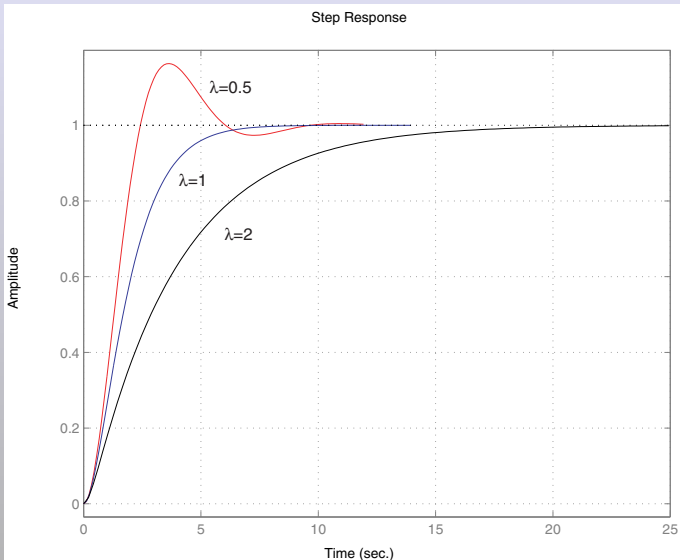
- cas où $\lambda > 1$, régime **apériodique**. [▶ Détail](#)
- cas où $\lambda = 1$, régime **critique**. [▶ Détail](#)

Réponse indicielle

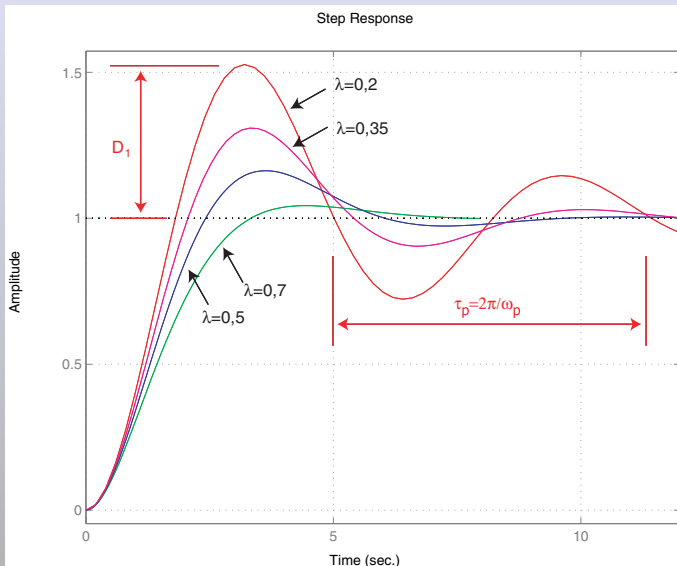
3 cas suivant la valeur de λ :

- cas où $\lambda > 1$, régime **apériodique**. [► Détail](#)
- cas où $\lambda = 1$, régime **critique**. [► Détail](#)
- cas où $\lambda < 1$, $\omega_p = \omega_0 \sqrt{1 - \lambda^2}$, ω_p est appelée **pseudo-pulsation**.
Le régime est dit **pseudopériodique**. La courbe en rouge admet un dépassement. [► Détail](#)

Réponse à un échelon



Influence du coefficient d'amortissement



Pseudo pulsation et Premier Dépassement

$$\omega_p = \omega_0 \sqrt{1 - \lambda^2} \quad \text{et,} \quad D_1 = 100e^{\frac{-\lambda\pi}{\sqrt{1-\lambda^2}}}$$

Pseudo pulsation et Premier Dépassement

$$\omega_p = \omega_0 \sqrt{1 - \lambda^2} \quad \text{et,} \quad D_1 = 100e^{\frac{-\lambda\pi}{\sqrt{1-\lambda^2}}}$$

Temps de réponse à 5%

$$t_{R5\%} = 3\tau \quad , \text{avec} \quad \tau = \frac{1}{\lambda\omega_0}$$

Formules inverses

$$\lambda = \frac{\ln \frac{100}{D_1}}{\sqrt{\pi^2 + \ln^2 \frac{100}{D_1}}} \quad \text{et,} \quad \omega_0 = \frac{\omega_p}{\sqrt{1 - \lambda^2}}$$

Equation Isomorphe

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{K}{1 + p \frac{2\lambda}{\omega_0} - \frac{p^2}{\omega_0^2}} \quad (7)$$

Equation Isochrone

$$H(j\omega) = \frac{\underline{S}}{\underline{E}} = \frac{K}{1 + j\omega \frac{2\lambda}{\omega_0} - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}} \quad (8)$$

Module et Phase

Module et Phase

- module de la fonction de transfert

$$H = \frac{K}{\sqrt{(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2})^2 + 4\lambda^2 \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}} \quad (9)$$

Module et Phase

- module de la fonction de transfert

$$H = \frac{K}{\sqrt{(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2})^2 + 4\lambda^2 \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}} \quad (9)$$

- argument de la fonction de transfert

$$\varphi = -\arctan \frac{2\lambda \frac{\omega}{\omega_0}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}} \quad (10)$$

Différents cas

Suivant λ , on distingue plusieurs cas :

- **cas où $\lambda > 1$** , le système est équivalent à deux fonctions de transfert du premier ordre en série :

$$H(j\omega) = \frac{K}{(1 + j\tau_1\omega)(1 + j\tau_2\omega)}$$

Les deux pulsations de coupure valent $\omega_1 = \frac{1}{\tau_1}$ et $\omega_2 = \frac{1}{\tau_2}$

Différents cas

Suivant λ , on distingue plusieurs cas :

- **cas où** $\lambda > 1$, le système est équivalent à deux fonctions de transfert du premier ordre en série :

$$H(j\omega) = \frac{K}{(1 + j\tau_1\omega)(1 + j\tau_2\omega)}$$

Les deux pulsations de coupure valent $\omega_1 = \frac{1}{\tau_1}$ et $\omega_2 = \frac{1}{\tau_2}$

- **cas où** $1 > \lambda > 1/\sqrt{2}$, On ne peut plus distinguer deux fréquences séparées.

Différents cas

Suivant λ , on distingue plusieurs cas :

- **cas où** $\lambda > 1$, le système est équivalent à deux fonctions de transfert du premier ordre en série :

$$H(j\omega) = \frac{K}{(1 + j\tau_1\omega)(1 + j\tau_2\omega)}$$

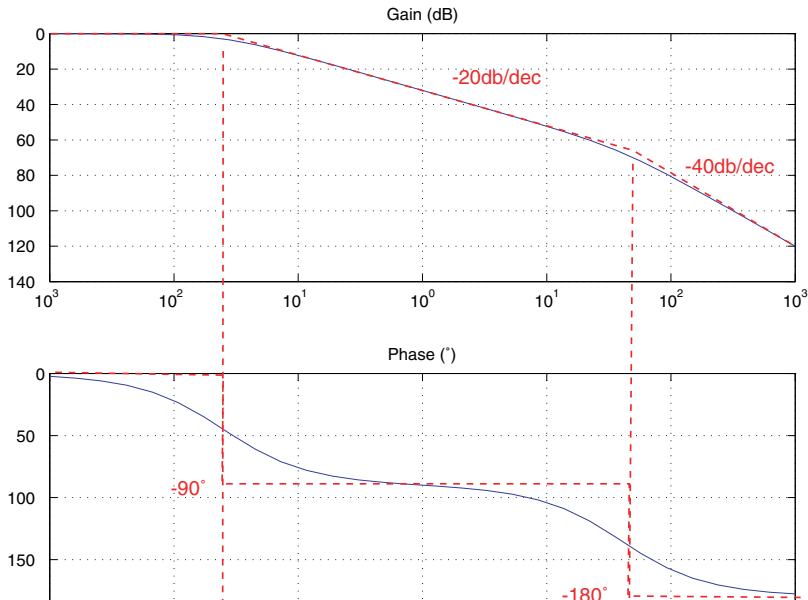
Les deux pulsations de coupure valent $\omega_1 = \frac{1}{\tau_1}$ et $\omega_2 = \frac{1}{\tau_2}$

- **cas où** $1 > \lambda > 1/\sqrt{2}$, On ne peut plus distinguer deux fréquences séparées.
- **cas où** $\lambda < 1/\sqrt{2}$, On a apparition d'un phénomène de *résonance* pour une pulsation ω_R :

$$\omega_R = \omega_0 \sqrt{1 - 2\lambda^2}$$

Facteur de résonance (pour $\lambda < 0,7$)

$$Q = \frac{|H(\omega_R)|}{|H(0)|} = \frac{1}{2\lambda\sqrt{1-2\lambda^2}}$$

Cas où $\lambda > 1$ 

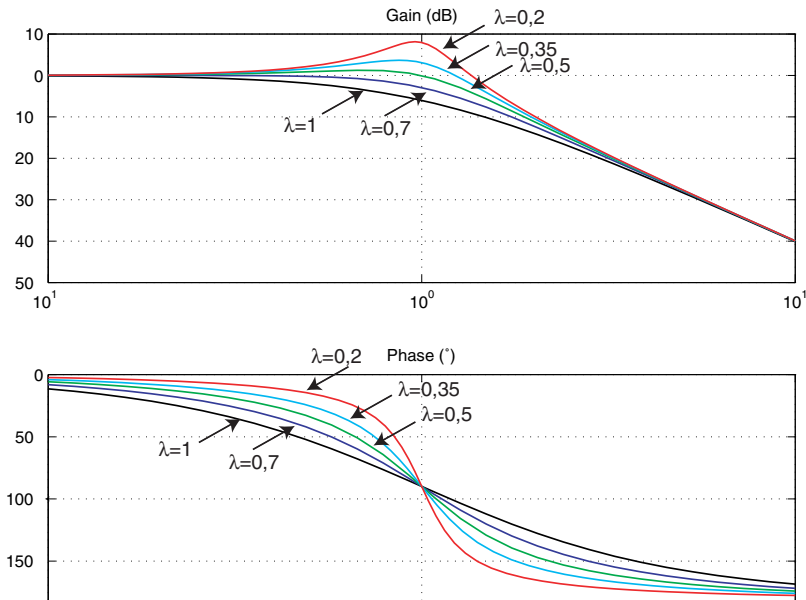
Cas où $\lambda < 1$ 

Diagramme de Nyquist

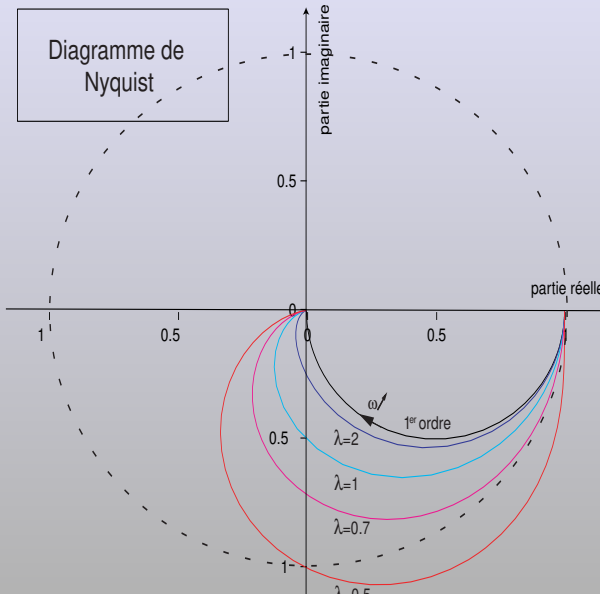
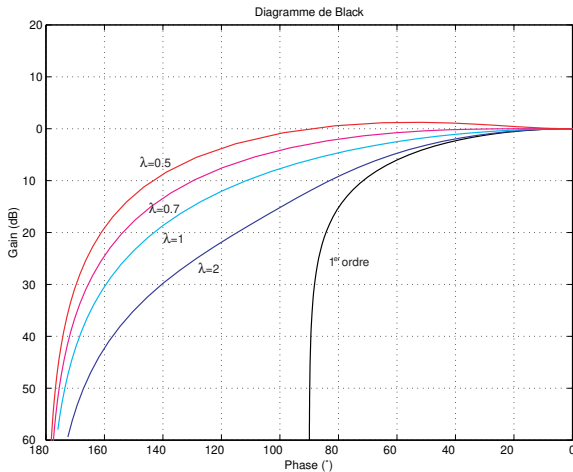


Diagramme de Black



Modèle de Broïda

Réponse Indicielle

- pour $t < T$, $m(t) = 0$
- pour $t > T$, $m(t) = K \cdot y \left(1 - e^{(t-T)/\tau}\right)$

Modèle de Broïda

Réponse Indicielle

- pour $t < T$, $m(t) = 0$
- pour $t > T$, $m(t) = K \cdot y (1 - e^{(t-T)/\tau})$

Fonction de Transfert Isomorphe

$$H(p) = K \frac{e^{-pT}}{1 + \tau p}$$

Modèle de Broïda

Réponse Indicielle

- pour $t < T$, $m(t) = 0$
- pour $t > T$, $m(t) = K \cdot y (1 - e^{(t-T)/\tau})$

Fonction de Transfert Isomorphe

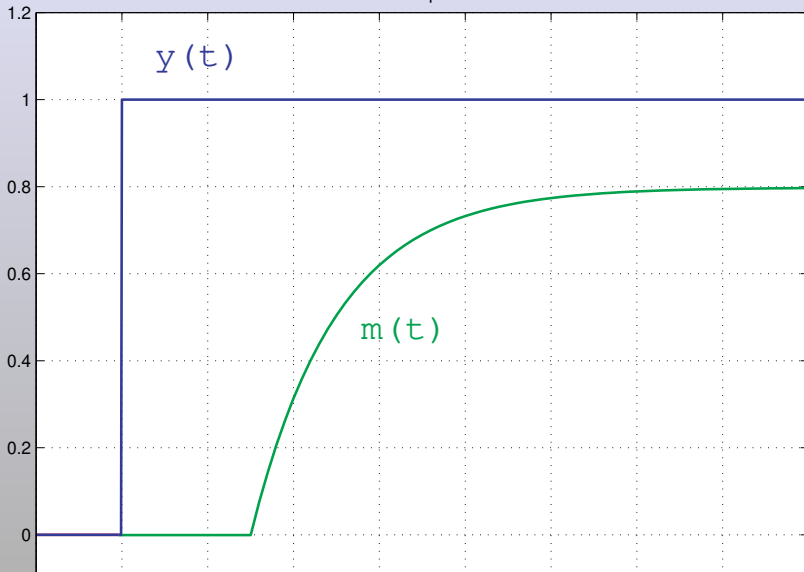
$$H(p) = K \frac{e^{-pT}}{1 + \tau p}$$

Fonction de Transfert Isochrone

$$H(j\omega) = K \frac{e^{-j\omega T}}{1 + j\omega\tau}$$

Essai indiciel

Modèle de Broïda : Réponse à une échelon



Essai indiciel

Modèle de Broïda : Réponse à une échelon

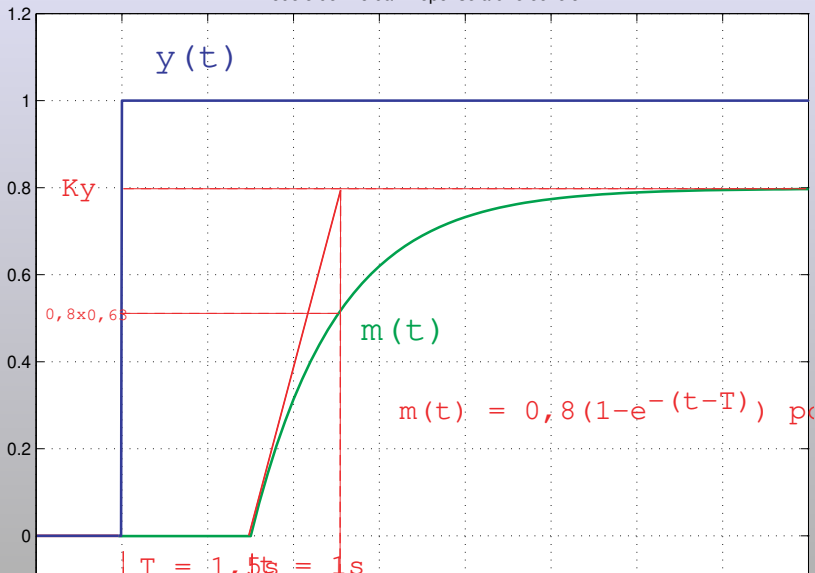


Diagramme de Bode

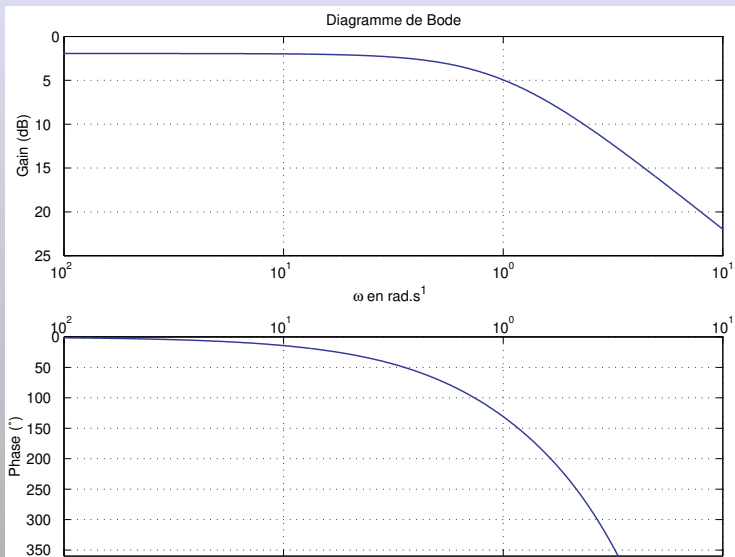
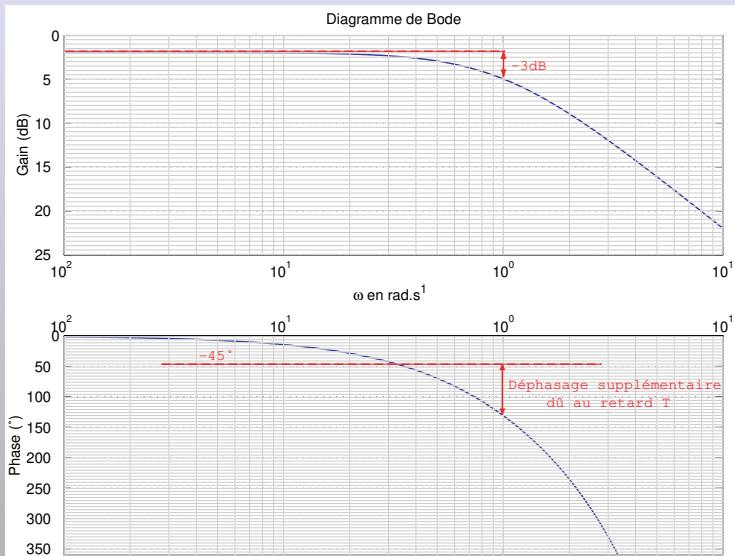


Diagramme de Bode



Modèle de Strejc

Fonction de transfert isomorphe

$$H(p) = K \frac{1}{(1 + \tau p)^n}$$

Modèle de Strejc

Fonction de transfert isomorphe

$$H(p) = K \frac{1}{(1 + \tau p)^n}$$

Fonction de transfert isochrone

$$H(j\omega) = K \frac{1}{(1 + j\omega\tau)^n}$$

Modèle de Strejc

Fonction de transfert isomorphe

$$H(p) = K \frac{1}{(1 + \tau p)^n}$$

Fonction de transfert isochrone

$$H(j\omega) = K \frac{1}{(1 + j\omega\tau)^n}$$

Remarques :

Le passage d'un ordre n à ordre $n + 1$ entraîne :

- Une atténuation supplémentaire de -20dB par décade lorsque $\omega \gg 1/\tau$
- Un déphasage supplémentaire de -90° lorsque $\omega \gg 1/\tau$

Essai indiciel

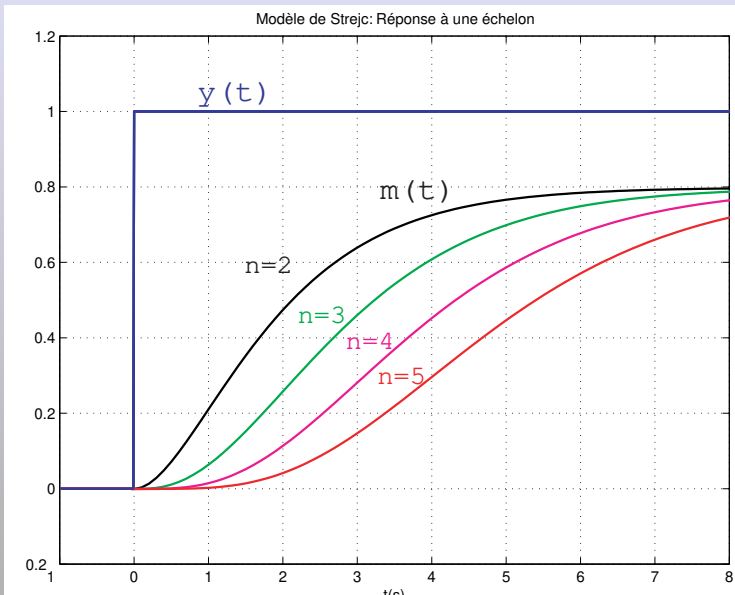


Diagramme de Bode

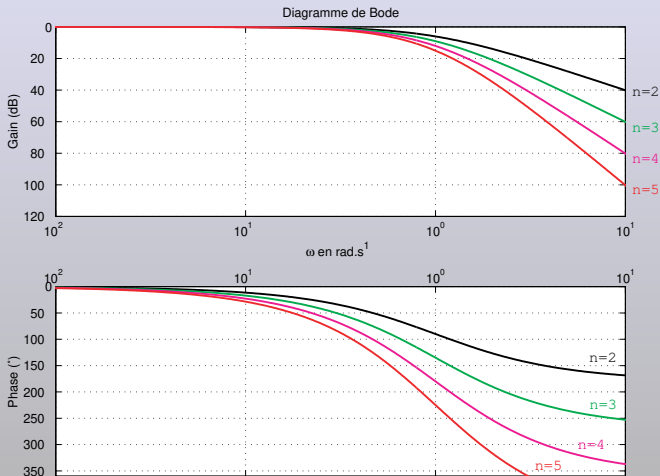
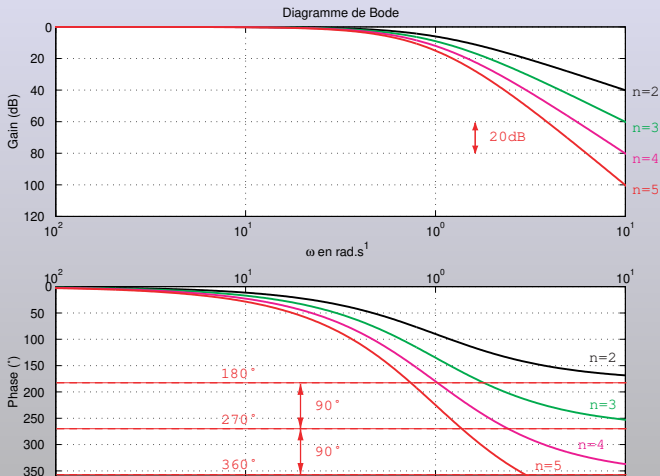


Diagramme de Bode



Modèle de Broïda intégrateur

Réponse Indicielle

- pour $t < T$, $m(t) = 0$
- pour $t > T$, $m(t) = k \int y(t) \cdot dt = k \cdot (t - T)$

Modèle de Broïda intégrateur

Réponse Indicielle

- pour $t < T$, $m(t) = 0$
- pour $t > T$, $m(t) = k \int y(t) \cdot dt = k \cdot (t - T)$

Fonction de Transfert Isomorphe

$$H(p) = k \frac{e^{-Tp}}{p}$$

Modèle de Broïda intégrateur

Réponse Indicielle

- pour $t < T$, $m(t) = 0$
- pour $t > T$, $m(t) = k \int y(t) \cdot dt = k \cdot (t - T)$

Fonction de Transfert Isomorphe

$$H(p) = k \frac{e^{-Tp}}{p}$$

Fonction de Transfert Isochrone

$$H(j\omega) = k \frac{e^{-j\omega T}}{j\omega}$$

Modèle de Broïda intégrateur

Réponse Indicielle

- pour $t < T$, $m(t) = 0$
- pour $t > T$, $m(t) = k \int y(t) \cdot dt = k \cdot (t - T)$

Fonction de Transfert Isomorphe

$$H(p) = k \frac{e^{-Tp}}{p}$$

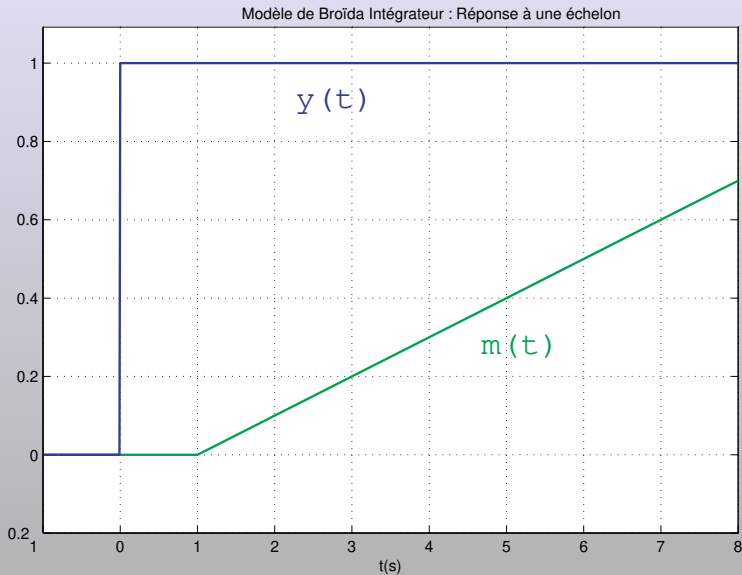
Fonction de Transfert Isochrone

$$H(j\omega) = k \frac{e^{-j\omega T}}{j\omega}$$

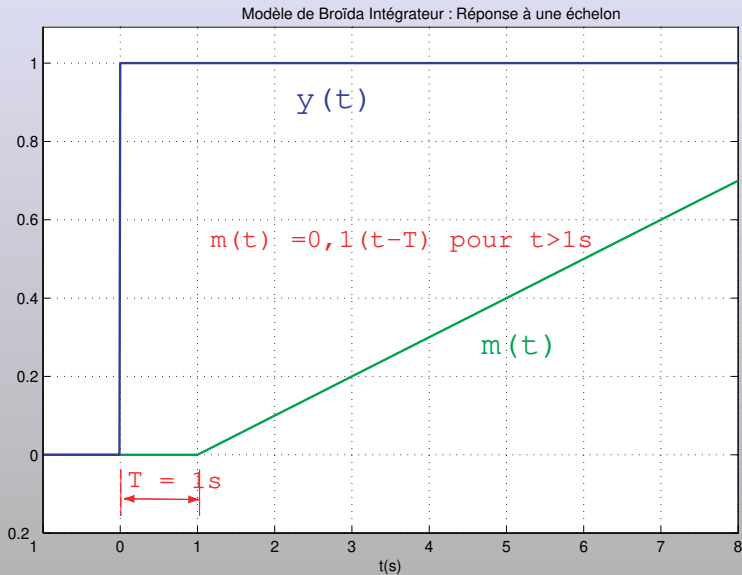
ATTENTION !

Ne pas confondre le **gain dynamique** k (qui s'exprime en $\%.s^{-1}$), et le **gain statique** K d'un procédé stable (sans unité)...

Essai indiciel



Essai indiciel



Modèle de Strejc intégrateur

Fonction de transfert isomorphe

$$H(p) = \frac{k}{p(1 + \tau p)^n}$$

Modèle de Strejc intégrateur

Fonction de transfert isomorphe

$$H(p) = \frac{k}{p(1 + \tau p)^n}$$

Fonction de transfert isochrone

$$H(j\omega) = \frac{k}{j\omega(1 + j\omega\tau)^n}$$

Modèle de Strejc intégrateur

Fonction de transfert isomorphe

$$H(p) = \frac{k}{p(1 + \tau p)^n}$$

Fonction de transfert isochrone

$$H(j\omega) = \frac{k}{j\omega(1 + j\omega\tau)^n}$$

Remarques :

- Le procédé est de classe 1, ce qui implique que la phase φ tende vers -90° quand ω tend vers 0.

Modèle de Strejc intégrateur

Fonction de transfert isomorphe

$$H(p) = \frac{k}{p(1 + \tau p)^n}$$

Fonction de transfert isochrone

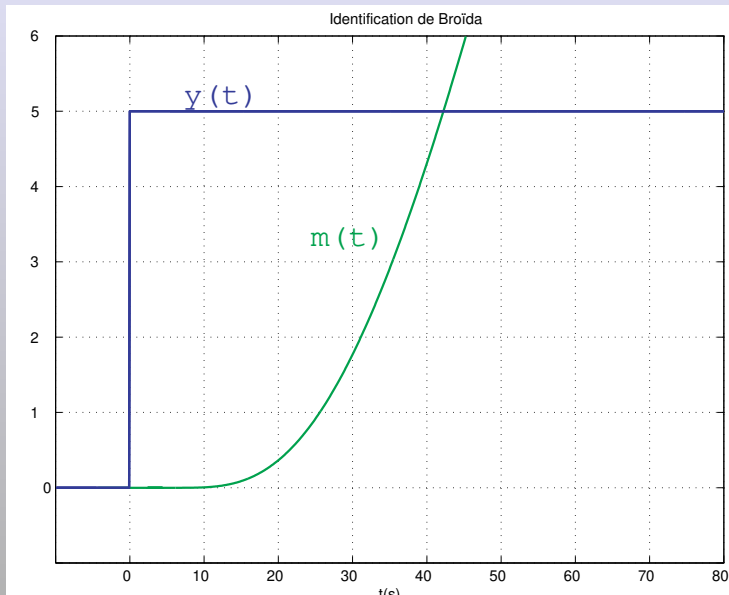
$$H(j\omega) = \frac{k}{j\omega(1 + j\omega\tau)^n}$$

Remarques :

- Le procédé est de classe 1, ce qui implique que la phase φ tende vers -90° quand ω tend vers 0.
- Chaque courbe de gain admet comme asymptote $k(t - n\tau)$. Quand n est grand, on peut définir une équivalence entre modèle de Broïda et modèle de Strejc :

$$H(j\omega) = \frac{k}{j\omega(1 + j\omega\tau)^n} \approx k \frac{e^{-j\omega T}}{j\omega} \quad , \text{avec} \quad T = n\tau$$

Essai indiciel



Essai indiciel

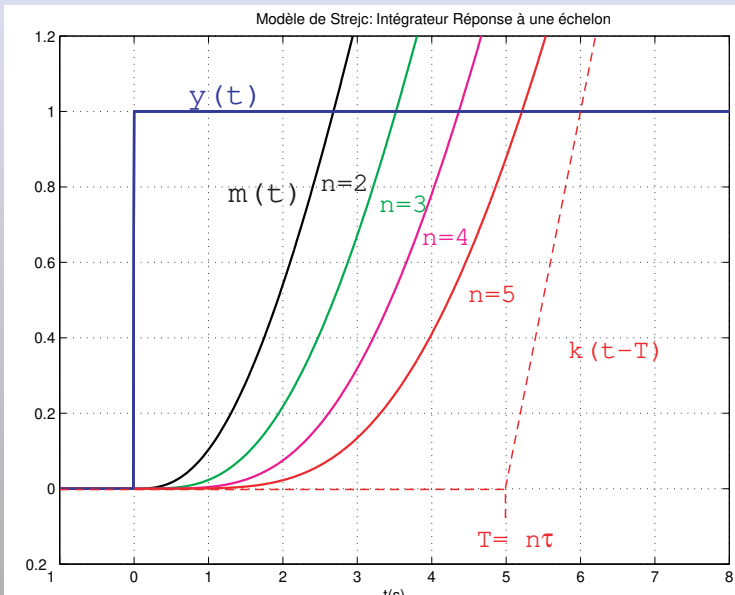


Diagramme de Bode

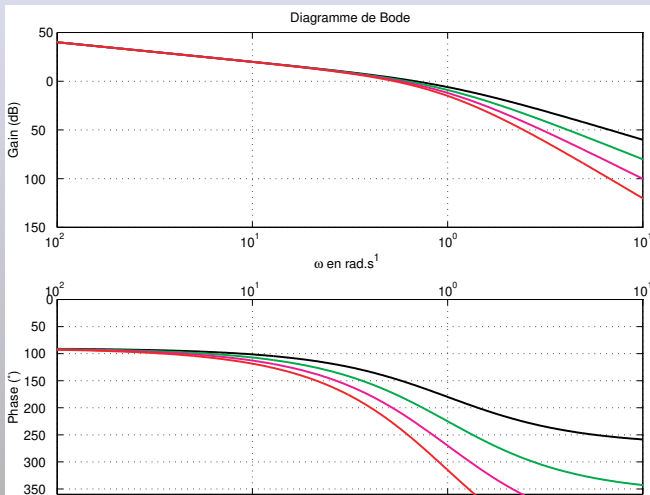
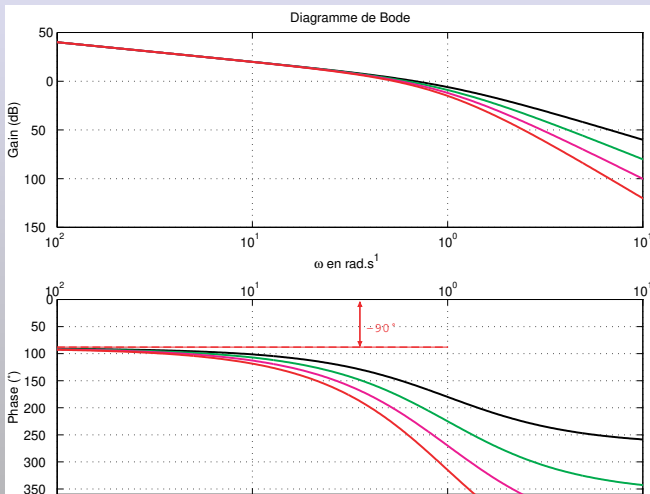
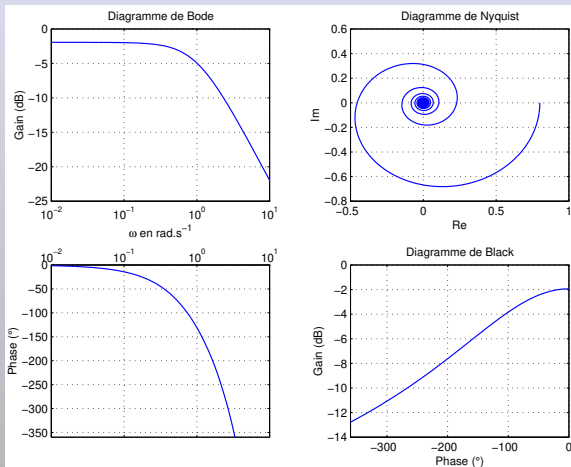


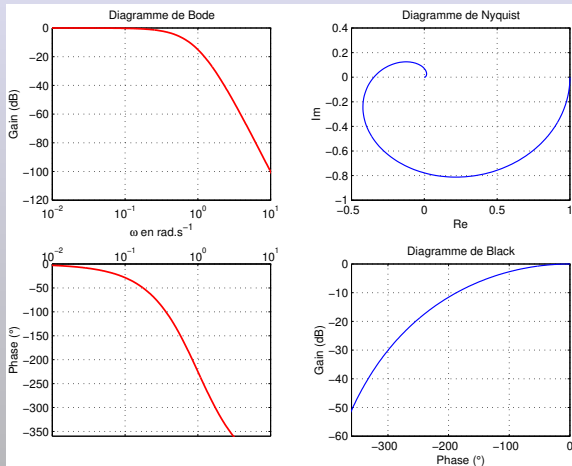
Diagramme de Bode



diagrammes de Nyquist et Black du modèle de Broïda



diagrammes de Nyquist et Black du modèle de Strejc



Réponse Indicielle

- pour $t < T$, $m(t) = 0$
- pour $t > T$, $m(t) = K \cdot y (1 - e^{(t-T)/\tau})$

Réponse Indicielle

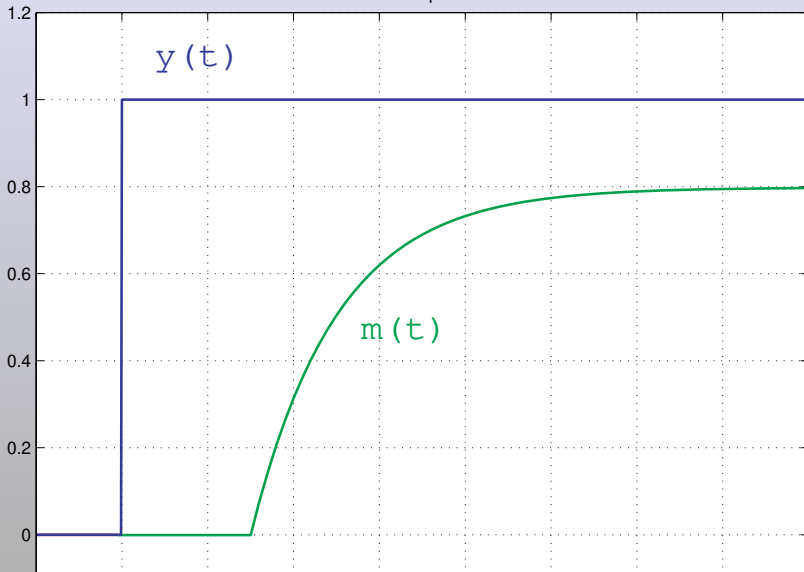
- pour $t < T$, $m(t) = 0$
- pour $t > T$, $m(t) = K \cdot y (1 - e^{(t-T)/\tau})$

Fonction de Transfert Isochrone

$$H(j\omega) = K \frac{e^{-j\omega T}}{1 + j\omega\tau}$$

Essai indiciel

Modèle de Broïda : Réponse à une échelon



Essai indiciel

Modèle de Broïda : Réponse à une échelon

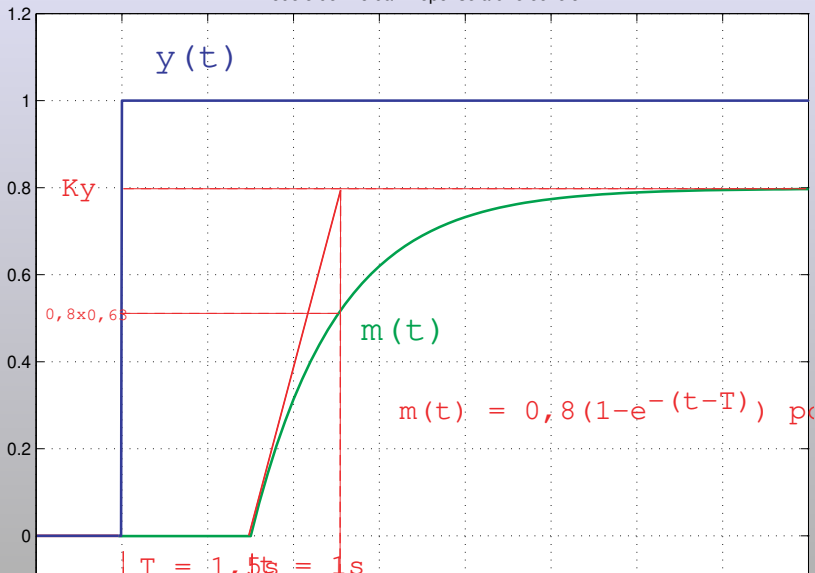


Diagramme de Bode

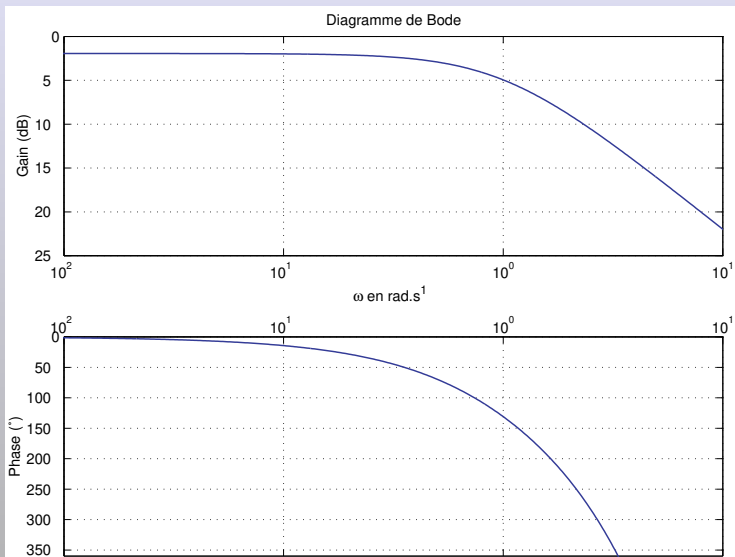
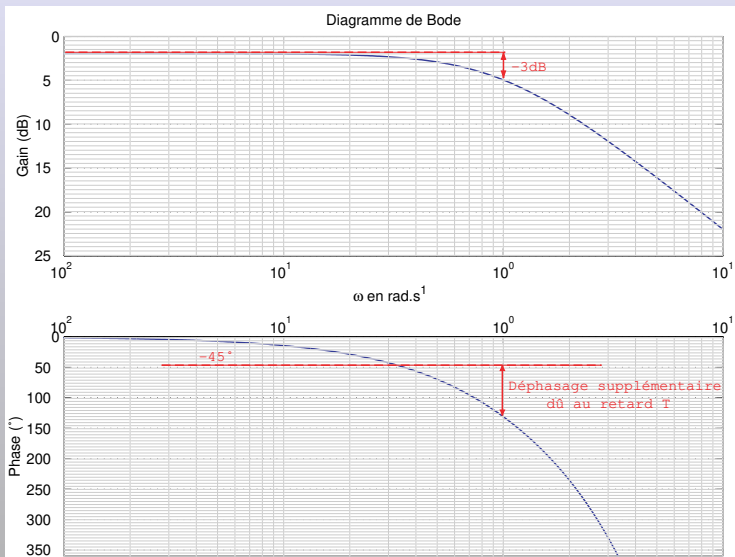


Diagramme de Bode



Fonction de transfert isochrone

$$H(j\omega) = K \frac{1}{(1 + j\omega\tau)^n}$$

Fonction de transfert isochrone

$$H(j\omega) = K \frac{1}{(1 + j\omega\tau)^n}$$

Remarques :

Le passage d'un ordre n à ordre $n + 1$ entraîne :

- Une atténuation supplémentaire de -20dB par décade lorsque $\omega \gg 1/\tau$
- Un déphasage supplémentaire de -90° lorsque $\omega \gg 1/\tau$

Essai indiciel

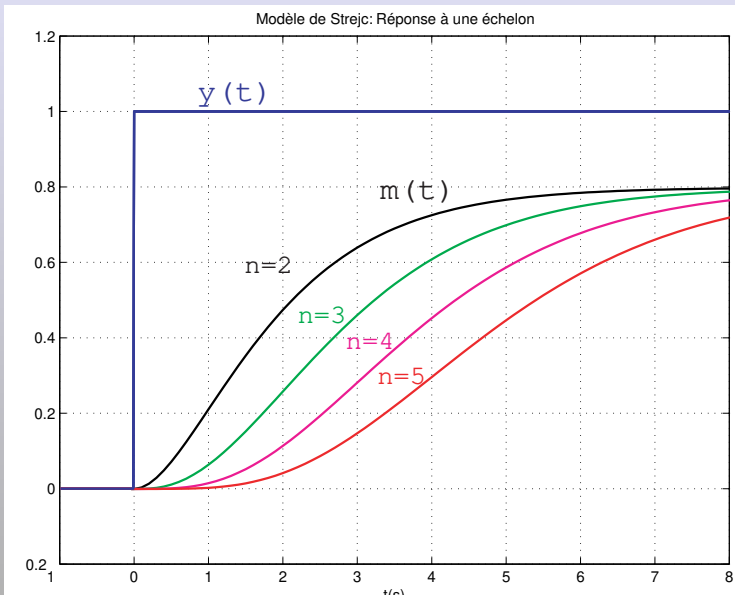


Diagramme de Bode

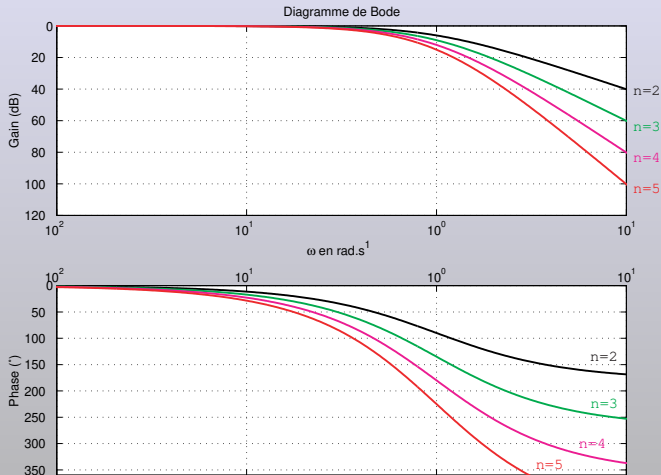


Diagramme de Bode

