Modélisation et comportement géométrique d'un mécanisme

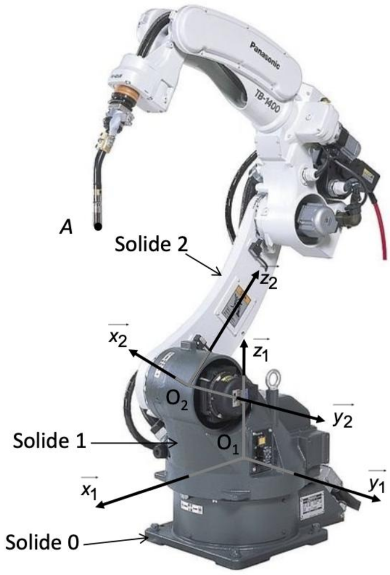
1- Objectifs

Un **mécanisme** est un ensemble de **pièces rigides articulées** les unes par rapport aux autres.
L'ensemble peut former une **structure porteuse**, une **structure robotique** ou un sous-ensemble qui **modifie un mouvement** de façon à l'adapter au besoin.
La **position** de mécanisme, ses **mouvements**, sont généralement contrôlés par un ensemble de composants comprenant des **actionneurs** : moteur ou vérins.

2- Modélisation des pièces mécaniques

Lors de son fonctionnement, les solides qui constituent un système se déforment sous l'action des efforts qu'ils subissent.
Par la suite, on fera l'hypothèse que ces déformations sont négligeables et on considérera les **solides indéformables**.
Le **solide S est indéformable** si, quels que soient deux points A et B du solide S leur distance ne varie pas au cours du temps : $\left\|\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}\right\| = \boldsymbol{Constante}$

3- Position relative de deux solides indéformables



La solution pour repérer la position d'un solide indéformable par rapport à un autre est **d'associer** à chaque solide étudié un repère, dit **repère lié**.

Un **repère lié au solide indéformable** (S) est défini par une **origine** et une **base, fixe** dans (S)

La position relative de deux solides est alors définie par la position relative des repères qui leur sont associés.

Ici le repère $R_1 = (O_1, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ est lié au solide S_1 et le repère $R_2 = (O_2, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ au solide S_2.
La position de S_2 (ou de R_2) est définie par rapport à S_1 (ou de R_1) par :

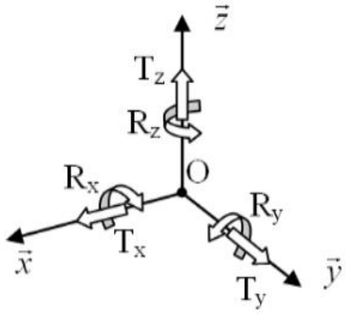
- la position de O_2 dans R_1,
- l'orientation de la base B_2 (associée au repère R_2) par rapport à la base B_1 (associée au repère R_1).

La cinématique s'intéresse aux mouvements de repères et de points.

4- Degré de liberté

Le degré de liberté d'un solide S_2 par rapport à un autre solide S_1 est le nombre de paramètres indépendants définissant au cours du temps la position de S_2 par rapport à S_1.
Six paramètres sont nécessaires pour définir la position relative de deux solides.

- La modification de la **position** de **l'origine** définit **3 translations** ;
- La modification de **l'orientation** de la **base** définit **3 rotations.**

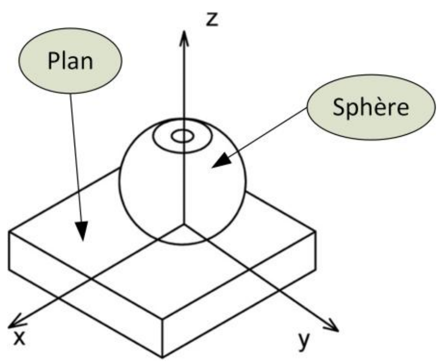
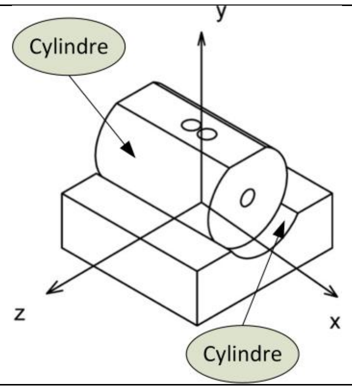


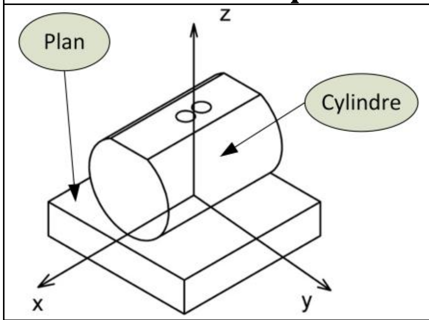
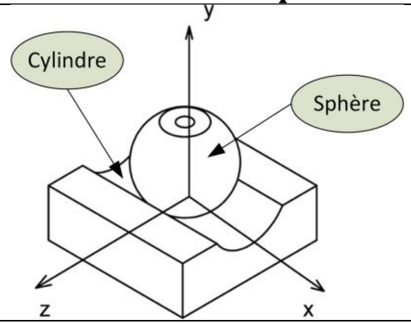
Lorsque deux solides n'ont aucune liaison, le degré de liberté est donc égal à six.
Lorsqu'il existe une liaison mécanique entre deux solides, le degré de liberté est strictement inférieur à six.

5- Modélisation et paramétrage des liaisons mécaniques

*Les mécanismes sont constitués de pièces mécaniques en **contact physique** les unes par rapport aux autres. Ces **contacts** sont appelés **liaisons mécaniques**. Nous allons définir plusieurs liaisons courantes, dont la schématisation est normalisée, entre deux pièces mécaniques S_1 et S_2.*

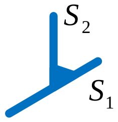
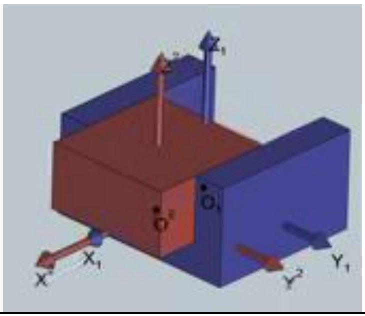
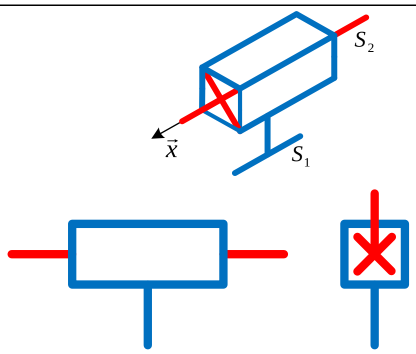
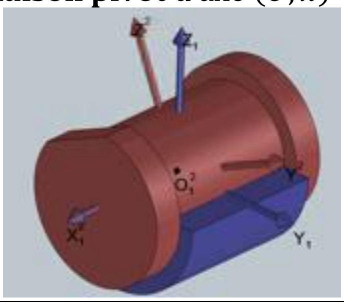
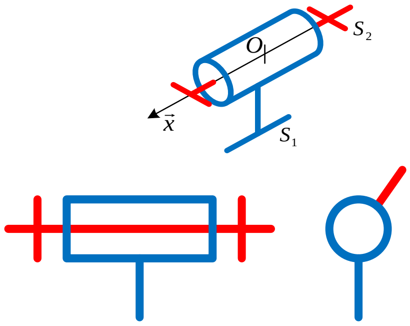
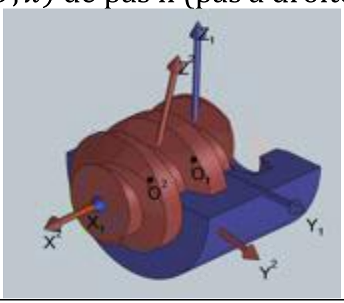
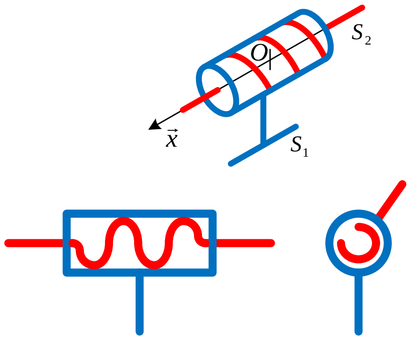
5.1 Les différents types de contact :

Le contact ponctuel		**Le contact surfacique**	
	**Contact :** Point **Direction :** Normale au plan ($\vec{z}$)		**Contact :** Surface **Direction :** Plan - Normale au plan ($\vec{y}$) Cylindre – Axe ($\vec{x}$) Cône - Axe ($\vec{x}$) Sphère

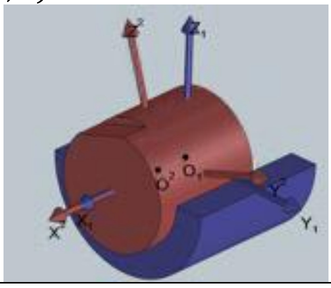
Contacts linéiques			
Linéique rectiligne		**Linéique circulaire**	
	**Contact :** Droite **Direction :** Normale au plan ($\vec{z}$) et axe de la ligne ($\vec{x}$)		**Contact :** Arc de cercle **Direction :** Axe du cylindre ($\vec{x}$)

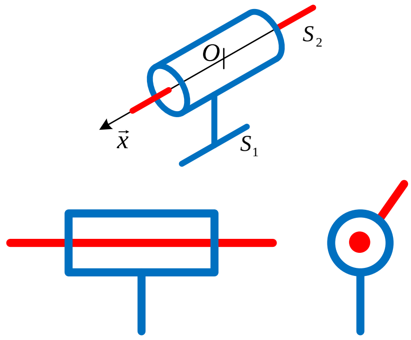
5.2 Liaisons mécaniques :

Le repère R1 est lié au solide S1 et le repère R2, au solide S2. Dans les cas où des éléments restent confondus ($O_1 = O_2$ ou $\vec{x}_1 = \vec{x}_2$) l'indice sera omis.

Liaison	Schématisation	Propriétés
Liaison encastrement		**Degré de liberté :** n=0 **Tableau des mobilités :** T R X 0 0 Y 0 0 Z 0 0
Liaison glissière de direction $\vec{x}$ 		**Degré de liberté :** n=1 **Tableau des mobilités :** T R X 1 0 Y 0 0 Z 0 0 **Contact :** Surfaces planes perpendiculaires.
Liaison pivot d'axe $(O, \vec{x})$ 		**Degré de liberté :** n=1 **Tableau des mobilités :** T R X 0 1 Y 0 0 Z 0 0 **Contact :** sur une surface de révolution.
Liaison hélicoïdale d'axe $(O, \vec{x})$ de pas h (pas à droite) 		**Degré de liberté :** n=1 **Tableau des mobilités :** T R X 1 1 Y 0 0 Z 0 0

Liaison pivot glissant d'axe $(O,\vec{x})$





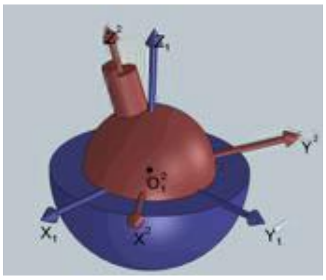
Degré de liberté : n=2

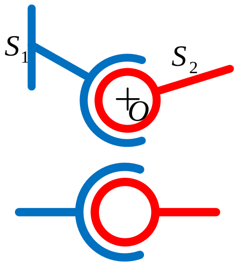
Tableau des mobilités :

	T	R
X	1	1
Y	0	0
Z	0	0

Contact : sur un cylindre de base circulaire.

Liaison sphérique (rotule) de centre O





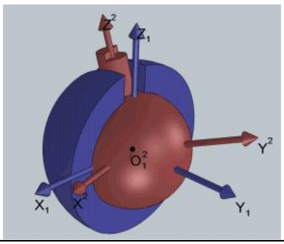
Degré de liberté : n=3

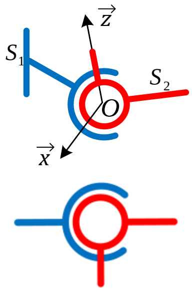
Tableau des mobilités :

	T	R
X	0	1
Y	0	1
Z	0	1

Contact : sur une sphère.

Liaison sphérique à doigt (rotule à doigt) de centre O de direction $\vec{z}$ et de normale $\vec{x}$





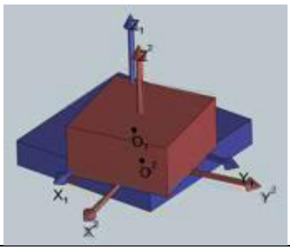
Degré de liberté : n=2

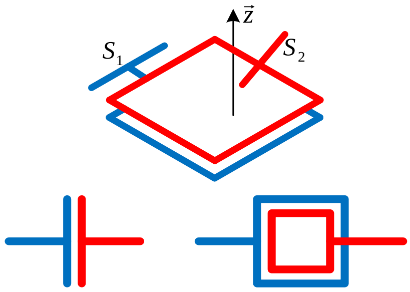
Tableau des mobilités :

	T	R
X	0	1
Y	0	0
Z	0	1

Contact : sur une sphère et butée.

Liaison plane (appui plan) de normale $\vec{z}$





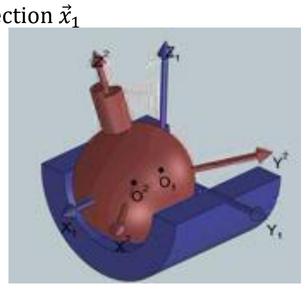
Degré de liberté : n=3

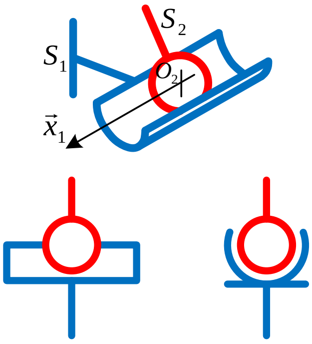
Tableau des mobilités :

	T	R
X	1	0
Y	1	0
Z	0	1

Contact : sur un plan.

Liaison sphère-cylindre (linéaire annulaire) de centre O_2 et de direction $\vec{x}_1$





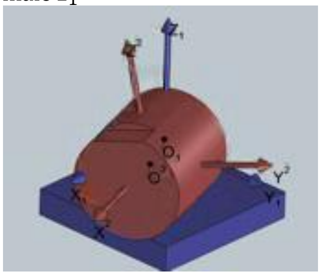
Degré de liberté : n=4

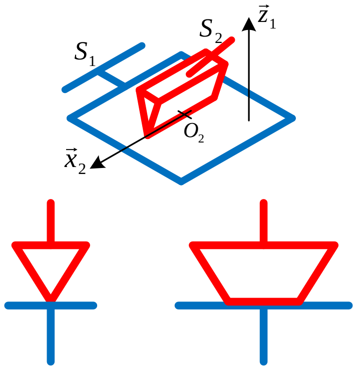
Tableau des mobilités :

	T	R
X	1	1
Y	0	1
Z	0	1

Contact : une sphère dans un cylindre.

Liaison cylindre-plan (linéaire rectiligne) d'axe $(O_2, \vec{x}_2)$ de normale $\vec{z}_1$



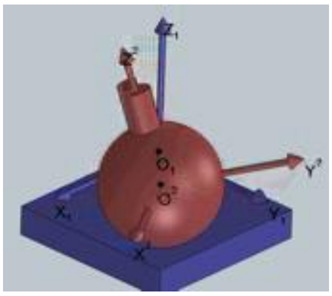


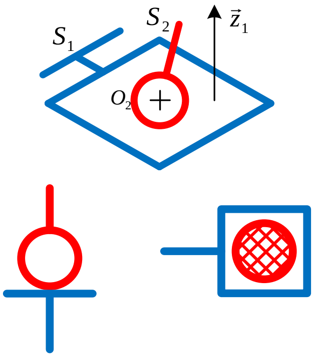
Degré de liberté : n=4
Tableau des mobilités :

	T	R
X	1	1
Y	1	0
Z	0	1

Contact : un cylindre sur un plan (axe du cylindre astreint à rester sur un plan décalé du plan réel de contact d'un rayon du cylindre).

Liaison sphère-plan (liaison ponctuelle) de centre O_2de normale $\vec{z}_1$





Degré de liberté : n=5
Tableau des mobilités :

	T	R
X	1	1
Y	1	1
Z	0	1

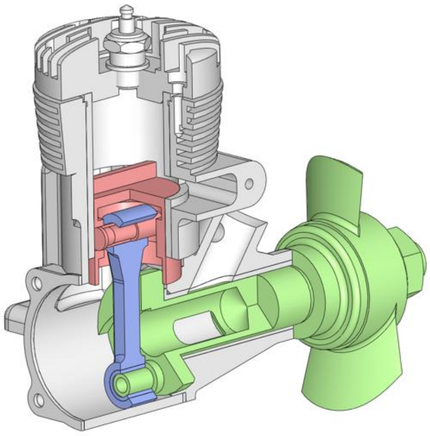
Contact : une sphère sur un plan (centre de la sphère astreint à rester sur un plan décalé du plan réel de contact d'un rayon de la sphère).

6- Le schéma cinématique :

Lorsque l'on souhaite étudier le comportement cinématique d'un mécanisme, il est nécessaire de s'appuyer sur un modèle cinématique, le schéma cinématique.

Le **schéma cinématique** est une représentation minimale et graphique qui montre le fonctionnement d'un mécanisme en représentant les **liaisons** et les **solides** le constituant.

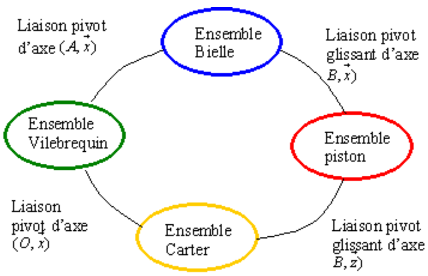
6.1 Classes d'équivalence cinématique :



C'est un **sous-ensemble de pièces** qui se déplacent ensemble (liées entre elles), elle constitue un **solide**
Seront exclues les pièces déformables (ressorts, rondelles élastiques…).

6.2 Graphe de liaisons :

Le graphe de liaisons d'un mécanisme
- Les **solides** sont représentés par des **cercles** ;
- Les **liaisons** entre les solides sont représentées par des **traits**, le long desquels sont indiqués le nom et les caractéristiques géométriques de la liaison.



6.3 Élaborer un schéma cinématique :

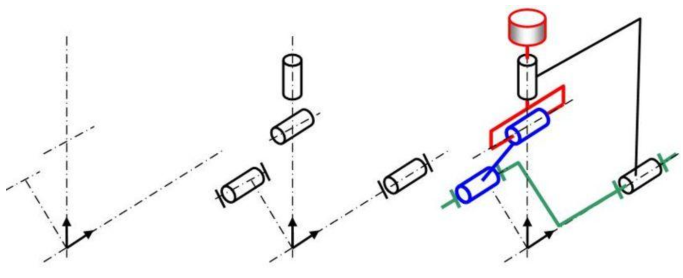
- Positionner, en respectant à peu près les proportions, les centres et les axes des liaisons.

- Mettre en place, dans le plan ou dans l'espace, les représentations symboliques des liaisons élémentaires en respectant le code de couleur retenu et la position de la liaison par rapport au référentiel d'analyse.

Bien respecter l'orientation des liaisons par rapport au repère.

- Relier tous les éléments de même couleur en respectant les proportions et les formes générales du mécanisme à schématiser.

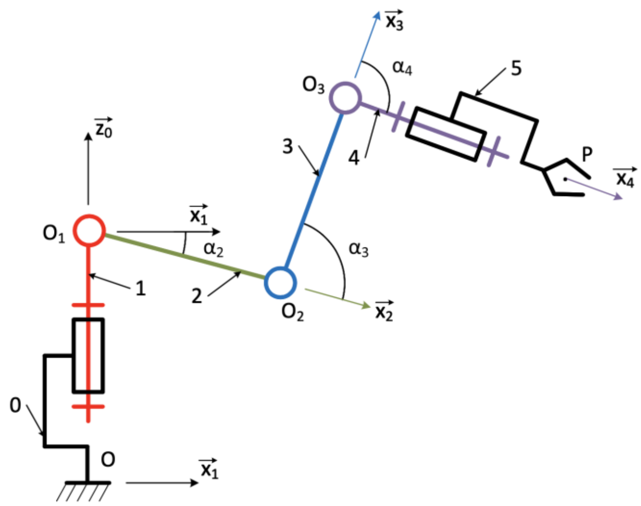
- Compléter éventuellement par quelques traits le schéma.



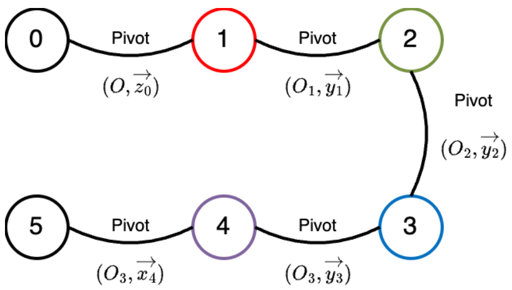
1- Les centres et les axes. *2- Les liaisons.* *3- Les classes d'équivalence.*

7- Modèle géométrique des structures ouvertes :

7.1 Modèle géométrique direct



Considérons le modèle cinématique d'un robot série 5 degrés de liberté, figure ci-contre.
L'ensemble de référence est noté 0, associé au repère $R_0\ (O, \vec{x_0}, \vec{y_0}, \vec{z_0})$.
L'outil est l'ensemble 5. Seule la position du point P est supposée fonctionnelle.



Les **coordonnées opérationnelles** sont les coordonnées de l'outil (effecteur du mécanisme) dans le repère de référence.
Les **coordonnées articulaires** sont les paramètres de position des liaisons du mécanisme, paramètres associés aux actionneurs (moteurs et vérins).

Dans l'exemple, les coordonnées opérationnelles sont celles du point P dans R_0 , notées (X, Y, Z) en posant $\overrightarrow{OP} = X.\overrightarrow{x_0} + Y.\overrightarrow{y_0} + Z.\overrightarrow{z_0}$. Les coordonnées articulaires sont $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$.

En robotique, le **modèle géométrique direct** est l'ensemble des équations permettant de calculer **les coordonnées opérationnelles** (position de l'effecteur) en fonction des **coordonnées articulaires.**

Le vecteur position de l'effecteur dans le repère de référence s'écrit aussi :
$\overrightarrow{OP} = a.\overrightarrow{z_1} + b.\overrightarrow{x_2} + c.\overrightarrow{x_3} + d.\overrightarrow{x_4} = \vec{f}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$ avec a, b, c et d les dimensions des segments OO_1, O_1O_2, O_2O_3 et O_3P.

Le **modèle géométrique direct** s'obtient en projetant l'équation $X.\overrightarrow{x_0} + Y.\overrightarrow{y_0} + Z.\overrightarrow{z_0} = \vec{f}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$ dans la base de référence. On obtient ainsi 3 équations scalaires :

$$\begin{cases} X = \vec{f}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4).\overrightarrow{x_0} \\ Y = \vec{f}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4).\overrightarrow{y_0} \\ Z = \vec{f}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4).\overrightarrow{z_0} \end{cases}$$

Le **modèle géométrique inverse** permet de calculer les coordonnées articulaires en fonction des coordonnées opérationnelles.

7.2 Imposer une position ou une contrainte de position

Pour **imposer une position** à un effecteur, il est nécessaire de déterminer le **modèle géométrique direct puis de l'inverser** numériquement ou en calculant le modèle géométrique inverse.
Une **contrainte de position limite les** mouvements possibles de l'effecteur. Elle s'exprime par une ou plusieurs **expressions vectorielles.**

Exemples :

- contrainte de distance → contrainte sur une norme
- contrainte d'appartenance à une droite → contrainte sur 2 coordonnées
- contraintes d'appartenance à un plan → contrainte sur une coordonnée
- contrainte de trajectoire → contrainte sur les coordonnées.

Exemples de contraintes :

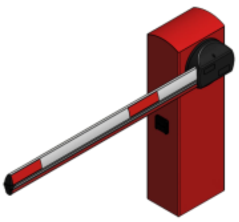
1. Le point P doit rester à une distance inférieure à d de son origine bâti A, soit à l'intérieur d'une sphère de rayon d : $\|\overrightarrow{AP}\| \leq d$.
2. Le point P doit rester à une hauteur h du « sol », soit sur un plan parallèle à $(\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{z_0})$: $\overrightarrow{AP}.\overrightarrow{y_0} = h$
3. Le point P doit se situer sur une droite verticale passant par le point $D(L, 0,0)$:

$$\overrightarrow{AP}.\overrightarrow{x_0} = L \qquad \overrightarrow{AP}.\overrightarrow{z_0} = 0$$

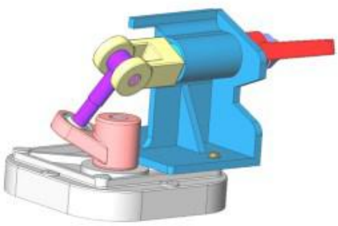
8- Modèle géométrique des structures fermées : loi entrée – sortie

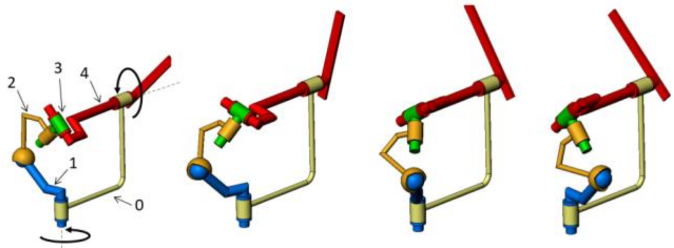
Un mécanisme en **structure fermée** (chaîne fermée) possède **une seule liaison motorisée** par un **actionneur** (contrairement aux structures ouvertes où chaque liaison nécessite d'être motorisée). C'est la structure bouclée du mécanisme qui fait que la mise en mouvement de cette liaison va entraîner celles de toutes les autres liaisons du mécanisme.
Cette **structure bouclée** du mécanisme se retrouve dans le graphe des liaisons sous la forme d'une **chaîne fermée**.

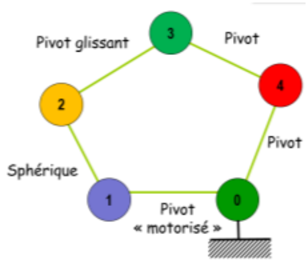
Exemple : mécanisme de transformation de mouvement d'une barrière



Le solide 1 est entraîné en rotation par un motoréducteur électrique. Animé d'un mouvement de rotation continu (à vitesse constante) par rapport au bâti 0, il permet la mise en rotation alternative du solide 4 sur lequel est fixé la lisse de la barrière.





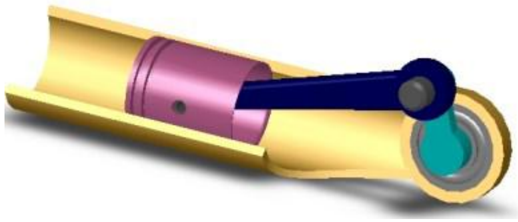


CAO — Schéma cinématique dans différentes positions — Graphe des liaisons

8.1 Loi entrée sortie en position

Dans un mécanisme à structure fermée, on peut distinguer un **paramètre** de position **d'entrée** et un **paramètre** de position de **sortie**.

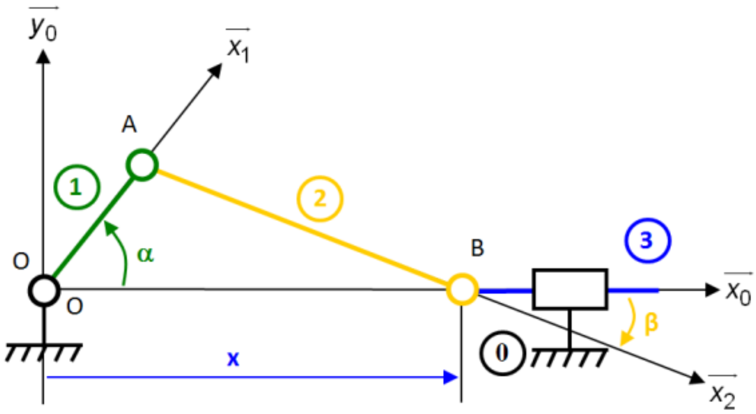
La loi **d'entrée-sortie en position** est la **relation mathématique** reliant les paramètres de position **d'entrée** et de **sortie**.



Exemple : système bielle-manivelle

Ce mécanisme correspond à celui que l'on retrouve dans un moteur thermique, par exemple.

Le modèle cinématique comprend 4 liaisons, 4 DDL de liaison associés à 4 paramètres de position.
Les paramètres d'entrée et de sortie sont ceux associés à la liaison pivot L_{01} et à la liaison glissière L_{30}.
Pour un compresseur, l'entrée est l'angle α, pour un moteur à combustion interne, l'entrée est la distance x.



8.2 Déterminer la loi d'entrée-sortie en position par fermeture géométrique

Démarche pour obtenir une loi entrée-sortie en position :

- écrire la **relation vectorielle de fermeture géométrique** de la chaîne de solides ; relation de Chasles entre les **points caractéristiques des liaisons** en parcourant la chaîne fermée :

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \cdots + \overrightarrow{DA} = \vec{0}$$

- **projeter l'équation de fermeture** dans la base de référence des angles pour faire apparaître les paramètres d'E/S.

- **éliminer les paramètres** de mouvement **autres** que ceux **d'entrée et de sortie**, en combinant les équations obtenues.

8.3 Simplifications et équivalences usuelles

8.3.1 Éliminer un angle

Pour éliminer un angle **β** présent dans 2 équations en cosinus et sinus, on exprime les relations sous la forme :

$$\begin{cases} R.\cos\beta = f(\alpha,\lambda) \\ R.\sin\beta = g(\alpha,\lambda) \end{cases}$$

d'où $(R.\cos\beta)^2 + (R.\sin\beta)^2 = \big(f(\alpha,\lambda)\big)^2 + \big(g(\alpha,\lambda)\big)^2$ avec $(R.\cos\beta)^2 + (R.\sin\beta)^2 = R^2$

soit $\boldsymbol{R^2 = \big(f(\alpha,\lambda)\big)^2 + \big(g(\alpha,\lambda)\big)^2}$

8.3.2 Éliminer une longueur

Pour éliminer une longueur **λ** en facteur d'un cosinus et sinus, on exprime les relations sous la forme :

$$\begin{cases} \lambda.\sin\beta = f(\alpha) \\ \lambda.\cos\beta = g(\alpha) \end{cases}$$

d'où $\frac{\lambda.\sin\beta}{\lambda.\cos\beta} = \frac{f(\alpha)}{g(\alpha)}$ soit $\boldsymbol{\tan\beta = \frac{f(\alpha)}{g(\alpha)}}$

8.3.3 Cas particulier

Isoler un angle d'une équation de la forme : $\boldsymbol{A.\cos\alpha + B.\sin\alpha = C}$

Poser un angle θ tel que : $\cos\theta = \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}$ et $\sin\theta = \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}$ soit $\tan\theta = \frac{B}{A}$
(qui vérifie bien : $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$)

On a alors $\cos\theta.\cos\alpha + \sin\theta.\sin\alpha = \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2}}$ donc $cos(\alpha - \theta) = \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2}}$

Si $\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2}} > 1$ alors il n'y a pas de solution
Si $\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2}} \leq 1$ alors $\alpha - \theta = \text{acos}\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2}}$ donc $\boldsymbol{\alpha = \text{acos}\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2}} + \theta}$ (modulo 2π)