# Tout savoir sur la dérivation de fonctions

## I Dérivation

### I.1 Définition

**Définition**

Une fonction est dite dérivable en un point $a$ si

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

existe.
Dans ce cas on note $f'(a)$ cette limite.

La fonction $f$ est dérivable sur un intervalle $I$ si elle est dérivable en tout point de $I$.

### I.2 Tangente

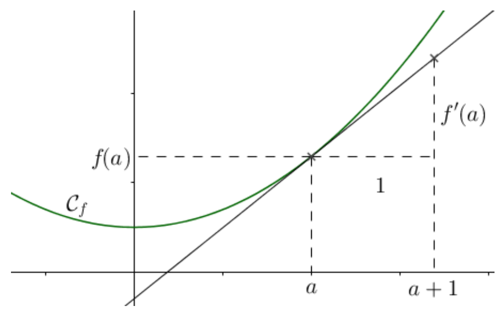
**Définition**

Soit $f$ une fonction dérivable sur $I$ et $a$ un point de $I$. La tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point $a$ est la droite passant par le point $\big(a; f(a)\big)$ et de coefficient directeur $f'(a)$.
$\mathscr{C}_f$ est évidemment la courbe représentative de la fonction $f$ sur $I$.

**Propriété 1**

Soit $f$ une fonction dérivable en $a$.
Une équation de la tangente au point d'abscisse $a$ est :

$$y = f'(a)(x-a) + f(a)$$




### I.3 Dérivées des fonctions usuelles

| Fonction $f(x) =$ | Ensemble de dérivation | Dérivée $f'(x) =$ |
|---|---|---|
| $k,\ k \in \mathbb{R}$ | $\mathbb{R}$ | $0$ |
| $x$ | $\mathbb{R}$ | $1$ |
| $x^2$ | $\mathbb{R}$ | $2x$ |
| $x^3$ | $\mathbb{R}$ | $3x^2$ |
| $x^n$ | $\mathbb{R}$ | $nx^{n-1}$ |

| Fonction $f(x) =$ | Ensemble de dérivation | Dérivée $f'(x) =$ |
|---|---|---|
| $\sqrt{x}$ | $]0;+\infty[$ | $\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ |
| $\dfrac{1}{x}$ | $]-\infty;0[\cup]0;+\infty[=\mathbb{R}^*$ | $\dfrac{-1}{x^2}$ |
| $\exp(x)$ | $\mathbb{R}$ | $\exp(x)$ |
| $\ln(x)$ | $]0\,;+\infty[$ | $\dfrac{1}{x}$ |
| $\cos x$ | $\mathbb{R}$ | $-\sin x$ |
| $\sin x$ | $\mathbb{R}$ | $\cos x$ |

**Propriété 2**

Soient $u$ et $v$ deux fonctions dérivables sur un intervalle $I$. On a les formules de dérivation suivantes :

— $(ku)' = ku'$, où $k \in \mathbb{R}$
— $(u+v)' = u' + v'$
— $(uv)' = u'v + uv'$
— $\left(\dfrac{1}{v}\right)' = \dfrac{-v'}{v^2}$ si pour tout $x$ de $I$, $v(x) \neq 0$
— $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$ si pour tout $x$ de $I$, $v(x) \neq 0$

**Théorème 1**

Soit $f$ une fonction dérivable et définie sur un intervalle $I$. Pour tout $x \in I$,

1. si $f'(x) < 0$, alors $f$ est strictement décroissante sur $I$ ;
2. si $f'(x) = 0$, alors $f$ est constante sur $I$ ;
3. si $f'(x) > 0$, alors $f$ est strictement croissante sur $I$.

**Propriété 3**

Si $f$ admet un extremum local alors $f'(a) = 0$.

**Attention la réciproque est fausse.** La condition $f'(a) = 0$ est nécessaire à l'existence d'un extremum mais non suffisante.

**Exemple 1**

La fonction $x \longmapsto x^3$ en 0.

## I.4 Compléments sur les dérivées

**Propriété 4**

Soient $a$ et $b$ deux nombres réels. La fonction $f : x \longmapsto \cos(ax+b)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, et $\forall x \in \mathbb{R}$ : $f'(x) = (\cos(ax+b))' = -a \times \sin(ax+b)$

**Exemple 2**

Dériver la fonction $f : x \longmapsto \cos(3x+4)$ en donnant son ensemble de dérivation.

**Propriété 5**

Soient $a$ et $b$ deux nombres réels. La fonction $g : x \longmapsto \sin(ax+b)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, et $\forall x \in \mathbb{R}$ :

$$g'(x) = (\sin(ax+b))' = a \times \cos(ax+b)$$

**Exemple 3**

Dériver la fonction $f : x \longmapsto \cos(3x+4)$ en donnant son ensemble de dérivation.

**Propriété 6**

Soit $u$ une fonction définie et dérivable sur un intervalle $I$ et $n$ un entier naturel non nul.
La fonction $x \longmapsto (u(x))^n$ est dérivable sur $I$ et pour tout $x$ de $I$,

$$\left((u(x))^n\right)' = n \times u'(x) \times (u(x))^{n-1}$$

**Exemple 4**

Dériver la fonction $f : x \longmapsto (-3x^2+2x+4)^5$ en donnant son ensemble de dérivation.

**Propriété 7**

Soit $u$ une fonction définie et dérivable sur un intervalle $I$, tel que $\forall x \in I,\ u(x) > 0$.
La fonction $x \longmapsto \ln(u(x))$ est dérivable sur $I$ et pour tout $x$ de $I$,

$$(\ln(u(x)))' = \frac{u'(x)}{u(x)}$$

**Exemple 5**

Dériver la fonction $f : x \longmapsto \sqrt{3x^2+2x+1}$ en donnant son ensemble de dérivation.

**Propriété 8**

Soient $u$ une fonction dérivable sur un intervalle $I$. La fonction $x :\longmapsto e^{u(x)}$ est dérivable sur $I$ et pour tout $x \in I$.

$$\left(e^{u(x)}\right)' = u'(x) \times e^{u(x)}$$

**Exemple 6**

Calculer la dérivée de la fonction $f : x \longmapsto e^{3x^2+5x-6}$ sur $\mathbb{R}$. En déduire son tableau de variation.

**Exercice :** Calculer les dérivées des fonctions définies par les formules :

1. $f(x) = 9x^3 + 5x^2 + 13$ sur $\mathbb{R}$;
2. $g(x) = \sin(x) + \sqrt{(}x)$ sur $]0; +\infty[$;
3. $h(x) = (7x^2 + 3x)exp(x)$ sur $\mathbb{R}$;
4. $i(x) = \cos(x)(12x + 5)$ sur $\mathbb{R}$;
5. $j(x) = \dfrac{3^2 + 4}{8x + 2}$ sur $]0; +\infty[$;