Chapitre 1

Outils pour la transformée de Fourier

7. Décomposition en série de Fourier

- Considérons un signal quelconque $x(t)$ **périodique** de période T et intégrable sur T.
- On peut toujours remplacer $x(t)$ par son développement en série de Fourier qui s'écrit comme suit :

$$\boxed{x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(a_n \cos\left(2\pi \frac{nt}{T}\right) + b_n \sin\left(2\pi \frac{nt}{T}\right)\right)}$$

- $a_0 = \overline{X} = \dfrac{1}{T} \displaystyle\int_0^T x(t)dt$ est la valeur moyenne de $x(t)$
- a_n et b_n sont les **coefficients de Fourier** avec :

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T x(t) \cos\left(2\pi \frac{nt}{T}\right) dt \quad \text{et} \quad b_n = \frac{2}{T} \int_0^T x(t) \sin\left(2\pi \frac{nt}{T}\right) dt$$

Interprétation de la décomposition

$$\boxed{x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(a_n \cos\left(2\pi \frac{nt}{T}\right) + b_n \sin\left(2\pi \frac{nt}{T}\right)\right)}$$

Développons cette expression :

$$x(t) = \boxed{a_0} + \boxed{a_1 \cos\left(2\pi \frac{t}{T}\right) + b_1 \sin\left(2\pi \frac{t}{T}\right)} + \boxed{a_2 \cos\left(2\pi \frac{2t}{T}\right) + b_2 \sin\left(2\pi \frac{2t}{T}\right)} + \boxed{a_3 \cos\left(2\pi \frac{3t}{T}\right) + b_3 \sin\left(2\pi \frac{3t}{T}\right)} + \cdots$$

Composante continue

Valeur moyenne

Signal à la fréquence f

composante fondamentale (ou harmonique 1)

Signal à la fréquence $2f$

harmonique 2

Signal à la fréquence $3f$

harmonique 3

8. Simplification dans le cas de signaux pairs ou impairs

- Si x est pair, on a $x(-t) = x(t)$ et les coefficients b_n sont tous nuls.

$$x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos\left(2\pi \frac{nt}{T}\right)$$

- Si x est impair, on a $x(-t) = -x(t)$ et les coefficients a_n sont tous nuls.

$$x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin\left(2\pi \frac{nt}{T}\right)$$

Exercice : à justifier...

Exemple de calcul des coefficients d'une série de Fourier

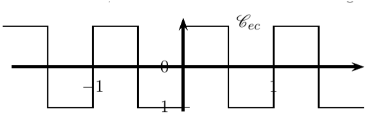
Soit le signal $x(t)$ défini pour tout t par $x(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 < t \leqslant 2 \\ 0 & \text{si } 2 < t \leqslant 4 \\ & \text{4-périodique} \end{cases}$

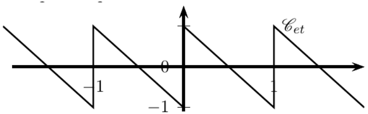
1. Représenter graphiquement x sur 3 périodes.
2. x est-il pair ? impair ?
3. Vérifier que $a_0 = \dfrac{1}{2}$, $a_n = 0$ et $b_n = \dfrac{1}{n\pi}(1 - \cos(n\pi))$
4. En déduire la décomposition de $x(t)$.
5. Représenter le spectre d'amplitude des quatre premières harmoniques de $x(t)$

https://www.geogebra.org/m/tT6UvD6k

Exercice

On considère les deux signaux d'entrée représentés ci-dessous :





1. Définir les fonctions entrée carrée ec et entrée triangulaire et, donner leur parité et leur valeur moyenne,
2. calculer leurs coefficients trigonométriques de Fourier,
3. représenter leur spectre d'amplitude pour $f < 10$