Programme de l'exposé

Table des matières

1 Transformation de Laplace

1.1 Définition

La transformée de Laplace associe à un signal $x(t)$ une fonction $X(p)$ définie par :

$$X(p) = \int_0^\infty x(t)e^{-pt}dt$$

La variable p est un nombre complexe appelé *variable de Laplace*. $X(p)$ est appelée *transformée de Laplace* de $x(t)$. On note aussi : $X(p) = \mathscr{L}\left[x(t)\right]$

1.2 Propriétés

1.2.1 théorème n° 1 : transformation d'une dérivée

Toute multiplication par p équivaut dans le domaine temporel à une dérivée en fonction du temps.

$$\mathscr{L}\left[\frac{dx(t)}{dt}\right] = p \cdot X(p)$$

Remarque : L'expression mathématique de ce théorème est en fait : $\mathscr{L}\left[\frac{dx(t)}{dt}\right] = p \cdot X(p) - x(0)$, mais $x(0) = 0$ en régulation.

1.2.2 théorème n° 2 : transformation d'une primitive

Toute division par p se traduit dans le domaine temporel par une intégration en fonction du temps.

$$\mathscr{L}\left[\int x(t).dt\right] = \frac{X(p)}{p}$$

1.2.3 théorème n° 3 : Théorème de la valeur finale

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = \lim_{p\to 0} p \cdot X(p)$$

1.2.4 théorème n° 4 : Linéarité

D'autre part, la transformée de Laplace est une *transformation linéaire* : Soit λ et μ deux constantes réelles, et $X(p)$ et $Y(p)$ les transformées de Laplace de $x(t)$ et $y(t)$:

$$\mathscr{L}\left[\lambda \cdot x(t) + \mu \cdot y(t)\right] = \lambda \cdot X(p) + \mu \cdot Y(p)$$

1.2.5 théorème n° 5 : Retard

Transformée de Laplace d'une fonction retardée d'un retard T :

$$\mathscr{L}\left[x(t - T)\right] = X(p) \cdot e^{-T \cdot p}$$

1.3 Transformées de Laplace des principaux signaux utilisés en régulation

Le tableau en fin de document donne les transformées de Laplace couramment utilisées en régulation (cf. 5).

2 Résolution des équations différentielles

Du fait de ses propriétés en ce qui concerne les dérivées en fonction du temps des signaux, la transformée de Laplace est très utile pour résoudre des équations différentielles linéaires.

Exemple de résolution d'un premier ordre : On rappelle que l'équation différentielle correspondant à un premier ordre dont le signal d'entrée est $e(t)$ et la grandeur de sortie est $s(t)$ vaut :

$$s(t) + \tau\frac{ds(t)}{dt} = Ke(t) \tag{1}$$

si $E(p)$ et $S(p)$ sont les transformées de Laplace de $e(t)$ et $s(t)$, alors l'équation (1) devient :

$$S(p) + \tau p \cdot S(p) = K \cdot E(p) \quad \text{,soit} \quad S(p)(1 + \tau p) = K \cdot E(p)$$

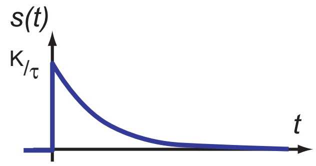
$$S(p) = \frac{K}{(1 + \tau p)} \cdot E(p) \tag{2}$$

La connaissance de $E(p)$ permet donc de connaître $S(p)$. Deux cas peuvent alors se présenter :

- Cas simple : L'expression de $s(t)$ peut se déduire de $S(p)$ directement à partir de la table des transformées de Laplace.
- Cas complexe : L'expression de $S(p)$ ne correspond pas aux cas élémentaires qui figurent dans la table et une décomposition en éléments simples (cf 16) est nécessaire afin de ramener $S(p)$ à une somme de cas élémentaires.

2.1 Exemple d'un cas simple

Si le signal de commande est une impulsion de Dirac $e(t) = \delta(t)$ alors :



$$E(p) = 1 \quad \text{et,} \quad S(p) = \frac{K}{(1+\tau p)} = \frac{\frac{K}{\tau}}{(\frac{1}{\tau}+p)}$$

D'aprés la table des transformées de Laplace, on peut déduire l'expression de $s(t)$:

$$s(t) = \frac{K}{\tau}.e^{-\frac{t}{\tau}}$$, ce qui correspond bien à la réponse impulsionnelle d'un premier ordre.

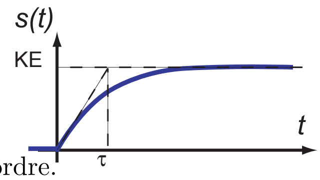
2.2 Exemple d'un cas complexe

Si le signal de commande est une échelon d'amplitude E : $e(t) = E \cdot u(t)$ alors :

$$E(p) = \frac{E}{p} \quad \text{et,} \quad S(p) = \frac{KE}{p(1+\tau p)}$$

On ne peut trouver directement dans la table des transformées usuelles une expression qui corresponde à $S(p)$. Il faut au préalable opérer une *décomposition en éléménts simples* de $S(p)$. La méthode de décomposition d'une fraction rationnelle en éléments simples (cf. 16) est donnée à la fin de ce cours.

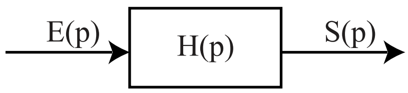
La décomposition en éléments simples de $S(p)$ permet d'aboutir au résultat : $S(p) = KE\left(\frac{1}{p} - \frac{\tau}{1+\tau p}\right)$,donc $S(p) = KE\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{\frac{1}{\tau}+p}\right)$ L'utilisation de la table des transformées usuelles de Laplace (cf. 5) permet à présent d'obtenir l'expression de $s(t)$: $s(t) = KE\left(u(t) - e^{-\frac{t}{\tau}}u(t)\right)$,donc $s(t) = KE\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)u(t)$, ce qui correspond bien à la réponse indicielle d'un premier ordre.



3 Fonctions de transfert isomorphe

3.1 Définition

On définit la ***fonction de transfert isomorphe*** comme le rapport $H(p) = \frac{S(p)}{E(p)}$ et on lui associe la représentation graphique ci-contre.

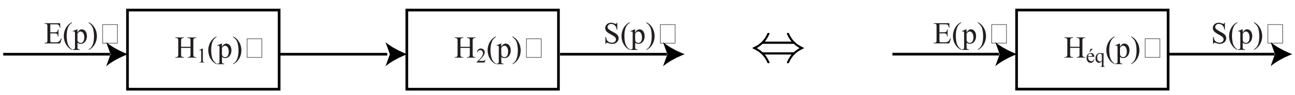


Exemple : L'équation (2) permet de définir la fonction de transfert isomorphe d'un premier ordre :

$$H(p) = \frac{K}{1+\tau \cdot p}$$

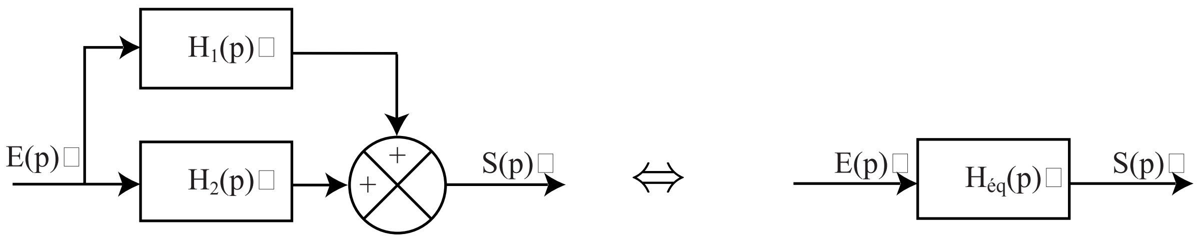
3.2 Association de fonctions de transfert

La fonction de transfert $H_{eq}(p)$ équivalente à la *mise en série* de deux fonctions de transfert $H_1(p)$ et $H_2(p)$ est le produit de ces deux fonctions de transfert :



$$H_{eq} = H_1(p) \times H_2(p)$$

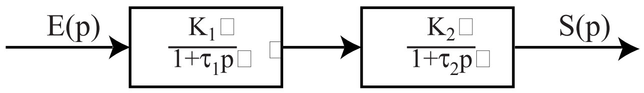
La fonction de transfert $H_{eq}(p)$ équivalente à la *mise en parallèle* de deux fonctions de transfert $H_1(p)$ et $H_2(p)$ est la somme de ces deux fonctions de transfert :



$$H_{eq} = H_1(p) + H_2(p)$$

3.3 Exemple d'association

On souhaite déterminer la fonction de transfert équivalente à la mise en série de deux procédés du premier ordre et trouver la réponse de cette fonction de transfert équivalente à un échelon d'amplitude E.



$$H_{eq} = \frac{K_1.K_2}{(1+\tau_1 p)(1+\tau_2 p)}$$

$$\text{or,} \quad E(p) = \frac{E}{p} \quad \text{donc,} \quad S(p) = \frac{E.K_1.K_2}{p(1+\tau_1 p)(1+\tau_2 p)}$$

La décomposition de $S(p)$ en éléments simples donne :

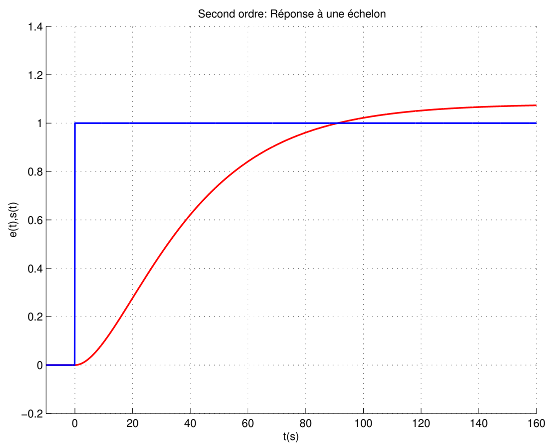
$$S(p) = E.K_1.K_2\left(\frac{1}{p} + \frac{A}{1+\tau_1 p} + \frac{B}{1+\tau_2 p}\right)$$

$$\text{avec,} \quad A = \frac{{\tau_1}^2}{\tau_2 - \tau_1} \quad \text{et,} \quad B = \frac{{\tau_2}^2}{\tau_1 - \tau_2}$$

$$\text{donc,} \quad s(t) = E.K_1.K_2\left(1 + \frac{\tau_1}{\tau_2 - \tau_1}e^{-\frac{t}{\tau_1}} + \frac{\tau_2}{\tau_1 - \tau_2}e^{-\frac{t}{\tau_2}}\right).u(t)$$

<u>Application Numérique</u> : Pour $K_1 = 1,2; \tau_1 = 27s; K_2 = 0,9; \tau 2 = 15s; E = 1$ on obtient l'expression suivante :

$$s(t) = 1,08\left(1 - 2,25e^{-\frac{t}{27}} + 1,25e^{-\frac{t}{15}}\right).u(t)$$



Le graphique ci-contre donne l'allure de $s(t)$. On peut vérifier que l'on retrouve l'allure de la réponse indicielle d'un second ordre sur-amorti.

4 Décomposition en éléments simples d'une fraction rationnelle

Le but de la décomposition est de ramener un fonction de transfert qui s'écrit sous la forme $H(p) = \dfrac{N(p)}{D(p)}$, où $N(p)$ et $D(p)$ sont des fonctions polynomiales de p, et $\deg N < \deg D$. On considèrera 3 exemples types :
$H_1(p) = \dfrac{1}{(p+a)(p+b)}$; $H_2(p) = \dfrac{1}{(p+a)p^2}$;$H_3(p) = \dfrac{1}{p(a.p^2+b.p+c)}$

Première étape : On factorise $D(p)$ sous forme d'un produit de polynômes irréductibles. Un polynôme est irréductible, soit quand il est d'ordre 1, soit quand il est d'ordre 2, et que son discriminant Δ est < 0.

Exemples : $H_1(p)$ et $H_2(p)$ sont déjà factorisés. $H_3(p)$ ne peut être factorisé que si $\Delta^2 = b^2 - 4ac \geq 0$. Dans le cas contraire, il reste inchangé.

Deuxième étape : Décomposition de $H(p)$:

— *Cas n° 1 :* présence de *pôles simples* au dénominateur : cas de $H_1(p)$: On peut décomposer H_1 ainsi :

$$H_1(p) = \frac{1}{(p+a)(p+b)} = \frac{A}{(p+a)} + \frac{B}{(p+b)} \tag{3}$$

— *Cas n° 2 :*présence de *pôles multiples* au dénominateur : cas de $H_2(p)$: On peut décomposer H_2 ainsi :

$$H_2(p) = \frac{1}{(p+a)p^2} = \frac{A}{p+a} + \frac{B_2}{p^2} + \frac{B_1}{p} \tag{4}$$

— *Cas n° 3 :*présence de *pôles complexes conjugués* au dénominateur : cas de $H_3(p)$ avec $\Delta \leq 0$: On peut décomposer H_3 ainsi :

$$H_3(p) = \frac{1}{p(a.p^2+b.p+c)} = \frac{A}{p} + \frac{B_2.p+B_1}{(a.p^2+b.p+c)} \tag{5}$$

Troisième étape : Détermination des coefficients $A, B, C, \ldots$
On réduit au même dénominateur, puis on procède par indentification.

— *Cas n° 1 :* pôles simples au dénominateur : cas de $H_1(p)$:
On réduit au même dénominateur le terme de droite de (3), puis on compare les dénominateurs :

$$\frac{1}{(p+a)(p+b)} = \frac{A(p+b)+B(p+a)}{(p+a)(p+b)} \frac{1}{(p+a)(p+b)} = \frac{(A+B)p + Ab + Ba}{(p+a)(p+b)} \Leftrightarrow \begin{cases} A+B=0 \\ Ab+Ba=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = \frac{1}{b-a} \\ B = \frac{1}{a-b} \end{cases}$$

— *Cas n° 2 :* pôles multiples au dénominateur : cas de $H_2(p)$:
On réduit au même dénominateur le terme de droite de (4), puis on compare les dénominateurs :

$$\frac{1}{(p+a)p^2} = \frac{Ap^2 + B_2(p+a) + B_1.p(p+a)}{(p+a)p^2} = \frac{(A+B_1)p^2 + (B_2+a.B_1)p + a.B_2}{(p+a)p^2} \Leftrightarrow \begin{cases} a.B_2 = 1 \\ B_2 + a.B_1 = 0 \\ A + B_1 = 0 \end{cases}$$

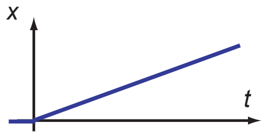
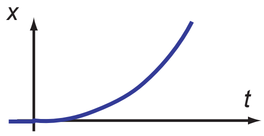
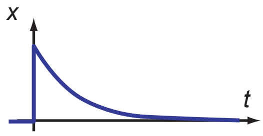
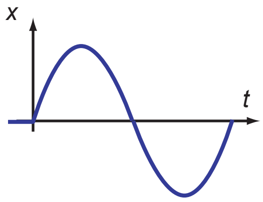
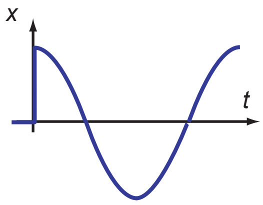
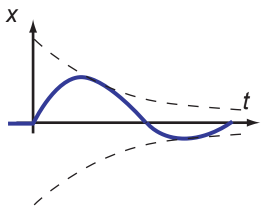
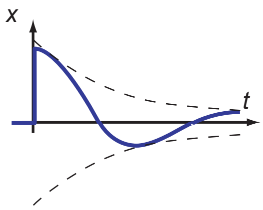
$$\Leftrightarrow \begin{cases} B_2 = \frac{1}{a} \\ B_1 = -\frac{B_2}{a} = -\frac{1}{a^2} \\ A = \frac{1}{a^2} \end{cases}$$

— *Cas n° 3 :* pôles complexes conjugués au dénominateur : cas de $H_3(p)$:
On réduit au même dénominateur le terme de droite de (5), puis on compare les dénominateurs :

$$\frac{1}{p(a.p^2+b.p+c)} = \frac{A(a.p^2+b.p+c) + (B_2.p+B_1)p}{p(a.p^2+b.p+c)} = \frac{(A.a+B_2)p^2 + (A.b+B_1)p + A.c}{p(a.p^2+b.p+c)} \Leftrightarrow \begin{cases} A.c = 1 \\ A.b + B_1 = 0 \\ A.a + B_2 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A = \frac{1}{c} \\ B_1 = -b.A = -\frac{b}{c} \\ B_2 = -a.A = -\frac{a}{c} \end{cases}$$

5 Transformée de Laplace des principaux signaux utilisés en régulation

fonction	$x(t)$	Représentation	$X(p)$
impulsion de Dirac	$\delta(t)$		1
échelon unité	$u(t)$		$\frac{1}{p}$
rampe unité	$t \cdot u(t)$		$\frac{1}{p^2}$
polynôme	$t^n \cdot u(t)$		$\frac{n!}{p^{n+1}}$
exponentielle	$e^{-a \cdot t} \cdot u(t)$		$\frac{1}{p+a}$
sinus	$sin(\omega t) \cdot u(t)$		$\frac{\omega}{p^2+\omega^2}$
cosinus	$cos(\omega t) \cdot u(t)$		$\frac{p}{p^2+\omega^2}$
sinus amorti	$e^{-a \cdot t} \cdot sin(\omega t) \cdot u(t)$		$\frac{\omega}{(p+a)^2+\omega^2}$
cosinus amorti	$e^{-a \cdot t} \cdot cos(\omega t) \cdot u(t)$		$\frac{p+a}{(p+a)^2+\omega^2}$