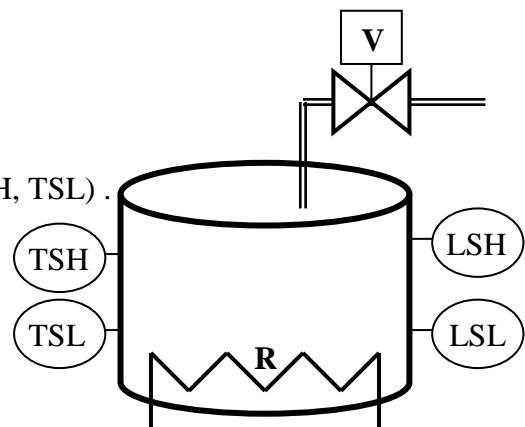


1 Introduction : gestion d'un chauffage

Le niveau d'une cuve est contrôlé par 2 capteurs de niveau NO (LSL, LSH) et 2 capteurs de température NO (TSH, TSL). Une vanne V permet le remplissage tant que le niveau haut n'est pas atteint. Une résistance chauffante R assure le chauffage jusqu'à la température maximale. Une sécurité de fonctionnement interdit le chauffage si le niveau bas n'est pas atteint, de même le remplissage est arrêté si la température minimale n'est pas atteinte.



1. A partir du cahier de charges, donner le nom des entrées et des sorties du système.

.Réponses : quatre entrées TSL, TSH, LSH et LSL. Deux sorties V et R.

2. Représenter ce cahier des Charges sous une forme synthétique.

. Grâce à l'algèbre de Boole (logique combinatoire) on trouve : $R = LSL \bullet \overline{TSH}$ et $V = TSL \bullet \overline{LSH}$.

2 Définition

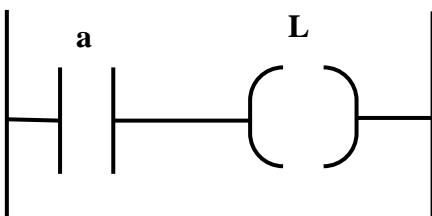
Une **variable logique** (ou booléenne) possède deux états notés : **0 et 1**.

Une **fonction logique** est une grandeur booléenne (0 ou 1) qui dépend d'autres variables booléennes.

3 Fonctions (ou opérations) logiques de base

3.1 Fonction OUI (sur une seule entrée)

Schéma à contacts



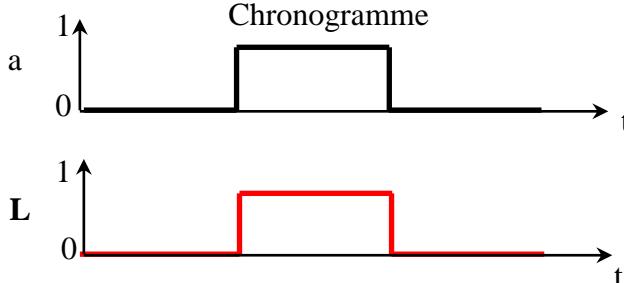
Equation

$$L=a$$

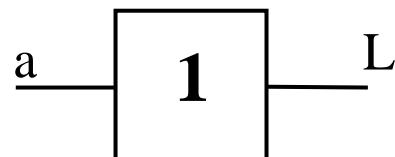
Table de vérité

a	L
0	0
1	1

Chronogramme

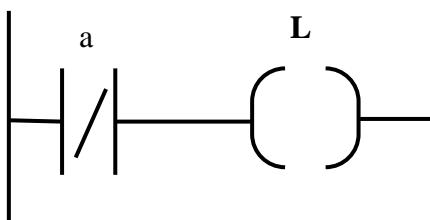


Logigramme



3.2 Fonction NON (sur une seule entrée)

Schéma à contacts



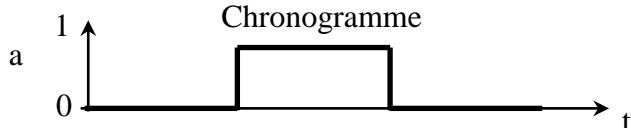
Equation

$$L = \bar{a}$$

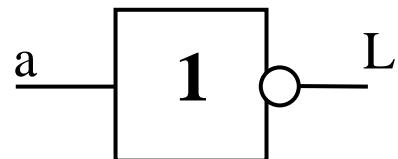
Table de vérité

a	L
0	1
1	0

Chronogramme



Logigramme



3.3 Fonction OU (sur deux entrées ou plus)

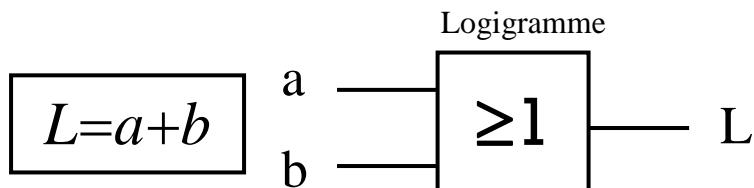
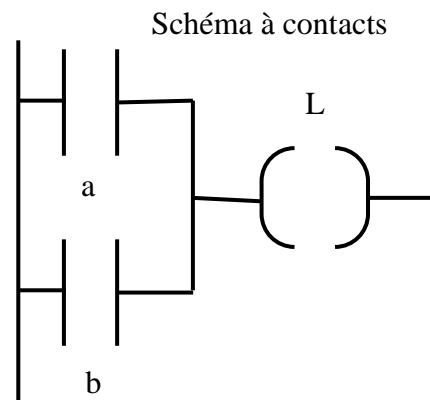
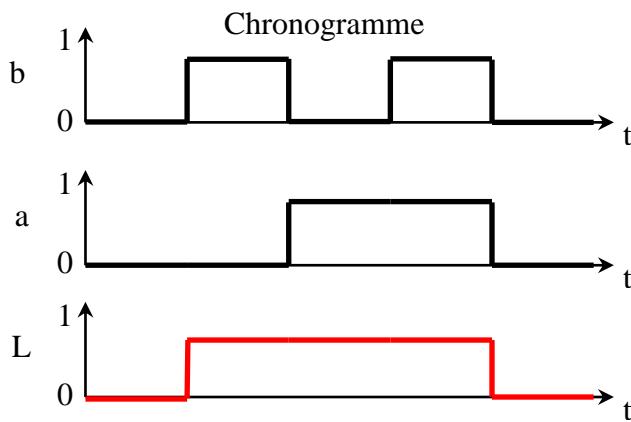
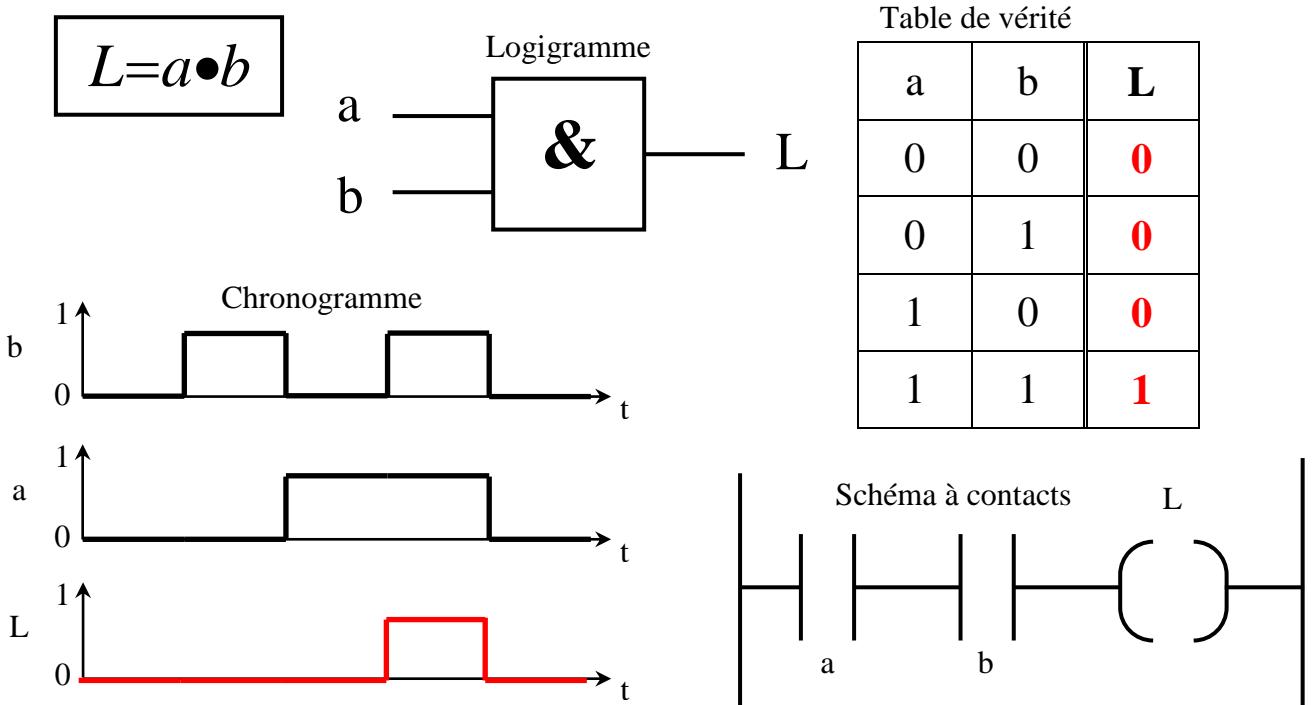


Table de vérité

a	b	L
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1



3.4 Fonction ET (sur deux entrées ou plus)



4 Propriétés fondamentales de l'algèbre de Boole

4.1 Eléments neutres et absorbants des fonctions ET et OU

$$A \cdot 1 = A \quad A + 0 = A \quad A \cdot 0 = 0 \quad A + 1 = 1$$

4.2 Idempotence des fonctions ET et OU

$$A \cdot A = A \quad A + A = A \quad A \cdot \bar{A} = 0 \quad A + \bar{A} = 1$$

4.3 Involution des fonctions ET et OU : $\bar{\bar{A}} = A$

4.4 Commutativité : des fonctions ET et OU

$$A \cdot B = B \cdot A \quad A + B = B + A$$

4.5 Associativité : des fonctions ET et OU

$$A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C = A \cdot B \cdot C \quad A + (B + C) = (A + B) + C = A + B + C$$

4.6 Distributivité

- de la fonction ET par rapport à la fonction OU. $A \cdot (B + C) = (A \cdot B) + (A \cdot C)$
- de la fonction OU par rapport à la fonction ET $A + (B \cdot C) = (A + B) \cdot (A + C)$
cette seconde distributivité n'est possible que dans l'algèbre de Boole.

4.7 Absorption

$$A + A \cdot B = A$$

$$A + \bar{A} \cdot B = A + B$$

5 Fonctions logiques complémentaires

5.1 Fonction NON ET (NAND)

$$L = \overline{a \bullet b}$$

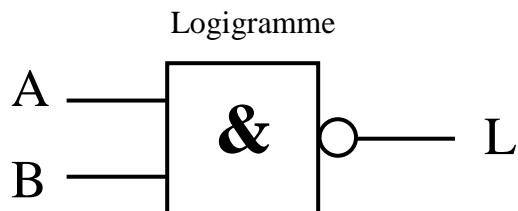
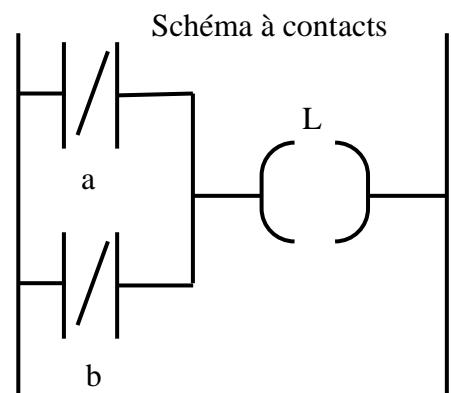
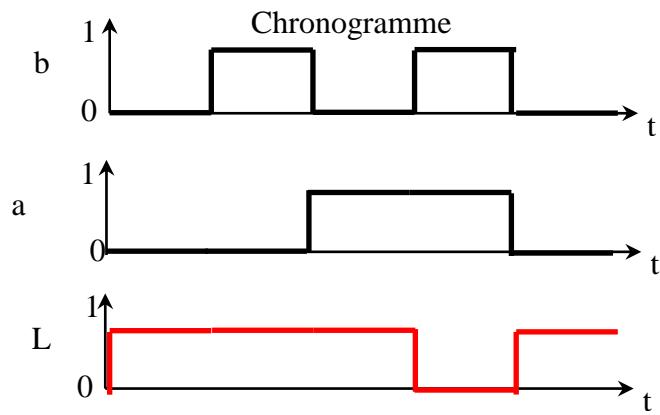


Table de vérité

a	b	L
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0



5.2 Fonction NON OU (NOR)

$$L = \overline{a + b}$$

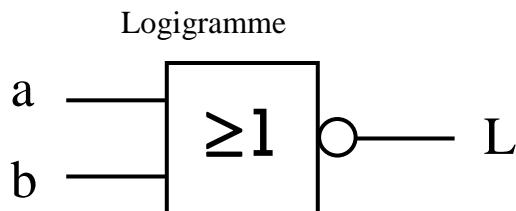


Table de vérité

a	b	L
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

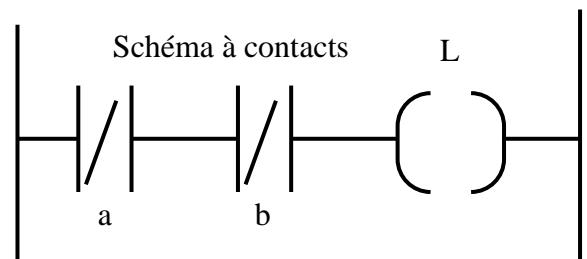
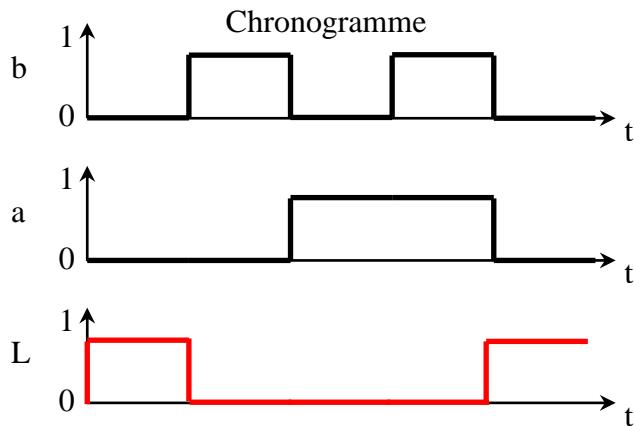
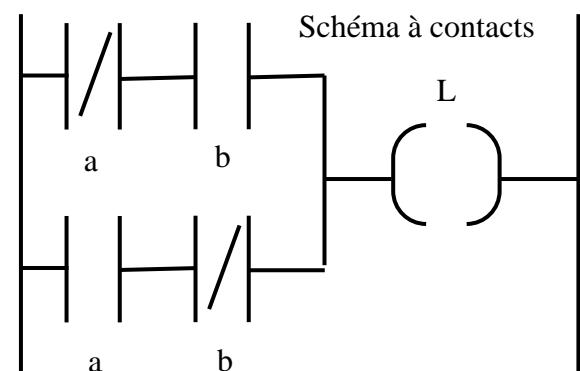
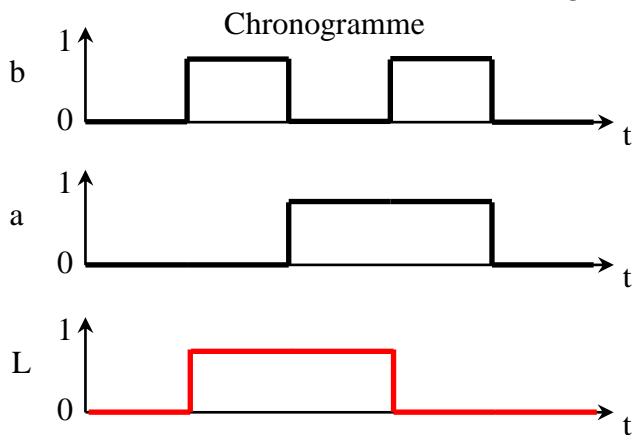
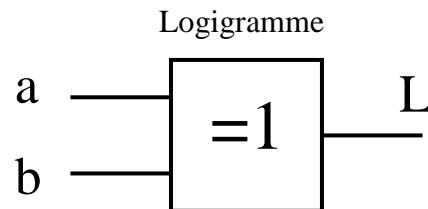


Table de vérité

a	b	L
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

5.3 OU exclusif (XOR)

$$L = a \oplus b = \bar{a} \bullet b + a \bullet \bar{b}$$



6 Techniques élémentaires de simplification

6.1 Théorème de De Morgan

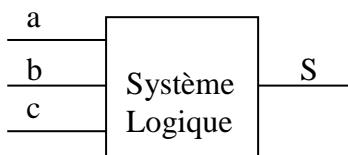
En algèbre de Boole, De Morgan a établit deux théorèmes :

$$\overline{a+b} = \overline{a} \bullet \overline{b} \quad \overline{a \bullet b} = \overline{a} + \overline{b}$$

Exemple : soit un objet lourd ET clair, la négation s'écrit objet léger OU foncé
La négation d'un objet lourd OU clair se traduit par un objet léger ET foncé

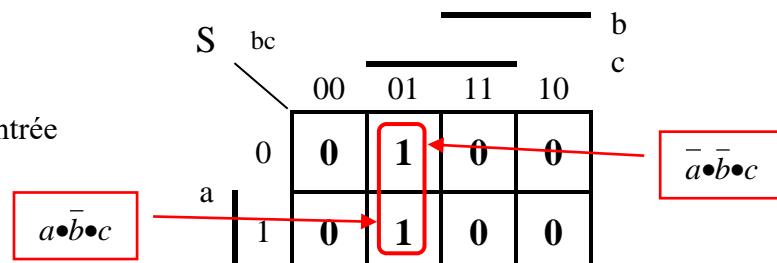
6.2 Tableau de Karnaugh

6.2.1 Exemple n°1 :



3 variables d'entrées $\Rightarrow 2^3$ combinaisons
 \Rightarrow tableaux à 8 cases

Passage d'une case adjacente \Rightarrow
Modification d'une seule variable d'entrée



Simplification

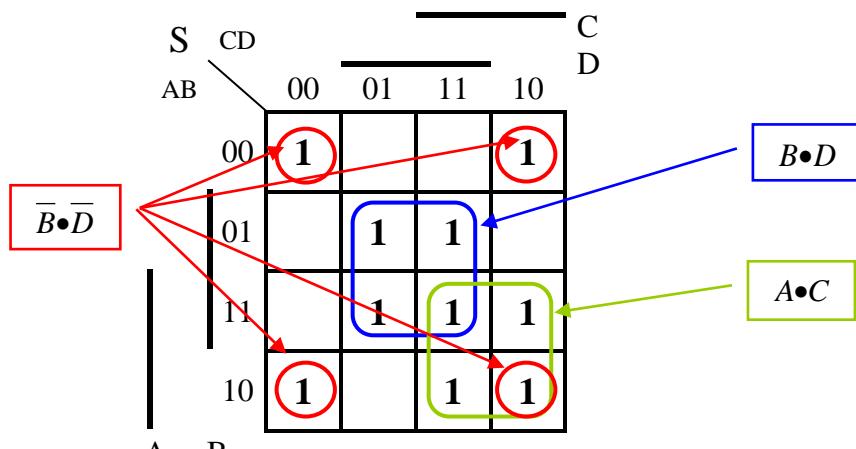
$$S = \overline{a} \bullet \overline{b} \bullet c + a \bullet \overline{b} \bullet c = (\overline{a} + a) \bullet \overline{b} \bullet c = \overline{b} \bullet c$$

6.2.2 Exemple n°2 :

Soit le système décrit par l'équation logique suivante :

$$S = B \bullet D + \overline{B} \bullet \overline{C} \bullet \overline{D} + A \bullet \overline{B} \bullet C \bullet D + \overline{B} \bullet C \bullet \overline{D} + A \bullet B \bullet C \bullet \overline{D}$$

Ici, nous avons 4 variables $\Rightarrow 2^4$ combinaisons \Rightarrow tableaux à 16 cases

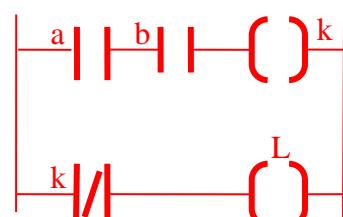
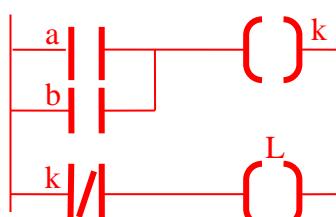


En simplifiant, on trouve :

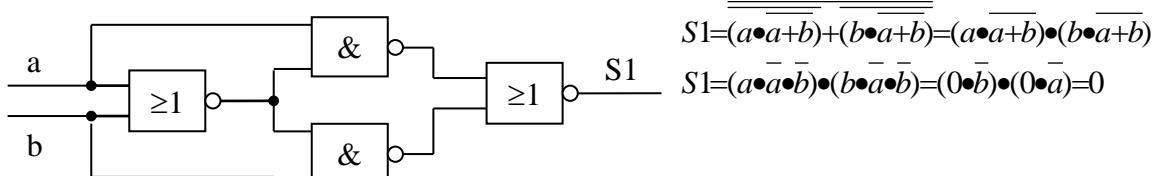
$$S = B \bullet D + \overline{B} \bullet \overline{D} + A \bullet C$$

7 Exercices

- Démontrer avec une table de vérité la propriété de distributivité du OU sur le ET :
$$A + (B \cdot C) = (A + B) \cdot (A + C)$$
- Donner la forme exacte du schéma à contacts du NAND : $L = a \bullet b = \overline{a+b}$
- Donner la forme exacte du schéma à contacts du NOR : $L = \overline{a+b} = \overline{a} \bullet \overline{b}$



- Donner l'équation simplifiée de S1



- Donner l'équation simplifiée de S2

