Transformée en Z

LP Rob&IA - 3

[R5.04 - Maths OT]

August 24, 2025

Introduction

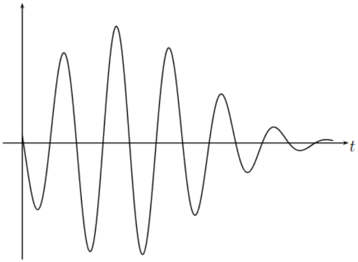
On dispose d'outils adaptés à l'étude des signaux **analogiques** :

- les nombres complexes (lorsque le signal est sinusoïdal) ;
- les séries de Fourier (lorsque le signal est périodique) ;
- la transformée de Laplace (lorsque le signal est causal).

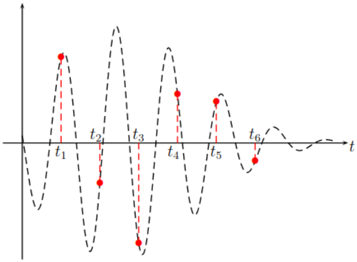
L'utilisation de plus en plus fréquente de calculateurs numériques nécessite la manipulation de signaux **discrets** tels que :

- des suites binaires, utilisées entre autre pour stocker et transmettre de l'information ;
- des suites discrètes provenant de l'échantillonnage d'un signal analogique tel que par exemple la numérisation de signaux audios.

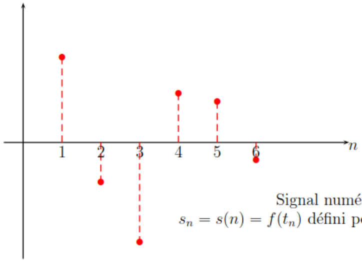
Signaux analogiques et numériques



Signal analogique s
$s(t)$ défini pour tout t réel, $t \geqslant 0$ (signal causal)



Echantillonnage
du signal s aux instants t_i



Signal numérique (s_n)
$s_n = s(n) = f(t_n)$ défini pour tout n entier, $n \geqslant 0$

Transformée en Z : représentation des signaux

Pour l'étude des signaux discrets, l'analogue de la transformée de Laplace est la transformée en Z.

Par la suite, nous utiliserons les notations suivantes :

- $s(t)$ est le signal continu étudié ;
- $s^*(t)$ le signal discret défini aux instants $t \in \{t_0, t_1, t_2, \ldots, t_k\}$;
- $s^*(t)$ sera aussi noté $s(kT_e)$ où T_e est la période d'échantillonnage et k entier ;
- $s(kT_e)$ sera réduit à s_k ;
- La suite de valeurs $\{s_0, s_1, \ldots, s_k\}$ est appelée **séquence** ;
- La période d'échantillonnage $T_e = t_n - t_{n-1}$ est constante !

Transformée en Z : définition théorique

1. La transformée de Laplace du signal causal $s(t)$ est donnée par :

$$\mathcal{L}[s(t)] = \int_0^{+\infty} s(t)\mathrm{e}^{-pt}\mathrm{d}t$$

2. On appelle transformée en Z d'un signal $s(t)$ notée $S(z)$, la transformée de Laplace du signal échantillonné $s^*(t)$ notée $S^*(p)$, dans laquelle $z = f(p)$.

→ On se rappellera qu'on passe ainsi du domaine temporel (t réel) au domaine fréquentiel (z ou $p = a + bj$).

Transformée en Z : définition pratique

<u>Exercice :</u>

On considère le signal continu $s(t)$ et la fonction $\delta(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t = 0 \\ 0 & \text{si } t > 0 \end{cases}$

1. Que dire de la fonction δ ?
2. Représenter graphiquement $p(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \delta(t - kT_e)$.
3. Exprimer $s^*(t)$ en fonction de $s(t)$ et de $p(t)$.
4. En déduire que $\mathcal{L}[s^*(t)] = \sum_{k=0}^{+\infty} s(kT_e)\mathrm{e}^{-kT_e p}$

En posant $z = \mathrm{e}^{T_e p}$ on a $\boxed{S(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} s(kT_e) z^{-k} = \sum_{k=0}^{+\infty} s_k \; z^{-k}}$

Résultats utiles pour la suite

On considère la somme $S_n = \sum_{k=0}^{n} x^k$

1. Décomposer cette somme à la main.
2. En déduire l'expression de $x \times S_n$.
3. Calculer $S_n - xS_n$ et en déduire que pour $x \neq 1$, on a $S_n = \dfrac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$.
4. Lorsque $|x| < 1$, déterminer la série $S = \lim\limits_{x \to +\infty} S_n$
5. Applications :
   - Calculer la somme $1 + 2 + 4 + 8 + ... + 1024$
   - Calculer la série $\sum_{k=0}^{+\infty} \dfrac{1}{2^k}$
   - Résoudre l'équation $1 + x + x^2 + ... + x^7 = 0$
   - "Voyez ce plateau de jeu de 64 cases, offrez-moi un grain de riz sur la première case, puis deux grains de riz sur la deuxième case, quatre grains de riz sur la troisième, huit grains de riz sur la quatrième et ainsi de suite jusqu'à la dernière..."
     Combien de grains de riz y a-t-il sur l'échiquier ?

Exemples

1. Calculer la transformée en Z d'un signal échelon $s(t) = 1$
2. Calculer la transformée en Z de $s(t) = \mathrm{e}^{-at}$.

Aide pour le 2. poser $A = \mathrm{e}^{-aT_e}$

Réponses :

1. $F(z) = \dfrac{1}{1 - z^{-1}}$
2. $F(z) = \dfrac{1}{1 - Az^{-1}}$

Propriétés

Transformée en Z	$Z[x_k] = X(z)$
Linéarité	$Z[ax_k + by_k] = a.X(z) + b.Y(z)$
Multiplication par a^k	$Z[a^k.x_k] = X\left(\frac{z}{a}\right)$
Avance de 1	$Z(x_{k+1}) = z.\left(X(z) - x_0\right)$
Retard	$Z(x_{k-n_0}) = z^{-n_0}.X(z)$
Somme	$\sum_{k=0}^{+\infty} x_k = \lim_{z \to 1} X(z)$
Valeur finale	$x_{+\infty} = \lim_{z \to 1}(1 - z^{-1})X(z)$
Valeur initiale	$x_0 = \lim_{z \to +\infty} X(z)$
Convolution $c_k = x_k * y_k = \sum_m x_m y_{k-m}$	$Z[c_k] = X(z).Y(z)$

Tables

Pour un signal temporel $x(t)$, on retrouve $X(p)$ la transformée de Laplace et $X(z)$ la transformée en Z :

$X(p)$	$x(t)$	$X(z)$
1	$\delta(t)$	1
$\mathrm{e}^{-kT_e p}$	$\delta(t-kT_e)$	z^{-k}
$\frac{1}{p}$	$\Gamma(t)=1$	$\frac{z}{z-1}$
$\frac{1}{p^2}$	t	$\frac{z}{(z-1)^2}$
$\frac{1}{p+a}$	$\mathrm{e}^{-at}=\alpha^t$	$\frac{z}{z-\alpha}$ avec $\alpha=\mathrm{e}^{-a}$
$\frac{1}{p(1+\tau p)}$	$1-\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}$	$\frac{(1-\alpha)z}{(z-1)(z-\alpha)}$ avec $\alpha=\mathrm{e}^{-\frac{1}{\tau}}$

Transformée en Z inverse

Deux méthodes à retenir (on développera aux prochains TD):

1. par décomposition en éléments simples + utilisation des tables
2. par division polynomiale (calcul des n premiers échantillons)

Transformée en Z modifiée

- La transformée en Z permet de connaître et de contrôler un processus aux instants d'échantillonnage (d'un capteur ou du toc d'horloge du micro-contrôleur ;
- MAIS, elle ne renseigne pas entre deux instants successifs ! (linéaire, non-déterministe...)
- Pour info, il existe une astuce qui permet de voir le comportement entre deux échantillons :
  - on introduit $T(z, m)$ pour $m \in \{0; 1\}$ qui génère un retard sur l'échantillonnage
  - On a la formule $G(z, m) = \sum_{k=0}^{+\infty} g(k + m) z^{-k}$
- Il existe des tables de transformée en Z modifiées ou bloquées que vous verrez en autom...