Tout savoir sur les intégrales

I Intégration

I.1 Définition

Définition

Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle $[a;b]$.
On définie l'intégrale de f entre a et b, le nombre $F(b)-F(a)$ où F est une primitive de f sur $[a;b]$. On note cette intégrale :

$$\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a)$$

Exemple 1

Une primitive de $f(x)=3x^2$ est $F(x)=x^3$ donc :

$$\begin{aligned}\int_2^5 f(x)dx &= \int_2^5 3x^2 dx\\ &= F(5)-F(2)\\ &= 5^3-2^3\\ &= 125-8\\ &= 117\end{aligned}$$

Exemple 2

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=2xe^{x^2}$.

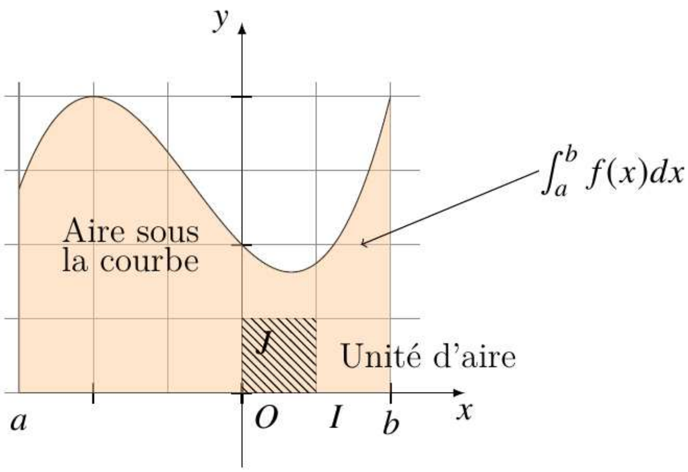
1. Montrer que F définie par $F(x)=e^{x^2}$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.
2. En déduire $\int_2^4 f(x)dx$.

En pratique l'intégrale d'une fonction positive sert à calculer l'aire sous la courbe d'une fonction.

Propriété 1

L'intégrale d'une fonction continue et **positive** f sur $[a;b]$ est l'aire (exprimée en u.a) de la surface délimitée par les droites d'équation $x=a$; $x=b$; $y=0$ et la courbe représentative de f.

Cette aire est aussi appelée **l'aire sous la courbe** de f, et on note cette intégrale $\int_a^b f(x)dx$.




```python
def f(x) :
    f = ...
    return f

def integrale(a, b, n) :
    x = a
    S = 0
    pas = (b-a)/n
    for i in range(...) :
        S += f(x)*pas
        x += ...
    return S
```

Exemple 3

Calculer l'aire sous la courbe de la fonction cube entre $x = 0$ et $x = 10$

Exemple 4

Calculer

$$\int_0^4 -3x^2 dx$$

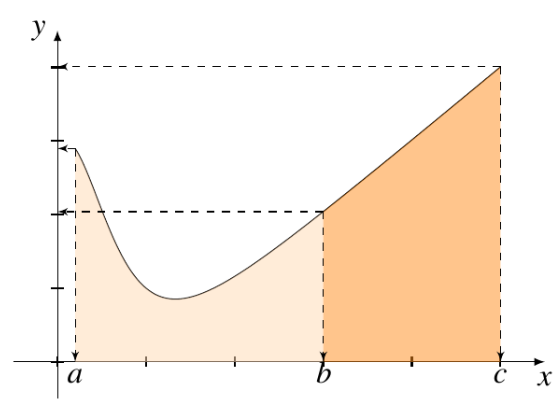
Faites une interprétation en terme d'aire. Est-ce normal de trouver une aire négative ?

I.2 Propriété de l'intégrale

Propriété 2

Relation de Chasles :
Soit f une fonction continue sur un intervalle I, a, b, c trois réels de I.

$$\int_a^b f(t)dt + \int_b^c f(t)dt = \int_a^c f(t)dt$$



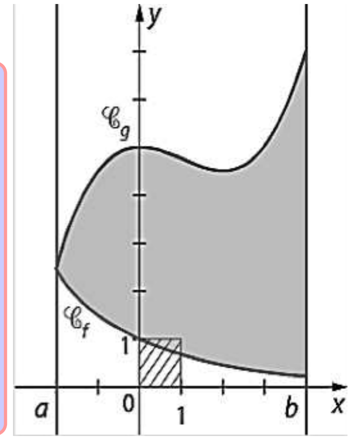
Interprétation géométrique dans le cas d'une fonction positive avec $a \leqslant b \leqslant c$.

Remarque *C'est une façon de voir un simple découpage de surface dans le cas où les fonctions sont positives.*

Propriété 3

Aire du domaine compris entre deux courbes :
Soient f et g deux fonctions continues positives sur $[a;b]$ telles que $f \leqslant g$ sur $[a;b]$.
Soit A l'aire de la surface comprise entre $\mathscr{C}_f$, $\mathscr{C}_g$ et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$. Alors :

$$A = \int_a^b \left(g(x) - f(x)\right) dx$$



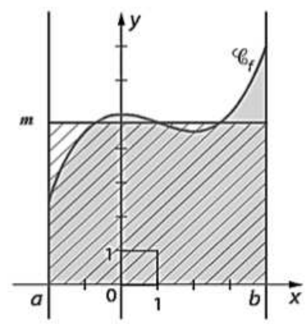
I.3 Valeur moyenne d'une fonction

Définition

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a;b]$. On appelle **valeur moyenne** de f sur $[a;b]$ le réel m tel que :

$$m = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

Illustration géométrique : Si f est positive sur $[a;b]$, la valeur moyenne de f est la hauteur du rectangle de largeur $b-a$ qui a la même aire que l'aire sous la courbe de f.



Exemple 5

Un mobile subit un mouvement rectiligne uniformément accéléré d'accélération $a = 1,5\ m.s^{-2}$. La vitesse du mobile au temps $t \geqslant 0$ *(t en secondes)* est notée $v(t)$, en $m.s^{-1}$, et sa position est donnée par $x(t)$, en mètres, avec $x(0) = 0$.

1. (a) Sachant que la vitesse initiale du mobile est $2\ m.s^{-1}$, exprimer $v(t)$ en fonction de t.
   (b) En déduire $x(t)$ en fonction de t.
2. Représenter graphiquement v et x en fonction de t sur $[0\,;10]$ à l'aide de `matplotlib`.
3. (a) Calculer l'aire sous la courbe de v sur $[0\,;10]$.
   (b) Calculer la valeur moyenne de v sur $[0\,;10]$. Interpréter ce résultat.
4. (a) Calculer de même la vitesse moyenne du mobile entre les instants $t = a$ et $t = b$.
   (b) Comparer avec la vitesse instantanée du mobile au temps $t = \dfrac{a+b}{2}$.