Corrigé exo Laplace

On considère un circuit LC.
Le signal d'entrée est noté $e(t)$. Le signal de sortie est noté $s(t)$.
Le système est régi par l'équation différentielle (E) : $LCs''(t)+s(t)=e(t)$.
Les conditions initiales sont : $s\left(0^+\right)=0$ et $s'\left(0^+\right)=0$.

1. On sait que $L=10$ H et $C=10^{-5}$ F. L'équation différentielle (E) s'écrit donc :
   $10\times10^{-5}\times s''(t)+s(t)=e(t)$ soit $10^{-4}s''(t)+s(t)=e(t)$.
2. On suppose que :

   La fonction $e(t)$ admet une transformée de Laplace notée $E(p)$

   La fonction $s(t)$ admet une transformée de Laplace notée $S(p)$.

   On applique la transformée de Laplace à l'équation différentielle et on utilise sa linéarité.
   $$\begin{aligned}\mathscr{L}\left(10^{-4}s''(t)+s(t)\right)=\mathscr{L}(e(t)) &\iff 10^{-4}\mathscr{L}\left(s''(t)\right)+\mathscr{L}(s(t))=\mathscr{L}(e(t))\\ &\iff 10^{-4}\left(p^2S(p)-ps(0^+)-s'(0^+)\right)+S(p)=E(p)\\ &\iff 10^{-4}p^2S(p)+S(p)=E(p)\iff\left(10^{-4}p^2+1\right)S(p)=E(p)\end{aligned}$$
3. La fonction de transfert $H(p)$ est définie par : $S(p)=H(p)\times E(p)$.
   Donc $H(p)=\dfrac{S(p)}{E(p)}=\dfrac{S(p)}{\left(10^{-4}p^2+1\right)S(p)}=\dfrac{1}{10^{-4}p^2+1}=\dfrac{1}{\frac{1}{10^4}p^2+1}=\dfrac{10^4}{p^2+10^4}$
4. On note $\mathscr{U}(t)$ la fonction échelon unité définie ainsi : $\begin{cases}\mathscr{U}(t)=0 & \text{si}\quad t<0\\ \mathscr{U}(t)=1 & \text{si}\quad t\geqslant0\end{cases}$

   On suppose désormais que l'on a : $e(t)=3\mathscr{U}(t)$.
5. D'après le formulaire, on peut dire que $E(p)=\dfrac{3}{p}$.
6. $\left(10^{-4}p^2+1\right)S(p)=E(p)$ donc $S(p)=\dfrac{E(p)}{10^{-4}p^2+1}=\dfrac{\frac{3}{p}}{10^{-4}p^2+1}=\dfrac{3}{10^{-4}p^3+p}=\dfrac{3\times10^4}{p^3+10^4p}$
   $\dfrac{3}{p}-\dfrac{3p}{p^2+10^4}=\dfrac{3\left(p^2+10^4\right)}{p\left(p^2+10^4\right)}-\dfrac{3p^2}{p\left(p^2+10^4\right)}=\dfrac{3p^2+3\times10^4-3p^2}{p^3+10^4p}=\dfrac{3\times10^4}{p^3+10^4p}=S(p)$
7. Il s'agit de chercher l'expression dont la transformée de Laplace est $S(p)=\dfrac{3}{p}-\dfrac{3p}{p^2+10^4}$.

   - Pour obtenir la fonction $p\longmapsto\dfrac{1}{p}$, il faut partir de $t\longmapsto\mathscr{U}(t)$, donc pour obtenir la fonction $p\longmapsto\dfrac{3}{p}$, il faut partir de $t\longmapsto3\mathscr{U}(t)$.
   - Pour obtenir la fonction $p\longmapsto\dfrac{p}{p^2+\omega^2}$, il faut partir de la fonction $t\longmapsto\cos(\omega t)\mathscr{U}(t)$, donc pour obtenir la fonction $p\longmapsto\dfrac{3p}{p^2+10^4}$, il faut partir de $t\longmapsto3\cos(10^2t)\mathscr{U}(t)$.

   On en déduit que $s(t)=3\mathscr{U}(t)-3\cos(10^2t)\mathscr{U}(t)=3\mathscr{U}(t)\left[1-\cos(100t)\right]$.
8. Le croquis représentant la courbe de $s(t)$ est le croquis 2 (regarder valeur en 0 et compris en -1 et 1.
   En effet :

   - Pour $t=0$ on a $\cos(100t)=\cos(0)=1$ donc $s(0)=0$.
     On peut donc éliminer les croquis 3 et 4.
   - $-1\leqslant\cos(100t)\leqslant1$ donc $1-\cos(100t)\geqslant0$ et donc $s(t)\geqslant0$ pour tout $y\geqslant0$.
     On peut donc éliminer le croquis 1.