Transformée de Laplace

LR

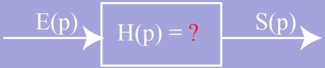
IUT de Béziers

Programme de l'exposé

Introduction :

Rappel cours précédent

But du cours précédent (cf *Identification*) : Déterminer les paramètres d'une fonction de transfert $H(p)$ connaissant $e(t)$ et $s(t)$.



Position du problème

But du présent cours : Déterminer le signal de sortie $s(t)$ d'une fonction de transfert $H(p)$ connaissant ses paramètres et signal d'entrée $e(t)$.

Définition de la transformation de Laplace

$$X(p) = \int_0^{\infty} x(t)e^{-pt}dt$$

Définition de la transformation de Laplace

$$X(p) = \int_0^{\infty} x(t)e^{-pt}dt$$

Notation

p est appelé *variable de Laplace*.
$X(p)$ est appelée *transformée de Laplace* de $x(t)$.
On note aussi : $X(p) = \mathscr{L}\left[x(t)\right]$

Théorème n° 1 : dérivée

$$\mathscr{L}\left[\frac{dx(t)}{dt}\right] = p \cdot X(p)$$

Théorème n° 2 : intégrale

$$\mathscr{L}\left[\int x(t).dt\right] = \frac{X(p)}{p}$$

Théorème n° 3 : Théorème de la valeur finale

$$\lim_{t \to \infty} x(t) = \lim_{p \to 0} p \cdot X(p)$$

Théorème n° 4 : linéarité

la transformée de Laplace est une *transformation linéaire* : :

$$\mathscr{L}\left[\lambda \cdot x(t) + \mu \cdot y(t)\right] = \lambda \cdot X(p) + \mu \cdot Y(p)$$

Théorème n° 5 : retard

Transformée de Laplace d'une fonction retardée d'un retard T :

$$\mathscr{L}\left[x(t-T)\right] = X(p) \cdot e^{-T \cdot p}$$

Table des transformées usuelles

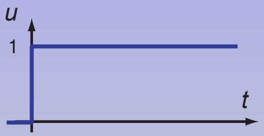
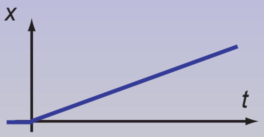
fonction	$x(t)$	Représentation	$X(p)$
impulsion de Dirac	$\delta(t)$		1
échelon unité	$u(t)$		$\frac{1}{p}$
rampe unité	$t \cdot u(t)$		$\frac{1}{p^2}$

Table des transformées usuelles

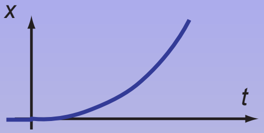
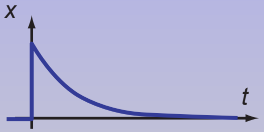
fonction	$x(t)$	Représentation	$X(p)$
polynôme	$t^n \cdot u(t)$		$\frac{n!}{p^{n+1}}$
exponentielle	$e^{-a \cdot t} \cdot u(t)$		$\frac{1}{p+a}$

Table des transformées usuelles

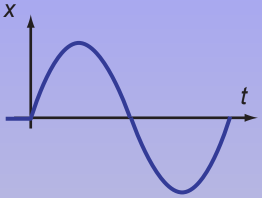
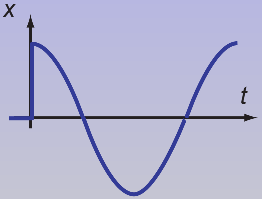
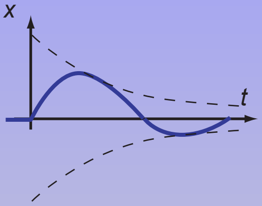
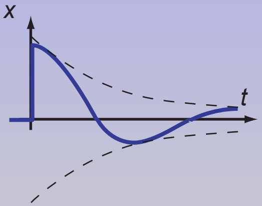
fonction	$x(t)$	Représentation	$X(p)$
sinus	$sin(\omega t) \cdot u(t)$		$\frac{\omega}{p^2+\omega^2}$
cosinus	$cos(\omega t) \cdot u(t)$		$\frac{p}{p^2+\omega^2}$

Table des transformées usuelles

fonction	$x(t)$	Représentation	$X(p)$
sinus amorti	$e^{-a\cdot t}\cdot sin(\omega t)\cdot u(t)$		$\frac{\omega}{(p+a)^2+\omega^2}$
cosinus amorti	$e^{-a\cdot t}\cdot cos(\omega t)\cdot u(t)$		$\frac{p+a}{(p+a)^2+\omega^2}$

Equation différentielle d'ordre 1

$$s(t) + \tau \frac{ds(t)}{dt} = Ke(t) \tag{1}$$

Equation différentielle d'ordre 1

$$s(t) + \tau \frac{ds(t)}{dt} = Ke(t) \tag{1}$$

Transformation de Laplace

$$S(p) = \frac{K}{(1 + \tau p)} \cdot E(p) \tag{2}$$

Equation différentielle d'ordre 1

$$s(t) + \tau \frac{ds(t)}{dt} = Ke(t) \quad (1)$$

Transformation de Laplace

$$S(p) = \frac{K}{(1+\tau p)} \cdot E(p) \quad (2)$$

Résolution

Deux cas peuvent alors se présenter :

- Cas simple : L'expression de $s(t)$ peut se déduire de $S(p)$ directement à partir de la table des transformées de Laplace.
- Cas complexe : L'expression de $S(p)$ ne correspond pas aux cas élémentaires qui figurent dans la table et une décomposition en éléments simples (cf 22) est nécessaire afin de ramener $S(p)$ à une somme de cas élémentaires.

Cas simple

Si $e(t) = \delta(t)$ alors :

$$S(p) =$$

Cas simple

Si $e(t) = \delta(t)$ alors :

$$S(p) = \frac{K}{(1+\tau p)} = \frac{\frac{K}{\tau}}{(\frac{1}{\tau} + p)}$$

Cas simple

Si $e(t) = \delta(t)$ alors :

$$S(p) = \frac{K}{(1+\tau p)} = \frac{\frac{K}{\tau}}{(\frac{1}{\tau}+p)}$$

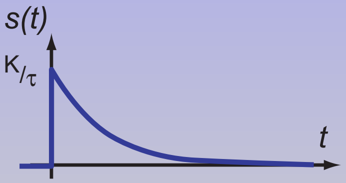
Solution

$$s(t) =$$

Cas simple

Si $e(t) = \delta(t)$ alors :

$$S(p) = \frac{K}{(1+\tau p)} = \frac{\frac{K}{\tau}}{(\frac{1}{\tau} + p)}$$



Solution

$$s(t) = \frac{K}{\tau}.e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Cas complexe

Si E : $e(t) = E \cdot u(t)$ alors :

$$E(p) = \frac{E}{p} \quad \text{et,} \quad S(p) = \frac{KE}{p(1+\tau p)}$$

Cas complexe

Si E : $e(t) = E \cdot u(t)$ alors :

$$E(p) = \frac{E}{p} \quad \text{et,} \quad S(p) = \frac{KE}{p(1+\tau p)}$$

Décomposition en éléments simples

$S(p) =$

,donc $S(p) =$

Cas complexe

Si E : $e(t) = E \cdot u(t)$ alors :

$$E(p) = \frac{E}{p} \quad \text{et,} \quad S(p) = \frac{KE}{p(1+\tau p)}$$

Décomposition en éléments simples

$S(p) =$
$KE\left(\frac{1}{p} - \frac{\tau}{1+\tau p}\right)$,donc $S(p) =$

Cas complexe

Si E : $e(t) = E \cdot u(t)$ alors :

$$E(p) = \frac{E}{p} \quad \text{et,} \quad S(p) = \frac{KE}{p(1+\tau p)}$$

Décomposition en éléments simples

$S(p) = KE\left(\frac{1}{p} - \frac{\tau}{1+\tau p}\right)$,donc $S(p) = KE\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{\frac{1}{\tau}+p}\right)$

Cas complexe

Si E : $e(t) = E \cdot u(t)$ alors :

$$E(p) = \frac{E}{p} \quad \text{et,} \quad S(p) = \frac{KE}{p(1+\tau p)}$$

Décomposition en éléments simples

$S(p) =$

$$KE\left(\frac{1}{p} - \frac{\tau}{1+\tau p}\right) \quad \text{,donc} \quad S(p) =$$

$$KE\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{\frac{1}{\tau}+p}\right)$$

Solution

$s(t) =$

,donc $s(t) =$

Cas complexe

Si E : $e(t) = E \cdot u(t)$ alors :

$$E(p) = \frac{E}{p} \quad \text{et,} \quad S(p) = \frac{KE}{p(1+\tau p)}$$

Décomposition en éléments simples

$S(p) =$

$KE\left(\frac{1}{p} - \frac{\tau}{1+\tau p}\right)$,donc $S(p) =$

$KE\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{\frac{1}{\tau}+p}\right)$

Solution

$$s(t) = KE\left(u(t) - e^{-\frac{t}{\tau}}u(t)\right)$$

,donc $s(t) =$

Cas complexe

Si E : $e(t) = E \cdot u(t)$ alors :

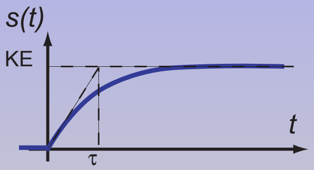
$$E(p) = \frac{E}{p} \quad \text{et,} \quad S(p) = \frac{KE}{p(1+\tau p)}$$

Décomposition en éléments simples

$S(p) =$
$KE\left(\frac{1}{p} - \frac{\tau}{1+\tau p}\right)$,donc $S(p) =$
$KE\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{\frac{1}{\tau}+p}\right)$

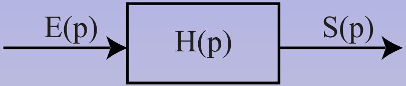
Solution

$s(t) = KE\left(u(t) - e^{-\frac{t}{\tau}} u(t)\right)$
,donc $s(t) =$
$KE\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) u(t)$

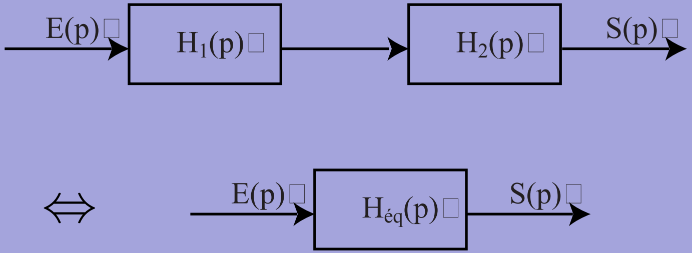


Définition d'une fonction de transfert

On définit la ***fonction de transfert isomorphe*** comme le rapport $H(p) = \frac{S(p)}{E(p)}$

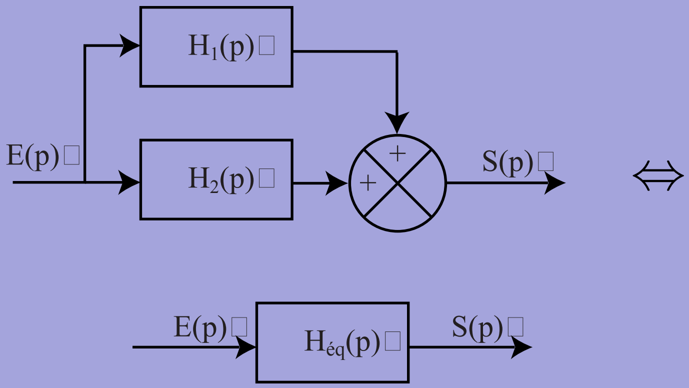


Association en série



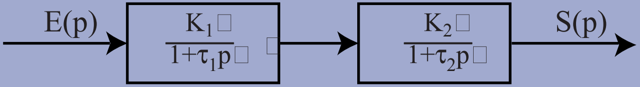
$$H_{eq} = H_1(p) \times H_2(p)$$

Association en parallèle



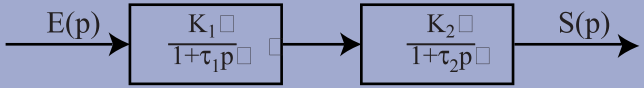
$$H_{eq} = H_1(p) + H_2(p)$$

Exemple d'association



$$H_{eq} = \frac{K_1.K_2}{(1+\tau_1 p)\,(1+\tau_2 p)}$$

Exemple d'association

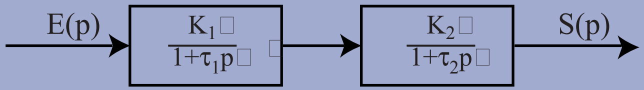


$$H_{eq} = \frac{K_1.K_2}{(1+\tau_1 p)(1+\tau_2 p)}$$

Réponse indicielle

$$s(t) = E.K_1.K_2\left(1 + \frac{\tau_1}{\tau_2-\tau_1}e^{-\frac{t}{\tau_1}} + \frac{\tau_2}{\tau_1-\tau_2}e^{-\frac{t}{\tau_2}}\right).u(t)$$

Exemple d'association



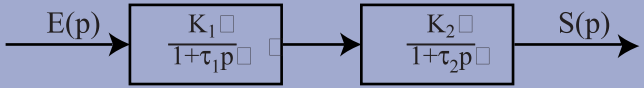
$$H_{eq} = \frac{K_1.K_2}{(1+\tau_1 p)(1+\tau_2 p)}$$

Réponse indicielle

$$s(t) = E.K_1.K_2\left(1 + \frac{\tau_1}{\tau_2 - \tau_1}e^{-\frac{t}{\tau_1}} + \frac{\tau_2}{\tau_1 - \tau_2}e^{-\frac{t}{\tau_2}}\right).u(t)$$

Application Numérique : Pour $K_1 = 1,2$; $\tau_1 = 27s$; $K_2 = 0,9$; $\tau 2 = 15s$; $E = 1$

Exemple d'association



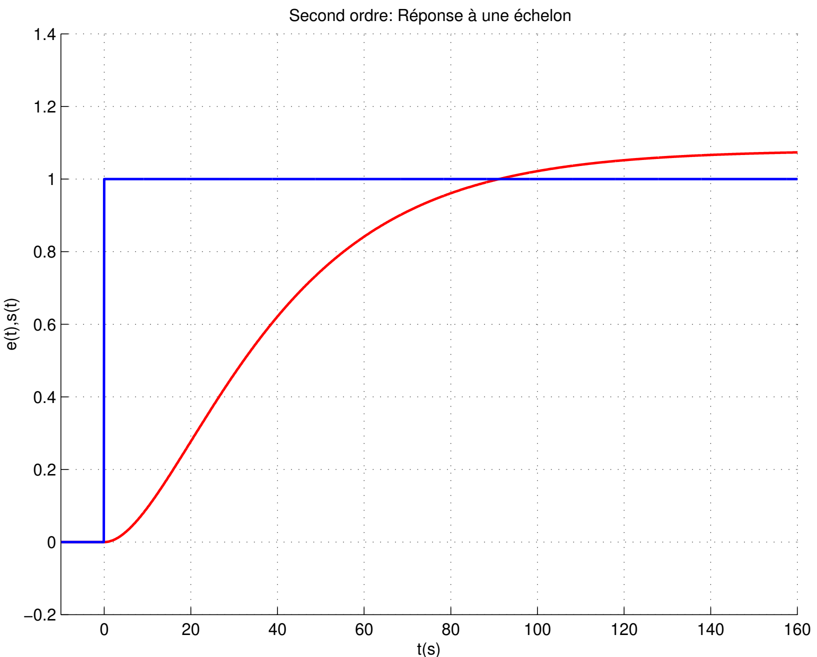
$$H_{eq} = \frac{K_1.K_2}{(1+\tau_1 p)\,(1+\tau_2 p)}$$

Réponse indicielle

$$s(t) = E.K_1.K_2\left(1 + \frac{\tau_1}{\tau_2-\tau_1}e^{-\frac{t}{\tau_1}} + \frac{\tau_2}{\tau_1-\tau_2}e^{-\frac{t}{\tau_2}}\right).u(t)$$

Application Numérique : Pour $K_1 = 1,2; \tau_1 = 27s; K_2 = 0,9; \tau 2 = 15s; E = 1$

$$s(t) = 1,08\left(1 - 2,25e^{-\frac{t}{27}} + 1,25e^{-\frac{t}{15}}\right).u(t)$$


Second ordre: Réponse à une échelon
e(t),s(t)
t(s)
1.4
1.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
−0.2
0
20
40
60
80
100
120
140
160

Décomposition en éléments simples d'une fraction rationnelle

$H(p) = \dfrac{N(p)}{D(p)}$, où $N(p)$ et $D(p)$ sont des fonctions polynomiales de p, et $\deg N < \deg D$.

Décomposition en éléments simples d'une fraction rationnelle

$H(p) = \dfrac{N(p)}{D(p)}$, où $N(p)$ et $D(p)$ sont des fonctions polynomiales de p, et $\deg N < \deg D$.

3 exemples types

$$H_1(p) = \frac{1}{(p+a)(p+b)} \;;\quad H_2(p) = \frac{1}{(p+a)p^2} \;; H_3(p) = \frac{1}{p(a.p^2+b.p+c)}$$

Etape n° 1

On factorise $D(p)$ sous forme d'un produit de polynômes irréductibles. Un polynôme est irréductible, soit quand il est d'ordre 1, soit quand il est d'ordre 2, et que son discriminant Δ est < 0.

Etape n° 2

Décomposition de $H(p)$:

Etape n° 2

Décomposition de $H(p)$:

- *Cas n° 1 : pôles simples* au dénominateur :

$$H_1(p) = \frac{1}{(p+a)(p+b)} = \frac{A}{(p+a)} + \frac{B}{(p+b)} \tag{3}$$

Etape n° 2

Décomposition de $H(p)$:

- *Cas n° 1 :* *pôles simples* au dénominateur :

$$H_1(p) = \frac{1}{(p+a)(p+b)} = \frac{A}{(p+a)} + \frac{B}{(p+b)} \tag{3}$$

- *Cas n° 2 :pôles multiples* au dénominateur :

$$H_2(p) = \frac{1}{(p+a)p^2} = \frac{A}{p+a} + \frac{B_2}{p^2} + \frac{B_1}{p} \tag{4}$$

Etape n° 2

Décomposition de $H(p)$:

- *Cas n° 1 : pôles simples* au dénominateur :

$$H_1(p) = \frac{1}{(p+a)(p+b)} = \frac{A}{(p+a)} + \frac{B}{(p+b)} \quad (3)$$

- *Cas n° 2 :pôles multiples* au dénominateur :

$$H_2(p) = \frac{1}{(p+a)p^2} = \frac{A}{p+a} + \frac{B_2}{p^2} + \frac{B_1}{p} \quad (4)$$

- *Cas n° 3 : pôles complexes conjugués* au dénominateur :

$$H_3(p) = \frac{1}{p(a.p^2+b.p+c)} = \frac{A}{p} + \frac{B_2.p+B_1}{(a.p^2+b.p+c)} \quad (5)$$

Etape n° 3

Détermination des coefficients $A, B, C, \ldots$
même dénominateur, puis indentification

- *Cas n° 1 :* pôles simples au dénominateur : cas de $H_1(p)$:

$$\frac{1}{(p+a)(p+b)} = \frac{A(p+b)+B(p+a)}{(p+a)(p+b)}$$

$$\frac{1}{(p+a)(p+b)} = \frac{(A+B)p+Ab+Ba}{(p+a)(p+b)} \qquad \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} A+B=0 \\ Ab+Ba=1 \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} A = \frac{1}{b-a} \\ B = \frac{1}{a-b} \end{array} \right.$$

Etape n° 3

- *Cas n° 2 :* pôles multiples au dénominateur : cas de $H_2(p)$:

$$\frac{1}{(p+a)p^2} = \frac{Ap^2 + B_2(p+a) + B_1.p(p+a)}{(p+a)p^2}$$

$$= \frac{(A+B_1)p^2 + (B_2 + a.B_1)p + a.B_2}{(p+a)p^2}$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a.B_2 = 1 \\ B_2 + a.B_1 = 0 \\ A + B_1 = 0 \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} B_2 = \frac{1}{a} \\ B_1 = -\frac{B_2}{a} = -\frac{1}{a^2} \\ A = \frac{1}{a^2} \end{array} \right.$$

Etape n° 3

- *Cas n° 3 :* pôles complexes conjugués au dénominateur : cas de $H_3(p)$:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{p(a.p^2+b.p+c)} &= \frac{A(a.p^2+b.p+c)+(B_2.p+B_1)p}{p(a.p^2+b.p+c)} \\
&= \frac{(A.a+B_2)p^2+(A.b+B_1)p+A.c}{p(a.p^2+b.p+c)} \\
&\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} A.c=1 \\ A.b+B_1=0 \\ A.a+B_2=0 \end{array}\right. \\
&\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} A=\frac{1}{c} \\ B_1=-b.A=-\frac{b}{c} \\ B_2=-a.A=-\frac{a}{c} \end{array}\right.
\end{aligned}$$