R4.21 Modélisation des robots manipulateurs articulés

I. Cinématique (avancée) des robots

José de Jesus CASTILLO ZAMORA

Maître de conférences,
IUT de Béziers,
Université de Montpellier,
LIRMM

Licence professionnelle
Robotique & Intelligence Artificielle

Sommaire

Sommaire

1. Un petit rappel sur la cinématique

Problème de cinématique directe

Il s'agit de déterminer la position et l'orientation de l'extrémité du robot par rapport à un système de coordonnées pris comme référence, connaissant les valeurs des articulations et les paramètres géométriques des éléments du robot.

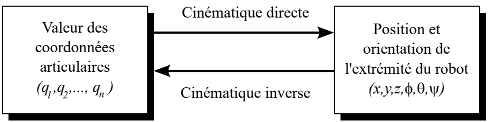

Figure 1 – Relation entre la cinématique directe et inverse

1. Un petit rappel sur la cinématique

Problème de cinématique directe

- **Méthodes graphiques**
- Méthodologie Denavith-Hartenberg
- Quaternions

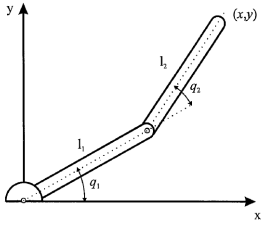

Figure 2 – Robot planaire avec 2 degrés de liberté

1. Un petit rappel sur la cinématique

Problème de cinématique directe

- Méthodes graphiques
- **Méthodologie Denavith-Hartenberg**
- Quaternions

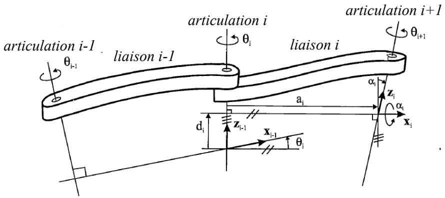

Figure 3 – Paramètres D-H d'une liaison tournante

1. Un petit rappel sur la cinématique

Problème de cinématique inverse

Il s'agit de résoudre la configuration à adopter par le robot pour une position et une orientation connues du point terminal.

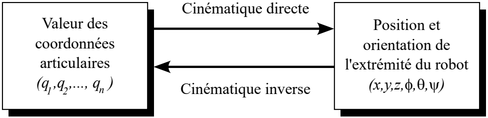

Figure 4 – Relation entre la cinématique directe et inverse

1. Un petit rappel sur la cinématique

Problème de cinématique inverse

- Méthodes graphiques
- Matrices de transformation homogène
- Découplage cinématique

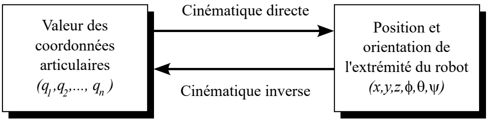

Figure 5 – Relation entre la cinématique directe et inverse

1. Un petit rappel sur la cinématique

A ne pas oublier

- La matrice Jacobienne
- La matrice Jacobienne Inverse
- Les singularités

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \\ \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{pmatrix} = J \begin{pmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \vdots \\ \dot{q}_n \end{pmatrix} \quad \text{with} \quad J = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\partial f_x}{\partial q_1} & \cdots & \frac{\partial f_x}{\partial q_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_\psi}{\partial q_1} & \cdots & \frac{\partial f_\psi}{\partial q_n} \end{pmatrix}}_{\text{Matrice Jacobienne}} \tag{1}$$

Sommaire

2. Introduction aux quaternions

Définition

- Les quaternions, définis par Hamilton, sont utilisés comme un outil mathématique d'une grande adaptabilité informatique pour travailler sur les rotations et les orientations.
- Ils sont souvent utilisés par certains robots commerciaux tels que les ABB.

2. Introduction aux quaternions

Définition

- Un quaternion Q est constitué de quatre composantes (q_0, q_1, q_2, q_3) qui représentent les coordonnées dans une base $\{e, i, j, k\}$.
- Il est commun d'appeler la partie scalaire à la composante e : $s = q_0$, et la partie vectorielle au reste des composantes $v = (q_1 \; q_2 \; q_3)^T$, de sorte qu'un quaternion peut être représenté comme suit :

$$Q = \begin{pmatrix} q_0 & q_1 & q_2 & q_3 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} s \\ v \end{pmatrix} \tag{2}$$

2. Introduction aux quaternions

Définition

- Un quaternion Q peut également être écrit comme suit :

$$Q = q_0 e + q_1 i + q_2 j + q_3 k \tag{3}$$

- Les quaternions sont associés à un angle de rotation θ autour d'un axe défini par le vecteur $k = \begin{pmatrix} k_1 & k_2 & k_3 \end{pmatrix}^T$, de sorte que

$$Q = \mathrm{Rot}\left(k, \theta\right) = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ k \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \end{pmatrix} \tag{4}$$

2. Introduction aux quaternions

1. Algèbre de quaternions

Loi de composition interne (produit)

Sur les éléments de la base, une loi de composition interne $\circ$ (produit) est définie :

Table 1 – Loi de composition interne

$\circ$	e	i	j	k
e	e	i	j	k
i	i	$-e$	k	$-j$
j	j	$-k$	$-e$	i
k	k	j	$-i$	$-e$

Les quaternions forment un groupe cyclique d'ordre quatre.

2. Introduction aux quaternions

1. Algèbre de quaternions

Quaternion conjugué

À tout quaternion Q peut être associé son conjugué Q^*, dans lequel le signe de la partie scalaire est conservé et le signe de la partie vectorielle est inversé. Si

$$Q = \begin{pmatrix} q_0 & q_1 & q_2 & q_3 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} s \\ v \end{pmatrix} \tag{5}$$

donc :

$$Q^* = \begin{pmatrix} q_0 & -q_1 & -q_2 & -q_3 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} s \\ -v \end{pmatrix} \tag{6}$$

2. Introduction aux quaternions

1. Algèbre de quaternions

Somme

La somme de deux quaternions :

$$Q_1 = \begin{pmatrix} s_1 \\ v_1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Q_2 = \begin{pmatrix} s_2 \\ v_2 \end{pmatrix} \tag{7}$$

est définie comme suit

$$Q_3 = Q_1 + Q_2 = \begin{pmatrix} s_1 \\ v_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} s_2 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_1 + s_2 \\ v_1 + v_2 \end{pmatrix} \tag{8}$$

2. Introduction aux quaternions

1. Algèbre de quaternions

Produit par un scalaire

Le produit d'un quaternion Q_1 par un scalaire a est :

$$Q_3 = aQ_1 = \begin{pmatrix} as_1 \\ av_1 \end{pmatrix} \tag{9}$$

2. Introduction aux quaternions

1. Algèbre de quaternions

Produit de quaternions

Le produit de deux quaternions Q_1 et Q_2 est défini à partir du tableau 1, tel que :

$$Q_3 = Q_1 \circ Q_2 = \begin{pmatrix} s_1 \\ v_1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} s_2 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_1 s_2 - (v_1 \bullet v_2) \\ v_1 \times v_2 + s_1 v_2 + s_2 v_1 \end{pmatrix} \tag{10}$$

2. Introduction aux quaternions

1. Algèbre de quaternions

La norme

D'après la définition du quaternion conjugué et la définition du produit de quaternions, il s'ensuit que :

$$Q \circ Q^* = \left(q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2\right) e \qquad (11)$$

Le nombre réel $\sqrt{q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}$ est appelé norme de Q et est représenté par $||Q||$.

2. Introduction aux quaternions

1. Algèbre de quaternions

L'inverse

L'inverse d'un quaternion peut être trouvé par l'expression :

$$Q^{-1} = \frac{Q^*}{||Q||^2} \tag{12}$$

À condition qu'il ne s'agisse pas d'un quaternion nul.

Exo 1

Rappelons la définition donnée dans l'Éq. 4 :

$$Q = \mathrm{Rot}\,(k, \theta) = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ k \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \end{pmatrix} \tag{13}$$

Obtenir le quaternion représentant une rotation de 90° autour de l'axe $k\,(3, -2, 1)$.

Exo 2

L'application de la rotation, exprimée par le quaternion Q à un vecteur r, sera définie par le produit :

$$Q \circ (0, r) \circ Q^{*} \tag{14}$$

Obtenir le vecteur r' résultant de l'application de la même rotation que dans l'exemple précédent (Exo 1). $Rot\,(k, 90°)$ où $k\,(3, -2, 1)$, sur le vecteur $r = (5\ 2\ \ -6)^T$.

Composition de rotations

Composer des rotations avec des quaternions est aussi simple que de multiplier deux quaternions. Le résultat de la rotation selon le quaternion Q_1, suivi d'une rotation selon Q_2, est le même que celui de la rotation selon Q_3 :

$$Q_3 = Q_2 \circ Q_1 \tag{15}$$

Il est important de tenir compte de l'ordre de multiplication, car le produit de quaternions n'est pas commutatif.

Composition de rotations avec des translations

Le résultat de l'application d'une translation d'un vecteur p suivie d'une rotation Q au repère $OXYZ$ est un nouveau repère $OUVW$, tel que les coordonnées d'un vecteur r dans le système $OXYZ$, connues dans $OUVW$, seront :

$$(0, r_{xyz}) = Q \circ (0, r_{uvw}) \circ Q^* + (0, p) \tag{16}$$

Si on applique d'abord la rotation et ensuite la translation p au vecteur r, il deviendra le vecteur r' selon l'expression :

$$(0, r') = Q \circ (0, r) \circ Q^* + (0, p) \tag{17}$$

Composition de rotations avec des translations

Le résultat d'une rotation puis d'une translation dans le système est donné par :

$$(0, r_{xyz}) = Q \circ (0, r_{uvw} + p) \circ Q^* \tag{18}$$

En maintenant le système $OXYZ$ fixe et en translatant le vecteur r selon p, puis en le faisant pivoter selon Q, on obtient le vecteur de coordonnées r' :

$$(0, r') = Q \circ (0, r + p) \circ Q^* \tag{19}$$

1. Introduction aux quaternions

3. Relation entre Quaternions et Matrices de transformation homogéne

Relation directe

La représentation de la matrice de transformation T en fonction des composantes d'un quaternion Q est donnée par la matrice suivante :

$$T = 2\begin{pmatrix} q_0^2 + q_1^2 - \frac{1}{2} & q_1 q_2 - q_3 q_0 & q_1 q_3 + q_2 q_0 & 0 \\ q_1 q_2 + q_3 q_0 & q_0^2 + q_2^2 - \frac{1}{2} & q_2 q_3 - q_1 q_0 & 0 \\ q_1 q_3 - q_2 q_0 & q_2 q_3 + q_1 q_0 & q_0^2 + q_3^2 - \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \tag{20}$$

1. Introduction aux quaternions

3. Relation entre Quaternions et Matrices de transformation homogéne

Relation inverse

Ceci peut être obtenu par les expressions suivantes

$$q_0 = \frac{1}{2}\sqrt{(n_x + o_y + a_z + 1)} \tag{21}$$

$$q_1 = \frac{1}{2}\sqrt{(n_x - o_y - a_z + 1)} \tag{22}$$

$$q_2 = \frac{1}{2}\sqrt{(-n_x + o_y - a_z + 1)} \tag{23}$$

$$q_3 = \frac{1}{2}\sqrt{(-n_x - o_y + a_z + 1)} \tag{24}$$