Test Rappels Maths Signal

Exercice n° 1 (nombres complexes)

On rappelle que j est le nombre tel que $j^2 = -1$.
L'impédance complexe de l'inductance de ligne est donnée par le nombre complexe $\underline{Z} = R + jL\omega$ avec :

- $R = 0,5\ \Omega$
- $L = 0,01$ H.
- La pulsation ω est exprimée en rad/s. On a : $\omega = 2\pi f$ où f est la fréquence du réseau, en Hz.
  On donne : $f = 50$ Hz.

1. Écrire sous forme algébrique les nombre complexes $\underline{Z}$ et $\dfrac{1}{\underline{Z}}$
2. Calculer les valeurs approchées, arrondies à 10^{-2}, du module de $\underline{Z}$, noté $\left|\underline{Z}\right|$ et de l'argument en radian de $\underline{Z}$.
3. Le réseau est alimenté par une tension de 230 V.
   La chute de tension U ,exprimée en volt, aux bornes de l'inductance est donnée par : $U = \left|\underline{Z}\right| I$, où Iest le coura
   La documentation indique : $I = 3,5$A.
   Pour éviter une perte de couple du moteur, la norme EN 50178 impose que la chute de tension U aux bornes de l'inductance de ligne soit comprise entre 3 % et 5 % de la tension d'alimentation du réseau.
   La chute de tension aux bornes de l'inductance de ligne est-elle conforme à la norme EN 50178 ?
   Justifier la réponse.

Exercice n° 2 (transformée de Laplace)

La fonction échelon unité $\mathscr{U}$ est définie par $\begin{cases} \mathscr{U}(t) = 0 & \text{si} \quad t < 0 \\ \mathscr{U}(t) = 1 & \text{si} \quad t \geqslant 0 \end{cases}$.

On note $s(t)$ le signal de sortie associé au signal d'entrée $e(t)$.
Les fonctions $e(t)$ et $s(t)$ sont des fonctions causales, c'est-à-dire qu'elles sont nulles pour $t < 0$.
On admet que les fonctions $e(t)$ et $s(t)$ admettent des transformées de Laplace notées respectivement $E(p)$ et $S(p)$.
La fonction de transfert $H(p)$ du système est définie par $S(p) = H(p) \times E(p)$.

On a $\quad e(t) = 2\mathscr{U}(t) - \mathscr{U}(t-1) \quad$ et $\quad H(p) = \dfrac{1}{p+1}$.

1. Étude du signal d'entrée :
   (a) Tracer la courbe représentative de la fonction $e(t)$ sur votre feuille.
   (b) Déterminer $E(p)$.
2. Étude du signal de sortie :
   (a) Démontrer que $S(p) = \dfrac{2}{p(p+1)} - \left(\dfrac{1}{p(p+1)}\right)\mathrm{e}^{-p}$.
   (b) Vérifier que $\dfrac{1}{p(p+1)} = \dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{p+1}$.
   (c) En déduire l'expression de $s(t)$.

Table de Laplace

Transformation de Laplace	
Fonction	Transformée de Laplace
$t \longmapsto \mathscr{U}(t)$	$p \longmapsto \dfrac{1}{p}$
$t \longmapsto \mathscr{U}(t-a)$	$p \longmapsto \dfrac{1}{p}\mathrm{e}^{-ap}$
$t \longmapsto \mathrm{e}^{-at}\mathscr{U}(t)$, avec a constante réelle	$p \longmapsto \dfrac{1}{p+a}$
Propriétés	
Fonction	Transformée de Laplace
$t \longmapsto f(t)\mathscr{U}(t)$	$p \longmapsto F(p)$
$t \longmapsto f(t-a)\mathscr{U}(t-a)$, avec a constante réelle	$p \longmapsto F(p)\mathrm{e}^{-ap}$
$t \longmapsto f(t)\mathrm{e}^{-at}\mathscr{U}(t)$, avec a constante réelle	$p \longmapsto F(p+a)$
$t \longmapsto f'(t)\mathscr{U}(t)$	$p \longmapsto pF(p) - f(0^+)$