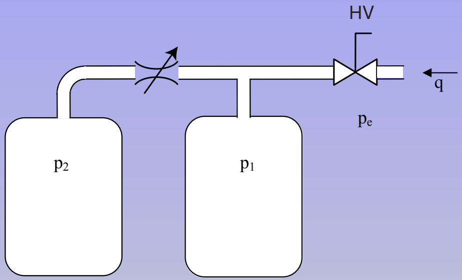
Procédés du 2° ordre

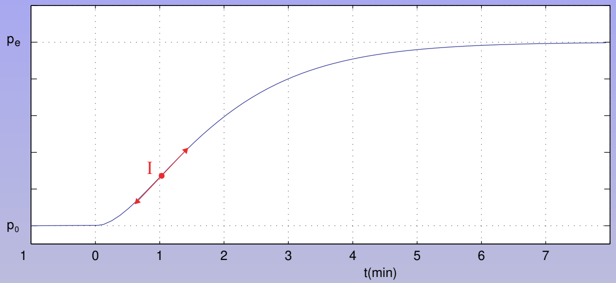
LR

IUT de Béziers

Programme de l'exposé

Cas du remplissage d'un réservoir



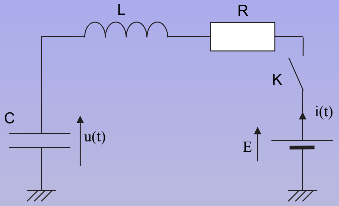

p_e
p_0
I
1
0
1
2
3
4
5
6
7
t(min)

equation différentielle

$$\frac{1}{\omega_0^2}.\frac{d^2u_c(t)}{dt^2}+\frac{2\lambda}{\omega_0}.\frac{du_c(t)}{dt}+u_c(t)=E.u(t)$$

,avec

$$\omega_0=\frac{1}{\sqrt{LC}} \qquad \text{et,} \qquad \lambda=\frac{1}{2}.R\sqrt{\frac{C}{L}}=\frac{1}{2}.RC\omega_0$$



equation différentielle

$$\frac{1}{\omega_0^2}.\frac{d^2x(t)}{dt^2}+\frac{2\lambda}{\omega_0}.\frac{dx(t)}{dt}+x(t)=K.y(t) \tag{1}$$

avec, ω_0, *pulsation propre* du système, en $rad.s^{-1}$,
λ, *coefficient d'amortissement* du système (sans unités),
K, *gain statique* du système (sans unités).

Réponse à un échelon de commande $y(t) = \Delta y \cdot u(t)$

polynôme caractéristique

polynôme caractéristique associé à l'équation sans second membre :
$\frac{1}{\omega_0^2}.r^2 + \frac{2\lambda}{\omega_0}.r + 1 = 0$
déterminant : $\Delta' = \frac{\lambda^2}{\omega_0^2} - \frac{1}{\omega_0^2} = \frac{1}{\omega_0^2}.(\lambda^2 - 1)$

3 cas suivant la valeur de λ :

Réponse à un échelon de commande $y(t) = \Delta y \cdot u(t)$

polynôme caractéristique

polynôme caractéristique associé à l'équation sans second membre :
$\frac{1}{\omega_0^2}.r^2 + \frac{2\lambda}{\omega_0}.r + 1 = 0$
déterminant : $\Delta' = \frac{\lambda^2}{\omega_0^2} - \frac{1}{\omega_0^2} = \frac{1}{\omega_0^2}.(\lambda^2 - 1)$

3 cas suivant la valeur de λ :

- **cas où** $\lambda > 1$, régime ***apériodique***, pas de dépassement . Détail

Réponse à un échelon de commande $y(t) = \Delta y \cdot u(t)$

polynôme caractéristique

polynôme caractéristique associé à l'équation sans second membre :
$\frac{1}{\omega_0^2}.r^2 + \frac{2\lambda}{\omega_0}.r + 1 = 0$
déterminant : $\Delta' = \frac{\lambda^2}{\omega_0^2} - \frac{1}{\omega_0^2} = \frac{1}{\omega_0^2}.(\lambda^2 - 1)$

3 cas suivant la valeur de λ :

- **cas où** $\lambda > 1$, régime ***apériodique***, pas de dépassement . Détail
- **cas où** $\lambda = 1$, régime ***critique***, pas de dépassement . Détail

Réponse à un échelon de commande $y(t) = \Delta y \cdot u(t)$

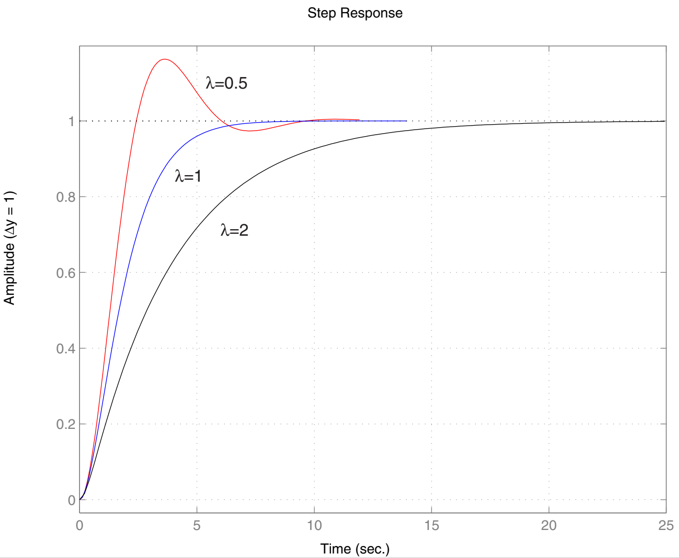
polynôme caractéristique

polynôme caractéristique associé à l'équation sans second membre :
$\frac{1}{\omega_0^2}.r^2 + \frac{2\lambda}{\omega_0}.r + 1 = 0$
déterminant : $\Delta' = \frac{\lambda^2}{\omega_0^2} - \frac{1}{\omega_0^2} = \frac{1}{\omega_0^2}.(\lambda^2 - 1)$

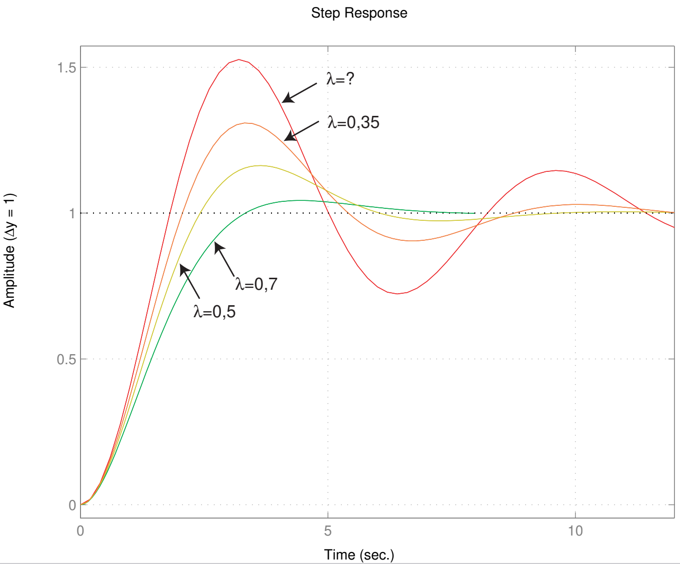
3 cas suivant la valeur de λ :

- **cas où** $\lambda > 1$, régime ***apériodique***, pas de dépassement . Détail
- **cas où** $\lambda = 1$, régime ***critique***, pas de dépassement . Détail
- **cas où** $\lambda < 1$,$\omega_p = \omega_0\sqrt{1-\lambda^2}$, ω_p est appelée ***pseudo-pulsation***. régime ***pseudopériodique***, admet un dépassement . Détail

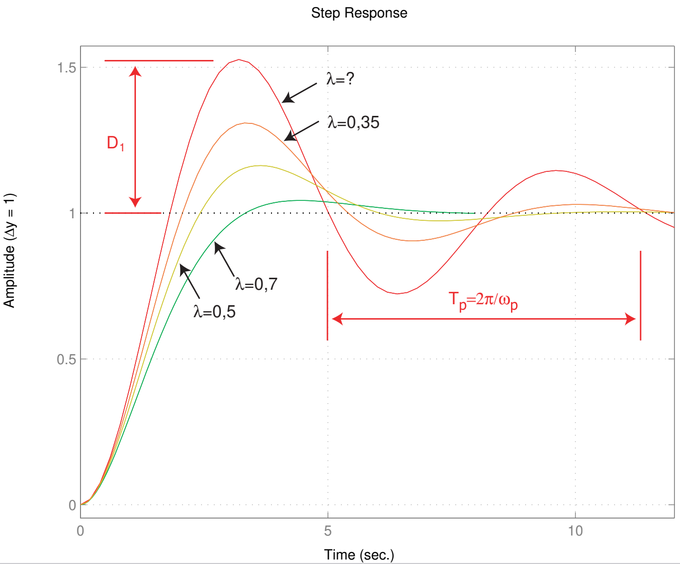
Réponse à un échelon



Influence du coefficient d'amortissement



Influence du coefficient d'amortissement



Pseudo pulsation et Premier Dépassement

$$\omega_p = \omega_0\sqrt{1-\lambda^2} \quad \text{et,} \quad D_{1r} = 100e^{\frac{-\lambda\pi}{\sqrt{1-\lambda^2}}}$$

Pseudo pulsation et Premier Dépassement

$$\omega_p = \omega_0 \sqrt{1-\lambda^2} \quad \text{et,} \quad D_{1r} = 100 e^{\frac{-\lambda\pi}{\sqrt{1-\lambda^2}}}$$

Temps de réponse à 5%

$$t_{R5\%} = 3\tau \quad \text{,avec} \quad \tau = \frac{1}{\lambda\omega_0}$$

Formules inverses

$$\lambda = \frac{\ln \frac{100}{D_{1r}}}{\sqrt{\pi^2 + \left(\ln \frac{100}{D_{1r}}\right)^2}} \quad \text{et,} \quad \omega_0 = \frac{\omega_p}{\sqrt{1-\lambda^2}}$$

Formules inverses

$$\lambda = \frac{\ln \frac{100}{D_{1r}}}{\sqrt{\pi^2 + \left(\ln \frac{100}{D_{1r}}\right)^2}} \quad \text{et,} \quad \omega_0 = \frac{\omega_p}{\sqrt{1-\lambda^2}}$$

Exemple d'application

Déterminer ω_0 et λ pour la courbe en rouge

Formules inverses

$$\lambda = \frac{\ln \frac{100}{D_{1r}}}{\sqrt{\pi^2 + \left(\ln \frac{100}{D_{1r}}\right)^2}} \quad \text{et,} \quad \omega_0 = \frac{\omega_p}{\sqrt{1-\lambda^2}}$$

Exemple d'application

Déterminer ω_0 et λ pour la courbe en rouge $\omega_p = 0,96 rad.s^{-1}$ et $D_{1r} = 52,6\%$

Formules inverses

$$\lambda = \frac{\ln \frac{100}{D_{1r}}}{\sqrt{\pi^2 + \left(\ln \frac{100}{D_{1r}}\right)^2}} \quad \text{et,} \quad \omega_0 = \frac{\omega_p}{\sqrt{1-\lambda^2}}$$

Exemple d'application

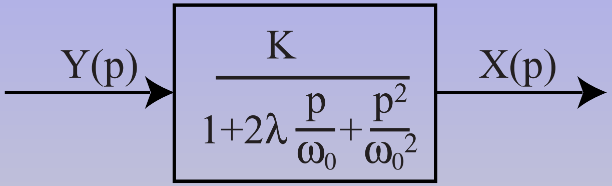
Déterminer ω_0 et λ pour la courbe en rouge $\omega_p = 0,96 rad.s^{-1}$ et $D_{1r} = 52,6\%$;$\lambda = 0,2$ et $\omega_0 = 1 rad.s^{-1}$

Fonction de transfert

$$H(p) = \frac{X(p)}{Y(p)} = \frac{K}{1 + 2\lambda\frac{p}{\omega_0} + \frac{p^2}{\omega_0^2}} \qquad (2)$$

Fonction de transfert

$$H(p) = \frac{X(p)}{Y(p)} = \frac{K}{1 + 2\lambda \frac{p}{\omega_0} + \frac{p^2}{\omega_0^2}} \tag{2}$$



La solution générale de l'équation sans second membre de l'équation est de la forme :

$$x(t) = Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t}$$

où r_1 et r_2 sont les racines du polynôme caractéristique

$$r_1 = \omega_0(-\lambda + \sqrt{\lambda^2 - 1}) \quad \text{et} \quad r_2 = \omega_0(-\lambda - \sqrt{\lambda^2 - 1})$$

Une solution particulière de l'équation différentielle est $x(t) = K\Delta y$. La solution de l'équation différentielle avec second membre est donc :

$$x(t) = Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t} + K\Delta y$$

Les conditions initiales $x(0) = 0$ et $x'(0) = 0$ imposent :

$$A + B + K\Delta y = 0 \quad \text{et} \quad r_1 A + r_2 B = 0$$

En combinant ces deux équations, on trouve :

$$A = K\Delta y \frac{r_2}{r_1 - r_2} \quad \text{et} \quad B = K\Delta y \frac{r_1}{r_2 - r_1}$$

Donc,

$$x(t) = K\Delta y(1 - (\frac{1}{2}(1 + \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2 - 1}})e^{(-\lambda + \sqrt{\lambda^2 - 1})\omega_0 t} + \frac{1}{2}(1 - \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2 - 1}})e^{(-\lambda - \sqrt{\lambda^2 - 1})\omega_0 t}))$$

La solution générale de l'équation sans second membre de l'équation est de la forme :

$$x(t) = (At + B)e^{rt}$$

où r est la racine double du polynôme caractéristique

$$r = -\omega_0$$

Une solution particulière de l'équation différentielle est $x(t) = K\Delta y$. La solution de l'équation différentielle avec second membre est donc :

$$x(t) = (At + B)e^{rt} + K\Delta y$$

Les conditions initiales $x(0) = 0$ et $x'(0) = 0$ imposent :

$$B + K\Delta y = 0 \quad \text{et} \quad A + rB = 0$$

En combinant ces deux équations, on trouve :

$$A = -K\Delta y\omega_0 \quad \text{et} \quad B = -K\Delta y$$

Donc,

$$x(t) = K\Delta y(1 - e^{-\omega_0 t}(1 + \omega_0 t))$$

La solution générale de l'équation sans second membre de l'équation est de la forme :

$$x(t) = (A\sin(\beta t) + B\cos(\beta t))e^{\alpha t}$$

où α est la partie réelle des racines du polynôme caractéristique, et β la partie imaginaire positive.

Une solution particulière de l'équation différentielle est $x(t) = K\Delta y$. La solution de l'équation différentielle avec second membre est donc :

$$x(t) = (A\sin(\beta t) + B\cos(\beta t))e^{\alpha t} + K\Delta y$$

Les conditions initiales $x(0) = 0$ et $x'(0) = 0$ imposent :

$$B + K\Delta y = 0 \quad \text{et} \quad A\beta + B\alpha = 0$$

En combinant ces deux équations, on trouve :

$$A = -K\Delta y\frac{\alpha}{\beta} = K\Delta y\frac{\lambda}{\sqrt{1-\lambda^2}} \quad \text{et} \quad B = -K\Delta y$$

Donc,

$$x(t) = K\Delta y(1 - e^{-\lambda\omega_0 t}(\cos(\sqrt{1-\lambda^2}\omega_0 t) + \frac{\lambda}{\sqrt{1-\lambda^2}}\sin(\sqrt{1-\lambda^2}\omega_0 t))$$