Stabilité - Critères algébriques

LR

IUT de Béziers

Programme de l'exposé

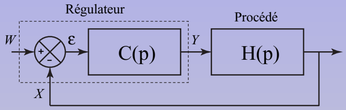
Soit 2 Fonctions de transfert :

$$H_1(p) = \frac{0,2}{p(1+6p)} \qquad H_2(p) = \frac{1}{1+2p+3p^2}$$

Objectif du cours

On souhaite déterminer :

- Si le système en boucle fermée sera stable.
- Les valeurs de A, Td, Ti, qui permettront d'obtenir des performances optimales pour la boucle.



Définiton

Un procédé est dit stable quand il tend à revenir à une position d'équilibre suite à une variation finie en entrée.

Définiton

Un procédé est dit stable quand il tend à revenir à une position d'équilibre suite à une variation finie en entrée.

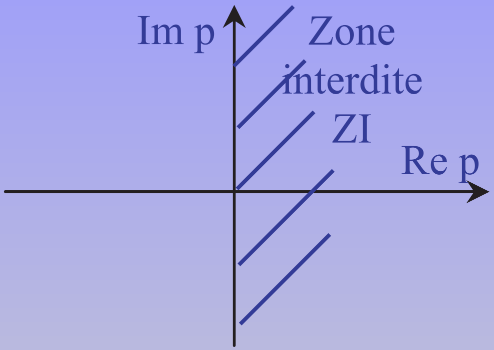
Cas particuliers :

- procédé stable en B.O. si, après ΔY ou ΔZ ,alors X tend vers une constante .
- procédé stable en B.F. si, après ΔW ou ΔZ ,alors X tend vers une constante .

Pôles d'une fonction de transfert

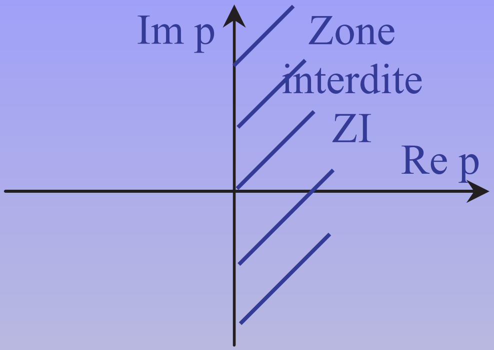
Soit $H(p) = \dfrac{N(p)}{D(p)}$ une fraction rationnelle.

Les *pôles* de $H(p)$ sont les racines de l'équation $D(p) = 0$ annulant le dénominateur.



Critère général de stabilité

Un système quelconque (bouclé ou non bouclé), de fonction de transfert $H(p)$, est stable si tous les pôles de $H(p)$ sont à partie réelle strictement négative ($\Re(p) < 0$).



Critère général de stabilité

Un système quelconque (bouclé ou non bouclé), de fonction de transfert $H(p)$, est stable si tous les pôles de $H(p)$ sont à partie réelle strictement négative ($\Re(p) < 0$).

Remarque : Si un seul pôle est à $\Re(p)(> \text{ou} =)0 \Rightarrow$ système instable.

Exemple : Stabilité des fonctions de transfert H_1 et H_2 en BO

$$H_1(p) = \frac{0,2}{p(1+6p)} \qquad H_2(p) = \frac{1}{1+2p+3p^2}$$

Exemple : Stabilité des fonctions de transfert H_1 et H_2 en BO

$$H_1(p) = \frac{0,2}{p(1+6p)} \qquad H_2(p) = \frac{1}{1+2p+3p^2}$$

- pôles de H_1 : $D_1(p) = 0 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{r} 1+6p=0 \\ p=0 \end{array} \right.$

Exemple : Stabilité des fonctions de transfert H_1 et H_2 en BO

$$H_1(p) = \frac{0,2}{p(1+6p)} \qquad H_2(p) = \frac{1}{1+2p+3p^2}$$

- pôles de H_1 : $D_1(p) = 0 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{r} 1+6p=0 \\ p=0 \end{array} \right.$

  2 pôles $p_1 = -\frac{1}{6}; p_1' = 0$

Exemple : Stabilité des fonctions de transfert H_1 et H_2 en BO

$$H_1(p) = \frac{0,2}{p(1+6p)} \qquad H_2(p) = \frac{1}{1+2p+3p^2}$$

- pôles de H_1 : $D_1(p) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 1+6p = 0 \\ p = 0 \end{cases}$

  2 pôles $p_1 = -\dfrac{1}{6}$; $p_1' = 0$; $p_1' = 0$ donc H_1 instable en B.O.

Exemple : Stabilité des fonctions de transfert H_1 et H_2 en BO

$$H_1(p) = \frac{0,2}{p(1+6p)} \qquad H_2(p) = \frac{1}{1+2p+3p^2}$$

- pôles de H_1 : $D_1(p) = 0 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{r} 1+6p=0 \\ p=0 \end{array} \right.$

  2 pôles $p_1 = -\dfrac{1}{6}$; $p_1' = 0$; $p_1' = 0$ donc H_1 instable en B.O.
- pôles de H_2 :

Exemple : Stabilité des fonctions de transfert H_1 et H_2 en BO

$$H_1(p) = \frac{0,2}{p(1+6p)} \qquad H_2(p) = \frac{1}{1+2p+3p^2}$$

- pôles de H_1 : $D_1(p) = 0 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{r} 1+6p = 0 \\ p = 0 \end{array} \right.$

  2 pôles $p_1 = -\frac{1}{6}$; $p_1' = 0$; $p_1' = 0$ donc H_1 instable en B.O.
- pôles de H_2 : $D_2(p) = 0 \Leftrightarrow 3p^2 + 2p + 1 = 0$; $\Delta' = 1 - 3 = -2 < 0$

  l'équation admet 2 racines complexes conjuguées :

Exemple : Stabilité des fonctions de transfert H_1 et H_2 en BO

$$H_1(p) = \frac{0,2}{p(1+6p)} \qquad H_2(p) = \frac{1}{1+2p+3p^2}$$

- pôles de H_1 : $D_1(p) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 1+6p = 0 \\ p = 0 \end{cases}$

  2 pôles $p_1 = -\frac{1}{6}$; $p_1' = 0$; $p_1' = 0$ donc H_1 instable en B.O.
- pôles de H_2 : $D_2(p) = 0 \Leftrightarrow 3p^2 + 2p + 1 = 0$; $\Delta' = 1 - 3 = -2 < 0$
  l'équation admet 2 racines complexes conjuguées :
  $p_2 = -\frac{1}{3} + i\frac{\sqrt{2}}{3}$; $p_2' = -\frac{1}{3} - i\frac{\sqrt{2}}{3}$

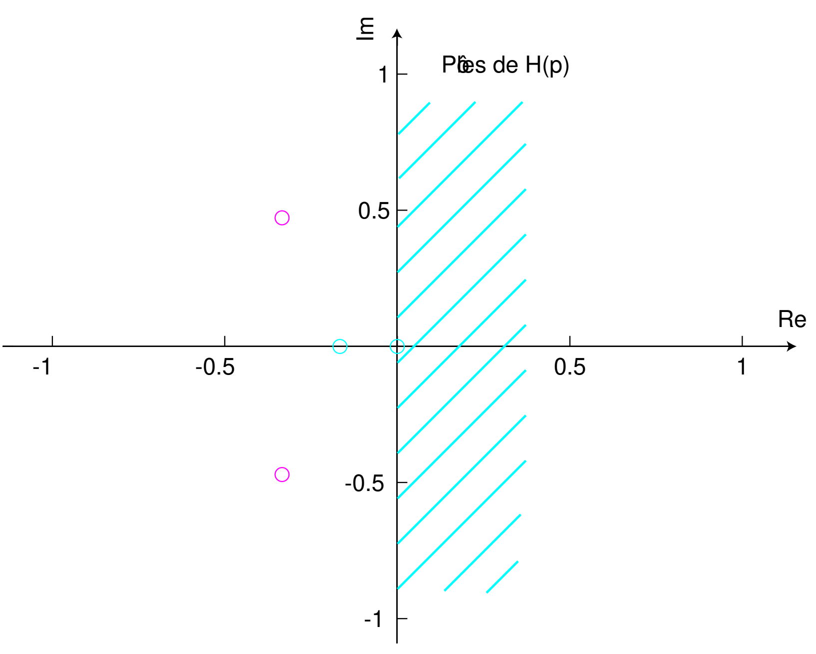
Exemple : Stabilité des fonctions de transfert H_1 et H_2 en BO

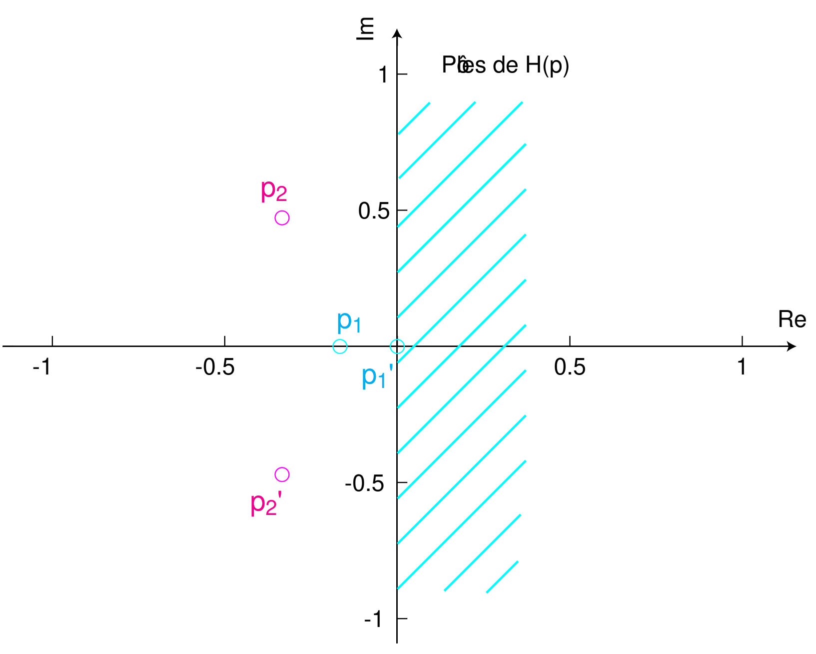
$$H_1(p) = \frac{0,2}{p(1+6p)} \qquad H_2(p) = \frac{1}{1+2p+3p^2}$$

- pôles de H_1 : $D_1(p) = 0 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{r} 1+6p=0 \\ p=0 \end{array} \right.$

  2 pôles $p_1 = -\frac{1}{6}; p_1' = 0$; $p_1' = 0$ donc H_1 instable en B.O.
- pôles de H_2 : $D_2(p) = 0 \Leftrightarrow 3p^2+2p+1=0$; $\Delta' = 1-3 = -2 < 0$ l'équation admet 2 racines complexes conjuguées :

  $p_2 = -\frac{1}{3} + i\frac{\sqrt{2}}{3}; p_2' = -\frac{1}{3} - i\frac{\sqrt{2}}{3}$; $\Re(p_2) = \Re(p_2') = -\frac{1}{3} < 0$ donc H_2 stable en B.O.


Im
Pôles de H(p)
1
0.5
-0.5
-1
Re
-1
-0.5
0.5
1


Im
Pôles de H(p)
Re
1
0.5
-0.5
-1
-1
-0.5
0.5
1
p2
p2'
p1
p1'

FTBF

$$F(p) = \frac{T(p)}{1 + T(p)} \text{ où } T(p) \text{ est la FTBO}$$

De ce qui précède, on déduit que :

FTBF

$F(p) = \dfrac{T(p)}{1 + T(p)}$ où $T(p)$ est la FTBO

De ce qui précède, on déduit que :

stabilité des systèmes en BF

Un système en boucle fermée est stable si les racines de l'équation $1 + T(p)$ sont à partie réelle négative ($\Re(p) < 0$).

FTBF

$$F(p) = \frac{T(p)}{1 + T(p)} \text{ où } T(p) \text{ est la FTBO}$$

De ce qui précède, on déduit que :

stabilité des systèmes en BF

Un système en boucle fermée est stable si les racines de l'équation $1 + T(p)$ sont à partie réelle négative ($\Re(p) < 0$).

Remarque : Si $T(p) = \dfrac{N(p)}{D(p)}$, alors les pôles de $F(p)$ sont les racines de l'équation $N(p) + D(p) = 0$

Exemple : Stabilité en BF des fonctions de transfert H_1 et H_2 avec un gain proportionnel $A = 10$

Exemple : Stabilité en BF des fonctions de transfert H_1 et H_2 avec un gain proportionnel $A = 10$

$T_1(p) = C(p) \times H_1(p) = 10\frac{0{,}2}{p(1+6p)} = \frac{2}{p(1+6p)}$;

$$\begin{aligned} 1 + T_1(p) = 0 &\Leftrightarrow N_1(p) + D_1(p) = 0 \\ &\Leftrightarrow 2 + p(1+6p) = 0 \\ &\Leftrightarrow 6p^2 + p + 2 = 0 \end{aligned} \tag{1}$$

Exemple : Stabilité en BF des fonctions de transfert H_1 et H_2 avec un gain proportionnel $A = 10$

$T_1(p) = C(p) \times H_1(p) = 10\frac{0{,}2}{p(1+6p)} = \frac{2}{p(1+6p)}$;

$$\begin{aligned} 1 + T_1(p) = 0 &\Leftrightarrow N_1(p) + D_1(p) = 0 \\ &\Leftrightarrow 2 + p(1+6p) = 0 \\ &\Leftrightarrow 6p^2 + p + 2 = 0 \end{aligned} \tag{1}$$

$\Delta = 1 - 4 \cdot 12 = -47 < 0$ l'équation admet 2 racines complexes conjuguées :

Exemple : Stabilité en BF des fonctions de transfert H_1 et H_2 avec un gain proportionnel $A = 10$

$T_1(p) = C(p) \times H_1(p) = 10\frac{0,2}{p(1+6p)} = \frac{2}{p(1+6p)}$;

$$\begin{aligned} 1 + T_1(p) = 0 &\Leftrightarrow N_1(p) + D_1(p) = 0 \\ &\Leftrightarrow 2 + p(1+6p) = 0 \\ &\Leftrightarrow 6p^2 + p + 2 = 0 \end{aligned} \tag{1}$$

$\Delta = 1 - 4 \cdot 12 = -47 < 0$ l'équation admet 2 racines complexes conjuguées :

- $1 + T_1(p) = 0 \Leftrightarrow$: $p_1 = -\dfrac{1}{12} + i\dfrac{\sqrt{47}}{12}$; $p_1' = -\dfrac{1}{12} - i\dfrac{\sqrt{47}}{12}$

Exemple : Stabilité en BF des fonctions de transfert H_1 et H_2 avec un gain proportionnel $A = 10$

$T_1(p) = C(p) \times H_1(p) = 10\frac{0,2}{p(1+6p)} = \frac{2}{p(1+6p)}$;

$$\begin{aligned} 1 + T_1(p) = 0 &\Leftrightarrow N_1(p) + D_1(p) = 0 \\ &\Leftrightarrow 2 + p(1+6p) = 0 \\ &\Leftrightarrow 6p^2 + p + 2 = 0 \end{aligned} \qquad (1)$$

$\Delta = 1 - 4 \cdot 12 = -47 < 0$ l'équation admet 2 racines complexes conjuguées :

- $1 + T_1(p) = 0 \Leftrightarrow : p_1 = -\dfrac{1}{12} + i\dfrac{\sqrt{47}}{12}; p_1' = -\dfrac{1}{12} - i\dfrac{\sqrt{47}}{12}$;
  $\Re(p_1) = \Re(p_1') = -\frac{1}{12} < 0$ donc H_1 stable en B.F.

Exemple : Stabilité en BF des fonctions de transfert H_1 et H_2 avec un gain proportionnel $A = 10$

$T_2(p) = C(p) \times H_2(p) = 10\frac{1}{1+2p+3p^2} = \frac{10}{1+2p+3p^2}$;

$$\begin{aligned} 1 + T_2(p) = 0 &\Leftrightarrow N_2(p) + D_2(p) = 0 \\ &\Leftrightarrow 10 + 1 + 2p + 3p^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow 3p^2 + 2p + 11 = 0 \qquad (1) \end{aligned}$$

Exemple : Stabilité en BF des fonctions de transfert H_1 et H_2 avec un gain proportionnel $A = 10$

$T_2(p) = C(p) \times H_2(p) = 10\frac{1}{1+2p+3p^2} = \frac{10}{1+2p+3p^2}$;

$$\begin{aligned} 1 + T_2(p) = 0 &\Leftrightarrow N_2(p) + D_2(p) = 0 \\ &\Leftrightarrow 10 + 1 + 2p + 3p^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow 3p^2 + 2p + 11 = 0 \end{aligned} \tag{1}$$

$\Delta' = 1 - 3 \cdot 11 = -32 < 0$ l'équation admet 2 racines complexes conjuguées :

Exemple : Stabilité en BF des fonctions de transfert H_1 et H_2 avec un gain proportionnel $A = 10$

$T_2(p) = C(p) \times H_2(p) = 10\frac{1}{1+2p+3p^2} = \frac{10}{1+2p+3p^2}$;

$$\begin{aligned} 1 + T_2(p) = 0 &\Leftrightarrow N_2(p) + D_2(p) = 0 \\ &\Leftrightarrow 10 + 1 + 2p + 3p^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow 3p^2 + 2p + 11 = 0 \end{aligned} \tag{1}$$

$\Delta' = 1 - 3 \cdot 11 = -32 < 0$ l'équation admet 2 racines complexes conjuguées :

- $1 + T_2(p) = 0 \Leftrightarrow$: $p_2 = -\frac{1}{3} + i\frac{4\sqrt{2}}{3}$; $p_2' = -\frac{1}{3} - i\frac{4\sqrt{2}}{3}$

Exemple : Stabilité en BF des fonctions de transfert H_1 et H_2 avec un gain proportionnel $A = 10$

$T_2(p) = C(p) \times H_2(p) = 10\frac{1}{1+2p+3p^2} = \frac{10}{1+2p+3p^2}$;

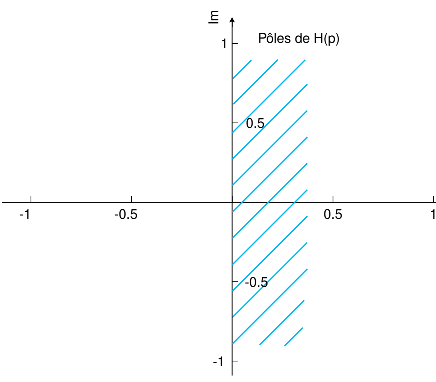
$$\begin{aligned} 1 + T_2(p) = 0 &\Leftrightarrow N_2(p) + D_2(p) = 0 \\ &\Leftrightarrow 10 + 1 + 2p + 3p^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow 3p^2 + 2p + 11 = 0 \end{aligned} \tag{1}$$

$\Delta' = 1 - 3 \cdot 11 = -32 < 0$ l'équation admet 2 racines complexes conjuguées :

- $1 + T_2(p) = 0 \Leftrightarrow$: $p_2 = -\frac{1}{3} + i\frac{4\sqrt{2}}{3}$; $p_2' = -\frac{1}{3} - i\frac{4\sqrt{2}}{3}$;
  $\Re(p_2) = \Re(p_2') = -\frac{1}{3} < 0$ donc H_2 stable en B.F.

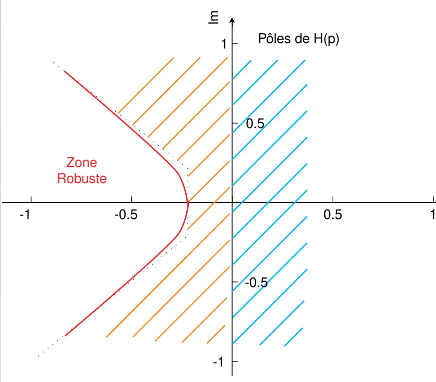
Robustesse

En pratique, les pôles ne doivent pas être trop proches de l'axe des imaginaires pour que la régulation soit robuste.



Robustesse

En pratique, les pôles ne doivent pas être trop proches de l'axe des imaginaires pour que la régulation soit robuste.

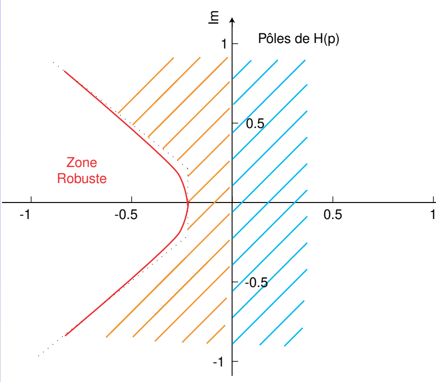


Robustesse

En pratique, les pôles ne doivent pas être trop proches de l'axe des imaginaires pour que la régulation soit robuste.

Exemple : Oscillations de H_1 en B.F. avec un gain $A = 10$.

La réponse indicielle de la boucle est stable, mais présente de nombreuses oscillations. Détail
Les pôles de $F_1(p)$ sont en effet trop proches de l'axe des imaginaires.



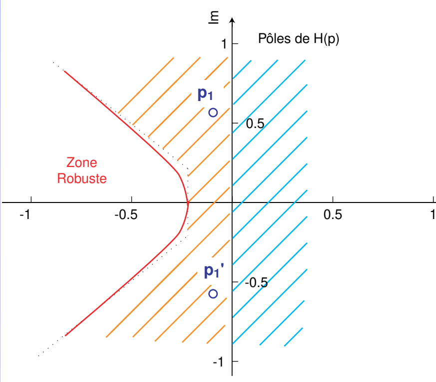
Robustesse

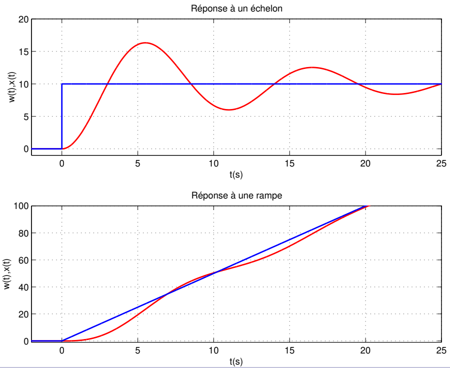
En pratique, les pôles ne doivent pas être trop proches de l'axe des imaginaires pour que la régulation soit robuste.

Exemple : Oscillations de H_1 en B.F. avec un gain $A = 10$.

La réponse indicielle de la boucle est stable, mais présente de nombreuses oscillations. *Détail*

Les pôles de $F_1(p)$ sont en effet trop proches de l'axe des imaginaires.




Réponse à un échelon
w(t),x(t)
t(s)
Réponse à une rampe
w(t),x(t)
t(s)