Mécanique des fluides

- Prérequis
- Définitions
- Hydrostatiques
  - Force surfacique de pression
  - Force volumique
  - Poussée d’Archimède
- Dynamiques des fluides
  - Fluides parfaits
  - Viscosité
  - Pertes de charges

Prérequis

Mathématiques

$$\iint_S g\, dS \quad \iiint_V g\, dV \quad \frac{\partial}{\partial x} \quad \frac{\partial}{\partial y} \quad \frac{\partial}{\partial z}$$

$\overrightarrow{grad}(s);\ div(\vec{v}); \Delta(s); \vec{\Delta}(\vec{v})$

Mécanique

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \sum \vec{F}$$

Loi de la dynamique

Thermodynamique

$$\Delta\left(U + K\right) = \dot{W} + \dot{Q}$$

Premier principe
(= conservation de l' énergie)

Qu’est-ce qu’un fluide ?

- pas de forme propre
- s’écoule si on lui applique une force
- prend la forme du récipient
- Les molécules interagissent (peu pour les gaz)
- Gardent une certaine mobilité les unes par rapport aux autres.
- Pas d’ordre comme dans un solide cristallin
  (mais ordre à courte distance pour les liquides)

Description macroscopique d’un fluide

- **Microscopique :** ce qu’on ne voit pas directement
  - Atomes ou molécules + ou - libres les uns / aux autres
  - Liquide = fort encombrement / interactions forte
  - Gaz = faible encombrement / interactions quasi nulles
- **Macroscopique :** à notre échelle
  - un fluide apparaît comme un **milieu continu**
  - il exerce/subit des forces sur/par notre environnement

Masse volumique

$\rho\,(x, y, z, t)$ en kg/m^3

Eau	1000 kg/m^3
Mercure	13540 kg/m^3
Air (20°C, 1 bar)	1.2 kg/m^3

A priori non uniforme dans l'espace

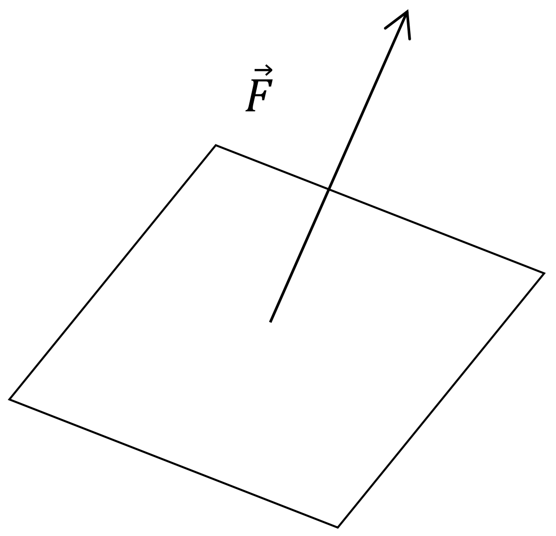
Varie avec la température (même pour un liquide) : **dilatabilité**
Varie avec la pression (peu pour un liquide) : **compressibilité**

le fluide incompressible

Une approximation bien utile :
$\rho = \rho_0$ **constant** par rapport à t et x, y, z

$$M(t) = \iiint_V \rho_0 \, dV = \rho_0 V$$ Masse de fluide dans V

Pression



Lorsqu'une force $\vec{F}$ s'exerce sur une surface **S** on définie la pression par le rapport de l'intensité de la force par la surface sur laquelle cette force s'exerce.

$\overrightarrow{dF}$ s'exprime en N

dS en m²

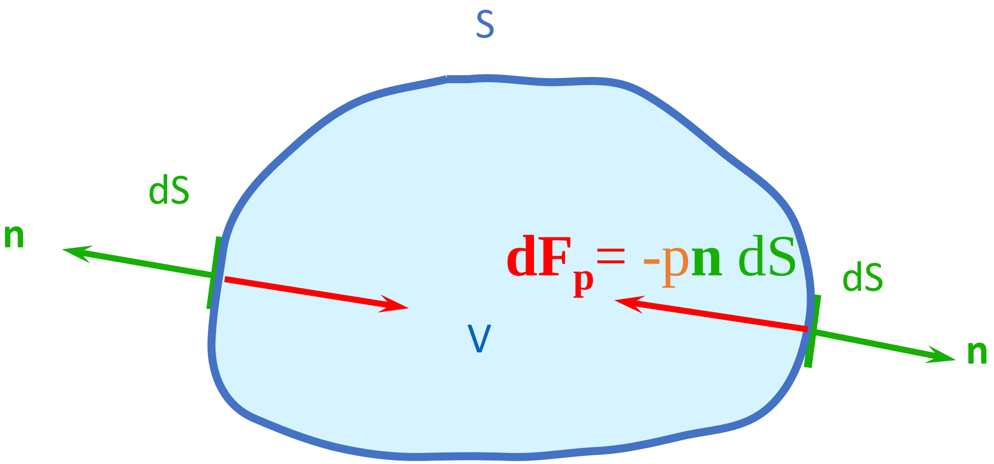
P en Pa

$$\overrightarrow{dF} = \mathrm{p} \times \overrightarrow{dS}$$

Force de pression

Expression générale : on considère un volume V fermé par une surface S

découpée en petits éléments de surface dS, de normale sortante **n**

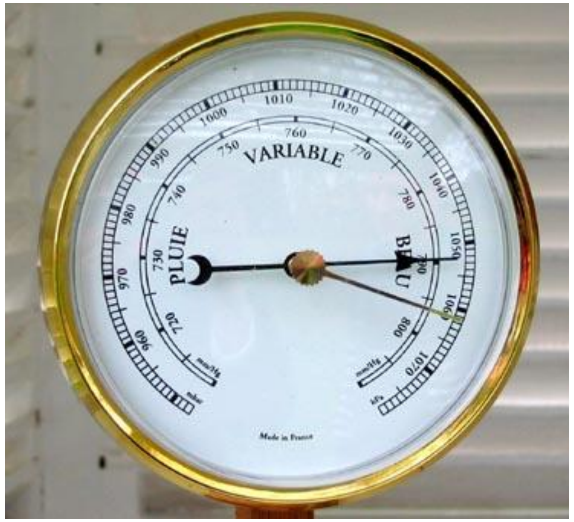


on peut donc ajouter ou soustraire
une **constante** arbitraire à p_0 :

$$\vec{F} = -\oiint (p - p_0)\overrightarrow{dS}$$

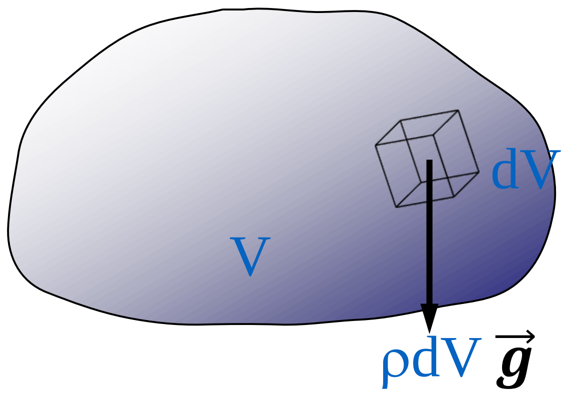
Mesures de pression

- Pression relative (ou différentielle)
- Pression absolue



- Dans les expressions il sera toujours question de pression absolue
- 1bar=10^5 Pa

Force volumique



Poids :

somme des poids élémentaires $dm\,\vec{g} = r dV\,\vec{g}$

de toutes les particules fluides dV

Attention !

a priori $\rho(x,y,z)$

$$\vec{P} = -\iiint (\rho \vec{g} dV)$$

Hydrostatique : équation locale

Equilibre : $\vec{P} + \vec{F} = \vec{0}$

$\vec{P} = \iiint (\rho \vec{g} dV)$

$\vec{F} = -\oiint (p - p_0)\overrightarrow{dS}$

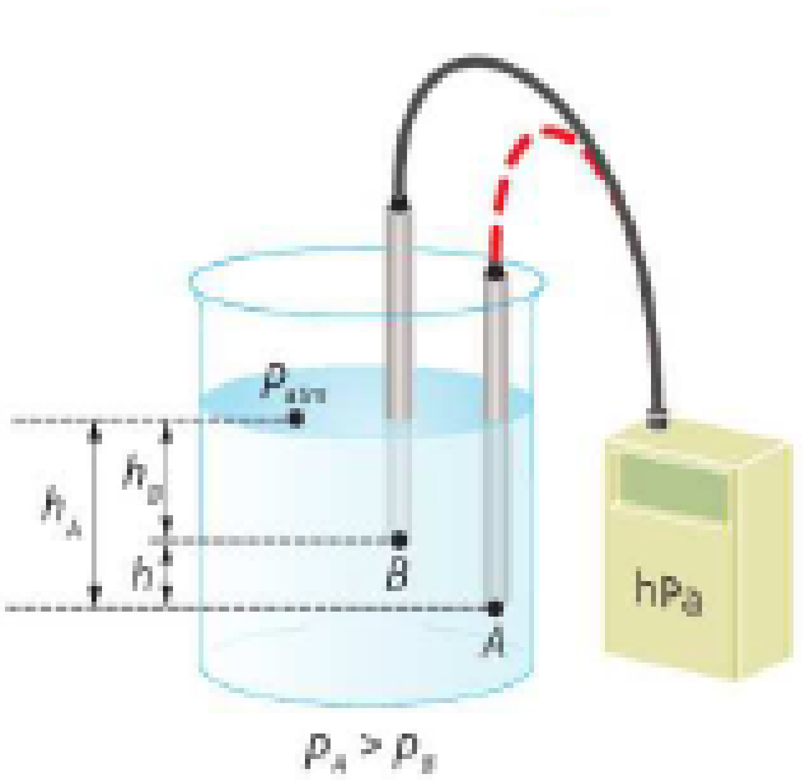
Or (formule de Green): $\vec{F} = -\oiint (p - p_0)\overrightarrow{dS} = \iiint \overrightarrow{grad}(p) dV$

Donc : $\iiint -\overrightarrow{grad}(p) dV + \iiint (\rho \vec{g} dV) = 0$ vrai quel que soit V

L'intégrale doit être nul, donc $\overrightarrow{grad}(p) = \rho \vec{g}$

Principe fondamental de l'hydrostatique :

$\mathbf{P_A - P_B = \rho.g.(h_A - h_B)}$
P_A pression au point A en (Pa)
P_B pression au point B en (Pa)
ρ masse volumique du liquide en (kg/m^3)
g = 9,81 accélération de la pesanteur en (m/s^2 ou N/kg)
h_A profondeur du point A en (m)
h_B profondeur du point B en (m)

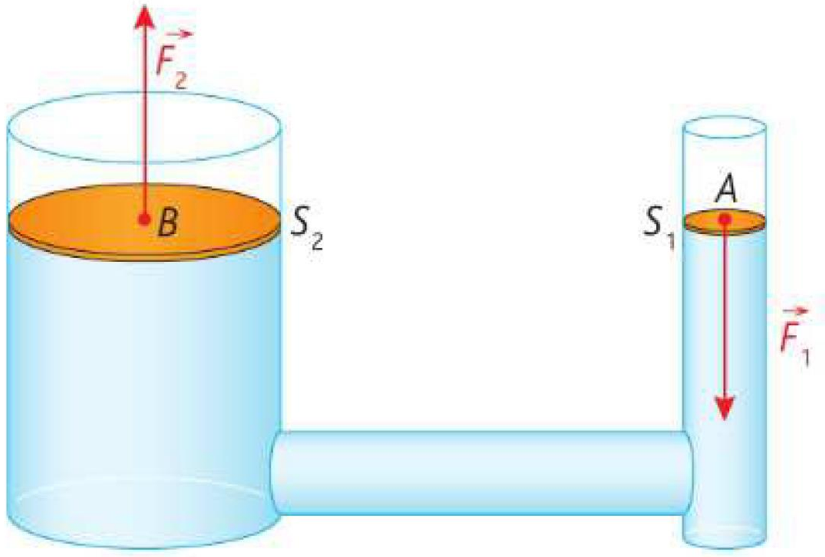


Ce principe peut s'écrire aussi $\mathbf{\Delta p = \rho.g.\,\Delta h}$

Théorème de Pascal

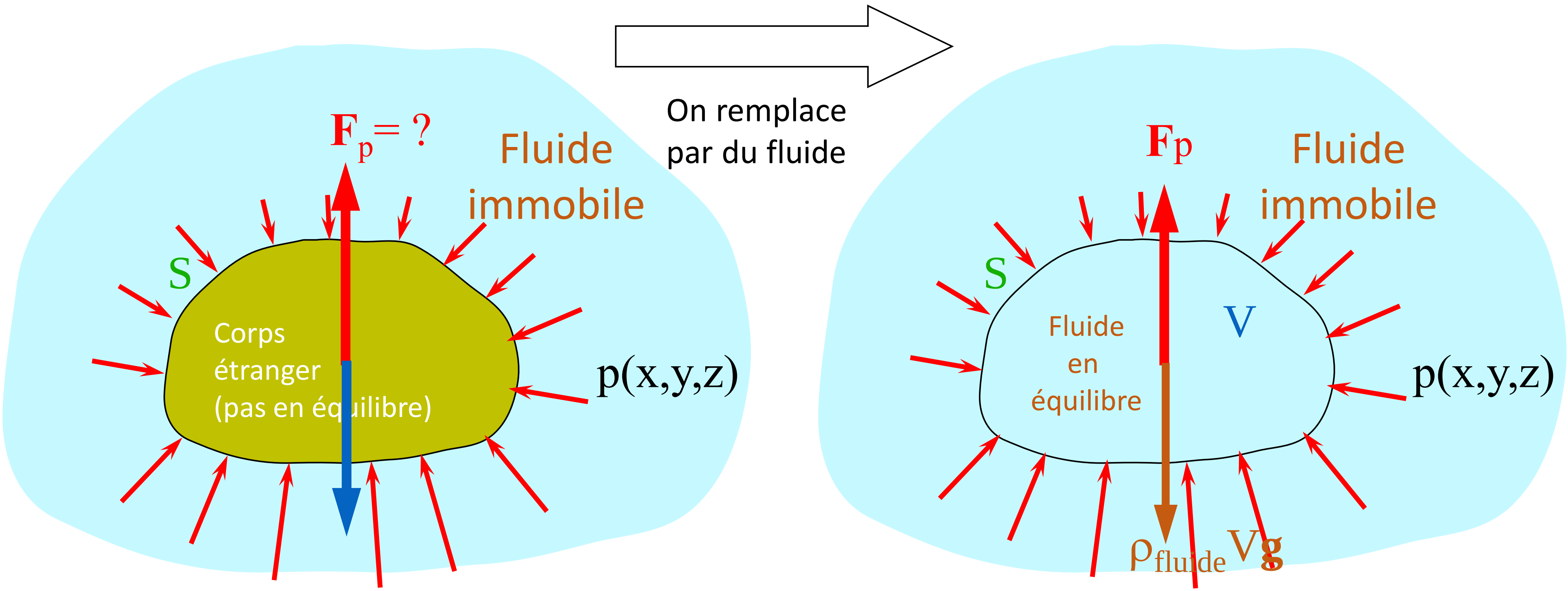
- Dans le cas d'un fluide incompressible au repos (masse volumique constante et fluide homogène) **les surfaces isobares sont horizontales**
- Il y a conservation de la pression

$$F_2 = F_1 . \frac{S_2}{S_1}$$



Poussée d'Archimède

- Rappel : Ce n'est rien d'autre que la résultante des forces de pression.
- On cherche en général la force exercée sur un corps étranger au fluide (solide ou bulle dans liquide, ballon d'hélium dans l'air...)



Le champ de pression est le même dans les deux cas, car le fluide autour est immobile.

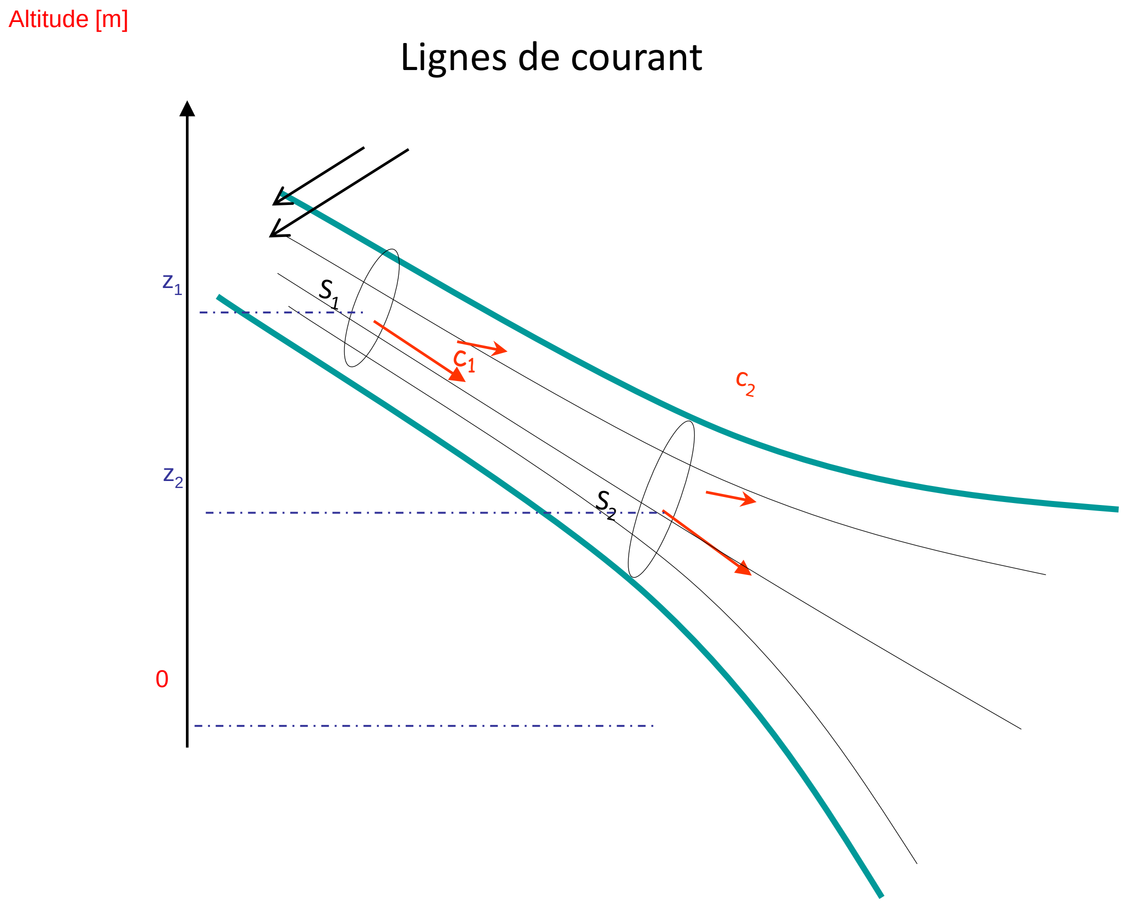
donc F_p aussi.

Or, l'équilibre dans le deuxième cas montre que : $\overline{F_p} = -\rho_{fluide} V \vec{g}$

Dynamique des fluides

- Limites de l’étude:
- Régime stationnaire (qui n’évolue pas dans le temps)
- Fluide incompressible

L’écoulement d’un fluide idéal : définitions et débits



Le débit volumique Q_v avec $Q_v = \frac{V}{\Delta t} = vS$

Le débit massique Q_m avec $Q_v = \frac{\rho V}{\Delta t} = \rho v S$

Il y a conservation du débit massique
si le **fluide est incompressible** il y a **conservation du débit volumique**

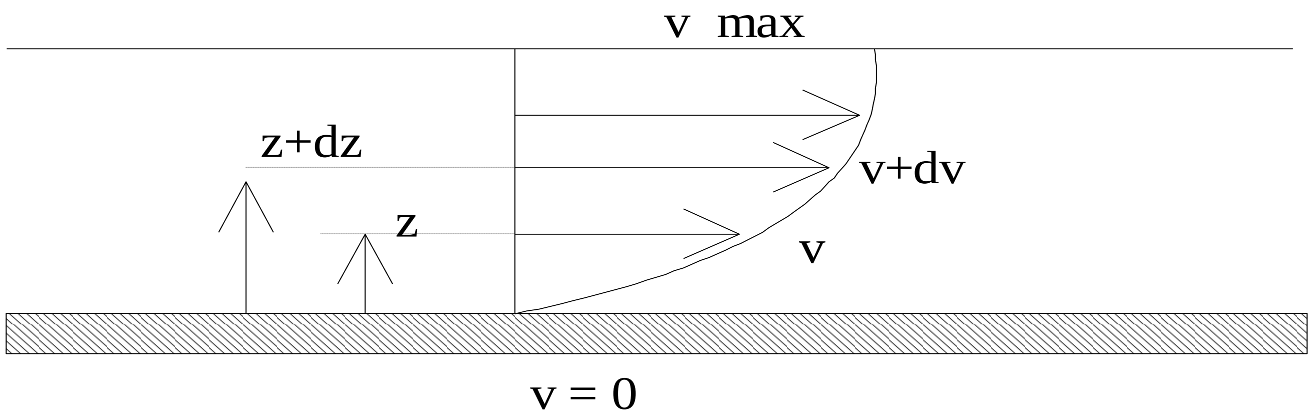
$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + div(\rho \vec{v}) = 0$$

Loi de Bernoulli

- Traduit un bilan d'énergie entre deux points d'une ligne de courant
- Nous sommes dans le cas d'un écoulement en régime établi et sans frottement d'un fluide parfait et incompressible.
- $\frac{1}{2} \cdot \rho v^2 + P + \rho g z = cte$
- $\frac{1}{2} \cdot \rho v_2^2 + +P_2 + \rho g z_2 = \frac{1}{2} \cdot \rho v_1^2 + +P_1 + \rho g z_1$
- En divisant tous les termes de la relation précédente par le produit ρ.**g** , on écrit tous les termes dans la dimension d'une hauteur (pressions exprimées en mètres de colonne de fluide)
- $\frac{v^2}{2g} + \frac{P}{\rho g} + z = cte$

Fluide réel, viscosité

- Un fluide réel en mouvement subit en réalité des pertes d’énergie dues au liquide lui-même ainsi qu’aux frottements sur les parois des canalisations. En fait chaque molécule de fluide ne s'écoule pas à la même vitesse : on dit qu'il existe un profil de vitesse :
- $d\vec{F} = \eta \times \overrightarrow{grad}(\vec{v})dS$
- η est la viscosité dynamique en Pa.s
- Notion de couche limite



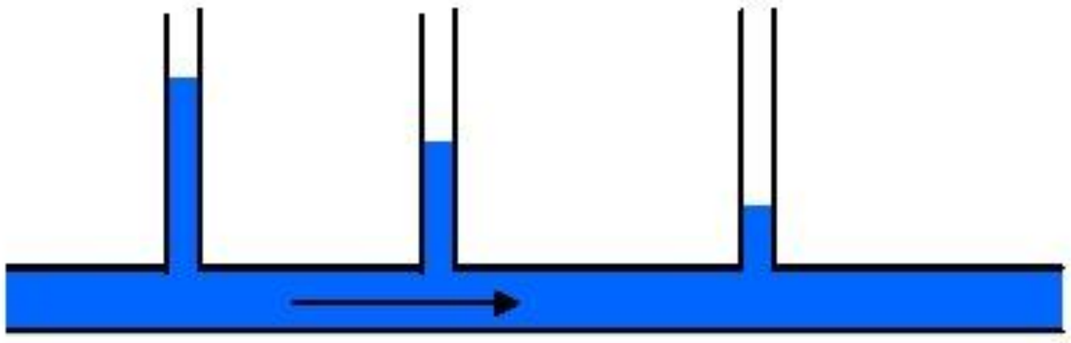
Pertes de charge

- La différence de pression **p = p_1 - p_2** entre deux points (1) et (2) d'un circuit hydraulique a pour origine :

✓ Les frottements du fluide sur la paroi interne de la tuyauterie ; on les appelle **pertes de charge régulières ou systématiques**.

- La résistance à l'écoulement provoquée par les accidents de parcours (coudes, élargissements ou rétrécissement de la section, organes de réglage, etc...) ; ce sont les **pertes de charge accidentelles ou singulières**

- $$\boldsymbol{\Delta P = f\,\frac{\rho v^2 L}{2D}}$$



Régimes d'écoulements: Nombre de Reynolds

- $Re = \frac{v\rho D}{\eta}$
  - ReLe nombre de Reynolds sans dimension [sans unité]
  - v La vitesse moyenne d'écoulement du fluide en mètres/seconde [$m.s^{-1}$]
  - ρ la masse volumique [$kg.m^{-3}$]
  - D Le diamètre du conduit en mètres [m]
  - η La viscosité dynamique du fluide en pascal seconde[Pa.s]

- **Régime d'écoulements**
  - Re < 2000 L'écoulement est laminaire
  - 2000 < Re < 3000 L'écoulement est intermédiaire
  - Re > 3000 L'écoulement est turbulent

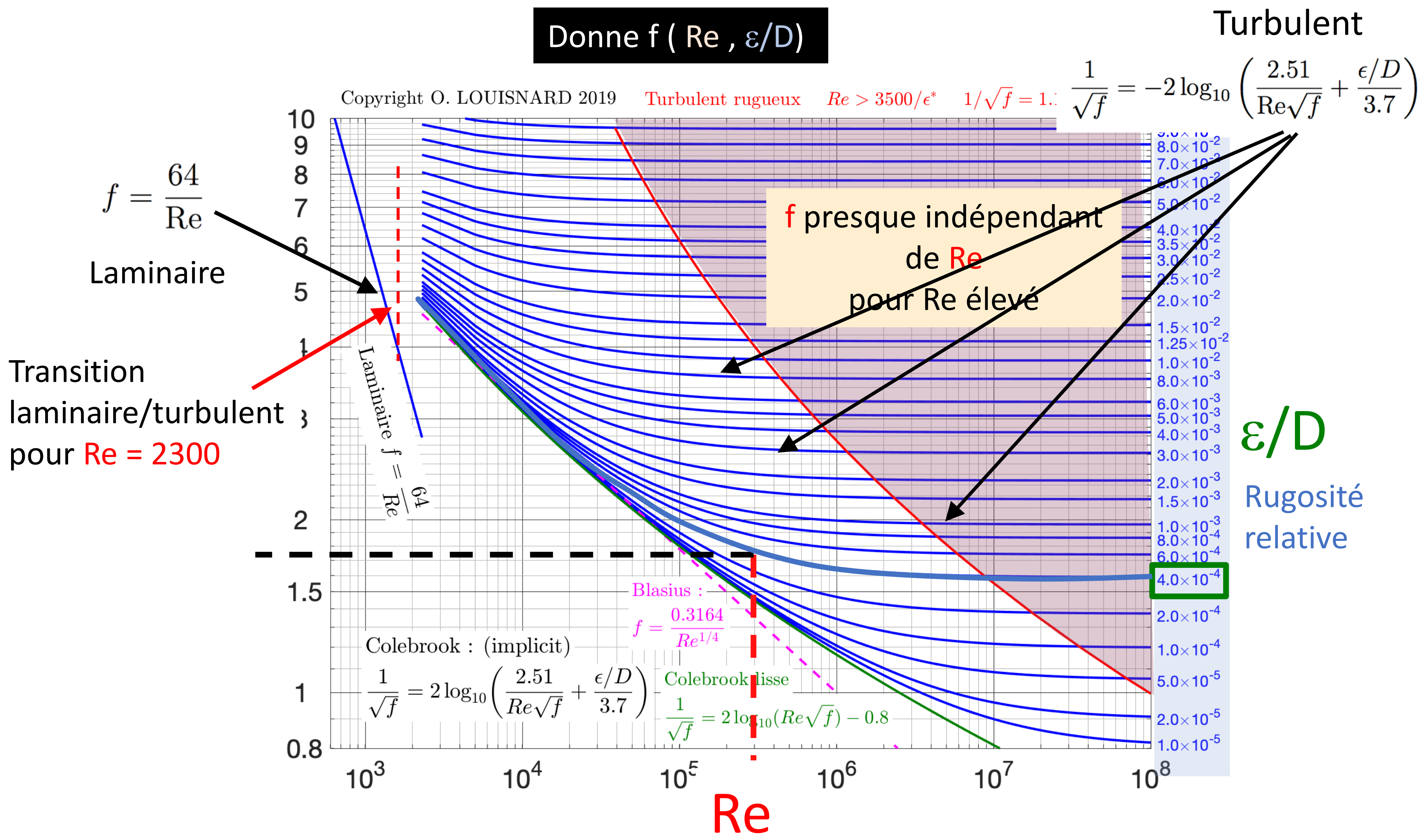
écoulement laminaire

écoulement turbulent
vue instantanée

écoulement turbulent
vue en pose

Diagramme de moody

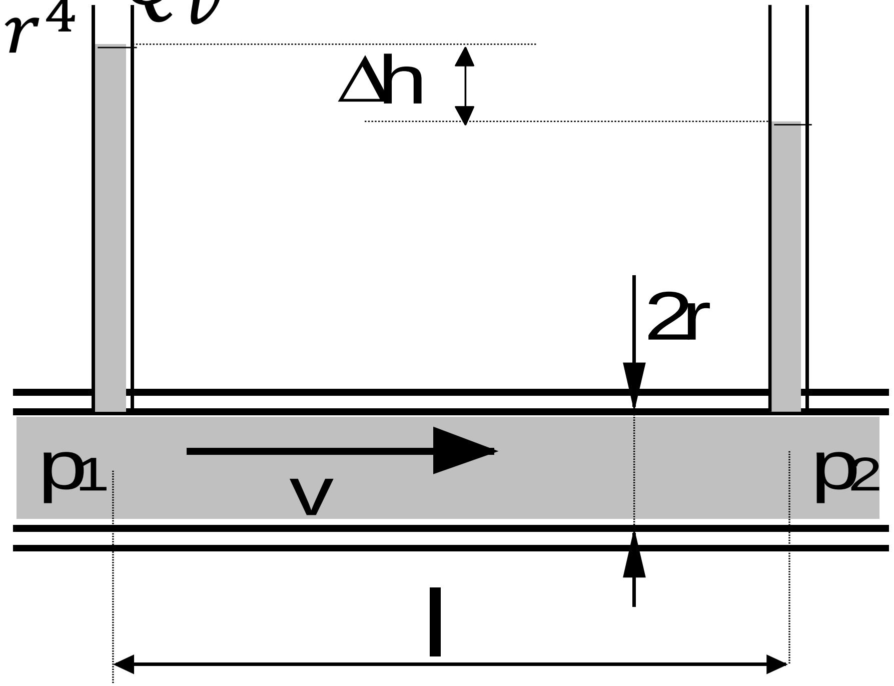
Donne f (Re , ε/D)



Loi de poiseuille

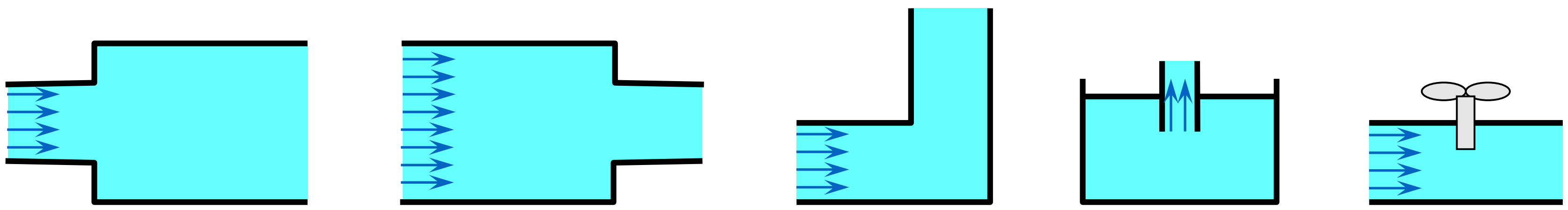
- Pour un **écoulement laminaire**, dans une conduite cylindrique horizontale, de longueur **l**, de rayon **r** (diamètre D), le débit-volume du fluide est donné par :

- $\Delta P = P_1 - P_2 = \frac{8\eta l}{r^4} Q_v$



Pertes de charge singulières

Lié à un « accident » sur a tuyauterie
(rétrécissement, coude, robinet ...)



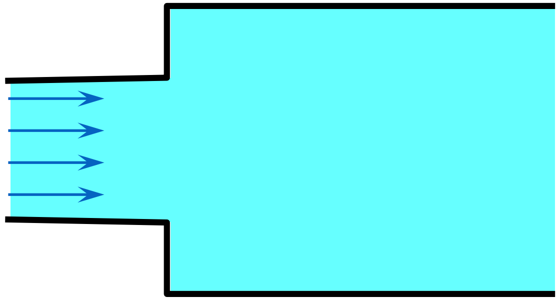
Analyse dimensionnelle :

$$h_v = \frac{v^2}{2g} e_v$$

Cette formule ne dit rien de plus !
Elle ramène le calcul de h_v (hauteur) à celui de e_v (sans dimension)
e_v dépend :
de Re (peu en turbulent)
de la géométrie de la singularité

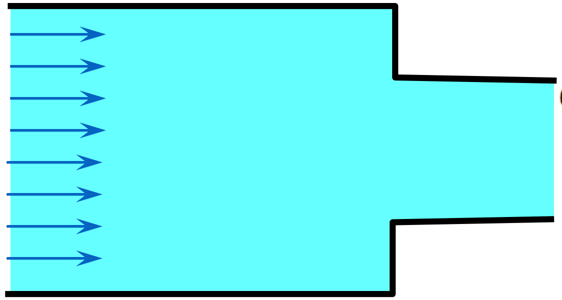
Pertes de charge singulières

$$h_v = \frac{v^2}{2g} e_v$$



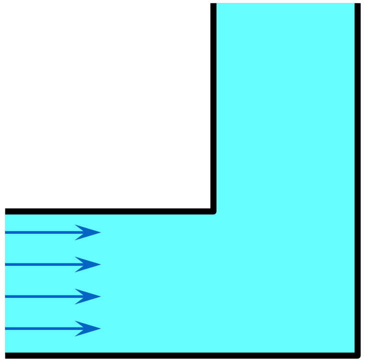
$$e_v = \left(1 - \frac{S_1}{S_2}\right)^2$$

Référence
vitesse amont

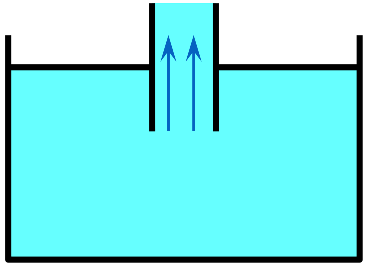


$$e_v = 0.45 \left(1 - \frac{S_2}{S_1}\right)^2$$

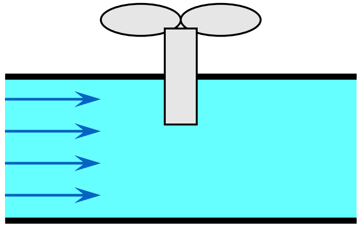
Référence
vitesse aval



$$e_v = 0.8$$



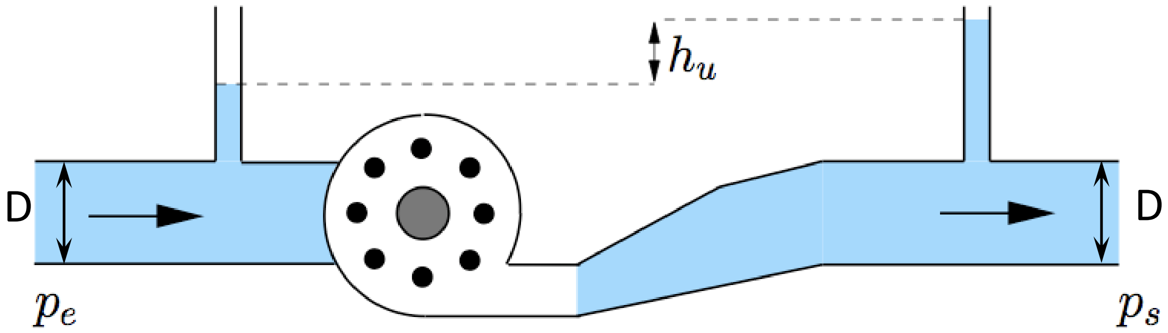
$$e_v = 1$$



$$e_v = 1.2$$

Gains de charge : pompes

Une pompe augmente l'énergie mécanique du fluide

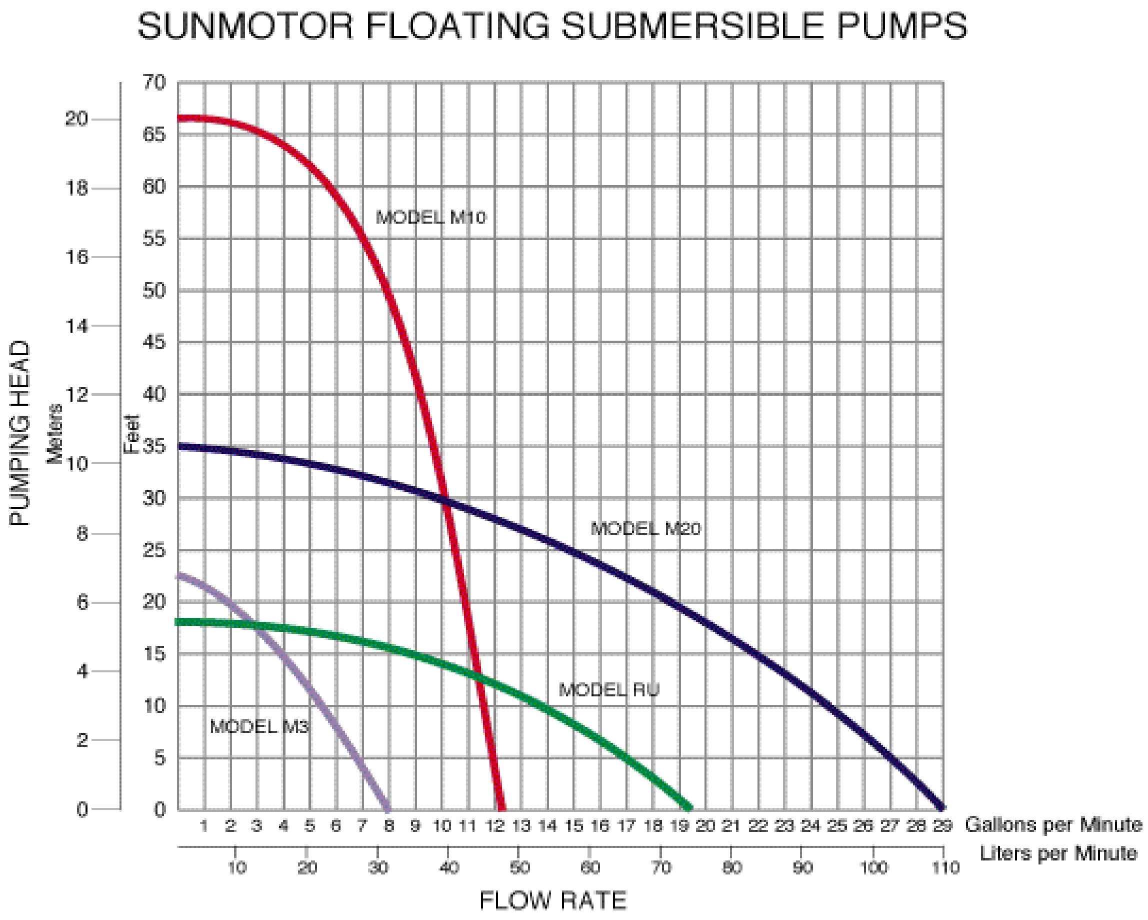


$$(P_s - P_e) = \frac{P_{mec}}{Q_v}$$

- Dans cet exemple, la pompe augmente la pression du fluide
- Exactement l'inverse d'une perte de charge

Caractéristique d’une pompe

Attention : la puissance délivrée par une pompe dépend du débit

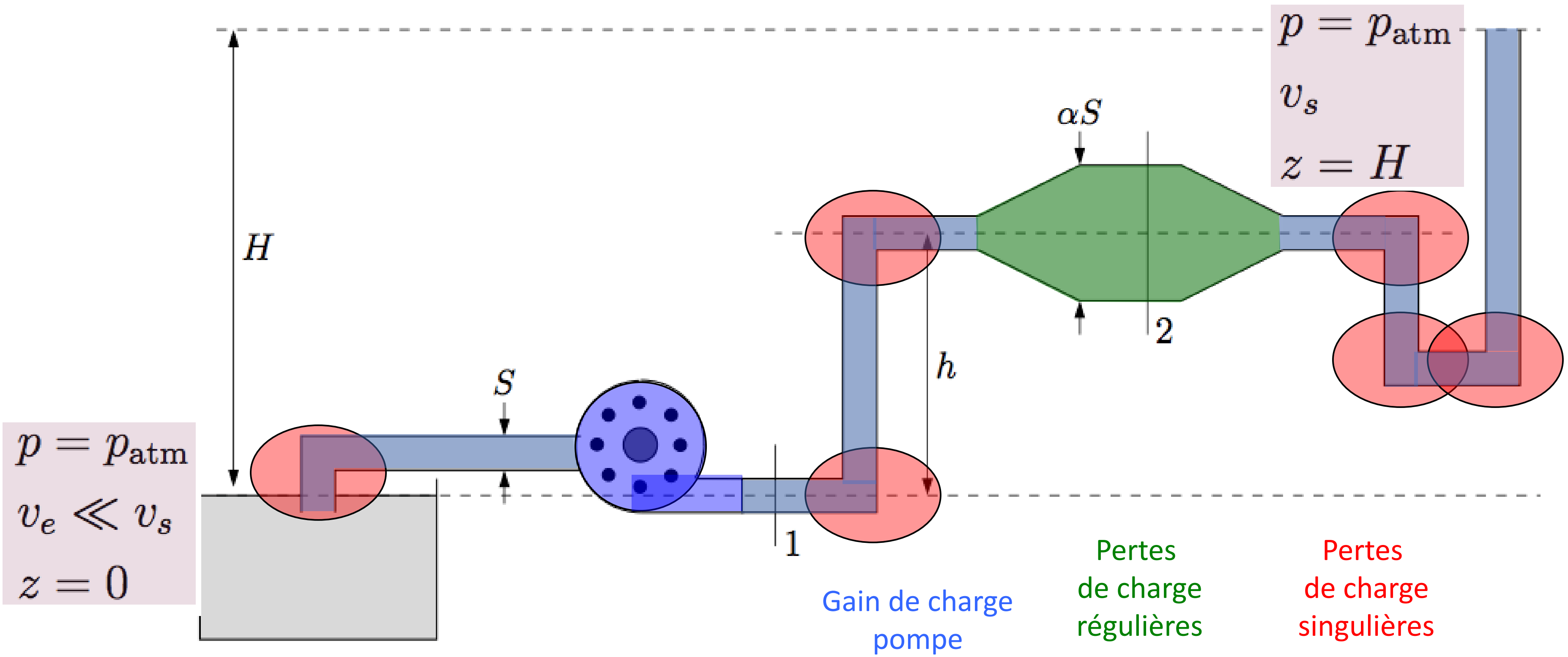


Dépendance environ parabolique

Loi de Bernoulli généralisée

- $\left(\frac{1}{2} \cdot \rho v_2^2 + +P_2 + \rho g z_2\right) - \left(\frac{1}{2} \cdot \rho v_1^2 + +P_1 + \rho g z_1\right) = -\Pi + \frac{P_{mec}}{Q_v}$
- La variation d'énergie du système ouvert est égale au perte de charge -Π et de l'énergie volumique fournie au système par une pompe par exemple

Application aux réseaux de fluide



Gain de charge pompe

Pertes de charge régulières

Pertes de charge singulières

$$\underbrace{\left(\frac{p_s}{\rho g}+\frac{v_s^2}{2g}+z_s\right)}_{\frac{p_{\mathrm{atm}}}{\rho g}+\frac{v_s^2}{2g}+H} - \underbrace{\left(\frac{p_e}{\rho g}+\frac{v_e^2}{2g}+z_e\right)}_{\frac{p_{\mathrm{atm}}}{\rho g}} = h_u - \sum \frac{v_i^2}{2g}\frac{L_i}{D_i}f_i - \sum \frac{v_i^2}{2g}e_v$$

Débitmètres, manomètres, capteur de niveau

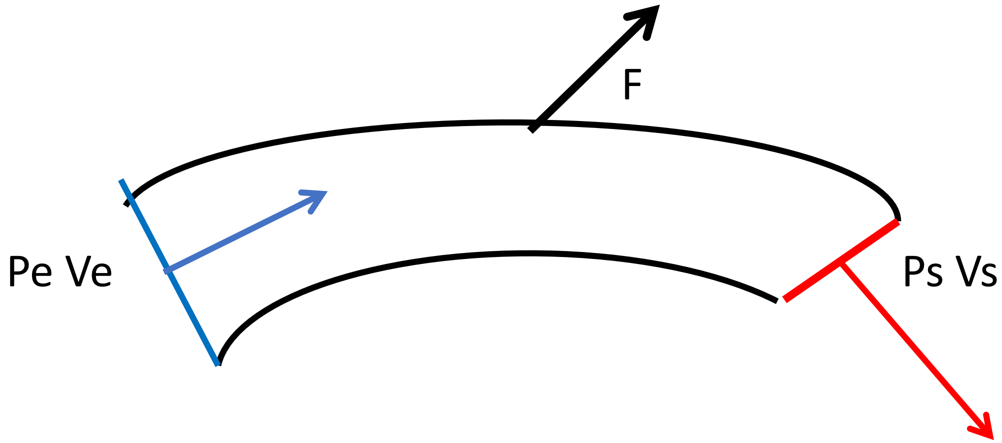
- Débitmètres
  - Débitmètre déprimogène
  - Débitmètre a obstacle
  - Débitmètre a ultrason
  - Débitmètre à turbine
- Manomètres
  - Piézoélectrique
  - Résistif
  - Capacitif…

Complément : force exercée sur un élément

- Position du problème
- Principe du calcul
- Expression
- Exemples

Position du problème

- On cherche la résultante des forces qui s’exerce sur un solide/ fluide



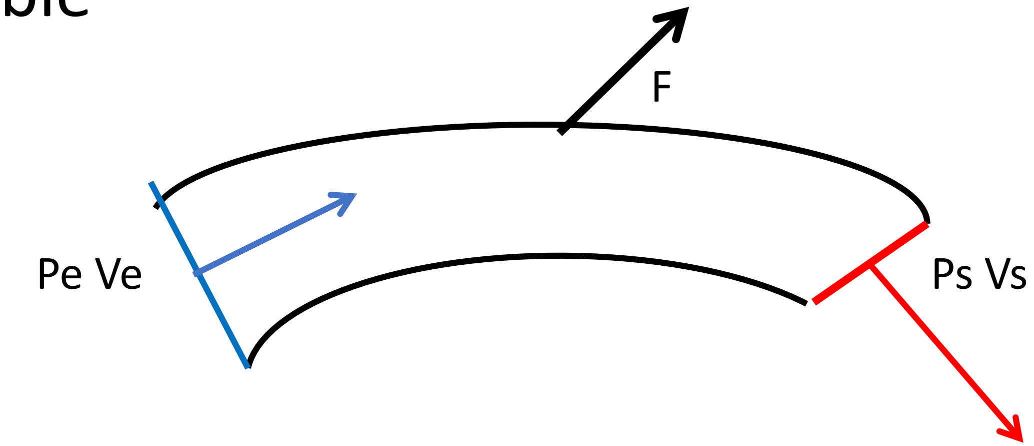
Principe du calcul

- Conservation de la quantité de mouvement (2^{e} loi de Newton)

$$\underbrace{\frac{d}{dt}\iiint_V \rho\mathbf{v}\, dV}_{\text{Variation de la QDM du fluide dans le volume } V} = \underbrace{-\iint_S \rho\mathbf{v}\,(\mathbf{v}.\mathbf{n})\; dS}_{\text{QDM transportée par le fluide entrante - sortante}} + \underbrace{\iiint_V \rho\mathbf{g}\, dV}_{\text{Poids du fluide}} + \underbrace{\iint_S -p\mathbf{n}\, dS}_{\text{Forces de pression}} + \underbrace{\iint_S \overline{\overline{\boldsymbol{\sigma_v}}}.\mathbf{n}\, dS}_{\text{Forces de frottement visqueux}} + \overrightarrow{F_{soilide/liquide}}$$

Théorème d'Euler

- Le résultat suivant est valable en régime permanent pour un fluide incompressible



La force de l'air sur le solide est due à P_{atm}:

$$\mathbf{F}_{\text{fluide}/\text{solide}} + \mathbf{F}_{\text{air}/\text{solide}} = \left(p_e - p_{\text{atm}} + \rho v_e^2\right) S_e \mathbf{n}_e - \left(p_s - p_{\text{atm}} + \rho v_s^2\right) S_s \mathbf{n}_s + M\mathbf{g}$$

Applications

$$\mathbf{F}_{\text{fluide/solide}} + \mathbf{F}_{\text{air/solide}} = \left(p_e - p_{\text{atm}} + \rho v_e^2\right) S_e \mathbf{n}_e - \left(p_s - p_{\text{atm}} + \rho v_s^2\right) S_s \mathbf{n}_s + M\mathbf{g}$$

$$= \rho Q v\left(\vec{V}_e - \vec{V}_s\right) \text{ si } \quad p_e = p_s = p_{\text{atm}}$$