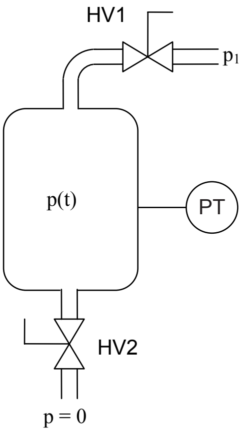
Programme de l'exposé

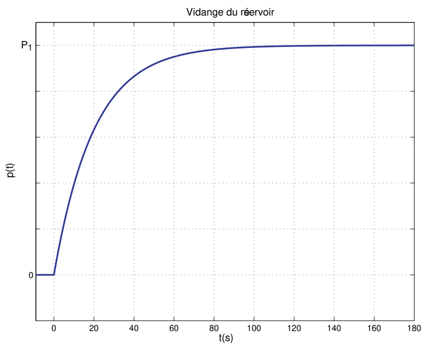
Table des matières

1 Introduction

1.1 Cas d'un réservoir



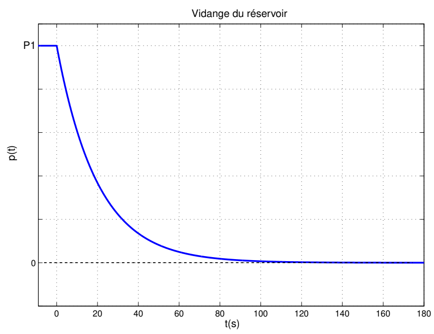
On considère le cas d'un réservoir où la pression est initialement nulle. Ce réservoir peut être alimenté par de l'air à la pression p_1 par action sur une vanne manuelle $HV1$. On ouvre la vanne manuelle $HV1$ à $t = 0$, et on enregistre l'évolution de la pression $p(t)$ qui s'établit dans le réservoir en fonction du temps. Le débit qui s'établit est noté $q(t)$



Evolution de la pression lors du remplissage
La courbe suivante représente l'évolution de la pression dans le réservoir lorsqu'on ouvre la vanne manuelle $HV1$ à $t = 0s$. La courbe de la pression en fonction du temps possède les propriétés remarquables suivantes :

- La courbe admet une asymptote $p(t) = p_1$.
- La tangente de cette courbe à $t = 0$ est non-nulle.

Evolution de la pression lors de la vidange



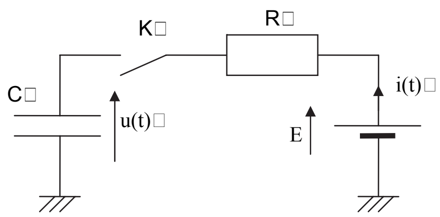
La pression à l'intérieur du réservoir s'étant stabilisée à p_1, on ferme la vanne $HV1$et on ouvre la vanne de vidange $HV2$. La courbe correspondant à l'évolution de $p(t)$ lors de cette vidange présente plusieurs propriétés remarquables :

- La courbe admet une asymptote $p(t) = 0$.
- La tangente de cette courbe à $t = 0$ est non nulle.

1.2 Analogie électrique

On peut établir les analogies suivantes entre le remplissage et la vidange d'un réservoir et la charge et la décharge d'un condensateur :

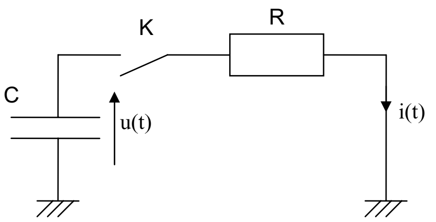
pression $p(t) \leftrightarrow$ tension $u(t)$
débit $q(t) \leftrightarrow$ intensité $i(t)$



L'équation différentielle de la charge d'un condensateur par une tension E donne une équation différentielle du premier ordre :

$$u(t) + \tau \frac{du(t)}{dt} = E$$

, avec $\tau = RC$ homogène à un temps. L'équation différentielle de la décharge d'un condensateur donne également une équation différentielle du premier ordre :



$$u(t) + \tau \frac{du(t)}{dt} = 0$$

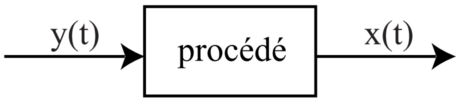
, avec $\tau = RC$ homogène à un temps.

2 Analyse temporelle

2.1 Cas d'un premier ordre sans retard

En généralisant les exemples précédents, on peut dire qu'un procédé du premier ordre est défini par l'équation différentielle :

$$x(t) + \tau \frac{dx(t)}{dt} = K.y(t) \qquad (1)$$



, où $y(t)$ et $x(t)$ sont respectivement les signaux d'entrée et de sortie du système. K est le *gain statique* du procédé et τ est sa *constante de temps*. La solution de cette équation différentielle dépend du type de signal $y(t)$ en entrée.

2.1.1 Réponse à un échelon

Lorsque le signal de commande est un échelon d'amplitude ΔY, l'équation différentielle (1) devient :

$$x(t) + \tau \frac{dx(t)}{dt} = K \cdot \Delta Y \qquad (2)$$

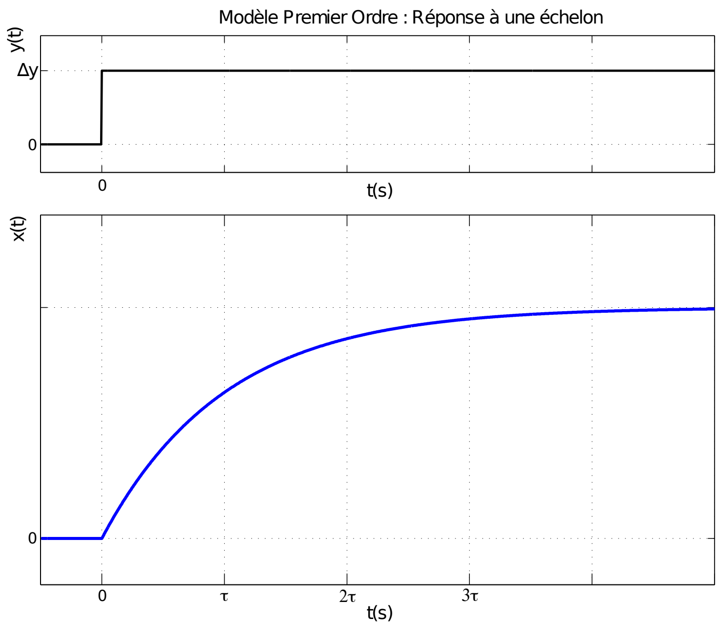
On démontre que la solution de ce cette équation différentielle est : $x(t) = K \cdot \Delta Y(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$

Propriétés graphiques
Le tracé de la réponse temporelle de $x(t)$ est donnée ci-contre. On peut vérifier les caractéristiques vue dans la partie 1.1.

— $x(\tau) =$

— $x(3\tau) =$

— $x'(t) \quad =$



2.1.2 Réponse à une impulsion de Dirac

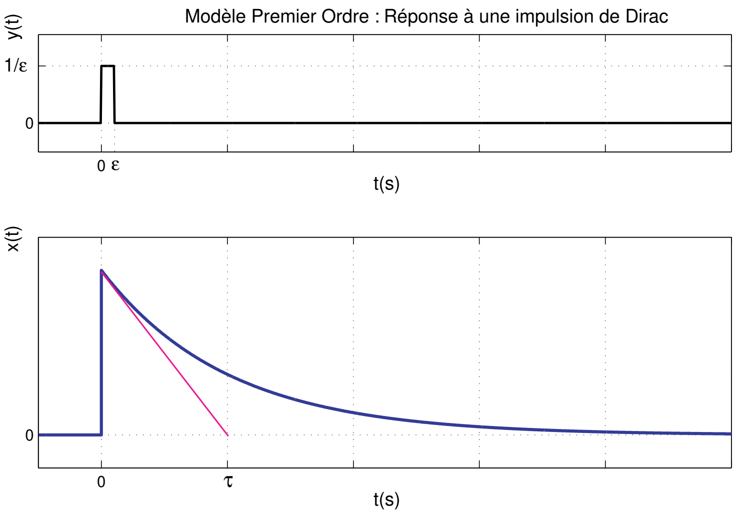
La réponse à une impulsion de Dirac

$$y(t) = \delta(t)$$

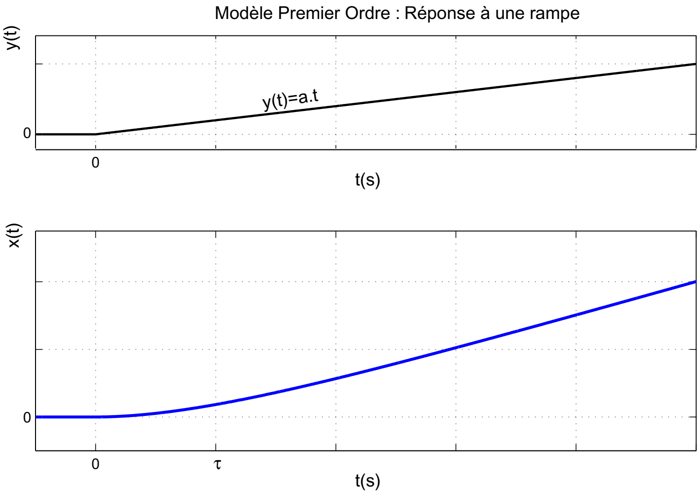
vaut :

$$x(t) = \frac{K}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}}$$

La figure ci-contre montre l'allure de la réponse impulsionnelle d'un procédé d'ordre un. L'amplitude de la réponse est maximale pour $t = 0$ et vaut $x(0) = \frac{K}{\tau}$. Le procédé retourne progressivement à la valeur qu'il avait avant l'application de l'impulsion de Dirac.



2.1.3 Réponse à une rampe



Un signal d'entrée de type rampe est défini par :

$$y(t) = a \cdot t$$

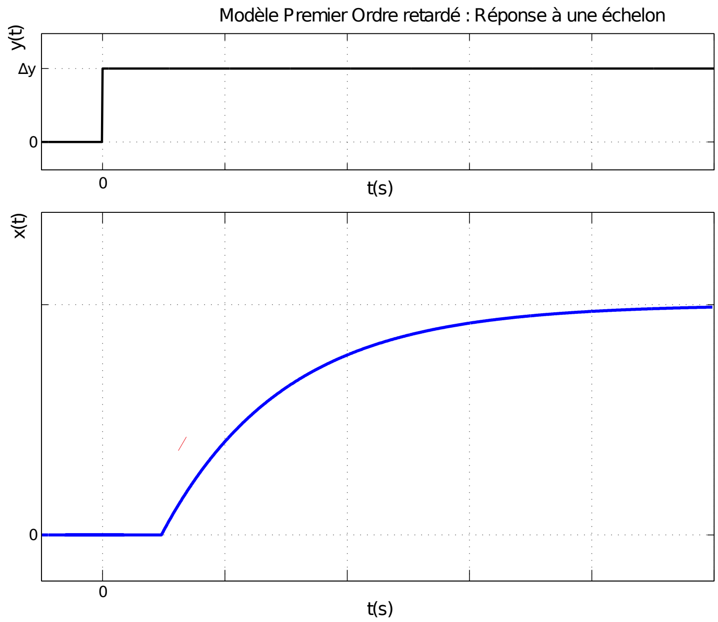
où a est la pente de la rampe (en $\%.s^{-1}$). La réponse à une telle rampe vaut :

$$x(t) = K \cdot a \cdot t - K \cdot a \cdot \tau(1 - e^{\frac{-t}{\tau}})$$

La courbe donnant $x(t)$ est donnée ci-contre. On peut voir que :

- la courbe admet une asymptote d'équation $x_{asympt}(t) = K \cdot a\,(t - \tau)$
- l'asymptote coupe l'axe des abscisses à $t = \tau$

2.2 Cas d'un premier ordre retardé



Dans de nombreux procédés, le signal de commande n'agit pas instantannément sur le procédé, et la mesure ne commence à évoluer qu'au bout d'un *temps mort*, ou *retard* noté T :

Propriétés graphiques
Le tracé de la réponse temporelle de $x(t)$ est donnée ci-contre. On peut déterminer graphiquement les 3 paramètres K, τ et T de ce modèle.

- $x(\tau + T) =$
- $x(3\tau + T) =$
- $x'(t) =$

La réponse d'un procédé avec retard se déduit de celle d'un procédé sans retard, en remplaçant la variable temps t par $t - T$:

réponse à un échelon d'amplitude Δy

$$x(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < T \\ K \cdot \Delta y(1 - e^{-\frac{t-T}{\tau}}) & \text{si } t \geq T \end{cases} \tag{3}$$

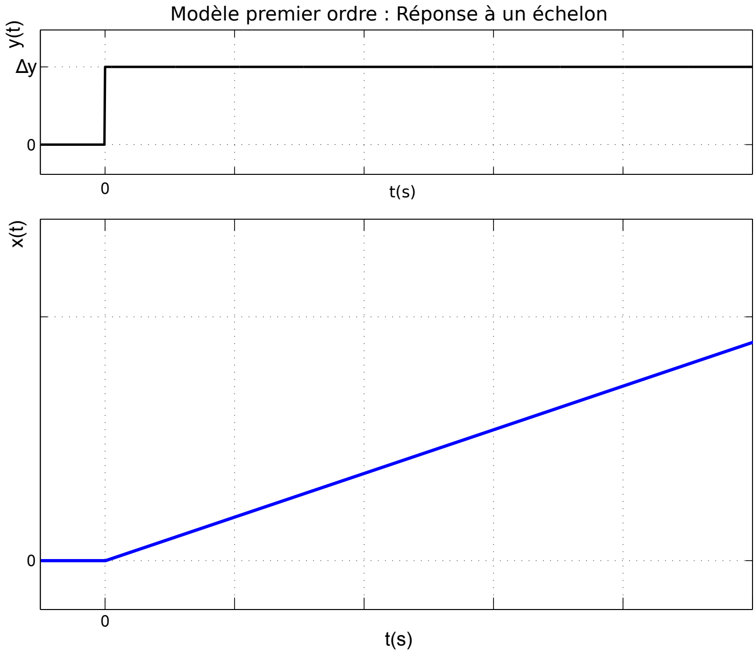
2.3 Cas d'un premier ordre intégrateur

Un cas particulier de procédé du premier ordre est défini par l'équation différentielle :

$$\frac{dx(t)}{dt} = k.y(t) \tag{4}$$

, où $y(t)$ et $x(t)$ sont respectivement les signaux d'entrée et de sortie du système. k est le *gain dynamique* du procédé exprimé en s^{-1}.

2.3.1 Réponse à un échelon



Lorsque le signal de commande est un échelon d'amplitude ΔY, l'équation différentielle (4) devient :

$$\frac{dx(t)}{dt} = k \cdot \Delta Y \tag{5}$$

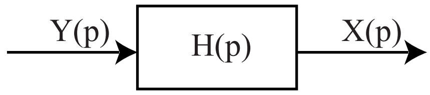
La solution de ce cette équation différentielle est : $x(t) = k \cdot \Delta Y \cdot t$

Propriétés graphiques
A partir du tracé de la réponse temporelle de $x(t)$ donnée ci-contre, on peut retrouver le paramètre k.
$k \cdot \Delta Y =$
donc, $k =$

3 Fonctions de transfert

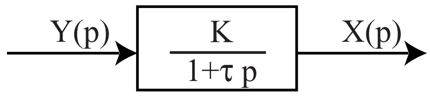
On définit la fonction de transfert réglante $H(p)$ d'un procédé quelconque comme le rapport $\frac{X(p)}{Y(p)}$.

$$H(p) = \frac{X(p)}{Y(p)}$$



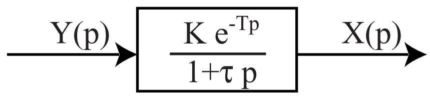
3.1 Cas d'un premier ordre sans retard

$$H(p) = \frac{K}{1 + \tau \cdot p} \tag{6}$$



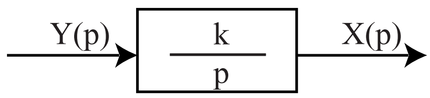
3.2 Cas d'un premier ordre retardé

$$H(p) = \frac{K \cdot e^{-T \cdot p}}{1 + \tau \cdot p} \tag{7}$$



3.3 Cas d'un premier ordre intégrateur

$$H(p) = \frac{k}{p} \tag{8}$$



Première partie

Annexes

L'équation à résoudre est :

$$x(t) + \tau \frac{dx(t)}{dt} = K.\Delta Y \tag{9}$$

Cette équation peut aussi s'écrire : $x(t) - K.\Delta Y + \tau \frac{dx(t)}{dt} = 0$. Si on pose :

$$f(t) = x(t) - K.\Delta Y \tag{10}$$

On peut remarquer que $\frac{df(t)}{dt} = \frac{dx(t)}{dt}$. L'équation 9 peut donc s'écrire :

$$f(t) + \tau \frac{df(t)}{dt} = 0$$

ce qui équivault à :

$$\frac{df}{f} = -\frac{dt}{\tau}$$

donc,

$$\int \frac{df}{f} = -\frac{1}{\tau} \int dt$$

donc,

$$\ln f = -\frac{t}{\tau} + C$$

où C est une constante réelle.

$$f(t) = A.e^{-\frac{t}{\tau}} \quad \text{où, } A = e^C$$

En revenant à la définition 10 de $f(t)$, il vient :

$$x(t) = f(t) + K.\Delta Y = A.e^{-\frac{t}{\tau}} + K.\Delta Y$$

Pour déterminer la valeur de la constante A, il faut connaître une solution particulière de $x(t)$. Or, à $t = 0$, on a la condition initiale $x(0) = 0$, et donc :

$$A + K.\Delta Y = 0 \quad \text{donc,} \quad A = -K.\Delta Y$$

$$\text{finalement,} \quad x(t) = K.\Delta Y(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$$