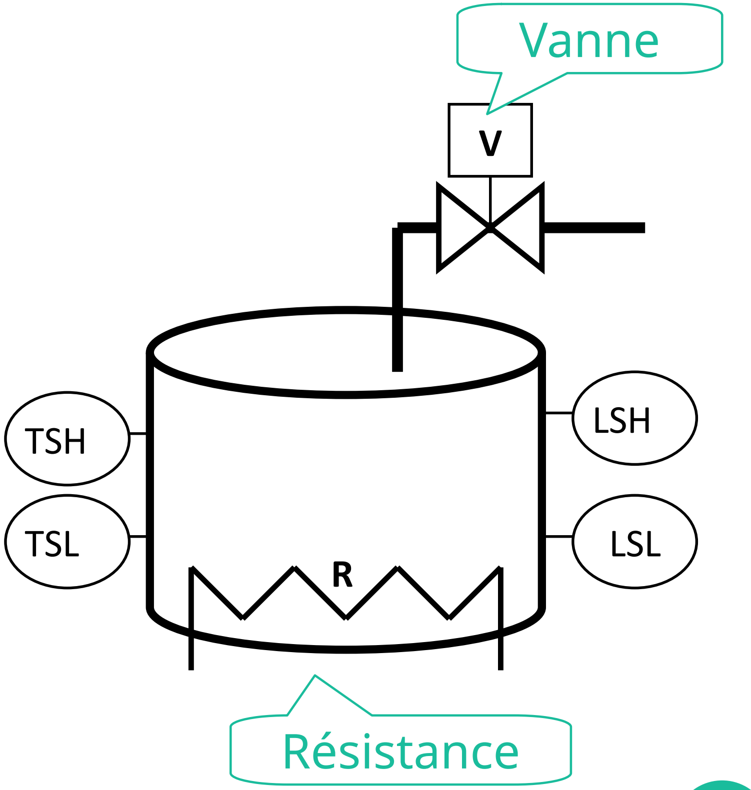
R119 – Algèbre de Boole

Licence Pro Rob&IA

Laurent ROY

Algèbre de Boole – Exemple introductif

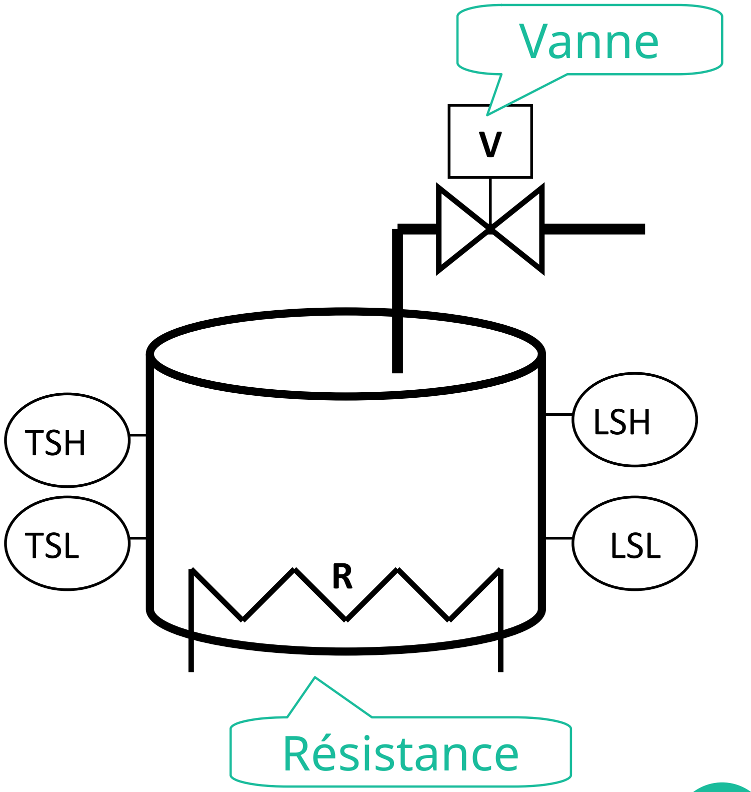
- **Cahier des charges**
  - **V** permet le remplissage tant que le niveau haut n'est pas atteint.
  - **R** assure le chauffage jusqu’à la température maximale.
  - le chauffage est arrêté si le niveau bas n’est pas atteint,
  - le remplissage est arrêté si la température minimale n’est pas atteinte



Algèbre de Boole – Exemple introductif

- **Entrées / Sorties**

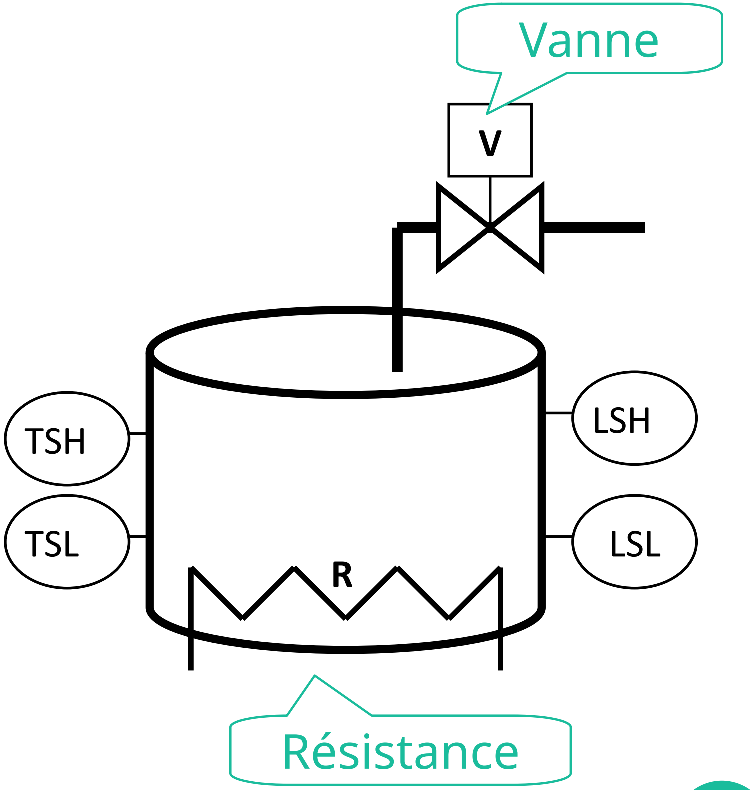
Entrées	Sorties



Algèbre de Boole – Exemple introductif

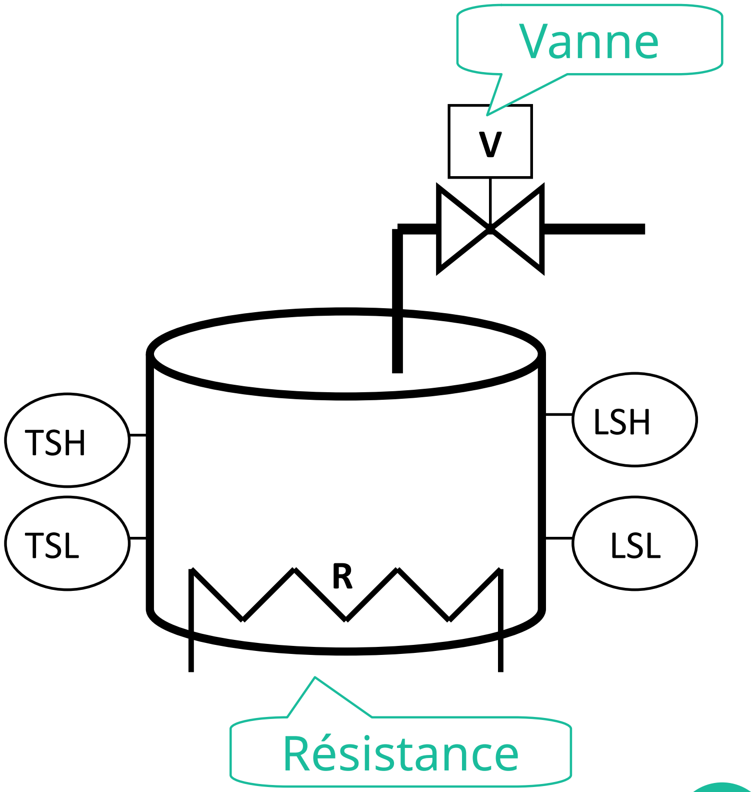
- ## Entrées / Sorties

Entrées	Sorties
TSH	R
TSL	V
LSH	
LSL	



Algèbre de Boole – Exemple introductif

- **Cahier des charges**
  - **V** permet le remplissage tant que le niveau haut n'est pas atteint.
  - le remplissage est arrêté si la température minimale n’est pas atteinte



Grâce à l’algèbre de Boole (logique combinatoire) on trouve :

$$V = TSL \bullet \overline{LSH}$$

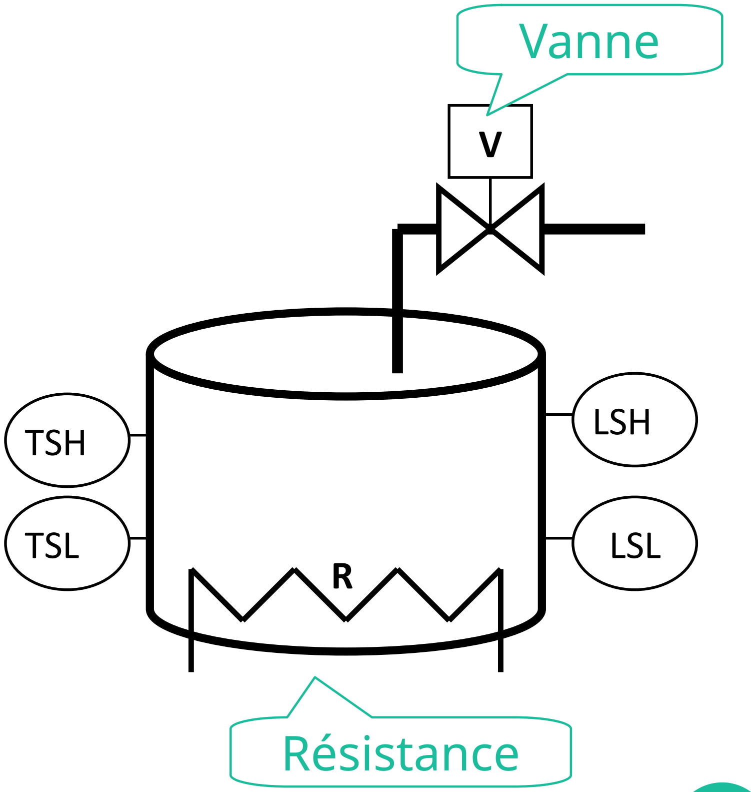
Lire : V égal TSL et non LSH

Algèbre de Boole – Exemple introductif

- **Cahier des charges**
  - **R** assure le chauffage jusqu'à la température maximale.
  - le chauffage est arrêté si le niveau bas n'est pas atteint,

Grâce à l'algèbre de Boole (logique combinatoire) on trouve : $R = LSL \bullet \overline{TSH}$

Lire : R égal LSL et non TSH



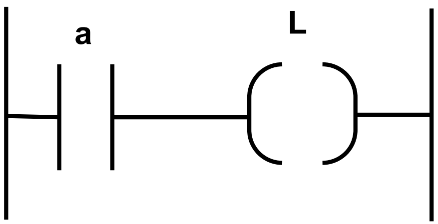
Variables et fonctions logiques

- **Une variable logique (ou booléenne) possède deux états notés : 0 et 1.**
- **Une fonction logique est une grandeur booléenne (0 ou 1) qui dépend d'autres variables booléennes.**

Fonctions logiques de base

- ## Fonction OUI (sur une seule entrée)

Schéma à contacts

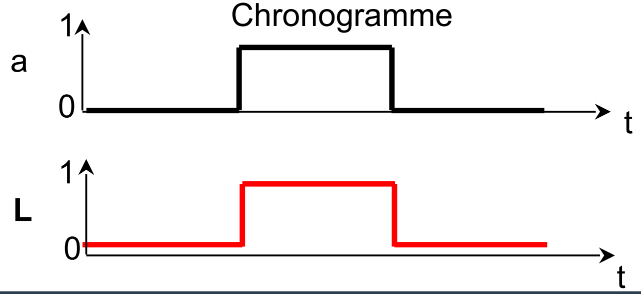


Equation

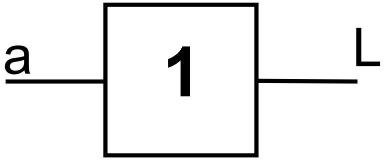
$$\boxed{L=a}$$

Table de vérité

a	L
0	0
1	1



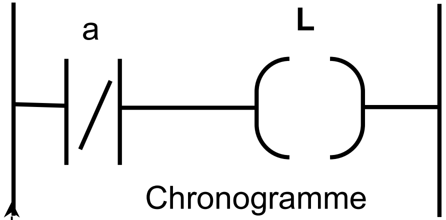
Logigramme



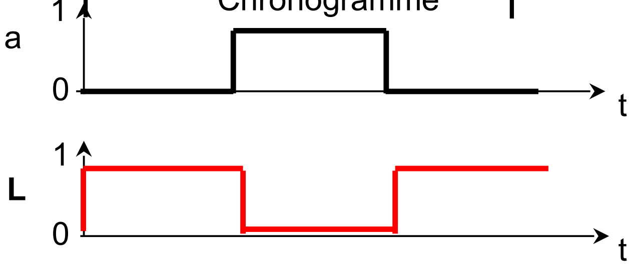
Fonctions logiques de base

- **Fonction NON (sur une seule entrée)**

Schéma à contacts



Chronogramme



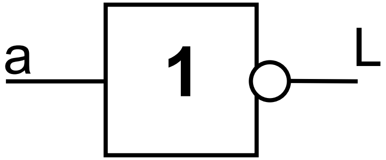
Equation

$$\boxed{L=\overline{a}}$$

Table de vérité

a	L
0	1
1	0

Logigramme



Fonctions logiques de base

- **Fonction OU (sur deux entrées ou plus)**

$$\boxed{L = a + b}$$

Logigramme

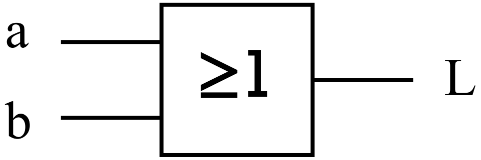


Table de vérité

a	b	L
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Chronogramme

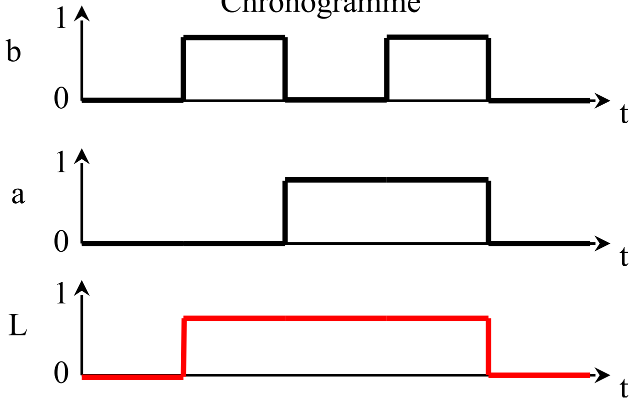
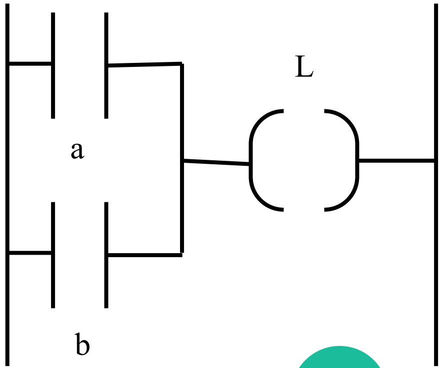


Schéma à contacts



Fonctions logiques de base

- **Fonction ET (sur deux entrées ou plus)**

$$\boxed{L = a \bullet b}$$

Logigramme

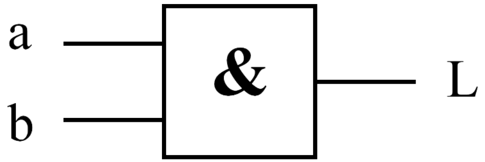
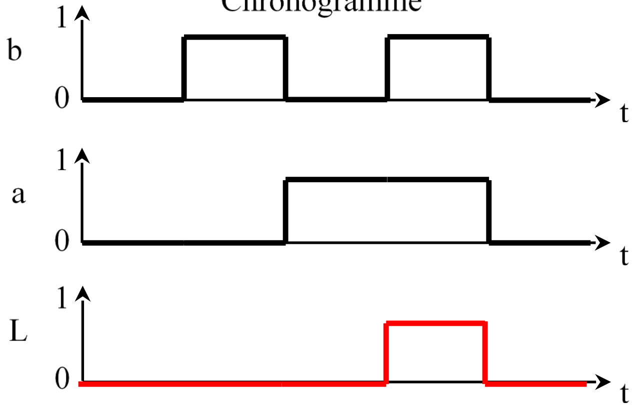
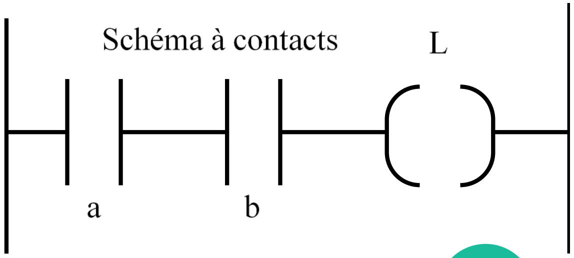


Table de vérité

a	b	L
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Chronogramme





Propriétés de l’algèbre de Boole

Eléments neutres et absorbants des fonctions ET et OU

$A . 1 = A$ **$A + 0 = A$** **$A . 0 = 0$** **$A + 1 = 1$**

Idempotence des fonctions ET et OU

$A . A = A$ **$A + A = A$** **$A . \overline{A} = 0$** **$A + \overline{A} = 1$**

Involution des fonctions ET et OU : $\overline{\overline{A}} = A$

Propriétés de l'algèbre de Boole

Commutativité : des fonctions ET et OU

$\mathbf{A \,.\, B = B \,.\, A}$ $\qquad$ $\mathbf{A + B = B + A}$

Associativité : des fonctions ET et OU

$\mathbf{A \,.\, (B \,.\, C) = (A \,.\, B) \,.\, C = A \,.\, B \,.\, C}$ $\qquad$ $\mathbf{A + (B + C) = (A + B) + C = A + B + C}$

Distributivité

- de la fonction ET par rapport à la fonction OU. $\quad \mathbf{A \,.\, (B + C) = (A \,.\, B) + (A \,.\, C)}$

- de la fonction OU par rapport à la fonction ET $\quad \mathbf{A + (B \,.\, C) = (A + B) \,.\, (A + C)}$

  cette seconde distributivité n'est possible que dans l'algèbre de Boole.

Absorption

$\mathbf{A + A \,.\, B = A}$ $\qquad$ $\mathbf{A + \overline{A} \,.\, B = A + B}$

Fonctions logiques complémentaires

- **Fonction NON-ET (*NAND*)**

$$\boxed{L=\overline{a \bullet b}}$$

Logigramme

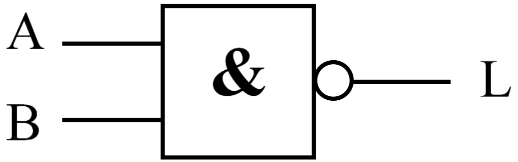


Table de vérité

a	b	L
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Chronogramme

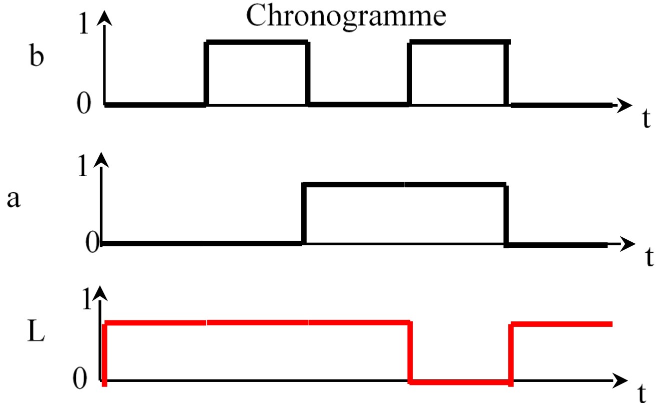
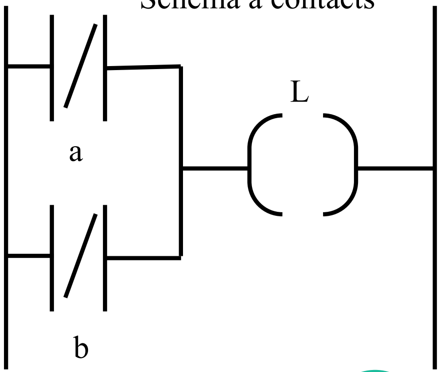


Schéma à contacts



- **Fonction NON-OU (*NOR*)**

$$\boxed{L=\overline{a+b}}$$

Logigramme

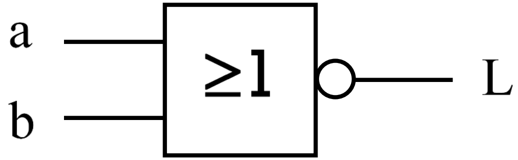


Table de vérité

a	b	L
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

Chronogramme

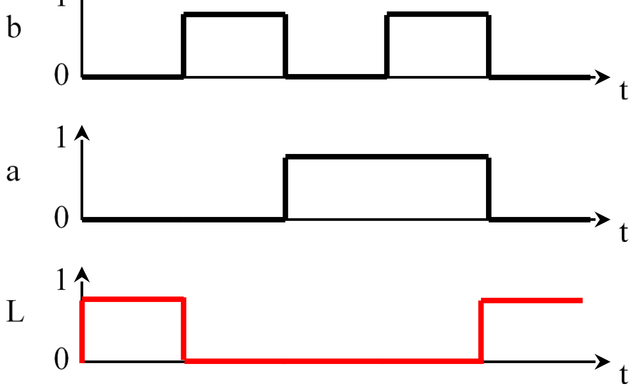
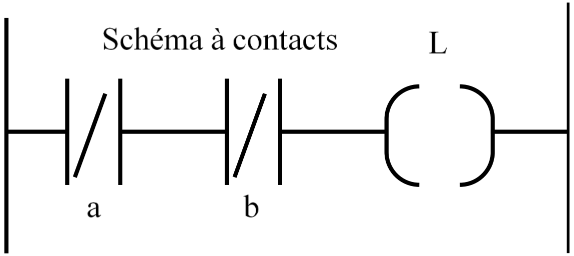


Schéma à contacts



Fonctions logiques complémentaires

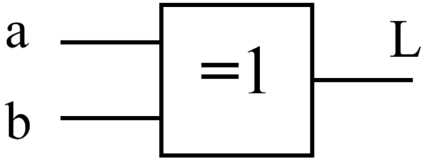
- **Fonction OU EXCLUSIF (*XOR*)**

$$L = a \oplus b = \overline{a} \bullet b + a \bullet \overline{b}$$

Table de vérité

a	b	L
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Logigramme



Chronogramme

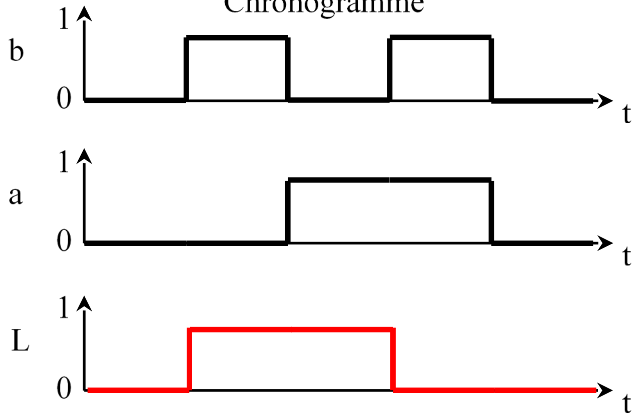
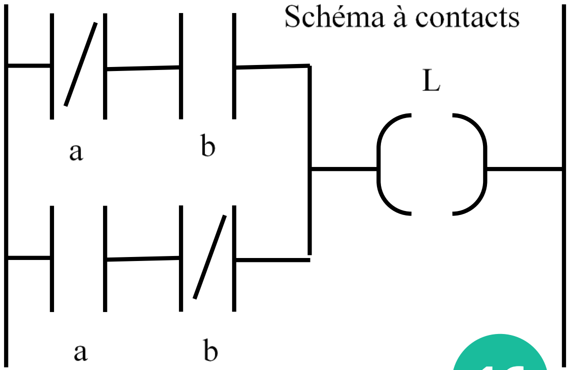


Schéma à contacts

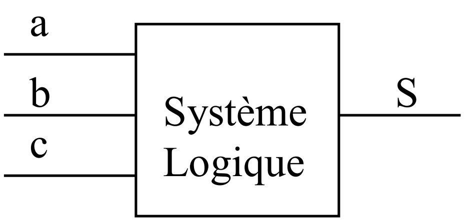


Simplification des fonctions logiques

- **Théorème de De Morgan**

$$\overline{a+b}=\overline{a}\bullet\overline{b} \qquad \overline{a\bullet b}=\overline{a}+\overline{b}$$

• Tableaux de Karnaugh : exemple 1



Passage d'une case adjacente ⇒
Modification d'une seule variable d'entrée

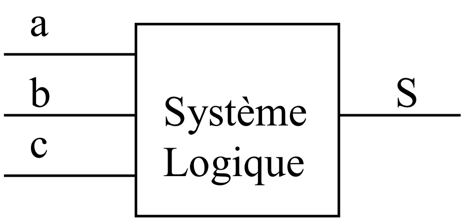
3 variables d'entrées ⇒ 2^3 combinaisons
⇒ tableaux à 8 cases

S

a \ bc	00	01	11	10
0	**0**	**1**	**0**	**0**
1	**0**	**1**	**0**	**0**

b
c

- **Tableaux de Karnaugh : exemple 1**



3 variables d'entrées $\Rightarrow 2^3$ combinaisons
$\Rightarrow$ tableaux à 8 cases

Passage d'une case adjacente $\Rightarrow$
Modification d'une seule variable d'entrée

S (a \ bc)	00	01	11	10
0	**0**	**1**	**0**	**0**
1	**0**	**1**	**0**	**0**

$\boxed{\bar{a}\bullet\bar{b}\bullet c}$

$\boxed{a\bullet\bar{b}\bullet c}$

$$S=\bar{a}\bullet\bar{b}\bullet c+a\bullet\bar{b}\bullet c=\left(\bar{a}+a\right)\bullet\bar{b}\bullet c=\bar{b}\bullet c$$

Simplification des fonctions logiques

• Tableaux de Karnaugh : exemple 2

Soit le système décrit par l'équation logique suivante :

$$S = B \bullet D + \overline{B} \bullet \overline{C} \bullet \overline{D} + A \bullet \overline{B} \bullet C \bullet D + \overline{B} \bullet C \bullet \overline{D} + A \bullet B \bullet C \bullet \overline{D}$$

Ici, nous avons 4 variables $\Rightarrow 2^4$ combinaisons $\Rightarrow$ tableaux à 16 cases

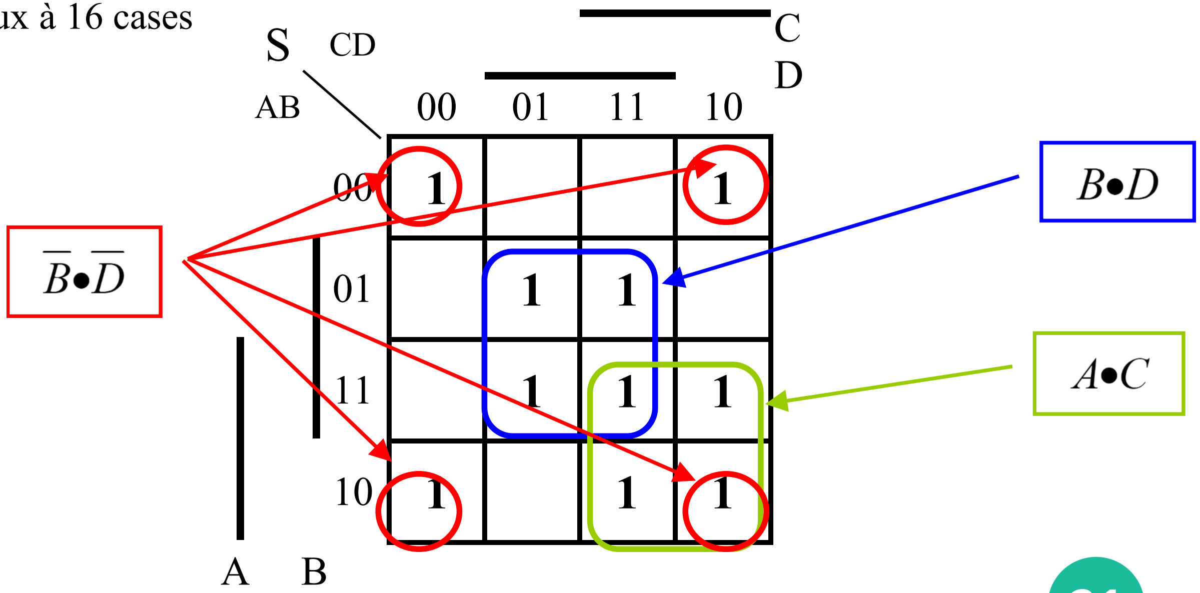
S — AB \ CD	00	01	11	10
00	**1**			**1**
01		**1**	**1**	
11		**1**	**1**	**1**
10	**1**		**1**	**1**

• Tableaux de Karnaugh : exemple 2

Soit le système décrit par l'équation logique suivante :

$$S = B \bullet D + \overline{B} \bullet \overline{C} \bullet \overline{D} + A \bullet \overline{B} \bullet C \bullet D + \overline{B} \bullet C \bullet \overline{D} + A \bullet B \bullet C \bullet \overline{D}$$

Ici, nous avons 4 variables $\Rightarrow 2^4$ combinaisons $\Rightarrow$ tableaux à 16 cases



$$S = B \bullet D + \overline{B} \bullet \overline{D} + A \bullet C$$

Exercices

- **Démontrer avec une table de vérité la propriété de distributivité du OU sur le ET**

$$A + (B \, . \, C) = (A + B) \, . \, (A + C)$$

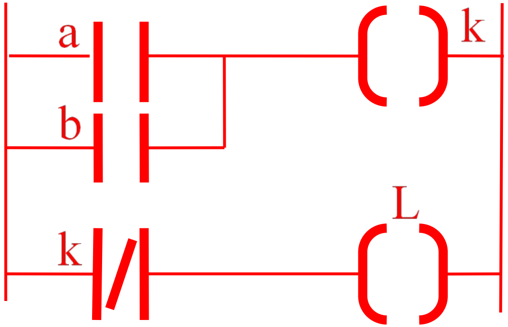
Exercices

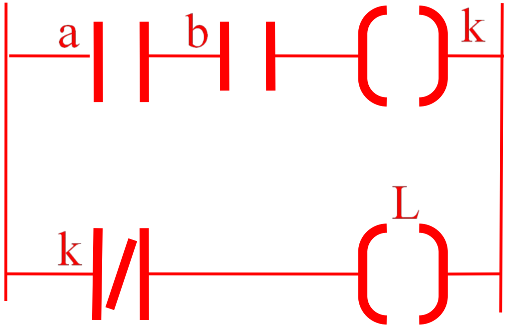
- Donner la forme exacte du schéma à contacts du NAND : $L=\overline{a \bullet b}=\overline{a}+\overline{b}$
- Donner la forme exacte du schéma à contacts du NOR : $L=\overline{a+b}=\overline{a}\bullet\overline{b}$

Exercices

- Donner la forme exacte du schéma à contacts du NAND : $L=\overline{a \bullet b}=\bar{a}+\bar{b}$

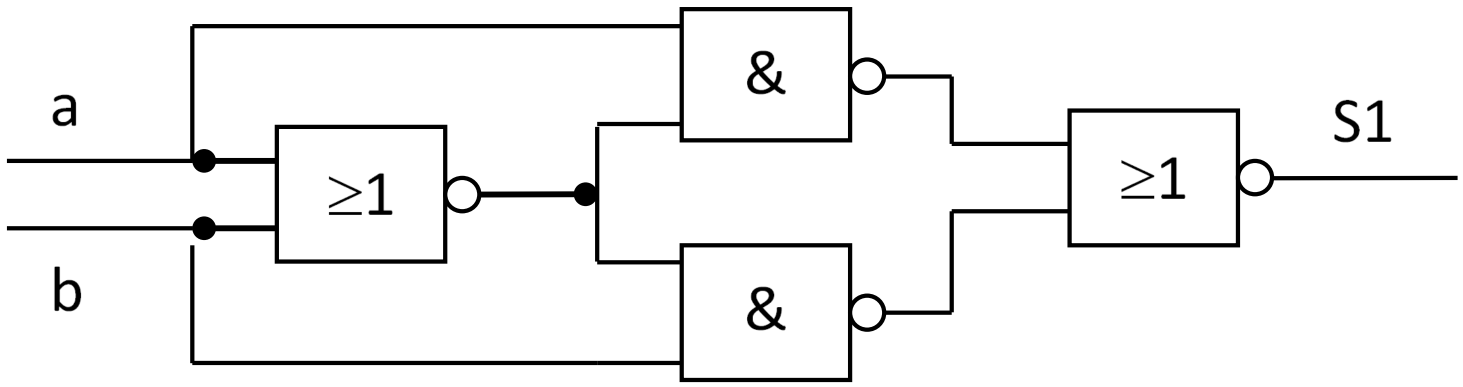
- Donner la forme exacte du schéma à contacts du NOR : $L=\overline{a+b}=\bar{a}\bullet\bar{b}$





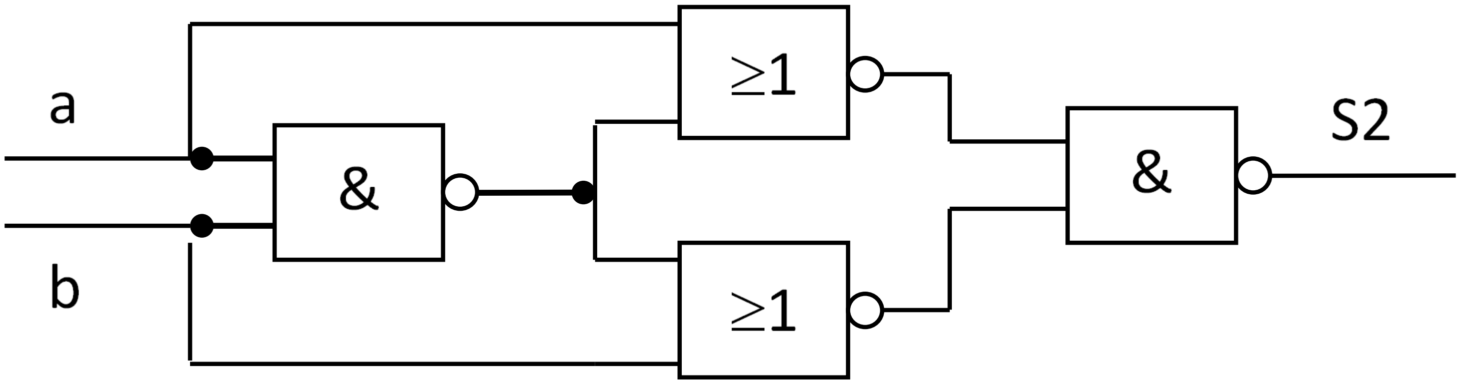
Exercices

- **Donner l'équation simplifiée de S1**



Exercices

- **Donner l'équation simplifiée de S2**



Fin

Bibliographie :

Boujat G., Anaya P. : Automatique industrielle en 20 fiches, Dunod

Documentation constructeur Siemens :

https://mall.industry.siemens.com