Nombres Complexes

Rappels

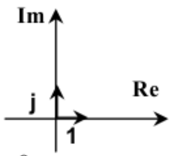
Fiche de rappel

CALCULS SUR LES COMPLEXES

RAPPELS DE COURS

▫ Soient a et b deux constantes réelles ; z = a + b j est un nombre complexe quelconque.

Module de z : $\left| \mathbf{a + b\,j} \right| = \sqrt{\mathbf{a^2 + b^2}}$; **phase (ou argument)** de z : $\phi = \mathbf{Arg\,(a + bj) = tan^{-1}\,(\frac{b}{a})}$



▫ **Cas particuliers importants**

si $\underline{z}$ = **a** (nombre **réel pur**) alors : $|\underline{z}| = |a|$; **éviter** $\sqrt{a^2}$ et $\mathbf{Arg\,\underline{z} = 0}$ **ou** $\boldsymbol{\pi}$; **ne pas écrire** $\mathbf{tan^{-1}\,(\frac{0}{a})}$.

si a > 0 ; *si a < 0*

si $\underline{z}$ = **b j** (**imaginaire pur**) alors : $|\underline{z}| = |b|$; **éviter** $\sqrt{b^2}$ et $\mathbf{Arg\,\underline{z} = +/-\frac{\pi}{2}}$; **ne pas écrire** $\mathbf{tan^{-1}\,(\frac{b}{0})}$.

si b > 0 ; *si b <0*

Exemples :

Pour **z = -0,5** on a : $\mathbf{|-0{,}5| = 0{,}5\,;\ Arg\,(-0{,}5) = \pi\ \ (ou\ -\pi)}$.

Pour **z = 1,3 j** on a: $\mathbf{|1{,}3\,j| = 1{,}3\,;\ Arg\,(1{,}3\,j) = +\frac{\pi}{2}}$.

▫ **Propriétés**

Soient $\underline{N}$ et $\underline{D}$ deux nombres complexes.

> ATTENTION : <u>ne jamais développer un produit</u>, pour calculer un module ou une phase : complications et résultats non exploitables! Utiliser les règles ci-dessous.

Règles :

- sur le **<u>produit</u>** : Module $\left|\underline{\mathbf{N}}\,.\,\underline{\mathbf{D}}\right| = |\underline{\mathbf{N}}|\,.\,|\underline{\mathbf{D}}|$; Argument (ou phase) $\mathbf{Arg\,(\underline{N}\,.\,\underline{D}) = Arg\,(\underline{N}) + Arg\,(\underline{D})}$
- le **<u>quotient</u>** : Module $\left|\frac{\underline{\mathbf{N}}}{\underline{\mathbf{D}}}\right| = \frac{|\underline{\mathbf{N}}|}{|\underline{\mathbf{D}}|}$; Argument (ou phase) $\mathbf{Arg\,(\frac{\underline{N}}{\underline{D}}) = Arg\,(\underline{N}) - Arg\,(\underline{D})}$

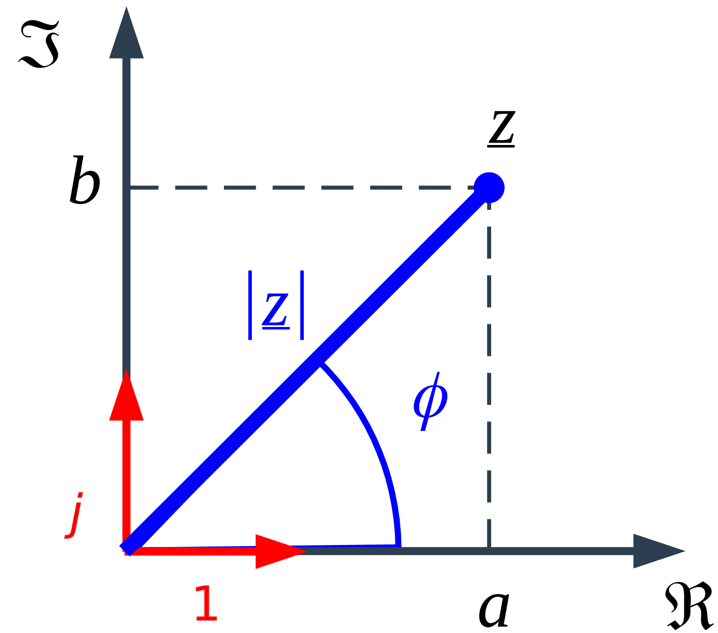
⚠ **<u>Pas de règles</u>** sur la **somme** (et **différence**) $\left|\underline{\mathbf{N}} + \underline{\mathbf{D}}\right| \neq |\underline{\mathbf{N}}| + |\underline{\mathbf{D}}|$ et $\mathbf{Arg\,(\underline{N} + \underline{D}) \neq Arg\,(\underline{N}) + Arg\,(\underline{D})}$.

▫ **Cas particulier important**

Pour l'exponentielle imaginaire $\mathbf{e^{jx} = cos\,x + j\,sin\,x}$; on a : $\mathbf{|e^{jx}| = 1}$ **et** $\mathbf{Arg\,(e^{jx}) = x}$ **avec x exprimé en** $\boxed{\textbf{radian}}$.

Module et Phase

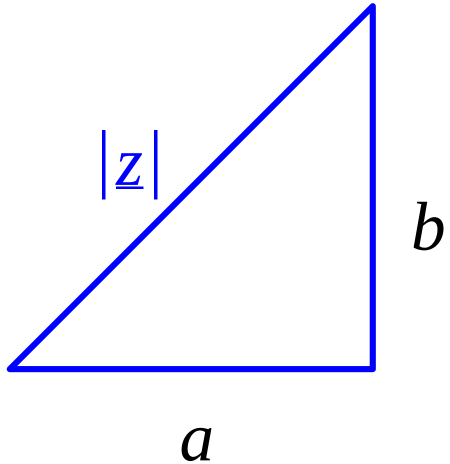
$\underline{z} = a + b \cdot j \qquad a, b \in \mathbb{R} ; z \in \mathbb{C}$



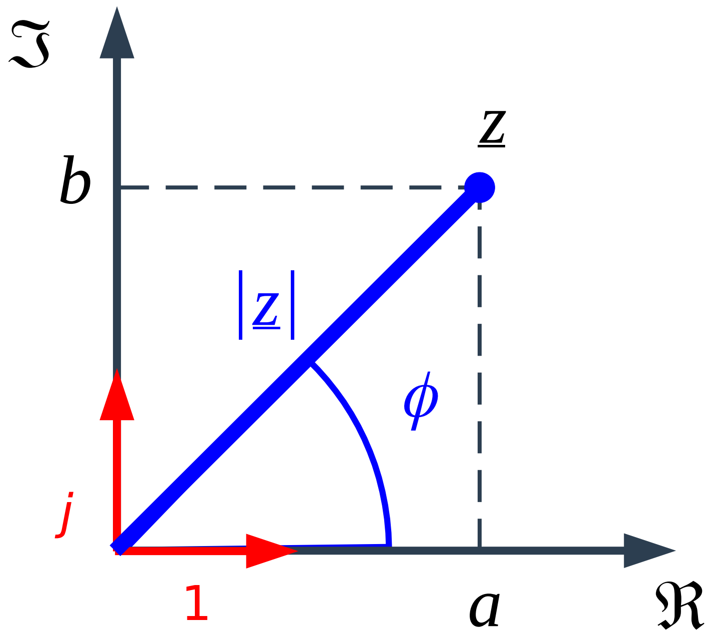
Module et Phase

$\underline{z} = a + b \cdot j \qquad a, b \in \mathbb{R} \,;\, \underline{z} \in \mathbb{C}$

- **Module** $\quad |\underline{z}| = \sqrt{a^2 + b^2}$



Phytagore : $\left(|\underline{z}|\right)^2 = a^2 + b^2$

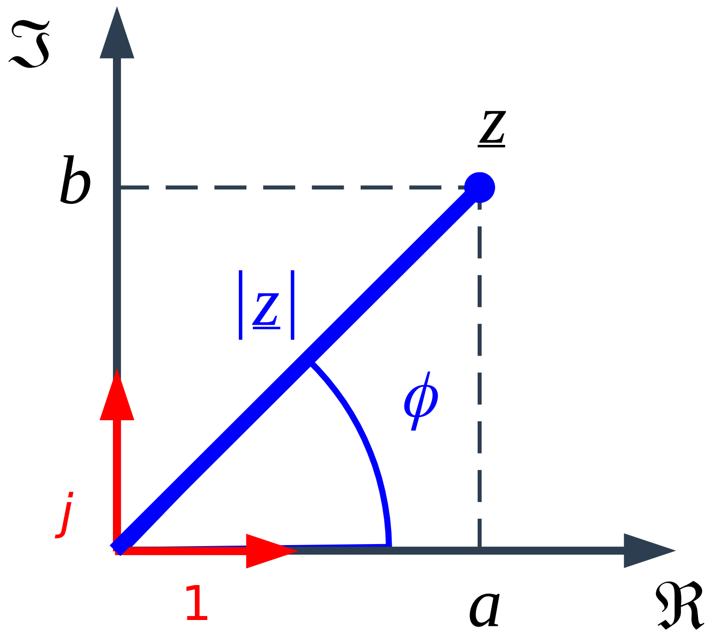


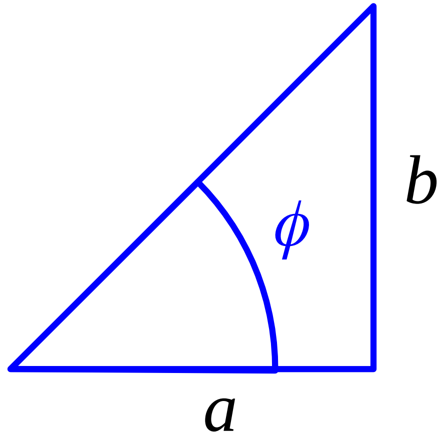
Module et Phase

$\underline{z} = a + b \cdot j \qquad a, b \in \mathbb{R}\,;\, z \in \mathbb{C}$

- **Module** $\quad |\underline{z}| = \sqrt{a^2 + b^2}$

- **Phase** $\quad arg(\underline{z}) = \arctan\left(\frac{b}{a}\right)$





$$\tan(\phi) = \frac{\textit{côté opposé}}{\textit{côté adjacent}} = \frac{b}{a}$$

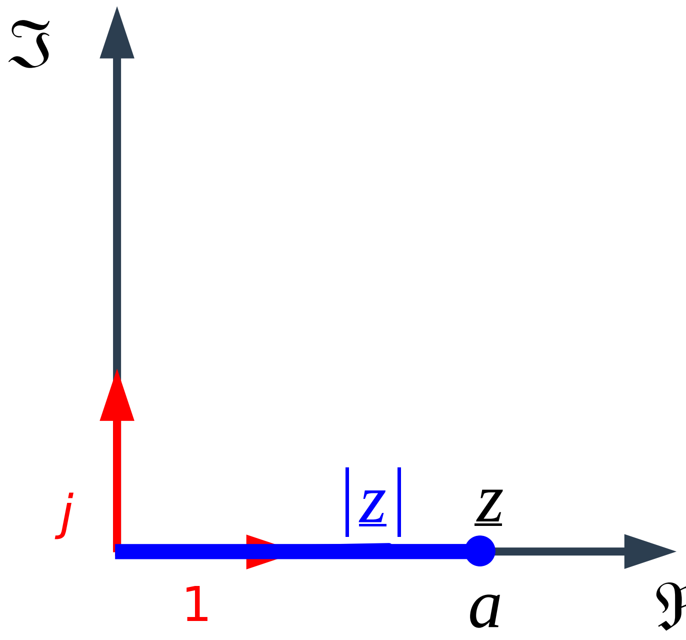
Module et Phase

Cas particuliers

- $\underline{z} = a$ (cas d'un réel pur)

$$\Rightarrow |\underline{z}| = |a|$$

$$\Rightarrow \begin{cases} arg(\underline{z}) = 0 \text{ si } a > 0 \\ \qquad\qquad . \end{cases}$$



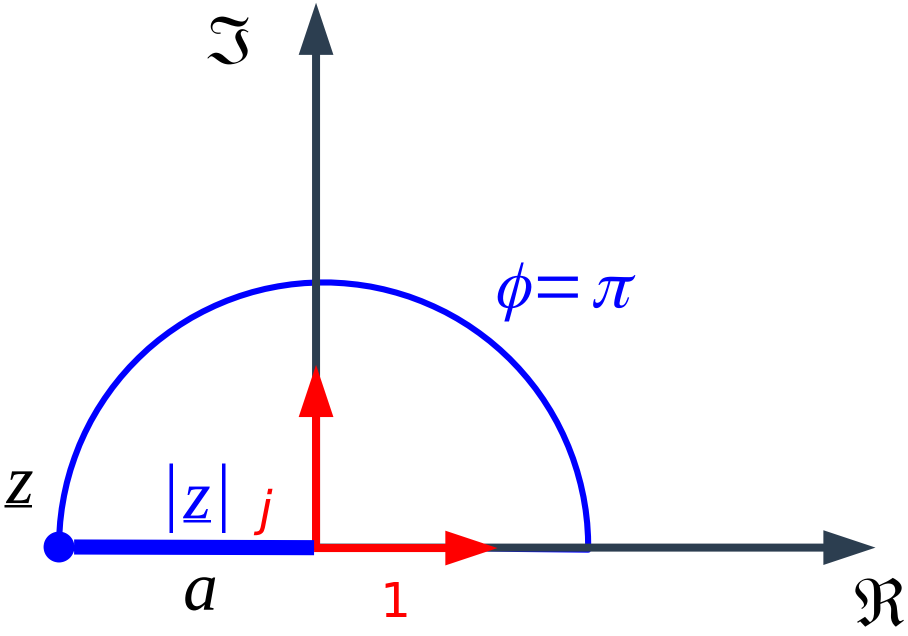
Module et Phase

Cas particuliers

– $\underline{z} = a$ (cas d'un réel pur)

$$\Rightarrow |\underline{z}| = |a|$$

$$\Rightarrow \begin{cases} arg(\underline{z}) = 0 \text{ si } a > 0 \\ arg(\underline{z}) = \pi \text{ si } a < 0 \end{cases}$$



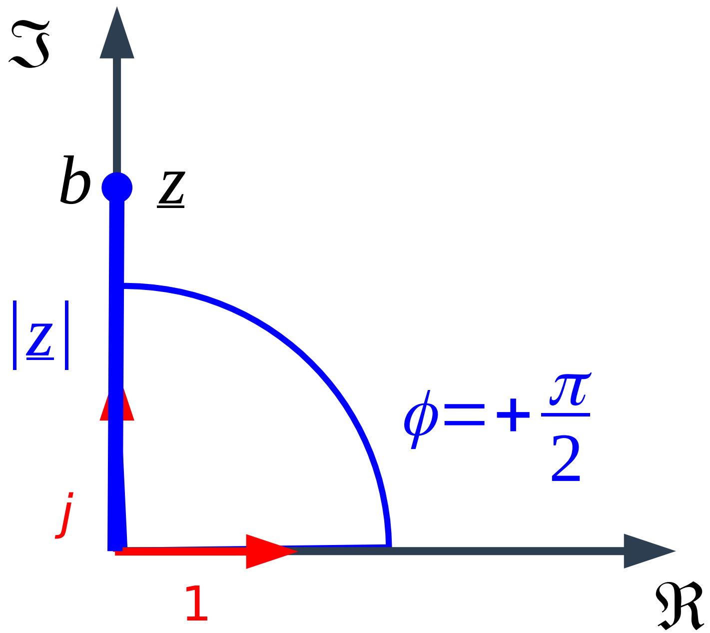
Module et Phase

Cas particuliers

- $\underline{z} = b \cdot j$ (cas d'un imaginaire pur)

$$\Rightarrow |\underline{z}| = |b|$$

$$\Rightarrow \begin{cases} arg(\underline{z}) = +\frac{\pi}{2} \text{ si } b > 0 \\ . \end{cases}$$



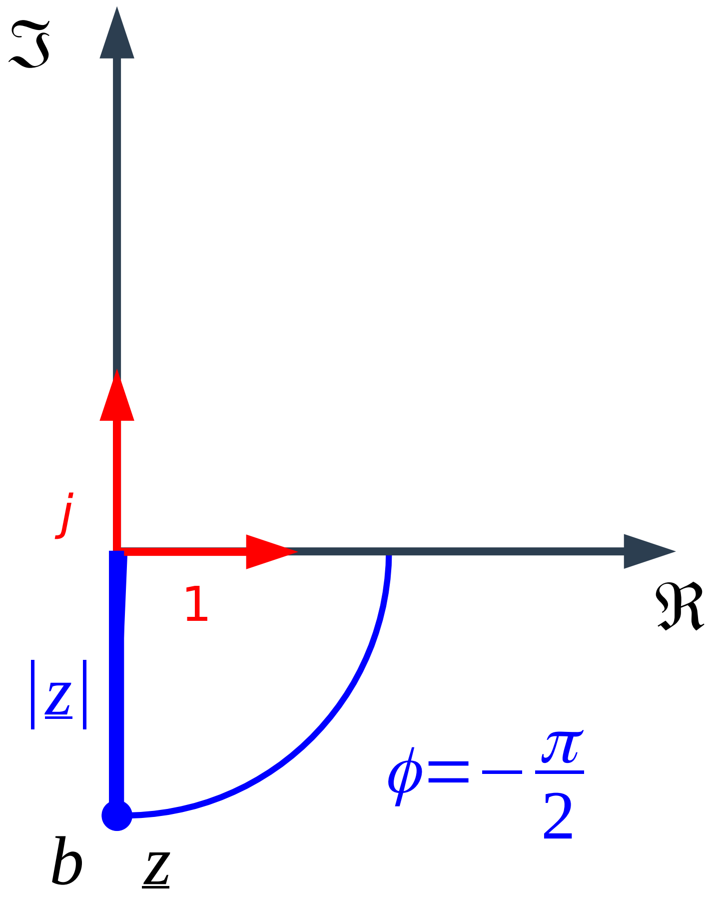
Module et Phase

Cas particuliers

- $\underline{z} = b \cdot j$ (cas d'un imaginaire pur)

$$\Rightarrow |\underline{z}| = |b|$$

$$\Rightarrow \begin{cases} arg(\underline{z}) = +\frac{\pi}{2} \text{ si } b > 0 \\ arg(\underline{z}) = -\frac{\pi}{2} \text{ si } b < 0 \end{cases}$$



Module et Phase

Exemples

- $\underline{z} = -0,5$

$$\Rightarrow |\underline{z}| \,?$$

$$\Rightarrow arg(\underline{z}) \,?$$

Module et Phase

Exemples

- $\underline{z}=-0,5$

$$\Rightarrow |\underline{z}|=|-0,5|=0,5$$

$$\Rightarrow arg(\underline{z})=\pi$$

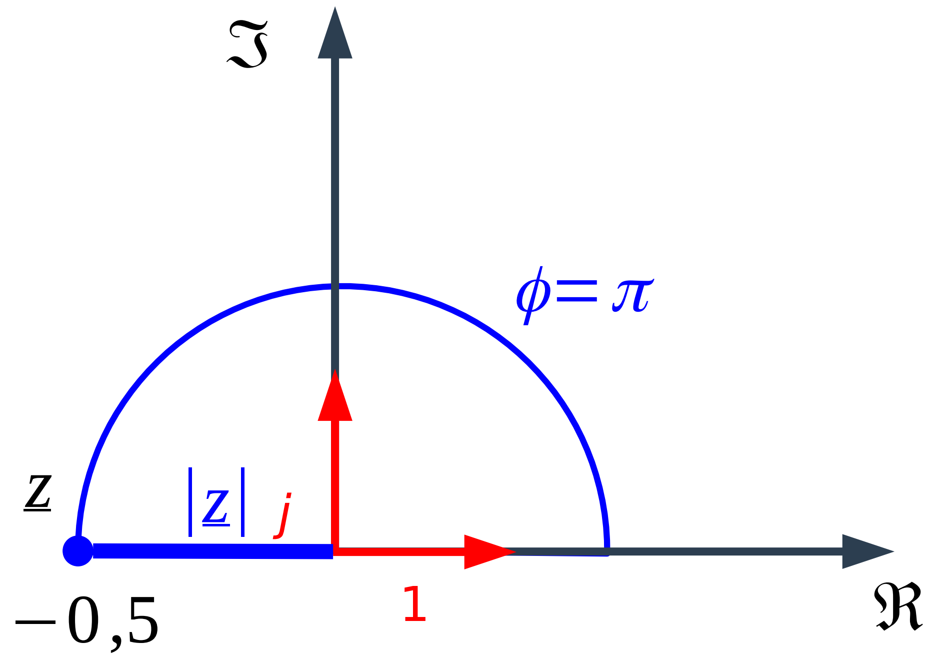
Module et Phase

Exemples

- $\underline{z} = -0{,}5$

$$\Rightarrow |\underline{z}| = |-0{,}5| = 0{,}5$$

$$\Rightarrow arg(\underline{z}) = \pi$$



Module et Phase

Exemples

- $\underline{z} = 1{,}3 \cdot j$

$$\Rightarrow |\underline{z}| ?$$

$$\Rightarrow arg(\underline{z}) ?$$

Module et Phase

Exemples

- $\underline{z} = 1{,}3 \cdot j$

$$\Rightarrow |\underline{z}| = |1{,}3| = 1{,}3$$

$$\Rightarrow arg(\underline{z}) = +\frac{\pi}{2}$$

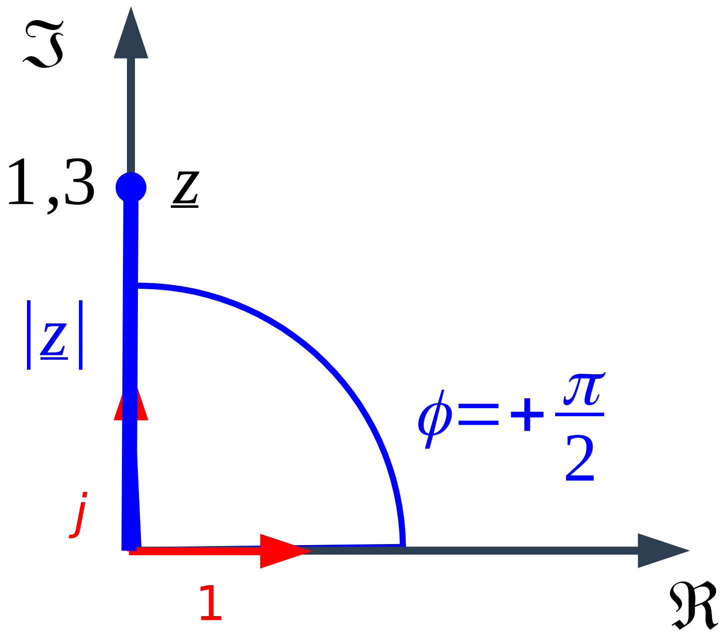
Module et Phase

Exemples

- $\underline{z} = 1{,}3 \cdot j$

$$\Rightarrow |\underline{z}| = |1{,}3| = 1{,}3$$

$$\Rightarrow arg(\underline{z}) = +\frac{\pi}{2}$$



Opérations entre complexes

Règles

Soit $\underline{N}$ et $\underline{D}$ deux nombres complexes

- **Produit** $|\underline{N}\cdot\underline{D}|=|\underline{N}|\cdot|\underline{D}|$ **et** $arg(\underline{N}\cdot\underline{D})=arg(\underline{N})+arg(\underline{D})$

- **Quotient** $|\frac{\underline{N}}{\underline{D}}|=\frac{|\underline{N}|}{|\underline{D}|}$ **et** $arg(\frac{\underline{N}}{\underline{D}})=arg(\underline{N})-arg(\underline{D})$

Opérations entre complexes

Règles

Soit $\underline{N}$ et $\underline{D}$ deux nombres complexes

Aucune règle concernant l'addition et la soustraction

$$\left|\underline{N}+\underline{D}\right| \neq \left|\underline{N}\right|+\left|\underline{D}\right| \qquad arg\left(\underline{N}-\underline{D}\right) \neq arg\left(\underline{N}\right)-arg\left(\underline{D}\right)$$

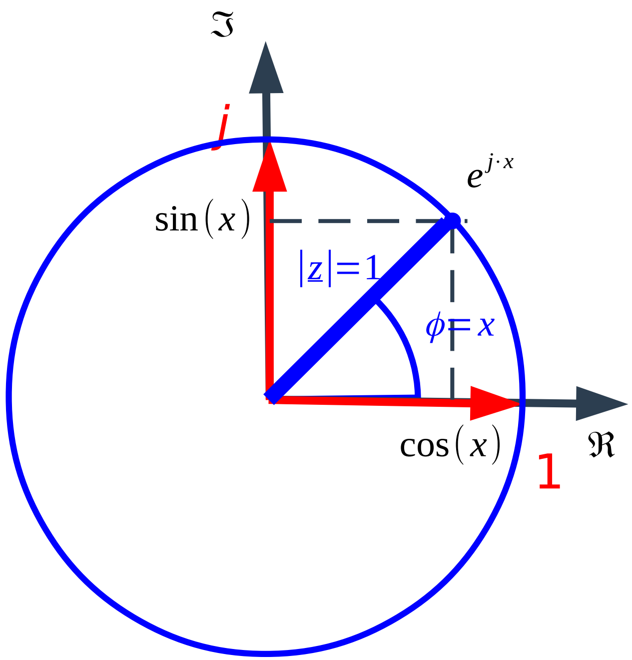
Exponentielle complexe

$$e^{j\cdot x} = \cos(x) + \sin(x)\,j$$

- **Module** $\quad |e^{j\cdot x}| = \sqrt{\cos(x)^2 + \sin(x)^2} = 1$

- **Phase** $\quad arg(e^{j\cdot x}) = \arctan\left(\dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}\right) = \arctan(\tan(x)) = x$

(si x exprimé en radians)



dans le plan complexe, $e^{j\cdot x}$ se trouve sur le cercle unité.

Nombres Complexes

Exercices

Exercices

Ex 1

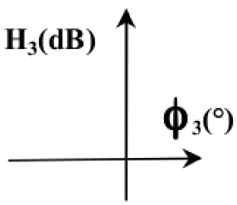
Déterminer les modules et arguments (phases) en fonction de ω des nombres complexes ci-dessous :

① $-10\,j\,\omega$ ② $\dfrac{1}{1+2\,j\omega}$ ③ $\dfrac{0{,}8}{(1+20j\omega)\,(1+j\omega)}$ ④ $\dfrac{e^{-2j\omega}}{1+10\,j\omega}$

Ex 2

Soit la fonction de transfert d'un procédé $\mathbf{H_3\,(p)=\dfrac{e^{-2p}}{1+4p}}$.

On souhaite tracer le diagramme de Black de cette fonction. Le diagramme de Black représente l'évolution du module $\mathbf{H_3}$ (exprimé en décibels) en fonction de la phase $\boldsymbol{\phi_{H_3}}$ (exprimé en degrés) de la fonction de transfert du procédé.



1. Déterminer $\underline{\mathbf{H_3}}\mathbf{(j\omega)}$.

2. Exprimer son module $\left|\underline{\mathbf{H_3}}\,\mathbf{(j\omega)}\right|$ et sa phase (argument) $\boldsymbol{\phi_{H3}\,(\omega)=\mathrm{Arg}\,\underline{H_3}\,(j\omega)}$ en fonction de ω.

3. Exprimer $\left|\underline{\mathbf{H_3}}\,\mathbf{(j\omega)}\right|$ en décibels et $\boldsymbol{\phi_{H3}\,(\omega)}$ en degrés.

4. Tracer le diagramme de Black de $\underline{\mathbf{H_3}}\mathbf{(j\omega)}$.

Ex 3

Soit la fonction de transfert d'un procédé $\mathbf{H_4(p)=\dfrac{0{,}5}{(1+2p)^3}}$. Tracer le diagramme de Black de $\underline{\mathbf{H_4}}\mathbf{(j\omega)}$.

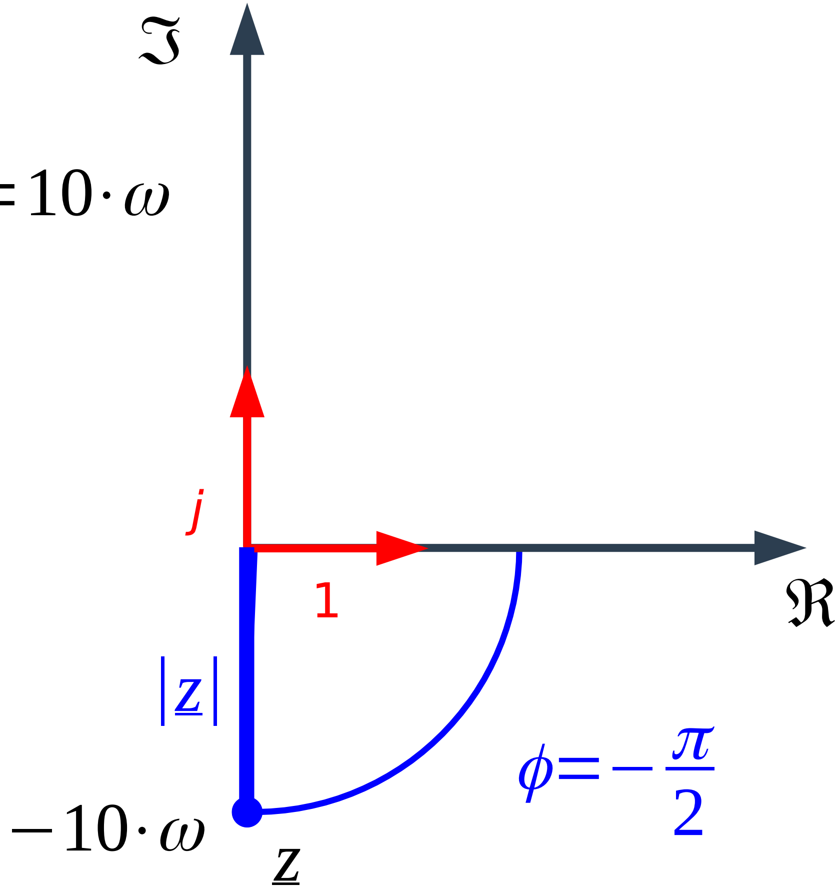
Exercice 1

- $\underline{\underline{z}} = -10 \cdot j\,\omega$
  - Module : ?
  - Phase : ?

Exercice 1

- $\underline{z} = -10 \cdot j\,\omega$
  - Module : $|-10 \cdot j\,\omega| = |-10 \cdot \omega| = 10 \cdot \omega$
  - Phase : $arg(-10 \cdot j\,\omega) = -\dfrac{\pi}{2}$

    , car $-10 \cdot \omega < 0$



Exercice 1

- $\underline{z} = \dfrac{1}{1+2 \cdot j\omega}$
  - Module : ?
  - Phase : ?

Exercice 1

- $\underline{z} = \frac{1}{1+2\cdot j\,\omega} = \frac{\underline{N}}{\underline{D}}$
  - Module : $|\underline{z}| = |\frac{\underline{N}}{\underline{D}}| = \frac{|\underline{N}|}{|\underline{D}|} = \frac{|1|}{|1+2\cdot j\,\omega|}$
  - Phase : $arg(\underline{z}) = arg(\frac{\underline{N}}{\underline{D}}) = arg(\underline{N}) - arg(\underline{D})$

    $= arg(1) - arg(1+2\cdot j\,\omega)$

Exercice 1

- $\underline{z} = \dfrac{1}{1+2 \cdot j\,\omega}$
  - Module : $|\underline{z}| = \dfrac{|1|}{|1+2 \cdot j\,\omega|} = \dfrac{1}{\sqrt{1^2+(2 \cdot \omega)^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{1+4 \cdot \omega^2}}$
  - Phase : $$\begin{aligned} arg(\underline{z}) &= arg(1) - arg(1+2 \cdot j\,\omega) \\ &= 0 - arg(1+2 \cdot j\,\omega) \\ &= -atan\left(\frac{2 \cdot \omega}{1}\right) \\ &= -atan(2 \cdot \omega) \end{aligned}$$

Exercice 1

- $\underline{z}=\frac{0,8}{(1+20\cdot j\,\omega)(1+j\,\omega)}=\frac{\underline{N}}{\underline{D_1}\times\underline{D_2}}$
  - Module : $|\underline{z}|=|\frac{\underline{N}}{\underline{D_1}\times\underline{D_2}}|=\frac{|\underline{N}|}{|\underline{D_1}|\times|\underline{D_2}|}=\frac{|0,8|}{|1+20\cdot j\,\omega|\times|1+j\,\omega|}$
  - Phase : $arg(\underline{z})=arg(\frac{\underline{N}}{\underline{D_1}\times\underline{D_2}})=arg(\underline{N})-arg(\underline{D_1})-arg(\underline{D_2})$
    $=arg(0,8)-arg(1+20\cdot j\,\omega)-arg(1+j\,\omega)$

Exercice 1

- $\underline{z} = \dfrac{0,8}{(1+20\cdot j\,\omega)(1+j\,\omega)}$
  - Module : $|\underline{z}| = \dfrac{|0,8|}{|1+20\cdot j\,\omega| \times |1+j\,\omega|} = \dfrac{0,8}{\sqrt{1+400\cdot\omega^2} \times \sqrt{1+\omega^2}}$
  - Phase : $$\begin{aligned} arg(\underline{z}) &= arg(0,8) - arg(1+20\cdot j\,\omega) - arg(1+j\,\omega) \\ &= 0 - arg(1+20\cdot j\,\omega) - arg(1+j\,\omega) \\ &= -atan(20\cdot\omega) - atan(\omega) \end{aligned}$$

ATTENTION : ne jamais développer un produit, pour calculer un module ou une phase

Exercice 1

- $\underline{z} = \dfrac{e^{-2j\omega}}{1+10\cdot j\omega}$
  - Module : $|\underline{z}| = \dfrac{|e^{-2j\omega}|}{|1+10\cdot j\omega|} = \dfrac{1}{\sqrt{1+100\cdot\omega^2}}$
  - Phase : $\begin{aligned} arg(\underline{z}) &= arg(e^{-2j\omega}) - arg(1+20\cdot j\omega) \\ &= -2\omega - atan(10\cdot\omega) \end{aligned}$

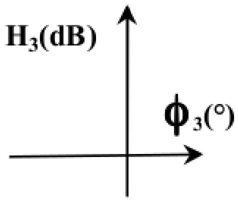
QCM n°1

Exercices

Ex 2

Soit la fonction de transfert d'un procédé $\mathbf{H_3\ (p) = \dfrac{e^{-2p}}{1 + 4p}}$.

On souhaite tracer le diagramme de Black de cette fonction. Le diagramme de Black représente l'évolution du module $\mathbf{H_3}$ (exprimé en décibels) en fonction de la phase $\boldsymbol{\phi_{H3}}$ (exprimé en degrés) de la fonction de transfert du procédé.



1. Déterminer $\mathbf{\underline{H_3}(j\omega)}$.

2. Exprimer son module $\left|\mathbf{\underline{H_3}\ (j\omega)}\right|$ et sa phase (argument) $\boldsymbol{\phi_{H3}\ (\omega) = \mathrm{Arg}\ \underline{H_3}\ (j\omega)}$ en fonction de ω.

3. Exprimer $\left|\mathbf{\underline{H_3}\ (j\omega)}\right|$ en décibels et $\boldsymbol{\phi_{H3}\ (\omega)}$ en degrés.

4. Tracer le diagramme de Black de $\mathbf{\underline{H_3}(j\omega)}$.

Ex 3

Soit la fonction de transfert d'un procédé $\mathbf{H_4(p) = \dfrac{0{,}5}{(1 + 2p)^3}}$. Tracer le diagramme de Black de $\mathbf{\underline{H_4}(j\omega)}$.

Exercice 2

- $H_3(p)=\dfrac{e^{-2p}}{1+4p}$
  - $\underline{H_3}(j\omega)=\dfrac{e^{-2j\omega}}{1+4j\omega}$
  - Module : $|\underline{H_3}|=\dfrac{|e^{-2j\omega}|}{|1+4\cdot j\omega|}=\dfrac{1}{\sqrt{1+16\cdot\omega^2}}$
  - Phase : $\varphi_{H_3}=arg(\underline{H_3}) \quad = \quad arg(e^{-2j\omega})-arg(1+4\cdot j\omega)$
    $\qquad = \quad -2\omega-atan(4\cdot\omega)$

Exercice 2

– Expression du module en décibels

$$H_3(dB) = 20\log(|\underline{H_3}|) = 20\log\left(\frac{1}{\sqrt{1+16\cdot\omega^2}}\right)$$

– Expression de la phase en degrés :

$$\varphi_3(°) = \frac{180}{\pi}\cdot arg(\underline{H_3})$$

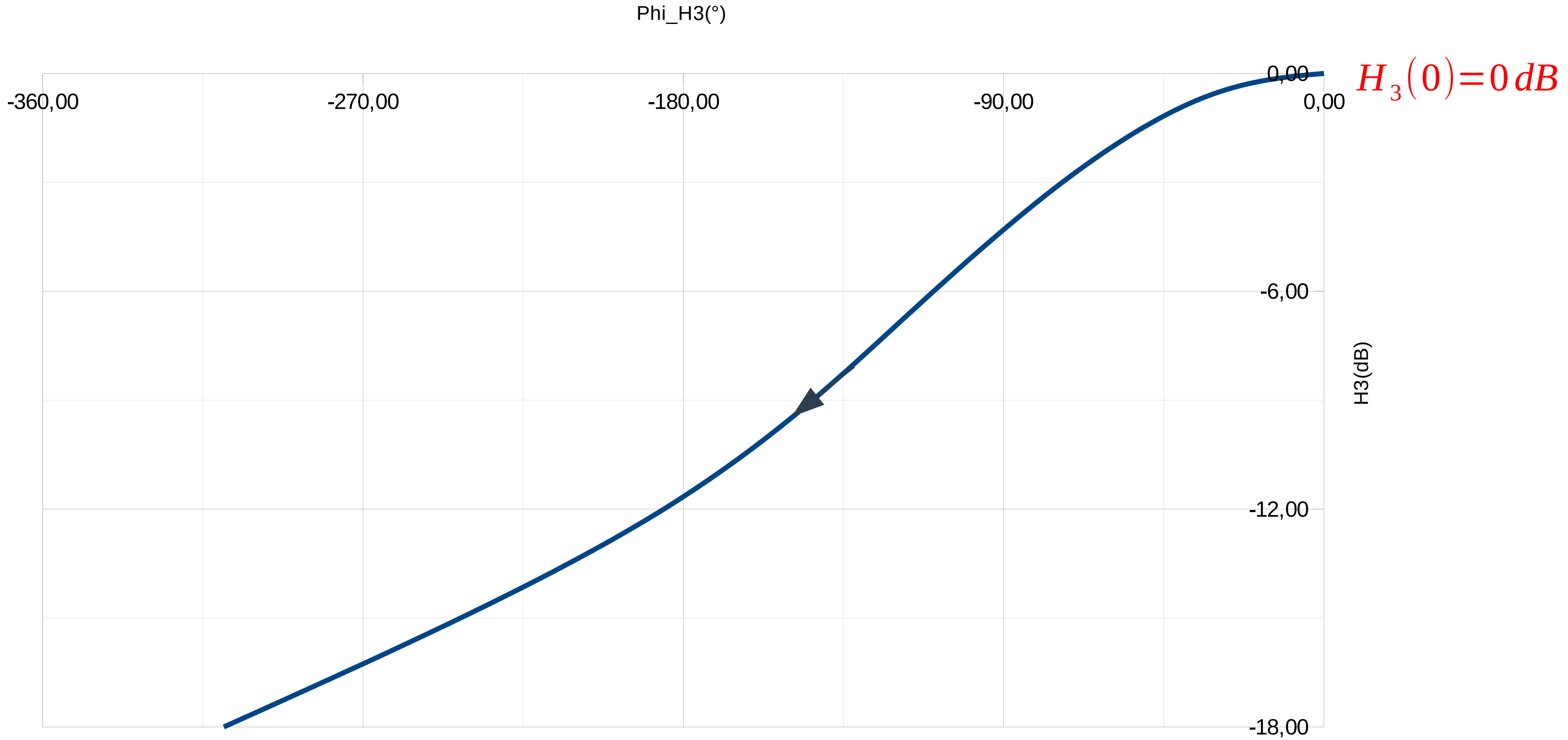
Exercice 2

– Tableau de valeurs :

w (rad/s)	H3(w)	H3db	Arg(H3(w))	Phi_H3(°)
0	1,00	0,00	0,00	0,00
0,1	0,93	-0,64	-0,58	-33,26
0,25	0,71	-3,01	-1,29	-73,65
0,5	0,45	-6,99	-2,11	-120,73
1	0,24	-12,30	-3,33	-190,56
2	0,12	-18,13	-5,45	-312,06

Exercice 2

– Diagramme de Black :



Exercice 3

- $H_4(p) = \dfrac{0,5}{(1+2p)^3}$
  - $\underline{H_4}(j\omega) = \dfrac{0,5}{(1+4j\omega)^3}$
  - Module : $|\underline{H_4}| = \dfrac{|0,5|}{(|1+2\cdot j\omega|)^3} = \dfrac{0,5}{(1+4\cdot\omega^2)^{3/2}}$
  - Phase : $\varphi_{H_4} = arg(\underline{H_4}) \;=\; arg(0,5) - 3\cdot arg(1+2\cdot j\omega)$
    $= -0 - 3\,atan(2\cdot\omega)$
    $= -3\,atan(2\cdot\omega)$

Exercice 3

- Expression du module en décibels

$$H_4(dB)=20\log\left(\left|\underline{H_4}\right|\right)=20\log\left(\frac{0,5}{\left(1+4\cdot\omega^2\right)^{3/2}}\right)$$

- Expression de la phase en degrés :

$$\varphi_4(°)=\frac{180}{\pi}\cdot arg\left(\underline{H_4}\right)$$

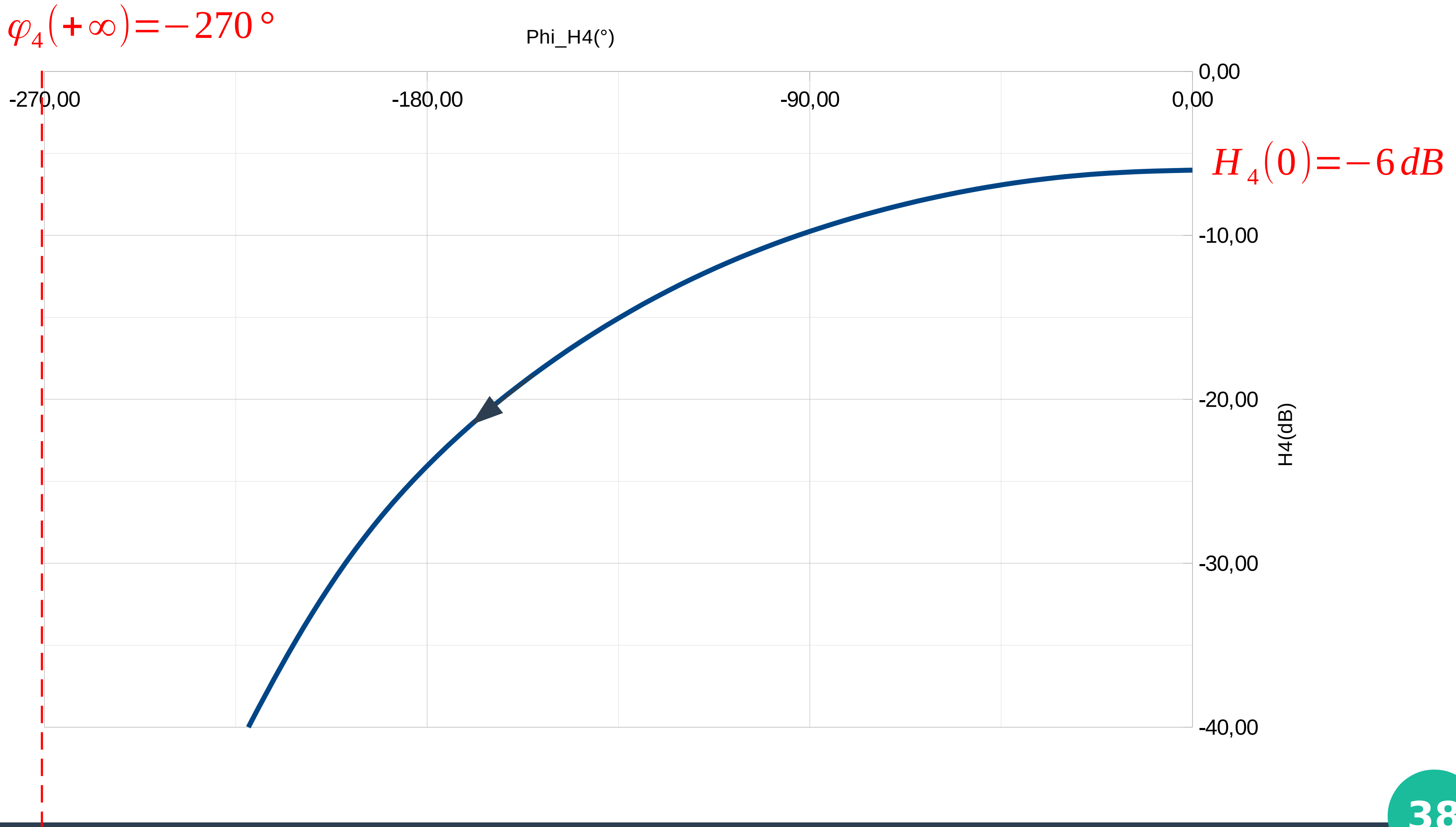
Exercice 3

- Tableau de valeurs :

w (rad/s)	H4(w)	H4db	Arg(H4(w))	Phi_H4(°)
0	0,50	-6,02	0,00	0,00
0,1	0,47	-6,53	-0,59	-33,93
0,25	0,36	-8,93	-1,39	-79,70
0,5	0,18	-15,05	-2,36	-135,00
1	0,04	-26,99	-3,32	-190,30
2	0,01	-42,93	-3,98	-227,89

Exercice 2

– Diagramme de Black :



QCM n°2