

Introduction à l'Optimisation et Bases Mathématiques

R4.03 Maths pour l'IT

Introduction

- **Optimisation** = Trouver la meilleure solution à un problème mathématiquement formulé.

Introduction

- **Optimisation** = Trouver la meilleure solution à un problème mathématiquement formulé.
- Intervient en IA, robotique, vision par ordinateur, finance, production, etc.

Introduction

- **Optimisation** = Trouver la meilleure solution à un problème mathématiquement formulé.
- Intervient en IA, robotique, vision par ordinateur, finance, production, etc.
- Deux grandes familles :
 - Optimisation sans contraintes.

Introduction

- **Optimisation** = Trouver la meilleure solution à un problème mathématiquement formulé.
- Intervient en IA, robotique, vision par ordinateur, finance, production, etc.
- Deux grandes familles :
 - Optimisation sans contraintes.
 - Optimisation sous contraintes.

Introduction

- **Optimisation** = Trouver la meilleure solution à un problème mathématiquement formulé.
- Intervient en IA, robotique, vision par ordinateur, finance, production, etc.
- Deux grandes familles :
 - Optimisation sans contraintes.
 - Optimisation sous contraintes.
- Fonction objectif (ou coût) à **minimiser** ou **maximiser**.

Introduction

- **Optimisation** = Trouver la meilleure solution à un problème mathématiquement formulé.
- Intervient en IA, robotique, vision par ordinateur, finance, production, etc.
- Deux grandes familles :
 - Optimisation sans contraintes.
 - Optimisation sous contraintes.
- Fonction objectif (ou coût) à **minimiser** ou **maximiser**.
- **Notion clé** : la **convexité** de la fonction objectif.

Introduction

- **Optimisation** = Trouver la meilleure solution à un problème mathématiquement formulé.
- Intervient en IA, robotique, vision par ordinateur, finance, production, etc.
- Deux grandes familles :
 - Optimisation sans contraintes.
 - Optimisation sous contraintes.
- Fonction objectif (ou coût) à **minimiser** ou **maximiser**.
- **Notion clé** : la **convexité** de la fonction objectif.

Notion de convexité

- Une fonction est convexe si :

Notion de convexité

- Une fonction est convexe si :

$$f(\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2) \leq \alpha f(x_1) + (1 - \alpha)f(x_2) \quad \forall \alpha \in [0, 1]$$

Notion de convexité

- Une fonction est convexe si :

$$f(\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2) \leq \alpha f(x_1) + (1 - \alpha)f(x_2) \quad \forall \alpha \in [0, 1]$$

- **Fonction à une variable** : convexité si $f''(x) > 0$.

Notion de convexité

- Une fonction est convexe si :

$$f(\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2) \leq \alpha f(x_1) + (1 - \alpha)f(x_2) \quad \forall \alpha \in [0, 1]$$

- **Fonction à une variable** : convexité si $f''(x) > 0$.
- **Fonction à plusieurs variables** : convexité si la **matrice Hессиennе** est **définie positive**.

Notion de convexité

- Une fonction est convexe si :

$$f(\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2) \leq \alpha f(x_1) + (1 - \alpha)f(x_2) \quad \forall \alpha \in [0, 1]$$

- **Fonction à une variable** : convexité si $f''(x) > 0$.
- **Fonction à plusieurs variables** : convexité si la **matrice Hессиенне** est **définie positive**.
- Pourquoi c'est important ?

Notion de convexité

- Une fonction est convexe si :

$$f(\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2) \leq \alpha f(x_1) + (1 - \alpha)f(x_2) \quad \forall \alpha \in [0, 1]$$

- **Fonction à une variable** : convexité si $f''(x) > 0$.
- **Fonction à plusieurs variables** : convexité si la **matrice Hессienne** est **définie positive**.
- Pourquoi c'est important ?
 - Minimum local = minimum global.

Notion de convexité

- Une fonction est convexe si :

$$f(\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2) \leq \alpha f(x_1) + (1 - \alpha)f(x_2) \quad \forall \alpha \in [0, 1]$$

- **Fonction à une variable** : convexité si $f''(x) > 0$.
- **Fonction à plusieurs variables** : convexité si la **matrice Hессиennе** est **définie positive**.
- Pourquoi c'est important ?
 - Minimum local = minimum global.
 - Permet des méthodes d'optimisation efficaces.

Gradient d'une fonction de plusieurs variables

- Gradient $\nabla f(x) = \text{vecteur des dérivées partielles.}$

Gradient d'une fonction de plusieurs variables

- Gradient $\nabla f(x)$ = vecteur des dérivées partielles.
- Permet de détecter les extremums :

$$\nabla f(x^*) = 0 \Rightarrow \text{point critique}$$

Gradient d'une fonction de plusieurs variables

- Gradient $\nabla f(x)$ = vecteur des dérivées partielles.
- Permet de détecter les extremums :

$$\nabla f(x^*) = 0 \Rightarrow \text{point critique}$$

- Si f est convexe, alors ce point est un minimum global.

Gradient d'une fonction de plusieurs variables

- Gradient $\nabla f(x) = \text{vecteur des dérivées partielles.}$
- Permet de détecter les extremums :

$$\nabla f(x^*) = 0 \Rightarrow \text{point critique}$$

- Si f est convexe, alors ce point est un minimum global.
- Exemple :

$$f(x, y) = x^2 + xy + y^2 \Rightarrow \nabla f = \begin{bmatrix} 2x + y \\ x + 2y \end{bmatrix}$$

Hessienne et convexité

- Hessienne $H_f(x) = \text{matrice des dérivées secondes.}$

Hessienne et convexité

- Hessienne $H_f(x)$ = matrice des dérivées secondes.
- Définie positive $\Leftrightarrow \forall v, v^T H_f v > 0$.

Hessienne et convexité

- Hessienne $H_f(x)$ = matrice des dérivées secondes.
- Définie positive $\Leftrightarrow \forall v, v^T H_f v > 0$.
- Teste la convexité pour les fonctions à plusieurs variables.

Hessienne et convexité

- Hessienne $H_f(x)$ = matrice des dérivées secondes.
- Définie positive $\Leftrightarrow \forall v, v^T H_f v > 0$.
- Teste la convexité pour les fonctions à plusieurs variables.
- Exemple (même fonction) :

$$H_f = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{Définie positive (valeurs propres } > 0\text{)}$$

Hessienne et convexité

- Hessienne $H_f(x)$ = matrice des dérivées secondes.
- Définie positive $\Leftrightarrow \forall v, v^T H_f v > 0$.
- Teste la convexité pour les fonctions à plusieurs variables.
- Exemple (même fonction) :

$$H_f = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{Définie positive (valeurs propres } > 0\text{)}$$

Algorithmes de descente de gradient

- Méthodes itératives pour minimiser une fonction.

Algorithmes de descente de gradient

- Méthodes itératives pour minimiser une fonction.
- Idée de base : se déplacer dans la direction opposée au gradient.

Algorithmes de descente de gradient

- Méthodes itératives pour minimiser une fonction.
- Idée de base : se déplacer dans la direction opposée au gradient.
- Formule :

$$x_{k+1} = x_k - \rho_k \nabla f(x_k) \quad \text{avec } \rho_k > 0$$

Algorithmes de descente de gradient

- Méthodes itératives pour minimiser une fonction.
- Idée de base : se déplacer dans la direction opposée au gradient.
- Formule :

$$x_{k+1} = x_k - \rho_k \nabla f(x_k) \quad \text{avec } \rho_k > 0$$

- Si f est convexe et bien conditionnée, la méthode converge vers le minimum global.

Algorithmes de descente de gradient

- Méthodes itératives pour minimiser une fonction.
- Idée de base : se déplacer dans la direction opposée au gradient.
- Formule :

$$x_{k+1} = x_k - \rho_k \nabla f(x_k) \quad \text{avec } \rho_k > 0$$

- Si f est convexe et bien conditionnée, la méthode converge vers le minimum global.
- Deux variantes :
 - Pas fixe (simple mais parfois lent).

Algorithmes de descente de gradient

- Méthodes itératives pour minimiser une fonction.
- Idée de base : se déplacer dans la direction opposée au gradient.
- Formule :

$$x_{k+1} = x_k - \rho_k \nabla f(x_k) \quad \text{avec } \rho_k > 0$$

- Si f est convexe et bien conditionnée, la méthode converge vers le minimum global.
- Deux variantes :
 - Pas fixe (simple mais parfois lent).
 - Pas variable (plus efficace mais plus complexe).

Algorithmes de descente de gradient

- Méthodes itératives pour minimiser une fonction.
- Idée de base : se déplacer dans la direction opposée au gradient.
- Formule :

$$x_{k+1} = x_k - \rho_k \nabla f(x_k) \quad \text{avec } \rho_k > 0$$

- Si f est convexe et bien conditionnée, la méthode converge vers le minimum global.
- Deux variantes :
 - Pas fixe (simple mais parfois lent).
 - Pas variable (plus efficace mais plus complexe).