Travaux Dirigés : Introduction à la Transformée de Fourier

Exercice n° 1 : Nombres Complexes

1. *Changement de forme :* On considère le complexe $z = 0.5 - j$
   (a) Calculer son module r.
   (b) Déterminer son argument θ principal (en radians et en degrés).
   (c) En déduire sa forme trigonométrique $z = re^{j\theta}$
2. À l'aide de la formule de Moivre $\left(\mathrm{e}^{j\theta}\right)^n = \cos(n\theta) + j\sin(n\theta)$, calculer z^5 sous forme algébrique.
3. Justifier que $\cos\theta = \dfrac{\mathrm{e}^{j\theta}+\mathrm{e}^{-j\theta}}{2}$ et $\sin\theta = \dfrac{\mathrm{e}^{j\theta}-\mathrm{e}^{-j\theta}}{2j}$

Contexte : Ce type de calcul est utilisé en électrotechnique pour étudier les fonctions de transfert des systèmes soumis à des tensions ou des courants alternatifs.

Exercice n° 2 : Décomposition en série de Fourier

Considérons un signal $s(t)$ de période $T = 20\text{ms}$ et de pulsation $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$ défini par : $s(t) = \begin{cases} 1, & 0 < t < \frac{T}{4} \\ -1, & \frac{T}{4} < t < \frac{T}{2} \\ 0, & \frac{T}{2} < t < T \end{cases}$

Propriété 1

Développement en série de Fourier de la fonction f :

$$s(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)\right)$$

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,\mathrm{d}t \qquad a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos(n\omega t)\,\mathrm{d}t. \qquad b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin(n\omega t)\,\mathrm{d}t. \quad (n \geqslant 1)$$

1. Caractériser et représenter schématiquement le signal sur au moins deux périodes.
2. Le signal est-il pair ? impair ?
3. Calculer les coefficients a_n et b_n de la série de Fourier de $s(t)$.
4. Décrire qualitativement le spectre obtenu (valeurs des fréquences présentes, décroissance).
5. Que devient le spectre en fréquence lorsque la période T devient très grande ? Interpréter ce résultat.

Exercice n° 3 : Calcul intégral

1. *Intégration par parties :* Calculer les intégrales suivantes en utilisant une intégration par parties :
   (a) $I = \displaystyle\int_0^{\pi} t\sin(t)\,dt$ (b) $J = \displaystyle\int_0^1 t\cos(\pi t)\,dt$ (c) $K = \displaystyle\int_0^{\pi} t^2\cos(t)\,dt$

Propriété 2

On considère deux fonctions u et v dérivables sur un intervalle I telles que u' et v' soient continues sur I. Soient a et b deux réels de I tels que $a < b$. Alors :

$$\int_a^b u'v\,\mathrm{d}t = [uv]_a^b - \int_a^b uv'\,\mathrm{d}t$$

2. *Changement de variable :* Proposer un changement de variable adapté pour simplifier les intégrales suivantes :

Propriété 3

La formule de changement de variable est la suivante : $\displaystyle\int_a^b f\left(\varphi(t)\right)\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\,\mathrm{d}x$

(a) $I = \displaystyle\int_0^{\pi} \sin(t - \frac{\pi}{2})\,dt$ Poser $x = t - \frac{\pi}{2}$

(b) $J = \displaystyle\int_1^{9} \mathrm{e}^{\sqrt{t}}\,dt$ Poser $x = \sqrt{t}$

(c) $K = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi^2}{4}} \sin(\sqrt{t})\,dt$ Poser $x = \sqrt{t}$

(d) $L = \displaystyle\int_0^{1} \frac{1}{1+\mathrm{e}^t}\,dt$ Poser $x = \mathrm{e}^t$

Aide : Pour la (b) et la (c), il faudra enchaîner avec une IPP, et pour la (d) une DES...

Vers la Transformée de Fourier

Cette généralisation de la décomposition permet d'obtenir la représentation fréquentielle d'un signal non périodique. La transformée d'une fonction $x(t)$ est donnée par :

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\mathrm{e}^{-j2\pi f t}\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\mathrm{e}^{-j\omega t}\,\mathrm{d}t$$

- Idée intuitive : La transformée de Fourier est ce qui se passe si la période devient infinie → signaux non-périodiques.
- Lien avec la transformée de Laplace : La transformée de Fourier est un cas particulier de la transformée de Laplace sur l'axe imaginaire pur ($s = j\omega$).
- Le graphe de $|X(f)|$ représente le spectre d'amplitude.
- Le graphe de $\arg(X(f))$ représente le spectre de phase.
- Ce qui nous motive ici : l'analyse de signaux issus de capteurs (vibrations, mesures de vitesse ou de position) ou l'étude de la réponse fréquentielle des systèmes.

Exercice nº 4 : Quelques manipulations

1. Expliquer les résultats suivants (toute méthode acceptée, calcul ou graphique)
   (a) Si $x(t)$ est paire, alors $X(f) = 2\displaystyle\int_0^{+\infty} x(t)\cos(\omega t)\,\mathrm{d}t$
   (b) Si $x(t)$ est impaire, alors $X(f) = -2j\displaystyle\int_0^{+\infty} x(t)\sin(\omega t)\,\mathrm{d}t$
2. On considère un signal type **porte** (défini par $x(t) = 1$ pour $-1 < t < 1$, $x(t) = 0$ ailleurs).
   (a) Ce signal est-il périodique ? Représenter son allure.
   (b) Est-il pair pair ? impair ?
   (c) En déduire que $X(f) = \dfrac{\sin 2\pi f}{\pi f}$.
   (d) Représenter graphiquement cette fonction appelée *sinus cardinal.*
3. Utiliser la partie précédente pour démontrer que la transformée de Fourier d'une impulsion de Dirac est égale à 1. Pour cela, nous considérerons $x(t) = \dfrac{1}{A}$ sur $\left[-\frac{A}{2}; \frac{A}{2}\right]$ avec A aussi petit que l'on veut et on admettra que $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

Remarque de fin de TD :
Comme pour la transformée de Laplace, le passage au domaine fréquentiel fera apparaître une typologie du signal considéré qui permettra par exemple de filtrer une partie indésirable de l'information. On utilisera aussi la transformée de Fourier inverse pour revenir au signal sous sa forme temporelle.