# Tout savoir sur les primitives

## I Primitive :

**Définition**

Soit $f$ une fonction continue et définie sur un intervalle $I$, on appelle **primitive** de $f$ sur $I$ toute fonction, dont la dérivée est égale à $f$. On note généralement $F$ une primitive de $f$.
Pour faire simple,

$$Si \quad F' = f \text{ alors F est une primitive de } f$$

**Exemple 1**

Une primitive de la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 6x^2 - 3x + 1$ est la fonction $F$ définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = 2x^3 - \frac{3}{2}x^2 + x$.

Il suffit de calculer la dérivée de la fonction $F$.

**Propriété 1**

Soit $f$ une fonction continue sur un intervalle $I$ et $F$ une primitive de $f$ sur $I$.
$f$ admet une infinité de primitives sur $I$ et toute primitive $G$ de $f$ sur $I$ est définie par $G(x) = F(x) + k$ où $k \in \mathbb{R}$.

**Remarque** *Il suffit de savoir que lorsque l'on dérive une constante on trouve toujours 0 pour s'en convaincre.*

### Tableau des primitives sur les fonctions usuelles

| $f(x) = \dots$ | UNE primitive $F$ de $f$ | sur $I = \dots$ |
|---|---|---|
| $a,\ a \in \mathbb{R}$ | $ax$ | $\mathbb{R}$ |
| $x^n,\ n \neq -1$ | $\frac{1}{n+1}x^{n+1}$ | $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}^*$ si $n < -1$ |
| $\frac{1}{x^2}$ | $-\frac{1}{x}$ | $\mathbb{R}^*$ |
| $\frac{1}{\sqrt{x}}$ | $2\sqrt{x}$ | $]0;+\infty[$ |
| $\cos(x)$ | $\sin(x)$ | $\mathbb{R}$ |
| $\sin(x)$ | $-\cos(x)$ | $\mathbb{R}$ |
| $e^x$ | $e^x$ | $\mathbb{R}$ |
| $\frac{1}{x}$ | $\ln(x)$ | $]0;+\infty[$ |

### Opération sur les primitives

On connait maintenant les primitives des fonctions usuelles c'est à dire les briques que nous utilisons le plus souvent. Mais comment fait-on quand les briques sont additionnées entre elles où multiplié par un nombre ...

**Propriété 2**

Soit $f$ et $g$ deux fonctions continues sur un intervalle $I$, $u$ une fonction dérivable sur $I$ et $k$ un réel quelconque.

1. Une primitive de $kf$ est $kF$ avec $F$ une primitive de $f$.
2. Une primitive de $f+g$ est $F+G$ avec $F$ et $G$ des primitives de $f$ et $g$ respectivement.
3. Une primitive de $u'u^n$, avec $n \neq -1$, est $\dfrac{1}{n+1}u^{n+1}$, avec $u$ ne s'annulant pas dans le cas où $n<0$.
4. Une primitive de $\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$, avec $u>0$ sur $I$, est $2\sqrt{u}$
5. Une primitive de $\cos(ax+b)$ sur $\mathbb{R}$, avec $a \neq 0$, est $\dfrac{1}{a}\sin(ax+b)$
6. Une primitive de $\sin(ax+b)$ sur $\mathbb{R}$, avec $a \neq 0$, est $-\dfrac{1}{a}\cos(ax+b)$
7. Une primitive de $u'e^u$ est $e^u$.
8. Une primitive de $\dfrac{u'}{u}$, avec $u>0$ sur $I$, est $\ln(u)$.

**Exemple 2**

Déterminer une primitive des fonctions suivantes :

— $f(x) = 3x^2+2x+1$ sur $\mathbb{R}$.
— $g(x) = sin(3x+8)$ sur $\mathbb{R}$.
— $h(x) = 2x(x^2+3)^5$ sur $\mathbb{R}$.
— $i(x) = \dfrac{4x^3+2x}{x^4+x^2}$ sur $]0\,;+\infty[$.

*Indice : vous devez reconnaitre quelle est la formules de la propriété 2 à utiliser et ensuite utiliser le tableau des primitives usuelles*