# Entraînement devoir

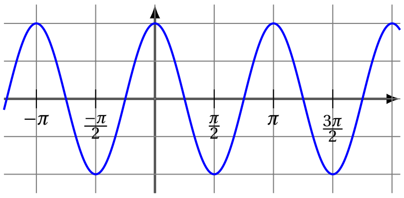
## Exercice n° 1

On appelle $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$, paire, périodique de période $\pi$, vérifiant :

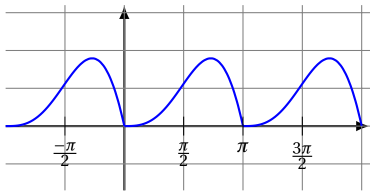
$$f(t) = t\sin(t) \quad \text{pour } t \in \left[0\,;\,\frac{\pi}{2}\right].$$

1. Parmi les quatre courbes suivantes quelle est celle qui représente la fonction $f$ ? On n'attend pas de justification.

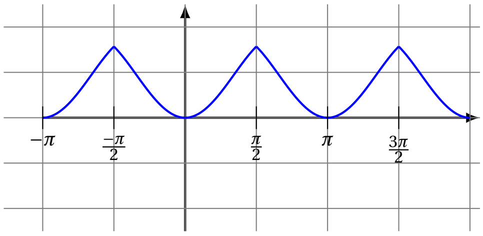
Courbe 1



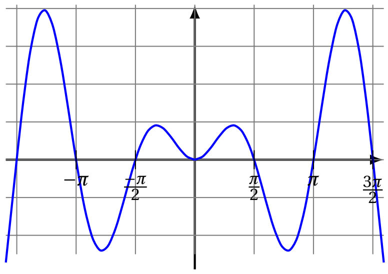

Courbe 2




Courbe 3




Courbe 4




2. On admet que la fonction $f$ est développable en série de Fourier.
   On note $S$ son développement en série de Fourier.
   On rappelle que :

   $S(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty}(a_n\cos(n\omega t) + b_n\sin(n\omega t))$, avec $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$, $T$ période de $f$ ;
   $a_0 = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_a^{a+T} f(t)\,\mathrm{d}t$. Pour $n \geqslant 1$ : $a_n = \dfrac{2}{T}\displaystyle\int_a^{a+T} f(t)\cos(n\omega t)\,\mathrm{d}t$ et $b_n = \dfrac{2}{T}\displaystyle\int_a^{a+T} f(t)\sin(n\omega t)\,\mathrm{d}t$
   avec $a$ constante réelle quelconque.

   (a) Justifier que $b_n = 0$ pour tout $n$ entier naturel supérieur ou égal à 1.

   (b) Montrer que la fonction $g$ définie pour tout réel $t$ par $g(t) = -t\cos(t) + \sin(t)$ est une primitive de la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $t \mapsto t\sin t$.

   (c) La fonction étant paire et de période $\pi$, $a_0$ vérifie $a_0 = \frac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)\mathrm{d}t$.

   Vérifier que $a_0 = \frac{2}{\pi}$. Écrire les étapes du calcul effectué.

3. On admet que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$ : $a_n = \frac{2}{\pi}(-1)^n\left(\frac{1}{(2n+1)^2} + \frac{1}{(2n-1)^2}\right)$
   Donner les valeurs de $a_1$ et $a_2$ arrondies au millième.

4. On note $f_e$ le nombre positif vérifiant $f_e^2 = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} f^2(t)\mathrm{d}t$.

   On admet que l'expression $a_0^2 + \frac{1}{2}\displaystyle\sum_{n=1}^{2}(a_n^2 + b_n^2)$, obtenue d'après la formule de Parseval, permet d'obtenir la valeur approchée de $f_e^2$ au millième.

   (a) Calculer la valeur approchée de $f_e^2$ au millième.

   (b) Si $f$ modélise un signal de période $\pi$, que représente $f_e$ ?

**Exercice n° 2**

On considère un circuit composé d'une résistance et d'une bobine en série.

On note :

- $R$ la valeur de la résistance, en ohm ($\Omega$),
- $L$ l'inductance de la bobine en henry (H),
- $e(t)$ la tension aux bornes du circuit. exprimée en volt (V), à l'instant $t$ exprimé en seconde (s).
- $i(t)$ l'intensité dans le circuit. exprimée en ampère (A), à l'instant $t$ (en seconde).

On rappelle que la fonction échelon unité est la fonction définie pour tout réel $t$ par :

$$U(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t < 0 \\ 1 & \text{si} \quad t \geqslant 0 \end{cases}$$

**Partie A : Réponse échelon du circuit**

Dans cette partie, on prend $R = 1\Omega$, $L = 0,2$ H et on étudie le comportement du circuit lorsqu'on applique soudainement une tension continue modélisée. pour tout réel $t$, par $e(t) = 10\mathcal{U}(t)$.

À l'instant $t = 0$ le courant dans le circuit est nul.

On admet que la fonction $i$ est solution sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ de l'équation différentielle

$$(E): \qquad Ly' + Ry = e(t)$$

d'inconnue $y$, où $y$ est une fonction dérivable de la variable $t$.

1. **Dans cette question, ou cherche une expression de** $i(t)$ **pour** $t \in [0\ ;\ +\infty[$.
   (a) Résoudre l'équation différentielle $(E_0) : 0,2y' + y = 0$.
   (b) Déterminer une fonction constante $g : t \longmapsto c$, avec $c$ constante réelle, solution de l'équation différentielle $(E) : 0,2y' + y = 10$.
   (c) En déduire les solutions de l'équation $(E)$.
   (d) Justifier que pour tout réel positif ou nul $t$ : $i(t) = 10 - 10\,\mathrm{e}^{-5t}$.
2. Représenter graphiquement la fonction $i$ sur $[0\ ;\ +\infty[$. Vers quelle valeur $\tau$ le courant se stabilise-t-il ?

**Le formulaire ci-dessous peut être utilisé pour la partie B de l'exercice**

| Fonction causale | Transformée de Laplace |
|---|---|
| $t \longmapsto \mathcal{U}(t)$ | $p \longmapsto \dfrac{1}{p}$ |
| $t \longmapsto \mathcal{U}(t-a)$, avec $a$ constante réelle | $p \longmapsto \dfrac{1}{p}\mathrm{e}^{-ap}$ |
| $t \longmapsto \mathrm{e}^{-at}\mathcal{U}(t)$, avec $a$ constante réelle | $p \longmapsto \dfrac{1}{p+a}$ |
| $f$ étant une fonction causale et $F$ sa transformée de Laplace, on a aussi : | |
| $t \longmapsto f(t)\mathcal{U}(t)$ | $p \longmapsto F(p)$ |
| $t \longmapsto f(t-\alpha)\mathcal{U}(t-\alpha)$, avec $\alpha$ constante réelle | $p \longmapsto F(p)\mathrm{e}^{-ap}$ |
| $t \longmapsto f'(t)\mathcal{U}(t)$ | $p \longmapsto pF(p) - f\left(0^+\right)$ |

**Partie B : Réponse impulsionnelle du circuit**

Dons cette partie, on prend $R = 1\Omega$, $L = 1$H et la tension $e$ aux bornes du circuit est définie sur $\mathbb{R}$ par

$$e(t) = 20U(t) - 20U(t-10).$$

On note $s(t)$ la tension aux bornes de la résistance. exprimée en volt. à l'instant $t$ (en seconde).

On admet que $s(0) = 0$ et que $\dfrac{L}{R}s'(t) + s(t) = e(t)$.

On note respectivement $S$ et $E$ les transformées de Laplace des fonctions $s$ et $e$.

1. Tracer la courbe représentative de la fonction $e$ sur laquelle est déjà représentée la fonction $s$.
2. Déterminer $E(p)$.
3. En appliquant la transformation de Laplace à l'égalité vérifiée par $s$ et $e$, montrer que

$$S(p) = \frac{20}{p(p+1)}\left(1 - \mathrm{e}^{-10p}\right)$$

4. **Détermination de $s(t)$ en fonction de $t$**
   (a) Vérifier que : $\dfrac{20}{p(p+1)} = \dfrac{20}{p} - \dfrac{20}{p+1}$.
   (b) Donner les originaux de $p \to \dfrac{20}{p}$, $p \to \dfrac{20}{p+1}$, $p \to \dfrac{20}{p}\mathrm{e}^{-10p}$ et $p \to \dfrac{20}{p+1}\mathrm{e}^{-10p}$.
   (c) En déduire $s(t)$
   (d) Vérifier que pour $t \in [10\,;\,+\infty[$, $s(t) = 20\left(\mathrm{e}^{10} - 1\right)\mathrm{e}^{-t}$.

   *On peut remarquer que « la réponse suit l'entrée », mais avec un certain retard. Ce délai est dû à la bobine, un composant qui emmagasine de l'énergie.*