1 ++ Loi uniforme sur [0, 4]

X est une variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur l'intervalle [0, 4].

1. Donner la fonction de densité de X.

2. Déterminer les probabilités suivantes :

$P(X \in [1, 3])$; $P(X \leq 2{,}5)$; $P(0{,}2 \leq X \leq 3{,}5)$; $P(X \leq 1)$; $P(X = 1)$; $P(X > 1)$.

3. a) Déterminer l'espérance $E(X)$.

b) Donner une interprétation de $E(X)$.

4. Déterminer la variance $V(X)$.

2 + Retrouver un résultat donné

La variable aléatoire X suit la loi normale $\mathcal{N}(20, 5)$.

a) Retrouver avec la calculatrice les valeurs approchée arrondies à 10^{-3} : $P(X \leq 28) \approx 0{,}945$ et $P(X \leq 12) \approx 0{,}055$.

b) En déduire une valeur approchée de $P(12 \leq X \leq 28)$.

3 + Calcul de probabilités

La variable aléatoire X suit la loi normale $\mathcal{N}(10, 2)$.

Calculer les probabilités suivantes (arrondir à 10^{-3}).

1. $P(X \leq 8)$ et $P(X > 8)$.

2. $P(9 \leq X \leq 12)$ et $P(7 \leq X \leq 14)$.

4 + Calcul de probabilités

La variable aléatoire X suit la loi normale $\mathcal{N}(8{,}5 ; 1{,}2)$.

Calculer les probabilités suivantes (arrondir à 10^{-3}).

1. $P(X \leq 7{,}5)$ et $P(X > 7{,}5)$.

2. $P(9 \leq X \leq 10)$ et $P(7 \leq X \leq 8)$.

5 + Coût de sinistres

Dans un groupe d'assurances on s'intéresse au coût d'une certaine catégorie de sinistres survenus pendant une année.

On considère la variable aléatoire C qui, à chaque sinistre tiré au hasard parmi les sinistres de cette catégorie, associe son coût en euros.

On suppose que C suit la loi normale de moyenne 1 200 et d'écart type 200.

Calculer la probabilité qu'un sinistre tiré au hasard parmi les sinistres de ce type coûte entre 1 000 et 1 500 euros.

6 ++ Comparaison de probabilités

Dans cet exercice, chaque probabilité est à arrondir à 10^{-2}.

1. X est une variable aléatoire qui suit la loi binomiale $\mathcal{B}(50 ; 0{,}7)$.

a) Calculer $P(X \leq 40)$ et $P(X \leq 29)$.

b) En déduire $P(30 \leq X \leq 40)$.

2. On décide d'approcher la loi de X par une loi normale.

a) Déterminer les paramètres μ et σ de cette loi normale. Arrondir σ à 10^{-2}.

b) Y étant une variable aléatoire suivant cette loi normale, calculer $P(30 \leq Y \leq 40)$.

c) Comparer les résultats obtenus aux questions **1.** b) et **2.** b).

7 +++ Le courrier d'une entreprise

Dans cette activité chaque probabilité demandée est à arrondir à 10^{-4}.

Une enquête permet d'estimer que la probabilité qu'une lettre, prélevée au hasard dans le courrier d'une entreprise, parvienne à son destinataire en France, le lendemain, est 0,7.

Dans la suite, on ne considère que les lettres à destination de la France.

À l'agence de Marne-la-Vallée d'une grande entreprise, on admet que l'on expédie 100 lettres par jour. On note X la variable aléatoire qui, à un jour tiré au hasard, associe le nombre de lettres qui parviendront à leur destinataire le lendemain. On suppose que les acheminements de ces lettres sont indépendants.

1. *Loi binomiale*

a) Expliquer pourquoi X suit une loi binomiale et préciser les paramètres de cette loi.

b) Calculer l'espérance mathématique de X, puis la valeur arrondie à 10^{-1} de l'écart type de X.

c) Calculer la probabilité que 60 lettres exactement, sur les 100 expédiées un jour tiré au hasard parviennent à leur destinataire le lendemain.

2. *Approximation d'une loi binomiale par une loi normale*

On décide d'approcher la loi de la variable discrète X par la loi normale de paramètres μ et σ.

a) Donner les valeurs de μ et σ.

b) On note Y une variable aléatoire suivant cette loi normale.

En utilisant cette approximation calculer la probabilité qu'au moins 80 des 100 lettres, expédiées un jour tiré au hasard, parviennent à leur destinataire le lendemain, c'est-à-dire $P(Y \geq 79{,}5)$.

c) Calculer de même la probabilité que le nombre de lettres, sur les 100 expédiées un jour choisi au hasard, parvenant à leur destinataire le lendemain, soit compris entre 55 et 85, c'est-à-dire $P(54{,}5 \leq Y \leq 85{,}5)$.

8 **+++ Probabilités conditionnelles, loi binomiale, loi normale**

Les trois parties de cet exercice sont indépendantes.

Dans cet exercice on s'intéresse aux factures comptabilisées chaque mois dans un garage.

A. *Probabilités conditionnelles*

Les factures du garage sont de deux types : les factures provenant de l'atelier de mécanique et les factures provenant de l'atelier de carrosserie.

On admet, qu'un certain mois, 65 % des factures proviennent de l'atelier de mécanique et le reste de l'atelier de carrosserie.

Dans l'ensemble des factures de ce mois, 2 % des factures provenant de l'atelier de mécanique sont erronées et 1 % des factures provenant de l'atelier de carrosserie sont erronées.

On prélève au hasard une facture dans l'ensemble des factures de ce mois. Toutes les factures ont la même probabilité d'être prélevées.

On considère les événements suivants :

M : « la facture prélevée provient de l'atelier de mécanique » ;

C : « la facture prélevée provient de l'atelier de carrosserie » ;

D : « la facture est erronée ».

1. Déduire des informations figurant dans l'énoncé les probabilités $P(M)$, $P(C)$, $P_M(D)$ et $P_C(D)$.

2. Construire un arbre pondéré traduisant la situation décrite dans l'énoncé.

3. Traduire par une phrase l'événement $M \cap D$ et déterminer sa probabilité.

4. Démontrer que $P(D) = 0{,}016\,5$.

5. Calculer la probabilité que la facture prélevée provienne de l'atelier de carrosserie sachant qu'elle est erronée. Arrondir à 10^{-4}.

B. *Loi binomiale*

Dans cette partie, les résultats approchés sont à arrondir à 10^{-2}.

À la fin d'un autre mois, on considère une liasse importante de factures. On note E l'événement : « une facture prélevée au hasard dans la liasse de factures est erronée ».

On suppose que $P(E) = 0{,}03$.

On prélève au hasard 20 factures dans la liasse pour vérification. La liasse contient assez de factures pour qu'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise de 20 factures. On considère la variable aléatoire X qui, à tout prélèvement ainsi défini, associe le nombre de factures erronées de ce prélèvement.

1. Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale dont on déterminera les paramètres.

2. Calculer la probabilité qu'aucune facture de ce prélèvement ne soit erronée.

3. Calculer la probabilité que, dans un tel prélèvement, au plus deux factures soient erronées.

C. *Loi normale*

Dans cette partie, les résultats approchés sont à arrondir à 10^{-2}.

À la fin d'un mois donné, on s'intéresse au montant des factures éditées pendant ce mois.

On note Y la variable aléatoire qui, à chaque facture prélevée au hasard dans l'ensemble des factures éditées pendant le mois, associe son montant en euros. On suppose que la variable aléatoire Y suit la loi normale de moyenne 840 et d'écart type 400.

1. Calculer $P(Y \leq 1\,500)$.

2. Pour les factures dont le montant est supérieur ou égal à 600 euros et inférieur ou égal à 1 500 euros, le garage propose le paiement en trois fois, sans frais.

Calculer la probabilité qu'une facture prélevée au hasard dans l'ensemble des factures éditées pendant le mois puisse être réglée en trois fois, sans frais c'est-à-dire :

$P(600 \leq Y \leq 1\,500)$.