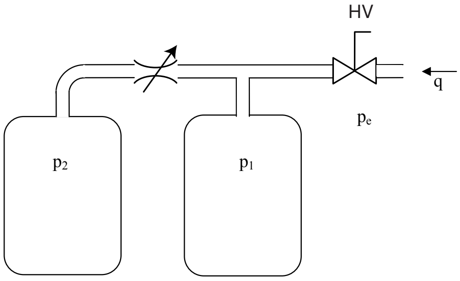
Programme de l'exposé

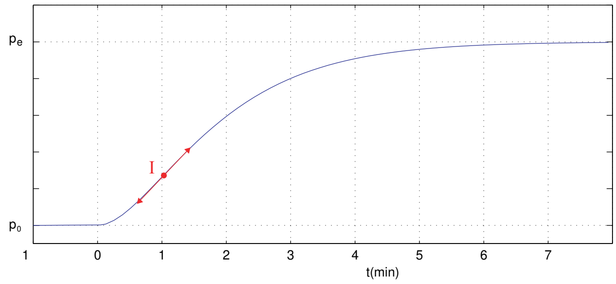
Table des matières

1 Introduction

1.1 Cas du remplissage d'un réservoir

On considère le remplissage de deux réservoirs séparés par une restriction réglable. A $t = 0$, les réservoirs sont remplis en ouvrant la vanne HV. La courbe d'évolution de p_2 en fonction du temps est donnée ci-contre. La courbe obtenue est différente de celle d'un procédé du premier ordre. Notamment, on observe que la tangente à l'origine de la courbe est nulle et que la courbe présente un point d'inflexion, noté I sur le graphique. On peut en déduire que ce procédé est au minimum d'ordre 2.





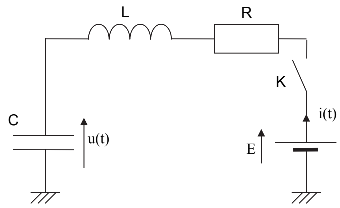
1.2 Analogie électrique

On peut faire le rapprochement entre les courbes obtenues dans le cas de l'exemple précédent et celles que l'on obtient avec un circuit R,L,C série comme représenté ci-dessous. L'équation différentielle suivante décrit l'évolution du courant dans le circuit lorsque l'on ferme l'interrupteur K à $t = 0$:

$$\frac{1}{\omega_0^2}.\frac{d^2u_c(t)}{dt^2} + \frac{2\lambda}{\omega_0}.\frac{du_c(t)}{dt} + u_c(t) = E.u(t)$$

,avec

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \qquad \text{et,} \qquad \lambda = \frac{1}{2}.R\sqrt{\frac{C}{L}} = \frac{1}{2}.RC\omega_0$$



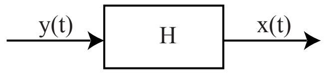
2 Etude temporelle

2.1 Equation différentielle

L'équation différentielle d'un système du second ordre est de la forme :

$$\frac{1}{\omega_0^2}.\frac{d^2x(t)}{dt^2} + \frac{2\lambda}{\omega_0}.\frac{dx(t)}{dt} + x(t) = K.y(t) \qquad (1)$$

avec, ω_0, *pulsation propre* du système, en $rad.s^{-1}$,
λ, *coefficient d'amortissement* du système (sans unités),
K, *gain statique* du système (sans unités).



2.2 Réponse à un échelon

On s'intéresse au cas où le signal d'entrée est un échelon unité : $y(t) = \Delta y \cdot u(t)$.
Le polynôme caractéristique associé à l'équation sans second membre est : $\frac{1}{\omega_0^2}.r^2 + \frac{2\lambda}{\omega_0}.r + 1 = 0$
Le déterminant de ce polynôme est : $\Delta' = \frac{\lambda^2}{\omega_0^2} - \frac{1}{\omega_0^2} = \frac{1}{\omega_0^2}.(\lambda^2 - 1)$
On distingue 3 cas suivant la valeur de λ :

— **cas où** $\lambda > 1$, $\Delta > 0$ le polynôme admet deux racines réelles, et la solution de l'équation différentielle est :

$$x(t) = K\Delta y(1 - e^{-\lambda\omega_0 t}(\frac{1}{2}(1 + \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2-1}})e^{\sqrt{\lambda^2-1}\omega_0 t} + \frac{1}{2}(1 - \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2-1}})e^{-\sqrt{\lambda^2-1}\omega_0 t}))$$

Le régime est dit ***apériodique***,ou sur-amorti. La réponse du procédé n'admet pas de dépassement (courbe en noir sur le graphique ci-dessous) .

— **cas où** $\lambda = 1$, $\Delta = 0$ le polynôme admet une racine réelle double, et la solution de l'équation différentielle est :

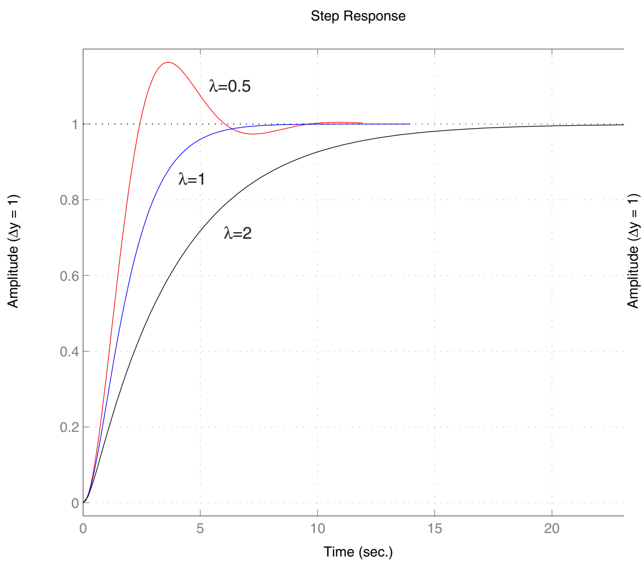
$$x(t) = K\Delta y(1 - e^{-\omega_0 t}(1 + \omega_0 t))$$

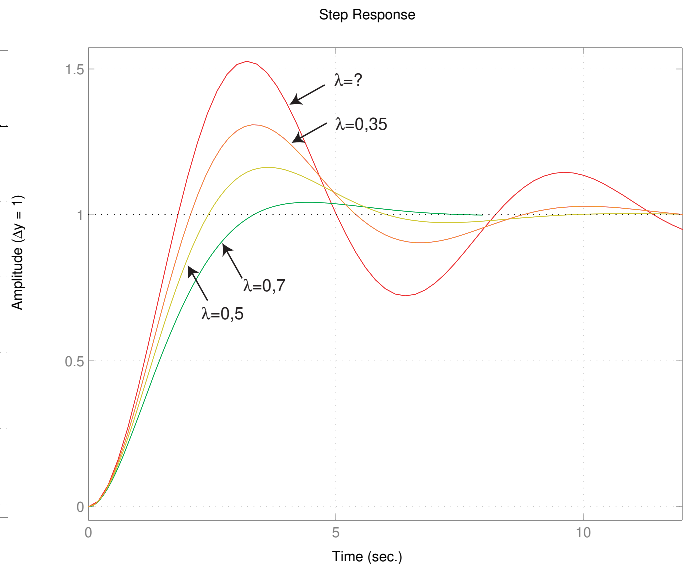
Le régime est dit ***critique***, ou amorti. La réponse du procédé n'admet pas de dépassement (courbe en bleu sur le graphique ci-dessous) .

— **cas où** $\lambda < 1$, $\Delta < 0$ le polynôme admet deux racines complexes conjuguéees, et la solution de l'équation différentielle est :

$$x(t) = K\Delta y(1 - e^{-\lambda\omega_0 t}(cos(\omega_p t) + \frac{\lambda\omega_0}{\omega_p} sin(\omega_p t)))$$

avec, $\omega_p = \omega_0\sqrt{1-\lambda^2}$, ω_p est appelée ***pseudo-pulsation***. Le régime est dit ***pseudopériodique***, ou sous-amorti. La réponse du procédé admet un dépassement (courbe en rouge sur le graphique ci-dessous).





2.3 Premier dépassement et pseudo-période

La courbe ci-dessus (à droite) représente la réponse pseudopériodique d'un système du 2° ordre pour différentes valeurs d'amortissement : $\lambda = 0,7; 0,5; 0,35$. Pour un amortissement donné les valeurs respectives de la pseudo-pulsation ω_p et du premier dépassement relatif D_{1r} peuvent se déduire des formules :

$$\omega_p = \omega_0\sqrt{1-\lambda^2} \quad \text{et,} \quad D_{1r} = 100e^{\frac{-\lambda\pi}{\sqrt{1-\lambda^2}}}$$

Le temps de réponse à 5% du système peut être calculé à l'aide de la formule :

$$t_{R5\%} = 3\tau \quad \text{,avec} \quad \tau = \frac{1}{\lambda\omega_0} \quad \text{constante de temps de l'enveloppe de la courbe.}$$

De la même façon, la connaissance de la réponse indicielle d'un système du 2° ordre en régime pseudo-périodique permet de déduire la valeur de λ et de ω_0 à l'aide des formules :

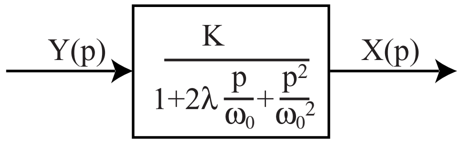
$$\lambda = \frac{\ln\frac{100}{D_{1r}}}{\sqrt{\pi^2 + \left(\ln\frac{100}{D_{1r}}\right)^2}} \quad \text{et,} \quad \omega_0 = \frac{\omega_p}{\sqrt{1-\lambda^2}}$$

Exemple d'application Déterminer la pulsation propre ω_0 et le coefficient d'amortissement λ pour la courbe présentant le plus fort dépassement sur la figure ci-dessus (en rouge à droite).

3 Fonction de transfert

Comme cela avait été fait pour les systèmes du premier ordre, la fonction de transfert isochrone peut se déduire en remplaçant $\frac{d}{dt}$ par p dans l'équation différentielle 1. En effectuant ce remplacement on trouve que la fonction de transfert type d'un second ordre vaut :

$$H(p) = \frac{X(p)}{Y(p)} = \frac{K}{1 + 2\lambda\frac{p}{\omega_0} + \frac{p^2}{\omega_0^2}} \tag{2}$$



4 Annexe1 : régime apériodique

La solution générale de l'équation sans second membre de l'équation est de la forme :

$$x(t) = Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t}$$

où r_1 et r_2 sont les racines du polynôme caractéristique

$$r_1 = \omega_0(-\lambda + \sqrt{\lambda^2 - 1}) \quad \text{et} \quad r_2 = \omega_0(-\lambda - \sqrt{\lambda^2 - 1})$$

Une solution particulière de l'équation différentielle est $x(t) = K\Delta y$. La solution de l'équation différentielle avec second membre est donc :

$$x(t) = Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t} + K\Delta y$$

Les conditions initiales $x(0) = 0$ et $x'(0) = 0$ imposent :

$$A + B + K\Delta y = 0 \quad \text{et} \quad r_1 A + r_2 B = 0$$

En combinant ces deux équations, on trouve :

$$A = K\Delta y \frac{r_2}{r_1 - r_2} \quad \text{et} \quad B = K\Delta y \frac{r_1}{r_2 - r_1}$$

Donc,

$$x(t) = K\Delta y(1 - (\frac{1}{2}(1 + \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2 - 1}})e^{(-\lambda + \sqrt{\lambda^2 - 1})\omega_0 t} + \frac{1}{2}(1 - \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2 - 1}})e^{(-\lambda - \sqrt{\lambda^2 - 1})\omega_0 t}))$$

5 Annexe2 : régime critique

La solution générale de l'équation sans second membre de l'équation est de la forme :

$$x(t) = (At + B)e^{rt}$$

où r est la racine double du polynôme caractéristique

$$r = -\omega_0$$

Une solution particulière de l'équation différentielle est $x(t) = K\Delta y$. La solution de l'équation différentielle avec second membre est donc :

$$x(t) = (At + B)e^{rt} + K\Delta y$$

Les conditions initiales $x(0) = 0$ et $x'(0) = 0$ imposent :

$$B + K\Delta y = 0 \quad \text{et} \quad A + rB = 0$$

En combinant ces deux équations, on trouve :

$$A = -K\Delta y \omega_0 \quad \text{et} \quad B = -K\Delta y$$

Donc,

$$x(t) = K\Delta y(1 - e^{-\omega_0 t}(1 + \omega_0 t))$$

6 Annexe3 : régime pseudo périodique

La solution générale de l'équation sans second membre de l'équation est de la forme :

$$x(t) = (A\sin(\beta t) + B\cos(\beta t))e^{\alpha t}$$

où α est la partie réelle des racines du polynôme caractéristique, et β la partie imaginaire positive.

Une solution particulière de l'équation différentielle est $x(t) = K\Delta y$. La solution de l'équation différentielle avec second membre est donc :

$$x(t) = (A\sin(\beta t) + B\cos(\beta t))e^{\alpha t} + K\Delta y$$

Les conditions initiales $x(0) = 0$ et $x'(0) = 0$ imposent :

$$B + K\Delta y = 0 \quad \text{et} \quad A\beta + B\alpha = 0$$

En combinant ces deux équations, on trouve :

$$A = -K\Delta y \frac{\alpha}{\beta} = K\Delta y \frac{\lambda}{\sqrt{1 - \lambda^2}} \quad \text{et} \quad B = -K\Delta y$$

Donc,

$$x(t) = K\Delta y(1 - e^{-\lambda\omega_0 t}(\cos(\sqrt{1 - \lambda^2}\omega_0 t) + \frac{\lambda}{\sqrt{1 - \lambda^2}}\sin(\sqrt{1 - \lambda^2}\omega_0 t))$$