

# Introduction à l'Optimisation et Bases Mathématiques

R4.03 Maths pour l'IT

- **Optimisation** = Trouver la meilleure solution à un problème mathématiquement formulé.

- **Optimisation** = Trouver la meilleure solution à un problème mathématiquement formulé.
- Intervient en IA, robotique, vision par ordinateur, finance, production, etc.

- **Optimisation** = Trouver la meilleure solution à un problème mathématiquement formulé.
- Intervient en IA, robotique, vision par ordinateur, finance, production, etc.
- Deux grandes familles :
  - Optimisation sans contraintes.

- **Optimisation** = Trouver la meilleure solution à un problème mathématiquement formulé.
- Intervient en IA, robotique, vision par ordinateur, finance, production, etc.
- Deux grandes familles :
  - Optimisation sans contraintes.
  - Optimisation sous contraintes.

- **Optimisation** = Trouver la meilleure solution à un problème mathématiquement formulé.
- Intervient en IA, robotique, vision par ordinateur, finance, production, etc.
- Deux grandes familles :
  - Optimisation sans contraintes.
  - Optimisation sous contraintes.
- Fonction objectif (ou coût) à **minimiser** ou **maximiser**.

- **Optimisation** = Trouver la meilleure solution à un problème mathématiquement formulé.
- Intervient en IA, robotique, vision par ordinateur, finance, production, etc.
- Deux grandes familles :
  - Optimisation sans contraintes.
  - Optimisation sous contraintes.
- Fonction objectif (ou coût) à **minimiser** ou **maximiser**.
- **Notion clé** : la **convexité** de la fonction objectif.

- **Optimisation** = Trouver la meilleure solution à un problème mathématiquement formulé.
- Intervient en IA, robotique, vision par ordinateur, finance, production, etc.
- Deux grandes familles :
  - Optimisation sans contraintes.
  - Optimisation sous contraintes.
- Fonction objectif (ou coût) à **minimiser** ou **maximiser**.
- **Notion clé** : la **convexité** de la fonction objectif.

- Une fonction est convexe si :

- Une fonction est convexe si :

$$f(\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2) \leq \alpha f(x_1) + (1 - \alpha)f(x_2) \quad \forall \alpha \in [0, 1]$$

- Une fonction est convexe si :

$$f(\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2) \leq \alpha f(x_1) + (1 - \alpha)f(x_2) \quad \forall \alpha \in [0, 1]$$

- **Fonction à une variable** : convexité si  $f''(x) > 0$ .

- Une fonction est convexe si :

$$f(\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2) \leq \alpha f(x_1) + (1 - \alpha)f(x_2) \quad \forall \alpha \in [0, 1]$$

- **Fonction à une variable** : convexité si  $f''(x) > 0$ .
- **Fonction à plusieurs variables** : convexité si la **matrice Hessienne** est **définie positive**.

- Une fonction est convexe si :

$$f(\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2) \leq \alpha f(x_1) + (1 - \alpha)f(x_2) \quad \forall \alpha \in [0, 1]$$

- **Fonction à une variable** : convexité si  $f''(x) > 0$ .
- **Fonction à plusieurs variables** : convexité si la **matrice Hessienne** est **définie positive**.
- Pourquoi c'est important ?

- Une fonction est convexe si :

$$f(\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2) \leq \alpha f(x_1) + (1 - \alpha)f(x_2) \quad \forall \alpha \in [0, 1]$$

- **Fonction à une variable** : convexité si  $f''(x) > 0$ .
- **Fonction à plusieurs variables** : convexité si la **matrice Hessienne** est **définie positive**.
- Pourquoi c'est important ?
  - Minimum local = minimum global.

- Une fonction est convexe si :

$$f(\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2) \leq \alpha f(x_1) + (1 - \alpha)f(x_2) \quad \forall \alpha \in [0, 1]$$

- **Fonction à une variable** : convexité si  $f''(x) > 0$ .
- **Fonction à plusieurs variables** : convexité si la **matrice Hessienne** est **définie positive**.
- Pourquoi c'est important ?
  - Minimum local = minimum global.
  - Permet des méthodes d'optimisation efficaces.

# Gradient d'une fonction de plusieurs variables

- Gradient  $\nabla f(x) =$  vecteur des dérivées partielles.

# Gradient d'une fonction de plusieurs variables

- Gradient  $\nabla f(x) =$  vecteur des dérivées partielles.
- Permet de détecter les extremums :

$$\nabla f(x^*) = 0 \Rightarrow \text{point critique}$$

# Gradient d'une fonction de plusieurs variables

- Gradient  $\nabla f(x) =$  vecteur des dérivées partielles.
- Permet de détecter les extremums :

$$\nabla f(x^*) = 0 \Rightarrow \text{point critique}$$

- Si  $f$  est convexe, alors ce point est un minimum global.

# Gradient d'une fonction de plusieurs variables

- Gradient  $\nabla f(x)$  = vecteur des dérivées partielles.
- Permet de détecter les extremums :

$$\nabla f(x^*) = 0 \Rightarrow \text{point critique}$$

- Si  $f$  est convexe, alors ce point est un minimum global.
- Exemple :

$$f(x, y) = x^2 + xy + y^2 \Rightarrow \nabla f = \begin{bmatrix} 2x + y \\ x + 2y \end{bmatrix}$$

- Hessienne  $H_f(x)$  = matrice des dérivées secondes.

- Hessienne  $H_f(x)$  = matrice des dérivées secondes.
- Définie positive  $\Leftrightarrow \forall v, v^T H_f v > 0$ .

- Hessienne  $H_f(x)$  = matrice des dérivées secondes.
- Définie positive  $\Leftrightarrow \forall v, v^T H_f v > 0$ .
- Teste la convexité pour les fonctions à plusieurs variables.

- Hessienne  $H_f(x)$  = matrice des dérivées secondes.
- Définie positive  $\Leftrightarrow \forall v, v^T H_f v > 0$ .
- Teste la convexité pour les fonctions à plusieurs variables.
- Exemple (même fonction) :

$$H_f = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{Définie positive (valeurs propres } \neq 0)$$

- Hessienne  $H_f(x)$  = matrice des dérivées secondes.
- Définie positive  $\Leftrightarrow \forall v, v^T H_f v > 0$ .
- Teste la convexité pour les fonctions à plusieurs variables.
- Exemple (même fonction) :

$$H_f = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{Définie positive (valeurs propres } \neq 0)$$

# Algorithmes de descente de gradient

- Méthodes itératives pour minimiser une fonction.

# Algorithmes de descente de gradient

- Méthodes itératives pour minimiser une fonction.
- Idée de base : se déplacer dans la direction opposée au gradient.

# Algorithmes de descente de gradient

- Méthodes itératives pour minimiser une fonction.
- Idée de base : se déplacer dans la direction opposée au gradient.
- Formule :

$$x_{k+1} = x_k - \rho_k \nabla f(x_k) \quad \text{avec } \rho_k > 0$$

# Algorithmes de descente de gradient

- Méthodes itératives pour minimiser une fonction.
- Idée de base : se déplacer dans la direction opposée au gradient.
- Formule :

$$x_{k+1} = x_k - \rho_k \nabla f(x_k) \quad \text{avec } \rho_k > 0$$

- Si  $f$  est convexe et bien conditionnée, la méthode converge vers le minimum global.

# Algorithmes de descente de gradient

- Méthodes itératives pour minimiser une fonction.
- Idée de base : se déplacer dans la direction opposée au gradient.
- Formule :

$$x_{k+1} = x_k - \rho_k \nabla f(x_k) \quad \text{avec } \rho_k > 0$$

- Si  $f$  est convexe et bien conditionnée, la méthode converge vers le minimum global.
- Deux variantes :
  - Pas fixe (simple mais parfois lent).

# Algorithmes de descente de gradient

- Méthodes itératives pour minimiser une fonction.
- Idée de base : se déplacer dans la direction opposée au gradient.
- Formule :

$$x_{k+1} = x_k - \rho_k \nabla f(x_k) \quad \text{avec } \rho_k > 0$$

- Si  $f$  est convexe et bien conditionnée, la méthode converge vers le minimum global.
- Deux variantes :
  - Pas fixe (simple mais parfois lent).
  - Pas variable (plus efficace mais plus complexe).

# Algorithmes de descente de gradient

- Méthodes itératives pour minimiser une fonction.
- Idée de base : se déplacer dans la direction opposée au gradient.
- Formule :

$$x_{k+1} = x_k - \rho_k \nabla f(x_k) \quad \text{avec } \rho_k > 0$$

- Si  $f$  est convexe et bien conditionnée, la méthode converge vers le minimum global.
- Deux variantes :
  - Pas fixe (simple mais parfois lent).
  - Pas variable (plus efficace mais plus complexe).