Applications Probabilités et Lois Normales

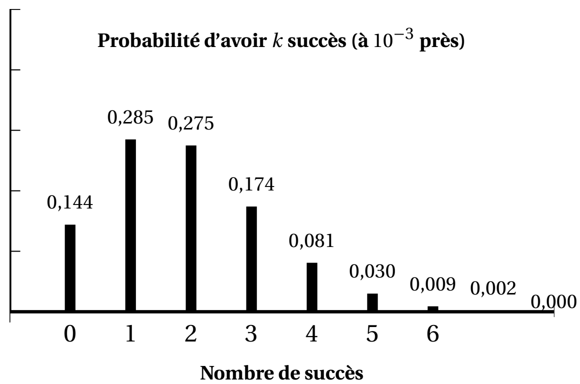
Exercice n° 1

Une usine fabrique en série des pompes de surface destinées à l'irrigation agricole.
Une entreprise lui commande un nombre important de pompes. Lors de la livraison, le service qualité de l'entreprise cherche à contrôler la conformité et le débit moyen des pompes mesuré en mètres cube par heure.

Partie 1 : Conformité

On admet que toutes les pompes ont la même probabilité d'être choisies et que la probabilité que la pompe soit non conforme est $0,038$.
On choisit au hasard un lot de 50 pompes dans le stock. On admet que le stock est suffisamment important pour que ce choix puisse être assimilé à un tirage avec remise.

On note Y la variable aléatoire qui associe le nombre de pompes non conformes du lot.



1. Justifier que Y suit une loi binomiale dont on donnera les paramètres.
2. En utilisant le diagramme ci-contre :
   (a) Calculer la probabilité qu'il y ait exactement 2 batteries non conformes dans le lot.
   (b) Calculer la probabilité qu'il y ait plus de 4 batteries non conformes dans le lot.
3. Calculer $E(Y)$. Que représente ce nombre dans le cadre d'un grand nombre de lots ?

Partie 2 : Débit moyen

Sur ce même prélèvement, la mesure du débit de chaque pompe est résumée dans le tableau suivant :

Débit (m^3/h)	5,7	5,8	5,9	6	6,1	6,2	6,3
Nombre de pompes	9	8	10	9	10	3	1

1. Calculer le débit moyen de cet échantillon.
2. On note $\overline{X}$ la variable aléatoire qui à chaque échantillon de 50 pompes associe son débit moyen.
   On admet que $\overline{X}$ suit une loi normale de moyenne inconnue μ et d'écart-type $\sigma = \dfrac{0,16}{\sqrt{50}}$.
   (a) Déterminer le nombre a tel que $p(\mu - a \leqslant \overline{X} \leqslant \mu + a) = 0,95$.
   (b) En déduire un encadrement de μ ayant une probabilité de 0,95.
   $\rightsquigarrow$ *on l'appelle intervalle de confiance à 95%*
   (c) Calculer cet intervalle de confiance en prenant la valeur de la question 1.

Exercice n° 2

Une entreprise produisant des VTT donne les informations suivantes concernant la pression des pneus :

« Pression (en bars) P : 1,30 - 2,30 ».

On considère que la pression mesurée sur la production suit une loi normale de moyenne μ et d'écart-type σ.
L'intervalle $[1,30 ; 2,30]$ qui est retenu comme « plage de normalité » correspond à l'intervalle $[\mu - 2\sigma ; \mu + 2\sigma]$ de cette loi.
On désigne par P la variable aléatoire qui associe à une roue de VTT pris au hasard la pression d'un de ses pneus en bars.

1. (a) Rappeler la probabilité que P prenne une valeur dans l'intervalle $[\mu - 2\sigma ; \mu + 2\sigma]$.
   (b) Déterminer les paramètres μ et σ.

2. Quelle est la probabilité qu'un pneu pris au hasard ait une pression supérieure ou égale à 2,5 bars ?
3. Déterminer la pression minimale p_0 telle qu'un pneu pris au hasard ait une probabilité au moins égale à 0,85 de se situer en-dessous.
   (on pourra s'aider de la table de la loi N(0;1))

Exercice n° 3

La durée de vie d'une ampoule mesurée en heures est une variable aléatoire qui suit une loi normale $\mathcal{N}(\mu;\sigma^2)$.
On a pu déterminer expérimentalement

$$p(D \leqslant 2000) = 0,0749 \text{ et } p(D \leqslant 3000) = 0,1423.$$

1. Quelle loi suit la variable $\dfrac{D-\mu}{\sigma}$?
2. Déterminer à l'aide des données expérimentales (table dans Moddle) un système vérifié par μ et σ.
3. En déduire μ et σ.
4. Déterminer alors l'intervalle tel que $p(D \in I) = 0,95$.

Exercice n° 4

Un stock de moteurs a été testé et vérifie les conditions suivantes :

- 20% des moteurs ont une vitesse inférieure à 0,82 rad/s ;
- 30% des moteurs ont une vitesse inférieure à 0,98 rad/s.

On choisit un moteur au hasard dans cette production et on note V la variable aléatoire donnant sa vitesse de rotation. On suppose que V suit une loi normale à préciser.

1. Traduire les résultats ci-dessus en termes de probabilités.
2. Déterminer alors μ et σ à l'aide de la table de la loi N(0,1).
3. Quelle est la glycémie moyenne dans cette population ?
4. Déterminer un intervalle de normalité 2σ (contenant 95% des valeurs autour de la moyenne).

Exercice n° 5

Une boulangerie industrielle utilise une machine pour fabriquer des pains de campagne pesant en moyenne 400 grammes. Pour être vendus aux clients, ces pains doivent peser au moins 385 grammes. Un pain dont la masse est strictement inférieure à 385 grammes est un pain non-commercialisable, un pain dont la masse est supérieure ou égale à 385 grammes est commercialisable.
La masse d'un pain fabriqué par la machine peut être modélisée par une variable aléatoire X suivant la loi normale d'espérance $\mu = 400$ et d'écart-type $\sigma = 11$.
Les probabilités seront arrondies au millième le plus proche
On pourra utiliser le tableau suivant dans lequel les valeurs sont arrondies au millième le plus proche.

x	380	385	390	395	400	405	410	415	420
$P(X \leqslant x)$	0,035	0,086	0,182	0,325	0,5	0,675	0,818	0,914	0,965

1. Calculer $P(390 \leqslant X \leqslant 410)$.
2. Calculer la probabilité p qu'un pain choisi au hasard dans la production soit commercialisable.
3. Le fabricant trouve cette probabilité p trop faible. Il décide de modifier ses méthodes de production afin de faire varier la valeur de σ sans modifier celle de μ.
   Pour quelle valeur de σ la probabilité qu'un pain soit commercialisable est-elle égale à 96 % ? On arrondira le résultat au dixième.
   On pourra utiliser le résultat suivant : lorsque Z est une variable aléatoire qui suit la loi normale d'espérance 0 et d'écart-type 1, on a $P(Z \leqslant -1,751) \approx 0,040$.