Tout savoir sur les lois de probabilités

I Indépendance

Définition

Soient A et B deux événements d'un univers Ω, avec A tel que $p(A) \neq 0$. On dit que les événements A et B sont indépendants lorsque :

$$p_A(B) = p(B)$$

Propriété 1

Soient A et B deux événements indépendants. on a alors :

$$p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$$

Remarque *Lorsque deux événements A et B sont indépendants alors on a aussi l'indépendance de :*

— A *et* $\overline{B}$

— $\overline{A}$ *et* B

— $\overline{A}$ *et* $\overline{B}$

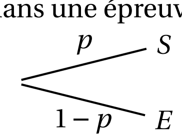
II Loi Binomiale

II.1 Schéma de Bernoulli

Définition

Dans un univers Ω nous considérons deux événements, l'événement S que l'on appelle le succès et son événement contraire E que l'on nommera l'échec.
On appelle **épreuve de Bernoulli** une expérience aléatoire qui comporte deux issues : S et E.

Si dans une épreuve de Bernoulli on a $p(S) = p$ alors $p(E) = 1 - p$. On a donc l'arbre suivant :



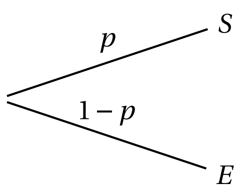
Définition

Soit n un entier naturel, lorsque l'on répète n fois une épreuve de Bernoulli de façon indépendante on dit que l'on réalise un **schéma de Bernoulli**. Pour définir un schéma de Bernoulli, il suffit de donner deux paramètres, le nombre de répétitions n et la probabilité de succès p.
On dit que le schéma est de paramètres n et p.

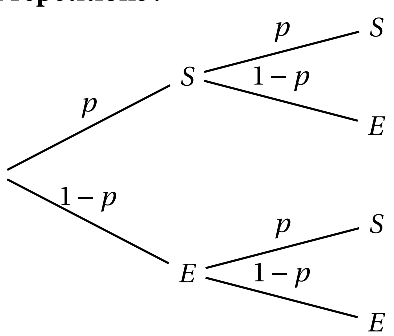
Exemple 1

Nous allons étudier les schéma de Bernoulli, en modifiant le paramètre n, c'est à dire le nombre de répétitions.

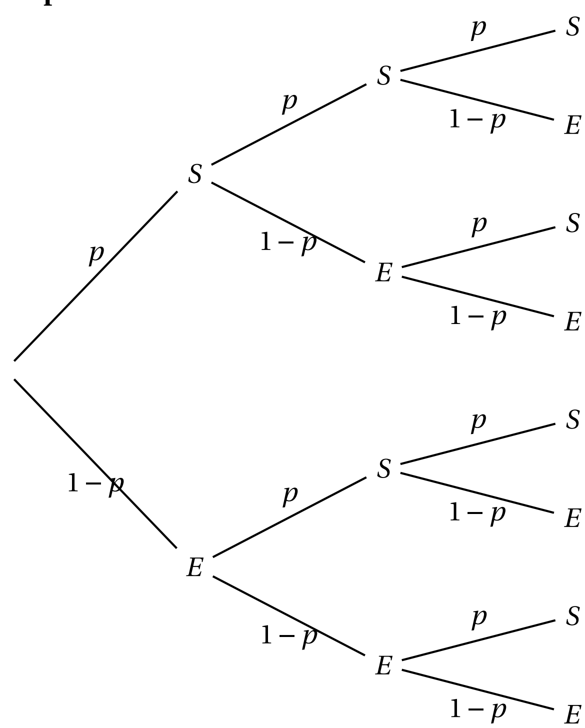
1 répétition :



2 répétitions :



3 répétitions :



II.2 Loi Binomiale

Définition

Soient n un nombre entier naturel et p un nombre appartenant à $[0\,;1]$. On considère un schéma de Bernoulli de paramètres n et p.

Lorsqu'une variable aléatoire X compte le nombre de succès réalisé à la suite de ce schéma. On dit que la variable aléatoire X suit la **loi Binomiale de paramètres** n et p. On la note $\mathscr{B}(n;p)$.

Remarque *Lorsqu'on réalise un schéma de Bernoulli de paramètres n et p, si l'on veut compter le nombre de chemins réalisant k succès. Il est nécessaire de compter le nombre de chemins qui conduisent à de telles issues noté* $\binom{n}{k}$

Définition

Soit n un nombre entier naturel et k un entier tel que $0 \leqslant k \leqslant n$.
On note, $\binom{n}{k}$ (se lit k parmi n) le nombre de chemins de l'arbre réalisant k succès pour n tirages. Ce coefficient est un coefficient binomial.

Propriété 2

Soit X une variable aléatoire suivant une loi binomiale $\mathscr{B}(n;p)$. La probabilité que X réalise k succès est :

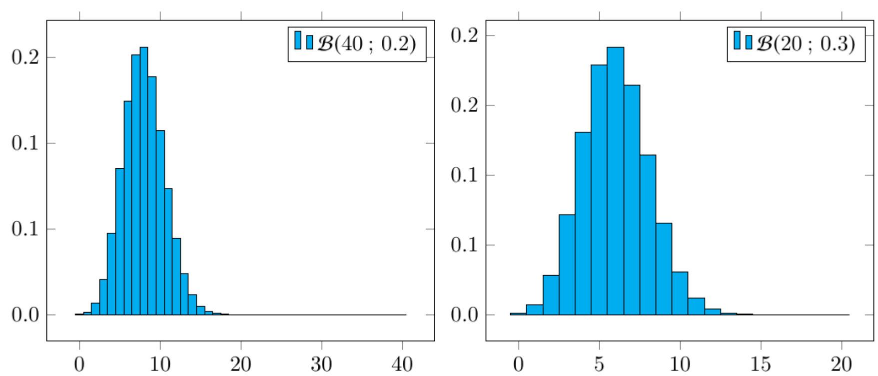
$$p(X=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$$

Remarque *Dans la pratique on utilisera Python (simpy) pour calculer cette probabilité.*

Exemple 2

Soit X une variable aléatoire suivant une loi binomiale $\mathscr{B}(25;0,6)$.
Calculer $p(X=15)$.

Représentation graphique :



Propriété 3

Soit X une variable aléatoire suivant une loi binomiale $\mathscr{B}(n;p)$ et a un nombre entier.

$$p(X\leqslant a)=\sum_{k=1}^{k=a}\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$$

Remarque *Dans la pratique on utilisera Python (simpy) pour calculer cette probabilité.*

```
from scipy import stats
X = stats.binom(n,p)
print (X.pmf(k))
print (X.cdf(k))
```

Exemple 3

Soit X une variable aléatoire suivant une loi binomiale $\mathscr{B}(25;0,6)$.
Calculer $p(X\leqslant 18)$.

Propriété 4

L'espérance d'une variable aléatoire X suivant une loi binomiale $\mathscr{B}(n;p)$ est :

$$E(X) = np$$

Propriété 5

La variance d'une variable aléatoire X suivant une loi binomiale $\mathscr{B}(n;p)$ est :

$$V(X) = np(1-p)$$

Aussi l'écart type est donc :

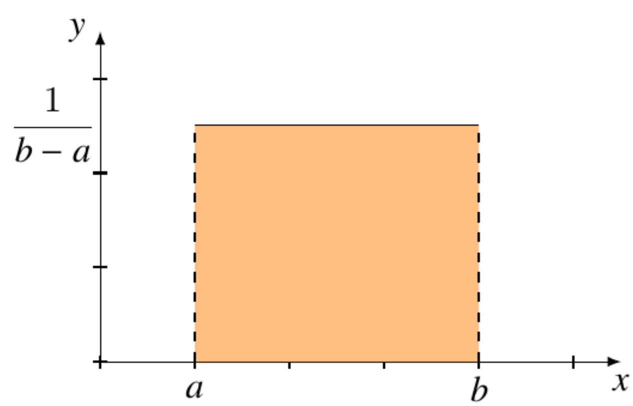
$$\sigma(X) = \sqrt{np(1-p)}$$

III Loi uniforme sur un intervalle $[a\,;\,b]$

Définition

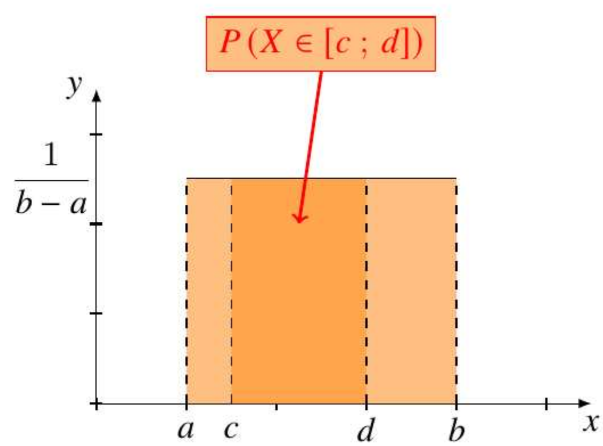
Une variable aléatoire X suit **une loi uniforme sur** $[a\,;\,b]$ si sa fonction densité est la fonction f définie sur $[a\,;\,b]$ par :

$$f(x) = \frac{1}{b-a}$$



Propriété 6

Si X suit une loi uniforme sur $[a\,;\,b]$ alors pour tous c et d deux nombres de $[a\,;\,b]$ on a : La probabilité $P(X \in [c\,;\,d])$ est donnée par l'aire sous la courbe de f entre les valeurs c et d c'est à dire : $\dfrac{d-c}{b-a}$. Donc $P(X \in [c\,;\,d]) = \dfrac{d-c}{b-a}$



Propriété 7

L'espérance d'une variable aléatoire X qui suit une loi uniforme sur $[a\,;\,b]$ est :

$$E(X) = \frac{a+b}{2}$$

La variance pour cette même variable est :

$$V(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

Exemple 4

Dans un supermarché, un jour de grande affluence, le temps d'attente T à la caisse, exprimé en minute suit la loi uniforme sur l'intervalle $[2\,;\,20]$.

1. Définir la fonction de densité f de la loi de T
2. Quelle est la probabilité que le temps d'attente soit inférieur à un quart d'heure ?
3. Quelle est le temps d'attente moyen à la caisse.

IV Loi Normale

Une loi normale intervient dans la modélisation de phénomènes aléatoires possédant de nombreuses causes indépendantes dont les effets s'ajoutent, sans que l'un d'eux soit dominant. Cette loi va intervenir dans de nombreux processus industriels y compris pour le calcul d'erreurs.

Définition

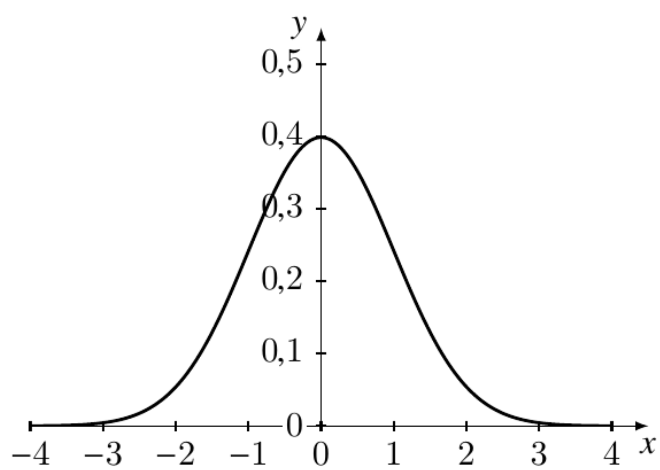
La **loi normale** $\mathcal{N}\left(\mu;\sigma\right)$ d'espérance μ et d'écart type σ est la loi à densité dont la fonction de densité est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-1}{2}\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

IV.1 La loi normale centrée réduite

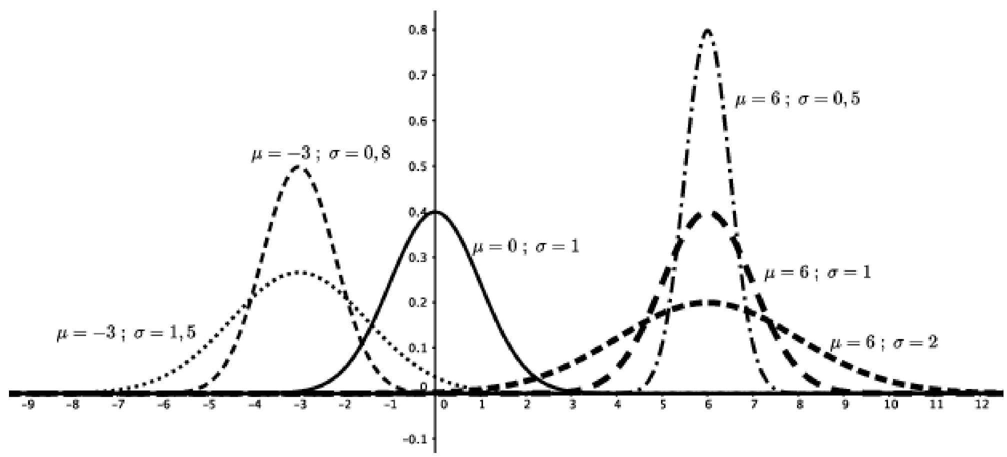
La loi normale d'espérance $\mu = 0$ et d'écart type $\sigma = 1$ s'appelle la loi normale centré réduite. Sa fonction à densité est donc la fonction définie par $f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-t^2}{2}}$. Cette fonction après étude donne le tableau de variations puis la courbe ci-dessous :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$	$\searrow$	0



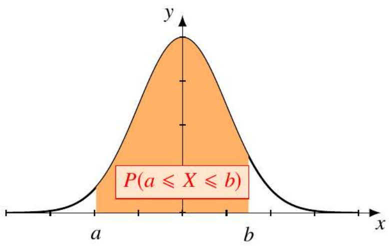
IV.2 Les autres lois normales

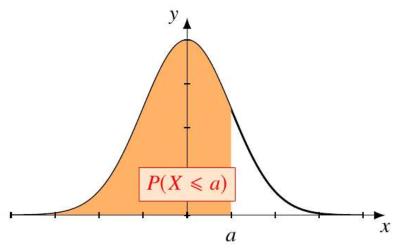
Voici les représentations graphiques de plusieurs fonction densité de variables qui suivent une loi normale $\mathcal{N}\left(\mu;\sigma\right)$.



IV.3 Calcul des probabilités

Pour calculer les probabilités d'une variable aléatoire qui suit une loi normale il faut calculer l'aire sous la courbe de la fonction densité.





Important :

Pour calculer ces probabilités on pourra aussi utiliser `scipy`...

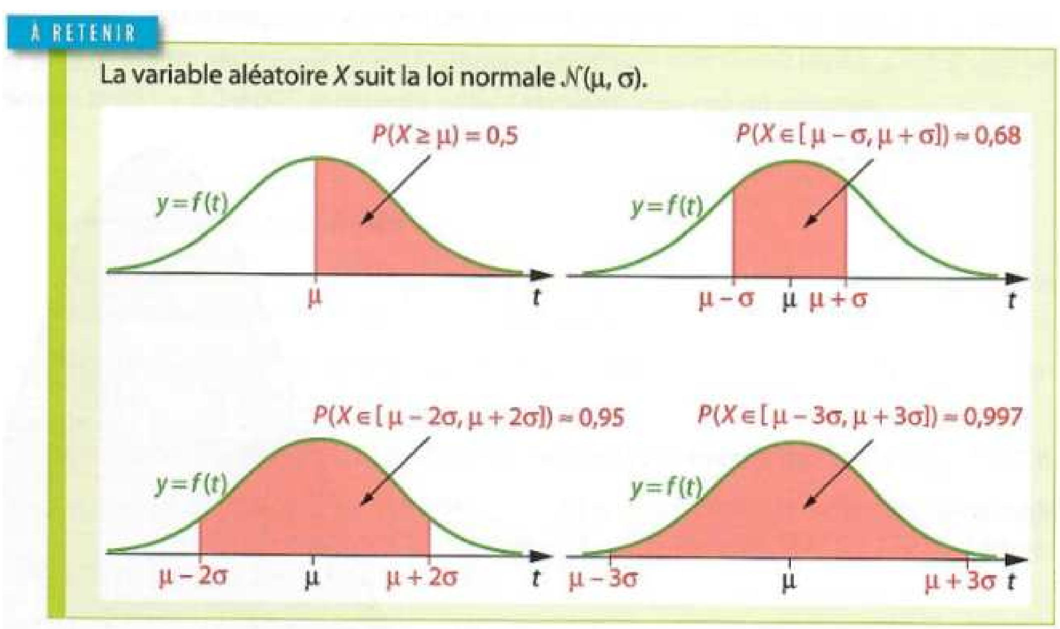
```
from scipy import stats
stats.norm.pdf(x, loc=m, scale=s)
stats.norm.cdf(x, loc=m, scale=s)
```

Exemple 5

Soit X une variable aléatoire suivant une loi normale $\mathcal{N}(10\,;1,5)$. On a les probabilités suivantes :

- $P(X \leqslant 10) = 0,5$
- $P(X \geqslant 10) = 0,5$
- $P(8,5 \leqslant X \leqslant 11,5) = 0,68$
- $P(7 \leqslant X \leqslant 13) = 0,95$
- $P(5,5 \leqslant X \leqslant 14,5) = 0,997$

Les trois derniers calculs sont connus sous le nom de 1, 2 3 σ. Les valeurs sont à connaître car elles servent souvent de test pour vérifier qu'une variable aléatoire suit bien une loi normale.



Dans les exercices, nous verrons comment on approxime une loi binomiale par une loi normale en appliquant une correction pour passer de l'une à l'autre.