Probabilités (1) : Conditionnement et indépendance

I. Fréquences et probabilités conditionnelles : La conduite favorise-t-elle le permis ?

A l'épreuve pratique du permis de conduire, on a observé les résultats suivants sur un échantillon de 500 candidats se présentant pour la première fois.

Candidats	avec conduite accompagnée (C)	sans conduite accompagnée ($\overline{C}$)	Total
Admis (A)		200	270
Refusés ($\overline{A}$)			
Total	84		500

On choisit au hasard un candidat dans cet échantillon.

1. Interpréter les valeurs données dans ce tableau puis, le compléter.
2. Déterminer la probabilité :
   - qu'un élève soit admis au permis de conduire.
   - qu'un élève ait pratiqué la conduite accompagnée **et** soit admis.
3. Le candidat choisit au hasard déclare avoir pratiqué la conduite accompagnée.
   Quelle est la probabilité qu'il ait son permis de conduire ?
   Comparer avec la probabilité que le candidat ait son permis ***en sachant*** qu'il n'a pas passé la conduite accompagnée

II. La règle de Bayes dans la pratique : dépistage du cancer du sein

Prenons le dépistage du cancer du sein par mammographie. À l'aide de pourcentages pour simplifier les chiffres, supposons que :

→ 5 femmes sur 100 ont un cancer du sein.

→ si une personne souffre d'un cancer du sein, la mammographie va le détecter 80 fois sur 100. Lorsque l'examen suggère la présence du cancer du sein, on dit que le résultat est positif, même si, bien sûr, il n'y a rien de positif à ce sujet pour la personne qui a passé l'examen (techniquement, on peut dire que la sensibilité de l'examen est de 80 %).

→ L'examen peut aussi se tromper dans l'autre sens, à savoir indiquer un cancer du sein lorsqu'il n'en existe pas. C'est ce que l'on appelle un faux positif. Supposons que si la personne testée n'a pas de cancer du sein, la probabilité que l'examen soit néanmoins positif est de 10 pour 100.

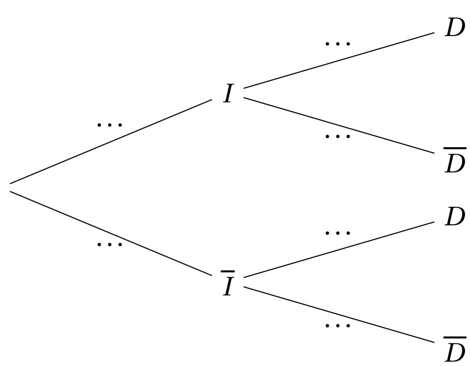
1. Commencez par calculer les **probabilités antérieures** $p(\text{cancer})$ et $p(\overline{\text{cancer}})$.
2. Déterminez la **probabilité a priori** de l'observation en cas d'événement (cancer).
3. Déterminez la probabilité **a priori** de l'observation en cas d'absence d'événement (pas de cancer).
4. Obtenez le **rapport de vraisemblance** comme rapport entre les deux probabilités susmentionnées.
5. Enfin, multipliez la probabilité antérieure par le rapport de vraisemblance et vous obtiendrez la probabilité **a posteriori**.

III. Condition...ou indépendance ? Pas de fumée sans feu !

Une usine est équipée d'un détecteur de fumée, censé donner l'alerte si un incendie se produit.
Ce détecteur a 99,9% de chances (999/1000) de se déclencher en cas d'incendie ; il a également, au cours d'une journée sans incendie, une probabilité de se déclencher de 0,1% (1/1000).
On estime le risque d'incendie dans ce monument à 0,01% (1/10000) chaque jour.
On note :

- D : « le détecteur de fumée se déclenche »
- I : « un incendie est déclaré »
- $\overline{D}$ et $\overline{I}$ les événements contraires de D et I

On peut représenter cette situation par un tableau à double entrée comme dans les exemples précédents, ou par un arbre de probabilités de ce type :



1. Recopier et compléter l'arbre à l'aide des données de l'énoncé.
2. Quelle est la probabilité que le détecteur se déclenche et qu'un incendie se soit déclaré ?
3. Déterminer la probabilité, au cours d'une journée, que le détecteur de fumée se déclenche.
4. Déterminer la probabilité qu'un incendie se soit déclaré, sachant que le détecteur de fumée se déclenche.
5. On ajoute un second détecteur de fumée, aux mêmes caractéristiques que le premier, et dont on suppose que le fonctionnement est indépendant du premier (c'est-à-dire que, sachant qu'un incendie se déclare, les événements « le premier détecteur se déclenche » et « le deuxième détecteur se déclenche » sont indépendants ; et qu'il en est de même sachant qu'aucun incendie ne se déclare. Sans conditionnement, les événements « le premier détecteur se déclenche » et « le deuxième détecteur se déclenche » sont-ils indépendants ?
6. (Toujours dans le cas des deux détecteurs) Déterminer la probabilité, au cours d'une journée, qu'au moins un détecteur de fumée se déclenche (Indication : il est plus facile de déterminer la probabilité qu'aucun détecteur ne se déclenche) ; et la probabilité qu'un incendie se soit déclaré, sachant qu'au moins un détecteur s'est déclenché.