

# Méthode Denavit-Hartenberg

## LP Rob&IA - 2

[R3.04 - Maths OT]

December 2, 2024

# Méthode Denavit-Hartenberg : Rappels

# Méthode Denavit-Hartenberg : Rappels

- Modélisation géométrique directe (MGD) : passage de l'espace articulaire à l'espace opérationnel :

# Méthode Denavit-Hartenberg : Rappels

- Modélisation géométrique directe (MGD) : passage de l'espace articulaire à l'espace opérationnel :

$$[\theta_x \ \theta_y \ \theta_z \ P_x \ P_y \ P_z]^T = MGD(q)$$

# Méthode Denavit-Hartenberg : Rappels

- Modélisation géométrique directe (MGD) : passage de l'espace articulaire à l'espace opérationnel :

$$[\theta_x \ \theta_y \ \theta_z \ P_x \ P_y \ P_z]^T = MGD(q)$$

- Expression des coordonnées du repère effecteur dans le repère outil

# Méthode Denavit-Hartenberg : Rappels

- Modélisation géométrique directe (MGD) : passage de l'espace articulaire à l'espace opérationnel :

$$[\theta_x \ \theta_y \ \theta_z \ P_x \ P_y \ P_z]^T = MGD(q)$$

- Expression des coordonnées du repère effecteur dans le repère outil
- Les degrés de liberté des articulations permettent de définir la matrice de transformation  ${}^{i-1}T_i$  d'un repère  $i$  dans son repère antécédent  $i - 1$

# Méthode Denavit-Hartenberg : Rappels

- Modélisation géométrique directe (MGD) : passage de l'espace articulaire à l'espace opérationnel :

$$[\theta_x \ \theta_y \ \theta_z \ P_x \ P_y \ P_z]^T = MGD(q)$$

- Expression des coordonnées du repère effecteur dans le repère outil
- Les degrés de liberté des articulations permettent de définir la matrice de transformation  ${}^{i-1}T_i$  d'un repère  $i$  dans son repère antécédent  $i - 1$
- Le MGD se calcule via :

# Méthode Denavit-Hartenberg : Rappels

- Modélisation géométrique directe (MGD) : passage de l'espace articulaire à l'espace opérationnel :

$$[\theta_x \ \theta_y \ \theta_z \ P_x \ P_y \ P_z]^T = MGD(q)$$

- Expression des coordonnées du repère effecteur dans le repère outil
- Les degrés de liberté des articulations permettent de définir la matrice de transformation  ${}^{i-1}T_i$  d'un repère  $i$  dans son repère antécédent  $i - 1$
- Le MGD se calcule via :

$${}^0T_{eff} = {}^0T_1 \cdot {}^1T_2 \cdot \dots \cdot {}^{eff-1}T_{eff}$$

# Méthode Denavit-Hartenberg : placement des axes

# Méthode Denavit-Hartenberg : placement des axes

→ Pour définir une transformation entre deux repères, il faut 6 paramètres (3 rot, 3 trans).

# Méthode Denavit-Hartenberg : placement des axes

- Pour définir une transformation entre deux repères, il faut 6 paramètres (3 rot, 3 trans).
- DH permet de passer à quatre paramètres, possible grâce aux règles suivantes :

# Méthode Denavit-Hartenberg : placement des axes

- Pour définir une transformation entre deux repères, il faut 6 paramètres (3 rot, 3 trans).
- DH permet de passer à quatre paramètres, possible grâce aux règles suivantes :
- ①  $z_i$ : axe de la liaison entre le corps  $C_{i-1}$  et  $C_i$  ;

# Méthode Denavit-Hartenberg : placement des axes

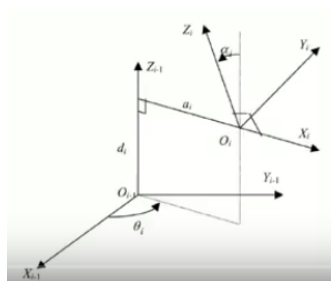
- Pour définir une transformation entre deux repères, il faut 6 paramètres (3 rot, 3 trans).
- DH permet de passer à quatre paramètres, possible grâce aux règles suivantes :
- ①  $z_i$ : axe de la liaison entre le corps  $C_{i-1}$  et  $C_i$  ;
- ②  $x_i$  porté par la normale commune entre  $z_{i-1}$  et  $z_i$  :  $x_i = z_{i-1} \wedge z_i$  ;

# Méthode Denavit-Hartenberg : placement des axes

- Pour définir une transformation entre deux repères, il faut 6 paramètres (3 rot, 3 trans).
- DH permet de passer à quatre paramètres, possible grâce aux règles suivantes :
  - 1  $z_i$ : axe de la liaison entre le corps  $C_{i-1}$  et  $C_i$  ;
  - 2  $x_i$  porté par la normale commune entre  $z_{i-1}$  et  $z_i$  :  $x_i = z_{i-1} \wedge z_i$  ;
  - 3  $y_i$  complété pour former repère orthonormé :  $y_i = z_i \wedge x_i$

# Méthode Denavit-Hartenberg : placement des axes

- Pour définir une transformation entre deux repères, il faut 6 paramètres (3 rot, 3 trans).
  - DH permet de passer à quatre paramètres, possible grâce aux règles suivantes :
- 1  $z_i$ : axe de la liaison entre le corps  $C_{i-1}$  et  $C_i$  ;
  - 2  $x_i$  porté par la normale commune entre  $z_{i-1}$  et  $z_i$  :  $x_i = z_{i-1} \wedge z_i$  ;
  - 3  $y_i$  complété pour former repère orthonormé :  $y_i = z_i \wedge x_i$



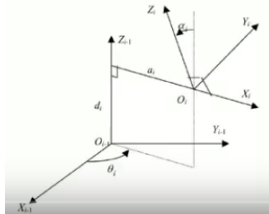
# Méthode Denavit-Hartenberg : Les paramètres

# Méthode Denavit-Hartenberg : Les paramètres

Les quatre paramètres DH sont :

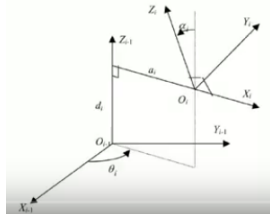
# Méthode Denavit-Hartenberg : Les paramètres

Les quatre paramètres DH sont :



# Méthode Denavit-Hartenberg : Les paramètres

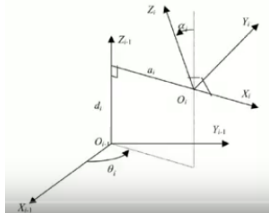
Les quatre paramètres DH sont :



- $d_i$  distance entre  $x_{i-1}$  et  $x_i$  suivant  $z_{i-1}$

# Méthode Denavit-Hartenberg : Les paramètres

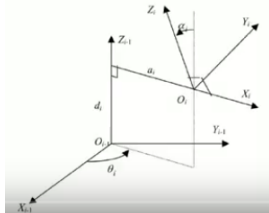
Les quatre paramètres DH sont :



- $d_i$  distance entre  $x_{i-1}$  et  $x_i$  suivant  $z_{i-1}$
- $\theta_i$  angle autour de  $z_{i-1}$  entre  $x_{i-1}$  et  $x_i$

# Méthode Denavit-Hartenberg : Les paramètres

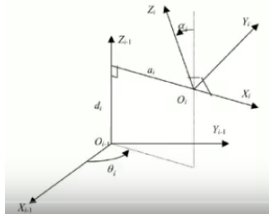
Les quatre paramètres DH sont :



- $d_i$  distance entre  $x_{i-1}$  et  $x_i$  suivant  $z_{i-1}$
- $\theta_i$  angle autour de  $z_{i-1}$  entre  $x_{i-1}$  et  $x_i$
- $r_i$  distance entre  $z_{i-1}$  et  $z_i$  suivant  $x_i$

# Méthode Denavit-Hartenberg : Les paramètres

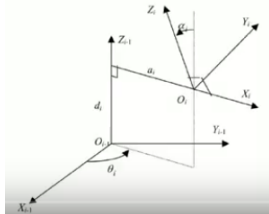
Les quatre paramètres DH sont :



- $d_i$  distance entre  $x_{i-1}$  et  $x_i$  suivant  $z_{i-1}$
- $\theta_i$  angle autour de  $z_{i-1}$  entre  $x_{i-1}$  et  $x_i$
- $r_i$  distance entre  $z_{i-1}$  et  $z_i$  suivant  $x_i$
- $\alpha_i$  angle autour de  $x_i$  entre  $z_{i-1}$  et  $z_i$

# Méthode Denavit-Hartenberg : Les paramètres

Les quatre paramètres DH sont :

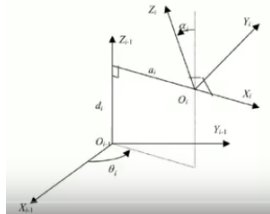


- $d_i$  distance entre  $x_{i-1}$  et  $x_i$  suivant  $z_{i-1}$
- $\theta_i$  angle autour de  $z_{i-1}$  entre  $x_{i-1}$  et  $x_i$
- $r_i$  distance entre  $z_{i-1}$  et  $z_i$  suivant  $x_i$
- $\alpha_i$  angle autour de  $x_i$  entre  $z_{i-1}$  et  $z_i$

$${}^{i-1}T_i = Trans(z, d_i)Rot(z, \theta_i)Trans(x, r_i)Rot(x, \alpha_i)$$

# Méthode Denavit-Hartenberg : Les paramètres

Les quatre paramètres DH sont :



- $d_i$  distance entre  $x_{i-1}$  et  $x_i$  suivant  $z_{i-1}$
- $\theta_i$  angle autour de  $z_{i-1}$  entre  $x_{i-1}$  et  $x_i$
- $r_i$  distance entre  $z_{i-1}$  et  $z_i$  suivant  $x_i$
- $\alpha_i$  angle autour de  $x_i$  entre  $z_{i-1}$  et  $z_i$

$${}^{i-1}T_i = Trans(z, d_i)Rot(z, \theta_i)Trans(x, r_i)Rot(x, \alpha_i)$$

$d_i$  = glissière et  $\theta_i$  = pivot

# Méthode DH Modifiée (Khalil - Kleinfinger)

# Méthode DH Modifiée (Khalil - Kleinfinger)

Méthode plus intuitive que la version originale car le repère  $R_i$  précède le corps  $C_i$ .

# Méthode DH Modifiée (Khalil - Kleinfinger)

Méthode plus intuitive que la version originale car le repère  $R_i$  précède le corps  $C_i$ .

Placement des axes :

- le repère  $R_i$  est lié au corps  $C_i$

# Méthode DH Modifiée (Khalil - Kleinfinger)

Méthode plus intuitive que la version originale car le repère  $R_i$  précède le corps  $C_i$ .

Placement des axes :

- le repère  $R_i$  est lié au corps  $C_i$
- $z_i$  est porté par l'articulation  $i$

# Méthode DH Modifiée (Khalil - Kleinfinger)

Méthode plus intuitive que la version originale car le repère  $R_i$  précède le corps  $C_i$ .

Placement des axes :

- le repère  $R_i$  est lié au corps  $C_i$
- $z_i$  est porté par l'articulation  $i$
- $x_i$  porté par la normale commune entre  $z_i$  et  $z_{i+1}$  :  $x_i = z_i \wedge z_{i+1}$  ;

# Méthode DH Modifiée (Khalil - Kleinfinger)

Méthode plus intuitive que la version originale car le repère  $R_i$  précède le corps  $C_i$ .

Placement des axes :

- le repère  $R_i$  est lié au corps  $C_i$
- $z_i$  est porté par l'articulation  $i$
- $x_i$  porté par la normale commune entre  $z_i$  et  $z_{i+1}$  :  $x_i = z_i \wedge z_{i+1}$  ;
- $y_i$  complété pour former repère orthonormé :  $y_i = z_i \wedge x_i$

# Méthode DH Modifiée (Khalil - Kleinfinger)

Méthode plus intuitive que la version originale car le repère  $R_i$  précède le corps  $C_i$ .

Placement des axes :

- le repère  $R_i$  est lié au corps  $C_i$
- $z_i$  est porté par l'articulation  $i$
- $x_i$  porté par la normale commune entre  $z_i$  et  $z_{i+1}$  :  $x_i = z_i \wedge z_{i+1}$  ;
- $y_i$  complété pour former repère orthonormé :  $y_i = z_i \wedge x_i$

# Méthode DH Modifiée (Khalil - Kleinfinger)

Méthode plus intuitive que la version originale car le repère  $R_i$  précède le corps  $C_i$ .

Placement des axes :

- le repère  $R_i$  est lié au corps  $C_i$
- $z_i$  est porté par l'articulation  $i$
- $x_i$  porté par la normale commune entre  $z_i$  et  $z_{i+1}$  :  $x_i = z_i \wedge z_{i+1}$  ;
- $y_i$  complété pour former repère orthonormé :  $y_i = z_i \wedge x_i$

Les paramètres :

- $\alpha_i$  angle autour de  $x_i$  entre  $z_{i-1}$  et  $z_i$

# Méthode DH Modifiée (Khalil - Kleinfinger)

Méthode plus intuitive que la version originale car le repère  $R_i$  précède le corps  $C_i$ .

Placement des axes :

- le repère  $R_i$  est lié au corps  $C_i$
- $z_i$  est porté par l'articulation  $i$
- $x_i$  porté par la normale commune entre  $z_i$  et  $z_{i+1}$  :  $x_i = z_i \wedge z_{i+1}$  ;
- $y_i$  complété pour former repère orthonormé :  $y_i = z_i \wedge x_i$

Les paramètres :

- $\alpha_i$  angle autour de  $x_i$  entre  $z_{i-1}$  et  $z_i$
- $d_i$  distance entre  $x_{i-1}$  et  $x_i$  suivant  $z_{i-1}$

# Méthode DH Modifiée (Khalil - Kleinfinger)

Méthode plus intuitive que la version originale car le repère  $R_i$  précède le corps  $C_i$ .

Placement des axes :

- le repère  $R_i$  est lié au corps  $C_i$
- $z_i$  est porté par l'articulation  $i$
- $x_i$  porté par la normale commune entre  $z_i$  et  $z_{i+1}$  :  $x_i = z_i \wedge z_{i+1}$  ;
- $y_i$  complété pour former repère orthonormé :  $y_i = z_i \wedge x_i$

Les paramètres :

- $\alpha_i$  angle autour de  $x_i$  entre  $z_{i-1}$  et  $z_i$
- $d_i$  distance entre  $x_{i-1}$  et  $x_i$  suivant  $z_{i-1}$
- $\theta_i$  angle autour de  $z_{i-1}$  entre  $x_{i-1}$  et  $x_i$

# Méthode DH Modifiée (Khalil - Kleinfinger)

Méthode plus intuitive que la version originale car le repère  $R_i$  précède le corps  $C_i$ .

Placement des axes :

- le repère  $R_i$  est lié au corps  $C_i$
- $z_i$  est porté par l'articulation  $i$
- $x_i$  porté par la normale commune entre  $z_i$  et  $z_{i+1}$  :  $x_i = z_i \wedge z_{i+1}$  ;
- $y_i$  complété pour former repère orthonormé :  $y_i = z_i \wedge x_i$

Les paramètres :

- $\alpha_i$  angle autour de  $x_i$  entre  $z_{i-1}$  et  $z_i$
- $d_i$  distance entre  $x_{i-1}$  et  $x_i$  suivant  $z_{i-1}$
- $\theta_i$  angle autour de  $z_{i-1}$  entre  $x_{i-1}$  et  $x_i$
- $r_i$  distance entre  $z_{i-1}$  et  $z_i$  suivant  $x_i$

# Méthode DH Modifiée (Khalil - Kleinfinger)

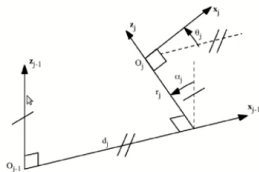
Méthode plus intuitive que la version originale car le repère  $R_i$  précède le corps  $C_i$ .

Placement des axes :

- le repère  $R_i$  est lié au corps  $C_i$
- $z_i$  est porté par l'articulation  $i$
- $x_i$  porté par la normale commune entre  $z_i$  et  $z_{i+1}$  :  $x_i = z_i \wedge z_{i+1}$  ;
- $y_i$  complété pour former repère orthonormé :  $y_i = z_i \wedge x_i$

Les paramètres :

- $\alpha_i$  angle autour de  $x_i$  entre  $z_{i-1}$  et  $z_i$
- $d_i$  distance entre  $x_{i-1}$  et  $x_i$  suivant  $z_{i-1}$
- $\theta_i$  angle autour de  $z_{i-1}$  entre  $x_{i-1}$  et  $x_i$
- $r_i$  distance entre  $z_{i-1}$  et  $z_i$  suivant  $x_i$



# Méthode DH Modifiée (Khalil - Kleinfinger)

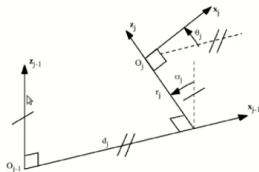
Méthode plus intuitive que la version originale car le repère  $R_i$  précède le corps  $C_i$ .

Placement des axes :

- le repère  $R_i$  est lié au corps  $C_i$
- $z_i$  est porté par l'articulation  $i$
- $x_i$  porté par la normale commune entre  $z_i$  et  $z_{i+1}$  :  $x_i = z_i \wedge z_{i+1}$  ;
- $y_i$  complété pour former repère orthonormé :  $y_i = z_i \wedge x_i$

Les paramètres :

- $\alpha_i$  angle autour de  $x_i$  entre  $z_{i-1}$  et  $z_i$
- $d_i$  distance entre  $x_{i-1}$  et  $x_i$  suivant  $z_{i-1}$
- $\theta_i$  angle autour de  $z_{i-1}$  entre  $x_{i-1}$  et  $x_i$
- $r_i$  distance entre  $z_{i-1}$  et  $z_i$  suivant  $x_i$



$${}^{i-1}T_i = Rot(x, \alpha_i) Trans(x, d_i) Rot(z, \theta_i) Trans(z, r_i)$$

# Méthode DH Modifiée (Khalil - Kleinfinger)

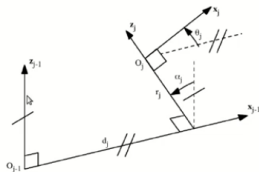
Méthode plus intuitive que la version originale car le repère  $R_i$  précède le corps  $C_i$ .

Placement des axes :

- le repère  $R_i$  est lié au corps  $C_i$
- $z_i$  est porté par l'articulation  $i$
- $x_i$  porté par la normale commune entre  $z_i$  et  $z_{i+1}$  :  $x_i = z_i \wedge z_{i+1}$  ;
- $y_i$  complété pour former repère orthonormé :  $y_i = z_i \wedge x_i$

Les paramètres :

- $\alpha_i$  angle autour de  $x_i$  entre  $z_{i-1}$  et  $z_i$
- $d_i$  distance entre  $x_{i-1}$  et  $x_i$  suivant  $z_{i-1}$
- $\theta_i$  angle autour de  $z_{i-1}$  entre  $x_{i-1}$  et  $x_i$
- $r_i$  distance entre  $z_{i-1}$  et  $z_i$  suivant  $x_i$



$${}^{i-1}T_i = Rot(x, \alpha_i) Trans(x, d_i) Rot(z, \theta_i) Trans(z, r_i)$$

$r_i$  = glissière et  $\theta_i$  = pivot

# Méthode DH : matrices de transformation

Matrice méthode originale :

# Méthode DH : matrices de transformation

Matrice méthode originale :

$${}^{i-1}T_i = \begin{pmatrix} \cos(\theta_i) & -\cos(\alpha_i) \sin(\theta_i) & \sin(\alpha_i) \sin(\theta_i) & r_i \cos(\theta_i) \\ \sin(\theta_i) & \cos(\alpha_i) \cos(\theta_i) & -\sin(\alpha_i) \cos(\theta_i) & r_i \sin(\theta_i) \\ 0 & \sin(\alpha_i) & \cos(\alpha_i) & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

# Méthode DH : matrices de transformation

Matrice méthode originale :

$${}^{i-1}T_i = \begin{pmatrix} \cos(\theta_i) & -\cos(\alpha_i) \sin(\theta_i) & \sin(\alpha_i) \sin(\theta_i) & r_i \cos(\theta_i) \\ \sin(\theta_i) & \cos(\alpha_i) \cos(\theta_i) & -\sin(\alpha_i) \cos(\theta_i) & r_i \sin(\theta_i) \\ 0 & \sin(\alpha_i) & \cos(\alpha_i) & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Matrice méthode modifiée :

# Méthode DH : matrices de transformation

Matrice méthode originale :

$${}^{i-1}T_i = \begin{pmatrix} \cos(\theta_i) & -\cos(\alpha_i) \sin(\theta_i) & \sin(\alpha_i) \sin(\theta_i) & r_i \cos(\theta_i) \\ \sin(\theta_i) & \cos(\alpha_i) \cos(\theta_i) & -\sin(\alpha_i) \cos(\theta_i) & r_i \sin(\theta_i) \\ 0 & \sin(\alpha_i) & \cos(\alpha_i) & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Matrice méthode modifiée :

$${}^{i-1}T_i = \begin{pmatrix} \cos(\theta_i) & -\sin(\theta_i) & 0 & d_i \\ \cos(\alpha_i) \sin(\theta_i) & \cos(\alpha_i) \cos(\theta_i) & -\sin(\alpha_i) & -r_i \sin(\alpha_i) \\ \sin(\alpha_i) \sin(\theta_i) & \sin(\alpha_i) \cos(\theta_i) & \cos(\alpha_i) & r_i \cos(\alpha_i) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

# Méthode DH : matrices de transformation

Matrice méthode originale :

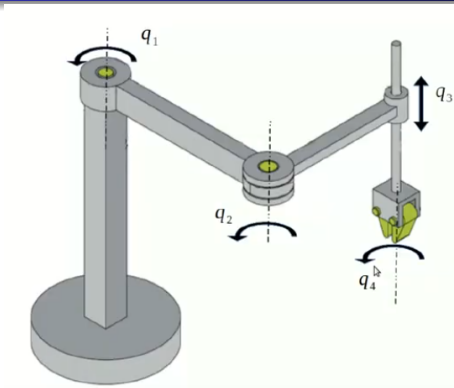
$${}^{i-1}T_i = \begin{pmatrix} \cos(\theta_i) & -\cos(\alpha_i) \sin(\theta_i) & \sin(\alpha_i) \sin(\theta_i) & r_i \cos(\theta_i) \\ \sin(\theta_i) & \cos(\alpha_i) \cos(\theta_i) & -\sin(\alpha_i) \cos(\theta_i) & r_i \sin(\theta_i) \\ 0 & \sin(\alpha_i) & \cos(\alpha_i) & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Matrice méthode modifiée :

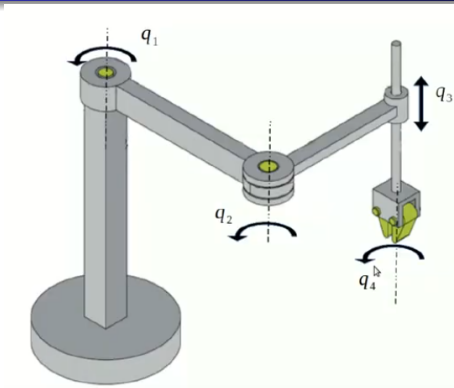
$${}^{i-1}T_i = \begin{pmatrix} \cos(\theta_i) & -\sin(\theta_i) & 0 & d_i \\ \cos(\alpha_i) \sin(\theta_i) & \cos(\alpha_i) \cos(\theta_i) & -\sin(\alpha_i) & -r_i \sin(\alpha_i) \\ \sin(\alpha_i) \sin(\theta_i) & \sin(\alpha_i) \cos(\theta_i) & \cos(\alpha_i) & r_i \cos(\alpha_i) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

# Exemple: Robot SCARA (RRPR)

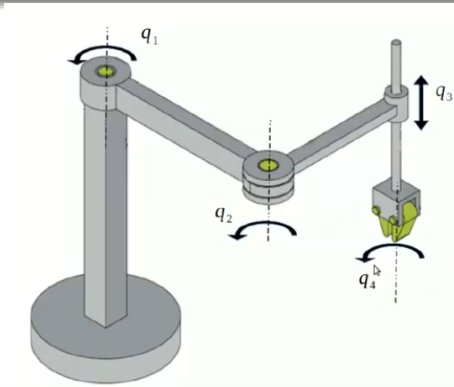
# Exemple: Robot SCARA (RRPR)



# Exemple: Robot SCARA (RRPR)

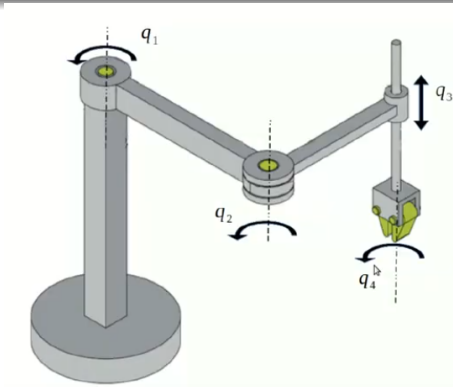


# Exemple: Robot SCARA (RRPR)



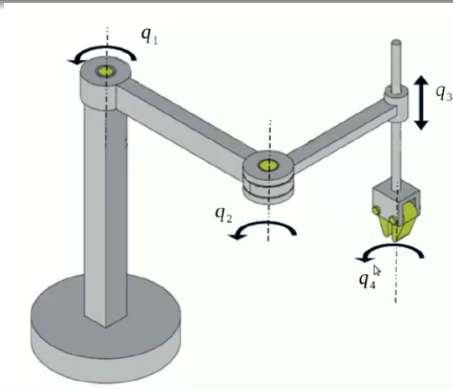
Robot à 4 axes:

# Exemple: Robot SCARA (RRPR)



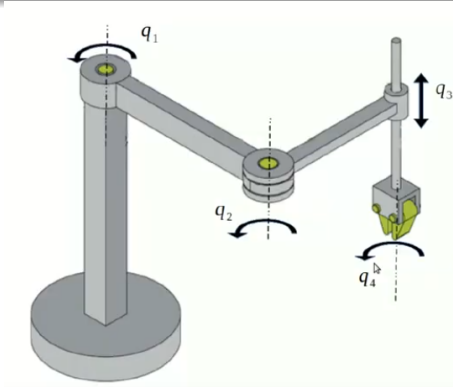
Robot à 4 axes:  
deux axes de rotation ( $R$ ),

# Exemple: Robot SCARA (RRPR)



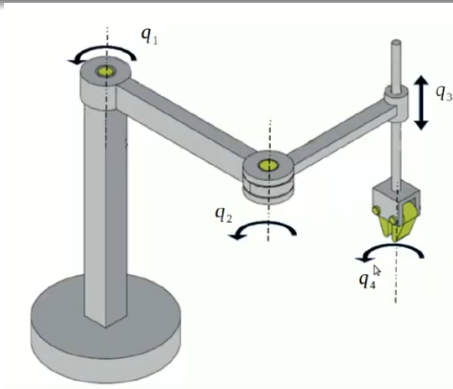
Robot à 4 axes:  
deux axes de rotation ( $R$ ),  
un axe prismatique ( $P$ ),

# Exemple: Robot SCARA (RRPR)



Robot à 4 axes:  
deux axes de rotation ( $R$ ),  
un axe prismatique ( $P$ ),  
et un dernier axe de rotation ( $R$ )

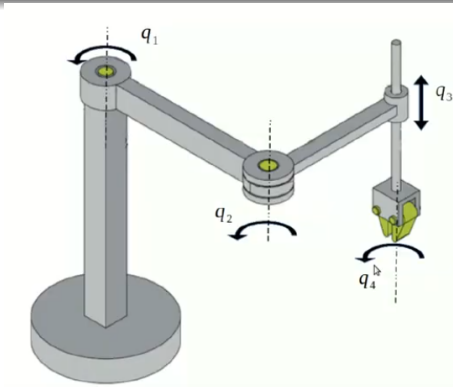
# Exemple: Robot SCARA (RRPR)



Robot à 4 axes:  
deux axes de rotation ( $R$ ),  
un axe prismatique ( $P$ ),  
et un dernier axe de rotation ( $R$ )

- Définition des corps  $C_i$  et choix repère référence

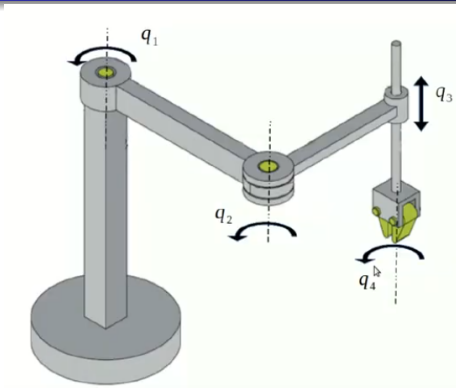
# Exemple: Robot SCARA (RRPR)



Robot à 4 axes:  
deux axes de rotation ( $R$ ),  
un axe prismatique ( $P$ ),  
et un dernier axe de rotation  
( $R$ )

- Définition des corps  $C_i$  et choix repère référence
- Identification des axes  $z_i$

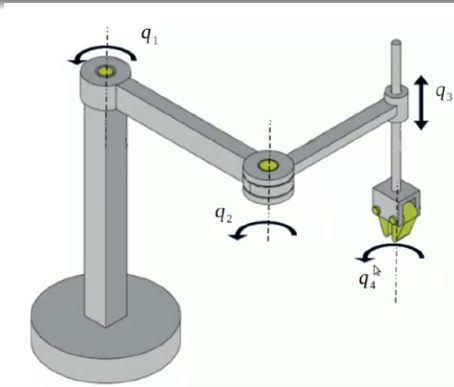
# Exemple: Robot SCARA (RRPR)



Robot à 4 axes:  
deux axes de rotation ( $R$ ),  
un axe prismatique ( $P$ ),  
et un dernier axe de rotation ( $R$ )

- Définition des corps  $C_i$  et choix repère référence
- Identification des axes  $z_i$
- Positionnement des axes  $x_i$

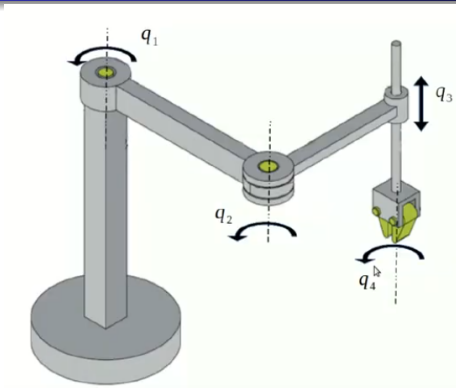
# Exemple: Robot SCARA (RRPR)



Robot à 4 axes:  
deux axes de rotation ( $R$ ),  
un axe prismatique ( $P$ ),  
et un dernier axe de rotation ( $R$ )

- Définition des corps  $C_i$  et choix repère référence
- Identification des axes  $z_i$
- Positionnement des axes  $x_i$
- Calcul des paramètres DH

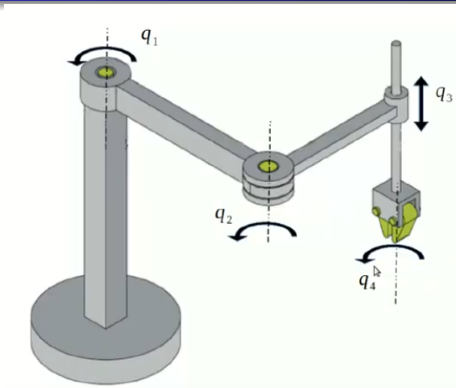
# Exemple: Robot SCARA (RRPR)



Robot à 4 axes:  
deux axes de rotation ( $R$ ),  
un axe prismatique ( $P$ ),  
et un dernier axe de rotation ( $R$ )

- Définition des corps  $C_i$  et choix repère référence
- Identification des axes  $z_i$
- Positionnement des axes  $x_i$
- Calcul des paramètres DH
- Construction des matrices de transformation

# Exemple: Robot SCARA (RRPR)



Robot à 4 axes:

deux axes de rotation ( $R$ ),  
un axe prismatique ( $P$ ),  
et un dernier axe de rotation  
( $R$ )

- Définition des corps  $C_i$  et choix repère référence
- Identification des axes  $z_i$
- Positionnement des axes  $x_i$
- Calcul des paramètres DH
- Construction des matrices de transformation