L3	R505	
	Thermodynamique Généralités Transferts thermiques	

Dans ce TD nous allons chercher à modéliser les transferts thermiques en particulier dans le cas où ils se déroulent dans un milieu dont la température n'est pas uniforme.

1. Flux thermique :

1. Densité de flux thermique :

Le flux thermique Φ d'un milieu 1 vers un milieu 2 est égal au transfert thermique fourni par le milieu 1 au milieu 2 par unité de temps. Le flux thermique représente donc la puissance thermique ; c'est une grandeur algébrique.

Il paraît évident que ce flux dépend de la surface de contact : plus cette surface est grande, plus le flux thermique sera important. On pourrait donc vouloir introduire un flux thermique par unité de surface, qui serait ainsi une grandeur intensive. Toutefois, le flux peut ne pas être homogène (on perd plus d'énergie à travers des fenêtres qu'à travers un mur par exemple) et la division précédente définirait donc un flux surfacique moyen.

Pour obtenir une grandeur plus précise, nous allons procéder par analogie avec les propriétés du débit massique$D_m = \iint_{Surface} \rho\vec{v}\,.\,\overrightarrow{dS}$ $\iint_{Surface}\overrightarrow{J_m}.\overrightarrow{dS}$, le débit massique est le flux du vecteur densité de flux de masse $\overrightarrow{J_m}$

Un débit massique est la masse passant à travers une surface par unité de temps. Ici on s'intéresse à l'énergie passant à travers une surface par unité de temps : c'est le même problème, mais pour une unité différente.

On définit donc le vecteur densité de flux thermique par la relation $\Phi = \iint_{Surface}\overrightarrow{J_{th}}.\overrightarrow{dS}$, ce vecteur a une norme en $W.m^{-2}$ (qui représente la puissance thermique par unité de surface en un point) et une direction et un sens qui indiquent dans quelle direction a lieu le transfert thermique localement.

2. Loi de Fourier :

La loi de Fourier permet de relier cette densité de flux thermique à d'autres grandeurs. Dans le cas où le flux thermique est dû à un phénomène de conduction (convection et rayonnement absents ou négligeables). En effet, on sait expérimentalement que le flux thermique doit être dirigé du chaud vers le froid ; la loi de Fourier donne la chose suivante : $\overrightarrow{J_{th}}. = \lambda\overrightarrow{grad}\,(T)$ c'est à dire que la densité de flux thermique est proportionnelle au gradient de température (plus les différences de température sont importantes, plus le flux est important ; si la température est uniforme il n'y a pas de flux), opposé au gradient thermique (le flux va des hautes températures vers les basses températures) avec un coefficient de proportionnalité λ appelé conductivité thermique (en $W.m^{-1}.K^{-1}$) qui dépend du matériau utilisé. Plus la conductivité thermique est élevée, plus un matériau sera le lieu d'un fort transfert thermique pour un même gradient de température.

Les ordres de grandeur suivants sont à connaître :

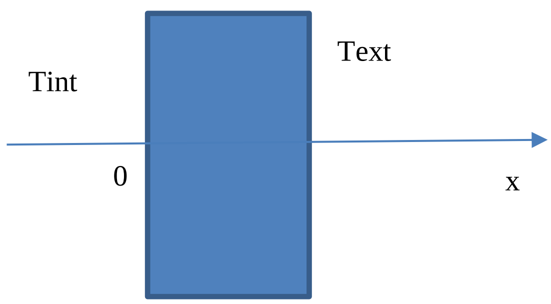
Matériau	Conductivité thermique (en $W.m^{-1}.K^{-1}$)
métal	100
minéral (pierre, brique, béton, verre...)	1
bois	0,1
isolant (laine de verre, paille, polystyrène,...)	0,01
air	0,03

Application : on se place dans le cas de conduction thermique unidimensionnel. On suppose donc que la température ne dépend en fait que d'un variable. Ici on supposera qu'elle ne dépend que de l'abscisse x : T(x). On veut exprimer le flux thermique total à travers une surface S placée à l'abscisse x_0 (le vecteur unitaire $\vec{u}_x$ est donc normal à cette surface).

$$\overrightarrow{J_{th}}. = \lambda \frac{dT}{dx}\overrightarrow{u_x}$$

3. *Notion de résistance thermique :*

On se place dans le cas pratique suivant, souvent rencontré dans le domaine de l'habitation par exemple : on considère un milieu d'épaisseur e, de surface S et de conductivité thermique λ séparant deux milieux homogènes de températures respectives T_{int} et T_{ext} (c'est à dire qu'on considère par exemple un mur séparant l'intérieur et l'extérieur de la maison). On se place également en régime stationnaire c'est à dire qu'il n'y a pas d'évolution au cours du temps.



Vu la géométrie du problème, la température ne dépend que de l'abscisse x à travers le mur. On a donc T(x)

Comme on est en régime stationnaire, ce flux ne doit en fait pas dépendre de x : toute l'énergie entrante doit sortir, sinon de l'énergie s'accumulerait et on ne serait pas en régime stationnaire. Cela signifie que $\frac{dT}{dx} = constante = \frac{Text-Tint}{e}$ et $\overrightarrow{J_{th}}. = \lambda \frac{Text-Tint}{e}\overrightarrow{u_x}$

La flux s'écrit donc $\Phi = \iint_{Surface} \overrightarrow{J_{th}}.\overrightarrow{dS} = \frac{\lambda S}{e}(Text - Tint)$

On voit que le flux est proportionnel à la différence de température causant ce flux. On remarque que cette relation de proportionnalité est la même que celle reliant le courant et la tension pour une résistance dans un circuit électrique : on a une analogie entre la tension (différence de potentiel) et la différence de température ainsi qu'entre le flux thermique et le flux de charge électrique (c'est à dire le courant I). Pour compléter l'analogie, on définit la résistance thermique par la relation $(Text - Tint) = R_{th}\Phi$ avec $R_{th} = \frac{e}{\lambda S}$

Plus cette résistance est grande plus le flux est faible et donc moins il y a de pertes thermiques. On voit que pour cela il faut un mur épais, peu conducteur du transfert thermique et de faible surface.

L'intérêt de l'analogie électrique est le suivant : comme les lois sont formellement identiques, toutes les propriétés des résistances électriques sont transposables aux résistances thermiques :

- Si on connait la différence de température et la résistance thermique, on peut en déduire le flux donc l'énergie thermique gagnée (ou perdue).
- Si on empile des matériaux (comme dans le cas d'un double vitrage verre/air/verre) cela revient à brancher des résistances en série ; la résistance thermique totale sera la somme des résistances thermiques
- Si on accole des matériaux (comme dans le cas d'un mur en brique percé d'une fenêtre), cela revient à brancher des résistances en parallèles. La résistance thermique totale sera l'inverse de la somme des inverses des résistances thermiques

4. *Prise en compte de la convection : loi de Newton :*

Jusque-là on ne s'est intéressé qu'au phénomène de conduction thermique. Toutefois si on considère un contact entre un solide et un gaz, le gaz sera forcément soumis à un phénomène de convection qu'il faut donc prendre en compte dans le bilan thermique.

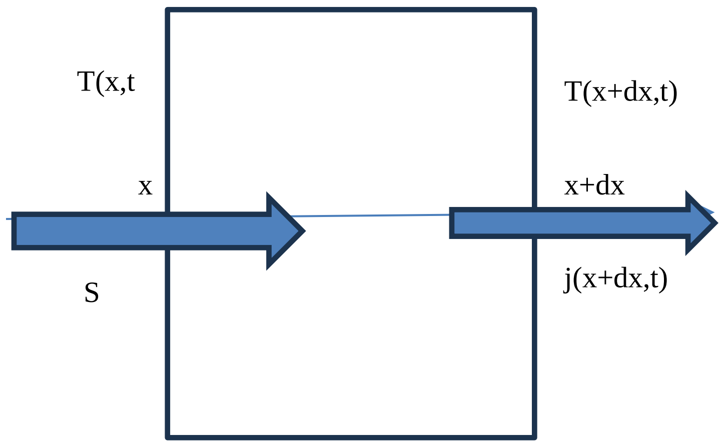
On peut alors utiliser la loi de Newton qui affirme la chose suivante : si on place un corps de température T_1 en contact avec un corps de température T_2, la surface de contact valant S, alors il apparaît un flux thermique de conducto-convection dont l'expression est : $\Phi_{2\rightarrow 1} = hS\,(T_2 - T_1)$; h est un coefficient constant appelé coefficient de transfert thermique de surface, il est mesuré en $W.m^{-2}.K^{-1}$, il dépend des deux matériaux et des conditions expérimentales.

2. Équation de diffusion thermique :

1. Obtention de l'équation de diffusion :

On se limite au cas d'une diffusion thermique dûe à une conduction thermique unidirectionnelle. On considère un milieu de conductivité λ, de capacité thermique massique à pression constante c_p et de masse volumique ρ. On suppose que la température ne dépend que de l'abscisse x et qu'aucun travail utile n'est fourni.

Réalisons un bilan d'énergie pendant dt pour une tranche de milieu situé entre l'abscisse x et l'abscisse x+dx :



La variation d'énergie interne $dU = dQ = \rho S dx C dT$ On peut en déduire que la puissance

$$P = \frac{dQ}{dt} = \rho S dx C \frac{dT}{dt}$$

La puissance reçue est la différence ente la puissance entrante et la puissance sortante

$$P = Sj(x,t) - Sj(x+dx,t) = S\big(j(x,t) - j(x+dx,t)\big) = Sdx\frac{dj(x)}{dx}$$

Comme

$j. = \lambda\ \frac{dT}{dx}$ alors $\frac{dj(x)}{dx} = \frac{d^2T(x)}{dx^2}$

Finalement $P = \frac{dQ}{dt} = \rho S dx C \frac{dT}{dt} = \lambda S dx \frac{d^2T(x)}{dx^2}$

On retiendra $\frac{dT}{dt} = \frac{\lambda}{\rho C}\frac{d^2T(x)}{dx^2}$ ou encore $\frac{dT}{dt} = D\frac{d^2T(x)}{dx^2}$ avec $D = \frac{\lambda}{\rho C}$

2. Étude de l'équation :

On peut voir mathématiquement que cette équation, appelée équation de diffusion ou équation de la chaleur est irréversible. En effet, si on fait le changement de variable t'= -t le sens inversé. Cela signifie que la diffusion thermique ne se déroule pas de la même façon selon que le temps avance ou recule, elle est donc irréversible. Cela est dû au fait que les transferts thermiques ont lieu entre des couches de température différentes, les échanges thermiques sont donc brutaux et il y a création d'entropie.

On remarque que D a pour unité le $m^2.s^{-1}$. Ainsi, contrairement à l'équation d'onde, il n'apparait pas de vitesse mais un coefficient D appelé coefficient de diffusion. Ce coefficient de diffusion relie les dimensions de temps et d'espace. Par exemple, si on attend un temps τ, la grandeur$\sqrt{D\tau}$ a la dimension d'une longueur, cela représente la distance qui a été parcouru par le front de température.

Symétriquement, si on considère une longueur L, alors$\frac{L^2}{D}$ est un temps : c'est le temps nécessaire pour que le front de température ait parcouru la distance L.

<u>exemple :</u>

On considère une barre métallique de longueur L=1 m, avec $\rho=7874\ kg.m^{-3}$, $cp=440\ J.K^{-1}.kg^{-1}$ et de conductivité thermique $\lambda=80{,}2\ W.m^{-1}.K^{-1}$. On chauffe la barre à une de ses extrémités et on se demande au bout de combien de temps la modification de température sera sensible à l'autre extrémité

$$\Delta t = \frac{L^2}{D} = \frac{L^2 \rho C}{\lambda} = \frac{1\times7874\times440}{80{,}2} = 43199s = 12h$$

3. *Résolution dans le cas stationnaire :*

On considère une barre de longueur L pour laquelle on fixe les températures à ses extrémités en les mettant en contact avec des thermostats aux températures T_{droite} et T_{gauche}. On suppose le régime stationnaire atteint et on veut calculer le profil de température en fonction de x. On a donc $\frac{dT}{dx} = 0$ L'équation de diffusion thermique donne$\frac{d^2T(x)}{dx^2}$ donc $T(x) = Ax + B$ comme $T(0) = T_{gauche}$ et $T(L) = T_{droite}$ $T(x) = \frac{T_{droite}-T_{gauche}}{L}x + T_{gauche}$

Et $j. = \lambda\ \frac{T_{droite}-T_{gauche}}{L}$ On retrouve le cas de la résistance thermique en régime permanent.