R4.21 Modélisation des robots manipulateurs articulés

I. Cinématique (avancée) des robots

José de Jesus CASTILLO ZAMORA

Maître de conférences,
IUT de Béziers,
Université de Montpellier,
LIRMM

Licence professionnelle
Robotique & Intelligence Artificielle

Sommaire

1. Cinématique directe par l'usage des quaternions

Problème de cinématique directe

Il s'agit de déterminer la position et l'orientation de l'extrémité du robot par rapport à un système de coordonnées pris comme référence, connaissant les valeurs des articulations et les paramètres géométriques des éléments du robot.

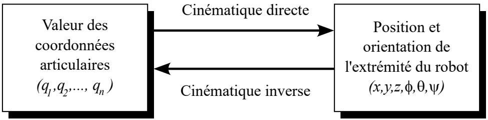

Figure 1 – Relation entre la cinématique directe et la cinématique inverse

1. Cinématique directe par l'usage des quaternions

Problème de cinématique directe

- Méthodes graphiques
- Méthodologie Denavith-Hartenberg
- **Quaternions**

Comme les matrices de transformation homogène et les quaternions sont des méthodes alternatives pour représenter les transformations de rotation et de translation, il est toujours possible d'utiliser les quaternions pour résoudre le problème de la cinématique directe.

1. Cinématique directe par l'usage des quaternions

Robot SCARA

Pour expliquer l'utilisation des quaternions, nous allons résoudre le problème de cinématique directe du robot SCARA illustré dans la Fig.2.

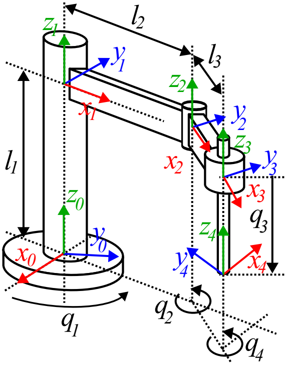

Figure 2 – Robot SCARA

1. Cinématique directe par l'usage des quaternions

Robot SCARA

On va obtenir l'expression permettant de connaître la position et l'orientation du repère associé à l'extrémité du robot $\{S_4\}$ par rapport à celui de la base $\{S_0\}$. Cette relation sera donnée en fonction de l_1, l_2 et l_3 ainsi que des coordonnées articulaires q_1, q_2, q_3 et q_4.

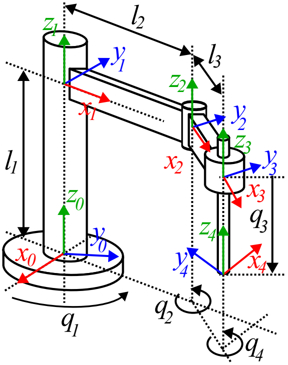

Figure 3 – Robot SCARA

1. Cinématique directe par l'usage des quaternions

La procédure

Convertir successivement $\{S_0\}$ en $\{S_1\}$, $\{S_2\}$, $\{S_3\}$ y $\{S_4\}$ selon la série de transformations suivante :

- Déplacer $\{S_0\}$ d'une distance l_1 le long de z_0 et le pivoter d'un angle q_1 autour de z_0, pour arriver à $\{S_1\}$.
- Déplacer $\{S_1\}$ d'une distance l_2 le long de x_1 et le pivoter d'un angle q_2 autour du nouveau z, pour arriver à $\{S_2\}$.
- Déplacer $\{S_2\}$ d'une distance l_3 le long de x_2 (arrivée à $\{S_3\}$).
- Déplacer $\{S_3\}$ d'une distance q_3 le long de z_3 et le pivoter d'un angle q_4 autour de z_4, pour arriver à $\{S_4\}$.

1. Cinématique directe par l'usage des quaternions

La procédure

Convertir successivement $\{S_0\}$ en $\{S_1\}$, $\{S_2\}$, $\{S_3\}$ y $\{S_4\}$ selon la série de transformations suivante :

$$
\begin{aligned}
S_0 \rightarrow S_1 : \quad & T\left(z, l_1\right) \quad Rot\left(z, q_1\right) \\
S_1 \rightarrow S_2 : \quad & T\left(x, l_2\right) \quad Rot\left(z, q_2\right) \\
S_2 \rightarrow S_3 : \quad & T\left(x, l_3\right) \quad Rot\left(z, 0\right) \\
S_3 \rightarrow S_4 : \quad & T\left(z, -q_3\right) \quad Rot\left(z, q_4\right)
\end{aligned}
\tag{1}
$$

1. Cinématique directe par l'usage des quaternions

Vecteurs de déplacement

$$\begin{aligned} p_1 &= (0\ 0\ l_1)^T \\ p_2 &= (l_2\ 0\ 0)^T \\ p_3 &= (l_3\ 0\ 0)^T \\ p_4 &= (0\ 0\ -q_3)^T \end{aligned} \tag{2}$$

Quaternions de rotation

$$\begin{aligned} Q_1 &= \left(\hat{C}_1\ 0\ 0\ \hat{S}_1\right)^T \\ Q_2 &= \left(\hat{C}_2\ 0\ 0\ \hat{S}_2\right)^T \\ Q_3 &= (1\ 0\ 0\ 0)^T \\ Q_4 &= \left(\hat{C}_4\ 0\ 0\ \hat{S}_4\right)^T \end{aligned} \tag{3}$$

où $\hat{C}_i = \cos\left(\frac{q_i}{2}\right)$ et $\hat{S}_i = \sin\left(\frac{q_i}{2}\right)$

1. Cinématique directe par l'usage des quaternions

Utilisation des quaternions

Un objet situé dans le repère $\{S_i\}$ par son vecteur de position a_i et son quaternion de rotation R_i, aura dans le repère $\{S_{i-1}\}$, le vecteur de position a_{i-1} et le quaternion R_{i-1} suivants :

$$\left.\begin{array}{c} (0, a_{i-1}) = Q_i \circ (0, a_i) \circ Q_i^* + (0, p_i) \\ R_{i-1} = Q_i \circ R_i \end{array}\right\} \tag{4}$$

où p_i et Q_i sont respectivement le déplacement et la rotation subséquente qui permettent de convertir $\{S_{i-1}\}$ en $\{S_i\}$.

1. Cinématique directe par l'usage des quaternions

Utilisation de l'équation (4)

$$\left.\begin{array}{c}(0, a_0) = Q_1 \circ (0, a_1) \circ Q_1^* + (0, p_1) \\ R_0 = Q_1 R_1\end{array}\right\} \quad (5)$$

$$\left.\begin{array}{c}(0, a_1) = Q_2 \circ (0, a_2) \circ Q_2^* + (0, p_2) \\ R_1 = Q_2 R_2\end{array}\right\} \quad (6)$$

$$\left.\begin{array}{c}(0, a_2) = Q_3 \circ (0, a_3) \circ Q_3^* + (0, p_3) \\ R_2 = Q_3 R_3\end{array}\right\} \quad (7)$$

$$\left.\begin{array}{c}(0, a_3) = Q_4 \circ (0, a_4) \circ Q_4^* + (0, p_4) \\ R_3 = Q_4 R_4\end{array}\right\} \quad (8)$$

1. Cinématique directe par l'usage des quaternions

Substitution récursive

Par substitution récursive des expressions ci-dessus, on obtient :

$$(0, a_0) = Q_{1234} \circ (0, a_4) \circ Q_{1234}^* + Q_{123} \circ (0, p_4) \circ Q_{123}^* + Q_{12} \circ (0, p_3) \circ Q_{12}^* + Q_1 \circ (0, p_2) \circ Q_1^* + (0, p_1) \quad (9)$$

À faire

En sachant que $Q_{ij}^* = (Q_i Q_j)^* = Q_j^* Q_i^*$: Développer l'expression ci-dessus pour définir Q_{1234}, Q_{123} et Q_{12} .

1. Cinématique directe par l'usage des quaternions

Les termes de l'équation (9)

En développant les produits des quaternions de l'équation (9) :

$$Q_{1234} \circ (0, a_4) \circ Q^*_{1234} = \left(0, \hat{C}_{112244} a_{4x} - \hat{S}_{112244} a_{4y}, \hat{C}_{112244} a_{4y} - \hat{S}_{112244} a_{4x}, a_{4z}\right) \tag{10}$$

$$Q_{123} \circ (0, p_4) \circ Q^*_{123} + Q_{12} \circ (0, p_3) \circ Q^*_{12} = \left(0, l_3 \hat{C}_{1122}, l_3 \hat{S}_{1122}, -q_3\right) \tag{11}$$

$$Q_1 \circ (0, p_2) \circ Q^*_1 = \left(0, l_2 \hat{C}_{11}, l_2 \hat{S}_{11}, 0\right) \tag{12}$$

1. Cinématique directe par l'usage des quaternions

Vecteur de position

En considérant la définition de p_1 dans l'équation (2) :

$$(0, p_1) = (0, 0, 0, l_1) \tag{13}$$

On trouve le quaternion de position :

$$(0, a_0) = \Big(0, a_{4x}\hat{C}_{112244} - a_{4y}\hat{S}_{112244} + l_3\hat{C}_{1122} + l_2\hat{C}_{11},$$
$$a_{4y}\hat{C}_{112244} - a_{4x}\hat{S}_{112244} + l_3\hat{S}_{1122} + l_2\hat{S}_{11}, a_{4z} - q_3 + l_1\Big) \tag{14}$$

1. Cinématique directe par l'usage des quaternions

Orientation par des quaternions

Concernant la relation entre les quaternions qui définissent l'orientation d'un objet dans les systèmes $\{S_0\}$ et $\{S_4\}$, on trouve que :

$$R_0 = Q_1 \circ Q_2 \circ Q_3 \circ Q_4 \circ R_4 = Q_{1234} \circ R_4 = \left(\hat{C}_{124}, 0, 0, \hat{S}_{124}\right) \quad (15)$$

Les équations (14) et (15) permettent de connaître la position a_0 et l'orientation R_0 d'un objet dans le système $\{S_0\}$ étant connues ces coordonnées dans le repère $\{S_4\}$.

1. Cinématique directe par l'usage des quaternions

Définitions

Si, en particulier, cet objet est positionné et orienté à l'extrémité du robot, on aura que :

$$\begin{aligned} a_4 &= (0,0,0) \\ R_4 &= (1,0,0,0) \end{aligned}$$

Relation finale

De sorte qu'on a finalement :

$$\begin{aligned} (0, a_0) &= \left(0, l_3\hat{C}_{1122} + l_2\hat{C}_{11}, l_3\hat{S}_{1122} + l_2\hat{S}_{11}, l_1 - q_3\right) \\ R_0 &= \left(\hat{C}_{124}, 0, 0, \hat{S}_{124}\right) \end{aligned}$$

1. Cinématique directe par l'usage des quaternions

Relation finale

De sorte qu'on a finalement :

$$\begin{aligned}(0, a_0) &= \left(0, l_3\hat{C}_{1122} + l_2\hat{C}_{11}, l_3\hat{S}_{1122} + l_2\hat{S}_{11}, l_1 - q_3\right)\\ R_0 &= \left(\hat{C}_{124}, 0, 0, \hat{S}_{124}\right)\end{aligned}$$

Position par rapport au $\{S_0\}$

$$\begin{aligned}x &= a_{0x} = l_3\cos\left(q_1+q_2\right) + l_2\cos\left(q_1\right)\\ y &= a_{0y} = l_3\sin\left(q_1+q_2\right) + l_2\sin\left(q_1\right)\\ z &= a_{0z} = l_1 - q_3\end{aligned} \tag{16}$$

1. Cinématique directe par l'usage des quaternions

Relation finale

De sorte qu'on a finalement :

$$\begin{aligned}(0, a_0) &= \left(0, l_3\hat{C}_{1122} + l_2\hat{C}_{11}, l_3\hat{S}_{1122} + l_2\hat{S}_{11}, l_1 - q_3\right) \\ R_0 &= \left(\hat{C}_{124}, 0, 0, \hat{S}_{124}\right)\end{aligned}$$

Orientation

L'extrémité du robot est tourné par rapport au repère de la base d'un angle $q_1 + q_2 + q_4$ autour de l'axe z :

$$Rot\left(z, q_1 + q_2 + q_4\right) \tag{17}$$