R3.21 Modélisation des robots

II. Modélisation des robots manipulateurs articulés

José de Jesus CASTILLO ZAMORA

Maître de conférences,
IUT de Béziers,
Université de Montpellier,
LIRMM

Licence professionnelle
Robotique & Intelligence Artificielle

Sommaire

Sommaire

1. Outils mathématiques pour la localisation

Degrés de liberté et composants

- Pour localiser un corps rigide dans l'espace, il est nécessaire de disposer d'un outil permettant la localisation spatiale de ses points.
- Dans un plan, le positionnement a deux degrés de liberté, et donc la position d'un point sera définie par deux composantes indépendantes.
- Dans le cas d'un espace tridimensionnel, il sera nécessaire d'utiliser trois composantes.

1. Outils mathématiques pour la localisation

Système de référence cartésien

Les systèmes de référence cartésiens sont définis par des axes mutuellement perpendiculaires avec une origine définie :

- Dans le plan, le système de référence OXY est défini par deux vecteurs de coordonnées OX et OY perpendiculaires l'un à l'autre avec un point d'intersection commun O.
- Dans l'espace, le système $OXYZ$ est composé d'une triade orthonormée de vecteurs de coordonnées OX, OY et OZ, avec un point d'intersection commun O.

Sommaire

1. Outils mathématiques pour la localisation

1. Représentation de la position

Coordonnées cartésiennes : sur le plan

Dans un système de coordonnées OXY, un point a est exprimé par les composantes (x, y) correspondant aux axes OX et OY. Un vecteur p, qui va de l'origine au point a, est caractérisée par les deux coordonnées cartésiennes (x, y).

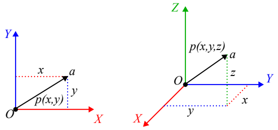


Figure 1 – Coordonnées cartésiennes

Coordonnées cartésiennes : dans l'espace

Un vecteur est défini par rapport au repère de référence $OXYZ$ par les coordonnées correspondant à chacun des axes. Le vecteur p sera défini par les composantes cartésiennes (x, y, z).

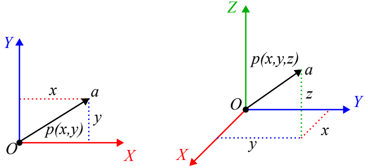


Figure 2 – Coordonnées cartésiennes

1. Outils mathématiques pour la localisation

1. Représentation de la position

Coordonnées polaires (sur le plan)

Un vecteur $p(r, \psi)$ est décrit, par rapport au OXY, en utilisant : r qui est la distance entre l'origine O et l'extrémité du vecteur p, tandis que ψ est l'angle que fait le vecteur p avec l'axe OX.

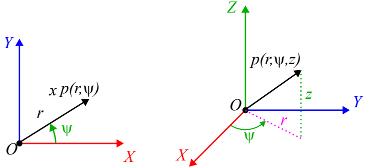


Figure 3 – Coordonnées polaires et cylindrique

Coordonnées cylindriques (dans l'espace)

Un vecteur $p(r, \psi, z)$ peut être exprimé par rapport au repère $OXYZ$ en ajoutant, aux composantes r et ψ, la composante z qui exprime la projection sur l'axe OZ du vecteur p.

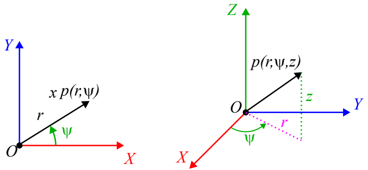


Figure 4 – Coordonnées polaires et cylindrique

1. Outils mathématiques pour la localisation

1. Représentation de la position

Coordonnées sphériques

En utilisant le repère $OXYZ$, le vecteur $p(r, \psi, \phi)$ a comme coordonnées : r qui est la distance de O à l'extrémité du vecteur ; ψ qui est l'angle formé par la projection du vecteur sur le plan OXY avec l'axe OX ; et ϕ, l'angle formé par le vecteur p avec l'axe OZ.

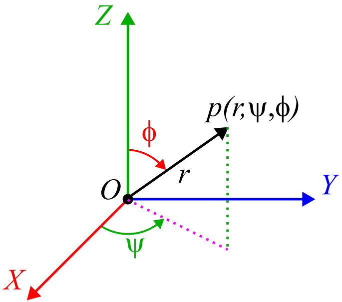


Figure 5 – Coordonnées sphériques

Sommaire

1. Outils mathématiques pour la localisation

2. Représentation de l'orientation

Considérations

- Il est nécessaire de définir l'orientation d'un objet par rapport à un système de référence.
- Il est nécessaire d'attribuer un nouveau système de référence à l'objet.
- Une orientation en 3D est définie par trois degrés de liberté (trois composantes linéairement indépendantes). Sur le plan, un seul degré de liberté définit l'orientation.

Matrices de rotation sur le plan

- Elles sont la méthode la plus utilisée.
- Supposons que nous ayons, sur le plan, deux repères OXY et OUV avec la même origine O, le repère OXY étant le repère fixe et OUV le repère mobile attaché à l'objet. Les vecteurs unitaires des axes de coordonnées du OXY sont i_x, j_y, tandis que ceux du OUV sont i_u, j_v.

Matrices de rotation sur le plan

- Un vecteur p du plan peut être représenté dans les deux systèmes comme suit :

$$p_{xy} = \begin{pmatrix} p_x & p_y \end{pmatrix}^T = p_x i_x + p_y j_y \tag{1}$$
$$p_{uv} = \begin{pmatrix} p_u & p_v \end{pmatrix}^T = p_u i_u + p_v j_v \tag{2}$$

- En effectuant une série de transformations, on obtient :

$$\begin{pmatrix} p_x \\ p_y \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} p_u \\ p_v \end{pmatrix} \tag{3}$$

Matrices de rotation sur le plan

- La matrice R est la matrice de rotation orthonormée ($R^{-1} = R^T$), qui définit l'orientation du OUV par rapport au OXY, et qui sert à transformer les coordonnées d'un vecteur dans le repère mobile en celles du repère fixe.
- Sur un plan, si l'on considère la position relative du OUV tourné d'un angle α autour de OXY, la matrice R sera :

$$R = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \tag{4}$$

Matrices de rotation dans l'espace

- Supposons les systèmes $OXYZ$ et $OUVW$, coïncidant à l'origine, $OXYZ$ étant le système fixe et $OUVW$ celui qui est adjacent à l'objet dont on veut définir l'orientation. Les vecteurs unitaires du système $OXYZ$ seront i_x, j_y, k_z, tandis que ceux du système $OUVW$ seront i_u, j_v, k_w.
- Un vecteur p de l'espac peut être référencé à l'un ou l'autre des deux systèmes :

$$p_{xyz} = \begin{pmatrix} p_x & p_y & p_z \end{pmatrix}^T = p_x i_x + p_y j_y + p_z k_z \tag{5}$$

$$p_{uvw} = \begin{pmatrix} p_u & p_v & p_w \end{pmatrix}^T = p_u i_u + p_v j_v + p_w k_w \tag{6}$$

Matrices de rotation dans l'espace

- A partir de là, une équivalence peut être obtenue :

$$\begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} p_u \\ p_v \\ p_w \end{pmatrix} \tag{7}$$

- Où R est la matrice de rotation qui définit l'orientation du système $OUVW$ par rapport au système $OXYZ$. Il s'agit également d'une matrice orthonormée, telle que $R^{-1} = R^T$.

Matrices de rotation basiques dans l'espace

L'orientation du système $OUVW$, avec l'axe OU coïncidant avec l'axe OX, est représentée par la matrice :

$$R(x,\phi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\phi) & -\sin(\phi) \\ 0 & \sin(\phi) & \cos(\phi) \end{pmatrix} \tag{8}$$

Matrices de rotation basiques dans l'espace

L'orientation du système $OUVW$, avec l'axe OV coïncidant avec l'axe OY, est représentée par la matrice :

$$R(y,\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & 0 & \sin(\theta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\theta) & 0 & \cos(\theta) \end{pmatrix} \tag{9}$$

Matrices de rotation basiques dans l'espace

L'orientation du système $OUVW$, avec l'axe OW coïncidant avec l'axe OZ, est représentée par la matrice :

$$R(z, \psi) = \begin{pmatrix} \cos(\psi) & -\sin(\psi) & 0 \\ \sin(\psi) & \cos(\psi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{10}$$

Composition des rotations

- Les matrices de rotation peuvent être composées pour exprimer l'application continue de plusieurs rotations.
- Il est important de tenir compte de l'ordre dans lequel les rotations sont effectuées, car le produit de matrices n'est pas commutatif.
- Dans l'exemple suivant : C_* exprime $\cos(*)$ et S_* exprime $\sin(*)$.

Composition des rotations

Si une rotation d'angle ϕ autour de OX est appliquée au système $OUVW$, suivie d'une rotation d'angle θ autour de OY et d'une rotation d'angle ψ autour de OZ, la rotation globale peut être exprimée comme suit :

$$
\begin{aligned}
T &= R(z,\psi)\,R(y,\theta)\,R(x,\phi) \\
&= \begin{pmatrix} C_\psi & -S_\psi & 0 \\ S_\psi & C_\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_\theta & 0 & S_\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -S_\theta & 0 & C_\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & C_\phi & -S_\phi \\ 0 & S_\phi & C_\phi \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} C_\theta C_\psi & C_\psi S_\theta S_\phi - S_\psi C_\phi & C_\psi S_\theta C_\phi + S_\psi S_\phi \\ C_\theta S_\psi & S_\psi S_\theta S_\phi + C_\psi C_\phi & S_\psi S_\theta C_\phi - C_\psi S_\phi \\ -S_\theta & C_\theta S_\phi & C_\theta C_\phi \end{pmatrix}
\end{aligned}
\tag{11}
$$

Considérations

- Pour représenter l'orientation dans l'espace, au moyen d'une matrice de rotation, neuf éléments doivent être définis.
- Tout repère $OUVW$, attaché au corps dont on veut décrire l'orientation, peut être défini par rapport au $OXYZ$ au moyen de trois angles : ϕ, θ et ψ, appelés angles d'Euler.
- En faisant tourner successivement le système $OXYZ$ sur certains axes d'un trièdre orthonormé avec les valeurs de ϕ, θ et ψ, on obtient le système $OUVW$.
- Il est nécessaire de savoir quels sont les axes sur lesquels s'effectuent les rotations.

1. Outils mathématiques pour la localisation

2. Représentation de l'orientation : Angles d'Euler

Représentation ZXZ (Intrinsèque)

À partir des systèmes $OXYZ$ et $OUVW$ initialement coïncidents, le système $OUVW$ peut être placé dans n'importe quelle orientation en suivant les étapes ci-dessous :

- Faire pivoter le système $OUVW$ d'un angle ψ par rapport à l'axe OZ, devenant le système $OU'V'W'$.
- Faire pivoter le système $OU'V'W'$ d'un angle ϕ par rapport à l'axe OU', devenant le système $OU''V''W''$.
- Faire pivoter le système $OU''V''W''$ d'un angle θ par rapport à l'axe OW'', devenant le système $OU'''V'''W'''$.

Représentation ZYZ (Intrinsèque)

À partir des systèmes $OXYZ$ et $OUVW$ initialement coïncidents, le système $OUVW$ peut être placé dans n'importe quelle orientation en suivant les étapes ci-dessous :

- Faire pivoter le système $OUVW$ d'un angle ψ par rapport à l'axe OZ, devenant le système $OU'V'W'$.
- Faire pivoter le système $OU'V'W'$ d'un angle θ par rapport à l'axe OV', devenant le système $OU''V''W''$.
- Faire pivoter le système $OU''V''W''$ d'un angle ϕ par rapport à l'axe OW'', devenant le système $OU'''V'''W'''$.

1. Outils mathématiques pour la localisation

2. Représentation de l'orientation : Angles d'Euler

Représentation XYZ (Extrinsèque)

À partir des systèmes $OXYZ$ et $OUVW$ initialement coïncidents, le système $OUVW$ peut être placé dans n'importe quelle orientation en suivant les étapes ci-dessous :

- Faire pivoter le système $OUVW$ d'un angle ϕ par rapport à l'axe OX (Roulis).
- Faire pivoter le système $OUVW$ d'un angle θ par rapport à l'axe OY (Tangage).
- Faire pivoter le système $OUVW$ d'un angle ψ par rapport à l'axe OZ (Lacet).

Paire de rotation

- L'orientation d'un système $OUVW$ par rapport au repère $OXYZ$ peut se décrire en définissant un vecteur $k\left(k_x, k_y, k_z\right)$ (qui passe par l'origine des deux systèmes) et un angle de rotation θ, de sorte que $OUVW$ corresponde au $OXYZ$ tourné d'un angle θ autour de l'axe k.
- La paire (k, θ) est appelée paire de rotation et est unique.
- L'application d'une paire de rotation qui fait tourner un vecteur p d'un angle θ autour de l'axe k est réalisée par :

$$\text{Rot}\left(k, \theta\right)p = p\cos\left(\theta\right) - \left(k \times p\right)\sin\left(\theta\right) + k\left(k \bullet p\right)\left(1 - \cos\left(\theta\right)\right) \quad (12)$$

Quaternions

- Les quaternions peuvent être utilisés comme un outil d'une grande polyvalence pour travailler avec les orientations.
- Un quaternion Q est constitué de quatre composantes (q_0, q_1, q_2, q_3) qui représentent les coordonnées du quaternion dans une base (e, i, j, k).

Quaternions

- Il est habituel d'appeler la partie scalaire, s, du quaternion la composante en e : q_0, et le reste des composantes la partie vectorielle v. Un quaternion est représenté comme suit :

$$Q = \begin{pmatrix} q_0 & q_1 & q_2 & q_3 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} s & v^T \end{pmatrix}^T \tag{13}$$

- Pour l'utilisation des quaternions, la rotation d'un angle θ autour du vecteur k est associée au quaternion défini par :

$$Q = \mathrm{Rot}\left(k, \theta\right) = \left(\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \quad k^T \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)^T \tag{14}$$

Sommaire

Représentation par coordonnées homogènes

- La représentation par coordonnées homogènes de l'emplacement des solides dans un espace à n dimensions se fait par l'intermédiaire des coordonnées d'un espace à $(n+1)$ dimensions.
- Un vecteur $p\,(x, y, z)$ sera représenté par $p\,(wx, wy, wz, w)$, où w est une valeur arbitraire et représente un facteur d'échelle.

Représentation par coordonnées homogènes

En général, un vecteur $p = ai + bj + ck$ où i ; j et k sont les vecteurs unitaires des axes OX, OY et OZ du cadre de référence $OXYZ$, est représenté en coordonnées homogènes par le vecteur colonne :

$$P = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aw \\ bw \\ cw \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ 1 \end{pmatrix} \tag{15}$$

Exemple

- Comment représenter le vecteur $p = 2i + 3j + 4k$?
- Les vecteurs nuls sont représentés par $(0\ 0\ 0\ n)^T$ avec $n \neq 0$.
- Les vecteurs de la forme $(a\ b\ c\ 0)^T$ sont utilisés pour représenter les directions, car ils représentent des vecteurs de longueur infinie.

Matrice de transformation homogène

Une matrice de transformation homogène T est définie comme une matrice à 4 dimensions représentant la transformation d'un vecteur de coordonnées homogènes d'un système de coordonnées à un autre.

$$T = \begin{pmatrix} R_{3\times 3} & p_{3\times 1} \\ f_{1\times 3} & w_{1\times 1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{Rotation} & \text{Translation} \\ \text{Perspective} & \text{Échelle} \end{pmatrix} \tag{16}$$

Composants

$$T = \begin{pmatrix} R_{3\times3} & p_{3\times1} \\ f_{1\times3} & w_{1\times1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{Rotation} & \text{Translation} \\ \text{Perspective} & \text{Échelle} \end{pmatrix}$$

On peut considérer qu'une matrice homogène est composée de :

- $R_{3\times3}$ una matrice de rotation
- $p_{3\times1}$ un vecteur de translation
- $f_{1\times3}$ une transformation de perspective
- $w_{1\times1}$ un facteur d'échelle

1. Outils mathématiques pour la localisation

3. Matrices de transformation homogène : Application des matrices homogènes

Considération

En considérant la transformation de perspective nulle et une mise à l'échelle unitaire, on obtient la matrice homogène T :

$$T = \begin{pmatrix} R_{3\times 3} & p_{3\times 1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{Rotation} & \text{Translation} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{17}$$

Qui représente l'orientation et la position d'un système $OUVW$ tourné et translaté par rapport au système de référence $OXYZ$.

Utilisation

Une matrice de transformation homogène peut être utilisée pour :

- Représenter la position et l'orientation d'un système tourné et translaté $O'UVW$ par rapport à un système de référence fixe $OXYZ$.
- Transformer un vecteur exprimé en coordonnées par rapport à un système $O'UVW$, en son expression en coordonnées du système de référence $OXYZ$.
- Faire pivoter et translater un vecteur par rapport à un cadre de référence fixe $OXYZ$.

Translation

Supposons que le système $O'UVW$ ne soit translaté que par un seul vecteur $p = p_x i + p_y j + p_z k$ par rapport au système $OXYZ$. La matrice T correspondra à la matrice de translation de base :

$$T(p) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & p_x \\ 0 & 1 & 0 & p_y \\ 0 & 0 & 1 & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{18}$$

Translation

Telle que :

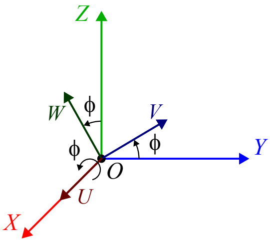
$$\begin{pmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & p_x \\ 0 & 1 & 0 & p_y \\ 0 & 0 & 1 & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_u \\ r_v \\ r_w \\ 1 \end{pmatrix} \tag{19}$$

Rotation

Supposons que le système $O'UVW$ ne soit que pivoté par rapport au système $OXYZ$. La sous-matrice de rotation $R_{3\times3}$ définit la rotation.

Autour de l'axe OX

$$T(x,\phi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C_\phi & -S_\phi & 0 \\ 0 & S_\phi & C_\phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (20)$$

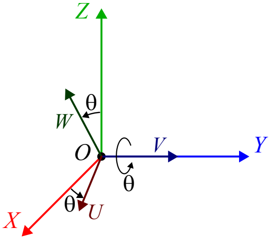


Rotation

Supposons que le système $O'UVW$ ne soit que pivoté par rapport au système $OXYZ$. La sous-matrice de rotation $R_{3\times3}$ définit la rotation.

Autour de l'axe OY

$$T(y,\theta) = \begin{pmatrix} C_\theta & 0 & S_\theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -S_\theta & 0 & C_\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (21)$$

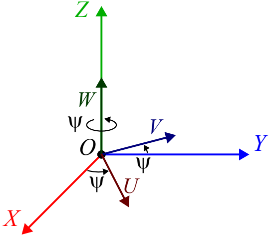


Rotation

Supposons que le système $O'UVW$ ne soit que pivoté par rapport au système $OXYZ$. La sous-matrice de rotation $R_{3\times3}$ définit la rotation.

Autour de l'axe OZ

$$T(z,\psi) = \begin{pmatrix} C_\psi & -S_\psi & 0 & 0 \\ S_\psi & C_\psi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (22)$$



1. Outils mathématiques pour la localisation

3. Matrices de transformation homogène : Application des matrices homogènes

Rotation

Tout vecteur r, représenté dans le système tourné $O'UVW$ par r_{uvw}, aura comme composantes (r_x, r_y, r_z) dans le système $OXYZ$ les suivantes :

$$\begin{pmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \\ 1 \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} r_u \\ r_v \\ r_w \\ 1 \end{pmatrix} \tag{23}$$

1. Outils mathématiques pour la localisation

3. Matrices de transformation homogène : Application des matrices homogènes

Rotation suivie d'une translation

Rotation d'un angle ϕ autour de l'axe OX suivie d'une translation du vecteur $p_{x,y,z}$.

$$T\left((x,\phi),p\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & p_x \\ 0 & C_\phi & -S_\phi & p_y \\ 0 & S_\phi & C_\phi & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{24}$$

Rotation suivie d'une translation

Rotation d'un angle θ autour de l'axe OY suivie d'une translation du vecteur $p_{x,y,z}$.

$$T\left((y,\theta),p\right) = \begin{pmatrix} C_\theta & 0 & S_\theta & p_x \\ 0 & 1 & 0 & p_y \\ -S_\theta & 0 & C_\theta & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{25}$$

Rotation suivie d'une translation

Rotation d'un angle ψ autour de l'axe OZ suivie d'une translation du vecteur $p_{x,y,z}$.

$$T\left((z,\psi),p\right) = \begin{pmatrix} C_\psi & -S_\psi & 0 & p_x \\ S_\psi & C_\psi & 0 & p_y \\ 0 & 0 & 1 & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{26}$$

Translation suivie d'une rotation

Translation du vecteur $p_{x,y,z}$ suivi d'une rotation d'un angle ϕ autour de l'axe OX.

$$T\left(p,(x,\phi)\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & p_x \\ 0 & C_\phi & -S_\phi & p_y C_\phi - p_z S_\phi \\ 0 & S_\phi & C_\phi & p_y S_\phi + p_z C_\phi \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{27}$$

1. Outils mathématiques pour la localisation

3. Matrices de transformation homogène : Application des matrices homogènes

Translation suivie d'une rotation

Translation du vecteur $p_{x,y,z}$ suivi d'une rotation d'un angle θ autour de l'axe OY.

$$T\left(p,(y,\theta)\right) = \begin{pmatrix} C_\theta & 0 & S_\theta & p_x C_\theta + p_z S_\theta \\ 0 & 1 & 0 & p_y \\ -S_\theta & 0 & C_\theta & p_z C_\theta - p_x S_\theta \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{28}$$

Translation suivie d'une rotation

Translation du vecteur $p_{x,y,z}$ suivi d'une rotation d'un angle ψ autour de l'axe OZ.

$$T\left(p,(z,\psi)\right)=\begin{pmatrix} C_\psi & -S_\psi & 0 & p_xC_\psi-p_yS_\psi \\ S_\psi & C_\psi & 0 & p_yC_\psi+p_xS_\psi \\ 0 & 0 & 1 & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{29}$$

1. Outils mathématiques pour la localisation

3. Matrices de transformation homogène : Application des matrices homogènes

Perspective et mise à l'échelle

Mise à l'échelle des composantes d'un vecteur : Tout vecteur $r\,(x, y, z)$ peut être transformé en un vecteur $r\,(ax, by, cz)$.

$$T = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{30}$$

Perspective et mise à l'échelle

Mise à l'échelle globale des composantes d'un vecteur : Tout vecteur $r\,(x, y, z)$ peut être transformé en un vecteur $r\,(x/s, y/s, z/s)$.

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s \end{pmatrix} \tag{31}$$

Perspective et mise à l'échelle

- Une autre application des matrices homogènes est la transformation de la perspective.
- Pour les applications robotiques des matrices homogènes, on suppose qu'il n'y a pas de transformation de perspective et que la mise à l'échelle est toujours unitaire.

Sans géométrique

La matrice de transformation T s'écrit généralement comme suit :

$$T = \begin{pmatrix} n_x & o_x & a_x & p_x \\ n_y & o_y & a_y & p_y \\ n_z & o_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n & o & a & p \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{32}$$

Où n, o et a sont une triade orthonormée :

$$||n|| = ||o|| = ||a|| = 1 \tag{33}$$

$$n \times o = a \tag{34}$$

$$\begin{pmatrix} n & o & a \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} n & o & a \end{pmatrix}^{T} \tag{35}$$

1. Outils mathématiques pour la localisation

3. Matrices de transformation homogène : Sens géométrique

Composants

- p représente la position de l'origine de $O'UVW$ par rapport au système $OXYZ$.
- n représente les coordonnées de l'axe $O'U$ du système $O'UVW$ par rapport au $OXYZ$.
- o représente les coordonnées de l'axe $O'V$ du système $O'UVW$ par rapport au $OXYZ$.
- a représente les coordonnées de l'axe $O'W$ du système $O'UVW$ par rapport au $OXYZ$.

Matrice inverse

La matrice inverse de la matrice de transformation homogène T correspond à l'expression suivante :

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} n_x & n_y & n_z & -n^T p \\ o_x & o_y & o_z & -o^T p \\ a_x & a_y & a_z & -a^T p \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{36}$$

On peut donc conclure que

$$r_{uvw} = T^{-1} r_{xyz} \tag{37}$$

Constitution de matrices homogènes

- Une transformation complexe peut être décomposée par l'application consécutive de transformations simples (rotations et translations de base).
- Le produit de matrices n'étant pas commutatif, la composition de transformations ne l'est pas non plus.

Constitution de matrices homogènes

- Auparavant, les axes sur lesquels les opérations étaient effectuées correspondaient au système fixe $OXYZ$. Il est également possible de composer des matrices de transformation de telle sorte que les opérations se réfèrent à tout moment au système en mouvement. Pour ce faire, il suffit de concaténer les matrices dans l'ordre inverse.
- Toute composition de matrices homogènes peut être étudiée selon que chaque transformation est effectuée par rapport au système fixe ou par rapport au système mobile.

Graphes de transformation

- Il est habituel de trouver des situations dans lesquelles la localisation spatiale d'un objet ou le système de référence qui lui est associé peut être réalisé par la composition de plusieurs transformations différentes.

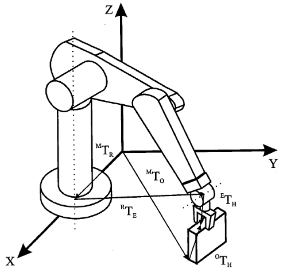


Figure 6 – Application de diverses transformations pour localiser un objet.

Graphes de transformation

- Dans la Figure 7, nous avons un manipulateur dont la base est référencée au système mondial $OXYZ$ au moyen de la transformation ${}^{M}T_{R}$. La transformation ${}^{R}T_{E}$ est utilisée pour aller de la base du manipulateur à son extrémité.

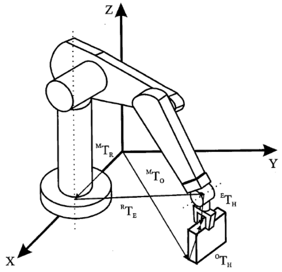


Figure 7 – Application de diverses transformations pour localiser un objet.

1. Outils mathématiques pour la localisation

3. Matrices de transformation homogène : Graphes de transformation

Graphes de transformation

- L'outil est référencé par rapport à l'extrémité du manipulateur par ${}^{E}T_{H}$. Un objet est référencé par rapport au système $OXYZ$ par la transformation ${}^{M}T_{O}$, et enfin, l'extrémité de l'outil est référencée par rapport à l'objet par la transformation ${}^{O}T_{H}$.

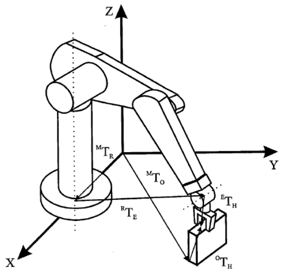


Figure 8 – Application de diverses transformations pour localiser un objet.

Graphes de transformation

- L'extrémité de l'outil peut être référencée par rapport au $OXYZ$ de deux manières différentes : par l'intermédiaire du manipulateur et par l'intermédiaire de l'objet.

$$^{M}T_{R}{}^{R}T_{E}{}^{E}T_{H} = {}^{M}T_{O}{}^{O}T_{H} \quad (38)$$

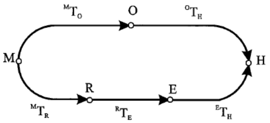


Figure 9 – Graphe de transformation.

Graphes de transformation

- Toute relation peut être facilement obtenue à partir du graphe. Pour cela, on passe de l'objet initial à l'objet final en multipliant les matrices de transformation correspondant aux arcs du graphe, et en considérant que si les arcs sont parcourus dans le sens inverse des flèches, il faut utiliser une matrice inverse.

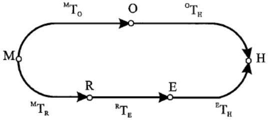


Figure 10 – Graphe de transformation.