R3.21 Modélisation des robots

II. Modélisation des robots manipulateurs articulés

José de Jesus CASTILLO ZAMORA

Maître de conférences,
IUT de Béziers,
Université de Montpellier,
LIRMM

Licence professionnelle
Robotique & Intelligence Artificielle

Sommaire

Sommaire

1. Cinématique du robot

La cinématique des robots

- Elle étudie le mouvement du robot par rapport à un système de référence.
- Elle s'intéresse à la description analytique du mouvement spatial du robot en fonction du temps, et en particulier aux relations entre la position et l'orientation de l'extrémité du robot et les valeurs prises par les coordonnées de ses articulations.
- Elle cherche également à trouver les relations entre les vitesses de déplacement des articulations et celles de la pointe. Cette relation est donnée par le modèle différentiel exprimé par la matrice jacobienne.

1. Cinématique du robot

Problème de cinématique directe

Il s'agit de déterminer la position et l'orientation de l'extrémité du robot par rapport à un système de coordonnées pris comme référence, connaissant les valeurs des articulations et les paramètres géométriques des éléments du robot.

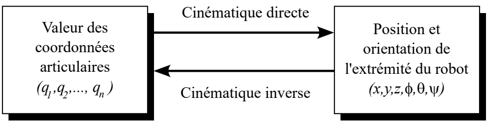

Figure 1 – Relation entre la cinématique directe et inverse

1. Cinématique du robot

Problème de cinématique inverse

Il s'agit de résoudre la configuration à adopter par le robot pour une position et une orientation connues du point terminal.

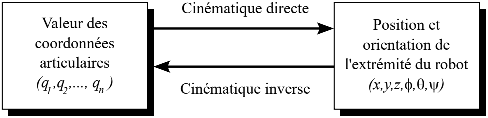

Figure 2 – Relation entre la cinématique directe et inverse

Sommaire

1. Cinématique du robot

1. Problème de cinématique inverse

Définition du problème

L'objectif du problème de cinématique inverse est de trouver les valeurs que doivent prendre les coordonnées articulaires du robot $q = (q_1, q_2, \ldots, q_n)^T$ pour que son extrémité soit positionnée et orientée selon une localisation spatiale donnée.
Dans ce cas, la procédure d'obtention des équations dépend fortement de la configuration du robot.

1. Cinématique du robot

1. Problème de cinématique inverse

Pas de solution unique

Pour résoudre le problème de cinématique inverse, il est plus approprié de trouver une relation mathématique explicite :

$$q_k = f_k\,(x, y, z, \phi, \theta, \psi) \tag{1}$$
$$k = 1, 2, ..., n \quad \text{(DDLs)}$$

Souvent, la solution au problème de cinématique inverse n'est pas unique ; il existe différentes valeurs de q_k qui positionnent et orientent l'extrémité du robot de la même manière.

1. Cinématique du robot

1. Problème de cinématique inverse

La plupart des robots ont une cinématique relativement simple qui facilite la résolution du problème de cinématique inverse.

Exemple

- Les trois premiers DDL de nombreux robots ont une structure plane : les trois premiers éléments sont contenus dans un plan.
- Dans de nombreux robots, les trois derniers DDL sont principalement dédiés à l'orientation de l'extrémité du robot.

Méthodes géométriques

Les méthodes géométriques permettent normalement d'obtenir les valeurs des premières variables articulaires, qui sont celles qui positionnent le robot (quelle que soit l'orientation de son extrémité).

Manipulation de la cinématique directe

Les équations correspondant au problème de cinématique directe peuvent être manipulées directement. C'est-à-dire, la cinématique directe établit la relation :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{n} & \mathbf{o} & \mathbf{a} & \mathbf{p} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (t_{ij}) \tag{2}$$

Où les éléments t_{ij} sont des fonctions des coordonnées articulaires q_k. On peut penser qu'au moyen de certaines combinaisons des 12 équations données dans l'Eq. (2), on peut déterminer les n variables articulaires q_i.

Découplage cinématique

Si l'on considère des robots capables de positionner et d'orienter leur extrémité dans l'espace, c'est-à-dire des robots à 6 DDL, cette méthode, pour certains types de robots, permet de résoudre les premiers degrés de liberté, dédiés au positionnement, indépendamment de la résolution des derniers DDL, dédié à l'orientation. Chacun de ces deux problèmes plus simples peut être traité et résolu par n'importe quelle procédure.

Considérations

- Cette procédure convient aux robots ayant peu de degrés de liberté ou au cas où seuls les premiers degrés de liberté sont pris en compte.
- La procédure est basée sur la recherche d'un nombre suffisant de relations géométriques impliquant les coordonnées de l'extrémité du robot, les coordonnées de ses articulations et les dimensions physiques de ses éléments.

1. Cinématique du robot

1. Problème de cinématique inverse : Méthodes géométriques

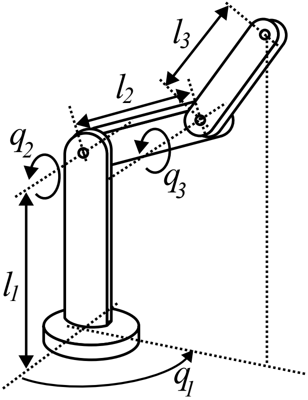

Figure 3 – Robot articulaire

1. Cinématique du robot

1. Problème de cinématique inverse : Matrice de transformation homogène

La méthode

- Définir les paramètres Denavit-Hartenberg
- Trouver ensuite les matrices A et donc la matrice T.
- En supposant une localisation cible de l'extrémité du robot définie par les vecteurs n, o, a et p, manipuler directement les 12 équations résultantes de T afin de déterminer q_i en fonction de n, o, a et p.

1. Cinématique du robot

1. Problème de cinématique inverse : Matrice de transformation homogène

Exemple

Puisque $T = {}^0A_1{}^1A_2{}^2A_3\ldots{}^{n-1}A_n$, on aura :

$$
\begin{aligned}
\left({}^0A_1\right)^{-1}T &= {}^1A_2{}^2A_3\ldots{}^{n-1}A_n && (3)\\
\left({}^1A_2\right)^{-1}\left({}^0A_1\right)^{-1}T &= {}^2A_3\ldots{}^{n-1}A_n && (4)\\
&\vdots
\end{aligned}
$$

À partir de la première des expressions, nous aurons q_1 isolé du reste des variables articulaires et il sera peut-être possible d'obtenir sa valeur. Une fois q_1 obtenu, la deuxième expression permettra d'avoir la valeur de q_2 isolée de $q_3, \ldots, q_n$, etc.

1. Cinématique du robot

1. Problème de cinématique inverse : Matrice de transformation homogène

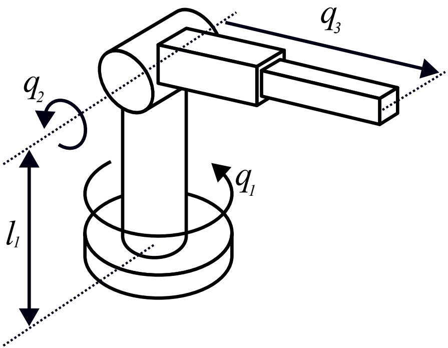

Figure 4 – Robot polaire

1. Cinématique du robot

1. Problème de cinématique inverse : Méthode de découplage cinématique

Contexte

On sait qu'en plus des 3 DDL de position, le robot possède 3 autres DDL qui lui permettent d'orienter son extrémité. Ces DDL sont normalement situés à l'extrémité de la chaîne cinématique et leurs axes se croisent généralement en un point (poignet du robot).

Découplage des problèmes

Étant donné une position et une orientation finales souhaitées, on trouve les coordonnées du poignet du robot, en calculant les valeurs des trois premières variables articulaires. Ensuite, à partir des données d'orientation et des variables articulaires déjà calculées, on obtient les valeurs des autres variables articulaires.

1. Cinématique du robot

1. Problème de cinématique inverse : Méthode de découplage cinématique

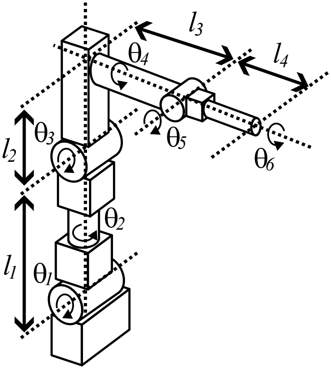

Figure 5 – Robot IRB6400

Sommaire

Introduction

Il est essentiel de connaître la relation entre les vitesses des coordonnées articulaires et celles de la position et de l'orientation de l'extrémité du robot. La relation entre les deux vecteurs de vitesse est obtenue par la matrice dite jacobienne.

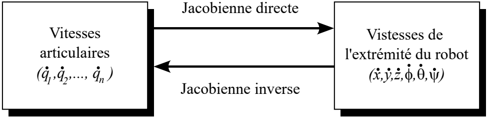

Figure 6 – Relation entre la Jacobienne directe et inverse

Dérivatives par rapport au temps

La méthode la plus directe pour obtenir la relation entre les vitesses des articulations et les vitesses de l'extrémité du robot consiste à différencier les équations correspondant au modèle cinématique direct.

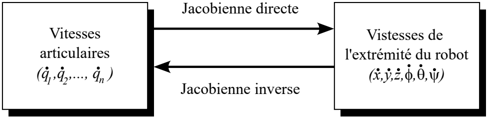

Figure 7 – Relation entre la Jacobienne directe et inverse

1. Cinématique du robot

2. Matrice Jacobienne et singularités : Relations différentielles

Supposons que les équations qui résolvent le problème de cinématique directe pour un robot avec n DDL sont connues :

$$
\begin{aligned}
x &= f_x\left(q_1, q_2, \ldots, q_n\right) \\
y &= f_y\left(q_1, q_2, \ldots, q_n\right) \\
z &= f_z\left(q_1, q_2, \ldots, q_n\right) \\
\phi &= f_\phi\left(q_1, q_2, \ldots, q_n\right) \\
\theta &= f_\theta\left(q_1, q_2, \ldots, q_n\right) \\
\psi &= f_\psi\left(q_1, q_2, \ldots, q_n\right)
\end{aligned}
$$

1. Cinématique du robot

2. Matrice Jacobienne et singularités : Relations différentielles

Si nous dérivons par rapport au temps les deux membres de la famille d'équations précédentes, nous aurons :

$$\dot{x} = \sum_{1}^{n} \frac{\partial f_x}{\partial q_i} \dot{q}_i \qquad (5)$$

$$\dot{y} = \sum_{1}^{n} \frac{\partial f_y}{\partial q_i} \dot{q}_i \qquad (6)$$

$$\dot{z} = \sum_{1}^{n} \frac{\partial f_z}{\partial q_i} \dot{q}_i \qquad (7)$$

$$\dot{\phi} = \sum_{1}^{n} \frac{\partial f_\phi}{\partial q_i} \dot{q}_i \qquad (8)$$

$$\dot{\theta} = \sum_{1}^{n} \frac{\partial f_\theta}{\partial q_i} \dot{q}_i \qquad (9)$$

$$\dot{\psi} = \sum_{1}^{n} \frac{\partial f_\psi}{\partial q_i} \dot{q}_i \qquad (10)$$

1. Cinématique du robot

2. Matrice Jacobienne et singularités : Relations différentielles

Ou exprimé sous forme de matrice :

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \\ \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{pmatrix} = J \begin{pmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \\ \vdots \\ \\ \dot{q}_n \end{pmatrix} \quad \text{with} \quad \underbrace{J = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_x}{\partial q_1} & \cdots & \frac{\partial f_x}{\partial q_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_\psi}{\partial q_1} & \cdots & \frac{\partial f_\psi}{\partial q_n} \end{pmatrix}}_{\text{Matrice Jacobienne}} \tag{11}$$

La valeur de la jacobienne est différente en chacun des points de l'espace articulaire.

Évaluation symbolique

Différentes procédures peuvent être utilisées pour calculer les vitesses des articulations à partir des vitesses de l'extrémité. Si la Jacobienne est connue, on peut l'inverser symboliquement :

$$\begin{pmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \vdots \\ \dot{q}_n \end{pmatrix} = J^{-1} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \\ \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{pmatrix} \tag{12}$$

Évaluation numérique

Cela consiste à évaluer numériquement la matrice J pour une configuration spécifique du robot et, en inversant numériquement cette matrice. Dans ce cas, il est nécessaire de considérer :

- La matrice jacobienne inverse doit être calculée en permanence, puisque J varie avec le mouvement du robot.
- Il est possible que la matrice J ne soit pas inversible puisque son déterminant (jacobien) est nul (singularité).
- La matrice J peut ne pas être carrée. Pour ce type de cas, on utilise une sorte de matrice pseudo-inverse, telle que $\left(JJ^T\right)^{-1}$.

En partant du modèle cinématique inverse

La troisième solution consiste à répéter la procédure suivie pour obtenir la matrice jacobienne directe, mais en partant maintenant du modèle cinématique inverse. C'est-à-dire en connaissant les relations :

$$
\begin{aligned}
q_1 &= f_1\left(x, y, z, \phi, \theta, \psi\right) \\
&\vdots \\
q_n &= f_n\left(x, y, z, \phi, \theta, \psi\right)
\end{aligned}
$$

1. Cinématique du robot

2. Matrice Jacobienne et singularités : Matrice Jacobienne inverse

En partant du modèle cinématique inverse

La matrice jacobienne inverse sera obtenue par différenciation par rapport au temps des deux membres de l'égalité :

$$\begin{pmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \vdots \\ \dot{q}_n \end{pmatrix} = J^{-1} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \\ \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{pmatrix} \quad \text{où} \quad J^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial \psi} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial \psi} \end{pmatrix} \tag{13}$$

Définition

- Les configurations singulières d'un robot sont celles dans lesquelles le déterminant de sa matrice jacobienne (jacobien) s'annule, auquel cas, il n'y a pas de jacobienne inverse.
- Au voisinage des configurations singulières, certains degrés de liberté du robot sont perdus.

1. Cinématique du robot

2. Matrice Jacobienne et singularités : Singularités

Sens physique

À proximité de ces configurations singulières, s'attendre à ce que l'extrémité du robot se déplace à vitesse constante obligerait à effectuer des mouvements articulaires à des vitesses infinies.

Considération

Une attention particulière doit être consacrée aux configurations singulières du robot. Pour éviter l'apparition de ces configurations, leur existence doit être prise en compte dès la phase de conception mécanique, en imposant des restrictions au mouvement du robot.

1. Cinématique du robot

2. Matrice Jacobienne et singularités : Singularités

Singularités aux limites de l'espace de travail

Elles se produisent lorsque l'extrémité du robot se trouve à un certain point de la limite de l'espace de travail.

Singularités dans l'espace de travail

Elles se produisent dans la zone de travail et sont généralement dues à l'alignement de deux ou plusieurs axes d'articulation du robot.

Procédure en présence de singularités

- Identifier le joint correspondant au degré de liberté manquant.
- Éliminer la ligne de la matrice jacobienne correspondant au degré de liberté manquant et la colonne correspondant à l'articulation qui en est la cause.
- Avec la nouvelle matrice jacobienne réduite, obtenir les vitesses de toutes les articulations, à l'exception de celle qui a été supprimée, nécessaires pour obtenir les vitesses cartésiennes souhaitées. La vitesse de l'articulation éliminée sera maintenue à zéro.

1. Cinématique du robot

2. Matrice Jacobienne et singularités : Singularités

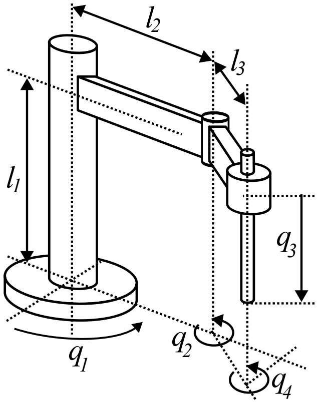

Figure 8 – Robot SCARA