

Méthode Denavit-Hartenberg

LP Rob&IA - 2

[R3.04 - Maths OT]

December 2, 2024

Méthode Denavit-Hartenberg : Rappels

Méthode Denavit-Hartenberg : Rappels

- Modélisation géométrique directe (MGD) : passage de l'espace articulaire à l'espace opérationnel :

Méthode Denavit-Hartenberg : Rappels

- Modélisation géométrique directe (MGD) : passage de l'espace articulaire à l'espace opérationnel :

$$[\theta_x \ \theta_y \ \theta_z \ P_x \ P_y \ P_z]^T = MGD(q)$$

Méthode Denavit-Hartenberg : Rappels

- Modélisation géométrique directe (MGD) : passage de l'espace articulaire à l'espace opérationnel :

$$[\theta_x \ \theta_y \ \theta_z \ P_x \ P_y \ P_z]^T = MGD(q)$$

- Expression des coordonnées du repère effecteur dans le repère outil

Méthode Denavit-Hartenberg : Rappels

- Modélisation géométrique directe (MGD) : passage de l'espace articulaire à l'espace opérationnel :

$$[\theta_x \ \theta_y \ \theta_z \ P_x \ P_y \ P_z]^T = MGD(q)$$

- Expression des coordonnées du repère effecteur dans le repère outil
- Les degrés de liberté des articulations permettent de définir la matrice de transformation $i^{-1}T_i$ d'un repère i dans son repère antécédent $i - 1$

Méthode Denavit-Hartenberg : Rappels

- Modélisation géométrique directe (MGD) : passage de l'espace articulaire à l'espace opérationnel :

$$[\theta_x \ \theta_y \ \theta_z \ P_x \ P_y \ P_z]^T = MGD(q)$$

- Expression des coordonnées du repère effecteur dans le repère outil
- Les degrés de liberté des articulations permettent de définir la matrice de transformation $i^{-1}T_i$ d'un repère i dans son repère antécédent $i - 1$
- Le MGD se calcule via :

Méthode Denavit-Hartenberg : Rappels

- Modélisation géométrique directe (MGD) : passage de l'espace articulaire à l'espace opérationnel :

$$[\theta_x \ \theta_y \ \theta_z \ P_x \ P_y \ P_z]^T = MGD(q)$$

- Expression des coordonnées du repère effecteur dans le repère outil
- Les degrés de liberté des articulations permettent de définir la matrice de transformation $i^{-1}T_i$ d'un repère i dans son repère antécédent $i - 1$
- Le MGD se calcule via :

$${}^0T_{eff} = {}^0T_1 \cdot {}^1T_2 \cdot \dots \cdot {}^{eff-1}T_{eff}$$

Méthode Denavit-Hartenberg : placement des axes

Méthode Denavit-Hartenberg : placement des axes

- Pour définir une transformation entre deux repères, il faut 6 paramètres (3 rot, 3 trans).

Méthode Denavit-Hartenberg : placement des axes

- Pour définir une transformation entre deux repères, il faut 6 paramètres (3 rot, 3 trans).
- DH permet de passer à quatre paramètres, possible grâce aux règles suivantes :

Méthode Denavit-Hartenberg : placement des axes

- Pour définir une transformation entre deux repères, il faut 6 paramètres (3 rot, 3 trans).
- DH permet de passer à quatre paramètres, possible grâce aux règles suivantes :
 - ① z_i : axe de la liaison entre le corps C_{i-1} et C_i ;

Méthode Denavit-Hartenberg : placement des axes

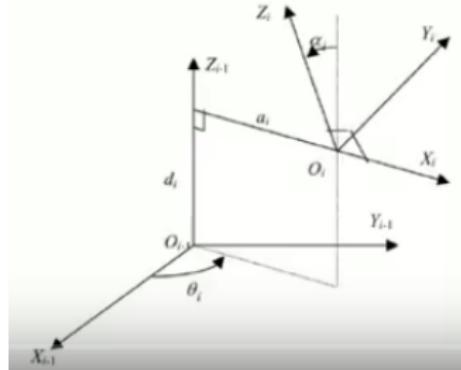
- Pour définir une transformation entre deux repères, il faut 6 paramètres (3 rot, 3 trans).
- DH permet de passer à quatre paramètres, possible grâce aux règles suivantes :
 - ① z_i : axe de la liaison entre le corps C_{i-1} et C_i ;
 - ② x_i porté par la normale commune entre z_{i-1} et z_i : $x_i = z_{i-1} \wedge z_i$;

Méthode Denavit-Hartenberg : placement des axes

- Pour définir une transformation entre deux repères, il faut 6 paramètres (3 rot, 3 trans).
- DH permet de passer à quatre paramètres, possible grâce aux règles suivantes :
 - ① z_i : axe de la liaison entre le corps C_{i-1} et C_i ;
 - ② x_i porté par la normale commune entre z_{i-1} et z_i : $x_i = z_{i-1} \wedge z_i$;
 - ③ y_i complété pour formé repère orthonormé : $y_i = z_i \wedge x_i$

Méthode Denavit-Hartenberg : placement des axes

- Pour définir une transformation entre deux repères, il faut 6 paramètres (3 rot, 3 trans).
- DH permet de passer à quatre paramètres, possible grâce aux règles suivantes :
 - ❶ z_i : axe de la liaison entre le corps C_{i-1} et C_i ;
 - ❷ x_i porté par la normale commune entre z_{i-1} et z_i : $x_i = z_{i-1} \wedge z_i$;
 - ❸ y_i complété pour formé repère orthonormé : $y_i = z_i \wedge x_i$



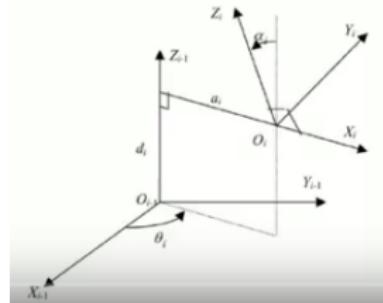
Méthode Denavit-Hartenberg : Les paramètres

Méthode Denavit-Hartenberg : Les paramètres

Les quatre paramètres DH sont :

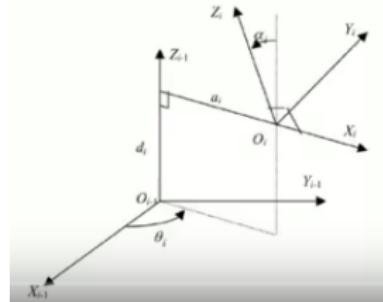
Méthode Denavit-Hartenberg : Les paramètres

Les quatre paramètres DH sont :



Méthode Denavit-Hartenberg : Les paramètres

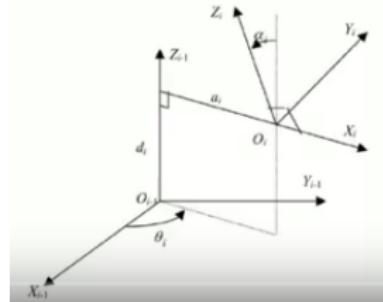
Les quatre paramètres DH sont :



- d_i distance entre x_{i-1} et x_i suivant z_{i-1}

Méthode Denavit-Hartenberg : Les paramètres

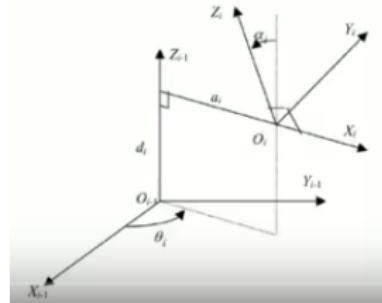
Les quatre paramètres DH sont :



- d_i distance entre x_{i-1} et x_i suivant z_{i-1}
- θ_i angle autour de z_{i-1} entre x_{i-1} et x_i

Méthode Denavit-Hartenberg : Les paramètres

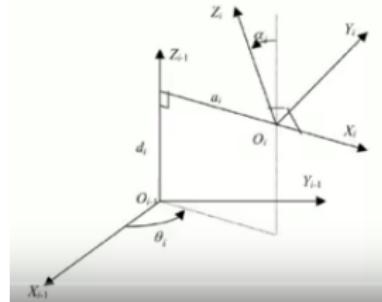
Les quatre paramètres DH sont :



- d_i distance entre x_{i-1} et x_i suivant z_{i-1}
- θ_i angle autour de z_{i-1} entre x_{i-1} et x_i
- r_i distance entre z_{i-1} et z_i suivant x_i

Méthode Denavit-Hartenberg : Les paramètres

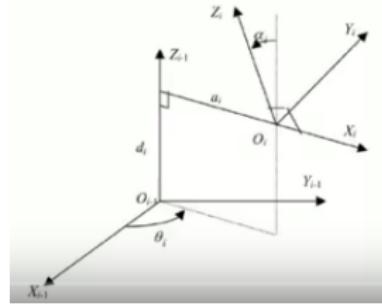
Les quatre paramètres DH sont :



- d_i distance entre x_{i-1} et x_i suivant z_{i-1}
- θ_i angle autour de z_{i-1} entre x_{i-1} et x_i
- r_i distance entre z_{i-1} et z_i suivant x_i
- α_i angle autour de x_i entre z_{i-1} et z_i

Méthode Denavit-Hartenberg : Les paramètres

Les quatre paramètres DH sont :

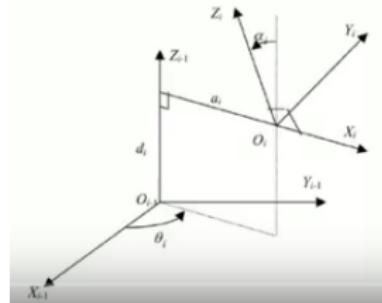


- d_i distance entre x_{i-1} et x_i suivant z_{i-1}
- θ_i angle autour de z_{i-1} entre x_{i-1} et x_i
- r_i distance entre z_{i-1} et z_i suivant x_i
- α_i angle autour de x_i entre z_{i-1} et z_i

$${}^{i-1}T_i = \text{Trans}(z, d_i) \text{Rot}(z, \theta_i) \text{Trans}(x, r_i) \text{Rot}(x, \alpha_i)$$

Méthode Denavit-Hartenberg : Les paramètres

Les quatre paramètres DH sont :



- d_i distance entre x_{i-1} et x_i suivant z_{i-1}
- θ_i angle autour de z_{i-1} entre x_{i-1} et x_i
- r_i distance entre z_{i-1} et z_i suivant x_i
- α_i angle autour de x_i entre z_{i-1} et z_i

$${}^{i-1}T_i = \text{Trans}(z, d_i) \text{Rot}(z, \theta_i) \text{Trans}(x, r_i) \text{Rot}(x, \alpha_i)$$

d_i = glissière et θ_i = pivot

Méthode DH Modifiée (Khalil - Kleinfinger)

Méthode DH Modifiée (Khalil - Kleinfinger)

Méthode plus intuitive que la version originale car le repère R_i précède le corps C_i .

Méthode DH Modifiée (Khalil - Kleinfinger)

Méthode plus intuitive que la version originale car le repère R_i précède le corps C_i .

Placement des axes :

- le repère R_i est lié au corps C_i

Méthode DH Modifiée (Khalil - Kleinfinger)

Méthode plus intuitive que la version originale car le repère R_i précède le corps C_i .

Placement des axes :

- le repère R_i est lié au corps C_i
- z_i est porté par l'articulation i

Méthode DH Modifiée (Khalil - Kleinfinger)

Méthode plus intuitive que la version originale car le repère R_i précède le corps C_i .

Placement des axes :

- le repère R_i est lié au corps C_i
- z_i est porté par l'articulation i
- x_i porté par la normale commune entre z_i et z_{i+1} : $x_i = z_i \wedge z_{i+1}$;

Méthode DH Modifiée (Khalil - Kleinfinger)

Méthode plus intuitive que la version originale car le repère R_i précède le corps C_i .

Placement des axes :

- le repère R_i est lié au corps C_i
- z_i est porté par l'articulation i
- x_i porté par la normale commune entre z_i et z_{i+1} : $x_i = z_i \wedge z_{i+1}$;
- y_i complété pour formé repère orthonormé : $y_i = z_i \wedge x_i$

Méthode DH Modifiée (Khalil - Kleinfinger)

Méthode plus intuitive que la version originale car le repère R_i précède le corps C_i .

Placement des axes :

- le repère R_i est lié au corps C_i
- z_i est porté par l'articulation i
- x_i porté par la normale commune entre z_i et z_{i+1} : $x_i = z_i \wedge z_{i+1}$;
- y_i complété pour formé repère orthonormé : $y_i = z_i \wedge x_i$

Méthode DH Modifiée (Khalil - Kleinfinger)

Méthode plus intuitive que la version originale car le repère R_i précède le corps C_i .

Placement des axes :

- le repère R_i est lié au corps C_i
- z_i est porté par l'articulation i
- x_i porté par la normale commune entre z_i et z_{i+1} : $x_i = z_i \wedge z_{i+1}$;
- y_i complété pour formé repère orthonormé : $y_i = z_i \wedge x_i$

Les paramètres :

- α_i angle autour de x_i entre z_{i-1} et z_i

Méthode DH Modifiée (Khalil - Kleinfinger)

Méthode plus intuitive que la version originale car le repère R_i précède le corps C_i .

Placement des axes :

- le repère R_i est lié au corps C_i
- z_i est porté par l'articulation i
- x_i porté par la normale commune entre z_i et z_{i+1} : $x_i = z_i \wedge z_{i+1}$;
- y_i complété pour formé repère orthonormé : $y_i = z_i \wedge x_i$

Les paramètres :

- α_i angle autour de x_i entre z_{i-1} et z_i
- d_i distance entre x_{i-1} et x_i suivant z_{i-1}

Méthode DH Modifiée (Khalil - Kleinfinger)

Méthode plus intuitive que la version originale car le repère R_i précède le corps C_i .

Placement des axes :

- le repère R_i est lié au corps C_i
- z_i est porté par l'articulation i
- x_i porté par la normale commune entre z_i et z_{i+1} : $x_i = z_i \wedge z_{i+1}$;
- y_i complété pour formé repère orthonormé : $y_i = z_i \wedge x_i$

Les paramètres :

- α_i angle autour de x_i entre z_{i-1} et z_i
- d_i distance entre x_{i-1} et x_i suivant z_{i-1}
- θ_i angle autour de z_{i-1} entre x_{i-1} et x_i

Méthode DH Modifiée (Khalil - Kleinfinger)

Méthode plus intuitive que la version originale car le repère R_i précède le corps C_i .

Placement des axes :

- le repère R_i est lié au corps C_i
- z_i est porté par l'articulation i
- x_i porté par la normale commune entre z_i et z_{i+1} : $x_i = z_i \wedge z_{i+1}$;
- y_i complété pour formé repère orthonormé : $y_i = z_i \wedge x_i$

Les paramètres :

- α_i angle autour de x_i entre z_{i-1} et z_i
- d_i distance entre x_{i-1} et x_i suivant z_{i-1}
- θ_i angle autour de z_{i-1} entre x_{i-1} et x_i
- r_i distance entre z_{i-1} et z_i suivant x_i

Méthode DH Modifiée (Khalil - Kleinfinger)

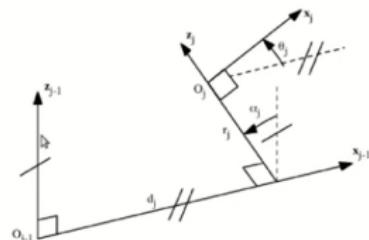
Méthode plus intuitive que la version originale car le repère R_i précède le corps C_i .

Placement des axes :

- le repère R_i est lié au corps C_i
- z_i est porté par l'articulation i
- x_i porté par la normale commune entre z_i et z_{i+1} : $x_i = z_i \wedge z_{i+1}$;
- y_i complété pour formé repère orthonormé : $y_i = z_i \wedge x_i$

Les paramètres :

- α_i angle autour de x_i entre z_{i-1} et z_i
- d_i distance entre x_{i-1} et x_i suivant z_{i-1}
- θ_i angle autour de z_{i-1} entre x_{i-1} et x_i
- r_i distance entre z_{i-1} et z_i suivant x_i



Méthode DH Modifiée (Khalil - Kleinfinger)

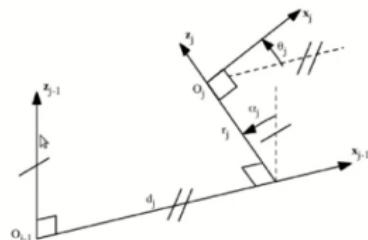
Méthode plus intuitive que la version originale car le repère R_i précède le corps C_i .

Placement des axes :

- le repère R_i est lié au corps C_i
- z_i est porté par l'articulation i
- x_i porté par la normale commune entre z_i et z_{i+1} : $x_i = z_i \wedge z_{i+1}$;
- y_i complété pour formé repère orthonormé : $y_i = z_i \wedge x_i$

Les paramètres :

- α_i angle autour de x_i entre z_{i-1} et z_i
- d_i distance entre x_{i-1} et x_i suivant z_{i-1}
- θ_i angle autour de z_{i-1} entre x_{i-1} et x_i
- r_i distance entre z_{i-1} et z_i suivant x_i



$${}^{i-1}T_i = \text{Rot}(x, \alpha_i) \text{Trans}(x, d_i) \text{Rot}(z, \theta_i) \text{Trans}(z, r_i)$$

Méthode DH Modifiée (Khalil - Kleinfinger)

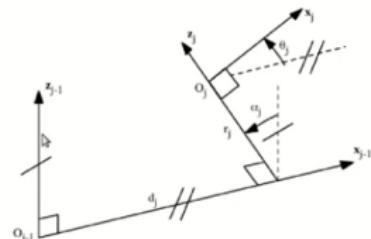
Méthode plus intuitive que la version originale car le repère R_i précède le corps C_i .

Placement des axes :

- le repère R_i est lié au corps C_i
- z_i est porté par l'articulation i
- x_i porté par la normale commune entre z_i et z_{i+1} : $x_i = z_i \wedge z_{i+1}$;
- y_i complété pour formé repère orthonormé : $y_i = z_i \wedge x_i$

Les paramètres :

- α_i angle autour de x_i entre z_{i-1} et z_i
- d_i distance entre x_{i-1} et x_i suivant z_{i-1}
- θ_i angle autour de z_{i-1} entre x_{i-1} et x_i
- r_i distance entre z_{i-1} et z_i suivant x_i



$${}^{i-1}T_i = Rot(x, \alpha_i)Trans(x, d_i)Rot(z, \theta_i)Trans(z, r_i)$$

r_i = glissière et θ_i = pivot

Méthode DH : matrices de transformation

Matrice méthode originale :

Méthode DH : matrices de transformation

Matrice méthode originale :

$${}^{i-1}T_i = \begin{pmatrix} \cos(\theta_i) & -\cos(\alpha_i) \sin(\theta_i) & \sin(\alpha_i) \sin(\theta_i) & r_i \cos(\theta_i) \\ \sin(\theta_i) & \cos(\alpha_i) \cos(\theta_i) & -\sin(\alpha_i) \cos(\theta_i) & r_i \sin(\theta_i) \\ 0 & \sin(\alpha_i) & \cos(\alpha_i) & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Méthode DH : matrices de transformation

Matrice méthode originale :

$${}^{i-1}T_i = \begin{pmatrix} \cos(\theta_i) & -\cos(\alpha_i) \sin(\theta_i) & \sin(\alpha_i) \sin(\theta_i) & r_i \cos(\theta_i) \\ \sin(\theta_i) & \cos(\alpha_i) \cos(\theta_i) & -\sin(\alpha_i) \cos(\theta_i) & r_i \sin(\theta_i) \\ 0 & \sin(\alpha_i) & \cos(\alpha_i) & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Matrice méthode modifiée :

Méthode DH : matrices de transformation

Matrice méthode originale :

$${}^{i-1}T_i = \begin{pmatrix} \cos(\theta_i) & -\cos(\alpha_i) \sin(\theta_i) & \sin(\alpha_i) \sin(\theta_i) & r_i \cos(\theta_i) \\ \sin(\theta_i) & \cos(\alpha_i) \cos(\theta_i) & -\sin(\alpha_i) \cos(\theta_i) & r_i \sin(\theta_i) \\ 0 & \sin(\alpha_i) & \cos(\alpha_i) & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Matrice méthode modifiée :

$${}^{i-1}T_i = \begin{pmatrix} \cos(\theta_i) & -\sin(\theta_i) & 0 & d_i \\ \cos(\alpha_i) \sin(\theta_i) & \cos(\alpha_i) \cos(\theta_i) & -\sin(\alpha_i) & -r_i \sin(\alpha_i) \\ \sin(\alpha_i) \sin(\theta_i) & \sin(\alpha_i) \cos(\theta_i) & \cos(\alpha_i) & r_i \cos(\alpha_i) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Méthode DH : matrices de transformation

Matrice méthode originale :

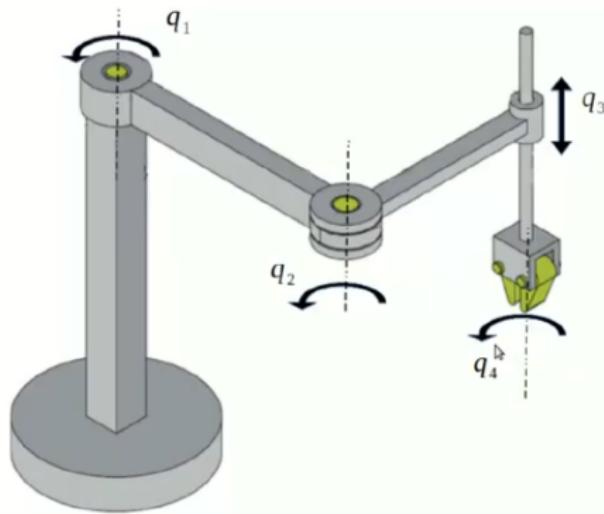
$${}^{i-1}T_i = \begin{pmatrix} \cos(\theta_i) & -\cos(\alpha_i) \sin(\theta_i) & \sin(\alpha_i) \sin(\theta_i) & r_i \cos(\theta_i) \\ \sin(\theta_i) & \cos(\alpha_i) \cos(\theta_i) & -\sin(\alpha_i) \cos(\theta_i) & r_i \sin(\theta_i) \\ 0 & \sin(\alpha_i) & \cos(\alpha_i) & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Matrice méthode modifiée :

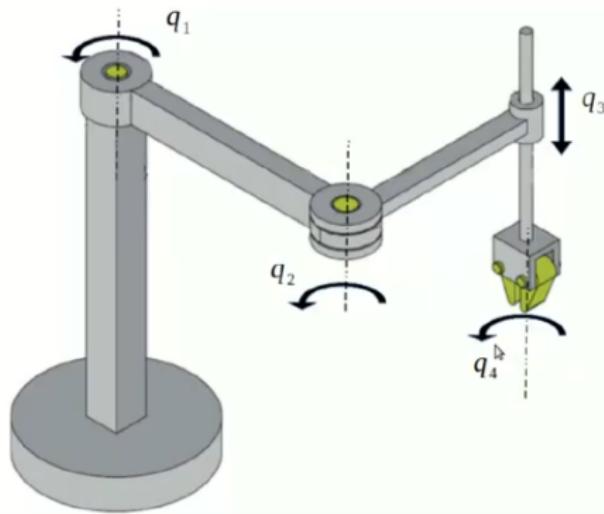
$${}^{i-1}T_i = \begin{pmatrix} \cos(\theta_i) & -\sin(\theta_i) & 0 & d_i \\ \cos(\alpha_i) \sin(\theta_i) & \cos(\alpha_i) \cos(\theta_i) & -\sin(\alpha_i) & -r_i \sin(\alpha_i) \\ \sin(\alpha_i) \sin(\theta_i) & \sin(\alpha_i) \cos(\theta_i) & \cos(\alpha_i) & r_i \cos(\alpha_i) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exemple: Robot SCARA (RRPR)

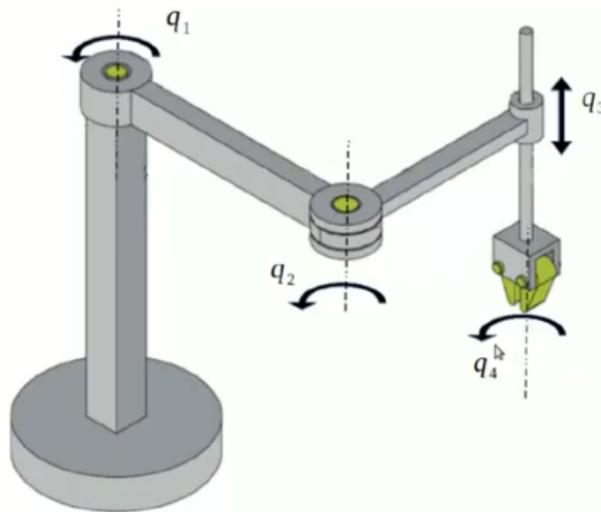
Exemple: Robot SCARA (RRPR)



Exemple: Robot SCARA (RRPR)

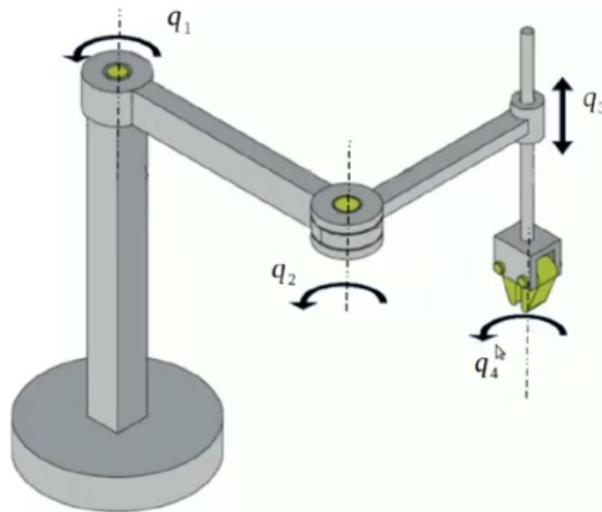


Exemple: Robot SCARA (RRPR)



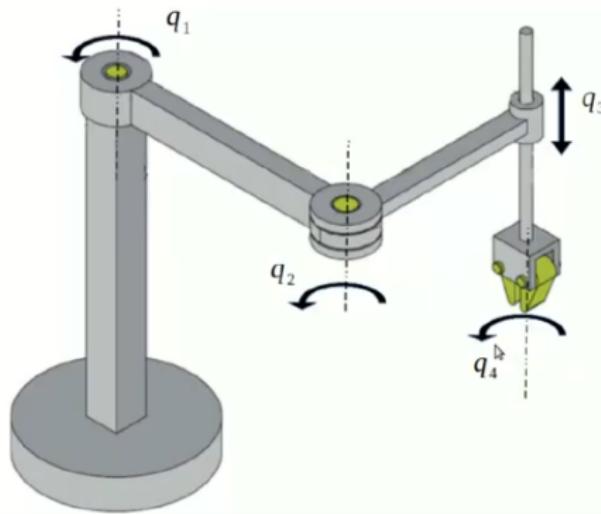
Robot à 4 axes:

Exemple: Robot SCARA (RRPR)



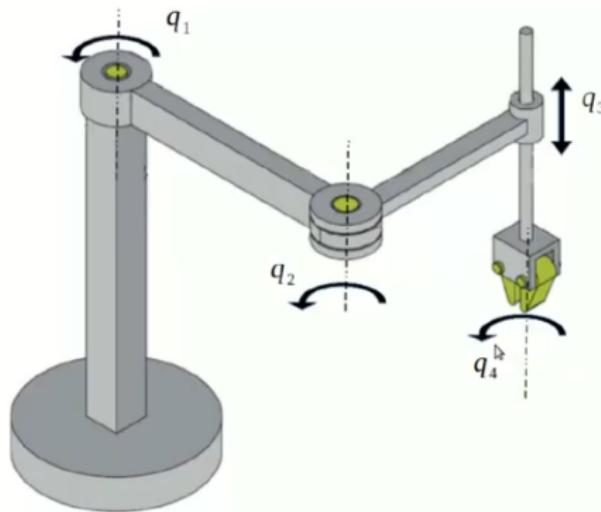
Robot à 4 axes:
deux axes de rotation (R),

Exemple: Robot SCARA (RRPR)



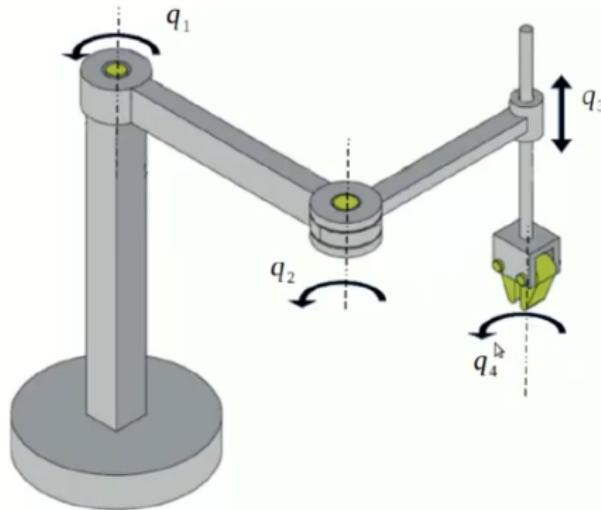
Robot à 4 axes:
deux axes de rotation (R),
un axe prismatique (P),

Exemple: Robot SCARA (RRPR)



Robot à 4 axes:
deux axes de rotation (R),
un axe prismatique (P),
et un dernier axe de rotation
(R)

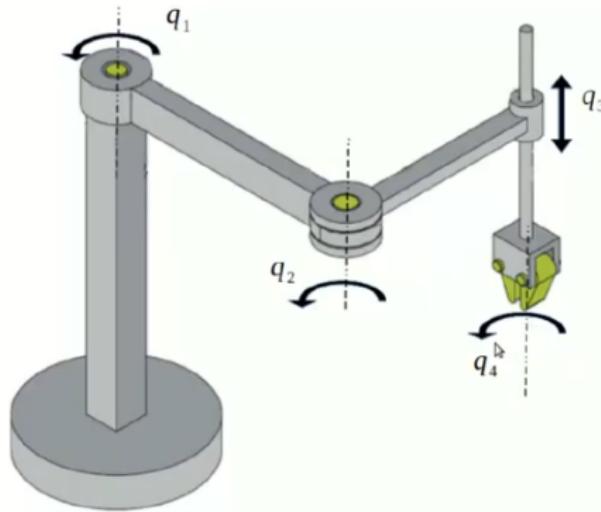
Exemple: Robot SCARA (RRPR)



Robot à 4 axes:
deux axes de rotation (R),
un axe prismatique (P),
et un dernier axe de rotation
(R)

- Définition des corps C_i et choix repère référence

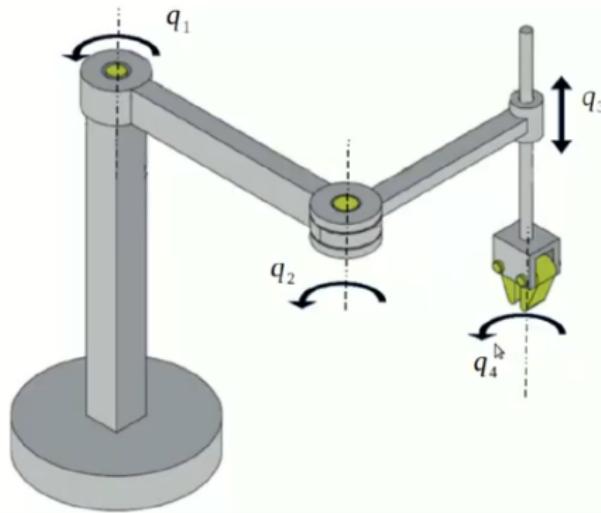
Exemple: Robot SCARA (RRPR)



Robot à 4 axes:
deux axes de rotation (R),
un axe prismatique (P),
et un dernier axe de rotation
(R)

- Définition des corps C_i et choix repère référence
- Identification des axes z_i

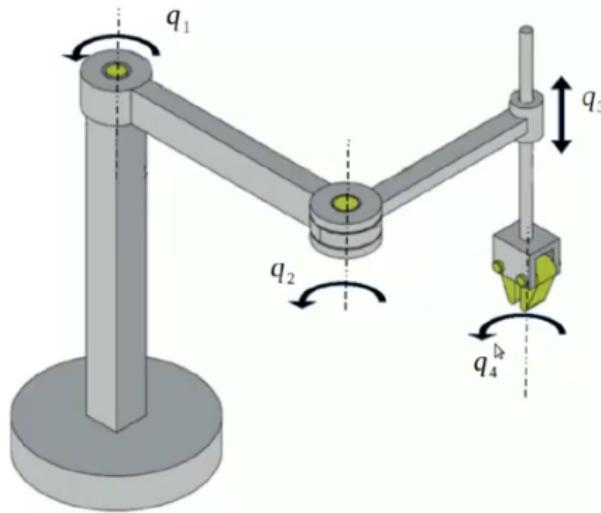
Exemple: Robot SCARA (RRPR)



Robot à 4 axes:
deux axes de rotation (R),
un axe prismatique (P),
et un dernier axe de rotation
(R)

- Définition des corps C_i et choix repère référence
- Identification des axes z_i
- Positionnement des axes x_i

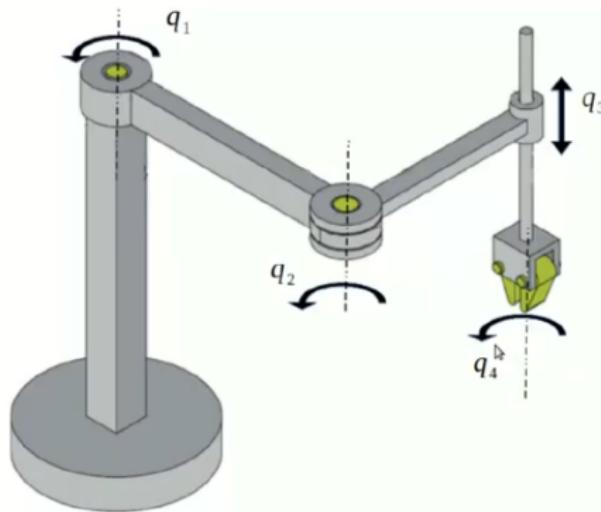
Exemple: Robot SCARA (RRPR)



Robot à 4 axes:
deux axes de rotation (R),
un axe prismatique (P),
et un dernier axe de rotation
(R)

- Définition des corps C_i et choix repère référence
- Identification des axes z_i
- Positionnement des axes x_i
- Calcul des paramètres DH

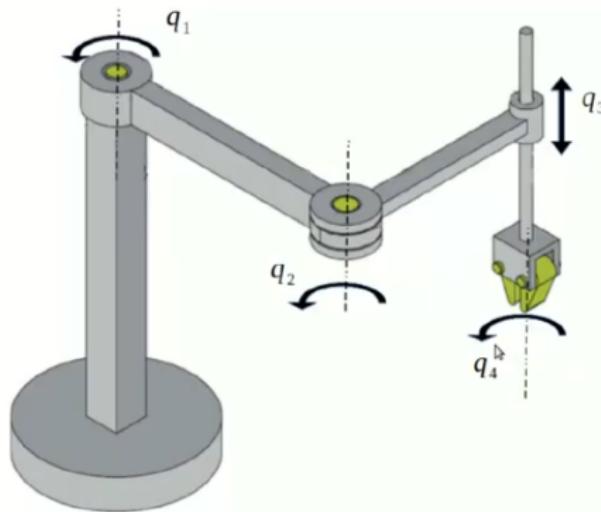
Exemple: Robot SCARA (RRPR)



Robot à 4 axes:
deux axes de rotation (R),
un axe prismatique (P),
et un dernier axe de rotation
(R)

- Définition des corps C_i et choix repère référence
- Identification des axes z_i
- Positionnement des axes x_i
- Calcul des paramètres DH
- Construction des matrices de transformation

Exemple: Robot SCARA (RRPR)



Robot à 4 axes:
deux axes de rotation (R),
un axe prismatique (P),
et un dernier axe de rotation
(R)

- Définition des corps C_i et choix repère référence
- Identification des axes z_i
- Positionnement des axes x_i
- Calcul des paramètres DH
- Construction des matrices de transformation