Propriétés de la transformée de Fourier

Nicolas MENDEZ

12 mai 2025

Propriétés fondamentales de la transformée de Fourier

Si on considère la transformée de Fourier de x notée $x(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} X(f)$.
On a les propriétés suivantes :

- **Linéarité** : $ax_1(t) + bx_2(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} aX_1(f) + bX_2(f)$
- **Changement d'échelle temporelle** : $x(at) \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{|a|} X\left(\frac{f}{a}\right)$
- **Décalage temporel** : $x(t - t_0) \xrightarrow{\mathcal{F}} e^{-j\omega t_0} X(f)$
- **Dérivation dans le temps** : $\frac{d}{dt}x(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} j\omega X(f)$

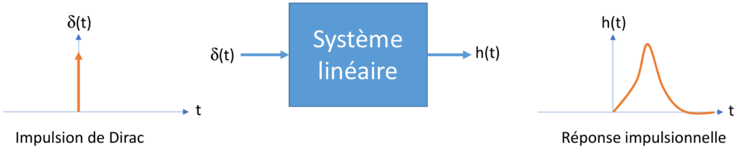
Exercice : On considère le signal $s(t)$, défini sur l'intervalle $[-1; 1]$ par $s(t) = t$

1. Représenter graphiquement ce signal. Est-il périodique ?
2. Quel est la nature du signal $\frac{d}{dt}s(t)$?
3. En déduire la transformée de Fourier de s sans calcul.

Définition : la convolution est une notion qui a pour but de traduire l'effet des systèmes (linéaires en particulier) sur l'allure des signaux qui leur sont appliqués.

But : trouver une manière de quantifier l'effet d'un système sur tout type de signal d'entrée.

On utilisera pour cela la **réponse impulsionnelle** afin de définir de manière standard l'effet d'un système sur les signaux qui lui sont appliqués.



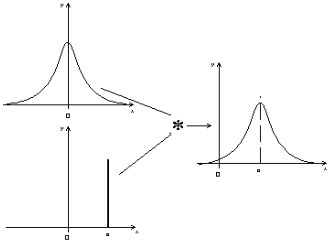
Convolution

Formule de la convolution (continue) :

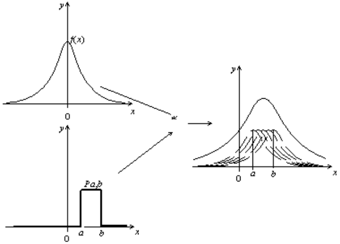
$$s(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau$$

Notation : $s(t) = e(t) * g(t)$

Exemples graphiques :



Produit de convolution d'une fonction par le dirac en a



Produit de convolution d'une fonction par une fonction porte

Lien entre convolution et transformée de Fourier

Théorème de Plancherel (convolution et produit) :

$$e(t) \times h(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} E(f) * H(f)$$

$$e(t) * h(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} E(f) \times H(f)$$

Application aux systèmes linéaires :
Si un système linéaire a pour réponse impulsionnelle $h(t)$, et qu'on applique un signal d'entrée $e(t)$, alors :

$$s(t) = e(t) * h(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} S(f) = E(f) \cdot H(f)$$

D'où :

$$H(f) = \frac{S(f)}{E(f)}$$

Ce principe est similaire à celui de la transformée de Laplace.