Rappels Maths signal

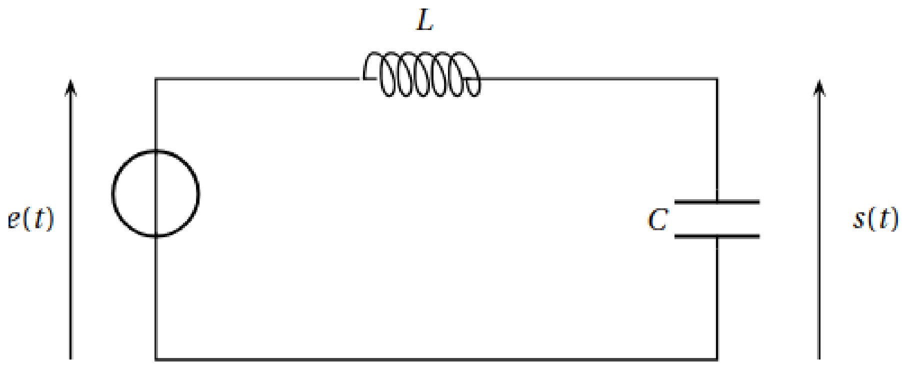
Exercice n° 1 (nombres complexes)

On rappelle que j est le nombre tel que $j^2 = -1$.

1. Écrire le nombre complexe $Z = \dfrac{1}{1-j}$ sous forme algébrique puis trigonométrique.
2. Représenter géométriquement l'ensemble des points M d'affixe $s = x + jy$ tels que :
   (a) $Re(s) = 1$ (b) $Re(s) < 0$ (c) $Re(s) = Im(s)$ (d) $|s| = 1$
3. On considère le complexe $s = x + jy$, et pour tout $t \in \mathbb{R}$ le nombre $f(t) = \mathrm{e}^{st}$.
   (a) $f(t)$ est-il réel ? complexe ? Justifier en manipulant son écriture.
   (b) Expliquer les affirmations suivantes :
   - *« Lorsque $x = 0$, le signal $f(t)$ est périodique pur »*
   - *« Lorsque $x < 0$, le signal $f(t)$ est stable »*
   - *« Lorsque $x > 0$, le signal $f(t)$ diverge »*

Exercice n° 2 (transformée de Laplace)

Un formulaire sur les transformées de Laplace est placé à la fin de l'exercice.

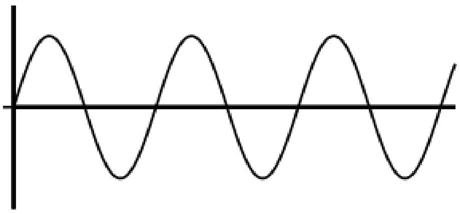


On considère un circuit LC. Le signal d'entrée est noté $e(t)$. Le signal de sortie est noté $s(t)$.
Le système est régi par l'équation différentielle (E) : $LCs''(t) + s(t) = e(t)$.
Les conditions initiales sont : $s\left(0^+\right) = 0$ et $s'\left(0^+\right) = 0$.

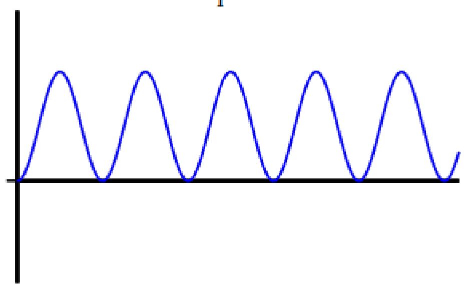
1. On sait que $L = 10$ H et $C = 10^{-5}$ F.
   Réécrire alors l'équation différentielle (E).
2. On suppose que :
   La fonction $e(t)$ admet une transformée de Laplace notée $E(p)$
   La fonction $s(t)$ admet une transformée de Laplace notée $S(p)$.
   Démontrer que l'on a : $\left(10^{-4}p^2 + 1\right) S(p) = E(p)$.
3. La fonction de transfert $H(p)$ est définie par : $S(p) = H(p) \times E(p)$.
   Démontrer que l'on a $H(p) = \dfrac{10^4}{p^2 + 10^4}$.

4. On note $\mathscr{U}(t)$ la fonction échelon unité. On suppose désormais que l'on a : $e(t) = 3\mathscr{U}(t)$.
   Représenter graphiquement le signal $e(t)$ en prenant pour échelle 1 cm pour chaque axe.
5. Donner l'expression de $E(p)$.
6. À l'aide des questions précédentes, déterminer $S(p)$ puis démontrer que l'on a : $S(p) = \dfrac{3}{p} - \dfrac{3p}{p^2+10^4}$.
7. En déduire l'expression de $s(t)$.
8. On admet que l'on a : $s(t) = 3\mathscr{U}(t)[1-\cos(100t)]$.
   Indiquer, sans justifier, lequel des croquis ci-dessous représente la courbe de la fonction $s(t)$.

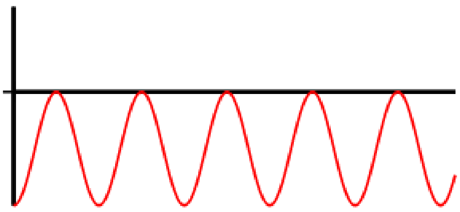
Croquis n° 1



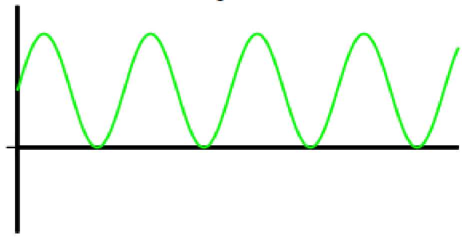
Croquis n° 2



Croquis n° 3



Croquis n° 4



Fonction	Transformée de Laplace
$t \longmapsto \mathscr{U}(t)$	$p \longmapsto \dfrac{1}{p}$
$t \longmapsto t\mathscr{U}(t)$	$p \longmapsto \dfrac{1}{p^2}$
$t \longmapsto t^2\mathscr{U}(t)$	$p \longmapsto \dfrac{2}{p^3}$
$t \longmapsto \mathrm{e}^{-at}\mathscr{U}(t)$, $a \in \mathbb{R}$	$p \longmapsto \dfrac{1}{p+a}$
$t \longmapsto \mathscr{U}(t-a)$	$p \longmapsto \dfrac{1}{p}\mathrm{e}^{-ap}$
$t \longmapsto \sin(\omega t)\mathscr{U}(t)$, $\omega \in \mathbb{R}$	$p \longmapsto \dfrac{\omega}{p^2+\omega^2}$
$t \longmapsto \cos(\omega t)\mathscr{U}(t)$, $\omega \in \mathbb{R}$	$p \longmapsto \dfrac{p}{p^2+\omega^2}$
Dans ce qui suit, $f(t)$ est une fonction possédant une transformée de Laplace notée $F(p)$.	
$t \longmapsto f(t)\mathrm{e}^{-at}\mathscr{U}(t)$, $a \in \mathbb{R}$	$p \longmapsto F(p+a)$
$t \longmapsto f(t-a)\mathscr{U}(t-a)$, $a \in \mathbb{R}$	$p \longmapsto F(p)\mathrm{e}^{-ap}$
Si de plus f est dérivable $t \longmapsto f'(t)\mathscr{U}(t)$	$pF(p) - f(0^+)$
Si de plus f' est dérivable $t \longmapsto f''(t)\mathscr{U}(t)$	$p^2F(p) - pf(0^+) - f'(0^+)$