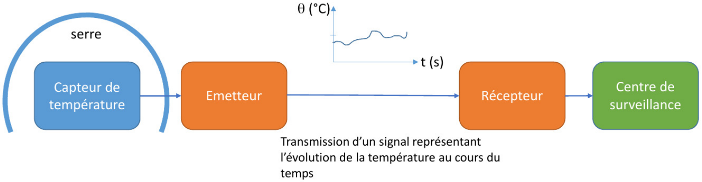
Chapitre 1

Outils pour la transformée de Fourier

- **Objectif du module :** introduire les outils spectraux pour l'analyse d'un signal
- **Contenu : Des rappels et approfondissements sur les éléments mathématiques pour l'étude des signaux**
- **Organisation :** 12 TD et 4 TP (Au moins deux devoirs et des CR de TP)

1. Introduction

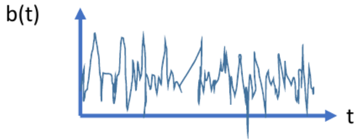
- Les signaux sont à la base de nombreuses disciplines scientifiques et techniques (télécommunications, électronique, informatique, internet et réseaux, pilotage de systèmes, etc.)
- Ils sont utilisés de manière intensive dans la vie quotidienne (parole, langage des signes, téléphonie, musique, signalisation routière, etc.)
- **Définition :** un signal peut être défini comme une fonction d'une ou plusieurs variables servant de support à la transmission d'une information ou d'une commande.
- **Exemple :**



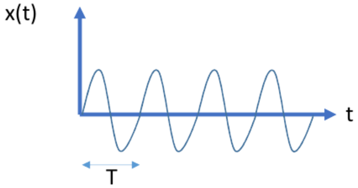
Suivi à distance de l'évolution de la température dans une serre agricole

2. Types de signaux

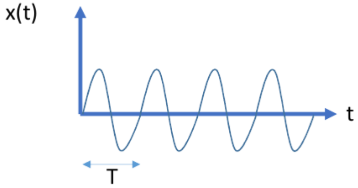
Signal aléatoire ou apériodique :
évolution non prédictible dans le temps (bruit)



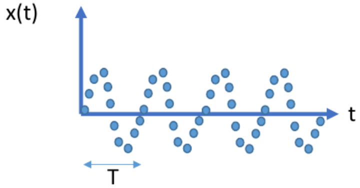
Signal déterministe :
peut être prédit dans le temps



Signal continu :
valeur déterminée à tout instant



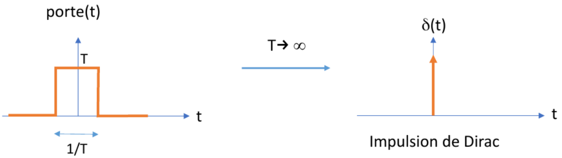
Signal discret :
valeurs connues qu'à des instants privilégiés (échantillon)



3. Quelques signaux à connaître

- **Signal Porte :**
  La fonction porte, notée généralement Π est définie comme suit : c'est la fonction qui vaut 1 entre $-1/2$ et $+1/2$ et qui est nulle partout ailleurs, mathématiquement : $\Pi(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } -\frac{1}{2} \leqslant t \leqslant \frac{1}{2} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

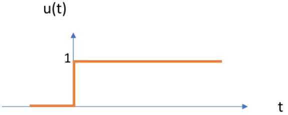
- **Impulsion de Dirac :**
  signal non réalisable (mais on peut s'en approcher !). Il peut être modélisé par un signal porte dont la largeur tend vers 0 et dont l'amplitude tend vers l'infini. C'est un signal très bref mais à très forte énergie.



$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)dt = 1$$

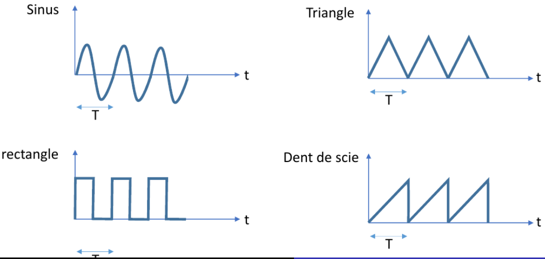
4. Quelques signaux à connaître

- **Fonction d'Heaviside (échelon unitaire) :**
  nul pour les temps négatifs et de valeur 1 pour les temps positifs.



$$\frac{d}{dt}u(t) = \delta(t)$$

- **Signaux périodiques :**



5. Très important : le signal sinusoïdal

$$x(t) = A\sin(\omega t + \varphi)$$

Amplitude maximale

Pulsation

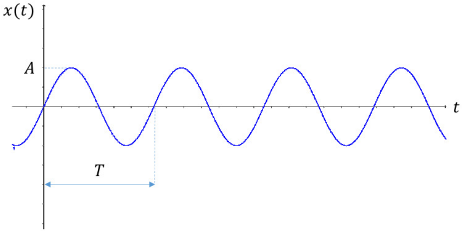
Phase à l'origine

$$\omega = 2\pi f$$

Fréquence

$$f = \frac{1}{T}$$

Période



Valeur moyenne $\bar{X} = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)dt = 0$

Valeur efficace $X_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T (x(t))^2 dt} = \frac{A}{\sqrt{2}}$

Exercice d'application :

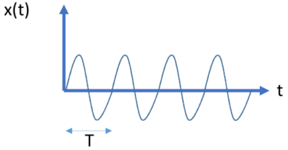
Soit le signal sinusoïdal dont l'évolution temporelle est décrite par l'expression suivante :

$$x(t) = 4\sin(6283t + 0,785)$$

1. Déterminer l'amplitude maximale de ce signal, sa fréquence, sa pulsation, sa période ainsi que sa phase.
2. Déterminer la valeur moyenne de ce signal ainsi que sa valeur efficace.
3. Si ce signal était diffusé par un haut-parleur, serait-il audible ?
   Pour info : un signal audible a une fréquence comprise entre $20\ Hz$ *et* $20\ kHz$

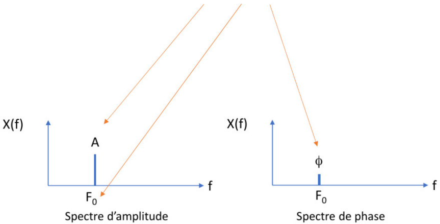
6. Représentation d'un signal

- Représentation temporelle (la plus connue !)



- Représentation fréquentielle (ou spectrale) :

$$x(t) = A\sin(\omega t + \varphi)$$



Exercices d'application :

Représenter le spectre d'amplitude des signaux suivants :

- $x_1(t) = 2\sin(200\pi t)$
- $x_2(t) = 3\sin(800\pi t + \frac{\pi}{4}$
- $x_3(t) = 1 + 2\sin(200\pi t)$
- $x_4(t) = 1 + 2\sin(200\pi t) + 3\sin(500\pi t)$
- $x_5(t) = 2\sin(200\pi t)\sin(500\pi t)$

Aide pour le dernier : $\sin a \sin b = \frac{1}{2}\left(\cos(a-b) - \cos(a+b)\right)$