Chapitre 5 Transformée de Laplace

0. Introduction La transformation de Laplace est une opération intégrale qui permet de transformer une fonction d'une variable réelle en une fonction d'une variable complexe. Par cette transformation, une équation différentielle linéaire peut être représentée par une équation algébrique. **1. Définitions et notations** Soit f une fonction d'une variable réelle définie et localement intégrable sur $[0, +\infty[$ et supposée nulle sur $]-\infty, 0[$. On suppose de plus, qu'il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $\int_0^{+\infty} e^{-x_0 t} f(t) dt < +\infty$.

Definition 1. Pour tout $p \in \mathbb{C}$, on pose

$$F(p) = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-pt} dt$$

La fonction $F(p)$ quand elle existe est appelée Transormée de Laplace de $f(t)$.

Notations. On note souvent $F = L(f)$, $F(p) = L(f(t))$, $f \supset F$ ou $f(t) \supset F(p)$.

Example 2.

1. Si
$$Y(t) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad t \geq 0 \\ 0 & \text{si} \quad t < 0 \end{cases}$$
On a
$$F(p) = \frac{1}{p}$$
définie pour $Re(p) > 0$.
2. Si $f(t) = e^{at}$, $a \in \mathbb{C}$, alors $e^{at} \supset \frac{1}{p-a}$ qui est définie pour $Re(p) > Re(a)$.

Existence de la transformée de Laplace : On l'un des trois cas :

1. F n'est définie en aucun point $p \in \mathbb{C}$ $(f(t) = e^{t^2})$
2. F est définie pour tout $p \in \mathbb{C}$ $(f(t) = e^{-t^2})$
3. F est définie pour certains complexes mais pas pour d'autres $(f(t) = Y(t))$

Supposons qu'il existe $p_0 \in \mathbb{C}$ tel que $F(p_0)$ existe, alors pour $p \in \mathbb{C}$ tel que $\text{Re}(p) \geq \text{Re}(p_0)$, $F(p)$ existe. On en déduit que :

— ou bien
$$\{x \in \mathbb{R} / F(p) \quad \text{existe, pour tout } p \in \mathbb{C}, \text{Re}(p) \geq x\}$$
est non minoré ; alors F est définie sur $\mathbb{C}$.

— ou bien
$$\{x \in \mathbb{R} / F(p) \quad \text{existe, pour tout } p \in \mathbb{C}, \text{Re}(p) \geq x\}$$
est minoré ; donc il admet une borne inf. α appelée abscisse de convergence. Il en résulte que F est définie sur le demi plan défini par $\text{Re}(p) \geq \alpha$.

Les méthodes de résolution des problèmes utilisant la transformée de Laplace constituent le **calcul symbolique** ou calcul opérationel

1 Propriétés de la transformée de Laplace

1.1 Propriétés algébriques.

1.1.1 Linéarité

2. Propriétés de la transformée de Laplace 2.1 Propriétés algébriques. 2.1.1 Linéarité On a

$$L(\alpha f(t) + \beta g(t)) = \alpha L(f(t)) + \beta L(g(t)).$$

Example 3.

$$\mathrm{ch}(\alpha t) \supset \frac{p}{p^2-\alpha^2} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{sh}(\alpha t) \supset \frac{\alpha}{p^2-\alpha^2}$$
$$\cos(\omega t) \supset \frac{p}{p^2+\omega^2} \qquad \text{et} \qquad \sin(\omega t) \supset \frac{\omega}{p^2+\omega^2}$$

1.1.2 Formule du retard

2.1.2 Formule du retard On a $f(t) = 0$ pour $t < 0$ et par suite $f(t-a) = 0$ pour $t < a$. Donc

$$f(t-a) \supset \int_a^{+\infty} f(t-a)e^{-pt}dt = \int_0^{+\infty} f(u)e^{-p(u+a)}du = e^{-pa}F(p)$$

Example 4. $Y(t-a) \supset \frac{e^{-pa}}{p}$

2.1.3 Cas d'une fonction périodique Si f est une fonction de période T supposée nulle sur $]-\infty, 0[$, alors

$$F(p) = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{nT}^{(n+1)T} f(t)e^{-pt}dt = (\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-pnT}) \int_0^T f(t)e^{-pt}dt$$

Cette série est convergente si et seulement si $R_e(p) > 0$; et on a :

$$F(p) = \frac{1}{1-e^{-pT}} \int_0^T f(t)e^{-pt}dt$$

Example 5.

$$f(t) = \sin(t)$$

1.1.3 Translation sur p.

2.1.4 Translation sur p.

Proposition 6. *Si* $f(t) \supset F(p)$ *alors* $f(t)e^{p_0 t} \supset F(p-p_0)$.

Example 7. On a

$$e^{\alpha t}\sin(t) \supset \frac{1}{(p-\alpha)^2+1}$$

1.1.4 Changement d'échelle

2.1.4 Changement d'échelle

Proposition 8. *Si* $f(t) \supset F(p)$ *alors* $f(at) \supset \frac{1}{a}F(\frac{p}{a})$, *pour tout* $a > 0$.

Example 9. On a

$$\sin(\omega t) \supset \frac{\omega}{(p-\alpha)^2 + \omega^2}$$

1.2 Propriétés analytiques

1.2.1 Dérivation

2.2 Propriétés analytiques 2.2. 1 Dérivation

Proposition 10. *Si* $f(t) \supset F(p)$ *et si* f *est de classe* C^n, *alors*

$$f^{(n)}(t) \supset p^n F(p) - p^{n-1} f(0) - p^{n-2} f'(0) - \cdots - p f^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0)$$

Example 11. Résoudre l'équation différentielle

$$y"(t) - y'(t) - 6y(t) = 2Y(t)$$

Proposition 12. *Si* $f(t) \supset F(p)$ *alors* $(-1)^n t^n f(t) \supset F^{(n)}(p)$

Example 13. $L(te^{at})$, $L(tY(t))$

Remark 14. Si $f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n$, alors $Lf(p) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n n!}{p^{n+1}}$.

Example 15. $L(\frac{\sin(\omega t}{t}) = \arctan(\frac{\omega}{p})$

1.2.2 Primitive

2.2. 2 Primitive

Proposition 16. *Si* $g(t) = \int_0^t f(u)du$ *et si* $f(t) \supset F(p)$ *alors* $g(t) \supset \frac{F(p)}{p}$.

Example 17. On a $tY(t) = \int_0^t Y(u)du$; donc

$$tY(t) \supset \frac{1}{p^2}$$

Proposition 18. *On a*

$$\lim_{t\to 0^+} f(t) = \lim_{p\to+\infty, p\in\mathbb{R}} pF(p) \qquad (\textit{Théorème de la valeur initiale})$$

et

$$\lim_{t\to +\infty} f(t) = \lim_{p\to 0, p\in\mathbb{R}} pF(p) \qquad (\textit{Théorème de la valeur finale})$$

1.2.3 Produit de convolution

3. Produit de convolution

Proposition 19. *On a*

$$L(f(t) * g(t)) = L(f(t)L(g(t))$$

A condition que ces termes existent.

2 Transformée de Laplace inverse

4. Transformée de Laplace inverse

Proposition 20. *On a*

$$L(f(t)) = L(g(t)) \Longleftrightarrow f(t) = g(t) \qquad p.p$$

Definition 21. On en déduit que si $F(p) = L(f(t))$, alors $f(t)$ est la transformée de Laplace inverse de $F(p)$