Chapitre 4 Analyse complexe

1 Fonctions complexes

1. **Fonctions complexes** On rappelle que pour tout $z = a + ib \in \mathbb{C}$,

$$|a + ib| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

et que $(\mathbb{C}, |\ \ |)$ est identifié à $\mathbb{R}^2$ muni de sa norme euclidienne.

Definition 1. Une partie non vide de $\mathbb{C}$ est appelée domaine si elle est ouverte et connexe. Un domaine D est dit simplement connexe si pour toute courbe fermée contenue dans D, l'intérieur de C est contenu dans D.

Proposition 2. *Tout domaine est connexe par arcs.*

$$\begin{array}{rccc} f: & U & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & z & \longrightarrow & f(z) \end{array}$$

il existe deux fonctions à deux variables $P(x, y)$ et $Q(x, y)$ telles que

$$f(z) = f(x + iy) = P(x, y) + iQ(x, y)$$

2 Limite et continuité

2. Limite et continuité Ces notions se définissent comme dans le cas d'une fonction à variable réelle en remplaçant la valeur absolue par le module.

Proposition 3. *f est continue en $z_0 = (x_0, y_0)$ si et seulement si les fonctions $P(x, y)$ et $Q(x, y)$ sont continues en (x_0, y_0).*

3 Fonctions holomorphes

3. Fonctions Holomorphes

Definition 4. Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$, f une fonction complexe définie de U dans $\mathbb{C}$ et $z_0 \in U$. On dit que f est dérivable en z_0 si

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

existe. La valeur de cette limite est notée $f'(z_0)$ et appelée dérivée de f en z_0.

Definition 5. On dit que f est holomorphe dans U si elle est dérivable en tout point de z de U.

Example 6. 1. $f(z) = z^n$ ($n \in \mathbb{N}$) est holomorphe dans $\mathbb{C}$.

2. $f(z) = \frac{1}{z}$ est holomorphe sur $\mathbb{C}^*$.
3. Toute fraction rationnelle est holomorphe sur son domaine de définition.

Proposition 7. *Si $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, alors elle est holomorphe sur son disque de convergence et on a*

$$f'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n z^{n-1}$$

4 Différentiabilité. Conditions de Cauchy

5. Différentiabilité. Conditions de Cauchy

Theorem 8. *Soit U un domaine de $\mathbb{C}$ et $f = P + iQ$ une fonction complexe définie sur U. Alors f est holomorphe dans U si et seulement si P et Q leurs dérivées partielles sont continues et vérifient les conditions dites de Cauchy :*

$$\begin{aligned} \tfrac{\partial P}{\partial x}(x_0, y_0) &= \tfrac{\partial Q}{\partial y}(x_0, y_0) \\ \tfrac{\partial P}{\partial y}(x_0, y_0) &= -\tfrac{\partial Q}{\partial x}(x_0, y_0) \end{aligned}$$

Dans ce cas, on a

$$f'(z) = \frac{\partial P}{\partial x}(x_0, y_0) + i\frac{\partial Q}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial Q}{\partial y}(x_0, y_0) - i\frac{\partial P}{\partial y}(x_0, y_0)$$

($z = z_0 + x$, ou $z = z_0 + ix$ x réel)

5 Intégration complexe- Formules de Cauchy

6. Intégration complexe

5.1 Courbes

6.1 Courbes Une courbe différentiable de $\mathbb{C}$ est définie par une fonction $t \longrightarrow z(t) = x(t) + iy(t)$, avec $t \in [a, b]$ qui admet une dérivée $z'(t) = x'(t) + iy'(t)$ continue et non nulle. On supposera de plus que $z(t_1) \neq z(t_2)$ pour tout $t_1 \neq t_2$. On dit que la courbe est fermée si $z(a) = z(b)$. Une courbe fermée partage le plan en deux domaines disjoints.

Example 9. Le cercle unité est une courbe fermée paramétrée par $z(t) = e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$. Notons que $z_1(t) = e^{2\pi i t}$, $t \in [0, 1]$ est un autre paramétrage du cercle unité.

Un paramétrage induit un sens de parcours de la courbe. La tangente à la courbe en $z_0 = z(t_0)$ est donnée par

$$z(t) = z(t_0) + z'(t_0)(t - t_0)$$

et sa normale est donnée par $z(t) = z(t_0) + iz'(t_0)(t - t_0)$. Les vecteurs $z'(t_0)$ et $iz'(t_0)$ sont orthogonaux et orientés comme les vecteurs 1 et i.

Remark 10 (Note 1cNote 1.). On a $z'(t) = x'(t)+iy'(t)$ et $iz'(t) = -y'(t)+ix'(t)$. On a $\det(z'(t), iz'(t)) = \begin{vmatrix} x'(t) & -y'(t) \\ y'(t) & x'(t) \end{vmatrix} = (x'(t))^2 + (y'(t))^2 > 0$

Definition 11. On dit qu'une courbe est orientée dans le sens positif si le vecteur $iz'(t)$ pointe vers son intérieur.

Example 12. $z(t) = e^{it}$ est un paramétrage du cercle unité. De plus, on a $iz'(t) = -e^{it}$ pointe vers 0. Si on prend $z(t) = e^{-it}$, on a $iz'(t) = e^{-it}$ pointe vers l'extérieur (sens négatif).

5.2 Intégrale curviligne

6.2 Intégrale curviligne

Definition 13. Si $z(t)$, $t \in [a, b]$ est un paramétrage d'une courbe C, alors

$$\int_C f(z)dz = \int_a^b f(z(t))z'(t)dt$$

Remark 14. Si $z_1(t)$, $t \in [c, d]$, est un autre paramétrage de C qui définit le même sens de parcours, on a $z_1(t) = z(s(t))$, avec $s'(t) > 0$. Par suite,

$$\int_C f(z)dz = \int_c^d f(z_1(t))z_1'(t)dt = \int_a^b f(z(s)z'(s)ds = \int_C f(z)dz$$

Si par contre z_1 définit le sens inverse, on obtient

$$\begin{aligned} \int_C f(z)dz &= \int_c^d f(z_1(t))z_1'(t)dt \\ &= \int_c^d f(z(s(t)))z'(s(t)s'(t)dt \\ &= \int_b^a f(z(s))z'(s)ds \\ &= -\int_C f(z)dz = \int_{C^-} f(z)dz \end{aligned}$$

Si $z(t)$ et $z(s(t))$ sont deux paramétrages d'une courbe C, alors ils définissent le même sens de parcours si et seulement si $s'(t) > 0$.

Propriétés

1. $\int_C(\alpha_1 f_1(z) + \alpha_2 f_2(z))dz = \alpha_1 \int_C f_1(z)dz + \alpha_2 \int_C f_2(z)dz$
2. Si $C_1 \cup C_2$ une courbe différentiable simple, alors
$$\int_{C_1\cup C_2} f(z)dz = \int_{C_1} f(z)dz + \int_{C_2} f(z)dz$$
3. $\left|\int_C f(z)dz\right| = \left|\int_a^b f(z(t))z'(t)dt\right| \leq \int_a^b |f(z(t)||z'(t)|dt \leq \sup\{|f(z)|; z \in C\}L_C$ où
$$L_C = \int_a^b |z'(t)|dt$$
désigne la longueur de la courbe.

Proposition 15. *Si f admet une primitive holomorphe dans U, alors pour tout chemin C d'origine z_1 et d'extrémité z_2, on a*

$$\int_C f(z)dz = \int_a^b f(z(t))z'(t)dt = \int_a^b F'(z(t))z'(t)dt = F(z_2) - F(z_1)$$

Si de plus, C est fermée, $\int_C f(z)dz = 0$

Example 16. Si C est le cercle unité, on a : $\int_C z^n dz = 0$ $\int_C \frac{dz}{z} = 2\pi i$. Donc $\frac{1}{z}$ n'admet pas de primitive sur $\mathbb{C}^*$.

5.3 Première formule de Cauchy

7. Intégration complexe- Formules de Cauchy

Theorem 17 (Théorème de Cauchy)**.** *Soit D un domaine de $\mathbb{C}$; et f est une fonction holomorphe de D dans $\mathbb{C}$ alors pour tout chemin fermé contenu dans D, on a*

$$\int_C f(z)dz = 0$$

Démonstration. On utilise la formule de GreenGreen-Riemann Note3 Supposons $f(x+iy) = P(x,y) + iQ(x,y)$

$$\begin{aligned}\int_{C^+} f(z)dz &= \int_{C^+} f(x+iy)(dx+idy)\\ &= \int_{C^+} Pdx - Qdy + i\int_{C^+} Qdx + Pdy\\ &= \iint_S \left(-\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy + i\iint_S \left(\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial y}\right)dxdy\end{aligned}$$

Theorem 18 (Formule intégrale de Cauchy)**.** *Soit D un domaine de $\mathbb{C}$; et f est une fonction holomorphe de D dans $\mathbb{C}$ alors pour tout chemin fermé contenu dans D et pour tout z_0 intérieur à C, on a*

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C^+} \frac{f(z)dz}{z - z_0}$$

Démonstration. Soit C_r le cercle de centre z_0 et de rayon $r > 0$. On a

$$\begin{aligned}\int_{C^+} \frac{f(z)dz}{z-z_0} &= \int_{C_r^+} \frac{f(z)dz}{z-z_0}\\ &\int_{C_r^+} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}dz + f(z_0)\int_{C_r^+} \frac{dz}{z-z_0}\\ &= \int_{C_r^+} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}dz + 2\pi i f(z_0)\end{aligned}$$

D'autre part, on a :

$$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = f'(z_0) + g(z)$$

d'où

$$\begin{aligned}\int_{C_r^+} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}dz &= f'(z_0)\int_{C_r^+} dz + \int_{C_r^+} g(z)dz\\ &= \int_{C_r^+} g(z)dz\end{aligned}$$

avec $\left|\int_{C_r^+} g(z)dz\right| \leq 2\pi r \sup_{|z|=r} |g(z)|$ qui tend vers 0 quand $r \to 0$.

6 Analyticité des fonctions holomorphes

7. Analyticité des fonctions holomorphes

Theorem 19. *Toute fonction holomorphe dans le disque ouvert* $|z - z_0| < R$ *est développable en série de Taylor de façon unique :*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$$

et pour tout $0 < r < R$*, on a*

$$a_n = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_r} \frac{f(u)}{(u - z_0)^{n+1}} du, \quad n \in \mathbb{N}.$$

où γ_r *est le cercle de centre 0 et de rayon r parcouru dans le sens direct.*

Démonstration. Pour tout $z \in D(z_0, R)$, il existe $r > 0$ tel que $|z - z_0| < r$. La formule intégrale de Cauchy donne

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r^+} \frac{f(u)du}{(u - z)}$$

D'autre part, on a

$$\frac{1}{u - z} = \frac{1}{(u - z_0) - (z - z_0)} = \frac{1}{u - z_0} \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{u - z_0}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(u - z_0)^{n+1}}$$

ce qui donne :

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} (z - z_0)^n \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r^+} \frac{f(u)du}{(u - z_0)^{n+1}} \right)$$

On prend $a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r^+} \frac{f(u)du}{(u - z_0)^{n+1}}$ qui est indépendant de r.

Corollary 20. *Toute fonction holomorphe dans un ouvert* U *de* $\mathbb{C}$ *est indéfiniment dérivable dans* U*. Et, on a*

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma_r^+} \frac{f(z)dz}{(z - z_0)^{n+1}}$$

On en déduit que toute fonction holomorphe est analytique.

7 Résidus

8. Résidus

Definition 21. On dit que a est un pôle d'ordre p de f s'il existe une fonction holomorphe définie sur un ouvert contenant a telle que

$$f(z) = \frac{\varphi(z)}{(z-a)^p}$$

avec $\varphi(a) \neq 0$.

Si $\varphi(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n(z-a)^n$, alors

$$f(z) = \frac{c_0}{(z-a)^p} + \frac{c_1}{(z-a)^{p-1}} + \cdots + \frac{c_{p-1}}{(z-a)} + \sum_{n=p}^{+\infty} c_n(z-a)^{n-p}$$

Donc $f(z)$ peut s'écrire sous la forme

$$f(z) = \frac{c_0}{(z-a)^p} + \frac{c_1}{(z-a)^{p-1}} + \cdots + \frac{c_{p-1}}{(z-a)} + \sum_{n=0}^{+\infty} c_{n+p}(z-a)^n$$

Definition 22. Dans cette expression, le coefficient c_{p-1} de $\frac{1}{z-a}$ est appelé Résidu de f en a et sera noté $Res(f,a)$.

Soit γ une courbe simple fermée autour de a; on a :

$$\int_{\gamma^+} f(z)dz = \sum_{k=1}^{p} c_{p-k} \int_{\gamma^+} \frac{dz}{(z-a)^k} + \int_{\gamma^+} g(z)dz$$

avec $g(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_{n+p}(z-a)^n$. Pour tout $k = 2, \cdots p$, on a

$$\int_{\gamma^+} \frac{dz}{(z-a)^k} = 0,$$

$$\int_{\gamma^+} g(z)dz = 0$$

et

$$\int_{\gamma^+} \frac{dz}{z-a} = 2\pi i$$

Il en résulte que

$$\int_{\gamma^+} f(z)dz = 2\pi i Res(f,a)$$

Plus généralement, si f a un nombre fini de pôles $a_0, a_1, \cdots, a_n$ entouré par un chemin fermé γ et si γ_i est un cercle de centre a_i et de rayon $r_i > 0$ qui est intérieur à γ, alors

$$\int_{\gamma^+} f(z)dz = \sum_{i=0}^{n} \int_{\gamma_i^+} f(z)dz = 2\pi i \sum_{j=0}^{n} Res(f,a_j)$$

Calcul pratique des résidus Si a est un pôle simple ($p = 1$), on a

$$Res(f,a) = \lim_{z\to a}(z - z_0)f(z)$$

En particulier si $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z),}$ en écrivant

$$(z-a)f(z) = \frac{P(z)}{\frac{Q(z)-Q(a)}{z-a}}$$

On obtient $Res(f,a) = \frac{P(a)}{Q'(a)}$. Plus généralement, si a est un pôle d'ordre p, on a

$$Res(f,a) = \frac{1}{(p-1)!}\left((x-a)^p f(z)\right)^{(p-1)}(z=a)$$

9. Points singuliers et série de Laurent

Definition 23. Soit f une fonction holomorphe sur $U - \{a\}$. On dit que a est un point singulier essentiel ou un point essentiel s'il n'existe aucun entier naturel p tel que $(z-a)^p f(z)$ soit holomorphe sur U

Example 24. $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$, $z = 0$ est un point essentiel

Theorem 25. *Soit f une fonction holomorphe sur $U = \{z \in \mathbb{C}/ \quad R_1 < |z - z_0| < R_2\}$. Alors f s'écrit de façon unique sous la forme*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n$$

Cette série s'appelle série de Laurent de f au point z_0.

Definition 26. Le coefficient de $\frac{1}{z-z_0}$ s'appelle le résidu de f en z_0.

Theorem 27. *Soit f une fonction holomorphe sur un ouvert D sauf en un nombre fini de points singuliers (pôles ou points essentiels) et si Γ est une courbe fermée incluse dans D ne passant par aucun point singulier, alors $\int_{\Gamma^+} f(z)dz$ est égal au produit de $2\pi i$ et de la somme des résidus de f en ses points singuliers intérieurs à Γ.*

8 Application au calcul intégral de fonctions réelles.

8.1 Intégrales de la forme $\int_0^{2\pi} R(\cos(\theta), \sin(\theta))d\theta$ où R est une fraction rationnelle à deux variables.

10. Application au calcul intégral de fonctions réelles 10.1 Intégrales de la forme $\int_0^{2\pi} R(\cos(\theta), \sin(\theta))d\theta$ où R est une fraction rationnelle à deux variables. On pose $z = e^{i\theta}$ d'où

$$\cos(\theta) = \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z}) \qquad \text{et} \qquad \sin(\theta) = \frac{1}{2i}(z - \frac{1}{z})$$

et $d\theta = \frac{dz}{iz}$. On se ramène à une intégrale de la forme

$$I = \int_{C^+} \left(R(\frac{1}{2}(z + \frac{1}{z}), \frac{1}{2i}(z - \frac{1}{z}) \right) \frac{dz}{iz}$$

où C est le cercle unité.

Example 28. Soit $I = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\theta}{2+\cos(\theta)}$. on obtient

$$I = -i \int_{C^+} \frac{2dz}{z^2 + 4z + 1}$$

Si on pose $f(z) = \frac{2}{z^2+4z+1}$, les pôles de f sont $z_1 = -2 + \sqrt{3}$ et $z_2 = -2 - \sqrt{3}$. On obtient

$$I = -i(2\pi i)Res(f, z_1) = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}$$

10.2 Intégrale de la forme $I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)dx}{Q(x)}$ où P et Q sont premiers entre eux Cette intégrale est convergente si Q n'a pas de zéro réel et $\deg Q \geq \deg P + 2$. Pour calculer cette intégrale, on pose $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ et on calcule l'intégrale de $R(z)$ sur le chemin γ_r formé par le segment $[-r, r]$ et le demi-cercle supérieur C_r de centre O et de rayon r parcouru dans le sens positif. On choisit r suffisament grand pour que les pôles $z_1, \cdots, z_n$ de R dont la partie imaginaire est >0 soient intérieurs à γ_r. On a alors

$$\int_{-r}^{r} R(x)dx + \int_{C^+} R(z)dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{n} Res(R(z), z_j)$$

La condition sur les degrés donne $\lim_{|z|\to+\infty} zR(z) = 0$. Puis, on applique le lemme suivant :

Lemma 29 (Premier lemme de Jordan1Jordan)**.** *Soit f une fonction complexe continue sur le secteur*

$$S = \{z \in \mathbb{C}/ \quad 0 \leq \theta_0 \leq arg(z) \leq \theta_0 + \alpha \leq \pi\}$$

Si on désigne par C_R l'arc de cercle orienté dans le sens direct défini par

$$z = Re^{i\theta}, \qquad \theta_0 \leq \theta \leq \theta_0 + \alpha$$

Alors $\lim_{|z|\to+\infty} |zf(z)| = 0$ *implique* $\lim_{R\to+\infty} \int_{C_R} f(z)dz = 0$

Il en résulte que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)dx = 2\pi i \sum_{j=1}^{n} Res(R(z), z_j)$$

Example 30. Calculer $I = \int_{0}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^4}$.

10.3 Calcul des intégrales de la forme $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{ix}dx$ On suppose que la fonction $f(z)$ est holomorphe dans le demi plan $\Im(z) \geq 0$ sauf peut être en un nombre fini de points. Le calcul de ce type d'intégrales se ramène au calcul des intégrales de la forme

$$I_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\cos(x)dx \qquad \text{et} \qquad I_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\sin(x)dx$$

Lemma 31 (2[e]lemme de Jordan2Jordan)**.** *Soit $f(z)$ une fonction définie sur le secteur $0 \leq \theta \leq \theta_0 \leq \pi$; et soit γ_r l'arc du cercle de centre 0 et de rayon r inclus dans ce secteur. Si $\lim_{|z|\to+\infty} f(z) = 0$, alors $\lim_{r\to+\infty} \int_{\gamma_r} f(z)e^{iz}dz = 0$.*

Pour calculer $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{ix}dx$, on considère le chemin constitué du segment $[-r, r]$ et le demi-cercle supérieur γ_r de centre 0 et de rayon r parcouru dans le sens positif. Sous l'hypothèse $\lim_{|z|\to+\infty} f(z) = 0$, on a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{ix}dx = 2\pi i \sum_{\Im(z_k)>0} Res(f(z)e^{iz}, z_k)$$

Dans le cas où $z = 0$ est un pôle simple de la fonction $f(z)$, on considère le chemin constitué par les parties suivantes $[-r, -\epsilon,]$, le demi-cercle supérieur de centre 0 et de rayon ϵ, le segment $[\epsilon, r]$ et le demi-cercle de centre 0 et de rayon r. Puis, on utilise le lemme suivant :

Lemma 32 (3[e]Lemme de Jordan3Jordan)**.** *Si on désigne par $\Delta(\epsilon)$ le demi-disque de centre 0 et de rayon ϵ, limité par l'arc γ_ϵ. Et, si f est une fonction holomorphe dans $\Delta(\epsilon)$ sauf au point 0 supposé être un pôle simple pour cette fonction. On a alors*

$$\lim_{\epsilon\to 0} \int_{\gamma_\epsilon^-} f(z)dz = -i\pi Res(f, 0)$$

Donc sous l'hypothèse $\lim_{|z|\to+\infty} f(z) = 0$, en faisant tendre r vers l'infini et ϵ vers 0, on obtient

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{ix}dx = i\pi Res(f(z)e^{iz}, 0) + 2i\pi \sum_{\Im(z_k)>0} Res(f(z)e^{iz}, z_k)$$

Application. Calculer $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)dx}{x}$.