Gestion des projets

Introduction

- Comment planifier un projet avant de le commence ?
- Comment programmer les différentes tâches d'un projet
- Comment coordonner et contrôler les activités ou tâche d'un projet de telle sorte à finir le projet dans les délais planifies ?

Deux Algorithmes:

PERT: Programme Evaluation et Révision Technique

CPM: Méthode du Chemin Critique.

Un Projet sera représenté par un réseau ou :

- Un Arc représente une tâche
- Un Nœud représente un évènement dans le temps qui marque la fin d'une ou de plusieurs tâches

Exemple 1

Représentez le projet aux tâches : A,B,C,D,E,F et G.

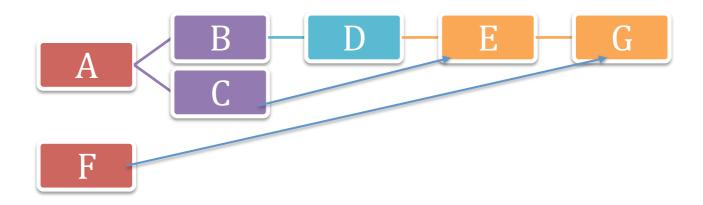
Avec:

- 1. A < B, C
- 2. C, D < E
- 3. B < D
- 4. E, F < G

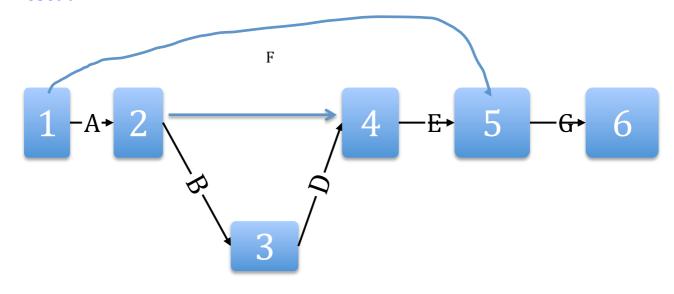
Potentiel des tâches :

Tâche	Prédécesseur	Niveau	
Α	-	1	
В	A	2	A < B, C
С	A	2	C, D < E B < D
D	В	3	B < D
E	C, D	4	E, F < G
F	-	1	
G	E, F	5	

D'où le potentiel des tâches :



Réseau



Exemple 2

Représentez le réseau aux tâches : A,B,C,D et E dont la durée est de 3,1,4,2 et 5 Jours respectivement.

A < C, D B < D C, D < E

Exemple 3

Représentez le réseau suivant

Tâche	Prédécesseur
A	-
В	-
С	В
D	A,C
E	A,C
F	D
G	E
Н	F,G

Exemple 4

Représentez le réseau suivant :

Tâche	Prédécesseur
A	-
В	Α
С	A
D	B,C
E	A
F	D,E
G	С
Н	F,G
I	Н

Remarque

Le Problème de gestion de projet est un problème de programmation linéaire.

Exemple 2

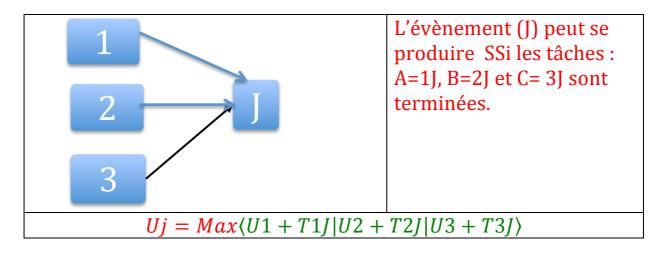
De manière Générale

$$\label{eq:minimiser} \begin{array}{l} \mbox{Minimiser Z = Tn - T1} \\ \mbox{Sujet Aux Contraintes} \\ \mbox{Tj - Ti > = Tij} \quad \mbox{Pour tout (i,j) appartenant à } R \\ \mbox{Ti, Tj >= 0} \end{array}$$

Solution par la méthode PERT.

Définition

Le temps le plus tôt associé au nœud j noté Uj est le temps le plus tôt à partir duquel l'évènement j peut se produire.



 $Uj = Max \langle U1 + T1J | U2 + T2J | U3 + T3J \rangle$ Où T1j , T2j, T3j sont les temps nécessaires pour l'exécution des

tâches A, B et C.

De manière générale

 $Uj = Max\{Ui + Tij\}$ Pour Tout (i,j) appartenant à R

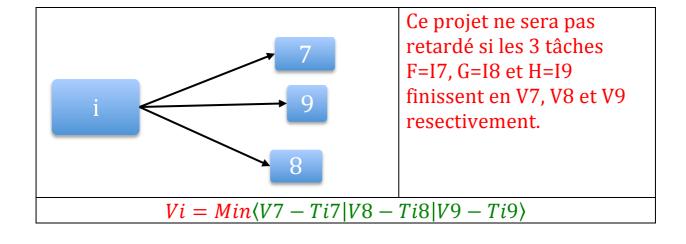
Application : Exemple 2

U1 = 0 U2 = U1 + T12 = 3 U3 = Max(U2+T23, U1+T13) = 3 U4 = Max(U2+T24, U3+T34) = 7 U5 = U4 + T45 = 12

Par conséquent la durée minimale du projet est de 12 jours

Définition

Le temps le plus tard associé au nœud i noté Vi est le temps le plus tard où l'évènement i peut débuter sans retarder le projet au-delàs de sa durée minimale.



De manière générale

$$Vi = Min\{Vj - Tij\}$$

Pour Tout (i,j) appartenant à R

Application: Exemple 2

V5 = U5 = 12

V4 = V5 - T45 = 7

V3 = V4 - T34 = 5

V2 = Min(V4-T24, V3 - T23) = 3

V1 = Min(V2-T12, V3 - T13) = 0

Définitions

- La différence entre le temps le plus tard et le temps le plus tôt d'un évènement i est appelé « slack time » : Temps Mort.
- Quand cette différence est nulle on dira que cet évènement est critique
- Le chemin qui passe par les évènements critiques du début à la fin du réseau s'appelle chemin critique.
- Les tâches du chemin critique sont des tâches critiques.

Tout retard dans une tâche critique engendre un retard du projet.

Présentation du projet PERT par événement

Evènement i	Ui	Vi	Vi-Ui
1	0	0	Critique
2	3	3	Critique
3	3	5	2
4	7	7	Critique
5	12	12	Critique

Remarque



La tâche A peut débuter en Ui mais ne doit pas finir après Vj

- 1. Vj-Tij est le temps le plus tard où doit commencer la tâche A
- 2. Ui+Tij est le temps le plus tôt où peut finir la tâche A
- 3. Vj-Ui est la durée maximale allouée à la tâche A
- 4. Le retard le plus grand que peut prendre la tâche A est : Vj-Ui-Tij
- 5 Si Vj-Ui-Tij = 0 alors la tâche A est critique

Présentation de PERT par tâche

Tâche	Durée	Temps	Temps	Temps	Temps	Critique
		le plus	le plus	le plus	le plus	
		tôt de	tard de	tôt de	tard de	
		début	début	fin	fin	
	Tij	Ui	Vj-Tij	Ui+Tij	Vj	Vj-Ui-Tij
(1,2) A	3	0	0	3	3	0
(1,3) B	1	0	4	1	5	4
(2,4) C	4	3	3	7	7	0
(3,4) D	2	3	5	5	7	2
(4,5) E	5	7	7	12	12	0

La méthode du chemin critique C.P.M.

L'Hypothèse nécessaire pour CPM est que chaque tâche du projet est proportionnelle aux ressources allouées à cette tâche (jusqu'à une certaine limite).

D'où:

Réduire le temps nécessaire à une tâche engendre un coût additionnel (Cout direct) appelé coût pour réduction.

Or,

En réduisant les temps des tâches critiques le temps total nécessaire pour finir le projet est lui même réduit engendrant par la même occasion une diminution des coûts indirects

le Coût total du projet

=

Coût Direct (% à la durée des tâches)

+

Coût Indirect (% à la durée du projet)

Il est parfois plus avantageux de réduire la durée de certaines tâches du projet et donc augmenter le coût direct et de diminuer les coûts indirects afin d'optimiser le coût total du projet.

> C.P.M. Minimiser le coût total du projet

Exemple

Tâche	Prédé cesseur	Durée Normale	Durée Minimale	Coût pour Réduction Par Jour
A	-	10	7	4
В	_	5	4	2
С	В	3	2	2
D	A,C	4	3	3
Е	A,C	5	3	3
F	D	6	3	5
G	Е	5	2	1
Н	F,G	5	4	4

Sachant que le coût indirect lié à ce projet est de 5 par jour, quelle est la solution qui minimise le coût total du projet.

Remarque

Si on exécute toutes les tâches de ce projet avec leur durée normale, alors le projet durera 25 jours et le coût total du projet sera : 125

De même, si on exécute toutes les tâches de ce projet avec leur durée minimale, alors le projet durera 17 jours et le coût total du projet sera : 132

Formulation Mathématique

Notons par:

K_{ij}: le temps normal de la tâche (i,j)

Lij: le temps minimal de la tâche (i,j)

T_{ij}: le temps nécessaire pour la tâche (i,j)

$$L_{ij}$$
 <= T_{ij} <= K_{ij}

C_{ij}: le coût de réduction par unité de temps

Le coût direct associé à la tâche (i,j) est donc :

$$C_{ij} * (K_{ij} - T_{ij})$$

Model 1

Le projet doit finir au maximum en T jours

$$\begin{aligned} \text{Minimiser Z} &= \sum_{i,j} \textit{Cij} * (\textit{Kij} - \textit{Tij}) \\ &T_j - T_i >= T_{ij} \\ &L_{ij} <= T_{ij} <= K_{ij} \\ &T_n - T_1 <= T \\ &T_i >= 0 \end{aligned}$$

Model 2

On possède pour un projet donné un budget supplémentaire B, peut on réduire le temps nécessaire à la durée totale du projet

$$\begin{aligned} & \text{Minimiser Z} = T_n \text{-} T_1 \\ & T_j - T_i >= T_{ij} \\ & L_{ij} <= T_{ij} <= K_{ij} \\ & \sum_{i,j} \textit{Cij} * (\textit{Kij} - \textit{Tij}) \\ & T_i >= 0 \end{aligned}$$

Model 3

Minimiser le coût total du projet

$$\begin{aligned} \text{Minimiser Z} &= F * (T_n\text{-}T_1) + \sum_{i,j} \textit{Cij} * (\textit{Kij} - \textit{Tij}) \\ &\quad T_j - T_i >= T_{ij} \\ &\quad L_{ij} <= T_{ij} <= K_{ij} \\ &\quad T_i >= 0 \end{aligned}$$

Pouvez en utilisant Excel que le Model 3 appliqué à notre exemple nous donne une durée du projet de 21 jours et un coût total de 121.

Remarque

Dans le cas de Recherche et développement la durée des tâches est plutôt approximative. Dans ce cas, pour chaque tâche on associe :

- (a) Un temps Optimiste
- (m) Un temps Probable
- (b) Un temps Pessimiste

Et on calcule:

- 1. Un temps moyen = $\frac{a+4*m+b}{6}$
- 2. Une variation Standard = $\frac{b-a}{6}$
- 3. Et une Variance = $(\frac{b-a}{6})^2$

Puis:

- 1. On résout le problème en utilisant la méthode PERT avec les temps moyens, d'où T la durée du projet
- 2. On calcul
 - a. E_T = La somme des temps moyens des tâches critiques d'un chemin critique
 - b. V_T = La somme des variances des tâches critiques d'un chemin critique

c.
$$\sigma_{\rm T} = \sqrt{V_{\rm T}}$$
 Déviation Standard

Avec cette notation, la probabilité de finir le projet en moins de X jours est :

Prob (
$$(X - E_T) / \sigma_T$$
)

Remarque

Dans le cas d'un réseau possédant plusieurs chemins critiques, nous devons prendre le chemin critique ayant la plus grande variance.

Exemple

Tâche	Prédécesseur	(a)	(m)	(b)
A	-	2	5	8
В	Α	6	9	12
С	Α	6	7	8
D	B,C	1	4	7
E	Α	8	8	8
F	D,E	5	14	17
G	С	3	12	21
Н	F,G	3	6	9
I	Н	5	8	11