Exercices d'Analyse

Exo1 :

Soit $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{A})$

Montrer que $\exists (f_n)$ une suite de fcts simples tq $f_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} f$

Sol 01 :

On a $f = f^+ - f^-$

Comme $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{A})$, alors f^+ et $f^- \in \mathcal{M}^+(X, \mathcal{A})$

D'après le thm d'approximation :

$\exists (g_n)_{n \geq 0}, (h_n)_{n \geq 0}$ 2 suites de fonctions simples tq

$$g_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} f^+ \qquad h_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} f^-$$

$\forall n \in \mathbb{N}$, on pose $f_n = g_n - h_n$.

Puisque g_n et h_n ont un nbr fini de valeurs, il en est de même pour $f_n = g_n - h_n$

Ainsi $\forall n \in \mathbb{N}$ f_n est simple et $f_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} f$

Exo2 :

Montrer que toute fonction positive appartenant à $L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$, $p > 0$ est une limite simple d'une suites de fonctions simples appartenant à $L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$

Sol 02 :

D'après le théorème d'approximation :

$\exists (e_n)_{n \geq 0}$ une suite de fonctions simples tq $e_n \xrightarrow[n \to \infty]{} f$

avec $0 \leq e_n \leq f$ $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\Rightarrow \quad 0 \leq e_n^p \leq f^p \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow \int e_n^p \leq \int f^p < +\infty \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

car $f \in L^p$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} \quad \int e_n^p < +\infty$$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} \quad e_n \in L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$$

Lemme de Fatou $|f_n|^p$

Exo3 :

Soit $(f_n) \in L^p$ $(1 < p < +\infty)$ tq :

i– $\|f_n\|_p \leq c$ $\quad c = \text{constante}$

ii– $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} f$ μ-p-p

Montrer que $f \in L_p$

Sol 03 :

On prend le Lemme de Fatou

/ $f \in L_p$ $\quad \|f\|_p = \left(\int |f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}$

$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}$ $\quad \|f_n\|_p = \left(\int |f_n|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}$

comme $|f_n| \geq 0$, alors $|f_n| \in M^+(X, \mathcal{A})$ $\quad \forall n \in \mathbb{N}$

Alors par le Lemme de Fatou, on a

$$\int (\liminf f_n) d\mu \leq \liminf \int f_n d\mu$$

si $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} f$ alors $\underline{\lim}_{n\to+\infty} f_n = \overline{\lim}_{n\to+\infty} f_n = f$

$$f_n \to f \Rightarrow |f_n|^p \to |f|^p$$

par le Lemme de Fatou sur $|f_n|^p$

$$\underbrace{\int \liminf |f_n|^p d\mu}_{=|f|^p} \leq \liminf \int |f_n|^p d\mu \leq C^p$$

$$\Rightarrow \int |f|^p d\mu \leq C^p < +\infty$$

$$\Rightarrow f \in L^p$$

Exo 4 :

Soit $h \in \mathcal{M}(X, \mathcal{A})$

Pour $n \in \mathbb{N}$

$$h_n(x) = \begin{cases} h(x) & \text{si } |h(x)| \leq n \\ n & \text{si } h(x) > n \\ -n & \text{si } h(x) < -n \end{cases}$$

TCD

si h est intégrable, montrer que $\int h = \lim_{n \to +\infty} \int h_n$

Sol 04 :

Soit $n \in \mathbb{N}$, $x \in X$

i)- $|h(x)| \leq n \Rightarrow h_n(x) = h(x)$

$\Rightarrow |h_n(x)| \leq |h(x)|$

ii). $h(x) > n \Rightarrow h_n(x) = n < h(x)$

$\Rightarrow |h_n(x)| < |h(x)|$

iii $h(x) < -n \Rightarrow h_n(x) = -n > h(x)$

$\Rightarrow |h_n(x)| < |h(x)|$

donc $\forall n \in \mathbb{N}$ $|h_n| < |h|$ $(*)$

$|h|$ intégrable $\Rightarrow$ $|h_n|$ intégrable $\forall n \in \mathbb{N}$

Montrons maintenant que $h_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} h$

soit $x \in X$

$\exists N \in \mathbb{N}$ tq $|h(x)| \leq N$ (car $h(x)$ est fini et $\mathbb{N}$ n'est pas majoré)

Donc $\forall n \in \mathbb{N}$ tq $n \geq N$ $n \geq |h(x)|$.

$\forall n \geq N$ $h_n(x) = h(x)$.

$\Rightarrow h_n(x) \xrightarrow[n \to +\infty]{} h(x) \Rightarrow h_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} h$ $(**)$

D'après $(*)$ et $(**)$ et le théorème de la convergence dominée (TCD)

comme h est intégrable alors $\lim \int h_n = \int h$

Exo5

Soit $(f_n)_{n\geq 0} \in \mathcal{M}^{\mathbb{N}}(X, \mathcal{A}, \mu)$ tq $\forall n \in \mathbb{N}$ $f_n \leq 0$

Montrer que $\limsup \int f_n \leq \int \limsup f_n$

Sol 05:

On peut utiliser le lemme de fatou sur $(-f_n)_{n\geq 0}$ car $(-f_n) \in \mathcal{M}^{+\mathbb{N}}(X, \mathcal{A})$

donc
$$\int \liminf(-f_n) \leq \liminf(\int -f_n)$$
$$-\int \limsup f_n \leq -\limsup \int f_n$$
$$\Rightarrow \quad \limsup \int f_n \leq \int \limsup f_n$$

Exo6:

Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite décroissante de $\mathcal{M}^+$ tq $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} f$

Montrer qu'on peut avoir $\int f \neq \lim \int f_n$

Sol 06:

prenons $X = \mathbb{R}$, $\mathcal{A} = \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $\mu = \lambda$

et $f_n(x) = \frac{1}{n}$ $\forall x \in \mathbb{R}$

On a $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et $(f_n)_{n\geq 0}$ décroissante

Or $\int f_n(x)\, d\lambda = \frac{1}{n} \lambda(\mathbb{R})$

$\forall n \in \mathbb{N}^*$ $\int f_n = +\infty$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} \int f_n = +\infty$

Mais $\int \lim f_n = \int 0 = 0$

Donc $\int \lim f_n \neq \lim \int f_n$

Exo 7:

· Soit $g \in \mathcal{M}^+(X, \mathcal{A})$ et μ une mesure sur $\mathcal{A}$

Posons $\nu(E) = \int_E g \, d\mu$

a)- Montrer que ν est une mesure sur $\mathcal{A}$

b)- Soit $f \in \mathcal{M}^+(X, \mathcal{A})$ simple

Montrer que $\int f \, d\nu = \int f g \, d\mu$ ①

c)- En déduire la relation (1) pour $f \in \mathcal{M}^+(X, \mathcal{A})$

Sol 07:

a)- i)- On a $g \geq 0$ et $\chi_E \geq 0$ $\forall E \in \mathcal{A}$

donc $g \chi_E \geq 0$

$\Rightarrow \int g \chi_E \, d\mu \geq 0$

$\Rightarrow \int_E g \, d\mu \geq 0$

$\Rightarrow \nu(E) \geq 0$

ii)- $\nu(\phi) = \int_\phi g \, d\mu$

$= \int g \chi_\phi \, d\mu$ $\quad (\chi_\phi = 0 \ \text{si} \ x \in X)$

$= \int 0 \, d\mu$ $\quad$ (car $0 = 0 \chi_X \Rightarrow \int 0 \, d\mu = 0 \mu(X) = 0$)

$\nu(\phi) = 0$

iii)- σ-additivité:

Soit $(E_n)_{n \geq 0} \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ 2 à 2 disjoints $(n \neq m \Rightarrow E_n \cap E_m = \phi)$

Comme $\chi_{E_n \cup E_m} = \chi_{E_n} + \chi_{E_m}$ alors $\chi_{\bigcup_{n=0}^{+\infty} E_n} = \sum_{n \in \mathbb{N}} \chi_{E_n}$

$\nu\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} E_n\right) = \int_{\cup E_n} g \, d\mu = \int g \chi_{\cup E_n} \, d\mu$

$= \int g \sum_{n=0}^{+\infty} \chi_{E_n} \, d\mu$

$= \int \sum_{n=0}^{+\infty} g \chi_{E_n} \, d\mu = \int \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} g \chi_{E_k} \, d\mu$

$\forall n \in \mathbb{N}$ on pose $S_n = \sum_{\ell=0}^{n} g \chi_{E_\ell}$

soit $n \in \mathbb{N}$ $S_{n+1} - S_n = g \chi_{E_{n+1}} \in \mathcal{M}^+(X, \mathcal{A})$ et ≥ 0

Donc $(S_n)_{n\geq 0}$ est croissante avec $S_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \sum_{\ell=0}^{+\infty} g \chi_{E_\ell}$

Donc d'après le théorème de la convergence monotone

On a

$$\int \sum_{n=0}^{+\infty} g \chi_{E_n} \, d\mu = \sum_{n=0}^{+\infty} \int g \chi_{E_n} \, d\mu$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{E_n} g \, d\mu$$

$$\nu\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} E_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \nu(E_n)$$

Conclusion: ν est une mesure sur $(X, \mathcal{A})$.

- soit $f \in \mathcal{M}^+(X, \mathcal{A})$ simple

$\Rightarrow \exists E_1, \dots, E_n \in \mathcal{A}$, $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$

tel que $f = \sum_{j=1}^{n} a_j \chi_{E_j}$

$$\int f \, d\nu = \int \sum_{j=1}^{n} a_j \chi_{E_j} \, d\nu$$

$$= \sum_{j=1}^{n} a_j \underline{\int \chi_{E_j} \, d\nu}$$

$$= \sum_{j=1}^{n} a_j \underline{\int g \chi_{E_j} \, d\mu}$$

$$= \int \sum_{j=1}^{n} a_j \cdot g \chi_{E_j} \, d\mu$$

$$= \int g \left(\sum_{j=1}^{n} a_j \chi_{E_j}\right) d\mu$$

$$= \int f \cdot g \, d\mu .$$

- soit $f \in \mathcal{M}^+(X, \mathcal{A})$, d'après le théorème d'approximation $\exists$ $e_1, \dots, e_n$ une suite de fcts simples croissante de $\mathcal{M}^+(X, \mathcal{A})$

tq $0 \leq e_n \leq f$ $\forall n \in \mathbb{N}$ et $e_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} f$

Comme $(e_n)_n \in \mathcal{M}^{+^{\mathbb{N}}}(X, \mathcal{A})$, et croissante, alors d'après le théorème de la convergence monotone, on a

$$\int f \, d\nu = \lim_{n \to +\infty} \int e_n \, d\nu$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \int g e_n \, d\mu .$$

d'après la relation ① on a

On a $\begin{cases} g e_n \longrightarrow g f \\ (g e_n)_n \text{ croissante (car } g \text{ positive)} \end{cases}$

donc d'après le TCM, on a

$$\int f \, d\nu = \lim \int g e_n \, d\mu = \int \lim g e_n \, d\mu$$

$$\Rightarrow \int f \, d\nu = \int f g \, d\mu$$

Exo 8 :

Soit $(f_n)_{n \geq 0} \in \mathcal{M}^{\mathbb{N}}(X, \mathcal{A})$ et $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ mesurable tq

$f_n \longrightarrow f$ μ-p-p et $\forall n \in \mathbb{N}$ $|f_n| \leq M < +\infty$

- Montrons que si $\mu(X) < +\infty$ alors $\lim_{n \to +\infty} \int f_n = \int f$

Sol 08 :

On a $\begin{cases} f_n \longrightarrow f \\ |f_n| \leq M < +\infty \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$

et $\int M \, d\mu = M \mu(X) < +\infty \Rightarrow M \in L^1$

donc d'après le théorème de la convergence dominée

$$\lim \int f_n = \int f$$

Exo 9

Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré

Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite croissante de fcts positives μ-intégrable tq $\int f_n \, d\mu \leq M$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$

$\forall n \in \mathbb{N}, \forall p \in \mathbb{N}$ $A_n(p) = \{x \in X / f_n(x) \geq p\}$

et $A = \{x \in X / (f_n(x))$ n'est pas bornée $\}$

1- $A(p) = \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n(p)$

Montrer que $\mu(A(p)) = \lim_{n\to+\infty} \mu(A_n(p))$

2. Montrer que $\mu(A(p)) \leq \frac{M}{p}$

3. Exprimer A en fct des $A(p)$

4- calculer $\mu(A)$ / 5- Mq $\exists f \in \mathcal{M}^+$ à valeurs ds $\mathbb{R}^+$ tq $f_n \longrightarrow f$ μ-p.p

Sol 9 :

1- Il suffit de montrer que $(A_n(p))_{n\geq 1}$ est croissante

Soit $p, n \in \mathbb{N}^*$

si $x \in A_n(p)$ alors $f_n(x) \geq p$

Comme $(f_n)_n$ croissante, alors $f_{n+1}(x) \geq f_n(x) \geq p$

$\Rightarrow x \in A_{n+1}(p)$

donc $A_n(p) \subset A_{n+1}(p)$

d'où $(A_n(p))_n$ croissante

$\Rightarrow \mu\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n(p)\right) = \lim_{n\to+\infty} \mu(A_n(p))$

$\Rightarrow \mu(A(p)) = \lim_{n\to+\infty} \mu(A_n(p))$

soit $p \in \mathbb{N}^*$ $\boxed{p\chi_{A_n(p)} \leq f_n \chi_{A_n(p)}}$ point de départ

$\Rightarrow \int p\chi_{A_n(p)} \leq \int f_n \chi_{A_n(p)}$

$\Rightarrow p\mu(A_n(p)) \leq \int_{A_n} f_n \, d\mu \leq M$

par passage à la lim $p\mu(A(p)) \leq M \Rightarrow \mu(A(p)) \leq M/p$

3 – $x \in A \iff (f_n(x))$ n'est pas bornée

$\iff \forall \alpha \in \mathbb{R}^+, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tq $f_{n_0}(x) > \alpha$

$\iff \forall p \in \mathbb{N}, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tq $f_{n_0}(x) > p$

$\iff \forall p \in \mathbb{N}, \exists n_0 \in \mathbb{N}\ x \in A_{n_0}(p)$

$\iff \forall p \in \mathbb{N}, x \in \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n(p) = A(p)$

$\iff \forall p \in \mathbb{N}, x \in A(p)$

$\iff x \in \bigcap_{p \in \mathbb{N}} A(p)$

donc $A = \bigcap_{p=0}^{+\infty} A(p)$

4 – $\forall p \in \mathbb{N}$ $A \subset A(p) \Rightarrow \mu(A) \leq \mu(A(p))$

$\Rightarrow 0 \leq \mu(A) \leq \frac{M}{p}$ $\forall p \in \mathbb{N}^*$

$\Rightarrow \mu(A) = 0$ (si $p \to +\infty$)

5 – On a $A = \{x \in X / (f_n(x))$ n'est pas bornée$\}$

soit $x \in X$

$(f_n(x))_n$ n'est pas bornée $\iff f_n(x)$ n'est pas majorée

$\iff f_n(x)$ n'est pas convergente (f est croissante)

donc $A = \{x \in X / (f_n(x))$ n'est pas convergente$\}$

alors $\forall x \in A^c$ $(f_n(x))_n$ converge vers $\ell(x) \in \mathbb{R}^+$

On définit alors f par :

$$f(x) = \begin{cases} \ell(x) & \text{si } x \in A^c \\ 0 & \text{si } x \in A \end{cases}$$

Comme $\mu(A) = 0$ alors A est négligeable

donc $f_n \to f$ μ-p.p

* Montrons que f est mesurable

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $E = \{x \in X / f(x) < \alpha\}$

$$\{x \in A^c / f(x) < \alpha\}$$

$$E = \{x \in A / f(x) < \alpha\} \cup \{x \in A^c / f(x) < \alpha\}$$
$$= \{x \in A / 0 < \alpha\} \cup \{x \in A^c / f(x) < \alpha\}$$
$$= A_1 \cup A_2$$

$A_1 \in \{\phi, A\} \subset \mathcal{A}$

$$A_2 = \{x \in A^c / f(x) < \alpha\}$$
$$= \{x \in A^c / f(x) \chi_{A^c}(x) < \alpha\}$$
$$= A^c \cap \{x \in X / f\chi_{A^c}(x) < \alpha\}.$$

On a $f_n \chi_{A^c} \longrightarrow f\chi_{A^c}$

Or $f_n, \chi_{A^c} \in \mathcal{M}^+(X, \mathcal{A}) \Rightarrow f\chi_{A^c} \in \mathcal{M}^+(X, \mathcal{A})$.

$\Rightarrow \{x \in X / f\chi_{A^c}(x) < \alpha\} \in \mathcal{A}$

$\Rightarrow A_2 \in \mathcal{A}$

d'où $E = A_1 \cup A_2 \in \mathcal{A}$

donc f est mesurable.

Mq f est intégrable et que $\lim \int f_n = \int f$

Lemme de Fatou: $\begin{cases} (f_n \chi_{A^c}) \nearrow, & f_n \chi_{A^c} \to f\chi_{A^c} \ \mu\text{-pp} \\ f_n \chi_{A^c} \geq 0 & \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$

$\Rightarrow \int \liminf f_n \chi_{A^c} \leq \lim (\inf \int f_n \chi_{A^c}$

Or $f_n \chi_{A^c} \longrightarrow f\chi_{A^c} = f$

donc $\underline{\lim} f_n \chi_{A^c} = f$.

donc $\int f \leq \liminf \int f_n \chi_{A^c} \leq M < +\infty$

donc f est intégrable.

$\int f = \int_{A^c} f + \cancel{\int_A f} = \int f\chi_{A^c} = \lim \int f_n \chi_{A^c}$
$$= \lim \left(\int f_n \chi_{A^c} + \int f_n \chi_A\right) = \lim_{n \to \infty} \int f_n$$

Exo 10 :

Soit $Y(x)$ la fonction de Heaviside

$$Y(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Calculer $\left(\frac{d}{dx} - \lambda\right)\left(Y(x) e^{\lambda x}\right)$. $\lambda \in \mathbb{C}$

Sol 10 :

On pose $f(x) = Y(x) e^{\lambda x}$, soit $\varphi \in D$

$$\langle (\tfrac{d}{dx} - \lambda) T_f, \varphi \rangle = \langle \tfrac{d}{dx} T_f, \varphi \rangle - \lambda \langle T_f, \varphi \rangle$$

$$= - \langle T_f, \varphi' \rangle - \lambda \langle T_f, \varphi \rangle$$

$$= - \int_{-\infty}^{+\infty} Y(x) e^{\lambda x} \varphi'(x)\, dx - \lambda \langle T_f, \varphi \rangle$$

$$= - \lim_{A \to +\infty} \int_0^A e^{\lambda x} \varphi'(x)\, dx - \lambda \langle T_f, \varphi \rangle$$

$$= - \lim_{A \to +\infty} \left[e^{\lambda x} \varphi(x) \right]_0^A + \lim_{A \to +\infty} \int_0^A \lambda e^{\lambda x} \varphi(x)\, dx - \lambda \langle T_f, \varphi \rangle$$

$$= - \lim_{A \to +\infty} \left(e^{\lambda A} \varphi(A) - \varphi(0) \right) + \lambda \lim_{A \to +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} Y(x) e^{\lambda x} \varphi(x)\, dx$$

$$= \varphi(0) - \lim_{A \to +\infty} e^{\lambda A} \varphi(A) \qquad - \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} Y(x) e^{\lambda x} \varphi(x)$$

$\varphi \in D \Rightarrow \exists B$ tq $\forall x > B$ $\varphi(x) = 0 \Rightarrow \lim_{A \to +\infty} e^{\lambda A} \varphi(A) = 0$

$$\Rightarrow \langle (\tfrac{d}{dx} - \lambda) T_f, \varphi \rangle = \varphi(0) = \langle \delta, \varphi \rangle$$

d'où $\left(\frac{d}{dx} - \lambda\right) T_f = \delta$

Exo 11 :

Vérifiez que $g\delta = g(0)\delta$, $\forall g \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$

Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ tq $\operatorname{supp} \varphi = [c, 0]$ $(c < 0)$

et $\int_{\mathbb{R}} \varphi \, dx = 1$

a- Mq $\sigma(x) = \int_c^x \varphi(t)\,dt$ est $C^\infty(\mathbb{R})$

b- Calculer $\sigma(x)$ pour $x \geq 0$ et $x \leq c$

Sol 11 :

. Soit $\varphi \in \mathcal{D}$

$\langle g\delta, \varphi \rangle = \langle \delta, g\varphi \rangle = (g\varphi)(0) = g(0)\varphi(0) = g(0)\langle \delta, \varphi \rangle$

$= \langle g(0)\delta, \varphi \rangle$

donc $g(0)\delta = g\delta$

.a- $\varphi \in \mathcal{D} \Rightarrow \varphi \in \mathcal{C}^\infty$

on a $\sigma'(x) = \varphi(x) \Rightarrow \sigma'$ est $\mathcal{C}^\infty \Rightarrow \sigma$ est $\mathcal{C}^\infty$

b- pour $x \geq 0$ $\sigma(x) = \int_c^x \varphi(t)\,dt = \int_{\mathbb{R}} \varphi(t)\,dt = 1$

pour $x \leq c$ $\sigma(x) = \int_c^x \varphi(t)\,dt = -\int_x^c \varphi(t)\,dt = 0$

(car $\operatorname{supp} \varphi = [c, 0]$)

Exo 12

- Résoudre dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ $x^2 T = 0$

- // $(x-a)T = 0$

Sol 12 :

. $x^2 T = 0$, on pose $U = xT$

$x^2 T = 0 \iff xU = 0 \iff \exists c \in \mathbb{R}$ $xT = U = c\delta = -cx\delta'$ (car $x\delta' = -\delta$)

$\iff x(T + c\delta') = 0$

$\iff \exists b \in \mathbb{R}$ tq $T + c\delta' = b\delta \Rightarrow T = b\delta - c\delta'$

$\Rightarrow T = \operatorname{vect}(\delta, \delta')$

2- $(x-a)T=0$

soit $\varphi \in \mathcal{D}$ $\qquad \varphi(x) = \varphi(a) + (x-a)\psi(x)$

avec $\begin{cases} \psi(x) = \dfrac{\varphi(x)-\varphi(a)}{x-a} & x \neq a \\ \psi(a) = \varphi'(a) \end{cases}$

soit $\alpha = 1$ sur un voisinage de supp T alors $\alpha T = T$

$$\alpha\varphi = \alpha\varphi(a) + (x-a)\alpha\psi$$

$$\langle T ; \alpha\varphi \rangle = \langle T, \alpha\varphi(a) \rangle + \langle T, (x-a)\alpha\psi \rangle$$

$$\Rightarrow \langle \alpha T, \varphi \rangle = \varphi(a)\langle T, \alpha \rangle + \langle \underbrace{\cancel{(x-a)T}}_{=0}, \alpha\psi \rangle$$

$$\Rightarrow \langle T, \varphi \rangle = \langle T, \alpha \rangle \langle \delta_a, \varphi \rangle$$

donc $\quad T = \langle T, \alpha \rangle \delta_a$

$S \subset \{ c \cdot \delta_a \,/\, c \in \mathbb{R} \}$ Inversement on vérifie que $\{ c\delta_a / c \in \mathbb{R} \} \subset S$

$\Rightarrow \qquad T = \text{vect}(\delta_a)$

<u>Exo13:</u>

On considère la distribution $V_p\left(\frac{1}{x}\right)$ définie par:

$$\langle V_p\left(\tfrac{1}{x}\right), \varphi \rangle = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{|t| \geq \varepsilon} \frac{\varphi(t)}{t} \, dt$$

1- Mq $V_p\left(\frac{1}{x}\right)$ est impaire

2- Vérifier que $\quad x\, V_p\left(\frac{1}{x}\right) = 1$

3. Soient T_1, T_2 deux distributions vérifiant $xT = 1$

calculer $T_1 - T_2 = c$

4- En déduire que $V_p \frac{1}{x}$ est la seule distribution impaire vérifiant

$xT = 1$

Exo 13 :

- Soit $\varphi \in \mathcal{D}$ $\quad \tilde{\varphi}(x) = \varphi(-x)$

$$\langle V_p \tfrac{1}{x}, \tilde{\varphi} \rangle = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{|t| \geq \varepsilon} \frac{\varphi(-t)}{t}\, dt$$

$u = -t$
$du = -dt$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(-t)}{t}\, dt + \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{\varphi(-t)}{t}\, dt \right)$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \left(\int_{\varepsilon}^{+\infty} -\frac{\varphi(t)}{t}\, dt + \int_{-\infty}^{-\varepsilon} -\frac{\varphi(t)}{t}\, dt \right)$$

$$= -\langle V_p \tfrac{1}{x}, \varphi \rangle$$

$\Longrightarrow V_p \frac{1}{x}$ est impaire

Soit $\varphi \in \mathcal{D}$

$$\langle x V_p \tfrac{1}{x}, \varphi \rangle = \langle V_p \tfrac{1}{x}, x\varphi \rangle = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{|t| \geq \varepsilon} \frac{t\,\varphi(t)}{t}\, dt$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{|t| \geq \varepsilon} \varphi(t)\, dt$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)\, dt = \langle 1, \varphi \rangle$$

$\longrightarrow \quad x V_p \frac{1}{x} = 1$

Soit T_1, T_2 tq $x T_1 = 1$ et $x T_2 = 1$

alors $x(T_1 - T_2) = 0$

$\Longrightarrow \exists c \in \mathbb{R}$ tq $T_1 - T_2 = c\,\delta$

Soit $T \in \mathcal{D}'$ impaire tq $xT = 1$

On a : $x V_p \frac{1}{x} = 1$ donc $\exists c \in \mathbb{R}$ tq $V_p \frac{1}{x} - T = c\,\delta$

$\begin{cases} V_p \frac{1}{x} \ldots \\ \delta \text{ pair} \end{cases} \Longrightarrow V_p \frac{1}{x}$ et T est à la fois pair et impair

$\Longrightarrow T = V_p \frac{1}{x}$

Exo 14 :

Calculer dans $D'(\mathbb{R})$

a) $\lim\limits_{n \to +\infty} \cos(nx)$

b) $\frac{d^2}{dx^2}|2x|$

Sol 14 :

a)- $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, $supp(\varphi) \subset [-A, A]$

$\lim\limits_{n \to +\infty} \langle T_{\cos(nx)}, \varphi \rangle$?

$$\langle T_{\cos(nx)}, \varphi \rangle = \int_{-A}^{A} \cos(nx)\, \varphi \, dx$$

$$= \int_{-A}^{A} \left(\frac{1}{n} \sin nx\right)' \varphi(x)\, dx$$

$$= \left[\frac{1}{n} \sin(nx)\, \varphi(x)\right]_{-A}^{A} - \frac{1}{n}\int_{-A}^{A} \sin nx\, \varphi'(x)\, dx$$

$$= \frac{1}{n} \sin(nA)\varphi(A) + \frac{1}{n}\sin(nA)\varphi(-A) - \frac{1}{n}\int_{-A}^{A} \sin nx\, \varphi'(x)$$

$$|\langle T_{\cos(nx)}, \varphi\rangle| \leq \frac{1}{n}\left|\sin(nA)(\varphi(A)+\varphi(-A))\right| + \frac{1}{n}\int_{-A}^{A} |\sin nx|\,|\varphi'(x)|\, dx$$

$$\leq \frac{1}{n}\underbrace{\left(|\varphi(A)+\varphi(-A)| + \int_{-A}^{A} |\varphi'(x)|\, dx\right)}_{M}$$

$$\leq \frac{M}{n} \to 0 = \langle 0, \varphi\rangle$$

$\lim \cos(nx) = 0$

b)- Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ et $supp\, \varphi \subset [-a, a]$

$$\left\langle \frac{d^2}{dx^2}(2|x|), \varphi \right\rangle = \langle 2|x|, \varphi'' \rangle = 4\delta$$