E.H.T.P. — Contrôle n° 1 — 3/11/2010

1° année. — d'analyse — Durée $1^h 30^{min}$

Barème : 2,5 points par question.

A/ Soit $g \in M^+(X, \mathfrak{X})$ et μ une mesure sur $\mathfrak{X}$.

Posons $\nu(E) = \int_E g \, d\mu$.

a) Montrer que ν est une mesure sur $\mathfrak{X}$.

b) Soit $f \in M^+(X, \mathfrak{X})$ simple. Montrer que

$$\int f \, d\nu = \int f g \, d\mu . \qquad (1)$$

c) En déduire la relation (1) pour $f \in M^+(X, \mathfrak{X})$.

B/ On considère la distribution $V_p(1/x)$ définie par

$$\langle V_p \frac{1}{x}, \varphi \rangle = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{|x| \geq \varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} \, dx, \ \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}).$$

1) Montrer que $V_p(1/x)$ est impaire.

2) Vérifier que : $x V_p(1/x) = 1$.

3) Soient T_1 et T_2 deux distributions vérifiant la relation $xT = 1$. Calculer $T_1 - T_2$.

4) En déduire que $V_p(1/x)$ est la seule distribution impaire vérifiant $xT = 1$.

5) Calculer dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, $\hat{1} = \mathcal{F}1$.

d'analyse

$\boxed{A}$

a) Montrons que ν est une mesure sur $\mathfrak{X}$.

- $\nu(\emptyset) = \int_{\emptyset} g \, d\mu = \int g \chi_{\emptyset} \, d\mu = \int 0 \, d\mu = 0.$

- soit $E \in \mathfrak{X}$:

$$\nu(E) = \int_E g \, d\mu = \int g \chi_E \, d\mu \geq 0 \text{ car } g\chi_E \geq 0.$$

- Soit $(E_n)_{n \geq 0} \in \mathfrak{X}^{\mathbb{N}}$ tq : $n \neq m \Rightarrow E_n \cap E_m = \emptyset$

Pour $n \geq 0$ posons : $S_n = \bigcup_{k=0}^{n} E_k$.

$$f_n = g \chi_{S_n}$$

On a
- $g \chi_{S_n} \in M^+(X, \mathfrak{X})$.
- $g \chi_{S_{n+1}} \geq g \chi_{S_n}$ car $S_{n+1} \supset S_n$.
- $g \chi_{S_n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} g \chi_{\bigcup_{k=0}^{\infty} E_k}$

Donc d'après le théorème de convergence monotone. $\lim\limits_{n \to +\infty} \int g \chi_{S_n} \, d\mu = \int g \chi_{\bigcup_{k=0}^{\infty} E_k} \, d\mu$.

Or : $\int g \chi_{S_n} \, d\mu = \int g \cdot \chi_{\bigcup_{k=0}^{n} E_k} \, d\mu$

$$= \int g \left(\sum_{k=0}^{n} \chi_{E_k} \right) d\mu = \sum_{k=0}^{n} \int g \chi_{E_k} \, d\mu$$

$$\Rightarrow \int g \chi_{S_n} d\mu = \sum_{k=0}^{n} \nu(E_k)$$

$$\Rightarrow \lim_{n \to +\infty} \int g \chi_{S_n} d\mu = \sum_{k=0}^{\infty} \nu(E_k)$$

$$\Rightarrow \int g \chi_{\bigcup_{k=0}^{\infty} E_k} d\mu = \sum_{k=0}^{\infty} \nu(E_k)$$

$$\Rightarrow \bullet\ \nu\left(\bigcup_{k=0}^{\infty} E_k\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \nu(E_k)$$

D'où ν est une mesure sur $\mathfrak{X}$.

b) soit $f \in \mathcal{M}^+(X, \mathfrak{X})$ simple.

Donc $f = \sum_{k=0}^{n} a_k \chi_{E_k}$ avec $E_k \in \mathfrak{X}$.

$$\int f \, d\nu = \sum_{k=0}^{n} a_k \, \nu(E_k)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} a_k \int_{E_k} g \, d\mu$$

$$= \sum_{k=0}^{n} a_k \int g \chi_{E_k} d\mu$$

$$= \int g \sum_{k=0}^{n} a_k \chi_{E_k} d\mu$$

d'où $\int f \, d\nu = \int g f \, d\mu$.

c) Soit $f \in M^+(X, \mathcal{X})$, $\exists (e_n)_{n \geq 0} \in M^+(X, \mathcal{X})^{\mathbb{N}}$ simples

tq : ① $\begin{cases} e_n \longrightarrow f \\ e_n \leq e_{n+1} \end{cases}$

On a alors ② $\begin{cases} g e_n \longrightarrow g f \\ g e_n \leq g e_{n+1} \end{cases}$

D'une part :

$\forall n \geq 0 \quad \int e_n g \, d\mu = \int e_n \, d\nu$.

$\Rightarrow \quad \lim\limits_{n \to +\infty} \int e_n g \, d\mu = \lim\limits_{n \to +\infty} \int e_n \, d\nu$. $(*)$

Le théorème de convergence monotone appliqué avec les mesures μ et ν donne :

$\lim\limits_{n \to +\infty} \int e_n g \, d\mu = \int (\lim\limits_{n \to +\infty} e_n g) \, d\mu = \int g f \, d\mu$ ②

$\lim\limits_{n \to +\infty} \int e_n \, d\nu = \int \lim\limits_{n \to +\infty} e_n \, d\nu = \int f \, d\nu$ ①

$(*) \Rightarrow \quad \int f \, d\nu = \int g f \, d\mu$.

$\boxed{B}$

1| Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$:

On a $\langle v_p(\frac{1}{x}), \tilde{\varphi} \rangle = \lim\limits_{\varepsilon \to 0^+} \int_{|x| > \varepsilon} \frac{\varphi(-x)}{x} dx$.

$= \lim\limits_{\varepsilon \to 0^+} \left[\int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(-x)}{x} dx + \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{\varphi(-x)}{x} dx \right]$

$$\langle V_p(\tfrac{1}{x}), \check{\varphi} \rangle \overset{u=-x}{=} \lim_{\varepsilon \to 0^+} \left[\int_{+\infty}^{\varepsilon} \frac{\varphi(u)}{u} du + \int_{-\varepsilon}^{-\infty} \frac{\varphi(u)}{u} du \right]$$

$$= - \lim_{\varepsilon \to 0^+} \left[\int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(u)}{u} du + \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{\varphi(u)}{u} du \right]$$

$$= - \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{|u| \geq \varepsilon} \frac{\varphi(u)}{u} du$$

$$= - \langle V_p(\tfrac{1}{x}), \varphi \rangle$$

d'où $V_p(\frac{1}{x})$ est impaire

2/ Vérifions que $x V_p(\frac{1}{x}) = 1$.

Soit $\varphi \in D(\mathbb{R})$

$$\langle x V_p(\tfrac{1}{x}), \varphi \rangle = \langle V_p(\tfrac{1}{x}), x\varphi \rangle$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{|x| \geq \varepsilon} \frac{x \varphi(x)}{x} dx$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{|x| \geq \varepsilon} \varphi(x) dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) dx$$

$$= \langle 1, \varphi \rangle$$

d'où $x V_p(\frac{1}{x}) = 1$

3/ Soient T_1, T_2 deux distributions

tq $\begin{cases} x T_1 = 1 \\ x T_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow x(T_1 - T_2) = 0.$

$\Rightarrow \exists c \in \mathbb{R},\ T_1 - T_2 = c.\delta$

4/ D'après ce qui précède $V_p(\frac{1}{x})$ est une distribut° impaire vérifiant $x\,V_p(\frac{1}{x}) = 1$.

Soit T une autre solution du problème

d'après 3) $\exists c \in \mathbb{R},\ T - V_p(\frac{1}{x}) = c\delta$.

Comme δ est paire, $T - V_p(\frac{1}{x})$ est paire.

Mais $T - V_p(\frac{1}{x})$ est aussi impaire.

Donc : $T - V_p(\frac{1}{x}) = 0$

D'où $T = V_p(\frac{1}{x})$

Ainsi, $V_p(\frac{1}{x})$ est la seule distribution impaire vérifiant $x\,V_p(\frac{1}{x}) = 1$.

5/ Calculons dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$: $\hat{1} = \mathcal{F}1$.

On sait que $\mathcal{F}$ réalise une bijection de $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ dans lui même et que sa bijection réciproque est $\overline{\mathcal{F}}$.

Or, on a $\overline{\mathcal{F}}\delta = 1$.

Donc : $\hat{1} = \mathcal{F}1 = \mathcal{F}\overline{\mathcal{F}}\delta = \delta$.

Ainsi $\hat{1} = \delta$.