ROYAUME DU MAROC

E.H.T.P.

COURS DE MATHEMATIQUES

1 ERE ANNEE

K. MOUALLIF

Année universitaire 2007-2008

Chapitre I

Intégrale de Lebesgue

I.1 Ensembles mesurables. Mesures.

Définition I.1.1 *Soit* X *un ensemble et* $\mathcal{P}(X)$ *l'ensemble des parties de* X*. On appelle tribu (ou* σ*-algèbre) sur* X*, un ensemble* $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ *qui possède les propriétés suivantes :*

i) $\emptyset \in \mathcal{A}$ *;*

ii) $A \in \mathcal{A} \implies A^c \in \mathcal{A}$ *où* A^c *désigne le complémentaire de* A *dans* X*;*

iii) Pour toute famille finie ou dénombrable $\{A_i\}_{i \in I \subset \mathbb{N}}$ *d'éléments de* $\mathcal{A}$*,*

$$\bigcup_{i \in I} A_i \in \mathcal{A}$$

Remarques I.1.1 • *Il résulte de i) et ii) que* $X \in \mathcal{A}$ *;*

• *Il découle de ii) et iii) que toute intersection finie ou dénombrable d'éléments de* $\mathcal{A}$ *est un élément de* $\mathcal{A}$ *;*

• *Si* A, $B \in \mathcal{A}$ *alors* $A \backslash B = A \cap B^c \in \mathcal{A}$.

Exemples I.1.1 • $\mathcal{P}(X)$ *est une tribu sur* X *;*

• *Soient* X *un ensemble et* $E \subset X$, *la famille* $\mathcal{A} = \{\emptyset, X, E, E^c\}$ *est une tribu sur* X.

Définition I.1.2 *On appelle espace mesurable tout couple* $(X, \mathcal{A})$ *formé par un ensemble* X *et une tribu* $\mathcal{A}$ *sur* X. *Les éléments de* $\mathcal{A}$ *sont appelés ensembles mesurables.*

Remarque I.1.1 *Soit* $\mathcal{F}$ *une famille quelconque de parties de* X. *Il est facile d'établir l'existence de la plus petite tribu sur* X *contenant* $\mathcal{F}$, *notée* $\sigma(\mathcal{F})$. *Il s'agit en fait de l'intersection de toutes les tribus sur* X *contenant* $\mathcal{F}$.

Définition I.1.3 *La tribu* $\sigma(\mathcal{F})$ *est appelée tribu engendrée par* $\mathcal{F}$.

Exemple I.1.1 *Prenons* $X = \mathbb{R}^n$ *muni de sa topologie usuelle et* $\mathcal{F}$ *l'ensemble des ouverts de* $\mathbb{R}^n$. *Il est clair que* $\mathcal{F}$ *n'est pas une tribu car le complémentaire d'un ouvert n'est pas en général un ouvert. La tribu* $\sigma(\mathcal{F})$ *engendrée par* $\mathcal{F}$ *est appelée tribu de Borel ou tribu Borélienne sur* $\mathbb{R}^n$. *Elle sera notée* $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ *et ses éléments seront appelés Boréliens.*

En théorie d'intégration, nous serons amenés à travailler dans

$$\overline{I\!R} = I\!R \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$$

muni des opérations usuelles avec les conventions suivantes:

1) $a \pm \infty = \pm\infty \qquad \forall a \in I\!R\,;$

2) $a \, . \, (\pm\infty) = \pm\infty \qquad \forall a > 0\,;$

3) $0 \, . \, (\pm\infty) = 0$, ce qui exprimera que l'intégrale d'une fonction infinie sur un ensemble de mesure nulle est nulle ou que l'intégrale d'une fonction nulle sur un ensemble de mesure infinie est nulle.

Les opérations $(+\infty) + (-\infty)$ et $(-\infty) + (+\infty)$ ne sont pas définies.

Définition I.1.4 *Soit $(X,\mathcal{A})$ un espace mesurable. Une mesure positive sur $(X,\mathcal{A})$ est une application*

$$\mu : \mathcal{A} \longrightarrow \overline{I\!R}_+ = I\!R_+ \cup \{+\infty\}$$

telle que

i) $\mu(\emptyset) = 0\,;$

ii) Pour toute famille finie ou dénombrable $\{A_i, i \in I \subset I\!N\}$ d'ensembles mesurables de X, deux à deux disjoints, on a

$$\mu\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \sum_{i\in I} \mu(A_i).$$

Le triplet $(X,\mathcal{A},\mu)$ est alors appelé espace mesuré.

Exemple I.1.2 *Soient* $(X,\mathcal{A})$ *un espace mesurable et* $a \in X$. *On considère l'application*

$$\delta_a : \mathcal{A} \longrightarrow \overline{I\!R}_+$$

définie par

$$\forall A \in \mathcal{A} \qquad \delta_a(A) = \begin{cases} 1 & si \quad a \in A \\ 0 & si \quad a \notin A \end{cases}$$

C'est une mesure sur $(X,\mathcal{A})$ *appelée mesure de Dirac au point* a.

Donnons à présent des propriétés importantes de la mesure ;

Proposition I.1.1 *Soit* $(X,\mathcal{A},\mu)$ *un espace mesuré.*

i) Si A, $B \in \mathcal{A}$ *alors* $A \subset B \Longrightarrow \mu(A) \leq \mu(B)$.

ii) Si A, $B \in \mathcal{A}$ *avec* $A \subset B$ *et* $\mu(A) < +\infty$ *alors* $\mu(B\backslash A) = \mu(B) - \mu(A)$.

iii) Si $(A_n)_{n\geq 1}$ *est une suite quelconque d'éléments de* $\mathcal{A}$ *alors*

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \mu(A_n).$$

iv) Si $(A_n)_{n\geq 1}$ *est une suite croissante d'éléments de* $\mathcal{A}$ *alors*

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \mu(A_n).$$

v) Si $(B_n)_{n\geq 1}$ *est une suite décroissante d'éléments de* $\mathcal{A}$ *telle que* $\mu(B_1) < +\infty$ *alors*

$$\mu\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} B_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \mu(B_n).$$

Démonstration :

i) On a $B = A \cup (B \backslash A)$ avec $A \cap (B \backslash A) = \emptyset$, donc

$$\mu(B) = \mu(A) + \mu(B \backslash A) \tag{I.1}$$

et finalement $\mu(A) \leq \mu(B)$.

ii) Si $\mu(A) < +\infty$, on peut le soustraire des deux membres de (I.1), d'où le résultat.

iii) Considérons

$$T_1 = A_1 \quad \text{et} \quad T_n = A_n \backslash \left(\bigcup_{k=1}^{n-1} A_k \right) \quad \text{pour} \quad n \geq 2.$$

On peut vérifier aisément que

- $\forall n \in I\!N^\star \quad T_n \in \mathcal{A} \qquad \text{et} \qquad T_n \subset A_n$
- Les T_n sont deux à deux disjoints et $\bigcup_{n=1}^{+\infty} T_n = \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n$.

Par conséquent

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n \right) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} T_n \right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mu(T_n) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \mu(A_n).$$

iv) On a $A_1 \subset A_2 \ldots \subset A_n \subset \ldots$. Posons

$$E_1 = A_1 \qquad \text{et} \qquad E_n = A_n \backslash A_{n-1} \quad \forall n \geq 2.$$

La suite $(E_n)_{n \geq 1}$ est telle que

$$A_n = \bigcup_{k=1}^{n} E_k \qquad \text{et} \qquad \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{+\infty} E_n.$$

De plus, les ensembles E_n sont deux à deux disjoints, donc

$$\mu(A_n) \;=\; \sum_{k=1}^{n} \mu(E_k)$$

et par suite

$$\lim_{n\to+\infty} \mu(A_n) \;=\; \sum_{n=1}^{+\infty} \mu(E_n) \;=\; \mu\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} E_n\right) \;=\; \mu\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\right)$$

v) Pour tout $n \geq 1$, posons $E_n = B_1 \backslash B_n$; La suite $(E_n)_n$ est croissante, par conséquent

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} E_n\right) \;=\; \lim_{n\to+\infty} \mu(E_n)$$

Or $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{+\infty} E_n \;=\; B_1 \backslash \left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} B_n\right)$, donc

$$\mu(B_1) - \mu\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} B_n\right) = \lim_{n\to+\infty} (\mu(B_1) - \mu(B_n)).$$

Comme $\mu(B_1) < +\infty$, il en résulte que $\displaystyle\mu\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} B_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \mu(B_n)$.

Définitions I.1.1 *Soit* $(X,\mathcal{A},\mu)$ *un espace mesuré.*

- *Si* $\mu(X)$ *est finie, on dit que* μ *est bornée (ou finie).*
- *Si* X *est réunion dénombrable d'ensembles de mesure finie, on dit que* μ *est* σ*-finie.*
- *Si* $\mu(X) = 1$, *on dit que* $(X,\mathcal{A},\mu)$ *est un espace probabilisé ; Les éléments de* X *sont appelés éventualités et les éléments de* $\mathcal{A}$ *sont appelés événements.*

Définition I.1.5 *Un ensemble $N \in \mathcal{A}$ est dit négligeable par rapport à μ (ou μ-négligeable) si $\mu(N) = 0$.*

Définition I.1.6 *On dira qu'une propriété $\mathcal{P}$ est vraie μ-presque partout ($\mu - pp$) si et seulement si l'ensemble sur lequel $\mathcal{P}$ est fausse est contenu dans un ensemble μ-négligeable.*

Proposition I.1.2 *Soient $(X,\mathcal{A},\mu)$ un espace mesuré et $\{S_n\}$ une suite d'ensembles négligeables. Alors $S = \bigcup\limits_{n=1}^{+\infty} S_n$ est négligeable.*

Démonstration :

On a $S = \bigcup\limits_{n=1}^{+\infty} S_n \in \mathcal{A}$ avec $\mu(S_n) = 0 \quad \forall n \geq 1$. D'après la proposition (I.1.1)

$$0 \leq \mu(S) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \mu(S_n) = 0.$$

Définition I.1.7 *Soit $(X,\mathcal{A},\mu)$ un espace mesuré. La mesure μ est dite complète si tout sous-ensemble d'un ensemble négligeable est mesurable.*

Théorème I.1.1 *Il existe une tribu $\mathcal{L}$ sur $I\!R^n$ et une mesure λ sur $(I\!R^n,\mathcal{L})$ uniques telles que :*

- $\lambda\left(\prod\limits_{i=1}^{n}]a_i,b_i[\right) = \prod\limits_{i=1}^{n} (b_i - a_i)$.
- $\mathcal{L} \supset \mathcal{B}(I\!R^n)$ *avec inclusion stricte.*
- λ *complète.*

$\mathcal{L}$ est la tribu de Lebesgue sur $I\!R^n$ et λ la mesure de Lebesgue sur $I\!R^n$.

Remarques I.1.2 *Soit l'espace mesuré* $(\mathbb{R}^n,\mathcal{L},\lambda)$.

• *Tout point de* $\mathbb{R}^n$ *est négligeable. Etablissons ce résultat dans le cas particulier où* $n = 1$.

Soit $a \in \mathbb{R}$. *L'ensemble* $\{a\}$ *est mesurable car c'est un fermé de* $\mathbb{R}$. *On a*

$$\{a\} \subset \left]a - \frac{1}{p},a + \frac{1}{p}\right[\qquad \forall p \in \mathbb{N}^*$$

par suite

$$\lambda(\{a\}) \leq \lambda\left(\left]a - \frac{1}{p},a + \frac{1}{p}\right[\right) \qquad \forall p \in \mathbb{N}^*$$

d'où

$$\lambda(\{a\}) \leq \frac{2}{p} \qquad \forall p \in \mathbb{N}^*$$

et ainsi

$$\lambda(\{a\}) = 0.$$

• *Toute partie finie ou dénombrable de* $\mathbb{R}^n$ *est négligeable. Par exemple, dans* $(\mathbb{R},\mathcal{L},\lambda)$, *l'ensemble* $\mathbb{Q}$ *est négligeable (bien qu'il soit dense dans* $\mathbb{R}$*).*

• *La mesure de Lebesgue admet bien d'autres ensembles négligeables que les ensembles dénombrables ; la frontière du pavé* $\prod_{i=1}^{n}]a_i,b_i[$ *par exemple est négligeable dans* $\mathbb{R}^n$.

I.2 Fonctions mesurables

Soit $(X,\mathcal{A})$ un espace mesurable.

Définition I.2.1 *Une fonction* $f : X \longrightarrow \overline{I\!R}$ *est dite mesurable si et seulement si*

$$\forall\, \alpha \in I\!R \quad f^{-1}(]\alpha, +\infty[) = \{x \in X : f(x) > \alpha\} \in \mathcal{A}.$$

Le lemme suivant donne quatre définitions équivalentes de la mesurabilité ;

Lemme I.2.1 *Soit* $f : X \longrightarrow \overline{I\!R}$*. Les propositions suivantes sont équivalentes*

(a) $\forall\, \alpha \in I\!R \quad A_\alpha = \{x \in X : f(x) > \alpha\} \in \mathcal{A}.$

(b) $\forall\, \alpha \in I\!R \quad B_\alpha = \{x \in X : f(x) \leq \alpha\} \in \mathcal{A}.$

(c) $\forall\, \alpha \in I\!R \quad C_\alpha = \{x \in X : f(x) \geq \alpha\} \in \mathcal{A}.$

(d) $\forall\, \alpha \in I\!R \quad D_\alpha = \{x \in X : f(x) < \alpha\} \in \mathcal{A}.$

Démonstration :

Il est clair que $(a) \Longleftrightarrow (b)$ car A_α et B_α sont complémentaires. On a de même $(c) \Longleftrightarrow (d)$. Montrons que $(a) \Longleftrightarrow (c)$.

On a l'égalité $C_\alpha = \bigcap\limits_{n=1}^{+\infty} A_{\alpha-\frac{1}{n}}$ d'où $(a) \Longrightarrow (c)$.

De la même façon, l'égalité $A_\alpha = \bigcup\limits_{n=1}^{+\infty} C_{\alpha+\frac{1}{n}}$ permet d'affirmer que

$(c) \Longrightarrow (a)$.

Remarque I.2.1 *Si f est à valeurs complexes, elle se décompose en partie réelle et partie imaginaire*

$$f = \mathcal{R}e(f) + i\mathcal{I}m(f)$$

où $\mathcal{R}e(f)$ et $\mathcal{I}m(f)$ sont à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Définition I.2.2 *L'application $f : X \longrightarrow \mathbb{C}$ est dite mesurable si et seulement si $\mathcal{R}e(f)$ et $\mathcal{I}m(f)$ sont mesurables.*

Donnons à présent une classe importante de fonctions mesurables ;

Définition I.2.3 *On considère l'espace mesurable $(\mathbb{R}^n, \mathcal{L})$ où $\mathcal{L}$ est la tribu de Lebesgue et $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$. Si f est continue alors f est mesurable.*

Démonstration :

L'intervalle $]\alpha, +\infty[\quad (\alpha \in \mathbb{R})$ est un ouvert de $\mathbb{R}$. L'ensemble $A_\alpha = f^{-1}(]\alpha, +\infty[)$ est donc un ouvert de $\mathbb{R}^n$ car f est continue. Il en résulte que, $A_\alpha \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$. D'où $A_\alpha \in \mathcal{L}$.

La fonction f est donc $\mathcal{L}$-mesurable.

Définition I.2.4 *Soient $(X, \mathcal{A})$ un espace mesurable et E un sous-ensemble* *quelconque de X. On appelle fonction caractéristique de E, la fonction χ_E définie par*

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1 & si \;\; x \in E \\ 0 & si \;\; x \notin E \end{cases}$$

La fonction caractéristique possède les propriétés suivantes :

$$\begin{cases} \chi_\emptyset = 0; \\ \chi_X = 1; \\ \chi_{A\cap B} = \chi_A.\chi_B; \\ \chi_{A\cup B} = \chi_A + \chi_B - \chi_{A\cap B}; \\ \chi_{A^c} = 1 - \chi_A. \end{cases}$$

Proposition I.2.1 *Soit $A \subset X$. Alors la fonction caractéristique de A est mesurable si et seulement si l'ensemble A est mesurable.*

Démonstration :

Soit $\alpha \in I\!\!R$, on a

$$A_\alpha = \{x \in X : \chi_A(x) > \alpha\} = \begin{cases} X & \text{si} \;\; \alpha < 0 \\ A & \text{si} \;\; 0 \le \alpha < 1 \\ \emptyset & \text{si} \;\; \alpha \ge 1 \end{cases}$$

Donc $A_\alpha \in \mathcal{A}$ pour tout $\alpha \in I\!\!R$ si et seulement si $A \in \mathcal{A}$.

Remarque I.2.2 *Il existe des fonctions mesurables qui ne sont pas continues. C'est le cas par exemple de la fonction $f = \chi_{]0,1[}$ avec $X = I\!\!R$ et $\mathcal{A} = \mathcal{L}$*

Proposition I.2.2 *Soient* $(X,\mathcal{A})$ *un espace mesurable et* f, $g : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ *mesurables. Alors les fonctions suivantes sont mesurables*

i) $f + g$, *lorsque cette somme existe ;*

ii) $\max(f,g)$ *et* $\min(f,g)$ *;*

iii) $|f|$, $\beta f (\beta \in \mathbb{R})$, f^2 *et* $f \times g$.

Démonstration :

Pour simplifier la démonstration on se limite aux fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$:

i) Utilisant la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, il vient :

$$A_\alpha = \bigcup_{r \in \mathbb{Q}} \left[\{x \in X : f(x) > r\} \cap \{x \in X : g(x) > \alpha - r\} \right].$$

Les fonctions f et g étant mesurables et $\mathbb{Q}$ dénombrable, on en déduit que $A_\alpha \in \mathcal{A}$.

ii) $\{x \in X : \max(f(x),g(x)) > \alpha\} = \{x \in X : f(x) > \alpha\} \cup \{x \in X : g(x) > \alpha\}$

$\{x \in X : \min(f(x),g(x)) > \alpha\} = \{x \in X : f(x) > \alpha\} \cap \{x \in X : g(x) > \alpha\}$.

Par suite les deux fonctions sont mesurables.

iii) • Si $\alpha \in I\!R$, l'ensemble

$$\{x \in X : \beta f(x) > \alpha\} = \begin{cases} \emptyset \text{ ou } X & \text{si } \beta = 0 \\ \left\{x \in X : f(x) > \frac{\alpha}{\beta}\right\} & \text{si } \beta > 0 \\ \left\{x \in X : f(x) < \frac{\alpha}{\beta}\right\} & \text{si } \beta < 0 \end{cases}$$

On voit que pour toute valeur de β, l'ensemble $\{x \in X : \beta f(x) > \alpha\}$ est mesurable.

• Si $\alpha \geq 0$ *alors* $\{x \in X : |f(x)| > \alpha\} = \{x \in X : f(x) > \alpha\} \cup \{x \in X : f(x) < -\alpha\}$

si $\alpha < 0$ *alors* $\{x \in X : |f(x)| > \alpha\} = X$

donc $|f|$ est mesurable.

• Pour f^2, on a

si $\alpha \geq 0$ *alors* $\{x \in X : f^2(x) > \alpha\} = \{x \in X : |f(x)| > \sqrt{\alpha}\}$

si $\alpha < 0$ *alors* $\{x \in X : f^2(x) > \alpha\} = X$

donc f^2 mesurable.

• On a $f \times g = \frac{1}{2}\left\{(f+g)^2 - f^2 - g^2\right\}$ donc mesurable.

Proposition I.2.3 *Soient* $(X,\mathcal{A})$ *un espace mesurable et* $f_n : X \longrightarrow \overline{I\!R}$, $n \in I\!N$, *des fonctions mesurables. Alors* $f = \sup_n f_n$, $g = \inf_n f_n$, $f^* = \liminf_n f_n$ *et* $g^* = \limsup_n f_n$ *sont mesurables.*

Démonstration :

On a pour $g(x) = \inf_n f_n(x)$

$$\{x \in X : g(x) \geq \alpha\} = \bigcap_{n=1}^{+\infty} \{x \in X : f_n(x) \geq \alpha\}.$$

De façon analogue pour $f(x) = \sup_n f_n(x)$

$$\{x \in X : f(x) > \alpha\} = \bigcup_{n=1}^{+\infty} \{x \in X : f_n(x) > \alpha\}.$$

Puisque toutes les fonctions f_n sont mesurables, alors f et g sont mesurables.

On rappelle d'autre part que

$$f^* = \liminf_n f_n = \sup_n \inf_{m \geq n} f_m,$$

$$g^* = \limsup_n f_n = \inf_n \sup_{m \geq n} f_m.$$

On en déduit que f^* et g^* sont aussi mesurables.

Corollaire I.2.1 *Soient* $(X,\mathcal{A})$ *un espace mesurable et* $f_n : X \longrightarrow \overline{I\!R}$, $n \in I\!N$, *des fonctions mesurables. Si* $(f_n)_n$ *converge simplement vers* f *sur* X *alors* f *est une fonction mesurable.*

Démonstration :

Pour tout $x \in X$, on a $f(x) = \lim_n f_n(x)$.

Or $\lim_n f_n(x) = \liminf_n f_n(x) = \limsup_n f_n(x)$, donc f est mesurable.

Définition I.2.5 *Soit* $(X,\mathcal{A})$ *un espace mesurable. Une fonction définie sur* X *est dite étagée ou simple s'il existe un nombre fini d'ensembles* *mesurables* $A_1, A_2, \ldots, A_n$ *et* n *valeurs finies* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ *tels que*

$$e = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{A_i} \tag{I.2}$$

On notera que l'écriture (I.2) n'est pas unique. Une fonction étagée est donc une fonction mesurable finie et qui ne prend qu'un nombre fini de valeurs.

La somme, le produit et le module de fonctions étagées sont étagées.

Le théorème d'approximation suivant montre l'importance des fonctions étagées

Théorème I.2.1 *Soit* $f : (X, \mathcal{A}) \longrightarrow \overline{I\!R}_+$ *mesurable. Il existe une suite de fonctions étagées positives* $(e_n)_{n \geq 1}$ *telle que*

i) $0 \leq e_1 \leq e_2 \leq \ldots \leq f$

ii) $\forall x \in X \qquad e_n(x) \longrightarrow f(x)$.

Autrement dit, toute fonction positive mesurable est limite simple d'une suite croissante de fonctions étagées positives.

Démonstration :

i) Pour $n \in I\!N$, découpons l'intervalle $[0, n]$ en $n2^n$ intervalles de longueur $\frac{1}{2^n}$.

Considérons les ensembles

$$I_{n,k} = \begin{cases} \{x \in X : \frac{k}{2^n} \leq f(x) < \frac{k+1}{2^n}\} & si \quad 0 \leq k < n2^n \\ \{x \in X : f(x) \geq n\} & si \quad k = n2^n \end{cases}$$

Les ensembles $I_{n,k}$ sont mesurables car f l'est. Les ensembles $I_{n,k}$ sont deux à deux disjoints et $X = \bigcup_{k=0}^{n2^n} I_{n,k}$.

Posons

$$e_n(x) = \begin{cases} \frac{k}{2^n} & si \quad x \in I_{n,k} \quad avec \quad 0 \leq k < n2^n \\ n & si \quad x \in I_{n,k} \quad avec \quad k = n2^n. \end{cases}$$

On voit que $e_n \geq 0$ et que $e_n(x) = \sum_{k=0}^{n2^n} \dfrac{k}{2^n}\chi_{I_{n,k}}(x)$.

La fonction e_n est donc étagée et par construction $e_n \leq f \ \ \forall n \geq 1$.

Il reste à prouver que $(e_n)_n$ est une suite croissante. Soit $x \in X$

<u>1$^{\text{er}}$ cas</u> : Il existe k, $0 \leq k < n2^n$ tel que $\frac{k}{2^n} \leq f(x) < \frac{k+1}{2^n}$. Ceci donne

$$e_n(x) = \frac{k}{2^n} \quad \text{et} \quad \frac{2k}{2^{n+1}} \leq f(x) \leq \frac{2k+2}{2^{n+1}}.$$

- Si $\frac{2k}{2^{n+1}} \leq f(x) < \frac{2k+1}{2^{n+1}}$ alors $e_{n+1}(x) = \frac{2k}{2^{n+1}} = e_n(x)$;
- Si $\frac{2k+1}{2^{n+1}} \leq f(x) \leq \frac{2k+2}{2^{n+1}}$ alors $e_{n+1}(x) = \frac{2k+1}{2^{n+1}} = \frac{k}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}} > e_n(x)$.

Notons que $k < n2^n$, entraine $2k+1 < (n+1)2^{n+1}$.

<u>2$^{\text{ème}}$ cas</u> : On suppose que x est tel que $f(x) \geq n$.

- Si $f(x) \geq n+1$ alors

$$e_n(x) = n,\ e_{n+1}(x) = n+1 \quad \text{d'où} \ \ e_{n+1}(x) \geq e_n(x).$$

• Si $n \leq f(x) < n+1$ alors

$$n2^{n+1} \leq 2^{n+1}f(x) < (n+1)2^{n+1}.$$

D'autre part, il existe k' tel que $k' \leq 2^{n+1}f(x) < k'+1$, c'est à dire $\frac{k'}{2^{n+1}} \leq f(x) < \frac{k'+1}{2^{n+1}}$ avec $k' < (n+1)2^{n+1}$.

Il en découle que

$$e_{n+1}(x) = \frac{k'}{2^{n+1}}.$$

L'inégalité $k'+1 > n2^{n+1}$ ou encore $k' \geq n2^{n+1}$ implique alors $e_{n+1}(x) \geq n = e_n(x)$.

Finalement $(e_n)_n$ est une suite croissante et pour tout $n \in I\!N^*$, $e_n \leq f$.

ii) Pour montrer la convergence simple, considérons un point $x \in X$. On a deux possibilités:

$$f(x) < +\infty \qquad \text{ou} \qquad f(x) = +\infty$$

a) Si $f(x) < +\infty$ alors

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in I\!N \text{ tel que } f(x) < n_0 \text{ et } \frac{1}{2^{n_0}} < \varepsilon$$

d'autre part

$$\forall n \geq n_0, \exists k' \text{ tel que } \frac{k'}{2^n} \leq f(x) < \frac{k'+1}{2^n}.$$

On remarque que $k' \leq f(x)2^n < n_0 2^n \leq n2^n$, ce qui entraine $e_n(x) = \frac{k'}{2^n}$.

Par suite

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in I\!N \text{ tel que } \forall n \geq n_0 \ \left|e_n(x) - f(x)\right| < \frac{1}{2^n} \leq \frac{1}{2^{n_0}} < \varepsilon$$

c'est à dire $e_n(x) \longrightarrow f(x)$.

b) Si $f(x) = +\infty$ alors $\forall n \in I\!N^* \quad f(x) \geq n$ d'où $e_n(x) = n$.

Par conséquent $\lim\limits_{n \to +\infty} e_n(x) = +\infty = f(x)$.

Conclusion : Pour tout $x \in X$, on a $e_n(x) \longrightarrow f(x)$ ce qui achève la démonstration du théorème.

I.3 Intégrale de Lebesgue des fonctions positives mesurables

Seules les fonctions mesurables sont intégrables au sens de Lebesgue. Notons que dans la pratique, la classe des fonctions mesurables étant très étendue, toutes les fonctions utilisées seront mesurables.

On considère $(X,\mathcal{A},\mu)$ un espace mesuré. Commençons par considérer le cas d'une fonction positive étagée.

Définition I.3.1 *Soit* $e = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{A_i}$ *une fonction étagée positive sur* X. *On appelle intégrale de* e *sur* X *par rapport à la mesure* μ, *le nombre positif (éventuellement* $+\infty$*) noté* $\int_X e \, d\mu$ *égal à* $\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i \mu(A_i)$.

(On admettra que la valeur de cette intégrale est indépendante de la représentation de e*).*

Remarque I.3.1 *Si pour un certain indice i on a*

$$\alpha_i = 0 \text{ et } \mu(A_i) = +\infty$$

alors le produit $\alpha_i \mu(A_i) = 0$.

Définition I.3.2 *On dit que e est intégrable sur X par rapport à μ si $\int_X e\, d\mu$ est finie.*

Définition I.3.3 *Si E est un ensemble mesurable, on définit l'intégrale de e sur E par*

$$\int_E e\, d\mu = \int_X e\, \chi_E\, d\mu = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\, \mu(E \cap A_i).$$

En particulier si $E \in \mathcal{A}$, alors $\int_E d\mu = \mu(E)$.

Exemple I.3.1 *On se place dans $(\mathbb{R},\mathcal{L},\lambda)$ et on considère la fonction e appelée fonction de Dirichlet et définie par*

$$e(x) = \begin{cases} 1 & si \quad x \in \mathbb{Q} \\ 0 & si \quad x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

e est une fonction positive étagée

$$e = 1\chi_{\mathbb{Q}} + 0\chi_{\mathbb{Q}^c}.$$

Prenons $E = [0,1]$

$$\int_{[0,1]} e\, d\lambda = \lambda\left([0,1] \cap \mathbb{Q}\right) = 0$$

e est donc intégrable au sens de Lebesgue sur $[0,1]$.

L'intégrale d'une fonction étagée positive possède les propriétés suivantes :

Proposition I.3.1 *Soient f, g deux fonctions étagées positives et $\alpha \in \mathbb{R}_+$. On a*

- $\int_X (f+g)\, d\mu = \int_X f\, d\mu + \int_X g\, d\mu\,;$
- $\int_X \alpha f\, d\mu = \alpha \int_X f\, d\mu\,;$
- $f \leq g \implies \int_X f\, d\mu \leq \int_X g\, d\mu.$

Nous sommes à présent en mesure de définir l'intégrale d'une fonction mesurable positive en s'appuyant sur le théorème (I.2.1)

Définition I.3.4 *Soit $f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ une fonction mesurable positive. L'intégrale de f sur X par rapport à μ est définie par*

$$\int_X f\, d\mu = \sup\left\{\int_X e\, d\mu\ ;\ 0 \leq e \leq f \text{ et } e \text{ étagée}\right\}.$$

(La borne supérieure est prise sur toutes les fonctions étagées positives qui minorent f.)

Remarque I.3.2 *Toute fonction $f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ positive mesurable possède une intégrale au sens de Lebesgue. Cependant, cette intégrale est soit positive finie soit égale à $+\infty$*

Définition I.3.5 *Soit $f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ une fonction mesurable positive.*

- *La fonction f est dite intégrable si $\int_X f\, d\mu$ est finie.*
- *Si $E \in \mathcal{A}$, on pose $\int_E f\, d\mu = \int_X f\, \chi_E\, d\mu$.*

La proposition suivante contient des propriétés élémentaires de l'intégrale qui se démontrent par application directe de la définition.

Proposition I.3.2 *Soient f, $g : X \longrightarrow \overline{I\!R}_+$ deux fonctions mesurables et $E, F \in \mathcal{A}$. On a*

- *Si $f \leq g$ alors $\int_E f\, d\mu \leq \int_E g\, d\mu$;*
- *Si $E \cap F = \emptyset$ alors $\int_{E\cup F} f\, d\mu = \int_E f\, d\mu + \int_F f\, d\mu$;*
- *Si $E \subset F$ alors $\int_E f\, d\mu \leq \int_F f\, d\mu$.*

Nous donnons à présent le théorème de la convergence monotone appelé aussi théorème de Beppo-Levi qui est l'un des principaux résultats de la théorie de l'intégrale de Lebesgue

Théorème I.3.1 *Soient $\{f_n : X \longrightarrow \overline{I\!R}_+\}_n$ une suite croissante de fonctions mesurables positives qui converge simplement vers une fonction f. Alors*

$$\lim_{n\to+\infty} \int_X f_n\, d\mu = \int_X f\, d\mu$$

Démonstration :

Rappelons que si $\{A_n,\ n \in I\!N\}$ est une suite croissante d'ensembles mesurables alors

$$\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \mu(A_n).$$

Montrons le lemme suivant :

Lemme I.3.1 *Soit e une fonction étagée positive et $\{B_n\}_n$ une suite croissante d'ensembles mesurables avec $X = \bigcup_n B_n$. Alors on a*

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{B_n} e \, d\mu = \int_X e \, d\mu.$$

Démonstration :

On a $e = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \chi_{A_i}$, donc $\int_{B_n} e \, d\mu = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \mu\left(A_i \cap B_n\right)$.

La suite $(A_i \cap B_n)_n$ est croissante et $A_i = \bigcup_n \left(A_i \cap B_n\right)$ d'où

$$\mu(A_i) = \lim_{n\to+\infty} \mu(A_i \cap B_n).$$

Par conséquent $\lim_{n\to+\infty} \int_{B_n} e \, d\mu = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \mu(A_i) = \int_X e \, d\mu.$

Démontrons à présent le théorème :

La fonction f est mesurable comme limite simple d'une suite de fonctions mesurables.

D'une part, on a

$$f_n \leq f \Longrightarrow \int_X f_n \, d\mu \leq \int_X f \, d\mu \Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} \int_X f_n \, d\mu \leq \int_X f \, d\mu. \quad \text{(I.3)}$$

D'autre part, soit e étagée positive telle que $0 \leq e \leq f$ et soit $\varepsilon \in]0,1[$.

On pose $B_n = \left\{x \in X / \ f_n(x) \geq (1-\varepsilon) e(x)\right\}$.

L'ensemble B_n est mesurable, la suite $(B_n)_n$ est croissante et $X = \bigcup_n B_n$.

En effet $X \subset \bigcup_n B_n$ car pour $x \in X$, $f_n(x) \longrightarrow f(x)$:

• Si $f(x) = 0$ alors $e(x) = 0$ et donc $x \in B_n$;

• Si $f(x) > 0$ alors il existe $n_0 \in I\!N$ tel que $f_{n_0}(x) \geq (1-\varepsilon)f(x) \geq (1-\varepsilon)e(x)$, donc $x \in B_{n_0}$;

• Si $f(x) = +\infty$, alors il existe $n_0 \in I\!N$ tel que $f_{n_0}(x) \geq (1-\varepsilon)e(x)$, d'où $x \in B_{n_0}$.

On constate que $f_n \geq (1-\varepsilon)e\,\chi_{B_n}$, donc $\int_X f_n\,d\mu \geq (1-\varepsilon)\int_{B_n} e\,d\mu$ et en utilisant le lemme

$$\lim_{n\to+\infty}\int_X f_n\,d\mu \geq (1-\varepsilon)\lim_{n\to+\infty}\int_{B_n} e\,d\mu = (1-\varepsilon)\int_X e\,d\mu$$

ceci étant vrai pour tout $\varepsilon \in]0,1[$, on en déduit que :

$$\lim_{n\to+\infty}\int_X f_n\,d\mu \geq \int_X e\,d\mu \tag{I.4}$$

et par suite

$$\lim_{n\to+\infty}\int_X f_n\,d\mu \geq \int_X f\,d\mu.$$

De (I.4) et (I.3), on tire

$$\lim_{n\to+\infty}\int_X f_n\,d\mu = \int_X f\,d\mu$$

ce qui termine la démonstration du théorème.

Remarque I.3.3 *Nous savons que toute fonction positive mesurable de X dans $\overline{I\!R}_+$ est limite simple croissante de fonctions étagées positives.*

Le théorème (I.3.1) *permet donc de démontrer facilement les propriétés suivantes de l'intégrale d'une fonction mesurable positive.*

Proposition I.3.3 *Soient f, $g : \longrightarrow \overline{I\!R}_+$ deux fonctions positives mesurables et $\alpha \in I\!R_+$. On a*

- $\int_X (f+g)\, d\mu = \int_X f\, d\mu + \int_X g\, d\mu$;
- $\int_X \alpha f\, d\mu = \alpha \int_X f\, d\mu$.

Dans la suite, on désignera par M^+ l'ensemble des fonctions mesurables de X dans $\overline{I\!R}_+$.

Lemme I.3.2 *(Lemme de Fatou)*

Soit $(f_n)_n$ une suite d'éléments de M^+ alors

$$\int_X \liminf_n f_n\, d\mu \leq \liminf_n \int_X f_n\, d\mu.$$

Démonstration :

Soit la fonction $g_n = \inf_{m\geq n} f_m$. La suite $(g_n)_n$ est croissante, g_n est positive mesurable et $\lim_n g_n = \sup_n g_n = \liminf_n f_n$.

Le théorème (I.3.1) entraine que

$$\int_X \liminf_n f_n\, d\mu = \lim_n \int_X g_n\, d\mu = \liminf_n \int_X g_n\, d\mu.$$

Or $g_n \leq f_n$ donc $\int_X g_n\, d\mu \leq \int_X f_n\, d\mu$ et par conséquent

$$\liminf_n \int_X g_n\, d\mu \leq \liminf_n \int_X f_n\, d\mu.$$

Proposition I.3.4 *Si $f : X \longrightarrow \overline{I\!\!R}_+$ est mesurable, alors l'application*

$$\begin{array}{rccl} \eta : & \mathcal{A} & \longrightarrow & \overline{I\!\!R}_+ \\ & A & \longmapsto & \eta(A) = \int_A f \, d\mu \end{array}$$

est une mesure sur $(X,\mathcal{A})$.

Démonstration :

• Pour tout $A \in \mathcal{A}$, on a $\eta(A) = \int_X f\chi_A \, d\mu \in \overline{I\!\!R}_+$;

• $\eta(\emptyset) = \int_\emptyset f d\mu = \int_X f\chi_\emptyset d\mu = \int_X 0 d\mu = 0$;

• Soit $(A_n)_{n\geq 1}$ une suite d'ensembles mesurables deux à deux disjoints.

Montrons que

$$\eta\left(\bigcup_n A_n\right) = \sum_n \eta(A_n).$$

Posons $A = \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n$ et $f_n = \sum_{k=1}^{n} f\chi_{A_k} = f\chi_{\bigcup_{k=1}^{n} A_k}$.

On constate que $(f_n)_n$ est une suite croissante de fonctions positives et mesurables qui converge simplement vers $f\chi_A$. Le théorème (I.3.1) entraine que

$$\lim_n \int_X f_n \, d\mu = \int_X f\chi_A \, d\mu = \int_A f \, d\mu = \lim_n \sum_{k=1}^{n} \int_{A_k} f \, d\mu = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_{A_n} f \, d\mu.$$

Proposition I.3.5 *Soit $f \in M^+$. On a*

$$f = 0 \ \ \mu - pp \Longleftrightarrow \int_X f \, d\mu = 0.$$

Démonstration :

$\Longleftarrow$) Soit $E_n = \left\{x \in X / \ f(x) \geq \frac{1}{n}\right\}$. L'ensemble E_n est mesurable et on a $f \geq \frac{1}{n}\chi_{E_n}$. Donc

$$\int_X f \, d\mu \geq \frac{1}{n}\mu(E_n),$$

ce qui prouve que $\mu(E_n) = 0$. On a

$$\{x \in X/ \ f(x) > 0\} = \bigcup_{n=1}^{+\infty} E_n.$$

Cet ensemble mesurable est donc négligeable comme réunion dénombrable d'ensembles négligeables.

$\Longrightarrow$) Posons $E = \{x \in X/ \ f(x) > 0\}$. Il existe un ensemble N négligeable tel que $E \subset N$. Or $E \in \mathcal{A}$, donc $\mu(E) = 0$.

On considère la suite de fonctions $f_n = n\chi_E$. On a $\int_X f_n \, d\mu = n\mu(E) = 0$.

On note que $f \leq \liminf_n f_n = \lim_n f_n$. En utilisant le lemme (I.3.2), il vient

$$0 \leq \int_X f \, d\mu \leq \int_X \liminf_n f_n \, d\mu \leq \liminf_n \int_X f_n \, d\mu = 0$$

ainsi

$$\int_X f \, d\mu = 0.$$

Proposition I.3.6 *Soit $f \in M^+$ et N un ensemble μ-négligeable. Alors, on a*

$$\int_N f \, d\mu = 0.$$

Proposition I.3.7 *Soient f, $g : X \longrightarrow \overline{I\!R}_+$ mesurables. On a*

$$f = g \;\; \mu - pp \Longrightarrow \int_X f \, d\mu = \int_X g \, d\mu.$$

I.4 Fonctions intégrables

On considère $(X,\mathcal{A},\mu)$ un espace mesuré. Soit $f : X \longrightarrow \overline{I\!R}$ et soient f^+ et f^- les fonctions positives définies par :

- $f^+(x) = \sup\{f(x),0\}$, la partie positive de f et
- $f^-(x) = \sup\{-f(x),0\}$, la partie négative de f.

On vérifie facilement que

$$f = f^+ - f^- \quad , \quad f^+ = \frac{1}{2}\left(|f| + f\right) \quad ,$$
$$|f| = f^+ + f^- \;\; et \;\; f^- = \frac{1}{2}\left(|f| - f\right) \quad .$$

Remarque I.4.1 *L'application f est mesurable si et seulement si f^+ et f^- sont mesurables.*

Définition I.4.1 *Soit $f : X \longrightarrow \overline{I\!R}$ mesurable. On dit que f est intégrable sur X par rapport à μ, si et seulement si f^+ et f^- le sont. L'intégrale de f est alors définie par*

$$\int_X f \, d\mu = \int_X f^+ \, d\mu - \int_X f^- \, d\mu.$$

Si $E \in \mathcal{A}$, on définit :

$$\int_E f \, d\mu = \int_X f\chi_E \, d\mu = \int_E f^+ \, d\mu - \int_E f^- \, d\mu.$$

Proposition I.4.1 *Soit $f : X \longrightarrow \overline{I\!R}$ mesurable ;*

$$f \text{ est intégrable} \iff |f| \text{ est intégrable.}$$

Démonstration :

$\Longrightarrow$) Les applications f^+ et f^- sont intégrables, donc

$$\int_X |f| \, d\mu = \int_X \left(f^+ + f^-\right) \, d\mu = \int_X f^+ \, d\mu + \int_X f^- \, d\mu < +\infty.$$

$\Longleftarrow$) On a f mesurable et $\int_X |f| \, d\mu < +\infty$. Les fonctions positives f^+ et f^- sont mesurables et vérifient $f^+ \leq |f|$ et $f^- \leq |f|$.

On en déduit que $\int_X f^+ \, d\mu < +\infty$ et $\int_X f^- \, d\mu < +\infty$, donc f est intégrable. Cette proposition est fausse pour l'intégrale de Riemann. En effet la fonction

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ +1 & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

n'est pas Riemann-intégrable sur $X = [0{,}1]$. Cependant $|f| = 1$ est Riemann-intégrable sur $X = [0{,}1]$.

Proposition I.4.2 *Soient $f, g : X \longrightarrow \overline{I\!R}$ intégrables. Alors on a*

$$f = g \ pp \Longrightarrow \int_X f \, d\mu = \int_X g \, d\mu.$$

Proposition I.4.3 *Soient $f : X \longrightarrow \overline{I\!R}$ intégrable et N un ensemble négligeable. Alors*

$$\int_N f \, d\mu = 0.$$

Proposition I.4.4 *Toute fonction $f : X \longrightarrow \overline{I\!R}$ intégrable est finie pp.*

Démonstration :

Posons $E = \{x \in X : \ |f(x)| = +\infty\}$. Nous avons $E = \bigcap\limits_{n \in I\!N^*} E_n$ où $E_n = \{x \in X : \ |f(x)| \geq n\}$.

L'ensemble E_n est mesurable car $|f|$ l'est. On en déduit que E est mesurable.

On a $n\,\chi_{E_n} \ \leq \ |f|$, donc

$$\mu(E) \leq \mu(E_n) \leq \frac{1}{n} \int_X \ |f| \ d\mu.$$

Comme $\int_X \ |f| \ d\mu < +\infty$ on en déduit que $\mu(E) = 0$.

Ainsi, lorsqu'on fait du calcul intégral, on peut se limiter aux fonctions à valeurs dans $I\!R$ ou dans $\mathbb{C}$.

On désigne par $\mathcal{L}^1_{I\!R}(X,\mathcal{A},\mu)$, $\mathcal{L}^1(X)$ ou $\mathcal{L}^1$ l'ensemble des fonctions f : $X \longrightarrow I\!R$ intégrables sur X par rapport à la mesure μ.

Notons que $\left|\int_X \ f \ d\mu\right| \leq \int_X \ |f| \ d\mu$, pour toute fonction $f \ \in \ \mathcal{L}^1$.

Proposition I.4.5 *Soient f, $g : X \longrightarrow I\!R$. On suppose que f est mesurable et que g est intégrable. Si $|f| \leq g$ pp alors f est intégrable et $\int_X \ |f| \ d\mu \leq \int_X \ g \ d\mu$.*

Démonstration :

Puisque f est mesurable alors $|f|$ est aussi mesurable. Considérons l'ensemble

$$N = \{x \in X / \ |f(x)| > g(x)\}.$$

On voit que $N \in \mathcal{A}$ et que $\mu(N) = 0$. De la proposition (I.3.2), on tire

$$\int_X |f| \ d\mu = \int_N |f| \ d\mu + \int_{N^c} |f| \ d\mu.$$

Comme $\int_N |f| \ d\mu = 0$, alors $\int_X |f| \ d\mu = \int_{N^c} |f| \ d\mu \leq \int_{N^c} g \ d\mu = \int_X g \ d\mu$

Proposition I.4.6 *Soient $f, g \in \mathcal{L}^1$ et $\alpha \in I\!R$. Alors*

i) $\alpha f \in \mathcal{L}^1$ et $f + g \in \mathcal{L}^1$;

ii) $\int_X \alpha f \ d\mu = \alpha \int_X f \ d\mu$ et $\int_X (f + g) \ d\mu = \int_X f \ d\mu + \int_X g \ d\mu$.

Nous avons déjà vu une justification du passage à la limite sous le signe somme pour une suite monotone (voir théorème (I.3.1)). Le théorème fondamental suivant donne une autre justification

Théorème I.4.1 *(Théorème de convergence dominée de Lebesgue)*

Soit $\{f_n : X \longrightarrow I\!R, \ n \in I\!N\}$ une suite de fonctions mesurables. On suppose que

i) La suite (f_n) converge simplement vers f ;

ii) Il existe $g \in \mathcal{L}^1$ telle que pour tout n

$$|f_n| \leq g. \tag{I.5}$$

Alors,

- *Pour tout n, $f_n \in \mathcal{L}^1$ et $f \in \mathcal{L}^1$;*
- $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_X |f_n - f|\, d\mu = 0$;
- $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_X f_n\, d\mu = \int_X f\, d\mu$.

Démonstration :

- f est mesurable car c'est une limite simple de fonctions mesurables ;
- L'inégalité (I.5) entraine que pour tout n, $f_n \in \mathcal{L}^1$;
- De la convergence simple de (f_n) vers f et de l'inégalité (I.5) on tire $|f| \leq g$ d'où $f \in \mathcal{L}^1$;
- On a $|f_n - f| \leq 2g$. Définissons la suite de fonctions mesurables positives

$$\varphi_n = 2g - |f_n - f|.$$

On a $2g = \lim\limits_n \varphi_n = \liminf\limits_n \varphi_n$.

L'application du lemme (I.3.2) conduit à

$$\begin{aligned}\int_X 2g\, d\mu &\leq \liminf_n \int_X \varphi_n\, d\mu \\ &= \int_X 2g\, d\mu + \liminf_n \left(-\int_X |f_n - f|\, d\mu\right).\end{aligned}$$

On en déduit que

$$\limsup_n \int_X |f_n - f|\, d\mu \leq 0 \quad \text{ou encore} \quad \lim_n \int_X |f_n - f|\, d\mu = 0.$$

L'inégalité

$$\left|\int_X f_n\, d\mu - \int_X f\, d\mu\right| \leq \int_X |f_n - f|\, d\mu$$

permet de conclure.

Donnons une deuxième version de ce théorème

Théorème I.4.2 *Soient $f : X \longrightarrow I\!R$ mesurable et $\{f_n : X \longrightarrow I\!R, n \in I \subset I\!N\}$ une suite de fonctions mesurables. On suppose que*

i) La suite $(f_n)_{n\in I}$ converge pp vers f ;

ii) Il existe $g \in \mathcal{L}^1$ telle que pour tout $n \in I$

$$|f_n| \leq g \quad pp.$$

Alors,

- *Pour tout $n \in I$, $f_n \in \mathcal{L}^1$ et $f \in \mathcal{L}^1$;*
- $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_X |f_n - f| \, d\mu = 0$ *;*
- $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_X f_n \, d\mu = \int_X f \, d\mu.$

Terminons ce paragraphe par des résultats relatifs aux fonctions à valeurs complexes.

Définition I.4.2 *Soit $f : X \longrightarrow \mathbb{C}$ mesurable. La fonction f est dite intégrable si $|f|$ est intégrable.*

Proposition I.4.7 *Soit $f : X \longrightarrow \mathbb{C}$ mesurable. On a $f = \mathcal{R}e(f) + i\mathcal{I}m(f)$,*

f est intégrable si et seulement si $\mathcal{R}e(f)$ et $\mathcal{I}m(f)$ sont intégrables.

On a alors

$$\int_X f\,d\mu = \int_X \mathcal{R}e(f)\,d\mu + i\int_X \mathcal{I}m(f)\,d\mu.$$

Remarque I.4.2 *Si f est une fonction à valeurs complexes, intégrable, alors on a*

$$\left|\int_X f\,d\mu\right| \leq \int_X |f|\,d\mu.$$

Il est important de noter que le théorème de Lebesgue reste valable pour les fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$.

I.5 Calcul intégral

Soit $(X,\mathcal{A},\mu)$ un espace mesuré.

I.5.1 Intégrales dépendant d'un paramètre

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ borné ou non. On considère

$$\begin{array}{rccl} f: & I\times X & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (t,x) & \longmapsto & f(t,x) \end{array}$$

Théorème I.5.1 *On suppose que*

i) l'application $x \longmapsto f(t,x)$ est mesurable pour tout $t \in I$,

ii) pour presque tout $x \in X$, l'application $t \longmapsto f(t,x)$ est continue en $t_0 \in I$ et *iii) il existe* $g \in \mathcal{L}^1$ *telle que pour tout* $t \in I\ :\ |f(t,x)| \leq g(x)$ *pp.*

Alors, pour tout $t \in I$*, la fonction* $x \longmapsto f(t,x)$ *est intégrable et la fonction* F *définie par* $F(t) = \int_X f(t,x)\, d\mu(x)$ *est continue en* t_0*.*

La notation $d\mu(x)$ signifie que la mesure porte sur l'ensemble dont la variable est x.

Démonstration :

L'inégalité $|f(t,x)| \leq g(x)$ pp entraine que la fonction $x \longmapsto f(t,x) \in \mathcal{L}^1$.

Pour montrer la continuité de F en t_0, on considère une suite $\{t_n\}$ d'éléments de I telle que $t_n \longrightarrow t_0$ et on va prouver que $F(t_n) \longrightarrow F(t_0)$.

Posons $f_n(x) = f(t_n,x)$ et $f(x) = f(t_0,x)$. Les fonctions f_n et f sont mesurables, $|f_n| \leq g$ pp et $(f_n)_n$ converge vers f presque partout. L'application du théorème de convergence dominée (I.4.2) implique que f_n et f sont intégrables et

$$\begin{aligned}
F(t_0) &= \int_X f(t_0,x)\, d\mu(x) &&= \int_X f(x)\, d\mu(x) \\
&= \lim_n \int_X f_n(x)\, d\mu(x) &&= \lim_n \int_X f(t_n,x)\, d\mu(x) \\
&= \lim_n F(t_n).
\end{aligned}$$

Théorème I.5.2 *Soit* I *un intervalle ouvert de* $\mathbb{R}$*. On suppose*

i) l'application $x \longmapsto f(t,x)$ *est intégrable pour tout* $t \in I$*,*

ii) pour presque tout $x \in X$*,* $\frac{\partial f}{\partial t}(t,x)$ *existe et*

iii) il existe $g \in \mathcal{L}^1$ *telle que pour tout* $t \in I$ *on a* $\left|\frac{\partial f}{\partial t}(t,x)\right| \leq g(x)$ *pp.*

Alors, pour tout $t \in I$, *la fonction* $x \longmapsto \frac{\partial f}{\partial t}(t,x)$ *est intégrable, la fonction* F *définie par* $F(t) = \int_X f(t,x)\, d\mu(x)$ *est dérivable et on a* $F'(t) = \int_X \dfrac{\partial f}{\partial t}(t,x)\, d\mu(x)$.

Remarque I.5.1 *Ces deux théorèmes restent valables pour les fonctions* $f(t,x)$ *à valeurs dans* $\mathbb{C}$.

I.5.2 Intégrale de Lebesgue et intégrale de Riemann

La fonction $f = \chi_{\mathbb{Q}\cap[0,1]}$ n'est pas Riemann-intégrable. Cependant elle est Lebesgue-intégrable car

$$\int_{\mathbb{R}} f\, d\lambda = \lambda\left(\mathbb{Q}\cap[0,1]\right) = 0.$$

Théorème I.5.3 *Soit* $[a,b]$ *un intervalle compact de* $\mathbb{R}$ *et soit* $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$.

Si f *est Riemann-intégrable sur* $[a,b]$ *alors* f *est Lebesgue-intégrable sur* $[a,b]$ *et on a l'égalité*

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_{[a,b]} f(x)\, d\lambda(x). \tag{I.6}$$

Remarque I.5.2 *On voit que dans le cas des intégrales propres, l'intégrale de Lebesgue est beaucoup plus générale que l'intégrale de Riemann. L'égalité* (I.6) *montre que l'on peut donc calculer l'intégrale de Lebesgue d'une fonction Riemann-intégrable par les méthodes classiques.*

Théorème I.5.4 *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et soit f une fonction localement Riemann-intégrable sur I. Alors f est Lebesgue-intégrable sur I si et seulement si l'intégrale de Riemann généralisée $\int_I f(x)\,dx$ est absolument convergente et on a*

$$\int_I f(x)\,dx = \int_I f(x)\,d\lambda(x). \tag{I.7}$$

Remarque I.5.3 *On constate que lorsqu'une intégrale généralisée existe, l'intégrale de Lebesgue existe si et seulement si l'intégrale est absolument convergente et on a l'égalité* (I.7).
On voit que les intégrales généralisées semi-convergentes échapperont ainsi aux théorèmes d'intégration. Ceci semble constituer une petite victoire de l'intégrale de Riemann sur l'intégrale de Lebesgue. Mais une intégrale généralisée n'est pas à proprement parler, une intégrale de Riemann.

Dans la suite, on notera $d\lambda(x) = dx$ pour $x \in \mathbb{R}$ et $d\lambda(x) = dx_1 dx_2 \dots dx_n$ pour $x \in \mathbb{R}^n$.

I.5.3 Théorème de Fubini

Nous énoncerons ce théorème pour des fonctions de deux variables réelles.

Théorème I.5.5 *Soient $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ mesurable et $E \times F$ un ensemble* *mesurable de* $I\!R^2$.

(i) Si f *est positive sur* $E \times F$ *alors on a*

$$\int_{E\times F} f(x,y)\,dxdy = \int_E dx \int_F f(x,y)\,dy = \int_F dy \int_E f(x,y)\,dx, \quad \text{(I.8)}$$

(= *éventuellement à* $+\infty$*) ;*

(ii) $f \in \mathcal{L}^1(E \times F) \Longleftrightarrow \int_E dx \int_F |f(x,y)|\,dy$ *ou* $\int_F dy \int_E |f(x,y)|\,dx$ *est finie ;*

(iii) Si $f \in \mathcal{L}^1(E \times F)$ *alors on a les égalités* (I.8).

Remarque I.5.4 *L'aspect pratique à retenir est que l'on peut calculer une intégrale double en choisissant l'ordre d'intégrabilité que l'on veut, pourvu que l'une au moins des intégrales itérées en module existe. L'existence des deux intégrales*

$$\int_E dx \int_F f(x,y)\,dy \text{ et } \int_F dy \int_E f(x,y)\,dx$$

n'implique pas l'intégrabilité de f *sur* $E \times F$

I.5.4 Changement de variables

Soient X et Y deux domaines de $I\!R^n$ et $\phi : Y \longrightarrow X$ une fonction bijective telle que ϕ et ϕ^{-1} soient de classe C^1.

On note $J_\phi(y)$ la matrice jacobienne de ϕ au point y :

$$J_\phi(y) = \left(\frac{\partial \phi_i}{\partial y_j}(y)\right)_{1\le i,j\le n} \quad \text{où} \;\; \phi = (\phi_1, \ldots, \phi_n) \;\; \text{et} \;\; y = (y_1, \ldots, y_n)$$

Théorème I.5.6 *Une fonction f est intégrable sur X si et seulement si $f(\phi(y))\left|\det J_\phi(y)\right|$ est intégrable sur Y et on a*

$$\int_X f(x)\,dx = \int_Y f(\phi(y))\left|\det J_\phi(y)\right|\,dy$$

Exemple I.5.1 *Soient $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction mesurable et $a \in \mathbb{R}^*$. On considère l'intégrale*

$$\int_{\mathbb{R}} f(ax)\,dx.$$

On effectue le changement de variable

$$y = ax \iff x = \frac{1}{a}y.$$

Ainsi, on a

$$\begin{array}{rccc} \phi : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & y & \longmapsto & x = \frac{1}{a}y, \end{array}$$

d'où $J_\phi(y) = \left(\frac{1}{a}\right)$ *et* $\det J_\phi(y) = \frac{1}{a}$.

On obtient finalement

$$\int_{\mathbb{R}} f(ax)\,dx = \frac{1}{|a|}\int_{\mathbb{R}} f(y)\,dy.$$

I.6 Espaces L^p

Soit $(X,\mathcal{A},\mu)$ un espace mesuré. L'ensemble $\mathcal{L}^1 = \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(X,\mathcal{A},\mu)$ ou $\mathcal{L}^1_{\mathbb{C}}(X,\mathcal{A},\mu)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Pour $f \in \mathcal{L}^1$, on pose

$$\|f\|_1 = \int_X |f| d\mu.$$

L'application $f \longrightarrow \|f\|_1$ n'est pas une norme. En effet,

$$\|f\|_1 = 0 \Longleftrightarrow f = 0 \text{ pp.}$$

C'est une semi norme sur $\mathcal{L}^1$ car

$$\|f + g\|_1 \leq \|f\|_1 + \|g\|_1, \forall f, g \in \mathcal{L}^1$$

$$\text{et } \|\alpha f\|_1 = |\alpha| \|f\|_1, \forall f \in \mathcal{L}^1, \forall \alpha \in \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C}.$$

On sait que pour tout $f, g \in \mathcal{L}^1$

$$f = g \text{ pp} \Longrightarrow \int_X f\, d\mu = \int_X g\, d\mu.$$

On introduit alors dans $\mathcal{L}^1$ la relation $\mathcal{R}$

$$f \mathcal{R} g \Longleftrightarrow f = g \text{ pp.}$$

On vérifie facilement que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence. On pose

$$L^1 = L^1(X,\mathcal{A},\mu) = \mathcal{L}^1/\mathcal{R}.$$

C'est donc l'espace vectoriel quotient, des classes d'équivalence des fonctions de $\mathcal{L}^1$ modulo l'égalité pp.

$$L^1 = \{\dot{f} :\ f \in \mathcal{L}^1\}.$$

Dans ce qui suit, on identifie $\dot{f}$ et f. Ainsi, si $f \in L^1$, f désignera l'ensemble des fonctions g telles que $g = f$ pp.

Proposition I.6.1 *L'application*

$$\begin{array}{rrcl} \|.\|_1 : & L^1 & \longrightarrow & I\!R_+ \\ & f & \longrightarrow & \|f\|_1 = \int_X |f| d\mu \end{array}$$

est bien définie et c'est une norme sur L^1.

En effet, $\|f\|_1$ est indépendant du représentant choisi dans la classe de f. De plus, pour tout $f \in L^1$

$$\|f\|_1 = 0 \Longleftrightarrow f = 0 \ \text{ pp} \Longleftrightarrow \dot{f} = \dot{0} \Longleftrightarrow f = 0 \ \text{ dans } L^1.$$

Il est important de noter que :

• L^1 est considéré comme un espace de fonctions (on ne distingue pas deux fonctions égales pp).

• L^1 est un espace vectoriel normé.

Définition I.6.1 *Pour $p \in [1, +\infty[$, on définit l'ensemble $L^p = \{\dot{f} : X \longrightarrow I\!R / \ |\dot{f}|^p \in L^1\}$.*

On a les résultats suivants :

Proposition I.6.2 *L'application*

$$\begin{array}{rcl} \|.\|_p : \ L^p & \longrightarrow & I\!R_+ \\ f & \longmapsto & \|f\|_p = \left(\int_X |f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \end{array}$$

est bien définie et c'est une norme sur L^p.

Proposition I.6.3 *(Inégalité de Hölder)*

Soient $p, q \in]1, +\infty[$. Si $f \in L^p$ et $g \in L^q$ avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, alors

$$fg \in L^1 \text{ et } \|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

Théorème I.6.1 *Pour $1 \leq p < +\infty$, L^p est un espace de Banach (espace vectoriel normé complet).*

I.7 Exercices

Exercice I.7.1 *Soit $X = I\!R$. On considère les deux familles*

$$\mathcal{F}_1 = \{]a,b[,\ a,\ b \in I\!R\}$$

et

$$\mathcal{F}_2 = \{[a,b],\ a,\ b \in I\!R\}.$$

Démontrer que :

$$\sigma(\mathcal{F}_1) = \sigma(\mathcal{F}_2).$$

Exercice I.7.2 *Soit X un ensemble non vide et $\mathcal{F}$ une famille de parties de X. On suppose que $X \in \mathcal{F}$ et que $\mathcal{F}$ est stable par passage au complémentaire.*

On note $\mathcal{F}'$ la plus petite famille contenant $\mathcal{F}$, stable par réunion et intersection dénombrable.

a/ Vérifier que $\mathcal{A} = \{E \in \mathcal{F}' : \ E^c \in \mathcal{F}'\}$ est une tribu sur X.

b/ On désigne par $\sigma(\mathcal{F})$ la tribu engendrée par $\mathcal{F}$. Montrer que $\mathcal{F}' = \sigma(\mathcal{F})$.

Exercice I.7.3 *Soient $(X,\mathcal{A},\mu)$ un espace mesuré et $(A_n)_n$ une suite d'ensembles mesurables. On pose $A = \bigcap_{n \in I\!N} \bigcup_{k \geq n} A_k$.*

1) Montrer que si la série $\sum_{n=0}^{+\infty} \mu(A_n)$ converge, alors $\mu(A) = 0$.

2) On suppose que $\mu(X)$ est finie et qu'il existe $s > 0$ tel que pour tout $n \in I\!N$, $\mu(A_n) \geq s$.

i) Montrer que $\mu(A) \geq s$.

ii) Montrer, à l'aide d'un contre exemple, que si $\mu(X) = +\infty$ alors il se peut que $\mu(A) < s$.

Exercice I.7.4 *Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré. Montrer que toute fonction constante sur X est mesurable.*

Exercice I.7.5 *On se place dans $(I\!R, \mathcal{L}, \lambda)$.*

a/ Montrer que toute fonction $f : I\!\!R \longrightarrow I\!\!R$ nulle presque partout (p.p.) est mesurable.

b/ Soit $f : I\!\!R \longrightarrow I\!\!R$ continue. Montrer que

$$f = 0 \text{ p.p.} \implies f = 0.$$

Exercice I.7.6 *Soit $f : I\!\!R \longrightarrow I\!\!R$ dérivable. La fonction $f' : I\!\!R \longrightarrow I\!\!R$ est-elle mesurable ?*

Exercice I.7.7 *Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré où μ est une mesure complète. On considère une suite $\{f_n : X \longrightarrow I\!\!R, n \in I\!\!N\}$ de fonctions mesurables qui converge p.p. vers une fonction f. Montrer que f est mesurable.*

Exercice I.7.8 *Soient $(X,\mathcal{A},\mu)$ un espace mesuré et $f : X \longrightarrow \overline{I\!\!R}_+$ mesurable. Montrer que*

$$\forall \alpha > 0 \text{ on a } \mu\left(\{x \in X,\, f(x) \geq \alpha\}\right) \leq \frac{1}{\alpha} \int_X f \, d\mu.$$

(Lemme de Tchebychev)

Exercice I.7.9 *Soient $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré, $f : X \longrightarrow \overline{I\!\!R}_+$ mesurable et N un ensemble négligeable. Montrer que*

$$\int_N f \, d\mu = 0.$$

Exercice I.7.10 *Soient* $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *un espace mesuré tel que* $\mu(X) < +\infty$ *et* $f : X \longrightarrow I\!R_+$ *une fonction intégrable. Pour tout* $n \in I\!N$*, on pose*

$$A_n = \{x \in X :\ n \leq f(x) < n+1\}$$

et

$$B_n = \{x \in X :\ f(x) \geq n\}.$$

a/ Montrer que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} n\mu(A_n) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mu(B_n).$$

b/ Montrer que la série $\sum_{n=0}^{+\infty} \mu(B_n)$ *est convergente.*

Exercice I.7.11 *Soient* $(X,\mathcal{A},\mu)$ *un espace mesuré et* $f : X \longrightarrow \overline{I\!R}_+$ *une fonction intégrable. Posons* $A_n = \{x \in X/\ f(x) > n\}$*. Montrer les assertions suivantes*

(a) $\forall \varepsilon > 0\ \ \exists A \in \mathcal{A}$ *tel que* $\mu(A) < +\infty$ *et* $\int_X f\, d\mu \leq \int_A f\, d\mu + \varepsilon.$

(b) $\lim_{n\to+\infty} n\mu(A_n) = 0.$

Exercice I.7.12 *On considère l'espace mesurable* $(I\!N,\mathcal{P}(I\!N))$*. L'application*

$$\mu_d : \mathcal{P}(I\!N) \longrightarrow \overline{I\!R}_+$$

définie par

$$\mu_d(A) = \begin{cases} card(A) & si\ \ A\ est\ fini \\ +\infty & si\ \ A\ est\ infini \end{cases}$$

est une mesure appelée mesure de dénombrement.

Montrer que toute fonction $f : \mathbb{N} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ *est mesurable et que* $\int_{\mathbb{N}} f \, d\mu_d = \sum_{n=0}^{+\infty} f(n)$.

Exercice I.7.13 *Soient* $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *un espace mesuré et* $\{f_n : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+, n \in \mathbb{N}^*\}$ *une suite croissante de fonctions mesurables. On suppose que* (f_n) *converge presque partout vers une fonction mesurable* f. *Montrer que*

$$\lim_{n \to +\infty} \int_X f_n \, d\mu = \int_X f \, d\mu.$$

Exercice I.7.14 *Soit* $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *un espace mesuré et* $\{f_n : X \longrightarrow \mathbb{R}_+, n \in \mathbb{N}^*\}$ *une suite de fonctions mesurables. Montrer que*

$$\int_X \sum_{n=1}^{+\infty} f_n \, d\mu = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_X f_n \, d\mu.$$

Exercice I.7.15 *Soit* $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *un espace mesuré,* $f \in \mathcal{L}^1$ *et* N *un ensemble négligeable. Montrer que*

$$\int_N f \, d\mu = 0.$$

Exercice I.7.16 *Soient* $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *un espace mesuré et* $f, g \in \mathcal{L}^1$. *Montrer que si* $f = g$ *p.p., alors* $\int_X f \, d\mu = \int_X g \, d\mu$.

Exercice I.7.17 *Soient* $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *un espace mesuré et* $f : X \longrightarrow I\!R$ *intégrable. Montrer que*

$$f = 0 \; pp \iff \forall A \in \mathcal{A} \quad \int_A f \, d\mu = 0.$$

Exercice I.7.18 *Soient* $(X,\mathcal{A},\mu)$ *un espace mesuré et* $f : X \longrightarrow I\!R$ *mesurable. Montrer que si* f *est intégrable alors l'ensemble* $\{x \in X/ \; f(x) \neq 0\}$ *peut s'exprimer comme une réunion dénombrable d'ensembles mesurables de mesure finie. La réciproque est-elle vraie ? Justifier votre réponse.*

Exercice I.7.19 *Soit la suite de fonctions*

$$f_n(x) = \frac{n^{\frac{3}{2}} x}{1 + n^2 x^2} \; ; \quad x \in [0,1] \; \text{ et } \; n \in I\!N.$$

a/ Etudier la convergence simple et uniforme de la suite (f_n) *sur* $[0,1]$.

b/ A-t-on le droit d'écrire

$$\lim_{n \to +\infty} \int_0^1 f_n(x) \, dx = \int_0^1 \lim_{n \to +\infty} f_n(x) \, dx \; ?$$

Exercice I.7.20 *Sachant que*

$$\int_0^{+\infty} \exp\left(-x^2\right) dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2},$$

calculer

$$\lim_{n \to +\infty} \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n dx.$$

Exercice I.7.21 *Soient* $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *un espace mesuré et* $\{f_n : X \longrightarrow \mathbb{R}_+, n \in \mathbb{N}\}$ *une suite de fonctions* μ*-intégrables qui converge simplement vers une fonction* f *intégrable. Pour tout* $n \in \mathbb{N}$*, on suppose que*

$$\int_X f_n \, d\mu = \int_X f \, d\mu.$$

Montrer que la suite (f_n) *converge vers* f *dans* L^1*.*

Exercice I.7.22 *Soient* $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *un espace mesuré et* $f : X \longrightarrow \mathbb{R}_+$ *une fonction intégrable. Déterminer* $\lim\limits_{n \to +\infty} \int_X f^n \, d\mu$*.*

Exercice I.7.23 *Démontrer que*

$$\int_0^{+\infty} \exp(-x) \cos \sqrt{x} \, dx = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{n!}{(2n)!}.$$

Exercice I.7.24 *Calculer* $\lim\limits_{n \to +\infty} \int_0^n \frac{dx}{1 + x + \cdots + x^n}$*.*

Exercice I.7.25 *Calculer de deux façons différentes*

$$\lim_{n \to +\infty} \int_0^1 nx \sin x (1-x)^n \, dx.$$

Exercice I.7.26 *Soient* $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *un espace mesuré et* $\{f_n : X \longrightarrow \mathbb{R}_+, n \in \mathbb{N}\}$ *une suite décroissante de fonctions positives mesurables qui converge simplement vers une fonction* f*. En supposant que* f_0 *est intégrable, montrer que*

$$\lim_{n \to +\infty} \int_X f_n \, d\mu = \int_X f \, d\mu.$$

Exercice I.7.27 *Chercher* $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^n \left(1-\dfrac{x}{n}\right)^n \exp\left(\dfrac{x}{2}\right)\,dx.$

Exercice I.7.28 *Calculer* $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty} \dfrac{nx\sin(x)\exp(-x)}{1+n^2x^2}dx.$

Exercice I.7.29 *On considère la suite de fonctions définies sur* $[0,1]$ *par*

$$f_n(x)=\begin{cases} n^{\frac{3}{2}}x & si \quad x\in[0,\frac{1}{n}] \\ \frac{1}{\sqrt{x}} & si \quad x\in[\frac{1}{n},1] \end{cases} \quad (n\in I\!N^*)$$

a/ Etudier la convergence simple de (f_n) *sur* $[0,1]$*.*

b/ Etudier la convergence uniforme de (f_n) *sur* $[0,1]$*.*

c/ A-t-on

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 f_n(x)\,dx=\int_0^1 \lim_{n\to+\infty} f_n(x)\,dx \ ?$$

Exercice I.7.30 *Soient* $(X,\mathcal{A},\mu)$ *un espace mesuré et* $\{f_n : X \longrightarrow I\!R, n\in I\!N\}$ *une suite de fonctions intégrables telle que*

$$\begin{cases} \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n \text{ est absolument convergente sur } X \text{ dans } I\!R, \\ \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \int_X |f_n(x)|\,d\mu \text{ est convergente dans } I\!R. \end{cases}$$

a/ Montrer que $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n$ *est intégrable et que*

$$\int_X \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)\,d\mu=\sum_{n=0}^{+\infty}\int_X f_n(x)\,d\mu.$$

b/ En utilisant la question a/, démontrer que

$$J=\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{\exp(x)-1}\,dx=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2+1}.$$

Exercice I.7.31 *Déterminer* $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^n \left(1-\dfrac{x}{n}\right)^n x^2\,dx.$

Exercice I.7.32 *Calculer* $I=\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln x}{1-x}\,dx.$

Exercice I.7.33 *Montrer que*

$$F(t)=\int_0^{+\infty}\frac{\exp\left(-x^2t\right)}{1+x^2}\,dx$$

est dérivable pour $t>0$ *et donner* $F'(t)$ *sous forme intégrale.*

Exercice I.7.34 *Montrer que*

$$\int_0^{+\infty}\exp\left(-x^2\right)\,dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

en considérant, pour tout $t\geq 0$*, les fonctions*

$$F(t)=\left(\int_0^t \exp\left(-x^2\right)\,dx\right)^2 \quad et \quad G(t)=\int_0^1\frac{\exp\left(-t^2(1+x^2)\right)}{1+x^2}\,dx.$$

Exercice I.7.35 *Soit* $f:\mathbb{R}^+\longrightarrow\mathbb{R}$ *une fonction mesurable. On suppose qu'il existe* $a\in\mathbb{R}$ *tel que*

$$\int_0^{+\infty}\exp\left(-ax\right)f(x)dx<+\infty.$$

Pour $t\in\mathbb{R}$*, on pose* $F(t)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\exp\left(-tx\right)f(x)\,dx$*. Montrer que la fonction* F *est dérivable sur* $I=]a,+\infty[$*.*

Exercice I.7.36 *Soit*

$$f(x,y)=\begin{cases} 0 & si \quad (x,y)=(0,0)\\ \frac{xy}{(x^2+y^2)^2} & si \quad (x,y)\in[-1,1]^2 \ et\ (x,y)\neq(0,0).\end{cases}$$

a/ Calculer $\int_{[-1,1]} dx \int_{[-1,1]} f(x,y)\, dy$ *et* $\int_{[-1,1]} dy \int_{[-1,1]} f(x,y)\, dx$.

b/ Vérifier que f *n'est pas intégrable sur* $[0,1] \times [0,1]$. *Quelle remarque peut-on faire ?*

Chapitre II

Transformation de Fourier dans L^1

II.1 Transformation de Fourier

Dans ce qui suit, L^1 désignera $L^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R})$ ou $L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$

Définition II.1.1 *Soit $f \in L^1$. On appelle transformée de Fourier de f, la fonction $\mathcal{F}f$ ou $\widehat{f}$ définie, pour tout $t \in \mathbb{R}$, par*

$$\mathcal{F}f(t) = \widehat{f}(t) = \int_{\mathbb{R}} \exp(-i2\pi tx) f(x)\, dx.$$

On vérifie facilement l'existence de cette intégrale .

L'application $\mathcal{F}$ qui à tout $f \in L^1$ associe $\widehat{f}$ s'appelle transformation de Fourier.

Pour $f \in L^1$, on pose

$$\overline{\mathcal{F}}f(t) = \int_{\mathbb{R}} \exp(i2\pi tx) f(x)\, dx,$$

appelée transformée de Fourier conjuguée de f.

Théorème II.1.1 *Si $f \in L^1$ alors $\widehat{f}$ est continue et bornée sur $I\!R$.*

Démonstration :

Pour tout $t \in I\!R$, l'application $x \longmapsto \exp(-i2\pi tx)f(x)$ est mesurable et pour tout $x \in I\!R$, l'application

$$t \longmapsto \exp(-i2\pi tx)f(x) \text{ est continue.}$$

On a

$$\left|\exp(-i2\pi tx)f(x)\right| \leq |f(x)| \quad \text{avec} \quad f \in L^1.$$

Par conséquent l'application

$$t \longmapsto \widehat{f}(t) = \int_{I\!R} \exp(-i2\pi tx)f(x)\, dx$$

est continue sur $I\!R$. D'autre part

$$|\widehat{f}(t)| = \left|\int_{I\!R} \exp(-i2\pi tx)f(x)\, dx\right| \leq \|f\|_1 < +\infty$$

donc $\sup\{|\widehat{f}(t)|, t \in I\!R\} = \|\widehat{f}\|_\infty \leq \|f\|_1$ ce qui prouve que $\widehat{f}$ est bornée.

Théorème II.1.2 *Si $f \in L^1$ alors $\lim\limits_{|t|\to+\infty} |\widehat{f}(t)| = 0$.*

Proposition II.1.1 *Soient f et $g \in L^1$. Les fonctions $f.\widehat{g}$, $\widehat{f}.g$ sont dans L^1 et*

$$\int_{I\!R} f(u)\widehat{g}(u)\, du = \int_{I\!R} \widehat{f}(x)g(x)\, dx.$$

Démonstration :

Puisque $\widehat{g}$ est bornée, alors $f.\widehat{g} \in L^1$. De même $\widehat{f}.g \in L^1$. On a

$$\begin{aligned}
\int_{I\!R} f(u)\widehat{g}(u)\,du &= \int_{I\!R} f(u) \left(\int_{I\!R} \exp(-i2\pi ux)g(x)\,dx\right) du \\
&= \int_{I\!R} g(x) \left(\int_{I\!R} \exp(-i2\pi ux)f(u)\,du\right) dx \\
&= \int_{I\!R} \widehat{f}(x)g(x)\,dx
\end{aligned}$$

car l'application $\varphi : (x,u) \longmapsto \exp(-i2\pi ux)f(u)g(x)$ est intégrable. En effet

$$\int_{I\!R} dx \int_{I\!R} |\varphi(x,u)|\,du = \int_{I\!R} |f(u)|\,du \int_{I\!R} |g(x)|\,dx < +\infty.$$

La proposition découle du théorème (I.5.5).

Remarque II.1.1 *Les résultats ci-dessus sont valables pour $\overline{\mathcal{F}}$.*

Pour simplifier les écritures des formules, on introduit la notation $\mathcal{F}(f(x))$ à la place de $\mathcal{F}f$.

II.2 Propriétés de la transformée de Fourier

a) Si $x^k f(x) \in L^1$ pour $k = 0,1,\dots,n$ alors $\widehat{f}$ est n fois dérivable et on a pour $k = 1,\dots,n$

$$\left(\widehat{f}\right)^{(k)} = D^k\widehat{f} = (-i2\pi)^k\,\mathcal{F}\left(x^k f(x)\right).$$

Démonstration :

Supposons $\widehat{f}$ dérivable jusqu'à l'ordre p avec $p < n$.

- L'application $h_x : t \longmapsto \exp(-i2\pi tx)f(x)$ est C^∞ ;
- L'application $x \longmapsto h_x^{(p)}(t) = (-i2\pi x)^p \exp(-i2\pi tx)f(x)$ est intégrable ;
- De plus $t \longmapsto (-i2\pi x)^p \exp(-i2\pi tx)f(x)$ est dérivable et
- $\left|(-i2\pi x)^{p+1} \exp(-i2\pi tx)f(x)\right| \leq (2\pi)^{p+1} \left|x^{p+1}f(x)\right| \in L^1$, pour tout $p < n$.

Le théorème (I.5.2) donne

$$\left(\widehat{f}\right)^{(p+1)}(t) = (-i2\pi)^{p+1}\, \mathcal{F}\left(x^{p+1}f(x)\right)(t).$$

b) Si, pour tout $k \in \{0,1,\ldots,n\}$, la fonction $f^{(k)}$ est continue et intégrable, alors

$$\mathcal{F}(f^{(k)})(t) = (2i\pi t)^k \widehat{f}(t).$$

Démonstration :

- On a

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(f')(t) &= \lim_{a\to+\infty} \int_{-a}^{a} \exp(-i2\pi tx)f'(x)\, dx \\
&= \left[\exp(-i2\pi tx)f(x)\right]_{-a}^{a} + \int_{-a}^{a} (2i\pi t)\exp(-i2\pi tx)f(x)\, dx.
\end{aligned}$$

f' est continue donc $\displaystyle\int_0^a f'(x)\, dx = f(a) - f(0)$. Comme $f' \in L^1$, alors $l = \displaystyle\lim_{a\to+\infty} f(a)$ existe. On a $l = 0$, car sinon, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} |f(x)| = |l| > 0$ et pour $\varepsilon \in]0,|l|[$, il existe $A > 0$ tel que pour tout $x > A$: $|f(x)| > |l| - \varepsilon$ ce qui est absurde.

On montre de même que $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$. Ainsi

$$\mathcal{F}(f^{'})(t) = (2i\pi t)\widehat{f}(t)$$

• Pour $n \geq 2$ et compte tenu des hypothèses le résultat s'obtient par itérations successives de la formule ci-dessus.

c) $\mathcal{F}$ est linéaire. C'est une conséquence de la linéarité de l'intégrale.

d) Soient $f \in L^1$ et $a \in I\!R^*$. Si $g(x) = f(ax)$, alors

$$\widehat{g}(t) = \frac{1}{|a|}\,\widehat{f}\left(\frac{t}{a}\right)$$

Démonstration :

On effectue le changement de variables $y = ax$

$$\begin{aligned}
\widehat{g}(t) &= \int_{I\!R} \exp\left(-i2\pi tx\right) f(ax)\, dx \\
&= \int_{I\!R} \exp\left(-i2\pi t\frac{1}{a}y\right) f(y)\frac{1}{|a|}\, dy \\
&= \tfrac{1}{|a|}\widehat{f}\left(\tfrac{t}{a}\right)
\end{aligned}$$

e) Pour $f \in L^1$, on a les propriétés suivantes :

i) $\overline{\mathcal{F}f} = \overline{\mathcal{F}}\ \overline{f}$ où $\overline{f}$ est la conjuguée de f lorsque celle-ci est à valeurs dans $\mathbb{C}$;

ii) $\mathcal{F}f_\sigma = \overline{\mathcal{F}}f = (\mathcal{F}f)_\sigma$ où f_σ est la symétrisée de f définie par $f_\sigma(x) = f(-x)$;

iii) Si f est paire alors $\widehat{f}$ est paire ;

iv) Si f est impaire alors $\widehat{f}$ est impaire ;

v) Si f est réelle paire alors $\widehat{f}$ est réelle paire ;

vi) Si f est réelle impaire alors $\widehat{f}$ est imaginaire impaire ;

vii) $\mathcal{F}(T_a f)(t) = \exp(-i2\pi a t)\widehat{f}(t)$ où $T_a f$ est la translatée de f définie par $T_a f(x) = f(x-a)$;

viii) $T_a\widehat{f} = \mathcal{F}(\exp(i2\pi a x)f(x))$.

II.3 Transformée de Fourier inverse

Notons que si $f \in L^1$, sa transformée de Fourier n'est pas nécessairement dans L^1.

Théorème II.3.1 *Si f et $\widehat{f}$ sont dans L^1, alors*

$$\overline{\mathcal{F}}\widehat{f}(t) = f(t), \quad \textit{pour tout } t \textit{ où } f \textit{ est continue.}$$

Corollaire II.3.1 *Si f est continue et $f, \widehat{f} \in L^1$ alors*

$$\overline{\mathcal{F}}\widehat{f} = f.$$

Théorème II.3.2 *Si f et $\widehat{f}$ sont dans L^1, alors*

$$\overline{\mathcal{F}}\widehat{f} = f \quad p.p.$$

Corollaire II.3.2 *i) Pour* $f \in L^1$, *on a* $\widehat{f} = 0 \Longrightarrow f = 0 \quad p.p.$

ii) Pour $f \in L^1 \cap C^0(I\!R)$, *on a* $\widehat{f} = 0 \Longrightarrow f = 0$.

iii) Pour $f, g \in L^1$, *on a* $\widehat{f} = \widehat{g} \Longrightarrow f = g \quad p.p.$

iv) Pour $f, g \in L^1 \cap C^0(I\!R)$, *on a* $\widehat{f} = \widehat{g} \Longrightarrow f = g$.

Théorème II.3.3 *(Formule de réciprocité de Fourier).*

On suppose que :

i) $f \in L^1$;

ii) Il existe un nombre fini de réels $a_1, a_2, \ldots, a_p$ *tels que* f *soit de classe* C^1 *sur* $]-\infty, a_1[, \;]a_1, a_2[, \; \ldots, \;]a_p, +\infty[$;

iii) $f' \in L^1$.

Alors, on a

$$\lim_{a \to +\infty} \int_{-a}^{a} \exp(i2\pi t x) \widehat{f}(x) \, dx = \frac{1}{2} \left(f(t^+) + f(t^-) \right).$$

Proposition II.3.1 *Supposons que* $f \in C^0(I\!R)$ *et* $f, \widehat{f} \in L^1$. *Alors, on a pour tout* $t \in I\!R$

$$\mathcal{F}\widehat{f}(t) = f_\sigma(t).$$

II.4 Convolution

Définition II.4.1 *Soient f et $g : I\!R \longrightarrow \mathbb{C}$. On appelle produit de convolution de f et g, la fonction*

$$f * g(x) = \int_{I\!R} f(u)g(x-u)\,du.$$

Proposition II.4.1 *Si f et $g \in L^1$ alors*

i) $f * g = g * f$;

ii) $f * g \in L^1$;

iii) $\mathcal{F}(f * g) = \mathcal{F}(f)\,\mathcal{F}(g)$.

II.5 Exercices sur la transformation de Fourier

Exercice II.5.1 *Soit $a \in \mathbb{C}$ tel que $\mathcal{R}e(a) > 0$ et on pose*

$$\mathcal{U}(x) = \begin{cases} 1 & si \quad x > 0 \\ 0 & si \quad x \leq 0 \end{cases}$$

Déterminer la transformée de Fourier de f dans les cas suivants

a/ $f(x) = \exp(-ax)\mathcal{U}(x)$;

b/ $f(x) = \exp(ax)\mathcal{U}(-x)$;

c/ $f(x) = \frac{x^k}{k!}\exp(-ax)\mathcal{U}(x)$;

d/ $f(x) = \frac{x^k}{k!}\exp(ax)\mathcal{U}(-x)$;

e/ $f(x) = \exp(-a|x|)$;

f/ $f(x) = sign(x) \exp(-a|x|)$.

Exercice II.5.2 *Calculer la transformée de Fourier de* $f(x) = \exp\left(-ax^2\right)$, $a > 0$, *via une équation différentielle.*

Exercice II.5.3 *Vérifier que la convolution est une opération bilinéaire continue de*

$L^1 \times L^1$ *dans* L^1 *telle que* $\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$.

Exercice II.5.4 *Calculer* $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos(xy)}{1+y^2}\, dy, \quad x \in I\!R$.

Exercice II.5.5 *Montrer que si* $f \in C^2(I\!R)$ *et* $f,\ f',\ f'' \in L^1$, *alors* $\widehat{f} \in L^1$.

Exercice II.5.6 *On se propose de démontrer le résultat suivant :*

Si f *et* $\widehat{f} \in L^1$ *alors* $\overline{\mathcal{F}}\widehat{f}(t) = f(t)$, *pour tout* t *où* f *est continue.*

a/ On pose pour $n \in I\!N^*$, $g_n(x) = \exp\left(-\frac{2\pi}{n}|x|\right)$. *Calculer* $\widehat{g_n}(s)$.

b/ Montrer que

$$\int_{I\!R} \widehat{f}(x) g_n(x) \exp(i2\pi tx)\, dx = \int_{I\!R} f(u) \widehat{g_n}(u-t)\, du, \quad t \in I\!R.$$

c/ Démontrer que

$$\lim_{n \to +\infty} \int_{I\!R} \widehat{f}(x) g_n(x) \exp(i2\pi tx)\, dx = \overline{\mathcal{F}}\widehat{f}(t).$$

d/ Calculer $\int_{I\!R} \widehat{g_n}(s)\, ds$.

e/ Vérifier que

$$\int_{I\!R} f(u)\widehat{g_n}(u-t)\, du - f(t) = \int_{I\!R} [f(s+t) - f(t)]\, \widehat{g_n}(s)\, ds.$$

f/ On suppose que f *est continue en* t. *Montrer que* $\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \eta > 0$ *tel que*

1. $\left| \int_{|s|\leq\eta} [f(s+t) - f(t)]\, \widehat{g_n}(s)\, ds \right| \leq \varepsilon,$
2. $\lim_{n\to+\infty} \int_{|s|>\eta} \left| f(s+t) - f(t) \right| \widehat{g_n}(s)\, ds = 0.$
3. *Conclure.*

Exercice II.5.7 *Déterminer* $f \in C^0(I\!R) \cap L^1$ *paire et solution de l'équation intégrale*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cos(2\pi t x)\, dx = \begin{cases} 1 - |2\pi t| & si \quad |t| < \frac{1}{2\pi} \\ 0 & si \quad |t| \geq \frac{1}{2\pi} \end{cases}$$

En déduire les valeurs de $I = \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos x}{x^2}\, dx$ *et* $J = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx.$

Exercice II.5.8 *Déterminer* $\widehat{f}$ *si* f *est définie sur* $I\!R$ *par* $f(x) = \exp\left(-x - x^2\right)$.

Exercice II.5.9 *Soit* f *une fonction paire de* L^1. *Comparer* $\mathcal{F}f$ *et* $\overline{\mathcal{F}}f$. *Même question si* f *est impaire.*

Calculer $\mathcal{F}f$ *et* $\overline{\mathcal{F}}f$ *pour*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{a} - \frac{|x|}{a^2} & si \quad |x| \leq a \\ 0 & si \quad x > a \end{cases} \quad ; \quad a > 0.$$

Exercice II.5.10 *Une fonction mesurable* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ *est dite à décroissance rapide (D.R.) si*

$$\forall p \in \mathbb{N} \quad \lim_{|x| \to +\infty} \left| x^p f(x) \right| = 0.$$

1) Donner un exemple d'une fonction à (D.R.).

2) Montrer que si f *est à (D.R.) et si* $|f|$ *est intégrable sur tout compact de* $\mathbb{R}$ *alors*

$$\forall p \in \mathbb{N} \ \ x^p f(x) \in L^1.$$

3) Montrer que

$$\left[f \in L^1 \text{ et } f \text{ est à (D.R.)} \right] \implies \widehat{f} \in C^\infty(\mathbb{R}).$$

4) Montrer que

$$\left[f \in C^\infty(\mathbb{R}) \ \text{ et } \ \forall k \in \mathbb{N} \ \ f^{(k)} \in L^1 \right] \implies \widehat{f} \text{ est à (D.R.)}.$$

5) Montrer que

$$\left[f \in C^0(\mathbb{R}) \ \text{ et } \ f \text{ est à (D.R.)} \right] \implies f \in L^1 \cap L^2.$$

Exercice II.5.11 *Considérons un signal $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ intégrable. Trouver une relation liant la densité spectrale d'énergie définie par*

$$d : t \longmapsto \left|\widehat{f}(t)\right|^2$$

et la fonction d'autocorrélation définie par

$$c : x \longmapsto \int_{\mathbb{R}} f(u)\overline{f(u-x)}\, du.$$

Exercice II.5.12 *Résoudre dans $C^0(\mathbb{R}) \cap L^1$, l'équation intégrale*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-a|x-t|\right) f(t)\, dt = \exp\left(-x^2\right)$$

où a est un réel strictement positif.

Chapitre III

Théorie élémentaire des distributions

III.1 Introduction

En physique, on utilise souvent des fonctions "singulières" dont les propriétés sont contradictoires. On se propose, par exemple, de représenter une masse unidimensionnelle unité concentrée au point $x = 0$. La fonction densité correspondante serait la limite d'une suite de fonctions densités $d_h(x)$ définie par

$$d_h(x) = \begin{cases} \frac{1}{2h} & si \quad |x| \leq h \\ \\ 0 & si \quad |x| > h \end{cases}$$

La fonction $d_h(x)$ a aussi la propriété suivante

$$\int_{I\!R} d_h(x)\, dx = 1 \quad \text{(masse totale)}$$

Si l'on admet l'existence d'une densité limite notée δ; celle-ci devrait vérifier

i) $\delta(x) = 0$ si $x \neq 0$

ii) $\delta(x) = +\infty$ si $x = 0$

iii) $\int_{I\!R} \delta(x)dx = 1$

appelée "fonction de Dirac". Elle est représentée graphiquement par

Elle représente de façon générale en physique, l'impulsion unité à l'origine.

Or on constate que les trois conditions i), ii) et iii) ci-dessus, sont incompatibles pour une fonction. En effet, δ étant nulle presque partout, son intégrale doit être nulle. Alors que faire?

Les physiciens (notamment Dirac vers 1920) ne se sont pas laissés arrêter par la contradiction. L'outil était commode, même s'il n'était pas satisfaisant d'un point de vue conceptuel. Ils utilisèrent aussi, sans rigueur mathématique, d'autres propriétés pour δ. Par exemple

- $\int_{I\!R} \delta(x)\phi(x)dx = \phi(0)$ pour toute "bonne fonction" ϕ;
- La fonction δ est la "dérivée" de l'échelon unité de Heaviside $\mathcal{U}(x)$.

Il a fallu attendre 1946 pour que soit construite, par Laurent Schwartz, une théorie complète de ces nouveaux objets mathématiques. C'est la théorie des distributions qui est devenue depuis d'un usage quasiment obligatoire en physique. On obtient avec les distributions une généralisation de la notion de fonction. La théorie des distributions rend compte également de la nouvelle dérivation, appelée "dérivation au sens des distributions" notion globale, contrairement à la dérivation usuelle. Notons au passage qu'une fonction continue sera dérivable au sens des distributions et même indéfiniment dérivable. Précisons pour terminer que nous n'abordons ici que les aspects élémentaires de cette théorie.

III.2 Espace $\mathcal{D}$ des fonctions tests

On considère $f : I\!\!R^n \longrightarrow I\!\!R$ ou $\mathbb{C}$

Définition III.2.1 *On appelle support de f l'ensemble*

$$supp(f) = \overline{\{x \in I\!\!R^n \ : \ f(x) \neq 0\}}$$

Remarque III.2.1 *Le support de f est un fermé en dehors duquel f est nulle. De plus, c'est le plus petit fermé ayant cette propriété.*

On introduit l'ensemble

$$\mathcal{D}(I\!\!R^n) = \mathcal{D} = \{f \in C^\infty(I\!\!R^n)/\ supp(f) \ \ borné\}.$$

Remarque III.2.2 *L'ensemble $\mathcal{D} \neq \{0\}$. En effet, la fonction*

$$\rho : I\!\!R \longrightarrow I\!\!R$$

définie par

$$\rho(x) = \begin{cases} 0 & si \ \ |x| \geq 1 \\ e^{-\left(\frac{1}{1-x^2}\right)} & si \ \ |x| < 1 \end{cases}$$

est telle que $supp(\rho) = [-1,1]$ *et* $\rho \in C^\infty(I\!R)$.

La fonction ρ *a l'allure suivante :*

Propriétés III.2.1 • *Muni de l'addition et de la multiplication par un scalaire,* $\mathcal{D}$ *est un* $\mathbb{C}$*-espace vectoriel.*

• $\mathcal{D}$ *est une algèbre* ($f \in \mathcal{D}$, $g \in \mathcal{D} \Longrightarrow fg \in \mathcal{D}$).

• *Si* $\varphi \in \mathcal{D}$ *alors* $\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \in \mathcal{D}$ *pour tout* $i \in \{1,2,\ldots,n\}$.

• *Si* $\varphi \in \mathcal{D}$ *et* $\psi \in C^\infty$, *alors* $\varphi\psi \in \mathcal{D}$.

Définition III.2.2 *(Convergence dans* $\mathcal{D}$*)*

Soit (φ_m) *une suite de fonctions de* $\mathcal{D}$. *On dit que* (φ_m) *converge vers* $\varphi \in \mathcal{D}$ *si*

1) Il existe un compact K *fixe tel que pour tout* m, $supp(\varphi_m) \subset K$;

2) Pour tout $k \in I\!N$, *les dérivées partielles d'ordre* k *des* φ_m *convergent uniformément (quand* $m \longrightarrow +\infty$*) vers les dérivées partielles correspondantes de* φ.

III.3 Les distributions

Définition III.3.1 *On appelle distibution sur $I\!R^n$ une forme linéaire continue sur $\mathcal{D}$.*

On désignera par $\mathcal{D}'$ l'ensemble des distributions (sur $I\!R^n$).

Pour $T \in \mathcal{D}'$ et $\varphi \in \mathcal{D}$, on a $T(\varphi) \in I\!R$ ou $\mathbb{C}$. On posera dans toute la suite $T(\varphi) =< T,\varphi >$ où $< .,. >$ désigne le crochet de dualité.

Définition III.3.2 *La fonctionnelle T est une distribution si elle vérifie*

1) $\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}, \forall \varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{D} \quad < T,\lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2 >= \lambda_1 < T,\varphi_1 > +\lambda_2 < T,\varphi_2 >$ *;*

2) Si $\varphi_m \longrightarrow \varphi$ *dans* $\mathcal{D}$ *alors* $< T,\varphi_m > \longrightarrow < T,\varphi >$.

Le deuxième point est équivalent à

$$[\varphi_m \longrightarrow 0 \ \ dans \ \ \mathcal{D} \implies < T,\varphi_m > \longrightarrow 0] \, .$$

Définitions III.3.1 *L'addition dans $\mathcal{D}'$ et la multiplication par un scalaire sont définies par :*

- $\forall\ S, T \in \mathcal{D}' \quad < S + T,\varphi >=< S,\varphi > + < T,\varphi > \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}$;
- $\forall\ S \in \mathcal{D}' \ \ \forall \lambda \in \mathbb{C} \quad < \lambda S,\varphi >= \lambda < S,\varphi > \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}$.

Proposition III.3.1 *Muni de l'addition et de la multiplication par un scalaire, l'ensemble des distributions $\mathcal{D}'$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$.*

Donnons à présent deux exemples importants de distributions.

Exemple III.3.1 *L'ensemble* $L^1_{loc}(I\!R^n)$ *désigne l'espace des classes de fonctions* $f : I\!R^n \longrightarrow I\!R$ *ou* $\mathbb{C}$ *intégrables sur tout compact de* $I\!R^n$. *A toute fonction* $f \in L^1_{loc}(I\!R^n)$, *on associe une distribution. En effet, soit* f *une telle fonction, on définit* T_f *par :*

$$\forall \varphi \in \mathcal{D} \quad < T_f, \varphi >= \int_{I\!R^n} f(x)\varphi(x)dx.$$

On montre que T_f *est bien une distribution.*

Remarque III.3.1 *On montre que pour tout* $f, g \in L^1_{loc}(I\!R^n)$,

$$f = g \ p.p. \Longleftrightarrow T_f = T_g.$$

ce qui permet d'identifier f *et* T_f. *Ainsi, pour tout* $f \in L^1_{loc}(I\!R^n)$ *on écrira*

$$< f, \varphi >=< T_f, \varphi >= \int_{I\!R^n} f(x)\varphi(x)dx.$$

Exemple III.3.2 *La distribution de Dirac (au point 0) est définie, pour tout* $\varphi \in \mathcal{D}$, *par :*

$$< \delta, \varphi >= \varphi(0).$$

La distribution de Dirac au point a *est définie, pour tout* $\varphi \in \mathcal{D}$, *par :*

$$< \delta_a, \varphi >= \varphi(a).$$

Définition III.3.3 *(Distribution régulière)*

Une distribution est dite régulière si elle correspond à une fonction localement intégrable.

La distribution T est régulière si et seulement si il existe une fonction f localement intégrable telle que $T = T_f$.

Dans le cas contraire, on dira que T est singulière.

Proposition III.3.2 *La distribution de Dirac est singulière.*

III.4 Opérations sur les distributions

III.4.1 Multiplication d'une distribution par une fonction C^∞

On ne peut pas définir de façon générale le produit de deux distributions. Par exemple, la fonction f définie par, $f(x) = \frac{1}{\sqrt{|x|}}$ est localement intégrable, on peut donc lui associer une distribution T_f, mais on ne peut pas le faire pour $f.f = f^2$. On n'a pas $T_f.T_f = T_{f^2}$.

On peut cependant définir le produit d'une distribution par une fonction C^∞. En effet, si $f \in L^1_{loc}(I\!R^n)$ et $\alpha \in C^\infty(I\!R^n)$, alors on constate que

$$< T_{\alpha f}, \varphi > = < T_f, \alpha\varphi > \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}.$$

Ceci nous amène à la définition suivante :

$$\forall T \in \mathcal{D}' \ \forall \alpha \in C^{\infty}(I\!R^n) \quad < \alpha T, \varphi > = < T, \alpha \varphi > \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}.$$

III.4.2 Dérivation des distributions

Prenons $f \in C^1(I\!R)$. Pour tout $\varphi \in \mathcal{D}$ on a

$$< T_{f'}, \varphi > = \int_{I\!R} f' \varphi dx = [f\varphi]_{-\infty}^{+\infty} - \int_{I\!R} f \varphi' dx.$$

Comme $[f\varphi]_{-\infty}^{+\infty} = 0$, alors $< T_{f'}, \varphi > = - < T_f, \varphi' >$.

Définition III.4.1 *Soit $T \in \mathcal{D}'$. On définit sa dérivée par rapport à x_i par*

$$\forall \varphi \in \mathcal{D} \ \left\langle \frac{\partial T}{\partial x_i}, \varphi \right\rangle = - \left\langle T, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right\rangle.$$

Proposition III.4.1 *Si $T \in \mathcal{D}'(I\!R^n)$ alors $\frac{\partial T}{\partial x_i} \in \mathcal{D}'(I\!R^n)$.*

Il découle de la proposition (III.4.1) qu'une distribution est toujours dérivable au sens des distributions et que ses dérivées sont elles mêmes des distributions. Une distribution est donc indéfiniment dérivable (C^{∞}) au sens des distributions.

Proposition III.4.2 *Pour T et $S \in \mathcal{D}'(I\!R^n)$ on a*

$$\frac{\partial (T+S)}{\partial x_i} = \frac{\partial T}{\partial x_i} + \frac{\partial S}{\partial x_i} \qquad \text{(Dérivation d'une somme).}$$

Proposition III.4.3 *Soit $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ on a*

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial T}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial T}{\partial x_i} = \frac{\partial^2 T}{\partial x_i \partial x_j} \qquad \text{(Egalité de Schwartz).}$$

Proposition III.4.4 *Soit $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ et soit $\lambda \in \mathbb{C}$*

$$\frac{\partial(\lambda T)}{\partial x_i} = \lambda \frac{\partial T}{\partial x_i}.$$

Proposition III.4.5 *Soient $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ et $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. On a*

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(fT) = \frac{\partial f}{\partial x_i} T + f \frac{\partial T}{\partial x_i}.$$

III.4.3 Convergence d'une suite de distributions

Définition III.4.2 *On dit que la suite (T_m) de distributions converge vers la distribution T si*

$$\forall \varphi \in \mathcal{D} \quad < T_m, \varphi > \longrightarrow < T, \varphi > .$$

Remarques III.4.1 • *Il s'agit donc de la limite simple sur l'ensemble des fonctions tests. On écrira*

$$T = \lim_m T_m \text{ ou } T_m \xrightarrow{\mathcal{D}'} T.$$

• *La convergence d'une suite de fonctions localement intégrables (f_m) vers f localement intégrable, au sens des distributions s'écrit*

$$f_m \xrightarrow{\mathcal{D}'} f \Longleftrightarrow \forall \varphi \in \mathcal{D} \quad \int_{\mathbb{R}} f_m \varphi dx \longrightarrow \int_{\mathbb{R}} f \varphi dx.$$

Proposition III.4.6 *Si* $T_m \xrightarrow{\mathcal{D}'} T$ *alors* $\frac{\partial T_m}{\partial x_i} \xrightarrow{\mathcal{D}'} \frac{\partial T}{\partial x_i}$ $\forall i = 1,2,\ldots,n.$

Définition III.4.3 *Soit* (T_m) *une suite de distributions. On dit que la série* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} T_k$ *converge et a pour somme* S *si la suite des sommes partielles* $S_m = \sum\limits_{k=0}^{m} T_k$ *converge vers la distribution* S.

Remarque III.4.1 *Compte tenu des résultats précédents si* $S = \sum\limits_{k=0}^{\infty} T_k$ *alors*

$$\frac{\partial S}{\partial x_i} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\partial T_k}{\partial x_i}.$$

On peut dériver terme à terme une série convergente de distributions. Il n'y a donc aucune précaution spéciale à prendre.

III.5 Exercices

Exercice III.5.1 *Soit* $\mathcal{U}(x)$ *la fonction échelon unité*

$$\mathcal{U}(x) = \begin{cases} 0 & si \quad x < 0 \\ 1 & si \quad x \geq 0. \end{cases}$$

Chercher sa dérivée au sens des distributions.

Exercice III.5.2 *Soit la suite* (f_n) *définie par*

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{n}{2} & si \quad |x| \leq \frac{1}{n} \\ \\ 0 & si \quad |x| > \frac{1}{n}. \end{cases}$$

Chercher $\lim\limits_{n} \, f_n$ *au sens des distributions.*

Exercice III.5.3 *Soit la suite* $(a_n) \subset I\!R$ *telle que* $a_n \longrightarrow a$*. Vérifier que* $\delta_{a_n} \xrightarrow{\mathcal{D}'} \delta_a$.

Exercice III.5.4 *On pose* $f_n(x) = \sin(2\pi n x)$*. Montrer que* $f_n \xrightarrow{\mathcal{D}'} 0$.

Exercice III.5.5 *Montrer que*

$$f_n \xrightarrow{L^1} f \Longrightarrow f_n \xrightarrow{\mathcal{D}'} f.$$

Exercice III.5.6 *Calculer dans* $\mathcal{D}'$

a/ $\left(\frac{d^2}{dx^2} + \omega^2\right)\left(\frac{\mathcal{U}(x)\sin(\omega x)}{\omega}\right) \;\; \omega \neq 0$ *;*

b/ $\left(\frac{d}{dx} - \lambda\right)(\mathcal{U}(x)\exp(\lambda x)) \;\; \lambda \in \mathbb{C}$*.*

Exercice III.5.7 *Montrer que la distribution* δ *de Dirac n'est pas régulière.*

Exercice III.5.8 *a/ Vérifier que* $\ln|x| \in L^1_{loc}(I\!R)$.

b/ Soit $\varphi \in \mathcal{D}(I\!R)$*. Calculer*

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \; [\varphi(\varepsilon) - \varphi(-\varepsilon)] \ln(\varepsilon).$$

c/ Démontrer que l'on a, au sens des distributions

$$(\ln|x|)' = Vp\left(\frac{1}{x}\right)$$

où $Vp\left(\frac{1}{x}\right)$ *désigne la valeur principale de* $\frac{1}{x}$*, définie pour tout* $\varphi \in \mathcal{D}(I\!R)$*, par*

$$\left\langle Vp\left(\frac{1}{x}\right), \varphi \right\rangle = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{|x| \geq \varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x}\, dx.$$

d/ Vérifier que $xVp\left(\frac{1}{x}\right) = 1$.

Exercice III.5.9 *Soit* $\delta \in \mathcal{D}'(I\!R)$ *la distribution de Dirac.*

a/ Pour tout $f \in C^\infty(I\!R)$*, vérifier que* $f\delta = f(0)\delta$.

b/ Pour tout $n \in I\!N^*$*, montrer que* $x\delta^{(n)} = -n\delta^{(n-1)}$.

c/ En admettant que la distribution $T = c\delta$, $c \in I\!R$*, est la seule solution de l'équation au sens des distributions* $xT = 0$*, résoudre dans* $\mathcal{D}'$ *l'équation* $x^n T = 0$.

Exercice III.5.10 *Soit* $f \in L^1(I\!R)$ *telle que* $\int_{I\!R} f(x)dx = 1$*. On pose* $f_n(x) = nf(nx)$*. Chercher* $\lim_n f_n$ *au sens des distributions.*

Exercice III.5.11 *Trouver une distribution* $y = f\mathcal{U}$ *(où* $f \in C^\infty(I\!R)$ *et* $\mathcal{U}$ *est la distribution échelon unité) qui satisfait, au sens des disributions, l'équation de l'oscillateur soumis à un choc à l'instant* $t = 0$

$$y" + \omega^2 y = k\delta \qquad (\omega > 0,\, k > 0).$$

Exercice III.5.12 *On pose*

$$\rho(x) = \begin{cases} 0 & si \;\; |x| \geq 1 \\ \\ e^{-\left(\frac{1}{1-x^2}\right)} & si \;\; |x| < 1. \end{cases}$$

1/ Soit $\varphi_0(x) = c\rho(x)$ *où la constante* c *est telle que* $\int_{I\!R} \varphi_0(x)dx = 1.$

On pose pour

$$\varepsilon > 0, \quad \psi_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon}\varphi_0\left(\frac{x}{\varepsilon}\right).$$

Montrer que $h = \psi_\varepsilon * \chi_{[-2\varepsilon, 2\varepsilon]} \in \mathcal{D}(I\!R).$

2/ Donner le support de h.

3/ Montrer que $h(x) = 1$ *pour* $x \in [-\varepsilon, +\varepsilon]$.

4/ Soit $f \in C^\infty(I\!R)$. *On considère la fonction*

$$g(x) = \begin{cases} \frac{f(x)-f(0)}{x} & si \;\; x \neq 0 \\ \\ f'(0) & si \;\; x = 0. \end{cases}$$

Montrer par récurrence que

$$\forall x \neq 0 \qquad g^{(n)}(x) = \frac{1}{x^{n+1}} \int_0^x t^n f^{(n+1)}(t)\, dt.$$

5/ En déduire que

$$\lim_{x \to 0} g^{(n)}(x) = \frac{f^{(n+1)}(0)}{n+1} \quad et\ que \quad g \in C^\infty(I\!R).$$

6/ Soit $\varphi \in \mathcal{D}$ tel que $\varphi(0) = 0$. Montrer que la fonction

$$\psi(x) = \begin{cases} \frac{\varphi(x)}{x} & si \quad x \neq 0 \\ \\ \varphi'(0) & si \quad x = 0. \end{cases}$$

appartient à $\mathcal{D}$.

7/ Soit $\theta_0 \in \mathcal{D}$ tel que $\theta_0(0) = 1$. Montrer que toute fonction $\varphi \in \mathcal{D}$ s'écrit :

$$\varphi(x) = \varphi(0)\theta_0(x) + x\psi(x)$$

où ψ est une fonction de $\mathcal{D}$.

8/ Résoudre dans $\mathcal{D}'$ l'équation $xT = 0$.

Exercice III.5.13 *Une fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ est dite à décroissance rapide (D.R.) si*

$$\forall p \in \mathbb{N} \lim_{|x| \to +\infty} \left| x^p f(x) \right| = 0.$$

1/ Donner un exemple d'une fonction à (D.R.).

2/ Montrer que si $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ et si f est à (D.R.) alors pour tout $p \in \mathbb{N}$, la fonction définie par $x^p f(x)$ est intégrable.

3/ Montrer que si f est intégrable et à (D.R.) alors $\widehat{f} \in C^\infty(\mathbb{R})$.

4/ On suppose que $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ et que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $f^{(k)}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$. Montrer alors que $\widehat{f}$ est à (D.R.).

5/ Soit $\mathcal{S} = \{f \in C^\infty(\mathbb{R}) /\ \forall k \in \mathbb{N} \ \ f^{(k)}$ est à (D.R.)$\}$. Montrer que $\mathcal{S}$

est un espace vectoriel stable pour la multiplication par un polynôme.

6/ Montrer que

i) $f \in \mathcal{S} \Longrightarrow f' \in \mathcal{S}$ *;*

ii) $\mathcal{S} \subset L^1 \cap L^2$.

7/ Montrer que si $f \in \mathcal{S}$ *alors* $\widehat{f} \in \mathcal{S}$.

8/ Soit $\{f_n\} \subset \mathcal{S}$. *On dit que* $f_n \xrightarrow{\mathcal{S}} 0$ *si*

$$\forall p \in I\!N,\ \forall q \in I\!N \quad \lim_{n \to +\infty} \sup_{x \in I\!R} \left| x^p f_n^{(q)}(x) \right| = 0.$$

Naturellement

$$f_n \xrightarrow{\mathcal{S}} f \ \text{ si } (f_n - f) \xrightarrow{\mathcal{S}} 0.$$

On suppose que $f_n \xrightarrow{\mathcal{S}} 0$. *Démontrer que*

i) $f_n' \xrightarrow{\mathcal{S}} 0$ *;*

ii) Pour tout polynôme P*:* $Pf_n \xrightarrow{\mathcal{S}} 0$ *;*

iii) $f_n \xrightarrow{L^1} 0$ *;*

iv) $\widehat{f_n} \xrightarrow{\mathcal{S}} 0$. *(Continuité de la transformée de Fourier sur* $\mathcal{S}$*)*

Exercice III.5.14 *Une distribution tempérée* U *est une forme linéaire continue sur* $\mathcal{S}$.

$$Si\ \phi_n \xrightarrow{\mathcal{S}} 0 \ \text{ alors } \ < U, \phi_n > \longrightarrow 0.$$

a/ Vérifier que $\mathcal{D} \subset \mathcal{S}$ *et que* $\mathcal{S}' \subset \mathcal{D}'$ *(une distribution tempérée est* *bien une distribution).*

b/ Vérifier que $U_n \xrightarrow{\mathcal{S}'} 0 \implies U_n \xrightarrow{\mathcal{D}'} 0.$

Exercice III.5.15 *Montrer qu'une fonction intégrable sur* $I\!R$ *définit une distribution tempérée.*

Exercice III.5.16 f *est dite à croissance lente si*

$$\exists A \geq 0,\ \exists a > 0 \ \textit{tels que}\ |f(x)| \leq A|x|^m \ \textit{si}\ |x| \geq a.$$

Montrer que toute fonction $f \in L^1_{loc}(I\!R)$ *et à croissance lente définit une distribution tempérée.*

Exercice III.5.17 *Vérifier que* $\mathcal{F} : \mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{S}$ *est une bijection linéaire d'inverse* $\overline{\mathcal{F}}$ *et que cette bijection est continue dans les deux sens.*

Exercice III.5.18 *Si* $U \in \mathcal{S}'$, *on définit* $\mathcal{F}U$ *et* $\overline{\mathcal{F}}U$ *par*

$$< \mathcal{F}U,\phi > = < U,\mathcal{F}\phi > \qquad \forall \phi \in \mathcal{S};$$

$$< \overline{\mathcal{F}}U,\phi > = < U,\overline{\mathcal{F}}\phi > \qquad \forall \phi \in \mathcal{S}.$$

Vérifier que $\mathcal{F}U$ *et* $\overline{\mathcal{F}}U$ *sont des distributions tempérées.*

Exercice III.5.19 *Montrer que* $\mathcal{F} : \mathcal{S}' \longrightarrow \mathcal{S}'$ *est une bijection linéaire, bi-continue et que*

$$\mathcal{F}\overline{\mathcal{F}} = I \quad \textit{et} \quad \overline{\mathcal{F}}\mathcal{F} = I.$$

Exercice III.5.20 *Montrer que* $\mathcal{F}\delta = 1$ *où* δ *est la distribution de Dirac.*

Chapitre IV

Fonctions de variable complexe

IV.1 Fonctions holomorphes

Définition IV.1.1 *On appelle fonction de variable complexe une fonction d'une partie de* $\mathbb{C}$ *dans* $\mathbb{C}$.

Définition IV.1.2 *Soient* Ω *une partie de* $\mathbb{C}$, f *une fonction de variable complexe de* Ω *dans* $\mathbb{C}$ *et* z_0 *un point d'accumulation de* Ω.
On dit que f *admet une limite* l *en* z_0 *et on écrit* $l = \lim\limits_{z \to z_0} f(z)$ *si*

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \delta > 0 \ \ \textit{tel que} \ \ |z - z_0| \leq \delta \Rightarrow |f(z) - l| \leq \varepsilon.$$

Définition IV.1.3 *On dit que* f *est continue en* $z_0 \in \Omega$ *si* $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$.

Définition IV.1.4 *Soient* Ω *est un ouvert de* $\mathbb{C}$ *et* $z_0 \in \Omega$. *On dit que*

f est dérivable en z_0 s'il existe $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que $\lim_{z\to z_0} \dfrac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} = \alpha$ ou encore si

$\exists \alpha \in \mathbb{C}$ tel que $f(z) = f(z_0) + \alpha(z-z_0) + |z-z_0|\epsilon(z-z_0)$ avec $\lim_{z\to z_0} \epsilon(z-z_0) = 0$.

Le nombre complexe α est appelé dérivée de f en z_0 et est notée $f^{'}(z_0)$.

Définition IV.1.5 *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$. La fonction f de variable complexe est dite holomorphe sur Ω si elle est dérivable en tout point de Ω. La fonction dérivée de f sera notée $f^{'}$.*

On dit aussi que f est holomorphe en z_0 lorsque f est dérivable en z_0.

Les propriétés classiques suivantes s'étendent aux fonctions de variable complexe.

Propriété IV.1.1 *Si f et g sont holomorphes sur Ω et si λ, $\mu \in \mathbb{C}$, alors*

$$(\lambda f + \mu g)' = \lambda f' + \mu g',\ (fg)' = f'g + fg' \text{ et } \left(\frac{f}{g}\right)^{'} = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

(si g ne s'annule pas sur Ω).

Remarque IV.1.1 *Les formules de dérivation d'une fonction composée et d'une fonction réciproque restent valables pour les fonctions de variable complexe.*

Définition IV.1.6 *(Fonction entière)*

Une fonction holomorphe sur tout le plan complexe $\mathbb{C}$ est appelée fonction entière.

Exemple IV.1.1 *La fonction* $e^z = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$ *est une fonction entière. (Ici le rayon de convergence est infini.)*

Remarque IV.1.2 *Prenons* $f : z \in \mathbb{C} \longmapsto z^2 \in \mathbb{C}$. *On constate que*

$$f(z) = f(x+iy) = Z = X + iY = (x^2 - y^2) + i(2xy).$$

De façon générale, une fonction de variable complexe s'écrit

$$f(z) = f(x+iy) = \mathcal{U}(x,y) + i\mathcal{V}(x,y).$$

Proposition IV.1.1 *La fonction* f *est continue en* $z_0 = x_0 + iy_0$ *si et seulement* $\mathcal{U}$ *et* $\mathcal{V}$ *sont continues en* (x_0,y_0).

Théorème IV.1.1 *(Conditions de Cauchy-Riemann)*

La fonction f *est holomorphe en* $z_0 = x_0 + iy_0 \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{U}$ *et* $\mathcal{V}$ *sont différentiables en* (x_0,y_0) *et*

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial x}(x_0,y_0) = \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial y}(x_0,y_0) \ ; \\ \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial y}(x_0,y_0) = -\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x}(x_0,y_0). \end{cases}$$

Démonstration :

f holomorphe en $z_0 \Leftrightarrow \exists \alpha \in \mathbb{C}$ tel que $f(z) = f(z_0) + \alpha(z - z_0) + |z - z_0|\epsilon(z - z_0)$ où $\epsilon(z - z_0)$ tend vers 0 lorsque z tend vers z_0. En posant $z = x + iy$, $\alpha = S + iT$, $\epsilon(x,y) = \epsilon_1(x,y) + i\epsilon_2(x,y)$ et en séparant les parties réelles et imaginaires dans l'égalité précédente, on obtient

$$\left\{\begin{array}{rcl} \mathcal{U}(x,y) & = & \mathcal{U}(x_0,y_0) + (x - x_0)S - (y - y_0)T \\ & & +\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}\epsilon_1(x - x_0,y - y_0) \\ \mathcal{V}(x,y) & = & \mathcal{V}(x_0,y_0) + (x - x_0)T + (y - y_0)S \\ & & +\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}\epsilon_2(x - x_0,y - y_0) \end{array}\right.$$

ce qui prouve que $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$ sont différentiables en (x_0,y_0) et

$$\left\{\begin{array}{l} S = \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial x}(x_0,y_0) \text{ et } T = -\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial y}(x_0,y_0), \\ S = \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial y}(x_0,y_0) \text{ et } T = \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x}(x_0,y_0). \end{array}\right.$$

D'où le résultat.

Remarque IV.1.3 *Ainsi si* $f(z) = \mathcal{U}(x,y) + i\mathcal{V}(x,y)$, *alors* $\alpha = f'(z_0) = \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial x}(x_0,y_0) + i\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x}(x_0,y_0)$.

Exemple IV.1.2 *Soit* $f(z) = z^2$. *On a* $\mathcal{U}(x,y) = x^2 - y^2$ *et* $\mathcal{V}(x,y) = 2xy$.

On voit que $\mathcal{U}$ *et* $\mathcal{V}$ *sont différentiables et les conditions de Cauchy-Riemann sont vérifiées.* f *est donc holomorphe sur tout* $\mathbb{C}$. *La remarque* *précédente entraine que*

$$f'(z) = 2x + i2y = 2z \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

IV.2 Intégration complexe

Définition IV.2.1 *Une courbe (arc, chemin) orientée dans* $\mathbb{C}$ *est le graphe dans le plan complexe d'une application continue de* $[a,b]$ *dans* $\mathbb{C}$.

Définition IV.2.2 *Soit* $\mathcal{C}$ *une courbe orientée* C^1 *par morceaux dont* $A = z(a)$ *est l'origine et* $B = z(b)$ *est l'extrémité. Le point* $C \in \mathcal{C}$ *s'il existe* $t \in [a,b]$ *tel que* $C = z(t) = x(t) + iy(t)$ *où* x *et* y *sont* C^1 *par morceaux sur* $[a,b]$. *En allant de* A *vers* B, *on dit que la courbe* $\mathcal{C}$ *est parcourue dans le sens* AB,

Si la fonction f *de variable complexe est continue sur* $\mathcal{C}$ *alors la fonction* $f \circ z$ *de variable réelle est continue sur* $[a,b]$ *et on a*

$$\int_{\mathcal{C}} f(z)dz = \int_a^b f(z(t))z'(t)dt.$$

Exemples IV.2.1 *Soit $\mathcal{C}$ le cercle de centre O et de rayon R, $R > 0$ parcouru dans le sens trigonométrique, qui sera par convention le sens positif. On a*

$$z = z(\theta) = Re^{i\theta} \quad \theta \in [0{,}2\pi].$$

Pour $f(z) = c$ (=constante), on a

$$\int_{\mathcal{C}^+} f(z)dz = \int_0^{2\pi} cRie^{i\theta}d\theta = 0.$$

Pour $f(z) = \frac{1}{z}$, on a

$$\int_{\mathcal{C}^+} \frac{1}{z}dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{Re^{i\theta}}Rie^{i\theta}d\theta = i2\pi.$$

Les propriétés suivantes sont les mêmes que pour les intégrales curvilignes.

Propriétés IV.2.1

- $\int_{\mathcal{C}^+} (\alpha f(z) + \beta g(z))\, dz = \alpha \int_{\mathcal{C}^+} f(z)dz + \beta \int_{\mathcal{C}^+} g(z)dz.$
- $\int_{AB} f(z)dz = -\int_{BA} f(z)dz.$
- $\int_{AB} f(z)dz = \int_{AC} f(z)dz + \int_{CB} f(z)dz.$
- *Si $|f(z)| \leq M \quad \forall z \in \mathcal{C}$ alors*

$$\left|\int_{\mathcal{C}} f(z)dz\right| \leq ML$$

où L est la longueur du chemin $\mathcal{C}$ égale à $\int_a^b |z'(t)|dt$.

IV.3 Théorème de Cauchy et ses conséquences

Soit Γ une courbe orientée C^1 par morceaux.

Définition IV.3.1 *On dit que* Γ *est fermée si son origine est égale à son extrémité.*

Définition IV.3.2 *La courbe* Γ *est dite simple si elle n'a pas de points doubles, ce qui veut dire que l'application* $t \longrightarrow z(t)$ *est injective sur* $[a,b[$.

Exemple d'une courbe fermée simple (CFS)

Une courbe fermée simple Γ est orientable et le sens positif sera par convention le sens trigonométrique.

Remarque IV.3.1 *Une courbe fermée simple* Γ *peut être considérée comme étant la frontière d'un ouvert* Ω *connexe et simplement connexe* *qui sera appelé "intérieur de Γ" et noté $\mathring{\Gamma}$.*

On rappelle que Ω simplement connexe veut dire que l'intérieur de toute CFS de Ω est inclus dans Ω. C'est donc un domaine sans "trous".

Théorème IV.3.1 *(Théorème de Cauchy)*

Soient Γ une courbe fermée simple et f une fonction holomorphe sur $\Gamma \cup \mathring{\Gamma}$. Alors

$$\int_{\Gamma^+} f(z)dz = 0.$$

Proposition IV.3.1 *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ dont la frontière est constituée de deux courbes fermées simples disjointes Γ_1 et Γ_2 avec Γ_2 entourant Γ_1.*

Soit f une fonction holomorphe sur $\Omega \cup \Gamma_1 \cup \Gamma_2$.

Alors on a

$$\int_{\Gamma_1^+} f(z)dz = \int_{\Gamma_2^+} f(z)dz.$$

Démonstration :

On construit deux courbes fermées simples (voir figure plus haut)

$$\begin{cases} \mathcal{C}_1 = AB \cup BC \cup CD \cup DA \ \ \text{(flèches normales)} \\ \mathcal{C}_2 = AD \cup DC \cup CB \cup BA \ \ \text{(flèches en gras).} \end{cases}$$

Le théorème de Cauchy entraine que :

$$\int_{\mathcal{C}_1} f(z)dz = 0 \quad et \quad \int_{\mathcal{C}_2} f(z)dz = 0.$$

Donc $\int_{\mathcal{C}_1} f(z)dz + \int_{\mathcal{C}_2} f(z)dz = 0.$

Or

$$\int_{BC} f(z)dz + \int_{CB} f(z)dz = 0 = \int_{DA} f(z)dz + \int_{AD} f(z)dz,$$

donc

$$\int_{\Gamma_1^-} f(z)dz + \int_{\Gamma_2^+} f(z)dz = 0,$$

ce qui entraine

$$\int_{\Gamma_1^+} f(z)dz = \int_{\Gamma_2^+} f(z)dz = 0.$$

Théorème IV.3.2 *(Formule de Cauchy)*

Soient Γ une courbe fermée simple et f une fonction de la variable complexe holomorphe sur $\Gamma \cup \mathring{\Gamma}$. Si z_0 est un point intérieur à Γ alors

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma^+} \frac{f(z)}{z - z_0} dz. \tag{IV.1}$$

Démonstration :

Soit $\mathcal{C}$ un cercle de centre z_0 et de rayon r entièrement intérieur à Γ. La fonction $\frac{f(z)}{z-z_0}$ est holomorphe sur le domaine limité par Γ et $\mathcal{C}$, elle est aussi holomorphe sur Γ et sur $\mathcal{C}$.

La proposition (IV.3.1) donne l'égalité :

$$\int_{\Gamma^+} \frac{f(z)}{z-z_0} dz = \int_{\mathcal{C}^+} \frac{f(z)}{z-z_0} dz.$$

La fonction f étant continue en z_0, donc pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que

$$|z - z_0| \leq \eta \Longrightarrow |f(z) - f(z_0)| \leq \varepsilon.$$

Si nous prenons le rayon $r < \eta$, nous aurons

$$\left| \int_{\mathcal{C}} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz \right| \leq \frac{\varepsilon}{r} 2\pi r = 2\pi\varepsilon.$$

D'autre part

$$\int_{\mathcal{C}^+} \frac{f(z_0)}{z-z_0} dz = f(z_0) \int_{\mathcal{C}^+} \frac{dz}{z-z_0}.$$

Or $z \in \mathcal{C}$ peut s'écrire $z = z_0 + re^{i\theta}$ avec $\theta \in [0,2\pi]$, donc

$$\int_{\mathcal{C}^+} \frac{dz}{z-z_0} = \int_0^{2\pi} \frac{1}{re^{i\theta}} ire^{i\theta} d\theta = i2\pi.$$

Par conséquent

$$\forall \varepsilon > 0 \qquad \left| \int_{\Gamma^+} \frac{f(z)}{z - z_0} dz - 2\pi i f(z_0) \right| \leq 2\pi\varepsilon,$$

d'où

$$\int_{\Gamma^+} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = 2\pi i f(z_0).$$

Remarques IV.3.1 *Soit f une fonction holomorphe sur $\Gamma \cup \mathring{\Gamma}$ où Γ est une courbe fermée simple.*

1) Si z_1 est extérieur à Γ alors

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma^+} \frac{f(z)}{z - z_1} dz = 0.$$

2) Si $z_0 \in \mathring{\Gamma}$ alors $f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma^+} \frac{f(z)}{z - z_0} dz$.

La formule de Cauchy exprime qu'une fonction holomorphe sur $\Gamma \cup \mathring{\Gamma}$ est complètement déterminée par ses valeurs sur la frontière.

IV.3.1 Formule de Taylor

Soient D un ouvert de $\mathbb{C}$, $z_0 \in D$, f une fonction holomorphe sur D et $\mathcal{C}$ un cercle de centre z_0 et de rayon R entièrement contenu dans D.

Soit z intérieur à $\mathcal{C}$ alors, il existe $\rho \geq 0$ tel que $|z - z_0| \leq \rho < R$.

On écrit la formule de Cauchy :

$$\begin{aligned}
f(z) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathcal{C}^+} \frac{f(u)}{u-z}du \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathcal{C}^+} \frac{f(u)}{u-z_0+z_0-z}du \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathcal{C}^+} \frac{f(u)}{(u-z_0)\left(1-\frac{z-z_0}{u-z_0}\right)}du \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathcal{C}^+} \frac{f(u)}{u-z_0}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{z-z_0}{u-z_0}\right)^n du \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathcal{C}^+} \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{f(u)(z-z_0)^n}{(u-z_0)^{n+1}}\right) du
\end{aligned}$$

On pose $\varphi_n(u) = \frac{f(u)(z-z_0)^n}{(u-z_0)^{n+1}}$. Comme f est holomorphe, alors elle est continue et par suite bornée sur le compact $\mathcal{C}$. D'où

$$|\varphi_n(u)| \leq \frac{M}{R}\left(\frac{\rho}{R}\right)^n \quad \forall u \in \mathcal{C}.$$

La série de fonctions $\sum \varphi_n$ est normalement donc uniformément convergente sur $\mathcal{C}$. Les fonctions étant continues sur $\mathcal{C}$, on admet l'extension à

$\mathcal{C}$ du théorème classique d'intégration terme à terme. Il en résulte que :

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}^+} \frac{f(u)}{(u - z_0)^{n+1}} du \right) (z - z_0)^n.$$

C'est le développement en série entière de $f(z)$ autour de z_0. En posant

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}^+} \frac{f(u)}{(u - z_0)^{n+1}} du,$$

on a

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n. \tag{IV.2}$$

On note que cette série entière a un rayon de convergence au moins égal à R.

Remarques IV.3.2 • *L'équation* (IV.2) *entraine que la fonction f, supposée holomorphe, est en fait C^∞ sur l'intérieur de $\mathcal{C}$.*

• *Le point z_0 étant arbitraire, on conclut que la fonction f holomorphe sur l'ouvert D implique que f est C^∞ sur D.*

• *Il découle de* (IV.2) *par un calcul simple que* $a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$.

Théorème IV.3.3 *(Série de Taylor)*

Soient Γ une courbe fermée simple, f une fonction holomorphe sur $\Gamma \cup \mathring{\Gamma}$ et $z_0 \in \mathring{\Gamma}$. Alors on peut entourer z_0 par cercle $\mathcal{C}$, de centre z_0, inclus dans $\mathring{\Gamma}$. On a

$$\forall z \in \mathring{\mathcal{C}} \quad f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n$$

avec

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i}\int_{\mathcal{C}^+} \frac{f(u)}{(u-z_0)^{n+1}}du,$$

ou encore

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i}\int_{\Gamma^+} \frac{f(u)}{(u-z_0)^{n+1}}du. \tag{IV.3}$$

Remarques IV.3.3 • *L'égalité* (IV.3) *est la formule généralisée de Cauchy. Pour $n = 0$, on retrouve la formule* (IV.1) *de Cauchy.*

• *La formule* (IV.3) *entraine que si une fonction holomorphe est connue sur une courbe fermée simple Γ alors elle est connue, ainsi que toutes ses dérivées, à l'intérieur de cette courbe.*

IV.3.2 Inégalités de Cauchy

Soient $\rho > 0$, $\mathcal{C}$ un cercle 0 et de rayon ρ et f une fonction holomorphe sur $\mathcal{C} \cup \mathring{\mathcal{C}}$.

On a d'après le théorème (IV.3.3),

$$\forall z \in \mathring{\mathcal{C}} \quad f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n,$$

avec $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathcal{C}^+} \frac{f(u)}{u^{n+1}} du$.

Notons que a_n est indépendant du cercle $\mathcal{C}$ donc de ρ. Utilisant le paramétrage du cercle, il vient :

$$\begin{aligned} a_n &= \tfrac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{f(\rho e^{i\theta})}{\rho^{n+1} e^{i(n+1)\theta}} i\rho e^{i\theta} d\theta \\ &= \tfrac{1}{2\pi \rho^n}\int_0^{2\pi} f(\rho e^{i\theta}) e^{-in\theta} d\theta. \end{aligned}$$

En posant $M(\rho) = \max\limits_{|z|=\rho} |f(z)|$, on aura $|a_n| \leq \frac{1}{2\pi\rho^n}\int_0^{2\pi} M(\rho) d\theta$, d'où les inégalités dites de Cauchy

$$\forall n \in I\!N \quad |a_n| \leq \frac{M(\rho)}{\rho^n}. \tag{IV.4}$$

Théorème IV.3.4 *(Théorème de Liouville)*

Une fonction entière bornée est constante.

Démonstration :

Soit $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ telle que, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$. La fonction f est holomorphe sur $\mathbb{C}$. Si $M = \sup\limits_{z\in \mathbb{C}} |f(z)|$, alors

$$|a_n| = \left|\frac{f^{(n)}(0)}{n!}\right| \leq \frac{M}{\rho^n}$$

où ρ est un réel strictement positif quelconque.

On constate que pour tout $n \geq 1$, $\lim\limits_{\rho\to+\infty} |a_n| = 0$. Or a_n est indépendant de ρ, donc pour tout $n \geq 1$, $a_n = 0$, ce qui prouve que la fonction f est constante.

Théorème IV.3.5 *(Théorème de d'Alembert-Gauss)*

Tout polynôme P de degré supérieur ou égal à 1 a au moins une racine complexe.

Démonstration :

Soit P un polynôme de degré $n \geq 1$. Si P n'a pas de racines, alors la fonction f définie par $f(z) = \frac{1}{P(z)}$ est entière. Pour tout $z \neq 0$, on a

$$|f(z)| = \frac{1}{|P(z)|} = \frac{1}{|z|^n \left|a_n + \frac{a_{n-1}}{z} + \cdots + \frac{a_0}{z^n}\right|}.$$

On voit que $|f(z)| \longrightarrow 0$ quand $|z| \longrightarrow +\infty$, ce qui prouve que la fonction f est bornée. D'après le théorème de Liouville la fonction f

est constante, et par conséquent le polynôme P est constant ce qui est absurde car le degré de P est supérieur à 1.

Théorème IV.3.6 *(Développement en série de Laurent)*

Soient R_1, R_2 deux réels tels que $R_2 > R_1 \geq 0$, $z_0 \in \mathbb{C}$ et f une fonction holomorphe dans la couronne ouverte de centre z_0 définie par :

$$C(R_1,R_2) = \{z \in \mathbb{C} / \ R_1 < |z - z_0| < R_2\}.$$

Pour tout $z \in C(R_1,R_2)$, on a

$$f(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n,$$

où

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}^+} \frac{f(u)}{(u - z_0)^{n+1}} du, \ \ (n \in \mathbb{Z}),$$

et $\mathcal{C}$ est un cercle quelconque de centre z_0 inclus dans $C(R_1,R_2)$.

Démonstration :

Soit $z \in C(R_1,R_2)$, il existe deux réels ρ_1 et ρ_2 strictement positifs tels que

$$R_1 < \rho_1 < |z - z_0| < \rho_2 < R_2.$$

Soit $\mathcal{C}_1$ (resp. $\mathcal{C}_2$) le cercle de centre z_0 et de rayon ρ_1 (resp. ρ_2). On construit deux courbes fermées simples :

$$\begin{cases} \Gamma = ABCDA \text{ (flèches normales)} \\ \Omega = ADCBA \text{ (flèches en gras).} \end{cases}$$

Le point z étant intérieur à Γ, on peut y appliquer la formule de Cauchy

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma^+} \frac{f(u)}{u-z}du.$$

Sur Ω, on applique le théorème de Cauchy

$$0 = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Omega^+} \frac{f(u)}{u-z}du.$$

La somme donne alors

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma^+\cup\Omega^+} \frac{f(u)}{u-z}du.$$

Comme les intégrales sur les segments AD et BC s'annulent mutuellement, on obtient :

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathcal{C}_2^+} \frac{f(u)}{u-z}du + \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathcal{C}_1^-} \frac{f(u)}{u-z}du.$$

Sur $\mathcal{C}_2^+$, on a $\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathcal{C}_2^+} \frac{f(u)}{u-z}du = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathcal{C}_2^+} \frac{f(u)}{u-z_0}\frac{1}{1-\frac{z-z_0}{u-z_0}}du.$

Or sur $\mathcal{C}_2$, $|z-z_0| < |u-z_0| = \rho_2$, donc $\left|\frac{z-z_0}{u-z_0}\right| < 1$ et $\frac{1}{1-\frac{z-z_0}{u-z_0}} = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{z-z_0}{u-z_0}\right)^n.$

D'où,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathcal{C}_2^+} \frac{f(u)}{u-z}du &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathcal{C}_2^+} \sum_{n=0}^{+\infty} f(u)\frac{(z-z_0)^n}{(u-z_0)^{n+1}}du \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathcal{C}_2^+} \frac{f(u)}{(u-z_0)^{n+1}}du\right)(z-z_0)^n, \end{aligned}$$

d'après la convergence uniforme de la série.

Sur $\mathcal{C}_1^+$, on a $\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathcal{C}_1^+} \dfrac{f(u)}{z-u}du = \dfrac{1}{2\pi i}\int_{\mathcal{C}_1^+} \dfrac{f(u)}{z-z_0}\dfrac{1}{1-\frac{u-z_0}{z-z_0}}du.$

Or sur $\mathcal{C}_1$, $|z - z_0| > |u - z_0| = \rho_1$, donc $\left|\frac{u-z_0}{z-z_0}\right| < 1$ et $\frac{1}{1-\frac{u-z_0}{z-z_0}} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \left(\dfrac{u-z_0}{z-z_0}\right)^n$.

D'où,

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{2\pi i}\int_{\mathcal{C}_1^+} \frac{f(u)}{z-u}du &= \tfrac{1}{2\pi i}\int_{\mathcal{C}_1^+} \sum_{n=0}^{+\infty} f(u)\frac{(u-z_0)^n}{(z-z_0)^{n+1}}du \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathcal{C}_1^+} f(u)(u-z_0)^n du\right)\frac{1}{(z-z_0)^{n+1}} \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathcal{C}_1^+} f(u)(u-z_0)^{n-1} du\right)\frac{1}{(z-z_0)^{n}}.
\end{aligned}$$

Ainsi, on a

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n + \sum_{n=1}^{+\infty} a_{-n}(z-z_0)^{-n}$$

avec

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathcal{C}_2^+} \frac{f(u)}{(u-z_0)^{n+1}}du, \quad n = 0,1,2,\ldots$$

et

$$a_{-n} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathcal{C}_1^+} \frac{f(u)}{(u-z_0)^{-n+1}}du, \quad n = 1,2,\ldots$$

En remplaçant l'indice $-n$ où $n = 1,2,\ldots$ par l'indice n où $n = -1,-2,\ldots$, on peut alors écrire $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_{-n}(z-z_0)^{-n} = \sum\limits_{-\infty}^{n=-1} a_n(z-z_0)^n$ et par conséquent

$$f(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n.$$

D'autre part, on peut remplacer dans les formules donnant les a_n, les cercles $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ par le cercle

$$\mathcal{C} = \{z \in \mathbb{C} / \ |z - z_0| = r\} \text{ où } r \in \,]\rho_1,\rho_2[.$$

IV.4 Points singuliers. Résidus

IV.4.1 Points singuliers

Définition IV.4.1 *On dit que z_0 est un point singulier isolé de f s'il existe un disque ouvert Δ de centre z_0 tel que f soit holomorphe dans Δ sauf au point z_0.*

Exemple IV.4.1 $z_0 = 0$ *est un point singulier isolé de* $f(z) = \frac{1}{z}$.

IV.4.2 Classification des singularités

Soit z_0 un point singulier isolé de f, il existe donc un disque ouvert Δ de centre z_0 tel que f soit holomorphe dans Δ sauf au point z_0.

On peut donc développer f en série de Laurent dans la couronne ouverte $\Delta - \{z_0\}$. On a alors

$$\forall z \in \Delta - \{z_0\}, \quad f(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n.$$

Trois cas sont alors possibles ;

1^er^ cas : Pour tout $n < 0$, $a_n = 0$. On a donc $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n = a_0 + a_1(z-z_0) + \cdots$.

Il suffit de poser $f(z_0) = a_0$ pour prolonger f en une fonction holomorphe dans Δ. On dit dans ce cas que z_0 est un point singulier éliminable (on dit aussi que l'on a une singularité apparente en z_0).

Proposition IV.4.1 *Soit z_0 un point singulier isolé de f. Le point z_0 est éliminable si et seulement si $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$ existe et est finie.*

La démonstration est laissée en exercice.

Exemple IV.4.2 *Soit f la fonction définie, pour $z \neq 0$, par $f(z) = \frac{\sin z}{z}$. On a*

$$f(z) = \frac{1}{z}\left(z - \frac{z^3}{3!} + \cdots\right) = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} + \cdots .$$

0 *est donc un point singulier éliminable de f. On voit que $\lim\limits_{z\to 0} \dfrac{\sin z}{z} = 1$.*

2^ème^ cas : Il existe $n_0 < 0$ tel que $a_{n_0} \neq 0$ et $a_n = 0$, pour tout $n < n_0$. Donc, pour tout $z \in \Delta - \{z_0\}$, on a

$$f(z) = a_{n_0}(z-z_0)^{n_0} + a_{n_0+1}(z-z_0)^{n_0+1} + \cdots + a_{-1}(z-z_0)^{-1} + g(z)$$

avec $g(z) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n$. On dit dans ce cas que z_0 est un pôle d'ordre $(-n_0)$.

Remarque IV.4.1 *On a*

$$\begin{array}{rcl} f(z)(z-z_0)^{-n_0} & = & a_{n_0} + a_{n_0+1}(z-z_0) + \cdots + a_{-1}(z-z_0)^{-n_0-1} + \cdots \\ & = & \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_{n_0+n}(z-z_0)^n \end{array}.$$

En posant $k(z) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_{n_0+n}(z-z_0)^n$, *on voit que la fonction* k *est holomorphe en* z_0 *et* $k(z_0) \neq 0$. *On en déduit que* f *s'écrit*

$$f(z) = \frac{k(z)}{(z-z_0)^{-n_0}},$$

d'où la proposition suivante.

Proposition IV.4.2 z_0 *est un pôle d'ordre* $m \in \mathbb{N}^*$ *si et seulement si* $f(z) = \frac{k(z)}{(z-z_0)^m}$ *avec* k *holomorphe en* z_0 *et* $k(z_0) \neq 0$.

Exemple IV.4.3 *Soit* f *la fonction définie par* $f(z) = \frac{1}{(z-1)^2(z-2)}$. *Le complexe* $z = 2$ *est un pôle d'ordre 1 (simple) alors que* $z = 1$ *est un pôle d'ordre 2 (double).*

Proposition IV.4.3 *Le complexe* z_0 *est un pôle d'ordre* m *de* f *si et seulement si*

$$\lim_{z \to z_0} (z-z_0)^m f(z)$$

existe, est finie et est non nulle.

La démonstration de cette proposition est laissée en exercice.

<u>$3^{\text{ème}}$ cas :</u> Il existe une infinité d'entiers $n < 0$ tel que $a_n \neq 0$. Ici z_0 est dit point singulier essentiel de f.

Exemple IV.4.4 *Soit la fonction f définie, pour tout $z \neq 0$, par $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$. On a*

$$f(z) = 1 + \frac{1}{1!z} + \cdots + \frac{1}{n!z^n} + \cdots$$

On constate que l'on a une infinité de puissances négatives dans le développement de Laurent, donc 0 *est un point singulier essentiel.*

IV.4.3 Résidus

Soit z_0 un point singulier isolé de f. Il existe donc un disque ouvert Δ de centre z_0 tel que f soit holomorphe dans $\Delta - \{z_0\}$ et on a :

$$\forall z \in \Delta - \{z_0\} \quad f(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_n(z - z_0)^n.$$

Définition IV.4.2 *On appelle résidu de f au point singulier isolé z_0 et on note $Res(f,z_0)$ le coefficient a_{-1} de son développement de Laurent autour de z_0 :*

$$Res(f,z_0) = a_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}^+} f(z)dz.$$

où $\mathcal{C}$ est un cercle quelconque de centre z_0 contenu dans Δ.

Théorème IV.4.1 *(Théorème des résidus)*

Soit Γ *une courbe simple et fermée et* f *holomorphe sur* $\Gamma \cup \overset{\circ}{\Gamma}$ *sauf en un nombre fini de points singuliers* $z_1,z_2,\ldots,z_p$ *intérieurs à* Γ*. Alors*

$$\int_{\Gamma^+} f(z)dz = 2\pi i \sum_{i=1}^{p} Res(f,z_i).$$

Démonstration :

On peut en effet entourer chaque point singulier z_i par un cercle $\mathcal{C}_i$, intérieur à Γ, de centre z_i de sorte que les cercles $\mathcal{C}_i$ soient deux à deux disjoints (voir figure ci-dessous).

Une généralisation de la technique utilisée dans la démonstration de la proposition (IV.3.1) conduit à :

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma^+} f(z)dz &= \sum_{i=1}^{p} \int_{\mathcal{C}_i^+} f(z)dz \\ &= 2\pi i \sum_{i=1}^{p} Res(f,z_i). \end{aligned}$$

IV.4.4 Calcul pratique des résidus

Remarque IV.4.2 *Sur les zéros des fonctions holomorphes ;*

Soient $a \in \mathbb{C}$ *et* f *holomorphe dans un voisinage* $\mathcal{V}$ *ouvert de* a*. On* *suppose que* $f(a) = 0$*. Pour tout* $z \in \mathcal{V}$*, on a*

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n. \end{aligned}$$

Si $f'(a) \neq 0$*, alors* $f(z) = (z-a)\varphi(z)$ *avec* φ *holomorphe sur* $\mathcal{V}$ *et* $\varphi(a) \neq 0$*. On dit dans ce cas que* a *est un zéro simple de* f*.*

Si $f'(a) = 0$ *et* $f''(a) \neq 0$*, alors* f *s'écrit* $f(z) = (z-a)^2\psi(z)$ *avec* ψ *holomorphe sur* $\mathcal{V}$ *et* $\psi(a) \neq 0$*. On dit dans ce cas que* a *est un zéro double (ou d'ordre deux) de* f*.*

D'une façon générale, a *serait une racine d'ordre* N *de* f *si*

$$f(a) = f'(a) = f''(a) = \ldots = f^{(N-1)}(a) = 0 \;\; et \;\; f^{(N)}(a) \neq 0.$$

Dans ce cas $f(z) = (z-a)^N H(z)$ *où* H *est holomorphe sur* $\mathcal{V}$ *et* $H(a) \neq 0$*.*

- Si z_0 est un pôle simple de f, pour tout $z \in \Delta - \{z_0\}$, on a

$$f(z) = \frac{a_{-1}}{z-z_0} + a_0 + a_1(z-z_0) + \cdots$$

d'où

$$Res(f,z_0) = a_{-1} = \lim_{z \longrightarrow z_0} (z-z_0)f(z).$$

Dans le cas où la fonction f s'écrit sous la forme $f(z) = \frac{g(z)}{h(z)}$ où g et h sont holomorphes au voisinage de z_0, z_0 étant zéro simple de h et

$g(z_0) \neq 0$, alors on peut écrire :

$$Res(f,z_0) = \lim_{z \to z_0} (z - z_0)\frac{g(z)}{h(z)} = \lim_{z \to z_0} \frac{g(z)}{\frac{h(z)-h(z_0)}{z-z_0}} = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)}.$$

• Si z_0 est un pôle d'ordre $n > 1$, alors pour tout $z \in \Delta - \{z_0\}$, on a

$$f(z) = \frac{a_{-n}}{(z - z_0)^n} + \cdots + \frac{a_{-1}}{(z - z_0)} + f_1(z).$$

Donc $(z - z_0)^n f(z) = a_{-n} + \cdots + a_{-1}(z - z_0)^{n-1} + (z - z_0)^n f_1(z)$ et par conséquent

$$Res(f,z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{1}{(n-1)!}\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\left[(z - z_0)^n f(z)\right].$$

Une deuxième méthode consiste à écrire

$$f(z) = \frac{k(z)}{(z - z_0)^n} \text{ avec } k(z) = a_{-n}+a_{-n+1}(z-z_0)+\cdots+a_{-1}(z-z_0)^{n-1}+\cdots$$

En posant $u = z - z_0$, on a autour de $u = 0$,

$$k(z_0 + u) = a_{-n} + a_{-n+1}u + \cdots + a_{-1}u^{n-1} + \cdots$$

Le résidu $Res(f,z_0)$ de f au point z_0 est le coefficient de u^{n-1}.

• Si z_0 est un point singulier essentiel, alors on doit chercher le coefficient a_{-1} dans le développement de Laurent.

IV.5 Calcul d'intégrales par la méthode des résidus

IV.5.1 Lemmes de Jordan

Lemme IV.5.1 *Soient* $\theta_1, \theta_2 \in [0,2\pi[$ $(\theta_1 < \theta_2)$,

$S = \{z \in \mathbb{C}/\theta_1 \leq Arg(z) \leq \theta_2\}$, f *une fonction définie sur* S *et* Γ_R *l'arc de cercle de centre* O *et de rayon* R *contenu dans* S *et défini par* $\Gamma_R = \left\{Re^{i\theta},\, \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2\right\}$. *On suppose que* f *est continue pour* $|z|$ *assez grand.* *Si* $\lim\limits_{|z|\to+\infty} |zf(z)| = 0$ $(z \in S)$, *alors* $\lim\limits_{R\to+\infty} \int_{\Gamma_R^+} f(z)dz = 0.$

Démonstration :

Pour R assez grand, on pose $M(R) = \sup\limits_{z\in\Gamma_R} |f(z)| = |f(z_R)|$. On a

$$\left|\int_{\Gamma_R^+} f(z)dz\right| = \left|\int_{\theta_1}^{\theta_2} f(Re^{i\theta})iRe^{i\theta}d\theta\right| \leq RM(R)\left(\theta_2 - \theta_1\right).$$

On a $\lim\limits_{R\to+\infty} RM(R) = \lim\limits_{R\to+\infty} R|f(z_R)| = \lim\limits_{|z_R|\to+\infty} |z_Rf(z_R)| = 0$, d'où le résultat.

Lemme IV.5.2 *Soient* $\theta_1, \theta_2 \in [0,2\pi[$ $(\theta_1 < \theta_2)$,

$S = \{z \in \mathbb{C}/\theta_1 \leq Arg(z) \leq \theta_2\}$, f *une fonction définie sur* S *et* Γ_R *l'arc de cercle de centre* O *et de rayon* R *contenu dans* S *et défini par* $\Gamma_R =$

$\{Re^{i\theta},\ \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2\}$. *On suppose que* f *est continue pour* $|z|$ *assez petit.*

Si $\lim\limits_{|z|\to 0} |zf(z)| = 0$ $(z \in S)$, *alors* $\lim\limits_{R\to 0} \int_{\Gamma_R^+} f(z)dz = 0.$

Démonstration analogue à celle du lemme (IV.5.1).

Lemme IV.5.3 *Soient* $\theta_1, \theta_2 \in [0,\pi]$ $(\theta_1 < \theta_2)$,

$S = \{z \in \mathbb{C}/\theta_1 \leq Arg(z) \leq \theta_2\}$, f *une fonction définie sur* S *et* Γ_R *l'arc de cercle de centre* O *et de rayon* R *contenu dans* S *et défini par* $\Gamma_R = \{Re^{i\theta},\ \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2\}$. *On suppose que* f *est continue pour* $|z|$ *assez grand.* *Si* $\lim\limits_{|z|\to +\infty} |f(z)| = 0$, *alors pour tout* $\alpha > 0$, *on a* $\lim\limits_{R\to +\infty} \int_{\Gamma_R^+} f(z)e^{i\alpha z}dz = 0.$

Démonstration :

Pour R assez grand, on pose $M(R) = \sup\limits_{z\in\Gamma_R} |f(z)| = \left|f(z_R)\right|$. On a

$$\begin{aligned} \left|\int_{\Gamma_R^+} f(z)e^{i\alpha z}dz\right| &= \left|\int_{\theta_1}^{\theta_2} f(Re^{i\theta})iRe^{i\theta}e^{i\alpha R(\cos\theta + i\sin\theta)}d\theta\right| \\ &\leq M(R)R\int_{\theta_1}^{\theta_2} e^{-\alpha R\sin\theta}d\theta \\ &\leq M(R)R\int_0^{\pi} e^{-\alpha R\sin\theta}d\theta. \end{aligned}$$

On a $\int_0^\pi e^{-\alpha R\sin\theta}d\theta = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\alpha R\sin\theta}d\theta$ et $\sin\theta \geq \frac{2}{\pi}\theta$ pour $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$, donc

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\alpha R\sin\theta}d\theta \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\alpha R\frac{2}{\pi}\theta}d\theta = \frac{\pi}{2\alpha R}\left[1 - e^{-\alpha R}\right].$$

Par conséquent $\left|\int_{\Gamma_R^+} f(z)e^{i\alpha z}dz\right| \leq 2M(R)R\frac{\pi}{2\alpha R}\left[1 - e^{-\alpha R}\right] \leq \frac{\pi}{\alpha}M(R)$.

Or $\lim\limits_{R\to+\infty} M(R) = 0$, donc $\lim\limits_{R\to+\infty} \int_{\Gamma_R^+} f(z)e^{i\alpha z}dz = 0$.

Lemme IV.5.4 *Soient $\theta_1, \theta_2 \in [0,2\pi[$ $(\theta_1 < \theta_2)$, $R > 0$, $\varepsilon \in]0,R[$, f une fonction holomorphe dans le disque pointé $\{z \in \mathbb{C}/\ 0 < |z| < R\}$ et l'arc $\gamma_\varepsilon = \{\varepsilon e^{i\theta}/\ \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2\}$. Si 0 est un pôle simple de f, alors*

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\gamma_\varepsilon^+} f(z)dz = i\,(\theta_2 - \theta_1)\,Res(f,0).$$

Démonstration :

Il découle du théorème de Laurent que pour tout z tel que $0 < |z| < R$, on a

$$f(z) = \frac{Res(f,0)}{z} + g(z)$$

où g est holomorphe dans le disque de centre O et de rayon R. Par suite

$$\int_{\gamma_\varepsilon^+} f(z)dz = Res(f,0)\int_{\gamma_\varepsilon^+} \frac{dz}{z} + \int_{\gamma_\varepsilon^+} g(z)dz.$$

D'autre part, pour r_0 tel que $0 < r_0 < R$, g est holomorphe sur le disque fermé de centre O et de rayon r_0. Il existe donc $M > 0$ tel que pour tout z qui vérifie $|z| \leq r_0$, on a $|g(z)| \leq M$.

Pour ε assez petit, $0 < \varepsilon < r_0$, on a alors

$$\left| \int_{\gamma_\varepsilon^+} g(z)dz \right| = \left| \int_{\theta_1}^{\theta_2} g(\varepsilon e^{i\theta}) i\varepsilon e^{i\theta} d\theta \right| \leq M\varepsilon \left(\theta_2 - \theta_1\right),$$

d'où $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \int_{\gamma_\varepsilon^+} g(z)dz = 0$. Par ailleurs, on a

$$\int_{\gamma_\varepsilon^+} \frac{dz}{z} = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{1}{\varepsilon e^{i\theta}} i\varepsilon e^{i\theta} d\theta = i\left(\theta_2 - \theta_1\right),$$

d'où le résultat.

IV.5.2 Calcul d'intégrales

IV.5.2.1 Premier type :

On se propose de calculer par la méthode des résidus l'intégrale $I = \int_0^{2\pi} R(\sin\theta, \cos\theta)d\theta$ où $R(x,y)$ est une fraction rationnelle n'ayant pas de pôles sur le cercle trigonométrique $x^2 + y^2 = 1$.

On pose $z = e^{i\theta}$, donc $\cos\theta = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$, $\sin\theta = \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right)$ et $d\theta = \frac{dz}{iz}$. Si $\theta \in [0,2\pi[$, z décrit le cercle trigonométrique $\mathcal{C}_0$.

En posant $f(z) = \frac{1}{iz}R\left(\frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right),\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)\right)$, on voit que l'intégrale I se ramène à :

$$I = \int_{\mathcal{C}_0^+} f(z)dz = 2\pi i \sum Res(f,z_i)$$

où les z_i sont tous les points singuliers de f intérieurs à $\mathcal{C}_0$.

Exemple IV.5.1 *Calculer* $I = \int_0^{2\pi} \dfrac{d\theta}{2+\sin\theta}$. *On a*

$$I = \int_{\mathcal{C}_0^+} \frac{1}{iz}\frac{1}{2+\frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right)}dz = \int_{\mathcal{C}_0^+} \frac{2}{z^2+4iz-1}dz.$$

Les complexes $z_0 = -(2+\sqrt{3})i$ *et* $z_1 = -(2-\sqrt{3})i$ *sont les deux pôles simples de* $\frac{2}{z^2+4iz-1}$. *Seul* z_1 *est intérieur à* $\mathcal{C}_0$ *et on a*

$$Res(f,z_1) = \frac{2}{2z_1+4i} = \frac{1}{z_1+2i} = \frac{1}{-2i+\sqrt{3}i+2i} = \frac{1}{\sqrt{3}i}.$$

Finalement, $I = 2\pi i Res(f,z_1) = 2\pi i\frac{1}{\sqrt{3}i} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}$.

IV.5.2.2 Deuxième type :

Dans ce cas, l'intérêt est porté sur les intégrales du type $I = \int_{-\infty}^{+\infty} \dfrac{P(x)}{Q(x)}dx$ où P, Q sont deux polynômes à coefficients réels, Q n'a pas de zéros réels et $d^\circ Q \geq d^\circ P + 2$. Remarquons que sous ces conditions l'intégrale est convergente.

On pose $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$ et on considère le contour $\Gamma_R = ABCA$ suivant

On a $\int_{\Gamma_R^+} f(z)dz = 2\pi i \sum Res(f,z_i)$ où les z_i sont tous les points singuliers de f intérieurs à Γ_R.

$$\int_{\Gamma_R^+} f(z)dz = \int_{-R}^{+R} f(x)dx + \int_{\mathcal{C}_R^+} f(z)dz \tag{IV.5}$$

où $\mathcal{C}_R$ est l'arc BCA. On fait tendre R vers $+\infty$ dans (IV.5).

D'une part, $\int_{-R}^{+R} f(x)dx$ tend vers I et d'autre part, $\lim\limits_{|z|\to+\infty} |zf(z)| = \lim\limits_{|z|\to+\infty} \left| z\frac{P(z)}{Q(z)} \right| = 0$. La fonction f étant continue pour $|z|$ assez grand, on en déduit d'après le lemme (IV.5.1) de Jordan, que

$$\lim_{R\to+\infty} \int_{C_R^+} f(z)dz = 0.$$

Comme l'intérieur de Γ_R tend vers le demi-plan $[\mathcal{I}m\ z > 0]$, lorsque $R \to +\infty$, on obtient

$$I = 2\pi i \sum Res(f,z_i)$$

où les z_i sont les points singuliers de la fonction f dont la partie imaginaire est strictement positive.

Exemple IV.5.2 *Calculer* $I = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^6} dx.$

En posant $f(z) = \frac{1}{1+z^6}$ *et* $I = \frac{1}{2}J$, *on a* $J = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^6} dx$. *La fonction*

$\frac{1}{1+z^6}$ *possède six pôles simples qui sont* $z_k = e^{i\frac{\pi(2k+1)}{6}}$, $k = 0, \ldots, 5$. *Seuls* $z_0 = e^{i\frac{\pi}{6}}$, $z_1 = e^{i\frac{\pi}{2}}$ *et* $z_2 = e^{i\frac{5\pi}{6}}$ *sont dans le demi-plan* $[\mathcal{I}m\ z > 0]$ *et* $Res(f,z_k) = \frac{1}{6z_k^5}$

$$I = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^6}dx = \frac{1}{2}2\pi i\left(-\frac{1}{6}\right)\left[e^{i\frac{\pi}{6}} + e^{i\frac{\pi}{2}} + e^{i\frac{5\pi}{6}}\right] = \frac{\pi}{6}\left[1 + 2\sin\frac{\pi}{6}\right] = \frac{\pi}{3}.$$

IV.5.2.3 Troisième type :

On se propose de calculer $I = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} \sin(\omega x)\, dx$ $\left(resp.\ I = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} \cos(\omega x)\, dx\right)$ où $\omega > 0$, P et Q sont deux polynômes tels que $d^\circ Q \geq d^\circ P + 1$ et Q est sans racines réelles.

On cherchera en fait à calculer l'intégrale suivante

$$J = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} e^{i\omega x} dx.$$

Bien entendu $I = \mathcal{I}m(J)$ (resp. $I = \mathcal{R}e(J)$). On considère la fonction $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} e^{i\omega z}$ et le contour $\Gamma_R = ABCA$.

On a

$$\int_{\Gamma_R^+} \frac{P(z)}{Q(z)} e^{i\omega z} dz = \int_{-R}^{+R} \frac{P(x)}{Q(x)} e^{i\omega x} dx + \int_{\mathcal{C}_R^+} \frac{P(z)}{Q(z)} e^{i\omega z} dz. \qquad \text{(IV.6)}$$

où $\mathcal{C}_R$ est le demi-cercle BCA. Comme $\lim_{|z|\to+\infty} \left|\frac{P(z)}{Q(z)}\right| = 0$, alors le lemme (IV.5.3) assure que

$$\lim_{R\to+\infty} \int_{\mathcal{C}_R^+} \frac{P(z)}{Q(z)} e^{i\omega z} dz = 0.$$

En faisant tendre R vers $+\infty$ dans (IV.6), on obtient :

$$J = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} e^{i\omega x} dx = 2\pi i \sum Res(f,z_i)$$

où les z_i sont les points singuliers de la fonction f dont la partie imaginaire est strictement positive.

Exemple IV.5.3 *Calculer* $I = \int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{1+x^2} dx$. *On a*

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{1+x^2} dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{1+x^2} dx$$

Soit $J = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{1+x^2} dx$. *En posant* $f(z) = \frac{e^{iz}}{1+z^2}$, *on voit que le seul pôle (simple) de* f *intérieur au demi-plan* $[\mathcal{I}m\ z > 0]$ *est le complexe* i. *Donc* $J = 2\pi i Res(f,i) = 2\pi i \frac{e^{-1}}{2i} = \pi e^{-1}$ *et par conséquent* $I = \frac{1}{2}\mathcal{R}e(J) = \frac{\pi}{2e}$.

IV.5.2.4 Calcul de l'intégrale de Dirichlet

On se propose de calculer $I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$. On peut vérifier facilement que l'intégrale I est convergente.

La méthode précédente nous amène à considérer la fonction $f(z) = \frac{e^{iz}}{z}$ sur le contour Γ_R. Mais ici, 0 est racine de Q. On voit que 0 est un pôle situé sur le chemin d'intégration. Nous allons changer de contour de manière à éviter la singularité. Considérons le contour suivant $\Gamma = AA'C'B'BCA$.

Le pôle 0 est alors à l'extérieur de Γ, donc $\int_{\Gamma^+} \frac{e^{iz}}{z} dz = 0$, c'est-à-dire

$$\int_{-R}^{-r} \frac{e^{ix}}{x} dx - \int_{\mathcal{C}_r'^+} \frac{e^{iz}}{z} dz + \int_r^R \frac{e^{ix}}{x} dx + \int_{\mathcal{C}_R^+} \frac{e^{iz}}{z} dz = 0$$

où $\mathcal{C}_r'$ (resp. $\mathcal{C}_R$) est le demi-cercle $A'C'B'$ (resp. BCA) de centre O et de rayon r (resp. R). On en déduit que

$$2i \int_r^R \frac{\sin x}{x} dx + \int_{\mathcal{C}_R^+} \frac{e^{iz}}{z} dz - \int_{\mathcal{C}_r'^-} \frac{e^{iz}}{z} dz = 0.$$

Sur BCA, on a

$$\lim_{|z| \to +\infty} \left| \frac{1}{z} \right| = 0 \implies \lim_{R \to +\infty} \int_{\mathcal{C}_R'^+} \frac{e^{iz}}{z} dz = 0.$$

Sur $B'C'A'$, le lemme (IV.5.4) implique que

$$\lim_{r \to 0} \int_{\mathcal{C}_r'^+} f(z) dz = i\pi Res(f,0) = i\pi 1 = i\pi.$$

Donc $2i \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = i\pi$ et par conséquent,

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}.$$

IV.6 Exercices

Exercice IV.6.1 *On rappelle que*

$$e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} \quad \forall z \in \mathbb{C},$$

$$e^{z_1+z_2} = e^{z_1} e^{z_2} \quad \forall z_1,\, z_2 \in \mathbb{C}$$

et

$$(e^z)' = e^z \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

a/ Montrer que $|e^z| = e^{Re(z)}$.

b/ Résoudre $e^z = 1$.

c/ e^z *est-elle injective? surjective?*

d/ Montrer que $e^{z+i2\pi} = e^z$. *Conclure.*

e/ Montrer que l'application $z \longrightarrow e^z$ *restreinte à la bande*

$$U = \{x + iy,\, x \in \mathbb{R},\, -\pi \leq y < +\pi\}$$

est une bijection dans $\mathbb{C}\setminus\{0\}$. *Son inverse est l'application* $u \longmapsto Log|u| + iArg\ u$ *avec* $-\pi \leq Arg\ u < +\pi$. *La fonction ainsi définie est la détermination principale du logarithme :*

$$Log\ u = Log|u| + iArg\ u, \quad -\pi \leq Arg\ u < +\pi.$$

f/ Trouver les images par e^z *des ensembles suivants :*

- *La droite* $y = y_0$ *avec* $-\pi \leq y_0 < +\pi$ *;*

- *Le segment* $x = 0$ *avec* $-\pi \leq y < +\pi$ *;*
- *La bande* $-\pi \leq Im(z) < h$ *avec* $-\pi \leq h < +\pi$.

g/ A-t-on l'égalité $Log(z_1 z_2) = Log(z_1) + Log(z_2)$ *?*

Exercice IV.6.2 *On pose pour* $z \in \mathbb{C}$

$$\sin(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \quad \cos(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2},$$
$$\sinh(z) = \frac{e^{z} - e^{-z}}{2} \quad et \quad \cosh(z) = \frac{e^{z} + e^{-z}}{2}.$$

a/ Vérifier que

$$\cosh(iz) = \cos(z), \quad \sinh(iz) = i\sin(z), \quad \cos^2(z) + \sin^2(z) = 1,$$

$$\cos(z + z') = \cos(z)\cos(z') - \sin(z)\sin(z') \quad et$$

$$\sin(z + z') = \sin(z)\cos(z') + \cos(z)\sin(z').$$

b/ Montrer que pour tout $z = x + iy \in \mathbb{C}$*, on a*

$$|\cos(z)|^2 = \cos^2(x) + \sinh^2(y).$$

A-t-on $|\cos(z)| \leq 1 \quad \forall z \in \mathbb{C}$ *?*

c/ Résoudre dans $\mathbb{C}$

$$\cos(z) = 0, \quad \sin(z) = 0, \quad \cosh(z) = 0 \quad et \quad \sinh(z) = 0.$$

Exercice IV.6.3 *Montrer que la fonction* f *définie par* $f(z) = \overline{z}$ *n'est holomorphe en aucun point de* $\mathbb{C}$.

Exercice IV.6.4 *Trouver toutes les fonctions holomorphes dont la partie réelle est*

$$u = x^2 - y^2.$$

Exercice IV.6.5 *On pose* $u(x,y) = e^{-x}(x \sin(y) - y \cos(y))$. *Déterminer* $v(x,y)$ *pour que*

$$f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$$

soit holomorphe.

Exercice IV.6.6 *Soit* f *holomorphe de* $\mathbb{C}$ *dans* $\mathbb{C}$. *On pose pour* $z = x + iy$,

$$f(z) = u(x,y) + iv(x,y).$$

On suppose qu'il existe a, b *et* $c \in \mathbb{R}$ *non tous nuls, tels que pour tout* $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, *on a*

$$au(x,y) + bv(x,y) = c.$$

Montrer que f *est constante.*

Exercice IV.6.7 *Calculer l'intégrale*

$$I = \int_{\mathcal{C}^+} \frac{\sin\left(\pi z^2\right) + \cos\left(\pi z^2\right)}{(z-1)(z-2)} dz$$

où $\mathcal{C}$ *est le cercle de centre* O *et de rayon 3.*

Exercice IV.6.8 *Soient $z_0 \in \mathbb{C}$, $r > 0$ et f une fonction holomorphe sur et à l'intérieur du cercle $\mathcal{C}$ de centre z_0 et de rayon r. Montrer que*

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta}) d\theta.$$

(C'est le théorème de Gauss sur la valeur moyenne)

Exercice IV.6.9 *Soient a et $b \in \mathbb{R}_+^*$ et Γ l'ellipse d'équation*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \; 0 < b \leq a.$$

Calculer $\displaystyle\int_{\Gamma^+} \frac{dz}{z}$. En déduire que

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{a^2 \cos^2(t) + b^2 \sin^2(t)} = \frac{2\pi}{ab}.$$

Exercice IV.6.10 *Si $R > 0$, on désigne par $\mathcal{C}$ le segment joignant les points d'affixes R et $R + i$. Pour $a > 0$, montrer que*

$$\lim_{R \longrightarrow +\infty} \int_{\mathcal{C}^+} \frac{e^{iaz}}{e^{2\pi z} - 1} dz = 0.$$

Exercice IV.6.11 *Soient $R > 0$, $a > 0$, $b \in \mathbb{R}$ et $\mathcal{C} = \{z \in \mathbb{C} / \; |z| = R$ et $\mathcal{R}e(z) \geq 0\}$. Montrer que*

$$\lim_{R \to +\infty} \int_{\mathcal{C}^+} \frac{z^2 - b^2}{z^2 + b^2} \frac{e^{iaz}}{z} dz = 0.$$

Exercice IV.6.12 *Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer les points singuliers et les résidus correspondants :*

1. $f(z) = \frac{(z^4+1)^2}{z^4(z-p)\left(z-\frac{1}{p}\right)}$; $\; p \in \mathbb{R}, p \notin \{0, -1{,}1\}$;

2. $f(z) = \frac{1}{\sin(z)}$;

3. $f(z) = \frac{1}{z^n - 1}$, $n \geq 1$;

4. $f(z) = \cos\left(\frac{1}{z}\right)$;

5. $f(z) = \sin\left(\frac{1}{z}\right)$;

6. $f(z) = \frac{e^z}{(z-1)(z-2)^3}$;

7. $f(z) = e^{\left(\frac{1}{z}\right)}$;

8. $f(z) = \frac{2ze^{-\pi z}}{1-e^{-2\pi z}}$.

Exercice IV.6.13 *Déterminer le développement en série de Laurent au voisinage des singularités :*

$$(z-3)\sin\left(\frac{1}{z+2}\right) \quad et \quad \frac{e^{2z}}{(z-1)^3}.$$

Exercice IV.6.14 *Calculer les intégrales*

$\int_{\mathcal{C}_1^+} \frac{e^{\frac{1}{z}}}{z+1}dz$ *où* $\mathcal{C}_1$ *est le cercle de centre* O *et de rayon* r $(r > 1)$ *et*

$\int_{\mathcal{C}_2^+} \frac{e^{zt}}{z^2(z^2+2z+2)}dz$ *où* $\mathcal{C}_2$ *est le cercle de centre* O *et de rayon* 3.

Exercice IV.6.15 *Calculer par la méthode des résidus :*

1. $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1-2a\sin(\theta)+a^2}$, $0 < a < 1$;
2. $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\cos(\theta)}{a+\cos(\theta)}d\theta$, $a > 1$;
3. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^{2m}}{1+x^{2n}}dx$, $m, n \in I\!N^*$, $n - m \geq 1$;

4. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)^2}dx$;
5. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x\sin(2x)}{4+x^2}dx$;
6. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(2\pi x)}{4+x^2}dx$;
7. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2(x)}{1+x^2+x^4}dx$.

Exercice IV.6.16 *Soit* $a \in]0,1[$. *Calculer*

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ax}}{1+e^x}dx,$$

en utilisant la fonction f *définie par* $f(z) = \frac{e^{az}}{1+e^z}$ *et le contour rectangulaire délimité par les droites d'équations* $x = R$, $x = -R$, $y = 0$ *et* $y = 2\pi$.

Exercice IV.6.17 *Soit* n *un entier naturel supérieur ou égal à 3. Calculer à l'aide du contour*

l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^n}$, *où* $R > 1$ *et* $\alpha = \frac{2\pi}{n}$.

Exercice IV.6.18 *Soient* $a > 0$ *et* f *la fonction définie par* $f(z) = \frac{z}{a-e^{-iz}}$.

1) Quelles sont les singularités de f *? De quelle nature sont-elles ? Les* *situer sur le plan.*

2) Calculer les résidus en chacune des singularités.

3) Calculer $I(a) = \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{x}{a - e^{-ix}} dx$ *en utilisant le contour rectangulaire suivant*

4) En déduire la valeur de l'intégrale $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} ucotg(u)du$.

Exercice IV.6.19 *La détermination choisie pour* $Log\ z$ *étant*

$$Log(z) = Log|z| + iArg(z), \quad 0 \leq Arg(z) < 2\pi.$$

Calculer

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{Log(x)}{(1+x^2)^2} dx$$

en utilisant la fonction f *définie par* $f(z) = \frac{Log(z)}{(1+z^2)^2}$ *et le contour* $\Gamma_{R,r}$ *ci-dessous avec* r *assez petit et* R *assez grand.*

Exercice IV.6.20 *On considère le contour* $\Gamma_{R,\varepsilon}$ *suivant :*

La partie courbe γ_ε *est le demi-cercle centré au point* $z = i$ *et de rayon* ε. *On suppose* ε *petit et* R *grand.*

Soient f *la fonction de la variable complexe définie par* $f(z) = \frac{2ze^{-\pi z}}{1-e^{-2\pi z}}$ *et*
$I = \int_0^{+\infty} \dfrac{x}{\sinh(\pi x)} dx$.

1) Déterminer les points singuliers de f, *leur nature et les résidus.*

2) Calculer $J = \int_{\Gamma^+_{R,\varepsilon}} f(z)dz$.

3) Montrer que $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \int_{\gamma^+_\varepsilon} f(z)dz = 1$.

4) Calculer $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \lim\limits_{R \to \infty} \left\{ \int_{CD} f(z)dz + \int_{EF} f(z)dz \right\}$ *en fonction de* I.

5) Calculer $\lim\limits_{R \to +\infty} \left\{ \int_{BC} f(z)dz + \int_{FA} f(z)dz \right\}$.

7) En déduire la valeur de I.

Exercice IV.6.21 *Soit* $a > 0$. *Chercher la transformée de Fourier de* e^{-x^2} *et* e^{-ax^2} *à l'aide du théorème des résidus.*

Exercice IV.6.22 *Vérifier que les zéros d'une fonction holomorphe (non nulle) sont isolés.*

Exercice IV.6.23 *On considère la fonction f définie par*

$$f(z) = \frac{1}{z^2 + 2\sqrt{2}z + 1}, \ z \in \mathbb{C}.$$

On pose $z_1 = -\sqrt{2} + 1$ et $z_2 = -\sqrt{2} - 1$.

1) Déterminer les pôles de f et calculer les résidus correspondants.

2) Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < |z_1|$, on a

$$f(z) = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(z_1^{n+1} - z_2^{n+1} \right) z^n.$$

3) Soient $p \in \mathbb{N}^*$ et g la fonction définie par

$$g(z) = \frac{z^{2p} + 1}{z^p(z^2 + 2\sqrt{2}z + 1)}.$$

Calculer les résidus de g aux pôles 0, z_1 et z_2.

4) Soit γ le cercle unité orienté dans le sens direct. Calculer les intégrales :

$$\int_{\gamma^+} f(z)dz \quad et \quad \int_{\gamma^+} g(z)dz.$$

5) En utilisant les questions précédentes, développer en série de Fourier la fonction

$$h(x) = \frac{1}{\sqrt{2} + \cos x}, \ x \in \mathbb{R}.$$

Exercice IV.6.24 *Soit f holomorphe dans un voisinage de z_0 sauf en z_0. Montrer que la $\lim\limits_{z \to z_0} f(z)$ existe et est finie si et seulement si les coefficients a_n $(n < 0)$, du développement de Laurent sont nuls.*

Exercice IV.6.25 *1) Soient $z = a$ un pôle simple de f et γ_ε un arc de cercle de centre a, d'angle θ et de rayon $\varepsilon > 0$. On suppose ε assez petit pour que f soit holomorphe dans un disque pointé $D^*(a,r)$, $r > \varepsilon$ contenant γ_ε. Démontrer que*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\gamma_\varepsilon^+} f(z)dz = i\theta Res(f,a).$$

2) Soient n un entier naturel supérieur ou égal à 2 et f la fonction définie par $f(z) = \frac{z-1}{z^{n+1}-1}$. Déterminer les points singuliers, leur nature et les résidus.

3) On considère le contour Γ_R suivant

où $\alpha = \frac{2\pi}{n+1}$, $a = e^{i\alpha}$, AB est l'arc de cercle de centre O et de rayon R et CD est l'arc γ_ε. On suppose que R est assez grand et ε assez petit. Calculer

$$\int_{\Gamma_R^+} f(z)dz.$$

4) Calculer $\lim\limits_{R \to +\infty} \int_{\gamma_R^+} f(z)dz$ et $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \int_{\gamma_\varepsilon^+} f(z)dz$.

5) Déterminer la valeur de l'intégrale

$$I_n = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1 + x + \cdots + x^n} dx.$$

6) Calculer $\lim_{n \to +\infty} I_n$.

7) Retrouver cette limite par le théorème de convergence dominée.

Exercice IV.6.26 *Prouver que* $\int_0^{+\infty} \cos\left(x^2\right) dx = \int_0^{+\infty} \sin\left(x^2\right) dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$ *en utilisant la fonction* f *définie par* $f(z) = e^{-z^2}$ *et le contour*

On admet que $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Exercice IV.6.27 *On considère le contour* Γ *suivant*

On suppose que r *est assez petit et* R *assez grand. Soient* $a \in \mathbb{R}$ *et* f *la fonction définie par* $f(z) = \frac{e^{iaz}}{e^z - e^{-z}}$.

1) Calculer $I = \int_{\Gamma^+} f(z) dz$.

2) Montrer que

$$I = \int_{BC} f(z)dz + \int_{C'B'} f(z)dz + K\left(\int_{-R}^{-r} f(x)dx - \int_{\gamma_r^+} f(z)dz + \int_r^R f(x)dx\right),$$

où K est une constante réelle non nulle que l'on calculera.

3) Montrer que

$$\lim_{R\to+\infty} \int_{BC} f(z)dz = \lim_{R\to+\infty} \int_{C'B'} f(z)dz = 0.$$

4) Donner

$$\int_{-R}^{-r} f(x)dx + \int_{r}^{R} f(x)dx$$

en fonction de $\displaystyle\int_r^R \frac{\sin(ax)}{\sinh(x)}dx.$

5) Déduire de ce qui précède la valeur de

$$J = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(ax)}{\sinh(x)}dx.$$

Exercice IV.6.28 *Calculer par la méthode des résidus*

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n}(\theta)\, d\theta.$$

Exercice IV.6.29 *Soient $p \in \mathbb{R} - \{0, -1, +1\}$ et f la fonction définie par*

$$f(z) = \frac{(z^4+1)^2}{z^4(z-p)(z-\frac{1}{p})}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

1) Déterminer les pôles et les résidus de f en ces pôles.

2) Soit $\mathcal{C}$ le cercle trigonométrique parcouru dans le sens direct. Calculer l'intégrale

$$J(p) = \int_{\mathcal{C}^+} f(z)dz.$$

3) Calculer par la méthode des résidus

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{\cos^2(2t)}{1 - 2p\cos(t) + p^2} dt.$$

Exercice IV.6.30 *1) Soit z_0 un point singulier isolé de f. Démontrer que z_0 est un point singulier éliminable de f si et seulement si $\lim\limits_{z \to z_0} f(z)$ existe et est finie.*

2) On considère la fonction f définie par $f(z) = \frac{ze^{iz}}{\sinh(z)}$. Déterminer les pôles et les résidus.

3) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on désigne par Γ_n le contour (dans $\mathbb{C}$) suivant

Calculer $I_n = \int_{\Gamma_n^+} f(z)dz$.

4) Déterminer la valeur de l'intégrale $J = \int_0^{+\infty} \frac{x\cos(x)}{\sinh(x)} dx$.

Exercice IV.6.31 *Soit f la fonction définie par $f(z) = \frac{-2}{(z-1)(z+1)}$. Développer f en série de Laurent autour des points $z = 0$ et $z = 1$.*

Exercice IV.6.32 *Soient* a, b *et* $\alpha \in \mathbb{C}$ *tels que* $0 < Re(a) < 1$ *et* $0 < Re(b) < 1$. *On considère la fonction* f *définie par*

$$f(z) = \begin{cases} \frac{e^{az}-a^{bz}}{1-e^{z}} & si \quad z \neq 0 \\ \alpha & si \quad z = 0 \end{cases}$$

1) Montrer que f *est holomorphe à l'origine si* α *est convenablement choisi.*

2) Calculer dans ce cas $f'(0)$.

3) Déterminer les pôles de f.

4) On considère le rectangle Γ_R *suivant*

Calculer $\int_{\Gamma_R^+} f(z)dz$.

5) Calculer $\lim\limits_{R\to+\infty} \int_{BC} f(z)dz$ *et* $\lim\limits_{R\to+\infty} \int_{DA} f(z)dz$.

6) Sachant que $I(a) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ax}}{1+e^{x}}dx = \frac{\pi}{\sin(a\pi)}$, *calculer*

$$\lim_{R\to+\infty} \int_{CD} f(z)dz.$$

7) En déduire la valeur de l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ax}-a^{bx}}{1-e^{x}}dx.$$

Exercice IV.6.33 *On considère la fonction f définie par $f(z) = \cot(\pi z) = \frac{\cos(\pi z)}{\sin(\pi z)}$.*

1) Montrer que pour tout x, $y \in \mathbb{R}$ tel que $|y| > \frac{1}{2}$, on a $\left|f(x+iy)\right| \leq \frac{1+e^{-\pi}}{1-e^{-\pi}}$.

2) Montrer que pour tout $y \in \mathbb{R}$ tel que $|y| \leq \frac{1}{2}$ et pour tout $k \in \mathbb{Z}$ on a,

$$\left|f(k+\frac{1}{2}+iy)\right| \leq \tanh\left(\frac{\pi}{2}\right).$$

3) Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathcal{C}_n$ le bord du carré dont les côtés sont portés par les droites $x = \pm\left(n+\frac{1}{2}\right)$ et $y = \pm\left(n+\frac{1}{2}\right)$. Montrer qu'il existe $M > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $z \in \mathcal{C}_n$, on a $|f(z)| \leq M$.

4) Soit $a \in]-1,1[$. On considère la fonction g_a définie par $g_a(z) = \frac{\pi f(z)}{z-a}$. Déterminer les points singuliers de g_a, leur nature et les résidus.

5) Calculer l'intégrale $I_n = \int_{\mathcal{C}_n^+} g_a(z)dz$.

6) On pose $J_n = \int_{\mathcal{C}_n^+} \dfrac{g_a(z)}{z}dz$; calculer J_n.

7) Chercher $\lim\limits_{n\to+\infty} J_n$.

8) Déduire de ce qui précède les sommes des séries :

$$\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{a^2-p^2}\ (a \neq 0) \quad \textit{et} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Exercice IV.6.34 *Soit la fonction h définie par $h(z) = \left(\frac{1}{\sin(z)} - \frac{1}{z}\right)\left(\frac{1}{z-t} - \frac{1}{z}\right)$ où t est un nombre complexe n'appartenant pas à $\pi\mathbb{Z}$.*

1) Trouver les points singuliers et les résidus de h.

2) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on désigne par $\mathcal{C}_n$ le bord du carré dont les côtés sont portés par les droites $x = \pm\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi$ et $y = \pm\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi$.

a/ Montrer que si $z = x + iy$ alors $|\sin(z)|^2 = \frac{\cosh(2y)-\cos(2x)}{2}$.

b/ Démontrer qu'il existe $M > 0$ tel que pour tout n, et tout $z \in \mathcal{C}_n$, on a

$$\left|\frac{1}{\sin(z)}\right| \leq M.$$

3) En déduire que $\lim_{n\to+\infty} \int_{\mathcal{C}_n} h(z)dz = 0$. En appliquant le théorème des résidus, démontrer

$$\frac{1}{\sin(t)} = \frac{1}{t} + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{2t}{t^2 - n^2\pi^2}.$$

Chapitre V

Transformation de Laplace et applications

V.1 Généralités

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On suppose que $f(t) = 0$ pour $t < 0$ et que $f \in L^1_{loc}([0, +\infty[)$.

Définition V.1.1 *On appelle transformée de Laplace de f, la fonction F , définie pour $p \in \mathbb{C}$ par*

$$F(p) = \int_{[0,+\infty[} e^{-pt} f(t)dt$$

On écrit $F(p) = \mathcal{L}\left[f(t)\right]$ ou encore $F(p) \sqsubset f(t)$. On dit aussi que $F(p)$ est l'image de $f(t)$.

Définition V.1.2 *L'application $\mathcal{L} : f \longmapsto F$ est appelée transformation* *de Laplace.*

Donnons des résultats relatifs à l'existence de l'intégrale de Laplace :

Proposition V.1.1 *i) Si $F(z)$ existe pour $z \in \mathbb{C}$ alors $F(p)$ existe pour tout nombre complexe p tel que $\mathcal{R}e(p) \geq \mathcal{R}e(z)$.*

ii) L'ensemble $E = \{\mathcal{R}e(z) / \ F(z) \ existe\})$ a l'une des formes suivantes

$$\emptyset, \quad]\alpha, +\infty[, \quad [\alpha, +\infty[\ \ ou \ \ \mathbb{R}.$$

Démonstration :

i) Soit $p \in \mathbb{C}$ tel que $\mathcal{R}e(p) \geq \mathcal{R}e(z)$. On a

$$\left|e^{-pt} f(t)\right| = e^{-\mathcal{R}e(p)t} |f(t)| \leq e^{-\mathcal{R}e(z)t} |f(t)| = \left|e^{-zt} f(t)\right|$$

Par conséquent si $F(z)$ existe alors $F(p)$ existe.

ii) Supposons que $E \neq \emptyset$ et soient $x \in E$ et $u \geq x$. Il existe donc un $z \in \mathbb{C}$ de la forme $z = x + iy$ tel que $F(z)$ existe. D'après i), $F(u)$ existe car $\mathcal{R}e(u) = u \geq \mathcal{R}e(z) = x$, d'où $u \in E$.

Considérons $\alpha = \inf E$. Il est clair que :

$$E = \begin{cases}]\alpha, +\infty[\ \ ou \ \ [\alpha, +\infty[& si \ \ \alpha \ est \ fini \\ \mathbb{R} & si \ \ \alpha = -\infty. \end{cases}$$

Définition V.1.3 *On appelle abscisse de f, et on le note α_f, le nombre :*

$$\alpha_f = \begin{cases} -\infty & si \quad E = I\!R \\ \alpha & si \quad E =]\alpha, +\infty[\quad ou \quad [\alpha, +\infty[\\ +\infty & si \quad E = \emptyset. \end{cases}$$

Remarque V.1.1 *Le nombre α_f joue un rôle analogue à celui du rayon de convergence d'une série entière. La droite verticale du plan complexe $\mathcal{R}e(p) = \alpha_f$ partage ce plan en deux demi-plans tels que $F(p)$ existe pour $\mathcal{R}e(p) > \alpha_f$ et n'existe pas pour $\mathcal{R}e(p) < \alpha_f$. Pour $\mathcal{R}e(p) = \alpha_f$, on doit faire une étude directe selon le cas.*

Donnons à présent une condition suffisante d'existence de $F(p)$;

Définition V.1.4 *On dit que la fonction f est d'ordre exponentiel (α) si et seulement si*

$$\exists \alpha \in I\!R, \ \exists M > 0 \ \ et \ \ \exists t_0 > 0 \ \ tel \ \ que \ \ pour \ tout \ \ t \geq t_0, on \ a \ \ |f(t)| \leq Me^{\alpha t}.$$

Ce qui est équivalent à dire que : $f(t) = \Theta\left(e^{\alpha t}\right)$ au voisinage de $+\infty$.

Exemple V.1.1 *Pour tout* $\alpha_0 > 0$, *on a* $t^n = \Theta\left(e^{\alpha_0 t}\right)$.

Proposition V.1.2 *Une fonction bornée est d'ordre exponentiel* (0).

Remarque V.1.2 *Les fonctions utilisées dans la pratique sont d'ordre exponentiel.*

Proposition V.1.3 *Si* $f(t) = \Theta\left(e^{\alpha t}\right)$ *alors* $F(p)$ *existe pour tout* p *tel que* $\mathcal{R}e(p) > \alpha$ *et par suite* $\alpha \geq \alpha_f$.

Démonstration :

Comme $f \in L^1_{loc}([0,+\infty[)$, il suffit de vérifier l'intégrabilité de $e^{-pt}f(t)$ au voisinage de $+\infty$. Or au voisinage de $+\infty$, on a

$$\left|e^{-pt}f(t)\right| \leq Me^{-\mathcal{R}e(p)t}e^{\alpha t} = Me^{-[\mathcal{R}e(p)-\alpha]t},$$

donc $F(p)$ existe si $\mathcal{R}e(p) > \alpha$.

Exemple V.1.2 *On considère la fonction Echelon unité ou fonction de Heaviside définie par*

$$\mathcal{U}(t) = \begin{cases} 1 & si \quad t \geq 0 \\ 0 & si \quad t < 0. \end{cases}$$

Pour $p \neq 0$, *la transformée de Laplace de* $\mathcal{U}$ *est* $F(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt}dt = \left[-\frac{e^{-pt}}{p}\right]_0^{+\infty}$. *L'intégrale existe si et seulement si* $\mathcal{R}e(p) > 0$. *On a dans ce cas* $\lim\limits_{t\to+\infty} e^{-pt} = 0$, *d'où* $F(p) = \frac{1}{p}$. *Ainsi*

$$\mathcal{L}\left[\mathcal{U}(t)\right] = \frac{1}{p}.$$

L'abscisse de convergence étant égal à 0.

Théorème V.1.1 *La fonction* F *est holomorphe dans le demi-plan* $\{p \in \mathbb{C} / \ \mathcal{R}e(p) > \alpha_f\}$ *et on a*

$$F^{(m)}(p) = \mathcal{L}\left[(-t)^m f(t)\right].$$

Ce résultat, dont la démonstration est admise, découle de l'extention aux variables complexes du théorème de dérivation sous le signe somme

$$F(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t)dt,$$

$$F^{'}(p) = \int_0^{+\infty} (-t)e^{-pt} f(t)dt,$$

$$\vdots$$

$$F^{(m)}(p) = \int_0^{+\infty} (-t)^m e^{-pt} f(t)dt = \mathcal{L}\left[(-t)^m f(t)\right].$$

Théorème V.1.2 *(Formule d'inversion de Bromwich)*

Si F *est la transformée de Laplace de* f *et si pour tout* $\alpha > \alpha_f$, $\beta \longmapsto$

$F(\alpha + i\beta)$ est Lebesgue intégrable sur $I\!R$, alors pour tout t où f est continue, on a

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha - i\infty}^{\alpha + i\infty} e^{pt} F(p) dp.$$

Démonstration :

Soient $\alpha > \alpha_f$ et $p = \alpha + i2\pi u$. On a

$$\begin{aligned} F(p) &= F(\alpha + i2\pi u) \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-(\alpha + i2\pi u)t} f(t) dt \\ &= \int_{I\!R} e^{-i2\pi ut} e^{-\alpha t} f(t) dt. \end{aligned}$$

Nous constatons que :

$$F(\alpha + i2\pi u) = \mathcal{F}\left(e^{-\alpha t} f(t)\right)(u) = \widehat{e^{-\alpha t} f(t)}(u),$$

égalité qui met en évidence le lien entre les transformations de Fourier et de Laplace.

Il découle des hypothèses que $u \longmapsto \widehat{e^{-\alpha t} f(t)}(u)$ est intégrable et $t \longmapsto e^{-\alpha t} f(t)$ est aussi intégrable puisque $\alpha > \alpha_f$. Nous pouvons donc appliquer le théorème d'inversion de la transformation de Fourier ; pour tout t où f est continue, on a

$$e^{-\alpha t} f(t) = \int_{I\!R} e^{i2\pi ut} F(\alpha + i2\pi u) du,$$

d'où

$$f(t) = \int_{I\!R} e^{(\alpha+i2\pi u)t} F(\alpha+i2\pi u)du$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} e^{pt}F(p)dp.$$

Remarques V.1.1 *1) Le calcul de l'intégrale de Bromwich le long de la droite verticale* $\Delta = \{z \in \mathbb{C}/\ \mathcal{R}e(z) = \alpha\}$ *peut se faire par la méthode des résidus.*

2) La fonction F *étant holomorphe dans le demi-plan* $\mathcal{R}e(p) > \alpha_f$*, tous les points singuliers de* $e^{pt}F(p)$ *se situent à gauche de* Δ*.*

Définition V.1.5 *Si* F *est la transformée de Laplace de* f*, on dit que* f *est la transformée de Laplace inverse de* F *et on écrit* $f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(p)]$*. On dit aussi que la fonction* f *est l'original de la fonction* F*.*

V.2 Propriétés de la transformation de Laplace

Propriété V.2.1 *(Linéarité)*

Soient λ *et* μ *deux scalaires. Si* $\mathcal{L}[f(t)] = F(p)$ *et* $\mathcal{L}[g(t)] = G(p)$*, alors*

$$\mathcal{L}[\lambda f(t) + \mu g(t)] = \lambda F(p) + \mu G(p).$$

Propriété V.2.2 *(Changement d'échelle)*

Soit $F(p) = \mathcal{L}[f(t)]$. Alors, pour tout $a > 0$

$$\mathcal{L}[f(at)] = \frac{1}{a} F\left(\frac{p}{a}\right).$$

En effet, $\mathcal{L}[f(at)] = \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(at)dt = \int_0^{+\infty} e^{-p\frac{u}{a}} f(u)\frac{du}{a} = \frac{1}{a}F\left(\frac{p}{a}\right)$.

Propriété V.2.3 *(Translation : Formule du retard)*

Soient f une fonction nulle sur $]-\infty,0[$ et $a \in I\!R$. On suppose que $F(p) = \mathcal{L}[f(t)]$. La fonction g définie par, $g(t) = f(t-a)$, est nulle pour $t < a$ et

$$\mathcal{L}[g(t)] = e^{-ap}F(p) = e^{-ap}\mathcal{L}[f(t)].$$

En effet

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[g(t)](p) &= \int_a^{+\infty} e^{-pt} f(t-a)dt \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-p(u+a)} f(u)du \\ &= e^{-ap}\mathcal{L}[f(t)](p). \end{aligned}$$

Exemple V.2.1 *Echelon unité retardé de $a > 0$.*

On a $\mathcal{L}[\mathcal{U}(t-a)](p) = \frac{e^{-pa}}{p}$.

Propriété V.2.4 *(Transformée de Laplace d'une dérivée)*

Supposons que f soit continue, de classe C^1 par morceaux sur $[0,+\infty[$. Si f et f' ont des transformées de Laplace, alors

$$\mathcal{L}\left[f'(t)\right](p) = p\mathcal{L}\left[f(t)\right](p) - f\left(0^+\right).$$

En effet, pour $a > 0$

$$\begin{aligned}\int_0^a e^{-pt} f'(t)dt &= \left[e^{-pt} f(t)\right]_0^a + p\int_0^a e^{-pt} f(t)dt \\ &= e^{-pa} f(a) - f\left(0^+\right) + p\int_0^a e^{-pt} f(t)dt.\end{aligned}$$

L'existence de $\mathcal{L}[f]$, $\mathcal{L}\left[f'\right]$ et l'égalité ci-dessus impliquent que $\lim\limits_{a\to+\infty} e^{-pa} f(a)$ existe. Puisque $t \longmapsto e^{-pt} f(t)$ est intégrable, alors cette limite est nulle.

Si les conditions sont vérifiées jusqu'à l'ordre n, le résultat précédent donne :

$$\mathcal{L}\left[f^n(t)\right](p) = p^n\mathcal{L}\left[f(t)\right](p) - p^{n-1} f\left(0^+\right) - p^{n-2} f'\left(0^+\right) - \cdots - f^{(n-1)}\left(0^+\right).$$

Propriété V.2.5 *(Transformée d'une primitive)*

On suppose que $f \in C^0\left([0,+\infty[\right)$ et on pose $\varphi(t) = \int_0^t f(x)dx$. Si $\mathcal{L}[f]$ et $\mathcal{L}[\varphi]$ existent, alors

$$\mathcal{L}\left[\varphi(t)\right](p) = \frac{\mathcal{L}\left[f(t)\right](p)}{p}.$$

En effet, puisque $\varphi \in C^1\left([0,+\infty[\right)$ et $\varphi' = f$, alors $\mathcal{L}[\varphi]$ existe. On a donc

$$\mathcal{L}\left[\varphi'(t)\right](p) = p\mathcal{L}\left[\varphi(t)\right](p) - \varphi(0) = \mathcal{L}\left[f(t)\right](p),$$

d'où le résultat.

Propriétés V.2.1 *Ici F désigne la transformée de Laplace de la fonction f.*

- *On a* $\mathcal{L}\left[\frac{f(t)}{t}\right](p) = \int_p^{\infty} F(u)du.$
- *Soient* $f, g \in \mathcal{L}^1_{loc}([0, +\infty[)$ *avec* $f(t) = g(t) = 0$ *pour* $t < 0$. *Alors*

$$\mathcal{L}[f * g] = \mathcal{L}[f] \times \mathcal{L}[g].$$

- *On a* $\mathcal{L}[f(t)\cos bt] = \frac{1}{2}[F(p-ib) + F(p+ib)]$ *et* $\mathcal{L}[f(t)\sin bt] = \frac{1}{2i}[F(p-ib) - F(p+ib)]$.
- *Considérons une fonction f bornée T-périodique ($T > 0$). Bien entendu f est supposée nulle pour $t < 0$. On a*

$$\mathcal{L}[f(t)] = \frac{\displaystyle\int_0^T e^{-pt} f(t)dt}{1 - e^{-pT}}.$$

- *On suppose que le rayon de convergence de* $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n t^n$ *est* $+\infty$ *et que le rayon de convergence de la série* $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n n!\, t^{n+1}$ *est non nul. Alors*

$$\mathcal{L}\left[\sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n\right] = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \frac{n!}{p^{n+1}}.$$

- $\lim\limits_{t\to 0^+} f(t) = \lim\limits_{p\to+\infty} pF(p)$, $p \in I\!R$, *si les limites existent. (C'est le théorème de la valeur initiale)*
- $\lim\limits_{t\to +\infty} f(t) = \lim\limits_{p\to 0^+} pF(p)$, $p \in I\!R$, *si les limites existent. (C'est le théorème de la valeur finale)*
- *La transformation de Laplace inverse est aussi linéaire.*

V.3 Applications de la transformation de Laplace

A l'aide d'un calcul formel, la transformation de Laplace permet de résoudre un certain nombre de problèmes différentiels à conditions initiales. Ce procédé technique est appelé calcul opérationnel ou calcul symbolique.

La détermination des images et des originaux se fait dans la pratique à l'aide de la table des transformées de Laplace appelée aussi dictionnaire d'images.

Exemple V.3.1 *On se propose de résoudre l'équation différentielle* $y^{'}(t) + 3y(t) = e^{-2t}$ *avec* $y(0) = 1$.

On pose $Y(p) = \mathcal{L}\left[y(t)\right]$. *On applique* $\mathcal{L}$ *aux deux membres de l'équation :*

$$\mathcal{L}\left[y^{'}(t)\right] + 3\mathcal{L}\left[y(t)\right] = \mathcal{L}\left[e^{-2t}\right]$$

$$pY(p) - y(0) + 3Y(p) = \frac{1}{p+2}$$

On obtient donc une équation algébrique :

$$(p+3)Y(p) = \frac{1}{p+2} + 1 = \frac{p+3}{p+2}$$

d'où $Y(p) = \frac{1}{p+2}$.

Après avoir trouvé $Y(p)$, *on cherche* $y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[Y(p)\right]$ *à l'aide de la table. On trouve* $y(t) = e^{-2t}$.

V.4 Table des transformées de Laplace usuelles

$f(t)$	$F(p)$	$f(t)$	$F(p)$
$\mathcal{U}(t)$	$\frac{1}{p}$	$e^{(-at)}\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{(p+a)^2+\omega^2}$
$t^n\ (n \in \mathbb{N})$	$\frac{n!}{p^{n+1}}$	$t\cos(\omega t)$	$\frac{p^2-\omega^2}{(p^2+\omega^2)^2}$
$\sqrt{t}$	$\frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{1}{p^{\frac{3}{2}}}$	$t\sin(\omega t)$	$\frac{2p\omega}{(p^2+\omega^2)^2}$
$\frac{1}{\sqrt{t}}$	$\sqrt{\pi}\frac{1}{p^{\frac{1}{2}}}$	$t^n e^{(-at)}$	$\frac{n!}{(p+a)^{n+1}}$
$(a \in \mathbb{C})\quad e^{(-at)}$	$\frac{1}{p+a}$	$\sin(2\sqrt{t})$	$\sqrt{\pi}\frac{e^{\left(-\frac{1}{p}\right)}}{p^{\frac{3}{2}}}$
$(a \neq b)\quad \frac{e^{(-at)}-e^{(-bt)}}{b-a}$	$\frac{1}{(p+a)(p+b)}$	$\frac{\cos(2\sqrt{t})}{\sqrt{t}}$	$\sqrt{\pi}\frac{e^{\left(-\frac{1}{p}\right)}}{p^{\frac{1}{2}}}$
$(a \neq b)\quad \frac{be^{(bt)}-ae^{(at)}}{b-a}$	$\frac{p}{(p-a)(p-b)}$	$\frac{\sin(at)-at\cos(at)}{2a^3}$	$\frac{1}{(p^2+a^2)^2}$
$\cosh(\omega t)$	$\frac{p}{p^2-\omega^2}$	$\frac{\sin(bt)+bt\cos(bt)}{2b}$	$\frac{p^2}{(p^2+b^2)^2}$
$\sinh(\omega t)$	$\frac{\omega}{p^2-\omega^2}$	$\cos(at)-\frac{1}{2}at\sin(at)$	$\frac{p^3}{(p^2+a^2)^2}$
$\cos(\omega t)$	$\frac{p}{p^2+\omega^2}$	$\frac{at\cosh(at)-\sinh(at)}{2a^3}$	$\frac{1}{(p^2-a^2)^2}$
$\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{p^2+\omega^2}$	$\frac{\sinh(at)+at\cosh(at)}{2a}$	$\frac{p^2}{(p^2-a^2)^2}$
$e^{(-at)}\cos(\omega t)$	$\frac{p+a}{(p+a)^2+\omega^2}$	$\cosh(at)+\frac{1}{2}at\sinh(at)$	$\frac{p^3}{(p^2-a^2)^2}$

V.5 Exercices

Exercice V.5.1 *Chercher les transformées de Laplace des fonctions suivantes :*

a/ $f(t) = e^{at},\ a \in \mathbb{C}$;

b/ $f(t) = \cos(\omega t),\ \omega \in \mathbb{R}$ *;*

c/ $f(t) = \sin(\omega t),\ \omega \in \mathbb{R}$ *;*

d/ $f(t) = t^n,\ n \in \mathbb{N}$ *;*

e/ $f(t) = \cosh(\omega t),\ \omega \in \mathbb{R}$ *;*

f/ $f(t) = \sinh(\omega t),\ \omega \in \mathbb{R}$*.*

Exercice V.5.2 *Soit f une fonction bornée de période $T > 0$.*

a/ Montrer que l'abscisse de f est $\alpha_f = 0$.

b/ Montrer que $F(p) = \frac{F_0(p)}{1-e^{-pT}}$ *où* $F_0(p) = \int_0^T e^{-pt} f(t)dt$*.*

c/ Chercher la transformée de Laplace de

i) $f(t) = |\sin t|$ *;*

ii) $f(t) = \frac{t}{T}$ *si* $0 \leq t < T$ *et* $f(t+T) = f(t)$*.*

Exercice V.5.3 *Soient f et $g \in \mathcal{L}^1_{loc}([0, +\infty[)$ avec $f(t) = g(t) = 0$ si $t < 0$.*

a/ Vérifier que $f * g(t) = \int_0^t f(u)g(t-u)du$*.*

b/ Démontrer que $\mathcal{L}[f * g] = \mathcal{L}[f] \times \mathcal{L}[g]$*.*

c/ Résoudre l'équation intégrale suivante : $y(t) = t^2 + \int_0^t \sin(t-x)y(x)dx$*.*

Exercice V.5.4 *Résoudre à l'aide de la transformée de Laplace :*

a/ $y'' - 2y' + y = \cos t - \sin t,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1$*.*

b/ $y''' - 3y'' + 3y' - y = t^2 e^t,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 0,\ y''(0) = -2$*.*

Exercice V.5.5 *Résoudre les systèmes différentiels :*

$$a/ \begin{cases} x'(t) &= x+5y \\ y'(t) &= x-3y \end{cases} \quad ; \qquad x(0)=1 \ , \ y(0)=2.$$

$$b/ \begin{cases} x'(t)-x(t)+2y(t) &= 1 \\ x'(t)+y'(t)+2x(t) &= 0 \end{cases} \quad ; \qquad x(0)=2 \ , \ y(0)=1.$$

$$c/ \begin{cases} f'(t)+g'(t) &= t \\ f''(t)-g(t) &= e^{-t} \end{cases} \quad ; \qquad f(0)=3 \ , \ f'(0)=-2 \ , \ g(0)=0.$$

Exercice V.5.6 *Résoudre*

$$y'(t)+\int_0^t y(x)dx = 1 \qquad avec \qquad y(0)=\alpha.$$

Exercice V.5.7 *Donner à l'aide de la table de Laplace la valeur de l'intégrale*

$$I=\int_0^{+\infty} te^{-2t}\cos(t)dt.$$

Exercice V.5.8 *Résoudre*

$$ty''(t)+(1-t)y'(t)=\frac{t^2}{2}-t \ , \quad y(0)=y_0.$$

Exercice V.5.9 *Soit $u(t)$ une fonction nulle pour $t<0$ et vérifiant pour t positif l'équation différentielle*

$$t\frac{d^2u}{dt^2}+\frac{du}{dt}+\left(n+\frac{1}{2}-\frac{t}{4}\right)u(t)=0$$

et soit $U(p)$ *sa transformée de Laplace.*

1°*) Etablir l'équation différentielle satisfaite par* $U(p)$.

2°*) En déduire* $U(p)$.

Dans la suite du problème, on supposera que

$$U(p) = \left(p - \frac{1}{2}\right)^n \left(p + \frac{1}{2}\right)^{-n-1}$$

et on pose $U(p) = F_n(p) = \mathcal{L}[f_n(t)]$.

3°*) Montrer que, pour tout* $k \in \{0,1,\ldots,n-1\}$, *on a*

$$\int_0^{+\infty} e^{-\frac{t}{2}} t^k f_n(t) dt = 0.$$

4°*) Calculer* $\mathcal{L}\left[e^{\frac{t}{2}} f_n(t)\right]$.

5°*) En déduire que* $e^{\frac{t}{2}} f_n(t) = \sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k \dfrac{t^k}{k!}$.

6°*) Calculer* $\mathcal{L}\left[e^{-\frac{t}{2}} f_n(t)\right]$.

7°*) En déduire que* $e^{\frac{t}{2}} f_n(t) = \frac{1}{n!} e^t \frac{d^n}{dt^n}\left(e^{-t} t^n\right)$.

8°*) On pose* $L_n(t) = \frac{1}{n!} e^t \frac{d^n}{dt^n}\left(e^{-t} t^n\right)$. *La fonction* L_n *est appelée "polynôme de Laguerre d'ordre* n*". Déduire des résultats précédents que le système de fonctions* $\left(e^{-\frac{t}{2}} L_n(t)\right)_{n \geq 0}$ *est un système de fonctions orthogonales, c'est-à-dire*

$$\int_0^{+\infty} e^{-t} L_m(t) L_n(t) dt = 0, \quad si\ m \neq n.$$

Chapitre VI

Espaces de Hilbert

VI.1 Définitions et notations

Dans tout ce qui suit, $I\!K$ désignera $I\!R$ ou $\mathbb{C}$.

Définition VI.1.1 *Soit E un espace vectoriel sur $I\!K$. Un produit scalaire sur E est une application*

$$\begin{array}{rcl} <.,.>: \ E \times E & \longrightarrow & I\!K \\ (x,y) & \longmapsto & <x,y> \end{array}$$

vérifiant :

H_1) $<x,x>\geq 0$ *et* $<x,x>=0 \iff x=0$ *;*

H_2) $\forall\ \alpha_1,\ \alpha_2 \in I\!K,\ \ \forall\ x_1,\ x_2,\ y \in E \ \ <\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, y> = \alpha_1 <x_1,y>$ $+\alpha_2 <x_2,y>$;

H_3) $\forall\ x,\ y \in E \ \ <x,y> = \overline{<y,x>}$.

De la définition (VI.1.1), il découle que pour tout α_1, $\alpha_2 \in I\!R$ et x, y_1, $y_2 \in E$ on a

$$< x,\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 >= \overline{\alpha_1} < x,y_1 > +\overline{\alpha_2} < x,y_2 > .$$

Définition VI.1.2 *Un espace vectoriel muni d'un produit scalaire s'appelle espace préhilbertien.*

Proposition VI.1.1 *Soit H un espace préhilbertien sur $I\!K$. Pour $x \in H$, on pose*

$\|x\| = \sqrt{< x,x >}$. On a les résultats suivants :

i) $| < x,y > | \leq \|x\| \; \|y\| \quad \forall\, x,y \in H$ (Inégalité de Cauchy-Schwarz) ;

ii) $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 \quad \forall\, x,y \in H$ (Egalité du parallélogramme) ;

iii) L'application $x \longmapsto \|x\|$ est une norme sur H ;

iv) Soient $a,b,c \in H$ et m le milieu du segment $[b,c]$. On pose $d(a,b) = \|x-y\|$. On a alors $d^2(a,b) + d^2(a,c) = 2d^2(a,m) + \frac{1}{2}d^2(b,c)$ (Lemme de la médiane).

La démonstration est laissée en exercice.

Définition VI.1.3 *On appelle espace de Hilbert, un espace préhilbertien complet (par rapport à la norme $\|x\| = \sqrt{< x,x >}$).*

Exemples VI.1.1 *i) L'espace $H = I\!R^n$ est un espace de Hilbert pour le* *produit scalaire*

$$< x,y >= \sum_{i=1}^{n} x_i y_i.$$

ii) L'espace $H = \mathbb{C}^n$ est un espace de Hilbert pour le produit scalaire

$$< x,y >= \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y}_i.$$

VI.2 L'espace de Hilbert L^2

Soit $(X,\mathcal{A},\mu)$ un espace mesuré. On rappelle que L^2 est l'ensemble des classes d'équivalence des fonctions $f : X \longrightarrow I\!K$ mesurables telles que $|f|^2$ soit intégrable.

On a les propriétés suivantes :

i) Si $f,\, g \in L^2$ alors $f \times g \in L^1$;

ii) Si $f,\, g \in L^2$ alors $f + g \in L^2$;

iii) Si $f \in L^2$ et $\alpha \in I\!K$ alors $\alpha f \in L^2$;

iv) L^2 est un espace vectoriel sur $I\!K$;

v) Pour $f,g \in L^2$, on pose $< f,g >= \int_X f(x)\overline{g(x)} d\mu(x)$. Alors $< .,. >$ est un produit scalaire sur L^2.

Remarque VI.2.1 *L^2 est un espace préhilbertien. La norme associée au produit scalaire est*

$$\|f\|_2 = \left(\int_X |f(x)|^2 d\mu(x) \right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{< f,f >}.$$

Théorème VI.2.1 *L^2 est un espace de Hilbert.*

Démonstration :

Soit (f_n) une suite de Cauchy dans L^2. On peut par raisonnement classique, extraire une sous suite $(f_{n_k})_{k\geq 1}$ telle que $\left\|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\right\|_2 \leq \frac{1}{2^k}$ pour tout $k = 1,2,\ldots.$

Posons $g_n = \left|f_{n_1}\right| + \sum_{k=1}^{n} \left|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\right|$ et $g = \left|f_{n_1}\right| + \sum_{k=1}^{+\infty} \left|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\right|$.

La fonction g_n est positive mesurable pour tout n et

$$\|g_n\|_2^2 \leq \left[\left\|f_{n_1}\right\|_2 + \sum_{k=1}^{n} \left\|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\right\|_2\right]^2 \leq \left(\left\|f_{n_1}\right\|_2 + 1\right)^2.$$

Notons d'autre part, que $g = \lim_n g_n$ et par conséquent g est mesurable. D'après le lemme de Fatou on a

$$\int_X g^2 d\mu \leq \liminf_n \int_X g_n^2 d\mu \leq \left(\left\|f_{n_1}\right\|_2 + 1\right)^2.$$

D'où g^2 intégrable, ce qui prouve que g^2 est finie presque partout. Donc la série

$$\left|f_{n_1}\right| + \sum_{k=1}^{+\infty} \left|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\right|$$

converge p.p., c'est-à-dire que la série de fonctions $f_{n_1} + \sum_{k=1}^{+\infty} \left(f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\right)$ est absolument convergente p.p.

Posons $A = \{x \in X/\ g(x) < +\infty\}$ et définissons la fonction f, égale p.p.

à g, par

$$f(x) = \begin{cases} f_{n_1} + \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \left(f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\right) & si \quad x \in A \\ 0 & si \quad x \notin A \end{cases}.$$

Pour tout $x \in X$, on a $\left|f(x)\right|^2 \leq g^2(x)$. Puisque f est mesurable, alors $f \in L^2$. Sachant que $f_{n_k} = f_{n_1} + \sum\limits_{p=1}^{k-1} \left(f_{n_{p+1}} - f_{n_p}\right)$, alors (f_{n_k}) converge p.p. vers f. Montrons à présent que f_{n_k} converge dans L^2 vers f. Pour tout $x \in A$, on a

$$\begin{aligned} \left|f(x) - f_{n_k}(x)\right|^2 &= \left|f(x) - f_{n_1}(x) - \sum_{p=1}^{k-1} \left(f_{n_{p+1}}(x) - f_{n_p}(x)\right)\right|^2 \\ &= \left|\sum_{p=k}^{+\infty} \left(f_{n_{p+1}}(x) - f_{n_p}(x)\right)\right|^2 \leq g^2(x). \end{aligned}$$

Par suite $\left(\left|f(x) - f_{n_k}(x)\right|^2\right)_k$ est une suite de fonctions positives, mesurables, telles que

$\left|f(x) - f_{n_k}(x)\right|^2$ converge p.p. vers 0, $\left|f(x) - f_{n_k}(x)\right|^2 \leq g^2(x)$ p.p. et $g^2 \in L^1$.

Le théorème de la convergence dominée entraine que

$$\lim_k \int_X \left|f(x) - f_{n_k}(x)\right|^2 d\mu(x) = \lim_k \left\|f - f_{n_k}\right\|_2^2 = \int_X 0 \; d\mu = 0.$$

Par conséquent f_{n_k} converge dans L^2 vers f. Or on sait que dans un espace métrique, toute valeur d'adhérence d'une suite de Cauchy est limite de la suite, donc on a

$$\lim_{n \to +\infty} \|f - f_n\|_2 = 0.$$

VI.3 Meilleure approximation sur un sous espace vectoriel

Soit H un espace préhilbertien. On note $< .,. >$ le produit scalaire sur H et $\|.\|$ la norme associée.

Définition VI.3.1 *On dit que $x \in H$ et $y \in H$ sont orthogonaux si $< x,y >= 0$.*

Soit $S \subset H$, on appelle orthogonal de S l'ensemble

$$S^{\perp} = \{y \in H / \ < x,y >= 0 \quad \forall x \in S\}.$$

Propriétés VI.3.1 *i) Si x et y sont orthogonaux alors $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$;*

ii) Plus généralement si $\varphi_1,\varphi_2,\ldots,\varphi_n$, éléments de H, sont deux à deux orthogonaux, alors

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} c_k \varphi_k \right\|^2 = \sum_{k=1}^{n} |c_k|^2 \left\|\varphi_k\right\|^2 .$$

On s'intéresse au problème suivant :

Soient H un espace préhilbertien, V un sous-espace vectoriel de H et f un élément de H.

Existe-t-il $f^* \in V$ tel que $\|f - f^*\| = \min_{v \in V} \|f - v\| = d(f,V)$?

Définition VI.3.2 *L'élément f^*, lorsqu'il existe, s'appelle meilleure ap-*

proximation de f sur V ou projection de f sur V. On le note $f^* = pr_V(f)$.

Théorème VI.3.1 *Soient H un espace préhilbertien et V un sous-espace vectoriel complet de H. Alors, pour tout $f \in H$, il existe un unique $f^* \in V$ tel que*

$$\|f - f^*\| = \min_{v \in V} \|f - v\|.$$

Démonstration :

Existence : On pose $d = d(f,V) = \inf_{v \in V} \|f - v\|$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $v_n \in V$ tel que

$$d \leq \|f - v_n\| < d + \frac{1}{n}.$$

On a donc $\lim_{n \to +\infty} \|f - v_n\| = d$. Montrons que (v_n) est une suite de Cauchy. Grâce à l'égalité du parallélogramme, nous pouvons écrire :

$$\left\|v_p - v_q\right\|^2 = \left\|v_p - f + f - v_q\right\|^2 = 2\left\|v_p - f\right\|^2 + 2\left\|f - v_q\right\|^2 - \left\|2f - (v_p + v_q)\right\|^2.$$

On a $\left\|2f - (v_p + v_q)\right\|^2 = 4\left\|f - \frac{v_p + v_q}{2}\right\|^2 \geq 4d^2$ et pour p et q assez grands

$$\begin{aligned}
\left\|v_p - v_q\right\|^2 &\leq 2\left(d + \tfrac{1}{p}\right)^2 + 2\left(d + \tfrac{1}{q}\right)^2 - 4d^2 \\
&= 4d\left(\tfrac{1}{p} + \tfrac{1}{q}\right) + 2\left(\tfrac{1}{p^2} + \tfrac{1}{q^2}\right) \\
&\leq \varepsilon^2.
\end{aligned}$$

La suite (v_n) est donc de Cauchy ; V étant complet, on en déduit que $v_n \longrightarrow f^* \in V$.

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \|f - v_n\| = d$ et $\|.\|$ étant continue, il vient $\|f - f^*\| = d$.

Unicité : Si f^* et h^* sont deux solutions, alors

$$\begin{aligned} \|f^* - h^*\|^2 &= \|f^* - f + f - h^*\|^2 \\ &= 2\|f^* - f\|^2 + 2\|f - h^*\|^2 - 4\left\|f - \tfrac{f^*+h^*}{2}\right\|^2, \end{aligned}$$

d'où $\|f^* - h^*\|^2 \leq 2d^2 + 2d^2 - 4d^2$, soit $f^* = h^*$.

Proposition VI.3.1 *Soient H un espace préhilbertien, V un sous-espace vectoriel complet de H et $f \in H$.*

f^* est la meilleure approximation de f sur V si et seulement si $f^* \in V$ et $f - f^* \in V^\perp$.

Proposition VI.3.2 *Soit H un espace préhilbertien. Si V est un sous-espace vectoriel de dimension finie de H, alors V est complet.*

VI.4 Théorème de Riesz

Proposition VI.4.1 *Soit H un espace préhilbertien. Pour tout $a \in H$, l'application*

$$\varphi : x \longmapsto < x,a >$$

est une forme linéaire continue sur H de norme égale à $\|a\|$.

Théorème VI.4.1 *(Théorème de Riesz)*

Soient H un espace de Hilbert et φ une forme linéaire continue sur H. Alors il existe un unique $a \in H$ tel que, pour tout $x \in H$, $\varphi(x) = < x,a >$.

VI.5 Systèmes orthogonaux

Définitions VI.5.1 *Soit H un espace préhilbertien.*

Un ensemble dénombrable $\mathcal{B} = \{\phi_n / \ n \in I\!N\} \subset H \backslash \{0\}$ est appelé

- *système orthogonal si $< \phi_n,\phi_m >= 0$ pour $n \neq m$;*
- *système orthonormé si $< \phi_n,\phi_m >= \delta_{n,m}$ où $\delta_{n,m}$ est le symbole de Kronecker ;*
- *système total si $\mathcal{B}^\perp = \{0\}$.*

Définition VI.5.1 *Si $\mathcal{B}$ est un système orthogonal, les nombres*

$$c_n(f) = \frac{< f,\phi_n >}{< \phi_n,\phi_n >} = \frac{< f,\phi_n >}{\|\phi_n\|^2}$$

sont appelés coefficients de Fourier de f relativement à $\mathcal{B}$.

Propriété VI.5.1 *Soit $\mathcal{B} = (\phi_n)_{n \geq 1}$ un système orthogonal. Alors $\mathcal{B}$ est libre, c'est-à-dire :*

$$\forall m \in I\!N^* \quad \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \phi_i = 0 \implies \lambda_i = 0, \ \forall \ i = 1, \ldots, m.$$

Proposition VI.5.1 *Soient H un espace préhilbertien et $\mathcal{B} = (\phi_n)_{n\geq 1}$ un système orthogonal. Alors pour tout $f \in H$ on a l'inégalité :*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left|c_n(f)\right|^2 \|\phi_n\|^2 \leq \|f\|^2 \quad \textit{(Inégalité de Bessel).}$$

Démonstration :

Soit $p \in I\!N^*$ et $V_p = Vect\left(\phi_1,\phi_2,\ldots,\phi_p\right)$ le sous-espace vectoriel engendré par $\left\{\phi_1,\phi_2,\ldots,\phi_p\right\}$. L'espace V_p est de dimension finie, donc complet. Soit $f \in H$ et $f^* = pr_{V_p}(f)$. On a $f^* \in V_p$ et $< f - f^*,v >= 0$ pour tout $v \in V_p$, donc

$$< f,\phi_i >=< f^*,\phi_i > \quad \textit{pour tout} \quad i = 1,2,\ldots,p.$$

Or $f^* = \sum\limits_{j=1}^{p} \lambda_j\phi_j$, donc

$$< f,\phi_i >= \lambda_i < \phi_i,\phi_i > .$$

Ainsi, $\lambda_i = \frac{<f,\phi_i>}{<\phi_i,\phi_i>}$ et par suite $f^* = \sum\limits_{i=1}^{p} c_i(f)\phi_i$.

D'autre part :

$$\|f\|^2 = \|f - f^* + f^*\|^2 = \|f - f^*\|^2 + \|f^*\|^2,$$

d'où $\|f^*\|^2 \leq \|f\|^2$, c'est-à-dire

$$\sum_{i=1}^{p} \left|c_i(f)\right|^2 \|\phi_i\|^2 \leq \|f\|^2.$$

Ceci étant vrai pour tout $p \in I\!N^*$, on en déduit que :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |c_n(f)|^2\|\phi_n\|^2 \leq \|f\|^2.$$

Définition VI.5.2 *(Base Hilbertienne)*

Soient H un espace de Hilbert et $\mathcal{B} = \{\phi_n /\ n \in I\!N^*\}$ un système orthogonal. La famille $\mathcal{B}$ est appelé base hilbertienne si pour tout $f \in H$, on a $f = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} c_n(f)\phi_n$.
(On dit que f se développe en série de Fourier dans H relativement à la base $\mathcal{B}$).

Théorème VI.5.1 *Soit H un espace de Hilbert et $\mathcal{B} = \{\phi_n /\ n \in I\!N^*\}$ un système orthogonal. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

i) $\mathcal{B}$ est un système total ;

ii) L'ensemble des combinaisons linéaires finies d'éléments de $\mathcal{B}$ est dense dans H ;

iii) $\mathcal{B}$ est une base hilbertienne ;

iv) $\forall f \in H :\ \ \|f\|^2 = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left|c_n(f)\right|^2 \|\phi_n\|^2$ (Egalité de Parseval).

Démonstration :

i) $\Longrightarrow$ ii)

Soit $\mathcal{B}_c$ l'ensemble des combinaisons linéaires finies d'éléments de $\mathcal{B}$. Supposons $\overline{\mathcal{B}}_c \neq H$. Il existe donc $f \in H$ tel que $f \notin\ \overline{\mathcal{B}}_c$. Or $\mathcal{B}_c$ est un sous-espace vectoriel de H, donc $\overline{\mathcal{B}}_c$ est un sous-espace vectoriel fermé de H et par suite $\overline{\mathcal{B}}_c$ est complet. Donc il existe un unique $f^* \in \overline{\mathcal{B}}_c$ tel que $f - f^* \in \left(\overline{\mathcal{B}}_c\right)^{\perp}$. Comme $\mathcal{B} \subset \overline{\mathcal{B}}_c$, alors $\left(\overline{\mathcal{B}}_c\right)^{\perp} \subset \mathcal{B}^{\perp} = \{0\}$, d'où

$f = f^*$ ce qui contredit $f \notin \overline{\mathcal{B}}_c$.

ii) $\Longrightarrow$ iii)

Soit $f \in H = \overline{\mathcal{B}}_c$. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un nombre fini de scalaires $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ tels que

$$\left\| f - \sum_{k=1}^{m} \alpha_k \phi_k \right\| < \varepsilon.$$

Or on a par le théorème de la projection

$$\left\| f - \sum_{k=1}^{m} c_k(f) \phi_k \right\| \leq \left\| f - \sum_{k=1}^{m} \alpha_k \phi_k \right\| < \varepsilon.$$

On a aussi, pour tout $p \geq m$

$$\left\| f - \sum_{k=1}^{p} c_k(f) \phi_k \right\| \leq \left\| f - \sum_{k=1}^{m} \alpha_k \phi_k \right\| < \varepsilon$$

car $\sum_{k=1}^{m} \alpha_k \phi_k \in Vect\left(\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_p\right)$, ce qui prouve que la série $\sum_{n=1}^{+\infty} c_n(f) \phi_n$ est convergente et a pour somme f.

iii) $\Longrightarrow$ iv)

On a $\|f\|^2 = \left\| f - \sum_{n=1}^{p} c_n(f) \phi_n \right\|^2 + \sum_{n=1}^{p} \left| c_n(f) \right|^2 \|\phi_n\|^2$. En faisant tendre p vers $+\infty$, on obtient $\|f\|^2 = \sum_{n=1}^{+\infty} \left| c_n(f) \right|^2 \|\phi_n\|^2$.

iv) $\Longrightarrow$ i)

Soit $f \in \mathcal{B}^\perp$. Pour tout $n \in I\!N^*$, on a $< f, \phi_n >= 0$, donc $\|f\| = 0$ et par conséquent $f = 0$.

Remarque VI.5.1 *Soit $\mathcal{B}$ une base hilbertienne. Deux éléments de H*

ayant mêmes coefficients de Fourier sont égaux. En effet

$$c_n(f) = c_n(g) \ \ \forall\, n \implies c_n(f-g) = 0 \ \ \forall\, n \ ;$$

L'égalité de Parseval prouve que $f = g$.

VI.6 Théorie L^2 des séries de Fourier

Soit $T > 0$. On considère l'ensemble $L^2_p(0,T)$ des classes de fonctions mesurables $f : I\!R \longrightarrow \mathbb{C}$ périodiques de période T et telles que

$$\int_{[0,T]} \left|f(t)\right|^2 dt < +\infty.$$

On montre que $L^2_p(0,T)$ est un espace de Hilbert pour le produit scalaire $<\ ,\ >$ définie pour tout f, $g \in L^2_p(0,T)$ par

$$< f,g >= \int_{[0,T]} f(t)\overline{g(t)}dt.$$

La norme associée étant

$$\|f\|_2 = \left(\int_{[0,T]} \left|f(t)\right|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}}.$$

On vérifie d'autre part que le système trigonométrique

$$\mathcal{B} = \left\{\phi_n = e^{\frac{i2\pi nt}{T}} \,/\, n \in \mathbb{Z}\right\}$$

est une base hilbertienne de l'espace de Hilbert $H = L^2_p(0,T)$.

Remarques VI.6.1 • *Pour* $n,m \in \mathbb{Z}$, *on a* $<\phi_n,\phi_m>= \begin{cases} 0 & si \quad n \neq m \\ T & si \quad n = m. \end{cases}$

• *Il découle du théorème* (VI.5.1) *que toute fonction* $f \in L^2_p(0,T)$ *admet un développement en série de Fourier (par rapport à* $\mathcal{B}$*) et on a* $f = \sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f)e^{\frac{i2\pi nt}{T}}$ *(la convergence est au sens de la norme de* L^2_p*) avec*

$$c_n(f) = \frac{<f,\phi_n>}{<\phi_n,\phi_n>} = \frac{1}{T}\int_{[0,T]} f(t)e^{-\frac{i2\pi nt}{T}}dt.$$

L'égalité de Parseval s'écrit alors $\|f\|_2^2 = \int_{[0,T]} \left|f(t)\right|^2 dt = \sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} \left|c_n(f)\right|^2 T$, *c'est-à-dire*

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left|c_n(f)\right|^2 = \frac{1}{T}\int_{[0,T]} \left|f(t)\right|^2 dt.$$

VI.7 Exercices

Exercice VI.7.1 *Soient* H *un espace de Hilbert et* M *un sous espace vectoriel fermé de* H. *Montrer que* H *est somme directe de* M *et* $M^\perp$.

Exercice VI.7.2 *Soient* H *un espace de Hilbert et* φ *une forme linéaire continue sur* H. *On se propose de montrer qu 'il existe un unique* $a \in H$ *tel que* $\varphi(x) =< x,a >$ *pour tout* $x \in H$.

1/ Vérifier que si $\varphi = 0$, *alors* $a = 0$.

2/ On suppose $\varphi \neq 0$.

i/ Montrer que $M = \ker \varphi$ *est un sous espace vectoriel fermé de* H *avec* $M \neq H$ *et* $M^{\perp} \neq \{0\}$.

ii/ On considère $b \in M^{\perp}$, $b \neq 0$. *Montrer que pour tout* $x \in H$

$$b \text{ est orthogonal à } \left(x - \frac{\varphi(x)}{\varphi(b)} b\right)$$

Conclure.

Exercice VI.7.3 *Soit* E *un espace de Hilbert. Montrer que l'orthogonal* $F^{\perp}$ *d'une partie* F *est un sous espace vectoriel fermé de* E.

Exercice VI.7.4 *Soit* $(E_n)_n$ *une suite d'espaces de Hilbert. Soit* E *l'ensemble de toutes les suites* $x = (x_1, \ldots, x_n, \ldots)$ *telles que, pour tout* $n \in I\!N$, $x_n \in E_n$ *et la série* $\sum \|x_n\|^2$ *est convergente. Montrer que* E *est un espace de Hilbert.*

Exercice VI.7.5 *(Polynômes orthogonaux)*

Soit I *un intervalle fermé de* $I\!R$. *On suppose que* $\mathring{I} \neq \emptyset$.

On se donne une fonction ω *définie, continue, strictement positive sur* $\mathring{I}$ *et telle que*

$$\forall n \in I\!N \quad \int_I |t^n|\, \omega(t)\, dt < +\infty. \tag{VI.1}$$

Une telle fonction ω *sera appelée fonction poids.*

On considère l'ensemble

$$S_\omega = \left\{ f \in \mathcal{C}^0(I,I\!R) / \int_I \left|f(t)\right|^2 \omega(t)\, dt < +\infty \right\}.$$

S_ω *a une structure d'espace vectoriel sur* $I\!R$ *et* $< f,g >= \int_I f(t)g(t)\omega(t)\, dt$ *définit un produit scalaire sur* S_ω.

S_ω *est un espace préhilbertien et compte tenu de* (VI.1) *on a* $\mathcal{P} \subset S_\omega$ *où* $\mathcal{P}$ *désigne l'espace des polynômes.*

a/ Démontrer qu'il existe une suite de polynômes $p_0,\ p_1, \ldots,\ p_n, \ldots$ *et une seule vérifiant*

$$\begin{cases} (i)\ d^o p_n = n\ ; \\ (ii)\ \textit{le coefficient de } x^n \textit{est égal à 1} (p_n \textit{est unitaire });\\ (iii)\ \forall q \in \mathcal{P}_{n-1} \quad < p_n,q >= 0. \end{cases}$$

($\mathcal{P}_{n-1}$ *désigne l'ensemble des polyômes de degré inférieur ou égal à* $n-1$*).*
Remarquer que les polynômes p_n *de degré* n *vérifiant* $< p_n,q >= 0$, *pour tout* $q \in \mathcal{P}_{n-1}$, *coincident à des constantes multiplicatives près.*

Les polynômes (p_n) *vérifiant (i) et (iii) s'appellent polynômes orthogonaux sur* I *relativement à la fonction poids* ω.

b/ On considère (p_n) *la suite des polynômes unitaires orthogonaux relativement à* ω *sur* I. *Montrer que cette suite vérifie les relations de* *récurrence*

$$p_n(x) = (x - \lambda_n)p_{n-1}(x) - \mu_n p_{n-2}(x)$$

avec $\mu_n = \frac{\|p_{n-1}\|^2}{\|p_{n-2}\|^2}$ *et* $\lambda_n = \frac{\langle xp_{n-1},p_{n-1}\rangle}{\|p_{n-1}\|^2}$.

c/ Montrer que les n racines du polunôme p_n sont réelles, distinctes et appartiennent à I.

Exercice VI.7.6 *Soit E un espace vectoriel sur $I\!R$. On suppose que E est un préhilbertien. On note $< .,. >$ le produit scalaire et $\|.\|$ la norme associée. On considère F un sous espace vectoriel de E de dimension finie et $\mathcal{B} = \{\phi_1, \ldots, \phi_n\}$ une base de F.*

1/ Soit $f \in E$ et ϕ^* la meilleure approximation de f dans F. Montrer que $\phi^* = \sum_{i=1}^{n} a_i^* \phi_i$ où les a_i^* sont solutions d'un système linéaire $(n \times n)$ que l'on précisera.

2/ Montrer que la matrice $G = (g_{ij})$ avec $g_{ij} =< \phi_i,\phi_j >$, $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq n$ est inversible.

3/ Soient a, $b \in I\!R$ et ω une fonction poids sur $[a,b]$ (cf. exercice (VI.7.5)*). On se donne une fonction f continue sur $[a,b]$.*

a) Montrer qu'il existe un et un seul $p_n^* \in \mathcal{P}_n$ tel que

$$\int_a^b \omega(x) \left(f(x) - p_n^*(x)\right)^2 \, dx = \min_{p_n \in \mathcal{P}_n} \int_a^b \omega(x) \left(f(x) - p_n(x)\right)^2 \, dx$$

où $\mathcal{P}_n$ désigne l'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n.

b) Montrer que $p_n^* = \sum\limits_{i=0}^{n} a_i^* x^i$ *où les* a_i^* *sont solutions d'un système à préciser.*

c) Application : Prendre $[a,b] = [-1,1]$ *et pour tout* $x \in [-1,1]$, $\omega(x) = 1$ *et* $f(x) = |x|$.

- *Déterminer* p_2^*.
- *Faire une représentation graphique pour expliquer la propriété de* p_2^*.

Exercice VI.7.7 *Déterminer les réels* a, b, c, d *et* e *qui minimisent l'intégrale :*

$$\int_{-1}^{+1} \left(x^5 - ax^4 - bx^3 - cx^2 - dx - e\right)^2 \, dx.$$

Exercice VI.7.8 *Trouver* $(a_0,b_0,c_0) \in I\!R^3$ *qui réalise le minimum de la fonction*

$$f(a,b,c) = \int_0^{+\infty} \left(x^3 - ax^2 - bx - c\right)^2 \exp\left(-x\right) dx.$$

Exercice VI.7.9 *Considérons* $N+1$ *couples de nombres réels* (x_i,y_i), $i = 0,\dots,N$, *où les* x_i *sont distincts. Soient* $\omega(x_i) > 0$, $i = 0,\dots,N$, *des nombres appelés poids. On dit que*

$$P_n^*(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i^* x^i \ (n < N)$$

est un polynôme qui réalise la meilleure approximation au sens des moindres *carrés si*

$$\sum_{i=0}^{N} \omega(x_i)\left[y_i - P_n^*(x_i)\right]^2 = \min_{P_n \in \mathcal{P}_n} \sum_{i=0}^{N} \omega(x_i)\left[y_i - P_n(x_i)\right]^2 \ ; \qquad \text{(VI.2)}$$

$\mathcal{P}_n$ désigne l'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n. On pose $E = I\!R^{N+1}$.

1/ Définir un produit scalaire $< .,. >$ sur E (ainsi que la norme $\|.\|$ associée) et un sous espace vectoriel F de E, de telle manière que le problème (VI.2) *se ramène au problème suivant*

$$\textit{Chercher}\, p_n^* \in F \textit{ tel que } \|y - p_n^*\| = \min_{p_n \in F} \|y - p_n\|$$

où $y = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_N \end{pmatrix}.$

2/ En déduire l'existence et l'unicité d'une solution pour le problème (VI.2)*, caractérisée par le système suivant*

$$\sum_{i=0}^{n} a_i^* \sum_{j=0}^{N} \omega(x_j) x_j^{i+k} = \sum_{j=0}^{N} \omega(x_j) y_j x_j^k; \ k = 0, \ldots, n.$$

3/ On suppose que $\omega(x_j) = 1$ pour tout $j \in \{0,1,\ldots,N\}$ et on considère *la matrice*

$$U = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_N & x_N^2 & \dots & x_N^n \end{pmatrix}.$$

Montrer que la solution du problème (VI.2) *est obtenue en effectuant la résolution du système linéaire*

$$U^t U a = U^t y \quad \text{où } a = \begin{pmatrix} a_0^* \\ a_1^* \\ \vdots \\ a_n^* \end{pmatrix}.$$

4/ Application : on considère le tableau de données

x_i	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1
y_i	$-\frac{3}{2}$	0	$\frac{1}{4}$	0	0
$\omega(x_i)$	1	1	1	1	1

Déterminer la droite des moindres carrés (P_1^*) *et la parabole des moindres carrés* (P_2^*).

5/ On pose $\bar{x} = \frac{1}{N+1}\sum_{i=0}^{N} x_i$, $\bar{y} = \frac{1}{N+1}\sum_{i=0}^{N} y_i$, $cov\,(x,y) = \frac{1}{N+1}\sum_{i=0}^{N} (x_i - \bar{x})\,(y_i - \bar{y})$ *et*

$$\sigma_x^2 = \frac{1}{N+1}\sum_{i=0}^{N} (x_i - \bar{x})^2.$$

On considère $D = P_1^* = a_0^* + a_1^* x$ *la droite des moindres carrés. Montrer* *que* $a_1^* = \frac{cov(x,y)}{\sigma_x^2}$, $a_0^* = \bar{y} - a_1^*\bar{x}$ *et en déduire que le couple* $(\bar{x},\bar{y}) \in D$.

Annexe A

Polynômes orthogonaux

I.1 Les polynômes de Legendre

Le polynôme de Legendre de degré n est défini par

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n}(x^2 - 1)^n \quad , \quad x \in [-1,1]$$

avec $P_0(x) = 1$.

Les premiers sont :

$$\begin{aligned}
P_0(x) &= 1 \ ; \\
P_1(x) &= x \ ; \\
P_2(x) &= \tfrac{1}{2}(3x^2 - 1) \ ; \\
P_3(x) &= \tfrac{1}{2}(5x^3 - 3x) \ ; \\
P_4(x) &= \tfrac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3) \ ; \\
P_5(x) &= \tfrac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x) \ ; \\
\ldots & \ldots \ \ldots
\end{aligned}$$

On peut les définir par la formule de récurrence

$$\begin{cases}
P_0(x) = 1, \ P_1(x) = x \ ; \\
P_n(x) = \frac{2n-1}{n} x P_{n-1}(x) - \frac{n-1}{n} P_{n-2}(x).
\end{cases}$$

La famille des polynômes de Legendre est orthogonale relativement à la fonction-poids

$w(x) = 1$ sur l'intervalle $[-1,1]$, c'est-à-dire

$$\begin{cases}
\displaystyle\int_{-1}^{1} P_n(x) P_m(x)\, dx = 0 \ \text{ si } \ n \neq m \ ; \\[2ex]
\displaystyle\int_{-1}^{1} [P_n(x)]^2 \ dx = \frac{2}{2n+1} \ \ (\neq 0).
\end{cases}$$

Les monômes 1, x, $x^2, \ldots$ s'expriment en fonction des polynômes P_n :

$$\begin{array}{lcl} 1 & = & P_0(x) \ ; \\ x & = & P_1(x) \ ; \\ x^2 & = & \frac{1}{3}\left[2P_2(x) + P_0(x)\right] \ ; \\ x^3 & = & \frac{1}{5}\left[2P_3(x) + 3P_1(x)\right] \ ; \\ x^4 & = & \frac{1}{35}\left[8P_4(x) + 20P_2(x) + 7P_0(x)\right] \ ; \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{array}$$

I.2 Les polynômes de Laguerre

Le polynôme de Laguerre de degré n est défini par

$$L_n(x) = e^x \frac{d^n}{dx^n}(e^{-x}x^n) \ , \ x \in [0, +\infty[.$$

Les premiers sont :

$$\begin{array}{lcl} L_0(x) & = & 1 \ ; \\ L_1(x) & = & -x + 1 \ ; \\ L_2(x) & = & x^2 - 4x + 2 \ ; \\ L_3(x) & = & -x^3 + 9x^2 - 18x + 6 \ ; \\ L_4(x) & = & x^4 - 16x^3 + 72x^2 - 96x + 24 \ ; \\ L_5(x) & = & -x^5 + 25x^4 - 200x^3 + 600x^2 - 600x + 120 \ ; \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{array}$$

On peut les définir par la formule de récurrence

$$\begin{cases} L_0(x) = 1, \ \ L_1(x) = -x + 1 \ ; \\ L_n(x) = (2n - x - 1)L_{n-1}(x) - (n-1)^2 L_{n-2}(x). \end{cases}$$

La famille des polynômes de Laguerre est orthogonale relativement à la fonction-poids

$w(x) = e^{-x}$ sur l'intervalle $[0, +\infty[$, c'est-à-dire

$$\begin{cases} \displaystyle\int_0^{\infty} e^{-x} L_n(x) L_m(x) \, dx = 0 \ \text{ si } \ n \neq m \ ; \\ \\ \displaystyle\int_0^{\infty} e^{-x} \left[L_n(x)\right]^2 \, dx = (n!)^2 \ \ (\neq 0). \end{cases}$$

Les monômes 1, x, $x^2, \ldots$ s'expriment en fonction des polynômes L_n :

$$\begin{aligned} 1 &= L_0(x) \ ; \\ x &= -L_1(x) + L_0(x) \ ; \\ x^2 &= L_2(x) - 4L_1(x) + 2L_0(x) \ ; \\ x^3 &= -L_3(x) + 9L_2(x) - 18L_1(x) + 6L_0(x) \ ; \\ \cdots & \ \cdots \ \cdots \end{aligned}$$

I.3 Les polynômes d'Hermite

Le polynôme d'Hermite de degré n est défini par

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n}(e^{-x^2}) \ \ , \ \ x \in]-\infty, +\infty[.$$

Les premiers sont :

$$\begin{array}{rcl} H_0(x) & = & 1 \ ; \\ H_1(x) & = & 2x \ ; \\ H_2(x) & = & 4x^2 - 2 \ ; \\ H_3(x) & = & 8x^3 - 12x \ ; \\ H_4(x) & = & 16x^4 - 48x^2 + 12 \ ; \\ H_5(x) & = & 32x^5 - 160x^3 + 120x \ ; \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{array}$$

On peut les définir par la formule de récurrence

$$\begin{cases} H_0(x) = 1, \ \ H_1(x) = 2x \ ; \\ H_n(x) = 2xH_{n-1}(x) - 2(n-1)^2 H_{n-2}(x). \end{cases}$$

La famille des polynômes de Laguerre est orthogonale relativement à la fonction-poids

$w(x) = e^{-x^2}$ sur l'intervalle $]-\infty, +\infty[$, c'est-à-dire

$$\begin{cases} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_n(x) H_m(x) \, dx = 0 \ \text{ si } \ n \neq m \ ; \\ \\ \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \left[H_n(x)\right]^2 \ dx = 2^n (n!) \sqrt{\pi} \ \ (\neq 0). \end{cases}$$

Les monômes 1, x, $x^2, \ldots$ s'expriment en fonction des polynômes H_n :

$$\begin{array}{lcl} 1 & = & H_0(x) \ ; \\ x & = & \frac{1}{2}H_1(x) \ ; \\ x^2 & = & \frac{1}{4}H_2(x) + \frac{1}{2}H_0(x) \ ; \\ x^3 & = & \frac{1}{8}H_3(x) + \frac{3}{4}H_1(x) \ ; \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{array}$$

I.4 Les polynômes de Tchebychev

Le polynôme de Tchebychev de degré n est défini par

$$T_n(x) = \cos\left(n \arccos x\right) \ , \ x \in [-1{,}1].$$

Les premiers sont :

$$\begin{array}{lcl} T_0(x) & = & 1 \ ; \\ T_1(x) & = & x \ ; \\ T_2(x) & = & 2x^2 - 1 \ ; \\ T_3(x) & = & 4x^3 - 3x \ ; \\ T_4(x) & = & 8x^4 - 8x^2 + 1 \ ; \\ T_5(x) & = & 16x^5 - 20x^3 + 5x \ ; \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{array}$$

On peut les définir par la formule de récurrence

$$\begin{cases} T_0(x) = 1, \ \ T_1(x) = x \ ; \\ T_n(x) = 2xT_{n-1}(x) - T_{n-2}(x). \end{cases}$$

La famille des polynômes de Laguerre est orthogonale relativement à la

fonction-poids

$w(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ sur l'intervalle $[-1,1]$, c'est-à-dire

$$\begin{cases} \displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} T_n(x)T_m(x)\, dx = 0 \ \text{ si } \ n \neq m \ ; \\ \displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \left[T_n(x)\right]^2 \, dx = \begin{cases} \pi & \text{si } \ n = 0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{si } \ n = 1,2,\ldots \end{cases} \end{cases}$$

Les monômes 1, x, $x^2, \ldots$ s'expriment en fonction des polynômes T_n :

$$\begin{aligned} 1 &= T_0(x) \ ; \\ x &= T_1(x) \ ; \\ x^2 &= \tfrac{1}{2}\left[T_2(x) + T_0(x)\right] \ ; \\ x^3 &= \tfrac{1}{4}\left[T_3(x) + 3T_1(x)\right] \ ; \\ x^4 &= \tfrac{1}{8}\left[T_4(x) + 4T_2(x) + 3T_0(x)\right] \ ; \\ \ldots & \ \ldots \ \ldots \end{aligned}$$

Le polynôme T_n admet n racines réelles sur l'intervalle $[-1,1]$;

$$T_n(x) = 0 \ \text{ pour } \ x = x_k = \cos\left[(2k+1)\frac{\pi}{2n}\right] \ ; \ \ k = 0,1,\ldots,n-1.$$

En outre

$$T_n(x) = 1 \ \text{ pour } \ x = 1, \cos\frac{2\pi}{n}, \ldots$$

et

$$T_n(x) = -1 \ \text{ pour } \ x = \cos\frac{\pi}{n}, \cos\frac{3\pi}{n}, \ldots$$

Table des matières

I Intégrale de Lebesgue **1**

I.1 Ensembles mesurables. Mesures. 1

I.2 Fonctions mesurables 9

I.3 Intégrale de Lebesgue des fonctions positives mesurables 18

I.4 Fonctions intégrables 27

I.5 Calcul intégral 33

I.5.1 Intégrales dépendant d'un paramètre 33

I.5.2 Intégrale de Lebesgue et intégrale de Riemann . . 35

I.5.3 Théorème de Fubini 36

I.5.4 Changement de variables 37

I.6 Espaces L^p 39

I.7 Exercices 41

II Transformation de Fourier dans L^1 **51**

II.1 Transformation de Fourier 51

II.2 Propriétés de la transformée de Fourier 53

II.3 Transformée de Fourier inverse 56

II.4 Convolution 58

II.5 Exercices sur la transformation de Fourier 58

III Théorie élémentaire des distributions **63**

III.1 Introduction 63

III.2 Espace $\mathcal{D}$ des fonctions tests 66

III.3 Les distributions 68

III.4 Opérations sur les distributions 70

III.4.1 Multiplication d'une distribution par une fonction C^∞ 70

III.4.2 Dérivation des distributions 71

III.4.3 Convergence d'une suite de distributions 72

III.5 Exercices 73

IV Fonctions de variable complexe **81**

IV.1 Fonctions holomorphes 81

IV.2 Intégration complexe 85

IV.3 Théorème de Cauchy et ses conséquences 87

IV.3.1 Formule de Taylor 91

IV.3.2 Inégalités de Cauchy 95

IV.4 Points singuliers. Résidus 100

IV.4.1 Points singuliers 100

IV.4.2 Classification des singularités 100

IV.4.3 Résidus 103

IV.4.4 Calcul pratique des résidus 104

IV.5 Calcul d'intégrales par la méthode des résidus 107

IV.5.1 Lemmes de Jordan 107

IV.5.2 Calcul d'intégrales 110

IV.5.2.1 Premier type : 110

IV.5.2.2 Deuxième type : 111

IV.5.2.3 Troisième type : 113

IV.5.2.4 Calcul de l'intégrale de Dirichlet 114

IV.6 Exercices 116

V Transformation de Laplace et applications **133**

V.1 Généralités 133

V.2 Propriétés de la transformation de Laplace 139

V.3 Applications de la transformation de Laplace 143

V.4 Table des transformées de Laplace usuelles 144

V.5 Exercices 144

VI Espaces de Hilbert **149**

VI.1 Définitions et notations 149

VI.2 L'espace de Hilbert L^2 151

VI.3 Meilleure approximation sur un sous espace vectoriel . . 154

VI.4 Théorème de Riesz 156

VI.5 Systèmes orthogonaux 157

VI.6 Théorie L^2 des séries de Fourier 161

VI.7 Exercices 162

A Polynômes orthogonaux **171**

I.1 Les polynômes de Legendre 171

I.2 Les polynômes de Laguerre 173

I.3 Les polynômes d'Hermite 174

I.4 Les polynômes de Tchebychev 176