Chapitre 1

Espaces de Hilbert

Dans tout ce chapitre, les espaces vectoriels considérés sont sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1. Notion de norme.

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.

Définition

Une application p de E dans $\mathbb{R}^+$ est dite une norme sur E si elle vérifie les propriétés suivantes :

1. $p(x) = 0 \Longleftrightarrow x = 0$
2. $p(\lambda x) = |\lambda| p(x)$ *pour tous* $\lambda \in \mathbb{K}$ *et* $x \in E$
3. $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$, *pour tous* $x, y \in E$

Définition

Un espace vectoriel muni d'une norme N est appelé espace vectoriel normé ; et noté (E, N).

2. Propriétés des espaces vectoriels normés

Soit $(E, \|\ \ \|)$ un e.v.n.

1. $\|-x\| = \|x\|$, pour tout $x \in E$
2. $\|x - y\| \leq \|x\| + \|y\|$, pour tous $x, y \in E$
3. $|\, \|x\| - \|y\| \,| \leq \|x - y\|$

2. Propriétés des espaces vectoriels normés

Soit $(E, \| \ \|)$ un e.v.n.

1. $\|-x\| = \|x\|$, pour tout $x \in E$
2. $\|x - y\| \leq \|x\| + \|y\|$, pour tous $x, y \in E$
3. $| \|x\| - \|y\| | \leq \|x - y\|$

Proposition

Soit $(E, \| \ \|)$ un e.v.n. L'application d définie sur $E \times E$ par :

$$d(x, y) = \|x - y\|$$

est une distance sur E. d est appelée distance associée à la norme sur E.

Donc, tout espace vectoriel normé est un espace métrique.

1. Espace préhilbertien

Soit H un espace vectoriel sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et φ une application de $H \times H$ dans $\mathbb{K}$

Définition

On dit que φ est un produit scalaire sur H si elle vérifie les propriétés suivantes :

1. Espace préhilbertien

Soit H un espace vectoriel sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et φ une application de $H \times H$ dans $\mathbb{K}$

Définition

On dit que φ est un produit scalaire sur H si elle vérifie les propriétés suivantes :

1. $\varphi(x + y, z) = \varphi(x, z) + \varphi(y, z)$, *pour tous* $x, y, z \in H$

1. Espace préhilbertien

Soit H un espace vectoriel sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et φ une application de $H \times H$ dans $\mathbb{K}$

Définition

On dit que φ est un produit scalaire sur H si elle vérifie les propriétés suivantes :

1. $\varphi(x + y, z) = \varphi(x, z) + \varphi(y, z)$, *pour tous* $x, y, z \in H$
2. $\varphi(\lambda x, y) = \lambda\varphi(x, y)$, *pour tous* $x, y \in H$ *et* $\lambda \in \mathbb{K}$

1. Espace préhilbertien

Soit H un espace vectoriel sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et φ une application de $H \times H$ dans $\mathbb{K}$

Définition

On dit que φ est un produit scalaire *sur H si elle vérifie les propriétés suivantes :*

1. $\varphi(x+y,z) = \varphi(x,z) + \varphi(y,z)$, *pour tous $x, y, z \in H$*
2. $\varphi(\lambda x, y) = \lambda\varphi(x,y)$, *pour tous $x, y \in H$ et $\lambda \in \mathbb{K}$*
3. $\varphi(x,y) = \overline{\varphi(y,x)}$

1. Espace préhilbertien

Soit H un espace vectoriel sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et φ une application de $H \times H$ dans $\mathbb{K}$

Définition

On dit que φ est un produit scalaire *sur H si elle vérifie les propriétés suivantes :*

1. $\varphi(x + y, z) = \varphi(x, z) + \varphi(y, z)$, *pour tous* $x, y, z \in H$
2. $\varphi(\lambda x, y) = \lambda\varphi(x, y)$, *pour tous* $x, y \in H$ *et* $\lambda \in \mathbb{K}$
3. $\varphi(x, y) = \overline{\varphi(y, x)}$
4. *Pour tout* $x \neq 0$, *on a* $\varphi(x, x) > 0$

Exemple

Sur $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{C})$, *l'application définie par :*

Exemple

Sur $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{C})$, *l'application définie par :*

$$\varphi(u,v) = \int_0^1 u(x)\overline{v(x)}\,d\,x$$

est un produit scalaire.

Notation. Un produit scalaire sera noté :

Notation. Un produit scalaire sera noté :$< x, y >$,

Notation. Un produit scalaire sera noté :$< x, y >$,$< x/y >$,

Notation. Un produit scalaire sera noté :$< x, y >$,$< x/y >$,(x, y)...

Définition

Un espace vectoriel muni d'un produit scalaire est appelé *espace préhilbertien*

Définition

Un espace vectoriel muni d'un produit scalaire est appelé *espace préhilbertien*

Proposition (Inégalité de Cauchy-Schwartz)

Si E est un préhilbertien, alors :

$$|<x,y>| \leq \sqrt{<x,x>}\sqrt{<y,y>}$$

pour tous $x, y \in E$.

Démonstration Si $< x/y >= 0$, l'inégalité est évidente.
Supposons que $< x, y > \neq 0$. Pour tout complexe λ et tous x et y éléments de E, on a :

Démonstration Si $< x/y >= 0$, l'inégalité est évidente. Supposons que $< x, y > \neq 0$. Pour tout complexe λ et tous x et y éléments de E, on a :

$$\begin{aligned} 0 \leq \quad & < x + \lambda y / x + \lambda y > = < x/x > \\ & + 2Re(\bar{\lambda} < x/y >) + |\lambda|^2 < y/y > . \end{aligned}$$

Si on pose $\lambda = \dfrac{< x/y >}{| < x/y > |} t$, avec $t \in \mathbb{R}$, alors :

Démonstration Si $< x/y >= 0$, l'inégalité est évidente. Supposons que $< x, y > \neq 0$. Pour tout complexe λ et tous x et y éléments de E, on a :

$$\begin{aligned} 0 \leq \quad & < x + \lambda y/x + \lambda y > = < x/x > \\ & + 2Re(\bar{\lambda} < x/y >) + |\lambda|^2 < y/y > . \end{aligned}$$

Si on pose $\lambda = \dfrac{< x/y >}{| < x/y > |} t$, avec $t \in I\!R$, alors :

$$0 \leq < x + \lambda y/x + \lambda y > = < x/x > + 2| < x/y > |t + < y/y > t^2$$

Démonstration Si $< x/y >= 0$, l'inégalité est évidente. Supposons que $< x, y > \neq 0$. Pour tout complexe λ et tous x et y éléments de E, on a :

$$\begin{aligned} 0 \leq \quad & < x + \lambda y/x + \lambda y >=< x/x > \\ & +2Re(\bar{\lambda} < x/y >) + |\lambda|^2 < y/y > . \end{aligned}$$

Si on pose $\lambda = \dfrac{< x/y >}{| < x/y > |} t$, avec $t \in I\!R$, alors :

$$0 \leq < x+\lambda y/x+\lambda y >=< x/x > +2| < x/y > |t+ < y/y > t^2$$

et donc,

$$| < x/y > |^2 - < x/x >< y/y > \leq 0.$$

Corollaire

Si E est un préhilbertien, alors l'application N définie par $N(x) = \sqrt{< x, x >}$ est une norme sur E.

Corollaire

Le produit scalaire est une application continue sur $E \times E$

Définition

Un espace préhilbertien complet est appelé un Hilbertien ou encore espace de Hilbert.

Théorème

Soient deux vecteurs x et y d'un espace préhilbertien, on a les identités suivantes :

Théorème

Soient deux vecteurs x et y d'un espace préhilbertien, on a les identités suivantes :

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2),$$

(parallèlogramme) et

Théorème

Soient deux vecteurs x et y d'un espace préhilbertien, on a les identités suivantes :

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2),$$

(parallèlogramme) et

$$\frac{1}{2}\|x-y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\|\frac{x+y}{2}\|^2$$

(médiane)

2. Orthogonalité

Définition

Deux vecteurs x et y d'un espace préhilbertien sont dits *orthogonaux* *si l'on a* $< x/y >= 0$.

Définition

Deux parties non vides M et N d'un espace préhilbertien E sont dites orthogonales si l'on a :

Définition

Deux parties non vides M et N d'un espace préhilbertien E sont dites orthogonales si l'on a :

$$< x/y >= 0, \ \ \forall (x, y) \in M \times N.$$

Définition

Soit une partie non vide M d'un espace préhilbertien E, on appelle *orthogonal* *de M le sous-ensemble $M^{\perp}$ défini par :*

Définition

Soit une partie non vide M d'un espace préhilbertien E, on appelle orthogonal de M le sous-ensemble $M^{\perp}$ défini par :

$$M^{\perp} = \{x \in E / \quad < x/y >= 0, \ \ \forall y \in M\}$$

Propriétés

Soit E un préhilbertien et M est une partie non vide de E. Alors

1. $M^{\perp}$ est un sous-espace vectoriel de E.
2. $M \subseteq M^{\perp\perp}$.
3. $M^{\perp} = (\overline{\mathrm{vect}(M)})^{\perp}$
4. Si N est une partie non vide de M, alors $M^{\perp} \subset N^{\perp}$

Théorème (Théorème de Pythagore)

Soient $x_1, x_2, \cdots, x_n$ *n vecteurs, deux à deux orthogonaux, d'un espace préhilbertien* E; *alors on a :*

Théorème (Théorème de Pythagore)

Soient $x_1, x_2, \cdots, x_n$ *n vecteurs, deux à deux orthogonaux, d'un espace préhilbertien* E; *alors on a :*

$$\|\sum_{i=1}^{n} x_i\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^2.$$

3. Projection orthogonale

Proposition

Soit E *un préhilbertien sur* $\mathbb{C}$ *et* F *une partie convexe de* E*. Pour tous* $x \in E$ *et* $a \in F$*, les propositions suivantes sont équivalentes.*

3. Projection orthogonale

Proposition

Soit E un préhilbertien sur $\mathbb{C}$ et F une partie convexe de E. Pour tous $x \in E$ et $a \in F$, les propositions suivantes sont équivalentes.

1. $d(x, a) = d(x, F)$

3. Projection orthogonale

Proposition

Soit E un préhilbertien sur $\mathbb{C}$ et F une partie convexe de E. Pour tous $x \in E$ et $a \in F$, les propositions suivantes sont équivalentes.

1. $d(x, a) = d(x, F)$
2. $Re < x - a, y - a > \leq 0$, *pour tout* $y \in F$

Démonstration Soit $z = a + t(y - a) = (1 - t)a + ty \in F$.
On a :

$$\begin{aligned} d(x, F)^2 &\leq d(x, z)^2 = \|x - z\|^2 \\ &= \|x - a\|^2 - 2tRe < x - a, y - a > +t^2\|y - a\|^2 \end{aligned}$$

On obtient :

$$2tRe < x - a, y - a > \leq t^2\|y - a\|^2$$

Démonstration Soit $z = a + t(y-a) = (1-t)a + ty \in F$. On a :

$$\begin{aligned} d(x,F)^2 &\leq d(x,z)^2 = \|x-z\|^2 \\ &= \|x-a\|^2 - 2tRe < x-a, y-a > + t^2\|y-a\|^2 \end{aligned}$$

On obtient :

$$2tRe < x-a, y-a > \leq t^2\|y-a\|^2$$

Si on divise par t et on passe à la limite en 0, on obtient le résultat.

Démonstration Soit $z = a + t(y - a) = (1 - t)a + ty \in F$.
On a :

$$\begin{aligned} d(x,F)^2 &\leq d(x,z)^2 = \|x - z\|^2 \\ &= \|x - a\|^2 - 2tRe < x - a, y - a > + t^2\|y - a\|^2 \end{aligned}$$

On obtient :

$$2tRe < x - a, y - a > \leq t^2\|y - a\|^2$$

Si on divise par t et on passe à la limite en 0, on obtient le résultat.
Réciproquement, on a :

Démonstration Soit $z = a + t(y-a) = (1-t)a + ty \in F$.
On a :

$$\begin{aligned} d(x,F)^2 &\leq d(x,z)^2 = \|x-z\|^2 \\ &= \|x-a\|^2 - 2tRe < x-a, y-a > + t^2\|y-a\|^2 \end{aligned}$$

On obtient :

$$2tRe < x-a, y-a > \leq t^2\|y-a\|^2$$

Si on divise par t et on passe à la limite en 0, on obtient le résultat.
Réciproquement, on a :
$\|x-y\|^2 = \|(x-a)-(y-a)\|^2 =$
$\|x-a\|^2 + \|y-a\|^2 - 2Re < x-a, y-a > \geq \|x-a\|^2$

Théorème (Théorème de la projection orthogonale)

Soit F une partie convexe complète non vide dans un préhilbertien E.

Théorème (Théorème de la projection orthogonale)

Soit F une partie convexe complète non vide dans un préhilbertien E.
Pour tout $x \in E$, il existe un élément unique $a \in F$ tel que :

Théorème (Théorème de la projection orthogonale)

Soit F une partie convexe complète non vide dans un préhilbertien E.
Pour tout $x \in E$, il existe un élément unique $a \in F$ tel que :

$$d(x, F) = \|a - x\|.$$

a est appelé projection orthogonale de x sur F.

Démonstration Soit $(a_n)_n \subset F$ tel que
$d(x, F) = \lim_n d(x, a_n) = \lim_n \|x - a_n\|$.

Démonstration Soit $(a_n)_n \subset F$ tel que
$d(x, F) = \lim_n d(x, a_n) = \lim_n \|x - a_n\|$.
On a :

$$\frac{1}{2}\|a_n - a_m\|^2 = \|x - a_n\|^2 + \|x - a_m\|^2 - 2\|x - \frac{a_n + a_m}{2}\|^2$$

Démonstration Soit $(a_n)_n \subset F$ tel que
$d(x, F) = \lim_n d(x, a_n) = \lim_n \|x - a_n\|$.
On a :

$$\frac{1}{2}\|a_n - a_m\|^2 = \|x - a_n\|^2 + \|x - a_m\|^2 - 2\|x - \frac{a_n + a_m}{2}\|^2$$

Or

$$\|x - \frac{a_n + a_m}{2}\|^2 \geq d(x, F)^2.$$

Démonstration Soit $(a_n)_n \subset F$ tel que
$d(x, F) = \lim_n d(x, a_n) = \lim_n \|x - a_n\|$.
On a :

$$\frac{1}{2}\|a_n - a_m\|^2 = \|x - a_n\|^2 + \|x - a_m\|^2 - 2\|x - \frac{a_n + a_m}{2}\|^2$$

Or

$$\|x - \frac{a_n + a_m}{2}\|^2 \geq d(x, F)^2.$$

Donc,

$$\frac{1}{2}\|a_n - a_m\|^2 \leq \|x - a_n\|^2 + \|x - a_m\|^2 - 2d(x, F)^2$$

On en déduit que $(a_n)_n$ est de cauchy dans F et donc elle converge vers $a \in F$.

On en déduit que $(a_n)_n$ est de cauchy dans F et donc elle converge vers $a \in F$.
On a $d(x, F) = d(x, a)$.

On en déduit que $(a_n)_n$ est de cauchy dans F et donc elle converge vers $a \in F$.
On a $d(x,F) = d(x,a)$.
Pour l'unicité si $b \in F$ répond à la question, on aura :
$$\frac{1}{2}\|a-b\|^2 = \|x-a\|^2 + \|x-b\|^2 - 2\|x - \frac{a+b}{2}\|^2 \leq 0.$$
Donc $a = b$

On notera $a = p_F(x)$. Donc, p_F est une application de E sur F.

Proposition

L'application :

$$p_F : \begin{array}{rcl} E & \longrightarrow & F \\ x & \longrightarrow & p_F(x) \end{array}$$

vérifie la relation :

Proposition

L'application :

$$p_F : \quad \begin{array}{l} E \longrightarrow F \\ x \longrightarrow p_F(x) \end{array}$$

vérifie la relation :

$$\|p_F(x) - p_F(y)\| \leq \|x - y\|, \quad \textit{pour tout } (x, y) \in E \times E.$$

Proposition

L'application :

$$p_F : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & F \\ x & \longrightarrow & p_F(x) \end{array}$$

vérifie la relation :

$$\|p_F(x) - p_F(y)\| \leq \|x - y\|, \quad \textit{pour tout } (x, y) \in E \times E.$$

Et, donc p_F est uniformément continue sur E.

Théorème

Soit un sous-espace vectoriel complet F d'un espace préhilbertien séparé E; alors pour tout $x \in E$, il existe un et un seul $x_0 \in F$ tel que :

Théorème

Soit un sous-espace vectoriel complet F d'un espace préhilbertien séparé E; alors pour tout $x \in E$, il existe un et un seul $x_0 \in F$ tel que :

$$d(x, F) = \|x - x_0\| \text{ et } x - x_0 \in F^{\perp}.$$

Proposition

Soient un espace de Hilbert E et une partie non vide A de E ; les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) *A est totale dans E, c'est-à-dire que le sous-espace vectoriel engendré par A est partout dense dans E.*

Proposition

Soient un espace de Hilbert E et une partie non vide A de E ; les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) *A est totale dans E, c'est-à-dire que le sous-espace vectoriel engendré par A est partout dense dans E.*

(ii) $A^{\perp} = \{0\}$.

4. Théorème de représentation de Riesz

Théorème (Théorème de représentation de Riesz)

Soit E un espace de Hilbert.

(a) *Pour tout $y \in E$, l'application :*

$$f_y : \begin{array}{l} E \longrightarrow \mathbb{K} \\ x \longrightarrow < x/y > \end{array}$$

est une forme linéaire continue sur E et on a $\|f_y\| = \|y\|$.

4. Théorème de représentation de Riesz

Théorème (Théorème de représentation de Riesz)

Soit E un espace de Hilbert.

(a) *Pour tout $y \in E$, l'application :*

$$f_y : \begin{array}{l} E \longrightarrow I\!K \\ x \longrightarrow < x/y > \end{array}$$

est une forme linéaire continue sur E et on a $\|f_y\| = \|y\|$.

(b) *Pour toute forme linéaire continue f sur E, il existe un élément y unique de E tel que $f = f_y$*

Démonstration Soit $f \in E'$; si f est nulle, on prend $y = 0$. Supposons que f est non nulle et soit $a \in (Kerf)^{\perp}$ avec $a \neq 0$. L'application g définie par $g(x) =< x, a >$ est une forme linéaire continue dont le noyau est $Kerf$.

En effet, si pour tout $x \in E$, il existe $x_1 \in kerf$ et α scalaire tels que :

$$x = x_1 + \alpha.a$$

Si $f(x) = 0$, alors $\alpha = 0$ et donc $x = x_1 \in kerf$; c'est-à-dire $< x, a >= 0$ Réciproquement, si $g(x) = 0$, alors $< x_1, a > +\alpha\|a\|^2 = 0$ ce qui implique $\alpha = 0$ et f(x)=0.

On en déduit qu'il existe α tel que $f = \alpha.g$ Par suite, $y = \bar{\alpha}.a$ répond à la question.

5. Familles orthogonales. Bases orthonormales

Définition

La famille $(e_i)_{i\in I}$ est dite orthonormale dans E, si elle est orthogonale et $\|e_i\| = 1$, pour tout $i \in I$.

Définition

Dans un espace de Hilbert E on appelle base hilbertienne toute famille ***orthonormale totale*** *dans E.*

Tout espace de Hilbert possède une base Hilbertienne.

Proposition

Si un espace de Hilbert est séparable, alors il contient une base orthonormale dénombrable.

6. Relation de Parseval et inégalité de Bessel

Soient E un espace de Hilbert et $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une famille orthonormale dénombrable de E. Pour tout $x \in E$, posons :

$$x_n = < x / e_n >, \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

6. Relation de Parseval et inégalité de Bessel

Soient E un espace de Hilbert et $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille orthonormale dénombrable de E. Pour tout $x \in E$, posons :

$$x_n = < x/e_n >, \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

Définition

$(x_n)_n$ sont appelés coefficients de Fourier de x dans $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Théorème (Inégalité de Bessel)

Si E est un espace de Hilbert et $(e_n)_n$ est une famille orthonormale de E; alors, pour tout $x \in E$, on a :

$$\sum_{n=0}^{\infty} | < x, e_n > |^2 \leq \|x\|^2 =< x/x > .$$

Démonstration. La série $\sum_{p=0}^{n} | < x, e_p > |^2$ est croissante.

d'autre part, on a :

$$\sum_{p=0}^{n} | < x, e_p > |^2 = \| \sum_{p=0}^{n} < x, e_p > e_p \|^2 = \|p(x)\|^2 \leq \|x\|^2$$

où p est la projection orthogonale de E sur $\mathrm{vect}(e_0, \cdots, e_n)$
On en déduit que la série est convergente. Si n tend vers l'infini, on obtient le résultat.

Théorème (Relation de Parseval)

Si E est un espace de Hilbert séparable et $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base hilbertienne orthonormale de E; alors, pour tout $x \in E$, on a :

$$\sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^2 = \|x\|^2 =< x/x > .$$

Démonstration. Si $x \in \mathrm{vect}(e_p)_p$, alors $x = \sum_{p=0}^{n} < x, e_p > e_p$;

donc

$$\|x\|^2 = \sum_{p=0}^{n} | < x, e_p > |^2 \leq \sum_{p=0}^{\infty} | < x, e_p > |^2 \leq \|x\|^2$$

Soit $x \in F = \overline{\mathrm{vect}(e_n)_n}$, il existe $y \in \mathrm{vect}(e_n)_n$ tel que $\|x - y\| < \dfrac{\epsilon}{2}$.
D'autre part,

$$x - \sum_{p=0}^{n} < x, e_p > e_p = x - y + \sum_{p=0}^{n} < y - x, e_p > e_p$$

On en déduit que :

$$\left\| x - \sum_{p=0}^{n} < x, e_p > e_p \right\| \leq \|x - y\| + \left\| \sum_{p=0}^{n} < y - x, e_p > e_p \right\| < \epsilon$$

c'est-à-dire que la série $\sum_{p=0}^{n} < x, e_p > e_p$ est convergente et sa somme est x.

En utilisant le théorème de Pythagore, on obtient le résultat.

Corollaire

Si E est un espace de Hilbert séparable et $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base orthonormale de E; alors, pour tout $x \in E$, l'application :

$$\begin{aligned} \varphi : E &\longrightarrow l^2_{\mathbb{K}} \\ x &\longrightarrow (x_n)_n \end{aligned}$$

est une isométrie.