Solutions des exercices

Solution de l'exercice (??): Soient $a < b$ et $[a,b] \in \mathcal{F}_2$. On a l'égalité

$$[a,b] = \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*}]a - \frac{1}{n}, b + \frac{1}{n}[.$$

On en déduit que $[a,b]$ est une réunion dénombrable d'éléments de $\mathcal{F}_1$; d'où

$$\mathcal{F}_2 \subset \sigma(\mathcal{F}_1)$$

et par suite

$$\sigma(\mathcal{F}_2) \subset \sigma(\mathcal{F}_1).$$

Pour $]a,b[\in \mathcal{F}_1$, on peut écrire

$$]a,b[= \bigcup_{n > \frac{2}{b-a}} [a + \frac{1}{n}, b - \frac{1}{n}].$$

Ainsi, on a $\mathcal{F}_1 \subset \sigma(\mathcal{F}_2)$, d'où

$$\sigma(\mathcal{F}_1) \subset \sigma(\mathcal{F}_2)$$

On a donc l'égalité

$$\sigma(\mathcal{F}_1) = \sigma(\mathcal{F}_2).$$

Solution de l'exercice (??): Soient $(X,\mathcal{A},\mu)$ un espace mesuré et

$$\begin{array}{rccc} f: & X & \longrightarrow & \overline{\mathbb{R}} \\ & x & \longmapsto & \beta \end{array}$$

Soit $A_\alpha = \{x \in X;\ f(x) > \alpha\}$. On a

$$A_\alpha = \begin{cases} X & \text{si} \quad \beta \in \mathbb{R} \text{ et } \alpha < \beta \\ \emptyset & \text{si} \quad \beta \in \mathbb{R} \text{ et } \alpha \geq \beta \\ X & \text{si} \quad \beta = +\infty \\ \emptyset & \text{si} \quad \beta = -\infty \end{cases}$$

On voit que $A_\alpha \in \mathcal{A}$, pour tout $\alpha \in I\!R$. Donc f est mesurable.

Solution de l'exercice (??): a/ Soit $f : I\!R \longrightarrow I\!R$, une fonction nulle presque partout. On pose $E = \{x \in I\!R : \ f(x) \neq 0\}$.

Il existe N négligeable tel que $E \subset N$. λ étant complète, on en déduit que E est un ensemble mesurable et négligeable. Considérons les ensembles $A_\alpha = \{x \in I\!R;\ f(x) > \alpha\}$. On a

$$A_\alpha = C_\alpha \cup D_\alpha$$

avec

$$C_\alpha = \{x \in E;\ f(x) > \alpha\} \ \text{ et } \ D_\alpha = \{x \in E^c;\ f(x) > \alpha\}$$

$C_\alpha \in \mathcal{L}$ car c'est un sous ensemble d'un ensemble négligeable.

$D_\alpha = E^c$ ou $\emptyset$ selon que $\alpha < 0$ ou $\alpha \geq 0$. Par suite $D_\alpha \in \mathcal{L}$ et donc $A_\alpha = C_\alpha \cup D_\alpha \in \mathcal{L}$. f est alors mesurable.

b/ $f : I\!R \longrightarrow I\!R$ continue. On suppose que $f = 0$ p.p. L'ensemble $E = \{x \in I\!R : \ f(x) \neq 0\}$ est négligeable.

Procédons par l'absurde: supposons qu'il existe $x_0 \in I\!R$ tel que $f(x_0) \neq 0$. f étant continue, il existe $h > 0$ tel que $\forall x \in]x_0 - h, x_0 + h[,\ f(x) \neq 0$, c'est-à-dire

$$]x_0 - h, x_0 + h[\subset E$$

donc $\lambda(]x_0 - h, x_0 + h[) = 2h = 0$ ce qui est absurde.

Solution de l'exercice (??): Soit $\alpha > 0$. On pose $E_\alpha = \{x \in X;\ f(x) \geq \alpha\}$.

E_α est mesurable. On a l'inégalité $f \geq \alpha \chi_{E_\alpha}$.

Les deux fonctions étant positives mesurables, il vient

$$\int_X f d\mu \geq \alpha \mu(E_\alpha)$$

Solution de l'exercice (??): La fonction $f\chi_N$ positive, mesurable est nulle p.p. car

$$\{x \in X : \ f(x)\chi_N(x) \neq 0\} \subset N$$

On en déduit que

$$\int_X f\chi_N d\mu = \int_N f d\mu = 0$$

Solution de l'exercice (??): Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré avec μ complète.

On considère $E = \{x \in X;\ f_n(x) \text{ne converge pas vers} f(x)\}$. E est négligeable.

On peut écrire $f = f\chi_E + f\chi_{E^c}$. La fonction $f\chi_E$ est nulle p.p. donc mesurable (généralisation de l'exercice (**??**) aux espaces mesurés complets).

D'autre part,

$$\forall x \in X \quad \text{on a} \quad f_n(x)\chi_{E^c}(x) \longrightarrow f(x)\chi_{E^c}(x)$$

La fonction $f\chi_{E^c}$ est donc mesurable comme limite simple d'une suite de fonctions mesurables. f est donc mesurable comme somme de deux fonctions mesurables.

Solution de l'exercice (**??**)**:** On pose $E = \{x \in X;\ f_n(x) \text{ne converge pas vers} f(x)\}$. Il existe N negligeable tel que $E \subset N$. On a

$$\int_N f_n d\mu = \int_N f d\mu = 0$$

Par suite

$$\int_X f_n d\mu = \int_{N^c} f_n d\mu = \int_X f_n \chi_{N^c} d\mu$$

et

$$\int_X f d\mu = \int_{N^c} f d\mu = \int_X f \chi_{N^c} d\mu$$

la suite $(f_n\chi_{N^c})$ est croissante, positive, mesurable et converge simplement vers $(f\chi_{N^c})$. Le théorème de la convergence monotone permet de conclure.

Solution de l'exercice (**??**)**:** On pose $S_n = \sum_{p=1}^{n} f_p$. (S_n) est une suite de fonctions positives mesurables. (S_n) converge simplement vers $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$.

Le théorème de la convergence monotone s'applique à la suite (S_n):

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} \int_X S_n d\mu &= \lim_{n\to+\infty} \int_X \sum_{p=1}^{n} f_p \, d\mu &&= \lim_{n\to+\infty} \sum_{p=1}^{n} \int_X f_p \, d\mu \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \int_X f_n \, d\mu &&= \int_X \lim_{n\to+\infty} S_n d\mu \\
&= \int_X \sum_{n=1}^{+\infty} f_n \, d\mu
\end{aligned}$$

Solution de l'exercice (**??**)**:** $f \in \mathcal{L}^1$, N negligeable. f est integrable, les deux fonctions positives f^+ et f^- sont aussi integrables.

On a donc $\int_N f^+ d\mu = \int_N f^- d\mu = 0$, d'où $\int_N f d\mu = \int_N f^+ d\mu - \int_N f^- d\mu = 0$.

Solution de l'exercice (**??**)**:** On pose $E = \{x \in X/\ f(x) \neq g(x)\} \subset N$, N negligeable.

Comme $\int_N f d\mu = \int_N g d\mu = 0$ alors

$$\int_X f d\mu = \int_{N^c} f d\mu \quad \text{et} \quad \int_X g d\mu = \int_{N^c} g d\mu$$

Or $f\chi_{N^c} = g\chi_{N^c}$ d'où le résultat.

Solution de l'exercice (**??**)**:** Soit $f : X \longrightarrow I\!R$ intégrable.

($\Rightarrow$) Supposons que $f = 0$ p.p. On en déduit que la fonction intégrable $f\chi_A = 0$ p.p., pour tout $A \in \mathcal{A}$. L'exercice (**??**) donne alors

$$\int_X f\chi_A d\mu = \int_A f d\mu = 0$$

($\Leftarrow$) On suppose que

$$\forall A \in \mathcal{A} \qquad \int_A f d\mu = 0$$

Posons $A_1 = \{x \in X/ \ f(x) \geq 0\}$ et $A_2 = \{x \in X/ \ f(x) < 0\}$

Ces deux ensembles sont mesurables. On a donc

$$\int_{A_1} f d\mu = 0 = \int_X f\chi_{A_1} d\mu$$

et

$$\int_{A_2} (-f) d\mu = 0 = \int_X -f\chi_{A_2} d\mu$$

$f\chi_{A_1}$ et $-f\chi_{A_2}$ étant positives mesurables, il vient

$$f\chi_{A_1} = 0 \ \text{ p.p.} \quad \text{ et } \quad -f\chi_{A_2} = 0 \ \text{ p.p.}$$

d'où $f(\chi_{A_1} + \chi_{A_2}) = f\chi_X = f = 0$ p.p.

Solution de l'exercice (**??**)**:** a/ Pour $n \in I\!N^*$, on considère l'ensemble $A_n = \{x \in X/ \ f(x) \geq \frac{1}{n}\}$.

A_n est mesurable et $\mu(A_n) < +\infty$ d'après l'exercice (**??**). La suite (A_n) est croissante au sens de l'inclusion. On pose $f_n = f\chi_{A_n}$. Il est clair que (f_n) est une suite croissante de fonctions positives mesurables et on vérifie facilement que $f_n \longrightarrow f$ simplement.

Le théorème de la convergence monotone permet d'affirmer que

$$\lim_{n \to +\infty} \int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu = \lim_{n \to +\infty} \int_{A_n} f d\mu$$

Utilisant la définition de la limite, $\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists N \in I\!N^*$ tel que $\displaystyle\int_X f d\mu \leq \int_{A_N} f d\mu + \varepsilon$, il vient

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists A = A_N \in \mathcal{A}, \ \ \mu(A) < +\infty \ \text{ tel que } \int_X f d\mu \leq \int_A f d\mu + \varepsilon$$

b/ Soit $A_n = \{x \in X/ \ f(x) > n\}$. On constate que

$$f\chi_{A_n} \geq n\chi_{A_n}$$

par suite $\int_{A_n} f d\mu \geq n\mu(A_n)$.

On va montrer que $\lim_{n\to+\infty} \int_{A_n} f d\mu = 0$ ou encore $\lim_{n\to+\infty} \int_{A_n^c} f d\mu = \int_X f d\mu$.

Posons $f_n = f\chi_{A_n^c}$. Les (f_n) forment une suite croissante de fonctions positives et mesurables.

Etudions la convergence simple de cette suite. Soit $x_0 \in X$.

Cas 1: $f(x_0)$ fini. $f_n(x_0) = f(x_0)$ pour n assez grand. Donc $(f_n(x_0)) \longrightarrow f(x_0)$

Cas 2: $f(x_0) = +\infty$. $f_n(x_0) = 0$ et dans ce cas $(f_n(x_0))$ ne converge pas vers $f(x_0)$.

Vérifions que l'ensemble $E = \{x \in X/ \ f(x) = +\infty\}$ est negligeable. En effet, on a

$E = \bigcap_{n\in \mathbb{N}^*} A_n$ donc mesurable de plus $\mu(E) \leq \mu(A_n) \quad \forall n \geq 1$.

Or $\mu(A_n) \leq \frac{1}{n} \int_X f d\mu$ (lemme de Chebychev). Par suite $\mu(E) = 0$.

En conséquence $f_n \longrightarrow f$ p.p. et l'exercice (**??**) permet de conclure.

Solution de l'exercice (??): $(\mathbb{N},\mathcal{P}(\mathbb{N}),\mu_d)$ espace mesuré. Soit $f : \mathbb{N} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}^+$ et soit $\alpha \in \mathbb{R}$

$$A_\alpha = \{n \in \mathbb{N}/ \ f(n) > \alpha\} \subset \mathcal{P}(\mathbb{N})$$

donc f est mesurable.

Considérons la suite de fonctions $\{f_n : \mathbb{N} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}^+\}$ définie par

$$f_n = f(n)\chi_{\{n\}}$$

• Si $f(n)$ est fini, alors f_n est étagée, positive et $\int_{\mathbb{N}} f_n d\mu_d = f(n)\mu_d(\{n\}) = f(n)$.

• Si $f(n) = +\infty$ alors $f_n \geq q\chi_{\{n\}} \quad \forall q$

d'où $\int_{\mathbb{N}} f_n d\mu_d \geq q \quad \forall q$, c'est-à-dire

$$\int_{\mathbb{N}} f_n d\mu_d = +\infty = f(n)$$

Vérifions que $f = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$. Pour cela, on considère $\phi_n = \sum_{p=0}^{n} f(p)\chi_{\{p\}}$.

ϕ_n converge simplement vers f, en effet: $\forall q \in \mathbb{N} \ \ \phi_n(q) = f(q)$ pour tout n assez grand, d'où $f = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$.

Il suffit à présent d'appliquer l'exercice (**??**);

$$\int_{\mathbb{N}} f d\mu_d = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{\mathbb{N}} f_n d\mu_d = \sum_{n=0}^{+\infty} f(n)$$

Solution de l'exercice (??): Soit la suite de fonctions

$$f_n(x) = \frac{n^{\frac{3}{2}}x}{1+n^2x^2}, \quad x \in [0,1], \quad n \in \mathbb{N}$$

a/ Convergence simple:

Si $x = 0$, $f_n(0) = 0$ donc $f_n(0) \longrightarrow 0$

Si $x \in]0,1]$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^{\frac{3}{2}}x}{n^2x^2} = 0$

f_n converge simplement vers $f = 0$ sur $[0,1]$.

Convergence uniforme:

Prenons la suite $x_n = \frac{1}{n}$. $f_n(x_n) = f_n(\frac{1}{n}) = \frac{\sqrt{n}}{2} \longrightarrow +\infty$.

On n'a pas convergence uniforme.

b/ Les théorèmes classiquent ne permettent pas de conclure (pas de convergence uniforme).

On va essayer le théorème de Lebesgue:

• f_n est continue donc mesurable.

• $f_n \longrightarrow 0$ simplement.

• Cherchons $g \in \mathcal{L}^1([0,1])$ telle que $|f_n| \leq g$.

Pour cela on pose:

$$\phi_x(t) = \frac{t^{\frac{3}{2}}x}{1+t^2x^2},\ \ t \geq 0,\ \ x \in]0,1]$$

On étudie ϕ_x sur $I\!R^+$.

$$\phi_x'(t) = \frac{1}{2}\frac{xt^{\frac{1}{2}}(3-x^2t^2)}{(1+t^2x^2)^2}$$

ϕ_x atteint un maximum en $t = \frac{\sqrt{3}}{x}$, d'où

$$|f_n(x)| \leq \phi_x(\frac{\sqrt{3}}{x}) = \frac{3^{\frac{3}{4}}}{4}\frac{1}{\sqrt{x}} = g(x) \quad \forall x \in]0,1]$$

ou encore

$$|f_n(x)| \leq g(x) \quad p.p.$$

$g(x) = \frac{3^{\frac{3}{4}}}{4}\frac{1}{\sqrt{x}}$ est intégrable sur $[0,1]$.

Le théorème de Lebesgue s'applique et on a l'égalité

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 f_n(x)dx = \int_0^1 \lim_{n\to+\infty} f_n(x)dx$$

Solution de l'exercice (??): On pose $I_n = \displaystyle\int_0^{\sqrt{n}} (1-\frac{x^2}{n})^n\, dx$ qui s'écrit encore

$$I_n = \int_{]0,+\infty[} (1-\frac{x^2}{n})^n \chi_{]0,\sqrt{n}[}(x)\, dx$$

On pose alors

$$X =]0,+\infty[\quad \text{et} \quad f_n(x) = (1-\frac{x^2}{n})^n \chi_{]0,\sqrt{n}[}(x)$$

On cherche donc

$$\lim_{n \to +\infty} I_n = \int_X f_n(x)dx$$

• f_n est mesurable.

• Convergence simple: Soit $x_0 \in X =]0, +\infty[$. Pour n assez grand

$$f_n(x_0) = (1 - \frac{x_0^2}{n})^n = e^{n \ln(1 - \frac{x_0^2}{n})} \longrightarrow e^{-x_0^2}.$$

Ainsi la suite (f_n) cnverge simplement vers la fonction $f(x) = e^{-x^2}$.

• Pour $t \in]0,1[$, on a $1 - t \leq e^{-t}$, et pour $x \in]0, \sqrt{n}[$ on a donc $1 - \frac{x^2}{n} \leq e^{-\frac{x^2}{n}}$
$\ln(1 - \frac{x^2}{n}) \leq -\frac{x^2}{n} \implies n \ln(1 - \frac{x^2}{n}) \leq -x^2 \implies f_n(x) \leq e^{-x^2}$.
On conclut que $f_n(x) \leq e^{-x^2}$ $\forall x \in X$.
Le thèorème de Lebesgue s'applique:

$$\lim_{n \to +\infty} I_n = \lim_{n \to +\infty} \int_X f_n(x)dx = \int_X \lim_{n \to +\infty} f_n(x)dx = \int_X e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Solution de l'exercice (??): Pour montrer que la fonction $F(t)$ est dérivable sur $I =]0, +\infty[$, il suffit de montrer qu'elle est dérivable sur $I_\alpha =]\alpha, +\infty[$, pour tout $\alpha > 0$.
Fixons $\alpha > 0$. Pour tout $t \in I_\alpha$ et $x \in X =]0, +\infty[$, on considère $f(t,x) = \frac{e^{-tx^2}}{1+x^2}$.
i) La fonction $x \longrightarrow f(t,x)$ est mesurable et intégrable sur X car $|f(t,x)| \leq \frac{1}{1+x^2}$ $\forall x$ et $\frac{1}{1+x^2} \in \mathcal{L}^1(X)$.
ii) $\forall x \in X$, $\frac{\partial f}{\partial t}(t,x)$ existe et vaut

$$\frac{\partial f}{\partial t}(t,x) = -\frac{x^2}{1+x^2}e^{-tx^2}$$

iii) On a $\forall t \in I_\alpha$, $|\frac{\partial f}{\partial t}(t,x)| \leq e^{-\alpha x^2} \in \mathcal{L}^1(I)$.
On peut donc affirmer que $F(t)$ est dérivable sur I et que

$$F'(t) = \int_0^{+\infty} -\frac{x^2}{1+x^2}e^{-tx^2}dx$$

Solution de l'exercice (??): La fonction $F(t) = (\int_0^t e^{-x^2}dx)^2$ est dérivable pour $t \in \mathbb{R}$ et on a

$$F'(t) = 2e^{-t^2} \int_0^t e^{-x^2}dx, \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Soit la fonction $g(t,x) = \frac{e^{-t^2(1+x^2)}}{1+x^2}$, définie sur $\mathbb{R} \times [0,1]$. On a
i) $x \longrightarrow g(t,x)$ est intégrable car

$$|g(t,x)| \leq \frac{1}{1+x^2}$$

ii) $\frac{\partial g}{\partial t}(t,x)$ existe, $\forall x$ et $\frac{\partial g}{\partial t}(t,x) = -2te^{-t^2(1+x^2)}$. Donc $|\frac{\partial g}{\partial t}(t,x)| = 2|t|e^{-t^2(1+x^2)} = g_x(t)$

Pour x fixé, étudions cette fonction par rapport à t.

Puisqu'elle est paire, on se limitera à $t \geq 0$. Le tableau de variation est

t	0		$\frac{1}{\sqrt{2(1+x^2)}}$		$+\infty$
g_x	0	$\nearrow$	$h(x)$	$\searrow$	0

avec $h(x) = \sqrt{2}e^{-\frac{1}{2}}\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$, continue, Lebesgue-intégrable sur [0,1] et

$$|\frac{\partial g}{\partial t}(t,x)| \leq h(x) \quad \forall x \in [0,1]$$

On peut alors dériver sous le signe somme. On a pour tout $t \in I\!R$

$$G'(t) = \int_0^1 -2te^{-t^2(1+x^2)}dx = -2te^{-t^2}\int_0^1 e^{-t^2x^2}dx$$

On effectue le changement de variable $y = tx$ pour avoir $G'(t) = -2e^{-t^2}\int_0^t e^{-y^2}dy$, d'où la relation

$$\forall t \in I\!R \qquad F'(t) + G'(t) = 0$$

On en déduit que

$$\forall t \in I\!R \qquad F(t) + G(t) = F(0) + G(0) = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx$$

soit $\forall t \in I\!R \qquad F(t) + G(t) = \frac{\pi}{4}$. En faisant tendre t vers $+\infty$, on obtient

$$(\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx)^2 + 0 = \frac{\pi}{4}$$

($\lim_{t \to +\infty} G(t) = 0$ provient de la majoration $|G(t)| \leq \frac{\pi}{4}e^{-t^2}$.)

Solution de l'exercice (**??**)**:** La fonction $y \longrightarrow f(x,y)$ est continue sur $[-1,1]$ et comme elle est impaire on a

$$\int_{[-1,1]} f(x,y)dy = 0$$

Pour les mêmes raisons

$$\int_{[-1,1]} f(x,y)dx = 0$$

Par suite

$$\int_{[-1,1]} dx \int_{[-1,1]} f(x,y)dy = \int_{[-1,1]} dy \int_{[-1,1]} f(x,y)dx = 0$$

cependant $f \notin \mathcal{L}^1([0,1] \times [0,1])$ car dans le cas contraire, on aurait d'après Fubini $A = \int_0^1 dx \int_0^1 \frac{xy}{(x^2+y^2)^2} dy$ est fini. Or

$$\int_0^1 \frac{xy}{(x^2+y^2)^2} dy = \begin{cases} \frac{1}{2x} - \frac{x}{2(x^2+1)} & si \quad x \neq 0 \\ 0 & si \quad x = 0 \end{cases}$$

et ainsi A ne peut être fini.

f n'est pas intégrable sur $[-1,1] \times [-1,1]$ car elle ne l'est pas sur $[0,1] \times [0,1]$.

Solution de l'exercice (??): a/ on pose $S_n = \sum_{p=0}^{n} p\mu(A_p)$. μ étant finie:

$$\mu(A_p) = \mu(B_p) - \mu(B_{p+1}).$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{p=0}^{n} p\mu(B_p) - \sum_{p=0}^{n} p\mu(B_{p+1}) \\ &= \sum_{p=0}^{n} p\mu(B_p) - \sum_{p=0}^{n} (p+1-1)\mu(B_{p+1}) \\ &= \sum_{p=0}^{n} p\mu(B_p) - \sum_{p=0}^{n} (p+1)\mu(B_{p+1}) + \sum_{p=0}^{n} \mu(B_{p+1}) \\ &= \sum_{p=0}^{n} p\mu(B_p) - \sum_{p=1}^{n+1} p\mu(B_p) + \sum_{p=1}^{n+1} \mu(B_p) \\ &= -(n+1)\mu(B_{n+1}) + \sum_{p=1}^{n+1} \mu(B_p) \end{aligned}$$

Posons $T_n = \sum_{p=1}^{n+1} \mu(B_p)$. On a donc $T_n = S_n + (n+1)\mu(B_{n+1})$. Or on a vu que $\lim_{n \to +\infty} n\mu(B_n) = 0$ (voir exercice (??)).

Il en résulte que $\lim_{n \to +\infty} T_n = \lim_{n \to +\infty} S_n$, d'où

$$\sum_{n=0}^{+\infty} n\mu(A_n) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mu(B_n)$$

b/ La suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une partition de X. Comme l'application $A \longrightarrow \int_A f d\mu$ est une mesure, alors on a

$$\int_X f d\mu = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{A_n} f d\mu < +\infty$$

on a par ailleurs $n\chi_{A_n} \leq f\chi_{A_n}$ d'où $n\mu(A_n) \leq \int_{A_n} f d\mu$.

La série $\sum_{n=0}^{+\infty} n\mu(A_n)$ est donc convergente d'où $\sum_{n=1}^{+\infty} \mu(B_n)$ est convergente.

Solution de l'exercice (??): On a $\int_X (f_n - f)d\mu = 0$. En posant $g = f_n - f$ on a donc

$$\int_X g_n^+ d\mu = \int_X g_n^- d\mu$$

Les g_n^+ sont mesurables, positives et tendent vers 0 simplement, de plus

$$g_n^+ = \sup(f(x) - f_n(x), 0) \leq f(x) \in \mathcal{L}^1(X)$$

Le théorème de la convergence dominée implique

$$\int_X g_n^+ d\mu \longrightarrow 0$$

par suite

$$\int_X g_n^- d\mu \longrightarrow 0$$

Comme on a

$$\int_X |f_n - f| d\mu = \int_X g_n^+ d\mu + \int_X g_n^- d\mu$$

On en déduit que

$$\lim_{n \to +\infty} \int_X |f_n - f| d\mu = 0$$

c'est-à-dire

$$f_n \longrightarrow f \text{ dans } L^1$$

Solution de l'exercice (??): Posons

$$E = \{x \in X / \ f(x) < 1\}$$

$$F = \{x \in X / \ f(x) = 1\}$$

$$G = \{x \in X / \ f(x) > 1\}$$

$$u_n = \int_X f^n d\mu$$

On a $u_n = a_n + b_n + c_n$ avec

$$a_n = \int_X f^n \chi_E d\mu \quad ; \quad b_n = \int_X f^n \chi_F d\mu \quad ; \quad c_n = \int_X f^n \chi_G d\mu$$

On constate que la suite $(f^n \chi_E)_n$ est telle que

- $f^n \chi_E \geq 0$.
- $f^n \chi_E \longrightarrow 0$ simplement.

• $f^n\chi_E \leq f \in \mathcal{L}^1(X)$

Le théorème de Lebesgue assure que $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$.

On remarque que $f^n\chi_F = \chi_F = f\chi_F$. Ainsi on a

$$b_n = \int_X f^n\chi_F d\mu = \int_X \chi_F d\mu = \mu(F) = \int_F f d\mu$$

d'où l'on tire que $\mu(F)$ est fini car f est intégrable et $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = \mu(F)$.

Considérons maintenant la suite $(f^n\chi_G)_n$. On remarque que

• $f^n\chi_G \geq 0$.

• $(f^n\chi_G)_n$ est croissante.

• $f^n\chi_G \longrightarrow \varphi$ simplement, avec $\varphi(x) = \begin{cases} +\infty & si \quad x \in G \\ 0 & si \quad x \notin G \end{cases}$

Par le théorème de la convergence monotone, on a

$$\lim_{n\to+\infty} c_n = \int_X \varphi d\mu = \begin{cases} +\infty & si \quad \mu(G) \neq 0 \\ 0 & si \quad \mu(G) = 0 \end{cases}$$

En conclusion

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \begin{cases} \mu(F) & si \quad \mu(G) = 0 \\ +\infty & si \quad \mu(G) \neq 0 \end{cases}$$

Solution de l'exercice (??): On sait que

$$\cos(\sqrt{x}) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^n}{(2n)!}; \quad x \geq 0$$

d'où $f(x) = e^{-x}\cos(\sqrt{x}) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \dfrac{e^{-x}x^n}{(2n)!}$.

On pose $S_N(x) = \sum\limits_{n=0}^{N} (-1)^n \dfrac{e^{-x}x^n}{(2n)!}$, S_N est mesurable, $S_N \longrightarrow f$ simplement et

$$|S_N(x)| \leq \sum_{n=0}^{N} (\frac{x^n}{2^n n!})e^{-x} \leq e^{-\frac{x}{2}} \in \mathcal{L}^1([0,+\infty[)$$

Par le théorème de la convergence dominée, il vient

$$\int_0^{+\infty} f(x)dx = \lim_{N\to+\infty} \int_0^{+\infty} S_N(x)dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \int_0^{+\infty} x^n e^{-x} dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} n!$$

Solution de l'exercice (??): On pose $f_n(x) = \frac{1}{1+x+\cdots+x^n}\chi_{]0,n[}$ et $I_n = \displaystyle\int_0^n \frac{dx}{1+x+\cdots+x^n} = \int_{]0,+\infty[} f_n(x)dx$

La fonction f_n est mesurable sur $X =]0, +\infty[$,positive et (f_n) converge simplement vers f telle que

$$f(x) = \begin{cases} 1-x & si \quad 0 < x < 1 \\ 0 & si \quad x \geq 1 \end{cases}$$

D'autre part, $\forall x \in X,\ \forall n \geq 2$ on a $|f_n(x)| \leq \frac{1}{1+x^2}$ qui est intégrable sur X.

Utilisant le théorème de la convergence dominée, il vient,

$$\lim_{n\to+\infty} I_n = \int_0^1 (1-x)dx = \frac{1}{2}$$

Solution de l'exercice (??): Pour tout $x \in I\!R$, on a $f'(x) = \lim_{n\to+\infty} n(f(x+\frac{1}{n}) - f(x))$. C'est une limite simple d'une suite de fonctions mesurables donc mesurable.

Solution de l'exercice (??): Soit $E = \{x \in X/\ f(x) \neq 0\}$.

$$E = \{x \in X/\ |f(x)| > 0\} = \bigcup_{n\in I\!N^*} \{x \in X/\ |f(x)| \geq \frac{1}{n}\}$$

Par le lemme de Tchebychev, on a

$$\mu(\{x \in X/\ |f(x)| \geq \frac{1}{n}\}) \leq n \int_X |f(x)|dx < +\infty$$

La réciproque est fausse: en effet si on se place dans l'espace mesuré $(I\!R,\mathcal{L},\lambda)$, l'application

$$\begin{array}{rccc} f: & I\!R & \longrightarrow & I\!R \\ & x & \longmapsto & 1 \end{array}$$

est telle que $E = \{x \in X/\ f(x) \neq 0\} = I\!R = \bigcup_{n\in I\!N^*}]-n,n[$ pourtant f n'est pas intégrable.

Solution de l'exercice (??): On considère $f_n(x) = nx(1-x)^n \sin x; \quad x \in [0,1]$.

- f_n est continue donc mesurable.
- $f_n \longrightarrow 0$ simplement.
- $|f_n| \leq 1$.

Le théorème de convergence dominée s'applique et donc

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n(x)dx = 0$$

On peut aussi procéder de façon directe:

$$|I_n| = |\int_0^1 f_n(x)dx| \leq \int_0^1 nx(1-x)^n dx$$

or on a par parties

$$\int_0^1 nx(1-x)^n dx = \frac{n}{(n+1)(n+2)}$$

d'où le résultat.

Solution de l'exercice (??): On a $f_n \geq 0$, $f_n \longrightarrow f$ simplement, f_n décroissante d'où $f_n \leq f_0$.

Comme f_0 est intégrable, le théorème de convergence dominée donne le résultat.

Solution de l'exercice (??): On pose pour $x \in X =]0, +\infty[$, $f_n(x) = (1 - \frac{x}{n})^n e^{\frac{x}{2}} \chi_{]0,n[}$.

D'où

$$I_n = \int_0^n (1 - \frac{x}{n})^n e^{\frac{x}{2}} dx = \int_X f_n(x) dx$$

On a

• f_n est mesurable.

• $f_n \longrightarrow e^{-\frac{x}{2}}$ simplement.

• $|f_n(x)| \leq e^{-\frac{x}{2}}$, qui est intégrable.

Par le théorème de Lebesgue, on a

$$\lim_{n \to +\infty} I_n = \int_0^{+\infty} e^{-\frac{x}{2}} dx = 2$$

Solution de l'exercice (??): Soit $f_n(x) = \frac{nxe^{-x} \sin x}{1+n^2x^2}$ pour $x \in X =]0, +\infty[$.

• f_n est mesurable.

• $f_n \longrightarrow 0$ simplement sur X.

• $|f_n(x)| \leq \frac{nx}{1+n^2x^2} e^{-x} \leq e^{-x}$, qui est intégrable sur X.

Utilisant le théorème de convergence dominée, il vient

$$\lim_{n \to +\infty} \int_X f_n(x) dx = 0$$

Solution de l'exercice (??): Il suffit de montrer que F est dérivable sur $]\beta, +\infty[$, $\forall \beta > a$.

Soit donc β fixé et $f(t,x) = e^{-tx} f(x)$ où $(t,x) \in]\beta, +\infty[\times]0, +\infty[$.

• On a $|f(t,x)| \leq e^{-ax}|f(x)| = |e^{-ax} f(x)|$, $\forall t \in]\beta, +\infty[$ et $\forall x \in]0, +\infty[$

Or $e^{-ax} f(x)$ est intégrable par hypothèse. Par suite $x \longrightarrow f(t,x)$ est intégrable.

• $\frac{\partial f}{\partial t}(t,x) = -xe^{-tx} f(x)$ existe.

• $|\frac{\partial f}{\partial t}(t,x)| = |-xe^{-tx} f(x)| = |-xe^{-(t-a)x} e^{-ax} f(x)| \leq xe^{-(\beta-a)x}|e^{-ax} f(x)|$.

La fonction $x \longrightarrow xe^{-(\beta-a)x}$ étant continue, bornée, on en déduit que $x \longrightarrow xe^{-(\beta-a)x}|e^{-ax} f(x)|$ est intégrable.

Le théorème de dérivation sous le signe somme permet de conclure.

Solution de l'exercice (??): a/ Convergence simple:

Si $x = 0$, alors $f_n(0) = 0 \longrightarrow 0$.

Si $x = 1$, alors $f_n(x) = 1 \longrightarrow 1$.

Si x est fixé dans $]0,1[$, alors $\exists N \in I\!N \,/\, \forall n \geq N \quad x \in [\frac{1}{n},1]$ d'où $f_n(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ $\forall n \geq N$. Par suite $f_n(x) \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{x}}$ $\forall x \in]0,1[$.

En conclusion: (f_n) converge simplement vers f telle que

$$f(x) = \begin{cases} 0 & si \quad x = 0 \\ \frac{1}{\sqrt{x}} & si \quad 0 < x \leq 1 \end{cases}$$

b/ On constate que pour tout n, f_n est continue sur $[0,1]$ mais f ne l'est pas, donc il n'y a pas convergence uniforme sur $[0,1]$.

c/ On va appliquer le théorème de la convergence dominée.

Les f_n sont mesurables et convergent simplement vers f. Pour n fixé,

si $x \in]0,\frac{1}{n}]$ on a $f_n(x) = n^{\frac{3}{2}} x \leq \sqrt{n} \leq \frac{1}{\sqrt{x}}$

si $x \in [\frac{1}{n},1]$ on a $f_n(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$.

On a donc

$$|f_n(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{x}} \quad \forall x \in]0,1]$$

ou encore

$$|f_n(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{x}} \text{ pour presque tout } x \in [0,1]$$

Comme $\frac{1}{\sqrt{x}} \in L^1([0,1])$, le théorème de Lebesgue justifie l'égalité.

Solution de l'exercice (??): a/ • On a $X \in \mathcal{F}$, donc $\emptyset \in \mathcal{F}$ d'où $\emptyset \in \mathcal{F}'$. Comme $X \in \mathcal{F} \subset \mathcal{F}'$, on en déduit que $\emptyset \in \mathcal{A}$.

• Si $E \in \mathcal{A}$ alors $E \in \mathcal{F}'$ et $E^c \in \mathcal{F}'$ donc $E^c \in \mathcal{A}$.

• Soit $(E_n) \subset \mathcal{A}$. On a donc $E_n \in \mathcal{F}'$ et $E_n^c \in \mathcal{F}'$ ce qui entraine que $\bigcup_n E_n \in \mathcal{F}'$ et $(\bigcup_n E_n)^c = \bigcap_n (E_n)^c \in \mathcal{F}'$ d'où $\bigcup_n E_n \in \mathcal{A}$.

$\mathcal{A}$ est donc une tribu sur X.

b/ On a d'une part, $\sigma(\mathcal{F})$ qui contient $\mathcal{F}$ et qui est stable par réunion et intersection dénombrable. Par conséquent $\sigma(\mathcal{F}) \supset \mathcal{F}'$.

On constate d'autre part que $\mathcal{F} \subset \mathcal{A} \subset \mathcal{F}'$.

$\mathcal{A}$ est donc une tribu sur X contenant $\mathcal{F}$, et par suite $\sigma(\mathcal{F}) \subset \mathcal{A}$ d'où $\sigma(\mathcal{F}) \subset \mathcal{F}'$ et l'égalité est donc prouvée.

Solution de l'exercice (??): a/ On pose $S_n = \sum_{p=0}^{n} f_p$.

• S_n est mesurable.

• $S_n \longrightarrow f = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ simplement. Ceci provient de l'hypothèse (i). La fonction f est à valeurs finies.

• Si on considère la fonction positive

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} |f_n(x)|.$$

Elle est intégrable puisque

$$\int_X \varphi(x) d\mu = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_X |f_n(x)| d\mu(x).$$

Utilisant alors l'inégalité $|S_n(x)| \leq \varphi(x)$, le théorème de la convergence dominée s'applique

$$\begin{aligned}
\int_X f(x) d\mu(x) &= \int_X \lim_{n \to +\infty} S_n(x) d\mu(x) \\
&= \lim_{n \to +\infty} \int_X S_n(x) d\mu(x) \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \int_X f_n(x) d\mu(x)
\end{aligned}$$

b/ Pour $x \in]0, +\infty[= X$, on a

$$f(x) = \frac{\sin x}{e^x - 1} = \frac{\sin x}{e^x(1 - e^{-x})} = e^{-x} \sin(x) \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-nx} = \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-nx} \sin(x)$$

On pose $f_n(x) = \sin x e^{-nx}$. $f(x)$ s'écrit alors

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$$

On voit que

• f_n est mesurable.

• $|f_n(x)| \leq e^{-nx}$, donc f_n est intégrable sur X.

• $\sum_{n=1}^{+\infty} |f_n(x)| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} (e^{-x})^n$, série géométrique convergente. Par suite $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ est absolument convergente.

• Montrons à présent que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{+\infty} |f_n(x)| dx$$

est convergente.

$$A_n = \int_0^{+\infty} |f_n(x)|dx = \int_0^{+\infty} |\sin x|e^{-nx}dx \leq \int_0^1 xe^{-nx}dx + \int_1^{+\infty} e^{-nx}dx$$

Un calcul simple conduit à

$$A_n \leq \frac{1}{n^2} - \frac{e^{-n}}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}$$

La série des A_n est donc convergente.

Par la question a/ il vient

$$\int_0^{+\infty} f(x)dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-nx}\sin(x)dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1+n^2}$$

Solution de l'exercice (??): 1) Soit $B_n = \bigcup_{k\geq n} A_k$.

$B_n \in \mathcal{A}$, (B_n) est décroissante et $A = \bigcap_{n\in \mathbb{N}} B_n$.

On a donc

$$0 \leq \mu(A) \leq \mu(B_n) \leq \sum_{k=n}^{+\infty} \mu(A_k)$$

La série $\sum_{n=0}^{+\infty} \mu(A_n)$ étant convergente, on a $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=n}^{+\infty} \mu(A_k) = 0$ d'où $\mu(A) = 0$

2)•) Puisque $\mu(X) < +\infty$, on a

$$\mu(A) = \lim_{n\to+\infty} \mu(B_n).$$

De l'inclusion $A_n \subset B_n$, on tire

$$s \leq \mu(A_n) \leq \mu(B_n)$$

Par passage à la limite on a $\mu(A) \geq s$.

••) $X = \mathbb{R}$, $\mathcal{A} = \mathcal{L}$ et $\mu = \lambda$. On a $\mu(\mathbb{R}) = +\infty$.

$A_n = [n,n+1[$, on a $\mu(A_n) \geq \frac{1}{2} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$A = \emptyset$ donc $\mu(A) = 0$ ce qui constitue un contre exemple.

Solution de l'exercice (??): L'intégrale $I_n = \int_0^n (1-\frac{x}{n})^n x^2 dx$ peut s'écrire $I_n = \int_X f_n(x)dx$ avec $X =]0,+\infty[$ et $f_n(x) = (1-\frac{x}{n})^n x^2 \chi_{]0,n[}(x)$.

La suite (f_n) est telle que f_n est mesurable et $f_n \longrightarrow f$ simplement avec $f(x) = x^2e^{-x}$.

L'inégalité $\ln(1-t) \leq -t \quad \forall t \in [0,1[$ permet de prouver que $|f_n(x)| \leq x^2e^{-x}$.

Le théorème de Lebesgue s'applique et on a

$$\lim_{n\to+\infty} I_n = \int_0^{+\infty} x^2e^{-x}dx = 2$$

Solution de l'exercice (??): on peut écrire $-I = \int_{]0,1[} \sum_{n=0}^{+\infty} -x^n \ln(x)\, dx$. Les fonctions $f_n(x) = -x^n \ln x$ étant mesurables positives, la série s'intègre terme à terme, d'où

$$-I = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 -x^n \ln(x)\, dx$$

ou encore

$$I = \sum_{n=0}^{+\infty} -\frac{1}{1+n^2} = -\frac{\pi^2}{6}.$$

Solution de l'exercice (??): a/ $f(x) = e^{-ax}\mathcal{U}(x)$.

$$\begin{aligned}
\widehat{f}(t) &= \int_0^{+\infty} e^{-i2\pi tx}e^{-ax}\ dx \\
&= \int_0^{+\infty} e^{-(a+i2\pi t)x}\ dx \\
&= \lim_{b\to+\infty}[-\frac{e^{-(a+i2\pi t)x}}{a+i2\pi t}]_0^b \\
&= \tfrac{1}{a+i2\pi t}\ \ si\ \ \mathcal{R}e(a) > 0
\end{aligned}$$

b/$f(x) = e^{ax}\mathcal{U}(-x) = g_\sigma$ avec $g(x) = f(x) = e^{-ax}\mathcal{U}(x)$.

On a donc $\widehat{f} = (\widehat{g})_\sigma$, c'est-à-dire

$$\widehat{f}(t) = \frac{1}{a - i2\pi t} = \frac{-1}{-a + i2\pi t}$$

c/ $f(x) = \frac{x^k}{k!}e^{-ax}\mathcal{U}(x) = \frac{1}{(-2\pi i)^k}\frac{1}{k!}(-2\pi i x)^k g(x)$ où $g(x) = e^{-ax}\mathcal{U}(x)$.

D'où

$$\widehat{f} = \frac{1}{(-2\pi i)^k}\frac{1}{k!}D^{(k)}\widehat{g}$$

$D^{(k)}$ désigne la dérivation d'ordre k.Par suite : $\widehat{f}(t) = \frac{1}{(-2\pi i)^k}\frac{1}{k!}k!\frac{(-i2\pi)^k}{(a+i2\pi t)^{k+1}}$.

Finalement

$$\widehat{f}(t) = \frac{1}{(a + i2\pi t)^{k+1}}$$

d/ Un calcul analogue au cas c/ donne

$$\widehat{f}(t) = \frac{-1}{(-a + i2\pi t)^{k+1}}$$

e/ $f(x) = e^{-a|x|} = e^{-ax}\mathcal{U}(x) + e^{ax}\mathcal{U}(-x)$ presque partout. Il est clair que

$$f = g\ \ p.p. \implies \widehat{f} = \widehat{g}$$

Ainsi $\widehat{f}(t) = \frac{1}{a+i2\pi t} + \frac{1}{a-i2\pi t} = \frac{2a}{a^2+4\pi^2t^2}$.

f/ $f(x) = sign(x)e^{-a|x|} = e^{-ax}\mathcal{U}(x) - e^{ax}\mathcal{U}(-x)$ presque partout. Donc

$$\widehat{f}(t) = \frac{1}{a + i2\pi t} - \frac{1}{a - i2\pi t} = \frac{-i4\pi t}{a^2 + 4\pi^2t^2}.$$

Solution de l'exercice (??): $f(x) = e^{-ax^2},\ a > 0$. On a $f'(x) = -2axf(x)$. D'où

$$\mathcal{F}(f'(x)) = -2a\mathcal{F}(xf(x))$$

c'est-à-dire

$$i2\pi t\widehat{f}(t) = (-2a)\frac{1}{(-i2\pi)}D^{(1)}\widehat{f}(t)$$

$\widehat{f}$ est donc solution de l'équation différentielle

$$\widehat{f}'(t) + \frac{2\pi^2}{a}t\widehat{f}(t) = 0$$

d'où

$$\widehat{f}(t) = Ce^{-\frac{\pi^2}{a}t^2}.$$

Or $\widehat{f}(0) = \int_{I\!R} e^{-ax^2}dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$, d'où $\widehat{f}(t) = \sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{-\frac{\pi^2}{a}t^2}$.

Solution de l'exercice (??): La biliéarité est immédiate. D'autre part, $|f\star g(x)| \leq \int_{I\!R} |f(u)||g(x-u)|du$ ou encore $|f\star g(x)| \leq (|f|\star|g|)(x)$. Par suite

$$\begin{aligned}
\int_{I\!R} |f\star g(x)|dx &\leq \int_{I\!R} (|f|\star|g|)(x)dx \\
&= \int_{I\!R} dx \int_{I\!R} |f(u)||g(x-u)|du \\
&= \int_{I\!R} du \int_{I\!R} |f(u)||g(x-u)|dx \\
&= \|g\|_1\|f\|_1
\end{aligned}$$

La continuité est donc assurée par définition de la continuité d'un opérateur bilinéaire.

Solution de l'exercice (??): $I(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\cos(xy)}{1+y^2}dy$. Posons $f(y) = \frac{1}{1+y^2}$, la table donne $\widehat{f}(x) = \pi e^{-2\pi|x|}$. On écrit $I(x) = \frac{1}{2}\mathcal{R}e[\int_{I\!R} e^{-i2\pi\frac{x}{2\pi}y}f(y)dy]$, d'où
$I(x) = \frac{1}{2}\mathcal{R}e[\widehat{f}(\frac{x}{2\pi})] = \frac{1}{2}\pi e^{-2\pi|\frac{x}{2\pi}|} = \frac{\pi}{2}e^{-|x|}$.

Solution de l'exercice (??): Puisque $f\in C^2(I\!R)$ et $f, f', f'' \in L^1(I\!R)$, alors la propriété b) du II.2?????? montre que

$$\mathcal{F}(f'')(t) = (2i\pi t)^2\widehat{f}(t) \tag{.1}$$

Comme $\mathcal{F}(f'')$ est continue bornée, l'égalité (.1) entraine l'existence d'une constante M telle que: $|\widehat{f}(t)| \leq \frac{M}{t^2} \quad \forall t\in[-1,+1]^c$.

$\widehat{f}$ est donc intégrable sur [-1,+1] car continue et bornée. Par conséquent, $\widehat{f}\in L^1(I\!R)$.

Solution de l'exercice (??): a/ $g_n(x) = e^{-\frac{2\pi}{n}|x|},\ n\in I\!N$. D'après l'exercice (**??**), on a

$$\widehat{g_n}(s) = \frac{\frac{4\pi}{n}}{\frac{4\pi^2}{n^2}+4\pi^2s^2} = \frac{1}{\pi}\frac{n}{1+n^2s^2}$$

b/ Pour $t\in I\!R$, on pose $h_n(x) = g_n(x)e^{i2\pi tx}$. La formule 4) du (**??**) donne

$$\widehat{h_n}(u) = \widehat{g_n}(u-t)$$

L'égalité est donc une conséquence directe de la proposition II.1.1.

c/ On pose $\varphi_n(x) = \widehat{f}(x)g_n(x)e^{i2\pi tx}$. φ_n est mesurable, $(\varphi)_n$ converge simplement vers $\varphi = \widehat{f}(x)e^{i2\pi tx}$ et on a

$$|\varphi_n(x)| \leq |\widehat{f}| \text{ qui est intégrable par hypothèse.}$$

Il découle alors du théorème de convergence dominée que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{I\!R} \varphi_n(x)dx = \int_{I\!R} \widehat{f}(x)e^{i2\pi tx}dx = \overline{\mathcal{F}}\widehat{f}(t)$$

d/ $\displaystyle\int_{I\!R} \widehat{g_n}(s)ds = \frac{1}{\pi}\int_{I\!R} \frac{n}{1+n^2s^2}ds = \frac{2}{\pi}[Arctg(ns)]_0^{+\infty} = 1.$

e/ On effectue le changement de variables $s = u - t$ pour avoir

$$\int_{I\!R} f(u)\widehat{g_n}(u-t)du = \int_{I\!R} f(s+t)\widehat{g_n}(s)ds.$$

Compte tenu de la question d/, on peut écrire:

$$f(t) = \int_{I\!R} f(t)\widehat{g_n}(s)ds$$

Ces deux égalités donnent directement le résultat par soustraction.

f/ Soit $\varepsilon > 0$, la continuité de f au point t implique que:

$$\exists \eta > 0 \text{ tel que } |s| \leq \eta \implies |f(s+t) - f(t)| \leq \varepsilon$$

Par suite

$$\left|\int_{|s|\leq\eta} [f(s+t) - f(t)]\widehat{g_n}(s)ds\right| \leq \varepsilon \int_{I\!R} \widehat{g_n}(s)ds = \varepsilon$$

On pose $\displaystyle I_n = \int_{|s|>\eta} |f(s+t)|\widehat{g_n}(s)ds$ et $\psi_n(s) = |f(s+t)|\widehat{g_n}(s)$.

ψ_n est mesurable, $(\psi_n)_n$ converge simplement vers 0 sur l'ensemble $\{s : \ |s| > \eta\}$. De plus

$$|\psi_n(s)| \leq \widehat{g_n}(\eta)|f(s+t)| \leq \frac{1}{2\pi\eta}|f(s+t)|.$$

Comme $s \longrightarrow |f(s+t)|$ est intégrable, on peut conclure par le théorème de convergence dominée que $I_n \longrightarrow 0$.

Soit à présent

$$J_n = \int_{|s|>\eta} |f(t)|\widehat{g_n}(s)ds.$$

On peut écrire

$$J_n = |f(t)|[1 - \frac{2}{\pi}\int_0^\eta \frac{n}{1+n^2s^2}ds] = |f(t)|[1 - \frac{2}{\pi}Arctg(n\eta)].$$

On voit donc que $\lim_{n\to+\infty} J_n = 0$. Ainsi $\lim_{n\to+\infty} (I_n + J_n) = 0$. D'où

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{|s|>\eta} |f(s+t) - f(t)|\widehat{g_n}(s)ds = 0.$$

Conclusion: La question f/ implique que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{I\!R} [f(s+t) - f(t)]\widehat{g_n}(s)ds = 0$$

Les questions e/, c/, b/ entrainent alors que

$$\overline{\mathcal{F}}\widehat{f}(t) = f(t).$$

Solution de l'exercice (??): La fonction f étant paire

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\sin(2\pi tx dx = 0$$

En posant

$$\varphi(t) = \begin{cases} 1 - |2\pi t| & si \quad |t| < \frac{1}{2\pi} \\ 0 & si \quad |t| \geq \frac{1}{2\pi} \end{cases}$$

L'équation devient : $\widehat{f}(t) = \varphi(t)$. Par le corollaire II.3.1., il vient

$$f(t) = \overline{\mathcal{F}}\varphi(t) = \int_{I\!R} \varphi(x)e^{(2\pi tx}dx = 2\int_0^{\frac{1}{2\pi}} [1 - 2\pi x]\cos(2\pi tx)dx$$

En faisant une intégration par parties, on trouve

$$f(t) = \frac{1}{\pi}\frac{1-\cos t}{t^2}$$

Or $\widehat{f}(0) = 1 = \int_{I\!R} f(t)dt = \frac{2}{\pi}I$, d'où $I = \frac{\pi}{2}$.
Une intégration par parties prouve que $I = J = \frac{\pi}{2}$.
Solution de l'exercice (??): $f(x) = e^{-x-x^2} = e^{[\frac{1}{4}-(x+\frac{1}{2})^2]} = e^{\frac{1}{4}}e^{-(x+\frac{1}{2})^2}$.

Utilisant la formule 3 de II.5??????, il vient

$$\widehat{f}(t) = e^{\frac{1}{4}}e^{-(2i\pi(-\frac{1}{2})t)}\mathcal{F}(e^{-x^2})(t) = e^{\frac{1}{4}}e^{(i\pi t)}\sqrt{\pi}e^{-\pi^2 t^2}$$

Solution de l'exercice (??): La fonction f étant paire $f = f_\sigma$. On sait que $\mathcal{F}f_\sigma = \overline{\mathcal{F}}f$, d'où $\mathcal{F}f = \overline{\mathcal{F}}f$.

Si f est impaire, on aura $\overline{\mathcal{F}}f = -\mathcal{F}f$. La fonction $f(x)$ donnée étant paire, donc

$$\begin{aligned} \mathcal{F}f(t) &= \int_{I\!R} e^{-i2\pi tx}f(x)dx \\ &= \int_{I\!R} \cos(2\pi tx)f(x)dx \\ &= 2\int_0^a (\frac{1}{a} - \frac{x}{a^2})\cos(2\pi tx)dx \end{aligned}$$

Une intégration par parties donne:

$$\widehat{f}(t) = \frac{1-\cos(2\pi a t)}{2\pi^2 a^2 t^2} = \overline{\mathcal{F}} f(t).$$

Solution de l'exercice (??): 1/ $f(x) = e^{-|x|}$ est une fonction (D.R.).

2/ Comme f est (D.R.), on a $\forall p \in I\!N$ $|x^{p+2} f(x)| \to 0$ quand $|x| \to +\infty$.

Il existe donc $A > 0$ tel que $|x^{p+2} f(x)| \leq 1$ $\forall x :$ $|x| > A$, d'où

$$|x^p f(x)| \leq \frac{1}{x^2} \ \ \forall x : \ |x| > A$$

$x^p f(x)$ est donc intégrable sur$\{x : \ |x| > A\}$. Sur l'intervalle compact $[-A,A]$, on a $x^p f(x)$ intégrable comme produit d'une fonction bornée par une fonction intégrable. On en déduit que f est intégrable sur $I\!R$.

3/ $f \in L^1(I\!R)$ et f (D.R.), la question 2/ implique que $x^p f(x) \in L^1(I\!R)$, $\forall p \in I\!N$.

Par la propriété a) du II.2????? on a $\widehat{f} \in C^\infty(I\!R)$.

4/ On suppose que $f \in C^\infty(I\!R)$ et $\forall k \in I\!N$ $f^{(k)} \in L^1(I\!R)$. Utilisant II.2 b)?????, il vient

$$\mathcal{F}(f^{(k)})(t) = (i2\pi t)^k \widehat{f}(t)$$

Comme $\lim\limits_{|t| \to +\infty} |\mathcal{F}(f^{(k)})(t)| = 0$ (théorème II.1.2.????), on conclut que $\widehat{f}$ est (D.R.).

5/ $f \in C^0(I\!R)$ et f est (D.R.), donc $f(x) \in L^1(I\!R)$ (question 2/). On constate que $f^2 = f.f$ est aussi (D.R.) et continue. La même question 2/ implique alors que $f^2 \in L^1(I\!R)$, c'est-à-dire $f \in L^2(I\!R)$.

Solution de l'exercice (??): On pose

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \int_{I\!R} f(u)\overline{f(u-x)}du \\ &= \int_{I\!R} f(u)\overline{f_\sigma(u-x)}du \\ &= \int_{I\!R} f(u)\overline{f_\sigma}(u-x)du \end{aligned}$$

d'où $\varphi(x) = f \star \overline{f_\sigma}(x)$. On calcule la transformée de Fourier de φ:

$$\widehat{\varphi} = \widehat{f}.\widehat{\overline{(f_\sigma)}} = \mathcal{F}(f).\mathcal{F}(\overline{(f_\sigma)})$$

Or $\overline{(f_\sigma)} = (\overline{f})_\sigma$, utilisant II.2 e/???????, il vient

$$\widehat{\varphi} = \mathcal{F}(f).\mathcal{F}\overline{f})_\sigma = \mathcal{F}(f).\overline{\mathcal{F}f} = \mathcal{F}(f).\overline{\mathcal{F}f} = |\widehat{f}|^2$$

Conclusion: La transformée de Fourier de la fonction d'autocorrélation est égale à la densité spectrale d'énergie.

Solution de l'exercice (??): On pose $g(x) = e^{-a|x|}$. On sait que $\widehat{g}(t) = \frac{2a}{a^2+4\pi^2t^2}$. L'équation s'écrit:

$$\int_{\mathbb{R}} f(t)g(x-t)dt = e^{-x^2} = \varphi(x)$$

c'est-à-dire $f \star g = \varphi$. En prenant les transformées, il vient

$$\widehat{f}.\widehat{g} = \widehat{\varphi} = \sqrt{\pi}e^{-\pi^2t^2}$$

d'où

$$\begin{aligned}
\widehat{f} &= \frac{\sqrt{\pi}}{2a}e^{-\pi^2t^2}(a^2+4\pi^2t^2) \\
&= \frac{a}{2}\sqrt{\pi}e^{-\pi^2t^2} + \frac{2\pi^2}{a}t^2\sqrt{\pi}e^{-\pi^2t^2} \\
&= \frac{a}{2}\widehat{\varphi}(t) + \frac{2\pi^2}{a}t^2\widehat{\varphi}(t) \\
&= \frac{a}{2}\widehat{\varphi}(t) - \frac{1}{2a}\widehat{\varphi''}(t)
\end{aligned}$$

Finalement

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{a}{2}\varphi(x) - \frac{1}{2a}\varphi''(x) \\
&= (\frac{a}{2}+\frac{1}{a})e^{-x^2} - \frac{2}{a}x^2e^{-x^2} \\
&= \frac{1}{2a}(a^2+2-4x^2)e^{-x^2}
\end{aligned}$$

Solution de l'exercice (??): La fonction $u \in L^1_{loc}(I\!R)$, elle définit donc une distribution. Pour tout $\varphi \in \mathcal{D}$, on a

$$\begin{aligned} < u',\varphi > &= - < u,\varphi' > \\ &= -\int_{I\!R} u(x)\varphi'(x)\,dx \\ &= -\int_0^{+\infty} \varphi'(x)\,dx \\ &= \left[\varphi(x)\right]_{+\infty}^{0} \\ &= \varphi(0) \\ &= < \delta,\varphi > \end{aligned}$$

d'où $u' = \delta$ au sens des distriutions.

Solution de l'exercice (??): Pour tout $n > 0$, f_n est localement intégrable, donc elle définit une distribution régulière.

Calculons sa dérivée au sens des distributions. Soit $\varphi \in \mathcal{D}$, on a

$$< f_n,\varphi >= \int_{I\!R} f_n(x)\varphi(x)\,dx = \frac{n}{2}\int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} \varphi(x)\,dx.$$

Utilisant la formule de la moyenne pour les intégrales, il vient $< f_n,\varphi >= \varphi(c_n)$ où $c_n \in [-\frac{1}{n},\frac{1}{n}]$.

$c_n \longrightarrow 0$ et $\varphi(c_n) \longrightarrow \varphi(0)$ car φ est continue. Or $\varphi(0) =< \delta,\varphi >$, donc $< f_n,\varphi >\longrightarrow< \delta,\varphi >$.

Solution de l'exercice (??): On a $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = a \in I\!R$. Pour tout $\varphi \in \mathcal{D}$, on a

$$< \delta_{a_n},\varphi >= \varphi(a_n) \longrightarrow \varphi(a) =< \delta_a,\varphi > ,$$

ce qui prouve que $\delta_{a_n} \xrightarrow{\mathcal{D}'} \delta_a$.

Solution de l'exercice (??): Soit $\varphi \in \mathcal{D}$, on a :

$$< f_n,\varphi >= \int_{-\infty}^{+\infty} \sin(2\pi nx)\varphi(x)\,dx = \left[\frac{1}{2\pi n}\cos(2\pi n)\right]_{-\infty}^{+\infty} + \frac{1}{2\pi n}\int_{-\infty}^{+\infty} \cos(2\pi nx)\varphi'(x)\,dx.$$

Donc

$$| < f_n,\varphi > | = \frac{1}{2\pi n}\left|\int_{-\infty}^{+\infty} \cos(2\pi nx)\varphi'(x)\,dx\right| \leq \frac{1}{2\pi n}\left|\int_{-c}^{+c} \varphi'(x)\,dx\right| \leq \frac{k}{2\pi n}$$

Donc $f_n \xrightarrow{\mathcal{D}'} 0$.

Solution de l'exercice (??): Supposons que $f_n \longrightarrow f$ dans L^1. Soit $\varphi \in \mathcal{D}$, on a

$$\begin{aligned} |< f_n - f,\varphi >| &= \left|\int_{I\!R} (f_n - f)\varphi \, dx\right| \\ &\leq \int_{I\!R} |f_n - f||\varphi| \, dx \\ &\leq \sup_{supp\ \varphi} |\varphi| \int_{supp\ \varphi} |f_n - f| \, dx \\ &\leq c\|f_n - f\|_{L^1} \end{aligned}$$

Il en découle que

$$< f_n,\varphi > \longrightarrow < f,\varphi > , \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}$$

ce qui équivalent à $f_n \xrightarrow{\mathcal{D}'} f$.

Solution de l'exercice (??): a/ Soit $\omega \in I\!R^*$. On applique la formule de dérivation du produit d'une fonction C^∞ par une distribution.

$$\begin{aligned} \left(\frac{d^2}{dx^2} + \omega^2\right)\left(\frac{u(x)\sin(\omega x)}{\omega}\right) &= \frac{1}{\omega}(\delta' \sin(\omega x) + 2\delta\omega\cos(\omega x) - \omega^2 u(x)\sin(\omega x)) \\ &\quad +\omega u(x)\sin(\omega x)) \\ &= \frac{1}{\omega}(-\omega\delta + 2\delta\omega) \\ &= \delta \end{aligned}$$

b/ Soit $\lambda \in \mathbb{C}$. On a

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{dx} - \lambda\right)(u(x)\exp(\lambda x)) &= \delta\exp(\lambda x) + \lambda u(x)\exp(\lambda x) - \lambda u(x)\exp(\lambda x) \\ &= \delta \end{aligned}$$

Solution de l'exercice (??): Procédons par l'absurde. Supposons qu'il existe une fonction $f \in L^1_{loc}(I\!R)$ telle que $\delta = T_f$. On considère la fonction $\rho \in \mathcal{D}(I\!R)$ définie par

$$\rho(x) = \begin{cases} 0 & si \quad |x| \geq 1 \\ \exp\left(-\frac{1}{1-x^2}\right) & si \quad |x| < 1 \end{cases}$$

Posons $\varphi_n(x) = \rho(nx)$. Pour tout $n \in I\!N^*$, $\varphi_n \in \mathcal{D}(I\!R)$ et $supp\ \varphi_n = [-\frac{1}{n},\frac{1}{n}]$. On a

$$< T_f,\varphi_n > = \int_{I\!R} f(x)\rho(nx) \, dx = \varphi_n(0)$$

d'où

$$< T_f,\varphi_n >=< f,\varphi_n >= \rho(0) = \exp(-1)$$

On en déduit que

$$\exp(-1) \leq \int_{[-\frac{1}{n},\frac{1}{n}]} |f(x)||\rho(nx)|\, dx \leq \int_{[-\frac{1}{n},\frac{1}{n}]} |f(x)|\, dx.$$

Montrons que $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$ où $a_n = \displaystyle\int_{[-\frac{1}{n},\frac{1}{n}]} |f(x)|\, dx.$
Posons $\psi_n(x) = |f(x)|\chi_{[-\frac{1}{n},\frac{1}{n}]}(x)$. On vérifie facilement que ψ_n est mesurable, tend vers 0 p.p., vérifie $|\psi(x)| \leq |f(x)|\chi_{[-1,1]}(x)$ et $|f(x)|\chi_{[-1,1]}(x) \in L^1(\mathbb{R})$.
Le théorème de Lebesgue permet alors de conclure que $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$.
Il en découle que $\exp(-1) \leq 0$, ce qui est absurde.
Il n'existe donc pas de fonction $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ telle que $\delta = T_f$. On en déduit que, la distribution δ n'est pas régulière.
Solution de l'exercice (??): a/ $\ln|x|$ est intégrable sur tout compact ne contenant pas 0. Il suffit de vérifier que $\ln|x|$ est intégrable sur $[-1,1]$. Pour $\varepsilon > 0$ assez petit, on a $\displaystyle\int_\varepsilon^1 \ln x\, dx = [x\ln x - x]_\varepsilon^1 = -1 - \varepsilon\ln(\varepsilon) + \varepsilon$.
Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \varepsilon\ln(\varepsilon) = 0$, on en déduit que la fonction $\ln|x|$ est intégrable sur $[0,1]$ et compte tenu de sa parité, elle est donc intégrable sur $[-1,1]$.
b/ Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, le théorème des accroissements finis entraine l'existence de c_ε dans l'intervalle $]-\varepsilon,\varepsilon[$ tel que

$$\varphi(\varepsilon) - \varphi(-\varepsilon) = 2\varepsilon\varphi'(c_\varepsilon).$$

Il vient alors

$$\Big[\varphi(\varepsilon) - \varphi(-\varepsilon)\Big]\ln(\varepsilon) = 2\varepsilon\ln(\varepsilon)\varphi'(c_\varepsilon).$$

D'où

$$\Big|\Big[\varphi(\varepsilon) - \varphi(-\varepsilon)\Big]\ln(\varepsilon)\Big| \leq |2\varepsilon\ln(\varepsilon)|\, \|\varphi'\|_\infty.$$

On en tire

$$\lim_{\varepsilon\to0^+} \Big(\varphi(\varepsilon) - \varphi(-\varepsilon)\Big)\ln(\varepsilon) = 0.$$

c/ Soit $\varphi \in \mathcal{D}(I\!R)$, on par définition

$$\begin{aligned}
< (\ln|x|)^{'},\varphi > &= -< \ln|x|,\varphi^{'} > \\
&= -\int_{I\!R} \ln|x|\ \varphi^{'}(x)\ dx \\
&= -\lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{|x|\geq\varepsilon} \ln|x|\ \varphi^{'}(x)\ dx \\
&= -\lim_{\varepsilon\to 0^+} \left[\int_{-\infty}^{-\varepsilon} \ln|x|\ \varphi^{'}(x)\ dx + \int_{\varepsilon}^{+\infty} \ln|x|\ \varphi^{'}(x)\ dx\right]
\end{aligned}$$

Utilisant une intégration par parties, il vient

$$\begin{aligned}
< (\ln|x|)^{'},\varphi > &= -\lim_{\varepsilon\to 0^+} \left[\Big(\ln|x|\ \varphi(x)\Big)_{-\infty}^{-\varepsilon} - \int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x}\ dx\right. \\
&\qquad \left. + \Big(\ln|x|\ \varphi(x)\Big)_{\varepsilon}^{+\infty} - \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x}\ dx\right] \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0^+} \Big[\varphi(\varepsilon)-\varphi(-\varepsilon)\Big]\ln(\varepsilon) + \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{|x|\geq\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x}\ dx \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{|x|\geq\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x}\ dx \\
&= < Vp\left(\tfrac{1}{x}\right),\varphi >
\end{aligned}$$

D'où l'égalité $\Big(\ln|x|\Big)^{'} = Vp\left(\frac{1}{x}\right)$

d/ Comme la fonction $x \longmapsto x$ est $\mathcal{C}^{\infty}$, on a

$$< xVp\left(\frac{1}{x}\right),\varphi >=< Vp\left(\frac{1}{x}\right),x\varphi >= \int_{I\!R} \varphi(x)\ dx =< 1,\varphi >$$

d'où le résultat.

Solution de l'exercice (??): a/ Soit $f \in \mathcal{C}^{\infty}(I\!R)$, on a

$$< f\delta,\varphi >=< \delta,f\varphi >= f(0)\varphi(0) = f(0) < \delta,\varphi >=< f(0)\delta,\varphi >$$

d'où l'égalité $f\delta = f(0)\delta$.

b/ On rappelle que

$$< \delta^{(n)},\varphi >= (-1)^n < \delta,\varphi^{(n)} >= (-1)^n\varphi^{(n)}(0)$$

La fonction $x \longmapsto x$ est $\mathcal{C}^\infty$, on a

$$\begin{aligned} < x\delta^{(n)},\varphi > &= < \delta^{(n)},x\varphi > \\ &= (-1)^n n\varphi^{(n-1)}(0) \\ &= -n < \delta^{(n-1)},\varphi > \\ &= < -n\delta^{(n-1)},\varphi > \end{aligned}$$

On en déduit que $x\delta^{(n)} = -n\delta^{(n-1)}$.

c/ Considérons l'équation $x^2 T = 0$. Elle s'écrit $x(xT) = 0$ et donc $xT = c\delta$.

En remarquant que $x\delta^{'} = -\delta$, il vient $xT = -cx\delta^{'}$ ou encore $x(T + c\delta^{'}) = 0$.

Finalement $T + c\delta^{'} = d\delta$. T est donc de la forme suivante $T = c_0\delta + c_1\delta^{'}$.

Ceci nous amène à démontrer par récurrence la proposition suivante

$$x^n T = 0 \Longleftrightarrow T = c_0\delta + c_1\delta^{'} + \cdots + c_{n-1}\delta^{(n-1)}$$

Elle est vraie pour $n = 1$. Supposons qu'elle soit vraie pour n, on a alors

$$x^{n+1}T = x^n(xT) \Longleftrightarrow xT = d_0\delta + d_1\delta^{'} + \cdots + d_{n-1}\delta^{(n-1)}$$

Utilisant la question b/, il vient

$$xT = -x\left[p_1\delta^{'} + p_2\delta^{''} + \cdots + p_n\delta^{(n)}\right]$$

ou encore

$$x\left[T + p_1\delta^{'} + p_2\delta^{''} + \cdots + p_n\delta^{(n)}\right] = 0$$

Ainsi on a

$$T + p_1\delta^{'} + p_2\delta^{''} + \cdots + p_n\delta^{(n)} = c_0\delta$$

ce qui peut s'écrire

$$T = c_0\delta + c_1\delta^{'} + \cdots + c_n\delta^{(n)}$$

Solution de l'exercice (??): Pour $\varphi \in \mathcal{D}$, on a

$$< f_n,\varphi > = \int_{I\!R} f_n(x)\varphi(x)\,dx = \int_{I\!R} nf(nx)\varphi(x)\,dx$$

Le changement de variable $y = nx$ donne pour $n \in I\!N^*$,

$$< f_n,\varphi > = \int_{I\!R} f(y)\varphi\left(\frac{y}{n}\right)\,dy$$

Considérons la suite de fonctions $\psi_n(y) = f(y)\varphi\left(\frac{y}{n}\right)$. On vérifie facilement que ψ_n est mesurable et tend simplement vers $\varphi(0)f$. De plus $|\psi_n| \leq \|\varphi\|_\infty |f|$ qui est intégrable. Le théorème de la convergence dominée permet d'affirmer que

$$< f_n,\varphi > \longrightarrow \varphi(0) \int_{I\!R} f\ dx = \varphi(0) =< \delta,\varphi >$$

c'est-à-dire $f_n \longrightarrow \delta$ au sens des distributions.

Solution de l'exercice (??): Soit $y = fu$ avec $f \in \mathcal{C}^\infty(I\!R)$. On a

$$\begin{aligned} y' &= f'u + f\delta \\ &= f'u + f(0)\delta \end{aligned}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} y'' &= f''u + f'\delta + f(0)\delta' \\ &= f''u + f'(0)\delta + f(0)\delta' \end{aligned}$$

L'équation de l'oscillateur s'écrit donc

$$f''u + f'(0)\delta + f(0)\delta' + \omega^2 fu = k\delta$$

ou encore

$$(f'' + \omega^2 f)u + (f'(0) - k)\delta + f(0)\delta' = 0$$

Il suffit de prendre f telle que

$$f'' + \omega^2 f = 0 \quad \text{avec} \quad f(0) = 0 \quad \text{et} \quad f'(0) = k$$

La fonction f est de la forme

$$f(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$$

$f(0) = 0 \Longrightarrow A = 0$ et $f'(0) = k \Longrightarrow B = \frac{k}{\omega}$, d'où $f(t) = \frac{k}{\omega}\sin(\omega t)$.
La distribution $y = \frac{k}{\omega}\sin(\omega t)u(t)$ est donc solution de l'équation.

Solution de l'exercice (??): 1/ Nous avons

$$\begin{aligned} h(x) &= \psi_\varepsilon * \chi_{[-2\varepsilon,2\varepsilon]}\,(x) \\ &= \int_{I\!R} \chi_{[-2\varepsilon,2\varepsilon]}\,(t)\ \psi_\varepsilon\ (x-t)\ dt \\ &= \int_{-2\varepsilon}^{2\varepsilon} \psi_\varepsilon\ (x-t)\ dt \end{aligned}$$

En posant $y = x - t$, il vient $h(x) = \displaystyle\int_{x-2\varepsilon}^{x+2\varepsilon} \psi_\varepsilon\ (y)\ dy$. D'où h est C^∞.

Sachant que *supp* $\psi_\varepsilon = [-\varepsilon,\varepsilon]$, on peut vérifier facilement que

$$h(x) = 0 \quad \text{si} \quad x \notin]-3\varepsilon,3\varepsilon[$$

Par suite *supp* $h \subset [-3\varepsilon,3\varepsilon]$. Ainsi $h \in \mathcal{D}(I\!R)$.

2/ On constate que $h(x) \neq 0$ si $x \in]-3\varepsilon,3\varepsilon[$ et donc *supp* $h = [-3\varepsilon,3\varepsilon]$.

3/ Pour $x \in [-\varepsilon,\varepsilon]$, on a

$$h(x) = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \psi_\varepsilon\ (x)\ dx = \frac{1}{\varepsilon} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \varphi_0\ (\frac{x}{\varepsilon}x)\ dx = \int_{-1}^{1} \varphi_0\ (y)\ dy = 1$$

4/ Soit $x \neq 0$. Pour $n = 0$, on a

$$g(x) = \frac{1}{x}[f(x) - f(0)] = \frac{1}{x}\int_0^x f^{'}(y)\ dy$$

La relation est donc vraie. Supposons qu'elle est vraie pour n. Une intégration par parties donne

$$x^{n+1}g^{(n)}(x) = \left[\frac{t^{n+1}f^{(n+1)}(t)}{n+1}\right]_0^x - \int_0^x \frac{t^{n+1}f^{(n+2)}(t)}{n+1}\ dt.$$

Il en découle

$$g^{(n)}(x) = \frac{f^{(n+1)}(x)}{n+1} - \frac{1}{(n+1)x^{n+1}}\int_0^x t^{n+1}f^{(n+2)}(t)\ dt.$$

En dérivant, il vient

$$g^{(n+1)}(x) = \frac{1}{x^{n+2}}\int_0^x t^{n+1}f^{(n+2)}(t)\ dt.$$

L'égalité est donc vraie par récurrence.

5/ Utilisant la formule de la moyenne, il vient

$$g^{(n)}(x) = \frac{1}{x^{n+1}}f^{(n+1)}(\theta)\int_0^x t^n\ dt = \frac{f^{(n+1)}(\theta)}{n+1} \quad \text{où} \quad 0 \leq |\theta| < |x|$$

d'où $\displaystyle\lim_{x\to 0} g^{(n)}(x) = \frac{f^{(n+1)}(0)}{n+1}$.

D'autre part, g est continue, C^∞ pour $x \neq 0$, avec $g^{(n)}(x)$ qui tend vers une limite finie lorsque $x \longrightarrow 0^\pm$, on en déduit que $g \in C^\infty(I\!R)$.

6/ Il suffit d'appliquer les questions 4/ et 5/ pour conclure que $\psi \in C^\infty$. Par ailleurs, on constate que pour tout $x \neq 0$, on a

$$\psi(x) \neq 0 \iff \varphi(x) \neq 0.$$

Il en résulte que $supp\ \psi = supp\ \varphi$. Ainsi $\psi \in \mathcal{D}$.

7/ La fonction $\varphi(x) - \varphi(0)\theta_0(x)$ appartient à $\mathcal{D}$ et vaut 0 pour $x = 0$. Il découle donc de la question précédente que la fonction définie par

$$\psi(x) = \begin{cases} \frac{\varphi(x)-\varphi(0)\theta_0(x)}{x} & si \quad x \neq 0 \\ \varphi'(0) - \varphi(0)\theta_0'(0) & si \quad x = 0 \end{cases}$$

est une fonction de $\lceil$. On a donc

$$\varphi(x) - \varphi(0)\theta_0(x) = x\psi(x) \quad \forall x \neq 0$$

cette égalité est vraie aussi pour $x = 0$.

8/ Montrons que

$$xT = 0 \iff T = c\delta \text{ où } c \text{ est une constante.}$$

($\Leftarrow$) Si $T = c\delta$, on a $xT = xc\delta = cx\delta$. Comme $x\delta = 0$, alors $xT = 0$.

($\Rightarrow$) On suppose que $xT = 0$. On a donc pour $\varphi \in \mathcal{D}$, $< xT,\varphi >= 0$.

Soit $\theta_0 \in \mathcal{D}$ telle que $\theta_0(0) = 1$. On sait que φ s'écrit sous la forme

$$\varphi(x) = \varphi(0)\theta_0(x) + x\psi(x) \text{ avec } \psi \in \mathcal{D}$$

On en déduit que

$$< T,\varphi >= \varphi(0) < T,\theta_0 > + < T,x\psi >$$

Or $< T,x\psi >=< xT,\psi >= 0$, donc

$$< T,\varphi >=< T,\theta_0 > \cdot < \delta,\varphi > .$$

Comme $< T,\theta_0 >$ est un scalaire indépendant de φ, on conclut que $T = c\delta$.

Solution de l'exercice (??): Les questions 1/, 2/, 3/ et 4/ ont fait l'objet de l'exercice (**??**).

5/ $S = \{f \in C^\infty(\mathbb{R}) / \ \forall k \in \mathbb{N},\ f^{(k)}\ est\ D.R.\}$. On voit que $0 \in S$.

Soient $f,g \in S$ et $\lambda \in \mathbb{C}$. Il est facile de vérifier que $f + g \in S$ et $\lambda \in S$.

S est par conséquent un sous espace vectoriel de $C^\infty(\mathbb{R})$.

Par ailleurs, pour $k \in \mathbb{N}$ et $f \in S$, on a $x^k f \in C^\infty(\mathbb{R})$ et

$$\forall p \in \mathbb{N} \quad |x^p x^k f(x)| = |x^{p+k} f(x)| \longrightarrow 0 \ \ si \ \ |x| \longrightarrow +\infty$$

On en déduit que $\forall k \in I\!N \;\; x^k f \in S$, d'où $Pf \in S$ pour tout polynôme.

6/ i) Soit $f \in S$. La fonction f' est C^∞ et $f'^{(k)} = f^{(k+1)}$ est D.R. d'où $f' \in S$.

ii) La question est $S \subset L^1(I\!R) \cap Ł^2(I\!R)$. On sait d'après l'exercice (**??**) que si $f \in C^0(I\!R)$ et si f est D.R. alors $f \in L^1 \cap Ł^2$. Le résultat en découle immédiatement.

7/ Soit $f \in S$. La fonction f est donc dans $L^1(I\!R)$ et elle est D.R. donc $\widehat{f} \in C^\infty(I\!R)$. Il découle de la question 6/ que

$$\forall k \in I\!N \quad f^{(k)} \in L^1(I\!R)$$

Par application de la question 4/, on a $\widehat{f}$ est D.R.. Utilisant la stabilité de S pour la multiplication par un polynôme ainsi que les propriétés de la transformation de Fourier (**??**), il vient

$$\begin{aligned} t^p \widehat{f}^{(k)}(t) &= t^p(-i2\pi)^k \mathcal{F}\left[x^k f(x)\right] \\ &= \tfrac{1}{(i2\pi)^p} \mathcal{F}\left[\left((-i2\pi)^k x^k f(x)\right)^{(p)}\right] \end{aligned} \tag{.2}$$

Comme $\left((-i2\pi)^k x^k f(x)\right)^{(p)}$ est un élément de S, sa transformée de Fourier est D.R. et par suite

$$\lim_{|t| \to +\infty} |t^p \widehat{f}^{(k)}(t)| = 0$$

Par conséquent $\widehat{f} \in S$.

8/ i) Provient de la définition.

ii) Soit $k \in I\!N$, on vérifie facilement à l'aide de la formule de Leibnitz que $x^p\left(x^k f_n(x)\right)^{(q)}$ converge uniformément vers sur $I\!R$.

iii) On $f_n \longrightarrow 0$ dans S, donc

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists N \in I\!N \,/\, \forall n \geq N \;\; |(1+x^2) f_n(x)| \leq \varepsilon, \forall x \in I\!R$$

d'où

$$\int_{I\!R} |f_n(x)| \, dx \leq \varepsilon \int_{I\!R} \frac{dx}{1+x^2}$$

donc

$$\|f_n\|_1 \leq \varepsilon\pi$$

Ainsi

$$\|f_n\|_1 \longrightarrow 0 \;\text{ dans }\; L^1$$

iv) On sait d'après l'égalité (.2) que

$$\left| t^p \widehat{f_n}^{(q)}(t) \right| = (2\pi)^{q-p} \left| \mathcal{F}\left[(x^q f_n(x))^{(p)}\right](t) \right|.$$

Si l'on pose $\phi_n(x) = \Big(x^q f_n(x)\Big)^{(p)}$, alors on peut affirmer que

$$\begin{cases} \phi_n \in S \text{ (questions 5/ et 6/ i))} \\ \phi_n \longrightarrow 0 \text{ dans } S \text{ (questions 8/ i) et 8/ ii))} \\ \phi_n \longrightarrow 0 \text{ dans } L^1 \text{ (question 8/ iii))} \end{cases}$$

Or on a d'après le théorème (**??**) et sa démonstration $\|\widehat{\phi_n}\|_\infty \leq \|\phi_n\|_1$, d'où le résultat.

Solution de l'exercice (??): a/ Soit $\varphi \in \mathcal{D}$, φ est C^∞ et *supp* φ est compact. On conclut que φ est D.R., ce qui est le cas aussi pour $\varphi^{(k)} \in \mathcal{D}$.

D'autre part, on peut vérifier facilement que la convergence dans $\mathcal{D}$ entraine la convergence dans S. Par conséquent tout élément de $S^{'}$ est un élément de $\mathcal{D}^{'}$.

b/ Supposons que $U_n \longrightarrow 0$ dans $S^{'}$. Donc

$$< U_n,\varphi > \longrightarrow 0 \;\; \forall \varphi \in S$$

et par conséquent

$$< U_n,\varphi > \longrightarrow 0 \;\; \forall \varphi \in \mathcal{D}.$$

Finalement $U_n \longrightarrow 0$ dans $\mathcal{D}^{'}$.

Solution de l'exercice (??): On sait que $L^1(I\!\!R) \subset L^1_{loc}(I\!\!R)$. Donc toute fonction de $L^1(I\!\!R)$ est une distribution. Soit $\{\varphi_n\}$ une suite de S, telle que $\varphi_n \longrightarrow 0$ dans S. On a

$$|< f,\varphi_n >| = \left| \int_{I\!\!R} f(x)\ \varphi_n(x)\ dx \right| \leq \|\varphi_n\|_\infty \|f\|_1.$$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \|\varphi_n\|_\infty = 0$, donc f définit une forme linéaire continue sur S. C'est donc une distribution tempérée.

Solution de l'exercice (??): La fonction $f \in L^1_{loc}(I\!\!R)$, c'est donc une distribution. Soit une suite φ_n de S telle que $\varphi_n \longrightarrow 0$ dans S. On a

$$\begin{aligned} |< f,\varphi_n >| &= \left| \int_{I\!\!R} f(x)\ \varphi_n(x)\ dx \right| \\ &= \left| \int_{|x|\leq a} f(x)\ \varphi_n(x)\ dx + \int_{|x|>a} f(x)\ \varphi_n(x)\ dx \right| \\ &= \|\varphi_n\|_\infty \int_{|x|\leq a} |f(x)|\ dx + \int_{|x|>a} |f(x)|\ |\varphi_n(x)|\ dx \end{aligned}$$

Or

$$\exists A > 0,\, m \in I\!\!N \,/\, |f(x) \leq A|x|^m \;\; \forall |x| \geq a$$

donc

$$|< f,\varphi_n >| \leq \|\varphi_n\|_\infty \int_{|x|\leq a} |f(x)|\, dx + A \left\|x^m \varphi_n(x)\right\|_1$$

Sachant que $f \in L^1_{loc}(I\!R)$ et utilisant les propriétés ii) et iii) de la question 8 de l'exercice (**??**), on conclut que

$$\lim_{n\to+\infty} < f,\varphi_n >= 0$$

donc f est bien tempérée.

Solution de l'exercice (**??**)**:** On sait que

$$f \in S \implies \widehat{f} \in S^{'} \ \text{(Question 7 de l'exercice (??))}.$$

$\mathcal{F}$ est donc une application linéaire continue sur S. Utilisant la question 6/ ii) de l'exercice (**??**), on déduit que f et $\widehat{f} \in L^1$. Comme de plus f est continue, on a d'après le théorème d'inversion de Fourier $\overline{\mathcal{F}}\widehat{f} = f$.

$\mathcal{F}$ est donc bijective et continue d'après la question 8/ iv) de l'exercice (**??**).

Une démonstration similaire donne la continuité de $\overline{\mathcal{F}}$.

Solution de l'exercice (**??**)**:** Soit $\phi \in S$. On a $\mathcal{F}\phi \in S$, donc $< U,\mathcal{F}\phi >\in \mathbb{C}$. Par suite $< \mathcal{F}U,\phi >\in \mathbb{C}$. $\mathcal{F}U$ est linéaire d'après la linéarité de $\mathcal{F}$.

Supposons que $\phi_n \longrightarrow 0$ dans S. On sait alors que $\mathcal{F}\phi_n \longrightarrow 0$ dans S, d'où

$$< \mathcal{F}U,\phi_n >=< U,\mathcal{F}\phi_n >\longrightarrow 0$$

$\mathcal{F}U$ est donc une distribution tempérée.

Démonstration analogue pour $\overline{\mathcal{F}}$.

Solution de l'exercice (**??**)**:** Soit $U \in S^{'}$, on a vu que $\mathcal{F}U \in S^{'}$ (cf. exercice (**??**)). $\mathcal{F} : S^{'} \longrightarrow S^{'}$ est donc linéaire. Elle est continue car $U_n \longrightarrow 0$ dans $S^{'}$ implique que $< \mathcal{F}U_n,\phi >=< U_n,\mathcal{F}\phi >\longrightarrow 0$.

On a les mêmes propriétés pour $\overline{\mathcal{F}}$.

Par ailleurs, pour $\varphi \in S$, on a

$$\begin{aligned} < \mathcal{F}\overline{\mathcal{F}}U,\varphi > &= < \overline{\mathcal{F}}U,\mathcal{F}\varphi > \\ &= < U,\overline{\mathcal{F}}\mathcal{F}\varphi > \\ &= < U,\varphi > \\ &= < \overline{\mathcal{F}}\mathcal{F}U,\varphi > \end{aligned}$$

ce qui prouve que $\overline{\mathcal{F}}\mathcal{F} = \mathcal{F}\overline{\mathcal{F}} = I$.

Solution de l'exercice (??): On constate que δ est une distribution tempérée. Pour $\varphi \in S$, on a

$$\begin{aligned} < \mathcal{F}\delta, \varphi > &= < \delta, \mathcal{F}\varphi > \\ &= \widehat{\varphi}(0) \\ &= \int_{I\!R} \varphi(x)\, dx \\ &= < 1, \delta > \end{aligned}$$

d'où $\mathcal{F}\delta = 1$.