

Recherche opérationnelle

Introduction

Monsieur X possède une société de fabrication d'écrous. Le processus de fabrication d'écrous passe par trois étapes.

A. Couper une barre

B. Trouer

C. Filer

L'usine dispose de :

2 Machines à couper

4 Machines à trouser

17 Machines à filer

Les temps nécessaires pour couper, percer, filer sont donnés dans le tableau suivant :

Action	Type 1	Type 2
Couper	2 s	2 s
Trouer	5 s	3 s
Filer	10 s	20 s
Profit	3 Centimes	4 Centimes

Question

Combien d'écrous de type 1 et de type 2 la société doit fabriquer pour maximiser son profit journalier ?

Formulation mathématique

Soit x_1 le nombre d'écrous de Type 1 fabriqués

..... x_2 Type 2

Les temps nécessaires pour :

$$\text{A. Couper} \quad ==> \quad 2x_1 + 2x_2$$

$$\text{B. Trouer} \quad ==> \quad 5x_1 + 3x_2$$

$$\text{C. Filer} \quad ==> \quad 10x_1 + 20x_2$$

Les temps disponibles sont

$$\text{A. Couper} \quad ==> \quad 8 * 3600 * 2$$

$$\text{B. Trouer} \quad ==> \quad 8 * 3600 * 4$$

$$\text{C. Filer} \quad ==> \quad 8 * 3600 * 17$$

Nous devons donc avoir

Contraintes

$$2x_1 + 2x_2 \leq 57\,600$$

$$5x_1 + 3x_2 \leq 115\,200$$

$$10x_1 + 20x_2 \leq 489\,600$$

Fonction économique

$$\text{Maximiser} \quad x_0 = 3x_1 + 4x_2$$

Problème de programmation linéaire

$$\text{Maximiser } x_0 = 3x_1 + 4x_2$$

$$2x_1 + 2x_2 \leq 57\,600$$

$$5x_1 + 3x_2 \leq 115\,200$$

$$10x_1 + 20x_2 \leq 489\,600$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0$$

Résolution Graphique

Définitions

- L'ensemble des solutions admissibles est l'ensemble des points qui vérifient toutes les contraintes.
- L'ensemble des solutions admissibles est l'intersection d'un nombre fini de demi-plans (**Hyperplans**).

Or, l'intersection d'un nombre fini d'hyperplans est convexe donc l'ensemble des solutions admissibles est convexe.

- Les points qui se trouvent à la frontière de l'ensemble des solutions admissibles définis par l'intersection des droites décrivant les contraintes sont appelés **Extremums**.

Remarque

La résolution graphique est limitée en nombre de variables.

Les problèmes classiques sont de l'ordre de 1500 variables et 500 contraintes.

Des problèmes plus importants sont de l'ordre de 20 000 variables et 5 000 contraintes et plus.

Résolution analytique

Méthode du simplexe

- Ecriture du problème de programmation linéaire sous la forme standard

$$\text{Maximiser } x_0 = 3x_1 + 4x_2$$

$$2x_1 + 2x_2 + x_3 = 57600$$

$$5x_1 + 3x_2 + x_4 = 115200$$

$$10x_1 + 20x_2 + x_5 = 489600$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0$$

x_3, x_4, x_5 sont appelées variables d'écart

- Ecriture du problème de programmation linéaire sous la forme d'un tableau

	X1	X2	X3	X4	X5	B
X3	2	2	1	0	0	57 600
X4	5	3	0	1	0	115 200
X5	10	20	0	0	1	489 600
X0	-3	-4	0	0	0	0

Sur ce tableau

$\{ x_3, x_4, x_5 \}$ sont des **variables de Base**.

$\{ x_1, x_2 \}$ sont donc des **variables Hors Base**.

Cette base correspond à **l'extremum (0, 0)**.

Définition

On appelle B_1, B_2 deux bases adjacentes si et seulement si il existe un couple unique (i, j) tel que :

x_i appartient B_1 et x_i n'appartient pas à B_2

x_j n'appartient pas à B_1 et x_j appartient à B_2

Remarque

Une base adjacente correspond à un extremum adjacent

- Tableau initial de la méthode du simplexe :

$$Ax = b$$

	X1	X2	X3	X4	X5	B
X3	2	2	1	0	0	57 600
X4	5	3	0	1	0	115 200
X5	10	20	0	0	1	489 600
X0	-3	-4	0	0	0	0

Règles définissant un tableau du simplexe

1. Matrice Identité sous les variables de Base
2. Colonne B ≥ 0
3. 0 sur la ligne x0 sous les variables de base
4. Un signe quelconque sur la ligne x0 sous les variables H.Base

Itérations dans la méthode du simplexe

1. Sur la ligne x0 cherchons le coefficient < 0 le plus petit, et faisons rentrer la variable correspondante dans la base.
Dans notre cas le coefficient est -4 et celui-ci correspond à la variable x2.

Or, si x_2 rentre dans la base, alors x_3 ou bien x_4 ou bien x_5 doit en sortir.

Pour cela on utilisera la règle du Ratio Minimum.

	X1	X2	X3	X4	X5	B	Ratio
X3	2	2	1	0	0	57 600	57 600/2
X4	5	3	0	1	0	115 200	115 200/3
X5	10	20	0	0	1	489 600	489 600/20
X0	-3	-4	0	0	0	0	

x_2 va donc remplacer x_5 dans la base.

	X1	X2	X3	X4	X5	B
X3		0	1	0		
X4		0	0	1		
X2		1	0	0		
X0		0	0	0		

Tableau (Extremum) Suivant

	X1	X2	X3	X4	X5	B
X3	1	0	1	0	-1/10	8640
X4	7/2	0	0	1	-3/20	41760
X2	1/2	1	0	0	1/20	24480
X0	-1	0	0	0	1/5	97920

Pour la ligne 1 :

$$\text{Alpha1} = 2/20 \rightarrow L1 = L1 - \text{Alpha1} * \text{Ligne Pivot}$$

2	2	1	0	0	57 600
---	---	---	---	---	--------

- 2/20 *

10	20	0	0	1	489 600
----	----	---	---	---	---------

=

1	0	1	0	-1/10	8640
---	---	---	---	-------	------

Tableau suivant

	X1	X2	X3	X4	X5	B	Ratio
X3	1	0	1	0	-1/10	8640	8640
X4	7/2	0	0	1	-3/20	41760	41760*2/7
X2	1/2	1	0	0	1/20	24480	24480*2
X0	-1	0	0	0	1/5	97920	

x1 va remplacer x3

	X1	X2	X3	X4	X5	B
X1	1	0	1	0	-1/10	8640
X4	0	0	-7/2	1	1/5	11520
X2	0	1	-1/2	0	1/10	20160
X0	0	0	1	0	1/10	106560

Tableau Final

$$\begin{array}{ll}
 X1 = 8640 & X2 = 20160 \\
 X3 = 0 & X4 = 11520 \\
 X5 = 0 & x0 = 106560
 \end{array}$$

Vérification

$$\begin{aligned} \text{Maximiser} \quad & x_0 = 3x_1 + 4x_2 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 &= 57600 \\ 5x_1 + 3x_2 + x_4 &= 115200 \\ 10x_1 + 20x_2 + x_5 &= 489600 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Max} &\rightarrow 3(8640) + 4(20160) = 106560 \\ 1^{\text{ère}} &\rightarrow 2(8640) + 2(20160) + 0 = 57600 \\ 2^{\text{ème}} &\rightarrow 5(8640) + 3(20160) + 11520 = 115200 \\ 3^{\text{ème}} &\rightarrow 10(8640) + 20(20160) + 0 = 489600 \end{aligned}$$

Exercice

$$\text{Maximiser } x_0 = 10x_1 + 9x_2$$

$$5x_1 + 4x_2 \leq 200$$

$$4x_1 + 6x_2 \leq 230$$

$$2x_1 + x_2 \leq 70$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Forme Standard

Maximiser $x_0 = 10 x_1 + 9 x_2$

$$5 x_1 + 4 x_2 + x_3 = 200$$

$$4 x_1 + 6 x_2 + x_4 = 230$$

$$2 x_1 + x_2 + x_5 = 70$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$$

x_3, x_4 et x_5 sont des variables d'écart

Tableau Initial

	X1	X2	X3	X4	X5	B
X3	5	4	1	0	0	200
X4	4	6	0	1	0	230
X5	2	1	0	0	1	70
X0	-10	-9	0	0	0	0

1ère Itération

	X1	X2	X3	X4	X5	B	Ratio
X3	5	4	1	0	0	200	200/5
X4	4	6	0	1	0	230	230/4
X5	2	1	0	0	1	70	70/2
X0	-10	-9	0	0	0	0	

x1 rentre dans la base et x5 sort

Tableau Suivant

	X1	X2	X3	X4	X5	B
X3	0	3/2	1	0	-5/2	25
X4	0	4	0	1	-2	90
X1	1	1/2	0	0	1/2	35
X0	0	-4	0	0	5	350

2ème Itération

	X1	X2	X3	X4	X5	B	Ratio
X3	0	3/2	1	0	-5/2	25	50/3
X4	0	4	0	1	-2	90	90/4
X1	1	1/2	0	0	1/2	35	70
X0	0	-4	0	0	5	350	

x2 rentre dans la base et x3 sort

Tableau Suivant

	X1	X2	X3	X4	X5	B
X2	0	1	2/3	0	-5/3	50/3
X4	0	0	-8/3	1	14/3	70/3
X1	1	0	-1/3	0	4/3	80/3
X0	0	0	8/3	0	-5/3	1250/3

3ème Itération

	X1	X2	X3	X4	X5	B	Ratio
X2	0	1	2/3	0	-5/3	50/3	-
X4	0	0	-8/3	1	14/3	70/3	5
X1	1	0	-1/3	0	4/3	80/3	20
X0	0	0	8/3	0	-5/3	1250/ 3	

x5 rentre dans la base et x4 sort

Tableau Suivant

	X1	X2	X3	X4	X5	B
X2	0	1	-2/7	5/14	0	25
X5	0	0	-4/7	3/14	1	5
X1	1	0	3/7	-2/7	0	20
X0	0	0	12/7	5/14	0	425

Tableau Final

Algorithme du Simplexe

Un tableau dans la méthode du simplexe est de la forme :

		X_q		X_k		B
		A_{1q}		0		B_1
		A_{2q}		0		
X_k		A_{iq}	.	1	.	B_i
		.		0		
		A_{nq}		0		B_n
X_0		C_q		0		

On commence par calculer : $C_q^* = \min(C_q)$

Si C_q^* est ≥ 0 alors le tableau en cours est un tableau final

sinon

la variable correspondante à C_q^* est la variable H.B qui rentrera dans la base.

Ensuite on calcul

$$R = \text{Min}\left(\frac{B_i}{A_{iq}} \text{ si } A_{iq} > 0 \text{ et } \infty \text{ Sinon}\right)$$

Si $R = \infty$ Cela signifie que la solution est non bornée
sinon

La ligne correspondante s'appelle **ligne Pivot** et représente la variable de base qui sortira de la base.

L'intersection de la ligne Pivot et de la Colonne correspondante à la variable H.B. s'appelle **le Pivot**

Suite à cela on utilise l'algorithme de triangularisation de Gauss pour retrouver un nouveau tableau du simplexe en procédant de la manière suivante :

Pour toutes les lignes « i » différentes de la ligne Pivot on calcul :

$$\text{Alpha}(i) = A_{iq}^* / \text{Pivot}$$

$$\text{Ligne}(i) = \text{Ligne}(i) - \text{Alpha}(i) * \text{Ligne Pivot}$$

Rappel des Règles définissant un tableau du simplexe :

1. Matrice Identité sous les variables de Base
2. Colonne B ≥ 0
3. 0 sur la ligne x0 sous les variables de base

La Forme Standard dans un problème de programmation linéaire.

Maximise X_0

Sujet aux contraintes

1. $\sum A_{ij} * X_j \leq B_i$
2. $\sum A_{ij} * X_j \geq B_i$
3. $\sum A_{ij} * X_j = B_i$

Contraintes de type 1 :

$$\sum A_{ij} * X_j \leq B_i \quad \sum A_{ij} * X_j + X_k = B_i$$

X_k : est une variable d'écart

Contraintes de type 2 :

$$\sum A_{ij} * X_j \geq B_i \quad \sum A_{ij} * X_j - X_k + Y_1 = B_i$$

X_k : est une variable d'écart

Y_1 : est une variable Artificielle

Contraintes de type 3 :

$$\sum A_{ij} * X_j = B_i \quad \sum A_{ij} * X_j + Y_2 = B_i$$

Y_2 : est une variable Artificielle

Pour favoriser l'élimination des variables artificielles on transforme

$$\text{Max } x_0 = C_1 \cdot X_1 + C_2 \cdot X_2 + \dots + C_n \cdot X_n$$

En

$$\text{Max } x_0 = C_1 \cdot X_1 + C_2 \cdot X_2 + \dots + C_n \cdot X_n - M \cdot Y_1 - M \cdot Y_2$$

M représentera un très grand nombre

Remarque

Lors d'un problème de minimisation, nous maximiserons $-X_0$

$$\text{Minimiser } (X_0) = - \text{Maximiser } (-X_0)$$

Application

$$\text{Minimiser } x_0 = 3 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2$$

$$x_1 + x_2 = 10$$

$$x_1 \geq 4$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Forme Standard

$$\text{Minimiser } x_0 = 3 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 + M \cdot y_1 + M \cdot y_2$$

$$x_1 + x_2 + y_1 = 10$$

$$x_1 - x_3 + y_2 = 4$$

$$x_1, x_2, x_3, y_1, y_2 \geq 0$$

	X1	X2	X3	Y1	Y2	B
Y1	1	1	0	1	0	10
Y2	1	0	-1	0	1	4
-X0	3	2	0	M	M	0

Ceci n'est pas un tableau initial

-X0	3-2M	2-M	M	0	0	-14M
-----	------	-----	---	---	---	------

Ou Encore

-X0	3	2	0	0	0	0
	-2	-1	1	0	0	-14

Tableau Initial du Simplexe

	X1	X2	X3	Y1	Y2	B
Y1	1	1	0	1	0	10
Y2	1	0	-1	0	1	4
-X0	3	2	0	0	0	0
	-2	-1	1	0	0	-14

Itérations du simplexe

	X1	X2	X3	Y1	Y2	B	Ratio
Y1	1	1	0	1	0	10	10
Y2	1	0	-1	0	1	4	4
-X0	3	2	0	0	0	0	
	-2	-1	1	0	0	-14	

X1 rentre à la place de Y2

	X1	X2	X3	Y1	Y2	B
Y1	0	1	1	1	-	6
X1	1	0	-1	0	-	4
-X0	0	2	3	0	-	-12
	0	-1	-1	0	-	-6

Itération Suivante

	X1	X2	X3	Y1	Y2	B	Ratio
Y1	0	1	1	1	-	6	6
X1	1	0	-1	0	-	4	Infini
-X0	0	2	3	0	-	-12	
	0	-1	-1	0	-	-6	

X2 rentre à la place de Y1

	X1	X2	X3	Y1	Y2	B
X2	0	1	1	-	-	6
X1	1	0	-1	-	-	4
-X0	0	0	1	-	-	-24
	0	0	0	-	-	0

Tableau Final avec :

$x_0 = 24$, $x_1 = 4$, $x_2 = 6$ et $x_3 = 0$

Exercice

Minimiser $x_0 = x_1 + 3x_2 + 4x_3$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 = 5$$

$$2x_1 + 3x_2 + x_3 = 6$$

x_1 Libre, $x_2 \geq 0$, $x_3 \geq 0$

x_1 Libre → Faire un changement de variable

$$x_1 = U - V$$

ou $U \geq 0$ et $V \geq 0$

Cas Particuliers

Maximiser $x_0 = 3x_1 - 2x_2$

Sujet à $6x_1 + 6x_2 \leq 6$

$x_1 + x_2 \geq 2$

$x_1, x_2 \geq 0$

Tableau Initial

	X1	X2	X3	X4	Y1	B
X3	6	6	1	0	0	6
Y1	1	1	0	-1	1	2
X0	-3	2	0	0	0	0
	-1	-1	0	1	0	-2

	X1	X2	X3	X4	Y1	B	Ratio
X3	6	6	1	0	0	6	1
Y1	1	1	0	-1	1	2	2
X0	-3	2	0	0	0	0	
	-1	-1	0	1	0	-2	

X1 rentre à la place de X3

	X1	X2	X3	X4	Y1	B
X1	1	1	1/6	0	0	1
Y1	0	0	-1/6	-1	1	1
X0	0	5	1/2	0	0	3
	0	0	1/6	1	0	-1

Tableau Final

Règle

Quand on arrive à un tableau final qui contient encore une variable artificielle, cela signifie que l'ensemble des solutions admissibles est Vide.

Maximiser $x_0 = 2x_1 + 2x_2$

$$-x_1 + x_2 \leq 1$$

$$-x_1 + 2x_2 \leq 4$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

	X1	X2	X3	X4	B
X3	-1	1	1	0	1
X4	-1	2	0	1	4
X0	-2	-2	0	0	0

Tableau Initial

	X1	X2	X3	X4	B
X2	-1	1	1	0	1
X4	1	0	-2	1	2
X0	-4	0	2	0	2

Itération suivante

	X1	X2	X3	X4	B	Ratio
X2	0	1	-1	1	3	Infini
X1	1	0	-2	1	2	Infini
X0	0	0	-6	4	10	

Itération suivante

Règle

Si au cours des itérations $R = \min(R_i)$ est Infini, cela signifie que la solution est non bornée.

Maximiser $x_0 = 2x_2 - x_1$

$$-x_1 + x_2 \leq 1$$

$$-x_1 + 2x_2 \leq 4$$

$$x_1 \leq 6$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

	X1	X2	X3	X4	X5	B
X2	0	1	-1	2	0	3
X1	1	0	-2	2	0	2
X5	0	0	2	-2	1	4
X0	0	0	0	2	0	4

Tableau Final

$$x_1 = 2, x_2 = 3$$

	X1	X2	X3	X4	X5	B	Ratio
X2	0	1	-1	2	0	3	Infini
X1	1	0	-2	2	0	2	Infini
X5	0	0	2	-2	1	4	2
X0	0	0	0	2	0	4	

	X1	X2	X3	X4	X5	B
X2	0	1	0	1	$\frac{1}{2}$	5
X1	1	0	0	0	1	6
X3	0	0	1	-1	$\frac{1}{2}$	2
X0	0	0	0	2	0	4

Tableau Final

$x_1 = 6, x_2 = 5$

Règle

Si dans un tableau final x_0 ne dépend pas d'une variable Hors Base, cela signifie que la solution n'est pas unique.

Remarque

Le segment de droite qui lie les points (2,3) et (6,5) est également solution.

Méthode Duale du Simplexe

Primal	Dual
$\begin{aligned} \text{Min } C^T * X \\ A * X &\geq B \\ X &\geq 0 \end{aligned}$	$\begin{aligned} \text{Max } B^T * Y \\ A^T * Y &\leq C \\ Y &\geq 0 \end{aligned}$

Exercice

Trouver le dual de :
$$\begin{aligned} \text{Min } 3x_1 + x_2 + 2x_3 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 &\geq 1 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 &\leq 1 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

Remarques

1. Le Dual du Dual est égal au Primal
2. Sous la forme standard le problème Primal et le problème Dual possèdent le même nombre de variables (ne comptant pas les variables artificielles)
3. Il y a une bijection entre les variables du Problème Primal et les variables du problème Dual :

$$\begin{array}{ll}
 X4 \leftrightarrow Y1 & X5 \leftrightarrow Y2 \\
 X1 \leftrightarrow Y3 & X2 \leftrightarrow Y4 \\
 X3 \leftrightarrow Y5 &
 \end{array}$$

Dans cette bijection les variables d'écarts du primal correspondent aux variables principales du Dual, et vice-versa.

	X1	X2	X3	X4	X5	B
X1	1	0	-1	-2/3	-1/3	1/3
X2	0	1	-1	-1/3	1/3	2/3
-X0	0	0	6	7/3	2/3	-5/3

Tableau Final du Primal

	Y1	Y2	Y3	Y4	Y5	B
Y2	0	1	1/3	-1/3	0	2/3
Y1	1	0	2/3	-1/3	0	7/3
Y5	0	0	1	1	1	6
Y0	0	0	1/3	2/3	0	5/3

Tableau Final du Dual

Correspondances

1. La solution du problème dual y_0 est égale à la solution du problème primal $x_0 = 5/3$
2. Les Variables de Base du Problème Primal ont des correspondantes Hors base dans le Problème Dual.
3. Les Variables Hors Base du Problème Primal ont des correspondantes dans la Base du Problème Dual.
4. Les Variables de Base du Problème Primal ont des valeurs égales au coût réduit de leurs correspondantes Hors base dans le Problème Dual.

Conclusion

Connaître le tableau final d'un problème primal équivaut à connaître aussi le tableau final de son Dual.

Remarque

$$\text{Min } 15 x_1 + 20 x_2 + 12 x_3$$

$$\frac{1}{4} x_1 + \frac{1}{2} x_2 + \frac{1}{4} x_3 \geq 3$$

$$\frac{2}{5} x_1 + \frac{3}{10} x_2 + \frac{3}{10} x_3 \geq 2$$

$$\frac{2}{5} x_1 + \frac{2}{5} x_2 + \frac{1}{5} x_3 \geq \frac{5}{2}$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

Pour ce Problème il est plus simple d'appliquer la Méthode du simplexe sur le Dual plutôt que sur le Primal.

Pourquoi ?

Exercice

Trouver le Dual du problème suivant :

$$\text{Min } 3 x_1 + x_2 - 5 x_3$$

$$3 x_1 + 2 x_3 \geq 2$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1$$

$$x_1 + 2 x_2 \leq 3$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

Remarque

Primal	Dual
Min	Max
$\sum_{j=1}^n A_{ij}X_j \geq B_i$	$Y_i \geq 0$
$\sum_{j=1}^n A_{ij}X_j = B_i$	$Y_i \text{ Libre}$
$X_j \geq 0$	$\sum_{i=1}^n A_{ij}Y_i \leq C_j$
$X_j \text{ Libre}$	$\sum_{i=1}^n A_{ij}Y_i = C_j$

Présentation de l'Algorithme Dual du Simplexe

$$\text{Min } 15 x_1 + 20 x_2 + 12 x_3$$

$$\frac{1}{4} x_1 + \frac{1}{2} x_2 + \frac{1}{4} x_3 \geq 3$$

$$\frac{2}{5} x_1 + \frac{3}{10} x_2 + \frac{3}{10} x_3 \geq 2$$

$$\frac{2}{5} x_1 + \frac{2}{5} x_2 + \frac{1}{5} x_3 \geq \frac{5}{2}$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

Forme Standard de la Méthode Duale du Simplexe

$$\text{Min } 15 x_1 + 20 x_2 + 12 x_3$$

$$-\frac{1}{4} x_1 - \frac{1}{2} x_2 - \frac{1}{4} x_3 + x_4 = -3$$

$$-\frac{2}{5} x_1 - \frac{3}{10} x_2 - \frac{3}{10} x_3 + x_5 = -2$$

$$-\frac{2}{5} x_1 - \frac{2}{5} x_2 - \frac{1}{5} x_3 + x_6 = -\frac{5}{2}$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0$$

	X1	X2	X3	X4	X5	X6	B
X4	-1/4	-1/2	-1/4	1	0	0	-3
X5	-2/5	-3/10	-3/10	0	1	0	-2
X6	-2/5	-2/5	-1/5	0	0	1	-5/2
-X0	15	20	12	0	0	0	0

Tableau Initial de la Méthode Duale Du Simplexe

1. Matrice Identité sous les variables de Base
2. x_0 ne dépend pas des variables de Base
3. Ligne $x_0 \geq 0$
4. B est de signe quelconque

	X1	X2	X3	X4	X5	X6	B
X4	-1/4	-1/2	-1/4	1	0	0	-3
X5	-2/5	-3/10	-3/10	0	1	0	-2
X6	-2/5	-2/5	-1/5	0	0	1	-5/2
-X0	15	20	12	0	0	0	0
Ratio	$15 / -(-1/4)$	$20 / -(-1/2)$	$12 / -(-1/4)$				

Algorithme Dual Du Simplexe

1. Vérifier que la ligne x_0 a des coefficients ≥ 0

2. Calculer $B_k = \min (B_i)$

Si $B_k \geq 0$ alors le tableau en cours est un tableau final sinon la ligne X_k correspondante au coefficient B_k est la variable de Base qui sortira de la Base.

3. Calculer le ratio minimum

$$R_j = \min_i (C_i / - A_{ki} \text{ Si } A_{ki} < 0 \text{ et } \infty)$$

Si $R_j < \infty$ alors la variable X_j correspondante à R_j est la variable Hors Base qui rentrera dans la Base.

Si $R_j = \infty$ Alors la solution est non bornée.

4. Ecrire X_0 en fonction des variables Hors Base et Itérer en utilisant la triangularisation de Gauss.

	X1	X2	X3	X4	X5	X6	B
X2	1/2	1	1/2	-2	0	0	6
X5	-1/4	0	-3/20	-3/5	1	0	-1/5
X6	-1/5	0	0	-4/5	0	1	-1/10
-X0	5	0	2	40	0	0	-120
Ratio	20		40/3	200/3			

Itération Suivante

	X1	X2	X3	X4	X5	X6	B
X2	-1/3	1	0	-4	10/3	0	16/3
X3	5/3	0	1	4	-20/3	0	4/3
X6	-1/5	0	0	-4/5	0	1	-1/10
-X0	5/3	0	0	32	40/3	0	-368/3
Ratio	25/3			40			

	X1	X2	X3	X4	X5	X6	B
X2	0	1	0	-8/3	10/3	-5/3	11/2
X3	0	0	1	-8/3	-20/3	25/3	1/2
X1	1	0	0	4	0	-5	1/2
-X0	0	0	0	76/3	40/3	25/3	-123,5

Tableau Final

Applications : Changement en X_0

P	P'
$\text{Max } 3x_1 + 5x_2$ $x_1 \leq 4$ $3x_1 + 2x_2 \leq 18$ $x_1, x_2 \geq 0$	$\text{Max } 3x_1 + 1x_2$ $x_1 \leq 4$ $3x_1 + 2x_2 \leq 18$ $x_1, x_2 \geq 0$

Tableau Final de P

	x1	x2	x3	x4	B
X3	1	0	1	0	4
X2	3/2	1	0	1/2	9
X0	9/2	0	0	5/2	45

Calculer :

$$\delta = \text{Coefficient}(P') - \text{Coefficient}(P) = 1 - 5 = -4$$

Augmenter (X_0 , X_2) de $-\delta$ quand on Maximise et de δ quand on Minimise.

	x1	x2	x3	x4	B
X3	1	0	1	0	4
X2	3/2	1	0	1/2	9
X0	9/2	0 + (-8)	0	5/2	45

	x1	x2	x3	x4	B
X ₃	1	0	1	0	4
X ₂	3/2	1	0	1/2	9
X ₀	-3/2	0	0	1/2	9

	x1	x2	x3	x4	B
X ₁	1	0	1	0	4
X ₂	0	1	-3/2	1/5	3
X ₀	0	0	3/2	1/2	15

Tableau Final

Applications : Changement en B

P	P'
$\text{Max } 3x_1 + 5x_2$ $x_1 \leq 4$ $3x_1 + 2x_2 \leq 18$ $x_1, x_2 \geq 0$	$\text{Max } 3x_1 + 5x_2$ $x_1 \leq 4$ $3x_1 + 2x_2 \leq 14$ $x_1, x_2 \geq 0$

Calculer :

$$\delta = \text{Coefficient}(P') - \text{Coefficient}(P) = 14 - 18 = -4$$

Augmenter B de :

Variable d'Ecart * δ quand on a une contrainte \leq et de

Variable d'Ecart * $(-\delta)$ quand on a une contrainte \geq et de

Variable Artificielle * δ quand on a une contrainte $=$.

Dans Notre Cas : $B(\text{Nouveau}) = B(\text{Ancien}) + X_4 * \delta$

	x1	x2	x3	x4	B
X3	1	0	1	0	$4 + 0 * (-4)$
X2	$3/2$	1	0	$1/2$	$9 + 1/2 * (-4)$
X0	$9/2$	0	0	$5/2$	$45 + 5/2 * (-4)$

Noter que Si $B \geq 0$ alors on aura un tableau final sinon on aura un tableau de la méthode duale du simplexe

Applications : Changement dans la Matrice A

P	P'
$\text{Max } 3 x_1 + 5 x_2$ $x_1 \leq 4$ $3 x_1 + 2 x_2 \leq 18$ $x_1, x_2 \geq 0$	$\text{Max } 3 x_1 + 5 x_2$ $x_1 \leq 4$ $1 x_1 + 2 x_2 \leq 18$ $x_1, x_2 \geq 0$

Calculer :

$$\delta = \text{Coefficient}(P') - \text{Coefficient}(P) = 1 - 3 = -2$$

Augmenter X_1 de :

Variable d'Ecart * δ quand on a une contrainte \leq et de

Variable d'Ecart * $(-\delta)$ quand on a une contrainte \geq et de

Variable Artificielle * δ quand on a une contrainte $=$.

Dans Notre Cas : $X_1 (\text{Nouveau}) = X_1 (\text{Ancien}) + X_4 * \delta$

	x1	x2	x3	x4	B
X3	$1 + 0 * (-2)$	0	1	0	4
X2	$3/2 + 1/2 * (-2)$	1	0	$1/2$	9
X0	$9/2 + 5/2 * (-2) = -1/2$	0	0	$5/2$	45

Itérer en utilisant la méthode du simplexe

Applications : Changement Ajout d'une Contrainte

P	P'
$\text{Max } 3x_1 + 5x_2$ $x_1 \leq 4$ $3x_1 + 2x_2 \leq 18$ $x_1, x_2 \geq 0$	$\text{Max } 3x_1 + 5x_2$ $x_1 \leq 4$ $3x_1 + 2x_2 \leq 18$ $x_1 + 2x_2 \leq 12$ $x_1, x_2 \geq 0$

Ajouter la nouvelle contrainte :

	x1	x2	x3	x4	X5	B
X ₃	1	0	1	0	0	4
X ₂	3/2	1	0	1/2	0	9
X ₅	1	2	0	0	1	12
X ₀	9/2	0	0	5/2	0	45

Ceci n'est pas un Tableau du Simplexe

	x1	x2	x3	x4	X5	B
X ₃	1	0	1	0	0	4
X ₂	3/2	1	0	1/2	0	9
X ₅	-2	0	0	-1	1	-6
X ₀	9/2	0	0	5/2	0	45

Ceci est un Tableau de la Méthode Duale du Simplexe

	x1	x2	x3	x4	X5	B
X ₃	1	0	1	0	0	4
X ₂	3/2	1	0	1/2	0	9
X ₅	-2	0	0	-1	1	-6
X ₀	9/2	0	0	5/2	0	45
Ratio	9/4			5/2		

Tableau Suivant

	x1	x2	x3	x4	X5	B
X ₃	0	0	1	-1/2	1/2	1
X ₂	0	1	0	-1/4	3/4	9/2
X ₁	1	0	0	1/2	-1/2	3
X ₀	0	0	0	1/4	9/4	31,5

Tableau Final

Applications : Changement Ajout d'une Variable

P	P'
$\text{Max } 3x_1 + 5x_2$ $x_1 \leq 4$ $3x_1 + 2x_2 \leq 18$ $x_1, x_2 \geq 0$	$\text{Max } 3x_1 + 5x_2 + 4x_5$ $x_1 + 2x_5 \leq 4$ $3x_1 + 2x_2 + x_5 \leq 18$ $x_1, x_2, x_5 \geq 0$

Ajouter la nouvelle Variable :

	x1	x2	x3	x4	X5	B
X_3	1	0	1	0	$0+1*2+0*1$	4
X_2	$3/2$	1	0	$1/2$	$0 + 0*2 + 1/2*1$	9
X_0	$9/2$	0	0	$5/2$	$0+ -4 + 0*2 + 5/2*1$	45

	x1	x2	x3	x4	X5	B
X_3	1	0	1	0	2	4
X_2	$3/2$	1	0	$1/2$	$1/2$	9
X_0	$9/2$	0	0	$5/2$	$-3/2$	45

Continuer Par la Méthode du Simplexe