Chapitre I

Intégrale de Lebesgue

1. Introduction L'intégrale de Riemann, vue dans les classes précédentes, donne des outils permettant le calcul de surfaces ou de volumes, la résolution d'équations différentielles, l'estimation des sommes de séries,... Toutefois, cette théorie ne répond pas aux multiples attentes des mathématiciens, physiciens ou ingénieurs. Dans ce cours, on donne les principaux résultats de la théorie de l'intégrale de Lebesgue. Cette théorie utilise une classe de fonctions beaucoup plus riche que la classe des fonctions Riemann intégrables.

Rappelons que toute fonction continue, continue par morceaux ou réglée est Riemann-intégrable sur un intervalle de la forme $[a, b]$. Toutefois le comportement des fonctions Riemann intégrables vis-à-vis des limites pose problème. Par exemple, la limite f d'une suite $(f_n)_n$ de fonctions Riemann-intégrables sur $[a, b]$ n'est pas forcément Riemann-intégrable sur $[a, b]$.

Example 1. Soit $(f_n)_{n>0}$ définie par :

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad 0 \leq x \leq \dfrac{1}{n} \\ \dfrac{1}{x} & \text{si} \quad \dfrac{1}{n} < x \leq 1. \end{cases}$$

Sa limite f définie sur $[0, 1]$ par

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x = 0 \\ \dfrac{1}{x} & \text{si} \quad 0 < x \leq 1 \end{cases}$$

n'est pas Riemann-intégrable sur $[0, 1]$. Même si la limite f est Riemann-intégrable sur $[a, b]$, il n'est pas sûr que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b \lim_{n\to+\infty} f_n(x)dx.$$

Example 2. Soit $(f_n)_{n>0}$ telle que

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x = 0 \\ n & \text{si} \quad 0 < x < \dfrac{1}{n} \\ 0 & \text{si} \quad \dfrac{1}{n} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

On a $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n(x)dx = 1$ et $\displaystyle\int_0^1 \lim_{n\to+\infty} f_n(x)dx = 0$.

1 Ensembles mesurables. Mesures.

2. Ensembles mesurables. Mesures

Definition 3. Soit X un ensemble non vide et $\mathcal{P}(X)$ l'ensemble des parties de X. On appelle tribu (ou σ-algèbre) sur X, un ensemble $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ qui possède les propriétés suivantes :

i) $\emptyset \in \mathcal{A}$;

ii) Si $A \in \mathcal{A}$, alors $A^c \in \mathcal{A}$
(où A^c désigne le complémentaire de A dans X) ;

iii) Pour toute famille finie ou dénombrable $(A_i)_{i \in I \subset \mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{A}$, $\bigcup_{i \in I} A_i \in \mathcal{A}$.

Remark 4. 1. Il résulte de i) et ii) que $X \in \mathcal{A}$;

2. Il découle de ii) et iii) que toute intersection finie ou dénombrable d'éléments de $\mathcal{A}$ est un élément de $\mathcal{A}$;

3. Si $A,\ B \in \mathcal{A}$ alors $A \backslash B = A \cap B^c \in \mathcal{A}$.

Examples 5. 1. $\mathcal{P}(X)$ est une tribu sur X ;

2. Soient $X = \{a, b, c\}$ et $E = \{a\}$. La famille $\mathcal{A} = \{\emptyset, X, E, E^c\}$ est une tribu sur X.

Definition 6. On appelle espace mesurable tout couple $(X, \mathcal{A})$ où X est un ensemble et $\mathcal{A}$ est une tribu sur X. Les éléments de $\mathcal{A}$ sont appelés ensembles mesurables.

Remark 7. 1. L'intersection d'une famille quelconque de tribus sur X est une tribu sur X.

2. Soit $\mathcal{F}$ une famille quelconque de sous-ensembles de X. L'intersection de toutes les tribus contenant la famille $\mathcal{F}$ est donc une tribu contenant $\mathcal{F}$, notée $\sigma(\mathcal{F})$. C'est en fait la plus petite tribu sur X contenant $\mathcal{F}$. Il est alors évident que toute tribu contenant $\mathcal{F}$ contient également $\sigma(\mathcal{F})$.

Definition 8. La tribu $\sigma(\mathcal{F})$ est appelée tribu engendrée par $\mathcal{F}$.

Example 9. Prenons $X = \mathbb{R}^n$ muni de sa topologie usuelle et $\mathcal{F}$ l'ensemble des ouverts de $\mathbb{R}^n$. Il est clair que $\mathcal{F}$ n'est pas une tribu car le complémentaire d'un ouvert n'est pas en général un ouvert. La tribu $\sigma(\mathcal{F})$ engendrée par $\mathcal{F}$ est appelée tribu de Borel ou tribu Borélienne sur $\mathbb{R}^n$. Elle est notée $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ et ses éléments sont appelés des Boréliens.

En théorie d'intégration, nous serons amenés à travailler dans l'ensemble $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$ muni des opérations usuelles avec les conventions suivantes :

1) $a \pm \infty = \pm\infty$ *pour tout* $a \in \mathbb{R}$;

2) $a \,.\, (\pm\infty) = \pm\infty$ *pour tout* $a > 0$;

3) 0 . $(\pm\infty)$ est égal à 0 (nous verrons que l'intégrale d'une fonction infinie sur un ensemble de mesure nulle est nulle et l'intégrale d'une fonction nulle sur un ensemble de mesure infinie est nulle) ;

4) Les opérations $(+\infty)+(-\infty)$ et $(-\infty)+(+\infty)$ ne sont pas définies.

Definition 10. Soit $(X,\mathcal{A})$ un espace mesurable. Une mesure positive sur $(X,\mathcal{A})$ est une application $\mu:\mathcal{A}\longrightarrow\overline{\mathbb{R}}_+=\mathbb{R}_+\cup\{+\infty\}$ telle que

1. $\mu(\emptyset)=0$;
2. Pour toute famille finie ou dénombrable $(A_i)_{i\in I\subset\mathbb{N}}$ d'ensembles mesurables de X, deux à deux disjoints, on a

$$\mu\left(\bigcup_{i\in I}A_i\right)=\sum_{i\in I}\mu(A_i).$$

Le triplet $(X,\mathcal{A},\mu)$ est alors appelé espace mesuré.

Example 11. Soient $(X,\mathcal{A})$ un espace mesurable et $a\in X$. On considère l'application

$$\delta_a:\mathcal{A}\longrightarrow\overline{\mathbb{R}}_+$$

définie pour tout $A\in\mathcal{A}$ par

$$\delta_a(A)=\begin{cases}1 & \text{si} \quad a\in A\\ 0 & \text{si} \quad a\notin A.\end{cases}$$

C'est une mesure sur $(X,\mathcal{A})$ appelée mesure de Dirac au point a.

Proposition Soit $(X,\mathcal{A},\mu)$ un espace mesuré.

1) Soient $A,\ B\in\mathcal{A}$. Si $A\subset B$, alors

$$\mu(A)\leq\mu(B).$$

2) Soient $A,\ B\in\mathcal{A}$. Si $A\subset B$ et $\mu(A)<+\infty$, alors

$$\mu(B\backslash A)=\mu(B)-\mu(A).$$

3) Si $(A_n)_{n\geq1}$ est une suite quelconque d'éléments de $\mathcal{A}$, alors

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty}A_n\right)\ \leq\ \sum_{n=1}^{+\infty}\mu\left(A_n\right).$$

4) Si $(A_n)_{n\geq1}$ est une suite croissante d'éléments de $\mathcal{A}$, alors

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty}A_n\right)\ =\ \lim_{n\to+\infty}\mu\left(A_n\right).$$

5) Si $(B_n)_{n\geq1}$ est une suite décroissante d'éléments de $\mathcal{A}$ telle que $\mu\left(B_1\right)<+\infty$ alors

$$\mu\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty}B_n\right)\ =\ \lim_{n\to+\infty}\mu\left(B_n\right).$$

Definition 12. Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré.

1. Si $\mu(X)$ est finie, on dit que μ est bornée (ou finie).
2. Si X est réunion dénombrable d'ensembles de mesures finies, on dit que μ est σ-finie.
3. Si $\mu(X) = 1$, on dit que $(X, \mathcal{A}, \mu)$ est un espace probabilisé. Les éléments de X sont appelés des éventualités et ceux de $\mathcal{A}$ des événements.

Definition 13. Un ensemble $N \in \mathcal{A}$ est dit négligeable par rapport à μ (ou μ-négligeable) si $\mu(N) = 0$.

Proposition 14. *Soient $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et $(S_n)_{n\geq 1}$ une suite d'ensembles négligeables. Alors $S = \bigcup_{n=1}^{+\infty} S_n$ est négligeable.*

Démonstration : On a $S = \bigcup_{n=1}^{+\infty} S_n \in \mathcal{A}$ avec $\mu(S_n) = 0$ pour tout $n \geq 1$. On a

$$0 \leq \mu(S) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \mu(S_n) = 0.$$

Definition 15. On dira qu'une propriété $\mathcal{P}$ est vraie μ-presque partout ($\mu - pp$) si l'ensemble sur lequel $\mathcal{P}$ est fausse est contenu dans un ensemble μ-négligeable.

Definition 16. Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré. La mesure μ est dite complète si tout sous-ensemble d'un ensemble négligeable est mesurable.

Theorem 17. *Il existe une tribu $\mathcal{L}$ sur $\mathbb{R}^n$ et une mesure λ sur $(\mathbb{R}^n, \mathcal{L})$ uniques telles que :*

- $\lambda\left(\prod_{i=1}^{n}]a_i, b_i[\right) = \prod_{i=1}^{n} (b_i - a_i)$.
- $\mathcal{L} \supset \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ *avec inclusion stricte.*
- λ *complète.*

$\mathcal{L}$ est appelée la tribu de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$ et λ est dite mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$.

Remarque Soit l'espace mesuré $(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}, \lambda)$. 1) Tout point de $\mathbb{R}^n$ est négligeable. Etablissons ce résultat dans le cas particulier où $n = 1$. Le sous ensemble $\{a\}$ de $\mathbb{R}$ est mesurable car c'est un fermé de $\mathbb{R}$. Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, nous avons

$$\{a\} \subset \left]a - \frac{1}{p}, a + \frac{1}{p}\right[.$$

Donc

$$\lambda(\{a\}) \leq \lambda\left(\left]a - \frac{1}{p}, a + \frac{1}{p}\right[\right)$$

et par conséquent

$$\lambda(\{a\}) \leq \frac{2}{p},\ \forall p \in \mathbb{N}^*.$$

Finalement

$$\lambda(\{a\}) = 0.$$

2) Toute partie finie ou dénombrable de $\mathbb{R}^n$ est négligeable. Par exemple, dans $(\mathbb{R}, \mathcal{L}, \lambda)$, l'ensemble $\mathbb{Q}$ est négligeable (bien qu'il soit dense dans $\mathbb{R}$). 3) La mesure de Lebesgue admet bien d'autres ensembles négligeables que les ensembles dénombrables. Par exemple, la frontière du pavé $\prod_{i=1}^{n}]a_i, b_i[$ est négligeable dans $\mathbb{R}^n$ sans être dénombrable.

2 Fonctions mesurables

3. Fonctions mesurables Soit $(X, \mathcal{A})$ un espace mesurable.

Definition 18. Une fonction $f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ est dite $\mathcal{A}$-mesurable si pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$

$$f^{-1}(]\alpha, +\infty[) = \{x \in X : f(x) > \alpha\} \in \mathcal{A}.$$

Dans la suite, nous utiliserons la notation $[f > \alpha]$ pour désigner l'ensemble

$$\{x \in X : f(x) > \alpha\}.$$

De même, nous noterons

- $[f \geq \alpha] = \{x \in X : f(x) \geq \alpha\}$;
- $[f \leq \alpha] = \{x \in X : f(x) \leq \alpha\}$;
- $[f < \alpha] = \{x \in X : f(x) < \alpha\}$;
- $[f = \alpha] = \{x \in X : f(x) = \alpha\}$.

Le lemme suivant donne quatre définitions équivalentes de la mesurabilité.

Lemma 19. *Soit $f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$. Les propositions suivantes sont équivalentes*

(a) $\forall\, \alpha \in \mathbb{R},\quad A_\alpha = \{x \in X : f(x) > \alpha\} \in \mathcal{A}$.

(b) $\forall\, \alpha \in \mathbb{R},\quad B_\alpha = \{x \in X : f(x) \leq \alpha\} \in \mathcal{A}$.

(c) $\forall\, \alpha \in \mathbb{R},\quad C_\alpha = \{x \in X : f(x) \geq \alpha\} \in \mathcal{A}$.

(d) $\forall\, \alpha \in \mathbb{R},\quad D_\alpha = \{x \in X : f(x) < \alpha\} \in \mathcal{A}$.

Definition 20. Soient $(X, \mathcal{A})$ un espace mesurable et E un sous-ensemble quelconque de X. On appelle fonction caractéristique de E, la fonction χ_E définie par

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \in E \\ 0 & \text{si} \quad x \notin E. \end{cases}$$

La fonction caractéristique possède les propriétés suivantes :

1. $\chi_\emptyset = 0$;
2. $\chi_X = 1$;
3. $\chi_{A\cap B} = \chi_A . \chi_B$;
4. $\chi_{A\cup B} = \chi_A + \chi_B - \chi_{A\cap B}$;
5. $\chi_{A^c} = 1 - \chi_A$.

Proposition 21. *Soit $A \subset X$. Alors la fonction caractéristique de A est mesurable si et seulement si l'ensemble A est mesurable.*

Proposition 22. *On considère l'espace mesurable $(\mathbb{R}^n, \mathcal{L})$ où $\mathcal{L}$ est la tribu de Lebesgue et $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$. Si f est continue alors f est $\mathcal{L}$-mesurable.*

Remark 23. Il existe des fonctions mesurables qui ne sont pas continues. C'est le cas par exemple de la fonction caractéristique de l'intervalle $]0,1[$ avec $X = \mathbb{R}$ et $\mathcal{A} = \mathcal{L}$.

Proposition 24. *Soient $(X, \mathcal{A})$ un espace mesurable et f, g deux applications $\mathcal{A}$-mesurables définies sur X et à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$. Alors les fonctions suivantes sont $\mathcal{A}$-mesurables*

1. *$f + g$, lorsque cette somme existe ;*
2. *$\max(f, g)$ et $\min(f, g)$;*
3. *Pour tout $\beta \in \mathbb{R}$, βf ;*
4. *$|f|$, f^2 et $f \times g$.*

Démonstration : En exercice

Proposition 25. *Soient $(X, \mathcal{A})$ un espace mesurable et $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite de fonctions $\mathcal{A}$-mesurables définies sur X et à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$. Alors $f = \sup_n f_n$, $g = \inf_n f_n$, $f^* = \liminf_n f_n$ et $g^* = \limsup_n f_n$ sont $\mathcal{A}$-mesurables.*

Démonstration : En exercice

Corollary 26. *Soient $(X, \mathcal{A})$ un espace mesurable et $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite de fonctions mesurables définies sur X et à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$. Si la suite $(f_n)_n$ converge simplement vers f sur X alors f est une fonction mesurable.*

Démonstration : En exercice

Definition 27. Soit $(X, \mathcal{A})$ un espace mesurable. Une fonction e définie sur X est dite étagée (ou simple) s'il existe un nombre fini d'ensembles mesurables $A_1, A_2, \ldots, A_n$ et n réels $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ tels que

$$e = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{A_i}. \tag{1}$$

Theorem 28. *Soit $f : (X, \mathcal{A}) \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ mesurable. Il existe une suite de fonctions étagées positives $(e_n)_{n\geq 1}$ telle que* *i)* $0 \leq e_1 \leq e_2 \leq \ldots \leq f$,

ii) *Pour tout* $x \in X$, *la suite* $(e_n(x))_n$ *converge vers* $f(x)$.

Autrement dit, toute fonction positive mesurable est limite simple d'une suite croissante de fonctions étagées positives.

4. Intégrale de fonctions positives Toutes les fonctions utilisées dans la suite de ce cours seront supposées mesurables. On définira l'intégrale de Lebesgue uniquement pour les fonctions mesurables.On considère $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré. Commençons par considérer le cas d'une fonction positive étagée.

Definition 29. Soit $e = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{A_i}$ une fonction étagée positive sur X. On appelle intégrale de e sur X par rapport à la mesure μ, le nombre positif (éventuellement $+\infty$) noté $\int_X e \, d\mu$ égal à $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu(A_i)$.

Definition 30. On dit que e est μ-intégrable sur X par rapport à μ si $\int_X e \, d\mu$ est finie.

Definition 31. Si E est un ensemble mesurable, on définit l'intégrale de e sur E par

$$\int_E e d\mu = \int_X e \chi_E d\mu.$$

En particulier si $E \in \mathcal{A}$, alors $\int_E d\mu = \mu(E)$.

Example 32. On se place dans $(\mathbb{R}, \mathcal{L}, \lambda)$ et on considère la fonction e définie par

$$e(x) = \begin{cases} 1 & si \quad x \in \mathbb{Q} \\ 0 & si \quad x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

La fonction e est positive étagée car $e = 1\chi_{\mathbb{Q}} + 0\chi_{\mathbb{Q}^c}$. Si $E = [0,1]$, alors

$$\int_{[0,1]} e \, d\lambda = \lambda\left([0,1] \cap \mathbb{Q}\right) = 0.$$

La fonction e est donc λ-intégrable au sens de Lebesgue sur $[0,1]$.

L'intégrale d'une fonction étagée positive possède les propriétés suivantes :

Proposition 33. *Soient* f, g *deux fonctions étagées positives et* α *un réel positif. On a*

1. $\int_X (f+g) \, d\mu = \int_X f \, d\mu + \int_X g \, d\mu$;
2. $\int_X \alpha f \, d\mu = \alpha \int_X f \, d\mu$;

3. *Si* $f \leq g$, *alors* $\displaystyle\int_X f d\mu \leq \int_X g d\mu$.

Definition 34. Soit $f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ une fonction mesurable positive. L'intégrale de f sur X par rapport à μ est définie par

$$\int_X f\, d\mu = \sup \left\{ \int_X e\, d\mu\,; 0 \leq e \leq f \text{ } et \text{ } e \text{ étagée} \right\}.$$

(La borne supérieure est prise sur toutes les fonctions étagées positives qui minorent la fonction f)

Remark 35. Toute fonction $f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ positive, mesurable, possède une intégrale au sens de Lebesgue. Cependant, cette intégrale est soit positive finie, soit égale à $+\infty$.

Definition 36. Soit $f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ une fonction mesurable positive. La fonction f est dite intégrable si $\displaystyle\int_X f\, d\mu$ est finie.

Si $E \in \mathcal{A}$, on pose

$$\int_E f\, d\mu = \int_X f\, \chi_E\, d\mu.$$

Proposition 37. *Soient* $f,\ g :\longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ *deux fonctions positives mesurables et* $\alpha \in \mathbb{R}_+$.

1. $\displaystyle\int_X (f+g)\, d\mu = \int_X f\, d\mu + \int_X g\, d\mu$;
2. $\displaystyle\int_X \alpha f\, d\mu = \alpha \int_X f\, d\mu$.

Proposition 38. *Soient* $f,\ g : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ *deux fonctions mesurables et* $E,\ F \in \mathcal{A}$.

1. *Si* $f \leq g$ *alors* $\displaystyle\int_E f\, d\mu \leq \int_E g\, d\mu$;
2. *Si* $E \cap F = \emptyset$ *alors* $\displaystyle\int_{E\cup F} f\, d\mu = \int_E f d\mu + \int_F f d\mu$;
3. *Si* $E \subset F$ *alors* $\displaystyle\int_E f\, d\mu \leq \int_F f\, d\mu$.

Nous donnons à présent le théorème de la convergence monotone appelé aussi théorème de Beppo-Levi qui est l'un des principaux résultats de la théorie de l'intégrale de Lebesgue. **Théorème**[Théorème de convergence monotone] Soit $(f_n)_n$ une suite croissante de fonctions mesurables positives qui converge simplement vers une fonction f. Alors

$$\lim_{n\to+\infty} \int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu.$$

Démonstration :Si $(A_n)_{n\geq 0}$ est une suite croissante d'ensembles mesurables alors

$$\mu\left(\bigcup_{n\geq 0} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \mu\left(A_n\right).$$

Montrons le lemme suivant :

Lemma 39. *Soit e une fonction étagée positive et $(B_n)_n$ une suite croissante d'ensembles mesurables avec $X = \bigcup_n B_n$. Alors on a*

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{B_n} e\, d\mu = \int_X e\, d\mu.$$

Démonstration :On a $e = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \chi_{A_i}$, donc $\int_{B_n} e\, d\mu = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \mu\left(A_i \cap B_n\right)$. La suite $(A_i \cap B_n)_n$ est croissante et $A_i = \bigcup_n (A_i \cap B_n)$ d'où

$$\mu\left(A_i\right) = \lim_{n\to+\infty} \mu\left(A_i \cap B_n\right).$$

Par conséquent

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{B_n} e d\mu = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \mu\left(A_i\right) = \int_X e d\mu.$$

Démontrons à présent le théorème : La fonction f est mesurable comme limite simple d'une suite de fonctions mesurables. D'une part, on a

$$\begin{aligned} f_n \leq f \quad &\Longrightarrow \quad \int_X f_n d\mu \leq \int_X f d\mu \\ &\Longrightarrow \quad \lim_{n\to+\infty} \int_X f_n d\mu \leq \int_X f d\mu. \end{aligned} \tag{2}$$

D'autre part, soit e une fonction étagée positive telle que $0 \leq e \leq f$ et soit $\varepsilon \in]0,1[$. On pose

$$B_n = \left\{x \in X / \ f_n(x) \geq (1-\varepsilon) e(x)\right\}.$$

L'ensemble B_n est mesurable et la suite $(B_n)_n$ est croissante. De plus on a $X = \bigcup_n B_n$. En effet pour $x \in X$, la suite $(f_n(x))_n$ converge vers $f(x)$:

- Si $f(x) = 0$ alors $e(x) = 0$ et donc $x \in B_n$;
- Si $0 < f(x) < +\infty$ alors il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

  $$f_{n_0}(x) \geq (1-\varepsilon) f(x) \geq (1-\varepsilon) e(x),$$

  donc $x \in B_{n_0}$;

- Si $f(x) = +\infty$, alors il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$f_{n_0}(x) \geq (1-\varepsilon)e(x),$$

d'où $x \in B_{n_0}$.

On constate que $f_n \geq (1-\varepsilon)e\,\chi_{B_n}$, donc

$$\int_X f_n \, d\mu \geq (1-\varepsilon) \int_{B_n} e d\mu.$$

Il vient

$$\begin{aligned} \lim_{n\to+\infty} \int_X f_n d\mu &\geq (1-\varepsilon) \lim_{n\to+\infty} \int_{B_n} e d\mu \\ &\geq (1-\varepsilon) \int_X e d\mu. \end{aligned}$$

Ceci étant vrai pour tout $\varepsilon \in]0,1[$, on en déduit que :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_X f_n \, d\mu \geq \int_X e \, d\mu,$$

et par suite

$$\lim_{n\to+\infty} \int_X f_n \, d\mu \geq \int_X f \, d\mu. \tag{3}$$

De (3) et (2), on tire

$$\lim_{n\to+\infty} \int_X f_n \, d\mu = \int_X f \, d\mu,$$

ce qui termine la démonstration du théorème.

Lemma 40 (Lemme de Fatou)**.** *Soit $(f_n)_n$ une suite d'éléments de M^+. On a*

$$\int_X \liminf_n f_n d\mu \leq \liminf_n \int_X f_n d\mu.$$

Démonstration : Soit la fonction $g_n = \inf_{m\geq n} f_m$. La suite $(g_n)_n$ est croissante, pour tout n la fonction g_n est positive mesurable et

$$\lim_n g_n = \sup_n g_n = \liminf_n f_n.$$

Il en résulte que

$$\int_X \liminf_n f_n \, d\mu = \lim_n \int_X g_n \, d\mu = \liminf_n \int_X g_n \, d\mu.$$

Or $g_n \leq f_n$ donc $\int_X g_n \, d\mu \leq \int_X f_n \, d\mu$ et par conséquent

$$\liminf_n \int_X g_n \, d\mu \leq \liminf_n \int_X f_n \, d\mu.$$

Proposition 41. *Soit $f \in M^+$. On a*

$$f = 0 \ \ \mu - pp \Longleftrightarrow \int_X f \, d\mu = 0.$$

Démonstration : [$\Longleftarrow$)] Soit $E_n = \left\{ x \in X / \ f(x) \geq \frac{1}{n} \right\}$. L'ensemble E_n est mesurable et on a $f \geq \frac{1}{n} \chi_{E_n}$. Donc

$$\int_X f \, d\mu \geq \frac{1}{n} \mu(E_n),$$

ce qui prouve que $\mu(E_n) = 0$. On a

$$\{x \in X / \ f(x) > 0\} = \bigcup_{n=1}^{+\infty} E_n.$$

Cet ensemble mesurable est donc négligeable comme réunion dénombrable d'ensembles négligeables.

$\Longrightarrow$ Posons $E = \{x \in X / \ f(x) > 0\}$. Il existe un ensemble N négligeable tel que $E \subset N$. Or $E \in \mathcal{A}$, donc $\mu(E) = 0$. Considérons la suite de fonctions de terme général $f_n = n \chi_E$. Nous avons

$$\int_X f_n d\mu = n\mu(E) = 0.$$

Notons que $f \leq \liminf_n f_n = \lim_n f_n$. On a :

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_X f d\mu \\ &\leq \int_X \liminf_n f_n d\mu \\ &\leq \liminf_n \int_X f_n d\mu = 0. \end{aligned}$$

Par conséquent

$$\int_X f d\mu = 0.$$

Proposition 42. *Soit $f \in M^+$ et N un ensemble μ-négligeable. Alors, on a*

$$\int_N f d\mu = 0.$$

Proposition 43. *Soient $f, \ g : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ mesurables. On a*

$$f = g \ \mu - pp \Longrightarrow \int_X f d\mu = \int_X g d\mu.$$

5. Fonctions intégrables Soient $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré, $f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$, f^+ et f^- les fonctions positives définies par :

$$f^+(x) = \sup\{f(x), 0\} \text{ et } f^-(x) = \sup\{-f(x), 0\}.$$

f^+ (*resp.* f^-) est dite partie positive (*resp.* négative) de f. On vérifie que

1. $f = f^+ - f^-$,
2. $|f| = f^+ + f^-$,

Remark 44. L'application f est mesurable si et seulement si f^+ et f^- sont mesurables.

Definition 45. Soit $f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ mesurable. On dit que f est intégrable sur X par rapport à μ, si f^+ et f^- le sont. L'intégrale de f est alors définie par

$$\int_X f d\mu = \int_X f^+ d\mu - \int_X f^- d\mu.$$

Si $E \in \mathcal{A}$ et f intégrable, on définit :

$$\int_E f d\mu = \int_X f \chi_E d\mu = \int_E f^+ d\mu - \int_E f^- d\mu.$$

Proposition 46. *Soit $f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ mesurable ;*

$$f \text{ est intégrable} \iff |f| \text{ est intégrable.}$$

Démonstration :

$\Longrightarrow$) Les applications f^+ et f^- sont intégrables, donc

$$\begin{aligned} \int_X |f| d\mu &= \int_X \left(f^+ + f^-\right) d\mu \\ &= \int_X f^+ d\mu + \int_X f^- d\mu < +\infty. \end{aligned}$$

$\Longleftarrow$) On a f mesurable et $\int_X |f| d\mu < +\infty$. Les fonctions positives f^+ et f^- sont mesurables et vérifient $f^+ \leq |f|$ et $f^- \leq |f|$. On en déduit que $\int_X f^+ d\mu < +\infty$ et $\int_X f^- d\mu < +\infty$, donc f est intégrable.

Cette proposition est fausse pour l'intégrale de Riemann. En effet la fonction f définie par

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si} \quad x \in \mathbb{Q} \\ +1 & \text{si} \quad x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

n'est pas Riemann-intégrable sur $X = [0, 1]$. Cependant $|f| = 1$ est Riemann-intégrable sur $X = [0, 1]$.

Proposition 47. *Toute fonction $f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ intégrable est finie pp*

Démonstration :Posons $E = \{x \in X \ : \ |f(x)| = +\infty\}$. Nous avons $E = \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} E_n$ où

$$E_n = \{x \in X \ : \ |f(x)| \geq n\}.$$

L'ensemble E_n est mesurable car $|f|$ l'est. On en déduit que E est mesurable.On a $n\,\chi_{E_n} \leq |f|$, donc

$$\mu(E) \leq \mu(E_n) \leq \frac{1}{n} \int_X |f| d\mu, \ \forall n \geq 1.$$

Comme $\int_X |f| d\mu < +\infty$ on en déduit que

$$\mu(E) = 0.$$

Ainsi, lorsqu'on fait du calcul intégral, on peut se limiter aux fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou dans $\mathbb{C}$. Dans toute la suite, nous désignerons par $\mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(X, \mathcal{A}, \mu)$, $\mathcal{L}^1(X)$ ou tout simplement $\mathcal{L}^1$ l'ensemble des fonctions $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ intégrables sur X par rapport à la mesure μ. Notons que pour toute fonction $f \in \mathcal{L}^1$

$$\left| \int_X f d\mu \right| \leq \int_X |f| d\mu.$$

Proposition 48. *Soient $f, \ g \in \mathcal{L}^1$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. On a*

1. *$\alpha f \in \mathcal{L}^1$ et $\int_X \alpha f \ d\mu = \alpha \int_X f d\mu$.*
2. *$f + g \in \mathcal{L}^1$ et $\int_X (f+g) d\mu = \int_X f d\mu + \int_X g d\mu$.*

Theorem 49 (Théorème de convergence dominée de Lebesgue)**.** *Soient $(f_n)_{n \geq 0}$ une suite de fonctions mesurables définies de X dans $\mathbb{R}$. On suppose que*

i) La suite (f_n) converge simplement vers f ;

ii) Il existe $g \in \mathcal{L}^1$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$|f_n| \leq g \tag{4}$$

Alors

- *Pour tout n, $f_n \in \mathcal{L}^1$ et $f \in \mathcal{L}^1$;*
- *$\lim_{n \to +\infty} \int_X |f_n - f| \, d\mu = 0$;*
- *$\lim_{n \to +\infty} \int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu$.*

Démonstration : • La fonction f est mesurable car c'est une limite simple de fonctions mesurables ; • L'inégalité (**??**) entraîne que pour tout n, $f_n \in \mathcal{L}^1$; • De la convergence simple de (f_n) vers f et de l'inégalité (**??**) on tire $|f| \leq g$, d'où $f \in \mathcal{L}^1$;

• On a $|f_n - f| \leq 2g$. Définissons la suite de fonctions mesurables positives

$$\varphi_n = 2g - |f_n - f| .$$

On a $2g = \lim_n \varphi_n = \liminf_n \varphi_n$. L'application du lemme **??** conduit à

$$\begin{aligned} \int_X 2g d\mu &\leq \liminf_n \int_X \varphi_n d\mu \\ &\leq \int_X 2g d\mu + \liminf_n \left(- \int_X |f_n - f| \, d\mu \right). \end{aligned}$$

On en déduit que

$$\limsup_n \int_X |f_n - f| \, d\mu \leq 0 \qquad \text{ou encore} \qquad \lim_n \int_X |f_n - f| \, d\mu = 0.$$

L'inégalité

$$\left| \int_X f_n d\mu - \int_X f d\mu \right| \leq \int_X |f_n - f| \, d\mu$$

permet de conclure.

6 Intégrale de Lebesgue et de Riemann La fonction $f = \chi_{\mathbb{Q} \cap [0,1]}$ n'est pas Riemann-intégrable. Cependant elle est Lebesgue-intégrable car

$$\int_{\mathbb{R}} f d\lambda = \lambda \left(\mathbb{Q} \cap [0,1] \right) = 0.$$

Theorem 50. *Soient $[a,b]$ un intervalle compact de $\mathbb{R}$ et f une fonction mesurable définie de $[a,b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Si f est Riemann-intégrable sur $[a,b]$ alors f est Lebesgue-intégrable sur $[a,b]$ et on a l'égalité*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{[a,b]} f(x) d\lambda(x). \tag{5}$$

Remark 51. On voit que dans le cas des intégrales propres, l'intégrale de Lebesgue est beaucoup plus générale que l'intégrale de Riemann. L'égalité (**??**) montre, toutefois, que l'on peut utiliser les techniques classiques (développement en somme, intégration par parties ou changements de variables, etc.) pour calculer l'intégrale de Lebesgue d'une fonction Riemann-intégrable.

Theorem 52. *Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction localement Riemann-intégrable sur I. Alors f est Lebesgue-intégrable sur I si et seulement si l'intégrale de Riemann généralisée $\displaystyle\int_I f(x)dx$ est absolument convergente et on a*

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx = \int_I f(x) d\lambda(x) \tag{6}$$

où α, $\beta \in \overline{\mathbb{R}}$ sont les extrémités de l'intervalle I.

Remark 53. On constate que lorsqu'une intégrale généralisée existe, l'intégrale de Lebesgue existe si et seulement si l'intégrale est absolument convergente et on a l'égalité (6). On voit que les intégrales généralisées semi-convergentes échapperont ainsi aux théorèmes d'intégration. Ceci semble constituer une petite victoire de l'intégrale de Riemann sur l'intégrale de Lebesgue. Mais une intégrale généralisée n'est pas à proprement parler, une intégrale de Riemann.

7. Intégrales dépendant d'un paramètre Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ borné ou non. On considère

$$\begin{array}{rccc} f: & I \times X & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (t,x) & \longmapsto & f(t,x). \end{array}$$

Theorem 54. *On suppose que*

i) l'application $x \longmapsto f(t,x)$ *est mesurable pour tout* $t \in I$,

ii) pour presque tout $x \in X$, *l'application* $t \longmapsto f(t,x)$ *est continue en* $t_0 \in I$,

iii) il existe $g \in \mathcal{L}^1$ *telle que pour tout* $t \in I\ :\ |f(t,x)| \leq g(x)$ *pp*

Alors, pour tout $t \in I$, *la fonction* $x \longmapsto f(t,x)$ *est intégrable et la fonction* F *définie par* $F(t) = \displaystyle\int_X f(t,x)d\mu(x)$ *est continue en* t_0.

La notation $d\mu(x)$ signifie que la mesure porte sur l'ensemble dont la variable est x. Démonstration :L'inégalité $|f(t,x)| \leq g(x)$ p.p. entraîne que la fonction

$$x \longmapsto f(t,x) \in \mathcal{L}^1.$$

Pour montrer la continuité de F en t_0, on considère une suite convergente $(t_n)_n$ d'éléments de I dont la limite est t_0 et on va prouver que la suite $(F(t_n))_n$ converge et de limite égale à $F(t_0)$.

Pour tout n, posons $h_n(x) = f(t_n, x)$ et $h(x) = f(t_0, x)$. Les fonctions h_n et h sont mesurables, $|h_n| \leq g$ p.p. et $(h_n)_n$ converge vers h presque partout. L'application du théorème de convergence dominée **??** implique que h_n et h sont intégrables et

$$\begin{aligned} F(t_0) &= \int_X f(t_0, x)\, d\mu(x) \\ &= \int_X h(x) d\mu(x) \\ &= \lim_n \int_X h_n(x) d\mu(x) \\ &= \lim_n \int_X f(t_n, x)\, d\mu(x) \\ &= \lim_n F(t_n). \end{aligned}$$

Theorem 55. *Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$. On suppose que*

i) l'application $x \longmapsto f(t,x)$ est intégrable pour tout $t \in I$,

ii) pour presque tout $x \in X$, $\dfrac{\partial f}{\partial t}(t,x)$ existe,

iii) il existe $g \in \mathcal{L}^1$ telle que pour tout $t \in I$ on a

$$\left|\frac{\partial f}{\partial t}(t,x)\right| \leq g(x) \ pp$$

Alors, pour tout $t \in I$, la fonction $x \longmapsto \dfrac{\partial f}{\partial t}(t,x)$ est intégrable, la fonction F définie par $F(t) = \displaystyle\int_X f(t,x)d\mu(x)$ est dérivable et on a

$$F'(t) = \int_X \frac{\partial f}{\partial t}(t,x)d\mu(x).$$

Remark 56. Ces deux théorèmes restent valables pour les fonctions $f(t,x)$ à valeurs dans $\mathbb{C}$.

Dans la suite, on notera

$$d\lambda(x) = dx \text{ pour } x \in \mathbb{R} \text{ et } d\lambda(x) = dx_1 dx_2 \dots dx_n \text{ pour } x \in \mathbb{R}^n.$$

8. Théorème de Fubini

Nous énoncerons ce théorème pour des fonctions de deux variables réelles.

Theorem 57. *Soient $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction mesurable et $E \times F$ un ensemble mesurable de $\mathbb{R}^2$.*

(i) Si f est positive sur $E \times F$ alors on a

$$\begin{aligned} \int_{E\times F} f(x,y)dxdy &= \int_E dx \int_F f(x,y)dy \\ &= \int_F dy \int_E f(x,y)dx, \end{aligned} \tag{7}$$

(= éventuellement à $+\infty$) ;

(ii) $f \in \mathcal{L}^1(E\times F) \Longleftrightarrow \displaystyle\int_E dx \int_F |f(x,y)|dy$ ou $\displaystyle\int_F dy \int_E |f(x,y)|dx$ est finie ;

(iii) Si $f \in \mathcal{L}^1(E \times F)$ alors on a les égalités (7).

Remark 58. L'aspect pratique à retenir est que l'on peut calculer une intégrale double en choisissant l'ordre d'intégrabilité que l'on veut, pourvu que l'une au moins des intégrales itérées en module existe. L'existence des deux intégrales

$$\int_E dx \int_F f(x,y)dy \text{ et } \int_F dy \int_E f(x,y)dx$$

n'implique pas l'intégrabilité de f sur $E \times F$.

9. Changement de variables Soient X et Y deux domaines de $\mathbb{R}^n$ et $\varphi : Y \longrightarrow X$ une fonction bijective telle que φ et φ^{-1} soient de classe C^1. On note $J_\varphi(y)$ la matrice jacobienne de φ au point y

$$J_\varphi(y) = \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial y_j}(y)\right)_{1\leq i,j\leq n}$$

où pour $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, φ_i est la $i^{i\grave{e}me}$ application coordonnée de φ.

Theorem 59. *Une fonction f est intégrable sur X si et seulement si $f(\varphi(y))\,|\det J_\varphi(y)|$ est intégrable sur Y et on a*

$$\int_X f(x)dx = \int_Y f(\varphi(y))\,|\det J_\varphi(y)|\,dy.$$

Example 60. Soient f une fonction mesurable définie de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}^*$. On considère l'intégrale

$$\int_{\mathbb{R}} f(ax)dx.$$

Soit

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & y & \longmapsto & x = \dfrac{1}{a}y \end{array}$$

la fonction bijective de classe $\mathcal{C}^1$ et dont la réciproque , également de classe $\mathcal{C}^1$, est définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $\varphi^{-1}(x) = ax$. Nous avons

$$\int_{\mathbb{R}} f(ax)dx = \frac{1}{|a|}\int_{\mathbb{R}} f(y)dy.$$

10. Espaces L^p Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré. L'ensemble $\mathcal{L}^1 = \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(X, \mathcal{A}, \mu)$ ou $\mathcal{L}^1_{\mathbb{C}}(X, \mathcal{A}, \mu)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Pour $f \in \mathcal{L}^1$, on pose

$$\|f\|_1 = \int_X |f| d\mu.$$

L'application $f \longmapsto \|f\|_1$ n'est pas une norme. En effet,

$$\|f\|_1 = 0 \Longleftrightarrow f = 0 \text{ pp}$$

C'est une semi norme sur $\mathcal{L}^1$ car pour tout f, $g \in \mathcal{L}^1$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, nous avons

1. $\|f + g\|_1 \leq \|f\|_1 + \|g\|_1$,
2. $\|\alpha f\|_1 = |\alpha|\|f\|_1$.

On sait (*cf.* l'exercice **??**) que pour tout $f,\ g \in \mathcal{L}^1$

$$f = g \text{ pp} \Longrightarrow \int_X f\,d\mu = \int_X g\,d\mu.$$

On introduit alors dans $\mathcal{L}^1$ la relation $\mathcal{R}$

$$f \mathcal{R} g \Longleftrightarrow f = g \text{ pp.}$$

On vérifie que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence et on pose

$$L^1 = L^1(X, \mathcal{A}, \mu) = \mathcal{L}^1/\mathcal{R}.$$

C'est l'espace vectoriel quotient, des classes d'équivalence des fonctions de $\mathcal{L}^1$ modulo l'égalité pp

$$L^1 = \left\{ \dot{f} : \ f \in \mathcal{L}^1 \right\}.$$

Dans ce qui suit, on identifie $\dot{f}$ et f. Ainsi, si $f \in L^1$, f désignera l'ensemble des fonctions g telles que $g = f$ pp

Proposition 61. *L'application*

$$\begin{array}{rccl} \|.\|_1 : & L^1 & \longmapsto & \mathbb{R}_+ \\ & f & \longrightarrow & \|f\|_1 = \displaystyle\int_X |f| d\mu \end{array}$$

est bien définie et c'est une norme sur L^1.

En effet, $\|f\|_1$ est indépendant du représentant choisi dans la classe de f. De plus, pour tout $f \in L^1$

$$\begin{array}{rcl} \|f\|_1 = 0 & \Longleftrightarrow & f = 0 \text{ pp} \\ & \Longleftrightarrow & \dot{f} = \dot{0} \\ & \Longleftrightarrow & f = 0 \text{ dans } L^1. \end{array}$$

Il est important de noter que

- L^1 est considéré comme un espace de fonctions (on ne distingue pas deux fonctions égales pp).
- L^1 est un espace vectoriel normé.

Definition 62. Pour $p \in [1, +\infty[$, on définit l'ensemble

$$L^p = \left\{ \dot{f} \ : \ X \longrightarrow \mathbb{R} / \ |\dot{f}|^p \in L^1 \right\}.$$

Nous avons les résultats suivants :

Proposition 63. *L'application*

$$\begin{array}{rccl} \|.\|_p : & L^p & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ & f & \longmapsto & \|f\|_p = \left(\displaystyle\int_X |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \end{array}$$

est bien définie et c'est une norme sur L^p.

Proposition 64. *(Inégalité de Hölder) Soient* $p,\ q \in]1, +\infty[$. *Si* $f \in L^p$ *et* $g \in L^q$ *avec* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, *alors*

$$fg \in L^1 \ \text{ et } \ \|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

Theorem 65. *Pour* $1 \leq p < +\infty$, L^p *est un espace de Banach (espace vectoriel normé complet).*

Remark 66. Si $X = \mathbb{R}$ et μ est la mesure de Lebesgue, on définit l'ensemble des (classes de) fonctions localement intégrables noté L^1_{loc} par

$$L^1_{loc} = \left\{ f \text{ mesurable} / \, \forall K \text{ compact}, \ \int_K |f| d\mu < +\infty \right\}.$$

Muni de l'addition et de la multiplication par un scalaire, L^1_{loc} est un espace vectoriel.