Ecole Hassania
des travaux Publics

Contrôle d'Analyse Numérique

I) Soit f une fonction continue sur $[a,b]$ et w une fonction-poids. On veut approcher l'intégrale $\int_a^b w(x) f(x)\,dx$ par la formule d'intégration

$$\int_a^b w(x) f(x)\,dx = K \sum_{i=0}^{n} f(x_i) + R(f) \qquad (1)$$

où la constante K et les abscisses x_i sont déterminés de telle sorte que la formule (1) soit exacte lorsque f est un polynôme de degré $(n+1)$ le plus élevé possible. (c-à-d $R(f) = 0$ si $f \in \mathcal{P}_{n+1}$)

1°) Montrer que l'on a $$K = \frac{1}{(n+1)} \int_a^b w(x)\,dx . \qquad (2)$$

2°) Si les abscisses x_i sont les racines du polynôme

$$\Pi_{n+1}(x) = \prod_{i=0}^{n} (x - x_i) = x^{n+1} + c_n x^n + \cdots + c_1 x + c_0 ,$$

a) Montrer que l'on a $$\Pi'_{n+1}(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{\Pi_{n+1}(x)}{x - x_i}$$

b) En déduire que les coefficients c_i sont solutions du système linéaire:

$$(S) \begin{cases} (n+1)\, c_n + m_1 = n\, c_n \\ (n+1)\, c_{n-1} + m_1 c_n + m_2 = (n-1)\, c_{n-1} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ (n+1)\, c_1 + m_1 c_2 + \cdots + m_{n-1} c_n + m_n = c_1 \end{cases} ,$$

et que l'on a la relation suivante :

$$m_{n+1} + c_n m_n + \cdots + c_1 m_1 + c_0 m_0 = 0 , \qquad (3)$$

avec $m_k = \sum_{i=0}^{n} x_i^k$, $k = 0, \ldots, n+1$.

3°). Déterminer la constante K, les coefficients c_i et les abscisses x_i, puis écrire la méthode d'intégration correspondante lorsque

a) $a = 0$, $b = 2$, $w(x) = 1$, $n = 2$, $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$

b) $a = -1$, $b = 1$, $w(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $n = 2$, $f(x) = \arcsin x$

Evaluer dans chacun des cas l'erreur d'intégration.

II)

On cherche les polynômes de degré n de la forme :

$$P_n(x) = x^n - n\alpha x^{n-1} + c_{n-2} x^{n-2} + \cdots + c_1 x + c_0$$

où $\alpha \geq 0$ donné, qui s'éloigne le moins de la fonction nulle sur $[-1,1]$ (càd telle que $\|P_n\|_\infty = \max\limits_{x\in[-1,1]} |P_n(x)|$ soit minimum)

1°) Montrer que cette "meilleure approximation" de la fonction nulle est unique. On le note $\widetilde{P}_n$. Caractériser ce polynôme.

2°) On considère le polynôme

$$Q(x) = \frac{1}{2^{n-1}} \left(\frac{1+\beta}{2}\right)^n T_n\left(\frac{2x+1-\beta}{1+\beta}\right), \quad \beta \geq 0$$

où T_n est le polynôme de Tchebychev de degré n, défini par

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x), \quad x \in [-1,1]$$

a) Montrer que les racines de $Q(x) = 0$ appartiennent à $[-1, \beta]$; et que Q atteint ses valeurs extrémales en des abscisses $\xi_1, \ldots, \xi_{n+1}$ de l'intervalle $[-1, \beta]$. Déterminer $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n+1}$.

b) On suppose que $\beta \geq 1$. Sous quelle condition sur β, $Q(x)$ admet-il n valeurs extrémales sur $[-1, 1]$.

c) En déduire que $\widetilde{P}_n$ est tel que $\alpha \leq \operatorname{tg}^2 \dfrac{\pi}{2n}$.

d) Montrer que l'hypothèse $\alpha \geq 0$ ne restreint pas la généralité du problème

III) Soient $\mathcal{D} = \{ (x_i, y_i), i = 1, \ldots, n \}$ un ensemble de n couples de nombres réels.
On notera $\bar{x}$ (resp. $\bar{y}$) la moyenne arithmétique des nombres x_i (resp. y_i) et $\text{cov}(x,y)$ la covariance des couples (x_i, y_i) :

$$\text{cov}(x,y) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) \quad , \quad \sigma_x = \sqrt{\text{cov}(x,x)} = \sqrt{V(x)}$$

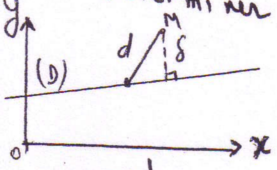
1°) On définit la distance d'un point $M_i = (x_i, y_i)$ de $\mathbb{R}^2$ à la droite (D) d'équation $y = ax + b$ par $d_i = |y_i - ax_i - b|$.
Déterminer les coefficients a et b pour que la droite (D) soit la droite de meilleure approximation au sens des moindres carrés, c-à-d telle que la valeur

$$E(a,b) = \sum_{i=1}^{n} d_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (y_i - ax_i - b)^2 \qquad (1)$$

soit minimale. Montrer que l'on a $a = \text{cov}(x,y) / V(x)$, $b = \bar{y} - a\bar{x}$.

2°) Montrer que $E(a,b)$ sera d'autant plus petite que le coefficient de corrélation défini par $\rho_{xy} = \dfrac{\text{cov}(x,y)}{\sigma_x \sigma_y}$, sera plus proche de 1 en valeur absolue.

3°) On choisit comme distance de $M_i = (x_i, y_i) \in \mathbb{R}^2$ à la droite (D) : $y = ax + b$, la distance géométrique usuelle définie par $\delta_i = |y_i - ax_i - b| / \sqrt{a^2 + 1}$
Déterminer les coefficients a et b telle que la valeur



$$F(a,b) = \sum_{i=1}^{n} \delta_i^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{(y_i - ax_i - b)^2}{a^2 + 1} \qquad (2)$$

soit minimale.
Montrer que l'on peut avoir

$$\begin{cases} a = \dfrac{\sigma_y - \sigma_x + \varepsilon \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\,\text{cov}^2(x,y)}}{2\,\text{cov}(x,y)} \\ b = \bar{y} - a\bar{x} \end{cases} , \quad \varepsilon = \pm 1$$

Cette solution est-elle unique ?

4°) <u>Application</u> Soit $\mathcal{D} = \{ (1,1), (\frac{1}{4}, 0.27), (\frac{1}{2}, 0.51), (\frac{1}{3}, 0.67) \}$

a) Construire la droite (D_1) vérifiant la condition (1)

b) Construire la ou les droite(s) (D_2) vérifiant la condition (2).