Exercice 1 - - *Troisième année* - ⋆

1. $\mathcal{L}^p(\mathbb{N},\mathcal{P}(\mathbb{N}),\mu_d)$ est l'espace des suites (u_n) telles que $\sum_{n\geq 1}|u_n|^p<+\infty$. Si $p<q$, et $(u_n)\in\ell^p$, alors $|u_n|\leq 1$ pour n assez grand et on a $|u_n|^q=|u_n|^p|u_n|^{q-p}\leq |u_n|^p$, et donc la série $\sum_n |u_n|^q$ est elle aussi convergente. D'autre part, on a $u_n=\frac{1}{n^\alpha}\in\ell^p\iff p\alpha>1$. Si on choisit donc α tel que $q\alpha>1$ et $p\alpha\leq 1$, alors $(u_n)\in\ell^q\backslash\ell^p$.
2. On va utiliser l'inégalité de Hölder. Prenons $f\in\mathcal{L}^p(\Omega)$. On a :
$$\int_\Omega |f|^p d\mu=\int_\Omega |f|^q 1 d\mu.$$
Soit r tel que $rp=q$, ie $r=q/p\in[1,+\infty[$, d'exposant conjugué r'. L'inégalité de Hölder donne
$$\begin{aligned}\int_\Omega |f|^p d\mu &\leq \left(\int_\Omega |f|^q d\mu\right)^{1/r}\left(\int_\Omega 1^{r'}d\mu\right)^{1/r'}\\ &\leq \mu(\Omega)^{1/r'}\|f\|_q^{1/r}.\end{aligned}$$
D'autre part, la fonction $f(x)=1/x^\alpha$ est dans $L^p([0,1])$ si et seulement si $p\alpha<1$. Prenant α tel que $p\alpha<1$ et $q\alpha>1$ on voit que l'inclusion est stricte dans ce cas.
3. Supposons par exemple $p\neq q$. Il suffit de prendre les fonctions f définies par $f(x)=1/x^\alpha$ si $x\in]0,1[$, $f=0$ ailleurs, et $g(x)=1/x^\alpha$ pour x dans $[1,+\infty[$, $g=0$ ailleurs. En raisonnant comme ci-dessus, on prouve que pour $p\alpha<1$ et $q\alpha>1$, on a $f\in\mathcal{L}^p$ mais pas dans $\mathcal{L}^q$. Le contraire se produit avec g (pour les mêmes valeurs de α).
4. La fonction $f(x)=1/\ln(x)$ est dans tous les espaces $L^p([0,1])$, car $|f|^p\leq 1/\sqrt{x}$ pour x assez petit. Elle n'est pas bornée donc pas dans $L^\infty([0,1])$.

Exercice 2 - - *Troisième année* - ⋆

1. On distingue deux cas : si $|f(x)|\leq 1$, alors on a $|f(x)|^p\leq|f(x)|^\alpha$. Si $|f(x)|\geq 1$, alors $|f(x)|^p\leq|f(x)|^\beta$. Dans tous les cas, l'inégalité demandée est satisfaite et ainsi, si $f\in L^\alpha(\mathbb{R})\cap L^\beta(\mathbb{R})$ on obtient $f\in L^p(\mathbb{R})$. $\{p\in[1,+\infty[\}=I$ est donc un intervalle, car pour tout $\alpha<\beta\in I$, le segment $[\alpha,\beta]$ est inclus dans I.
2. Il s'agit simplement d'une application du théorème de continuité sous le signe intégrale, car, en posant $F(p,x)=|f(x)|^p$, alors :
– $x\mapsto|f(x)|^p$ est mesurable pour tout p.
– $p\mapsto|f(x)|^p$ est continue pour tout x.
– $|F(p,x)|\leq|f(x)|^\alpha+|f(x)|^\beta$, fonction intégrable qui ne dépend pas de p.
Donc $p\mapsto\int_\mathbb{R}|f(x)|^p dx$ est continue.

Exercice 3 - - *Troisième année* - ⋆⋆

1. Il suffit simplement d'utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz :
$$|F(x)|^2\leq\int_{[0,x]}|f|^2d\lambda\int_{[0,x]}1^2d\lambda=x\int_{[0,x]}|f|^2d\lambda.$$
Cela donne le résultat, puisque quand $x\to 0$, $\int_{[0,x]}|f|^2d\lambda$ tend vers 0.

2. C'est un peu plus dur, puisque si on applique de but en blanc l'inégalité de Cauchy-Schwarz sur $[0,x[$, on obtient simplement que $\frac{|G(x)|}{\sqrt{x}} \leq M$ pour une certaine constante M. En fait, on va appliquer l'inégalité sur un intervalle $[a,x]$. Pour cela, fixons $\varepsilon > 0$ et remarquons que

$$\begin{aligned} |G(x)| &\leq \int_0^a |g|d\lambda + \int_a^x |g|d\lambda \\ &\leq \int_0^a |g|d\lambda + \sqrt{x-a}\left(\int_a^x |g|^2 d\lambda\right), \end{aligned}$$

où la dernière inégalité vient de l'inégalité de Cauchy-Schwartz sur $[a,x]$. On en déduit

$$\frac{|G(x)|}{\sqrt{x}} \leq \frac{C}{\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x-a}}{x}\left(\int_{[a,x]} |g|^2 d\lambda\right)^{1/2}.$$

En choisissant $a > 0$ de sorte que $\int_a^{+\infty} |g|^2 d\lambda < \varepsilon$, on voit que pour x assez grand, on a

$$\frac{|G(x)|}{\sqrt{x}} \leq \varepsilon,$$

ce qui est l'inégalité désirée.

Exercice 4 - Translation - *Troisième année* - $\star\star$

Comme suggéré, supposons d'abord que f est une fonction continue à support compact, et on suppose donc que son support est inclus dans un segment $[-A,A]$. D'après le théorème de Heine, f est en fait uniformément continue, et donc, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \eta > 0$ tel que $|x-y| < \eta \implies |f(x)-f(y)| < \varepsilon$. Or, si $|a| < \eta$ et $x \in \mathbb{R}$, $|(x-a)-x| < \eta$. En outre, $f(x)$ et $f(x-a)$ sont tous les deux nuls si x et $x-a$ sont tous les deux hors de $[-A,A]$. En particulier, si on suppose $|a| < 1$, $|f(x)-f(x-a)| = 0$ si $x \notin [-A-1, A+1]$.

$$\begin{aligned} \|\tau_a(f) - f\|_p^p &= \int_{\mathbb{R}} |f(x-a) - f(x)|^p dx \\ &= \int_{-A-1}^{A+1} |f(x-a) - f(x)|^p dx \\ &= \int_{-A-1}^{A+1} \varepsilon^p dx \\ &= (2A+1)\varepsilon^p. \end{aligned}$$

Ceci prouve bien le résultat si f est continue à support compact. Prenons maintenant f quelconque dans $L^p(\mathbb{R})$ et fixons $\varepsilon > 0$. Par densité des fonctions continues à support compact dans $L^p(\mathbb{R})$, il existe $g \in C_c(\mathbb{R})$ tel que $\|f-g\|_p < \varepsilon$. Par changement de variables, on a aussi $\|\tau_a(f) - \tau_a(g)\|_p = \|f-g\|_p < \varepsilon$. Maintenant, d'après le premier point, il existe $\eta > 0$ tel que si $|a| < \eta$, alors $\|\tau_a(g) - g\|_p < \varepsilon$. On conclut en écrivant :

$$\|f - \tau_a(f)\|_p \leq \|f-g\|_p + \|g - \tau_a(g)\|_p + \|\tau_a(g) - \tau_a(f)\|_p < 3\varepsilon.$$

Exercice 5 - Produit de convolution - *Troisième année* - $\star\star\star$

1. Il s'agit simplement d'une application de l'inégalité de Hölder : si on pose, pour $x \in \mathbb{R}$ fixé, $h(y) = f(x-y)$, alors $h \in L^p(\mathbb{R})$ avec $\|h\|_p = \|f\|_p$. On en déduit que $hg \in L^1(\mathbb{R})$ et l'estimation :
$$|f \star g(x)| \leq \int_{\mathbb{R}} |h(y)g(y)|dy \leq \|h\|_p \|g\|_q = \|f\|_p \|g\|_q.$$
2. Nous allons appliquer le théorème de Fubini. Montrons en effet que $(x,y) \mapsto f(x-y)g(y)$ est dans $L^1(\mathbb{R}^2)$. On a en effet, d'après le théorème de Fubini-Tonelli,
$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^2} |f(x-y)g(y)|dy &= \int_{\mathbb{R}} |g(y)| \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x-y)|dx\right) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}} |g(y)| \|f\|_1 dy \text{ changement de variables} \\ &= \|f\|_1 \|g\|_1.\end{aligned}$$
D'après le théorème de Fubini, on en déduit que, pour presque tout $x \in \mathbb{R}$, $f \star g(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-y)g(y)dy$ est défini, que cette fonction est intégrale et satisfait $\|f \star g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$.
3. Ecrivons ce qui est indiqué, et remarquons que, pour tout x, la fonction $y \mapsto |f(x-y)|^{1/q}$ est dans $L^q(\mathbb{R})$. D'autre part, d'après la question précédente, pour presque tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $y \mapsto (|f(x-y)|^{1/p}|g(y)|)^p$ est intégrable sur $\mathbb{R}$, ie $y \mapsto |f(x-y)|^{1/p}|g(y)|$ est dans $L^p(\mathbb{R})$. D'après l'inégalité de Hölder, on obtient, pour presque tout x de $\mathbb{R}$, que la fonction $y \mapsto |f(x-y)||g(y)|$ est intégrable, et que
$$\int_{\mathbb{R}} |f(x-y)||g(y)|dy \leq \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x-y)||g(y)|^p dy\right)^{1/p} \|f\|_1^{1/q}.$$
En passant à la puissance p, ceci devient :
$$|f \star g(x)|^p \leq (|f| \star |g|^p)(x) \|f\|_1.$$
On applique maintenant le résultat de la question précédente à $|f| \star |g|^p$, et on obtient $f \star g \in L^p$ avec l'estimation
$$\|f \star g\|_p^p \leq \|f\|_1 \|g\|_p^p \|f\|_1^{p/q} = \|f\|_1^p \|g\|_p^p.$$

Exercice 6 - Dualité - *Troisième année* - $\star$

1. Il s'agit simplement d'une reformulation de l'inégalité de Hölder.
2. Calculons d'abord $\|f\|_p$:
$$\|f\|_p^p = \int_{\mathbb{R}} |g(x)|^{p+pq-2p} dx = \|g\|_q^q.$$
D'autre part,
$$T(f) = \int_{\mathbb{R}} |g|^q = \|g\|_q^q.$$
On en déduit
$$\|T\| \geq \frac{|Tf|}{\|f\|_p} = \|g\|_q^{q-q/p} = \|g\|_q.$$

Si vous trouvez une erreur, une faute de frappe, etc... dans ces exercices, merci de la signaler à geolabo@bibmath.net Venez poursuivre le dialogue sur notre forum :

http://www.bibmath.net/forums