Exercice 1 Soit $a \in]0,1[$; on se propose de calculer $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ax}}{1+e^x}$.
On considère le rectangle C de sommet R, $-R$, $R+i(2\pi)$, $-R+i(2\pi)$ et on désigne par J_R le segment d'extremités R et $R+i(2\pi)$

1. Montrer que $\lim_{R\to+\infty} \int_{J_R} \frac{e^{az}dz}{1+e^z} = 0$
2. Calculer $\int_{C^+} \frac{e^{az}dz}{1+e^z}$
3. En déduire que $I = \frac{\pi}{\sin(a\pi)}$

Exercice 2 Posons $H_0(t) = \chi_{[0,+\infty[}$, $f(t) = H_0(t)\sin(t)$ et $g(t) = H_0(t)\cos(t)$

1. Vérifier que $(f * g)(x) = \frac{1}{2}x\sin(x)$
2. En déduire $L(x\sin(x))$ et $L(x\cos(x))$

Exercice 3 Chercher la fonction $f(x)$ telle que

1. $Lf(x) = \frac{2x}{x^2+4} + \frac{1}{x^2}$
2. $Lf(x) = \frac{1}{(x+2)^3} + \frac{x}{x^2-1}$
3. $Lf(x) = \frac{2x+1}{x(x^2-1)(x^2+x+1)}$

Exercice 4 Chercher les solutions des équations différentielles suivantes

1. $y^{(4)} - y = 1$ avec $y(0) = 3$, $y'(0) = 5$ et $y"(0) = y"'(0) = 0$
2. $y"' - y" + 2y = 0$ avec $y(0) = 2$, $y'(0) = -2$ et $y"(0) = 3$

***Solution de l'exercice** 1.* 1. On a

$$\int_{J_R}\frac{e^{az}dz}{1+e^z}=\int_0^{2\pi}\frac{e^{a(R+it)}idt}{1+e^{R+it}}$$

D'autre part, on a $|1+e^{R+it}|\geq|1-e^R|$; ce qui donne

$$\left|\int_{J_R}\frac{e^{az}dz}{1+e^z}\right|\leq\int_0^{2\pi}\frac{e^{aR}dt}{e^R-1}=2\pi\frac{e^{aR}}{e^R-1}$$

Il en résulte que $\lim\limits_{R\to+\infty}\int_{J_R}\frac{e^{az}dz}{1+e^z}=0$

2. Les pôles de la fonction sont $z_k=e^{i(2k+1)\pi}$. Le seul pôle intérieur est $z_0=i\pi$. Il en résulte que
$$\int_{C^+}\frac{e^{az}dz}{1+e^z}=2i\pi Res(f(z),i\pi)=-2i\pi e^{ai\pi}$$
3. En décomposant l'intégrale sur les quatres cotés du rectangle et en faisant tendre R vers $+\infty$, on obtient
$$(1-e^{2ia\pi})\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{ax}dx}{1+e^x}=-2i\pi e^{ia\pi}$$
ce qui permet de conclure

***Solution de l'exercice** 2.* 1. On a

$$\begin{aligned}(f*g)(x)&=\int_{I\!R}=\int_{I\!R}H_0(t)\sin(t)H_0(x-t)\cos(x-t)dt\\&=\int_0^x\sin(t)\cos(x-t)dt\\&=\frac{1}{2}\int_0^x(\sin(x)+\cos(2t-x))\,dt\\&=\frac{1}{2}x\sin(x)\end{aligned}$$

2. On a
$$L(x\sin(x))=2L(f*g)(x)=2Lf(x)Lg(x)=\frac{2x}{(1+x^2)^2}$$
et
$$L(x\cos(x))=L((x\sin(x))')-L(sin(x)=xL(x\sin(x))-L(\sin(x)=\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$$

***Solution de l'exercice** 3.* 1. $Lf(x)=\frac{2x}{x^2+4}+\frac{1}{x^2}=L(2\cos(2x))+L(x)$; ce qui donne $f(x)=x+2\cos(2x)$

2. $Lf(x)=\frac{1}{(x+2)^3}+\frac{x}{x^2-1}=\frac{1}{2}L(x^2)+\frac{1}{2}(Le^x+Le{-}x)$; ce qui donne $f(x)=\frac{1}{2}x^2+\cos(x)$
3. $Lf(x)=\frac{2x+1}{x(x^2-1)(x^2+x+1)}=L(-\frac{1}{2}e^{-x}+\frac{1}{2}e^x+e^{\frac{x}{2}}\cos(\frac{\sqrt{3}}{2}x)-1)$;
ce qui donne
$$f(x)=-\frac{1}{2}e^{-x}+\frac{1}{2}e^x+e^{\frac{x}{2}}\cos(\frac{\sqrt{3}}{2}x)-1$$

***Solution de l'exercice** 4.* 1. On a $L(y^{(4)} - y) = L1$; ce qui donne $p^4 Ly(p) - 3p^3 - 5p^2 - Ly = \frac{1}{p}$. Il en résulte que

$$Ly = -\frac{1}{4(p+1)} + \frac{2p}{p^2+1} + \frac{5}{2(p^2+1)} + \frac{9}{4(p-1)} - \frac{1}{p}$$

ce qui donne

$$y(x) = -\frac{1}{4}e^{-x} + 2\cos(x) + \frac{5}{2}\sin(x) + \frac{9}{4}e^{x} - 1$$

2. $L(y"' - y" + 2y) = 0$; ce qui donne

$$p^3 Ly - 2p^2 - 2p - 3 - p^2 Ly + 2p + 2 + 2Ly) = 0$$

ce qui donne

$$(p^3 - p^2 + 2)Ly = 2p^2 + 2p + 1$$

Par suite $Ly = \frac{2p^2+2p+1}{p^3-p^2+2} = \frac{1}{5(p+1) + \frac{9(p-1)}{5((p-1)^2+1)}} \frac{12}{5((p-1)^2+1)}$; ce qui donne

$$y(x) = \frac{1}{5}e^{-x} + \frac{9}{5}e^{x}\cos(x) + \frac{12}{5}e^{x}\sin(x)$$