Solution de l'exercice (??): a/Soit $z \in \mathbb{C}$, $z = x + iy$, $x \in \mathbb{R}$; $y \in \mathbb{R}$

$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy}$, d'où $|e^z| = e^x = e^{\mathcal{R}e(z)}$.

b/

$$\begin{aligned} e^z = 1 &\iff e^x e^{iy} = 1e^{i0} \\ &\iff e^x = 1 \text{ et } y = 0 + 2k\pi;\ k \in \mathbb{Z} \\ &\iff x = 0 \text{ et } y = 2k\pi \\ &\iff y = 2k\pi;\ k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

c/ On déduit de b/ que

$$e^{z_1} = e^{z_2} \iff e^{z_1 - z_2} = 1 \iff z_1 = z_2 + i2k\pi;\ k \in \mathbb{Z}$$

$\begin{array}{llll} f: & \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & z & \longmapsto & e^z \end{array}$ n'est donc pas injective.

Par ailleurs, soit $u \in \mathbb{C}$; existe-t-il un $z \in \mathbb{C}$ tel que

$$e^z = u \tag{.3}$$

Posons $z = x + iy$, $x \in \mathbb{R}$; $y \in \mathbb{R}$ et $u = |u|e^{iArg(u)}$. L'équation (.3) s'écrit alors $e^x e^{iy} = |u|e^{iArg(u)}$.

On en déduit que $e^x = |u|$ et $y = Arg(u) + 2k\pi;\ k \in \mathbb{Z}$. L'équation n'a pas de solutions si $u = 0$

Par contre, pour $u \in \mathbb{C}^*$, on constate qu'il y a une infinité de z tel que $e^z = u$, ce sont les $z = \ln u + iArg(u) + i2k\pi$.

Ainsi $\begin{array}{llll} f: & \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & z & \longmapsto & e^z \end{array}$ n'est pas surjective, mais $\begin{array}{llll} f: & \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C}^* \\ & z & \longmapsto & e^z \end{array}$ est surjective.

d/ Pour tout $z \in \mathbb{C}$, $e^{z+i2\pi} = e^z e^{i2\pi} = e^z$. f a une période $T = i2\pi$.

Il suffit donc de restreindre l'étude a une bande horizontale du plan complexe d'une largeur égale à 2π. Par exemple

$$U = \{z = x + iy, x \in \mathbb{R};\ -\pi \leq y < +\pi\}$$

e/ La fonction $\begin{array}{llll} f: & U & \longrightarrow & \mathbb{C}^* \\ & z & \longmapsto & e^z \end{array}$ est injective. En effet

$$e^{z_1} = e^{z_2} \iff z_1 = z_2 \quad \forall z_1, z_2 \in U$$

Comme elle est surjective, c'est donc une bijection. La fonction inverse est: $\begin{array}{llll} Log: & \mathbb{C}^* & \longrightarrow & U \\ & u & \longmapsto & Log(u) = \ln|u| \end{array}$

avec $-\pi \leq y < +\pi$.

f/ Pour $z = x + iy$, posons $Z = e^z = e^x e^{iy}$.

• La droite $y = y_0$ se transforme en l'ensemble $\{Z = e^x e^{iy_0};\ x \in I\!R\}$

c'est-à-dire demi-droite polaire d'argument y_0.

• Le segment vertical $x = 0,\ -\pi \leq y < +\pi$ est transformé en $\{Z = e^{iy};\ -\pi \leq y < +\pi\}$

c'est-à-dire, cercle de rayon 1.

• L'image de la bande $-\pi \leq \mathcal{I}m(z) < h$ avec $-\pi \leq h < \pi$, est le secteur $-\pi \leq Arg(u) < h$.

g/ Rappelons que $Log(u) = Log|u| + iArg(u)$; avec $-\pi \leq Arg(u) < +\pi$. L'égalité $Log(z_1 z_2) = Log(z_1) + Log(z_2)$ n'est pas toujours vraie. Prenons par exemple $z_1 = z_2 = -1$; on a $Log(z_1) = Log(z_2) = -i\pi$ et $Log(z_1 z_2) = Log(1) = 0$.

On voit donc que dans ce cas $Log(z_1 z_2) \neq Log(z_1) + Log(z_2)$.

Solution de l'exercice (??): a/ Il suffit d'appliquer les définitions.

b/ On a $z = x + iy$, d'où

$$\cos(z) = \cos(x + iy) = \cos(x)\cos(iy) - \sin(x)\sin(iy)$$

Or $\cos(iy) = \cosh(-y) = \cosh(y)$ et $\sin(iy) = \frac{1}{i}\sinh(-y) = i\sinh(y)$.

Il en découle que

$$\cos(z) = \cos(x + iy) = \cos(x)\cosh(y) - i\sin(x)\sinh(y)$$

Par suite,

$$\begin{aligned}
|\cos(z)|^2 &= \cos^2(x)\cosh^2(y) + \sin^2(x)\sinh^2(y) \\
&= \cos^2(x)(1 + \sinh^2(y)) + \sin^2(x)\sinh^2(y) \\
&= \cos^2(x) + \sinh^2(y)(\cos^2(x) + \sin^2(x)) \\
&= \cos^2(x) + \sinh^2(y)
\end{aligned}$$

On n'a pas toujours $|\cos(z)| \leq 1$. Il suffit de prendre par exemple $z = i$. On a alors

$$|\cos(z)|^2 = 1 + \sinh^2(1)$$

d'où $|\cos(z)| > 1$.

c/ $\bullet$ $\sin(z) = 0 \iff e^{iz} = e^{-iz}$

$$\begin{aligned}
&\iff e^{i2z} = 1\\
&\iff i2z = i2k\pi; k \in \mathbb{Z}\\
&\iff z = k\pi; k \in \mathbb{Z}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bullet \cos(z) = 0 &\iff e^{iz} = -e^{-iz}\\
&\iff e^{i2z} = -1 = e^{i\pi}\\
&\iff i2z = i\pi + i2k\pi; k \in \mathbb{Z}\\
&\iff z = (2k+1)\tfrac{\pi}{2}; k \in \mathbb{Z}.
\end{aligned}$$

Utilisant a/, il vient:

$$\cosh(z) = 0 \iff z = i(2k+1)\frac{\pi}{2}; k \in \mathbb{Z} \text{ et } \sinh(z) = 0 \iff z = ik\pi; k \in \mathbb{Z}.$$

Solution de l'exercice (??): Soit $z = x + iy$, alors $f(z) = \overline{z} = x - iy$. On a donc $\mathcal{U}(x,y) = x$ (Partie réelle de $f(z)$) et $\mathcal{V}(x,y) = -y$ (Partie imaginaire de $f(z)$).

Les conditions de Cauchy-Riemann ne sont vérifiées en aucun point, d'où le résultat.

Solution de l'exercice (??): On a $f(z) = \mathcal{U}(x,y) + i\mathcal{V}(x,y)$ avec $\mathcal{U}(x,y) = x^2 - y^2$. Intégrons les conditions de Cauchy-Riemann.

$\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial x} = \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial y} = 2x$; par conséquent $\mathcal{V}(x,y) = 2xy + \alpha(x)$. D'autre part,

$$\begin{aligned}
\tfrac{\partial \mathcal{U}}{\partial y} = -\tfrac{\partial \mathcal{V}}{\partial x} &\iff -2y = -2y - \alpha'(x)\\
&\iff \alpha'(x) = 0\\
&\iff \alpha(x) = c \;\; \text{(c est constante)}
\end{aligned}$$

Il en résulte que

$$\begin{aligned}
f(z) &= x^2 - y^2 + i2xy + ic\\
&= (x+iy)^2 + ic
\end{aligned}$$

Donc $f(z) = z^2 + ic$.

Solution de l'exercice (??): Intégrons les conditions de Cauchy:

$$\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial y} = \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial x} = -e^{-x}(x\sin y - y\cos y) + e^{-x}\sin y$$

ce qui donne

$$\mathcal{V}(x,y) = ye^{-x}\sin y + xe^{-x}\cos y + \varphi(x)$$

où φ est une fonction de la seule variable x. On a aussi

$$\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x} = -\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial y}$$

c'est-à-dire $-ye^{-x}\sin y - xe^{-x}\cos y + e^{-x}\cos y + \varphi^{'}(x) = -ye^{-x}\sin y - xe^{-x}\cos y + e^{-x}\cos y$, soit $\varphi^{'}(x) = 0$. Donc $\varphi(x) = k$ où k est une constante. Ainsi $\mathcal{V}(x,y) = e^{-x}(y\sin y + x\cos y) + k$. On note que $f(z)$ s'écrit alors $f(z) = ize^{-z} + ik$.

Solution de l'exercice (??): Partant de la relation

$$a\mathcal{U}(x,y) + b\mathcal{V}(x,y) = c \quad \forall x,y \in I\!R$$

on tire

$$\begin{cases} a\frac{\partial\mathcal{U}}{\partial x} + b\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial x} & = & 0 \\ a\frac{\partial\mathcal{U}}{\partial y} + b\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial y} & = & 0 \end{cases}$$

Utilisant alors les conditions de Cauchy, il vient

$$\begin{cases} a\frac{\partial\mathcal{U}}{\partial x} + b\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial x} & = & 0 \\ b\frac{\partial\mathcal{U}}{\partial y} - a\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial y} & = & 0 \end{cases}$$

Ce système de deux équations à deux inconnues a un déterminant $\Delta = -(a^2 + b^2)$ non nul car sinon a,b et c seraient tous nuls, ce qui contredirait l'hypothèse.
Ce système a donc une solution unique $\frac{\partial\mathcal{U}}{\partial x} = \frac{\partial\mathcal{V}}{\partial x} = 0$. Le système de Cauchy donne alors $\frac{\partial\mathcal{U}}{\partial y} = \frac{\partial\mathcal{V}}{\partial y} = 0$.
Ainsi $\mathcal{U}$,$\mathcal{V}$ et f sont constantes.

Solution de l'exercice (??): Posons $f(z) = \sin(\pi z^2) + \cos(\pi z^2)$. La fonction f est holomorphe sur $\mathbb{C}$. On a

$$\frac{1}{(z-1)(z-2)} = \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-1}$$

d'où

$$I = \int_{\mathcal{C}^+} \frac{f(z)}{z-2}\,dz - \int_{\mathcal{C}^+} \frac{f(z)}{z-1}\,dz$$

Les points $z_0 = 2$ et $z_1 = 1$ sont intérieurs au cercle $\mathcal{C}$. Il suffit donc d'appliquer la formule de Cauchy,

$$I = 2\pi i f(z_0) - 2\pi i f(z_1) = 4i\pi.$$

Solution de l'exercice (??): f est holomorphe sur et l'intérieur du cercle $\mathcal{C}(z_0,r)$. On peut donc appliquer la formule de Cauchy

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathcal{C}^+} \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz.$$

Or $z \in \mathcal{C} \Longleftrightarrow z = z_0 + re^{i\theta}$ avec $\theta \in [0,2\pi]$.

Il en résulte donc que

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + re^{i\theta})}{re^{i\theta}}\, ire^{i\theta} d\theta$$

ou encore $f(z_0) = \frac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta})\, d\theta$.

On voit que $f(z_0)$ représente la valeur moyenne des valeurs de f sur le cercle.

Solution de l'exercice (??): On applique la formule de Cauchy avec $f(z) = 1 \;\; \forall z \in \mathbb{C}$ et $z_0 = 0$ intérieur à Γ, il vient

$$\int_{\Gamma^+} \frac{dz}{z}\, dz = 2\pi i f(0) = 2\pi i$$

Par ailleurs

$$z \in \Gamma \Longleftrightarrow z = z(t) = a\cos t + ib\sin t \;\text{ avec }\; t \in [0,2\pi]$$

On a donc

$$\begin{aligned}
\int_{\Gamma^+} \frac{dz}{z}\, dz &= \int_0^{2\pi} \frac{-a\sin t + ib\cos t}{a\cos t + ib\sin t}\, dt \\
&= \int_0^{2\pi} \frac{(-a\sin t + ib\cos t)(a\cos t - ib\sin t)}{a^2\cos^2 t + b^2\sin^2 t}\, dt \\
&= 2\pi i
\end{aligned}$$

En identifiant les deux parties imaginaires, il vient

$$\int_0^{2\pi} \frac{ab(\cos^2 t + \sin^2 t)}{a^2\cos^2 t + b^2\sin^2 t}\, dt = 2\pi$$

d'où le résultat.

Solution de l'exercice (??): On $z \in \mathcal{C} \Longleftrightarrow z = R + ix$ avec $x \in [0,1]$. On procède par majoration

$$\begin{aligned}
|I| &= \left| \int_0^1 \frac{e^{ia(R+ix)}}{e^{2\pi(R+ix)} - 1} i\, dx \right| \\
&\leq \int_0^1 \frac{e^{-ia}}{e^{2\pi R} - 1}\, dx \\
&\leq \tfrac{1}{e^{2\pi R} - 1}
\end{aligned}$$

d'où l'on tire que $\displaystyle\lim_{R \to +\infty} I = 0$.

Solution de l'exercice (??): Ici il s'agit du demi-cercle situé dans le demi-plan des $z = x + iy$

avec $y \geq 0$.

Si $z \in \mathcal{C}$, alors $z = Re^{i\theta}$, $0 \leq \theta \leq \pi$. D'où

$$I(R) = \int_{\mathcal{C}^+} \frac{z^2 - b^2}{z^2 + b^2} \frac{e^{iaz}}{z} \, dz$$

Ainsi, pour R assez grand, on a

$$|I_R| \leq \int_0^{\pi} \frac{R^2 + b^2}{R^2 - b^2} \frac{e^{-aR\sin\theta}}{R} R \, d\theta$$

c'est-à-dire

$$|I_R| \leq \frac{R^2 + b^2}{R^2 - b^2} \int_0^{\pi} e^{-aR\sin\theta} \, d\theta$$

Cette dernière intégrale a été majorée dans la démonstration du lemme????????. On a donc $|I_R| \leq \frac{R^2+b^2}{R^2-b^2} \frac{\pi}{aR} \left[1 - e^{-aR}\right]$ et par suite $\lim\limits_{R \to +\infty} I_R = 0$.

Solution de l'exercice (??): a/ On constate que $z_0 = p$ et $z_1 = \frac{1}{p}$ sont des pôles simples. $z_2 = 0$ est un pôle d'ordre 4.

$$Res(f,p) = \lim_{z \to p} (z - p) f(z) = \frac{(p^4 + 1)^2}{p^3(p^2 - 1)} \quad \text{et} \quad Res(f,\frac{1}{p}) = \lim_{z \to \frac{1}{p}} (z - \frac{1}{p}) f(z) = \frac{(p^4 + 1)^2}{p^3(1 - p^2)}$$

En ce qui concerne le pôle 0, on pose

$$\begin{aligned} g(z) = z^4 f(z) &= (z^4 + 1)^2 \left[\tfrac{1}{z-p} - \tfrac{1}{z-\frac{1}{p}}\right] \\ &= (z^4 + 1)^2 \tfrac{p}{p^2-1} \left[\tfrac{1}{z-p} - \tfrac{1}{z-\frac{1}{p}}\right] \\ &= (z^4 + 1)^2 \tfrac{p}{p^2-1} \left[\left(-\tfrac{1}{p}\right) \tfrac{1}{1-\frac{z}{p}} + p \tfrac{1}{1-pz}\right] \end{aligned}$$

$g(z)$ est développable en série entière dans le disque ouvert de centre 0 et de rayon $r = \inf \left(|p|; \left|\frac{1}{p}\right|\right)$. Ainsi, on a

$$g(z) = \left[z^8 + 2z^4 + 1\right] \left[\frac{1}{1 - p^2}\right] \left[\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{z}{p}\right)^n - p^2 \sum_{n=0}^{+\infty} (pz)^n\right]$$

Le résidu de f en 0 est le coefficient de z^3, c'est-à-dire

$$Res(f,0) = \frac{1}{1 - p^2} \left[\frac{1}{p^3} - p^5\right] = \frac{1 - p^8}{p^3(1 - p^2)}.$$

b/ $f(z) = \frac{1}{\sin z}$. On donne une remarque générale sur les zéros d'une fonction holomorphe. Soit f holomorphe sur un domaine ouvert $D \subset \mathbb{C}$. On suppose que $a \in D$ avec $f(a) = 0$.

On sait que f admet un développement de Taylor au voisinage de a:

$$f(z) = f(a) + (z-a)f^{'}(a) + \frac{(z-a)^2}{2!}f^{''}(a) + \cdots$$

Si $f^{'}(a) \neq 0$ alors $f(z) = (z-a)h(z)$ avec h holomorphe au voisinage de a et $h^{'}(a) \neq 0$. On dit dans ce cas que a est un zéro simple de $f(z)$.

Plus généralement, si $f^{(k)}(a) = 0$ pour $k = 0,\ldots,N-1$ et si $f^N(a) \neq 0$ alors au voisinage de af s'écrit $f(z) = (z-a)^N g(z)$ avec g holomorphe au voisinage de a et $g(a) \neq 0$. On dit dans ce cas que a est un zéro d'ordre N de $f(z)$.

Considérons ici $\varphi(z) = \sin z$, holomorphe sur $\mathbb{C}$. Les zéros sont $z_k = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ (cf. exercice (**??**) c/).

Comme $\varphi^{'}(z_k) = \cos k\pi = (-1)^k \neq 0$, on déduit que $z_k = k\pi$ est un zéro simple de $\varphi(z)$. Ainsi $f(z) = \frac{1}{\varphi(z)} = \frac{1}{(z-z_k)H_k(z)}$ avec $H_k(z)$ holomorphe au voisinage de z_k et $H_k(z_k) \neq 0$.

Il en résulte que les z_k sont des pôles simples de $f(z)$ et

$$Res(f,z_k) = \frac{1}{\varphi^{'}(z_k)} = \frac{1}{(-1)^k} = (-1)^k$$

c/ $f(z) = \frac{1}{z^n-1},\quad n \in \mathbb{N}^*$. Les points singuliers sont les racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité $z_k = e^{i\frac{2k\pi}{n}},\ k = 0,\ldots,n-1$.

La fonction s'écrit

$$f(z) = \frac{1}{(z-z_0)(z-z_1)\ldots(z-z_{n-1})}$$

On voit que chaque z_k est un pôle simple et $Res(f,z_k) = \frac{1}{nz_k^{n-1}} = \frac{z_k}{n}$.

d/ Soit $f(z) = \cos\left(\frac{1}{z}\right)$, $z_0 = 0$ est un point singulier. Le développement de Laurent de f au tour de $z_0 = 0$ s'écrit

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n)!}\frac{1}{z^{2n}},\ \forall z \neq 0$$

On constate que $z_0 = 0$ est un point singulier essentiel et on voit que $Res(f,0) = 0$.

e/ Soit $f(z) = \sin\left(\frac{1}{z}\right)$, alors $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!}\frac{1}{z^{2n+1}},\ \forall z \neq 0$. $z_0 = 0$ est un point singulier essentiel et $Res(f,0) = 1$.

f/ Soit $f(z) = \frac{e^z}{(z-1)(z-2)^3}$. La fonction e^z est une fonction entière. $z_0 = 1$ est un pôle simple et $Res(f,1) = -e$. $z_1 = 2$ est un pôle d'ordre 3. On pose $g(z) = (z-2)^3 f(z) = \frac{e^z}{z-1}$ et $z - z_0 = u$. La fonction $g(z_0+u) = g(2+u) = e^2 e^u \frac{1}{1+u}$. Elle admet un développement en série entière autour de 0 et $Res(f,2) = \frac{e^2}{2}$ (c'est le coefficient de u^2).

g/ Soit $g(z) = e^{\frac{1}{z}}$. On a $\forall z \neq 0 \;\; e^{\frac{1}{z}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{1}{n! z^n}$. $z_0 = 0$ est donc un point singulier essentiel de f et $Res(f,0) = 1$.

h/ Soit $f(z) = \frac{2ze^{-\pi z}}{1-e^{-2\pi z}}$. Posons $g(z) = 2ze^{-\pi z}$ et $h(z) = 1 - e^{-2\pi z}$. Déterminons les zéros de $h(z)$.

$$h(z) = 0 \Longleftrightarrow e^{-2\pi z} = 1 \Longleftrightarrow -2\pi z = i2k\pi \Longleftrightarrow z = z_k = ik,\, k \in \mathbb{Z}$$

Comme $h^{'}(z_k) = 2\pi e^{-2\pi z_k} = 2\pi \neq 0$, on en déduit que z_k est un zéro simple de h. Nous avons donc

$$f(z) = \frac{2ze^{-\pi z}}{(z - z_k)H_k(z)}$$

avec H_k holomorphe au voisinage de z_k et $H_k(z_k) \neq 0$. Il est clair que si $z_k \neq 0$, c'est-à-dire si $k \neq 0$, $z_k = ik$ est un pôle simple de $f(z)$ et

$$Res(f,z_k) = \frac{2z_k e^{-\pi z_k}}{2\pi e^{-2\pi z_k}} = \frac{ik}{\pi} e^{-ik\pi} = \frac{ik}{\pi}(-1)^k$$

Dans le cas où $k = 0$, le point singulier éliminable car $\lim_{z \to 0} f(z)$ existe et est finie.