INTÉGRATION
et applications

Christian BOURDARIAS

Groupe de Modélisation
Mathématique et Mécanique

Version Septembre 2000

AVANT PROPOS

Ce polycopié contient l'intégralité du cours d'intégration de Licence de Mathématiques enseigné à l'Université de Savoie entre septembre 1996 et juin 2000, ainsi que quelques compléments. La partie réellement enseignée, correspondant à un volume horaire de 35h, est constituée des chapitres 1 (suivant les connaissances des étudiants), 2 (seulement les idées), 3 à 8, 9 sauf le paragraphe 9.6 sur la compacité dans les espaces L^p. Les deux chapitres de probabilités donnés en annexe ne sont plus enseignés depuis la création du module optionnel de probas-stats. L'essentiel des TD se trouve à la fin de chaque chapitre, tous les sujets d'examen sont en annexe.

Pour rédiger (par approximations successives) ce document, je me suis inspiré des ouvrages suivants :

1. le cours de Mesure et Intégration de Thierry Gallouët et Raphaèle Herbin (Université de Provence), téléchargeable sur le site du groupe GM3 (Groupe de Recherche en Mathématique et Mécanique) :
   http ://www-gm3.univ-mrs.fr/polys/index.html
2. le livre de Daniel Revuz "Mesure et intégration" publié chez Hermann (coll. Méthodes),
3. le livre de Marc Briane et Gilles Pagès "Théorie de l'intégration" publié chez Vuibert,
4. dans une moindre mesure, le livre de Walter Rudin "Analyse réelle et complexe" publié chez Masson,
5. le livre de Joël Benoist et Alain Salinier "Exercices de calcul intégral" publié chez Masson,

ainsi que de notes personnelles, essentiellement issues du cours d' Intégration d'André Gramain (Université de Tours), publié chez Hermann.

Table des matières

Chapitre 1

Préliminaires

Objectif : passer en revue quelques notions et outils auxquels il sera fait constamment appel dans la suite du cours.

1.1 Droite achevée $\overline{\mathbb{R}}$.

Une suite à valeurs dans $\mathbb{R}$ n'a pas toujours une valeur d'adhérence, c'est lié à la non-compacité de l'espace métrique $(\mathbb{R}, |.|)$. Une suite croissante et majorée de $\mathbb{R}$ converge vers sa borne supérieure : on peut s'affranchir de la deuxième condition en donnant à "$+\infty$" un statut convenable.
On désigne par $\overline{\mathbb{R}}$ l'ensemble obtenu en adjoignant à $\mathbb{R}$ deux "éléments étrangers" notés $-\infty$ et $+\infty$: $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, muni de la relation d'ordre prolongeant celle de $\mathbb{R}$ et pour laquelle on a : $\forall x \in \mathbb{R} \quad -\infty < x < +\infty$.
$\overline{\mathbb{R}}$ est muni de la "topologie de l'ordre" i.e. de la topologie définie à partir des intervalles. Ainsi on obtient une base de voisinages de $a \in \overline{\mathbb{R}}$ en considérant :
- les intervalles $]a-r, a+r[,\ r \in \mathbb{R}_+^* \quad$ si $a \in \mathbb{R}$,
- les intervalles $]A, +\infty],\ A \in \mathbb{R} \quad$ si $a = +\infty$,
- les intervalles $[-\infty, A[,\ A \in \mathbb{R} \quad$ si $a = -\infty$.

Remarque 1.1.1 Considérons l'application $\varphi \ : \ ([-1,1], |.|) \to \overline{\mathbb{R}}$ telle que $\varphi(-1) = -\infty$, $\varphi(1) = +\infty$ et $\varphi(x) = \tan \dfrac{\pi x}{2} \quad si \quad |x| \neq 1$. La topologie de $\overline{\mathbb{R}}$ définie ci dessus est aussi l'unique topologie qui fait de φ un homéomorphisme (en particulier elle est donc métrisable).

Pour cette topologie $\overline{\mathbb{R}}$ est compact, et la topologie qu'elle induit sur $\mathbb{R}$ coincide avec la topologie de l'espace métrique $(\mathbb{R}, |.|)$. On définit aussi $\overline{\mathbb{R}}_+ = [0, +\infty]$ (partie compacte de $\overline{\mathbb{R}}$).
On notera les propriétés suivantes, faciles à justifier :
- Toute partie non vide de $\overline{\mathbb{R}}$ admet une borne supérieure et une borne inférieure.
- Toute suite croissante (resp. décroissante) est convergente.

On peut étendre à $\overline{\mathbb{R}}$ les opérations algébriques de façon à "récupérer" les propriétés des limites de suites :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad x + (\pm\infty) = (\pm\infty) + x = \pm\infty,$$

$$\forall x > 0 \quad x \times (\pm\infty) = (\pm\infty) \times x = \pm\infty, \qquad \forall x < 0 \quad x \times (\pm\infty) = (\pm\infty) \times x = \mp\infty,$$

$$(+\infty) + (+\infty) = +\infty, \quad (+\infty) \times (+\infty) = +\infty,$$

$$(-\infty)+(-\infty)=(-\infty), \quad (-\infty)\times(-\infty)=(+\infty), \quad (+\infty)\times(-\infty)=(-\infty),$$

et c'est tout ! (même si on verra qu'il est justifié, en intégration, de poser $0\times(+\infty)=(+\infty)\times 0=0$).

1.2 Valeurs d'adhérence d'une suite à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$.

On rappelle ici, dans le cadre de $\overline{\mathbb{R}}$, quelques réultats du cours de $M4$ et on introduit les notions de limites inférieures et supérieures d'une suite à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$.
Pour $a\in\overline{\mathbb{R}}$ on notera $\mathcal{V}(a)$ l'ensemble des voisinages de a dans $\overline{\mathbb{R}}$.

Définition 1.2.1 Soit $u=(u_n)_{n\geq 0}$ une suite à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$, et soit $a\in\overline{\mathbb{R}}$. On dit que a est une valeur d'adhérence de u si :

$$\forall V\in\mathcal{V}(a) \quad \forall p\in\mathbb{N} \quad \exists n\geq p \quad u_n\in V.$$

Proposition 1.2.1 Soit $u=(u_n)_{n\geq 0}$ une suite à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$, et soit $a\in\overline{\mathbb{R}}$. Les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) a est valeur d'adhérence de u.

(ii) Il existe une suite extraite de u qui converge vers a.

(iii) $\forall p\in\mathbb{N} \quad a\in\overline{A_p}$, où $A_p=\{u_n;\ n\geq p\}$.

Remarque 1.2.1

1. $adh(u)=\displaystyle\bigcap_{p\in\mathbb{N}}\overline{A_p}$, ensemble des valeurs d'adhérence de u, est une partie compacte non vide de $\overline{\mathbb{R}}$ (*exercice*). Que dire si on remplace $\overline{\mathbb{R}}$ par $\mathbb{R}$?
2. $adh(u)$ est la réunion de l'ensemble des points de répétition de u et de l'ensemble des points d'accumulation de l'ensemble des valeurs prises par u (*écrire avec précision les définitions de ces ensembles*).
3. $\lim u_n=a\Longrightarrow a\in adh(u)$.

Soit $u=(u_n)_{n\geq 0}$ une suite à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$. On définit les suites $(v_p)_{p\geq 0}$ et $(w_p)_{p\geq 0}$ par : $v_p=\inf\limits_{n\geq p}u_n$ et $w_p=\sup\limits_{n\geq p}u_n$. La suite v est croissante, la suite w est décroissante, de sorte que ces deux suites convergent dans $\overline{\mathbb{R}}$, d'où :

Définition 1.2.2 On appelle limite inférieure (resp. supérieure) de la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ l'élément de $\overline{\mathbb{R}}$ $\underline{\lim}\, u_n=\lim\limits_{p\to\infty}(\inf\limits_{n\geq p}u_n)=\sup\limits_{p\geq 0}\inf\limits_{n\geq p}u_n$ (resp.$\overline{\lim}\, u_n=\lim\limits_{p\to\infty}(\sup\limits_{n\geq p}u_n)=\inf\limits_{p\geq 0}\sup\limits_{n\geq p}u_n$).

Quelques propriétés (voir TD) :

1. $\underline{\lim}\, u_n\leq\overline{\lim}\, u_n$.
2. $\underline{\lim}\, u_n$ et $\overline{\lim}\, u_n$ sont respectivement la plus petite et la plus grande des valeurs d'adhérence de u. On a donc, en particulier :
   (a) $adh(u)\subset[\underline{\lim}\, u_n,\overline{\lim}\, u_n]$,
   (b) il existe une suite extraite qui converge vers $\underline{\lim}\, u_n$ (resp. $\overline{\lim}\, u_n$),

(c) u converge dans $\overline{\mathbb{R}}$ si et seulement si $\underline{\lim}\, u_n = \overline{\lim}\, u_n$.

3. Si u et v sont deux suites de $\mathbb{R}$ et k un réel on a, dans $\overline{\mathbb{R}}$:

   (a) $\overline{\lim}\,(u_n + v_n) \leq \overline{\lim}\, u_n + \overline{\lim}\, v_n$ dès que le second membre a un sens ($\geq$ avec $\underline{\lim}$),

   (b) $\overline{\lim}\, ku_n = \begin{cases} k\overline{\lim}\, u_n & si \quad k \geq 0 \\ k\underline{\lim}\, u_n & si \quad k < 0 \end{cases}$ (analogue avec $\underline{\lim}$).

Remarque 1.2.2 Tout ceci est transposable dans $\mathbb{R}$ à condition de considérer des suites bornées.

1.3 Fonctions définies sur un ensemble E, à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\overline{\mathbb{R}}$.

E et F étant deux ensembles, $\mathcal{F}(E, F)$ désigne l'ensemble des applications de E dans F. Pour $F = \mathbb{R}$ ou $\overline{\mathbb{R}}$, $\mathcal{F}(E, F)$ est muni de la relation d'ordre usuelle (c'est un ordre partiel) et, dans chacun de ces cas, $\mathcal{F}(E, F)$ est *réticulé* i.e. :

$$\forall f, g \in \mathcal{F}(E, F) \quad \inf(f, g) \in \mathcal{F}(E, F) \quad et \quad \sup(f, g) \in \mathcal{F}(E, F).$$

N.B. Si $(f_i)_{i\in I}$ est une famille de fonctions de $\mathcal{F}(E, \mathbb{R})$ ou $\mathcal{F}(E, \overline{\mathbb{R}})$, les *enveloppes inférieures et supérieures*, à savoir $\inf\limits_{i\in I} f_i$ et $\sup\limits_{i\in I} f_i$ sont a priori dans $\mathcal{F}(E, \overline{\mathbb{R}})$. Il en va de même, quand $I = \mathbb{N}$, pour $\underline{\lim}\, f_n$ et $\overline{\lim}\, f_n$, fonctions définies respectivement par $x \mapsto \underline{\lim}\, f_n(x)$ et $x \mapsto \overline{\lim}\, f_n(x)$.

Remarque 1.3.1

1. Il ne faut pas confondre $\overline{\lim}\, f_n$, qui est une fonction, avec $\lim\limits_{x\to a} \sup f(x) := \inf\limits_{V\in\mathcal{V}(a)} \sup\limits_{x\in V} f(x) \in \overline{\mathbb{R}}$.
2. Il n'est pas question d'affirmer, par analogie avec les suites de réels, qu'il existe une suite extraite de $(f_n)_{n\geq 0}$ qui converge (en quel sens d'ailleurs ?) vers $\overline{\lim}\, f_n$.

Quelques rappels :

– Parties positives et négatives d'une fonction $f \in \mathcal{F}(E, \overline{\mathbb{R}})$: ce sont les fonctions f^+ et f^- définies par $f^+ = \sup(f, 0)$ et $f^- = -\inf(f, 0) = (-f)^+$. On a ainsi $f = f^+ - f^-$ et $|f| = f^+ + f^-$.

– Convergence simple. Une suite $(f_n)_{n\geq 0} \subset \mathcal{F}(E, \overline{\mathbb{R}})$ converge simplement vers $f \in \mathcal{F}(E, \overline{\mathbb{R}})$ si : $\forall x \in E \quad \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$. Pour des fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$ ceci équivaut à :

$$\forall x \in E\ \forall \varepsilon > 0\ \exists p \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N} \quad n \geq p \Longrightarrow |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon.$$

– Convergence uniforme (fonctions à valeurs réelles).
$(f_n)_{n\geq 0}$ converge uniformément vers f si :

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists p \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N} \quad n \geq p \Longrightarrow \forall x \in E\ |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$$

ou encore :

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists p \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N} \quad n \geq p \Longrightarrow \sup_{x\in E} |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon.$$

(Essentiellement : "p ne dépend pas de x")
Soit $\mathcal{B}(E, \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions bornées sur E, $\| f \|_\infty = \sup\limits_E(|f|)$ définit une norme sur $\mathcal{B}(E, \mathbb{R})$ pour laquelle cet espace est complet. C'est la "norme de la convergence uniforme" :

$$f_n \to f \text{ dans } (\mathcal{B}(E, \mathbb{R}), \|\,.\,\|_\infty) \Longleftrightarrow f_n \text{ converge uniformément vers } f.$$

1.4 Opérations ensemblistes, fonctions indicatrices.

Soit E un ensemble. $\mathcal{P}(E)$, ensemble des parties de E, est partiellement ordonné par la relation d'inclusion. Si $(A_i)_{i\in I}$ est une famille de parties de E on a :

$$\sup_{i\in I} A_i = \bigcup_{i\in I} A_i \in \mathcal{P}(E) \quad et \quad \inf_{i\in I} A_i = \bigcap_{i\in I} A_i \in \mathcal{P}(E)$$

– Formules de De Morgan :

$$(\bigcup_{i\in I} A_i)^c = \bigcap_{i\in I} A_i^c \quad et \quad (\bigcap_{i\in I} A_i)^c = \bigcup_{i\in I} A_i^c.$$

Elles sont très faciles à justifier et il faut savoir les appliquer sans hésiter.

– Limites supérieures et inférieures d'ensembles. Soit $(A_n)_{n\geq 0}$ une suite de parties de E. On définit :

$$\overline{\lim}\, A_n = \bigcap_{p\in\mathbb{N}} \bigcup_{n\geq p} A_n = \inf_{p\in\mathbb{N}} \sup_{n\geq p} A_n \quad et \quad \underline{\lim}\, A_n = \bigcup_{p\in\mathbb{N}} \bigcap_{n\geq p} A_n = \sup_{p\in\mathbb{N}} \inf_{n\geq p} A_n$$

et on dit que la suite converge si $\underline{\lim}\, A_n = \overline{\lim}\, A_n$. Les propriétés et des exemples seront vus en exercice, ainsi que le lien avec les notions analogues concernant les fonctions.

– Fonctions indicatrices. Pour tout $A \in \mathcal{P}(E)$ on définit la fonction :

$$\mathbb{1}_{\mathrm{A}} : \mathrm{E} \to \mathbb{R} \quad \text{définie par } \mathbb{1}_{\mathrm{A}}(\mathrm{x}) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \in A \\ 0 \text{ si } x \notin A \end{cases}$$

L'application $\Phi \ : \begin{cases} \mathcal{P}(E) \to \mathcal{F}(E,\mathbb{R}) \\ A \mapsto \mathbb{1}_{\mathrm{A}} \end{cases}$ est injective, et on a les propriétés suivantes :

⋆ $A \subset B \Longrightarrow \mathbb{1}_{\mathrm{A}} \leq \mathbb{1}_{\mathrm{B}}$ (croissance de Φ).

⋆ $\mathbb{1}_{\mathrm{A}\cup\mathrm{B}} = \sup(\mathbb{1}_{\mathrm{A}}, \mathbb{1}_{\mathrm{B}})$ ($= \mathbb{1}_{\mathrm{A}} + \mathbb{1}_{\mathrm{B}}$ si et seulement si $A \cap B = \emptyset$).

⋆ $\mathbb{1}_{\mathrm{A}\cap\mathrm{B}} = \inf(\mathbb{1}_{\mathrm{A}}, \mathbb{1}_{\mathrm{B}}) = \mathbb{1}_{\mathrm{A}} \times \mathbb{1}_{\mathrm{B}}$.

⋆ $\mathbb{1}_{\mathrm{A}^c} = 1 - \mathbb{1}_{\mathrm{A}}$.

⋆ Si $(A_i)_{i\in I}$ est une partition de E on a $\sum_{i\in I} \mathbb{1}_{\mathrm{A_i}} = 1$ (pour $x \in E$ la somme $\sum_{i\in I} \mathbb{1}_{\mathrm{A_i}}(\mathrm{x})$ a toujours un sens car un seul terme est non nul).

Voir les exercices pour d'autres propriétés.

– "Application réciproque" d'une application $f \ : \ E \to F$.

Si $A \in \mathcal{P}(E)$ on pose, avec un abus d'écriture usuel, $f(A) = \{y \in F;\ \exists x \in A \quad y = f(x)\}$. On a $f(A) \in \mathcal{P}(F)$ et on définit ainsi une application de $\mathcal{P}(E)$ dans $\mathcal{P}(F)$ notée encore f.

On définit également (même si $f \ : \ E \to F$ n'est pas bijective !) une application "réciproque" notée (abusivement) f^{-1} :

$$f^{-1} \ : \ \begin{cases} \mathcal{P}(F) \to \mathcal{P}(E) \\ B \mapsto f^{-1}(B) := \{x \in E;\ f(x) \in B\} \end{cases}$$

et on utilise couramment les notations : $f^{-1}(B) = \{f(x) \in B\}$ ou même $\{f \in B\}$.

On retiendra les propriétés suivantes, toutes très simples à établir :

⋆ $\forall B \in F\ f(f^{-1}(B)) \subset B$, égalité quand f est surjective.

⋆ $\forall A \in E\ f^{-1}(f(A)) \supset A$, égalité quand f est injective.

⋆ $\forall B, B' \in F\ f^{-1}(B \cup B') = f^{-1}(B) \cup f^{-1}(B')$.

⋆ $\forall B, B' \in F\ f^{-1}(B \cap B') = f^{-1}(B) \cap f^{-1}(B')$.

⋆ $\forall B \in F\ f^{-1}(B^c) = (f^{-1}(B))^c$.

1.5 Cardinaux, dénombrabilité.

N.B. Ces notions sont étudiées plus en détails dans le cours d'Analyse. La présentation qui suit est simplifiée et limitée aux seuls résultats qui seront effectivement utilisés.

Définition 1.5.1 Deux ensembles E et F sont équipotents s'il existe une bijection de l'un sur l'autre. On dit alors qu'ils ont même cardinal et on écrit $\mathrm{card}E = \mathrm{card}F$. Un ensemble *fini* est un ensemble équipotent à une section commençante $[1, n]$ de $\mathbb{N}$ (on montre alors que n est unique).

N.B. Un ensemble peut avoir même cardinal que l'une de ses parties propres (par exemple $\mathbb{N}$ et l'ensemble des entiers pairs). Cette propriété caractérise les "ensembles infinis". On peut définir un ordre sur les cardinaux : $\mathrm{card}E \leq \mathrm{card}F$ si et seulement si il existe une injection de E dans F. On écrit $\mathrm{card}E < \mathrm{card}F$ s'il existe une injection de E dans F mais pas d'injection de F dans E.

Proposition 1.5.1 Pour tout ensemble E, il existe un ensemble F de cardinal strictement supérieur. En particulier $\mathrm{card}\mathcal{P}(E) > \mathrm{card}E$.

Preuve : soit E un ensemble quelconque. Montrons que $\mathrm{card}\mathcal{P}(E) > \mathrm{card}E$ en prouvant qu'il n'existe pas d'application $f : E \longrightarrow \mathcal{P}(E)$ surjective. Supposons en effet qu'il existe une telle application et soit $B = \{x \in E\,;\, x \notin f(x)\}$: il existe un élément $z \in E$ tel que $B = f(z)$. On a nécessairement $z \in B$ ou bien $z \notin B$ mais chaque cas aboutit immédiatement à une absurdité. ■

Définition 1.5.2 Un ensemble infini dénombrable est un ensemble qui a même cardinal que $\mathbb{N}$.

Remarque 1.5.1

1. On conviendra de dire "dénombrable" pour "fini ou infini dénombrable".
2. Une partie dénombrable d'un ensemble E peut être écrite comme l'ensemble des valeurs d'une suite à valeurs dans E.

Proposition 1.5.2 Un ensemble A est dénombrable si et seulement si il existe une injection de A dans $\mathbb{N}$ (ou dans un ensemble dénombrable)

Preuve : on suppose A infini et $j : A \to \mathbb{N}$ injective. On peut alors utiliser le fait que $j(A) \subset \mathbb{N}$ est *bien ordonné* pour construire, par récurrence, une bijection de $\mathbb{N}$ dans A. ■

Exercice 1.5.1 Montrer qu'un ensemble A est dénombrable si et seulement si il existe une surjection de $\mathbb{N}$ sur A.

Proposition 1.5.3 Toute partie d'un ensemble dénombrable est (finie ou) dénombrable.

Des exemples :

– $\mathbb{Z}$ est dénombrable : utiliser par exemple l'application $\mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ définie par
$$x \to \begin{cases} 2x - 1 \ si\ x > 0 \\ 2|x| \ si\ x \leq 0 \end{cases}.$$

– $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ est dénombrable : on utilise l'application $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ définie par
$(n,p) \to \begin{cases} 0 \ si \ n = p = 0 \\ (n+p)\dfrac{n+p+1}{2} + p \ sinon \end{cases}$.

– $\mathbb{Q}^{+\star}$ est dénombrable, en effet l'application $\begin{cases} \mathbb{Q}^{+\star} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N} \\ r = \dfrac{p}{q} \mapsto (p,q) \end{cases}$ (où p et q sont des entiers naturels non nuls et premiers entre eux) est injective.

– $]0,1[$ n'est pas dénombrable. Cet ensemble (ainsi que $\mathbb{R}$) est équipotent à $\mathcal{P}(\mathbb{N})$.

Proposition 1.5.4 Si A et B sont deux ensembles dénombrables, le produit cartésien $A \times B$ est dénombrable.

Proposition 1.5.5 Soient E un ensemble et $(A_i)_{i\in I}$ une famille dénombrable (i.e. I est dénombrable) de parties dénombrables de E, alors $A = \bigcup_{i\in I} A_i$ est dénombrable (on dira : "une union dénombrable d'ensembles dénombrables est dénombrable").

Preuve : on utilise la dénombrabilité de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. ■

Corollaire 1.5.1 $\mathbb{Q}$ est dénombrable.

Preuve : écrire $\mathbb{Q} = \mathbb{Q}^{-\star} \cup \{0\} \cup \mathbb{Q}^{+\star}$ ... ■

1.6 Exercices

Exercice 1.6.1 Soit $u = (u_n)_{n\geq 0}$ une suite à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$. On rappelle que

$$\overline{\lim}\, u_n = \lim_{p\to\infty} \sup_{n\geq p} u_n.$$

Montrer que $\overline{\lim}\, u_n$ est la plus grande valeur d'adhérence de u.

Exercice 1.6.2 Soient $(u_n)_{n\geq 0}$ et $(v_n)_{n\geq 0}$ deux suites à valeurs dans $\mathbb{R}$. Montrer que $\overline{\lim}\,(u_n + v_n) \leq \overline{\lim}\, u_n + \overline{\lim}\, v_n$ dans $\overline{\mathbb{R}}$, dès que le second membre a un sens. Que dire si l'une des suites converge ?

Exercice 1.6.3 Si $u = (u_n)_{n\geq 0}$ est une suite à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$, on sait (conséquence du résultat de l'exercice 1) qu'il existe une suite extraite de u qui converge vers $\overline{\lim}\, u_n$ (resp. $\underline{\lim}\, u_n$). Pourquoi ceci est-il faux pour une suite $(f_n)_{n\geq 0} \subset \mathcal{F}(\mathrm{E}, \overline{\mathbb{R}})$?
On pourra chercher un contre exemple dans l'espace des fonctions bornées $\mathcal{B}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$.

Exercice 1.6.4 Trouver l'ensemble des valeurs d'adhérence d'une suite $(u_n)_{n\geq 0}$ telle que $\underline{\lim}\, u_n = 0$, $\overline{\lim}\, u_n = 1$ et $\lim(u_{n+1} - u_n) = 0$. Donner un exemple d'une telle suite.

Exercice 1.6.5 A quoi correspond $|\mathbb{1}_A - \mathbb{1}_B|$?

Exercice 1.6.6 Soit $(A_n)_{n\geq 0}$ une suite de parties d'un ensemble E. On rappelle que

$$\underline{\lim}\, A_n = \bigcup_{p\geq 0} \bigcap_{n\geq p} A_n \quad \text{et} \quad \overline{\lim}\, A_n = \bigcap_{p\geq 0} \bigcup_{n\geq p} A_n.$$

1. Montrer que :

$$\mathbb{1}_{\overline{\lim}\, A_n} = \overline{\lim}\ \mathbb{1}_{A_n}\ ,$$
$$\underline{\lim}\ A_n \subset \overline{\lim}\ A_n\ ,$$
$$(\overline{\lim}\ A_n)^c = \underline{\lim}\ A_n^c\ ,$$
$$\underline{\lim}\ A_n = \{x \in E; \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{1}_{A_n^c}(x) < \infty\}\ ,$$
$$\overline{\lim}\ A_n = \{x \in E; \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{1}_{A_n}(x) = \infty\}\ .$$

2. On suppose la suite $(A_n)_{n\geq 0}$ monotone. Que sont $\underline{\lim}\ A_n$ et $\overline{\lim}\ A_n$?
3. Même question si la suite est définie par : $A_{2p} = A$ et $A_{2p+1} = B$, $p \in \mathbb{N}$, A et B étant deux parties données de E.

Exercice 1.6.7 Il s'agit de montrer ici que tout ouvert de $\mathbb{R}$ est une union dénombrable d'intervalles ouverts deux à deux disjoints. Soit $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{R}$. On définit, pour x et $y \in \mathcal{U}$, la relation : $x \sim y$ si le segment de bornes x et y est inclus dans $\mathcal{U}$. Vérifier que "$\sim$" est une relation d'équivalence. Pour $x \in \mathcal{U}$, on pose $A(x) = \{y \in \mathcal{U};\ x \sim y\}$: $A(x)$ est la classe de x pour la relation $\sim$ et on rappelle que ces classes forment une partition de $\mathcal{U}$.

1. Montrer que, pour tout $x \in \mathcal{U}$, $A(x)$ est un intervalle ouvert.
2. Montrer qu'il existe une partie dénombrable $D \subset \mathcal{U}$ telle que $\mathcal{U} = \bigcup_{x\in D} A(x)$, avec $A(x)\cap A(y) = \emptyset$ si x, $y \in D$ et $x \neq y$.

Exercice 1.6.8 Montrer qu'un ensemble A est dénombrable si et seulement si il existe une surjection de $\mathbb{N}$ sur A.

Chapitre 2

Intégrale de Riemann

Objectifs : rappeler brièvement la théorie (on a choisi ici l'approche de Darboux), donner en complément un critère général d'intégrabilité, montrer l'intérêt d'une théorie plus générale, introduire la démarche conduisant à l'Intégrale de Lebesgue.

2.1 Définition.

Introduisons tout d'abord quelques notations.
Soient a, b deux réels tels que $a < b$.

- $\mathcal{B}([a,b],\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des fonctions réelles bornées sur $[a,b]$. La théorie de l'intégrale de Riemann ne concerne que ces fonctions.
  Soient $f \in \mathcal{B}([a,b],\mathbb{R})$ et $A \subset [a,b]$; on appelle oscillation de f sur A le réel
  $$\omega(f,A) = \sup_A(f) - \inf_A(f).$$
- On appelle subdivision de $[a,b]$ toute partie finie σ de $[a,b]$ contenant a et b. On la range canoniquement en une suite finie stictement croissante $x_0 = a < x_1 < \cdots < x_n = b$.
  On appelle "pas de la subdivision σ" le réel $|\sigma| = \max\limits_{1 \leq i \leq n}(x_i - x_{i-1})$.
- On note $\mathcal{S}([a,b])$ l'ensemble des subdivisions de $[a,b]$.
- Pour $f \in \mathcal{B}([a,b],\mathbb{R})$ et $\sigma \in \mathcal{S}([a,b])$, $\sigma = \{x_0, x_1, \cdots, x_n\}$ on pose :
  $$s(f,\sigma) = \sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1}) \inf_{[x_{i-1},x_i]}(f),$$
  $$S(f,\sigma) = \sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1}) \sup_{[x_{i-1},x_i]}(f).$$
  $s(f,\sigma)$ et $S(f,\sigma)$ sont respectivement la petite et la grande somme de Darboux associée à f et à la subdivision σ.
  On pose en outre :
  $$\Delta(f,\sigma) = S(f,\sigma) - s(f,\sigma) = \sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1})\,\omega(f,[x_{i-1},x_i]).$$

  On montre facilement la propriété suivante :

$$\forall \sigma, \sigma' \in \mathcal{S}([a,b]), \qquad \forall f \in \mathcal{B}([a,b], \mathbb{R}) \qquad s(f,\sigma) \leq S(f,\sigma')$$

(utiliser la subdivision $\sigma'' = \sigma \cup \sigma'$. On a alors : $s(f,\sigma) \leq s(f,\sigma'') \leq S(f,\sigma'') \leq S(f,\sigma')$).

Conséquence : l'ensemble $\{s(f,\sigma); \sigma \in \mathcal{S}([a,b])\}$ des petites sommes admet une borne supérieure $I_\star(f)$ et l'ensemble des grandes sommes une borne inférieure $I^\star(f)$.
On a (facilement) : $I_\star(f) \leq I^\star(f)$.

Définition 2.1.1 f est intégrable au sens de Riemann ("R-intégrable" pour simplifier) si $I_\star(f) = I^\star(f)$ (autrement dit si l'ensemble des petites sommes et l'ensemble des grandes sommes sont deux ensembles adjacents). La valeur commune est l'intégrale de f sur $[a,b]$ et est notée $I(f) = \displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$.
On note $\mathcal{I}([a,b])$ l'ensemble des fonctions R-intégrables sur $[a,b]$.

Définition 2.1.2 Une partie A de $[a,b]$ est mesurable au sens de Riemann ("R-mesurable") si $\mathbb{1}_{\mathrm{A}}$ est R-intégrable. Sa mesure est alors, par définition, $\displaystyle\int_a^b \mathbb{1}_{\mathrm{A}}(\mathrm{x})\,\mathrm{dx}$.

Exemple 2.1.1 La fonction $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}\cap[0,1]}$ n'est pas R-intégrable (les petites sommes et les grandes sommes sont constantes et valent respectivement 0 et 1), donc $\mathbb{Q} \cap [0,1]$ n'est pas R-mesurable. Tout intervalle de $[a,b]$ est bien sûr R-mesurable et sa mesure est égale à sa longueur.

2.2 Critères d'intégrabilité. Classes de fonctions R-intégrables.

On se propose de rappeler les critères classiques d'intégrabilité étudiés en Deug et de les compléter par un critère relatif à l'ensemble des points de discontinuité de la fonction (théorème 2.2.1), grâce auquel on retrouve immédiatement le caractère intégrable des fonctions des classes usuelles (fonctions en escalier, continues par morceaux, réglées ...).

Proposition 2.2.1 Soit $f \in \mathcal{B}([a,b], \mathbb{R})$. Les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) $f \in \mathcal{I}([a,b])$,

(ii) $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \sigma \in \mathcal{S}([a,b]) \quad \Delta(f,\sigma) \leq \varepsilon$,

(iii) **(critère de Darboux)** $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \alpha > 0 \quad \forall \sigma \in \mathcal{S}([a,b]) \quad |\sigma| \leq \alpha \Longrightarrow \Delta(f,\sigma) \leq \varepsilon$.

Remarque 2.2.1 (iii) exprime que l'écart entre la petite et la grande somme tend vers zéro quand le pas de la subdivision tend vers zéro.

Preuve : le seul point délicat est l'implication $(i) \Longrightarrow (iii)$. Soient $\varepsilon > 0$ et $\sigma = (x_0, \cdots, x_n)$ tels que $\Delta(f,\sigma) < \varepsilon/2$. Posons alors $h = \inf\limits_i (x_i - x_{i-1})$ et soit $\tau = (t_j)_{j \in J}$ une subdivision de $[a,b]$ telle que $|\tau| \leq h$.
Il y a au plus $(n-1)$ intervalles $]t_{j-1}, t_j[$ qui contiennent un point de σ, chacun des autres étant contenu dans un intervalle $[x_{i-1}, x_i]$. On pose :

$$J_1 = \{j \in J;\ \exists i \in [1,n] \quad x_i \in]t_{j-1}, t_j[\},$$

$$J_2 = \{j \in J;\ \exists i \in [1,n] \quad [t_{j-1}, t_j] \subset [x_{i-1}, x_i]\},$$

de sorte que :

$$\Delta(f,\tau) = \sum_{j\in J_1}(t_j - t_{j-1})\omega(f,[t_{j-1},t_j]) + \sum_{j\in J_2}(t_j - t_{j-1})\omega(f,[t_{j-1},t_j]).$$

On a $Card(J_1) \leq n-1$, de plus si $j \in J_2$ et $[t_{j-1},t_j] \subset [x_{i-1},x_i]$ alors $\omega(f,[t_{j-1},t_j]) \leq \omega(f,[x_{i-1},x_i])$ de sorte que $\sum_{j\in J_2}(t_j - t_{j-1})\omega(f,[t_{j-1},t_j]) \leq \Delta(f,\sigma)$ d'où :

$$\Delta(f,\tau) \leq \Delta(f,\sigma) + (n-1)\,h\,\omega(f,[a,b]).$$

Si $\omega(f,[a,b]) = 0$ (f constante), on pose $\alpha = h$, sinon on pose $\alpha = \min(h, \dfrac{\varepsilon}{2\,(n-1)\,h\,\omega(f,[a,b])})$; alors : $|\tau| \leq \alpha \Longrightarrow \Delta(f,\tau) \leq \varepsilon$. ■

Proposition 2.2.2 $\mathcal{I}([a,b])$ est un espace vectoriel réel (pour les lois usuelles).
L'application I : $f \mapsto I(f) = \displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ est une forme linéaire sur $\mathcal{I}([a,b])$, croissante, continue pour la norme de la convergence uniforme.
L'application N_1 : $f \mapsto \displaystyle\int_a^b |f(x)|\,dx$ est une semi-norme sur $\mathcal{I}([a,b])$.

Proposition 2.2.3 $\mathcal{I}([a,b])$ est complet pour la norme $||.||_\infty$ de la convergence uniforme.

Preuve : il suffit de montrer que c'est un sous espace fermé de $(\mathcal{B}([a,b],\mathbb{R}), ||.||_\infty)$, autrement dit qu'une limite uniforme de fonctions R-intégrables est R-intégrable. Soit $(f_n)_{n\geq 0} \subset \mathcal{I}([a,b])$ une suite convergeant uniformément vers f dans $\mathcal{B}([a,b],\mathbb{R})$ et soit $\varepsilon > 0$.
Soit $\eta > 0$: on associe à ce réel un entier p tel que $\sup_{[a,b]} \mid f(x) - f_p(x) \mid \leq \eta$. On a alors :

$$\forall A \subset [a,b] \quad \omega(f,A) \leq \omega(f_p,A) + 2\,\eta$$

d'où il résulte que :

$$\forall \sigma \in \mathcal{S}([a,b]) \quad \Delta(f,\sigma) \leq \Delta(f_p,\sigma) + 2\,\eta \mid \sigma \mid .$$

D'après la proposition 2.2.1 (ii) appliquée à la fonction intégrable f_p, il existe une subdivision σ telle que $\Delta(f_p,\sigma) \leq \eta$. Pour cette subdivision on a $\Delta(f,\sigma) \leq (1 + 2 \mid \sigma \mid)\,\eta \leq (1 + 2\,(b-a))\,\eta$. Le choix $\eta = \dfrac{\varepsilon}{1+2\,(b-a)}$ conduit donc à l'existence d' une subdivision σ telle que $\Delta(f,\sigma) \leq \varepsilon$ et il suffit d'appliquer la proposition 2.2.1 à f pour conclure. ■

Proposition 2.2.4 Les fonctions en escalier sur $[a,b]$, les fonctions monotones ou monotones par morceaux sur $[a,b]$, les fonctions continues ou continues par morceaux sur $[a,b]$, et plus généralement les fonctions réglées sur $[a,b]$ sont R-intégrables.

Preuve :

– Fonctions en escalier : utiliser le critère (ii) de la proposition 2.2.1 en gérant correctement les points de discontinuité éventuels, qui sont en nombre fini (on entoure chacun d'eux de deux points de subdivision suffisamment proches).
– Fonctions continues : elles sont uniformément continues sur $[a,b]$ (théorème de Heine)... On utilise le critère de Darboux.

– Fonctions réglées : on utilise la proposition 2.2.3 (une fonction réglée est la limite uniforme d'une suite de fonctions en escalier).

Définition 2.2.1 On dira qu'une partie A de $\mathbb{R}$ est négligeable si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe une suite $(I_n)_{n\geq 0}$ d'intervalles $I_n =]a_n, b_n[$ telle que :

$$A \subset \bigcup_{n\geq 0} I_n \qquad \textit{et} \qquad \sum_{n\geq 0} (b_n - a_n) \leq \varepsilon.$$

Exemple 2.2.1 Un point est négligeable, une réunion dénombrable d'ensembles négligeables est négligeable.

Remarque 2.2.2 Un tel ensemble n'est pas nécessairement R-mesurable. Ex. : $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$.

On énonce maintenant le principal résultat de ce paragraphe, grâce auquel on peut retrouver immédiatement ce qui précède.

Théorème 2.2.1 (Lebesgue) Pour qu'une fonction $f \in \mathcal{B}([a, b], \mathbb{R})$ soit R-intégrable il faut et il suffit que l'ensemble des points de discontinuité de f soit négligeable.

Pour démontrer ce résultat nous avons besoin d'introduire la notion d'oscillation d'une fonction en un point.

Définition 2.2.2 Soit $f \in \mathcal{B}([a, b], \mathbb{R})$. On appelle oscillation de f en $x \in [a, b]$ le réel

$$\omega(f, x) = \inf_{V\in\mathcal{V}(x)} \omega(f, V).$$

($\mathcal{V}(x)$ désigne l'ensemble des voisinages de x dans $[a, b]$)

Exercice 2.2.1 Montrer que f est continue en x si et seulement si $\omega(f, x) = 0$.

Lemme 2.2.1 L'application $x \mapsto \omega(f, x)$ est semi-continue supérieurement (s.c.s.), c'est à dire :
$\forall \lambda \in \mathbb{R} \quad \{x \in [a, b] \,; \omega(f, x) \geq \lambda\}$ est fermé.

Preuve du lemme : soient λ un réel, $A = \{x \in [a, b] \,; \omega(f, x) \geq \lambda\}$ et $u \in \overline{A}$.
Si V est un voisinage ouvert de u, il existe un x dans A tel que $x \in V$; V est alors un voisinage de x et ainsi $\omega(f, V) \geq \omega(f, x) \geq \lambda$. Tout voisinage de u contient un voisinage ouvert, de sorte que : $\forall V \in \mathcal{V}(u) \quad \omega(f, V) \geq \lambda$, d'où $\omega(f, u) \geq \lambda$, c'est à dire $u \in A$. ■

Preuve du théorème 2.2.1 : commençons par établir la condition nécessaire. Nous supposons que f est R-intégrable et notons $\mathcal{D}$ l'ensemble des points de discontinuité de f. On a alors $\mathcal{D} = \bigcup_{n\geq 1} \mathcal{D}_{1/n}$, où, pour tout $\alpha > 0$:

$$\mathcal{D}_\alpha = \{x \in [a, b] \,; \, \omega(f, x) \geq \alpha\}.$$

Il nous suffit ainsi de montrer que pour tout $\alpha > 0 \quad \mathcal{D}_\alpha$ est négligeable.
Soient $\varepsilon > 0$ et $\sigma = (t_i)_{0\leq i\leq n} \in \mathcal{S}([a, b])$ tels que :

$$\Delta(f, \sigma) = \sum_{i=1}^{n} (t_i - t_{i-1})\, \omega(f, [t_{i-1}, t_i]) \leq \frac{\alpha\, \varepsilon}{2}.$$

Si $]t_{i-1}, t_i[$ contient un point $x \in \mathcal{D}_\alpha$ alors $\omega(f, [t_{i-1}, t_i]) \geq \alpha$ donc $\mathcal{D}_\alpha \setminus \sigma$ est contenu dans une réunion d'intervalles $]t_{i-1}, t_i[$ de longueur totale inférieure à $\varepsilon/2$. L'ensemble $\mathcal{D}_\alpha \cap \sigma$ est fini et peut donc être inclus lui aussi dans une réunion (finie) d'intervalles de longueur totale inférieure à $\varepsilon/2$. Il résulte de ceci que $\mathcal{D}_\alpha$ est négligeable.
Prouvons enfin la condition suffisante. Supposons $\mathcal{D}$ négligeable et soit $\varepsilon > 0$.
L'ensemble $\mathcal{D}_\varepsilon$ est négligeable (car inclus dans $\mathcal{D}$) et peut donc être recouvert par une famille d'intervalles ouverts de longueur totale inférieure à ε. Or $\mathcal{D}_\varepsilon$ est fermé dans $[a, b]$ d'après le lemme 2.2.1, donc compact : il existe donc un sous recouvrement fini

$$\mathcal{D}_\varepsilon \subset I = [a_1, b_1[\cup]a_2, b_2[\cup \cdots \cup]a_n, b_n]$$

avec $a_1 = a$, $b_n = b$ et $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(b_i - a_i) \leq \varepsilon$. On peut en outre supposer (quitte à faire des regroupements) que $b_i < a_{i+1}$ pour $i = 1, \cdots, n-1$.
L'ensemble $K = [a, b] \setminus I$ est réunion finie des segments $[b_i, a_{i+1}]$. Tout point x de K possède un voisinage V_x dans $[a, b]$ tel que $\omega(f, V_x) < \varepsilon$ (en effet $x \notin \mathcal{D}_\varepsilon \Longrightarrow \omega(f, x) < \varepsilon$, or $\omega(f, x) = \inf\limits_{V \in \mathcal{V}(x)} \omega(f, V) \ldots$), par compacité il existe donc pour chaque intervalle $[b_i, a_{i+1}]$ une subdivision
$s_{i_0} = b_i < s_{i_1} < \cdots < s_{i_{k(i)}}$ telle que $\omega(f, [s_{i_{j-1}}, s_{i_j}]) < \varepsilon$ pour $j = 1, \cdots, k(i)$.
Soit $\tau = (t_r)_{0 \leq r \leq p}$ la subdivision de $[a, b]$ obtenue à partir de tous les points a_i, b_i et s_{i_j}. Considérons la quantité $\Delta(f, \tau) = \displaystyle\sum_{r=1}^{p}(t_r - t_{r-1})\,\omega(f, [t_{r-1}, t_r])$:

- si $[t_{r-1}, t_r] \subset K$ on a $\omega(f, [t_{r-1}, t_r]) < \varepsilon$: la contribution de tous ces cas à la somme $\Delta(f, \tau)$ est donc strictement inférieure à $\varepsilon\,(b - a)$.
- dans le cas contraire, $[t_{r-1}, t_r]$ ne peut rencontrer K qu'en des points de subdivision (en t_r ou t_{r-1}) : la somme des longueurs des intervalles correspondants est inférieure à ε et l'oscillation de f sur ces intervalles est majorée par $\omega(f, [a, b])$. Leur contribution est donc majorée par $\varepsilon\,\omega(f, [a, b])$.

On a finalement $\Delta(f, \tau) \leq \varepsilon\,(b - a + \omega(f, [a, b]))$, d'où l'on déduit l'intégrabilité de f par application de la proposition 2.2.1 (ii). ∎

Remarque 2.2.3 On peut modifier une fonction $f \in \mathcal{I}([a, b])$ en un nombre fini de points : elle reste R-intégrable et son intégrale ne change pas, mais on prendra garde que l'on ne peut pas le faire sur un ensemble négligeable quelconque (voir l'exemple 2.1.1 et la remarque 2.2.2) ... et c'est dommage.

2.3 Autres approches.

1. Sommes de Riemann : à $f \in \mathcal{B}([a, b], \mathbb{R})$ et $\sigma \in \mathcal{S}([a, b])$ on associe les sommes

$$R(f, \sigma, (\xi)_{1 \leq i \leq n}) = \sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1})\, f(\xi_i)$$

   où, pour $1 \leq i \leq n$, ξ_i est un réel quelconque de $[x_{i-1}, x_i]$. On montre que f est R-intégrable si et seulement si ces sommes convergent, quand $|\sigma|$ tend vers zéro, indépendemment du choix des ξ_i, $1 \leq i \leq n$.

2. On peut commencer par définir l'intégrale d'une fonction en escalier : si $f = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i \mathbb{I}_{A_i}$ où les A_i sont des intervalles de $[a, b]$ deux à deux disjoints (éventuellement réduits à un point), et si $l(A_i)$

désigne la longueur de A_i, on pose :

$$\int_a^b f(t)\,dt = \sum_{i=1}^n a_i\, l(A_i)$$

après avoir vérifié que ce résultat ne dépend pas de l'écriture de f sous la forme ci-dessus. On voit donc qu'il suffit d'avoir défini la "mesure" des intervalles bornés ; on procède ensuite par passage à la limite :

(a) utilisation de fonctions en escalier majorantes et minorantes : leurs intégrales doivent définir deux ensembles adjacents $\longrightarrow$ on retrouve le même ensemble $\mathcal{I}([a,b])$ de fonctions intégrables.

(b) passage à la limite uniforme $\longrightarrow$ on obtient l'intégrale des fonctions réglées (dont l'ensemble est un sous ensemble strict du précédent).

2.4 Extensions.

1. Au lieu de fixer $[a,b]$, on peut travailler avec les fonctions bornées à support borné.
2. Intégrale des fonctions réelles bornées définies sur un pavé borné de $\mathbb{R}^n$: pas de difficulté particulière, la démarche étant identique.
3. Fonctions $f: \quad [a,b] \longrightarrow F$ où F est un espace vectoriel normé :
   (a) si $dim(F) < \infty$, pas de difficulté : on se ramène au cas des fonctions réelles en utilisant une base de F.
   (b) si $dim(F) = \infty$ c'est plus délicat : les notions de bornes sup et inf disparaissent...
      i. on peut définir l'oscillation de f sur A par $\omega(f,A) = diam(f(A))$ et, si F est complet, prendre le critère de Darboux comme définition. Les résultats précédents restent alors vrais.
      ii. on peut utiliser les sommes de Riemann ...
      iii. on peut traiter le cas des fonctions en escalier et, si F est complet, en déduire l'intégrale des fonctions réglées par passage à la limite uniforme.

2.5 Insuffisance de l'intégrale de Riemann.

1. Théorie restreinte aux fonctions bornées à support borné et suffisamment régulières.
2. Elle ne permet pas d'obtenir de "bons" espaces fonctionnels. Par exemple $(\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R}), N_1)$ n'est pas complet.
3. Médiocrité des théorèmes de convergence (en particulier interversion des symboles lim et $\int$) : on a besoin de convergence uniforme...
4. La mesure sous-jacente (voir définition 2.1.2) est insuffisante dans de nombreux cas "concrets" : on peut avoir besoin, par exemple, de manipuler des "masses ponctuelles" ...
5. On n'a pas de propriété "d'additivité dénombrable" pour la mesure au sens de Riemann ; par exemple, si $r \in \mathbb{Q}$, $\{r\}$ est mesurable et de mesure nulle, or $\mathbb{Q} \cap [0,1]$, union dénombrable de tels singletons, n'est pas mesurable ($\mathbb{1}_{\mathbb{Q}\cap[0,1]}$ n'est pas intégrable). On aimerait pourtant lui attribuer une mesure nulle puisqu'il est négligeable (au sens de la définition 2.2.1) !

2.6 Démarche pour définir l'intégrale de Lebesgue.

1. Etendre la mesure des intervalles à une classe suffisamment vaste de parties de $\mathbb{R}$ munie d'une structure convenable (tribu) de façon à obtenir la propriété d'additivité dénombrable i.e. :

$$mes(\bigcup_{n\geq 0} A_n) = \sum_{n\geq 0} mes(A_n)$$

si les A_n sont deux à deux disjoints et mesurables.

2. Définir l'intégrale des fonctions “étagées mesurables” (qui généralisent en un certain sens les fonctions en escalier).
3. Définir un procédé de passage à la limite.

Remarque 2.6.1 :

1. Il ne sera pas possible de “mesurer” toutes les parties de $\mathbb{R}$: ceci est une conséquence de l'axiome du choix.
2. On peut développer une théorie “purement fonctionnelle” (intégrale vue comme forme linéaire continue sur un espace de fonctions), le lien sera fait via le théorème de Riesz.

2.7 Exercices

Exercice 2.7.1 Soit f une fonction croissante de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

1. Montrer que f a une limite à droite et une limite à gauche en tout point.
2. Montrer que l'ensemble des points de discontinuité de f est dénombrable.
   Indication : on pourra considérer, pour $n \in \mathbb{N}$, les ensembles

$$A_n = \{x \in [0,1]; f(x^+) - f(x^-) > (f(1) - f(0))/n\}.$$

   où $f(x^+)$ (resp. $f(x^-)$) désigne la limite de f à droite (resp. à gauche) en x. On en déduit que f est intégrable au sens de Riemann sur tout segment : comment obtient-on ce résultat de façon élémentaire ?

Exercice 2.7.2 Une fonction f : $[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est en escalier s'il existe une subdivision

$$a = x_0 < x_1 < ... < x_{n-1} < x_n = b$$

telle que f soit constante sur chaque intervalle $]x_i, x_{i+1}[,\ 0 \leq i \leq n-1$.
Une fonction réelle définie sur [a,b] est dite réglée si elle est la limite uniforme d'une suite de fonctions en escalier sur [a,b].

1. Montrer que l'ensemble des points de discontinuité d'une fonction réglée est dénombrable. On en déduit que f est intégrable au sens de Riemann : comment peut-on obtenir encore ce résultat ?
2. ($*$) Montrer qu'une fonction f : $[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est réglée sur [a,b] si et seulement si elle admet des limites à droite et à gauche en tout point de]a,b[, à droite en a, à gauche en b.

Exercice 2.7.3 Soit f la fonction définie sur $[0,1]$ par $f(0) = 0$ et, pour $x \neq 0$, $f(x) = \sin(\dfrac{1}{x})$.
Cette fonction est-elle intégrable au sens de Riemann ? Est-elle réglée ? Conclusion ?

Chapitre 3

Tribus et mesures

3.1 Tribus de parties d'un ensemble. Espaces mesurables.

Définition 3.1.1 Soient E un ensemble et $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(E)$ un ensemble de parties de E. $\mathcal{T}$ est une tribu sur E (ou σ-algèbre) si :

(a) $\emptyset \in \mathcal{T}$,

(b) $\forall A \subset E \quad A \in \mathcal{T} \Longrightarrow A^c \in \mathcal{T}$ (stabilité par passage au complémentaire),

(c) $\forall (A_n)_{n\geq 0} \subset \mathcal{T} \quad \bigcup\limits_{n\geq 0} A_n \in \mathcal{T}$ (stabilité par réunion dénombrable).

Remarque 3.1.1

1. (a) et (b) $\Longleftrightarrow$ (a') et (b), avec (a') : $E \in \mathcal{T}$.
   (a) et (a') sont donc interchangeables dans la définition d'une tribu.
2. (b) et (c) $\Longleftrightarrow$ (b) et (c'), avec (c') : $\forall (A_n)_{n\geq 0} \subset \mathcal{T} \quad \bigcap\limits_{n\geq 0} A_n \in \mathcal{T}$ (stabilité par intersection dénombrable).
   (c) et (c') sont donc interchangeables.
3. $\forall A,\, B \subset E \quad A,\, B \in \mathcal{T} \Longrightarrow A \setminus B,\; A \bigtriangleup B \in \mathcal{T}$.
4. Si, dans la définition, on remplace la condition de stabilité par réunion dénombrable par la condition plus faible de stabilité par réunion finie, on obtient la notion de clan ou algèbre de parties.

Exemple 3.1.1 $\mathcal{T} = \{\emptyset, E\}$: "tribu grossière", $\mathcal{T} = \mathcal{P}(E)$.

Définition 3.1.2 Si E est un ensemble et $\mathcal{T}$ une tribu de parties de E, le couple $(E, \mathcal{T})$ s'appelle un espace mesurable. Les éléments de $\mathcal{T}$ s'appellent les parties mesurables de E.

La notion de "tribu engendrée" permet de définir des tribus sans les décrire explicitement. La démarche est semblable à celle qui mène, par exemple, à la notion de sous espace vectoriel engendré par une partie d'un e.v.

Proposition 3.1.1 *L'intersection d'une famille quelconque de tribus sur E est une tribu sur E.*

Preuve : immédiate.

Remarque 3.1.2 C'est leur borne inférieure dans $(\mathcal{P}(E), \subset)$.

Si $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(E)$ est une classe de parties de E, l'ensemble des tribus sur E contenant $\mathcal{C}$ n'est pas vide ($\mathcal{P}(E)$ est une telle tribu). La borne inférieure de l'ensemble de ces tribus (leur intersection) est, d'après la proposition précédente, une tribu : c'est la plus petite tribu contenant $\mathcal{C}$. Ceci conduit à la définition suivante :

Définition 3.1.3 Soient E un ensemble et $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(E)$. On appelle tribu engendrée par $\mathcal{C}$, et on note $\tau(\mathcal{C})$, la plus petite tribu contenant $\mathcal{C}$ i.e. :

$$\tau(\mathcal{C}) = \bigcap_{\substack{\mathcal{T} \ tribu \ sur \ E \\ \mathcal{T} \supset \mathcal{C}}} \mathcal{T}$$

En pratique, pour montrer qu'une tribu $\mathcal{S}$ est la tribu engendrée par $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(E)$ il suffit de montrer que toute tribu contenant $\mathcal{C}$ contient $\mathcal{S}$.

Remarque 3.1.3 Il est important de remarquer que, contrairement à ce que l'on pourrait être tenté de croire, les éléments de la tribu engendrée par $\mathcal{C}$ ne sont pas tous obtenus, à partir des éléments de $\mathcal{C}$, en utilisant les opérations : “intersection dénombrable”, “union dénombrable” et “passage au complémentaire”. Plus précisément, soient E un ensemble et $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(E)$; on pose :

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}^1(\mathcal{C}) &= \{A \subset E;\ A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n, A_n \in \mathcal{C} \text{ ou } A_n^c \in \mathcal{C}\}, \\
\mathcal{R}^2(\mathcal{C}) &= \{A \subset E;\ A = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n, A_n \in \mathcal{C} \text{ ou } A_n^c \in \mathcal{C}\}, \\
\mathcal{R}(\mathcal{C}) &= \mathcal{R}^1(\mathcal{C}) \cup \mathcal{R}^2(\mathcal{C}).
\end{aligned}$$

Prenons $E = \mathbb{R}$ et $\mathcal{C}$ l'ensemble des ouverts de $\mathbb{R}$ (donc $\tau(\mathcal{C})$ est la tribu borélienne de $\mathbb{R}$, voir définition ci après). Il est facile de voir que $\mathcal{R}(\mathcal{C}) \subset \tau(\mathcal{C})$, mais que, par contre (et cela est moins facile à voir), $\mathcal{R}(\mathcal{C})$ n'est pas une tribu. En posant : $\mathcal{S}_0 = \mathcal{C}$, et, pour $n \geq 1$, $\mathcal{S}_n = \mathcal{R}(\mathcal{S}_{n-1})$, on peut aussi montrer que $\overline{\mathcal{S}} = \bigcup_{n \geq 0} \mathcal{S}_n$ n'est pas une tribu (et que $\overline{\mathcal{S}} \subset \tau(\mathcal{C})$).

Le résultat suivant, de démonstration immédiate, est utile dans les raisonnements concernant les tribus :

Proposition 3.1.2 *Soient $\mathcal{T}$ une tribu et $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(E)$, alors :*

$$\mathcal{C} \subset \mathcal{T} \Longrightarrow \tau(\mathcal{C}) \subset \mathcal{T}.$$

Exemple 3.1.2

1. Tribu borélienne d'un espace topologique E : c'est la tribu $\mathcal{B}(E)$ engendrée par les ouverts de E.
2. Tribu engendrée par une partition de E (voir les exercices).

Remarque 3.1.4

1. La tribu borélienne est aussi engendrée par les fermés.

2. $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ est engendrée par les pavés ouverts à “extrémités rationnelles”, i.e. les ensembles $\prod_{i=1}^{d}]a_i, b_i[$ avec $a_i,\ b_i \in \mathbb{Q}$.

Proposition 3.1.3

1. $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ est engendrée par l'une quelconque des familles d'intervalles :

$$\{]-\infty, a[;\ a \in \mathbb{R}\}, \quad \{]-\infty, a];\ a \in \mathbb{R}\}, \quad \{]a, +\infty[;\ a \in \mathbb{R}\}, \quad \{[a, +\infty[;\ a \in \mathbb{R}\}$$
$$\{[a, b];\ a,\ b \in \mathbb{R}\}, \quad \{]a, b[;\ a,\ b \in \mathbb{R}\}, \quad \{[a, b[;\ a,\ b \in \mathbb{R}\}, \quad \{]a, b];\ a,\ b \in \mathbb{R}\}.$$

2. Dans ce qui précède, il suffit de prendre a et b dans une partie dense dans $\mathbb{R}$ (par exemple $\mathbb{Q}$).

Preuve : soit $\mathcal{C}$ l'ensemble des intervalles ouverts bornés $]a, b[$. On a $\mathcal{C} \subset \mathcal{B}(\mathbb{R})$ donc aussi $\tau(\mathcal{C}) \subset \mathcal{B}(\mathbb{R})$. L'inclusion réciproque s'obtient en notant que tout ouvert de $\mathbb{R}$ est réunion dénombrable d'intervalles ouverts bornés (voir exercices) de sorte que si $\mathcal{O}$ désigne l'ensemble des ouverts de $\mathbb{R}$ on a $\mathcal{O} \subset \tau(\mathcal{C})$ d'où $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \subset \tau(\mathcal{C})$.
Considérons par exemple l'ensemble $\mathcal{C}_1$ des intervalles de la forme $]-\infty, a]$. On a à nouveau $\mathcal{C}_1 \subset \mathcal{B}(\mathbb{R})$ car ces intervalles sont des fermés, donc $\tau(\mathcal{C}_1) \subset \mathcal{B}(\mathbb{R})$. On remarque ensuite que

$$]a, b[=]-\infty, b[\setminus]-\infty, a] = \left(\bigcup_{n\geq 1}]-\infty, b - \frac{1}{n}]\right) \setminus]-\infty, a] \in \tau(\mathcal{C}_1)$$

d'où $\mathcal{O} \subset \tau(\mathcal{C}_1)$ et $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \subset \tau(\mathcal{C}_1)$.
Les autres cas se traitent de manière analogue ou en s'appuyant sur les précédents. La deuxième partie de la proposition s'obtient en utilisant que tout réel est la limite d'une suite croissante (resp. décroissante) de rationnels. ∎

Proposition 3.1.4 (tribu image réciproque) *Soient E un ensemble, $(E', \mathcal{T}')$ un espace mesurable et $f\ :\ E \to E'$ une application.*
$\mathcal{T} := f^{-1}(\mathcal{T}') = \{f^{-1}(B);\ B \in \mathcal{T}'\}$ *est une tribu sur E appelée tribu image réciproque de $\mathcal{T}'$ par f.*

Preuve : en exercice.

Proposition 3.1.5 (tribu image directe) *Soient $(E, \mathcal{T})$ un espace mesurable, E' un ensemble et $f\ :\ E \to E'$ une application.*
$\mathcal{T}' := \{B \subset E';\ f^{-1}(B) \in \mathcal{T}\}$ *est une tribu sur E' appelée tribu image directe de $\mathcal{T}$ par$f$.*

Attention : ce n'est pas $f(\mathcal{T})$
Preuve : en exercice.

Définition 3.1.4 Soit $(E_i, \mathcal{T}_i)_{1\leq i\leq n}$ une famille finie d'espaces mesurables. On appelle tribu produit des $\mathcal{T}_i$ et on note $\bigotimes_{1\leq i\leq n} \mathcal{T}_i$ la tribu engendrée par les “pavés mesurables” $\prod_{1\leq i\leq n} \mathcal{A}_i, \quad A_i \in \mathcal{T}_i$. On appelle alors produit des espaces $(E_i, \mathcal{T}_i)_{1\leq i\leq n}$ le couple $(\prod_{1\leq i\leq n} E_i, \bigotimes_{1\leq i\leq n} \mathcal{T}_i)$, qu'on notera pour simplifier $\prod_{1\leq i\leq n} (E_i, \mathcal{T}_i)$.

Exemple : on vérifiera à titre d'exercice que $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$.
Pour l'inclusion $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$, on montrera successivement que pour tout ouvert $\mathcal{U}$ de $\mathbb{R}$ l'ensemble $\Big\{B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\,;\, \mathcal{U} \times B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)\Big\}$ est la tribu $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ puis que pour tout borélien B, l'ensemble $\Big\{A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\,;\; A \times B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)\Big\}$ est la tribu $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.

3.2 Mesures positives, espaces mesurés : définitions et exemples.

Définition 3.2.1 Soit $(E, \mathcal{T})$ un espace mesurable. Une mesure positive sur $(E, \mathcal{T})$ est une application $m \;:\; \mathcal{T} \to \overline{\mathbb{R}}_+$ telle que :

(a) $m(\emptyset) = 0$,

(b) **(σ-additivité)** pour toute suite $(A_n)_{n\geq 0}$ d'ensembles mesurables deux à deux disjoints (i.e. $p \neq q \Longrightarrow A_p \cap A_q = \emptyset$) on a :
$$m(\bigcup_{n\geq 0} A_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} m(A_n).$$

Remarque 3.2.1 On peut remplacer (a) par : $\exists A \in \mathcal{T}\ m(A) < \infty$. Cette condition permet d'écarter la mesure constante égale à $+\infty$.
Pour justifier ceci, mais aussi par la suite, on prendra garde que dans $\overline{\mathbb{R}}_+$: $x + y = x + z \Longrightarrow y = z$ si et seulement si $x < +\infty$.

Définition 3.2.2 On appelle espace mesuré tout triplet $(E, \mathcal{T}, m)$ où $(E, \mathcal{T})$ est un espace mesurable et m une mesure sur $(E, \mathcal{T})$.

Définition 3.2.3 On distingue deux catégories importantes de mesures :
– mesure finie : toute mesure m telle que $m(E) < +\infty$. On dit alors que $(E, \mathcal{T}, m)$ est un espace mesuré fini.
  Une mesure "de masse totale 1" (i.e. telle que $m(E) = 1$) s'appelle une probabilité sur $(E, \mathcal{T})$.
– mesure σ-finie : toute mesure m telle qu'il existe une famille $(A_n)_{n\geq 0} \subset \mathcal{T}$ vérifiant $\bigcup\limits_{n\geq 0} A_n = E$ et $\forall n \geq 0\ m(A_n) < +\infty$.
  (Si besoin, on peut supposer que $(A_n)_{n\geq 0}$ est croissante ou définit une partition de E).

Exemple 3.2.1
– masse de Dirac en $a \in E$: c'est la mesure δ_a sur $(E, \mathcal{T})$ définie par :
$$\forall A \in \mathcal{T} \quad \delta_a(A) = \begin{cases} 1 \text{ si } a \in A \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$
  C'est une mesure finie (et même une probabilité).
– mesure du comptage :
$$\forall A \in \mathcal{T} \quad m(A) = \begin{cases} Card(A) \text{ si } A \text{ fini} \\ +\infty \text{ sinon} \end{cases}$$
  C'est une mesure finie si et seulement si E est fini, σ-finie si et seulement si E est dénombrable.

3.3 Propriétés des mesures positives.

Proposition 3.3.1 *Toute mesure (positive) sur l'espace mesuré* $(E,\mathcal{T})$ *vérifie :*

(a) Additivité forte :

$$\forall A,\, B\in\mathcal{T} \quad m(A\cup B)+m(A\cap B)=m(A)+m(B)$$

(b) Monotonie :

$$\forall A,\, B\in\mathcal{T} \quad A\subset B\Longrightarrow m(A)\leq m(B)$$

(c) σ*-sous additivité :*

$$\forall (A_n)_{n\geq 0}\subset\mathcal{T} \quad m(\bigcup_{n\geq 0}A_n)\leq\sum_{n=0}^{+\infty}m(A_n)$$

(d) Continuité croissante : pour toute suite croissante $(A_n)_{n\geq 0}$ *d'ensembles mesurables :*

$$m(\bigcup_{n\geq 0}A_n)=\lim_{n\to+\infty}m(A_n)=\sup_{n\geq 0}m(A_n)$$

(e) Continuité décroissante : soit $(A_n)_{n\geq 0}$ *une suite décroissante d'ensembles mesurables. S'il existe un entier* n_0 *tel que* $m(A_{n_0})<\infty$ *alors :*

$$m(\bigcap_{n\geq 0}A_n)=\lim_{n\to+\infty}m(A_n)=\inf_{n\geq 0}m(A_n)$$

Preuve :

(a) On a $A\cup B=(A\setminus B)\bigcup_{\text{disj.}}B$ donc $m(A\cup B)=m(A\setminus B)+m(B)$ d'où :

$$m(A\cup B)+m(A\cap B)=\underbrace{m(A\setminus B)+m(A\cap B)}_{m(A)}+m(B).$$

(b) Il suffit de remarquer que si $A\subset B$ alors $B=A\bigcup_{\text{disj.}}(B\setminus A)$ ...

(c) On définit la suite $(B_n)_{n\geq 0}$ par $B_0=A_0$ et, pour $n\geq 1$, $B_n=A_n\setminus\bigcup_{p=0}^{n-1}A_p$. Les B_n sont dans $\mathcal{T}$, deux à deux disjoints, et on a : $\bigcup_{n\geq 0}B_n=\bigcup_{n\geq 0}A_n$, d'où :

$$m(\bigcup_{n\geq 0}A_n)=m(\bigcup_{n\geq 0}B_n)=\sum_{n=0}^{+\infty}m(B_n)\leq\sum_{n=0}^{+\infty}m(A_n).$$

(d) On définit la suite $(B_n)_{n\geq 0}$ par $B_0=A_0$ et, pour $n\geq 1$, $B_n=A_n\setminus A_{n-1}$. Les B_n sont dans $\mathcal{T}$, deux à deux disjoints, et on a : $\bigcup_{n\geq 0}B_n=\bigcup_{n\geq 0}A_n$ et $\bigcup_{p=0}^{n}B_p=A_n$, d'où :

$$m(\bigcup_{n\geq 0}A_n)=m(\bigcup_{n\geq 0}B_n)=\sum_{n=0}^{+\infty}m(B_n)=\lim_{n\to\infty}\uparrow\sum_{p=0}^{n}m(B_p)=\lim_{n\to\infty}\uparrow m(A_n)=\sup_{n}m(A_n).$$

(e) Remarquons que $\bigcap\limits_{n\geq 0} A_n = \bigcap\limits_{n\geq n_0} A_n$ de sorte qu'on peut supposer que $n_0 = 0$, i.e. $m(A_0) < \infty$. Considérons alors la suite $(B_n)_{n\geq 0} \subset \mathcal{T}$ définie par $B_n = A_0 \setminus A_n$. C'est une suite croissante de sorte que : $m(\bigcup\limits_{n\geq 0} B_n)) = \lim\limits_{n\to\infty} \uparrow m(B_n) = \sup\limits_{n} m(B_n)$, d'autre part on vérifie facilement que $\bigcap\limits_{n\geq 0} A_n = A_0 \setminus \left(\bigcup\limits_{n\geq 0} B_n\right)$. Comme $\bigcup\limits_{n\geq 0} B_n \subset A_0$ on a $m\left(\bigcup\limits_{n\geq 0} B_n\right) < \infty$ d'où, d'après le lemme 3.3.1 ci dessous (de démonstration immédiate) :

$$m\left(\bigcap_{n\geq 0} A_n\right) = m(A_0) - m\left(\bigcup_{n\geq 0} B_n\right) = m(A_0) - \lim_{n\to\infty} \uparrow m(B_n)$$

or, $m(A_n)$ étant fini, $m(B_n) = m(A_0) - m(A_n)$ d'où finalement le résultat.

■

Lemme 3.3.1 *Soient A, $B \in \mathcal{T}$ tels que $A \subset B$ et $m(A) < \infty$, alors $m(B \setminus A) = m(B) - m(A)$.*

Remarque 3.3.1

1. Si la mesure m est finie, on peut appliquer la continuité décroissante sans restriction.
2. Si $m(A_n) = +\infty$ pour tout entier $n \geq 0$, il ne faut pas en conclure que $m(\bigcap\limits_{n\geq 0} A_n) = +\infty$. Considérer par exemple la mesure du comptage sur $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ et $A_n = [n, +\infty[$.

3.4 Compléments.

3.4.1 Ensembles négligeables, complété d'un espace mesuré.

Définition 3.4.1 Soit $(E, \mathcal{T}, m)$ un espace mesuré.

1. Une partie A de E est négligeable pour m s'il existe $B \in \mathcal{T}$ tel que $A \subset B$ et $m(B) = 0$ (un ensemble négligeable n'est donc pas nécessairement mesurable).
2. m est complète si toute les parties négligeables sont mesurables. On dit alors que $(E, \mathcal{T}, m)$ est un espace mesuré complet.
3. Une propriété relative aux éléments de E est vraie "presque partout pour m" (m-pp) si elle est vraie dans le complémentaire d'un ensemble négligeable.

Proposition 3.4.1
Soient $(E, \mathcal{T}, m)$ un espace mesuré et $\mathcal{N}_m$ l'ensemble des parties m-négligeables de E.

1. *$\hat{\mathcal{T}} = \{A \cup N;\ A \in \mathcal{T},\ N \in \mathcal{N}_m\}$ est une tribu. C'est la tribu engendrée par $\mathcal{T} \cup \mathcal{N}_m$.*
2. *Il existe une unique mesure $\hat{m}$ sur $\hat{\mathcal{T}}$ prolongeant m.*
3. *$(E, \mathcal{T}, m)$ et $(E, \hat{\mathcal{T}}, \hat{m})$ ont les mêmes ensembles négligeables.*

On dit que $(E, \hat{\mathcal{T}}, \hat{m})$ est le complété de $(E, \mathcal{T}, m)$.

Preuve : en exercice.
Exemple : tribu de Lebesgue (voir plus loin).

3.4.2 Mesures signées.

On peut définir des mesures à valeurs réelles, complexes, vectorielles ..., en conservant la propriété de σ-additivité. Par exemple :

Définition 3.4.2 Soit $(E, \mathcal{T})$ un espace mesurable. On appelle mesure signée sur $(E, \mathcal{T})$ une application $m : \mathcal{T} \to \mathbb{R}$ telle que :

$$\forall (A_n)_{n\geq 0} \subset \mathcal{T} \ t.q. \ p \neq q \Longrightarrow A_p \cap A_q = \emptyset \ : \quad m(\bigcup_{n\geq 0} A_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} m(A_n).$$

Remarque 3.4.1 L'ensemble $\bigcup\limits_{n\geq 0} A_n$ étant invariant par permutation des indices, la série $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} m(A_n)$ est commutativement convergente donc en fait absolument convergente.

Pour une telle mesure on a le résultat de décomposition suivant :

Proposition 3.4.2 *Soit m une mesure signée sur $(E, \mathcal{T})$. Il existe deux mesures <u>positives finies</u> sur $\mathcal{T}$, m^+ et m^-, telles que :*

1. $\forall A \in \mathcal{T} \ m(A) = m^+(A) - m^-(A)$
2. $\exists C \in \mathcal{T} \ m^+(C) = 0$ *et* $m^-(C^c) = 0.$

m^+ et m^- sont caractérisées par :

$$m^+(A) = \sup\{m(B); \ B \in \mathcal{T}, \ B \subset A\}$$
$$m^-(A) = -\inf\{m(B); \ B \in \mathcal{T}, \ B \subset A\}$$

Preuve : en exercice.

3.4.3 Théorème de la classe monotone, application.

Définition 3.4.3 Une famille $\mathcal{M}$ de parties d'un ensemble E est appelée une classe monotone si :

1. $E \in \mathcal{M}$,
2. $\forall A, B \in \mathcal{M} \quad A \subset B \Longrightarrow B \setminus A \in \mathcal{M}$,
3. Pour toute suite croissante $(A_n)_{n\geq 0}$ d'éléments de $\mathcal{M}$, on a $\bigcup\limits_{n\geq 0} A_n \in \mathcal{M}$.

Par exemple, une tribu est une classe monotone.

Remarque 3.4.2 Une classe monotone est stable par passage au complémentaire (choisir $B = E$) dans la deuxième condition.

Soit $\mathcal{C}$ une classe de parties de E. Comme dans le cas des tribus on montre (c'est immédiat) qu'il existe une plus petite classe monotone contenant $\mathcal{C}$, notée $\mathcal{M}(\mathcal{C})$. Précisément :

$$\mathcal{M}(\mathcal{C}) = \bigcap_{\substack{\mathcal{M} \text{ classe monotone} \\ \mathcal{M} \supset \mathcal{C}}} \mathcal{M}$$

On a clairement $\mathcal{M}(\mathcal{C}) \subset \tau(\mathcal{C})$ mais aussi :

Théorème 3.4.1 (de la classe monotone) *Soit $\mathcal{C}$ une classe de parties de E stable par les intersections finies, alors la classe monotone engendrée par $\mathcal{C}$ est égale à la tribu engendrée par $\mathcal{C}$ (i. e. $\mathcal{M}(\mathcal{C}) = \tau(\mathcal{C})$).*

Lemme 3.4.1 *$\mathcal{M}(\mathcal{C})$ est stable par les intersections finies.*

Preuve : posons $\mathcal{M}_1 = \{A \in \mathcal{M}(\mathcal{C})\,;\, \forall B \in \mathcal{C} \quad A \cap B \in \mathcal{M}(\mathcal{C})\}$. $\mathcal{M}_1$ est une classe monotone (vérification facile) qui contient $\mathcal{C}$ car $\mathcal{C}$ est stable par les intersections finies : on a donc $\mathcal{C} \subset \mathcal{M}_1 \subset \mathcal{M}(\mathcal{C})$, d'où $\mathcal{M}_1 = \mathcal{M}(\mathcal{C})$.
Définissons ensuite $\mathcal{M}_2 = \{A \in \mathcal{M}(\mathcal{C})\,;\, \forall B \in \mathcal{M}(\mathcal{C}) \quad A \cap B \in \mathcal{M}(\mathcal{C})\}$. $\mathcal{M}_2$ est une classe monotone (vérification facile) qui contient $\mathcal{C}$ d'après l'égalité $\mathcal{M}_1 = \mathcal{M}(\mathcal{C})$. On en déduit comme précédemment que $\mathcal{M}_2 = \mathcal{M}(\mathcal{C})$ puis, par récurrence, la stabilité par intersection finie. ■

Lemme 3.4.2 *$\mathcal{M}(\mathcal{C})$ est stable par les réunions finies.*

Preuve : soient $A_1, \cdots, A_p \in \mathcal{M}(\mathcal{C})$. On a, par application du lemme précédent et des propriétés d'une classe monotone :

$$\left(\bigcup_{n=1}^{p} A_n\right)^c = \bigcap_{n=1}^{p} A_n^c \in \mathcal{M}(\mathcal{C})$$

d'où $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{p} A_n \in \mathcal{M}(\mathcal{C})$. ■

Preuve du théorème : comme $\mathcal{M}(\mathcal{C}) \subset \tau(\mathcal{C})$, il suffit de montrer que $\mathcal{M}(\mathcal{C})$ est une tribu. Il reste juste à prouver la stabilité par réunion dénombrable.
Soit donc $(A_n)_{n\geq 0} \subset \mathcal{M}(\mathcal{C})$, on a : $\displaystyle\bigcup_{n\geq 0} A_n = \lim_{p\to\infty} \uparrow \bigcup_{n=1}^{p} A_n$ et on conclut grâce au lemme 3.4.2 et à la propriété de stabilité par réunion croissante. ■

Une application essentielle :

Proposition 3.4.3 (lemme d'unicité des mesures) *Soit $\mathcal{C}$ une classe de parties d'un ensemble E, stable par intersections finies et engendrant une tribu $\mathcal{T}$.*

1. *Si μ et ν sont deux mesures bornées sur $\mathcal{T}$ égales sur $\mathcal{C}$ et de même masse totale, elles sont égales.*
2. *Si deux mesures σ-finies μ et ν sur $\mathcal{T}$ sont égales sur $\mathcal{C}$ et telles qu'il existe une famille $(A_n)_{n\geq 0} \subset \mathcal{C}$ vérifiant*
   - *(a) $\forall n \in \mathbb{N}\ \mu(A_n) = \nu(A_n) < \infty$*
   - *(b) $\displaystyle\bigcup_{n\geq 0} A_n = E$*

   alors elles sont égales.

Preuve : pour établir le premier point, définissons $\mathcal{M} = \{A \in \mathcal{T}\,;\, \mu(A) = \nu(A)\}$. On vérifie aisément que $\mathcal{M}$ est une classe monotone et on a : $\mathcal{C} \subset \mathcal{M} \subset \mathcal{T}$. D'après le théorème de la classe monotone on a donc $\mathcal{T} = \tau(\mathcal{C}) = \mathcal{M}(\mathcal{C}) \subset \mathcal{M} \subset \mathcal{T}$ d'où $\mathcal{M} = \mathcal{T}$.
Pour le deuxième point, considérer les traces de μ et ν sur les A_n ... ■

3.4.4 Théorèmes d'existence des mesures

Le résultat suivant, de démonstration difficile, est fondamental en théorie de la mesure :

Théorème 3.4.2 *Soit* $(E, \mathcal{T})$ *un espace mesurable et soit* $\mathcal{S}$ *une famille de parties de* E *telle que*
– $\tau(\mathcal{S}) = \mathcal{T}$,
– $\mathcal{S}$ *est stable par les intersections finies,*
– *Si* $A,\ B \in \mathcal{S}$ *sont tels que* $A \subset B$ *alors* $B \setminus A$ *est une réunion finie d'éléments disjoints de* S.
– $\exists (A_n)_{n\geq 0} \subset \mathcal{S} \quad E = \bigcup\limits_{n\geq 0} A_n$.
Toute application $m\ :\ \mathcal{S} \to \overline{\mathbb{R}}_+$ σ*-additive peut alors se prolonger en une mesure sur* $(E, \mathcal{T})$.
(La σ*-additivité sur* $\mathcal{S}$ *signifie que l'on a* $m(\bigcup\limits_{n\geq 0} A_n) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} m(A_n)$ *pour toute famille* $(A_n)_{n\geq 0}$ *d'éléments disjoints de* S *dont la réunion est dans* $\mathcal{S}$*).*

Applications :

Corollaire 3.4.1 *Il existe une unique mesure* λ *sur* $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ *telle que :* $\forall a < b \quad \lambda([a, b[) = b - a$.

Cette mesure est la mesure de Borel sur $\mathbb{R}$. Elle prolonge l'application "longueur des intervalles" et possède les propriétés énoncées dans le paragraphe 5 ci dessous. Ce résultat est un cas particulier du suivant (prendre $F = Id_{\mathbb{R}}$) :

Corollaire 3.4.2 (fonction de répartition d'une mesure finie)
Soit $F\ :\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *une application. Les conditions suivantes sont équivalentes :*
(i) F *est croissante, continue à gauche,* $\lim\limits_{x\to\infty} F(x) = 0, \quad \lim\limits_{x\to+\infty} F(x) < \infty$,
(ii) il existe une mesure bornée m *sur* $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ *telle que* $\forall x \in \mathbb{R} \quad F(x) = m(]-\infty, x[)$.
Sous ces conditions, F *s'appelle la fonction de répartition de* m *et on a :*

$$\forall a < b \quad m([a, b[) = F(b) - F(a).$$

Preuve :
$(i) \Longrightarrow (ii)$ **:** on applique le théorème 3.4.2 avec $\mathcal{S} =$"classe des intervalles $[a, b[$" et m définie sur $\mathcal{S}$ par $m([a, b[) = F(b) - F(a)$. Pour les propriétés vérifiées par $\mathcal{S}$ il n'y a pas de difficulté. Montrons la σ-additivité de m sur $\mathcal{S}$. Soit $([a_n, b_n[)_{n\geq 0}$ une famille dénombrable disjointe telle que $\bigcup\limits_{n\geq 0} [a_n, b_n[= [\alpha, \beta[$.
Ces deux hypothèses entraînent que l'ensemble des intervalles $[a_n, b_n[$ de la famille est totalement ordonné pour la relation d'ordre partiel dans $\mathcal{S}$: $[a, b[\leq [c, d[\Longleftrightarrow (a = c$ et $b = d)$ ou $b \leq c$ et qu'on peut, à une permutation près des indices, supposer que pour tout entier n on a $b_n \leq a_{n+1}$ (prendre le temps de justifier ceci). On en déduit alors facilement : $F(\beta) - F(\alpha) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} (F(b_n) - F(a_n))$ i.e. la σ-additivité de m sur $\mathcal{S}$.
$(ii) \Longrightarrow (i)$ **:** la croissance de F est une conséquence simple de la croissance de la mesure. Soit $x \in \mathbb{R}$; par croissance de F, l'application φ définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(h) = F(x) - F(x - h)$ est croissante donc elle admet une limite à droite ℓ en 0. On a alors $\ell = \lim\limits_{n\to\infty} \left(F(x) - F(x - \frac{1}{n})\right) = \lim\limits_{n\to\infty} \downarrow m\left([x - \frac{1}{n}, x[\right) = m\left(\bigcap\limits_{n\geq 1} [x - \frac{1}{n}, x[\right) = m(\emptyset) = 0$ (continuité décroissante de m, mesure finie) d'où la continuité à

gauche. F est croissante et majorée sur $\mathbb{R}$ (par $m(\mathbb{R}) < \infty$) donc admet une limite finie en $+\infty$; elle est minorée (par 0) donc admet aussi une limite finie en $-\infty$: en considérant les intervalles $]-\infty, -n[$, $n \in \mathbb{N}$, on montre par continuité décroissante de m que cette limite est nulle. ■

Corollaire 3.4.3 (mesure produit) *Soit $(E_i, \mathcal{T}_i, m_i)_{1\leq i\leq n}$ une famille finie d'espaces mesurés σ-finis. Il existe une unique mesure sur l'espace produit $(\prod_{1\leq i\leq n} E_i, \bigotimes_{1\leq i\leq n} \mathcal{T}_i)$, notée $\otimes m_i$, telle que :*

$$\forall (A_i)_{1\leq i\leq n}, \quad A_i \subset \mathcal{T}_i, \quad (\otimes m_i)(\prod A_i) = m_1(A_1)\cdots m_n(A_n).$$

Voir aussi le premier résultat énoncé dans le paragraphe suivant.

Preuve : on applique le théorème 3.4.2 avec $\mathcal{S} =$"classe des pavés mesurables" et m définie sur $\mathcal{S}$ par $m(\prod A_i) = m_1(A_1)\cdots m_n(A_n)$. ■

3.5 Mesure de Lebesgue sur $(\mathbb{R}^{\mathrm{d}})$.

Le résultat suivant se déduit des corollaires 3.4.1 et 3.4.3 :

Théorème 3.5.1 *Pour tout entier $d \geq 1$ il existe une unique mesure λ sur $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ telle que tout pavé borné $\prod_{i=1}^{d}]a_i, b_i[$ ait pour mesure $\prod_{i=1}^{d}(b_i - a_i)$. Cette mesure s'appelle la mesure de Borel sur $\mathbb{R}^d$ (c'est une mesure σ-finie).*

En prenant $E = \mathbb{R}^d$ et $\mathcal{C} =$"classe des pavés ouverts", la proposition 3.4.3 donne l'unicité de la mesure de Borel. On obtient également, en appliquant cette même proposition, une preuve élégante de son invariance par translation :

Corollaire 3.5.1 (invariance par translation de la mesure de Borel)

$$\forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\ \forall a \in \mathbb{R}^d \quad A + a := \{x + a;\ x \in A\} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \text{ et } \lambda(A + a) = \lambda(A)$$

Plus généralement on a :

$$\forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\ \forall \alpha \in \mathbb{R}\ \forall a \in \mathbb{R}^d \quad \alpha A + a \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \text{ et } \lambda(\alpha A + a) = |\alpha|^d \lambda(A).$$

Preuve : soit $\mathcal{T} = \left\{A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\,;\, A + a \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\right\}$. $\mathcal{O}$ désignant l'ensemble des ouverts de $\mathbb{R}^d$, on a $\mathcal{O} \subset \mathcal{T} \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ car les translations sont des homéomorphismes, et on montre facilement que $\mathcal{T}$ est une tribu, donc $\mathcal{T} = \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$. On vérifie alors que l'application $\lambda_a : \begin{cases} \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) & \longrightarrow & \overline{\mathbb{R}}_+ \\ A & \longmapsto & \lambda(A + a) \end{cases}$ est une mesure qui coïncide avec λ sur la classe des pavés ouverts. On conclut alors en utilisant la proposition 3.4.3 avec $A_n = \prod]-n, n[$. La deuxième partie du corollaire se démontre de manière analogue. ■

Définition 3.5.1 La mesure complétée de la mesure de Borel sur $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ est la mesure de Lebesgue notée encore λ pour simplifier. La tribu complétée $\widehat{\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)}$ est la tribu de Lebesgue $\mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$.

Remarque 3.5.1 On peut montrer que la tribu de Lebesgue sur $\mathbb{R}$ est un sous ensemble strict de $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ (voir exercice 3.6.16 par exemple) équipotent à ce même ensemble et contenant strictement $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Proposition 3.5.1 *La mesure de Borel sur* $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ *possède les propriétés suivantes :*
– λ *est* σ*-finie, bornée sur les ensembles mesurables bornés.*
– $\lambda(\mathbb{R}^d) = +\infty$ *et, dans* $\mathbb{R}$*, tout intervalle non borné a pour mesure* $+\infty$*.*
– λ *est diffuse, au sens suivant :*

$$\forall x \in \mathbb{R}^d \quad \{x\} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \text{ et } \lambda(\{x\}) = 0.$$

– λ *est régulière, au sens suivant :*

$$\forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\ \lambda(A) = \sup\{\lambda(K);\ K \subset A,\ K\, compact\}$$

$$\forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\ \lambda(A) = \inf\{\lambda(O);\ O \supset A,\ O\, ouvert\}$$

– $\forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\ \forall \varepsilon > 0\ \exists O,$ *ouvert* $\exists F,$ *fermé t.q.* $F \subset A \subset O$ *et* $\lambda(O \setminus F) \leq \varepsilon$*.*

Preuve : pour montrer que λ est diffuse, utiliser la continuité monotone décroissante. Les deux derniers points sont une extension du cas “mesure finie” abordé en exercice. Le reste ne présente pas de difficulté. ■

Remarque 3.5.2 une mesure m sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ qui est finie sur les compact s'appelle une mesure de Radon sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, elle est alors régulière. Si de plus elle est invariante par translation on montre, en utilisant le théorème de classe monotone, qu'il existe une constante $C \geq 0$ telle que $m = C\,\lambda$ (voir exercices).

Remarque 3.5.3 la proposition et le corollaire qui précèdent sont valables pour la mesure de Lebesgue (remplacer alors $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ par $\mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$).

Remarque 3.5.4 La mesure de Borel (resp. Lebesgue) étant diffuse, toute partie dénombrable de $\mathbb{R}^n$ est de mesure nulle. La réciproque est fausse : voir l'ensemble de Cantor (exercice 3.6.17).

3.6 Exercices

3.6.1 Tribus

Exercice 3.6.1 Soit $\mathcal{T}$ une tribu sur un ensemble E, et $F \subset E$. Montrer que $\mathcal{T}_F = \{A \cap F;\ A \in \mathcal{T}\}$ est une tribu sur F (tribu trace de $\mathcal{T}$ sur F).

Exercice 3.6.2 Soient E et F des ensembles. Pour $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(E)$ (resp. $\mathcal{P}(F)$) on note $\tau(\mathcal{A})$ la tribu de E (resp. F) engendrée par $\mathcal{A}$.

1. Montrer que si $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$ alors $\tau(\mathcal{A}) \subset \tau(\mathcal{B})$.
2. Soit $f : E \longrightarrow F$ une application.
   (a) Montrer que si $\mathcal{T}'$ est une tribu sur F, alors $f^{-1}(\mathcal{T}')$ est une tribu sur E (tribu image réciproque).

(b) Montrer que si $\mathcal{T}$ est une tribu sur E, alors $\mathcal{T}' = \{B \subset F;\ f^{-1}(B) \in \mathcal{T}\}$ est une tribu sur F (tribu image directe).

(c) Montrer que pour toute classe $\mathcal{C}$ de parties de F on a : $\tau(f^{-1}(\mathcal{C})) = f^{-1}(\tau(\mathcal{C}))$ (on introduira la tribu image directe de la tribu $\tau(f^{-1}(\mathcal{C}))$).

Exercice 3.6.3 Déterminer la tribu engendrée par les singletons de $\mathbb{R}$.

Exercice 3.6.4 Soit E un ensemble ;

1. L'ensemble des parties finies de E est-il une tribu ? (deux cas)
2. Soit $(A_i)_{i\in I}$ une partition dénombrable de E. Décrire la tribu engendrée par cette partition, c'est à dire par le sous ensemble de $\mathcal{P}(E)$ dont les éléments sont les A_i. Cette tribu est-elle dénombrable ? Comment peut-on caractériser les A_i ? (on les appelle les atomes de la tribu $\mathcal{T}$).
3. Montrer que toute tribu finie de parties de E est la tribu engendrée par une partition finie de E. Que dire du cardinal d'une telle tribu ?
4. ($\star$) Montrer que si E est dénombrable, toute tribu sur E est engendrée par une partition.
5. ($\star$) Montrer que toute tribu infinie $\mathcal{T}$ sur un ensemble (infini) E est non dénombrable *(raisonner par l'absurde : supposant $\mathcal{T}$ dénombrable, on pourra introduire, pour tout élément $x \in E$, l'ensemble $A(x)$ intersection de tous les éléments de $\mathcal{T}$ contenant x, et montrer à l'aide de ces ensembles qu'il existe une injection de $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ dans $\mathcal{T}$).*

Exercice 3.6.5 Montrer que la tribu borélienne de $\mathbb{R}^d$ est égale à celle engendrée par l'ensemble de toutes les boules ouvertes.

Exercice 3.6.6

1. Soient $(E, \mathcal{T}, m)$ un espace mesuré et $\mathcal{N}_m$ l'ensemble des parties m-négligeables de E.
   (a) Montrer que $\hat{\mathcal{T}} = \{A \cup N\ ;\ A \in \mathcal{T},\ N \in \mathcal{N}_m\}$ est une tribu et que c'est la tribu engendrée par $\mathcal{T} \cup \mathcal{N}_m$.
   (b) Montrer qu'il existe une unique mesure $\hat{m}$ sur $\hat{\mathcal{T}}$ prolongeant m.
   (c) Montrer que $(E, \mathcal{T}, m)$ et $(E, \hat{\mathcal{T}}, \hat{m})$ ont les mêmes ensembles négligeables.

   On dit que $(E, \hat{\mathcal{T}}, \hat{m})$ est le complété de $(E, \mathcal{T}, m)$.
2. Soit $E = \{a,\ b,\ c,\ d\}$ un ensemble. On pose $A = \{a,\ b\}$, $B = \{c,\ d\}$ et $\mathcal{T} = \tau(A,\ B)$.
   (a) Décrire la tribu $\mathcal{T}$.
   (b) Décrire avec précision l'espace complété de l'espace mesuré $(E, \mathcal{T}, \delta_a)$ où δ_a est la mesure de Dirac en a. Trouver une partition qui engendre la tribu complétée $\hat{\mathcal{T}}$.

3.6.2 Mesures

Exercice 3.6.7 Soit E un ensemble non dénombrable. Pour toute partie A de E, on pose $m(A) = 0$ si A est dénombrable, et $m(A) = +\infty$ sinon. L'application m est-elle une mesure sur $\mathcal{P}(E)$?

Exercice 3.6.8

1. Soit $(a_{n,p})_{(n,p)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ une suite double de réels croissante en n et p.
   Montrer que $\lim\limits_n \lim\limits_p a_{n,p} = \lim\limits_p \lim\limits_n a_{n,p}$.
2. Soient $(m_n)_{n\geq 0}$ une famille de mesures (positives) sur $(E,\mathcal{T})$ et $(\alpha_n)_{n\geq 0} \subset \mathbb{R}_+^*$. On pose, pour $A \in \mathcal{T}$, $m(A) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \alpha_n\, m_n(A)$. Montrer que m est une mesure sur $\mathcal{T}$. On considère l'espace mesurable $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$: qu'obtient-on si pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose $m_n = \delta_n$, mesure de Dirac en n, et $\alpha_n = 1$?

Exercice 3.6.9 Soient $(E,\mathcal{T})$ un espace mesurable, et $\mu \;:\; \mathcal{T} \to \overline{\mathbb{R}}_+$ une application telle que $\mu(\emptyset) = 0$. Montrer que μ est une mesure si et seulement si :

(i) $\forall A,\ B \in \mathcal{T} \quad A \cap B = \emptyset \Longrightarrow \mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$,

(ii) pour toute suite croissante $(A_n)_{n\geq 0} \subset \mathcal{T}$ on a : $\mu(\bigcup\limits_{n\geq O} A_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} \mu(A_n)$.

Exercice 3.6.10 ($\star$) Soit $(E,\mathcal{T},m)$ un espace mesuré. On définit une application $\mu\ :\ \mathcal{T} \to \overline{\mathbb{R}}$ par :

$$\mu(A) = \sup\{m(B)\ ;\ B \subset A,\ B \in \mathcal{T},\ m(B) < +\infty\}.$$

1. Montrer que μ est une mesure sur $(E,\mathcal{T})$.
2. Montrer que si m est σ-finie alors $m = \mu$.

Exercice 3.6.11 On considère ici l'espace mesuré $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$. Que peut on dire d'un ouvert de $\mathbb{R}$ de mesure nulle ?
Soit $\varepsilon > 0$. Peut-on construire un ouvert dense dans $\mathbb{R}$ de mesure inférieure à ε ?

Exercice 3.6.12 (Régularité d'une mesure finie sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$) . Soit m une mesure finie sur la tribu borélienne sur $\mathbb{R}$. On pose :

$$\mathcal{T} = \{A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\,;\, \forall\varepsilon > 0\ \exists O \text{ ouvert de } \mathbb{R},\ \exists F \text{ fermé de } \mathbb{R} \text{ tels que } F \subset A \subset O \text{ et } m(O \setminus F) \leq \varepsilon\}.$$

1. Soient a et $b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Montrer que $]a,b[\, \in \mathcal{T}$.
2. Montrer que $\mathcal{T}$ est une tribu. En déduire que m est régulière.
3. En déduire que : $\forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \quad m(A) = \inf\{m(O)\ ;\ O \supset A, O \text{ ouvert de } \mathbb{R}\}$.

Exercice 3.6.13 (Borel-Cantelli)
Soit $(E,\mathcal{T},m)$ un espace mesuré, et $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{T}$ telle que $\sum\limits_{n\geq 0} m(A_n) < +\infty$.
Montrer que $m(\overline{\lim}\, A_n) = 0$.

Exercice 3.6.14 Soit $(E,\mathcal{T},m)$ un espace mesuré **avec m bornée**. Montrer que pour toute suite $(A_n)_{n\geq 0} \subset \mathcal{T}$ on a :

$$m(\underline{\lim}\, A_n) \leq \underline{\lim}\, m(A_n) \leq \overline{\lim}\, m(A_n) \leq m(\overline{\lim}\, A_n)$$

Quelle inégalité subsiste si m n'est pas bornée ? Examiner le cas de $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ avec $A_n =]n, +\infty[$.

Exercice 3.6.15 On se propose de monter qu'une mesure de Radon sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ (voir la remarque 3.5.2) invariante par translation est de la forme $C\,\lambda$ avec $C \geq 0$.
On note Ω_n l'ensemble des pavés de $\mathbb{R}^d$ produits d'intervalles de la forme $[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}]$, $k \in \mathbb{Z}$.

1. Montrer que tous les éléments de Ω_0 ont une même mesure $C < \infty$.
2. Montrer que pour tout $B \in \Omega_n$ on a : $m(B) = C\, 2^{-nd}$.
3. Montrer que $\mathcal{C} := \bigcup_{n\geq 0} \Omega_n$ est stable par les intersections finies et engendre $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$. Conclure.

Exercice 3.6.16 (pourquoi ne peut-on pas définir la mesure de Lebesgue sur $\mathcal{P}(\mathbb{R})$...) On définit la relation d'équivalence sur $[0,1]$: $xRy \iff x - y \in \mathbb{Q}$. <u>En utilisant l'axiome du choix,</u> on construit un ensemble $A \subset [0,1]$ tel que A contienne un élément et un seul de chaque classe d'équivalence. Pour $q \in \mathbb{Q} \cap [0,1]$, on définit $A_q = \{y \in [0,1]; y = x + q \text{ ou } y = x + q - 1, x \in A, \}$.

1. Montrer que $\bigcup_{q\in\mathbb{Q}} A_q = [0,1]$.
2. Montrer que si m est une application de $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ dans $\overline{\mathbb{R}}_+$, invariante par translation et vérifiant $m([0,1]) = 1$, m ne peut pas être σ- additive.
   En déduire la non-existence d'une mesure m sur $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ telle que $\forall a,\, b \in \mathbb{R}$ t.q. $a < b$, $m([a,b]) = b - a$

Exercice 3.6.17 (L'ensemble de Cantor) On définit la suite $(C_n)_{n\geq 0}$ de parties de $[0,1]$ de la manière suivante :

$$C_n = \bigcup_{p=1}^{2^n} [a_p^n, b_p^n],$$

avec

$$a_1^0 = 0,\, b_1^0 = 1, \text{ de sorte que } C_0 = [0,1],$$

et, pour tout $n \geq 0$ et tout $p \in \{1,\ldots,2^n\}$,

$$\begin{cases} a_{2p-1}^{n+1} = a_p^n, \quad b_{2p-1}^{n+1} = a_p^n + \dfrac{b_p^n - a_p^n}{3}, \\ a_{2p}^{n+1} = a_p^n + \dfrac{2(b_p^n - a_p^n)}{3}, \quad b_{2p}^{n+1} = b_p^n. \end{cases}$$

On pose alors :

$$C = \bigcap_{n\geq 0} C_n,$$

C est l'ensemble de Cantor.

1. Montrer que C est compact, d'intérieur vide et de mesure de Lebesgue nulle.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $A_n = \{a_p^n,\, p \in \{1,\ldots,2^n\}\}$.
   Montrer que :
   $$A_n = \{\sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha_i}{3^i}\,;\, \alpha_i \in \{0,2\},\, \forall i \in \{1,\ldots,n\}\},$$
   et que :
   $$b_p^n = a_p^n + \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{2}{3^i},\, \forall p \in \{1,\ldots,2^n\}.$$

3. Montrer que :

$$(\forall i \in \mathbb{N}^*\, \alpha_i \in \{0,2\}) \implies \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\alpha_i}{3^i} \in C.$$

4. Soit $X = \{0,2\}^{\mathbb{N}^*}$, et soit $\tilde{C} = \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\alpha_i}{3^i} \,;\, \forall i \in \mathbb{N}^* \quad \alpha_i \in \{0,2\} \right\}$. Montrer que X et $\tilde{C}$ sont équipotents et conclure que C est non dénombrable.

Chapitre 4

Applications mesurables

4.1 Mesurabilité.

Définition 4.1.1 Soient $(E, \mathcal{T})$ et $(E', \mathcal{T}')$ deux espaces mesurables. Une application $f : E \longrightarrow E'$ est mesurable par rapport aux tribus $\mathcal{T}$ et $\mathcal{T}'$ si $f^{-1}(\mathcal{T}') \subset \mathcal{T}$.
On dira alors que f est $(\mathcal{T}, \mathcal{T}')$-mesurable (ou simplement "mesurable" s'il n'y a pas ambiguité).

Remarque 4.1.1

1. Cette condition s'écrit aussi : $\forall A \in \mathcal{T}' \quad f^{-1}(A) \in \mathcal{T}$. (Remarquer l'analogie avec la définition de la continuité...).
2. Dans le cas où E et E' sont deux espaces topologiques munis de leurs tribus boréliennes, une application $E \to E'$ mesurable est dite borélienne. On verra par exemple qu'une application continue est borélienne.

La condition $f^{-1}(\mathcal{T}') \subset \mathcal{T}$ est bien trop sévère à vérifier. On dispose de critères plus maniables, en particulier grâce au lemme fondamental suivant :

Lemme 4.1.1 *Soient E et E' des ensembles et $f : E \to E'$ une application. Pour toute classe $\mathcal{C}$ de parties de E' on a :*

$$\tau(f^{-1}(\mathcal{C})) = f^{-1}(\tau(\mathcal{C})).$$

Preuve : on utilise les notions de tribu image directe et image réciproque. Le détail est proposé en exercice dans le chapitre précédent.
Application :

Proposition 4.1.1 (critère de mesurabilité)
Une application $f : (E, \mathcal{T}) \to (E', \mathcal{T}')$ est mesurable si et seulement si il existe une classe $\mathcal{C}$ de parties de E' engendrant $\mathcal{T}'$ telle que $f^{-1}(\mathcal{C}) \subset \mathcal{T}$

Preuve :
C.N. : immédiat.
C.S. : $f^{-1}(\mathcal{T}') = f^{-1}(\tau(\mathcal{C})) = \tau(f^{-1}(\mathcal{C})) \subset \mathcal{T}$. ■

Corollaire 4.1.1 *Soient E et E' deux espaces topologiques. Toute application continue $f : E \to E'$ est borélienne.*

Preuve : on prend pour $\mathcal{C}$ la classe des ouverts de E' ... ∎

Proposition 4.1.2 *Soient $(E,\mathcal{T})$, $(E',\mathcal{T}')$ et $(E'',\mathcal{T}'')$ des espaces mesurables, $f : E \to E'$ et $g : E' \to E''$ des applications. Alors :*

$$f \quad \text{et} \quad g \quad \text{mesurables} \Longrightarrow g \circ f \quad \text{mesurable}.$$

Preuve : immédiate.

Proposition 4.1.3 (restriction) *Soient $f : (E,\mathcal{T}) \to (E',\mathcal{T}')$ une application mesurable et $E_0 \subset E$, alors la restriction de f à E_0 est $(\mathcal{T}_{E_0},\mathcal{T}')$-mesurable, $\mathcal{T}_{E_0}$ désignant la tribu trace de $\mathcal{T}$ sur E_0 (définie en exercice).*

Preuve : immédiate.

Proposition 4.1.4 (recollement) *Soient $(E,\mathcal{T})$ et $(E',\mathcal{T}')$ des espaces mesurables, et $f : E \to E'$ une application. Si $(E_n)_{n\geq 0} \subset \mathcal{T}$ est une partition dénombrable de E telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$ la restriction de f à E_n soit $(\mathcal{T}_{E_n},\mathcal{T}')$-mesurable, alors f est $(\mathcal{T},\mathcal{T}')$-mesurable.*

Preuve : soit $B \in \mathcal{T}'$, on a :

$$f^{-1}(B) = \bigcup_{n\geq 0} \Big(f^{-1}(B) \cap E_n\Big) = \bigcup_{n\geq 0} f^{-1}_{|E_n}(B) \in \mathcal{T}.$$

∎

Proposition 4.1.5 (application à valeurs dans un espace produit)
Soient $(E,\mathcal{T})$, $(E_i,\mathcal{T}_i)_{1\leq i\leq n}$ des espaces mesurables et $f = (f_1,\cdots,f_n) : E \to \prod_{1\leq i\leq n} E_i$ une application. f est $(\mathcal{T}, \bigotimes_{1\leq i\leq n} \mathcal{T}_i)$-mesurable si et seulement si pour tout $i = 1,\cdots,n$ l'application $f_i : E \to E_i$ est $(\mathcal{T},\mathcal{T}_i)$-mesurable.

Lemme 4.1.2 *Pour tout $j = 1,\cdots,n$ la projection $p_j : \begin{cases} \prod_{1\leq i\leq n} E_i & \longrightarrow & E_j \\ (x_i)_{1\leq i\leq n} & \longmapsto & x_j \end{cases}$ est $(\bigotimes_{1\leq i\leq n} \mathcal{T}_i,\mathcal{T}_j)$-mesurable.*

Preuve : pour le lemme, il suffit de noter que :

$$\forall A \in \mathcal{T}_j \quad p_j^{-1}(A) = E_1 \times \cdots \times E_{j-1} \times A \times E_{j+1} \times \cdots \times E_n \in \bigotimes_{1\leq i\leq n} \mathcal{T}_i.$$

La condition nécessaire de la proposition est une conséquence immédiate du lemme. Pour la condition suffisante on remarque que si $\prod_{1\leq i\leq n} A_i$ est un pavé mesurable alors $f^{-1}\left(\prod_{1\leq i\leq n} A_i\right) = \bigcap_{1\leq i\leq n} f_i^{-1}(A_i)$. ∎

On a déjà défini la notion de tribu engendrée par un ensemble de parties. On définit maintenant la notion de tribu engendrée par une application.

Définition 4.1.2 Si $(E',\mathcal{T}')$ est un espace mesurable et $f : E \to E'$ une application, la plus petite tribu sur E rendant f mesurable (c'est clairement $f^{-1}(\mathcal{T}')$) s'appelle la tribu engendrée par f. On la notera $\tau(f)$ (exemples en exercices). Plus généralement si $(E_i,\mathcal{T}_i)_{i\in I}$ est une famille d'espaces mesurables et $f_i : E \longrightarrow E_i,\ i \in I$ une famille d'applications, on appelle tribu engendrée par cette famille d'applications et on note $\tau((f_i)_{i\in I})$ la plus petite tribu les rendant toutes mesurables : c'est la tribu $\tau\left(\bigcup_{i\in I} f_i^{-1}(\mathcal{T}_i)\right)$.

On peut "transporter" une mesure à l'aide d'une application mesurable; c'est la notion de mesure image qui joue un rôle important par exemple en probabilités pour définir la notion de loi de probabilité :

Proposition 4.1.6 *Soient $(E,\mathcal{T},m)$ un espace mesuré, $(E',\mathcal{T}')$ un espace mesurable et $f : E \to E'$ une application mesurable. L'application $\mu : \mathcal{T}' \to \overline{\mathbb{R}}_+$ définie par :*

$$\forall B \in \mathcal{T}' \ \mu(B) = m(f^{-1}(B))$$

est une mesure sur $(E',\mathcal{T}')$ qu'on appelle mesure image de m par f.

4.2 Mesurabilité des fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$, $\overline{\mathbb{R}}$ ou $\overline{\mathbb{R}}_+$.

$\mathbb{R}$, $\overline{\mathbb{R}}$ et $\overline{\mathbb{R}}_+$ sont munis de leurs tribus boréliennes. La tribu borélienne de $\overline{\mathbb{R}}$, par exemple, est engendrée par les intervalles $[-\infty,a[,\ a \in \mathbb{R}$ (resp. $[-\infty,a]$, $]a,+\infty]$, $[a,+\infty]$ etc...).

Définition 4.2.1 Soient $(E,\mathcal{T})$ un espace mesurable et $f : E \to \mathbb{R}$ (resp. $\overline{\mathbb{R}}$, $\overline{\mathbb{R}}_+$) une application. On dit que f est $\mathcal{T}$-mesurable si f est mesurable relativement aux tribus $\mathcal{T}$ et $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ (resp. $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$, $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}_+)$).

Notations : $\mathcal{M}(E,\mathcal{T})$, ou $\mathcal{M}$ s'il n'y a pas ambiguïté, désigne l'ensemble des applications $f : E \to \mathbb{R}$ $\mathcal{T}$-mesurables, $\mathcal{M}_+(E,\mathcal{T})$, ou $\mathcal{M}_+$, l'ensemble des applications $f : E \to \overline{\mathbb{R}}_+$ $\mathcal{T}$-mesurables (on dira "applications mesurables positives").

Par application de la proposition 4.1.1 on a alors ce résultat, très important en pratique :

Proposition 4.2.1 *Soient $(E,\mathcal{T})$ un espace mesurable et $f : E \to \mathbb{R}$ (resp. $\overline{\mathbb{R}}$, $\overline{\mathbb{R}}_+$) une application. Les énoncés suivants sont équivalents :*

(i) f *est* $\mathcal{T}$*-mesurable.*

(ii) $\forall a \in \mathbb{R} \quad \{f < a\} \in \mathcal{T}$.

(iii) $\forall a \in \mathbb{R} \quad \{f \leq a\} \in \mathcal{T}$.

(iv) $\forall a \in \mathbb{R} \quad \{f > a\} \in \mathcal{T}$.

(v) $\forall a \in \mathbb{R} \quad \{f \geq a\} \in \mathcal{T}$.

On obtient ainsi très facilement :

Proposition 4.2.2 *Soit $(E,\mathcal{T})$ un espace mesurable, alors :*

$$\forall A \subset E \quad A \in \mathcal{T} \iff \mathbb{1}_A \quad \mathcal{T} - \text{mesurable}.$$

La proposition suivante concerne la stabilité de $\mathcal{M}$ vis à vis des opérations usuelles.

Proposition 4.2.3 *Soit $(E, \mathcal{T})$ un espace mesurable. $\mathcal{M}$ et $\mathcal{M}_+$ sont stables par les opérations :*
– $f \to k.f \quad k \in \mathbb{R}$ *(avec la convention $0 \times \infty = 0$),*
– $(f, g) \to f + g, \ f \times g,$
– $(f, g) \to \sup(f, g), \ \inf(f, g).$
En particulier, si $f \in \mathcal{M}$, il en est de même de $f^+, \ f^-, \ |f|$.

Remarque 4.2.1 On a les mêmes résultats avec $f, \ g \ : \ E \to \overline{\mathbb{R}}$ chaque fois que ces opérations ont un sens.

La preuve de ce résultat s'appuie sur la continuité des applications $(u, v) \to u + v, \ uv, \ \sup(u, v), ...$ et sur le lemme suivant, conséquence immédiate de la proposition 4.1.5 :

Lemme 4.2.1 *Soient $f, \ g \in \mathcal{M}$ (resp. $\mathcal{M}_+$). L'application* $h \ : \ \begin{cases} E \to \mathbb{R}^2 \ (resp. \ \overline{\mathbb{R}}_+^2) \\ x \to (f(x), g(x)) \end{cases}$ *est mesurable pour les tribus $\mathcal{T}$ et $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ (resp. $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}_+^2)$).*

Proposition 4.2.4 (stabilité par passages à la limite) *Soit $(E, \mathcal{T})$ un espace mesurable.*

(i) Pour toute suite $(f_n)_{n \geq 0}$ de fonctions $\mathcal{T}$-mesurables $E \to \mathbb{R}$ (resp. $\overline{\mathbb{R}}_+$), les fonctions $\sup\limits_{n \geq 0} f_n$, $\inf\limits_{n \geq 0} f_n$, $\overline{\lim} f_n$, $\underline{\lim} f_n$ sont $\mathcal{T}$-mesurables de E dans $\overline{\mathbb{R}}$ (resp. $\overline{\mathbb{R}}_+$)

(ii) Une limite simple de fonctions $\mathcal{T}$-mesurables est $\mathcal{T}$-mesurable.

Preuve : en exercice.

Remarque 4.2.2 On a la stabilité dans $\mathcal{M}$ (situation (i)) si la suite est bornée (pour la norme $\| \, . \, \|_\infty$), sinon on obtient des fonctions $\mathcal{T}$-mesurables $E \to \overline{\mathbb{R}}$.

Définition 4.2.2 Soient E un ensemble et $f \ : \ E \to \mathbb{R}$. On dit que f est étagée si f ne prend qu'un nombre fini de valeurs (i.e. si $f(E)$ est un ensemble fini).

Posons $f(E) = \{a_1, \cdots, a_p\}$ et $A_i = f^{-1}(\{a_i\})$. Alors les $A_i, \ 1 \leq i \leq p$ forment une partition de E et on a :

$$f = \sum_{i=1}^{p} a_i \, \mathbb{1}_{\mathrm{A_i}} \tag{4.1}$$

(4.1) est la <u>forme canonique de f</u>.

D'autre part toute somme $\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i \, \mathbb{1}_{\mathrm{B_i}}$ avec $\alpha_1, \cdots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ et $B_1, \cdots, B_n \subset E$ définit clairement une fonction étagée, d'où :

Proposition 4.2.5 *L'ensemble des fonctions étagées sur E est le s.e.v. de $\mathcal{F}(E, \mathbb{R})$ engendré par les fonctions indicatrices (c'est aussi une algèbre car $\mathbb{1}_{\mathrm{A}} \times \mathbb{1}_{\mathrm{B}} = \mathbb{1}_{\mathrm{A \cap B}}$).*

On va bien sûr s'intéresser essentiellement aux fonctions étagées mesurables. On note $\mathcal{E}$ l'ensemble des fonctions étagées $\mathcal{T}$-mesurables $E \to \mathbb{R}$ et $\mathcal{E}^+$ l'ensemble des fonctions étagées $\mathcal{T}$-mesurables positives $E \to \mathbb{R}_+$.

Proposition 4.2.6 *L'ensemble $\mathcal{E}$ des fonctions étagées mesurables définies sur $(E, \mathcal{T})$ est le s.e.v. de $\mathcal{F}(E, \mathbb{R})$ (et de $\mathcal{M}$) engendré par les fonctions indicatrices d'ensembles mesurables.*

Preuve : il faut essentiellement montrer que toute fonction étagée mesurable est combinaison linéaire de fonctions indicatrices d'ensembles mesurables, or, si $f = \sum_{i=1}^{p} a_i \, \mathbb{1}_{\mathrm{A_i}}$ est la forme canonique de f, on a $A_i = f^{-1}(a_i) \in \mathcal{T}$ car $\{a_i\}$ est un borélien (c'est un fermé). ∎

La proposition suivante et son corollaire donnent des critères fondamentaux de mesurabilité.

Proposition 4.2.7 (mesurabilité positive) *Soient $(E, \mathcal{T})$ un espace mesurable et $f : E \to \overline{\mathbb{R}}_+$. Alors :*

$$f \in \mathcal{M}_+ \Longleftrightarrow \exists (f_n)_{n\geq 0} \subset \mathcal{E}^+ \quad f = \lim_{n\to\infty} \uparrow f_n.$$

Autrement dit, les fonctions mesurables positives sont les limites simples de suites croissantes de fonctions étagées mesurables positives.
De plus, si $f \in \mathcal{M}_+$ est bornée, la suite f_n peut être choisie de sorte que la convergence soit uniforme.

Corollaire 4.2.1 (mesurabilité) *Soient $(E, \mathcal{T})$ un espace mesurable et $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$. Alors :*

$$f \quad \mathcal{T}\text{-mesurable} \Longleftrightarrow \exists (f_n)_{n\geq 0} \subset \mathcal{E} \quad f = \lim f_n.$$

(i.e. les fonctions mesurables sont les limites simples de suites de fonctions étagées mesurables)

Preuve :
C.S. : immédiat par application de la proposition 4.2.4.
C.N. : on utilise les "approximations dyadiques tronquées" de f : on tronque f "au niveau n", on partage l'intervalle $[0, n]$ en $n2^n$ intervalles de même longueur et on pose

$$f_n(x) = \begin{cases} \dfrac{k}{2^n} & \text{si} \quad f(x) \in [\dfrac{k}{2^n}, \dfrac{k+1}{2^n}[, \\ n & \text{si} \qquad f(x) \geq n. \end{cases}$$

Pour tout entier $n \geq 1$ f_n est étagée mesurable, de décomposition canonique :

$$f_n = \sum_{k=0}^{n2^n-1} \frac{k}{2^n} \, \mathbb{1}_{\{\frac{k}{2^n} \leq f < \frac{k+1}{2^n}\}} + \mathrm{n} \, \mathbb{1}_{\{f \geq n\}}$$

Pour établir la convergence simple de f_n vers f il suffit de remarquer que si $f(x) = +\infty$ alors $f_n(x) \geq n$ et sinon, pour $n > f(x)$ on a $f(x) - \dfrac{1}{2^n} < f_n(x) \leq f(x)$.

Il reste à établir la croissance de la suite $(f_n)_{n\geq 0}$. Si $f(x) \geq n$, c'est à dire aussi $\dfrac{n\,2^{n+1}}{2^{n+1}} \leq f(x)$ alors on a $f_{n+1}(x) \geq n = f_n(x)$, sinon il existe un entier k unique tel que $\dfrac{k}{2^n} \leq f(x) < \dfrac{k+1}{2^n} < n$, ce qui s'écrit aussi :

$$\frac{2k}{2^{n+1}} \leq f(x) < \frac{2k+1}{2^{n+1}} \quad \text{ou} \quad \frac{2k+1}{2^{n+1}} \leq f(x) < \frac{2k+2}{2^{n+1}}.$$

Dans le premier cas on a $f_{n+1}(x) = f_n(x) = \dfrac{k}{2^n}$ et dans le second $f_{n+1}(x) = \dfrac{2k+1}{2^{n+1}} = f_n(x) + \dfrac{1}{2^{n+1}}$.
Dans tous les cas on a bien $f_{n+1}(x) \geq f_n(x)$. Il résulte enfin de ce qui précède que si f est bornée la convergence de $(f_n)_{n\geq 0}$ vers f est uniforme car on a alors, pour $n \geq \| f \|_\infty$: $| f_n(x) - f(x) | \leq \dfrac{1}{2^n}$ pour tout $x \in E$. ∎

4.3 Quelques modes de convergence liés à la mesure.

Remarque 4.3.1 *On a défini la notion de relation vraie presque partout. En particulier on notera que si* $f, g \ : \ E \to \mathbb{R}$ *(resp.* $\overline{\mathbb{R}}$, $\overline{\mathbb{R}}_+$*) sont mesurables, les ensembles* $\{f \neq g\} = (f-g)^{-1}(\mathbb{R}^*)$ *et* $\{f \geq g\} = (f-g)^{-1}([0, +\infty[)$ *sont mesurables et on a :*

1. $f = g$ *m-p.p.* $\Longleftrightarrow m(\{f \neq g\}) = 0$,
2. $f < g$ *m-p.p.* $\Longleftrightarrow m(\{f \geq g\}) = 0$.

Dans tout ce paragraphe, les fonctions sont définies sur l'espace mesuré $(E, \mathcal{T}, m)$.

Définition 4.3.1 (convergence presque partout)
On dit que $(f_n)_{n\geq 0}$ converge vers f presque partout (et on écrit : $f_n \to f$ p.p.) s'il existe une partie m-négligeable $A \subset E$ telle que :

$$\forall x \in A^c \quad \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x).$$

Définition 4.3.2 (convergence presque uniforme)
On dit que $(f_n)_{n\geq 0}$ converge vers f presque uniformément (et on écrit $f_n \to f$ p.u.) si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe une partie mesurable A telle que $m(A) \leq \varepsilon$ et f_n converge uniformément vers f sur A^c.

Le résultat suivant, assez fin, établit un lien entre ces deux notions dans le cas d'un espace mesuré fini :

Théorème 4.3.1 (Egorov)
On suppose $m(E) < \infty$*. Soient* f_n, $n \geq 0$ *et* f *des fonctions mesurables* $E \to \mathbb{R}$*. Si* $(f_n)_{n\geq 0}$ *converge vers* f *presque partout alors* $(f_n)_{n\geq 0}$ *converge vers* f *presque uniformément.*

Définition 4.3.3 (convergence en mesure)
Soient f_n, $n \geq 0$ et f des fonctions mesurables $E \to \mathbb{R}$. $(f_n)_{n\geq 0}$ converge vers f en mesure si :

$$\forall \delta > 0 \quad \lim_{n\to\infty} m(\{|f_n - f| \geq \delta\}) = 0.$$

Les liens entre ces notions sont précisés dans le diagramme suivant. Les démonstrations seront faites en exercice.

$$\begin{tikzcd}
\text{convergence uniforme} \arrow[r] \arrow[d] & \text{convergence simple} \arrow[r] & \text{convergence p.p.} \arrow[lld, bend left=10, "\text{si } m(E)<\infty"] \arrow[d, shift left, "\text{si } m(E)<\infty"] \\
\text{convergence p.u.} \arrow[rru] \arrow[rr, shift right] & & \text{convergence en mesure} \arrow[ll, shift right, "(*)"'] \arrow[u, shift left, "(*)"]
\end{tikzcd}$$

(*) : pour une suite extraite

4.4 Exercices

Exercice 4.4.1

1. Soient f et g des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et λ la mesure de Lebesgue. Montrer que $f = g \quad \lambda$-p.p. si et seulement si $f = g$.
2. Soient f et g des fonctions définies de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et δ_0 la mesure de Dirac en 0. Montrer que $f = g \quad \delta_0$-p.p. si et seulement si $f(0) = g(0)$.

Exercice 4.4.2 Soit $(E, \mathcal{T})$ un espace mesurable.

1. Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite de fonctions mesurables de $(E, \mathcal{T})$ dans $(\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}))$. Montrer que $\sup(f_n)$, $\inf(f_n)$, $\overline{\lim}\ (f_n)$ et $\underline{\lim}\ (f_n)$ sont mesurables.
2. Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite de fonctions mesurables de $(E, \mathcal{T})$ dans $(\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}))$ convergeant simplement vers f ; montrer que f est mesurable.

Exercice 4.4.3 Soient $(E, \mathcal{T})$ un espace mesurable et f une fonction réelle $\mathcal{T}$-mesurable. a étant un réel strictement positif on définit la fonction tronquée f_a par :

$$f_a(x) = \begin{cases} f(x) \text{ si } \mid f(x) \mid \leq a, \\ a \text{ si } f(x) > a, \\ -a \text{ si } f(x) < -a. \end{cases}$$

Montrer que f_a est une application $\mathcal{T}$-mesurable :

1. En utilisant les théorèmes de restriction et recollement,
2. En remarquant que $f_a = sgn(f) \min(\mid f \mid, a)$.

Exercice 4.4.4 Soient $(E, \mathcal{T})$ un espace mesurable et $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite de fonctions $\mathcal{T}$-mesurables de E dans $\mathbb{R}$.

1. Montrer que l'ensemble A des points $x \in E$ tels que $(f_n(x))_{n\geq 0}$ soit de Cauchy est mesurable.
2. Soit f une fonction $\mathcal{T}$-mesurable de E dans $\mathbb{R}$. Montrer que l'ensemble de convergence de f_n vers f, i.e. $\{x \in E;\ \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x)\}$, est mesurable.

Exercice 4.4.5

Soit $(E, \mathcal{T}, m)$ un espace mesuré. On rappelle que pour toute suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{T}$ d'ensembles mesurables telle que $\sum\limits_{n\geq 0} m(A_n) < +\infty$ on a : $m(\overline{\lim}\ A_n) = 0$ (lemme de Borel-Cantelli).

1. Soient $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite d'applications $\mathcal{T}$-mesurables de E dans $\mathbb{R}$ et f une applications $\mathcal{T}$-mesurable de E dans $\mathbb{R}$.
   (a) Montrer que pour tout $n \geq 0$ et tout $\varepsilon > 0$ l'ensemble $\{\mid f_n - f \mid > \varepsilon\}$ est mesurable.
   (b) Montrer que $(f_n)_{n\geq 0}$ tend vers f p.p. si et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$ l'ensemble $\overline{\lim}\ \{\mid f_n - f \mid > \varepsilon\}$ est négligeable.
   (c) On suppose vérifiée la condition suivante :
   $$\text{Pour tout } \varepsilon > 0 \text{ la série } \sum_{n\geq 0} m(\{\mid f_n - f \mid > \varepsilon\}) \text{ converge.} \tag{4.2}$$
   Qu'en déduit-on ?

(d) On considère le cas $(E, \mathcal{T}, m) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$, $f_n = 1\!\!1_{[0,\frac{1}{n}]}$ pour $n \geq 1$ et $f = 0$. La condition (4.2) est-elle réalisée ? Conclusion ?

Exercice 4.4.6

1. Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$; montrer que si f est croissante, f est borélienne.
2. Montrer que les fonctions en escalier sur $[a, b]$ sont des fonctions étagées mesurables sur $([a, b], \mathcal{B}([a, b]))$. Que dire des fonctions réglées sur $[a, b]$?

Exercice 4.4.7 Soient $(E, \mathcal{T})$ un espace mesurable et f une fonction réelle $\mathcal{T}$-mesurable. Que peut-on dire des ensembles suivants :

1. $\mathrm{G}(f) = \{(x, t) \in E \times \mathbb{R} \ ; \ f(x) = t\}$ (graphe de f),
2. $\mathrm{Epi}(f) = \{(x, t) \in E \times \mathbb{R} \ ; \ f(x) \leq t\}$ (épigraphe de f).

Exercice 4.4.8 Soient $(E, \mathcal{T}, m)$ un espace mesuré et $\hat{\mathcal{T}}$ la tribu complétée de $\mathcal{T}$. Montrer qu'une fonction réelle f sur E est $\hat{\mathcal{T}}$-mesurable si et seulement si il existe deux fonctions $\mathcal{T}$-mesurables g et h telles que $g \leq f \leq h$ et $m(\{g \neq h\}) = 0$.
(On commencera par traiter le cas des fonctions étagées).

Exercice 4.4.9 Soit $(E, \mathcal{T})$ un espace mesurable.

1. f étant une fonction étagée de E dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, caractériser $\tau(f)$ (tribu engendrée par f).
2. Si A est un atome de $\mathcal{T}$ (i.e. $\forall B \in \mathcal{T}$, $B \subset A \Longrightarrow B = A$ ou $B = \emptyset$), montrer que toute fonction $\mathcal{T}$-mesurable est constante sur A.
3. On suppose que $\mathcal{T}$ est engendrée par une partition dénombrable. Donner une C.N.S. pour qu'une fonction réelle f définie sur E soit $\mathcal{T}$-mesurable.

Exercice 4.4.10 Soit f une application de E dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Montrer qu'une fonction g de E dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ est $\tau(f)$-mesurable si et seulement si il existe une fonction borélienne Φ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que $g = \Phi \circ f$ *(on commencera par traiter le cas où g est étagée).*

Exercice 4.4.11 Soit f une application mesurable de $(E, \mathcal{T})$ dans $(E', \mathcal{T}')$. Si m est une mesure sur $\mathcal{T}$, on note $f(m)$ la mesure image de m par$f$:

$$\forall B \in \mathcal{T}' \ f(m)(B) = m(f^{-1}(B)).$$

1. Est ce que $f(m)$ est nécessairement bornée (resp. σ-finie, diffuse) si m est bornée (resp. σ-finie, diffuse) ?
2. Déterminer $f(m)$ quand $m = \lambda$, mesure de Lebesgue sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, $\mathcal{T}' = \mathcal{B}(\mathbb{R})$ et f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = |x|$.

Exercice 4.4.12 (Convergence en mesure) ($\star$) Soient $(E, \mathcal{T}, m)$ un espace mesuré, $(f_n)_{n \geq 0}$ une suite de fonctions mesurables de E dans $\mathbb{R}$.

1. Montrer que s'il existe des fonctions mesurables f et g de E dans $\mathbb{R}$ telles que $(f_n)_{n \geq 0}$ converge en mesure vers f et g, alors $f = g$ p.p.

   (On pourra commencer par montrer que, pour tout $\delta > 0$, $m(\{|f - g| > \delta\}) = 0$).

2. Montrer que si $(f_n)_{n\geq 0} \subset \mathcal{M}$ converge en mesure vers $f \in \mathcal{M}$ et $(g_n)_{n\geq 0} \subset \mathcal{M}$ converge en mesure vers $g \in \mathcal{M}$, alors $(f_n + g_n)_{n\geq 0}$ converge en mesure vers $f + g$.
3. On suppose maintenant que m est une **mesure finie**. Montrer que si $(f_n)_{n\geq 0} \subset \mathcal{M}$ converge en mesure vers $f \in \mathcal{M}$ et $(g_n)_{n\geq 0} \subset \mathcal{M}$ converge en mesure vers $g \in \mathcal{M}$, alors $(f_n\, g_n)_{n\geq 0}$ converge en mesure vers $f\, g$.

   (On sera amené à montrer que, si $(f_n)_{n\geq 0} \subset \mathcal{M}$ converge en mesure vers $f \in \mathcal{M}$, alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe n_0 et $k_0 \in \mathbb{N}$ tels que, si $n \geq n_0$ et $k \geq k_0$, on a $m(\{|f_n| \geq k\}) \leq \varepsilon$).

   Donner un contre-exemple au résultat précédent lorsque $m(E) = +\infty$.

Exercice 4.4.13 (Convergence presque uniforme, presque partout et en mesure)
Soient $(E, \mathcal{T}, m)$ un espace mesuré, $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite de fonctions mesurables de E dans $\mathbb{R}$ et $f \in \mathcal{M}$. On suppose que $f_n \to f$ presque uniformément ; montrer que $f_n \to f$ presque partout et en mesure.

Exercice 4.4.14 (Théorème d'Egorov) $(\star)$ Soient $(E, \mathcal{T}, m)$ un espace mesuré fini, $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite de fonctions mesurables de E dans $\mathbb{R}$ et f une fonction mesurable de E dans $\mathbb{R}$ telles que $f_n \to f$ p.p. Pour $j \in \mathbb{N}^*$ et $n \in \mathbb{N}$, on définit :

$$A_{n,j} = \{|f - f_n| \geq \frac{1}{j}\}, \text{ et } B_{n,j} = \bigcup_{p>n} A_{p,j}$$

1. Montrer que, à j fixé, $\lim_{n\to+\infty} m(B_{n,j}) = 0$
2. Montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe A tel que $m(A) \leq \varepsilon$ et $f_n \to f$ uniformément sur A^c lorsque $n \to +\infty$. En déduire le théorème d'Egorov. *(On cherchera A sous la forme : $\bigcup_{j\in\mathbb{N}^*} B_{n_j,j}$, avec un choix judicieux de n_j)*
3. Montrer, par un contre exemple, qu'on ne peut pas prendre $\varepsilon = 0$ dans la question précédente.
4. Montrer, par un contre exemple, que le résultat du théorème d'Egorov est faux lorsque $m(E) = +\infty$.

Exercice 4.4.15 (Convergence en mesure et convergence presque partout)
Soient $(E, \mathcal{T}, m)$ un espace mesuré, $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite de fonctions mesurables de E dans $\mathbb{R}$ et f une fonction mesurable de E dans $\mathbb{R}$. On rappelle que la suite $(f_n)_{n\geq 0}$ converge en mesure vers f si (par définition) :

$$\forall\, \varepsilon > 0, \lim_{n\to+\infty} m(\{|f_n - f| > \varepsilon\}) = 0.$$

1. On suppose dans cette question que $m(E) < +\infty$.
   (a) Montrer que si $(f_n)_{n\geq 0}$ tend vers f presque partout, alors $(f_n)_{n\geq 0}$ tend vers f en mesure. *(Utiliser le théorème d'Egorov)*
   (b) Montrer par un contre-exemple que la réciproque de la question (a) est fausse.
2. Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite de fonctions mesurables de E dans $\mathbb{R}$. On dit que $(f_n)_{n\geq 0}$ est de Cauchy en mesure si :

$$\forall\, \varepsilon > 0, \forall \delta > 0, \exists n \in \mathbb{N} \qquad p,\, q \geq n \Longrightarrow m(\{|f_p - f_q| > \varepsilon\} \leq \delta.$$

   Montrer que si la suite $(f_n)_{n\geq 0}$ converge en mesure vers f, alors $(f_n)_{n\geq 0}$ est de Cauchy en mesure.

3. Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite de Cauchy en mesure ; montrer qu'il existe une fonction mesurable g et une sous-suite $(f_{n_k})_{k\geq 0}$, telles que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $A \in \mathcal{T}$ vérifiant $m(A) \leq \varepsilon$ et tel que $(f_{n_k})_{k\geq 0}$ converge uniformément vers g sur A^c.

   (Construire la sous-suite $(f_{n_k})_{k\geq 0}$ de sorte que $m(A_k) \leq 2^{-k}$, avec $A_k = \{|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}| > 2^{-k}\}$, et chercher A sous la forme $\bigcup_{k\geq p} A_k$, où p est convenablement choisi)

4. En déduire que si $(f_n)_{n\geq 0}$ converge en mesure vers f, il existe une sous-suite qui converge vers f presque partout.

   (On pourra commencer par montrer que la suite $(f_{n_k})_{k\geq 0}$ construite en 3. converge presque partout et en mesure)

Chapitre 5

Intégration

Dans toute la suite, $(E, \mathcal{T}, m)$ désigne un espace mesuré quelconque.

5.1 Intégrale d'une fonction étagée mesurable positive

Définition 5.1.1 Soit $f \in \mathcal{E}^+$ de décomposition canonique $f = \sum_{i=1}^{p} a_i \mathbb{1}_{A_i}$. On définit l'intégrale de f par rapport à la mesure m en posant (dans $\overline{\mathbb{R}}_+$) :

$$\int f\, dm = \sum_{i=1}^{p} a_i m(A_i)$$

(avec la convention $0 \times (+\infty) = 0$).

Remarque 5.1.1 On a en particulier, si $A \in \mathcal{T}$, $\int \mathbb{1}_A \, dm = m(A)$.

Proposition 5.1.1 *L'application* $\begin{cases} \mathcal{E}^+ \to \overline{\mathbb{R}}_+ \\ f \to \int f\, dm \end{cases}$ *a les propriétés suivantes :*

(i) $\forall f \in \mathcal{E}^+ \ \forall k \in \mathbb{R}_+ \quad \int kf\, dm = k \int f\, dm$

(ii) $\forall f, g \in \mathcal{E}^+ \quad \int (f+g)\, dm = \int f\, dm + \int g\, dm$

(iii) $\forall f, g \in \mathcal{E}^+ \quad f \leq g \Longrightarrow \int f\, dm \leq \int g\, dm$ *(croissance).*

Preuve : le premier point est immédiat. Le troisième s'obtient en écrivant $g = f + (g - f)$ et en appliquant (ii) après avoir remarqué que $g - f \in \mathcal{E}^+$. Il reste donc à établir (ii).
Ecrivons f et g sous forme canonique :

$$f = \sum_{i=1}^{p} a_i \, \mathbb{1}_{A_i} \qquad g = \sum_{j=1}^{q} b_j \, \mathbb{1}_{B_j}$$

où $(A_i)_{1 \leq i \leq p}$ et $(B_j)_{1 \leq j \leq q}$ sont des partitions de E. Posons alors $C_{ij} = A_i \cap B_j$: ceux des ensembles C_{ij} qui sont non vides forment une partition de E, de même, pour tout $i = 1, \cdots, p$,
$\{C_{ij}\,;\, 1 \leq j \leq q,\, C_{ij} \neq \emptyset\}$ est une partition de A_i et, pour tout $j = 1, \cdots, q$, $\{C_{ij}\,;\, 1 \leq i \leq p,\, C_{ij} \neq \emptyset\}$

est une partition de B_j. $f+g$ étant étagée mesurable, on a $(f+g)(E) = \{s_1, \cdots, s_r\}$ et on pose, pour $k = 1, \cdots, r$: $S_k = \{f+g = s_k\}$. Alors :

$$\int f\, dm = \sum_{i=1}^{p} a_i\, m(A_i) = \sum_{i=1}^{p} a_i \sum_{j=1}^{q} m(C_{ij}) = \sum_{i,j} a_i\, m(C_{ij})$$

et formule analogue pour l'intégrale de g. Enfin :

$$\begin{aligned} \int f\, dm + \int g\, dm &= \sum_{i,j} (a_i + b_j)\, m(C_{ij}) \\ &= \sum_{k=1}^{r} s_k \sum_{\{(i,j)\,;\, a_i+b_j = s_k\}} m(C_{ij}) \\ &= \sum_{k=1}^{r} s_k\, m\left(\bigcup_{\{(i,j)\,;\, a_i+b_j=s_k\}} C_{ij} \right) = \sum_{k=1}^{r} s_k\, m(S_k) \\ &= \int (f+g)\, dm. \end{aligned}$$

5.2 Intégrale d'une fonction mesurable positive.

Définition 5.2.1 Soit $f \in \mathcal{M}_+$. On définit l'intégrale de f par rapport à la mesure m en posant (dans $\overline{\mathbb{R}}_+$) :

$$\int f\, dm = \sup\{ \int g\, dm \ ;\ g \in \mathcal{E}^+,\ g \leq f \}.$$

Dans la définition précédente, le "sup" peut être pris sur une suite **croissante** de fonctions étagées mesurables de limite f. C'est l'objet du résultat suivant, très important en pratique :

Proposition 5.2.1 *Pour toute fonction $f \in \mathcal{M}_+$ et toute suite $(f_n)_{n\geq 0}$ de fonctions étagées mesurables positives telle que $f = \lim_{n\to\infty} \uparrow f_n$ on a $\int f\, dm = \lim_{n\to\infty} \uparrow \int f_n\, dm$.*

Preuve : il résulte immédiatement de la définition 5.2.1 que $\lim_{n\to\infty} \uparrow \int f_n\, dm \leq \int f\, dm$. Il reste à montrer que si $g \in \mathcal{E}^+$ et $g \leq f$ alors $\int g\, dm \leq \lim_{n\to\infty} \uparrow \int f_n\, dm$.
Soit $c \in]0,1[$. $A_n = \{f_n \geq c\, g\}$ définit une suite croissante d'ensembles mesurables de réunion E et on a $f_n \geq c\, g\, \mathbb{1}_{A_n}$ (facile). Alors :

$$\int f_n\, dm \geq c \int g\, \mathbb{1}_{\mathrm{A_n}}\, \mathrm{dm} = \mathrm{c} \sum_{\mathrm{a} \in \mathrm{g(E)}} \mathrm{a\, m(\{g = a\} \cap A_n)}$$

or pour tout $a \in g(E)$ la propriété de continuité monotone croissante donne : $m(\{g = a\}) = \lim_{n\to\infty} m(\{g = a\} \cap A_n)$ et, $g(E)$ étant fini, on a ainsi $\lim_{n\to\infty} c \int g\, \mathbb{1}_{\mathrm{A_n}}\, \mathrm{dm} = \mathrm{c} \int \mathrm{g\, dm}$, d'où :

$$\forall c \in]0,1[\quad c \int g\, dm \leq \lim_{n\to\infty} \uparrow \int f_n\, dm$$

ce qui permet de conclure. ■

Proposition 5.2.2 *L'intégrale des fonctions mesurables positives sur $(E, \mathcal{T}, m)$ a les propriétés suivantes :*

1. $\forall f \in \mathcal{M}_+ \ \forall k \in \mathbb{R}_+ \quad \int kf\,dm = k\int f\,dm$
2. $\forall f,g \in \mathcal{M}_+ \quad \int (f+g)\,dm = \int f\,dm + \int g\,dm$
3. *(Croissance)* $\forall f,g \in \mathcal{M}_+ \quad f \leq g \Longrightarrow \int f\,dm \leq \int g\,dm$
4. **Convergence monotone** *ou propriété de Beppo-Levi :*
Pour toute suite <u>*croissante*</u> $(f_n)_{n\geq 0} \subset \mathcal{M}_+$ *on a :*

$$\int \lim_{n\to\infty} \uparrow f_n\,dm = \lim_{n\to\infty} \uparrow \int f_n\,dm$$

5. **Lemme de Fatou** *: pour toute suite* $(f_n)_{n\geq 0} \subset \mathcal{M}_+$ *on a :*

$$\int \underline{\lim}\, f_n\,dm \leq \underline{\lim} \int f_n\,dm$$

Preuve : les deux premiers points s'obtiennent très simplement grâce à la proposition 5.2.1. La croissance est une conséquence immédiate de la définition.
Prouvons le résultat de convergence monotone. Posons $f = \lim_{n\to\infty} \uparrow f_n$, alors $f \in \mathcal{M}_+$ et $f_n \leq f$ pour tout n, d'où $\int f_n\,dm \leq \int f\,dm$ et finalement $\lim_{n\to\infty} \uparrow \int f_n\,dm \leq \int f\,dm$. Il reste à établir l'inégalité inverse. Pour chaque entier n on considère une suite $(f_n^p)_{p\geq 0} \subset \mathcal{E}^+$ telle que $f_n = \lim_{p\to\infty} \uparrow f_n^p$ et on pose, pour tout $p \in \mathbb{N}$: $g_p = \sup_{0\leq n\leq p} f_n^p$. Cette fonction est clairement étagée, positive et mesurable. La suite $(g_p)_{p\geq 0}$ est croissante, en effet, comme $f_n^p \leq f_n^{p+1}$ on a :

$$g_p = \sup_{0\leq n\leq p} f_n^p \leq \sup_{0\leq n\leq p} f_n^{p+1} \leq \sup_{0\leq n\leq p+1} f_n^{p+1} = g_{p+1}.$$

L'inégalité $f_n^p \leq g_p$, valable pour $n \leq p$, donne par passage à la limite sur p : $f_n \leq \lim_{p\to\infty} \uparrow g_p$ d'où $f \leq \lim_{p\to\infty} \uparrow g_p$.
Enfin l'inégalité $f_n^p \leq f_n$, valable pour tous n et p donne : $g_p \leq \sup_{0\leq n\leq p} f_n = f_p$, d'où $\lim_{p\to\infty} \uparrow g_p \leq f$
Récapitulons : la suite $(g_p)_{p\geq 0} \subset \mathcal{E}^+$ converge (simplement) en croissant vers f et vérifie $g_p \leq f_p$ pour tout entier p. Par application de la proposition 5.2.1 et de la propriété de croissance de l'intégrale dans $\mathcal{M}_+$ on a alors :

$$\int f\,dm = \lim_{p\to\infty} \uparrow \int g_p\,dm \leq \lim_{p\to\infty} \uparrow \int f_p\,dm,$$

ce que l'on voulait.
Le lemme de Fatou s'obtient en appliquant la propriété de convergence monotone à la suite $(\inf_{n\geq p} f_n)_{p\geq 0}$:

$$\int \underline{\lim}\, f_n\,dm = \int \lim_{p\to\infty} \uparrow (\inf_{n\geq p} f_n)\,dm = \lim_{p\to\infty} \uparrow \int (\inf_{n\geq p} f_n)\,dm$$

d'autre part : $\forall q \geq p \quad \inf_{n\geq p} f_n \leq f_q$ donc $\int (\inf_{n\geq p} f_n)\,dm \leq \inf_{n\geq p} \int f_n\,dm$. Finalement :

$$\int \underline{\lim}\, f_n\,dm \leq \lim_{p\to\infty} \uparrow \inf_{n\geq p} \int f_n\,dm = \underline{\lim} \int f_n\,dm.$$

■

Corollaire 5.2.1 *Interversion des signes* $\int$ *et* $\sum$ *:*

$$\forall (f_n)_{n\geq 0} \subset \mathcal{M}_+ \quad \int \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n\right) dm = \sum_{n=0}^{+\infty} \int f_n \, dm.$$

Preuve : il suffit d'appliquer la propriété de Beppo-Levi à la suite $S_n = \sum_{p=0}^{n} f_p$. ∎

Corollaire 5.2.2 *Soient* $f \in \mathcal{M}_+$ *et* $(f_n)_{n\geq 0} \subset \mathcal{M}_+$ *telles que* $f = \lim_{n\to+\infty} f_n$ *(limite simple). S'il existe un réel* $C \geq 0$ *tel que* $\forall n \geq 0 \quad \int f_n \, dm \leq C$ *alors* $\int f \, dm \leq C$.

Preuve : c'est une application du lemme de Fatou :

$$\int f \, dm = \int (\lim_{n\to\infty} f_n) \, dm = \int \underline{\lim} \, f_n \, dm \leq \underline{\lim} \int f_n \, dm \leq C.$$

∎

Corollaire 5.2.3 *(Mesure positive définie par une densité). Pour toute fonction mesurable positive* f *la formule* $(f.m)(A) = \int f \mathbb{1}_{\mathrm{A}} \, \mathrm{dm}$ *définit une mesure positive* $f.m$ *sur* $(E, \mathcal{T})$ *qu'on appelle mesure de densité* f *par rapport à* m*, et on a :*

$$\forall g \in \mathcal{M}_+ \quad \int g \, d(f.m) = \int f g \, dm.$$

Notation : $(f.m)(A) = \int f \mathbb{1}_{\mathrm{A}} \, \mathrm{dm}$ est noté aussi $\int_A f \, dm$. En particulier on a $\int_E f \, dm = \int f \, dm$.

Preuve : montrer que $f.m$ est une mesure ne présente pas de difficulté (l'additivité dénombrable s'obtient en utilisant le corollaire 5.2.1). Pour le calcul de $\int g \, d(f.m)$ on considère d'abord le cas où $g \in \mathcal{E}^+$. Ecrivons g sous forme canonique : $g = \sum_{i=1}^{p} a_i \mathbb{1}_{\mathrm{A_i}}$. On a alors :

$$\begin{aligned}
\int g \, d(f.m) &= \sum_{i=1}^{p} a_i \, (f.m)(A_i) \\
&= \sum_{i=1}^{p} a_i \int f \, \mathbb{1}_{\mathrm{A_i}} \, \mathrm{dm} \\
&= \int f. \left(\sum_{i=1}^{p} a_i \, \mathbb{1}_{\mathrm{A_i}}\right) dm = \int f \, g \, dm.
\end{aligned}$$

Le cas général s'obtient grâce à la proposition 5.2.1 et à la propriété de Beppo-Levi. ∎

5.3 Fonctions intégrables.

Définition 5.3.1

Une fonction réelle mesurable f est intégrable (au sens de Lebesgue) si $\int |f| \, dm < +\infty$. Cette condition équivaut à l'ensemble des conditions $\int f^+ \, dm < +\infty$ et $\int f^- \, dm < +\infty$, et on pose, lorsqu'elle est satisfaite :

$$\int f \, dm = \int f^+ \, dm - \int f^- \, dm.$$

Notation : l'ensemble des fonctions réelles définies sur E, $\mathcal{T}$-mesurables et intégrables par rapport à la mesure m est noté $\mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, \mathcal{T}, m)$ ou $\mathcal{L}^1$ s'il n'y a pas ambiguïté.

Proposition 5.3.1 *$\mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, \mathcal{T}, m)$ est un espace vectoriel réel. L'application $f \to \int f\, dm$ est une forme linéaire positive sur cet espace, i.e. :*

1. $\forall f \in \mathcal{L}^1 \quad \forall k \in \mathbb{R} \qquad \int k\, f\, dm = k \int f\, dm$
2. $\forall f,\, g \in \mathcal{L}^1 \qquad \int (f+g)\, dm = \int f\, dm + \int g\, dm$
3. *(positivité)* $\forall f \in \mathcal{L}^1 \quad f \geq 0 \Longrightarrow \int f\, dm \geq 0.$

Preuve : soient $f,\, g \in \mathcal{L}^1$ et $k \in \mathbb{R}$. La proposition 5.2.2 donne immédiatement :

$$\int \mid k\, f \mid\ dm = \mid k \mid \int \mid f \mid\ dm < \infty,$$

$$\int \mid f + g \mid\ dm \leq \int \mid f \mid\ dm + \int \mid g \mid\ dm < \infty,$$

d'où il résulte que $\mathcal{L}^1$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Remarquons que $(k\, f)^{\pm} = \begin{cases} k\, f^{\pm} & \text{si} \quad k \geq 0 \\ (-k)\, f^{\mp} & \text{si} \quad k < 0 \end{cases}$. Ainsi quand $k \geq 0$, par exemple, on a :

$$\int k\, f\, dm = \int (k\, f)^+\, dm - \int (k\, f)^-\, dm = k \int f^+\, dm - k \int f^-\, dm = k \int f\, dm$$

Le calcul est analogue pour $k < 0$.

Pour montrer l'additivité décomposons $f + g$ de deux façons :

$$\begin{aligned} f + g &= (f+g)^+ - (f+g)^- \\ &= (f^+ - f^-) + (g^+ - g^-) \end{aligned}$$

on a donc : $(f+g)^+ + f^- + g^- = (f+g)^- + f^+ + g^+$, d'où :

$$\int (f+g)^+\, dm + \int f^-\, dm + \int g^-\, dm = \int (f+g)^-\, dm + \int f^+\, dm + \int g^+\, dm.$$

Comme toutes les quantités figurant dans l'égalité ci-dessus sont finies, on peut en déduire :

$$\int (f+g)^+\, dm - \int (f+g)^-\, dm = (\int f^+\, dm - \int f^-\, dm) + (\int g^+\, dm - \int g^-\, dm)$$

c'est à dire $\int (f+g)\, dm = \int f\, dm + \int g\, dm.$

Pour établir la positivité, il suffit de remarquer que si $f \geq 0$ alors $f = f^+$ et $f^- = 0$. ■

Corollaire 5.3.1 $\forall f, g \in \mathcal{L}^1 \quad f \leq g \Longrightarrow \int f\, dm \leq \int g\, dm.$

Preuve : immédiat en utilisant la propriété de positivité. ■

Corollaire 5.3.2 $\forall f \in \mathcal{L}^1 \quad |\int f\, dm| \leq \int |f|\, dm.$

Preuve : $\mid \int f\, dm \mid = \mid \int f^+\, dm - \int f^-\, dm \mid \leq \int f^+\, dm + \int f^-\, dm = \int \mid f \mid\ dm.$ ■

Remarque 5.3.1 Il est facile d'étendre la définition et la proposition 5.3.1 aux fonctions à valeurs complexes. Soit $f : E \to \mathbb{C}$ une fonction mesurable ; f est intégrable si la fonction réelle $|f| = [(Re\, f)^2 + (Im\, f)^2]^{1/2}$ est intégrable, ce qui équivaut à l'intégrabilité des fonctions réelles $Re\, f$ et $Im\, f$. On pose alors

$$\int f\, dm = \int Re\, f\, dm + i \int Im\, f\, dm.$$

Désormais, $\mathbb{K}$ désigne l'un des corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

5.4 L'espace $L^1_{\mathbb{K}}(E, \mathcal{T}, m)$.

Sur $\mathcal{C}([a,b])$ l'application $f \to \int_a^b |\, f(t)\,|\; dt$ (intégrale de Riemann) est une norme ; sur $\mathcal{I}([a,b])$ c'est une semi-norme. On va examiner l'analogue sur $\mathcal{L}^1$ de cette application.

Proposition 5.4.1 *L'application* $N : \begin{cases} \mathcal{L}^1 \to \mathbb{R}_+ \\ f \to \int |f|\, dm \end{cases}$ *est une semi-norme.*

Remarque 5.4.1 Ce n'est pas une norme : on a par exemple $\int_{\mathbb{R}} |\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}|\, \mathrm{d}\lambda = 0 \cdots$

Proposition 5.4.2 *Soit $f \in \mathcal{M}_+$. Alors :*

$$\int f\, dm = 0 \Longleftrightarrow f = 0 \; p.p.$$

Ce résultat est basé sur le lemme suivant, élémentaire mais utile à connaître :

Lemme 5.4.1 *Soit $f \in \mathcal{M}_+$. Alors :*

$$\forall t > 0 \quad m(\{f \geq t\}) \leq \frac{1}{t} \int f\, dm.$$

Preuve : $\int f\, dm \geq \int_{\{f \geq t\}} f\, dm \geq t \int \mathbb{1}_{\{\mathrm{f} \geq \mathrm{t}\}}\, \mathrm{dm} = \mathrm{t\, m}(\{\mathrm{f} \geq \mathrm{t}\}).$ ■

Preuve de la proposition 5.4.2 :

CN : on remarque que $\{f \neq 0\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \{f \geq \frac{1}{n}\}$ or, d'après le lemme 5.4.1 :

$$m\left(\{f \geq \frac{1}{n}\}\right) \leq n \int f\, dm = 0$$

et on conclut par sous-additivité de la mesure.

CS : soient $A = \{f \neq 0\}$ et $f_n = \min(f, n).\mathbb{1}_{\mathrm{A}}$: $(f_n)_{n \geq 0}$ est une suite de fonctions mesurables positives qui converge en croissant vers f. Par convergence monotone on a alors $\int f\, dm = \lim_{n \to \infty} \uparrow \int f_n\, dm$, or : $\int f_n\, dm \leq n\, m(A) = 0.$ ■

Corollaire 5.4.1 *Soit $f \in \mathcal{L}^1$. Alors :*

$$N(f) = 0 \Longleftrightarrow f = 0 \; p.p.$$

On dit dans ce cas que f est négligeable.

Corollaire 5.4.2
$$\forall f, g \in \mathcal{L}^1 \quad f = g \ p.p. \implies \int f\,dm = \int g\,dm.$$

La réciproque est clairement fausse.
On peut ainsi dire que "l'intégrale ne fait pas la distinction entre deux fonctions égales presque partout". Soit alors f une fonction définie sur le complémentaire d'un ensemble mesurable de mesure nulle : on peut lui associer un prolongement mesurable $\overline{f}$ (par exemple en prolongeant par 0). Si $\overline{f}$ est intégrable, ce qui ne dépend pas du prolongement mesurable choisi, on dit que f est intégrable (on écrit encore $f \in \mathcal{L}^1$).
Soit $\mathcal{N}$ le sous espace vectoriel des fonctions négligeables. On pose $L^1 = \mathcal{L}^1/\mathcal{N}$, ensemble des classes d'équivalence dans $\mathcal{L}^1$ pour la relation d'équivalence

$$f \sim g \iff f - g \in \mathcal{N}$$

On a donc, en notant $\tilde{f}$ la classe de $f \in \mathcal{L}^1$:

$$\tilde{f} = \tilde{g} \iff f = g \text{ p.p.}$$

On munit L^1 de la structure d'espace vectoriel quotient ($\alpha\tilde{f} + \beta\tilde{g} = \widetilde{\alpha f + \beta g}$). On obtient un ordre partiel sur L^1 en notant que la relation d'ordre "$\leq$" dans $\mathcal{L}^1$ est compatible avec la relation d'égalité p.p. , on obtient alors en particulier : $|\tilde{f}| = \widetilde{|f|}$.
Soit $\varphi \in L^1$. La quantité $\int f\,dm$ est la même pour tout représentant f de φ ($\varphi = \tilde{f}$), c'est par définition l'intégrale de φ ; enfin on pose $N(\varphi) \overset{déf}{=} \int |\varphi|\,dm = \int |f|\,dm$ définissant ainsi une norme puisque $f = 0$ p.p. $\iff \tilde{f} = 0_{L^1}$. Cette norme est notée $\|\,.\,\|_1$.
Résumons et complétons :

Proposition 5.4.3 $(L^1, \|\,.\,\|_1)$ *est un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel normé.*
Sur cet espace l'application $I\ :\ \varphi \to \int \varphi\,dm$ *est linéaire positive et continue.*

Preuve : seule la continuité reste à établir. Or, si $\varphi = \tilde{f} \in L^1$:

$$|\ I(\varphi)\ | = \left|\int \varphi\,dm\right| = \left|\int f\,dm\right| \leq \int |\ f\ |\ dm = \int |\ \varphi\ |\ dm = \|\ \varphi\ \|_1\ .$$

■

Définition 5.4.1 On appelle convergence dans L^1, ou convergence en moyenne (d'ordre un), la convergence dans l'espace normé $(L^1, \|\,.\,\|_1)$:

$$\varphi_n \overset{L^1}{\to} \varphi \iff \|\ \varphi_n - \varphi\ \|_1 \to 0 \iff \int |\varphi_n - \varphi|\,dm \to 0.$$

Voici un résultat simple mais d'usage fréquent :

Proposition 5.4.4
$$\varphi_n \overset{L^1}{\to} \varphi \implies \int \varphi_n\,dm \to \int \varphi\,dm$$

(réciproque fausse).

Remarque 5.4.2 On fera systématiquement l'abus consistant à confondre une fonction $\varphi \in L^1$ avec l'un quelconque de ses représentants $f \in \mathcal{L}^1$. C'est "légitime" tant que l'on ne considère que des familles dénombrables de fonctions (pourquoi ?) et qu'on s'intéresse aux propriétés de f "compatibles avec la relation d'égalité presque partout (intégrabilité, convergence p.p. , en mesure, en moyenne ...).
Par exemple, au lieu d'écrire : "soit $\varphi \in L^1$ telle que $\varphi = \tilde{f}, \quad f \in \mathcal{L}^1, \quad f \geq 0$ p.p. " (ce qui s'écrit $\varphi \geq 0$ dans L^1) on écrira : "soit $f \in L^1, \quad f \geq 0$ p.p. ". De même, via des représentants, on pourra parler sans rougir de convergence p.p. ou de convergence en mesure pour des fonctions de L^1.

Pour illustrer ces considérations, réécrivons le lemme de Fatou et son corollaire dans une "version L^1" :

Proposition 5.4.5 (Fatou L^1)
Soit $(f_n)_{n\geq 0} \subset L^1$ vérifiant $f_n \geq 0$ p.p. et soit $f = \underline{\lim}\, f_n$ p.p. , alors :

$$\int f\, dm \leq \underline{\lim} \int f_n\, dm.$$

De plus, s'il existe $C \geq 0$ tel que $\forall n \geq 0 \quad \int f_n\, dm \leq C$ alors $f \in L^1$ et $\int f\, dm \leq C$.

Terminons ce paragraphe par une mise au point concernant les espaces complétés.

Remarque 5.4.3 Soient $(E, \mathcal{T}, m)$ un espace mesuré, $(E, \hat{\mathcal{T}}, \hat{m})$ l'espace complété et $f : E \to \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. L'espace d'arrivée est muni de sa tribu borélienne. Alors :

1. f est $\hat{\mathcal{T}}$-mesurable si et seulement si il existe des fonctions g et h $\mathcal{T}$-mesurables telles que $g \leq f \leq h$ et $g = h \quad m$- p.p.
   Par exemple, si $E = \mathbb{R}$, f est mesurable pour la tribu de Lebesgue si et seulement si il existe des fonctions boréliennes g et h égales p.p. telles que $g \leq f \leq h$ (voir exercices).
2. f est intégrable pour $\hat{m}$ si et seulement si g et h le sont pour m ; on a alors $\int f\, d\hat{m} = \int g\, dm = \int h\, dm$. Il est facile d'en déduire que les espaces $L^1(E, \hat{\mathcal{T}}, \hat{m})$ et $L^1(E, \mathcal{T}, m)$ sont isomorphes et isométriques. On les identifie en général.

5.5 Théorèmes de convergence, applications fondamentales.

Théorème 5.5.1 (de convergence monotone, ou de Beppo-Lévi)
Soient $(E, \mathcal{T}, m)$ un espace mesuré, $(f_n)_{n\geq 0} \subset L^1$ et $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$. On suppose que :

1. $\forall n \in \mathbb{N}\ f_{n+1} \geq f_n$ *p.p. (ou* $\forall n \in \mathbb{N}\ f_{n+1} \leq f_n$ *p.p.),*
2. $f_n \to f$ *p.p. , quand* $n \to +\infty$,

alors :

1. $f \in L^1$ *si et seulement si* $\lim\limits_{n\to+\infty} \int f_n\, dm \in \mathbb{R}$,
2. *Si* $f \in L^1$, *alors* $f_n \to f$ *dans* L^1 *(en particulier* $\lim \int f_n\, dm = \int f\, dm$*).*

Preuve : supposons par exemple que $\forall n \in \mathbb{N}\ f_{n+1} \geq f_n$ p.p. .Il existe un ensemble négligeable N, des fonctions mesurables $(g_n)_{n\geq 0}$ et g telles que $\int |g_n|\, dm < +\infty$ et, sur N^c :

– $g_n = f_n, \; g = f$,
– $(g_n) \uparrow g$ (partout).

Dans ces conditions, si on pose $h_n = g_n - g_0$ et $h = g - g_0$ on peut appliquer le théorème de Beppo-Levi dans $\mathcal{M}_+$ à $(h_n)_{n\geq 0}$ et h :

$$\int h\, dm = \lim \uparrow \int h_n\, dm.$$

Or : $f \in L^1 \iff g \in L^1 \iff h \in L^1 \iff \lim \uparrow \int h_n\, dm < +\infty \iff \lim \int f_n\, dm < +\infty$.

Si $f \in L^1$, on a enfin : $\int |f_n - f|\, dm = \int |g_n - g|\, dm = \int |h_n - h|\, dm = \int (h - h_n)\, dm$
$= \int h\, dm - \int h_n\, dm \to 0$ quand $n \to +\infty$. ■

Théorème 5.5.2 (Convergence dominée)
Soient $(f_n)_{n\geq 0}$ et f des fonctions mesurables de E dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ telles que :

1. *$f_n \to f$ p.p. ,*
2. *$\exists g \in L^1 \quad \forall n \geq 0 \quad |f_n| \leq g$ p.p.*

Alors $f \in L^1$ et f_n converge vers f dans L^1 (c.à.d. $\int |f_n - f|\, dm \to 0$ lorsque $n \to +\infty$).

Remarque 5.5.1

1. On a aussi (voir paragraphe 4) $\int f_n\, dm \to \int f\, dm$ lorsque $n \to +\infty$.
2. La deuxième condition entraîne que $f_n \in L^1$ pour tout entier n.
3. Bien noter que g ne dépend pas de n.

Preuve : notons que les hypothèses entrainent que $|f| \leq g$ p.p. de sorte que $\int |f|\, dm \leq \int g\, dm < +\infty$ d'où $f \in L^1$. On remarque d'autre part que $|f_n - f| \leq |f_n| + |f| \leq 2g$ p.p. ; alors si on pose $h_n = 2g - |f_n - f|$, h_n vérifie les hypothèses de la proposition 5.4.5 (Fatou version L^1) :

$$\int \underline{\lim}\, h_n\, dm \leq \underline{\lim} \int h_n\, dm$$

c'est à dire :

$$\int 2g\, dm \leq \int 2g\, dm - \overline{\lim} \int |f_n - f|\, dm$$

d'où $\overline{\lim} \int |f_n - f|\, dm = 0$, ce qui entraîne $\lim \int |f_n - f|\, dm = 0$. ■

Théorème 5.5.3 (Riesz-Fisher) *$(L^1, \|\,.\,\|_1)$ est un espace de Banach.*

Ce théorème est une conséquence du suivant, qui énonce que dans L^1 toute série normalement convergente est convergente.

Théorème 5.5.4 *Pour toute suite $(f_n)_{n\geq 0} \subset L^1$ telle que $\sum_0^\infty \| f_n \|_1 < +\infty$, la série $\sum_0^\infty f_n$ converge <u>dans L^1 et p.p.</u> De plus $\| \sum_0^\infty f_n \|_1 \leq \sum_0^\infty \| f_n \|_1$.*

La démonstration de ce théorème utilise un petit résultat qui fait l'objet d'un exercice :

Lemme 5.5.1 *Soit* $f \in \mathcal{M}_+$. *Alors* $\displaystyle\int f\,dm < \infty \Longrightarrow f < \infty$ *p.p.*

Preuve du théorème 5.5.4 : comme $\displaystyle\sum_{n=0}^{p} |f_n| \nearrow \sum_{0}^{\infty} |f_n| \in \mathcal{M}_+$, on a, par application du théorème de convergence monotone dans $\mathcal{M}_+$: $\displaystyle\int \sum_{0}^{\infty} |f_n|\,dm = \lim_{p\to\infty} \uparrow \int \sum_{n=0}^{p} |f_n|\,dm$.

D'autre part : $\displaystyle\int \sum_{n=0}^{p} |f_n|\,dm = \sum_{0}^{p} \| f_n \|_1 \leq \sum_{0}^{\infty} \| f_n \|_1 < +\infty$ par hypothèse. On en déduit que $\displaystyle\int \sum_{0}^{\infty} |f_n|\,dm < +\infty$.

Posons $g = \displaystyle\sum_{0}^{\infty} |f_n|$. Il résulte de ce qui précède que $g \in L^1$ et donc, d'après le lemme, que $g < +\infty$ p.p. La série $\displaystyle\sum_{0}^{\infty} f_n$ converge donc absolument, presque partout. Soit f sa somme, définie presque partout. Résumons :

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{n=0}^{p} f_n \to f \text{ p.p. quand } p \to \infty \\ \displaystyle|\sum_{n=0}^{p} f_n| \leq g \text{ p.p. avec } g \in L^1. \end{cases}$$

Le théorème de convergence dominée permet de conclure que $\displaystyle\sum_{0}^{p} f_n \to f$ dans L^1 quand $p \to +\infty$.

Enfin on a, pour tout $p \in \mathbb{N}$: $\displaystyle\int |\sum_{n=0}^{p} f_n|\,dm \leq \int \sum_{n=0}^{p} |f_n|\,dm \leq \sum_{0}^{\infty} \| f_n \|_1 < +\infty$ d'où la dernière assertion du théorème en passant à la limite sur p (par continuité de la norme). ■

Corollaire 5.5.1 (permutation des symboles $\int$ et $\sum$)
Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ *une suite de fonctions mesurables telles que* $\displaystyle\sum_{0}^{\infty} \int |f_n|\,dm < \infty$, *alors les fonctions* f_n, $\displaystyle\sum_{0}^{\infty} |f_n|$ *et la fonction définie presque partout* $\displaystyle\sum_{0}^{\infty} f_n$ *sont intégrables et on a :*

$$\int \left(\sum_{0}^{\infty} f_n \right) dm = \sum_{0}^{\infty} \int f_n\,dm$$

Preuve : en exercice.

Le théorème suivant énonce essentiellement que “la convergence dans L^1 d'une suite entraine la convergence presque partout pour une suite extraite”.

Théorème 5.5.5 (Réciproque partielle du théorème de convergence dominée)
Soient $(f_n)_{n\geq 0} \subset L^1$ *et* $f \in L^1$ *telles que* $f_n \to f$ *dans* L^1, *alors il existe une sous-suite* $(f_{n_k})_{k\geq 0}$, *et une fonction* $g \in L^1$ *telles que :*

1. $f_{n_k} \to f$ *p.p.* ,
2. $\forall k \in \mathbb{N}\ |f_{n_k}| \leq g$ *p.p.*

Preuve : (f_n) est une suite de Cauchy dans L^1 ; on peut donc construire par récurrence une suite strictement croissante d'entiers $(n_k)_{k\geq 0}$ en posant $n_0 = \min\left\{N \geq 0 \; ; \; \forall p,q \geq N \;\; \| f_p - f_q \|_1 \leq \frac{1}{2}\right\}$ et, pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$n_{k+1} = \min\left\{N > n_k \; ; \; \forall p,q \geq N \;\; \| f_p - f_q \|_1 \leq \frac{1}{2^{k+2}}\right\}.$$

Posons $h_k = f_{n_{k+1}} - f_{n_k}$. On a $h_k \in L^1$ et $\sum_0^{\infty} \| h_k \|_1 < +\infty$; on peut ainsi appliquer le théorème 5.5.4 : la série $\sum_0^{\infty} h_k$ converge presque partout et dans L^1 (vers la même limite). Or $\sum_{k=0}^{p-1} h_k = f_{n_p} - f_{n_0} \to f - f_{n_0}$ dans L^1 ; il en résulte que f_{n_p} converge vers f (dans L^1 et) presque partout.
Enfin on a aussi $|f_{n_p}| \leq | f_{n_0} | + \sum_0^{\infty} |h_k| = g \in L^1$. (voir la démonstration du théorème 5.5.4) ∎

On s'intéresse maintenant à deux théorèmes très importants concernant les intégrales "dépendant d'un paramètre".

Théorème 5.5.6 (Continuité sous le signe $\int$.)
Soient $(E, \mathcal{T}, m)$ un espace mesuré, T un espace métrique, $t_0 \in T$ et $f : E \times T \to \mathbb{K}$ tels que :

(i) $\forall t \in T$ $f(.,t)$ *est mesurable,*

(ii) $\exists V \in \mathcal{V}(t_0) \quad \exists g \in L^1 \quad \forall t \in V \quad |f(.,t)| \leq g$ *p.p. ,*

(iii) l'application $f(x,.)$ définie par : $t \to f(x,t)$ est continue en t_0, pour presque tout $x \in E$.

Alors F, définie de V dans $\mathbb{R}$ par : $F(t) = \int f(x,t)\, dm(x)$ est continue en t_0.

Preuve : T étant un espace métrique, il suffit de prouver la continuité séquentielle.
Soit donc $(t_n)_{n\geq 0} \subset V$, telle que $\lim_{n\to+\infty} t_n = t_0$. Soit f_n définie par $f_n(x) = f(x,t_n)$. Le théorème de convergence dominée appliqué à f_n donne immédiatement le résultat. ∎

Remarque 5.5.2

1. Noter le caractère local de (ii).
2. On peut écrire ce théorème comme un résultat d'échange des symboles $\int$ et lim :

$$\int \lim_{t\to t_0} f(x,t)\, dm(x) = \lim_{t\to t_0} \int f(x,t)\, dm(x).$$

Plus généralement on a :

Proposition 5.5.1 *Soient $(E, \mathcal{T}, m)$ un espace mesuré, T un espace métrique, $A \subset T$, $t_0 \in \overline{A}$ et $f : E \times T \to \mathbb{K}$ tels que :*

(i) $\forall t \in A \quad f(.,t)$ *est mesurable,*

(ii) $\exists V \in \mathcal{V}(t_0) \quad \exists g \in L^1 \quad \forall t \in V \cap A \quad |f(.,t)| \leq g$ *p.p. ,*

(iii) l'application $f(x,.)$ définie par : $t \to f(x,t)$ a une limite en t_0 suivant A pour presque tout $x \in E$.

Alors F, définie par : $F(t) = \int f(x,t)\,dm(x)$ a une limite en t_0 suivant A et on a :

$$\lim_{\substack{t\to t_0\\ t\in A}} \int f(x,t)\,dm(x) = \int \left(\lim_{\substack{t\to t_0\\ t\in A}} f(x,t) \right) dm(x).$$

Théorème 5.5.7 (Dérivabilité sous le signe $\int$.)
Soient (E,T,m) un espace mesuré, I un ouvert de $\mathbb{R}$ et $f : E\times I \to \mathbb{K}$ tels que :

(i) $\forall t\in I \quad f(.,t)\in L^1$,

(ii) Pour presque tout $x\in E$ $\quad \dfrac{\partial f}{\partial t}(x,t)$ existe sur I,

(iii) $\exists g\in L^1 \quad \forall t\in I \quad |\dfrac{\partial f}{\partial t}(.,t)| \le g$ *p.p.* .

Alors F, définie de I dans $\mathbb{K}$ par : $F(t) = \int f(x,t)\,dm(x)$ est dérivable sur I et :

$$\forall t\in I \quad F'(t) = \int \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\,dm(x).$$

Preuve : soient $t_0\in I$ et $(t_n)_{n\ge 0}\subset I$ telle que $\lim_{n\to+\infty} t_n = t_0$. Soit f_n définie sur E par $f_n(x) = \dfrac{f(x,t_n)-f(x,t_0)}{t_n-t_0}$. Il résulte de (i) que $f_n\in L^1$, de (ii) que $f_n(.)\to \dfrac{\partial f}{\partial t}(.,t_0)$ p.p. et, compte tenu de (ii), (iii), l'inégalité des accroissements finis donne : $\forall n\ge 0 \quad |f_n|\le g$ p.p.
Il reste alors à remarquer que :

$$\forall n\ge 0 \quad \frac{F(t_n)-F(t_0)}{t_n-t_0} = \int f_n\,dm$$

et à appliquer le théorème de convergence dominée. ∎

Remarque 5.5.3

1. Ce théorème s'étend facilement aux fonctions de classe $\mathcal{C}^p$, y compris avec I ouvert de $\mathbb{R}^d$.
2. On a un énoncé analogue en remplaçant $\mathbb{R}$ par $\mathbb{C}$ et "dérivable" par "holomorphe".
3. Qu'en est-il des résultats classiques de continuité ou de dérivabilité "d'une intégrale fonction de l'une de ses bornes" énoncés dans les années antérieures ? Précisons ces questions **dans le cadre de la mesure de Lebesgue** sur $\mathbb{R}$:

Définition 5.5.1 Une fonction mesurable $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{K}$ est localement intégrable si pour tout compact K de $\mathbb{R}$ la fonction $f\,\mathbb{1}_K$ est intégrable (il suffit de considérer pour K les segments $[a,b]$). $L^1_{loc}(\mathbb{R})$ désigne l'espace des (classes de) fonctions localement intégrables sur $\mathbb{R}$ (généralisation immédiate à $\mathbb{R}^n$).

Si $f\in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ la notation $\int_a^b f(t)\,d\lambda(t)$ désigne l'intégrale $\int_{[a,b]} f\,d\lambda$ si $a\le b$ et l'intégrale $-\int_{[b,a]} f\,d\lambda$ sinon (et on a la relation de Chasles bien connue).On a alors les résultats suivants :

Proposition 5.5.2 *On considère l'espace mesuré $(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}),\lambda)$. Soit $f\in L^1_{loc}$; la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(t) = \int_a^t f(x)\,d\lambda(x)$ est continue.*

Preuve : en exercice.

Proposition 5.5.3 *On considère l'espace mesuré* $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$*. Soit* $f \in L^1_{loc}$ *; la fonction* F *définie sur* $\mathbb{R}$ *par* $F(t) = \int_a^t f(x)\,d\lambda(x)$ *est dérivable* **presque partout** *et de dérivée* f*.*

Ce résultat très important est de démonstration délicate. Si f est continue, F est dérivable partout et la démonstration est facile.

5.6 Comparaison entre les intégrales de Riemann et de Lebesgue.

On utilise les notations du chapitre 2.

Proposition 5.6.1 *Toute fonction intégrable au sens de Riemann sur* $[a,b]$ *est intégrable au sens de Lebesgue (i.e.* $f \in L^1_{\mathbb{R}}([a,b], \mathcal{L}([a,b]), \lambda))$ *et les deux intégrales sont égales.*

Preuve : soit $f \in \mathcal{I}([a,b])$. D'après la proposition 2.2.1 du chapitre 2 il existe une suite (σ_n) de subdivisions $\{x_0^n = a < x_1^n < \cdots < x_{p(n)}^n = b\}$ telle que $\Delta(f, \sigma_n) \to 0$ quand $n \to +\infty$; en particulier $s(f,\sigma_n)$ et $\mathcal{S}(f,\sigma_n)$ ont pour limite commune $\int_a^b f(x)\,dx$. Remarquons que l'on peut supposer la suite (σ_n) croissante (pourquoi ?), ce que l'on fait.
Définissons g_n par $g_n(x) = \inf\{f(t);\ t \in [x_{i-1}^n, x_i^n]\}$ pour $x \in [x_{i-1}^n, x_i^n[, \quad i = 1, \cdots, p(n)$ et $g_n(b) = 0$. On définit de même h_n en remplaçant "inf" par "sup". Ces fonctions sont intégrables au sens de Lebesgue (fonctions étagées mesurables bornées sur $[a,b]$), $(g_n)_{n\geq 0}$ est croissante, $(h_n)_{n\geq 0}$ est décroissante et $\int (h_n - g_n)\,d\lambda = \Delta(f,\sigma_n) \to 0$ quand $n \to +\infty$.
Posons enfin $g = \lim \uparrow g_n$ et $h = \lim \downarrow h_n$: on a $g \leq f \leq h$. Comme $\int g_n\,d\lambda = s(f,\sigma_n)$ et $\int h_n\,d\lambda = S(f,\sigma_n)$, ces intégrales ont pour limite finie commune $\int_a^b f(x)\,dx$ et le théorème de convergence monotone dans L^1 donne : $g \in L^1$, $h \in L^1$, et $\int (h-g)\,d\lambda = 0$ d'où $g = h$ p.p. donc f est mesurable pour la tribu de Lebesgue (i.e. la tribu complétée de la tribu borélienne), $f \in L^1$ et $\int f\,d\lambda = \int_a^b f(x)\,dx$. ■

Attention : il existe des fonctions Riemann-intégrables qui ne sont pas boréliennes (c'est la tribu de Lebesgue qui figure dans l'énoncé ci dessus).

Remarque 5.6.1 Il résulte de ceci que les techniques de calcul intégral établies dans le cadre de l'intégrale de Riemann peuvent être utilisées dans le cadre de l'intégrale de Lebesgue (pour les fonctions R-intégrables).

Proposition 5.6.2 (intégrabilité au sens de Riemann)
Une fonction f *bornée sur* $[a,b]$ *est R-intégrable si et seulement si l'ensemble de ses points de discontinuité est* λ*-négligeable.*

Preuve : ce n'est rien d'autre que le résultat déjà énoncé au chapitre 2 (théorème 2.2.1) à condition de vérifier que la notion d'ensemble négligeable définie à cette occasion (déf. 2.1) est la même que celle d'ensemble λ-négligeable. Pour cela on utilise la régularité de la mesure de Lebesgue ($\lambda(A) =$

$\inf\{\lambda(O);\ O \text{ ouvert } \supset A\}$), et le fait que tout ouvert O de $\mathbb{R}$ s'écrit sous la forme $O = \bigcup_{n\geq 0} I_n$ avec $I_n =]a_n, b_n[$. ■

Proposition 5.6.3 *Les fonctions qui, au sens de Riemann, admettent une intégrale généralisée (ou impropre)* **absolument convergente** *sur un intervalle I sont intégrables au sens de Lebesgue sur I et les deux intégrales sont égales.*

Preuve : traitons par exemple le cas où $I = [0, +\infty[$. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction admettant une intégrale impropre absolument convergente, c'est à dire telle que $\int_0^{+\infty} |f(x)|\,dx$ converge. On sait qu'alors $\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$ converge.
f étant localement R-intégrable, f est mesurable ; de plus, si on pose $\varphi_n = |f|\mathbb{1}_{[0,n]}$ on a $\varphi_n \nearrow |f|$ et, d'après la proposition 5.6.1 :

$$\forall n \geq 0 \quad \int \varphi_n\,d\lambda = \int_0^n |f(x)|\,dx \to \int_0^{+\infty} |f(x)|\,dx < \infty \text{ qd. } n \to +\infty$$

D'après le théorème de convergence monotone on a alors : $|f| \in L^1(I)$ (donc aussi $f \in L^1$) et

$$\int |f|\,d\lambda = \lim \uparrow \int \varphi_n\,d\lambda = \int_0^{+\infty} |f(x)|\,dx.$$

Pour finir, posons $f_n = f\mathbb{1}_{[0,n]}$, alors $f_n \to f$ sur I, $|f_n| \leq |\ f\ | \in L^1$ et, par le théorème de convergence dominée, $\int f_n\,d\lambda \to \int f\,d\lambda$. Or $\int f_n\,d\lambda = \int_0^n f(x)\,dx \to \int_0^{+\infty} f(x)\,dx$ puisque cette dernière intégrale est convergente. En résumé : $f \in L^1$ et $\int f\,d\lambda = \int_0^{+\infty} f(x)\,dx$. ■

On définit également la notion d'intégrale généralisée (ou impropre) au sens de Lebesgue. C'est l'objet du paragraphe suivant.

5.7 Intégrales convergentes.

On ne traite désormais que de l'intégrale de Lebesgue, et "dx" est mis pour "$d\lambda(x)$". $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Définition 5.7.1 Soit $f : I = [0, +\infty[\to \mathbb{K}$ une fonction telle que $\forall a \in \mathbb{R}_+ \quad f\mathbb{1}_{[0,a]} \in \mathrm{L}^1(\mathrm{I})$. Si $\int_0^a f(x)\,dx \overset{déf}{=} \int f\mathbb{1}_{[0,a]}\,\mathrm{d}\lambda$ a une limite finie quand $a \to +\infty$, on dit que f admet une intégrale convergente sur I. La limite des intégrales $\int f\mathbb{1}_{[0,a]}\,\mathrm{d}\lambda$ est notée $\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$.

Remarque 5.7.1

1. Définitions analogues pour les autres types d'intervalle, en prenant garde (comme dans le cadre de l'intégrale de Riemann) de traiter indépendemment chaque borne.
2. Si $f \in L^1([0, +\infty[)$ alors f a une intégrale convergente et $\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$ (au sens de la définition précédente) est égal à $\int_I f\,d\lambda$ (utiliser le théorème de convergence dominée).
3. Notons que, grâce au théorème de convergence monotone, on montre que l'absolue convergence au sens de Lebesgue équivaut à l'intégrabilité, donc cette terminologie n'a pas à être introduite.

Exemple 5.7.1 La fonction $x \to \dfrac{\sin x}{x}$ n'est pas intégrable sur $[0, +\infty[$, en effet :

$$\forall n \geq 0 \quad \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |\frac{\sin x}{x}| \, dx \geq \frac{2}{(n+1)\pi}$$

de sorte que :

$$\forall n \geq 0 \quad \int_{0}^{n\pi} |\frac{\sin x}{x}| \, dx \geq \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

qui tend vers l'infini avec n.
Cependant la fonction $F(a) = \displaystyle\int_0^a \frac{\sin x}{x} \, dx$ a une limite finie quand $a \to +\infty$ (faire une intégration par parties).

Nous commençons par deux résultats importants de topologie sur les "limites de limites" :

Lemme 5.7.1 *Soit* $u(n,p), \quad (n,p) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ *une suite double d'un espace métrique complet* $(\mathbf{X}, d)$ *telle que :*

1. *pour tout* p *la suite* $u(n,p)$ *tend vers une limite* $u(\infty, p)$ *quand* $n \to \infty$,
2. *pour tout* n *la suite* $u(n,p)$ *tend vers une limite* $u(n, \infty)$ *quand* $p \to \infty$, *uniformément par rapport à* n.

Alors $u(\infty, p)$ *et* $u(n, \infty)$ *tendent vers une même limite* ℓ *quand* n *et* p *tendent respectivement vers l'infini.*

Preuve : montrons que la suite $u(n, \infty)$ est de Cauchy. Pour cela on écrit :

$$|u(n,\infty) - u(n',\infty)| \leq |u(n,\infty) - u(n,p)| + |u(n,p) - u(n',p)| + |u(n',p) - u(n',\infty)|.$$

Soit $\varepsilon > 0$; d'après la convergence uniforme de $u(n,p)$ vers $u(n,\infty)$, il existe un entier p tel que l'on ait $|u(n,\infty) - u(n,p)| \leq \varepsilon/4$ pour tout n. Soit p_0 un tel entier. Compte tenu de la première hypothèse il existe un entier n_0 tel que pour $n \geq n_0$ on ait $|u(n,p) - u(\infty,p)| \leq \varepsilon/4$. Alors, pour $n, \; n' \geq n_0$, on a $|u(n,p) - u(n',p)| \leq \varepsilon/2$ et donc aussi finalement $|u(n,\infty) - u(n',\infty)| \leq \varepsilon$.
Soit ℓ la limite de $u(n,\infty)$ (X est complet). Soit $\varepsilon > 0$; il existe $P \in \mathbb{N}$ tel que pour $p \geq P$ on ait $|u(n,p) - u(n,\infty)| \leq \varepsilon$ pour tout n (deuxième hypothèse). En passant à la limite sur n on a alors $|u(\infty,p) - \ell| \leq \varepsilon$ pour $p \geq P$, ce qui prouve que la suite $u(\infty,p)$ a pour limite ℓ. ■

Le lemme suivant sert quand on ne connait pas la limite $u(n,\infty)$.

Lemme 5.7.2 *Pour que la suite* $u(n,p)$ *ait une limite* $u(n,\infty)$ *quand* $p \to \infty$, *uniformément par rapport à* n, *il faut et il suffit qu'elle satisfasse à la condition de Cauchy uniforme suivante :*

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists p_0 \in \mathbb{N} \; \forall p, p' \in \mathbb{N} \quad p, p' \geq p_0 \Longrightarrow \forall n \geq 0 \; d(u(n,p), u(n,p')) \leq \varepsilon.$$

On dispose, pour les intégrales convergentes, de l'analogue des théorèmes de convergence dominée et de dérivation "sous le signe $\int$" :

Définition 5.7.2 Soit $(f_i)_{i \in I}$ une famille de fonctions $[0, +\infty[\to \mathbb{K}$ d'intégrales convergentes. On dit que cette famille est à intégrales uniformément convergentes sur $[0, +\infty[$ si $\displaystyle\int_0^a f_i(x) \, dx \to \int_0^\infty f_i(x) \, dx$ quand $a \to +\infty$, uniformément par rapport à $i \in I$.

Théorème 5.7.1 (convergence dominée) *Soient* $(f_n)_{n\geq 0}$ *et* f *des fonctions* $[0,+\infty[\to \mathbb{K}$ *telles que :*

1. *la famille* $(f_n)_{n\geq 0}$ *est à intégrales uniformément convergentes sur* $[0,+\infty[$,
2. $f_n \to f$ *p.p.* ,
3. $\forall a \geq 0\ \exists g \in L^1([0,a]) \quad \forall n \geq 0 \quad |f_n| \leq g$ *p.p. sur* $[0,a]$.

Alors f *possède une intégrale convergente sur* $[0,+\infty[$ *et* $\displaystyle\int_0^\infty f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\int_0^\infty f_n(x)\,dx$.

Théorème 5.7.2 (Continuité sous le signe $\int$)
Soient T *un espace métrique,* $t_0 \in T$ *et* $f\ :\ [0,+\infty[\times T \to \mathbb{K}$ *tels que :*

1. *la famille* $(f(.,t))_{t\in T}$ *est à intégrales uniformément convergentes sur* $[0,+\infty[$,
2. $\exists V \in \mathcal{V}(t_0)\ \forall a \geq 0\ \exists g \in L^1([0,a])\ \forall t \in V \quad |f(.,t)| \leq g$ *p.p.* ,
3. *l'application* $f(x,.)$ *définie par :* $t \to f(x,t)$ *est continue en* t_0*, pour presque tout* $x \in [0,+\infty[$.

Alors F*, définie de* T *dans* $\mathbb{R}$ *par :* $F(t) = \displaystyle\int_0^\infty f(x,t)\,dx$ *est continue en* t_0.

Théorème 5.7.3 (Dérivabilité sous le signe $\int$)
Soient I *un ouvert de* $\mathbb{R}$ *et* $f\ :\ [0,+\infty[\times I \to \mathbb{K}$ *tels que :*

1. *pour tout* $t \in I$ *la fonction* $f(.,t)$ *possède une intégrale convergente sur* $[0,+\infty[$,
2. *pour presque tout* $x \in [0,+\infty[\ \ \dfrac{\partial f}{\partial t}(x,t)$ *existe sur I,*
3. *la famille* $(\dfrac{\partial f}{\partial t}(.,t))_{t\in I}$ *est à intégrales uniformément convergentes sur* $[0,+\infty[$,
4. $\forall a \geq 0\ \exists g \in L^1([0,a])\ \forall t \in I \quad |\dfrac{\partial f}{\partial t}(.,t)| \leq g$ *p.p. sur* $[0,a]$.

Alors F*, définie de* I *dans* $\mathbb{K}$ *par :* $F(t) = \displaystyle\int_0^\infty f(x,t)\,dx$ *est dérivable sur* I *et :*

$$\forall t \in I \quad F'(t) = \int_0^\infty \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\,dx.$$

5.8 L'espace de Hilbert L^2, en bref (pour aborder les probabilités sans larmes).

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Définition 5.8.1 On désigne par $L^2 = L^2_{\mathbb{K}}(E,\mathcal{T},m)$ l'espace des classes d'équivalence (pour la relation d'égalité p.p.) des fonctions mesurables $f\ :\ E \to \mathbb{K}$ dont le module est de carré intégrable. Autrement dit :

$$f \in L^2 \Longleftrightarrow |\ f\ |^2 \in L^1.$$

Proposition 5.8.1 L^2 *est un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel.*

Preuve : il y a juste à prouver la stabilité pour les lois usuelles. Pour cela, on utilise que :
$\forall k \in \mathbb{R},\ \forall f,g \in L^2 \quad |kf|^2 = k^2f^2$ et $|f+g|^2 \leq 2(|f|^2+|g|^2)$. ■

Proposition 5.8.2 $f, g \in L^2 \Longrightarrow fg \in L^1$.

Preuve : conséquence immédiate de l'inégalité : $|fg| \leq \frac{1}{2}(|f|^2 + |g|^2)$. ■

Proposition 5.8.3 *L'application* $\Phi \ : \ (f, g) \to (f|g) \overset{déf}{=} \int f\,\overline{g}\,dm$ *est un produit scalaire sur* L^2.

Preuve : le caractère sesquilinéaire hermitien de cette application est immédiat. En outre :

$$(f|f) = 0 \Longleftrightarrow \int | \ f \ |^2 \ dm = 0 \Longleftrightarrow | \ f \ |^2 = 0 \ \text{ p.p.} \ \Longleftrightarrow f = 0 \ \text{ p.p.} \ (\Longleftrightarrow f = 0 \quad dans \quad L^2).$$

■

Pour $f \in L^2$, la quantité $\| \ f \ \|_2 = (\int \ | \ f \ |^2 \ dm)^{\frac{1}{2}}$ définit la norme associée à Φ. La convergence dans L^2, c'est à dire la convergence pour cette norme, s'appelle aussi la "convergence en moyenne quadratique". Retenir que :

$$f_n \to f \text{ dans } L^2 \Longleftrightarrow f_n,\ f \in L^2 \text{ et } \int |f_n - f|^2\,dm \to 0 \text{ quand } n \to +\infty.$$

Corollaire 5.8.1 (Inégalité de Cauchy-Schwarz)

$$\int | \ f\,g \ | \ dm \leq \| \ f \ \|_2 \, \| \ g \ \|_2$$

Proposition 5.8.4 $(L^2, \| \,.\, \|_2)$ *est un espace de Hilbert.*

Il suffit de montrer que toute suite de Cauchy est convergente. Or ceci, comme dans le cas de L^1, résulte de la proposition suivante :

Proposition 5.8.5 *Pour toute suite* $(f_n)_{n \geq 0} \subset L^2$ *telle que* $\sum_0^\infty \| \ f_n \ \|_2 < +\infty$, *la série* $\sum_0^\infty f_n$ *converge dans* L^2 *et p.p. . De plus* $\| \sum_0^\infty f_n \ \|_2 \leq \sum_0^\infty \| \ f_n \ \|_2$.

Remarque 5.8.1 $L^2_{\mathbb{R}}(E, \mathcal{T}, m)$ est un espace de Hilbert (réel) pour le produit scalaire $(f|g) \overset{déf}{=} \int f\,g\,dm.$

Proposition 5.8.6 *Si* $m(E) < \infty$ **(en particulier si m est une probabilité)** *alors* $L^2 \subset L^1$.

Preuve : Soit $f \in L^2$, il s'agit de montrer que $\int | \ f \ | \ dm < \infty$.

– <u>première méthode</u> : on utilise l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

$$\int |f|\,dm = \int |f \times 1|\,dm \leq \| \ f \ \|_2 \times \| \ 1 \ \|_2 \leq \| \ f \ \|_2 \times m(E) < \infty.$$

– <u>deuxième méthode</u> : soit $f \in L^2$. On a :

$$\int |f|\,dm = \int_{|f| \leq 1} |f|\,dm + \int_{|f| > 1} |f|\,dm \leq m(E) + \int | \ f \ |^2 \ dm = m(E) + \| \ f \ \|_2 < \infty$$

car $|f| \leq | \ f \ |^2$ là où $|f| \geq 1$.

■

Remarque 5.8.2 L'inégalité $\int |f|\,dm \ \leq \ m(E) \quad \| \ f \ \|_2$, i.e. $\| \ f \ \|_1 \leq \ m(E) \quad \| \ f \ \|_2$ montre que l'injection canonique $i \ : \ L^2 \hookrightarrow L^1$ est linéaire continue. On retiendra en particulier que **si** $m(E) < \infty$ alors :

$$f_n \to f \ dans \ L^2 \Longrightarrow f_n \to f \ dans \ L^1.$$

5.9 Exercices

Exercice 5.9.1

1. Soient m_1 et m_2 des mesures sur l'espace mesurable $(E, \mathcal{T})$. Montrer qu'une application f mesurable de $(E, \mathcal{T})$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ est intégrable pour la mesure $m = m_1 + m_2$ si et seulement si elle est intégrable pour les mesures m_1 et m_2, et qu'on a alors : $\int f\, dm = \int f\, dm_1 + \int f\, dm_2$.
2. Soient $(m_n)_{n\geq 0}$ une famille de mesures (positives) sur $(E, \mathcal{T})$ et $(\alpha_n)_{n\geq 0} \subset \mathbb{R}_+^*$. On considère la mesure $m = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n\, m_n$. Que devient la propriété énoncée dans la question précédente ?

Exercice 5.9.2 Soit δ_a la mesure de Dirac en a, définie sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. Décrire les éléments de l'espace $L^1(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \delta_a)$ et, pour $f \in L^1$, calculer $\int f\, d\delta_a$. Qu'est ce qui change si on remplace $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \delta_a)$ par $(\mathbb{R}, \mathcal{P}(\mathbb{R}), \delta_a)$?

Exercice 5.9.3 On considère l'espace mesuré $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), m)$ où m désigne la mesure du comptage. Les fonctions réelles définies sur cet espace seront écrites sous forme de suites $(a_p)_{p\geq 0}$.

1. A quoi correspondent, en termes de suites, les fonctions mesurables, les fonctions étagées, les fonctions intégrables, les différentes notions de convergence (p.p., p.u., en mesure, dans L^1) ?
2. Ecrire dans ce cadre les théorèmes de convergence monotone et de convergence dominée.

Exercice 5.9.4 Soient $(E, \mathcal{T}, m)$ un espace mesuré et $f \in \mathcal{M}_+$.

1. Montrer que si $\int f\, dm < +\infty$, alors $f < +\infty$ *pp*.
2. Montrer que si $A \in T$ est tel que $m(A) = 0$ alors $\int_A f\, dm = 0$.

Exercice 5.9.5 On considère l'espace mesuré $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$.
Soit $f \in L^1$; montrer que pour tout $y \in \mathbb{R}$ on a $f(.+y) \in L^1$ et $\int f\, d\lambda = \int f(.+y)\, d\lambda$.

Exercice 5.9.6 Soient $(E, \mathcal{T}, m)$ un espace mesuré, $f \in L^1$. Montrer que :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall A \in \mathcal{T} \qquad m(A) \leq \delta \Longrightarrow \int_A |f|\, dm \leq \varepsilon$$

(Introduire $f_n = \inf(|f|, n)$).

Exercice 5.9.7 Soient $(E, \mathcal{T}, m)$ un espace mesuré et L^1 l'espace $L^1_{\mathbb{R}}(E, \mathcal{T}, m)$. Soient $(f_n)_{n\geq 0} \subset L^1$ et $f \in L^1$. Montrer que $(f_n)_{n\geq 0}$ converge vers f dans L^1 si et seulement si pour tout $A \in \mathcal{T}$ $\lim_{n\to\infty} \int_A f_n\, dm = \int_A f\, dm$, la convergence étant uniforme par rapport à A, c'est à dire :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \qquad n \geq n_0 \Longrightarrow \forall A \in \mathcal{T} \quad |\int_A f_n\, dm - \int_A f\, dm| \leq \varepsilon.$$

(Pour la condition suffisante, choisir deux ensembles A bien adaptés à ce qu'on souhaite prouver ...)

Exercice 5.9.8 Soient $(E, \mathcal{T}, m)$ un espace mesuré, et $(f_n)_{n\geq 0} \subset \mathcal{L}^1$. On suppose que f_n converge uniformément vers f. A-t-on $f \in \mathcal{L}^1$? *(distinguer les cas $m(E) < +\infty$ et $m(E) = +\infty$)*

Exercice 5.9.9
On considère l'espace mesuré $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$.

1. Soit $f \in L^1$ une fonction à valeurs dans $[0, 1]$ telle que :
$$\int f^2 \, d\lambda = \int f \, d\lambda.$$
Montrer qu'il existe un borélien B de mesure finie tel que $f = \mathbb{1}_B$ p.p.
2. Soit $f \in L^1$ une fonction à valeurs positives telle que :
$$\forall n \geq 1 \quad \int f^{2n} \, d\lambda = \int f \, d\lambda.$$
   (a) Montrer que : $\forall \alpha > 0 \quad \lambda(\{f \geq 1 + \alpha\}) = 0$.
   (b) Montrer que $\lambda(\{f > 1\}) = 0$.
   (c) Que peut-on en conclure pour f ?

Exercice 5.9.10 Pour $n \geq 0$ on pose $I_n = \displaystyle\int_0^1 (\cos \frac{1}{x})^n \, dx$. Etudier la limite éventuelle de I_n quand $n \to +\infty$ *(on demande une rédaction courte et très précise).*

Exercice 5.9.11
On considère l'espace mesuré $([0, 1], \mathcal{B}([0, 1]), \lambda)$. Chaque entier naturel $n \geq 1$ étant décomposé (de manière unique) sous la forme $n = 2^p + k, \quad 0 \leq k < 2^p$, on pose $f_n = \mathbb{1}_{[\frac{k}{2^p}, \frac{k+1}{2^p}[}$.

1. Préciser $f_1, \cdots, f_7$ (faire un dessin !).
2. Montrer que la suite $(f_n)_{n \geq 1}$ converge dans L^1 vers 0.
3. La suite $(f_n)_{n \geq 1}$ converge-t-elle presque partout vers 0 ?
4. Trouver une suite extraite de $(f_n)_{n \geq 1}$ qui converge vers 0 p.p.
5. La suite $(f_n)_{n \geq 1}$ converge-t-elle en mesure ?
6. On considère maintenant un espace mesuré quelconque $(E, \mathcal{T}, m)$.
   (a) Montrer que si une suite $(f_n)_{n \geq 0}$ converge dans L^1 vers une fonction f alors elle converge aussi vers f en mesure.
   (b) Construire un contre exemple simple prouvant que la réciproque est fausse.

Exercice 5.9.12
Soient $(E, \mathcal{T}, m)$ un espace mesuré, f et $(f_n)_{n \geq 0}$ des fonctions mesurables positives telles que :

(i) $f_n \to f$ p.p. ,
(ii) $\forall n \geq 0 \quad \int f_n \, dm \leq \int f \, dm < \infty$.

On se propose de montrer que la suite $(f_n)_{n \geq 0}$ converge vers f dans L^1.

1. Montrer que $(f - f_n)^+$ converge vers 0 dans L^1.
2. En déduire que la suite $(f - f_n)^-$ converge également vers 0 dans L^1, et conclure.

Exercice 5.9.13

1. Soient $(E, \mathcal{T}, m)$ un espace mesuré, $(f_n)_{n\geq 0} \subset L^1$, $f, g \in L^1$. On suppose que $f_n \to f$ p.p. et que $f_n \to g$ dans L^1. Montrer que $f = g$ p.p.
2. On suppose maintenant $(E, \mathcal{T}, m) = ([-1,1], \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$.
   Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit la fonction : $f_n = n\, \mathbb{1}_{[-\frac{1}{2n}, \frac{1}{2n}]}$.
   (a) Montrer que la suite $(f_n)_{n\geq 0}$ est bornée dans L^1, et que la suite $(\int f_n\, d\lambda)_{n\geq 0}$ converge.
   (b) Peut-on appliquer le théorème de convergence dominée à la suite $(f_n)_{n\geq 0}$?
   (c) A-t-on convergence de la suite $(f_n)_{n\geq 0}$ dans L^1 ?
   (d) Montrer que pour toute fonction φ continue de $[-1,1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, $\int f_n \varphi\, d\lambda \to \int \varphi\, d\delta_0$ lorsque $n \to +\infty$.

Exercice 5.9.14
Soient $(E, \mathcal{T}, m)$ un espace mesuré, $f \in L^1$ et $(f_n)_{n\geq 0} \subset L^1$ une suite qui converge vers f dans L^1. On suppose qu'il existe un réel $C \geq 0$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N}\ \ | f_n | \leq C$ p.p.

1. Montrer que $| f | \leq C$ p.p.
2. Montrer que $(f_n)_{n\geq 0}$ converge vers f dans L^2.

Exercice 5.9.15 Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction **continue**. On prolonge f à $\mathbb{R}$ en posant :

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si} \quad x \in [a,b] \\ f(b) & \text{si} \quad x > b \\ f(a) & \text{si} \quad x < a. \end{cases}$$

Pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$ on pose $g_n(x) = n\left(\tilde{f}(x + \frac{1}{n}) - \tilde{f}(x)\right)$.

1. Montrer que $\lim\limits_{n\to\infty} \int_a^b g_n(x)\, dx = f(b) - f(a)$. *Attention : pas de théorème de convergence du cours d'intégration à utiliser ici, seulement des outils de 1ère année !*
2. On suppose désormais que f est dérivable et que sa dérivée f' est bornée sur $[a,b]$.
   (a) Montrer que f' est borélienne *(écrire f' comme limite p.p. d'une suite de fonctions boréliennes).*
   (b) Montrer que la suite $(\| g_n \|_\infty)_{n\geq 1}$ est bornée.
   (c) Déduire de tout ce qui précède que f' est intégrable (au sens de Lebesgue) sur $[a,b]$ et que $\int_{[a,b]} f'\, d\lambda = f(b) - f(a)$.

Exercice 5.9.16
Soient a, b, α, β des réels avec $a < b$ et $\alpha < \beta$, $\varphi : [\alpha, \beta] \to [a,b]$ une fonction bijective et dérivable [*on rappelle qu'alors φ est strictement monotone*]. λ désigne indifféremment la mesure de Lebesgue sur $[a,b]$ ou $[\alpha, \beta]$.

1. Montrer, en s'inspirant de l'exercice précédent, que φ', dérivée de φ sur $[\alpha, \beta]$, est borélienne. Montrer à l'aide du lemme de Fatou que φ' est intégrable sur $[a,b]$. On admettra dans la suite que φ' vérifie :

$$\forall s,t \in [\alpha, \beta] \qquad \int_s^t \varphi'(u)\, d\lambda(u) = \varphi(t) - \varphi(s).$$

2. On pose, pour tout borélien A de $[a,b]$:

$$\mu(A) = \int_{[\alpha,\beta]} \mathbb{1}_{\mathrm{A}}(\varphi(\mathrm{u}))\, |\varphi'(\mathrm{u})|\, \mathrm{d}\lambda(\mathrm{u}).$$

Montrer que μ est une mesure sur $\mathcal{B}([a,b])$, tribu des boréliens de $[a,b]$.

3. Montrer que pour tout intervalle $[c,d] \subset [a,b]$: $\mu([c,d]) = d-c$.
En déduire (avec précision) que $\mu = \lambda$.

4. Montrer que pour toute fonction f mesurable positive sur $[a,b]$ on a :

$$(CV) \quad \int_{[a,b]} f\, d\lambda = \int_{[\alpha,\beta]} f \circ \varphi\, |\varphi'|\, d\lambda$$

(*on pourra commencer par établir (CV) pour les fonctions étagées mesurables positives sur* $[a,b]$).

5. Montrer que pour toute fonction $f \in L^1([\alpha,\beta], \mathcal{B}([\alpha,\beta]), \lambda)$ on a $f\circ\varphi\, |\varphi'| \in L^1([\alpha,\beta], \mathcal{B}([\alpha,\beta]), \lambda)$ et que f satisfait la formule de changement de variable (CV).

Exercice 5.9.17 On considère l'espace mesuré $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$.
Soit $f \in L^1_{loc}$, montrer que la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(t) = \displaystyle\int_a^t f(x)\, d\lambda(x)$ est continue.

Exercice 5.9.18

1. Montrer que pour tout $t \geq 0$ la fonction $x \to \dfrac{e^{-tx^2}}{1+x^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.
2. Etudier la continuité et la dérivabilité de la fonction F définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$F(t) = \int_{\mathbb{R}_+} \frac{e^{-tx^2}}{1+x^2}\, dx.$$

3. Montrer que F vérifie la relation :

$$\forall t > 0 \quad F'(t) - F(t) = -\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{t}}.$$

(On rappelle que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-u^2}\, du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$*)*

Exercice 5.9.19 Soit m une mesure finie sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.

1. Montrer que l'intégrale $f(x) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} e^{itx}\, dm(t)$ est bien définie pour tout $x \in \mathbb{R}$.
2. On suppose que $\dfrac{2f(0) - f(h) - f(-h)}{h^2}$ a une limite finie quand $h \to 0$.
   (a) Montrer que $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} t^2\, dm(t) < \infty$ *(on suggère d'utiliser le lemme de Fatou).*
   (b) Montrer que la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est de classe $\mathcal{C}^2$.

Chapitre 6

Produits d'espaces mesurés

6.1 Produits d'espaces mesurables.

Définition 6.1.1 (rappel) Soient $(E_i, \mathcal{T}_i)_{1\leq i\leq n}$ une famille d'espaces mesurables et $E = \prod_{1\leq i\leq n} E_i$. On appelle tribu produit sur E et on note $\bigotimes_{1\leq i\leq n} \mathcal{T}_i$ la tribu engendrée par la classe des pavés

$$\prod_{1\leq i\leq n} \mathcal{T}_i = \left\{ \prod_{1\leq i\leq n} A_i\,; \quad A_i \in \mathcal{T}_i,\ i = 1, \cdots, n \right\}.$$

$(\prod_{1\leq i\leq n} E_i, \bigotimes_{1\leq i\leq n} \mathcal{T}_i)$ s'appelle l'espace produit des espaces mesurables $(E_i, \mathcal{T}_i), 1 \leq i \leq n$. On le notera $\prod_{i=1}^{n}(E_i, \mathcal{T}_i)$.

Définition 6.1.2 Soient $(E_i, \mathcal{T}_i)_{i\in I}$ une famille d'espaces mesurables et, pour chaque $i \in I$, $f_i\ :\ E \to E_i$ une application. On appelle tribu engendrée par la famille $(f_i)_{i\in I}$ la plus petite tribu sur E rendant toutes les applications f_i mesurables.

Remarque 6.1.1 Cette tribu, notée $\tau((f_i)_{i\in I})$ est aussi la tribu $\tau\left(\bigcup_{i\in I} f_i^{-1}(\mathcal{T}_i)\right)$.

Proposition 6.1.1 *Soit* $(E_i, \mathcal{T}_i)_{1\leq i\leq n}$ *une famille finie d'espaces mesurables.* $\bigotimes_{1\leq i\leq n} \mathcal{T}_i$ *est la tribu engendrée par les applications coordonnées* $X_j\ :\ \begin{cases} E \to E_j \\ (x_i)_{1\leq i\leq n} \mapsto x_j \end{cases}$

Preuve : Pour tout i et tout $A_i \in \mathcal{T}_i$ on a $X_i^{-1}(A_i) = E_1 \times \cdots \times E_{i-1} \times A_i \times E_{i+1} \times \cdots \times E_n \in \bigotimes_{1\leq i\leq n} \mathcal{T}_i$, donc les applications X_i sont mesurables et on a alors $\tau((X_i)_{1\leq i\leq n}) \subset \bigotimes_{1\leq i\leq n} \mathcal{T}_i$. D'autre part on a :

$$\prod_{1\leq i\leq n} A_i = \bigcap_{1\leq i\leq n} X_i^{-1}(A_i) \subset \tau((X_i)_{1\leq i\leq n})$$

donc $\bigotimes_{1\leq i\leq n} \mathcal{T}_i \subset \tau((X_i)_{1\leq i\leq n})$. ∎

Proposition 6.1.2 *Soit $(E_i,\mathcal{T}_i)_{1\le i\le n}$ une famille finie d'espaces mesurables. Si, pour chaque i, $\mathcal{C}_i\subset\mathcal{T}_i$ engendre $\mathcal{T}_i$ et contient E_i, alors $\mathcal{C}=\prod_{1\le i\le n}\mathcal{C}_i$ engendre $\bigotimes_{1\le i\le n}\mathcal{T}_i$.*

Preuve : Pour tout i et tout $A_i\in\mathcal{C}_i$: $X_i^{-1}(A_i)=E_1\times\cdots\times E_{i-1}\times A_i\times E_{i+1}\times\cdots\times E_n\in\mathcal{C}=\prod_{1\le i\le n}\mathcal{C}_i$ (car $E_k\in\mathcal{C}_k$ pour tout k), d'où :

$$X_i^{-1}(\mathcal{T}_i)=X_i^{-1}(\tau(\mathcal{C}_i))=\tau(X_i^{-1}(\mathcal{C}_i))\subset\tau(\mathcal{C})$$

et finalement $\bigotimes_{1\le i\le n}\mathcal{T}_i\subset\tau(\mathcal{C})$. D'autre part $\mathcal{C}=\prod_{1\le i\le n}\mathcal{C}_i\subset\prod_{1\le i\le n}\mathcal{T}_i$, on a donc $\tau(\mathcal{C})\subset\tau(\prod_{1\le i\le n}\mathcal{T}_i)=\bigotimes_{1\le i\le n}\mathcal{T}_i$. ■

Exemple 6.1.1 Le produit de "d exemplaires" de $(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}))$ n'est autre que $(\mathbb{R}^d,\mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ car $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ est engendrée, par exemple, par les produits d'intervalles ouverts.

Proposition 6.1.3 (rappel) *Une application $f=(f_1,\cdots,f_n)$ d'un espace mesurable $(F,\mathcal{S})$ dans un espace produit $(\prod_{i\in I}E_i,\bigotimes_{i\in I}\mathcal{T}_i)$ est mesurable si et seulement si les applications $f_i=X_i\circ f,\quad 1\le i\le n$, sont mesurables.*

Preuve :

CN : une composée d'applications mesurables est mesurable.

CS : si toutes les applications $X_i\circ f$ sont mesurables alors pour tout i et tout $A_i\in\mathcal{T}_i$ on a $f^{-1}(X_i^{-1}(A_i))=(X_i\circ f)^{-1}(A_i)\in\mathcal{S}$ d'où :

$$f^{-1}\left(\bigcup_{i\in I}X_i^{-1}(A_i)\right)=\bigcup_{i\in I}f^{-1}(X_i^{-1}(A_i))\in\mathcal{S}$$

et on conclut grâce à la remarque 6.1.1 et au critère usuel de mesurabilité.

■

Corollaire 6.1.1 *Le produit d'espaces mesurables est associatif : on a, à condition d'identifier $(E_1\times\cdots\times E_n)\times(E_{n+1}\cdots\times E_{n+p})$ et $E_1\times\cdots E_{n+p}$:*

$$\prod_{i=1}^{n}(E_i,\mathcal{T}_i)\times\prod_{i=n+1}^{n+p}(E_i,\mathcal{T}_i)=\prod_{i=1}^{n+p}(E_i,\mathcal{T}_i).$$

Preuve : compte tenu de cette identification ensembliste, la tribu $\bigotimes_{i=1}^{n}\mathcal{T}_i\times\bigotimes_{i=n+1}^{n+p}\mathcal{T}_i$ est la plus petite tribu sur $\prod_{i=1}^{n+p}E_i$ rendant mesurables les applications $(x_1,\cdots,x_{n+p})\mapsto(x_1,\cdots,x_n)$ et $(x_{n+1},\cdots,x_{n+p})\mapsto(x_1,\cdots,x_{n+p})$, c'est donc aussi, d'après la proposition précédente, la plus petite tribu rendant mesurables les applications $(x_1,\cdots,x_{n+p})\mapsto x_i$ pour $i=1,\cdots,n+p$: c'est donc bien aussi la tribu $\bigotimes_{i=1}^{n+p}\mathcal{T}_i$.
■

Proposition 6.1.4 *Soient $(E_i, \mathcal{T}_i)_{1\le i\le n}$ une famille d'espaces mesurables, $(F, \mathcal{S})$ un espace mesurable et $f : \prod_{i=1}^{n}(E_i, \mathcal{T}_i) \to (F, \mathcal{S})$ une application mesurable. Pour tout entier p tel que $1 \le p < n$ et tout $(a_{p+1}, \cdots, a_n) \in E_{p+1} \times \cdots E_n$, l'application "partielle"*

$$g \ : \ \begin{cases} \prod_{i=1}^{p} E_i \to F \\ (x_1, \cdots, x_p) \mapsto f(x_1, \cdots, x_p, a_{p+1}, \cdots, a_n) \end{cases}$$

est mesurable.

Preuve : Grâce à la propriété d'associativité, il suffit d'établir la proposition pour un produit de deux espaces. Soit donc f une application mesurable de $(E_1 \times E_2, \mathcal{T}_1 \otimes \mathcal{T}_2)$ dans $(F, \mathcal{S})$ et $a_2 \in E_2$. L'application h_{a_2} $E_1 \to E_1 \times E_2$ définie par $h_{a_2}(x_1) = (x_1, a_2)$ est mesurable car (prop. 6.1.3) chacune des applications $x_1 \mapsto x_1$ et $x_1 \mapsto a_2$ l'est, donc $g = f \circ h_{a_2}$ est mesurable. ■

Remarque 6.1.2 On peut bien sûr "fixer" d'autres coordonnées que les $n - p$ dernières.

Exemple 6.1.2 On prend $f = \mathbb{1}_A$ où A est une partie mesurable de $(E_1 \times E_2, \mathcal{T}_1 \otimes \mathcal{T}_2)$ et $x_1 \in E_1$. Désignons par A_{x_1} la projection sur E_2 de la "section de A au dessus de x_1", c'est à dire $A_{x_1} = \{x_2 \in E_2;\ (x_1, x_2) \in A\}$. On a $\mathbb{1}_A(x_1, \cdot) = \mathbb{1}_{A_{x_1}}(\cdot)$ et cette application est mesurable (autrement dit $A_{x_1} \in \mathcal{T}_2$).

6.2 Mesures produits. Théorème de Fubini.

Pour alléger les notations on se limite désormais à deux facteurs.

Proposition 6.2.1 *Soient $(E_1, \mathcal{T}_1, m_1)$ et $(E_2, \mathcal{T}_2, m_2)$ deux espaces mesurés finis (resp. σ-finis). Il existe une unique mesure sur $(E_1 \times E_2, \mathcal{T}_1 \otimes \mathcal{T}_2)$, notée $m_1 \otimes m_2$, telle que :*

$$\forall (A_1, A_2) \in \mathcal{T}_1 \times \mathcal{T}_2 \qquad (m_1 \otimes m_2)(A_1 \times A_2) = m_1(A_1)\, m_2(A_2).$$

Cette mesure est finie (resp. σ-finie).

Définition 6.2.1 $(E_1 \times E_2, \mathcal{T}_1 \otimes \mathcal{T}_2, m_1 \otimes m_2)$ est le produit des espaces mesurés $(E_1, \mathcal{T}_1, m_1)$ et $(E_2, \mathcal{T}_2, m_2)$.

Lemme 6.2.1 *Si m_2 est σ-finie alors pour tout $A \in \mathcal{T}_1 \otimes \mathcal{T}_2$ l'application* $\begin{cases} E_1 \to \overline{\mathbb{R}}_+ \\ x_1 \mapsto m_2(A_{x_1}) \end{cases}$ *est $\mathcal{T}_1$-mesurable.*

Preuve du lemme :
Cas $\mathbf{m_2}$ finie. On définit $\mathcal{M} = \{A \in \mathcal{T}_1 \otimes \mathcal{T}_2\,;\ x_1 \mapsto m_2(A_{x_1})$ est mesurable$\}$. Vérifions que $\mathcal{M}$ est une classe monotone :

- $E_1 \times E_2 \in \mathcal{M}$ car $(E_1 \times E_2)_{x_1} = E_2$ et une application constante est mesurable.
- Soit $(A_n)_{n\ge 0} \subset \mathcal{M}$ une famille croissante. On vérifie facilement que $(\bigcup A_n)_{x_1} = \bigcup \uparrow (A_n)_{x_1}$ et donc $m_2((\bigcup A_n)_{x_1}) = \lim_{n\to\infty} \uparrow m_2((A_n)_{x_1})$. L'application $x_1 \mapsto m_2((\bigcup A_n)_{x_1})$ est donc mesurable comme limite simple de fonctions mesurables, d'où $\bigcup (A_n)_{x_1} \in \mathcal{M}$.

– Si $A,\ B \in \mathcal{M}$ sont tels que $A \subset B$ alors $(B \setminus A)_{x_1} = B_{x_1} \setminus A_{x_1}$ et, **$\mathbf{m_2}$ étant finie**, $m_2((B \setminus A)_{x_1}) = m_2(B_{x_1}) - m_2(A_{x_1})$ d'où la mesurabilité de $x_1 \mapsto m_2((B \setminus A)_{x_1})$ et donc $B \setminus A \in \mathcal{M}$.

Si $(A_1, A_2) \in \mathcal{T}_1 \times \mathcal{T}_2$, classe des pavés mesurables, on a $m_2((A_1, A_2)_{x_1}) = \mathrm{1\!I}_{A_1}(x_1) \times m_2(A_2)$ donc, $\mathrm{1\!I}_{A_1}$ étant mesurable, $\mathcal{T}_1 \times \mathcal{T}_2 \subset \mathcal{M}$. Or la classe des pavés mesurables est stable par les intersections finies et engendre $\mathcal{T}_1 \otimes \mathcal{T}_2$, donc, grâce au théorème de la classe monotone, on a $\mathcal{T}_1 \otimes \mathcal{T}_2 \subset \mathcal{M}$.

Cas $\mathbf{m_2}$ σ-finie. Définissons $\mathcal{M}$ comme ci dessus. Pour tout $F \in \mathcal{T}_2$ tel que $m_2(F) < \infty$ et tout $A \in \mathcal{T}_1 \otimes \mathcal{T}_2$ on a $A \cap (E_1 \times F) \in \mathcal{M}$ d'après le raisonnement précédent. Soit donc $(F_n)_{n \geq 0}$ une suite croissante de parties $\mathcal{T}_2$-mesurables vérifiant $m_2(F_n) < \infty$ et $\bigcup F_n = E_2$. On a alors, pour $x_1 \in E_1$, $m_2(A_{x_1}) = \lim\limits_{n \to \infty} \uparrow m_2(A_{x_1} \cap F_n) = \lim\limits_{n \to \infty} \uparrow m_2((A \cap (E_1 \times F_n))_{x_1})$, d'où la mesurabilité de l'application $x_1 \mapsto m_2(A_{x_1})$. ■

Preuve du théorème 6.2.1 :

Unicité. Il suffit d'appliquer le théorème de la classe monotone à la classe des pavés.

Existence. Posons, pour $A \in \mathcal{T}_1 \otimes \mathcal{T}_2$, $m(A) = \displaystyle\int_{E_1} m_2(A_{x_1})\, dm_1(x_1)$: on définit bien, grâce au lemme précédent, une application $m\ :\ \mathcal{T}_1 \otimes \mathcal{T}_2 \to \overline{\mathbb{R}}_+$ et il faut montrer qu'il s'agit bien d'une mesure. On a immédiatement $m(\emptyset) = 0$. Soient d'autre part $(A_n)_{n \geq 0} \subset \mathcal{T}_1 \otimes \mathcal{T}_2$ une suite de parties deux à deux disjointes, et $A = \bigcup A_n$; on a alors $A_{x_1} = (\bigcup A_n)_{x_1})$ (réunion disjointe), et ainsi :

$$\begin{aligned} m(A) &= \int_{E_1} m_2(A_{x_1})\, dm_1(x_1) = \int_{E_1} \sum_{n=0}^{+\infty} m_2((A_n)_{x_1})\, dm_1(x_1) = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{E_1} m_2((A_n)_{x_1})\, dm_1(x_1) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} m(A_n). \end{aligned}$$

Enfin on a :

$$m(A_1 \times A_2) = \int_{E_1} \mathrm{1\!I}_{A_1}(x_1) m_2(A_2)\, dm_1(x_1) = m_1(A_1) m_2(A_2).$$

On voit alors que m est finie dès que m_1 et m_2 le sont ; le cas σ-fini se traite comme d'habitude. ■

Théorème 6.2.1 (Fubini-Tonelli) *Soient $(E_1, \mathcal{T}_1, m_1)$ et $(E_2, \mathcal{T}_2, m_2)$ deux espaces mesurés σ-finis. Pour toute fonction mesurable positive f définie sur $(E_1 \times E_2, \mathcal{T}_1 \otimes \mathcal{T}_2, m_1 \otimes m_2)$, les fonctions :*

$$F_1\ :\ \begin{cases} (E_1, \mathcal{T}_1) \to (\overline{\mathbb{R}}_+, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}_+)) \\ x_1 \mapsto \displaystyle\int_{E_2} f(x_1, x_2)\, dm_2(x_2), \end{cases}$$

et

$$F_2\ :\ \begin{cases} (E_2, \mathcal{T}_2) \to (\overline{\mathbb{R}}_+, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}_+)) \\ x_2 \mapsto \displaystyle\int_{E_1} f(x_1, x_2)\, dm_1(x_1) \end{cases}$$

sont mesurables positives et on a (dans $\overline{\mathbb{R}}_+$) :

$$\begin{aligned} \int_{E_1 \times E_2} f\, d(m_1 \otimes m_2) &= \int_{E_1} \left(\int_{E_2} f(x_1, x_2)\, dm_2(x_2) \right) dm_1(x_1) \\ &= \int_{E_2} \left(\int_{E_1} f(x_1, x_2)\, dm_1(x_1) \right) dm_2(x_2) \end{aligned}$$

Preuve : les fonctions F_1 et F_2 sont bien définies, d'après la proposition 6.1.4. Considérons d'abord le cas d'une fonction indicatrice $f = \mathbb{1}_A$, avec $A \in \mathcal{T}_1 \otimes \mathcal{T}_2$. On a :

$$F_1(x_1) = \int_{E_2} \mathrm{1\!I_A(x_1, x_2)\, dm_2(x_2) = m_2(A_{x_1})}$$

donc F_1 est mesurable (de même pour F_2). De plus :

– $\int f\, d(m_1 \otimes m_2) = (m_1 \otimes m_2)(A)$,

– $\int_{E_1} F_1(x_1)\, dm_1(x_1) = \int_{E_1} m_2(A_{x_1})\, dm_1(x_1) \overset{déf}{=} (m_1 \otimes m_2)(A)$

d'où la première égalité. Ensuite, on remarque que l'application $A \mapsto \int_{E_2} F_2(x_2)\, dm_2(x_2)$ (avec $F_2(x_2) = \int_{E_1} \mathrm{1\!I_A(x_1, x_2)\, dm_1(x_1)}$) définit une mesure positive sur $\mathcal{T}_1 \otimes \mathcal{T}_2$ qui prend la valeur $m_1(A_1)m_2(A_2)$ si $A = A_1 \times A_2$. C'est $m_1 \otimes m_2$ (comme dans la démonstration de la prop. 6.2.1) d'où la deuxième égalité. Le cas général se traite par le processus habituel. ■

Corollaire 6.2.1 *Avec les mêmes hypothèses et notations on a :*

$$\begin{aligned} f \in L^1(E_1 \times E_2, \mathcal{T}_1 \otimes \mathcal{T}_2, m_1 \otimes m_2) \quad &\Longleftrightarrow \quad \int_{E_1} \left(\int_{E_2} |f(x_1, x_2)|\, dm_2(x_2) \right) dm_1(x_1) < \infty \\ &\Longleftrightarrow \quad \int_{E_2} \left(\int_{E_1} |f(x_1, x_2)|\, dm_1(x_1) \right) dm_2(x_2) < \infty \end{aligned}$$

Corollaire 6.2.2 *Sous les mêmes hypothèses les conditions suivantes sont équivalentes :*
(i) f négligeable sur $(E_1 \times E_2, \mathcal{T}_1 \otimes \mathcal{T}_2, m_1 \otimes m_2)$,
(ii) $f(x_1, \cdot)$ m_2-négligeable pour m_1-presque tout $x_1 \in E_1$,
(iii) $f(\cdot, x_2)$ m_1-négligeable pour m_2-presque tout $x_2 \in E_2$.
En particulier $A \in \mathcal{T}_1 \otimes \mathcal{T}_2$ est négligeable si et seulement si A_{x_1} est m_2-négligeable pour m_1-presque tout x_1.

Théorème 6.2.2 (Fubini)
Soient $(E_1, \mathcal{T}_1, m_1)$ et $(E_2, \mathcal{T}_2, m_2)$ deux espaces mesurés σ-finis. Soit $f \in L^1(E_1 \times E_2, \mathcal{T}_1 \otimes \mathcal{T}_2, m_1 \otimes m_2)$ alors :

1. *Pour m_1-presque tout x_1 la fonction $x_2 \mapsto f(x_1, x_2)$ est intégrable sur $(E_2, \mathcal{T}_2, m_2)$ et pour m_2-presque tout x_2 la fonction $x_1 \mapsto f(x_1, x_2)$ est intégrable sur $(E_1, \mathcal{T}_1, m_1)$.*
2. *La fonction $x_1 \mapsto \int_{E_2} f(x_1, x_2)\, dm_2(x_2)$, définie m_1- p.p. , est intégrable sur $(E_1, \mathcal{T}_1, m_1)$ et la fonction $x_2 \mapsto \int_{E_1} f(x_1, x_2)\, dm_1(x_1)$ définie m_1- p.p. , est intégrable sur $(E_2, \mathcal{T}_2, m_2)$*
3. *On a :*

$$\begin{aligned} \int_{E_1 \times E_2} f\, d(m_1 \otimes m_2) &= \int_{E_1} \left(\int_{E_2} f(x_1, x_2)\, dm_2(x_2) \right) dm_1(x_1) \\ &= \int_{E_2} \left(\int_{E_1} f(x_1, x_2)\, dm_1(x_1) \right) dm_2(x_2) \end{aligned}$$

Preuve : si $f \in L^1(m_1 \otimes m_2)$ on a aussi, d'après le corollaire 6.2.1, $\int_{E_1} (\int_{E_2} |f|\, dm_2)\, dm_1 < \infty$, ce qui entraîne que $\int_{E_2} |f|(x_1, x_2)\, dm_2(x_2) < \infty$ m_1 p.p. . Autrement dit la fonction $x_2 \mapsto f(x_1, x_2)$ est intégrable sur $(E_2, \mathcal{T}_2, m_2)$ pour m_1-presque tout x_1. De plus on a, pour m_1-presque tout x_1 :

$$\left| \int_{E_2} f(x_1, x_2)\, dm_2(x_2) \right| \leq \int_{E_2} |f|(x_1, x_2)\, dm_2(x_2)$$

et cette dernière intégrale, comme fonction de x_1, est intégrable sur $(E_1, \mathcal{T}_1, m_1)$.
La fonction $x_1 \mapsto \int_{E_2} f(x_1, x_2)\, dm_2(x_2)$ est donc intégrable sur $(E_1, \mathcal{T}_1, m_1)$, de même pour la fonction $x_2 \mapsto \int_{E_1} f(x_1, x_2)\, dm_1(x_1)$ sur $(E_2, \mathcal{T}_2, m_2)$. Il résulte de ceci que les trois intégrales qui figurent dans l'enoncé ont un sens, et il reste juste à remarquer que les égalités sont vraies pour f^+ et f^- d'après le théorème de Fubini-Tonelli. ■

Sur $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(N)$ la mesure du comptage est σ-finie : le théorème de Fubini permet de retrouver simplement un résultat sur les "séries doubles" :

Corollaire 6.2.3 *Soit $(a_{n,p})_{n,p \in \mathbb{N}}$ une "suite double" de $\mathbb{K}$. On a*

$$\sum_n \left(\sum_p \mid a_{n,p} \mid \right) = \sum_p \left(\sum_n \mid a_{n,p} \mid \right)$$

dans $\overline{\mathbb{R}}_+$. Si ces quantités sont finies on a alors (dans $\mathbb{K}$) :

$$\sum_n \left(\sum_p a_{n,p} \right) = \sum_p \left(\sum_n a_{n,p} \right)$$

Cette valeur commune est notée $\sum_{(n,p) \in \mathbb{N}^2} a_{n,p}$.

Preuve : il suffit d'appliquer les théorèmes de Fubini-Tonelli et Fubini à la mesure produit $\mu = m \otimes m$ où m est la mesure du comptage sur $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(N))$. On peut remarquer que cette mesure μ n'est autre que la mesure du comptage sur $(\mathbb{N}^2, \mathcal{P}(\mathbb{N}^2))$ et que $\sum_{(n,p) \in \mathbb{N}^2} a_{n,p} = \int_{\mathbb{N}^2} a_{n,p}\, d\mu$ (lorsque cette somme est définie.

Remarque 6.2.1 Pour terminer ce paragraphe, signalons une difficulté théorique concernant les espaces complets : un produits d'espaces mesurés complets n'est pas en général lui même complet. C'est le cas en particulier pour le produit de d exemplaires de l'espace $(\mathbb{R}, \mathcal{L}(\mathbb{R}), \lambda)$.

6.3 Changement de variable dans $\mathbb{R}^n$.

Notations : dans les intégrales, avec $x = (x_1, \cdots, x_n)$ comme variable d'intégration, la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$ est figurée indifféremment par $d\lambda$ (s'il n'y a pas ambiguité), $d\lambda(x)$, dx, $dx_1 \otimes \cdots \otimes dx_n$, ou plus simplement $dx_1 \cdots dx_n$. Ces deux dernières notations s'imposent lorsqu'on souhaite utiliser le théorème de Fubini.

Rappel : Soient U et V deux ouverts de $\mathbb{R}^n$. Une application $\varphi : U \longrightarrow V$ est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme si φ est bijective, de classe $\mathcal{C}^1$ sur U et si φ^{-1} est de classe $\mathcal{C}^1$ sur V.
On aura en pratique à appliquer le résultat suivant (voir cours de calcul différentiel) :

Proposition 6.3.1 *Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Une application $\varphi : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de U sur son image $V = \varphi(U)$ si et seulement si elle vérifie :*

(i) φ est injective,

(ii) φ est de classe $\mathcal{C}^1$ (les dérivées partielles de φ existent et sont continues sur U),

(iii) En tout point $u \in U$ le déterminant de la matrice Jacobienne de φ est non nul.

Le théorème suivant se montre par localisation et récurrence sur la dimension :

Théorème 6.3.1 *Soient U et V deux ouverts de $\mathbb{R}^n$, φ un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de U sur V et $J(\varphi)$ le déterminant de la matrice Jacobienne de φ. Pour toute fonction borélienne positive f sur V (resp. pour $f \in L^1(V)$) on a :*

$$\int_V f(x)\,dx = \int_U f(\varphi(y))\,|J(\varphi)(y)|\,dy \qquad (\text{“on pose } x = \varphi(y)\cdots\text{”})$$

et aussi (en considérant φ^{-1}) :

$$\int_U f\circ\varphi(x)\,dx = \int_V f(u)\,|J(\varphi^{-1})(u)|\,du \qquad (\text{“on pose } \varphi(x) = u\cdots\text{”}).$$

Remarque 6.3.1 Ce résultat s'interprète en termes de mesure image : la mesure image de la mesure de Lebesgue sur U par φ est la mesure de densité $|J(\varphi^{-1})|$ par rapport à la mesure de Lebesgue sur V. En effet, si μ est cette mesure image, on a pour tout $A \in \mathcal{B}(V)$:

$$\mu(A) = \int_V \mathbb{I}_{\mathrm{A}}\,\mathrm{d}\mu = \lambda(\varphi^{-1}(\mathrm{A})) = \int_{\mathrm{U}} \mathbb{I}_{\varphi^{-1}(\mathrm{A})}\,\mathrm{d}\lambda = \int_{\mathrm{U}} (\mathbb{I}_{\mathrm{A}}\circ\varphi)\,\mathrm{d}\lambda = \int_{\mathrm{V}} \mathbb{I}_{\mathrm{A}} \mid \mathrm{J}(\varphi^{-1}) \mid \mathrm{d}\lambda$$

d'où $\mu = \mid J(\varphi^{-1}) \mid \lambda$.

Exemple 6.3.1 Si $\varphi(x) = \alpha x + \beta$, où $\alpha \in \mathbb{R}^*$ et $\beta \in \mathbb{R}^n$, la matrice Jacobienne de φ est αI et on a :

$$\int_V f(x)\,dx = \int_U f(\alpha y + \beta)\,|\alpha|^n\,dy.$$

Exemple 6.3.2 (coordonnées polaires) Soit $f(x,y)$ une fonction mesurable positive (resp. intégrable) dans le disque D de $\mathbb{R}^2$ défini par $x^2+y^2 < R^2$; alors la fonction $(r,\theta) \mapsto f(r\cos\theta, r\sin\theta)\cdot r$ est mesurable positive (resp. intégrable) dans le rectangle $]0,R[\times]0,2\pi[$ et on a :

$$\int_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^{2\pi}\int_0^R f(r\cos\theta, r\sin\theta)\cdot r\,dr\,d\theta.$$

(Noter que $\varphi : \left\{\begin{array}{ccc}]0,R[\times]0,2\pi[& \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (r,\theta) & \longmapsto & (x,y) = (r\cos\theta, r\sin\theta) \end{array}\right.$ *est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de l'ouvert* $]0,R[\times]0,2\pi[$ *sur l'ouvert $D \setminus ([0,R[\times\{0\})$)*

Terminons par un résultat sur l'intégration des “fonctions de r”, où $r(x_1,\cdots,x_n) = \sqrt{x_1^2+\cdots+x_n^2}$ $=\| x \|$. La preuve est proposée en exercice.

Proposition 6.3.2 *Soient $F : [0,+\infty] \to \mathbb{R}$ une fonction et $f = F\circ r : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Si F est mesurable positive (resp. si $r \to F(r)r^{n-1}$ est intégrable) alors f est mesurable positive (resp. intégrable) et on a :*

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} F(\| x \|)\,dx = n\,b_n \int_0^{+\infty} F(r) r^{n-1}\,dr$$

où b_n désigne la mesure de la boule unité de $\mathbb{R}^n$.

Corollaire 6.3.1 *Soit α un réel. La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{\| x \|^\alpha}$ est intégrable sur $B(0,1)$ si et seulement si $\alpha < n$ et intégrable sur $B(0,1)^c$ si et seulement si $\alpha > n$.*

6.4 Exercices

Exercice 6.4.1 Soient $(E_i, \mathcal{T}_i),\ i = 1, \cdots, n$ des espaces mesurables et, pour chaque i, f_i une fonction réelle définie sur E_i. On définit la fonction $f_1 \otimes \cdots \otimes f_n$ par :

$$(f_1 \otimes \cdots \otimes f_n)(x_1, \cdots, x_n) = f_1(x_1)...f_n(x_n).$$

1. Montrer que si les $f_i,\ 1 \leq i \leq n$, sont $\mathcal{T}_i$-mesurables, alors $f_1 \otimes \cdots \otimes f_n$ est mesurable sur l'espace produit $\displaystyle\prod_{i=1}^{n} (E_i, \mathcal{T}_i)$.
2. Montrer réciproquement que si la fonction $f_1 \otimes \cdots \otimes f_n$ est $(\displaystyle\bigotimes_{1 \leq i \leq n} \mathcal{T}_i)$-mesurable et non nulle alors les $f_i,\ 1 \leq i \leq n$, sont $\mathcal{T}_i$-mesurables.

Exercice 6.4.2 Soient m_1 et m_2 des probabilités sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ telles que $(m_1 \bigotimes m_2)(\mathbb{R}^2 \setminus D) = 0$, où $D = \{(x, x), x \in \mathbb{R}\}$. Montrer qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $m_1 = m_2 = \delta_a$, où δ_a est la mesure de Dirac en a.

Exercice 6.4.3 Soient λ la mesure de Lebesgue sur $[0, 1]$ et μ la mesure du comptage sur $[0, 1]$ muni de la tribu de toutes ses parties.
On définit la fonction f sur $[0, 1] \times [0, 1]$ par $f(x, y) = 1$ si $x = y$ et $f(x, y) = 0$ si $x \neq y$.

1. Calculer $\displaystyle\int_0^1 (\int_0^1 f(x, y)\, d\mu(y))\, d\lambda(x)$ et $\displaystyle\int_0^1 (\int_0^1 f(x, y)\, d\lambda(x))\, d\mu(y)$.
2. Que constate t-on ? Ce résultat met-il en défaut le théorème de Fubini-Tonelli ?

Exercice 6.4.4 Soit $L^1 = L^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$. Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on pose :

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{(x+1)^2} & \text{si } x > 0 \text{ et } x < y \leq 2x, \\ -\dfrac{1}{(x+1)^2} & \text{si } x > 0 \text{ et } 2x < y \leq 3x, \\ 0 & \text{si } x > 0 \text{ et } y \notin]x, 3x], \\ 0 & \text{si } x \leq 0. \end{cases}$$

1. Montrer que $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est mesurable.
2. Montrer que pour tout $y \in \mathbb{R}$, $f(., y) \in L^1$. On pose $\varphi(y) = \displaystyle\int f(x, y)\, d\lambda(x)$; montrer que $\varphi \in L^1$.
3. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x, .) \in L^1$. On pose $\psi(x) = \displaystyle\int f(x, y)\, d\lambda(y)$; montrer que $\psi \in L^1$.
4. Montrer que $\displaystyle\int \varphi\, d\lambda \neq \int \psi\, d\lambda$.
5. Pourquoi le théorème de Fubini ne s'applique t-il pas ici ?

Exercice 6.4.5 Soit f une fonction continue, positive et intégrable sur $\mathbb{R}^2$ pour la mesure de Lebesgue. Peut-on affirmer que $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} f(x,x)\,dx < \infty$?
(On pourra considérer la fonction définie par $f(x,y) = \varphi(x+y, x-y)$ où $\varphi(x,y) = e^{-(1+x^2)|y|}$)

Exercice 6.4.6 Soit $(E, \mathcal{T}, m)$ un espace mesuré σ-fini, et f une application mesurable positive. On pose $G = \{(\xi, \tau) \in E \times \mathbb{R}_+;\ 0 < \tau < f(\xi)\}$ et $F = \mathbb{1}_{\mathrm{G}}$.

1. Montrer que F est $\mathcal{T} \bigotimes \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$- mesurable.
2. Montrer que : $\displaystyle\int f\,dm = \int_0^{+\infty} m(\{f > t\})\,dt$ *(écrire $f(x) = \displaystyle\int_0^{f(x)} dt \ldots$)*
   Que représente cette intégrale, pour G ?
3. Montrer que l'on a aussi $\displaystyle\int f\,dm = \int_0^{+\infty} m(\{f \geq t\})\,dt$.
4. Que dire du graphe de f dans l'espace produit $E \times \mathbb{R}_+$?

Exercice 6.4.7 Soient a un réel strictement positif et $f : [0,a] \to \mathbb{R}$ une fonction intégrable pour la mesure de Lebesgue λ sur $[0,a]$.

1. Montrer que l'on définit bien une fonction en posant, pour $x \in]0,a]$: $g(x) = \displaystyle\int_{[x,a]} \frac{f(t)}{t}\,d\lambda(t)$.
2. Montrer que g est intégrable sur $]0,a]$ et que l'on a :

$$\int_{]0,a]} g(x)\,d\lambda(x) = \int_{[0,a]} f(x)\,d\lambda(x).$$

Exercice 6.4.8 Calculer, à l'aide d'un changement de variable, l'intégrale $I = \displaystyle\int_{\mathbb{R}^2} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}\,dx\,dy$. En déduire la valeur de l'intégrale $J = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx$.

Exercice 6.4.9 (Intégration par parties dans L^1) Soient $[a,b]$ un intervalle de $\overline{\mathbb{R}}$, f et g des fonctions de $L^1(]a,b[, \mathcal{B}(]a,b[), m)$ où m est une mesure σ-finie et diffuse.
On pose, pour $x \in]a,b]$, $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\,dm(t) \overset{\text{déf}}{=} \int_{]a,x[} f(t)\,dm(t)$ et $G(x) = \displaystyle\int_a^x g(t)\,dm(t)$. Montrer, en utilisant le théorème de Fubini, que l'on a :

$$\int_a^b F(x)\,g(x)\,dm(x) = F(b)\,G(b) - \int_a^b f(x)\,G(x)\,dm(x).$$

(on pourra poser $h(x,y) = g(x)\,f(y)\,\mathbb{1}_{\{y<x\}}$)

Exercice 6.4.10
Soit $\Delta =]0,1[\times]0,1[\times]-\pi,\pi[$ et soit $\varphi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ l'application définie par :

$$\varphi(u,v,w) = (u, uv\cos w, v\sin w).$$

1. Montrer que φ est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de Δ sur son image $\varphi(\Delta)$.
2. Calculer le volume de $\varphi(\Delta)$ (i.e. $\lambda(\varphi(\Delta))$).

Exercice 6.4.11
Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une application mesurable.

1. On suppose dans cette question que f est positive. Montrer que :

$$\int_{\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_+} f(x-y)\, e^{-(x+y)}\, dx\, dy = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} f(v)\, e^{-|v|}\, dv. \tag{6.1}$$

2. Montrer que (6.1) est encore vrai si $f \in L^1$.

Exercice 6.4.12

Pour $n \geq 3$ on note B_n la boule ouverte unité de $\mathbb{R}^n$, S_{n-1} la sphère unité de $\mathbb{R}^n$, λ la mesure de Lebesgue sur $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$ et on pose $b_n = \lambda(B_n)$.
Soit Ω l'ouvert défini par :

$$\Omega = \{(r, \varphi_1, \cdots, \varphi_{n-2}, \theta);\ r > 0,\ -\frac{\pi}{2} < \varphi_1, \cdots, \varphi_{n-2} < \frac{\pi}{2},\ 0 < \theta < 2\pi\}.$$

On définit une application $\Phi\ :\ \Omega \to \mathbb{R}^n$ par :

$$\begin{cases} x_1 = r\cos\varphi_1 \cdots \cos\varphi_{n-3}\cos\varphi_{n-2}\cos\theta \\ x_2 = r\cos\varphi_1 \cdots \cos\varphi_{n-3}\cos\varphi_{n-2}\sin\theta \\ x_3 = r\cos\varphi_1 \cdots \cos\varphi_{n-3}\sin\varphi_{n-2} \\ \cdots\cdots \\ x_{n-2} = r\cos\varphi_1\cos\varphi_2\sin\varphi_3 \\ x_{n-1} = r\cos\varphi_1\sin\varphi_2 \\ x_n = r\sin\varphi_1 \end{cases}$$

et on pose $\Delta_n(r, \varphi_1, \cdots, \varphi_{n-2}, \theta) = J(\Phi)$ (déterminant jacobien de Φ).

1. Montrer que $\Delta_n(r, \varphi_1, \cdots, \varphi_{n-2}, \theta) = (-1)^n\, r\, (\cos\varphi_1)^{n-2}\Delta_{n-1}(r, \varphi_2, \cdots, \varphi_{n-2}, \theta)$. En déduire que $|J(\Phi)| = r^{n-1}H(\varphi_1, \cdots, \varphi_{n-2}, \theta)$ où l'on a posé :

$$H(\varphi_1, \cdots, \varphi_{n-2}, \theta) = \prod_{i=1}^{n-2}(\cos\varphi_i)^{n-i-1}.$$

2. Montrer que Φ est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de Ω sur le complémentaire d'un ensemble négligeable que l'on précisera. Écrire la formule de changement de variable associée.
3. Soit u l'application de $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ dans S_{n-1} définie par $u(x) = \dfrac{x}{\| x \|}$. Pour $A \in \mathcal{B}(S_{n-1})$ on pose $\sigma_{n-1}(A) = n\, \lambda(u^{-1}(A) \cap B_n)$.
   (a) Montrer que σ_{n-1} est une mesure sur $\mathcal{B}(S_{n-1})$ (qu'on notera σ dans la suite pour simplifier).
   (b) Montrer que pour toute fonction mesurable positive $g\ :\ S_{n-1} \to \mathbb{R}$ on a :

   $$\int_{S_{n-1}} g(s)\, d\sigma(s) = n\int_{B_n} (g \circ u)(x)\ d\lambda(x)$$

   et en déduire que :

   $$\int_{S_{n-1}} g(s)\, d\sigma(s) = \int_{\Omega_1} (g \circ \Phi)(1, \varphi_1, \cdots, \varphi_{n-2}, \theta)H(\varphi_1, \cdots, \varphi_{n-2}, \theta)\, d\varphi_1 \cdots d\varphi_{n-2}\, d\theta$$

   où $\Omega_1 = \{(\varphi_1, \cdots, \varphi_{n-2}, \theta);\ -\frac{\pi}{2} < \varphi_1, \cdots, \varphi_{n-2} < \frac{\pi}{2},\ 0 < \theta < 2\pi\}$.

(c) Montrer que pour toute fonction f borélienne positive sur $\mathbb{R}^n$ on a :

$$\int_{\mathbb{R}^n} f\,d\lambda = \int_0^{+\infty} \int_{S_{n-1}} f(rs)\,r^{n-1}\,dr\,d\sigma(s).$$

On examinera pour commencer le cas $f = \mathbb{1}_{\mathrm{D}}$ *où* $D = \{x = r\,s\,;\, a < r < b,\, s \in A\}$ *avec* $a \geq 0$ *et* $A \in \mathcal{B}(S_{n-1})$ *et on utilisera l'application* $\varphi :]0, +\infty[\times S_{n-1} \longrightarrow \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ *définie par* $\varphi(r, s) = rs$

(d) Montrer que $\sigma(S_{n-1}) = n\,b_n$.

(e) Établir la prop. 3.2 du cours : si F est mesurable positive sur $[0, +\infty[$ alors

$$\int_{\mathbb{R}^n} F(\| x \|)\,d\lambda(x) = n\,b_n \int_0^{+\infty} F(r)r^{n-1}\,dr.$$

En déduire que la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{\| x \|^\alpha}$ est intégrable sur $B(0,1)$ si et seulement si $\alpha < n$ et intégrable sur $B(0,1)^c$ si et seulement si $\alpha > n$.

Exercice 6.4.13 On reprend les notations de l'exercice précédent.

1. Montrer que $b_n = b_{n-1}I_{n-1}$ où, pour $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \displaystyle\int_{-1}^{1} (1-x^2)^{n/2}\,dx$.
2. Montrer que pour $n \geq 2$ on a $(n+1)I_n = n\,I_{n-2}$.
3. Déduire de ce qui précède que pour $k \in \mathbb{N}$:

$$b_{2k} = \frac{\pi^k}{k!} \qquad b_{2k+1} = \frac{2^{k+1}\pi^k}{1 \cdot 3 \cdots (2k+1)}.$$

Exercice 6.4.14 Soient $(E, \mathcal{T}, \mu)$ et $(F, \mathcal{S}, \nu)$ deux espaces mesurés σ-finis et $K \in L^2(\mu \otimes \nu)$ de norme $\| K \|_2$.

1. Montrer que pour tout $f \in L^2(\nu)$, l'intégrale $\displaystyle\int K(x,y)\,f(y)\,d\nu(y)$ est finie μ p.p. et définit un élément de $L^2(\mu)$ noté Kf.
2. Montrer que l'application $\Phi :\ L^2(\nu) \to L^2(\mu)$ définie par $\Phi(f) = Kf$ est un opérateur linéaire de norme $\| \Phi \| \leq \| K \|_2$.
3. Soient (e_i) et (f_j) des bases hilbertiennes de $L^2(\mu)$ et $L^2(\nu)$. On pose :

$$a_{ij} = \int K(x,y)\,e_i(x)\,f_j(y)\,d\mu(x)\,d\nu(y).$$

   Montrer que $\| K \|_2^2 = \displaystyle\sum_{i,j} a_{ij}^2$, et que la famille $(e_i \otimes f_j)$ est une base hilbertienne de $L^2(\mu \otimes \nu)$.
4. On suppose maintenant que $(E, \mathcal{T}, \mu) = (F, \mathcal{S}, \nu)$ et on considère les itérés Φ, $\Phi^2, \cdots, \Phi^n = \Phi \circ \Phi^{n-1}$. Montrer que $\Phi^n(f) = \displaystyle\int K_n(.,y)\,f(y)\,d\mu(y)$ pour une fonction K_n que l'on déterminera par une relation de récurrence.

Chapitre 7

Convolution

7.1 Convolution dans $\mathcal{M}_+(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$

Proposition 7.1.1 *Soient f et g des fonctions mesurables positives sur $\mathbb{R}^d$.*

1. *Pour tout $x \in \mathbb{R}^d$ la fonction $y \to f(x-y)\, g(y)$ est mesurable positive.*
2. *La fonction $f \star g \,:\, x \longrightarrow \displaystyle\int f(x-y)\, g(y)\, dy$ est mesurable positive. On l'appelle fonction convolée des fonctions f et g.*

Preuve : le premier point est immédiat, le second résulte du théorème de Fubini-Tonelli appliqué à la fonction définie sur $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ par $F(x,y) = f(x-y)\, g(y)$. ■

Définition 7.1.1 L'application : $\left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_+ \times \mathcal{M}_+ & \longrightarrow & \mathcal{M}_+ \\ (f,g) & \longmapsto & f \star g \end{array} \right.$ s'appelle produit de convolution (dans $\mathcal{M}_+$).

Proposition 7.1.2 *Le produit de convolution dans $\mathcal{M}_+$ vérifie :*

1. $f \star g = g \star f$,
2. $f \star (g \star h) = (f \star g) \star h$,
3. $\displaystyle\int (f \star g)\, d\lambda = \left(\int f\, d\lambda\right) \cdot \left(\int g\, d\lambda\right)$.
4. $\{f \star g \neq 0\} \subset \{f \neq 0\} + \{g \neq 0\}$

Preuve : pour les trois premiers points les seuls outils sont le théorème de Fubini-Tonelli et le changement de variable affine. Il n'y a aucune difficulté. Enfin, si $x \notin \{f \neq 0\} + \{g \neq 0\}$ alors pour tout $y \in \mathbb{R}^d$ soit $g(y) = 0$ soit, dans le cas contraire, $x - y \notin \{f \neq 0\}$ i.e. $f(x-y) = 0$. Dans les deux cas on a $F(x,y) = 0$ et donc $(f \star g)(x) = 0$. ■

7.2 Convolution dans $L^1_{\mathbb{K}}(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \lambda)$.

Proposition 7.2.1 *Soient f et g des fonctions intégrables sur $\mathbb{R}^d$.*

1. *Pour presque tout $x \in \mathbb{R}^d$ la fonction $y \to f(x-y)\, g(y)$ est intégrable.*

2. *La fonction définie presque partout par* $(f \star g)(x) = \int f(x-y)\,g(y)\,dy$ *est intégrable. Sa classe dans* L^1 *ne dépend que des classes de* f *et* g*.*

Preuve : le point 3. de la proposition 7.1.2 appliquée à $|\ f\ |$ et $|\ g\ |$ donne, par application du théorème de Fubini-Tonelli, l'intégrabilité de $F\ :\ (x,y) \to f(x-y)\,g(y)$. Le théorème de Fubini donne alors l'intégrabilité de la fonction $y \to f(x-y)\,g(y)$ pour presque tout x et celle de $f \star g$. Il reste à vérifier que si les fonctions intégrables f, f_1, g, g_1 sont telles que $f = f_1$ p.p. et $g = g_1$ p.p. alors $f \star g = f_1 \star g_1$ p.p. , ce qui ne présente pas de difficulté. ∎

Définition 7.2.1 Soient f et g dans L^1. On note $f \star g$ l'élément de L^1 défini via des représentants par $(f \star g)(x) = \int f(x-y)\,g(y)\,dy$. On l'appelle produit de convolution de f et g.

Proposition 7.2.2 *Le produit de convolution dans* L^1 *est commutatif, associatif, distributif par rapport à l'addition. De plus*

$$\| f \star g \|_1 \leq \| f \|_1 \| g \|_1 \ .$$

(L^1 *muni de la convolution est une* $\mathbb{K}$*- algèbre de Banach commutative).*
Enfin :

$$\forall f,\, g \in L^1 \qquad \int (f \star g)\,d\lambda = \left(\int f\,d\lambda\right) \cdot \left(\int g\,d\lambda\right).$$

Preuve : pas de difficulté (Fubini, changement de variable affine...).

Remarque 7.2.1

1. L'algèbre $(L^1, +, \cdot, \star)$ n'a pas d'unité, i.e. d'élément neutre pour la loi de composition interne $\star$ (voir exercices).
2. On peut définir $(f \star g)(x)$ dès que f et g sont mesurables et que $(|\ f\ | \star |\ g\ |)(x) < \infty$ p.p. , en effet la fonction $y \mapsto f(x-y)\,g(y)$ est alors intégrable pour presque tout x.

Définition 7.2.2 Soit f une fonction mesurable. On appelle support essentiel de f le fermé $\text{supp}(f) = \bigcap_{F \in S(f)} F$ où $S(f) = \{F \text{ fermé de } \mathbb{R}^d\,;\ f = 0 \ \text{ p.p. sur } F^c\}$

Remarque 7.2.2

1. On vérifie immédiatement que $\text{supp}(f)$ ne dépend que de la classe de f pour la relation d'égalité p.p.
2. En utilisant que $\mathbb{R}^d$ possède une base dénombrable d'ouverts on montre que $f = 0$ p.p. sur $\text{supp}(f)^c$. On peut donc énoncer que $\text{supp}(f)$ est le plus petit fermé F tel que $f = 0$ p.p. sur F^c.
3. Si f est continue, on retrouve la notion usuelle de support, c'est à dire $\text{supp}(f) = \overline{\{f \neq 0\}}$.

Définition 7.2.3 Soit $f \in L^1$. On appelle support de f et on note $\text{supp}(f)$ le support essentiel de n'importe quel représentant de f.

Proposition 7.2.3 *Soient* f *et* g *dans* L^1*. Si* f *et* g *sont à supports compacts, alors* $f \star g$ *est à support compact.*

Preuve : en exercice.

7.3 Régularisation par convolution, applications.

Précisons quelques notations :

1. $C_c(\Omega, \mathbb{R})$ (abrégé en $\mathcal{C}_c$) désigne l'espace des fonctions continues $\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ à support compact.
2. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{C}_c^k(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ (abrégé en $\mathcal{C}_c^k$) désigne l'espace des fonctions $\mathbb{R}^d \to \mathbb{K}$ de classe $\mathcal{C}^k$ à support compact.
3. $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ (abrégé en $\mathcal{C}_c^\infty$), ou $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$, désigne l'espace des fonctions $\mathbb{R}^d \to \mathbb{K}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ à support compact.
4. Pour $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_d) \in \mathbb{N}^d$ ("multi-indice") et $x = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^d$ on pose $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_d$ (longueur du multi-indice) et $D^\alpha = \dfrac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_d^{\alpha_d}}$.

Proposition 7.3.1 *Soient $f \in L^1_{loc}$ et $g \in \mathcal{C}_c^k$, alors $f \star g$ est définie partout, de classe $\mathcal{C}^k$, et pour tout multi-indice $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_d) \in \mathbb{N}^d$ de longueur $|\alpha| \leq k$ on a :*

$$D^\alpha(f \star g) = f \star D^\alpha g.$$

Remarque 7.3.1 Il faut entendre par là que $f \star g$, élément de L^1, admet un représentant qui vérifie les propriétés énoncées.

Preuve : soit K le support (compact) de g. Si on pose $K' = x - K$ (c'est un compact) on vérifie que $f \star g = (f \mathbb{1}_{\mathrm{K}'}) \star \mathrm{g}$: on se ramène ainsi au cas où $f \in L^1$. Si $k = 0$ on a juste à prouver la continuité de $f \star g$, or pour presque tout $y \in \mathbb{R}^d$ la fonction $x \to f(y)\, g(x-y)$ est continue et on a $|f(y)\, g(x-y)| \leq M \mid f(y) \mid \in L^1$ avec $M = \parallel g \parallel_\infty$. On conclut grâce au théorème de continuité d'une intégrale dépendant d'un paramètre. Pour la dérivabilité, on se ramène par récurrence sur k au cas de fonctions d'une variable réelle (d=1) : il s'agit alors d'établir la dérivabilité de $f \star g$ et la formule $(f \star g)' = f \star g'$ lorsque $f \in L^1$ et $g \in \mathcal{C}_c^1$. On dispose déjà de l'intégrabilité, pour tout $x \in \mathbb{R}$, de la fonction $y \to F(x, y) \overset{déf}{=} f(y)\, g(x-y)$, d'autre part $\dfrac{\partial F}{\partial x}(x, y) = f(y) g'(x-y)$ existe pour presque tout y et vérifie $\left| \dfrac{\partial F}{\partial x}(x, y) \right| \leq M \mid f \mid \in L^1$ d'où le résultat par application du théorème de dérivation d'une intégrale dépendant d'un paramètre. ∎

Définition 7.3.1 On appelle noyau régularisant toute fonction $\rho \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ vérifiant :

$$\rho \geq 0, \qquad \mathrm{supp}(\rho) \subset \overline{B}(0, 1), \qquad \int_{\mathbb{R}^d} \rho(x)\, dx = 1.$$

Un tel noyau existe : considérons par exemple la fonction $\varphi = \exp(\dfrac{-1}{1 - \| \, . \, \|^2}) \mathbb{1}_{\overline{\mathrm{B}}}$, alors $\rho = \dfrac{\varphi}{\parallel \varphi \parallel_1}$ vérifie les conditions ci-dessus.

Soit ρ un noyau régularisant. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}^d$ on pose $\rho_n(x) = n^d \rho(nx)$, définissant ainsi une fonction $\rho_n \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ telle que $\mathrm{supp}(\rho_n) \subset \overline{B}(0, \dfrac{1}{n})$ et $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^d} \rho_n(x)\, dx = 1$. On dit que la suite $(\rho_n)_{n>0}$ est une suite régularisante.

En posant, pour $\varepsilon > 0$, $\rho_\varepsilon = \dfrac{1}{\varepsilon^d} \rho \left(\dfrac{\cdot}{\varepsilon} \right)$, on définit une "famille régularisante" $(\rho_\varepsilon)_{\varepsilon > 0}$.

Proposition 7.3.2 *Soit ρ un noyau régularisant. Pour $f \in L^1$ la suite $(f \star \rho_n)_{n>0} \subset \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ converge dans L^1 vers f. De même : $f \star \rho_\varepsilon \to f$ dans L^1 quand $\varepsilon \to 0$.*

Corollaire 7.3.1 *L'espace des fonctions intégrables de classe $\mathcal{C}^\infty$ est dense dans L^1.*

Pour établir cette proposition on a besoin de résultats préliminaires (importants en eux mêmes et que l'on retiendra) :

Lemme 7.3.1 *L'espace des fonctions étagées mesurables intégrables est dense dans L^1.*

Preuve : soit $f \in L^1$. Via un représentant, et en écrivant $f = f^+ - f^-$, on se ramène au cas où $f \in \mathcal{M}_+ \cap \mathcal{L}^1$. On sait alors que f est limite croissante d'une suite $(f_n)_{n\geq 0}$ de fonctions étagées mesurables positives. Ces fonctions sont intégrables (on a $0 \leq f_n \leq f$) et convergent vers f dans L^1 par application du théorème de convergence monotone. ■

Lemme 7.3.2 *L'espace $C_c(\Omega, \mathbb{R})$ des fonctions continues à support compact est dense dans L^1 (ou encore : toute fonction de L^1 est la limite, au sens de la norme $\| \,.\, \|_1$, d'une suite de fonctions continues à support compact) .*

Preuve : grâce au résultat précédent il suffit de montrer que pour tout borélien A de mesure finie et tout $\varepsilon > 0$ il existe une fonction Φ_ε continue à support compact telle que $\| \mathbb{1}_{\mathrm{A}} - \Phi_\varepsilon \|_1 \leq \varepsilon$. Par régularité de la mesure de Lebesgue il existe un ouvert O et un fermé F tels que $F \subset A \subset O$ et $\lambda(O \setminus F) \leq \varepsilon$. En remarquant que $F = \bigcup_n \uparrow \overline{B}(0,n) \cap F$ et en utilisant la propriété de continuité croissante des mesures on voit que l'on peut supposer que F est un compact K. Or, dans $\mathbb{R}^d$ (et plus généralement dans tout espace localement compact), étant donnés un compact K et un fermé G disjoints (ici $G = O^c$) il existe une fonction continue à valeurs dans $[0,1]$ qui vaut 1 sur K et 0 sur G. Choisissons pour Φ_ε une telle fonction, alors $\mathbb{1}_{\mathrm{A}} - \Phi_\varepsilon$ est à valeurs dans $[0,1]$, nulle sur K et sur O^c ; on a alors $\int | \mathbb{1}_{\mathrm{A}} - \Phi_\varepsilon | \, \mathrm{d}\lambda \leq \lambda(\mathrm{O} \setminus \mathrm{K}) \leq \varepsilon$. ■

Lemme 7.3.3 (continuité en moyenne) *Soit $f \in L^1$, alors : $\lim_{h\to 0} \int |f(x+h) - f(x)| \, dx = 0$. En notant $\tau_k f$ l'application $x \mapsto f(x-k)$, ceci exprime la continuité en zéro de l'application $k \mapsto \tau_k f$ définie sur $\mathbb{R}^d$ à valeurs dans L^1.*

Preuve : supposons d'abord f continue à support compact : f est alors uniformément continue. Si $\mathrm{supp}(f) \subset \overline{B}(0,R)$ on a, pour $\| h \| \leq 1$, $\mathrm{supp}(f(.+h) - f) \subset K = \overline{B}(0, R+1)$. Soit alors $\varepsilon > 0$; il existe un réel $\delta \in]0,1]$ tel que pour tout $h \in \mathbb{R}^d$: $\| h \| \leq \delta \Longrightarrow \forall x \in \mathbb{R}^d \quad | f(x+h) - f(x) | \leq \dfrac{\varepsilon}{\lambda(K)}$. On a ainsi :

$$\| h \| \leq \delta \Longrightarrow \int | f(x+h) - f(x) | \, dx \leq \varepsilon.$$

Dans le cas général on considère une suite $(f_n)_{n\geq 0}$ de fonctions continues à support compact qui converge vers f dans L^1. On a alors, en posant $k = -h$:

$$\| \tau_k f - f \|_1 \leq \| \tau_k f - \tau_k f_n \|_1 + \| \tau_k f_n - f_n \|_1 + \| f_n - f \|_1$$

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe un entier n_0 tel que $\| f_{n_0} - f \|_1 \leq \varepsilon/3$ et aussi (invariance par translation) $\| t_k f_{n_0} - t_k f \|_1 \leq \varepsilon/3$ pour tout $k \in \mathbb{R}^d$. Enfin il existe un réel $\delta > 0$ tel que $\| \tau_k f_{n_0} - f_{n_0} \|_1 \leq \varepsilon/3$ dès que $\| h \| \leq \delta$. Alors on a : $\| h \| \leq \delta \Longrightarrow \| \tau_k f - f \|_1 \leq \varepsilon$. ■

Remarque 7.3.2 On déduit facilement de ce dernier lemme que l'application $h \mapsto \tau_h f$ de $\mathbb{R}^d$ dans L^1 est uniformément continue (exercice).

Preuve de la proposition 7.3.2 : comme ρ_n est d'intégrale égale à un, on a :

$$(f \star \rho_n)(x) - f(x) = \int (f(x-y) - f(x))\, \rho_n(y)\, dy$$

d'où l'on déduit :

$$\| f \star \rho_n - f \|_1 \leq \int \rho_n(y) \left(\int \mid f(x-y) - f(x) \mid \, dx \right) dy.$$

Soient $\varepsilon > 0$ et $\delta > 0$ tel que $\displaystyle\int \mid f(x-y) - f(x) \mid \, dx \leq \varepsilon$ pour $\| y \| \leq \delta$ (lemme de continuité en moyenne). En intégrant séparément sur les ensembles $\{\| y \| \leq \delta\}$ et $\{\| y \| > \delta\}$ on obtient :

$$\begin{aligned} \| f \star \rho_n - f \|_1 &\leq \varepsilon + \int_{\{\|y\| > \delta\}} \rho_n(y) \left(\int \mid f(x-y) - f(x) \mid \, dx \right) dy \\ &\leq \varepsilon + 2 \| f \|_1 \int_{\{\|y\| > \delta\}} \rho_n(y)\, dy \end{aligned}$$

et la dernière intégrale est nulle dès que $n \geq \dfrac{1}{\delta}$. ■

Proposition 7.3.3 *$\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ est dense dans L^1.*

Preuve : soit $f \in C_c(\Omega, \mathbb{R})$ et $(\rho_n)_{n>0}$ une suite régularisante, alors $f \star \rho_n \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ et la suite $(f \star \rho_n)_{n>0}$ converge vers f dans L^1. Donc, dans $(L^1, \| . \|_1)$: $\overline{\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})} \supset C_c(\Omega, \mathbb{R})$, d'où $\overline{\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})} \supset \overline{C_c(\Omega, \mathbb{R})} = L^1$. ■

7.4 Exercices

Exercice 7.4.1 (Théorème de la loi image)
Soient $(E, \mathcal{T}, m)$ un espace mesuré, $(E', \mathcal{T}')$ un espace mesurable et $X : E \to E'$ une application mesurable. On rappelle que l'application $m' : \mathcal{T}' \to \overline{\mathbb{R}_+}$ définie par

$$\forall B \in \mathcal{T}' \qquad m'(B) = m(X \in B) = m(X^{-1}(B))$$

est une mesure sur $\mathcal{T}'$, appelée mesure image de m par X. Soit f une application de E' dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Etablir que :

1. Si f est mesurable positive on a (dans $\overline{\mathbb{R}_+}$) $\displaystyle\int_{E'} f\, dm' = \int_E f \circ X\, dm.$
2. $f \in L^1(m') \iff f \circ X \in L^1(m)$.
3. Si $f \in L^1(m')$ alors on a $\displaystyle\int_{E'} f\, dm' = \int_E f \circ X\, dm.$

Exercice 7.4.2 (Convolution des mesures bornées)
Soient μ et ν deux mesures positives bornées sur $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$. Le produit de convolution de μ et ν, noté $\mu \star \nu$, est la mesure image de $\mu \otimes \nu$ par l'application $S : (x, y) \mapsto x + y$, c'est à dire :

$$\forall A \in B(R^d) \quad (\mu \star \nu)(A) = (\mu \otimes \nu)(\{(x, y) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d ;\ x + y \in A\}).$$

1. Montrer que $\mu \star \nu = \nu \star \mu$.
2. Montrer que $\delta_a \star \delta_b = \delta_{a+b}$.
3. Montrer que pour toute mesure bornée m sur $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ et tout $a \in \mathbb{R}^d$ on a : $\delta_a \star m = m \circ \tau_{-a}$ i.e. $\forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \quad (\delta_a \star m)(A) = m(A-a)$.
   Que dire de δ_0 ?
4. Que peut-on dire du produit de convolution de deux probabilités ?
5. Montrer que pour toute fonction $f \in \mathcal{M}_+(\mathbb{R}^d)$ ou $f \in L^1(\mu \star \nu)$ on a :
$$\begin{aligned} \int f\, d(\mu \star \nu) &= \int \left(\int f(x+y)\, d\nu(y) \right) d\mu(x) \\ &= \int \left(\int f(x+y)\, d\mu(x) \right) d\nu(y) \end{aligned}$$
6. Soient μ et ν des mesures positives bornées de densités respectives f et g par rapport à la mesure de Lebesgue, que dire alors alors $\mu \star \nu$?

Exercice 7.4.3 Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \lambda)$; pour $h \in \mathbb{R}^d$ on note $\tau_h f$ la fonction $f(.-h)$. Montrer que l'application $h \mapsto \tau_h f$ de $\mathbb{R}^d$ dans L^1 est uniformément continue.

Exercice 7.4.4 Montrer que si f et $g \in L^1(\mathbb{R}^d)$ sont à support compact, alors $f * g$ est à support compact.
Calculer $\mathbb{1}_{[a,b]} * \mathbb{1}_{[c,d]}$ *(on pourra supposer par exemple $b-a \leq d-c$)* .

Exercice 7.4.5 On se propose de montrer qu'il n'existe pas d'élément neutre pour la convolution dans $L^1(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \lambda)$.
Supposer l'existence d'un tel élément, noté u, et montrer alors que : $\forall r > 0 \quad \int e^{-r\|y\|^2} u(y)\, dy = 1$.
Que se passe t-il quand $r \to +\infty$? Conclure.

Exercice 7.4.6 Approximations de l'unité.
Il s'agit de définir des familles de fonctions intégrables qui se comportent asymptotiquement comme un élément neutre pour la convolution.
Une famille $(\varphi_t)_{t \in \mathbb{R}_+} \subset L^1(\mathbb{R}^d)$ est une approximation de l'unité si :

(i) $\forall t > 0 \quad \int \varphi_t\, d\lambda = 1$,

(ii) $\sup\limits_{t>0} \int |\, \varphi_t \,|\, d\lambda < +\infty$,

(iii) $\forall \varepsilon > 0 \quad \lim\limits_{t \to 0} \int_{\{\|x\| \geq \varepsilon\}} |\, \varphi_t \,|\, d\lambda = 0$.

La condition (ii) est redondante s'il s'agit d'une famille de fonctions positives p.p.
On peut aussi utiliser des suites $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset L^1(\mathbb{R}^d)$: remplacer alors "$t \to 0$" par "$n \to +\infty$".

1. **Exemples** (à vérifier) :
   – $\varphi_t(x) = \dfrac{1}{2t} e^{-\frac{|x|}{t}}$ (noyau de Laplace sur $\mathbb{R}$).
   – $\varphi_t(x) = \dfrac{t}{\pi\,(t^2 + x^2)}$ (noyau de Cauchy sur $\mathbb{R}$).
   – $\varphi_t(x) = \dfrac{1}{2t} \mathbb{1}_{\{|x| \leq t\}}$ (sur $\mathbb{R}$).

- $\varphi_t(x) = \dfrac{1}{(t\sqrt{2\pi})^d} e^{-\frac{\|x\|^2}{2t^2}}$ (noyau de Gauss sur $\mathbb{R}^d$).
- $\varphi_t(x) = \dfrac{1}{t^d}\,\varphi(\dfrac{x}{t})$ avec $\varphi \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^d)$ et $\displaystyle\int \varphi\, d\lambda = 1$.

2. Montrer que pour tout $f \in L^1$: $\lim\limits_{t\to 0} f \star \varphi_t = f$ dans L^1.

Chapitre 8

Transformée de Fourier

On considère dans toute la suite des fonctions définies sur $\mathbb{R}^d$ à valeurs complexes et L^1 est mis pour $L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \lambda)$.

8.1 Transformée de Fourier dans L^1.

Lemme 8.1.1 *Pour $f \in L^1$ et $t = (t_1, \cdots, t_d) \in \mathbb{R}^d$ la fonction $x \mapsto e^{-2i\pi t\cdot x} f(x)$ est intégrable sur $\mathbb{R}^d$.*

Preuve : la fonction $x \mapsto e^{-2i\pi t\cdot x}$ est continue donc borélienne, de plus $|e^{-2i\pi t\cdot x} f(x)| = |f(x)|$ d'où l'intégrabilité. ■

Définition 8.1.1 Soit $f \in L^1$; la transformée de Fourier de f est la fonction complexe $\hat{f}$ définie sur $\mathbb{R}^d$ par :

$$\hat{f}(t) = \int f(x) e^{-2i\pi t\cdot x}\, dx \tag{8.1}$$

Remarque 8.1.1 Il existe d'autres transformées de Fourier, selon les utilisateurs. Par exemple :

$$\hat{f}(t) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int f(x) e^{-it\cdot x}\, dx \tag{8.2}$$

ou encore, en probabilités :

$$\hat{f}(t) = \int f(x) e^{it\cdot x}\, dx. \tag{8.3}$$

Pour l'essentiel les propriétés sont les mêmes, éventuellement à des constantes mutiplicatives près. Deux exemples (en supposant vérifiées les hypothèses convenables) :
- avec (8.1) et (8.3) : $\widehat{f \star g} = \hat{f}\hat{g}$,
  avec (8.2) : $\widehat{f \star g} = (2\pi)^{d/2} \hat{f}\hat{g}$.
- avec (8.1) $(d = 1)$: $\widehat{f'}(t) = 2\pi i t \hat{f}(t)$,
  avec (8.2) : $\widehat{f'}(t) = it\hat{f}(t)$,
  avec (8.3) : $\widehat{f'}(t) = -it\hat{f}(t)$.

Proposition 8.1.1

1. *$\forall f \in L^1 \quad \hat{f} \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^d, \mathbb{C}) \overset{déf}{=} \{\varphi \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^d, \mathbb{C}); \lim_{\|t\| \to \infty} \varphi(t) = 0\}$: la transformée de Fourier d'une fonction intégrable est une fonction continue de limite nulle à l'infini.*

2. L'application $\mathcal{F}\ :\ \begin{cases} (L^1, \|\,.\,\|_1) \to (\mathcal{C}_0, \|\,.\,\|_\infty) \\ f \mapsto \hat{f} \end{cases}$ *est linéaire continue.*

Preuve : la continuité est une simple application du théorème de continuité d'une intégrale dépendant d'un paramètre. Pour la limite nulle à l'infini, il suffit de bien comprendre le cas $d = 1$, le cas général étant une simple extension "technique". Les ingrédients sont, dans l'ordre, une astuce, un changement de variable affine et le lemme de continuité en moyenne.
Soit $(t_n)_{n\geq 0}$ une suite de réels de limite $+\infty$ (on les suppose donc non nuls). Comme $-e^{i\,\pi} = 1$ (astuce !) on a :

$$\begin{aligned} \hat{f}(t_n) &= \int f(x)\, e^{-2i\pi t_n\, x}\, dx \\ &= -\int f(x)\, e^{-2i\pi t_n\, (x - \frac{1}{2t_n})}\, dx \end{aligned}$$

Le changement de variable $u = x - \dfrac{1}{2t_n}$ donne alors $\hat{f}(t_n) = -\displaystyle\int f(u + \frac{1}{2t_n})\, e^{-2i\pi t_n\, u}\, du$. En ajoutant membre à membre les deux expressions de $\hat{f}(t_n)$ ainsi obtenues on a :

$$2\,\hat{f}(t_n) = \int \left(f(x) - f(x + \frac{1}{2t_n}) \right)\, e^{-2i\pi t_n\, x}\, dx$$

d'où : $|\ \hat{f}(t_n)\ | \leq \dfrac{1}{2}\ \|\ f - f(\cdot + \dfrac{1}{2t_n})\ \|_1 \to 0$ quand $n \to \infty$ (continuité en moyenne).
La linéarité de $\mathcal{F}$ est immédiate et la continuité résulte de l'inégalité $|\ \hat{f}(t)\ | \leq \|\ f\ \|_1$ de laquelle on déduit $\|\ \hat{f}\ \|_\infty \leq \|\ f\ \|_1$. ■

Corollaire 8.1.1 *Si la suite* $(f_n)_{n\geq 0}$ *converge vers* f *dans* L^1 *alors* $(\widehat{f_n})_{n\geq 0}$ *converge uniformément vers* $\hat{f}$.

Remarque 8.1.2 L^1 n'est pas stable par la transformée de Fourier : examiner par exemple le cas de la fonction $\mathbb{1}_{[-1,1]}$.

Proposition 8.1.2

$$\forall f,\, g \in L^1 \quad \widehat{f \star g} = \hat{f}\hat{g}.$$

Preuve : rappelons que $f \star g \in L^1$ donc $\widehat{f \star g}$ a un sens. Rappelons également que la fonction $(x, y) \mapsto F(x, y) = f(x-y)\, g(y)$ est intégrable sur $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ (utiliser Fubini-Tonelli), il en est donc de même de $(x, y) \mapsto f(x-y)\, g(y)\, e^{-2i\pi t\cdot x}$ ce qui justifie l'utilisation du théorème de Fubini. On a ainsi :

$$\begin{aligned} \widehat{f \star g}(t) &= \int (f \star g)(x)\, e^{-2i\pi t\cdot x}\, dx \\ &= \int \left(\int f(x-y)\, g(y)\, dy \right)\, e^{-2i\pi t\cdot x}\, dx \\ &= \int\int f(x-y)\, e^{-2i\pi t\cdot(x-y)}\, g(y)\, e^{-2i\pi t\cdot y}\, dx\, dy \\ &= \int g(y)\, e^{-2i\pi t\cdot y} \left(\int f(x-y)\, e^{-2i\pi t\cdot(x-y)}\, dx \right)\, dy \\ &= \hat{f}(t)\, \hat{g}(t). \end{aligned}$$

■

Proposition 8.1.3 (théorème d'échange)

$$\forall f,\, g \in L^1 \quad f\,\hat{g},\, \hat{f}\,g \in L^1 \text{ et } \int f\,\hat{g}\,d\lambda = \int \hat{f}\,g\,d\lambda$$

Preuve : les fonctions $\hat{f}$ et $\hat{g}$ étant continues bornées, $f\,\hat{g}$ et $\hat{f}\,g$ sont intégrables. Le théorème de Fubini-Tonelli permet de justifier l'intégrabilité de $(t,x) \mapsto f(t)\,g(x)\,e^{-2i\pi t\cdot x}$ et on a alors :

$$\begin{aligned}\int f(t)\,\hat{g}(t)\,dt &= \int f(t)\left(\int g(x)\,e^{-2i\pi t\cdot x}\,dx\right)\,dt \\ &= \int g(x)\left(\int f(t)\,e^{-2i\pi t\cdot x}\,dt\right)\,dx \\ &= \int g(x)\,\hat{f}(x)\,dx.\end{aligned}$$

■

Théorème 8.1.1 (théorème d'inversion) *Soit* $f \in L^1$ **telle que** $\hat{\mathbf{f}} \in \mathbf{L^1}$ *; alors* $f = \overline{\mathcal{F}}\mathcal{F}f$ *p.p. où* $\overline{\mathcal{F}}$ *est définie sur* L^1 *par* $(\overline{\mathcal{F}}g)(t) = \int g(x)\,e^{2i\pi t\cdot x}\,dx$. *Autrement dit :*

$$f(t) = \int \hat{f}(x)\,e^{2i\pi t\cdot x}\,dx = \hat{\hat{f}}(-t) \text{ p.p. .}$$

Preuve : voir exercices.

Remarque 8.1.3 Un simple changement de variable permet de vérifier que l'on a aussi : $\hat{\hat{f}}(-\cdot) = \widehat{\hat{f}(-\cdot)}$.

Remarque 8.1.4 Le théorème d'inversion entraine en particulier que si $\hat{f}$ est intégrable alors f possède un représentant dans $\mathcal{C}_0$.

Corollaire 8.1.2 *L'application* $\mathcal{F}$: $\begin{cases} L^1 \to \mathcal{C}_0 \\ f \mapsto \hat{f} \end{cases}$ *est injective.*

On verra en exercice que cette application n'est pas surjective.

8.2 Différentiabilité.

On utilise les notations suivantes : si $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_d) \in \mathbb{N}^d$ est un multi-indice et f une fonction $\mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$, $D^\alpha f := \dfrac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_d^{\alpha_d}} f$ et M^α désigne la fonction définie sur $\mathbb{R}^d$ par $M^\alpha(x) = x_1^{\alpha_1} \cdots x_d^{\alpha_d}$.

Proposition 8.2.1 *Soient* $k \in \mathbb{N}^*$ *et* f *une fonction de classe* $\mathcal{C}^k$ *sur* $\mathbb{R}^d$ *telle que :*

$$\forall \alpha \in \mathbb{N}^d \qquad |\alpha| \leq k \Longrightarrow D^\alpha f \in L^1,$$

alors :

$$\forall t \in \mathbb{R}^d \quad \widehat{D^\alpha f}(t) = (2i\pi)^{|\alpha|} t^\alpha \hat{f}(t).$$

Preuve : par récurrence sur $\mid \alpha \mid$ on se ramène au cas où $k = 1$ avec $d = 1$ (en considérant les fonctions partielles). On suppose donc que $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ et f, $f' \in L^1$: il s'agit alors de montrer que $\widehat{f'}(t) = 2i\pi\, t\, \hat{f}(t)$ pour tout réel t. Or :

$$\begin{aligned}
\widehat{f'}(t) - 2i\pi\, t\, \hat{f}(t) &= \int \frac{d}{dx}\left(f(x)\, e^{-2i\pi\, tx}\right) dx \\
&= \lim_{n\to\infty} \int_{-n}^{n} \frac{d}{dx}\left(f(x)\, e^{-2i\pi\, tx}\right) dx \quad \text{(par convergence dominée)} \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(\underbrace{f(n)\, e^{-2i\pi\, nt} - f(-n)\, e^{2i\pi\, nt}}_{u_n} \right)
\end{aligned}$$

et il reste à utiliser le lemme qui suit pour obtenir que $u_n \to 0$ quand $n \to \infty$ et conclure. ∎

Lemme 8.2.1 *Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ intégrable ainsi que sa dérivée f'. Alors* $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$.

Preuve : on remarque que $f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t)\, dt$ de sorte que, par intégrabilité de f', f admet une limite ℓ en $+\infty$. f étant elle même intégrable on a nécessairement $\ell = 0$. Même résultat en $-\infty$.

∎

Proposition 8.2.2 *Soient $k \in \mathbb{N}^*$ et f une fonction telle que $M^\alpha f \in L^1$ pour tout multi-indice α de longueur $|\alpha| \leq k$. Alors $\hat{f} \in \mathcal{C}^k$ et :*

$$\forall \alpha \in \mathbb{N}^d \qquad |\alpha| \leq k \Longrightarrow D^\alpha \hat{f} = (-2i\pi)^{|\alpha|}\widehat{M^\alpha f}.$$

Preuve : simple application du théorème de dérivation sous le signe $\int$. ∎

Remarque 8.2.1

1. Sous les hypothèses de la proposition (8.2.1), la fonction $M^\alpha \hat{f}\ :\ t \mapsto t^\alpha \hat{f}(t)$ est dans $\mathcal{C}_0$ et donc, quand $|t| \to \infty$, $\hat{f}(t)$ tend vers 0 plus vite que $\dfrac{1}{t^\alpha}$. En fait les deux propositions qui précèdent établissent un lien entre la régularité de f (resp. $\hat{f}$) et la décroissance de $\hat{f}$ (resp. f) à l'infini.
2. Avec la transformée "probabiliste" (8.3), remplacer $2i\pi$ par$-i$.

8.3 Transformée de Fourier dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d, \mathbb{C})$.

Les propositions (8.2.1) et (8.2.2) et la remarque qui suit conduisent à s'intéresser aux fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ qui "tendent vers 0 plus vite que l'inverse de toute fonction polynôme", ainsi que leurs dérivées.

Définition 8.3.1 L'espace des fonctions à décroissance rapide est le $\mathbb{C}$-e.v. :

$$\mathcal{S} = \{f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{C})\,;\, \forall \alpha,\, \beta \in \mathbb{N}^d \quad \sup_{x\in\mathbb{R}^d} |x^\alpha D^\beta f(x)| < \infty\}$$

Remarque 8.3.1 $\mathcal{S}$ contient l'espace des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ à support compact.

Proposition 8.3.1

1. $\forall f \in \mathcal{S} \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^d \quad M^\alpha D^\beta f \in \mathcal{S}$.
2. $\forall f, g \in \mathcal{S} \quad fg \in \mathcal{S}$.

Preuve : pas de difficulté.

Théorème 8.3.1 *$\mathcal{S}$ est un sous espace de L^1. L'application $\mathcal{F} : f \mapsto \hat{f}$ est une bijection de $\mathcal{S}$ dans $\mathcal{S}$ de bijection réciproque $\overline{\mathcal{F}}$, i.e. :*

$$\forall f \in \mathcal{S} \; \forall t \in \mathbb{R}^d \quad f(t) = \hat{\hat{f}}(-t).$$

Preuve : soient $f \in \mathcal{S}$ et r un réel strictement supérieur à d. Pour tout indice $i = 1, \cdots, d$, la quantité $| x_i |^r \; f(x)$ est bornée, donc aussi $\| x \|^r \; f(x)$ (par équivalence de la norme euclidienne avec la norme sup $| x_i |$). f étant également bornée, il existe une constante $C \geq 0$ telle que $| f | \leq C$ et $\| x \|^r | f(x) | \leq C$. On obtient donc $| f | \leq \dfrac{C}{1 + \| x \|^r} \in L^1$ d'où $\mathcal{S} \subset L^1$.
Soient α et β des multi-indices. Comme $M^\beta f$, $D^\alpha(M^\beta f) \in \mathcal{S} \subset L^1$ on a (prop. 8.2.2 et 8.2.1) :

$$t^\alpha \, D^\beta \hat{f} = (-2i\pi)^{|\beta|} \, t^\alpha \, \widehat{M^\beta f} = (-2i\pi)^{|\beta|} \, \frac{1}{(2i\pi)^{|\alpha|}} \widehat{D^\alpha M^\beta f} \in \mathcal{C}_0$$

de sorte que $\hat{f} \in \mathcal{S}$. L'injectivité de $\mathcal{F}$ étant connue, il reste à établir la surjectivité. Soit $g \in \mathcal{S}$; comme $\hat{g} \in \mathcal{S} \subset L^1$ on a (théorème d'inversion) $g = \hat{\hat{g}}(-\cdot) = \widehat{\hat{g}(-\cdot)} = \hat{f}$ avec $f = \hat{g}(-\cdot) \in \mathcal{S}$. ∎

Corollaire 8.3.1 *$\forall f, g \in \mathcal{S} \quad \widehat{f \star g} = \hat{f}\hat{g}$ et $\widehat{f\,g} = \hat{f} \star \hat{g}$.*

Preuve : la première égalité a déjà été établie dans L^1. Pour la seconde on peut utiliser l'existence de φ et ψ dans $\mathcal{S}$ tels que $f = \hat{\varphi}$ et $g = \hat{\psi}$. On a alors :

$$\widehat{f\,g} = \widehat{\hat{\varphi}\,\hat{\psi}} = \widehat{\widehat{\varphi \star \psi}} = (\varphi \star \psi)(-\cdot) = (\hat{f}(-\cdot) \star \hat{g}(-\cdot))(-\cdot) = \hat{f} \star \hat{g}$$

la dernière égalité étant de vérification simple. ∎

8.4 Transformée de Fourier dans L^2.

On rappelle que $L^2_{\mathbb{C}}$ est un espace de Hilbert pour le produit scalaire $(f|g) = \displaystyle\int f(t)\overline{g(t)}\,dt$. La transformée de Fourier d'une fonction de L^2 ne peut être définie comme pour une fonction de L^1 car, a priori, la fonction $x \mapsto f(x)\,e^{-2i\pi t \cdot x}$ n'est pas intégrable. On va utiliser une méthode de prolongement par densité en s'appuyant sur les deux résultats suivants.

Proposition 8.4.1 *$\mathcal{S}$ est dense dans L^2 (i.e. $\forall f \in L^2 \; \exists (f_n)_{n \geq 0} \subset \mathcal{S} \quad \lim_{n \to \infty} \| f_n - f \|_2 = 0$).*

Preuve : on a en effet $\mathcal{C}_c^\infty \subset \mathcal{S} \subset L^2$ et (voir chapitre 9) $\mathcal{C}_c^\infty$ est dense dans L^2. ∎

Proposition 8.4.2 *$\forall f, g \in \mathcal{S} \quad (\hat{f}|\hat{g}) = (f|g)$ (en particulier $\| \hat{f} \|_2 = \| f \|_2$).*

Preuve : soient $f,\, g \in \mathcal{S}$, alors $f,\, g,\, \hat{f},\, \hat{g} \in L^2$ et on a :

$$\begin{aligned}
(\hat{f}|\hat{g}) &= \int \hat{f}(t)\,\overline{\hat{g}}(t)\,dt = \int \hat{f}(t)\,\widehat{\overline{g}}(-t)\,dt \\
&= \int \hat{\hat{f}}(t)\,\overline{g}(-t)\,dt \quad \text{(théorème de transfert)} \\
&= \int f(-t)\,\overline{g}(-t)\,dt \quad \text{(théorème d'inversion)} \\
&= \int f(t)\,\overline{g}(t)\,dt = (f|g).
\end{aligned}$$

■

Théorème 8.4.1 (transformée de Fourier dans L^2)
Il existe une application linéaire $\tilde{\mathcal{F}} \;:\; L^2 \to L^2$ telle que :

1. $\forall f \in L^1 \cap L^2 \quad \tilde{\mathcal{F}}(f) = \hat{f}$,
2. *(Plancherel)* $\forall f,\, g \in L^2 \quad (\tilde{\mathcal{F}}(f)|\tilde{\mathcal{F}}(g)) = (f|g)$
   En particulier $\parallel \tilde{\mathcal{F}}(f) \parallel_2 = \parallel f \parallel_2$.
3. *(Inversion)* $\forall f \in L^2 \quad f = \tilde{\mathcal{F}} \circ \tilde{\mathcal{F}}(f)(-\cdot)$ *p.p.* .
4. $\tilde{\mathcal{F}}$ *est bijective (c'est finalement un isomorphisme d'espaces de Hilbert).*

Preuve : l'application linéaire $\mathcal{F}$ est continue de $(\mathcal{S}, \|\,.\,\|_2)$ dans $(L^2, \|\,.\,\|_2)$ car isométrique. $\mathcal{S}$ est dense dans L^2 et l'espace d'arrivée, L^2, est complet. Il existe donc un unique prolongement continu (et de norme un) de $\mathcal{F}$ à L^2, qu'on note (provisoirement) $\tilde{\mathcal{F}}$. La conservation du produit scalaire (Plancherel) est une conséquence simple de la proposition 8.4.2 : introduire deux suites de $\mathcal{S}$ convergeant respectivement vers f et g dans L^2 et utiliser la continuité du produit scalaire.
Si $f \in L^1 \cap L^2$, alors (voir chap. 9) il existe une suite $(f_n)_{n\geq 0} \subset \mathcal{S}$ qui converge vers f dans L^1 **et** dans L^2. Dans ces conditions, $\mathcal{F}(f_n) = \hat{f}_n$ converge vers $\hat{f}$ uniformément (donc partout) et vers $\tilde{\mathcal{F}}(f)$ dans L^2 donc p.p. pour une sous suite (réciproque partielle du th. de convergence dominée dans L^2, chap. 9) : on a donc $\tilde{\mathcal{F}}(f) = \hat{f}$ p.p. , d'où l'égalité ans L^2.
Soit $f \in L^2$ et soit $(f_n)_{n\geq 0} \subset \mathcal{S}$ qui converge vers f dans L^2, alors $\widehat{f_n}$ converge vers $\tilde{\mathcal{F}}(f)$ dans L^2 et $\widehat{\widehat{f_n}}$ converge vers $\tilde{\mathcal{F}} \circ \tilde{\mathcal{F}}(f)$ dans L^2. Il existe une sous suite (faire deux extractions successives) pour laquelle ces convergences ont lieu au sens p.p. , or $\forall t \in \mathbb{R}^d \quad f_n(t) = \widehat{\widehat{f_n}}(-t)$: on en déduit alors que $f = \tilde{\mathcal{F}} \circ \tilde{\mathcal{F}}(f)(-\cdot)$ p.p. .
La surjectivité de $\tilde{\mathcal{F}}$ se déduit de la formule d'inversion comme dans $\mathcal{S}$ et l'injectivité découle de la conservation de la norme. ■

Remarque 8.4.1 Lorsque $f \in L^2$, on écrira désormais $\hat{f}$ ou $\mathcal{F}(f)$ au lieu de $\tilde{\mathcal{F}}(f)$, mais on veillera à ne pas oublier que $\hat{f}$ n'est pas défini de la même façon selon que f est dans L^1 ou dans L^2. Toutefois on montre que si $f \in L^2$ alors sa transformée de Fourier est la limite dans L^2 de celle de $f\,\mathbb{1}_{[-A,A]}$ quand $A \to +\infty$ i.e. $\lim\limits_{A\to+\infty} \parallel \hat{f} - \varphi_A \parallel_2 = 0$ où φ_A est définie par $\varphi_A(t) = \displaystyle\int_{-A}^{A} f(x)\, e^{-2i\pi\, t\cdot x}\, dx$ (voir aussi les exercices pour la formule d'inversion).

8.5 Transformée de Fourier des mesures bornées. Fonctions caractéristiques.

Se reporter au chapitre "Probabilités II" en annexe.

8.6 Exercices

Exercice 8.6.1 Soit $H(t) = e^{-|t|}, t \in \mathbb{R}$. On pose, pour $\lambda > 0$ et tout $x \in \mathbb{R}$:

$$h_\lambda(x) = \int_{\mathbb{R}} H(\lambda t)\, e^{2i\pi tx}\, dt.$$

1. Montrer que $h_\lambda(x) = \dfrac{2\lambda}{\lambda^2 + 4\pi^2 x^2}$ et que la famille $(h_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{R}_+^*}$ est une approximation de l'unité (voir TD précédent). Qu'en déduit-on pour $f * h_\lambda$?
2. Soit $f \in L^1$, montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :
$$(f * h_\lambda)(x) = \int_{\mathbb{R}} H(\lambda t)\, \hat{f}(t)\, e^{2i\pi xt}\, dt.$$
3. Déduire de ce qui précède le théorème d'inversion :
$$\forall f \in L^1 \qquad \hat{f} \in L^1 \Longrightarrow f = \hat{\hat{f}}(-\cdot) \ \text{ p.p.}$$
4. Comment adapter ce qui précède pour établir le théorème d'inversion en dimension $d > 1$?

Exercice 8.6.2 (juin 96)

1. Résoudre dans $L^1(\mathbb{R})$ l'équation $f \star f = f$.
   (On pourra utiliser la transformation de Fourier dans $L^1(\mathbb{R})$)
2. En déduire qu'il n'y a pas d'élément neutre dans $L^1(\mathbb{R})$ pour la convolution.

Exercice 8.6.3 (juin 97) Dans toute la suite, L^1 désigne l'espace $L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}, \mathcal{L}(\mathbb{R}), \lambda)$, $\mathcal{C}_c$ l'espace des fonctions continues $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ à support compact, $\mathcal{C}_0$ l'espace des fonctions continues $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ de limite nulle à l'infini et enfin $\mathcal{S}$ désigne l'espace des fonctions à décroissance rapide sur $\mathbb{R}$.

1. Calculer la transformée de Fourier de la fonction caractéristique d'un intervalle $[-a, a] \quad (a > 0)$.
2. On pose $h = \mathbb{1}_{[-1,1]}$ et, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $g_n = \mathbb{1}_{[-\mathrm{n},\mathrm{n}]}$. Déterminer avec précision la fonction $g_n \star h$ (elle est affine par morceaux) et tracer le graphe de cette fonction pour $n = 1$ et $n = 2$. Montrer que $g_n \star h \in \mathcal{C}_c$ et que la suite $(g_n \star h)_{n \geq 1}$ est bornée dans L^∞.
3. On pose, pour $t \in \mathbb{R}$ et pour $n \in \mathbb{N}^*$ $f_n(t) = \dfrac{\sin(2\pi t)\, \sin(2\pi nt)}{\pi^2 t^2}$. Montrer que $f_n \in L^1$ puis que $g_n \star h = \widehat{f_n}$ (rédiger avec précision).
4. Montrer que $\lim\limits_{n \to \infty} \| f_n \|_1 = +\infty$.
   (On pourra commencer par montrer que l'on a $\| f_n \|_1 \geq C \displaystyle\int_0^\pi \frac{|\sin(nu)|}{u} du$ où C est une constante strictement positive indépendante de n)

5. On admettra le résultat suivant :
   Soient E et F deux espaces de Banach et $f : E \to F$ une application linéaire continue. Si f est bijective alors f^{-1} est continue.
   Déduire de tout ce qui précède que la transformation de Fourier envoie L^1 sur un sous espace strict de $\mathcal{C}_0$ (i.e. $\mathcal{F}(L^1) \subsetneq \mathcal{C}_0$).
6. Montrer que l'image de L^1 par la transformation de Fourier est dense dans $\mathcal{C}_0$ (on pourra utiliser l'espace $\mathcal{S}$).

Exercice 8.6.4 (sept. 96)
f étant une fonction de $L^2 = L^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ et A un réel positif, on définit la fonction $\Psi_A(f)$ par : $\Psi_A(f)(t) = \displaystyle\int_{-A}^{A} \hat{f}(x) e^{2i\pi tx}\, dx.$

1. Montrer que $\Psi_A(f)$ est bien définie sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer, après avoir remarqué que $\hat{f} 1\!\!1_{[-\mathrm{A},\mathrm{A}]} \in \mathrm{L}^1 \cap \mathrm{L}^2$, que $\Psi_A(f) \in L^2$ et majorer sa norme *(on utilisera le théorème de Plancherel).*
3. Montrer que Ψ_A est une application linéaire continue de L^2 dans L^2.
4. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$ et tout $f \in L^2$ il existe un réel A_0 tel que :
   $$A_0 \leq A < A' \Longrightarrow \| \Psi_A(f) - \Psi_{A'}(f) \|_2 \leq \varepsilon.$$
   En déduire que $\Psi_A(f)$ a une limite dans L^2 quand $\mathcal{A} \to +\infty$, notée $\Psi(f)$.
5. Montrer que Ψ est une application linéaire continue de L^2 dans L^2.
6. Montrer que si $f \in \mathcal{S}$ alors $\Psi(f) = f$.
7. Montrer que si $f \in L^2$ alors $\Psi(f) = f$ p.p.
8. Calculer, pour $a > 0$, la transformée de Fourier de la fonction $1\!\!1_{[-\mathrm{a},\mathrm{a}]}$. En déduire le calcul de $\displaystyle\lim_{A \to +\infty} \int_{-A}^{A} \frac{\sin \lambda x}{x} e^{itx}\, dx.$

Chapitre 9

Espaces L^p

Dans toute la suite on considère un espace mesuré $(E, \mathcal{T}, m)$.

9.1 Inégalités de convexité.

Proposition 9.1.1 *Soient α, β des réels strictement positifs tels que $\alpha+\beta = 1$, et u, $v \in \overline{\mathbb{R}}_+$. Alors :*

$$u^\alpha v^\beta \leq \alpha u + \beta v. \tag{9.1}$$

Preuve : Le résultat est évident si u, ou v, est égal à 0 ou $+\infty$. Sinon :

$$(9.1) \Longleftrightarrow \alpha \ln u + \beta \ln v \leq \ln(\alpha u + \beta v),$$

ce qui exprime la concavité de la fonction ln. ■

Définition 9.1.1 Deux réels p, $q > 1$ sont conjugués si $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ (ce qui équivaut à $q = \dfrac{p}{p-1}$). Par extension on dit que 1 et $+\infty$ sont conjugués.

Remarque 9.1.1 Le réel 2 est son propre conjugué.

Corollaire 9.1.1 (Young) *Soient a, b des réels positifs, p, $q > 1$ des réels conjugués. Alors :*

$$a\, b \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Preuve : appliquer la prop. 9.1.1 avec $\alpha = \dfrac{1}{p}$, $\beta = \dfrac{1}{q}$, $u = a^p$ et $v = b^q$. ■

Proposition 9.1.2 (Inégalité de Hölder dans $\mathcal{M}_+$) *Soient $f, g \in \mathcal{M}_+$ et $p, q > 1$ des réels conjugués. Alors :*

$$\int f g\, dm \leq \left(\int f^p\, dm\right)^{1/p} \left(\int g^q\, dm\right)^{1/q}.$$

Preuve : posons $A = \left(\int f^p\, dm\right)^{1/p}$ et $B = \left(\int g^q\, dm\right)^{1/q}$, alors :
- si $A = 0$ (resp. $B = 0$) on a $f = 0$ p.p. (resp. $g = 0$ p.p.) et l'inégalité est vérifiée,
- si $A = +\infty$ ou $B = +\infty$ l'inégalité est trivialement vérifiée,

– si $0 < A,\, B < +\infty$ l'inégalité d'Young donne $\dfrac{f\,g}{A\,B} \leq \dfrac{1}{p}\left(\dfrac{f}{A}\right)^p + \dfrac{1}{q}\left(\dfrac{g}{B}\right)^q$ et on conclut en intégrant chaque membre (le second membre est d'intégrale égale à un).

■

Proposition 9.1.3 (Inégalité deMinkowski dans $\mathcal{M}_+$) *Soient $f,\, g \in \mathcal{M}_+$ et $p \in [1, +\infty[$. Alors :*

$$\left(\int (f+g)^p\, dm\right)^{1/p} \leq \left(\int f^p\, dm\right)^{1/p} + \left(\int g^p\, dm\right)^{1/p}.$$

Preuve : si $p = 1$ c'est banal, si $p > 1$ soit $q = \dfrac{p}{p-1}$ le conjugué de p. Par application de l'inégalité de Hölder à f et $(f+g)^{p-1}$ on obtient :

$$\begin{aligned}\int f\,(f+g)^{p-1}\, dm &\leq \left(\int f^p\, dm\right)^{1/p} \left(\int (f+g)^{(p-1)q}\, dm\right)^{1/q} \\ &\leq \left(\int f^p\, dm\right)^{1/p} \left(\int (f+g)^p\, dm\right)^{1/q}\end{aligned}$$

de même :

$$\int g\,(f+g)^{p-1}\, dm \leq \left(\int g^p\, dm\right)^{1/p} \left(\int (f+g)^p\, dm\right)^{1/q}$$

En ajoutant membre à membre on a alors :

$$\int (f+g)^p\, dm \leq \left[\left(\int f^p\, dm\right)^{1/p} + \left(\int g^p\, dm\right)^{1/p}\right] \left(\int (f+g)^p\, dm\right)^{1/q}$$

d'où, par division, l'inégalité de Minkowski dans le cas où $\int (f+g)^p\, dm < +\infty$. Remarquons enfin que, par convexité de $x \mapsto x^p$ si $p > 1$, on a $\left(\dfrac{f+g}{2}\right)^p \leq \dfrac{1}{2}(f^p + g^p)$ donc si $\int (f+g)^p\, dm = +\infty$ on a aussi $\int f^p\, dm = +\infty$ ou $\int g^p\, dm = +\infty$ et l'inégalité de Minkowski est satisfaite (nous aussi). ■

9.2 Semi-normes N_p et espaces $\mathcal{L}^p$, $\quad 1 \leq p \leq \infty$.

Soit p un réel, $p \geq 1$. Pour $f \in \mathcal{M}$ posons $N_p(f) = \left(\int |f|^p\, dm\right)^{1/p} \in \overline{\mathbb{R}}_+$. N_p satisfait les propriétés :

1. $\forall f, g \in \mathcal{M} \quad N_p(f+g) \leq N_p(f) + N_p(g)$ (Minkowski),
2. $\forall f \in \mathcal{M},\ \forall \lambda \in \mathbb{R} \quad N_p(\lambda f) \leq |\lambda| N_p(f)$,
3. si $1 < p < +\infty$ et $q = \dfrac{p}{p-1}$ alors : $\forall f, g \in \mathcal{M} \quad N_1(fg) \leq N_p(f) N_q(g)$ (Hölder).

On cherche à étendre ceci au cas $p = +\infty$ (avec donc $q = 1$).

Définition 9.2.1 Soit $f \in \mathcal{M}_+$. On dit que $M \in \overline{\mathbb{R}}_+$ est un majorant essentiel de f si $f \leq M$ p.p.

Lemme 9.2.1 *Soit $f \in \mathcal{M}_+$. La borne inférieure de l'ensemble des majorants essentiels de f est un majorant essentiel de f (c'est donc le plus petit).*

Preuve : soit C cette borne inférieure : pour tout entier $n \geq 1$ on a $f \leq C + 1/n$ p.p. c 'est à dire $f \leq C+1/n$ sur le complémentaire d'un ensemble négligeable A_n. Alors $f \leq C$ sur le complémentaire de l'ensemble négligeable $A = \bigcup_{n \geq 1} A_n$, i.e. $f \leq C$ p.p. . ■

Définition 9.2.2 Soit $f \in \mathcal{M}_+$. On appelle borne supérieure essentielle de f, et on note $N_\infty(f)$, son plus petit majorant essentiel. Si $f \in \mathcal{M}$, on note $N_\infty(f)$ la borne supérieure essentielle de $\mid f \mid$: $N_\infty(f) = N_\infty(\mid f \mid)$.

Remarque 9.2.1 On retiendra en particulier que :

$$\mid f \mid \leq N_\infty(f) \text{ p.p.} \quad \text{et} \quad \forall a \in \overline{\mathbb{R}}_+ \quad N_\infty(f) \leq a \Longleftrightarrow \mid f \mid \leq a \text{ p.p. .}$$

Proposition 9.2.1 *N_∞ satisfait les propriétés suivantes :*

1. $\forall f, g \in \mathcal{M} \quad N_\infty(f+g) \leq N_\infty(f) + N_\infty(g)$ *(Minkowski),*
2. $\forall f \in \mathcal{M},\ \forall \lambda \in \mathbb{C} \quad N_\infty(\lambda f) \leq |\lambda| N_\infty(f)$,
3. $\forall f, g \in \mathcal{M} \quad N_1(fg) \leq N_\infty(f)\, N_1(g)$ *(Hölder).*

Preuve : aucune difficulté.

Définition 9.2.3 Pour $p \in [1, +\infty]$, $\mathcal{L}^p$ désigne l'ensemble des fonctions f mesurables (réelles ou complexes) telles que $N_p(f) < +\infty$.

Proposition 9.2.2 *Pour $p \in [1, +\infty]$, $\mathcal{L}^p$ est un espace vectoriel et N_p une semi norme sur $\mathcal{L}^p$. De plus : $\forall f \in \mathcal{L}^p \quad N_p(f) = 0 \Longleftrightarrow f = 0$ p.p.*

Preuve : aucune difficulté.

9.3 Espaces L^p, $\quad 1 \leq p \leq \infty$.

Définition 9.3.1 Pour $p \in [1, +\infty]$, L^p désigne l'espace vectoriel quotient $\mathcal{L}^p/\mathcal{N}$ où $\mathcal{N}$ désigne le sous espace des fonctions négligeables.

Suivant la même démarche que pour le cas de L^1, on définit N_p sur L^p par l'intermédiaire de n'importe quel représentant dans $\mathcal{L}^p$ et on note $N_p(f) = \| f \|_p$. On a alors :

Proposition 9.3.1 *Pour $p \in [1, +\infty]$, $(L^p, \| \,.\, \|_p)$ est un espace vectoriel normé. Si q est le conjugué de p on a :*

$$\forall f \in L^p \quad \forall g \in L^q \qquad fg \in L^1 \ \textit{et} \ \| fg \|_1 \leq \| f \|_p \| g \|_q$$

(inégalité de Hölder).

Remarque 9.3.1 L'inégalité de Hölder exprime que l'application bilinéaire :

$$\Phi \ : \ \begin{cases} L^p \times L^q \to L^1 \\ (f,g) \mapsto fg \end{cases}$$

est continue.

Proposition 9.3.2 *Pour $p \in [1, +\infty]$, $(L^p, \| \,.\, \|_p)$ est un espace de Banach.*

C'est la conséquence directe du résultat suivant :

Proposition 9.3.3 *Soit $p \in [1, +\infty]$. Dans $(L^p, \| \,.\, \|_p)$ toute série normalement convergente est convergente.*

Preuve : pour $1 \leq p < +\infty$, la démonstration suit de très près celle que l'on a donné dans le cas $p = 1$. Traitons le cas $p = +\infty$:
soit $(f_n)_{n\geq 0} \subset L^\infty$ t.q. $\sum_0^\infty \| f_n \|_\infty < \infty$. Soit, pour $n \geq 0$, g_n la fonction définie p.p. par $g_n(x) = \sum_{k=0}^n |f_k(x)|$: on a $0 \leq g_n(x) \leq \sum_0^\infty \| f_k \|_\infty$ p.p. donc la série $\sum_{k=0}^\infty f_k$ converge absolument, p.p. $/x$. La fonction f définie p.p. par $f(x) = \sum_{k=0}^\infty f_k(x)$ vérifie :

$$|f(x) - \sum_{k=0}^n f_k(x)| \leq \sum_{n+1}^\infty \| f_k \|_\infty \text{ p.p.}$$

d'où :

$$\| f - \sum_{k=0}^n f_k \|_\infty \leq \sum_{n+1}^\infty \| f_k \|_\infty \to 0 \text{ quand } n \to +\infty$$

ce qui exprime la convergence de la série $\sum_{k=0}^\infty f_k$ dans L^∞. ■

Corollaire 9.3.1 *Soit $p \in [1, +\infty]$. Si $(f_n)_{n\geq 0}$ converge vers f dans L^p alors il existe une sous-suite qui converge vers f presque partout.*

Preuve : comme dans le cas $p = 1$. ■

Proposition 9.3.4 (convergence dominée) *Soit $p \in [1, +\infty[$. Si $(f_n)_{n\geq 0}$ et f sont des fonctions mesurables telles que :*

1. *$(f_n)_{n\geq 0}$ converge vers f presque partout,*
2. *$\exists g \in L^p \ \forall n \in \mathbb{N} \quad |f_n| \leq g$ p.p.*

alors $(f_n)_{n\geq 0}$ converge vers f dans L^p.

Preuve : on a immédiatement $(f_n)_{n\geq 0} \subset L^p$, $|f| \leq g$ p.p. et donc aussi $f \in L^p$. Il suffit alors de remarquer que $|f_n - f|^p \to 0$ p.p. , que $|f_n - f|^p \leq 2^{p-1}(|f_n|^p + |f|^p) \leq 2^p |g|^p \in L^1$ et d'appliquer le théorème de convergence dominée dans L^1. ■

Remarque 9.3.2 Ce résultat est faux dans L^∞ (considérer par exemple, dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ la suite $(f_n)_{n\geq 0}$ définie par $f_n = \mathbb{1}_{]n,+\infty[}$).

Proposition 9.3.5 (rappel) *L^2 est un espace de Hilbert pour le produit scalaire $(f, g) \mapsto \int f\overline{g}\, dm$*

Remarque 9.3.3 L^p, si $p \neq 2$, n'est pas un espace de Hilbert en général (voir exercices).

On examine maintenant les relations entre les espaces L^p (inclusions ?...).

Proposition 9.3.6 *Si $m(E) < \infty$ alors : $1 \leq p \leq q \leq +\infty \Longrightarrow L^q \subset L^p$, de plus les injections canoniques sont continues.*

Preuve : si $q = +\infty$ et $1 \leq p < \infty$, on a $\displaystyle\int \mid f \mid^p \ dm \leq \parallel f \parallel_\infty^p m(E) < \infty$ donc $f \in L^p$ et $\parallel f \parallel_p \leq m(E)^{1/p} \parallel f \parallel_\infty$. Supposons maintenant $q < +\infty$ et soit p tel que $1 \leq p \leq q$. Si $f \in L^q$ alors $\mid f \mid^p \in L^{q/p}$. En appliquant l'inégalité de Hölder aux fonctions $\mid f \mid^p$ et 1 avec les exposants conjugués $\alpha = \dfrac{q}{p}$ et $\beta = \dfrac{\alpha}{\alpha - 1} = \left(1 - \dfrac{p}{q}\right)^{-1}$ on obtient :

$$\int \mid f \mid^p \leq \left(\int \mid f \mid^q\right)^{\frac{p}{q}} \left(\int 1\right)^{1-\frac{p}{q}} = \parallel f \parallel_q^p m(E)^{1-\frac{p}{q}} < \infty$$

donc $f \in L^p$ et $\parallel f \parallel_p \leq m(E)^{(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} \parallel f \parallel_q$, cette dernière inégalité prouvant la continuité de l'injection canonique $i \, : \, L^q \to L^p$. ■

Remarque 9.3.4 Ce résultat a lieu en particulier dans un espace probabilisé. On a alors, si $1 < p < q < +\infty$: $L^\infty \subset L^q \subset L^p \subset L^1$ et $\parallel f \parallel_1 \leq \parallel f \parallel_p \leq \parallel f \parallel_q \leq \parallel f \parallel_\infty$.

Corollaire 9.3.2 *Si $(E, \mathcal{T}, m) = (\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \lambda)$ alors :*

$$1 < p < q < +\infty \Longrightarrow L^\infty_{loc} \subset L^q_{loc} \subset L^p_{loc} \subset L^1_{loc}.$$

9.4 Convolution et régularisation. Applications.

Dans tout ce paragraphe, $(E, \mathcal{T}, m) = (\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \lambda)$.

Proposition 9.4.1 *Soient $p \in [1, +\infty]$, $f \in L^1$ et $g \in L^p$. Alors :*

$$f \star g \in L^p \ \textit{et} \ \parallel f \star g \parallel_p \leq \parallel f \parallel_1 \parallel g \parallel_p .$$

Preuve : le cas $p = +\infty$ est facile. Si $p < \infty$, soit q l'exposant conjugué de p. Comme $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$, on a :

$$\int \left(\int \mid f(x-y)\, g(y) \mid \, dy\right)^p dx = \int \left(\int \mid f(x-y) \mid^{\frac{1}{p}} \mid g(y) \mid \mid f(x-y) \mid^{\frac{1}{q}} \, dy\right)^p dx$$

d'autre part l'inégalité de Hölder donne :

$$\begin{aligned} \int \left(\mid f(x-y) \mid^{\frac{1}{p}} \mid g(y) \mid\right) \mid f(x-y) \mid^{\frac{1}{q}} \, dy &\leq \left(\int \mid f(x-y) \mid \mid g(y) \mid^p \, dy\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int \mid f(x-y) \mid \, dy\right)^{\frac{1}{q}} \\ &\leq \parallel f \parallel_1^{\frac{1}{q}} \left((\mid f \mid \star \mid g \mid^p)(x)\right)^{\frac{1}{p}} \end{aligned}$$

de sorte que :

$$\int \left(\int \mid f(x-y)\, g(y) \mid \, dy \right)^p dx \;\leq\; \| f \|_1^{\frac{p}{q}} \, \| | f | \star | g |^p \|_1$$
$$\leq\; \| f \|_1^{\frac{p}{q}} \, \| f \|_1 \, \| g \|_p^p < \infty$$

d'où l'on déduit que $\displaystyle\int \mid f(x-y)\, g(y) \mid \, dy < \infty$ pour presque tout $x \in \mathbb{R}^d$. La fonction $y \mapsto f(x-y)\, g(y)$ est donc intégrable pour presque tout $x \in \mathbb{R}^d$, i.e. $f \star g$ est définie p.p. . De plus $f \star g \in L^p$ et :

$$\| f \star g \|_p \;\leq\; \left(\int \left(\int \mid f(x-y)\, g(y) \mid \, dy \right)^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$
$$\leq\; \| f \|_1^{\frac{1}{p}+\frac{1}{q}} \, \| g \|_p = \| f \|_1 \, \| g \|_p \, .$$

■

On peut en fait énoncer un résultat plus précis (Young) :

Proposition 9.4.2 *Si p, q, $r \in [1,+\infty]$ vérifient $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1+\dfrac{1}{r}$, alors :*

$$f \in L^p \text{ et } g \in L^q \Longrightarrow f \star g \in L^r \text{ et } \| f \star g \|_r \leq \| f \|_p \| g \|_q \, .$$

Proposition 9.4.3 *Pour tout $p \in [1,+\infty[$ $C_c(\Omega,\mathbb{R})$ est dense dans L^p. Plus généralement, si Ω désigne un ouvert de $\mathbb{R}^d$ alors $C_c(\Omega,\mathbb{R})$ est dense dans $L^p(\Omega)$.*

Preuve : analogue au cas $p=1$. En particulier on notera que $\mathcal{E} \cap L^1$ est dense dans L^p si $1 \leq p < \infty$.

■

Remarque 9.4.1 Si $f \in L^p \cap L^q$ (avec $1 \leq p, q < \infty$) alors il existe une suite de fonctions étagées intégrables (resp. de fonctions continues à support compact) qui convergent vers f dans chacun des espaces L^p et L^q.

Remarque 9.4.2 $\mathcal{E}$ est dense dans L^∞, mais pas $\mathcal{E} \cap L^1$.

Proposition 9.4.4 (continuité en moyenne d'ordre p) *Soient $p \in [1,+\infty[$ et $f \in L^p$. Alors :*

$$\lim_{h \to 0} \int |f(x+h)-f(x)|^p \, dx = 0.$$

L'application $y \to \tau_y f$ est uniformément continue de $\mathbb{R}$ dans L^p.

Remarque 9.4.3 Les deux résultats précédents sont faux pour $p=+\infty$ (considérer, dans $\mathbb{R}$, $f = 1\!\!1_{\mathbb{R}_+}$).

Proposition 9.4.5 *Soient $p \in [1,+\infty[$ et $(\rho_n)_{n \geq 0}$ une suite régularisante. Alors :*

$$\forall f \in L^p \quad f \star \rho_n \to f \text{ dans } L^p \text{ quand } n \to \infty.$$

Corollaire 9.4.1 *Pour tout $p \in [1,+\infty[$, $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d,\mathbb{R})$ est dense dans L^p. Plus généralement, si Ω désigne un ouvert de $\mathbb{R}^d$ alors $C^\infty(\Omega,\mathbb{R})$ est dense dans $L^p(\Omega)$.*

Preuve : remarquer que $L^p \subset L^1_{\text{loc}}$ puis appliquer le cas L^1 et la proposition précédente. ■

Corollaire 9.4.2 *Pour tout* $p \in [1,+\infty[$, $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d,\mathbb{R})$ *est dense dans* L^p. *Plus généralement, si* Ω *désigne un ouvert de* $\mathbb{R}^d$ *alors* $C_c^\infty(\Omega,\mathbb{R})$ *est dense dans* $L^p(\Omega)$.

Preuve : même démarche que dans le cas L^1. ■

Remarque 9.4.4 Si $f \in L^p \cap L^q$ (avec $1 \leq p,\ q < \infty$) alors il existe une suite de fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ à support compact qui convergent vers f dans chacun des espaces L^p et L^q.

On examine pour finir une application du résultat de densité de $C_c(\Omega,\mathbb{R})$ dans L^p $(1 \leq p < \infty)$. Rappelons qu'un espace métrique est séparable s'il contient une partie dénombrable dense.

Proposition 9.4.6 *Pour* $1 \leq p < \infty$, *l'espace* L^p *est séparable.* L^∞ *n'est pas séparable.*

Preuve : en exercice.

9.5 Dualité L^p-L^q.

Proposition 9.5.1 *Soient* $p,\ q \in [1,+\infty]$ *des réels conjugués et soit* $g \in L^q$. *L'application* $T_g \ : \left\{ \begin{array}{l} L^p \to \mathbb{K} \\ f \mapsto \displaystyle\int f\,g\,dm \end{array} \right.$ *est linéaire continue (i.e.* $T_g \in (L^p)'$. *L'application* $\left\{ \begin{array}{l} L^q \to (L^p)' \\ g \mapsto T_g \end{array} \right.$ *est une isométrie.*

Remarque 9.5.1 Cette proposition donne un moyen de fabriquer des formes linéaires continues sur L^p. La question qui se pose naturellement est de savoir si on les obtient toutes ainsi. Dans le cas de l'espace de Hilbert L^2, la réponse est positive (voir propriétés d'un espace de Hilbert). La réponse est encore positive si $1 \leq p < \infty$ et si m est σ-finie (voir plus loin le théorème 9.5.2). Par contre on a $L^1 \underset{\neq}{\subset} (L^\infty)'$.

Preuve : d'après l'inégalité de Hölder on a $|T_g(f)| \leq \| f \|_p \| g \|_q$, d'où la continuité de T_g et l'inégalité $\| T_g \| \leq \| g \|_q$. Pour montrer que l'on a en fait l'égalité, considérer la fonction $f = \text{sgn}(g)\,|g|^{q-1} \in L^p$. ■

Pour obtenir, sous certaines hypothèses, la surjectivité de l'application $g \mapsto T_g$, on va utiliser un résultat très important sur la décomposition des mesures (ce n'est pas la seule méthode possible).

Définition 9.5.1 Soient μ et ν des mesures définies sur un espace mesurable $(E,\mathcal{T})$. Alors :

1. On dit que μ est absolument continue par rapport à ν si pour tout $A \in \mathcal{T}$ on a :
   $\nu(A) = 0 \Longrightarrow \mu(A) = 0$. On écrit $\mu \ll \nu$.
2. On dit que μ et ν sont étrangères (ou mutuellement singulières) s'il existe une partie mesurable A telle que μ soit concentrée sur A (i.e. $\mu(A^c) = 0$) et ν soit concentrée sur A^c. On écrit $\mu \perp \nu$.

Exemple : pour tout réel a, la mesure de Dirac en a et la mesure de Lebesgue sont étrangères.

Remarque 9.5.2 $\mu \ll \nu$ et $\mu \perp \nu \Longrightarrow \mu = 0$.

Théorème 9.5.1 (Lebesgue-Radon-Nikodym) *Soit $(E, \mathcal{T}, m)$ un espace mesuré où m est σ-finie. Pour toute mesure signée μ sur $(E, \mathcal{T})$:*

1. *il existe une unique décomposition de μ sous la forme $\mu = \mu_a + \mu_s$ où μ_a et μ_s sont des mesures signées telles que $\mu_a \ll m$ et $\mu_s \perp m$,*
2. *il existe une unique (classe de) fonction $h \in L^1(m)$ telle que $\mu_a = h\,m$.*

Preuve :

Unicité de la décomposition : supposons que $\mu = \mu_a + \mu_s = \mu'_a + \mu'_s$ avec $\mu_a, \mu'_a \ll m$ et $\mu_s, \mu'_s \perp m$. Si $\mu_s \neq \mu'_s$, il existe un ensemble mesurable A tel que $m(A) = 0$ et $\mu_s(A) \neq \mu'_s(A)$, donc aussi $\mu_a(A) \neq \mu'_a(A)$. Or on a $\mu_a(A) = \mu'_a(A) = 0$, donc les deux décompositions sont identiques.

Unicité de h : si $\mu_a = h\,m = h'\,m$ avec $h, h' \in L^1(m)$, on obtient facilement que $h = h'$ p.p. (exercice).

Existence de la décomposition : en écrivant μ comme la différence de deux mesures positives bornées, on se ramène au cas où μ est positive et bornée. D'autre part, m étant σ-finie, il existe une partition $(E_n)_{n\geq 0}$ de E en sous-ensembles mesurables tels que $m(E_n) < \infty$: ceci permet de se ramener au cas où m est bornée.
Posons $\nu = \mu + m$: $\nu(E) < \infty \Longrightarrow L^2(\nu) \subset L^1(\nu) \subset L^1(\mu)$. On peut donc définir une application $T : \begin{cases} L^2(\nu) & \rightarrow \quad \mathbb{R} \\ \quad f & \mapsto \quad \displaystyle\int f\,d\mu. \end{cases}$
T est linéaire, de plus :

$$\forall f \in L^2(\nu) \quad \left| \int f\,d\mu \right| \leq \int |\, f \,|\ d\mu \leq \int |\, f \,|\ d\nu \leq \left(\int |\, f \,|^2\ d\nu\right)^{1/2} \nu(E)^{1/2} = \|\, f \,\|_{L^2(\nu)}\ \nu(E)^{1/2},$$

donc T est continue. Le théorème de représentation de Riesz dans l' espace de Hilbert $L^2(\nu)$ assure alors l'existence d'une fonction $g \in L^2(\nu)$ telle que :

$$\forall f \in L^2(\nu) \quad T(f) = \int f\,d\mu = (f \mid g) = \int f\,g\,d\nu \tag{9.2}$$

En considérant $f = \mathbb{1}_{\mathrm{A}}$ on obtient en particulier : $\forall A \in \mathcal{T} \quad \mu(A) = \displaystyle\int_A g\,d\nu \leq \nu(A)$, d'où l'on déduit facilement que $0 \leq g \leq 1$ ν-pp : on peut donc, dans (9.2), utiliser un représentant de g (encore noté g) à valeurs dans $[0, 1]$. (9.2) s'écrit aussi :

$$\forall f \in L^2(\nu) \quad \int f\,(1-g)\,d\mu = \int f\,g\,dm \tag{9.3}$$

Posons $B = \{0 \leq g < 1\}$ (alors $B^c = \{g = 1\}$) et, pour tout $A \in \mathcal{T}$:

$$\mu_a(A) = \mu(A \cap B), \qquad \mu_s(A) = \mu(A \cap B^c).$$

Le choix $f = \mathbb{1}_{\mathrm{B^c}}$ dans (9.3) donne $m(B^c) = 0$ et on a $\mu_s(B) = 0$, donc $\mu_s \perp m$.
Le choix $f = \mathbb{1}_{\mathrm{A \cap B}} \dfrac{1}{1-\mathrm{g}}$ dans (9.3) donne $\mu_a(A) = \displaystyle\int_{A\cap B} \frac{g}{1-g}\,dm = \int_A \left(\frac{g}{1-g}\,\mathbb{1}_{\mathrm{B}}\right) dm.$
$\dfrac{g}{1-g}\,\mathbb{1}_{\mathrm{B}} \in \mathcal{L}^1(\mathrm{m})$ car $\displaystyle\int \left| \frac{g}{1-g}\,\mathbb{1}_{\mathrm{B}} \right| \mathrm{dm} = \int_{\mathrm{E\cap B}} \frac{\mathrm{g}}{1-\mathrm{g}}\,\mathrm{dm} = \mu_{\mathrm{a}}(\mathrm{E}) = \mu(\mathrm{B}) < \infty$. On conclut donc en choisissant pour h la classe, dans $L^1(m)$, de la fonction $\dfrac{g}{1-g}\,\mathbb{1}_{\mathrm{B}}$. ∎

Corollaire 9.5.1 *Soit $(E,\mathcal{T},m)$ un espace mesuré où m est σ-finie. Une mesure signée μ sur $(E,\mathcal{T})$ est absolument continue par rapport à m si et seulement si μ a une densité par rapport à m.*

Corollaire 9.5.2 *Soient $(E,\mathcal{T},m)$ un espace mesuré où m est σ-finie et μ une mesure signée sur $(E,\mathcal{T})$. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) $\mu \ll m$,

(ii) $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall A \in \mathcal{T} \qquad m(A) \leq \delta \Longrightarrow |\mu(A)| \leq \varepsilon.$

Remarque 9.5.3 Pour un contre exemple dans le cas d'une mesure non σ-finie, considérer, dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, $m = (\frac{1}{x}\, \mathbb{1}_{\{x>0\}})\, \lambda$.

Théorème 9.5.2 *Soient $(E,\mathcal{T},m)$ un espace mesuré σ-fini, $p \in [1,+\infty[$, et q le conjugué de p. Alors :*

$$\forall T \in (L^p)' \quad \exists! g \in L^q \quad \forall f \in L^p \quad T(f) = \int f g\, dm$$

(i.e. $T = T_g$) et on a $\| g \|_q = \| T \|$.

Remarque 9.5.4 Si $p \neq 1$ on peut s'affranchir de la condition de σ-finitude.

Preuve : compte tenu de la prop.5.1, seule la première partie du théorème reste à prouver.
a) <u>unicité</u>
Soient $g, g' \in L^q$ tels que $T = T_g = T_{g'}$. On a donc : $\forall f \in L^p \quad \int f g\, dm = \int f g'\, dm$. La mesure m étant σ-finie, E est la réunion d'une famille $(E_n)_{n\geq 0}$ de parties deux à deux disjointes et de mesures finies. Alors $f = \mathbb{1}_{E_n} \mathrm{sgn}(g-g') \in L^p$ et donc $\int_{E_n} |g-g'|\, dm = 0$, d'où $g = g'$ p.p. sur E_n, et finalement $g = g'$ p.p.
b) <u>existence, cas m bornée</u>
Dans ce cas, pour tout $A \in \mathcal{T}$, $\mathbb{1}_A \in L^\infty \subset L^p$. On définit $\mu : \mathcal{T} \to \overline{\mathbb{R}}^+$ par $\mu(A) = T(\mathbb{1}_A)$. μ est une mesure : d'une part $\mu(\emptyset) = 0$, d'autre part si $(A_n)_{n\geq 0}$ est une suite d'éléments de $\mathcal{T}$ deux à deux disjoints on a

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{n=0}^{k} \mathbb{1}_{A_n} \to \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{1}_{A_n} \text{ p.p.} \\ \displaystyle\sum_{n=0}^{k} \mathbb{1}_{A_n} \leq 1 \in L^p(m) \end{cases}$$

on a donc (convergence dominée) $\sum_{n=0}^{k} \mathbb{1}_{A_n} \to \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{1}_{A_n}$ dans L^p et on en déduit que $\mu(\bigcup_0^\infty A_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mu(A_n)$ grâce à la continuité de T dans L^p.
La mesure μ est absolument continue par rapport à m, en effet si $m(A) = 0$ alors $\mathbb{1}_A = 0$ dans L^p et donc $T(\mathbb{1}_A) = 0$. Le théorème de Radon-Nikodym assure alors l'existence d'une fonction $g \in L^1(m)$ telle que pour tout $A \in \mathcal{T}$: $T(\mathbb{1}_A) = \int_A g\, dm$.
cas $\mathbf{p = 1}$: $\forall A \in \mathcal{T} \quad |\int_A g\, dm| = |T(\mathbb{1}_A)| \leq \| T \|\, m(A)$; on en déduit (exercice) que $|g| \leq \| T \|$ p.p. , i.e. $g \in L^\infty \subset L^q$. Les applications T et T_g sont continues et coïncident sur le sous espace dense $\mathcal{E} \cap L^1$ des fonctions étagées intégrables, donc $T = T_g$.

cas $\mathbf{1 < p < \infty}$: il suffit de montrer que $g \in L^q$ et de conclure comme ci-dessus.
Soit $(g_n)_{n\geq 0} \subset \mathcal{E}^+$ t.q. $g_n \uparrow |g|$ quand $n \to +\infty$; on a alors $\int g_n^q \, dm \uparrow \int |g|^q \, dm$. Or :

$$\int g_n^q \, dm \leq \int \underbrace{g_n^{q-1} sgn(g)}_{\in \mathcal{E}} g \, dm = T(g_n^{q-1} sgn(g)) \leq \| T \| \| g_n^{q-1} \|_p$$

d'où l'on tire, compte tenu de la relation liant p et q : $\| g_n \|_q \leq \| T \|$, et enfin $\| g \|_q \leq \| T \|$.
c) existence, cas m σ-finie
Remarquons d'abord qu'il existe une fonction h mesurable positive m-intégrable *(par exemple, E étant la réunion d'une famille $(E_n)_{n\geq 0}$ de parties deux à deux disjointes et de mesures finies, on peut prendre* $h = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n m(E_n)} \mathbb{1}_{A_n}$*)*; la mesure $m' = hm$ est alors bornée. La fonction Φ définie sur $L^p(m')$ *(le vérifier)* par $\Phi(f) = T(fh^{\frac{1}{p}})$ est linéaire continue *(*$|\Phi(f)| \leq \| T \| \, . \, \| fh^{\frac{1}{p}} \|_{L^p(m)} = \| T \| \, . \, \| f \|_{L^p(m')}$*)*.
D'après l'étude précédente, il existe $g \in L^q(m')$ telle que $\Phi(f) = \int fg \, dm'$. Pour $u \in L^p(m)$ on a alors $uh^{-\frac{1}{p}} \in L^p(m')$ et $T(u) = \Phi(uh^{-\frac{1}{p}}) = \int uh^{-\frac{1}{p}} gh \, dm = \int u \, (gh^{\frac{1}{q}}) \, dm$ et il reste juste à remarquer que $gh^{\frac{1}{q}} \in L^q$. ■

9.6 Compacité dans les espaces $L^p(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), \lambda)$.

Soit E un espace vectoriel normé et A une partie de E ; on rappelle que A est (séquentiellement) compacte si de toute suite d'éléments de A on peut extraire une sous-suite qui converge. Notons que cette notion de compacité séquentielle est équivalente à la notion de compacité "de Borel -Lebesgue" (i.e. de tout recouvrement de A par des ouverts on peut extraire un sous-recouvrement fini) dès que E est un espace métrique.
Dans le cas où E est un espace de dimension finie, A est compacte si et seulement si A est fermée bornée, et A est relativement compacte si et seulement si A est bornée.
Ces deux caractérisations sont fausses si $\dim(E) = +\infty$. Le théorème de Riesz nous dit que la boule unité fermée d'un evn E est compacte si et seulement si la dimension de E est finie.
Ω étant un ouvert de $\mathbb{R}^d$, on s'intéresse ici au cas $E = L^p(\Omega)$, espace vectoriel normé de dimension infinie, et on voudrait caractériser les parties relativement compactes ; en particulier, étant donnée une suite de fonctions de $L^p(\Omega)$, sous quelles hypothèses peut-on en extraire une sous-suite qui converge ?
Une condition nécessaire évidente est que la partie considérée soit bornée (une partie relativement compacte est toujours bornée). La deuxième condition est, pour $1 \leq p < +\infty$, que la partie soit équicontinue en moyenne, au sens précisé dans le théorème suivant :

Théorème 9.6.1 (Kolmogorov) *Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$, $1 \leq p < \infty$ et A une partie de $L^p(\Omega)$. A est relativement compacte si et seulement si :*

1. *A est bornée dans L^p, i.e. :*

$$\exists C \in \mathbb{R} \quad \forall f \in A \qquad \| f \|_p \leq C$$

2. *A est équicontinue en moyenne, i.e. :*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \qquad |h| \leq \delta \Longrightarrow \forall f \in A \quad \| \tilde{f}(. + h) - \tilde{f} \|_p \leq \varepsilon$$

3. A est “équimédiocre à l'infini”,i.e. :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists a \in \mathbb{R}_+ \quad \forall f \in A \quad \int_{B(0,a)^c} |\tilde{f}|^p \, d\lambda \leq \varepsilon$$

où $\tilde{f}$ est la prolongée de f par 0 en dehors de Ω.

La démonstration de ce théorème se fait en utilisant la densité de l'espace de fonctions $C_c(\Omega, \mathbb{R})$ dans $L^p(\Omega)$, et le théorème d'Ascoli, que nous rappelons ici :

Théorème 9.6.2 (Ascoli) *Soient K une partie compacte de $\mathbb{R}$ et A une partie de l'espace vectoriel $C(K, \mathbb{R})$ muni de la norme uniforme ; A est relativement compacte si et seulement si A est bornée et uniformément équicontinue, i.e.*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x, y \in K \qquad |x - y| \leq \delta \Longrightarrow \forall f \in A \quad |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon.$$

Corollaire 9.6.1 *Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$, $1 \leq p < +\infty$ et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^p(\Omega)$. Si $A = \{f_n \; ; \; n \in \mathbb{N}\}$ vérifie les conditions 1, 2 et 3 du théorème de Kolmogorov, alors on peut extraire de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une sous-suite convergeant dans $L^p(\Omega)$.*

9.7 Exercices

Exercice 9.7.1 (Avril 98) Soient $(E, \mathcal{T}, m)$ un espace mesuré, p et q deux réels strictement positifs. On définit le réel r par : $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$. Montrer que pour toutes fonctions mesurables $f, g : E \to \mathbb{R}$ on a :

$$\left(\int | \, f g \, |^r \; dm\right)^{1/r} \leq \left(\int | \, f \, |^p \; dm\right)^{1/p} \left(\int | \, g \, |^q \; dm\right)^{1/q}$$

Indication : appliquer l'inégalité de Hölder dans $\mathcal{M}_+$ au produit $| \, f \, |^r \, | \, g \, |^r$ avec un couple d'exposants bien choisi.

Exercice 9.7.2 Soit $(E, \mathcal{T}, m)$ un espace mesuré.

1. On suppose ici qu' il existe A et $B \in \mathcal{T}$ t.q. $A \cap B = \emptyset$, $0 < m(A) < +\infty$, et $0 < m(B) < +\infty$. Montrer que L^p est un espace de Hilbert si et seulement si $p = 2$. *(On pourra utiliser l'identité du parallèlogramme avec des fonctions de L^p bien choisies)*
2. Montrer que pour $m = \delta_0$ (mesure de Dirac en 0), L^p est un espace de Hilbert pour tout $p \in [1, +\infty]$.

Exercice 9.7.3 Montrer à l'aide d'un contre exemple que le théorème de convergence dominée est faux dans L^∞.

Exercice 9.7.4 Soient $(E, \mathcal{T}, m)$ un espace mesuré, $p \in [1, +\infty]$ et q le conjugué de p, $(f_n)_{n\geq 0} \subset L^p$, $(g_n)_{n\geq 0} \subset L^q$, $f \in L^p$ et $g \in L^q$ tels que $f_n \to f$ dans L^p et $g_n \to g$ dans L^q. Montrer que $\int f_n g_n \, dm \to \int f g \, dm$ quand $n \to +\infty$.

Exercice 9.7.5 Soient $(E, \mathcal{T}, m)$ un espace mesuré, $(f_n)_{n\geq 0} \subset L^2$ et $f \in L^2$. On suppose que la suite $(f_n)_{n\geq 0}$ converge faiblement vers f dans L^2, i.e. :

$$\forall \varphi \in L^2 \quad \int f_n \varphi \, dm \to \int f \varphi \, dm \text{ quand } n \to +\infty.$$

1. Montrer que pour tout $g \in L^2$ on a :

$$\| g \|_2 = \sup_{h \in L^2 - \{0\}} \frac{\displaystyle\int g \, h \, dm}{\| h \|_2}.$$

2. Montrer que $\| f \|_2 \leq \underline{\lim} \| f_n \|_2$
3. On suppose de plus que $\| f_n \|_2 \to \| f \|_2$ quand $n \to +\infty$. Montrer que la suite $(f_n)_{n\geq 0}$ converge vers f dans L^2.

Exercice 9.7.6 (*) Soient $(E, \mathcal{T}, m)$ un espace mesuré t.q. $m(E) < +\infty$ et $p \in [1, +\infty]$.
Soit $(f_n)_{n\geq 0} \in L^p$, telle que :
(i) la suite $(\| f_n \|_p)_{n\geq 0}$ est bornée,
(ii) $f_n \to f$ p.p. quand $n \to +\infty$.

1. Montrer que $f \in L^p$ et $\| f \|_p \leq \sup_{n\geq 1} \| f_n \|_p$.
2. On suppose (dans cette question seulement) que $p > 1$. Soit $r \in [1, p[$; montrer que $f_n \to f$ dans L^r quand $n \to +\infty$.
   (Introduire, pour $\varepsilon > 0$, l'ensemble $A_n^\varepsilon = \{|f_n - f| > \varepsilon\}$. Poser $p = r\,s$: on sera amené à appliquer l'inégalité de Hölder avec les exposants conjugués s et $s' = \frac{s}{s-1}$).
3. Soit q le conjugué de p ; montrer que, pour tout $g \in L^q$, on a :

$$\int f_n g \, dm \to \int f g \, dm \text{ quand } n \to +\infty.$$

   (Utiliser le même ensemble que précédemment).

Exercice 9.7.7 Soit $f \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On considère l'espace mesuré $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$; montrer que :

$$\| f \|_p \to \| f \|_\infty \text{ quand } p \to +\infty.$$

Indications : commencer par montrer que $\limsup_{p\to+\infty} \| f \|_p \leq \| f \|_\infty$.
Pour montrer que $\liminf_{p\to+\infty} \| f \|_p \geq \| f \|_\infty$, *on pourra introduire, pour* $0 < \varepsilon < \| f \|_\infty$, *l'ensemble* $A_\varepsilon = \{|f| > \| f \|_\infty - \varepsilon\}$.

Exercice 9.7.8 Soient $1 < p < +\infty$, $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ et $g \in L^p(\mathbb{R}^d)$.
Montrer que $f * g$ est définie p.p. , $f * g \in L^p$ et $\| f * g \|_p \leq \| f \|_1 \| g \|_p$.
(Ecrire $\int (\int |f(x-y)g(y)| \, dy)^p \, dx = \int (\int |f(x-y)|^{\frac{1}{p}} \, |g(y)| \, |f(x-y)|^{\frac{1}{q}} \, dy)^p \, dx$, *avec* $q = \frac{p}{p-1}$ *puis appliquer l'inégalité de Hölder ...).*

Exercice 9.7.9 Soient $1 < p < +\infty$, $q = \frac{p}{p-1}$, $f \in L^p = L^p_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \lambda)$ et $g \in L^q$.

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, l'application $f(.)g(x-.)$ est intégrable et que $f * g$ est définie partout. Montrer que $f * g \in L^\infty$ et que $\| f * g \|_\infty \leq \| f \|_p \| g \|_q$.
2. Montrer que $f*g$ est continue et que l'application $(f,g) \mapsto f*g$ est bilinéaire continue de $L^p \times L^q$ dans $\mathcal{C}_b(\mathbb{R},\mathbb{R})$.
3. Montrer que $f * g \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R},\mathbb{R})$.
4. On prend maintenant $p = 1$ et $q = +\infty$, i.e. $f \in L^1$ et $g \in L^\infty$. Reprendre (en les adaptant) les questions précédentes. A t-on encore $f * g \in \mathcal{C}_0$?

Exercice 9.7.10 (L'espace $L^p_{\mathbb{R}}(\mathbb{R},\mathcal{B}(R),\lambda)$ est séparable (*))
Soient p tel que $1 \leq p < \infty$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $k = 0, 1, \cdots, 2n^2 - 1$, on note : $I^n_k = [-n + \frac{k}{n}, -n + \frac{k+1}{n}[$.
On pose : $A_n = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\ ;\ f|_{I^n_k} = r,\ \text{où } r \in \mathbb{Q},\quad f = 0 \text{ sur } [-n,n[^c\}$, et $A = \displaystyle\bigcup_{n\geq 0} A_n$.

1. Montrer que A est dénombrable.
2. Montrer que A est dense dans $\mathcal{C}_c(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et conclure par densité de $\mathcal{C}_c(\mathbb{R},\mathbb{R})$ dans $L^p_{\mathbb{R}}(\mathbb{R},\mathcal{B}(R),\lambda)$.

Exercice 9.7.11 (L'espace $L^\infty_{\mathbb{R}}(\mathbb{R},\mathcal{B}(R),\lambda)$ n'est pas séparable)
On pose $B = \{f_a = 1\!\!1_{]\mathrm{a}-1,\mathrm{a}+1[};\ \mathrm{a} \in \mathbb{R}\}$.

1. Montrer que B est non dénombrable.
2. Soit A une partie dense de $L^\infty_{\mathbb{R}}(E,\mathcal{B}(R),\lambda)$. Montrer que pour tout $a \in \mathbb{R}$, il existe une fonction $g \in A$ telle que $\| f_a - g \|_\infty \leq \frac{1}{4}$. En déduire que $L^\infty_{\mathbb{R}}(E,\mathcal{B}(R),\lambda)$ n'est pas séparable.

Exercice 9.7.12 (une caractérisation de L^p (*)) Soient $(E,\mathcal{T},m)$ un espace mesuré σ-fini, $1 \leq p \leq +\infty$ et $f \in \mathcal{M}$. Montrer que $f \in L^p$ si et seulement si $fg \in L^1$ pour tout $g \in L^q$, où q est le conjugué de p.
(On distinguera les cas $p = 1$ et $p > 1$. Dans ce dernier cas, pour établir la suffisance de la condition, montrer que l'application T_f définie sur L^q par $T_f(g) = \int f\,g\,dm$ est continue...).

Exercice 9.7.13 (juin 97) Soient $(E,\mathcal{T},m)$ un espace mesuré et $p \in]1,+\infty[$. On désigne par L^p l'espace $L^p_{\mathbb{R}}(E,\mathcal{T},m)$ et on pose $q = \dfrac{p}{p-1}$ (conjugué de p). On dit qu'une suite $(f_n)_{n\geq 0} \subset L^p$ converge faiblement vers une fonction $f \in L^p$ si pour toute fonction $g \in L^q$ on a $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int f_n g\,dm = \int f g\,dm.$

1. Dans cette question on prend $(E,\mathcal{T},m) = (\mathbb{R},\mathcal{L}(\mathbb{R}),\lambda)$. En considérant les fonctions $f_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}} 1\!\!1_{[1,\mathrm{e}^n]}$ et $g\ :\ g(x) = \dfrac{1}{x} 1\!\!1_{[1,+\infty[}(\mathrm{x})$, montrer que la convergence uniforme n'entraine pas la convergence faible dans L^p.
2. On suppose maintenant que m est une mesure finie. Montrer que la convergence uniforme entraine la convergence faible dans L^p.

Exercice 9.7.14 (juin 96) Soit $p \in [1,+\infty[$. On note $L^p(\mathbb{R}_+)$ l'espace $L^p_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}_+,\mathcal{B}(\mathbb{R}_+),\lambda)$ et $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}_+)$ l'ensemble des fonctions $\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ continues à support compact. A toute fonction $f \in L^p(\mathbb{R}_+)$ on associe une fonction F définie sur $]0,+\infty[$ par

$$(1) \qquad F(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt.$$

1. Pourquoi (1) définit-elle effectivement un réel $F(x)$?
2. On suppose dans cette question que $1 < p < +\infty$. L'objectif est d'établir l'inégalité

$$(2) \qquad \| F \|_p \leq \frac{p}{p-1} \| f \|_p .$$

   (a) On suppose $\mathbf{f} \in \mathcal{C}_{\mathbf{c}}(\mathbb{R}_+)$ et $\mathbf{f} \geq \mathbf{0}$. Soient alors $M = \sup_{\mathbb{R}_+} |f|$, $a > 0$ tel que f soit nulle hors de $[0, a]$ et $L = \int_0^a f(t)\, dt$.

      i. Vérifier que $F(x) \leq M$ sur $]0, a]$ et $F(x) = \frac{L}{x}$ sur $]a, +\infty[$. En déduire que $F \in L^p(\mathbb{R}_+)$.

      ii. Montrer que $\lim_{x \to +\infty} xF^p(x) = 0$ et $\lim_{x \to 0} xF^p(x) = 0$. En déduire, à l'aide d'une intégration par parties que

$$(3) \qquad (p-1) \int_0^\infty F^p(x)\, dx = p \int_0^\infty F^{p-1}(x) f(x)\, dx.$$

      iii. A l'aide de l'inégalité de Hölder montrer que l'inégalité (2) est vérifiée.

   (b) Montrer que (2) est encore vraie pour toute fonction $f \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}_+)$.

   (c) On suppose enfin $f \in L^p(\mathbb{R}_+)$. On sait qu'alors (rappeler pourquoi) il existe une suite $(f_n)_{n \geq 0} \subset \mathcal{C}_c(\mathbb{R}_+)$ qui converge vers f dans $L^p(\mathbb{R}_+)$. Soit F_n la fonction associée à f_n par (1).

      i. Montrer que $(F_n)_{n \geq 0}$ est une suite de Cauchy dans $L^p(\mathbb{R}_+)$. En déduire que $(F_n)_{n \geq 0}$ a une limite $\tilde{F}$ dans $L^p(\mathbb{R}_+)$.

      ii. A l'aide de l'inégalité de Hölder établir que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+ \quad |F_n(x) - F(x)| \leq \| f_n - f \|_p \; x^{-\frac{1}{p}}$$

      (on écrira $\int_0^x |f_n(t) - f(t)|\, dt = \int_0^\infty |f_n(t) - f(t)| \mathbb{1}_{[0,x]}(t)\, dt$*)*.

      iii. Des deux résultats précédents déduire avec précision que $\tilde{F} = F$.

      iv. Montrer enfin que (2) est vraie pour $f \in L^p(\mathbb{R}_+)$. Que peut-on dire de l'application $T \; : \; f \mapsto F$ définie par (1) ?

3. On étudie maintenant le cas $p = 1$.

   (a) Soit A un borélien de $\mathbb{R}_+$ de mesure $\lambda(A)$ finie. On pose $F_A(x) = \frac{1}{x} \int_0^x \mathbb{1}_A(t)\, dt$. Montrer que

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists x_0 > 0 \quad \forall x \geq x_0 \quad F_A(x) \geq \frac{\lambda(A) - \varepsilon}{x}.$$

   En déduire que $F_A \notin L^1(\mathbb{R}_+)$.

   (b) Montrer que si $f \in L^1(\mathbb{R}_+)$ vérifie $f > 0$ p.p. alors $F \notin L^1(\mathbb{R}_+)$.

Annexe A

Le théorème de Riesz

On présente ici des résultats, dus à Riesz, qui font le lien entre l'intégrale des fonctions continues et les mesures abstraites sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Rappel : on définit les espaces de fonctions continues (de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$) suivants :

$$\begin{aligned}
C_b(\mathbb{R},\mathbb{R}) &= \{f \in C(\mathbb{R},\mathbb{R})\,;, \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)| < \infty\},\\
C_0(\mathbb{R},\mathbb{R}) &= \{f \in C(\mathbb{R},\mathbb{R})\,; \lim_{|x|\to\infty} f(x) = 0\},\\
C_c(\mathbb{R},\mathbb{R}) &= \{f \in C(\mathbb{R},\mathbb{R})\,; \exists K \subset \mathbb{R},\ K \text{ compact},\ f = 0 \text{ sur } K^c\}.
\end{aligned}$$

Il est clair que $C_c \subset C_0 \subset C_b$.

Définition A.0.1 Soit L une forme linéaire sur C_b (resp.C_0, C_c), on dit que L est positive si $L(f) \geq 0$ pour $f \geq 0$.

Soit m une mesure finie sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, alors $C_b \subset L^1(m)$ et l'application qui à f associe $\int f\,dm$ est linéaire continue positive sur $(C_b, \|\,.\,\|_\infty)$ (on rappelle qu'avec cette norme C_b et C_0 sont des espaces de Banach, mais que C_c ne l'est pas : on a en effet $\overline{C_c} = C_0$). Les deux théorèmes qui suivent concernent le problème de la réciproque : peut-on obtenir toutes les formes linéaires positives sur C_c, C_0 ou C_b de cette façon (i.e. en leur associant une mesure sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$) ?

Théorème A.0.1 (Riesz, mesures positives σ-finies) *Soit L une forme linéaire positive sur C_c, alors il existe une unique mesure m sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ telle que :*

$$\forall f \in C_c \quad L(f) = \int f\,dm,$$

de plus m est σ-finie.

Remarque A.0.1 En particulier, en considérant sur C_c la forme linéaire positive qui, à $f \in C_c$ de support inclus dans $[a,b]$, associe $L(f) = \int_a^b f(t)\,dt$ (intégrale de Riemann), on obtient l'existence et l'unicité de la mesure de Lebesgue sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.

Théorème A.0.2 (Riesz, mesures positives bornées) *Soit L une application linéaire positive de C_0 dans $\mathbb{R}$, alors il existe une unique mesure m finie sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ telle que :*

$$\forall f \in C_0 \quad L(f) = \int f\,dm.$$

Preuve : proposée en exercice, en utilisant le résultat précédent :
soit L une forme linéaire positive sur C_0.

1. Pour montrer que si m existe, alors m est finie, considérer, pour $n \geq 0$, les fonctions

$$f_n = 1\!\!1_{[-\mathrm{n},\mathrm{n}]} + (\mathrm{x}+\mathrm{n}+1)\,1\!\!1_{[-(\mathrm{n}+1),\mathrm{n}]} + (\mathrm{n}+1-\mathrm{x})\,1\!\!1_{[\mathrm{n},\mathrm{n}+1]}$$

   et la continuité de L.

2. **Montrer que L est continue**. *(Raisonner par l'absurde en supposant que L est positive et non continue : construire une suite g_n de fonctions continues positives telles que la série de terme général g_n converge normalement et telles que g, limite de la série de terme général g_n, vérifie $\forall n \in \mathbb{N} \quad T(g) > n$).*

3. Montrer que la restriction T de L à C_c est linéaire continue, et donc par le théorème A.0.1 qu'il existe une unique mesure m telle que $\forall f \in C_c \quad T(f) = \int f\,dm$.

4. Montrer que : $\forall f \in C_0 \quad L(f) = \int f\,dm$ *(approcher f de manière uniforme par $f_n \in C_c$.*

■

Le résultat du théorème A.0.2 est faux si on remplace C_0 par C_b. On peut, par exemple, construire une forme linéaire continue positive sur C_b non identiquement nulle, et nulle sur C_0 (en utilisant un résultat "de type Hahn-Banach" (voir cours d'Analyse Fonctionnelle en maîtrise).
On peut maintenant faire la remarque suivante :

Remarque A.0.2 Soit K une partie compacte de $\mathbb{R}$. On note $C(K,\mathbb{R})$ l'espace des fonctions réelles continues sur K. Si m est une mesure finie sur $(K,\mathcal{B}(K))$, l'espace fonctionnel $C(K,\mathbb{R})$ est inclus dans $L^1_{\mathbb{R}}(K,\mathcal{B}(K),m)$, et l'application qui à $f \in C(K,\mathbb{R})$ associe $\int f\,dm$ est linéaire positive (et continue si $C(K,\mathbb{R})$ est muni de la norme de la convergence uniforme). Réciproquement, soit L une forme linéaire positive sur $C(K,\mathbb{R})$. Le théorème précédent permet de montrer qu'il existe une unique mesure finie, notée m, sur $(K,\mathcal{B}(K))$ telle que :

$$\forall f \in C(K,\mathbb{R}) \quad L(f) = \int f\,dm.$$

En particulier, en considérant sur $C([a,b],\mathbb{R})$ la forme linéaire positive $L(f) = \int_a^b f(t)\,dt$ (intégrale de Riemann), on obtient l'existence et l'unicité de la mesure de Lebesgue sur $([a,b],\mathcal{B}([a,b]))$.

Considérons maintenant le cas des mesures signées : si m est une mesure signée sur $(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}))$ (ou sur $(K,\mathcal{B}(K))$), l'application qui à $f \in C_0$ (ou $C(K)$, associe $\int f\,dm$ est linéaire continue (pour la norme de la convergence uniforme). Réciproquement, on a aussi existence et unicité d'une mesure (signée) définie à partir d'une forme linéaire continue sur C_0 (ou $C(K)$) :

Théorème A.0.3 (Riesz, mesures signées) *Soit L une forme linéaire continue (pour la norme $\|\,.\,\|_\infty$) sur C_0 (ou sur $C(K,\mathbb{R})$). Alors il existe une unique mesure signée m, sur $(R,\mathcal{B}(\mathbb{R}))$ (ou sur $(K,\mathcal{B}(K))$) telle que :*

$$\forall f \in C_0 (\text{ ou } C(K,\mathbb{R})) \quad L(f) = \int f\,dm.$$

Preuve : on se ramène au théorème de Riesz "positif"...

Définition A.0.2 (Mesures de Radon) Les éléments de $(C_0(\mathbb{R},\mathbb{R}))'$ (resp. $(C(K,\mathbb{R}))'$) sont appelés "mesures de Radon" sur $\mathbb{R}$ (resp. K).

Définition A.0.3 (Mesures de Radon) Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^d$ ($d \in \mathbb{N}^*$), on appelle mesure de Radon sur Ω tout élément de $M(\Omega) = (C(\overline{\Omega},\mathbb{R}))'$, c.à.d. toute forme linéaire continue (pour la norme $\|\,.\,\|_\infty$) sur $(C(\overline{\Omega},\mathbb{R})$.

Remarque A.0.3 Soit T une forme linéaire sur $C_c(\Omega,\mathbb{R})$;

1. Si T est continue pour la norme $\|\,.\,\|_\infty$, alors il existe une et une seule mesure signée μ sur $\mathcal{B}(\Omega)$ telle que $\forall f \in C_c \quad T(f) = \int f\, d\mu$.
2. Si T est continue pour la topologie "naturelle" de $C_c(\Omega,\mathbb{R})$, (i.e. : pour tout compact $K \subset \Omega$ il existe $C_K \in \mathbb{R}$ tel que $\forall f \in C_c(\Omega,\mathbb{R}) \quad T(f) \le C_K \parallel f \parallel_\infty$, avec $\text{supp}(f) \subset K$), alors ce résultat est faux ; par contre il existe deux mesures positives μ_1 et μ_2 sur $\mathcal{B}(\Omega)$ telles que $\forall f \in C_c(\Omega,\mathbb{R}) \quad T(f) = \int f\, d\mu_1 - \int f\, d\mu_2$. Noter que μ_1 et μ_2 peuvent prendre toutes les deux la valeur $+\infty$ (exemple : $d = 1$, $\Omega =]-1,1[$, $T(f) = \sum_{n \in \mathbb{N}^*} n f(1 - \frac{1}{n}) - \sum_{n \in \mathbb{N}^*} n f(-1 + \frac{1}{n})$), et donc que $(\mu_1 - \mu_2)(\Omega)$ n'a pas toujours un sens....

Soit enfin T une forme linéaire sur $C_c^\infty(\Omega,\mathbb{R})$, continue pour la norme $\|\,.\,\|_\infty$, alors il existe une et une seule mesure signée μ sur $\mathcal{B}(\Omega)$ telle que : $\forall f \in C_c^\infty(\Omega,\mathbb{R}) \quad T(f) = \int f\, d\mu$.

Annexe B

Probabilités (I)

B.1 Introduction

Il y a deux notions fondamentales en probabilités :

a. <u>Expérience aléatoire</u> : expérience dont le résultat est soumis au hasard. Exemples :

1. jet aléatoire de deux dés,
2. battage d'un jeu de n cartes,
3. jeu de Pile ou Face de durée infinie,
4. observation de la durée de vie d'un appareil,
5. mouvement d'une particule pendant un intervalle de temps $[t_1, t_2]$.

Description mathématique : à l'aide d'un ensemble Ω dont les éléments ω représentent les issues possibles. Dans les exemples ci-dessus on peut prendre :

1. $\{1, \cdots, 6\} \times \{1, \cdots, 6\}$,
2. $\mathcal{S}_n$, n^{ieme} groupe symétrique,
3. $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$, ensemble des suites à valeurs dans $\{0, 1\}$,
4. $\mathbb{N}$ ou $\mathbb{R}_+$,
5. $\mathcal{C}([t_1, t_2], \mathbb{R}^3)$.

b. <u>Evénement aléatoire</u> : événement lié à une expérience aléatoire. Par exemple, dans les situations précédentes :

1. amener un total supérieur ou égal à 10,
2. il n'y a pas deux as consécutifs,
3. obtenir une série de cent "Pile" consécutifs,
4. observer une durée de vie supérieure à deux ans,
5. la particule reste confinée dans la boule unité.

Description mathématique : par la partie A de Ω égale à l'ensemble des ω qui réalisent l'événement. Ainsi dans l'exemple 1. on aura $A = \{(5,5),(5,6),(6,5),(6,6)\}$.

Le "lexique" suivant précise les correpondances entre les terminologies probabilistes et ensemblistes :

Terminologie probabiliste	**Terminologie ensembliste**	**Notations**
événement certain	espace entier	Ω
événement impossible	partie vide	$\emptyset$
événement contraire	partie complémentaire	A^c
et	intersection	$\cap$
événements incompatibles	parties disjointes	$A \cap B = \emptyset$
ou (non exclusif)	réunion	$\cup$
système exhaustif d'événements (ou système de constituants)	partition	
implication	inclusion	$A \subset B$

On souhaite que la classe des événements soit stable par les opérations "contraire","et", "ou" appliquées à des suites éventuellement infinies d'événements : il est alors naturel d'imposer à cette classe, au niveau ensembliste, de former une tribu $\mathcal{T}$ de parties de Ω.
Pour décrire complètement une expérience aléatoire, il reste à introduire la notion de probabilité. Cela se fait de manière **axiomatique**, mais essentiellement par analogie avec les fréquences statistiques de façon à ce que la théorie puisse rendre compte des phénomènes aléatoires. On obtiendra en particulier une loi théorique dite "des grands nombres" énonçant que la fréquence d'apparition $\frac{N_A}{N}$ d'un événement A au cours de N répétitions d'une même expérience tend (en un certain sens) vers la probabilité de cet événement quand $N \to +\infty$, précisant la vitesse de convergence (en $\frac{1}{\sqrt{N}}$), l'ampleur des déviations probables... Cette loi rend compte d'un fait expérimental connu sous le nom de loi empirique des grands nombres (effectuez, en grand nombre, des lancers successifs d'une pièce de monnaie et observez l'évolution de la fréquence d'apparition de "Pile"...)

Définition B.1.1 Une probabilité sur l'espace probabilisable (i.e. mesurable) $(\Omega, \mathcal{T})$ est une mesure positive $\mathbf{p}$ sur cet espace, de masse totale 1 ($\mathbf{p}(\Omega) = 1$). Le triplet $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbf{p})$ s'appelle un espace probabilisé.

En conclusion de ce paragraphe nous énonçons : "toute expérience aléatoire se décrit mathématiquement (au moins dans notre galaxie) par la donnée d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbf{p})$".

B.2 Exemples élémentaires

1. **Cas d'un ensemble fini** $\Omega = \{\omega_1, \cdots, \omega_n\}$.
   On peut toujours supposer, quitte à remplacer Ω par l'ensemble des atomes de $\mathcal{T}$ (on rappelle que cet ensemble engendre $\mathcal{T}$), que $\mathcal{T} = \mathcal{P}(\Omega)$. Il est clair alors que grâce à la propriété d'additivité (appelée ici "axiome des probabilités totales") définir $\mathbf{p}$ équivaut à définir une famille finie $(p_i)_{1 \leq i \leq n}$ de réels positifs tels que $\sum_{i=0}^{n} p_i = 1$, en posant : $\forall i = 1, \cdots, n \quad p_i = \mathbf{p}(\{\omega_i\})$.

Alors, en effet :

$$\forall A \in \mathcal{T} \quad \mathbf{p}(A) = \sum_{\{i;\omega_i \in A\}} p_i.$$

En particulier, lorsqu'il est question de tirage au hasard on sous entend que $\mathbf{p}$ est la "probabilité uniforme" définie par : $\forall i = 1, \cdots, n \quad p_i = \frac{1}{n} = \frac{1}{Card(\Omega)}$ de sorte que la formule précédente s'écrit

$$\forall A \in \mathcal{T} \quad \mathbf{p}(A) = \frac{Card(A)}{Card(\Omega)}.$$

A ce niveau, il est clair que le calcul des probabilités se ramène à un calcul de dénombrement.

2. **Cas d'un ensemble infini dénombrable** $\Omega = \{\omega_i, i \in \mathbb{N}\}$.
   La remarque faite à propos du cas fini reste valable : on peut prendre $\mathcal{T} = \mathcal{P}(\Omega)$. Toute probabilité $\mathbf{p}$ sur $(\Omega, \mathcal{T})$ peut être définie par la donnée de la famille dénombrable $\{\mathbf{p}(\omega); \omega \in \Omega\}$ de réels positifs (vérifiant bien sûr : $\sum_{\omega\in\Omega} \mathbf{p}(\omega) = 1$).
   On remarquera qu'il n'y a pas dans ce cas de probabilité uniforme possible.

   Exemple B.2.1 On joue à Pile ou Face et on décide de s'arrêter dès que l'on obtient Pile. Un choix possible pour Ω est l'ensemble des suites finies $(F, \cdots, F, P)$ auquel on adjoint la suite infinie constante $(F, \cdots, F, \cdots)$ en pensant aux éternels perdants (il y en a). On prend bien sûr $\mathcal{T} = \mathcal{P}(\Omega)$.
   Soient $p \in]0, 1[$ et $q = 1 - p$. Vérifier (le choix sera justifié plus loin) qu'on définit une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{T})$ en posant :

$$\mathbf{p}(\omega) = q^{n-1}p \quad si \quad \omega = (\underbrace{F, \cdots, F}_{n-1 \ termes}, P)$$

   et $\mathbf{p}(\{(F, \cdots, F, \cdots)\}) = 0$.

Quelques rappels sur les dénombrements :

1. Arrangements avec répétitions.

   Définition B.2.1 On appelle arrangement avec répétitions de p objets parmi n toute application de $[1, p]$ dans $[1, n]$ (i.e. toute suite finie de p éléments de $[1, n]$).

   L'ensemble des arrangements avec répétitions de p objets parmi n a pour cardinal n^p.

   Exemples : tirages avec remise dans une urne, codes de p chiffres, jeu du Master Mind etc...

2. Arrangements sans répétitions.

   Définition B.2.2 On appelle arrangement (sans répétitions) de p objets parmi n toute application **injective** de $[1, p]$ dans $[1, n]$ (i.e. toute suite finie de p éléments distincts de $[1, n]$). Si $p = n$, un arrangement est une permutation.

   L'ensemble des arrangements de p objets parmi n a pour cardinal $A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$ ($n!$ pour les permutations).

   Exemples : tirages sans remise dans une urne, tiercé etc...

3. Combinaisons.

Définition B.2.3 On appelle combinaison de p objets parmi n toute partie à p éléments d'un ensemble à n éléments. On peut aussi définir l'ensemble de ces combinaisons comme l'ensemble quotient de l'ensemble des injections de $[1,p]$ dans $[1,n]$ par la relation d'équivalence :

$$f\mathcal{R}g \Longleftrightarrow \exists s \in \mathcal{S}_p \quad g = f \circ s \quad (\Longleftrightarrow f([1,p]) = g([1,p]))$$

L'ensemble des combinaisons de p objets parmi n a pour cardinal $C_n^p = \dfrac{A_n^p}{p!} = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$.
Exemples : tirages simultanés dans une urne, grilles de Loto etc...
Généralisation : le nombre de partitions d'un ensemble à n éléments en r parties de cardinaux $p_1, \cdots, p_r$ (de somme n) est $\dfrac{n!}{p_1! \cdots p_r!}$. Une combinaison correspond à $r = 2,\ p_1 = p,\ p_2 = n-p$.

4. Combinaisons avec répétitions : voir l' exercice 1.

B.3 Probabilités conditionnelles, événements indépendants

Exemple introductif : on tire une carte au hasard dans un jeu de trente deux. On associe à cette expérience aléatoire l'espace $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbf{p})$ où Ω est un ensemble à 32 éléments, $\mathcal{T} = \mathcal{P}(\Omega)$ et $\mathbf{p}$ la probabilité uniforme. On considère les événements A : "tirer un as noir", B : "tirer un trèfle". On obtient immédiatement $\mathbf{p}(A) = \frac{1}{16}$ et $\mathbf{p}(B) = \frac{1}{4}$.
Supposons que l'on dispose de l'information : "la carte tirée est un as noir" ; il est raisonnable alors de prendre comme nouvel espace probabilisable $(A, \mathcal{P}(A))$ muni de la probabilité uniforme $\mathbf{p}_A$. L'événement "tirer un trèfle" se décrit maintenant par $B' = B \cap A$ et :

$$\mathbf{p}_A(B') = \frac{Card(B')}{Card(A)} = \frac{Card(B \cap A)}{Card(A)} = \frac{1}{2} = \frac{\mathbf{p}(B \cap A)}{\mathbf{p}(A)}.$$

Cette dernière égalité suggère aussi de garder l'espace $(\Omega, \mathbf{p}(\Omega))$ et de le munir d'une nouvelle probabilité "concentrée sur A", définie à partir de $\mathbf{p}$:

Définition B.3.1 Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbf{p})$ un espace probabilisé et A un événement de probabilité non nulle. On appelle probabilité conditionnelle d'un événement B "sachant A" ou "par rapport à A" le nombre $\mathbf{p}(B|A)$ défini par :

$$\mathbf{p}(B|A) = \frac{\mathbf{p}(B \cap A)}{\mathbf{p}(A)}. \tag{B.1}$$

Proposition B.3.1 *Soit* $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbf{p})$ *un espace probabilisé et* A *un événement de probabilité non nulle. L'application* $\mathbf{p}(.|A) \ : \ \mathcal{T} \to [0,1]$ *définie par (B.1) est une probabilité sur* $(\Omega, \mathcal{T})$.

Remarque B.3.1 La forme multiplicative de (B.1) est connue sous le nom de "formule des probabilités composées" :

$$si \quad \mathbf{p}(A) \neq 0, \quad \mathbf{p}(A \cap B) = \mathbf{p}(A)\mathbf{p}(B|A)$$

Lorsque $\mathbf{p}(A) \neq 0$ et $\mathbf{p}(B) \neq 0$ on notera que $\mathbf{p}(A \cap B) = \mathbf{p}(A)\mathbf{p}(B|A) = \mathbf{p}(B)\mathbf{p}(A|B)$; enfin on peut généraliser ceci à une famille de n événements :

$$\mathbf{p}(A_1 \cap \cdots \cap A_n) = \mathbf{p}(A_1) \times \mathbf{p}(A_2|A_1) \times \mathbf{p}(A_3|A_1 \cap A_2) \cdots \times \mathbf{p}(A_n|A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1})$$

si tout est correctement défini.

Théorème B.3.1 (Formule de Bayès ou de probabilité des causes)
Soient $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbf{p})$ *un espace probabilisé et* $(H_1, \cdots, H_n)$ *un système de constituants. On suppose que* $\forall i \in \{1, \cdots, n\} \quad \mathbf{p}(H_i) \neq 0$*, et soit* $A \in \mathcal{T}$ *tel que* $\mathbf{p}(A) \neq 0$*. Alors :*

$$\forall i \in \{1, \cdots, n\} \quad \mathbf{p}(H_i|A) = \frac{\mathbf{p}(H_i)\mathbf{p}(A|H_i)}{\sum_{k=1}^{n} \mathbf{p}(H_k)\mathbf{p}(A|H_k)}$$

Exemple B.3.1 Ω représente une “population”, $(H_1, \cdots, H_n)$ une partition de Ω en n sous-populations dont on connait les effectifs (on connait les $\mathbf{p}(H_k)$. On interroge une personne choisie au hasard dans Ω et on s'intéresse à l'événement A : “avoir lu les œuvres complètes de Frédéric Dard”. Supposons que l'on connaisse la probabilité de A dans chaque sous-population, i.e. les $\mathbf{p}(A|H_k), \quad k = 1 \cdots, n$ (grâce par exemple à une étude statistique) et que la personne déclare avoir lu tout F.D. Quelle est la probabilité qu'elle fasse partie de $H_1 =$ “l'U.S. Chambéry” ?

Lemme B.3.1 $\mathbf{p}(A) = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{p}(H_k)\mathbf{p}(A|H_k)$.

Preuve : les H_k formant une partition de Ω, on a $A = \bigcup_{k=1}^{n} (A \cap H_k)$ (réunion disjointe) d'où $\mathbf{p}(A) = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{p}(A \cap H_k)$, et il suffit alors d'appliquer la formule des probabilités composées. ■

Prouvons maintenant la formule de Bayès. D'après la remarque B.3.1 on a :

$$\mathbf{p}(A)\mathbf{p}(H_i|A) = \mathbf{p}(H_i)\mathbf{p}(A|H_i) = \mathbf{p}(A \cap H_i)$$

et donc $\mathbf{p}(H_i|A) = \dfrac{\mathbf{p}(H_i)\mathbf{p}(A|H_i)}{\mathbf{p}(A)}$. Le lemme précédent permet de conclure. ■

Définition B.3.2 Deux événements A et B sont (stochastiquement) indépendants si $\mathbf{p}(A \cap B) = \mathbf{p}(A)\mathbf{p}(B)$.

Remarque B.3.2 $\emptyset$ et Ω sont indépendants de tout autre événement .

Commentaire : si A et B sont indépendants et si $\mathbf{p}(A) \neq 0$ on a $\mathbf{p}(B|A) = \mathbf{p}(B)$. De façon intuitive cela signifie que la réalisation de A n'a pas d'influence sur la probabilité de réalisation de B.

Proposition B.3.2 *Si* A *et* B *sont indépendants, alors* $(A^c, B), \quad (A, B^c), \quad (A^c, B^c)$ *sont des couples d'événements indépendants.*

Preuve : traitons par exemple le premier cas : $\mathbf{p}(A^c \cap B) = \mathbf{p}(B) - \mathbf{p}(A \cap B) = \mathbf{p}(B) - \mathbf{p}(A)\mathbf{p}(B) = (1 - \mathbf{p}(A))\mathbf{p}(B) = \mathbf{p}(A^c)\mathbf{p}(B)$. ■

Définition B.3.3

1. n tribus $\mathcal{T}_1, \cdots, \mathcal{T}_n$ d'événements sont indépendantes si pour tout système $(A_1, \cdots, A_n)$ d'événements tel que $\forall i = 1, \cdots n \quad A_i \in \mathcal{T}_i$ on a

$$\mathbf{p}(\bigcap_{i=1}^{n} A_i) = \prod_{i=1}^{n} \mathbf{p}(A_i)$$

2. n événements $A_1, \cdots, A_n$ sont indépendants si les tribus $\sigma(A_1), \cdots, \sigma(A_n)$ qu'ils engendrent le sont (on rappelle que $\sigma(A_i) = \{\emptyset, A_i, A_i^c, \Omega\}$).

Remarque B.3.3

1. $A_1, \cdots, A_n$ sont indépendants si et seulement si $\mathbf{p}(B_1 \cap \cdots \cap B_n) = \mathbf{p}(B_1) \times \cdots \times \mathbf{p}(B_n)$ pour toute suite $B_1, \cdots, B_n$ telle que $\forall i = 1, \cdots, n \quad B_i \in \{\emptyset, A_i, A_i^c, \Omega\}$.
2. Grâce à la proposition précédente on retrouve la définition B.3.2 quand $n = 2$.
3. Une famille quelconque $(\mathcal{T}_i)_{i \in I}$ de tribus est indépendante si toute sous famille finie l'est, au sens de la définition précédente.

Application : expériences aléatoires indépendantes ; modélisation dans le cas discret.
On considère n espaces discrets $(\Omega_i, \mathcal{T}_i = \mathcal{P}(\Omega_i), \mathbf{p}_i)$ $i = 1, \cdots, n$ modélisant chacun une expérience aléatoire, les n expériences étant supposées sans interaction (c'est la notion d'indépendance a priori).
On choisit $\Omega = \prod_{i=1}^{n} \Omega_i = \{(\omega_1, \cdots, \omega_n);\ \forall i \quad \omega_i \in \Omega_i\}$ et $\mathcal{T} = \mathcal{P}(\Omega)$. Notons que la définition de $\mathcal{T}$ pose problème dans le cas non-discret : ceci sera examiné plus tard.
L'événement A_i lié à la i^{eme} expérience est représenté dans l'expérience globale par

$$A_i^* = \Omega_1 \times \cdots \times \Omega_{i-1} \times A_i \times \Omega_{i+1} \times \cdots \times \Omega_n = \{\omega \in \Omega;\ \omega_i \in A_i\}$$

et il est naturel de poser $\mathbf{p}(A_i^*) = \mathbf{p}_i(A_i)$.
Si en particulier $A_i = \{\omega_i\}$, on a $\{(\omega_1, \cdots, \omega_n)\} = \bigcap_{i=1}^{n} A_i^*$ et on traduit l'indépendance a priori par l'indépendance au sens de la définition B.3.3 en posant : $\mathbf{p}(\{(\omega_1, \cdots, \omega_n)\}) = \prod_{i=1}^{n} \mathbf{p}(A_i^*) = \prod_{i=1}^{n} \mathbf{p}_i(\{(\omega_i)\})$ et il est très simple alors de vérifier qu'on a bien défini ainsi une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{T})$.
L'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbf{p})$ que l'on vient de définir s'appelle l'espace produit des espaces discrets $(\Omega_i, \mathcal{T}_i, \mathbf{p}_i)$. En particulier, si les $(\Omega_i, \mathcal{T}_i, \mathbf{p}_i)$ sont identiques, l'espace obtenu modélise n répétitions indépendantes d'une même expérience aléatoire.

Exemple B.3.2 On appelle épreuve de Bernoulli toute épreuve à deux résultats. Ces résultats sont codés 1 et 0 avec pour probabilités respectives p et $q = 1 - p$. Si on répète n fois cette épreuve de façon indépendante, on prend comme espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbf{p})$ avec $\Omega = \{0, 1\}^n$, $\mathcal{T} = \mathcal{P}(\Omega)$ et $\mathbf{p}(\{(\omega_1, \cdots, \omega_n)\}) = p^k q^{n-k}$ où k est le nombre de 1 dans la suite $(\omega_1, \cdots, \omega_n)$.
On pourra aussi, de manière semblable, justifier le choix de la probabilité $\mathbf{p}$ dans l'exemple B.2.1.

Proposition B.3.3 (lemme de Borel-Cantelli)
Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbf{p})$ *un espace probabilisé et*$(A_n)_{n \geq 0}$ *une suite infinie d'événements .*

1. *Si* $\sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{p}(A_n) < +\infty$ *alors* $\mathbf{p}(\overline{\lim}\ A_n) = 0$ *; c'est à dire que presque sûrement un nombre fini de* A_n *au plus sont réalisés.*
2. **Si la suite $(\mathbf{A_n})$ est indépendante** *et si* $\sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{p}(A_n) = +\infty$ *alors* $\mathbf{p}(\overline{\lim}\ A_n) = 1$ *; c'est à dire que presque sûrement une infinité de* A_n *sont réalisés.*
En particulier, pour une suite indépendante d'événements , $\mathbf{p}(\overline{\lim}\ A_n) = 0$ *ou* 1 *(suivant que* $\sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{p}(A_n)$ *converge ou diverge).*

Preuve :

1. $\sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{p}(A_n) = \int \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{1}_{\mathrm{A_n}} \, d\mathbf{p}$ (chap.IV Cor.2.1), donc :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{p}(A_n) < +\infty \iff \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{1}_{\mathrm{A_n}} \in \mathrm{L}^1_+ \implies \sum_{\mathrm{n}=0}^{\infty} \mathbb{1}_{\mathrm{A_n}} < +\infty \quad \text{p.p.}$$

   or (voir T.D. 1) $\overline{\lim}\, A_n = \{\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{1}_{\mathrm{A_n}} = \infty\}$.

2. Posons $A = \overline{\lim}\, A_n$; il s'agit de montrer que, sous les hypothèses d'indépendance des A_n et de divergence de la série de terme général $\mathbf{p}(A_n)$, on a $\mathbf{p}(A^c) = 0$. Or $A^c = \bigcup_{p\geq 0} \bigcap_{n\geq p} A_n^c = \bigcup_{p\geq 0} F_p$ et il nous suffit d'établir que : $\forall p \geq 0 \quad \mathbf{p}(F_p) = 0$.
   L'indépendance des A_n entraine que : $\forall k \geq p \quad \mathbf{p}(\bigcap_{n=p}^{k} A_n^c) = \prod_{n=p}^{k} \mathbf{p}(A_n^c) = \prod_{n=p}^{k}(1 - \mathbf{p}(A_n))$, de plus $\forall k \geq p \quad F_p \subset \bigcap_{n=p}^{k} A_n^c$, donc $0 \leq \mathbf{p}(F_p) \leq \prod_{n=p}^{k}(1 - \mathbf{p}(A_n))$.
   Si l'un des $\mathbf{p}(A_n^c)$ est nul pour $n \geq p$, c'est fini ; sinon on a : $\ln \prod_{n=p}^{k}(1-\mathbf{p}(A_n)) = \sum_{n=p}^{k} \ln(1-\mathbf{p}(A_n))$.
   Comme $\ln(1 - x) \sim -x$ au voisinage de 0, la série $\sum_{n\geq p} \ln(1 - \mathbf{p}(A_n))$ est de même nature que la série $\sum_{n\geq p} -\mathbf{p}(A_n)$ c'est à dire diverge vers $-\infty$, donc $\prod_{n=p}^{k}(1 - \mathbf{p}(A_n)) \to 0$ quand $k \to +\infty$ d'où $\mathbf{p}(F_p) = 0$. ∎

B.4 Variables aléatoires réelles.

Définition B.4.1 Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbf{p})$ un espace probabilisé. Une variable aléatoire réelle est une application $\mathcal{T}$-mesurable $X : \Omega \to \mathbb{R}$.
On dit que X est discrète si $X(\Omega)$ est fini ou dénombrable, entière si $X(\Omega) \subset \mathbb{Z}$.

Définition B.4.2 (loi de probabilité) On appelle loi de probabilité d'une variable aléatoire réelle X la probabilité image P_X de $\mathbf{p}$ par X :

$$\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \quad P_X(B) = \mathbf{p}(X^{-1}(B)) = \mathbf{p}(X \in B).$$

Définition B.4.3 (fonction de répartition) On appelle fonction de répartition d'une variable aléatoire réelle X la fonction $F_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $F_X(t) = \mathbf{p}(\{X < t\}) = P_X(]-\infty, t[)$.

Proposition B.4.1

1. *La fonction de répartition F d'une variable aléatoire réelle X est croissante, continue à gauche, $\lim_{t\to-\infty} F(t) = 0$, $\lim_{t\to+\infty} F(t) = 1$, enfin :*

$$\forall a, b \in \mathbb{R} \quad t.q. \ a < b \quad P_X([a, b[) = \mathbf{p}(\{a \leq X < b\}) = F(b) - F(a).$$

2. *(réciproque admise) Soit $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction croissante, continue à gauche, de limites respectives 0 et 1 en $-\infty$ et $+\infty$. Il existe une unique probabilité P sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ telle que : $\forall t \in \mathbb{R} \quad F(t) = P(]-\infty, t[)$.*
   P est la mesure de Lebesgue-Stieljes associée à F.

Preuve : en exercice.

Définition B.4.4 (lois définies par une densité ou "absolument continues")
La variable aléatoire réelle $X : \Omega \to \mathbb{R}$ possède la densité $f \in \mathcal{M}_+$ (par rapport à la mesure de Lebesgue λ) si la mesure P_X est de densité f par rapport à λ, c'est à dire si :

$$\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \quad P_X(B) = \mathbf{p}(X \in B) = \int_B f \, d\lambda.$$

Remarque B.4.1

1. On a nécessairement $f \in L^1_+(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ et $\displaystyle\int f \, d\lambda = 1 \; (= P_X(\mathbb{R}))$.
2. La fonction de répartition s'exprime alors par : $F(t) = \displaystyle\int_{-\infty}^{t} f(x) \, d\lambda(x)$.

<u>**Exemples fondamentaux**</u> **:**

<u>**Lois discrètes**</u> **:** $X(\Omega) = \{x_1, \cdots, x_n\}$ (cas fini) ou $\{x_k;\ k \in \mathbb{N}\}$ (cas dénombrable).
Il suffit (voir paragraphe 2) de connaître les $p_k = P_X(x_k) = \mathbf{p}(\{X = x_k\})$: on a alors $P_X = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} p_k \, \delta_{x_k}$.

1. **Loi Uniforme** sur $\{x_1, \cdots, x_n\}$: $\forall k \in \{1 \cdots, n\} \quad p_k = \dfrac{1}{n}$ (équiprobabilité).
2. **Loi Binomiale** : $X(\Omega) = \{1, \cdots, n\}$; $\forall k \in \{1 \cdots, n\} \quad p_k = C_n^k p^k q^{n-k}$ avec $p \in]0, 1[$ et $q = 1-p$.
   On dit que X suit la loi binomiale de paramètres n et p, notée $\mathcal{B}(n, p)$ (vérifier qu'on a bien défini une probabilité).
   Cas type : on considère l'espace $(\Omega = \{0, 1\}^n, \mathcal{T}, \mathbf{p})$ associé à une suite de n épreuves de Bernoulli indépendantes, et la variable X définie par $\forall \omega = (\omega_1, \cdots, \omega_n) \in \Omega \quad X(\omega) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \omega_i$.
   X, qui donne le nombre de 1 dans la suite $(\omega_1, \cdots, \omega_n)$, suit la loi $\mathcal{B}(n, p)$. Noter que X s'écrit $X = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i$ où X_i est la projection de l'espace $\Omega = \{0, 1\}^n$ sur sa i^{eme} coordonnée (C'est une variable aléatoire réelle ; quelle est sa loi ?).
3. **Loi de Poisson** de paramètre λ (> 0) : $X(\Omega) = \mathbb{N}$; $\forall k \in \mathbb{N} \quad p_k = e^{-\lambda} \dfrac{\lambda^k}{k!}$.
   On vérifiera que ceci définit bien une probabilité ; cette loi s'applique par exemple au nombre d'appels téléphoniques journaliers aboutissant à un standard.
4. **Loi Géométrique** de paramètre p : $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$; $\forall k \in \mathbb{N} \quad p_k = pq^{k-1}$ avec $p \in]0, 1[$ et $q = 1-p$.
   On vérifiera comme précédemment que ceci définit bien une probabilité .

<u>**Lois définies par une densité**</u> **:**

1. **Loi Uniforme** (ou équidistribuée) sur $[a,b]$: $f = \frac{1}{b-a}\,\mathbb{1}_{[a,b]}$.
2. **Loi Exponentielle** de paramètre λ (>0) : $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}\,\mathbb{1}_{[0,+\infty[}(x)$.
3. **Loi de Cauchy** de paramètre σ (>0) : $f(x) = \frac{1}{\pi\sigma}\frac{1}{1+\frac{x^2}{\sigma^2}}$.
4. **Loi Normale** de paramètres m et σ $(\sigma > 0)$: $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2})$.

Le théorème qui suit est fondamental pour l'utilistion des lois de probabilités.

Théorème B.4.1 (de la loi image)
Soient $(\Omega,\mathcal{T},\mathbf{p})$ *un espace probabilisé,* $X : \Omega \to \mathbb{R}$ *une variable aléatoire réelle de loi* P_X *et* $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *une application mesurable. Alors :*

1. $\varphi \in \mathcal{M}_+ \Longrightarrow \int_\Omega \varphi \circ X\, d\mathbf{p} = \int_{\mathbb{R}} \varphi\, dP_X$,

2. $\varphi \circ X \in L^1(\Omega,\mathcal{T},\mathbf{p}) \Longleftrightarrow \varphi \in L^1(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}),P_X)$,

3. si $\varphi \in L^1(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}),P_X)$ *(ou* $\varphi \circ X \in L^1(\Omega,\mathcal{T},\mathbf{p})$*) alors* $\int_\Omega \varphi \circ X\, d\mathbf{p} = \int_{\mathbb{R}} \varphi\, dP_X$.

Preuve :
1. Soit $\varphi \in \mathcal{E}_+$ de forme canonique : $\varphi = \sum_{i=1}^{p} a_i \mathbb{1}_{A_i}$. On obtient successivement :

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi\, dP_X = \sum_{i=1}^{p} a_i P_X(A_i) = \sum_{i=1}^{p} a_i \mathbf{p}(X^{-1}(A_i)) = \sum_{i=1}^{p} a_i \int_\Omega \mathbb{1}_{X^{-1}(A_i)}\, d\mathbf{p} = \sum_{i=1}^{p} a_i \int_\Omega \mathbb{1}_{A_i} \circ X\, d\mathbf{p}$$

$$= \int_\Omega \Big(\sum_{i=1}^{p} a_i \mathbb{1}_{A_i}\Big) \circ X\, d\mathbf{p} = \int_\Omega \varphi \circ X\, d\mathbf{p}.$$

L'extension à $\mathcal{M}_+$ s'obtient par convergence monotone.
2. Soit $\varphi \in \mathcal{M}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ alors $|\varphi| \in \mathcal{M}_+$ et on a :

$$\int_\Omega |\varphi| \circ X\, d\mathbf{p} = \int_\Omega |\varphi \circ X|\, d\mathbf{p} = \int_{\mathbb{R}} |\varphi|\, dP_X$$

d'où la seconde assertion.
3. Si $\varphi \in L^1(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}),P_X)$, alors φ^+ et φ^- vérifient le point précédent (avec des intégrales finies) donc φ aussi. ■

Définition B.4.5 Soit $X \in L^1(\Omega,\mathcal{T},\mathbf{p})$. On appelle espérance (ou moment d'ordre 1) de X le réel $E(X) = \int_\Omega X\, d\mathbf{p} = \int_{\mathbb{R}} x\, dP_X$ (par application du th. B.4.1).
Si $E(X) = 0$ on dit que X est centrée.

Définition B.4.6 Soit $X \in L^2(\Omega,\mathcal{T},\mathbf{p})$. On appelle moment d'ordre 2 de X la quantité $E(X^2)$, et on appelle variance de X (ou moment centré d'ordre 2) la quantité :

$$V(X) = E[(X-m)^2] = \int_\Omega (X-m)^2\, d\mathbf{p} = \int_{\mathbb{R}} (x-m)^2\, dP_X$$

avec $m = E(X)$ (rappelons que $L^2(\Omega,\mathcal{T},\mathbf{p}) \subset L^1(\Omega,\mathcal{T},\mathbf{p})$).
On appelle écart type de X la quantité $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.

Remarque B.4.2 $\sigma(X)$, qui est une mesure de la dispertion de X autour de sa moyenne $E(X)$, s'exprime dans les mêmes unités que X (lorsqu'il y en a !).

Quelques propriétés :

Proposition B.4.2

1. *Soient $X, Y \in L^1(\Omega, \mathcal{T}, \mathbf{p})$, a etb réels ; alors $E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y)$.*
2. *Soient $X \in L^2$, $a, b \in \mathbb{R}$; alors*
   - $V(aX + b) = a^2 V(X)$
   - $\sigma(aX + b) = |a|\sigma(X)$
   - $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$
3. *$X \in L^2 \iff X$ possède une espérance et une variance.*

Preuve : aucune difficulté.

Cas des variables discrètes :

– $X(\Omega) = \{x_1, \cdots, x_n\}$, $p_k = \mathbf{p}(X = x_k)$, $\quad k = 1, \cdots, n$.
On a alors $P_X = \sum_{k=1}^{n} p_k\, \delta_{x_k}$ d'où (th.B.4.1 et T.D. 4) :

$$m = E(X) = \int_{\mathbb{R}} x\, dP_X = \sum_{k=1}^{n} p_k x_k,$$

$$V(X) = \int_{\mathbb{R}} (x - m)^2\, dP_X = \sum_{k=1}^{n} p_k (x_k - m)^2 = \underbrace{\sum_{k=1}^{n} p_k x_k^2}_{E(X)^2} - \underbrace{m^2}_{E(X)^2}.$$

– $X(\Omega) = (x_k)_{k \in \mathbb{N}}$: remplacer les sommes par des séries.

On retrouve bien sûr les définitions élémentaires. Voir les exemples en exercices.

Proposition B.4.3 *Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbf{p})$ un espace probabilisé.*

1. [**Inégalité de Markov**] *Soit Y une variable aléatoire réelle positive d'espérance $m < +\infty$. Alors :*
$$\forall \lambda > 0 \quad \mathbf{p}(\{Y \geq \lambda m\}) \leq \frac{1}{\lambda}.$$
2. [**Inégalité de Bienaymé-Tchebichev**] *Soient $X \in L^2$, $m = E(X)$ et $\sigma = \sigma(X)$. Alors :*
$$\forall k > 0 \quad \mathbf{p}(\{|X - m| \geq k\sigma\}) \leq \frac{1}{k^2}.$$

Preuve :

1. D'après le lemme 4.1 du chapitre IV :
$$\mathbf{p}(\{Y \geq \lambda m\}) \leq \frac{1}{\lambda m} \underbrace{\int_{\Omega} Y\, d\mathbf{p}}_{m} = \frac{1}{\lambda}.$$

2. On applique l'inégalité de Markov à la variable $Y = (X - m)^2$ avec $\lambda = k^2$; en effet on a alors $E(Y) = \sigma^2$ et donc :
$$\mathbf{p}(\{|X - m| \geq k\sigma\}) = \mathbf{p}(\{Y \geq k^2\sigma^2\}) \leq \frac{1}{k^2}.$$

■

Commentaire : L'inégalité de Bienaymé-Tchebichev est célèbre mais a un intérêt plus théorique que pratique car elle est peu précise. On remarquera qu'elle ne donne aucune information pour $k \leq 1$.

B.5 Exercices

Exercice B.5.1 Considérons un ensemble $E = \{x_1, \cdots, x_n\}$ à n éléments dans lequel on effectue p tirages avec remise. Si on décide de ne pas tenir compte de l'ordre des tirages, le résultat de cette expérience aléatoire peut s'écrire sous la forme d'une suite $(a_1, \cdots, a_n)$ d'entiers de somme p, a_i étant le nombre d'occurences de l'élément x_i. Remarquons que si $a_i \in \{0, 1\}$ pour tout i, alors on définit de cette manière une combinaison de p éléments (i.e. une partie à p éléments de E).
Définition : on appelle combinaison avec répétitions de p éléments parmi n tout n-uplet $(a_1, \cdots, a_n)$ d'entiers de somme p. Leur nombre sera noté Γ_n^p.

1. Calculer Γ_n^p en s'aidant du schéma suivant (où $n = 6,\ p = 5$) :

$*$		$**$	$*$	$*$	
1	2	3	4	5	6

2. On jette 3 dés indiscernables. Quel est le nombre de configurations possibles ?
3. Quel est le nombre maximum de monômes de degré 4 dans un polynôme de 3 variables ?

Exercice B.5.2 On considère que la radiographie des poumons est un test de dépistage d'une maladie M efficace à 99%, c'est à dire que les probabilités que le test soit positif alors que l'on sait être bien portant, ou négatif alors que l'on est malade sont égales à $0,01$. On suppose également que dans la population concernée $0,5\%$ des individus ont la maladie M.
Quelle est la probabilité qu'un individu déclaré sain à la suite d'un test négatif soit en fait malade ?

Exercice B.5.3 Soient $(\Omega, \mathcal{T}, p)$ un espace probabilisé, $X \ : \ \Omega \to \mathbb{R}$ une variable aléatoire réelle , P_X sa loi de ***Preuve :*** et F sa fonction de répartition. Montrer que F est continue à gauche en tout point, continue en a si et seulement si $P_X(\{a\}) = 0$. On suppose que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$; montrer que $\mathcal{P}_X$ possède une densité que l'on précisera.

Exercice B.5.4 Soient $(\Omega, \mathcal{T}, p)$ un espace probabilisé et X une variable aléatoire réelle sur $(\Omega, \mathcal{T})$.

1. On prend pour X la variable aléatoire nulle. Calculer la loi de probabilité P_X de X. En déduire que la connaissance de P_X ne permet pas en général de déterminer la probabilité p sur $(\Omega, \mathcal{T})$.
2. Montrer que P_X détermine p de manière unique si et seulement si la tribu engendrée par X est égale à $\mathcal{T}$.

Exercice B.5.5 Soient $(\Omega, \mathcal{T}, p)$ un espace probabilisé et X une variable aléatoire réelle à valeurs dans $\mathbb{N}$. On pose $p_n = p(\{X = n\})$, $n \geq 0$, et on appelle alors **fonction génératrice de X** la fonction G_X définie par $G_X(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n\, x^n$, sous réserve de convergence de la série.

1. Montrer que G_X est au moins définie sur $[-1, 1]$ dans tous les cas, sur $\mathbb{R}$ si X ne prend qu'un nombre fini de valeurs.
2. On suppose désormais que G_X admet $]-R, R[$ comme intervalle de convergence avec $R > 1$ (ou $\mathbb{R}$). Montrer que X admet une espérance et que $E(X) = G'_X(1)$.
3. Montrer de même que $X(X-1)$ admet une espérance, en déduire que X admet une variance que l'on déterminera.
4. **Application :** traiter les cas des lois binomiale de pramètres n et p, de Poisson de paramètre λ, géométrique de paramètre p.

Exercice B.5.6 Soient $(\Omega, \mathcal{T})$ un espace probabilisé et X une variable aléatoire de $(\Omega, \mathcal{T})$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, de loi de probabilité P_X. Calculer l'espérance et la variance de la variable aléatoire X dans les cas suivants :

1. P_X est la loi uniforme sur $[a, b]$ $(a, b \in \mathbb{R},\ a < b$;
2. P_X est la loi exponentielle de paramètre λ ;
3. P_X est la loi de Gauss.

Exercice B.5.7 L'arracheur de dents arrache les dents de ses patients au hasard. Quand ils arrivent, les clients ont une dent malade parmi les trente deux qu'ils possèdent encore. On considère les dix premiers clients en notant X le nombre total de dents malades extraites à bon escient.

1. Déterminer la loi de la variable aléatoire réelle X. Calculer la probabilité qu'aucun des patients n'y laisse la dent malade.
2. Combien doit-il traiter de personnes pour extraire au moins une dent malade avec une probabilité supérieure à $0,6$?

Le dernier client se laisse arracher les dents une à une tant que la dent malade n'a pas été extraite. On note Y le nombre de dents saines auquelles ce malheureux doit renoncer.

3. Déterminer la loi de la variable aléatoire réelle X. Calculer la probabilité qu'il reparte entièrement édenté.
4. Calculer $E(Y)$ et $\sigma(Y)$.

Exercice B.5.8 (Problème de Buffon) Sur un parquet "infini" dont les lattes ont une largeur $2d$, on laisse tomber au hasard une aiguille de longueur 2ℓ avec $\ell < d$, et on veut estimer la probabilité de l'événement A : "l'aiguille rencontre un interstice". On appelle (Ω, T, p) l'espace probabilisé associé à ce problème.

On considère :

– que la position x du centre de l'aiguille par rapport à l'interstice le plus proche et dans la direction $x'x$ perpendiculaire aux lattes est une variable aléatoire uniformément distribuée sur $[-d, d]$,
– que l'angle orienté θ que fait l'aiguille avec l'interstice est une variable aléatoire uniformément distribuée sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

1. Montrer que l'événement A "correspond" (on précisera en quel sens) à la partie P_A du plan (x, θ) : $P_A = \{(x, \theta) \in [-d, d] \times [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]; |x| < \ell \sin \theta\}$. Représenter graphiquement P_A.
2. Montrer que $p(A) = \frac{2\ell}{\pi d}$.
3. On suppose maintenant que $\ell = \frac{d}{2}$. On lance n fois l'aiguille : quelle est la loi de la variable aléatoire Z_n, qui représente le nombre de rencontres au cours des n lancers.

   Soit F_n la fréquence des rencontres avec une interstice au cours des n lancers ; estimer, à l'aide de l'inégalité de Bienaymé Tchebicheff, le nombre de lancers permettant d'obtenir $|F - \frac{1}{\pi}| \leq 0,05$ avec une probabilité d'au moins 0,99.

Annexe C

Probabilités (II)

C.1 Variables aléatoires vectorielles

Dans toute la suite, $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbf{p})$ désigne un espace probabilisé .

Définition C.1.1 Une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ est une application $\mathcal{T}$-mesurable $X : \Omega \to \mathbb{R}^n$. On appelle loi de probabilité de X la probabilité image de $\mathbf{p}$ par X : c'est une probabilité sur $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$ qu'on notera P_X.

Remarque C.1.1 On peut bien sûr définir des variables aléatoires à valeurs dans un espace mesuré $(E, \mathcal{S})$ quelconque.

Définition C.1.2 Soit $X = (X_1, \cdots, X_n) : \Omega \to \mathbb{R}^n$ une variable aléatoire . La loi de X, P_X, est dite aussi loi conjointe du n-uplet de variables aléatoires réelles $(X_1, \cdots, X_n)$ et P_{X_i} est la $i^{ème}$ probabilité marginale de X (dans les tableaux ci-dessous, on les lit dans les marges).

Remarque C.1.2 Soit $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$: on a $P_{X_i}(B) = \mathbf{p}(X_i^{-1}(B)) = P_X(\mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R} \times B \times \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R})$ (B est le $i^{ème}$ facteur), de sorte que la donnée de la loi conjointe détermine les lois marginale. La réciproque est fausse comme on peut le constater sur l'exemple suivant (mêmes lois marginales, lois conjointes distinctes).

$X_2 \backslash X_1$	-1	1	loi de X_2
-1	1/2	0	1/2
1	0	1/2	1/2
loi de X_1	1/2	1/2	

$X_2 \backslash X_1$	-1	1	loi de X_2
-1	1/4	1/4	1/2
1	1/4	1/4	1/2
loi de X_1	1/2	1/2	

Définition C.1.3 (lois définies par une densité)
La variable aléatoire $X : \Omega \to \mathbb{R}^n$ possède la densité $f \in L^1_+$ (par rapport à la mesure de Lebesgue λ) si la mesure P_X est de densité f par rapport à λ, c'est à dire si :

$$\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \quad P_X(B) = \mathbf{p}(X \in B) = \int_B f \, d\lambda = \int_B f(x_1, \cdots, x_n) \, dx_1 \cdots dx_n.$$

Théorème C.1.1 (de la loi image)
Soient $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbf{p})$ *un espace probabilisé,* $X : \Omega \to \mathbb{R}^n$ *une variable aléatoire de loi* P_X *et* $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *une application mesurable. Alors :*

1. $\varphi \in \mathcal{M}_+ \Longrightarrow \int_\Omega \varphi \circ X \, d\mathbf{p} = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi \, dP_X$,
2. $\varphi \circ X \in L^1(\Omega, \mathcal{T}, \mathbf{p}) \Longleftrightarrow \varphi \in L^1(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n), P_X)$,
3. *si* $\varphi \in L^1(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}), P_X)$ *(ou* $\varphi \circ X \in L^1(\Omega, \mathcal{T}, \mathbf{p})$*) alors* $\int_\Omega \varphi \circ X \, d\mathbf{p} = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi \, dP_X$.

Preuve : comme pour le cas d'une variable aléatoire réelle . Voir aussi les exercices du chapitre VII.

C.2 Espérance, variance

$(\Omega, \mathcal{T}, \mathbf{p})$ désigne un espace probabilisé et $X = (X_1, \cdots, X_n) : \Omega \to \mathbb{R}^n$ une variable aléatoire .

Définition C.2.1 Si pour tout $i = 1 \cdots n$ X_i est intégrable (i.e. possède une espérance $E(X_i)$) alors le vecteur $E(X) = \begin{pmatrix} E(X_1) \\ . \\ . \\ E(X_n) \end{pmatrix}$ s'appelle espérance de X.

Définition C.2.2 Soit $X = (X_1, \cdots, X_n)$ une variable aléatoire telle que $X_i \in L^2$ pour tout $i = 1 \cdots n$. On appelle covariance des variables X_i et X_j le réel :

$$C_{ij} = \operatorname{cov}(X_i, X_j) \stackrel{déf}{=} E\left((X_i - E(X_i))(X_j - E(X_j))\right).$$

La matrice $\operatorname{Cov}(C_{ij})_{i,j}$ s'appelle matrice de covariance de X.

On a clairement $C_{ij} = C_{ji}$, de plus on remarque que :
– $\operatorname{cov}(X_i, X_j) = E(X_i X_j) - E(X_i)E(X_j)$,
– $\operatorname{cov}(X_i, X_i) = V(X_i)$.
Enfin :

Proposition C.2.1 *La matrice de covariance est la matrice d'une forme quadratique positive sur* $\mathbb{R}^n$ *(appelée variance de* X*).*

Preuve : on a déjà remarqué la symétrie, d'autre part :

$$\begin{aligned} \forall (\xi_1, \cdots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n \qquad \sum_{1 \le i,j \le n} C_{ij} \, \xi_i \, \xi_j &= E\left(\sum_{i,j} \xi_i \, (X_i - EX_i) \, \xi_j \, (X_j - EX_j)\right) \\ &= E\left(\sum_{i=1}^n \xi_i \, (X_i - EX_i)\right)^2 \ge 0 \end{aligned}$$

■

Exemple : variable aléatoire gaussienne.
$X : \Omega \to \mathbb{R}^n$ suit une loi gaussienne canonique si P_X est définie par une densité de la forme :

$$f(x_1, \cdots, x_n) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2} \sigma_1 \cdots \sigma_n} \exp\left\{ -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{(x_i - m_i)^2}{\sigma_i^2} \right\}$$

où $\sigma_1 \cdots \sigma_n > 0$ et $m_1, \cdots, m_n \in \mathbb{R}$. Alors, par application du théorème de Fubini on obtient :

$$E(X) = \begin{pmatrix} m_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ m_n \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathrm{Cov}(X) = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sigma_n^2 \end{pmatrix}$$

C.3 Indépendance de variables aléatoires

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbf{p})$ un espace probabilisé et soient $(E_i, \mathcal{T}_i)$, $1 \leq i \leq n$ des espaces probabilisables (par exemple $E_i = \mathbb{R}^{n_i}$ et $\mathcal{T}_i = \mathcal{B}(\mathbb{R}^{n_i})$).

Définition C.3.1 Des variables aléatoires $X_1, \cdots, X_n$ définies sur Ω et à valeurs respectivement dans $E_1, \cdots, E_n$ sont indépendantes si les tribus qu'elles engendrent sont indépendantes.

On a le critère fondamental suivant :

Théorème C.3.1 *Les variables aléatoires $X_1, \cdots, X_n$ (voir ci-dessus) sont indépendantes si et seulement si la loi conjointe de $(X_1, \cdots, X_n)$ dans $(E_1 \times \cdots \times E_n, \mathcal{T}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{T}_n)$ est égale au produit des lois marginales, i.e. :*

$$P_{(X_1, \cdots, X_n)} = P_{X_1} \otimes \cdots \otimes P_{X_n}.$$

Preuve : il suffit de vérifier que pour tout pavé $B_1 \times \cdots B_n$ ($B_i \in \mathcal{T}_i$ pour $i = 1 \cdots n$) on a :

$$P_{(X_1, \cdots, X_n)}(B_1 \times \cdots B_n) = P_{X_1}(B_1) \cdots P_{X_n}(B_n)$$

ce qui s'écrit aussi :

$$\mathbf{p}(\{X_1 \in B_1\} \cap \cdots \cap \{X_n \in B_n\}) = \mathbf{p}(\{X_1 \in B_1\}) \cdots \mathbf{p}(\{X_n \in B_n\})$$

or cette dernière propriété vérifiée pour tout pavé équivaut à l'indépendance des tribus. ■

Corollaire C.3.1 *Soient $X_1, \cdots, X_n$ des variables aléatoires réelles de densités respectives $f_1, \cdots, f_n$ par rapport à la mesure de Lebesgue. Ces variables sont indépendantes si et seulement si la variable aléatoire $X = (X_, \cdots, X_n)$ a une loi de densité $f = f_1 \otimes \cdots \otimes f_n$ (c'est à dire : $f(x_1, \cdots, x_n) = f_1(x_1) \cdots f_n(x_n)$).*

Preuve : $X_1, \cdots, X_n$ sont indépendantes si et seulement si pour tout pavé $B_1 \times \cdots B_n$ on a :

$$\begin{aligned} \int_{B_1 \times \cdots B_n} dP_X &= \int_{B_1 \times \cdots B_n} dP_{X_1} \otimes \cdots \otimes dP_{X_n} \\ &= \int_{B_1} f_1(x_1)\, dx_1 \cdots \int_{B_n} f_n(x_n)\, dx_n \\ &= \int_{B_1 \times \cdots B_n} f_1(x_1) \cdots f_n(x_n)\, dx_1 \cdots dx_n \end{aligned}$$

ce qui permet de conclure. ■

Par simple application de la propriété d'associativité du produit des mesures on obtient :

Corollaire C.3.2 *Soient* $X_1, \cdots, X_n$ *des variables aléatoires indépendantes et* p *un entier tel que* $1 \leq p \leq n-1$*, alors les variables aléatoires* $Y = (X_1, \cdots, X_p)$ *et* $Z = (X_{p+1}, \cdots, X_n)$ *sont indépendantes.*

Le résultat suivant est très utile en pratique :

Proposition C.3.1 *Pour* $i = 1 \cdots n$ *soient* $X_i : (\Omega, \mathcal{T}) \to (E_i, \mathcal{T}_i)$ *une variable aléatoire et* $g_i : (E_i, \mathcal{T}_i) \to (F_i, \mathcal{S}_i)$ *une application mesurable. Si* $X_1, \cdots, X_n$ *sont indépendantes alors* $g_1(X_1), \cdots, g_n(X_n)$ *sont indépendantes.*

Preuve : il suffit de remarquer que $\tau(g_i(X_i)) \subset \tau(X_i)$ et d'appliquer la définition. ■

Exemple : si X_1, X_2, X_3, X_4 sont des variables aléatoires réelles indépendantes, alors $X_1 + X_2$ et $X_3^2 X_4$ sont des variables aléatoires réelles indépendantes (appliquer la proposition aux variables indépendantes $Y_1 = (X_1, X_2)$ et $Y_2 = (X_3, X_4)$ et aux fonctions $g_1(u, v) = u + v$, $g_2(u, v) = u^2 v$).

C.4 Somme et produit de v.a.r. indépendantes

Proposition C.4.1 *Soient* X_1 *et* X_2 *des variables aléatoires réelles indépendantes et intégrables, alors* $X_1 X_2$ *est intégrable et* $E(X_1 X_2) = E(X_1) E(X_2)$.

Preuve : grâce à l'indépendance et au théorème de Fubini-Tonelli on a :

$$\begin{aligned} E(\mid X_1 X_2 \mid) &= \int_{\mathbb{R}^2} \mid x_1 x_2 \mid \, dP_{(X_1, X_2)} \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} \mid x_1 x_2 \mid \, d(P_{X_1} \otimes P_{X_2}) \\ &= \int_{\mathbb{R}} \mid x_1 \mid \, dP_{X_1} \int_{\mathbb{R}} \mid x_2 \mid \, dP_{X_2} < \infty \end{aligned}$$

donc $X_1 X_2 \in L^1$ et le même calcul, sans les valeurs absolues, donne le résultat (Fubini). ■

Corollaire C.4.1 *Soient* $X_1, \cdots, X_n$ *des variables aléatoires réelles deux à deux indépendantes et de variances finies, alors la matrice des covariances est diagonale.*

Preuve : pour $i \neq j$: $\mathrm{cov}(X_i, X_j) = E(X_i X_j) - E(X_i) E(X_j) = 0$. ■

Attention : la réciproque est fausse.

Corollaire C.4.2

Soient $X_1, \cdots, X_n$ *des variables aléatoires réelles deux à deux indépendantes, alors :*

$$V(X_1 + \cdots + X_n) = V(X_1) + \cdots + V(X_n).$$

Preuve :

$$\begin{aligned} V(X_1 + \cdots + X_n) = E\left\{ \left(\sum_{i=1}^{n} (X_i - E(X_i)) \right)^2 \right\} &= \sum_{i,j} E\left((X_i - E(X_i))(X_j - E(X_j)) \right) \\ &= \sum_{i,j} E(X_i - E(X_i))\, E(X_j - E(X_j)) \\ &= \sum_{i,j} \mathrm{cov}(X_i, X_j) = \sum_{i=1}^{n} V(X_i). \end{aligned}$$

■

Proposition C.4.2 *Soit* $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbf{p})$ *un espace probabilisé et soient* $X,\ Y\ :\ \Omega \to \mathbb{R}^d$ *des variables aléatoires indépendantes. Alors* $X+Y$ *a pour loi* $P_{X+Y} = P_X \star P_Y$.

Preuve : on a successivement, pour $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$) :

$$P_{X+Y}(A) = \mathbf{p}(\{X+Y \in A\}) = \mathbf{p}(\{(X,Y) \in S^{-1}(A)\}) = P_{(X,Y)}(S^{-1}(A))$$

L'indépendance de X et Y se traduit par $P_{(X,Y)} = P_X \otimes P_Y$, donc :

$$P_{X+Y}(A) = (P_X \otimes P_Y)(\{X+Y \in A\}) \overset{déf}{=} (P_X \star P_Y)(A).$$

■

Corollaire C.4.3 *Si les variables aléatoires* X *et* Y *ont des lois de densités respectives* f *et* g *par rapport à la mesure de Lebesgue, alors* $X+Y$ *a une loi de densité* $f \star g$ *par rapport à cette même mesure.*

Remarque C.4.1 Ces résultats se généralisent sans peine au cas d'une somme de n variables aléatoires réelles indépendantes.

C.5 Transformée de Fourier des mesures bornées. Fonctions caractéristiques.

NB : On se limite au cas des mesures positives bornées (en vue des probabilités).
Comme la fonction $x \to e^{-2i\pi t \cdot x}$ est continue et bornée sur $\mathbb{R}^d$, elle est intégrable par rapport à toute mesure bornée, ce qui justifie la définition suivante :

Définition C.5.1 La transformée de Fourier d'une mesure positive bornée μ est la fonction $\hat{\mu}$ définie sur $\mathbb{R}^d$ par $\hat{\mu}(t) = \displaystyle\int e^{-2i\pi t \cdot x}\, d\mu(x)$.

Définition C.5.2 Soit X une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{T}, p)$ à valeurs dans $\mathbb{R}^d$. On appelle fonction caractéristique de X la fonction définie sur $\mathbb{R}^d$ par $\varphi_X(t) = E(e^{itX}) = \displaystyle\int e^{itx}\, dP_X(x)$; autrement dit $\varphi_X = \widehat{P_X}$ pour la transformée de Fourier "probabiliste".

Remarque C.5.1 Si P_X a pour densité f par rapport à la mesure de Lebesgue alors :

$$\varphi_X(t) = \int e^{itx}\, f(x)\, dx = \hat{f}(t),$$

en particulier $\varphi_X \in \mathcal{C}_0$

Proposition C.5.1 *Soit* μ *une mesure positive bornée sur* $\mathbb{R}^d$*, alors* $\hat{\mu}$ *est uniformément continue et bornée sur* $\mathbb{R}^d$*. Même résultat pour la fonction caractéristique d'une variable aléatoire .*

Preuve : $\hat{\mu}$ est bornée car $|\hat{\mu}(t)| \leq \mu(\mathbb{R}^d) = \hat{\mu}(0)$. D'autre part, pour s et t dans $\mathbb{R}^d$:

$$\begin{aligned} |\hat{\mu}(t) - \hat{\mu}(s)| &\leq \int |e^{-2i\pi t\cdot x} - e^{-2i\pi s\cdot x}|\, d\mu(x) \\ &\leq \int \min(2, 2\pi|t-s|)\, d\mu(x). \end{aligned}$$

Donc, si $\varepsilon > 0$ est donné :

$$|t-s| \leq \delta = \frac{\varepsilon}{2\pi\mu(\mathbb{R}^d)} \Longrightarrow |\hat{\mu}(t) - \hat{\mu}(s)| \leq \varepsilon.$$

$\blacksquare$

Proposition C.5.2 *Soient μ_1 et μ_2 des mesures positives bornées sur $\mathbb{R}^d$, alors $\widehat{\mu_1 \star \mu_2} = \hat{\mu_1} \cdot \hat{\mu_2}$ (idem avec la T.F. "probabiliste").*

Preuve : exercice facile.

Corollaire C.5.1 *Si $X_1, \cdots, X_n : \Omega \to \mathbb{R}^d$ sont des variables aléatoires indépendantes, alors :*

$$\varphi_{(X_1+\cdots+X_n)} = \varphi_{X_1} \cdots \varphi_{X_n}.$$

Preuve : on a en effet $P_{(X_1+\cdots+X_n)} = P_{X_1} * \cdots * P_{X_n}$. $\blacksquare$

On a pour les fonctions caractéristiques l'analogue des résultats du chapitre VIII (section "différentiabilité"). Par exemple, pour les variables aléatoires réelles :

Proposition C.5.3 *Soient $k \in \mathbb{N}^*$ et X une variable aléatoire réelle telle que les k premiers moments existent i.e. telle que $\int_{\mathbb{R}} |\, x^p \,|\ dP_X(x) < \infty$ pour tout $p \leq k$. Alors $\varphi_X \in \mathcal{C}^k$ et :*

$$\forall p \leq k \qquad \varphi_X^{(p)}(t) = i^p \int_{\mathbb{R}} x^p\, e^{itx}\, dP_X(x).$$

En particulier : $\varphi_X^{(p)}(0) = i^p\, M_p$ où M_p est le moment d'ordre p.

Proposition C.5.4 *Soient $k \in \mathbb{N}^*$ et X une variable aléatoire réelle ayant une loi de densité f de classe $\mathcal{C}^k$ sur $\mathbb{R}$ telle que $\forall p \leq k \quad f^p \in L^1$, alors (avec la T.F. probabiliste) :*

$$\forall p \leq k \quad \forall t \in \mathbb{R}^d \qquad \widehat{f^p}(t) = (-i)^p\, t^p\, \varphi_X(t).$$

Il en résulte en particulier que :

$$\lim_{t\to\pm\infty} t^k\, \varphi_X(t) = 0.$$

Voir le cours de probabilités pour d'autes propriétés.

C.6 Modes de convergence des suites de variables aléatoires réelles

Pour une suite $(X_n)_{n\geq 0}$ de variables aléatoires réelles définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbf{p})$ on dispose déjà des modes de convergence étudiés en intégration, avec un vocabulaire spécifique aux probabilités :

– La convergence presque sûre, qui correspond à la convergence presque partout. On écrit : $X_n \to X$ p.s. .

– La convergence en probabilité, ou convergence stochastique, qui correspond à la convergence en mesure. On écrit $X_n \to X$ st. :

$$X_n \to X \text{ st. } \Longleftrightarrow \forall \delta > 0 \quad \lim_{n\to\infty} \mathbf{p}\left(\{\mid X_n - X \mid \geq \delta\}\right) = 0.$$

– La convergence en moyenne ou convergence dans L^1 : $\lim_{n\to\infty} \int_\Omega \mid X_n - X \mid \, dp = 0$,
et plus généralement la convergence en moyenne d'ordre p ou convergence dans L^p $(1 \leq p < \infty)$: $\lim_{n\to\infty} \int_\Omega \mid X_n - X \mid^p \, dp = 0$.

On peut alors reprendre les résultats déjà connus en tenant compte du fait que la mesure est finie. Outre le théorème de convergence dominée et sa réciproque partielle rappelons ainsi que :

Proposition C.6.1 *La convergence presque sûre entraine la convergence en probabilité.*

Proposition C.6.2 *La convergence en probabilité entraine la convergence presque sûre pour au moins une suite extraite.*

Proposition C.6.3 *La convergence en moyenne entraine le convergence en probabilité.*

La réciproque de ce dernier résultat est fausse. Il faut ajouter une hypothèse supplémentaire : l'équi-intégrabilité :

Définition C.6.1 Une suite $(X_n)_{n\geq 0})$ de variables aléatoires est équi-intégrable si :

(i) $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall A \in \mathcal{T} \quad \forall n \in \mathbb{N} \qquad \mathbf{p}(A) \leq \delta \Longrightarrow \int_A \mid X_n \mid \, d\mathbf{p} \leq \varepsilon$ ("équicontinuité"),

(ii) $(X_n)_{n\geq 0})$ est bornée dans L^1, i.e. : $\sup_{n\geq 0} \parallel X_n \parallel_1 < +\infty$.

Remarque C.6.1 On montre que la suite $(X_n)_{n\geq 0}$ est équi-intégrable si et seulement si elle vérifie la condition suivante (qui sert de définition chez certains auteurs) :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists a > 0 \quad \forall n \geq 0 \quad \int_{|X_n|>a} |X_n| \, d\mathbf{p} \leq \varepsilon.$$

Proposition C.6.4 *Soit $(X_n)_{n\geq 0})$ une suite de variables aléatoires sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, p)$.*

1. *Si la suite $(X_n)_{n\geq 0}$ converge vers X dans L^1, alors elle est équi-intégrable.*
2. *Si la suite $(X_n)_{n\geq 0}$ converge en probabilité vers X et est équi-intégrable, alors elle converge vers X dans L^1.*

Nous allons introduire pour finir la notion de convergence en loi, plus faible que les précédentes (voir diagramme récapitulatif) et équivalente, comme on le verra plus loin, à la convergence simple des fonctions caractéristiques.
Nous désignerons par $\mathcal{C}_0$ l'espace $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ muni de sa norme usuelle (pour laquelle c'est un espace de Banach) et par M_b^+ l'ensemble des mesures positives bornées sur $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$.
Pour toute mesure $m \in M_b^+$, l'application $T_m\ :\ f \longrightarrow \int f\,dm$ est une forme linéaire continue et positive ($\forall f \geq 0 \quad T(f) \geq 0$) sur $\mathcal{C}_0$. D'autre part il existe un résultat très important en analyse fonctionnelle :

Proposition C.6.5 *(Riesz) Soit T une forme linéaire positive sur $\mathcal{C}_0$. T est continue et il existe une unique mesure positive bornée (i.e. $m \in M_b^+$) telle que $T(f) = \int f\,dm$ pour tout $f \in \mathcal{C}_0$. De plus $\| T \| = m(X)$.*

M_b^+ peut donc être identifié à un sous ensemble de $\mathcal{C}_0'$, dual topologique de $\mathcal{C}_0$. A ce titre on dispose de la notion de convergence dite "faible-*" (étudiée dans le cours d'analyse fonctionnelle de maîtrise) que l'on particularise dans notre contexte par :

Définition C.6.2 Une suite $(\mu_n)_{n\geq 0}$ de mesures positives bornées sur $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$ converge faiblement vers une mesure μ si :

$$\forall f \in \mathcal{C}_0 \quad \int f\,d\mu_n \to \int f\,d\mu. \tag{C.1}$$

Le problème est que l'ensemble des probabilités n'est pas fermé dans M_b^+ pour la convergence faible : on vérifie par exemple immédiatement (en dimension 1) que la suite $(\delta_n)_{n\geq 0}$ des masses de Dirac en n converge faiblement vers la mesure nulle. C'est pourquoi on introduit une notion plus restrictive :

Définition C.6.3 Une suite $(\mu_n)_{n\geq 0}$ de mesures positives bornées sur $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$ converge étroitement vers une mesure μ si :

(i) $(\mu_n)_{n\geq 0}$ converge faiblement vers μ,

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty} \mu_n(\mathbb{R}) = \mu(\mathbb{R})$.

Remarque C.6.2 Si les mesures μ_n et la mesure μ sont des probabilités, alors la convergence étroite équivaut à la convergence faible.

Pour la convergence étroite, le critère C.1 est modifié de la façon suivante :

Proposition C.6.6 *Une suite $(\mu_n)_{n\geq 0}$ de mesures positives bornées sur $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$ converge étroitement vers une mesure μ si et seulement si :*

$$\forall f \in \mathcal{C}_b \quad \int f\,d\mu_n \to \int f\,d\mu. \tag{C.2}$$

($\mathcal{C}_b = \mathcal{C}_b(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ désigne l'espace des fonctions continues bornées sur $\mathbb{R}^n$).

Définition C.6.4 On dit qu'une suite $(X_n)_{n\geq 0}$ de variables aléatoires converge en loi vers une variable aléatoire X si la suite $(P_{X_n})_{n\geq 0}$ des lois de probabiliteé associées converge étroitement vers la loi P_X.

Compte tenu de la remarque (C.6.2), ceci équivaut à :

$$\forall f \in \mathcal{C}_b \quad \int f\, dP_{X_n} \to \int f\, dP_X.$$

ou encore, si les lois P_{X_n} (resp. P_X) ont des densités g_n (resp. g) par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$:

$$\forall f \in \mathcal{C}_b \quad \int f\, g_n\, d\lambda \to \int f\, g\, d\lambda.$$

Au niveau des fonctions de répartition on a le résultat suivant, important en pratique :

Proposition C.6.7 *Une suite $(X_n)_{n\geq 0}$ de variables aléatoires converge en loi vers une variable aléatoire X si et seulement si $\lim\limits_{n\to\infty} F_{X_n}(t) = F_X(t)$ en tout point de continuité de F.*

Remarque C.6.3 En particulier si P_X est diffuse on aura :

$$\forall a,\, b \in \mathbb{R}\ (a < b) \quad \mathbf{p}\left(\{a \leq X_n \leq b\}\right) \to \mathbf{p}\left(\{a \leq X \leq b\}\right) \text{ quand } n \to +\infty.$$

Le lien entre la convergence en loi et les fonctions caractéristiques est basé sur le résultat suivant :

Proposition C.6.8 *(Paul Lévy)*

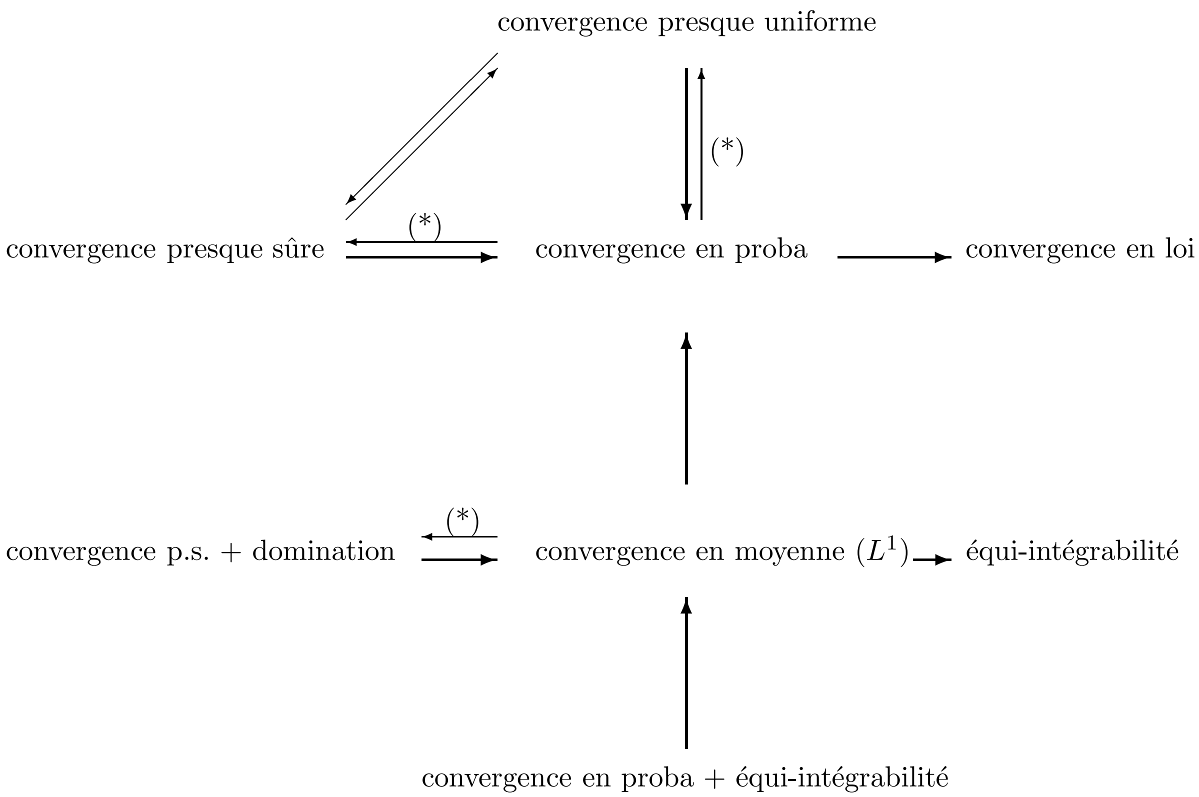
1. *Soient μ, $(\mu_n)_{n\geq 0}$ des mesures positives bornées. La suite $(\mu_n)_{n\geq 0}$ converge étroitement vers μ si et seulement si $\widehat{\mu_n}$ converge simplement vers $\hat{\mu}$.*
   Lorsque cette dernière convergence a lieu, elle est uniforme sur tout compact de $\mathbb{R}^d$.
2. *Si $\widehat{\mu_n}$ converge simplement vers une fonction φ continue en 0, alors il existe une mesure positive bornée μ telle que μ_n converge étroitement vers μ.*

Preuve : nous admettrons ce résultat. Remarquons seulement que la fonction $x \to e^{-2i\pi t\cdot x}$ est continue bornée de sorte que la convergence étroite de μ_n vers μ entraine la convergence simple de $\widehat{\mu_n}$ vers $\hat{\mu}$.

Corollaire C.6.1 *Soient X, $(X_n)_{n\geq 0}$ des variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, p)$. Alors $(X_n)_{n\geq 0}$ converge en loi vers X si et seulement si $(\varphi_{(X_n)})_{n\geq 0}$ converge simplement vers φ_X.*

Remarque C.6.4 La convergence en loi est parfois définie par la convergence simple des fonctions caractéristiques.

Diagramme récapitulatif :



(*) : pour une suite extraite

C.7 Lois des grands nombres, théorème central limite

Théorème C.7.1 (loi faible des grands nombres)
Soit $(X_n)_{n\geq 0} \subset L^2(\Omega, \mathcal{T}, \mathbf{p})$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes. On suppose que la suite $(\mu_n)_{n\geq 0}$ des espérances et la suite $(\sigma_n^2)_{n\geq 0}$ des variances vérifient :

$$(*) \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \mu_k = \mu \in \mathbb{R} \quad \textit{et} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sqrt{\sum_{k=1}^{n} \sigma_k^2} = 0$$

alors la variable $Y_n = \dfrac{X_1 + \cdots + X_n}{n}$ converge en probabilité vers la constante μ.

Preuve : les hypothèses et les propriétés de l'espérance et de la variance donnent immédiatement :

$$E(Y_n) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} E(X_k) \to \mu \quad \text{et} \quad \sigma^2(Y_n) = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} \sigma_k^2 \to 0.$$

Soit $\delta > 0$, on a alors :

$$\mathbf{p}(\{\mid Y_n - \mu \mid \geq \delta\}) \leq \mathbf{p}(\{\mid Y_n - E(Y_n) \mid \geq \frac{\delta}{2}\}) + \underbrace{\mathbf{p}(\{\mid E(Y_n) - \mu \mid \geq \frac{\delta}{2}\})}_{\text{nul à partir d'un certain rang}}$$

Rappelons l'inégalité de Bienaymé-Tchebichev appliquée à Y_n :

$$\mathbf{p}(\{| Y_n - E(Y_n) | \geq \lambda\sigma(Y_n)\}) \leq \frac{1}{\lambda^2}.$$

Pour $\lambda = \dfrac{\delta}{2\sigma(Y_n)}$ on obtient : $\mathbf{p}(\{| Y_n - E(Y_n) | \geq \dfrac{\delta}{2}\}) \leq \dfrac{4\sigma^2}{\delta^2} \to 0$ quand $n \to \infty$, ce qui achève la démonstration. ∎

Remarque C.7.1 Les conditions (*) sont en particulier réalisées lorsque les variables X_n ont toutes même espérance et même variance. Voici un exemple classique d'une telle situation :

Corollaire C.7.1 *Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une suite d'épreuves de Bernoulli indépendantes telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$ $\mathbf{p}(\{| X_n = 1 |\}) = p$ et $\mathbf{p}(\{| X_n = 0 |\}) = q = 1 - p$. La variable $Y_n = \dfrac{X_1 + \cdots + X_n}{n}$ (qui représente la fréquence d'apparition de 1 au cours des n épreuves) converge en probabilité vers la constante p.*

Commentaire : on vient de donner un exemple de loi "faible" des grands nombres qui énonce un résultat de convergence en probabilité. La loi "forte" que l'on va étudier maintenant énonce un résultat de convergence presque sûre. Rappelons que la convergence presque sûre entraine la convergence en probabilité, ce qui explique la terminologie "faible/forte".

Théorème C.7.2 (loi forte des grands nombres)
Soit $(X_n)_{n\geq 0} \subset L^2(\Omega, \mathcal{T}, \mathbf{p})$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes telles que :

1. $E(X_n) = \mu_n$ *avec* $\lim_{n\to\infty} \mu_n = \mu \in \mathbb{R}$,
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sigma^2(X_n)}{n^2} < \infty$,

alors la variable $Y_n = \dfrac{X_1 + \cdots + X_n}{n}$ converge presque sûrement vers la constante μ.

Lemme C.7.1 (inégalitéde Kolmogorov)
Soit $(X_1, \cdots, X_n)$ une suite finie de variables aléatoires réelles dans $L^2(\Omega, \mathcal{T}, \mathbf{p})$, indépendantes, centrées ($E(X_k) = 0$). On a alors :

$$\mathbf{p}\left(\left\{\max_{1\leq k\leq n} | \sum_{i=1}^{k} X_i | \geq \varepsilon\right\}\right) \leq \frac{1}{\varepsilon^2} \sum_{k=1}^{n} \sigma^2(X_k).$$

Preuve : posons $S_k = \sum_{i=1}^{k} X_i$ et $Y = \max_{1\leq k\leq n} | \sum_{i=1}^{k} X_i | = \max_{1\leq k\leq n} | S_k |$, on a alors $\{Y \geq \varepsilon\} = \bigcup_{k=1}^{n} E_k$ avec $E_k = \{| S_k | \geq \varepsilon\} \cap \{| S_i | < \varepsilon,\ i = 1 \cdots k-1\}$ (on a donc une réunion disjointe). Par indépendance on a :

$$\sum_{k=1}^{n} \sigma^2(X_k) = \sigma^2(S_n) = E(S_n^2) - \underbrace{E(S_n)^2}_{0} = \sum_{k=1}^{n} \int_{E_k} S_n^2$$

d'autre part :

$$\begin{aligned}\int_{E_k} S_n^2 &= \int_{E_k} (S_k + X_{k+1} + \cdots + X_n)^2 \\ &= \int \mathbb{1}_{\mathrm{E_k}}\, \mathrm{S_k^2} + \underbrace{\int \mathbb{1}_{\mathrm{E_k}} (\mathrm{X_{k+1}} + \cdots + \mathrm{X_n})^2}_{\geq 0} + 2\int \mathbb{1}_{\mathrm{E_k}}\, \mathrm{S_k}\, (\mathrm{X_{k+1}} + \cdots + \mathrm{X_n})\end{aligned}$$

Les variables $\mathbb{1}_{\mathrm{E_k}}\, \mathrm{S_k}$ et $(X_{k+1} + \cdots + X_n)$ étant indépendantes on a :

$$\int \mathbb{1}_{\mathrm{E_k}}\, \mathrm{S_k}\, (\mathrm{X_{k+1}} + \cdots + \mathrm{X_n}) = \left(\int \mathbb{1}_{\mathrm{E_k}}\, \mathrm{S_k}\right) \underbrace{\left(\int (X_{k+1} + \cdots + X_n)\right)}_{0} = 0$$

on a donc : $\displaystyle\int_{E_k} S_n^2 \geq \int \mathbb{1}_{\mathrm{E_k}}\, \mathrm{S_k^2} \geq \varepsilon^2 \mathbf{p}(\mathrm{E_k})$ et ainsi :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} \sigma^2(X_k) &\geq \varepsilon^2 \sum_{k=1}^{n} \mathbf{p}(E_k) \\ &\geq \varepsilon^2\, \mathbf{p}(\{Y \geq \varepsilon\}).\end{aligned}$$

■

Lemme C.7.2 *Soit $(X_n)_{n\geq 1} \subset L^2$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes centrées et telles que $\sum_{n=1}^{\infty} \sigma^2(X_n) < \infty$, alors la série $\sum_{n=1}^{\infty} X_n$ converge presque sûrement.*

Preuve : par application du lemme C.7.1 on a :

$$\mathbf{p}\left(\left\{\max_{0\leq k\leq m} \mid X_n + \cdots + X_{n+k} \mid \geq \varepsilon\right\}\right) \leq \frac{1}{\varepsilon^2} \sum_{i=n}^{n+m} \sigma^2(X_i) \leq \frac{1}{\varepsilon^2} \sum_{i=n}^{\infty} \sigma^2(X_i)$$

et donc :

$$\mathbf{p}\left(\left\{\sup_{k\geq 0} \mid X_n + \cdots + X_{n+k} \mid \geq \varepsilon\right\}\right) \leq \frac{1}{\varepsilon^2} \sum_{i=n}^{\infty} \sigma^2(X_i) \to 0 \quad \text{quand} \quad n \to \infty$$

or l'ensemble des points de divergence de la série $\sum_{n=1}^{\infty} X_n$ est inclus, pour tout entier n, dans l'ensemble $E_n = \left\{\sup_{k\geq 0} \mid X_n + \cdots + X_{n+k} \mid \geq \varepsilon\right\}$, donc cet ensemble est de probabilité nulle. ■

Lemme C.7.3 *Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite de réels de limite ℓ, alors $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} u_k = \ell$.*

Preuve : ce résultat est classique. ■

Lemme C.7.4 *Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite de réels telle que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{u_n}{n}$ converge, alors $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{u_1 + \cdots + u_n}{n} = 0$.*

Preuve : posons $s_n = \sum_{p=1}^{n} \frac{u_p}{p}$, alors $u_1 + \cdots + u_n = \sum_{k=1}^{n} k\,(s_k - s_{k-1}) = n\,s_n - \sum_{k=1}^{n-1} s_k$ et ainsi :

$$\frac{u_1 + \cdots + u_n}{n} = \underbrace{s_n}_{\to s} - \underbrace{\frac{n-1}{n}}_{\to 1} \underbrace{\frac{\sum_{k=1}^{n-1} s_k}{n-1}}_{\to s \text{ (lemme C.7.3)}} \to 0 \quad \text{quand} \quad n \to \infty$$

■

Preuve du théorème C.7.2 : posons $Y_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} X_k$, alors :

$$Y_n - \mu = \left(Y_n - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \mu_k \right) + \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \mu_k - \mu \right).$$

Le second terme a pour limite 0, d'autre part :

$$Y_n - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \mu_k = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} (X_k - \mu_k) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} X'_k.$$

Les variables X'_k sont indépendantes et on a $E(X'_k) = 0$, $\sigma^2(X'_k) = \sigma^2(X_k)$. Enfin :

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sigma^2 \left(\frac{X'_k}{k} \right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \sigma^2(X'_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \sigma^2(X'_k) < \infty$$

(par hypothèse). Donc (lemme C.7.2) la série $\sum_{k \geq 1} \frac{X'_k}{k}$ converge presque sûrement. D'après le lemme C.7.4 on a alors $\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} X'_k = 0$ p.s. c'est à dire aussi : $\lim_{n \to \infty} Y_n = \mu$ p.s. ■

Remarque C.7.2 Si les variables aléatoires réelles $(X_n)_{n \geq 1}$ sont indépendantes et de même loi avec $E(X_n) = \mu$ alors on peut montrer que $\lim_{n \to \infty} \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} = \mu$ p.s. sans hypothèse sur les variances.

Théorème C.7.3 (théorème central limite) *Soit $(X_n)_{n \geq 1} \subset L^2$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes et de même loi μ (i.e. $\forall n \geq 1 \quad P_{X_n} = \mu$). Soient $m = E(X_n)$, $\sigma^2 = V(X_n)$ et $Y_n = \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}$ pour $n \geq 1$. Alors $Z_n = \sqrt{n}\, \frac{Y_n - m}{\sigma}$ converge en loi vers la loi normale centrée réduite (i.e. : P_{Z_n} converge étroitement vers la mesure de densité $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ par rapport à la mesure de Lebesgue).*

Preuve : Z_n est la somme des n variables aléatoires réelles indépendantes $\frac{X_i - m}{\sigma\sqrt{n}}$, on a donc :

$$\varphi_{Z_n}(t) = \prod_{i=1}^{n} \left(\varphi_{\frac{X_i - m}{\sigma\sqrt{n}}}(t) \right) = \left[\psi\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}} \right) \right]^n$$

avec $\psi(u) = \int e^{it(x-m)}\, d\mu(x)$, où, pour tout $i = 1, \cdots, n$, $\mu = dP_{X_i}$. Sachant que $X_i \in L^2$, d'après la proposition C.5.3, ψ est de classe $\mathcal{C}^2$ et on a : $\psi(0) = 1$, $\quad \psi'(0) = i\,E(X_i - m) = 0$, $\quad \psi''(0) = -\sigma^2$, d'où le développement limité au voisinage de zéro : $\psi\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}} \right) = 1 - \frac{t^2}{2n} + o\left(\frac{t^2}{n} \right)$. On en déduit que

$\left[\psi\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)\right]^n \to e^{-\frac{t^2}{2}} = \hat{f}(t)$ (voir le lemme qui suit) où f est la densité de la loi normale centrée réduite i.e. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$. ∎

Lemme C.7.5 *Soit f la densité de la loi normale centrée réduite sur* $\mathbb{R}$ *i.e.* $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$, *alors* $\hat{f} = \sqrt{2\pi}\, f$.

Preuve : f vérifie $f' = -x\, f \in \mathcal{S}$, on a donc $\widehat{f'} = -\widehat{x\, f}$. On a d'autre part les relations : $\hat{f}' = i\, \widehat{x\, f}$ et $\widehat{f'} = -i\, x\, \hat{f}$, d'où finalement : $\hat{f}' = -x\, \hat{f}$.
f et $\hat{f}$ vérifient la même équation différentielle linéaire du premier ordre, donc il existe une constante $\lambda \in \mathbb{C}$ telle que $\hat{f} = \lambda\, f$. Or : $\hat{f}(0) = \int f(x)\, dx = 1 = \lambda\, f(0) = \frac{\lambda}{\sqrt{2\pi}}$, d'où $\lambda = \sqrt{2\pi}$. ∎

C.8 Exercices

On s'est limité à l'étude de quelques propriétés énoncées sans démonstration dans ce chapitre.

Exercice C.8.1 On dit qu'une suite $(X_n)_{n\geq 0}$ de variables aléatoires réelles définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, p)$ est équi-intégrable si elle satisfait les deux conditions :

(i) [*équicontinuité*] $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall A \in \mathcal{T} \quad \forall n \geq 0 \quad p(A) \leq \delta \Longrightarrow \int_A |X_n|\, dp \leq \varepsilon$.

(ii) $(X_n)_{n\geq 0}$ est bornée dans L^1.

1. Soit $X \in L^1(\Omega, \mathcal{T}, p)$. Montrer que la suite constante égale à X est équi-continue i.e. :
$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall A \in \mathcal{T} \quad p(A) \leq \delta \Longrightarrow \int_A |X|\, dp \leq \varepsilon.$$
[*on pourra introduire la suite* $Y_n = \min(|X|, n),\ n \geq 0$]
2. Montrer que si la suite $(X_n)_{n\geq 0}$ converge vers X dans L^1, alors elle est équi-intégrable.
3. Montrer que si la suite $(X_n)_{n\geq 0}$ converge en ***Preuve :*** vers X et est équi-intégrable, alors elle converge vers X dans L^1.
4. Montrer que la suite $(X_n)_{n\geq 0}$ est équi-intégrable si et seulement si elle vérifie la condition suivante (qui sert de définition chez certains auteurs) :
$$(EI) \qquad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists a > 0 \quad \forall n \geq 0 \quad \int_{|X_n|>a} |X_n|\, dp \leq \varepsilon.$$

Exercice C.8.2 Soient $\mathcal{M}$ l'ensemble des mesures positives bornées sur $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(R^d))$, $(\mu_n)_{n\geq 0} \subset \mathcal{M}$ et $\mu \in \mathcal{M}$. $\mathcal{C}_b$ désignant l'ensemble des fonctions continues bornées sur $\mathbb{R}^d$, montrer que $(\mu_n)_{n\geq 0}$ converge étroitement vers μ si et seulement si :
$$\forall f \in \mathcal{C}_b \quad \int f\, d\mu_n \to \int f\, d\mu \quad \textit{quand} \quad n \to +\infty.$$

Exercice C.8.3 Soint $(\Omega, \mathcal{T}, p)$ un espace probabilisé, X et $X_n,\ n \geq 0$ des variables aléatoires réelles. Montrer que si la suite $(X_n)_{n\geq 0}$ converge en probabilité vers X alors elle converge en loi vers X.

Exercice C.8.4

1. Montrer que pour toute suite $(\mu_n)_{n\geq 0}$ de mesures positives bornées sur $\mathbb{R}^d$ convergeant étroitement vers une mesure positive bornée μ on a :

$$\underline{\lim}\, \mu_n(G) \geq \mu(G) \quad et \quad \overline{\lim}\, \mu_n(F) \leq \mu(F)$$

respectivement pour tout ouvert G et tout fermé F de $\mathbb{R}^d$. En déduire que pour tout borélien A dont la frontière ∂A est μ-négligeable on a $\lim_{n\to\infty} \mu_n(A) = \mu(A)$.

2. Réciproquement, montrer que si $\mu_n,\ n \geq 0$ et μ sont des mesures positives bornées sur $\mathbb{R}^d$ telles que $\lim_{n\to\infty} \mu_n(G) = \mu(G)$ pour tout ouvert G tel que $\mu(\partial G) = 0$, alors la suite $(\mu_n)_{n\geq 0}$ converge étroitement vers μ.
(on pourra utiliser la formule $\int f\, dm = \int_0^{+\infty} m(\{f > t\})\, dt$ valable pour toute fonction borélienne $f:\ \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}_+$ -voir TD précédent)

3. (Application) Soient $X_n,\ n \geq 0$ et X des variables aléatoires réelles définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, p)$, $F_{X_n},\ n \geq 0$ et F_X leurs fonctions de répartition respectives. Montrer que $(X_n)_{n\geq 0}$ converge en loi vers X si et seulement si $\lim_{n\to\infty} F_{X_n}(t) = F_X(t)$ en tout point de continuité de la fonction F.

4. Par quelle condition simple peut s'exprimer la convergence en loi d'une suite de variables aléatoires réelles entières ?

Annexe D

Sujets d'examen

D.1 Partiel, janvier 96

Exercice D.1.1

On considère l'espace mesuré $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$.

1. Soit $f \in L^1$ une fonction à valeurs dans $[0,1]$ telle que :

   $$\int f^2 \, d\lambda = \int f \, d\lambda.$$

   Montrer qu'il existe un borélien B de mesure finie tel que $f = \mathbb{1}_B$ p.p.

2. Soit $f \in L^1$ une fonction à valeurs positives telle que :

   $$\forall n \geq 1 \quad \int f^{2n} \, d\lambda = \int f \, d\lambda.$$

   (a) Montrer que : $\forall \alpha > 0 \quad \lambda(\{f \geq 1 + \alpha\}) = 0$.

   (b) Montrer que $\lambda(\{f > 1\}) = 0$.

   (c) Que peut-on en conclure pour f ?

Exercice D.1.2

Soient $(f_n)_{n \geq 0}$ et $(g_n)_{n \geq 0}$ deux suites de fonctions mesurables, f et g des fonctions mesurables telles que :

(i) $\forall n \geq 0 \quad f_n \in L^1$, et $g \in L^1$

(ii) $\forall n \geq 0 \quad |f_n| \leq g_n$ p.p.

(iii) $f_n \to f$ p.p. et $g_n \to g$ p.p. quand $n \to +\infty$

(iv) $\lim\limits_{n \to +\infty} \int g_n = \int g$.

1. Montrer que $f \in L^1$.
2. Montrer que $f_n \to f$ dans L^1 quand $n \to +\infty$.
   (*on pourra considérer la fonction* $\varphi_n = g + g_n - |f_n - f|$)

Exercice D.1.3

Soient a, b, α, β des réels avec $a < b$ et $\alpha < \beta$, $\varphi : [\alpha, \beta] \to [a, b]$ une fonction bijective et dérivable [*on rappelle qu'alors* φ *est strictement monotone*]. λ désigne indifféremment la mesure de Lebesgue sur $[a, b]$ ou $[\alpha, \beta]$.

1. Montrer que φ', dérivée de φ sur $[\alpha, \beta]$, est borélienne.
2. On pose, pour tout borélien A de $[a, b]$:

$$\mu(A) = \int_{[\alpha,\beta]} \mathbb{1}_{\mathrm{A}}(\varphi(\mathrm{u}))\, |\varphi'(\mathrm{u})|\, \mathrm{d}\lambda(\mathrm{u}).$$

   Montrer que μ est une mesure sur $\mathcal{B}([a, b])$, tribu des boréliens de $[a, b]$.
3. On admettra que sous les hypothèses précédentes φ' vérifie :

$$\varphi' \in L^1 \quad et \quad \forall s, t \in [\alpha, \beta] \quad \int_s^t \varphi'(u)\, d\lambda(u) = \varphi(t) - \varphi(s).$$

   Montrer que pour tout intervalle $[c, d] \subset [a, b]$: $\mu([c, d]) = d - c$.
   En déduire (avec précision) que $\mu = \lambda$.
4. Montrer que pour toute fonction f mesurable positive sur $[a, b]$ on a :

$$(CV) \quad \int_{[a,b]} f\, d\lambda = \int_{[\alpha,\beta]} f \circ \varphi\, |\varphi'|\, d\lambda$$

   (*on pourra commencer par établir (CV) pour les fonctions étagées mesurables positives sur* $[a, b]$).
5. Montrer que pour toute fonction $f \in L^1([\alpha, \beta], \mathcal{B}([\alpha, \beta]), \lambda)$ on a $f \circ \varphi\, |\varphi'| \in L^1([\alpha, \beta], \mathcal{B}([\alpha, \beta]), \lambda)$ et que f satisfait la formule de changement de variable (CV).

Exercice D.1.4

1. Montrer que pour tout $t \geq 0$ la fonction $x \to \dfrac{e^{-tx^2}}{1 + x^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.
2. Etudier la continuité et la dérivabilité de la fonction F définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$F(t) = \int_{\mathbb{R}_+} \frac{e^{-tx^2}}{1 + x^2}\, dx.$$

3. Montrer que F vérifie la relation :

$$\forall t > 0 \quad F'(t) - F(t) = -\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{t}}.$$

   (On rappelle que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-u^2}\, du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$*)*

****

D.2 Examen, juin 96

Exercice D.2.1

1. Résoudre dans $L^1(\mathbb{R})$ l'équation $f \star f = f$.
   (On pourra utiliser la transformation de Fourier dans $L^1(\mathbb{R})$)
2. En déduire qu'il n'y a pas d'élément neutre dans $L^1(\mathbb{R})$ pour la convolution.

Exercice D.2.2 On considère l'espace mesuré $(\mathbb{R}_+, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+), m)$ où $\mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$ désigne la tribu borélienne de $\mathbb{R}_+$ et m la mesure ayant pour densité la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ par rapport à la mesure de Lebesgue. On note enfin $L^1(m)$ l'espace $L^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}_+, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+), m)$
(ainsi, si f est mesurable, $f \in L^1(m) \Longleftrightarrow \displaystyle\int_0^\infty \frac{|f(x)|}{x}\,dx < \infty$).

1. Soient $f, g \in L^1(m)$. Montrer que la fonction $(x, y) \mapsto f(y)g(\frac{x}{y})$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$pour la mesure produit $m \otimes m$.
   (Utiliser Fubini-Tonelli et un changement de variable).
   En déduire que pour λ-presque tout x la fonction $y \mapsto f(y)g(\frac{x}{y})$ est m-intégrable sur $\mathbb{R}_+$.
2. Pour $f, g \in L^1(m)$ on définit $f \square g$, pour λ-presque tout x, par :
$$(f \square g)(x) = \int_{\mathbb{R}_+} f(y)g(\frac{x}{y})\,dm(y).$$
   Montrer que $f \square g \in L^1(m)$ et que $\| f \square g \|_{L^1(m)} \leq \| f \|_{L^1(m)} \| g \|_{L^1(m)}$.

Exercice D.2.3 Soit $p \in [1, +\infty[$. On note $L^p(\mathbb{R}_+)$ l'espace $L^p_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}_+, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+), \lambda)$ et $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}_+)$ l'ensemble des fonctions $\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ continues à support compact. A toute fonction $f \in L^p(\mathbb{R}_+)$ on associe une fonction F définie sur $]0, +\infty[$ par

$$(1) \qquad F(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt.$$

1. Pourquoi (1) définit-elle effectivement un réel $F(x)$?
2. On suppose dans cette question que $1 < p < +\infty$. L'objectif est d'établir l'inégalité
$$(2) \qquad \| F \|_p \leq \frac{p}{p-1} \| f \|_p \,.$$
   (a) On suppose $\mathbf{f} \in \mathcal{C}_\mathbf{c}(\mathbb{R}_+)$ et $\mathbf{f} \geq \mathbf{0}$. Soient alors $M = \sup\limits_{\mathbb{R}_+} |f|$, $a > 0$ tel que f soit nulle hors de $[0, a]$ et $L = \displaystyle\int_0^a f(t)\,dt$.
      i. Vérifier que $F(x) \leq M$ sur $]0, a]$ et $F(x) = \dfrac{L}{x}$ sur $]a, +\infty[$. En déduire que $F \in L^p(\mathbb{R}_+)$.
      ii. Montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} xF^p(x) = 0$ et $\lim\limits_{x \to 0} xF^p(x) = 0$. En déduire, à l'aide d'une intégration par parties que
$$(3) \qquad (p-1)\int_0^\infty F^p(x)\,dx = p\int_0^\infty F^{p-1}(x)f(x)\,dx.$$
      iii. A l'aide de l'inégalité de Hölder montrer que l'inégalité (2) est vérifiée.

   (b) Montrer que (2) est encore vraie pour toute fonction $f \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}_+)$.

(c) On suppose enfin $f \in L^p(\mathbb{R}_+)$. On sait qu'alors (rappeler pourquoi) il existe une suite $(f_n)_{n\geq 0} \subset \mathcal{C}_c(\mathbb{R}_+)$ qui converge vers f dans $L^p(\mathbb{R}_+)$. Soit F_n la fonction associée à f_n par (1).

i. Montrer que $(F_n)_{n\geq 0}$ est une suite de Cauchy dans $L^p(\mathbb{R}_+)$. En déduire que $(F_n)_{n\geq 0}$ a une limite $\tilde{F}$ dans $L^p(\mathbb{R}_+)$.

ii. A l'aide de l'inégalité de Hölder établir que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+ \quad |F_n(x) - F(x)| \leq \| f_n - f \|_p \ x^{-\frac{1}{p}}$$

(on écrira $\displaystyle\int_0^x |f_n(t) - f(t)|\, dt = \int_0^\infty |f_n(t) - f(t)| \mathbb{1}_{[0,x]}(t)\, dt$*).*

iii. Des deux résultats précédents déduire avec précision que $\tilde{F} = F$.

iv. Montrer enfin que (2) est vraie pour $f \in L^p(\mathbb{R}_+)$. Que peut-on dire de l'application $T \ : \ f \mapsto F$ définie par (1) ?

3. On étudie maintenant le cas $p = 1$.

(a) Soit A un borélien de $\mathbb{R}_+$ de mesure $\lambda(A)$ finie. On pose $F_A(x) = \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x \mathbb{1}_A(t)\, dt$. Montrer que

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists x_0 > 0 \quad \forall x \geq x_0 \quad F_A(x) \geq \frac{\lambda(A) - \varepsilon}{x}.$$

En déduire que $F_A \notin L^1(\mathbb{R}_+)$.

(b) Montrer que si $f \in L^1(\mathbb{R}_+)$ vérifie $f > 0$ p.p. alors $F \notin L^1(\mathbb{R}_+)$.

D.3 Examen, septembre 96

Exercice D.3.1 Pour $n \geq 0$ on pose $I_n = \int_0^1 (\cos \frac{1}{x})^n \, dx$. Etudier la limite éventuelle de I_n quand $n \to +\infty$ *(on demande une rédaction courte et très précise).*

Exercice D.3.2 Soient λ la mesure de Lebesgue sur $[0,1]$ et μ la mesure du dénombrement sur $[0,1]$ muni de la tribu de toutes ses parties (pour $A \subset [0,1]$, $\mu(A) = Card(A)$ si A est fini et $\mu(A) = +\infty$ sinon).
On définit la fonction f sur $[0,1] \times [0,1]$ par $f(x,y) = 1$ si $x = y$ et $f(x,y) = 0$ si $x \neq y$.

1. Calculer $\int_0^1 (\int_0^1 f(x,y) \, d\mu(y)) \, d\lambda(x)$ et $\int_0^1 (\int_0^1 f(x,y) \, d\lambda(x)) \, d\mu(y)$.
2. Que constate t-on ? Ce résultat met-il en défaut le théorème de Fubini-Tonelli ?

Exercice D.3.3 Soit $f \in L^1 = L^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$.

1. Pour tout $k \in \mathbb{Z}$ on désigne par f_k la fonction définie par $f_k(x) = f(x+k)$, et on pose $g = \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} |f_k|$.
   Montrer que : $\int_0^1 g(x) \, d\lambda(x) < +\infty$.
2. Montrer que pour λ-presque tout x la série $\sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} f(x+k)$ est absolument convergente.

Exercice D.3.4 Soit $(E, \mathcal{T}, m)$ un espace mesuré, avec $m(E) = 1$. Pour tout réel $p > 0$ et toute fonction $f : E \to \mathbb{R}$ mesurable on pose $N_p(f) = (\int_E |f|^p \, dm)^{\frac{1}{p}} \in \overline{\mathbb{R}_+}$. Dans tout l'exercice f désigne une fonction positive, intégrable et telle que $\ln(f)$ soit intégrable. L'objectif est de prouver qu'alors : $\lim_{p \to 0} N_p(f) = \exp \int_E (\ln(f) \, dm$.

1. Montrer que $f \neq 0$ p.p. . En déduire que $\lim_{p \to 0} \int_E f^p \, dm = 1$.
   (on pourra utiliser la décomposition : $f^p = f^p \mathbb{1}_{\{f<1\}} + \mathrm{f}^{\mathrm{p}} \mathbb{1}_{\{f \geq 1\}}$*)*
2. Montrer que $\lim_{p \to 0} \ln N_p(f) = \lim_{p \to 0} \frac{1}{p} \int_E (f^p - 1) \, dm$.
3. Prouver les estimations suivantes :
   (a) Si $a \geq 1$ et $0 < p \leq 1$ alors $\frac{a^p - 1}{p} \leq a - 1$.
   (on pourra utiliser par exemple l'inégalité des accroissements finis)
   (b) Si $a > 0$ et $p > 0$ alors $\frac{a^p - 1}{p} \geq \ln a$.
4. Démontrer le résultat annoncé.

Exercice D.3.5 f étant une fonction de $L^2 = L^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ et A un réel positif, on définit la fonction $\Psi_A(f)$ par : $\Psi_A(f)(t) = \int_{-A}^{A} \hat{f}(x) e^{2i\pi tx} \, dx$.

1. Montrer que $\Psi_A(f)$ est bien définie sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer, après avoir remarqué que $\hat{f} \mathbb{1}_{[-\mathrm{A},\mathrm{A}]} \in \mathrm{L}^1 \cap \mathrm{L}^2$, que $\Psi_A(f) \in L^2$ et majorer sa norme (on utilisera le théorème de Plancherel).

3. Montrer que Ψ_A est une application linéaire continue de L^2 dans L^2.
4. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$ et tout $f \in L^2$ il existe un réel A_0 tel que :

$$A_0 \leq A < A' \Longrightarrow \| \Psi_A(f) - \Psi_{A'}(f) \|_2 \leq \varepsilon.$$

   En déduire que $\Psi_A(f)$ a une limite dans L^2 quand $A \to +\infty$, notée $\Psi(f)$.
5. Montrer que Ψ est une application linéaire continue de L^2 dans L^2.
6. Montrer que si $f \in \mathcal{S}$ alors $\Psi(f) = f$.
7. Montrer que si $f \in L^2$ alors $\Psi(f) = f$ p.p.
8. Calculer, pour $a > 0$, la transformée de Fourier de la fonction $\mathbb{1}_{[-\mathrm{a},\mathrm{a}]}$. En déduire le calcul de $\lim\limits_{A \to +\infty} \displaystyle\int_{-A}^{A} \frac{\sin \lambda x}{x} e^{itx}\, dx$.

D.4 Partiel, janvier 97

Exercice D.4.1

On considère l'espace mesuré $([0,1],\mathcal{B}([0,1]),\lambda)$. Chaque entier naturel $n \geq 1$ étant décomposé (de manière unique) sous la forme $n = 2^p + k, \quad 0 \leq k < 2^p$, on pose $f_n = 1\!\!\mathrm{I}_{[\frac{k}{2^p},\frac{k+1}{2^p}[}$.

1. Préciser $f_1, \cdots, f_7$.
2. Montrer que la suite $(f_n)_{n\geq 1}$ converge dans L^1 vers 0.
3. La suite $(f_n)_{n\geq 1}$ converge-t-elle presque partout vers 0 ?
4. Trouver une suite extraite de $(f_n)_{n\geq 1}$ qui converge vers 0 p.p.
5. La suite $(f_n)_{n\geq 1}$ converge-t-elle en mesure ?
6. On considère maintenant un espace mesuré quelconque $(E,\mathcal{T},m)$.
   (a) Montrer que si une suite $(f_n)_{n\geq 0}$ converge dans L^1 vers une fonction f alors elle converge aussi vers f en mesure.
   (b) Construire un contre exemple simple prouvant que la réciproque est fausse.

Exercice D.4.2

Soient $E,\mathcal{T},m)$ un espace mesuré, f et $(f_n)_{n\geq 0}$ des fonctions mesurables positives telles que :

(i) $f_n \to f$ p.p. ,

(ii) $\forall n \geq 0 \quad \int f_n\,dm \leq \int f\,dm < \infty$.

On se propose de montrer que la suite $(f_n)_{n\geq 0}$ converge vers f dans L^1.

1. Montrer que $(f - f_n)^+$ converge vers 0 dans L^1.
2. En déduire que la suite $(f - f_n)^-$ converge également vers 0 dans L^1, et conclure.

Exercice D.4.3

Soient m une probabilité sur un espace mesurable $(E,\mathcal{T})$, φ une fonction convexe sur $]u,v[$ (avec $-\infty \leq u < v \leq +\infty$), $f \in L^1(m)$ une fonction à valeurs dans $]u,v[$ (p.p.) telle que $\varphi\circ f \in L^1(m)$.

1. Vérifier que $\int f\,dm \in]u,v[$.
2. Comparer $\varphi\left(\int f\,dm\right)$ et $\int \varphi(f)\,dm$ quand φ est une fonction affine $x \to \alpha x + \beta$.
3. Prouver l'inégalité suivante (inégalité de Jensen) : $\varphi\left(\int f\,dm\right) \leq \int \varphi(f)\,dm$.
   On pourra utiliser (en l'admettant) que φ est l'enveloppe supérieure des fonctions affines qu'elle domine, i.e. $\varphi = \sup\{h;\ h \leq \varphi,\ h \text{ affine}\}$.
4. Quelle inégalité en déduire dans le cas d'une mesure bornée quelconque ?
5. Montrer réciproquement que si une fonction $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est telle que pour toute fonction f borélienne et bornée sur $[0,1]$ on ait : $\psi\left(\int_0^1 f\,d\lambda\right) \leq \int_0^1 \psi(f)\,d\lambda$, alors ψ est convexe.
   Rappel : ψ est convexe si et seulement si :
   $$\forall a,\, b \in \mathbb{R} \quad \forall t \in [0,1] \qquad \psi(ta + (1-t)b) \leq t\psi(a) + (1-t)\psi(b).$$
   On suggère d'utiliser une fonction f étagée prenant deux valeurs...

Exercice D.4.4 Soit m une mesure finie sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.

1. Montrer que l'intégrale $f(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{itx}\, dm(t)$ est bien définie pour tout $x \in \mathbb{R}$.
2. On suppose que $\dfrac{2f(0) - f(h) - f(-h)}{h^2}$ a une limite finie quand $h \to 0$.
   (a) Montrer que $\int_{\mathbb{R}} t^2\, dm(t) < \infty$ *(on suggère d'utiliser le lemme de Fatou).*
   (b) Montrer que la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est de classe $\mathcal{C}^2$.

****

D.5 Examen, juin 97

Exercice D.5.1 Soit $f\,:\,[a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction **continue**. On prolonge f à $\mathbb{R}$ en posant :

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si} \quad x \in [a,b] \\ f(b) & \text{si} \quad x > b \\ f(a) & \text{si} \quad x < a. \end{cases}$$

Pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$ on pose $g_n(x) = n\left(\tilde{f}(x+\frac{1}{n}) - \tilde{f}(x)\right)$.

1. Montrer que $\lim_{n\to\infty} \int_a^b g_n(x)\,dx = f(b) - f(a)$. *Attention : pas de théorème de convergence du cours d'intégration à utiliser ici, seulement des outils de Deug 1ère année !*
2. On suppose désormais que f est dérivable et que sa dérivée f' est bornée sur $[a,b]$.
   (a) Montrer que f' est borélienne *(écrire f' comme limite p.p. d'une suite de fonctions boréliennes).*
   (b) Montrer que la suite $(g_n)_{n\geq 1}$ est bornée dans $L^\infty([a,b])$.
   (c) Déduire de tout ce qui précède que f' est intégrable (au sens de Lebesgue) sur $[a,b]$ et que $\int_a^b f'(x)\,dx = f(b) - f(a)$.

Exercice D.5.2 Dans toute la suite, L^1 désigne l'espace $L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}, \mathcal{L}(\mathbb{R}), \lambda)$, $\mathcal{C}_c$ l'espace des fonctions continues $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ à support compact, $\mathcal{C}_0$ l'espace des fonctions continues $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ de limite nulle à l'infini et enfin $\mathcal{S}$ désigne l'espace des fonctions à décroissance rapide sur $\mathbb{R}$.

1. Calculer la transformée de Fourier de la fonction caractéristique d'un intervalle $[-a,a]$ $(a > 0)$.
2. On pose $h = 1\!\!1_{[-1,1]}$ et, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $g_n = 1\!\!1_{[-n,n]}$. Déterminer avec précision la fonction $g_n \star h$ (elle est affine par morceaux) et tracer le graphe de cette fonction pour $n = 1$ et $n = 2$. Montrer que $g_n \star h \in \mathcal{C}_c$ et que la suite $(g_n \star h)_{n\geq 1}$ est bornée dans L^∞.
3. On pose, pour $t \in \mathbb{R}$ et pour $n \in \mathbb{N}^*$ $f_n(t) = \dfrac{\sin(2\pi t)\,\sin(2\pi n t)}{\pi^2 t^2}$. Montrer que $f_n \in L^1$ puis que $g_n \star h = \widehat{f_n}$ (rédiger avec précision).
4. Montrer que $\lim_{n\to\infty} \| f_n \|_1 = +\infty$.
   (On pourra commencer par montrer que l'on a $\| f_n \|_1 \geq C \int_0^\pi \frac{|\sin(nu)|}{u} du$ où C est une constante strictement positive indépendante de n)
5. On admettra le résultat suivant :
   Soient E et F deux espaces de Banach et $f\,:\,E \to F$ une application linéaire continue. Si f est bijective alors f^{-1} est continue.
   Déduire de tout ce qui précède que la transformation de Fourier envoie L^1 sur un sous espace strict de $\mathcal{C}_0$ (i.e. $\mathcal{F}(L^1) \subsetneq \mathcal{C}_0$).
6. Montrer que l'image de L^1 par la transformation de Fourier est dense dans $\mathcal{C}_0$ (on pourra utiliser l'espace $\mathcal{S}$).

Exercice D.5.3 Soient $(E, \mathcal{T}, m)$ un espace mesuré et $p \in]1, +\infty[$. On désigne par L^p l'espace $L^p_{\mathbb{R}}(E, \mathcal{T}, m)$ et on pose $q = \dfrac{p}{p-1}$ (conjugué de p). On dit qu'une suite $(f_n)_{n\geq 0} \subset L^p$ converge faiblement vers une fonction $f \in L^p$ si pour toute fonction $g \in L^q$ on a $\lim_{n\to\infty} \int f_n g\,dm = \int f g\,dm$.

1. Dans cette question on prend $(E, \mathcal{T}, m) = (\mathbb{R}, \mathcal{L}(\mathbb{R}), \lambda)$. En considérant les fonctions $f_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}} 1\!\!1_{[1,\mathrm{e^n}]}$ et $g \,:\, g(x) = \dfrac{1}{x} 1\!\!1_{[1,+\infty[}(\mathrm{x})$ montrer que la convergence uniforme n'entraine pas la convergence faible dans L^p.

2. On suppose maintenant que m est une mesure finie. Montrer que la convergence uniforme entraine la convergence faible dans L^p.

D.6 Examen, septembre 1997

Exercice D.6.1 Soient $(E,\mathcal{T},m)$ un espace mesuré et L^1 l'espace $L^1_{\mathbb{R}}(E,\mathcal{T},m)$. Soient $(f_n)_{n\geq 0}\subset L^1$ et $f\in L^1$. Montrer que $(f_n)_{n\geq 0}$ converge vers f dans L^1 si et seulement si pour tout $A\in\mathcal{T}$ $\lim\limits_{n\to\infty}\int_A f_n\,dm=\int_A f\,dm$, la convergence étant uniforme par rapport à A, c'est à dire :

$$\forall\varepsilon>0\quad\exists n_0\in\mathbb{N}\quad\forall n\in\mathbb{N}\qquad n\geq n_0\Longrightarrow\forall A\in\mathcal{T}\quad\left|\int_A f_n\,dm-\int_A f\,dm\right|\leq\varepsilon.$$

(Pour la condition suffisante, choisir deux ensembles A bien adaptés à ce qu'on souhaite prouver ...)

Exercice D.6.2 Soient a un réel strictement positif et $f:[0,a]\to\mathbb{R}$ une fonction intégrable pour la mesure de Lebesgue λ sur $[0,a]$.

1. Montrer que l'on définit bien une fonction en posant, pour $x\in]0,a]$: $g(x)=\displaystyle\int_{[x,a[}\frac{f(t)}{t}\,d\lambda(t)$.
2. Montrer que g est intégrable sur $]0,a]$ et que l'on a :

$$\int_{]0,a]}g(x)\,d\lambda(x)=\int_{[0,a]}f(x)\,d\lambda(x).$$

Exercice D.6.3 Soient $(E,\mathcal{T},m)$ un espace mesuré avec $m(E)<+\infty$ et $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite de fonctions réelles mesurables définies sur E. On suppose qu'il existe une suite $(t_n)_{n\geq 1}$ de réels telle que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}|t_n|=+\infty$ et $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}|t_nf_n(x)|$ converge absolument pour presque tout $x\in E$. On pose alors, pour $x\in E$:

$$g(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}|t_nf_n(x)|\qquad(\in[0,+\infty]).$$

On note, pour $k\geq 1$, $A_k=\{g\leq k\}$ et enfin $A=\displaystyle\bigcup_{k\geq 1}A_k$.

1. Montrer que $m(A^c)=0$.
2. Montrer que :

$$\forall\varepsilon>0\quad\forall k\geq 1\quad\forall N\geq 1\quad\exists n>N\qquad\int_{A_k}|f_n|\,dm\leq\varepsilon.$$

   (On raisonnera par l'absurde et on s'interessera à $\int_{A_k}g\,dm$: majorer et minorer cette intégrale pour mettre en évidence une contradiction)

3. En déduire qu'il existe une sous-suite $(f_{n_k})_{k\geq 1}$ telle que :

$$\forall k\geq 1\quad\int_{A_k}|f_{n_k}|\,dm<\frac{1}{2^k}.$$

4. Montrer que :

$$\forall p\geq 1\quad\sum_{k=p}^{+\infty}\int_{A_p}|f_{n_k}|\,dm<+\infty.$$

5. En déduire que $\displaystyle\sum_{k=p}^{+\infty}|f_{n_k}|<+\infty$ presque partout sur A_p et enfin que : $\lim\limits_{k\to+\infty}f_{n_k}(x)=0$ p.p. .

D.7 Partiel, janvier 98

Exercice D.7.1

Soient $(E, \mathcal{T}, m)$ un espace mesuré, $f \in L^1$ et $(f_n)_{n\geq 0} \subset L^1$ une suite qui converge vers f dans L^1. On suppose qu'il existe un réel $C \geq 0$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N} \ \mid f_n \mid \leq C$ p.p.

1. Enoncer la "réciproque partielle du théorème de convergence dominée".
2. Montrer que $\mid f \mid \leq C$ p.p.
3. Montrer que $(f_n)_{n\geq 0}$ converge vers f dans L^2.

Exercice D.7.2

Soient $(E, \mathcal{T}, m)$ un espace mesuré avec $m(E) = 1$ (c'est à dire que m est une probabilité) et $f \in L^1_{\mathbb{C}}$. $\Re(f)$ et $\Im(f)$ désignent respectivement la partie réelle et la partie imaginaire de f.

1. Montrer que $\displaystyle\lim_{\substack{t\to 0\\ t\in\mathbb{R}^*}} \int \frac{\mid 1 + t\,f \mid -1}{t}\, dm = \int \Re(f)\, dm$ (on énoncera avec précision le théorème utilisé).
2. On suppose que : $\forall z \in \mathbb{C} \ \displaystyle\int \mid 1 + zf \mid \, dm \geq 1$. Déduire alors de la question précédente que $\displaystyle\int f\, dm = 0$.

Exercice D.7.3

Soient a, b deux réels tels que $a < b$. Le segment $[a, b]$ est muni de sa tribu borélienne $\mathcal{B}([a, b])$ et λ désigne la mesure de Lebesgue sur $([a, b], \mathcal{B}([a, b]))$. Dans les intégrales, on écrira dt (resp. dx) pour $d\lambda(t)$ (resp. $d\lambda(x)$).

1. Montrer que toute fonction monotone de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$ est borélienne.
2. Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction décroissante. En utilisant, pour $n \in \mathbb{N}^*$, les points $y_i = f(b) + i\,\dfrac{f(a) - f(b)}{n}$, $\quad i = 0, \cdots, n$, construire une suite $(h_n)_{n\geq 1}$ de fonctions en escalier décroissantes convergeant simplement vers f.
3. Soit $g \in L^1$. On pose, pour $x \in [a, b]$, $G(x) = \displaystyle\int_a^x g(t)\, dt$ et $M = \displaystyle\sup_{x\in[a,b]} G(x)$. On rappelle que G est continue. Soit enfin $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction décroissante positive.
   (a) Dans le cas particulier où f est en escalier, montrer que :
   $$\int_a^b f(x)\, g(x)\, dx \leq M.f(a) \tag{D.1}$$
   (b) A l'aide de la suite $(h_n)_{n\geq 1}$ définie dans la deuxième question, montrer que (D.1) est vraie dans le cas général.
4. Etablir la "deuxième formule de la moyenne" qui s'énonce :
   Soient $g \in L^1([a, b])$ et f une fonction décroissante positive sur $[a, b]$. Il existe un réel $y \in [a, b]$ tel que $\displaystyle\int_a^b f(x)\, g(x)\, dx = f(a) \int_a^y g(x)\, dx$.

D.8 Examen, juin 1998

Exercice D.8.1 Soient $(E,\mathcal{T},m)$ un espace mesuré, p et q deux réels strictement positifs. On définit le réel r par : $\dfrac{1}{r}=\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}$. Montrer que pour toutes fonctions mesurables $f,\, g\, :\, E\to \mathbb{R}$ on a :

$$\left(\int \mid f\,g\mid^r\ dm\right)^{1/r}\le\left(\int \mid f\mid^p\ dm\right)^{1/p}\left(\int \mid g\mid^q\ dm\right)^{1/q}$$

Indication : appliquer l'inégalité de Hölder au produit $\mid f\mid^r\mid g\mid^r$ *avec un couple d'exposants bien choisi*

Exercice D.8.2

1. Enoncer le théorème de convergence monotone dans L^1.
2. Soient $(E,\mathcal{T},m)$ un espace mesuré et f une fonction mesurable à valeurs réelles positives définie sur E, telle que f^n soit intégrable pour tout entier $n\ge 1$. On note A l'ensemble $\{f\ge 1\}$.
   (a) Montrer que : $m(A)=0\iff \lim\limits_{n\to\infty}\displaystyle\int f^n\,dm=0$.
   (b) On considère les trois propositions suivantes :
      (i) $m(A)=0$.
      (ii) La série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\int f^n\,dm$ converge vers $\displaystyle\int\frac{f}{1+f}\,dm$.
      (iii) La série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\int f^n\,dm$ converge.

   On pose $g_p=\displaystyle\sum_{n=1}^{p}(-1)^{n+1}f^n$. Montrer que $(g_{2p})_{p\ge1}$ est croissante sur A^c et en déduire que $(i)\Longrightarrow(ii)$.
   Retrouver ce résultat par application du théorème de convergence dominée.
   Montrer l'équivalence des trois propositions.

Exercice D.8.3 Soient $[a,b]$ un segment de $\mathbb{R}$ et $f\,:\,[a,b]\to\mathbb{R}$ une fonction intégrable pour la mesure de Lebesgue et $n\in\mathbb{N}^*$.
$\mathcal{S}_n$ désigne l'ensemble des permutations de $\{1,\cdots,n\}$.
On désigne par A la partie de $\mathbb{R}^n$ définie par :

$$A=\{x=(x_1,\cdots,x_n)\in\mathbb{R}^n\,;\,a<x_n<x_{n-1}<\cdots<x_1<b\}$$

et à toute permutation $\sigma\in\mathcal{S}_n$ on associe l'application

$$\varphi_\sigma\ :\left\{\begin{array}{ccc}\mathbb{R}^{\,n} & \to & \mathbb{R}^{\,n}\\ (x_1,\cdots,x_n) & \mapsto & (x_{\sigma(1)}<x_{\sigma(2)}<\cdots<x_{\sigma(n)})\end{array}\right.$$

ainsi que l'ensemble $A_\sigma=\varphi_\sigma(A)$.

1. (a) Représenter A et les A_σ lorsque $n=2$, $a=1$ et $b=3$.
   (b) Préciser la matrice jacobienne de φ_σ lorsque $n=3$ et σ défini par $\sigma(1)=2$, $\sigma(2)=1$, $\sigma(3)=3$.
2. Montrer que φ_σ est un difféomorhisme de A sur A_σ et que $\mid J(\varphi_\sigma)\mid=1$.

3. On considère l'application $F = f \otimes f \otimes \cdots \otimes f \ : \ [a,b]^n \to \mathbb{R}$ (définie par $F(x_1, \cdots, x_n) = f(x_1) \cdots f(x_n)$).
   (a) Montrer que $F \in L^1([a,b]^n)$.
   (b) Enoncer le théorème de changement de variable dans $\mathbb{R}^n$.
   (c) Montrer que :
$$\forall \sigma \in \mathcal{S}_n \quad \int_{A_\sigma} f(x_1) \cdots f(x_n)\, dx_1 \cdots dx_n = \int_A f(x_1) \cdots f(x_n)\, dx_1 \cdots dx_n.$$
4. Montrer que pour tout $x \in [a,b]^n$:
$$x \in \left(\bigcup_{\sigma \in \mathcal{S}_n} A_\sigma \right)^c \Longleftrightarrow (\exists\, i \in \{1, \cdots, n\},\ x_i = a) \text{ ou } (\exists\, i,\ x_i = b) \text{ ou } (\exists\, i\ \exists\, j,\ i \neq j,\ x_i = x_j)$$
   et en déduire que $[a,b]^n \setminus \left(\bigcup_{\sigma \in \mathcal{S}_n} A_\sigma \right)$ est négligeable *(on rappelle que tout hyperplan affine de $\mathbb{R}^n$ est négligeable pour la mesure de Lebesgue).*
5. En considérant l'intégrale $\displaystyle\int_{[a,b]^n} F(x)\, dx$, déduire des questions 3. et 4. que :
$$\int_a^b f(x_1) \left(\int_a^{x_1} f(x_2) \cdots \left(\int_a^{x_{n-1}} f(x_n)\, dx_n \right) \cdots dx_2 \right) dx_1 = \frac{1}{n!} \left(\int_a^b f(s)\, ds \right)^n.$$
6. **Application.**Soient $T \geq 0$, $u \in L^1([0,T])$ telle que $u \geq 0$ p.p. et v une fonction mesurable positive bornée sur $[0,T]$. On suppose qu'il existe des constantes A, $B \geq 0$ telles que : $v(t) \leq A + B \displaystyle\int_0^t u(s)\, v(s)\, ds$ p.p. sur $[0,T]$.
   (a) Montrer par récurrence sur n que pour tout $n \geq 1$ on a (p.p. sur $[0,T]$) :
$$\begin{aligned} v(t) \quad &\leq \quad A \sum_{k=0}^{n-1} \frac{B^k}{k!} \left(\int_0^t u(s)\, ds \right)^k \\ &\quad + B^n \int_0^t u(s_1) \left(\int_0^{s_1} u(s_2) \cdots \left(\int_0^{s_{n-1}} u(s_n)\, v(s_n)\, ds_n \right) \cdots ds_2 \right) ds_1. \end{aligned}$$
   (b) En déduire que $v(t) \leq A \exp \left\{ B \displaystyle\int_0^t u(s)\, ds \right\}$ p.p. sur $[0,T]$.

D.9 Examen, septembre 1998

Exercice D.9.1 Soit $(E, \mathcal{T}, m)$ un espace mesuré fini (i.e. $m(E) < \infty$) et soit $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite d'applications mesurables de E dans $\mathbb{R}$. Montrer l'équivalence des propriétés suivantes :

(i) $\forall \varepsilon > 0 \quad \lim\limits_{n\to\infty} m(\{\mid f_n \mid \geq \varepsilon\}) = 0$ (i.e. $(f_n)_{n\geq 0}$ converge vers 0 en mesure).

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty} \displaystyle\int \frac{\mid f_n \mid}{1+\mid f_n \mid}\, dm = 0.$

(Utiliser la croissance de l'application $x \mapsto \dfrac{x}{1+x}$ *sur* $\mathbb{R}^+$ *et la décomposition* $E = \{\mid f_n \mid \geq \varepsilon\} \cup \{\mid f_n \mid < \varepsilon\}$*)*

Exercice D.9.2 (Intégration par parties dans L^1) Soient $[a, b]$ un intervalle de $\overline{\mathbb{R}}$, f et g des fonctions de $L^1(]a, b[, \mathcal{B}(]a, b[), m)$ où m est une mesure σ-finie et diffuse.
On pose, pour $x \in]a, b]$, $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\, dm(t) \stackrel{\text{déf}}{=} \int_{]a,x[} f(t)\, dm(t)$ et $G(x) = \displaystyle\int_a^x g(t)\, dm(t)$. Montrer, en utilisant le théorème de Fubini, que l'on a :

$$\int_a^b F(x)\, g(x)\, dm(x) = F(b)\, G(b) - \int_a^b f(x)\, G(x)\, dm(x).$$

(on pourra poser $h(x, y) = g(x)\, f(y)\, 1\!\!1_{\{y<x\}}$*)*

Exercice D.9.3 Soit E l'ensemble des fonctions réelles f définies sur $\mathbb{R}$, nulles sur $]-\infty, 0[$, localement intégrables pour la mesure de Lebesgue et telles que l'ensemble $A(f) = \{\alpha \in \mathbb{R}\, ;\, t \mapsto f(t)\, e^{-\alpha t} \in L^1\}$ soit non vide.

1. Soient $f \in E$ et a la borne inférieure de $A(f)$ dans $\overline{\mathbb{R}}$ ($a \in \mathbb{R}$ ou $a = -\infty$). Montrer que pour tout nombre complexe z tel que $Re(z) > a$ la fonction $t \mapsto f(t)\, e^{-zt}$ est intégrable.
   On définit alors, sur le demi plan ouvert $\{Re(z) > a\}$, une fonction $\mathcal{L}f$ de la variable complexe z par :
   $$(\mathcal{L}f)(z) = \int_0^\infty f(t)\, e^{-zt}\, dt.$$
2. Déterminer a et $\mathcal{L}f$ dans chacun des cas :
   (a) $f(t) = 1\!\!1_{[0,+\infty[}(t)$
   (b) $f(t) = \sin bt$ ($b \in \mathbb{C}$).
3. Montrer que $\mathcal{L}f$ est holomorphe dans le demi-plan $\{Re(z) > a\}$.
4. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nulle sur $] - \infty, 0[$ et intégrable : on a alors $f \in E$ et $\mathcal{L}f$ est définie au moins sur $\{Re(z) \geq 0\}$ (justifier brièvement).
   (a) Montrer que la restriction de $\mathcal{L}f$ à $\mathbb{R}_+$ est continue sur $\mathbb{R}_+$.
   (b) On pose $F(t) = \displaystyle\int_0^t f(u)\, du$. Montrer que $F \in E$ et $\inf A(f) \leq 0$.
   (c) Exprimer $(\mathcal{L}F)(z)$ à l'aide de $(\mathcal{L}f)(z)$ pour $Re(z) > 0$.
   (d) Montrer que la restriction de $\mathcal{L}F$ à $\mathbb{R}_+^*$ vérifie :
   $$\lim_{x\to 0^+} x\, (\mathcal{L}F)(x) = \lim_{t\to+\infty} F(t).$$
5. Soient f, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nulles sur $] - \infty, 0[$ et intégrables.

(a) Montrer que la convolée de f et g est donnée par $(f \star g)(x) = \mathbb{1}_{[0,+\infty[}(\mathrm{x}) \int_0^{\mathrm{x}} \mathrm{f}(\mathrm{x}-\mathrm{t})\,\mathrm{g}(\mathrm{t})\,\mathrm{dt}$.

(b) Montrer que sur le demi plan $\{Re(z) > 0\}$ on a :

$$\mathcal{L}(f \star g) = \mathcal{L}f \times \mathcal{L}g.$$

D.10 Partiel, novembre 98

Exercice D.10.1

Soit $(E, \mathcal{T}, m)$ un espace mesuré.

1. Montrer que pour toute suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{T}$ d'ensembles mesurables telle que $\sum_{n\geq 0} m(A_n) < +\infty$ on a : $m(\overline{\lim}\, A_n) = 0$ (lemme de Borel-Cantelli).
2. Soient $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite d'applications $\mathcal{T}$-mesurables de E dans $\mathbb{R}$ et f une applications $\mathcal{T}$-mesurable de E dans $\mathbb{R}$.
   (a) Montrer que pour tout $n \geq 0$ et tout $\varepsilon > 0$ l'ensemble $\{| f_n - f |> \varepsilon\}$ est mesurable.
   (b) Montrer que $(f_n)_{n\geq 0}$ tend vers f p.p. si et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$ l'ensemble $\overline{\lim}\, \{| f_n - f |> \varepsilon\}$ est négligeable.
   (c) On suppose vérifiée la condition suivante :
   $$\text{Pour tout } \varepsilon > 0 \text{ la série } \sum_{n\geq 0} m(\{| f_n - f |> \varepsilon\}) \text{ converge.} \tag{D.2}$$
   Qu'en déduit-on ?
   (d) On considère le cas $(E, \mathcal{T}, m) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$, $f_n = \mathbb{1}_{[0,\frac{1}{n}]}$ pour $n \geq 1$ et $f = 0$. La condition (D.2) est-elle réalisée ? Conclusion ?

Exercice D.10.2

Soit μ une mesure sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(R))$ vérifiant les conditions :

(C1) $\forall x \in \mathbb{R} \quad \mu(\{x\}) = 0$ (μ est diffuse).

(C2) Pour tout compact K de $\mathbb{R}$: $\mu(K) < \infty$.

1. Parmi les mesures ci-dessous, lesquelles vérifient ces conditions ?
   (a) $\mu = \lambda$, mesure de Borel.
   (b) $\mu = \delta_a$, mesure de Dirac en $a \in \mathbb{R}$.
   (c) μ : mesure du dénombrement sur $\mathbb{R}$.
2. Calculer $\lim_{n\to\infty} \mu\left(]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}[\right)$.
3. A étant une partie mesurable de $\mathbb{R}$, on définit $f_A : \mathbb{R} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ par $f_A(x) = \mu\left(A \cap [- \mid x \mid, \mid x \mid]\right)$ pour $x \in \mathbb{R}$.
   Expliquer pourquoi f_A est bien définie, montrer qu'elle est paire et croissante sur $\mathbb{R}_+$.
4. Dessiner f_A dans les cas suivants :
   (a) $A = \mathbb{Q}$.
   (b) $\mu = \lambda$ et $A = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.
   (c) $\mu = \lambda$ et $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} [n, n + \frac{1}{2}]$.
5. On suppose dans cette question que $\mu = \lambda$.
   (a) Montrer que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:$| f_A(x) - f_A(y) |\leq 2 \mid x - y \mid$.
   (b) En déduire que pour tout $t \in [0, \lambda(A)]$ il existe un borélien B inclus dans A tel que $\lambda(B) = t$.

D.11 Examen I, janvier 1999

Exercice D.11.1

1. Soient $(E, \mathcal{T})$ un espace mesurable et $\mu : \mathcal{T} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ une application telle que $\mu(\emptyset) = 0$. Montrer que μ est une mesure si et seulement si
   (i) $(\forall A,\, B \in \mathcal{T}) \quad (A \cap B = \emptyset \Longrightarrow \mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B))$
   (ii) μ a la propriété de continuité croissante.
2. On considère l'espace mesuré $(E, \mathcal{T}) = ([0,1], \mathcal{P}([0,1]))$. Soit f une application de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}_+$; on pose, pour toute partie T de $[0,1]$:
$$\mu(T) = \sup \left\{ \sum_{t \in A} f(t)\,;\; A \subset T,\ A \text{ fini} \right\},$$
avec la convention $\sum_{t \in \emptyset} f(t) = 0$.
   (a) Déterminer $\mu(\{x\})$ pour tout $x \in [0,1]$.
   (b) Montrer que μ est une mesure sur $([0,1], \mathcal{P}([0,1]))$.
   (c) On suppose que μ est finie. Montrer alors que l'ensemble $C_n = \left\{ t \in [0,1]\,;\; f(t) \geq \dfrac{\mu([0,1])}{n} \right\}$ est fini et en déduire que le support de f, c'est à dire l'ensemble $C = \{t \in [0,1]\,;\; f(t) \neq 0\}$ est dénombrable.

Exercice D.11.2

Soit $(E, \mathcal{T}, m)$ un espace mesuré. L'objet de cet exercice est d'établir que pour toute application mesurable positive $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ on a :
$$\int f\, dm = \int_{\mathbb{R}_+} m(\{f > t\})\, d\lambda(t) \tag{D.3}$$
où λ désigne la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}_+$.
$\mathbb{R}$, R_+ et $\overline{\mathbb{R}}_+$ sont munis de leur tribu borélienne.

1. Montrer que toute application monotone de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ est mesurable. En déduire la mesurabilité de l'application $\Phi : \begin{cases} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & m(\{f > t\}) \end{cases}$.
2. On suppose que f est étagée de décomposition canonique $f = \sum_{i=1}^{p} a_i\, \mathbb{1}_{A_i}$, avec $0 \leq a_1 < a_2 < \cdots < a_p$. On pose $a_0 = 0$ et on définit, pour $1 \leq k \leq p$: $\delta_k = a_k - a_{k-1}$.
   (a) Montrer que : $\int f\, dm = \sum_{k=1}^{p} \delta_k \sum_{i=k}^{p} m(A_i)$
   (b) Montrer que Φ est étagée et que (D.3) est vraie.
3. Montrer finalement que (D.3) est vraie pour toute application mesurable positive f *(à rédiger avec précision)*.

Exercice D.11.3

1. Montrer que pour tout réel t la fonction $x \mapsto \exp\left(-\frac{1}{2}(\frac{t^2}{x^2}+x^2)\right)$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

   On pose $K(t) = \int_{\mathbb{R}_+} \exp\left(-\frac{1}{2}(\frac{t^2}{x^2}+x^2)\right)\, dx$.

2. Montrer que K est continue et bornée sur $\mathbb{R}$.
3. Montrer que K est dérivable sur $]0,+\infty[$ et donner une expression intégrale de $K'(t)$. **On énoncera complètement le théorème utilisé**.
4. A l'aide du changement de variable $u = \frac{t}{x}$ montrer que K satisfait une équation différentielle du premier ordre sur $]0,+\infty[$.
5. Trouver une expression simple de K sur $\mathbb{R}$. On rappelle que : $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx = \sqrt{2\pi}$.

D.12 Partiel, mars 99

Exercice D.12.1 : questions de cours.

1. Enoncer la théorème de changement de variable dans $\mathbb{R}^n$.
2. Enoncer et démontrer le lemme de continuité en moyenne.

Exercice D.12.2

Soit $\Delta =]0,1[\times]0,1[\times]-\pi,\pi[$ et soit $\varphi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ l'application définie par :

$$\varphi(u,v,w) = (u, uv\cos w, v\sin w).$$

1. Montrer que φ est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de Δ sur son image $\varphi(\Delta)$.
2. Calculer le volume de $\varphi(\Delta)$ (i.e. $\lambda(\varphi(\Delta))$).

Exercice D.12.3

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une application mesurable.

1. On suppose dans cette question que f est positive. Montrer que :

$$\int_{\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_+} f(x-y)\, e^{-(x+y)}\, dx\, dy = \int_{\mathbb{R}} f(v)\, e^{-|v|}\, dv. \tag{D.4}$$

   Indication : changement de variable judicieux ...

2. Montrer que (D.4) est encore vrai si $f \in L^1$.

D.13 Examen II, juin 1999

Exercice D.13.1 Montrer que $\displaystyle\int_{]0,1[\times]0,1[)} \frac{1}{1-x\,y}\,dx\,dy = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$. Justifier chaque étape avec précision.
Indication : utiliser le développement en série de $\dfrac{1}{1-u}$, $\mid u \mid < 1$.

Exercice D.13.2 Soit m une probabilité sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ $(m(\mathbb{R}) = 1)$. Soient f et g des fonctions réelles monotones et de même sens définies sur $\mathbb{R}$ telles que f, g et fg soient intégrables pour la mesure m. Montrer que :

$$\int f\,g\,dm \geq \Big(\int f\,dm\Big)\Big(\int g\,dm\Big)$$

Indication : on pourra utiliser la fonction F *définie sur* $\mathbb{R}^2$ *par* $F(x, y) = (f(x) - f(y)(g(x) - g(y))$.

Exercice D.13.3 Soient $(E, \mathcal{T}, m)$ un espace mesuré, p, $q \in [1, +\infty]$ et $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite de fonctions de $L^p \cap L^q$. On suppose que $(f_n)_{n\geq 0}$ converge vers 0 dans L^p et est de Cauchy dans L^q. Montrer que $(f_n)_{n\geq 0}$ tend vers 0 dans L^q.

Exercice D.13.4 On considère l'espace mesuré $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$.

1. Soient $h \in L^1 - \{0\}$, $g \in L^p$ avec $p \in [1, +\infty]$, et $a \in \mathbb{R}$ tel que $\mid a \mid < \dfrac{1}{\| h \|_1}$. Montrer que l'équation $f - a\,h \star f = g$ d'inconnue f possède une unique solution dans L^p.
   Indication : considérer l'application Φ *de* L^p *dans* L^p *définie par* $\Phi(f) = a\,h \star f + g$ *et appliquer le théorème du point fixe.*
2. Soient maintenant h et g dans L^1 telles que leurs transformées de Fourier vérifient $\hat{g} \in L^1$ et $\| \hat{h} \|_\infty < 1$. Montrer en utilisant la transformée de Fourier que l'équation d'inconnue f :
$$f - h \star f = g \tag{D.5}$$
   admet dans L^1 au plus une solution et que cette solution est dans $\mathcal{C}_0$.
3. Soient a et b des réels tels que $a > b > 0$, g et h les fonctions réelles définies sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = e^{-a|x|}$ et $h(x) = (a - b)\,e^{-a\,x}\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(\mathrm{x})$.
   (a) Vérifier que g et h satisfont les hypothèses de la question précédente.
   (b) En déduire que la solution éventuelle f de (D.5) est telle que :
$$\hat{f}(t) = \frac{2a}{(a - 2i\pi t)(b + 2i\pi t)} \tag{D.6}$$
4. On suppose a priori que f est dérivable sur $I_1 =]-\infty, 0[$ et $I_2 =]0, +\infty[$, et que f' est bornée.
   (a) Montrer que sous les hypothèses précédentes sur f on a :
$$\forall x \in I_1 \cup I_2 \quad (h \star f)'(x) = (h \star f')(x).$$
   (b) En déduire que pour tout x de I_1 et de I_2 on a :
$$(h \star f)'(x) = (a - b)f(x) - a\,(f \star h)(x).$$

(c) En déduire que f est solution sur chacun des intervalles I_1 et I_2 de l'équation différentielle : $y' = -b\,y + (a\,g + g')$.

(d) Montrer que f est alors donnée par :

$$f(x) = \frac{2a}{a+b}\, e^{ax}\, \mathbb{1}_{\mathrm{I}_1}(\mathrm{x}) + \frac{2\mathrm{a}}{\mathrm{a}+\mathrm{b}}\, \mathrm{e}^{-\mathrm{bx}}\, \mathbb{1}_{\mathrm{I}_2}(\mathrm{x}) \tag{D.7}$$

(On rappelle que $f \in \mathcal{C}_0$)

5. Vérifier que la fonction définie par (D.7) est dans L^1, satisfait bien (D.6) et conclure.
6. Déduire de (D.6) et (D.7) la transformée de Fourier de $\dfrac{1}{(\alpha - ix)(\beta + ix)}$, $(\alpha > \beta > 0)$.

D.14 Examen I, septembre 99

Exercice D.14.1 Soient $(E, \mathcal{T}, m)$ un espace mesuré **fini** (i.e. $m(E) < \infty$) et $u : E \longrightarrow \mathbb{R}$ une application $\mathcal{T}$-mesurable. On définit, pour tout entier naturel n les ensembles :

$$A_n = \{| u | \geq n\} \qquad \text{et} \qquad B_n = \{n \leq | u | < n+1\}.$$

Montrer l'équivalence des trois propriétés suivantes :

(i) $\displaystyle\int | u | \, dm < \infty$,

(ii) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} n\, m(B_n) < \infty$,

(iii) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} m(A_n) < \infty$.

Exercice D.14.2 Soit $(E, \mathcal{T}, m)$ un espace mesuré **fini**. On note L^1 l'espace $L^1_{\mathbb{R}}(E, \mathcal{T}, m)$.

1. Soit $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une application continue vérifiant la propriété suivante :

$$\exists C > 0 \quad \forall s \in \mathbb{R} \qquad | g(s) | \leq C(1+ | s |). \tag{D.8}$$

   (a) Montrer que pour toute fonction $u \in L^1$ on a $g \circ u \in L^1$.

   (b) Soient u, $F \in L^1$ et $(u_n)_{n \geq 0} \subset L^1$ telles que $u_n \to u$ p.p. et $| u_n | \leq F$ p.p. . Montrer que $(g \circ u_n)_{n \geq 0}$ converge vers $g \circ u$ dans L^1.

   (c) Soit $(u_n)_{n \geq 0} \subset L^1$ une suite convergeant vers u dans L^1. Montrer à nouveau que la suite $(g \circ u_n)_{n \geq 0}$ converge vers $g \circ u$ dans L^1 : on établira le résultat pour une sous suite et on conclura en argumentant de façon précise.

2. On prend désormais $(E, \mathcal{T}, m) = ([0,1], \mathcal{B}([0,1]), \lambda)$ et on considère une application continue $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ **ne vérifiant pas** la propriété (D.8).

   (a) Montrer que pour tout entier naturel n il existe un réel α_n tel que $| \alpha_n | \geq n$ et $| g(\alpha_n) | \geq n \, | \alpha_n |$.

   (b) Montrer qu'il existe un réel α tel que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha}{| \alpha_n | \, n^2} = 1$.

   (c) On pose $a_1 = 0$ et, pour $n \geq 1$: $a_{n+1} = a_n + \dfrac{\alpha}{| \alpha_n | \, n^2}$. On définit alors $u = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \, 1\!\!1_{[a_n, a_{n+1}[}$.
   Montrer que $u \in L^1$ mais que $g \circ u \notin L^1$.

D.15 Examen II, septembre 99

Exercice D.15.1 Soit $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$ une fonction vérifiant la propriété suivante :

$$\forall \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d) \quad \int f(t)\, \varphi(t)\, dt = 0.$$

Soit $(\rho_n)_{n\geq 1}$ une suite régularisante : on rappelle que $\rho_n(x) = n^d \rho(nx)$ où $\rho \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ vérifie :

$$\rho \geq 0, \qquad \operatorname{supp}(\rho) \subset \overline{B(0,1)}, \qquad \int_{\mathbb{R}^d} \rho(x)\, dx = 1.$$

1. Montrer que : $\forall n \geq 1 \quad f \star \rho_n = 0$.
2. Soient $a > 0$ et $b = a + 1$. Montrer que : $\forall x \in B(0,a) \quad (f \star \rho_n)(x) = \Big((f\, \mathbb{1}_{\mathrm{B(0,b)}}) \star \rho_{\mathrm{n}}\Big)(x) = 0.$
3. En déduire que : $\displaystyle\int_{B(0,a)} \mid f(t) \mid\, dt \leq \parallel f\, \mathbb{1}_{\mathrm{B(0,b)}} - (\mathrm{f}\, \mathbb{1}_{\mathrm{B(0,b)}}) \star \rho_{\mathrm{n}} \parallel_1.$
4. Montrer finalement que $f = 0$ p.p. sur $\mathbb{R}^d$.

Exercice D.15.2 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{-\pi x^2}$. On rappelle que $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} e^{-u^2}\, du = \sqrt{\pi}$.

1. Ecrire une équation différentielle du premier ordre vérifiée par f.
2. Montrer que f admet une transformée de Fourier $\hat{f}$ qui vérifie la même équation différentielle que f.
3. Calculer $\hat{f}(0)$ et en déduire que $\hat{f} = f$. Quelle est, plus généralement, la transformée de Fourier de la fonction F définie sur $\mathbb{R}^n$ par $F(x) = e^{-\pi \|x\|^2}$?
4. Ecrire le développement de f en série entière. En déduire une expression de $f^{(2k)}(0)$ pour $k \in \mathbb{N}$ puis, à l'aide du résultat de la question précédente, le calcul de $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} x^{2k}\, f(x)\, dx$.

D.16 Partiel, novembre 99

Exercice D.16.1 (Question de cours)

1. Enoncer le théorème de la classe monotone.
2. Soient $(E_1, \mathcal{T}_1)$ et $(E_2, \mathcal{T}_2)$ deux espaces mesurables.
   (a) Qu'est ce que la tribu produit $\mathcal{T}_1 \otimes \mathcal{T}_2$?
   (b) Montrer que la projection $p_1 : \left\{ \begin{array}{ccc} E_1 \times E_2 & \longrightarrow & E_1 \\ (x_1, x_2) & \longmapsto & x_1 \end{array} \right.$ est $(\mathcal{T}_1 \otimes \mathcal{T}_2, \mathcal{T}_1)$-mesurable.

Exercice D.16.2

Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ une suite de réels positifs tels que la série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ soit convergente. Pour toute partie finie A de $\mathbb{N}$ on pose $\Phi(A) = \sum_{n\in A} a_n$ (avec la convention $\sum_{n\in\emptyset} a_n = 0$). On définit alors une application $\mu : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ par :

$$\forall T \subset \mathbb{N} \quad \mu(T) = \sup\{\Phi(A)\,;\, A \subset T,\ A \text{ fini}\}$$

1. Montrer que μ est croissante, c'est à dire :
$$\forall S, T \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) \quad S \subset T \Longrightarrow \mu(S) \leq \mu(T)$$
2. Déterminer $\mu(\mathbb{N})$; en déduire que μ est bornée.
3. Montrer que μ est additive, c'est à dire :
$$\forall S, T \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) \quad S \cap T = \emptyset \Longrightarrow \mu(S \cup T) = \mu(S) + \mu(T)$$
4. Soit $(T_n)_{n\geq 0}$ une suite croissante de parties de $\mathbb{N}$. Montrer que $\mu\left(\bigcup_{n\geq 0} T_n\right) = \sup \mu(T_n)$.
5. Déduire de 3. et 4. que μ est σ-additive et, donc, est une mesure sur $\mathcal{P}(\mathbb{N})$. Exprimer cette mesure à l'aide de la famille $(\delta_n)_{n\geq 0}$ des masses de Dirac en n.

Exercice D.16.3 (Les deux questions sont indépendantes)

1. Soit $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,t) & \longmapsto & f(x,t) \end{array} \right.$ une application continue. Pour tout réel x on note f_x l'application partielle $t \to f(x,t)$. Montrer que $\sup_{x\in[0,1]} f_x = \sup_{x\in[0,1]\cap\mathbb{Q}} f_x$ (utiliser que tout réel de $[0,1]$ est limite d'une suite de rationnels).
   En déduire que $g \stackrel{déf}{=} \sup_{x\in[0,1]} f_x$ est borélienne.
2. On considère la tribu $\mathcal{T}$ de $\mathbb{R}$ engendrée par les singletons (on rappelle que cette tribu est formée des parties de $\mathbb{R}$ dénombrables ou de complémentaire dénombrable) et la famille $\left(\mathbb{1}_{\{x\}}\right)_{x\in[0,1]}$.
   Montrer que pour tout x de $[0,1]$ l'application $\mathbb{1}_{\{x\}}$ est $(\mathcal{T}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$-mesurable.
   $g \stackrel{déf}{=} \sup_{x\in[0,1]} \mathbb{1}_{\{x\}}$ est elle $(\mathcal{T}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$-mesurable ?

D.17 Examen I, janvier 2000

Exercice D.17.1

On considère un espace mesuré $(E, \mathcal{T}, m)$. Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite de L^1 qui converge m- p.p. vers une fonction $f \in L^1$ et telle que : $\lim_{n\to\infty} \int f_n \, dm = \int f \, dm$.

1. Enoncer le théorème de convergence dominée.
2. On suppose que $f_n \geq 0$ p.p. pour tout entier n.
   (a) Montrer que $(f - f_n)^+$ converge vers zéro dans L^1.
   (On commencera par montrer que $(f - f_n)^+ \leq f$ p.p.).
   (b) En déduire que $(f - f_n)^-$ converge également vers zéro dans L^1.
   (c) Montrer finalement que f_n converge vers f dans L^1.
3. On abandonne l'hypothèse "$\forall n \in \mathbb{N} \quad f_n \geq 0$ p.p. ". Construire un contre-exemple simple montrant que le résultat de convergence précédent n'est plus vrai.

Exercice D.17.2 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction borélienne telle que la fonction $x \mapsto e^{ax} f(x)$ soit intégrable pour tout réel a.

1. Montrer que : $\forall z \in \mathbb{C} \quad \int_{\mathbb{R}} e^{|zx|} \mid f(x) \mid \, dx < \infty$.
2. En déduire que :

$$\forall z \in \mathbb{C} \quad \int_{\mathbb{R}} e^{zx} f(x) \, dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \int_{\mathbb{R}} x^n f(x) \, dx.$$

   On énoncera le théorème utilisé.

Exercice D.17.3

On considère l'espace mesuré $([0,1], \mathcal{B}([0,1]), \lambda)$ et une fonction réelle mesurable φ intégrable sur $[0,1]$.

1. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}_+$ la fonction $x \to \sqrt{\varphi(x)^2 + t}$ est intégrable sur $[0,1]$. On peut ainsi définir une fonction F sur $\mathbb{R}_+$ par la formule $F(t) = \int_0^1 \sqrt{\varphi(x)^2 + t} \, d\lambda(x)$.
2. Montrer que F est continue sur $\mathbb{R}_+$.
   (Prouver la continuité sur $[0, a]$ pour tout réel $a > 0$).
3. Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}_+^\star$ et donner une expression de $F'(t)$ pour $t > 0$.
4. On se propose de prouver que F est dérivable (à droite) en $t = 0$ si et seulement si $\frac{1}{\varphi} \in L^1([0,1])$.
   (a) **Condition suffisante.** On suppose que $\frac{1}{\varphi} \in L^1([0,1])$ montrer alors que $\varphi \neq 0$ p.p. et en déduire la dérivabilité de F en zéro.
   (b) **Condition nécessaire : première méthode.**
   On suppose que F est dérivable en zéro. On définit une suite $(h_n)_{n\geq 0}$ de fonctions positives sur $[0,1]$ par :

$$h_n(x) = n \left(\sqrt{\varphi(x)^2 + \frac{1}{n}} - \mid \varphi(x) \mid \right).$$

   Montrer que la suite $(h_n)_{n\geq 0}$ converge simplement (dans $\mathcal{M}_+$) vers une limite que l'on identifiera et en déduire à l'aide du lemme de Fatou l'intégrabilité de $\frac{1}{\varphi}$.

(c) **Condition nécessaire : deuxième méthode.**

Prouver que la fonction F' admet une limite (à droite) en zéro dans $\overline{\mathbb{R}}_+$ puis montrer que $\lim_{t \to 0^+} F'(t) = F'(0)$ (appliquer un théorème de calcul différentiel). En considérant alors en particulier la suite $(F'(\frac{1}{n}))_{n \in \mathbb{N}^\star}$ montrer à l'aide du théorème de Beppo-Levi que $\frac{1}{\varphi}$ est intégrable.

D.18 Partiel, avril 99

Exercice D.18.1
Soit f une fonction borélienne positive sur $\mathbb{R}_+$. Exprimer l'intégrale $\displaystyle\int_0^\infty \int_0^\infty \frac{f(x+y)}{x+y}\,dx\,dy$ en fonction de $\displaystyle\int_0^\infty f(x)\,dx$.
Indication : *$\Phi\,:\,(x,y) \longrightarrow (x+y,y)$ définit un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de $(\mathbb{R}_+^*)^2$ sur ...*

Exercice D.18.2

1. Montrer que pour tout réel $a > 0$ la fonction $(x,y) \mapsto e^{-xy^2}$ est intégrable sur $D = [0,a] \times \mathbb{R}_+$.
2. Calculer $I(a,y) = \displaystyle\int_0^a e^{-xy^2} \sin x\,dx$ pour $a > 0$ et $y \geq 0$.
3. Déterminer la limite quand $a \to +\infty$ de $\displaystyle\int_0^\infty \left(\int_0^a e^{-xy^2} \sin x\,dx\right) dy$.
4. En déduire que l'intégrale $\displaystyle\int_0^a \frac{\sin x}{\sqrt{x}}\,dx$ a une limite, quand $a \to +\infty$, égale à $\displaystyle\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{1}{1+y^4}\,dy$.
   On rappelle que $\displaystyle\int_0^\infty e^{-u^2}\,du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

D.19 Examen II, juin 2000

Exercice D.19.1 Dans la suite, on notera de la même façon un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ et sa matrice dans la base canonique. On note $(\cdot,\cdot)$ le produit scalaire usuel dans $\mathbb{R}^n$. Q désigne une forme quadratique définie positive sur $\mathbb{R}^n$ de matrice symétrique associée A dans la base canonique : $Q(x) = (Ax, x)$. On note Δ le déterminant de A et $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ ses valeurs propres (distinctes ou non).

1. Enoncer le théorème de changement de variable dans $\mathbb{R}^n$.
2. Justifier sans calculs l'intégrabilité sur $\mathbb{R}^n$ de la fonction $x \to e^{-Q(x)}$ *(utiliser une minoration classique de $Q(x)$ en fonction de $\| x \|$).*
3. Calculer $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} e^{-Q(x)}\, dx$ en fonction de Δ à l'aide d'un changement de variable. On rappelle que $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} e^{-u^2}\, du = \sqrt{\pi}$.
   Indication : *il existe une matrice orthogonale P telle que $P^{-1}AP$ soit diagonale : il serait judicieux de "poser x=Py" ...*
4. Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$.
   (a) λ étant un réel non nul, on note g_λ la fonction définie sur $\mathbb{R}^n$ par $g_\lambda(x) = f(\lambda x)$. Exprimer la transformée de fourier $\widehat{g_\lambda}$ de g_λ à l'aide de $\hat{f}$ et de λ.
   (b) Soit $M \in GL_n(\mathbb{R})$ une matrice inversible. Montrer que :
   $$\widehat{f \circ M} = \frac{1}{\mid det(M) \mid} \hat{f} \circ (\,{}^tM^{-1})$$
   (c) En déduire que si f est invariante par les transformations orthogonales (i.e. $f \circ P = f$ pour toute transformation orthogonale P) alors $\hat{f}$ l'est aussi.
   (d) Dans cette question, on suppose $n = 1$ et on rappelle que la fonction $x \to e^{-\pi x^2}$ est égale à sa transformée de Fourier. Déterminer la transformée de Fourier de la fonction $x \to e^{-a x^2}$ pour $a > 0$.
5. On considère pour $i = 1, \cdots, n$ des fonctions réelles f_i définies sur $\mathbb{R}$ et intégrables. La fonction $f_1 \otimes \cdots \otimes f_n$ est définie sur $\mathbb{R}^n$ par :
   $$(f_1 \otimes \cdots \otimes f_n)(x_1, \cdots, x_n) = f_1(x_1)...f_n(x_n).$$
   Exprimer la transformée de Fourier de $f_1 \otimes \cdots \otimes f_n$ à l'aide de celles des f_i.
6. Déterminer la transformée de Fourier de $x \to e^{-Q(x)}$ quand la matrice A (introduite au début de l'exercice) est diagonale.
7. Même question dans le cas général.

Exercice D.19.2 L^1 désigne l'espace $L^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ où λ est la mesure de Lebesgue.
Soit $f \in L^1$, telle que $f = 0$ p.p. sur $\mathbb{R}_-$.
On définit, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $f^{*(n)}$ par : $f^{*(1)} = f$ et pour $n \geq 2$: $f^{*(n)} = f^{*(n-1)} * f$ (produit de convolution de $f^{*(n-1)}$ et de f).
Pour $\alpha \geq 0$ on pose : $g(\alpha) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} |f(t)|\, dt$.

1. (a) Montrer que $f^{*(n)}$ est bien définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et que $f^{*(n)} = 0$ sur $\mathbb{R}_-$.

(b) Montrer, par récurrence sur n, que :

$$\forall\,\alpha \geq 0,\ \forall\,n \geq 1 \quad \int_0^{+\infty} e^{-\alpha t}|f^{*(n)}(t)|\,dt \leq (g(\alpha))^n.$$

Indications : *Fubini-Tonelli, changement de variable affine. Se rappeler que f et les $f^{*(n)}$ sont nulles sur $\mathbb{R}_-$.*

(c) En déduire que :

$$\forall\,\alpha \geq 0, \forall\,n \geq 1, \forall\,x \geq 0 \quad \int_0^x |f^{*(n)}(t)|\,dt \leq e^{\alpha x}(g(\alpha))^n.$$

Indication : *dans le premier membre de l'inégalité du (b), minorer $\int_0^{\infty} \ldots$ par $\int_0^x \ldots$*

2. Soit $h \in C_b(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, espace des fonctions réelles continues et bornées sur $\mathbb{R}$.

   (a) Montrer que $(h * f)(x)$ est définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ et que $h * f \in C_b(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. En déduire que $h * f^{*(n)} \in C_b(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ pour tout $n \geq 1$.

   (b) On suppose maintenant que $h = 0$ sur $\mathbb{R}_-$.
   Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$: $(h * f^{*(n)})(x) \to 0$ quand $n \to +\infty$.
   Indication : *montrer qu'il existe $\alpha \geq 0$ tel que $0 \leq g(\alpha) < 1$ et se ramener à utiliser 1. (c)*

Exercice D.19.3 Soient $(E, \mathcal{T}, m)$ un espace mesuré fini (i.e tel que $m(E) < +\infty$) et $p \in [1, +\infty]$. L^p désigne l'espace $L^p_{\mathbb{R}}(E, \mathcal{T}, m)$.
Soit $(f_n)_{n\geq 0} \subset L^p$, telle que :
(i) la suite $(\| f_n \|_p)_{n\geq 0}$ est bornée,
(ii) $f_n \to f$ p.p. quand $n \to +\infty$.

1. Montrer que $f \in L^p$ et $\| f \|_p \leq \sup_{n\geq 0} \| f_n \|_p$
   Indication : *lemme de Fatou.*

2. On suppose de plus que $p > 1$. Soit alors $r \in [1, p[$. Montrer que $f_n \to f$ dans L^r quand $n \to +\infty$.
   Indications :
   - *Introduire, pour $\varepsilon > 0$, les ensembles $A_n^\varepsilon = \{|f_n - f| > \varepsilon\}$ et $(A_n^\varepsilon)^c$.*
   - *Poser $p = r\,s$: on sera amené à appliquer l'inégalité de Hölder dans $\int |\, f_n - f\,|^r\, \mathbb{1}_{A_n^\varepsilon}\,\mathrm{dm}$ avec les exposants conjugués s et $s' = \dfrac{s}{s-1}$.*
   - *Rappel : dans le cas d'une mesure finie, la convergence p.p. entraîne la convergence en mesure.*

D.20 Examen I, septembre 2000

Exercice D.20.1 Soient E un ensemble non vide et A une partie de E. On désigne par $\mathcal{C}$ l'ensemble des parties de E qui contiennent A :

$$\mathcal{C} = \{B \in \mathcal{P}(E)\,;\; A \subset B\}.$$

1. Déterminer la tribu $\tau(\mathcal{C})$ engendrée par $\mathcal{C}$.
2. A quelle condition obtient-on $\tau(\mathcal{C}) = \mathcal{P}(E)$? Qu'obtient-on si $A = E$?

Exercice D.20.2 A tout réel α on associe la suite $(I_n(\alpha))_{n\geq 1}$ définie par :

$$I_n(\alpha) = \int_0^n \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n e^{-\alpha x}\, dx.$$

On pourra poser : $f_n(x) = 1\!\!1_{[0,\mathrm{n}]}(\mathrm{x}) \left(1 + \frac{\mathrm{x}}{\mathrm{n}}\right)^{\mathrm{n}} \mathrm{e}^{-\alpha\,\mathrm{x}}$.

1. On suppose $\alpha \leq 1$. Monter alors en utilisant le lemme de Fatou que $\lim_{n\to\infty} I_n(\alpha) = +\infty$.
2. On suppose maintenant $\alpha > 1$. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ et $n \geq 1$ on a $e^x \geq \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$ puis déterminer la limite de la suite $(I_n(\alpha))_{n\geq 1}$.

Exercice D.20.3 Soient $(E, \mathcal{T}, m)$ un espace mesuré fini et I un ensemble. On dit qu'une famille $(X_i)_{i\in I}$ d'applications mesurables définies sur cet espace est équi-intégrable si elle satisfait les deux conditions :

(i) *(équicontinuité)* $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall A \in \mathcal{T} \quad \forall i \in I \quad m(A) \leq \delta \Longrightarrow \int_A |X_i|\, dm \leq \varepsilon.$

(ii) $(X_i)_{i\in I}$ est bornée dans L^1.

1. Soit $X \in L^1(E, \mathcal{T}, m)$. Montrer que la famille réduite à X est équi-intégrable , i.e. :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall A \in \mathcal{T} \quad m(A) \leq \delta \Longrightarrow \int_A |X|\, dm \leq \varepsilon$$

   Indication : *on pourra introduire la suite* $Y_n = \min(|X|, n),\ n \geq 0$, *et commencer par établir la propriété pour* Y_n *à* n *fixé...*

2. En déduire que toute famille finie de L^1 est équi-intégrable.
3. Montrer que si la suite $(X_n)_{n\geq 0}$ converge vers X dans L^1, alors elle (la famille associée) est équi-intégrable.
4. Montrer que si la suite $(X_n)_{n\geq 0}$ converge en mesure vers X et est équi-intégrable, alors elle converge vers X dans L^1.

   Indication : *On sera amené à utiliser une décomposition de la forme :*

$$\int |\, X_n - X \,|\ dm \leq \int_{\{|X_n - X| < a\}} |\, X_n - X \,|\ dm + \int_{\{|X_n - X| \geq a\}} |\, X_n - X \,|\ dm$$

D.21 Examen II, septembre 2000

Exercice D.21.1 On justifiera chaque étape avec précision.

1. En calculant de deux façons différentes l'intégrale $I = \displaystyle\int_{\mathbb{R}_+^2} \frac{dx\,dy}{(1+y)\,(1+x^2y)}$, montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2-1}\,dx = \frac{\pi^2}{4}$
2. Trouver, à l'aide d'un changement de variables, une relation entre les intégrales $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln x}{x^2-1}\,dx$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2-1}\,dx$.
3. Montrer que :
$$\int_0^1 \frac{\ln x}{1-x^2}\,dx = \sum_{p=0}^{\infty} \int_0^1 x^{2p} \ln x\,dx.$$
4. Déduire de ce qui précède la valeur de la série $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$.

Exercice D.21.2

L^1 désigne l'espace $L^1(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \lambda)$. Soit $f \in L^1$ et soit $(r_n)_{n\geq 0}$ une suite de réels strictement positifs de limite nulle. B_n désigne la boule ouverte $B(0, r_n)$. On définit, pour $n \in \mathbb{N}$, la fonction $\overline{f}_n$ par :

$$\overline{f}_n(x) = \frac{1}{\lambda(B_n)} \int_{B(x,r_n)} f(y)\,dy$$

1. Montrer que $\overline{f}_n \in L^1$ pour tout entier n.
2. Énoncer le lemme de continuité en moyenne dans L^1.
3. Montrer que la suite $(\overline{f}_n)_{n\geq 0}$ converge vers f dans L^1.

Exercice D.21.3 Soient $(E, \mathcal{T}, m)$ un espace mesuré et $f : E \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable non m- p.p. nulle. On définit alors une fonction $\theta : \mathbb{R}_+^* \to \overline{\mathbb{R}}_+$ par $\theta(p) = \displaystyle\int |\, f\,|^p\ dm$, et on lui associe l'ensemble $I = \{p \in \mathbb{R}_+^*\,;\, \theta(p) < +\infty\}$.

1. Montrer que I est un intervalle.
   Indication : *quand I n'est ni vide ni un singleton, considérer p, q dans I et $r > 0$ tels que $p < r < q$, écrire $r = \alpha p + (1-\alpha) q$ (avec $\alpha \in]0,1[$) et utiliser l'inégalité de Hölder avec l'exposant $\dfrac{1}{\alpha}$ et son conjugué.*
2. Montrer, quand I n'est pas vide, que la fonction $\ln\theta$ est convexe sur I.
3. En considérant l'espace mesuré $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ et la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par
$$f(x) = \frac{\mathbb{1}_{[0,\frac{1}{2}]}(\mathrm{x}) + \mathbb{1}_{[2,+\infty[}(\mathrm{x})}{x(\ln x)^2}$$
   montrer que I peut être un singleton.

Exercice D.21.4

Énoncez les résultats que vous connaissez sur la transformée de Fourier dans L^2.