E.H.T.P — Contrôle d'analyse — 17/12/2016

1° année — Durée $2^h\,15^{mn}$

1) Soit (f_n) une suite décroissante dans M^+ qui converge vers f.

a) Montrer qu'on peut avoir $\lim \int f_n \neq \int f$

b) Si en plus $f_1 \in L_1$, montrer que

$$\lim \int f_n = \int f$$

2) Soient $g \in M^+(X, \Sigma)$ et γ une mesure sur Σ.

Posons $\vartheta(E) = \int_E g \, d\gamma$

i) Soit $f \in M^+(X, \Sigma)$ simple. Montrer que

$$\int f \, d\vartheta = \int f g \, d\gamma \qquad (1)$$

ii) En déduire la relation (1) pour $f \in M^+(X, \Sigma)$

3) Résoudre dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ l'équation différentielle

$$E'' + aE = \delta \quad , \quad a < 0$$

en calculant la transformée de Fourier de E

4) Résoudre dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ l'équation $(x-a)^2 T = 0 \, ; \, a \in \mathbb{R}$.

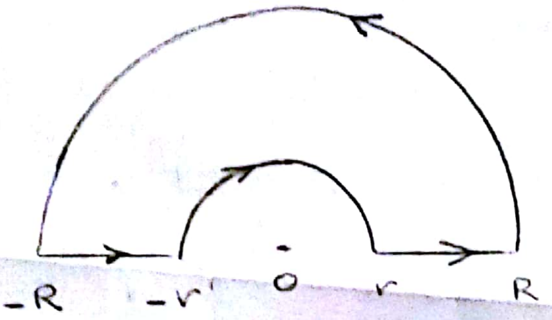
5) On pose $u(x,y) = x^3 - 3xy^2 + y + 1$

Trouver toutes les fonctions holomorphes $f(z)$ telles que $u(x,y) = \operatorname{Re} f(z)$. Exprimer analytiquement ces fonctions et leurs dérivées en fonction de z.

6) Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \cos \pi x}{x^2 + 2x + 5} \, dx$

→ ←

7) Calculer l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx$ en utilisant le chemin :



8) Soient H préhilbertien, $\mathcal{B} = (\phi_n)_{n \geq 1}$ un système orthogonal et

$$c_n(f) = \frac{\langle f, \phi_n \rangle}{\langle \phi_n, \phi_n \rangle} = \frac{\langle f, \phi_n \rangle}{\|\phi_n\|^2}$$

les coefficients de Fourier de f relativement à $\mathcal{B}$.

Démontrer l'inégalité de Bessel :

$$\sum_{n=1}^{\infty} |c_n(f)|^2 \|\phi_n\|^2 \leq \|f\|^2 , \quad \forall f \in H .$$

<u>Barème : 2,5 points par question.</u>