Chap2, série 1: Analyse Numérique 2

Enseignant : Salem NAFIRI

3 février 2017

Exercice 1 : énoncé

Le but de cet exercice est de compléter un programme permettant d'approcher l'intégrale d'une fonction continue. Soit a, $b \in \mathbb{R}$, on veut approcher numériquement $\int_a^b f(x)dx$. Soit N un entier positif, $h = (b-a)/N$, on pose $x_i = a + ih$, $i = 0, \cdots, N$. Soit M un entier positif, on se donne des points d'intégration $-1 \leqslant t_1 < t_2 < ... < t_M \leqslant 1$, des poids $\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_M$ et donc une formule de quadrature $J(g) = \sum_{j=1}^{M} \omega_j g(t_j)$ pour intégrer numériquement $\int_{-1}^{1} g(t)dt$. On obtient donc l'approximation

$$L_h(f) = \frac{h}{2} \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=1}^{M} \omega_j f\Big(x_i + h\frac{t_j + 1}{2}\Big) \text{ de } \int_a^b f(x)dx.$$

D'après le théorème 3.1, si la formule de quadrature est exacte pour les polynômes de degré r et si $f \in \mathcal{C}^{r+1}[a, b]$ alors

$$\left| \int_a^b f(x)dx - L_h(f) \right| = O(h^{r+1}).$$

Etant donné les points d'intégration t_j, $j = 1, \cdots, M$, les poids de la formule de quadrature seront calculés en utilisant la formule du théorème 3.2 :

$$\omega_j = \int_{-1}^{1} \varphi_j(t)dt \qquad j = 1, \cdots, M.$$

Question 1 : Dans le cas de la formule du trapèze, $M = 2$, $t_1 = -1$, $t_2 = 1$, de Gauss à deux points, $M = 2$, $t_1 = -1/\sqrt{3}$, $t_2 = 1/\sqrt{3}$, et de Simpson, $M = 3$, $t_1 = -1$, $t_2 = 0$, $t_3 = 1$, remplir le tableau suivant (ici "ordre" désigne l'ordre de convergence maximal de la méthode).

ω_1	
ω_2	
ω_3 (Simpson)	
$L_h(f)$	
ordre	

Question 2 : Le programme `integration.m` est à votre disposition. A partir de la donnée de N, ce programme vous permet de calculer l'erreur

$$\left| \int_a^b f(x)dx - L_h(f) \right|$$

pour les formules du trapèze, de Gauss à deux points et de Simpson. Ce programme est incomplet, vous devez en particulier programmer les formules issues de la question 1 ci-dessus. Pour lancer le programme avec $N = 10$, tapez

```
[err trap, err gau2, err simp]=integration(10);
```

dans la fenêtre de commande `matlab`. Les lignes à compléter sont ....

Question 3 : Dans le cas où $a = 0$, $b = 1$, $f(x) = xsin(10\pi x)$, calculer $\int_0^1 f(x)dx$ et remplir le tableau suivant pour les trois formules proposées (deux chiffres significatifs, ici "ordre" désigne l'ordre observé numériquement pour $N = 40, 80$ arrondi à l'entier le plus proche).

N	`erreur`
5	
10	
20	
40	
80	
ordre	