Analyse Numérique 1

Salem Nafiri

Ecole Hassania des Travaux Publics

Rappel: Théorie matricielle

Quelques Rappels sur la théorie matricielle

Questions:

1. C’est quoi une matrice?
2. C’est quoi son rang ?
3. C’est quoi une valeur propre ? Un vecteur propre ?
4. Peut on mesurer un vecteur propre ? Une matrice ?
5. Que veut dire le conditionnement d’une matrice ?

Quelques Rappels sur la théorie matricielle

Réponses:

- Une matrice est un tableau de nombre à n lignes et m colonnes.

  A=(a_ij), i=1,…,n et j=1,…,m (dans la suite m=n)

- Transposé d'une matrice A, noté A^t =(a_ij)=(a_ji)
- Une matrice adjointe est notée A*=($\bar{a}_{ji}$)
- Une matrice est diagonale si a_ij=0, i≠j
- Une matrice est dite triangulaire supérieure (resp. triang. inférieure) si a_ij=0, i>j (resp. i<j)
- A est à diagonale (strict.) dominante si :

$$|a_{ii}| \geq \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ j \neq i}} |a_{ij}| \text{ (resp. >)}$$

Rappels

Le rang d'une matrice A∈ $M_{n,m}$(IR) est la dimension du sous espace vectoriel de IR^m engendré par ses vecteurs colonnes.
Rang A= dim(Im A)

Trace d'une matrice: Tr(A)=$\sum_{i=1}^{n} a_{ii}$
Tr(A)=Tra(A^t)
Tr(AB)=Tr(BA)
Tr(.) est une fonction linéaire.

Quelques Rappels sur la théorie matricielle

Une valeur propre est la solution du polynôme caractéristique associé à A.

$p_A(\lambda)=\det(\lambda I-A)$

$\rho(A)=\max\{\lambda_i(A), i=1,\ldots n\}$ est le rayon spectral de A.

Un vecteur $v \neq 0$ *tel que* $Av = \lambda v$ est dit: vecteur propre de A associé à la valeur propre λ.

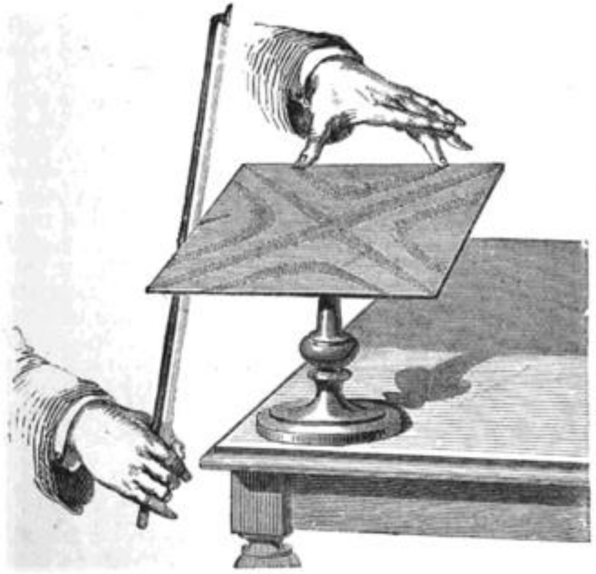
Une valeur singulière de A est la racine carrée positive d'une valeur propre de la matrice hermitienne A^*A ($A^t A$ si la matrice est à coefficients réels.)

Can we See or Hear eigenvectors ?

Ernst Florens Friedrich Chladni (1756-1827)

« Cet homme rend le son visible »
Tels furent les mots prononcés par Napoléan en découvrant l’expérience de **Chladni**.
La technique de **Chladni**, publiée pour la première fois en 1787 dans son ouvrage *Entdeckungen über die Theorie des Klanges* («Découvertes dans la théorie du son»).

https://www.youtube.com/watch?v=6kLmlbkWJZ8



Chladni plates

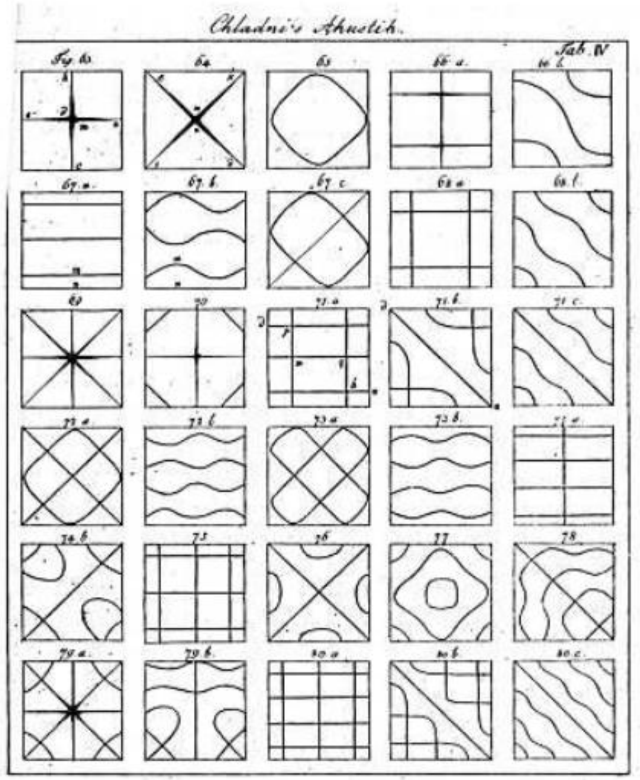
- Let us “see” the **vibration** of the metal plate from the white sands.

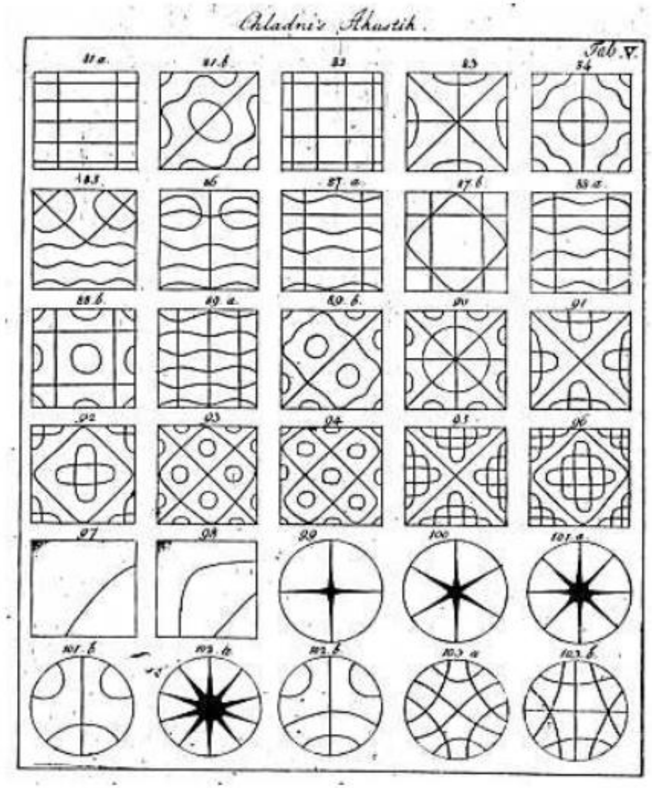
(https://www.youtube.com/watch?v=wvJAgrUBF4w)

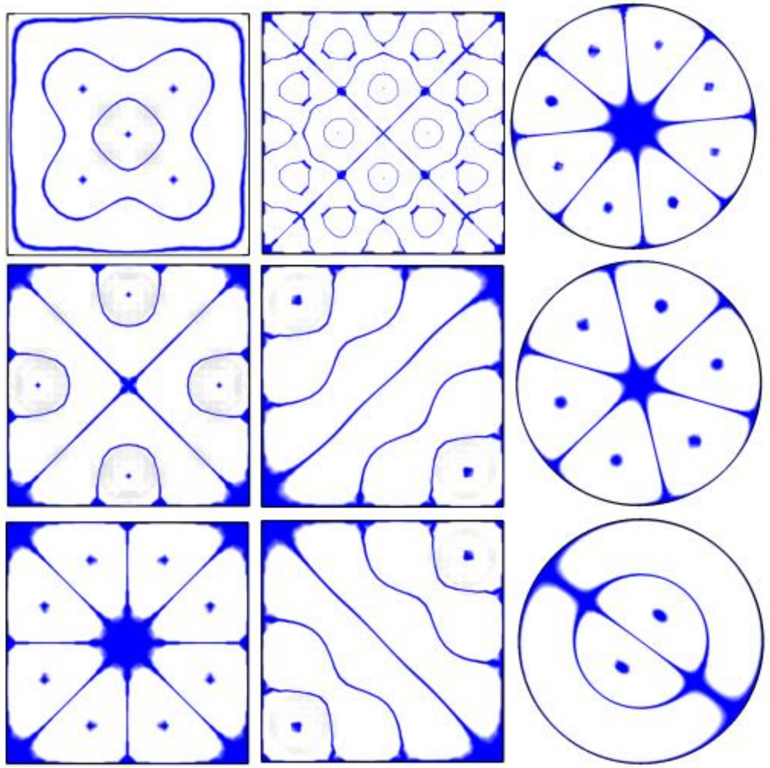
Seeing and Hearing the Eigenvectors of a Fluid

Aaron Demby Jones, JoAnn Kuchera-Morin and Theodore Kim
Media Arts and Technology Program
University of California.

Chladni plates **VS** spetral







Left: In the late 1700's, the physicist Ernst Chladni was amazed by the patterns formed by sand on **vibrating metal plates**.
Right: numerical simulations obtained with a **discretized Laplacian.**

- a symmetric matrix $A \in \mathbf{R}^{n \times n}$ is *positive semidefinite* if

$$x^T A x \geq 0 \quad \text{for all } x$$

- a symmetric matrix $A \in \mathbf{R}^{n \times n}$ is *positive definite* if

$$x^T A x > 0 \quad \text{for all } x \neq 0$$

  this is a subset of the positive semidefinite matrices

note: if A is symmetric and $n \times n$, then $x^T A x$ is the function

$$x^T A x = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} A_{ij} x_i x_j = \sum_{i=1}^{n} A_{ii} x_i^2 + 2 \sum_{i>j} A_{ij} x_i x_j$$

this is called a *quadratic form*

Vector Norm

On a vector space V, a norm is a function $\|\cdot\|$ from V to the set of non-negative reals that obeys three postulates:

$$\|x\| > 0 \qquad if \qquad x \neq 0, C$$
$$\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\| \qquad if \quad \lambda \in R, x \in V$$
$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \qquad if \quad x, y \in V \qquad (Trinagular \quad Inequality)$$

we can think of $\|x\|$ as the length or magnitude of the vector x.

The most familiar norm on R^n is the Euclidean

ℓ_2-norm defined by $\|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \right)^{1/2}$

ℓ_∞-norm defined by $\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$

ℓ_1-norm defined by $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$

In general *p*-norm, defined by

ℓ_p-norm defined by $\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^p \right)^{1/p}$ for $p > 0$ and n-vector x

Matrix Norm

Matrix norm corresponding to given vector norm defined by

$$\|A\| = \max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$$

Norm of matrix measures maximum stretching matrix does to any vector in given vector norm.

Matrix norm corresponding to vector 1-norm is maximum absolute column sum

$$\|A\|_1 = \max_j \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$$

Matrix norm corresponding to vector ∞- norm is maximum absolute row sum,

$$\|A\|_\infty = \max_i \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$$

$$|||A|||_2 = \sqrt{\rho(A^*A)}.$$

Properties of Matrix Norm

Any matrix norm satisfies:

1. $\|A\| > O$ if $A \neq O$
2. $\|\gamma A\| = |\gamma| \cdot \|A\|$ for any scalar value γ

3. $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$

Matrix norm also satisfies

4. $\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$
5. $\|Ax\| \leq \|A\| \cdot \|x\|$ for any vector x

Conditionnement d’une matrice

Les modèles linéaires de la physique, de l'astronomie,..., conduisent souvent à la résolution de grands systèmes linéaires qu'on représente matriciellement par une équation du type AX=Y. Il arrive parfois qu'une petite variation sur A (resp. sur Y) entraîne une grande variation sur X. On dit dans ce cas que la matrice, ou le problème, est **mal conditionnée**.

Exemple : On souhaite résoudre le système linéaire AX=Y, où A est la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 7 & 8 & 7 \\ 7 & 5 & 6 & 5 \\ 8 & 6 & 10 & 9 \\ 7 & 5 & 9 & 10 \end{pmatrix}.$$

Si Y est le vecteur

$$Y = \begin{pmatrix} 32 \\ 23 \\ 33 \\ 31 \end{pmatrix}$$

alors on trouve

$$X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Mais si Y est le vecteur

$$Y = \begin{pmatrix} 32.1 \\ 22.9 \\ 33.1 \\ 30.9 \end{pmatrix}$$

alors on trouve

$$X = \begin{pmatrix} 9.2 \\ -12.6 \\ 4.5 \\ -11 \end{pmatrix}.$$

Autrement dit, de très petites variations sur Y ont conduit à de grandes variations sur X.

Conditionnement d’une matrice

Il y a des calculs matriciels qui sont sensibles aux erreurs dans l'entrée. Comme dans l’exemple suivant:

$$\frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{3}x_2 = 1,$$
$$\frac{1}{3}x_1 + .3x_2 = 0,$$

Le système suivant admet une solution x_1= 3.375 et x_2=-0.375

Si on remplace le coefficient a_{22}=3 par 1/3, alors le nouveau système n’admet plus de solution.

$$\frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{3}x_2 = 1,$$
$$\frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{3}x_2 = 0$$

Une petit changement dans l’entrée de la matrice a causé un changement radical de la sortie, i.e., une perte totale de la solution !!!

Matrix Condition Number

Condition number of square nonsingular matrix A defined by

$$cond(A) = \|A\| \cdot \|A\|^{-1}$$

By convention, cond $(A) = \infty$ if A singular

Example: $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 4 \end{bmatrix}$ $\|A\|_1 = 6$ $\|A\|_\infty = 8$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 0.5 & 1.5 & -0.5 \\ -0.5 & 2.5 & -0.5 \\ -0.5 & -0.5 & 0.5 \end{bmatrix} \quad \|A^{-1}\|_1 = 4.5 \quad \|A^{-1}\|_\infty = 3.5$$

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 7 & 8 & 7 \\ 7 & 5 & 6 & 5 \\ 8 & 6 & 10 & 9 \\ 7 & 5 & 9 & 10 \end{pmatrix}.$$

$cond_1$ (A) = 6 x 4.5 = 27
$cond_\infty$ (A) = 8 x 3.5 = 28

Dans l'exemple précédent, on trouve K(A)=4488, où la norme choisie est la norme matricielle associée à la norme infinie sur R^4.

Résolution de $Ax=b$

1. Méthodes Directes

- Méthode de Cramer
- Méthode de Gauss
- Décomposition LU
- Méthode de Cholesky

2. Méthodes Itératives

- Méthode de Jacobi
- Méthode de Gauss Seidel
- Méthode de Relaxation
- Méthode de la descente
- Méthode de Gradient Conjugué

Motivation: Ax=b

If we have one linear equation

$$ax = b$$

in which the unknown is x and a and b are constants then there are just three possibilities

- $a \neq 0$ then $x = \frac{b}{a} \equiv a^{-1}b$. The equation $ax = b$ has a *unique solution* for x.
- $a = 0$, $b = 0$ then the equation $ax = b$ becomes $0 = 0$ and any value of x will do. There are *infinitely many solutions* to the equation $ax = b$.
- $a = 0$ and $b \neq 0$ then $ax = b$ becomes $0 = b$ which is a contradiction. In this case the equation $ax = b$ has *no solution* for x.

Méthode de Cramer

Cramer's Rule

The unique solution to the equations:

$$ax + by = e$$

$$cx + dy = f$$

is given by:

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta}, \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta}$$

in which

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \qquad \Delta_x = \begin{vmatrix} e & b \\ f & d \end{vmatrix}, \qquad \Delta_y = \begin{vmatrix} a & e \\ c & f \end{vmatrix}$$

Méthode de Cramer

What if the method fails?

Cramer's rule fails if the determinant of the coefficient array is zero, since you can't divide by zero. In this case the system of equations is either inconsistent (it has no solutions) or it has infinitely many solutions. Either way, you need to use some other method to seek the solutions. Cramer's rule always succeeds if there is exactly one solution.

Elimination de Gauss

Consider the system

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + 5x_3 &= 14 \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 &= 3 \\ 4x_1 + 5x_2 - x_3 &= 7 \end{aligned}$$

The first step is to write the equations in matrix form.
This gives:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & -1 & -3 \\ 4 & 5 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 \\ 3 \\ 7 \end{bmatrix}.$$

Then for conciseness we combine the matrix of coefficients with the column vector of right-hand sides to produce the **augmented matrix**

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 5 & 14 \\ 2 & -1 & -3 & 3 \\ 4 & 5 & -1 & 7 \end{array}\right]$$

If the general system of equations is written

$$AX = B$$

then the augmented matrix is written

$$[A|B].$$

Hence the first equation

$$x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 14$$

is replaced by the first row

$$1 \quad 3 \quad 5 \quad | \quad 14$$

of the augmented matrix, and so on.

Stage 1 proceeds by first eliminating x_1 from the second and third equations using row operations.

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 3 & 5 & 14 \\ 2 & -1 & -3 & 3 \\ 4 & 5 & -1 & 7 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ R2-2\times R1 \\ R3-4\times R1 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 3 & 5 & 14 \\ 0 & -7 & -13 & -25 \\ 0 & -7 & -21 & -49 \end{array}\right]$$

In the above we have subtracted twice row (equation) 1 from row (equation) 2. In full these operations would be written, respectively, as

$$(2x_1 - x_2 - 3x_3) - 2(x_1 + 3x_2 + 5x_3) = 3 - 2 \times 14$$

or

$$-7x_2 - 13x_3 = -25$$

and

$$(4x_1 + 5x_2 - x_3) - 4(x_1 + 3x_2 + 5x_3) = 7 - 4 \times 14$$

or

$$-7x_2 - 21x_3 = -49.$$

You should practise this process by obtaining the other coefficients in new rows 2 and 3 of the augmented matrix. Now since all the elements in rows 2 and 3 are negative we multiply throughout by -1 to produce

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 5 & 14 \\ 0 & -7 & -13 & -25 \\ 0 & -7 & -21 & -49 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ R2\times(-1) \\ R3\times(-1) \end{array} \quad \Rightarrow \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 5 & 14 \\ 0 & 7 & 13 & 25 \\ 0 & 7 & 21 & 49 \end{array}\right]$$

(In extended form we have

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + 5x_3 &= 14 \\ 7x_2 + 13x_3 &= 25 \\ 7x_3 + 21x_2 &= 49 \end{aligned}$$

Notice that the first equation remains unaltered).
Finally, we eliminate x_3 from the third equation by subtracting equation 2 from equation 3 i.e. $R3 - R2$.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 5 & 14 \\ 0 & 7 & 13 & 25 \\ 0 & 7 & 21 & 49 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ R3 - R2 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 5 & 14 \\ 0 & 7 & 13 & 25 \\ 0 & 0 & 8 & 24 \end{array}\right]$$

The system is now in triangular form.

Décomposition LU

Suppose we have the system of equations

$$AX = B.$$

The motivation for an LU decomposition is based on the observation that systems of equations involving triangular coefficient matrices are easier to deal with. Indeed, the whole point of Gaussian Elimination is to replace the coefficient matrix with one that is triangular. The LU decomposition is another approach designed to exploit triangular systems.
We suppose that we can write

$$A = LU$$

where L is a lower triangular matrix and U is an upper triangular matrix. Our aim is to find L and U and once we have done so we have found an LU decomposition of A.

It turns out that we need only consider lower triangular matrices L that have 1s down the diagonal. Here is an example, let

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 8 & 14 \\ 2 & 6 & 13 \end{bmatrix} = LU$$

where $L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ L_{21} & 1 & 0 \\ L_{31} & L_{32} & 1 \end{bmatrix}$ and $U = \begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} & U_{13} \\ 0 & U_{22} & U_{23} \\ 0 & 0 & U_{33} \end{bmatrix}$.
Multiplying out LU and setting the answer equal to A gives

$$\begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} & U_{13} \\ L_{21}U_{11} & L_{21}U_{12} + U_{22} & L_{21}U_{13} + U_{23} \\ L_{31}U_{11} & L_{31}U_{12} + L_{32}U_{22} & L_{31}U_{13} + L_{32}U_{23} + U_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 8 & 14 \\ 2 & 6 & 13 \end{bmatrix}.$$

Now we have to use this to find the entries in L and U. Fortunately this is not nearly as hard as it might at first seem. We begin by running along the top row to see that

$$\boxed{U_{11} = 1}\,, \qquad \boxed{U_{12} = 2}\,, \qquad \boxed{U_{13} = 4}\,.$$

Now consider the second row

$$L_{21}U_{11} = 3 \quad \therefore L_{21} \times 1 = 3 \quad \therefore \boxed{L_{21} = 3},$$

$$L_{21}U_{12} + U_{22} = 8 \quad \therefore 3 \times 2 + U_{22} = 8 \quad \therefore \boxed{U_{22} = 2},$$

$$L_{21}U_{13} + U_{23} = 14 \quad \therefore 3 \times 4 + U_{23} = 14 \quad \therefore \boxed{U_{23} = 2}.$$

Notice how, at each step, the equation in hand has only one unknown in it, and other quantities that we have already found. This pattern continues on the last row

$$L_{31}U_{11} = 2 \quad \therefore L_{31} \times 1 = 2 \quad \therefore \boxed{L_{31} = 2},$$

$$L_{31}U_{12} + L_{32}U_{22} = 6 \quad \therefore 2 \times 2 + L_{32} \times 2 = 6 \quad \therefore \boxed{L_{32} = 1},$$

$$L_{31}U_{13} + L_{32}U_{23} + U_{33} = 13 \quad \therefore (2 \times 4) + (1 \times 2) + U_{33} = 13 \quad \therefore \boxed{U_{33} = 3}.$$

We have shown that

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 8 & 14 \\ 2 & 6 & 13 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

and this is an LU decomposition of A.

Décomposition de Cholesky

Cholesky decomposition is a special version of LU decomposition tailored to handle symmetric matrices more efficiently.

For a symmetric matrix A, by definition, $a_{ij} = a_{ji}$. LU decomposition is not efficient enough for symmetric matrices. The computational load can be halved using Cholesky decomposition.

Using the fact that A is symmetric, write

$$A = LL'$$

where L is a lower triangular matrix. That is,

$$L = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0\dots & 0 & \\ \vdots & & & & \\ l_{n1} & l_{n2} & n_{n3} & \dots & l_{nn} \end{bmatrix} \tag{1}$$

Note that the diagonal elements of L are not 1s as in the case of LU decomposition.

With Cholesky decomposition, the elements of L are evaluated as follows:

$$l_{kk} = \sqrt{a_{kk} - \sum_{j=1}^{k-1} l_{kj}^2} \quad k = 1, 2, \ldots, n \tag{2}$$

$$l_{ki} = \frac{1}{l_{ii}} \left(a_{ki} - \sum_{j}^{i-1} l_{ij} l_{kj} \right) \quad i = 1, 2, \ldots, k-1 \tag{3}$$

where the first subscript is the row index and the second one is the column index.

Cholesky decomposition is evaluated column by column (starting from the first column) and, in each row, the elements are evaluated from top to bottom. That is, in each column the diagonal element is evaluated first using (2) (the elements above the diagonal are zero) and then the other elements in the same row are evaluated next using (3). This is carried out for each column starting from the first one.

Note that if the value within the square root in (2) is negative, Cholesky decomposition will fail. However, this will not happen for positive semidefinite matrices, which are encountered commonly in many engineering systems (e.g., circuits, covariance matrix). Thus, Cholesky decomposition is a good way to test for the positive semidefiniteness of symmetric matrices.

Décomposition QR

There is another matrix factorization that is sometimes very useful, the so-called QR *decomposition*,

$$\mathbf{A} = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{R} \tag{2.10.1}$$

Here $\mathbf{R}$ is upper triangular, while $\mathbf{Q}$ is orthogonal, that is,

$$\mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{Q} = \mathbf{1} \tag{2.10.2}$$

where $\mathbf{Q}^T$ is the transpose matrix of $\mathbf{Q}$. Although the decomposition exists for a general rectangular matrix, we shall restrict our treatment to the case when all the matrices are square, with dimensions $N \times N$.

Coût de calcul

- Pour la méthode de Cramer, le coût de calcul est O(n!)
- Le coût de calcul dans la méthode de Gauss est: n^3/3.
- Le coût de calcul dans la méthode de décomposition LU est 2 n^3/3+O(n^2) flops.
- La méthode de Cholesky pour les matrices symétriques définies positives est en 1/3 n^3.
- Le coût de la méthode QR pour une matrice de taille n*n est en 4/3 n^3. Ce coût est relativement élevé.
- FLOPS est une unité de mesure de la vitesse d'un système informatique.

Etude des algorithmes de résolution de $Ax=b$

Algorithme 1 : Algorithme d'élimination de Gauss

Entrées : $\mathbf{A}, \mathbf{b}$

pour $k = 1, \ldots, n-1$ **faire**
  `// On teste si le pivot est nul`
  si $|a_{kk}| < \varepsilon$ **alors**
    Afficher un message d'erreur
  fin
  sinon
    `//Calcul de` $\mathbf{A}^{(k)}$
    pour $i = k+1, \ldots, n$ **faire**
      $c \leftarrow \frac{a_{ik}}{a_{kk}}$
      $b_i \leftarrow b_i - c \times b_k$
      $a_{ik} \leftarrow 0$
      pour $j = k+1, \ldots, n$ **faire**
        $a_{ij} \leftarrow a_{ij} - c \times a_{kj}$
      fin
    fin
  fin
fin
$\widetilde{\mathbf{A}} \leftarrow \mathbf{A}$
$\widetilde{\mathbf{b}} \leftarrow \mathbf{b}$

Sorties : $\widetilde{\mathbf{A}}, \widetilde{\mathbf{b}}$

Algorithme 2 : Algorithme de Doolittle

Entrées : **A**

$L \leftarrow I_{nn}$

$U \leftarrow 0_{nn}$

pour $i = 1, \ldots, n-1$ **faire**

  pour $j = i, \ldots, n$ **faire**

$$u_{ij} \leftarrow a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} u_{kj}$$

  fin

  pour $j = i+1, \ldots, n$ **faire**

$$l_{ji} \leftarrow \frac{1}{u_{ii}} \left(a_{ji} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{jk} u_{ki} \right)$$

  fin

fin

$u_{nn} \leftarrow a_{nn} - \sum_{k=1}^{n-1} l_{nk} u_{kn}$

Sorties : L, U

On donne maintenant *l'algorithme de Cholesky* qui étant donnée une matrice carrée réelle A symétrique et définie positive calcule une matrice L telle que $A = L\,L^T$. On admettra que cet algorithme est correct.

Entrèe : $A = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n} \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ symétrique et définie positive.
Sortie : $L = (l_{i,j})_{1\leq i,j\leq n} \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ tel que $A = L\,L^T$.

1. $l_{1,1} = \sqrt{a_{1,1}}$;
2. Pour i de 2 à n par pas de 1, faire :
   - $l_{i,1} = \frac{a_{i,1}}{l_{1,1}}$;
3. Pour j de 2 à n par pas de 1, faire :
   - Pour i de 1 à $j-1$ par pas de 1, faire :

     $l_{i,j} = 0$;
   - $l_{j,j} = \sqrt{a_{j,j} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{j,k}^2}$;
   - Pour i de $j+1$ à n par pas de 1, faire :

     $l_{i,j} = \frac{a_{i,j} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{i,k}\, l_{j,k}}{l_{j,j}}$;
4. Retourner $L = (l_{i,j})_{1\leq i,j\leq n} \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$.

TP

Résoudre le système $Ax = b$ avec

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 & 6 & -4 \\ 4 & 9 & 12 & 6 & -3 \\ 6 & 12 & -9 & -17 & 15 \\ 6 & 6 & -17 & 17 & 16 \\ -4 & -3 & 15 & 16 & -8 \end{pmatrix}$$

et

$$b = \begin{pmatrix} 5 \\ 15 \\ 33 \\ -10 \\ 28 \end{pmatrix}.$$

Références

Ipsen, Ilse C. F. *Numerical matrix analysis linear systems and least squares, North Carolina State University.*