Exercice 3.

Soit f la fonction entière de la variable complexe z définie par : $f(z) = \exp(2xz - z^2)$, où x est un paramètre réel, et soit $\sum_{n=0}^{+\infty} H_n(x)z^n$ le développement en série entière de f.

1.)- Montrer que $H_n(x) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\partial\Omega^+} \exp(2xz - z^2)\frac{dz}{z^{n+1}}$ où Ω est un ouvert convenable. Calculer $H_n'(x)$ (sans justifier la dérivation sous l'intégrale). Montrer que $H'_{n+1} = 2H_n$ pour $n \geq 0$. En déduire que H_n est un polynôme de degré n.

2.)- Si Ω est un disque de centre 0 et de rayon plus grand que $|x|$, montrer que l'on a $e^{-x^2}H_n(x) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\partial\Omega^+} \frac{e^{-z^2}dz}{(z+x)^{n+1}}$. En déduire que $e^{-x^2}H_n(x) = \frac{(-1)^n}{n!}\left(\frac{d^n}{dz^n}e^{-z^2}\right)_{z=x}$.

3.)- Soit $\varphi(x)$ une fonction continue telle que $\int_{-\infty}^{+\infty}|\varphi(x)|^2e^{-x^2}dx < +\infty$. On lui associe la fonction $\Phi(z) = \int_{-\infty}^{+\infty}\exp[-(x-z)^2]\varphi(x)dx$ qui est une fonction entière de z (On ne demande pas de le démontrer). On pose $\Phi(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(\varphi)z^n$ le développement en série entière de Φ. Démontrer la formule : $a_n(\varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} H_n(x)e^{-x^2}\varphi(x)dx$.

4.)- Pour $\varphi = H_n$ on note $\Phi = \Phi_n$ Démontrer les relations : $\Phi'_{n+1}(z) = 2\Phi_n(z)$, $\Phi_n(0) = 0$ $(n \geq 1)$, et $\Phi_0(z) = \sqrt{\pi}$. En déduire la valeur de Φ_n.

5.)- On pose $\omega(x) = e^{-x^2}$ et on considère l'ensemble $S_\omega = \left\{f \in \mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R}) / \int_{-\infty}^{+\infty}|f(x)|^2\omega(x)dx < +\infty\right\}$. On munit S_ω du produit scalaire $< f,g >= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)g(x)\omega(x)dx$ qui en fait un espace préhilbertien. La norme associée étant $\|f\| = \sqrt{< f,f >}$.

a)- Verifier que les H_n appartiennent à S_ω et calculer $< H_p, H_q >$. $p,q \in \mathbb{N}$.

b)- Soit $\varphi \in S_\omega$. On pose $f(x) = \varphi(x)e^{-x^2}$. Montrer que $f \in L^1(\mathbb{R})$.

c)- Que représente la fonction $u \to e^{-\pi^2u^2}\Phi(-i\pi u)$. Φ etant la fonction, associée à φ, définie dans la question 3.).

d)- Montrer que si tous les $a_n(\varphi)$ sont nuls alors φ est nulle.

e)- Montrer que le système $\{H_n / n \in \mathbb{N}\}$ est une base hilbertienne de S_ω.

On considère un espace mesuré $(X, \mathcal{X}, \mu)$ et (f_n) une suite croissante de fonctions positives μ-intégrables à valeurs dans $\mathbb{R}_+$, telle que $\int f_n d\mu \leq M$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Soient $A_n(p) = \{x \in X \mid f_n(x) \geq p\}$, $n \in \mathbb{N}$, $p \in \mathbb{N}$ et $A = \{x \in X \mid [f_n(x)]$ n'est pas une suite bornée$\}$

1) Posons $A(p) = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n(p)$.

Montrer que $\mu(A(p)) = \lim_{n \to \infty} \mu(A_n(p))$

2) Montrer que $\mu(A(p)) \leq \frac{M}{p}$

3) Exprimer A en fonction des $A(p)$.

4) Calculer $\mu(A)$.

5) Montrer que f_n converge presque partout vers une fonction mesurable f à valeurs dans $\mathbb{R}_+$.

6) Montrer que f est intégrable et que

$$\lim \int f_n d\mu = \int f d\mu .$$

7) On pose $u(x, y) = -6xy + 2x + 1$

Trouver toutes les fonctions holomorphes $f(z)$ telles que $u(x,y) = \mathrm{Re}\, f(z)$. Exprimer ces fonctions en fonction de z et calculer leur dérivée.

E.H.T.P. Contrôle n° 1 de mathématiques. 1° année G.C+Mc 2/11/2006.

On considère un espace mesuré $(X, \mathcal{X}, \mu)$ et (f_n) une suite croissante de fonctions positives μ-intégrable à valeurs dans $\mathbb{R}_+$, telle que $\int f_n d\mu \leq M$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Soient $A_n(p) = \{x \in X \mid f_n(x) \geq p\}$, $n \in \mathbb{N}$, $p \in \mathbb{N}$

et $A = \{x \in X \,/\, [f_n(x)]$ n'est pas une suite bornée$\}$

1) Posons $A(p) = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n(p)$.

Montrer que $\mu(A(p)) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n(p))$.

2) Montrer que $\mu(A(p)) \leq \frac{M}{p}$.

3) Exprimer A en fonction des $A(p)$.

4) Calculer $\mu(A)$.

5) Montrer que f_n converge presque partout vers une fonction mesurable f à valeurs dans $\mathbb{R}_+$.

6) Montrer que f est intégrable et que

$$\lim \int f_n \, d\mu = \int f \, d\mu .$$

7) On pose $u(x,y) = -6xy + 2x + 1$

Trouver toutes les fonctions holomorphes $f(z)$ telles que $u(x,y) = \operatorname{Re} f(z)$. Exprimer ces fonctions en fonction de z et calculer leur dérivée.

E.H.T.P. | Rattrapage d'analyse | 1° année 7/3/2011

Partie A. Durée 45 mn

1) Montrer que toute fonction mesurable à valeurs dans $\mathbb{R}$ est limite d'une suite de fonctions simples mesurables.

2) Soient (f_n) une suite de fonctions mesurables, et $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction mesurable telles que : $\lim\limits_{n \to \infty} f_n = f$ γ-presque partout avec $|f_n| \leq M < +\infty$, $\forall n$.
Montrer que si $\gamma(X) < +\infty$, alors
$$\lim_{n \to \infty} \int f_n \, d\gamma = \int f \, d\gamma$$

3) Vérifier que $g\delta = g(0)\delta \qquad \forall g \in C^\infty(\mathbb{R})$

4) Soit $\varphi(x) \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ telle que $\operatorname{Supp} \varphi = [c, 0]$, $c < 0$, et $\int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\, dx = 1$.
a) Montrer que la fonction $\sigma(x) = \int_c^x \varphi(t)\, dt$ est $C^\infty(\mathbb{R})$.
b) Calculer $\sigma(x)$ pour i) $x \geq 0$ et pour ii) $x \leq c$.

E.H.T.P. | Contrôle n° 2 de mathématiques | 1ère année 15/12/06

1) Calculer dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$:

a) $\displaystyle\lim_{h \to 0} \frac{\tau_h T - T}{h}$, $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$

b) $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \cos nx$

c) $\displaystyle\frac{d^2}{dx^2} |x|$

2) Soit f une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$, non constante et qui ne s'annule pas sur $\mathbb{C}$. Montrer que
$\forall \varepsilon > 0, \forall r > 0, \exists z \in \mathbb{C}, |z| > r$ tel que $|f(z)| < \varepsilon$

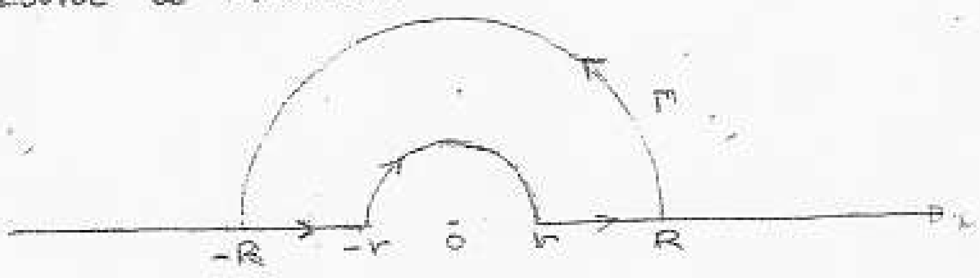
3) Chercher la fonction $f(t)$ dont la transformée de Laplace est :

$$F(p) = \operatorname{Log}\left(1 + \frac{\omega^2}{p^2}\right)$$

4) Calculer l'intégrale :

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin 3\theta}{5 - 3\cos\theta}\, d\theta$$

5) Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{Log} x}{1 + x^2}\, dx$ en utilisant le chemin



E.H.T.P. — Contrôle n° 2 d'analyse — 1° année

24/12/2008

Durée 2^h

Les 7 exercices sont indépendants.

Barème : 3 points par exercice.

1) Résoudre l'équation intégrale :

$$\int_0^t f(x)\, e^{(t-x)}\, dx = \sin t \qquad (t>0).$$

2) Soient H un espace préhilbertien sur $\mathbb{C}$, et V un sous-espace vectoriel complet de H. Montrer que

$$\langle f, pr_V(h) \rangle = \langle pr_V(f), h \rangle, \quad \forall f, h \in H$$

3) Calculer dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, $\lim\limits_{n \to +\infty} T_{f_n}$, avec $f_n(t) = \dfrac{n}{\sqrt{\pi}}\, e^{-n^2 t^2}$.

4) Calculer dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, $\dfrac{d^n}{dx^n}\left(\dfrac{x^{n-1}\, Y}{(n-1)!}\right)$, $n \in \mathbb{N}^*$.

5) Trouver le développement de Laurent, $f(z) = \sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z+2)^n$, autour de $z_0 = -2$, avec :

$$f(z) = \frac{z}{(z+1)(z+2)}$$

6) Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_\Gamma \frac{dz}{1+z^3}$, où

Γ est l'ellipse $2x^2 + y^2 - \dfrac{3}{2} = 0$

7) Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^{2\pi} \cos^{2n}\theta \, d\theta$, $n = 1, 2, \ldots$

$$\left(\text{Rappel : } (1+z^2)^{2n} = \sum_{p=0}^{2n} \frac{(2n)!}{p!\,(2n-p)!}\, z^{2p} \right).$$

$\langle p(x), y \rangle = \langle p(x), p(y) \rangle$

$\langle p(x) + x_1, p(y) \rangle = \langle p(x), p(y) \rangle + \langle x_1, p(y) \rangle$

[illegible]

E.H.T.P.
1° année.

Contrôle n° 1
d'analyse.

3/11/2010
Durée 1h 30min.

Barème : 2,5 points par question.

A/ Soit $g \in M^+(X, \mathfrak{X})$ et μ une mesure sur $\mathfrak{X}$.
Posons $\nu(E) = \int_E g \, d\mu$.

a) Montrer que ν est une mesure sur $\mathfrak{X}$.

b) Soit $f \in M^+(X, \mathfrak{X})$ simple. Montrer que

$$\int f \, d\nu = \int f g \, d\mu . \qquad (1)$$

c) En déduire la relation (1) pour $f \in M^+(X, \mathfrak{X})$.

B/ On considère la distribution $Vp(1/x)$ définie par

$$\langle Vp \frac{1}{x}, \varphi \rangle = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{|x| \geq \varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} \, dx , \ \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}).$$

1) Montrer que $Vp(1/x)$ est impaire.

2) Vérifier que : $x Vp(1/x) = 1$.

3) Soient T_1 et T_2 deux distributions vérifiant la relation $xT = 1$. Calculer $T_1 - T_2$.

4) En déduire que $Vp(1/x)$ est la seule distribution impaire vérifiant $xT = 1$.

5) Calculer dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, $\hat{1} = \mathcal{F}1$.

E.H.T.P. Contrôle n° 1 d'analyse (5) 1° année 19/11/2008 Durée 1^h30

Les 5 exercices sont indépendants

1) On pose $u(x,y) = 2x^3 - 6xy^2 - y + 1$
Trouver toutes les fonctions holomorphes $f(z)$ telles que $u(x,y) = \operatorname{Re} f(z)$. Exprimer analytiquement ces fonctions et leurs dérivées en fonction de z.

2) Montrer que toute fonction mesurable à valeurs dans $\mathbb{R}$ est limite d'une suite de fonctions simples mesurables.

3) Montrer que toute fonction positive appartenant à $L^p(X)$, $p>0$ est limite d'une suite de fonctions simples appartenant à $L^p(X)$.

4) Soit (f_n) une suite de fonctions dans $M(X, \mathfrak{X}, \gamma)$ telles que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in X$. $f_n(x) \leq 0$.
Montrer que

$$\limsup \int f_n \, d\gamma \leq \int \limsup f_n \, d\gamma$$

5) Soit (f_n) une suite décroissante dans M^+ qui converge vers f.
a) Montrer qu'on peut avoir $\lim \int f_n \neq \int f$
b) Si en plus $f_1 \in L_1$, montrer que

$$\lim \int f_n = \int f$$

E.H.T.P. A — Contrôle n° 1 de mathématiques — 1° année G.C+M — 2/11/2006.

On considère un espace mesuré $(X, \mathcal{X}, \mu)$ et (f_n) une suite croissante de fonctions positives μ-intégrable à valeurs dans $\mathbb{R}_+$, telle que $\int f_n d\mu \leq M$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Soient $A_n(p) = \{x \in X \mid f_n(x) \geq p\}$, $n \in \mathbb{N}$, $p \in \mathbb{N}$

et $A = \{x \in X \mid [f_n(x)]$ n'est pas une suite bornée$\}$

1) Posons $A(p) = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n(p)$.

Montrer que $\mu(A(p)) = \lim_{n \to \infty} \mu(A_n(p))$.

2) Montrer que $\mu(A(p)) \leq \frac{M}{p}$.

3) Exprimer A en fonction des $A(p)$.

4) Calculer $\mu(A)$.

5) Montrer que f_n converge presque partout vers une fonction mesurable f à valeurs dans $\mathbb{R}_+$.

6) Montrer que f est intégrable et que

$$\lim \int f_n d\mu = \int f d\mu.$$

7) On pose $u(x, y) = -6xy + 2x + 1$

Trouver toutes les fonctions holomorphes $f(z)$ telles que $u(x,y) = \operatorname{Re} f(z)$. Exprimer ces fonctions en fonction de z et calculer leur dérivée.

E.H.T.P. Contrôle n: 2 de mathématiques. 1re année G1

19/1/06

1) Calculer

$$I_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+4)^2}$$

2) Calculer

$$I_2 = \int_0^{2\pi} \frac{\sin 3\theta}{5-3\cos\theta}\, d\theta$$

3) Calculer au sens des distributions

$$T = \left(\frac{d^2}{dx^2} + k^2\right)\left(Y(x)\sin(kx)\right),\ k \in \mathbb{R}^*.$$

4) Calculer $x\delta'$ en fonction de δ (Dans $D'(\mathbb{R}$

5) Résoudre dans $D'(\mathbb{R})$ l'équation :

$$x.\frac{dT}{dx} = 0$$

Ecole Hassania des Travaux Publics

CONTRÔLE 1
de Mathématiques
Durée 1h 30 mn

Exercice 1 *Soient* $\mathbf{X}$ *un ensemble,* $\mathcal{B}$ *une tribu sur* $\mathbf{X}$*,* μ *une mesure positive sur* $\mathbf{X}$ *et* $\mathbf{A}$*,* $\mathbf{B}$ *deux éléments de* $\mathcal{B}$ *tels que* $\mathbf{A} \subset \mathbf{B}$ *et* $\mu(\mathbf{A}) = \mu(\mathbf{B}) < +\infty$*. Montrer que pour tout* $\mathbf{C} \in \mathcal{B}$*, on a*

$$\mu(\mathbf{A} \cap \mathbf{C}) = \mu(\mathbf{B} \cap \mathbf{C}).$$

Exercice 2 *On considère, dans* $\mathbb{R}^2$*, le sous ensemble* $\mathbf{D} =]1, +\infty[\times]0,1[$*. Soit* $\mathbf{f}$ *la fonction définie sur* $\mathbb{R}^2$ *par*

$$\mathbf{f}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \begin{cases} e^{-xy} - 2e^{-2xy} & si \quad (x,y) \in \mathbf{D} \\ 0 & si \quad (x,y) \notin \mathbf{D}. \end{cases}$$

1. (a) *Montrer que pour tout* $\mathbf{x} \in \mathbb{R}$*, la fonction* $\mathbf{y} \longmapsto \mathbf{f}(\mathbf{x},\mathbf{y})$ *est Lebesgue-intégrable sur* $\mathbb{R}$ *et calculer son intégrale* $\mathbf{I}(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}} \mathbf{f}(\mathbf{x},\mathbf{y})d\mathbf{y}$.
   (b) *Démontrer que la fonction* $\mathbf{I}$ *est Lebesgue-intégrable sur* $\mathbb{R}$.
   (c) *Quel est le signe de* $\int_{\mathbb{R}} \mathbf{I}(\mathbf{x})d\mathbf{x}$ *?*
2. (a) *Montrer que pour tout* $\mathbf{y} \in \mathbb{R}$*, la fonction* $\mathbf{x} \longmapsto \mathbf{f}(\mathbf{x},\mathbf{y})$ *est Lebesgue-intégrable sur* $\mathbb{R}$ *et calculer son intégrale* $\mathbf{J}(\mathbf{y}) = \int_{\mathbb{R}} \mathbf{f}(\mathbf{x},\mathbf{y})d\mathbf{x}$.
   (b) *Démontrer que la fonction* $\mathbf{J}$ *est Lebesgue-intégrable sur* $\mathbb{R}$.
   (c) *Quel est le signe de* $\int_{\mathbb{R}} \mathbf{J}(\mathbf{y})d\mathbf{y}$ *?*
3. *La fonction* $\mathbf{f}$ *est-elle Lebesgue-intégrable sur* $\mathbb{R}^2$ *? Justifier votre réponse.*

E.H.T.P. — Contrôle n°: 1 de mathématiques. — 1° année G.C 1 — 21/10/2003

1°) Considérons un signal $f(u)$ intégrable et de carré intégrable. On appelle densité spéctrale d'energie la fonction $|\hat{f}(t)|^2$ et fonction d'autocorrélation la quantite

$$C(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\, \overline{f(u-x)}\, du .$$

a) Trouver une fonction $g(x)$ telle que $C(x) = (f*g)(x$

b) Calculer $\hat{g}$.

c) Quelle relation existe-t-il entre la fonction d'autocorrélation et la densité spéctrale d'energie.

2°) Soit (f_n) une suite de fonctions mesurables.

Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et A_p l'ensemble défini par :

$A_p = \{ x \in X \,/\, \forall n_0 \in \mathbb{N}, \exists\, m$ et $n > n_0$, tels que $|f_m(x) - f_n(x)| \geq \frac{1}{p}$

a) Montrer que A_p est mesurable.

b) En déduire que l'ensemble A des points x tels que $f_n(x)$ ne soi pas une suite de Cauchy est un ensemble mesurable.

3°) Soit $g \in M^+(X, \mathfrak{X})$ et μ une mesure sur $\mathfrak{X}$.

posons $\nu(E) = \int_E g\, d\mu$.

a) Montrer que ν est une mesure sur $\mathfrak{X}$.

b) Soit $f \in M^+(X, \mathfrak{X})$. Montrer que :

$$\int f\, d\nu = \int f g\, d\mu .$$

EHTP **Contrôle d'analyse** **2009-2010**

Durée : 2h

Exercice 1 :

Déterminer les réels **a,b,c,d** tels que l'intégrale

$$\int_{-1}^{1}[x^4+(1-a)x^3-bx^2+(1-c)x-d]^2\,dx \qquad \text{Soit minimale.}$$

Exercice 2 :

Résoudre à l'aide de la transformation de Laplace l'équation différentielle suivante :

$$y''(t)+y(t)=2t \qquad \text{avec} \quad y(\pi)=0 \quad \textit{et} \quad y'(\pi)=2$$

1) Donner l'expression de $y(t)$ en fonction de $y(0)$ *et* $y'(0)$.

2) Déterminer $y(0)$, $y'(0)$ *puis* $y(t)$.

Problème :

On pose $a=(1+i)\sqrt{\frac{\pi}{2}}$ et $g(z)=\frac{e^{-z^2}}{1+e^{-2az}}$

1) Montrer que $g(z)-g(z+a)=e^{-z^2}$.
2) Déterminer les points singuliers de g ainsi que leur nature.
3) Calculer le résidu de $g(z)$ en $\frac{a}{2}$.
4) Pour $r>0$ soit C_r le parallélogramme de sommets $-r$, r , $r+a$, $-r+a$ parcouru dans le sens positif. Calculer l'intégrale $\int_{C_r} g(z)dz$.
5) Montrer que, lorsque $r \to \infty$, l'intégrale de g sur les cotés « non horizontaux » du parallélogramme tend vers 0.
6) En déduire la valeur de l'intégrale $I=\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx$.

Barème : Ex1 : 5 pts, Ex2 : 5 pts, Problème : 10 pts

$$g(z)=\frac{e^{-z^2}}{1+e^{-2az}}\ ; \quad a=(1+i)\sqrt{\frac{\pi}{2}}\ ;$$

E.H.T.P.
$1^{ère}$ G.C.

Contrôle : 1

Transformée de Laplace.

Mathématiques.

1°) Soit $F(p)$ la transformée de Laplace d'une fonction $f(t)$.

Montrer que $\lim\limits_{\substack{p \to +\infty \\ p \in \mathbb{R}}} F(p) = 0$.

2°) Soit $u(t)$ une fonction nulle pour t négatif vérifiant pour t positif l'équation différentielle :

$$t \frac{d^2u}{dt^2} + \frac{du}{dt} + tu = 0$$

et soit $U(p)$ sa transformée de Laplace.

Etablir et résoudre l'équation différentielle satisfaite par $U(p)$.

Dans la suite du problème, on supposera que $u(0) = 1$.

3°) Déterminer dans ce cas $U(p)$.

4°) Calculer le produit de convolution $(u * u)(t)$.

5°) Trouver une fonction $v(t)$ telle que

$$v(t) \cdot u(t) = \int_0^t \cos(t - x)\, u(x)\, dx \quad , \quad t \geq 0$$

6°) Trouver une fonction $w(t)$ telle que

$$u(t) = w(t) * Y(t) \frac{e^{it}}{\sqrt{\pi t}}.$$

$Y' = \delta$

où $Y(t)$ est la fonction de Heaviside.

7°) En déduire l'expression intégrale de $u(t)$:

$$u(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^1 \frac{\cos(st)}{\sqrt{1 - s^2}}\, ds.$$

ECOLE HASSANIA DES TRAVAUX PUBLICS

1ères Années- 2010/2011

Mathématiques

Durée : 1 heure

Documents non autorisés

Exercice 1.

Soit f la fonction définie par $f(z) = \frac{\cot g(\pi z)}{z^2}$. On désigne par γ_n $(n \in \mathbb{N})$ la frontière orientée positivement du carré Ω_n défini par

$$\Omega_n = \left\{ x + iy;\ \sup(|x|, |y|) \leq n + \frac{1}{2} \right\}$$

1. Quels sont les points singuliers de f ?. Donner leurs types.
2. Calculer le résidu de f en chaque point singulier.
3. Montrer que $\int_{\gamma_n} f(u)du = 0$

Exercice 2.

On considère la fonction F de la variable complexe p, avec $\mathrm{Re}(p) > 0$, définie par

$$F(p) = \frac{1}{p(p^2+1)(1-e^{-p\pi})}$$

1. Montrer que

$$F(p) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-n\pi p} G(p)$$

avec $G(p) = \frac{1}{p(p^2+1)}$

2. Donner la transformée de Laplace inverse de G.
3. En déduire la transformée de Laplace inverse de F.

Exercice 3.

Calculer

$$\min_{a,b,c \in \mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^+} (x^3 - a - bx - cx^2)^2 e^{-x} dx$$

E.H.T.P. Contrôle n° 2 de mathématiques. 1' année G(19/1/06

1) Calculer

$$I_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+4)^2}.$$

2) Calculer

$$I_2 = \int_0^{2\pi} \frac{\sin 3\theta}{5 - 3\cos\theta}\, d\theta.$$

3) Calculer au sens des distributions

$$T = \left(\frac{d^2}{dx^2} + k^2\right)\left(Y(x)\sin(kx)\right),\ k \in \mathbb{R}^*.$$

4) Calculer $x\,\delta'$ en fonction de δ (Dans $D'(\mathbb{R}$

5) Résoudre dans $D'(\mathbb{R})$ l'équation :

$$x.\frac{dT}{dx} = 0.$$

E.H.T.P. — Contrôle : — Mathématiques.

1ère G.C — Transformée de Laplace

1°) Soit $F(p)$ la transformée de Laplace d'une fonction $f(t)$.

Montrer que $\lim\limits_{\substack{p \to +\infty \\ p \in \mathbb{R}}} F(p) = 0$.

2°) Soit $u(t)$ une fonction nulle pour t négatif vérifiant pour t positif l'équation différentielle :

$$t \frac{d^2u}{dt^2} + \frac{du}{dt} + tu = 0$$

et soit $U(p)$ sa transformée de Laplace

Etablir et résoudre l'équation différentielle satisfaite par $U(p)$.

Dans la suite du problème, on supposera que $u(0) = 1$.

3°) Déterminer dans ce cas $U(p)$.

4°) Calculer le produit de convolution $(u * u)(t)$.

5°) Trouver une fonction $v(t)$ telle que

$$v(t) \cdot u(t) = \int_0^t \cos(t-x)\, u(x)\, dx \quad , \quad t \geq 0$$

6°) Trouver une fonction $w(t)$ telle que

$$u(t) = w(t) * Y(t) \frac{e^{it}}{\sqrt{\pi t}}$$

où $Y(t)$ est la fonction de Heaviside.

7°) En déduire l'expression intégrale de $u(t)$:

$$u(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^1 \frac{\cos(st)}{\sqrt{1-s^2}}\, ds$$

E.H.T.P. | Contrôle n° 1 | 3/11/2010
1° année. | d'analyse. | Durée 1h 30min.

Barème : 2,5 points par question.

A/ Soit $g \in M^+(X,\mathfrak{X})$ et μ une mesure sur $\mathfrak{X}$.
Posons $\nu(E) = \int_E g \, d\mu$.

a) Montrer que ν est une mesure sur $\mathfrak{X}$.

b) Soit $f \in M^+(X,\mathfrak{X})$ simple. Montrer que

$$\int f \, d\nu = \int f g \, d\mu \qquad (1)$$

c) En déduire la relation (1) pour $f \in M^+(X,\mathfrak{X})$.

B/ On considère la distribution $Vp(1/x)$ définie par

$$\langle Vp\frac{1}{x}, \varphi \rangle = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{|x| \geq \varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} \, dx, \ \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}).$$

1) Montrer que $Vp(1/x)$ est impaire.

2) Vérifier que : $x \, Vp(1/x) = 1$.

3) Soient T_1 et T_2 deux distributions vérifiant la relation $xT = 1$. Calculer $T_1 - T_2$.

4) En déduire que $Vp(1/x)$ est la seule distribution impaire vérifiant $xT = 1$.

5) Calculer dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, $\hat{1} = \mathcal{F}1$.

E.H.T.P. Controle n° 2 de mathématiques — 1re année — 15/12/06

1) Calculer dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$:

a) $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\tau_h T - T}{h}$, $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$

b) $\lim\limits_{n \to +\infty} \cos nx$

c) $\dfrac{d^2}{dx^2} |x|$

2) Soit f une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$, non constante et qui ne s'annule pas sur $\mathbb{C}$. Montrer que

$\forall \varepsilon > 0, \forall r > 0, \exists z \in \mathbb{C}, |z| > r$ tel que $|f(z)| < \varepsilon$

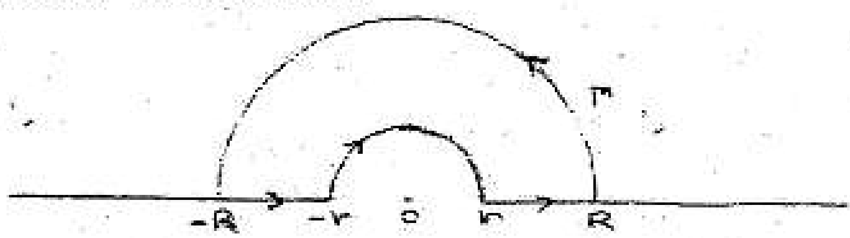
3) Chercher la fonction $f(t)$ dont la transformée de Laplace est :

$$F(p) = \mathrm{Log}\left(1 + \frac{\omega^2}{p^2}\right)$$

4) Calculer l'intégrale :

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin 3\theta}{5 - 3\cos\theta}\, d\theta .$$

5) Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{Log}\, x}{1 + x^2}\, dx$ en utilisant le chemin



E.H.T.P.

Contrôle de Mathématiques

Durée : 1h

I. Soit $(X, \mathcal{X}, \mu)$ un espace mesuré. On suppose que $\mu(X) < +\infty$. On considère $f : X \longrightarrow \mathbb{R}_+$ intégrable. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$A_n = \{x \in X \,/\, n \leq f(x) < n+1\} \text{ et } B_n = \{x \in X \,/\, f(x) \geq n\}$$

a/ Montrer que :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} n\,\mu(A_n) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mu(B_n)$$

b/ Montrer que la série $\sum_{n=0}^{+\infty} \mu(B_n)$ est convergente.

II. Soit $(X, \mathcal{X}, \mu)$ un espace mesuré et $f_n : X \longrightarrow \mathbb{R}_+$ une suite de fonctions μ-intégrables qui converge simplement vers une fonction μ-intégrable f. On suppose de plus que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\int_X f_n \, d\mu = \int_X f \, d\mu .$$

Montrer que $\lim_{n \to +\infty} \int_X |f_n - f| \, d\mu = 0$.

III. Calculer

$$\lim_{n \to +\infty} \int_0^{+\infty} \frac{n x \sin x \; e^{-x}}{1 + n^2 x^2} \, dx \; ;$$

Barème : I : 3 pts II : 2 pts III : 2 pts

11) Soit
$$f(x,y)=\begin{cases} 0 & \text{si } (x,y)=(0,0) \\ \dfrac{xy}{(x^2+y^2)^2} & \text{si } (x,y)\in[-1,1]^2,\ (x,y)\neq(0,0) \end{cases}$$

a) Calculer $\displaystyle\int_{[-1,+1]} dx \int_{[-1,+1]} f(x,y)\,dy$ et

$$\int_{[-1,+1]} dy \int_{[-1,+1]} f(x,y)\,dx$$

b) Montrer que f n'est pas intégrable sur $[0,1]\times[0,1]$.
Quelle remarque peut-on faire ?

12) a) Soit $a_{m,n}\geq 0$ pour $m,n\in\mathbb{N}$, montrer en utilisant le théorème de Tonelli que
$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} a_{m,n} = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} a_{m,n} \qquad (\leq +\infty).$$

b) Posons $a_{n,n}=+1$, $a_{n,n+1}=-1$ et $a_{m,n}=0$ si $m\neq n$ ou $m\neq n+1$.
Montrer que
$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} a_{m,n}=0 \ , \quad \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} a_{m,n}=1$$
ainsi l'hypothèse d'intégrabilité dans le théorème de Fubini est nécessaire.

E.H.T.P.

Contrôle de Mathématiques

Durée : 1h

I. Soit $(X, \mathcal{X}, \mu)$ un espace mesuré. On suppose que $\mu(X) < +\infty$. On considère $f : X \longrightarrow \mathbb{R}_+$ intégrable. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$A_n = \{x \in X \mid n \leq f(x) < n+1\} \text{ et } B_n = \{x \in X \mid f(x) \geq n\}$$

a/ Montrer que :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} n\,\mu(A_n) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mu(B_n)$$

b/ Montrer que la série $\sum_{n=0}^{+\infty} \mu(B_n)$ est convergente.

II. Soit $(X, \mathcal{X}, \mu)$ un espace mesuré et $f_n : X \longrightarrow \mathbb{R}_+$ une suite de fonctions μ-intégrables qui converge simplement vers une fonction μ-intégrable f. On suppose de plus que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\int_X f_n \, d\mu = \int_X f \, d\mu .$$

Montrer que $\lim_{n \to +\infty} \int_X |f_n - f| \, d\mu = 0$.

III. Calculer

$$\lim_{n \to +\infty} \int_0^{+\infty} \frac{n x \sin x \; e^{-x}}{1 + n^2 x^2} \, dx \; ;$$

Barème : I : 3 pts II : 2 pts III : 2 pts

11) Soit
$$f(x,y)=\begin{cases}0 & \text{si } (x,y)=(0,0)\\ \dfrac{xy}{(x^2+y^2)^2} & \text{si } (x,y)\in[-1,1]^2,\ (x,y)\neq(0,0)\end{cases}$$

a) Calculer $\displaystyle\int_{[-1,+1]} dx \int_{[-1,+1]} f(x,y)\,dy$ et

$$\int_{[-1,+1]} dy \int_{[-1,+1]} f(x,y)\,dx .$$

b) Montrer que f n'est pas intégrable sur $[0,1]\times[0,1]$.
Quelle remarque peut-on faire ?

12) a) Soit $a_{m,n}\geqslant 0$ pour $m,n\in\mathbb{N}$, montrer en utilisant le théorème de Tonelli que

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} a_{m,n} = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} a_{m,n} \quad (\leq +\infty).$$

b) Posons $a_{n,n}=+1$, $a_{n,n+1}=-1$ et $a_{mn}=0$ si $m\neq n$ ou $m\neq n+1$.
Montrer que

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} a_{m,n}=0 \quad , \quad \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} a_{m,n}=1$$

ainsi l'hypothèse d'intégrabilité dans le théorème de Fubini est nécessaire.

ECOLE HASSANIA DES TRAVAUX PUBLICS

1ères Années- 2010/2011

Contrôle de Mathématiques

Durée : 2 heures

Documents autorisés

Exercice 1.

Soit f la fonction de la variable complexe définie par $f(z) = \frac{2z}{e^{\pi z} - e^{-\pi z}}$.

1.)- Déterminer les points singuliers de f, leur nature et les résidus de f en ces points.

On considère le contour $\Gamma_{R\epsilon} = ABCDEFA$, orienté dans le sens positif, avec $A(-R,0)$, $B(R,0)$, $C(R,1)$, $D(\epsilon,1)$, $E(-\epsilon,1)$, $F(-R,1)$ où AB, BC, CD, EF, FA sont des segments de droite et DE est l'arc de cercle γ_ϵ de centre i et de rayon ϵ dont les points verifient $\mathrm{Im}(z) \geq 1$, R et ϵ étant deux réels strictement positifs. On suppose ϵ assez petit et R assez grand.

2.)- Calculer $J = \int_{\Gamma^-_{R\epsilon}} f(z)dz$

3.)- Montrer que $f(z) = \frac{Res(f,i)}{z-i} + g(z)$, avec $g(z)$ holomorphe au voisinage de i. Montrer que $\lim_{\epsilon\to 0} \int_{\gamma_\epsilon^-} f(z)dz = 1$

4.)- Calculer $\lim_{\epsilon\to 0 \text{ et } R\to+\infty} \left\{\int_{CD} f(z)dz + \int_{EF} f(z)dz\right\}$ en fonction de $I = \int_0^{+\infty} \frac{x}{\sinh(\pi x)} dx$.

5.)- Calculer $\lim_{R\to+\infty} \left\{\int_{BC} f(z)dz + \int_{FA} f(z)dz\right\}$.

6.)- En déduire la valeur de I.

Exercice 2.

1.)- Soit F la transformée de Laplace d'une fonction f. On pose $G(p) = \mathcal{L}(t^m f(t))(p)$, $m \in \mathbb{N}$. Verifier que $G(p) = (-1)^m F^{(m)}(p)$.

On considère la fonction de la variable complexe p définie par $F_n(p) = 2(2p-1)^n(2p+1)^{-n-1}$. On pose $F_n(p) = \mathcal{L}(f_n(t))(p)$.

2.)- Montrer que, pour tout $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$, on a $\int_0^{+\infty} e^{-\frac{t}{2}} t^k f_n(t) dt = 0$

3.)- Calculer $\mathcal{L}\left[e^{\frac{t}{2}} f_n(t)\right](p)$.

4.)- En déduire que $e^{\frac{t}{2}} f_n(t) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k \frac{t^k}{k!}$. On rappelle que $\mathcal{L}(t^m)(p) = \frac{m!}{p^{m+1}}$, $m \in \mathbb{N}$.

5.)- Calculer $\mathcal{L}\left[e^{-\frac{t}{2}} f_n(t)\right](p)$.

6.)- En déduire que $e^{\frac{t}{2}} f_n(t) = \frac{1}{n!} e^t \frac{d^n}{dt^n}(e^{-t} t^n)$. On rappelle que $\mathcal{L}(e^{-at} t^n)(p) = \frac{n!}{(p+a)^{n+1}}$