Chapitre 6 **Espaces de Hilbert**

1 Rappels

Dans tout ce chapitre, les espaces vectoriels considérés sont sur $I\!K = I\!R$ ou $\mathbb{C}$.

1. Espace préhilbertien

Soit H un espace vectoriel sur $I\!K = I\!R$ ou $\mathbb{C}$ et φ une application de $H \times H$ dans $I\!K$

Definition 1. On dit que φ est un *produit scalaire* sur H si elle vérifie les propriétés suivantes :

1. $\varphi(x+y,z) = \varphi(x,z) + \varphi(y,z)$, pour tous $x,y,z \in H$
2. $\varphi(\lambda x,y) = \lambda\varphi(x,y)$, pour tous $x,y \in H$ et $\lambda \in I\!K$
3. $\varphi(x,y) = \overline{\varphi(y,x)}$
4. Pour tout $x \neq 0$, on a $\varphi(x,x) > 0$

Example 2. Sur $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{C})$, l'application définie par :

$$\varphi(u,v) = \int_0^1 u(x)\overline{v(x)}d\,x$$

est un produit scalaire.

Notation. Un produit scalaire sera noté :$< x,y >$,$< x/y >$,(x,y)...

Definition 3. Un espace vectoriel muni d'un produit scalaire est appelé *espace préhilbertien*

Proposition 4 (Inégalité de Cauchy-Schwartz)**.** *Si E est un préhilbertien, alors :*

$$| < x,y > | \leq \sqrt{< x,x >}\sqrt{< y,y >}$$

pour tous $x,y \in E$.

Démonstration Si $< x/y >= 0$, l'inégalité est évidente. Supposons que $< x,y >\neq 0$. Pour tout complexe λ et tous x et y éléments de E, on a :

$$\begin{array}{ll} 0 \leq & < x+\lambda y/x+\lambda y >=< x/x > \\ & +2Re(\bar{\lambda} < x/y >) + |\lambda|^2 < y/y > . \end{array}$$

Si on pose $\lambda = \frac{<x/y>}{|<x/y>|}t$, avec $t \in I\!R$, alors :

$$0 \leq < x+\lambda y/x+\lambda y >=< x/x > +2| < x/y > |t+ < y/y > t^2$$

et donc,

$$| < x/y > |^2 - < x/x >< y/y > \leq 0.$$

Corollary 5. *Si E est un préhilbertien, alors l'application N définie par $N(x) = \sqrt{< x, x >}$ est une norme sur E.*

Corollary 6. *Le produit scalaire est une application continue sur $E \times E$*

Definition 7. Un espace préhilbertien complet est appelé un *Hilbertien* ou encore *espace de Hilbert.*

Theorem 8. *Soient deux vecteurs x et y d'un espace préhilbertien, on a les identités suivantes :*

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2),$$

(parallèlogramme) et

$$\frac{1}{2}\|x - y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\|\frac{x + y}{2}\|^2$$

(médiane)

2 Orthogonalité

2. Orthogonalité

Definition 9. Deux vecteurs x et y d'un espace préhilbertien sont dits *orthogonaux* si l'on a $< x/y >= 0$.

Definition 10. Deux parties non vides M et N d'un espace préhilbertien E sont dites orthogonales si l'on a :

$$< x/y >= 0, \ \ \forall (x, y) \in M \times N.$$

Definition 11. Soit une partie non vide M d'un espace préhilbertien E, on appelle *orthogonal* de M le sous-ensemble $M^\perp$ défini par :

$$M^\perp = \{x \in E / \ \ < x/y >= 0, \ \ \forall y \in M\}$$

Propriétés Soit E un préhilbertien et M est une partie non vide de E. Alors

1. $M^\perp$ est un sous-espace vectoriel de E.
2. $M \subseteq M^{\perp\perp}$.
3. $M^\perp = (\overline{\mathrm{vect}(M)})^\perp$
4. Si N est une partie non vide de M, alors $M^\perp \subset N^\perp$

Theorem 12 (Théorème de Pythagore)**.** *Soient $x_1, x_2, \cdots, x_n$ n vecteurs, deux à deux orthogonaux, d'un espace préhilbertien E; alors on a :*

$$\|\sum_{i=1}^{n} x_i\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^2.$$

3 Projection orthogonale

3. Projection orthogonale

Proposition 13. *Soit E un préhilbertien sur $\mathbb{C}$ et F une partie convexe de E. Pour tous $x \in E$ et $a \in F$, les propositions suivantes sont équivalentes.*

1. $d(x, a) = d(x, F)$
2. $Re < x - a, y - a > \leq 0$, *pour tout* $y \in F$

Démonstration Soit $z = a + t(y - a) = (1 - t)a + ty \in F$. On a :

$$\begin{aligned} d(x, F)^2 & \leq d(x, z)^2 = \|x - z\|^2 \\ & = \|x - a\|^2 - 2tRe < x - a, y - a > + t^2\|y - a\|^2 \end{aligned}$$

On obtient :

$$2tRe < x - a, y - a > \leq t^2\|y - a\|^2$$

Si on divise par t et on passe à la limite en 0, on obtient le résultat. Réciproquement, on a : $\|x - y\|^2 = \|(x - a) - (y - a)\|^2 = \|x - a\|^2 + \|y - a\|^2 - 2Re < x - a, y - a > \geq \|x - a\|^2$

Theorem 14 (Théorème de la projection orthogonale)**.** *Soit F une partie convexe complète non vide dans un préhilbertien E. Pour tout $x \in E$, il existe un élément unique $a \in F$ tel que :*

$$d(x, F) = \|a - x\|.$$

a est appelé projection orthogonale de x sur F.

Démonstration Soit $(a_n)_n \subset F$ tel que $d(x, F) = \lim_n d(x, a_n) = \lim_n \|x - a_n\|$. On a :

$$\frac{1}{2}\|a_n - a_m\|^2 = \|x - a_n\|^2 + \|x - a_m\|^2 - 2\|x - \frac{a_n + a_m}{2}\|^2$$

Or

$$\|x - \frac{a_n + a_m}{2}\|^2 \geq d(x, F)^2.$$

Donc,

$$\frac{1}{2}\|a_n - a_m\|^2 \leq \|x - a_n\|^2 + \|x - a_m\|^2 - 2d(x, F)^2$$

On en déduit que $(a_n)_n$ est de cauchy dans F et donc elle converge vers $a \in F$. On a $d(x, F) = d(x, a)$. Pour l'unicité si $b \in F$ répond à la question, on aura : $\frac{1}{2}\|a - b\|^2 = \|x - a\|^2 + \|x - b\|^2 - 2\|x - \frac{a+b}{2}\|^2 \leq 0$. Donc $a = b$ On notera $a = p_F(x)$. Donc, p_F est une application de E sur F.

Proposition 15. *L'application :*

$$\begin{aligned} p_F : \quad & E \longrightarrow F \\ & x \longrightarrow p_F(x) \end{aligned}$$

vérifie la relation :

$$\|p_F(x) - p_F(y)\| \leq \|x - y\|, \text{ pour tout } (x, y) \in E \times E.$$

Et, donc p_F est uniformément continue sur E.

Theorem 16. *Soit un sous-espace vectoriel complet F d'un espace préhilbertien séparé E; alors pour tout $x \in E$, il existe un et un seul $x_0 \in F$ tel que :*

$$d(x, F) = \|x - x_0\| \text{ et } x - x_0 \in F^{\perp}.$$

Proposition 17. *Soient un espace de Hilbert E et une partie non vide A de E ; les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) *A est totale dans E, c'est-à-dire que le sous-espace vectoriel engendré par A est partout dense dans E.*

(ii) $A^{\perp} = \{0\}$.

4 Théorème de représentation de Riesz

4. Théorème de représentation de Riesz

Theorem 18 (Théorème de représentation de Riesz)**.** *Soit E un espace de Hilbert. Pour toute forme linéaire continue f sur E, il existe un élément y unique de E tel que $f(x) =< x, y >$, pour tout $x \in E$. De plus, on a $\|f\| = \|y\|$.*

Démonstration Soit $f \in E'$; si f est nulle, on prend $y = 0$. Supposons que f est non nulle et soit $a \in (Kerf)^{\perp}$ avec $a \neq 0$. L'application g définie par $g(x) =< x, a >$ est une forme linéaire continue dont le noyau est $Kerf$. En effet, si pour tout $x \in E$, il existe $x_1 \in kerf$ et α scalaire tels que :

$$x = x_1 + \alpha.a$$

Si $f(x) = 0$, alors $\alpha = 0$ et donc $x = x_1 \in kerf$; c'est-à-dire $< x, a >= 0$ Réciproquement, si $g(x) = 0$, alors $< x_1, a > +\alpha\|a\|^2 = 0$ ce qui implique $\alpha = 0$ et f(x)=0. On en déduit qu'il existe α tel que $f = \alpha.g$ Par suite, $y = \bar{\alpha}.a$ répond à la question.

5 Familles orthogonales. Bases orthonormales

5. Familles orthogonales. Bases orthonormales

Definition 19. La famille $(e_i)_{i \in I}$ est dite *orthonormale* dans E, si elle est orthogonale et $\|e_i\| = 1$, pour tout $i \in I$.

Definition 20. Dans un espace de Hilbert E on appelle *base hilbertienne* toute famille **orthonormale totale** dans E.

Tout espace de Hilbert possède une base Hilbertienne.

Proposition 21. *Si un espace de Hilbert est séparable, alors il contient une base orthonormale dénombrable.*

6 Relation de Parseval et inégalité de Bessel

6. Relation de Parseval et inégalité de Bessel Soient E un espace de Hilbert et $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille orthonormale dénombrable de E. Pour tout $x \in E$, posons :

$$x_n = < x/e_n >, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}$$

Definition 22. $(x_n)_n$ sont appelés coefficients de Fourier de x dans $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Theorem 23 (Inégalité de Bessel)**.** *Si E est un espace de Hilbert et $(e_n)_n$ est une famille orthonormale de E; alors, pour tout $x \in E$, on a :*

$$\sum_{n=0}^{\infty} | < x, e_n > |^2 \leq \|x\|^2 = < x/x > .$$

Démonstration. La série $\sum_{p=0}^{n} | < x, e_p > |^2$ est croissante. d'autre part, on a :

$$\sum_{p=0}^{n} | < x, e_p > |^2 = \| \sum_{p=0}^{n} < x, e_p > e_p\|^2 = \|p(x)\|^2 \leq \|x\|^2$$

où p est la projection orthogonale de E sur $\mathrm{vect}(e_0, \cdots, e_n)$ On en déduit que la série est convergente. Si n tend vers l'infini, on obtient le résultat.

Theorem 24 (Relation de Parseval)**.** *Si E est un espace de Hilbert séparable et $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base hilbertienne orthonormale de E; alors, pour tout $x \in E$, on a :*

$$\sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^2 = \|x\|^2 = < x/x > .$$

Démonstration. Si $x \in \mathrm{vect}(e_p)_p$, alors $x = \sum_{p=0}^{n} < x, e_p > e_p$; donc

$$\|x\|^2 = \sum_{p=0}^{n} | < x, e_p > |^2 \leq \sum_{p=0}^{\infty} | < x, e_p > |^2 \leq \|x\|^2$$

Soit $x \in F = \overline{\mathrm{vect}(e_n)_n}$, il existe $y \in \mathrm{vect}(e_n)_n$ tel que $\|x - y\| < \frac{\epsilon}{2}$. D'autre part,

$$x - \sum_{p=0}^{n} < x, e_p > e_p = x - y + \sum_{p=0}^{n} < y - x, e_p > e_p$$

On en déduit que :

$$\left\| x - \sum_{p=0}^{n} < x, e_p > e_p \right\| \leq \|x - y\| + \left\| \sum_{p=0}^{n} < y - x, e_p > e_p \right\| < \epsilon$$

c'est-à-dire que la série $\sum_{p=0}^{n} < x, e_p > e_p$ est convergente et sa somme est x. En utilisant le théorème de Pythagore, on obtient le résultat.