Introduction à la recherche opérationnelle Et la modélisation mathématique

Abdelhak ELIDRISSI

PLAN

- Survol historique et définitions …
- Place de la recherche opérationnelle:
- Quelques problèmes classiques:
- Modélisation mathématique en programme linéaire:
- Conclusions:

Définitions

Cambridge Dictionary

Operational research UK (US operations research)
The systematic study of how best to solve problems in business and industry

Wikipedia

Operations research, operational research, or simply OR, is the use of mathematical models, statistics and algorithms to aid in decision-making

Roadef

Recherche Opérationnelle : approche scientifique pour la résolution de problèmes de gestion de systèmes complexes

Définitions

- Méthodes scientifiques pour résoudre des problèmes d'optimisation liés aux organisations du monde réel
- Une discipline à la croisée des mathématiques et de l'informatique
  - prolongement de l'algorithmique
  - manipulant des structures plus élaborées : graphes, polyèdres...
  - domaine d'application de la théorie de la complexité algorithmique
- Une boite à outils de méthodes, tant positives que négatives, pour aborder sainement et sereinement les problèmes d'optimisation

Les enjeux de la recherche opérationnelle:

- **Entreprises:**
  - ✓ Améliorer la compétitivité des entreprises
  - ✓ Préserver des emplois
  - ✓ Accéder à l'innovation

- **Domaine politique:**
  - ✓ Meilleures décisions stratégiques
  - ✓ Environnement:
  - ✓ Meilleure gestion des ressources

- **Environnement:**
  - ✓ Meilleur gestion des ressources

Recherche Opérationnelle
Science de la décision
Science du management

Domaines d’application de la Recherche opérationnelle:

- Aviation:
  - Contrôle du trafic aérien
  - Maintenance Aéronautique
  - Services aéroportuaires
  - Services à bord
  - …

Domaines d'application de la Recherche opérationnelle:

- ✓ Logistique & Supply chain:
  - ❖ Transport de marchandises,
  - ❖ Transport intermodal,
  - ❖ Logistique maritime,
  - ❖ Logistique urbaine,
  - ❖ Transport routier,
  - ❖ …

Domaines d'application de la Recherche opérationnelle:

- Production:
  - Production automobile,
  - Production chimiques,
  - Agroalimentaire,
  - Textiles,
  - Emballage,
  - …

Domaines d’application de la Recherche opérationnelle:

- Ressources Naturelles:
  - Exploitation minière,
  - Pétrole et gaz,
  - Produits pétrochimiques,
  - …

Domaines d'application de la Recherche opérationnelle:

- Industrie Ferroviaire:

- Stockage des produits:

- Santé:

- …

Quelques entreprises spécialisés en Recherche opérationnelle:

QUINTIQ

Artelys | SOLUTIONS EN OPTIMISATION

EURODECISION
ALGORITHMS FOR BUSINESS

DecisionBrain
OPTIMIZATION FOR THE INTELLIGENT ENTERPRISE

ROADEF

http://roadef.org/societe-francaise-recherche-operationnelle-aide-decision

Quelques problèmes classiques de Recherche opérationnelle:

❖ Problème du voyageur de commerce

Pendant les vacances, vous avez décidé de visiter vos différents copains éparpillés dans tout le Maroc.

Vous partez de l'EHTP et revenez à l'EHTP:

Vous souhaitez effectuer la tournée la plus courte possible (ou la moins chère !)

Quelques problèmes classiques de Recherche opérationnelle:

❖ Problème du voyageur de commerce

Comment construire
la tournée la plus courte ?

Comment se convaincre qu'une tournée

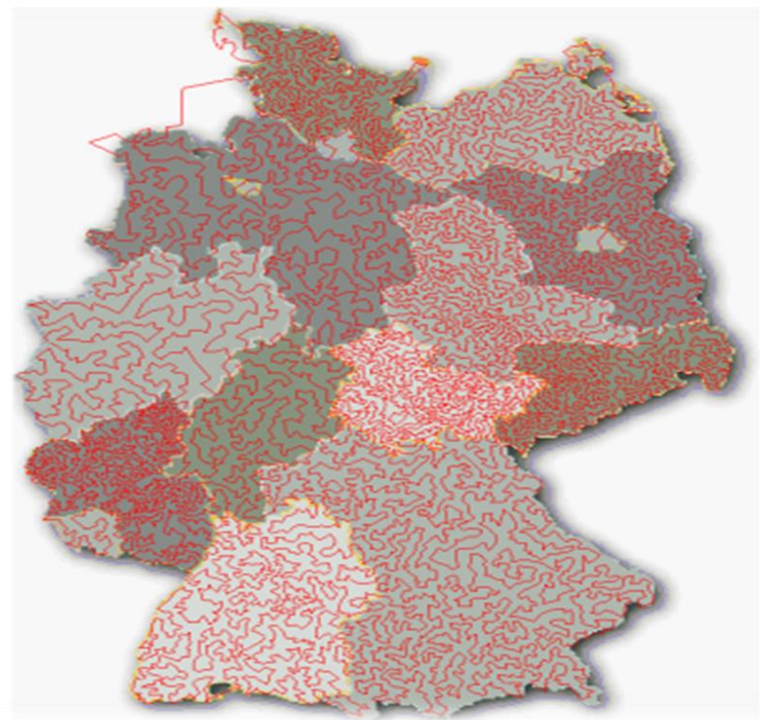
est la meilleure possible ?

Quelques problèmes classiques de Recherche opérationnelle:

❖ Problème du voyageur de commerce

TSP, 2001, Allemagne, 15112 villes

TSP, 1998, USA, 13509 villes



Quelques problèmes classiques de Recherche opérationnelle:

❖ Problème du sac à dos

Lors de votre départ de l'EHTP, vous avez décidé de prendre un sac à dos avec vous. Vous devez choisir quel objet à mettre en fonction de vos besoins et en respectant le poids maximal du sac.

- Un ensemble objet $N = \{1,\ldots,n\}$ disponible
- Chaque objet *i à:*
  - ✓ Un poids w_i
  - ✓ Une utilité u_i
- La capacité du sac W à respecter

Quel objet mettre dans le sac pour maximiser l'utilité totale

- Application du problème de sac à dos:

Problème de chargement de bateaux avec centenaire est équivalent à un problème de sac à dos

Objectif ? On veut transporter le plus de centenaires

Sac à dos: Le bateau voyageur

Les objets: Les centenaires à transporter

Modélisation en programme linéaire

Rappel mathématique

- ✓ Une fonction $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ est une fonction linéaire si et seulement si pour un ensemble de constantes $c_1, c_2, \ldots, c_n$

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$$

- ✓ Pour toute fonction linéaire $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ est pour toute constante b, les inégalités:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leq \text{b}$$
$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \geq \text{b}$$

sont des inégalités linéaires.

Modélisation en programme linéaire

Définition (Problème de programmation linéaire)

Un problème de programmation linéaire est un problème d'optimisation pour lequel:

1. Nous essayons de **maximiser** (ou **minimiser**) une fonction linéaire des variables de décision. La fonction qui doit être maximisée ou minimisée s'appelle la fonction objectif.

2. Les valeurs des variables de décision doivent satisfaire un ensemble de contraintes. Chaque contrainte doit être une équation linéaire ou une inégalité linéaire.

3. Une restriction de signe est associée à chaque variable. Pour toute variable x_i, le signe de restriction spécifie que x_i doit être non négatif ($x_i \geq 0$) ou sans restriction de signe.

Modélisation en programme linéaire

Un exemple de modélisation en programme linéaire

Grand amateur de légumes biologiques, vous décidez de planter dans votre jardin de quoi assurer quelques bons repas. <u>**Navets**</u> et <u>**courgettes**</u> étant vos légumes préférés, vous décidez de ne produire que cela. Vous avez un très grand terrain mais vous êtes limité par la quantité d'engrais biologique que vous fabriquez évidemment vous même.

Objectif: Combien produire (en m^2) de courgettes et navets pour avoir le maximum de poids ?

Sachant que le rendements = *4kg/m2* courgettes, *5kg/m2* navets

Sous contraintes: Pour produire les courgettes et les navets nous aurons besoins d'utiliser des engrais et des anti-parasites.

Modélisation en programme linéaire

Données de l'exercice

- **8 litre d'engrais A disponible:**

2 litre/m² nécessaires pour courgettes, *1 litre/m²* pour navets

- **7 litre d'engrais B disponible:**

2 litre/m² nécessaires pour courgettes, *1 litre/m²* pour navets

- **3 litre anti-parasites C disponible:**

1 litre/m² nécessaires pour navets

Modélisation en programme linéaire

La solution de l'exercice

- **Variables de décisions:**

$$\begin{cases} x : superficie\ des\ courgettes \\ y : superficie\ des\ navets \end{cases}$$

- **Contraintes:**

$$\begin{cases} A : 2x + y \leq 8 \\ B : x + 2y \leq 7 \\ C : \ y \leq 3 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$$

Modélisation en programme linéaire

La solution de l’exercice

- **Critères à optimiser:**

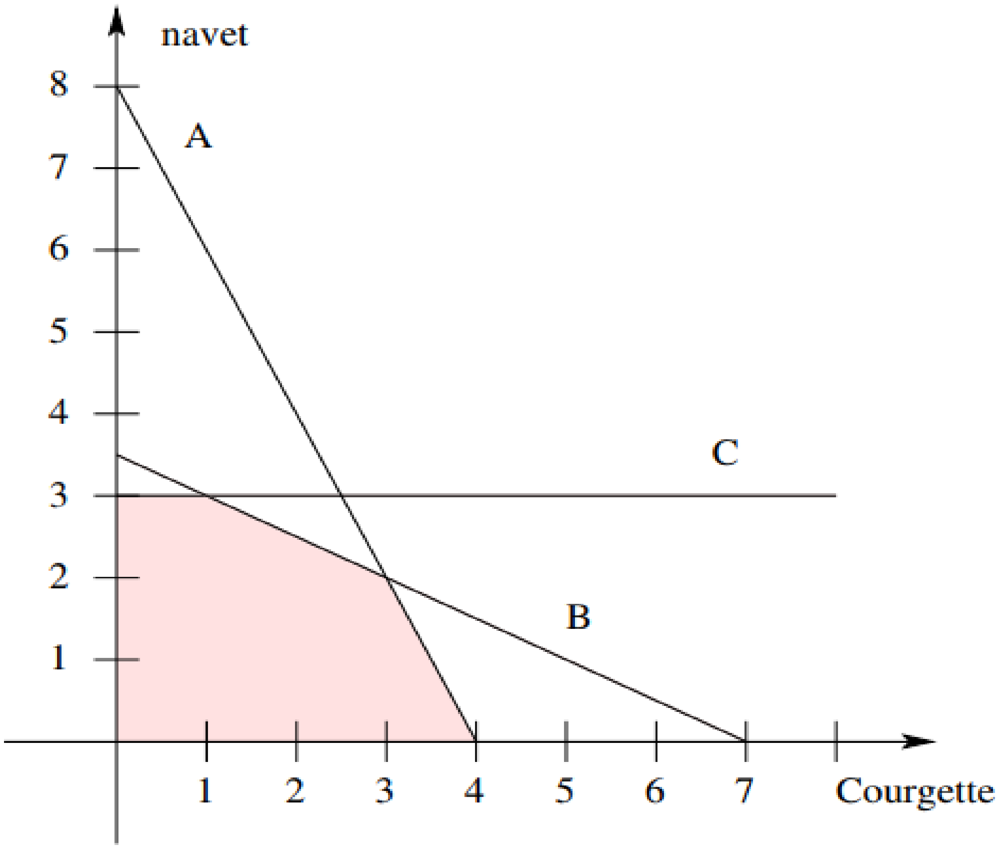
$$Max\ z = 4x + 5y$$

- **Contraintes:**

$$\begin{cases} A: 2x + y \leq 8 \\ B: x + 2y \leq 7 \\ \quad C:\ y \leq 3 \\ \ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$$

Modélisation en programme linéaire

Représentation graphique des solutions



Optimum atteint au bord

L'optimum de la fonction-objectif, s'il existe, est atteint en (au moins) un **sommet** du polyèdre

Ensemble des solutions réalisables = **polyèdre**

Résolution par l'algorithme du simplex

Modélisation en programme linéaire

Un résumé de la modélisation en programme linéaire

- **3 choses à identifier :**
  - ✓ Variables de décisions
  - ✓ Contraintes
  - ✓ Fonctions objectif

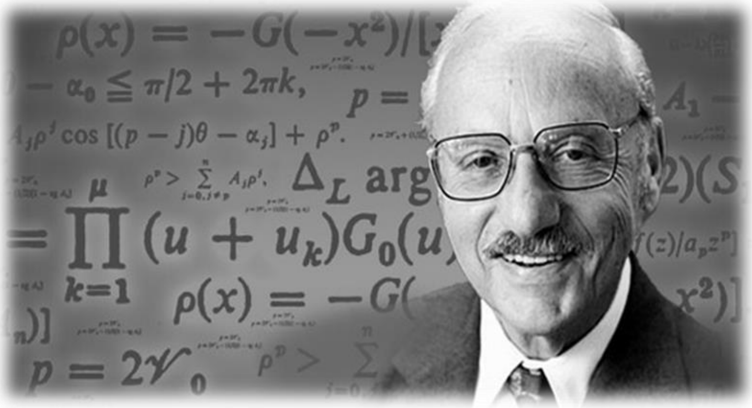
Les identifier clairement pour prendre un bon départ dans la modélisation

Cette technique est efficace en théorie et en pratique
=> Existence de nombreux logiciels de résolution :
Excel, CPLEX, Mathematica, FICO XPRESS . . .

Modélisation en programme linéaire

Résolution par l’algorithme du simplexe

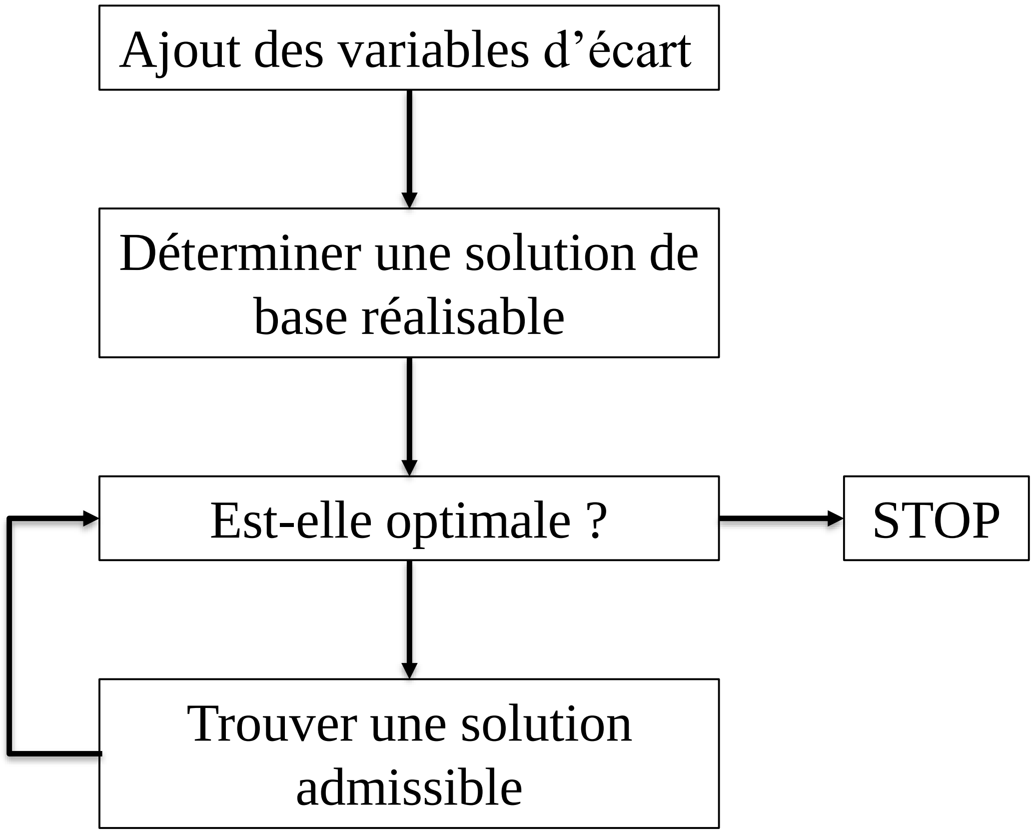
En 1947 Georges DANTZIG travaillant sur un projet des forces de l’air américaines, a introduit un algorithme de calcul permettant de résoudre les problèmes de programmation linéaire.



Le nom de l'algorithme est dérivé de la notion de simplex et a été suggéré par [Motzkin](). En réalité, l'algorithme n'utilise pas de simplexes, mais certaines interprétations de l'ensemble admissible du problème renvoient au concept de simplexe.

Modélisation en programme linéaire

Résolution par l'algorithme du simplexe



Modélisation en programme linéaire

Résolution de notre exercice

- **Critères à optimiser:**

$$Max\ z = 4x + 5y$$

- **Contraintes:**

$$\begin{cases} A: 2x + y \leq 8 \\ B: x + 2y \leq 7 \\ C:\ y \leq 3 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$$

Modélisation en programme linéaire

Résolution de notre exercice

Etape 1: (Ajout des variables d'écart)

$$\begin{cases} 2x + y + \boldsymbol{e_1} = 8 \\ x + 2y + \boldsymbol{e_2} = 7 \\ y + \boldsymbol{e_3} = 3 \\ \boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, \boldsymbol{e_3} \geq 0, x, y \geq 0 \end{cases}$$

Modélisation en programme linéaire

Résolution de notre exercice

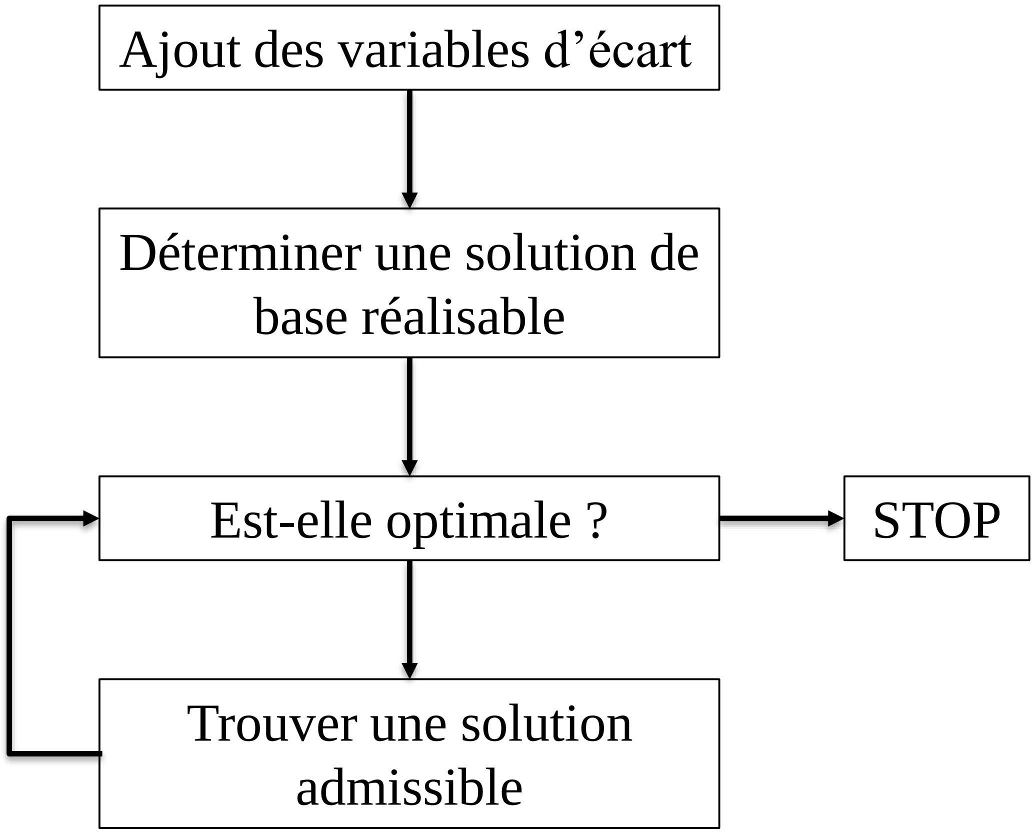
Etape 2: (Solution de base réalisable)

Avec : $\boldsymbol{x = 0, y = 0}$

$$\begin{cases} \boldsymbol{e_1} = 8 \\ \boldsymbol{e_2} = 7 \\ \boldsymbol{e_3} = 3 \\ \boldsymbol{z} = 0 \end{cases}$$

Modélisation en programme linéaire

Résolution par l’algorithme du simplexe



Modélisation en programme linéaire

Résolution de notre exercice

Etape 4: (Trouver une solution admissible)

a. Tracer le tableau de la matrice:

	x	y	e1	e2	e3	C	K
e1	2	1	1	0	0	8	8
e2	1	2	0	1	0	7	7./2
e3	0	1	0	0	1	3	3
Z	4	5	0	0	0	0	

Modélisation en programme linéaire

Résolution de notre exercice

Etape 4: (Trouver une solution admissible)

b. Trouver la variable entrante

	x	y	e1	e2	e3	C	K
e1	2	1	1	0	0	8	8
e2	1	2	0	1	0	7	7./2
e3	0	1	0	0	1	3	3
Z	4	5	0	0	0	0	

Max(coeff(Z))=5 => y variable entrante

Modélisation en programme linéaire

Résolution de notre exercice

Etape 4: (Trouver une solution admissible)

c. Trouver la variable sortante

Pivot

	x	y	e1	e2	e3	C	K
e1	2	1	1	0	0	8	8
e2	1	2	0	1	0	7	7/2
e3	0	1	0	0	1	3	3
Z	4	5	0	0	0	0	

$$Calculer\ K = \frac{Colonne\ contrainte}{Colonne\ pivot}$$

$$Min(K)>0 \Rightarrow e3\ variable\ sortante$$

Modélisation en programme linéaire

Résolution de notre exercice

Etape 4: (Trouver une solution admissible)

d. Mettre à jour le tableau

	x	y	e1	e2	e3	C	K
e1	2	0	1	0	-1	5	
e2	1	0	0	1	-2	1	
y	0	1	0	0	1	3	
Z	4	0	0	0	-5	-15	

Ligne pivot= Ligne pivot / Pivot
Annuler la colonne pivot
Coeff (Z)$\leq$ 0 pour garantir l'optimalité de la solution

Modélisation en programme linéaire

Résolution de notre exercice

Etape 1: (Trouver une solution admissible)

b. Variable entrante

	x	y	e1	e2	e3	C	K
e1	2	0	1	0	-1	5	
e2	1	0	0	1	-2	1	
y	0	1	0	0	1	3	
Z	4	0	0	0	-5	-15	

Max(coeff(Z))=4 => x variable entrante

Modélisation en programme linéaire

Résolution de notre exercice

Etape 4: (Trouver une solution admissible)

c. Trouver la variable sortante

Pivot

	x	y	e1	e2	e3	C	K
e1	2	0	1	0	-1	5	5./2
e2	1	0	0	1	-2	1	1
y	0	1	0	0	1	3	
Z	4	0	0	0	-5	-15	

Calculer $K = \frac{Colonne\ contrainte}{Colonne\ pivot}$

$Min(K)>0 \Rightarrow e2$ variable sortante

Modélisation en programme linéaire

Résolution de notre exercice

Etape 4: (Trouver une solution admissible)

d. Mettre à jour le tableau

	x	y	e1	e2	e3	C	K
e1	0	0	1	-2	3	3	
x	1	0	0	1	-2	1	
y	0	1	0	0	1	3	
Z	0	0	0	-4	3	-19	

Ligne pivot= Ligne pivot / Pivot
Annuler la colonne pivot
Coeff (Z)$\leq$ 0 pour garantir l'optimalité de la solution

Modélisation en programme linéaire

Résolution de notre exercice

Etape 4: (Trouver une solution admissible)

d. Mettre à jour le tableau

	x	y	e1	e2	e3	C
e3	0	0	1/3	- 2/3	1	1
x	1	0	2/3	- 1/3	0	3
y	0	1	- 1/3	2/3	0	2
Z	0	0	- 1/3	-2	0	-22

Ligne pivot= Ligne pivot / Pivot
Annuler la colonne pivot
Coeff (Z)$\leq$ 0 pour garantir l'optimalité de la solution

Modélisation en programme linéaire

Solution de notre programme linéaire

- **La solution optimale:**

$$z = 4x + 5y = 22$$

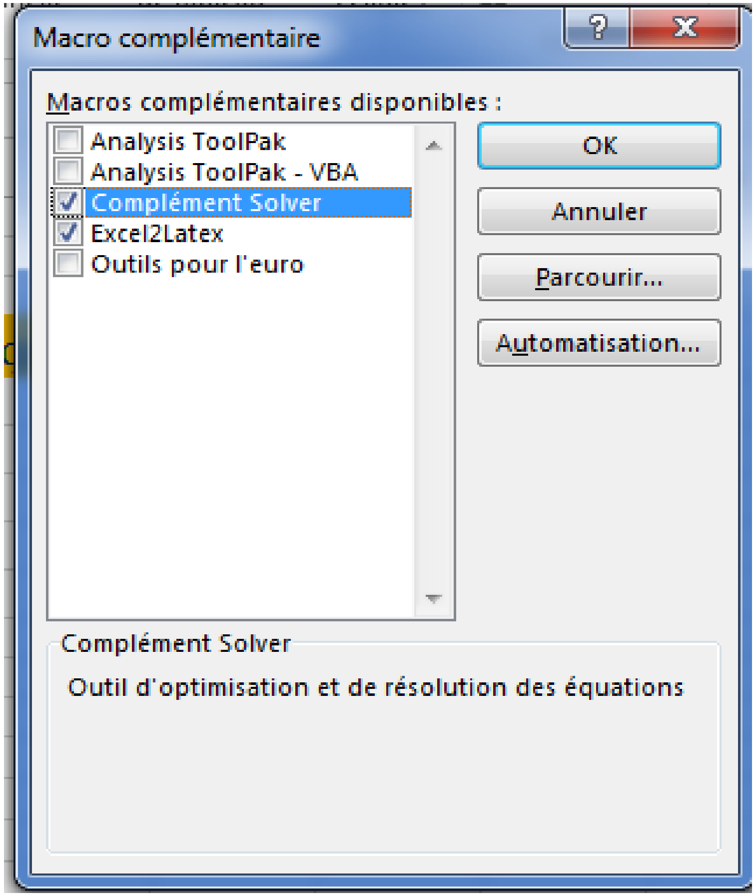
$$\begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \end{cases}$$

Modélisation en programme linéaire

Résolution de notre programme linéaire par le solveur d'Excel

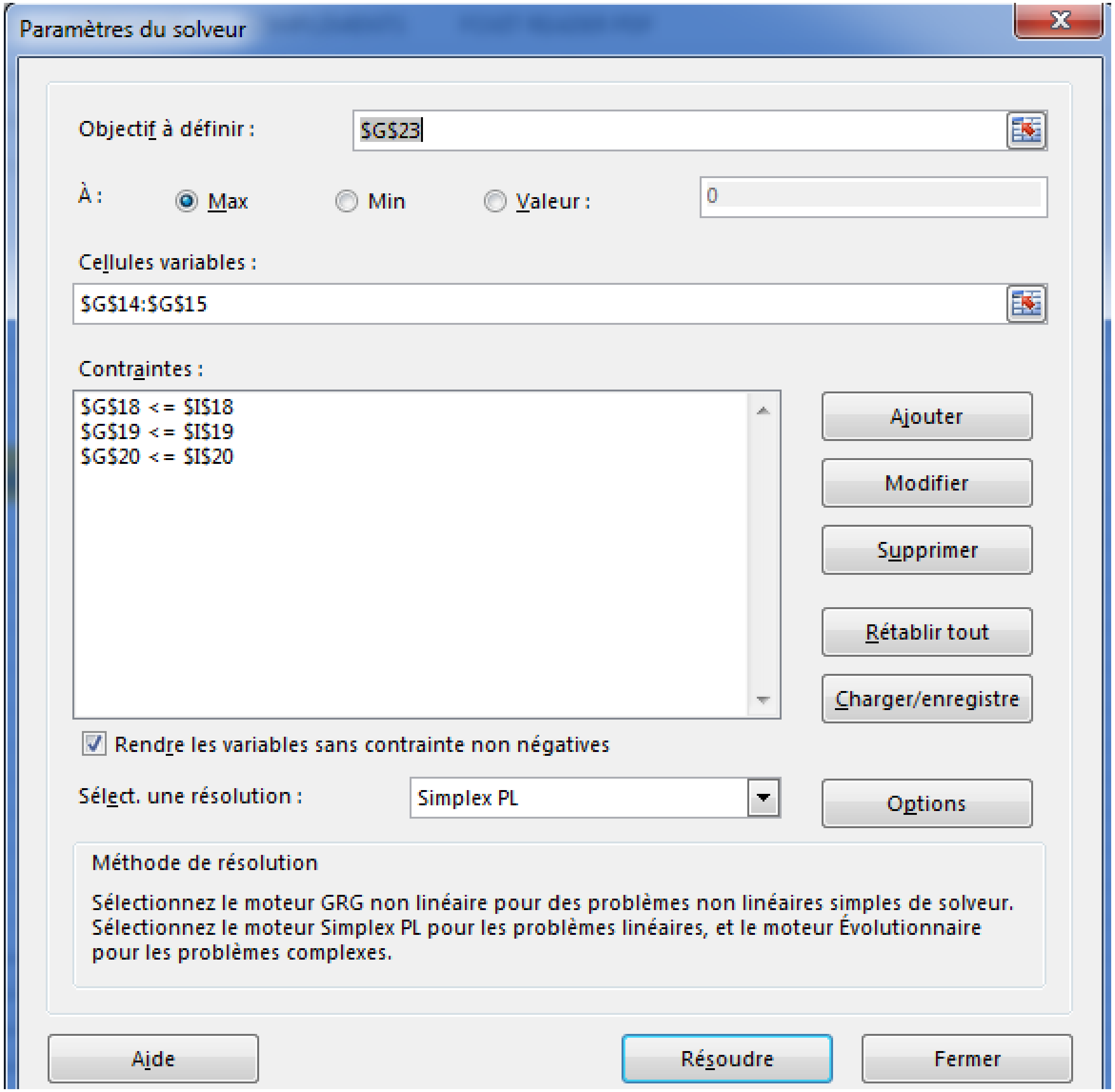
Modélisation en programme linéaire

Résolution de notre programme linéaire par le solveur d'Excel



Modélisation en programme linéaire

Résolution de notre programme linéaire par le solveur d'Excel



Modélisation en programme linéaire

Résolution de notre programme linéaire par le solveur d'Excel

Résolution par l'excel de notre modele mathématique				
Les variables	x	3		
	y	2		
Les contraintes	2x+y	8	<=	8
	x+2y	7	<=	7
	y	2	<=	3
	objective	22		


Questions