Instructions

1. Durée: 2h00 .
2. Ecrire votre Nom, Prénom et Groupe sur toutes les feuilles.
3. Il est strictement interdit de parler avec votre voisin ou de lui demander quoi que ce soit. Cela peut entrainer des soustractions de points comme il peut vous envoyer directement à la session de rattrapage.
4. Les documents et portables sont strictement interdit, les calculatrices sont autorisées.
5. On attachera le plus grand soin à la rédaction et à la présentation claire et lisible des résultats lors de la correction.

Partie 1: Dérivation numérique

Exercice 1: Choisir les bonnes réponses en justifiant

1. On veut calculer une approximation numérique de la dérivée $f'(a)$ de la fonction $f(x) = \cos(x)$ par l'approximation
$$f'(a) \approx \frac{f(a+h)-f(a)}{h}.$$
Alors l'erreur absolue quelque soit $h > 0$ est bornée par
   (a) $h^2/2$
   (b) $h^2\cos(1)$
   (c) $h\cos(a)/4$
   (d) $h/2$
2. On utilise l'expression $(f(h)-2f(0)+f(-h))/h^2$ pour calculer les approximations de $f''(0)$ (On suppose que les calculs sont exacts, sans prendre en compte les erreurs d'arrondi). Ce résultat est toujours correct si $f(x)$ est
   (a) une fonction trigonométrique
   (b) une fonction logarithmique
   (c) un polynôme de degré 4
   (d) un polynôme de degré 3
3. On approche la dérivée seconde de f au point $x=0$, par l'approximation
$$D_2f(0) = \frac{f(h)-2f(0)+f(-h)}{h^2}.$$
On suppose que f est infiniment différentiable, et on néglige les erreurs d'arrondi. Alors, l'erreur absolue
$$|f''(0) - D_2f(0)|$$
est bornée par
   (a) $\frac{h^2}{12}\max_{x\in[-h,h]}|f''(x)|$
   (b) $\frac{h^2}{48}\max_{x\in[-h,h]}|f^{(4)}(x)|$
   (c) $\frac{h}{4}\max_{x\in[-h,h]}|f''(x)|$
   (d) $\frac{h^2}{12}\max_{x\in[-h,h]}|f^{(4)}(x)|$

Exercice 2:

On veut utiliser la formule centrée

$$f'(x) \simeq \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} \tag{1}$$

pour approcher la dérivée d'une fonction définie sur l'intervalle $[a, b]$ vérifiant

$$\max_{a \leqslant x \leqslant b} |f'''(x)| \leqslant M$$

Supposons que l'utilisation d'un ordinateur produit une erreur $e(x+h)$ et $e(x-h)$ dans l'évaluation de $f(x+h)$ et $f(x-h)$ respectivement. C'est donc dire que si f^* représente la valeur effectivement calculée,

$$f(x+h) = f^*(x+h) + e(x+h)$$
$$f(x-h) = f^*(x-h) + e(x-h)$$

donc l'erreur totale due à l'utilisation de la formule (1) avec f^* au lieu de f sera

$$f'(x) - \left[\frac{f^*(x+h) - f^*(x-h)}{2h}\right] = \frac{e(x+h) - e(x-h)}{2h} - \frac{h^2}{6} f'''(\xi),$$

avec ξ appartenant à l'intervalle $[a, b]$. Le premier terme représente l'erreur due aux arrondis et le second l'erreur liée à l'approximation.

(a) En supposant que $|e(x+h)| < \varepsilon$ et $|e(x-h)| < \varepsilon$, montrer que la valeur absolue de l'erreur totale commise est bornée par

$$g(h) = \frac{\varepsilon}{h} + \frac{h^2}{6} M.$$

(b) (b) On veut approcher $f'(0,9)$ pour la fonction tabulée suivante:

x	$f(x)$
0,800	0,71736
0,895	0,78021
0,898	0,78208
0,902	0,78457
0,905	0,78643
0,950	0,81342

En vous servant de la formule (1) calculer deux approximations de $f'(0,9)$ en prenant d'abord $h = 0,002$ et ensuite $h = 0,005$. Sachant que la valeur exacte de $f'(0,9) = 0,62161$, calculer les erreurs commises et expliquer les résultats obtenus.

(c) Sachant que $f(x) = \sin(x)$ et que tous les chiffres des approximations de $f(x)$ du tableau sont significatifs, déterminer analytiquement la valeur de h qui donne la meilleure approximation de $f'(0,9)$ en utilisant la formule (1).

Partie 2: Intégration numérique

Exercice 3:

Soit la fonction $f(x) = 0.2 + 25x$.

1. Utiliser la formule de trapèze pour intégrer numériquement la fonction f de $a = 0$ à $b = 2$.
2. Comparer la valeur approchée avec la valeur exacte de l'intégrale.
3. Conclure.

Exercice 4:

Définissons la fonction $F(x) = \int_0^x te^{-t}dt$.

Combien faudrait-il de sous-intervalles, à l'aide de la méthode de Simpson composée, pour obtenir une approximation de $F(1)$ avec une précision de $0,5 \times 10^{-8}$ (répondre sans calculer la valeur analytique de $F(x)$)?

Partie 3: Approximation des équations différentielles ordinaires et aux dérivées partielles

Exercice 5:

Pourquoi on ne peut pas utiliser la méthode d'Euler pour approcher la solution $u(x) = \left(\frac{2}{3}x\right)^{\frac{3}{2}}$ du problème à valeur initiale $u' = u^{\frac{1}{3}}$, $u(0) = 0$? Justifier votre réponse.

Exercice 6:

Un modèle pour la diffusion d'une épidémie se base sur l'hypothèse que sa vitesse de propagation est proportionnelle au nombre d'individus infectés et au nombre d'individus sains.

Si on note $I(t) \geqslant 0$ le nombre d'individus infectés à l'instant $t \geqslant 0$ et $A > 0$ le nombre d'individus total, il existe une constante $k \in \mathbb{R}^+$ telle que $I'(t) = kI(t)(A - I(t))$.

1. Montrer qu'il existe $T > 0$ et une unique solution $I \in \mathscr{C}^\infty([0,T])$ au problème de Cauchy

$$\begin{cases} I'(t) = kI(t)(A - I(t)), \\ I(0) = I_0 > 0. \end{cases}$$

2. Montrer que si $0 < I_0 < A$ alors $0 < I(t) < A$ pour tout $t > 0$.

3. Montrer que si $0 < I_0 < A$ alors $I(t)$ est croissante sur $\mathbb{R}^+$.

4. Soit $0 < I_0 < A$. On considère le schéma implicite

$$\frac{I_{n+1} - I_n}{\Delta t} = kI_n(A - I_{n+1}).$$

Montrer que ce schéma est inconditionnellement stable.

5. Ecrire un programme `Scilab` qui calcule et qui dessine la solution approchée de ce problème d'épidémiologie.

Exercice 7:

On considère l'équation de la chaleur suivante

$$\begin{cases} \frac{\partial w(t,x)}{\partial t} = \frac{\partial^2 w(t,x)}{\partial x^2}, & t > 0,\ x \in (0,\pi) \\ w(t,0) = 0 = w(t,\pi) & \text{(Condition au bord de Dirichlet)} \\ w(0,x) = w_0(x). & \text{(Condition initiale)} \end{cases}$$

1. En utilisant la méthode de semi-discrétisation (par rapport à la variable spatiale x), montrer que l'approximation numérique de l'équation de la chaleur donne naissance à une équation différentielle ordinaire sous la forme

$$\begin{cases} W'(t) = MW(t), & t > 0 \\ W(0) = W_0. \end{cases}$$

Préciser M, $W(t)$ et W_0.

2. Pour un pas spatial $h = \frac{\pi}{N+1}$, montrer que les vecteurs propres v_k et les valeurs propres λ_k de M sont donnés par les formules

$$(v_k)_i = \sin(ikh), \qquad \lambda_k = \frac{4}{h^2}\sin^2\left(\frac{kh}{2}\right),\ i = 1, \cdots, N;\ k = 1, \cdots, N.$$

3. Calculez la plus petite et la plus grande valeur propre de M et leur rapport. Comment se comporte-t-il pour $N \to \infty$?