

# Modélisation mathématique et simulation numérique

## Partie 1 : Modélisation par l'exemple

**S. NAFIRI**

**Ecole Hassania des Travaux Publics**

**École Mathématique Africaine** : Géométrie, Analyse  
Numérique et Applications, 5-16 septembre 2016,  
N'Djamena, Tchad

- ① Modélisation et simulation ?
- ② Modélisation par des EDOs
- ③ Modélisation par des EDPs
- ④ Problème 1 : système thermoélastique des ondes
- ⑤ Problème 2 : système thermoélastique des poutres
- ⑥ Conclusion

# Modélisation et simulation ?

# Modélisation mathématique ?

- **La modélisation mathématique** consiste à traduire un phénomène réel (donc complexe) à l'aide d'outils mathématiques.

# Modélisation mathématique ?

- **La modélisation mathématique** consiste à traduire un phénomène réel (donc complexe) à l'aide d'outils mathématiques.

## Attention :

- il faut pas trop simplifier pour ne pas perdre des propriétés qualitatives importantes du problème que l'on cherche à modéliser ;
- il faut pas garder un système trop compliqué sur lequel toute étude théorique serait hors de portée ;

# Historique de la simulation

La naissance de la simulation numérique remonte aux débuts des années mille neuf cent cinquante où les premiers ordinateurs purent être utilisés pour un usage civil. En particulier, à Los Alamos (qui contient une des plus grandes institutions multidisciplinaires du monde, Laboratoire national de Los Alamos), la machine MANIAC est devenue opérationnelle en 1952. La simulation apporte des informations complémentaires aux outils théoriques.

# A quoi sert la simulation numérique ?

**La simulation numérique** est avant tout un objet mathématique.

Concrètement, il s'agit de la représentation mathématique d'un objet ou d'un système. A quoi servent ces représentations mathématiques ?

L'utilité de la simulation réside souvent dans le fait de réaliser ce que l'on appelle des expériences virtuelles. Imaginez que j'ai une télécommande dans la main : je peux essayer de la compresser, de la casser, de la chauffer, etc. Si pour diverses raisons je n'ai pas accès à cette télécommande, mais que je possède un modèle mathématique de cette dernière - la physique est le lieu où l'on crée des modèles mathématiques des objets réels - au lieu d'agir sur elle dans le monde réel, je vais pouvoir essayer de mener un calcul numérique qui me donnera une idée de la réponse de cet objet à différentes sollicitations que l'on pourrait avoir sur lui.

# A quoi sert la simulation numérique ?

Effectuer un calcul numérique, c'est donc essayer de développer un calcul dont l'essence est parfaitement mathématique et qui a pour objectif de donner une représentation simplifiée d'un objet réel. Il ne faut pas jamais oublier que l'objet virtuel n'est pas l'objet, mais bien une représentation simplifiée, ce qui va être à l'origine de très nombreux problèmes. L'une des questions que l'on se pose quand on fait du calcul numérique concerne en effet la validation du calcul. On a beau faire plein de calculs extrêmement beaux et précis, souvent c'est bien la validation du calcul qui reste un véritable problème. Et pour cause, on n'a pas de manière simple de savoir si un calcul mène au bon résultat. En revanche, cela fait des animations souvent formidables.



# Situations où l'ordinateur est nécessaire

Les types d'application sont nombreux et variés.

- On peut faire une simulation numérique lorsque l'objet est inaccessible. Par exemple, en astrophysique : les étoiles, les galaxies ou l'univers dans son entier sont des objets de simulation parce qu'ils sont inaccessibles et ne peuvent faire l'objet d'une expérience en laboratoire.

Ce problème se pose aussi pour l'infiniment petit. Certains systèmes quantiques sont en effet à ce point petits qu'ils sont inaccessibles à l'expérience. Pour essayer de les comprendre, on tente donc de les simuler sur un ordinateur.

- On peut faire de la simulation numérique lorsque l'on veut étudier le comportement d'un objet qui n'existe pas encore physiquement : la conception du dernier avion d'Airbus, l'A380, a été entièrement réalisée sur ordinateur. Cette simulation a permis de diminuer les coûts de développement de manière significative.

# Situations où l'ordinateur est nécessaire

- On peut faire de la simulation numérique lors de la conception de bâtiments et d'infrastructures.
- On peut faire de la simulation numérique pour imaginer des objets abstraits complètement imaginaires, comme des objets fractals ou des systèmes dynamiques.
- On peut aussi faire de la simulation du cerveau. Malheureusement, nous sommes encore loin de comprendre complètement le fonctionnement du cerveau.
- On peut faire de la simulation numérique lorsque la complexité d'un calcul est grande. C'est notamment le cas lorsque l'on souhaite casser un code. Les problèmes de cryptographie pour casser un code supposent en effet de très grandes puissances de calcul.

# Aspect fini des ordinateurs

La solution exacte d'un problème d'EDO ou d'EDP est une fonction continue. **Les ordinateurs** ne connaissent que **le fini** et **le discret**. En effectuant un calcul numérique, un ordinateur ne peut retenir qu'un nombre fini de chiffres pour représenter les opérandes et les résultats des calculs intermédiaires.

Les solutions approchées seront calculées comme des ensembles de valeurs discrètes sous la forme de composantes d'un vecteur solution d'un problème matriciel. La représentation des nombres dans un ordinateur introduit la notion d'erreur d'arrondi ou de troncature.

Ces erreurs peuvent se cumuler sur un calcul et la solution numérique finale pourra s'avérer très éloignée de la solution exacte.

# Aspect fini des ordinateurs

La solution exacte d'un problème d'EDO ou d'EDP est une fonction continue. **Les ordinateurs** ne connaissent que **le fini** et **le discret**. En effectuant un calcul numérique, un ordinateur ne peut retenir qu'un nombre fini de chiffres pour représenter les opérandes et les résultats des calculs intermédiaires.

Les solutions approchées seront calculées comme des ensembles de valeurs discrètes sous la forme de composantes d'un vecteur solution d'un problème matriciel. La représentation des nombres dans un ordinateur introduit la notion d'erreur d'arrondi ou de troncature.

Ces erreurs peuvent se cumuler sur un calcul et la solution numérique finale pourra s'avérer très éloignée de la solution exacte.

**On doit donc faire appel à l'analyse numérique...**

# Revenons maintenant à la modélisation...

- Que modélise les EDOs ?
- Que modélise les EDPs ?

# Modélisation par des EDOs

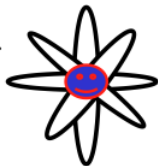
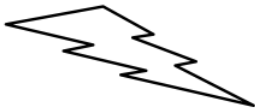
# D'où vient les EDOs ?



Les EDOs ont été formulées pour la première fois au 17ème siècle par I. Newton (1671) et par G.W. Leibniz (1676).

## La seconde loi de Newton

$F(t)$



$q(t)$

$m$



## Exemple 1 : La seconde loi de Newton

La seconde loi de Newton indique que la force exercée sur un corps/un point matériel produit une accélération proportionnelle,

$$mq''(t) = F(t). \quad (1)$$

Ici  $q(t)$  représente la position à l'instant  $t$  du corps de masse  $m$ ,  $F(t)$  la force qui lui est appliquée.

## Exemple 1 : La seconde loi de Newton

La seconde loi de Newton indique que la force exercée sur un corps/un point matériel produit une accélération proportionnelle,

$$mq''(t) = F(t). \quad (1)$$

Ici  $q(t)$  représente la position à l'instant  $t$  du corps de masse  $m$ ,  $F(t)$  la force qui lui est appliquée.

La solution  $q(t)$  ?

## Exemple 1 : La seconde loi de Newton

La seconde loi de Newton indique que la force exercée sur un corps/un point matériel produit une accélération proportionnelle,

$$mq''(t) = F(t). \quad (1)$$

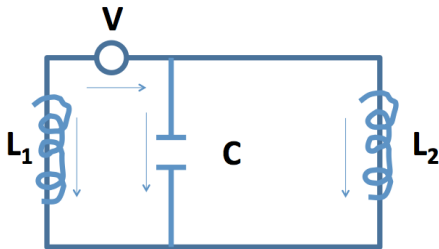
Ici  $q(t)$  représente la position à l'instant  $t$  du corps de masse  $m$ ,  $F(t)$  la force qui lui est appliquée.

La solution  $q(t)$  ?

$$q(t) = \frac{1}{m} \int_0^t \int_0^s F(r) dr ds + tC_1 + C_2 \quad (2)$$

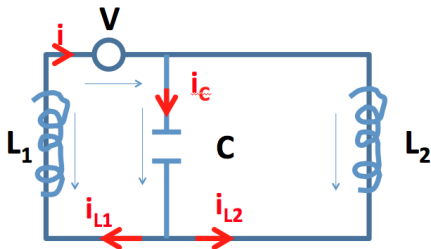
$C_1$  et  $C_2$  sont des constantes arbitraires dans  $\mathbb{R}$ .

## Exemple 2 : Réseau électrique



- $V$  désigne la source de tension.
- $L_1, L_2$  représentent l'inductance des bobines.
- $C$  désigne la capacité du condensateur.

## Exemple 2 : Réseau électrique



- $V$  désigne la source de tension.
- $L_1, L_2$  représentent l'inductance des bobines.
- $C$  désigne la capacité du condensateur.

## Exemple 2 : Réseau électrique

Appliquons les lois de bases en électricité :

- le courant  $I_L$  et la tension  $V_L$  à travers la bobine d'inductance  $L$  sont liés par la relation suivante :

$$V_L(t) = L \frac{dI_L}{dt}(t) \quad (3)$$

- le courant  $I_C$  et la tension  $V_C$  du condensateur dont la capacité est  $C$  vérifient

$$I_C(t) = C \frac{dV_C}{dt}(t) \quad (4)$$

## Exemple 2 : Réseau électrique

La conservation de la charge et de l'énergie sont décrites par les lois de Kirchhoff. La première loi de Kirchhoff énonce que la somme des courants qui entrent par un noeud est égale à la somme des courants qui en sortent. La seconde loi de Kirchhoff dit que dans une maille fermée d'un réseau électrique, la somme des tensions le long de cette maille est toujours nulle. En appliquant ces lois à notre exemple, on obtient le système d'équations différentielles suivant

$$L_1 \frac{dI_{L_1}}{dt}(t) = V_{L_1}(t) = V_C(t) + V(t). \quad (5)$$

$$L_2 \frac{dI_{L_2}}{dt}(t) = V_{L_2}(t) = V_C(t). \quad (6)$$

$$C \frac{dV_C}{dt}(t) = I_C(t) = -I_{L_1}(t) - I_{L_2}(t). \quad (7)$$

## Exemple 2 : Réseau électrique

On suppose qu'on ne peut mesurer que le courant  $I_{L_1}$ , et on pose,

$$y(t) = I_{L_1}(t)$$

La formule (5) est équivalente à :

$$L_1 y^{(1)}(t) = V_c(t) + V(t)$$

En multiplions par  $C$  et en différenciant une fois nous obtenons

$$L_1 C y^{(2)}(t) = C V_C^{(1)}(t) + C V^{(1)}(t)$$

D'après (7), il s'en suit

$$L_1 C y^{(2)}(t) = -y(t) - I_{L_2}(t) + C V^{(1)}(t) \quad (8)$$

Différencions cette équation une deuxième fois et utilisons (6)

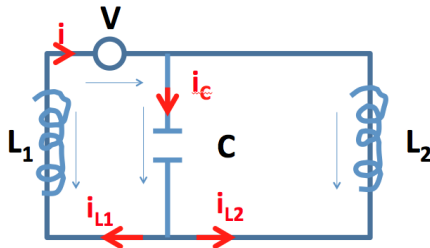
$$L_{(1)} C y^{(3)}(t) = -y^{(1)}(t) - \frac{dI_{L_2}}{dt}(t) + C V^{(2)}(t) \quad (9)$$

$$= -y^{(1)}(t) - \frac{1}{L_2} V_c(t) + C V^{(2)}(t) \quad (10)$$

$$= -y^{(1)}(t) - \frac{1}{L_2} \left( L_1 y^{(1)}(t) - V(t) \right) + C V^{(2)}(t). \quad (11)$$



## Exemple 2 : Réseau électrique

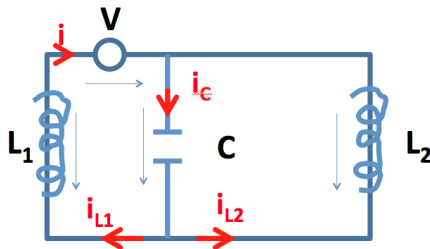


L'équation différentielle ordinaire suivante

$$L_1 C y^{(3)}(t) + \left(1 + \frac{L_1}{L_2}\right) y^{(1)}(t) = \frac{1}{L_2} V(t) + C V^{(2)}(t). \quad (12)$$

décrit le comportement de  $I_{L_1}$  à l'intérieur du réseau.

## Exemple 2 : Réseau électrique



L'équation différentielle ordinaire suivante

$$L_1 C y^{(3)}(t) + \left(1 + \frac{L_1}{L_2}\right) y^{(1)}(t) = \frac{1}{L_2} V(t) + C V^{(2)}(t). \quad (12)$$

décrit le comportement de  $I_{L_1}$  à l'intérieur du réseau.

Exercice : Trouver l'expression de  $y(t)$ .

## Exemple 3 : Equation Logistique

La croissance d'une population est habituellement modélisé par une équation de la forme

$$\frac{dP}{dt} = kP$$

où  $P$  représente le nombre d'individus à un temps donné  $t$ . Ce modèle suppose que le taux de croissance de la population est proportionnelle à la taille de la population.

Une solution de cette équation est la fonction exponentielle :

$$P(t) = Ce^{kt}$$

## Exemple 3 : Equation Logistique

La croissance d'une population est habituellement modélisé par une équation de la forme

$$\frac{dP}{dt} = kP$$

où  $P$  représente le nombre d'individus à un temps donné  $t$ . Ce modèle suppose que le taux de croissance de la population est proportionnelle à la taille de la population.

Une solution de cette équation est la fonction exponentielle :

$$P(t) = Ce^{kt}$$

Remarque :  $P(t) \longrightarrow \infty$  **qd**  $t \rightarrow \infty$  !!!

## Exemple 3 : Equation Logistique, 1844–1845

Un modèle plus réaliste tient compte du fait que **tout environnement a une capacité de charge limitée**  $K$ , donc si  $P$  atteint  $K$  la population arrête de croître. Le modèle dans ce cas est le suivant :

$$\frac{dP}{dt} = kP \left( 1 - \frac{P}{K} \right) \quad (13)$$

On l'appelle **l'équation différentielle logistique**.

## Exemple 3 : Equation Logistique, 1844–1845

Un modèle plus réaliste tient compte du fait que **tout environnement a une capacité de charge limitée**  $K$ , donc si  $P$  atteint  $K$  la population arrête de croître. Le modèle dans ce cas est le suivant :

$$\frac{dP}{dt} = kP \left( 1 - \frac{P}{K} \right) \quad (13)$$

On l'appelle **l'équation différentielle logistique**.

**Remarque : C'est une équation différentielle ordinaire non linéaire !!!**

## Exemple 3 : Equation Logistique, 1844–1845

Un modèle plus réaliste tient compte du fait que **tout environnement a une capacité de charge limitée**  $K$ , donc si  $P$  atteint  $K$  la population arrête de croître. Le modèle dans ce cas est le suivant :

$$\frac{dP}{dt} = kP \left( 1 - \frac{P}{K} \right) \quad (13)$$

On l'appelle **l'équation différentielle logistique**.

**Remarque : C'est une équation différentielle ordinaire non linéaire !!!**



## Exemple 3 : Equation Logistique, 1844–1845

Un modèle plus réaliste tient compte du fait que **tout environnement a une capacité de charge limitée**  $K$ , donc si  $P$  atteint  $K$  la population arrête de croître. Le modèle dans ce cas est le suivant :

$$\frac{dP}{dt} = kP \left(1 - \frac{P}{K}\right) \quad (13)$$

On l'appelle **l'équation différentielle logistique**.

**Remarque : C'est une équation différentielle ordinaire non linéaire !!!**

Exercice : Trouver l'expression de  $P(t)$ .





## Exemple 4 : Modèle proie-prédateur, 1925-1926

Quand des observations montrèrent que la proportion de poissons prédateurs augmentait quand la pêche diminuait, un mathématicien italien, Vito Volterra, conçut un modèle pour décrire le phénomène (peu après la première guerre mondiale). Ce modèle, désormais connu sous le nom d'équations de Lotka-Volterra.



ALFRED JAMES LOTKA



VITO VOLTERRA

## Exemple 4 : Modèle proie-prédateur, 1925-1926

Quand des observations montrèrent que la proportion de poissons prédateurs augmentait quand la pêche diminuait, un mathématicien italien, Vito Volterra, conçut un modèle pour décrire le phénomène (peu après la première guerre mondiale). Ce modèle, désormais connu sous le nom d'équations de Lotka-Volterra.



ALFRED JAMES LOTKA

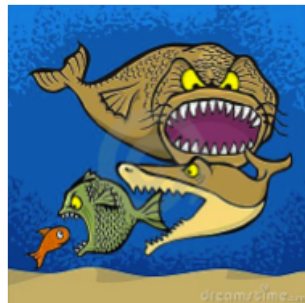


VITO VOLTERRA



## Exemple 4 : Modèle proie-prédateur

$$\begin{cases} x'(t) = ax(t) - bx(t)y(t) \\ y'(t) = cx(t)y(t) - dy(t) \end{cases} \quad (14)$$



où  $x$  est une fonction représentant **l'effectif de la population des proies** à un instant donné, idem avec  $y$  pour les **prédateurs**, et  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$  des réels strictement positifs.

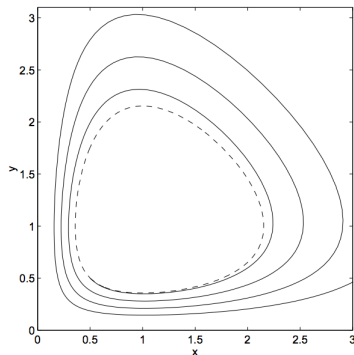
Le couplage dans (14) modélise les rencontres entre les deux espèces et leur évolution.

## Exemple 4 : Modèle proie-prédateur

**Remarque :** Un calcul explicite de la solution, ne peut pas s'effectuer.

$$\begin{cases} x'(t) = ax(t) - bx(t)y(t) \\ y'(t) = cx(t)y(t) - dy(t) \end{cases} \quad (15)$$

On doit recourir au **calcul numérique**.  
La méthode d'Euler explicite donne le graphe spiral suivant des solutions  $y$  en fonction de  $x$ , avec  $x_0 = 0.5$  et  $y_0 = 0.5$ .



# Modélisation par des EDPs

Soit  $u(x, y)$  une fonction à deux variables réelles. On considère l'équation

$$a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + d \frac{\partial u}{\partial x} + e \frac{\partial u}{\partial y} + fu = g.$$

$a, b, c, d, e, f$  sont des coefficients constants.

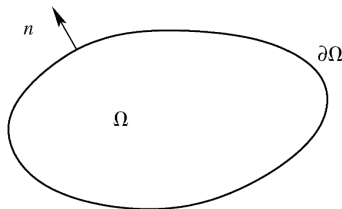
**Définition :**

- Si  $b^2 - 4ac < 0$  : l'équation est dite elliptique.
- Si  $b^2 - 4ac = 0$  : l'équation est dite parabolique.
- Si  $b^2 - 4ac > 0$  : l'équation est dite hyperbolique.

# Equation de la chaleur

Soit  $\Omega$  un domaine de l'espace  $\mathbb{R}^N$ ,  $N = 1, 2$ , ou 3 que l'on suppose occupé par un matériau homogène, isotrope, et conducteur de la chaleur. On note

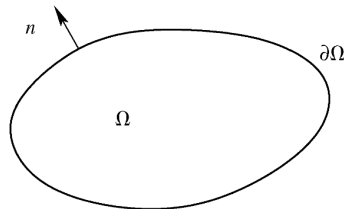
- $x$  la variable d'espace ( $\in \Omega$ ).
- $t$  la variable de temps.
- $f(t, x)$  les sources de chaleur qui s'appliquent à  $\Omega$
- $\theta(t, x)$  la température le long de  $\Omega$ .
- $c$  la chaleur spécifique.
- $k$  la conductivité thermique.



# Equation de la chaleur

L'équation aux dérivées partielles qui modélise le transfert de la chaleur le long de  $\Omega$  s'appelle **l'équation de la chaleur**

$$\left\{ \begin{array}{ll} c \frac{\partial \theta}{\partial t} - k \Delta \theta = f & \text{pour } (x, t) \in \Omega \times \mathbb{R}_*^+ \\ \theta(t, x) = 0 & \text{pour } (x, t) \in \partial\Omega \times \mathbb{R}_*^+ \\ \theta(t = 0, x) = \theta_0(x) & \text{pour } x \in \Omega \end{array} \right. \quad (16)$$



## Remarque :

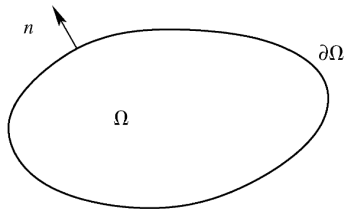
- C'est une équation parabolique.
- $\theta(t, x)|_{\partial\Omega} = 0$  : est la condition aux limites de Dirichlet, i.e. ,le domaine est supposé baigner dans un thermostat à température constante. D'autres conditions aux limites peuvent aussi être envisagées.



# Equation de la chaleur

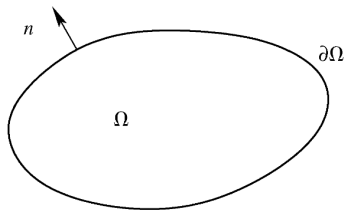
$$\left\{ \begin{array}{ll} c \frac{\partial \theta}{\partial t} - k \Delta \theta = f & \text{pour } (x, t) \in \Omega \times \mathbb{R}_*^+ \\ \theta(t, x) = 0 & \text{pour } (x, t) \in \partial \Omega \times \mathbb{R}_*^+ \\ \theta(t = 0, x) = \theta_0(x) & \text{pour } x \in \Omega \end{array} \right.$$

Remarque :



# Equation de la chaleur

$$\left\{ \begin{array}{ll} c \frac{\partial \theta}{\partial t} - k \Delta \theta = f & \text{pour } (x, t) \in \Omega \times \mathbb{R}_*^+ \\ \theta(t, x) = 0 & \text{pour } (x, t) \in \partial \Omega \times \mathbb{R}_*^+ \\ \theta(t = 0, x) = \theta_0(x) & \text{pour } x \in \Omega \end{array} \right.$$

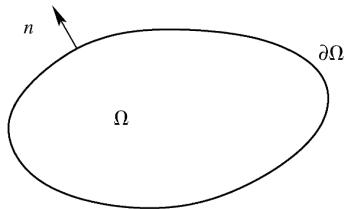


## Remarque :

- $\frac{\partial \theta}{\partial n}(t, x)|_{\partial \Omega} = 0$  : est la condition aux limites de Neumann, i.e. , le domaine est supposé adiabatique ou thermiquement isolé de l'extérieur  $\implies$  le flux de chaleur sortant au bord est nul.

# Equation de la chaleur

$$\left\{ \begin{array}{ll} c \frac{\partial \theta}{\partial t} - k \Delta \theta = f & \text{pour } (x, t) \in \Omega \times \mathbb{R}_*^+ \\ \theta(t, x) = 0 & \text{pour } (x, t) \in \partial \Omega \times \mathbb{R}_*^+ \\ \theta(t = 0, x) = \theta_0(x) & \text{pour } x \in \Omega \end{array} \right.$$

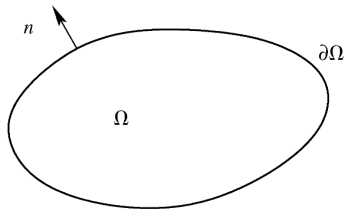


## Remarque :

- $\frac{\partial \theta}{\partial n}(t, x)|_{\partial \Omega} = 0$  : est la condition aux limites de Neumann, i.e. , le domaine est supposé adiabatique ou thermiquement isolé de l'extérieur  $\implies$  le flux de chaleur sortant au bord est nul.
- $\frac{\partial \theta}{\partial n}(t, x)|_{\partial \Omega} + \alpha \theta(t, x)|_{\partial \Omega} = 0$  : est la condition aux limites de Fourier/Robin, i.e. , le flux de chaleur sortant au bord est proportionnel au saut de température entre l'extérieur et l'intérieur.

# Equation de la chaleur

$$\left\{ \begin{array}{ll} c \frac{\partial \theta}{\partial t} - k \Delta \theta = f & \text{pour } (x, t) \in \Omega \times \mathbb{R}_*^+ \\ \theta(t, x) = 0 & \text{pour } (x, t) \in \partial \Omega \times \mathbb{R}_*^+ \\ \theta(t = 0, x) = \theta_0(x) & \text{pour } x \in \Omega \end{array} \right.$$



## Remarque :

- $\frac{\partial \theta}{\partial n}(t, x)|_{\partial \Omega} = 0$  : est la condition aux limites de Neumann, i.e. , le domaine est supposé adiabatique ou thermiquement isolé de l'extérieur  $\implies$  le flux de chaleur sortant au bord est nul.
- $\frac{\partial \theta}{\partial n}(t, x)|_{\partial \Omega} + \alpha \theta(t, x)|_{\partial \Omega} = 0$  : est la condition aux limites de Fourier/Robin, i.e. , le flux de chaleur sortant au bord est proportionnel au saut de température entre l'extérieur et l'intérieur.
- On peut imaginer des situations où les conditions aux limites sont mélangées. Dirichlet sur  $\partial \Omega_D$ , Neumann sur  $\partial \Omega_N$  et Fourier sur  $\partial \Omega_F$ , avec  $\partial \Omega_D, \partial \Omega_N, \partial \Omega_F$  formant une partition de la frontière  $\partial \Omega$ .

$$\left\{ \begin{array}{ll} c \frac{\partial \theta}{\partial t} - k \Delta \theta = f & \text{pour } (x, t) \in \Omega \times \mathbb{R}_*^+ \\ \theta(t, x) = 0 & \text{pour } (x, t) \in \partial \Omega \times \mathbb{R}_*^+ \\ \theta(t = 0, x) = \theta_0(x) & \text{pour } x \in \Omega \end{array} \right.$$

Remarque :

$$\left\{ \begin{array}{ll} c \frac{\partial \theta}{\partial t} - k \Delta \theta = f & \text{pour } (x, t) \in \Omega \times \mathbb{R}_*^+ \\ \theta(t, x) = 0 & \text{pour } (x, t) \in \partial \Omega \times \mathbb{R}_*^+ \\ \theta(t = 0, x) = \theta_0(x) & \text{pour } x \in \Omega \end{array} \right.$$

**Remarque :** Ce système n'est pas seulement un modèle de propagation de la chaleur. Il a en fait un caractère universel, et on le retrouve comme modèle de nombreux phénomènes sans aucun rapport entre eux.

- Ce système est aussi connu sous le nom d'**équation d diffusion**, et modélise la diffusion ou migration d'une concentration ou densité à travers le domaine  $\Omega$  : imaginer un polluant diffusant dans l'atmosphère, ou bien une espèce chimique migrant dans un substrat.
- le modèle de la chaleur intervient aussi en finance et il porte le nom de **modèle de Black and Scholes**.

# Modèle de Black and Scholes

C'est une variante du modèle de la chaleur qui permet de trouver le prix de l'option d'achat (ou call) d'une action qui vaut initialement  $x$  et qu'on pourra acheter au prix  $k$  dans un temps ultérieur  $T$ . Ce prix est la solution  $u$  de

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - ru + \frac{1}{2r}x \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2\sigma^2}x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 & \text{pour } (x, t) \in \mathbb{R} \times (0, T) \\ u(t = T, x) = \max(x - k, 0) = 0 & \text{pour } x \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (17)$$

- $\sigma$  étant la volatilité de l'action.
- $r$  le taux d'intérêt

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} - \alpha \left( \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} \right) = 0.$$



Une équation similaire a été étudiée par Fornasier et Mars en 2007 pour recolorer les anciennes fresques italiennes fragmentées. Voir



M. Fornasier and R. March. Restoration of color images by vector valued BV functions and variational calculus, SIAM J. Appl. Math., Vol. 68 No. 2, 2007, pp. 437-460.



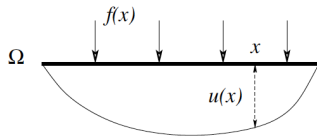
# Equation des ondes ou de D'Alembert

L'équation des ondes modélise des phénomènes de propagation d'ondes ou de vibration. Par exemple, en deux dimensions d'espace elle est un modèle pour étudier les vibrations d'une membrane élastique tendue (comme la peau d'un tambour).

# Equation des ondes

En une dimension d'espace, elle est aussi appelée équation des cordes vibrantes. Au repos, la membrane occupe un domaine plan  $\Omega$ . Sous l'action d'une force normale à ce plan d'intensité  $f$ , elle se déforme et son déplacement normal est noté  $u$ . On suppose qu'elle est fixée sur son bord, ce qui donne une condition aux limites de Dirichlet. L'équation des ondes dont  $u$  est solution est donnée par

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = f & \text{dans } \Omega \times \mathbb{R}_*^+ \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \times \mathbb{R}_*^+ \\ u(t=0) = u_0 & \text{dans } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial t}(t=0) = u_1 & \text{dans } \Omega \end{array} \right. \quad (18)$$

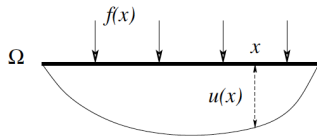


# Equation des ondes

En une dimension d'espace, elle est aussi appelée équation des cordes vibrantes. Au repos, la membrane occupe un domaine plan  $\Omega$ . Sous l'action d'une force normale à ce plan d'intensité  $f$ , elle se déforme et son déplacement normal est noté  $u$ . On suppose qu'elle est fixée sur son bord, ce qui donne une condition aux limites de Dirichlet. L'équation des ondes dont  $u$  est solution est donnée par

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = f & \text{dans } \Omega \times \mathbb{R}_*^+ \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \times \mathbb{R}_*^+ \\ u(t=0) = u_0 & \text{dans } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial t}(t=0) = u_1 & \text{dans } \Omega \end{cases} \quad (18)$$

Remarque : C'est une équation hyperbolique.



# Equation de Laplace

Pour certains choix du terme source  $f$ , la solution de l'équation de la chaleur atteint un état stationnaire, c'est-à-dire que  $u(t, x)$  admet une limite  $u_\infty(x)$  quand le temps  $t$  tend vers l'infini. Souvent, il est intéressant de calculer directement cet état stationnaire. Dans ce cas, pour un terme source  $f(x)$  indépendant du temps, on résout une équation du deuxième ordre en espace

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (19)$$

# Equation de Laplace

Pour certains choix du terme source  $f$ , la solution de l'équation de la chaleur atteint un état stationnaire, c'est-à-dire que  $u(t, x)$  admet une limite  $u_{\infty}(x)$  quand le temps  $t$  tend vers l'infini. Souvent, il est intéressant de calculer directement cet état stationnaire. Dans ce cas, pour un terme source  $f(x)$  indépendant du temps, on résout une équation du deuxième ordre en espace

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (19)$$

## Remarque :

- C'est une équation elliptique.
- Cette équation est aussi la version stationnaire de l'équation des ondes.
- Cette équation peut modéliser le déplacement vertical d'une membrane élastique soumise à une force normale  $f$  et fixée sur son contour.

# Equation de Schrödinger

L'équation de Schrödinger décrit l'évolution de la fonction d'onde  $u$  d'une particule soumise à un potentiel  $V$ . Rappelons que  $u(t, x)$  est une fonction de  $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^N$  à valeurs dans  $\mathbb{C}$  et que son module au carré  $|u|^2$  s'interprète comme la densité de probabilité pour détecter que la particule se trouve au point  $(t, x)$ . Le potentiel  $V(x)$  est une fonction à valeurs réelles. La fonction d'onde  $u$  est solution de

$$\begin{cases} i \frac{\partial u}{\partial t} + \Delta u - Vu = 0 & \text{dans } \mathbb{R}_*^+ \times \mathbb{R}^N \\ u(t = 0) = u_0 & \text{dans } \mathbb{R}^N \end{cases} \quad (20)$$

L'équation de Schrödinger décrit l'évolution de la fonction d'onde  $u$  d'une particule soumise à un potentiel  $V$ . Rappelons que  $u(t, x)$  est une fonction de  $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^N$  à valeurs dans  $\mathbb{C}$  et que son module au carré  $|u|^2$  s'interprète comme la densité de probabilité pour détecter que la particule se trouve au point  $(t, x)$ . Le potentiel  $V(x)$  est une fonction à valeurs réelles. La fonction d'onde  $u$  est solution de

$$\begin{cases} i \frac{\partial u}{\partial t} + \Delta u - Vu = 0 & \text{dans } \mathbb{R}_*^+ \times \mathbb{R}^N \\ u(t = 0) = u_0 & \text{dans } \mathbb{R}^N \end{cases} \quad (20)$$

**Remarque :** Il n'y a pas de condition aux limites apparentes, puisque l'équation a lieu dans tout l'espace (qui n'a pas de bord).

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{rot}(E) = -\frac{\partial B}{\partial t}, \quad \text{rot}(B) = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t} \\ \text{div}(E) = 0, \quad \text{div}(B) = 0 \end{array} \right. \quad (21)$$

- $E$  et  $B$  étant respectivement le champ électrique et le champ magnétique.
- Ces équations signifient que la variation spatiale du champ électrique donne naissance à un champ magnétique variant dans le temps, et vice versa.



# Equation de Maxwell

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{rot}(E) = -\frac{\partial B}{\partial t}, \quad \text{rot}(B) = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t} \\ \text{div}(E) = 0, \quad \text{div}(B) = 0 \end{array} \right. \quad (21)$$

- $E$  et  $B$  étant respectivement le champ électrique et le champ magnétique.
- Ces équations signifient que la variation spatiale du champ électrique donne naissance à un champ magnétique variant dans le temps, et vice versa.

Exercice : Montrer que l'éqn. de Maxwell  $\implies$  l'éqn. des ondes.

# Ce n'est pas tout...il y en a encore!!!

La liste n'est pas exhaustive :

- L'équation de transport
- L'équation des plaques
- L'équation de Navier-Stokes
- L'équation de Boltzman
- L'équation de Burger
- **Les systèmes thermoélastiques**
- etc...