Eléments d’Algèbre linéaire Numérique

Rappel: Théorie matricielle

Quelques Rappels sur la théorie matricielle

Questions:

1. C’est quoi une matrice?
2. C’est quoi son rang ?
3. C’est quoi une valeur propre ? Un vecteur propre ?
4. Peut on mesurer un vecteur propre ? Une matrice ?
5. Que veut dire le conditionnement d’une matrice ?

Quelques Rappels sur la théorie matricielle

Réponses:

- Une matrice est un tableau de nombre à n lignes et m colonnes.

A=(a_ij), i=1,…,n et j=1,…,m (dans la suite m=n)

- Transposé d'une matrice A, noté A^t =(a_ij)=(a_ji)
- Une matrice adjointe est notée A*=($\bar{a}_{ji}$)
- Une matrice est diagonale si a_ij=0, i≠j
- Une matrice est dite triangulaire supérieure (resp. triang. inférieure) si a_ij=0, i>j (resp. i<j)
- A est à diagonale (strict.) dominante si :

$$|a_{ii}| \geq \sum_{\substack{1\leq i\leq n \\ j\neq i}} |a_{ij}| \text{ (resp. >)}$$

Rappels

Le rang d'une matrice A∈ $M_{n,m}$(IR) est la dimension du sous espace vectoriel de IR^{m}engendré par ses vecteurs colonnes.
Rang A= dim(Im A)

Trace d'une matrice: Tr(A)=$\sum_{i=1}^{n} a_{ii}$
Tr(A)=Tra(A^t)
Tr(AB)=Tr(BA)
Tr(.) est une fonction linéaire.

Quelques Rappels sur la théorie matricielle

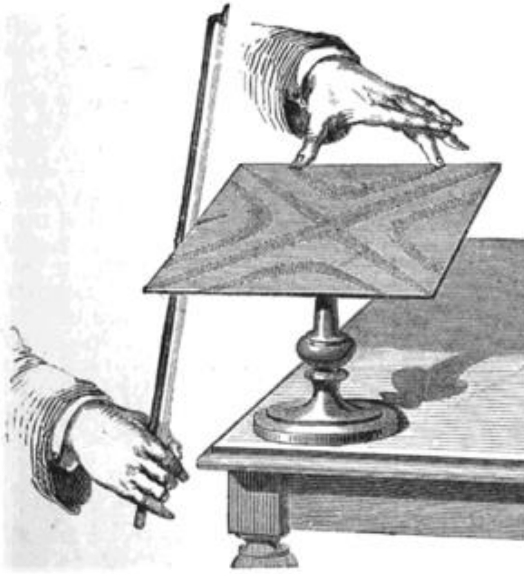
Une valeur propre est la solution du polynôme caractéristique associé à A.
$p_A(\lambda)$=det(λI-A)
ρ(A)=max{λ_i(A), i=1,…n} est le rayon spectral de A.
Un vecteur $\mathrm{v} \neq 0$ $tel\ que\ Av = \lambda v$ est dit: vecteur propre de A associé à la valeur propre λ.
Une valeur singulière de A est la racine carrée positive d'une valeur propre de la matrice hermitienne A*A ($A^t A$ si la matrice est à coefficients réels.)

Can we See or Hear eigenvectors ?

Ernst Florens Friedrich Chladni (1756-1827)

« Cet homme rend le son visible »
Tels furent les mots prononcés par Napoléan en découvrant l’expérience de **Chladni**.
La technique de **Chladni**, publiée pour la première fois en 1787 dans son ouvrage *Entdeckungen über die Theorie des Klanges* («Découvertes dans la théorie du son»).

https://www.youtube.com/watch?v=6kLmlbkWJZ8



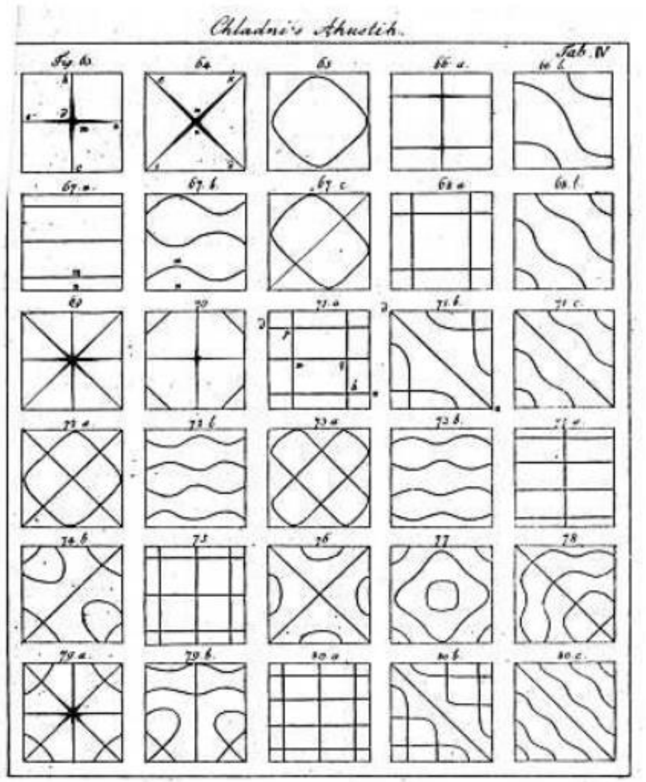
Chladni plates

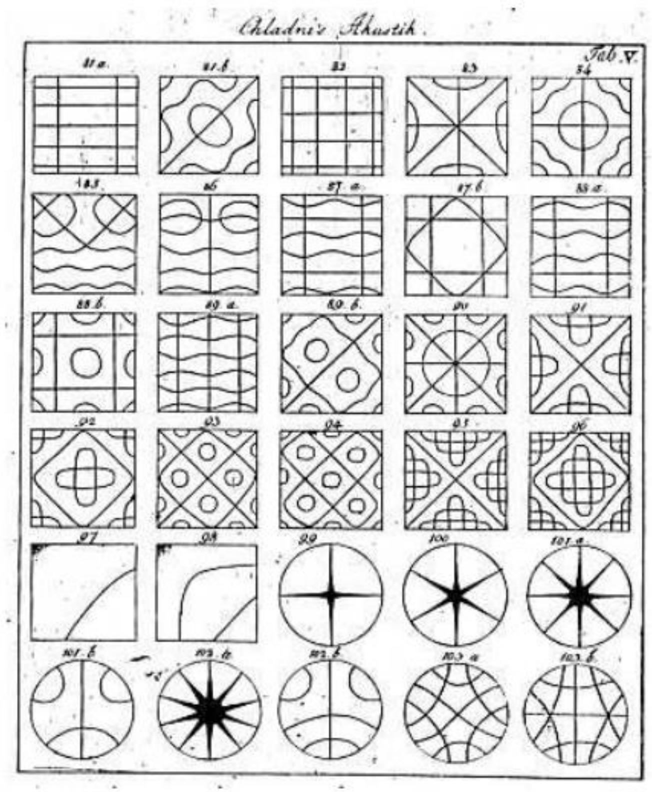
- Let us “see” the **vibration** of the metal plate from the white sands.

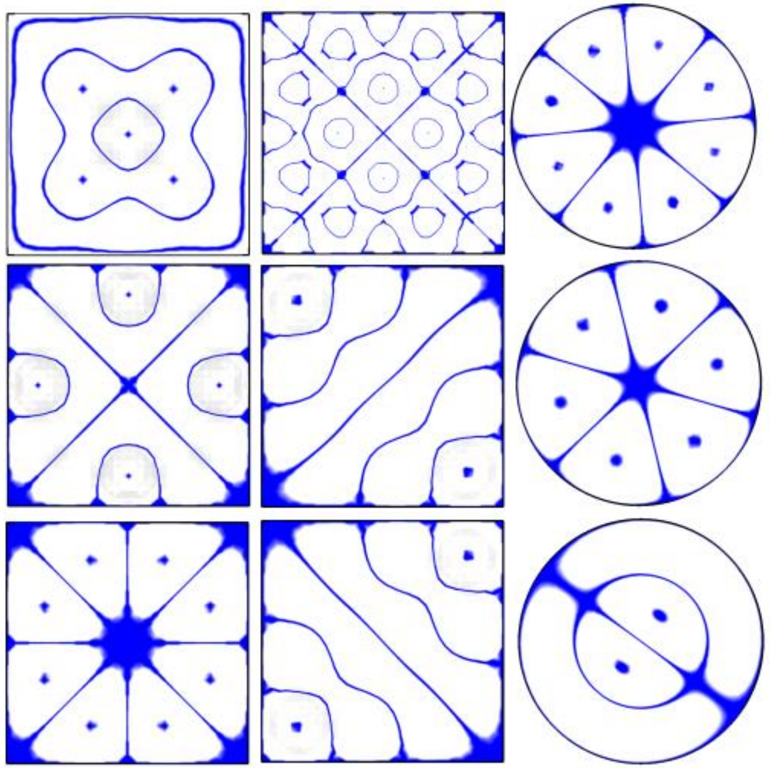
(https://www.youtube.com/watch?v=wvJAgrUBF4w)

Seeing and Hearing the Eigenvectors of a Fluid
Aaron Demby Jones, JoAnn Kuchera-Morin and Theodore Kim
Media Arts and Technology Program
University of California.

Chladni plates **VS** spetral







Left: In the late 1700's, the physicist Ernst Chladni was amazed by the patterns formed by sand on **vibrating metal plates**.
Right: numerical simulations obtained with a **discretized Laplacian.**

- a symmetric matrix $A \in \mathbf{R}^{n \times n}$ is *positive semidefinite* if

$$x^T A x \geq 0 \quad \text{for all } x$$

- a symmetric matrix $A \in \mathbf{R}^{n \times n}$ is *positive definite* if

$$x^T A x > 0 \quad \text{for all } x \neq 0$$

  this is a subset of the positive semidefinite matrices

note: if A is symmetric and $n \times n$, then $x^T A x$ is the function

$$x^T A x = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} A_{ij} x_i x_j = \sum_{i=1}^{n} A_{ii} x_i^2 + 2 \sum_{i>j} A_{ij} x_i x_j$$

this is called a *quadratic form*

Vector Norm

On a vector space V, a norm is a function $\|\cdot\|$ from V to the set of non-negative reals that obeys three postulates:

$$\|x\| > 0 \qquad if \qquad x \neq 0, C$$

$$\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\| \qquad if \quad \lambda \in R, x \in V$$

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \qquad if \quad x, y \in V \qquad (Trinagular \quad Inequality)$$

we can think of $\|x\|$ as the length or magnitude of the vector x.

The most familiar norm on R^n is the Euclidean

ℓ_2-norm defined by $\|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{1/2}$

ℓ_∞-norm defined by $\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$

ℓ_1-norm defined by $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$

In general *p*-norm, defined by

ℓ_p-norm defined by $\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^p\right)^{1/p}$ for $p > 0$ and *n*-vector x

Matrix Norm

Matrix norm corresponding to given vector norm defined by

$$\|A\| = \max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$$

Norm of matrix measures maximum stretching matrix does to any vector in given vector norm.

Matrix norm corresponding to vector 1-norm is maximum absolute column sum

$$\|A\|_1 = \max_j \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$$

Matrix norm corresponding to vector ∞ - norm is maximum absolute row sum,

$$\|A\|_\infty = \max_i \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$$

$$|||A|||_2 = \sqrt{\rho(A^* A)}.$$

Properties of Matrix Norm

Any matrix norm satisfies:

1. $\|A\| > O$ if $A \neq O$
2. $\|\gamma A\| = |\gamma| \cdot \|A\|$ for any scalar value γ

3. $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$

Matrix norm also satisfies

4. $\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$
5. $\|Ax\| \leq \|A\| \cdot \|x\|$ for any vector x

Conditionnement d’une matrice

Les modèles linéaires de la physique, de l'astronomie,..., conduisent souvent à la résolution de grands systèmes linéaires qu'on représente matriciellement par une équation du type AX=Y. Il arrive parfois qu'une petite variation sur A (resp. sur Y) entraîne une grande variation sur X. On dit dans ce cas que la matrice, ou le problème, est **mal conditionnée**.

Exemple : On souhaite résoudre le système linéaire AX=Y, où A est la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 7 & 8 & 7 \\ 7 & 5 & 6 & 5 \\ 8 & 6 & 10 & 9 \\ 7 & 5 & 9 & 10 \end{pmatrix}.$$

Si Y est le vecteur

$$Y = \begin{pmatrix} 32 \\ 23 \\ 33 \\ 31 \end{pmatrix}$$

alors on trouve

$$X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Mais si Y est le vecteur

$$Y = \begin{pmatrix} 32.1 \\ 22.9 \\ 33.1 \\ 30.9 \end{pmatrix}$$

alors on trouve

$$X = \begin{pmatrix} 9.2 \\ -12.6 \\ 4.5 \\ -11 \end{pmatrix}.$$

Autrement dit, de très petites variations sur Y ont conduit à de grandes variations sur X.

Conditionnement d'une matrice

Il y a des calculs matriciels qui sont sensibles aux erreurs dans l'entrée. Comme dans l'exemple suivant:

Le système suivant admet une solution x_1= 3.375 et x_2=-0.375

$$\frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{3}x_2 = 1,$$
$$\frac{1}{3}x_1 + .3x_2 = 0,$$

Si on remplace le coefficient a_{22}=3 par 1/3, alors le nouveau système n'admet plus de solution.

$$\frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{3}x_2 = 1,$$
$$\frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{3}x_2 = 0$$

Une petit changement dans l'entrée de la matrice a causé un changement radical de la sortie, i.e., une perte totale de la solution !!!

Matrix Condition Number

Condition number of square nonsingular matrix A defined by

$$cond(A) = \|A\| \cdot \|A\|^{-1}$$

By convention, cond (A) = ∞ if A singular

Example: $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 4 \end{bmatrix}$ $\|A\|_1 = 6$ $\|A\|_\infty = 8$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 0.5 & 1.5 & -0.5 \\ -0.5 & 2.5 & -0.5 \\ -0.5 & -0.5 & 0.5 \end{bmatrix} \quad \|A^{-1}\|_1 = 4.5 \qquad \|A^{-1}\|_\infty = 3.5$$

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 7 & 8 & 7 \\ 7 & 5 & 6 & 5 \\ 8 & 6 & 10 & 9 \\ 7 & 5 & 9 & 10 \end{pmatrix}.$$

cond_1 (A) = 6 x 4.5 = 27

cond_∞ (A) = 8 x 3.5 = 28

Dans l'exemple précédent, on trouve K(A)=4488, où la norme choisie est la norme matricielle associée à la norme infinie sur R^4.

TP avec Scilab

Exercices:

Find the eigenvalues and eigenvectors of the following matrix by hand:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Find the eigenvalues and eigenvectors of the following matrix by hand:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Can you guess the eigenvalues of the matrix

$$C = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}?$$

Remarque: Les résultats numériques des vecteurs propres diffèrent de ceux calculés analytiquement !!!
Perturbation causée par les erreurs d’arrondis !
Est-ce qu’on peut faire un autre algorithme numérique qui résout ce problème numérique ?

Exercices:

Construire les matrices suivantes en utilisant le moins d'opérations possible.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 9 & 7 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} .$$

Exercice 2 (Manipulation de vecteurs)**.** On définit le vecteur X par `X=[1:0.01:10]`.

a) Mettre dans une variable n la taille du vecteur X.

b) Afficher à l'écran la valeur du troisième élément de X.

c) Créer un vecteur Y qui contient tous les éléments de X en sens inverse.

d) Échanger le cinquième et le septième élément de X.

Exercice 3 (Résolution d'un exercice avec Scilab)**.** On donne les matrices

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Les questions qui suivent seront à traiter au maximum à l'aide de Scilab.

a) Calculer J^2 et vérifier que l'on a $AJ = JA$. Que vaut J^{-1} ?

b) Montrer que $(A+2I_4+3J)^2 = 4(A+2I_4+3J)$ et que $A(A+6J) = -5I_4$ (où I_4 est la matrice identité 4×4). En déduire que A est inversible et donner explicitement A^{-1}.

c) La matrice A est-elle diagonalisable ?

d) Pouvez-vous trouver une expression de A^n ?

Exercice 6 : Construire la matrice de taille 100*100 de la forme suivante.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 2 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Exercice 7 : Calculer la somme des entiers de 1 jusqu'à 100, calculer 100!. Donner une façon de calculer toutes les valeurs du cosinus sur les entiers de 1 à 100 le plus rapidement possible.

Exercice 8 : Calculer les normes ℓ^2 et ℓ^1 d'un vecteur sans passer par la commande `norm`.

Exercice 9 : Résoudre le système linéaire suivant

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x - y & = & 5 \\ -2x + y & = & -7 \end{array} \right.$$

Exercice: Gram Schmidt

1) Dans $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire canonique, orthonormaliser en suivant le procédé de Schmidt, la famille (u, v, w) avec

$$u = (1,0,1), v = (1,1,1), w = (-1,1,0)$$

2)

a) Énoncer le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt.

b) Orthonormaliser la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ pour le produit scalaire

$$(P, Q) \mapsto \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t$$

1.1. Programmer la décomposition QR d'une matrice $A \in GL_n(\mathbb{R})$ à l'aide du procédé de Gram-Schmidt.

1.2. Que pensez-vous de l'algorithme de Gram-Schmidt modifié ci-dessous ? Donne-t-il le même résultat ? Quel est son intêret ?

```
Q=A;R=zeros(A);
for k=1:(n-1)
  R(k,k)=norm(Q(:,k));
  if  R(k,k)==0 then  abort; end;
  Q(:,k)=Q(:,k)/R(k,k);
  R(k,k+1:n)=Q(:,k)'*Q(:,k+1:n);
  Q(:,k+1:n)=Q(:,k+1:n)-Q(:,k)*R(k,k+1:n);
end
R(n,n)=norm(Q(:,n));
Q(:,n)=Q(:,n)/R(n,n);
```

1.3. Programmer la décomposition QR d'une matrice $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ à l'aide des matrices de Householder.

1.4. Comparer les trois méthodes précédentes (vérifier en particulier l'orthogonalité de la matrice Q obtenue) pour la matrice de Hilbert définie par $H_{i,j} = \dfrac{1}{i+j-1}$, $1 \leq i, j \leq n$ pour $n = 10$.

2. Problème des moindres carrés

Soient n points (x_i, y_i), $1 \leq i \leq n$. Faire un programme qui trouve la droite $y = ax + b$ minimisant $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} |y_i - (ax_i + b)|^2$. Prendre un exemple et tracer sur un graphique les points et la droite.

Exercice:

Deux récipients A et B sont séparés par une membrane perméable dans les deux sens. On place dans les récipients A et B deux solutions contenant respectivement a_0 molécules (dans A) et b_0 molécules (dans B). On suppose que, toutes les heures, 20% des molécules passent de A dans B et 10% des molécules passent de B dans A. On note a_n et b_n les nombres respectifs de molécules présentes dans A et B au bout de n heures.

1) Montrer que $\begin{cases} a_{n+1} = 0{,}8a_n + 0{,}1b_n \\ b_{n+1} = 0{,}2a_n + 0{,}9b_n \end{cases}$ et donner l'interprétation matricielle de ce système en considérant la matrice colonne $p_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$.

Les deux récipients n'ayant d'échanges qu'entre eux.

2) Sachant que si $a_0 = 150$ et $b_0 = 20$ (unités), quelles instructions écrire pour connaître les quantités de molécules après 10 heures ?

Quelle méthode appliqueriez vous pour connaître la répartition limite, si elle existe, entre les deux milieux ?

3) Quels sont les dosages initiaux nécessaires pour obtenir après 1 heure, une répartition égale à $a_1 = 130$ et $b_1 = 40$ (unités).

Ecrire l'instruction Scilab permettant d'expliciter le résultat.