Chapitre II

Transformée de Fourier

1. Introduction Une fonction périodique se décompose en somme d'une série de fonctions trigonométriques caractérisées par leurs fréquences. La transformée de Fourier est une extension de ces techniques au cas des fonctions non périodiques considérées comme des fonctions de période infinie. La transformée de Fourier est une fonction dont la variable peut s'interpréter comme une fréquence. **2. Transformée de Fourier dans $L^1(\mathbb{R}^n)$** Soit $f : \mathbb{R}n \longrightarrow \mathbb{R}$ Lebesgue intégrable. La transformée de Fourier notée $\hat{f}$ est la fonction à valeurs complexes définie par

$$\hat{f}(s) = \int_{\mathbb{R}n} f(x)e^{-i(2\pi)xs}dx$$

où sx désigne le produit scalaire euclidien sur $\mathbb{R}^n$.

Remark 1. Il existe différentes variantes de la définition de la transformée de Fourier. On peut trouver les définitions suivantes :

$$\hat{f}(s) = \int_{\mathbb{R}n} f(x)e^{-ixs}dx \quad \text{ou} \quad \hat{f}(s) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n}\int_{\mathbb{R}n} f(x)e^{-ixs}dx$$

Lemma 2. *L'espace des fonctions C^∞ à support compact est dense dans les espaces $L^p(\mathbb{R}^n)$*

Proposition 3. *Pour tout $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ on a :*

1. *$\hat{f}$ est bien définie*
2. *$\hat{f}$ est continue sur $\mathbb{R}n$ et on a $\left\|\hat{f}\right\|_\infty \leq \|f\|_1$*
3. $\lim_{\|x\|\to+\infty} \hat{f}(x) = 0$

Preuve . L'application $s \longrightarrow f(x)e^{-i(2\pi)sx}$ est continue pour presque tout $x \in \mathbb{R}^n$. De plus

$$|f(x)e^{-i(2\pi)sx}| \leq |f(x)|$$

qui est intégrable. Donc la fonction $\hat{f}$ est continue.

D'autre part, on a $|\hat{f}(s)| \leq \|f\|_1$, pour tout $s \in \mathbb{R}^n$. Donc $\left\|\hat{f}\right\|_\infty \leq \|f\|_1$. Pour 3) supposons d'abord que $n = 1$. Si f est C^∞ à support compact inclus dans $[-a, a]$. Une intégration par parties donne

$$\begin{aligned}\hat{f}(s) &= [-\tfrac{f(x)}{i(2\pi)s}e^{-i(2\pi)sx}]_{-a}^{a} + \tfrac{1}{(i(2\pi)s)}\textstyle\int_{-a}^{a} f'(x)e^{-i(2\pi)sx}dx \\ &= \tfrac{1}{(i(2\pi)s)}\textstyle\int_{-a}^{a} f'(x)e^{-i(2\pi)sx}dx\end{aligned}$$

Il en résulte que $|\hat{f}(s)| \leq \frac{a}{\pi s}\|f'\|_\infty$.

Pour $f \in L^1(I\!\!R)$ quelconque, il existe une fonction φ C^∞ à support compact telle que $\|f-\varphi\|_1 < \epsilon$. Il en résulte que

$$|\hat{f}(s)| \leq |\hat{f}(s) - \hat{\varphi}(s)| + |\hat{\varphi}(s)| \leq \epsilon + |\hat{\varphi}(s)|$$

Sur $I\!\!R^n$ avec $n > 1$, on a

$$\begin{aligned} \hat{f}(x) &= \int_{I\!\!R^n} f(t) e^{-i(2\pi)xt} dt \\ &= \int_{I\!\!R^{n-1}} e^{-i(2\pi)x't'} \int_{I\!\!R} f(t', t_n) e^{-i(2\pi)x_n t_n} dt_n dt' \end{aligned}$$

Si l'on pose

$$g(x, t') = e^{-i(2\pi)x't'} \int_{I\!\!R} f(t', t) e^{-i(2\pi)x_n t} dt$$

on a

$$\hat{f}(x) = \int_{I\!\!R^{n-1}} g(x, t') dt'$$

avec $\lim_{|x_n| \to +\infty} |g(x, t')| = \lim_{|x_n| \to +\infty} \int_{I\!\!R} f(t', t) e^{-i(2\pi)x_n t} dt = 0$.

Corollary 4. *L'application $\mathcal{F}$ définie de $L^1(I\!\!R^n)$ dans $C_0(I\!\!R^n)$ par $\mathcal{F}f = \hat{f}$ est une application linéaire continue.*

Definition 5. L'application $\bar{\mathcal{F}}$ définie sur $L^1(I\!\!R^n)$ par

$$\bar{\mathcal{F}} f(s) = \int_{I\!\!R^n} f(x) e^{i(2\pi)xs} dx$$

est appelée transformée de Fourier conjuguée.

Example 6. Soit $f(x) = \frac{1}{2} e^{-|x|}$ (densité de Poisson) $f \in L^1(I\!\!R)$ et on a $\mathcal{F}f(s) = \frac{1}{1+4\pi^2 s^2}$

Example 7. $f(x) = \chi_{[-1,1]}(x)$; calculer $\hat{f}$. $\hat{f}$ est elle intégrable ?

3. Propriétés de la transformée de Fourier

Proposition 8. *Soit $f \in L^1(I\!\!R^n)$*

1. *Pour tout $\lambda \in I\!\!R^*$, on a $\mathcal{F}(f(\lambda x))(s) = \frac{1}{|\lambda|^n} \mathcal{F}(\frac{s}{\lambda})$*
2. $\mathcal{F}(\tau_a f)(s) = e^{-i(2\pi)as} \hat{f}(s)$
3. $\mathcal{F}\left(e^{i(2\pi a x)} f(x)\right)(s) = \tau_a(\hat{f})(s)$

Preuve .

1. On pose $x = \varphi(u) = \frac{u}{\lambda}$; on a

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(f(\lambda x))(s) &= \int_{I\!\!R^n} f(\lambda x) e^{-i(2\pi)xs} dx \\ &= \int_{I\!\!R^n} f(u) e^{-i(2\pi)u\frac{s}{\lambda}} |det\varphi|(u) du \\ &= \int_{I\!\!R^n} f(u) e^{-i(2\pi)u\frac{s}{\lambda}} \frac{1}{|\lambda|^n} du \end{aligned}$$

d'où le résultat.

2. $\mathcal{F}(\tau_a f)(s) = \int_{I\!Rn} (\tau_a f)(x) e^{-i(2\pi)xs} dx = \int_{I\!Rn} f(u) e^{-i(2\pi)(u+a)s} du$
3. $\mathcal{F}\left(e^{i(2\pi ax)} f(x)\right)(s) = \int_{I\!Rn} e^{i(2\pi ax} f(x) e^{-i(2\pi)xs} dx = \int_{I\!Rn} e^{i(2\pi ax} f(x) e^{-i(2\pi)x(s-a)} dx = \hat{f}(s-a)$

Proposition 9. *Soit $f \in L^1(I\!Rn)$ telle que $g_k(x) = x_i^k f(x)$ soit Lebesgue intégrable pour tout $k = 0 \cdots p$. Alors $\hat{f}$ est $p-$ fois dérivable par rapport à x_i. Et, on a*

$$\partial_i^k \hat{f}(s) = (-2\pi i)^k \mathcal{F}(x_i^k f(x))(s)$$

pour tout $k = 0, \cdots, p$

Preuve . Posons $h(x,y) = f(x) e^{-i(2\pi)xy}$. On a

$$|h(x,y)| = |f(x)| \in L^1(I\!Rn)$$

et

$$\partial_i^k h(x,y) = \partial_{y_i}^k h(x,y) = (-i(2\pi))^k x_i^k f(x) e^{-i(2\pi)xy} \in L^1(I\!Rn)$$

et

$$|\partial_i^k h(x,y)| \leq (2\pi)^k |x_i^k f(x)| \in L^1(I\!Rn)$$

Il en résulte que

$$\partial_i \hat{f}(s) = -2(\pi i) \int_{I\!Rn} x_i f(x) e^{-i(2\pi)xy} dy = (-2\pi i) \mathcal{F}(x_i f(x))(s)$$

Corollary 10. *Si $f \in L^1(I\!Rn)$ tel que $x^\alpha f(x) \in L^1(I\!Rn)$ pour $|\alpha| \leq p$. Alors*

$$D^\alpha \hat{f}(s) = (-i(2\pi))^{|\alpha|} \mathcal{F}(x^\alpha f(x))(s)$$

Corollary 11. *Si f est à support compact alors $\hat{f}$ est C^∞.*

Proposition 12. *Soit $f \in L^1(I\!Rn) \cap C^1(I\!Rn)$ telle que $\partial_j f \in L^1(I\!Rn)$. Alors*

$$\mathcal{F}(\partial_j f)(s) = (2\pi) i s_j \hat{f}(s)$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(\partial_1 f)(s) &= \int_{I\!Rn-1} e^{-i(2\pi)x's'} \left(\int_{I\!R} \partial_1 f(x) e^{-i(2\pi)x_1 s_1} dx_1\right) dx' \\
&= \int_{I\!Rn-1} e^{-i(2\pi)x's'} \left(2\pi i s_1 \int_{I\!R} f(x) e^{-i(2\pi)x_1 s_1} dx_1\right) dx' \\
&= (2\pi i s_1) \int_{I\!Rn} f(x) e^{-i(2\pi)xs} dx \\
&= (2\pi i) s_1 \hat{f}(s)
\end{aligned}$$

Corollary 13. $\mathcal{F}(D^\alpha f)(s) = (2\pi i)^{|\alpha|} s^\alpha \hat{f}(s)$

Proposition 14 (Formule de dualité)**.** *Pour tous $f, g \in L^1(I\!Rn)$, on a $f\hat{g}$ et $g\hat{f}$ sont Lebesgue intégrables et on a :*

$$\int_{I\!Rn} f(x)\hat{g}(x) dx = \int_{I\!Rn} \hat{f}(x) g(x) dx$$

Preuve . Les fonctions $\hat{f}$ et $\hat{g}$ sont bornées. Posons $h(x,y) = f(x)g(y)e^{-i(2\pi)xy}$. On a

$$\int_{I\!Rn \times I\!Rn} |h(x,y)| dx dy = \int_{I\!Rn} |g(y)| \int_{I\!Rn} |f(x)| dx dy = \|f\|_1 \|g\|_1$$

Le théorème de Fubini donne

$$\begin{aligned} \int_{I\!Rn} f(x)\hat{g}(x)dx &= \int_{Rn} f(x) \left(\int_{I\!Rn} g(y)e^{-i(2\pi)xy} dy \right) dx \\ &= \int_{I\!Rn} g(y) \left(\int_{Rn} f(x)e^{-i(2\pi)xy} dx \right) dy \\ &= \int_{I\!Rn} g(y)\hat{f}(y)dy \end{aligned}$$

4. Produit de convolution

Definition 15. Pour tous $f, g \in L^(I\!Rn)$, on pose

$$(f * g)(x)) \int_{I\!Rn} f(t)g(x-t)dt$$

$f * g$ est bien définie et appelée produit de convolution de f et g.

Proposition 16. *On a* $\mathcal{F}(f * g) = \hat{f}\hat{g}$

Preuve .

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(f * g)(s) &= \int_{I\!Rn} \left(\int_{I\!Rn} f(x-t)g(t)dt \right) e^{-i(2\pi)xs} dx \\ &= \int_{I\!Rn} g(t)e^{-i(2\pi)st} \int_{I\!Rn} f(x-t)e^{-i(2\pi)(x-t)s)} dx dt \\ &= \hat{f}(s)\hat{g}(s) \end{aligned}$$

5. Formule d'inversion

Proposition 17. *Si f et $\hat{f}$ sont Lebesgue intégrables alors*

$$f(s) = \int_{I\!R^n} \hat{f}(t)e^{i(2\pi)st} dt \text{ presque partout}$$