Exercice 1 (Contôle 2,le 16/12/2006) :

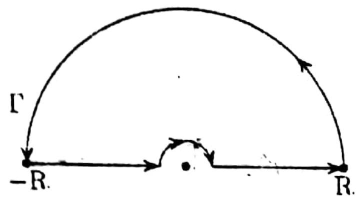
1. Calculer l'intégrale suivante :

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin(3\theta)}{5-3\cos(\theta)}d\theta$$

2. Calculer l'intégrale :

$$\int_0^{\infty} \frac{\ln(x)}{1+x^2}dx$$

En utlisant le chemin suivant :



$e^{i0} = e^{i0} = 1$

Figure 1: Le chemin de calcul

Solution 1 :

1. Posons $I = \displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\sin(3\theta)}{5-3\cos(\theta)}d\theta$,puis faisons le changement de variable $z = e^{i\theta}$,notre contour est le cercle unité parcouru dans le sens trigonométrique γ^+.
On a donc $dz = ie^{i\theta}d\theta = izd\theta \Longrightarrow d\theta = \frac{dz}{iz}$
Or on a :

$$\begin{cases} \cos(\theta) &= \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2} = \frac{z^2+1}{2z} \\ \sin(\theta) &= \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i} = \frac{z^2-1}{2iz} \end{cases}$$

Donc on trouve :

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2\pi} \frac{\sin(3\theta)}{5-3\cos(\theta)}d\theta \\ &= \oint_{\gamma^+} \frac{\frac{1}{2i}\left(z^3-\frac{1}{z^3}\right)}{5-\frac{3}{2}(z+\frac{1}{z})}\frac{dz}{iz} \\ &= \oint_{\gamma^+} \frac{z^6-1}{2z^3(3z^2-10z+3)}dz = \oint_{\gamma^+} f(z)dz \end{aligned}$$

Or d'après le théorème de résidus on a :

$$\oint_{\gamma^+} f(z)dz = \sum_{z_k \in int(\gamma^+)} 2\pi i Res(f, z_k)$$

Les pôles de f (les racines du dénominateur) sont : $z_0 = 0 \in int(\gamma^+)$, $z_1 = \frac{1}{3} \in int(\gamma^+)$ et $z_2 = 3 \notin int(\gamma^+)$

Soit : $\oint_{\gamma^+} f(z)dz = 2\pi i\,(Res(f,0) + Res(f,1/3)) = 0$

Car : $(Res(f,1/3) = ((z-1/3)f(z))_{z=1/3} = ??$

et $(Res(f,0) = \frac{1}{(3-1)!}\left[(z-0)f(z)\right]^{(3-1)}(z=0) = ??$

2. Posons $f(z) = \frac{\ln(z)}{1+z^2}$,le contour d'intégration étant le chemin définie ci-dessus .Intégrons donc sur le chemin considéré :

$$\begin{aligned}
I &= \oint_{\gamma^+} f(z)dz \\
&= \int_{[r,R]\cup C(0,R)\cup[-R,r]\cup C(0,r)} f(z)dz \\
&= \int_{[r,R]} f(z)dz + \int_{C(0,R)} f(z)dz + \int_{[-R,-r]} f(z)dz + \int_{C(0,r)} f(z)dz \\
&= \int_r^R f(x)dx + \int_0^\pi f(Re^{i\theta})iRe^{i\theta}d\theta - \int_R^r f(-x)dx - \int_0^\pi f(re^{i\theta})d\theta
\end{aligned}$$

Pour l'intégrale $\int_0^\pi f(Re^{i\theta})iRe^{i\theta}d\theta$,on montre facilement qu'il tend vers 0 quand $R \longrightarrow +\infty$,En effet :

$$\left|\int_0^\pi f(Re^{i\theta})iRe^{i\theta}d\theta\right| \leq \int_0^\pi \left|\frac{R\sqrt{\pi^2+\ln^2(R)}}{R^2-1}\right| d\theta = \pi\frac{R\sqrt{\pi^2+\ln^2 R}}{R^2-1} \longrightarrow_{R\longrightarrow+\infty} 0$$

Faisons $(r,R) \longrightarrow (0,+\infty)$:

Alors pour le deuxième intégrale: $\int_0^\pi f(re^{i\theta})ire^{i\theta}d\theta$,ona :

$$\left|\int_0^\pi f(re^{i\theta})ire^{i\theta}d\theta\right| \leq \int_0^\pi \left|\frac{r\sqrt{\pi^2+\ln^2(r)}}{1-r^2}\right| d\theta \leq \pi\frac{r\sqrt{\pi^2+r^2}}{1-r^2} \longrightarrow_{r\longrightarrow 0} 0$$

Faisons $(r,R) \longrightarrow (0,+\infty)$:

$$
\begin{aligned}
I &= \int_{\gamma^+} f(z)dz \\
&= \int_{r}^{R} f(x)dx + -\overbrace{\int_{R}^{r} f(-t)dt}^{t=-x} \qquad ,(\ln(-x) = \ln(e^{i\pi}x) = i\pi + \ln(x)) \\
&= \int_0^{\infty} \frac{\ln(x)}{1+x^2}dx + \int_0^{\infty} \frac{i\pi + \ln(x)}{1+x^2}dx \\
&= 2\int_0^{\infty} \frac{\ln(x)}{1+x^2}dx + \int_0^{\infty} \frac{i\pi}{1+x^2}dx \\
&= i\frac{\pi^2}{2} + 2\int_0^{\infty} \frac{\ln(x)}{1+x^2}dx
\end{aligned}
$$

Appliquons maintenant le théorème des résidus on a :

$$\oint_{\gamma^+} f(z)dz = \sum_{z_k \in int(\gamma^+)} 2\pi i Res(f, z_k)$$

La fonction f possède deux poles $-i$ et i ,mais seulement $i \in int(\gamma^+)$(Demi plan supérieur)
Donc : $\oint_{\gamma^+} f(z)dz = 2\pi i Res(f,i) = 2\pi(\frac{\ln(i)}{2i}) = 2\pi i(\frac{i\frac{\pi}{2}}{2i}) = i\frac{\pi^2}{2}$
Finalement $\int_0^{\infty} \frac{\ln(x)}{1+x^2}dx = 0.$
(Remarquer que : $\int_0^{\infty} \frac{\ln(x)}{1+x^2}dx = \int_0^{1} \frac{\ln(x)}{1+x^2}dx + \int_1^{\infty} \frac{\ln(x)}{1+x^2}dx = \int_0^{1} \frac{\ln(x)}{1+x^2}dx + \int_1^{0} \frac{\ln(\frac{1}{t})}{1+t^{-2}}\frac{-dt}{t^2} =$ 0)

EXERCICE 2 (Contôle 2,le 24/12/2008) :

1. Trouver le dévelopement de LAURENT de la fonction f autour $z_0 = -2$:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n, \quad f(z) = \frac{z}{(z+1)(z+2)}$$

2. Calculer l'intégrale :

$$\oint_{\Gamma^+} \frac{dz}{1+z^3}$$

Γ^+ étant l'ellipse :$2x^2 + y^2 = \frac{3}{2}$

3. Calculer l'intégrale :

$$\int_0^{2\pi} \cos^{2n}(\theta)d\theta$$

Rappel : $(1+z^2)^{2n} = \sum_{k=0}^{2n} C_{2n}^k z^{2k}$

Solution 2:

1. Posons $u = z+2$,on a donc : $f(u) = \frac{u-2}{u(u-1)} = \frac{2}{u} + \frac{1}{1-u}$

   Or : $\frac{1}{1-u} = \sum_{n=0}^{+\infty} u^n$

   Donc : $f(u) = \frac{2}{u} + \frac{1}{1-u} = \frac{2}{u} + \sum_{n=0}^{+\infty} u^n$

   Les cofficients a_n dans $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n$ sont donnés par :

$$a_n = \begin{cases} 1 & si \quad n \geq 0 \\ 2 & si \quad n = -1 \\ 0 & si \quad n \prec -1 \end{cases}$$

2. Appliquons maintenant le théorème de résidus on a :

$$\oint_{\gamma^+} f(z)dz = \sum_{z_k \in int(\gamma^+)} 2\pi i Res(f, z_k)$$

   La fonction f possède trois poles $-1, e^{-i\frac{\pi}{3}}$ et $e^{i\frac{\pi}{3}}$,mais seulement les deux derniers $\in int(\gamma^+)$

   On a donc :
   $\oint_{\Gamma^+} \frac{dz}{1+z^3} = 2\pi i(Res(f, e^{-i\frac{\pi}{3}}) + Res(f, e^{i\frac{\pi}{3}})) = 2\pi i(\frac{1}{3e^{-2i\frac{\pi}{3}}} + \frac{1}{3e^{2i\frac{\pi}{3}}}) = 2\pi i(\frac{-1}{3}) = \frac{-2\pi i}{3}$

3. Soit $n \geq 0$,on procède comme l'exercice 1 :
   Faisons le changement de variable $z = e^{i\theta}$,notre contour est le cercle unité parcouru dans le sens trigonométrique γ^+.
   On a donc $dz = ie^{i\theta}d\theta = izd\theta \Longrightarrow d\theta = \frac{dz}{iz}$
   Or on a : $\begin{cases} \cos(\theta) &= \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2} = \frac{z^2+1}{2z} \\ \sin(\theta) &= \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i} = \frac{z^2-1}{2iz} \end{cases}$

Donc on trouve :

$$
\begin{aligned}
I &= \int_0^{2\pi} \cos^{2n}(\theta) d\theta \\
&= \oint_{\gamma^+} (\frac{z^2+1}{2z})^{2n} \frac{dz}{iz} \\
&= \oint_{\gamma^+} \frac{1}{iz(2z)^{2n}} \sum_{k=0}^{2n} C_{2n}^k z^{2k} dz \\
&= \oint_{\gamma^+} \frac{1}{iz^{2n+1}2^{2n}} \sum_{k=0}^{2n} C_{2n}^k z^{2k} dz \\
&= \oint_{\gamma^+} \sum_{k=0}^{2n} \frac{1}{iz^{2n+1}2^{2n}} C_{2n}^k z^{2k} dz \\
&= \frac{1}{i2^{2n}} \oint_{\gamma^+} \sum_{k=0}^{2n} C_{2n}^k z^{2k-2n-1} dz \\
&= \frac{1}{i2^{2n}} (\sum_{k \neq n}^{2n} \oint_{\gamma^+} C_{2n}^k z^{2k-2n-1} dz + \oint_{\gamma^+} C_{2n}^n z^{2n-2n-1} dz) \\
&= \frac{1}{i2^{2n}} (0 + 2\pi i C_{2n}^n)
\end{aligned}
$$

EXERCICE 3 (Rattrapage ,le 11/04/2009) :

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$,γ_n^+ l'ellipse parcourue dans le sens directe d'équation $4x^2+y^2 = 4n^2$,calculer $\oint_{\gamma^+} f(z)dz$, f est donnée par :

$$f(z) = \frac{1}{(z^2 - e(1+i)z + ie^2)^3}$$

Solution 3:

1. **Le chemin d'intégration :** $4x^2 + y^2 = 4n^2 \Longrightarrow \left(\frac{x}{n}\right)^2 + \left(\frac{y}{2n}\right)^2 = 1$.
2. **Les pôles de f :** Sont les racines du dénominateur .
   On a $z^2 - e(1+i)z + ie^2 = z^2 - ez - eiz + ie^2 = z(z-e) - ie(z-e) = (z-e)(z-ei)$.
   Donc les pôles (triples) de f sont :

$$\begin{cases} z_0 &= e \\ z_1 &= ie \end{cases}$$

3. **Calculs des résidus :** Comme z_0 et z_1 sont des pôles triples ($m = 3$) ,le résidu de f en chacun de ces pôles est calculé par la formule suivante :

$$Res(f,a) = \lim_{z \longrightarrow a} \frac{1}{(m-1)!} [(z-a)^m f(z)]^{(m-1)}$$

Donc :

$$\begin{cases} Res(f,e) &= \lim\limits_{z\longrightarrow e} \frac{1}{2!}\left[(z-e)^3 f(z)\right]^{(2)} = \lim\limits_{z\longrightarrow e} \frac{1}{2}\left[(z-ei)^{-3}\right]^{(2)} = \lim\limits_{z\longrightarrow e} \frac{1}{2}\left[6(z-ei)^{-5}\right] \\ Res(f,ie) &= \lim\limits_{z\longrightarrow ie} \frac{1}{2!}\left[(z-ei)^3 f(z)\right]^{(2)} = \lim\limits_{z\longrightarrow ie} \frac{1}{2}\left[(z-e)^{-3}\right]^{(2)} = \lim\limits_{z\longrightarrow ie} \frac{1}{2}\left[6(z-e)^{-5}\right] \end{cases}$$

Soit :

$$\begin{cases} Res(f,e) &= \frac{1}{2}\left[6(e-ei)^{-5}\right] = 3(\sqrt{2}ee^{-i\frac{\pi}{4}})^{-5} \\ Res(f,ie) &= \frac{1}{2}\left[6(ei-e)^{-5}\right] = -Res(f,e) \end{cases}$$

4. **Calcul de** $I_n = \oint_{\gamma_n^+} f(z)dz$: Plusieurs cas à discuter :

   (a) Si $n = 1$, $z_0, z_1 \notin int(\gamma_n^+)$,la fonction f est par conséquent holomorphe sur $int(\gamma_n^+)$, donc $I_n = \oint_{\gamma_n^+} f(z)dz = 0$.

   (b) Si $n = 2$,$z_0 \notin int(\gamma_n^+)$ et $z_1 \in int(\gamma_n^+)$,d'après le théorème des résidus :

$$I_2 = \oint_{\gamma_2^+} f(z)dz = 2\pi i Res(f,ie) = 2\pi i \times -3(\sqrt{2}ee^{-i\frac{\pi}{4}})^{-5}$$

   (c) Si $n \geq 3$,$z_0, z_1 \in int(\gamma_n^+)$, d'après le théorème des résidus :

$$I_n = \oint_{\gamma_n^+} f(z)dz = 2\pi i\left[Res(f,e) + Res(f,ie)\right] = 0$$

EXERCICE 4 (Contôle 2,le 22/01/2014) :

1. Trouver le dévelopement de LAURENT de la fonction f autour $z_0 = -2$:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n, \quad f(z) = \frac{z}{(z^2+1)(z^2+2)}$$

   Pour :

   (a) $1 \prec |z| \prec \sqrt{2}$
   (b) $|z| \succ \sqrt{2}$

2. Calculer l'intégrale suivante :

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin(3\theta)}{5-3\cos(\theta)} d\theta$$

3. On pose :$u(x,y) = x^3 - 3xy^2 + y$ .Trouver toutes les fonctions holomorphes $f(z)$ telles que u est la partie réelle de f .Exprimer analytiquement ces fonctions et leurs dérivées en fonction de z .

4. La même question pour :

   (a) $u(x,y) = -2xy + 1$
   (b) $u(x,y) = x^2 - y^2 + xy$

Solution 4:

1. Posons :$u(x,y) = x^3 - 3xy^2 + y$,pour démontrer que f est holomorphe ou non ,utilisons les conditions de CAUCHY (Dans notre cas ,ces deux conditions sont vérifées):

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{\partial v}{\partial x} \end{cases}$$

Puisque f est holomorphe ,donc on peut écrire :

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y} = 3(x^2-y^2) - i(-6xy+1) = 3(x^2-y^2+2ixy) - i = 3z^2 - i$$

Donc $f(z) = z^3 - iz + \alpha$,avec $\alpha \in \mathbb{C}$

2. Pour $u(x,y) = -2xy + 1$, la même méthode donne $f(z) = (2-i)\frac{z^2}{2} + \alpha$,avec $\alpha \in \mathbb{C}$
3. Pour $u(x,y) = x^2 - y^2 + xy$, la même méthode donne $f(z) = iz^2 + \alpha$,avec $\alpha \in \mathbb{C}$

EXERCICE 5 (Contôle 2,le 03/01/2014) :

1. En intégrant $f(z) = e^z z^{-n-1}$ autour du cercle unité .Calculer :

$$I_n = \int_0^{2\pi} e^{\cos(\theta)} \cos(n\theta - \sin(\theta))\, d\theta$$

$$J_n = \int_0^{2\pi} e^{\cos(\theta)} \sin(n\theta - \sin(\theta)) d\theta$$

2. Calculer $I(\gamma) = \int_\gamma \frac{e^{iz}}{z^3} dz$,sur les deux circuits suivants :

Solution 5:

1. Posons :

$$\begin{cases} I_n &= \int_0^{2\pi} e^{\cos(\theta)} \cos(n\theta - \sin(\theta)) d\theta \\ J_n &= \int_0^{2\pi} e^{\cos(\theta)} \sin(n\theta - \sin(\theta)) d\theta \end{cases}$$

On a

Scanned by CamScanner

$$
\begin{aligned}
I_n - iJ_n &= \int_0^{2\pi} e^{\cos(\theta)} \cos\left(n\theta - \sin(\theta)\right) d\theta - i\int_0^{2\pi} e^{\cos(\theta)} \sin\left(n\theta - \sin(\theta)\right) d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} e^{\cos(\theta) - i(n\theta - \sin(\theta))} d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} e^{\cos(\theta) + i\sin(\theta) - in\theta} d\theta \\
&= \oint_{\gamma^+} e^z z^{-n} \frac{dz}{iz} \\
&= -i \oint_{\gamma^+} \frac{e^z}{z^{n+1}} dz \\
&= -i.2.\pi.i.Res(f,0) \\
&= 2\pi \frac{1}{n!} [z^{n+1} f(z)]^{(n)}(0) \\
&= 2\pi \frac{1}{n!} [e^z]^{(n)}(0) \\
&= 2\pi \frac{1}{n!} (e^z)(0) \\
&= \frac{2\pi}{n!}
\end{aligned}
$$

Par identification des parties réelle et imaginaire on trouve :

$$
\begin{cases} I_n = \dfrac{2\pi}{n!} \\ J_n = 0 \end{cases}
$$

Solution 1 :

On calcule $F(p)$:

$$F'(p) = \frac{\left(1+\frac{\omega^2}{p^2}\right)'}{1+\frac{\omega^2}{p^2}} = \frac{-2\omega^2}{p\left(\omega^2+p^2\right)} = -2\left(\frac{1}{p} - \frac{p}{\omega^2+p^2}\right)$$

Donc :

$$F'(p) = -2\left(\mathcal{L}(1) - \mathcal{L}(\cos\omega t)\right) = -2\mathcal{L}\left(1-\cos\omega t\right) = \mathcal{L}\left[-2\left(1-\cos\omega t\right)\right]$$

Et comme $F^{(m)}(p) = \mathcal{L}\left[(-t)^m f(t)\right]$, avec ici $m=1$:

$$F'(p) = \mathcal{L}\left[-2\left(1-\cos\omega t\right)\right] = \mathcal{L}\left[(-t)^1 f(t)\right]$$

Soit : $f(t) = \dfrac{2\left(1-\cos\omega t\right)}{t}$

EXERCICE 2 : Trouver, en utilisant la transformée de Laplace, la solution de l'équation suivante :

$y'' + 4y' + 3y = 0$ Avec les conditions initiales $y(0) = 3$, et $y'(0) = 1$.

Solution 2 :

On utilise la formule qui relie la transformée de Laplace de la dérivée d'ordre n d'une fonction f à la transformée de Laplace de la fonction f et aux valeurs que prennent à l'origine les $n-1$ premières dérivées de f :

$$\mathcal{L}f^{(n)}(p) = p^n \mathcal{L}f(p) - \sum_{k=0}^{n-1} p^{n-1-k} f^{(k)}(0)$$

$y'' + 4y' + 3y = 0$ Avec les conditions initiales $y(0) = 3$, et $y'(0) = 1$. Par transformation de Laplace, on obtient l'équation algébrique :

$$\left(p^2+4p+3\right)\mathcal{L}y(p) = py(0) + y'(0) + 4y(0) = 3p + 13$$

$$\Longrightarrow \mathcal{L}y(p) = \frac{3p+13}{p^2+4p+3} = \frac{5}{p+1} - \frac{2}{p+3}$$

$$\Longrightarrow y(t) = 5e^{t} - 2e^{3t}, t \geq 0$$

EXERCICE 3 : Soit une poutre dont les extrémités en $x = 0$ et $x = L$ coïncident avec l'axe des x. Cette poutre supporte une charge par unité de longueur $W(x)$ qui agit verticalement. Il en résulte que l'axe de cette poutre présente une flèche $y(x)$ au point x qui est solution de l'équation différentielle :

$$\frac{\mathrm{d}^4 y(x)}{\mathrm{d}^4 x} = \frac{w(x)}{EI} \quad , \quad 0 \leq x \leq L$$

Où E est le module d'élasticité de la poutre et I son moment d'inertie par rapport à son axe (l'axe y est dirigé vers le bas).
Les conditions initiales associées à l'équation précédente dépendent de la façon dont la poutre est supportée :

- extrémité emboîtée, solidaire ou fixe : $y = y' = 0$;
- extrémité pivotante ou posée : $y = y'' = 0$;
- extrémité libre ou posée : $y' = y''' = 0$;

1. On considère une poutre dont les extrémités en $x = 0$ et $x = L$ sont posées et qui porte une charge par unité de longueur constante w_0. Trouver la flèche en tout point de la poutre.
2. On considère une poutre emboîtée à son extrémité $x = 0$ et libre en $x = L$. Déterminer la flèche pour une charge par unité de longueur $w(x) = w_0$ pour $0 \leq x \leq \frac{L}{2}$ et 0 pour $\frac{L}{2} \leq x \leq L$

Solution 3 :
La flèche $y(x)$ est solution de l'équation différentielle :

$$\frac{\mathrm{d}^4 y(x)}{\mathrm{d}^4 x} = \frac{w(x)}{EI} \quad , \quad 0 \leq x \leq L$$

1. Les conditions initiales sont : $y(0) = y''(0) = 0$ et $y(L) = y''(L) = 0$. Appliquant la transformation de Laplace aux deux membres de l'équation précédente, on obtient :

$$p^4 Y(p) - p^2 y'(0) - y'''(0) = \frac{w_0}{EI} \frac{1 - e^{-pL}}{p}$$

$$\Longrightarrow Y(p) = \frac{w_0}{EI} \frac{1 - e^{-pL}}{p^5} + \frac{1}{p^2} y'(0) + \frac{1}{p^4} y'''(0)$$

$Y(p)$ a pour original :

$$y(x) = H(x)\left[\frac{w_0}{EI}\frac{x^4}{4!} + y'''(0)\frac{x^3}{3!} + y'(0)x\right] - H(x-L)\frac{w_0}{EI}\frac{(x-L)^4}{4!}$$

Comme $x \leq L$, le dernier terme n'intervient pas.
$y'(0)$ et $y'''(0)$ sont déterminées par les conditions initiales en $x = L$:

$$\left\{\begin{array}{lcl} y(L) & = & \frac{w_0}{EI}\frac{L^4}{4!} + y'''(0)\frac{L^3}{3!} + y'(0)L = 0 \\ y''(L) & = & \frac{w_0}{EI}\frac{L^2}{2} + y'''(0)L = 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} y'(0) & = & \frac{w_0}{24EI}L^3 \\ y'''(0) & = & \frac{w_0}{2EI}L \end{array}\right.$$

La flèche de la poutre a donc pour expression :

$$y(x)=\frac{w_0}{24EI}\left(x^4-2Lx^3+L^3x\right)=\frac{w_0}{24EI}x\left(L-x\right)\left(-x^2+Lx+L^2\right)$$

2. Les conditions initiales sont : $y(0)=y'(0)=0$ et $y''(L)=y'''(L)=0$

$$p^4Y(p)-py''(0)-y'''(0)=\frac{w_0}{EI}\frac{1-e^{-pL}}{p}$$

$$\Longrightarrow Y(p)=\frac{w_0}{EI}\frac{1-e^{-pL}}{p^5}+\frac{1}{p^3}y''(0)+\frac{1}{p^4}y'''(0)$$

$Y(p)$ a pour original :

$$y(x)=H(x)\left[\frac{w_0}{EI}\frac{x^4}{4!}+y'''(0)\frac{x^3}{3!}+y'(0)x\right]-H\left(x-\frac{L}{2}\right)\frac{w_0}{EI}\frac{(x-L)^4}{4!}$$

EXERCICE 4 : Résoudre l'équation intégro-différentielle :

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}-\int_0^t(t-u)y(u)\mathrm{d}u=\cos t$$

Avec $y(0)=1$

Solution 4 :
On reconnaît le produit de convolution de y par la fonction f définie par : $f(t)=H(t)\cdot t$
Appliquant la transformation de Laplace aux deux membres de l'équation, on obtient :

$$pY(p)-y(0)-\frac{1}{p^2}Y(p)=\frac{p}{p^2+1}$$

$$\Longrightarrow Y(p)=\frac{p^2}{(p-1)(p^2+1)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-1}+\frac{p+1}{p^2+1}\right)$$

$Y(p)$ a pour original :

$$y(t)=\frac{H(t)}{2}\left(e^t+\cos t+\sin t\right)$$

EXERCICE 5 : A l'aide de la transformation de Laplace, calculer l'intégrale :

$$\int_0^{+\infty}\frac{1-\cos ut}{u^2}\mathrm{d}u$$

Solution 5 :
Soit F la transformée de Laplace de f. Elle est définie par :

$$F(p)=\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}\frac{1-\cos ut}{u^2}e^{-pt}\mathrm{d}u\mathrm{d}t$$

Utilisons le théorème de Fubini généralisé et intégrons d'abord par rapport à t :

$$\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos ut}{u^2} e^{-pt} \mathrm{d}t = \frac{1}{p} - \frac{p}{p^2+u^2} = \frac{u^2}{p(p^2+u^2)}$$

On obtient alors :

$$F(p) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{p(p^2+u^2)} \mathrm{d}u = \frac{\pi}{2} \frac{1}{p^2}$$

On en déduit l'expression de f pour $t \succ 0$:

$$f(t) = -\frac{\pi}{2} t$$

$f(t)$ étant une fonction paire, on a donc :

$$f(t) = -\frac{\pi}{2} |t| \quad , \quad t \in \mathbb{R}$$