Eléments d’Algèbre linéaire Numérique

Rappel: Théorie matricielle

Quelques Rappels sur la théorie matricielle

Questions:

1. C’est quoi une matrice?
2. C’est quoi son rang ?
3. C’est quoi une valeur propre ? Un vecteur propre ?
4. Peut on mesurer un vecteur propre ? Une matrice ?
5. Que veut dire le conditionnement d’une matrice ?

Le calcul matriciel, ou parfois appelé la boîte à outils des mathématiciens, a apporté plusieurs changements et un développement au niveau de la vie quotidienne, et surtout dans le domaine mathématique.

Au lieu de manipuler une collection de nombres sur lesquels on souhaite effectuer, systématiquement, le même calcul en donnant de longues listes de calcul , il est plus pratique de manipuler toute cette collection -qu’on appellera un Tableau ou une Matrice- d'un seul coup à l'aide des opérations et opérateurs (Addition, Inverse...), inventés par les mathématiciens comme Cholesky, Cramer, Jacobi et Gauss.

Quelques Rappels sur la théorie matricielle

Réponses:

- Une matrice est un tableau de nombre à n lignes et m colonnes.

A=(a_ij), i=1,…,n et j=1,…,m (dans la suite m=n)

La partie de l'image avec l'ID de relation rId2 n'a pas été trouvé dans le fichier.

Rappels

La partie de l'image avec l'ID de relation rId2 n'a pas été trouvé dans le fichier.

La partie de l'image avec l'ID de relation rId3 n'a pas été trouvé dans le fichier.

Quelques Rappels sur la théorie matricielle

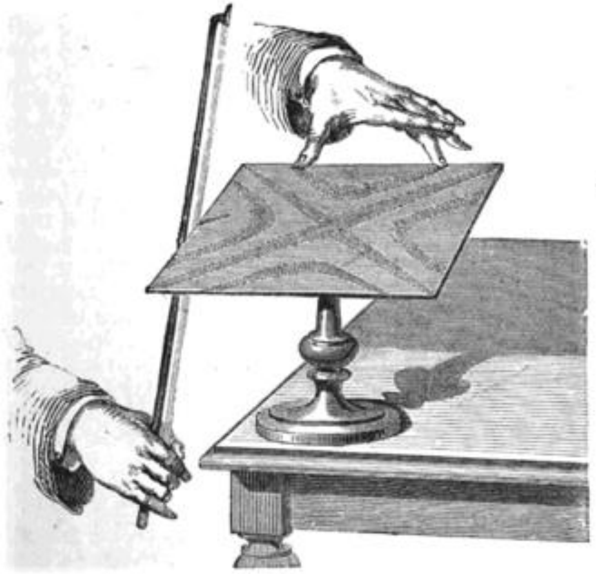
La partie de l'image avec l'ID de relation rId2 n'a pas été trouvé dans le fichier.

Can we See or Hear eigenvectors ?

Ernst Florens Friedrich Chladni (1756-1827)

« Cet homme rend le son visible »
Tels furent les mots prononcés par Napoléan en découvrant l’expérience de **Chladni**.
La technique de **Chladni**, publiée pour la première fois en 1787 dans son ouvrage *Entdeckungen über die Theorie des Klanges* («Découvertes dans la théorie du son»).

https://www.youtube.com/watch?v=6kLmlbkWJZ8



Chladni plates

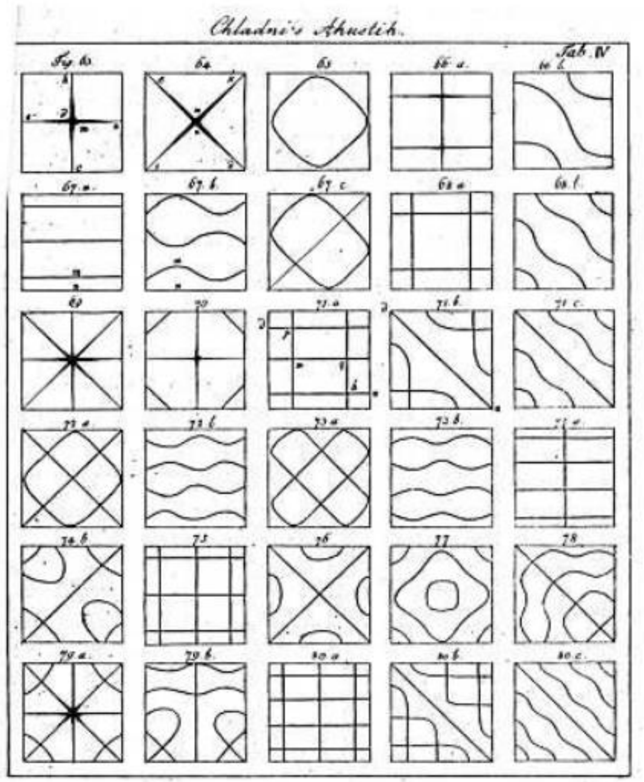
- Let us "see" the **vibration** of the metal plate from the white sands.

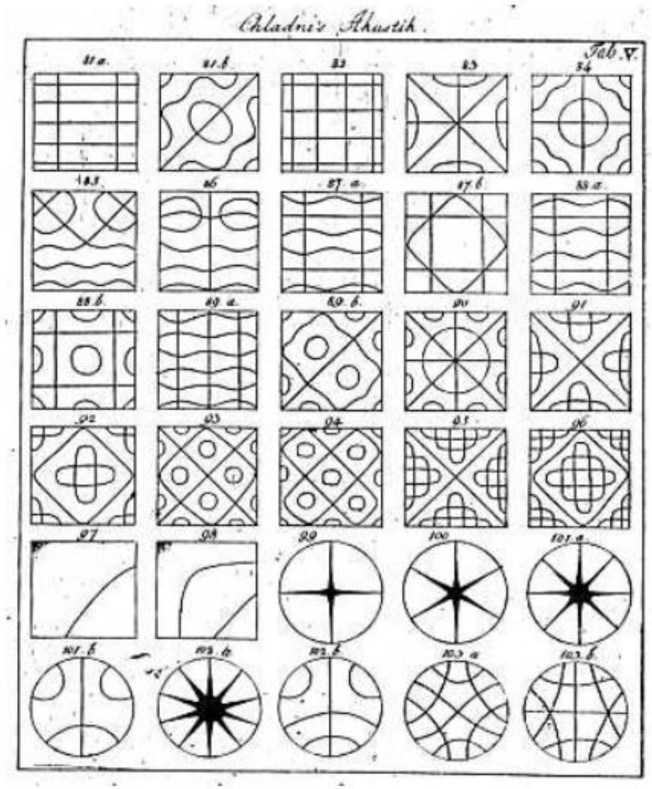
(https://www.youtube.com/watch?v=wvJAgrUBF4w)

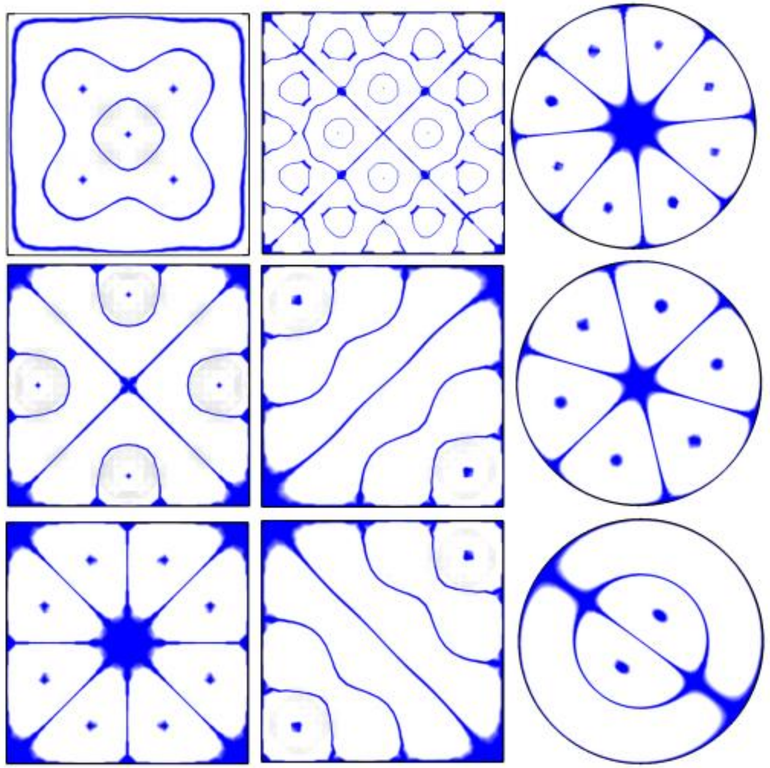
Seeing and Hearing the Eigenvectors of a Fluid

Aaron Demby Jones, JoAnn Kuchera-Morin and Theodore Kim
Media Arts and Technology Program
University of California.

Chladni plates **VS** spetral







Left: In the late 1700's, the physicist Ernst Chladni was amazed by the patterns formed by sand on **vibrating metal plates**.
Right: numerical simulations obtained with a **discretized Laplacian.**

- a symmetric matrix $A \in \mathbf{R}^{n \times n}$ is *positive semidefinite* if

$$x^T A x \geq 0 \quad \text{for all } x$$

- a symmetric matrix $A \in \mathbf{R}^{n \times n}$ is *positive definite* if

$$x^T A x > 0 \quad \text{for all } x \neq 0$$

  this is a subset of the positive semidefinite matrices

note: if A is symmetric and $n \times n$, then $x^T A x$ is the function

$$x^T A x = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} A_{ij} x_i x_j = \sum_{i=1}^{n} A_{ii} x_i^2 + 2 \sum_{i>j} A_{ij} x_i x_j$$

this is called a *quadratic form*

Vector Norm

On a vector space V, a norm is a function $\|\cdot\|$ from V to the set of non-negative reals that obeys three postulates:

$$\|x\| > 0 \qquad if \qquad x \neq 0, C$$

$$\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\| \qquad if \quad \lambda \in R, x \in V$$

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \qquad if \quad x, y \in V \qquad (Trinagular \qquad Inequality)$$

we can think of $\|x\|$ as the length or magnitude of the vector x.

The most familiar norm on R^n is the Euclidean

ℓ_2-norm defined by $\|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \right)^{1/2}$

ℓ_∞-norm defined by $\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$

ℓ_1-norm defined by $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$

In general *p*-norm, defined by

ℓ_p-norm defined by $\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^p \right)^{1/p}$ for $p > 0$ and n-vector x

Matrix Norm

Matrix norm corresponding to given vector norm defined by

$$\|A\| = \max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$$

Norm of matrix measures maximum stretching matrix does to any vector in given vector norm.

Matrix norm corresponding to vector 1-norm is maximum absolute column sum

$$\|A\|_1 = \max_j \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$$

Matrix norm corresponding to vector ∞- norm is maximum absolute row sum,

$$\|A\|_\infty = \max_i \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$$

$$|||A|||_2 = \sqrt{\rho(A^* A)}.$$

Properties of Matrix Norm

Any matrix norm satisfies:

1. $\|A\| > O$ if $A \neq O$
2. $\|\gamma A\| = |\gamma| \cdot \|A\|$ for any scalar value γ

3. $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$

Matrix norm also satisfies

4. $\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$
5. $\|Ax\| \leq \|A\| \cdot \|x\|$ for any vector x

Conditionnement d’une matrice

Les modèles linéaires de la physique, de l'astronomie,..., conduisent souvent à la résolution de grands systèmes linéaires qu'on représente matriciellement par une équation du type AX=Y. Il arrive parfois qu'une petite variation sur A (resp. sur Y) entraîne une grande variation sur X.
On dit dans ce cas que la matrice, ou le problème, est **mal conditionnée**.

Exemple : On souhaite résoudre le système linéaire AX=Y, où A est la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 7 & 8 & 7 \\ 7 & 5 & 6 & 5 \\ 8 & 6 & 10 & 9 \\ 7 & 5 & 9 & 10 \end{pmatrix}.$$

Si Y est le vecteur

$$Y = \begin{pmatrix} 32 \\ 23 \\ 33 \\ 31 \end{pmatrix}$$

alors on trouve

$$X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Mais si Y est le vecteur

$$Y = \begin{pmatrix} 32.1 \\ 22.9 \\ 33.1 \\ 30.9 \end{pmatrix}$$

alors on trouve

$$X = \begin{pmatrix} 9.2 \\ -12.6 \\ 4.5 \\ -11 \end{pmatrix}.$$

Autrement dit, de très petites variations sur Y ont conduit à de grandes variations sur X.

Conditionnement d'une matrice

Il y a des calculs matriciels qui sont sensibles aux erreurs dans l'entrée. Comme dans l'exemple suivant:

$$\frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{3}x_2 = 1,$$
$$\frac{1}{3}x_1 + .3x_2 = 0,$$

Le système suivant admet une solution x_1= 3.375 et x_2=-0.375

Si on remplace le coefficient a_{22}=3 par 1/3, alors le nouveau système n'admet plus de solution.

$$\frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{3}x_2 = 1,$$
$$\frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{3}x_2 = 0$$

Une petit changement dans l'entrée de la matrice a causé un changement radical de la sortie, i.e., une perte totale de la solution !!!

Matrix Condition Number

Condition number of square nonsingular matrix A defined by

$$cond(A) = \|A\| \cdot \|A\|^{-1}$$

By convention, cond $(A) = \infty$ if A singular

Example: $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 4 \end{bmatrix}$ $\|A\|_1 = 6$ $\quad \|A\|_\infty = 8$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 0.5 & 1.5 & -0.5 \\ -0.5 & 2.5 & -0.5 \\ -0.5 & -0.5 & 0.5 \end{bmatrix} \quad \|A^{-1}\|_1 = 4.5 \quad \|A^{-1}\|_\infty = 3.5$$

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 7 & 8 & 7 \\ 7 & 5 & 6 & 5 \\ 8 & 6 & 10 & 9 \\ 7 & 5 & 9 & 10 \end{pmatrix}.$$

cond_1 (A) = 6 x 4.5 = 27
cond_∞ (A) = 8 x 3.5 = 28

Dans l'exemple précédent, on trouve K(A)=4488, où la norme choisie est la norme matricielle associée à la norme infinie sur R^4.

TP avec Scilab

Exercices:

Find the eigenvalues and eigenvectors of the following matrix by hand:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Find the eigenvalues and eigenvectors of the following matrix by hand:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Can you guess the eigenvalues of the matrix

$$C = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}?$$

Remarque: Les résultats numériques des vecteurs propres diffèrent de ceux calculés analytiquement !!!

Perturbation causée par les erreurs d'arrondis !

Est-ce qu'on peut faire un autre algorithme numérique qui résout ce problème numérique ?

Exercices:

Construire les matrices suivantes en utilisant le moins d'opérations possible.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 9 & 7 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} .$$

Exercice 2 (Manipulation de vecteurs). On définit le vecteur X par `X=[1:0.01:10]`.

a) Mettre dans une variable n la taille du vecteur X.

b) Afficher à l'écran la valeur du troisième élément de X.

c) Créer un vecteur Y qui contient tous les éléments de X en sens inverse.

d) Échanger le cinquième et le septième élément de X.

Exercice 3 (Résolution d'un exercice avec Scilab). On donne les matrices

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Les questions qui suivent seront à traiter au maximum à l'aide de Scilab.

a) Calculer J^2 et vérifier que l'on a $AJ = JA$. Que vaut J^{-1} ?

b) Montrer que $(A+2I_4+3J)^2 = 4(A+2I_4+3J)$ et que $A(A+6J) = -5I_4$ (où I_4 est la matrice identité 4×4). En déduire que A est inversible et donner explicitement A^{-1} .

c) La matrice A est-elle diagonalisable ?

d) Pouvez-vous trouver une expression de A^n ?

Exercice 6 : Construire la matrice de taille 100*100 de la forme suivante.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 2 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Exercice 7 : Calculer la somme des entiers de 1 jusqu'à 100, calculer 100!. Donner une façon de calculer toutes les valeurs du cosinus sur les entiers de 1 à 100 le plus rapidement possible.

Exercice 8 : Calculer les normes ℓ^2 et ℓ^1 d'un vecteur sans passer par la commande `norm`.

Exercice 9 : Résoudre le système linéaire suivant

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x - y & = & 5 \\ -2x + y & = & -7 \end{array} \right.$$

Exercice: Gram Schmidt

1) Dans $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire canonique, orthonormaliser en suivant le procédé de Schmidt, la famille (u, v, w) avec

$$u = (1,0,1), v = (1,1,1), w = (-1,1,0)$$

2)

a) Énoncer le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt.

b) Orthonormaliser la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ pour le produit scalaire

$$(P,Q) \mapsto \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t$$

1.1. Programmer la décomposition QR d'une matrice $A \in GL_n(\mathbb{R})$ à l'aide du procédé de Gram-Schmidt.

1.2. Que pensez-vous de l'algorithme de Gram-Schmidt modifié ci-dessous ? Donne-t-il le même résultat ? Quel est son intêret ?

```
Q=A;R=zeros(A);
for k=1:(n-1)
  R(k,k)=norm(Q(:,k));
  if  R(k,k)==0 then  abort; end;
  Q(:,k)=Q(:,k)/R(k,k);
  R(k,k+1:n)=Q(:,k)'*Q(:,k+1:n);
  Q(:,k+1:n)=Q(:,k+1:n)-Q(:,k)*R(k,k+1:n);
end
R(n,n)=norm(Q(:,n));
Q(:,n)=Q(:,n)/R(n,n);
```

1.3. Programmer la décomposition QR d'une matrice $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ à l'aide des matrices de Householder.

1.4. Comparer les trois méthodes précédentes (vérifier en particulier l'orthogonalité de la matrice Q obtenue) pour la matrice de Hilbert définie par $H_{i,j} = \dfrac{1}{i+j-1}$, $1 \leq i, j \leq n$ pour $n = 10$.

2. Problème des moindres carrés

Soient n points (x_i, y_i), $1 \leq i \leq n$. Faire un programme qui trouve la droite $y = ax + b$ minimisant $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} |y_i - (ax_i + b)|^2$. Prendre un exemple et tracer sur un graphique les points et la droite.

Exercice:

Deux récipients A et B sont séparés par une membrane perméable dans les deux sens. On place dans les récipients A et B deux solutions contenant respectivement a_0 molécules (dans A) et b_0 molécules (dans B). On suppose que, toutes les heures, 20% des molécules passent de A dans B et 10% des molécules passent de B dans A. On note a_n et b_n les nombres respectifs de molécules présentes dans A et B au bout de n heures.

1) Montrer que $\begin{cases} a_{n+1} = 0{,}8a_n + 0{,}1b_n \\ b_{n+1} = 0{,}2a_n + 0{,}9b_n \end{cases}$ et donner l'interprétation matricielle de ce système en considérant la matrice colonne $p_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$.

Les deux récipients n'ayant d'échanges qu'entre eux.

2) Sachant que si $a_0 = 150$ et $b_0 = 20$ (unités), quelles instructions écrire pour connaître les quantités de molécules après 10 heures ?

Quelle méthode appliqueriez vous pour connaître la répartition limite, si elle existe, entre les deux milieux ?

3) Quels sont les dosages initiaux nécessaires pour obtenir après 1 heure, une répartition égale à $a_1 = 130$ et $b_1 = 40$ (unités).

Ecrire l'instruction Scilab permettant d'expliciter le résultat.