Fonctions mesurables : corrigé

Exercice 1 - Mesurables ! - *L3* - ⋆⋆

1. Soit A un borélien de $\mathbb{R}$ et f l'indicatrice de $\mathbb{Q}$. Alors, $f^{-1}(A)$ est égal à :
   – $\varnothing$ si $A = \varnothing$;
   – $\{1\}$ si $A \subset \mathbb{Q}$;
   – $\{0\}$ si $A \subset \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$;
   – $\{0, 1\}$ si A contient à la fois des rationnels et des irrationnels.
   Dans tous les cas, $f^{-1}(A)$ est un borélien, et donc la fonction est mesurable.
2. Puisque les intervalles ouverts engendrent la tribu borélienne, il suffit de prouver que l'image réciproque de tout intervalle ouvert est un borélien. Soit I un tel intervalle. On pose $g :] - \infty, 0] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto -x$ et $h :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$, $x \mapsto x + 1$. Alors g et h sont continues. Ainsi, $g^{-1}(I)$ est un ouvert de $] - \infty, 0]$, a fortiori un borélien de $\mathbb{R}$. De même, $h^{-1}(I)$ est un ouvert de $]0, +\infty[$, a fortiori un borélien de $\mathbb{R}$. Comme $f^{-1}(I) = g^{-1}(I) \cup h^{-1}(I)$, on en déduit que $f^{-1}(I)$ est un borélien, et donc f est mesurable.
3. On sait que toute fonction continue est mesurable, et que la limite simple de fonctions mesurables est mesurable. Ici, on peut écrire f' comme la limite simple de la suite (f_n), où f_n est définie par
   $$f_n(x) = \frac{f(x + 1/n) - f(x)}{1/n}.$$
   Chaque f_n étant continue, elle est mesurable. Donc f' est mesurable.

Exercice 2 - Fonctions monotones - *L3* - ⋆⋆

Dans la suite, on supposera f croissante, le cas f décroissante étant symétrique.

1. Soient $x < y$ deux éléments de $f^{-1}(] - \infty, c[)$ et considérons $z \in]x, y[$. Puisque f est croissante, on a $f(z) \leq f(y) < c$, et donc $z \in f^{-1}(] - \infty, c[)$.
2. Rappelons que les ensembles $f^{-1}(] - \infty, c[)$, $c \in \mathbb{R}$, engendrent la tribu des boréliens. Pour prouver que f est mesurable, il suffit donc de prouver que pour chaque $c \in \mathbb{R}$, $f^{-1}(]-\infty, c[)$ est un borélien. Mais c'est un convexe de $\mathbb{R}$, donc un intervalle, donc un borélien !

Exercice 3 - Fonction et son module - *L3* - ⋆⋆

L'idée est la suivante. On va considérer un espace mesurable $(E, \mathcal{T})$ tel qu'il existe une partie A de E qui n'est pas mesurable. On définit ensuite une fonction f de module constant et telle que $f^{-1}(\{1\}) = A$. Ainsi, $|f|$ est mesurable puisque constante, tandis que f n'est pas mesurable, car l'image réciproque du borélien $\{1\}$ n'est pas mesurable.
Pour le choix de $(E, \mathcal{T})$ et A, il suffit de savoir qu'un tel exemple existe. Si on veut expliciter un exemple, on peut prendre $E = \{0, 1\}$ et $\mathcal{T} = \{\varnothing, E\}$ qui est une tribu (la plus petite tribu sur E). On pose ensuite $A = \{0\}$.
Il est ensuite facile de définir f. On peut poser $f(x) = 1$ si $x \in A$ et $f(x) = -1$ si $x \notin A$. Elle vérifie les conditions voulues.

Si vous trouvez une erreur, une faute de frappe, etc... dans ces exercices, merci de la signaler à geolabo@bibmath.net Venez poursuivre le dialogue sur notre forum :

`http://www.bibmath.net/forums`