第三章作业

3.3：

由题意，总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$，其中 μ, σ^2 未知，要检验假设

$$H_0 : \mu = 83.8\% \leftrightarrow H_1 : \mu \neq 83.8\%$$

取检验统计量 $T = \frac{\sqrt{n}(\bar{X}-\mu_0)}{S^*}$，当 H_0 成立时，有 $T \sim t(n-1)$，则拒绝域为

$$W = \left\{ T \geq t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1) \right\}$$

又 $n = 10$，

$$\begin{aligned} \bar{X} &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = 83.88\% \\ S^* &= \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2} = 0.009773 \\ T &= \frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu_0)}{S^*} = 0.259 \end{aligned}$$

对给定的水平 $\alpha = 0.05$，查 $t_{0.025}(9) = 2.2622$，由于 $T < t_{0.025}(9)$，接受 H_0，认为更换了原料以后成品无明显变化。

3.6：

由题意，总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$，其中 μ, σ^2 未知，要检验假设

$$H_0 : \sigma^2 = 0.01 \leftrightarrow H_1 : \sigma^2 \neq 0.01$$

取检验统计量 $\mathcal{X}^2 = \frac{(n-1)S^{*2}}{\sigma_0^2}$，当 H_0 成立时，有 $\mathcal{X}^2 \sim \mathcal{X}^2(n-1)$，则拒绝域为

$$W = \left\{ \mathcal{X}^2 \geq \mathcal{X}^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1) \right\} \bigcup \left\{ \mathcal{X}^2 \leq \mathcal{X}^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1) \right\}$$

又 $n=5$，

$$S^*=\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2}=0.00173$$
$$\mathcal{X}^2=\frac{(n-1)S^{*2}}{\sigma_0^2}=0.692$$

对给定的水平 $\alpha=0.05$，查 $\mathcal{X}^2_{0.975}(4)=0.484,\mathcal{X}^2_{0.025}(4)=11.143$，由于 $\mathcal{X}^2_{0.975}(4)<\mathcal{X}^2<\mathcal{X}^2_{0.025}(4)$，接受 H_0，认为总体标准差为 0.1.

3.8:

由题意，总体 $X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2),Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$，其中 $\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2$ 未知，且 $\sigma_1^2=\sigma_2^2$，要检验假设

$$H_0:\mu_1=\mu_2\leftrightarrow H_1:\mu_1\neq\mu_2$$

取检验统计量 $T=\frac{\bar{X}-\bar{Y}}{S_w\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}}$，其中 $S_w=\sqrt{\frac{(n_1-1)S^{*2}_{1n_1}+(n_2-1)S^{*2}_{2n_2}}{n_1+n_2-2}}$，当 H_0 成立时，有 $T\sim t(n_1+n_2-2)$，则拒绝域为

$$W=\left\{|T|\geq t_{\frac{\alpha}{2}}(n_1+n_2-2)\right\}$$

$$n_1=13,\bar{X}=80.02,S^{*2}_{1n_1}=\frac{1}{n_1-1}\sum_{i=1}^{n_1}(X_i-\bar{X})^2=0.00055$$
$$n_2=8,\bar{Y}=79.97875,S^{*2}_{2n_2}=\frac{1}{n_2-1}\sum_{i=1}^{n_2}(Y_i-\bar{Y})^2=0.000984$$

故

$$S_w=\sqrt{\frac{(n_1-1)S^{*2}_{1n_1}+(n_2-1)S^{*2}_{2n_2}}{n_1+n_2-2}}=0.02664$$
$$T=\frac{\bar{X}-\bar{Y}}{S_w\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}}=3.4458$$

对给定的水平 $\alpha=0.05$，查 $t_{0.025}(19)=2.0930$，由于 $T>t_{0.025}(19)$，拒绝 H_0，认为它们的总体均值不相等。

3.10:

由题意，总体 $X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2),Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$，其中 $\mu_1=76,\mu_2=79,\sigma_1,\sigma_2$ 未知，要检验假设

$$H_0:\sigma_1^2=\sigma_2^2\leftrightarrow H_1:\sigma_1^2\neq\sigma_2^2$$

因为 $\frac{X-\mu_1}{\sigma_1} \sim N(0,1), \frac{Y-\mu_2}{\sigma_2} \sim N(0,1)$，故

$$\sum_{i=1}^{n_1}(\frac{X_i-\mu_1}{\sigma_1})^2 \sim \mathcal{X}^2(n_1), \sum_{i=1}^{n_2}(\frac{Y_i-\mu_2}{\sigma_2})^2 \sim \mathcal{X}^2(n_2)$$

又 $n_1 = n_2 = 10$，所以当 H_0 成立时，有

$$F = \frac{\sum_{i=1}^{n_1}(X_i-\mu_1)^2/n_1}{\sum_{i=1}^{n_2}(Y_i-\mu_2)^2/n_2} \sim F(n_1,n_2)$$

则拒绝域为

$$W = \left\{F \geq F_{\frac{\alpha}{2}}(n_1,n_2)\right\} \bigcup \left\{F \leq F_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_1,n_2)\right\}$$

故计算得 $F = 1.392$，对给定的水平 $\alpha = 0.05$，查 $F_{0.025}(10,10) = 3.72, F_{0.975}(10,10) = 0.269$，由于 $F_{0.975}(10,10) < F < F_{0.025}(10,10)$，接受 H_0，认为两种方法的得率的方差无显著差异。

3.12：

1. 由题意，总体 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$，其中 μ,σ^2 未知，要检验假设

$$H_0 : \mu \geq 65 \leftrightarrow H_1 : \mu < 65$$

取检验统计量 $T = \frac{\sqrt{n}(\bar{X}-\mu_0)}{S^*}$，当 H_0 成立时，有 $T \sim t(n-1)$，则拒绝域为

$$W = \left\{T \leq -t_\alpha(n-1)\right\}$$

$n = 10$，

$$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = 62.4$$
$$S^* = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2} = 11.037$$
$$T = \frac{\sqrt{n}(\bar{X}-\mu_0)}{S^*} = -0.745$$

对给定的水平 $\alpha = 0.05$，查 $t_{0.05}(9) = 1.8331$，由于 $T > -t_{0.05}(9)$，接受 H_0，认为这批保险丝的平均熔化时间不小于 65 秒。

2. 由题意，要检验假设

$$H_0 : \sigma^2 \leq 80 \leftrightarrow H_1 : \sigma^2 > 80$$

取检验统计量 $\mathcal{X}^2 = \frac{(n-1)S^{*2}}{\sigma_0^2}$，当 H_0 成立时，有 $\mathcal{X}^2 \sim \mathcal{X}^2(n-1)$，则拒绝域为

$$W = \left\{\mathcal{X}^2 \geq \mathcal{X}^2_\alpha(n-1)\right\}$$

$n=5$，

$$S^* = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2} = 121.822$$

$$\mathcal{X}^2 = \frac{(n-1)S^{*2}}{\sigma_0^2} = 13.705$$

对给定的水平 $\alpha=0.05$，查 $\mathcal{X}^2_{0.05}(9)=16.919$，由于 $\mathcal{X}^2<\mathcal{X}^2_{0.05}(9)$，接受 H_0，认为熔化时间的方差不超过 80。

3.15:

由题意，总体 $X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2), Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$，其中 $\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2$ 未知，且 $\sigma_1^2=\sigma_2^2$，要检验假设

$$H_0:\mu_1-\mu_2\leq 2 \leftrightarrow H_1:\mu_1-\mu_2>2$$

取检验统计量 $T=\frac{(\bar{X}-\bar{Y})-c}{S_w\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}}$，其中 $S_w=\sqrt{\frac{(n_1-1)S^{*2}_{1n_1}+(n_2-1)S^{*2}_{2n_2}}{n_1+n_2-2}}$，当 H_0 成立时，有 $T\sim t(n_1+n_2-2)$，则拒绝域为

$$W=\left\{T\geq t_{\frac{\alpha}{2}}(n_1+n_2-2)\right\}$$

$n_1=n_2=12, c=2$，

$$\bar{X}=,5.25,(n_1-1)S^{*2}_{1n_1}=\sum_{i=1}^{n_1}(X_i-\bar{X})^2=10.25$$

$$\bar{Y}=1.5,(n_2-1)S^{*2}_{2n_2}=\sum_{i=1}^{n_2}(Y_i-\bar{Y})^2=11$$

故

$$S_w=\sqrt{\frac{(n_1-1)S^{*2}_{1n_1}+(n_2-1)S^{*2}_{2n_2}}{n_1+n_2-2}}=0.983$$

$$t=\frac{(\bar{X}-\bar{Y})-c}{S_w\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}}=4.363$$

对给定的水平 $\alpha=0.05$，查 $t_{0.05}(22)=1.7171$，由于 $T>t_{0.05}(22)$，所以在显著性水平 $\alpha=0.05$ 下，拒绝 H_0。

3.17:

由题意，总体 $X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2), Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$，其中 $\mu_1=\mu_2$，要检验假设

$$H_0:\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}\geq 1 \leftrightarrow H_1:\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}<1$$

取检验统计量 $F=\frac{S_{1n_1}^{*2}}{S_{2n_2}^{*2}}$，当 H_0 成立时，有 $F\sim F(n_1-1,n_2-1)$，则拒绝域为

$$W=\left\{F\leq F_{1-\alpha}(n_1-1,n_2-1)\right\}$$

$$n_1=8,\bar{X}=15.0125,S_{1n_1}^{*2}=\frac{1}{n_1-1}\sum_{i=1}^{n_1}(X_i-\bar{X})^2=0.0955$$
$$n_2=9,\bar{Y}=14.9889,S_{2n_2}^{*2}=\frac{1}{n_2-1}\sum_{i=1}^{n_2}(Y_i-\bar{Y})^2=0.0261$$

故

$$F=\frac{S_{1n_1}^{*2}}{S_{2n_2}^{*2}}=3.659$$

对给定的水平 $\alpha=0.05$，查 $F_{0.95}(7,8)=1/F_{0.05}(8,7)=0.268$，由于 $F>F_{0.95}(7,8)$，所以接受 H_0，认为乙机床的加工精度比甲机床的高。

3.20:

设 X 表示可能出现的放射性物质放射的粒子数,其所有可能值的集合为 $S=0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11$
提出假设：$H_0:X\sim P(\lambda)$ 其中 λ 为未知参数。
由题中所给的数据计算出 λ 的极大似然估计估计值

$$\hat{\lambda}=\bar{x}=\frac{\sum_{i=1}^{11}n_i\times x_i}{\sum_{i=1}^{11}n_i}=3.88$$

理论频数：

$$P(x_i\in S)=\frac{\hat{\lambda}^{x_i}}{x_i!}e^{-\hat{\lambda}}(i=1,2,\ldots,12)$$

计算理论概率等相关结果如下表：

x_i	0	1	2	3	4	5
p_i	0.0206	0.0801	0.1556	0.2013	0.1953	0.1515
np_i	53.8072	209.2212	406.4272	525.7956	510.1236	395.718
m_i	57	203	383	525	532	408
$(m_i-np_i)^2$	10.19397184	38.70332944	548.8336998	0.63297936	478.576877	150.847524
$\frac{(m_i-np_i)^2}{np_i}$	0.189453676	0.184987609	1.350386243	0.001203851	0.938158668	0.381199551

x_i	6	7	8	9	10	11
p_i	0.0980	0.0542	0.0263	0.0113	0.0043	0.0015
np_i	255.976	141.5704	68.6956	29.5156	11.2316	3.918
m_i	273	139	49	27	10	6
$(m_i - np_i)^2$	289.816576	6.60695616	387.9166594	6.32824336	1.51683856	4.334724
$\frac{(m_i-np_i)^2}{np_i}$	1.132202144	0.046669051	5.646892368	0.214403345	0.135050978	1.106361409

因为$K_n = \sum_{i=1}^{r} \frac{(m_i - np_i)^2}{np^i} \sim \chi^2(r-k-1)$,其中$np_{11} < 5$,则需要$x_{10}$和$x_{11}$合并，

$r = 11$和$k = 1$(未知参数个数)。代入数据计算：

$K_n = \sum_{i=1}^{r} \frac{(m_i - np_i)^2}{np^i} < \chi^2_{0.05}(9) = 16.92$

所以，不拒绝原假设，认为在每个时间间隔内观察到的粒子数是服从泊松分布。

3.22：

提出假设：$H_0 : X \sim N(\mu, \sigma^2)$ 其中 μ, σ^2 为未知参数。
由题中所给的数据计算出 μ, σ^2 的极大似然估计估计值

$$\hat{\mu} = \bar{x} = 11.0024$$
$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \bar{x}^2 = 0.00101824$$

计算理论概率、理论频数等相关结果如下表：

组限 $(t_{i-1}, t_i]$	10.93∼10.95	10.95∼10.97	10.97∼10.99	10.99∼11.01
$u_i = \frac{t_i - \hat{\mu}}{\hat{\sigma}}$	1.642633229	1.015673981	0.388714734	0.238244514
$F(t_i) = \Phi(u_i)$	0.0505	0.1539	0.3483	0.5948
$p_i = \Phi(u_i) - \Phi(u_{i-1})$	0.0351	0.1034	0.1944	0.2465
np_i	3.51	10.34	19.44	24.65
m_i	5	8	20	34

组限 $(t_{i-1}, t_i]$	11.01~11.03	11.03~11.05	11.05~11.07	11.07~11.09
$u_i = \frac{t_i - \hat{\mu}}{\hat{\sigma}}$	0.865203762	1.492163009	2.119122257	2.746081505
$F(t_i) = \Phi(u_i)$	0.8078	0.9319	0.983	0.997
$p_i = \Phi(u_i) - \Phi(u_{i-1})$	0.213	0.1241	0.0511	0.014
np_i	21.3	12.41	5.11	1.4
m_i	17	6	6	4

因为$K_n = \sum_{i=1}^{r} \frac{(m_i - np_i)^2}{np^i} \sim \chi^2(r-k-1)$，其中最后一组$np < 5$，则合并后，$r = 7$，$k = 2$（未知参数个数）。代入数据计算：

$$K_n = \sum_{i=1}^{r} \frac{(m_i - np_i)^2}{np^i} > \chi^2_{0.05}(4) = 9.49$$

所以，拒绝原假设，认为螺栓口径不服从正态分布。