6.4

令 $p_1 = 0.05, p_2 = 0.1$, 并设 A 事件为从产品中随机取出 10 个，有 2 个不合格，则

$$p(A|p_1) = C_{10}^2 0.05^2 0.95^8 = 0.0746$$

$$p(A|p_2) = C_{10}^2 0.1^2 0.9^8 = 0.1937$$

从而

$$\pi(p_1|A) = \frac{p(A|p_1)\pi(p_1)}{p(A|p_1)\pi(p_1) + p(A|p_2)\pi(p_2)} = \frac{0.0746 * 0.8}{0.0746 * 0.8 + 0.1937 * 0.2} = 0.6064$$

$$\pi(p_2|A) = \frac{p(A|p_2)\pi(p_2)}{p(A|p_1)\pi(p_1) + p(A|p_2)\pi(p_2)} = 1 - \pi(p_1|A) = 0.3936$$

6.5

(1) 当 X 的观察值为 12 时，θ 的后验

$$\pi(\theta|x) \propto \pi(\theta) * p(x|\theta) \propto \begin{cases} \frac{1}{10} * 1 & 11.5 \le \theta \le 12.5 \\ 0 & other \end{cases}$$

从而

$$\pi(\theta|x) = \begin{cases} 1 & 11.5 \le \theta \le 12.5 \\ 0 & other \end{cases}$$

(2) 当 X 有 6 个观察值 12,11.7,11.5,11.1,11.4,11.9 时，θ 的后验

$$\pi(\theta|x) \propto \pi(\theta) * p(x|\theta) \propto \begin{cases} \frac{1}{10} * 1^6 & 11.5 \le \theta \le 11.6 \\ 0 & other \end{cases}$$

从而

$$\pi(\theta|x) = \begin{cases} 10 & 11.5 \le \theta \le 11.6 \\ 0 & other \end{cases}$$

6.7

由题目可知，顾客服务时间 $T \sim Exp(\lambda)$, 其中参数 λ 的先验分布是 $\lambda \sim \Gamma(\alpha, \beta)$, 且其均值为 0.2，标准差为 1，因此

$$\frac{\alpha}{\beta} = 0.2, \frac{\alpha}{\beta^2} = 1$$

即 $\alpha = 0.04, \beta = 0.2$

λ 的后验分布有形式

$$\pi(\lambda|x) \propto \pi(\lambda)\pi(x|\lambda) \propto \lambda^{\alpha-1}e^{-\beta\lambda} * \lambda^n e^{-\lambda\sum_{i=1}^n x_i} \propto \lambda^{n+\alpha-1}e^{-\lambda(\beta+\sum_{i=1}^n x_i)} \propto \lambda^{n+\alpha-1}e^{-\lambda(\beta+n\bar{x})}$$

因此，$\pi(\lambda|x) \sim \Gamma(n+\alpha, \beta+n\bar{x})$, 由 Gamma 分布的性质，$\frac{1}{\lambda}$ 的后验为逆 Gamma 分布，即 $\pi(\frac{1}{\lambda}|x) \sim IG(n+\alpha, \frac{1}{\beta+n\bar{x}})$

将 $\alpha = 0.04, \beta = 0.2, n = 20, \bar{x} = 3.8$ 代入得，λ 的后验期望估计为

$$E\lambda = \frac{n+\alpha}{\beta+n\bar{x}} = 0.263$$

$\frac{1}{\lambda}$ 的后验期望估计为

$$E\frac{1}{\lambda} = \frac{\beta+n\bar{x}}{n+\alpha-1} = 4.002$$

6.8

设 X 为 1000 名成年人中投赞成票的人数，则 X $\sim B(1000,\theta)$, $0<\theta<1$.

（1）由题意可知样本分布 $p(710 \mid \theta) = C_{1000}^{710}\theta^{710}(1-\theta)^{290}$.

对于 A，$\pi(\theta \mid 710) \propto p(710 \mid \theta)\cdot\pi_A(\theta) \propto \theta^{710}(1-\theta)^{290}\cdot\theta = \theta^{711}(1-\theta)^{290}$,

$\therefore \theta$ 的后验分布 $\pi(\theta \mid 710) \sim \beta(712, 291)$.

对于 B，$\pi(\theta \mid 710) \propto p(710 \mid \theta)\cdot\pi_B(\theta) \propto \theta^{710}(1-\theta)^{290}\cdot\theta^3 = \theta^{713}(1-\theta)^{290}$,

$\therefore \theta$ 的后验分布 $\pi(\theta \mid 710) \sim \beta(714, 291)$.

(2) 对于 A 与 B 给出的先验分布，分别记 θ 的后验期望估计为 $\hat{\theta}_A$ 和 $\hat{\theta}_B$，

$\therefore \hat{\theta}_A = E(\theta \mid 710) = \frac{712}{712+291} = 0.7098$, $\hat{\theta}_B = E(\theta \mid 710) = \frac{714}{714+291} = 0.7104$.

6.9(可参考例题 6.2.5)

由题设知 $\pi(\theta) = N(\theta_0, \sigma_0^2) = N(3,1)$, 即 $\theta_0 = 3, \sigma_0^2 = 1$.

$\because \pi(\theta) \propto \exp\{-\frac{1}{2}\frac{(\theta-\theta_0)^2}{\sigma_0^2}\}$, $p(\mathbf{x} \mid \theta) \propto \exp\{-\frac{1}{2}\sum_{\mathrm{i=1}}^{\mathrm{n}}\frac{(\mathrm{x_i}-\theta)^2}{\sigma^2}\}$,

$\therefore \pi(\theta \mid \mathbf{x}) \propto \pi(\theta)p(\mathbf{x} \mid \theta)$

$\propto \exp\{-\frac{1}{2}[\frac{(\theta-\theta_0)^2}{\sigma_0^2} + \frac{1}{\sigma^2}\sum_{\mathrm{i=1}}^{\mathrm{n}}(\mathrm{x_i}-\theta)^2]\}$

$\propto \exp\{-\frac{(\theta-\mathrm{a})^2}{2\mathrm{b}^2}\}$.

由例 6.2.5，$a = (\frac{n\bar{\mathrm{x}}}{\sigma^2} + \frac{\theta_0}{\sigma_0^2})/(\frac{n}{\sigma^2} + \frac{1}{\sigma_0^2}) = 3$, $b^2 = 1/(\frac{n}{\sigma^2} + \frac{1}{\sigma_0^2}) = 0.25$.

因此，θ 的后验概率分布 $\pi(\theta \mid \mathbf{x})$ 为正态分布 $N(3, 0.25)$.

对于 $\alpha = 0.05$, 查找标准正态分布 $N(0,1)$ 的分布表可得 $u_{\alpha/2} = 1.96$，

故 θ 的 95% 可信区间为 $(a - bu_{\alpha/2}, a + bu_{\alpha/2}) = (2.02, 3.98)$.