一.（本题满分 20 分）

填空题：

1. 设 $X_1,X_2,\cdots X_{10}$ 是来自正态母体 $N(\mu,\sigma^2)$ 的一个简单随机子样，其中 μ，σ^2 已知。填充下列统计量的分布及其相应参数：

A. $\dfrac{X_2+\mu}{\sigma}+\dfrac{X_9-2\mu}{2\sigma}$~($\underline{N(\frac{3\mu}{2\sigma},\frac{5}{4})}$)

B. $\dfrac{\sum_{i=1}^{10}(X_i-\mu)^2}{\sigma^2}$~($\underline{\chi^2(10)}$)

C. $\dfrac{2\sum_{i=1}^{6}(X_i-\mu)^2}{3\sum_{i=7}^{10}(X_i-\mu)^2}$~($\underline{F(6,4)}$)

2. 设有一母体 X，其均值 $EX=\mu$，方差 $DX=\sigma^2$ 以及四阶矩 EX^4 都存在，$X_1,X_2,\cdots X_n$ 是来自母体 X 的简单随机子样。则 μ 的无偏估计量为 $\underline{\overline{X}}$，相合估计量为 $\underline{\overline{X}}$；σ^2 的无偏估计量为 $\underline{EX^2-EX}$，相合估计量为 $\underline{EX^2-EX}$。

二．选择题（本题满分 20 分，从 A~E 中选择一个完整的答案，填入指定处）

1.设 $X\sim N(0,1)$，则 $P\{X>\}=1-a$（$0<a<1$）。 （C）

A. u_a　B. $-u_a$　C. u_{1-a}　D. B 或 C　E. A~D 的答案皆错

2.设 $F\sim F(m,n)$，则 $P\{F>\}=1-a$（$0<a<1$）。 （E）

A. $-F_a(m,n)$　B. $F_{1-a}(m,n)$　C. $F_a(m,n)$　D. $F_a^{-1}(n,m)$　E. B 或 D

3.设检验假设 H: $\theta=\theta_0$ 的一个检验法则犯第一类错误的概率为 P(I)，检验的显著水平为 α，则。 （C）

A. P(I)=$1-\alpha$　B. P(I)=$\alpha/2$　C. P(I)=α　D. P(I)$\geq 1-\alpha$　E. C 或 D

4，设 $X_1,X_2,\cdots X_n$ 是来自正态母体 $N(\mu,\sigma^2)$ 的子样，其中 μ 未知，σ^2 已知，则是统计量。 （D）

A. S^2/σ^2；　B. $(X_1-\mu)/\sigma$；　C. $|X_1|+|X_2|$；　D.A 和 C；　E.A 和 B

5.设母体 X 及 Y 的分布式任意的，但分别是具有有限的非零方差，记 $EX=\mu_1$，$EY=\mu_2$，现独立地从两母体中各取一个子样，子样容量分别是 n_1 和 n_2。在大子样下，

我们可以推出 $\mu_1-\mu_2$ 的置信概率近似为 $1-\alpha$ 的置信区间。这里所谓的大子样，一般是指。（E）

A．$n_1\ge 50$； B．$n_2\ge 50$； C. $n_1+n_2\ge 50$； D.A 且 B； E.A~D 的答案皆错

三.（本题满分 20 分）

设母体 X 的概率密度为

$$f(x,\theta)=\begin{cases}\dfrac{1}{\theta}e^{-\frac{x}{\theta}}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}\qquad (0<\theta<+\infty)$$

1. 求 θ 的矩估计量和最大似然估计量；
2. 用以上方法求得的估计量是否为 θ 的无偏估计？是否为 θ 的相合估计？

解：

1. θ 的矩估计量和最大似然估计量均为 θ
2. 显然用以上方法求得的估计量是 θ 的无偏估计，也为 θ 的相合估计。

四.（本题满分 14 分）

已知某种设备的工作温度服从正态分布，现对该温度作 10 次测量，得数据（$^\circ C$）

1250 12751265 1245 1260 1255 1270 1265 1250 1240

1. 求温度的母体均值 μ 的 95%置信区间；
2. 求温度的母体标准差 σ 的 95%置信区间。

解：

1. 枢轴量

$$T=\frac{\overline{X}-\mu}{S^*/\sqrt{n}}\sim t(n-2)$$

2. 枢轴量

$$\chi^2=\frac{(n-1)S^{*2}}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$$

五.（本题满分 14 分）

设有两个独立的来自不同正态母体的子样

(-4.4, 4.0, 2.0, -4.8)，(6.0, 1.0, 3.2, -4.0)

问能否认为两个子样来自同一母体（$\alpha=0.05$）？

解：

（提示：首先检验两母体的方差是否相同，其次检验两母体的均值是否相同）

六.（本题满分 6 分）

设母体 $X\sim N(\mu,1)$，希望检验假设 $H_0:\mu=6\leftrightarrow H_1:\mu=7$。若从该母体中取出容量为 4 的简单随机子样，并采用如下检验法则：

当 $\overline{X}\ge 7$ 时，拒绝 H_0，接受 H_1；当 $\overline{X}<7$ 时，接受 H_0，拒绝 H_1。求上述检验

法则犯第一、二类错误的概率。

解：

利用上述检验法则犯第一、二类错误的概率分别为

$$P_{\theta^1}=1-\Phi(\frac{7-6}{\sqrt{4}})=1-\Phi(0.5)$$

$$P_{\theta^2}=\Phi(\frac{7-7}{\sqrt{4}})=0.5$$

七．（本题满分 6 分）

设 $t_\alpha(n),F_\alpha(m,n)$ 分别表示 $t(n),F(m,n)$ 分布相应的上侧分位数，

求证：$\left[t_{\alpha/2}(n)\right]^2=F_\alpha(1,n)$

证明：

设 $X\sim N(0,1),Y\sim\chi^2(n)$ 则，

$$T=\frac{X}{\sqrt{Y/n}}\sim t(n)$$

于是，对于给定显著水平 α ，有 $P\{|T|\geq t_{\alpha/2}\}=\alpha$ 。而

$$T^2=\frac{X^2}{Y/n}\sim F(1,n)$$

于是，$P\{|T^2|\geq[t_{\alpha/2}(n)]^2\}=\alpha=P\{|T^2|=F\geq F_\alpha(1,n)\}$

故 $\left[t_{\alpha/2}(n)\right]^2=F_\alpha(1,n)$