2011-2012（下）研究生应用数理统计试题（A）

1　设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为正态总体 $X \sim N(\mu,\ \sigma^2)$ 的样本，令 $d = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left|X_i - \mu\right|$，试证

$E(d) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sigma$，$D(d) = \left(1 - \frac{2}{\pi}\right)\frac{\sigma^2}{n}$。(10 分)

2 设总体 X 服从正态 $N(\mu,\ \sigma^2)$，$X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为其样本，$\overline{X}$ 与 S^2 分别为样本均值及方差。又设 X_{n+1} 与 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 独立同分布，试求统计量 $Y = \frac{X_{n+1} - \overline{X}}{S}\sqrt{\frac{n}{n+1}}$ 的分布。

解：由正态分布的特性可得

$$\bar{x} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n}),\quad x_{n+1} \sim N(\mu, \sigma^2),\quad \frac{(n-1)}{\sigma^2}S^2 \sim \chi^2(n-1).$$

则有

$$x_{n+1} - \bar{x} \sim N(0, \frac{n+1}{n}\sigma^2),$$

从而

$$\frac{x_{n+1} - \bar{x}}{\sigma\sqrt{\frac{n+1}{n}}} \sim N(0,1).$$

又 $\frac{x_{n+1} - \bar{x}}{\sigma\sqrt{\frac{n+1}{n}}}$ 与 $\frac{(n-1)}{\sigma^2}S_n^2$ 相互独立，从而

$$\frac{\dfrac{x_{n+1} - \bar{x}}{\sigma\sqrt{\frac{n+1}{n}}}}{\sqrt{\dfrac{(n-1)}{\sigma^2}S^2 \Big/ (n-1)}} = \sqrt{\frac{n}{n+1}}\frac{(x_{n+1} - \bar{x})}{S} \sim t(n-1).$$

（其中 $S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$）(10 分)

3　设总体 X 具有分布律

X	1	2	3
p	θ^2	$2\theta(1-\theta)$	$(1-\theta)^2$

其中 $\theta(0 < \theta < 1)$ 为未知参数，已知取得了样本值 $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 1$，求 θ 的矩估计和最大似然估计. (10 分)

4 证明样本 k 阶原点矩 $A_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^k$ 是总体 X 的 k 阶原点矩 $\mu_k = E(X^k)$ 的无偏估计量。(10 分)

5 假定某商场某种商品的月销售量服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$，μ, σ 未知。为了决定商店对该商品的进货量，需对 μ 作估计，为此，随机抽取若干月，其销售量分别为：64，57，49，81，

76，70，59，求 μ 的置信度为 0.95 的置信区间。(10 分)

6　一种元件，要求其使用寿命不得低于 1000（小时）。现在从一批这种元件中随机抽取 25 件，测得其寿命平均值为 950（小时）。已知该种元件寿命服从标准差 $\sigma=100$（小时）的正态分布，试在显著水平 0.05 下确定这批元件是否合格。(10 分)

7　某小学一年级共有三个班级，在一次数学考试中从三个班随机抽取 12,15,13 个学生的成绩。设学生成绩服从正态分布且方差相等，样本的方差分析表如下表 1 所示，问在显著性水平为 0.05 时，三个班的平均成绩有无显著差异？(10 分)

表 1　方差分析表

方差来源	平方和	自由度	均方差	F 值	显著性
因素 A	355.477				
误差	13429.498				
总和	13764.975				

8 某问题是一个四因素二水平试验，选用 $L_8(2^7)$ 正交表，要考虑 $A\times B$，试验方案设计及试验结果见表 2。（15 分）

（1）　各因素及交互作用的主次顺序（指标 y 越大越好）。

（2）　试找最优工艺条件。

（3）　在显著水平 α =0.05 下，哪些因素的影响显著？

表 2

列号 / 试验号	A 1	B 2	$A\times B$ 3	C 4	5	6	D 7	数据 y_i
1	1	1	1	1	1	1	1	115
2	1	1	1	2	2	2	2	160
3	1	2	2	1	1	2	2	145
4	1	2	2	2	2	1	1	155
5	2	1	2	1	2	1	2	140
6	2	1	2	2	1	2	1	155
7	2	2	1	1	2	2	1	100
8	2	2	1	2	1	1	2	125
I_j	575	570	500	500	540	535	525	
II_j	520	525	595	595	555	560	570	
R_j	55	45	95	95	15	25	45	
S_j	378.1	253.1	1128.1	1128.1	28.1	78.1	253.1	

9 营业税税收总额 y 与社会商品零售总额 x 有关。为了利用社会商品零售总额预测税收总额，

现收集了以下数据，见表 3。（15 分）

表 3 单位：亿元

序号	社会商业零售总额 x	营业税税收总额 y
1	142.08	3.93
2	177.30	5.96
3	204.68	7.85
4	242.88	9.82
5	316.24	12.50
6	341.99	15.55
7	332.69	15.79
8	389.29	16.39
9	453.40	18.45

（1）求营业税税收总额 y 与社会商品零售总额 x 的线性回归方程。

（2）在显著水平 α =0.05 下检验回归方程的线性性。

（3）预测当社会商品零售总额 $x=300$ 亿元时的营业税的平均税收总额。

附表：