第一章作业参考答案

1.3 设 X_1, X_2, X_3 为总体 X 的一个样本, 在下列四种情形下, 试分别写出样本空间 χ 与样本 X_1, X_2, X_3 的联合概率函数或联合概率密度。

(1) 总体 X 服从泊松分布 $P(\lambda)$;

(2) 总体 X 服从指数分布 $\mathrm{Exp}(\lambda)$;

(3) 总体 X 服从均匀分布 $U(a,b)$;

(4) 总体 X 服从正态分布 $N(\mu,1)$;

解:

(1) $\chi=\{(x_1,x_2,x_3)\mid x_k=0,1,2,3,\cdots k=1,2,3\}$

因为 $X_i\sim P(\lambda)$, 所以 $P\left(X_1\leq x_1, X_2\leq x_2, X_3\leq x_3\right)=P\left(X_1\leq x_1\right)P\left(X_2\leq x_2\right)P\left(X_3\leq x_3\right)$ $=\frac{\lambda^{x1+x2+\times 3}e^{-3\lambda}}{x_1!x_2!x_3!}$, 其中 $x_k=0,1,2\cdots k=1,2,3$

(2) $\chi=\{(x_1,x_2,x_3)\mid x_k>0; k=1,2,3\}$

因为 $X_i\sim \mathrm{Exp}(\lambda)$, 其概率密度函数为 $f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, x\geq 0\\ 0, x<0\end{cases}$

所以 $f\left(x_1,x_2,x_3\right)=f\left(x_1\right)f\left(x_2\right)f\left(x_3\right)=\lambda^3 e^{-\lambda^{(x_1+x_2+x_3)}}$, 其中 $x_k\geq 0; k=1,2,3$

(3) $\chi=\{(x_1,x_2,x_3)\mid a\leq x_k\leq b; k=1,2,3\}$

因为 $X_i\sim U(a,b)$, 其概率密度函数为 $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{b-a}, a\leq x\leq b\\ 0, x<a \text{ 或} x>b\end{cases}$

所以 $f\left(x_1,x_2,x_3\right)=f\left(x_1\right)f\left(x_2\right)f\left(x_3\right)=\frac{1}{(b-a)^3}$, 其中 $a\leq x_k\leq b; k=1,2,3$

(4) $\chi=\{(x_1,x_2,x_3)\mid -\infty<x_k<+\infty; k=1,2,3\}$

因为 $X_i\sim N(\mu,1)$, 其概率密度函数为 $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2}}, (-\infty<x<+\infty)$

所以 $f\left(x_1,x_2,x_3\right)=f\left(x_1\right)f\left(x_2\right)f\left(x_3\right)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}e^{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}(x_i-\mu)^2}$, 其中 $-\infty<x_k<+\infty; k=1,2,3$

1.12 若从总体中抽取样本容量为 13 的样本值: $-2.1, 3.2, 0, -0.1, 1.2, -4, 2.22, 2.01, 1.2, -0.1, 3.21, -2.1, 0$, 试写出样本值的顺序统计量, 样本中位数及样本极差, 如果再抽取一个样本为 2.7, 构成一个容量为 14 的样本值, 求样本中位数。

解:

✓ $\left(X_{(1)}, X_{(2)}, X_{(3)}, X_{(4)}, X_{(5)}, X_{(6)}, X_{(7)}, X_{(8)}, X_{(9)}, X_{(10)}, X_{(11)}, X_{(12)}, X_{(13)}\right)$ 为样本 $(-4, -2.1, -2.1, -0.1, -0.1, 0, 0, 1.2, 1.2, 2.01, 2.22, 3.2, 3.21)$ 的顺序统计量

✓ 样本中位数：0

✓ 样本极差: 7.21

如果再抽取一个样本为 2.7, 构成一个容量为 14 的样本值, 样本中位数: 0.6

1.13 设 $1,1,1,2,0,0,1,3,1,0,0,2,4,0,3,1,1,4,0,2$ 为来自某个总体的 20 个样品, 求经验分布函数 $F_{20}(x)$ 。

解:

经验分布函数如下:

$$F_{20}(x)=\begin{cases}0, x<0\\ \frac{3}{10}, 0 \leq x<1\\ \frac{13}{20}, 1 \leq x<2\\ \frac{16}{20}, 2 \leq x<3\\ \frac{18}{20}, 3 \leq x<4\\ 1, 4 \leq x\end{cases}$$

1.16 设 $X_1, ..., X_n$ 为正态总体 $N\left(\mu, \sigma^2\right)$ 的一个样本, 求 $Y=\frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n\left(X_i-\mu\right)^2$ 的概率分布。

解:

由于 $X_i \sim N\left(\mu, \sigma^2\right), i=1,2, \ldots, n$, 则 $\frac{X_i-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$, 又 X_i 相互独立, 则

$$\left(\frac{X_i-\mu}{\sigma}\right)^2 \sim \chi^2(1)$$

因此, $Y=\frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n\left(X_i-\mu\right)^2 \sim \chi^2(n)$

1.20 已知 $X \sim t(n)$，求证 $X^2=\frac{Y^2}{Z/n} \sim F(1, n)$。

证明:

令 $X=\frac{Y}{\sqrt{Z/n}}$, 其中 $Y \sim N(0,1), Z \sim \chi^2(n)$, 则 $X \sim t(n)$

因为 $X^2=\frac{Y^2}{Z/n}$, 而 $Y^2 \sim \chi^2(1), Z \sim \chi^2(n)$

所以 $X^2=\frac{Y^2}{Z/n} \sim F(1, n)$

1.21 已知完成一个电子邮件的时间 (分钟)$X \sim N(8,4)$，随机抽取了 25 个样品，求:

(1) 样本均值落在 $7.8 \sim 8.2$ 分钟之间的概率;

(2) 样本均值落在 $7.5 \sim 8$ 分钟之间的概率;

(3) 如果随机抽取 100 个样品，那么其样本均值落在 $7.8 \sim 8.2$ 分钟之间的概率有多大?

(4) 下面哪种情况更有可能发生-单个样品大于 11 分钟；25 个样品的均值大于 9 分钟；100 个样品的均值大于 8.6 分钟。

解:

(1) 由题意可得: $\mu=8,\sigma^2=4,n=25$;

对于 $7.8<\bar{x}<8.2 \Leftrightarrow -0.5<\frac{\sqrt{n}(\bar{x}-\mu)}{\sigma}<0.5$；

$$又\frac{\sqrt{n}(\bar{x}-\mu)}{\sigma}\sim N(0,1)$$

通过查 N$(0,1)$ 分布表，可得:

$$P\{7.8<\bar{x}<8.2\}=P\left\{-0.5<\frac{\sqrt{n}(\bar{x}-\mu)}{\sigma}<0.5\right\}$$
$$=\phi(0.5)-\phi(-0.5)=0.6915-(1-0.6915)=0.383$$

(2) 和 (1) 一样即求 $-1.25<\frac{\sqrt{n}(x-\mu)}{\sigma}<0$ 的概率。

通过查表可得: P$\{7.5<x<8\}=0.5-(1-0.8944)=0.3944$

(3) 此时 $n=100$，即求 $-1<\frac{\sqrt{n}(x-\mu)}{\sigma}<1$ 的概率。

通过查表可得: P$\{7.8<x<8.2\}=0.8413-(1-0.8413)=0.6826$

(4) 单个样品大于 11 分钟即 $x>11$,

可得该概率 p1 $=1-0.9332=0.0668$;

25 个样品的均值大于 9 分钟, 即 $x>9$,

可得该概率为 p2 $=1-0.9938=0.0062$;

100 个样品的均值大于 8.6 分钟即 $x>8.6$,

可得该概率 P3=1- $0.9987=0.0013$;

综上所述, 第一种情况更有可能发生。

1.23 设 $X_1,\ldots,X_n,X_{n+1},\ldots,X_{n+m}$ 为正态总体 N$(0,\sigma^2)$ 的样本,

(1) 确定 a 与 b, 使得 $\mathrm{a}\left(\sum_{i=1}^n X_i\right)^2+b\left(\sum_{i=n+1}^{n+m} X_i\right)^2$ 服从 χ^2 分布;

(2) 确定 c, 使得 $\mathrm{c}\sum_{i=1}^n X_i/\sqrt{\sum_{i=n+1}^{n+m} X_i^2}$ 服从 t 分布;

(3) 确定 d, 使得 $\mathrm{d}\sum_{i=1}^n X_i^2/\sum_{i=n+1}^{n+m} X_i^2$ 服从 F 分布。

解:

(1) 由题意, 有

$$\mathrm{a}\left(\sum_{i=1}^n X_i\right)^2+b\left(\sum_{i=n+1}^{n+m} X_i\right)^2=\mathrm{a}\left(\mathrm{n}\bar{X}_n\right)^2+b\left(\mathrm{m}\bar{X}_m\right)^2=\left(\sqrt{a}\mathrm{n}\bar{X}_n\right)^2+\left(\sqrt{b}\,\mathrm{m}\bar{X}_m\right)^2$$

由定理 1.2.1, 只要 $\sqrt{a}\mathrm{n}\bar{X}_n$ 和 $\sqrt{b}\,\mathrm{m}\bar{X}_m$ 均服从 N$(0,1)$ 分布, 则上式服从 $\chi^2(2)$ 分布。

而 $\bar{X}_n\sim N\left(0,\frac{\sigma^2}{n}\right)$,

故有 $\mathrm{E}\left(\sqrt{a}\mathrm{n}\bar{X}_n\right)=0,\mathrm{D}\left(\sqrt{a}\mathrm{n}\bar{X}_n\right)=\mathrm{a}n^2\frac{\sigma^2}{n}=an\sigma^2$;

$\mathrm{E}\left(\sqrt{b}\,\mathrm{m}\bar{X}_m\right)=0,\mathrm{D}\left(\sqrt{b}\,\mathrm{m}\bar{X}_m\right)=\mathrm{b}m^2\frac{\sigma^2}{m}=bm\sigma^2$ 。

要使 $\sqrt{a}\mathrm{n}\bar{X}_n$ 和 $\sqrt{b}\,\mathrm{m}\bar{X}_m$ 均服从 N$(0,1)$ 分布,

则令 $an\sigma^2=1$ 且 $bm\sigma^2=1$, 可得: $a=\frac{1}{n\sigma^2},b=\frac{1}{m\sigma^2}$ 。

(2) 由于 $\sum_{i=1}^{n} X_i = n\bar{X}_n$, 故有 $\mathrm{E}\left(\mathrm{n}\bar{X}_n\right) = 0, \mathrm{D}\left(\mathrm{n}\bar{X}_n\right) = n^2\frac{\sigma^2}{n} = n\sigma^2$,

则 $\frac{1}{\sqrt{n}\sigma}\sum_{i=1}^{n} X_i$ 服从 $\mathrm{N}(0,1)$ 分布。

又因为 $X_i \sim \mathrm{N}\left(0,\sigma^2\right)$, 故 $\frac{X_i}{\sigma}$ 服从 $\mathrm{N}(0,1)$ 分布,

则 $\sum_{i=n+1}^{n+m}\left(\frac{X_i}{\sigma}\right)^2$ 服从 $\chi^2(m)$ 分布,

由定理 1.2.2, $\frac{\frac{1}{\sqrt{n}\sigma}\sum_{i=1}^{n} X_i}{\sqrt{\sum_{i=n+1}^{n+m}\left(\frac{X_i}{\sigma}\right)^2/m}}$ 服从 t(m) 分布,

令 $\frac{\frac{1}{\sqrt{n}\sigma}\sum_{i=1}^{n} x_i}{\sqrt{\sum_{i=n+1}^{n+m}\left(\frac{X_i}{\sigma}\right)^2/m}} = \frac{c\sum_{i=1}^{n} X_i}{\sqrt{\sum_{i=n+1}^{n+m} X_i^2}}$, 得到 $\mathrm{c} = \sqrt{\frac{m}{n}}$ 。

(3) 由于 $X_i \sim \mathrm{N}\left(0,\sigma^2\right)$, 则 $\frac{X_i}{\sigma} \sim N(0,1)$,

故有 $\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i}{\sigma}\right)^2 \sim \chi^2(n), \sum_{i=n+1}^{n+m}\left(\frac{X_i}{\sigma}\right)^2 \sim \chi^2(m)$,

由定理 1.2.3, $\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i}{\sigma}\right)^2/n}{\sum_{i=n+1}^{n+m}\left(\frac{X_i}{\sigma}\right)^2/m} \sim F(n,m)$,

令 $\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i}{\sigma}\right)^2/n}{\sum_{i=n+1}^{n+m}\left(\frac{X_i}{\sigma}\right)^2/m} = \frac{d\sum_{i=1}^{n}(X_i)^2}{\sum_{i=n+1}^{n+m}(X_i)^2}$, 得到 $\mathrm{d} = \frac{m}{n}$ 。

1.24 设 $X_1,\ldots,X_n,X_{n+1}$ 是来自正态总体 $\mathrm{N}\left(\mu,\sigma^2\right)$ 的样本, 试求统计量

$$\mathrm{Y} = \frac{X_{n+1}-\bar{X}_n}{S_n^*}\sqrt{\frac{n}{n+1}}$$

的抽样分布。

解:

由定理 1.2.4 的 (1) 知, $\bar{X}_n \sim N\left(\mu,\frac{\sigma^2}{n}\right)$, 则有 $\mathrm{E}\left(X_{n+1}-\bar{X}_n\right) = 0$,

$\mathrm{D}\left(X_{n+1}-\bar{X}_n\right) = \mathrm{D}\left(X_{n+1}\right) + D\left(\bar{X}_n\right) = \sigma^2 + \frac{\sigma^2}{n} = \frac{n+1}{n}\sigma^2$,

故 $X_{n+1}-\bar{X}_n \sim N\left(0,\frac{n+1}{n}\sigma^2\right)$, 则 $\frac{X_{n+1}-\bar{X}_n}{\sqrt{\frac{n+1}{n}}\sigma} \sim N(0,1)$ 。

再由定理 1.2.4 的 (2) 知, $\frac{(n-1)S_n^{*2}}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$,

因此, 由定理 1.2.2 得到, $\frac{X_{n+1}-\bar{X}_n}{S_n^*}\sqrt{\frac{n}{n+1}} = \frac{\frac{X_{n+1}-\bar{X}_n}{\sqrt{\frac{n+1}{n}}\sigma}}{\sqrt{\frac{(n-1)S_n^{*2}/\sigma^2}{n-1}}} \sim t(n-1)$ 。

1.25 设 $X_1,\ldots,X_{n1}$ 和 $Y_1,\ldots,Y_{n2}$ 分别为正态总体 $\mathrm{N}\left(\mu_1,\sigma_1^2\right)$ 和 $\mathrm{N}\left(\mu_2,\sigma_2^2\right)$ 的两个独立样本, 试证:

$$\frac{n_2\sigma_2^2\sum_{i=1}^{n_1}\left(X_i-\mu_1\right)^2}{n_1\sigma_1^2\sum_{i=1}^{n_2}\left(Y_i-\mu_2\right)^2} \sim F\left(n_1,n_2\right).$$

证明:

由于 $\frac{X_i-\mu_1}{\sigma_1} \sim N(0,1), \frac{Y_i-\mu_2}{\sigma_2} \sim N(0,1)$,

则 $\sum_{i=1}^{n_1}\left(\frac{X_i-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2 \sim \chi^2\left(n_1\right), \sum_{i=1}^{n_2}\left(\frac{Y_i-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2 \sim \chi^2\left(n_2\right)$,

进一步, 由定理 1.2.3, $\frac{\sum_{i=1}^{n_1}\left(\frac{X_i-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2/n_1}{\sum_{i=1}^{n_2}\left(\frac{Y_i-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2/n_2} \sim F\left(n_1,n_2\right)$,

故 $\frac{n_2\sigma_2^2\sum_{i=1}^{n_1}\left(X_i-\mu_1\right)^2}{n_1\sigma_1^2\sum_{i=1}^{n_2}\left(Y_i-\mu_2\right)^2} \sim F\left(n_1,n_2\right)$ 。证毕。