Formulario Teoria Dei Sistemi

Stefan Dascalescu

2025

1 Basi Iniziali

Si calcola il polinomio caratteristico come: $p(\lambda) = (A - \lambda I)$

Mentre il polinomio caratteristico contiene anche le componenti con esponente > 1, nel polinomio minimo, ogni componente è presente solo una volta (cioè ogni componente ha come esponente 1).

2 Sistemi a tempo continuo

Forma implicita:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases}$$

Forma esplicita:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \phi(t - t_0)x(t_0) + \displaystyle\int_{t_0}^{t} H(t - \tau)u(\tau)dt \\ y(t) = \psi(t - t_0)x(t_0) + \displaystyle\int_{t_0}^{t} W(t - \tau)u(\tau)dt \end{cases}$$

$\phi(t) = e^{At} = Ue^{\Lambda}U^{-1}$
$H(t) = \phi(t)B = e^{At}B = Ue^{\Lambda}U^{-1}B$
$\Psi(t) = C\phi(t) = Ce^{At} = CUe^{\Lambda}U^{-1}$
$W(t) = C\phi(t)B = Ce^{At}B = CUe^{\Lambda}U^{-1}B$

Esprimiamo i modi naturali come:

$$x_L = \sum_{i=0}^{n} \underbrace{c_i e^{\lambda_i t} u_i}_{\text{Autovalori Reali}} + \sum_{i=0}^{n} \underbrace{|\lambda_i|_{dB} i e^{Re(\lambda_i)t} sin(Im(\lambda_i)t + \varphi + \angle\lambda_i)u_{i,a} + cos(Im(\lambda_i)t + \varphi + \angle\lambda_i)u_{i,b}}_{\text{Autovalori Complessi}}$$

$ATTENZIONE:$
Quando si scrive la formulazione per i numeri complessi, questa vale per una coppia di valori complessi e cogniugati. Ciò significa che, avendo:

$$\lambda_1 = \alpha + \omega j \ \text{ e } \ \lambda_2 = \alpha - \omega j$$

si prende come reale $Re(\lambda)$ il valore "α", mentre come immagginario $Im(\lambda)$ si prende il valore "$+\omega$".
Considerando dunque la nomenclatura: $\lambda = \alpha \ \pm \ \omega j$
Si pone:

$$x_L(t) = e^{\alpha t}[(c_a \ cos(\omega t) + c_b sin(\omega t) \ )u_a + (-c_a sin(\omega t) + c_b cos(\omega t) \ )u_b)]$$
$$\implies x_L = m \ e^{\alpha t}[\sin(\omega t + \varphi)u_a + \cos(\omega t + \varphi)u_b]$$

Dove:

$$m = \sqrt{c_a^2 + c_b^2}$$
$$c_a = v_a x_0 \quad c_b = v_b x_0$$
$$\sin(\varphi) = \tfrac{c_a}{m} \ \text{ oppure } \ \cos(\varphi) = \tfrac{c_b}{m}$$
$$\varphi = \arcsin(\tfrac{c_a}{m}) \ \text{ oppure } \ \varphi = \arccos(\tfrac{c_b}{m})$$

Nello specifico, per i complessi si vede:

$$\Phi(t) = e^{At} = e^{\lambda_i t}\begin{pmatrix} u_a & u_b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} cos(wt) & sin(wt) \\ -sin(wt) & cos(wt) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_a \\ v_b \end{pmatrix} = e^{\lambda_i t}(cos(wt)u_a v_a + sin(wt)u_a v_a - sin(wt)u_b v_b + cos(wt)u_b v_b)$$

$$\Psi(t) = Ce^{At} = e^{\lambda_i t}(cos(wt)Cu_a v_a + sin(wt)Cu_a v_a - sin(wt)Cu_b v_b + cos(wt)u_b v_b)$$

$$H(t) = e^{At}B = e^{\lambda_i t}(cos(wt)u_a v_a B + sin(wt)u_a v_a B - sin(wt)u_b v_b B + cos(wt)u_b v_b B)$$

$$W(t) = Ce^{At}B + D = e^{\lambda_i t}(cos(wt)Cu_a v_a B + sin(wt)Cu_a v_a B - sin(wt)Cu_b v_b B + cos(wt)Cu_b v_b B) + D$$

avendo invece una funzione del tipo: $\begin{cases} x(t) = \Phi(t)x_0 + \int_0^t H(t-\tau)u(\tau)d\tau \\ y(t) = \Psi(t)x_0 + \int_0^t W(t-\tau)u(\tau)d\tau \end{cases}$

Possiamo calcolarci le matrici A, B, C e D come: $\begin{array}{l} A = \lim_{t\to 0} \frac{d}{dt}\Phi(t) \\ B = \lim_{t\to 0} H(t) \\ C = \lim_{t\to 0} \Psi(t) \\ D = W(t) - Ce^{At}B \end{array}$

Se invece è definito nel dominio di Laplace: $\begin{array}{l} A = \lim_{t\to 0} \frac{d}{dt}\mathcal{L}^{-1}\{\Phi(s)\} \\ B = \lim_{t\to 0} \mathcal{L}^{-1}\{H(s)\} \\ C = \lim_{t\to 0} \mathcal{L}^{-1}\{\Psi(s)\} \\ D = W(s) - C(sI-A)^{-1}B \end{array}$

3 Sistemi a tempo discreto

Forma implicita:

$$\begin{cases} x(t+1) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases}$$

Forma esplicita:

$$\begin{cases} x(t+1) = \phi(t-t_0)x(t_0) + \sum_{\tau=t_0}^{t} H(t-\tau)u(\tau) \\ y(t) = \psi(t-t_0)x(t_0) + \sum_{\tau=t_0}^{t} W(t-\tau)u(\tau) \end{cases}$$

$\phi(t) = A^t = U\Lambda^t U^{-1}$
$H(t) = \phi(t)B = A^t B = U\Lambda^t U^{-1}B$
$\psi(t) = C\phi(t) = CA^t = CU\Lambda^t U^{-1}$
$W(t) = C\phi(t)B = CA^t B = CU\Lambda^t U^{-1}B$

Dove, per i complessi si pone:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \alpha & \omega \\ -\omega & \alpha \end{pmatrix}$$

Considerando:

$$\lambda = \alpha + i\omega$$

Esprimiamo i modi naturali come:

$$x_L = \sum_{i=0}^{n} \underbrace{c_i \lambda_i^t u_i}_{\text{Autovalori Reali}} + \sum_{i=0}^{n} \underbrace{\rho^t(cos(\theta t + \varphi)u_{i,a} + isin(\theta t + \varphi)u_{i,b})}_{\text{Autovalori Complessi}}$$

Dove si ha:

$$\begin{array}{ll} \lambda = \alpha + i\omega = Re(\lambda_i) + iIm(\lambda_i) & \\ \rho = \sqrt{\alpha^2 + \omega^2} & : modulo \\ \theta = arctan(\frac{\omega}{\alpha}) & : fase \end{array}$$

Ne consegue che:

$$\alpha = \rho cos(\theta t)$$
$$\omega = \rho sin(\theta t)$$

Nello specifico, per i complessi si vede:

$$\Phi(t) = A^t = U\Lambda^t U^{-1} = \begin{pmatrix} u_a & u_b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho cos(\theta t) & \rho sin(\theta t) \\ -\rho sin(\theta t) & \rho cos(\theta t) \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} v_a \\ v_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_a & u_b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho^t cos(\theta t) & \rho^t sin(\theta t) \\ -\rho^t sin(\theta t) & \rho^t cos(\theta t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_a \\ v_b \end{pmatrix}$$

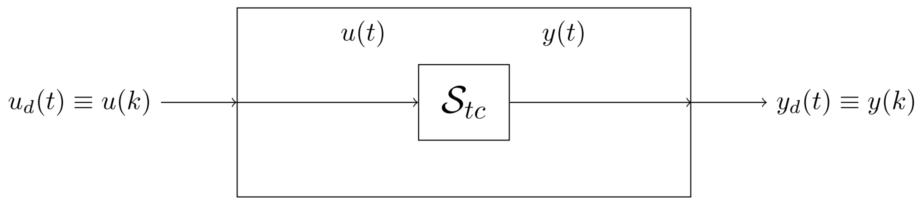
$$\Psi(t) = C\Phi(t) = CA^t = C \begin{pmatrix} u_a & u_b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho^t cos(\theta t) & \rho^t sin(\theta t) \\ -\rho^t sin(\theta t) & \rho^t cos(\theta t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_a \\ v_b \end{pmatrix}$$

$$H(t) = \Phi(t)B = A^t B = \begin{pmatrix} u_a & u_b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho^t cos(\theta t) & \rho^t sin(\theta t) \\ -\rho^t sin(\theta t) & \rho^t cos(\theta t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_a \\ v_b \end{pmatrix} B$$

$$W(t) = C\Phi(t)B + D = CA^t B + D = C \begin{pmatrix} u_a & u_b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho^t cos(\theta t) & \rho^t sin(\theta t) \\ -\rho^t sin(\theta t) & \rho^t cos(\theta t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_a \\ v_b \end{pmatrix} B + D$$

4 Sistemi campionati

Un sistema campionato è un sistema che segue il seguente schema:



Scrivendo dunque il sistema in forma implicita:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A_d x(t) + B_d u(t) \\ y(t) = C_d x(t) + D_d u(t) \end{cases}$$

Si calcolano come:

$$\begin{aligned} &A_d = e^{AT} = \Phi(t = kT) \\ &B_d = \int_0^{t=kT} e^{A\theta} d\theta B \\ &C_d = C \quad (per\ ingressi\ a\ singola\ entrata\ e\ singola\ uscita) \\ &D_d = D \end{aligned}$$

Dove:

$$\theta = (k+1)T_C - \tau$$

Per campionare invece un sistema, avendo solo la sua risposta impulsiva in uscita, ovvero W(t), si procede facendo:

$$W(k) = \mathcal{Z}^{-1}\ \{\mathcal{Z}\ \{\mathcal{L}\ \{\ W(s)\ \frac{1}{s}\ \}_{|k\ =\frac{t}{T_c}}\ \frac{z-1}{z}\ \}\ \}$$

5 Osservabilità ed Eccitabilità

5.1 Osservabilità

$$Cu_i \neq 0$$

5.2 Eccitabilità

$$v_i B \neq 0$$

6 Stabilita

6.1 Interna

6.1.1 Normale

$$\forall \quad \lambda_i <= 0$$

6.1.2 Asintotica

$$\forall \quad \lambda_i < 0$$

6.1.3 Instabile

$$\exists \quad \lambda_i \in R^n \quad t.c. \quad \lambda_i > 0$$

6.2 Esterna

$$\begin{cases} \lambda_{osservabili} <= 0 \\ \lambda_{eccitabili,osservabili} < 0 \end{cases}$$

6.2.1 Esterna nello stato zero

Posto $\mathrm{x}_o = 0$: $\begin{cases} \lambda_{osservabili} <= 0 \\ \lambda_{eccitabili,osservabili} < 0 \end{cases}$

7 Criteri

7.1 Criterio di Routh

$$\begin{array}{c|llll} n & a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & ... \\ n-1 & a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & ... \\ n-2 & b_1 & b_2 & ... & \\ ... & ... & & & \\ 1 & y_1 & & & \\ 0 & z_1 & & & \\ \hline \end{array}$$

$$b_1 = \frac{\begin{vmatrix} a_n & a_{n-2} \\ a_{n-1} & a_{n-3} \end{vmatrix}}{-a_{n-1}}$$

$$b_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_n & a_{n-4} \\ a_{n-1} & a_{n-5} \end{vmatrix}}{-a_{n-1}}$$

...

$$c_1 = \frac{\begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}}{-b_1}$$

Casi speciali:

```
1) Primo elemento della righa è nullo:
    - togli lo zero
    - sposta tutti i numeri a sx di 1 posto
    - cambia tutti i segni
    - somma la riga originale con quella nuova (spostata)
    - la risultante sarà la riga nuova

2) Intera riga nulla:
    - prendi i valori della riga precedente e ci costruisci un polinomio
    - fai la derivata del polinomio
    - i coeff. della derivata saranno la nuova riga
```

7.2 Criterio di Juri

a_0	a_1	a_2	...	a_{n-1}	a_n	
a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	...	a_1	a_0	
b_0	b_1	b_2	...	b_{n-1}		
b_{n-1}	b_{n-2}	...	b_1	b_0		
...						
...						
...						
μ_0	μ_1	μ_2				
μ_2	μ_1	μ_0				

$$\mathrm{b}_0 = \begin{vmatrix} a_0 & a_n \\ a_n & a_0 \end{vmatrix}$$

$$\mathrm{b}_1 = \begin{vmatrix} a_0 & a_{n-1} \\ a_n & a_1 \end{vmatrix}$$

$$\mathrm{c}_0 = \begin{vmatrix} b_0 & b_{n-1} \\ b_{n-1} & b_0 \end{vmatrix}$$

```
Se valgono tutte le sequenti disequazioni,
allora il sistema è stabile asintoticamente:
```

$$\begin{cases} \| b_{n-1}| < |b_0| \\ \| c_{n-2}| < |c_0| \\ ... \\ ... \\ ... \\ \| \mu_2| < |\mu_0| \end{cases}$$

7.3 Criterio di Lyapunov

$\exists \;\; V(x) : R^n \to R \quad t.c. \quad V(x_e) = 0, \quad \forall x \in \mathcal{I}_{x_e}$

da un sistema di grado > 1, si ottiene la

$$\text{Jacobbiana: } J = \begin{pmatrix} \frac{\partial \dot{x_1}}{\partial x_1} & \frac{\partial \dot{x_1}}{\partial x_2} & ... & \frac{\partial \dot{x_1}}{\partial x_n} \\ \frac{\partial \dot{x_2}}{\partial x_1} & \frac{\partial \dot{x_2}}{\partial x_2} & ... & \frac{\partial \dot{x_2}}{\partial x_n} \\ ... & ... & ... & ... \\ \frac{\partial \dot{x_n}}{\partial x_1} & \frac{\partial \dot{x_n}}{\partial x_2} & ... & \frac{\partial \dot{x_n}}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

$\to \;\; A = J_{|x=x_e}$
$A^T Q + QA = -P$
dove Q e P sono simmetriche

$V(x) = x^T Q x$

dove:
$V(x) > 0 \quad e \quad \dot{V}(x) < 0$

oppure:
$V(x) \geq 0 \quad e \quad \dot{V}(x) \leq 0$

Solitamente si puo considerare:
$V(x) = \frac{1}{2}(x_1 - xe)^2 + \frac{1}{2}(x_2 - xe)^2$

8 Trasformate

8.1 Trasformate di Laplace (s)

$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}dt$

$\delta(t)$	1
$\delta_{-1}(t)$	$\frac{1}{s}$
$\frac{t^k}{k!}$	$\frac{1}{s^{k+1}}$
$e^{\alpha t}$	$\frac{1}{s-\alpha}$
$\sin(wt)$	$\frac{w}{s^2+w^2}$
$\cos(wt)$	$\frac{s}{s^2+w^2}$
$e^{\alpha t}\sin(wt)$	$\frac{w}{(s-\alpha)^2+w^2}$
$e^{\alpha t}\cos(wt)$	$\frac{s-\alpha}{(s-\alpha)^2+w^2}$
$f(t-k)u(t-k)$	$e^{-kt}\mathcal{L}\{f(t)\}$
te^{kt}	$\frac{1}{(s-k)^2}$

8.2 Trasformate Z (z)

$F(z) = \mathcal{Z}\{f(t)\} = \sum_{t=0}^{+\infty} f(t)z^{-t}$

$\delta(t)$	1
$\delta(t-k)$	$\frac{1}{z^k}$
$\delta_{-1}(t)$	$\frac{z}{z-1}$
$\delta_{-1}(t-k)$	$\frac{z}{z^k(z-1)}$
t	$\frac{z}{(z-1)^2}$
$f(t)$	$\frac{d}{dz}F(z)$
λ^t	$\frac{z}{z-\lambda}$
$\lambda^{t-k}\delta_{-1}(t-k)$	$\frac{z}{z-\lambda}$
$\sin(\theta t)$	$\frac{z\sin(\theta)}{z^2-2z\cos(\theta)+1}$
$\cos(\theta t)$	$\frac{z(z-\cos(\theta))}{z^2-2z\cos(\theta)+1}$
$\rho^t\sin(\theta t)$	$\frac{z}{(z-1)^{k+1}}$
$t\lambda^t$	$\frac{-\lambda z}{(z-\lambda)^2}$
$f(t-k)u(t-k)$	$e^{-kt}\mathcal{L}\{f(t)\}$
te^{kt}	$\frac{1}{(s-k)^2}$

9 Diagramma di Bode

Termine	Modulo	Fase
k	$\begin{cases} 20\log_{10} k & se \quad \lvert k\rvert > 0 \\ -20\log_{10} k & se \quad \lvert k\rvert < 0 \end{cases}$	$\begin{cases} 0, & se \quad k > 0 \\ -\pi, & se \quad k < 0 \end{cases}$
s	retta passante per $\omega = 1$, pendenza $20\frac{dB}{dec}$	$\pm\frac{\pi}{2} = cost$
$1 \ \pm \ \tau s$	$\begin{cases} 0 & se \quad \omega < \frac{1}{\tau} \\ 20\frac{dB}{dec} & se \quad \omega > \frac{1}{\tau} \end{cases}$	$\begin{cases} 0 & \text{una decade prima di } \frac{1}{\tau} \\ \pm\frac{\pi}{4} & \text{nel mezzo} \\ \pm\frac{\pi}{2} & \text{una decade dopo di } \frac{1}{\tau} \end{cases}$
$1 \ \pm \ \frac{2z}{\omega_n} s \pm \frac{1}{\omega_n^2} s^2$	$\begin{cases} 0 & se \quad \omega << \omega_n \\ 40\frac{dB}{dec} & se \quad \omega >> \frac{1}{\omega_n} \\ \text{asintoto} & se \quad z < \frac{1}{2} \end{cases}$	$\begin{cases} 0 \qquad \text{una decade prima di } \omega_n \\ \text{nel mezzo, lineare per} \\ z \to 1 \text{ (passa per } \frac{\pi}{2}) \\ \\ \text{nel mezzo, gradino per} \\ z \to 0 \text{ (si allunga dalle 2 decadi)} \\ \pm\pi \qquad \text{una decade dopo di } \omega_n \end{cases}$

```
1) Modulo
    - sale per numeratore (cioè se l'elemento sta al numeratore)
    - scende per denumeratore (cioè se l'elemento sta al denominatore)
2) Fase
    - sale per numeratore positivo
    - scende per numeratore negativo
    - sale per denumeratore negativo
    - scende per denumeratore positivo
```

10 Diagramma di Nyquist

Il diagramma di Nyquist è semplicimente un piano cartesiano che ha come assi:

- L'asse dei Reali (Re) - Asse delle ascisse (x)
- L'asse degli Immaginari (Im) - Asse delle ordinate (y)

Per disegnare il grafico nel diagramma, si osserva il grafico del diagramma di Bode, e poi si procede nel seguente modo:

REGOLA 1

- NON ci sono poli nell'origine s, $\Rightarrow$ si parte dal punto $(k, 0)$, dove $k = \frac{b_0}{a_0}$ con fase:

$$\phi(0) = \begin{cases} 0 & \text{per } k >= 0 \\ 180 & \text{per } k < 0 \end{cases}$$

- SI ci sono poli nell'origine s^v, $\Rightarrow$ si parte dal punto $(\pm\infty, p')$, dove $p' = arbitrario$ con fase:

$$\phi(0) = \begin{cases} -v \cdot 90 & \text{per } k >= 0 \\ \pm 180 - v \cdot 90 & \text{per } k < 0 \end{cases}$$

REGOLA 2

- se $F(s)$ è strettamente propria, cioè grado$_{n}um = n > grado_{d}en = m$,$\Rightarrow$ si finisce nell'origine $(0,0)$, con $k' = \frac{b_n}{a_n}$ si ha fase:

$$\phi(\infty) = \begin{cases} -(n-m)\cdot 90 & \text{per } k' >= 0 \\ \pm 180 - (n-m)\cdot 90 & per k' >= 0 \end{cases}$$

- se $F(s)$ NOPN è strettamente propria, cioè grado$_{n}um = n <= grado_{d}en = m$,$\Rightarrow$ si finisce nel punto $(k', 0)$, con $k' = \frac{b_n}{a_n}$ si ha fase:

$$\phi(\infty) = \begin{cases} -(n-m)\cdot 90 & \text{per } k' >= 0 \\ \pm 180 - (n-m)\cdot 90 & \text{per } k' < 0 \end{cases}$$

Regola 3

- se $F(s)$ ha poli nell'origine s^v con molteplicitá v, $\Rightarrow$ per $\omega \quad 0 \Rightarrow F(j\omega)$ ha ampiezza infitia
  Cioè, in Nyquist c'é una chiusura all'infinito di $v \cdot 180$ tra o^- e 0^+

Intersezioni con gli assi

- se fase $\phi = \pm\, k \cdot \frac{\pi}{2}$, $\Rightarrow$ tocca l'asse Im (y)

- se fase $\phi = \pm\, k \cdot \pi$, $\Rightarrow$ tocca l'asse Re (x)

Individuazione del semipiano

- se fase $\phi = 0 \Rightarrow Re > 0 \quad \& \quad Im > 0$

- se fase $\phi = 90 \Rightarrow Re > 0 \quad \& \quad Im < 0$

- se fase $\phi = 180 \Rightarrow Re < 0 \quad \& \quad Im < 0$

- se fase $\phi = 360 \Rightarrow Re > 0 \quad \& \quad Im > 0$

11 Rappresentazione del sistema dei domini

11.1 Nel dominio s

$\Phi(s) = (sI - A)^{-1}$
$H(s) = (sI - A)^{-1}B$
$\Psi(s) = C(sI - A)^{-1}$
$W(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$

11.2 Nel dominio z

$\Phi(z) = (zI - A)^{-1}$
$H(z) = (zI - A)^{-1}B$
$\Psi(z) = C(zI - A)^{-1}$
$W(z) = C(zI - A)^{-1}B + D$

12 Risposta Forzata

12.1 Tempo continuo

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(S)\} = \mathcal{L}^{-1}\{W(S)U(S)\} = \mathcal{L}^{-1}\{\mathcal{L}\{W(t)\}\mathcal{L}\{u(t)\}\}$$

12.2 Tempo discreto

$$y(k) = \mathcal{Z}^{-1}\{Y(Z)\} = \mathcal{Z}^{-1}\{W(Z)U(Z)\} = \mathcal{Z}^{-1}\{\mathcal{Z}\{W(t)\}\mathcal{Z}\{u(t)\}\}$$

Per il teorema dei residui si consideri:

$$\frac{b_m s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \ ... \ + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \ ... \ + a_1 s + a_0} = \frac{R_1}{s-s_1} + \frac{R_2}{s-s_2} + \ ... \ + \frac{R_n}{s-s_n}$$

13 Risposta a regime permanente

13.1 Ingresso Scalino

$$u(t) = \delta_{-1}(t)$$
$$y_{RP}(t) = \big[W(s)\big]_{s=0}$$

13.2 Ingresso Polinomiale

$$u(t) = \frac{t^k}{k!}$$
$$y_{RP}(t) = \sum_{i=0}^{k} \frac{t^{k-i}}{(k-i)!} \ \frac{1}{i!} \ \left[\frac{di}{ds^i}W(s)\right]_{s=0}$$

13.3 Ingresso periodico

$$u(t) = \sin(wt)$$
$$y_{RP}(t) = |W(s)|_{dB} \ A \ \sin(wt \ + \ \theta \ + \ \angle W(s) \ )$$

13.4 Ingresso esponenziale

$$u(t) = e^{\alpha t}$$
$$y_{RP}(t) = e^{\alpha t} W(s)_{|s=\alpha}$$

14 Matrici Osservabile e Raggiungibile

$$O = \begin{pmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ ... \\ CA^{n-1} \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{I} = span\{Ker(O)\}$$

$$Dim(\mathcal{I}) = n - Dim(Ker(O)) = n - rk(O)$$

$$R = \begin{pmatrix} B & AB & A^2B & ... & A^{n-1}B \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{R} = span\{Im(R)\}$$

$$Dim(\mathcal{I}) = Dim(Im(R)) = rk(R)$$

15 Scomposizione di Kalman

$$\begin{aligned}&\chi_1 = \mathcal{R} \cap \mathcal{I}\\ &\chi_2: \quad \chi_1 \bigoplus \chi_2 = \mathcal{R}\\ &\chi_3: \quad \chi_1 \bigoplus \chi_3 = \mathcal{I}\\ &\chi_4: \quad \chi_1 \bigoplus \chi_2 \bigoplus \chi_3 \bigoplus \chi_4 = R^n\end{aligned}$$

$$T^{-1} = \{ \quad \chi_1 \quad | \quad \chi_2 \quad | \quad \chi_3 \quad | \quad \chi_4 \quad \}$$

In maniera alternativa, non avendo i χ, ma considerando solo $\mathcal{R}$ e $\mathcal{I}$, si può trovare:

$$\begin{aligned}&\mathrm{R} = \{ \ \mathrm{v}_1, \ v_2, \ ..., \ v_n\}\\ &\mathrm{I} = \{ \ \mathrm{w}_1, \ w_2, \ ..., \ w_m\}\\ &\mathrm{T}^{-1} = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & ... & v_n & w_1 & w_2 & ... & w_m \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Se invece si studia solo per uno fra $\mathcal{R}$ o $\mathcal{I}$, si considera:

$$\begin{aligned}&\mathrm{R} = \{ \ \mathrm{v}_1, \ v_2, \ ..., \ v_n\}\\ &\mathrm{T}^{-1} = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & ... & v_n & | & \text{completamento con vettori lin. indip. da quelli presenti} \end{pmatrix}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\mathrm{I} = \{ \ \mathrm{w}_1, \ w_2, \ ..., \ w_m\}\\ &\mathrm{T}^{-1} = \begin{pmatrix} w_1 & w_2 & ... & w_m & | & \text{completamento con vettori lin. indip. da quelli presenti} \end{pmatrix}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\widetilde{A} = TAT^{-1}\\ &\widetilde{B} = TB\\ &\widetilde{C} = CT^{-1}\\ &\widetilde{D} = D\end{aligned}$$

$$\begin{cases} \dot{z} = \widetilde{A}z + \widetilde{B}u = \begin{pmatrix} \widetilde{A}_{1,1} & \widetilde{A}_{1,2} & \widetilde{A}_{1,3} & \widetilde{A}_{1,4}\\ \widetilde{A}_{2,1} & \widetilde{A}_{2,2} & \widetilde{A}_{2,3} & \widetilde{A}_{2,4}\\ \widetilde{A}_{3,1} & \widetilde{A}_{3,2} & \widetilde{A}_{3,3} & \widetilde{A}_{3,4}\\ \widetilde{A}_{4,1} & \widetilde{A}_{4,2} & \widetilde{A}_{4,3} & \widetilde{A}_{4,4} \end{pmatrix} z + \begin{pmatrix} \widetilde{B}_1\\ \widetilde{B}_2\\ \widetilde{B}_3\\ \widetilde{B}_4 \end{pmatrix} u = \begin{pmatrix} \widetilde{A}_{1,1} & \widetilde{A}_{1,2} & \widetilde{A}_{1,3} & \widetilde{A}_{1,4}\\ 0 & \widetilde{A}_{2,2} & 0 & \widetilde{A}_{2,4}\\ 0 & 0 & \widetilde{A}_{3,3} & \widetilde{A}_{3,4}\\ 0 & 0 & 0 & \widetilde{A}_{4,4} \end{pmatrix} z + \begin{pmatrix} \widetilde{B}_1\\ \widetilde{B}_2\\ 0\\ 0 \end{pmatrix} u \\ \\ y = \widetilde{C}z + \widetilde{D}u = \begin{pmatrix} \widetilde{C}_1 & \widetilde{C}_2 & \widetilde{C}_3 & \widetilde{C}_4 \end{pmatrix} + \widetilde{D}u = \begin{pmatrix} 0 & \widetilde{C}_2 & 0 & \widetilde{C}_4 \end{pmatrix} + \widetilde{D}u \end{cases}$$

16 Rappresentazione

$$W(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \ ... \ + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \ ... \ + a_1 s + a_0}$$

16.1 Forma canonica raggiungibile

Da scegliere se W:qxp, ha p<q

$$\mathrm{A}_R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & ... & 0\\ 0 & 0 & 1 & ... & 0\\ ... & & & & \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & ... & -a_{n-1} \end{pmatrix} \quad \mathrm{B}_R = \begin{pmatrix} 0\\ 0\\ ...\\ 0\\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{C}_R = \begin{pmatrix} b_0 & b_1 & b_2 & ... & b_m & 0 & ... & 0 \end{pmatrix}$$

$$---B_R \quad \text{e} \quad C_R \quad \text{devono avere } n \text{ elementi} ---$$

16.2 Forma canonica Osservabile

Da scegliere se W:qxp, ha q<p

$$\mathrm{A}_O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & 0 & ... & 0 & 0 & -a_2 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & 1 & 0 & -a_{n-1} \end{pmatrix} \quad \mathrm{B}_O = \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ ... \\ b_m \\ 0 \\ ... \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{C}_O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & ... & 1 \end{pmatrix}$$

$$---B_O \quad \text{e} \quad C_O \quad \text{devono avere } n \text{ elementi} ---$$

16.3 Realizzazione di Gilbert

Può essere realizzata solo se non sono presenti poli in $s = 0$.

$$A_g = \begin{pmatrix} \overbrace{\begin{matrix} s_1 & ... & \underline{O} \\ ... & ... & ... \\ \underline{O} & ... & s_1 \end{matrix}}^{rk(R_1)} & ... & \underline{O} \\ ... & ... & ... \\ \underline{O} & ... & \underbrace{\begin{matrix} s_1 & ... & \underline{O} \\ ... & ... & ... \\ \underline{O} & ... & s_1 \end{matrix}}_{rk(R_n)} \end{pmatrix} \quad B_g = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ ... \\ B_n \end{pmatrix}$$

$$C_g = \begin{pmatrix} C_1 & C_2 & ... & C_n \end{pmatrix}$$

`Valgono le regole:`

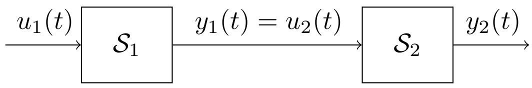
- **A_g è una matrice diagonale che contiene solo gli autovettori λ**
- **REGOLA:** $\mathrm{R}_i = B_i \; C_i$
- $\mathrm{U}^{-1} = \begin{pmatrix} I & \underline{O} & ... \\ \underline{O} & I & ... \end{pmatrix}$

Dato una generica funzione di trasferimento $W(s)$, per calcolare le varie componenti R_i si calcola:
$W(s) = \frac{1}{(s+a_1)(s+a_2)...(s+a_n)} A_{n\ x\ n} + \ ...$

$$R1 = \lim_{s->-a_1} (s + a_1) \frac{1}{(s + a_1)(s + a_2)...(s + a_n)} A_{n\ x\ n}$$
$$R2 = \lim_{s->-a_2} (s + a_2) \frac{1}{(s + a_1)(s + a_2)...(s + a_n)} A_{n\ x\ n}$$
...

17 Sistemi Interconnessi

17.1 In serie



$$S_1 : \begin{cases} \dot{x_1} = A_1 x_1 + B_1 u_1 \\ y_1 = C_1 x_1 + D_1 u_1 \end{cases} \qquad S_2 : \begin{cases} \dot{x_2} = A_2 x_2 + B_2 u_2 \\ y_2 = C_2 x_2 + D_2 u_2 \end{cases}$$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$$

$$u_2 = y_1$$

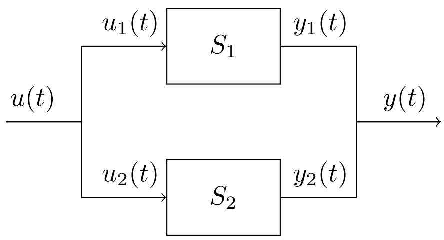
$$W_{TOT}(S) = W_1(S)\ W_2(S)$$

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} \dot{x_1} \\ \dot{x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ B_2 C_1 & A_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 D_1 \end{pmatrix} u$$

$$y = \begin{pmatrix} D_2 C_2 & C_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + D_2 D_1 u$$

Solo se entrambi i sistemi sono stabili, il sistema completo sarà stabile. Se anche uno solo dei 2 sistemi è instabile, l'intero sistema sarà instabile.

17.2 In parallelo



$$S_1 : \begin{cases} \dot{x_1} = A_1 x_1 + B_1 u_1 \\ y_1 = C_1 x_1 + D_1 u_1 \end{cases} \qquad S_2 : \begin{cases} \dot{x_2} = A_2 x_2 + B_2 u_2 \\ y_2 = C_2 x_2 + D_2 u_2 \end{cases}$$

$$u_1 = u_2 = u$$
$$y_1 = y_2 = y$$

$$W_{TOT}(S) = W_1(S) + W_2(S)$$

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} \dot{x_1} \\ \dot{x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix} u$$

$$y = \begin{pmatrix} C_1 & C_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + (D_1 + D_2) u$$

Solo se entrambi i sistemi sono stabili, il sistema completo sarà stabile. Se anche uno solo dei 2 sistemi è instabile, l'intero sistema sarà instabile.

17.3 In retroazione