



ALGORYTMY I STRUKTURY DANYCH

STRUKTURY DANYCH: GRAFY

MINIMALNE DRZEWO ROZPINAJĄCE

Dany jest graf G spójny z wagami.

Drzewo rozpinające – podgraf grafu G , który jest drzewem zawierającym *wszystkie wierzchołki* grafu G .

Minimalne drzewo rozpinające – drzewo rozpinające, dla którego *suma wag krawędzi jest minimalna*.

Graf nieskierowany jest **spójny**, jeśli każdy wierzchołek jest osiągalny ze wszystkich innych wierzchołków.

Przykład

Przy projektowaniu układów elektronicznych często końcówki wielu elementów składowych należy uczynić elektrycznie równoważnymi, łącząc je przewodami. Do połączenia zbioru n końcówek możemy użyć $n-1$ przewodów, z których każdy łączy dwie końcówki. Ze wszystkich możliwych sposobów połączeń najbardziej pożądanym jest zazwyczaj ten, który **minimalizuje łączną długość użytych przewodów**.

Problem łączenia końcówek można modelować za pomocą spójnego grafu nieskierowanego z wagami $G = (V, E, w)$, w którym V jest zbiorem końcówek, a E jest zbiorem możliwych połączeń między parami końcówek. Z każdą krawędzią jest związana waga określająca koszt (długość potrzebnego przewodu) połączenia dwóch wierzchołków.

Problem: Znaleźć acykliczny podzbiór krawędzi $T \subset E$, który łączy wszystkie wierzchołki i którego łączna waga jest najmniejsza.

Rozwiązanie: minimalne drzewo rozpinające.

Reguła zachłanna:

- w algorytmie **Kruskala** – zbiór T jest **lasem**. Do T jest zawsze dodawana ta krawędź w grafie, która ma najmniejszą wagę i która łączy dwie różne składowe (tzn. dwa drzewa z lasu).
- w algorytmie **Prima** zbiór T jest zawsze **pojedynczym drzewem**. Do T jest zawsze dodawana ta krawędź w grafie, która ma najmniejszą wagę i która łączy drzewo wyznaczone przez T z wierzchołkiem spoza tego drzewa.



1. ALGORYTM KRUSKALA

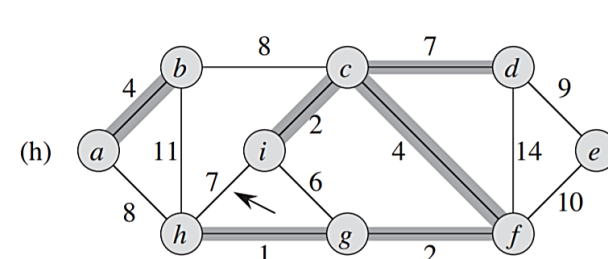
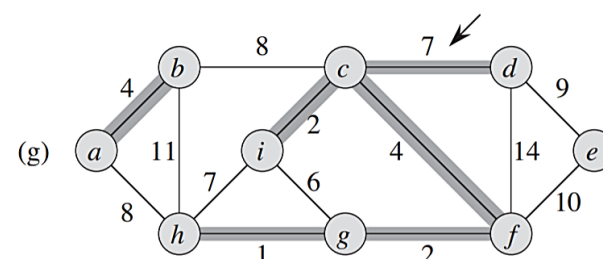
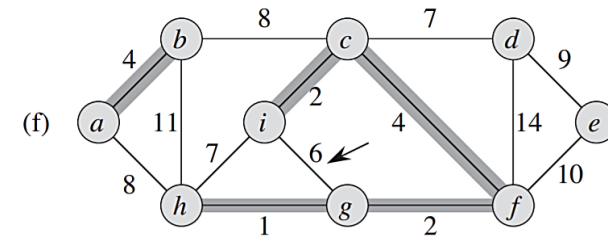
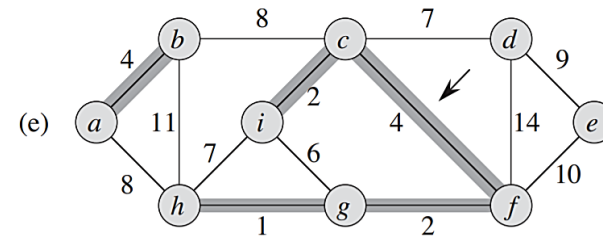
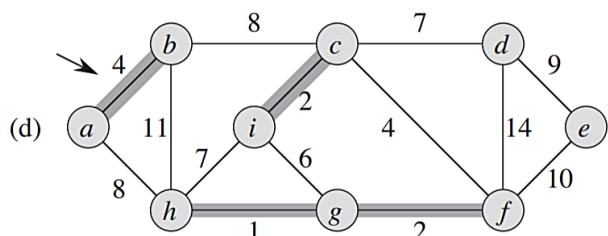
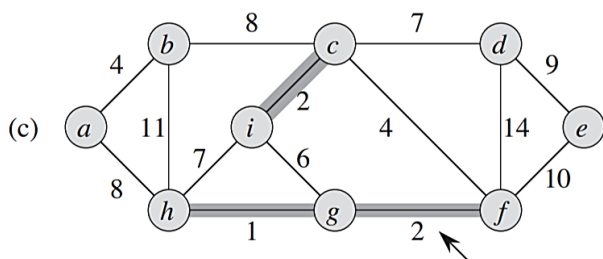
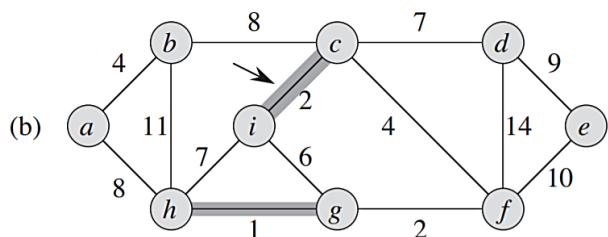
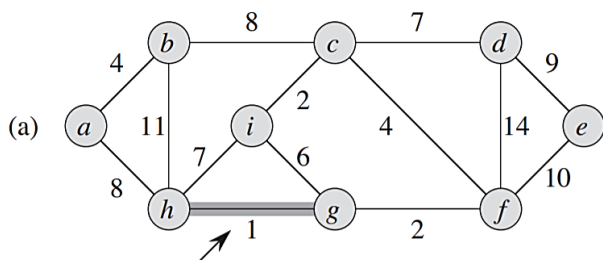
Algorytm Kruskala jest algorytmem zachłannym znajdującym minimalne drzewo rozpinające danego grafu spójnego z wagami. *Reguła zachłanna:* dodaj krawędź o minimalnej wadze, która nie tworzy cyklu. Rozwiązanie częściowe nie musi być drzewem.

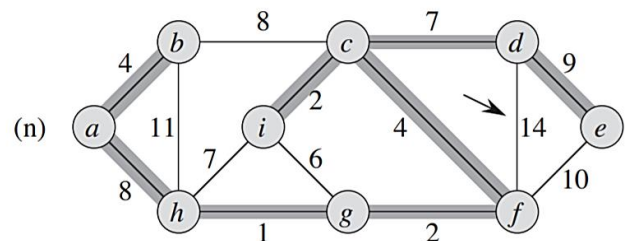
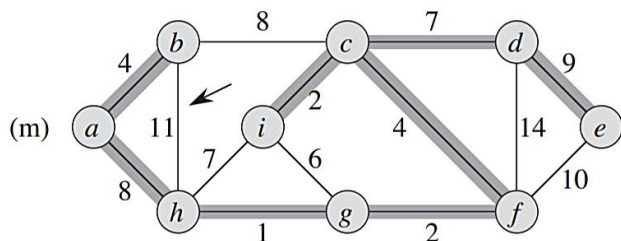
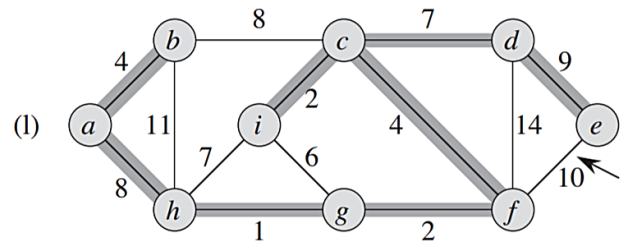
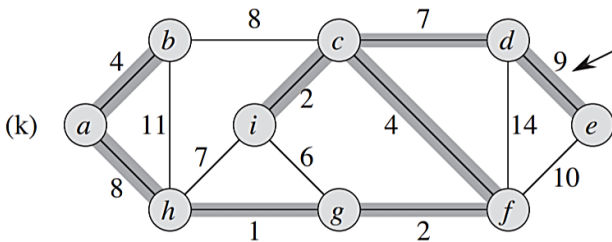
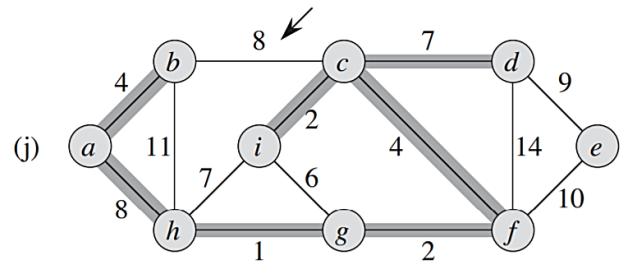
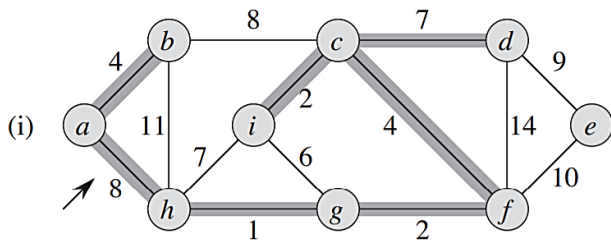
Wejście: $G = (V, E, w)$ – graf spójny nieskierowany z wagami.

Wyjście: T – zbiór krawędzi minimalnego drzewa rozpinającego grafu G .

Algorytm:

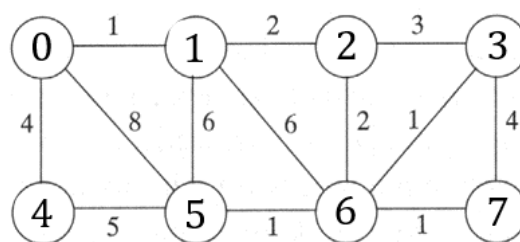
- 1 $T = \emptyset$
- 2 utwórz *rozłączne* podzbiory zbioru V (każdy podzbiór zawiera jeden wierzchołek ze zbioru V)
- 3 *sortuj* zbiór krawędzi E w porządku niemalejącym ze względu na wagi krawędzi
- 4 **for** każda krawędź (u, v) z uporządkowanego zbioru krawędzi E :
- 5 **if** u i v należą do podzbiorów rozłącznych:
- 6 połącz podzbiory zawierające u i v ;
- 7 dodaj krawędź (u, v) do zbioru T





Zadanie 1. Wykonaj krokową analizę działania algorytmu Kruskala dla powyższego grafu. (*Pliki do wykorzystania: [zadania_algorytm_Kruskala_Prima.xlsx](#), [arkusz zadanie_1](#)*).

Zadanie 2. Znajdź minimalne drzewo rozpinające dla poniższego grafu. (*Pliki do wykorzystania: [zadania_algorytm_Kruskala_Prima.xlsx](#), [arkusz zadanie_2](#)*).





2. ALGORYTM PRIMA

Algorytm Prima jest algorytmem *zachłannym* znajdującym minimalne drzewo rozpinające danego grafu spójnego z wagami. Każde rozwiązanie częściowe jest drzewem.

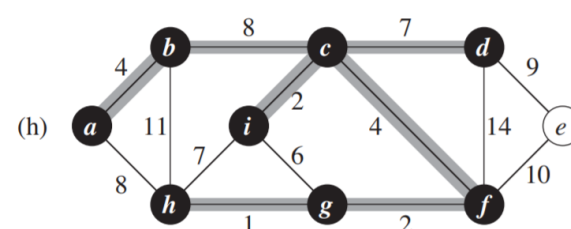
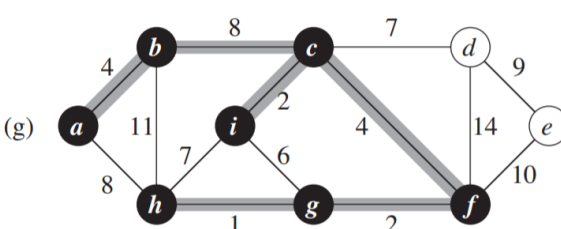
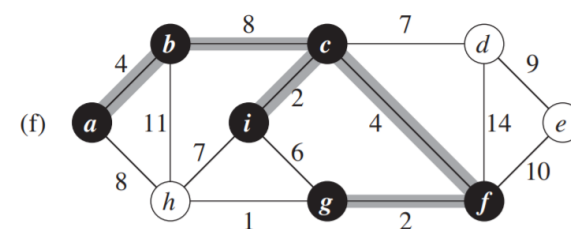
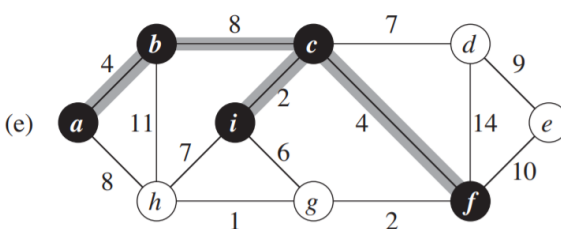
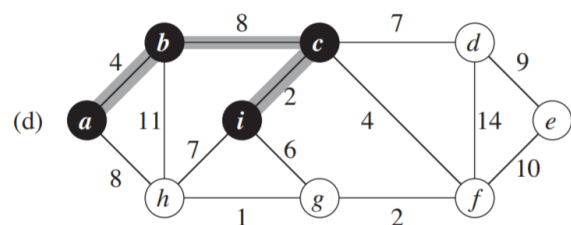
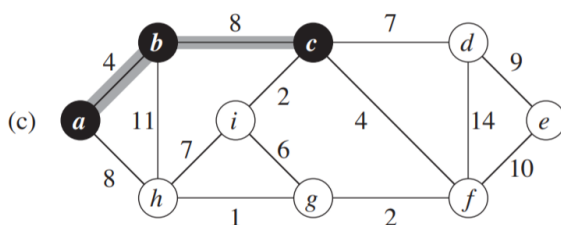
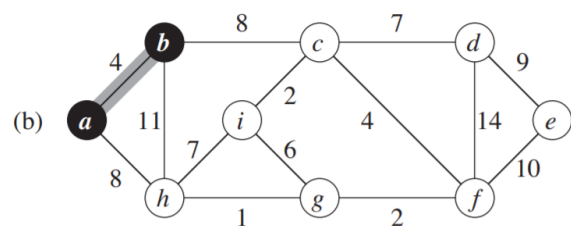
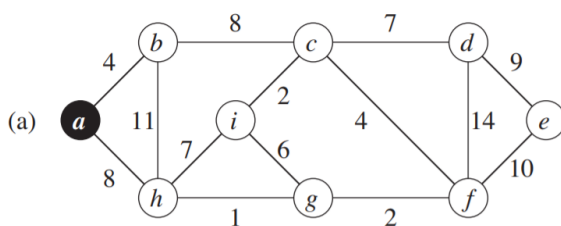
Wejście: $G = (V, E, w)$ – graf spójny z wagami, s - wierzchołek startowy.

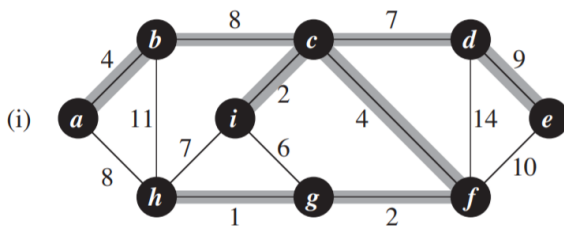
Reguła zachłanna: dodaj krawędź o minimalnej wadze, której jeden wierzchołek należy do bieżącego drzewa, a drugi nie należy do tego drzewa.

Wyjście: T – zbiór krawędzi minimalnego drzewa rozpinającego grafu G .

Algorytm:

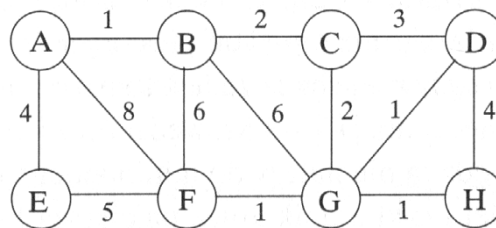
- 1 $T = \emptyset$
- 2 $U = \{s\}$
- 3 **while** $U \neq V$:
- 4 znajdź krawędź $(u, v) \in E$ o minimalnej wadze taką, że $u \in U$ oraz $v \in V - U$
- 5 $T = T \cup \{(u, v)\}$
- 6 $U = U \cup \{v\}$





Zadanie 3. Wykonaj krokową analizę działania algorytmu Prima dla powyższego grafu. (*Pliki do wykorzystania: [zadania_algorytm_Kruskala_Prima.xlsx](#), [arkusz_zadanie_3](#)*).

Zadanie 4. Chcemy znaleźć minimalne drzewo rozpinające dla poniższego grafu.



- wykonaj algorytm Prima; za każdym razem, gdy pojawia się wybór wierzchołka, zawsze użyj tego, który jest pierwszy w kolejności alfabetycznej (startując od wierzchołka A).
- Na tym samym grafie wykonaj algorytm Kruskala.

Zadanie 5. Pokaż, jak znaleźć maksymalne drzewo rozpinające grafu, tzn. drzewo rozpinające o możliwie największej łącznej wadze.

Bibliografia

T. H. Cormen, Ch. E. Leiserson, R. L. Rivest: *Wprowadzenie do algorytmów*. WNT Warszawa 2012.