ALGORYTMY I STRUKTURY DANYCH

METODY UKŁADANIA ALGORYTMÓW:
METODA „DZIEL I ZWYCIĘŻAJ"

Metoda polega na tym, że zamiast rozwiązywać wejściowy problem, który może być problemem trudnym, próbuje się wskazać *jeden* lub *więcej innych problemów*, które są łatwiejsze do rozwiązania, a ich rozwiązanie pozwala na skonstruowanie rozwiązania problemu wejściowego.

Algorytm typu „*dziel i zwyciężaj*" dzieli problem na ***niezależne*** podproblemy, rozwiązuje je ***rekurencyjnie***, a następnie ***łączy*** rozwiązania wszystkich podproblemów w celu utworzenia rozwiązania pierwotnego problemu.

Dziel: Dzielimy problem na pewną liczbę podproblemów, stanowiących mniejsze egzemplarze tego samego problemu.

Zwyciężaj: Rozwiązujemy podproblemy rekurencyjnie. Jeśli jednak rozmiary podproblemów są dostatecznie małe, to rozwiązujemy podproblemy bezpośrednio.

Połącz: Łączymy rozwiązania podproblemów w rozwiązanie pierwotnego problemu.

Formalny zapis metody

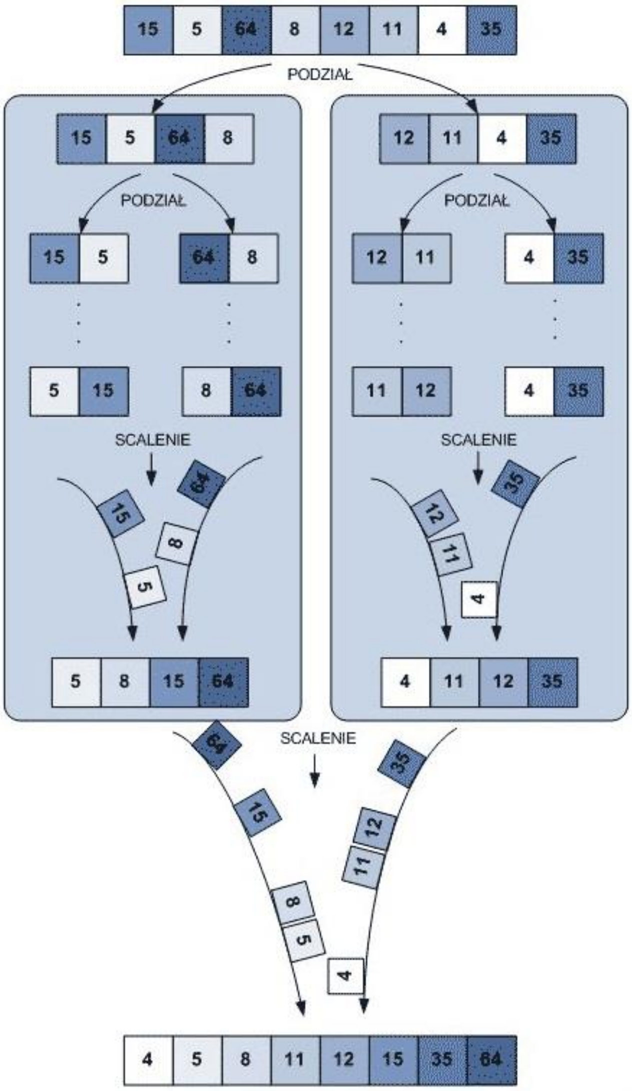
dziel_i_zwyciezaj*(N)*
  jeśli *N* wystarczająco małe
    zwróć *Przypadek_elementarny(N)*
  w przeciwnym przypadku
    Podziel *Pb(N)* na mniejsze egzemplarze: $Pb(N_1), Pb(N_2),..., Pb(N_k)$
    dla $i = 1, ..., k$
      oblicz wynik cząstkowy w_i = ***dziel_i_zwyciezaj***(N_i)
    zwróć *PołączRozwiazania*$(w_1, w_2,..,w_k)$

Zadanie 1. Wykonaj analizę działania algorytmu sortowania szybkiego (*quicksort*) na przykładowych danych. (*Pliki do wykorzystania*: *zadania_dziel_i_rzadz.xlsx,* arkusz *zadanie_1*).

Zadanie 2. Zaimplementuj funkcję *merge*() scalającą dwa posortowane wektory (patrz rysunek na str. 2). Następnie wykonaj analizę działania algorytmu sortowania przez scalanie (*mergesort*) na przykładowych danych. (*Pliki do wykorzystania*: *zadania_dziel_i_rzadz.xlsx,* arkusz *zadanie_2*).

Zadanie 3. Stosując metodę "dziel i zwyciężaj", ułóż algorytm wyznaczania największego elementu wektora.

Zadanie 4. Dana jest tablica *n* liczb całkowitych. Przedstaw algorytm liczący sumę elementów w tablicy z zastosowaniem metody „dziel i zwyciężaj".



ANALIZA ZŁOŻONOŚCI OBLICZENIOWEJ SORTOWANIA PRZEZ SCALANIE

Załóżmy, że rozmiar pierwotnego problemu n jest potęgą dwójki. Wtedy *w każdym kroku* podziału dzielimy problem na podproblemy rozmiaru dokładnie $n/2$.

Dziel: W kroku dzielenia znajdujemy środek przedziału, co zajmuje czas stały, więc $\Theta(1)$.

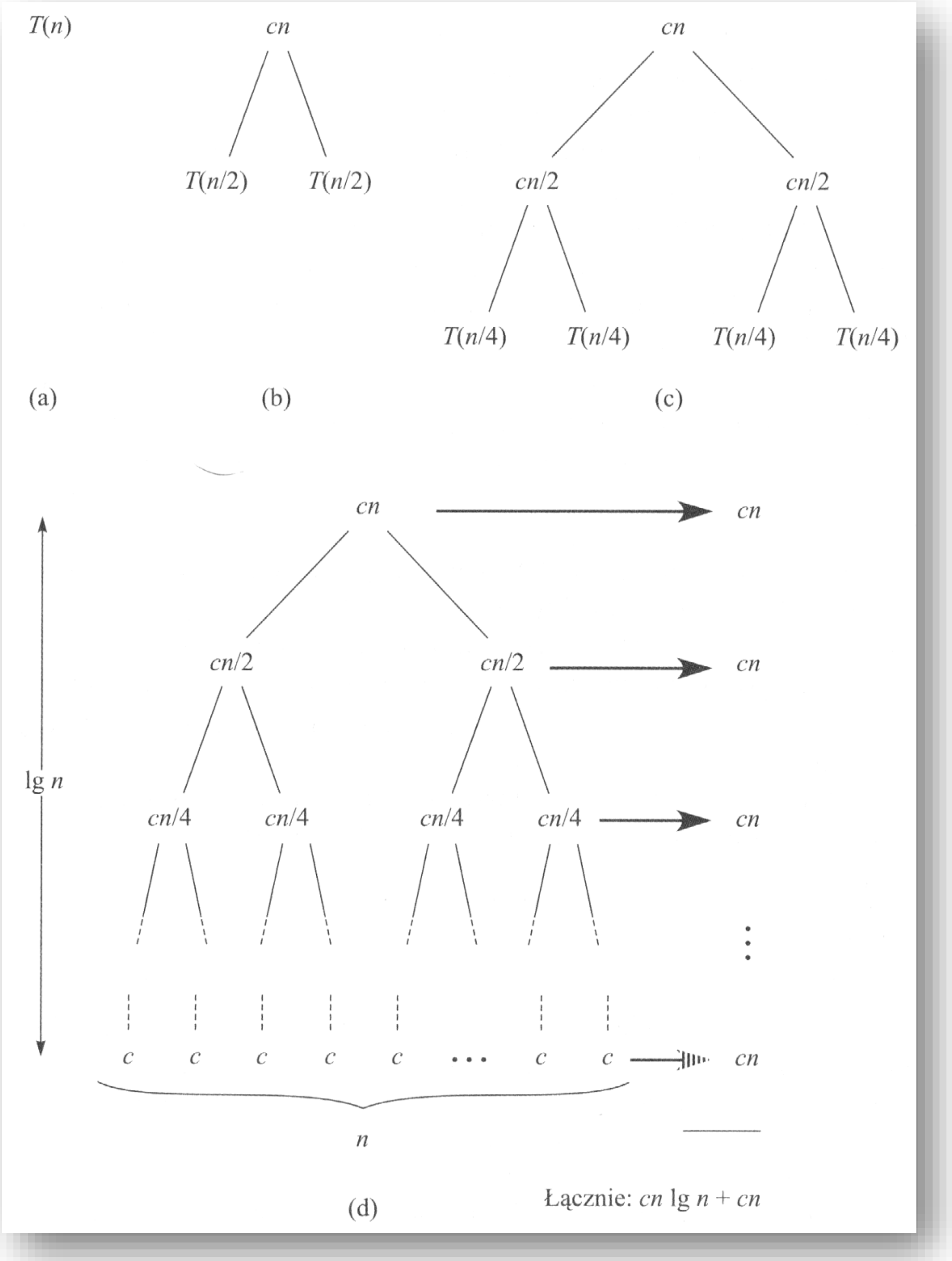
Zwyciężaj: Rozwiązujemy rekurencyjnie dwa podproblemy, każdy rozmiaru $n/2$, co daje w sumie czas $2 * T(n/2)$.

Połącz: Procedura *merge*() działa dla n elementowej podtablicy w czasie $\Theta(n)$.

Czas działania sortowania przez scalanie w przypadku pesymistycznym wynosi:

$$T(n) = \begin{cases} \Theta(1) & jeśli\ n = 1 \\ 2T(n/2) + \Theta(n) & jeśli\ n > 1 \end{cases} = \begin{cases} c & jeśli\ n = 1 \\ 2T(n/2) + cn & jeśli\ n > 1 \end{cases}$$

$$T(n) = \begin{cases} c & jeśli\ n = 1 \\ 2T(n/2) + cn & jeśli\ n > 1 \end{cases}$$



Zsumujemy teraz koszty na każdym poziomie drzewa. Koszt na najwyższym poziomie to cn, drugi poziom wnosi koszt $c\left(\frac{n}{2}\right) + c\left(\frac{n}{2}\right) = cn$, kolejny poziom wnosi koszt $c\left(\frac{n}{4}\right) + c\left(\frac{n}{4}\right) + c\left(\frac{n}{4}\right) + c\left(\frac{n}{4}\right) = cn$. Na najniższym poziomie jest n węzłów, każdy wnoszący koszt c, co w sumie daje koszt cn.

Łączna liczba poziomów "drzewa rekursji" jest równa $\log_2 n + 1$, a każdy poziom wnosi koszt cn, co daje łączny koszt $cn(\log_2 n + 1)$= $cn \log_2 n + cn$. Pomijając składnik niższego rzędu i stałą c, otrzymujemy wynik $\Theta(n \log_2 n)$.