

## Содержание

<b>1</b>	<b>Бинарное дерево поиска</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Scapegoat tree</b>	<b>2</b>
2.1	Структура дерева . . . . .	2
2.2	Время работы . . . . .	4
<b>3</b>	<b>Splay tree</b>	<b>4</b>
3.1	Общая структура дерева . . . . .	4
3.2	Splay . . . . .	5
<b>4</b>	<b>Об оффлайн деревьях поиска: нижняя граница времени работы, геометрическое представление</b>	<b>9</b>
4.1	Основные определения и предваряющие результаты . . . . .	9
4.2	Оценка снизу числа OPT . . . . .	10
4.3	Более практичная оценка снизу . . . . .	13
4.4	Оценка снизу через число перебежек . . . . .	14
<b>5</b>	<b>Tango деревья</b>	<b>14</b>
<b>6</b>	<b>Link-Cut trees</b>	<b>15</b>
6.1	Описание структуры, план действий . . . . .	15
6.2	Выражение операций на дереве через операции на путях . . . . .	16
6.3	Операции на путях . . . . .	18
<b>7</b>	<b>Mergeable trees</b>	<b>19</b>
7.1	Описание структуры и чего мы хотим от этой структуры . . . . .	19
7.2	Реализация merge . . . . .	20
7.3	Merge без операций cut . . . . .	23
7.3.1	Новая структура дерева . . . . .	23
7.3.2	Стек $S_v$ . . . . .	24
7.3.3	Link . . . . .	24
7.3.4	Merge . . . . .	25
7.3.5	Поисковая структура на путях . . . . .	26
<b>8</b>	<b>Динамизация структур данных</b>	<b>27</b>
8.1	. . . . .	27
8.2	. . . . .	30
8.3	. . . . .	32
<b>9</b>	<b>Структуры данных и путешествия во времени</b>	<b>32</b>
9.1	Персистентность . . . . .	33
9.2	Ретрактивность . . . . .	35
9.3	Нижняя оценка на создание ретроактивной структуры: wordRAM . . . .	39

# 1 Бинарное дерево поиска

Записал: Борис Золотов

В каждом узле бинарного дерева поиска хранятся *ключ*  $a$  и два поддерева, правое и левое. Все ключи в левом поддереве не превосходят  $a$ , а в правом — не меньше  $a$ . Алгоритм поиска — начиная с корня, сравниваем искомый ключ с ключом в узле, в зависимости от сравнения спускаемся в правое или в левое поддерево.

Вставка в бинарное дерево — поиск + вставляем туда, куда пришёл поиск. Чтобы удалить элемент — ставим на его место самый левый элемент в его правом поддереве.

Проблема такой наивной структуры — может вместо дерева получиться палка (если, например, ключи приходят в порядке по убыванию), и поиск будет занимать  $\mathcal{O}(n)$ . Красно-чёрные деревья, например, следят за тем, чтобы дерево всегда имело высоту  $\mathcal{O}(\log n)$ .

**Определение 1.** Дерево называется идеально сбалансированным (perfectly balanced tree), если размеры детей каждой ее вершины отличаются не больше, чем на 1.

Хотим научиться поддерживать  $\pm$ баланс, не храня много дополнительной информации (такой, как атрибуты red/black) — в идеале,  $\mathcal{O}(1)$  дополнительных данных, какие-нибудь несколько чисел про дерево в целом. Это умеют две структуры.

## 2 Scapegoat tree

Записал: Борис Золотов

*Источники: [GR93; And89]. Мы в основном опираемся на [GR93].*

### 2.1 Структура дерева

Зафиксируем константу  $\frac{1}{2} < \alpha < 1$ . Будем рассматривать структуру данных, в которой хранится дерево  $tree$ . Также будем хранить текущее количество узлов в дереве —  $size$ . У каждого узла  $node$  есть дети  $left$ ,  $right$  и ключ  $key$ .

**structure** TREE

root  
size  
maxSize

**structure** NODE

left, right  
key

Мы хотим, чтобы глубина дерева была  $\mathcal{O}(\log n)$ , где  $n$  — количество узлов в дереве. Для этого заведем несколько условий

**condition**  $\alpha$ -WEIGHT( $node\ x$ )

$\max\{size(x.left), size(x.right)\} \leq \alpha \cdot size(x)$

**condition**  $\alpha$ -HEIGHT( $node\ x$ )

$depth(x) \leq \lfloor \log size \rfloor + 1$

**condition** WEAK  $\alpha$ -HEIGHT(node  $x$ )

$$\text{depth}(x) \leq \lfloor \log \text{maxSize} \rfloor + 1$$

$\triangleright$  maxSize will be defined later

Желаемая максимальная высота дерева ( $n$  — количество узлов с ключами) —  $\mathcal{O}(\log_{\frac{1}{\alpha}} n)$ .

Если  $\alpha = \frac{1}{2}$ , то результатом будет идеально сбалансированное дерево, то есть  $\alpha$  — это, грубо говоря, разрешённое отклонение размера поддеревьев от состояния баланса.

Узел называется *глубоким*, если он нарушает weak  $\alpha$ -height condition. Глубокие узлы мы не любим и каждый раз, когда они у нас будут появляться, мы будем переподвешивать часть дерева так, чтобы они переставали быть глубокими.

Заметим, что если дерево  $\alpha$ -weight balanced, то оно и  $\alpha$ -height balanced. Обратного следствия нет, потому что может быть «один сын справа, а слева сбалансированное поддерево».

Иногда мы будем перестраивать все дерево. Чтобы реализовать вставку и удаление, нам также потребуется хранить величину maxSize для всего дерева tree. maxSize — штука, отвечающая какой максимальный размер был у дерева с момента последней его полной перестройки. (То есть, кроме собственно дерева с ключами, мы храним дополнительно только size и maxSize — два числа.) Также, нам понадобится еще один инвариант для нашего дерева

$$\text{Инвариант: } \alpha \cdot \text{maxSize} \leq \text{size} \leq \text{maxSize}$$

Заметим, что из этого инварианта следует, что глубина дерева без глубоких вершин не превосходит  $\mathcal{O}(\log n)$ .

*Удаление:* просто удаляем. Проверяем, не нарушился ли инвариант. Если нарушился — просто перестроим всё дерево с нуля, сделав массив с ключами за линию и соорудив из него идеально сбалансированное дерево. size при этом уменьшается на 1, а maxSize = size.

*Вставка:* сначала стандартная вставка, добавляем ключ в лист. При этом size увеличивается на 1,

$$\text{maxSize} := \max\{\text{maxSize}, \text{size}\}.$$

Может, однако, оказаться так, что новый узел  $x$  оказался глубоким. Тогда рассмотрим путь от  $x$  до корня  $a_0 \dots a_H$  и найдём среди этих узлов (просто за линию, посчитав количество) самый нижний, не сбалансированный по весу (такой найдётся, докажем) и перестраиваем (глупо, за линию) дерево под ним.

**Теорема 1.** Среди  $a_0 \dots a_H$  всегда найдётся узел, не сбалансированный по весу (козёл отпущения).

*Доказательство.* Пусть нет, тогда  $\text{size}(a_i) \leq \alpha \cdot \text{size}(a_{i+1})$ . Тогда  $\text{size}(x) \leq \alpha^H \cdot \text{size}(T)$ . Прологарифмируем это неравенство по основанию  $\frac{1}{\alpha}$ :

$$0 \leq -H + \log_{\frac{1}{\alpha}} n$$

□

**Теорема 2.** При вставке элемента сохраняется сбалансированность по высоте.

*Доказательство.* Интересен только случай, когда вставленный элемент глубокий. Достаточно показать, что при перестройке глубина перестроенного поддерева уменьшится. Заметим, что у нас в каждый момент времени бывает не более одного глубокого элемента (при вставке может появиться только один, вот-вот вставленный, а при удалении `maxSize` меняется только если все дерево было перестроено), значит, глубина поддерева может остаться прежней тогда и только тогда, когда выбранное поддерево состояло из полного поддерева с добавленным к нему одним глубоким элементом. Но такое поддерево удовлетворяет условию сбалансированности по весу, а значит, мы его не могли выбрать. □

Корректность мы показали, но у нас остались операции перестройки, которые работают в худшем случае за линейно. Покажем, что они хорошо амортизируются.

## 2.2 Время работы

Сначала разберемся с перестройкой дерева при удалении. Эта операция линейна и происходит не чаще, чем раз в  $\alpha \cdot \text{size}(T)$  операций удаления, а значит, имеет ее амортизированная сложность  $\mathcal{O}(1)$ .

Осталась операция перестройки нижнего несбалансированного поддерева при вставке. Пусть корень этого дерева —  $x$ . У этого поддерева есть больший ребенок (не умаляя общности будем считать, что он левый) и меньший (соответственно, правый). Рассмотрим все операции вставки в левое поддерево и удаления из правого поддерева с момента последней перестройки какого-либо родителя  $x$ . Для того, чтобы  $x$  перестал быть сбалансированным по высоте, их количество должно быть хотя бы линейно от  $\text{size}(x)$ . Сопоставим все эти операции перестройке дерева. Заметим, что каждая вставка и удаление была сопоставлена не более чем  $\mathcal{O}(\log n)$  перестройкам, значит, амортизированная сложность этих операций не увеличилась. При этом каждой перестройке мы сопоставили линейное количество вставок и удалений, значит, амортизированная сложность всех перестроек не превосходит  $\mathcal{O}(1)$ .

Таким образом, операции вставки и удаления работают за амортизированное время  $\mathcal{O}(\log n)$ .

## 3 Splay tree

*Записал: Никита Гаевой*

*Оригинальная статья: [ST85]*

### 3.1 Общая структура дерева

В этом дереве мы каждый раз, когда захотим что-то сделать с вершиной, будем поднимать ее до корня (операция `splay`). В самом дереве в этот раз мы можем не

хранить ничего, кроме корня `root`. Но часто хочется уметь быстро считать размер дерева, для этого можно хранить отдельную переменную `size` для всего дерева.

```
structure TREE
  root
  size
structure NODE
  left, right
  key
```

▷ optional

Выразим сначала операции `insert` и `erase` через операцию `splay`, а потом будем разбираться со `splay`. Для `erase` нам понадобится операция `splay_front(node)`. Эта операция делает `splay` для наименьшего ключа в поддереве.

```
1: procedure INSERT(x)
2:   standard_insert(x)
3:   splay(x)
4: procedure GET(x)
5:   splay(x)
6: procedure ERASE(x)
7:   splay(x)
8:   splay_front(root.right)
9:   standard_erase(x)
```

Два вызова функции `splay` при удалении нужны для того, чтобы правый сын корневой вершины не имел левого сына (потому что он содержит наименьший ключ в своем поддереве) и операция `standard_erase(x)` работала за  $\mathcal{O}(1)$  (потому что она просто возьмет этого правого сына и поставит на место удаленного корня). Еще стоит отметить, что даже при простом доступе к вершине мы вызываем операцию `splay`, это нужно потому что наше дерево может иметь довольно большую глубину во время работы, а оценка у нас будет только на амортизированную сложность операции `splay`.

Ниже мы будем оценивать сложность `splay` при фиксированном множестве ключей в дереве, покажем, что этого достаточно. Удаление вершины из дерева испортит время работы очевидно не сможет, а при добавлении мы спускаемся на полную глубину дерева и можно считать, что искомая вершина была в дереве всегда, просто мы ее не трогали до момента добавления. Тут стоит обратить внимание на то, что с таким подходом, если у нас был какой-то ключ, мы его удалили, а потом добавили обратно, то в оценке времени работы их надо рассматривать как два различных ключа.

## 3.2 Splay

Итак, нам надо научиться понимать вершину в корень. Это делается при помощи нескольких видов вращений дерева. Все вращения в дальнейшем будем рассматривать с точностью до симметрии. Простейшее вращение называется `zig` (см. рис. 1). Легко видеть, что это вращение поднимает вершину  $x$  на один уровень выше. При помощи одного этого вращения можно поднять вершину в корень, но для амортизационного анализа нам этого не хватит, поэтому мы будем делать сразу двойные вращения.

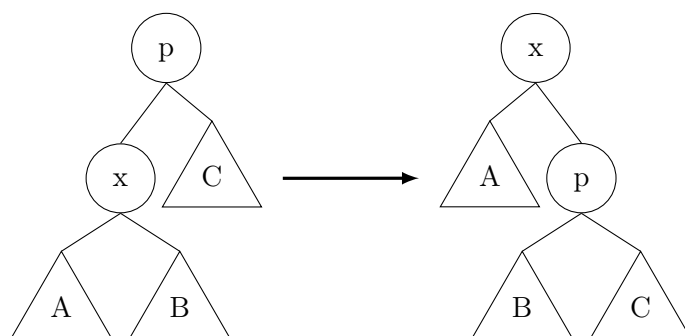


Рис. 1: Zig

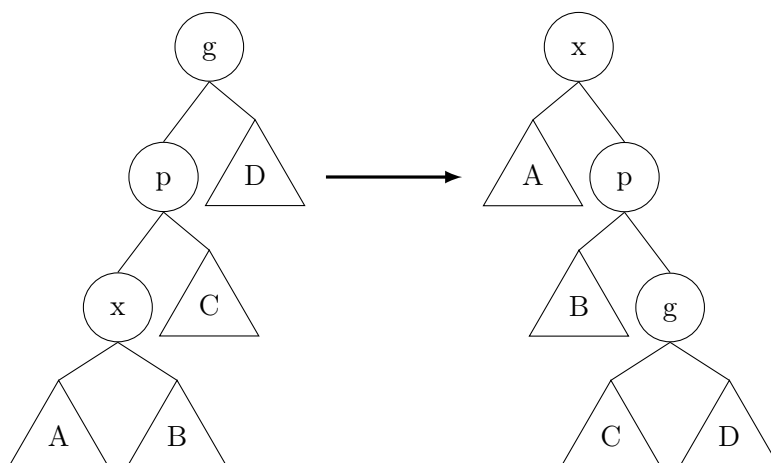


Рис. 2: Zig-zig

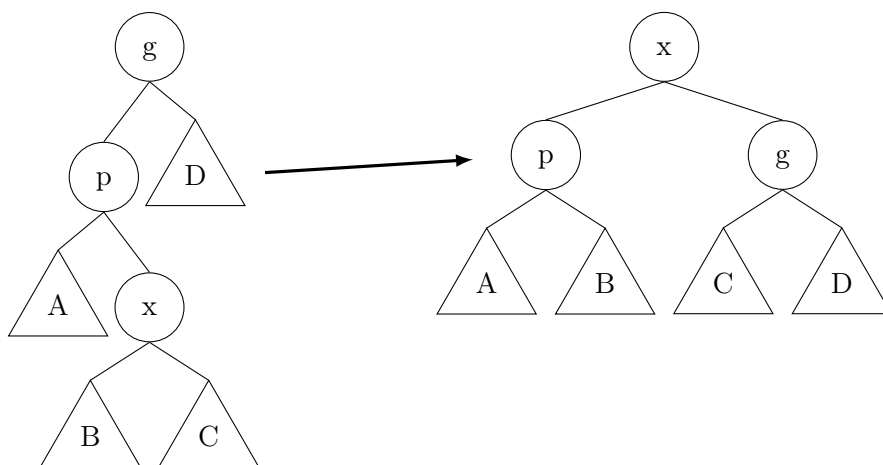


Рис. 3: Zig-zag

Двойные вращения бывают двух видов: zig-zig (рис. 2) и zig-zag (рис. 3). Оба эти вращения реализуются при помощи пары вращений zig, но для того, чтобы выразить zig-zig, надо сначала выполнить zig от вершины  $p$ , и только потом от  $x$ . Zig-zag при этом выражается как два вызова zig от  $x$ . Стоит отметить, что при splay мы не сможем выполнить двойное вращение, если интересующая нас вершина непосредственный сын корня, тогда мы должны сделать zig и не забыть его посчитать при анализе (но он может быть только один).

Для анализа, мы воспользуемся методом потенциалов. Для начала наведем функцию  $w: \text{keys} \rightarrow \mathbb{R}_+$ . На нее тоже будут какие-то условия. Про то, какой она может быть, поймем позже, пока можно считать, что она всегда возвращает 1, реально менять ее придется только для следствий. Определим функцию «размера» поддерева  $s(x) = \sum_{v \in \text{subtree of } x} w(v)$  и функцию «ранга»  $r(x) = \log_2 s(x)$  (логарифм двоичный, это неожиданно важно, но дальше основание писать не будем), а функцией потенциала всего дерева  $T$  будет  $\Phi(T) = \sum_{x \in T} r(x)$ . Для того, чтобы метод потенциалов работал, нужно чтобы  $\Phi$  всегда было неотрицательно (ну или придется оценить оценить насколько сильно оно бывает отрицательным и прибавить к асимптотике). При  $w \equiv 1$  это очевидно, а вообще это надо запомнить как первое ограничение на  $w$ . Амортизированная стоимость операции splay  $\text{am.cost} = \Delta\Phi + \#\text{rotations}$  (да, это просто определение). Пусть мы выполнили один splay. Теперь  $r(x)$  и  $s(x)$  будут обозначать значения до вызова операции, а  $r'(x)$  и  $s'(x)$  — после. Тогда на самом деле мы хотим доказать следующую теорему:

**Теорема 3.**  $\text{am.cost} \leq 3(r'(x) - r(x)) + \mathcal{O}(1)$

*Доказательство.* Надо оценить  $\Delta\Phi$  для каждого из вращений.

*Zig:*

$$\begin{aligned} \Delta\Phi &= r'(p) - r(p) + r'(x) - r(x) \\ &= r'(p) - r(x) && \text{since } r'(x) = r(p) \\ &\leq r'(x) - r(x) && \text{since } p \text{ is lower than } x \text{ after zig} \end{aligned}$$

Дополнительно стоит отметить, что  $r'(x) \geq r(x)$  поскольку слева написана сумма по большему множеству, поэтому если мы вдруг захотим это умножить на какую-нибудь произвольно взятую константу 3, ничего не испортится.

*Zig-zig:*

$$\begin{aligned} \Delta\Phi &= r'(g) - r(g) + r'(p) - r(p) + r'(x) - r(x) \\ &= r'(g) + r'(p) - r(p) - r(x) \\ &\leq r'(g) + r'(x) - 2r(x) && \text{due to the tree structure} \\ &\leq 3(r'(x) - r(x)) - 2 && \text{since } r'(g) + r(x) \leq 2(r'(x) - 1) \end{aligned}$$

Осталось показать почему  $r'(g) + r(x) \leq 2(r'(x) - 1)$ .

$$\begin{aligned}
\frac{r'(g) + r(x)}{2} &= \log s'(g) + \log s(x) \\
&\leq \log \left( \frac{s'(x) - w(p)}{2} \right) && \text{Jensen's inequality} \\
&= \log(s'(x) - w(p)) - 1 \\
&\leq r'(x) - 1
\end{aligned}$$

*Zig-zag:*

$$\begin{aligned}
\Delta\Phi &= r'(g) - r(g) + r'(p) - r(p) + r'(x) - r(x) \\
&= r'(g) + r'(p) - r(p) - r(x) \\
&\leq r'(g) + r'(p) - 2r(x) && \text{due to the tree structure} \\
&\leq 3(r'(x) - r(x)) - 2 && \text{since } r'(g) + r'(p) \leq 2(r'(x) - 1)
\end{aligned}$$

Доказательство неравенства  $r'(g) + r'(p) \leq 2(r'(x) - 1)$  в точности повторяет доказательство аналогичного неравенства выше.

Изменения потенциала от каждого двойного вращения мы оценили как  $3(r'(x) - r(x)) - 2$ . Все наши страдания были на самом деле направлены на то, чтобы получить двойку в конце. Теперь, когда мы просуммируем по всем вращениям при операции `splay`, мы получим оценку  $\Delta\Phi \leq 3(r'(x) - r(x)) - \#rotations + \mathcal{O}(1)$ , поскольку все промежуточные  $r(x)$  скомпенсируются, `zig` будет вызван не более одного раза, а в оценке двойных вращений есть слагаемое  $-2$ , которые просуммируются в количество вращений. Таким образом,  $\text{am.cost} = \Delta\Phi + \#rotations \leq 3(r'(x) - r(x)) + \mathcal{O}(1)$ , что нам и надо.  $\square$

Ниже мы будем считать, что наше дерево работает с ключами  $1 \dots n$ , выполняет  $m$  операций, а  $W := \sum_i w(i)$ . Теперь нам надо выбрать  $w$ . Надо вспомнить какие условия ограничения мы насобирали на  $w$ . Ограничения у нас появлялись в двух местах: из определения  $w > 0$  (потому что мы потом хотим логарифмировать) и из метода потенциалов  $\Phi \geq 0$ . При  $w \geq 1$  потенциал неотрицателен автоматически, поскольку все слагаемые неотрицательны.

**Следствие 4** (Balance Theorem). *Амортизированное время работы на любой последовательности из  $m$  запросов  $\mathcal{O}(m \log n + n \log n)$ .*

*Доказательство.* Берем  $w(x) = 1$ .  $\square$

**Следствие 5** (Static Optimality Theorem). *Пусть  $q_x$  — количество доступов к элементу  $x$ . Тогда амортизированное время работы  $\mathcal{O}\left(m + \sum_x q_x \log\left(\frac{m}{q_x}\right)\right)$ .*

*Доказательство.* Берем  $w(x) = q_x$ .  $\square$

Из этой теоремы следует, что `splay` дерева работают не хуже (с точностью до константного множителя, конечно), чем оптимальное статическое дерево поиска. Аналогичное утверждение про динамические деревья остается открытой проблемой.



**Гипотеза 6** (Dynamic Optimality Conjecture). Пусть  $A$  — произвольное двоичное дерево поиска, которое может делать некоторые вращения (Zig, рис. 1), и обрабатывать запрос на доступ к вершине за ее глубину. Обозначим  $A(S)$  — время работы  $A$  на последовательности запросов  $S$ . Тогда время работы  $splay$  дерева на последовательности  $S$  не превосходит  $\mathcal{O}(n + A(S))$ .

Для следующего следствия стоит вспомнить, что мы считаем, что элементы  $1 \dots n$ .

**Следствие 7** (Static Finger Theorem). Пусть  $f$  — некоторый фиксированный элемент, «finger». Тогда время работы  $\mathcal{O}\left(m + n \log n + \sum_{x - \text{запрос}} \log(|x - f| + 1)\right)$ .

*Доказательство.* Берем  $w(x) = \frac{1}{(|x-f|+1)^2}$ . Тогда  $W = \mathcal{O}(1)$ , а потенциал может быть отрицательным, но не больше, чем на  $\mathcal{O}(n \log n)$ , поскольку  $w \geq \frac{1}{n^2}$ , это слагаемое мы можем просто искусственно добавить к потенциалу и, следовательно, асимптотике.  $\square$

**Следствие 8** (Dynamic Finger Theorem). Аналогично, но теперь  $f$ , «finger» — элемент, к которому обращались предыдущим запросом (и, следовательно, находящийся в корне). Тогда время работы  $\mathcal{O}\left(m + n + \sum_{x - \text{запрос}} \log(|x - f| + 1)\right)$ .

*Доказательство.* Надо бы как-нибудь доказать.  $\square$  todo 1

**Теорема 9** (Scanning Theorem or Sequential Access Theorem or Queue theorem). Доступ к элементам в порядке возрастания работает за амортизированную единицу на запрос.

*Доказательство.* Следует из Dynamic Finger Theorem (Corollary 8).  $\square$

## 4 Об оффлайн деревьях поиска: нижняя граница времени работы, геометрическое представление

Записал: Борис Золотов

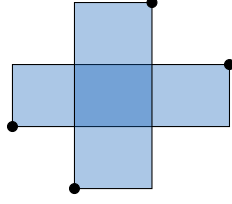
### 4.1 Основные определения и предваряющие результаты

Пусть дано бинарное дерево поиска с  $n$  ключами. Мы знаем последовательность запросов, которые зададим этому дереву:  $P = \{s_1, s_2, \dots, s_m\}$ . В поисках ключей  $s_i$  мы будем бегать по дереву туда-сюда и в процессе спуска/подъёма пройдем через некоторые вершины, которые нам не нужны.

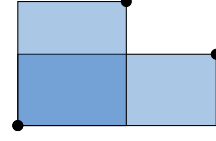
**Определение 2.**  $E(P)$  — множество всех вершин, которые мы посетим в процессе поиска вершин с ключами из  $P$ .  $E = P \cup X$ ,  $X$  — множество «лишних» вершин.

**Определение 3.** OPT — минимальный размер  $E(P)$  (обозначение множества  $P$  будем опускать, и так по контексту ясно).

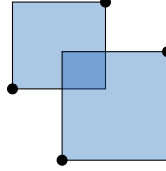
**Определение 4.** Пусть  $a, b \in \mathbb{R}^2$ . Тогда  $\text{rect}(a, b)$  — прямоугольник, стороны которого параллельны осям координат, а противоположные вершины — точки  $a$  и  $b$ . Его же будем называть *прямоугольником, определённым точками  $a, b$* .



(a) Эти прямоугольники независимы



(b) Эти прямоугольники независимы



(c) Эти прямоугольники **не** независимы

Рис. 4: Примеры прямоугольников, независимых и не очень

**Определение 5.** Конечное множество  $G \subset \mathbb{R}^2$  называется *arborally satisfiable*, если

$$\begin{aligned} &\forall a, b \in G \quad x(a) = x(b), \text{ либо } y(a) = y(b), \text{ либо} \\ &\exists c \in \text{rect}(a, b) \quad (\text{внутри или на границе}). \end{aligned}$$

**Теорема 10** (Доказана ранее). Рассмотрим последовательность запросов

$$\{(s_1, 1), (s_2, 2), \dots, (s_m, m)\} \subset \mathbb{Z}^2.$$

Надмножество этой последовательности может представлять из себя последовательность узлов, которые были посещены при поиске  $s_1, \dots, s_m$ , в том и только том случае, если оно *arborally satisfiable*.

Далее мы будем рассматривать изображение последовательности запросов на плоскости, соответственно под множеством  $P$  будем понимать  $\{(s_1, 1), (s_2, 2), \dots, (s_m, m)\}$ , аналогично вторую координату приделаем к ключам вершин из множества  $E$ .

**Определение 6.** Пусть дано множество  $P$  и его надмножество  $E$ . Два прямоугольника, определённых каждой двумя вершинами множества  $P$ , будем называть *независимыми* (смотреть Рисунок 4), если

- 1) они оба не *arborally satisfiable*, то есть им не принадлежит ни одна точка из  $E$ ,
- 2) ни одна из вершин одного из этих прямоугольников не лежит во внутренности другого.

## 4.2 Оценка снизу числа ОРТ

**Определение 7.** Будем говорить, что прямоугольник, определённый точками  $(x_1, y_1)$ ,  $(x_2, y_2)$ , имеет тип «+», если  $(x_1 - x_2) \cdot (y_1 - y_2) \geq 0$ , иначе прямоугольник имеет тип «-» (смотреть Рисунок 5).



Рис. 5: Прямоугольники типа «+» и типа «-».

**Определение 8.**  $\text{MAXIND}$  — наибольшее число попарно независимых прямоугольников, определённых точками из  $P$ . Соответственно,  $\text{MAXIND}_+$ ,  $\text{MAXIND}_-$  — наибольшие количества попарно независимых прямоугольников фиксированного типа.

**Теорема 11.**

$$\text{OPT} \geq |P| + \frac{1}{2} \text{MAXIND}. \quad (1)$$

Прежде чем приступить к доказательству Теоремы 11, докажем следующую лемму:

**Лемма 12.**

$$\text{OPT}_+(P) \geq |P| + \frac{1}{2} \text{MAXIND}_+(P). \quad (2)$$

Здесь  $\text{OPT}_+$  — количество точек в множестве  $E(P)$ , нужное для того, чтобы множество всех прямоугольников типа «+» было *arborally satisfiable*. Это более слабое условие.

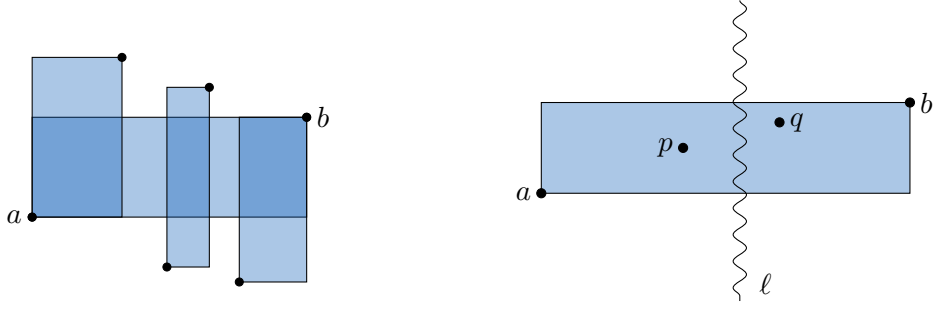
Далее мы забываем о том, что множества точек, с которыми мы работаем, — это вообще говоря выходы какой-то процедуры поиска, и рассматриваем произвольные конечные множества точек на плоскости.

*Доказательство Леммы 12.* Пусть все координаты точек из  $P$  различны (точки можно чуть-чуть пошевелить, чтобы это стало так и ничего больше не нарушилось). Рассмотрим максимальный набор попарно независимых «+»-прямоугольников и самый широкий из них — пусть он определён точками  $a, b$ . Некоторые прямоугольники будут пересекать наш самый широкий прямоугольник, одной из их вершин может быть  $a$  или  $b$ , либо их определяющие вершины будут лежать за границами самого широкого прямоугольника, одна выше, одна ниже, смотреть Рисунок 6а.

Прямоугольники, имеющие своей вершиной  $a$ , не пересекаются с прямоугольниками, имеющими своей вершиной  $b$ , потому что иначе получается случай прямо как на Рисунке 4с. Более того, оставшиеся прямоугольники тоже не могут никак налезать друг на друга, потому что опять же получится случай с Рисунка 4с. Поэтому существует вертикальная линия, пересекающая *только* выбранный нами широкий прямоугольник  $\text{rect}(a, b)$ , обозначим её через  $\ell$ , смотреть Рисунок 6b.

Рассмотрим самую верхнюю, самую правую точку из  $E(P)$ , которая левее  $\ell$  и принадлежит  $\text{rect}(a, b)$ , обозначим её через  $p$ . Такая точка точно существует, потому что как минимум  $a$  подойдёт, мы выбираем из непустого множества. Рассмотрим самую нижнюю, самую левую точку из  $E(P)$ , которая правее  $\ell$ , принадлежит  $\text{rect}(a, b)$  и не ниже  $p$ , обозначим её через  $q$ . Опять же такая найдётся, потому что есть  $b$ .

**Утверждение 13.** Точки  $p$  и  $q$  лежат на одной горизонтали.



(a) Прямоугольники, независимые с  $\text{rect}(a, b)$

(b) Вертикальная линия, не пересекающая ни один из прямоугольников набора. Две точки, соответствующие прямоугольнику  $\text{rect}(a, b)$

Рис. 6: Доказательство Леммы 12

Иначе образованный ими прямоугольник должен быть *arborally satisfiable*, и это бы значило, что мы неправильно выбрали  $p, q$  (найдётся точка из  $E(P)$ , принадлежащая прямоугольнику  $\text{rect}(p, q)$  и лежащая ближе к  $\ell$ ). Сопоставим прямоугольнику  $\text{rect}(a, b)$  горизонтальный отрезок  $pq$ , удалим этот прямоугольник из набора и продолжим сопоставление.

**Утверждение 14.** *Каждый отрезок  $pq$  сопоставлен не более чем одному  $\text{rect}(a, b)$  из набора независимых прямоугольников.*

Потому что  $pq$  лежит внутри  $\text{rect}(a, b)$  и пересекает линию, которую не пересекает больше никто из прямоугольников набора, имеющих общие точки с  $\text{rect}(a, b)$ . Остальные прямоугольники из выбранных нами независимых просто не пересекаются с  $\text{rect}(a, b)$ .

Рассмотрим точки  $p_1 \dots p_t, q_1 \dots q_t$ , отрезки с концами в которых были сопоставлены некоторым прямоугольникам и которые все оказались на одной горизонтальной прямой.

**Утверждение 15.** *Точки  $p_i, q_i$  (соответствующие одному прямоугольнику) — соседние из отмеченных точек на этой горизонтальной прямой.*

В противном случае отрезок  $p_i q_i$  будет пересекать какой-то другой отрезок  $p_j q_j$ . И в процессе сопоставления точек соответствующим прямоугольникам мы бы взяли какие-то другие точки.

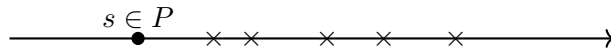


Рис. 7: Точки, добавленные в данную строку

Рассмотрим некоторую строку, в ней находится одна точка из исходного множества запросов  $P$ , смотреть Рисунок 7. Пусть мы добавили в эту строку ещё  $n$  точек, сопоставленных различным независимым прямоугольникам. Тогда точек стало  $n + 1$ , и наибольшее число прямоугольников, которое может им соответствовать, —  $n$ , потому что Утверждение 15. То есть на одну точку из  $E(P)$  добавляется не более одного

прямоугольника. Лемма доказана.  $\square$

*Доказательство теоремы 11.*

$$\text{OPT} \geq \max(\text{OPT}_+, \text{OPT}_-).$$

Теперь воспользуемся тем, что максимум не меньше среднего, а также леммой 12.

$$\begin{aligned} \max(\text{OPT}_+, \text{OPT}_-) &\geq |P| + \frac{1}{2}(\text{MAXIND}_+ + \text{MAXIND}_-) \geq \\ &\geq |P| + \frac{1}{2} \cdot \text{MAXIND}. \end{aligned} \quad \square$$

### 4.3 Более практичная оценка снизу

Рассмотрим пару  $(s_i, i)$  из набора поисковых запросов. Упорядочим все остальные точки  $(s_j, j)$ ,  $j < i$  по второй координате и соединим их  $y$ -монотонной ломаной сверху вниз, смотреть Рисунок 8.

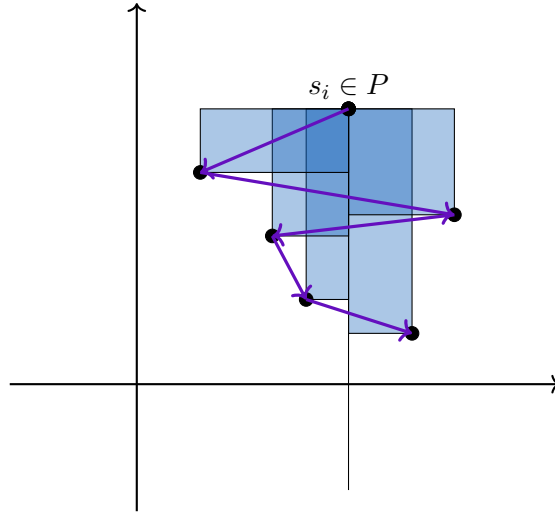


Рис. 8: Подсчёт числа пересечений с вертикальной прямой

Обозначим через  $J(s_i)$  количество пересечений этой ломаной с вертикальным лучом, идущим из  $s_i$  вниз. Понятно, что такое число можно посчитать для любого элемента последовательности запросов.

**Теорема 16.**

$$\text{OPT}(P) \geq |P| + \sum_{s_i} \frac{J(s_i)}{2} \quad (3)$$

*Доказательство.* На каждом ребре ломаной, пересекающем вертикальный луч, построим как на диагонали прямоугольник, стороны которого параллельны осям координат. Так у каждого пересечения появится свой прямоугольник. Объединим получившиеся наборы прямоугольников, смотреть Рисунок 9.

Все прямоугольники в объединении, легко видеть, будут попарно независимы. Осталось лишь применить теорему 11.  $\square$

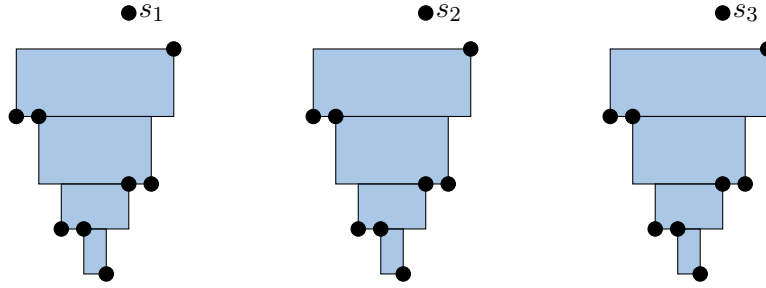


Рис. 9: Набор попарно независимых прямоугольников

#### 4.4 Оценка снизу через число перебежек

Рассмотрим вершину  $q$  бинарного дерева поиска  $T$ . Обозначим через  $R(q)$  количество чередований между спусками в левое поддерево  $q$  и правое поддерево  $q$ . Спуски в сам узел  $q$  и всё, что происходит вне поддерева  $q$ , при этом игнорируется.

**Теорема 17.**

$$\text{OPT}(P) \geq \sum_{q \in T} R(q). \quad (4)$$

*Доказательство.* Следует из Теоремы 16. □

0	000	000	0
1	001	100	4
2	010	010	2
3	011	110	6
4	100	001	1
5	101	101	5
6	110	011	3
7	111	111	7

Рис. 10: Bit-reversal sequence делает нижнюю оценку бессмысленно большой

## 5 Tango деревья

*Записал: Борис Золотов*

Дерево, где у каждой вершины есть «любимый потомок» — тот, в которого происходил спуск при предыдущем запросе. Отметим у каждой вершины её любимого потомка — дерево окажется представленным виде объединения путей, смотреть Рисунок 11.

Каждому такому пути сопоставим дерево поиска (чтобы за  $\log \log$  отправляться в нужное место пути). При смене любимого потомка у вершины нам придётся перестраивать такие деревья. Это мы умеем.

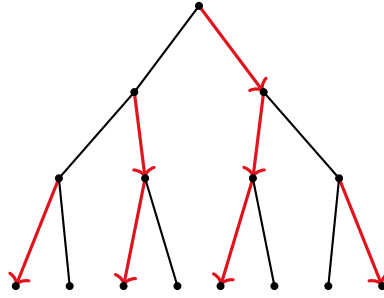


Рис. 11: Tango-дерево представлено в виде объединения путей

## 6 Link-Cut trees

### 6.1 Описание структуры, план действий

*Записала: Анастасия Софронова*

Наша цель — поддерживать структуру данных, которая умеет хранить лес подвешенных бинарных деревьев и производить с ними следующие операции:

- $\text{makeTree}(v)$  — создать дерево из одной вершины  $v$ .
- $\text{link}(v, w)$  — подвесить  $u$  к  $w$  (при этом  $u$  является корнем одного из деревьев леса, а у  $w$  не более одного ребёнка).
- $\text{cut}(v)$  — удалить ребро между  $v$  и её родителем.
- $\text{findRoot}(u)$  — найти корень дерева вершины  $u$ .
- $\text{findCost}(u)$  — возвращает ближайшее к корню ребро минимального веса на пути от  $u$  до корня.
- $\text{addCost}(u, x)$  — добавить  $x$  к весам всех рёбер на пути от  $u$  до корня.

При этом  $\text{findCost}$  можно адаптировать, чтобы искать не минимум на пути, а, например, сумму и т.д.

В [ST83] описано, как добиться асимптотики  $\mathcal{O}(\log n)$  на операцию в худшем случае. Мы же изучим link-cut trees, работающие за амортизированное  $\mathcal{O}(\log n)$  ([Tar84]).

В описании структуры данных и доказательстве времени работы будет две смысловых части.

- 1) Научиться реализовывать структуру для частного случая дерева — пути. А именно, нам потребуются следующие операции:

- $\text{makePath}(v)$  — создать путь из одной вершины.
- $\text{findPath}(v)$  — вернуть путь, в котором лежит вершина  $v$ .
- $\text{findTail}(p)$  — найти верхний конец пути  $p$ .
- $\text{join}(p, v, q)$  — объединить пути  $p$  и  $q$  в один через вершину  $v$ , т.е., верхний конец пути  $p$  и нижний конец пути  $q$  соединить с  $v$ .

- $\text{split}(v)$  — отрезать ребро, ведущее из  $v$  в предка в пути.
  - $\text{findPathCost}(u)$ ,  $\text{addPathCost}(u, x)$ .
- 2) Выразить операции на лесе через операции на путях. Т.е., разобьём вершины дерева на пути. После этого некоторые рёбра лежат на путях (сплошные рёбра), а некоторые соединяют разные пути (пунктирные рёбра). Для операций на дереве нам понадобится также дополнительная функция  $\text{expose}(v)$ , которая превращает путь от  $v$  до корня дерева в один из путей разбиения (при этом рёбра, идущие из  $v$  вниз, не входят в этот путь).

## 6.2 Выражение операций на дереве через операции на путях

Мы начнём с того, что выразим операции на дереве (разбитом на пути) через операции на путях и  $\text{expose}(v)$ .

```

1: procedure MAKE TREE(u)
2:   makePath(u)
3: procedure FIND ROOT(u)
4:   findTail(expose(u))
5: procedure FIND COST(u)
6:   expose(u)
7:   findPathCost(u)
8: procedure ADD COST(u, x)
9:   expose(u)
10:  addPathCost(u, x)
11: procedure LINK(u, w)
12:  join( $\emptyset$ , expose(u), expose(w))
13: procedure CUT(v)
14:  expose(v)
15:  split(v)

```

Таким образом,  $\text{expose}$  помогает нам свести задачу на дереве к задаче на пути. Мы считаем, что функция  $\text{expose}$  возвращает указатель на путь, получившийся в результате её исполнения. Некоторых пояснений требует функция  $\text{link}$ : здесь мы отождествляем вершину и путь, состоящий только из этой вершины.

Итак, теперь нужно научиться делать  $\text{expose}$ .

```

1: procedure EXPOSE(u)
2:    $p := \emptyset$  ▷ Здесь будем накапливать наш текущий путь
3:   while  $u \neq \emptyset$  do
4:      $w := \text{successor}(\text{findPath}(u))$  ▷ Запомним следующий сверху путь в дереве
5:      $(q, r) := \text{split}(u)$  ▷ Отрежем у  $u$  сплошное ребро вниз
6:     if  $q \neq \emptyset$  then ▷  $q$  — часть пути, проходящего через  $u$ , ниже  $u$ 
7:        $\text{successor}(q) := u$  ▷ Теперь ребро из  $q$  в  $u$  — пунктирное
8:      $p := \text{join}(p, u, r)$  ▷ А ребро из  $u$  в наш текущий путь — сплошное
9:      $u := w$  ▷ Перейдём к вершине следующего пути

```



10:  $\text{successor}(p) := \emptyset$

Операцию, которая происходит в теле `while`, назовём `splice`.

**Теорема 18.** Пусть выполнено  $m$  операций с деревом, из них  $n$  операций `makeTree` (т.е., в дереве не более  $n$  вершин). Тогда верно следующее:

- 1) Мы произвели  $\mathcal{O}(m)$  операций с путями дерева.
- 2) `expose` был вызван  $\mathcal{O}(m)$  раз.
- 3) За все вызовы `expose` было выполнено  $\mathcal{O}(m \log n)$  операций `splice`.

*Доказательство.* Первые два пункта очевидно следуют из того факта, что во всех операциях на дереве `expose` вызывается константное количество раз. Докажем оценку на количество `splice`.

Назовём ребро  $(v, w)$  тяжёлым, если  $2 \cdot \text{size}(v) > \text{size}(w)$ , и лёгким, если это неравенство не выполняется. Таким образом, на пути от любой вершины до корня дерева не более логарифма лёгких рёбер.

Мы будем рассматривать следующие величины:

- $\text{HS}$  — количество тяжёлых сплошных рёбер в текущий момент времени;
- $\text{HSC}$  — сколько раз мы создавали тяжёлые сплошные рёбра к текущему моменту времени.

Каждый `splice` превращает некоторое пунктирное ребро в сплошное. Будем рассматривать отдельно лёгкие и тяжёлые рёбра. Так как на пути от  $u$  до корня не более логарифма лёгких рёбер, то и превратить лёгкое пунктирное в лёгкое сплошное мы могли не более логарифма раз.

Тогда  $\#\text{splice} \leq m(\log n + 1) + \text{HSC}$ .

В конце  $\text{HS} \leq n - 1$ . Значит, почти все создания тяжёлых сплошных рёбер были «отменены», т.е., если мы создавали  $\text{HSC}$  тяжёлых сплошных рёбер, то по крайней мере  $\text{HSC} - n + 1$  раз мы превратили тяжёлое сплошное в тяжёлое пунктирное.

Это могло произойти во время `splice`, тогда одновременно с этим мы превратили лёгкое пунктирное в лёгкое сплошное. Из этого следует, что  $\text{HSC} \leq n - 1 + \frac{m}{2}(\log n + 1)$

Итак, мы получили нужную оценку на количество `splice`. По модулю одной маленькой детали: операции `link` и `cut` тоже влияют на наш потенциал  $\text{HSC}$ .

Во время этих операций лёгкое сплошное ребро могло превратиться в тяжёлое сплошное — такие тяжёлые рёбра можно просто не учитывать в значении  $\text{HSC}$ .

Также тяжёлое сплошное ребро могло превратиться в лёгкое сплошное. Это соответствует уменьшению потенциала, которое при этом не «уравновешивает» создание этого тяжёлого ребра в какой-то предыдущий момент времени. Однако, так как на любом пути лёгких рёбер не больше логарифма, то на каждую из  $m$  операций может произойти не более  $\log n$  «незарегистрированных» изменений потенциала.

Суммарно это внесёт в  $\text{HSC}$  (и нашу итоговую оценку) ещё  $\mathcal{O}(m \log n)$  операций.

□

### 6.3 Операции на путях

Для реализации операций на путях мы будем использовать Splay-дерево. Будем хранить путь в дереве таким образом, чтобы при обходе дерева dfs-ом мы выписывали путь слева направо, заканчивая вершиной *tail* (таким образом, *findTail* будет просто возвращать самую правую вершину дерева). В узле дерева будем хранить также следующие величины:

- $\Delta\text{cost}(x) = \text{cost}(x) - \text{mincost}(x)$ , где  $\text{mincost}(x)$  — это минимальная стоимость вершины в поддереве  $x$ .
- $\Delta\text{min}(x) = \text{mincost}(x) - \text{mincost}(p(x))$ , а если  $x$  — корень дерева, то  $\Delta\text{min}(x) = \text{mincost}(x)$

```

1: procedure MAKEPATH(u)
2:   makeSplayTree(u)
3: procedure FINDPATH(v)
4:   splay(v)
5:   return(v)
6: procedure FINDPATHCOST(v)
7:   while right(v)  $\neq$  0 and min(right(v)) = 0 or left(v)  $\neq$  0 and min(left(v)) = 0 do
8:     if right(v)  $\neq$  0 and min(right(v)) = 0 then
9:       v := right(v)
10:    else
11:      v := left(v)
12:    splay(v)
13:    return(v,  $\Delta\text{min}(v)$ )
14: procedure ADDPATHCOST(v, x)
15:    $\Delta(\text{min})(v) = \Delta(\text{min})(v) + x$ 
16: procedure JOIN(p, v, q)
17:   v.left = p
18:   v.right = q
19: procedure SPLIT(v)
20:   splay(v)
21:   cut(v, v.left)
22:   cut(v, v.right)

```

Для анализа мы воспользуемся уже доказанной асимптотикой splay-дерева. Мы рассмотрим «виртуальное» splay-дерево, которое будет состоять из всех splay-деревьев путей, а также проведённых между путями пунктирными рёбрами.

Потенциалы будут такими же:

$$iw(v) = \begin{cases} \text{size}(v), & \text{если у } v \text{ два пунктирных ребра} \\ \text{size}(v) - \text{size}(u), & \text{если } (u, v) \text{ — сплошное ребро} \end{cases}$$

$$tw(v) = \sum_{u \text{ — из поддерева } v \text{ в виртуальном дереве}} iw(u)$$

$$r(v) = \log tw(v)$$

$$\Phi = \sum_v r(v)$$

Тогда за одну операцию `splay` на одном `splay`-дереве мы платим  $3(r(u) - r(v)) + 1$ , что даёт амортизированный логарифм, как в анализе асимптотики `splay`-деревя. Но нам нужно сказать, что на все операции `splay` во время выполнения одного `expose` мы суммарно заплатим не более логарифма. Легко видеть, что операция `splay` не меняет структуры виртуального дерева, а значит, не меняет потенциалы. Таким образом, во время переходов от одного пути к другому во время операции `expose` все слагаемые  $r(v)$ , кроме двух, взаимно уничтожатся. Тогда:

$$\text{expose}(v) = 3(r(\text{root}) - r(v)) + 2\#\text{splice},$$

что есть  $\mathcal{O}(m \log n)$ .

## 7 Mergeable trees

*Записал: Никита Елизаров*

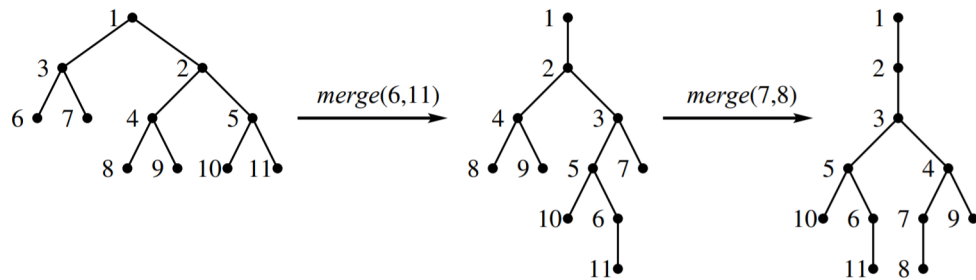
Полное описание всех структур и доказательств можно найти в [Geo+11].

### 7.1 Описание структуры и чего мы хотим от этой структуры

- Храним:
  - храним лес бинарных деревьев с корнем;
  - на узлах — рациональные ключи;
  - выполнено свойство кучи:  $l(v) \geq l(p(v))$ .
- Поддерживаем операции:
  - $\text{parent}(v)$  — узнать, кто является предком  $v$ ;
  - $\text{root}(v)$  — узнать, кто является корнем дерева, в котором находится  $v$ ;
  - $\text{nca}(v, w)$  — nearest common ancestor: если в одном дереве, то возвращает первого общего предка, если не в одном дереве, то возвращает пустое множество;
  - $\text{insert}(v, x)$  — создание нового дерева с вершиной  $v$  и ключом  $x$ ;
  - $\text{link}(v, w)$  — подвесить  $v$  к  $w$ , причём  $v$  — корень какого-то дерева из леса, а  $u$   $w$  не более одного ребёнка. Также  $l(v) \geq l(w)$ ;
  - $\text{cut}(v)$  — удалить ребро между  $v$  и его родителем;

- $delete(v)$  — удалить  $v$ , если  $v$  — лист;
- $merge(v, w)$  — для начала надо сделать  $link$  корней вершин, если вершины в разных деревьях. Затем мы рассматриваем два пути:
  - \*  $P$  — путь от  $v$  к корню дерева;
  - \*  $Q$  — путь от  $w$  к корню дерева.

Далее мы совмещаем эти два пути с сохранением свойства кучи. Примеры двух **merge** показаны ниже:



- Реализация. Реализация будет устроена так же, как и в **link-cut trees** за исключением того, что мы добавим еще одну команду **topmost**, про которую поговорим чуть позже.

Заметим, что **merge** есть обобщение **link-cut**, поэтому считаем, что **link-cut** это **merge**.

Введём два обозначения:

- $m$  — количество **merge** операций к данному моменту, включая **link-cut**;
- $n$  — количество **insert** операций к данному моменту (начинаем с пустого дерева).

Таким образом, всё будет занимать  $\mathcal{O}(n)$  памяти.

- План.

Сначала заметим, что в идеале хотим всё уметь делать за амортизированное  $\mathcal{O}(\log n)$ . Но научимся только вот так:

- если в последовательности операций над деревом есть **cut**, то умеем делать **merge** за амортизированное  $\mathcal{O}(\log^2 n)$ ;
- если **cut** в последовательности нет, то научимся делать за амортизированное  $\mathcal{O}(\log n)$ ;
- ну а еще попутно докажем некоторые нижние оценки.

## 7.2 Реализация merge

Как и оговаривалось ранее, введём операцию **topmost**(**v**, **w**).

$\text{topmost}(v, w)$  — мы идём по пути от  $v$  к  $\text{root}(v)$ , начиная с  $v$ , и берём первую вершину  $u$  такую, что  $l(u) > l(w)$ . Это можно сделать за  $\mathcal{O}(\log n)$  стандартным бинарным поиском.

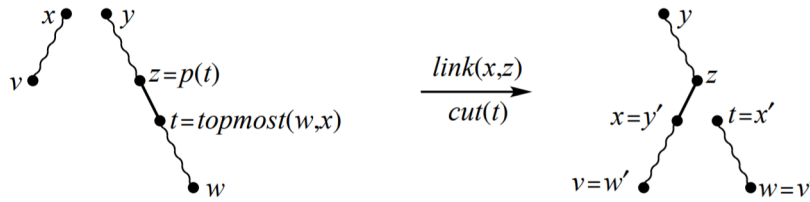
```

1: procedure MERGE( $v, u$ )
2:    $u := \text{nca}(v, w)$  ▷ ищем общего предка  $v$  и  $w$ 
3:   if  $u = v$  or  $u = w$  then
4:     return ▷ если общий предок совпадает с  $v$  или  $w$ , то пути уже совмещены
5:   else
6:      $x = \text{topmost}(v, u)$ 
7:      $y = \text{topmost}(w, u)$ 
8:     if  $x < y$  then
9:       swap( $x, y$ )
10:      swap( $v, w$ )
11:     if  $u \neq \emptyset$  then
12:       cut( $x$ )
13:     while  $x < u$  do
14:        $t := \text{topmost}(w, x)$ 
15:       link( $x, \text{parent}(t)$ )
16:       cut( $t$ )
17:        $y := x$ 
18:        $x := t$ 
19:       swap( $v, w$ )
20:     link( $x, w$ )

```

Если вершины находятся в разных деревьях, то нужно сделать еще один **link** в самом начале.

Операцию, которая находится в теле while назовём **Merge step**. Картинка к ней показана ниже:



Чтобы оценить количество шагов, достаточно оценить количество изменений родителя. Поймём, что количество изменений родителя это количество merge steps плюс не более чем 2: в каждом merge step ровно одно изменение родителя, еще одно берётся в самом конце (**link**( $x, w$ )) и еще может быть одно, если они из разных деревьев.

Теперь докажем следующую лемму.

**Лемма 19.** *Количество изменений родителя это  $\mathcal{O}(m \log n)$ .*

*Доказательство.* Будем считать, что все наши ключи это не просто рациональные числа, а числа  $\{1, \dots, n\}$ . Для этого упорядочим все наши ключи в порядке возрастания

и заменим каждый ключ на соответствующий номер.

Определим **cost** операции как количество изменений родителя.

$$\mathbf{am. cost} = cost + \Delta\Phi$$

Потенциал следующий:

- каждому ребру  $e$  даём 1 потенциала ( $\Phi_e$ );
- от каждого ребра  $(parent(v), v)$  дадим  $\log(v - w)$  родителю и  $\log(v - w)$  ребёнку;
- $\Phi_v$  от вершины определяется как сумма потенциалов, которая приходит ей от рёбер (из предыдущего пункта);
- $\Phi = \sum_{v \in V} \Phi_v + \sum_{e \in E} \Phi_e$ .

Заметим, что **cut** и **delete** уменьшают  $\Phi$  хотя бы на 1 и дают не более одного изменения родителя. Значит их **am. cost**  $\leq 0$ . Остаётся только **merge**.

В начале **merge** возможен **initial link** (так как вершины могут быть в разных деревьях). Заметим, что он увеличивает потенциал не более, чем на  $2\log n + 1$ : по логарифму в каждой вершине и 1 от ребра.

Как влияет **merge step**: Посмотрим на родителей  $t$  за два **merge step**: пусть  $parent'(t)$  это родитель, который будет у  $t$  на следующем **merge step** после того, который показан на картинке. Тогда:

$$t > parent'(t) \geq x > parent(t)$$

Первое неравенство понятно — это просто свойство кучи, второе чуть хитрее: новый родитель  $t$  будет в ветке  $y'$ , то есть в ветке  $x$ , но вполне может так оказаться, что это будет сам  $x$ , поэтому больше либо равно. Последнее неравенство снова видно из картинки, так как  $z = parent(x)$ .

Математической магией этих трёх неравенств получаем, что:

- либо  $t - parent'(t) \leq \frac{t - parent(t)}{2}$ ;
- либо  $x - parent(t) \leq \frac{t - parent(t)}{2}$ .

В первом случае родительский потенциал  $t$  уменьшается не менее чем на 1. Во втором случае детский потенциал  $x$  уменьшается не менее чем на 1.

Одно из этих условий точно выполнится, а значит потенциал уменьшится хотя бы на один, таким образом (так как у нас ровно одно изменение родителя)

$$\mathbf{am. cost}(\mathbf{merge step}) \leq 0.$$

Стоит подметить (иначе неверна строка выше), что после **initial link** все остальные изменения потенциала неположительны. Это (!) вроде как следует из того факта,

что для  $t$  его и родительский и детский потенциал только уменьшаются (родительский - видно из неравенства, а детский, потому что на самом деле  $t$  переходит в  $x$ , а его детский потенциал уменьшился опять же из-за этого неравенства). В итоге  $t$  пробегает по всем вершинам пути (так как переходит в  $x$ , а  $x$  в свою очередь переходит в  $y$ ).

Таким образом амортизационная стоимость **merge** это  $\mathcal{O}(\log n)$ . Если вспомнить, что для всех остальных операций требуется  $\mathcal{O}(\log n)$  времени, то получается, что амортизационное время работы **merge** это  $\mathcal{O}(\log^2 n)$ .  $\square$

## 7.3 Merge без операций cut

### 7.3.1 Новая структура дерева

Разбиваем деревья на сплошные пути: некоторые рёбра считаем сплошными, некоторые рёбра считаем пунктирными; компонента связности по сплошным рёбрам и есть сплошной путь.

**Определение 9.** Определим ранг вершины, как  $r(v) := \lceil \log size(v) \rceil$ , где  $size(v)$  — это сумма по ключам в поддереве  $v$ , включая саму  $v$ .

Разбивать будем следующим образом: говорим, что ребро  $(v, w)$  сплошное, если  $r(v) = r(w)$ . **Note!** Заметим, что все таким образом определённые сплошные рёбра были бы сплошными в **link-cut trees**.

Для каждого узла будем хранить следующее:

- указатель на **parent(x)**;
- указатель на **solid child(x)** (то есть указатель на ребёнка, соединённого сплошным ребром, если такой есть);
- указатель на **head(x)** — отдельная вершина, в которой хранится указатель начало сплошного пути, в котором вершина находится;
- **dashed size(x) := 1 +  $\sum_{u \text{ — пунктирный ребёнок}} size(u)$**

Такая структура двухсвязного списка позволяет ускорить операции вставки и удаления.

Также, для каждого сплошного пути мы будем хранить следующее:

- **head(x)** — отдельная вершина, в которой хранится указатель на **top** пути, а также размер **top** и ранг всего пути;
- поисковая структура — пока структура, которая будет уметь выполнять три функции:
  - удалять узлы в начале пути за  $\mathcal{O}(1)$ ;
  - добавлять одиночные узлы перед заданным за  $\mathcal{O}(1)$ ;
  - делать **topnode(x, s)** — наименьший узел на сплошном пути, содержащим  $s$ , ключ которого больше чем  $x$ .

- более того, каждый **head** хранит указатель на поисковую структуру соответствующего сплошного пути.

Тот факт, что мы храним только размер топ пути, позволяет нам пересчитывать все остальные размеры, пользуясь формулой:

$$size(x) = size(p(x)) - d(p(x)).$$

### 7.3.2 Стэк $S_v$

Теперь  $root(v)$  возвращает стек начал сплошных путей, которые находятся на пути  $[v, root(v)]$ . Эти стеки полезны в нахождении **nca**( $\mathbf{v}, \mathbf{w}$ ). Для начала, найдём два стека для  $v, w$  соответственно (обозначим их за  $S_v$  и за  $S_w$ ). А далее:

```

1: procedure NCA( $\mathbf{v}, \mathbf{w}$ )
2:   if  $top(S_w) \neq top(S_v)$  then
3:     return 0
4:   else
5:     while  $top(S_v) = top(S_w)$  do
6:        $pop(S_v)$ 
7:        $pop(S_w)$ 
8:     if  $S_v = S_w = \emptyset$  then
9:       return  $\min\{v, w\}$ 
10:    if  $S_v = \emptyset$  and  $S_w \neq \emptyset$  then
11:      return  $\min\{v, p(top(S_w))\}$ 
12:    if  $S_v \neq \emptyset$  and  $S_w = \emptyset$  then
13:      return  $\min\{w, p(top(S_v))\}$ 
14:    if  $S_v \neq \emptyset$  and  $S_w \neq \emptyset$  then
15:      return  $\min\{p(top(S_v)), p(top(S_w))\}$ 

```

Так как рангов всего не более  $\log n$ , то видно, что **nca** работает за  $\mathcal{O}(\log n)$ .

### 7.3.3 Link

Теперь поговорим про **link**( $\mathbf{v}, \mathbf{w}$ ). Прodelывать мы будем его в несколько этапов:

- добавляем ребро  $(v, w)$ , сначала как пунктирное;
- ищем множество узлов, где ранг меняется. Обозначим его за  $Q$ . Утверждается, что  $Q$  представляет собой объединение начал сплошных путей. Поэтому искать мы  $Q$  будем поднимаясь в **head** пути и спускаясь, пока ранг отличается от старого.
- все сплошные выходящие рёбра из вершин из  $Q$  заменить на пунктирные, пересчитать ранг;
- меняем обратно те пунктирные, которые должны быть сплошными; (Здесь возникает проблема, так как нам надо следить за добавлением вершин в поисковую структуру пути)



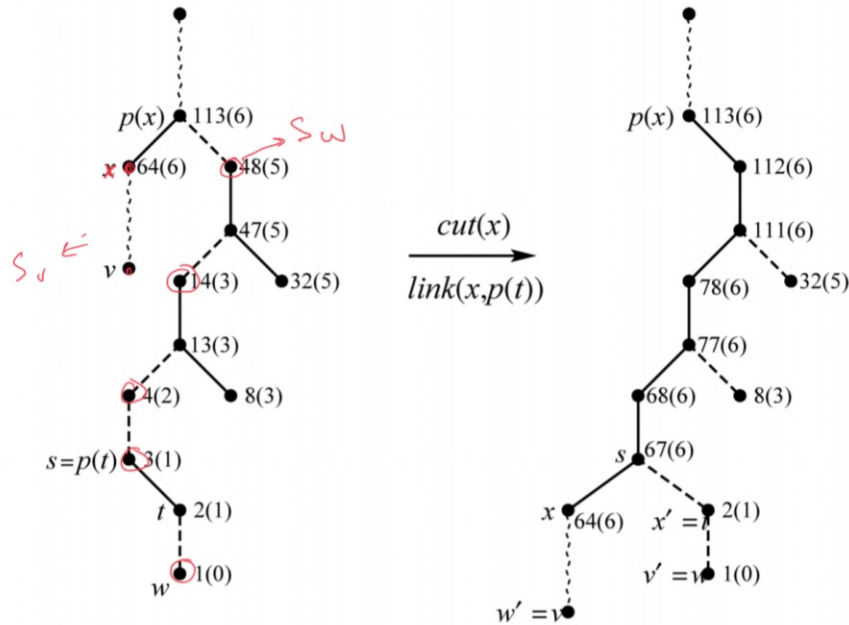
**Лемма 20.** Суммарное время на все операции **link** это  $\mathcal{O}(m \log n)$ .

*Доказательство.* Можем оценить время работы как константа умножить на количество вставок в  $Q$  или в  $S_w$ . Заметим, что если мы вставляем вершину в  $Q$ , то в итоге вставляем и в  $S_w$  (когда мы меняем сплошные рёбра на пунктирные; здесь мы можем считать, что мы просто добавляем их в  $S_w$ ).

Также в самом начале мы вызывали **root(w)** и поэтому мы добыли  $S_w$  размера  $\mathcal{O}(\log n)$ . Заметим, что при добавлении вершины в  $S_w$  её ранг увеличился. Так как ранг для каждой вершины увеличился не более чем на  $\mathcal{O}(\log n)$  раз и  $m > n$ , то общее время работы не более  $\mathcal{O}(m \cdot \log n)$ . **Важно!** Так как у нас нет cut, то ранги только растут.  $\square$

### 7.3.4 Merge

- сначала мы снова заботимся о том, чтобы обе вершины оказались в одном дереве, делая **link**;
- в остальном делаем merge также как и в прошлой подсекции (что мы делаем с обновлением структур поймём позже)



- (?) утверждается, что понимать, куда именно вставлять вершины мы будем уметь, используя структуру на путях (которую мы еще не ввели) и **topnode**.

**Лемма 21.** Не считая вызовов **topnode**, затраченное время на все **merge** не превосходит  $\mathcal{O}(m \cdot \log n)$ .

*Доказательство.* Во время одного merge мы возможно соединяем два дерева с помощью **link**. Это мы делаем за амортизированный  $\mathcal{O}(\log n)$ .

Из первой подсекции мы знаем, что количество **merge steps** это  $\mathcal{O}(m \cdot \log n)$ . Во время **merge step** мы достаём из  $S_v$  и  $S_w$  и добавляем в  $Q$ . Как и в прошлой лемме, в начале мы добавили в  $S_v$  и  $S_w$  по  $\mathcal{O}(\log n)$  вершин, а последующие добавления снова лишь увеличивают ранг, а так как у каждой вершины не более  $\mathcal{O}(\log n)$  увеличений ранга, то мы снова получаем  $\mathcal{O}(m \cdot \log n)$ . **Важно!** Так как у нас нет **cut**, то ранги только растут.

□

### 7.3.5 Поисковая структура на путях

Также как и в **link-cut trees** мы будем представлять сплошной путь в виде **splay-дерева**.

Будем доказывать, что в **splay-дереве topnode** запрос можно сделать за  $\mathcal{O}(\text{parent change})$ , где **parent change** следует за запросом **topnode**.

**Определение 10.** **Finger** — узел, посещённый в **splay-дереве** последний раз.

Результат без доказательства: **am. cost** (операций со **splay-деревом**) это  $\mathcal{O}(\log d + 1)$ , где  $d = |f' - f|$  (?) Здесь,  $f'$  и  $f$  — новый и старый **finger** соответственно.

**Определение 11.**  $\log d + 1$  — время Коула для данной операции.

**Лемма 22.** *Добавление посещения узла между операциями не уменьшает время Коула.*

*Доказательство.* Самостоятельно (утверждается, что несложно).

□

Предполагается, что можно доказать, что **topnode** работает за  $\mathcal{O}(\text{parent change})$  без модификаций, но это открытый вопрос, поэтому мы модифицируем: когда хотим что-то добавить в сплошные пути во время работы **merge**, мы добавляем не сразу а при случае (позволяется иметь узлы в сплошном пути не в **splay-дереве**).

Тогда реализация **topnode(x,e)** выглядит следующим образом: мы делаем бинарный поиск  $e$  в **splay-дереве**. Тогда ответом будет являться:

- либо последний посещённый узел в бинарном поиске;
- либо сплошной ребёнок последнего посещённого узла;
- либо вершина, которая находится не в дереве.

Если это либо первая, либо вторая ситуация, то (?) всё хорошо, мы нашли и делаем **splay**. Если же это третья ситуация, то мы остановились в самой правой нижней вершине, обозначим её за  $y$ , делаем **splay(y)**, а далее просто идём по указателям по вершинам и последовательно находим **topnode**. Пока мы идём до нашего результата и находим что-то новое — добавляем это в **splay-дерево**.

Далее будет описана идея доказательства, что **topnode** работает за  $\mathcal{O}(\text{parent change})$  (автор конспекта не очень понял на момент написания, для полного понимания нужно прочитать почти всю статью):

На **topnode** требуется  $\mathcal{O}(1)$  + количество операций со **splay-деревом** (ну и время на эти операции).

Определим потенциал и **am. cost**:

Пусть  $d_f$  — количество предков  $f$  на сплошном пути. Тогда потенциал дерева  $\Phi_T = \log d_f$ , где  $f$  — это **finger** дерева. Потенциал всей системы это  $\sum_{T \in M} \Phi_T$ .

**am.cost** операций со **splay-деревом** = время Коула + увеличение потенциала.

Также перед любым **merge** мы "просто потрогаем **top** пути." **Важное замечание.** Если мы хотим что-то делать с **top** пути, то это будет за  $\mathcal{O}(1)$ , так как время Коула уравнивается изменением потенциала. Если мы хотим что-то делать на расстоянии  $\mathcal{O}(1)$  от предыдущего узла, то тоже делается за  $\mathcal{O}(1)$ . Из чего следует, что **delete** и **insert** из **top**, в **top**, либо рядом с предыдущим **finger** тоже делается за  $\mathcal{O}(1)$ .

Из всего этого мы можем заключить, что суммарная стоимость на **merge**  $\mathcal{O}(m \cdot \log n)$  за исключением **access**.

**Access:** разбор случаев, но в каждом случае **am.cost**  $\leq 2 \cdot \text{cost}(\text{query}) + \mathcal{O}(1)$ , где **cost(query)** — изменение родителей.

## 8 Динамизация структур данных

Записал: Всеволод Евтушевский

Пусть у нас есть задача поиска:

$$Q: X \times 2^D \rightarrow A,$$

где  $A$  — ответы,  $D$  — объекты,  $X$  — запросы.

### 8.1

**Определение 12.** Говорим, что задача поиска является decomposable, если функция  $Q$  обладает следующим свойством:

$$Q(x, D \cup D') = Q(x, D) \blacklozenge Q(x, D'),$$

где  $\blacklozenge$  означает, операцию, которая быстро считается.

**Пример 1.** Пусть мы хотим в каком-то множестве точек узнавать ближайшего соседа от точки запроса. Ясно, что мы можем узнать ближайшего соседа в множестве  $D$ , ближайшего соседа в множестве  $D'$  и взять из них того, что ближе.

Предположим, что у нас есть такая функция  $Q$ . Давайте сформулируем задачу:

Итак, пусть существует структура данных, которая умеет только хранить и выдавать ответ на запрос, со следующими свойствами:

- В ней  $n$  объектов;
- Она занимает  $S(n)$  памяти;
- Её можно построить за  $P(n)$ ;
- Она отвечает на вопрос за  $Q(n)$ .

**Задача 1.** Мы хотим построить структуру данных, которая обладает следующими свойствами:

- Она занимает  $S'(n) = \mathcal{O}(S(n))$  памяти;
- Она строится за  $P'(n) = \mathcal{O}(P(n))$ ;
- Она отвечает на вопрос за  $Q'(n) = \mathcal{O}(\log n \cdot Q(n))$ ;
- Вставка занимает  $I'(n) = \mathcal{O}\left(\log n \cdot \frac{P(n)}{n}\right)$ .

В данной задаче имеется ввиду амортизированное время для запроса и вставки.

Итак, давайте строить. Разбиваем наши элементы на на логарифмическое количество уровней. Теперь у нас имеется  $\log n$  уровней, которые называются  $L_0, \dots, L_l$ :

- $L_0$ :  $\emptyset$  или структура с 1 элементом
- $L_1$ :  $\emptyset$  или структура с 2 элементами
- $\vdots$
- $L_i$ :  $\emptyset$  или структура с  $2^{i-1}$  элементами
- $\vdots$
- $L_l$ :  $\emptyset$  или структура с  $2^{l-1}$  элементами

Запрос делаем следующим образом:

```

Query(x):
  a := E (ответ на  $\emptyset$ )
  for i = 0 to l
    if  $L_i \neq \emptyset$ 
      a := a  $\blacklozenge$  Q(x,  $L_i$ )
  return a

```

Ясно, что на запрос мы потратим времени

$$\sum_{i=0}^{l-1} Q(2^i) < l \cdot Q(n) = \mathcal{O}(\log n)Q(n).$$

**Замечание.** Если  $Q(n)$  — большое, то есть  $Q(n) > n^\varepsilon$  при каком-то  $\varepsilon > 0$ , то время на запросе — это  $\mathcal{O}(Q(n))$ .

Вставку делаем следующим образом:

```

Insert(x):
  Find min  $k : L_k = \emptyset$ 
  build  $L_k := \{x\} \cup \bigcup_{i < k} L_i$ 
  for  $i = 0$  to  $k - 1$ 
    destroy  $L_i$ 

```

Ясно, что build происходит за  $P(2^k)$ .

Мы хотим, чтоб цена за одну вставку была

$$I'(n) = \mathcal{O}(\log n) \frac{P(n)}{n}.$$

$$I'(n) = \mathcal{O}(\log n) \frac{P(n)}{n} = \sum_{i=0}^{\log n} \frac{P(2^i)}{2^i}.$$

Ясно, что за  $n$  вставок у нас получится

$$\sum_{i=0}^{\log n} P(2^i) \frac{n}{2^i} = n \sum_{i=0}^{\log n} \frac{P(2^i)}{2^i} = \mathcal{O}(\log n) P(n).$$

Что и требовалось.

**Замечание.** Если  $P(n) > n^{1+\varepsilon}$ , где  $\varepsilon > 0$ , то  $I'(n) = \mathcal{O}\left(\frac{P(n)}{n}\right)$ .

**Задача 2.** Мы хотим получить тот же результат, что и в Задаче 1, только время для запроса и вставку теперь не амортизированное, а в худшем случае.

Теперь на каждом уровне у нас будут старые структуры и новые. То есть, на уровне  $i$  будут находиться структуры  $O_i^1, O_i^2, O_i^3, N_i$ , снова в каждой из них  $\emptyset$  или  $2^i$  объектов. Также ещё мы хотим, чтоб выполнялось:

- если  $O_i^1 = \emptyset$ , то  $O_i^2 = \emptyset$
- если  $O_i^2 = \emptyset$ , то  $O_i^3 = \emptyset$

От  $N_i$  хотим, чтоб  $N_i = \emptyset$  или  $N_i$  было частичной (то есть той, которая находится в процессе построения) структура для  $2^i$  объектов. Также нам надо, чтоб каждый объект был ровно в одной структуре  $O$  и, может быть, в структуре  $N$ .

Запрос делаем следующим образом:

```

Query(x):
   $a_i = E$ 
  for  $i = 0$  to  $l$ 
    if  $Q_i^1 \neq \emptyset$ 
       $a_i = a \blacklozenge \text{Query}(x, Q_i^1)$ 
    if  $Q_i^2 \neq \emptyset$ 
       $a_i = a \blacklozenge \text{Query}(x, Q_i^2)$ 
    if  $Q_i^3 \neq \emptyset$ 
       $a_i = a \blacklozenge \text{Query}(x, Q_i^3)$ 
  return  $a$ 

```

Очевидно, что время запроса у нас такое же.

Вставку делаем следующим образом:

```

Insert(x):
  for  $i = l \dots 1$ 
    if  $O_{i-1}^1 \neq \emptyset$  and  $O_{i-1}^2 \neq \emptyset$ 
      do  $\frac{P(2^i)}{2^i}$  шагов построения  $N_i := O_{i-1}^1 \cup O_{i-1}^2$ 
    if  $N_i$  is complete
      destroy  $O_{i-1}^1, O_{i-1}^2$ 
       $O_{i-1}^1 := O_{i-1}^3$ 
      destroy  $O_{i-1}^3$ 
      Update(i)
   $N_0 := x$ 
  Update(0)

```

Что такое Update(i)?

```

Update(i):
  if  $O_i^1 = \emptyset$ 
     $O_i^1 := N_i$ 
  else if  $O_i^2 = \emptyset$ 
     $O_i^2 := N_i$ 
  else  $O_i^3 := N_i$ 
  destroy  $N_i$ 

```

Все ошибки не могут быть заняты, это доказывается по индукции, но это было оставлено в качестве упражнения.

Идея в том, что мы не делаем построение сразу, а делаем столько его шагов, сколько можем себе позволить. А значит, время вставки даже в худшем случае будет  $\mathcal{O}\left(\frac{P(n)}{n} \log n\right)$ .

## 8.2

**Определение 13.** Говорим, что задача поиска является invertible, если функция  $Q$  обладает следующим свойством: Если  $D = D_1 \cup D_2$ , то

$$Q(x, D_1) = Q(x, D) - \blacklozenge Q(x, D_2),$$

где  $\blacklozenge$  быстро считается.

Предположим, что у нас есть такая функция  $Q$ . Давайте сформулируем задачу:

**Задача 3.** Пусть у нас есть структура данных  $M$ , которая умеет вставлять и ещё другая структура данных  $G$ , в которую мы будем вставлять элемент, который хотим удалить из  $M$ . Хотим, чтоб амортизированное время удаления из  $M$  равнялось  $\mathcal{O}\left(P(n)\frac{\log n}{n}\right)$ .

Query(x): Return $Q(x, M) - \blacklozenge Q(x, G)$
---

Подвох заключается в том, что у нас может быть много удалённых элементов, поэтому весь наш анализ будет от количества элементов, которые когда-либо вставлялись. А мы хотим не этого.

Мы будем ждать момента, когда  $|G| > \frac{1}{2}|M|$ , и в это время перестраивать структуру полностью. Идея в том, что между двумя такими моментами пройдёт минимум  $\frac{n}{2}$  удалений, а значит, когда мы считаем амортизированную стоимость удаления, мы можем заключить, что цена каждого удаления — это  $\mathcal{O}\left(\frac{P(n)}{n}\right) + \mathcal{O}\left(P(n)\frac{\log n}{n}\right)$  (второе слагаемое — это вставки в структуру  $G$ ).

When $ G  > \frac{1}{2} M $ Build $M := M \setminus G$ $G := \emptyset$
---

Также есть проблема, что глобальные перестроения могут помешать локальным, то есть для работы вставок мы тоже перестраиваем систему, и надо, чтоб нам хватило ресурсов для вставки, несмотря на то, что мы потратили что-то на удаление. Для борьбы с этим достаточно просто амортизированную стоимость удаления умножить на достаточно большую константу.

**Задача 4.** Мы хотим получить тот же результат, что и в задаче 3, только время теперь не амортизированное, а в худшем случае.

Для решения Задачи 4 мы поддерживаем три структуры:  $M, I, G$ :

Query(x): Return $Q(x) = Q(x, M) \blacklozenge Q(x, I) - \blacklozenge Q(x, G)$
--

В какой-то момент снова перестраиваем структуру, а именно в случае, если  $|G| > \frac{1}{2}(|M| + |I|)$ . Чтоб удовлетворять запросам, придётся заморозить наши структуры. Поэтому также поддерживаем ещё три структуры:  $M', I', G'$ .

Во время работы по перестроению структуры, мы будем временно объекты, которые мы хотим удалить, вставлять в  $G'$ , которые хотим вставить, вставляем в  $I'$ .  $M'$  — это, собственно, структура, которую мы строим. Пока мы строим:

Query(x): Return $Q(x) = Q(x, M) \blacklozenge Q(x, I) \blacklozenge Q(x, I') - \blacklozenge Q(x, G) - \blacklozenge Q(x, G')$
--

Когда мы делаем каждое удаления, мы будем делать  $c\frac{P(n)}{n}$  (для какой-то константы  $c$ ) шагов построения структуры  $M'$ .

Через  $\frac{n}{c}$  шагов  
 $M := M', I := I', G := G'$

Ясно, что время в худшем случае будет каким надо, а именно,

$$\mathcal{O}\left(P(n)\frac{\log n}{n}\right).$$

### 8.3

Наши запросы не всегда бывают invertible. Далее будет идея того, что нужно делать с теми запросами, которые не invertible.

Нам всё равно потребуется какое-нибудь условие, а именно, weak deletion in time  $D(n)$ . Это какая-то операция, которая даст структуре данных понять, что этого элемента не должно в ней быть, и при этом не увеличит время на запрос.

Делаем то же самое для вставок — поддерживаем уровни.

Когда нам нужно удалить  $x$ : сделаем weak deletion  $x$  в каждом уровне, содержащем  $x$  (+ чтоб найти эти уровни, нам нужен какой-то словарик, который по элементу называет уровни, где он содержится).

Делаем те же глобальные перестройки, то есть когда не удаленных объектов  $> \frac{1}{2}$  удалённых — делаем global rebuild.

Из прошлого рассуждения знаем, что

- амортизированное время вставки — это  $\mathcal{O}\left(P(n)\frac{\log n}{n} + D(n)\right)$ ;
- амортизированное время удаления — это  $\mathcal{O}\left(\frac{P(n)}{n}\right)$ .

Это также можно несколькими структурами сделать в худшем случае. А именно, структурами структурами:  $M, S, M', S', u$ .  $M$  — главная,  $S$  её дублирует. Когда у нас удалений становится больше, чем половина тех элементов, которые лежат в  $M$ , снова начинаем глобальное перестроение. Для этого мы заморозим структуру  $S$ , для новых запросов заведём  $u$  — очередь запросов, которую будем применять к  $M'$ .  $M'$  — это рабочая копия  $M$  на время перестроения. Когда мы закончили, у нас  $M'$  будет на правах  $M$  и  $S'$  на правах  $S$ . После этого надо сделать все обновления в очереди  $u$ . Нужно просто подобрать константы, сколько шагов построения  $S'$  и  $M'$  мы будем выполнять каждый раз, когда делаем удаление.

## 9 Структуры данных и путешествия во времени

*Записала: Татьяна Белова*

Оригинальная статья: [DIL07].

В этом разделе нам будут интересны структуры данных, позволяющие осуществлять эти самые "путешествия во времени". Определить это понятие можно по-разному, мы разберем два варианта: персистентность и ретрактивность.



## 9.1 Персистентность

Мы будем рассматривать структуры данных в модели pointer machine. Структура данных рассматривается как некоторое множество узлов, в каждом узле хранится  $\mathcal{O}(1)$  полей, в поле может быть записано число или указатель на другой узел, смотрите Рисунок 12. Иногда вводят дополнительное константное ограничение на входящую степень узла, то есть, для каждого узла, количество указателей, указывающих на него, должно быть не больше какой-то константы.

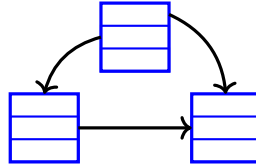


Рис. 12: Pointer machine

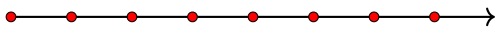
Операции, которые поддерживает структура:

- $x = \text{new node}$  — создать новый узел
- $x = y.\text{field}$  — взять значение поля
- $x = y + z$  — объединить два узла
- $\text{destroy}(x)$  — удалить узел, если на него нет указателя

Персистентность бывает разных видов:

### 1) Частичная персистентность

- изменяем только последнюю версию
- спрашиваем о любых версиях



*Известные результаты.* Если у структуры данных константная входящая степень для всех узлов, то можно сделать ее частично персистентной с константным мультипликативным overhead-ом.

[Dri+86] сделали алгоритм с амортизированным  $\mathcal{O}(1)$  overhead-ом.

[Bro96] сделали алгоритм с  $\mathcal{O}(1)$  overhead-ом в худшем случае.

### 2) Полная персистентность: частичная + можем изменять прошлое.

Каждый раз, когда мы изменяем прошлое, мы создаем новую версию структуры. Получается дерево версий, смотрите Рисунок 13.

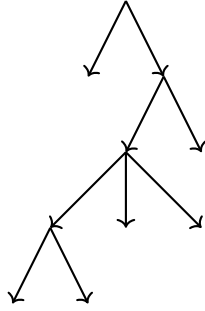


Рис. 13: Полная персистентность

*Известные результаты.* Если у структуры данных константная входящая степень для всех узлов, то ее можно наделить полной персистентностью также с константным мультипликативным overhead-ом. Правда в случае полной персистентности такого overhead-а умеют добиваться только амортизированно ([Dri+86]), и можно ли добиться его в худшем случае — открытый вопрос.

- 3) **Конфлюэнтная персистентность:** полная + можем комбинировать версии.

В этом случае, помимо обычных изменений структуры, можно также сливать две версии в одну. Получается ациклический граф версий, смотреть Рисунок 14.

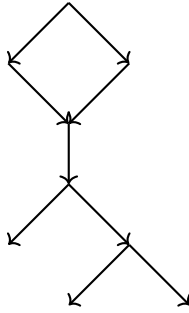


Рис. 14: Конфлюэнтная персистентность

*Известные результаты.* С конфлюэнтной персистентностью все сложнее, [FK03] умеют с overhead-ом  $\log(\#upd) + \max_v e(v)$ , где  $\#upd$  — это количество всех сделанных к этому моменту изменений,  $v$  — вершина в графе версий, а  $e(v) = 1 + \log\#(\text{путей из корня в } v)$ .

Открытый вопрос: можно ли сделать overhead  $\mathcal{O}(\log n)$ ? При этом  $\mathcal{O}(\log n)$  умеют получать для частного случая задачи, когда мы хотим сливать только версии, в которых нет общих полей ([CPL12]).

- 4) **Функциональная персистентность:** комбинированная + нельзя модифицировать узлы

*Известные результаты.* В общем виде задачу решать не умеют. Умеют только для частных случаев. Например, Balanced BST и Link-cut-tree умеют делать функционально персистентными с overhead-ом  $\mathcal{O}(\log n)$  ([DLP08]).

## Приложения частичной персистентности

### Задача Point location

Дан плоский граф  $G$  с ребрами-отрезками. Запросы: по данной точке определить, в какой грани она находится. Можно сделать предобработку.

### Решение с помощью частичной персистентности.

Отсортируем вершины графа по координате  $x$ . Будем в этом порядке добавлять вершины и поддерживать множество ребер, которые пересекают вертикальную полосу от этой вершины до следующей. Ребра будем хранить в каком-нибудь BST. Таким образом, у нас появилось  $n$  версий этого BST, по версии для каждой точки, смотрите Рисунок 15.

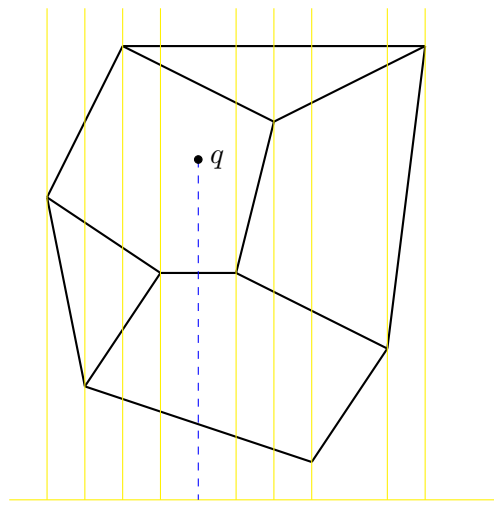


Рис. 15: Версии BST

Когда приходит запрос, мы сначала должны понять, между какими вершинами  $v$  и  $u$  по оси  $x$  лежит наша точка. Это делается за  $\mathcal{O}(\log n)$ . Затем обращаемся к BST для  $v$  и смотрим, между какими ребрами лежит точка.

Изменяем мы только последнюю версию, запросы делаем к любой, получается, нам достаточно частичной персистентности.

## 9.2 Ретрактивность

Есть структура данных, поддерживающая какие-то updates и queries.

В случае ретрактивности мы хотим уметь возвращаться в прошлое и исправлять какие-то действия, а именно отменить или добавить какой-то update. При этом мы не будем создавать новую ветку версий, ветка будет всего одна, и все действия, произошедшие после нашего изменения, по-прежнему будут учитываться.

Операции:

- $\text{Insert}(t, \text{update})$  – добавить изменение  $\text{update}$  во время  $t$
- $\text{Delete}(t)$  – удалить изменение, произошедшее во время  $t$

- $\text{Query}(t, \text{query})$  – сделать запрос  $\text{query}$  во время  $t$

Операции мы будем писать с большой буквы, чтобы не путать их с операциями  $\text{insert}$ ,  $\text{delete}$  и  $\text{query}$  для структуры.

Также небольшая деталь: мы считаем, что между любыми моментами времени мы всегда можем вставить операцию, причем без дополнительных затрат на кодирование этих моментов времени. Для этого поддерживаем *order-maintenance structure*, которая будет об этом заботиться, и которую мы не будем обсуждать.

Ретрактивность бывает разных видов:

### 1) Частичная ретрактивность

- $\text{Insert}$ ,  $\text{Delete}$  в любой момент времени  $t$
- $\text{Query}$  только в последний момент времени  $t_{\text{now}}$

### 2) Полная ретрактивность

- $\text{Insert}$ ,  $\text{Delete}$  в любой момент времени  $t$
- $\text{Query}$  в любой момент времени  $t$

Введем параметры для измерения эффективности ретрактивной структуры.

- $m$  – количество изменений за все время
- $r$  – при обращении к моменту времени  $t$ , количество операций, примененных к структуре после  $t$
- $n$  – максимальное количество одновременно находящихся в структуре элементов за все время

Теперь давайте оценим *overhead* на выполнение запроса, если мы делаем структуру ретрактивной.

## Частичная ретрактивность

### 1) $\text{Insert}(t, \text{update})$

Если операции коммутативные, то  $\text{Insert}()$  делается с константным *overhead*-ом, так как мы всегда можем добавлять операцию в конец.

$$\text{Insert}(t, \text{update}) \Leftrightarrow \text{Insert}(t_{\text{now}}, \text{update})$$

### 2) $\text{Delete}(t)$

Если операция  $a$ , которую мы хотим отменить, обратима, а также все операции коммутируют, то  $\text{Delete}(t) \Leftrightarrow \text{Insert}(t_{\text{now}}, a^{-1})$ .

Таким образом, если операции коммутативные и обратимые, то мы можем сделать структуру частично ретрактивной с overhead-ом  $\mathcal{O}(1)$ .

Еще оказывается, что структуру данных можно сделать частично ректрактивной с константным overhead-ом, если это структура данных для задачи поиска, т.е. структура с операциями insert, delete и query. В этом случае мы также можем вставлять и удалять элементы только в последний момент времени и благодаря этому получаем ретрактивность с константным overhead-ом.

## Полная ретрактивность

Мы снова рассмотрим частный случай структур данных, а именно *decomposable search problems*, и научимся наделять их полной ретрактивностью.

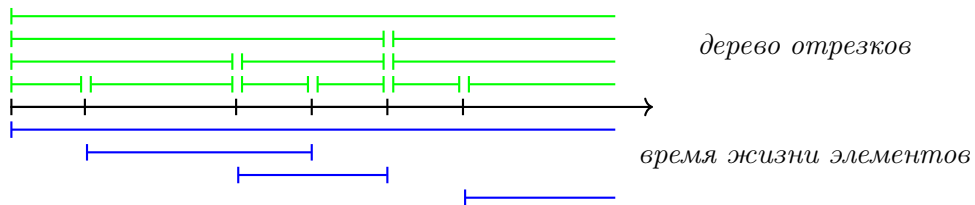
Напоминание: decomposable search problem (d.s.p.) — это задача поиска с дополнительным условием  $Q(x, D \cup D') = Q(x, D) \blacklozenge Q(x, D')$ , где операция  $\blacklozenge$  выполняется за константное время.

**Теорема 23.** Структуру данных для d.s.p. с операциями insert, delete и query, работающими за время  $T(n)$  и использующими  $S(n)$  памяти, можно сделать полностью ретрактивной, при этом все операции будут работать за время

- $\mathcal{O}(T(m))$ , если  $T(m) = \Omega(n^\varepsilon)$ ,  $\varepsilon > 0$
- $\mathcal{O}(T(m) \log m)$ , иначе

и использовать  $\mathcal{O}(S(m) \log m)$  памяти, где  $m$  — это общее количество изменений.

*Доказательство.* Отметим все моменты времени, когда произошла какая-то операция. Таким образом, весь интервал от начального момента времени до последнего разбился на отрезки. Будем хранить их в в дереве отрезков, представляющем из себя сбалансированное бинарное дерево, то есть сами наши отрезки будут в листьях дерева. Каждому элементу сопоставим интервал времени, в который он присутствует в структуре. Этот интервал покрывается логарифмическим количеством узлов нашего дерева, в них и запишем этот элемент. В каждом узле храним элементы в нашей структуре.



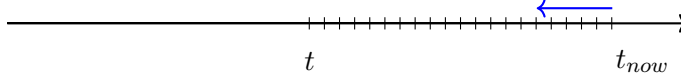
Теперь, когда нам нужно добавить или удалить элемент, происходит следующее. Если нужно, добавим новый момент времени, т.е. разделим один из отрезков на два и перебалансируем дерево. Потом добавим или удалим элемент из всех  $\mathcal{O}(\log m)$  соответствующих узлов.

Если мы хотим сделать Query для времени  $t$ , то мы должны рассмотреть  $\mathcal{O}(\log m)$  узлов, соответствующих  $t$ , и объединить с помощью  $\blacklozenge$  результаты query в них.  $\square$

## Общая техника

**Теорема 24.** Структуру данных с операциями, работающими за  $\mathcal{O}(T(n))$ , можно сделать полностью ретрактивной, при этом операции для  $t_{now}$  будут работать за время  $\mathcal{O}(T(n))$ , а ретрактивные операции будут работать за  $\mathcal{O}(rT(n))$ . Памяти потребуется  $\mathcal{O}(S(m))$ .

*Доказательство.* Будем запоминать все изменения, а также как изменилась структура, чтобы можно было откатить изменения.



Каждый раз, когда нам нужно сделать  $\text{Insert}(t, \text{update})$  или  $\text{Delete}(t, \text{update})$ , будем откатывать изменения от  $t_{now}$  до  $t$ , затем применять новое изменение и применяем все  $r$  изменений снова.  $\square$

**Теорема 25.** Существует структура данных в модели *straight-line-program* с операциями *update* и *query*, работающими за  $\mathcal{O}(1)$ , такая, что любая частично ретрактивная структура в модели *history-dependent algebraic-computation-tree*, *integer-RAM* или *real-RAM* будет тратить  $\Omega(r)$  времени на *update* или *query*, причем как в худшем случае, так и амортизированно.

*Доказательство.* Рассмотрим структуру, которая хранит два числа  $x$  и  $y$ , изначально равные нулю, и поддерживает следующие операции:

- $x += c$
- $y += c$
- $y = x \cdot y$

Покажем, что эта структура нам подходит. Для этого рассмотрим последовательность операций:

$y += a_n$   
 $y = x \cdot y$   
 $y += a_{n-1}$   
 $y = x \cdot y$   
 $\dots$   
 $y += a_0$   
 $\text{Query}(t_{now}, y)$

Так мы получим значением многочлена  $a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$  в точке 0.

После чего сделаем ретрактивный  $\text{Insert}(t = -1, "x += c")$ . Теперь  $\text{Query}(t_{now}, y)$  уже дает нам значение этого многочлена в точке  $c$ .

И так мы можем считать значение многочлена в любой точке.

Но для вычисления многочлена в точке (при известном заранее многочлене, но неизвестной точке) есть нижняя оценка  $\Omega(n)$  в любой модели из условия ([FHM01]).

Таким образом, если мы сделаем достаточное количество вызовов  $\text{Insert}(t = -1, "x += c")$  и  $\text{Query}(t_{\text{now}}, y)$ , то мы поймем, что нам потребуется  $\Omega(r)$  времени на операцию даже амортизированно.  $\square$

### 9.3 Нижняя оценка на создание ретроактивной структуры: wordRAM

**Определение 14.** *Модель вычислений CELL-PROBE* — это WORD RAM, в которой единственной операцией, имеющей цену и учитывающейся при подсчёте времени работы, является доступ к данным. Данные по-прежнему хранятся в блоках фиксированного размера, чтение целого блока имеет единичную стоимость.

**Определение 15.** *Свёртка двух последовательностей слов*  $\langle x_0 \dots x_{k-1} \rangle, \langle y_0 \dots y_{k-1} \rangle$  — это последовательность слов

$$\langle w_0 \dots w_{2k-1} \rangle, \text{ такая, что } w_i = \sum_{a+b=i} x_a \times y_b. \quad (5)$$

**Задача 5** (Динамическая свёртка). Требуется поддерживать в памяти набор слов  $\langle x_0 \dots x_{2k-1} \rangle$  и эффективно отвечать на следующие запросы:

- 1)  $\text{change}_k(x)$ : присвоить  $x_k$  значение  $x$ .
- 2)  $\text{alg\_query}_k$ : вернуть  $k$ -ую компоненту свёртки

$$\langle x_0 \dots x_{k-1} \rangle \otimes \langle x_k \dots x_{2k-1} \rangle.$$

**Теорема 26** ([FHM98], Теорема 1). *Задача 5 не решается на моделях CELL-PROBE и WORD RAM быстрее, чем  $\Omega(\sqrt{n})$  в худшем случае.*

**Теорема 27** ([DIL07], Теорема 3). *Существует структура данных в модели WORD RAM со словами размера  $\log n$ , которая поддерживает обновление и запрос за  $O(1)$ , но любая частично ретроактивная структура данных с теми же функциями требует время*

$$\Omega\left(\sqrt{\frac{r}{\log r}}\right) \text{ amortised}$$

*либо на обновление, либо на запрос.*

*Доказательство.* Приведём пример такой структуры. Она будет поддерживать набор слов  $\langle w_1 \dots w_m \rangle$  линейного размера. Изначально все эти слова нулевые. Будут доступны следующие операции:

$$\begin{array}{ll} \text{update} & w_i := x \\ & w_i := w_j + w_k \\ & w_i := w_j \times w_k \\ \text{query} & w_i = ? \end{array}$$

Модель вычислений WORD RAM позволяет делать такие операции за константное время. Над такой структурой данных мы можем за  $O(n \log n)$  времени и  $O(n)$  памяти сгенерировать и проделать последовательность обновлений, которая посчитает свёртку (5) двух половинок хранимого набора слов: это называется быстрое дискретное преобразование Фурье.

Теперь пусть мы хотим делать ретроактивные Insert вида  $w_i := x$  в начальный момент времени. Понятно, что возможность такой операции равносильна решению Задачи 5 о динамической свёртке, что не может быть сделано быстрее, чем за  $\Omega(\sqrt{n})$  на каждое изменение.

При этом при вычислении преобразования Фурье было сделано  $r = O(n \log n)$  операций. Чтобы выразить время операции через  $r$ , заметим, что  $n = \Omega(r / \log r)$ . Мы получили, что время решения задачи о динамической свёртке —

$$\Omega(\sqrt{n}) = \Omega\left(\sqrt{\frac{r}{\log r}}\right).$$

□

## Список литературы

- [And89] Arne Andersson. «Improving partial rebuilding by using simple balance criteria». в: *Workshop on Algorithms and Data Structures*. Springer. 1989, с. 393—402.
- [Bro96] Gerth Stolting Brodal. «Partially persistent data structures of bounded degree with constant update time». в: *Nord. J. Comput.* 3.3 (1996), с. 238—255.
- [CIL12] Sébastien Collette, John Iacono и Stefan Langerman. «Confluent persistence revisited». в: *Proceedings of the twenty-third annual ACM-SIAM symposium on Discrete algorithms*. SIAM. 2012, с. 593—601.
- [DIL07] Erik D Demaine, John Iacono и Stefan Langerman. «Retroactive data structures». в: *ACM Transactions on Algorithms (TALG)* 3.2 (2007), 13—es.
- [DLP08] Erik D Demaine, Stefan Langerman и Eric Price. «Confluently persistent tries for efficient version control». в: *Scandinavian Workshop on Algorithm Theory*. Springer. 2008, с. 160—172.
- [Dri+86] James R Driscoll и др. «Making data structures persistent». в: *Proceedings of the eighteenth annual ACM symposium on Theory of computing*. 1986, с. 109—121.
- [FHM01] Gudmund Skovbjerg Frandsen, Johan P Hansen и Peter Bro Miltersen. «Lower bounds for dynamic algebraic problems». в: *Information and Computation* 171.2 (2001), с. 333—349.
- [FHM98] Gudmund Skovbjerg Frandsen, Johan P Hansen и Peter Bro Miltersen. «Lower Bounds for Dynamic Algebraic Problems». в: *BRICS RS-98.11* (май 1998).
- [FK03] Amos Fiat и Haim Kaplan. «Making data structures confluent persistent». в: *Journal of Algorithms* 48.1 (2003), с. 16—58.



- [Geo+11] Loukas Georgiadis и др. «Data structures for mergeable trees». в: *ACM Transactions on Algorithms (TALG)* 7.2 (2011), с. 1—30.
- [GR93] Igal Galperin и Ronald L Rivest. «Scapegoat Trees.» в: *SODA*. т. 93. 1993, с. 165—174.
- [ST83] Daniel Dominic Sleator и Robert Endre Tarjan. «A data structure for dynamic trees». в: *Journal of Computer and System Sciences* 26.3 (1983), с. 362—391. ISSN: 0022-0000. DOI: [https://doi.org/10.1016/0022-0000\(83\)90006-5](https://doi.org/10.1016/0022-0000(83)90006-5). URL: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0022000083900065>.
- [ST85] Daniel Dominic Sleator и Robert Endre Tarjan. «Self-Adjusting Binary Search Trees». в: *J. ACM* 32.3 (июль 1985), с. 652—686. ISSN: 0004-5411. DOI: 10.1145/3828.3835. URL: <https://doi.org/10.1145/3828.3835>.
- [Tar84] Robert Endre Tarjan. «Data Structures and Network Algorithms». в: *Society for Industrial and Applied Mathematics* (1984).