Résumé partie 5

Définitions:

Arbres de contraintes arithmétiques
Un arbre de contraintes arithmétiques est un arbre dont les nœuds et les feuilles sont marqués par des ensembles de formules arithmétiques.

Couverture des nœuds d'un arbre
T : Arbre, E : ensemble de formule
L'ensemble des nœuds de T couvert par E est le plus petit ensemble de nœuds N tq :
pour tout n $\in$ N :
soit label(n) $\cap$ Epsilon = $\varnothing$, où label(n) est l'ensemble des formules étiquetant le nœud n.
soit tous les enfants du nœud n.

(Ma definition : Le plus petit nombre de noeud qui enumère toutes les équations du système d'équations.)

Couverture d'un arbre
Un ensemble de formules E couvre un arbre T si la racine de T appartient à l'ensemble des nœuds couverts par E.

Contre-exemple d'un arbre
Un contre-exemple d'un arbre T est une affectation des métavariables de T, à condition qu'il existe un ensemble de formules E qui couvre T et tq toutes les négations des formules de E sont satisfaites.

Pour en trouver un, il suffit de résoudre la négation d'un système qui couvre T.

Pour ce faire, nous énumérons un ensemble suffisant de systèmes qui couvrent T et essayons de résoudre chacun d'eux jusqu'à ce que nous trouvions un contre-exemple.
Nous pouvons énumérer un ensemble suffisant d'ensembles couvrants avec la formule suivante :

cover(T) = {{f} | f $\in$ label(T)} $\cup$ { [U1≤i≤n si | si $\in$ cover(T [i])}

où label(T) est le label de la racine de T, et T[i] le i-ième enfants de la racine de T.

Cet ensemble est suffisant dans le sens où tout ensemble de couverture d'un arbre T doit être un sur-ensemble d'au moins un ensemble de cover(T).

5.2 Entrelacement avec Zenon

Dans Zenon, un arbre de recherche de preuves peut être vu comme un arbre étiqueté avec des ensembles de formules.
Pour utiliser cet arbre afin de trouver des instanciations, nous devons d'abord permettre à Zenon de retourner un arbre avec des branches ouvertes dans le cas où il ne trouve pas de contradiction.
Nous filtrons ensuite toutes les formules de l'arbre et ne gardons que les contraintes arithmétiques pour construire un arbre de contraintes arithmétiques.
Enfin, nous essayons de trouver un contre-exemple de cet arbre, et une fois trouvé, nous pouvons prouver la formule initiale en utilisant le **γ∀inst**.

γ¬∃inst : Instancie les métavariables avec les valeurs du contre-exemple.

Illustrons ce mécanisme par un exemple :

$\exists x \in Z.(x \geq 0 \lor x \geq 1) \land (x \geq -5 \land x \leq 0)$ (1).

Pour prouver cette formule, on considère d'abord sa négation, puis on la décompose en utilisant les les règles de recherche de preuve pour obtenir l'arbre de recherche de preuve ouvert de la figure 4. (voir preuve **PHOTO**)

Avec ce mécanisme, Zenon alterne entre la recherche de preuves régulière avec les règles habituelles de recherche de preuves, et la résolution arithmétique sur des arbres de recherche de preuves ouverts pour obtenir des contre-exemples qui fournissent des instanciations pour fermer les arbres de recherche de preuves

Cette approche est saine car les instanciations ne peuvent pas introduire d'incohérences et complète pour la validité des formules arithmétiques purement existentielles, où toutes les variables sont quantifiées existentiellement. (cad avec $\exists$)
Étant donné une telle formule, si la négation de cette formule est insatisfaisable, alors il existe une substitution σ des variables pour que la formule de base résultante soit insatisfaisable.
Puisque la formule est fondée, cela signifie qu'après avoir appliqué les règles de recherche de preuve propositionnelle, nous avons un arbre T, à condition qu'il y ait une comparaison insatisfaisante de constantes numériques dans chaque branche de l'arbre de recherche de preuves.
La substitution σ est un contre-exemple de T, avec un ensemble de couverture E tq chaque comparaison $e \bowtie f \in$ Epsilon est absurde après substitution par σ.
Notre énumération des ensembles de couverture potentiels est tq:
il existe Epsilon’ ∈ cover(T) tq Epsilon’ ⊆ Epsilon.
Cela signifie qu'il existe un contre-exemple σ’ de T, avec l'ensemble de recouvrement Epsilon’ à condition qu'il ferme également toutes les branches après la substitution, et que σ’ sera trouvé pendant la recherche de la preuve puisque le branch and bound se termine toujours lorsqu'il existe une solution.

5.3 Limites de la méthode du simplexe

La principale limite de la méthode du simplexe est qu'elle ne permet pas d'effectuer des calculs abstraits, c'est-à-dire qu'elle ne peut traiter que des constantes numériques.
Par exemple si nous voulons prouver la formule $\exists x \in \mathbb{Q}. x \leq a$, où a est une constante rationnelle, nous ne pouvons pas alimenter le simplexe avec la formule $X \leq a$, où X est la métavariable correspondant à la variable existentielle x, car dans ce contexte, X et a sont fondamentalement différentes : nous ne pouvons pas changer la valeur de a, alors que nous pouvons changer la valeur de X, mais le simplex n'est pas capable de faire cette différence.

Par extension, cela nous empêche de traiter des formules contenant à la fois des métavariables et des Epsilon-termes et donc des formules impliquant des alternances de quantificateurs.