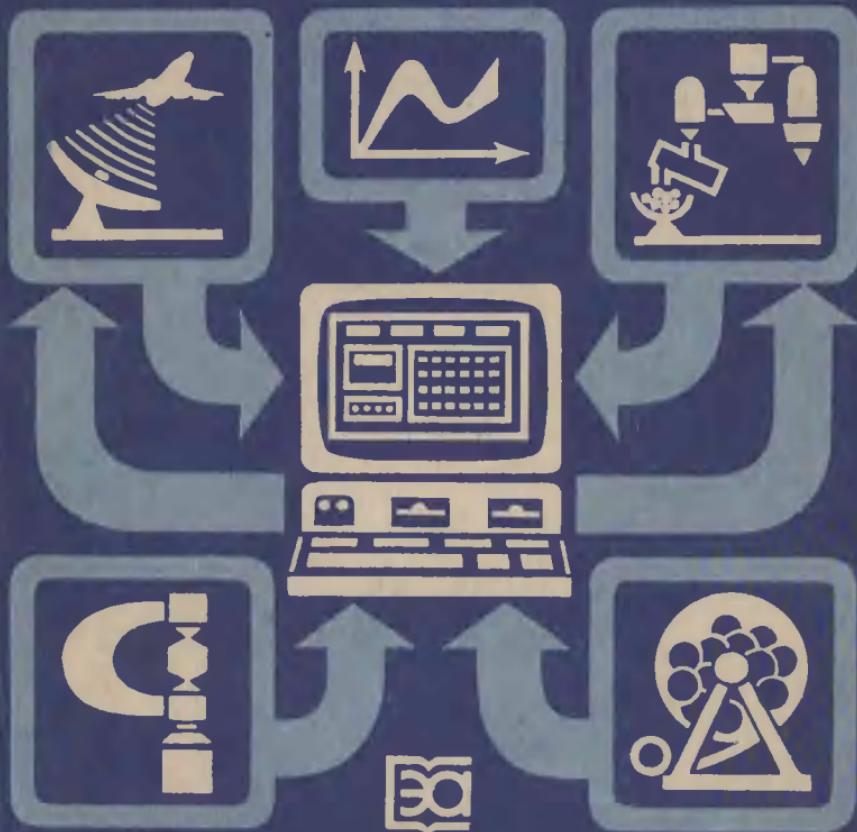


СТАТИСТИЧЕСКАЯ ОБРАБОТКА РЕЗУЛЬТАТОВ ЭКСПЕРИМЕНТОВ НА МИКРО-ЭВМ И ПРОГРАММИРУЕМЫХ КАЛЬКУЛЯТОРАХ



**СТАТИСТИЧЕСКАЯ
ОБРАБОТКА
РЕЗУЛЬТАТОВ
ЭКСПЕРИМЕНТОВ
НА МИКРО-ЭВМ
И ПРОГРАММИРУЕМЫХ
КАЛЬКУЛЯТОРАХ**



**Ленинград
ЭНЕРГОАТОМИЗДАТ
Ленинградское отделение
1991**

ББК 32.973–01

С78

УДК 681.31-181.48

C78 Статистическая обработка результатов экспериментов на микро-ЭВМ и программируемых калькуляторах /
А. А. Костылев, П. В. Миляев, Ю. Д. Дорский и др.: Л.: Энергоатомиздат. Ленингр. отд-ние, 1991. – 304 с.: ил. ISBN 5-283-04479-3

Рассмотрены математические модели физических и экономических экспериментов. Даются рекомендации по выбору схемы статистического анализа экспериментальных данных, приводятся сведения о статистических методах. Приведены многочисленные прикладные программы для микрокалькуляторов и микро-ЭВМ (на языках "бейсик", "квейсик", "форTRAN").

Для инженерно-технических работников, занимающихся обработкой экспериментальных данных и наблюдений.

**С 2404000000–107
051 (01) – 91 210–90**

ББК 32.973-01

Производственное издание

Костылев Александр Александрович, Миляев Павел Васильевич, Дорский Юрий Дмитриевич, Левченко Василий Кузьмич, Чикулаева Галина Анатольевна

**СТАТИСТИЧЕСКАЯ ОБРАБОТКА РЕЗУЛЬТАТОВ
ЭКСПЕРИМЕНТОВ НА МИКРО-ЭВМ И ПРОГРАММИРУЕМЫХ
КАЛЬКУЛЯТОРАХ**

Редактор С. П. Левкович. Художник обложки С. В. Алексеев. Художественный редактор Т. Ю. Теплицкая. Технический редактор Н. А. Минеева. Корректор Н. Д. Быкова. Оператор И. Л. Полилеева

ИБ № 2449

Подписано в печать с оригинала-макета 25.03.91. Формат 84×108^{1/32}. Бумага газетная. Гарнитура Универс. Печать высокая. Усл. печ. л. 15,96. Усл. кр.-отт. 16,17. Уч.-изд. л. 17,42. Тираж 25 000 экз. Заказ 1130. Цена 1 р. 50 к.

Энергоатомиздат, Ленинградское отделение.
191065, Ленинград, Д-65, Марсово поле, 1.

Ордена Октябрьской Революции, ордена Трудового Красного Знамени Ленинградское производственно-техническое объединение «Печатный Двор» имени А. М. Горького при Госкомпечати СССР. 197110, Ленинград, П-110, Чкаловский пр., 15.

ISBN 5-283-04479-3 **© А. А. Костылев, П. В. Миляев, Ю. Д. Дорский,
В. К. Левченко, Г. А. Чикулаева, 1991**

ПРЕДИСЛОВИЕ

По-видимому, нет необходимости доказывать важность экспериментальных исследований для научно-технического прогресса. Эксперименты представляют собой мощное средство получения новых знаний не только во всех областях естественных и технических наук, но и в экономике, социологии, политике и военном деле, являются непременным условием совершенствования производства и эксплуатации новой техники. Их масштабы неуклонно растут, и к их выполнению привлекается все более широкий круг научных и инженерно-технических работников.

Одним из основных этапов любого эксперимента является статистическая обработка экспериментальных данных. В конечном итоге она направлена на построение математической модели исследуемого объекта или явления, объединяющей как априорную, так и экспериментальную информацию. В зависимости от цели эксперимента (исследование, управление, контроль) эта модель может использоваться по-разному: для предметно-смыслового анализа и построения физической (эконометрической и др.) модели, для прогнозирования состояния объекта или явления, управления им или оптимизации параметров, для контроля состояния или работоспособности.

Внимание экспериментаторов к изучению и широкому практическому применению статистических методов обработки в последние годы резко возросло. Это связано, с одной стороны, с повышением требований к качеству проведения экспериментов, к их экономичности, а с другой стороны — с тем, что в связи с разработкой и широким распространением персональных и микро-ЭВМ, микропроцессоров и программируемых микрокалькуляторов появилась возможность их массового внедрения в экспериментальные

установки и измерительные системы, практического использования каждым исследователем или производственником.

Применение статистических методов обработки экспериментальных данных требует знания основных положений теории вероятностей и математической статистики, умелого использования принципов и приемов программирования современных вычислительных средств, объединенных с аппаратными средствами и входящих в состав измерительно-вычислительных систем. Кроме того, в связи с усложнением алгоритмов обработки данных необходимы достаточно глубокие знания основных вычислительных методов.

Статистические методы, методы вычислительной математики и программирование на ЭВМ традиционно изучаются независимо. Сейчас, когда резко повысились требования к интенсивности процессов обучения и труда исследователей и инженерно-технических работников, этот путь уже не позволяет в требуемые сжатые сроки сформировать грамотного специалиста, умеющего решать комплексные практические задачи. В связи с этим имеется реальная потребность в "интегрирующих" работах, в которых представлялся бы развернутый справочный материал по основным задачам статистического анализа экспериментальных данных, методам их решения, в программном обеспечении, описании библиотеки прикладных программ, написанных на языках высокого уровня и ориентированных на широкий круг пользователей.

К настоящему времени опубликовано мало работ, сочетающих в себе статистический и "машинный" подход. Особенno мало литературы, ориентирующей на применение микро-ЭВМ и микрокалькуляторов, которые используются исключительно широко (единственным известным авторам исключением является работа [22], которая, как представляется, не исчерпала тему). Цель настоящей книги – хотя бы частично заполнить этот пробел.

Изложение основных теоретических сведений о методах математической статистики и вычислительной математики не претендует на полноту и математическую строгость. Поэтому основные результаты даются часто без формальных доказательств, а лишь сопровождаются ссылками на работы, где они приводятся и где обсуждаются более подробно. В то же время авторы постарались систематизированно рассмотреть наиболее распространенные и важные вопросы, возникающие на практике у специалиста по обработке экспериментальных данных. В связи с этим содержание теорети-

ческой части книги несколько шире, чем тот материал, который доведен до конкретных вычислительных программ. Представляется, что самостоятельное написание программ является полезным и необходимым упражнением для практического овладения материалом. Авторы также не стремились включить в книгу полный набор всех возможных вычислительных подпрограмм в каждой из модификаций (подпрограмм из БНТР/РАФОС, на языках "фортран", "бейсик", "квейсик", программ для программируемых калькуляторов). В некоторых случаях полагалось, что подпрограмма на одном из языков может быть "чисто механически" переписана на другой. В других случаях подпрограммы вообще не приводилось потому, что их реализация представляется тривиальной. Это относится, например, к программам вычисления оценок математического ожидания и дисперсии, проверки гипотез, которые на языке высокого уровня может написать даже начинающий программист. В то же время аналогичные программы для программируемых калькуляторов приведены, поскольку их написание в условиях жестких ограничений на объем программы и число регистров памяти оказывается порой делом непростым

Работа авторского коллектива над книгой распределась следующим образом: глава 1 написана А. А. Костылевым (§ 1.1), П. В. Миляевым (§ 1.2), Г. А. Чикулаевой (§ 1.3) и Ю. Д. Дорским (§ 1.4), главы 2, 4 – написаны А. А. Костылевым, главы 3, 5 – А. А. Костылевым, Г. А. Чикулаевой, В. К. Левченко, Ю. Д. Дорским, приложения составлены Г. А. Чикулаевой.

Отзывы и пожелания просьба направлять по адресу: 191065, Ленинград, Марсово поле, д. 1, Ленинградское отделение Энергоатомиздата.

Авторы

ГЛАВА ПЕРВАЯ

ОСОБЕННОСТИ ПОСТРОЕНИЯ И ПРОГРАММНОГО ОБЕСПЕЧЕНИЯ ИЗМЕРИТЕЛЬНО-ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ НА БАЗЕ МИКРО-ЭВМ И ПРОГРАММИРУЕМЫХ МИКРОКАЛЬКУЛЯТОРОВ

1.1. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ ОБ ИЗМЕРИТЕЛЬНО-ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ СИСТЕМАХ, ИСПОЛЬЗУЕМЫХ ПРИ ПРОВЕДЕНИИ НАУЧНЫХ ЭКСПЕРИМЕНТОВ

Общая характеристика и классификация научных экспериментов. Каждый эксперимент представляет собой совокупность трех составных частей: исследуемого явления (процесса, объекта), условий и средств проведения эксперимента. Эксперимент проводится в несколько этапов:

предметно-содержательное изучение исследуемого процесса и его математическое описание на основе имеющейся априорной информации, анализ и определение условий и средств проведения эксперимента;

создание условий для проведения эксперимента и функционирования исследуемого объекта в желаемом режиме, обеспечивающем наиболее эффективное наблюдение за ним;

сбор, регистрация и математическая обработка экспериментальных данных, представление результатов обработки в требуемой форме;

содержательный анализ и интерпретация результатов эксперимента;

использование результатов эксперимента, например коррекция физической модели явления или объекта, принятие решения о состоянии объекта, применение модели для прогноза, управления или оптимизации и др.

В зависимости от типа исследуемого объекта (явления) выделяют несколько классов экспериментов: физические, инженерные, медицинские, биологические, экономические, социологические и др. Наиболее глубоко разработаны общие вопросы проведения физических и инженерных экспериментов, в которых исследуются естественные или искусственные физические объекты (устройства) и протекающие в них процессы. Как правило, при их проведении исследователь может

неоднократно повторять измерения физических величин в сходных условиях, задавать желаемые значения входных (объясняющих) переменных, изменять их в широких масштабах, фиксировать или устранять влияние тех факторов, зависимость от которых в настоящий момент не исследуется. Далее в основном будут рассматриваться именно эти классы экспериментов. В экспериментах других классов аналогичные возможности существенно ограничены. В частности, для эконометрических экспериментов характерен малый объем экспериментальных данных, зачастую отсутствие возможностей повторения эксперимента в аналогичных условиях, влияние большого числа неуправляемых и неконтролируемых факторов. Тем не менее некоторые методы, используемые при проведении физических и инженерных экспериментов, например методы статистической обработки данных, могут с успехом применяться и в нетехнических задачах.

Классификацию экспериментов можно провести по следующим признакам:

степени близости объекта, непосредственно используемого в эксперименте, к объекту, в отношении которого планируется получение новой информации (натурный, стендовый или полигонный, модельный, вычислительный эксперименты);

цели проведения — исследование, испытание (контроль), управление (оптимизация, настройка);

степени влияния на условия проведения эксперимента (пассивный и активный эксперименты);

степени участия человека (эксперименты с использованием автоматических, автоматизированных и неавтоматизированных средств проведения эксперимента — средств, используемых для создания и изменения условий проведения эксперимента, сбора и обработки экспериментальных данных).

Результатом эксперимента в широком смысле является теоретическое осмысливание экспериментальных данных — результатов непосредственного измерения, получаемых в ходе эксперимента, и установление законов и причинно-следственных связей, позволяющих предсказывать ход интересующих исследователя явлений, выбирать такие условия (воздействия), при которых удается добиться требуемого или наиболее благоприятного их протекания. В более узком смысле под результатом эксперимента часто понимается математическая модель, устанавливающая формальные функ-

циональные или вероятностные связи между различными переменными, процессами или явлениями. Получению именно этого результата служат хорошо разработанные методы статистической обработки экспериментальных данных. Необходимо отметить, что получение в ходе эксперимента математической модели является необходимым, но не достаточным условием результативности эксперимента и его полезности для развития соответствующей области науки. Это в особой степени относится к нетехническим отраслям знания. Выявленные статистические связи между различными величинами или процессами могут не соответствовать их причинной зависимости. Вопрос о наличии причинных отношений между наблюдаемыми величинами должен решаться исследователем на основании предметно-содержательного анализа эксперимента, которым должен непременно и начинаться и заканчиваться эксперимент. Чтобы подчеркнуть эту мысль, приведем характерное высказывание А. А. Чупрова: "Задача истолкования подмеченной связи представляется нередко и наиважнейшей и наитруднейшей. Обрабатывая сходным образом эмпирические данные, которые имеют совершенно одинаковый вид, исследователь приходит в разных случаях к выводам, глубоко различным по их внутреннему смыслу... Правильное истолкование подмечаемой связи представляется особенно существенным, когда статистическое знание привлекается к обоснованию жизненно важных решений и практических мероприятий. Тут знание связей, остающихся без истолкования или неверно истолковываемых, часто хуже полного незнания. Недостаточное внимание к этому обстоятельству является одним из злейших статистических преступлений. Здесь и корень наиопаснейших для статистики нападок на нее" [78, с. 126].

Содержательный анализ математических моделей обладает спецификой для различных предметных областей. Поэтому рассмотрение этих вопросов, несмотря на всю их важность, выходит за рамки настоящей книги и в дальнейшем основное внимание будет уделяться решению более узкой задачи — построению математической модели явления (процесса, устройства) по экспериментальным данным.

Общие сведения о средствах проведения эксперимента. Исходная информация для построения математической модели исследуемого явления получается с помощью средств проведения эксперимента, представляющих собой совокупность средств измерений различных типов (измеритель-

ных устройств, преобразователей и принадлежностей к ним), каналов передачи информации и вспомогательных устройств для обеспечения условий проведения эксперимента. В различных предметных областях средства проведения эксперимента могут называться по-разному (например, экспериментальная установка, информационно-измерительная система, измерительная система), а также могут иметь многочисленные конкретные узкоспециализированные наименования [13, 21, 45, 50, 52, 60, 68]. В дальнейшем будем пользоваться термином "измерительная система". В зависимости от целей эксперимента иногда различают измерительные информационные (исследование), измерительные контролирующие (контроль, испытание) и измерительные управляющие (управление, оптимизация) системы [68], которые различаются в общем случае как составом оборудования, так и сложностью обработки экспериментальных данных.

Состав средств измерений, входящих в измерительную систему и выполняющих функции датчиков сигналов, формирователей воздействий на исследуемый объект, в существенной степени определяется его математической моделью, которая используется при его планировании и строится на основании предварительной информации. То же самое можно сказать и о предварительном выборе методов обработки экспериментальных данных, который может в дальнейшем уточняться по мере получения экспериментальной информации об объекте исследования и условиях проведения эксперимента (в частности, о вероятностных характеристиках погрешностей измерения).

В связи с возрастанием сложности экспериментальных исследований, что проявляется в увеличении числа измеряемых величин, повышением требований к качеству математической модели объекта исследований и оперативности ее получения в состав современных измерительных систем включаются вычислительные средства различных классов. Эти средства ("большие" ЭВМ, персональные, мини- или микро-ЭВМ, программируемые микрокалькуляторы) не только выполняют задачи сбора и математической обработки экспериментальной информации, но и решают задачи управления ходом эксперимента и автоматизации функционирования измерительной системы [50, 60]. Эффективность применения вычислительных средств при проведении экспериментов проявляется в следующих основных направлениях: сокращении времени подготовки и проведении экспери-

мента в результате ускорения сбора и обработки информации, повышения оперативности управления режимами объекта исследования;

повышении точности и достоверности результатов эксперимента на основе использования более сложных и эффективных алгоритмов обработки измерительных сигналов, увеличении объема используемых экспериментальных данных;

сокращении числа исследователей, участвующих в проведении эксперимента и в появлении возможности создания автоматических систем, способных выполнять свои задачи в тех условиях, в которых пребывание человека нежелательно или невозможно;

усилении контроля за ходом проведения эксперимента и повышении возможностей его оптимизации;

повышении оперативности доведения результатов эксперимента до потребителя в наиболее удобной форме.

Таким образом, современные средства проведения эксперимента представляют собой, как правило, измерительно-вычислительные системы (ИВС) или комплексы, снабженные развитыми вычислительными средствами. При обосновании структуры и состава ИВС необходимо решить следующие основные задачи:

определить состав аппаратной части ИВС (средств измерений, вспомогательного оборудования);

выбрать тип ЭВМ, входящей в состав ИВС;

установить каналы связи между ЭВМ, устройствами, входящими в аппаратную часть ИВС, в том числе и нестандартными, и потребителем информации;

разработать программное обеспечение ИВС.

При выборе типа ЭВМ необходимо учитывать требования по оперативности получения результатов экспериментов, сложность алгоритмов обработки экспериментальных данных и объем получаемой информации. Это позволит оценить требуемые объемы оперативного и долговременного запоминающих устройств, скорость выполнения операций. В значительной степени эти требования определяются сложностью объекта исследований и соответственно его математической моделью.

Основные этапы и режимы статистической обработки экспериментальных данных. В арсенале средств, которыми должен владеть современный экспериментатор, статистические методы обработки и анализа данных занимают особое место. Это связано с тем, что результат любого, достаточно

сложного эксперимента не может быть получен без обработки экспериментальных данных. В связи с этим следует заметить, что широко используемый в литературе, в том числе и вынесенный в название данной книги, термин "обработка результатов эксперимента", так же как и близкий к нему по смыслу термин "обработка результатов измерений", является, строго говоря, не совсем корректным.

Сформулируем кратко основные задачи и этапы статистической обработки экспериментальных данных [1, 2, 12, 13, 19, 22, 26, 30, 31, 36, 52, 74].

1. Содержательный анализ эксперимента, построение априорной вероятностной математической модели источника экспериментальных данных (модели объекта исследования, средств и условий проведения эксперимента).

2. Составление плана эксперимента, в частности, определение значений независимых переменных, выбор тестовых сигналов, оценка объема наблюдений. Предварительное обоснование и выбор методов и алгоритмов статистической обработки экспериментальных данных.

3. Проведение непосредственно экспериментальных исследований, сбор экспериментальных данных, их регистрация и ввод в ЭВМ.

4. Предварительная статистическая обработка данных, предназначенная, в первую очередь, для проверки выполнения предпосылок, лежащих в основе выбранного статистического метода построения стохастической модели объекта исследований, а при необходимости — для коррекции априорной модели и изменения решения о выборе алгоритма обработки. В ходе первичной обработки обычно решаются частные задачи: анализ и отбраковка промахов и сбоев (аномальных измерений), восстановление пропущенных измерений, сжатие измерительной информации (проверка однородности и объединение серий измерений, группировка данных, оценка параметров измеряемых величин), исследование законов распределения наблюдаемых величин и др. (более подробно см. гл. 2).

5. Составление детального плана дальнейшего статистического анализа экспериментальных данных.

6. Собственно статистическая обработка экспериментальных данных (вторичная, полная, итоговая обработка), направленная на построение модели объекта исследования, и статистический анализ ее качества. Иногда на этом же этапе решаются и задачи использования построенной модели,

например: определяется оптимальное управляющее воздействие на объект, оптимизируются его параметры, производится экстраполяция его состояния.

7. Формально-логическая и содержательная интерпретация результатов экспериментов, принятие решения о продолжении или завершении эксперимента, подведение итогов исследования.

Статистическая обработка экспериментальных данных может быть осуществлена в двух основных режимах [39, 74].

В первом режиме сначала производится сбор и регистрация полного объема экспериментальных данных и лишь затем они обрабатываются. Этот вид обработки называют off-line-обработкой, апостериорной обработкой, обработкой данных по выборке полного (фиксированного) объема. Достоинством этого режима обработки является возможность использования всего арсенала статистических методов анализа данных и, соответственно, наиболее полное извлечение из них экспериментальной информации. Однако оперативность такой обработки может не удовлетворять потребителя, кроме того, при ее реализации ужесточаются требования к емкости памяти ЭВМ, управление ходом эксперимента почти невозможно.

Во втором режиме обработка наблюдений производится параллельно с их получением. Этот вид обработки называют on-line-обработкой, обработкой данных по выборке нарастающего объема, последовательной обработкой данных. В этом режиме существенно снижаются требования к емкости памяти, появляется возможность экспресс-анализа результатов эксперимента и оперативного управления его ходом. Как правило, только таким образом удается реализовать обработку данных в так называемом "реальном" масштабе времени. Этот режим обработки основывается главным образом на применении рекуррентных алгоритмов. К его недостаткам следует отнести более сильную зависимость от объема априорной информации об объекте исследований, более узкие возможности по варьированию методами статистического анализа в целях получения наиболее адекватной модели явления.

При рассмотрении методов статистической обработки данных необходимо анализировать эффективность используемых вычислительных алгоритмов. При этом качество алгоритма обработки может быть охарактеризовано устойчивостью и точностью получаемого решения, его оператив-

ностью, необходимым объемом памяти и быстродействием вычислительных средств, универсальностью алгоритма и др.

Основу вычислительных алгоритмов, используемых при реализации важнейших статистических методов – регрессионного, дискриминантного и факторного анализов, – составляют методы решения систем линейных алгебраических уравнений. Для обоснованного выбора и (или) оценки возможностей разрабатываемых или используемых алгоритмов и вычислительных программ необходимо иметь представления об их сути, сильных и слабых сторонах. Поэтому, например, приводимый в гл. 4 материал, посвященный вычислительным аспектам метода наименьших квадратов, не является второстепенным, а занимает центральное положение.

Как правило, современные ЭВМ различных классов имеют достаточно полное программное обеспечение, позволяющее решать все основные задачи статистической обработки экспериментальных данных и реализующее соответствующие вычислительные процедуры (см. ниже). Поэтому в большинстве случаев исследователю нет необходимости полностью разрабатывать программу обработки данных в проводимом эксперименте: достаточно разработать конкретную вызывающую программу и включить в нее обращения к стандартным подпрограммам, набор которых определяется конкретными задачами эксперимента. Однако "механическое" использование статистических и вычислительных процедур без понимания их сути и возможностей может привести к абсурдным результатам и дискредитировать эти эффективные методы.

Общие сведения об основных статистических методах. При решении задач обработки экспериментальных данных используются методы, основанные на двух основных составных частях аппарата математической статистики теории статистического оценивания неизвестных параметров, используемых при описании модели эксперимента, и теории проверки статистических гипотез о параметрах или природе анализируемой модели. Некоторые элементарные сведения об их основных положениях приводятся в § 2.2

Перечислим основные методы многомерного статистического анализа, которые широко применяются при обработке экспериментальных данных, в первую очередь, применительно к инженерным и физическим экспериментам. Подробно их содержание рассматривается в работах [1, 2, 3, 15, 27, 30, 31, 42, 67, 78].

Корреляционный анализ Его сущность состоит в определении степени вероятностной связи (как правило, линейной)

между двумя и более случайными величинами. В качестве этих случайных величин могут выступать входные, независимые переменные, в этот набор может включаться и результирующая (зависимая) переменная. В последнем случае корреляционный анализ позволяет отобрать факторы или регрессоры (в регрессионной модели), оказывающие наиболее существенное влияние на результирующий признак. Отобранные величины используются для дальнейшего анализа, в частности при выполнении регрессионного анализа. Корреляционный анализ позволяет обнаруживать заранее неизвестные причинно-следственные связи между переменными. При этом следует иметь в виду, что наличие корреляции между переменными является только необходимым, но не достаточным условием наличия причинных связей.

Характеристикой линейной вероятностной связи между случайными величинами является коэффициент корреляции, или корреляционный момент, а между случайными процессами — корреляционная функция (см. § 3.2). В зависимости от закона распределения данных используются различные методы определения этих характеристик.

Применительно к задаче обработки экспериментальных данных корреляционный анализ используется на этапе предварительной обработки.

Дисперсионный анализ. Этот метод (группа методов) предназначен для обработки экспериментальных данных, зависящих от качественных факторов, и для оценки существенности влияния этих факторов на результаты наблюдений.

Его сущность состоит в разложении дисперсии результирующей переменной на независимые составляющие, каждая из которых характеризует влияние того или иного фактора на эту переменную. Сравнение этих составляющих позволяет оценить существенность влияния факторов.

При проведения инженерных и физических экспериментов дисперсионный анализ, как правило, играет подчиненную роль. Он используется, например, на этапе предварительной обработки при проверке гипотез об однородности экспериментальных данных, а при регрессионном анализе — при проверке адекватности полученной модели (см. § 2.4, § 4.2).

Регрессионный анализ. Методы регрессионного анализа позволяют установить структуру и параметры модели, связывающей количественные результирующую и факторные переменные, и оценить степень ее согласованности с экспериментальными данными. Этот вид статистического анализа позволяет решать главную задачу эксперимента в случае, если наблюдаемые и результирующие переменные являются количественными, и в этом смысле он является основным при обработке этого типа экспериментальных данных. Подробно методы регрессионного анализа описаны в гл. 4.

Факторный анализ. Его сущность состоит в том, что "внешние" факторы, используемые в моделях и сильно коррелированные между собой, могут и должны быть заменены другими, более

малочисленными "внутренними" факторами, которые трудно или невозможно измерить, но которые определяют поведение "внешних" факторов и тем самым поведение результирующей переменной. Факторный анализ является методикой, которая в определенном смысле является источником возникновения гипотез, гипотетических моделей, их структуры. Факторный анализ делает возможным выдвижение гипотез о структуре взаимосвязи переменных, не задавая эту структуру заранее и не имея о ней предварительно никаких сведений. Эта структура определяется по результатам наблюдений. Полученные гипотезы могут быть проверены в ходе дальнейших экспериментов. Задачей факторного анализа является нахождение простой структуры, которая бы достаточно точно отражала и воспроизводила реальные, существующие зависимости.

Наиболее широко применяется факторный анализ в эконометрии и других нетехнических приложениях. В некоторых отношениях факторный анализ и его модификация — компонентный анализ близки к регрессионному анализу.

1.2. ОСОБЕННОСТИ ПОСТРОЕНИЯ АВТОМАТИЗИРОВАННЫХ ИЗМЕРИТЕЛЬНО-ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ НА БАЗЕ МИКРО-ЭВМ

Для повышения эффективности научных исследований необходимо решить по крайней мере две проблемы. Первая — это создание современной базы автоматизации эксперимента, основанной на широком внедрении ЭВМ с достаточно развитым математическим (программным) обеспечением. Суть второй проблемы состоит в подготовке инженерных и научных кадров, способных создавать, осваивать, внедрять и эксплуатировать современные автоматизированные экспериментальные комплексы.

В настоящее время для исследователей очевидна необходимость передачи таких функций, как управление ходом эксперимента, обработки и анализа результатов измерений ЭВМ. Однако из-за недостаточных знаний возможностей автоматизации (главным образом — архитектуры ЭВМ) трудно более активно использовать ЭВМ даже в тех областях, где автоматизация эффективна или без нее эксперимент провести просто невозможно. Главная трудность здесь состоит не столько в отсутствии средств автоматизации (ЭВМ, интерфейсы), сколько в неумении использовать даже готовые комплексы в реальных, конкретных экспериментальных исследованиях.

Опыт показывает, что измерительно-вычислительные системы, разработанные без участия исследователей, работают и используются, как правило, недостаточно эффективно. Более того, если экспериментатор не понимает архитектуры средств автоматизации (совокупность аппаратных и программных средств), то он не может правильно планировать и выполнять исследования, эффективно использовать дорогостоящее оборудование.

Поэтому представляется крайне важным овладение исследователем методами построения автоматизированных экспериментальных установок, принципами работы основных компонентов средств автоматизации, а также способами эффективного их использования.

Для уяснения места и роли ЭВМ в автоматизированных экспериментальных комплексах рассмотрим обобщенную структурную схему автоматизированной экспериментальной установки.

Обобщенная структурная схема экспериментальной установки. Состав измерительных приборов определяется задачей конкретного эксперимента или областью научных знаний, в которой планируется эксперимент. Так, например, при проведении экспериментальных работ по оценке характеристик неоднородностей в кабелях, световодах, волноводах в сверхширокой полосе частот применяются генераторы пикосекундного диапазона длительности, стробоскопические осциллографы, обеспечивающие масштабно-временное преобразование рассеянных неоднородностями сигналов, а также управляемые ЭВМ цифровые осциллографы, обеспечивающие аналого-цифровое преобразование (АЦП) сигналов, временное их хранение и экспресс-анализ результатов измерений и обработки, и другая аппаратура [5].

На обобщенной структурной схеме экспериментальной установки (рис. 1.1) можно выделить несколько основных частей. Во-первых, это исследуемый объект, снабженный системой управления с целью задания значений параметров, характеризующих объект. Другим важным элементом структурной схемы является измерительная система. Измеряемыми величинами в экспериментальных исследованиях являются физические величины (напряжение, ток, давление, температура и т. д.). Кроме того, часто свойства объекта характеризуются его реакцией на тестовый (зондирующий) сигнал. В этом случае информативными являются как форма сигнала, так и его параметры (длительность, амплитуда, полоса частот и т. д.). Поэтому в состав измерительной системы включен блок формирования тестовых сигналов. Этот сигнал передается к объекту либо посредством излучения, либо по соответствующим линиям связи (световоды, проводники и т. д.).

Назначение датчиков, коммутаторов, усилителей и АЦП традиционно.

Следующей основной частью экспериментальной установки является обрабатывающая и управляющая система. При ее реализации наиболее широко используются магистрально-модульные микро-процессорные системы, и в частности микро-ЭВМ серии "Электроника" [54, 55]. К ним относятся ЭВМ "Электроника-60 (М)", "Электроника-61-1", "Электроника-81 (В)", ДВК-1, ДВК-2, ДВК-3, ДВК-4 и др. Основу их архитектуры составляет усеченный интерфейс "общая шина" (Q-BUS).

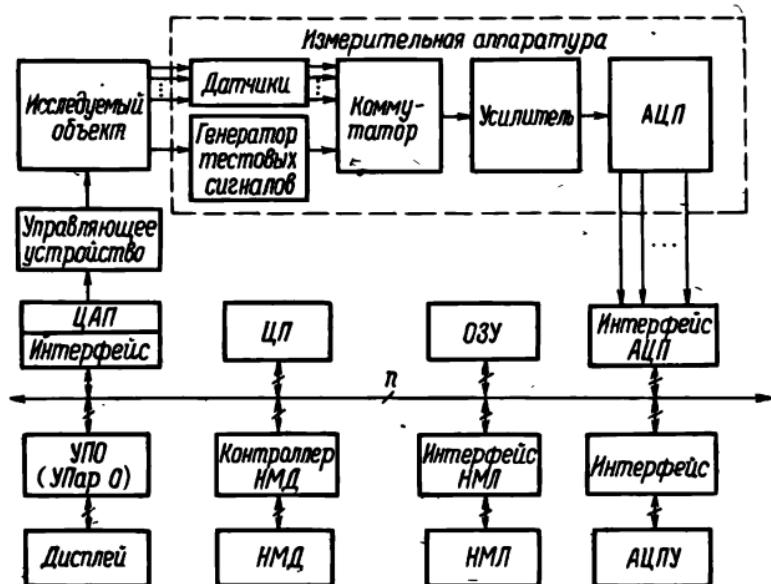


Рис. 1.1. Структурная схема автоматизированной экспериментальной установки

Популярность этих микро-ЭВМ обусловлена следующими их основными достоинствами:

- 1) высокой гибкостью, что обеспечивает возможность модификации системы в соответствии с конкретными потребностями;
- 2) стандартной формой связи для всех устройств, подключенных к единице системной магистрали;
- 3) наиболее полно развитым и продолжающим развиваться математическим обеспечением.

Аппаратная часть архитектуры таких микро-ЭВМ, как правило, включает в себя центральный процессор, оперативную и долговременную память, устройства ввода-вывода информации и обеспечивающие их функционирование интерфейсы.

Центральный процессор выполняет сотни тысяч операций в секунду, что позволяет ему оперативно управлять ходом эксперимента и поставлять исследователю результаты обработки в масштабе времени, близком к реальному.

При работе его в интерактивном (диалоговом) режиме исследователь может быстро оценивать возникающие ситуации и принимать оперативные решения, изменения ход эксперимента в нужном направлении.

Особенности применения таких ЭВМ в контурах управления автоматизированных экспериментальных комплексов связаны в основном со спецификой принципов обмена информацией через единый системный канал и их программного обеспечения.

Отметим еще раз, что современный исследователь без глубокого понимания совокупности аппаратных и программных средств используемой ЭВМ не в состоянии эффективно эксплуатировать и разрабатывать современные экспериментальные комплексы.

Опыт показывает, что при изучении той или иной микропроцессорной системы следует брать за основу аппаратные средства, а не наоборот. Поэтому вначале кратко рассмотрим принципы обмена информацией и их схемотехническую и программную поддержку, а затем рассмотрим особенности программного обеспечения таких микропроцессорных систем.

Принципы обмена информацией, их схемотехническая и программная поддержка. Обмен информацией между различными внешними устройствами (ВУ), подключенными к системному каналу, осуществляется по принципу "задатчик — исполнитель" (ведущий — ведомый или активный — пассивный), т. е. асинхронно. В каждый момент времени только одно из устройств, подключенных к каналу, может быть активным (задатчиком, ведущим). Все остальные устройства в этот момент времени должны быть пассивными (ведомыми, исполнителями). Процесс обмена данными между устройствами замкнут, т. е. в ответ на управляющий сигнал активного устройства должен поступить ответный сигнал (квитанция) от пассивного устройства.

В микро-ЭВМ предусмотрены три режима обмена данными: программный обмен, программный обмен по требованию внешнего устройства (прерывание) и обмен в режиме прямого доступа к памяти (ПДП).

Программный режим — это организация обмена данными между процессором и ВУ или между двумя ВУ по инициативе процессора и под управлением программы.

В режиме прерывания организуется выполнение функций программного режима по требованию (по инициативе) ВУ, подключенных к каналу. При получении требования на обслуживание процессор приостанавливает выполнение текущей программы, переходит на выполнение программы обслуживания запросившего устройства, а после ее завершения про-

должает выполнять прерванную (текущую) программу.

Режим ПДП – это организация обмена данными между ОЗУ и ВУ по его требованию. Особенность этого режима состоит в том, что процесс обмена происходит без участия процессора, т. е. адресацией памяти размерами передаваемых массивов и регенерацией памяти управляет устройство, запросившее режим ПДП. Это самый быстрый способ обмена данными между ОЗУ и ВУ.

Для организации обмена каждое ВУ должно иметь один или несколько регистров (регистры данных, состояний), адреса которых определяет пользователь. Адреса регистров ВУ могут иметь как четные, так и нечетные номера (160000_8 – 177777_8). Восемь регистров с адресами 177550_8 – 177566_8 резервированы для регистров стандартных устройств ввода–вывода информации. Однако они также могут использоваться по усмотрению пользователя.

Формат регистра состояния ВУ. В рассматриваемых микро-ЭВМ рекомендуется применять формат регистра состояния, показанный на рис. 1.2 [54, 55]. Разряд "Разрешение работы" выполняет функции инициализации (пуска) устройства и используется только для записи информации.

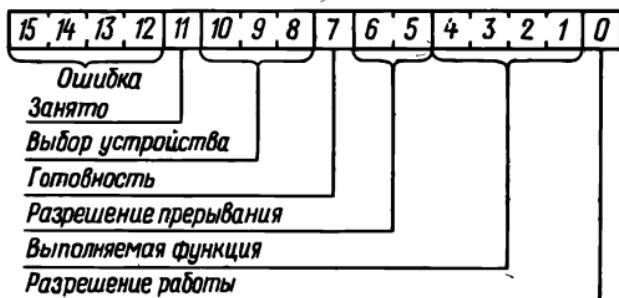


Рис. 1.2. Примерный формат регистра состояния внешнего устройства

Разряды 1–4 содержат информацию о выполняемой ВУ операции. Пятый и шестой разряды могут использоваться для чтения и записи, а также участвуют в операциях, реализующих режим прерывания. Седьмой разряд (бит готовности) характеризует готовность устройства к работе. При единичном значении этого разряда устройство готово, при нулевом – нет.

К одному ВУ может быть подключено несколько исполнительных устройств. Для их идентификации предназначены разряды 8–10 (выбор устройства) регистра состояний.

Разряды 12–15 идентифицируют ошибку обмена.

Для реализации обмена в режиме прямого доступа к памяти ВУ, кроме того, должно иметь еще несколько регистров:

регистр адреса памяти (РАП), предназначенный для хранения текущего адреса ячейки памяти. После передачи каждого слова содержимое этого регистра инкрементируется;

регистр счета слов (РСС), выполняющий функцию управления размером передаваемого массива данных. Информация в него должна заносится процессором перед началом обмена;

регистр адреса устройства (РАУ), который хранит номер дорожки или блока в ЗУ большой емкости. Обмен данными между ЦП и ВУ или между двумя ВУ может происходить битами, байтами или 16-разрядными словами.

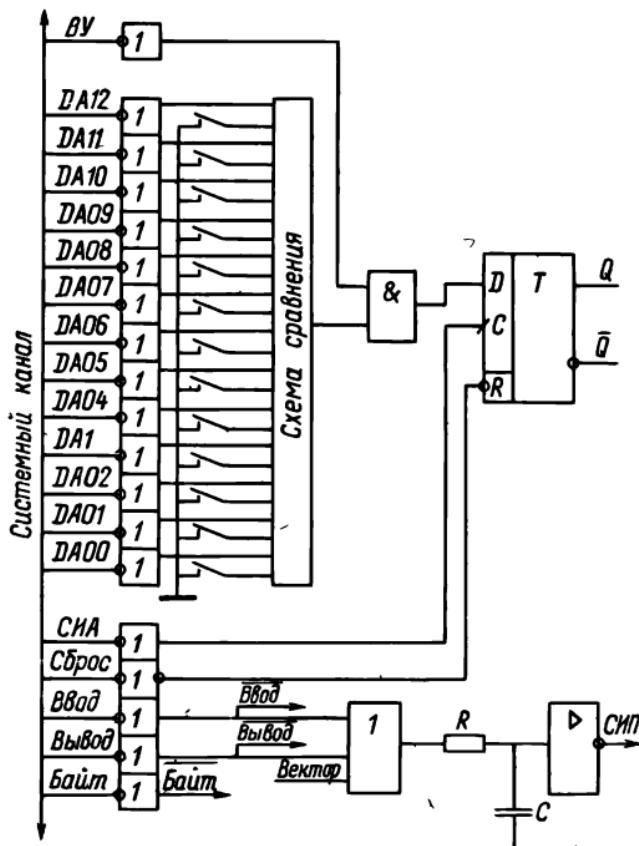


Рис. 1 3 Логика поддержки программного режима обмена

Для большинства экспериментаторов наибольший интерес представляет дисциплина обмена, обеспечивающая управление ВУ в одном из двух режимов — программном и прерывания. Поэтому аппаратную и программную части дисциплины обмена в этих режимах рассмотрим подробнее.

Программный режим работы. Для обеспечения работы устройства, подключенного к системному каналу микро-ЭВМ, пользователь сам определяет состав регистров и логики, обеспечивающей выполнение устройством заданных функций. Однако состав логики управления, связанной с системным каналом, диктуется структурой канальных сигналов. Примерный вид функциональной электрической схемы, реализующей логику управления устройством пользователя в программном режиме, приведен на рис. 1.3.

Логика работы этой части интерфейса сводится к следующему. Обращение к внешним устройствам центральный процессор (ЦП) начинает с выставления адреса на шины DA0—DA15. Информацию о том, что адрес выставлен, несет синхроимпульс активного устройства (СИА), вырабатываемый ЦП с задержкой около 150 нс, необходимой для прекращения переходных процессов в линиях связи. Если адрес находится в диапазоне адресов регистров ВУ (160000—177777), то ЦП вырабатывает сигнал (ВУ). Распознавание адресов ВУ производит ЦП по значениям трех старших разрядов DA13—DA15. Адреса регистров ВУ задаются пользователем при помощи переключателей или перемычек, установленных на входе схемы сравнения. Если код выставленного на шинах DA0—DA12 адреса совпадает с кодом, установленным переключателями П0—П12, то на выходе схемы сравнения устанавливается сигнал высокого уровня. Его конъюнкция с сигналом ВУ даст также сигнал высокого уровня, который по сигналу СИА запоминается в триггере и может быть использован для стробирования исполнительного устройства (например, регистра данных). После окончания адресной части цикла ЦП формирует сигналы "ввод", "вывод" или "байт". Сигналы "ввод" и "вывод" пользователь может применить для организации записи и считывания информации в регистр данных ВУ. При этом необходимо помнить, что в рассматриваемом режиме обмена сигнал "ввод" вырабатывается ЦП во время действия сигнала СИА и означает, что ЦП готов принять данные от ВУ.

Для организации программного обмена с несколькими регистрами данных (или любых других исполнительных

устройств) одного ВУ можно использовать любые разряды адреса. В этом случае нет необходимости в соответствующих переключателях и входах схемы сравнения, а выходные сигналы соответствующих разрядов могут быть применены для организации стробирования упомянутых регистров. Обычно для этих целей используют младшие разряды, начиная с DA1.

Обмен информацией в рассматриваемом режиме может происходить как байтами, так и 16-разрядными словами. При выполнении байтовых команд ЦП вырабатывает сигнал "байт", а для организации программного доступа к младшему или старшему байту можно использовать любой разряд DA. Обычно для этих целей используют разряд DA0. Сигнал "байт" используется при передаче адреса (этот сигнал означает, что далее будет следовать операция вывода) и при передаче данных (сигнал "байт" означает, что выводится байт информации).

После окончания процесса приема или передачи данных логика управления (рис. 1.3) должна сформировать и передать ЦП квитанцию. Эту функцию выполняет сигнал синхронизации пассивного устройства (СИП). Он должен быть сформирован не позднее чем через 10 мкс после выработки сигнала "ввод" ("вывод"). В противном случае ЦП перейдет на подпрограмму обслуживания внутреннего прерывания с адресом вектора 4. Как отмечалось выше, прием и передача данных сопровождается сигналами "ввод" и "вывод", которые могут формировать сигнал СИП, а время его появления регулируется параметрами элементов интегрирующей RC-цепи.

Таким образом, в программном режиме, при передаче данных из ВУ в активное устройство канальные операции выполняются в следующей последовательности:

- 1) активное устройство выставляет адрес на шину DA0—DA15 и вырабатывает сигнал ВУ;
- 2) не ранее чем через 150 нс после установки адреса активное устройство вырабатывает сигнал СИА, предназначенный для запоминания адреса во входной логике (рис. 1.3, триггер);
- 3) ВУ дешифрует адрес и запоминает его;
- 4) активное устройство снимает адрес, сигнал ВУ и вырабатывает сигнал "ввод", сигнализируя о готовности принять данные, и ожидает сигнал СИП;
- 5) ВУ помещает данные на шину DA0—DA15 и выраба-

тывает СИП, сигнализируя о наличии данных на шинах DA0—DA15;

6) активное устройство принимает СИП, данные и снимает сигнал "ввод";

7) ВУ снимает СИП, завершая операцию передачи данных;

8) активное устройство снимает СИА, завершая канальный цикл "ввод". В этом режиме сигнал "байт" не вырабатывается.

Последовательность канальных операций при организации передачи данных из активного устройства во ВУ следующая:

1) активное устройство выставляет адрес, сигнал ВУ, "байт", СИА (не менее чем через 150 нс);

2) ВУ дешифрует адрес и запоминает его;

3) активное устройство снимает адрес, ВУ, "байт", выставляет на шину DA0—DA15 данные и не ранее чем через 100 нс вырабатывает сигнал "вывод";

4) ВУ принимает данные и вырабатывает СИП (в пределах 10 мкс);

5) активное устройство по СИП снимает сигнал "вывод" (примерно через 150 нс) и данные (примерно через 250 нс);

6) ВУ снимает СИП;

7) активное устройство снимает СИА, завершая канальный цикл "вывод".

Во время передачи данных от ЦП к ВУ сигнал "байт" устанавливается только при байтовых командах и означает передачу в ВУ байта информации.

Кроме этого, в режиме программного обмена реализуется канальный цикл "ввод—пауза—вывод", т. е. ввод данных в процессор, их преобразование и вывод по адресу последнего выбранного операнда. Адресная часть, ввод и вывод выполняются аналогично рассмотренному ранее с той разницей, что сигнал СИА остается активным и после окончания ввода данных, а это позволяет осуществить вывод преобразованных данных без повторения адресной части цикла.

Пример реализации программной поддержки программного режима. Программную часть интерфейса, обеспечивающую этот режим обмена, рассмотрим на примере организации обмена данными между клавиатурой и экраном дисплея. Эти два устройства могут рассматриваться как два самостоятельных ВУ.

Клавиатура имеет два регистра — регистр состояния (РС) с адресом 177560 и регистр данных (РД) с адресом 177562.

Адрес РС экрана монитора 177564, а РД — 177566.

Приведем пример программы, обеспечивающей обмен между клавиатурой и экраном. Первые две команды (*TSTB* и *BPL*) обеспечивают циклическую проверку готовности клавиатуры (наличие в седьмом разряде РС единицы), а вторые — экрана. Следующая команда обеспечивает пересылку кода нажатой клавиши в РД экрана, т. е. печать соответствующего символа на экране дисплея.

```
P1: TSTB @# 177560
    BPL P1
P2: TSTB @# 177564
    BPL P2
    MOVB @# 177562, @#177566
    JMP P1
```

Таким образом, приведенная программа организует работу дисплея в режиме печатающей машинки.

Режим прерывания. Внешнее устройство, способное обмениваться данными в этом режиме, является инициатором сеанса обслуживания. Центральный процессор, получив запрос на программный обмен, приостанавливает выполнение текущей программы и переходит к выполнению программного обслуживания запросившего устройства. После этого ЦП возвращается к прерванной программе и продолжает ее выполнение.

Каждое устройство, способное вызывать прерывание работы ЦП, должно иметь в составе регистра состояния разряд разрешения прерывания. Если устройству разрешается прерывание программы, то этот разряд должен быть программно установлен в единицу. Кроме этого, ЦП разрешает прерывание только в том случае, если седьмой разряд регистра состояния процессора установлен в нуль. Выход на программу обслуживания ВУ ЦП производит автоматически с помощью вектора прерывания. Этот вектор указывает номер ячейки памяти, которая хранит стартовый адрес программы обслуживания прерывания.

Для организации обмена в этом режиме аппаратная часть интерфейса (в дополнение к рис. 1.3) должна иметь логическую структуру, показанную на рис. 1.4. Представлен-

ная логическая структура должна обеспечить выработку сигнала требования прерывания (ТПР), прием и передачу сигнала предоставления прерывания (ППР), формирование и передачу адреса вектора прерывания.

Сигнал ТПР вырабатывается в случае, если ВУ готово к обмену (сигнал "готово" имеет высокий уровень) и разряд разрешения прерывания РС установлен в "1".

Функцию разряда разрешения прерывания РС выполняет первый триггер на рис. 1.4. Для установки этого триггера в "1" необходимо вход D соединить с соответствующим разрядом шины DA, а на вход C подать сигнал "вывод". Конъюнкция значения разряда разрешения прерывания с сигналом "готово" обеспечит установку второго триггера (его называют триггером требования прерывания) в единичное состояние. Инвертированный сигнал этого триггера, как видно из схемы рис. 1.4, и есть сигнал ТПР. Центральный процессор получив от устройства сигнал ТПР вырабатывает (если седьмой разряд его РС установлен в "0") сигналы "ввод" и ППР. По сигналу "ввод" сбрасывается третий триггер (триггер представления прерывания), чем запрещается

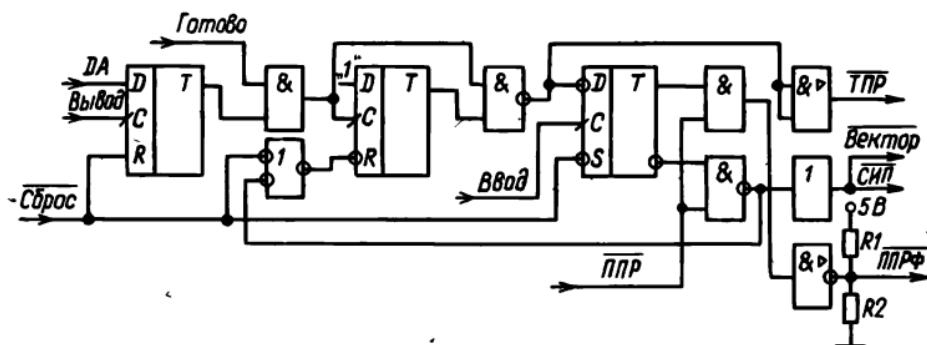


Рис. 1.4. Логика поддержки режима прерывания

дальнейшее распространение по каналу сигнала ППР. Как видно из схемы на рис. 1.4, сигналы "ввод" и ППР участвуют в формировании СИП и сигнала "вектор". Сигнал "вектор" используется для передачи процессору адреса вектора прерывания (программы обслуживания). Сигнал ППР снимает сигнал ТПР. По сигналу СИП обслуживаемое устройство выставляет на шины DA00–DA07 адрес вектора прерывания, ЦП принимает этот адрес, СИП и снимает сигналы "ввод" и ППР. Устройство снимает СИП, ЦП помещает в стек содержимое счетчика команд (СК) и регистра состояния процес-

сопа (РСП) и загружает в них новую информацию из двух последовательно расположенных ячеек памяти (например, для клавиатуры это ячейки 60 и 62). При этом содержимое первой ячейки есть адрес вектора прерывания. После этого ЦП выполняет программу обслуживания этого устройства.

По завершении обслуживания ЦП возвращается к текущей программе в то место, где она была прервана с помощью команды RTI. По этой команде из стека выбираются два слова, которые записываются в СК и РСП соответственно.

Если два или несколько устройств одновременно запрашивают сеанс обслуживания, то первым удовлетворяется устройство, электрически наиболее близко расположенное к ЦП.

Любое из устройств, подключенных к каналу, может прервать выполнение программы обслуживания другого устройства, если оно имеет более высокий приоритет. Следовательно, программы обслуживания могут "вкладываться" одна в другую до любого уровня.

Пример реализации программной поддержки режима прерывания. Программную часть интерфейса устройства, обеспечивающую режим прерывания, рассмотрим на следующем примере. Пусть во время выполнения некоторой программы требуется обеспечить изменение исходных данных по инициативе внешнего устройства, после чего продолжить выполнение программы с новыми исходными данными. В качестве ВУ выберем опять клавиатуру, а требование прерывания будем формировать посредством нажатия ее произвольной клавиши.

Пусть задачей основной программы является нахождение суммы содержимого восьми ячеек памяти, расположенных одна за другой. Тогда задачей программы обслуживания ВУ будет занесение нового содержимого в эти ячейки памяти в моменты времени, определяемые пользователем.

Приведем программу, реализующую такой режим обмена.

<i>MOV</i>	<i>#2000, @# 60</i>	Стартовый адрес
<i>MOV</i>	<i>#200, @# 62</i>	Новое состояние РСП
<i>MOV</i>	<i>#4000, R6</i>	Организация стека

<i>P4:</i>	<i>MOV</i>	<i># 10, R0</i>	
	<i>MOV</i>	<i># 3000, R1</i>	
	<i>CLR</i>	<i>R2</i>	Основная программа

<i>P2:</i>	<i>ADD</i>	<i>(R1) +, R2</i>	
	<i>SOB</i>	<i>R Ø, P2</i>	
<i>P3:</i>	<i>TSTB</i>	<i>@ #177564</i>	
	<i>BPL</i>	<i>P3</i>	
	<i>MOVB</i>	<i>R2, @ #177566</i>	
	<i>MOV</i>	<i>#100, @ #177560</i>	
	<i>JMP</i>	<i>P4</i>	
	<i>MOV</i>	<i>#10, R Ø</i>	Программа
	<i>MOV</i>	<i>#3000, R1</i>	обслуживания
<i>P5:</i>	<i>MOV</i>	<i>@ #177562, (R1) +</i>	
	<i>SOB</i>	<i>R Ø, P5</i>	
		<i>RTI</i>	

Первые три команды являются подготовительными и могут быть выполнены вручную. При этом первая команда определяет стартовый адрес программы обслуживания ВУ, вторая – формирует новое содержимое РСП, а третья – определяет начальный адрес стека.

Первые пять команд основной программы обеспечивают нахождение суммы содержимого восьми ячеек памяти с помещением результата в *R2*. Следующие команды обеспечивают вывод на экран символа, код которого находится в младшем байте *R2*. Следующая команда обеспечивает выработку клавиатурой сигнала ТПР.

При нажатии клавиши клавиатуры "7-й бит" РСП установится в "1" и после выполнения девятой команды ЦП разрешит прерывание и передаст управление программе обслуживания ВУ с адресом вектора 2000. Эта программа обеспечит занесение во все ячейки памяти (3000–3010) кода только что нажатой клавиши и возвратит (по *RTI*) управление прерванной программе (команде *JMP*). По команде *JMP* управление передается команде основной программы, которая, обработав новые данные, выведет на экран соответствующий символ.

1.3. ОСОБЕННОСТИ ПРОГРАММНОГО ОБЕСПЕЧЕНИЯ ИЗМЕРИТЕЛЬНО-ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ НА БАЗЕ МИКРО-ЭВМ

Состав программного обеспечения микро-ЭВМ семейства "Электроника-60". Рассмотрим назначение основных компонентов программного обеспечения (ПО), структура которого приведена на рис. 1.5.

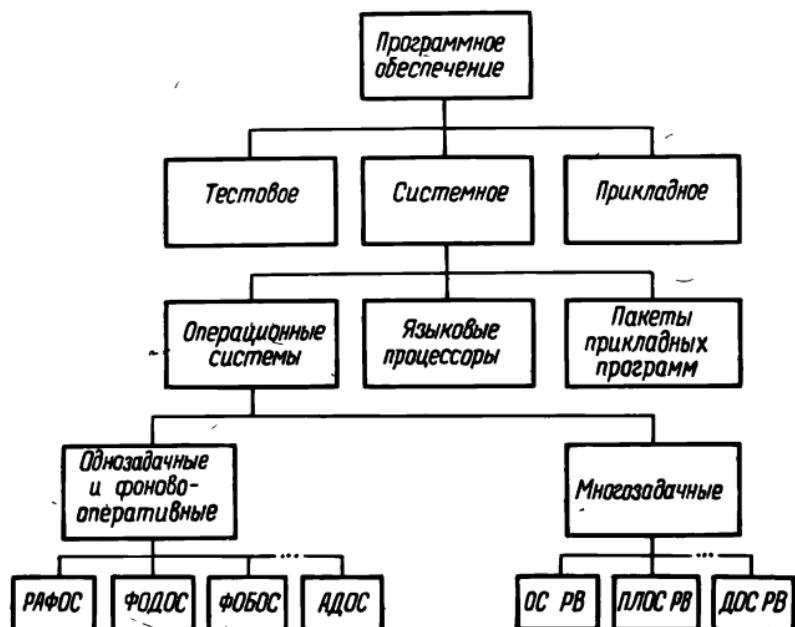


Рис. 1.5. Структура программного обеспечения микро-ЭВМ "Электроника-60"

Тестовое ПО, предназначено для проверки работоспособности, наладки и поиска неисправностей вычислительных комплексов, построенных на базе микро-ЭВМ типа "Электроника-60". В него входят тест-программы команд, прерываний, памяти, перфоленточных устройств ввода-вывода, арифметики и т. д. Все тест-программы можно использовать самостоятельно или под управлением специальной операционной системы, упрощающей комплексную проверку систем..

Прикладное ПО включает в себя набор программ и отдельных модулей, разрабатываемых пользователем для решения конкретной прикладной задачи.

Системное ПО управляет процессом создания, отладки и выполнения прикладных программ пользователя. Клю-

чевым подмножеством системного ПО являются операционные системы (ОС), определяющие основные особенности и режимы работы по созданию и выполнению программ.

Ключевым подмножеством системного ПО являются операционные системы (ОС), определяющие основные особенности и режимы работы по созданию и выполнению программ.

Для разработки программ пользователями применяются языки программирования высокого уровня и машинно-ориентированные языки. Трансляторы или языковые процессоры составляют второе подмножество системного ПО. Они работают под управлением ОС, и смысл их работы заключается в перекодировании исходных текстов программ в последовательности инструкций, выполняемых процессором микро-ЭВМ.

Системное программное обеспечение семейства микро-ЭВМ "Электроника-60" позволяет разработчику создавать прикладные программы с помощью основных языков программирования — бейсик, фортран, паскаль и др. Эти языки удобны в применении, однако обладают некоторой избыточностью по сравнению с машинно-ориентированными языками по емкости памяти, а также меньшим быстродействием оттранслированных модулей.

Для более полного использования возможностей микро-ЭВМ применяются машинно-ориентированные языки. К ним относится, например, язык макроассемблер или макро.

Третье подмножество системного ПО составляют пакеты прикладных программ, предназначенные для решения задач с помощью микро-ЭВМ. Пакеты прикладных программ (ППП) может создавать пользователь, однако во многих случаях удается эффективно использовать готовые пакеты, имеющиеся в ПО микро-ЭВМ.

Общие сведения об операционных системах. Выбор операционной системы в первую очередь определяется архитектурой конкретной ЭВМ и характером решаемых задач.

По своему функциональному назначению операционные системы, используемые в микро-ЭВМ "Электроника-60" и программно с ней совместимых ЭВМ, можно разделить на следующие классы:

1) однозадачные ОС В такой ОС программа, поставленная пользователем на решение, выполняется процессором непрерывно до ее завершения;

2) фоново-оперативные ОС, в которых время процессора разделяется между двумя задачами: оперативной, имеющей приоритет,

и фоновой. Обе задачи находятся в оперативной памяти и в любой момент готовы к выполнению;

3) мультипрограммные (многозадачные) ОС, характеризующиеся параллельным выполнением многих задач.

Среди однозадачных и фоново-оперативных операционных систем реального времени можно выделить системы РАФОС, ФОДОС, ФОБОС, АДОС и др. Все эти системы представляют собой различные версии ОС RT-11.

Источником появления мультипрограммных операционных систем реального времени – ОС РВ, ПЛОС РВ, ДОС РВ является операционная система *RSX*.

Перечисленные системы объединяет одно важное свойство – модульность построения. Ядром этих операционных систем является модуль "монитор", обеспечивающий доступ к системным и пользовательским файлам, диалог с терминалом, запись программ пользователя в файл, вывод на печатающее устройство или терминал и многие другие функции. У монитора имеется список (таблица), с помощью которого он "узнает" пользовательские команды. Разные мониторы могут иметь различные списки и тем самым могут различаться своими возможностями. Так, например, "мощности" мониторов операционных систем РАФОС, ФОДОС, ФОБОС различны. Это вызвано различием аппаратных средств, в среде которых адаптировались данные системы.

Общий недостаток этих систем – выдача сообщений на английском языке. Кроме того, в этих операционных системах текстовую информацию приходится представлять в сокращенном наборе КОИ-7, включающем в себя только прописные буквы. Это вызвано тем, что все системные программы ориентированы на работу с 7-битовыми кодами символов. Между тем распространены устройства, позволяющие работать с полным набором символов, такие, как терминалы 15И3-00-013 и печатающее устройство *DZM-180*. Отсутствие программной поддержки препятствует полному использованию их возможностей.

В связи с этим была разработана ОС АДОС, совместимая с *RT-11* (версия V05.00), в которой для хранения текстов используется код КОИ-8. Отличия АДОС от *RT-11* обмен с терминалом в коде КОИ-8; более высокая скорость обмена с терминалом; большинство системных программ были переработаны таким образом, что сообщения системы выдаются на русском языке.

Другая известная операционная система – ФОДОС, совместимая с *RT-11*, представляет собой один из вариантов системы РАФОС. Система ФОДОС – фоново-основная дисковая операционная система, предназначена для использования в проблемно-ориентированных вычислительных комплексах, построенных на базе микро-ЭВМ. Усовершенствованный вариант системы – ФОДОС-З в отличие от первоначальных вариантов обеспечивает поддержку всех типов центральных процессоров семейства микро-ЭВМ; использование опера-

тивной памяти емкостью до 4М байт; мультитерминальную поддержку на программном уровне; программирование не только на языках "Фортран-4", "бейсик", "ассемблер", но и "модула-2", "паскаль", СИ и др.

Ограниченнaя емкость памяти и сравнительно невысокое быстродействие накладывают весьма существенные ограничения на использование микро- и мини-ЭВМ для решения задач многих классов.

В информационных системах, особенно в системах реального времени (РВ), где задержки, связанные с выгрузкой задач на устройства внешней памяти, и разделение времени центрального процессора нежелательны, возникают проблемы с размещением задач в оперативной памяти и обеспечением требуемого времени их реакции на запрос. Так как право на существование имеют как мини-ЭВМ, так и микро-ЭВМ, и по своим возможностям они дополняют друг друга, то можно использовать комплексы из нескольких ЭВМ — машинные сети. В ПО таких комплексов могут применяться ОС РВ, например широко используемая ОС РВ-ВЭФ [14]. Она обеспечивает мультипрограммирование для задач, число которых ограничено емкостью ОЗУ. Несмотря на удобство, гибкость и широкий набор функций, эта система не обеспечивает средств межзадачного взаимодействия.

Таким образом, число операционных систем достаточно велико и каждая новая операционная система обладает как достоинствами, так и недостатками. Рассмотрим основные функции и структуру одной из широко применяемых операционных систем — ОС РАФОС. Выбор системы РАФОС обусловлен хорошей реакцией системы на внешние прерывания, большой скоростью обмена с внешними вычислительными устройствами. Для ее работы требуется минимальная аппаратная конфигурация. Эксплуатация системы продемонстрировала ее высокую эффективность для отладки ПО систем управления и подтвердила правильность основных принципов, положенных в основу ее построения. Приведенное описание достаточно для понимания большинства систем модульной структуры.

Особенности и состав операционной системы РАФОС. Операционная система реального времени с разделением функций (РАФОС) представляет собой базовую систему для магистрально-модульных комплексов СМ ЭВМ, программно совместимых с СМ-3, СМ-4. Система РАФОС ориентирована на работу в комплексах, в состав которых могут входить дополнительные процессоры (например, СМ-2410 или СМ-2600), а также микропроцессоры. Использование дополнительных процессоров в составе комплексов позволяет существенно повысить производительность технических средств при решении задач специальных классов. Подобные комплексы называются системами с разделением функций, так как повышение производительности в них достигается

в результате разделения функций между процессорами, ориентации процессоров на выполнение одной или нескольких специальных функций, параллельного функционирования всех процессоров комплекса.

Система РАФОС позволяет эффективно организовать вычислительный процесс в комплексах СМ ЭВМ, имеющих от 16 до 248К байт оперативной памяти, и обслуживает широкий набор внешних устройств. Система РАФОС позволяет строить системы, сочетающие решение задач реального времени с многопользовательской работой в режиме разделения времени. При этом РАФОС имеет самую быструю реакцию на внешнее воздействие (прерывание) по сравнению с другими операционными системами реального времени СМ ЭВМ, что особенно важно в автоматизированных информационно-измерительных и информационно-управляющих системах.

Система РАФОС имеет многослойную структуру, в которую входят: программы-мониторы, программы-драйверы, системные программы (утилиты), системные и объектные макробиблиотеки (рис. 1.6). Она организована в виде файлов, которые хранятся на запоминающих устройствах — накопителях на магнитных дисках (НМД). Взаимодействуя с ОС пользователь создает свои файлы.

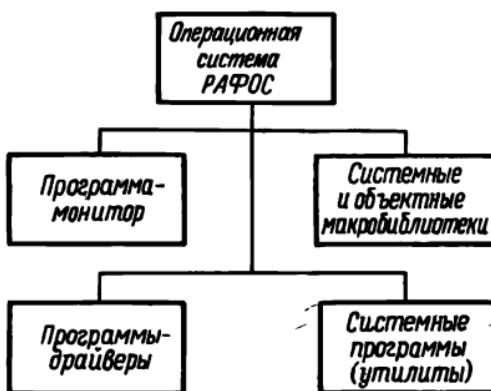


Рис. 1.6 Структура операционной системы РАФОС

Обращение к файлу происходит по его имени, содержащему собственно имя и тип файла. Вместе с именем файла можно указать логическое или физическое имя устройства, на котором этот файл должен быть создан или уже существует. Например, сообщение: *RK1: TEST. TXT* соответствует тому, что на первом приводе накопителя на магнитном

диске (НМД) СМ-5400 существует файл с именем *TEST* текстового типа.

Перечислим основные типы файлов ОС РАФОС:

текстовые, создаваемые пользователем (*MAC* – программа на языке "макро", *FOR* – программа на языке "форктран", *PAS* – программа на языке "паскаль", *BAS* – программа на языке "бейсик", *TXT* – текстовая документация, *LST* – файл листинга программы, *MAP* – файл карты распределения памяти, создаваемой программой *LINK*, *COM* – файл, содержащий последовательности команд, необходимые для трансляции и компоновки мониторов и драйверов);

объектные, создаваемые в результате трансляции или извлекаемые из объектных (*OBJ*);

отображения памяти, получаемые при редактировании объектных файлов и объектных библиотек (*SAV*);

системные, содержащие программы-мониторы, программы-драйверы устройств, системные библиотеки (*SYS*).

Основной управляющей программой ОС РАФОС служит программа-монитор, являющаяся связующим звеном между пользователем, аппаратурой и системным ПО. Она принимает, анализирует и выполняет специальные команды управления системой (команды монитора, которые описаны в приложении 1).

Мониторы ОС РАФОС. В состав ОС РАФОС входят мониторы пяти типов:

RM – исполняющий монитор реального времени, резидентный в оперативной памяти;

SJ – однозадачный монитор реального времени;

FB – фоново-оперативный монитор реального времени, обслуживающий до восьми задач на комплексах с памятью до 56 К байт; .

XM – монитор управления памятью до 248 К байт для обслуживания до восьми задач реального времени;

TS – многопользовательский монитор разделения времени для комплексов с емкостью памяти от 96 до 248 К байт и обслуживания до 30 задач.

Мониторы размещаются в файлах, имеющих имена, состоящие из пяти букв: последние две буквы определяют тип монитора, первые три буквы – всегда *RAF*. Типом файла, содержащего монитор, является *SYS*. Например, файл *RAFSJ.SYS* содержит *SJ*-монитор.

Каждый монитор ОС РАФОС состоит из трех основных компонентов: резидентного монитора *RMON*, модуля *USR*,

интерпретатора команд монитора *KMON*. Во всех мониторах компонент *RMON* постоянно находится в оперативной памяти. В состав *RMON* входят: модули обработки прерываний, обслуживания таймера, интерпретации системных макро-команд, диагностики системных сбоев, системные таблицы и т. д. Модуль *USR* выполняет основные функции работы с каталогами внешних запоминающих устройств и интерпретацию командных строк. Так как модуль *USR* используется реже, чем *RMON*, он загружается из системного устройства по мере необходимости. Область программы, в которую помещается *USR*, сохраняется на системном устройстве в файле *SWAP.SYS*. Для повышения быстродействия *USR* может быть сделан резидентным (постоянно загруженным) в оперативной памяти с помощью команды монитора *SET USR NOSWAP*. Интерпретатор команд монитора *KMON* выполняет анализ и обработку команд (см. приложение 1), вводимых с терминала или командного файла.

Драйверы внешних устройств. В состав ОС РАФОС входят программы-драйверы, осуществляющие управление устройствами конкретных типов (дисками, терминалами и т. д.). Для каждого устройства имеется программа-драйвер, реализующая алгоритм управления этим устройством. Драйверы обеспечивают доступ ко всем периферийным и внешним запоминающим устройствам со стороны мониторов, а также системных прикладных программ.

Драйверы позволяют разрабатывать программное обеспечение, независимое от внешних устройств. Вся работа с устройствами на физическом уровне выполняется в драйверах. Если пользователю необходимо работать с дополнительными устройствами, нестандартными для РАФОС, то он может разработать драйвер для этого устройства. Включить новый драйвер в состав системы можно с помощью команды монитора (*INSTALL*).

Каждый драйвер системы РАФОС хранится в отдельном файле на системном диске, с которого загружен монитор операционной системы. Файл, содержащий драйвер, имеет имя, состоящее из трех букв, а тип файла — *SYS*. Первые две буквы имени файла — сокращенное наименование устройства, они определяют "физическое" имя устройства при работе под управлением ОС. Последняя буква имени файла называется постфиксом и связана с типом монитора. Например, драйвер устройства печати для *XМ*-монитора находится в файле *LPRX.SYS*.

Внешние устройства ОС РАФОС. Классификация устройства с учетом физической структуры и метода обработки приведена в табл. 1.1.

Таблица 1.1

Структура	Последовательный доступ	Произвольный доступ
Файловая	Накопитель на магнитной ленте (МЛ)	Накопитель на магнитном диске (НМД)
Нефайловая	Перфоленточное устройство Печатающее устройство Терминал	—

Все внешние устройства, входящие в состав экспериментального комплекса, управляемого ОС РАФОС, имеют физическое, а также одно или несколько логических имен. Логические имена устройств обеспечивают независимость программы пользователя от конкретных внешних устройств в операциях ввода – вывода. Так, обращаясь к устройству с логическим именем *DK*, можно обмениваться данными с накопителями на гибких магнитных дисках НМД СМ-5400 и НМД ЕС-5061 (29М байт), имеющими различные физические имена – *DX, DP*.

Обычно физические имена устройств совпадают с именами драйверов ОС. Например, драйвером накопителя на магнитной ленте ИЗОТ-5003, имеющим физическое имя *MT*, является системный файл *MT.SYS*.

Приведем некоторые имена физических устройств:

RK, RKN – диск со сменными кассетами ($0 \leq N \leq 7$) 2,4 Мбайт;

DM, DMN – пакет сменных дисков ($0 \leq N \leq 7$) 14М байт;

DP, DPN – пакет ($0 \leq N \leq 7$) 20 Мбайт;

DX, DXN – накопитель на гибком диске ($0 \leq N \leq 3$);

DY, DYN – накопитель с двойной плотностью ($0 \leq N \leq 3$);

TT – системный терминал;

MT, MTN – накопитель на магнитной ленте ($0 \leq N \leq 7$).

GT – устройство отображения графической информации (графический дисплей);

CR – устройство ввода с перфокарт;

PC – перфоленточное устройство ввода–вывода;

LP – устройство печати;

NL – “нуль-устройство”, которое осуществляет фиктивные операции ввода–вывода без передачи информации.

Таблицы монитора ОС РАФОС, входящие в состав компонента монитора *RMON*, включают в себя следующие предопределенные логические имена:

SY, SYN – логическое имя устройства, с которого загружена операционная система. *SYN* определяет устройство, подключенное к тому же контроллеру, что и *SY*, и имеющее номер *N* (максимальное значение *N* зависит от типа физического устройства). Соответствие *SY* и физического устройства не может быть изменено командой монитора *ASSIGN* (см. приложение 1);

DK, DKN – логическое имя устройства, которое используется по умолчанию. *DKN* определяет устройство, подключенное к тому же контроллеру, что и *DK*, и имеющее номер *N*. После загрузки ОС *DK* совпадает с *SY*. Соответствие *DK* физическому устройству может быть изменено командой *ASSIGN*.

Утилиты. Следующим типом программ, входящих в состав ОС РАФОС, являются системные программы, называемые утилитами:

программа-редактор (*K52, SCREEN, EDIT*), предназначенная для создания и корректировки текстов программ;

программы, позволяющие выполнять операции над файлами (открытие и закрытие файлов) (*OPEN, CLOSE*), создавать новый файл (*CREATE*), переименовывать файл (*RENAME*), удалять файл (*DEL*) из каталога диска, а также другие операции.

программы-отладчики, помогающие отыскивать и исправлять ошибки в программах пользователей;

программы-трансляторы, позволяющие транслировать программы, получать объектные модули;

редактор связей (*LINK*), компонующий объектные модули, получаемые в результате трансляции, в загрузочные модули;

программа-библиотекарь (*LIBRARY*), обслуживающая

библиотеки программных модулей. По команде монитора библиотекарь может извлечь модуль из библиотеки или включить его в библиотеку;

программа сравнения исходных текстов (*DIFF*), определяющая различия в двух текстовых файлах;

программы распечатки содержимого памяти (*DUMP*), анализирующие нетекстовые файлы;

программа обслуживания устройств (*DUP*) и др.

Системные библиотеки. Они представляют собой интерфейс между монитором и драйверами, с одной стороны, и системными и прикладными программами — с другой. В состав ОС РАФОС входят две системные библиотеки.

Системная макробиблиотека (файл *SYSMAC. SML*) содержит макрокоманды, которые можно использовать в программах на языке "макро". Специальная группа макрокоманд предназначена для программирования драйверов.

Системная библиотека объектных модулей (хранится в файле *SYSLTB. OBJ* на системном диске) ориентирована на использование в программах на языке "форTRAN". С помощью этой библиотеки реализуются почти все возможности мониторов: обработка прерываний от внешних устройств, вычисления с 32-разрядными целыми числами, работа со строками и т. д.

Компоновщик РАФОС (программа *L/NK*) при необходимости автоматически извлекает модули из этой библиотеки, в том числе и специальный драйвер, выполняющий загрузку частей программы, имеющей оверлейную структуру.

Трансляторы. Одним из компонентов ПО микро-ЭВМ являются языковые трансляторы, представляющие собой сложные программы, необходимые для отладки пользовательских программ.

Процесс разработки программ на форTRANе, макро и других языках состоит из следующих этапов: создание файла исходного текста программы; трансляция программы и получение объектного модуля; исправление ошибок трансляции, редактирование текста программ; компоновка объектных модулей и получение загрузочного модуля (*L/NK*); запуск программы на выполнение (*R* или *RUM*).

Для выполнения каждого из этапов разработки программы требуются знания соответствующих инструкций командного языка, физического смысла происходящих в ОС процес-

сов, умения работать с системными программами-утилитами.

Наиболее широко применяется для создания программ обработки экспериментальных данных и автоматизации исследований на базе микро-ЭВМ алгоритмический язык "фортран".

В различных операционных системах СМ ЭВМ реализованы разные версии языка "фортран". В название версии входит название соответствующей операционной системы: фортран/РАФОС, фортран/ОС-РВ, фортран/ДОС. Все три версии представляют собой значительное расширение стандарта фортрана (фортран СТ). Фортран/РАФОС снабжен наиболее развитыми средствами оптимизации. Отметим, что средства отладки включены в фортран/РАФОС и в фортран/ОС-РВ. В трансляторах фортран/ДОС и фортран/ОС-РВ имеется специальный режим, при котором трансляторы фиксируют отклонение программы от стандарта фортрана и выдают соответствующие предупреждения.

Основные отличия фортрана/РАФОС от фортрана/СТ сводятся к следующему:

1. Алфавит расширен литерой ' ' (апостроф).
2. Имеется оператор *IMPLICIT* для неявного указания типа по первой букве имени; вместо типа *DOUBLE PRECISION* в операторе *IMPLICIT* используется тип *REAL * 8*.
3. Имеются текстовые константы в виде последовательности литер, заключенной в апострофи.
4. Индексные выражения могут быть любыми арифметическими выражениями целого или вещественного типа. В последнем случае они автоматически приводятся к целому типу.
5. Во всех арифметических операциях, кроме возведения в степень, разрешаются любые комбинации типов данных.
6. В отношениях допустимы все комбинации целого, вещественного типов и типа удвоенной точности.
7. В арифметических операторах присваивания допускаются все сочетания типов: целого, вещественного, комплексного и двойной точности.
8. В операторе *GOTO* (I_1, I_2, \dots, I_n) при $i < 1$ или при $i > n$ произойдет передача управления на оператор, следующий за оператором перехода.
9. Заключительная строка *END* может играть роль операторов *STOP* или *RETURN*.

10. В операторе *DATA* могут указываться имена массивов.

11. Имеются операторы ввода–вывода последовательного доступа без указания устройств (*READ* и *PRINT*):

12. Имеются средства бесформатного ввода–вывода прямого доступа, к которым относятся: оператор *DEFINE FILE*, описывающий файл прямого доступа, операторы ввода–вывода прямого доступа *READ*, *WRITE*, *FIND*.

13. Кроме объявлений типа, имеющихся в фортране/СТ, допустимы следующие объявления с указанием длины в байтах: *INTEGER * 4*, *REAL * 4*, *REAL * 8*, *COMPLEX * 8*, *LOGICAL * 4*, *LOGICAL * 1*.

14. Максимальное число измерений массивов равно семи.

15. В операторах *STOP* и *PAUSE* может использоваться целая константа или текстовый литерал.

16. В подпрограмме *FUNCTION* можно указывать длину значения функции в байтах.

17. Оператор *DATA* может быть расположен в любом месте модуля, но после тех объявлений, в которых описаны объекты, указанные в операторе *DATA*.

При необходимости перевода той или иной программы обработки экспериментальных данных с одной версии фортрана на другую необходимо учитывать их различия, вызванные разной архитектурой соответствующих вычислительных машин и особенностями операционных систем. Рекомендации по переводу программ, в том числе и по переводу программ, написанных на версиях фортрана для ЕС ЭВМ и БЭСМ-6, изложены в работе [20].

Алгоритмический язык-интерпретатор "бейсик" является промежуточным звеном между ессемблером и языками высокого уровня.

Программа, записанная в ОЗУ ЭВМ, выполняется последовательно, начиная со строки с минимальным номером. При этом каждый символ последовательно друг за другом интерпретируется и выполняется.

Язык позволяет программировать и решать задачи в диалоговом режиме. Основным достоинством этого языка является простота обучения и применения. Подробнее язык описан в работе [66]. Язык "бейсик", входящий в операционную систему РАФОС, имеет большие возможности: может работать с внешними носителями информации (магнитными дисками и лентами) прямого доступа, записывать и считывать информацию файловой структуры. Поэтому как сами программы, так и подпрограммы, написанные на языке "бейсик", могут быть систематизированы пользователем в библиотеки.

Алгоритмический язык "квейсик" предназначен для разработки и выполнения программ на микро-ЭВМ. Транслятор языка "квейсик" является компилятором, т.е. он преобразует исходную программу в объектную программу в машинных командах. Это обеспечивает большую скорость выполнения программ, чем в языке "бейсик", но требует большей емкости ЗУ, так как в памяти ЭВМ одновременно находятся исходная и оттранслированная программы. Языки системный "квейсик" (входящий в ОС РАФОС), так же как и системный "бейсик", позволяет записывать и считывать программы в файл на устройство прямого доступа: магнитные диски, ленты.

По организации программы, алгоритмам вычислений и операндам языки "бейсик" и "квейсик" подобны. Поэтому описание подпрограмм и их имена даются для языка "бейсик".

Каждая подпрограмма имеет нумерацию строк, начиная с пятой. Естественно, что каждый пользователь будет менять, исходя из структуры своей программы, данную нумерацию. Этую замену следует проводить тщательно, чтобы не спутать номера строк в операторах безусловного перехода с новыми номерами. Требуемые подпрограммы, к которым есть обращение в данной подпрограмме, например 15 GOSUB 100, имеют в строке 100 только название

100 REM 'SUBROUTINE BGAUS3'

Пользователь самостоятельно пишет требуемую подпрограмму (в данном случае *BGAUS3*), начиная с 100 (или с удобной ему) строки таким образом, чтобы все необходимые для вычислений подпрограммы органично входили в общую программу.

Одним из способов включения подпрограмм в общую программу является создание каталогов подпрограмм на внешнем носителе с последующим объединением их командой APPEND (см. описание языка). В этом случае каждой подпрограмме необходимо отводить только ей присущие номера строк, чтобы при объединении всех подпрограмм не произошло их перекрытия.

И в любом случае необходимо помнить о том, что в языке "бейсик" нет структуры формальных параметров при описании подпрограмм. Поэтому в каждой подпрограмме должны быть свои переменные или, по крайней мере, изменение их значений в процессе работы программы не должно отражаться на результатах; значения входных переменных должны быть вычислены до обращения к подпрограмме

Организация межмодульных связей. Возможны два способа организации связей между объектными модулями. Один из них предполагает раздельное редактирование модулей и выполнение полученных загрузочных модулей по отдельности. Связь между такими модулями может осуществляться через общие наборы данных. При втором спо-

собе объектные модули объединяются редактором связей (загрузчиком *LINK*) в загрузочный модуль. Если один модуль программы передает управление другому, то первый из них называют вызывающим, а второй — вызываемым (или подпрограммой).

Различают две формы межмодульных связей: по управлению и по данным. Связь по управлению обеспечивает передачу и возврат управления, а также сохранение и восстановление регистров, а связь по данным — передачу аргументов (параметров) из модуля в модуль.

Организация связей модулей, написанных на одном языке, обычно не вызывает трудностей. Компиляторы (программы, преобразующие файл, написанный на языке высокого уровня, в файл, содержащий двоичный код) в этом случае обеспечивают связь по управлению и данным автоматически. При формировании команд, организующих межмодульные связи, компиляторы выполняют стандартные соглашения о связях. Эти соглашения устанавливают правила использования регистров общего назначения для организации связи и определяют стандартную структуру области сохранения. Загрузку регистров связей производит вызывающий модуль.

При программировании на языке "ассемблер" рекомендуется придерживаться стандартных соглашений о связях. Язык "ассемблер" ("макро") не ограничивается переводом программы в машинный код. Файл, который ассемблер образует для хранения программы, переведенных в двоичный код, содержит также информацию о стартовом адресе программы. Этот адрес вычисляется в процессе загрузки, когда загрузчик (*RUM*) поместит программу в память.

Определение начального адреса программы позволяет сложным программам загрузки компоновать единую программу из независимо оттранслированных модулей. Файл, полученный в результате компоновки (тип *SAV*), отражает состояние памяти в тот момент, когда программа будет загружена. В нем установлен фактический начальный адрес (адрес передачи управления) и все относительные адреса соответственно смещены. Программы монитора, как правило, используют первые 400₈ слов памяти для управления, поэтому начальный адрес обычно равен 1000₈.

На связи модулей, транслированных с разных языков, влияют особенности языковых средств и компиляторов. Языковые средства различаются неэквивалентными типами данных. К особенностям компиляторов относятся неполное выполнение соглашений о связях, а также несходство в организации хранения данных эквивалентных типов.

Обычно интерес представляют способы передачи управления и обмена данными между программами, выполненными на языках высокого уровня, и программами, написанными на машинно-ориентированном языке. Рассмотрим примеры, реализующие передачу управ-

ления и данных из программ на фортране в программы на макро. Отметим, что обращение к программам на макро из фортрана производится при помощи стандартного оператора вызова подпрограммы *CALL*. Например, оператор *CALL PM (A, B, C, ...)* передает управление программе на языке "макро" с именем *PM* (*A, B* и *C* – параметры, значения которых необходимо передать в программу на макро).

После передачи управления команде программы на макро с именем *PM* регистр *R5* содержит адрес числа переданных параметров. Следующие ячейки памяти содержат адреса адресов передаваемых параметров, причем, если параметры описаны как *INTEGER* (т. е. являются целыми), то их значения занимают по одному машинному слову и располагаются последовательно друг за другом, начиная с ячейки памяти, адрес которой находится как $\text{@}(R5) + 2$. Если параметры описаны оператором *REAL*, то значение каждого параметра располагается в двух соседних ячейках памяти (т. е. занимает машинное слово двойной длины), так же как и в первом случае, с адреса $\text{@}(R5) + 2$. При этом значения каждого из параметров представлены в форме с плавающей запятой. Например, значение параметра *A = 53.0 (REAL)* в ячейках памяти будет представлено как 041524 (старшее слово) и 000000 (младшее слово). Старшее слово в двоичном коде будет иметь вид

0 100 001 101 010 100 ... 0.

Порядок (*e'*) Мантисса

В рассматриваемых микро-ЭВМ порядок (*e*) числа с плавающей запятой определяется как $e = e' - 128$, а мантисса нормализована и сдвинута влево на один разряд (т. е. старший разряд мантиссы скрыт). В нашем примере для порядка отводится шесть двоичных разрядов $e = 134 - 128 = 6$, а восстановленная (сдвинутая вправо на один разряд) нормализованная мантисса имеет вид 110101000000000000000000. В соответствии с полученным порядком ($e = 6$) отделим шесть старших двоичных разрядов и получим $A = 2^0 + 2^2 + 2^4 + 2^5 = 53.0$.

Программа на фортране (*FTI*), использующая внешнюю (макро-ассемблеровскую) процедуру *PM1*, передает программе *PM1* параметры *A* и *B*.

PROGRAMM FTI
INTEGER A, B, C
A = 52
B = 53
CALL PM1(A, B, C)
*PRINT *, C*
END

PM:: MOV @ R5, R1
MOV (R1) +, R2
MOV (R1) +, R3
BIS R2, R3
MOV R3, (R1)
RETURN
.END

Программа *PM1* обеспечивает прием этих параметров, обработку (в рассматриваемом примере обработка *A* и *B* сводится к их логическому сложению) и передачу результата в программу на фортране посредством присвоения ему имени *C*.

В общем случае через одни и те же параметры можно передавать данные как из фортрана в макро, так и наоборот. При этом предыдущие значения параметров не сохраняются.

Приведем пример обмена данными, описанными как *REAL*, между программами на фортране и макро.

<i>PROGRAMM FTR</i>	<i>PM2 .MOV@ R5, R1</i>
<i>REAL A, B, C</i>	<i>MOV# MEM, R2</i>
<i>A = 3.5</i>	<i>MOV R2, R3</i>
<i>B=28.7</i>	<i>MOV (R1) +, (R2) +</i>
<i>CALL PM2 (A, B, C)</i>	<i>MOV (R1) +, (R2) +</i>
<i>PRINT*, C</i>	<i>MOV (R1) +, (R2) +</i>
<i>END</i>	<i>MOV (R1) +, (R2) +</i>
	<i>FADD R3</i>
	<i>MOV (R3) + 4, (R1) +</i>
	<i>MOV (R3) + 6, (R1) +</i>
	<i>RETURN</i>
	<i>.END</i>

Как видно, каждому параметру требуется две ячейки памяти. Приведенная в качестве примера программа обеспечивает передачу вещественных переменных *A* и *B* на языке "макро" (программа *PM2*), их преобразование (в рассматриваемом примере сложение с плавающей запятой) и передачу результата в программу на фортране, посредством присвоения ему имени *C*, описанному как *REAL*.

Передача параметров между программами на системных языках "квейсик" и "бейсик" осуществляется (также через пятый регистр) аналогично рассмотренным примерам. Однако способы передачи управления программе на макро несколько отличаются от передачи на фортране и изложены в соответствующих руководствах.

Прикладное программное обеспечение (ПО) статистической обработки экспериментальных данных. Программное обеспечение прикладной статистики является мощным и универсальным средством решения основных задач обработки результатов экспериментов. Как правило, современные ЭВМ снабжены достаточно сложными программными средствами статистической обработки и задача экспериментатора состоит в их максимальном и наиболее эффективном использовании. В настоящее время в нашей стране и за рубежом накоплен большой опыт создания и применения ПО вычислительных машин различных классов, прежде всего больших универсальных ЭВМ [1, 2, 29, 32, 37, 38, 69].

Программные средства статистической обработки данных по типу их системной организации можно разбить на несколько классов, среди которых особенно широко используются средства двух типов.

Комплексы и библиотеки программ (подпрограмм). К настоящему времени пользователями разработано огромное число подпрограмм, которые могут быть использованы при статистической обработке данных. Некоторые из этих подпрограмм систематизированы и описаны в доступной литературе [22, 26, 28, 48, 62, 64, 65, 77, 79, 85], другие – в ведомственных изданиях. Наборы тематически связанных подпрограмм, реализующих основные операции по статистической обработке данных в пределах некоторого раздела прикладной статистики, называют комплексами программ (КП). Библиотеки подпрограмм (БП) представляют собой значительные по объему КП, в которых решены задачи стандартного описания и классификации компонент библиотеки. К классу БП относятся известные библиотеки подпрограмм для больших универсальных ЭВМ *IMSL*, *SSP*, ПНП-БИМ, а для микро- и мини-ЭВМ – их аналоги (микроверсии), например достаточно подробно описываемая в настоящей книге библиотека для научно-технических расчетов БНТР/РАФОС. Библиотеки, как правило, постоянно дополняются подпрограммами, написанными пользователями или описанными в литературе.

Для того чтобы использовать этот класс программного обеспечения, пользователь должен знать операционную систему и иметь навыки программирования на соответствующем алгоритмическом языке, поскольку при этом необходимо составить и отладить основную (вызывающую) программу, организующую ввод–вывод экспериментальной информации и обращения к выбранным подпрограммам.

Пакеты прикладных программ (ППП). Отличительной чертой этого класса программных средств является наличие специального входного языка, близкого к естественному. Пакеты ПП ориентированы, в первую очередь, на пользователя-непрограммиста. Разработки ПО этого класса проводятся в настоящее время особенно интенсивно, в том числе и применительно к мини- и микро-ЭВМ. Наиболее известными ППП являются пакеты *BMDP*, *SPSS*, ППСА, ОТЭКС, ОПЭК, а также их микроверсии, в частности версия ОТЭКС для СМ-4 и версия пакета *BMDP* в ОС РАФОС, разработанная в НИИМ ЛГУ [1, 26, 32, 37, 38].

Рассмотренные классы ПО статистической обработки данных существуют и развиваются в условиях сложного динамического равновесия. Детально эти вопросы анализируются в работах [1, 2, 69]. Каждый класс ПО имеет свои группы пользователей, для которых он наиболее приемлем. При решении задач статистической обработки экспериментальных данных на микро-ЭВМ наиболее широко применяются в настоящее время комплексы и библиотеки подпрограмм. Это объясняется многими причинами, среди которых можно отметить следующие:

1. Высокий общий уровень "компьютерной грамотности" экспериментаторов, обслуживающих автоматизированные измерительно-вычислительные комплексы на базе микро-ЭВМ, что позволяет им успешно создавать собственные основные программы обработки и расширять БП новыми подпрограммами.

2. Сравнительно медленное создание и распространение микропрограмм некоторых ППП (*SPSS*, *ППСА* и др.).

3. Ориентацию ПО для микро-ЭВМ на более широкий круг пользователей, не имеющих высокой квалификации в области статистической обработки. В этой связи в программное обеспечение должны включаться в первую очередь простейшие стандартные статистические процедуры, которые успешно реализуются на основе КП и БП.

4. Специфику автоматизированных информационно-измерительных систем на базе микро-ЭВМ, связанную с постоянным обменом данными с внешними устройствами и оперативным анализом экспериментальной информации, которую в настоящее время удается учесть только путем создания программ функционирования систем, включающих в себя подпрограммы статистической обработки из БП или подпрограммы пользователя.

Отметим, что особенно целесообразно использовать микропрограммы не узкоспециализированных статистических БП, а общематематических библиотек, таких, как *SSPFST*, *NAG*, *IMSL*, снабженных хорошими подпрограммами матричной алгебры и вычислительной математики. Это позволяет пользователю достаточно просто расширять статистические разделы своей библиотеки, создавая удобные подпрограммы, приспособленные под конкретную ситуацию, специфику входных и выходных данных. В результате такого расширения удается в значительной степени избавиться от характерных недостатков статистических разделов некоторых

БП. Например, статистический раздел БНТР/РАФОС, (см. ниже) из-за своего универсального назначения не содержит многих важных подпрограмм, которые было бы удобно использовать в конкретных условиях, набор программ и методов обработки отличается от принятого в отечественной литературе [22]. Использование подпрограмм других разделов БНТР позволяет пользователю скомпоновать собственные недостающие подпрограммы.

Создание программ с использованием библиотеки научных подпрограмм. Одним из достоинств языка "фортран/РАФОС" является наличие обширной библиотеки для научно-технических расчетов (БНТР/РАФОС). Она представляет собой набор более 230 подпрограмм на фортране, разбитых для удобства на пять разделов: 1) линейная алгебра, 2) численные методы анализа, 3) статистика, 4) специальные функции, 5) сервисные программы.

Библиотека БНТР/РАФОС является аналогом известной библиотеки *SSPFST*, используемой на ЕС ЭВМ [62]. Она представляет собой библиотеку пользователя, состав которой определяется при ее генерации. Она может быть записана на магнитный диск или магнитную ленту в виде одного большого файла типа *FOR*, содержащего исходные тексты программ, либо в виде файла типа *OB J*, содержащего объектные модули программы библиотеки.

В первом случае текст нужной программы копируется и включается в программу пользователя и последняя отлаживается как единый фортрановский модуль.

Во втором случае при компоновке программы (команда *LINK*) анализируются все обращения к подпрограммам библиотеки в основной программе, при этом используется объектная библиотека, содержащая необходимые модули.

В подпрограммах библиотеки не фиксированы максимальные длины массивов данных, они указаны в списках формальных параметров описания подпрограммы. Обращение ко всем подпрограммам библиотеки осуществляется посредством оператора *CALL*.

Некоторые подпрограммы, которые могут быть использованы при статистической обработке, описаны в гл. 3 и 5.

1.4. ОСОБЕННОСТИ ПРИМЕНЕНИЯ ПРОГРАММИРУЕМЫХ МИКРОКАЛЬКУЛЯТОРОВ

Сравнительная характеристика современных ПМК. Использование вычислительного средства любого класса значительно облегчает и ускоряет обработку результатов эксперимента. Однако применение больших или микро-ЭВМ для широкого круга потребителей часто сопряжено с трудностями. При решении сравнительно простых задач затраты, связанные с обращением к ЭВМ (прежде всего — временные), могут оказаться необоснованными. В настоящее время ПМК доказали свою эффективность при решении многих научно-технических задач, в том числе и при выполнении сложных статистических расчетов и реализации алгоритмов обработки экспериментальных данных в самых различных областях [4, 34, 58, 75, 76, 81, 84]. Свидетельством этого являются также программы, приведенные в гл. 3 и 6.

Для статистической обработки результатов экспериментов могут использоваться отечественные ПМК различных типов, основные данные о которых приведены в табл. 1.2.

Выполняемые операции и функции в таблице обозначены так же, как и на лицевой панели ПМК. Некоторые из используемых символов требуют пояснения: $[x]$ — выделение целой части числа; $\{x\}$ — выделение дробной части числа; \max — определение большего из двух чисел, находящихся в операционных регистрах РХ и РY; знак — определение знака числа; \wedge , \vee , \oplus , инв — логические операции над двоичными числами, выполняемые поразрядно: логическое умножение, логическое сложение, исключающее ИЛИ, инверсия; \vec{O}''' — перевод времени в часах, минутах, секундах и долях секунды в часы и доли часа; \vec{O}''' — обратный перевод значений времени; \vec{O}' — перевод градусов, минут и долей минут в градусы и доли градуса; \vec{O}' — обратный перевод угловых измерений; сч — генератор псевдослучайной последовательности чисел в интервале от 0 до 1.

Качественное отличие ПМК МК-52 от всех остальных моделей состоит в имеющейся памяти на 512 шагов, в которую могут быть записаны программы и числовые данные из регистров памяти общего назначения (РОН). Помещенная в эту память информация сохраняется при выключении ПМК, что является существенным достоинством данного калькулятора.

В микрокалькуляторах типов МК-46, МК-64, МК-52 предусмотрена возможность подключения внешних устройств, что существенно расширяет возможности использования этих калькуляторов в автоматизированных информационно-измерительных, контролирующих и управляющих системах.

Особенности программного обеспечения ПМК. Основные сведения о языке программирования. Каждый ПМК характеризуется своей системой команд или входным языком. Как видно из табл. 1.2, можно вы-

Таблица 1.2

Математические операции и технические характеристики	Тип ПМК		
	Б3-21, МК-46, МК-64	Б3-34, МК-56, МК-54	МК-61, МК-52
$+; -; X; \div; \sqrt{ }; x^2; 1/x; \sin; \cos;$ $x^y; \ln; e^x; \pi$	+	-	+
e^{jx}	+	-	-
$\lg; \tg; 10^x; \arcsin(\sin^{-1});$ $\arccos(\cos^{-1}); \arctg(\tg^{-1})$	-	+	+
$ x , \{x\}, [x], \max, \text{зн}, \wedge, \vee, \oplus, \text{инв}$	-	-	+
$\overrightarrow{O''}, \overleftarrow{O''}, \overrightarrow{O}, \overleftarrow{O'}, \text{сч}$	-	-	+
Число шагов программы	60	98	105
Число РОН	8	14	15
Число регистров операционного стека	2	4	4
Регистр предыдущего результата	-	+	+
Кольцевой стек	+	-	-
Косвенная адресация	-	+	+
Организация циклов с регистрами РО-РЗ	-	+	+
Организация подпрограммы, условные и безусловные переходы	+	+	+

делить три типа входных языков ПМК, которые назовем входными языками Б3-21, Б3-34, МК-61. В связи с тем, что имеются отличия в обозначении некоторых одинаковых команд в разных ПМК, а принятное обозначение некоторых команд оказывается не совсем удобным для записи, используемая авторами форма записи таких команд представлена в табл. 1.3. Остальные символы команд приводятся в том виде, в каком они изображены на лицевой панели ПМК.

Таблица 1.3

Функция	Используемое обозначение	Другие обозначения
Ввод числа, разделение чисел	\uparrow	$B; B \uparrow$
Обмен между регистрами	$X Y$	$\overleftarrow{XY}; \overrightarrow{XY}$
Запись числа в РОН	P	$X \rightarrow P$
Запись числа из РОН в РХ	IP	$P \rightarrow X$
Кольцевая перезапись чисел в регистрах операционного стека	$F \rightarrow$	O

Работа с программой, в частности ее ввод в ПМК, упрощается, если перед символом команды стоит символ соответствующей префиксной клавиши. Например, $R\pi(F\pi)$ – вызов в регистр $X(PX)$ числа π , Fx^2 – вычисление квадрата числа, $PIn(FIn)$ – вычисление натурального логарифма и т. д.

Программа, записанная на одном из языков ПМК, в некоторых случаях может быть переведена на другой язык формальными методами. Эти методы предполагают, что замена команды одного языка командой или фрагментом программы другого языка обеспечивает идентичное оригиналу содержимое регистров памяти и операционного стека после ее выполнения.

Для ПМК, имеющих одинаковую структуру, перевод программы с языка более простого на более сложный не вызывает затруднений, а лишь приводит в некоторых случаях к избыточности новой программы. Так, программа для Б3-34 реализуется на МК-56, МК-54, МК-61, МК-52 без какой-либо коррекции. Но если в программе для Б3-34 определение, например, $|x|$ требует выполнения двух операций:

Fx^2 ; $F\sqrt{ }$, то в МК-61 они могут быть заменены одной командой, входящей в язык этого ПМК.

Обратный перевод из языка более сложного в более простой осуществить труднее, а иногда и невозможно вовсе. Так, невозможно с помощью Б3-34 выполнить логические операции, предусмотренные в МК-61.

Наиболее сложным оказывается перевод программ, записанных для ПМК с различной организацией. Это ПМК группы Б3-21, с одной стороны, и групп Б3-34 и МК-61 — с другой (см. табл. 1.2). Подробно такой перевод рассмотрен, например, в работе [75].

В связи с тем, что ПМК Б3-21 в настоящее время с производства сняты, современные ПМК имеют организацию Б3-34, а программы, записанные на языке Б3-34, полностью реализуемы на МК-56, МК-54, МК-61, МК-52, программы в настоящей книге приведены только на языке Б3-34.

Общие рекомендации по разработке программ. Несмотря на значительное число справочных изданий с программами для ПМК [4, 34, 76, 81, 84 и др.], для эффективного использования программ требуются определенные знания по программированию. Это связано с тем, что конкретные условия решаемой задачи далеко не всегда совпадают с данными из справочника, а в некоторых случаях требуемой справочной информации просто нет. В пособиях по ПМК имеются подробные методические рекомендации по составлению и отладке программ, приемам программирования [4, 84 и др.], поэтому остановимся лишь на некоторых общих положениях.

Составление программы является необходимым условием реализации вычислительного алгоритма. Записывать разработанную программу в память ПМК имеет смысл при многократном ее применении. Кроме экономии времени, автоматическое повторение вычислений исключает неизбежные при ручной работе ошибки.

При составлении сложной программы целесообразно использовать ее подробное представление в виде таблицы, где в строке следует записать адрес, команду, код операции, соответствующий данной команде в используемом ПМК, содержимое регистров операционного стека и регистра предыдущего результата, распределение данных в РОН, а также комментарии к команде или блоку команд. Такая запись упрощает составление программы, ее анализ, оптимизацию и дальнейшую отладку [4].

Первоначальный вариант программы должен обеспечивать выполнение заданного алгоритма. Для разветвляющихся и циклических алгоритмов переходы в программе (условные или безусловные) обычно указывают стрелками, а места для адресов переходов на первом этапе оставляют свободными.

После того как создана основа будущей программы, в ней выделяются повторяющиеся цепочки команд, которые могут быть оформлены как подпрограммы. Если n — число команд в повторяющемся участке программы, а N — число повторений этого участка, то организация подпрограммы приводит к экономии памяти, когда $2N + n + 1 < Nn$.

На следующем этапе рассматривается возможность и целесообразность сокращения числа используемых РОН с учетом сохранения информации в регистрах операционного стека, регистре предыдущего результата, а также возможность сокращения числа команд программы, например, при изменении последовательности действий.

Наконец, изучается возможность улучшения программы путем введения сервисных блоков, упрощающих инструкцию по ее применению (сокращающих число ручных операций) и таким образом уменьшающих вероятность возможных ошибок.

По окончании программирования уточняются и записываются адреса переходов.

Предложенная последовательность действий представляется наиболее целесообразной, хотя и не гарантирует создание наилучшей программы. Заметим, однако, что тщательная отработка программы нужна при ее многократном дальнейшем использовании либо при возникновении дефицита памяти. Во многих случаях для дальнейшего улучшения программы требуются неоправданные затраты времени.

Важной составной частью вычислительного процесса является анализ точности полученного результата. Источниками погрешностей в ПМК являются ограниченная разрядность внутренних регистров и приближенность численных методов, используемых для вычисления значений различных встроенных функций. Влияние этих источников на погрешность конечного результата зависит от последовательности выполняемых действий и должно быть учтено при программировании [3, 34, 76].

После того как программа составлена, она записывается в память программы ПМК, проверяется и отлаживается.

Для отлаженной программы ее подробная запись представляет лишь учебный интерес. Обычно на этом этапе программа приводится к виду, удобному для хранения и дальнейшего использования. Удобным является представление программы в виде таблицы с номерами ячеек, соответствующими адресам памяти. В эти ячейки заносятся символы команд и соответствующие коды операций [4]. Наличие последних облегчает проверку записи программы в ПМК. Однако в литературе распространена более компактная запись, исключающая коды операций [34, 75, 76, 84]. По этой записи в строке размещается 12 команд для БЗ-21 и 10 – для БЗ-34. Первая команда каждой строки имеет адрес, заканчивающийся нулем; таким образом просто определяется адрес любой команды.

Применение программы требует инструкции, описывающей порядок действий пользователя. Вид представления инструкции может быть произвольным, однако необходимость экономии места приводит к формализации записи. Например, запись инструкции: a_1 П0; a_2 П1; В/О; С/П; x_i ; С/П; БП 34 С/П; у в РХ и Р5, означает: занести в регистры Р0 и Р1 исходные данные a_1 и a_2 . Установить программный счетчик на нулевой адрес (как правило, первая команда программы записывается в ячейку памяти с адресом 00) и произвести пуск программы. Ввести массив данных $\{x_i\}$, после ввода каждого x_i подавать команду С/П. Завершающий участок программы записан в память программ, начиная с адреса 34. Переход к нему осуществляется командой безусловного перехода после ввода всего массива $\{x_i\}$. Окончательный результат у размещается в регистрах РХ и Р5. Часто для повторного применения программы требуется иной порядок действий. Например, если необходимо решить задачу для тех же исходных данных a_1 и a_2 , но нового массива $\{x_j\}$, инструкция может быть дополнена записью: при повторных вычислениях БП 17; x_j С/П и т. д.

Работа с внешними устройствами. Возможности ПМК применительно к задачам обработки экспериментальных данных и создания автоматизированных информационных систем могут быть расширены с помощью различных внешних устройств. Например, для МК-52 промышленностью выпускаются блоки постоянной памяти с записью в них набора различных программ общего назначения. Специальными командами пользователь переписывает нужную ему программу из блока памяти в память программ ПМК

и далее действует в соответствии с прилагаемой к блоку инструкцией.

Особого внимания заслуживают ПМК, которые могут использовать исходные данные, вводимые не с клавиатуры, а по внешнему каналу связи, также выводить получаемые данные и результаты расчетов на регистрирующее или исполнительное устройство (МК-46 и МК-64). Эти ПМК по своей организации и вычислительным возможностям аналогичны БЗ-21. Возможность ввода информации с внешней шины в цифровой форме предусмотрена в МК-46, в МК-64 имеется АЦП, позволяющий работать с аналоговыми сигналами. При работе с внешними устройствами в Р9 ПМК должен быть записан код эксперимента, разряды которого определяют число опрашиваемых входных устройств (от 1. до 7), синхронный или асинхронный характер работы ПМК с источниками данных, наличие или отсутствие допускового контроля входной информации, характер выводимой информации (входные данные, выходные данные и результаты обработки, только результаты или отсутствие вывода). Особенностью программы обработки, записываемой в ПМК, является обязательность команды вывода данных на внешнюю шину, которая помещается в конце программы перед командой С/П.

В регистры кольцевого стека записываются допусковые величины для контроля входной информации по первым шести каналам. В каждый регистр стека записывается по три разряда нижнего и верхнего пределов. Информация от внешних устройств поступает по семи каналам, записывается в РОН со второго по восьмой в нормированном виде. Если предварительно в соответствующий регистр ввести множитель $1 \cdot 10^4$, информация будет записана в реальном масштабе (три разряда). Так можно обеспечить умножение входных данных на любой коэффициент вида $1 \cdot 10^n$ ($n = 1 \dots 8$).

При допусковом контроле выход значений получаемых данных за пределы допуска регистрируется загоранием соответствующего проверяемому каналу разряда специального индикатора на лицевой панели.

При подаче команды С/П ПМК выполняет опрос каналов, записывая поступающие с них данные в РОН. Одновременно выполняется допусковый контроль. По окончании контроля (если задействованы все семь каналов ввода, время приема и контроля данных составляет около 0,6 с) начинается обработка данных по записанной в ПМК програм-

ме. По окончании вычислений выводятся результаты. Если в программе предусмотрена команда безусловного перехода к началу программы, для повторного пуска достаточно подать команду С/П.

Для работы микрокалькуляторов типов МК-46 и МК-64 с внешними устройствами требуется согласование уровней входных и выходных сигналов ПМК и этих устройств. Для работы с регистрирующим устройством требуется подача специальных сигналов на ПМК, разрешающих вывод следующего данного.

Более подробно организация работы с внешними устройствами изложена в описании МК-46 и МК-64.

ГЛАВА ВТОРАЯ

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ОБРАБОТКА ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ДАННЫХ

2.1. ОСНОВНЫЕ ЗАДАЧИ ПРЕДВАРИТЕЛЬНОЙ ОБРАБОТКИ

Конечной целью предварительной обработки экспериментальных данных является выдвижение гипотез о классе и структуре математической модели исследуемого явления, определение состава и объема дополнительных измерений, выбор возможных методов последующей статистической обработки и анализ выполнения основных предпосылок, лежащих в их основе. Для ее достижения необходимо решить некоторые частные задачи, среди которых можно выделить следующие [1, 2, 12, 19, 22, 30, 51, 52, 68, 74, 82]:

1. Анализ, отбраковка и восстановление аномальных (сбитых) или пропущенных измерений. Эта задача связана с тем, что исходная экспериментальная информация обычно неоднородна по качеству. Наряду с основной массой результатов прямых измерений, получаемых с возможно малыми погрешностями, в экспериментальных данных часто имеются грубые промахи, вызванные просчетами наблюдателя, сбоями при вводе в ЭВМ, аномалиями в работе измерительных приборов и т. д. Без анализа качества данных, устранения или уменьшения влияния аномальных данных на результаты

последующей обработки можно прийти к ложным выводам об изучаемом объекте или явлении.

2. Экспериментальная проверка законов распределения экспериментальных данных, оценка параметров и числовых характеристик наблюдаемых случайных величин или процессов. Выбор методов последующей обработки, направленной на построение и проверку адекватности математической модели исследуемому явлению, существенно зависит от закона распределения наблюдаемых величин. Так, при использовании для обработки процедур классического регрессионного анализа, в первую очередь, необходимо выяснить, является ли закон распределения наблюдаемых величин гауссовским и некоррелированным и т. д. Получаемые при решении этой задачи выводы о природе экспериментальных данных могут быть как весьма общими (независимость измерений, их равноточность, аддитивный характер погрешностей и др.), так и содержать детальную информацию о статистических свойствах данных (вид закона распределения, его параметры). Решение центральной задачи предварительной обработки не является чисто математическим, а требует также содержательного анализа изучаемого процесса, схемы и методики проведения эксперимента.

3. Сжатие и группировка исходной информации при большом объеме экспериментальных данных. При этом должны быть учтены особенности их законов распределения, которые выявлены на предыдущем этапе обработки.

4. Объединение нескольких групп измерений, полученных, возможно, в различное время или в различных условиях, для совместной обработки.

5. Выявление статистических связей и взаимовлияния различных измеряемых факторов и результирующих переменных, последовательных измерений одних и тех же величин. Решение этой задачи позволяет отобрать те переменные, которые оказывают наиболее сильное влияние на результирующий признак. Выделенные факторы используются для дальнейшей обработки, в частности, методами регрессионного анализа. Анализ корреляционных связей делает возможным выдвижение гипотез о структуре взаимосвязи переменных и, в конечном итоге, о структуре модели явления.

В ходе предварительной обработки кроме указанных часто решают и другие задачи, имеющие частный характер: отображение, преобразование и унификацию типа наблюде-

ний, визуализацию многомерных данных и др. [2, 10, 74].

Следует отметить, что в зависимости от конечных целей исследования, сложности изучаемого явления и уровня априорной информации о нем объем задач, выполняемых в ходе предварительной обработки, может существенно изменяться. То же самое можно сказать и о соотношении целей и задач, которые решаются при предварительной обработке и на последующих этапах статистического анализа, направленных на построение модели явления. Так, например, если целью эксперимента является изменение значения неизвестной, но заранее известной величины путем прямых многократных измерений с помощью средства измерений с известными характеристиками погрешностей, то полная обработка результатов измерения ограничивается простейшей предварительной обработкой данных (оценкой математического ожидания). В то же время, если измеряемая величина является переменной, а закон распределения погрешностей измерительного прибора неизвестен, то для решения конечной задачи потребуется проведение как предварительной обработки данных, так и применение статистических методов исследования физических зависимостей.

Для решения задач предварительной обработки используются различные статистические методы: проверка гипотез, оценивание параметров и числовых характеристик случайных величин и процессов, корреляционный и дисперсионный анализ. Для предварительной обработки, оказывающей, как следует из сказанного, первостепенное влияние на качество решения конечных задач исследования, характерно итерационное решение основных задач, когда повторно возвращаются к решению той или иной задачи после получения результатов на последующем этапе обработки.

2.2. ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ

Формы описания случайных величин и процессов и их числовые характеристики. Экспериментальные данные представляют собой реализации случайных величин или случайных процессов. Поэтому для их описания используется математический аппарат теории вероятностей, оперирующей со случайными событиями и величинами, и теории случайных процессов.

Случайные величины делят на одномерные (скалярные) и многомерные (векторные), которые представляют собой совокупности (наборы) одномерных случайных величин. И одномерные и многомерные случайные величины могут быть как дискретными, так и непрерывными.

Дискретная случайная величина принимает значения, принадлежащие конечному или счетному множеству. Множество значений непрерывной случайной величины является несчетным, или континуумом.

В зависимости от физической природы дискретные величины подразделяются на количественные, ординальные (или порядковые) и номинальные (или классификационные). Непрерывные случайные величины относятся к величинам Количественного типа.

Не умаляя значения дискретных случайных величин в прикладных экспериментальных исследованиях, тем не менее далее ограничимся описанием непрерывных случайных величин. Свойства дискретных случайных величин различных типов рассматриваются в работах [22, 30, 52].

Из теории вероятностей известно, что исчерпывающее описание случайной величины дается ее законом распределения вероятностей — правилом, позволяющим определять вероятность попадания этой величины в любую заданную область ее значений.

Закон распределения (распределение) случайной величины может быть задан с помощью любой из двух взаимно однозначно связанных между собой функций: функции распределения и плотности вероятности. Рассмотрим эти функции применительно к одномерным и многомерным случайным величинам.

Функция распределения (вероятностей) одномерной случайной величины определяется следующим образом: $F(x) := P[X \leq x]$.

Плотность (распределения) вероятности представляет собой производную функции распределения: $W(x) = dF(x)/dx$. Элемент вероятности $W(x) dx = P[x \leq X < x + dx]$. Функции $F(x)$ и $W(x)$ произвольной случайной величины должны удовлетворять многим требованиям, в частности, $F(x) \geq 0$; $W(x) \geq 0$, $F(x)$ — неубываю-

$\begin{matrix} +\infty \\ \text{щая функция;} \end{matrix}$ $\int_{-\infty}^{+\infty} W(x) dx = 1$

Для удобства применения в некоторых случаях функции распределения и плотности вероятностей удается представить в виде параметрических функций — функций известного вида, удовлетворяющих упомянутым требованиям и зависящих от некоторого (малого) числа параметров: $F(x) = F(x, \theta_1, \dots, \theta_r) \equiv F(x, \theta)$, $W(x) = W(x, \theta_1, \dots, \theta_r) \equiv W(x, \theta)$, где $\theta = [\theta_1, \dots, \theta_r]^T$ — вектор параметров. Примеры таких распределений приведены далее. Для некоторых видов функций распределения параметры влияют на свойства плотности вероятности достаточно избирательно. В этом случае удается разделить параметры на три основных типа, поскольку они имеют

вполне определенный геометрический смысл: сдвига, масштаба и формы.

Параметр сдвига (расположения) характеризует расположение области возможных значений величины. Параметр масштаба (шкалы, разброса) характеризует размер этой области. Параметр формы (вида) определяет форму данной плотности вероятностей (в смысле, отличающемся от расположения и масштаба) среди функций данного класса. Примерами параметров сдвига и масштаба являются параметры μ и σ^2 для гауссовского распределения $N(\mu, \sigma^2)$; примером параметра формы является параметр c распределения Вейбулла, при $c = 1$ распределение совпадает с экспоненциальным, при $c = 2$ – с распределением Рэля.

Несмотря на то, что параметризация законов распределения существенно упрощает их использование, некоторые задачи удается решить еще более простыми средствами, используя числовые характеристики распределений. Эти характеристики определяются через начальные и центральные моменты различных порядков.

Начальным моментом k -го порядка случайной величины называется величина

$$\mu_k \{ X \} := \int_{-\infty}^{+\infty} x^k W(x) dx.$$

Центральный момент k -го порядка случайной величины определяется следующим образом:

$$M_k \{ X \} := \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu_1 \{ X \})^k W(x) dx.$$

Для определения традиционно используемых числовых характеристик применяют моменты не выше четвертого порядка. На практике обычно применяют:

математическое ожидание (характеристика сдвига)

$$M \{ X \} \equiv \bar{x} \equiv \mu_x := \mu_1 \{ X \} = \int_{-\infty}^{+\infty} x W(x) dx;$$

дисперсию (характеристика масштаба)

$$D \{ X \} \equiv \sigma_x^2 := M_2 \{ X \} = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \bar{x})^2 W(x) dx;$$

коэффициент асимметрии (характеристика формы)

$$A \{ X \} := \mu_3 \{ X \} / M_3 \{ X \};$$

коэффициент эксцесса (характеристика формы)

$$E \{ X \} := \mu_4 \{ X \} / M_4 \{ X \} - 3.$$

Поскольку существуют распределения, для которых некоторые (или все) из этих характеристик не определены, то наряду с ними часто используют:

моду распределения (характеристика сдвига)

$$\text{Mod}\{X\} = \arg \max_x W(x);$$

медиану (характеристика сдвига)

$$\text{Med}\{X\} = x_{0.5},$$

где x_q — квантиль распределения q -го порядка (см. ниже);

половину функции плотности вероятностей на заданном уровне α от максимального значения (характеристика масштаба)

$$\Delta X : W(\Delta X/2) = \alpha W_{\max}.$$

При статистических расчетах (интервальном оценивании, проверке статистических гипотез) большое значение имеют квантили распределений различного (q -го) порядка — корни уравнения $F(x) = q$. Как отмечалось, квантиль порядка $q = 0.5$ называется медианой.

Для описания вероятностных свойств многомерной случайной величины $X = [X_1 \dots X_n]^T$ используются n -мерные плотности вероятности $W(x)$ и функции распределения $F(x)$.

Среди числовых характеристик многомерных случайных величин наиболее широко используются:

вектор математического ожидания

$$M\{X\} \equiv \bar{X} = [\bar{X}_1 \dots \bar{X}_n]^T;$$

корреляционная (ковариационная) матрица

$$D\{X\} = M\{(X - \bar{X})(X - \bar{X})^T\} = [\sigma_{ij}],$$

где $\sigma_{ij} = M\{(X_i - \bar{X}_i)(X_j - \bar{X}_j)\}$ — корреляционный момент случайных величин X_i и X_j (отметим, что $\sigma_{ii} = M\{(X_i - \bar{X}_i)^2\} = D\{X\}$ — дисперсия величины X_i).

Во многих случаях экспериментальные данные представляют собой реализацию случайных процессов — случайных функций времени (или иногда другой, например, пространственной переменной). Поскольку при обработке таких данных на цифровой ЭВМ производится их дискретизация во времени, то последовательность отсчетов (сечений) случайного процесса $X(t)$ в моменты времени t_1, \dots, t_n может интерпретироваться как совокупность случайных величин $X_1 = X(t_1), \dots, X_n = X(t_n)$. Для описания вероятностных свойств каждой из них ($X_i, i=1, n$) могут применять характеристики, используемые ранее. $W(x_i) = W(x_i, t_i)$; $F(x_i) = F(x_i, t_i)$; $\bar{X}_i = \bar{X}(t_i)$; $D\{X_i\} = \sigma_x^2(t_i)$ и т. д.

При совместном рассмотрении всех временных сечений случайного процесса их целесообразно трактовать как многомерную слу-

чайную величину $\mathbf{X} = [X(t_1) \dots X(t_n)]^T$ и использовать для ее описания соответствующие характеристики: $W(x) = W(x, t)$; $F(x) = F(x, t)$; $M\{\mathbf{X}\} = M\{\mathbf{X}, t\}$; $D\{\mathbf{X}\} = D\{\mathbf{X}, t\}$, где $t = [t_1 \dots t_n]^T$.

Некоторые модельные законы распределения случайных величин. При построении вероятностных моделей формирования экспериментальных данных, при описании ошибок измерений, а также при статистическом анализе качества оценок параметров и проверке гипотез широко используются стандартные, хорошо изученные законы распределения случайных величин. Эти распределения достаточно разнообразны, что объясняется, естественно, разнообразием свойств реальных случайных величин и процессов.

М. Кендалл и А. Стьюарт разделяют функции распределения на следующие пять классов: симметричные унимодальные, симметричные двухмодальные, косые, крайне косые и все остальные [43]. В свою очередь, каждый из этих классов подразделяется на более мелкие подклассы, в которые входят и все наиболее известные, классические распределения, некоторые из которых будут рассмотрены ниже. Более подробно и широко модельные распределения и их свойства рассмотрены в работах [2, 30, 43, 57, 61, 80].

1. Гауссовское (нормальное) распределение. Это распределение играет исключительную роль в теории вероятностей и математической статистике. Оно описывает случайные величины, которым присущи самые общие закономерности: непрерывность значений, симметричность, унимодальность, большая вероятность малых отклонений от среднего значения.

Известно, что случайные величины, формирующиеся под воздействием большого числа независимых случайных факторов, взаимодействующих аддитивно и имеющих один порядок значений, распределены приблизительно по гауссовскому закону. К гауссовскому закону стремится распределение многих выборочных статистик, используемых при оценивании параметров и проверке гипотез (см. ниже).

Одномерная плотность вероятностей гауссовской случайной величины X ($X \sim N(\mu_X, \sigma_X^2)$) имеет вид

$$W(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_X^2}} e^{-\frac{(x-\mu_X)^2}{2\sigma_X^2}}, \quad (2.1)$$

Функция распределения

$$F(x) = \Phi\left(\frac{x-\mu_X}{\sigma_X}\right), \quad (2.2)$$

где μ_X и σ_X^2 – параметры распределения, определяющие сдвиг и

масштаб соответственно; $\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^z e^{-\frac{1}{2}t^2} dt^2$ – функция распределения нормированной (стандартной) гауссовой случайной величины $z \sim N(0,1)$ (функция ошибок, интеграл Лапласа).

Числовые характеристики одномерной гауссовой случайной величины:

$$M\{X\} = \text{Med}\{X\} = \text{Mod}\{X\} = \mu_X;$$

$$D\{X\} = \sigma_X^2; A\{X\} = 0; E\{X\} = 0.$$

Для многомерного статистического анализа фундаментальное значение имеет понятие многомерного гауссова закона распределения векторной случайной величины X ($X \sim N(\mu_X; \Sigma_X)$):

$$W(x) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^N |\Sigma|_X}} \exp \left[-\frac{1}{2} (x - \mu_X)^T \Sigma_X^{-1} (x - \mu_X) \right], \quad (2.3)$$

где $\mu_X = [\mu_1, \dots, \mu_N]^T$ – вектор математических ожиданий; $\Sigma_X = [\sigma_{ij}]$ ($i, j = 1, \dots, N$) – корреляционная (ковариационная) матрица.

Числовые характеристики n -мерной гауссовой случайной величины:

$$M\{X\} = \text{Med}\{X\} = \text{Mod}\{X\} = \mu_X;$$

$$D\{X\} = M\{(X - \bar{X})(X - \bar{X})^T\} = \Sigma_X.$$

Матрица Σ_X является неотрицательно определенной симметричной. Диагональные элементы $\sigma_{ii} = \sigma_i^2$ равны дисперсиям соответствующих одномерных случайных величин X_i . Если величины X_i ($i = 1, \dots, N$) независимы (или некоррелированы, что в данном случае эквивалентно), то $\Sigma_X = \text{diag}(\sigma_1^2, \dots, \sigma_N^2)$ и n -мерная плотность вероятности представляет собой произведение одномерных плотностей вероятности.

Одно из замечательных свойств гауссова распределения состоит в том, что частные и условные распределения, полученные из него, также являются гауссовыми. Более того, линейные комбинации гауссовых случайных величин распределены по гауссовскому закону: если $X \sim N(\mu_X, \Sigma_X)$, то m -мерный вектор $Y = AX$ имеет распределение $N(A\mu_X, A\Sigma_X A^T)$. Здесь A – матрица размера $m \times N$.

Частным, но на практике важным случаем многомерной гауссовой случайной величины является двухмерная гауссовская ве-

личина (X_1, X_2) , для которой

$$W(x_1, x_2) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^2 [\sigma_{11}\sigma_{22}(1-\rho_X^2)]^2}} \cdot X \cdot \\ X \exp \left\{ -\frac{1}{2(1-\rho_X^2)} \left[\frac{(x_1 - \mu_1)^2}{\sigma_{11}^2} - 2\rho_X \frac{(x_1 - \mu_1)(x_2 - \mu_2)}{\sqrt{\sigma_{11}\sigma_{22}}} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{(x_2 - \mu_2)^2}{\sigma_{22}^2} \right] \right\}. \quad (2.4)$$

Числовые характеристики:

вектор математических ожиданий $\mu = [\mu_1 \mu_2]^T$;

дисперсионная матрица $\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{bmatrix}$, где $\sigma_{ij} = M\{ (X_i - \bar{X}_i)(X_j - \bar{X}_j) \}$;

коэффициент корреляции $\rho_X = \sigma_{12}/\sqrt{\sigma_{11}\sigma_{22}}$.

Таблицы квантилей гауссовского распределения λ_q приведены в работах [2, 4, 9, 30, 56]. Программы их вычисления описаны в гл. 3.

2. Логарифмически-гауссовское (логнормальное) распределение. Описывает случайные величины, формирующиеся под воздействием большого числа независимых случайных факторов, взаимодействующих мультипликативно и имеющих один порядок значений: $X \sim \sim L(m, \sigma)$.

Плотность вероятностей

$$W(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}x} \exp \left\{ -\frac{(\ln x - \ln m)^2}{2\sigma_X^2} \right\} & (x \geq 0); \\ 0 & (x < 0). \end{cases} \quad (2.5)$$

Функция распределения

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{(\ln x - \ln m)/\sigma} \exp(-t^2/2) dt & (x \geq 0); \\ 0 & (x < 0), \end{cases} \quad (2.6)$$

где m, σ — параметры распределения ($m, \sigma > 0$).

Числовые характеристики:

$$M\{X\} = me^{\frac{1}{2}\sigma^2}; \quad \text{Mod}\{X\} = me^{-\sigma^2}; \quad \text{Med}\{X_1\} = m;$$

$$D\{X\} = m^2 e^{\sigma^2} (e^{\sigma^2} - 1); \quad A\{X\} = (e^{\sigma^2} - 1)^{\frac{1}{2}} (e^{\sigma^2} + 2);$$

$$E\{X\} = (e^{\sigma^2} - 1) (e^{3\sigma^2} + 3e^{2\sigma^2} + 6e^{\sigma^2} + 6).$$

3. Равномерное (прямоугольное) распределение. Это распределение встречается в прикладной статистике в двух типовых случаях: во-первых, когда в некотором интервале все значения случайной величины равновероятны и, во-вторых, при аппроксимации других непрерывных распределений в относительно малых интервалах значений.

Плотность вероятности случайной величины X , имеющей равномерное распределение [$X \sim R(a, b)$],

$$W(x) = \begin{cases} 1/(b-a) & (a \leq x \leq b); \\ 0 & (x > b, x < a), \end{cases} \quad (2.7)$$

функция распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0 & (x < a); \\ (x-a)/(b-a) & (a \leq x \leq b); \\ 1 & (x > b). \end{cases} \quad (2.8)$$

Здесь a и b — параметры распределения (границы области возможных значений), определяющие и сдвиг и масштаб.

Числовые характеристики:

$$\begin{aligned} M\{X\} &= \text{Med}\{\bar{X}\} = (a+b)/2; \quad D\{X\} = (b-a)^2/12; \\ A\{X\} &= 0; \quad E\{X\} = -1.2. \end{aligned}$$

Мода распределения отсутствует.

4. Распределение Коши (Брейта—Вигнера). Оно обладает большой спецификой — ни один из его моментов (включая математическое ожидание и дисперсию) не определен. Примером случайной величины, имеющей распределение Коши, является отношение двух независимых гауссовских случайных величин X_1 и X_2 ($X_1, X_2 \sim N(0, 1)$): $X = X_1/X_2 \sim C(a, c)$. Распределение Коши является классическим примером распределения с более тяжелыми, чем у гауссовского, "хвостами".

Плотность вероятности

$$W(x) = \frac{1}{\pi} \frac{c}{c^2 + (x-a)^2}, \quad (2.9)$$

функция распределения

$$F(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arctg \frac{x-a}{c}, \quad (2.10)$$

где a — параметр сдвига; b — параметр масштаба (полуширина распределения на полувысоте).

Числовые характеристики.

$$\text{Med}\{X\} = \text{Mod}\{X\} = a.$$

Случайная величина, имеющая распределение Коши, обладает свойством самовоспроизведения:

1) если $X \sim C(a, c)$, то величина $Y = b_0 + b_1 X$ имеет распределение Коши: $Y \sim C(a', c')$, где $a' = b_1 a + b_0$; $c' = |b_1|c$;

2) если $X \sim C(a, c)$, то величина $Y = 1/X$ имеет распределение Коши: $Y \sim C(a'c')$, где $a' = a(a^2 + b^2)$; $b' = b(a^2 + b^2)$;

3) если независимые случайные величины $X_i \sim C(a, c)$ ($i = 1, n$), то их среднее значение $Y = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ имеет распределение Коши: $Y \sim C(a, c)$.

5. Экспоненциальное (показательное) распределение. Оно является частным случаем гамма-распределения (см. ниже) или распределения Вейбулла [2, 80], широко используется, например, в задачах определения надежности.

Плотность вероятности

$$W(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & (x \geq 0); \\ 0 & (x < 0), \end{cases} \quad (2.11)$$

функция распределения

$$F(x) = \begin{cases} 1 - \exp(-\lambda x) & (x \geq 0); \\ 0 & (x < 0), \end{cases} \quad (2.12)$$

где λ — параметр распределения ($\lambda > 0$), определяющий и сдвиг и масштаб.

Числовые характеристики $X \sim E(\lambda)$:

$$M\{X\} = 1/\lambda; \quad \text{Mod}\{X\} = 0; \quad \text{Med}\{X\} = \ln 2/\lambda;$$

$$D\{X\} = 1/\lambda^2; \quad A\{X\} = 2; \quad E\{X\} = 6.$$

6. Распределение Лапласа. Оно широко используется при описании погрешностей измерительных приборов [57]: $X \sim Lp(\beta, \lambda)$.

Плотность вероятности

$$W(x) = \frac{1}{2} \lambda e^{-\lambda|x-\theta|} \quad (x \in R), \quad (2.13)$$

где λ — параметр масштаба ($\lambda > 0$); θ — параметр сдвига.

Числовые характеристики:

$$M\{X\} = \text{Mod}\{X\} = \text{Med}\{X\} = \theta; \quad D\{X\} = 2/\lambda^2;$$

$$A\{X\} = 0; \quad E\{X\} = 3.$$

7. Распределение хи-квадрат (χ^2 -распределение). Такое распределение имеет сумму квадратов гауссовских стандартных случайных величин $X = \sum_{i=1}^{\nu} X_i^2$, $X_i \sim N(0,1)$: $X \sim \chi^2(\nu)$. Распределение χ^2

$$X = \sum_{i=1}^{\nu} X_i^2, \quad X_i \sim N(0,1); \quad X \sim \chi^2(\nu).$$

играет большую роль в статистическом оценивании и проверке гипотез.

Плотность вероятности

$$W(x) = \begin{cases} \frac{1}{2^{\nu/2}\Gamma(\nu/2)} x^{\nu/2 - 1} e^{-x/2} & (x \geq 0); \\ 0 & (x < 0), \end{cases} \quad (2.14)$$

функция распределения

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{2^{\nu/2}\Gamma(\nu/2)} \int_0^x t^{\frac{\nu}{2} - 1} e^{-t/2} dt & (x \geq 0); \\ 0 & (x < 0), \end{cases} \quad (2.15)$$

где ν — параметр (число степеней свободы), целое положительное число; $\Gamma(x)$ — гамма-функция Эйлера.

Числовые характеристики:

$$M\{X\} = \nu; \quad \text{Mod}\{X\} = \nu - 2 \quad (\nu \geq 2); \quad D\{X\} = 2\nu;$$

$$A\{X\} = 2^{3/2}\sqrt{\nu}; \quad E\{X\} = 12/\nu.$$

Таблицы квантилей χ^2 -распределения приведены в работах [2, 4, 9, 30, 56]. Программы для их вычисления описаны в гл. 3.

8. Распределение Стьюдента (t -распределение). Широко используется в интервальном оценивании параметров и при проверке статистических гипотез.

Плотность вероятностей случайной величины X , имеющей t -распределение [$X \sim T(\nu)$],

$$W(x) = \frac{1}{\sqrt{\nu\pi}} \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} \left(1 + \frac{x^2}{\nu}\right)^{-(\nu+1)/2} \quad (x \in R), \quad (2.16)$$

где ν — параметр (число степеней свободы), целое положительное число; $\Gamma(x)$ — гамма-функция.

Числовые характеристики:

$$M\{X\} = \text{Med}\{X\} = \text{Mod}\{X\} = 0; \quad D\{X\} = \frac{\nu}{\nu-2} \quad (\nu \geq 2);$$

$$A\{X\} = 0; \quad E\{X\} = 6/(\nu-4) \quad (\nu > 4).$$

Таблицы квантилей t -распределения приведены в работах [2, 4, 9, 30, 56]. Программы их вычисления описаны в гл. 3.

9. Распределение Фишера—Сnedекора (F -распределение, распределение дисперсионного отношения). Играет важную роль в теории оценивания, при статистической проверке гипотез, в дисперсионном анализе.

Плотность вероятности случайной величины X , имеющей F -распределение [$X \sim F(\nu_1, \nu_2)$],

$$W(x) = \begin{cases} \frac{\Gamma\left(\frac{\nu_1 + \nu_2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\nu_2}{2}\right)} \frac{\frac{\nu_1}{2} \frac{\nu_2}{2}}{(x^{\frac{\nu_1}{2}} - 1)^{\frac{\nu_1 + \nu_2}{2}}} & (x \geq 0); \\ 0 & (x < 0), \end{cases} \quad (2.17)$$

где ν_1 и ν_2 — параметры распределения (степени свободы), целые положительные числа; $\Gamma(x)$ — гамма-функция.

Числовые характеристики:

$$M\{X\} = \nu_2 / (\nu_2 - 2) \quad (\nu_2 > 2); \quad \text{Mod}\{X\} = \frac{(\nu_1 - 2)\nu_2}{\nu_1(\nu_2 + 2)} \quad (\nu_1 > 1)$$

$$D\{X\} = \frac{2\nu_2^2(\nu_1 + \nu_2 - 2)}{\nu_1(\nu_2 - 2)^2(\nu_2 - 4)} \quad (\nu_2 > 4);$$

$$A\{X\} = \frac{(2\nu_1 + \nu_2 - 2)\sqrt{8(\nu_2 - 4)}}{(\nu_2 - 6)\sqrt{\nu_1 + \nu_2 - 2}} \quad (\nu_2 > 6).$$

Таблицы квантилей F -распределения приведены в работах [2, 4, 9, 30, 56]. Программы их вычисления описаны в гл. 3.

Методы оценивания параметров распределений и их числовых характеристик. Закон распределения является исчерпывающей вероятностной характеристикой наблюдаемой в ходе эксперимента случайной величины или случайного процесса. Однако задача его определения по экспериментальным данным является достаточно сложной (см. § 2.3). Поэтому на практике часто определяют не законы распределения, а их параметры или числовые характеристики, основными из которых являются (при неявном допущении гауссовости закона распределения) математическое ожидание, дисперсия и коэффициент корреляции.

Напомним основные положения теории точечного оценивания. Для упрощения ограничимся задачами статистической обработки скалярных величин. Обобщения для векторных величин приводятся в работах [2, 42].

Пусть случайная величина X описывается плотностью вероятности $W(x)$, которая характеризуется набором неизвестных числовых параметров $(\theta_1, \dots, \theta_r)$. Этот набор удобно представлять в виде вектора $\theta = [\theta_1, \dots, \theta_r]$. Например, гауссовская случайная величина с распределением $N(\mu, \sigma^2)$ имеет вектор параметров $\theta = [\mu \ \sigma^2]^T$. Набор параметров характеризует и любую иную вероятностную модель: уравнение регрессии, дискриминантную функцию и т. д. Пара-

метры θ обычно неизвестны. Их необходимо оценить по выборке $x = [x_1, \dots, x_N]$ объема N . Часто неизвестен и вид функции $W(x)$.

Любая функция $\varphi(x)$, которая не зависит от неизвестных параметров, называется статистикой.

Оценкой $\hat{\theta}$ параметра θ называется статистика, реализация которой $\varphi(x)$ принимается за неизвестное истинное значение параметра θ . Так как выборка x априори является случайной, то и $\hat{\theta}$ есть случайная величина, имеющая свой закон распределения $W(\hat{\theta})$. Ясно, что не всякая статистика может служить надежной оценкой для θ . Возникает вопрос о требованиях к оценкам. Наиболее распространенными являются требования состоятельности, несмещенности и эффективности.

Оценка $\hat{\theta}$ называется состоятельной, если при неограниченном увеличении объема выборки N она сходится по вероятности к истинному значению параметра θ :

$$\hat{\theta} \xrightarrow{P} \theta \Leftrightarrow \lim_{N \rightarrow \infty} P(|\hat{\theta} - \theta| \geq \epsilon_0) = 0 \quad (\forall \epsilon_0 > 0).$$

Оценка $\hat{\theta}$ называется несмешенной, если ее математическое ожидание равно θ при любом N ($M\{\hat{\theta}\} = \theta$), в противном случае оценка называется смещенной. Величина $d_{\hat{\theta}} := [\theta - M\{\hat{\theta}\}]$ называется смещением оценки. Из определения следует, что для несмешенной оценки $d_{\hat{\theta}} = 0$, для смещенной оценки $d_{\hat{\theta}} \neq 0$.

Несмешенная оценка $\hat{\theta}$, имеющая минимально возможную дисперсию $D\{\hat{\theta}\} := M\{(\hat{\theta} - \bar{\theta})^2\}$, называется эффективной.

Эффективностью несмешенной оценки $\hat{\theta}$ относительно несмешенной оценки $\hat{\theta}'$ называется отношение их дисперсий:

$$\text{eff}(\hat{\theta} | \hat{\theta}') = D\{\hat{\theta}'\} / D\{\hat{\theta}\} = \sigma_{\hat{\theta}'}^2 / \sigma_{\hat{\theta}}^2. \quad (2.18)$$

Для векторного параметра θ под дисперсией его оценки $\hat{\theta}$ обычно понимают след ее дисперсионной матрицы:

$$\sigma_{\hat{\theta}}^2 = \text{tr} D\{\hat{\theta}\} = \text{tr} M\{(\hat{\theta} - \bar{\theta})(\hat{\theta} - \bar{\theta})^T\} = M\{(\hat{\theta} - \bar{\theta})^T(\hat{\theta} - \bar{\theta})\}.$$

Для смещенных оценок важным показателем является средний квадрат (полной) ошибки оценивания:

$$L(\hat{\theta}) = M\{(\hat{\theta} - \theta)^2\} = d_{\hat{\theta}}^2 + D\{\hat{\theta}\}, \quad (2.19)$$

который характеризует ошибки, вызванные как смещением оценки, так и ее случайным разбросом.

Для векторного параметра

$$L(\theta) := \text{tr} M\{(\hat{\theta} - \theta)(\hat{\theta} - \theta)^T\} = M\{(\hat{\theta} - \theta)^T(\hat{\theta} - \theta)\}.$$

При сравнении смещенных (в общем случае) оценок $\hat{\theta}$ и $\hat{\theta}'$ относительную их эффективность можно определить как отношение их средних квадратов:

$$\text{eff}(\hat{\theta} | \hat{\theta}') = L(\hat{\theta}') / L(\hat{\theta}). \quad (2.20)$$

Использование дисперсии оценки или среднего квадрата ее ошибки позволяет провести предварительный анализ качества оценки. При более детальном изучении экспериментальных данных используют методы интервального оценивания (см. ниже).

Для получения точечных оценок параметров используются различные методы: метод моментов, метод минимума среднего риска (его конкретные реализации — методы максимума апостериорной вероятности, минимума среднего квадрата и среднего абсолютного значения ошибки оценивания), методы максимального правдоподобия и наименьших квадратов и некоторые другие [2, 30, 42]. Рассмотрим два последних из упомянутых метода, получивших наиболее широкое применение в классической математической статистике.

1. Суть метода максимального правдоподобия (ММП) состоит в следующем. Пусть наблюдаемая в ходе эксперимента случайная величина X имеет плотность вероятности $W(x|\theta)$, которая зависит от вектора неизвестных параметров θ . При проведении N наблюдений совокупность измерений $\{X_i\}, i = \overline{1, N}$, которую удобно представить в виде векторной случайной величины $X = [X_1, \dots, X_N]^T$, описывается плотностью вероятности $W(x|\theta)$. Отметим, что, если наблюдения являются независимыми и однородными, то

$$W(x, \theta) = \prod_{i=1}^N W(x_i | \theta). \quad \text{Функция } W(x | \theta) \text{ характеризует вероят-}$$

ность получения выборки x при фиксированных значениях параметров и является, следовательно, N -мерной функцией аргумента x .

Если теперь зафиксировать выборку x , положив ее равной наблюдаемому значению, а аргументом считать вектор оцениваемых параметров θ , то полученная функция

$$L(\theta | x) := W(x | \theta)$$

при каждом фиксированном значении θ будет характеризовать вероятность того, что данная реализация x получена при наблюдении за случайной величиной, параметры распределения которой равны θ . Функция $L(\theta | x)$ называется функцией правдоподобия, она является l -мерной функцией аргумента θ . Согласно принципу максимального правдоподобия (Фишера) наилучшей при данной экспериментальной выборке x считается такая оценка векторного параметра, которая соответствует максимуму функции правдоподобия:

$$\hat{\theta} = \hat{\theta}_{\text{ММП}} = \arg \max_{\theta} L(\theta | x). \quad (2.21)$$

Такая оценка называется оценкой метода максимального правдоподобия или МП-оценкой.

Для получения МП-оценок часто используют систему уравнений

$$\partial L(\theta | x) / \partial \theta = 0 \quad (2.22)$$

или (в скалярном виде)

$$\partial L(\theta_1, \dots, \theta_r | x) / \partial \theta_i = 0 \quad (i = 1, r), \quad (2.23)$$

Для упрощения системы уравнений (2.23), в частности для их линеаризации, функцию правдоподобия часто подвергают некоторым монотонным преобразованиям, например логарифмируют, поскольку координаты максимумов у исходной и полученной функций совпадают. Тогда вместо системы (2.23) решается система

$$\frac{\partial \ln L(\theta_1, \dots, \theta_r | x)}{\partial \theta_i} \equiv \frac{I(\theta_1, \dots, \theta_r | x)}{\partial \theta_i} = 0 \quad (i = 1, r). \quad (2.24)$$

Уравнения (2.23) или (2.24) называются уравнениями правдоподобия. При их решении следует иметь в виду, что полученные корни в отдельных случаях могут соответствовать не глобальным, а локальным максимумам, или даже минимумам, или точкам перегиба функции правдоподобия, т. е. представляют собой так называемые аномальные или "сбитые" оценки. Это требует детального анализа всех результатов оценивания, могущих вызвать сомнения в их истинности.

Известно, что МП-оценки при высокоточных измерениях (ширина функции правдоподобия по оцениваемым параметрам существенно меньше априорной плотности вероятности параметров) близки к байесовским оценкам и при достаточно общих условиях являются асимптотически-несмещенными, асимптотически-эффективными, состоятельными и асимптотически-гауссовскими [2, 18, 30, 42].

2. В методе наименьших квадратов (МНК), в отличие от метода, рассмотренного ранее, не используется информация о законе распределения экспериментальных данных и таким образом этот метод является непараметрическим методом оценивания. Это обеспечивает возможность получения соответствующих оценок (МНК-оценок), как правило, приемлемых по точности в тех случаях, когда вероятностная модель эксперимента неизвестна и метод максимального правдоподобия и другие параметрические методы принципиально неприменимы. Однако если закон распределения измерений известен, то МНК-оценки в общем случае проигрывают по точности параметрическим оценкам, в частности МП-оценкам. Исключение составляет случай, когда измерения имеют гауссовскую статистику. Тогда МНК-оценки совпадают с МП-оценками (см. ниже, а также в гл. 5). Этот результат в общем виде сформулирован в известной теореме Гаусса—Маркова [2, 15, 27].

Применительно к задаче оценки параметров распределения метод наименьших квадратов можно сформулировать следующим образом

более общий случай см. в гл. 4). Рассмотрим функцию известного вида $f_i(\theta)$, которая зависит от векторного параметра θ и в общем случае — от номера эксперимента, т. е. условий его проведения. Значение функции $f_i(\theta)$ соответствует значению наблюдаемой в i -м эксперименте случайной величины X_i с некоторой ошибкой ϵ_i :

$$X_i = f_i(\theta) + \epsilon_i \quad (i = \overline{1, N}).$$

Требуется по результатам наблюдений $\{x_i \mid i = \overline{1, N}\}$ оценить векторный параметр θ . Для этого вводится критерий качества оценки $\hat{\theta}$:

$$Q(\hat{\theta}) = \sum_{i=1}^N [x_i - f_i(\hat{\theta})]^2$$

или в векторном виде

$$Q(\hat{\theta}) = [\mathbf{x} - \mathbf{f}(\hat{\theta})]^T [\mathbf{x} - \mathbf{f}(\hat{\theta})], \quad (2.25)$$

где

$$\mathbf{f}(\theta) = [f_1(\theta), \dots, f_N(\theta)].$$

Величины $(x_i - f_i(\hat{\theta})) = \epsilon_i$, определяющие показатель $Q(\hat{\theta})$, представляют собой невязки оценивания в i -м эксперименте, а вектор $\mathbf{x} - \mathbf{f}(\hat{\theta}) = \mathbf{\epsilon}$ — вектор невязки оценки $\hat{\theta}$.

Метод наименьших квадратов определяет МНК-оценку из условия

$$\hat{\theta} = \hat{\theta}_{\text{МНК}} = \arg \min_{\theta} Q(\hat{\theta}) \quad (2.26)$$

Для определения МНК-оценок, как правило, от вариационного уравнения (2.26) переходят к системе уравнений

$$\partial Q(\hat{\theta}) / \partial \hat{\theta} = 0, \quad (2.27)$$

которую часто называют системой нормальных уравнений.

При выборе функций $f_i(\theta)$ необходимо обеспечить ее дифференцируемость по θ , а также чтобы случайные величины ϵ_i имели нулевые математические ожидания и желательно были бы некоррелированы между собой и имели бы одинаковые дисперсии.

В частности, при оценке математического ($\theta \equiv \bar{X}$) ожидания можно принять $f_i(\theta) = \bar{X}$, тогда:

$$Q(\bar{X}) = \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{X})^2; \quad (2.28)$$

$$\bar{X}_{\text{МНК}} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i. \quad (2.29)$$

Как отмечалось, при гауссовой статистике измерений (и, добавим, при их статистической независимости и равноточности) эта же оценка может быть получена методом максимального правдоподобия. Действительно, в этом случае функция правдоподобия

$$L'(\bar{X} | x) = \prod_{i=1}^N \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_X^2}} e^{-\frac{(x_i - \bar{X})^2}{2\sigma_X^2}} = \\ = \frac{1}{\sqrt{(2\pi\sigma_X^2)^n}} e^{-\frac{1}{2\sigma_X^2} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{X})^2}$$

а ее логарифм

$$l(\bar{X} | x) = k \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{X})^2 + b,$$

где $k = -1/(2\sigma_X^2)$; $b = \ln(1/\sqrt{(2\pi\sigma_X^2)^n})$.

Очевидно, что решение уравнения правдоподобия

$$\partial l(\bar{X} | x) / \partial \bar{X} = 0$$

дает оценку

$$\bar{X}_{\text{МП}} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i,$$

совпадающую в данном случае с (2.29).

Методы статистического анализа качества оценок. Анализ эффективности оценивания не менее важен, чем построение самих алгоритмов получения оценок, поскольку он позволяет судить о целесообразности проведения того или иного эксперимента, а также рационально и экономично выбирать его схему.

На начальном этапе анализа качества получаемых точечных оценок проверяется наличие у них трех традиционных свойств: несмещенности, состоятельности и эффективности. Как правило, при этом также оценивается дисперсия оценки (при неявном предположении о гауссовском распределении выборки), которая (также при неявном предположении о гауссовой статистике оценки) позволяет судить о качестве оценки.

Однако при более глубоком исследовании результатов эксперимента необходимо использовать более "тонкие" показатели качества — характеристики точности и надежности полученных оценок. Эти пока-

затели формируются при интервальном оценивании исследуемых параметров.

Степень близости точечной оценки $\hat{\theta}$ к соответствующему параметру распределения θ удобно характеризовать с помощью доверительного интервала $I_D = [\theta_H, \theta_B]$, удовлетворяющего равенству $P[\theta \in I_D] = p$.

Здесь p — заданная доверительная вероятность; θ_H и θ_B — нижняя и верхняя доверительные границы, которые, так же как и оценка $\hat{\theta}$, являются статистиками и, как правило, непосредственно с ней связаны. Доверительный интервал (его длина) характеризуют точность, доверительная вероятность p — надежность (достоверность оценки).

При выборе доверительной вероятности следует иметь в виду, что задание слишком высоких значений p ($p \rightarrow 1$) обусловливает бесполезность полученной интервальной оценки, поскольку длина доверительного интервала всегда получается чрезмерно большой. Поэтому на практике крайне редко используют значения $p > 0,998$. Нижнее значение p обычно равно 0,9.

Для определения доверительного интервала рассматривается плотность вероятности $W(\epsilon)$ ошибки оценки $\epsilon = \hat{\theta} - \theta$. При неявном допущении о гауссовском (или близком к нему) распределении экспериментальных данных закон распределения ошибки оценки ϵ , как правило, соответствует хорошо изученным модельным законам — гауссовскому, Стьюдента, Фишера—Сnedекора, χ^2 и др.

Границы доверительного интервала формируются из оценки параметра $\hat{\theta}$ и доверительных границ ошибки оценивания ϵ_H, ϵ_B :

$$\theta_H = \hat{\theta} + \epsilon_H = \hat{\theta} - |\epsilon_H|; \quad (2.30)$$

$$\theta_B = \hat{\theta} + \epsilon_B.$$

Границы ϵ_H и ϵ_B определяются из условий

$$\int_{-\infty}^{\epsilon_H} W(\epsilon) d\epsilon = \int_{\epsilon_B}^{\infty} W(\Delta\theta) d\epsilon = \frac{1-p}{2}, \quad (2.31)$$

откуда

$$\epsilon_H = \frac{\epsilon_1 - p}{2}; \quad \epsilon_B = \frac{\epsilon_1 + p}{2},$$

где ϵ_q — квантиль q -го порядка распределения $W(\epsilon)$

Для симметричных распределений $W(\epsilon)$.

$$\theta_H = \hat{\theta} - \epsilon_B = \hat{\theta} - |\epsilon_H|; \quad (2.32)$$

$$\theta_B = \hat{\theta} + \epsilon_B = \hat{\theta} + |\epsilon_H|,$$

$$\text{где } |\epsilon_H| = \epsilon_B = |\epsilon_1 - p| = \frac{\epsilon_1 + p}{2}.$$

Для состоятельных оценок их точность возрастает при увеличении объема выборки N . Поэтому при заданной доверительной вероятности доверительные границы являются функциями объема выборки. При заданных доверительных границах функцией объема выборки оказывается доверительная вероятность. Таким образом, при проведении анализа качества оценивания исследуемых параметров появляется возможность определения объема выборки $N = N(I_d, p)$, необходимого для оценки параметра с заданными точностью и надежностью.

Элементы теории статистической проверки гипотез. Статистическая гипотеза — это утверждение о некоторых вероятностных свойствах изучаемого явления. Примерами статистических гипотез являются предположения о типе закона распределения наблюдаемой случайной величины, о числовых значениях параметров распределения, о типе зависимости между наблюдаемыми величинами и др.

Выдвинутую гипотезу называют нулевой или основной и обозначают H_0 , а противоречащую ей гипотезу H_1 называют альтернативной или конкурирующей.

Процедура статистической проверки гипотез основана на использовании того или иного статистического критерия. Статистическим критерием называют случайную величину G с плотностью вероятности $W(g)$, которая является статистикой — функцией случайной выборки X . Чаще всего критерий выбирается таким, чтобы при справедливости нулевой гипотезы распределение $W(g)$ относилось к хорошо изученным типам распределений: гауссовскому, t -, F -, χ^2 -распределениям или некоторым другим. Наблюдаемым (эмпирическим, выборочным) значением g называют то значение критерия, которое получено по выборке x , зафиксированной в конкретном эксперименте.

Критической областью I_1 называют совокупность значений критерия, при которых нулевую гипотезу отвергают. Областью принятия гипотезы I_0 называют совокупность значений критерия, при которых нулевую гипотезу принимают. При отклонении гипотезы считают, что экспериментальные данные противоречат выдвинутой гипотезе. Принятие нулевой гипотезы не означает, что она является истинной, просто она не противоречит результатам опыта. Границы критической области называют критическими точками.

При статистической проверке гипотезы могут быть допущены ошибки двух родов. Если в действительности гипотеза H_0 верна, а из-за воздействия случайных факторов $g \in I_1$ и принято решение ее отвергнуть, то совершаются так называемая ошибка первого рода. Ее вероятность обозначается через α : $\alpha = P\{H_0 \text{ отвергается} | H_0 \text{ верна}\}$. Вероятность правильного принятия H_0 в этом случае $P\{H_0 \text{ принимается} | H_0 \text{ верна}\} = 1 - \alpha$.

Если в действительности верна гипотеза H_1 , но $g \in I_0$ и принимается решение принять гипотезу H_0 , то совершается ошибка второго рода. Ее вероятность обозначается через β : $\beta = P\{H_0 \text{ при-$

нимается $|H_1$ верна}. Вероятность правильного отклонения H_0
 $P\{H_0 \text{ отвергается } |H_1 \text{ верна}\} = 1 - \beta$.

Простые критерии проверки гипотез накладывают ограничение только на уровень вероятности первого рода (ошибки отклонения верной нулевой гипотезы). Заданное значение $\alpha \in (0,1)$ называют уровнем значимости. При этом не накладывается никаких ограничений на вероятность ошибки второго рода, т. е. ошибки принятия неверной нулевой гипотезы. В этом одна из проблем использования простых критериев. Для снижения ее остроты рекомендуется в качестве нулевой гипотезы принимать такое утверждение, необоснованное отклонение которого наиболее опасно. Другая проблема связана с обоснованным выбором уровня значимости α . Так, может оказаться, что при одном значении p гипотеза H_0 отвергается, а при другом — принимается. Обычно полагают $\alpha = 0,02 \dots 0,08$. Более детально эти проблемы анализируются в работах [2, 18, 22, 42, 74].

Методы статистической проверки гипотез можно разделить на параметрические, когда вид закона распределения известен, и непараметрические, когда он не известен. Наибольшее распространение получили параметрические методы.

Задание только уровня вероятности ошибки первого рода α при использовании простых критериев существенно упрощает задачу проверки гипотез, поскольку позволяет оперировать с известной условной плотностью вероятности критерия, соответствующей истинной гипотезе

$$H_0 \cdot W(g|H_0).$$

Области I_0 и I_1 определяются из условий:

$$\int_{I_0} W(g|H_0) dg = 1 - \alpha; \quad \int_{I_1} W(g|H_0) dg = \alpha \quad (2.33)$$

Эти условия определяют области I_0 и I_1 неоднозначно. Различают односторонние критические области: левостороннюю $I_1 = (-\infty, g'_0)$; правостороннюю $I_1 = (g''_0, \infty)$, и двусторонние критические области.

$$I_1 = (-\infty, g'_D) \cup (g''_D, \infty).$$

Критические точки определяются квантилями g_α соответствующего порядка распределения $W(g)$:

$$g'_0 = g_\alpha; \quad g''_0 = g_1 - \alpha; \quad (2.34)$$

$$g'_D = g_{\alpha/2}; \quad g''_D = g_1 - \alpha/2$$

Для симметричных законов распределения $g_{\alpha/2} = -g_1 - \alpha/2$.

Гипотеза H_0 принимается, если наблюдаемое значение критерия удовлетворяет условиям:

$$g \geq g_\alpha \quad (\text{левосторонний критерий}); \quad (2.35)$$

$$g \leq g_{1-\alpha} \text{ (правосторонний критерий)}; \quad (2.36)$$

$$g_{\alpha/2} \leq g \leq g_{1-\alpha/2} \text{ (двусторонний критерий).} \quad (2.37)$$

Для симметричных законов распределения двусторонний критерий [условие (2.37)] принимает вид

$$|g| \leq g_{1-\alpha/2}. \quad (2.38)$$

При выборе вида критической области следует учитывать вероятность ошибки второго рода. Это делается с использованием так называемой мощности критерия γ , которая связана с вероятностью β : $\gamma = 1 - \beta$. Критическую область нужно выбирать так, чтобы при заданном уровне значимости α мощность критерия γ — вероятность того, что не будет допущена ошибка второго рода — была максимальной. Для определения мощности критерия необходимо определить или оценить условную плотность вероятности критерия $W(g|H_1)$ при справедливости альтернативной гипотезы.

Задачи проверки гипотез можно разделить на несколько типов.

1. Проверка гипотезы о типе распределения наблюдаемой случайной величины (критерии согласия).

2. Проверка гипотез о числовых значениях параметров законов распределения экспериментальных данных. Эта задача включает в себя также проверки гипотез независимости случайных величин, стационарности экспериментальных данных.

3. Проверка гипотез об однородности экспериментальных данных.

4. Проверка гипотез о типе зависимости между экспериментальными данными.

2.3. ИССЛЕДОВАНИЕ ЗАКОНОВ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ДАННЫХ

Оценивание эмпирических законов распределения. Рассмотрим методы определения эмпирических (выборочных, статистических) законов распределения случайных экспериментальных данных, которые служат, во-первых, в качестве оценок истинных, но неизвестных законов распределения, а во-вторых, для сжатия экспериментальных данных, поскольку по сгруппированным данным при большом объеме выборки существенно проще оценивать параметры распределений (см. § 2.4).

Дадим основные определения. Пусть получена выборка $\{x_i\}$ ($i = 1, n$) объемом n дискретной или непрерывной случайной величины X . Напомним, что в качестве случайной величины может выступать произвольное временное сечение $X(t_i)$ случайного процесса $X(t)$. Последовательность зна-

чений выборки, записанная в возрастающем (не убывающем) порядке, называется вариационным рядом $\{x'_j\}$ ($j = \overline{1, n}$): $x_j \leq x_{j+1}$. Когда случайная величина является дискретной или результаты измерений непрерывной случайной величины квантуются по уровню достаточно грубо (округляются), то наблюдаемые значения реализаций могут повторяться и тогда отдельные значения вариационного ряда приобретают кратность (абсолютную частоту) m_j , превышающую единицу. В этом случае вариационный ряд может быть "скат" и преобразован к совокупности $\{x''_j, m_j\}$ ($j = \overline{1, M}$): $x''_j < x''_{j+1}$ ($m_j \geq 1, M < n$). Вариационный ряд является основой для построения эмпирических законов распределения и группировки экспериментальных данных.

Эмпирическим распределением вероятностей дискретной случайной величины $W^*(x_j)$ называют функцию, определенную на множестве допустимых значений x_j ($j = \overline{1, M}$, $M' > M$) случайной величины и принимающую в этих точках значения, равные относительным частотам $w_j = m_j/n$ (если какие-либо допустимые значения не вошли в вариационный ряд, то их частоты полагаются равными нулю). Очевидно,

что $\sum_{i=1}^{M'} w_i = 1$ и $\sum_{i=1}^{M'} m_i = n$.

Эмпирическая функция распределения дискретной случайной величины $F^*(x_j)$ может быть определена по функции $W^*(x_j)$:

$$F^*(x_j) = \sum_{i=1}^j W^*(x_i).$$

При анализе законов распределения непрерывных случайных величин весь интервал значений вариационного ряда $\{x_i\}$ $[\xi_1, \xi_n]$ разбивается на k , как правило, равных частных интервалов $[\xi_i, \xi_{i+1}]$ ($i = \overline{1, k}$), имеющих длину h . Далее определяются абсолютные m_i и относительные $w_i = m_i/n$ частоты попадания реализации величины в каждый из них.

Эмпирическим законом распределения непрерывной случайной величины называют совокупность частных интервалов $[\xi_i, \xi_{i+1}]$ – интервалов группировки – и соответствующих им абсолютных m_i или относительных w_i частот ($i = \overline{1, k}$). Этот закон позволяет определить выборочную функцию

плотности вероятности

$$W^*(x) = \begin{cases} w_i/h_i, & x \in [\xi_i, \xi_{i+1}]; \\ 0, & x < \xi_1, x > \xi_n \end{cases} \quad (2.39)$$

и выборочную функцию распределения

$$F^*(x) = \int_{-\infty}^x W(x') dx' = \sum_{i=1}^j w_i, \quad x \in [\xi_j, \xi_{j+1}). \quad (2.40)$$

График функции $W^*(x)$ называют гистограммой относительных частот. Она представляет собой ступенчатую фигуру, состоящую из прямоугольников, основаниями которых служат частичные интервалы $[\xi_i, \xi_{i+1}]$, имеющие длину h_i , а их высоты равны w_i/h_i (плотностям относительной частоты). Отметим, что иногда на гистограммах вдоль оси ординат откладывают значения m_i/h_i (плотность абсолютной частоты), тогда площадь гистограммы равна не единице, а объему выборки n и полученную кривую называют гистограммой частот.

Еще одним из способов графического представления закона распределения экспериментальных данных является полигон относительных или абсолютных частот. Полигоны получают, соединяя прямыми линиями точки, соответствующие серединам интервалов группировки и значениям w_i/h_i или m_i/h_i . Так же как и гистограмма относительных частот, полигон относительных частот является оценкой функции плотности вероятности. От полигона относительных или абсолютных частот иногда переходят к полигонам накопленных частот, которые являются оценками функции распределения случайной величины [30].

Эмпирические законы распределения, как правило, заметно отличаются от теоретических. Это затрудняет идентификацию формы распределения экспериментальных данных и связано, в первую очередь, с двумя факторами: во-первых, с ограниченностью или даже с малостью выборки и, во-вторых, с разбиением интервала значений случайной величины на частные интервалы, в пределах которых плотность вероятности представляется постоянной или линейной функцией.

Естественно, радикальным средством повышения качества оценивания закона распределения является увеличение объема экспериментальных данных. Однако это часто сопряжено с существенным ростом затрат на проведение эксперимента,

а при "апостериорной" обработке данных и просто невозможно.

Поэтому большую значимость приобретает вопрос об обоснованном разбиении интервала выборки на интервалы группировки. Очевидно, что при слишком большом числе интервалов k некоторые из них окажутся пустыми или слабо заполненными и эмпирическая плотность вероятности (гистограмма) будет изрезанной и многолепестковой. При слишком малом числе интервалов k гистограмма утратит детальность и связь с особенностями теоретического распределения, станет малоинформационной.

Для более глубокого понимания этого явления полезно представить группировку данных как процедуру фильтрации экспериментальных данных [57]. При этом считается, что на гладкую теоретическую функцию плотности вероятности из-за случайности, связанной с ограниченным объемом выборки, накладывается шум. При группировке данных производится фильтрация "зашумленной" плотности вероятности. При малых интервалах группировки полоса пропускания "фильтра" слишком широка, шум подавляется недостаточно эффективно. При больших интервалах полоса сужается, шум отфильтровывается, однако при этом возникают и искажения теоретической функции плотности вероятности. Оптимальным является такое число интервалов k и, соответственно, их размер h , при котором достигается разумное сочетание сглаживания случайной и искажения полезной (теоретической) составляющей суммарной плотности вероятности.

В литературе имеется большое число рекомендаций (отметим, часто без основания) по выбору числа интервалов группировки [2, 4, 30, 56, 57]. Детальный их критический обзор выполнен в работе [57]. Приведем лишь некоторые результаты, которые часто используются на практике.

Эвристические соотношения: формула Старджеса: $k = \log_2 n + 1$, формула Брукса и Каррузера: $k = 5 \lg n$, формула Хайнхольда и Гаеде: $k = \sqrt{n}$.

Соотношения, полученные на основе использования критериев близости между гистограммой и теоретической плотностью вероятности:

$$k = 4 \lg n; \quad k = 5 \lg(n/10); \quad k = (4/\pi) \lg(n/10),$$

где $\pi = 1/\sqrt{E\{X\}}$ — контрактный процесс распределения;

$$= \frac{E\{X\} + 1.5}{6} n^{0.4}.$$

Трудность использования двух последних выражений состоит в том, что число интервалов группировки нужно выбрать до того, как будут определены числовые характеристики распределения, в том числе и эксцесс или контр-эксцесс. Обычно полагают, что для эмпирических распределений $1,8 \leq E\{X\} \leq 6$, и получают соответствующие границы числа интервалов. Достоинством этих выражений является то, что они показывают зависимость числа интервалов не только от объема выборки, но и от формы закона распределения. На практике часто полагают, что

$$0,55n^{0.4} \leq k \leq 1,25n^{0.4}. \quad (2.41)$$

С учетом того, что k рекомендуется выбирать нечетным, это неравенство достаточно определенно задает значение k .

При использовании для обработки маломощных вычислительных средств, например программируемых калькуляторов, проблемы оптимальности разбиения отступают перед проблемами сложности реализации программ и тогда ограничиваются заведомо "неоптимальной" рекомендацией: $7 \leq k \leq 22$.

При подготовке группированных данных для проверки гипотезы о виде распределения с помощью некоторых критериев, например критерия χ^2 , часто используют не интервалы с равной длиной, а интервалы с равной вероятностью. Для оценки числа таких интервалов K часто используется формула

$$K = b^5 \sqrt{2(n/\lambda_\alpha)}, \quad (2.42)$$

где λ_α — квантиль гауссовского распределения порядка α ; α — уровень значимости; b — некоторый коэффициент (при $b = 4$ получается формула Манна—Вальда, при $b = 2$ — формула Уильямса).

При $b = 2$, $\alpha = 0,1$, выражение (2.42) получает вид

$$K = 1,9n^{0.4}. \quad (2.43)$$

Иногда это выражение используется и для определения числа равновеликих интервалов, однако оно не позволяет получить оптимальное число, так как $K \geq k$.

Проверка статистических гипотез о виде закона распределения экспериментальных данных. Полученные гистограммы или полигоны частот, несмотря на их наглядность, как правило, не позволяют сделать обоснованный вывод о виде закона распределения результатов измерений. Однако

их рассмотрение и качественное сравнение с известными (модельными) теоретическими законами позволяет сформулировать гипотезы, которые требуют проверки с помощью соответствующих статистических критериев. Чаще всего используются так называемые критерии согласия, среди которых наиболее употребительными являются критерий χ^2 (Пирсона) и Колмогорова–Смирнова [2, 18, 57, 74].

Задача проверки гипотезы о виде закона распределения начинается с конкретизации нулевой гипотезы H_0 , которая представляет собой предположение о том, что случайная величина X , для которой получена выборка $\{x_i\}$ ($i = 1, n$) имеет выбранный вид распределения:

$$H_0 : F(x) = F_0(x), \quad (2.44)$$

где $F_0(x) = F_0(x, \theta)$ – модельная известная функция распределения, характеризуемая вектором параметров $\theta = [\theta_1, \dots, \theta_m]^T$, которые могут быть как известными, так и неизвестными и оцениваемыми в ходе проверки.

Для конкретизации нулевой гипотезы [выбора конкретной функции $F_0(x, \theta)$], помимо упомянутого рассмотрения гистограмм и полигонов, может использоваться теоретический анализ схемы эксперимента, а также вычисление оценок числовых характеристик случайной величины, в первую очередь асимметрии и эксцесса, и сравнение их с аналогичными характеристиками различных типовых распределений.

После выдвижения нулевой гипотезы вычисляется наблюдаемое значение критерия, характеризующее различие между эмпирической и модельной функциями распределения. Отметим, что при использовании критериев согласия положительное решение нельзя рассматривать как утверждение о правильности выбранной модели закона распределения: оно лишь говорит о том, что экспериментальные данные не противоречат этому предположению. Определенным ответом является только отрицательный ответ.

1. Критерий χ^2 состоит в вычислении и сравнении с критическим значением статистики

$$g = \sum_{i=1}^k \frac{(m_i - m'_i)^2}{m'_i}, \quad (2.45)$$

где m_i и m'_i – наблюдаемое и теоретическое значения частот попадания случайной величины в i -й интервал группировки $[\xi_i, \xi_{i+1}]$.

Теоретические частоты рассчитываются с использованием модельных законов распределения:

для дискретных величин — по распределению вероятностей

$$m_i = n W_0(x_i), \quad (2.46)$$

для непрерывных — по плотности вероятностей

$$m_i = \int_{\xi_i}^{\xi_{i+1}} W_0(x) dx \quad (2.47)$$

или функции распределения

$$m_i = F_0(\xi_{i+1}) - F_0(\xi_i). \quad (2.48)$$

При справедливости гипотезы H_0 статистика g асимптотически имеет χ^2 -распределение вне зависимости от числа интервалов k и объема выборки. Если модельное распределение является гауссовским, то при справедливости нулевой гипотезы критерий имеет это распределение при любом объеме выборки. Число степеней свободы ν определяется числом интервалов k и числом параметров распределения M , оцениваемых одновременно с проверкой гипотезы: $\nu = k - M - 1$. Отсюда нулевая гипотеза принимается, если

$$g < \chi^2_{\nu, 1 - \alpha}, \quad (2.49)$$

в противном случае гипотезу H_1 отвергают. Здесь $\chi^2_{\nu, q}$ — квантиль порядка q χ^2 -распределения с ν степенями свободы.

Если гипотеза H_0 принимается, то в качестве оценок параметров распределения исследуемой случайной величины X принимают оценки этих параметров, использованные при задании модельного распределения.

Следует иметь в виду, что слишком малые значения теоретических частот m'_i недопустимы. На практике, как отмечалось выше, интервал значений разбивают на частные, в общем случае неравные между собой, интервалы равной вероятности. Иногда же интервалы просто выбирают такими, чтобы $m'_i \geq 5$. При равенстве исходных интервалов этого можно добиться путем объединения соседних "малонаселенных" интервалов, суммирования их частот и соответствующим изменением числа k .

В качестве практически важного примера рассмотрим процедуру расчета теоретических частот при проверке гипотезы о гауссовском распределении измеряемой величины.

Рассмотрим два распространенных варианта задания исходной статистической информации.

Пусть эмпирическое распределение задано в виде последовательности средних значений интервалов группировки x_{0i} и соответствующих абсолютных частот m_i : $\{x_{0i}, m_i\}$. Для простоты будем считать, что все интервалы имеют одинаковый размер h . Тогда величина m'_i вычисляется после определения по сгруппированной выборке $\{x_{0i}, m_i\}$ выборочного среднего m и выборочной дисперсии S^2 (см. § 2.4) с помощью выражения

$$m'_i = \frac{nh}{\sqrt{S^2}} W(u_i), \quad (2.50)$$

где $W(u)$ — плотность стандартного гауссовского распределения; $u_i = (x_i - m) / \sqrt{S^2}$ — нормированное значение середины i -го интервала группировки.

Недостатком этого метода расчета теоретических частот является его сравнительно низкая точность, связанная со ступенчатой аппроксимацией функции плотности вероятности. В то же время нельзя не отметить его простоту.

Более точным, хотя и более сложным является второй способ. В этом случае эмпирическое распределение задается набором интервалов группировки $[\xi_i, \xi_{i+1})$ и соответствующих им частот m_i , ($i = 1, k$). Как и ранее, по сгруппированной выборке определяются оценки математического ожидания m и дисперсии S^2 . Далее переходят к нормированным значениям границ интервалов группировки:

$$u_i = (x_i - m) / \sqrt{S^2}; \quad u_{i+1} = (x_{i+1} - m) / \sqrt{S^2}, \quad (2.51)$$

причем нижнюю границу первого ($i = 1$) интервала полагают равной $-\infty$ ($u_1 = -\infty$), а верхнюю границу последнего ($i = k$) — равной $+\infty$ ($u_{k+1} = +\infty$). Теоретические частоты определяются с помощью функции стандартного гауссовского распределения $\Phi(u)$:

$$m'_i = n [\Phi(u_{i+1}) - \Phi(u_i)]. \quad (2.52)$$

Аналогичные формулы могут быть получены и для других видов распределения случайных величин [18].

2. В критерии Колмогорова—Смирнова данные $\{x_i\}$ не группируются, а лишь упорядочиваются, т. е. строится вариационный ряд $\{x'_i\}$. В своей наиболее разработанной формулировке он предполагает только простую альтерна-

тивную гипотезу H_1 , поэтому модельная функция $F_0(x)$ должна быть задана полностью, включая значения параметров θ . Критерий основан на статистике

$$g = \max_x |F^*(x) - F_0(x)|,$$

где $F^*(x)$ — эмпирическая функция распределения, построенная по вариационному ряду $\{x'_i\}$:

$$F^*(x) = \begin{cases} 0, & x < x_1; \\ i/n, & x_i \leq x < x_{i+1} \quad (i = \overline{1, n-1}); \\ 1, & x \geq x_n. \end{cases}$$

При практическом использовании статистики g следует учитывать, что эмпирическая функция распределения является ступенчатой. Поэтому наибольшее значение разности между $F^*(x)$ и $F_0(x)$ приходится на одну из точек разрыва x'_i ($i = 1, n$). В связи с этим для определения значения критерия g обычно используют следующее соотношение:

$$g = \max(g_1, g_2), \quad (2.53)$$

$$\text{где } g_1 = \max_i \left[\frac{i}{n} - F_0(x'_i) \right]; \quad g_2 = \max_i \left[F_0(x'_i) - \frac{i-1}{n} \right].$$

А. Н. Колмогоров доказал, что закон распределения статистики g при $n \rightarrow \infty$ не зависит от вида функции $F_0(x)$. Асимптотическое распределение для величины $g' = \sqrt{n}g$ известно и табулировано, для него составлены таблицы квантилей k_α и программы их расчета [9, 56].

В качестве критической в методе Колмогорова—Смирнова используется как двусторонняя, так и правосторонняя области. В первом случае гипотеза H_0 принимается, если

$$g < K_{n,\alpha} \frac{1}{\sqrt{n}} k_{1-\alpha}, \quad (2.54)$$

где α — уровень значимости; $K_{n,\alpha}$ — критическая точка [56].

Во втором случае для правосторонней критической области вычисление критерия упрощается: $g = g_1$.

Гипотеза H_0 принимается, если $g < K_{n,\alpha}^+$, где $K_{n,\alpha}^+$ — критическая точка для одностороннего критерия.

Критические точки одностороннего критерия $K_{n,\alpha}^+$ также табулированы [9]. Кроме того, можно использовать

соотношение

$$K_{n,\alpha}^+ \approx K_{n,2\alpha} = \frac{1}{\sqrt{n}} k_1 - 2\alpha \quad (2.55)$$

или асимптотическое (при $n \rightarrow \infty$) разложение

$$K_{n,\alpha}^+ \approx \sqrt{-\ln \alpha / (2n)}. \quad (2.56)$$

В заключение отметим, что наряду с рассмотренными и другими известными "строгими" критериями проверки гипотез [2, 12, 56] для решения частной задачи — проверки гипотезы о гауссовском законе распределения — часто используются упрощенные процедуры, основанные главным образом на проверке гипотез о значениях коэффициентов асимметрии и эксцесса [2, 12, 57, 74]. Применение этих процедур (критериев проверки нормальности) разумно только при наличии достаточно больших выборок ($n > 200 \dots 500$), в противном случае результат их применения в значительной степени случаен.

При упрощенных расчетах часто полагают [12, 18, 33], что экспериментальные данные имеют гауссовское распределение, если (при $n \geq 1$)

$$|\hat{A}\{X\}| < 1,5\sqrt{\sigma_A^2}; |\hat{E}\{X\} - \frac{6}{N+1}| < 1,5\sqrt{\sigma_E^2},$$

где σ_A^2 и σ_E^2 — дисперсии оценок коэффициентов асимметрии и эксцесса [см. выражения (2.46), (2.47)].

Если $|\hat{A}\{X\}| \geq 2\sqrt{\sigma_A^2}$ и (или) $|\hat{E}\{X\} - 6| / (N+1) \geq 2\sqrt{\sigma_E^2}$, то экспериментальные данные даже приблизительно не описываются гауссовским законом распределения.

2.4. ОЦЕНКА ЧИСЛОВЫХ ХАРАКТЕРИСТИК И ПАРАМЕТРОВ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН И ПРОЦЕССОВ

Параметрические оценки числовых характеристик по выборке полного объема. При получении параметрических оценок числовых характеристик случайных величин и про-

цессов в максимальной степени используется информация о законе их распределения. В результате этого обеспечиваются оптимальные свойства параметрических оценок (несмещенность, эффективность, состоятельность) в том случае, если наблюдаемые величины распределены в точном соответствии с законом, принятым при их формировании, а все иные (непараметрические) оценки будут менее точными. Однако столь сильная "привязанность" оценок к законам распределения может обернуться (и на практике часто так и бывает) существенным снижением точности, если реальные условия эксперимента будут отличаться от стандартных (см. ниже).

Для получения параметрических оценок чаще всего используется метод максимального правдоподобия, который позволяет формировать оценки, как правило, близкие по своим характеристикам к байесовским. В большинстве случаев используется предположение о гауссовском законе распределения экспериментальных данных. Это объясняется не только тем, что измерения часто действительно близки по своим характеристикам к гауссовским случайным величинам или процессам, но и тем, что эта гипотеза часто принимается без сколько-нибудь серьезной критической проверки. Рассмотрим методы оценки числовых характеристик случайных величин и процессов в предположении, что их гауссовость действительно имеет место. При этом учтем различные возможные условия проведения экспериментов.

Безошибочные измерения одномерной случайной величины. Пусть случайная величина $X \sim N(\mu_X, \sigma_X^2)$ наблюдается непосредственно (безошибочно). В результате эксперимента получена выборка $\{x_i\}$ из n независимых реализаций этой случайной величины: $\{x_i\} = (x_1, \dots, x_n)$. Несложно показать [2, 4, 39, 51, 61], что Максимально правдоподобные оценки параметров μ_X и σ_X^2 будут иметь вид (см. также § 2.2):

оценка математического ожидания (выборочное среднее)

$$\hat{\mu}_X \equiv m_X = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i; \quad (2.57)$$

оценка дисперсии (выборочная дисперсия):
известно математическое ожидание

$$\hat{\sigma}_X^2 \equiv s_X^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu_X)^2; \quad (2.58)$$

не известно математическое ожидание

$$\hat{\sigma}_X^2 \equiv s_X^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - m_X)^2 = \frac{1}{n-1} \left[\sum_{i=1}^n x_i^2 - \right. \\ \left. - \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2 \right]. \quad (2.59)$$

Эти оценки являются несмешенными (при детерминированных значениях m_X и σ_X^2) и асимптотически эффективными. Их дисперсии таковы:

$$D\{m_X\} = \sigma_X^2/n; \quad (2.60)$$

известно математическое ожидание

$$D\{s_X^2\} = \frac{2}{n} \sigma_X^4 \quad (\text{при } n \geq 1); \quad (2.61)$$

не известно математическое ожидание

$$D\{s_X^2\} = \frac{2}{n-1} \sigma_X^4 \quad (\text{при } n \geq 1). \quad (2.62)$$

При оценке среднего квадратического отклонения σ_X следует учитывать, что величина $s_X = \sqrt{s_X^2}$ является состоятельной и асимптотически-эффективной, но смещенной оценкой (точнее — асимптотически-несмешенной). Несмешенная оценка σ_X имеет вид [4, 70]:

известно математическое ожидание

$$s'_X = k'_n s_X = \sqrt{\frac{n}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)} s_X; \quad (2.63)$$

не известно математическое ожидание

$$s'_X = k''_n s_X = \sqrt{\frac{n-1}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} s_X, \quad (2.64)$$

где $\Gamma(x)$ — гамма-функция.

Можно доказать, что $k''_n = k'_n - 1$ или $k'_n = k''_{n+1}$.

При $n \geq 10$ можно использовать приближенное разложение для коэффициента k''_n :

$$k''_n = \left(1 + \frac{1}{4n} + \frac{9}{32n^2} \right). \quad (2.65)$$

При $4 \leq n \leq 9$ это выражение также можно использовать, если не требуется высокая точность вычислений (погрешность составляет не более 1%). При высокой требуемой точности целесообразно пользоваться данными табл. 2.1.

Таблица 2.1

$n \dots$	4	5	6	7	8	9
$k''_n \dots$	1,085	1,064	1,051	1,042	1,036	1,032

В § 2.3 отмечалось, что для суждения о виде распределения наблюдаемой случайной величины иногда привлекаются оценки коэффициентов асимметрии и эксцесса, которые определяются по выборочным моментам третьего и четвертого порядков (m_{X_3} , m_{X_4} , \hat{M}_{X_3} и \hat{M}_{X_4}). Выборочные моменты обычно рассчитываются с помощью выражений:

$$m_{X_k} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^k; \quad \hat{M}_{X_k} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - m_{X_1})^k \quad (k = 3, 4),$$

которые дают состоятельные и эффективные оценки характеристик гауссовской случайной величины.

Для анализа точности и надежности рассмотренных оценок используют доверительные интервалы, соответствующие заданной доверительной вероятности p (см. § 2.2). Отметим, что качество интервального оценивания гарантируется только при гауссовском распределении и резко падает при отклонениях от него.

Оценка математического ожидания (2.57) является несмещенной и имеет гауссовское распределение. Поэтому, как правило, рассматривается симметричный доверительный интервал $J_1 = [x_{h_1}, x_{v_1}] \equiv [m - \Delta_p, m + \Delta_p]$, однако иногда устанавливают односторонние интервалы: $J_2 = (-\infty, x_{v_2}]$ и $J_3 = [x_{h_3}, \infty)$ [2, 4, 51, 56].

Известно, что при заданной дисперсии σ_X^2 статистика $g = \frac{m_X - \mu_X}{\sigma_X} \sqrt{n}$ имеет стандартное гауссовское распределение [4, 56]. Откуда

$$x_{H_1} = m_X - \sigma_X \lambda_{(1+\rho)/2} / \sqrt{n}; \quad (2.66)$$

$$x_{B_1} = m_X + \sigma_X \lambda_{(1+\rho)/2} / \sqrt{n}; \quad (2.67)$$

$$x_{B_2} = m_X + \sigma_X \lambda_\rho / \sqrt{n}; \quad (2.68)$$

$$x_{H_3} = m_X - \sigma_X \lambda_\rho / \sqrt{n}, \quad (2.69)$$

где λ_q – квантиль порядка q распределения $N(0,1)$.

При неизвестной дисперсии статистика $g = \frac{m_X - \mu_X}{s_X} \sqrt{n}$

имеет t -распределение с $v = n - 1$ степенями свободы. Откуда получаются следующие границы доверительных интервалов:

$$x_{H_1} = m_X - s_X t_{n-1, (1+\epsilon)/2} / \sqrt{n}; \quad (2.70)$$

$$x_{B_1} = m_X + s_X t_{n-1, (1+\epsilon)/2} / \sqrt{n}; \quad (2.71)$$

$$x_{B_2} = m_X + s_X t_{n-1, \epsilon} / \sqrt{n}; \quad (2.72)$$

$$x_{H_3} = m_X - s_X t_{n-1, \epsilon} / \sqrt{n}. \quad (2.73)$$

Отметим, что при достаточно больших n ($n \geq 60 \dots 100$) $t_{n-1, q} \approx \lambda_q$ и вместо выражений (2.70)–(2.73) можно использовать (2.66)–(2.69), в которые вместо истинных значений σ_X подставляются их оценки s_X .

При оценке качества оценок дисперсии (2.58) и (2.59) в зависимости от постановки задачи устанавливаются двухсторонний $J_1 = [\sigma_{H_1}^2, \sigma_{B_1}^2]$ и односторонние $J_2 = [0, \sigma_{B_2}^2]$, $J_3 = [\sigma_{H_3}^2, \infty)$ доверительные интервалы. Ограничимся случаем неизвестного математического ожидания. Тогда статистика $g = (n-1)s^2/\sigma_X^2$ имеет χ^2 -распределение с $v = n-1$ степенями свободы. Откуда

$$\sigma_{H_1}^2 = (n-1)s^2/\chi_{n-1, (1+\rho)/2}^2; \quad (2.74)$$

$$\sigma_{B_1}^2 = (n-1)s^2/\chi_{n-1, (1-\rho)/2}^2; \quad (2.75)$$

$$\sigma_{B_2}^2 = (n-1)s^2/\chi_{n-1, 1-\rho}^2; \quad (2.76)$$

$$\sigma_{H_3}^2 = (n - 1)s_X^2 / \chi_{n-1, p}^2 \quad (2.77)$$

где $\chi_{\nu, q}^2$ — квантиль порядка q χ^2 -распределения с ν степенями свободы.

Если объем выборки достаточно велик, то распределение оценки дисперсии приближается к гауссовскому и при $n \geq 60$ расчет границ упрощается:

$$\sigma_{H_1}^2 = s_X^2 - s_X^2 \sqrt{\frac{2}{n-1}} \lambda_p; \quad (2.78)$$

$$\sigma_{B_1}^2 = s_X^2 + s_X^2 \sqrt{\frac{2}{n-1}} \lambda_p. \quad (2.79)$$

Доверительные границы для среднего квадратического отклонения определяются по вышеприведенным границам дисперсии с учетом соотношений (2.63), (2.64).

Полученные доверительные интервалы для математического ожидания и дисперсии позволяют определить объемы выборок n_p , потребных для обеспечения заданных точности и надежности оценок.

Если задана ширина двустороннего интервала $2\Delta_p$, в котором с вероятностью p должно содержаться истинное значение математического ожидания, то из выражений (2.66), (2.67), (2.70) и (2.71) можно определить n_p :

известна дисперсия

$$n_p \geq \sigma_X^2 (\lambda_p / \Delta_p); \quad (2.80)$$

не известна дисперсия

$$n_p \geq s_X^2 (t_{n-1, (1+p)/2} / \Delta_p)^2. \quad (2.81)$$

При $n \geq 60 \dots 100$

$$n_p \geq s_X^2 (\lambda_p / \Delta_p)^2. \quad (2.82)$$

Аналогично из выражений (2.78) и (2.79), справедливых для большой выборки ($n \geq 60 \dots 100$), можно получить выражения для определения числа измерений, потребного для того, чтобы истинное значение дисперсии с заданной доверительной вероятностью оказалось в доверительном интервале заданной ширины $2\Delta_p$:

$$n_p \geq 2s_X^2 (\lambda_p / \Delta_p)^2 + 1. \quad (2.83)$$

Отметим, что расчет значений n_p с помощью выражений (2.81) – (2.83) на практике производится методом последо-

вательных приближений: сначала задается некоторое ориентировочное число необходимых измерений n_0 (желательно, чтобы выполнялось условие $n_0 \leq n_p$), затем по полученной выборке рассчитывается s_X^2 и по значениям $t_{n_0-1}, (1+\rho)/2 \cdot \lambda_\rho, \Delta_\rho$ определяется оценка n_p . После выполнения n_p измерений и получения новой оценки s_X^2 целесообразно снова оценить потребный объем измерений. Если он окажется менее объема полученной выборки, то измерения завершаются, в противном случае — эксперимент продолжается.

Коэффициенты асимметрии и эксцесса могут оцениваться по формулам:

$$\hat{A}\{X\} = \frac{1}{n(\sqrt{s^2})^3} \sum_{i=1}^n (x_i - m)^3; \quad (2.84)$$

$$\hat{E}\{X\} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - m)^4 / (s^2 - 3). \quad (2.85)$$

Дисперсии этих оценок [12]:

$$\sigma_A^2 = \frac{6(n-2)}{(n+1)(n+3)}; \quad (2.86)$$

$$\sigma_E^2 = \frac{24n(n-2)(n-3)}{(n+1)^2(n+3)(n+5)}. \quad (2.87)$$

Одноканальные измерения одномерной случайной величины с погрешностями, имеющими гауссовское распределение. Пусть случайная величина $X \sim N(\mu_X, \sigma_X^2)$ наблюдается с некоторой случайной независимой ошибкой ΔX , которая также имеет гауссовское распределение: $\Delta X \sim N(0, \sigma_\Delta^2)$, т. е. вместо случайной величины X наблюдается случайная величина $Y = X + \Delta X$. Дисперсия σ_Δ^2 полагается известной.

Поскольку $\mu_Y = \mu_X$ и $\sigma_Y^2 = \sigma_X^2 + \sigma_\Delta^2$, то на основе ранее полученных выражений максимально правдоподобные оценки параметров μ_X и σ_X^2 будут иметь вид:

оценка математического ожидания

$$m_X = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i; \quad (2.88)$$

оценка дисперсии

$$s_X^2 = s_Y^2 - \sigma_{\Delta}^2, \quad (2.89)$$

где s_Y^2 — оценка дисперсии случайной величины X , получаемая в соответствии с выражениями (2.58) или (2.59).

Дисперсия оценки (2.88)

$$D\{m_X\} = (\sigma_X^2 + \sigma_{\Delta}^2)/n. \quad (2.90)$$

Дисперсия оценки (2.89) определяется выражениями (2.61) или (2.62).

Многоканальные измерения одномерной случайной величины с погрешностями, имеющими гауссовские распределения. Пусть случайная величина $X \sim N(\mu_X, \sigma_X^2)$ наблюдается с помощью m независимых измерительных приборов, погрешности которых ΔX_j ($j = 1, \dots, m$) также имеют гауссовские распределения: $\Delta X_j \sim N(0, \sigma_{\Delta j}^2)$, т. е. вместо случайной величины X в j -м канале наблюдается величина $Y_j = X + \Delta X_j$. В результате n m -канальных измерений получается массив $y_{j,i}$ ($i = 1, \dots, n$; $j = 1, \dots, m$) из m X n значений. ограничимся оцениванием одного параметра — математического ожидания.

Рассмотрим однократное (i -е) многоканальное измерение. Оценку математического ожидания по результатам i -го измерения будем искать в классе линейных оценок:

$$m_{X_i} = \sum_{j=1}^m c_j y_{j,i}, \quad (2.91)$$

где c_j — неизвестные коэффициенты.

Можно показать, что для несмещенной оценки m_X необходимо, чтобы $\sum_{j=1}^m c_j = 1$. С учетом этого ограничения значения c_j ($i = 1, \dots, m$), соответствующие эффективной оценке математического ожидания, получаются путем решения оптимизационной задачи $D\{m_{X_i}\} \equiv \sum_{j=1}^m c_j^2 \sigma_j^2 \rightarrow \min$, где $\sigma_j^2 = \sigma_X^2 + \sigma_{\Delta j}^2$. Для этого может использоваться метод неопределенных множителей Лагранжа. В результате получа-

ются оптимальные значения коэффициентов: $c_j = d_j / \sum_{j=1}^m d_j$,

где $d_j = 1/\sigma_{\Delta_j}^2$. Тогда оценка (2.91) принимает вид

$$m_{X_i} = \sum_{j=1}^m d_j y_{ji} / \sum_{j=1}^m d_j. \quad (2.92)$$

Соответственно дисперсия этой оценки

$$D\{m_{X_i}\} = \sigma_X^2 + \sum_{j=1}^m d_j^2 \sigma_{\Delta_j}^2 / (\sum_{j=1}^m d_j)^2. \quad (2.93)$$

Теперь рассмотрим совместную обработку n много-канальных измерений. Поскольку все оценки m_{X_i} ($i = 1, n$) являются несмещенными, независимыми и имеют равные дисперсии, то наилучшей оценкой математического ожидания является выборочное среднее оценок m_{X_i} :

$$m_X = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n m_{X_i} = \frac{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m d_j y_{ji}}{\sum_{j=1}^m d_j}; \quad (2.94)$$

дисперсия этой оценки

$$D\{m_X\} = \frac{1}{n} \left[\sigma_X^2 + \sum_{j=1}^m \left(\frac{d_j}{\sum_{j=1}^m d_j} \right)^2 \sigma_{\Delta_j}^2 \right]. \quad (2.95)$$

Оценка параметров многомерных случайных величин. Пусть m -мерная случайная величина $\mathbf{X} = [X_1, \dots, X_m]^T$ имеет гауссовское распределение: $\mathbf{X} \sim N(\mu_X, \Sigma_X)$ (см. § 2.2). В результате эксперимента получена выборка $\{x_i\} = (x_1, \dots, x_n)$. Максимально правдоподобные оценки параметров μ_X и Σ_X имеют вид [2, 46]

$$\hat{\mu}_X \equiv m_X = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i; \quad (2.96)$$

$$\hat{\Sigma}_X = \hat{S}_X = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (\mathbf{x}_i - \mathbf{m}) (\mathbf{x}_i - \mathbf{m})^T. \quad (2.97)$$

Особый интерес представляют оценки параметров двухмерного распределения $\mathbf{X} = [X_1, X_2]^T$. В роли случайных величин X_1 и X_2 могут выступать различные сечения случайного процесса $X(t)$: $X_1 = X(t_m)$, $X_2 = X(t_k)$ или значения выходной Y и входной X величин; в этом случае

$$\mathbf{m}_X = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{x}_i = [m_{X_1} m_{X_2}]^T, \quad (2.98)$$

$$\text{где } m_{X_j} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_{ji} \quad (j = 1, 2).$$

Корреляционная матрица $\Sigma_X = M\{(X - \mu)(X - \mu)^T\}$ в двухмерном распределении имеет вид

$$\begin{bmatrix} R_{X_1 X_1} & R_{X_1 X_2} \\ R_{X_2 X_1} & R_{X_2 X_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{X_1}^2 & R_{X_1 X_2} \\ R_{X_1 X_2} & \sigma_{X_2}^2 \end{bmatrix}, \quad (2.99)$$

где $R_{X_j X_q}$ — корреляционный момент случайных величин X_j и X_q ($j, q = 1, 2$).

Метод максимального правдоподобия позволяет получить следующие оценки элементов корреляционной матрицы (в предположении о неизвестности μ_X):

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_{X_j}^2 = s_{X_j}^2 &= \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_{ji} - m_{X_j})^2 = \frac{1}{n-1} \left[\sum_{i=1}^n x_{ji}^2 - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n x_{ji} \right)^2 \right] \quad (j = 1, 2); \end{aligned} \quad (2.100)$$

$$\begin{aligned} \hat{R}_{X_j X_q} &= \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_{ji} - m_{X_j})(x_{qi} - m_{X_q}) = \\ &= \frac{1}{n-1} \left[\sum_{i=1}^n x_{ji} x_{qi} - \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n x_{ji} \right) \left(\sum_{i=1}^n x_{qi} \right) \right] \\ &\quad (j, q = 1, 2). \end{aligned} \quad (2.101)$$

Отметим, что оценка (2.100) является частным случаем оценки (2.101).

Выражения для дисперсий оценок (2.98) и (2.100), а также доверительные интервалы для анализа их точности и надежности приведены выше.

Наряду с корреляционными моментами иногда оцениваются также ковариационные моменты $\hat{K}_{X_j X_q}$ случайных величин X_j и X_q :

$$\hat{K}_{X_j X_q} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n x_{ji} x_{qi} \quad (j, q = 1, 2), \quad (2.102)$$

и коэффициент их корреляции

$$\begin{aligned} \rho_{X_j X_q} &= R_{X_j X_q} / \sqrt{\sigma_{X_j}^2 \sigma_{X_q}^2}; \\ \hat{\rho}_{X_j X_q} &\equiv r_{X_j X_q} = \hat{R}_{X_j X_q} / \sqrt{s_{X_j}^2 s_{X_q}^2} = \\ &= \frac{\left[\sum_{i=1}^n x_{ji} x_{qi} - \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n x_{ji} \right) \left(\sum_{i=1}^n x_{qi} \right) \right]}{\sqrt{\left[\sum_{i=1}^n x_{ji}^2 - \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n x_{ji} \right)^2 \right] \left[\sum_{i=1}^n x_{qi}^2 - \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n x_{qi} \right)^2 \right]}} \\ &(j, q = 1, 2). \end{aligned} \quad (2.103)$$

Оценим доверительные границы и потребный объем измерений для оценки коэффициента корреляции (2.103). Можно показать, что при большом объеме выборки ($n > 30 \dots 50$) оценка $r_{X_1 X_2}$ имеет гауссовское распределение [4, 18, 30]: $r_{X_1 X_2} \sim N\left(\rho_{X_1 X_2}, \frac{1 - \rho_{X_1 X_2}^2}{\sqrt{n}}\right)$. Отсюда можно определить границы двустороннего доверительного интервала $J_1 = [r_h, r_v]$:

$$\begin{aligned} r_h &= r_{X_1 X_2} - \frac{\sqrt{1 - r_{X_1 X_2}^2}}{\sqrt{n}} \lambda_{(1+\rho)/2}; \\ r_v &= r_{X_1 X_2} + \frac{\sqrt{1 - r_{X_1 X_2}^2}}{\sqrt{n}} \lambda_{(1+\rho)/2}. \end{aligned} \quad (2.104)$$

Вид распределения выборочного коэффициента корреляции при малых n ($n < 30$) имеет весьма сложный вид. Поэтому для определения доверительного интервала в этом случае используют различные способы преобразования, позволяющие получить величину с приблизительно гауссовским распределением. В частности, широко используется Z -преобразование Фишера:

$$z = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + r_{X_1 X_2}}{1 - r_{X_1 X_2}} \quad (r_{X_1 X_2} = \text{th} z), \quad (2.105)$$

которое преобразует случайную величину $r_{X_1 X_2}$ к случайной величине z , имеющей приближенно распределение

$$N \left(\frac{1}{2} \ln \frac{1 + \rho_{X_1 X_2}}{1 - \rho_{X_1 X_2}} + \frac{\rho_{X_1 X_2}}{2(n-1)} \cdot \frac{1}{n-3} \right) [4, 18, 30, 56].$$

Здесь $\text{th} z = (e^z - e^{-z}) / (e^z + e^{-z})$ — гиперболический тангенс.

Это преобразование может использоваться даже при сравнительно небольших n ($n \geq 10$). В этом случае

$$\begin{aligned} r_h &= \text{th} \left(z - \lambda (1 + \rho) / 2 \frac{1}{\sqrt{n-3}} \right); \\ r_v &= \text{th} \left(z + \lambda (1 + \rho) / 2 \frac{1}{\sqrt{n-3}} \right). \end{aligned} \quad (2.106)$$

Потребный объем измерений сравнительно просто определить для больших n ($n > 30 \dots 50$). Если задана ширина интервала $2\Delta_\rho$, который с вероятностью ρ должен "накрывать" истинное значение коэффициента корреляции, то из выражений (2.64) следует, что

$$n_p \geq \frac{1 - r_{X_1 X_2}^2}{\Delta_\rho^2} \lambda^2 (1 + \rho) / 2. \quad (2.107)$$

Оценка математического ожидания и дисперсии при условии коррелированности отсчетов. Приведенные ранее оценки (2.57) – (2.59) получены при условии независимости отсчетов и резко теряют свои оптимальные свойства при использовании коррелированной выборки. Рассмотрим более общий случай, когда статистические связи в выборке $x = [x_1, \dots, x_n]^T$, имеющей Гауссовское распределение, задаются корреляционной матри-

цей $\Sigma_X = M\{(X - \mu_X)(X - \mu_X)^\top\}$. Будем полагать, что все отсчеты x_i ($i = 1, n$) имеют одинаковые математические ожидания μ_X и дисперсии $\sigma_{X_i}^2 = \sigma_X^2$ (корреляционная матрица $\Sigma_X = \sigma_X^2 \Omega_X$, где Ω_X — нормированная корреляционная матрица с единичной главной диагональю). Тогда плотность вероятности вектора наблюдений x определяется выражением (2.3). При фиксированной выборке x она представляет собой функцию правдоподобия, позволяющую найти МП-оценки параметров. Решая уравнение правдоподобия, можно получить следующие выражения [51, 82]:

$$m_X = \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} x_j \right) / \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} \right); \quad (2.108)$$

$$s_X^2 = \left[\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} (x_i - m_X) (x_j - m_X) \right] / (n - 1), \quad (2.109)$$

где c_{ij} — элемент (i, j) матрицы $c = \Omega_X^{-1}$.

Отметим, что эти оценки представляют собой частный случай оценок параметров линейной регрессии при условии коррелированности измерений и матрице регрессоров $F = [1 \dots 1]^\top$ (см. гл. 5). Дисперсии и доверительные интервалы для этих оценок могут быть определены также на основе общих соотношений.

Оценка корреляционных функций и спектральных плотностей эргодических случайных процессов. Пусть выборка $\{x_i\}$ ($i = 1, n$) представляет собой совокупность отсчетов $x_i = x(t_i)$ реализации $x(t)$ эргодического случайного процесса $X(t)$, взятых с равномерным шагом Δt . Тогда оценки математического ожидания, дисперсии, ковариационной, корреляционной и нормированной корреляционной функций могут быть получены с помощью следующих выражений:

$$m_X = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i; \quad (2.110)$$

$$s_X^2 = \frac{1}{n-1} \left[\sum_{i=1}^n x_i^2 - \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2 \right]; \quad (2.111)$$

$$\hat{K}_X(l\Delta t) \equiv \hat{K}_X[l] = \frac{1}{n-l-1} \sum_{i=l+1}^{n-l} x_i x_{i-l}; \quad (2.112)$$

$$\begin{aligned} \hat{R}_X(l\Delta t) \equiv \hat{R}_X[l] &= \frac{1}{n-l-1} \sum_{i=l+1}^{n-l} (x_i x_{i-l} - m_X^2) = \\ &= \hat{K}_X[l] - m_X^2; \end{aligned} \quad (2.113)$$

$$r_X(l\Delta t) \equiv r_X[l] = \hat{R}_X[l]/s_X^2 \quad (l = \overline{0, L-1}). \quad (2.114)$$

Здесь L выбирается из условия $L \geq \tau_k/\Delta t$, где τ_k – интервал корреляции случайного процесса ($R_X(\tau) \approx 0$ при $\tau \geq \tau_k$).

Оценки (2.110) и (2.111) могут использоваться, если $\Delta t \geq \tau_k$, т. е. отсчеты x_i некоррелированы, или если интервал наблюдения $T_n \geq \tau_k$. В противном случае следует применять оценки (2.108), (2.109), причем в качестве корреляционной матрицы измерений используется ее оценка или аппроксимация.

Оценка спектральной плотности средней мощности $E_X(f)$ на дискретных частотах $f_i = (i-1)\Delta F$, $\Delta F = 1/\Delta t(N-1)$ ($i = \overline{1, N}$) может быть получена с помощью дискретного преобразования Фурье (более подробно см. ниже):

$$\hat{E}_X((i-1)\Delta F) = \mathcal{F} \left\{ \hat{K}_X[l] \right\} \Delta t$$

или, полагая $k = i + 1$,

$$\hat{E}_X[k] = \mathcal{F} \left\{ \hat{K}_X[l] \right\} \Delta t \quad (k = \overline{0, N-1}; l = \overline{0, L-1}). \quad (2.115)$$

Обычно принимают $N = L$. Для того чтобы избежать так называемых ошибок наложения, необходимо, чтобы шаг дискретизации по времени Δt был существенно меньше интервала корреляции τ_k . Отметим, что полученная дискретная спектральная плотность $E_X[k]$ представляет собой функцию, симметричную относительно точки $k = N/2 + 1$ (считаем N четным).

Оценка ковариационной функции может быть получена косвенным методом на основе дискретного преобразования Фурье [4, 39, 82]. Для этого сначала вычисляется дискретный

спектр сигнала

$$x[i] = \begin{cases} x_{i+1} & (i = \overline{0, n-1}); \\ 0 & (n < i \leq N-1); \end{cases} \quad (2.116)$$

$$X[k] \equiv \mathcal{F} \{x[i]\} := \sum_{i=0}^{N-1} x[i] W_N^{ik},$$

где

$$N \geq n; \quad W_N = e^{-j2\pi/N} \quad (k = \overline{1, N-1}).$$

Далее вычисляется первичная оценка спектральной плотности

$$\hat{E}_X[k] = X[k]X^*[k] \quad (k = \overline{0, N-1}), \quad (2.117)$$

и с помощью обратного дискретного преобразования Фурье получается оценка так называемой периодической (циклической) ковариационной функции:

$$\hat{K}_X^n[l] \equiv \mathcal{F}^{-1}\{\hat{E}_X[k]\} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \hat{E}_X[k] W_N^{-kl} \quad (l = \overline{1, N-1}). \quad (2.118)$$

Оценка ковариационной функции

$$\hat{K}_X[l] = \hat{K}_X^n[l] \quad (l = \overline{0, L-1}), \quad (2.119)$$

если выполнено условие $N > 2L$ (на практике $N > > (5 \dots 10)L$).

Для выполнения преобразований (2.115), (2.116), (2.118) обычно используются алгоритмы быстрого преобразования Фурье (БПФ), обеспечивающие существенное ускорение вычислений по сравнению с непосредственной реализацией дискретного преобразования Фурье. В связи с этим косвенный метод оценки ковариационных и корреляционных функций оказывается более экономичным, чем их непосредственный расчет. Обычным для алгоритмов БПФ (см. гл. 4) является условие $N = 2^m$, где $m = 1, 2, \dots$. Для его выполнения, если $n < N$, исходный дискретный сигнал ($\hat{R}_X[l]$ или $x[i]$) должен быть дополнен нулевыми отсчетами до требуемой размерности.

В то же время косвенный метод, основанный на использовании первичной оценки (2.117), обладает тем недостат-

ком, что получаемые оценки не являются состоятельными [39]. Это связано с резким усечением гипотетической, генеральной последовательности x_i ($i = \dots -1, 0, +1 \dots$) с помощью прямоугольного "окна", выбирающего n отсчетов x_i ($i = 1, n$). Для устранения этого недостатка исходная последовательность $x[i]$ умножается на функцию "окна" (весовую функцию) $d[i]$:

$$x'[i] = d[i]x[i] \quad (i = \overline{0, N-1}); \quad (2.120)$$

полученный взвешенный сигнал далее используется при оценке спектральной плотности и ковариационной функции [выражения (2.116) – (2.119)]. Известны различные функции "окна": обобщенная косинусоидальная, гауссовская и др. [39].

Рекуррентные параметрические оценки числовых характеристик по нарастающей выборке. В автоматизированных системах обработки экспериментальных данных для получения текущих оценок рассмотренных числовых характеристик широко используются рекуррентные процедуры. Они основаны на использовании при формировании текущей оценки оценок параметров, полученных на предыдущих шагах, и их коррекции в результате использования вновь поступивших экспериментальных данных. Рекуррентные алгоритмы требуют существенно меньшей емкости памяти ЭВМ, чем алгоритмы, рассмотренные ранее.

Рекуррентная оценка математического ожидания имеет вид [4, 39, 74]

$$\begin{aligned} m_X^{(i)} &= m_X^{(i-1)} + \frac{1}{i} [x_i - m_X^{(i-1)}] = \frac{i-1}{i} m_X^{(i-1)} + \\ &+ \frac{1}{i} x_i; \quad m_X^{(0)} = 0 \quad (i = 1, \dots). \end{aligned} \quad (2.121)$$

При известном математическом ожидании случайной величины

$$\begin{aligned} \hat{D}_X^{(i)} &= \frac{i-1}{i} \hat{D}_X^{(i-1)} + \frac{(x_i - \mu_X)^2}{i} = \\ &= \hat{D}_X^{(i-1)} + \frac{1}{i} [(x_i - \mu_X)^2 - \hat{D}_X^{(i-1)}]; \\ \hat{D}_X^{(0)} &= 0 \quad (i = 1, \dots). \end{aligned} \quad (2.122)$$

Если математическое ожидание неизвестно и оценивается в ходе эксперимента с помощью формулы (2.121), применяется следующее рекуррентное выражение:

$$\hat{D}_X^{(i)} = \frac{i-2}{i-1} \hat{D}_X^{(i-1)} + \frac{1}{i} [x_i - m_X^{(i-1)}]^2. \quad (2.123)$$

Для получения оценки корреляционного момента используется алгоритм

$$\begin{aligned} \hat{R}_{X_1 X_2}^{(i)} &= \frac{i-1}{i} \hat{R}_{X_1 X_2}^{(i-1)} + \frac{1}{i} [(x_{1i} - \mu_{X_1}) (x_{2i} - \mu_{X_2})]; \\ \hat{R}_{X_1 X_2}^{(i)} &= \frac{i-2}{i-1} \hat{R}_{X_1 X_2}^{(i-1)} - \frac{1}{i} [(x_{1i} - m_{X_1}^{(i-1)}) (x_{2i} - \\ &- m_{X_2}^{(i-1)})]; \quad \hat{R}_{X_1 X_2}^{(0)} = 0 \quad (i = 1, \dots). \end{aligned} \quad (2.124)$$

При этом выражение (2.124) используется, когда математические ожидания μ_{X_1} и μ_{X_2} не известны, а оцениваются по выражению (2.121).

При реализации рекуррентных алгоритмов, когда максимальное число измерений n заранее не определено и жестко не ограничено внешними по отношению к содержательной стороне эксперимента обстоятельствами, необходимо выработать критерий остановки процедуры оценивания и окончания проведения измерений. Поскольку рекуррентные оценки (2.121) – (2.124) на каждом i -м шаге эквивалентны оценкам (2.57) – (2.59), (2.101), полученным по выборкам объема i , и обладают всеми рассмотренными ранее свойствами и характеристиками, то для останова можно на каждом шаге оценивать число измерений n_p , потребное для обеспечения требуемых точности и надежности, и сравнивать с числом приведенных измерений. Однако, как правило, поступают проще – используется следующий критерий:

$$|\hat{\theta}^{(i)} - \hat{\theta}^{(i-1)}| \leq \delta, \quad (2.125)$$

где $\hat{\theta}^i$ – оценка параметра θ на i -м шаге; δ – допускаемая погрешность измерений.

Следует отметить, что обсуждавшиеся оценки могут рассматриваться с более общих позиций и получаться как частный случай в рамках регрессионного анализа с помощью рекуррентного метода наименьших квадратов (см. гл. 4) или методами динамической фильтрации (см. [23, 49]).

Некоторые упрощенные алгоритмы оценивания. На практике при использовании рассмотренных оценок, могут возникнуть трудности, связанные с большим объемом выборки ($n > 50 \dots 100$). Они связаны, в частности, с возможностью переполнения разрядной сетки ЭВМ значениями Σx_i и Σx_i^2 , или из-за того, что, начиная с некоторых i ($i > 1$), числа x_i/i и x_i^2/i станут машинным нулем или будут иметь недопустимую потерю значащих цифр. Кроме того, объем вычислений, необходимых для получения традиционных оценок, может оказаться чрезмерно большим в условиях временных ограничений; в некоторых случаях реализация нерекуррентных алгоритмов оценивания требует недопустимо большой емкости памяти. В связи с этим широко используются упрощенные алгоритмы, свободные от отмеченных недостатков.

Наиболее распространенные из них базируются (может быть, неявно) на формировании вариационного ряда $\{x'_i\}$ ($i = \overline{1, n}, x'_{i+1} \geq x'_i$), который в дальнейшем используется для получения порядковых статистик или для группировки (систематизации) экспериментальных данных.

При группировке используется несколько способов. Один из них уже рассматривался в § 2.3, когда область возможных значений случайной величины разбивалась на M интервалов, в частности, равной длины и подсчитывалось число наблюдений m_j , заключенных в каждом из них. В этом случае вместо исходной выборки $\{x_i\}$ ($i = \overline{1, n}$) получалась сгруппированная выборка $\{\bar{x}_j, m_j\}$ ($j = \overline{1, M}$), где \bar{x}_j — средняя точка j -го интервала. Интервал возможных значений может определяться априорно, тогда отсутствует принципиальная необходимость в запоминании всех элементов выборки или вариационного ряда, что приводит к экономии памяти. При более точном, апостериорном определении интервала, в котором лежат измеренные значения, определяется размах выборки (см. ниже) и необходимо запоминать исходную выборку $\{x_i\}$ ($i = \overline{1, n}$) или соответствующий вариационный ряд $\{x'_i\}$. Вопросы выбора значения M были рассмотрены выше.

Другой распространенный способ группировки состоит в разбиении выборки $\{x_i\}$ ($i = \overline{1, n}$) полного объема n

на M подвыборок $\{x_i\}_k$ ($k = \overline{1, M}; i = \sum_{j=1}^{k-1} n_j, \sum_{j=1}^k n_j$)

объема n_k : $\sum_{k=1}^M n_k = n$, и вычислении по каждой из них выборочного среднего t_{X_k} и выборочной дисперсии $s_{X_k}^2$. Тогда вместо исходной выборки $\{x_i\}$ ($i = \overline{1, n}$) используется выборка $\{t_{X_k}, s_{X_k}^2, n_k\}$ ($k = \overline{1, M}$).

Отметим, что важным дополнительным достоинством оценок, основанных на порядковых статистиках, является их высокая эффективность при нарушении гауссовости распределения исходных данных, когда классические оценки оказываются малопригодными (см. ниже). Кроме того, они нечувствительны к потере части экспериментальной информации.

Рассмотрим некоторые наиболее употребительные оценки. (Более подробно эти вопросы исследуются в работах [2, 18, 25, 30, 39, 70, 72].)

Оценка математического ожидания и дисперсии с помощью порядковых статистик. Пусть $\{x_i\}$ — наблюдаемая выборка объема n , а $\{x'_i\}$ — соответствующий вариационный ряд: $x'_1 < x'_2 < \dots < x'_n$.

В качестве оценки математического ожидания может использоваться выборочная (статистическая) медиана $\hat{Med}\{X\}_{ст} \equiv \bar{x}_{0,5}$. Если n — четное ($n = 2k$, k — некоторое целое число), то

$$\bar{x}_{0,5} = (x'_{k+1} + x'_{k+2})/2, \quad (2.126)$$

при нечетном n ($n = 2k + 1$)

$$\bar{x}_{0,5} = x'_k. \quad (2.127)$$

Если наблюдаемая случайная величина имеет гауссовское распределение $X \sim N(\mu, \sigma_X)$, то при достаточно больших n ($n > 50 \dots 100$) закон распределения выборочной медианы близок к гауссовскому и оценка обладает следующими характеристиками:

$$M\{\bar{x}_{0,5}\} = \mu_X; \quad D\{\bar{x}_{0,5}\} = \frac{\pi}{2n} \sigma_X^2.$$

Отсюда следует, что в этих условиях эффективность выборочной медианы несколько ниже, чем эффективность

выборочного среднего:

$$\text{eff}(\bar{x}_{05}/m_X) = 2/\pi \approx 0,637,$$

однако для ее получения требуется выполнить лишь примерно $3n/2$ операций сравнения элементов выборки $\{x_i\}$ вместо $n - 1$ сложений и одного деления, необходимых для вычисления m_X .

Отметим, что для оценки математического ожидания могут использоваться выражения более общего, чем (2.126) или (2.127), вида. Например, при $n = 2k + 1$ можно использовать следующую оценку:

$$\hat{\mu}_X = (x'_m + x'_{n-m+1})/2, \quad (2.128)$$

где m — целое число ($1 \leq m \leq k$).

При уменьшении m снижается емкость необходимой памяти (при $m = 1$ требуется только две ячейки), упрощается возможность реализации алгоритма получения текущих оценок, однако повышается чувствительность к "засоренности" исходных данных и к потерям части исходных данных.

Для оценки дисперсии и среднего квадратического значения случайной величины широко применяются процедуры, основанные на определении размаха выборки $g_n = x'_n - x'_1$. Несмешенная оценка среднего квадратического значения гауссовской случайной величины определяется выражением [72]

$$s'_X = g_n / \alpha_n, \quad (2.129)$$

где α_n — некоторый коэффициент, определяемый объемом выборки (табл. 2.2).

Таблица 2.2

n	α_n	β_n	n	α_n	β_n
4	2,059	0,880	10	3,078	0,797
5	2,326	0,864	12	3,258	0,778
6	2,534	0,848	14	3,407	0,762
7	2,704	0,833	16	3,532	0,749
8	2,847	0,820	18	3,640	0,738
9	2,970	0,808	20	3,735	0,729

Дисперсия этой оценки

$$D\{s'_X\} = \frac{\beta_n^2}{\alpha_n^2} \sigma_X^2, \quad (2.130)$$

где β_n – коэффициент, зависящий от n (табл. 2.2).

Эффективность этой оценки несколько ниже, чем эффективность выборочного среднего квадратического значения:

$$\text{eff}(s'_X/s_X) = \frac{2\beta_n^2 \Gamma^2(n/2)}{\alpha_n^2 \left[(n-1) \Gamma^2 \left(\frac{n-1}{2} \right) - \Gamma^2(n/2) \right]} < 1. \quad (2.131)$$

Однако это различие невелико ($\text{eff}(s'_X/s_X) > 0.9$ при $n > 4$) и при увеличении объема выборки оценка s'_X по точности приближается к оценке s_X . При этом следует учесть, что для реализации алгоритма (2.129) требуется всего две ячейки памяти, около $3n/2$ операций сравнения, одно вычитание и одно деление, тогда как вычисление выборочного среднего квадратического значения необходимо примерно n операций сложения, n – умножения и одно извлечение квадратного корня. Отметим также, что алгоритм (2.129) можно использовать для получения текущих оценок среднего квадратического значения и дисперсии.

Оценка числовых характеристик случайной величины по сгруппированным данным. Пусть исходная выборка $\{x_i\}$ объемом n задается в виде распределения средних точек $\{x_i\}$ ($i = 1, M$) M интервалов длиной h , на которые разбита область возможных значений случайной величины X , и соответствующих им абсолютных частот $\{m_i\}$ ($i = 1, M, M \ll n$).

В этом случае выборочное среднее и выборочную дисперсию находят с помощью выражений [4, 70, 72]

$$m_X = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^M m_i \bar{x}_i; \quad (2.132)$$

$$s_X^2 = \frac{1}{n-1} \left[\sum_{i=1}^M m_i (\bar{x}_i)^2 - \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^M m_i \bar{x}_i \right)^2 \right].$$

При необходимости определения коэффициентов асимметрии и эксцесса выборочного распределения предвари-

тельно находят выборочные начальные моменты [70, 72]

$$m_{X_i} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^M m_j (\bar{x}_j)^i \quad (i = 1, 4). \quad (2.133)$$

Затем вычисляются выборочные центральные моменты второго, третьего и четвертого порядков:

$$\begin{aligned}\hat{M}_{X_2} &= s_X^2 = m_{X_2} - m_{X_1}^2; \\ \hat{M}_{X_3} &= m_{X_3} - 3m_{X_2}m_{X_1} + 2m_{X_1}^3; \\ \hat{M}_{X_4} &= m_{X_4} - 4m_{X_3}m_{X_1} + 6m_{X_2}m_{X_1} - 3m_{X_1}^4.\end{aligned} \quad (2.134)$$

После этого находят выборочные значения коэффициентов асимметрии и эксцесса:

$$\hat{A}\{X\} = \hat{M}_{X_3}/s_X^3; \quad \hat{E}_X\{X\} = \hat{M}_{X_4}/(s_X^2)^2 - 3. \quad (2.135)$$

Следует отметить, что группировка данных приводит к методическим ошибкам определения моментов распределения, которые при некоторых предположениях о характере истинного распределения могут быть устранены с помощью поправок Шеппарда [4, 70]:

$$\left. \begin{aligned}\tilde{m}_{X_1} &= m_{X_1} = m_X; \\ \tilde{m}_{X_2} &= m_{X_2} - \frac{h^2}{12}; \\ \tilde{m}_{X_3} &= m_{X_3} - \frac{m_{X_1}h^2}{4}; \\ \tilde{m}_{X_4} &= m_{X_4} - \frac{m_{X_2}h^2}{2} + \frac{7h^4}{240};\end{aligned} \right\} \quad (2.136)$$

$$\tilde{M}_{X_1} = M_{X_1} = 0; \quad \tilde{M}_{X_2} = M_{X_2} = \tilde{s}_X^2 = s_X^2 - h^2/12;$$

$$\tilde{M}_{X_3} = \hat{M}_{X_3}; \quad (2.137)$$

$$\tilde{M}_{X_4} = M_{X_4} - M_{X_2}h^2/2 + 7h^4/240.$$

Эти поправки применимы, например, при гауссовском, Рэлея, Максвелла, Симпсона распределениях и неприменимы при равномерном, экспоненциальном и др.

Сгруппированные данные позволяют определить оценки ковариационного и корреляционного моментов двух слу-

чайных величин X_1 и X_2 [72]:

$$\hat{K}_{X_1 X_2} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^K m_{ij} \bar{x}_{1i} \bar{x}_{2j}; \quad (2.138)$$

$$\hat{R}_{X_1 X_2} = \frac{1}{n-1} \left[\sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^K m_{ij} \bar{x}_{1i} \bar{x}_{2j} - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^M m_i^{(1)} \bar{x}_{1i} \sum_{j=1}^K m_j^{(2)} \bar{x}_{2j} \right] \quad (2.139)$$

где m_{ij} — число реализаций двухмерной случайной величины, попавших в i -й интервал по переменной x_1 и в j -й интервал

по переменной x_2 ; $m_i^{(1)} = \sum_{j=1}^K m_{ij}$; $m_j^{(2)} = \sum_{i=1}^M m_{ij}$;

\bar{x}_{1i} и \bar{x}_{2j} — средние значения интервалов группировки по переменным x_1 и x_2 .

Средние квадратические отклонения величин X_1 и X_2 оцениваются по формулам, почти совпадающим с выражением (2.132):

$$s_{X_i} = \sqrt{\frac{1}{n-1} \cdot \left[\sum_{j=1}^{M(K)} m_j^{(i)} x_{ij}^2 - \frac{1}{n} \left(\sum_{j=1}^{M(K)} m_j^{(i)} x_{ij} \right)^2 \right]} \quad (i = 1, 2). \quad (2.140)$$

Затем можно получить оценку коэффициента корреляции:

$$r_{X_1 X_2} = \hat{R}_{X_1 X_2} / s_{X_1} s_{X_2}. \quad (2.141)$$

Показатели точности и надежности рассмотренных оценок при $M \geq 7 \dots 10$ и при $n > 50$ близки к соответствующим характеристикам классических оценок.

Оценка числовых характеристик случайной величины по результатам обработки подвыборок полной выборки. Как отмечалось, для группировки данных и сжатия информации полная выборка $\{x_i\}$ ($i = 1, n$) может быть разбита на M подвыборок объема n_i ($i = 1, M$) каждая. Для них определяются выборочное среднее m_{X_i} и выборочная дисперсия $s_{X_i}^2$. Соответственно сгруппированная таким образом выборка представляет собой набор $\{m_{X_i}, s_{X_i}^2, n_i\}$ ($i = 1, M$).

Она позволяет вычислить оценки математического ожидания и дисперсии случайной величины [70]:

$$m_X = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^M n_i m_{X_i}; s_X^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^M n_i (s_{X_i}^2 + m_{X_i}^2) - m_X^2. \quad (2.142)$$

Оценки числовых характеристик при отклонении закона распределения от гауссовского. В действительности экспериментальные данные почти никогда не имеют "чисто" гауссовского распределения. Это относится даже к тому случаю, когда в результате проверки была принята гипотеза о гауссовой статистике измерений, поскольку эта проверка, как отмечалось, скорее отвечает на вопрос о том, какое распределение не описывает наблюдаемые величины, чем позволяет однозначно выбрать истинное распределение. Основными причинами негауссности измерений являются как „внутренний“ характер механизма формирования экспериментальных данных, которые принципиально имеют распределение, отличное от гауссовского (например, шумы на выходе амплитудного детектора при подаче на его вход гауссовского шума распределения по закону Рэлея), так и существование нерегулярных аномальных ошибок измерений. Последнее обстоятельство вообще препятствует использованию параметрических оценок, алгоритмы которых базируются на конкретных свойствах законов распределения измерений: большинство оптимальных параметрических оценок резко теряют свои замечательные свойства (несмещенность, эффективность) даже при незначительных отклонениях от стандартных условий.

Радикальный путь повышения качества оценки в реальных условиях связан с применением робастных оценок [2, 25, 30, 72, 74]. Под робастностью понимается слабая чувствительность к отклонениям от стандартных условий и высокая эффективность для широкого класса распределений.

Наиболее известной из робастных оценок параметра сдвига распределения случайной величины является выборочная медиана. При обработке равноточных данных выборочная медиана в некоторых случаях существенно эффективнее выборочного среднего (табл. 2.3), хотя, отметим, иногда этот алгоритм и уступает по точности операции осреднения, в частности, при гауссовском распределении.

Таблица 2.3

Распределение	$N(\mu_X, \sigma_X^2)$	$L_p(\theta, \lambda)$	$E(\lambda)$	$R(a, b)$	$C(a, c)$
$\text{eff} \left(\frac{x_0,5}{m_X} \right)$ $\frac{2(n-1)+\pi}{\pi n}$ (при $n \rightarrow \infty$ $\text{eff} \approx 0,637$)	2		1	$\frac{n+2}{3n}$ (при $n \rightarrow \infty$ $\text{eff} \approx 0,33$)	$\frac{4}{\pi^2} n \approx$ $\approx 0,405n$

Таблица 2.4

Вид засорения $W(x, \mu_X, \theta)$	Степень засорения		
	0	0,05	1
$N(\mu_X, (3\sigma_X)^2)$	0,637	0,828	0,637
$L_p(\mu_X, 1)$	0,637	1,310	2,000
$R(\mu_X - 3\sigma_X, \mu_X + 3\sigma_X)$	0,637	2,157	13,254
$C(\mu_X, 1)$	0,637	2,713	25,344

В то же время существует довольно широкий класс распределений, весьма близких к гауссовскому и часто встречающихся на практике, для которых алгоритм выборочной медианы предпочтительнее оценки (2.57). Для таких распределений характерна повышенная по сравнению с гауссовским законом вероятность больших отклонений от среднего, т. е. их плотность вероятности имеет утяжеленные "хвосты". Часто используется так называемая модель Тьюки "засоренного" гауссовского закона:

$$W(x) = (1 - \epsilon) N(x, \mu_X, \sigma_X^2) + \epsilon W(x, \mu_X, \theta), \quad (2.143)$$

где ϵ — доля "засоряющих" (аномальных) наблюдений.

Функция (2.143) описывает наблюдения, основная часть которых имеет гауссовское распределение $N(x, \mu_X, \sigma_X^2)$, а остальные распределены по закону $W(x, \mu_X, \theta)$. Функция $W(x, \mu_X, \theta)$, как правило, принимается симметричной, параметр ее положения совпадает с математическим ожиданием гауссовского распределения, а параметр масштаба θ

существенно превышает среднее квадратическое значение σ_x . Функция $N(x, \mu_x, \sigma_x^2)$ характеризует центральную часть распределения экспериментальных данных, а функция $W(x, \mu_x, \theta)$ – определяет "хвосты" распределения $W(x)$. Модель Тьюки хорошо описывает результаты измерений с учетом возможных сбоев или промахов при измерениях [2, 57, 68].

Представленные в табл. 2.4 значения относительной эффективности выборочной медианы и выборочного среднего $eff(x_{0.5}/m_x)$, полученные по данным табл. 8.1 [2], показывают, что даже при незначительной "засоренности" измерений выборочная медиана в большинстве случаев предпочтительнее выборочного среднего. В случае если аномальные ошибки распределены по гауссовскому закону, выборочная медиана точнее выборочного среднего при $\epsilon \in [0,1; 0,9]$.

Выборочная медиана относится к классу взвешенных порядковых статистик, которые определяются следующим образом [2]:

$$\bar{x}_n = \sum_{i=1}^n w_i x'_i, \quad (2.144)$$

где w_i – вес, с которым суммируются члены вариационного ряда $\{x'_i\}$ ($i = \overline{1, n}$). Для нее все весовые коэффициенты имеют нулевые значения, кроме $w_{(n+1)/2} = 1$ (при n – нечетном) или $w_{n/2} = w_{n/2 + 1} = 1/2$ (при n – четном). Кроме медианы на практике часто используются так называемые цензурированные оценки.

Цензурированная оценка первого типа имеет следующие весовые коэффициенты:

$$w_i = \begin{cases} w_0 > 0 & \text{при } a \leq x'_i \leq b; \\ 0 & \text{при } x'_i < a, x'_i > b. \end{cases} \quad (2.145)$$

Значение w_0 обратно пропорционально числу элементов вариационного ряда, попавших в заданный интервал значений $[a, b]$. Оно не может быть задано заранее и определяется после завершения эксперимента.

При использовании цензурированной оценки второго типа

$$w_i = \begin{cases} \frac{1}{n-m-k} & (m \leq i \leq k); \\ 0 & (i < m, i > k). \end{cases} \quad (2.146)$$

Частным случаем подобной оценки является усеченное среднее, когда отбрасывается r наименьших и r наибольших членов вариационного ряда, а $v = n - 2r$ центральных порядковых статистик осредняются:

$$\bar{x}_r = \frac{1}{n-2r} \sum_{i=r}^{n-r} x'_i. \quad (2.147)$$

При использовании цензурированных оценок основная проблема связана с выбором параметров, определяющих число оставляемых в сумме (2.147) членов. Это число зависит, в первую очередь, от степени "засорения" ϵ : чем она больше, тем меньше членов вариационного ряда следует использовать для формирования оценки. Некоторые рекомендации по выбору параметров приведены в работах [2, 30, 61, 74]. Среди других типов робастных оценок параметра сдвига упомянем "винзорированное" среднее, оценки Ходжеса—Лемана, M -оценки Хубера, бивес-оценку Мостелера—Тьюки [2, 30, 61, 74].

Аналогичные робастные оценки могут быть получены и для оценки параметра масштаба распределения. В частности, для описания разброса случайной величины X наряду со средним квадратическим значением σ_X может использоваться среднее абсолютное значение

$$\delta_X = \int_{-\infty}^{+\infty} |x - \mu_X| W(x) dx, \quad (2.148)$$

которое связано с σ_X соотношением

$$\delta_X / \sigma_X = \sqrt{2/\pi}. \quad (2.149)$$

Используя эту связь, можно определить выборочное среднее абсолютное значение

$$d_X = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |x_i - m_X| \quad (2.150)$$

и далее оценивать среднее квадратическое значение

$$s_{d_X} = \sqrt{\pi/2} d_X. \quad (2.151)$$

Оценка (2.151) является более эффективной, чем выборочное среднее квадратическое значение, начиная с крайне незначительных ϵ ($\epsilon > 0,002$) [2] (табл. 2.5).

Таблица 2.5

ϵ	0	0,001	0,002	0,005	0,01	0,02	0,05	0,1
$\text{eff } \frac{s_{d_X}}{s_X}$	0,876	0,948	1,016	1,196	1,439	1,752	2,035	1,903

При исследовании степени связи между двумя случайными величинами, одна либо обе из которых распределены не по гауссовскому закону, применение оценки коэффициента корреляции (2.103) становится неэффективным и может привести к ложным выводам.

Для решения подобных задач может использоваться коэффициент ранговой корреляции Спирмена [30, 72].

Пусть получена выборка $\{x_{1i}, x_{2i}\}$ ($i = 1, n$) двухмерной случайной величины $\mathbf{X} = (X_1, X_2)$. Тогда в соответствии с выражением (2.103) выборочный коэффициент корреляции

$$r_{X_1 X_2} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_{1i} - \bar{X}_1)(x_{2i} - \bar{X}_2)}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_{1i} - \bar{X}_1)^2 \sum_{i=1}^n (x_{2i} - \bar{X}_2)^2}}.$$

Заменим в этом выражении значения x_{1i} и x_{2i} на их ранги x_{1i}^p и x_{2i}^p . Напомним, что ранг элемента выборки, например x_{1i} , представляет собой число x_{1i}^p , равное порядковому номеру элемента x_1 , в вариационном ряду $\{x'_i\}$ ($i = 1, n$). Всем одинаковым значениям вариационного ряда соответствуют одинаковые ранги, равные среднему арифметическому их порядковых номеров. В результате после некоторых преобразований получим [30, 72] выражение

для коэффициента ранговой корреляции:

$$r_{X_1 X_2}^p = 1 - \frac{6 \sum_{j=1}^n (x_{1j}^p - x_{2j}^p)^2}{n(n^2 - 1)}, \quad (2.152)$$

в котором по фактически исходным данным вычисляется только величина $\sum_{j=1}^n (x_{1j}^p - x_{2j}^p)^2$.

С увеличением объема выборки выборочный коэффициент корреляции $r_{X_1 X_2}^p$ стремится к теоретическому значению $\rho_{X_1 X_2}^p$ (для генеральной выборки). Коэффициент $\rho_{X_1 X_2}^p$ близок к коэффициенту корреляции $\rho_{X_1 X_2}$, причем $\rho_{X_1 X_2}^p < \rho_{X_1 X_2}$, но $\rho_{X_1 X_2} - \rho_{X_1 X_2}^p < 0,018$ [72]. Диапазон возможных значений рангового коэффициента корреляции равен $[-1; +1]$.

Определение доверительных интервалов и проверку гипотез о значениях коэффициента ранговой корреляции при малых n производят с использованием таблиц квантилей распределения Спирмена [72]. Однако при $n > 30$ статистика

$$g = \frac{r_{X_1 X_2}^p}{\sqrt{1 - (r_{X_1 X_2}^p)^2}} \sqrt{n - 2} \quad (2.153)$$

имеет t -распределение с $v = n - 2$ степенями свободы. Отсюда могут быть определены границы доверительного интервала, использующие квантили распределения Стьюдента.

Оценка параметров некоторых законов распределения. Рассмотренные оценки математического ожидания и дисперсии (выборочное среднее и выборочная дисперсия), определяемые выражениями (2.55) – (2.59), представляют собой оптимальные оценки параметров гауссовского распределения. Приведем выражения для оценок параметров других распространенных распределений.

Оценки параметров логарифмически-нормального распределения. Алгоритм оценивания определяется

$$\hat{m} \equiv \exp \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln x_i \right); \quad (2.154)$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (\ln x_i - \ln m)^2, \quad (2.155)$$

где x_i — i -й элемент выборки $\{x_i\}$ ($i = \overline{1, n}$).

Для оценивания параметра a_X может также использоваться выборочная медиана [2, 80]:

$$\hat{m} = \bar{x}_{0,5}. \quad (2.156)$$

Оценки параметров равномерного распределения могут определяться как через выборочное среднее и выборочную дисперсию, так и с помощью порядковых статистик [2, 22, 80]:

$$\begin{aligned} \hat{a} &= m_X - \sqrt{3}s_X; \\ \hat{b} &= m_X + \sqrt{3}s_X; \end{aligned} \quad \left. \right\} \quad (2.157)$$

$$\hat{a} = x'_1 - \frac{x'_n - x'_1}{n-1}; \quad (2.158)$$

$$\hat{b} = x'_n + \frac{x'_n - x'_1}{n-1}. \quad (2.159)$$

Оценка параметра экспоненциального распределения определяется через среднее выборочное значение

$$\hat{\lambda} = 1/m_X = 1/\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i\right). \quad (2.160)$$

Оценка параметра распределения Лапласа определяется через среднее абсолютное значение [2]

$$\hat{\lambda} = 1/\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |x_i|\right), \quad (2.161)$$

Здесь полагается, что параметр сдвига $\theta = 0$.

Оценки параметров распределения Коши. В связи с неопределенностью моментов распределения оценки формируются на основе порядковых статистик:

$$\hat{a} = \hat{\text{Med}}\{X\} = x'_{(n+1)/2}; \quad \hat{c} = x'_{[0,75n+1]} - x'_{(n+1)/2}, \quad (2.162)$$

где $[\cdot]$ — символ операции взятия целой части числа. Здесь считается, что n — нечетное.

Алгоритмы оценивания параметров распределения других видов приведены, в частности, в работах [2, 25, 43, 72, 80]. Выражения, определяющие дисперсии ряда оценок, приведены в [25].

2.5. ПРОВЕРКА НЕКОТОРЫХ СТАТИСТИЧЕСКИХ ГИПОТЕЗ О СВОЙСТВАХ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ДАННЫХ

Проверка гипотезы о среднем значении гауссовской случайной величины. Случай известной дисперсии. Пусть X имеет распределение $N(\mu, \sigma_0^2)$, где μ – неизвестное среднее значение; σ_0^2 – известная дисперсия.

Проверяется нулевая гипотеза $H_0: \mu = \mu_0$, где μ_0 – гипотетическое (предполагаемое) среднее значение.

В зависимости от содержательной постановки задачи могут использоваться три альтернативные гипотезы H_1 :
а) $H_1: \mu \neq \mu_0$; б) $H_1: \mu > \mu_0$; в) $H_1: \mu < \mu_0$.

Нулевая гипотеза проверяется при заданном уровне значимости α – вероятности ошибочного принятия альтернативной гипотезы H_1 при справедливости нулевой гипотезы H_0 . Проверка производится по выборке $\{x_i\} = (x_1, \dots, x_n)$ объема n с помощью статистики

$$g = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma_0} \sqrt{n}, \quad (2.163)$$

где \bar{x} – выборочное среднее.

Статистика g при справедливости гипотезы H_0 имеет гауссовское распределение $N(0; 1)$. В зависимости от вида альтернативной гипотезы H_1 используют следующие критерии:

а) двусторонний критерий ($H_1: \mu \neq \mu_0$). Гипотеза принимается, если $|g| < \lambda_1 - \alpha/2$, в противном случае гипотеза H_0 отвергается;

б) односторонний (правосторонний) критерий ($H_1: \mu > \mu_0$). Гипотеза H_0 принимается, если $g < \lambda_1 - \alpha$, в противном случае принимается H_1 ;

в) односторонний (левосторонний) критерий ($H_1: \mu < \mu_0$). Гипотеза H_0 принимается, если $g > -\lambda_1 - \alpha$, в противном случае принимается H_1 .

Здесь λ_q – квантиль гауссовского распределения порядка q .

Случай неизвестной дисперсии (t -критерий). Пусть случайная величина X имеет гауссовское распределение $N(\mu, \sigma^2)$, причем параметры μ и σ^2 неизвестны. Проверяется нулевая гипотеза $H_0: \mu = \mu_0$, где μ_0 — гипотетическое среднее значение. Нулевая гипотеза проверяется при заданном уровне значимости α . Проверка производится по выборке $\{x_i\} = \{x_1, \dots, x_n\}$ объема n с помощью статистики

$$g = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s^2} \sqrt{n}, \quad (2.164)$$

где \bar{x} — выборочное среднее; s^2 — выборочная дисперсия.

Статистика g при справедливости гипотезы H_0 имеет t -распределение Стьюдента с $v = n - 1$ степенями свободы.

В зависимости от вида альтернативной гипотезы H_1 применяются следующие критерии:

а) двусторонний критерий ($H_1: \mu \neq \mu_0$). Гипотеза H_0 принимается, если $|g| < t_{v, 1-\alpha/2}$, в противном случае H_0 отвергается;

б) односторонний (правосторонний) критерий ($H_1: \mu > \mu_0$). Гипотеза H_0 принимается, если $g < t_{v, 1-\alpha}$, в противном случае H_0 отвергается;

в) односторонний (левосторонний) критерий ($H_1: \mu < \mu_0$). Гипотеза H_0 принимается, если $g > -t_{v, 1-\alpha}$, в противном случае принимается H_1 .

Здесь $t_{v, q}$ — квантиль порядка q t -распределения Стьюдента с v степенями свободы.

Проверка гипотезы о равенстве средних значений двух гауссовских случайных величин. Пусть случайные величины X_1 и X_2 имеют распределения $N(\mu_1, \sigma_1^2)$ и $N(\mu_2, \sigma_2^2)$. Дисперсии σ_1^2 и σ_2^2 распределений полагаются известными. Проверяется нулевая гипотеза $H_0: \mu_1 = \mu_2$.

Нулевая гипотеза проверяется при заданном уровне значимости α по выборке $\{x_{1i}\} = (x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1n})$ объема n_1 случайной величины X_1 и по выборке $\{x_{2i}\} = (x_{21}, x_{22}, \dots, x_{2n})$ объема n_2 случайной величины X_2 . При этом используется статистика

$$g = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{(\sigma_1^2/n_1) + (\sigma_2^2/n_2)}}, \quad (2.165)$$

где \bar{x}_1 и \bar{x}_2 — выборочные средние значения выборок $\{x_{1i}\}$

и $\{x_{1i}\}$. При справедливости нулевой гипотезы H_0 статистика g имеет распределение $N(0; 1)$. В зависимости от альтернативной гипотезы H_1 используются следующие критерии:

а) двусторонний критерий ($H_1: \mu_1 \neq \mu_2$). Гипотеза H_0 принимается, если $|g| < \lambda_1 - \alpha/2$, в противном случае гипотеза H_0 отвергается;

б) односторонний (правосторонний) критерий ($H_1: \mu_1 > \mu_2$).

Гипотеза H_0 принимается, если $g < \lambda_1 - \alpha$ в противном случае гипотеза H_0 отвергается;

в) односторонний (левосторонний) критерий ($H_1: \mu_1 < \mu_2$).

Гипотеза H_0 принимается, если $g > -\lambda_1 - \alpha$ в противном случае гипотеза H_0 отвергается.

Здесь λ_q — квантиль порядка q гауссовского распределения.

Пусть случайные величины X_1 и X_2 имеют распределения $N(\mu_1, \sigma^2)$ и $N(\mu_2, \sigma^2)$ с равными, но неизвестными дисперсиями. Проверяется нулевая гипотеза $H_0: \mu_1 = \mu_2$.

Нулевая гипотеза проверяется при заданном уровне значимости α по выборке $\{x_{1i}\} = (x_{11}, \dots, x_{1n})$ объема n_1 величины X_1 и по выборке $\{x_{2i}\} = (x_{21}, \dots, x_{2n})$ объема n_2 случайной величины X_2 , по которым вычисляются выборочные средние значения m_1 и m_2 и выборочные дисперсии s_1^2 и s_2^2 . Далее используется статистика

$$g = \frac{m_1 - m_2}{\sqrt{\frac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}{n_1 + n_2}}} \sqrt{\frac{n_1 n_2 (n_1 + n_2 - 2)}{n_1 + n_2}}. \quad (2.166)$$

При условии справедливости нулевой гипотезы H_0 статистика g имеет t -распределение Стьюдента с $v = n_1 + n_2 - 2$ степенями свободы. В зависимости от альтернативной гипотезы H_1 используются следующие критерии:

а) двусторонний критерий ($H_1: \mu_1 \neq \mu_2$). Гипотеза H_0 принимается, если $|g| < t_{v, 1 - \alpha/2}$, в противном случае H_0 отвергается;

б) односторонний (правосторонний) критерий ($H_1: \mu_1 > \mu_2$). Гипотеза H_0 принимается, если $g < t_{v, 1 - \alpha}$, в противном случае принимается альтернативная гипотеза H_1 ;

в) односторонний (левосторонний) критерий ($H_1: \mu_1 < \mu_2$). Гипотеза H_0 принимается, если $g > -t_{v, 1 - \alpha}$, в противном случае принимается гипотеза H_1 .

Здесь $t_{\nu q}$ — квантиль порядка q t -распределения Стьюдента с ν степенями свободы.

Пусть случайные величины X_1 и X_2 имеют распределения $N(\mu_1, \sigma_1^2)$ и $N(\mu_2, \sigma_2^2)$, причем известно, что $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$ либо гипотеза $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ при проверке ее с использованием F -критерия (см. ниже) была отклонена.

Нулевая гипотеза $H_0: \mu_1 = \mu_2$.

Проверка гипотезы при уровне значимости α производится по двум независимым выборкам $\{x_{1i}\}$ и $\{x_{2i}\}$ объемом n_1 и n_2 , по которым определяются выборочные средние m_1 и m_2 и выборочные дисперсии s_1^2 и s_2^2 соответственно. Используется статистика

$$g = \frac{m_1 - m_2}{\sqrt{s_1^2/n_1 + s_2^2/n_2}}. \quad (2.167)$$

При справедливости нулевой гипотезы H_0 статистика g имеет t -распределение Стьюдента.

В зависимости от постановки задачи рассматриваются различные альтернативные гипотезы H_1 и соответствующие критерии:

а) двусторонний критерий ($H_1: \mu_1 \neq \mu_2$). Гипотеза принимается, если $|g| < t_{\nu, 1 - \alpha/2}$, в противном случае гипотеза H_0 отклоняется;

б) односторонний (правосторонний) критерий ($H_1: \mu_1 > \mu_2$). Гипотеза H_0 принимается, если $g < t_{\nu, 1 - \alpha}$, в противном случае гипотеза H_0 отвергается;

в) односторонний (левосторонний) критерий ($H_1: \mu_1 < \mu_2$). Гипотеза H_0 принимается, если $g < -t_{\nu, 1 - \alpha}$, в противном случае следует принять гипотезу H_1 .

Здесь $t_{\nu q}$ — квантиль порядка q t -распределения Стьюдента с ν степенями свободы. Величина ν — наибольшее целое число, не превосходящее ν' : $\nu = \{\nu'\}$, где

$$\nu' = (s_1^2/n_1 + s_2^2/n_2)^2 / \left[\frac{(s_1^2/n_1)^2}{n_1 - 1} + \frac{(s_2^2/n_2)^2}{n_2 - 1} \right]. \quad (2.168)$$

Значения ν лежат в интервале между наименьшим из чисел $n_1 - 1$ и $n_2 - 1$ и их суммой: $n_1 + n_2 - 2$.

Пусть случайные величины X_1 и X_2 имеют распределения $N(\mu_1, \sigma_1^2)$ и $N(\mu_2, \sigma_2^2)$, причем дисперсии σ_1^2 и σ_2^2 неизвестны. Получены две зависимые выборки каждой из случайных величин $\{x_{1i}\}$ и $\{x_{2i}\}$ одинакового объема n . Например,

двумя приборами в одном и том же порядке производятся измерения деталей (массы, размеров и т. д.).

Нулевая гипотеза $H_0: \mu_1 = \mu_2$. Альтернативная гипотеза $H_1: \mu_1 \neq \mu_2$. Проверка гипотезы производится с использованием статистики

$$g = \bar{d} \sqrt{n/s_d}, \quad (2.169)$$

где $\bar{d} = (\sum d_i)/n$ — средняя разность элементов выборок $\{x_{1i}\}$ и $\{x_{2i}\}$ с одинаковыми номерами; $s_d = \sqrt{\frac{\sum d_i^2 - (\sum d_i)^2/n}{n-1}}$ — выборочное среднее квадратическое значение разностей элементов выборок с одинаковыми номерами.

Здесь $d_i = x_{1i} - x_{2i}$ ($i = 1, \dots, n$) — разности элементов выборок $\{x_{1i}\}$ и $\{x_{2i}\}$.

При справедливости гипотезы H_0 статистика g имеет t -распределение Стьюдента с $v = n - 1$ степенями свободы.

Нулевая гипотеза H_0 принимается при уровне значимости α , если $|g| < t_{v, 1-\alpha/2}$, в противном случае гипотеза H_0 отклоняется.

Здесь $t_{v, q}$ — квантиль порядка q t -распределения Стьюдента с v степенями свободы.

Очевидным образом процедура проверки гипотезы H_0 может быть преобразована и для других альтернативных гипотез H_1 ($\mu_1 > \mu_2$ и $\mu_1 < \mu_2$).

Проверка гипотезы о дисперсии гауссовой случайной величины. Пусть случайная величина X имеет распределение $N(\mu, \sigma^2)$, где μ и σ^2 — неизвестные среднее и дисперсия. Нулевая гипотеза $H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2$, где σ_0^2 — гипотетическая (предполагаемая) дисперсия.

Проверка гипотезы H_0 при уровне значимости α производится по результатам выборки $\{x_i\}$ объема n с использованием статистики

$$g = (n-1)s^2/\sigma_0^2, \quad (2.170)$$

где s^2 — выборочная дисперсия.

При справедливости нулевой гипотезы статистика g имеет χ^2 -распределение с $v = n - 1$ степенями свободы.

В зависимости от альтернативной гипотезы H_1 используют следующие критерии:

а) двусторонний критерий ($H_1: \sigma^2 \neq \sigma_0^2$). Гипотеза при-

нимается, если

$$X_{\nu, \alpha/2}^2 \leq t \leq X_{\nu, 1 - \alpha/2}^2, \quad (2.171)$$

в противном случае гипотеза H_0 отклоняется;

б) односторонний (правосторонний) критерий ($H_1: \sigma^2 > \sigma_0^2$). Гипотеза H_0 принимается, если $g < X_{\nu, 1 - \alpha}^2$, в противном случае гипотеза H_0 отвергается;

в) односторонний (левосторонний) критерий ($H_1: \sigma^2 < \sigma_0^2$). Гипотеза H_0 принимается, если $g > -X_{\nu, q}^2$, в противном случае гипотеза H_0 отклоняется.

Здесь $X_{\nu, q}^2$ — квантиль порядка q χ^2 -распределения с $\nu = n - 1$ степенями свободы.

Проверка гипотезы о равенстве дисперсий двух гауссовских случайных величин (F -критерий). Пусть случайные величины X_1 и X_2 имеют распределения $N_1(\mu_1, \sigma_1^2)$ и $N_2(\mu_2, \sigma_2^2)$. Нулевая гипотеза $H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2$. Она проверяется при заданном уровне значимости α по результатам двух независимых выборок: $\{x_{1i}\}$ объема n_1 и $\{x_{2i}\}$ объема n_2 . При этом используется статистика $g = s_1^2/s_2^2$, где s_1^2 и s_2^2 — выборочные дисперсии случайных величин X_1 и X_2 . Для упрощения процедуры проверки гипотезы в качестве случайной величины X_1 принимаем ту случайную величину, выборочная дисперсия которой больше: $s_1^2 \geq s_2^2$. Отсюда имеем $g \geq 1$.

В зависимости от постановки задачи и выбора альтернативной гипотезы H_1 используются следующие правила:

а) двусторонний критерий (гипотеза $H_1: \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$). Гипотеза H_0 принимается, если

$$g \leq F_{\nu_1, \nu_2, 1 - \alpha/2}, \quad (2.172)$$

в противном случае H_0 отвергается;

б) односторонний критерий (гипотеза $H_1: \sigma_1^2 > \sigma_2^2$). Гипотеза H_0 принимается, если $g < F_{\nu_1, \nu_2, 1 - \alpha}$, в противном случае гипотеза H_0 отклоняется.

Проверка гипотезы о равенстве дисперсий нескольких гауссовских случайных величин по независимым выборкам. Случай выборок одинакового объема (критерий Кокрена). Пусть случайные величины X_1, \dots, X_l ($l > 2$) распределены по гауссовскому закону. Извлечены l независимых выборок этих случайных величин $\{x_{1i}\}, \dots, \{x_{li}\}$ одинакового объема n . Требуется по этим выборкам при уровне значимости α проверить нулевую гипотезу H_0 об однородности

дисперсий:

$$H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \dots = \sigma_I^2.$$

Альтернативная гипотеза H_1 состоит в том, что дисперсия хотя бы одной случайной величины значимо отличается от значений дисперсий других случайных величин.

Критерий Кокрена основан на использовании статистики

$$g = \frac{\max\{s_i^2\}}{\sum_{i=1}^I s_i^2}, \quad (2.173)$$

где s_i^2 — выборочная дисперсия случайной величины X_i ;
 $\max\{s_i^2\}$ — максимальное значение выборочной дисперсии.

Статистика g при справедливости нулевой гипотезы имеет распределение Кокрена $c_{I,\nu}$ с I , ν степенями свободы ($\nu = n - I$).

Гипотеза H_0 принимается, если наблюдаемое значение статистики $g < c_{I,\nu\alpha}$, где $c_{I,\nu\alpha}$ — квантиль порядка α распределения Кокрена $c_{I,\nu}$ [56]. В противном случае гипотеза H_0 отклоняется.

Если нулевая гипотеза принимается, т. е. все наблюдаемые выборки можно считать выборками из одной генеральной совокупности, то в качестве оценки дисперсии этой совокупности принимается среднее арифметическое выборочных дисперсий:

$$s^2 = \left(\frac{1}{I} \sum_{i=1}^I s_i^2 \right) / I. \quad (2.174)$$

Выборки различного объема (критерий Бартлетта). Пусть случайные величины X_1, \dots, X_I ($I > 2$) распределены по гауссовскому закону. Извлечены I независимых выборок $\{x_{1i}\}, \dots, \{x_{Ii}\}$. Объем каждой выборки равен n_i ($i = 1, \dots, I$), причем $n_i \neq \text{const}$ (если объемы всех выборок равны, то предпочтительнее использовать критерий Кокрена [56]). Требуется при уровне значимости α проверить нулевую гипотезу H_0 об однородности дисперсий:

$$H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \dots = \sigma_I^2.$$

Альтернативная гипотеза H_1 состоит в том, что хотя бы одна из случайных величин x_i ($i = 1, \dots, I$) имеет дисперсию, значимо отличающуюся от дисперсий остальных случайных величин.

Проверка гипотезы производится с использованием статистики

$$g = \{v \ln s^2 - b\} / \left[\frac{v' - v^{-1}}{3(l-1)} + 1 \right], \quad (2.175)$$

где $v = \sum v_i$; $v' = \sum 1/v_i$; $s^2 = (\sum v_i s_i^2)/v$; $b = (\sum v_i \ln s_i^2)/v$.

Здесь $v_i = n_i - 1$ — число степеней свободы i -й выборки; s_i^2 — выборочная дисперсия i -й выборки.

Статистика g при справедливости нулевой гипотезы H_0 приближенно имеет χ^2 -распределение с $k = l - 1$ степенями свободы, если объем каждой выборки $n_i \geq 4$.

Нулевая гипотеза H_0 принимается при уровне значимости α , если $g > \chi_{\nu, 1-\alpha}^2$, в противном случае она отклоняется. Здесь $\chi_{\nu, q}^2$ — квантиль порядка q χ^2 -распределения с ν степенями свободы.

Если нулевая гипотеза принимается, то в качестве оценки дисперсии генеральной совокупности, из которой извлечены все l выборок, принимают среднее арифметическое выборочных дисперсий, взвешенных по числам степеней свободы выборок:

$$s^2 = \left(\sum_{i=1}^l v_i s_i^2 \right) / v. \quad (2.176)$$

Проверка гипотезы о коэффициенте линейной корреляции двухмерной гауссовской случайной величины (двух одномерных гауссовых случайных величин). Пусть двухмерная случайная величина (X, Y) имеет гауссовское распределение. Нулевая гипотеза H_0 : $\rho = \rho_0$, где ρ — коэффициент корреляции компонент X и Y ; ρ_0 — гипотетическое (предполагаемое) значение корреляции. Гипотеза H_0 проверяется при уровне значимости α по результатам двухмерной выборки $\{x_i, y_i\}$ объема n с использованием статистики (z -критерий Фишера)

$$g = (z - \xi_0) \sqrt{n - 3}, \quad (2.177)$$

где

$$z = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + r_{XY}}{1 - r_{XY}}; \quad \xi_0 = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + \rho_0}{1 - \rho_0} + \frac{\rho_0}{2(n-1)}.$$

Здесь r_{XY} — выборочный коэффициент корреляции. При справедливости нулевой гипотезы H_0 статистика g распределена асимптотически по гауссовскому закону $N(0, 1)$.

В зависимости от постановки задачи и вида альтернативной гипотезы H_1 различают двусторонний и односторонние критерии:

а) двусторонний критерий ($H_1: \rho \neq \rho_0$). Гипотеза принимается, если $|g| < \lambda_1 - \alpha/2$, в противном случае она отклоняется;

б) односторонний (правосторонний) критерий ($H_1: \rho > \rho_0$). Гипотеза H_0 принимается, если $g < \lambda_1 - \alpha$, в противном случае она отклоняется;

в) односторонний (левосторонний) критерий ($H_1: \rho < \rho_0$). Гипотеза H_0 принимается, если $g > \lambda_1 - \alpha$, в противном случае нулевая гипотеза отвергается.

Здесь λ_q — квантиль порядка q стандартного гауссовского распределения.

Проверка гипотезы о равенстве коэффициентов линейной корреляции двух двухмерных гауссовых случайных величин. Пусть двухмерные случайные величины (X_1, Y_1) и (X_2, Y_2) имеют двухмерные гауссовые распределения. Нулевая гипотеза $H_0: \rho_1 = \rho_2$, где ρ_j ($j = 1, 2$) — коэффициент корреляции j -й двухмерной случайной величины. Гипотеза H_0 проверяется при уровне значимости α по результатам двух независимых двухмерных выборок $\{x_{1i}, y_{1i}\}$ и $\{x_{2i}, y_{2i}\}$ объемом n_1 и n_2 соответственно с использованием статистики (z -критерий Фишера)

$$g = (z_1 - z_2) / \sqrt{\frac{1}{n_1 - 3} + \frac{1}{n_2 - 3}}, \quad (2.178)$$

где

$$z_j = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + r_{XYj}}{1 - r_{XYj}} \quad (j = 1, 2).$$

Здесь r_{XYj} — выборочный коэффициент корреляции, вычисленный по выборке $\{x_{ji}, y_{ji}\}$. При справедливости нулевой гипотезы статистика g распределена асимптотически по гауссовскому закону $N(0; 1)$ [56].

В зависимости от альтернативной гипотезы используют следующие правила:

а) двусторонний критерий ($H_1: \rho_1 \neq \rho_2$). Нулевая гипотеза H_0 принимается, если $|g| < \lambda_1 - \alpha/2$, в противном случае H_0 отклоняется;

б) односторонний (правосторонний) критерий ($H_1:$

$\rho_1 < \rho_2$. Нулевая гипотеза H_0 принимается, если $g < \lambda_{1-\alpha}$, в противном случае она отвергается;

в) односторонний (левосторонний) критерий ($H_1: \rho_1 < \rho_2$). Гипотеза H_0 принимается, если $g > \lambda_{1-\alpha}$, в противном случае она отклоняется.

Здесь λ_q — квантиль порядка q стандартного гауссовского распределения.

ГЛАВА ТРЕТЬЯ

ЭЛЕМЕНТЫ ПРОГРАММНОГО ОБЕСПЕЧЕНИЯ ПРЕДВАРИТЕЛЬНОЙ ОБРАБОТКИ ДАННЫХ

3.1. ПОДПРОГРАММЫ БНТР/РАФОС

Подпрограмма *STNR/S*. Предназначена для вычисления квантили λ_q порядка q стандартного гауссовского распределения.

Обращение к подпрограмме:

CALL STNR/S (Q, Y, IER)

Q — заданная вероятность q ;

Y — вычисляемое значение λ_q ;

IER — вычисляемый параметр ошибки: *IER* = 129 — значение *Q* лежит вне допустимой области.

Используемая подпрограмма: *SVERTS*.

Подпрограмма *STST/I*. Предназначена для вычисления квантили $t_{\nu, q}$ порядка q распределения Стьюдента с ν степенями свободы.

Обращение к подпрограмме:

CALL STST/I (Q, N, T, IER)

Q — заданная вероятность q ;

N — заданное число степеней свободы ν ($\nu \geq 1$);

T — вычисляемое значение $t_{\nu, q}$;

IER — вычисляемый параметр ошибки определяется по формуле *IER* = 128 + *N1*, где *N1* может принимать следующие значения: *N1* = 1 — степень свободы *N* меньше 1; *N1* = 2 — значение *Q* не находится в интервале [0; 1]; *N1* =

= 3 – ошибки в подпрограмме *STNRIS*, к которой было обращение из подпрограммы *STSTI*.

Используемые подпрограммы: *STNRIS*, *SVERTS*.

Подпрограмма *STCHI*. Предназначена для вычисления квантили $\chi^2_{\nu, q}$ порядка q χ^2 -распределения с ν степенями свободы.

Обращение к подпрограмме:

CALL STCHI (Q, N, X, IER)

Q – заданная вероятность q ;

N – заданное число степеней свободы ν (должно находиться в диапазоне 0,5 . . . 200 000);

X – вычисляемое значение $\chi^2_{\nu, q}$ аргумента;

IER – вычисляемый параметр ошибки. Определяется по формуле $IER = 128 + N1$, где $N1$ может принимать следующие значения: $N1 = 1$ – значение P не находится в интервале (0, 1) включительно; $N1 = 2$ – ошибка в подпрограмме *STNRIS*; $N1 = 3$ – ошибка в подпрограмме *STCH*.

Используемые подпрограммы: *STCH*, *STNRIS*, *STNOR*, *SFGAMM*, *SVERTS*.

Подпрограмма *STFI*. Предназначена для вычисления квантили $F_{\nu_1 \nu_2 q}$ порядка q распределения Фишера.

Обращение к подпрограмме:

CALL STFI (Q, N1, N2, F, IER)

Q – заданная вероятность q ;

N1, N2 – заданные степени свободы ν_1 и ν_2 ;

F – вычисляемое значение квантили распределения Фишера $F_{\nu_1 \nu_2 q}$;

IER – вычисляемый параметр ошибки. Определяется по формуле $IER = 128 + N$, где N может принимать следующие значения: $N = 1$ – ошибка в подпрограмме *STBETI*; $N = 2$ – значение q меньше 0 или больше 1; $N = 3$ – при вычислении X произошло переполнение. В этом случае X принимается равным наибольшему машинному числу.

Используемые подпрограммы: *STBETI*, *STBETA*, *SFLGAM*, *SVERTS*.

Подпрограмма *STSMIR*. Предназначена для вычисления значения предельной функции распределения для статистики Колмогорова–Смирнова.

Обращение к подпрограмме:

CALL STSMIR (X, Y)

X – заданный аргумент функции Смирнова;

Y – вычисляемое значение функции Смирнова.

Причение. Подпрограмма устанавливает $Y = 0$, если $X \leq 0,27$, и $Y = 1$, если $X \geq 3,1$. Два аргумента $X = -0,62$ и $X = 1,87$ дают результат, который отличается от таблицы Смирнова на 2,9 и 1,9 в пятом десятичном знаке. Все остальные результаты дают меньшие ошибки.

Используемые подпрограммы отсутствуют.

Подпрограмма *STKOL1*. Предназначена для разности между эмпирическим и теоретическим распределением с использованием критерия Колмогорова–Смирнова.

Обращение к подпрограмме:

CALL STKOL1 (X, N, Z, PROB, IFCD, U, S, IER)

X – заданный вектор независимых наблюдений размерности N ; на выходе из подпрограммы X содержит исходные данные, упорядоченные в монотонную неубывающую последовательность (вариационный ряд);

N – заданное число наблюдений;

Z – вычисляемая переменная, равная $\sqrt{ND_N}$, где $D_N = \max_{-\infty < X < +\infty} |F_N(X) - F(X)|$; $F_N(X)$ – эмпирическая, а $F(X)$ – теоретическая функция распределения (см. § 2.3);

$PROB$ – вычисляемая вероятность того, что статистика $\sqrt{ND_N}$ больше или равна Z в предположении истинности гипотезы о принадлежности X совокупности с рассматриваемой плотностью: например, $PROB = 0,05$ означает, что гипотеза о принадлежности X совокупности с рассматриваемой плотностью может быть отвергнута с вероятностью ошибки 5%;

$IFCD$ – заданное число, определяющее рассматриваемую теоретическую функцию распределения: $IFCD = 1 - F(X)$ – гауссовская функция распределения; $IFCD = 2 - F(X)$ – экспоненциальная функция распределения; $IFCD = 3 - F(X)$ – функция распределения Коши; $IFCD = 4 - F(X)$ – равномерное распределение;

U – заданный первый параметр теоретического распределения. Если $IFCD = 1$ или $IFCD = 2$, то U – среднее значение; если $IFCD = 3$, U – медиана распределения Коши; если $IFCD = 4$, U – левая концевая точка равномерной плотности;

S – заданный второй параметр теоретического распределения. Если $IFCD = 1$ или $IFCD = 2$, то S – среднее квадратическое отклонение; если $IFCD = 3$, S – константа для вы-

числения первой квартили плотности распределения Коши ($U = S$); если $|FCD| = 4$, S — правая концевая точка;

IER — вычисляемый параметр ошибки: $IER = 0$ — ошибок не обнаружено; $IER = 1$ — не выполняется условие относительно S .

Примечание. Значение N должно быть больше или равно 100, так как при меньших значениях N асимптотические формулы, используемые в подпрограмме *STSM/R*, дают значительные логрешности. Если одна и та же выборка используется как для оценки параметров непрерывного распределения, так и для проверки закона распределения, то уровни вероятностей, определяемые этой подпрограммой, могут оказаться неверными.

Используемые подпрограммы: *STSM/R*, *STNOR*.

Подпрограмма *STWOAV*. Предназначена для проверки гипотезы о принадлежности нескольких выборок одной и той же генеральной совокупности при помощи двустороннего дисперсионного статистического критерия Фридмана.

Обращение к подпрограмме:

CALL STWOAV (A, R, N, M, W, XR, NDF, NR)

A — заданная матрица исходных данных размера $N \times M$;

N — заданное число групп наблюдений;

M — заданное число наблюдений в каждой выборке;

W — рабочий вектор размерности $2M$;

NR — заданный параметр, определяющий способы вычисления рангов: $NR = 0$ — для неранжируемых данных; $NR = 1$ — для ранжируемых данных;

R — вычисляемая матрица ранжированных данных размера $N \times M$;

XR — вычисляемая статистика Фридмана;

NDF — вычисляемое число степеней свободы.

Используемые подпрограммы — *STRANK*.

Подпрограмма *STUTES*. Предназначена для проверки гипотезы о принадлежности двух независимых выборок одной и той же генеральной совокупности при помощи *U*-теста Манна—Уитни.

Обращение к подпрограмме:

CALL STUTES (A, R, N1, N2, U, Z)

A — заданный вектор наблюдений размерности $N = N1 + N2$, содержащий две независимые выборки, причем меньшая выборка предшествует большей;

$N1$ — заданное число наблюдений в меньшей выборке;
 $N2$ — заданное число наблюдений в большей выборке;
 R — вычисляемый вектор рангов размерности $N = N1 + N2$;

U — вычисляемая статистика, используемая для проверки однородности двух выборок;

Z — вычисляемая мера для определения значимости U в терминах нормального распределения.

П р и м е ч а н и е : Если $N2 < 20$, то $Z = 0$.

Используемые подпрограммы: *STRNK, STTIE*.

Подпрограмма *STTALY*. Предназначена для вычисления суммы, среднего, среднего квадратического отклонения, минимума и максимума для всех или некоторых выборок экспериментальных данных.

Обращение к подпрограмме:

CALL STTALY (A, S, TOTAL, AVER, SD, VMIN, VMAX, NO, NV)

A — заданная матрица наблюдений размера $NO \times NV$;

S — заданный вектор размерности NO , указывающий выборки из A . Обрабатываются только те выборки из A , для которых соответствующие элементы вектора S не равны нулю;

NO — заданное число наблюдений в каждой выборке;

NV — заданное число выборок;

$TOTAL$ — вычисляемый вектор сумм размерности NV ;

$AVER$ — вычисляемый вектор средних значений размерности NV ;

SD — вычисляемый вектор средних квадратических отклонений размером NV ;

$VMIN$ — вычисляемый вектор минимальных значений размерности NV ;

$VMAX$ — вычисляемый вектор максимальных значений размерности NV ;

Используемые подпрограммы отсутствуют.

Подпрограмма *STIGRP*. Предназначена для оценки основных статистических параметров по сгруппированным данным.

Обращение к подпрограмме:

CALL STIGRP (F, Y, K, YLM, WID, IOPT, STAT, IER)

F — заданный вектор размерности K , содержащий частоту для каждого интервала класса;

Y — рабочий вектор размерности K ;

K – заданное число групп, в которых производится классификация;

YLM – заданная нижняя граница интервала младшего класса;

WID – заданная ширина интервала каждого класса;

$IOPT$ – заданный вектор размерности 8, указывающий, какие из основных статистических характеристик должны быть вычислены. Структура вектора следующая: $IOPT(1) = 1$ – вычисляется среднее арифметическое; $IOPT(2) = 1$ – вычисляется среднее геометрическое; $IOPT(3) = 1$ – вычисляется среднее гармоническое; $IOPT(4) = 1$ – вычисляется медиана; $IOPT(5) = 1$ – вычисляется оценка характеристик; $IOPT(6) = 1$ – вычисляется дисперсия; $IOPT(7) = 1$ – вычисляется третий центральный момент; $IOPT(8) = 1$ – вычисляется четвертый центральный момент;

$STAT$ – вычисляемый вектор размерности 8, содержащий значения основных статистических характеристик в соответствии со значениями, принимаемыми вектором $IOPT$;

IER – вычисляемый параметр ошибки. Определяется по формулам: $IER = 128 + N$ и $IER = 32 + N$, где N может принимать следующие значения: $N = 1$ – число вводимых групп меньше двух ($K < 2$); $N = 2$ – нижняя граница интервала младшего класса меньше нуля, когда $IOPT(2) = 1$; $N = 3$ – нижняя граница интервала младшего класса меньше нуля, когда $IOPT(3) = 1$; $N = 4$ – наивысшая частота класса, появляется для двух или более классов, когда $IOPT(5) = 1$.

Используемые подпрограммы отсутствуют.

Подпрограмма $STRKS$. Предназначена для определения степени связи между двумя переменными при помощи коэффициента ранговой корреляции Спирмэна.

Обращение к подпрограмме:

CALL STRKS (A, B, R, N, RS, T, NDF, NR)

A – заданный вектор наблюдений размерности N для первой переменной;

B – заданный вектор наблюдений размерности N для второй переменной;

N – заданное число наблюдений в выборках;

NR – заданный код, определяющий способы вычисления рангов: $NR = 0$ – для неранжируемых данных векторов A и B ; $NR = 1$ – для ранжируемых данных векторов A и B ;

R – вычисляемый вектор размерности $2N$ ранжированных данных;

RS — вычисляемое значение коэффициента ранговой корреляции Спирмэна;

T — вычисляемая мера для определения значимости *RS*;

NDF — вычисляемое число степеней свободы.

Причина. Если $N < 10$, то $T = 0$.

Используемые подпрограммы: *STRNK*, *STTIE*.

Подпрограмма *STCOR*. Предназначена для вычисления средних значений, средних квадратических отклонений и коэффициентов корреляции.

Обращение к подпрограмме:

CALL STCOR (N, M, IO, X, XB, ST, RX, R, B, D, T)

N — заданное число наблюдений;

M — заданное число переменных (выборок);

IO — параметр, определяющий порядок ввода данных:

IO = 0 — данныечитываются с устройства ввода специальной подпрограммой *DATA*, написанной пользователем; *IO* = 1 — данные находятся в оперативной памяти.

Обращение к подпрограмме *DATA*:

CALL DATA (M, D)

M — заданная размерность вектора данных *D*;

D — рабочий вектор, в который помещаются данные;

X — матрица размера *N* × *M*, содержащая данные при *IO* = 1. При *IO* = 0 значение *X* = 0;

T — рабочий вектор размерности *M*;

XB — вычисляемый вектор размерности *M*, содержащий выборочные средние значения;

ST — вычисляемый вектор размерности *M*, содержащий выборочные средние квадратические отклонения;

RX — вычисляемая матрица ковариаций размера *M* × *N*, содержащая суммы взаимных произведений отклонений от среднего (выборочные ковариации);

R — вычисляемая матрица коэффициентов корреляции размера *N* × *M*;

B — вычисляемый вектор размерности *M*, содержащий диагональные элементы матрицы ковариаций.

Используемые подпрограммы: *DATA*.

Подпрограмма *STAUTO*. Предназначена для оценки для данного временного ряда среднего значения, дисперсии, ковариаций и корреляций, частных корреляций.

Обращение к подпрограмме:

**CALL STAUTO (W, LW, K, L, ISW, AMEAN, VAR, ACV, AC,
PACV, WKAREA)**

W – заданный вектор размерности *LW*, содержащий временной ряд, для которого определяются ковариации;

LW – заданная размерность вектора *W*;

K – заданное число вычисляемых ковариаций и корреляций;

L – заданное число вычисляемых частных корреляций;

ISW – заданный управляющий параметр для определения выполняемой задачи: *ISW* = 1 – найти среднее и дисперсию; *ISW* = 2 – найти ковариации; *ISW* = 3 – найти среднее, дисперсию и ковариации; *ISW* = 4 – найти ковариации и корреляции; *ISW* = 5 – найти среднее, дисперсию, ковариации и корреляции; *ISW* = 6 – найти ковариации, корреляции и частные корреляции; *ISW* = 7 – найти среднее, дисперсию, корреляции и частные корреляции;

WKAREA – рабочий вектор размерности *L*;

AMEAN – вычисляемое среднее значение для временного ряда (вывод при *ISW* = 1, 3, 5, 7);

VAR – вычисляемая дисперсия временного ряда (вывод при *ISW* = 1, 3, 5, 7);

ACV – вычисляемый вектор размерности *K* ковариаций временного ряда (вывод при *ISW* = 2, 3, 4, 5, 6, 7);

AC – вычисляемый вектор размерности *K* корреляций временного ряда (вывод при *ISW* = 4, 5, 6, 7);

PACV – вычисляемый вектор размерности *L* частных корреляций временного ряда (вывод при *ISW* = 6, 7).

Используемые подпрограммы отсутствуют.

Подпрограмма *STCROS*. Предназначена для вычисления выборочных оценок среднего, дисперсии, взаимных ковариаций и взаимных корреляций для двух взаимно стационарных временных рядов.

Обращение к подпрограмме:

**CALL STCROS (XY, NC, ISW, EMUSIG, ACV, IA, IB, AC, IC,
ID, IER)**

XY – заданный вектор размерности *N* = *NC*(1) × *NC*(2) × *NC*(3) × *NC*(4), содержащий два временных ряда;

NC – заданный вектор размерности 4, содержащий следующие значения: *NC*(1) – длина первого временного ряда;

$NC(2)$ – длина второго временного ряда; $NC(3)$ – число каналов в каждом временном ряду; $NC(4)$ – максимальное число интервалов времени для взаимных ковариаций и взаимных корреляций;

ISW – заданный параметр варианта: $ISW = 1$ – вычисление среднего значения и дисперсии для каждого канала каждого временного ряда; $ISW = 2$ – вычисление взаимных ковариаций; $ISW = 3$ – вычисление среднего значения и дисперсии для каждого канала временного ряда и взаимных ковариаций; $ISW = 4$ – вычисление взаимных ковариаций и взаимных корреляций; $ISW = 5$ – вычисление среднего значения и дисперсии для каждого канала временного ряда, взаимных ковариаций и взаимных корреляций;

$EMUS/G$ – заданный вектор размерности $4NC(3)$, содержащий средние значения для $NC(3)$ каналов обоих временных рядов в первых $2NC(3)$ ячейках. Оставшиеся ячейки содержат соответствующие дисперсии. Вектор является входным, если параметр ISW нечетный;

IA – заданное максимальное значение первого индекса в операторе размерности для матрицы ACV ;

IB – заданное максимальное значение второго индекса в операторе размерности для матрицы ACV ;

IC – заданное максимальное значение первого индекса в операторе размерности для матрицы AC ;

ID – заданное максимальное значение второго индекса в операторе размерности для матрицы AC ;

ACV – вычисляемая матрица размера $NC(3) \times NC(3) \times (NC(4) + 1)$, которая определяется только для $ISW = 2, 3, 4, 5$ и содержит взаимные ковариации в мультиплексной форме;

AC – вычисляемая матрица размера $NC(3) \times NC(3) \times (NC(4) + 1)$, которая определяется только для $ISW = 4$ и 5 и содержит взаимные корреляции в мультиплексной форме;

IER – вычисляемый параметр ошибки. Определяется по формуле $IER = 128 + N$, где N может принимать следующие значения: $N = 1$ – ISW не равно 1, 2, 3, 4 или 5; $N = 2$ – $NC(1)$ или $NC(2)$ или оба меньше 2; $N = 3$ – $NC(3) < < 1$ или $NC(4) < 0$ при $ISW = 2, 3, 4$ или 5; $N = 4$ – меньшее из $NC(1)$ и $NC(2)$, меньше или равно $NC(4)$ при $ISW = 2, 3, 4$ или 5.

Используемые подпрограммы: $SWERTS$.

Подпрограмма *STMSON*. Предназначена для оценки среднего значения и дисперсии выборки нормальной распределенной совокупности.

Обращение к подпрограмме:

CALL STMSON (Y, N, IOP, CRIT, M, PAR, STAT, NDF, IER)

Y – заданный вектор размерности *N*, содержащий выборку;

N – заданный размер выборки;

IOP – заданный вектор размерности 4, указывающий вид проверяемой гипотезы и интервальные оценки, подлежащие вычислению; имеет следующую структуру: *IOP*(1) = *I* – указывает на вид критерия при проверке гипотезы о средних значениях: *I* = 1 – двусторонний критерий; *I* = 2 – верхний односторонний критерий; *I* = 3 – нижний односторонний критерий; *IOP*(2) = *I* – указывает на вид интервальной оценки различий между средними: *I* = 1 – двусторонняя оценка; *I* = 2 – верхняя односторонняя оценка; *I* = 3 – нижняя односторонняя оценка; *IOP*(3) = *I* – указывает на вид критерия при проверке гипотезы о дисперсии: *I* = 1 – двусторонний критерий; *I* = 2 – верхний односторонний критерий; *I* = 3 – нижний односторонний критерий; *IOP*(4) = *I* – определяет вид интервальных оценок дисперсии: *I* = 1 – двусторонняя оценка; *I* = 2 – верхняя односторонняя оценка; *I* = 3 – нижняя односторонняя оценка;

CRIT – заданный вектор размерности 4, содержащий константы, требуемые для интервального оценивания и проверки гипотез. *I*-й элемент вектора содержит: *I* = 1 – доверительную вероятность для интервальной оценки среднего (используется только когда *IOP*(2) = 1, 2 или 3); *I* = 2 – доверительную вероятность для интервальной оценки дисперсии (требуется, когда *IOP*(4) = 1, 2 или 3); *I* = 3 – гипотетическую величину среднего (требуется, когда *IOP*(4) = 1, 2 или 3); *I* = 4 – гипотетическую величину дисперсии (требуется, когда *IOP*(3) = 1, 2 или 3);

M – заданное число значений в предыдущем векторе;

PAR – заданный вектор размерности 2, содержащий дополнительные оценки параметров;

STAT – вычисляемый вектор размерности 6, содержащий: *STAT*(1) – вероятность для проверки гипотезы относительно среднего; *STAT*(2) – вероятность для проверки гипотезы относительно дисперсии; *STAT*(3) – нижний предел

для среднего; $STAT(4)$ – верхний предел для среднего; $STAT(5)$ – нижний предел для дисперсии; $STAT(6)$ – верхний предел для дисперсии;

NDF – вычисленное количество степеней свободы в оценке дисперсии;

IER – вычисляемый параметр ошибки. Определяется по формуле $IER = 128 + N$, где N может принимать следующие значения: $N = 1$ – число определенных ответов меньше 2; $N = 2$ – ошибка в подпрограмме $STTD$; $N = 3$ – ошибка в подпрограмме $STCH$; $N = 4$ – ошибка в подпрограмме $STSI$; $N = 5$ – ошибка в подпрограмме $STCHI$.

П р и м е ч а н и е . Если I не равно 1, 2 или 3 для любого вектора IOP , то проверка или оценка не проводятся.

Используемые подпрограммы: $STCH$, $STTD$, $STCHI$, $STNOR$, $STSI$, $SFGAMM$, $STEFC$, $STNRIS$, $SVERTS$.

Подпрограмма $STPETS$. Предназначена для оценки среднего значения и дисперсии нормально распределенной совокупности по двум выборкам, используя метод доверительных интервалов.

Обращение к подпрограмме:

CALL STPETS (Y, N, IOP, CRIT, STAT, NDF, IER)

Y – заданный вектор длины $N = N(1) + N(2)$, содержащий данные первой и второй выборок;

N – заданный вектор размерности 2, содержащий размеры выборок;

IOP – заданный вектор размерности 4, указывающий вид проверяемой гипотезы и интервальные оценки, подлежащие вычислению; $IOP(1) = 1$ – указывает вид гипотез для средних значений: $I = 1$ – двусторонний критерий; $I = 2$ – верхний односторонний критерий; $I = 3$ – нижний односторонний критерий; $IOP(2) = I$ – указывает на вид интервальной оценки различия между средними: $I = 1$ – двусторонняя оценка; $I = 2$ – верхняя односторонняя оценка; $I = 3$ – нижняя односторонняя оценка; $IOP(3) = I$ – указывает на вид гипотезы для дисперсий: $I = 1$ – двусторонняя проверка; $I = 2$ – верхняя односторонняя; $I = 3$ – нижняя односторонняя; $IOP(4) = I$ – указывает на вид интервальных оценок дисперсий: $I = 1$ – двусторонняя проверка; $I = 2$ – верхняя односторонняя; $I = 3$ – нижняя односторонняя; $CRIT(5)$ – заданный вектор, содержащий константы, требуемые для оценок интервалов и проверок гипотез. Элемент вектора $CRIT(I)$ содержит: при $I = 1$ – доверительную вер-

ятность для интервальной оценки среднего (используется, если $IOP(2) = 1, 2$ или 3) ; при $I = 2$ – доверительную вероятность для интервальной оценки дисперсии (используется, если $IOP(4) = 1, 2$ или 3) ; при $I = 3$ – гипотетическую дисперсию (используется, если $IOP(4) = 1, 2$ или 3) ; при $I = 4$ – мультипликативную константу (используется, если $IOP(1)$ или $IOP(2)$ равны $1, 2$ или 3) ; при $I = 5$ – аддитивную константу (используется, если $IOP(1)$ или $IOP(2)$ равны $1, 2$ или 3) .

$STAT(9)$ – вычисляемый вектор, содержащий результаты выводов относительно среднего и дисперсии: $STAT(1)$ – оценка первого среднего; $STAT(2)$ – оценка второго среднего; $STAT(3)$ – оценка дисперсии; $STAT(4)$ – вероятность (для гипотезы относительно среднего) того, что она верна, больше или равна величине, вычисленной для статистики критерия; $STAT(5)$ – вероятность (для гипотезы относительно дисперсии) того, что она верна, больше или равна величине, вычисленной для статистики критерия; $STAT(6)$ – нижний предел для интервальной оценки среднего; $STAT(7)$ – верхний предел для интервальной оценки среднего; $STAT(8)$ – нижний предел для интервальной оценки дисперсии; $STAT(9)$ – верхний предел для интервальной оценки дисперсии; NDF – вычисленное число степеней свободы в оценке дисперсии; IER – вычисляемый параметр ошибки. Определяется по формуле $IER = 128 + N$, где N может принимать следующие значения: $N = 1$ – число определенных ответов меньше трех; $N = 2$ – ошибка в подпрограмме $STTD$; $N = 3$ – ошибка в подпрограмме $STCH$; $N = 4$ – ошибка в подпрограмме $STSTI$; $N = 5$ – ошибка в подпрограмме $STCHI$.

Примечания: 1. Если I не равно $1, 2$ или 3 для всех элементов вектора IOP , то интервальные оценки и проверки не осуществляются.

2. Если требуются выводы относительно средней первой совокупности с использованием информации о дисперсии, полученной от второй совокупности, $STPETS$ может быть использована: для проверки гипотезы путем задания $CRIT(4) = 0.0$ и $CRIT(5)$, равного гипотетической величине первого среднего; для интервального оценивания путем задания $CRIT(4) = CRIT(5) = 0.0$.

Используемые подпрограммы: $STTD$, $STCH$, $STCHI$, $STSTI$, $STNOR$, $SFGAMM$, $STEFC$, $STNRIS$, $SVERTS$.

Подпрограмма STTS. Предназначена для вычисления статистики при различных гипотезах.

Обращение к подпрограмме:

CALL STTS (A, NA, B, NB, NOP, NDF, ANS)

A – заданный вектор размерности *NA*, содержащий данные первой выборки;

NA – заданное число наблюдений в *A*;

B – заданный вектор размерности *NB*, содержащий данные второй выборки;

NB – заданное число наблюдений в *B*;

NOP – заданный параметр для выбора различных гипотез: *NOP* = 1 – рассматривается гипотеза: среднее значение совокупности *B* равно заданному значению. При этом должно быть *NA* = 1; *NOP* = 2 – рассматривается гипотеза: среднее значение совокупности *B* равно среднему значению совокупности *A* при условии, что дисперсия совокупности *B* равна дисперсии совокупности *A*; *NOP* = 3 – рассматривается гипотеза: среднее значение совокупности *B* равно среднему значению совокупности *A*, при условии, что дисперсия совокупности *B* не равна дисперсии совокупности *A*; *NOP* = 4 – рассматривается гипотеза: среднее значение совокупности *A* равно среднему значению совокупности *B* при отсутствии информации о дисперсиях совокупностей *A* и *B*. При этом должно быть *NA* = *NB*;

NDF – вычисляемая переменная, содержащая число степеней свободы, соответствующее вычисляемой статистике;

ANS – вычисляемая переменная, содержащая *g*-статистику.

Примечания: 1. *NA* и *NB* должны быть больше 1, за исключением *NA* = 1 в выборе 1. *NA* и *NB* должны быть одинаковы в выборе 4. 2. Если *NOP* не равен 1, 2, 3 или 4, то число степеней свободы и *g*-статистики не будут вычислены. *NDF* и *ANS* полагаются равными нулю.

Используемые подпрограммы отсутствуют.

Подпрограмма STKOL2. Предназначена для проверки разности между двумя выборочными функциями распределения при помощи критерия Колмогорова–Смирнова.

Обращение к подпрограмме:

CALL STKOL2 (X, Y, N, M, Z, PROB)

X – заданный вектор размерности *N*, содержащий первую

выборку. На выходе вектор содержит исходные данные, упорядоченные в неубывающую последовательность (вариационный ряд);

Y — заданный вектор размерности M , содержащий вторую выборку. На выходе вектор содержит исходные данные, упорядоченные в неубывающую последовательность; N — заданное число наблюдений в X ; M — заданное число наблюдений в Y ; Z — вычисляемая переменная, равная максимальному значению величины $\sqrt{\frac{MN}{M+N}} |F_N(X) - F_M(Y)|$,

где $F_N(X)$ и $F_M(Y)$ — эмпирические функции распределения множеств X и Y соответственно;

$PROB$ — вычисляемая вероятность того, что статистика $\sqrt{\frac{MN}{N+M}} D_{M,N}$ больше или равна Z в предположении истинности гипотезы о принадлежности X и Y совокупностям с одинаковой функцией распределения. (Например, $PROB = 0,05$ означает, что гипотеза о принадлежности X и Y совокупностям с одинаковой плотностью может быть отвергнута с вероятностью ошибки 5%.)

П р и м е ч а н и е . Значения M и N должны быть больше или равны 100, так как при меньших значениях асимптотические формулы, используемые в подпрограмме *STSMIR*, дают значительные погрешности.

Используемая подпрограмма: *STSMIR*.

3.2. ПОДПРОГРАММЫ НА ЯЗЫКЕ "ФОРТРАН"

1. Подпрограмма *FGAUSP*. Предназначена для расчета плотности вероятности стандартной гауссовой случайной величины.

```
SUBROUTINE FGAUSP (X, AM, AD, P)
PI=3.1415927
R=SQRT (2 *PI)
P=EXP( (-1) * (X-AM) ** 2/2./AD**2) /AD/R
RETURN
END
```

Обращение к подпрограмме:

```
CALL FGAUSP(X, AM, AD, P)
```

X — значение случайной величины;

AM — математическое ожидание случайной величины *X*;

AD — дисперсия случайной величины;

P — значение плотности вероятности случайной гауссовой величины *X*.

Используемых подпрограмм нет.

2. Подпрограмма *FGAUSF*. Предназначена для вычисления функции распределения стандартной гауссовой случайной величины.

Функция распределения аппроксимируется степенным полиномом [71]:

$$F(x) = 1 - \frac{1}{2} (1 + d_1 x + d_2 x^2 + \dots + d_6 x^6 + \epsilon)^{-16},$$

где d_i — коэффициенты полинома (даны в тексте подпрограммы); x — значение случайной величины; ϵ — погрешность аппроксимации, $|\epsilon| \leq 1,5 \cdot 10^{-7}$.

```
SUBROUTINE FGAUSF(X, PX)
DATA D1, D2/4986.7347E-5,2114.1006E-5/
DATA D3, D4/327.76263E-5,38.0036E-6/
DATA D5, D6/48.8906E-6,53.83E-7/
F=X*(D1+X*(D2+X*(D3+X*(D4+X*(D5+X*D6))))) )
F=(F+1.)**16
PX=1.0-0.5/F
RETURN
END
```

Обращение к подпрограмме:

CALL FGAUSF(X, FX)

X — значение случайной величины;

FX — значение функции распределения.

Используемых подпрограмм нет.

3. Подпрограмма *FGAUSI*. Вычисляет значение квантиля λ_q гауссовского распределения порядка q .

Квантиль гауссовского распределения аппроксимируется следующим образом [71]:

$$\lambda_q = t - \frac{c_0 + c_1 t + c_2 t^2}{1 + d_1 t + d_2 t^2 + d_3 t^3} + \epsilon,$$

где $t = \sqrt{\ln(\alpha^{-2})}$; $\alpha = 1 - q$; c_i, d_i — коэффициенты разло-

жения (даны в тексте подпрограммы); ϵ – погрешность аппроксимации; $|\epsilon| \leq 4,5 \cdot 10^{-4}$.

```
SUBROUTINE FGAUSI(Q, X)
DATA C0,C1/2.515517,0.8028538/
DATA C2,D1/0.01032,1.432788/
DATA D2,D3/0.189269,0.001308/
AN=1.0-Q
T=SQRT ( ALOG ( 1.0/AN**2 ) )
X=T- ( C0+T* ( C1+C2*T ) ) / ( 1.0+T*
! ( D1+T* ( D2+T*D3 ) ) )
RETURN
END
```

Обращение к подпрограмме:

CALL FGAUSI(Q, X)

Q – вероятность $q = P(x \leq \lambda_q)$;

X – квантиль λ_q порядка q гауссовского распределения.

Используемых подпрограмм нет.

4. Подпрограмма *FGAMMA*. Предназначена для расчета гамма-функции $\Gamma(x)$ вещественного аргумента x для $0 \leq x < 35$.

На интервале $0 < x \leq 1$ гамма-функция аппроксимируется степенным полиномом [71]:

$$\Gamma(x) = 1 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_8x^8 + \epsilon,$$

где b_i – коэффициенты полинома (даны в тексте подпрограммы); x – аргумент гамма-функции; ϵ – погрешность аппроксимации не превышает $3 \cdot 10^{-7}$.

На интервале $1 < x < 35$ используется рекурсивная формула $\Gamma(x) = x\Gamma(x-1)$.

```
SUBROUTINE FGAMMA(X, G)
DATA B1,B2/-0.577191652,0.988205891/
DATA B3,B4/-0.897056937,0.918206857/
DATA B5,B6/-0.756704078,0.482199394/
DATA B7,B8/-0.193527818,0.035868343/
D=1.0
Y=X
IF (X.LE.1.0) GO TO 3
K=0
1 K=K+1
```

```

Y=X-K
D=D*Y
IF (Y.LE.1.0) GO TO 3
GOTO 1
3 F=((( ((B8*Y+B7)*Y+B6)*Y+B5)*Y+B4)
! *Y+B3)*Y+B2)*Y+B1)*Y+1.0
G=D/F/Y
RETURN
END

```

Обращение к подпрограмме:

CALL FGAMMA (X, G)

X – аргумент;

G – значение гамма-функции.

Используемых подпрограмм нет.

5. Подпрограмма *FTSTI*. Предназначена для расчета квантилей $t_{\nu q}$ *t*-распределения (Стьюдента) порядка q с ν степенями свободы.

Используется аппроксимация функции [71]

$$t_{\nu q} = \lambda_q + \frac{a_1(\lambda)}{\nu} + \frac{a_2(\lambda)}{\nu^2} + \frac{a_3(\lambda)}{\nu^3} + \frac{a_4(\lambda)}{\nu^4},$$

где λ_q – квантиль порядка q гауссовского распределения; ν – число степеней свободы *t*-распределения; $a_i(\lambda)$ – полиномы аппроксимации (приведены в тексте программы).

Удовлетворительные результаты аппроксимация дает при любых q и $(\nu_1, \nu_2) > 50$, ошибку до 3% – при $q < 0,995$ и $(\nu_1, \nu_2) > 20$.

```

SUBROUTINE FTSTI(AT, V, T)
PN=1.0-AT/2
CALL FGAUSI(PN, X)
X2=X**2
G1=(X2+1)*X/4
G2=((5*X2+16)*X2+3)*X/96
G3=((3*X2+19)*X2+17)*X2-15)*X/384
G4=((((79*X2+776)*X2+1482)*X2-1920)
!*X2-945)*X/92.16E3
T=X+G1/V+G2/V**2+G3/V**3+G4/V**4
RETURN
END

```

Обращение к подпрограмме:

CALL FTSTI(AT, V, T)

AT – вероятность $\alpha = 1 - q$ для t -распределения;

V – число степеней свободы;

T – квантиль $t_{\nu q}$.

Используемая подпрограмма: *FGAUSI*.

6. Подпрограмма *FX2I*. Позволяет рассчитать квантиль $\chi^2_{\nu q}$ χ^2 -распределения с ν степенями свободы для вероятности ошибки $\alpha(\chi^2) = 1 - q$.

Для $\nu > 30$ имеем [71] $\chi^2_{\nu} \approx \nu \left(1 - \frac{2}{9\nu} + \lambda_q \sqrt{\frac{2}{9\nu}} \right)^3$,

где ν – степень свободы χ^2 -распределения; λ_q – квантиль гауссовского распределения порядка q .

Аппроксимация достаточно верна и для $\nu > 5$ и $\alpha(\chi^2) < 0,1$.

SUBROUTINE FX2I(V, AX2, X2)

Q=1.0-AX2

CALL FGAUSI(Q, X)

**X2=V*(1.0-2.0/9.0/V+X*SQRT(2.0/9.0
! /V)) ** 3**

RETURN

END

Обращение к подпрограмме:

CALL FX2I(V, AX2, X2)

V – число степеней свободы ν ;

AX2 – вероятность ошибки $\alpha(\chi^2)$;

X2 – квантиль χ^2 .

Используемая подпрограмма: *FGAUSI*.

7. Подпрограмма *FFISHI*. Предназначается для расчета квантилей *F*-распределения (Фишера), которые аппроксируются следующим образом [71]:

$$F_{\nu_1 \nu_2 q} \approx e^{2\omega},$$

где ν_1 – число степеней свободы случайного процесса с большей дисперсией; ν_2 – число степеней свободы случайного

процесса с меньшей дисперсией; $\omega = \frac{\lambda_q \sqrt{H+L}}{H} - \left(\frac{1}{\nu_1 - 1} - \right.$

$$-\frac{1}{\nu_2 - 1} \left(L + \frac{5}{6} - \frac{2}{3H} \right); H = 2 \frac{(\nu_1 - 1)(\nu_2 - 1)}{\nu_1 + \nu_2 - 2};$$

$L = (\lambda_q^2 - 3)/6$; λ_q – квантиль гауссовского распределения порядка q .

```

SUBROUTINE FFISHI(QF,V1,V2,F)
CALL FGAUSI(QF,X)
R=(X**2-3.0)/6.
H=2.0*(V1-1)*(V2-1)/(V1+V2-2)
W=X*SQRT(H+L)/H-(V2-V1)*(R+5.0/6-
! 2.0/3/H)/(V2-1)/(V1-1)
F=EXP(2* W)
RETURN
END

```

Обращение к подпрограмме:

```
CALL FFISHI (QF, V1, V2, F)
```

QF – вероятность q ;

$V1, V2$ – числа степеней свободы ν_1 и ν_2 соответственно;

F – квантиль $F_{\nu_1 \nu_2 q}$.

Используемая подпрограмма: *FGAUSI*.

8. Подпрограмма *FMD*. Оценивает математическое ожидание *AM* и дисперсию *AD* массива *A (N)*.

```

SUBROUTINE FMD(A,N,AM,AD)
DIMENSION A(N)
AM=0.0
AD=0.0
DO 5 I=1,N
5 AM=AM+A(I)
AM=AM/N
DO 10 J=1,N
10 AD=AD+ (A(J)-AM)**2
AD=AD/(N-1)
RETURN
END

```

Обращение к подпрограмме:

```
CALL FMD (A, N, AM, AD)
```

A – исходный массив данных;

N – размерность массива;

A M – математическое ожидание;

AD – дисперсия.

Используемых подпрограмм нет.

9. Подпрограмма *FVAR*. Формирует вариационный ряд $B(M) : (B(1) \leq B(2) \leq \dots \leq B(N))$ из исходной выборки $A(N)$.

```
SUBROUTINE FVAR(A,B,N)
DIMENSION A(N)
N1=N
DO 15 J=1,N
DO 5 I=1,N1
W=A(1)
K=1
IF (A(I).GT.W) GO TO 5
W=A(I)
K=I
5 CONTINUE
DO 10 I=K,N1-1
10 A(I)=A(I+1)
N1=N1-1
15 B(J)=W
RETURN
END
```

Обращение к подпрограмме:

CALL FVAR (A, B, N)

A – исходный ряд;

B – вариационный ряд;

N – размерность рядов.

Используемых подпрограмм нет.

3.3. ПОДПРОГРАММЫ НА ЯЗЫКАХ "БЕЙСИК" И "КВЕЙСИК"

1. Подпрограмма *BGAUSP*. Предназначена для расчета плотности вероятности стандартной гауссовской случайной величины. Описание переменных дано к подпрограмме *FGAUSP*.

```
5 REM 'SUBROUTINE BGAUSP'
10 PI=3.1415927
```

```
15 R=SOR(2.*P1) \ R1=(X-AM)*(X-AM)
20 P=EXP((-1)*R1/2.0/AD/AD)/AD/R
25 RETURN
```

2. Подпрограмма *BGAUSF*. Предназначена для вычисления функции распределения стандартной гауссовой случайной величины. Описания переменных даны к подпрограмме *FGAUSF*.

```
5 REM 'SUBROUTINE BGAUSF'
10 D1=.0498673 \ D2=.021141
15 D3=3.27763E-03 \ D4=3.80036E-05
20 D5=4.88906E-05 \ D6=5.38300E-06
25 F=((((D6*X+D5)*X+D4)*X+D3)*X+D2)*X+D1
30 F=EXP(16*LOG(F*X+1))
35 P=1-.5/F
40 RETURN
```

3. Подпрограмма *BGAUSI*. Вычисляет значение квантиля λ_q гауссовского распределения порядка q . Описание аппроксимации и переменных даны к подпрограмме *FGAUSI*.

```
5 REM 'SUBROUTINE BGAUSI'
10 C0=2.51552 \ C1=.802854
15 C2=.01032 \ D1=1.43279
20 D2=.189269 \ D3=1.30800E-03
25 A=1-Q
30 T=SQR(LOG(1/A/A))
35 B1=C1+C2*T
40 B2=D2+D3*T
45 X=T-(C0+T*B1)/(1+T*(D1+T*B2))
50 RETURN
```

4. Подпрограмма *BGAMMA*. Предназначена для расчета гамма-функции вещественного аргумента. Описание алгоритма и переменных даны к подпрограмме *FGAMMA*.

```
5 REM 'SUBROUTINE BGAMMA'
10 B1=-.577192 \ B2=.988206
15 B3=-.897057 \ B4=.918207
20 B5=-.756704 \ B6=.482199
25 B7=-.193528 ,\ B8=.035868
```

```

30 D=1 \ Y=X
35 IF X<=1 GO TO 60
40 K=0
45 K=K+1 \ Y=X-K \ D=D*Y
50 IF Y<=1 GO TO 60
55 GO TO 45
60 F=((B8*Y+B7)*Y+B6)*Y+B5)*Y+B4
65 F=((F*Y+B3)*Y+B2)*Y+B1) Y+1
70 G=D/F/Y
75 RETURN

```

5. Подпрограмма *BTSTI*. Предназначена для расчета квантилей $t_{\nu q}$ *t*-распределения (Стьюдента) с ν степенями свободы порядка q .

Описание переменных дано к подпрограмме *FTSTI*.

```

5 REM 'SUBROUTINE BTSTI'
10 P=1-A/2
15 GOSUB 100
20 X2=X*X
25 G1=(X2+1)*X/4
30 G2=((5*X2+16)*X2+3)*X/96
35 G3=((3*X2+19)*X2+17)*X2-15)*X/384
40 G4=((79*X2+776)*X2+1482)*X2
45 G4=((G4-1920)*X2-945)*X/92160
50 T=X+G1/V+G2/V/V+G3/V/V/V+G4/V/V/V/V
55 RETURN
100 REM 'SUBROUTINE BGAUSI'

```

6. Подпрограмма *BX2I*. Позволяет рассчитать квантиль $X_{\nu q}^2$ -распределения χ^2 с ν степенями свободы порядка q .

Описание переменных дано к подпрограмме *FX2I*.

```

5 REM 'SUBROUTINE BX2I'
10 Q=1-A
15 GOSUB 100
20 X2=(1-2/9/V+X*SQR(2/9/V))
25 X2=V*EXP(3*LOG(X2))
30 RETURN
100 REM 'SUBROUTINE BGAUSI'

```

7. Подпрограмма *BFISHI*. Вычисляет квантиль $F_{\nu_1 \nu_2 q}$ для *F*-распределения (Фишера) порядка q с ν_1 и ν_2 степе-

нями свободы. Описание переменных дано к подпрограмме *FFISHI*.

```
5 REM 'SUBROUTINE BFISHI'
15 GOSUB 100
20 L=(X*X-3)/6
25 H=2*(V1-1)*(V2-1)/(V1+V2-2)
30 W=X*SQR(H+L)/H
35 L=L+5/6-2/3/H
40 W=W-(V2-V1)*L/(V2-1)/(V1-1)
45 F=EXP(2*W)
50 RETURN
100 REM 'SUBROUTINE BGAUSI'
```

8. Подпрограмма *BMD*. Оценивает математическое ожидание *AM* и дисперсию *AD* массива *A(N)*, где *N* – размерность массива.

```
5 REM 'SUBROUTINE BMD'
10 AM=0.0
15 AD=0.0
20 FOR I=1 TO N \ AM=AM+A(I) \ NEXT I
25 AM=AM/N
30 FOR J=1 TO N \ AD=AD+(A(I)-AM)*(A(I)-AM)
35 NEXT J
40 AD=AD/(N-1)
45 RETURN
```

9. Подпрограмма *BVAR*. Формирует вариационный ряд *B(N)* из исходного произвольного ряда *A(N)*. Описание переменных дано к подпрограмме *FVAR*.

```
5 REM 'SUBROUTINE BVAR'
10 N1=N
15 FOR J=1 TO N
20 FOR I=1 TO N1 \ A=A(1) \ K=1
25 IF A(I)>A GO TO 35
30 A=A(I) \ K=I
35 NEXT I
40 FOR I=K,N-1 \ L=I+1 \ A(I)=A(L) \ NEXT I
45 N1=N1-1 \ B(J)=A \ NEXT J
50 RETURN
```

10. Программы *QCOSP* (на языке "квейсик") и *BCOSP* (на языке "бейсик"). Предназначена для расчета корреляционных функций и спектральных плотностей (энергетических спектров) эргодических случайных процессов по выборке их дискретных отсчетов $X(i) \equiv x(t_i)$ ($i = \overline{1, 256}$), взятых с постоянным шагом дискретизации. Непосредственно рассчитывается корреляционная функция, а спектральная плотность определяется с помощью алгоритма быстрого преобразования Фурье (см. гл. 2). Результаты расчетов выводятся в виде таблиц и графиков на экран дисплея.

```
1 PUT (/******")
2 PUT (/"ИССЛЕДОВАНИЕ КОРРЕЛЯЦИОННЫХ ФУНКЦИЙ")
3 PUT (/"СИГНАЛОВ И ИХ ЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ СПЕКТРОВ")
4 PUT (/******")
11 REAL A(257),X(257),Y(257),Z(257),R(81)
12 REAL ET,P,D,H1,ZN,Z2,Z3,Z4,T1,T2,T3,T4,ZF
13 REAL C,S,A1,A2,U1,U2,U3,U4,G,Y2,F0,F1,T,V6
16 LET N=256\LET M=8\ LET Z3=1\ LET N1=N
18 LET ZN=0.641593\ LET N2=N/2 \ LET N3=N-1
20 LET N4=N2+1 \ LET N5=N/4P=3.1415927
21 LET I1=1
25 PUT (/"ЗАДАТЬ ВРЕМЕННОЙ ШАГ ДИСКРЕТИЗАЦИИ")
30 GET (ET) \ LET ZF=1/ET/N
35 PUT (/"ЧАСТОТНЫЙ ШАГ РАВЕН",ZF,"ГЦ")
45 GOSUB 600
50 FOR I=1 TO N \ LET A(I)=X(I) \ NEXT I
53 PUT (/*---ТАБЛИЦА ЗНАЧЕНИЙ СИГНАЛА---")
54 GOSUB 410
55 PUT (/"--ДЛЯ ВЫВОДА ГРАФИКА -- GOTO 57 --")
56 STOP
57 GOSUB 500
59 STOP
60 GOSUB 289
61 PUT (/" ТАБЛИЦА ЗНАЧЕНИЙ КОРРЕЛЯЦИОННОЙ ")
62 PUT (/" ФУНКЦИИ ")
63 GOSUB 410
64 PUT (/"--ДЛЯ ВЫВОДА ГРАФИКА -- GOTO 66 --")
65 STOP
66 GOSUB 500 \ STOP
67 FOR I=1 TO N LET X(I)=0 \ NEXT I
70 GOSUB 340
71 FOR I=1 TO N
```

```

72 LET A(I)=SQR(X(I)*X(I)+Y(I)*Y(I)) \NEXT I
74 LET N6=N
75 GOSUB 280
76 PUT (/**** ТАБЛИЦА ЗНАЧЕНИЙ СПЕКТРА ***")
77 GOSUB 410
78 PUT (/*ДЛЯ ВЫВОДА ГРАФИКА -- GOTO 270 --")
79 STOP
80 GOSUB 500 \ STOP
280 LET M1=A(1)
281 FOR I=2 TO N6
282 IF M1=>A(I) THEN 284 \ LET M1=A(I)
284 NEXT I
285 FOR I=1 TO N6 \ LET A(I)=A(I)/M1 \NEXT I
288 RETURN
289 PUT (/*ИДЕТ РАСЧЕТ КОРРЕЛЯЦИОННОЙ ФУНКЦИИ*/
290 FOR I=1 TO 80 \ LET R(I)=0 \ NEXT I
293 FOR I=1 TO 80
294 FOR J=1 TO N \ LET J1=J-I+1
296 LET R(I)=R(I)+X(J)*X(J1) \ NEXT J
299 LET R(I)=R(I)/(N-I+1) \ LET N6=80 \NEXT I
301 GO TO 320
302 FOR I=1 TO N \ LET Y(I)=0 \ LET A(I)=0
304 NEXT I
305 FOR I=1 TO 80 \ LET J=79+I \ LET Y(J)=R(I)
308 NEXT I
309 FOR I=1 TO 79 \ LET J=80-I+1 \ LET Y(I)=R(J)
312 NEXT I
314 FOR I=1 TO 80 \ LET A(I)=R(I) \NEXT I
317 GO TO 334
320 FOR I=1 TO N \ LET A(I)=0 \NEXT I
323 FOR I=1 TO 80 \ LET A(I)=R(I) \NEXT I
326 LET N6=N
327 GOSUB 280
328 FOR I=1 TO 80 \ LET R(I)=A(I) \NEXT I
331 LET N6=80 \ GO TO 302
334 RETURN
340 FOR L=1 TO M \ LET L1=EXP((M+1-L)*LOG(2))
342 LET L2=L1/2 \ LET U1=1 \ LET U2=0
344 LET A1=P/L2
345 LET C=COS(A1) \ LET S=I1*SIN(A1)
347 FOR J=1 TO L2
348 FOR I=J TO N STEP L1 \ LET I2=I+L2
350 LET T1=X(I)+X(I2) \ LET T2=Y(I)+Y(I2)

```

```

352 LET T3=X(I)-X(I2) \ LET T4=Y(I)-Y(I2)
354 LET X(I2)=T3*U1-T4*U2 \ LET Y(I2)=T4*U1+T3*U2
356 LET X(I)=T1 \ LET Y(I)=T2 \ NEXT I
359 LET U3=U1*C-U2*S \ LET U2=U2*C+U1*S
361 LET U1=U3
362 NEXT J
363 PUT ("***** ИДЕТ Б ПФ *****")
364 NEXT L
366 LET J=1
367 FOR I=1 TO N3
368 IF I>=J THEN 375
369 LET T1=X(J) \ LET T2=Y(J) \ LET X(J)=X(I)
372 LET Y(J)=Y(I) \ LET X(I)=T1 \ LET Y(I)=T2
375 LET K=N2
376 IF K>=J THEN 380 \ LET J=J-K \ LET K=K/2
379 GO TO 376
380 LET J=J+K \ NEXT I
382 RETURN
410 LET L=0 \ LET K=0
412 FOR I=1 TO 4 \ LET J=4*L+I
414 PUT (A(J),) \ NEXT I
416 PRINT
417 LET L=L+1
418 IF L=16+16*K THEN 420
419 IF L*4<N5 THEN 412 \ RETURN
500 REAL B
501 LET C=0 \ LET G=0
502 FOR I=1 TO N1
503 IF A(I)<C THEN C=A(I) \ NEXT I
505 PUT (C)
507 FOR I=1 TO N1 \ LET A(I)=A(I)+C*(-1)
509 NEXT I
510 FOR I=1 TO N1
511 IF A(I)>G THEN LET G=A(I) \ NEXT I
513 FOR I=1 TO N1 \ LET A(I)=A(I)/G \ NEXT I
515 LET V6=G+C\ PRINT V6
516 LET B=1.0625 \ LET H=1 \ LET K=H+70
533 FOR J=0 TO 17
534 IF J>=12 THEN IF J<16 THEN LET F=12
535 IF J<4 THEN LET F=0
536 LET B=B-0.0625
537 IF J>=4 THEN IF J<8 THEN LET F=4
538 LET S=B+0.03125

```

539 IF J>=8 THEN IF J<12 THEN LET F=8
540 LET D=B-0.03125
541 FOR I=H TO K
542 IF K<=N1 THEN 544
543 IF K>N1 THEN 599
544 LET E=H+4
546 IF I<E THEN IF J>F THEN PUT(" ",)
547 LET P1=I-4
548 IF I=H THEN IF J=0 THEN PUT("U"," "," "," ","1",)
549 IF I=H THEN IF J=8 THEN PUT("0",".","5","0",)
550 IF I=H THEN IF J=4 THEN PUT("0",".","7","5",)
551 IF I=H THEN IF J=12 THEN PUT("0",".","2","5",)
552 IF J>15 THEN 561
553 IF I>=E THEN IF A(P1)<S THEN IF A(P1)>D THEN PUT("." ,)
554 IF I=E THEN IF J=F THEN IF A(P1)>D THEN PUT("-",- ,)
555 IF I=E THEN IF J>F THEN IF A(P1)<D THEN PUT("1",)
556 IF I=E THEN J=F THEN IF A(P1)>=S THEN PUT("-",- ,)
557 IF I=E THEN IF J<F THEN IF A(P1)=S THEN PUT ("1",)
558 IF I>E THEN IF A(P1)<D THEN IF A(P1)>=0 THEN PUT(" ",)
559 IF I>E THEN IF A(P1)>=0 THEN IF A(P1)>=0 THEN PUT(" ",)
560 IF J<16 THEN 582
561 IF I>=E THEN IF J=16 THEN A(P1)<S THEN PUT("." ,)
563 IF I<=E THEN LET Q1=0
565 IF I>=E THEN LET Y2=(I-E-Q1)/5
567 IF I>=E THEN IF Y2=1 THEN LET Q1=Q1+5
568 IF I>=E THEN IF J=16 THEN 570
569 GO TO 571
570 IF A(P1)>=S THEN IF Y2<>1 THEN PUT("-",- ,)
571 IF I>=E THEN IF J=16 THEN IF A(P1)>=S
THEN IF Y2=1 THEN PUT ("+",)
572 IF J=16 THEN 582
573 IF I<E THEN 582
574 IF I=E THEN PUT(" ",)
575 IF I<39+H THEN LET Z1=2*Q1+H
577 IF I<39+H THEN IF Y2=1 THEN IF Z1>9
THEN IF Z1<100 THEN 579
578 GO TO 580
579 PUT(" ",Z1," ",)
580 IF I<39+H THEN IF Y2=1 THEN IF Z1>99 THEN PUT(" ",Z1," ",)
581 IF I=39+H THEN PUT(" ",T")

Строка без номера есть продолжение предыдущей строки.

```
582 NEXT I
583 PUT
584 NEXT J
595 FOR I=1 TO N1 \ LET A(I)*G+C \ NEXT I
599 RETURN

1 PRINT"*****"
2 PRINT"ИССЛЕДОВАНИЕ КОРРЕЛЯЦИОННЫХ ФУНКЦИЙ"
3 PRINT"СИГНАЛОВ И ИХ ЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ СПЕКТРОВ"
4 PRINT"*****"
11 REAL A(257).X(257).Y(257).Z(257).R(81)
12 REAL ET,P,D,H1,ZN,Z2,Z3,Z4,T1,T2,T3,T4,ZF
13 REAL C,S,A1,A2,U1,U2,U3,U4,G,Y2,F0,F1,T,V6
16 N=256 \ M=8 \ Z3=1 \ N1=N \ ZN=0.641593
18 N2=N/2 \ N3=N-1 \ N4=N2+1 \ N5=N/4
20 P=3.1415927 \ I1=1
25 PRINT"ЗАДАТЬ ВРЕМЕННОЙ ШАГ ДИСКРЕТИЗАЦИИ"
30 INPUT ET \ ZF=1/ET/N
35 PRINT"ЧАСТОТНЫЙ ШАГ РАВЕН".ZF."ГЦ"
45 GOSUB 600
50 FOR I=1 TO N \ A(I)=X(I) \ NEXT I
53 PRINT"*****ТАБЛИЦА ЗНАЧЕНИЙ СИГНАЛА*****"
54 GOSUB 410
55 PRINT"ДЛЯ ВЫВОДА ГРАФИКА -- GO TO 57 --"
56 STOP
57 GOSUB 500
59 STOP
60 GOSUB 289
61 PRINT" ТАБЛИЦА ЗНАЧЕНИЙ КОРРЕЛЯЦИОННОЙ "
62 PRINT" ФУНКЦИИ "
63 GOSUB 410
64 PRINT"ДЛЯ ВЫВОДА ГРАФИКА -- GO TO 66 --"
65 STOP
66 GOSUB 500 \ STOP
67 FOR I=1 TO N \ X(I)=0 \ NEXT I
70 GOSUB 340
71 FOR I=1 TO N
72 A(I)=SQR(X(I)*X(I)+Y(I)*Y(I)) \ NEXT I
74 N6=N
75 GOSUB 280
76 PRINT"*** ТАБЛИЦА ЗНАЧЕНИЙ СПЕКТРА ***"
77 GOSUB 410
78 PRINT"ДЛЯ ВЫВОДА ГРАФИКА -- GO TO 270 --"
```

```

79 STOP
80 GOSUB 500 \ STOP
280 M1=A(1)
281 FOR I=2 TO N6
282 IF M1=>A(I) GO TO 284 \ M1=A(I)
284 NEXT I
285 FOR I=1 TO N6 \ A(I)=A(I)/M1 \ NEXT I
288 RETURN
289 PRINT"ИДЕТ РАСЧЕТ КОРРЕЛЯЦИОННОЙ ФУНКЦИИ"
290 FOR I=1 TO 80 \ R(I)=0 \ NEXT I
293 FOR I=1 TO 80
294 FOR J=1 TO N \ J1=J-I+1
296 R(I)=R(I)+X(J)*X(J1) \ NEXT J
299 R(I)=R(I)/(N-I+1) \ N6=80 \ NEXT I
301 GO TO 320
302 FOR I=1 TO N \ Y(I)=0 \ A(I)=0 \ NEXT I
305 FOR I=1 TO 80 \ J=79+I \ Y(J)=R(I)
308 NEXT I
309 FOR I=1 TO 79 \ J=80-I+1 \ Y(I)=R(J)
312 NEXT I
314 FOR I=1 TO 80 \ A(I)=R(I) \ NEXT I
317 GO TO 334
320 FOR I=1 TO N \ A(I)=0 \ NEXT I
323 FOR I=1 TO 80 \ A(I)=R(I) \ NEXT I
326 N6=N
327 GOSUB 280
328 FOR I=1 TO 80 \ R(I)=A(I) \ NEXT I
331 N6=80 \ GO TO 302
334 RETURN
340 FOR L=1 TO M \ L1=EXP((M+1-L)*LOG(2))
342 L2=L1/2 \ U1=1 \ U2=0 \ A1=P/L2
345 C=COS(A1) \ S=I1*SIN(A1)
347 FOR J=1 TO L2
348 FOR I=J TO N STEP L1 \ I2=I+L2
350 T1=X(I)+X(I2) \ T2=Y(I)+Y(I2)
352 T3=X(I)-X(I2) \ T4=Y(I)-Y(I2)
354 X(I2)=T3*U1-T4*U2 \ Y(I2)=T4*U1+T3*U2
356 X(I)=T1 \ Y(I)=T2 \ NEXT I
359 U3=U1*C-U2*S \ U2=U2*C+U1*S \ U1=U3
362 NEXT J
363 PRINT"***** ИДЕТ Б П Ф *****"
364 NEXT L
366 J=1

```

```
367 FOR I=1 TO N3
368 IF I>=J GOTO 375
369 T1=X(J) \ T2=Y(J) \ X(J)=X(I)
372 Y(J)=Y(I) \ X(I)=T1 \ Y(I)=T2
375 K=N2
376 IF K>=J GO TO 380 \ J=J-K \ K=K/2
379 GO TO 376
380 J=J+K \ NEXT I
382 RETURN
410 L=0 \ K=0
412 FOR I=1 TO 4 \ J=4*L+I
414 PRINT A(J) \ NEXT I
416 PRINT
417 L=L+1
418 IF L=16+16*K GO TO 420
419 IF L*4<N5 GO TO 412 \ RETURN
500 REAL B
501 C=0 \ G=0
502 FOR I=1 TO N1
503 IF A(I)<C THEN C=A(I) \ NEXT I
505 PRINT C
507 FOR I=1 TO N1 \ A(I)=A(I)+C*(-1)
509 NEXT I
510 FOR I=1 TO N1
511 IF A(I)>G THEN G=A(I) \ NEXT I
513 FOR I=1 TO N1 \ A(I)=A(I)/G \ NEXT I
515 V6=G+C \ PRINT V6
516 B=1.0625 \ H=1 \ K=H+70
533 FOR J=0 TO 17
534 IF J>=12 THEN IF J<16 THEN F=12
535 IF J<4 THEN F=0
536 B=B-0.0625
537 IF J>=4 THEN IF J<8 THEN F=4
538 S=B+0.03125
539 IF J>=8 THEN IF J<12 THEN F=8
540 D=B-0.03125
541 FOR I=H TO K
542 IF K<=N1 GO TO 544
543 IF K>N1 GO TO 599
544 E=H+4
546 IF I<E THEN IF J<>F THEN PRINT " "
547 P1=I-4
548 IF I=H THEN IF J=0 THEN PRINT "U 1".
```

```

549 IF I=H THEN IF J=8 THEN PRINT "0.50".
550 IF I=H THEN IF J=4 THEN PRINT "0.75".
551 IF I=H THEN IF J=12 THEN PRINT "0.25".
552 IF J>15 THEN 561
553 IF I>=E THEN IF A(P1)<S THEN IF A(P1)>D THEN PRINT " "
554 IF I=E THEN IF J=F THEN IF A(P1)>D THEN PRINT "-"
555 IF I=E THEN IF J<>F THEN IF A(P1)<D THEN PRINT "I"
556 IF I=E THEN J=F THEN IF A(P1)>=S THEN PRINT "-".
557 IF I=E THEN IF J<>F THEN IF A(P1)=S THEN PRINT "I"
558 IF I>E THEN IF A(P1)<D THEN IF A(P1)>=0 THEN PRINT " "
559 IF I>E THEN IF A(P1)>=S THEN IF A(P1)>=0 THEN PRINT " "
560 IF J<16 THEN GO TO 582
561 IF I>=E THEN IF J=16 THEN IF
    A(P1)<S THEN PRINT "*".
563 IF I<=E THEN Q1= 0
565 IF I>=E THEN Y2=(I-E-Q1)/5
567 IF I>=E THEN IF Y2=1 THEN Q1=Q1+5
568 IF I>=E THEN IF J=16 GO TO 570
569 GO TO 571
570 IF A(P1)>=S THEN IF Y2<>1 THEN PRINT "-".
571 IF I>=E THEN IF J=16 THEN IF A(P1)>=S
    THEN IF Y2=1 THEN PRINT "+".
572 IF J=16 GO TO 582
573 IF I<E GO TO 582
574 IF I=E THEN PRINT " ".
575 IF I<39+H THEN Z1=2*Q1+H
577 IF I<39+H THEN IF Y2=1 THEN IF Z1>9
    THEN IF Z1<100 GO TO 579
578 GO TO 580
579 PRINT "Z1," ,
580 IF I<39+H THEN IF Y2=1 THEN IF Z1>99
    THEN PRINT ".Z1," "
581 IF I=39+H THEN PRINT " " T"
582 NEXT I
583 PRINT
584 NEXT J
595 FOR I=1 TO N1 \ A(I)=A(I)*G+C \ NEXT I
599 RETURN

```

3.4. ПРОГРАММЫ ДЛЯ МИКРОКУЛЬКУЛЯТОРОВ

Программы ПМК 3/1–ПМК 3/4. Программа ПМК 3/1 служит для вычисления стандартной плотности вероятности.

$Fx^2 \quad 2 \quad + \quad /-/ \quad Fe^x \quad 2 \quad F\pi \quad X \quad F\sqrt{-} \div$
 C/P

Инструкция к программе ПМК 3/1: В/О; x С/П. В РХ – значение плотности вероятности.

Программа ПМК 3/2 служит для вычисления значений плотности вероятности при заданных математическом ожидании m и дисперсии σ^2 случайной величины.

П0 С/П П1 С/П ИП0 – $Fx^2 \quad /-/ \quad 2 \quad -$
 $IP1 \div \quad Fe^x \quad 2 \quad F\pi \quad X \quad IP1 \times \quad F\sqrt{-} \div$
БП 03

Инструкция к программе ПМК 3/2: В/О; m С/П; σ^2 С/П; x С/П. В РХ – значение плотности вероятности. Для повторных вычислений при неизменных m и σ^2 : x С/П:

Программа ПМК 3/3 предназначена для вычисления значений плотности вероятности случайной величины по выборке $\{x_i\}$ ее известных реализаций.

0 П0 П1 П4 С/П ↑ ИП0 + П0 XY
 $Fx^2 \quad IP1 \quad + \cdot \quad P1 \quad KIP4 \quad BP \quad 04 \quad IP0 \quad IP4 \div$
П2 ИП1 ИП0 Fx^2 ИП4 $\div \quad - \quad IP4 \quad 1 \quad -$
+ П1 С/П ИП2 – $Fx^2 \quad /-/ \quad 2 \quad \div \quad IP1$
 $\div \quad Fe^x \quad 2 \quad F\pi \quad X \quad IP1 \quad X \quad F\sqrt{-} \div \quad BP$
32

Инструкция к программе ПМК 3/3: В/О; С/П; ввести отсчеты случайной величины: x_i С/П. БП 17 С/П. После останова в Р1 – s^2 , в Р2 – m . Ввести значение случайной величины, для которого рассчитывается плотность вероятности: x С/П; в РХ – результат. Для дальнейших вычислений: x С/П.

Программа ПМК 3/4 предназначена для вычисления функции распределения гауссовской случайной величины. Используется приближенное выражение [71].

П4 ИП0 X ИП4 Fx^2 П5 ИП1 X + ИП4
ИП5 X ИП2 X + ИП5 Fx^2 ИП3 X +
1 + Fx^2 Fx^2 $F1/x$ 2 \div 1 XY –
С/П BP 00

Инструкция к программе ПМК 3/4: записать коэффициенты аппроксимирующего многочлена: $c_1 = 0,196854$ в Р0; $c_2 = 0,115194$ в Р1, $c_3 = 0,000344$ в Р2; $c_4 = 0,019527$ в Р3; В/О; x С/П. В РХ – $W(x)$. Для повторных вычислений: x С/П.

Программы ПМК 3/5 и ПМК 3/6. Предназначены для вычисления значений квантилей гауссовского распределения λ_q порядка q для $q \geq 0,5$. Исходными данными для про-

граммы ПМК 3/5 служат коэффициенты $a_0 = 2,30753$; $a_1 = -0,27061$; $b_1 = 0,99229$; $b_2 = 0,04481$ [71]. Точность вычислений для $q \geq 0,9$ не хуже 0,1%. В программе ПМК 3/6 используются коэффициенты $c_0 = 2,515517$; $c_1 = 0,802853$; $c_2 = 0,010328$; $d_1 = 1,432788$; $d_2 = 0,189269$; $d_3 = 0,001308$ [71]. Точность вычислений для $q \geq 0,9$ не хуже 0,02%.

П5 С/П П6 С/П П7 С/П П8 С/П ↑ 1
 XY — Fx² F1/x Fln F√ ПД ИПБ ИП6 ИПД
 X + ИП7 ИПД X ИП8 ИПД Fx² X +
 1 + ÷ ИПД XY — ПО БП 07

Инструкция к программе ПМК 3/5: В/О; a_0 С/П; a_1 С/П; b_1 С/П; b_2 С/П; q С/П. Значение λ_q в РХ и Р0. Для повторных вычислений: q С/П.

4 П4 6 П0 С/П КП4 FL 0 04 С/П ↑
 1 XY — F1/x Fx² Fln ПС F√ ПД ИП6
 X ИП5 + ИПС ИП7 X + ИП8 ИПД X
 1 + ИП9 ИПС X + ИПА ИПС X ИПД
 X + ÷ ИПД XY — ПО БП 08

Инструкция к программе ПМК 3/6: В/О; С/П; c_0 С/П; c_1 С/П; c_2 С/П; d_1 С/П; d_2 С/П; d_3 С/П; q С/П. Значение λ_q в РХ и Р0. Для повторных вычислений: q С/П.

Программы ПМК 3/7 и ПМК 3/8. Предназначены для вычисления значений квантилей χ^2 -распределения. Программа ПМК 3/7 использует приближенную формулу [71] и включает в себя вычисление квантилей гауссовского распределения, обеспечивая хорошую точность для q , близких к 1. Так, для $q = 0,999$ и $\nu = 1$ ошибка составляет 3,2%; $\nu = 3 - 2\%$; $\nu = 6 - 1\%$. Для малых значений q и больших ν : $q = 0,1$; ошибка меньше 3% при $\nu \geq 20$ ($q = 0,001$ и $\nu = 100$ ошибка 16%).

Программа ПМК 3/8 удобна для работы с большими ν при известных значениях квантилей гауссовского распределения. Используется разложение Корниша–Фишера [4].

4 П4 5 П0 С/П КП4 FL 0 04 С/П ↑
 1 XY — Fx² F1/x Fln F√ ПД ИП5 ИП6
 ИПД X + ИП7 ИПД X ИП8 ИПД Fx² X
 + 1 + ÷ ИПД XY — ПО 2 ИП9
 ÷ 9 ÷ ПВ F√ X ИПВ — 1 +
 ↑ Fx² X ИП9 X П1 БП 08

Инструкция к программе ПМК 3/7: В/О; С/П a_0 С/П; a_1 С/П; b_1 С/П; b_2 С/П (см. программу ПМК 3/5); ν С/П; q С/П.

Значение $\chi^2_{\nu q}$ в РХ и Р1 (в Р0 – λ_q). При повторных вычислениях: ν П9; q С/П. Если число ν не меняется: q С/П.

П0	С/П	П1	2	X	$F\sqrt{-}$	П2	X	ИП1	+
ИП0	Fx^2	П3	1	–	2	X	3	÷	+
ИП3	ИП0	X	ИП0	7	X	–	9	÷	ИП2
÷	+	П0	С/П	.					

Инструкция к программе ПМК 3/8: В/О; λ_q С/П; ν С/П. Значения $\chi^2_{\nu q}$ в Р0 и РХ.

Программа ПМК 3/9. Предназначена для вычисления квантилей F-распределения по формуле $F \approx e^{2\omega}$ и включает в себя вычисление квантилей гауссовского распределения. Хорошая точность обеспечивается для $\nu_1, \nu_2 \geq 5$ ($\nu_1 = \nu_2 = 5$; $q = 0,95$ – погрешность 1,5%; $q = 0,99$ – погрешность 3,7%). С ростом числа степеней свободы погрешность быстро уменьшается.

4	П4	6	П0	С/П	КП4	FL 0 04	С/П	↑
1	XY	–	Fx^2	$F1/x$	$F1n$	$F\sqrt{-}$	ПД	ИП5 ИП6
ИПД	X	±	ИП7	ИПД	X	ИП8	ИПД	Fx^2 X
+	1	+	÷	ИПД	XY	–	П0	Fx^2 3
–	6	+	П4	ИП9	1	–	П2	ИПА 1
–	П3	X	2	X	ИП2	ИП3	+	÷ ПВ
ИП3	$F1/x$	ИП2	$F1/x$	–	5	↑	6	÷ ИП4
+	2	ИПВ	÷	3	+	–	X	ИП0 ИПВ
ИП4	+	$F\sqrt{-}$	X	ИПВ	÷	+	2	X Fe^x
П1	БП	08						

Инструкция к программе ПМК 3/9: В/О; С/П; a_0 С/П; a_1 С/П; b_1 С/П; b_2 С/П (см. программу ПМК 3/5); ν_1 С/П; ν_2 С/П; q С/П: Значение $F_{\nu_1 \nu_2 q}$ в РХ и Р1 (в Р0 – λ_q). При повторных вычислениях: ν_1 П9; ν_2 ПА; q С/П. Если меняется только q : q С/П.

Программа ПМК 3/10. Предназначена для вычисления квантилей t-распределения по приближенному разложению [71] и предполагает известными значения λ_q . Погрешность, вычислений для $q = 0,9$ и $\nu \geq 2$ меньше 0,3%; для $q = 0,95$ и $\nu \geq 2$ – меньше 0,8%; для $q = 0,975$ и $\nu \geq 3$ – меньше 0,4% и быстро уменьшается с ростом ν .

П9	С/П	ПД	Fx^2	ПС	1	+	ИПД	X	4
÷	ИП9	+	ИПД	+	ИПС	Fx^2	ПВ	5	X
ИПС	1	6	X	+	3	+	ИПД	X	9
6	÷	ИП9	Fx^2	П8	÷	+	ИПВ	ИПС	X

ПА	3	X	1	9	ИПВ	X	+	1	7
ИПС	X	+	1	5	-	ИПД	X	3	8
4	÷	ИП9	ИП8	X	÷	+	ИПВ	Fx^2	7
9	X	ИПА	7	7	X	+	ИПВ	1	4
8	9	X	+	ИПС	ИП0	X	-	ИП1	-
ИПД	X	ИП2	÷	ИП8	Fx^2	÷	+		

Инструкция к программе ПМК 3/10: В/О; 1920 П0;
 945 П1; 92160 П2; ν С/П; λ_q С/Л. После окончания расчетов
 $t_{\nu q}$ в РХ и Р9. При повторных вычислениях: В/О; ν С/П;
 λ_q С/П.

Программа ПМК 3/11. Служит для обработки результатов наблюдения случайной величины (процесса) с целью построения гистограммы. Исходными данными являются максимальное x_{\max} и минимальное x_{\min} значения случайной величины, которые заданы либо определяются по наблюдаемой выборке, а также число k ($k \leq 10$) равных интервалов, на которые разбивается вся область наблюдения от x_{\min} до x_{\max} . В ходе выполнения программы в регистрах с номерами 0 – ($k - 1$) накапливаются числа, равные числу попаданий наблюдаемых значений случайной величины в соответствующие интервалы. В интервал включается точка, совпадающая с его левой границей.

0	П0	П1	П2	П3	П4	П5	П6	П7	П8
П9	С/П	С/П	ПВ	–	С/П	÷	ПС	С/П	ИПВ
–	ИПС	÷	ПД	КИПД	1	+	КПД	БП	18

Инструкция к программе ПМК 3/11: В/О; С/П; x_{\max} С/П; x_{\min} С/П, k С/П; вводятся наблюдаемые значения случайной величины: x ; С/П.

Программы ПМК 3/12 и ПМК 3/13. Осуществляют проверку гипотезы о распределении случайной величины по гауссовскому закону в соответствии с выражениями (2.45), (2.49) – (2.52).

Программа ПМК 3/12 применяется, когда случайная величина задана рядом равноотстоящих значений x ; и соответствующих им абсолютных частот m_i . Исходные данные: объем выборки n , разность между двумя соседними значениями случайной величины h , выборочное среднее m , выборочная дисперсия s^2 ; M – число различных возможных значений случайной величины и квантили χ^2 -распределения.

П0	0	П2	ИП0	С/П	X	С/П	$F\sqrt{\quad}$	П1	÷
П0	С/П	П3	С/П	П4	С/П	П5	С/П	ИП3	–

ИП1	\div	Fx^2	2	\div	$/-$	Fex	2	$F\pi$	X
$F\sqrt{-}$	\div	ИП0	X	П7	ИП5	-	Fx^2	ИП7	\div
ИП2	+	П2	БП	15	ИП2	ИП4	-	$Fx < 0$	53
0	П6	C/П	1	П6	C/П				

Инструкция к программе ПМК 3/12: В/О; n С/П; h С/П; s^2 С/П; m С/П; $\chi_M^2 - 3,1 - \alpha$ С/П. Вводить пары значений: m , С/П; x , С/П. После ввода всех данных БП 45 С/П. Если в РХ (Р6) = 0, то гипотеза H_0 принимается. В Р2 – значение статистики g [выражение (2.45)].

Программа ПМК 3/13 применяется, если эмпирическое распределение случайной величины задано последовательностью интервалов $[x_i; x_{i+1}]$ и соответствующих им сумм частот m_i .

П8	C/П	П9	C/П	ПА	C/П	ПВ	C/П	П0	0
П1	П2	С/П	П3	С/П	$F\sqrt{-}$	П4	С/П	П5	С/П
ИП3	-	ИП4	\div	ПС	ИП8	X	ИПС	Fx^2	П7
ИП9	X	+	ИПС	ИП7	X	ИПА	X	+	ИП7
Fx^2	ИПВ	X	+	1	+	Fx^2	Fx^2	$F1/x$	2
\div	1	XY	-	ПД	ИП1	-	ИП0	X	П6
ИПД	П1	C/П	ИП6	-	Fx^2	ИП6	\div	ИП2	+
П2	БП	19	ИП2	ИП5	-	$Fx < 0$	81	0	П7
C/П	1	П7	C/П						

Инструкция к программе ПМК 3/13: В/О; ввести коэффициенты c , из инструкции к программе ПМК 3/4: c , С/П; n С/П; m С/П; s^2 С/П; $\chi_M^2 - 3,1 - \alpha$ С/П. Далее вводить пары значений: x_{i+1} С/П; m , С/П. После ввода всех данных: БП 73 С/П. Если в РХ (Р7) = 0, гипотеза H_0 принимается. В Р2 значение статистики g [выражение (2.45)].

Программа ПМК 3/14. Предназначена для проверки гипотезы о вероятности появления события в одном испытании по значению статистики g и соответствующим правилам. Исходные данные: объем выборки n , гипотетическая вероятность p_0 появления события, относительная частота ω появления события в данной выборке, квантили гауссовского распределения.

C/П	П0	1	XY	-	\div	ИП0	\div	$F\sqrt{-}$	C/П
ИП0	-	X	П0	Fx^2	$F\sqrt{-}$	С/П	-	$Fx < 0$	24
0	П1	БП	26	1	П1	ИП0	С/П	-	П4
$Fx < 0$	36	0	П2	БП	38	1	П2	ИП4	$Fx = 0$
44	1	П3	C/П	0	П3	C/П			

Инструкция к программе ПМК 3/14: В/О; n С/П; p_0 С/П; ω С/П; $\lambda_1 - \alpha/2$ С/П; $\lambda_1 - \alpha$ С/П. В РО – значение статистики g , в Р1 – индикатор двустороннего критерия, в Р2 – правостороннего, в РХ и РЗ – левостороннего. Гипотеза H_0 принимается, если индикатор равен нулю.

Программы ПМК 3/15–ПМК 3/18. Предназначены для определения точечных оценок случайной величины или процесса.

Программа ПМК 3/15 служит для вычисления выборочного среднего m по формуле (2.57), выборочной дисперсии s^2 по формуле (2.59), а также s . Исходные данные: массив значений $\{x_i\}$ и его объем n .

П0	П1	0	П2	П3	С/П	\uparrow	ИП2	+	П2
XY	Fx^2	ИП3	+	П3	FL 0	05	ИП2	ИП1	\div
П4	Fx^2	ИП1	X	ИП3	XY	-	КИП1	XY	ИП1
\div	П5	$F\sqrt{\quad}$	П6	С/П					

Инструкция к программе ПМК 3/15: В/О; n С/П; вводить все значения: x_i ; С/П. После обработки данных в Р4 – m ; в Р5 – s^2 , в РХ и Р6 – s .

Программа ПМК 3/16 позволяет рассчитывать текущее выборочное среднее в соответствии с выражением $m_i = m_{i-1} + (x_i - m_{i-1})/i$.

П0	0	П1	1	П4	ИП0	ИП1	-	ИП4	\div
ИП1	+	П1	С/П	П0	КИП4	БП	05		

Инструкция к программе ПМК 3/16: В/О; вводить значения: x_i ; С/П. После обработки каждого данного в РХ и Р1 – m_i , в Р4 – i .

Программа ПМК 3/17 предназначена для вычисления несмещенной и самостоятельной оценки среднего квадратического отклонения $s' = k_n s$ для $n \geq 10$ по формуле для k_n (2.65). Исходные данные: объем выборки n и выборочная дисперсия s^2 .

$F\sqrt{\quad}$	С/П	4	X	$F1/x$	\uparrow	Fx^2	2	\div	+
1	+	П0	X	П1	С/П				

Инструкция к программе ПМК 3/17: В/О; s^2 С/П; n С/П. После вычисления s' – в РХ и Р1, k_n – в Р0.

Программа ПМК 3/18 позволяет определять значения математического ожидания m и дисперсии s^2 случайной величины по сгруппированным данным по формулам (2.132), в том числе с учетом поправки Шеппарда – по формуле

(2.137). Исходные данные: выборочные средние \bar{x}_i , частоты m_i , появления соответствующих значений и число $h = \bar{x}_{i+1} - \bar{x}_i$.

0	П1	П2	П3	П4	С/П	↑	С/П	П1	Х
ИП2	+	П2	ХY	ИП1	Fx ²	X	ИП3	+	П3
КИП	БП	05	ИП2	ИП4	÷	П6	ИП3	ИП2	Fx ²
ИП4	÷	-	ИП4	1	-	÷	П7	С/П	Fx ²
1	2	÷	-	П8	С/П				

Инструкция к программе ПМК 3/18: В/О; С/П; вводить попарно: m_i ; С/П; \bar{x}_i , С/П. После ввода всех пар: БП 23 С/П; h С/П. Результаты: m – в Р6, n – в Р5, s^2 – в Р7, $(s')^2$ – в РХ и Р8. Если применение поправки Шеппарда невозможно, положить $h = 0$, тогда $s^2 = (s')^2$.

Программы ПМК 3/19–ПМК 3/21. Предназначены для определения доверительных интервалов среднего значения гауссовской случайной величины.

Программа ПМК 3/19 служит для расчетов непосредственно по выборке $\{x_i\}$. Для определения границ интервалов используются выражения (2.66) – (2.69). Исходные данные: σ и квантили гауссовского распределения.

П0	С/П	П1	С/П	П2	0	П3	П4	С/П	ИП3
+	П3	КИП4	БП	08	ИП3	ИП4	÷	П5	ИП0
ИП4	F $\sqrt{-}$	÷	П6	ИП5	ИП1	ИП6	X	-	П7
ИП5	ИП1	ИП6	X	+	П8	ИП5	ИП2	ИП6	X
-	П9	ИП5	ИП2	ИП6	X	+	ПА	С/П	

Инструкция к программе ПМК 3/19: В/О; σ С/П; $\lambda_{(1+p)/2}$ С/П; λ_p С/П. Ввести все значения выборки: x_i , С/П. После ввода данных: БП 15 С/П. Результаты: в Р4 объем массива n , в РХ и РА – \bar{x}_{B_2} , в Р9 – \bar{x}_{H_3} , а Р8 – \bar{x}_{B_1} , в Р7 – \bar{x}_{H_1} .

Программа ПМК 3/20 предполагает известными объем выборки n и выборочное среднее m , в остальном соответствует ПМК 3/19.

П0	С/П	С/П	F $\sqrt{-}$	÷	П1	ПП	22	П2	ХY
ИП0	+	П3	ИП1	ПП	22	П4	ХY	ИП0	+
П5	С/П	С/П	X	↑	ИП0	-	/-	В/О	

Инструкция к программе ПМК 3/20: В/О; m С/П; σ С/П; n С/П; $\lambda_{(1+p)/2}$ С/П; λ_p С/П. Результаты: \bar{x}_{H_1} – в Р2, \bar{x}_{B_1} – в Р3, \bar{x}_{H_3} – в Р4, \bar{x}_{B_2} – в РХ и Р5.

Программа ПМК 3/21 применяется в том случае, когда дисперсия случайной величины неизвестна. Вычисления производятся по формулам (2.70) – (2.73) с использованием квантилей t -распределения и непосредственно по выборке.

0	П0	П1	П4	С/П	\uparrow	ИП0	+	П0	ХУ
Fx^2	ИП1	+	П1	КИП4	БП	04	ИП0	ИП4	\downarrow
П3	ИП1	ИП0	Fx^2	ИП4	\div	–	ИП4	1	–
\div	П5	$F\sqrt{}$	ИП4	$F\sqrt{}$	\div	П6	ПП	52	П7
ХУ	ИП3	\downarrow	П8	ПП	52	П9	ХУ	ИП3	\downarrow
ПА	С/П	С/П	ИП6	X	\uparrow	ИП3	–	/–/	В/О

Инструкция к программе ПМК 3/21: В/О; С/П; ввести все данные: x ; С/П, после чего в Р4 – значение n . БП 17 С/П. Определяются квантили t -распределения и вводятся в РХ: $t_{n-1, (1+\rho)/2}$ С/П; $t_{n-1, \rho}$ С/П. Результаты: выборочное среднее m – в Р3, выборочная дисперсия s^2 – в Р5, \bar{x}_{n_1} – в Р7, \bar{x}_{v_1} – в Р8, \bar{x}_{n_3} – в Р9, \bar{x}_{v_2} – в РА и РХ.

Если выборочное среднее m и выборочная дисперсия s^2 известны, доверительные интервалы находятся по программе ПМК 3/20 с заменой квантилей гауссовского распределения квантилями t -распределения.

Программы ПМК 3/22 и ПМК 3/23. Предназначены для определения доверительных интервалов дисперсии гауссовой случайной величины в соответствии с выражениями (2.74) – (2.77).

Программа ПМК 3/22 используется в случае, если выборочная дисперсия s^2 известна.

Программа ПМК 3/23 предназначена для работы непосредственно по выборке $\{x_i\}$. Здесь должны быть известны объем выборки n и квантили χ^2 -распределения.

\uparrow	1	–	С/П	X	.	ПП	19	П0	ПП	18
П1	ПП	18	П2	ПП	18	П3	С/П	ХУ	\uparrow	
С/П	\div	В/О								

Инструкция к программе ПМК 3/22: В/О; n С/П; s^2 С/П; $\chi^2_{n-1, (1+\rho)/2}$ С/П; $\chi^2_{n-1, (1-\rho)/2}$ С/П; $\chi^2_{n-1, 1-\rho}$ С/П; $\chi^2_{n-1, \rho}$ С/П. Результаты: $\sigma_{n_1}^2$ – в Р0, $\sigma_{v_1}^2$ – в Р1, $\sigma_{v_2}^2$ – в Р2, $\sigma_{n_3}^2$ – в Р3 и РХ.

0	П0	П1	П4	С/П	\uparrow	ИП0	+	П0	ХУ
Fx^2	ИП1	+	П1	КИП4	БП	04	ИП1	ИП0	Fx^2
ИП4	\div	–	П3	ИП4	1	–	\div	П2	ИП3

$\frac{C/P}{P7} + \frac{P5}{IP3} \frac{IP3}{C/P} \frac{C/P}{\div} \frac{P8}{C/P} \frac{+}{C/P} \frac{P6}{IP3} \frac{IP3}{C/P} \frac{C/P}{\div}$

Инструкция к программе ПМК 3/23: В/О; С/П; ввести данные: x_i ; С/П; далее БП 17 С/П; значение n — в Р4. $X_n^2 - 1, (1 + \rho) / 2$ С/П; $X_n^2 - 1, (1 - \rho) / 2$ С/П; $X_n^2 - 1, 1 - \rho$ С/П; $X_n^2 - 1, \rho$ С/П. Результаты: $\sigma_{H_1}^2$ — в Р5, $\sigma_{B_1}^2$ — в Р6, $\sigma_{B_2}^2$ — в Р7, $\sigma_{H_3}^2$ — в РХ и Р8.

Программы ПМК 3/24 и ПМК 3/25. Предназначены для вычисления значения корреляционной функции \hat{R}_X случайного процесса в моменты t_m и t_k . Программа ПМК 3/25 обеспечивает также вычисление относительной корреляционной функции ρ , математических ожиданий $\bar{x}(t_m)$, $\bar{x}(t_k)$ и дисперсий $\sigma^2(t_m)$, $\sigma^2(t_k)$ сечений случайного процесса. Исходные данные для программы: два связанных массива значений $\{x_i(t_m)\}$ и $\{x_i(t_k)\}$. Вычисления выполняются по формулам (2.101), (2.103).

0	П0	П1	П2	П5	С/П	С/П	↑	ИП1	+
П1	F→	X	ИП2	+	П2	F→	ИП0	+	П0
КИПБ	БП	05	ИП2	ИП1	ИП0	X	ИП5	+	-
ИП5	1	-	÷	П3	С/П				

Инструкция к программе ПМК 3/24: В/О; С/П; вводить попарно: $x_i(t_m)$ С/П; $x_i(t_k)$ С/П. Далее БП 23 С/П. Результаты: объем выборок n — в Р5, $\hat{R}_X(t_m, t_k)$ — в РХ и Р3.

0	П0	П1	П2	П3	П4	П5	С/П	С/П	↑
Fx^2	ИП4	+	П4	F→	↑	ИП1	+	П1	F→
X	ИП2	+	П2	XY	↑	Fx^2	ИП3	+	П3
XY	ИП0	+	П0	КИПБ	БП	07	ИП2	ИП0	ИП5
÷	П7	ИП1	ИП5	+	П8	ИП5	X	X	ПП
73	П6	ИП3	ИП0	ПП	70	П9	ИП4	ИП1	ПП
70	ПА	ИП6	ИП9	ИПА	X	$F\sqrt{-}$	÷	ПВ	С/П
Fx^2	ИП5	÷	-	ИП5	1	-	÷	B/O	

Инструкция к программе ПМК 3/25: В/О; С/П; вводить попарно: $x_i(t_m)$ С/П; $x_i(t_k)$ С/П, затем БП 37 С/П. Результаты: $\hat{R}_X(t_m, t_k)$ — в Р6, ρ — в РХ и РВ, $\bar{x}(t_m)$ — в Р7, $\bar{x}(t_k)$ — в Р8, $\sigma^2(t_m)$ — в Р9, $\sigma^2(t_k)$ — в РА, n — в Р5.

Программа ПМК 3/26. Предназначена для расчета доверительного интервала коэффициента корреляции двухмерной

гауссовской случайной величины. Исходные данные: выборочный коэффициент корреляции r_{XY} , объем выборки n , квантили гауссовского распределения (программы ПМК 3/5, ПМК 3/6) или t -распределения (программа ПМК 3/10). Используются выражения (2.106).

П0	С/П	П1	С/П	П2	1	+	1	ИП2	-
\div	Fln	2	\div	П3	ИП1	ИП0	3	\div	$F\sqrt{\quad}$
\div	П4	-	ПП	33	П7	ИП3	ИП4	+	ПП
33	П8	С/П	Fex	П5	\uparrow	F1/x	П6	-	ИП5
ИП6	+	\div	B/O						

Инструкция к программе ПМК 3/26: В/О; n С/П; $\lambda_{(1+\rho)/2}$ С/П; r_{XY} С/П. Результаты: r_n – в Р7, r_v – в РХ и Р8.

Программы ПМК 3/27–ПМК 3/29. Предназначены для проверки гипотезы о среднем значении гауссовой случайной величины.

Программа ПМК 3/27 предполагает известными дисперсию σ_0^2 и выборочное среднее m .

Программа ПМК 3/28 обеспечивает вычисления непосредственно по выборке $\{x_i\}$ при известной дисперсии σ_0^2 .

Программа ПМК 3/29 применяется, если дисперсия σ_0^2 неизвестна. Другие исходные данные: объем выборки n , предполагаемое среднее μ_0 и квантили гауссовского распределения. Статистика g вычисляется по формуле (2.163) в программах ПМК 3/27 и ПМК 3/28, в программе ПМК 3/29 – по формуле (2.164). Гипотеза H_0 принимается, если индикатор критерия равен нулю.

С/П	-	С/П	\div	С/П	$F\sqrt{\quad}$	X	П0	Fx^2	$F\sqrt{\quad}$
С/П	-	$Fx \geq 0$	18	1	П1	БП	20	0	П1
ИП0	С/П	П4	-	$Fx < 0$	30	0	П2	БП	32
1	П2	ИП4	/-	ИП0	-	$Fx < 0$	41	0	П3
С/П	1	П3	С/П						

Инструкция к программе ПМК 3/27: В/О; m' С/П; μ_0 С/П; σ_0^2 С/П; n С/П; $\lambda_1 - \alpha/2$ С/П; $\lambda_1 - \alpha$ С/П. Результаты: g – в Р0, в Р1 – индикатор двустороннего критерия, в Р2 – правостороннего, в РХ и Р3 – левостороннего.

0	П4	П5	С/П	ИП5	+	П5	КИП4	БП	03
ИП5	ИП4	\div	П5	С/П	-	С/П	\div	ИП4	$F\sqrt{\quad}$
X	П0	Fx^2	$F\sqrt{\quad}$	С/П	-	/-	$Fx \geq 0$	33	0
П1	БП	35	1	П1	ИП0	С/П	П6	-	$Fx < 0$

45 0 П2 БП 47 1 П2 ИП6 /-/ ИП0
 - Fx<0 56 0 П3 С/П 1 П3 С/П

Инструкция к программе ПМК 3/28: В/О; С/П; ввести все значения случайной величины: x ; С/П. Значение n – в Р4. БП 10 С/П; μ_0 С/П; σ_0^2 С/П; $\lambda_1 - \alpha/2$ С/П; $\lambda_1 - \alpha$ С/П. Результаты: g – в Р0, в Р1 – индикатор двустороннего критерия, в Р2 – правостороннего, в РХ и Р3 – левостороннего, выборочное среднее m – в Р5.

0	П4	П5	П6	С/П	П7	ИП5 +	П5 ИП7
Fx ²	ИП6	+	П6	КИП4	БП	04 ИП5	ИП4 +
П5	ИП6	ИП5	Fx ²	ИП4	X	- ИП4	1 -
÷	П6	ИП5	С/П	-	÷	F1/x ИП4	F $\sqrt{-}X$
П0	Fx ²	F $\sqrt{-}$	С/П	-	Fx<0	51 0 П1 БП	
53	1	П1	ИП0	С/П	П7	- Fx<0	63 0
П2	БП	65	1	П2	ИП7	/-/ ИП0	- Fx<0
74	0	П3	С/П	1	П3	С/П	

Инструкция к программе ПМК 3/29: В/О; С/П; ввести все данные: x ; С/П; далее БП 17 С/П; μ_0 С/П; $t_n - 1, 1 - \alpha/2$ С/П; $t_n - 1, 1 - \alpha$ С/П. Результаты: значение статистики g – в Р0, в Р1 – индикатор двустороннего критерия, в Р2 – правостороннего, в Р3 и РХ – левостороннего, выборочное среднее m – в Р5, выборочная дисперсия s^2 – в Р6.

Программы ПМК 3/30–ПМК 3/33. Предназначены для проверки гипотезы о равенстве средних значений двух гауссовых случайных величин. Гипотеза H_0 принимается при индикаторе критерия, равном нулю.

Программа ПМК 3/30 применяется при известных дисперсиях σ_1^2 и σ_2^2 . Используются квантили гауссовского распределения. Известны выборочные средние m_1 , m_2 и объемы выборок n_1 и n_2 . Статистика g определяется по формуле (2.165).

С/П	-	С/П	С/П	÷	С/П	С/П	÷	+	F $\sqrt{-}$
÷	П0	Fx ²	F $\sqrt{-}$	С/П	-	Fx<0	22 0	П1	
БП	24	1	П1	ИП0	С/П	П4	-	Fx<0	34
0	П2	БП	36	1	П2	ИП4	/-/ ИП0	-	
Fx<045	0	П3	С/П	1	П3	С/П			

Инструкция к программе ПМК 3/30: В/О; m_1 С/П; m_2 С/П; σ_1^2 С/П; n_1 С/П; σ_2^2 С/П; n_2 С/П; $\lambda_1 - \alpha/2$ С/П; $\lambda_1 - \alpha$ С/П. Результаты: g – в Р0, в Р1 – индикатор двусто-

ронного критерия, в Р2 – правостороннего, в Р3 и РХ – левостороннего.

Программа ПМК 3/31 предполагает известными выборочные дисперсии s_1^2 и s_2^2 , тогда как дисперсии случайных величин равны, но неизвестны. Используются квантили t -распределения. Значение статистики g определяется по формуле (2.166). Объемы выборок n_1 и n_2 , а также выборочные средние m_1 и m_2 известны.

C/П	–	C/П	П0	1	–	C/П	X	C/П	П1
1	–	C/П	X	+	F $\sqrt{ }$	+	ИП0	ИП1	X
ИП0	ИП1	+	÷	ИП0	ИП1	+	2	–	X
F $\sqrt{ }$	X	П0	F x^2	F $\sqrt{ }$	C/П	–	F $x < 0$	43	0
П1	БП	45	1	П1	ИП0	C/П	П4	–	F $x < 0$
55	0	П2	БП	57	1	П2	ИП4	/–/	ИП0
–	F $x < 0$	66	0	П3	C/П	1	П3	C/П	

Инструкция к программе ПМК 3/31: В/О; m_1 С/П; m_2 С/П; n_1 С/П; s_1^2 С/П; n_2 С/П; s_2^2 С/П; $t_{n_1+n_2-2,1-\alpha/2}$ С/П; $t_{n_1+n_2-2,1-\alpha}$ С/П. Результаты: g – в Р0, в Р1 – индикатор двустороннего критерия, в Р2 – правостороннего, в Р3 и РХ – левостороннего.

Программа ПМК 3/32 в отличие от программы ПМК 3/31 предполагает неравенство неизвестных дисперсий. Статистика g определяется по формуле (2.167), число степеней свободы квантиля t -распределения – по выражению (2.168).

C/П	–	C/П	С/П	П4	÷	П1	C/П	C/П	П5
÷	П2	+	П3	F $\sqrt{ }$	÷	П0	ИП3	F x^2	ИП1
F x^2	ИП4	1	–	÷	ИП5	1	–	ИП2	F x^2
XY	÷	+	÷	П4	C/П	ИП0	F x^2	F $\sqrt{ }$	XY
–	F $x < 0$	47	0	П1	БП	49	1	П1	ИП0
C/П	П5	–	F $x < 0$	59	0	П2	БП	61	1
П2	ИП5	/–/	ИП0	–	F $x < 0$	70	0	П3	C/П
1	П3	C/П							

Инструкция к программе ПМК 3/32: В/О; m_1 С/П; s_1^2 С/П; n_1 С/П; s_2^2 С/П; n_2 С/П. В РХ и Р4 значение ν' . Определяется значение ν как целая часть от ν' ; далее $t_{\nu,1-\alpha/2}$ С/П; $t_{\nu,1-\alpha}$ С/П. Результаты: g – в Р0, в Р1 – индикатор двустороннего критерия, в Р2 – правостороннего, в Р3 и РХ – левостороннего.

Программа ПМК 3/33 обеспечивает расчеты непосредственно по выборкам $\{x_{1i}\}$ и $\{x_{2i}\}$. Дисперсии σ_1^2 и σ_2^2

неизвестны, объемы выборок равны ($n_1 = n_2 = n$). Используется выражение (2.169) и квантили t -распределения.

0	П0	П1	П4	С/П	С/П	—	\uparrow	Fx^2	ИП1
+	П1	ХY	ИП0	+	П0	КИП4	БП	04	ИП0
ИП4	÷	П2	Fx^2	ИП4	X	ИП1	ХY	—	ИП4
1	—	÷	$F\sqrt{-}$	П3	ИП2	ИП4	$F\sqrt{-}X$	ХY	
+	П5	Fx^2	$F\sqrt{-}$	С/П	—	$Fx < 0$	51	0	П6
С/П	1	П6	С/П						

Инструкция к программе ПМК 3/33: В/О; С/П. Вводить пары значений: x_i , С/П; x_{2i} , С/П. После ввода всех пар: n – в Р4, БП 19 С/П; $t_n - 1, 1 - \alpha/2$ С/П. Результаты: средняя разность элементов выборки d – в Р2, выборочное среднее квадратическое значение разностей s_d – в Р3, g – в Р5, в РХ и Р6 – индикатор критерия.

Программы ПМК 3/34 и ПМК 3/35. Предназначены для проверки гипотезы о дисперсии гауссовой случайной величины. Гипотеза H_0 принимается, когда индикатор критерия равен нулю. Если известны объем выборки n , выборочная дисперсия s^2 и предполагаемая дисперсия σ_0^2 , используется программа ПМК 3/34. Программа ПМК 3/35 рассчитана на работу непосредственно по выборке $\{x_i\}$. При проверке гипотезы используются квантили χ^2 -распределения. Статистика вычисляется по формуле (2.170).

С/П	\uparrow	1	—	X	С/П	\div	П0	С/П	—
$Fx \geq 0$	21	С/П	ИП0	—	$Fx \geq 0$	21	0	П1	БП
23	1	П1	ИП0	С/П	—	$Fx < 0$	32	0	П2
БП	34	1	П2	С/П	$/-$	ИП0	—	$Fx < 0$	43
0	П3	С/П	1	П3	С/П				

Инструкция к программе ПМК 3/34: В/О; s^2 С/П; n С/П; σ_0^2 С/П; $\chi^2_{n-1, \alpha/2}$ С/П; $\chi^2_{n-1, 1-\alpha/2}$ С/П; $\chi^2_{n-1, 1-\alpha}$ С/П; $\chi^2_{n-1, \alpha}$ С/П.

Результаты: g – в Р0, в Р1 – индикатор двустороннего критерия, в Р2 – правостороннего, в РХ и Р3 – левостороннего.

0	П0	П1	П4	С/П	П2	ИП0	$+$	П0	ИП2
Fx^2	ИП1	$+$	П1	КИП4	БП	04	ИП0	ИП4	\div
БП	ИП1	ИП0	Fx^2	ИП4	\div	—	П7	ИП4	1
—	$+$	П6	ИП7	С/П	\div	П0	С/П	С/П	ИП0
—	$Fx \geq 0$	53	ХY	ИП0	ХY	—	$Fx \geq 0$	53	0
П1	БП	55	1	П1	ИП0	С/П	—	$Fx < 0$	64

0	П2	БП	66	1	П2	С/П	/—/ ИП0 —
Fx<0 75		0	П3	С/П	1	П3	С/П

Инструкция к программе ПМК 3/35: В/О; С/П; ввести массив данных: x_i ; С/П. Объем выборки n – в Р4, БП 17 С/П; σ_0^2 С/П; $x_{n-1, \alpha/2}$ С/П; $x_{n-1, 1-\alpha/2}$ С/П; $x_{n-1, 1-\alpha}$ С/П; $x_{n-1, \alpha}$ С/П. Результаты: g – в Р0, в Р1 – индикатор двустороннего критерия, в Р2 – правостороннего, в Р3 и РХ – левостороннего. Выборочное среднее m – в Р5, выборочная дисперсия s^2 – в Р6.

Программы ПМК 3/36–ПМК 3/38. Предназначены для проверки гипотезы о равенстве дисперсий гауссовских случайных величин: программа ПМК 3/36 – для двух случайных величин, программы ПМК 3/37 и ПМК 3/38 – для нескольких. Гипотеза H_0 принимается при нулевом индикаторе критерия.

Программа ПМК 3/36 имеет исходные данные: выборочные дисперсии s_1^2 и s_2^2 , объемы выборок n_1 и n_2 , квантили F -распределения. Статистика g вычисляется по формуле $g = s_1^2/s_2^2$.

С/П	÷	П0	С/П	ИП0	—	Fx≥0 12	0	П1
БП	14	1	П1	ИП0	С/П	—	Fx<0 22	0
П2	С/П	1	П2	С/П				

Инструкция к программе ПМК 3/36: В/О; s_1^2 С/П; s_2^2 С/П; $F_{n_1-1, n_2-1, 1-\alpha/2}$ С/П; $F_{n_1-1, n_2-1, 1-\alpha}$ С/П. Результаты: g – в Р0, в Р1 – индикатор двустороннего критерия, в Р2 – одностороннего.

Программа ПМК 3/37. Имеются / независимых выборок случайной величины одинакового объема n с выборочными дисперсиями s_i^2 . Используются выражения (2.173), (2.174), квантили распределения Кокрена $C_{I, n-1, \alpha}$.

П0	П4	0	П1	П2	С/П	П3	ИП1	+	П1
ИП2	ИП3	—	Fx≥0	17	БП	19	ИП3	П2	FL0
05	ИП1	ИП4	÷	П3	ИП2	ИП1	÷	П0	С/П
—	Fx<0	36	0	П5	С/П	1	П5	С/П	

Инструкция к программе ПМК3/37: В/О; / С/П; ввести все значения выборочных дисперсий: s_i^2 С/П; $C_{I, n-1, \alpha}$ С/П. Результаты: g – в Р0, наибольшая выборочная дисперсия $\max\{s_i^2\}$ – в Р2; в Р3 – \bar{s}^2 , в Р5 и РХ – индикатор критерия.

Программа ПМК 3/38 в отличие от программы ПМК 3/37 применяется, когда объемы независимых выборок

n_i случайной величины различны. Используются квантили χ^2 -распределения [см. формулы (2.175), (2.176)].

0	П0	П1	П2	П3	П4	С/П	П5	ИП0	+
П0	ИП5	F1/x	ИП1	+	П1	С/П	П6	ИП5	X
ИП2	+	П2	ИП6	Fln	ИП5	X	ИП3	+	П3
КИП	БП	06	ИП0	ИП2	ИП0	÷	П5	Fln	X
ИП3	ИП0	+	П6	—	ИП1	ИП0	F1/x	—	3
÷	ИП4	1	—	÷	1	+	÷	П7	С/П
ИП7	—	Fx<0	67	0	П8	С/П	1	П8	С/П

Инструкция к программе ПМК 3/38: В/О; С/П; ввести все пары значений: $n_i - 1$ С/П; s_i^2 С/П. В Р0 – значение v БП 33 С/П; $\chi_{v, 1-\alpha}^2$ С/П. Результаты: v^{-1} – в Р1, s^2 – в Р5, в Р6 – коэффициент b , в Р7 – g , в Р8 и РХ – индикатор критерия.

ГЛАВА ЧЕТВЕРТАЯ

ПОСТРОЕНИЕ МОДЕЛЕЙ ИСТОЧНИКОВ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ДАННЫХ МЕТОДАМИ РЕГРЕССИОННОГО АНАЛИЗА

4.1. ЗАДАЧИ РЕГРЕССИОННОГО АНАЛИЗА

Регрессионные модели. Регрессионный анализ является основным статистическим методом построения математических моделей объектов или явлений по экспериментальным данным. Эти модели связывают количественные переменные – результирующую и объясняющие (в различных областях используются разные названия этих переменных: выход, целевой, выходной или результирующий признак, отклик, результативная, эндогенная или зависимая переменная; факторные, предсказывающие, экзогенные переменные, факторы, фактор-аргументы, предикторы и др. [1, 3, 46, 78]). Необходимо отметить, что определяемая в ходе анализа функция регрессии лишь формально устанавливает соответствие между переменными этих двух групп, хотя они в действительности могут и не состоять в причинно-следственных отношениях. Поэтому устанавливаемые в ходе регрессионного анализа связи могут иногда ложно истолковываться как причинно-следственные. Таким образом, могут возник-

нуть так называемые нонсенсрегрессии (ложные, абсурдные), которые не имеют практического смысла [1, 78]. По этой причине перед применением статистического аппарата на основе профессионально-логического анализа проблемы необходимо решить, какую из переменных рассматривать как результирующую, а какие из регистрируемых величин – как объясняющие.

Рассмотрим общую схему регрессионного анализа. Пусть результирующая переменная Y связана с некоторыми объясняющими переменными x_1, \dots, x_k , которые удобно представлять в виде компонент вектора $\mathbf{x} = [x_1, \dots, x_k]^T$. Связь является стохастической: значение y переменной Y , полученные в различных экспериментах при фиксированных значениях вектора \mathbf{x} , случайным образом флюктуирует вокруг некоторого неизвестного уровня $\eta(\mathbf{x})$:

$$Y \equiv Y(\mathbf{x}) = \eta(\mathbf{x}) + \epsilon, \quad (4.1)$$

где второе слагаемое определяет случайное отклонение результирующей переменной от величины $\eta(\mathbf{x})$. Случайные отклонения ϵ могут служить проявлением влияния не учтенных в векторе \mathbf{x} (и может быть, случайных) факторов, случайными ошибками измерения результирующей переменной и другими причинами, которые более подробно будут обсуждаться ниже. Среднее значение отклонений полагается равным нулю, поэтому математическое ожидание результирующей переменной совпадает со значением функции $\eta(\mathbf{x})$:

$$M\{Y(\mathbf{x})\} = \eta(\mathbf{x}). \quad (4.2)$$

Это уравнение называется регрессией (уравнением регрессии), а функция $\eta(\mathbf{x})$ – функцией регрессии (ФР).

Существует большое число типов регрессионных моделей, определяемых видом ФР $\eta(\mathbf{x})$, которые, как правило, зависят не только от объясняющих переменных, но и от некоторых параметров β_1, \dots, β_m , которые также удобно представлять в виде векторов $\beta = [\beta_1, \dots, \beta_m]^T$:

$$\eta(\mathbf{x}) = \eta(\mathbf{x}, \beta). \quad (4.3)$$

Для таких ФР задача их определения сводится к задаче оценки вектора параметров β по экспериментальным данным. В зависимости от того, как эти параметры входят в ФР, модели делятся на линейные и нелинейные (по параметрам).

Основные результаты в настоящее время получены применительно к линейным регрессионным моделям, которые в общем виде можно записать следующим образом:

$$Y(x) = \eta(x, \beta) + \epsilon = \sum_{j=1}^m \beta_j f_j(x) + \epsilon, \quad (4.4)$$

где $f_j(x) \equiv f(x_1, \dots, x_k)$ — некоторые известные функции объясняющих переменных, не включающие в себя неизвестные коэффициенты β_j . Функции $f_j(x)$ называют регрессорами.

Эту модель удобно представить в векторной форме:

$$Y \equiv Y(x) = f^\top \beta + \epsilon, \quad (4.5)$$

где $f^\top = [f_1(x), \dots, f_m(x)]^\top$ — вектор регрессоров.

Особенно часто используются полиномиальные регрессоры, в частности так называемая линейная (по факторам) полиномиальная регрессионная модель:

$$Y = \sum_{j=1}^m \beta_j x_j + \epsilon = x^\top \beta + \epsilon. \quad (4.6)$$

Если $M\{Y\} = 0$, то размерности векторов x и β равны числу объясняющих переменных ($k = m$). В противном случае размерности векторов полагают на единицу больше ($m = k + 1$): в число объясняющих переменных вводят фиктивную переменную, равную единице ($x = [1 x_1, \dots, x_k]^\top$). Тогда β_1 равен значению ФР при нулевых значениях действительных факторов и модель (4.6) принимает вид

$$Y = x^\top \beta + \epsilon = \beta_1 + \sum_{j=2}^m \beta_j x'_j + \epsilon \quad (x'_j = x_j - 1). \quad (4.7)$$

Из сопоставления (4.6) и (4.7) с выражением (4.5) следует, что в роли регрессоров выступают объясняющие переменные: $f^\top = [x_1, \dots, x_m]^\top$ или $f^\top = [1 x_1, \dots, x_k]^\top$.

Другой, широко используемой формой полиномиальной модели является полиномиальная ФР одной объясняющей переменной, например времени:

$$Y = \sum_{j=1}^m \beta_j x^{j-1} + \epsilon = x^\top \beta + \epsilon, \quad (4.8)$$

где $x^\top \equiv f^\top = [1 x x^2, \dots, x^{k-1}]^\top$.

В общем случае полиномиальная регрессионная модель выглядит следующим образом:

$$Y = \beta_1 + \sum_{j=1}^k \beta_j x_j + \sum_{j=1}^k \sum_{i=j+1}^k \beta_{ij} x_i x_j + \dots + \sum_{j=1}^k \sum_{i=j+1}^k \sum_{l=j+1}^k \beta_{jil} x_i x_j x_l + \dots \quad (4.9)$$

Это уравнение также можно представить в форме (4.5), если перенумеровать все параметры в выражении (4.9) от 1 до m и принять:

$$f_1(x) = 1; f_2(x) = x_1; \dots; f_{k+1}(x) = x_k; f_{k+2}(x) = x_1^2; \\ f_{k+3}(x) = x_1 x_2; \dots; f_q(x) = x_1 x_k; f_{q+1}(x) = x_2^2, \dots$$

Рассмотренные модели описывали результат одного эксперимента. Распространим их на случай выполнения n измерений. С учетом общего выражения (4.5) результаты n экспериментов можно представить в виде:

$$y_1 \equiv y(x_1) = f_1^T \beta + \epsilon_1; \\ \dots \dots \dots \\ y_n \equiv y(x_n) = f_n^T \beta + \epsilon_n, \quad (4.10)$$

где y_i — значение результирующей переменной Y , полученное в i -м эксперименте; $x_i = [x_{i1}, \dots, x_{im}]^T$ — вектор объясняющих переменных в i -м эксперименте; $f_i^T = [f_1(x_i), \dots, f_m(x_i)]^T$ — вектор регрессоров; ϵ_i — i -е значение случайного отклонения.

Здесь предполагается, что параметры β_j неизменны при проведении всех экспериментов. Величина x_{ij} ($i = \overline{1, n}$; $j = \overline{1, m}$) представляет собой значение j -й переменной, полученной в i -м опыте.

Выражения (4.10) удобно записывать в векторно-матричной форме:

$$y = F\beta + \epsilon = \eta + \epsilon, \quad (4.11)$$

где $y = [y_1, \dots, y_n]^T$ — вектор откликов;

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_1^T \\ \dots \\ \mathbf{f}_n^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(x_1) & \dots & f_m(x_1) \\ \dots & \dots & \dots \\ f_1(x_n) & \dots & f_m(x_n) \end{bmatrix}$$

— матрица регрессоров; $\mathbf{e} = [\epsilon_1, \dots, \epsilon_n]^T$ — вектор отклонений; $\eta = [\eta(x_1), \dots, \eta(x_n)]^T$ — вектор регрессии.

Например, для линейной модели наблюдений (4.7) матрица регрессоров, которую также называют матрицей плана эксперимента, имеет вид

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 1 & x_{11} & x_{12} \dots x_{1(m-1)} \\ 1 & x_{21} & x_{22} \dots x_{2(m-1)} \\ \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_{n1} & x_{n2} \dots x_{n(m-1)} \end{bmatrix}, \quad (4.12)$$

где x_{ij} — значение j -го фактора в i -м эксперименте.

Для полиномиальной модели (4.8)

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 \dots x_1^{m-1} \\ 1 & x_2 \dots x_2^{m-1} \\ \dots & \dots \\ 1 & x_n \dots x_n^{m-1} \end{bmatrix}, \quad (4.13)$$

где x_i — значение единственной объясняющей переменной в i -м эксперименте.

В частности, если объясняющая переменная — время, отсчеты которого берутся с постоянным шагом T , т. е. $x_i = (i - 1)T$, то

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & T & T^2 & \dots & T^{m-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & (n-1)T & [(n-1)T]^2 & \dots & [(n-1)T]^{m-1} \end{bmatrix}. \quad (4.14)$$

Основной задачей регрессионного анализа является получение оценок параметров регрессии ($\hat{\beta}_1, \dots, \hat{\beta}_m$), которые были бы оптимальными в определенном смысле. Полученные оценки, которые будем представлять в виде компонент вектора $\hat{\beta} = [\hat{\beta}_1, \dots, \hat{\beta}_m]^T$, позволяют решать задачу оценки (восстановления) регрессии и ее прогноза. В первом случае в качестве оценки "истинного" значения результирующей переменной, соответствующей вектору регрессоров \mathbf{f}_i ($i \in [1, n]$), уже использованному при формирова-

нии оценки вектора параметров, применяется величина

$$\hat{y}_i \equiv \hat{\eta}(x_i) = f_i^T \hat{\beta}, \quad (4.15)$$

а в качестве оценки вектора регрессии $\hat{\eta} = [\eta(x_1), \dots, \eta(x_n)]^T$ — вектор

$$\hat{y} \equiv \hat{\eta} = F\hat{\beta}. \quad (4.16)$$

Во втором случае для оценки значения ФР при векторе x_i объясняющих переменных, не совпадающем ни с одним из ранее зафиксированных значений x_i ($i = \overline{1, n}$), используется величина

$$\hat{y}_i \equiv \hat{\eta}(x_i) = f_i^T \hat{\beta}. \quad (4.17)$$

Примеры приведения задачи обработки экспериментальных данных к задаче регрессионного анализа. Приведем примеры, показывающие, что многие задачи оценки параметров модели источника экспериментальных данных могут быть сформулированы в терминах линейной регрессии.

Восстановление сигнала на ходе линейной динамической системы. Сигнал $Y(t)$, наблюдаемый на выходе линейной динамической системы с известной импульсной характеристикой $h(t)$, представляется в виде суммы сигнала $y_u(t)$ — результата преобразования системой неизвестного сигнала $u(t)$, и погрешности измерений $\epsilon(t)$:

$$Y(t) = y_u(t) + \epsilon(t), \quad (4.18)$$

$$\text{где } y_u(t) = \int_{-\infty}^t h(t-\tau)u(\tau)d\tau; \quad \epsilon(t) — \text{случайный процесс}$$

с нулевым математическим ожиданием и известной корреляционной функцией $R_\epsilon(\tau)$.

Если произведено n измерений $y[i]$ отсчетов реализации $y(t)$ сигнала $Y(t)$ ($y[i] \equiv y(t)|_{t=(i-1)T}$) и определена дискретная импульсная характеристика системы $h[i] \equiv h(t)|_{t=(i-1)T}$, то с учетом выражения (4.18) может быть получена следующая система уравнений [5]:

$$y = F\beta + \epsilon, \quad (4.19)$$

$$\text{где } y = [y[1], \dots, y[n]]^T;$$

$$F = \begin{bmatrix} Th[1] & 0 & 0 & \dots & 0 \\ Th[2] & Th[1] & 0 & \dots & 0 \\ Th[3] & Th[2] & Th[1] & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \vdots \\ Th[m] & Th[m-1] & Th[m-2] & \dots & 0 \\ 0 & Th[m] & Th[m-1] & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & Th[1] \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & Th[m] \end{bmatrix};$$

$\epsilon = [\epsilon[1], \dots, \epsilon[n]]^T$ – вектор с нулевым математическим ожиданием ($M\{\epsilon\} = 0$) и известной корреляционной матрицей

$$D\{\epsilon\} = [R_\epsilon((i-j)T)] \quad (i, j = \overline{1, n}); \quad \beta = [u[1], \dots, u[m]]^T.$$

Идентификация линейной динамической системы. Существует несколько постановок задачи идентификации линейных систем [5, 8, 24], т. е. задачи определения динамических характеристик систем по экспериментальным данным. Здесь рассмотрим лишь два варианта, которые часто используются на практике [5, 21, 24, 44, 45].

1. Задача оценки импульсной характеристики системы $h(t)$ по входному $U(t)$ и выходному $Y(t)$ сигналам, измеряемым с погрешностями: $U(t) = u_0(t) + \delta(t)$; $Y(t) = y_u(t) + \epsilon(t)$. Здесь $y_u(t)$ – результат преобразования сигнала $u(t)$ исследуемой системой. Для выходного сигнала можно записать

$$Y(t) = \int_0^t u(t-\tau) h(\tau) d\tau + \epsilon(t). \quad (4.20)$$

Шумы $\delta(t)$ и $\epsilon(t)$ имеют нулевое математическое ожидание и известные корреляционные функции $R_\delta(\tau)$ и $R_\epsilon(\tau)$.

При дискретном наблюдении реализаций сигналов $u(t)$ и $y(t)$ с шагом дискретизации T и получении наборов отсчетов $\{y[i]\}$, $\{u[i]\}$ ($i = \overline{1, n}$), можно получить систему линейных уравнений, которой должна удовлетворять дискретная импульсная характеристика $h[i]$ ($i = \overline{1, m}$):

$$y = F\beta + \epsilon, \quad (4.21)$$

где $y = [y[1], \dots, y[n]]^T$;

$$F = \begin{bmatrix} Tu[1] & 0 & & 0 & \dots & 0 \\ Tu[2] & Tu[1] & & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ Tu[m] & Tu[m-1] & Tu[m-2] & \dots & 0 \\ 0 & Tu[m] & Tu[m-1] & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & Tu[1] \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & Tu[m] \end{bmatrix};$$

$$\epsilon = [\epsilon[1], \dots, \epsilon[n]]^T; \beta = [h[1], \dots, h[m]]^T.$$

2. Задача оценки коэффициентов разностного уравнения дискретной модели системы по входному и выходному дискретным сигналам, наблюдаемым с ошибками (см. выше).

Пусть разностное уравнение, описывающее систему, имеет вид

$$y[i] + a_{N-1}y[i-1] + \dots + a_0y[i-N] = \\ = b_P u[i-N+P] + \dots + b_0 u[i-N], \quad (4.22)$$

где N – порядок уравнения; $P < N$; a_i, b_j – неизвестные коэффициенты ($i = \overline{0, N-1}$; $j = \overline{0, P}$).

Это уравнение можно переписать следующим образом:

$$-y[i] = a_0y[i-N] + \dots + a_{N-1}y[i-1] - \\ - b_0 u[i-N] - \dots - b_P u[i-N+P]. \quad (4.23)$$

Предположим, что в результате наблюдений получено M отсчетов реализаций входного и выходного сигналов ($M \geq 2N$). Тогда с учетом выражения (4.23) можно записать систему уравнений, из которой определяются коэффициенты уравнения (4.22):

$$y = F\beta + \epsilon, \quad (4.24)$$

где $y = [-y[N+1] \dots -y[M]]^T$;

$$F = \begin{bmatrix} y[1] & y[2] & \dots & y[M] & -u[1] & \dots & -u[P+1] \\ y[2] & y[3] & \dots & y[N+1] & -u[2] & \dots & -u[P+1] \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ y[M-N] & y[M-N+1] & \dots & y[M-1] & -u[M-N] & \dots & -u[M-N+P] \end{bmatrix};$$

$$\epsilon = [-\epsilon[N+1], \dots, -\epsilon[M]]^T; \beta = [a_0, \dots, a_{N-1}, b_0, \dots, b_P]^T.$$

Идентификация модели временного ряда (дискретного случайного процесса). Для описания реальных случайных процессов широко используются их модели в виде некоторых гипотетических линейных дискретных систем, формирующих процессы с аналогичными корреляционными свойствами из некоррелированного шума. Такие модели называются формирующими фильтрами [23, 49]. В частности, как в эконометрии, так и в технике широко применяются модели авторегрессии — скользящего среднего. Рассмотрим авторегрессионную модель. Она определяется разностным уравнением:

$$Y[i] + \sum_{j=1}^m a_j Y[i-j] = N[i], \quad (4.25)$$

где $Y[i]$ — отсчеты случайного процесса; a_j — коэффициенты модели ($j = \overline{1, m}$); $N[i]$ — отсчеты (ненаблюдаемые) некоррелированного порождающего шума ($M\{N[i]\} = 0$, $M\{N[i]N[j]\} = \sigma^2 \delta_{ij}$).

Авторегрессионная модель может описывать как стационарный, так и нестационарный случайный процесс. Необходимым и достаточным условием стационарности является расположение корней p_i ($i = \overline{1, m}$) характеристического уравнения $p^m + a_1 p^{m-1} + \dots + a_m = 0$ внутри круга единичного радиуса, т. е. условие $|p_i| < 1$.

Решение уравнения (4.25) можно записать в рекуррентной форме:

$$Y[i] = \sum_{j=1}^m (-a_j) Y[i-j] + N[i] \quad (i \geq m+1). \quad (4.26)$$

Пусть производятся измерения отсчетов реализации случайного процесса $Y[i]$: $y[1], \dots, y[k]$ ($k \geq 2m$). Тогда на основании выражения (4.25) может быть составлена система уравнений, которой должны удовлетворять искомые коэффициенты модели:

$$y = F\beta + \epsilon, \quad (4.27)$$

где $y = [y[m+1], \dots, y[k]]^T$;

$$F = \begin{bmatrix} -y[m] & -y[m-1] & \dots & -y[1] \\ -y[m+1] & -y[m] & \dots & -y[2] \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -y[k-1] & -y[k-2] & \dots & -y[k-m] \end{bmatrix};$$

$$\beta = [a_1, \dots, a_m]^T; \quad \epsilon = [n[m+1], \dots, n[k]]^T.$$

Оценка параметров полиномиальной функции, измеряемой с погрешностями. Пусть $f(t)$ — детерминированная (полезная) составляющая случайного наблюдаемого процесса, представляющая собой полином степени $m - 1$:

$$f(t) = a_0 + a_1 t + \dots + a_m t^m - 1. \quad (4.28)$$

В частности, такая аппроксимация часто используется для представления невозмущенных траекторий движения различных объектов [49]. Пусть в результате эксперимента получены $n \geq m$ отсчетов наблюдаемого процесса $Y(t_i)$: $\{y[i]\}$ ($i = \overline{1, n}$), где $y[i] \equiv y(t_i)$. Тогда, учитывая, что $y(t_i) = f(t_i) + \epsilon(t_i)$, (4.29)

ненсложно записать систему уравнений для определения коэффициентов полинома (4.28):

$$y = F\beta + \epsilon, \quad (4.30)$$

где $y = [y[1], \dots, y[n]]^T$;

$$F = \begin{bmatrix} 1 & t_1 & t_1^2 & \dots & t_1^{m-1} \\ 1 & t_2 & t_2^2 & \dots & t_2^{m-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & t_n & t_n^2 & \dots & t_n^{m-1} \end{bmatrix};$$

$$\epsilon = [\epsilon[1], \dots, \epsilon[n]]^T; \quad \beta = [a_0, \dots, a_m]^T.$$

Здесь ϵ — случайный вектор с нулевым математическим ожиданием и известной корреляционной матрицей $D\{\epsilon\}$.

4.2. ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ КЛАССИЧЕСКОГО РЕГРЕССИОННОГО АНАЛИЗА

Базовые (фундаментальные) положения классического линейного регрессионного анализа. Классический линейный регрессионный анализ опирается на систему положений о свойствах регрессионной модели, выполнение которых гарантирует получение оптимальных оценок параметров и функции регрессии [1, 3, 15, 27, 78]. Они касаются прежде всего случайной переменной ϵ , учитывающей влияние неучтенных факторов, случайных помех и ошибок измерений. Кроме того, эти положения предъявляют определенные требования к матрице регрессоров F . Перечислим наиболее важные из них.

1. На вектор неизвестных параметров не наложено никаких ограничений: $\beta \in \mathbb{R}^m$.

2. Вектор ϵ есть n -мерная случайная величина.

3. Математическое ожидание вектора отклонений равно нулю $M\{\epsilon\} = 0$.

4. Компоненты вектора ϵ не коррелированы между собой и имеют одинаковые дисперсии σ_ϵ^2 :

$$\text{cov}\{\epsilon_i, \epsilon_j\} \equiv M\{\epsilon_i \epsilon_j\} = \sigma_\epsilon^2 \delta_{ij}$$

или

$$D\{\epsilon\} \equiv [\text{cov}\{\epsilon_i, \epsilon_j\}] \equiv M\{\epsilon \epsilon^\top\} = \sigma_\epsilon^2 I,$$

где δ_{ij} — символ Кронекера; I — единичная матрица.

Это положение часто называют условием однородности (гомоскедастичности) и некоррелированности измерений. Если оно не выполняется, измерения неоднородны (гетероскедастичны) и (или) коррелированы.

Из него следуют соотношения для математического ожидания и корреляционной матрицы вектора значений зависимой переменной:

$$\bar{Y} = F\beta \equiv \eta;$$

$$D\{Y\} \equiv M\{(Y - \bar{Y})(Y - \bar{Y})^\top\} = D\{\epsilon\} = \sigma_\epsilon^2 I.$$

5. Случайные величины ϵ_i ($i = \overline{1, n}$) и вектор ϵ в целом имеют гауссовское распределение. При выполнении положения 4

$$\epsilon_i \sim N(0, \sigma_\epsilon^2); \quad \epsilon \sim N(0, \sigma_\epsilon^2 I).$$

6. Матрица регрессоров F детерминирована, т. е. ее элементы $f_{ij} = f_j(x_i)$ не являются случайными величинами.

7. Ранг матрицы регрессоров равен числу параметров ФР: $\text{rank } F = m$.

Классическим регрессионным анализом называют процедуру оценивания регрессионных параметров и статистический анализ модели при выполнении этих положений. Его основные положения рассматриваются ниже. В последующем перечисленные предположения будут ослабляться, поскольку их нарушения являются скорее правилом, чем исключением (см. § 4.5).

Классические оценки параметров регрессии методом наименьших квадратов и их свойства. Рассмотрим задачу оценивания параметров регрессии β_i ($i = \overline{1, m}$) по резуль-

татам экспериментов y_i , ($i = 1, \dots, n$). Для оценивания могут использоваться различные методы. В классическом регрессионном анализе используется метод наименьших квадратов (МНК). В этом случае оценки минимизируют сумму квадратов невязок оценивания. Невязками оценивания, которые также называют остатками, являются разности

$$e_i = y_i - \hat{y}_i,$$

а вектором невязок — вектор

$$\mathbf{e} = \mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}}.$$

Остатки вызываются двумя причинами — отличием вектора оценок $\hat{\beta}$ от вектора истинных параметров β и наличием случайных возмущений ϵ :

$$\mathbf{e} = \mathbf{F}(\beta - \hat{\beta}) + \epsilon. \quad (4.31)$$

Сумма квадратов остатков

$$Q_0 = \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2 \equiv \sum_{i=1}^n e_i^2 \equiv (\mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}})^\top (\mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}}) \equiv \mathbf{e}^\top \mathbf{e} \quad (4.32)$$

выступает в МНК в качестве критерия качества оценки. Оценкой метода наименьших квадратов (МНК-оценкой) называют вектор $\hat{\beta}$, минимизирующий функционал (4.32). Для нахождения оценки перепишем (4.32) в виде

$$Q_0 = Q(\hat{\beta}) = (\mathbf{y} - \mathbf{F}\hat{\beta})^\top (\mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}}),$$

продифференцируем его по $\hat{\beta}$ и приравняем нулю. В результате получим уравнение для вычисления оценки:

$$\partial Q_0 / \partial \hat{\beta} = -2\mathbf{F}^\top \mathbf{y} + 2\mathbf{F}^\top \hat{\mathbf{F}}\hat{\beta} = 0.$$

Его очевидным образом можно преобразовать к виду

$$\mathbf{F}^\top \hat{\mathbf{F}}\hat{\beta} = \mathbf{F}^\top \mathbf{y}. \quad (4.33)$$

Эта система линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) является основой для получения МНК-оценок параметров регрессии и называется системой нормальных уравнений.

Поскольку матрица \mathbf{F} имеет полный ранг (предложение 7), то матрица $(\mathbf{F}^\top \mathbf{F})$ невырожденная и, следовательно, имеет обратную матрицу $(\mathbf{F}^\top \mathbf{F})^{-1}$. Умножив правую и левую части

системы (4.33) на $(F^T F)^{-1}$, получим явное выражение для МНК-оценки вектора параметров:

$$\hat{\beta} = (F^T F)^{-1} F^T y, \quad (4.34)$$

откуда получается выражение для оценки вектора регрессии:

$$\hat{\eta} = F \hat{\beta} = F (F^T F)^{-1} F^T y. \quad (4.35)$$

Матрица $G = F^T F$ называется информационной, а её обратная $S = (F^T F)^{-1}$ — матрицей ошибок.

Рассмотрим основные свойства МНК-оценок параметров и вектора регрессии. Начнем со свойств, не зависящих от вида распределения возмущений.

1. МНК-оценки относятся к классу линейных. Действительно, оценки $\hat{\beta}$ и $\hat{\eta}$ получаются из вектора наблюдений y с помощью линейного преобразования — умножения на матрицы $A = (F^T F)^{-1} F^T$ и $B = FA$ соответственно:

$$\hat{\beta} = Ay; \quad \hat{\eta} = By. \quad (4.36)$$

2. МНК-оценки являются несмещанными:

$$M\{\hat{\beta}\} = M\{(F^T F)^{-1} F^T y\} = \beta; \quad (4.37)$$

$$M\{\hat{\eta}\} = M\{F\hat{\beta}\} = \eta. \quad (4.38)$$

3. Корреляционные матрицы оценок определяются следующими выражениями:

$$\begin{aligned} D\{\hat{\beta}\} &= M\{(\hat{\beta} - \beta)(\hat{\beta} - \beta)^T\} = \\ &= M\{[(F^T F)^{-1} F^T (y - \eta)][(F^T F)^{-1} F^T (y - \eta)]^T\} = \\ &= M\{(F^T F)^{-1} F^T (y - \eta)(y - \eta)^T F [(F^T F)^{-1}]^T\} = \\ &= (F^T F)^{-1} F^T M\{(y - \eta)(y - \eta)^T\} F (F^T F)^{-1} = \\ &= (F^T F)^{-1} F^T \sigma_e^2 I F (F^T F)^{-1} = \sigma_e^2 (F^T F)^{-1} = \sigma_e^2 S; \end{aligned} \quad (4.39)$$

$$\begin{aligned} D\{\eta\} &= M\{(\hat{\eta} - \eta)(\hat{\eta} - \eta)^T\} = M\{F(\hat{\beta} - \beta)(\hat{\beta} - \beta)^T F^T\} = \\ &= F M\{(\hat{\beta} - \beta)(\hat{\beta} - \beta)^T\} F^T = FD\{\hat{\beta}\} F^T = \\ &= \sigma_e^2 F (F^T F)^{-1} F^T = \sigma_e^2 F S F^T. \end{aligned} \quad (4.40)$$

При выводе учтено, что $[(F^T F)^{-1}]^T = (F^T F)^{-1}$ (ввиду симметричности матрицы), $M\{(y - \eta)(y - \eta)^T\} = \sigma_\epsilon^2 I$ (см. положение 4).

Элементами матриц $D\{\hat{\beta}\}$ и $D\{\hat{\eta}\}$ являются дисперсии $\sigma^2\{\hat{\beta}_i\}$ и $\sigma^2\{\hat{\eta}_i\}$ и взаимно корреляционные моменты между оценками параметров ($R\{\hat{\beta}_i, \hat{\beta}_j\}$) или оценками отсчетов ФР ($R\{\hat{\eta}_i, \hat{\eta}_j\}$).

Из выражений (4.39) и (4.40) следует, что оценки параметров регрессии и отсчетов ФР будут некоррелированными только в том случае, если столбцы матрицы F попарно ортогональны и матрица G является диагональной.

Показано, что МНК-оценки являются эффективными в классе несмешанных линейных оценок (теорема Гасса-Маркова) [3, 15, 27, 67]. Если возмущения имеют гауссовское распределение (положение 5), то МНК-оценки являются эффективными и в классе всех несмешанных оценок (линейных и нелинейных) и совпадают с оценками метода максимального правдоподобия.

Эффективность МНК-оценок означает, что

$$D\{\hat{\beta}\} \leq D\{\tilde{\beta}\}; \sigma^2\{\hat{\beta}_i\} \leq \sigma^2\{\tilde{\beta}_i\} \quad (i = \overline{1, m}); \\ \text{tr}\{D\{\hat{\beta}\}\} \leq \text{tr}\{D\{\tilde{\beta}\}\}; \det D\{\hat{\beta}\} \leq \det D\{\tilde{\beta}\}. \quad (4.41)$$

Аналогично для оценок регрессии

$$D\{\hat{\eta}\} \leq D\{\tilde{\eta}\}; \sigma^2\{\hat{\eta}_i\} \leq \sigma^2\{\tilde{\eta}_i\} \quad (i = \overline{1, n}); \quad (4.42) \\ \text{tr}\{D\{\hat{\eta}\}\} \leq \text{tr}\{D\{\tilde{\eta}\}\}; \det D\{\hat{\eta}\} \leq \det D\{\tilde{\eta}\}.$$

Здесь $\tilde{\beta}, \tilde{\beta}_i, \tilde{\eta}$ и $\tilde{\eta}_i$ – произвольные оценки β, β_i, η и η_i , указанных классов.

Отметим, что величины $\det D\{\hat{\beta}\}$ и $\det D\{\hat{\eta}\}$ называются обобщенными дисперсиями оценок векторов параметров и регрессии.

4. МНК-оценки состоятельны:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\{| \hat{\beta}_i - \beta_i | < \gamma\} = 1 \quad (i = \overline{1, m}),$$

где γ – произвольное положительное число.

5. МНК-оценки параметров регрессии позволяют получить несмешанные эффективные и состоятельные оценки вектора

возмущений, дисперсии и корреляционной матрицы возмущений. Ими являются вектор остатков

$$\hat{\epsilon} = \epsilon \equiv (y - F\hat{\beta}), \quad (4.43)$$

величина

$$\hat{\sigma}_\epsilon^2 \equiv s^2 = \hat{\epsilon}^T \hat{\epsilon} / (n - m) \quad (4.44)$$

и матрица

$$\hat{D}\{\epsilon\} = s^2 S = (y - F\hat{\beta})^T (y - F\hat{\beta}) (F^T F)^{-1} / (n - m). \quad (4.45)$$

Теперь рассмотрим свойства, связанные с предположением о гауссовском распределении возмущений.

6. При выполнении положения 5 векторы оценок $\hat{\beta}$ и $\hat{\eta}$ имеют многомерные гауссовские распределения:

$$\hat{\beta} \sim N(\beta; \sigma_\epsilon^2 (F^T F)^{-1}); \quad \hat{\eta} \sim N(\eta, \sigma_\epsilon^2 F (F^T F)^{-1} F^T). \quad (4.46)$$

7. Случайная величина

$$g = Q_0 / \sigma_\epsilon^2, \quad (4.47)$$

где $Q_0 = \epsilon^T \epsilon$ — так называемая остаточная сумма квадратов, имеет центральное χ^2 -распределение с $\nu = n - m$ степенями свободы:

$$g \sim \chi^2(\nu). \quad (4.48)$$

Рекуррентный алгоритм метода наименьших квадратов. Традиционный алгоритм МНК-оценок параметров регрессии по выборке данных полного объема (4.34) не всегда может быть использован на практике. К его недостаткам относятся большая требуемая емкость памяти для хранения вектора y и матрицы регрессоров F , необходимость заново решать задачу оценивания при поступлении новых данных, невозможность получения текущих оценок в интересах оперативного управления объектом в ходе эксперимента, необходимость в большом числе вычислительных операций при высокой размерности вектора параметров обращения информационной матрицы. Рассмотрим свободный от этих недостатков рекуррентный алгоритм последовательного оценивания вектора параметров по мере поступления новых измерений.

Пусть первоначально проведено i измерений. Это позволяет сформировать вектор наблюдений и матрицу регрессо-

ров, соответствующие этому измерению:

$$\mathbf{y}^{(i)} = [y_1, \dots, y_i]^T; \quad \mathbf{F}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_1^T \\ \vdots \\ \mathbf{f}_i^T \end{bmatrix}. \quad (4.49)$$

Сформируем оценку вектора параметров регрессии, соответствующую i измерениям:

$$\hat{\beta}^{(i)} = (\mathbf{F}_i^T \mathbf{F}_i)^{-1} \mathbf{F}_i^T \mathbf{y}^{(i)} \equiv \mathbf{S}_i \mathbf{F}_i^T \mathbf{y}^{(i)},$$

где $\mathbf{S}_i = (\mathbf{F}_i^T \mathbf{F}_i)^{-1}$ — матрица ошибок на i -м шаге.

После проведения $(i+1)$ -го измерения можно сформировать вектор результирующих переменных $\mathbf{y}^{(i+1)}$, матрицу регрессоров \mathbf{F}_{i+1} и получить оценку

$$\hat{\beta}^{(i+1)} = (\mathbf{F}_{i+1}^T \mathbf{F}_{i+1})^{-1} \mathbf{F}_{i+1}^T \mathbf{y}^{(i+1)} \equiv \mathbf{S}_{i+1} \mathbf{F}_{i+1}^T \mathbf{y}^{(i+1)}. \quad (4.50)$$

Очевидно, что

$$\mathbf{y}^{(i+1)} = \begin{bmatrix} \mathbf{y}^{(i)} \\ y_{i+1} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{F}_{i+1} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_i \\ \mathbf{f}_{i+1}^T \end{bmatrix}; \quad \mathbf{F}_{i+1}^T = [\mathbf{F}_i^T \mathbf{f}_{i+1}]. \quad (4.51)$$

Эти соотношения позволяют переписать выражение для оценки (4.50) следующим образом:

$$\hat{\beta}^{(i+1)} = (\mathbf{F}_i^T \mathbf{F}_i + \mathbf{f}_{i+1} \mathbf{f}_{i+1}^T)^{-1} (\mathbf{F}_i^T \mathbf{y}^{(i)} + \mathbf{f}_{i+1} y_{i+1}). \quad (4.52)$$

Теперь воспользуемся следующей формулой (часто называемой леммой об обращении матрицы)

$$(\mathbf{A} + \gamma \mathbf{aa}^T)^{-1} = \mathbf{A}^{-1} - \frac{\mathbf{A}^{-1} \mathbf{aa}^T \mathbf{A}^{-1}}{\mathbf{a}^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{a} + \gamma^{-1}}. \quad (4.53)$$

В ее справедливости можно убедиться с помощью непосредственной проверки выполнения равенства

$$(\mathbf{A} + \gamma \mathbf{aa}^T) \left(\mathbf{A}^{-1} - \frac{\mathbf{A}^{-1} \mathbf{aa}^T \mathbf{A}^{-1}}{\mathbf{a}^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{a} + \gamma^{-1}} \right) = \mathbf{I}.$$

С учетом выражения (4.53) можно получить рекуррентные выражения для матрицы ошибок и оценок параметров:

$$\mathbf{S}_{i+1} = \mathbf{S}_i - \frac{\mathbf{S}_i \mathbf{f}_{i+1} \mathbf{f}_{i+1}^T \mathbf{S}_i}{\mathbf{f}_{i+1}^T \mathbf{S}_i \mathbf{f}_{i+1} + 1}; \quad (4.54)$$

$$\begin{aligned} \hat{\boldsymbol{\beta}}^{(i+1)} &= [\mathbf{S}_i \mathbf{F}_i^T \mathbf{y}^{(i)} + \mathbf{S}_i \mathbf{f}_{i+1} \mathbf{y}_{i+1} - \mathbf{S}_i \mathbf{f}_{i+1} \mathbf{f}_{i+1}^T \mathbf{S}_i \times \\ &\times (\mathbf{F}_i^T \mathbf{y}^{(i)} + \mathbf{f}_{i+1} \mathbf{y}_{i+1})] (\mathbf{f}_{i+1}^T \mathbf{S}_i \mathbf{f}_{i+1} + 1)^{-1} = \hat{\boldsymbol{\beta}}^{(i)} + \\ &+ \mathbf{c}_{i+1} [\mathbf{y}_{i+1} - \mathbf{f}_{i+1}^T \hat{\boldsymbol{\beta}}^{(i)}], \end{aligned} \quad (4.55)$$

где $\mathbf{c}_{i+1} = \mathbf{S}_i \mathbf{f}_{i+1} / (\mathbf{f}_{i+1}^T \mathbf{S}_i \mathbf{f}_{i+1} + 1)$ – вектор коррекции.

Из выражения (4.55) следует, что оценка вектора параметров на $(i+1)$ -м шаге представляет собой сумму оценки вектора на предыдущем, i -м, шаге и поправки, которая, в свою очередь, формируется из невязки (разности между $(i+1)$ -м измерением \mathbf{y}_{i+1} и его прогнозом $\mathbf{f}_{i+1}^T \hat{\boldsymbol{\beta}}^{(i)}$) по оценке $\hat{\boldsymbol{\beta}}^{(i)}$ с помощью вектора коррекции.

Для функционирования алгоритма необходимо использовать начальные условия для вектора оценки $\hat{\boldsymbol{\beta}}^{(0)}$ и матрицы ошибок \mathbf{S}_0 . Здесь возможны различные варианты.

Во-первых, в качестве начальных условий можно использовать матрицу \mathbf{S}_j и вектор $\hat{\boldsymbol{\beta}}^{(j)}$ ($j \geq m$), сформированные с помощью нерекуррентного алгоритма. В этом случае рекуррентный алгоритм начинает работать с $(j+1)$ -го шага. Недостатками такого выбора начальных условий являются необходимость выполнения (однократного) обращения информационной матрицы и требование запоминания вектора данных и матрицы регрессоров на начальном этапе. Достоинством является то, что на любом шаге решения регрессионной задачи рекуррентная оценка совпадает с традиционной оценкой (4.34) и обладает всеми рассмотренными свойствами.

Во-вторых, для того чтобы рекуррентный алгоритм мог функционировать начиная с первого шага, можно задать произвольные значения начальных условий. Обычно полагают $\hat{\boldsymbol{\beta}}^{(0)} = 0$; $\mathbf{S}_0 = \alpha \mathbf{I}$, где α – достаточно малое число ($\alpha = 10^{-6} \dots 10^{-4}$). Как правило, при возрастании i рекуррент-

ные значения $\hat{\beta}^{(i+1)}$ и S_{i+1} сходятся к значениям, соответствующим традиционному МНК.

Отметим, что рекуррентный алгоритм позволяет в ходе эксперимента решать задачу оптимального останова измерений по достижении заданной точности оценок. Например, если заданы уровни дисперсий оценок параметров $D\{\hat{\beta}_i\}_{\text{тр}}$, то вычислительный процесс заканчивается на j -м шаге, если $\sigma_e^2 s_{jj} \leq D\hat{\beta}_i$ (где $i = \overline{1, m}$), где s_{ij} – i -й диагональный элемент матрицы S_j на j -м шаге.

Статистический анализ качества регрессионной модели. Полученные МНК-оценки коэффициентов регрессии (4.34) обеспечивают высокое качество полученной модели только при условии, что ее структура $F\beta$ соответствует структуре истинной зависимости $y_0 = F_0\beta_0$ между математическим ожиданием отклика и факторами. Однако на практике, как правило, отсутствует априорная информация о структуре истинной модели и исследователь вынужден поочередно рассматривать различные виды регрессионных моделей¹ и останавливаться на той, которая согласуется с экспериментальными данными. Такую модель называют адекватной [3, 15]. Она должна удовлетворять условию

$$M\{y\} = F\beta. \quad (4.56)$$

Адекватная модель не обязательно должна совпадать с истинной. Более того, адекватная модель не единственна – с помощью произвольного неособенного линейного преобразования от модели $F\beta$ можно перейти к другой адекватной модели $F^*\beta^*$: $F^* = FR$, $\beta^* = R^{-1}\beta$ (здесь R – невырожденная матрица). Однако общим для всех адекватных моделей является то, что для каждой из них существует неособенное линейное преобразование R , F , приводящее ее к истинной модели:

$$R_F: F^*R_F = F_0; R_F^{-1}\beta^* = \beta_0. \quad (4.57)$$

Ошибки в выборе структуры модели часто проявляются в том, что, во-первых, оцениваемая модель содержит больше параметров, чем истинная (так называемый перебор па-

¹ Проблемы рационального выбора структуры регрессионной модели рассмотрены в § 4.5.

метров), во-вторых, проверяемая модель содержит меньше параметров, чем истинная (недобор параметров). Рассмотрим последствия этих ошибок.

Начнем с недобора параметров. Пусть принятая ФР имеет вид

$$\eta = F\beta, \quad (4.58)$$

в то время как истинной ФР является функция

$$\eta_0 = F_0 \beta_0. \quad (4.59)$$

Будем считать, что вектор истинных параметров β_0 включает в себя вектор оцениваемых параметров:

$$\beta_0 = [\beta^T \beta_1^T]^T, \quad (4.60)$$

где β_1 – вектор параметров, не входящих в ФР (4.58).

В этом случае истинную матрицу регрессоров можно представить в виде

$$F_0 = [FF_1], \quad (4.61)$$

где F_1 – матрица, отражающая долю в результирующем значении у членов, соответствующих вектору β_1 .

Из выражений (4.60), (4.61) следует, что вектор результирующих переменных

$$y = F\beta + F_1\beta_1 + \epsilon.$$

Оценка вектора параметров выбранной модели (4.58) имеет вид $\hat{\beta} = (F^T F)^{-1} F^T y$. Фактически это означает, что используемая оценка вектора $\hat{\beta}_0 = [\hat{\beta}^T \beta_1^T]^T$.

Рассмотрим математическое ожидание оценки $\hat{\beta}$:

$$\begin{aligned} M\{\hat{\beta}\} &= (F^T F)^{-1} F^T M\{y\} = (F^T F)^{-1} F^T (F\beta + F_1\beta_1) = \\ &= \beta + (F^T F)^{-1} F^T F_1 \beta_1 \equiv \beta + \Delta\beta(F, F_1, \beta_1). \end{aligned} \quad (4.62)$$

Таким образом, видно, что при недоборе параметров регрессии полученная оценка $\hat{\beta}$ в общем случае является смещенной, т. е. даже компоненты вектора параметров, которые оцениваются, определяются с систематической погрешностью $\Delta\beta$. Соответственно смещенными оказываются и оценки вектора регрессии $\hat{\eta}$ и дисперсии возмущений s^2 . Смещение будет отсутствовать только в том случае, когда столбцы матрицы F_0 ортогональны: тогда матрицы F и F_1 будут ортогональны ($F^T F_1 = 0$) и $\Delta\beta = 0$.

Можно показать [27], что такая оценка не является состоятельной.

Теперь рассмотрим перебор параметров. Пусть $\eta_0 = F_0\beta_0$ – истинная функция регрессии, а предполагаемая модель имеет вид

$$\eta = F\beta,$$

где

$$F = [F_0 \ F_1]; \quad (4.63)$$

$$\beta = [\beta_0^T \ \beta_1^T]^T. \quad (4.64)$$

Здесь β_1 – вектор "лишних" параметров.

В этих условиях оценка вектора параметров $\hat{\beta}$ имеет вид

$$\hat{\beta} = (F^T F)^{-1} F^T y.$$

Найдем математическое ожидание этой оценки с учетом истинной ФР:

$$\begin{aligned} M\{\hat{\beta}\} &= \left[\begin{bmatrix} F_0^T \\ F_1^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_0 F_1 \end{bmatrix} \right]^{-1} \begin{bmatrix} F_0^T \\ F_1^T \end{bmatrix} F_0 \beta_0 = \\ &= \begin{bmatrix} F_0^T F_0 & F_0^T F_1 \\ F_1^T F_0 & F_1^T F_1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} F_0^T F_0 \beta_0 \\ F_1^T F_0 \beta_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ 0 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (4.65)$$

Из этого выражения видно, что истинные параметры оцениваются несмещенно, а математическое ожидание оценок "лишних" (избыточных) параметров равно нулю.

Отсюда следует, что оценки вектора регрессии и дисперсии, полученные в условиях перебора параметров, также являются несмешенными. Доказано, что МНК-оценки в условиях перебора являются состоятельными. В то же время точность оценок при переборе параметров теряется [15, 27]:

$$D\{\hat{\beta}\} = D\{\hat{\beta}_0\} + \sigma_\epsilon^2 (F^T F)^{-1} F_0^T F_1 F_1^T F_0 (F_0^T F_0)^{-1}. \quad (4.66)$$

Здесь $D\{\hat{\beta}_0\}$ – корреляционная матрица МНК-оценки $\hat{\beta}_0 = (F_0^T F_0)^{-1} F_0^T y$, полученной при условии совпадения истинной и выбранной ФР. Второе слагаемое в (4.66) является неотрицательно определенной матрицей, отсюда

$$D\{\hat{\beta}\} \geq D\{\hat{\beta}_0\}. \quad (4.67)$$

Знак равенства в (4.67) обеспечивается при условии ортогональной матрицы регрессоров.

Таким образом, отметим следующее. Недобор параметров является более серьезным недостатком регрессионной модели, поскольку при этом оценки параметров, регрессии и дисперсии возмущений получаются смещенными и не являются состоятельными. При чрезмерном усложнении модели (переборе параметров) снижается эффективность оценивания.

При проверке адекватности модели традиционно последовательно исследуются два аспекта проблемы:

соответствие выбранного класса функций регрессии истинной ФР (эта подзадача часто также называется проверкой адекватности);

гипотезы о значимости коэффициентов регрессии.

Для проверки первой гипотезы используются методы дисперсионного анализа [1, 3, 15]. Рассмотрим три возможных варианта его реализации.

Нулевая гипотеза H_0 состоит в выполнении равенства $F\beta = M\{y\}$. Альтернативная гипотеза $H_1: F\beta \neq M\{y\}$. Гипотеза H_0 проверяется при заданном уровне значимости α . Вычисляется оценка дисперсии возмущений s^2 :

$$s^2 = Q_0 / (n - m), \quad (4.68)$$

где $Q_0 = (y - F\hat{\beta})^T (y - F\hat{\beta}) = y^T y - \hat{\beta} F^T y$ – остаточная сумма квадратов, характеризующая разброс экспериментальных данных относительно оцененной функции регрессии.

В первом варианте проверки гипотезы используется известное априорное (точное) значение дисперсии σ_e^2 . Статистика

$$g = s^2 / \sigma_e^2 \quad (4.69)$$

при справедливости нулевой гипотезы имеет χ^2 -распределение с $v = n - m$ степенями свободы. Поэтому гипотеза H_0 принимается, если

$$\chi_{v, \alpha/2}^2 \leq g \leq \chi_{v, 1 - \alpha/2}^2, \quad (4.70)$$

в противном случае она отклоняется.

Во втором варианте проверки гипотезы полагается, что на основании N дополнительных экспериментов $\{y'_1, \dots, y'_N\}$ при фиксированных значениях факторов определена

независимая оценка дисперсии $s_1^2 = [\sum_{i=1}^N (y'_i - \bar{y}'_j)^2]/(N-1)$. При справедливости нулевой гипотезы статистика

$$g = s^2/s_1^2 \quad (4.71)$$

имеет F -распределение с $\nu_1 = n - m$ и $\nu_2 = N - 1$ степенями свободы. Поэтому H_0 принимается, если

$$g \leq F_{\nu_1, \nu_2, 1 - \alpha/2}, \quad (4.72)$$

в противном случае она отклоняется. Отметим, что здесь полагается, что $s^2 \geq s_1^2$. В противном случае отношение изменяется на обратное, соответственно изменяется квантиль F -распределения.

В третьем варианте проверки гипотезы вычисляется дисперсия случайной величины Y по результатам основного регрессионного эксперимента:

$$\hat{\sigma}_Y^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{Y})^2 = \frac{1}{n-1} \mathbf{y}^\top \mathbf{y} - \hat{\mathbf{Y}}^\top \hat{\mathbf{Y}}, \quad (4.73)$$

где $\hat{\mathbf{Y}} = [\hat{Y} \dots \hat{Y}]^\top$; $\hat{Y} = \left(\sum_{i=1}^n y_i \right)/n$.

При справедливости нулевой гипотезы отношение

$$g = s^2 / \hat{\sigma}_Y^2 \quad (4.74)$$

имеет F -распределение с $\nu_1 = n - m$ и $\nu_2 = n - 1$ степенями свободы. Поэтому она принимается, если

$$g \leq F_{\nu_1, \nu_2, 1 - \alpha/2}. \quad (4.75)$$

Здесь снова предполагается, что $g \geq 1$.

Проверка гипотезы о значимости параметров регрессии (гипотезы о равенстве нулю соответствующего параметра) позволяет убрать из модели "лишние" параметры, что, как отмечалось, приводит к повышению точности оценок остальных. Рассматриваемые методы позволяют проверить, не отличаются ли полученные оценки коэффициентов от нуля только из-за случайных возмущений. Проверка основывается на том, что, как отмечалось, оценки $\hat{\beta}_j$ имеют гауссовское распределение с математическим ожиданием β_j и дисперсией

$D\{\beta_i\} = \sigma_e^2 s_{ii}$, где s_{ii} – элементы матрицы ошибок S . Оценкой дисперсии $D\{\beta_i\}$ является величина $s^2 s_{ii}$.

Нулевая гипотеза $H_0: \beta_i = 0$. Альтернативная гипотеза $H_1: \beta_i \neq 0$. Проверка производится при заданном уровне вероятности ошибочного признания значимым коэффициента, в действительности равного нулю. Используется статистика

$$g = \hat{\beta}_i / \sqrt{s^2 s_{ii}}, \quad (4.76)$$

которая при справедливости гипотезы H_0 имеет t -распределение Стьюдента с $v = n - m$ степенями свободы.

Гипотеза H_0 принимается, если

$$|g| \leq t_{v, 1 - \alpha/2}, \quad (4.77)$$

в противном случае коэффициент β_i считается значимым.

Незначимые коэффициенты целесообразно отбросить и вновь решить регрессионную задачу. Однако после этого необходимо снова проверить гипотезу об адекватности новой модели. Если она не подтвердила адекватности, то следует вернуться к прежней модели.

Наряду с рассмотренными методами дисперсионного анализа регрессионной модели для проверки ее адекватности широко используются и другие методы: критерий Бокса и Веца, проверка значимости множественного коэффициента множественной корреляции (см. гл. 2), критерий Вальда–Вольфовица, ранговые критерии, графическое исследование остатков [1, 3, 15, 74].

Для практического использования полученных по экспериментальным данным регрессионных моделей большое значение имеют показатели точности и надежности оценок параметров, функции регрессии и дисперсии возмущений.

Известную информацию о точности оценок несут определенные ранее корреляционные матрицы ошибок оценивания (4.39) и (4.40). Однако, как отмечалось в § 2.2, более удобным является использование доверительных интервалов, которые включают в себя истинные значения исследуемых величин с заданной доверительной вероятностью p . Доверительная оценка основывается на тех же предпосылках, что и проверка гипотез о значениях параметров. Поэтому без дополнительного обсуждения приведем выражения для индивидуальных доверительных интервалов для параметров β_i ($i = \overline{1, m}$), отсчетов функции регрессии η_i , вектора регрессии η и дисперсии возмущений [1, 3, 15]:

а) дисперсия возмущений заранее известна:

$$\begin{aligned} \hat{\beta}_i - t_{n-m, (1-p)/2} \sqrt{\sigma_e^2 s_{ii}} &\leq \beta_i \leq \hat{\beta}_i + t_{n-m, p/2} \sqrt{\sigma_e^2 s_{ii}}; \\ \hat{\eta}_i - t_{n-m, (1-p)/2} \sqrt{\sigma_e^2 f_i^T (F^T F)^{-1} f_i} &\leq \eta_i \leq \hat{\eta}_i + \\ + t_{n-m, p/2} \sqrt{\sigma_e^2 f_i^T (F^T F)^{-1} f_i}; \end{aligned} \quad (4.78)$$

$$\begin{aligned} \hat{\eta} - t_{n-m, (1-p)/2} \left[\begin{array}{c} \sqrt{\sigma_e^2 f_1^T (F^T F)^{-1} f_1} \\ \dots \\ \sqrt{\sigma_e^2 f_n^T (F^T F)^{-1} f_n} \end{array} \right] &\leq \eta \leq \hat{\eta} + \\ + t_{n-m, p/2} \left[\begin{array}{c} \sqrt{\sigma_e^2 f_1^T (F^T F)^{-1} f_1} \\ \dots \\ \sqrt{\sigma_e^2 f_n^T (F^T F)^{-1} f_n} \end{array} \right]; \end{aligned}$$

б) дисперсия возмущений оценивается в ходе регрессионного эксперимента. В этом случае могут использоваться выражения, аналогичные (4.78), в которых дисперсия заменяется ее оценкой (4.44), здесь число степеней свободы t -распределения уменьшается на единицу.

Рассмотренные индивидуальные доверительные интервалы используются, как правило, тогда, когда матрица $G = (F^T F)$ близка к диагональной. В других случаях из-за коррелированности оценок параметров индивидуальные доверительные интервалы малоинформативны. Тогда используется доверительная область в m -мерном пространстве, которая с заданной вероятностью p включает в себя вектор β .

Доверительная область задается неравенством [13, 15, 71]

$$(\hat{\beta} - \beta)^T F^T F (\hat{\beta} - \beta) \leq m s^2 F_{m, n-m, p} \quad (4.79)$$

где $F_{\nu_1 \nu_2 p}$ — квантиль p -го порядка F -распределения Снедекора—Фишера с ν_1, ν_2 степенями свободы.

Здесь предполагается, что оценка дисперсии s^2 получена по выражению (4.44). Если s^2 получена по дополнительным данным, то используется квантиль распределения с $m, n-1$ степенями свободы.

4.3. ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ АЛГОРИТМЫ МЕТОДА НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ

Выше было показано, что классические оценки параметров линейной регрессии определяются решением нормальной системы уравнений (4.33) :

$$F^T F \beta = F^T y,$$

которое символически можно представить в виде (4.34) :

$$\hat{\beta} = (F^T F)^{-1} F^T y.$$

В тех случаях, когда необходимо только получить оценки параметров без их последующего статистического анализа точности и надежности, т. е. тогда, когда нет явной потребности в вычислении матрицы ошибок $S = (F^T F)^{-1}$, оценки определяются непосредственным решением нормальной системы уравнений. Это приводит к существенной экономии числа требуемых вычислительных операций и, следовательно, повышает оперативность решения задачи. Если помимо получения оценок требуется провести их статистический анализ, то без вычисления матрицы S обойтись не удается, и тогда МНК-оценки могут быть получены с использованием выражения (4.34). Однако и в этом случае матрица $G = (F^T F)$ крайне редко обращается непосредственно по известным формулам Крамера (только при $m \leq 2 \dots 3$). При достаточно высокой размерности вектора оцениваемых параметров матрица S определяется путем m -кратного решения системы уравнений:

$$F^T F x_i = e_i, \quad (i = \overline{1, m}), \quad (4.80)$$

где $e_i = [e_1, \dots, e_m]^T$, а $e_j = 1$ при $j = i$ и $e_j = 0$ при $j \neq i$. После нахождения набора решений \hat{x}_i ($i = \overline{1, m}$) обратная матрица получается их объединением:

$$S \equiv [s_1, \dots, s_m] = [\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_m], \quad (4.81)$$

т. е. решения \hat{x}_i являются столбцами s_i матрицы S .

Таким образом, основу классического регрессионного анализа составляют алгоритмы решения систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) вида

$$Ax = b, \quad (4.82)$$

в которых матрица системы A , вектор неизвестных x и вектор

тор свободных членов в имеют свой конкретный смысл, вытекающий из решаемой задачи. Характерным для системы (4.82) является ее совместность и определенность, симметричность матрицы A ($A = F^T F$) и ее невырожденность (см. § 4.2). Рассмотрим основные методы численного решения подобных систем.

Общая характеристика численных методов. При разработке и анализе различных методов численного решения СЛАУ важное место занимает учет возникающих погрешностей решения, вызываемых ошибками округления при выполнении основных арифметических операций в ЭВМ, неточностью исходной информации о системе, и связанные с ним проблемы экономии машинной памяти и снижения требуемого числа операций [7].

Выбор метода решения, а также его конкретная реализация в виде вычислительной программы самым существенным образом зависит от типа матрицы системы и соответствующего способа ее хранения в запоминающем устройстве ЭВМ. Можно выделить два основных типа матриц. матрицы общего вида и разреженные матрицы.

Матрицы общего вида содержат элементы, большая часть которых отлична от нуля, поэтому для их хранения требуется m^2 ячеек памяти. Исключение составляют так называемые вычислимые матрицы, элементы которых могут быть достаточно просто вычислены по каким-то исходным данным, занимающим в памяти сравнительно мало места. В этом случае вместо того, чтобы запоминать все элементы матрицы, их выгоднее каждый раз заново вычислять. Примером являются теплицевые матрицы. В связи с разнообразием и спецификой вычислимых матриц особенностями обладают и соответствующие методы решения СЛАУ. Поэтому основанные на них программы разрабатываются для конкретных задач и не входят в программное обеспечение универсальных ЭВМ. Далее такие программы рассматриваться не будут.

Значительная, а иногда и большая часть элементов разреженных матриц равна нулю. Можно выделить несколько разновидностей таких матриц. Одну группу составляют разреженные матрицы, ненулевые элементы которых расположены без какой-либо системы. Поэтому необходимо запоминать не только значения ненулевых элементов, но и их "адрес" — номера строки и столбца. Однако особый интерес представляют разреженные матрицы, относящиеся к другой группе. Это разреженные матрицы специальной структуры — диагональные, треугольные, почти треугольные (матрицы Гессенберга), ленточные матрицы, в частности трехдиагональные, и некоторые другие. К этой же группе можно отнести и симметричные матрицы, которые формально не относятся к разреженным, однако требуют для запоминания не m^2 (как в общем случае), а $m(m + 1)/2$ ячеек памяти.

Для основных видов матриц специальной структуры разрабо-

таки особые модификации большинства алгоритмов, первоначально созданных для решения СЛАУ с матрицами общего вида, а также оригинальные специальные алгоритмы, позволяющие эффективно использовать матрицы. Так, существуют алгоритмы и программы для решения СЛАУ с симметричными, ленточными, трехдиагональными, почти треугольными и другими специальными матрицами. Эти алгоритмы работают более эффективно и позволяют решать задачи большей размерности, чем при задании матриц систем в общей форме.

Выбор метода решения СЛАУ существенным образом связан со способом хранения матриц, который, в свою очередь, определяется видом матрицы. Основными являются три способа: общий, симметричный и диагональный.

Существующие методы решения СЛАУ можно разбить на два класса: прямые и итерационные.

Метод решения относят к классу прямых (точных, конечных), если в предположении отсутствия ошибок округления он дает точное решение задачи после конечного числа операций.

Итерационные методы принципиально позволяют получать не решение СЛАУ, а только последовательность, к нему сходящуюся. Некоторый, достаточно близкий к пределу член этой последовательности принимается за приближенное решение. Иначе говоря, итерационные методы имеют некоторую теоретически обусловленную ошибку решения (методическую погрешность).

Прямые методы чаще используются в случаях, когда матрица СЛАУ является матрицей общего вида или специальной матрицей, например треугольной или симметричной. Для больших разреженных матриц, при хранении которых используются их особые свойства, чаще используются итерационные методы. В связи с упомянутой особенностью структуры информационной матрицы далее будут рассмотрены прямые методы.

Влияние ошибок округления и погрешностей исходных данных. Среди главных слагаемых погрешности решения СЛАУ выделяются погрешности, вызванные округлением чисел в ЭВМ, и погрешности, порождаемые неточностью исходной информации, задаваемой коэффициентами системы и ее правой частью.

Округление чисел, неизбежное при их представлении с использованием любого конечного числа разрядов, приводит к тому, что приближенные арифметические операции сложения (вычитания) и умножения (деления) в ЭВМ обладают иными свойствами, чем точные: они не ассоциативны, не дистрибутивны, в машинной арифметике существуют делители нуля (произведение ненулевых сомножителей может оказаться равным нулю) и т. п.

При выполнении большого числа арифметических операций, определяющих результат, ошибки округления накапливаются. В связи с этим при прочих равных условиях предпочтительнее алгоритмы, использующие меньшее число операций. Именно поэтому, например,

правило Крамера или эквивалентный ему метод непосредственного обращения матрицы системы (4.82), требующие выполнения приблизительно p/l операций умножения, не выдерживают конкуренции с прямыми методами, для которых требуемое число умножений имеет порядок p^3 (см. ниже).

Непосредственный количественный анализ распространения ошибок округления и преобразование их в погрешность конечного результата (прямой анализ ошибок округления) представляет собой сложную задачу. Поэтому на практике часто используют так называемый обратный анализ ошибок округления [7]. При его применении считают, что полученное приближенное решение СЛАУ является точным решением некоторой другой системы с измененной матрицей. Вместо оценки степени различия точного и приближенного решений определяется степень различия коэффициентов исходной и измененной системы. На практике элементы матрицы системы (см. § 4.1) часто получаются в ходе физических измерений, принципиально выполняемых с некоторыми погрешностями. Поэтому, если кажется, что различия элементов матриц исходной и измененной систем не превосходят погрешностей измерений, то можно считать, что вычисления производятся с достаточно высокой точностью и ошибки округления не оказывают существенного влияния на результат. В противном случае следует изменить алгоритм решения с целью уменьшения числа требуемых вычислительных операций и (или) повысить число разрядов в представлении чисел, например, путем перехода к числам двойной длины в ЭВМ (представление чисел с двойной точностью).

При решении практических задач коэффициенты и свободные члены СЛАУ, как правило, известны не точно, а с некоторыми погрешностями. Кроме того, при вводе этих данных в ЭВМ зачастую производится их дополнительное искажение в результате округления. В связи с этим важно уметь оценивать получаемую погрешность решения, понимать причины ее возникновения, а при неприемлемом ее уровне выбирать такие методы, которые обеспечивали бы минимальную чувствительность результата к погрешностям исходных данных, изменять схему эксперимента (порождающую матрицу A и вектор b) и повышать точность измерений.

Рассмотрим случай, когда с погрешностью известна правая часть векторно-матричного уравнения $Ax = b$: вместо вектора b в СЛАУ используется вектор $b_\epsilon = b + \epsilon$, где ϵ — вектор погрешностей, который, естественно, не может быть отделен от вектора b . В этих условиях уравнение (4.82) перепишем в виде

$$Ax = b_\epsilon \text{ или } Ax = b + \epsilon.$$

Линейность уравнения и аддитивность погрешности правой части позволяет представить его решение $\hat{x}_\epsilon = A^{-1}b_\epsilon$ в виде суммы решения уравнения (4.82) с точно известной правой частью \hat{x}_t ("точного

решения") и погрешности решения $\delta_{\epsilon} \hat{x}$, вызванной возмущением ϵ :

$$\hat{x}_{\epsilon} = \hat{x}_T + \delta_{\epsilon} \hat{x}.$$

Здесь принимаем, что число уравнений равно числу неизвестных и СЛАУ определена, т. е. A представляет собой невырожденную квадратную матрицу. Напомним, что запись решения системы уравнений в виде $\hat{x} = A^{-1}b$ имеет часто символический смысл и не обязательно означает, что при его получении вычисляется обратная матрица и умножается на вектор правых частей.

Очевидно, что погрешность решения и погрешность правой части связаны уравнением $A\delta_{\epsilon} \hat{x} = \epsilon$, откуда $\delta_{\epsilon} \hat{x} = A^{-1}\epsilon$.

Поскольку $\|\delta_{\epsilon} \hat{x}\| \leq \|A^{-1}\| \|\epsilon\|$; $\|b\| \leq \|A\| \|\hat{x}_T\|$ и $\|\hat{x}_T\| \geq \frac{\|b\|}{\|A\|}$, то относительная погрешность решения $\gamma_{x_{\epsilon}}$,

вызванная погрешностью ϵ задания правой части СЛАУ, удовлетворяет неравенству

$$\gamma_{x_{\epsilon}} := \frac{\|\delta_{\epsilon} \hat{x}\|}{\|\hat{x}_T\|} \leq \|A\| \|A^{-1}\| \frac{\|\epsilon\|}{\|b\|} = \text{cond } A \gamma_b. \quad (4.83)$$

Из него следует, что относительная погрешность решения может в $\text{cond } A$ раз превосходить относительную погрешность правой части $\gamma_b := \|\epsilon\|/\|b\|$. Подчеркнем, что этот результат никак не связан с методом решения СЛАУ и справедлив при использовании любой векторно-матричной нормы. Видно, какое большое влияние на точность решения оказывает число обусловленности матрицы системы.

Теперь оценим погрешность решения, обусловленную возмущением матрицы системы. В этом случае вместо матрицы A в уравнении (4.82) используется матрица $A_{\delta} = A + \delta A$, где δA – матрица возмущения. По тем же причинам, что и ранее, решение уравнения $A_{\delta}x = b$, имеющее вид $\hat{x}_{\delta A} = A_{\delta}^{-1}b$, можно представить как сумму "точного решения" и погрешности, вызванной возмущением матрицы

$$\hat{x}_{\delta A} = \hat{x}_T + \delta_A \hat{x}.$$

Это решение удовлетворяет уравнению

$$(A + \delta A)(\hat{x}_T + \delta_A \hat{x}) = b.$$

Будем считать матрицу A_{δ} невырожденной. Из этого уравнения можно определить погрешность решения [7]:

$$\begin{aligned} \hat{x}_T + \delta_A \hat{x} &= (A + \delta A)^{-1}b \Rightarrow \delta_A \hat{x} = (A + \delta A)^{-1}b - \hat{x}_T = \\ &= (A + \delta A)^{-1} \delta A \hat{x}_T. \end{aligned}$$

Отсюда следует соотношение для относительной погрешности решения γ_{x_A} , вызванной погрешностью задания матрицы системы уравнений:

$$\gamma_{x_A} = \frac{\|\delta_A \hat{x}\|}{\|\hat{x}_T\|} \leq \|(\mathbf{A} + \delta\mathbf{A})\| \|(\mathbf{A} + \delta\mathbf{A})^{-1}\| \frac{\|\delta\mathbf{A}\|}{\|(\mathbf{A} + \delta\mathbf{A})\|} \approx \text{cond } \mathbf{A}_\delta \gamma_A. \quad (4.84)$$

Величина $\|\delta\mathbf{A}\|/\|(\mathbf{A} + \delta\mathbf{A})\| \approx \|\delta\mathbf{A}\|/\|\mathbf{A}\| := \gamma_A$ по сути представляет собой относительную погрешность задания матрицы системы. Как видно из уравнения (4.84), и в этом случае число обусловленности матрицы системы выступает в качестве своеобразного "коэффициента усиления" относительной погрешности задания исходных данных.

В общем случае, при одновременном возмущении матрицы системы и ее правой части уравнение (4.82) принимает вид

$$(\mathbf{A} + \delta\mathbf{A})\mathbf{x} = (\mathbf{b} + \epsilon) \text{ или } \mathbf{A}_\delta \mathbf{x} = \mathbf{b}_\epsilon.$$

Можно показать, что относительная погрешность $\gamma_{x_A\epsilon}$ решения $\hat{x}_{\delta A\epsilon}$ этого уравнения содержит три слагаемых:

$$\gamma_{x_A\epsilon} = \frac{\|\hat{x}_{\delta A\epsilon} - \hat{x}_T\|}{\|\hat{x}_T\|} = \gamma_{x_A} + \gamma_{x_\epsilon} + \gamma_{x_A} \gamma_{x_\epsilon},$$

где γ_{x_A} и γ_{x_ϵ} — относительные погрешности, введенные ранее. Поскольку, как правило, $\gamma_{x_A} \gamma_{x_\epsilon} < \gamma_{x_A}$ и $\gamma_{x_A} \gamma_{x_\epsilon} < \gamma_{x_\epsilon}$, а $\text{cond } \mathbf{A} \approx \text{cond } \mathbf{A}_\delta$, то это выражение можно переписать:

$$\gamma_{x_A\epsilon} \leq \text{cond } \mathbf{A}_\delta [\gamma_A + \gamma_\epsilon]. \quad (4.85)$$

Таким образом, полная относительная погрешность традиционных методов решения СЛАУ определяется числом обусловленности матрицы системы и относительными погрешностями исходных данных. Во многих практических регрессионных задачах числа обусловленности могут достигать очень больших значений (порядка $10^2 - 10^4$) [1, 5, 15, 21, 44], а точность исходных данных ограничена — относительные погрешности имеют порядок $10^{-5} - 10^{-1}$. Поэтому, как следует из полученных выражений, традиционные методы часто не позволяют получать удовлетворительные по точности решения. Для решения плохо обусловленных СЛАУ разработаны специальные методы, использующие идеи регуляризации, которые будут рассмотрены в § 4.5.

Прямые методы решения линейных уравнений. Для пояснения сути различных вычислительных методов в современной линейной алгебре широко используется идея пред-

ставления матриц СЛАУ в виде произведения или суммы других матриц специального вида. Такие представления называют разложениями или факторизациями [7].

Наиболее употребительные методы решения СЛАУ можно разделить на две группы: методы, использующие разложения на треугольные множители, и методы, связанные с применением ортогональных матриц. К первой группе относятся метод Гаусса и его модификации, метод квадратного корня и схема Халецкого, ко второй — метод QR -разложения, метод сингулярных разложений и некоторые другие.

Цель факторизации при решении СЛАУ состоит в том, чтобы перейти от системы (4.82)

$$Ax = b$$

к эквивалентной системе

$$Ux = b' \quad (4.86)$$

или

$$Dx = b'', \quad (4.87)$$

где U и D — треугольная и диагональная матрицы.

Рассмотрим, каким образом может быть получено решение этих эквивалентных систем уравнений.

Запишем структуру СЛАУ (4.86) в развернутом виде. Для определенности будем считать матрицу U верхней треугольной:

$$\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & \dots & u_{1m} \\ u_{22} & u_{23} & \dots & u_{2m} \\ u_{33} & \dots & u_{3m} \\ 0 & \dots & & & \\ & & u_{mm} & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b'_1 \\ b'_2 \\ b'_3 \\ \vdots \\ b'_m \end{bmatrix}. \quad (4.88)$$

Из выражений (4.88) видно, что последнее уравнение $u_{mm}x_m = b'_m$ содержит единственный неизвестный аргумент x_m и может быть непосредственно решено относительно него:

$$\hat{x}_m = b'_m / u_{mm}.$$

В предпоследнее уравнение входят два неизвестных — x_{m-1} и x_m , однако последнее уже определено, поэтому

этого уравнения достаточно, чтобы определить

$$\hat{x}_{m-1} = \frac{b'_{m-1} - u(m-1)m\hat{x}_m}{u(m-1)(m-1)}$$

Рассуждая аналогично, на каждой итерации будем определять из очередного уравнения значение очередной неизвестной:

$$\hat{x}_i = \left(b'_i - \sum_{j=i+1}^m u_{ij} \hat{x}_j \right) / u_{ii} \quad (i = m-1, 1). \quad (4.89)$$

Эта процедура называется обратной подстановкой. Очевидно, что для ее реализации требуется выполнить $N \sim m^2/2$ операций умножения.

Аналогично решается СЛАУ с нижней треугольной матрицей. Соответствующая процедура называется прямой подстановкой.

Еще проще решить систему уравнений (4.87), которая в развернутом виде выглядит следующим образом:

$$\begin{bmatrix} d_{11} & 0 & 0 \dots 0 \\ 0 & d_{22} & 0 \dots 0 \\ 0 & 0 & d_{33} \dots 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 \dots d_{mm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \dots \\ x_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b''_1 \\ b''_2 \\ b''_3 \\ \dots \\ b''_m \end{bmatrix}. \quad (4.90)$$

Видно, что в этом случае СЛАУ распадается на совокупность из m независимых уравнений с одним неизвестным каждое, которые определяются так:

$$x_i = b''_i / d_{ii} \quad (i = \overline{1, m}). \quad (4.91)$$

Для решения системы требуется выполнить m операций умножения (деления).

Методы LU-разложения. Метод Гаусса. При использовании методов LU-разложения матрица A представляется в виде произведения нижней треугольной матрицы L и верхней треугольной матрицы U : $A = LU$ (обозначения матриц введены по начальным буквам слов *lower* и *upper*). Алгоритмы различаются способом определения матриц L и U по матрице A .

Среди методов LU -разложения наибольшую известность приобрел метод Гаусса. Его идея состоит в том, что последовательно за $m - 1$ шагов вычислений определяется матрица $C = L^{-1}$, которая обеспечивает приведение исходной системы к эквивалентной системе (4.86) с верхней треугольной матрицей:

$$CAx = Cb \Leftrightarrow L^{-1}LUx = Cb \Leftrightarrow Ux = b' \quad (4.92)$$

Этап перехода от исходной системы к системе (4.86) называется прямым ходом (прямым исключением), а рассмотренный ранее этап решения полученного уравнения — обратным ходом (обратной подстановкой). Запишем развернутую форму матричного представления СЛАУ $Ax = b$:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{bmatrix}.$$

Процедура прямого хода, включающая в себя как операции по формированию матрицы C , так и умножение на нее исходной матрицы системы A , выполняется за $m - 1$ шагов. Рассмотрим один из возможных вариантов его реализации (схему единственного деления) [6]. Для упрощения будем считать, что $a_{ii} \neq 0$ ($i = \overline{1, m}$).

На первом шаге вычислим $m - 1$ множителей

$$M_j^{(1)} = a_{j1}/a_{11} \quad (i = \overline{2, m}),$$

и вычтем из каждого j -го уравнения первое, умноженное на M_j . Рассматривая новые коэффициенты при неизвестных и свободные члены преобразованных уравнений

$$a_{ij}^{(1)} = a_{ij} - M_j^{(1)} a_{1j};$$

$$b_i^{(1)} = b_i - M_j^{(1)} b_1 \quad (i = \overline{2, m}; j = \overline{1, m}),$$

можно убедиться, что для всех уравнений, начиная со второго, коэффициенты при первом неизвестном

$$a_{i1}^{(1)} = 0 \quad (i = \overline{2, m})$$

Преобразованная система уравнений запишется в следующем виде:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & \dots & a_{2m}^{(1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & a_{m2}^{(1)} & \dots & a_{mm}^{(1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2^{(1)} \\ \dots \\ b_m^{(1)} \end{bmatrix}.$$

Продолжая таким же образом на втором и последующих шагах, можно исключить x_2 из последних $m - 2$ уравнений [вычисляются множители $M_i^{(2)} = a_{i2}^{(1)} / a_{22}^{(1)}$, $i = \overline{3, m}$], затем x — из последних $m - 3$ уравнений [вычисляются множители $M_i^{(3)} = a_{i3}^{(2)} / a_{33}^{(2)}$ ($i = \overline{4, m}$)] и т. д. На k -м шаге исключается x_k с помощью множителей $M_i^{(k)} = a_{ik}^{(k-1)} / a_{kk}^{(k-1)}$ ($i = \overline{k+1, m}$). При этом коэффициенты и правые части оставшихся $m - k$ уравнений определяются следующими очевидными выражениями:

$$a_{ij}^{(k)} = a_{ij}^{(k-1)} - M_i^{(k)} a_{kj}^{(k-1)}, \quad b_j^{(k)} = b_j^{(k-1)} - M_i^{(k)} b_k^{(k-1)} \\ (i = \overline{k+1, n}; j = \overline{k, n}).$$

При этом система уравнений принимает вид

$$\left[\begin{array}{cccccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1(k-1)} & a_{1k} & a_{1(k+1)} & \dots & a_{1m} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & \dots & a_{2(k-1)}^{(1)} & a_k^{(1)} & a_{2(k+1)}^{(1)} & \dots & a_{2m}^{(1)} \\ \dots & & & & & & & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{kk}^{(k-1)} & a_{k(k+1)}^{(k-1)} & \dots & a_{km}^{(k-1)} \\ \dots & & & & a_{mk}^{(k-1)} & a_{m(k+1)}^{(k-1)} & \dots & a_{mm}^{(k-1)} \end{array} \right] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_k \\ \dots \\ x_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2^{(1)} \\ \dots \\ b_k^{(k-1)} \\ \dots \\ b_m^{(k-1)} \end{bmatrix}$$

После выполнения $(m - 1)$ -го шага происходит исключение x_{m-1} из последнего уравнения и окончательно СЛАУ записывается в форме (4.86) следующим образом:

$$\left[\begin{array}{cccccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1(m-1)} & a_{1m} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & \dots & a_{2(m-1)}^{(1)} & a_{2m}^{(1)} \\ \dots & & & & \\ 0 & 0 & \dots & a_{(m-1)(m-1)}^{(m-2)} & a_{(m-1)m}^{(m-2)} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{mm}^{(m-1)} \end{array} \right] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_{m-1} \\ x_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2^{(1)} \\ \dots \\ b_{m-1}^{(m-2)} \\ b_m^{(m-1)} \end{bmatrix}.$$

Напомним, что после завершения прямого хода выполняется обратный ход метода Гаусса, рассмотренный выше. Стоящие вдоль главной диагонали матрицы системы элементы $a_{ii}^{(j-1)}$ называются ведущими элементами.

Дадим матричную интерпретацию процессу исключения, соответствующую вычислительной схеме (4.92). Каждый k -й шаг ($k = \overline{1, m-1}$) прямого хода эквивалентен умножению системы урав-

нений слева на матрицу

$$C_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 \dots 0 & 0 & 0 \dots 0 \\ 0 & 1 \dots 0 & 0 & 0 \dots 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 \dots 0 & 1 & 0 \dots 0 \\ 0 & 0 \dots 0 & M_{k+1}^{(k)} & 1 \dots 0 \\ 0 & 0 \dots 0 & M_{k+2}^{(k)} & 0 \dots 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 \dots 0 & M_m^{(k)} & 0 \dots 1 \end{bmatrix}$$

При использовании таких матриц процедура прямого хода записывается следующим образом:

$$CAx = Cb,$$

где $C = C_{m-1}C_{m-2}, \dots, C_1$, что совпадает с выражением (4.92)

Модификация метода Гаусса. В действительности, в описанной форме метод Гаусса почти никогда не используется. Это связано с тем, что отдельные элементы a_{ii}^{i-1} (центральные или ведущие элементы), на которые производится деление уравнений, могут быть равны нулю.

Для преодоления этой проблемы достаточно поступить следующим образом: при $a_{ii}^{i-1} = 0$ можно поменять местами i -е уравнение с одним из последующих. При невырожденной матрице A найдется хотя бы одна такая перестановка. При этом полученная система является эквивалентной исходной. Правила, определяющие порядок перестановок, называют стратегиями перестановок.

Дальнейшая модификация направлена на то, чтобы с помощью перестановок избежать деления не только на нулевые, но и на малые ведущие элементы. Это связано с тем, что погрешность результата деления двух чисел обратно пропорциональна абсолютной величине делителя.

Среди различных стратегий выбора ведущего элемента часто используют так называемое частичное упорядочение. Его суть состоит в том, что при выборе первого и любого очередного, i -го ведущего уравнения предпочтение отдается тому из еще не побывавших ведущим уравнений, в котором модуль элемента из i -го столбца максимальный. Оно становится ведущим, поменявшиесь местами

с уравнением, которое занимало это место ранее. Такие перестановки возможны на каждом шаге. Это стратегия выбора ведущего элемента по столбцу. Известны также алгоритмы, использующие схему выбора ведущего элемента по строке, также производящие перестановку уравнений.

Перестановка уравнений может быть описана путем умножения исходной системы на некоторую перестановочную матрицу P , элементы которой могут быть только нулями или единицами, причем в каждой строке и в каждом столбце имеется ровно одна единица. Поэтому модификации метода Гаусса, в которых используется упорядочение уравнений, представляют собой алгоритмы, использующие LU -разложение матрицы PA .

$$PA = LU.$$

Дальнейшим усовершенствованием метода исключения является метод Гаусса с выбором главного элемента (метод главных элементов), в котором ведущий элемент определяется по всей матрице системы. Этот метод также называют методом Гаусса с полным упорядочением. Поясним его суть с использованием расширенной матрицы системы (4.82) [6, 7, 82]

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1q} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{p1} & \dots & \boxed{a_{pq}} & \dots & a_{pn} & b_p \\ a_{m1} & \dots & a_{mq} & \dots & a_{mn} & b_n \end{bmatrix}.$$

Среди элементов матрицы a_{ij} выберем наибольший по модулю, называемый главным элементом. Пусть им будет, например, элемент a_{pq} . Стока с номером p , содержащая главный элемент, называется главной строкой, а соответствующее уравнение системы — главным уравнением.

Далее вычисляем множители $M_i^{(1)} = a_{ij} / a_{pq}$ для всех $i \neq p$. Затем преобразуем матрицу следующим образом: из каждой i -й строки вычтем главную строку, умноженную на $M_i^{(1)}$. В результате получим матрицу, у которой все элементы q -го столбца, кроме a_{pq} , равны нулю. Отбрасывая этот столбец и главную строку, получим новую матрицу A_1 с меньшим на единицу числом строк и столбцов.

Над матрицей A_1 повторяются те же операции, после чего получается матрица A_2 и т. д. Так продолжается до тех пор, пока не получится матрица-строка, содержащая коэффициент перед последним неизвестным и свободный член уравнения. Далее объединяются все главные строки, начиная с последней. Если теперь изменить порядок следования неизвестных в векторе x , то матрица системы становится треугольной.

Отметим, что классический метод Гаусса является частным случаем метода главных элементов, если в качестве главного элемента всегда выбирать левый верхний элемент матрицы системы.

В рассмотренных модификациях метода Гаусса LU -разложение проводилось в неявной форме [см. выражение (4.92)]. В то же время существуют реализации алгоритма, в которых LU -разложение используется непосредственно [6, 82].

Значения элементов треугольных матриц L и U могут быть получены из равенства $A = LU$. Система рекуррентных соотношений для определения элементов l_{ij} и u_{ij} выглядит следующим образом [6, 7, 82]:

$$l_{ij} = 0 \text{ при } i < j;$$

$$u_{ij} = 0 \text{ при } i > j \quad (i, j = \overline{1, m});$$

$$u_{11} = a_{11}, u_{ij} = a_{ij}, l_{j1} = a_{j1}/u_{11} \quad (j = \overline{2, m});$$

$$u_{ij} = a_{ij} - \sum_{p=1}^{i-1} l_{ip} u_{pj} \quad (i = \overline{2, m}); \quad (4.93)$$

$$u_{ij} = a_{ij} - \sum_{p=1}^{i-1} l_{ip} u_{pj}, \quad l_{ji} = \left(a_{ji} - \sum_{p=1}^{i-1} l_{jp} u_{pi} \right) / u_{ii} \\ (i = \overline{2, m}; \quad j = \overline{i+1, m}).$$

Эти формулы часто называют компактной схемой метода Гаусса для треугольного разложения матрицы системы или схемой Халецкого.

После определения LU -разложения на основании использования последовательности эквивалентных преобразований

$$\left. \begin{array}{l} Ax = b \Leftrightarrow LUx = b \Leftrightarrow L^{-1}LUx = L^{-1}b \equiv b' \Leftrightarrow \\ \left\{ \begin{array}{l} Ux = b'; \\ Lb' = b \end{array} \right. \end{array} \right\} \quad (4.94)$$

решение исходной СЛАУ с матрицей A общего вида можно свести к последовательному решению двух систем с треугольными матрицами: $Lb' = b$; $Ux = b'$. Решение СЛАУ с верхней треугольной матрицей получается столь же просто, как и для системы с нижней треугольной матрицей (см. выше).

Другие варианты метода LU -разложения, в частности известный алгоритм Краута–Дулилтла, описаны в работах [6, 79, 82, 85].

Метод квадратных корней. Этот метод (называемый иногда, как и схема, рассмотренная выше, методом Халецкого или методом Банахевича) используется

при решении систем уравнений с симметричной положительно определенной матрицей.

Метод основан на факте существования треугольного разложения симметричной положительно определенной матрицы A следующего вида:

$$A = U^T U, \quad (4.95)$$

где U – верхняя треугольная матрица.

Видно, что это разложение представляет собой частный случай $L U$ -разложения, использующего указанную специфику матрицы A .

Элементы матрицы U получаются путем решения системы уравнений

$$\sum_{k=1}^i u_{ki} u_{kj} = a_{ij} \quad (i = \overline{1, m}; j = \overline{i, m}).$$

Эти уравнения непосредственно следуют из выражения (4.95).

Решение системы уравнений приводит к следующим рекуррентным формулам, хорошо приспособленным к реализации на ЭВМ [6, 7, 82]:

$$\begin{aligned} u_{ii} &= \sqrt{a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} u_{ki}^2}; \\ u_{ij} &= \left(a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} u_{ki} u_{kj} \right) / u_{ii} \quad (i = \overline{1, m}; j = \overline{i+1, m}); \\ u_{ij} &= 0 \text{ при } i > j. \end{aligned} \quad (4.96)$$

После получения разложения (4.95) решение системы сводится по аналогии с (4.94) к решению двух систем уравнений с треугольными матрицами:

$$\begin{cases} U^T b' = b; \\ Ux = b'. \end{cases}$$

Иногда при решении методом квадратных корней используется разложение матрицы системы в виде

$$A = L^T L, \quad (4.97)$$

где L – нижняя треугольная матрица. Элементы матрицы L определяются по формулам, которые несложно получить

по аналогии с (4.96) :

$$l_{ii} = \sqrt{a_{ii} - \sum_{k=i+1}^m l_{ki}^2}; \quad l_{ij} = \left(a_{ij} - \sum_{k=i+1}^m l_{ki} l_{kj} \right) / l_{ii}$$
$$(j = \overline{1, i-1}; \quad i = \overline{m, 1}); \quad l_{ij} = 0 \text{ при } i < j.$$

Для получения решения исходной системы последовательно решаются две системы с треугольными матрицами: $L^T b' = b$; $Lx = b'$.

Методы QR-разложения. Как и при решении других задач линейной алгебры, при определении корней СЛАУ большую роль играет представление матрицы системы A в виде произведения ортогональной матрицы Q и верхней треугольной матрицы R :

$$A = QR.$$

Это разложение часто называют QR -разложением матрицы A , а основанные на его использовании методы решения алгебраических задач — методами QR -разложения. QR -разложение существует для любой квадратной матрицы A , причем, если матрица A невырождена, то ее QR -разложение, в котором диагональные элементы матрицы положительны, единственno [6, 7, 53, 82].

Если QR -разложение матрицы СЛАУ найдено, то система (4.82) сводится к эквивалентной системе

$$Rx = Q^T b \equiv b', \quad (4.98)$$

которая может быть решена методом обратной подстановки. В выражении (4.98) учтено, что для ортогональной матрицы Q выполняется равенство $Q^{-1} = Q^T$.

Для получения QR -разложения матрицы системы используются методы, основными из которых являются метод вращений (Гивенса) и метод отражений (Хаусхолдера). Поскольку оба этих метода подробно рассматриваются в учебниках по линейной алгебре, то здесь дадим лишь их краткое пояснение [6, 7, 82].

При использовании метода Гивенса определяется последовательность матриц специального вида — матриц вращения — $P_B^{(1)}, \dots, P_B^{(N)}$, такая, что матрица $R = P_B^{(N)} \dots P_B^{(1)}$. А будет верхней треугольной с положительными элементами на главной диагонали.

Матрицей вращения называется матрица

$$P_B = [p_{kj}] = \begin{bmatrix} & & j \\ & \cdots & \cdots & & i \\ 1 & \cdots & \cos\varphi & \cdots & -\sin\varphi & j \\ & \cdots & \cdots & 1 & \cdots & i \\ & \cdots & \sin\varphi & \cdots & \cos\varphi & \cdots & 1 \\ & & & & & & i \end{bmatrix}$$

которая отличается от единичной тем, что для нее $p_{jj} = p_{jj} = \cos\varphi$; $p_{ij} = \sin\varphi$; $p_{ji} = -\sin\varphi$, где φ — некоторый угол (считаем, что $i > j$). При умножении на эту матрицу некоторого вектора $a = [a_1, \dots, a_m]^T$ все элементы вектора $a' = P_B a$ будут совпадать с элементами вектора a , за исключением a'_j и a'_i .

$$a'_j = a_j \cos\varphi - a_i \sin\varphi;$$

$$a'_i = a_i \sin\varphi + a_j \cos\varphi.$$

Очевидно, что, каковы бы ни были a_j и a_i , найдется такое вращение (такой угол φ), при котором $a'_j = 0$, а $a'_i = \sqrt{a_j^2 + a_i^2} \equiv \rho \geq 0$. Для этого должны выполняться условия: $\cos\varphi = a_j/\rho$; $\sin\varphi = -a_i/\rho$. Если $a_j = 0$, то $\cos\varphi = 1$, $\sin\varphi = 0$ и $P_B = I$.

Таким образом, умножение на матрицу вращения с правильно выбранным углом поворота φ позволяет получить j -й нулевой элемент в векторе-результате.

Последовательность матриц $P_B^{(1)}, \dots, P_B^{(N)}$ содержит для каждого столбца матрицы A столько матриц вращения, сколько в этом столбце ненулевых элементов под главной диагональю. В общем случае для всей матрицы A таких элементов будет $N = m(m-1)/2$, так как если среди поддиагональных элементов матрицы есть нулевые, то соответствующие матрицы вращения становятся единичными.

Первая матрица вращения $P_B^{(1)}$ выбирается такой, чтобы в матрице $P_B^{(1)} A$ обратился в нуль элемент a'_{21} . Затем осуществляется вращение с использованием матрицы $P_B^{(2)}$ таким образом, чтобы в нуль обратился элемент a''_{31} матрицы $P_B^{(2)} P_B^{(1)} A$, и т. д. После $m-1$ вращения получается матрица $P_B^{(m-1)}, \dots, P_B^{(1)} A$, у которой все элементы первого столбца, кроме самого верхнего, равны нулю. Далее аналогичным образом обращают в нуль все поддиагональные элементы всех других столбцов.

В методе Хаусхолдера матрица A преобразуется к треугольному виду путем умножения на последовательность специальных матриц другого вида — матриц отражения.

Матрицей отражения называется матрица

$$P_O = I - 2ww^T,$$

где w — произвольный вещественный вектор единичной длины ($\|w\| =$

= 1) Название матрицы связано с тем, что если в трехмерном пространстве рассмотреть проходящую через начало координат зеркальную плоскость, для которой вектор w является нормальным, то преобразование зеркального отражения от такой плоскости задается рассматриваемой матрицей отражения.

Пусть заданы любые ненулевые векторы a и s . Можно показать, что существует такое отражение (матрица P_0 и определяющий ее вектор w), которое переводит вектор a в вектор αs , где α – некоторое число $P_0 a = \alpha s$. Вектор w при этом задается соотношениями

$$w = \frac{1}{\rho} (a - \alpha s); \quad \rho^2 = 2[a(a - \alpha s)^T]^{1/2}; \quad \alpha = \pm \|a\|/\|s\|.$$

Отсюда, в частности, следует, что всегда существует матрица отражения, позволяющая преобразовать произвольный вектор (например, вектор-столбец матрицы системы) в вектор заданного вида

Пусть A – заданная матрица СЛАУ. Умножим ее слева на последовательность матриц отражения $P_0^{(1)}, \dots, P_0^{(m-1)}$. Каждую из этих матриц $P_0^{(i)}$ ($i = \overline{1, m-1}$) будем выбирать из условия обращения в нуль поддиагональных элементов i -го столбца полученного ранее произведения $P_0^{(1)} \dots P_0^{(i-1)} A$. В результате этих операций будет получена требуемая верхняя треугольная матрица R .

Метод сингулярного разложения. Он основан на такой факторизации матрицы СЛАУ, которая позволяет перейти к эквивалентной системе с диагональной матрицей, т. е. к системе из m независимых уравнений с одним неизвестным в каждом (см. выше).

Введем основные понятия и определения, которые будут использованы также в § 4.5 [6, 7, 74, 79, 82].

Пусть A – произвольная матрица размером $n \times m$. Рассмотрим квадратные матрицы $A^T A$ и $A A^T$ порядка m и n соответственно. Можно показать, что ненулевые собственные значения этих матриц λ_i совпадают ($\lambda_i > 0; i = \overline{1, r}$, где r – ранг матриц $A, A^T A, A A^T$). Арифметические значения квадратных корней из общих собственных значений матриц $A^T A$ и $A A^T$ $\mu_i = \sqrt{\lambda_i}$ называются сингулярными (главными) числами матрицы A . Будем полагать, что первые r сингулярных чисел пронумерованы и расположены в порядке убывания: $\mu_1 \geq \mu_2 \geq \dots \geq \mu_r > 0$. Остальные сингулярные числа полагаются равными нулю: $\mu_{r+1} = \dots = 0$.

Сингулярные числа являются важными характеристиками матрицы A и обладают следующими свойствами:

1. Сингулярные числа матрицы не изменяются при умножении ее справа или слева на ортогональную матрицу.
2. Квадратная матрица является невырожденной тогда и только тогда, когда все ее сингулярные числа отличны от нуля.
3. Модуль определителя матрицы A равен произведению всех сингулярных чисел.

Справедлива следующая теорема, являющаяся основой для рассматриваемого метода решения СЛАУ [7, 74, 79].

Для любой матрицы A размера $n \times m$ существует разложение

$$A = UDV^T, \quad (4.99)$$

где U , V – ортогональные матрицы порядка n и m соответственно; D – прямоугольная диагональная матрица размером $n \times m$ с невозрастающими элементами.

Разложение (4.99) называется сингулярным разложением матрицы A . Для вещественной матрицы A сингулярное разложение является вещественным, т. е. матрицы U , D и V^T имеют вещественные элементы.

Матрицы, входящие в сингулярное разложение (4.99), имеют следующий вид:

$$D = \text{diag}(\mu_1, \dots, \mu_r, 0, \dots, 0);$$

$$U = [u_i] \quad (i = \overline{1, n}); \quad V = [v_i] \quad (i = \overline{1, m}).$$

Здесь u_i и v_i – собственные векторы матриц AA^T и A^TA соответственно.

Сингулярное разложение (4.99) матрицы системы (4.82), если матрица A квадратная и невырожденная, позволяет перейти к эквивалентной системе:

$$DV^T x = U^T b \equiv b'.$$

Отсюда следует, что решение исходной СЛАУ можно свести к последовательному решению двух систем:

$$\begin{cases} Dz = b'; \\ V^T x = z; \end{cases} \quad (4.100)$$

первая из этих систем, имеющая диагональную матрицу, решается по формулам (4.93). При решении второй системы следует учесть, что $(V^T)^{-1} = V$. В итоге решение системы (4.100) можно представить в виде

$$\hat{x} = VD^{-1}U^T b = \sum_{i=1}^m \mu_i^{-1} v_i u_i^T b$$

или в рекуррентной форме:

$$\hat{x}^{(i)} = \hat{x}^{(i-1)} + \mu_i v_i u_i^T b \quad (i = \overline{1, m}); \quad \hat{x}^{(0)} = 0.$$

Для выполнения сингулярного разложения матрицы СЛАУ используются известные методы определения собственных значений и собственных векторов матриц $A^T A$ и $A A^T$ [6, 7, 79, 82].

Сравнение методов [6, 7, 15, 53, 63, 79, 82]. Рассмотренные методы решения СЛАУ, естественно, обладают различной устойчивостью к ошибкам округления, требуют разной емкости памяти и времени счета.

Время решения СЛАУ определяется числом арифметических операций (в первую очередь, операций умножения и деления), необходимых для выполнения факторизации матрицы системы. Поэтому преимущества имеют методы LU-разложения (табл. 4.1): методы Гаусса, компактная схема и, особенно, метод квадратного корня. Дополнительной оперативной памяти эти методы не требуют. По числу операций и по емкости требуемой памяти метод Хаусхолдера несколько лучше метода Гивенса и по этим характеристикам сравнительно немного отстает от метода Гаусса. Наибольшие вычислительные трудности возникают при реализации метода сингулярного разложения.

Таблица 4.1

Способ разложения	Число операций
Метод Гаусса	$m^3/3$
Компактная схема метода Гаусса	$m^3/3$
Метод Халецкого (квадратного корня)	$m^3/6$
Метод Гивенса	m^3
Метод Хаусхолдера	$2/3 m^3$
Метод сингулярного разложения	$3 m^3$

Обшим недостатком методов LU-разложения является их низкая вычислительная устойчивость к ошибкам исходных данных при плохой обусловленности матрицы СЛАУ: в этих условиях классический метод Гаусса без выбора ведущего элемента практически неработоспособен, другие модифика-

ции этого метода устойчивее, однако уступают методам других групп. Наиболее устойчивым из методов треугольного разложения является метод квадратного корня. Причина этого недостатка состоит в том, что при LU -разложении число обусловленности матрицы системы растет, что приводит к росту ошибок решения.

Методы Гивенса и Хаусхолдера близки между собой по уровню погрешности округления и по этому показателю лишь немного уступают модификациям метода Гаусса. Вместе с тем они свободны от отмеченного выше основного недостатка методов LU -разложения, поскольку нормы матриц A и R совпадают и переход к эквивалентной системе с треугольной матрицей не приводит к росту числа обусловленности.

Метод сингулярных разложений в классическом варианте не обеспечивает преимуществ по уровню вычислительной устойчивости по сравнению с методами QR -разложения. Однако, как будет показано в § 4.5, он является хорошей базой для создания высокоеффективных алгоритмов, предназначенных специально для работы с плохо обусловленными и вырожденными матрицами.

4.4. РЕГРЕССИОННЫЙ АНАЛИЗ ПРОСТЕЙШИХ ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ МОДЕЛЕЙ

Рассмотрим процедуры оценки параметров и статистического анализа регрессионных полиномиальных моделей нулевого, первого и второго порядка.

Полиномиальная модель нулевого порядка. В этом случае регрессия не содержит действительных факторов. Единственным фактором является фиктивная переменная x'_1 , тождественно равная единице [см. выражение (4.7)]:

$$Y = \beta_1 x'_1 + \epsilon = \beta_1 + \epsilon. \quad (4.101)$$

Поскольку $M\{\epsilon\} = 0$, то β_1 представляет собой математическое ожидание случайной величины Y : $M\{Y\} = \beta_1$. Реализации результирующей переменной

$$y_i = \beta_1 + \epsilon_i \quad (i = \overline{1, n}).$$

Отсюда несложно получить тривиальные выражения для векторов и матриц, входящих в общую форму регрес-

сионной модели (4.11):

$$\mathbf{F} = [1 \dots 1]^T; \quad \mathbf{F}^T = [1 \dots 1]; \quad \mathbf{y} = [y_1, \dots, y_n]^T; \quad \beta = \beta_1.$$

Поскольку $(\mathbf{F}^T \mathbf{F})^{-1} = 1/n$, то

$$\hat{\beta}_1 = \hat{M}\{\mathbf{Y}\} = \frac{1}{n} [1 \dots 1] \mathbf{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i. \quad (4.102)$$

Это выражение, естественно, совпадает с использованной ранее формулой для оценки математического ожидания случайной (гауссовской) величины (2.57).

Дисперсия оценки имеет вид

$$\sigma^2 \{\hat{\beta}_1\} = \sigma_\epsilon^2 / n, \quad (4.103)$$

а оценка дисперсии возмущений

$$s^2 \equiv \hat{\sigma}_\epsilon^2 = \frac{1}{(n-1)} (\mathbf{y} - \mathbf{F}\hat{\beta}_1)^T (\mathbf{y} - \mathbf{F}\hat{\beta}_1) = \frac{1}{n-1} \times \\ \times \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{\beta}_1)^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n \left(y_i - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n y_j \right)^2. \quad (4.104)$$

Полученные выражения совпадают с выражениями (2.60) и (2.59).

Аналогично может быть получен рекуррентный алгоритм оценивания:

$$\hat{\beta}_1^{(i+1)} \equiv \hat{M}\{\mathbf{Y}\}_{i+1} = \hat{\beta}_1^{(i)} + c_{i+1} [y_{i+1} - \hat{\beta}_1^{(i)}]; \quad (4.105)$$

$$c_{i+1} = s_i / (s_i + 1); \quad s_{i+1} = s_i - s_i^2 / (s_i + 1) = 1 / (1 + 1/s_i).$$

Поскольку для первого отсчета дисперсия оценки $\hat{\beta}_1^{(1)} = \sigma_\epsilon^2 s_1 = \sigma_\epsilon^2$, то начальное условие $s_1 = 1$. В этом случае $s_{i+1} = 1 / (1 + i)$; $c_{i+1} = 1 / (i + 1)$ и получается выражение

$$\hat{\beta}_1^{(i+1)} = \hat{\beta}_1^{(i)} + \frac{1}{1+i} [y_{i+1} - \hat{\beta}_1^{(i)}]. \quad (4.106)$$

Аналогично получается рекуррентная оценка дисперсии возмущений $D \equiv \sigma_\epsilon^2$:

$$\hat{D}^{(i+1)} = \frac{i}{i+1} \hat{D}^{(i)} + \frac{1}{i+1} [y_{i+1} - \hat{\beta}_1^{(i+1)}]^2. \quad (4.107)$$

Выражения (4.106) и (4.107) с точностью до обозначений совпадают с формулами (2.121) и (2.122).

Модель первого порядка. Для определенности рассмотрим линейную по факторам модель следующего вида:

$$Y = \beta_2 x + \beta_1 + \epsilon, \quad (4.108)$$

где $x \equiv x'_2$ — единственная реальная переменная [см. (4.7)].

В этом случае матрицы, входящие в уравнение регрессии, выглядят следующим образом:

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ \dots & \dots \\ 1 & x_n \end{bmatrix}; \quad \mathbf{F}^T \mathbf{F} = \begin{bmatrix} n & \sum_{i=1}^n x_i \\ \sum_{i=1}^n x_i & \sum_{i=1}^n x_i^2 \end{bmatrix};$$

$$(\mathbf{F}^T \mathbf{F})^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n x_i^2 - \sum_{i=1}^n x_i \\ -\sum_{i=1}^n x_i & n \end{bmatrix},$$

где $\Delta = n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2$ — определитель матрицы ошибок; $x_i = x'_{i2}$.

Следовательно, оценки параметров принимают вид:

$$\hat{\beta}_2 = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n y_i}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2}; \quad (4.109)$$

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum_{i=1}^n y_i \sum_{i=1}^n x_i^2 - \sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n x_i y_i}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2}. \quad (4.110)$$

Последнюю оценку удобнее находить из уравнения для средних значений объясняющей и результирующей переменной:

$$\hat{M}\{Y\} = \beta_2 \bar{x} + \beta_1. \quad (4.111)$$

Отсюда

$$\hat{\beta}_1 = \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n y_i - \hat{\beta}_2 \sum_{i=1}^n x_i \right). \quad (4.112)$$

После определения оценок параметров может быть найдена оценка функции регрессии

$$\hat{\eta}(x) = \hat{\beta}_2 x + \hat{\beta}_1. \quad (4.113)$$

Рекуррентные оценки параметров

$$\begin{aligned}\hat{\beta}_2^{(i+1)} &= \hat{\beta}_2^{(i)} + c_{2i} (y_{i+1} - \hat{\beta}_2^{(i)} x_{i+1} - \hat{\beta}_1^{(i)}) ; \\ \hat{\beta}_1^{(i+1)} &= \hat{\beta}_1^{(i)} + c_{1i} (y_{i+1} - \hat{\beta}_2^{(i)} x_{i+1} - \hat{\beta}_1^{(i)})\end{aligned} \quad (4.114)$$

получаются из общих соотношений (4.55), если принять $f_i^T = [1 \ x_i]$.

Для проверки адекватности линейной модели вычисляется дисперсионное отношение

$$F = \max(D, D_0) / \min(D, D_0).$$

Здесь

$$D_0 = \frac{1}{n-2} \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{\beta}_2 x_i - \hat{\beta}_1)^2 \quad (4.115)$$

— остаточная дисперсия;

$$D = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{Y})^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n \left(y_i - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n y_j \right)^2 \quad (4.116)$$

— общая дисперсия результирующей переменной.

Линейная модель (4.108) считается адекватной, если

$$F \leq F_{n-2, n-1, 1-\alpha}. \quad (4.117)$$

При проверке адекватности модели целесообразно также оценить значимость параметров. Для этого вычисляются и сравниваются с квантилями t -распределения Стьюдента статистики

$$g_i \equiv |\hat{\beta}_i| / \sqrt{\hat{\sigma}^2 \{ \hat{\beta}_i \}} \geq t_{n-2, \alpha} \quad (i = 1, 2). \quad (4.118)$$

При выполнении этого неравенства значения соответствующих параметров считаются не противоречащими экспе-

риментальным данным. В противном случае рекомендуется изменить модель регрессии и снова решить задачу оценки ее (теперь уже единственного) параметра. Если незначимым оказался коэффициент β_2 , то следует перейти к регрессионной задаче, рассмотренной ранее. При признании незначимым коэффициента β_1 уравнение регрессии первого порядка будет содержать только коэффициент β_2 :

$$Y = \beta_2 x + \epsilon. \quad (4.119)$$

Рекомендуется получить соотношения для решения этой задачи самостоятельно.

Если параметры регрессии оказались значимыми или если было принято решение не изменять модель и не отбрасывать незначимые коэффициенты (выше отмечалось, что лучше оставить незначимые коэффициенты, чем ошибочно — вероятность этой ошибки равна α — отбросить значимые), то далее целесообразно провести интервальное оценивание параметров и значений ФР [см. выражения (4.78)].

Полиномиальная модель второго порядка. В заключение рассмотрим процедуру двухфакторного регрессионного анализа на примере уравнения

$$Y = \beta_1 + \beta_2 x + \beta_3 x^2 + \epsilon. \quad (4.120)$$

Здесь роль первого реального фактора x'_2 играет величина x , а второго x'_3 — ее квадрат. В этом случае

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\beta} &= [\beta_1 \ \beta_2 \ \beta_3]^T; \\ \mathbf{F} &= \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & x_n & x_n^2 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (4.121)$$

При вычислении оценок параметров использовать обратную матрицу $(\mathbf{F}^T \mathbf{F})^{-1}$ часто нецелесообразно и следует перейти к решению системы нормальных уравнений $\mathbf{F}^T \mathbf{F} \boldsymbol{\beta} = \mathbf{F}^T \mathbf{y}$, которая, как можно показать, в скалярном виде выглядит следующим образом:

$$n\beta_1 + \left(\sum_{i=1}^n x_i \right) \beta_2 + \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right) \beta_3 = \sum_{i=1}^n y_i;$$

$$\left(\sum_{i=1}^n x_i \right) \beta_1 + \left(\sum_{i=1}^n x_i^3 \right) \beta_2 + \left(\sum_{i=1}^n x_i^5 \right) \beta_3 = \sum_{i=1}^n x_i y_i; \quad (4.122)$$

$$\left(\sum_{i=1}^n x_i^4 \right) \beta_1 + \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right) \beta_2 + \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right) \beta_3 = \sum_{i=1}^n x_i^2 y_i.$$

Для ее решения могут использоваться методы, рассмотренные в § 4.3, и программы, описанные в гл. 5.

4.5. ОСОБЕННОСТИ РЕГРЕССИОННОГО АНАЛИЗА ПРИ НАРУШЕНИИ БАЗОВЫХ ПОЛОЖЕНИЙ

Регрессионный анализ при неоднородных и коррелированных возмущениях. Среди базовых предпосылок классического регрессионного анализа (см. § 4.2) особенно часто нарушается предположение об однородности и некоррелированности возмущений. Покажем, каким образом должна быть модифицирована процедура регрессионного анализа и к каким последствиям приведет использование классического алгоритма в неадекватных условиях [1, 3, 15, 27, 67, 78].

Итак, пусть входящий в уравнение регрессии $Y = F\beta + \epsilon$ вектор возмущений ϵ характеризуется корреляционной матрицей

$$V \equiv D\{\epsilon\} = \sigma_\epsilon^2 \Omega, \quad (4.123)$$

где Ω — некоторая положительно определенная матрица.

Основная идея модификации состоит в том, чтобы найти такое преобразование уравнения регрессии с коррелированными или неоднородными возмущениями, которое позволило бы получить классическую регрессию, рассмотренную ранее:

$$Z = Q\beta + \xi; \quad D\{\xi\} = \sigma_\epsilon^2 I. \quad (4.124)$$

Такое преобразование можно осуществить, если использовать представление корреляционной матрицы Ω в виде $\Omega = TT^T$. (4.125)

Отметим, что представление (4.125) не является единственным.

Умножим правую и левую части исходного уравнения регрессии на T^{-1} и получим

$$T^{-1}Y = T^{-1}F\beta + T^{-1}\epsilon. \quad (4.126)$$

Используя обозначения

$$T^{-1}Y = Z; \quad T^{-1}F = Q; \quad T^{-1}\epsilon = \xi, \quad (4.127)$$

придем к модели (4.124). Покажем, что преобразованные возмущения ξ являются некоррелированными и однородными. Для этого определим корреляционную матрицу вектора ξ :

$$\begin{aligned} D\{\xi\} &:= M\{\xi\xi^T\} = M\{(T^{-1}\epsilon)(T^{-1}\epsilon)^T\} = \\ &= T^{-1}M\{\epsilon\epsilon^T\}(T^T)^{-1} = T^{-1}V(T^T)^{-1} = \sigma_\epsilon^2 I, \end{aligned} \quad (4.128)$$

что и требовалось показать. Здесь учтено, что $M\{\xi\} = 0$, поскольку $M\{\epsilon\} = 0$.

Преобразованная модель (4.124) отвечает всем предпосылкам классического регрессионного анализа, поэтому для получения оценок параметров может использоваться МНК:

$$\hat{\beta}_\Omega = (Q^T Q)^{-1} Q^T z.$$

Эту оценку можно преобразовать с учетом (4.127):

$$\begin{aligned} \hat{\beta}_\Omega &= [(T^{-1}F)^T (T^{-1}F)]^{-1} (T^{-1}F)^T (T^{-1}y) = \\ &= (F^T (T^{-1})^T T^{-1} F)^{-1} F^T (T^{-1})^T T^{-1} y = \\ &= (F^T \Omega^{-1} F)^{-1} F^T \Omega^{-1} y. \end{aligned} \quad (4.129)$$

Соответствующим образом можно модифицировать и все остальные основные соотношения регрессионного анализа:

$$\hat{\eta} = F(F^T \Omega^{-1} F)^{-1} F^T \Omega^{-1} y; \quad (4.130)$$

$$\hat{\epsilon} = y - F(F^T \Omega^{-1} F)^{-1} F^T \Omega^{-1} y; \quad (4.131)$$

$$D\{\hat{\beta}_\Omega\} = \sigma_\epsilon^2 (F^T \Omega^{-1} F)^{-1}; \quad (4.132)$$

$$D\{\hat{\eta}\} = \sigma_\epsilon^2 F(F^T \Omega^{-1} F)^{-1} F^T; \quad (4.133)$$

$$s^2 = \frac{1}{n-m} (y - F\hat{\beta})^T \Omega^{-1} (y - F\hat{\beta}). \quad (4.134)$$

Полученные оценки при недиагональной матрице V на-

зывают оценками обобщенного метода наименьших квадратов (оценками Эйткена), а при диагональной матрице — оценками взвешенного МНК. В соответствии с теоремой Гаусса—Маркова они являются несмешенными и эффективными в классе несмешенных линейных оценок, а при гауссовском распределении возмущений совпадают максимально правдоподобными оценками и являются эффективными в классе всех несмешенных оценок.

Для анализа адекватности модели, точности и надежности оценок (4.130)–(4.134) могут использоваться выражения, рассмотренные в § 4.2 для обычной модели, в которой нужно лишь соответствующим образом изменить обычную сумму квадратов на обобщенную. Например, доверительная область для всех параметров задается неравенством [ср. с выражением (4.79)]

$$(\hat{\beta}_\Omega - \beta)^T Q^T Q (\hat{\beta}_\Omega - \beta) \leq \frac{m}{n-m} (z^T z - \hat{\beta}_\Omega Q^T z) F_{m,n-m,p'} \quad (4.135)$$

а индивидуальные доверительные интервалы для параметров ФР имеют вид [ср. с выражением (4.78)]

$$\begin{aligned} \hat{\beta}_{\Omega i} - t_{n-m, (1-p)/2} \sqrt{s^2 v_{ii}} &\leq \beta_i \leq \hat{\beta}_{\Omega i} + \\ + t_{n-m, (1-p)/2} \sqrt{s^2 v_{ii}}, \end{aligned} \quad (4.136)$$

где s^2 определяется из (4.134); v_{ii} — i -й диагональный элемент модифицированной матрицы ошибок (4.132).

Применение обычного, классического МНК для анализа модели с корреляционной матрицей возмущений (4.123) приводит к тому [15], что полученные оценки параметров и ФР хотя и остаются несмешенными, однако перестают быть эффективными. При этом оценка дисперсии становится смещенной, а из-за того, что классическая оценка корреляционной матрицы $D\{\hat{\beta}\}$ отличается от истинной корреляционной матрицы ошибок оценивания и ее элементы часто имеют заниженные значения, статистический анализ качества дает, как правило, ложные, "оптимистические" результаты.

Основная трудность применения рассматриваемых оценок заключается в том, что матрица Ω заранее, как правило, неизвестна. Поэтому оценки получают в два этапа [15]: сначала получают оценку корреляционной матрицы Ω , а за-

тем – оценки в соответствии с полученными ранее выражениями.

Регрессионный анализ в условиях мультиколлинеарности. При решении регрессионных задач часто сталкиваются с наличием сильной линейной связи между всеми или некоторыми объясняющими переменными. Это явление называется мультиколлинеарностью [1, 15, 27, 67, 78]. Мультиколлинеарность может проявляться в функциональной (явной) и вероятностной (скрытой) форме. Функциональная форма возникает, когда по крайней мере один из факторов связан с другим линейным функциональным соотношением. Вероятностная форма мультиколлинеарности имеет место, когда по крайней мере между двумя случайными объясняющими переменными существует сравнительно сильная корреляция. Во всех случаях, когда обнаруживается мультиколлинеарность, необходим тщательный предметно-содержательный анализ причин ее возникновения.

С математической точки зрения мультиколлинеарность проявляется в том, что информационная матрица $G = F^T F$ становится плохо обусловленной, а при строгой мультиколлинеарности – вырожденной ($\det F^T F = 0$), т. е. матрица регрессоров F имеет неполный ранг ($r < m$). Это приводит, как следует из результатов § 4.2, 4.3, к резкому снижению точности оценок параметров и функции регрессии, которые часто перестают удовлетворять предъявляемым требованиям. Оценки становятся крайне чувствительными к выборочным наблюдениям. Применение критериев значимости становится ненадежным.

Для установления наличия и степени мультиколлинеарности используются различные способы и показатели: коэффициент множественной детерминации, элементы корреляционной матрицы стандартизованных регрессоров и др. [3, 15, 78]. В линейной алгебре для исследования мультиколлинеарности широко используются рассмотренные в § 4.3 числа обусловленности матрицы регрессоров или информационной матрицы, которые достаточно просто могут быть рассчитаны с применением микро-ЭВМ.

Для борьбы с мультиколлинеарностью или в целях снижения степени ее нежелательного влияния на результаты анализа в настоящее время используется ряд методов [1, 13, 27, 28, 67, 78]:

1) метод центрирования факторов [15];

2) метод исключения коррелированных независимых

переменных; задача отсева факторов решается в ходе поиска наилучшей структуры модели (см. ниже);

3) метод линейного преобразования переменных. Метод основан на таком линейном преобразовании модели регрессии, при котором информационная матрица становится ортогональной. Дальнейшим его развитием является метод главных компонент, который фактически также реализует идею исключения переменных, однако не в исходном, а в ортогональном базисе;

4) алгебраические методы, основанные на применении для получения оценок параметров регрессии в исходном базисе численно устойчивых методов решения исходной системы

$$F\beta = y \Leftrightarrow Ax = b. \quad (4.137)$$

Отказ от использования нормальной системы уравнений (4.33) связан с тем, что число обусловленности матрицы $F^T F$ существенно больше числа обусловленности матрицы F исходной системы ($\text{cond } F^T F = \text{cond}^2 F$). Здесь используется определение числа обусловленности матрицы как отношения максимального сингулярного числа к минимальному, которое позволяет оценивать степень вырожденности не только квадратных, но и прямоугольных матриц. Отсюда следует, что переход от исходной системы к нормальной ухудшает обусловленность задачи и приводит к снижению точности решения. Кроме того, в условиях строгой мультиколлинеарности нормальная система не является определенной, что не позволяет применять для ее решения стандартные методы.

Рассмотрим два алгебраических метода, широко используемых на практике.

Метод псевдообращения. Предварительно дадим несколько определений. Нормальным псевдорешением СЛАУ (4.137) называется вектор \hat{x}_n , обеспечивающий минимум нормы невязки $\|b - A\hat{x}\|$ и имеющий минимальную норму $\|\hat{x}\|$ [7, 73]. Очевидно, что если матрица $A^T A$ не вырождена, то нормальное псевдорешение совпадает с обобщенным решением СЛАУ. При вырожденной матрице $A^T A$ существует бесконечное число обобщенных решений и нормальное псевдорешение совпадает с тем из них, которое имеет наименьшую норму.

Нормальное псевдорешение формально можно получить

с помощью псевдообратной матрицы \mathbf{A}^+ :

$$\hat{\mathbf{x}}_b = \mathbf{A}^+ \mathbf{b}. \quad (4.138)$$

Матрица \mathbf{A}^+ размера $m \times n$ называется псевдообратной (матрицей Мура–Пенроуза, обобщенной обратной матрицей) для матрицы \mathbf{A} размера $n \times m$, если она удовлетворяет следующим условиям:

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^+\mathbf{A} = \mathbf{A}; \quad \mathbf{A}^+\mathbf{A}\mathbf{A}^+ = \mathbf{A}^+;$$

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^+ = (\mathbf{A}\mathbf{A}^+)^T; \quad \mathbf{A}^+\mathbf{A} = (\mathbf{A}^+\mathbf{A})^T. \quad (4.139)$$

Можно показать, что такая матрица всегда существует и единственна [7]. Псевдообратная матрица обладает следующим экстремальным свойством [7]: для любой матрицы \mathbf{X} размера $m \times n$ выполняется соотношение $\|\mathbf{A}\mathbf{A}^+ - \mathbf{I}\| \leq \|\mathbf{A}\mathbf{X} - \mathbf{I}\|$, причем, если для какой-либо матрицы \mathbf{X} , отличной от \mathbf{A}^+ , имеет место равенство, то $\|\mathbf{A}^+\| < \|\mathbf{X}\|$. Если \mathbf{A} – квадратная невырожденная матрица, то $\mathbf{A}^+ = \mathbf{A}^{-1}$, которая, очевидно, удовлетворяет условиям (4.139). Если матрица \mathbf{A} – прямоугольная и имеет полный ранг ($r = m$), то

$$\mathbf{A}^+ = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \quad (4.140)$$

и нормальное псевдорешение совпадает с решением по методу наименьших квадратов (4.34). Если матрица \mathbf{A} имеет неполный ранг, то такого простого представления псевдообратной матрицы нет.

В настоящее время для псевдообращения матриц систем, особенно при их плохой обусловленности, как правило, применяется метод сингулярного разложения [74, 79]. При использовании этого метода, во-первых, не производится переход к нормальной системе уравнений, который, как отмечалось, ухудшает обусловленность системы, и, во-вторых, получаются алгоритмы, которые могут быть обобщены и на случай вырожденной СЛАУ.

Сначала рассмотрим псевдообратную матрицу для прямо-

угольной матрицы размера $n \times m$

$$D = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & 0 \dots 0 \\ 0 & d_2 & 0 \dots 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 \dots d_m \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 \dots 0 \end{bmatrix}. \quad (4.141)$$

Если эта матрица имеет ранг r ($r \leq m$), то r ее диагональных элементов отличны от нуля. Как можно проверить непосредственной подстановкой в выражение (4.139), псевдообратной для нее является матрица D^+ размера $m \times n$:

$$D^+ = \begin{bmatrix} d_1^+ & 0 \dots 0 \dots 0 \\ 0 & d_2^+ \dots 0 \dots 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 \dots d_m^+ \dots 0 \end{bmatrix}, \quad (4.142)$$

$$\text{где } d_j^+ = \begin{cases} 1/d_j & \text{при } d_j \neq 0; \\ 0 & \text{при } d_j = 0. \end{cases}$$

Отметим, что матрица DD^+ представляет собой матрицу порядка n , у которой на главной диагонали расположены r единиц, а остальные элементы являются нулями.

Теперь рассмотрим псевдообратную матрицу для произвольной матрицы A . Поскольку для матрицы A всегда, как и для вырожденной матрицы, может быть получено сингулярное разложение (см. § 4.3)

$$A = UDV^T,$$

то с учетом (4.141), (4.142) псевдообратной для A является матрица

$$A^+ = VD^+U^T, \quad (4.143)$$

которая определена как для невырожденных, так и для вырожденных СЛАУ.

Нормальное псевдорешение может быть получено как в традиционной форме

$$\hat{x} = VD^+U^Tb = \sum_{i=1}^r \mu_i^{-1} v_i u_i^T b, \quad (4.144)$$

так и в виде рекуррентного соотношения

$$\begin{aligned}\hat{x}^{(i)} &= \hat{x}^{(i-1)} + \mu_i^{-1} v_i u_i^T b \quad (i = \overline{1, r}); \\ \hat{x}^{(0)} &= 0,\end{aligned}\tag{4.145}$$

где r — ранг матрицы A ; μ_i — ее сингулярные числа.

Непосредственное использование псевдообращения дает удовлетворительные результаты лишь при малом уровне погрешностей исходных данных: $\gamma_A, \gamma_b \rightarrow 0$ (см. § 4.3). В противном случае метод псевдообращения неэффективен — норма вектора ошибки решения $\|\hat{x}_\tau - A^+ b\|$, как правило, оказывается недопустимо большой. Детально этот вопрос рассматривается в работах [5, 7, 73].

Для возмущенной СЛАУ вводится эффективная псевдообратная матрица A_τ^+ , которая имеет структуру псевдообратной матрицы (4.143), но для которой элементы матрицы (4.142) определяются иначе:

$$d_{\tau i}^+ = \begin{cases} 1/d_i, & \text{при } d_i > \tau; \\ 0, & \text{при } d_i \leq \tau. \end{cases}\tag{4.146}$$

Здесь учтено, что $d_i \geq 0$, поскольку $d_i = \mu_i$ ($i = \overline{1, m}$), где μ_i — сингулярные числа матрицы A .

Матрица A_τ^+ удовлетворяет лишь трем последним условиям Мура—Пенроуза (4.139), а первое заменяется неравенством

$$\|AA_\tau^+A - A\| \leq \tau.$$

Величина τ должна быть согласована с уровнем погрешностей задания исходных данных: при возрастании возмущений τ необходимо увеличивать, при повышении точности данных $\tau \rightarrow 0$.

Эффективное псевдорешение:

$$\hat{x}_\tau = A_\tau^+ b = \sum_{i=1}^{r'} \mu_i^{-1} v_i u_i^T b;\tag{4.147}$$

$$\begin{aligned}\hat{x}_\tau^{(i)} &= \hat{x}_\tau^{(i-1)} + \mu_i^{-1} v_i u_i^T b \quad (i = \overline{1, r'}), \\ \hat{x}_\tau^{(0)} &= 0,\end{aligned}\tag{4.148}$$

где r' — число, не превышающее ранга матрицы $r' \leq r$ и, также как и τ , согласованное с уровнем погрешности исходных данных.

Очевидно, что при малом уровне возмущений ($\tau \rightarrow 0$, $r' \rightarrow r$) $\hat{x}_\tau \approx \hat{x}_h \approx \hat{x}_t$. При возрастании погрешностей задания исходных данных $\hat{x}_\tau \neq \hat{x}_h \neq \hat{x}_t$. Однако при правильном задании параметра τ точность эффективного псевдорешения может существенно превышать точность нормального псевдорешения: $\|\hat{x}_\tau - A_\tau^+ b\| \ll \|\hat{x}_t - A^+ b\|$. Недостатком этого метода является отсутствие конкретных рекомендаций по выбору параметров τ или r' .

Метод регуляризации. От этого недостатка свободен другой метод, основанный на идеи регуляризации. В настоящее время метод регуляризации А.Н. Тихонова является основным при решении широкого класса некорректных задач¹, к числу которых относится и задача решения возмущенных СЛАУ [5, 7, 15, 44, 45, 73, 74].

В соответствии с методом регуляризации в качестве приближенного решения СЛАУ (4.137) в условиях возмущения матрицы системы и (или) вектора правых частей следует брать вектор \hat{x}_α , который обеспечивает минимум функционала

$$\Phi_\alpha(\hat{x}, b) = Q\{\hat{A}\hat{x}, b\} + \alpha F(\hat{x}). \quad (4.149)$$

Функционал (4.149) называется сглаживающим. Входящее в его состав слагаемое $Q\{\hat{A}\hat{x}, b\} = \|b - \hat{A}\hat{x}\|$ представляет собой квадрат нормы невязки решения \hat{x} , а $F(\hat{x})$ обычно называют стабилизирующим функционалом или стабилизатором и выбирают исходя из физического смысла задачи. Параметр α ($\alpha > 0$), называемый параметром регуляризации, должен быть определенным образом согласован с погрешностью задания исходных данных.

Отметим, что сглаживающий функционал является обобщением функционалов, использованных ранее. Так, при самостоятельном использовании функционала $Q(\hat{A}\hat{x}, b)$ поиск его минимума приводит к традиционным нерегуляризованным решениям по методу наименьших квадратов (4.34) или (4.144). Для вырожденной матрицы системы ранее было получено нормальное псевдорешение, которое соответствует

¹ Задача называется корректной (по АДАМАРУ), если, во-первых, решение существует, во-вторых, решение единственно, в-третьих, решение устойчиво к погрешностям исходных данных [73].

одновременной минимизации функционала $Q \{A\hat{x}, b\}$ и стабилизатора частного вида $F(\hat{x}) = \|\hat{x}\|^2$.

Полученное в результате минимизации сглаживающего функционала (4.149) приближенное решение СЛАУ (4.137) \hat{x}_α обладает тем замечательным свойством, что при согласовании параметра регуляризации с погрешностью исходных данных для него справедливы два условия [73]:

- 1) $\hat{x}_\alpha \rightarrow \hat{x}_T$ при $\gamma_A, \gamma_b \rightarrow 0$;
- 2) $\|\hat{x}_T - \hat{x}_\alpha\| \leq \|\hat{x}_T - \hat{x}\|$ при $\forall \hat{x}$.

Приближенное решение \hat{x}_α называется регуляризованным решением СЛАУ. Оно не является единственным в том смысле, что различным стабилизаторам $F(\hat{x})$ соответствуют различные, вообще говоря, решения \hat{x}_α . Выбор функционала $F(\hat{x})$ обычно подсказывает характером решаемой задачи и, естественно, основан на использовании заранее заданной информации о решении.

В частности, если известен вектор \hat{x}_0 , близкий по априорным данным к точному решению \hat{x}_T , то стабилизатор естественно задать в виде

$$F(\hat{x}) = \|\hat{x}_0 - \hat{x}\|^2 = (\hat{x}_0 - \hat{x})^\top (\hat{x}_0 - \hat{x})$$

и искать регуляризованное решение путем минимизации по α функционала

$$\Phi_\alpha(\hat{x}, b) = (b - A\hat{x})^\top (b - A\hat{x}) + \alpha(\hat{x}_0 - \hat{x})^\top (\hat{x}_0 - \hat{x}). \quad (4.150)$$

Можно показать [5], что в этом случае

$$\hat{x}_\alpha = (A^\top A + \alpha I)^{-1} (A^\top b + \alpha \hat{x}_0). \quad (4.151)$$

Вектор (4.151) называется регуляризованным решением СЛАУ, нормальным относительно вектора \hat{x}_0 . Если вектор \hat{x}_0 задать не удается, то можно принять его равным нулю. В результате получается решение

$$\hat{x}_\alpha = (A^\top A + \alpha I)^{-1} A^\top b. \quad (4.152)$$

Оно минимизирует квадрат нормы невязки решения $\|b - A\hat{x}\|$ при фиксированном квадрате нормы решения $\|\hat{x}\|^2$. Верно и обратное — решение (4.152) имеет мини-

мальный квадрат нормы в классе решений с заданным значением нормы невязки.

Ввиду отмеченной ранее вычислительной неэффективности использования обратных матриц на практике регуляризованное решение получают путем решения СЛАУ

$$(A^T A + \alpha I) x = A^T b. \quad (4.153)$$

Поскольку матрица $(A^T A + \alpha I)$ симметрична, для решения системы (4.153) целесообразно использовать метод квадратного корня (см. § 4.3).

Центральным при использовании метода регуляризации является вопрос об оптимальном (согласованном) значении параметра регуляризации α . Для определения этого значения используется ряд методов, в частности метод невязки [73, 74]. Показано, что параметр регуляризации, удовлетворяющий условию $\|b - A\hat{x}_\alpha\| \approx \delta_\epsilon$, обеспечивает получение решений, по порядку точности близких к оптимальному. Здесь δ_ϵ — оценка уровня погрешности исходных данных: $\|\epsilon\| \leq \delta_\epsilon$.

Рассмотрим более подробно особенности применения регуляризованных оценок вида (4.152) для решения регрессионной задачи, являющейся по своей сути статистической. Отметим, что в регрессионном анализе оценка (4.152) часто называется гребневой или ридж-оценкой. Можно показать, что гребневая оценка вектора параметров линейной регрессии $\hat{\beta}_\alpha = (F^T F + \alpha I)^{-1} F^T y$ обладает следующими свойствами [5, 15, 27, 28, 67]:

1. Гребневая оценка является смещенной, поскольку при $\alpha \neq 0$

$$M\{\hat{\beta}_\alpha\} = (I - \alpha (F^T F)^{-1})^{-1} \beta \neq \beta. \quad (4.154)$$

2. Гребневая оценка — результат линейного преобразования МНК-оценки. Действительно, поскольку $F^T y = F^T F \beta$, то

$$\hat{\beta}_\alpha = (F^T F + \alpha I)^{-1} F^T F \beta = R_\alpha \hat{\beta}, \quad (4.155)$$

где $R_\alpha = [I + \alpha (F^T F)^{-1}]^{-1}$, причем $R_\alpha \neq I$ при $\alpha > 0$. Отсюда, в частности, следует, что при невырожденной матрице $F^T F \lim_{\alpha \rightarrow 0} \hat{\beta}_\alpha = \hat{\beta}$.

3. Для любой матрицы регрессоров F существует такое значение параметра регуляризации $\alpha = \alpha_0 > 0$, при котором средняя сумма квадратов ошибки оценки (средний квадрат нормы ошибки) будет меньше полной дисперсии МНК-оценки:

$$L\{\hat{\beta}_{\alpha_0}\} \leq L\{\hat{\beta}\}, \quad (4.156)$$

где

$$L\{\hat{\beta}\} \equiv \text{tr}\{D\{\hat{\beta}\}\} = \sigma_{\epsilon}^2 \text{tr}\{(F^T F)^{-1}\};$$

$$L\{\hat{\beta}_{\alpha_0}\} = \text{tr}\{D\{\hat{\beta}_{\alpha_0}\}\} + (R_{\alpha_0}x_T - x_T)(R_{\alpha_0}x_T - x_T).$$

Действительно, при плохой обусловленности матрицы $(F^T F)$ ее минимальное собственное число стремится к нулю,

$$\text{поэтому величина } L\{\hat{\beta}\} \equiv \sigma_{\epsilon}^2 \text{tr}\{(F^T F)^{-1}\} = \sigma_{\epsilon}^2 \sum_{i=1}^m 1/\lambda_i$$

принимает крайне большие значения. В то же время средний квадрат нормы ошибки гребневой оценки в отличие от несмещенной МНК-оценки содержит две составляющие: полную дисперсию гребневой оценки, которая монотонно убывает с ростом α , и полный квадрат смещения, который при увеличении параметра регуляризации α монотонно растет. Отсюда следует, что при некотором значении $\alpha = \alpha_0$ средняя сумма квадратов $L\{\hat{\beta}_{\alpha}\}$ будет иметь минимум. Иными словами, из выражения (4.156) вытекает, что, допуская небольшое смещение оценки, можно уменьшить дисперсию регуляризованной оценки настолько, что при этом уменьшится и полный средний квадрат ошибки.

При использовании гребневых оценок для выбора оптимального значения α_0 также широко используется метод невязки. В простейшем случае α подбирают из условия

$$\sigma_{\epsilon_H}^2 \leq \|y - F\hat{\beta}_{\alpha}\|^2 \leq \sigma_{\epsilon_B}^2, \quad (4.157)$$

где $\sigma_{\epsilon_H}^2$ и $\sigma_{\epsilon_B}^2$ — оценки нижней и верхней границ дисперсии возмущений. Более корректным является статистический подход, когда α постепенно уменьшают, начиная с $\alpha \gg 0$, проверяя каждый раз гипотезу о равенстве векторов y и $F\hat{\beta}_{\alpha}$. Если гипотеза при каком-либо $\alpha = \hat{\alpha}_0$ принимается, то полученная оценка близка к оптимальной.

При коррелированных возмущениях $(D\{\epsilon\}) = \sigma^2 \Omega$, где Ω – неотрицательно определенная матрица с единичной главной диагональю) гребневая оценка принимает вид

$$\hat{\beta}_\alpha = (\mathbf{F}^\top \Omega^{-1} \mathbf{F} + \alpha \mathbf{I})^{-1} \mathbf{F}^\top \Omega^{-1} \mathbf{y}. \quad (4.158)$$

Гребневые оценки более общего вида, а также их связь с другими известными методами решения регрессионных задач рассмотрены в работах [5, 44, 45].

Выбор наилучшей структуры регрессионной модели. Одной из основных задач регрессионного анализа является обоснованное решение о том, какие факторы или регрессоры следует включить в модель. Выше отмечалось, что нежелательным оказывается как недобор, так и перебор факторов. Обсуждавшиеся в этом параграфе вычислительные проблемы, вызванные явлением мультиколлинеарности, во многом связаны с наличием в модели коррелированных или линейно зависимых переменных. Обоснованное упрощение модели позволяет снизить требуемые вычислительные затраты, повысить оперативность обработки, повысить прогностические возможности модели. Уменьшение числа регрессоров увеличивает число степеней свободы $v = n - m$ остаточной дисперсии и делает связанные с ней проверки гипотез более надежными. Рассмотрим некоторые наиболее распространенные методы поиска наилучших регрессионных моделей. (Более подробно эти вопросы обсуждаются в работах [1, 3, 10, 15, 27, 28, 32, 67].)

Построение и проверка всех возможных регрессий. Очевидный подход к построению оптимальной модели состоит в построении и статистической проверке всех возможных уравнений регрессии, которые можно получить, выбирая по i ($i = 0, m$) регрессоров. Поскольку для каждого регрессора имеется две возможности – либо он включается в модель, либо не включается, – то всего имеется 2^m возможных уравнений регрессии. Каждая модель проверяется на адекватность, например, с использованием остаточной дисперсии (4.76) коэффициента множественной детерминации, статистики Мэллоуза или др. Обычно этот метод используется при $m \leq 10 \dots 15$. Для сокращения числа проверок поступают следующим образом.

Все модели разбиваются на m подмножеств, содержащих 1, 2, ..., m регрессоров. Внутри каждого подмножества модели упорядочиваются, например, по возрастанию коэф-

фициента множественной детерминации (квадрат коэффициента корреляции переменных Y и X):

$$R^2 = 1 - [(\mathbf{y} - \hat{\mathbf{F}}\hat{\beta})^\top (\mathbf{y} - \hat{\mathbf{F}}\hat{\beta})] / [(\mathbf{y} - \bar{\mathbf{y}})^\top (\mathbf{y} - \bar{\mathbf{y}})] \equiv 1 - Q_0/Q,$$

где Q_0 – остаточная сумма квадратов; Q – полная сумма квадратов отклонений от среднего. Далее рассматриваются "лидеры" различных подмножеств и делается попытка выявить закономерности в появлении регрессоров. Рассмотрение начинается с моделей с малым числом регрессоров. Если при усложнении модели не происходит заметного прироста коэффициента детерминации, то введение нового регрессора едва ли целесообразно. Для принятия решения об обоснованности модели с p регрессорами ($p < m$) вычисляются и сравниваются коэффициенты детерминации для данной и для самой сложной модели с m регрессорами: R_p^2 и R_m^2 . Различия между моделями с p и m регрессорами считаются незначимыми, если выполняется неравенство

$$\frac{(n-m)(R_m^2 - R_p^2)}{1 - R_m^2} \leq (m-1) F_{(m-1), (n-m), \alpha} \quad (4.159)$$

где $F_{\nu_1, \nu_2 q}$ – квантиль порядка q F -распределения с ν_1 , ν_2 степенями свободы.

Аналогичная проверка может быть выполнена с использованием остаточной дисперсии s^2 , остаточной суммы квадратов Q_0 , статистики Мэллоуза или частного коэффициента корреляции. Поиск наилучшей (адекватной) модели заканчивается, как только различия между некоторой упрощенной и полной моделями будут незначимыми.

Метод исключения. При большом числе факторов и регрессоров анализ всех возможных регрессий становится затруднительным. Поэтому необходим переход к более экономичным процедурам поиска структуры адекватной регрессионной модели. На практике используется несколько стратегий поиска: поиск вдоль перспективных ветвей, метод включения и др. [15, 32, 67]. Однако наиболее широко применяется метод исключения и рассмотренный далее шаговый метод. Расчеты методом исключения начинают с обращения к полной регрессионной модели. После этого вычисляют частные F -критерии для оценки значимости каждого из полученных коэффициентов регрессии.

Частный критерий для i -го регрессора определяется в данном случае следующим образом:

$$F_i = \frac{(Q_{0i} - Q_0)(n - m')}{Q_0}, \quad (4.160)$$

где Q_0 — остаточная сумма квадратов для редуцируемой модели; Q_{0i} — остаточная сумма квадратов для редуцированной модели без i -го регрессора; m' — число регрессоров в редуцируемой модели (на первом шаге исключения $m' = m$).

После получения значений критерия для всех регрессоров определяется "кандидат" на исключение — регрессор с наименьшим значением F -критерия. Это значение F_{\min} сравнивается с критическим значением F -распределения с $1, n - m'$ степенями свободы при заданном уровне значимости α . Если $F_{\min} < F_{1, n - m', 1 - \alpha}$, то данный регрессор исключается из модели, в противном случае процедура исключения заканчивается. После исключения регрессора коэффициенты для редуцированной регрессионной модели рассчитываются заново, производится проверка гипотезы об адекватности новой модели и при положительном решении процедура исключения повторяется.

Метод шаговой регрессии. В расчетах этим методом используется как процедура исключения, так и включения регрессоров. Процедура начинается с рассмотрения самой простой регрессионной модели, в частности содержащей один регрессор. Далее рассматриваются все регрессоры, которые еще не включены в модель, и для них рассчитываются частные F -критерии. Выбирается регрессор с самым большим значением критерия F_{\max} , которое сравнивается с критическим значением F_1 для включения в модель. Если $F_{\max} > F_1$, то соответствующий регрессор включается в модель. В противном случае процедура завершается. После включения нового регрессора коэффициенты модели оцениваются заново и проверяется гипотеза об адекватности модели. Далее выполняется процедура исключения регрессора, ставшего незначимым после включения в модель нового регрессора: определяется регрессор с минимальным значением частного критерия F_{\min} , который сравнивается с критическим значением F_0 для исключения из модели (см. выше). Если $F_{\min} < F_0$, то данный регрессор исключается, в противном случае модель остается без изменений и переходят

к поиску "кандидата" на новое включение. Шаговый алгоритм завершается, если не удается выполнить ни нового исключения, ни нового включения регрессоров.

В заключение отметим, что рассмотренные в данном подпараграфе методы фактически являются средством для формирования хорошо обусловленной матрицы уравнения регрессии и дополняют рассмотренные ранее алгебраические методы решения регрессионной задачи при заданной матрице F . В то же время очевидны и определенные аналогии между некоторыми методами решения плохо обусловленных СЛАУ, например, методом псевдообращения или методом главных компонент и методом исключения регрессоров.

Регрессионный анализ в условиях ошибок в регрессорах. В некоторых практических случаях факторы или регрессоры задаются (измеряются) с ошибками (см. § 4.1). В этих условиях классические МНК-оценки параметров и функции регрессии теряют свои оптимальные свойства, что необходимо учитывать при их применении или при поиске альтернативных алгоритмов оценивания. Ограничимся кратким рассмотрением особенностей регрессионного анализа в условиях активного эксперимента. Более полно этот вопрос исследуется в работах [1, 15, 27, 32, 42, 67], где также обсуждаются особенности обработки результатов пассивного эксперимента и рассматриваются специальные алгоритмы регрессионного анализа.

В условиях активного эксперимента, характерного для научных исследований в технике, значения факторов целенаправленно задаются, однако из-за ошибок управления фактически на исследуемый объект действуют отличные от них значения

$$x_{\delta ij} = x_{ij} + \delta_{ij}, \quad (4.161)$$

где δ_{ij} – ошибка задания j -го фактора в i -м эксперименте.

В этих условиях уравнение регрессии можно записать в следующем виде:

$$\mathbf{y} = F_\delta \boldsymbol{\beta} + \mathbf{v}, \quad (4.162)$$

где \mathbf{y} – вектор наблюдаемых значений результирующей переменной; $\boldsymbol{\beta}$ – вектор оцениваемых параметров; F_δ – фактическая матрица регрессоров; \mathbf{v} – вектор возмущений.

Матрица регрессоров F_δ здесь представляется следующим образом:

$$F_\delta = \begin{bmatrix} f_1(x_{\delta 1}) & \dots & f_m(x_{\delta 1}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1(x_{\delta n}) & \dots & f_m(x_{\delta n}) \end{bmatrix}, \quad (4.163)$$

где $f_i(x)$ – известные функции; $x_{\delta i} = x_i + \delta_i$.

Фактическая матрица неизвестна, поэтому при оценивании параметров используется "запланированная" матрица регрессоров F , определяемая заданными значениями факторов. Уравнение регрессии, используемое при формировании оценки имеет вид

$$y = F\beta + \epsilon, \quad (4.164)$$

где ϵ – вектор отклонений, вызываемых как возмущениями модели (4.162), так и различием матриц F_δ и F :

$$\epsilon = v - \Delta F\beta. \quad (4.165)$$

Здесь $\Delta F = F_\delta - F$ – матрица, характеризующая отклонения фактической и расчетной матрицы регрессоров. В общем случае ΔF зависит не только от вектора возмущений факторов $\delta = [\delta_1, \dots, \delta_k]^T$, но и от значений вектора факторов x . Только для линейных функций $f_i(x)$ матрица ΔF будет функцией вектора δ . Например, если используется модель вида (4.6), то

$$F = \begin{bmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}; \quad F_\delta = \begin{bmatrix} x_1 + \delta_1 \\ \dots \\ x_n + \delta_n \end{bmatrix}; \quad \Delta F = \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \dots \\ \delta_n \end{bmatrix}. \quad (4.166)$$

Модель (4.164) представляет собой уравнение регрессии с известной матрицей плана, однако реальные свойства вектора отклонений ϵ не будут соответствовать базовым предпосылкам, описанным в § 4.2, даже в том случае, если фактический вектор отклонений v будет этим предпосылкам удовлетворять ($M\{v\} = 0$; $D\{v\} = \sigma_v^2 I$).

Действительно, можно показать [1, 15, 67], что математическое ожидание вектора ϵ

$$M\{\epsilon\} = -M\{\Delta F\}\beta, \quad (4.167)$$

а его корреляционная матрица

$$D\{\epsilon\} = \sigma_v^2 I + M\{[\Delta F - M\{\Delta F\}] \beta \beta^T [\Delta F - M\{\Delta F\}]\}. \quad (4.168)$$

Отсюда следует, что оценки параметров регрессии фактической модели (4.162), полученные обычным методом наименьших квадратов для модели (4.164) с использованием выражения (4.34), являются смещенными (из-за смещения вектора ϵ) и неэффективными (из-за коррелированности элементов этого вектора). Несмешенными, однако, и также не эффективными классические оценки будут только при линейных функциях $f_i(x)$, например для модели (4.6) при условии, что $M\{\delta_i\} = 0$. Непосредственное использование для оценки параметров регрессии обобщенного МНК, приспособленного для работы в условиях коррелированных отклонений, невозможно, поскольку корреляционная матрица $D\{\epsilon\}$ зависит от оцениваемых параметров [см. (4.168)] и в связи с этим неизвестна. Возможный путь решения этой проблемы — использование итерационных процедур, на каждом шаге которых оценивается вектор параметров β и корреляционная матрица возмущений. Отметим, что в тех случаях, когда погрешности задания факторов невелики, снижением эффективности классических МНК-оценок на практике часто можно пренебречь или использовать для получения оценок рассмотренные выше методы решения уравнения регрессии, устойчивые к погрешностям исходных данных.

ГЛАВА ПЯТАЯ

ЭЛЕМЕНТЫ ПРОГРАММНОГО ОБЕСПЕЧЕНИЯ РЕГРЕССИОННОГО АНАЛИЗА

5.1. ПОДПРОГРАММЫ БНТР/РАФОС

Подпрограммы матричной алгебры. Матричные подпрограммы являются удобным средством реализации алгоритмов обработки экспериментальных данных, рассмотренных как в гл. 3, так и в гл. 5. Ниже приводится описание основных подпрограмм, входящих в БНТР/РАФОС. Отметим некоторые особенности этих подпрограмм, которые следует учитывать при их практическом использовании. Они связаны, в первую очередь, с расположением данных в массивах, передаваемых в эти подпрограммы и из них в качестве фактических параметров. Отметим, что рассматриваемые особен-

ности характерны не только для пакета БНТР/РАФОС, но и для других библиотек подпрограмм, в частности для рассматриваемых в § 5.2 подпрограмм на языке "форктран".

Обычной формой представления матрицы в программе пользователя является двухмерный массив с границами, соответствующими действительным размерам матрицы. Например, матрица размера 3 X 3 задается двухмерным массивом

A (1,1)	A (1,2)	A (1,3)
A (2,1)	A (2,2)	A (2,3)
A (3,1)	A (3,2)	A (3,3)

Поскольку в действительности память ЭВМ организована в виде "линейки" запоминающих ячеек, то массив в запоминающем устройстве представляется в векторном виде и выглядит следующим образом:

A (1,1)	A (2,1)	A (3,1)	A (1,2)	A (2,2)
A (3,2)	A (1,3)	A (2,3)	A (3,3)	

Матричные подпрограммы организованы таким образом, что они используют в качестве формальных параметров для представления матриц именно векторные массивы, в которых элементы матриц расположены по столбцам. Поэтому в подпрограмму будет передан из основной программы именно этот векторный массив.

Однако иногда возникает необходимость в создании программ, позволяющих производить операции с матрицами с переменными размерами. В таких случаях соответствующий двухмерный массив в операторе явного описания типа (*DIMENSION, REAL*) описывается с максимально возможными размерами. Если максимальные границы, заданные оператором описания типа, превышают действительные размеры матрицы, то возникают проблемы при пересадке массива в подпрограмму. Пусть, например, область памяти, отводимая для запоминания данных описана оператором *DIMENSION A (3,3)*, а действительный размер матри-

цы равен 2×2 . Тогда в двухмерной записи распределение элементов матрицы по ячейкам памяти имеет вид:

A (1,1)	A (1,2)	
A (2,1)	A (2,2)	

Реально они распределяются в "линейке" запоминающего устройства следующим образом:

A (1,1)	A (2,1)		A (1,2)	A (2,2)				
---------	---------	--	---------	---------	--	--	--	--

Если теперь массив A передается в подпрограмму, в которой он описан оператором *DIMENSION A (N, N)*, и в вызывающей программе определено значение $N = 2$ (это значение передается в подпрограмму через список параметров), то подпрограмма будет оперировать не с заданным, а с искаженным массивом:

A (1,1)	
A (2,1)	A (1,2)

или

A (1,1)	A (2,1)	A (1,2)	
---------	---------	---------	--

Очевидно, что искажения массива будут отсутствовать только в том случае, если действительное число строк и столбцов матрицы совпадает с соответствующими границами двухмерного массива, указанными в операторе описания типа данных.

Для того чтобы можно было оперировать с матрицами переменного размера, что соответствует условию, когда максимальный размер в общем случае превышает реальный, необходимо "правильно" перейти от двухмерного к векторному представлению матрицы. Этот переход должен учитывать реальный размер матрицы. Так, для рассматриваемого

примера от двухмерной записи матрицы А (3.3) следует перейти к векторной записи, учитываяющей то, что действительный размер матрицы равен 2×2 :

A (1,1)	A (2,1)	A (1,2)	A (2,2)				
---------	---------	---------	---------	--	--	--	--

Тогда в подпрограмму, которая предварительным заданием параметра $N = 2$ подготовлена к обработке матрицы размера 2×2 , будут переданы первые четыре элемента векторного массива и искажений матрицы не произойдет.

Таким образом, при обращении к матричным подпрограммам в тех случаях, когда предполагаемая обработка матриц различного размера, следует перейти от двухмерной записи матрицы к векторной. Этот (и обратный ему) переход производится с помощью специальных подпрограмм: в библиотеке БНТР/РАФОС это подпрограмма *LARRAY* в подпрограммах на языке "форктран" – *FARRAY* (см. ниже).

Число ячеек памяти, используемых для хранения матриц, зависит от типа последних и от способа хранения в подпрограммах. Различают матрицы общего вида, симметричные и диагональные и соответственно три способа хранения.

При общем (полном) способе хранения в памяти находятся все элементы матрицы, расположенные в "линейке" ячеек по столбцам. Требуемое число ячеек памяти равно NM , где N и M – число строк и столбцов матрицы.

Для хранения симметричной матрицы может использоваться как общий, так и более экономный симметричный способ. В последнем случае в памяти размещается только верхняя треугольная часть матрицы, элементы которой располагаются по столбцам в последовательных ячейках памяти. При этом требуется $N(N + 1)/2$ ячеек памяти (принимается $N = M$).

Для хранения диагональных матриц в принципе могут использоваться общий или симметричный способы хранения. Однако действительно существенная экономия емкости памяти достигается при диагональном способе хранения, когда в N последовательных ячейках помещаются только диагональные элементы матрицы.

Способ хранения матриц в основной программе должен быть согласован со способом хранения в используемых подпрограммах. При необходимости изменения способа хранения могут применяться специальные подпрограммы

(подпрограммы *MSTR* и *LAMSTR*). Переменные, указывающие способ хранения матриц в вызываемых подпрограммах, могут принимать одно из следующих значений: 0 – общий способ хранения, 1 – симметричный, 2 – диагональный.

1. Подпрограмма *LARRAY*. Предназначена для преобразования одномерного массива в двухмерный и наоборот. Позволяет обращаться из программы пользователя, работающей с двухмерными массивами, к подпрограммам, работающим с массивами данных в векторной форме (с одномерными массивами).

Обращение к подпрограмме:

CALL LARRAY(MODE, I, J, N, M, S, D)

MODE – число, указывающее тип преобразования
MODE = 1 – из одномерного массива в двухмерный, *MODE* = 2 – из двухмерного массива в одномерный;

I – действительное число строк в матрице *D*;

J – действительное число столбцов в матрице *D*;

N – число строк, определенных для матрицы *D* в операторе явного описания типа;

M – число столбцов, определенных для матрицы *D* в операторе описания типа;

S – вектор размерности $k \geqslant I \times J$. При *MODE* = 1 вектор является входным, при *MODE* = 2 – выходным;

D – матрица размера $N \times M$, содержащая матрицу данных размера $I \times J$. При *MODE* = 1 матрица является выходной, при *MODE* = 2 – входной.

Используемых подпрограмм нет. Матрица *D* хранится полным способом. Массив *S* и матрица *D* могут храниться в одних и тех же ячейках памяти.

2. Подпрограмма *LAMSTR*. Предназначена для изменения способа хранения матрицы.

Обращение к подпрограмме:

CALL LAMSTR(A, R, N, MSA, MSR)

A – вводимая матрица;

R – результирующая матрица;

N – число строк и столбцов матриц *A* и *R*;

MSA – число, указывающее способ хранения матрицы *A*.

Используемая подпрограмма – *LALOC*. Матрица *R* не может находиться в тех же ячейках, что и матрица *A*.

3. Подпрограмма *LADCPY*. Предназначена для записи диагональных элементов матрицы в виде вектора (одномерного массива).

Обращение к подпрограмме:

CALL LADCPY (A, R, N, MS)

A – исходная матрица;

N – размер матрицы *A*;

MS – число, указывающее способ хранения матрицы *A*;

R – результирующий вектор длины *N*.

Используемая подпрограмма – *LALOC*.

4. Подпрограмма *LAConv*. Предназначена для преобразования элементов из представления с обычной точностью в представление с удвоенной точностью.

Обращение к подпрограмме:

CALL LAConv (N, M, MODE, S, D, MS)

N – число строк матриц *S* и *D*;

M – число столбцов матриц *S* и *D*;

MODE – число, указывающее тип преобразования: 1 – из обычной точности в удвоенную; 2 – из удвоенной точности в обычную;

S – матрица, содержащая числа обычной точности (входная матрица – при *MODE* = 1, выходная матрица – при *MODE* = 2);

D – матрица, содержащая числа удвоенной точности (выходная матрица – при *MODE* = 1, входная матрица – при *MODE* = 2).

MS – число, указывающее способ хранения матриц.

Используемых подпрограмм нет.

5. Подпрограмма *LAFADD*. Предназначена для сложения двух матриц, слагаемые и результат хранятся полным способом.

Обращение к подпрограмме:

CALL LAFADD (A, B, R, N, M)

A – первая вводимая матрица;

B – вторая вводимая матрица;

R – результирующая матрица;

N – число строк в матрицах *A*, *B*, *R*;

M – число столбцов в матрицах *A*, *B*, *R*.

Используемых подпрограмм нет.

7. Подпрограмма *LAFSUB*. Предназначена для въчитания двух матриц. Все матрицы хранятся полным способом.

Обращение к подпрограмме:

CALL LAFSUB (A, B, R, N, M)

Описание параметров дано в предыдущей подпрограмме.

8. Подпрограмма *LAFTRA*. Предназначена для транспонирования матрицы при полном способе хранения.

Обращение к подпрограмме:

CALL LAFTRA (A, R, N, M)

A – транспонированная матрица;

R – транспонируемая матрица;

N – число строк в матрице *A* и столбцов в матрице *R*;

M – число столбцов в матрице *A* и строк в матрице *R*.

Используемых подпрограмм нет. Матрица *R* не может храниться в тех же ячейках, что и матрица *A*.

9. Подпрограмма *LASMPY*. Предназначена для умножения матрицы на скаляр.

Обращение к подпрограмме:

CALL LASMPY (A, C, R, N, M, MS)

A – входная матрица;

C – скаляр;

R – выходная матрица;

N – число строк в матрицах *A* и *R*;

M – число столбцов в матрицах *A* и *R*;

MS – число, указывающее способ хранения матриц *A* и *R*.

Используемая подпрограмма – *LALOC*.

10. Подпрограмма *LASCLA*. Предназначена для присвоения каждому элементу матрицы значения, равного заданному скаляру.

Обращение к подпрограмме:

CALL LASCLA (A, C, N, M, MS)

- *A* – результирующая матрица;

C – заданный скаляр;

N – число строк в матрице *A*;

M – число столбцов в матрице *A*;

MS – число, указывающее способ хранения матрицы *A*.

Используемая подпрограмма – *LALOC*.

11. Подпрограмма *LADCLA*. Предназначена для присвоения каждому диагональному элементу значения, равного заданному скаляру.

Обращение к подпрограмме:

CALL LADCLA (A, C, N, MS)

A – вводимая и после выполнения подпрограммы результирующая матрица;

C – заданный скаляр;

N – число строк и столбцов в матрице *A*;

MS – число, указывающее способ хранения матрицы *A*.

Используемая подпрограмма – *LALOC*.

12. Подпрограмма *LAMPRD*. Предназначена для умножения двух матриц: $R = AB$.

Обращение к подпрограмме:

CALL LAMPRD (A, B, R, N, M, MSA, MSB, L)

A – первая вводимая матрица;

B – вторая вводимая матрица;

R – результирующая матрица;

N – число строк в матрицах *A* и *R*;

M – число столбцов в матрице *A* и строк в матрице *B*;

L – число столбцов в матрицах *B* и *R*;

MSA, *MSB* – числа, указывающие способ хранения матриц *A* и *B*.

Используемая подпрограмма – *LALOC*. Матрица *R* не может помещаться в тех же ячейках памяти, что и матрицы *A* и *B*.

13. Подпрограмма *LAMLFF*. Предназначена для умножения двух матриц, хранящихся полным способом.

Обращение к подпрограмме:

CALL LAMLFF (A, B, L, M, N, IA, IB, C, IC, IER)

A – первая заданная матрица размера $L \times M$;

B – вторая заданная матрица размера $M \times N$;

L – число строк матрицы *A*;

M – число столбцов матрицы *A* и строк матрицы *B*;

N – число столбцов матрицы *B*;

IA – заданное в операторе *DIMENSION* число строк матрицы *A*;

IB – заданное в операторе *DIMENSION* число строк матрицы *B*;

IC — заданное в операторе *DIMENSION* число строк матрицы *C*;

C — вычисляемая матрица размера *L* × *N*;

IER — вычисляемый параметр ошибки. Значение *IER* = 129 соответствует тому, что матрицы *A*, *B* или *C* имеют неправильный размер.

Используемая подпрограмма — *SVERTS*.

14. Подпрограмма *LAFPRD*. Предназначена для умножения транспонированной матрицы, хранящейся полным способом, на другую матрицу, хранящуюся тем же способом.

Обращение к подпрограмме:

CALL LAFPRD (A, B, R, N, M, L)

A — первая вводимая матрица;

B — вторая вводимая матрица;

R — результирующая матрица;

N — число строк в матрицах *A* и *B*;

M — число столбцов в матрице *A* и строк в матрице *R*;

L — число столбцов в матрицах *B* и *R*.

Используемых подпрограмм нет. Матрица *R* не может находиться в тех же ячейках, что и матрицы *A* или *B*.

15. Подпрограмма *LATPRD*. Предназначена для умножения транспонированной матрицы на другую матрицу при произвольном способе их хранения.

Обращение к подпрограмме:

CALL LATPRD (A, B, R, N, M, MSA, MSB, L)

A, B — первая и вторая вводимые матрицы;

R — результирующая матрица;

N — число строк в матрицах *A* и *B*;

M — число столбцов в матрице *A* и строк в матрице *R*;

L — число столбцов в матрицах *B* и *R*;

MSA, MSB — числа, указывающие способ хранения матриц *A* и *B*.

Используемых подпрограмм нет. Матрица *R* не может занимать те же ячейки, что и матрицы *A* и *B*.

16. Подпрограмма *LAMLFP*. Предназначена для умножения матрицы *A* на транспонированную матрицу *B*, хранящуюся полным способом: $R = A^T B$.

Обращение к подпрограмме:

CALL LAMLFP (A, B, L, M, N, IA, IB, C, IC, IER)

A — первая заданная матрица размера *L* × *M*;

B – вторая заданная матрица размера $N \times M$;

L – число строк в матрицах *A* и *C*;

M – число столбцов в матрицах *A* и *B*;

N – число строк в матрице *B* и число столбцов в матрице *C*;

IA – заданный в операторе *DIMENSION* размер матрицы *A* по строкам;

IB – заданный в операторе *DIMENSION* размер матрицы *B* по строкам;

IC – заданный в операторе *DIMENSION* размер матрицы *C* по строкам;

C – вычисляемая матрица размера $L \times M$;

IER – вычисляемый параметр ошибки. Значение *IER* = 129 означает, что матрицы *A*, *B* или *C* имеют неправильный размер.

Используемые подпрограммы – *Sverts*.

17. Подпрограмма *LAMATA*. Предназначена для умножения транспонированной матрицы на исходную с получением результирующей симметричной матрицы.

Обращение к подпрограмме:

CALL LAMATA (A, R, N, M, MS)

A – вводимая матрица;

R – результирующая матрица;

N – число строк в матрице *A*;

M – число столбцов в матрице *A*, размер матрицы *R*;

MS – число, указывающее способ хранения матрицы *A*.

Используемая подпрограмма – *LALOC*. Матрица *R* не может быть помещена в те же ячейки памяти, что и матрица *A*. Способ хранения матрицы *R* – симметричный.

18. Подпрограмма *LAMINV*. Предназначена для обращения квадратной матрицы, хранимой полным способом, методом Гаусса–Жордана.

Обращение к подпрограмме:

CALL LAMINV (A, N, D, L, M)

A – обращаемая матрица, разрешаемая в процессе вычислений. После выполнения подпрограммы *A* – матрица, обратная исходной;

N – размер матрицы *A*;

L, *M* – рабочий вектор размера *N*;

D – определитель входной матрицы *A*.

Используемых подпрограмм нет.

19. Подпрограмма *LASIN*. Предназначена для обращения симметричной положительно определенной матрицы методом квадратного корня.

Обращение к подпрограмме:

CALL LASIN (A, N, EPS, IER)

A – вектор размера $N(N + 1)/2$. При входе в подпрограмму – верхняя треугольная часть исходной матрицы, хранимой по столбцам. При выходе из подпрограммы – верхняя треугольная часть обратной матрицы;

N – размер исходной матрицы;

EPS – вводимая константа, используемая в качестве допускаемой относительной погрешности вычислений;

IER – индикатор ошибки: *IER* = 0 – ошибок нет; *IER* = -1 – нет результата либо из-за ошибки в параметре *N*, либо из-за того, что какое-либо подкоренное выражение (см. гл. 2) отрицательно, может быть из-за ошибок вычислений; *IER* = *K* – указывает на потерю точности, т. е. при разложении матрицы *A* в произведение $U^T U$ подкоренное выражение на (*K* + 1)-м шаге оказывается положительным, но по абсолютной величине меньшим, чем $ABS[EPS A(K + 1, K + 1)]$.

Используемая подпрограмма – *LAFSD* (см. ниже).

20. Подпрограмма *LADATF*. Предназначена для *LU*-разложения положительно определенной матрицы, хранящейся полным способом (*L* – матрица с единичной диагональю).

Обращение к подпрограмме:

CALL LADATF (A, LU, N, IA, IDGT, D1, D2, INPUT, EQUIL, WA, IER)

A – массив, содержащий элементы исходной матрицы, хранящейся полным способом;

N – порядок матрицы *A*;

IA – порядок матриц *A* и *LU* в операторе размерности в вызывающей программе;

IDGT – параметр проверки точности разложения: *IDGT* > 0 – предполагается, что элементы разложения имеют *IDGT* десятичных разрядов; *IDGT* = 0 – проверка на точность вычисления не производится;

LU – матрица порядка *N*, содержащая элементы треугольных матриц *L* и *U* (единичная диагональ матрицы *L* не хранится);

D_1, D_2 – компоненты для вычисления определителя D матрицы ($D = D_1 \cdot 2^D_2$);

$INPUT$ – вектор длины N , содержащий индексы перестановки строк;

$EQUIL$ – вектор размера N , содержащий обратные абсолютных значений наибольшего элемента каждой строки;

WA – параметр проверки точности, он существует, если $IDGT > 0$;

IER – индикатор ошибки: $IER = 128 + N1$ и $IER = 32 + + N1$ ($N1 = 1$ – при неустранимой ошибке; $N1 = 2$ – при потере точности).

Используемая подпрограмма $SVERTS$.

21. Подпрограмма $LAMFAC$. Предназначена для LU -разложения неособенной матрицы A .

Обращение к подпрограмме:

$CALL LAMFAC (A, PER, N, IA, IER)$

A – при входе в подпрограмму – исходная матрица A размера N ; при выходе из подпрограммы содержит элементы матриц L и U (единичная диагональ матрицы L не хранится);

PER – массив размерности не менее N , в котором содержатся перестановки строк матрицы;

N – порядок матрицы A ;

IA – граница первого измерения, указанная для матрицы A в вызывающей программе, если она хранится в форме с двойной индексацией; если матрица хранится векторным способом, то $IA = N$;

IER – индикатор ошибки: $IER = 0$ – нет ошибок; $IER = 3$ – разложение не может быть выполнено.

Используемых подпрограмм нет.

22. Подпрограмма $LAFSD$. Предназначена для $U^T U$ факторизации симметричной положительно определенной матрицы A .

Обращение к подпрограмме:

$CALL LAFSD (A, N, EPS, IER)$

A – массив размерности $N(N + 1)/2$, содержащий при входе в подпрограмму элементы верхней треугольной части симметричной матрицы A , расположенные по столбцам; при выходе из подпрограммы – элементы матрицы U ;

N – размер матрицы A ;

EPS – относительная погрешность вычислений;

IER – индикатор ошибки: *IER* = 0 – ошибки отсутствуют; *IER* = -1 – означает, что какое-то из подкоренных выражений неположительно (возможно вследствие ошибок округления); *IER* = *K* – указывает на потерю точности.

Используемых подпрограмм нет.

23. Подпрограмма *LADECP*. Предназначена для разложения симметричной положительно определенной матрицы *A*.

Обращение к подпрограмме:

CALL LADECP (A, U, N, D1, D2, IER)

A – массив размерности $N(N + 1)/2$, содержащий симметричную матрицу *A* размера $N \times N$, хранящуюся симметричным способом;

N – порядок матрицы *A*;

UL – массив размерности $N(N + 1)/2$, содержащий элементы матрицы *L*;

D1, D2 – компоненты определителя матрицы *A* (*D* = $= D1 \cdot 2^{D2}$);

IER – индикатор ошибки: *IER* = 129 – матрица *A* является вырожденной.

Подпрограммы решения систем линейных алгебраических уравнений. Данные подпрограммы базируются на факторизации матриц СЛАУ, выполняемых с помощью подпрограмм, рассмотренных выше. Могут применяться как для обращения матриц систем уравнений, так и для их непосредственного решения.

1. Подпрограмма *LAELMF*. Предназначена для решения СЛАУ методом *L U*-разложения.

Обращение к подпрограмме:

CALL LAELMF (A, B, IPUT, N, IA, X)

A – массив, содержащий элементы *L U*-разложения матрицы *A*, полученные с помощью подпрограммы *LADATF* (массив *L U*);

X – массив размера *N* элементов вектора решений СЛАУ;

B – массив размера *N* элементов вектора правой части;

IPUT – массив размера *N* (см. подпрограмму *LADATF*);

IA – порядок матрицы *A* в операторе размерности в вызывающей программе.

Используемые подпрограммы отсутствуют. Перед исполь-

зованием подпрограммы *LAELMF* применяется подпрограмма *LADATF*.

2. Подпрограмма *LAQT1F*. Предназначена для решения нескольких СЛАУ общего вида с одинаковыми матрицами и различными правыми частями методом *L U*-разложения.

Обращение к подпрограмме:

CALL LAQT1F (A, M, N, IA, B, IDGT, WK, IER)

A – матрица размера $N \times N$, хранимая полным способом;

M – число правых частей;

N – число уравнений в СЛАУ;

IA – число строк в операторе размерности для матриц *A* и *B* в вызывающей программе;

B – матрица размера $N \times M$, содержащая при входе в подпрограмму правые части уравнений. При выходе содержит *M* решений систем;

WK – рабочий массив размерности $\geq N$;

IER, IDGT – см. описание подпрограммы *LADATF*.

Используемые подпрограммы: *LADATF*, *LAELMF*, *SVERTS*.

3. Подпрограмма *LAELMP*. Предназначена для решения СЛАУ с симметричной матрицей методом квадратного корня.

Обращение к подпрограмме:

CALL LAELMP (A, B, N, X)

A – массив размерности $N(N + 1)/2$, содержащий матрицу *U*, соответствующую $L^T L$ -разложению матрицы *A*, получаемый с помощью подпрограммы *LADECP* (массив *U*);

B – массив, содержащий правые части системы;

X – массив, содержащий элементы вектора решения;

N – число строк матрицы.

Используемых подпрограмм нет. Перед использованием этой подпрограммы применяется подпрограмма *LADECP*.

4. Подпрограмма *LAQT1P*. Предназначена для решения нескольких СЛАУ с одинаковыми симметричными матрицами и различными правыми частями методом квадратного корня.

Обращение к подпрограмме:

CALL LAQT1P (A, M, N, B, IB, IDGT, D1, D2, IER)

A – массив размерности $N(N + 1)/2$, содержащий при

входе в программу коэффициенты матрицы A , хранящейся симметричным способом (элементы верхней треугольной части записаны по столбцам); при выходе из подпрограммы массив содержит элементы матрицы L $L^T L$ -разложения;

M – число различных правых частей;

N – число уравнений в каждой системе;

B – матрица размера $N \times M$ при входе в программу содержит элементы правых частей систем; при выходе содержит элементы решений систем;

IB – число строк в операторе размерности матрицы B в вызывающей программе;

$IDGT$, IER , $D1$ и $D2$ – параметры, см. описание к подпрограммам $LADATF$ и $LADECP$.

Используемые подпрограммы – $LADECP$, $LAELMP$, $Sverts$.

Подпрограммы регрессионного анализа. Позволяют непосредственно решать задачи комплексного регрессионного анализа при минимальном использовании подпрограмм предварительной подготовки и обработки данных.

1. Подпрограмма $STMIRI$. Производит вычисление средних значений, коэффициентов линейной регрессии, средних квадратических значений ошибок коэффициентов регрессии, стандартных отклонений для массивов, которые содержат недостающие величины.

Обращение к подпрограмме:

CALL STMIRI (X, N, M, IX, XMEAN, B, A, S, IBAS, INCD, IER)

X – заданная матрица наблюдений размера $N \times M$;

N – заданное число наблюдений над каждой переменной;

M – заданное число наблюдаемых переменных;

IX – заданный в операторе $DIMENSION$ размер матрицы X по строкам ($IX \geq N$);

$IBAS$ – заданный в операторе $DIMENSION$ размер по строкам матриц A , B и S , вычисленных при обращении к подпрограмме;

$XMEAN$ – вычисляемый вектор размерности M , содержащий среднее значение каждого из столбцов матрицы X ;

B – вычисляемая матрица порядка M , содержащая коэффициенты регрессии. Минимальный размер матрицы $M \times M$;

A – вычисляемая матрица порядка M , содержащая значение нулевых членов, отсекаемых по оси ординат уравнением регрессий;

S – вычисляемая матрица, диагональные элементы которой являются средними квадратическими отклонениями, а остальные элементы определяют средние квадратические ошибки коэффициентов регрессии;

INCD – вычисляемый вектор, содержащий значения инцидентности; указывает число пар наблюдений, использованных при вычислении матриц *B*, *A* и *S*;

IER – вычисляемый параметр ошибки. Определяется по формуле $IER = 32 + N$, где $N = 1$ – число пар наблюдений; $N = 2$ – число пар наблюдений.

Используемая подпрограмма – *SVERTS*.

2. Подпрограмма *STGT*. Предназначена для образования независимых переменных вплоть до степени *M* (наивысшей указанной степени полинома) и вычисления средних, стандартных отклонений и коэффициентов корреляции. Эта подпрограмма обычно вызывается перед обращением к подпрограммам *STMLTR*, *LAMINV* при выполнении полиномиальной регрессии.

Обращение к подпрограмме:

CALL STGDAT (N, M, X, XB, ST, D, SU)

N – заданное число наблюдений;

M – заданная наивысшая степень полинома;

X – заданная матрица размера $N \times (M + 1)$, в первый столбец которой помещаются данные для независимой переменной, а в последний – данные для зависимой переменной. При выходе из подпрограммы образованные степени независимой переменной помещаются в столбцы с номерами от 2 до *M*;

XB – вычисляемый вектор размерности *M* + 1, содержащий выборочные средние независимых и зависимой переменных;

ST – вычисляемый вектор размерности *M* + 1, содержащий выборочные стандартные отклонения независимых и зависимой переменных;

D – вычисляемая матрица [только верхняя треугольная часть симметричной матрицы $(M + 1) \times (M + 1)$], содержащая выборочные коэффициенты корреляции;

SU – вычисляемый вектор, содержащий выборочные ковариации независимых и зависимой переменных.

Примечание. Число *N* должно быть больше, чем *M* + 1. Если *M*, равно или больше пяти, то для получения

удовлетворительного результата вычисление с обычной точностью может быть недостаточно.

3. Подпрограмма *STMLTR*. Предназначена для выполнения анализа множественной линейной регрессии для зависимой переменной и множества независимых переменных. Используется для анализа множественной и полиномиальной регрессии.

Обращение к подпрограмме:

CALL STMLTR (N, K, XB, ST, D, RX, RY, IS, B, SB, T, A)

N – заданное число наблюдений, $N > K + 1$;

K – заданное число независимых переменных в данной регрессии;

XB – заданный вектор размерности *M*, содержащий средние значения всех переменных; *M* – число переменных;

ST – заданный вектор размерности *M*, содержащий стандартные отклонения всех переменных;

D – заданный вектор размерности *M*, содержащий диагональные элементы матрицы ковариаций;

RX – заданная матрица порядка *K*, содержащая обратные величины корреляций между независимыми переменными;

RY – заданный вектор размерности *K*, содержащий корреляции между независимыми переменными и зависимой переменной;

B – вычисляемый вектор размерности *K*, содержащий коэффициенты регрессии;

SB – вычисляемый вектор, содержащий стандартные отклонения коэффициентов регрессии;

T – вычисляемый вектор размерности *K*, содержащий *t*-значения;

A – вычисляемый вектор, содержащий следующую информацию: *A* (1) – свободный член уравнения регрессии; *A* (2) – множественный коэффициент корреляции; *A* (3) – стандартная ошибка оценки; *A* (4) – сумма квадратов, обусловленная регрессией (*SSAR*); *A* (5) – число степеней свободы, связанное с *SSAR*; *A* (6) – средний квадрат *SSAR*; *A* (7) – сумма квадратов отклонений от регрессии (*SSDR*); *A* (8) – число степеней свободы, связанное с *SSDR*; *A* (9) – средний квадрат *SSDR*; *A* (10) – *F*-значение.

Используемых подпрограмм нет.

4. Подпрограмма *STSTRG*. Предназначена для выполнения анализа шаговой множественной регрессии зависимой переменной и множества независимых переменных.

На каждом шаге в уравнение регрессии вводится переменная, которая имеет наибольшую частную корреляцию с зависимой переменной. Любая переменная из матрицы данных может быть обозначена как зависимая переменная. Любая независимая переменная может быть введена или устранена из уравнения регрессии независимо от ее доли участия в уравнении.

Обращение к подпрограмме:

CALL STSTRG (M, N, D, XB, ID, PC, NS, A, L, B, S, T, LL, IER)

M – заданное число переменных в матрице данных;

N – заданное число наблюдений;

D – заданная матрица порядка *M* ковариаций (корреляций). Эта матрица не сохраняется при выходе из подпрограммы;

XB – заданный вектор размерности *M* средних значений;

ID – заданный вектор размерности *M*, содержащий коды для каждой переменной. *ID(i) = 0* – *i*-я независимая переменная, пригодная для отбора; *ID(i) = 1* – *i*-я независимая переменная, обязательно вводимая в уравнение регрессии; *ID(i) = 2* – *i*-я переменная, не должна рассматриваться в уравнении регрессии; *ID(i) = 3* – *i*-я зависимая переменная; вектор *ID* в процессе вычисления не сохраняется;

PC – заданная константа, обозначающая часть общей дисперсии, определяемой какой-либо независимой переменной. Независимая переменная, для которой эта величина не достигается, не включается в уравнение регрессии. Для обеспечения ввода в уравнения регрессии всех переменных следует задать *PC = 0.0*;

NS – вычисляемый вектор размерности 5, содержащий следующую информацию. *NS(1)* – номер зависимой переменной; *NS(2)* – число переменных, в первую очередь включаемых в уравнение регрессии; *NS(3)* – число переменных, не включаемых в уравнение регрессии; *NS(4)* – номер последнего шага; *NS(5)* – номер последней переменной, введенной в уравнение регрессии;

A – вычисляемый вектор размерности 11, содержащий следующую информацию для последнего шага: *A(1)* – сумма квадратов, полученная на данном шаге (*S_s*); *A(2)* – отношение *P*; *A(3)* – накапливаемая сумма квадратов (*S_{CUM}*), *A(4)* – накапливаемое отношение (*P_{CUM}*); *A(5)* – сумма квадратов зависимой переменной; *A(6)* – коэффициент

множественной корреляции; $A(7)$ — F -отношение для суммы квадратов, обусловленной регрессией; $A(8)$ — стандартная ошибка оценки (остаточный средний квадрат); $A(9)$ — свободный член; $A(10)$ — коэффициент множественной корреляции, скорректированный с учетом степени свободы; $A(11)$ — стандартная ошибка оценки, скорректированная с учетом степеней свободы;

L — вычисляемый вектор размерности K , содержащий номера независимых переменных в уравнении регрессии;

K — число независимых переменных в уравнении регрессии;

B — вычисляемый вектор размерности K , содержащий частные коэффициенты регрессии, соответствующие переменным в векторе L ;

S — вычисляемый вектор размерности K , содержащий стандартные ошибки частных коэффициентов регрессии, соответствующие переменным в векторе L ;

T — вычисляемый вектор, содержащий T -значения, соответствующие переменным в векторе L ;

LL — рабочий вектор размерности M ;

IER — вычисляемый параметр ошибки: $IER = 0$ — ошибок не обнаружено; $IER = 1$ — остаточная сумма квадратов отрицательна или ведущий элемент в пошаговом процессе есть нуль. В этом случае переменная, которая вызвала данную ошибку, не входит в регрессию. Результат, предшествующий этому шагу, сохраняется, а текущий выбор прекращается.

П р и м е ч а н и е. Число наблюдений должно быть больше, чем число независимых переменных плюс единица. Переменные, которые включаются в уравнение регрессии пользователем, вводятся перед всеми другими независимыми переменными. В пределах множества этих переменных, первой выбирается та, которая определяет наибольшую часть дисперсии.

Используемая подпрограмма — $STOUT(NS,ANS,L,B,S,T,NSTOP)$. Эта подпрограмма должна быть составлена пользователем и является подпрограммой вывода, которая печатает результаты каждого шага регрессионного анализа.

$NSTOP$ — заданный код выбора, который равен единице, если шаговая регрессия должна быть закончена, и равен нулю, если она должна продолжаться.

5. П о д п р о г р а м м а $STSTEP$. Производит выбор наилучшей регрессионной модели, используя шаговый алгоритм.

Обращение к подпрограмме:

CALL STSTEP (A, M, N, ALFAI, ALFAO, IH, B, IOPT, IER)

A – заданная матрица исправленных сумм квадратов и векторных произведений независимых и зависимых переменных. Для хранения ее требуется вектор размерности $(M + 1) \times (M + 2)$; здесь же находятся вычисляемые коэффициенты регрессии и суммы квадратов ошибок;

M – заданное число независимых переменных;

N – заданное число точек данных;

ALFAI – заданный уровень значимости для исходной информации. Находится в пределах от 0 до 1;

ALFAO – заданный уровень значимости для "удаления" не равен нулю;

IOPT – заданный параметр, определяющий, необходимо ли просматривать результаты после каждого шага (при этом *IOPT* = 1) или же результаты необходимо выдать после того, как выбрана последняя модель (при этом *IOPT* = 0);

IH – вычисляемый вектор размерности *M*, определяющий, включена ли первая независимая переменная в модель. Если *IH* (*I*) = 1, то переменная не включена в модель;

B – вычисляемый вектор размерности *M* + 1, содержащий коэффициенты скорректированной модели;

IOPT – вычисляемый параметр, указывающий, что отобрана последняя регрессионная модель. При этом *IOPT* = -1;

IER – вычисляемый параметр ошибки. Определяется по формуле *IER* = $128 + N$, где *N* может принимать следующие значения: *N* = 1, 2 – ошибка в подпрограмме *STFD*; *N* = 4 – переменные были проверены на дополнение или вытиранье $2M$ раз; *N* = 5 – уровни значимости *ALFAI* и *ALFAO* были определены неверно; *N* = 6 – при попытке ввести очередную переменную в модель получается сингулярная подматрица.

Используемые подпрограммы – *STFD*, *STNOR*, *SVERTS*.

6. Подпрограмма *STFORC*. Вводит отобранные независимые переменные в модель, используя прямой шаговый алгоритм.

Обращение к подпрограмме:

CALL STFORC (A, M, N, ALFAI, ALFAO, JX, IH, B, IOPT, IER)

A – заданная матрица исправленных сумм квадратов и векторных произведений независимых переменных. Хра-

нится симметричным способом как вектор размерности $(M + 1) \times (M + 2)/2$; здесь же находятся вычисляемые коэффициенты регрессии и суммы квадратов ошибок;

M – заданное число независимых переменных;

N – заданное число точек данных;

$ALFA1$ – заданный уровень значимости для исходной информации. Находится в пределах от 0 до 1;

$ALFAO$ – заданный уровень значимости для "удаления" переменных. Находится в пределах от 0 до 1 и должен быть не меньше $ALFA1$;

JX – заданный вектор размерности M , содержащий единицы или нули в зависимости от того, необходимо ли введение данной переменной в модель;

IH – вычисляемый вектор размерности $M + 1$, определяющий, включена ли первая независимая переменная в модель. Если $IH(1) = -1$, то переменная в модель не включается. Если $IH(1) = 1$, то переменная включается в модель. При входе в подпрограмму $IH(1) = 0$;

B – вычисляемый вектор размерности $M + 1$, содержащий коэффициенты скорректированной модели;

$IOPT$ – вычисляемый параметр, указывающий, отобрана ли последняя регрессионная модель. При этом $IOPT = -1$;

IER – вычисляемый параметр ошибки. Определяется по формуле $IER = 128 + N$, где N может принимать следующие значения: $N = 1, 2$ – ошибка в подпрограмме $STFD$; $N = 4$ – переменные были проверены на дополнение или "удаление" $2M$ раз; $N = 5$ – уровни значимости " $ALFA1$ " и " $ALFAO$ " были определены неверно; $N = 6$ – при попытке ввести очередную переменную в модель получается сингулярная подматрица.

Используемые подпрограммы – $STFD$, $STNOR$, $SVERTS$.

7. Подпрограмма $STLEAP$. Предназначена для определения наилучших регрессионных подмножеств в полной регрессионной модели.

Обращение к подпрограмме:

CALL STLEAP (RR, KZ, IJOB, IXS, STAT, IXV, NVAR, IXB, BEST, IB, WK, IW, IER)

RR – заданный вектор размерности $(2 \times KZ * * 3 + 4 * KZ)/3$. Первые $KZ \times (KZ + 1)/2$ ячеек содержат коэффициенты матрицы корреляции. Оставшиеся ячейки используются как рабочая память; KZ – заданное число переменных;

IJOB — заданный вектор размерности 4: *IJOB*(1) — содержит число степеней свободы для вектора *RR*. Значение *IJOB*(1) должно быть не меньше, чем *KZ*; *IJOB*(2) — определяет критерий выбора модели; *IJOB*(3) — определяет максимальное число регрессий. При выходе из подпрограммы в *IJOB*(3) помещается вычисляемое число найденных подмножеств; *IJOB*(4) — определяет максимальное число регрессий для каждого подмножества;

WK — рабочий вектор размерности *KZ* × (2 × *IJOB*(4) + 6);

IW — рабочий вектор размерности 3 × *KZ* * * 2 + 9 × *KZ* + 12;

IXS — вычисляемый вектор размерности *KZ*, содержащий расположение первого элемента для каждого размера подмножества;

STAT — вычисляемый вектор, содержащий значения критерия для каждого рассмотренного подмножества;

IXV — вычисляемый вектор, содержащий ячейки первых элементов для каждого подмножества в *NVAR*;

NVAR — вычисляемый вектор, содержащий ряд переменных для каждого рассмотренного подмножества;

IXB — вычисляемый вектор, содержащий номер первой строки для каждого подмножества в *BEST*;

BEST — вычисляемая матрица коэффициентов наилучшей регрессии;

IB — размер строки в матрице *BEST*;

IER — вычисляемый параметр ошибки. Определяется по формулам: *IER* = 128 + *N* и *IER* = 32 + *N*, где *N* может принимать следующие значения: *N* = 1 — *KZ* или *IJOB* определены неверно; *N* = 2 — ошибка в подпрограмме; *N* = 3 — сумма ошибок квадратов неположительна; *N* = 4 — появились недопустимые значения в исходных данных; *N* = 5 — одна из имеющихся четырех переменных имеет недопустимое значение.

Используемые подпрограммы — *STFD*, *STNOR*, *Sverts*.

5.2. ПОДПРОГРАММЫ НА ЯЗЫКЕ "ФОРТРАН"

Подпрограммы матричной алгебры. Представленные подпрограммы выполняют те же функции, что и аналогичные подпрограммы БНТР/РАФОС. В связи с этим перед использованием данных подпрограмм необходимо ознакомиться

с особенностями матричных подпрограмм, описанных в § 5.1. В подпрограммах используется только полный способ хранения матриц.

1. Подпрограмма *FARRAY*. Предназначена для преобразования одномерного массива в двухмерный и наоборот. Позволяет обращаться из программы пользователя, работающей с двухмерными массивами, к подпрограммам, работающим с массивами в векторной форме (см. § 5.1).

```
SUBROUTINE FARRAY( MODE, I, J, N, M, S, D)
DIMENSION S(I, J), D(N, M)
IF(MODE.EQ.1) GO TO 30
DO 20 K1=1,I
    DO 10 K2=1,J
        S(K1,K2)=D(K1, K2)
10    CONTINUE
20    CONTINUE
30    DO 50 K1=1,I
        DO 40 K2=1,J
            D(K1,K2)=S(K1, K2)
40    CONTINUE
50    CONTINUE
      RETURN
END
```

Обращение к подпрограмме:

CALL FARRAY (MODE, I, J, N, M, S, D)

Параметры имеют тот же смысл, что и одноименные параметры подпрограммы *LARRAY* (см. § 5.1). Используемых подпрограмм нет.

2. Подпрограмма *FMTRA*. Предназначена для транспонирования матрицы при полном способе хранения.

```
SUBROUTINE FMTRA(A,B,N,M)
DIMENSION A(N, M), B(M, N)
DO 20 I=1,M
    DO 10 J=1,N
        B(I, J)=A(J, I)
10    CONTINUE
20    CONTINUE
      RETURN
END
```

Обращение к подпрограмме:

CALL FMTRA (A, B, N, M)

Параметры подпрограммы описаны в подпрограмме *LAFTRA* (§ 5.1). Используемых подпрограмм нет.

3. Подпрограмма *FMADD*. Предназначена для сложения двух матриц, хранящихся полным способом.

```
SUBROUTINE FMADD (A, B, R, N, M)
DIMENSION A(N, M), B(N, M), R(N, M)
DO 20 I=1,N
    DO 10 J=1, M
10    R(I, J)=A(I,J) +B (I,J)
20    CONTINUE
    RETURN
END
```

Обращение к подпрограмме:

CALL FMADD (A, B, R, N, M)

Параметры имеют тот же смысл, что и параметры подпрограммы *LAFADD* (см. § 5.1). Используемых подпрограмм нет.

4. Подпрограмма *FMSUB*. Предназначена для вычитания двух матриц. Матрицы хранятся полным способом.

```
SUBROUTINE FMSUB (A,B,R,N,M)
DIMENSION A(N,M), B(N,M), R(N,M)
DO 20 I=1,N
    DO 10 J=1, M
10    R(I,J)=A(I,J) -B (I,J)
20    CONTINUE
20    CONTINUE
    RETURN
END
```

Обращение к подпрограмме:

CALL FMSUB (A, B, R, N, M)

Параметры имеют тот же смысл, что и параметры подпрограммы *LAFSUB* (см. § 5.1). Используемых подпрограмм нет.

5. Подпрограмма *FMSPR*. Предназначена для умножения матрицы на скаляр.

```
SUBROUTINE FMSPR (A,C,R,N,M)
DIMENSION A (N,M), R (N,M)
DO 20 I=1,N
    DO 10 J=1,M
        R (I,J) = C*A (I,J)
10    CONTINUE
20    CONTINUE
      RETURN
END
```

Обращение к подпрограмме:

```
CALL FMSPR (A, C, R, N, M)
```

Параметры описаны в программе *LASMPY* (см. § 5.1). Используемых подпрограмм нет.

6. Подпрограмма *FMCMEQ*. Предназначена для присвоения каждому элементу матрицы значения, равного заданному скаляру.

```
SUBROUTINE FMCMEQ (A,C,N,M)
DIMENSION A (N,M)
DO 20 I=1, N
    DO 10 J=1,M
        A (I,J) = C
10    CONTINUE
20    CONTINUE
      RETURN
END
```

Обращение к подпрограмме:

```
CALL FMCMEQ (A, C, N, M)
```

Параметры описаны в подпрограмме *LASCLA* (см. § 5.1). Используемых подпрограмм нет.

7. Подпрограмма *FMCDEQ*. Предназначена для присвоения каждому диагональному элементу квадратной матрицы значения, равного заданному скаляру.

```
SUBROUTINE FMCDEQ (A,C,N)
DIMENSION A (N,N)
DO 10 I=1, N
```

A (I,I)=C
10 CONTINUE
RETURN
END

Обращение к подпрограмме:

CALL FMCDEQ (A, C, N)

Параметры описаны в подпрограмме *LADCLA* (см. § 5.1). Используемых подпрограмм нет.

8. Подпрограмма *FMPRD*. Предназначена для умножения двух матриц.

```
SUBROUTINE FMPRD (A,B,R,N,M,L)
DIMENSION A (N,M), B (M,L), R (N,L)
DO 30 J=1,L
    DO 20 I=1,N
        RV=0.
        DO 10 K=1, M
            R (I,J)=RV+A (I,K) *B (K,J)
            RV=R (I,J)
10      CONTINUE
20      CONTINUE
30      CONTINUE
      RETURN
END
```

Обращение к подпрограмме:

CALL FMPRD (A, B, R, N, M, L)

Параметры описаны в подпрограмме *LAMPRD* (см. § 5.1). Используемых подпрограмм нет.

9. Подпрограмма *FMATB*. Предназначена для умножения транспонированной матрицы на другую матрицу.

```
SUBROUTINE FMATB (A,B,R,N,M,L)
DIMENSION A (N,M), B (N,L), R (M,L)
DO 30 I=1,M
    DO 20 J=1,L
        PV=0.0
        DO 10 K=1, N
            R (I,J)=PV+A (K,I) *B (K,J)
            PV=R (I,J)
10      CONTINUE
20      CONTINUE
30      CONTINUE
      RETURN
END
```

```
10      CONTINUE
20      CONTINUE
30      CONTINUE
      RETURN
      END
```

Обращение к подпрограмме:

CALL FMATB (A, B, R, N, M, L)

Параметры описаны в подпрограмме *LAFPRD* (см. § 5.1). Используемых подпрограмм нет.

10. Подпрограмма *FMATA*. Предназначена для умножения транспонированной матрицы на исходную с получением результирующей симметричной матрицы, хранящейся полным способом.

```
SUBROUTINE FMATA (A,R,N,M)
DIMENSION A (N,M), R (N,M)
DO 30 I=1,M
      DO 20 J=1,M
            RV=0.0
            DO 10 K=1,N
                  R (I,J)=RV+A (K,I)*A (K,J)
                  RV=R (I,J)
10      CONTINUE
20      CONTINUE
30      CONTINUE
      RETURN
      END
```

Обращаться к подпрограмме:

CALL FMATA (A, R, N, M)

Описание параметров дано в подпрограмме *LAMATA* (см. § 5.1). Используемых подпрограмм нет.

11. Подпрограмма *FMINV*. Предназначена для обращения квадратной матрицы, хранимой полным способом, методом Гаусса.

```
SUBROUTINE FMINV (A,N,D,R,X,B,IER)
DIMENSION A (N,N), R (N,N), B (N), X (N)
IER1=1
DO 40 I=1,N
```

```

        IF (IER1.EQ.-1) GO TO 40
        DO 10 J=1,N
          B (J)=0.0
10      CONTINUE
        \B (I)=1.0
        CALL FGAUSS (A,X,B,N,D,IER)
        IF (IER.EQ.1) GO TO 20
        IER1=-1
        GO TO 40
20      DO 30 J=1,N
          R (J,I)=X (J)
30      CONTINUE
40      CONTINUE
        IER=IER1
        RETURN
        END

```

Обращение к подпрограмме:

CALL FMINV (A, N, D, R, X, B, IER)

A – обращаемая матрица;
N – размер матрицы *A*;
D – определитель матрицы;
R – результирующая матрица;
X – рабочий вектор размерности *N*;
B – рабочий вектор размерности *N*;
IER – индикатор ошибки: *IER* = 1 – матрица невырожденная; *IER* = -1 – матрица вырожденная.

Используемая подпрограмма *FGAUSS* (см. § 5.2).

12. Подпрограмма *FMSINV*. Предназначена для обращения квадратной симметричной матрицы, хранимой полным способом методом квадратного корня.

```

SUBROUTINE FMSINV(A,N,D,R,X,B)
DIMENSION A(N,N), R(N,N), B(N), X(N)
DO 40 I=1,N
        DO 10 J=1,N
          B (J)=0.0
10      CONTINUE
        B (I)=1.0
        CALL FSQRT (A, N,B,X)
20      DO 30 J=1,N
          R (J,I)=X (J)
30      CONTINUE
40      CONTINUE

```

```
30      CONTINUE
40      CONTINUE
      RETURN
      END
```

Обращение к подпрограмме:

```
CALL FMSINV (A, N, D, R, X, B, IER)
```

A – обращаемая симметричная матрица;
N – порядок матрицы *A* ;
D – определитель матрицы;
R – результирующая матрица;
X – рабочий вектор размерности *N*;
B – рабочий вектор размерности *N*;
IER – индикатор ошибки: *IER* = 1 – матрица невырожденная; *IER* = -1 – матрица вырожденная.

Используемая подпрограмма – *FSQRT*.

13. П о д п р о г р а м м а *DECOMP* [79]. Предназначена для *L U*-разложения матрицы *A* и определения ее числа обусловленности.

```
SUBROUTINE DECOMP (NDIM,N,A,COND,IPVT
!, WORK)
      INTEGER NDIM,N
      REAL A (NDIM,N), COND,WORK (N)
      INTEGER IPVT (N)
```

C
C ПРОГРАММА ВЫЧИСЛЯЕТ РАЗЛОЖЕНИЕ ВЕЩЕСТВЕННОЙ МАТРИЦЫ ПОСРЕДСТВОМ ГАУССОВА ИСКЛЮЧЕНИЯ И ОЦЕНИВАЕТ ОБУСЛОВЛЕННОСТЬ МАТРИЦЫ.
C NDIM=СТРОЧНАЯ РАЗМЕРНОСТЬ МАССИВА, СОДЕРЖАЩЕГО А
C N=ПОРЯДОК МАТРИЦЫ
C А=МАТРИЦА, КОТОРУЮ НУЖНО РАЗЛОЖИТЬ
C ВЫХОДНАЯ ИНФОРМАЦИЯ:
C А– СОДЕРЖИТ ВЕРХНЮЮ И НИЖНЮЮ ТРЕУГОЛЬНЫЕ МАТРИЦЫ
C COND=ОЦЕНКА ОБУСЛОВЛЕННОСТИ А.
C IPVT=ВЕКТОР ВЕДУЩИХ ЭЛЕМЕНТОВ.
C WORK–РАБОЧИЙ ВЕКТОР
C ОПРЕДЕЛИТЕЛЬ МАТРИЦЫ А МОЖНО ПОЛУЧИТЬ ПО ФОРМУЛЕ:

```

C      DET (A) =IPVT (N) *A (1,1) *A (2,2) *... * A (N, N)
C
REAL EK,T,ANORM,YNORM,ZNORM
INTEGER NM1,I,J,K,KP1,KB,KM1,M
IPVT (N) =1
IF (N.EQ.1) GO TO 80
NM1=N-1
C      ВЫЧИСЛЯЕТСЯ 1-НОРМА МАТРИЦЫ А
ANORM=0.0
DO 10 J=1,N
T=0.0
DO 5 I=1,N
T=T+ABS (A (I,J) )
5      CONTINUE
IF (T.GT.ANORM) ANORM=T
10     CONTINUE
C      ГАУССОВО ИСКЛЮЧЕНИЕ С ЧАСТИЧНЫМ ВЫБОРОМ
C      ВЕДУЩЕГО ЭЛЕМЕНТА
DO 35 K=1,NM1
KP1=K+1
C      ПОИСК ВЕДУЩЕГО ЭЛЕМЕНТА
M=K
DO 15 I=KP1,N
IF (ABS (A (I,K) ) .GT.ABS (A (M,K) )) M=I
15     CONTINUE
IPVT (K) =M
IF (M.NE.K) IPVT (N) =-IPVT (N)
T=A (M,K)
A (M,K)=A (K,K)
A (K,K)=T
C      СЛЕДУЮЩИЙ ШАГ ПРОПУСКАЕТСЯ, ЕСЛИ ВЕДУЩИЙ
C      ЭЛЕМЕНТ РАВЕН НУЛЮ.
IF (T.EQ.0.0) 00 TO 35
C      ВЫЧИСЛЯЮТСЯ МНОЖИТЕЛИ
DO 20 I=KP1,N
A (I, K) = -A (I, K) /T
20     CONTINUE
C      ПЕРЕСТАНОВКА И ИСКЛЮЧЕНИЕ ПО СТОЛБЦАМ
DO 30 J=KP1,N
T=A (M,J)
A (M,J)=A (K,J)
A (K,J)=T
IF (T.EQ.0.0) GO TO 30

```

```

DO 25 I=KP1,N
      A(I,J)=A(I,J)+A(I,K)*T
CONTINUE
CONTINUE
CONTINUE
C   РЕШЕНИЕ СИСТЕМЫ (ТРАНСПОНИР. ДЛЯ А) *Y=E
C
DO 50 K=1,N
      T=0.0
      IF (K.EQ.1) GO TO 45
      K M1=K-1
      DO 40   I=1,KM1
              T=T+A(I,K)*WORK(I)
      CONTINUE
      EK=1.0
      IF (T.LT.0.0) EK=-1.0
      IF (A(K,K).EQ.0.0) GO TO 90
      WORK(K)=-EK+T/A(K,K)
50    CONTINUE
      DO 60 KB=1,NM1
              K=N-KB
              T=0.0
              KP1=K+1
              DO 55   I=KP1,N
                      T=T+A(I,K)*WORK(K)
              CONTINUE
              WORK(K)=T
              M=IPVT(K)
              IF (M.EQ.K) GO TO 60
              T=WORK(M)
              WORK(M)=WORK(K)
              WORK(K)=T
60    CONTINUE
              YNORM=0.0
              DO 65   I=1,N
                      YNORM=YNORM+ABS(WORK(I))
              CONTINUE
C   РЕШАЕТСЯ СИСТЕМА A*Z=Y
              CALL SOLVE(NDIM,N,A,WORK,IPVT)
              ZNOR M=0.0
              DO 70   I=1,N
                      ZNORM=ZNORM+ABS(WORK(I))
              CONTINUE

```

```

C   ОЦЕНКА ОБУСЛОВЛЕННОСТИ
      COND=ANORM*ZNORM/YNORM
      IF (COND.LT.1.0)    COND=1.0
      RETURN
C   СЛУЧАЙ МАТРИЦЫ 1 НА 1
  80      COND=1.0
          IF (A(1,1).NE.0.0) RETURN
C   ТОЧНОСТЬ ВЫРОЖДЕННОСТЬ
  90      COND=1.0E+32
          RETURN
          END

```

Обращение к подпрограмме:

CALL DECOMP (NDIM, N, A, COND, IPVT, WORK)

A – массив, содержащий при входе в подпрограмму элементы матрицы *A*; при выходе из подпрограммы массив содержит элементы матриц *L* и *U*;

N – размер матрицы *A*;

NDIM – число строк массива *A*;

COND – число обусловленности матрицы *A*;

IPVT – массив, содержащий перестановку ведущих элементов матрицы *A*;

WORK – рабочий массив размерности *N*.

Определитель матрицы *A* можно получить по формуле $\det A = |IPVT(N)| A(1,1) A(2,2) \dots A(N,N)$. Используемых подпрограмм нет.

Подпрограммы решения систем линейных алгебраических уравнений. Используются при обращении матриц и для решения нормальной системы уравнений регрессии.

1. Подпрограмма *SOLVE* [79]. Используется для решения СЛАУ после выполнения треугольного разложения матрицы системы с помощью подпрограммы *DECOMP* (см. выше).

SUBROUTINE SOLVE (NDIM,N,A,B,IPVT)

INTEGER NDIM,N,IPVT (N)

REAL A(NDIM,N), B (N)

C .РЕШЕНИЕ ЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ A*X=B

C ПОДПРОГРАММУ НЕ СЛЕДУЕТ ИСПОЛЬЗОВАТЬ, ЕСЛИ

C DECOMP ОБНАРУЖИЛА ВЫРОЖДЕННОСТЬ

C NDIM=СТРОЧНАЯ РАЗМЕРНОСТЬ МАССИВА , СОДЕРЖАЩЕГО А

```

C   N    =ПОРЯДОК МАТРИЦЫ
C   A    =ФАКТОРИЗОВАННАЯ МАТРИЦА, ПОЛУЧЕННАЯ
C   ИЗ DECOMP
C   В    =ВЕКТОР ПРАВЫХ ЧАСТЕЙ
C   IPVT =ВЕКТОР ВЕДУЩИХ ЭЛЕМЕНТОВ, ПОЛУЧЕННЫЙ
C   ИЗ DECOMP
C   B    =ВЕКТОР РЕШЕНИЯ X.
      INTEGER KB,KM1,NM1,KP1,I,K, M
      REAL T
C   ПРЯМОЙ ХОД
      IF (N.EQ.1) GO TO 50
      NM1=N-1
      DO 20 K=1,NM1
          KP1=K+1
          M=IPVT (K)
          T=B (M)
          B (M)=B (K)
          B (K)=T
          DO 10 I=KP1,N
              B (I)=B (I)+A (I,K) *T
10      CONTINUE
20      CONTINUE
C   ОБРАТНАЯ ПОДСТАНОВКА
      DO 40 KB=1,NM1
          KM1=N-KB
          K=K M1+1
          B (K)=B (K) /A (K,K)
          T=-B (K)
          DO 30 I=1,KM1
              B (I)=B (I)+A (I,K) *T
30      CONTINUE
40      CONTINUE
50      B (1)=B (1) /A (1,1)
      RETURN
      END

```

Обращение к подпрограмме.

CALL SOLVE (NDIM, N, A, B, IPVT)

A – массив, содержащий элементы факторизованной матрицы *A*;

B – массив размерности *N*, содержащий правые части системы уравнений;

N, NDIM, IPVT – параметры, имеющие тот же смысл, что и одноименные параметры подпрограммы *DECOMP*. Используемых подпрограмм нет.

2. Подпрограмма *FGAUSS* решения СЛАУ методом Гаусса с выбором ведущего элемента по строке.

```
SUBROUTINE FGAUSS(A,X,B,N,D,IER)
DIMENSION A (N,N), X (N) ,B (N)
IER=-1
N1=N-1
DO 100 I=1,N1
M=I+1
IF (A (I,I) .NE.0) GO TO 50
DO 10 K=M,N
IF (A (K,I) .NE.0) GO TO 30
10 CONTINUE
GO TO 135
30 DO 40 J=I,N
V=A (J,J)
A (I,J)=A (M,J)
A (M,J)=V
40 CONTINUE
V=B (I)
B (I)=B (M)
B (M)=V
50 IF (A (M,I) .EQ.0) GO TO 80
R=-A (M,I) /A (I,I)
DO 60 J=I,N
A (M,J)=A (M,J) +R*A (I,J)
60 CONTINUE
B (M)=B (M) +R*B (I)
80 M=M+1
IF (M.LE.N) GO TO 50
100 CONTINUE
IF (A (N,N) .EQ.0) GO TO 135
X (N)=B (N) /A (N,N)
I=N1
110 V=0.0
I1=I+1
DO 120 M=I1,N
V=VA (I,M) *X (M)
120 CONTINUE
X (I)=(B (I) -V) /A (I,I)
```

```

I=I-1
IF (I.GE.1) GO TO 110
D=1
DO 130 I=1,N
D=D*A (I,I)
130 CONTINUE
IER=1
135 RETURN
END

```

Обращение к подпрограмме:

CALL FGAUSS (A, X,B, N, D, IER)

A – матрица системы;

X – вектор решения;

B – вектор правых частей;

N – размер матрицы *A*, векторов *B* и *X*;

D – определитель матрицы;

IER – индикатор ошибки: *IER* = 1 – ошибки нет; *IER* =
= -1 – матрица *A* является вырожденной.

Используемых подпрограмм нет.

3. Подпрограмма *FSQRT*. Предназначена для
решения СЛАУ методом квадратного корня.

```

SUBROUTINE FSQRT (A,N,B,X)
DIMENSION A (N,N), B (N), X (N) ,D (N,N)
DIMENSION C (N,N) ,Y (N)
REAL S1,S2,S3,S4
INTEGER I,J,K,L
D (1,1)=A (1,1)
Y (1)=B (1) /D (1,1)
C (1,1)=1.0
DO 5 I=2,N
D (I,1)=A (I,1)
C (I,I) =1.0
C (1,I)=A (1,I) /D (1,1)
5 CONTINUE
DO 60 I=2,N
M=I
DO 20 J=2,M
S1=0.0
DO 10 K=1,J-1
10 S1=S1+D (I,K) *C (K,J)
20 C (I,J)=S1
60 B (I)=Y (I)-S1
END

```

```

D (I,J) = A (I,J) - S1
20 CONTINUE
IF (I+1.GT.N) GO TO 45
DO 40 J=I+1,N
S2=0.0
DO 30 K=1,I-1
30 S2=S2+D (I,K) *C (K,J) -
C (I,J) = (A (I,J) - S2) /D (I,I)
40 CONTINUE
45 S3=0.0
DO 50 K=1,I-1
50 S3=S3+D (I,K) *Y (K)
Y (I) = (B (I) - S3) /D (I,I)
60 CONTINUE
X (N) = Y (N)
DO 80 L=1,N-1
I=N-L
S4=0.0
DO 70 K=I+1,N
70 S4=S4+C (I,K) *X (K)
80 X (I) = Y (I) - S4
RETURN
END

```

Обращение к подпрограмме:

CALL FSQRT (A, N, B, X)

A – матрица коэффициентов системы;

N – размер матрицы *A*, векторов *B* и *X*;

B – вектор правых частей;

X – вектор решения.

Используемых подпрограмм нет.

5.3. ПОДПРОГРАММЫ НА ЯЗЫКЕ "БЕЙСИК"

Подпрограммы матричной алгебры. Приводимые ниже подпрограммы являются аналогами подпрограмм, написанных на языке "форTRAN" (см. § 5.2). Ввиду того что в них сохранены имена подпрограмм (с заменой первой буквы *F* на букву *B*) и используемых переменных, то для их применения достаточно ознакомиться с описанием соответствующих подпрограмм § 5.2.

; 1. Подпрограмма *BARRAY*. Предназначена для преобразования одномерного массива в двухмерный или обратно

```
5 REM 'SUBROUTINE BARRAY'
10 IF M1=1 GO TO 40
15 FOR K1=1 TO I
20 FOR K2=1 TO J
25 S(K1,K2)=D(K1,K2)
30 NEXT K2
35 NEXT K1
40 FOR K1=1 TO I
45 FOR K2=1 TO J
50 D(K1,K2)=S(K1,K2)
55 NEXT K2
60 NEXT K1
65 RETURN
70 END
```

2. Подпрограмма *BMTRA*. Предназначена для транспонирования матрицы при полном способе хранения.

```
5 REM 'SUBROUTINE BMTRA'
10 FOR I=1 TO M
15 FOR J=1 TO N
20 B(I,J)=A(J,I)
25 NEXT J
30 NEXT I
35 RETURN
```

3. Подпрограмма *BMADD*. Предназначена для сложения двух матриц, хранящихся полным способом.

```
5 REM 'SUBROUTINE BMADD'
10 FOR I=1 TO N
15 FOR J=1 TO M
20 R(I,J)=A(I,J)+B(I,J)
25 NEXT J
30 NEXT I
35 RETURN
```

4. Подпрограмма *BMSUB*. Предназначена для вычитания двух матриц.

```
5 REM 'SUBROUTINE BMSUB'
10 FOR I=1 TO N
15 FOR J=1 TO M
20 R(I,J)=A(I,J)-B(I,J)
25 NEXT J
30 NEXT I
35 RETURN
```

5. Подпрограмма *BMSPR*. Производит умножение матрицы на скаляр.

```
5 REM 'SUBROUTINE BMSPR'
10 FOR I=1 TO N
15 FOR J=1 TO M
20 R(I,J)=C*A(I,J)
25 NEXT J
30 NEXT I
35 RETURN
```

6. Подпрограмма *BMCMEQ*. Присваивает каждому элементу матрицы значения, равные заданному скаляру.

```
5 REM 'SUBROUTINE BMCMEQ'
10 FOR I=1 TO N
15 FOR J=1 TO M
20 A(I,J)=C
25 NEXT J
30 NEXT I
35 RETURN
```

7. Подпрограмма *BMCMDEQ*. Предназначена для присвоения каждому диагональному элементу квадратной матрицы значения, равного заданному скаляру.

```
5 REM 'SUBROUTINE BMCMDEQ'
10 FOR I=1 TO N \ A(I,I)=C
15 NEXT I
20 RETURN
```

8. Подпрограмма *BMPRD*. Предназначена для умножения двух матриц.

```
5 REM 'SUBROUTINE BMPRD'
```

```
10 FOR J=1 TO L
15 FOR I=1 TO N \ RV=0.
20 FOR K=1 TO M
25 R(I,J)=RV+A(I,K)*B(K,J)
30 RV=R(I,J) \ NEXT K
35 NEXT I
40 NEXT J
45 RETURN
```

9. Подпрограмма *BMATB*. Предназначена для умножения транспонированной матрицы на другую матрицу.

```
5 REM 'SUBROUTINE BMATB'
10 FOR I=1 TO M
15 FOR J=1 TO L \ PV=0.
20 FOR K=1 TO N
25 R(I,J)=PV+A(K,I)*B(K,J)
30 NEXT K
35 NEXT J
40 NEXT I
45 RETURN
```

10. Подпрограмма *BMATA*. Предназначена для умножения транспонированной матрицы на исходную с получением результирующей симметричной матрицы, хранящейся полным способом.

```
5 REM 'SUBROUTINE BMATA'
10 FOR I=1 TO M
15 FOR J=1 TO M \ PV= 0.
20 FOR K=1 TO N
25 R(I,J)=PV+A(K,I)*A(K,J)
30 NEXT K
35 NEXT J
40 NEXT I
45 RETURN
```

11. Подпрограмма *BMINV*. Предназначена для обращения квадратной матрицы, хранимой полным способом, методом Гаусса.

```
5 REM 'SUBROUTINE BMINV'
10 I1=1
```

```

15 FOR I=1 TO N
20 IF I1=-1 GO TO 65
25 FOR J=1 TO N \ B(J)=0
30 NEXT J
35 B(I)=1
40 GOSUB 100
45 IF I2=1 GO TO 55
50 I1=-1 \ GO TO 65
55 FOR J=1 TO N
60 R(J,I)=X(J) \ NEXT J
65 NEXT I
70 I2=I1
75 RETURN
100 REM 'SUBROUTINE BGAUSS'

```

Используемая подпрограмма — *BGAUSS*.

12. Подпрограмма *BMSINV*. Предназначена для обращения квадратной симметричной матрицы, хранимой полным способом, методом квадратного корня.

```

5 REM 'SUBROUTINE BMSINV'
10 FOR I=1 TO N
15 FOR J=1 TO N \ B(J)=0.0
20 NEXT J
25 B(I)=1.0
30 GOSUB 100
35 FOR J=1 TO N \ R(J,I)=X(J)
40 NEXT J
45 NEXT I
50 RETURN
100 REM 'SUBROUTINE BSQRT'

```

Используемая подпрограмма — *BSQRT*.

Подпрограммы решения систем алгебраических уравнений. Приводимые программы аналогичны подпрограммам *FGAUSS* и *FSQRT* из § 5.2.

1. Подпрограмма *BGAUSS*. Предназначена для решения СЛАУ $Ax = b$ методом Гаусса. Описание переменных дано в § 5.2 (подпрограмма *FGAUSS*).

```

5 REM 'SUBROUTINE BGAUSS'
10 N1=N-1
15 FOR I=1 TO N1 \ M=I+1

```

```

20 IF A(I,I)<> 0 GO TO 55
25 FOR K=M TO N
30 IF A(K,I)<> 0 GO TO 40 \ NEXT K
35 GO TO 130
40 FOR J=I TO N \ V=A(J,J) \ A(I,J)=A(M,J)
45 A(M,J)=V \ NEXT J
50 V=B(I) \ B(I)=B(M) \ B(M)=V
55 IF A(M,I)=0 GO TO 75 \ R=-A(M,I)/A(I,I)
60 FOR J=1 TO N \ A(M,J)=A(M,J)+R*A(I,J)
65 NEXT J
70 B(M)=B(M)+R*B(I)
75 M=M+1 \ IF M<=N GO TO 55 \ NEXT I
80 IF A(N,N)=0 GO TO 130
85 X(N)=B(N)/A(N,N) \ I=N1
90 V=0.0 \ I1=I+1
95 FOR M=I1 TO N \ V=V+A(I,M)*X(M) \ NEXT M
100 X(I)=(B(I)-V)/A(I,I) \ I=I-1
105 IF I=>1 GO TO 90 \ D=1
110 FOR I=1 TO N \ D=D*A(I,I) \ NEXT I
130 RETURN

```

Используемых подпрограмм нет.

2. Подпрограмма *BSQRT*. Предназначена для решения СЛАУ методом квадратного корня. Описание переменных дано в § 5.2 (подпрограмма *FSQRT*).

```

5 REM 'SUBROUTINE BSQRT'
10 D(1,1)=A(1,1) \ Y(1)=B(1)/D(1,1)
15 C(1,1)=1.0
20 FOR I=2 TO N \ D(I,1)=A(I,1) \ C(I,1)=1.0
25 C(1,I)=A(1,I)/D(1,1) \ NEXT I
30 FOR I=2 TO N \ M=I
35 FOR J=2 TO M \ S1=0.0
40 FOR K=1 TO J-1 \ S1=S1+D(I,K)*C(K,J)
45 NEXT K
50 D(I,J)=A(I,J)-S1 \ NEXT J
55 I2=I+1
60 IF I2>N GO TO 85
65 FOR J=I+1 TO N \ S2=0.0
70 FOR K=1 TO I-1 \ S2=S2+D(I,K)*C(K,J)
75 NEXT K
80 C(I,J)=(A(I,J)-S2)/D(I,I)\ NEXT J
85 S3=0.0

```

```

90 FOR K=1 TO I-1 \ S3=S3+D(I,K)*Y(K)
95 NEXT K
100 Y(I)=(B(I)-S3)/D(I,I) \ NEXT I
105 X(N)=Y(N)
110 FOR L=1 TO N-1 \ I=N-L \ S4=0.0
115 FOR K=I+1 TO N \ S4=S4+C(I,K)*X(K)
120 NEXT K
125 X(I)=Y(I)-S4 \ NEXT L
130 RETURN

```

Используемых подпрограмм нет.

Программа корреляционно-регрессионного анализа BCORREG. Предназначена для определения параметров уравнения парной линейной регрессии $Y = A + BX$ и статистического анализа качества полученных оценок (см. гл. 4). Помимо точечных и интервальных оценок параметров и линии регрессии при доверительной вероятности $p = 0,95$, программа позволяет определить математические ожидания и дисперсии переменных X и Y и коэффициент корреляции между ними, а также оценить его значимость. Данные вводятся с дисплея (операторы 60 ... 100), их объем заранее не определяется ($N \leq 256$). Вывод данных производится на экран дисплея. Доверительные интервалы для линии регрессии выводятся в виде таблицы, в которую также включаются значения независимой переменной x_i и экспериментально полученные значения y_i . Программа работает в диалоговом режиме.

```

5 REM "PROGRAMM BCORREG"
10 REM "КОРРЕЛЯЦИОННО-РЕГРЕССИОННЫЙ АНАЛИЗ"
20 REM "      ДАННЫХ "
30 DIM X(255),Y(255),Y4(255),Y5(255),Y6(255)
35 DIM T(9),R1(9)
40 DATA 12.71,4.3,3.18,2.78,2.57,2.45,2.37
41 DATA 2.31,2.26,0.997,0.95,0.88,0.81,0.75
42 DATA 0.71,0.67,0.63,0.6
50 V1=0 \ V2=0 \ W1=0 \ W2=0 \ Z=0 \ Z1=0
60 FOR I=1 TO 255
70 PRINT "ВВЕСТИ X(";I;") ИЛИ A/P И GOTO 150"
80 INPUT X(I)
90 PRINT "ВВЕСТИ Y(";I;")"
100 INPUT Y(I)
110 V1=V1+X(I) \ V2=V2+X(I)*X(I)

```

```

120 W1=W1+Y(I) \ W2=W2+Y(I)*Y(I)
130 Z=Z+X(I)*Y(I) \ N=1
140 NEXT I
150 N1=N-1 \ N2=N-2 \ X1=V1/N \ Y1= W1/N
170 S1=V2-V1*V1/N \ S2=W2-W1*W1/N
190 X2=S1/N1 \ Y2=S2/N1 \ X3=SQR(X2)
200 Y3=SQR(Y2) \ S3=Z-Y1*W1/N
220 R=S3/SQR(S1*S2)
230 B=S3/S1 \ A=Y1-B*X1
250 PRINT
260 PRINT"*****"
280 PRINT" ТОЧЕЧНЫЕ ОЦЕНКИ ПАРАМЕТРОВ "
290 PRINT"*****"
300 PRINT"МАТ.ОЖИДАНИЯ: X CP=";X1;"Y CP=";Y1
320 PRINT" ДИСПЕРСИИ: DX=";X2;" DY=";Y2
330 PRINT"СР.КВАДР.ОТКЛ.: SX=";X3;" SY=";Y3
340 PRINT"КОЭФФИЦИЕНТ КОРРЕЛЯЦИИ R=";R
350 PRINT"УРАВНЕНИЕ РЕГРЕССИИ: Y=B*X+A"
360 PRINT"ПАРАМЕТРЫ: B=";B;" A=";A
370 PRINT"*****"
380 PRINT" ЕСЛИ НУЖНЫ ИНТЕРВАЛЬНЫЕ ОЦЕНКИ "
381 PRINT" GOTO 400 "
382 PRINT"*****"
390 STOP
400 FOR I=1 TO N \ Y5(I)=A+B*X(I)
410 Z1=1+(Y(I)-Y5(I))*(Y(I)-Y5(I)) \ NEXT I
440 S4=1/(N-2) \ S5=SQR(S4)
460 C0=S5*SQR(V2/(N*S1)) \ C1=S5/SQR(S1)
480 IF N2>9 GOTO 540
490 FOR I=1 TO 9 \ READ T(I) \ NEXT I
520 T1=T(N2) \ GO TO 550
540 T1=1.95+2.8/N2
550 T2=ABS(A)/C0 \ T3=ABS(B)/C1 \ A1=A-T1*C1
570 A2=A+T1*C0 \ B1=B-T1*C1 \ B2=B+T1*C1
580 IF N2>9 GOTO 610
590 FOR I=1 TO 9 \ READ R1(I) \ NEXT I
600 R2=R1(N2) \ GOTO 615
610 R2=0.21+3.73/N2
615 Z2=0.5*LOG((1+R)/(1-R)) \ Z3=1/SQR(N-3)
620 Z4=Z2-1.96*Z3 \ Z5=Z2+1.96*Z3
630 DEF FNT(Q)=(EXP(Q)-EXP(-Q)/EXP(Q)+EXP(-Q))
635 R3=FNT(Z4) \ R4=FNT(Z5)

```

```

640 IF N1>9 GOTO 655 \ T4=T(N1) \ GOTO 660
655 T4=1.95+2.8/N1
660 E=X3*T4/SQR(N) \ X4=X1-E \ X5=X1+E
670 X6=X3*(0.857-0.407/N1) \ X7=X6*X6
680 X8=X3*(1+10.63/N1) \ X9=X8*X8
690 PRINT"*****"
691 PRINT" РЕЗУЛЬТАТЫ ИНТЕРВАЛЬНОГО "
692 PRINT" ОЦЕНИВАНИЯ ПРИ ДОВЕРИТЕЛЬНОЙ "
693 PRINT" ВЕРОЯТНОСТИ P=0.95 "
694 PRINT"*****"
700 IF R2>=R GOTO 715
705 PRINT" КОЭФФИЦИЕНТ КОРРЕЛЯЦИИ НЕЗНАЧИМ "
710 GOTO 720
715 PRINT" R МИН= ";R3;" R МАКС= ";R4
720 PRINT" X СР.МИН= ";X4;" X СР.МАКС= ";X5
725 PRINT"DX МИН= ";X7;"DX МАКС= ";X9
730 PRINT"СКО X МИН= ";X6;"СКО X МАКС= ";X8
735 IF T2<=T1 GOTO 770 \ IF T3<=T1 GOTO 770
745 PRINT" A МИН= ";A1;" A МАКС= ";A2
750 PRINT" B МИН= ";B1;" B МАКС= ";B2
765 GOTO 775
770 PRINT" КОЭФФИЦИЕНТЫ А И В НЕЗНАЧИМЫ"
775 PRINT
780 PRINT"*****"
781 PRINT" ЕСЛИ НУЖНЫ ДОВЕРИТЕЛЬНЫЕ "
782 PRINT" ИНТЕРВАЛЫ ДЛЯ ЛИНИИ РЕГРЕССИИ "
783 PRINT" TO GOTO 800 "
784 PRINT"*****"
794 STOP
800 S6=T1*S5
810 FOR I=1 TO N \ D1=X(I)-X1 \ D2=D1*D1
830 D3=S6*SQR(D2/(N*X2)+1/N)
840 Y4(I)=Y5(I)-D3 \ Y6(I)=Y5(I)+D3 \ NEXT I
860 FOR I=0 TO 16
880 PRINT"*****"
890 PRINT"X Y ЭКСП Y МИН Y СР Y МАКС"
895 PRINT"*****"
900 FOR J=1 TO 15 \ J1=J+I*15
910 PRINT X(J1),Y(J1),Y4(J1),Y5(J1),Y6(J1)
920 NEXT J
930 PRINT"*****"
931 PRINT" ДЛЯ ВЫВОДА СЛЕДУЮЩИХ ЗНАЧЕНИЙ"
932 PRINT" GOTO 950"

```

```
933 PRINT"*****"
940 STOP
950 NEXT I
960 END
```

5.4. ПРОГРАММЫ ДЛЯ МИКРОКАЛЬКУЛЯТОРОВ

Программы матричной алгебры. 1. Программы ПМК 5/1—ПМК 5/4. Предназначены для выполнения умножения матрицы A размером $m \times n$ на матрицу B размером $n \times p$, где $n \leq 6$. Элементы матриц вещественные.

Программа ПМК 5/1 служит для умножения столбца на строку ($n = 1$).

4	П4	С/П	КП4	БП	02	П0	С/П	П1	С/П
П2	С/П	П3	С/П	4	П4	КИП4	ИП0	Х	С/П
БП	16	ИП1	П0	БП	14	ИП2	П0	БП	14
ИП3	П0	БП	14						

А. Инструкция к программе ПМК 5/1 для $m \leq 9, p \leq 4$: В/О; С/П; ввести элементы матрицы-столбца: a_{11} С/П; ...; a_{m1} С/П. Б/П 0,6; ввести элементы матрицы-строки: b_{11} С/П; ...; b_{p1} С/П. БП 14; подавать команду С/П; после каждого останова в РХ значение элемента первого столбца матрицы-произведения C : c_{11} ; ...; c_{m1} ; БП 22; подавать команду С/П; после каждого останова в РХ значения элементов второго столбца матрицы C . Для получения элементов третьего столбца — БП 26 С/П; четвертого — БП 30 С/П.

Б. Инструкция к программе ПМК 5/1 для $m > 9, p \leq 4$: выполнить программу по инструкции п. А для первых девяти элементов матрицы A , получить девять первых строк матрицы C . Повторить программу для следующих девяти (или оставшихся) элементов матрицы A , при этом элементы матрицы B вводятся снова. В результате будут получены очередные девять строк (или оставшиеся) матрицы C .

В. Инструкция к программе ПМК 5/1 для $m \leq 9, p > 4$: выполнить программу по инструкции п. А для первых четырех элементов матрицы B , получить первые четыре столбца матрицы C ; БП 06, ввести следующие четыре (или оставшиеся) элемента матрицы B , получить следующие четыре столбца матрицы C и т. д.

Г. Инструкция к программе ПМК 5/1 для $m > 9, p > 4$: ввести первые девять элементов матрицы A , действовать по

инструкции п. В до получения девяти первых строк матрицы C . Ввести следующие девять элементов (оставшиеся элементы) матрицы A , получить элементы следующих девяти строк матрицы C . Ввод элементов матрицы B повторяется.

Программа ПМК 5/2 служит для умножения матриц разме-ра $m \times n$ и $n \times p$ при $n = 2$.

4	П4	С/П	КП4	БП	02	П0	С/П	П1	С/П
П2	С/П	П3	С/П	4	П4	КИП4	ИП0	Х	КИП4
ИП1	Х	+	С/П	БП	16	ИП2	П0	ИП3	П1
БП	14								

А. Инструкция к программе ПМК 5/2 для $m \leq 4$, $p \leq 2$:
В/О; С/П; ввести построчно элементы матрицы A : a_{11} С/П;
 \dots ; a_{m2} С/П; БП 0,6; ввести по столбцам элементы матрицы B : b_{11} С/П; b_{12} С/П; \dots ; b_{2p} С/П. БП 14; подавать команду С/П; после каждого останова в РХ – элементы первого столбца матрицы C , начиная с c_{11} . После вывода c_{m1} – БП 26. Подавать команду С/П; после каждого останова в РХ – значение c_{12} , начиная с c_{12} .

Б. Инструкция к программе ПМК 5/2 для $m > 4$, $p \leq 2$:
В/О; С/П; ввести построчно элементы первых четырех строк матрицы A и, действуя по инструкции п. А, получить первые восемь элементов матрицы C – от c_{11} до c_{12} ; В/О; С/П; ввести элементы следующих четырех строк матрицы A ; БП 0,6; повторить ввод элементов b_{ij} и получить еще восемь элементов матрицы C .

В. Инструкция к программе ПМК 5/2 для $m \leq 4$; $p > 2$: выполнить программу по инструкции п. А, используя элементы первых двух столбцов матрицы B ; БП 0,6; ввести элементы двух следующих столбцов матрицы B и получить значения двух очередных столбцов матрицы-произведения.

Г. Инструкция к программе ПМК 5/2 для $m > 4$; $p > 2$: выполнить программу по инструкции п. В для первых четырех строк матрицы A и получить элементы четырех строк матрицы C . По инструкции п. Б ввести следующие восемь элементов матрицы A . Ввод столбцов матрицы B повторить, получить четыре следующие строки C и т. д.

Программа ПМК 5/3 предназначена для умножения матриц размера $m \times n$ и $n \times p$ при $n = 3$.

4	П4	С/П	КП4	БП	02	П0	С/П	П1	С/П
П2	4	П4	КИП4	ИП0	Х	КИП4	ИП1	Х	+
КИП4	ИП2	Х	+	С/П	БП	13			

А. Инструкция к программе ПМК 5/3 для $m \leq 3, p = 1$:
В/О; С/П; ввести построчно элементы матрицы A : a_{11} С/П;
 \dots ; a_{33} С/П; БП 06; ввести элементы матрицы B : b_{11} С/П;
 \dots ; b_{31} . Подавать команду С/П; после каждого останова
в РХ – значение c_{11} , начиная с c_{11} .

Б. Инструкция к программе ПМК 5/3 для $m > 3, p = 1$:
выполнить программу по инструкции п. А для первых трех
строк матрицы A ; получить значения $c_{11}; c_{12}; c_{31}$; далее В/О;
С/П; ввести построчно элементы трех следующих строк
матрицы A . БП 11. Подавать команду С/П; после каждого
останова в РХ – следующие три элемента матрицы-произве-
дения.

В. Инструкция к программе ПМК 5/3 для $m \leq 3, p > 1$: вы-
полнить программу по инструкции п. А с первым столбцом мат-
рицы B . После получения c_{11} – БП 0,6; ввести элементы вто-
рого столбца B ; получить элементы второго столбца C и т. д.

Г. Инструкция к программе ПМК 5/3 для $m > 3, p > 1$:
выполнить программу по инструкции п. А для первых трех
строк матрицы A и первого столбца B . Далее работать по
инструкции п. В. После получения трех строк C – В/О; С/П;
ввести следующие три строки A , ввод столбцов B повторять.

Программа ПМК 5/4 позволяет вычислять элементы
матрицы-произведения при $n \leq 6$. Каждое применение про-
граммы обеспечивает вычисление одного элемента c_{ij} .

1	4	ПО	С/П	КПО	КИПО	БП	03	1	3
ПО	БП	03	1	4	ПО	0	КИПО	КИПО	X
+	С/П	БП	1	7					

Инструкция к программе ПМК 5/4: В/О; С/П; ввести
элементы i -й строки матрицы A : a_{i1} С/П; \dots ; a_{in} С/П.
БП 08 С/П; ввести элементы j -го столбца матрицы B : b_{1j}
С/П; \dots ; b_{nj} С/П; БП 13; n раз подать команду С/П. В РХ –
 c_{ij} матрицы-произведения.

2. Программы ПМК 5/5–ПМК 5/9. Предназначены
для вычисления произведения матриц вида $A^T A$. Размер
исходной матрицы A – $m \times n$.

Программа ПМК 5/5 обеспечивает вычисления, если ис-
ходная матрица A представляет собой строку ($m = 1$),
а число n не превышает десяти.

П2	П1	1	3	П0	ПД	С/П	КПО	FL 1	06
ПП	26	ПП	18	ПП	25	БП	12	КИПД	КИПО
X	С/П	FL 1	18	В/О	КИП2	ИП2	П1	ИПД	П0
1	–	ПД	В/О						

Инструкция к программе ПМК 5/5: В/О; n С/П; ввести все элементы матрицы: a_{11} С/П; ...; после ввода a_{1n} подавать команду С/П; с каждым остановом в РХ – построчно значения элементов матрицы-произведения, начиная с диагональных (матрица C симметрична относительно главной диагонали): $c_{11}; c_{12}; \dots; c_{1n}; c_{22}; \dots$

Программа ПМК 5/6 используется, если в исходной матрице A $m = 2, n \leq 5$.

П2	2	X	П1	1	4	П3	П0	С/П	КП0
FL 1	08	ИП2	П1	ИП3	П0	ПП	35	КИП2	ИП2
П1	КИП3	КИП3	ИП3	П0	КИП0	ПД	КИП0	ПС	ИП3
П0	ПП	35	БП	18	ИПД	КИП0	Х	ИПС	КИП0
X	+	С/П	FL1	35	В/О				

Инструкция к программе ПМК 5/6: В/О; n С/П; ввести по столбцам элементы матрицы A : a_{11} С/П; a_{21} С/П; a_{12} С/П; ... После ввода a_{2n} подавать команду С/П. После каждого останова в РХ по строкам выводятся элементы матрицы-произведения, начиная с диагональных (использована симметрия матрицы C): $c_{11}; c_{12}; \dots; c_{1n}; c_{22}; \dots$

Программа ПМК 5/7 служит для вычисления произведения $A^T A$, если $m = n = 3$.

9	П1	1	4	П0	С/П	КП0	FL1	05	3
П1	1	4	П0	ПП	38	2	П1	1	1
П0	ИПА	ПД	ИП9	ПС	ИП8	ПВ	ПП	38	ИП7
Fx^2	ИП6	Fx^2	+	ИП5	Fx^2	+	С/П	0	ИПД
ПП	52	ИПС	ПП	52	ИПВ	ПП	52	С/П	FL1
38	В/О	КИП0	Х	+	В/О				

Инструкция к программе ПМК 5/7: В/О; С/П; ввести по столбцам элементы матрицы A : a_{11} С/П; a_{21} С/П; ...; a_{12} С/П; ...; после ввода a_{33} подавать команду С/П; с каждым остановом в РХ – значения элементов матрицы-произведения по строкам, начиная с диагональных (использована симметрия матрицы C).

Программа ПМК 5/8 используется, если исходная матрица A содержит один столбец элементов. Результатом произведения $A^T A$ является число.

0	С/П	Fx^2	+	БП	01
---	-----	--------	---	----	----

Инструкция к программе ПМК 5/8: В/О; С/П; вводить элементы исходной матрицы: a_{11} С/П. После каждого оста-

нова в РХ – значение $\sum_{i=1}^m a_{i1}^2$. Число m не ограничено.

Программа ПМК 5/9 используется, если исходная матрица A содержит два столбца элементов; число элементов m в столбце не более пяти.

П2	2	X	П1	1	4	П0	С/П	КП0	FL1
07	1	4	ПП	33	1	4	ИП2	–	П3
ПП	33	1	4	П0	0	КИП0	КИП3	X	+
FL2	26	С/П	П0	ИП2	П1	0	КИП0	Fx ²	+
FL1	37	С/П	В/О						

Инструкция к ПМК 5/9: В/О; m С/П; ввести по столбцам элементы исходной матрицы; после ввода a_{m2} : С/П в РХ – c_{11} ; С/П; в РХ – c_{22} ; С/П; в РХ – $c_{21} = c_{12}$.

3. Программы ПМК 5/10–ПМК 5/13. Предназначены для вычисления определителей матриц. Элементы матриц вещественные.

Программа ПМК 5/10 служит для вычисления определителя матрицы A второго порядка.

С/П	С/П	X	XY	С/П	X	XY	–	С/П
-----	-----	---	----	-----	---	----	---	-----

Инструкция к программе ПМК 5/10: В/О; ввести построчно элементы матрицы: a_{ij} С/П, начиная с a_{11} . После ввода a_{22} : в РХ – значение $\det(A)$.

Программа ПМК 5/11 служит для вычисления определителя матрицы третьего порядка.

4	П4	9	П0	С/П	КП4	FL0	04	ИП5	ИП9
X	ИП6	ИП8	X	–	X	ИПВ	ИП6	X	ИП5
ИПС	X	–	ИПА	X	+	ИП8	ИПС	X	ИП9
ИПВ	X	–	ИП7	X	+	П0	С/П		

Инструкция к программе ПМК 5/11: В/О; С/П; ввести построчно элементы матрицы a_{ij} С/П, начиная с a_{11} . После ввода a_{33} : в РХ и Р0 – $\det(A)$.

Программа ПМК 5/12 [76] является универсальной и служит для вычисления определителя матрицы порядка $n \leq 5$.

П4	1	4	П2	КИП0	ИП0	П1	С/П	ИП4	÷
КП2	FL1	07	1	4	П3	ИП0	П1	Cx	КП2
FL1	19	ИП0	ИП2	+	П1.	П2	ИП3	–	Fx ≠ 0
36	С/П	ПП	83	БП	23	КИП0	ИП4	С/П	КИП2
–	X	П4	ИП0	П3	Fx ≠ 037	FBx	С/П	КИП2	

- XY ÷ КП1 FL3 37 ИП1 ИПО + ПЗ
 1 4 П1 П2 КИП1/-/ ПП 83 ИПЗ +
 ПЗ ИП1 - Fx=0 64 ИПО П1 КИП3 КП2 FL1
 77 БП 13 ИПО XY ↑ КИП3 X КИП1 +
 КП2 F→ FL0 85 XY ПО В/О

Инструкция к программе ПМК 5/12: В/О; n П0; ввести построчно элементы матрицы: a_{ij} , С/П, начиная с a_{11} . После ввода a_{nn} : в РХ – значение $\det(A)$.

Программа ПМК 5/13 позволяет вычислять определитель матрицы произвольного порядка n . Для этого матрица $\{a_{ij}^{(n)}\}$ преобразуется в матрицу $\{a_{ij}^{(n-1)}\}$; матрица $\{a_{ij}^{(n-1)}\}$ – в матрицу $\{a_{ij}^{(n-2)}\}$ и т. д. [17], пока не будет получено число $a_{11}^{(1)} = \begin{bmatrix} a_{11}^{(2)} & a_{12}^{(2)} \\ a_{21}^{(2)} & a_{22}^{(2)} \end{bmatrix}$.

Определитель исходной матрицы A вычисляется по формуле $\det A = a_{11}^{(1)} / \gamma$, где

$$\gamma = \begin{cases} 1 \text{ при } n = 1, 2; \\ \prod_{k=3}^n [a_{11}^{(k)}]^{k-2} \text{ при } n \geq 3 \end{cases}$$

или

$$\gamma = a_{11}^{(3)} [a_{11}^{(4)}]^2 [a_{11}^{(5)}]^3 \dots [a_{11}^{(n)}]^{n-2}.$$

Если в процессе вычислений какой-то элемент $a_{11}^{(k)}$ оказывается равным нулю, перед переходом к очередному этапу понижения степени над первой строкой определителя следует выполнить тождественное преобразование, прибавив к ней элементы любой другой строки, так чтобы $a_{11}^{(k)} \neq 0$.

П0	С/П	П1	С/П	П2	С/П	П3	С/П	П4	С/П
П5	С/П	П6	С/П	П7	С/П	П8	С/П	П9	С/П
ПА	С/П	ПВ	С/П	ПС	С/П	ПД	С/П	ИП0	ИП8
X	ИП1	ПП	62	ИП0	ИП9	X	ИП2	ПП	62
ИП0	ИПА	X	ИП3	ПП	62	ИП0	ИПВ	X	ИП4
ПП	62	ИП0	ИПС	X	ИП5	ПП	62	ИП0	ИПД
X	ИП6	ИП7	X	-	С/П	В/О			

Инструкция к программе ПМК 5/13 для $n \leq 7$: В/О; ввести элементы двух верхних строк матрицы A : a_{11} С/П; a_{12} С/П; ...; a_{1n} С/П; БП 14; a_{21} С/П; ...; a_{2n} С/П. БП 28.

Подавать команду С/П; после каждого останова в РХ – значения $a_{11}^{(n-1)}$; $a_{12}^{(n-1)}$ и т. д. После получения $a_{1(n-1)}^{(n-1)}$: БП 14; ввести элементы третьей строки (аналогично – последующих): a_{31} С/П; ...; a_{3n} С/П; БП 28; далее подавать команду С/П; получить значения элементов второй строки новой матрицы и т. д. После получения всех элементов матрицы $\{a_{ij}^{(n-1)}\}$ ПМК 5/13 применяется к ней и т. д. Когда будет получено значение $a_{11}^{(1)}$, вычисляется γ и определитель $\det(A)$.

Инструкция к программе ПМК 5/13 для $n > 7$. Элементы исходной матрицы $\{a_{ij}^{(n)}\}$ группируются в массивы, каждый из которых содержит первый

$$\left\{ \begin{matrix} a_{11} \dots a_{17} \\ \dots \dots \dots \\ a_{n1} \dots a_{n7} \end{matrix} \right\}; \quad \left\{ \begin{matrix} a_{11} a_{18} \dots a_{1,13} \\ \dots \dots \dots \\ a_{n1} a_{n8} \dots a_{n,13} \end{matrix} \right\}; \quad \left\{ \begin{matrix} a_{11} a_{1,14} \dots \\ \dots \dots \dots \\ a_{n1} a_{n,14} \dots \end{matrix} \right\}; \dots$$

столбец и еще до шести столбцов исходной матрицы $\{a_{ij}^{(n)}\}$. В соответствии с инструкцией для $n \leq 7$ выполняется обработка первого массива и находятся элементы $a_{11}^{(n-1)}$; ...; $a_{16}^{(n-1)}$; ...; $a_{n6}^{(n-1)}$, затем обрабатывается второй массив и т. д.

4. Программы ПМК 5/14 и ПМК 5/15. Предназначены для вычисления обратных матриц (элементы матриц вещественные).

Программа ПМК 5/14 служит для обращения матрицы размера 2×2

П6	С/П	П1	С/П	П2	С/П	П7	ИП6	X	ИП1
ИП2	X	–	П4	/–	П5	ИП6	ИП4	÷	П3
ИП7	ИП4	÷	П0	ИП1	ИП5	+	П1	ИП2	ИП5
+	П2	С/П							

Инструкция к программе ПМК 5/14: В/О; ввести построчно элементы матрицы A : a_{11} С/П; ...; a_{22} С/П. Результаты: a^{11} – в Р0, a^{12} – в Р1, a^{21} – в Р2 и РХ, a^{22} – в Р3.

Программа ПМК 5/15 служит для обращения матрицы размера 3×3 .

П7	С/П	П8	С/П	П9	С/П	П4	С/П	П5	С/П
----	-----	----	-----	----	-----	----	-----	----	-----

П6	С/П	П1	С/П	П2	С/П	П3	З	П0	ИП4
ИП7	÷	ПД	/-/	ПС	ИП5	ИПД	ИП8	Х	-
ПА	ИП6	ИПД	ИП9	Х	-	ПВ	ИП1	ИП7	÷
ПД	/-/	П6	ИП2	ИПД	ИП8	Х	-	П4	ИП3
ИПД	ИП9	Х	-	П5	ИП8	ИП7	÷	П1	ИП9
ИП7	÷	П2	ИП7	F1/x	П3	ИПА	П7	ИПВ	П8
ИПС	П9	FL0	19	С/П					

Инструкция к программе ПМК 5/15: В/О; ввести построчно элементы матрицы A : a_{11} С/П; ...; a_{33} С/П. Результаты: в Р7 – a^{11} ; в Р8 – a^{12} ; в Р9 – a^{13} ; в Р4 – a^{21} ; в Р5 – a^{22} ; в Р6 – a^{23} ; в Р1 – a^{31} ; в Р2 – a^{32} ; в Р3 – a^{33} .

Программы решения систем линейных алгебраических уравнений.

1. Программы ПМК 5/16–ПМК 5/21. Предназначены для нахождения корней системы линейных уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = S_1; \\ \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = S_n. \end{cases}$$

Программа ПМК 5/16 служит для вычисления корней системы двух линейных уравнений.

6	П4	П0	С/П	КП4	FL0	03	ИП7	Х	ИПА
ИП9	Х	-	ИП7	ИПВ	Х	ИП8	ИПА	Х	-
+	П2	ИП9	ИП8	ИП2	Х	-	ИП7	÷	П1
СП									

Инструкция к программе ПМК 5/16: В/О; С/П; a_{11} С/П; a_{12} С/П; S_1 С/П; a_{21} С/П; a_{22} С/П; S_2 С/П. Результаты: в РХ и Р1 – x_1 , в Р2 – x_2 .

Программа ПМК 5/17 служит для вычисления корней системы трех линейных уравнений.

1	4	П0	3	П2	3	П1	С/П	П4	С/П
ИП4	÷	КП0	FL1	09	FL2	05	ИП5	ИПВ	-
ИПА	ИПД	-	П5	Х	ИП7	ИПД	-	П7	ИП8
ИПВ	-	П8	Х	-	ИП6	ИПС	-	ИП5	Х
ИП9	ИПС	-	П6	ИП7	Х	-	÷	П3	ИП8
ИП3	ИП6	Х	-	ИП5	÷	П2	ИПВ	ИП2	ИПД
Х	-	ИП3	ИПС	Х	-	П1	С/П		

Инструкция к программе ПМК 5/17: В/О; С/П; ввести построчно коэффициенты уравнений, включая свободные члены: a_{11} С/П; ...; a_{13} С/П; S_1 С/П; a_{21} С/П; ...; S_3 С/П. Результаты: в РХ и Р1 – x_1 ; в Р2 – x_2 ; в Р3 – x_3 .

Программа ПМК 5/18 [76] служит для решения линейной системы из $n \leq 4$ уравнений.

P4	1	4	P2	ИП0	П1	С/П	ИП4	\div	КП2
FL1	06	1	4	П3	ИП0	П1	FL1	23	КИП3
С/П	БП	19	Cx	КП2	FL1	24	КП2	ИП0	ИП2
+	П1	П2	ИП3	-	Fx \neq 042		С/П	ПП	84
БП	28	КИП0ИП0	П3	С/П	КИП2	-	П4	С/П	
КИП2	-	ИП4	\div	КП1	FL3	49	ИП1	ИП0	+
П3	1	4	П1	П2	КИП1/-/		ПП	84	ИП3
+	П3	ИП1	-	Fx=065	ИП0		П1	КИП3	КП2
FL1	78	БП	12	ИП0	XY	\uparrow	КИП3	X	КИП1
+	КП2	F \rightarrow	FL0	86	F \rightarrow	П0	B/O		

Инструкция к программе ПМК 5/18: n П0; В/О; a_{11} С/П; ...; a_{1n} С/П; S_1 С/П; a_{21} С/П; a_{22} С/П; ...; S_n С/П. После останова x_1 — в РХ и РД; С/П; после останова x_2 — в РХ и РС; С/П; x_3 — в РХ и РВ, СП; x_4 — в РХ и РА.

Программа ПМК 5/19 [76] предназначена для нахождения корней системы из пяти линейных уравнений для $a_{11} = 1$.

ИПД	XY	\uparrow	.F \rightarrow	\uparrow	КИП0	X	КИПД	\div	ПП
89	Fx<0	03	F \rightarrow	XY	ПД	С/П	ИПД	ИП0	-
3	+	Fx \geqslant 0	03	F \rightarrow	КИПД-		ИПД	П0	F \rightarrow
С/П	КИП0	-	XY	\div	FBx	XY	ПП	89	Fx=0
29	F \rightarrow	XY	ПД	1	3	П0	П1	F \rightarrow	КИП1
/-/	\uparrow	F \rightarrow	\uparrow	КИПД	X	КИП1	\div	КП0	ПП
90	Fx=0	52	F \rightarrow	XY	ПД	ИП1	ИП0	6	-
-	-	Fx=0	48	П1	F \rightarrow	КИПД	КП0	Cx	ПП
89	Fx<0	75	+	1	3	П0	БП	14	КПД
F \rightarrow	ИПД	1	-	ПД	1	-	B/O		

Инструкция к программе ПМК 5/19: В/О; 13 П0; 5 ПД; a_{12} РС; a_{13} РВ; a_{14} РА, a_{15} Р9; S_1 Р8; 0 П3, П4, П5, П6, П7; a_{21} С/П; a_{22} С/П; ...; S_2 С/П; a_{31} С/П; ...; S_5 С/П. Результаты: x_1 — в РС; x_2 — в РВ; x_3 — в РА; x_4 — в Р9; x_5 — в Р8.

Программы ПМК 5/20 и ПМК 5/21 предназначены для нахождения корней системы линейных уравнений, если матрица коэффициентов системы приведена к верхней треугольной с ненулевыми диагональными элементами.

Программа ПМК 5/20 вычисляет корни системы уравнений при $n \leq 8$.

1	3	П0	П2	0	П5	С/П	С/П	\div	ПД
---	---	----	----	---	----	-----	-----	--------	----

С/П	X	ПЗ	БП	36	С/П	X	ПЗ	БП	24
С/П	X	ПЗ	КИП5	ИП5	П1	КИП2	ИП2	П4	ИП3
С/П	КИП4	X	+	FL1	30	С/П	XY	-	С/П
÷	КП0	БП	20						

Программа ПМК 5/21 вычисляет корни системы уравнений при $n \leq 12$.

1	4	П0	С/П	ПП	91	С/П	X	ПП	88
С/П	X	ПП	84	С/П	X	ПП	80	С/П	X
ПП	76	С/П	X	ПП	72	С/П	X	ПП	68
С/П	X	ПП	64	С/П	X	ПП	60	С/П	X
ПП	56	С/П	X	ПП	52	С/П	X	С/П	ИП4
X	+	С/П	ИП5	X	+	С/П	ИП6	X	+
С/П	ИП7	X	+	С/П	ИП8	X	+	С/П	ИП9
X	+	С/П	ИПА	X	+	С/П	ИПВ	X	+
С/П	ИПС	X	+	С/П	ИПД	X	+	С/П	XY
-	С/П	÷	КП0	В/О					

Инструкция к программам ПМК 5/20 и ПМК 5/21: В/О; С/П; S_{nn} С/П; a_{nn} С/П; вводить построчно коэффициенты уравнений и свободные члены, начиная с нижних строк, в последовательности $a_{i,i+1}$ С/П; $a_{i,i+2}$ С/П; ...; a_{in} С/П; S_i С/П; a_{ii} С/П. После ввода a_{11} : x_n — в РД, x_{n-1} — в РС и т. д., x_1 — также в РХ.

2. Программы ПМК 5/22 и ПМК 5/23. Позволяют преобразовывать систему линейных уравнений порядка n в систему линейных уравнений порядка $n - 1$ с исключением первого неизвестного x_1 . Многократное применение программы обеспечивает получение выражения $a_1^{(1)}x_n = S_1^{(1)}$, из которого определяется x_n . Подстановка x_n в исходную систему уравнений позволяет найти x_{n-1} и т. д.

Программа ПМК 5/22 предназначена для снижения порядка системы из $n \leq 10$ уравнений. В позиции программы, обозначенные *, записывается порядок системы n (например, 08).

ПД	ПП	22	С/П	КП0	FL1	03	С/П	ИПД	÷
П2	ПП	22	С/П	КИП0	ИП2	X	-	FL1	13
БП	07	1	3	П0	*	*	П1	В/О	

Инструкция к программе ПМК 5/22: В/О ввести коэффициенты первого уравнения системы, включая свободный член, и первый коэффициент второй строки: $a_{11}^{(n)}$ С/П; ...; $a_{1n}^{(n)}$ С/П; $S_1^{(n)}$ С/П; $a_{21}^{(n)}$ С/П. После останова в РХ —

число n . Вводить построчно остальные коэффициенты системы. После ввода каждого следующего коэффициента второго уравнения в РХ – значение $a_{11}^{(n-1)}$; $a_{12}^{(n-1)}$; ...; $a_{1,n-1}^{(n-1)}$; $S_1^{(n-1)}$. После ввода $a_{31}^{(n)}$ С/П в РХ – число n , затем $a_{32}^{(n)}$ С/П в РХ – $a_{21}^{(n-1)}$ и т. д.

Программа ПМК 5/23 предназначена для снижения порядка n системы, когда число уравнений больше 10.

П2	П3	С/П	ПД	ПП	30	С/П	ИПД	\div	П4
ПП	40	FL2	06	С/П	П1	П2	ПП	32	С/П
ИПД	\div	П4	ИП2	П1	ПП	42	FL3	19	С/П
8	П1	1	3	П0	С/П	КП0	FL1	35	В/О
8	П1	1	3	П0	С/П	КИП0	ИП4	X	–
FL1	45	В/О							

Инструкция к программе ПМК 5/23: В/О; $(n-1)$ С/П; ввести девять коэффициентов первой строки и первый коэффициент второй: $a_{11}^{(n)}$ С/П; ...; $a_{19}^{(n)}$ С/П; $a_{21}^{(n)}$ С/П. После ввода $a_{22}^{(n)}$ С/П в РХ – $a_{11}^{(n-1)}$; $a_{23}^{(n)}$ С/П, в РХ – $a_{12}^{(n-1)}$ и т. д. до получения $a_{18}^{(n-1)}$. После этого $a_{31}^{(n)}$ С/П; $a_{32}^{(n)}$ С/П; в РХ – $a_{21}^{(n-1)}$ и т. д. до получения восьми столбцов матрицы коэффициентов $\{a_{ij}^{(n-1)}\}$, где i – от 1 до n , j – от 1 до 8. После получения $a_{n,8}^{(n-1)}$ записать в РХ число k , равное восьми, если $n-8 \geq 8$, и равное $n-8$, если $n-8 < 8$, С/П. Ввести в РХ k коэффициентов первой строки, начиная с $a_{1,10}^{(n)}$ {в том числе и свободный член $S_1^{(n)}$ }, и первый коэффициент второй строки $a_{21}^{(n)}$. Далее вводить коэффициенты второй строки, начиная с $a_{2,10}^{(n)}$. После ввода каждого коэффициента в РХ значение $a_{1,i+8}^{(n-1)}$, где i – от 1 до 8. Далее $a_{31}^{(n)}$ С/П; $a_{3,10}^{(n)}$ С/П и т. д. до получения следующих восьми столбцов матрицы коэффициентов $a_{ij}^{(n-1)}$ и т. д.

Если воспользоваться одной из программ ПМК 5/22 или ПМК 5/23 для понижения порядка системы уравнений, а затем из каждой вновь образованной системы с коэффициентами $a_{ij}^{(n-1)}$; $a_{ij}^{(n-2)}$; ...; $a_{11}^{(1)}$ взять по одному уравнению с ненулевым первым членом, коэффициенты

вновь образованной системы составят верхнюю треугольную матрицу, дополненную вектором свободных членов. Все решения такой системы находятся с помощью программ ПМК 5/20 и ПМК 5/21.

Программы регрессионного анализа. Программы ПМК 5/24–ПМК 5/26 предназначены для оценки параметров полиномиальной регрессии.

Программа ПМК 5/24 служит для вычисления коэффициентов $\hat{\beta}_1$ и $\hat{\beta}_2$ линейной регрессии по известной выборке x_i и y_i [см. формулы (4.109), (4.110)].

```

0   П0   П1   П2   П3   П4   С/П   П5   ИП0 +
П0   ИП5 Fx2 ИП2 + П2   С/П   ↑   ИП1 +
П1   XY   ИП5 X   ИП3 + П3   КИП4 БП 06
ИП3 ИП4 X   ИП0 ИП1 X   -   ИП2 ИП4 X
ИП0 Fx2 -   ÷   П6 ИП1 ИП0 ИП6 X   -
ИП4 ÷   П7   С/П

```

Инструкция к ПМК 5/24: В/О; С/П; ввести пары значений x и y : x_i , С/П; y_i , С/П. БП 30 С/П. В Р4 – число i ; в Р6 – $\hat{\beta}_2$, в РХ и Р7 – $\hat{\beta}_1$.

Программа ПМК 5/25 помимо коэффициентов линейной регрессии (см. программу ПМК 5/24) вычисляет значение $\hat{\theta}^2$.

```

0   П0   П1   П2   П3   П4   П5   С/П   П6   ИП0
+   П0   ИП6 Fx2 ИП1 + П1   С/П   П7   ИП2
+   П2   ИП7 Fx2 ИП3 + П3   ИП6 ИП7 X
ИП4 + П4   КИП5 БП 07 ИП4 ИП5 X   ИП0
ИП2 X   -   ИП1 ИП5 X   ИП0 Fx2 -   ÷
П6   ИП2 ИП6 ИП0 X   -   ИП5 ÷   П7 ИП3
ИП7 ИП2 X   -   ИП6 ИП4 X   -   ИП5 -
П8   С/П

```

Инструкция к программе ПМК 5/25: В/О; С/П; ввести все пары значений x и y : x_i , С/П; y_i , С/П. БП 36 С/П. В Р7 – $\hat{\beta}_1$; в Р6 – $\hat{\beta}_2$; в Р8 и РХ – $\hat{\theta}^2$, в Р5 – n .

Программа ПМК 5/26 [81] предназначена для оценки параметров квадратичного полинома [см. формулы (4.121), (4.122)].

КНОП	С/П	П2	XY	П3	1	2	П0	КИП4	4
П1	ИП3	ПП	14	↑	КИП0	+	КП↑	XY	ИП3
X	FL1	14	3	П1	ИП2	В/О	8	6	ПД

ИПА	ИП9	ИП9	ИП8	\div	П2	КППД	П1	.	ИП4	ИПВ
ИП2	ИПА	КППД	ПВ	Fx^2	ИП1	\div	-		ИПА	ИПА
ИП8	\div	П3	КППД	П4	ИП6	ИП2	ИП5	КППД	П6	
ИП7	ИП3	ИП5	КППД	ИП6	ИПВ	Х	ИП1	\div	-	
ИП4	\div	П0	ИПВ	КППД	ИП1	\div	П1	ИП5	ИП8	
\div	ИП2	ИП1	КППД	ИП3	ИП0	Х	-	ПС	В/О	
1	2	П0	Cx	КП↑	FLO	94	C/П			

Инструкция к программе ПМК 5/26: БП 90 С/П; В/О; С/П; ввести все пары исходных данных: x_i ; $\uparrow y_i$ С/П. БП 27 С/П. В РС и РХ — $\hat{\beta}_3$; в Р1 — $\hat{\beta}_2$; в Р0 — $\hat{\beta}_1$.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

КОМАНДЫ МОНИТОРА

Управление системными операциями в ОС РАФОС осуществляется с помощью командного языка монитора. Из трех компонентов монитора (резидентного монитора *RMON*, клавиатурного монитора *KMON* и программы обслуживания пользователя *USR*) взаимодействие пользователя с ОС обеспечивает клавиатурный монитор. На готовность *KMON* к приему инструкций командного языка указывает появление точки в левой позиции текущей строки терминала. После этого можно набирать любую из приведенных ниже команд монитора. Полный перечень команд монитора с подробным описанием ключей приводится в работе [59]. Здесь команды монитора приводятся в наиболее употребительной форме.

При описании команд используются следующие условные обозначения *DEV* — физическое или логическое имя устройства (см § 1.3); *NAM* — логическое имя устройства; */OPT* — ключ команды, уточняющий действие команды; *FILE*, *FILE1*, *FILE2*, *FILE3* — спецификация одного или нескольких файлов; *LENGTH* — длина (числовой аргумент ключа); *SIZE* — размер (числовой аргумент ключа); *N* — числовой аргумент; *INFILES* — спецификация входных файлов; *OUTFILES* — спецификация выходных файлов; *TYPE* — тип оптимизации, генерируемого кода, идентификатор раздела (*F* — оперативный, *B* — фоновый).

Все команды завершаются нажатием клавиши *<ВК>*, [] — указание на то, что ключ можно опустить

Основные команды монитора

1 *FORMAT-[/OPT] DEV* — выполняет операцию формирования диска, а также его проверку. Например, команда *FORMAT/NOQ 3*. производит формирование диска с логическим номером 3. Использование ключа позволяет не запрашивать подтверждения перед выполнением команды.

При нормальном окончании процесса формирования на терминал выводится сообщение *FORMAT COMPLETE*

2. *INIT[/OPT] DEV* инициализирует каталог внешнего устройства. Например, команда *INIT/NOQ/BAD 3* инициализирует каталог внешнего устройства с логическим номером 3, проверяет носитель на наличие дефектных блоков и записывает на их место файлы "*FILE.BAD*".

3 *R <имя программы>* – запускает на выполнение фоновую программу с устройства *SY* (с которого осуществляется загрузка).

RUN <имя программы> – запускает на выполнение фоновую программу с указанного устройства (*DK* по умолчанию)

При нормальном запуске программы на экране появляется символ *****

Например, команда *R DUP* производит запуск на выполнение программы *DUP* с устройства *SY*. *DUP* – программа обслуживания устройств. После появления на экране символа ***** набираем, например, команду *RK1:/F/K/H*, которая осуществляет инициализацию каталога носителя *RK1*, распечатывает дефектные блоки, указывает номера дефектных блоков, после чего осуществляет попытку прочесть блоки без ошибок

4. *ASSIGN DEV NAM* – присваивает физическому устройству логическое имя

DEASSIGN NAM – отменяет соответствие логического имени физическому устройству или виртуальному носителю.

Например, команда *ASSIGN RK3: DK* присваивает физическому устройству *RK3* логическое имя *DK*. Команда *ASSIGN RK3: 3* присваивает физическому устройству *RK3* логическое имя 3. Команда *DEASSIGN 3:* отменяет соответствие логического имени 3 физическому устройству

5. *.CREATE [/OPT] FILE [/OPT]* – создает новый файл в указанном месте или расширяет существующий. Например, команда *.CREATE TEST.FOR* создает новый файл типа *FOR* на диске *DK*

6. *.DELETE[/OPT] FILES* – стирает, удаляет из каталога указанные файлы.

7. *.BOOT RAFSJ* – выполняет загрузку монитора ОС *RAFSJ*.

8. *.COPY[/OPT] INFILES[/OPT] OUFILES[/OPT]* – выполняет операции по передаче файлов, копированию носителей и служебные функции

Например, команда *COPY/CONC A.FOR + B.FOR RK1:C.FOR* объединяет два входных файла в один выходной. Команда *.COPY TEST.FOR 2* копирует файл с устройства *DK* на устройство с логическим именем 2. Новый файл имеет то же имя. Команда *.COPY/BOOT RK1:RT11SJ RK2*, выполняет операцию копирования системного загрузчика из файла монитора в первые блоки устройства *RK2*; выполняя теперь команду *.BOOT RK2:* осуществляют загрузку ОС с устройства *RK2*.

9. *.LOAD DEV[-TYPE], [., ., DEVI[=TYPE]]* – загружает драйверы в оперативную память. Аргумент *TYPE* определяет программу, за которой закреплено устройство

.UNLOAD DEV[,..., DEV] – удаляет загруженные в память драйверы, освобождая занимаемую ими память.

Например, команда *.LOAD MT* загружает драйвер *MT.SYS* в оперативную память. После этого можно выполнять операции с магнитной лентой, например, *.COPY RK1: TEST.FOR MT@* – копирует файл с устройства *RK1* на ленту *.COPY RK1: PROG.FOR MT: /POS: -1* – позволяет копировать программу в конец файла на ленте без перемотки ленты в начало файла.

10. *.DIR[/OPT] [FILES]* – распечатывает запрашиваемую информацию об устройстве, файле, группе файлов.

Например, команда *.DIR RK1* распечатывает оглавление диска *RK1* с указанием блоков, отведенных под каждый файл. Команда *.DIR/BR RK1* распечатывает оглавление диска в пять столбцов. Команда *.DIR TEST.** распечатывает все файлы с именем *TEST* на диске *DK*, указывая, сколько блоков занимает каждый.

11. *FORT[/OPT] FILES[/OPT]* – вызывает транслятор с языка "фортран" для трансляции одной или нескольких программ.

Например, команда *.FORT PROG* транслирует программу на языке "фортран" без выдачи листинга. Команда *FORT/LIST PROG* транслирует программу на фортране с выдачей листинга на устройство печати (*LP*). Команда *FORT/LIST: TT: PROG* транслирует программу на "фортране" с выдачей листинга на терминал.

12. *.MACRO[/OPT] FILES[/OPT]* – вызывает макроассемблер для трансляции одного или нескольких файлов. Например, команда *.MACRO PROG* транслирует программу на макроассемблере. Команда *.MACRO/LIST/CROSSREFERENCE PROG* транслирует программу на макроассемблере и создает листинг и таблицу перекрестных ссылок.

В результате трансляции программы ОС автоматически присваивает имя *PROG.OBJ* объектному файлу и *PROG.LST* файлу листинга.

13. *BASIC* – вызывает интерпретатор языка "бейсик"

14. *PRINT[/OPT] FILES* – распечатывает заданное число копий одного или нескольких файлов на устройстве печати

Например, команда *.PRINT PROG.LST* распечатывает файл листинга на печатающее устройство

15. *.TYPE[/OPT] FILES* – распечатывает указанные файлы на терминал.

16. *.LINK[/OPT] FILES* – выполняет компоновку объектных модулей, полученных с помощью языковых процессоров РАФОС. Например, команда *.LINK PROG RK@: FORLIB* образует загрузочный модуль *PROG.SAV*. Наличие библиотеки *FORLIB* обязательно для программ на фортране. В этом случае она находится на устройстве *RK@*. Команда *.LINK/MAP PROG* создает загрузочный модуль *PROG.SAV* с выводом на печать карты распределения памяти

17. *.LIBR[/OPT] FILES[/OPT]* – позволяет создавать и модифицировать файлы библиотек и распечатывать их каталоги. Напри-

мер, команда *LIBR/CR MATR M1* – создает на устройстве *DK* объектную библиотеку *MATR.OBJ* и включает в нее модуль *M1 OBJ*. Команда *LIBR/IN MATR M2, M3* добавляет в библиотеку *MATR* объектные модули *M2, M3*.

Команда *.LIBR/MACRO PROG* – создает на устройстве *DK* макробиблиотеку с именем *PROG*. Команда *LIBR/LIST TT: MATR* распечатывает оглавление объектной библиотеки *MATR* на экране терминала. Команда *LIBR/LIST MATR* – распечатывает оглавление библиотеки *MATR* на устройстве печати.

18. *.SHOW* – выводит на системный терминал логические имена устройств, параметры монитора, конфигурацию аппаратуры, характеристики терминалов и состояние драйверов

19. *.SQ/[NO] QUERY DEV.* – выполняет операцию "сбор мусора". Запрашивает подтверждения перед выполнением операции.

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

ОПИСАНИЕ ЭКРАННОГО РЕДАКТОРА К52

Введение. Связь пользователя с вычислительной машиной осуществляется через терминал. Связь обеспечена только в оперативном режиме (нажатие клавиши "автоном."). Все, что пользователь вводит с терминала в этом режиме, сразу же попадает в машину

Специальная программа – монитор, описываемая ранее и всегда доступная в вычислительной машине, проверяет этот ввод. Эта же программа заставляет перемещаться на нужное число позиций печатающую головку или курсор терминала

Вывод на экран или печать символов, введенных с экрана, осуществляет та же программа-монитор

Значительная часть работы монитора состоит в управлении другими программами. К таким программам относятся, например, редакторы

Редакторы текстов. Эти программы позволяют в удобной и доступной форме формировать тексты программ, хранящихся в файлах на диске или ленте

К настоящему времени создано много различных редакторов текстов, которые делятся на две группы: редакторы общего назначения (консольные); экранные редакторы

В консольных редакторах все изменения в текстовом файле проводятся в области оперативной памяти – буфере и, чтобы посмотреть на измененный текст, надо набирать специальные команды. К таким редакторам относятся *EDIT, TECO, SCREEN, SED, F340, TED* и т. д.

Экранные редакторы позволяют использовать экран дисплея как поле для внесения исправлений в текст. В этом случае каждое нажатие функциональной клавиши приводит к выдаче из ЭВМ специальных управляющих кодов. С помощью этих кодов можно сме-

щать курсор, стирать экран или его часть, раздвигать строку или ее часть и т. д. При этом для различных моделей дисплеев коды одних и тех же управляющих функций (а иногда и набор функций) различны. Поэтому для выполнения почти одинаковых функций разработаны экранные редакторы К340 (для экранов типа VT-340), К2000 (для экранов типа ВТА-2000); К13 (для экранов типа 15ИЭ-00-013); К52 (для экранов VT-52, VDT-52129, СМ 7209, 15 ИЭ-00-013).

Рассмотрим достаточно широко используемый редактор К52, который может работать с операционными системами ОС ДВК, РАФОС, ФОДОС на микро-ЭВМ типа ДВК, "Электроника-60", СМ-ЭВМ.

Обращение к редактору. При работе в операционных системах РАФОС-11, RT-11V4, совместимых с RT-11, экранный редактор К52 вызывается как командами монитора .R или .RUN, так и командой .EDIT. В первом случае программа К52 запускается следующим образом .R K52 <ВК> (запуск программы с системного устройства) или .RUN DEV: K52 <ВК> (запуск программы с устройства с именем DEV).

При нормальном запуске программы К52 (файл K52.SAV) на экране должен появиться символ готовности '*' После этого можно вводить командную строку. Вид командной строки определяется режимом редактирования файлов (описывается ниже).

При вызове редактора с помощью команды EDIT формат команды также определен режимом работы с файлом.

Режим создания нового файла. При использовании команд монитора R или RUN командная строка в общем случае записывается следующим образом:

*< имя вых. файла>/C [A · размер].

Здесь обязательным является ключ C (или CREATE — создать). Необязательный ключ ALLOCATE (или A) задает размер (в блоках) области, резервируемой для создаваемого файла. Так, по команде *RK0· A.FOR/C <ВК> на устройстве RK0· создается новый файл A.FOR.

Формат команды EDIT, позволяющей создать новый файл, имеет вид

.EDIT/C имя файла [/ALLOCATE.размер].

Режим просмотра существующего файла. В этом режиме входной файл доступен только для просмотра (чтения). Командная строка имеет вид

*<имя вход. файла>/I

Команда EDIT имеет следующий формат:

.EDIT/I <имя вх. файла>

При попытке изменить текст файла в этом режиме выдается сообщение об ошибке

Редактирование существующего файла. Редактировать существующий файл можно двумя способами.

В первом случае, по окончании редактирования будет создан файл с именем "имя вых. файла", а входной файл не изменяется. Командная строка имеет вид

* <имя вых. файла> [/A размер] = <имя вх. файла>.

Команда *EDIT* в этом случае имеет формат

.EDIT/OUTPUT <имя вых. файла> [/A. размер] <имя вх. файла>

Во втором случае командная строка имеет вид

* <имя файла> [/A. размер].

Команда *EDIT* имеет следующий формат

EDIT <имя файла> [/A размер].

При таком способе редактирования будет создан файл с именем <имя файла>, содержащий отредактированный текст, а исходный файл сохранится в файле типа BAK. Например, по команде * MX/J A.FOR/C <ВК> на устройстве *MX/J* создается новый файл *A.FOR*. По команде * B.B= A.LST <ВК> редактируется файл *DK: A.LST* (*DK* – логическое имя устройства, которое используется по умолчанию), и отредактированная версия файла будет записана в файл с именем *B.B*. При этом сохранится исходный файл. По команде * RK2: A FOR <ВК> будет редактироваться файл *RK2: A.FOR* (*RK2* – имя физического носителя, на котором создается отредактированный файл *A.FOR*). Исходный текст сохраняется в файле с именем *RK2: A.BAK*.

В процессе работы пользователь может включить в редактируемый текст содержимое других текстовых файлов (дополнительные входные файлы), а также записывать часть информации в дополнительные выходные файлы. В процессе редактирования все измене-

Страница Команда	7	Далее Поиск	8	Стирание слова Восстановление слова	9	Ввод Заменить	Вместо
Вперед		Назад		Стирание знака Восстановление знака			
Конец	4	Начало	5	Восстановление знака		Добавить	Специальная
Слово		Конец строки	2	Обновить буфер	3		
Смена регистра Начало строки	1	Стирание конца строки		Выборка		Абзац	Стирание строки Восстановление строки
Вставить строку	0			Сброс	,	Служебная	
						Справка	

Рис. П.1. Дополнительная клавиатура терминала

ния в редактируемом или создаваемом тексте отображаются на экране терминала

Для ввода функций и команд редактора используются клавиши дополнительной клавиатуры (рис. П.1). Редактор К52 использует экран терминала в качестве "окна" в редактируемый файл, показы-

вал на экране 24 строки текста В процессе работы пользователь может сдвигать текст вверх и вниз, получая доступ к его различным фрагментам Используя функции и команды редактора, можно вносить изменения в файл, стирать текст и добавлять новый.

Для обозначения конца файла используется специальный символ

■ При вставке текста этот символ смещается вправо и вниз; при создании нового файла — появляется в начале пустого экрана.

Кроме этого символа на экране всегда присутствует курсор —. Он соответствует месту в файле, куда вставляется символ при нажатии соответствующей клавиши основной клавиатуры дисплея.

Основные команды редактора. Рассмотрим функции и команды, выполняемые экранным редактором.

Функция — это операция, для выполнения которой пользователю достаточно нажать одну или две клавиши на дополнительной клавиатуре терминала Заштрихованные на рис. П.1 клавиши в редакторе не используются.

Команда — операция, для выполнения которой необходимы следующие действия 1) выполнить функцию "команда" (нажать клавишу 7 дополнительной клавиатуры); 2) ввести имя команды, полное или сокращенное; 3) выполнить функцию "ввод".

Каждая клавиша дополнительной клавиатуры, кроме <служб.> и <справка>, может выполнять две функции — простую и сложную Простые функции изображены в верхней части клавиши, сложные — в нижней. Для выполнения простой функции достаточно нажать соответствующую клавишу Для выполнения сложной функции необходимо сначала нажать клавишу <служб >, а затем выполнить соответствующую функцию. Повторение функции осуществляется следующим образом <служб>N<функция> (N — целое десятичное число от 1 до 65 535) При вводе числа повторений редактор выдает подсказку "REPEAT" (повторение)

Приведем описание наиболее часто используемых в работе команд редактора

Управление курсором, исправление отдельных символов Любой символ, набираемый на клавиатуре дисплея, появляется в том месте экрана, где в данный момент находится курсор. После появления на экране очередного символа курсор автоматически сдвигается вправо на одну позицию Нажатием клавиши <ВК> фиксируется конец очередной строки При этом курсор переходит на экране в новую позицию следующей строки

Курсор можно перемещать по экрану в произвольное место, нажимая клавиши с рисунками стрелок → — сдвиг курсора на одну позицию вправо; ← — сдвиг курсора на одну позицию влево; ↑ — сдвиг курсора на одну позицию вверх; ↓ — сдвиг курсора на одну позицию вниз

Если выбрано направление перемещения курсора по файлу (выполнена функция "вперед" или "назад"), то нажатием клавиши "начало строки" курсор перемещается в начало строки (следующей или

предыдущей). Аналогично, если выбрано направление перемещения курсора по файлу ("вперед" или "назад"), то нажатием клавиши "конец стр." курсор перемещается в конец строки (следующей или предыдущей).

Функция "слово" в зависимости от выбранного направления ("вперед" или "назад") перемещает курсор в начало следующего или предыдущего слова.

Функция "конец" позволяет переместить курсор в конец текстового файла. Если курсор уже находится в конце текста, раздается звуковой сигнал. Аналогично функцией "начало" курсор возвращается в положение первого символа файла.

Функции удаления и восстановления текста. Редактор позволяет удалять отдельные символы, слова, строки. При выполнении функции удаления текст сохраняется в буфере символа, слова или строки в зависимости от выполняемой функции. Фрагменты текста, сохраненные в буферах, можно вставить в текст с помощью соответствующих функций восстановления. При выполнении функций восстановления содержимое буферов не изменяется, т. е. символ, слово или строку можно вставить в произвольное число экземпляров.

Емкость буферов следующая: буфер символа — один символ, буфер слова — 80 символов, буфер строки — 132 символа. До запуска редактора К52 все буфера пусты. После окончания сеанса редактирования содержимое буферов сохраняется до выхода на уровень монитора.

Чтобы удалить символ можно воспользоваться либо функцией <ЗБ> (забой), либо функцией "стир. знак" (клавиша <6>). Нажатием клавиши <ЗБ> удаляется символ, перед которым находится курсор. Если курсор находится в начале строки, то нажатием <ЗБ> стирается символ "конец строки" и строки сливаются. Чтобы восстановить текст, нужно нажать клавишу <ВК>.

С помощью функции "стир. знак" удаляется символ, на котором находится курсор, при этом расположенный справа текст строки, сдвигается на одну позицию влево.

Функция "восст. знак" включает в файл последний удаленный символ, при этом символ вставляется на то место, где находится курсор. При восстановлении строка раздвигается, освобождая пространство для символа. Функция "восст. знак" недопустима, если буфер символа пуст, т. е. ни разу не выполнялись функции <ЗБ> или "стир. знак".

Функция "стир. слов" удаляет символ, на котором находится курсор и все символы справа, принадлежащие данному слову. Часть строки сдвигается влево, заполняя освободившееся пространство.

Функция "ПС" удаляет все символы слова, которые находятся слева от курсора. Оставшаяся после удаления слова часть строки сдвигается влево, заполняя освободившееся пространство.

Функция "восст. слов" используется для восстановления последнего удаленного слова, которое хранится в буфере сохранения. При

восстановлении часть строки, находящаяся справа от курсора, смещается вправо. Чтобы удалить строку можно воспользоваться одной из следующих функций: "стир. строки"; "стир. кон. строки"; <СУ/У>.

Функция "стир. строки" удаляет все символы строки, находящиеся справа от курсора, включая символ, на котором находится курсор и символ "конец строки".

Функция "стир. кон. строки" удаляет символ, на котором находится курсор, затем стирает все символы строки до символа "конец строки". Этот символ не удаляется.

Функция <СУ/У> (при нажатой клавише СУ нажимается клавиша с буквой У) позволяет удалить все символы строки, находящиеся слева от курсора. Если курсор находится в начале строки, то удаляется вся предыдущая строка.

Функция "восст. строки" — восстанавливает последнюю удаленную одной из выше перечисленных функций строку.

Просмотр текста и поиск по модели. Если текстовый файл достаточно длинный, то его крайне неудобно просматривать построчно. Для ускорения можно его просматривать по страницам. Для этого можно установить размер страницы текста. Например, чтобы сделать его равным 24 строкам (столько строк одновременно размещается на экране терминала), нужно выполнить команду:

<служеб.><7>SET PAGE 24<ВК>

После этого нажатием клавиши <7> экран обновляется очередной страницей текста.

Чтобы найти нужное слово в тексте, следует нажать клавиши <служеб.> и <8>. В ответ редактор запросит так называемую модель поиска. В качестве модели набирается нужное слово и нажимается клавиша <8>. Повторным нажатием клавиши <8> отыскивается следующее появление слова в тексте и т. д.

Использование буфера. Редактор позволяет выделять определенные фрагменты текста, перемещать их из основного текста во внутренний буфер "PASTE" и затем включать содержимое буфера в нужные точки текста. Перед началом работы с редактором буфер "PASTE" пуст. Емкость буфера не является постоянной величиной и зависит от типа монитора, емкости доступной оперативной памяти и размера резидентного монитора. Минимальная емкость буфера — 512 символов.

Выделение участка текста. Функция "выборка" не оказывает никакого видимого действия, а лишь запоминает позицию курсора в тексте. Это место считается далее одной из границ выделенного участка — "выборки". Вторая граница выборки определяется текущим положением курсора. Выборку можно отменить, воспользовавшись функцией "ввод".

Функции записи в буфер. Функция "обновить" выполняется после того, как сформирована выборка. По этой функции производятся следующие действия: очищается буфер "PASTE", в бу-

фер "PASTE" записывается выделенный текст, при этом найденный текст исключается из файла. Если выборка не определена, то при попытке записать текст в буфер раздается звуковой сигнал. Если выборка превышает размеры буфера "PASTE", то редактор также выдает звуковой сигнал. Для работы с выборками, превышающими емкость буфера "PASTE", рекомендуется использовать дополнительные входные и выходные файлы.

Функция "обновить" может быть использована в режиме просмотра файла ($\text{X} <\text{имя файла}> // \text{VK}$). В этом режиме, осуществив выборку текста, можно скопировать в буфер определенный фрагмент просматриваемого файла, а затем в режиме редактирования другого файла включить этот текст в нужной точке.

Таким образом, можно копировать часть текста одного файла в другой, не меняя содержимого одного из файлов.

Добавление в буфер. Функция "добавить" аналогична функции "обновить", при этом не стирается содержимое буфера "PASTE", а добавляется новая выборка в его конец.

Включение в текст содержимого буфера. Функция "буфер" включает текущее содержимое буфера "PASTE" в редактируемый текст, начиная с позиции, где находится курсор. После выполнения функции курсор помещается на первом символе после вставленного текста. Если выполнение функции "буфер" вызовет переполнение выходного файла, то редактор выдает звуковой сигнал. При попытке выполнить функцию "буфер" в режиме просмотра файлов также раздается звуковой сигнал.

Функция "заменить" предназначена для замены заданных символов или цепочек символов на содержимое буфера "PASTE".

Если функцией "выборка" определена выборка, то при выполнении функции "заменить" содержимое выборки удаляется и заменяется содержимым буфера. С помощью этой функции можно заменить неоднократно повторяющуюся модель поиска на содержимое буфера "PASTE".

Если при выполнении функции "заменить" буфер "PASTE" пуст, то выборка стирается. Таким образом можно удалить из файла большой участок текста, не используя буфер.

Служебные команды и функции редактора. При возникновении ошибки в процессе редактирования редактор сигнализирует звуковым сигналом, при этом внутренний буфер сообщений заполняется сообщением, объясняющим причину ошибки. Функция "справка" может подсказать причину ошибки. Так, если буфер сообщения не пуст, то при нажатии функции "справка" на нижних строках экрана появляется сообщение об ошибке. Если буфер сообщений пуст, то первое нажатие функции "справка" высвечивает на экран диаграмму функциональных клавиш. Последующие нажатия вызывают вывод на экран списка команд, списка функций и т. д.

Функция "брос" не оказывает воздействия на редактируемый текст и используется для отмены действия ошибочно введенной функции.

ции "служеб." или для отмены действия функции "выборка", если она была осуществлена.

Функция "ввод" используется для завершения ввода любой команды редактора и запуска ее на выполнение, а также восстановления на экране текста, затертого функцией "справка".

Команды окончания редактирования. Закончить сеанс редактирования можно командами "*EXIT*" и "*QUIT*".

При выполнении команды *EXIT* (<служеб.><команда>*EXIT* <ввод>) закрываются все файлы, включая дополнительный входной и выходной. Если в файл вносились изменения, то редактор сохраняет их.

Команда "*QUIT*" (<служеб.><команда>*QUIT* <ввод>) осуществляет следующие действия: закрывает все входные файлы, не изменения их содержания; аннулирует все выходные файлы (основные и дополнительные).

Восстановление текста на экране. При работе с редактором текст на экране может быть испорчен из-за вывода на экран сообщений по функции "*HELP*" и т. д. При выполнении функции <СУ/W> (при нажатой клавише <СУ> нажимается клавиша *W*) экран очищается и на него заново выводится редактируемый текст.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Айвазян С. А., Енюков И. С., Мешалкин Л. Д. Прикладная статистика: Исследование зависимостей. — М.: Финансы и статистика, 1985.
2. Айвазян С. А., Енюков И. С., Мешалкин Л. Д. Прикладная статистика: Основы моделирования и первичная обработка данных. — М.: Финансы и статистика, 1983.
3. Асатуриан В. И. Теория планирования эксперимента. — М.: Радио и связь, 1983.
4. Астанин Л. Ю., Дорский Ю. Д., Костылев А. А. Применение программируемых калькуляторов для инженерных и научных расчетов. — Л.: Энергоатомиздат, 1986.
5. Астанин Л. Ю., Костылев А. А. Основы сверхширокополосных радиолокационных измерений. — М.: Радио и связь, 1989.
6. Бахвалов Н. С., Жидков Н. П., Кобельков Г. М. Численные методы. — М.: Наука, 1987.
7. Беклемишев Д. В. Дополнительные главы линейной алгебры. — М.: Наука, 1983.
8. Большев Л. Н., Смирнов Н. В. Таблицы математической статистики. — М.: Наука, 1965.
9. Браверман Э. М., Мучник И. В. Структурные методы обработки эмпирических данных. — М.: Наука, 1983.
10. Бухтияров А. М., Маликова Ю. П., Фролов Г. Д. Практикум по программированию на фортране (ОС ЕС ЭВМ). — 3-е изд. — М.: Наука, 1988.
11. Вайну Я. Я. Корреляция рядов динамики. — М.: Статистика, 1977.
12. Ватутин В. А., Телевинова Т. М., Чистяков В. П. Вероятностные методы в физических исследованиях. — М.: Наука, 1985.
13. Видениекс П. О., Вентиньш Я. Я., Кривчинков А. А. Проблемно-ориентированные микропроцессорные системы в производстве РЭА. — М.: Радио и связь, 1987.

15. Вучков И., Бояджиева Л., Солаков Е. Прикладной линейный регрессионный анализ. — М.: Финансы и статистика, 1987.
16. Вычислительная математика / Н. И. Данилина, Н. С. Дубровская, О. П. Кваша, Г. Л. Смирнов. — М.: Высшая школа, 1985.
17. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. — М.: Наука, 1988.
18. Гмурман В. Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. — М.: Высшая школа, 1975.
19. Гольцман Ф. М. Физический эксперимент и статистические выводы. — Л.: Изд-во Ленингр. гос. ун-та, 1982.
20. Горелик А. М., Ушкова В. А., Шура-Бура М. Р. Мобильность программ на фортране. — М.: Финансы и статистика, 1984.
21. Грановский В. А. Динамические измерения: Основы метрологического обеспечения. — Л.: Энергоатомиздат, 1984.
22. Гришин В. К., Живописцев Ф. А., Иванов В. А. Математическая обработка и интерпретация физического эксперимента. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1988.
23. Гришин Ю. П., Казаринов Ю. М. Динамические системы, устойчивые к отказам. — М.: Радио и связь, 1985.
24. Гроп Д. Методы идентификации систем. — М.: Мир, 1979.
25. Губарев В. В. Алгоритмы статистических измерений. — М.: Энергоатомиздат, 1985.
26. Дайтбеков Д. М., Калмыкова О. В., Черепанов А. И. Программное обеспечение статистической обработки данных. — М.: Финансы и статистика, 1984.
27. Демиденко Е. З. Линейная и нелинейная регрессии. — М.: Финансы и статистика, 1981.
28. Демиденко Е. З. Линейная и нелинейная регрессия: Фортран-IV — М.: Изд-во Ин-та мировой экономики и международных отношений, 1979.
29. Денисов В. И., Попов А. А. Пакет программ оптимального планирования эксперимента. — М.: Финансы и статистика, 1986.
30. Джонсон Н., Лион Ф. Статистика и планирование эксперимента в технике и науке: Методы обработки данных. — М.: Мир, 1980.
31. Джонсон Н., Лион Ф. Статистика и планирование эксперимента в технике и науке: Методы планирования эксперимента. — М.: Мир, 1981.
32. Дрейпер Н., Смит Г. Прикладной регрессионный анализ. В 2-х кн. — 2-е изд. — М.: Финансы и статистика, 1987.
33. Дьяконов В. П. Справочник по алгоритмам и программам на языке бейсик для персональных ЭВМ. — М.: Наука, 1987.
34. Дьяконов В. П. Справочник по расчетам на микрокалькуляторах. — М.: Наука, 1986.
35. Единая система электронных вычислительных машин. Пакет научных подпрограмм. Техническое описание: Руководство программиста. Кн. 2. — Минск, 1976.

36. Елисеева И. И., Рукавишников В. О. Логика прикладного статистического анализа. — М.: Финансы и статистика, 1982.
37. Енюков И. С. Методы, алгоритмы, программы многомерного статистического анализа: Пакет ППСА. — М.: Финансы и статистика, 1986.
38. Загоруйко Н. Г., Елкина В. Н., Емельянов С. В. Пакет прикладных программ ОТЭКС (для анализа данных) — М.: Финансы и статистика, 1986.
39. Иванов В. В. Методы вычислений на ЭВМ: Справочное пособие. — Киев: Наукова думка, 1986.
40. Ивахненко А. Г., Юрачковский Ю. П. Моделирование сложных систем по экспериментальным данным. — М.: Радио и связь, 1987.
41. Казаков И. Е., Гладков Д. И. Методы оптимизации стохастических систем. — М.: Наука, 1987.
42. Кендалл М., Стьюарт А. Статистические выводы и связи / Пер. с англ. — М.: Наука, 1973.
43. Кендалл М., Стьюарт А. Теория распределений. — М.: Наука, 1966.
44. Костылев А. А. Идентификация радиолокационных целей при использовании сверхширокополосных сигналов: Методы и приложения // Зарубежная радиоэлектроника. — 1984. — № 4. — С. 75 — 104.
45. Костылев А. А. Обработка сигналов при экспериментальном исследовании рассеяния коротких радиоимпульсов на проводящей сфере // Радиотехника. — 1984. — № 8. — С. 64—66.
46. Котюков В. И. Многофакторные кусочно-линейные модели. — М.: Финансы и статистика, 1984.
47. Крутько П. Д., Максимов А. И., Скворцов Л. М. Алгоритмы и программы проектирования автоматических систем / Под ред. П. Д. Крутько. — М.: Радио и связь, 1988.
48. Кудрявцев Е. М. Исследование операций в задачах, алгоритмах и программах. — М.: Радио и связь, 1984.
49. Кузьмин С. З. Основы проектирования систем цифровой обработки радиолокационной информации. — М.: Радио и связь, 1986.
50. Кузьмичев Д. А., Радкевич И. А., Смирнов А. Д. Автоматизация экспериментальных исследований: Учебное пособие. — М.: Наука, 1983.
51. Куликов Е. И. Методы измерения случайных процессов. — М.: Радио и связь, 1986.
52. Лавренчик В. Н. Постановка физического эксперимента и статистическая обработка его результатов. — М.: Энергоатомиздат, 1986.
53. Лоусон Ч., Хенсон Р. Численное решение задач метода наименьших квадратов / Пер. с англ. — М.: Наука, 1986.
54. Микро-ЭВМ: Практическое пособие / Под ред. Л. Н. Преснухина. Кн. 1. Семейство ЭВМ "Электроника-60" / И. Л. Талов, А. Н. Соловьев, В. Д. Борисенков — М.: Высшая школа, 1988.

55. Мини- и микро-ЭВМ семейства "Электроника" / Б. Л. Толстых, И. Л. Талов, В. Г. Цывинский и др. — М.: Радио и связь, 1987.
56. Мюллер П., Нойман П., Шторм Р. Таблицы по математической статистике / Пер. с нем. — М.: Финансы и статистика, 1982.
57. Новицкий П. В., Зограф И. А. Оценка погрешностей результатов измерений. — Л.: Энергоатомиздат, 1985.
58. Обработка геологической информации на микрокалькуляторах / В. В. Бабенко, В. П. Афанасьев, Н. Н. Зинчук и др. — М.: Недра, 1988.
59. Операционная система СМ ЭВМ РАФОС: Справочник / Л. И. Валикова, Г. В. Вигдорчик, А. Ю. Воробьев, А. А. Лукин; Под общ. ред. В. П. Семика. — М.: Финансы и статистика, 1984.
60. Певчев Ю. Ф., Финогенов К. Г. Автоматизация физического эксперимента: Учебное пособие для вузов. — М.: Энергоатомиздат, 1986.
61. Поллард Дж. Справочник по вычислительным методам статистики. — М.: Финансы и статистика, 1982.
62. Программирование, отладка и решение задач на ЭВМ единой серии. Язык фортран: Учебное пособие для вузов / И. А. Кудряшов, Н. Х. Кушнер, Л. В. Петрова, Н. А. Силов; Под ред. И. А. Кудряшова. — Л.: Энергоатомиздат, 1988.
63. Программное обеспечение СМ ЭВМ. Операционная система с разделением функций РАФОС. Библиотека для научно-технических расчетов БНТР/РАФОС. Описание применения, 1981. — Т. 9. — Кн. 1, — Ч. 1.
64. Сборник научных программ на фортране: Руководство для программиста. Вып. 1. — М.: Статистика, 1974.
65. Сборник научных программ на фортране. Вып. 2 — М.: Статистика, 1976.
66. Светозарова Г. И., Мельников А. А., Козловский А. В. Практикум по программированию на языке "бейсик". — М.: Наука, 1988.
67. Себер Дж. Линейный регрессионный анализ. — М.: Мир, 1980.
68. Селиванов М. Н., Фридман А. Э., Кудряшова Ж. Ф. Качество измерений: Метрологическая справочная книга. — Л.: Лениздат, 1987.
69. Сильвестров Д. С. Программное обеспечение прикладной статистики: Обзор состояния. Тенденции развития. — М.: Финансы и статистика, 1988.
70. Справочник по вероятностным расчетам. — М.: Воениздат, 1970.
71. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами / Под ред. М. Абрамовича и И. Стиган / Пер. с англ. — М.: Наука, 1979.
72. Степнов М. Н. Статистические методы обработки результатов механических испытаний. — М.: Машиностроение, 1985.
73. Тихонов А. Н. Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач. — 3-е изд., перераб. — М.: Наука, 1986.
74. Тихонов А. Н., Уфимцев М. В. Статистическая обработка результатов экспериментов. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1988.

75. Трохименко Я. К. Программирование микрокалькуляторов "Электроника МК-52" и "Электроника МК-61". — Киев: Техника, 1987.
76. Трохименко Я. К., Любич Ф. Д. Радиотехнические расчеты на микрокалькуляторах. — М.: Радиосвязь, 1988.
77. Уолш Б. Программирование на бейсике. — М.: Радио и связь, 1987.
78. Ферстер Э., Ренц Б. Методы корреляционного и регрессионного анализа. — М.: Финансы и статистика, 1983.
79. Форсайт Дж., Мальcolm M., Моулер К. Машины методы математических вычислений. — М.: Мир, 1980.
80. Хастингс Н., Пикок Дж. Справочник по статистическим распределениям / Пер. с англ. — М.: Статистика, 1980.
81. Цветков А. Н., Еланечников В. А. Прикладные программы для микро-ЭВМ "Электроника Б3-34", "Электроника МК-56", "Электроника МК-54". — М.: Финансы и статистика, 1984.
82. Чуа Л. О., Лин Пен-Мин. Машины анализ электронных схем: Алгоритмы и вычислительные методы / Пер. с англ. -- М.: Энергия, 1980.
83. Шалыгин А. С., Палагин Ю. И. Прикладные методы статистического моделирования. — Л.: Машиностроение, 1986.
84. Шелест А. Е. Микрокалькуляторы в физике: Справочное пособие. — М.: Наука, 1988.
85. Шуп Т. Решение инженерных задач на ЭВМ. — М.: Мир, 1982.

Содержание

Предисловие	3
ГЛАВА ПЕРВАЯ. ОСОБЕННОСТИ ПОСТРОЕНИЯ И ПРОГРАММНОГО ОБЕСПЕЧЕНИЯ ИЗМЕРИТЕЛЬНО-ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ НА БАЗЕ МИКРО-ЭВМ И ПРОГРАММИРУЕМЫХ МИКРОКАЛЬКУЛЯТОРОВ	6
1.1. Общие сведения об измерительно-вычислительных системах, используемых при проведении научных экспериментов	6
1.2. Особенности построения автоматизированных измерительно-вычислительных систем на базе микро-ЭВМ	15
1.3. Особенности программного обеспечения измерительно-вычислительных систем на базе микро-ЭВМ	28
1.4. Особенности применения программируемых микрокалькуляторов	47

ГЛАВА ВТОРАЯ. ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ОБРАБОТКА ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ДАННЫХ	54
2.1. Основные задачи предварительной обработки	54
2.2. Основные сведения из теории вероятностей и математической статистики	56
2.3. Исследование законов распределения экспериментальных данных	75
2.4. Оценка числовых характеристик и параметров распределений случайных величин и процессов	84
2.5. Проверка некоторых статистических гипотез о свойствах экспериментальных данных	114
ГЛАВА ТРЕТЬЯ. ЭЛЕМЕНТЫ ПРОГРАММНОГО ОБЕСПЕЧЕНИЯ ПРЕДВАРИТЕЛЬНОЙ ОБРАБОТКИ ДАННЫХ	123
3.1. Подпрограммы БНТР/РАФОС	123
3.2. Подпрограммы на языке "форTRAN"	136
3.3. Подпрограммы на языках "бейсик" и "квейсик"	142
3.4. Программы для микрокалькуляторов	153
ГЛАВА ЧЕТВЕРТАЯ. ПОСТРОЕНИЕ МОДЕЛЕЙ ИСТОЧНИКОВ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ДАННЫХ МЕТОДАМИ РЕГРЕССИОННОГО АНАЛИЗА	168
4.1. Задачи регрессионного анализа	168
4.2. Основные положения классического регрессионного анализа	177
4.3. Вычислительные алгоритмы метода наименьших квадратов	192
4.4. Регрессионный анализ простейших полиномиальных моделей	211
4.5. Особенности регрессионного анализа при нарушении базовых положений	218
ГЛАВА ПЯТАЯ. ЭЛЕМЕНТЫ ПРОГРАММНОГО ОБЕСПЕЧЕНИЯ РЕГРЕССИОННОГО АНАЛИЗА	233
5.1. Подпрограммы БНТР/РАФОС	233
5.2. Подпрограммы на языке "форTRAN"	254
5.3. Подпрограммы на языке "бейсик"	268
5.4. Программы для микрокалькуляторов	277
Приложение 1. Команды монитора	289
Приложение 2. Описание экранного редактора К-52	292
Список литературы	300

1 р. 50 к.