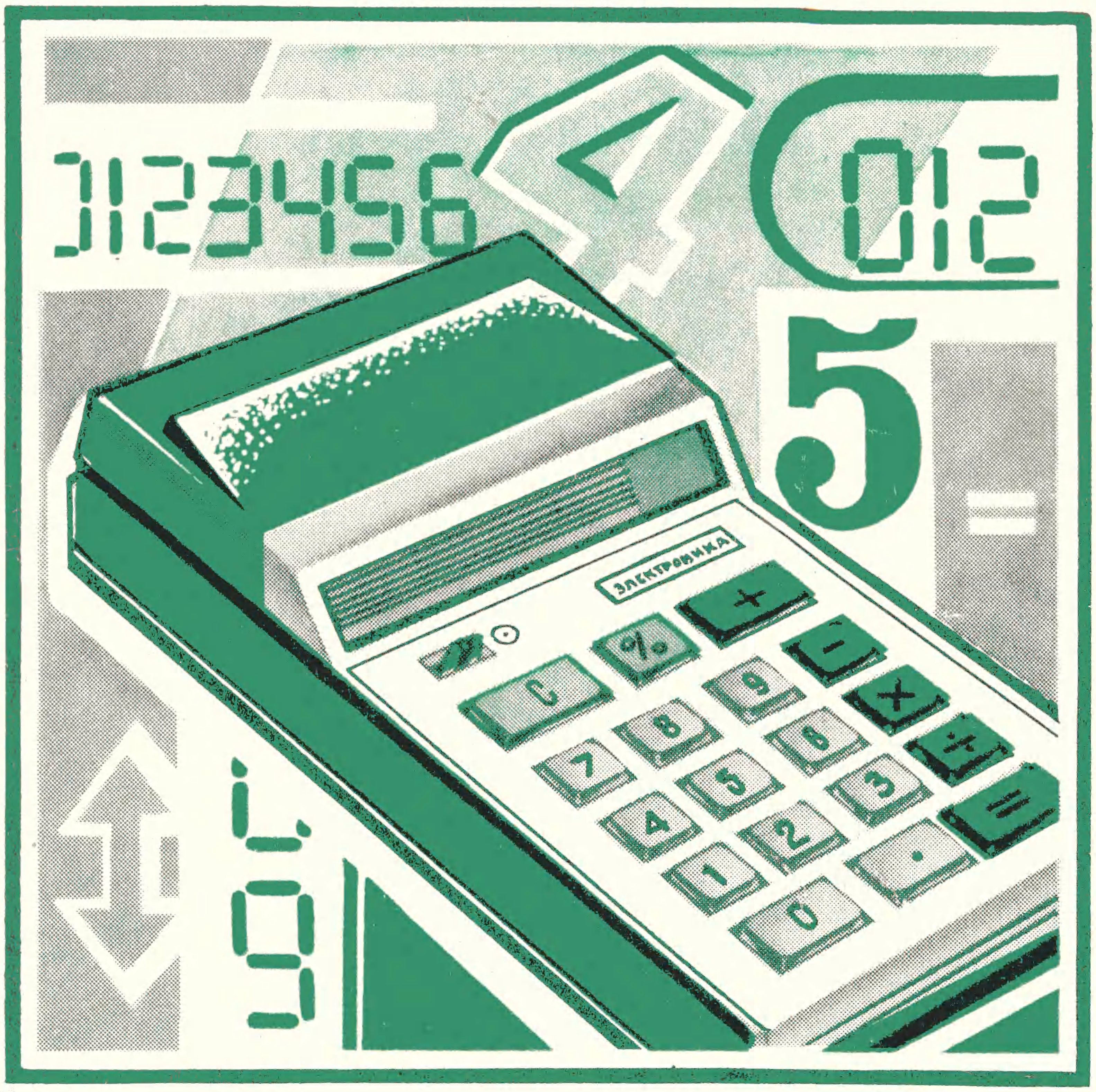
Ю. А. БЕЛЫЙ

СЧИТАЮЩАЯ МИКРОЭЛЕКТРОНИКА



ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»

АКАДЕМИЯ НАУК СССР
Серия "Наука и технический прогресс"

Ю.А. БЕЛЫЙ

СЧИТАЮЩАЯ МИКРОЭЛЕКТРОНИКА

Издательство "Наука"
Москва 1983

Б е л ы й Ю.А. Считающая микроэлектроника. М.: Наука, 1983. 120 с.

Книга посвящена электронным микрокалькуляторам – устройству и методам вычислений на моделях разных типов. Дается также краткая история развития вычислительной техники, рассказывается о микроминиатюризации электронных схем, намечаются тенденции развития микроэлектронной вычислительной техники.

Автор книги Ю.А. Белый – кандидат физико-математических наук, заведующий кафедрой математики Николаевского педагогического института.

24.5

Ответственный редактор

доктор физико-математических наук

Н.А. КРИНИЦКИЙ

Юрий Александрович Б е л ы й

СЧИТАЮЩАЯ МИКРОЭЛЕКТРОНИКА

Утверждено к печати редколлегией
серии научно-популярных изданий АН СССР

Редактор издательства **Н.Б. Прокофьева**
Художник **В.П. Хлебников**. Художественный редактор **А.М. Драговой**
Технический редактор **И.И. Джиоева**. Корректоры **И.Г. Мартьянова, О.А. Разуменко**

Книга набрана на наборно-печатающем автомате
оператором В.В. Разладиным

ИБ № 27567

Подписано к печати 17.10.83. Т–16672. Формат 60x90 1/16
Бумага для глубокой печати. Печать офсетная. Усл.печ.л. 7,5
Усл.кр.-отт. 7,8. Уч.-изд.л. 8,3. Тираж 50000 (2-й завод,25001–50000 экз.).
Тип. зак. 789. Цена 60 коп.

Издательство "Наука", 117864 ГСП-7, Москва, В-485, Профсоюзная ул., д. 90

Ордена Трудового Красного Знамени 1-я типография издательства "Наука"
199034, Ленинград, В-34, 9-я линия, 12

Б $\frac{2405000000-554}{042(02)-83}$ 297–83–IV

ВМЕСТО ВВЕДЕНИЯ

ОТ АБАКА ДО КОМПЬЮТЕРА И ОТ НЕГО – К МИКРОКАЛЬКУЛЯТОРУ

Первые вспомогательные средства вычислений человек начал применять очень давно, вероятно, тогда, когда он только стал овладевать счетом. По распространенному мнению, его первой "вычислительной машиной" были десять пальцев его рук. Этот инструмент, кстати, всегда находившийся у вычислителя при себе, мог помочь не только в простейших случаях – пальцевый счет сыграл в свое время значительную роль в развитии вычислительных приемов, но его возможности давно уже себя исчерпали. В течение многих веков широко использовался абак – счетное устройство разных конструкций, общим для которых был способ поразрядного вещественного представления чисел, главным образом при выполнении сложения и вычитания. И сейчас еще можно встретить одну из более поздних разновидностей этого нехитрого устройства – так называемые русские счеты. Для представления (моделирования) единиц различных разрядов в ранних конструкциях абаков часто использовались камешки из известняка, по-латински calculi от calx – известняк, известь. Отсюда пошел глагол calculare – сначала бросать камешки, позже – считать, а затем и существительное calculator – вычислитель, счетчик, калькулятор.

Сразу же заметим, что в латинском языке был еще один глагол для обозначения того же действия "вычислять" – computare, отсюда (через английское compute) произошел термин "компьютер", которым часто обозначают электронно-вычислительную машину (ЭВМ) с программным управлением, мощной памятью и высокопроизводительными устройствами вывода результатов вычислений в алфавитно-цифровом виде. Название же "калькулятор" закрепилось за настольными или карманными вычислительными приборами, также электронными, но с более узкими возможностями, предназначенными для индивидуального пользования.

Бурное развитие науки в эпоху естественно-научной революции вызвало резко возросшую потребность в выполнении громоздких усложнившихся вычислений, что в свою очередь привело к появлению и развитию новых вычислительных методов и средств. В первой четверти XVII в. появились логарифмические таблицы, "логарифмическая шкала" – прообраз счетной линейки. Почти одновременно стали разрабатываться и счетные машины. Первая из известных машин такого рода была изготовлена в 1623 г. В. Шиккардом и могла, по утверждению изобретателя, "автоматически" выполнять четыре арифметических действия (принципиальная возможность выполнения этих операций на машине Шиккарда подтверждена в современных ее реконструкциях). Однако обстоятельства сложились так, что эта попытка создания механической вычислительной машины была надолго забыта.

Большую известность получила счетная машина Б. Паскаля (1642 г.). Впрочем, она предназначалась только для сложения и вычитания чисел.

В силу ряда причин (главным образом технического характера) ни машина Паскаля, ни более совершенная машина Лейбница (первый вариант – 1673 г.) распространения не получили, так же как и многие другие модели и конструкции счетных машин, разработанные в течение последующих двух веков. Среди особо важных разработок первой половины XIX в. следует упомянуть попытку Ч. Бэббиджа создать механическую вычислительную машину с программным управлением.

Широкое распространение вычислительных машин механического типа началось всего около 100 лет назад, после того как в 1879 г. петербургский инженер В.Т. Однер получил в России патент на изобретенный им арифмометр. Усовершенствованная его конструкция – арифмометр "Феликс" до недавнего времени широко использовалась. В первой четверти нашего века такие арифмометры были основными средствами механизации вычислительных работ во многих областях человеческой деятельности.

Примерно с начала нашего века постепенно распространились настольные вычислительные машины электромеханического типа, автоматически выполнявшие сложение, вычитание и деление, а наиболее совершенные – и умножение. Большая масса и высокая стоимость, невысокая надежность и шум при работе, необходимость вручную определять и устанавливать порядок промежуточных и окончательных результатов вычислений, а также низкое быстродействие были очевидными, однако принципиально неустранимыми недостатками вычислительных машин этого типа.

Параллельно с этими машинами с конца XIX в. нашли применение для решения задач статистики и учета счетно-аналитические, или счетно-перфорационные, машины. Эти средства вычислений уже не предназначались для индивидуального пользования, как и появившиеся позже ЭВМ. Развитие перфорационной вычислительной техники, а также широкое применение в различных устройствах электромеханических реле создали в начале второй трети XX в. условия для реализации проектов универсальных электромеханических цифровых вычислительных машин, предназначенных для выполнения сложных научно-технических расчетов. К этому же времени появилась возможность применения в цифровых вычислительных машинах и элементов электроники – электронных ламп. К 1941 г. К. Цузе создал первую в мире универсальную цифровую вычислительную машину на электромеханических реле с программным управлением, принципиальные основы которой были заложены еще в разработках Ч. Бэббиджа, а Дж. Атанасов – первую специализированную электронно-вычислительную машину, предназначенную для решения больших систем линейных алгебраических уравнений. В машине Атанасова использовались блоки на электронных лампах, оперативное запоминающее устройство на конденсаторах, числа представлялись в двоичной системе счисления. В 1944 г. в США начала работать большая релейная машина МАРК-1. В начале 1946 г. было закончено сооружение первой универсальной электронно-вычислительной машины ЭНИАК*.

Эта первая ЭВМ представляла собой громоздкое сооружение: занимала

* При разработке ЭНИАК Дж. Маучли и Дж. Эккертом были широко использованы идеи Атанасова, что через четверть века послужило причиной лишения их патентных прав.

площадь 170 $м^2$, масса ее составляла десятки тонн, она содержала свыше 18 тыс. электронных ламп и 1,5 тыс. реле и потребляла около 150 кВт электроэнергии. В ней имелось всего 20 регистров памяти. Тем не менее использование электронных ламп вместо механических и электромеханических элементов позволило резко повысить скорость выполнения операций – умножение на ЭНИАК производилось за 2,8 мкс (1 мкс = 10^{-6} с), а сложение – за 0,2 мкс. Примерно с той же скоростью выполняются в наше время эти операции на программируемом микрокалькуляторе, содержащем примерно столько же электронных элементов на площади в 25–30 $мм^2$, потребляющем сотые, а то и тысячные доли ватта и имеющем примерно столько же, а то и намного больше регистров оперативной памяти.

Первая отечественная электронно-вычислительная машина МЭСМ была разработана в Институте электротехники АН УССР в 1950 г. под руководством академика С.А. Лебедева. Под его же руководством в 1952 г. была создана самая быстродействующая на то время в Европе электронно-вычислительная машина БЭСМ. В 1953 г. в СССР начался выпуск первой в Европе серийной ЭВМ высокого класса "Стрела".

С тех пор развитие и внедрение электронно-вычислительных машин оказывает огромное влияние на научно-технический прогресс. Не случайно одним из важнейших факторов современной научно-технической революции (НТР) считается кибернетизация и автоматизация производства и многих других сфер человеческой деятельности на базе широкого применения электронно-вычислительной техники. В свою очередь электронная промышленность явилась мощным стимулятором развития теоретической электроники, достижения которой с неслыханной для прежних времен скоростью стали внедряться в производство: в 1948 г. У. Шокли опубликовал статью, содержащую основные идеи устройства транзистора, а уже в начале 50-х годов новые полупроводниковые элементы были освоены массовым производством, и очень скоро электронные лампы в конструкциях ЭВМ, а затем и в других устройствах были вытеснены полупроводниковыми элементами.

Построенные на новой элементной базе ЭВМ второго поколения значительно уменьшились в габаритах и массе, стали потреблять намного меньше электроэнергии, одновременно повысилась их надежность, быстродействие и снизилась стоимость. Например, габаритные размеры ЭВМ "МИР" (машина для инженерных расчетов), первой в серии полупроводниковых машин под этим названием, разработанных в Институте кибернетики АН УССР, 1840Х750Х1079 мм, масса – 300 кг, машина потребляет всего 1 кВт электроэнергии. В то же время ее быстродействие достигает 8 тыс. арифметических операций в секунду. В машине используется очень простой язык программирования, при этом круг решаемых с ее помощью инженерных и научных задач остается весьма широким.

Очень немного времени потребовалось для внедрения технологии формирования на одной кремниевой пластине нескольких диодов, транзисторов, конденсаторов и резисторов, соединенных между собой так, чтобы получилась весьма сложная электронная схема. Создание таких интегральных схем (ИС) стало началом наступления эры микроэлектроники, какой мы ее знаем сегодня. Но только началом.

До наступления этой эры между самыми сложными счетно-клавишными машинами настольного типа, предназначавшимися для индивидуального пользования, и самыми простыми и малогабаритными для того времени ЭВМ по многим параметрам (вычислительные возможности, быстродействие, габариты, стоимость) образовался большой разрыв. Он не был уменьшен и с появлением релейных настольных вычислительных машин – они имели ряд технических и технологических недостатков, а по своим эксплуатационным параметрам мало отличались от электромеханических машин. В нашей стране выпуск таких машин "Вильнюс" и "Вятка" был налажен в 1961 г. Но к тому времени группой ученых Вычислительного центра Ленинградского университета уже была спроектирована одна из первых в мире настольных электронных клавишных вычислительных машин, в которой использовались малогабаритные полупроводниковые диоды и ферритовые сердечники. Проект машины был рассчитан на выполнение операций с 17-разрядными десятичными числами.

Был изготовлен действующий макет "Лада", производивший действия с 9-разрядными десятичными числами. Интересны характеристики конструкции: габаритные размеры без блока питания – 450Х410Х250 мм, потреблявшаяся мощность – 50 Вт, внутреннюю память машины составляли три оперативных и два индикаторных (на цифровых лампах тлеющего разряда) регистра каждый емкостью 9 десятичных разрядов. При выполнении вычислений получались 9-разрядные сумма и разность (время выполнения 6,0–8,5 мкс), 18-разрядное произведение – 9 старших и 9 младших разрядов (произведения выводились на отдельные индикаторные регистры, среднее время умножения 150 мкс), 9-разрядное частное и 9-разрядный остаток при делении (среднее время выполнения 180 мкс).

В том же 1961 г. на выставке промышленных достижений в Лондоне была представлена настольная электронная клавишная вычислительная машина (ЭКВМ) "Анита МК-8" на тиратронах с холодным катодом. Широкое распространение таких машин началось с 1964 г., когда почти одновременно появились "Компет CS-10A" в Японии, "IME-84" в Италии, "Frieden-130" в США. В том же году в СССР началось серийное производство ЭКВМ "Вега", действующий макет которой был изготовлен еще в 1962 г. В 1967 г. в нашей стране была создана машина ЭДВМ-П (электронная десятиклавишная вычислительная машина с печатью-перфорацией) – первая отечественная ЭКВМ, вычислявшая автоматически тригонометрические функции.

Дальнейшее бурное развитие как "малой", так и "большой" вычислительной техники неразрывно связано с новыми достижениями микроэлектроники. Это также яркий пример того, насколько коротким стал в наше время, в эпоху научно-технической революции, промежуток между изобретением и его массовым внедрением. В самом конце 1950 г. была разработана технология производства интегральных схем – микроминиатюрных электронных устройств, содержащих группы безраздельно связанных между собой элементов, выполнявших роль диодов, триодов, конденсаторов, резисторов и соединений, а уже в 1961 г. появилась первая ЭВМ (третьего поколения), содержавшая 587 интегральных схем. Она была в 48 раз меньше по массе и в 150 раз по объему транзисторной ЭВМ, выполнявшей те же функции. В 1965 г. появились и первые ЭКВМ на интегральных схемах. Массовое производство таких ЭКВМ началось в 1967 г. в Японии – в течение года там было выпущено их 63 тыс. шт. Затем за два последующих года выпуск их увеличился более чем в 7 раз, при этом появились первые переносные ЭКВМ, в которых были использованы только что внедренные в производство большие интегральные схемы (БИС).

Дело в том, что после создания интегральных схем физики и инженеры направили свои усилия на разработку усовершенствованных технологических процессов, позволявших осуществить более компактное размещение электронных элементов на одной микросхеме. Использование в производстве оптических методов, технологии получения тонких пленок и способов осаждения тонких слоев в вакууме привело сначала к появлению схем среднего уровня интеграции (на кристалле размером 5X5 мм размещалось до 100 транзисторов), а затем схем, содержавших десятки и сотни тысяч элементов и соединений. Внедрение больших интегральных схем привело не только к дальнейшему совершенствованию ЭВМ (теперь уже четвертого поколения), но и к настоящей революции в малой вычислительной технике индивидуального пользования.

Первая портативная ЭКВМ "Компет T-8D", выпущенная фирмой "Шарп" в Японии, имела габариты 247X135X72 мм, массу – 1,65 кг, 4 большие интегральные схемы в форме квадрата со стороной 3 мм, каждая из которых включала 1875 элементов (упомянутых выше), а кроме того 2 интегральные схемы, 5 транзисторов и 11 диодов. Предназначалась она для выполнения четырех арифметических действий и их последовательностей над 8-разрядными десятичными числами. Карманной она, как видим, не была, но ее можно было переносить и использовать в любом месте, тем более что было предусмотрено автономное питание от встроенных аккумуляторов.

Дальнейшие важные шаги в развитии переносной вычислительной техники следовали один за другим через очень короткие интервалы. Не прошло и двух лет, как переносные ЭКВМ стали "карманными" и продолжали быстро уменьшаться (как и их стоимость), в них появились дополнительные регистры памяти. Уже в 1972 г. была выпущена микроЭКВМ "HP-35" – первый образец микрокалькулятора инженерного, или научно-технического, типа. Кроме обычных действий, на этой модели автоматически вычислялись десятичные значения степенно-показательной, показательных, прямых и обратных тригонометрических функций, натуральных и десятичных логарифмов и т.д. Кроме естественной формы, числа в этой модели могли быть представлены в форме с плавающей запятой и в диапазоне от 10^{-99} до 10^{+99} -1. И это при габаритах 147X81X33 мм и массе 255 г. А в следующем 1973 г. той же фирме "Хьюлетт-Паккард" в модели "HP-65" удалось в те же габариты "втиснуть" целую программируемую ЭВМ, на которой можно было реализовать составленные пользователями вычислительные программы, содержавшие до 100 команд, или применить пакеты заранее составленных и записанных на магнитных карточках программ.

Так был практически устранен разрыв между "настоящими" ЭВМ и малой вычислительной техникой индивидуального пользования, калькуляторами, тем более что применение достижений микроэлектроники привело к огромным и чрезмерно важным изменениям в развитии больших

ЭВМ. Прежде всего, на новой элементной базе они и сами в значительной степени уменьшились. Появился термин "малые ЭВМ", а затем и "мини-" и "микроЭВМ", причем за этими терминами скрывалось снижение массы, габаритов, цен, потребления энергии и эксплуатационных расходов при одновременном повышении надежности, а подчас и производительности.

Но дело было не только в этом. Организация крупносерийного производства малых ЭВМ привела к резкому увеличению общего числа ЭВМ, находящихся в эксплуатации. На конец 1971 г. парк ЭВМ в капиталистических странах составлял 131,3 тыс. шт. К 1978 г. только малых ЭВМ использовалось около 300–400 тыс. шт. и еще 400–600 тыс. шт. микроЭВМ (не следует путать с микроЭКВМ – их в пользовании сотни миллионов). Эти количественные изменения привели к качественному скачку – четко наметилась тенденция к рассредоточению вычислительной техники и ее приближению к непосредственному потребителю. Распространение микроЭВМ можно рассматривать как одну из сторон реализации этой тенденции на самом низком уровне, но зато с учетом потребностей самого массового потребителя.

В нашей стране первые образцы ЭКВМ на интегральных схемах появились в 1970 г., а с 1971 г. начался серийный выпуск (ЭКВМ "Искра"). В 1972 г. были разработаны первые отечественные микроЭКВМ на больших интегральных схемах.

В настоящее время отечественная промышленность выпускает несколько десятков моделей микрокалькуляторов различных типов. За прошедшие 10 лет совершенствование элементной базы этих устройств, в особенности характеристик применяемых схем, привело к разительным изменениям их основных параметров. При неуклонном повышении удобства работы на них и их надежности уменьшились габариты, масса, резко возросло время непрерывной работы от автономного источника питания. По последнему параметру можно выделить три поколения микрокалькуляторов. Первое из них могло непрерывно работать от внутреннего источника тока 3–7 ч, второе – до 800 ч, а третье 6000–8000 ч, т.е. при трех часах вычислений в день микрокалькуляторы последних моделей не потребуют замены источника тока в течение многих лет – почти всего периода их эксплуатации.

Это было достигнуто прежде всего резким снижением потребляемой электроэнергии: микрокалькуляторы первого поколения потребляли в среднем 600 мВт, второго 1–10, третьего 0,03–0,6 мВт. Появились микрокалькуляторы на солнечных батареях, работающие от источников естественного и искусственного света и не нуждающиеся в иных источниках питания. Отечественный микрокалькулятор "Электроника Б3-38" (габаритные размеры 55X91X5,5 мм, масса 50 г) в 87 раз по объему и в 33 раза по массе меньше первых образцов переносных ЭКВМ, а по вычислительным возможностям намного их превосходит.

Поразительны и темпы роста производства ЭКВМ, и прежде всего микрокалькуляторов. С 1970 по 1976 г. их выпуск возрос в 100 раз и достиг 100 млн. экземпляров в год. Только в нашей стране ежегодно производятся миллионы микрокалькуляторов.

Сказанное означает, что электронный микрокалькулятор – явление в нашей действительности не случайное и не преходящее. Он становится таким же обычным и привычным предметом нашего быта, как часы, радиоприемник или телевизор, и таким же орудием труда, как авторучка или еще недавно – счетная линейка. Микрокалькуляторы значительно повышают производительность труда на рабочих местах многих производств, оказывают эффективную помощь в учебе, создают нам дополнительный комфорт дома и везде экономят время (которого нам постоянно так не хватает). Кстати, выпускаются микрокалькуляторы, вмонтированные в корпуса наручных электронных часов и даже встроенные в шариковые авторучки.

Но как ни просты на первый взгляд производимые нами манипуляции при вычислениях на любой модели микрокалькулятора, квалифицированная, рациональная работа с ними требует определенного расширения и повышения вычислительной культуры их пользователя, что должно привести его не к атрофии вычислительных умений и навыков (как некоторые опасаются), а скорее наоборот, к их дальнейшему развитию и укреплению. Ознакомление с некоторыми особенностями устройства микрокалькуляторов и их отдельных узлов, с принципами их работы – хороший повод для приобретения первоначальных сведений по микроэлектронике, физической реализации математических действий в различных системах счисления, математической логике. Ознакомление с работой более сложных микрокалькуляторов программированного типа, составление характерных программ для решения на них довольно сложных задач также имеет большое познавательное значение, может стать первым этапом на пути к ознакомлению с работой современных электронно-вычислительных машин в широком значении этого термина.

Содействовать повышению вычислительной культуры пользователей микрокалькуляторов, привлечь и по возможности удовлетворить их интерес к перечисленным выше аспектам – такова цель настоящей книги.

ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ О МИКРОКАЛЬКУЛЯТОРАХ

Термин "микрокалькуляторы" закреплен Общесоюзным стандартом за переносными вычислительными устройствами на электронных элементах и узлах, предназначенными для использования в любых условиях, с автономным питанием, карманного размера и небольшой (50–300 г) массы. Аббревиатура "МК" используется в обозначениях новых моделей этих устройств (например, "Электроника МК-51"). До введения этих обозначений применялись индексы "Б3" или "С3" (например, "Электроника Б3-24" или "Электроника С3-15").

По функциональным (операционным, вычислительным) возможностям микрокалькуляторы подразделяются на три группы (типа) – простейшие, инженерные и программируемые.

Простейшие микрокалькуляторы предназначаются, как правило, для выполнения обычных арифметических операций и их последовательностей. Более совершенные модели этой группы имеют и некоторые дополнительные возможности. Инженерные микрокалькуляторы, кроме обычных вычислений, обеспечивают автоматическое вычисление значений основных элементарных функций – показательных, логарифмических, прямых и обратных тригонометрических и некоторых других. Программируемые микрокалькуляторы обеспечивают вычисления по программам в несколько десятков шагов, составленным самими вычислителями, в значительной мере устраняя разрыв между вычислительной техникой индивидуального пользования и стационарными ЭВМ.

ОБ АРИФМЕТИЧЕСКИХ ПРИНЦИПАХ РАБОТЫ МИКРОКАЛЬКУЛЯТОРОВ

Выполняя на микрокалькуляторе, скажем, действия сложения и вычитания, мы не очень задумываемся над тем, как эти действия осуществляются, тем более что те же действия просто, сравнительно быстро и весьма наглядно выполняются и на таком простом счетном приборе, как широко известные русские счеты. Но вот когда в какие-то почти неощутимые промежутки времени мы получаем на микрокалькуляторе результат умножения (деления) многозначных чисел или, нажав клавишу $\boxed{\text{sin}}$, – значение соответствующей функции для заданного аргумента с точностью, намного превосходящей точность большинства распространенных математических таблиц, мы не можем не задать себе вопрос, как же все это происходит, как считает электронный микрокалькулятор.

Ответ на этот вопрос и прост и сложен в одно и то же время. Прежде всего заметим, что все вычислительные операции от умножения и деления, возведения в степень и извлечения корня до дифференцирования и интегрирования и т.д. могут быть сведены к самым простым – сложению и вычитанию, многократно повторенным (поэтому блок МК, в котором производятся вычисления, называется сумматором, или арифметико-логическим устройством).

Но при выполнении машинным путем даже простейшей операции – сложения возникает проблема, как наиболее удобно представить, смоделировать цифры и числа, над которыми выполняется сложение, и результаты этого действия над числами.

Практически повсеместно для вычислений употребляется десятичная система. В одной из первых вычислительных машин, изобретенной французским математиком Б. Паскалем в середине XVII в., число одного разряда (т.е. от 0 до 9) моделировалось углом, который по отношению к некоторому начальному положению занимало зубчатое счетное колесо; сложению чисел соответствовало сложение пропорциональных им углов. Г.В. Лейбниц для этой цели использовал ступенчатый валик – цилиндр, на боковой поверхности которого параллельно образующей располагалось 9 ступенек, ребер, каждое из которых было на 1/9 короче предыдущего. Входя в зацепление со счетной шестеренкой в разных своих частях, цилиндр поворачивал ее на соответствующий угол (одну, две, три... и т.д. девятых частей), с помощью чего и достигалось моделирование чисел и результатов действий над ними. Т. Однер предложил для той же цели колеса с переменным числом зубьев – "колеса Однера", на использовании которых основано устройство получивших в прошлом широкое распространение арифмометров.

Итак, моделирование чисел в десятичной системе счисления механически обеспечивалось достаточно просто и надежно, но сами устройства были весьма сложными, шумными и, главное, слишком медлительными в работе.

Уже первые шаги в создании электронных вычислительных машин привели к выводу, что непосредственное использование десятичной системы счисления здесь неудобно, моделировать ее обеспечением десяти стабильных электрических или электронных состояний некоторых узлов слишком сложно и ненадежно. Автор первой электронной вычислительной машины Дж. Атанасов пришел к заключению, что наиболее удобна двоичная система счисления, в которой любое число может быть представлено комбинацией всего двух символов, двух цифр, которым соответствуют два устойчивых электрических, электронных или магнитных состояния. К тому же выполнение арифметических действий в двоичной системе счисления очень просто, особенно в случае сложения и умножения.

Для изображения чисел в двоичной системе счисления употребляются всего две цифры – 0 и 1, моделирование которых в вычислительных устройствах, как уже сказано, не вызывает затруднений. При этом, как и в десятичной системе счисления, основание системы (число 2) изображается единицей во втором разряде слева, т.е. как 10; тройка получится прибавлением к этому числу единицы, т.е. $10 + 1 = 11$; четверка, равная 2^2, изобразится как 100 (в десятичной системе $10^2 = 100$) и т.д. Таким образом числам 0, 1, 2,..., 9 в десятичной системе будут соответствовать следующие числа в двоичной системе (табл. 1):

Таблица 1

Десятичная система	Двоичная система	Десятичная система	Двоичная система
0	0	5	101
1	1	6	110
2	10	7	111
3	11	8	1000
4	100	9	1001
и т.д.			

Одну двоичную цифру часто называют бит (по-английски binary digit – двоичная цифра): бит может быть 0 или 1. В теории информации бит принимается за единицу информации. Заметим сразу, что для оценки мощности запоминающих устройств или величины потока информации в электронной вычислительной технике используются и бо́льшие единицы: байт, равная (обычно) 8 бит, и килобайт, равная 1024 бит.

Разберемся, как в двоичной системе счисления производятся арифметические операции. Для выполнения сложения достаточно запомнить, что в этой системе 1 + 1 = 10 (более полная "таблица сложения": 0 + 0 = 0; 0 + 1 = 1; 1 + 0 = 1; 1 + 1 = 10), т.е. каждые две единицы младшего разряда дают одну единицу старшего разряда. Поэтому сложение двух чисел производится очень просто, например:

$$\begin{array}{r} 101 \\ +\ 100 \\ \hline 1001 \end{array}$$

Более "громоздкий" пример:

	Двоичная система	Десятичная система
Перенос	11111111	
Первое слагаемое	11011101	+ 221
Второе слагаемое	11101111	239
Сумма	111001100	460

Из этих примеров можно сделать вывод: при сложении каждые две единицы младшего разряда зачеркиваем и заменяем единицей следующего разряда, все это производится чисто механически. Вычитание в двоичной системе выполняется аналогично вычитанию в обычной десятичной системе. Если в некотором разряде приходится вычитать единицу из нуля, занимается единица из следующего старшего разряда и т.д. При этом следует помнить, что занимаемая единица старшего разряда равна двум единицам данного разряда.

Еще проще выполняется в двоичной системе операция умножения. Таблица умножения в этой системе состоит из одной строчки, а именно 1×1 = 1 (случаи 0×0 = 0; 0×1; 1×0 очевидны). Это значит, что при умножении двух двоичных чисел "в столбик" каждое частичное произведение или равно нулю, если в соответствующем разряде множителя стоит нуль, или равно множимому, сдвинутому на соответствующее число разрядов, если в соответствующем разряде множителя единица. Например:

$$\begin{array}{r} \times\begin{array}{r}111\\101\end{array}\\ \hline 111\\ 111\\ \hline 100011 \end{array} \qquad \begin{array}{r} \times\begin{array}{r}1011101\\1001101\end{array}\\ \hline 1011101\\ 1011101\\ 1011101\\ 1011101\\ \hline 1101111111001 \end{array}$$

Как видим, умножение сводится к сложению со сдвигом – при умножении следует множимое переписать столько раз, сколько единиц в множителе, смещая каждый результат на соответствующее количество разрядов влево (как и при умножении десятичных чисел). Затем производится сложение.

Выходит, что двоичная арифметика – арифметика, в которой почти не нужно считать! Правда, несколько более громоздкой становится запись чисел, вычислений над ними и их результатов. Конечно, в обычной арифметике двоичная система счисления никогда не вытеснит десятичную, однако в арифметике электронного микрокалькулятора, вообще ЭВМ, ни громоздкое представление компонентов действий, ни скучная процедура их выполнения не существенны – здесь простота правил двоичных вычислений и легкость их представления с помощью электронных узлов и схем дают по сравнению с десятичной системой ощутимую выгоду (о чем ниже еще будет разговор).

Существуют не очень сложные правила перевода любых чисел, целых и дробных, из одной системы счисления в другую, например из десятичной в двоичную (или наоборот). Мы не станем на этом подробно останавливаться – тому, кто работает на микрокалькуляторе, об этом заботиться не приходится, все, что нужно для такого перевода, выполняется автоматически. Следует, однако, заметить, что когда мы нажимаем на ту или иную цифровую клавишу микрокалькулятора, вводя в его вычислительный регистр некоторое одноразрядное десятичное число, оно преобразуется там в некоторое четырехзначное двоичное число (двоичный код) в соответствии с приведенной на с. 12 таблицей. Такое четырехзначное число называется тетрадой (от греческого тетра – четыре). После ввода некоторого многоразрядного числа, скажем 9153, получится следующая последовательность тетрад: 1001 0001 0101 0011. Таким образом, каждая тетрада представляет некоторое одноразрядное десятичное число в двоичном коде. Такой смешанный код представления чисел называют двоично-десятичным. Именно этот код применяется в электронных микрокалькуляторах.

При выполнении действия сложения двоичных чисел "потетрадно" осложнений не возникает, если только сумма внутри каждой тетрады-результата не превышает 9. Например:

$$\begin{array}{r} +\begin{array}{r}0010\\1010\end{array}\\ \hline 0110 \end{array} \qquad \begin{array}{r} +\begin{array}{r}2\\4\end{array}\\ \hline 6 \end{array}$$

Но вот мы находим сумму:

0011	3
+	+
1010	8
1101	11

Число 1101 в таблице отсутствует, поскольку соответствующее ему в десятичной системе число 11 имеет два разряда и в двоично-десятичном коде должно быть выражено двумя тетрадами. Откуда берется добавочная тетрада для нового разряда? Для этого сумматор микрокалькулятора имеет устройство, которое в случае поступления в него одноразрядного числа больше 9 автоматически добавляет для корректирования число 6(0110), чем обеспечивает передачу 10 в следующую тетраду, т.е. сложение в двоично-десятичном коде. Почему 6? Потому что, кроме предусмотренных таблицей одноразрядных дестичных чисел от 0 до 9, существует еще 6 двухразрядных десятичных чисел 10, 11, 12, 13, 14, 15, которые можно выразить в той же тетраде так: 1010, 1011, 1100, 1101, 1110, 1111. Чтобы "перескочить" через эти числа в следующую тетраду двоично-десятичного кода используется добавление корректирующей тетрады 0110 (6).

Поясним процесс сложения в двоично-десятичном коде на следующем примере. Складываются числа 1285 и 6643. При сложении десятков 8 и 4 получается "переполнение". Процесс сложения можно представить так:

	0001	0010	1000	0101	
+	0110	0110	0100	0011	
	0111	1000	1100	1000	Нескорректированная сумма
+			0110		Корректирующая тетрада
		1			Перенос при коррекции
	0111	1001	0010	1000	Скорректированная сумма

Рассмотрим еще один пример: 5785 + 1952.

	0101	0111	1000	0101	
+	0001	1001	0101	0010	
	0110	0000	1101	0111	Нескорректированная сумма
		0110	0110		Корректирующие тетрады
	0111	0111	0011	0111	Скорректированная сумма

АЛГЕБРА ЛОГИКИ В ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ СХЕМАХ МИКРОКАЛЬКУЛЯТОРОВ

Итак, мы выяснили, что электронные микрокалькуляторы работают в двоично-десятичном коде, оперируя с числами, каждый разряд которых изображается как 0 или как 1. Для машинной записи таких чисел используются элементы, которые могут принимать одно из двух устойчивых состояний. Если считать аргументами и значениями преобразующих функций отдельные разряды двоичных чисел, то любую схему для преобразования двоичной информации можно рассматривать как функциональное устройство с несколькими входами и выходами, такое, что на каждый вход подается и с каждого выхода снимается двоичная цифра – 0 или 1. Переменные и функции, принимающие одно из двух возможных значений, 0 или 1, называются логическими (или булевыми – по имени английского математика и логика Дж. Буля, создателя современной символической логики).

Познакомимся с несколькими логическими функциями, обозначаемыми как "И", "ИЛИ", "НЕ".

Логическую функцию "И" называют логическим умножением (или конъюнкцией), обозначается она знаком $\wedge$. Для двух аргументов X и $У$ ее можно представить таким образом:

X	$У$	"И" $(X \wedge У)$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Логическое умножение подчиняется тем же законам, что и арифметическое, в частности переместительному и сочетательному. Результат этой логической операции для любого конечного числа аргументов равен единице тогда и только тогда, когда все "сомножители" равны единице, что совпадает с результатом обычного арифметического умножения. Простейшей физической моделью операции "И" с двумя входами может быть последовательное соединение двух выключателей в электрической цепи. Цепь будет замкнута только в том случае, если будут включены оба выключателя.

Логическую функцию "ИЛИ" называют логическим сложением (или дизъюнкцией). Обозначается оно знаком V. Логическая сумма нескольких слагаемых равна нулю, если каждое слагаемое равно нулю, и равна единице, если равно единице хотя бы одно из слагаемых.

Значения этой функции от аргументов X и $У$ определяются так:

X	$У$	"ИЛИ" $(X \vee У)$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Логическое сложение также подчиняется переместительному и сочетательному законам, но логическая сумма не всегда совпадает с арифметической: $1 \vee 1 = 1$; $1 + 1 = 10$. Простейшую физическую модель этой функции также легко представить: это параллельное соединение двух или нескольких выключателей в электрической цепи; цепь замкнута, если включен хотя бы один из этих выключателей.

Логическая функция "НЕ", логическое отрицание – функция одного аргумента, ее значения определяются так:

X	"НЕ" $(\bar{X}, \neg X)$
0	1
1	0

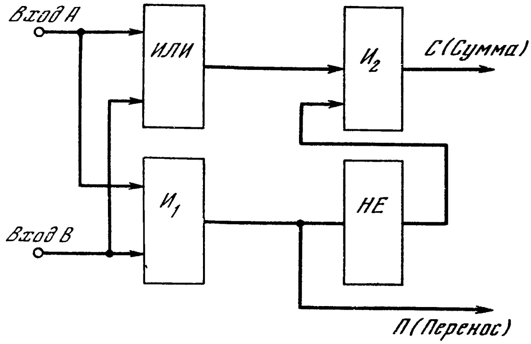


Рис. 1. Логическая схема одноразрядного двоичного сумматора на два входа

Обозначается эта функция чертой над аргументом ($\bar{X}$) или знаком $\neg$ перед аргументом ($\neg X$) и читается в обоих случаях "не X".

Операции над выражениями, содержащими логические функции, выполняются в определенном порядке по старшинству: сначала операция "НЕ", затем "И", после этого "ИЛИ". Существуют и другие логические функции, любая из них может быть представлена в виде некоторой комбинации функций "И", "ИЛИ", "НЕ". Весьма часто используются функции "И–НЕ" (так называемая стрелка Пирса, $F = \overline{X \wedge У}$) и "ИЛИ–НЕ" (штрих Шеффера, $F = X \vee У$).

Рассмотренные логические элементы широко применяются в автоматике и электронной вычислительной технике, из них собирают цепи для выполнения более сложных логических операций. Покажем это на простейшем примере сложения двух одноразрядных двоичных чисел, который представляет для нас особый интерес. Мы уже знаем, что 0+0 = 0, 0+1 = 1, 1+ +0 = 1, 1+1 = 10. В первых трех случаях достаточно было бы использовать только логический элемент "ИЛИ". Однако при выполнении операции 1+1 = 10 следует блокировать подачу импульса на выход данного разряда – "сумму" и перекинуть его в следующий разряд, осуществить перенос. Это достигается применением схемы, состоящей из одного элемента "ИЛИ", двух "И" и одного "НЕ", соединенных, как показано на рис. 1.

Если на обоих входах сигнал отсутствует, отсутствует он и на обоих выходах. Если появляется импульс 1 хотя бы на одном из входов, он свободно проходит через "ИЛИ", но блокируется на "И", поэтому на входе "НЕ" будет 0, а на выходе сформируется 1. Но это обозначает, что на оба входа "$И_1$" поступают одновременно импульсы 1, поэтому "$И_1$" срабатывает и пропускает на выход "СУММА" импульс 1; осуществляется операция 0+1 = 1 или 1+0 = 1. На выход "ПЕРЕНОС" сигнал не поступает.

Но вот на оба входа схемы поступили сразу два импульса. В результате того, что на вход "$И_2$" поступило два импульса, он срабатывает, посылает импульс на выход "ПЕРЕНОС" и на вход "НЕ", на выходе которого появляется 0, что блокирует элемент "$И_1$", и на выход "СУММА" импульс не поступает. Осуществилась операция 1+1 = 10. Операция простейшая, но для ее реализации потребовалось четыре логических элемента.

Описанная схема называется одноразрядным двоичным сумматором на два входа и является составной частью многоразрядного двоичного сумматора – обязательного блока любой электронной вычислительной машины. Ее действие может быть описано следующим логическим выражением:

$$C = (A \vee B) \wedge \text{П}, \quad \text{П} = A \wedge B,$$

где А и В – содержимое входов, С – содержимое выхода "СУММА", П – содержимое выхода "ПЕРЕНОС".

Одноразрядный двоичный сумматор на два входа недостаточен для сложения двух многоразрядных двоичных чисел: при этом в каждом разряде могут одновременно складываться три единицы. Нужен одноразрядный сумматор на три входа (табл. 2).

Таблица 2

Входы			Выходы		Входы			Выходы	
А	В	Д	С	П	А	В	Д	С	П
0	0	0	0	0	1	1	0	0	1
1	0	0	1	0	1	0	1	0	1
0	1	0	1	0	0	1	1	0	1
0	0	1	1	0	1	1	1	1	1

Здесь А и В обозначают цифры, которые являются слагаемыми в данном разряде, Д – перенос в данный разряд из соседнего младшего разряда, С – результат сложения в данном разряде, П – перенос в соседний старший разряд. Логические выражения, соответствующие этой таблице, могут быть представлены в следующем виде:

$$C = (A \wedge \overline{B} \wedge \overline{\text{Д}}) \vee (\overline{A} \wedge B \wedge \overline{\text{Д}}) \vee (\overline{A} \wedge \overline{B} \wedge \text{Д}) \vee (A \wedge B \wedge \text{Д}),$$

$$\text{П} = (A \wedge B \wedge \overline{\text{Д}}) \vee (A \wedge \overline{B} \wedge \text{Д}) \vee (A \wedge B \wedge \text{Д}).$$

Логическая схема, реализующая это выражение, должна была бы состоять из 13 логических элементов – трех "НЕ", восьми "И" и двух "ИЛИ". Однако логические преобразования позволяют упростить их до следующего вида:

$$C = (A \wedge B \wedge \text{Д}) \vee (A \vee B \vee \text{Д}) \vee \overline{(A \wedge B) \vee (A \vee \text{Д}) \vee (B \wedge \text{Д})},$$

$$\text{П} = (A \wedge B \wedge \overline{\text{Д}}) \vee (A \wedge \overline{B} \wedge \text{Д}) \vee (\overline{A} \wedge B \wedge \text{Д}) \vee (A \wedge B \wedge \text{Д}).$$

Благодаря этому логическая схема одноразрядного двоичного сумматора с тремя входами упрощается, и количество логических элементов в ней может быть уменьшено до девяти.

ЭЛЕМЕНТЫ, УЗЛЫ И БЛОКИ (УСТРОЙСТВА) МИКРОКАЛЬКУЛЯТОРА

Элементы

Как в любом электронном приборе, в микрокалькуляторе чаще всего используются транзисторы, полупроводниковые диоды, конденсаторы, резисторы. Все эти детали связаны между собой в определенном порядке соединительными проводами. Назначение соединительных проводов – пропускать электрический ток, направлять его из одного элемента схемы в другой. Назначение резисторов – ограничивать токи до требуемой величины (энергию, выделяющуюся на них в виде тепла, необходимо отводить из схемы). Конденсатор обладает способностью накапливать и какое-то время хранить электрические заряды. Он способен также пропускать импульсные токи, отделяя их от постоянных, отделять короткие импульсы от более продолжительных, вместе с резистором может выполнять роль эталона времени – чем больше емкость конденсатора, тем дольше он разряжается через резистор. Каждый из конденсаторов в цепи базы транзистора создает некоторую задержку его состояния. Периодические изменения состояния транзисторов порождают генерацию импульсных колебаний.

Конденсаторы и резисторы относятся к пассивным элементам электронных схем, диоды и транзисторы – к активным.

Назначение диода, характерного полупроводникового прибора, – пропускать ток, но только в одном направлении (его можно рассматривать как клапан, открывающийся в одном направлении). Существенной особенностью полупроводников является значительное изменение электропроводности при самых незначительных добавках примесных элементов – один атом определенной примеси на миллиард атомов чистого полупроводника может изменить его электропроводность в миллионы раз.

Если в четырехвалентный кремний или германий ввести в качестве примеси пятивалентный фосфор, появятся избыточные электроны, легко порывающие связь с атомами. Электроны, как известно, несут отрицательный заряд. Такой полупроводниковый материал обладает электронной проводимостью, или проводимостью *n*-типа (от negativus – отрицательный). Если же в качестве примеси использовать трехвалентный элемент, например бор, на определенных местах в атоме, называемых дырками, образуется нехватка электронов. Под влиянием внешнего электрического поля электрон из одного атома перескакивает в другой, заполняя в нем дырку, его место занимает электрон из соседнего атома и т.д. Наблюдаемый при этом эффект эквивалентен перемещению дырок в направлении, противоположном движению электронов. В этом случае говорят, что полупроводник обладает дырочной, или *p*-проводимостью (positivus – положительный).

Если в соседние области полупроводника ввести разнородные примеси, то эти области будут обладать проводимостью разного типа и на их границе возникнет электронно-дырочный, или *p–n*-переход. Если положительный полюс источника тока подключить к *n*-области, а отрицательный к *p*-области, то электроны будут притянуты к положительному полюсу, а носители положительного заряда, дырки – к отрицательному. На *p–n*-переходе образуется обедненный электрическими зарядами запирающий слой, почти не пропускающий тока. При обратной полярности источника тока электроны будут подвигаться к положительному полюсу, а дырки – к отрицательному. Два потока зарядов обусловят прохождение тока через *p–n*- переход. Таким путем *p–n*-переход образует диод, электрический клапан, пропускающий ток в одном направлении. *P–n*-переход обладает еще одним важным свойством – ширина запирающего слоя может изменяться в зависимости от подводимого напряжения. Тем самым появляется возможность управлять *p–n*-переходом, изменяя его емкость в необходимых размерах.

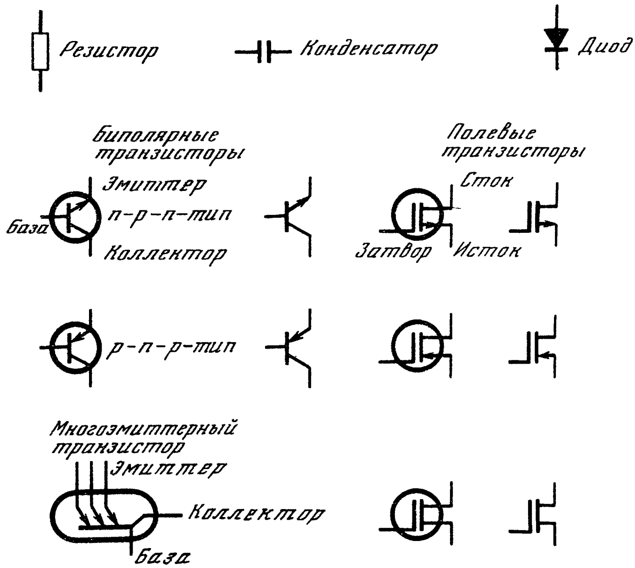


Рис. 2. Изображения на схемах основных элементов электроники

Три слоя полупроводников разных типов проводимости и два *p–n*-перехода позволяют управлять током с помощью электрического поля. Два соседних перехода образуют транзистор – прибор, который, как и диод, пропускает ток только в одну сторону, но в отличие от диода обладает способностью еще и усиливать, генерировать и преобразовывать электрические колебания, используя внешний источник питания. Транзистор применяется во многих электронных схемах как управляемый выключатель. Под действием слабого управляющего сигнала, подаваемого на один из его электродов, транзистор начинает пропускать ток, при отсутствии сигнала не пропускает, т.е. ведет себя как разомкнутый выключатель. Такая схема называется ключом. Если из трех слоев полупроводников разных типов проводимости два крайних слоя имеют проводимость одинакового типа, а средний – противоположного, образуется биполярный транзистор *p–n–p* или *n–p–n*-типа. Средний слой у биполярного транзистора называется базой, крайние – эмиттером и коллектором (если сравнить транзистор с вакуумным триодом, то эмиттер соответствует катоду, коллектор – аноду, а база – сетке).

Рассмотрим одну из возможных схем включения транзистора в электрическую цепь – схему с общей базой. По этой схеме усиливаемый сигнал подается на участок между эмиттером и базой, а выходной снимается между базой и коллектором. В цепи эмиттер–база внешний источник тока включен в направлении пропускания, батарея помогает электронам и дыркам преодолевать запирающий слой. На участке база–коллектор батарея, наоборот, препятствует переходу зарядов через *p–n*-переход. На первом участке сопротивление незначительно, на втором – очень большое, а ток, проходящий через оба *p–n*-перехода, остается почти неизменным. Поэтому в соответствии с законом Ома напряжение сигнала на выходе будет во много раз превышать напряжение входного сигнала. В этом и состоит процесс усиления электрического тока в транзисторе.

Транзисторы, в которых для управления прохождением электрических зарядов используется электрическое поле, называются полевыми. Основная деталь полевых транзисторов – полупроводниковый канал, по которому заряды продвигаются между двумя малыми областями разной проводимости – истоком и стоком. Управляющий металлический электрод – затвор отделен от полупроводникового канала тончайшим слоем изолятора – окисла полупроводника, через который затвор воздействует электрическим полем на заряды. Такой транзистор называют МОП-транзистором (металл–окисел–полупроводник). Это разновидность МДП-транзистора (металл–диэлектрик–полупроводник), у которого промежуточный диэлектрический слой не обязательно окисел.

Из этих пяти основных элементов может быть собрано множество разнообразных электронных узлов и блоков, обеспечивающих выполнение самых различных операций с электрическими импульсами. Условные обозначения основных элементов на электронных схемах приведены на рис. 2.

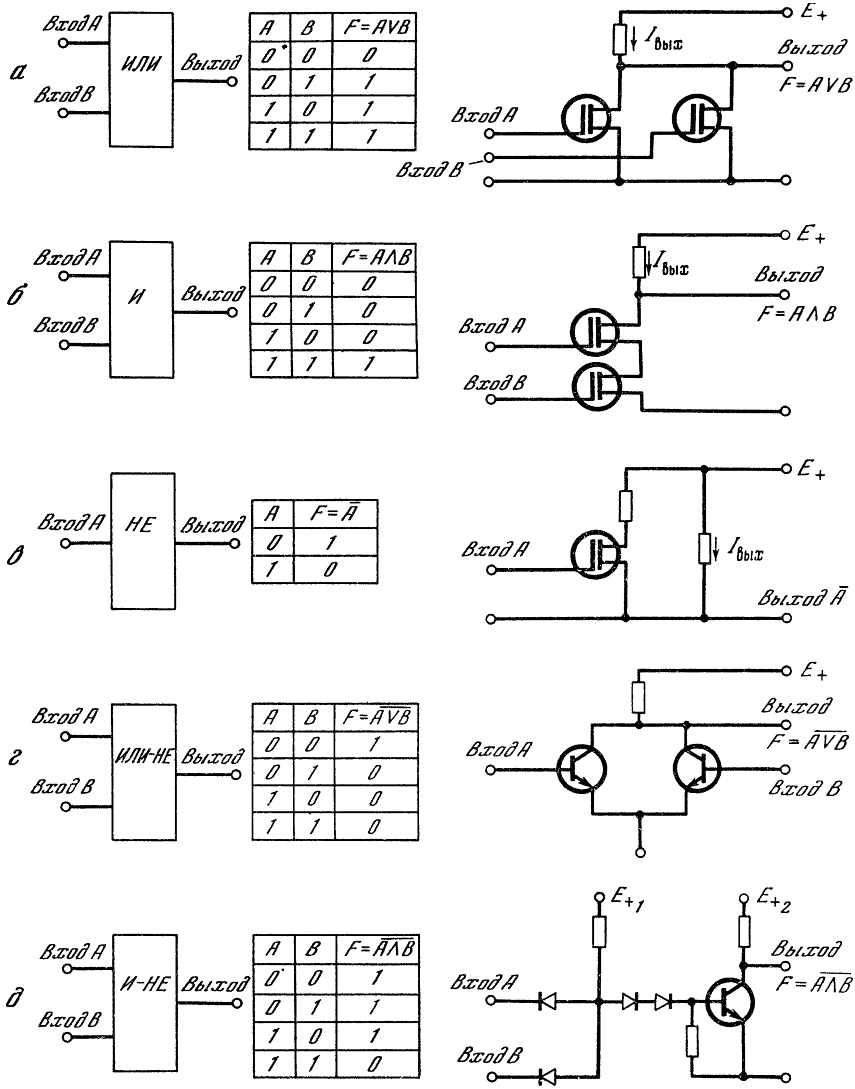
Узлы

Посмотрим теперь, как из основных элементов образуются некоторые узлы электронных устройств. Прежде всего остановимся несколько подробнее на физической реализации логических схем "И", "ИЛИ", "НЕ" (рис. 3), которые играют важную роль при составлении электронных схем.

Если на вход транзистора подать два управляющих сигнала так, чтобы он открывался от любого из них и пропускал ток либо выдавал импульс тока под действием *или* первого входного импульса, *или* второго, схема будет выполнять логическую операцию "ИЛИ". Когда усилия одного входного импульса недостаточно, чтобы открыть транзистор, и необходимо одновременное действие двух входных сигналов – *и* первого, *и* второго, получается схема, реализующая логическую операцию "И". Можно и так подвести импульс, чтобы он закрывал заранее открытый до того транзистор, т.е. на выходе при наличии входного импульса импульс *не* появится, когда же на входе импульс отсутствует, транзистор выдает выходной сигнал. Таким образом реализуется схема "НЕ", называемая также инвертором.

Несколько сложнее схема мультивибратора – электронного прибора, предназначенного для периодического генерирования импульсов прямоугольной формы. Два транзистора соединяются так, что каждый из них управляет работой другого. Конденсаторы обеспечивают некоторое запаздывание, замедляют реакцию одного транзистора на действие соседнего, в результате чего транзисторы поочередно открывают и закрывают друг друга. Каждое такое открывание–закрывание порождает импульс тока, начинает работать генератор, создающий последовательность, очередь импульсов тока.

Одним из важных узлов вычислительной электроники является триггер – переключательное устройство, сколь угодно долго сохраняющее одно из двух устойчивых состояний и скачкообразно переключающееся под воздействием внешнего управляющего импульса из одного состояния



A	B	$F=A\vee B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

A	B	$F=A\wedge B$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

A	$F=\bar{A}$
0	1
1	0

A	B	$F=\overline{A\vee B}$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

A	B	$F=\overline{A\wedge B}$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Рис. 3. Узлы, реализующие основные логические операции
а – ИЛИ, *б* – И, *в* – НЕ, *г* – ИЛИ–НЕ (Штрих Шеффера), *д* – И–НЕ (Стрелка Пирса)

в другое. В транзисторном варианте триггера два транзистора связаны между собой непосредственно. Открываясь, один из транзисторов мгновенно закрывает второй; это состояние сохраняется до тех пор, пока внешний сигнал не заставит транзисторы поменяться местами – закрытый транзистор открывается, но при этом закрывает открытый. Одно из важных применений триггера в электронной вычислительной технике – использование его для хранения одной двоичной единицы информации, т.е. одного двоичного разряда.

Цепочки триггеров используются в калькуляторе в качестве регистров памяти. По состоянию каждого триггера можно очень быстро определить, сколько импульсов подано на вход. Можно каждый триггер использовать как отдельный элемент памяти, хранящий 0 или 1. Информацию, содержащую некоторое двоичное число, легко на такую цепочку записать, прочитать и при необходимости стереть, заменив новой.

Объединяя в определенном порядке и последовательности триггеры с логическими элементами, можно получить коммутатор – быстродействующий бесконтактный переключатель, направляющий импульсы по разным цепям в определенном порядке. Соединение коммутатора с логическими элементами позволяет создать шифраторы – устройства для превращения однообразной последовательности одинаковых импульсов в закодированную определенным образом последовательность импульсов и пауз, чередующихся в строго определенном порядке, и дешифраторы – устройства, решающие обратную задачу: из совокупности многих кодов, состоящих из импульсов и пауз, отбирать и направлять строго определенные их комбинации.

С помощью диодных мостиков, переброшенных от проводов одной группы к проводам другой, можно обеспечить перераспределение и длительное хранение электрических импульсов. Такая многомостиковая схема – диодная матрица – может выполнять роль постоянного запоминающего устройства: хранящаяся в нем информация не изменяется в процессе работы калькулятора.

Микроэлектроника и микрокалькулятор

В любой ЭВМ используется большое количество электронных элементов. Многие тысячи обычных полупроводниковых диодов и транзисторов, не говоря уже об электронных лампах, входившие в состав схем вычислительных устройств ЭВМ второго поколения, занимали сравнительно много места, их монтаж был очень трудоемок и не очень надежен. Об общедоступных переносных вычислительных устройствах индивидуального пользования не приходилось и мечтать (даже в научной фантастике они не предусматривались). К концу 50-х годов создалась кризисная ситуация: дальнейшее усложнение электронных схем вошло в противоречие с их надежностью, энергоемкостью, стоимостью и местом, необходимым для их размещения. Найденный выход в значительной мере был подсказан практикой, совершенствованием технологии производства транзисторов – самых массовых элементов электроники.

В 1959 г. была разработана так называемая планарная технология, в основу которой положен интегрально-групповой процесс, предусматривающий одновременную обработку большого количества одинаковых элементов на общей подложке. В результате большого числа весьма тонких технологических операций на одной и той же пластине размещалось сразу несколько десятков, а по мере совершенствования технологии – сотен и тысяч транзисторов. Затем пластину разрезали на части, каждая из которых содержала один транзистор, помещали в отдельный корпус, припаивали выводы и герметизировали, а затем соединяли друг с другом и с иными электронными элементами при помощи трудоемкой (и не очень надежной) пайки, получая в результате необходимые электронные схемы.

Позже возникла мысль изготовлять необходимые функциональные устройства на одном основании, тем более что той же или очень близкой технологией можно было получить диоды, резисторы и конденсаторы, а методами напыления металлической сетки нужной конфигурации обеспечить соединение этих элементов между собой. Так созрела идея создания микроминиатюрных электронных устройств, в которых отдельные элементы неразделько связаны между собой конструктивно, технологически и электрически – интегральных схем (ИС) или интегральных микросхем (ИМС). Этим в начале 60-х годов ознаменовалось рождение микроэлектроники.

Общая подложка, на которой изготовляются интегральные микросхемы, – тонкая кремниевая (или германиевая) пластинка*. Обычная химическая технология получения кремния (восстановление SiO_2 в электрической дуге между графитовыми электродами) дает материал, содержащий до 2% примесей, для микроэлектроники совершенно непригодный. Исходный чистый кремний (не более одного атома примесей на сто миллионов, а то и на миллиард своих атомов) получают при помощи весьма сложных физико-химических и физических процессов. При этом кремний получается в поликристаллической форме, для микроэлектроники же требуется монокристаллическая, т.е. сплошной кристалл.

Поликристаллический цилиндр кремния методом зонной плавки токами высокой частоты расплавляют, в расплав вводят для затравки мельчайший монокристалл чистого кремния и в конечном счете получают монокристалл кремния требуемой чистоты в форме цилиндра диаметром 30–50 мм, длиной 15–20 см, обладающий при этом электронной или дырочной проводимостью (по потребности). Затем алмазной пилой цилиндр разрезается на шайбы толщиной 50–100 мкм (микрометров–тысячных долей миллиметра), каждая из которых подвергается тщательнейшей шлифовке, полировке и очистке. Получаются монокристаллические кремниевые пластинки – основной исходный материал, подложка для изготовления интегральных (ИС) и больших интегральных схем (БИС). Последние представляют собой схемы высокой степени интеграции – на одной такой схеме размещается до сотни тысяч отдельных электронных элементов.

Это – подготовительный этап, так сказать, нулевой цикл изготовления интегральной микросхемы. Теперь на поверхности (и в самом теле) каждой пластинки в результате одного цикла технологических операций следует получить сразу несколько десятков больших интегральных схем. Поскольку в одной такой схеме содержатся десятки тысяч отдельных элементов и одновременно обрабатываются десятки и сотни пластинок, это значит, что за один цикл получаются электронные схемы, состоящие в общей сложности из десятков и сотен миллионов отдельных элементов. Каждый такой элемент уменьшен почти до атомно-молекулярных размеров, а принцип работы основан на физических процессах, протекающих на микроскопическом уровне. Это является характерной особенностью микроэлектронной технологии и получаемых с ее помощью изделий.

---

*Кремний – очень распространенный на Земле элемент, его содержание в земной коре достигает почти 30%. Кварцевый песок представляет собой почти чистую двуокись кремния SiO_2. Германий – более редкий элемент.

Для следующей стадии используются результаты еще одного подготовительного этапа: разработки принципиальной схемы БИС и ее топологии (т.е. конфигурации и взаимного расположения отдельных зон, участков кристалла, из которых должны быть образованы элементы схемы). Изготовляются маски, или шаблоны, – тонкие плоскопараллельные пластинки из прозрачного материала, на которых нанесен определенный рисунок из прозрачных или непрозрачных для определенной волны света участков–окошек, образующих топологию одного из слоев структуры схемы.

Но вот полупроводниковые пластины и шаблоны подготовлены. После этого верхний слой кремниевой пластинки окисляется в атмосфере кислорода (или другим способом) и снова превращается в окисел кремния. Делается это потому, что на поверхности пластинки необходимо создать непроводящий слой, а SiO_2 почти идеальный материал для этих целей – хороший изолятор, образует очень прочное покрытие, допускает точный контроль толщины, хорошо защищает подложку от проникновения примесей, где они не нужны, а при необходимости легко удаляется, например травлением.

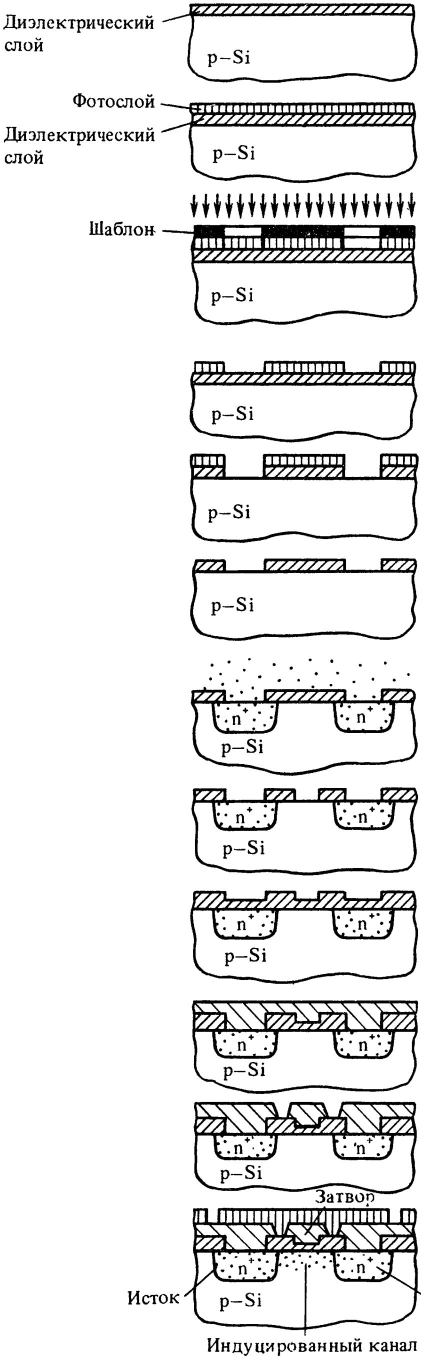
Затем следует этап, который можно назвать фотолитографическим. Непроводящий слой покрывается тонким слоем специального светочувствительного лака – фоторезиста, пластинка накрывается шаблоном и засвечивается (в основном ультрафиолетовыми лучами с наименее возможной длиной волны), а фоторезист подвергается фотохимической обработке (аналогичной обычному проявлению), в результате которой незасвеченные места удаляются. После этого на полупроводниковой пластине образуют зоны измененной проводимости.

Для этого используется процесс легирования, основанный на диффузии, в результате в определенных местах, из которых вытравлен окисный слой, внедряются дозированные количества примесных элементов – в одних случаях для создания проводимости *n*-типа пятивалентного фосфора, чем создается избыток свободных электронов (применяются также другие элементы этой группы, например сурьма или мышьяк, все они называются донорными, отдающими электроны); в других для создания *p*-проводимости – трехвалентного бора (индия, галлия – акцепторов, связывающих электроны и образующих дырки). При этом применяются различные технологические процессы, например нагревание пластинки в парах фосфора или бора при температуре 1100–1200° С.

Кроме диффузии, применяется также ионная имплантация, или ионное внедрение, – бомбардировка поверхности пластинки ионизированными атомами примесей.

Важным технологическим процессом является эпитаксия – наращивание нового, монокристаллического слоя кремния или другого полупроводника на поверхность основного монокристаллического слоя. Процесс осуществляется при температуре 1200° С в парах галогенидов кремния. Выпадающий при этом на поверхность пластинки кремний и образует эпитаксиальный слой. Добавка в пары дозированного количества примесей обеспечивает нужный тип проводимости наращенного слоя.

В результате этих процессов, которые могут быть повторены неоднократно, образуя несколько слоев, получается кристалл полупроводника с вкраплением на строго определенных местах ничтожно малых количеств



Создание диэлектрического слоя (двуокиси кремния, SiO_2) на кремневой пластинке *p* – проводимости

Нанесение фотослоя (фоторезиста)

Экспонирование фотослоя ультрафиолетовыми лучами, в результате которого происходит полимеризация освещенных участков фотослоя

Проявление с вымыванием засвеченных участков фотослоя

Вскрытие окон в диэлектрическом слое вытравливанием

Удаление фотослоя

Легирование (введение примеси *n* типа) с помощью диффузии для образования островков с проводимостью *n* – типа в области истока и стока

Повторное вскрытие окон в диэлектрическом слое вытравливанием

Выращивание тонкого слоя подзатворного диэлектрика

Напыление проводящего слоя – алюминия

Удаление проводящего слоя с открытых участков, формирование соединительных цепей

Нанесение защитного слоя и вскрытие контактных площадок

Структура МДП-транзистора с каналом *n*-типа

Рис. 4. Основные этапы изготовления полевого транзистора микросхемы

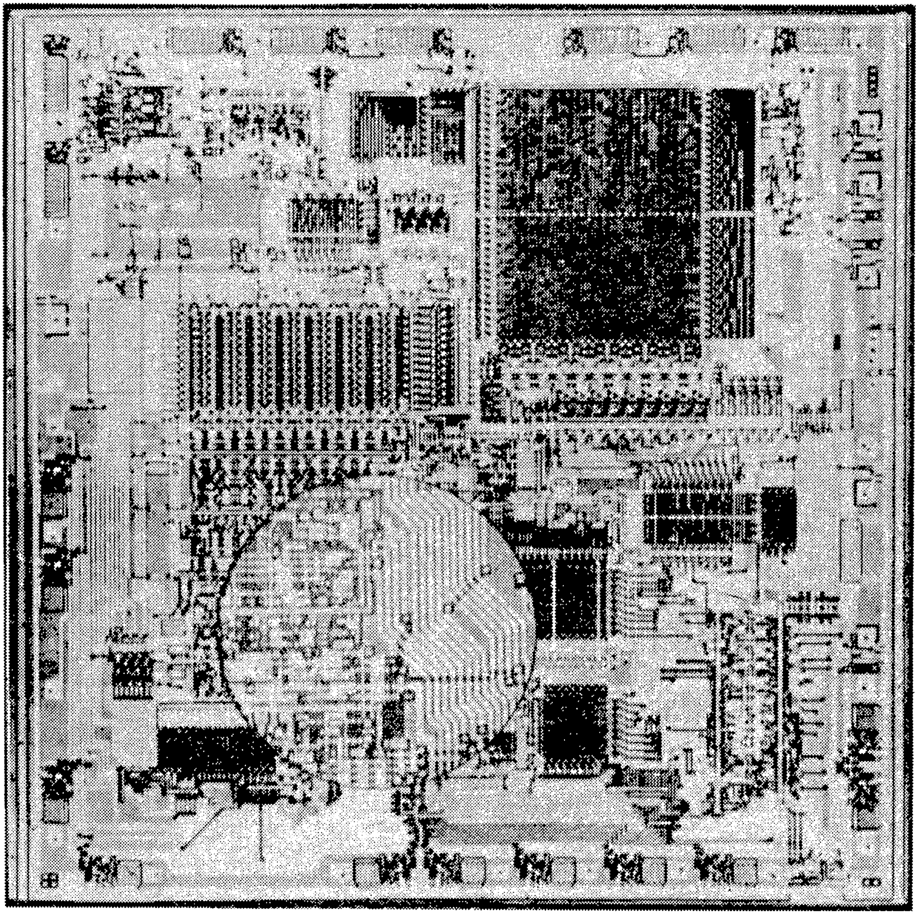


Рис. 5. Большая интегральная схема при сильном увеличении

примесей. Таким образом получаются транзисторные структуры, занимающие на поверхности полупроводниковой пластинки площадь, меньшую, чем поперечное сечение человеческого волоса. Однако в них еще отсутствуют контакты и соединения. Выводы и соединения образуются металлизацией поверхности пластинки в соответствующих местах. В качестве проводящего материала обычно используется алюминий, отличающийся низкой температурой испарения, сравнительно хорошей адгезией, низким удельным сопротивлением. Применяется и золото, но оно, помимо высокой стоимости, обладает худшей адгезией.

При образовании проводящей сети повторяется цикл технологических операций: повторное окисление слоя полупроводника, нанесение фоторезиста, совмещение и экспонирование мест контактов и электрических соединений, протравливание и смывание фоторезиста, напыление на поверхность пластинки алюминиевой пленки, покрытие алюминиевой пленки фоторезистом, совмещение и экспонирование мест контактов и соединений, протравливание и удаление алюминиевой пленки в ненужных местах, протравливание и смывание фоторезиста, впекание алюминия в кремний при 500–600° С.

Последовательность этапов получения полевого транзистора на микросхеме показана на рис. 4.

Кроме транзисторов и соединений, интегральная микросхема включает резисторы и конденсаторы. Применяются различные технологии изготовления этих элементов.

После завершения цикла технологических операций полупроводниковая шайба разрезается на отдельные схемы, каждая из которых затем подвергается тщательной проверке, для чего в целом ряде ее точек подсоединяются тонкие щупы специальных тестеров. Схемы, прошедшие контроль и испытание, снабжаются необходимым количеством выводов и заключаются в неразъемный герметизированный корпус. Такие микросхемы составляют основной узел микрокалькуляторов и других изделий микроэлектроники (рис. 5).

Блоки (устройства)

Большая часть устройств микрокалькулятора формируется в едином технологическом процессе на монокристаллике кремния в виде пластинки размером примерно 5X5 мм, образуя большую интегральную схему типа металл–окисел–полупроводник. Например, в одной из распространенных моделей микрокалькуляторов отечественного производства "Электроника Б3-18" на такой пластинке размещено 16 тыс. транзисторов, около тысячи конденсаторов и 8 тыс. резисторов, соединенных между собой 25 тыс. проводников. На этой пластинке размещаются следующие взаимосвязанные функциональные устройства: устройство управления вводом и выводом информации, управляющее устройство, арифметико-логическое, оперативное запоминающее, постоянное запоминающее устройство, генератор опорной частоты.

Устройство управления вводом и выводом информации следит за состоянием клавиатуры ввода и обеспечивает распределение поступающей с нее информации по соответствующим устройствам и узлам микрокалькулятора, а также управляет выводом необходимой информации на индикатор (работу этого устройства несколько подробнее мы рассмотрим ниже). Управляющее устройство служит для обеспечения синхронизации и координации всех устройств микрокалькулятора на основании импульсов стабильной частоты, вырабатываемых тактовым генератором или генератором опорной частоты. Арифметико-логическое устройство выполняет те действия над числами, которые подаются командами с устройства управления и с постоянного запоминающего устройства. Поскольку эти действия сводятся к сложению и вычитанию, арифметико-логическое устройство называют также сумматором.

Основные части оперативного запоминающего устройства – текущий регистр (его называют также регистром индикатора), накапливающий регистр и рабочий регистр. Во многих моделях имеются также дополнительные регистры памяти – один или несколько. Набираемое на клавиатуре число вводится в текущий регистр и высвечивается на индикаторе. При

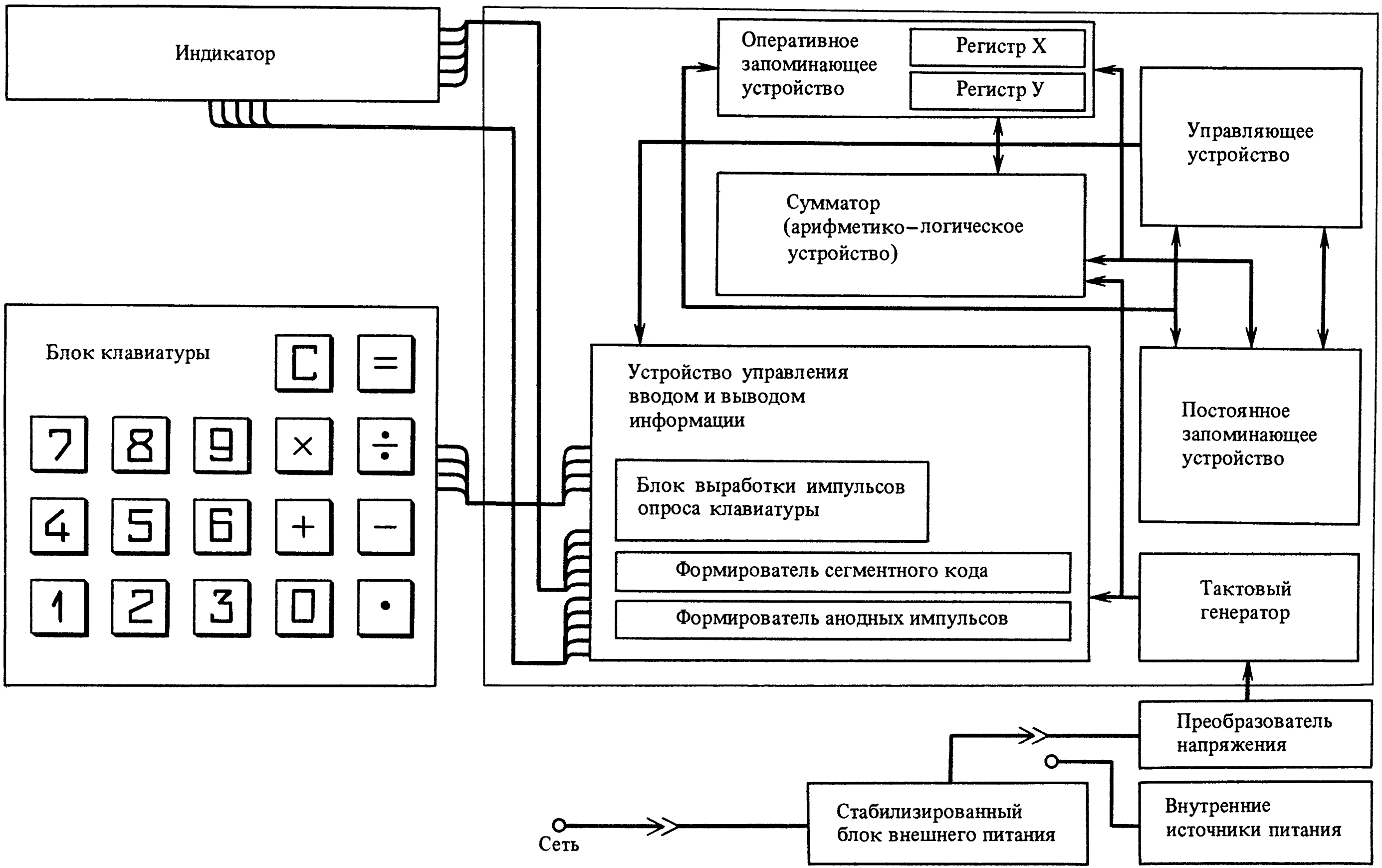


Рис. 6. Упрощенная блок-схема микрокалькулятора

наличии клавиш обмена содержимым регистров и соответствующих им команд $\boxed{xy}$ или $\boxed{\leftrightarrow}$, а также вызова из памяти $\boxed{\text{ИП}}$ в регистр индикатора могут быть поданы числа, хранящиеся в рабочем регистре или в регистрах памяти. В регистр индикатора также заносятся числа, представляющие собой результат выполнения соответствующих операций.

В рабочий регистр числа попадают из регистра индикатора при нажатии соответствующих операционных клавиш, в частности $\boxed{+}$ $\boxed{-}$ $\boxed{\times}$ $\boxed{\div}$, а в некоторых моделях также клавиши ввода $\boxed{\uparrow}$. При этом до начала ввода следующего числа предыдущее продолжает сохраняться и в регистре индикатора. Регистры памяти предназначены для хранения исходных и промежуточных данных, которые должны быть использованы при выполнении последующих вычислений. В некоторых моделях предусмотрено выполнение арифметических действий над содержимым ячеек памяти. Запись числа в регистр памяти и его вызов производятся соответствующими командами, выполняемыми при нажатии особых клавиш, например $\boxed{\text{ЗАП}}$ $\boxed{\text{ИП}}$ и др. (подробнее об этом ниже).

Постоянное запоминающее устройство служит для хранения программ выполнения арифметических операций и подпрограмм вычисления различных функций, а также некоторых констант, например числа π. Дело в том, что даже в простых микрокалькуляторах предусмотрены специальные программы, в которых указывается последовательность действий (команд) при выполнении умножения или деления. В ряде моделей простых микрокалькуляторов предусмотрены программы вычисления $\sqrt{x}$, $1/x$, %, в инженерных микрокалькуляторах имеются также подпрограммы для вычисления тригонометрических, логарифмических и других элементарных функций. Все эти подпрограммы и константы вводятся в постоянное запоминающее устройство при изготовлении большой интегральной схемы.

В любой модели микрокалькуляторов имеется также устройство ввода – клавиатура и устройство вывода – индикатор, дисплей. Предусмотрен также преобразователь напряжения, который преобразует напряжение внутренних источников питания или сетевого блока питания в напряжения, непосредственно питающие различные устройства калькулятора, поскольку питание, скажем индикатора, должно иметь иное (более высокое) напряжение, чем питание устройств большой интегральной схемы, и т.д. В качестве внутренних источников питания используются различные виды сухих элементов или аккумуляторов, которые размещаются в корпусе микрокалькулятора. Отдельно от корпуса располагаются сетевые блоки стабилизированного питания, прилагаемые почти ко всем моделям калькуляторов, выпускаемым в нашей стране. Типичная (упрощенная) блок-схема микрокалькулятора приведена на рис. 6.

Ввод информации

Для ввода в микрокалькулятор исходных числовых данных и команд для их переработки предназначена клавиатура. Она состоит из нескольких групп клавиш, обычно разного цвета (какой-либо стандарт в их окраске пока отсутствует, но во многих моделях две основные группы клавиш – ввода цифр и операционные обычно окрашены в черный и синий цвета соответственно).

К клавишам ввода цифр, кроме [0] ,..., [9] , относится клавиша десятичной запятой [,] (или [.]) , а также имеющаяся в некоторых моделях клавиша изменения знака [/−/] и некоторые другие.

К операционным клавишам относятся клавиши [+] , [−] , [×] , [÷] , при нажатии которых арифметико-логическое устройство подготавливается к выполнению соответствующей операции (а в некоторых моделях и выполняет ее) , а также клавиша [=] , при нажатии которой выполняется ранее предписанная операция. В ряде моделей с весьма совершенной вычислительной логикой эта клавиша отсутствует, но есть клавиша [↑] (более подробно о ней ниже). В некоторых устаревших моделях можно встретить также клавиши [+=] и [−=] . Их наличие свидетельствует о том, что данная модель обладает простейшей, унаследованной от суммирующих машин электромеханического типа структурой.

Функциональные клавиши, клавиши занесения чисел в регистры памяти и вызова их из нее и клавиши сброса образуют третью группу клавиш. Клавиши общего сброса [C] имеются во всех моделях калькуляторов, в ряде моделей имеются также клавиши сброса содержимого регистра индикатора (регистра X) [C_x] . Довольно часто даже в простых моделях встречаются клавиши [%] [1/x] и [$\sqrt{\ }$], применяемые для выполнения вычислений с процентами, нахождения чисел, обратных данным, и автоматического вычисления квадратных корней. Более совершенные модели микрокалькуляторов с дополнительными регистрами памяти имеют также все или часть клавиш следующей подгруппы: [ЗАП] , [П+] , [П−] , [П×] , [П÷] , [П+x^2] , [ИП] , [СП] (встречаются и другие обозначения клавиш этой группы, например [STO] , [RCL] , [M] и др.) .

Большая подгруппа клавиш с обозначениями элементарных функций (показательных, логарифмических, прямых и обратных тригонометрических и некоторых других) имеется в более сложных моделях инженерных микрокалькуляторов. Поскольку предусмотренное конструкцией этих моделей количество автоматически выполняемых подпрограмм для вычисления этих функций обычно значительно больше количества клавиш, которые можно разместить на лицевой панели прибора, часть клавиш отводится для выполнения двух функций, при этом одна выполняется при непосредственном нажатии данной клавиши, а другая – после предварительного нажатия клавиши [F] , называемой префиксной, или клавишей совмещенной функции. В некоторых моделях, например "Б3-38", "Б3-21", "Б3-34", "МК-54", часть клавиш выполняет даже три функции.

Устройства индикации ввода-вывода данных

Состояние регистра индикации в каждый данный момент работы микрокалькулятора отражается на индикаторе (дисплее), расположенном на лицевой панели. Индицируются числа (вместе с десятичной запятой) , которые вводятся в регистр X с помощью клавиатуры для выполнения над ними соответствующих операций, результаты промежуточных и итоговых вычислений, знак минус (−) для отрицательных чисел, признаки переполнения разрядной сетки индикатора, разрядки внутреннего источника питания и т.д.

Рис. 7. Семисегментные цифровые индикаторы и способы представления цифр

Каждая цифра представляется обычно с помощью индицирования необходимой конфигруации части (или всех) сегментов семисегментного одноразрядного индикатора, как это показано на рис. 7. Известны также индикаторы мозаичного типа, в которых каждая цифра представляется комбинацией части из $7 \cdot 5 = 35$ светящихся точек.

Элементная база индикаторов может быть различной: низковольтные катодолюминесцентные (вакуумно-люминесцентные) элементы, светоизлучающие диоды, жидкокристаллические элементы. Каждый из физико-технических способов индикации чисел имеет свои преимущества и недостатки.

Катодолюминесцентные индикаторы используют явление свечения вещества (люминофора) под воздействием бомбардировки его быстрыми электронами, вылетающими с поверхности разогретого катода. Цвет свечения зависит от состава люминофора, в микрокалькуляторах используется обычно зелёный как наиболее благоприятный для глаза. Напряжение питающего индикатор тока сравнительно невысоко (15–45 В), что не вызывает больших затруднений при согласовании индикаторов этого типа с остальной схемой калькулятора. Катодолюминесцентные индикаторы имеют относительно большой угол обзора, могут быть довольно большого размера и поэтому отличаются повышенной "читабельностью". Однако они хрупки, т.е. чувствительны к ударным перегрузкам, имеют примерно в 10 раз меньший срок службы, чем индикаторы на светоизлучающих диодах, потребляют сравнительно много электроэнергии, при этом питающий источник тока должен иметь два различных напряжения (для накала и анода), выдерживаемые для нормальной работы индикатора в довольно жестких параметрах.

Светоизлучающие диоды представляют собой твердотельные полупроводниковые приборы с электронно-дырочным переходом или контактом металл–полупроводник, в которых при прохождении электрического тока в одном из двух направлений генерируется оптическое излучение, воспринимаемое в видимой области спектра как одноцветное. В микрокалькуляторных индикаторах используются диоды, светящиеся красным светом. Такие индикаторы отличаются малой чувствительностью к ударным перегрузкам, большим сроком службы (до 100 тыс. рабочих часов). Низковольтное питание (~ 5 В) обеспечивает легкое согласование индикаторов этого типа с остальными узлами микрокалькулятора. Потребляемая индикаторами на светоизлучающих диодах электроэнергия значительно меньше той, которая необходима для питания катодолюминесцентных индикаторов, но значительно выше потребляемой индикаторами на жидких кристаллах. Светоизлучающие диоды имеют относительно небольшие размеры, поэтому перед ними на индикаторе приходится устанавливать миниатюрные лупы, что значительно снижает угол обзора по сравнению с индикаторами других типов. Индикация с помощью светоизлучающих диодов хорошо видна при слабом освещении и даже при его отсутствии, но сильно ухудшается при увеличении яркости наружного освещения.

Индикатор на жидких кристаллах представляет собой две стеклянные пластинки, на которые нанесены токопроводящие прозрачные электроды в форме сегментов, из комбинаций которых составляются любые цифры, а между пластинками размещено вещество, которое в жидкой фазе обладает, как и твердые кристаллы, свойством анизотропии, т.е. неодинаковости всех или некоторых свойств, в том числе оптических, в разных направлениях. Пластинки жидкокристаллического индикатора помещаются между поляроидными пленками. Свет, проходящий сквозь поляроиды, электроды, жидкокристаллическое вещество, не изменяет поляризации, если на электродах отсутствует напряжение. При подаче же напряжения жидкокристаллическое вещество изменяет направление поляризации на 90° и соответствующий участок становится непрозрачным. Индицируемые сегменты выглядят темными силуэтами на светлом фоне. Достоинством жидкокристаллического индикатора является его высокая экономичность, поскольку расход электроэнергии на индикацию ничтожен (миниатюрной батарейки достаточно для питания микрокалькулятора с жидкокристаллическим индикатором в течение нескольких лет работы).

Но и этот тип индикаторов имеет свои недостатки: если при нормальном и интенсивном наружном освещении индикаторы, работающие в режиме отражения света, дают достаточно контрастное и хорошо различимое изображение, то при слабом освещении "читабельность" резко снижается, а в темноте индикация становится вообще невидимой. Индикаторы довольно хрупки, возникают трудности при обеспечении надежного контакта индикатора с остальной схемой калькулятора, что иногда нарушает вывод соответствующей информации.

О ВЗАИМОДЕЙСТВИИ ОСНОВНЫХ РЕГИСТРОВ ОПЕРАТИВНОГО ЗАПОМИНАЮЩЕГО УСТРОЙСТВА МИКРОКАЛЬКУЛЯТОРОВ

Числа, над которыми нужно выполнить какие-то вычислительные операции (операнды), в ходе их набора на клавиатуре попадают сначала в регистр индикатора и при этом индицируются, т.е. становятся видимыми на индикаторе; если данная модель калькулятора имеет клавишу обмена содержимым этих регистров $\boxed{\overleftrightarrow{xy}}$ или $\boxed{\leftrightarrow}$, в регистр индикатора можно направить числа также из рабочего регистра (при этом содержимое индикатора поменяется местами с содержимым рабочего регистра), а при наличии дополнительных ячеек памяти – из них нажатием клавиши $\boxed{\text{ИП}}$ (из памяти).

В рабочий регистр числа попадают из регистра индикатора при нажатии соответствующих операционных клавиш (здесь и далее, если специально не оговорено, имеются в виду модели, в которых есть клавиша результата $\boxed{=}$). При нажатии клавиши результата или последующих операционных клавиш происходит выполнение предыдушей операции, результат попадает в регистр индикатора и становится видимым на индикаторе. Таким образом, индикатор фактически осуществляет вывод результатов вычислений. После выполнения операции, когда ее результат перешел в регистр индикатора, в рабочем регистре продолжает сохраняться операнд, введенный последним. Поэтому если для дальнейшей работы необходимо

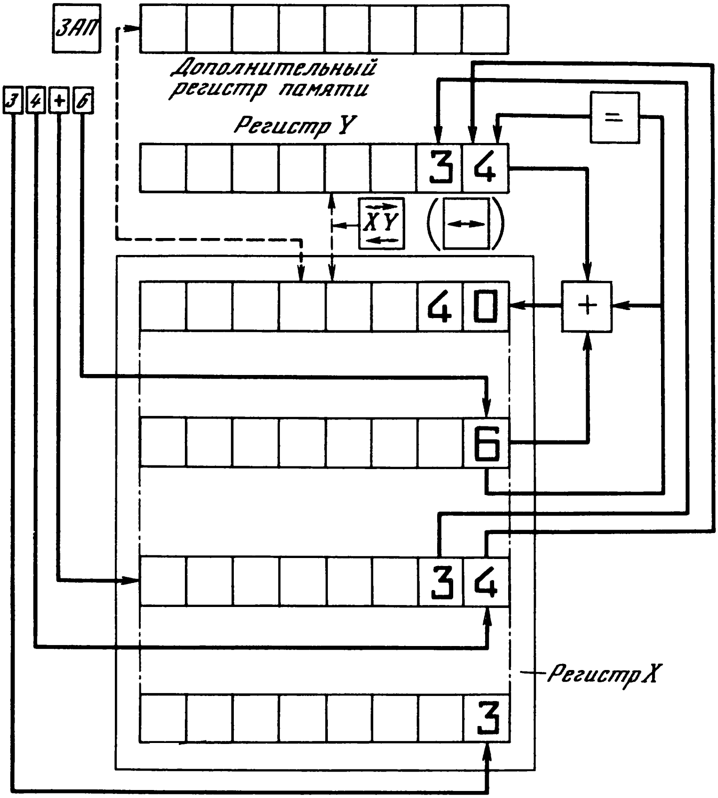


Рис. 8. Схема взаимодействия основных регистров оперативного запоминающего устройства

очистить оба регистра оперативного запоминающего устройства, во многих моделях микрокалькуляторов приходится клавишу сброса [C] нажимать дважды. В некоторых моделях при нажатии этой клавиши происходит общий сброс, а для очистки содержимого регистра индикатора предусмотрена специальная клавиша [C_x] . При выполнении одноместных операций (т.е. над одним операндом, например $\sqrt{}$, или при вычислении элементарных функций в инженерных микрокалькуляторах) рабочий регистр не задействуется и его содержимое сохраняется. Его можно использовать при следующем вычислении.

Взаимодействие между регистрами индикатора и рабочим показано на рис. 8. Набранное число попадает сначала на регистр индикатора. На рисунке показано, как после нажатия клавиш [3] и [4] на этом регистре появилось число 34. При нажатии клавиши [+] введенное число 34 дублируется в рабочем регистре. Следующим нажатием клавиши [6] – второго слагаемого – оно вводится в регистр индикатора, а предыдущее содержимое этого регистра гасится. При нажатии клавиши [=] (или операционных клавиш [+] , [–] и т.д.) выполняется сложение чисел-операндов, находящихся в регистрах индикатора и рабочем, а результат операции, занявший при этом регистр индикатора, появляется на нем. На рисунке также показано взаимодействие регистров индикатора и рабочего при нажатии клавиши $\boxed{xy}$ ($\boxed{\leftrightarrow}$, если она имеется), а также регистра индикатора и регистра памяти с помощью клавиш $\boxed{\text{ЗАП}}$ (занесение в память) и $\boxed{\text{ИП}}$ (вызов из памяти на регистр индикатора).

СОГЛАСОВАНИЕ УСТРОЙСТВ ВВОДА-ВЫВОДА СО СЧЕТНО-РЕШАЮЩИМ УСТРОЙСТВОМ МИКРОКАЛЬКУЛЯТОРА

Корпус большой интегральной схемы, в котором размещено счетно-решающее устройство калькулятора, при всей сложности выполняемых им функций имеет сравнительно небольшое число выводов. Так, на модели "Б3-23" их всего 35, да и то не все они задействованы, а на одной из самых совершенных моделей инженерных микрокалькуляторов "Б3-38" – 52. Очевидно, что с большой интегральной схемой должны быть соединены клавиатура и индикатор. В модели "Б3-23" 18 клавиш, кроме того, 7 сегментов и десятичная запятая каждого разряда индикатора также должны быть соединены со схемой, а в этой модели 8 основных и 1 дополнительный знаковый разряд. Значит, следует присоединить еще по меньшей мере $(7+1)\times 8 + 1 = 65$ элементов и не забыть о подводке питания. Сколько же проводников нужно для соединения и как велико должно быть число выводов, если не применить специальных мер по уплотнению информации?

Достигается это следующим образом. Прежде всего провода, которые соединяют формирователь сегментного кода (часть устройства управления вводом-выводом, определяющую, какие сегменты должны в данном случае в каждом разряде индицироваться) с отдельными сегментами, – общие для всех разрядов индикатора. Их всего 8, назовем их проводами формирования сегментного кода. Кроме того, к каждому разряду подводится еще по одному проводу от формирователя анодных импульсов.

Индикатор при этом работает так: каждый сегмент индицируется только в тот момент, когда замкнута цепь провод формирования кода данного сегмента – провод подачи анодного импульса. Но напряжение на анод поступает в форме коротких импульсов продолжительностью всего около 100 мкс. Они подаются примерно тысячу раз в секунду, но каждый раз – на цифру следующего разряда индикатора, потом все повторяется сначала. Это значит, что соответствующие сегменты в течение секунды 1000 раз загораются и гаснут, но человеческий глаз этого "мигания" не замечает – мы видим каждую цифру непрерывно светящейся.

На рис. 9 показано, как происходит подача информации в течение двух тактов на два соседних разряда индикатора. На индикаторе должны быть изображены цифры 2 и 4. В этом случае в течение момента времени, когда подается импульс анодного напряжения на разряд *A*, должны индицироваться сегменты *a, b, c, d, e, f, g, h* (*h* – индикация десятичной запятой), когда же следующий импульс подается на разряд *B*, сегменты *a, d, e* и *h* отключаются, сегменты *c* и *f* подключаются, а сегменты *b* и *g* продолжают индицировать.

Таким образом удается с помощью 17 проводников связать 66 элементов индикатора через 17 выводов с большой интегральной схемой.

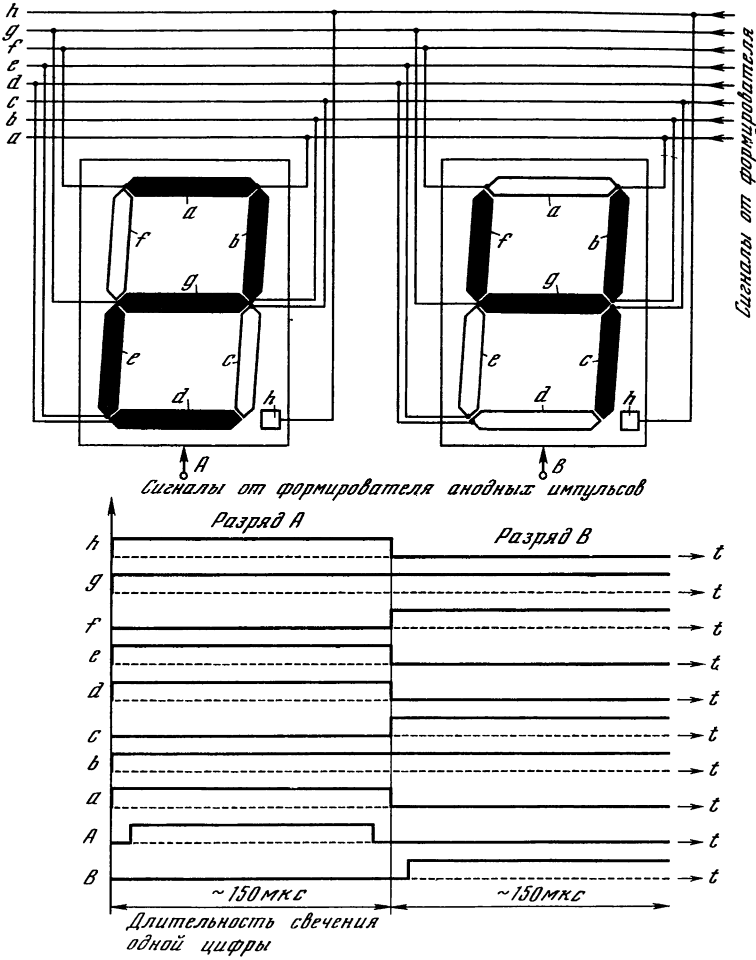


Рис. 9. Схема управления двумя разрядами индикации. Высвечивается число 24
вверху – схема подключения управляющих сигналов, обеспечивающая реализацию принципа временного разделения: управляющий сигнал для одних и тех же сегментов каждой цифры общий, кроме того к каждой цифре подводится независимый управляющий сигнал от формирователя анодных импульсов; *внизу* – временные диаграммы управляющих импульсов

Те же провода, по которым поочередно на каждый разряд индикатора поступают анодные импульсы (точнее, часть из них), используются и для соединения большой интегральной схемы с клавиатурой (рис. 10). Видно, что для ввода сигналов, которые поступают от клавиш при их нажатии, достаточно четырех проводов (*1–4*) к устройству ввода и пяти к блоку выработки импульсов опроса клавиатуры (*B, C, D, E* и *F*), используемых для подачи анодных импульсов на индикатор. Дешифратор клавиатуры проверяет провода *1–4*, ведущие от клавиатуры к устройству ввода, и провода *B–F*, определяя при этом, какая клавиша была нажата. Таким образом получается матрица из 5Х4 элементов, в соответствующих местах ко-

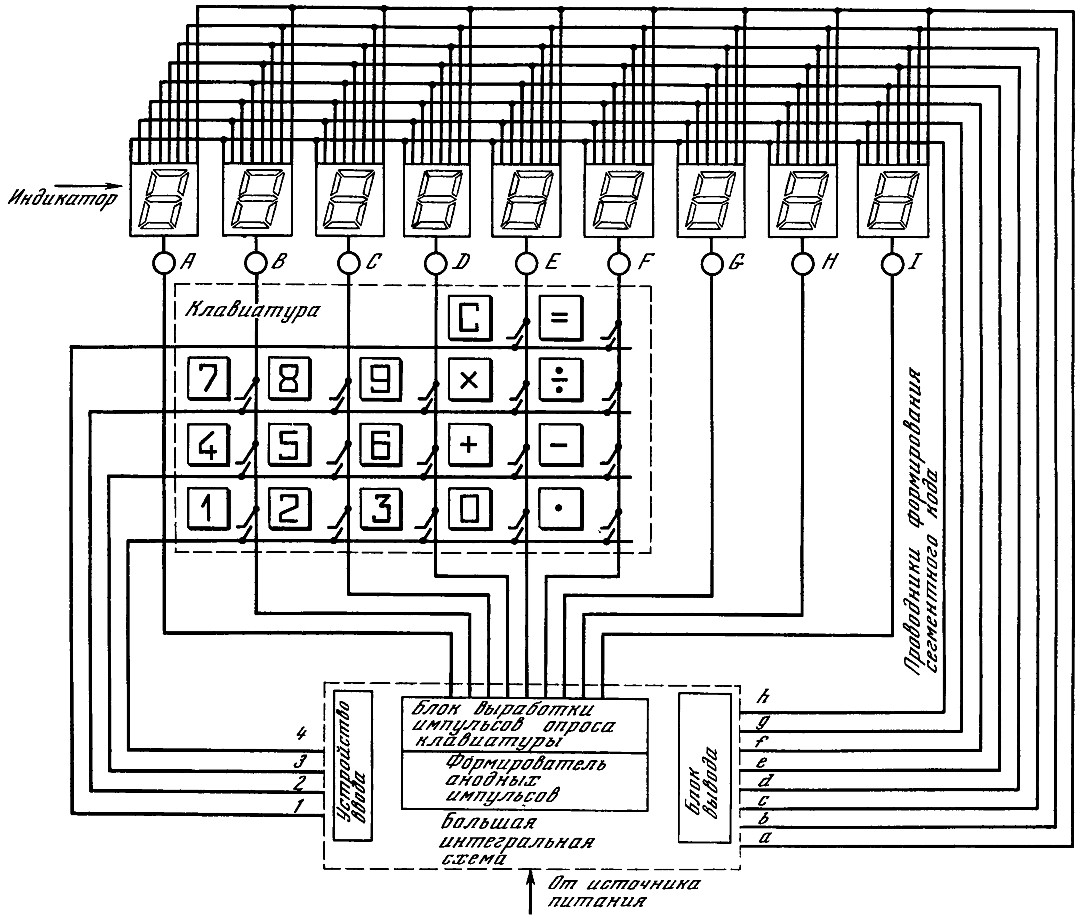

Индикатор
A
B
C
D
E
F
G
H
I
Клавиатура
7
8
9
4
5
6
1
2
3
C
×
+
0
=
÷
−
·
Проводники формирования сегментного кода
Устройство ввода
1
2
3
4
Блок выработки импульсов опроса клавиатуры
Формирователь анодных импульсов
Большая интегральная схема
Блок вывода
a
b
c
d
e
f
g
h
От источника питания

Рис. 10. Схема подключения клавиатуры и индикатора микрокалькулятора к большой интегральной схеме согласно принципу временного разделения времени

торой расположены контакты для соединения двух групп проводников, из них только четыре добавляются к предыдущим. Если, напрмер, нажимается клавиша $\boxed{5}$, то соединяются провод *3* с устройством ввода и провод *С* с блоком выработки импульсов опроса клавиатуры.

Следует иметь в виду, что при нажатии клавиши соответствующий сигнал воспринимается устройством ввода с некоторой задержкой, так как дешифратор клавиатуры производит опрос всех клавишных контактов не сразу, а поочередно. Время между моментом нажатия клавиши и ее опросом очень незначительно, почти незаметно, но промежуток времени, в течение которого данный контакт ожидает при опросе своей очереди, в известных пределах меняется, поскольку зависит от того, каким по пути опроса окажется задействованный контакт. Если до окончания такого опроса будет нажата другая клавиша, то дешифратор ее "не заметит". Этим самым уменьшается вероятность появления ошибок при случайном нажатии или задевании ненужных клавиш, что случается чаще, если размеры клавиш и расстояний между ними малы. В то же время слишком кратковременное нажатие на клавишу может также привести к тому, что дешифратор этого не заметит; значит, при наборе чисел на клавиатуре надо следить за его правильностью по показаниям индикатора.

Из сказанного видно, как остроумно решена в микрокалькуляторе проблема уплотнения информации при соединении вводно-выводных устройств со счетно-решающим и каким четким во времени должно быть согласование работы этих устройств и самого счетно-решающего устройства во всех его частях.

СИСТЕМЫ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ ЛОГИКИ, ПРИМЕНЯЕМЫЕ В МИКРОКАЛЬКУЛЯТОРАХ

В различных моделях микрокалькуляторов применяются разные системы вычислительной логики, которые отличаются одна от другой как внешними признаками – наличием или отсутствием определенных клавиш, так и "внутренне" – особенностями взаимодействия операндов и операторов (действий над операндами).

Признак микрокалькуляторов с так называемой арифметической логикой – наличие клавиш $\boxed{+=}$, $\boxed{-=}$. К микрокалькуляторам этой системы относится одна из первых отечественных моделей "Б3-04". Такие калькуляторы не совсем удобны в обращении из-за возможного смешения клавиш $\boxed{+=}$ и $\boxed{-=}$ и ошибок, которые могут возникнуть при этом.

Наибольшее распространение получила алгебраическая логика, самая близкая к естественной: мы пишем, например, $a + b = c$ и клавиши нажимаются в том же порядке.

Во многих моделях более сложных инженерных микрокалькуляторов, например "Б3-32", "Б3-36", "Б3-38", имеются клавиши $\boxed{[(}$ и $\boxed{)]}$ (в "С3-15" – $\boxed{(}$ и $\boxed{)}$). Нажатие клавиши $\boxed{[(}$ обусловливает запоминание арифметической операции, выполненной до этого, а также полученных в результате ее выполнения чисел, клавиши $\boxed{)]}$ – выполнение предыдущей операции. На этих калькуляторах можно вычислять усложненные алгебраические выражения с учетом старшинства операций, вводя в них выражения примерно в том же виде, в котором их принято записывать при обычных вычислениях на бумаге. Такие микрокалькуляторы обладают алгебраической логикой с иерархией.

Во всех предыдущих случаях имелось в виду, что оператор при вычислениях вводится между операндами. Но уже при нахождении $\sqrt{x}$ ввод оператора производится после ввода операнда и соответствие алгебраической логики естественной записи нарушается. То же имеет место и при выполнении других одноместных операций, например a^x, $\lg x$, $\sin x$ в инженерных микрокалькуляторах.

Способ ввода оператора после ввода операндов нашел применение в особой системе вычислительной логики (называемой инверсной, или обратной польской записью), отличающейся относительной простотой схемных решений, некоторым уменьшением в ряде случаев числа нажатий клавиш и облегчением выполнения комбинированных действий, например нахождения суммы произведений $(a \cdot b) + (c \cdot d) + \ldots$ Эта система применяется в инженерном микрокалькуляторе "Б3-19", а также в программируемых "Б3-21", "Б3-34" и "МК-54". В последних применение этой системы обеспечивает заметное уменьшение числа шагов (команд) программы и некоторое ускорение вычислительного процесса.

СПОСОБЫ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ЧИСЕЛ В МИКРОКАЛЬКУЛЯТОРАХ

Микрокалькуляторы отличаются от механических или электромеханических вычислительных машин, в частности, тем, что в них автоматически указывается положение десятичной запятой, отделяющей целую часть числа от дробной, т.е. определяется порядок промежуточных и окончательных результатов вычислений. При этом, как и в стационарных ЭВМ, используются три формы указания порядка числа: естественная, с фиксированной и с плавающей запятой. В свою очередь используются две разновидности представления числа в форме с фиксированной запятой – с постоянно фиксированной запятой в строго определенном положении, например перед двумя последними числовыми разрядами (что удобно при выполнении действий над денежными суммами в рублях–копейках и применяется в некоторых настольных калькуляторах для бухгалтерских расчетов) и с переменно фиксированной, устанавливаемой самим оператором в одном из нескольких положений в зависимости от требующегося количества разрядов дробного числа. Применение этого способа представления порядка чисел оправданно в случае выполнения вычислений, в которых должно быть обеспечено постоянное для данной задачи, но меняющееся в других задачах число дробных разрядов операндов. Такое представление порядка числа также применяется в некоторых моделях настольных микрокалькуляторов.

Наибольшее распространение в микрокалькуляторах получило естественное представление порядка чисел, когда запятая указывается на том месте, где она введена вычислителем или определена результатом выполненной операции. Ее положение может быть ограничено только количеством разрядов (разрядной сеткой) индикатора. Так как в этом случае вычислитель располагает максимальными в пределах данного калькулятора возможностями ввода и получения количества разрядов исходных данных и результатов вычислений, этот способ представления оказывается более удобным, чем способ с фиксированной запятой.

При этом применяются два различных варианта представления чисел в естественной форме: ”правое” и ”левое”. При ”левом” представлении, которое используется, например, в инженерном микрокалькуляторе ”Б3-19”, число вводится слева направо, без сдвига, заполняя сначала старший разряд индикаторного регистра, а затем последующие. При ”правом” представлении старший разряд вводимого числа попадает сначала в младший разряд регистра индикатора, а затем, по мере набора остальных разрядов вводимого числа, постепенно сдвигается налево. Покажем некоторые особенности представления ”правого” и ”левого” чисел в восьмиразрядном индикаторе:

Число	72,8	0,000072	1234,56789
Левое представление	72,800000	0,0000720	1234,5678
Правое представление	72,8	0,000072	1234,5678

Последняя колонка демонстрирует свойство этих представлений, заключающееся в том, что превышение количества разрядов вводимого числа по сравнению с количеством разрядов регистра индикатора приводит к переполнению разрядной сетки, в результате теряются, отбрасываются разряды дробной части числа.

Способ, когда число сдвинуто младшими разрядами вправо, имеет некоторое преимущество при считывании результатов с одинаковым числом дробных разрядов. Он и получил наибольшее распространение в различных типах микрокалькуляторов.

Между тем во многих расчетах научно-технического характера приходится оперировать с данными, в которых младшие значащие разряды могут оказаться за пределами разрядной сетки справа. Как ввести, например, в восьмиразрядный регистр число 0,00000000875 или что высветится на индикаторе в результате деления 0,0006742 на 52935? В обоих случаях на индикаторе высвечивается машинный нуль, значащие разряды полностью теряются. Каков же выход?

Выход появится, если применить представление чисел в форме с плавающей запятой. В этом случае любое число выразится в виде $M \cdot 10^p$, где M – мантисса, которую составляют значащие разряды числа, p – так называемый порядок числа, т.е. показатель степени числа 10^p, на которое должна быть умножена мантисса M для получения данного числа. Число может быть выражено или в истинно нормализованном виде, когда $0{,}1 \leqslant M < 1$, или в модифицированном нормализованном виде, когда $1 \leqslant M \leqslant 10$. Представление чисел в этом виде применяется наряду с естественной формой, как правило, в более сложных инженерных микрокалькуляторах, предназначенных для научно-технических расчетов (например в ”Б3-19”, ”Б3-32”, ”Б3-36”, ”Б3-38”, ”С3-15”). При изображении чисел в этом виде индицируется знак мантиссы, если она отрицательна, сама мантисса M, знак порядка p и сам порядок, на который отводится два последних разряда индикатора. В восьмиразрядном индикаторе число 0,0005673 представится так:

5.673000–04, что означает $5{,}673 \cdot 10^{-4}$,

а число –0,01983 запишется в модифицированном нормализованном виде следующим образом:

–1.9830000–02.

На индикаторах некоторых моделей микрокалькуляторов знаку десятичной запятой отводится полный разряд, что для чисел с дробной частью на единицу уменьшает количество разрядов индицируемого числа или его мантиссы. Такой индикатор установлен, например, на "Б3-19". Поскольку наибольшим десятичным числом, которое можно записать двумя цифрами, является 99, то диапазон представляемых в этой форме чисел расширяется в огромных пределах: от $\pm 10^{-99}$ до $\pm 9{,}9999999 \cdot 10^{99}$, т.е. почти до 10^{100}, что удовлетворяет самым взыскательным требованиям в вычислениях. Так, величина заряда электрона e = 0,00000000000000000016022 Кл, которую в естественной форме не удастся представить ни в одной модели микрокалькулятора, в нормализованном модифицированном виде выразится очень просто:

1,6022000–19, т.е. $1{,}6022 \cdot 10^{-19}$.

Число Авогадро – количество молекул в киломоле вещества, равное 602 200 000 000 000 000 000 000 000 кмоль$^{-1}$, будет представлено так:

6.0220000 –26, т.е. $6{,}022 \cdot 10^{26}$.

Еще один пример: великий древнегреческий ученый Архимед, разработав способ представления сколь угодно больших чисел, продемонстрировал возможности этого способа, выразив количество песчинок во Вселенной, считая по 10 000 песчинок в одном маковом зерне и представляя Вселенную как шар огромных (но конечных) размеров с центром в Солнце, диаметр которого во столько раз больше рассстояния от Земли до Солнца, во сколько раз диаметр Солнца больше диаметра Земли. Все эти величины были известны Архимеду лишь с весьма относительной точностью, но шар был огромен, а песчинки так малы! И сколько же Архимед насчитал в этом шаре песчинок? В современной записи "всего" 10^{63}. На индикаторах микрокалькуляторов можно представлять значительно большие числа и, главное, производить с такими числами вычисления.

ТОЧНОСТЬ ВЫЧИСЛЕНИЙ НА МИКРОКАЛЬКУЛЯТОРАХ

На первый взгляд использование микрокалькуляторов позволяет без всяких оговорок резко повысить точность вычислений. В самом деле, работая с логарифмической линейкой, мы вынуждены удовлетворяться обычно не более чем тремя верными знаками результатов вычислений или значащими цифрами – всеми цифрами данного числа, кроме нулей, расположенных левее первой отличной от нуля цифры, и нулей в конце числа на месте неизвестных цифр; использование четырех- или пятизначных математических таблиц обеспечивает четыре–пять значащих цифр, на микрокалькуляторе с восьмиразрядным индикатором в результате вычислений мы видим, как правило, восемь цифр. Но все ли они заслуживают доверия и во всех ли случаях восьми разрядов достаточно?

Проще ответить сначала на второй вопрос. Из предыдущего ясно, что не всегда восьмиразрядный индикатор обеспечит нам выдачу чисел с достаточной точностью. Возьмем такой простой пример: пусть себестоимость некоторого изделия составляет 96 руб. 76 коп., т.е. 96,76 руб. Сколько будут стоить 6789 таких изделий? Восьмиразрядный микрокалькулятор ответит: 656 903,64 руб. Все в порядке, результат выдан с точностью до копеек. А сколько будут стоить 56 789 изделий? Получаем: 5 494 903,6. Что значит ..., 6? Шесть десятых рубля? 60 копеек? Конечно. А где же копейки первого разряда? Калькулятор их потерял – восьми разрядов его индикатора для представления данного числа не хватило, однако в финансово-бухгалтерских расчетах такого рода вычисления требуется вести с точностью до копеек!

Однако главное в вопросе о точности вычислений на микрокалькуляторах заключается в другом. Представим себе, что нам необходимо вычислить площадь комнаты, длина и ширина которой составляют соответственно 465 и 287 см, т.е. 4,65 и 2,87 м. Перемножив оба числа с помощью микрокалькулятора, получим 13,3455 м^2. Но ведь площадь комнаты никто не станет выражать с точностью до десятитысячных долей квадратного метра, и это не случайно – при измерениях пользуются обычно рулеткой, при этом вряд ли можно выразить соответствующие размеры комнаты с точностью, превосходящей полсантиметра, а это значит, что истинная длина комнаты заключена в пределах от 4,645 до 4,654 м, ширина – от 2,865 до 2,874 м, а истинное значение площади от 4,645X2,865 = 13,307925 до 4,654X2,874 = = 13,375596. Отсюда следует, что в полученном нами в первый раз результате доверия заслуживают не более трех первых значащих цифр, т.е. площадь комнаты следует считать равной 13,3 м^2.

В чем причина такого явления? Дело в том, что в практических вычислениях в большинстве случаев приходится иметь дело не с точными, а с приближенными числами. Именно эти числа мы получаем в результате измерения физических величин. Приближенные числа получаются и в результате того, что при изучении реальных процессов приходится описывать их с помощью идеализированных математических моделей, часто приходится заменять бесконечные процессы, пределами которых являются искомые величины, конечной последовательностью действий. Но любые действия над приближенными числами приводят к приближенному же результату. Уже результат обычного деления двух точных чисел в большинстве случаев приходится выражать приближенно. Как же следует обращаться с приближенными числами, чтобы не выписывать ненужные "хвосты" результатов, не заслуживающие доверия? Этот вопрос стоял особенно остро, когда вычисления производились вручную или с помощью механических вычислительных средств и на получение каждого дополнительного разряда результатов приходилось тратить много времени.

Академик А.Н. Крылов в свое время разработал теорию действий над приближенными числами. Напомним ее основные положения, полностью сохраняющие свое значение и при использовании микрокалькуляторов.

Если число a является приближенным значением некоторого числа A, то разность $A-a$ называется истинной абсолютной погрешностью числа a, а всякое число Δa, удовлетворяющее условию $|A-a| \leqslant \Delta a$ – границей абсолютной погрешности, или предельной абсолютной погрешностью числа a.

Отношение абсолютной погрешности $A-a$ данного приближенного числа a к модулю $|A|$ соответствующего точного числа A называется относительной погрешностью этого числа и обозначается δ. Число δ_a , не меньшее относительной погрешности числа a, называется предельной относительной погрешностью данного числа, $\delta_a \geqslant \delta$. Для краткости слово "предельная" обычно опускается. Если абсолютная погрешность величины a не превышает одной единицы разряда последней цифры числа a, то говорят, что у числа a все знаки верные. Это требование к записи приближенного числа, позволяющее получить представление о его точности, называют принципом академика Крылова. Если приближенное число содержит лишние или не вполне надежные знаки, его следует округлить, сохранив не более одного ненадежного знака.

Если число a имеет n верных значащих цифр, то его относительная погрешность $\delta_a = 1/z \cdot 10^{n-1}$, где z – первая значащая цифра числа. Например, если число 325,6 имеет 4 верных значащих цифры, то его относительная погрешность равна $1/3 \cdot 10^{4-1} = 0{,}00003$, или 0,003%.

Погрешности результатов действий над приближенными числами могут быть выражены через погрешности первоначальных данных следующим образом:

1. Предельная абсолютная погрешность алгебраической суммы равна сумме предельных абсолютных погрешностей слагаемых.

2. Относительная погрешность суммы заключена между наибольшей и наименьшей из относительных погрешностей слагаемых.

3. Относительная погрешность произведения и частного равна сумме относительных погрешностей сомножителей (или делимого и делителя соответственно).

4. Относительная погрешность n-й степени приближенного числа в n раз больше относительной погрешности основания как для целых, так и для дробных значений n.

По этим правилам можно определить погрешность результата любой комбинации арифметических действий над приближенными числами.

Если теперь кроме значащих цифр числа учитывать в ряде случаев количество десятичных знаков, т.е. тех его цифр, которые расположены справа от знака дробности, то основные правила округления результатов действий над приближенными числами можно изложить так:

1. При сложении и вычитании приближенных чисел в результате следует сохранить столько десятичных знаков, сколько их имеет приближенное данное с наименьшим числом десятичных знаков.

2. При умножении и делении в результате следует сохранить столько значащих цифр, сколько их имеет приближенное данное с наименьшим числом значащих цифр.

3. При возведении в квадрат и куб в результате следует сохранить столько значащих цифр, сколько их имеет возводимое в степень приближенное число; так же следует поступать и при извлечении квадратного и кубического корней.

4. При вычислении промежуточных результатов следует брать одной цифрой больше, чем рекомендовано в пунктах 1–3.

5. Если данные можно брать с произвольной точностью, то для получения результата с k значащими цифрами (или десятичными знаками) число значащих цифр (или десятичных знаков) у них должно обеспечивать $k + 1$-цифру в результате.

Применение этих правил при вычислениях с приближенными числами на микрокалькуляторах не должно вызывать затруднений. Теперь, например, становится ясным, почему при определении площади комнаты в результате следовало ограничиться тремя значащими цифрами – ведь именно по три значащих цифры (и не больше) имели приближенные сомножители.

В некоторых случаях снижение точности расчета на микрокалькуляторе вызывается его конструктивными особенностями. Например, может иметь место значительная потеря точности при делении чисел, у которых порядок делимого значительно меньше порядка делителя (то же имеет место и при сложении и вычитании таких чисел). Потеря точности происходит из-за того, что часть значащих цифр при этом оказывается за пределами индикатора. Так, при нахождении частного от деления 0,0000228 на 3687 в естественной форме получаем машинный нуль – на индикаторе не появляется ни одной значащей цифры, между тем в нормализованной модифицированной форме мы получили бы $6{,}1838 \cdot 10^{-9}$. Из этого положения есть выход, притом достаточно простой – сначала увеличить делимое в 10^n раз (n подбирается с таким расчетом, чтобы получить достаточное количество значащих цифр результата), а затем полученное частное во столько же раз уменьшить. Если считать, что числа в данном примере приближенные, то желательно обеспечить в частном три значащие цифры, для чего делимое увеличим в 10^4 раз, получим 0,00006183 (одна цифра запасная), уменьшим после округления во столько же раз и запишем соответствующий результат так: 0,0000228:3687 = 0,00000000618.

С тем же явлением встречаемся при нахождении чисел, обратных данным, вида $1/x$. Пусть, например, следует найти 1/113355. При непосредственном делении или при использовании клавиши [1/x], если она предусмотрена, получаем 0,0000088 – всего две значащие цифры. Но увеличив числитель в 10^3 раз, т.е. взяв 1000 вместо 1, выполнив деление и уменьшив в 1000 раз результат, получаем 0,0000088218.

При выполнении на микрокалькуляторах комбинированных вычислений, состоящих из большого количества отдельных операций, все заметнее сказываются погрешности, возникающие при округлении результатов промежуточных действий. Эти погрешности называют операционными. Их уменьшение может быть достигнуто выбором способов вычислений, вычислительных алгоритмов, обеспечивающих получение результата выполнением меньшего количества операций.

Не следует забывать, что результаты вычислений могут отличаться невысокой точностью также в связи с особенностями применяемых методов вычислений. На практике весьма часто используется метод последовательных приближений, когда значение результата, получаемого в ходе вычислений, постепенно приближается к некоторому значению, но достичь его можно лишь в результате бесконечного количества повторений некоторых операций. Поскольку вычисления рано или поздно приходится обрывать, появляется методическая ошибка или остаточная погрешность. Во многих случаях метод последовательных приближений нечувствителен к операционным погрешностям и случайным ошибкам, но в других случаях нужно считаться с тем, что по мере уменьшения остаточной погрешности увеличивается операционная погрешность, чем и ограничивается точность окончательного результата вычислений.

Остановимся на ошибках, возникающих при вводе операндов и операторов, и на способах их исправления.

Микрокалькулятор – устройство, работающее с высокой точностью, и ошибки, возникающие в связи с его внутренними дефектами, крайне редки. Зато нередко случаются ошибки, причиной которых является нажатие не тех клавиш, которые нужны, а тех, которые расположены по соседству или задеты случайно. Поэтому ввод чисел следует контролировать по индикатору, ошибка при неправильном вводе оператора может быть замечена прикидкой, грубой оценкой результата действий и ее сравнением с показаниями индикатора. Если выполняются не очень громоздкие вычисления или ошибка допущена в самом начале вычислительного процесса, то заметив ее, нажатием клавиши $\boxed{\text{C}}$ (кстати, ее рекомендуется нажимать перед началом любого нового вычислительного процесса, не связанного с предыдущим) ввод выполняется заново. Но если ошибка произошла не в начале вычислительного процесса, то погашение предыдущего и вызванное этим повторное выполнение всей последовательности вычислений ведет к дополнительной затрате времени. В таких случаях можно рекомендовать следующее.

Если ошибка замечена при вводе операнда, то нажатием клавиши $\boxed{\text{C}_\text{x}}$ можно погасить только содержимое регистра индикатора, т.е. число, введенное последним, затем операнд вводится повторно, но уже правильно. В некоторых моделях то же достигается однократным нажатием клавиши $\boxed{\text{C}}$, и лишь двукратное ее нажатие ведет к сбросу всего результата. Если же и эта возможность отсутствует, "нейтрализовать" влияние неправильно введенного числа на ход вычислений можно соответственно подобранной операцией: если на данное число должен быть умножен предыдущий результат, то на него же следует и разделить соответствующий промежуточный результат, если ошибочно введенный операнд – слагаемое, его же следует вычесть из общего результата и т.д., после чего ввести правильное значение операнда.

При неправильном, т.е. несвоевременном, нажатии операционных клавиш $\boxed{\times}$ и $\boxed{\div}$ достаточно после этого нажать клавиши $\boxed{1}$ $\boxed{=}$, нейтрализовав тем самым воздействие неправильного ввода операции, а затем нажать клавишу той операции, которая в данном месте нужна. Если же по ошибке неправильно нажата клавиша $\boxed{+}$ или $\boxed{-}$, то правильный результат можно получить, нажав сначала клавиши $\boxed{0}$ $\boxed{=}$, а затем клавишу, соответствующую правильной операции. Если при работе на более сложных моделях инженерных микрокалькуляторов с совмещенными функциями (когда одна и та же клавиша выполняет дополнительную функцию после нажатия префиксной клавиши $\boxed{\text{F}}$) ошибочно нажата клавиша $\boxed{\text{F}}$, то ошибку можно исправить нажатием клавиши $\boxed{\text{CF}}$, если она имеется, или же последующим выполнением операции, обратной по отношению к ошибочно введенной; нажав не вовремя клавишу $\boxed{\text{F}}$, следует выполнить совмещенную функцию, скажем $\boxed{\sqrt{\ }}$, а затем результат возвести в квадрат и т.п. При этом, однако, следует считаться с возможностью появления методической ошибки.

Существуют и другие пути устранения подобных ошибок. Во многих моделях микрокалькуляторов имеются клавиши обмена содержимым регистров $\boxed{\leftrightarrow}$ или $\boxed{\overrightarrow{\underleftarrow{xy}}}$. С их помощью можно вызвать на индикатор содержимое регистра У, т.е. результат вычислений, выполненных до ошибочного ввода, запомнить его или же зафиксировать в памяти машины либо на бумаге и, сбросив нажатием клавиши $\boxed{C}$ содержимое всех операционных регистров, ввести зафиксированный промежуточный результат повторно и продолжить вычисления.

ПРОСТЫЕ МИКРОКАЛЬКУЛЯТОРЫ

К простым микрокалькуляторам относятся те, которые предназначены преимущественно для выполнения арифметических действий и различных их последовательностей. В них отсутствует возможность автоматического вычисления значений многих элементарных функций, что характерно для более сложных моделей инженерных микрокалькуляторов и связано с наличием в их постоянном запоминающем устройстве специальных подпрограмм. Однако в ряде моделей простых микрокалькуляторов имеются отдельные встроенные подпрограммы для нахождения квадратного корня (и вообще корня четной степени) из данного числа, для нахождения числа,

Рис. 11. Микрокалькулятор "Электроника Б3-23"

Таблица 3

Характеристика и выполняемые функции	"Б3-04"	"Б3-09м"	"Б3-14" "Б3-14м" "Б3-14к"	"Б3-23"	"Б3-24г"
Тип индикатора*	ЖК	КЛИ	КЛИ	СИД	СИД
Число клавиш	17	20	20 21 – "Б3-14к"	18	20
Наличие клавиш					
$\boxed{\%}$	Нет	Есть	Нет Нет Есть	Есть	Нет
$\boxed{\sqrt{}}$	Нет	Нет	Есть	Нет	Нет
$\boxed{1/x}$	Нет	Есть	Есть	Нет	Нет
$\boxed{/-/}$	Нет	Нет	Нет	Нет	Нет
$\boxed{\leftrightarrow}$	Нет	Нет	Нет	Нет	Нет
Наличие дополнительных регистров памяти	Нет	Нет	Нет	Нет	$\boxed{П+}$
Масса, кг	0,2	0,3	0,3	0,2	0,2
Потребляемая мощность, мВт	30	400	400 350	450	450
Размер, мм					
длина	120	158	125 158 124	155	155
ширина	78	86	74 86 73	78 86 73	78
высота	18	36	31 36 30,4	28	28
Источник питания**	Б	Б, С	Б, С	Б, С	Б, С
Число и тип элементов***	2а	4а	3а 4а 3а	3а	3а

* ЖК – индикатор на жидких кристаллах, КЛИ - катодолюминесцентный индикатор, СИД – светоизлучающие диоды.

** Б – питание от батарей сухих элементов, С – предусмотрено питание от внешней сети, Ак – питание от аккумуляторов.

*** а – элемент А-316, б – элемент СЦ-32, в – аккумулятор Д-0,06, г – аккумулятор Д-0,1.

обратного данному, а в некоторых моделях – для автоматического выполнения процентных вычислений.

Все модели простых микрокалькуляторов, выпускаемых в настоящее время в нашей стране, выполняют четыре арифметических действия, а также допускают действия с повторяющимися числами (константами), благодаря чему во многих случаях достигается значительная рационализация сложных вычислений. Все калькуляторы этого типа имеют восьмиразрядные индикаторы, что обеспечивает вычисления с 7–8 значащими цифрами – на несколько порядков выше того, что допускает счетная линейка или четырех-пятизначные математические таблицы.

Основные характеристики простых микрокалькуляторов отечественного производства приведены в табл. 3, а внешний вид микрокалькулятора "Электроника Б3-23" представлен на рис. 11.

	"Б3-25а"	"Б3-26"	"С3-27"	"Б3-30" "Б3-39"	"С3-33"	"МК-53"	"МК-57"	"МК-60"
	КЛИ 19	КЛИ 25	КЛИ 18	ЖК 20	СИД 25	ЖК 26	СИД 25	ЖК 25
	Нет	Есть	Нет	Есть	Есть	Есть	Есть	Есть
	Нет	Есть	Нет	Есть	Нет	Есть	Есть	Есть
	Нет	Нет	Нет	Есть	Есть	Есть	Есть	Нет
	Нет	Есть	Нет	Нет	Есть	Есть	Есть	Есть
	Нет	Есть	Нет	Нет	Есть	Есть	Есть	Нет
	Нет	$\boxed{\text{П+}}$ $\boxed{\text{П−}}$	Нет	Нет	$\boxed{\text{П+}}$ $\boxed{\text{П−}}$	$\boxed{\text{П+}}$ $\boxed{\text{П−}}$	$\boxed{\text{П+}}$ $\boxed{\text{П−}}$	$\boxed{\text{П+}}$ $\boxed{\text{П−}}$ $\boxed{\text{П} \leftrightarrow x}$
	0,3 700	0,3 700	0,2 400	0,1 10	0,2 500	0,05 0,06	0,15	0,06 0,03
	140	142	165	109	160	95	155	115
	75	78	78	66,5	90	61	78	65
	25 Б, С 3а	27,5 Б, С 4а	21 Б, С 3а	10,5 Ак, С/Б 2в 3б	40 С, Ак 4г	6,5 Б 2б	28 Б, С 3а	8 Б Солнечная батарея

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ РЕГИСТРЫ ПАМЯТИ

Выше отмечалось, что многие модели микрокалькуляторов, в том числе и некоторые простые, имеют дополнительные регистры памяти. С их помощью можно в процессе вычислений сохранять и вызывать при необходимости различные константы, исходные и промежуточные данные, которые используются в счете неоднократно, и т.д.

По особенностям использования дополнительные регистры памяти можно разделить на три разновидности – простые, сальдирующие и адресные. Простые принимают на хранение содержимое регистра индикатора нажатием клавиши, обычно обозначенной $\boxed{\text{ЗАП}}$. С помощью клавиши $\boxed{\text{ИП}}$ хранящееся в памяти число снова вызывается на регистр индикатора, при этом его копия продолжает сохраняться в памяти. Если в такой допол-

Таблица 4

Последовательность нажатия клавиш	Индикация	Примечание
/15,4/ [П+] [−]	(15,4)	
/12,4/ [+]	(3,0)	
/6,25/ [П+] [−]	(9,25)	
/1,22/ [−]	(8,03)	
/2,14/ [+]	(5,89)	
/7,16/ [П+] [−]	(13,0~~6~~)5	
/5,34/ [=] [−]	(7,71)	Общий результат
[ИП]	(28,81)	Сумма положительных слагаемых
[=]	(21,10)	Сумма отрицательных слагаемых

нительный регистр памяти вводится некоторое новое число, хранившееся там до этого число автоматически стирается.

Микрокалькуляторы с сальдирующими дополнительными регистрами памяти отличаются наличием клавиш [П+], [П−], а в некоторых новых моделях также и [П×], [П÷]. Способ работы сальдирующих регистров памяти отличается от простых тем, что при нажатии клавиши [П+] содержимое регистра индикатора прибавляется к содержимому регистра памяти, при нажатии клавиши [П−] вычитается, а при нажатии клавиш [П×] и [П÷] соответственно умножается или делится. В некоторых более сложных моделях имеется еще клавиша [П+x^2], с помощью которой в дополнительный регистр записывается квадрат содержимого регистра индикатора (прибавляемый к содержимому дополнительного регистра памяти), что удобно при вычислениях, связанных с нахождением сумм квадратов.

Если в микрокалькуляторе имеется несколько дополнительных регистров памяти, они нумеруются, т.е. им присваивается адрес. Этот адрес указывается как при занесении данного в дополнительный регистр, так и при его выборке оттуда. В этом случае имеет место наличие адресных (или адресуемых) дополнительных регистров памяти. Такие регистры имеются, например, в программируемых микрокалькуляторах ”Б3-21”, ”Б3-34”, ”МК-54”.

В выпускаемых нашей промышленностью моделях простых микрокалькуляторов используются преимущественно сальдирующие дополнительные регистры памяти (клавиши [П+] в ”Б3-24г”, [П+], [П−] в ”Б3-26”). Гашение их содержимого производится с помощью клавиши [СП] (сброс памяти).

Применение сальдирующих дополнительных регистров памяти в простых (чаще всего встречающихся) случаях затруднений не вызывает, более сложные случаи будут рассмотрены ниже. Здесь же обратим внимание на одну тонкость. Пусть требуется найти результат сложений некоторой последовательности положительных и отрицательных чисел, причем так, чтобы сумма положительных чисел была бы отделена и выдана отдельно от суммы отрицательных чисел. Продуманным использованием клавиши $\boxed{\text{П+}}$, клавиш $\boxed{+}$, $\boxed{-}$ это требование может быть легко выполнено. Рассмотрим его на следующем примере:

15,4–12,4 + 6,25–1,22–2,14 + 7,16–5,34 = ?

Вычислительный алгоритм (табл. 4) для этого случая представим подробнее (здесь и далее в параллелограммах обозначены вводимые в микрокалькулятор операнды, а в круглых скобках – показания индикатора).

ДЕЙСТВИЯ С КОНСТАНТАМИ

Важной особенностью вычислений на подавляющем большинстве моделей микрокалькуляторов, начиная с самых простых, является то, что при выполнении серии однотипных операций, в которых в качестве одного из операндов выступает одно и то же число (операции вида $x_i * k$, где $*$ означает одну из арифметических операций), его повторный ввод не является необходимым. В этих случаях говорят о вычислениях с константой; использование константной автоматики приводит к известной экономии времени на ввод данных, к уменьшению возможности возникновения ошибок при манипуляциях на клавиатуре, поскольку сокращается количество нажимаемых при вводе клавиш.

Однако работа с константами на разных моделях калькуляторов может значительно различаться, так как конструктивные особенности одних моделей предполагают, что константой при всех арифметических операциях является второй операнд, в других при умножении константой служит первый операнд, а при делении второй (т.е. делитель), в одних моделях константная автоматика распространяется на все четыре арифметических действия, в других только на умножение и деление.

Рассмотрим некоторые особенности применения константной автоматики в микрокалькуляторах, где константой должен быть первый операнд.

Пусть набран первый операнд. По общему правилу при нажатии любой из операционных клавиш $\boxed{+}$ $\boxed{-}$ $\boxed{\times}$ $\boxed{\div}$ содержимое регистра индикатора дублируется на рабочем регистре и закрепляется в качестве константы. После этого нажатием клавиши результата $\boxed{=}$ обеспечивается выполнение операции вида $k * x_i$. В большинстве моделей этого типа повторное нажатие клавиши $\boxed{=}$ обеспечивает выполнение введенной перед этим операции над очередным содержимым регистра индикатора и первым операндом-константой, например:

$\boxed{3}\boxed{\times}\boxed{2}\boxed{=}\boxed{=}\boxed{=}\ldots$

(6)(18)(54) ...

В микрокалькуляторах с этим типом константной автоматики известного упрощения при выполнении вычислений можно достичь, если в качестве константы взять результат некоторого промежуточного вычисления. Пусть, например, требуется вычислить боковую поверхность конуса с постоянным радиусом основания R для нескольких различных значений образующей l . В этом случае, считая в выражении $S = \pi R l$ константой πR и положив $\pi = 355/113$, наиболее целесообразно вычисления выполнять так:

$$\boxed{355}\ \boxed{\div}\ \boxed{113}\ \boxed{x}\ \boxed{R}\ \boxed{x}\ \boxed{l_1}\ \underset{(S_1)}{\boxed{=}}\ \boxed{l_2}\ \underset{(S_2)}{\boxed{=}}\ \boxed{l_3}\ \underset{(S_3)}{\boxed{=}} \ldots \underset{(S_n)}{\boxed{=}} \ldots$$

Выражение вида $a^n \cdot b$ следует вычислять так:

$$\boxed{a}\ \boxed{x}\ \boxed{b}\ \overbrace{\underset{(a\cdot b)}{\boxed{=}}\ \underset{(a^2\cdot b)}{\boxed{=}}\ \underset{(a^3\cdot b)}{\boxed{=}}\ \ldots\ \underset{(a^n\cdot b)}{\boxed{=}}}^{n\ \text{раз}}$$

Большее распространение получили микрокалькуляторы другой разновидности, у которых константой становится второй операнд. Здесь следует обратить внимание на то, как осуществляется переход от одной (повторяющейся над константой) операции к другой. Пусть требуется вычислить (((3X2)X2) + 5) + 5.

Проследим за ходом выполнения вычислений на калькуляторах этой разновидности:

Последовательность нажатия клавиш	$\boxed{3}$	$\boxed{x}$	$\boxed{2}$	$\boxed{=}$	$\boxed{=}$	$\boxed{+}$	$\boxed{5}$	$\boxed{=}$	$\boxed{=}$
Содержимое рабочего регистра	0	3	3	2	2	2	12	5	5
Содержимое регистра индикации	3	3	2	6	12	12	5	17	22

Следует отметить, что в некоторых моделях этой разновидности (например, "Б3-14") вычисления с константой осуществляются только при нажатии клавиши $\boxed{=}$. В других моделях ("Б3-23", "Б3-26") константная автоматика срабатывает и при нажатии операционных клавиш ($\boxed{+}$ $\boxed{-}$ $\boxed{\times}$ $\boxed{\div}$). Здесь следует иметь в виду, что при каждом нажатии операционной клавиши содержимое регистра X дублируется в регистре У. Этим обстоятельством можно воспользоваться для рационализации ряда вычислений в моделях этой разновидности.

Так, для нахождения числа, обратного данному, в некоторых моделях даже простых микрокалькуляторов, например "Б3-09", "Б3-14", "Б3-30", предусмотрена специальная подпрограмма, реализуемая нажатием клавиши $\boxed{1/x}$. А как быть, если такой клавиши (и соответствующей подпрограммы) нет? Можно, конечно, выполнить действие $\boxed{1}\,\boxed{\div}\,\boxed{x}$. А если x – многоразрядное число, особенно если оно получено в результате предыдущих вычислений и уже высвечено на индикаторе? Вводить его заново после ввода $\boxed{1}\,\boxed{\div}$? Не совсем удобно, точнее, совсем неудобно: прежде чем выполнить данную операцию, придется x записать отдельно или занести в дополнительный регистр памяти, если он имеется. Лишняя запись – лишний источник возможных ошибок. Как же без этого обойтись? Возьмем какой-нибудь микрокалькулятор этой разновидности, например "Б3-23". Наберем на клавиатуре число 5 и трижды нажмем клавишу $\boxed{\div}$.

Рис. 12. Микрокалькулятор "Электроника МК-60" с питанием от солнечных батарей и индикатором на жидких кристаллах

На индикаторе получим 0,2. Но ведь это и есть 1/5, т.е. число обратное 5. Этот результат не случаен: набрав 5 и нажав клавишу $\boxed{\div}$ в первый раз, мы дублируем число 5 в рабочем регистре, при этом как второй операнд оно становится константой. При последующих нажатиях той же клавиши 5 разделится само на себя и на индикаторе появится 1, затем будет выполнено действие деления 1 на 5, т.е. то, что и требовалось*.

На данной разновидности калькуляторов можно "рационализировать" выполнение и других вычислительных приемов. Например, $n \cdot x$ можно найти n-кратным нажатием клавиши $\boxed{+}$ после ввода x: $/x/\,\boxed{+}\,\boxed{+}\,\ldots\,\boxed{+}$, а x^n получится при n-кратном нажатии клавиши $\boxed{\times}$: $/x/\,\boxed{\times}\,\boxed{\times}\,\ldots\,\boxed{\times}$.

Отсюда – отличный метод возведения числа x в квадрат (на "Б3-09" и "Б3-14" не реализуется) : $/x/\,\boxed{\times}\,\boxed{\times} \to (x^2)$.

Несколько иначе устроена константная автоматика на "Б3-30", "Б3-39", "МК-60" (последняя модель питается от солнечных батарей, рис. 12). В этих моделях при умножении константой является первый операнд, а при делении – второй, для сложения же и вычитания константная автоматика вообще не предусмотрена; этого не следует забывать во избежание получения ошибочных результатов.

Рассмотрим теперь несколько примеров совместного использования дополнительных регистров памяти и константной автоматики для рационализации некоторых вычислительных процессов. Пусть требуется найти значения последовательных членов арифметической прогрессии, начиная со второго и кончая N-м, а кроме того, сумму N ее членов S_N, если заданы первый член a_1 и разность d. Если константой является второй операнд, это удобнее всего сделать так:

$$/a_1/\ \underset{a_1}{\boxed{П+}}\ \boxed{+}\ /d/\ \underset{(a_2)}{\boxed{=}}\ \underset{S_2}{\boxed{П+}}\ \underset{(a_3)}{\boxed{=}}\ \underset{S_3}{\boxed{П+}}\ \ldots\ \underset{(a_N)}{\boxed{=}}\ \underset{S_N}{\boxed{П+}}\ \boxed{ИП} \to (S_N)$$

После каждого нажатия клавиши $\boxed{=}$ получаем очередное значение a_n, которое высвечивается на индикаторе, а нажимая клавишу $\boxed{П+}$, прибавляем значение a_n к сумме предыдущих членов S_{n-1} и получаем S_n. Значение сум-

* В заводских инструкциях к этим микрокалькуляторам описанный метод нахождения $1/x$ не упоминается.

мы S_N вызывается на индикатор из дополнительного регистра памяти нажатием клавиши $\boxed{\text{ИП}}$.

Пусть, например, $a_1 = 4, d = 3, N = 5$. Найти a_2, a_3, a_4, a_5, S_5:

$\boxed{4}$	$\boxed{\text{П+}}$	$\boxed{+}$	$\boxed{3}$	$\boxed{=}$	$\boxed{\text{П+}}$	$\boxed{=}$	$\boxed{\text{П+}}$	$\boxed{=}$	$\boxed{\text{П+}}$	$\boxed{=}$	$\boxed{\text{П+}}$	$\boxed{\text{ИП}}$	→	(50)
	4			(7)	11	(10)	21	(13)	34	(16)	50			

Если же у нас калькулятор, у которого константой является первый операнд, то достаточно поменять порядок ввода a_1 и d. Будет: $\boxed{d}$ $\boxed{+}$ $\boxed{a_1}$ $\boxed{\text{П+}}$ $\boxed{=}$ ... и далее, как в первом случае.

Рассмотрим теперь непосредственное суммирование членов геометрической прогрессии, числовой последовательности, весьма часто использующейся в самых различных разделах математики и ее приложений. Положив для простоты $a = 1$ и обозначив знаменатель геометрической прогрессии через q, получим выражение $1 + q + q^2 + \ldots$ Вычисление членов этой последовательности на микрокалькуляторах, у которых константа – второй операнд, очень просто:

$\boxed{1}$	$\boxed{\times}$	$\boxed{q}$	$\boxed{=}$	$\boxed{=}$	$\boxed{=}$	...
			(q^2)	(q^3)	(q^4)	

Если же наряду с нахождением членов прогрессии вычислять и их суммы, то после каждого нажатия клавиши $\boxed{=}$ следует нажать и клавишу $\boxed{\text{П+}}$. При этом после того, как в дополнительный регистр памяти введен первый член, там будет накапливаться сумма соответствующего числа членов данной геометрической прогрессии. Значения ее S_n вызываются на индикатор нажатием клавиши $\boxed{\text{ИП}}$:

$\boxed{1}$	$\boxed{\text{П+}}$	$\boxed{\times}$	$\boxed{q}$	$\boxed{=}$	$\boxed{\text{П+}}$	$\boxed{\text{ИП}}$	$\boxed{=}$	$\boxed{\text{П+}}$	$\boxed{\text{ИП}}$	...	$\boxed{\text{ИП}}$
				(q^2)	S_2	(S_2)	(q^3)	S_3	(S_3)		(S_n)

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ КЛАВИШИ ОБМЕНА СОДЕРЖИМЫМ РЕГИСТРОВ X И У

Клавиша $\boxed{\overrightarrow{\underleftarrow{xy}}}$ (или $\boxed{\leftrightarrow}$) имеется в некоторых моделях простых микрокалькуляторов, например в "Б3-26" и "С3-33", и в большинстве моделей инженерных микрокалькуляторов. Ее назначение – обмен содержимым регистров X и У – при ее нажатии содержимое рабочего регистра переходит в регистр индикатора и высвечивается на нем, а содержимое регистра индикатора переходит в рабочий регистр. Это используется обычно, когда нужно проверить содержимое рабочего регистра в какой-то момент. Нажатием этой клавиши мы вызываем его на индикатор, повторным нажатием возвращаем назад. Если же эту клавишу нажать перед нажатием клавиши $\boxed{=}$, то вместо операции $a * b$ выполнится операция $b * a$ ($*$ – любая арифметическая операция). Например, вместо 17:3 будет найдено 3:17, вместо 19–5 вычислится 5–19 и т.д.

Эта же клавиша может быть с успехом использована при выполнении серии вычислений для вызова в регистр индикатора числа, принимавшего участие в предыдущей операции. Пусть, например, нужно выполнить следующие операции: $a + b$, $b + c$, $c + d$. В этом случае рациональная последовательность действий может быть такой:

[a] [+] [b] [=] [↔] [+] [c] [=] [↔] [+] [d] [=]

$(a+b)$ $(b+c)$ $(c+d)$

Целесообразность вызова содержимого рабочего регистра в регистр индикатора однократным нажатием клавиши [↔] по сравнению с повторным набором операнда, чаще всего многоразрядного, совершенно очевидна.

Пусть теперь мы должны выполнить действие $d = a:(b+c)$. При наличии клавиши [↔] его очень удобно выполнить так:

[b] [+] [c] [=] [a] [↔] [÷] [=] → (d).

А в случае ее отсутствия так:

[b] [+] [c] [÷] [a] [=] [1/x] → (d),

используя клавишу [1/x] или иные способы нахождения числа, обратного данному.

Приведем еще один пример эффективного (и эффектного) применения этой клавиши – для нахождения последовательности чисел Фибоначчи. Эти числа, имеющие длинную историю, до настоящего времени являются объектом многочисленных исследований в различных разделах математики и ее приложений. Последовательность чисел Фибоначчи начинается двумя единицами, а каждый последующий член равен сумме двух предыдущих: $u_{n+1} = u_{n-1} + u_n$, т.е. имеет вид 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144... На микрокалькуляторе с клавишей [↔] члены этой последовательности один за другим могут быть найдены так:

Алгоритм*	[1]	[+]	[1]	[=]	[↔]	[=]	[↔]	[=]	[↔]	[=]	[↔]	[=]	[↔]
Индикатор	<u>1</u>	1	<u>1</u>	<u>2</u>	1	<u>3</u>	2	<u>5</u>	3	<u>8</u>	5	<u>13</u>	8

Кроме двух первых, которые были введены непосредственно, все остальные члены этой последовательности получаем каждый раз при нажатии клавиши [=], чередуя ее с клавишей [↔], нажатие которой каждый раз возвращает нужное слагаемое в регистр индикатора (числа Фибоначчи подчеркнуты).

ОСОБЕННОСТИ АРИФМЕТИЧЕСКИХ ВЫЧИСЛЕНИЙ

Арифметические вычисления являются основными для всех типов микрокалькуляторов, поскольку к ним в конечном счете сводятся любые более сложные – до численного дифференцирования и интегрирования включительно. Навыки простейших вычислений на каждой данной модели приобретаются быстро, самые основные сведения о них приводятся в заводских инструкциях. Однако ознакомление со многими дополнительными способами и приемами вычислений может существенно повысить производительность труда вычислителя, работающего с микрокалькулятором. Сле-

---

*Здесь и далее рекомендуемую последовательность нажатия клавиш будем условно называть алгоритмом дует также отметить, что как простые, так и более сложные вычисления в разных моделях могут выполняться по-разному, на что следует обратить внимание.

Можно сказать, что вычисление любого арифметического (формульного) выражения состоит из некоторой последовательности арифметических действий, каждое из которых предполагает наличие одного или двух чисел-операндов и выполняемой над ними арифметической операции. Те из операций, которые предусматривают действие над одним числом (например, возведение в целую степень), принято называть одноместными, над двумя (сложение, вычитание и т.д.) – двухместными.

Применительно к микрокалькуляторам арифметические выражения, подлежащие вычислению, можно условно разделить на простые, когда при выполнении соответствующих операций не требуется специально запоминать промежуточные операнды (результат выполнения предыдущей операции используется в качестве операнда последующей), и сложные, когда в процессе вычисления приходится запоминать один или несколько промежуточных результатов.

Естественно, что любое сложное арифметическое выражение можно разбить на ряд простых, результат вычисления каждого из которых можно сохранить тем или иным путем, например записать. Так и приходится поступать при вычислениях на тех моделях микрокалькуляторов, в которых отсутствуют дополнительные регистры памяти. В дальнейшем примеры на вычисление сложных арифметических выражений будем рассматривать применительно к моделям, имеющим такие регистры. Как правило, при этом будем использовать наиболее распространенные сальдирующие (накопляющие) регистры (клавиша $\boxed{\text{П+}}$). При этом следует помнить, что если не требуется сложения очередного операнда с содержимым дополнительного регистра памяти, то перед вводом данного операнда это содержимое следует обязательно стереть нажатием клавиши $\boxed{\text{СП}}$. Эта операция излишняя в микрокалькуляторах с несальдирующими дополнительными регистрами памяти (клавиша $\boxed{\text{ЗАП}}$), в которых предыдущее содержимое автоматически стирается при вводе нового операнда.

Рассмотрим общий порядок выполнения арифметических операций и вычисления простых арифметических выражений, который пригоден для любых моделей микрокалькуляторов, кроме тех, в которых применяется инверсный способ ввода – в этих моделях отсутствует клавиша $\boxed{=}$, но имеется особая клавиша ввода $\boxed{\uparrow}$ (табл. 5).

Для очистки содержимого регистров Х и У, если в них ранее было что-то занесено, следует предварительно нажать клавишу $\boxed{\text{C}}$. При этом в одних моделях (например, в "Б3-14" и "Б3-30") для погашения содержимого этих регистров достаточно однократного нажатия клавиши $\boxed{\text{C}}$, в других (например, в "Б3-23", "Б3-26") при однократном нажатии этой клавиши очищается только регистр Х, при повторном – также и регистр У. Для гашения ошибочно набранного и высвечиваемого в данный момент на индикаторе операнда в некоторых моделях микрокалькуляторов имеется специальная клавиша $\boxed{\text{C}_\text{x}}$.

Ранее (см. с. 49) мы уже говорили о применяемых в книге обозначениях при записи алгоритмов последовательностей нажатия клавиш. Доба-

Таблица 5

Действие	Пример	Последовательность нажатия клавиш	Показания индикатора
Сложение	$23 + 58 = 81$	[23] [+] [58] [=] →	(81)
Вычитание	$16 - 2{,}5 = 13{,}5$	[16] [−] [2,5] [=] →	(13,5)
Умножение	$7{,}2 \times 4{,}5 = 32{,}4$	[7,2] [×] [4,5] [=] →	(32,4)
Деление	$7{,}2 : 4{,}5 = 1{,}6$	[7,2] [÷] [4,5] [=] →	(1,6)
Смешанные действия	$\dfrac{(3{,}2 + 2{,}5) \times 7{,}2}{4{,}5} = 9{,}12$	[3,2] [+] [2,5] [×] [7,2] [÷] [4,5] [=] →	(9, 12)
	$\dfrac{2{,}5 \times 7{,}2 + 3{,}2}{7{,}1} = 3$	[2,5] [×] [7,2] [+] [3,2] [÷] [7,1] [=] →	(3)

вим только, что обозначения → или ↓ рекомендуют заметить показания индикатора после нажатия соответствующих операционных клавиш, в некоторых случаях эти показания тут же приводятся для проверки или сравнения.

Рассмотрим теперь несколько примеров на вычисление типичных арифметических выражений. Пусть требуется найти произведение e сумм $(a + b) \times (c + d)$. Ход вычислений может быть представлен в виде следующей схемы: [a] [+] [b] [=] [П+] [c] [+] [d] [×] [ИП] [=] → (e). Напомним, что при отсутствии в калькуляторе дополнительного регистра памяти ход вычислений тот же, только вместо нажатия клавиши [П+] следует содержимое регистра индикатора записать или запомнить, а вместо нажатия клавиши [ИП] заново ввести записанный или запомненный операнд. Это арифметическое выражение после некоторых предварительных преобразований можно вычислить сплошной последовательностью операций, не прибегая ни к внутренней, ни к внешней памяти, что будет продемонстрировано ниже.

Вычислительный алгоритм для другого характерного арифметического выражения – суммы произведений $e = (a \times b) + (c \times d)$ имеет вид [a] [×] [b] [=] [П+] [c] [×] [d] [=] [+] [ИП] [=] → (e).

Естественно, что по такой схеме может быть выполнено сложение достаточно большого числа произведений пар сомножителей, использование сальдирующего дополнительного регистра памяти представляет при этом значительные удобства. В случае же его отсутствия можно поступать, как указано выше, т.е. записывать промежуточные результаты умножений, после чего полученные произведения последовательно складывать. Однако в этом случае, как и в предыдущем, можно использовать искусственное преобразование в соответствии с тождеством

$$(a \times b) + (c \times d) = \left(\frac{a \times b}{d} + c\right) \times d,$$

которое позволяет обойтись без записи промежуточных вычислений. Выражение, записанное в правой части данного равенства, вычисляется на микрокалькуляторе так: $\fbox{a}$ $\fbox{×}$ $\fbox{b}$ $\fbox{÷}$ $\fbox{d}$ $\fbox{+}$ $\fbox{c}$ $\fbox{×}$ $\fbox{d}$ $\fbox{=}$ →. Этот прием может быть распространен и на большее количество слагаемых произведений. Вот как можно сложить четыре пары произведений:

$$(a \times b) + (c \times d) + (e \times f) + (g \times h) =$$
$$= \left(\left(\left(\frac{a \times b}{d} + c\right) \times \frac{d}{f} + e\right) \times \frac{f}{g} + g\right) \times h.$$

Аналогично может быть вычислена и сумма частных – с использованием дополнительного регистра памяти, записью промежуточных вычислений или же с помощью следующего преобразования:

$$(a : b) + (c : d) + (e : f) = \left(\left(\frac{a \times d}{b} + c\right) \times \frac{c}{d} + e\right) : f.$$

Найдем, например, общее сопротивление параллельно соединенных резисторов:

$$1/R = 1/R1 + 1/R2 + 1/R3 \text{ или } R = \frac{1}{1/R1 + 1/R2 + 1/R3}.$$

Дано: $R1$ = 220 кОм; $R2$ = 27 Ом; $R3$ = 47 Ом, найти R. Последовательность вычислений на микрокалькуляторе с дополнительным регистром памяти сальдирующего типа ($\fbox{П+}$) будет иметь вид

$\fbox{1}$ $\fbox{÷}$ $\fbox{220000}$ $\fbox{=}$ (0,0000045) $\fbox{П+}$ $\fbox{1}$ $\fbox{÷}$ $\fbox{27}$ $\fbox{=}$ (0,037037) $\fbox{П+}$ $\fbox{1}$ $\fbox{÷}$ $\fbox{47}$

$\fbox{=}$ (0,0212765) $\fbox{П+}$ $\fbox{1}$ $\fbox{÷}$ $\fbox{ИП}$ (0,0583182) $\fbox{=}$ → (17,147312). Ответ: 17,15 Ом.

Вычисление упрощается при наличии клавиши $\fbox{1/x}$. В этом случае вместо $\fbox{1}$ $\fbox{÷}$ $\fbox{a}$ $\fbox{=}$ выполняется $\fbox{a}$ $\fbox{1/x}$. Еще лучше использовать константную автоматику, когда константой является второй операнд. Здесь вместо $\fbox{1}$ $\fbox{÷}$ $\fbox{a}$ $\fbox{=}$ выполняется $\fbox{a}$ $\fbox{÷}$ $\fbox{÷}$ $\fbox{=}$, тогда приведенный выше вычислительный процесс можно представить так: $\fbox{R1}$ $\fbox{÷}$ $\fbox{÷}$ $\fbox{=}$ $\fbox{П+}$ $\fbox{R2}$ $\fbox{÷}$ $\fbox{÷}$ $\fbox{=}$ $\fbox{П+}$ $\fbox{R3}$ $\fbox{÷}$ $\fbox{÷}$ $\fbox{=}$ $\fbox{П+}$ $\fbox{ИП}$ $\fbox{÷}$ $\fbox{÷}$ $\fbox{=}$ → (R).

Если надо вычислить значение дроби, в числителе и знаменателе которой находятся сложные арифметические выражения, например

$$\frac{a + b + c \times d}{e + f - g \times h},$$

то в этом случае лучше вычислить сначала знаменатель, а затем числитель, который можно будет сразу же разделить на знаменатель, например выражение

$$\frac{324{,}15 \times 0{,}235 \times 6{,}208 - 42{,}16}{21{,}49 \times 0{,}875 - 12{,}35 \times 0{,}386}$$

можно вычислить так:

/21,49/ $\boxed{\times}$ /0,875/ $\boxed{=}$ $\boxed{П+}$ /12,35/ $\boxed{\times}$ /0, 386/ $\boxed{=}$ $\boxed{П-}$ /324,15/ $\boxed{\times}$ /0,235/

(18,80375) (4,7671)

$\boxed{\times}$ /6,208/ $\boxed{-}$ /42,16/ $\boxed{=}$ $\boxed{\div}$ $\boxed{ИП}$ $\boxed{=}$ → (30,68652).

(430,73595)(14,03665)

Обратим внимание на еще один случай вычислений. Пусть, например, следует найти частное от произведений нескольких многоразрядных сомножителей, т.е. вычислить выражение вида

$$\frac{a \times b \times c \times d}{e \times f \times g \times h}.$$

В этом случае целесообразно чередовать действия умножения и деления, что уменьшает опасность переполнения регистра.

ПРОЦЕНТНЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ

При выполнении процентных вычислений следует выделить три основных понятия: начальное число a, принимаемое за 100%; процентную таксу b – число процентов от начального числа a (процентное отношение) и процентную сумму c (процент от числа) – часть начального числа a, содержащую столько процентов, сколько показывает процентная такса b. Часто приходится вычислять также наращенное число $a_н$, полученное сложением начального числа a с процентной суммой c, исчисляемой от данного числа, и уменьшенное число $a_у$, получаемое вычитанием процентной суммы из начального числа. Задачи на процентные вычисления легко решаются с помощью любых моделей микрокалькуляторов, для большего удобства в некоторых моделях предусмотрена специальная программа, вызываемая клавишей $\boxed{\%}$.

Приведем алгоритмы решения основных типов задач на процентные вычисления с помощью микрокалькуляторов: а) не имеющих клавиши $\boxed{\%}$, б) с клавишей $\boxed{\%}$.

Найти процентную таксу (процент) от числа:

$$c = a \times \frac{b}{100} = a \times b, \%$$

а) /a/ $\boxed{\times}$ /b/ $\boxed{\div}$ /100/ $\boxed{=}$ → (c),

б) /a/ $\boxed{\times}$ /b/ $\boxed{\%}$ → (c).

От какого начального числа a процентная сумма c составляет b %?

$$a = c : \frac{b}{100}.$$

а) /c/ $\boxed{\div}$ /b/ $\boxed{\times}$ /100/ $\boxed{=}$ → (a),

б) /c/ $\boxed{\div}$ /b/ $\boxed{\%}$ → (a).

Сколько процентов b составляет процентная сумма c от начального числа a?

$$b = \frac{c}{a} \times 100.$$

а) $\boxed{c}\ \boxed{\div}\ \boxed{a}\ \boxed{\times}\ \boxed{100}\ \boxed{=} \to (b)$,

б) $\boxed{c}\ \boxed{\div}\ \boxed{a}\ \boxed{\%} \to (b)$.

Найти наращенное число $a_н$ по начальному числу a и процентной таксе b:

$$a_н = a\left(1 + \frac{b}{100}\right) = a + \frac{a \times b}{100}.$$

а) $\boxed{a}\ \boxed{\times}\ \boxed{b}\ \boxed{:}\ \boxed{100}\ \boxed{+}\ \boxed{a}\ \boxed{=} \to (a_н)$,

б) $\boxed{a}\ \boxed{+}\ \boxed{b}\ \boxed{\%}\ \boxed{=} \to (a_н)$.

Найти уменьшенное число $a_у$ по начальному числу a и процентной таксе b:

$$a_у = a\left(1 - \frac{b}{100}\right) = a - \frac{a \times b}{100}.$$

а) $\boxed{a}\ \boxed{\times}\ \boxed{b}\ \boxed{\div}\ \boxed{100}\ \boxed{-}\ \boxed{a}\ \boxed{=}\ \boxed{/-/} \to (a_у)$,

б) $\boxed{a}\ \boxed{-}\ \boxed{b}\ \boxed{\%}\ \boxed{=} \to (a_у)$.

ПРИЕМЫ УСЛОЖНЕННЫХ ВЫЧИСЛЕНИЙ

Хорошо владея техникой вычислений, можно даже на простейших моделях микрокалькуляторов достаточно быстро находить значения элементарных функций, притом с точностью, значительно превосходящей точность четырех- и даже пятизначных таблиц. Рассмотрим ряд соответствующих вычислительных приемов, использование которых значительно расширяет вычислительные возможности даже самых простых моделей микрокалькуляторов.

Извлечение квадратного корня

В моделях микрокалькуляторов, имеющих клавиши $\boxed{\sqrt{x}}$ ("Б3-14","Б3-26", "Б3-30" и др.), извлечение квадратного корня из числа, взятого в достаточно широком интервале (обычно от 10^{-8} до $10^{8}-1$), не вызывает никаких затруднений: набираем на клавиатуре подкоренное число x, нажимаем клавишу $\boxed{\sqrt{x}}$ и на индикаторе появляется восьми- или в крайнем случае семизначный результат. Но если в калькуляторе автоматическое извлечение квадратных корней не предусмотрено, можно воспользоваться способом, которым древние вавилоняне владели почти 4 тыс. лет тому назад.

Пусть требуется извлечь квадратный корень из некоторого числа x. Допустим, что y_0 является грубым приближением $\sqrt{x}$ по недостатку. Тогда очевидно, что x/y_0 будет также приближением $\sqrt{x}$, но по избытку (если же y_0 – приближение по избытку, то x/y_0 – приближение по недостатку).

Очевидно, что среднее арифметическое из этих чисел $\frac{y_0 + x/y_0}{2}$ будет более точным приближением к $\sqrt{x}$, чем оба предыдущих. Положим $y_1 = \frac{y_0 + x/y_0}{2}$. Тогда среднее арифметическое между y_1 и x/y_1 $y_2 = 1/2(y_1 + x/y_1)$ будет еще лучшим приближением $\sqrt{x}$. Этот процесс можно повторять многократно, получая каждый раз все более точное значение $\sqrt{x}$, однако обычно двух-трех приближений достаточно для получения корня квадратного с точностью, достигающей 6–8 значащих цифр. Проверим это на примере $\sqrt{2}$. Положим $y_0 = 1{,}4$. Тогда

$$y_1 = 1/2(1{,}4 + 2/1{,}4) = 1{,}4142857,$$

$$y_2 = 1/2\ (y_1 + 2/y_1) = 1{,}4142135,$$

$$y_3 = 1/2(y_2 + 2/y_2) = 1{,}4142135.$$

Уже после вычисления y_2 получаем 8 верных знаков $\sqrt{2}$, т.е. y_3 можно было уже не находить. Если взять более грубое начальное приближение, может увеличиться лишь число циклов вычислений, и на получение результата с той же точностью придется затратить немного больше времени. На микрокалькуляторах с дополнительным регистром памяти вычисление можно представить в виде такой последовательности нажатия клавиш:

$/y_0/$ $\boxed{\text{П+}}$ $\boxed{\times}$ $\boxed{\div}$ $\boxed{\text{ИП}}$ $\boxed{+}$ $\boxed{\text{ИП}}$ $\boxed{\div}$ $\boxed{2}$ $\boxed{=}$ $\boxed{\text{СП}}$ $\boxed{\text{П+}}$ ...

(нажатием $\boxed{\text{СП}}$ стираем предыдущее значение y_0, чтобы оно не прибавилось после нажатия клавиши $\boxed{\text{П+}}$ к y_1). Эта последовательность выполняется несколько раз (обычно 2–3) до достижения желательной точности.

Возьмем любое целое трех- или четырехзначное число, например 387. Найдем $\sqrt{387}$. Очевидно, что искомый корень меньше 20 ($20^2 = 400$). Возьмем $y_0 = 19$. Тогда

$$y_1 = 1/2(y_0 + 387/y_0) = 19{,}684210,$$

$$y_2 = 1/2(y_1 + 387/y_1) = 19{,}672319,$$

$$y_3 = 1/2(y_2 + 387/y_2) = 19{,}672319,$$

$$y_4 = 1/2(y_3 + 387/y_3) = 19{,}672316.$$

С точностью до 10 значащих цифр $\sqrt{387} = 19{,}672315557$. Таким образом, уже y_3 обеспечивает 8 верных знаков результата (на самом деле и значительно больше, но они уже за пределами разрядной сетки индикатора), y_2 обеспечивает 7, а y_1 – 3 верных знака результата.

Найдем теперь $\sqrt{5013}$. Прикинем: $80^2 = 6400$. Слишком много. $70^2 = 4900$. Ближе. Пусть $y_0 = 70$. Тогда

$$y_1 = (1/2(y_0 + 5013/y_0) = 70{,}807145,$$

$$y_2 = 1/2(y_1 + 5013/y_1) = 70{,}802545.$$

Уже y_2 дает восемь верных знаков $\sqrt{5013}$ (в этом можно убедиться, найдя y_3, или же возводя 70,802542 в квадрат. Получается 5012,9999). Этот метод был описан уже после вавилонян около I в. н.э. древнегреческим математиком и механиком Героном Александрийским и распространен на случаи корней любой положительной степени Ньютоном (почему часто называется методом Герона–Ньютона). Он пригоден для обычных письменных или полуписьменных вычислений, очень удобен для вычислений с помощью микрокалькуляторов простейших моделей и используется в специальных подпрограммах, обеспечивающих автоматическое вычисление $\sqrt{x}$, которые хранятся в постоянной памяти более сложных микрокалькуляторов и больших ЭВМ.

Прекращение вычислений по таким программам осуществляется после того, как абсолютная величина разности между двумя соседними приближениями станет не больше некоторого наперед заданного достаточно малого положительного числа ε, характеризующего заданную точность вычислений, т.е. $y_n - y_{n-1} \leqslant \varepsilon$. Этот метод вычислений, заключающийся в нахождении по некоторому известному приближению искомой величины следующего, более точного приближения, называется методом итерации. Не останавливаясь здесь на вопросе о сходимости последовательности таких вычислений, отметим, что все рассмотренные ниже случаи применения метода итерации корректны и допустимы для указанных в каждом отдельном случае интервалов. Для оценки точности извлечения корня при очередном приближении можно, как выше было показано, воспользоваться возведением в квадрат очередного y_n, для чего удобно использовать константную автоматику. На "Б3-23", например, y_n^2 получается нажатием клавиш $\boxed{\times}\boxed{=}$ или $\boxed{\times}$ $\boxed{\times}$. Проверку следует производить после того, как очередное y_n занесено в дополнительный регистр памяти или записано, поскольку оно может понадобиться для дальнейших вычислений, если требуемая точность не достигнута.

Вычисление корней целой положительной степени из данного числа

Способом, подобным примененному для нахождения квадратного корня, можно найти и корни любой целой положительной степени из данного числа x, т.е. $\sqrt[m]{x}$ (при m четном x должен быть положительным). Вот соответствующая итерационная формула:

$$y_{n+1} = 1/m\,(x/y_n^{m-1} + (m-1)\times y_n).$$

При $m = 3$ она приобретает следующий вид:

$$y_{n+1} = 1/3\,(x/y_n^2 + 2y_n),$$

а при $m = 5$

$$y_{n+1} = 1/5\,(x/y_n^4 + 4y_n).$$

Вычисление $\sqrt[3]{x}$ на микрокалькуляторе с дополнительным регистром памяти может быть выполнено в такой последовательности:

$/y_0/$ $\boxed{\text{П+}}$ $\boxed{\times}$ $\boxed{\div}$ $\boxed{\text{ИП}}$ $\boxed{\div}$ $\boxed{\text{ИП}}$ $\boxed{+}$ $\boxed{\text{ИП}}$ $\boxed{+}$ $\boxed{\text{ИП}}$ $\boxed{\div}$ $\boxed{3}$ $\boxed{=}$ $\boxed{\text{СП}}$ $\boxed{\text{П+}}$ ...

Вычислим, например $\sqrt[3]{4560}$. Поскольку $10^3 = 1000 < 4560 < 20^3 = 8000$, значение искомого корня находится между 10 и 20. Положим $y_0 = 15$, тогда, подставляя значение y_0 и последующих приближений y_n в приведенную выше формулу, получим: $y_1 = 16{,}755555$; $y_2 = 16{,}584473$; $y_3 =$

$= 16{,}582691$. Проверим: $y_1^3 = 4704{,}0989$; $y_2^3 = 4561{,}472$; $y_3^3 = 4559{,}9937$. Очевидно, что y_3 содержит по меньшей мере 6 верных знаков результата – для большинства практических случаев этого вполне достаточно (уточненное значение $\sqrt[3]{4560} = 16{,}58268868$).

Аналогично находятся значения корней при других m, хотя с увеличением m вычисления становятся все более громоздкими.

Вычисление тригонометрических функций

С помощью определенных приемов с достаточной точностью можно вычислить значения прямых и обратных тригонометрических функций на простых моделях микрокалькуляторов. Но поскольку при этом аргументы тригонометрических функций выражаются в радианной мере, сначала остановимся на переводе градусной меры в радианную, и наоборот, и на выражении с достаточной точностью числа π.

Каким следует брать число π? Значение $\pi = 3{,}14$ и даже $3{,}1416$ во многих случаях не соответствует той точности, которая достигается при вычислениях с микрокалькулятором. Из многочисленных приемов получения достаточно большого числа верных десятичных знаков числа π упомянем наиболее удобный (предложенный Адрианом Антонисом в конце XVI в.): $\pi \approx \dfrac{355}{113} = 3{,}1415929\ldots$ В нем верны шесть десятичных знаков, его легко запомнить*.

Любопытен путь, которым Антонис пришел к этому результату. Сначала он показал, что $3\dfrac{15}{106} < \pi < 3\dfrac{17}{120}$. Эти приближения ($3{,}141509\ldots < \pi < 3{,}141666\ldots$) почти на два порядка точнее, чем известное приближение Архимеда, но для практического применения особых преимуществ не имеют. Далее Антонис вопреки всем правилам складывает отдельно числители и знаменатели дробных частей этих приближений:

$$3\frac{15+17}{106+120} = 3\frac{32}{226} = 3\frac{16}{113} = \frac{355}{113}.$$

Таким образом, совершенно незаконный прием случайно привел к столь удобному для запоминания и вполне достаточному по точности для практических вычислений на микрокалькуляторе выражению числа π через обыкновенную дробь. Этот результат был опубликован сыном Адриана Антониса Мецием, поэтому его называют иногда числом Меция. То же приближение может быть получено строго с помощью представления числа π подходящими дробями.

Перевод градусов в радианы и наоборот. Между градусной (α) и радианной (x) мерами углов и дуг существует следующая зависимость:

$\alpha/x = 180^\circ/\pi$, откуда $x = \alpha^\circ \cdot \pi/180^\circ$.

---

*Эта дробь получится, если написать по два раза три первых нечетных числа (113 355), и вторую тройку из этих шести цифр разделить на первую.

Перевод из градусов в радианы.

Поэтому если, например, $\alpha = 19°$, приняв $\pi = 355/113$, получаем

$$x = \frac{19 \times 355}{180 \times 113} = 0{,}33161256 \text{ рад.}$$

Уточненное значение 19° в радианах с точностью до 9 десятичных знаков 0,331612557. Погрешность едва ощутима. Алгоритм перевода в этом случае очень прост:

/19/ [÷] /180/ [×] /355/ [÷] /113/ [=] → (x).

Пусть теперь α равно 19°35′. Минуты следует превратить в десятичные доли градуса, для чего число минут необходимо разделить на 60: $19°35' = 19° + \frac{35}{60} = \frac{35}{60} + 19°$.

Последовательность действий на микрокалькуляторе выглядит так:

/35/ [÷] /60/ [+] /19/ [÷] /180/ [×] /355/ [÷] /113/ [=] → (0,34179369).

Не вызывает затруднений и перевод в радианную градусной меры, выраженной в градусах, минутах и секундах. Например, если $\alpha = 19°35'27''$, то

$$x = \frac{((27 : 60 + 35) : 60 + 19) \times 355}{180 \times 113} = 0{,}3419245$$

(погрешность — две единицы последнего разряда: более точное значение 0,3419243).

Может понадобиться перевод из градусной меры в радианную целой серии угловых величин, например 21°, 21°10′, 21°20′, 21°30′... Тогда есть смысл использовать константную автоматику. Не следует забывать, что умножение на константу (или умножение константы) в разных моделях микрокалькуляторов осуществляется по-разному: в одних константой должен быть второй сомножитель, в других — первый. В качестве константы берется число $C = \frac{\pi}{180} = \frac{355}{113 \times 180} = 0{,}0174533$.

Задача перехода от радианной меры к градусной также решается весьма просто: из соотношения $\alpha/x = 180°/\pi$ следует, что

$$\alpha = \frac{x \times 180°}{\pi} = \frac{x \times 180 \times 113}{355}.$$

Пусть $x = 0{,}5$ рад. Тогда $\alpha = \frac{0{,}5 \times 180 \times 113}{355} = 28{,}647884°$.

На микрокалькуляторе: /0,5/ [×] /180/ [÷] /355/ [×] /113/ [=] →(28,647884°). Неверен лишь последний знак: уточненное значение 0,5 рад = 28,6478897°...

Чтобы десятичные доли градуса перевести в минуты (и секунды), следует умножить их на 60 и 3600. На микрокалькуляторе это выполняется так:

/28,647884/ [−] /28/ [=] [×] /60/ [=] [−] /38/ [×] /60/ [=] → (28°38′52″,4).

(0,647884) (38,87304)

На индикаторе обозначения градус (°), минута (′), секунда (″) не воспроизводятся, но об этом при переводе в градусную меру не следует забывать.

Вычисление синуса. При вычислении синуса (и других тригонометрических функций) некоторого произвольного аргумента с помощью микрокалькулятора следует поступать так же, как и при использовании соответствующих математических таблиц: аргумент следует заключить в отрезок $0 \leqslant \alpha \leqslant 90^\circ$ $(0 \leqslant x \leqslant \pi)$. Для этого, если аргумент задан в градусах, его делят на 90, вычитают целую часть из полученного частного, а разность умножают на 90. Полученный результат в градусах и градусных долях, выраженных десятичной дробью, будет искомым значением аргумента на отрезке $[0^\circ, 90^\circ]$. Что дробная часть результата выражена десятичной дробью – не помеха, именно в этой форме градусная мера переводится в радианную.

Алгоритм выделения α на отрезке $[0^\circ, 90^\circ]$ может быть представлен так:

A ÷ 90 − [y] × 90 = → (α),

где $[y]$ обозначает целую часть частного $A^\circ : 90$.

Пусть $A^\circ = 2822^\circ$, тогда

2822 ÷ 90 = − 31 = × 90 = → (31,99995) = 32°.

(31,35555) (0,35555)

Если угол задан в радианах, поступают аналогично, но вместо 90° берется $\dfrac{\pi}{2} \approx \dfrac{355}{113 \times 2} = 1{,}5707964$ (более точно 1,570796327).

В соответствии с теорией рядов дифференциального исчисления функция $y = \sin x$ может быть представлена следующей последовательностью:

$$y = \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1},$$

где аргумент x должен быть выражен в радианной мере.

Поскольку эта последовательность представляет собой знакочередующийся ряд с монотонно убывающими по абсолютной величине членами, то, ограничившись вычислением первых n членов этой последовательности, можем быть уверены в том, что модуль абсолютной погрешности результата вычислений не будет превосходить модуля первого отброшенного члена, т.е. $|u_{n+1}|$. Если ограничиться тремя первыми членами этого разложения, то $u_4 = \dfrac{|x^7|}{7!}$. При $x = 15^\circ = \pi/12$ $|u_4| = \dfrac{\pi/12}{7!} = \dfrac{0{,}28179938^7}{5040} = \dfrac{0{,}00008429}{5040} =$ $= 0{,}000000017$.

О чем говорит приведенный расчет? О том, что найденное по трем членам разложения в ряд значение $\sin 15^\circ$ будет определено с точностью до седьмого десятичного знака. При $x = 30^\circ = \pi/6$ $|u_4| = 0{,}000002$, а при $x = 45^\circ = \pi/4$ $|u_4| = 0{,}00004$, т.е. в первом случае получим не менее пяти, а во втором не менее четырех верных знаков. После возрастания x примерно до 0,82 рад $\approx$ $\approx 47^\circ$ точность вычисления не превышает четырех десятичных знаков и продолжает уменьшаться. В этом случае, исходя из соотношения $\sin x =$

$= \cos(\pi/2 - x)$, получим более точное значение $\sin x$, если применим ряд для косинуса (который рассмотрим ниже).

Итак, для углов до $\pi/4$ для вычисления значения $\sin x$ можно применять сумму $x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$. Для удобства при вычислениях ее можно привести к следующему виду:

$$\sin x \approx \left(\left(\frac{x^2}{20} - 1\right)\frac{x^2}{6} + 1\right)x. \qquad (1)$$

Последовательность вычислений на микрокалькуляторе с дополнительным регистром памяти выглядит так:

x [П+] [×] [=] [÷] 20 [−] 1 [×] [ИП] [×] [ИП] [÷] 6
[+] 1 [×] [ИП] [=] $\to (\sin x)$.

Если в калькуляторе дополнительный регистр памяти (клавиши [П+], [М+] или [ЗАП]) отсутствует, придется x или x^2 соответствующее число раз вводить заново.

Вычислим с помощью приведенного выражения синус какой-либо дуги и сравним полученное значение с аналогичным, найденным на инженерном микрокалькуляторе, вычисляющем элементарные функции автоматически. Пусть $\alpha = 27°29'$. Перевод минут в десятичные доли градуса дает 27,483333°, после преобразования в радианы получаем 0,47967467. Вычисления по формуле (1) приводят к результату $\sin 27°29' = 0{,}4614907$. На инженерном калькуляторе ответ 0,4614906, т.е. погрешность составляет всего единицу седьмого десятичного разряда (в сторону увеличения).

Для вычисления той же функции можно воспользоваться и другим соотношением, если исходить из ее разложения в цепную дробь вида

$$b_0 + \cfrac{a_1}{b_1 + \cfrac{a_2}{b_2 + \cdots + \cfrac{a_n}{b_n}\cdots}}.$$

В этом случае

$$\sin x = \boxed{x - \cfrac{x^3}{6 + \cfrac{3x^2}{10 - \cfrac{11x^2}{42\ldots}}}}$$

Ограничимся частью разложения, которая выделена рамкой:

$$\sin x = x - \cfrac{x^3}{6 + \cfrac{3x^2}{10}} = \cfrac{x\left(6 + \cfrac{3x^2}{10}\right) - x^3}{6 + \cfrac{3x^2}{10}} = \frac{x}{3} \times \frac{60 - 7x^2}{20 + x^2}.$$

После несложных преобразований приходим к выражению:

$$\sin x \approx \left(\left(\frac{x^2}{20} + 1\right)^{-1} \times 10 - 7\right) \times \frac{x}{3}, \tag{2}$$

преимущество которого хотя бы в том, что в нем по сравнению с выражением (1) на одну операцию ввода x^2 меньше. Для того же значения x получаем $\sin x = 0{,}4614892$. Погрешность примерно та же по абсолютной величине, но в сторону уменьшения (по недостатку).

Последнее обстоятельство приводит к мысли при особо точных вычислениях брать для $\sin x$ среднее арифметическое результатов вычислений, полученных по формулам (1) и (2). Для того же значения x получаем $\sin x = 0{,}4614904$, разница с полученным на инженерном микрокалькуляторе – всего две единицы восьмого десятичного разряда. Проверка показывает, что при приближении угла к $\pi/4$ точность уменьшается до пяти-шести верных десятичных знаков, для углов, близких к $\pi/3$, – пяти верных десятичных знаков и почти до самого конца интервала $\pi/3 < x < \pi/2$ обеспечивается не менее четырех десятичных знаков результата. Впрочем, для аргументов, больших $\pi/4$, удобнее воспользоваться соотношением $\sin x = \cos(\pi/2 - x)$ и разложением в ряд для $\cos x$.

Формулу (1) можно несколько упростить таким преобразованием:

$$\sin x \approx x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{20}x^5 = x\left(1 - \frac{1}{6}x^2 + \frac{x^4}{20}\right) = x\left(\frac{(x^2-100)^2 + 20}{120}\right).$$

В этом случае потребуется лишь однократный ввод аргумента x и его квадрата x^2. Если не нужна большая точность вычислений, можно ограничиться всего двумя членами разложения $\sin x$ в ряд:

$$\sin x = x - x^3/6 = x\,(1 - x^2/6).$$

Если на калькуляторе есть клавиша $\boxed{\sqrt{\ }}$, это выражение можно преобразовать так, что аргумент достаточно будет ввести один раз:

$$x - \frac{1}{6}x^3 = \left(x^2 - \frac{1}{3}x^4 + \frac{1}{36}x^6\right)^{1/2}.$$

Если аргумент x значительно меньше единицы, то членом $x^6/36$ можно пренебречь. Тогда, поскольку

$$x^2 - \frac{1}{3}x^4 = -\left(\frac{x^4 - 3x^2}{3}\right) = \frac{-(x^4 - 2\cdot 4/2x^2 + 9/4) + 9/4}{3} = \frac{9-(2x^2-3)^2}{12},$$

получаем следующее приближенное выражение для $\sin x$:

$$\sin x \approx \sqrt{\frac{9-(2x^3-3)^2}{12}}. \tag{3}$$

Вычислительный алгоритм имеет в этом случае такой вид:

$\boxed{x}\ \boxed{\times}\ \boxed{=}\boxed{\times}\ \boxed{2}\ \boxed{-}\ \boxed{3}\ \boxed{\times}\ \boxed{=}\boxed{-}\ \boxed{9}\ \boxed{\div}\boxed{12}\ \boxed{/-/}\ \boxed{\sqrt{\ }} \to (\sin x)$.

Если клавиша изменения знака $\boxed{/-/}$ отсутствует, можно, например, возвести полученное подкоренное выражение в квадрат и из результата дважды извлечь квадратный корень.

С помощью выражения (3) можно находить значения синусов углов почти до 17° ($\sim$ 0,3 радиана) с погрешностью, не превышающей $5 \cdot 10^{-5}$ (т.е как и посредством четырехзначных таблиц тригонометрических функций). Вычислим, например, $\sin 16^\circ 30'$, в радианах $\sin 0{,}287979$; по формуле (3) получим 0,2839710, с помощью инженерного калькулятора 0,28401533 – погрешность $4{,}5 \cdot 10^{-5}$.

Эту же формулу без существенного снижения точности можно применить и для вычислений в более широком диапазоне значений аргументов, если воспользоваться соотношением $\sin 2x = 2 \sin x \cos x = 2 \sin x \sqrt{1 - \sin^2 x}$. Извлечение квадратного корня можно приберечь для заключительного этапа с учетом того, что

$$\sin^2 2x = 1 - \cos^2 2x = 1 - (1 - 2\sin^2 x)^2 = -((2\sin^2 x - 1)^2 - 1)$$

и $\sin 2x = \sqrt{-((2\sin^2 x - 1)^2 - 1)}$.

Дальнейшее расширение диапазона может быть достигнуто применением последнего соотношения для $\sin 4x$ и т.д.

Во всех рассмотренных случаях мы приводим полные показания индикатора, соответствующие содержимому его регистра. Сколько же десятичных знаков достаточно сохранить в окончательном результате? Ответ на этот вопрос зависит от того, с какой точностью измеряются и задаются угловые величины. В обычной практике они задаются в градусах и минутах, будем считать, с точностью до полминуты. При вычислении $\sin x$ изменение аргумента на $0{,}5'$ влечет в интервале $0 < x < \pi/4$ изменение функции примерно на 0,00015; это означает, что в результате достаточно четырех десятичных знаков.

В точных геодезических вычислениях расчеты могут вестись и в секундах. Поскольку при изменении аргумента на полсекунды функция $\sin x$ в том же интервале изменяется примерно на 0,000002, то для таких вычислений вполне достаточно шести десятичных знаков. Лишь в некоторых астрономических и других особо точных расчетах может понадобиться еще бо́льшая точность, но там будет более целесообразным применение инженерных калькуляторов с повышенной разрядностью и автоматическим вычислением соответствующих функций. Значит, для большинства тригонометрических вычислений восьмиразрядная индикация является избыточной, и в окончательном результате вычислений достаточно сохранить 5–6 десятичных знаков.

Вычисление косинуса. Разложение функции $y = \cos x$ в степенной ряд имеет вид

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots$$

Ограничившись тремя первыми членами этого ряда, после элементарных преобразований получим выражение

$$\cos x \approx (x^2/12 - 1) \cdot x^2/2 + 1, \qquad (4)$$

которым можно воспользоваться для нахождения значений этой функции. Погрешность вычислений по этой формуле не превысит 10^{-5}, если аргумент не превышает 0,3 рад (примерно 17°). 5 верных десятичных знаков результата, как мы уже знаем, вполне достаточно для большинства практических вычислений. При $x = \pi/6$ погрешность равна $3 \cdot 10^{-5}$, что обеспечивает 4 верных десятичных знака. При $x = \pi/4$ погрешность становится более ощутимой – $3 \cdot 10^{-4}$, поэтому для углов, превышающих 0,3 рад, при усиленных требованиях к точности вычислений лучше воспользоваться формулой $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$, которая и при значительно больших значениях аргумента обеспечивает весьма точный результат

Выражение (4) можно преобразовать в более удобный для работы с микрокалькулятором вид:

$$1 - x^2/2 + x^4/24 = 1/24\ ((x^4 - 12x^2 + 36) - 36 + 24) = 1/24(x^2 - 6)^2 - 12)$$

В этом случае понадобится лишь однократный ввод аргумента x.

Повышенную точность вычисления косинуса обеспечивает выражение, которое можно получить, используя разложение функции $\cos x$ в цепную дробь:

$$\cos x = -((x^2/30 + 1)^{-1} \cdot 5 - 3) \cdot x^2/4 + 1. \qquad (5)$$

Сравним результаты вычислений по приведенным формулам с вычислением косинуса на инженерном микрокалькуляторе для угла в $\pi/4 = 0{,}78539816$ рад ($\cos \pi/4 = 0{,}707106781\ldots$). По формуле (4) $\cos x = 0{,}7074292$, по формуле (5) – 0,7071068.

Формула (4) обеспечивает три верных десятичных знака, формула (5) – пять, хотя вычисления здесь не намного сложнее. Косинусы для аргументов, превышающих $\pi/4$, лучше находить по соотношению $\cos x = \sin(\pi/2 - x)$ и формулам (1) или (2) для синусов.

Вычисление тангенса. Как известно, $\operatorname{tg} x = \sin x/\cos x$; поэтому значения этой функции для x нетрудно найти, если известны значения $\sin x$ и $\cos x$ (напомним, что $\cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x}$). Эту функцию можно вычислить и непосредственно. Разложение ее в ряд имеет вид

$$\operatorname{tg} x = x + 1/3x^3 + 2/15x^5 + 17/315x^7 + \ldots$$

Этот ряд знакопостоянен и убывает значительно медленнее, чем ряды для $\sin x$ и $\cos x$, а это значит, что, ограничившись тремя первыми членами этого разложения и получив после несложных преобразований формулу

$$\operatorname{tg} x \approx x/120\ ((4x + 5)^2 + 95), \qquad (6)$$

можем рассчитывать примерно на следующую точность: для $x < 0{,}15$ рад (6,6°) – не менее шести десятичных знаков, для $0{,}15 < x < 0{,}3$ рад (17,2°) – не менее четырех, для $0{,}3 < x < \pi/6$ – три и для $\pi/6 < x < \pi/4$ – один десятичный знак.

Как видим, формула (6) может быть практически использована лишь для аргументов, не превышающих 0,3 рад. Без существенного снижения точности можно найти тангенсы бóльших аргументов, используя известную формулу тангенса двойного угла $\operatorname{tg} 2x = \dfrac{2\operatorname{tg} x}{1 - 2\operatorname{tg}^2 x}$. Но можно предложить более простой и надежный способ, если использовать для вычисления тангенса его разложение в непрерывную дробь, которое имеет вид

$$\operatorname{tg} x = \boxed{\cfrac{x}{1 - \cfrac{x^2}{3 - \cfrac{x^2}{5 - \ldots \cfrac{x^2}{2n+1}}}}}$$

Если ограничиться выражением, заключенным в рамку, т.е. взять подходящую дробь

$$\cfrac{x}{1 - \cfrac{x^2}{3 - \cfrac{x^2}{5}}},$$

можно после преобразований

$$\frac{15x - x^3}{15x - 6x^2} = \frac{30x - 2x^3}{30x - 12x^2} = \frac{25 + 5 - 2x^2}{5 - 2x^2} \cdot \frac{x}{6} = \left(\frac{25}{5 - 2x^2} + 1\right) \cdot \frac{x}{6}$$

получить формулу

$$\operatorname{tg} x \approx ((-2/5x^2 + 1)^{-1} \cdot 5 + 1) \cdot x/6, \qquad (7)$$

пригодную для вычисления тангенсов на простых микрокалькуляторах со значительно большей, чем по формуле (6), точностью вычислений. Сравним результаты вычисления по этой формуле, по формуле (6) и с табличными значениями данной функции (табл. 6).

Таблица 6

Аргумент	Табличное значение	Вычисления по формуле (6)	Погрешность	Вычисления по формуле (7)	Погрешность
0,15 рад	0,15113521	0,15113512	$1 \cdot 10^{-7}$	0,15113521	Не прослеживается
0,30 рад	0,30933624	0,309324	$1,3 \cdot 10^{-5}$	0,30933608	$2,4 \cdot 10^{-7}$
$\pi/6$	0,57735027	0,5766952	$-6,6 \cdot 10^{-4}$	0,5773415	$8,7 \cdot 10^{-6}$
$\pi/4$	1,00000000	0,9867355	$-1,4 \cdot 10^{-2}$	0,99978763	$2,2 \cdot 10^{-4}$

Как видим, формула (7) обеспечивает почти на два порядка бóльшую точность вычисления тангенса практически без затраты дополнительного времени и усилий.

Что касается функции $y = \operatorname{ctg} x$, то при необходимости ее значение для данного x легко найти, исходя из того, что $y = 1/\operatorname{tg} x$.

Вычисление обратных тригонометрических функций. Обратные тригонометрические функции могут быть также вычислены на простых микрокалькуляторах по формулам, которые несложно получить, ограничившись несколькими членами разложения этих функций в ряд или их представлением в виде цепной дроби.

Ряд для арксинуса может быть представлен так:

$$\arcsin x = x + x^3/6 + 3x^5/40 + 5x^7/1112 + \ldots$$

Если ограничиться тремя его первыми членами, то после несложных преобразований придем к выражению

$$\arcsin x \approx x\ (1 + x^2/6(1 + 9x^2/20)), \qquad (8)$$

которое может быть использовано для нахождения данной функции, однако при приближении аргумента к 0,5 рад его точность резко падает. Лучшие результаты обеспечивает формула, которая получается из представления функции $y = \arcsin x$ в виде цепной дроби:

$$\arcsin x = ((-9/20x^2 + 1)^{-1} \cdot 10 + 17) \cdot x/27. \qquad (9)$$

Сопоставим результаты вычисления $\arcsin x$ по формулам (8) и (9) с табличными данными (табл. 7).

Таблица 7

Аргумент	Табличное значение	Вычисления по формуле (8)	Погрешность	Вычисления по формуле (9)	Погрешность
0,10 рад	0,10016742	0,1001674	Не прослеживается	0,1001674	Не прослеживается
0,25	0,25268026	0,252677	$3 \cdot 10^{-6}$	0,2526795	$7 \cdot 10^{-7}$
0,50	0,52359878	0,523177	$4{,}3 \cdot 10^{-4}$	0,5234742	$1{,}3 \cdot 10^{-4}$
0,75	0,848062	0,838110	$1 \cdot 10^{-2}$	0,8441423	$4 \cdot 10^{-3}$

Преимущества на стороне формулы (9), но и она при аргументах, больших 0,5, не обеспечивает даже той точности, какую дают стандартные математические таблицы.

Эти же формулы могут быть использованы и для вычисления $\arccos x$ на основании соотношения $\arccos x = \pi/2 - \arcsin x$.

Если на микрокалькуляторе есть клавиша $\boxed{\sqrt{x}}$, можно использовать формулу

$$\arccos x \approx \sqrt{6(1 - \sqrt{\frac{1 + 2x}{3}}}\,,$$

в которой аргумент требуется ввести только один раз. Максимальная погрешность в интервале $0{,}7 < x < 1$ составляет $6 \cdot 10^{-4}$.

Функцию $\operatorname{arctg} x$ для $|x| < 1$ можно с достаточной для большинства практических случаев точностью вычислить путем ее разложения в ряд

$$\operatorname{arctg} x = x - x^3/3 + x^5/5 - x^7/7 + \ldots$$

Если ограничиться тремя первыми членами этого ряда, получим формулу

$$\operatorname{arctg} x \approx x\ (1 - x^2/3\ (1 - 3x^2/5)).$$

Более точные значения арктангенса могут быть получены, если взять четыре члена этого ряда:

$$\operatorname{arctg} x \approx x\ (1 - x^2/3(1 - 3x^2/5\ (1 - 5x^2/7))).$$

Можно применить также следующее соотношение:

$$\operatorname{arctg} x \approx \pi/2 - 1/x\ (1 - 1/3x^2\ (1 - 3/5x^2) \text{ для } |x| > 1$$

или

$$\operatorname{arctg} x \approx (0{,}6x^2 + 1)^{-1}\ \cdot 5 + 4)\ \cdot\ x/9; \quad 0 \leqslant x < 1/2.$$

Выводы о погрешностях, которые следует учитывать при использовании этих соотношений, предоставляем сделать самому читателю. Приведем несколько контрольных значений этой функции:

Аргумент	**Функция** $y = \operatorname{arctg} x$ **(в радианах)**
0,1	0,09966866
0,25	0,24497866
0,5	0,46364761
0,75	0,64350114
1,0	0,7853981

Арккотангенс при необходимости может быть определен по тем же формулам с учетом того, что $\operatorname{arcctg} x = \pi/2 - \operatorname{arctg} x$. Можно воспользоваться также тем, что $\operatorname{arcctg} x = \operatorname{arctg} 1/x$.

Вычисление экспонент и логарифмов

Распространение микрокалькуляторов значительно потеснило таблицы логарифмов чисел, поскольку для выполнения обычных арифметических действий и их любых последовательностей микрокалькуляторы намного удобнее и эффективнее. Упрощается и возведение в целую степень, а также (при наличии клавиши $\boxed{\sqrt{x}}$) извлечение корня четной степени. Однако при решении многих теоретических задач математики и ее практических приложений показательная функция $y = a^x$ и обратная ей логарифмическая функция $y = \log_a x$ продолжают сохранять свое значение. Вот почему практически на всех моделях инженерных микрокалькуляторов предусмотрены специальные микропрограммы для автоматического вычисления показательных и логарифмических функций и соответствующие клавиши для их ввода. В простых микрокалькуляторах такие микропрограммы не предусмотрены, но это не является непреодолимым препятствием, когда надо вычислить эти функции для отдельных значений аргументов.

В математике весьма часто рассматривается и применяется показательная функция при основании e, где e — число Эйлера, определяемое как предел, к которому стремится $(x + 1/x)^x$, когда x стремится к ∞, т.е.

$$e = \lim_{x \to \infty} (x + 1/x)^x.$$

Это трансцендентное число, т.е. число, которое (как и π) не является корнем какого-либо алгебраического уравнения. Приближенное значение $e = 2{,}718281828459045...$ Для наших целей достаточно брать $e = 2{,}71828$.

Разложение этой функции в степенной ряд имеет вид

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ... + \frac{x^n}{n!} + ...$$

($n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \, ... \, n$, т.е. равно произведению всех последовательных целых чисел от 1 до n включительно).

Хотя этот ряд сходится при всех значениях x, нужно взять слишком много его членов, чтобы с "терпимой" точностью, хотя бы с четырьмя десятичными знаками, получить значение e^x при достаточно больших значениях x. Если, например, ограничиться тремя первыми членами этого разложения, т.е. положить $e^x = 1 + x + x^2/2 = 1 + x(1 + x/2)$, то погрешность будет меньше, чем 10^{-4}, только для $|x| < 0{,}01$.

И все же есть различные способы приближенного вычисления e^x с повышенной точностью на простом микрокалькуляторе. Так, из разложения e^x в цепную дробь можно после некоторых преобразований получить выражение

$$e^x \approx ((-(x^2/60 + 1)^{-1} \cdot 5 + 6) \cdot 1/x - 0{,}5)^{-1} + 1, \qquad (10)$$

которое обеспечивает достаточно высокую точность вычислений в интервале $0 < x < 1$. Например, при $x = 0{,}2$ получаем $e^x = 1{,}2214027$, что всего на $1 \cdot 10^{-8}$ меньше табличного значения. Даже при $x = 1$ имеем пять верных значащих цифр результата $e \approx 2{,}7183098$ вместо $2{,}7182818...$ Поскольку $e^{2x} = (e^x)^2$, появляется возможность достаточно широкого изменения интервала значений аргумента без существенного снижения точности. Так, представив $e^{6,4}$ в виде $(((((e^{0,2})^2)^2)^2)^2)^2$ и вычислив $e^{0,2} \approx 1{,}2214027$ по формуле (10), после пятикратного возведения этого результата в квадрат (что не составляет труда) получаем $e^{6,4} = 601{,}84345$ (табличное значение $601{,}845$), т.е. обеспечивается пять верных значащих цифр.

Можно привести еще более простое соотношение, которое тем не менее обеспечивает более высокую точность вычислений: $\dfrac{(x+3)^2+3}{(x-3)^2-3}$, получаемое из разложения e^x в цепную дробь. По крайней мере для $|x| \leqslant 0{,}2$ оно дает восемь верных значащих цифр. Применение же соотношения $e^{2nx} = (e^x)^{2n}$ обеспечивает дальнейшее расширение интервала значений x без существенного снижения точности. Например, вычисление того же $e^{6,4}$ этим способом дает те же пять верных знаков $(601{,}8359)$, но намного проще стали вычисления. Их выполнение особенно удобно, когда на микрокалькуляторе имеется дополнительный регистр памяти.

Если значение x отрицательно, то все вычисления следует произвести с его абсолютной величиной, а затем найти число, обратное данному, так как $e^{-x} = 1/x$. Это особенно удобно сделать, используя клавишу $\boxed{1/x}$, если она имеется, или воспользоваться описанным выше приемом.

Посредством функции $y = e^x$ (экспоненциальной) математически описываются многие процессы в физике, химии, биологии, скорость протекания которых пропорциональна наличному количеству изменяющейся величины, например, распад радиоактивных элементов, рост колоний бактерий и многие другие. Для демонстрации связанных с функцией $y = e^x$ вычислений на простом микрокалькуляторе рассмотрим расчет изменения атмосферного давления с возрастанием высоты над уровнем моря, которое описывается так называемой барометрической формулой Лапласа, имеющей вид

$$p = p_0 e^{-H/7020},$$

где p_0 – атмосферное давление на уровне моря (1013,25 гектопаскаль), p – атмосферное давление на высоте H над уровнем моря. Определим атмосферное давление в самой высокой точке нашей страны – Пике Коммунизма ($H = 7495$ м).

Нам необходимо вычислить $1013{,}25 \cdot e^{-7495/7620}$. Поскольку $7495/7620 = 0{,}9836 > 0{,}2$, подберем такую целую степень $2{,}2^n$, чтобы $0{,}9836/2^n$ стало бы меньше 0,2, т.е. попало бы в интервал $]0; 0{,}2[$, например, при $n = 8$ $0{,}9836 : 8 = 0{,}12294 < 0{,}2$. Нахождение e^x в данном случае можно свести к вычислению выражения

$$(e^{-x/8})^8 = (((1/e^{x/8})^2)^2)^2 = \left(\left(\left(\frac{(x/8-3)^2+3}{(x/8+3)^2+3}\right)^2\right)^2\right)^2.$$

Вычислительный алгоритм может быть представлен в следующем виде:

/7495/ $\boxed{\div}$ /7620/ $\boxed{=}$ $\boxed{\div}$ $\boxed{8}$ $\boxed{\text{ЗАП}}$ $\boxed{+}$ $\boxed{3}$ $\boxed{\times}$ $\boxed{=}$ $\boxed{+}$ $\boxed{3}$

(0,9826) (0,12295)

$\boxed{=}$ $\boxed{\text{ИП}}$ $\boxed{-}$ $\boxed{3}$ $\boxed{\times}$ $\boxed{=}$ $\boxed{+}$ $\boxed{3}$ $\boxed{\div}$ $\boxed{\text{ИП}}$ $\boxed{=}$ $\boxed{\times}$ $\boxed{=}$ $\boxed{=}$ $\boxed{=}$

(11,27742) (9,7528135) (0,88430814) (0,3739633)

$\boxed{\times}$ /1013,25/ $\boxed{=}$ → (378,918) ≈ 378,92 гектопаскаль.

Вычисления на инженерном микрокалькуляторе с клавишей $\boxed{e^x}$ дают 378,922. Итак, наши вычисления дали пять верных значащих цифр. Для практических целей достаточно трех-четырех – именно столько их приводится в ежедневных сводках погоды. В нашем случае в ответе можно оставить число 378,9 или даже 379.

Хотя с распространением микрокалькуляторов логарифмические вычисления в значительной степени утратили свое значение, логарифмическая функция $y = \log_a x$, обратная показательной $y = a^x$, продолжает оставаться объектом изучения и имеет многочисленные приложения. При этом особое значение имеет функция $y = \ln x$, основанием которой является число e. Логарифмы чисел при этом основании называются натуральными. В тех относительно редких случаях, когда нам могут понадобиться натуральные логарифмы отдельных чисел, их можно будет вычислить по одной из следующих приближенных формул (обратите внимание на интервал рекомендуемых значений аргумента):

$$\ln(x+1) \approx x\,(1 - x/2\,(1 - 2x/3\,(1 - 3x/4\,(1 - 4x/5)))); \quad -1 < x \leqslant 1, \tag{11}$$

$$\ln x \approx y\,(1 - y/2\,(1 - 2y/3\,(1 - 3y/4))); \quad y = x - 1; \quad 0 < x \leqslant 2, \tag{12}$$

$$\ln \frac{x+1}{x-1} \approx \frac{2}{x}\,(1 + 1/3x^2\ (1 + 3/5x^2\ (1 + 5/7x^2\ (1 + 7/9x^2))));\ |x| \geqslant 1.$$

(13)

Весьма точные значения $\ln x$ для x в интервале $]0{,}7; 1{,}6[$ могут быть получены из формулы

$$\ln x \approx \left(\left(-0{,}6\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2 + 1\right)^{-1} \cdot 5 + 4\right)\left(\frac{2}{9}\,\frac{x-1}{x+1}\right), \qquad (14)$$

причем в указанном интервале относительная погрешность результата вычислений оказывается меньшей, чем 0,00003%, т.е. обеспечивается не менее шести верных значащих цифр. Так, $\ln 1{,}5$, вычисленный по этой формуле, дает результат 0,4054649. Табличное значение 0,4054651, всего на $2 \cdot 10^{-7}$ больше.

Если понадобится более точное значение $\ln x$ для x вне указанного интервала, следует использовать соотношение

$$\ln x = \ln\ (2^n \cdot y) = \ln y + n \ln 2 = \ln y + n \cdot 0{,}6931472, \qquad (15)$$

при этом n подбирается так, чтобы удовлетворялось неравенство $0{,}7 < y = x/2^n < 1{,}6$. Например, если $x = 25{,}5$, то n следует взять равным 4 или 5. Тогда $y_1 = 25{,}5 : 2^4 = 25{,}5.16 = 1{,}59375$, а $y_2 = 25{,}5 : 2^5 = 25{,}5 : 32 = 0{,}796875$. Тогда y_1, вычисленный по формуле (14), будет равен 0,46608798, а $\ln 25{,}5 = 0{,}46608798 + 4 \cdot 0{,}6931472 = 3{,}2386767$. При $y_2 = 0{,}796875$ $\ln x = 3{,}2386785$. Табличное значение $\ln 25{,}5$ равно 3,2386784. При $n = 4$ будет шесть верных значащих цифр, а при $n = 5$ – даже семь.

От натуральных логарифмов легко перейти к десятичным, и наоборот. Так как из определения логарифма следует, что $10^{\lg x} = x$ и $e^{\ln x} = x$, то, логарифмируя по основаниям e и 10, получаем

$$\ln x \cdot \ln 10 = \ln x; \quad \lg x = \ln x \cdot \ln e.$$

Отсюда

$$\lg x = 1/\ln 10 \cdot \ln x; \quad \ln x = 1/\lg e \cdot \lg x \qquad (\ln 10 = 2{,}3025851).$$

Поскольку $1/\ln 10 = 0{,}4342945 \ldots \approx 0{,}4343$, при переходе от натуральных логарифмов к десятичным часто используется соотношение $\lg x = 0{,}4343 \cdot \ln x$, и наоборот, $\ln x = \lg x : 0{,}4343 = 2{,}3026 \cdot \lg x$.

Для чего могут понадобиться вычисления с логарифмами? Прежде всего, пожалуй, для действий со степенно-показательными функциями вида $z = x^y$, где x – положительное, $\neq e$, а y – любое вещественное число. Поскольку $\ln x^y = y \cdot \ln x$, то $x^y = e^{y \ln x}$. Отсюда следует, что для вычисления $z = x^y$ необходимо найти $\ln x$, умножить найденное значение на y и вычислить $e^{y \ln x}$. Вот здесь, работая с простым микрокалькулятором, и нужно знать, как вычислять на нем значения функций вида $y = \ln x$ и $y = e^x$. На инженерных микрокалькуляторах предусмотрены специальные подпрограммы, автоматически выполняющие эти комбинированные вычисления (клавиша $\boxed{x^y}$ или $\boxed{y^x}$).

Вычислим, например, $z = 3{,}1416^{2{,}7183}$. Сначала находим $\ln 3{,}1416$ по формулам (14) и (15), получаем 1,447; умножаем полученное на 2,7183; результат 3,1117; затем находим $e^{3{,}1117}$, сведя вычисления к аргументу из интервала]0; 0,2[, получаем 22,458. Найдено π^e с точностью до пяти значащих цифр.

Вычисление гиперболических функций

С экспоненциальной функцией $y = e^x$ тесно связан еще один класс элементарных функций – гиперболические синус ($y = \operatorname{sh} x$), косинус ($y = \operatorname{ch} x$), тангенс ($y = \operatorname{th} x$) и котангенс ($y = \operatorname{cth} x$). Эти функции задаются через e^x следующими соотношениями:

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}; \quad \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}; \quad \operatorname{th} x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}; \quad \operatorname{cth} x = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}.$$

Мы остановимся на особенностях вычисления функции $y = \operatorname{ch} x$. График этой функции называется цепной линией – именно такую форму принимает цепь или тяжелый гибкий шнур, подвешенный за концы.

Поскольку $e^x = 1 + x + x^2/2 + x^3/6 + x^4/24 + x^5/120 + x^6/720 + \ldots$, а

$e^{-x} = 1 - x + x^2/2 - x^3/6 + x^4/24 - x^5/120 + x^6/720 \ldots$,

то

$$\frac{e^x + e^{-x}}{2} = \operatorname{ch} x = 1 + x^2/2 + x^4/24 + x^6/720 + \ldots \qquad (16)$$

Это выражение можно использовать для вычисления $y = \operatorname{ch} x$ Из него же можно весьма просто найти e^x. Если ограничиться тремя членами правой части соотношения (16), то, удвоив обе части, получим $e^x + 1/e^x = 2 + x^2 + x^6/14$. Пусть $e^x = y$. Приходим к квадратному уравнению $y^2 - zy + 1 = 0$, где $z = 2 + x^2/2 + x^4/12$. Выделив полный квадрат, преобразуем его в выражение $z = 1/12\ ((x^2 + 6)^2 - 12)$, которое одним вводом аргумента можно легко вычислить на простом микрокалькуляторе. После этого останется решить квадратное уравнение $y^2 - zy + 1 = 0$:

$$y_{1,2} = \frac{z \pm \sqrt{z^2 - 4}}{2}.$$

Один корень его будет e^x, второй e^{-x}.

Проверим этот алгоритм вычисления для $x = 0{,}2$. Получим:

$z = 2{,}0401333$; $y_1 = e^x = 1{,}221402$; $y_2 = e^{-x} = 0{,}81873125$

(шесть верных значащих цифр). Полусумма корней этого уравнения, т.е. 1,020067, дает нам значение гиперболического косинуса для данного аргумента с той же точностью.

Зная $\operatorname{ch} x$, нетрудно найти значения и других гиперболических функций, исходя из следующих соотношений:

$$\operatorname{ch} x = \sqrt{y^2 - 1}; \quad \operatorname{th} x = \sqrt{1 - 1/y^2}; \quad \operatorname{cth} x = 1/\sqrt{1 - 1/y^2}.$$

Умножение и деление многоразрядных чисел с получением результата, в котором количество значащих цифр превышает количество разрядов индикатора

Уже при умножении двух пятиразрядных целых чисел в ответе должно получиться девять или десять значащих цифр. Между тем на индикаторе простого микрокалькулятора высвечивается не более восьми разрядов. Можно ли в этом случае получить результат, в котором количество разрядов превышает возможности индикатора?

Пусть, например, нужно перемножить 87654321 и 12345678. Представим искомое произведение в следующем виде:

$$(87650000 + 4321) \times (12340000 + 5678).$$

Теперь по правилу умножения двучленов перемножим 8765 и 1234, приписав к результату восемь нулей, затем 8765 умножим на 5678, а 4321 – на 1234, приписав к каждому из этих произведений по четыре нуля, наконец 4321 умножим на 1234. Затем, избегая переполнения разрядной сетки индикатора, в два-три приема найдем сумму всех четырех произведений с учетом нулей справа. Запись можно расположить так:

8765 × 1234 =	10816010 0000 0000
8765 × 5678 =	4976 7670 0000
4321 × 1234 =	533 2114 0000
4321 × 5678 =	2453 4638
	10821520 2237 4638

5678 заменить

Нами получен шестнадцатиразрядный результат при умножении двух чисел.

Еще проще получить результат деления двух чисел (в котором количество разрядов частного будет лимитироваться только терпением вычислителя). Разделим, например, 436784 на 385.

436784 : 385 = 1134,5038 ^{961} $_{0389}$	
5 436$\boxed{4}$90	1134 × 385
194000 : 385 = 503,8961	
193655	503 × 385
345000 : 385 = 896,10389	
344960	896 × 385
40000 : 385...	436784 : 385 = 1134,50389610389 ....

Фактически мы применили здесь традиционный способ деления: делимое делится на делитель, целая часть частного умножается на делитель и вычитается из делимого, остаток снова делится на делимое, после того как к нему приписано ... три нуля (вместо одного, как обычно), тем самым полнее используются возможности микрокалькулятора и ускоряется вычислительный процесс. Цифры частного, которые получаются при последующих делениях, для наглядности несколько смещены по высоте. Процесс можно продолжать сколько угодно, если только один из очередных остатков не разделится нацело.

ИНЖЕНЕРНЫЕ МИКРОКАЛЬКУЛЯТОРЫ

Уже вскоре после начала серийного выпуска первых моделей простых микрокалькуляторов появились и более сложные модели, автоматически, с большой точностью и почти мгновенно вычисляющие по заданным аргументам значения многих элементарных функций – прямых и обратных тригонометрических, показательных, логарифмических и некоторых других. По новому стандарту за ними закреплено название "инженерные микрокалькуляторы".

Во всех моделях этого типа имеются дополнительные регистры памяти. Так как функциональные возможности инженерных микрокалькуляторов значительно расширены, потребовалось или значительно увеличить количество клавиш для ввода команд, или же всем или части клавиш поручить выполнение двух и даже трех функций. По первому пути пошли разработчики микрокалькулятора "Электроника С3-15" – любая из 41 клавиши этой модели выполняет только одну функцию. В большинстве же моделей инженерных калькуляторов имеется клавиша $\boxed{F}$ (или $\boxed{F_1}$ и $\boxed{F_2}$), называемая префиксной, или клавишей совмещенной функции, предварительное нажатие которой поручает другим клавишам выполнение вторых функций (которые обозначены обычно над соответствующими клавишами).

Во многих моделях калькуляторов этого типа имеются клавиши $\boxed{(}$ и $\boxed{)}$ (одноуровневые скобки) или $\boxed{[(}$ $\boxed{)]}$ (двухуровневые скобки), наличие которых свидетельствует о более высоком классе этих моделей по их вычислительной логике и облегчает, как ниже будет показано, выполнение комбинированных арифметических действий.

К инженерным микрокалькуляторам относятся следующие (выпускаемые в нашей стране): "С3-15", "Б3-18" в нескольких модификациях, "Б3-19М", "Б3-32", "Б3-35", "Б3-36", "Б3-37", "Б3-38" и "МК-51". В табл. 8 приводятся основные характеристики микрокалькуляторов отечественного производства. В большинстве моделей инженерных микрокалькуляторов, кроме естественной формы представления чисел на индикаторе, применяется также представление в форме с плавающей запятой или в полулогарифмической форме. При этом на индикаторе число представляется в так называемом модифицированном нормализованном виде $N = M \cdot 10^p$, где значение мантиссы M должно быть заключено в пределах от 1 до 10 ($1 \leqslant M \leqslant 10$). Это дает возможность значительно расширить диапазон представляемых на индикаторе чисел, как весьма малых по абсолютной величине, так и очень больших: от $\pm 10^{-100}$ до $\pm 9{,}9999999 \cdot 10^{99}$. Количество же значащих цифр числа ограничивается количеством разрядов, отводимых в индикаторе на представление мантиссы: 10 в модели "С3-15", 8 – во всех остальных моделях, выпускаемых у нас в настоящее время.

При работе с тригонометрическими функциями наиболее удобны те модели, в которых аргумент выражается как в градусной, так и в радианной мере, например "Б3-18", "Б3-32", "Б3-36", "Б3-38". В двух последних моделях предусмотрен также автоматический перевод градусной меры в радианную и наоборот (клавиши $\boxed{р-г}$ и $\boxed{г-р}$), в модели "Б3-38", кроме того, вычисление тригонометрических функций для аргументов, выраженных в градах (дуга в четверть окружности, т.е. в 90°, делится на 100 градов; 360° = 400 градов). На этой же модели предусмотрен автоматический перевод минут и секунд градусной меры в десятичные доли градуса. Менее удобны в этом смысле те модели, в которых дуги должны быть предварительно выражены в радианах ("С3-15").

Большинство моделей инженерных микрокалькуляторов имеет сальдирующие, накапливающие, дополнительные регистры памяти (клавиша $\boxed{\text{П+}}$): при посылке содержимого регистра индикатора в память оно автоматически прибавляется к содержимому регистра памяти. В некоторых моделях содержимое регистра индикатора может вычитаться из содержимого регистра памяти (клавиша $\boxed{\text{П}-}$), а в моделях "Б3-35", "Б3-36" и "Б3-38" предусмотрено также умножение и деление содержимого регистра памяти на содержимое регистра индикатора (клавиши $\boxed{\text{П}\times}$ и $\boxed{\text{П}\div}$). В моделях "Б3-18" и "Б3-37" возможно, кроме того, накапливание суммы квадратов чисел из регистра индикатора (клавиша $\boxed{\text{П} + x^2}$).

В "С3-15" два регистра оперативной памяти. Для записи числа в первый из них следует нажать клавишу $\boxed{\text{ЗАП}}$ и любую клавишу с нечетной цифрой, для записи во второй следует после клавиши $\boxed{\text{ЗАП}}$ нажать клавишу с любой четной цифрой, для вызова числа из памяти нажимается клавиша $\boxed{\text{Сч}}$ и любая клавиша с нечетной (для первого регистра) или четной (для второго регистра) цифрой. Число, записанное в первый регистр памяти, может быть использовано в вычислениях и без предварительного вызова. Пусть, например, число A записано в первый регистр, а B – во второй регистр памяти. Тогда действия $B : A$ или $B-A$ могут быть выполнены так: $\boxed{\text{Сч}}$ $\boxed{6}$ $\boxed{\div}$ $\boxed{=}$ и $\boxed{\text{Сч}}$ $\boxed{4}$ $\boxed{-}$ $\boxed{=}$. В этой же модели возможно по данным x и y автоматическое вычисление выражения $\sqrt{x^2 + y^2}$ (клавиша $\boxed{|\rho|}$), что удобно при переходе от прямоугольной декартовой к полярной системе координат и при вычислении длины гипотенузы прямоугольного треугольника по длинам катетов. Во многих инженерных микрокалькуляторах предусмотрен также обмен содержимым регистров памяти и индикатора (клавиша $\boxed{\text{П} \leftrightarrow x}$).

Интересна особенность микрокалькулятора "Б3-32" (рис. 13). По данным коэффициентам a, b, c квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ с его помощью автоматически находятся корни x_1 и x_2 так же, как и корни системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными. В моделях "Б3-36" и "Б3-38" автоматически вычисляется факториал числа $n\,(n!)$, в последней модели предусмотрена также автоматизация статистических расчетов – вычисление среднего арифметического, суммы квадратов величин, среднеквадратического и смешенного среднеквадратического отклонения введенных величин*.

Модель "Б3-19М" – единственный из выпускаемых в нашей стране инженерных микрокалькуляторов, в котором используется инверсный ввод. В этой модели отсутствует клавиша $\boxed{=}$, вместо нее имеется клавиша ввода первого операнда $\boxed{\uparrow}$, и действие $a + b = c$ ($a \times b = c$ и т.д.) выполняется на

---

*Модель "Б3-38" имеет наименьшие габариты (55×91×5,5 мм) и массу (50 г), т.е. размеры маленького зеркальца.

Таблица 8

Характеристика и выполняемые функции	"С3-15"	"Б3-18а" "Б3-18м"	"Б3-19м"	"Б3-32"
Тип индикатора*	СИД	ВЛД	СИД	ВЛД
Число разрядов индикатора	15	9	12	9
Число разрядов мантиссы в режиме с плавающей запятой	10		7	5
Дополнительные регистры памяти		$\boxed{П+}$ $\boxed{П-}$ $\boxed{П\leftrightarrow x}$ $\boxed{П+x^2}$ $\boxed{П\leftrightarrow x^2}$		$\boxed{П+}$
Число адресуемых регистров	2	1	1+4 стековых	1
Аргументы тригонометрических функций	Радианы	Градусы Радианы	Градусы	Градусы Радианы
Перевод градусов в радианы и наоборот	Нет	Нет	Нет	Нет
Вычисления со скобками	$\boxed{(}$ $\boxed{)}$	Нет	Нет	$\boxed{[(}$ $\boxed{)]}$
Статистические функции	Нет	Нет	Нет	Нет
Масса, кг	0,4	0,4	0,4	0,3
Потребляемая мощность, Вт	1,2	0,35 1,0	0,8	0,3
Размер, мм				
длина	170	160 170	166,5	120
ширина	90	90 86,5	86	73
высота	32	40 27	41	30,4
Источник питания**	С, Ак	С, Ак С, Ак, Б	С, Ак	С, Б
Число и тип элементов***	4в	4в–д 4а–д	4д	3а
Время непрерывной работы от автономного источника, ч	2,5	3	3	3

* СИД – светоизлучающие диоды, ВЛД – вакуумно-люминесцентный дисплей, ЖК – индикаторы на жидких кристаллах.
** С – питание от сети, Б – батареи сухих элементов, Ак – аккумуляторы.
*** а – А-316, б – СЦ-30, в – ЦНК-0,45, г – Д-0,25, д – Д-0,55, е – ДМП-0,12.

этой модели так: $\boxed{a}$ $\boxed{\uparrow}$ $\boxed{b}$ $\boxed{+}$ $\rightarrow (c)$. Такой способ ввода имеет в некоторых случаях определенные преимущества по сравнению с обычным.

Отметим, что если результат некоторой операции представляет собой число, по абсолютной величине меньшее единицы (т.е. с отрицательным порядком), то в некоторых моделях инженерных микрокалькуляторов (например, "Б3-19", "Б3-36") он выражается в форме с плавающей запя-

	"Б3-35"	"Б3-36"	"Б3-37"	"Б3-38"	"МК-51"
	ВЛД	ВЛД	СИД	ЖК	ЖК
	12	12	9	9	9
	8	8	–	5	5
	$\boxed{П+}$ $\boxed{П-}$ $\boxed{ПХ}$ $\boxed{П:}$ $\boxed{П \leftrightarrow x}$	$\boxed{П+}$ $\boxed{П-}$ $\boxed{ПХ}$ $\boxed{П:}$ $\boxed{П \leftrightarrow x}$	$\boxed{П+}$ $\boxed{П-}$ $\boxed{П \leftrightarrow x}$ $\boxed{П + x^2}$	$\boxed{П+}$ $\boxed{П-}$ $\boxed{П \leftrightarrow X}$	$\boxed{П+}$ $\boxed{П-}$ $\boxed{П \leftrightarrow X}$
	1	1	1	1	1
	Градусы	Градусы Радианы	Градусы Радианы	Градусы Радианы Грады	Градусы Радианы Грады
	Нет	Есть	Нет	Нет	Нет
	$\boxed{[(}$ $\boxed{)]}$	$\boxed{[(}$ $\boxed{)]}$	$\boxed{[(}$ $\boxed{)]}$	$\boxed{[(}$ $\boxed{)]}$	$\boxed{[(}$ $\boxed{)]}$
	Нет	Нет	Нет	Есть	Есть
	0,25	0,2	0,2	0,05	0,1
	0,3	0.35	0,3	0,0006	0,0006
	143	145	155	55	130
	79	78,5	78	91	71
	22	17	28	5,5	8
	С, Ак	С, Ак	С, Б	Б	Б
	4г	3г	3а	2б	1е
	6	7		800	1000

Примечание. В "Б3-32" автоматически находятся корни квадратных уравнений и систем линейных уравнений с двумя неизвестными, в "С3-15" вычисляется $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$, в "Б3-36", "Б3-38", "МК-51" – $n!$ Во всех моделях инженерных микрокалькуляторов предусмотрено автоматическое вычисление значений показательных, логарифмических, прямых и обратных тригонометрических функций.

той, что на первых порах несколько непривычно для вычислителя. Например, умножение 22,5 на 0,00456 дает 0,1026, но в этих моделях данный результат представится так: 1,026–1, т.е. $1{,}026 \cdot 10^{-1}$; sin 30,5° будет представлен как 5,07538–1 и т.д. Впрочем, привычка воспринимать числа в этой форме и оперировать с ними приобретается довольно быстро.

При описании приемов работы на инженерных микрокалькуляторах

Рис. 13. Микрокалькулятор "Электроника Б3-32"

мы будем использовать следующий способ обозначения ввода в действие совмещенной функции: после изображения префиксной клавиши $\boxed{\text{F}}$ следует надклавишное обозначение совмещенной функции в квадратных скобках. Например, запись /30/ $\boxed{\text{F}}$ [sin] означает, что должно быть вычислено значение синуса 30°. При этом следует иметь в виду, что в разных моделях инженерных калькуляторов выполнение совмещенных операций может быть поручено клавишам с разными основными обозначениями, например вычисление функции sin x в моделях "Б3-18", "Б3-36", "Б3-37" производится после нажатия клавиш $\boxed{\text{F}}$ и $\boxed{1}$, а в моделях "Б3-19М" и "Б3-32" – $\boxed{\text{F}}$ и $\boxed{7}$ и т.д.

ВВОД ЧИСЕЛ И КОМАНД

Перед началом очередного вычисления необходимо убедиться в том, что в рабочем регистре, регистре индикатора и в дополнительных регистрах памяти не хранятся результаты предыдущих вычислений. Для этого, если питание микрокалькулятора после предыдущего вычисления не выключалось, следует поступать по-разному. В некоторых моделях, например в "Б3-36" и "Б3-37", однократное нажатие клавиши $\boxed{\text{C}}$ очищает все регистры, в других для очистки регистров индикатора и рабочего клавишу $\boxed{\text{C}}$ следует нажать дважды, а если необходимо снять режим переполнения или совмещенной функции, то и трижды ("Б3-18"). В большинстве моделей нажатием клавиши $\boxed{\text{C}}$ очищаются все регистры, если же необходимо очистить только регистр индикатора, то следует нажать клавишу $\boxed{\text{C}_\text{x}}$ (модели "С3-15" и "Б3-19М"), $\boxed{\text{CN}}$ ("Б3-32") или $\boxed{\text{CK}}$ (модель "Б3-38") и т.д. Для снятия режима совмещенной функции в ряде моделей предусмотрена клавиша [CF] ("Б3-32", "Б3-36", "Б3-37"). При использовании модели "Б3-38", имеющей две клавиши совмещенных функций [F_1] и [F_2], со способами очистки различных регистров в разных режимах следует ознакомиться по инструкции, прилагаемой к микрокалькулятору.

Ввод операндов в инженерных микрокалькуляторах производится так же, как и в простых. Следует лишь иметь в виду, что при вводе правильных десятичных дробей вида 0, *abc*... в одних моделях ("С3-15", "Б3-18", "Б3-36", "Б3-37") достаточно нажать клавишу [·] и вслед за тем ввести дробную часть (например, ввод 0,625 производится так: [·] [6] [2] [5]), в других же моделях ("Б3-19", "Б3-32") перед нажатием клавиши [·] следует обязательно нажать клавишу [0] . Как уже упоминалось, в большинстве моделей инженерных микрокалькуляторов предусмотрены ввод и работа с числами в форме с плавающей запятой. Для этого после ввода мантиссы нажимается клавиша [ВП] (ввод порядка) (в моделях "С3-15", "Б3-36") или [n] (в "Б3-19М"), [EEX] (в "Б3-32"), [F] [ВП] (в "Б3-38"), после чего вводится порядок с соответствующим знаком.

ВЫПОЛНЕНИЕ АРИФМЕТИЧЕСКИХ ДЕЙСТВИЙ

Как и на простых микрокалькуляторах, для выполнения арифметических действий во всех моделях инженерных микрокалькуляторов (кроме "Б3-19") после ввода первого операнда нажимается соответствующая операционная клавиша. При этом на регистре индикатора продолжает сохраняться первый операнд или результат выполнения предыдущих операций, а калькулятор подготавливается к выполнению данной операции. После этого вводится следующий операнд, нажимается клавиша [=] или клавиша последующей операции и на индикаторе появляется очередной результат. Во всех микрокалькуляторах этого типа обеспечивается выполнение цепочных операций, когда одна за другой выполняются несколько арифметических операций, к которым можно прибавить также операции $\sqrt{x}$ и $1/x$. При необходимости приходится записывать результаты промежуточных операций или же использовать дополнительные регистры памяти, которые имеются во всех моделях инженерных микрокалькуляторов.

Выполнение комбинированных действий значительно облегчается в тех моделях, где имеются клавиши [(] и [)] или, еще лучше, [[(] [)]] .

Например, нужно произвести вычисление $6:(9-\sqrt{5+4}\times 2)$. На микрокалькуляторе без клавиш со скобками можно или занести значение числителя в память, затем вычислить знаменатель и разделить на него числитель, или после соответствующего анализа воспользоваться следующей последовательностью вычислений:

[5] [+] [4] [=] [√] [×] [2] [=] [/−/] [+] [9] [÷] [6] [=] [1/x] → (2).

Как видим, даже в таком относительно простом примере пришлось проявить известную изобретательность для выполнения данного вычислительного процесса. Он намного упрощается, если используемый калькулятор имеет клавиши со скобками. Вот как можно применить их в данном случае:

$\boxed{6}\ \boxed{:}\ \boxed{[(}\boxed{9}\ \boxed{-}\ \boxed{[(}\boxed{5}\ \boxed{+}\boxed{4}\ \boxed{=}\ \boxed{F}\ \boxed{\sqrt{\ }}\boxed{\times}\boxed{2}\boxed{=}\ \boxed{)]}\ \boxed{)]}\boxed{=} \rightarrow (2).$

Чем же калькуляторы со скобками по своему устройству отличаются от калькуляторов без скобок? Бесскобочные микрокалькуляторы имеют два оперативных регистра чисел X и У, микрокалькуляторы с простыми скобками – три: X, У, Z, с двойными – четыре: X, У, Z, T. Проследим, как меняется содержимое регистров и происходит вычисление в рассмотренном выше случае:

T	0	0	0	0	0	6	6	6	6	6	6	6	6	6	0	0	0
Z	0	0	6	6	6	9	9	9	9	9	9	9	9	9	6	0	0
У	0	6	0	0	9	0	0	5	5	4	4	3	3	2	9	6	0
X	6	6	0	9	9	0	5	5	4	9	3	3	2	6	6	3	2
Ввод	6	−	[(	9	−	[(	5	+	4	=	F √	×	2	=	)]	)]	=

Как видим, при использовании клавиш $\boxed{[(}$ $\boxed{)]}$ последовательность вычислений на микрокалькуляторе максимально приближается к традиционной. Обратите внимание на связь между нажатием клавиш со скобками и изменением содержания регистров У, Z и T: при нажатии открывающих скобок $\boxed{[(}$ содержимое этих регистров сдвигается на один регистр вверх, а при нажатии закрывающих – вниз, и только после того как содержимое "верхних" регистров попадет в "нижние" операционные регистры, оно принимает участие в непосредственном вычислении.

Иной путь рационализации вычислений избран в инженерном микрокалькуляторе "Б3-19М" (а также в программируемых калькуляторах "Б3-21", "Б3-34", "МК-54" и др.). Процесс вычислений суммы произведений вида $(a \times b) + (c \times d)$ может быть в обозначениях клавиш представлен так:

$\boxed{a}\boxed{\uparrow}\boxed{b}\ \boxed{\times}\boxed{c}\ \boxed{\uparrow}\boxed{d}\boxed{\times}\ \boxed{+} \rightarrow$

Так же просто на этой модели находится произведение сумм вида $(a + b) \times (c + d)$.

Особенность работы модели "Б3-19" состоит в использовании так называемого инверсного ввода. Внешне это проявляется, как уже упоминалось, в отсутствии клавиши $\boxed{=}$ и наличии клавиши ввода $\boxed{\uparrow}$, с помощью которой осуществляется переход первого операнда из регистра X в регистр У и дальнейшее продвижение информации в особом устройстве, называемом стеком (от англ. stack – кипа, пакет), или стековой памятью, и включающем дополнительный вычислительный регистр. Стековая память обеспечивает выполнение различных последовательных вычислений "скобочного" типа, а также вычисления с константой. Например, надо вычислить $(3 \times 4) + (5 \times 6)$; пронаблюдаем за работой стековой памяти:

Z	0	0	0	0	0	12	12	12	12
У	0	3	3	0	12	5	5	12	12
X	3	3	4	12	5	5	6	30	$\underline{42}$
Ввод	3	↑	4	×	5	↑	6	×	+

(окончательный результат подчеркнут).

Здесь нетрудно заметить следующие особенности: при нажатии клавиши $\boxed{\uparrow}$ содержимое регистра Х дублируется в регистре У, содержимое У продвигается "вверх", в регистр Z, а содержимое регистра Z, если оно отлично от 0, исчезает.

При нажатии операционных клавиш $\boxed{+}$ $\boxed{-}$ $\boxed{\times}$ $\boxed{\div}$ содержимое регистров Х и У соответствующим образом связывается, т.е. выполняется данная операция. Результат ее выполнения заносится в регистр Х и высвечивается на индикаторе, содержимое регистра У, сыграв свою роль при выполнении данной операции, исчезает, а содержимое регистра Z дублируется в У, сохраняясь в Z. Это свойство стековой памяти модели "БЗ-19" позволяет использовать содержимое регистра Z в качестве константы при сложении и умножении. Если же содержимое этого регистра должно быть делителем или вычитаемым – константами, то следует использовать клавишу обмена содержимым регистров Х и У. Взаимодействие регистров в этом случае демонстрируется на следующем примере: $(((24:2):2)-2) = ?$

Z	0	0	2	2	2	2	2	2	2	2
У	0	2	2	2	2	2	12	2	6	2
X	2	2	2	24	24	12	2	6	2	4
Ввод	/2/	$\boxed{\uparrow}$	$\boxed{\uparrow}$	/24/	$\boxed{F}$ [x ⇄ y]	$\boxed{\div}$	$\boxed{F}$ [x ⇄ y]	$\boxed{\div}$	$\boxed{F}$ [x ⇄ y]	$\boxed{-}$.

При вычислении прямых и обратных тригонометрических функций, логарифмических функций $\ln x$ и $\lg x$, а также показательной функции e^x используется регистр У; находящаяся в нем информация сохраняется и может быть использована для последующих вычислений. При выполнении одноместных операций $\sqrt{x}$ и $1/x$ регистры У и Z не используются, их содержимое сохраняется и также может быть использовано в последующих операциях. При вычислении значений x^y(/y/ $\boxed{\uparrow}$ /x/ $\boxed{F}$ [x^y]) для хранения промежуточных результатов занимаются все регистры, после окончания вычисления значение x^y попадает в регистр Х и высвечивается, а в регистрах У и Z сохраняется число 2,302585 (ln 10).

На других моделях инженерных микрокалькуляторов действия с константами производятся так же, как и на простых.

ВЫЧИСЛЕНИЕ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ФУНКЦИЙ

При вычислениях с элементарными функциями необходимо учитывать, во-первых, те ограничения, которые накладываются на аргумент областью определения данной функции (например, корни четной степени можно вычислять только для неотрицательного аргумента; аргументом логарифмической функции может быть только положительное число и т.д.), во-вторых, количеством разрядов, выделяемых для изображения числа в индикаторе. В большинстве моделей инженерных калькуляторов диапазон представляемых чисел огромен, и если используется представление в форме с плавающей запятой, то, казалось бы, ограничения, накладываемые на аргумент в этом отношении, несущественны. Тем не менее, вычисляя, скажем, e^x, мы не можем дать x значение, большее, чем 230,2585, так как из выражения $y = e^x$ следует $x = \ln y$; положив y максимально большим числом, которое мы можем ввести, а именно $9{,}9999999 \cdot 10^{99}$, получаем в качестве натурального логарифма данного числа именно 230,2585; ограничивается и значение аргумента для тангенса $x = 180° \cdot n \pm 89{,}9°$, ..., причем количество девяток в дробной части тем меньше, чем больше n.

Ограничения, связанные с количеством разрядов индикатора, значительно ужесточаются для тех моделей, в которых числа выражаются только в естественной форме ("Б3-18", "Б3-37"). При вычислении e^x x не должен быть больше 18,42, при вычислении 10^x x не может быть больше 8 и т.д. Вообще, работая на калькуляторе определенной модели, следует ознакомиться с ограничениями, накладываемыми на аргументы соответствующих функций по заводской инструкции. Однако в некоторых случаях такие ограничения бывают завышены. Так, в инструкции для "Б3-18" отмечается, что точность вычисления тригонометрических функций за пределами $-360° < x < +360°$ ($|2\pi|$ радиан) падает. Это утверждение избыточно, в чем можно убедиться на следующем примере. Вычислим

$\sin(-81°)$: $\boxed{81}$ $\boxed{/-/}$ $\boxed{F}$ [sin] $\to$ (–0,987688).

Теперь найдем

$\sin 9999999° = \sin(27777 \times 360° + 279°) = \sin(27778 \cdot 360° - 81°) =$

$= \sin(-81°) \to (-0{,}987688)$.

Как видим, результат вычислений и для случая, когда x взят в интервале $]-360°, 360°[$ и даже в еще более узком $]-90°, 90°[$, один и тот же, что и для $x > 2777 \cdot 360°$ (кстати, все десятичные знаки результата верные и абсолютная погрешность составляет всего $3{,}4 \cdot 10^{-7}$). Для тангенса тех же аргументов получаем разницу, не превышающую единицы последнего разряда.

Если мы все-таки допустим грубую ошибку, введя аргумент, взятый вне области определения данной функции, т.е. попытаемся совершить некорректную операцию, микрокалькулятор тем или иным способом даст знать об этом. На индикаторе "С3-15" высветится ряд точек, в "Б3-19" и некоторых других моделях – ряд тире или буква "Е", а в новых моделях программируемых калькуляторов "Б3-34" и "МК-54" – слово error – ошибка (та же индикация может обозначать и переполнение разрядной сетки индикатора, и разрядку источников питания).

Наличие восьмиразрядного индикатора не всегда обеспечивает выдачу восьми- или хотя бы семизначных значений элементарных функций. В модели "Б3-32" выдаются всего пять знаков, при представлении числа в форме с плавающей запятой три разряда из восьми отводятся на порядок числа и его знак.

Отметим особенности вычисления функции x^y (в модели "С3-15" – y^x). В большинстве моделей оно осуществляется в два этапа: сначала в соответствии с соотношением $x^y = e^{y \ln x}$ после набора x и нажатия клавиши $\boxed{F}$ $[x^y]$ происходит вычисление $\ln x$, затем после набора второго аргумента y и нажатия клавиши $\boxed{=}$ находится произведение $y \ln x$ и вычисляется $x^y =$ $= e^{y \ln x}$. Микропрограмма, вызываемая клавишей $\boxed{x^y}$, используется при вычислении значений этой функции как при $y > 1$ ("степеней"), так и при $y < 1$ ("корней"). Пусть, например, необходимо найти $\sqrt[3]{7}$. Поскольку $\sqrt[3]{7} = 7^{1/3}$, имеем $\boxed{7}$ $\boxed{F}$ $[x^y]$ $\boxed{3}$ $\boxed{F}$ $[1/x]$ $\boxed{=}$ $\to$ (1,912931).

Вычисления с тригонометрическими функциями

Чаще всего на практике тригонометрические функции приходится применять при решении треугольников, плоских и сферических, прямоугольных и косоугольных. Решение плоских прямоугольных треугольников на инженерных микрокалькуляторах не вызывает затруднений. Весьма просто производится и решение косоугольных треугольников по теореме синусов. Пусть в треугольнике ABC даны $BC = a$, A и B. Найти $AC = b$. Из формулы теоремы синусов $a/\sin A = b/\sin B$ следует $b = a \cdot \sin B/\sin A$. Алгоритм решения (в обозначениях клавиатуры) в общем случае может быть представлен так:

/A/ [F] [sin] [F] [ЗАП] /B/ [F] [sin] [×] /a/ [÷] [F] [ИП] [=] → (b).

При использовании традиционных средств вычислений известные неудобства представлял случай решения косоугольных треугольников по теореме косинусов, когда сторона треугольника определяется по двум другим сторонам и углу между ними. Соответствующая формула имеет вид $c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos C}$ и отличается "нелогарифмичностью". Если продумать последовательность вычислений и учесть возможности инженерных микрокалькуляторов, применение теоремы косинусов не вызовет каких-либо усложнений. Здесь очень удобно использовать клавишу [П + x²], которая имеется в моделях "Б3-18", "Б3-37". Если в подкоренном выражении вычислить сначала $-2a \cdot b \cdot \cos C$, ввести его в память ([F] [ЗАП]), то после этого достаточно будет ввести a и затем нажать клавиши [F] [П + x²]: квадрат a прибавится к тому, что уже записано в памяти, остается то же сделать с b и из содержимого дополнительного регистра памяти извлечь квадратный корень.

Вот как будет выглядеть вычислительный алгоритм в этом случае:

/C/ [F] [cos] [×] /2/ [×] /a/ [×] /b/ [/-/] [F] [ЗАП] /a/ [F] [П + x²]
/b/ [F] [П + x²] [F] [ИП] [F] [√] → (c).

Если в вашей модели микрокалькулятора автоматическое вычисление $\text{П} + x^2$ не предусмотрено, следует возвести a и b в квадрат отдельно и сложить с предварительно вычисленным $-2a \cdot b \cdot \cos C$.

Такой вычислительный процесс используется не только в геометрии. Так, в механике и электротехнике расчет суммы двух синусоидальных колебаний с одинаковой частотой, сдвинутых по фазе, выполняется по следующим формулам:

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 \cdot A_2 \cdot \cos(\varphi_2 - \varphi_1)},$$

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{A_1 \cdot \sin\varphi_1 + A_2 \cdot \sin\varphi_2}{A_1 \cdot \cos\varphi_1 + A_2 \cdot \cos\varphi_2}.$$

Первая из них, как легко видеть, почти не отличается от формулы теоремы косинусов (и тесно с нею связана).

Рассмотрим теперь пример более сложной задачи с тригонометрическими расчетами, в которой особенно заметны возможности микрокалькуляторов, — попробуем найти кратчайшее расстояние на поверхности земного шара между двумя географическими пунктами по их координатам (такую задачу часто приходится решать геодезистам, штурманам судов и самолетов). Это расстояние совпадает с длиной дуги большого круга на поверхности Земли, проходящего через данные точки, а центр круга — с центром Земли (такая дуга называется локсодромией). Расстояние в градусах выражается формулой сферической теоремы косинусов:

$$a = \arccos\,(\cos b \cdot \cos c + \sin b \cdot \sin c \cdot \cos A),$$

где A — дуговая разность долгот, b и c — дуговые расстояния данных пунктов от географического полюса, широта которого 90°.

Найдем расстояние между Москвой и Киевом. Географические координаты Москвы: широта 55°45′, долгота по Гринвичу +2ч30$^{\text{М}}$,3; Киева — соответственно 50°27′ и + 2ч2$^{\text{М}}$,0. Средний радиус Земли принимается равным 6371,032 км.

Прежде всего переведем разности долгот в градусы: 2ч 30$^{\text{М}}$,0 — 2ч 2$^{\text{М}}$,0 = = 28$^{\text{М}}$,3; 1$^{\text{М}}$,0 = 15′, отсюда 28$^{\text{М}}$,3 · 15′ = 424,5′ = 7,075°. Далее:

$$b = 90° - 55°45' = 34°15' = 34{,}25°,$$

$$c = 90° - 50°27' = 39°33' = 39{,}55°.$$

Отсюда

$$a = \arccos\,(\cos 34{,}25° \cdot \cos 39{,}55° + \sin 34{,}25° \cdot \sin 39{,}55° \cdot \cos 7{,}075°).$$

На "Б3-36" вычислительный алгоритм может быть представлен в следующем виде:

/b/ [F] [sin] [F] [ЗП] /c/ [F] [sin] [×] [F] [ИП] [=] [F] [ЗП] /A/
(0,562805) (0,636751) (0,3583666)

[F] [cos] [×] [F] [ИП] [=] /b/ [F] [cos] [F] [ЗП] /c/ [F] [cos] [×]
(0,992386) (в = 0,3556380) (0,82659) (0,771069)

[F] [ИП] [=] [+] /в/ [=] [ARC] [cos]
(0,6373579) (0,9929959) (6°,78526)

Мы получили искомое расстояние в градусах дуги большого круга. Для контроля в круглых скобках приведены значения тригонометрических функций соответствующих аргументов и других промежуточных данных. В процессе вычислений использован дополнительный регистр памяти, однако его оказалось недостаточно, поэтому один из промежуточных результатов (0,3556380 — подчеркнутый) пришлось "запоминать" на бумаге, а затем в нужном месте ввести его заново. "Запоминать" можно было не все цифры этого числа, поскольку точность исходных данных в этом примере такова, что достаточно пяти знаков после запятой.

На этом примере также видно, что одного дополнительного регистра памяти часто бывает недостаточно. В данном случае удобно было бы использовать модель "С3-15", в которой два дополнительных регистра памяти, или "Б3-19" с дополнительным стековым регистром. Для последней модели упрощенная запись алгоритма имеет следующий вид:

/sin b/ [↑] /sin c/ [×] /cos A/ [×] [↑] /cos a/ [↑] /cos c/ [×] [↑] [F] [arccos] → (a).

Мы получили ответ в дуговых градусах, а хотели бы видеть его в километрах. Это нетрудно получить из соотношения, выражающего среднюю длину дугового градуса через средний радиус R земного шара:

$$L_0 = \frac{2\pi R}{360^\circ} = \frac{\pi \cdot 6371{,}032}{180} = 111{,}177 \text{ км}.$$

Учитывая, что это среднее значение, а также то, что исходные данные приведены с точностью до половины минуты, минута же дуги большого круга Земли составляет 111,177 : 60 = 1,852 км (морская миля) и половина этой величины лишь немного меньше 1 км, приходим к заключению, что ответ в этой задаче не может даже теоретически по точности превышать 1 км. Отсюда следует:

$$L = 6{,}78526^\circ \cdot 111{,}177 = 754{,}3696 \text{ км, т.е. } 754 \pm 1 \text{ км}.$$

Для более точного определения расстояния между двумя пунктами должны быть с большей точностью заданы их координаты.

ПРОГРАММИРУЕМЫЕ МИКРОКАЛЬКУЛЯТОРЫ

Первые ЭВМ разрабатывались как мощные быстродействующие средства для выполнения громоздких и трудоемких вычислений с большим количеством исходных данных. Характерной чертой таких вычислений было наличие в них так называемых разветвляющихся и циклических процессов и соответствующих способов и методов их реализации. Очень скоро определилась и другая важная "профессия" ЭВМ как высокоэффективных средств управления сложными производственными процессами и системами. Хотя бурное развитие технологии производства элементов и узлов вычислительной техники и ЭВМ в целом способствовало быстрому уменьшению их габаритов, энергоемкости и стоимости при одновременном увеличении быстродействия и повышении надежности, многие годы электронные вычислительные машины были доступны лишь сравнительно узкому кругу потребителей – относительно крупным научным и производственным коллективам. Даже не всякое высшее учебное заведение имело в своем распоряжении универсальную ЭВМ, не могло быть и речи о внедрении такой техники в быт, обеспечении ею индивидуальных потребителей, деятельность которых связана с выполнением вычислений. Впрочем, использование ЭВМ широкого назначения для решения многих частных задач, в том числе задач управления производством, не всегда рентабельно, поскольку наиболее дорогостоящий и сложный их блок – арифметическое устройство – часто работает в этом режиме на холостом ходу, недостаточно загружается. Кроме того, ЭВМ общего назначения обычно не имеют в своем составе устройства связи с объектом.

Дальнейшее развитие технологии производства электронных схем, микроэлектроники, в особенности больших интегральных схем и на их базе микропроцессоров – стандартных логических блоков, выполняющих разнообразные функции под управлением хранимой в их памяти программы, привело к кардинальным изменениям в формах и масштабах использования вычислительной техники. Начался переход от централизованного использования ЭВМ к широкому, массовому и рассредоточенному внедрению их в самые различные сферы человеческой деятельности. Производство мини- и микрокомпьютеров быстро растет и применение их весьма специфично: в отличие от больших ЭВМ и от электронных микрокалькуляторов многие из этих машин предназначены скорее для управления различными объектами, чем для непосредственных вычислений. Основные области их использования: автоматические системы управления производством, где микрокомпьютеры являются компонентами более сложных систем, узлами и встроенными блоками высокопроизводительных станков и поточных линий, различных систем наблюдения и контроля, узлами лабораторных и измерительных приборов и т.д. вплоть до бытовых приборов.

Что же касается индивидуальных вычислений (которые могут теперь быть много сложнее, чем в недалеком прошлом), то здесь подобающее место заняли разнообразные электронные клавишные вычислительные машины. При этом значительная дистанция между возможностями простых микрокалькуляторов и ЭВМ в последние годы заполняется программируемыми микрокалькуляторами. В этих сравнительно новых, но быстро завоевывающих популярность устройствах удачно сочетается скорость и точность вычислений по самостоятельно составленным потребителем программам, присущая универсальным ЭВМ, с простотой обслуживания, доступностью и карманными размерами микрокалькуляторов. Обладая всеми качествами обычной ЭКВМ, программируемый микрокалькулятор имеет весьма обширную для своих размеров память, достаточную для записи программ в несколько десятков шагов, и обеспечивает выполнение таких характерных для больших ЭВМ логических операций, как условный и безусловный переходы, использование подпрограмм и т.д. Именно это и позволяет значительно расширить область индивидуально выполняемых вычислений – автоматизировать многие научные и инженерно-технические расчеты, вычислять многие нестандартные функции, автоматизировать статистическую обработку результатов наблюдений и экспериментов и т.п.

Программируемый микрокалькулятор имеет все основные блоки больших ЭВМ: устройства ввода и вывода, оперативную память, постоянную память с библиотекой подпрограмм, устройства, управляющие последовательным прохождением команд и выполнением арифметических операций, и т.д. Изучение особенностей работы на таких калькуляторах позволяет освоить и основные принципы программирования на больших ЭВМ: размещение переменных в ячейках памяти, кодирование команд, принятие решений об условных или безусловных переходах от одной части программы к другой, умение записать короткой последовательностью команд подчас весьма длинную последовательность вычислительных операций и т.д.

Характерным и широко распространенным образцом программируемых микрокалькуляторов является "Электроника Б3-21", на примере которой рассмотрим особенности их работы.

Программируемый микрокалькулятор "Б3-21" может работать как обычный калькулятор, так и автоматически – по программам, составленным и введенным пользователем. Следует помнить, что при вводе операндов и операций применяется инверсная запись (как в микрокалькуляторе "Б3-19"). При выполнении элементарных действий клавиши нажимаются в следующей последовательности:

для $a + b$ [a] [↑] [b] [+] → $(a + b)$,

для $a : b$ [a] [↑] [b] [÷] → $(a : b)$ и т.д.

"Б3-21" оперирует с восьмиразрядными десятичными числами. При этом в диапазоне $0 \leqslant |x| \leqslant 10^8-1$ (99999999) форма представления запятой – естественная, а в диапазоне от 10^{-99} до 10^{-8} и от 10^8-1 до $9{,}999999 \times 10^{99}$ – плавающая, как в большинстве инженерных микрокалькуляторов. Числа на индикаторе при вводе появляются поразрядно слева направо. Поскольку для изображения запятой в индикаторе отводится целый разряд, максимальное число разрядов при индикации смешанных чисел, как и в ряде других моделей, равно 7.

Клавиатура "Б3-21" (рис. 14) состоит из двух префиксных клавиш совмещенной функции (желтой [P] и коричневой [F]), клавиши сброса последнего набранного числа (или операции) [C_x] , выделенной красным цветом, а также из трех больших групп клавиш, выделенных по их основному назначению тоже разным цветом.

Клавиши ввода цифр от 0 до 9 и десятичной запятой – черного цвета. Над ними в отличие от других групп клавиш не показана вторая символика, но при совместном их использовании с префиксными клавишами и в зависимости от рода работы эти клавиши выполняют и другие функции.

К операционным клавишам, выделяемым синим цветом, кроме [+] [–] [×] [÷] , относятся также клавиша ввода первого операнда [↑] , характерная для ЭКВМ с инверсным вводом, клавиша обмена содержимым между регистрами Х и У [XY] , клавиша изменения знака числа в регистре Х [/ – /] и клавиша ввода порядка числа [ВП] (в режимах работы с плавающей запятой). При предварительном нажатии префиксной клавиши [P] первые шесть клавиш служат для ввода команд автоматического вычисления элементарных функций $\sin x$, $\cos x$, e^x, e^{ix}, $\ln x$ и π, а две остальные при нажатии префиксной кла-

Рис. 14. Программируемый микрокалькулятор "Электроника Б3-21" (передняя панель)

Таблица 9

Обозначение клавиши	Назначение клавиши					
	при непосредственном нажатии		при нажатии с клавишей [F]		при нажатии с клавишей [P]	
	операция	код	операция	код	операция	код
1	2	3	4	5	6	7
[0]	Ввод цифры 0	04	Нормализация регистра 0 (X)	02	Нормализация регистра 0 (X)	01
[1]	1	14	Вызов содержимого регистра памяти 1 (У)	12	Ввод в регистр памяти 1 (У)	11
[2]	2	24	Вызов содержимого регистра памяти 2	22	Ввод в регистр памяти 2	21
[3]	3	34	3	32	3	31
[4]	4	44	4	42	4	41
[5]	5	54	5	52	5	51
[6]	6	64	6	62	6	61
[7]	7	74	7	72	7	71
[8]	8	84	8	82	8	81
[9]	9	94	9	92	9	91
[sin x] [+]	Сложение	96	–	95	Вычисление $\sin x$	93
[cos x] [−]	Вычитание	86	–	85	Вычисление $\cos x$	83
[π] [×]	Умножение	26	–	25	Вызов π	23
[e^x] [÷]	Деление	36	–	35	Вычисление e^x	33
[e^{ix}] [↑]	Ввод	06	–	05	Вычисление e^{ix}	03
[ln x] [⇄ xy]	Обмен содержимым между регистрами	16	–	15	Вычисление $\ln x$	13
[1/x] [,] [↻]	Ввод десятичной запятой	46	Вычисление $1/x$	45	Передача в стеке по часовой стрелке	43

Таблица 9 (окончание)

1	2	3	4	5	6	7
[x^2] /–/	Изменение знака числа в регистре X	56	Вычисление x^2	55	Передача в стеке против часовой стрелки	53
[Q] [$\sqrt{x}$] ВП	Ввод порядка	66	Вычисление $\sqrt{x}$	65		63
Сx	Сброс содержимого регистра X	76	–	75	–	73
xy [НОП]	Вычисление x^y	38	–	37	Нет операции	39
[$x \geq 0$] В/О	Возврат из подпрограммы; очистка программного счетчика в режиме "Работа"	48	–	47	Проверка условия $x \geq 0$	49
[$x = 0$] БП	Безусловный переход	58	–	57	Проверка условия $x = 0$	59
[$x < 0$] ПП	Обращение к подпрограмме; потактовое прохождение программы в режиме "Работа"	68		67	Проверка условия $x < 0$	69
[$x \neq 0$] СП	Стоп пуск	78	–	77	Проверка условия $x \neq 0$	79
[РР] $\overrightarrow{\text{ШГ}}$	Пошаговое прохождение программы в сторону увеличения адресов		–		Переход в режим "Работа"	
[РП] $\overleftarrow{\text{ШГ}}$	Пошаговое прохождение в сторону уменьшения адресов		–		Переход в режим "Программирование"	

Примечание. Некоторые клавиши в сочетании с префиксными клавишами используются только в режиме программирования для формирования порядковых номеров отдельных команд программы (в графах 4 и 6 в этих случаях проставлены прочерки " – ").

виши [Г] — для вычисления x^2 и $\sqrt{x}$ соответственно. Кроме того, с префиксной клавишей [Р] и двумя последними клавишами осуществляется работа со стековыми регистрами памяти.

Среди третьей группы клавиш (серого цвета) одна [x^y] предназначена для вычисления степенно-показательной функции, остальные — для работы в режиме программирования: [БП] — безусловный переход, [ПП] — обращение к подпрограмме, [С/П] — стоп/пуск, [В/О] —возврат из программы, две остальных [$\overrightarrow{\text{ШГ}}$] и [$\overleftarrow{\text{ШГ}}$] — для пошагового прохождения программы в сторону увеличения (→) или уменьшения (←) адресов. Их совмещенные функции при предварительном нажатии клавиши [Р] : исключение некоторой команды из программы ([НОП] — нет операции), команды условного перехода $x = 0, x < 0, x \neq 0, x \geqslant 0$, а также переход в режим работы (РР) или режим программирования (РП). В последнем режиме каждая клавиша, кроме [$\overrightarrow{\text{ШГ}}$] и [$\overleftarrow{\text{ШГ}}$] , может быть использована для ввода трех различных кодов операций.

В табл. 9 приводится назначение каждой из клавиш в зависимости от того, нажимается ли она непосредственно или с префиксными клавишами, а также коды операций, выполняемых при нажиме соответствующих клавиш в режиме программирования.

ИНДИКАЦИЯ ВВОДА, ПРОМЕЖУТОЧНЫХ И ОКОНЧАТЕЛЬНЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ ВЫЧИСЛЕНИЙ

Катодолюминесцентный (в части образцов — светодиодный) индикатор имеет 12 десятичных разрядов. Если число представляется в естественной форме, то первый разряд, как обычно, отводится на индикацию знака числа (индицируется только минус для отрицательных чисел), 2–9-й разряды предназначаются для индикации самого числа. При этом в случае правильной или смешанной дроби один полный разряд отводится на индикацию десятичной запятой. В отличие от многих других моделей ввод нуля в правильной десятичной дроби обязателен; 10–12-й разряды в этом случае остаются свободными. Например, число 12 345 678 будет представлено в индикаторе так:

	1	2	3	4	5	6	7	8			

а число −0,123456 так:

−	0	·	1	2	3	4	5	6			

Иначе располагается число с плавающей запятой. Наберем на клавиатуре число −0,001234 и с помощью клавиши [↑] введем его в рабочий регистр. На индикаторе высветится:

−	1	·	2	3	4				−	0	3

Здесь число представлено так, что первый разряд отведен на знак мантиссы (минус), следующие пять разрядов (в принципе их могло быть и восемь) — на саму мантиссу, в 10-м разряде — знак порядка, минус, в 11–12-м - порядок, который может выражаться двузначными числами от 00 до 99, а с учетом знака от −99 до 99.

Чтобы сразу ввести в индикатор (и регистр X) число в нормализованной форме, следует сначала набрать на клавиатуре мантиссу (со знаком минус, если число отрицательное), затем, нажав клавишу [ВП], порядок числа, нажав после набора клавишу, если порядок отрицателен. Например, в регистр У надо ввести число 1,6735 $\cdot 10^{-27}$ (масса атома водорода в килограммах).

Порядок набора /1,6735/ [ВП] /27/ /–/

На индикаторе видим: /1/·/6/7/3/5/ / /–/2/7/

В режиме "Программирование" на индикаторе появляются коды трех ближайших команд программы и номер следующей за ними команды.

ОПЕРАТИВНАЯ ПАМЯТЬ

Важным преимуществом модели "БЗ-21" является большой объем оперативной памяти. В самых простых моделях имеется только два оперативных регистра памяти, в более совершенных еще 1–2 дополнительных, в этой же модели их 14. Это, конечно, очень мало по сравнению с емкостью оперативных запоминающих устройств больших ЭВМ, достигающей десятков тысяч ячеек (регистров), однако сопоставимо с первыми моделями ЭВМ и при наличии определенных навыков программирования может быть использовано вычислителем при решении задач с довольно большим количеством подлежащих запоминанию данных.

Основные регистры оперативной памяти "БЗ-21" – два операционных X и У и семь дополнительных P_2, P_3, P_4, P_5, P_6, P_7, P_8, предназначенных для хранения исходных данных и результатов промежуточных вычислений.

В регистр X число вводится при нажатии клавиш ввода цифр, а также клавиш [,] и [/–/]. При этом вводимое число высвечивается на индикаторе, что позволяет контролировать содержимое этого регистра визуально. В этот же регистр могут заноситься также числа, находящиеся в регистре У с помощью обмена содержимым регистров X и У (клавиша [xy]), а также из регистров P_2,..., P_8 с помощью префиксной клавиши [F].

Регистр У предназначен для хранения чисел, над которыми в данный момент производится операция. Эти числа попадают в него при нажатии клавиши [↑], при этом содержимое регистра X сохраняется. Если набрать новое число, то оно запишется в регистр X, при этом предыдущее автоматически в нем сотрется, но сохранится в регистре У.

Передача содержимого регистров при операции ввода, арифметических операциях и при вычислении элементарных функций не отличается от аналогичных действий на других моделях.

Запись числа, высвеченного на индикаторе, т.е. находящегося в регистре X, в один из регистров P_2,..., P_8 осуществляется последовательным нажатием префиксной клавиши [P] и цифровой клавиши с номером соответствующего регистра. Так, если на индикаторе записано число –195,83 (температура кипения азота), то, нажав клавиши [P] [8], мы запишем его в регистр памяти P_8, что можно проверить, вызвав содержимое этого регистра нажатием клавиш [F] [8] на индикатор. При записи в регистры

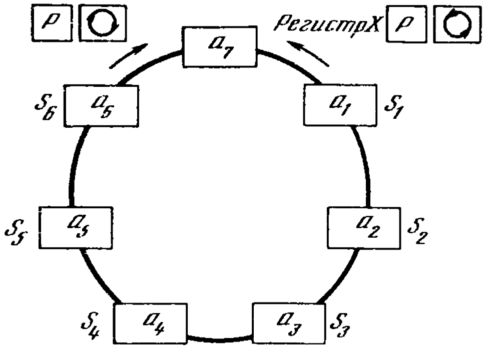


Рис. 15. Схема работы стековой памяти микрокалькулятора "Б3-21"

$P_2, \ldots, P_8$ (как и в регистр У) содержимое регистра X сохраняется до тех пор, пока не будет произведена новая запись в этот регистр.

Кроме рассмотренных регистров памяти с независимым доступом к их содержимому, в "Б3-21" есть еще дополнительное оперативное запоминающее устройство из шести ячеек памяти, которое вместе с регистром X образует замкнутое кольцо из семи регистров, – так называемый кольцевой стек (рис. 15). Запись чисел в кольцевой стек может производиться в двух направлениях – по часовой стрелке и против часовой стрелки. Для занесения числа в очередную ячейку кольцевого стека надо набрать число на клавиатуре, а затем последовательно нажать клавиши [Р] [↻] (при записи по часовой стрелке) или [Р] [↺] (в противном случае). На индикаторе тогда высвечивается содержимое очередного стекового регистра.

Использование стековой памяти позволяет существенно расширить возможности запоминания исходных данных и промежуточных результатов, а также заметно сократить длину составляемых программ, однако требует усиленного внимания и учета смещения содержимого всех стековых регистров по кольцу после каждой операции. Следует учитывать такие особенности работы со стековыми регистрами:

а) доступ к ним возможен только через регистр X;

б) при записи в стек на индикаторе высвечивается записанное в данной ячейке стека число. При переводе числа из данного регистра стека в другой его регистр записывается прежнее содержимое регистра X;

в) операции со стеком не влияют на содержимое регистра У;

г) кроме операций [Р] [↺] и [Р] [↻] никакие операции с регистром X не влияют на содержимое регистров стека.

Для предварительного ознакомления с работой стековых регистров введем в кольцо какие-нибудь характерные числа, например 111,222,..., 666. Последнее, седьмое число 777 оставим в регистре X. Набирая теперь последовательно одна за одной команды [Р] [↻] или [Р] [↺], можем видеть, как циклически происходит вывод чисел, записанных в стековые регистры, на регистр X.

ВЫПОЛНЕНИЕ НЕПРОГРАММИРУЕМЫХ ВЫЧИСЛЕНИЙ

Вычисления без программ на "Б3-21" практически не отличаются от уже рассмотренных вычислений на калькуляторах типа "Б3-19". Отметим лишь некоторые особенности. На "Б3-21" имеется микропрограмма вычисления функции $y = e^{ix}$ (по формуле Эйлера $e^{ix} = \cos x - i \cdot \sin x$). После ввода в регистр X значения аргумента x и нажатия клавиш [P] [e^{ix}] результат получаем в двух регистрах: в регистре X – $\cos x$, в регистре У – $\sin x$. Это единственная в данной модели функция, результаты вычисления которой записываются и в регистре X, и в регистре У.

Поскольку в данной модели нет микропрограммы для вычисления $\operatorname{tg} x$, исходя из соотношения $\operatorname{tg} x = \sin x/\cos x$ эту функцию можно вычислить, последовательно нажимая клавиши:

/x/ [↑] [P] [e^{ix}] [÷] → ($\operatorname{tg} x$),

т.е. используя результаты вычисления функции $y = e^{ix}$. Напомним, что x следует выражать в радианах, а перевод из градусов в радианы выполняется по формуле $x = \alpha \cdot \pi/180$, т.е. с помощью алгоритма

/α/ [↑] /180/ [÷] [↑] [P] [π] [×] → (x).

Вычислим, например, $\operatorname{tg} 62°30' = \operatorname{tg} 62{,}5°$:

/62,5/ [↑] /180/ [÷] [↑] [P] [π] [×] [P] [e^{ix}] [÷] → (1,920981).

Несколько громоздко, но ввод занимает всего 15–20 секунд, после чего сразу же получаем ответ. Это значительно быстрее и, главное, на два-три порядка точнее, чем с помощью обычных таблиц тригонометрических функций. В режиме же программирования один раз составленная программа позволит найти целую серию значений сложной функции почти без дополнительных манипуляций на клавиатуре (кроме ввода новых значений аргументов). Кстати, в силу некоторого несовершенства вычислительных алгоритмов микропрограмм последняя значащая цифра получаемого результата не совсем надежна: проверка показывает, что десятизначное значение $\operatorname{tg} 62{,}5° = 1{,}920982127$, т.е. погрешность полученного результата превосходит единицу последнего разряда (по недостатку).

СОСТАВЛЕНИЕ ПРОГРАММ

Как и на любых других ЭВМ, решение сложных задач на "Б3-21" состоит из программирования задачи, ввода и редактирования программы, отладки программы, занесения исходных данных и выполнения программы.

Перед написанием программы на конкретном языке данной машины необходимо четко представить себе алгоритм решения данной задачи, что достигается при соответствующем ее анализе. При этом следует учитывать возможности данной машины, т.е. хорошо знать выполняемые машиной элементарные операции, предусматриваемые программой. Чтобы избежать ошибок и описок при составлении программ для решения сложных задач, разработан ряд методов, облегчающих непосредственное программирование. Одним из них является составление блок-схем – графических схем, изображающих соответствующий алгоритм. Вся программа при этом разби-

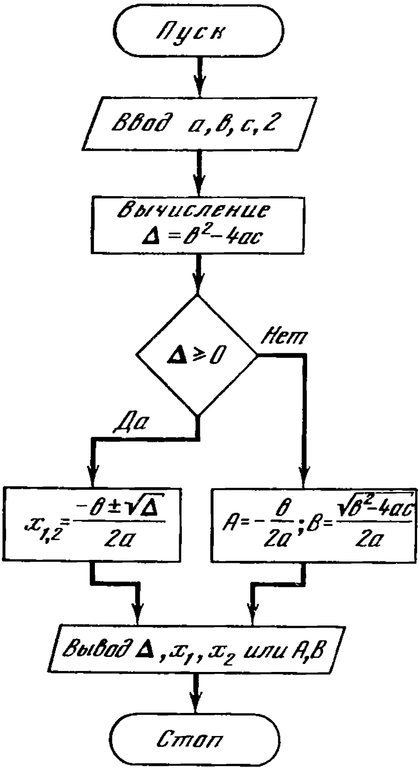


Рис. 16. Блок-схема программы решения квадратного уравнения

вается на отдельные блоки, каждый из которых реализует определенную функцию. Преобладают в основном вычислительные и логические блоки, первые из них предусматривают вычисления по формулам, вторые – проверку различных условий. Вычислительные блоки в блок-схемах принято обозначать прямоугольниками, внутри которых помещаются указания о соответствующих им вычислениям, логические – ромбами, внутри которых записывают условия, подлежащие проверке. Мы будем применять также параллелограммы для обозначений ввода и вывода и овалы для обозначения пуска и останова (стопа).

Все эти фигуры в блок-схемах связываются между собой в определенном порядке стрелками, направление которых указывает последовательность, в которой осуществляются вычисленные процессы. От каждого прямоугольника должна отходить только одна стрелка; от каждого ромба – две, одна из которых, помеченная словом "да", указывает на выполнение данного условия, другая ("нет") означает невыполнение условия.

Блок-схема программы для решения квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ (с учетом случая $\Delta = b^2 - 4ac < 0$, когда корни комплексные и сопряженные), будет иметь вид, показанный на рис. 16.

По этой программе вычислительная машина или вычислитель-человек, следующий ее предписаниям, по известным формулам найдет действительные корни уравнения x_1 и x_2, разные или равные (при $\Delta \geqslant 0$) или же действительную часть A и коэффициент при мнимой части B комплексных сопряженных корней при $\Delta < 0$. Определить, какие именно корни получены в результате вычисления, можно, если учесть знак дискриминанта $\Delta = b^2 - 4ac$, который должен быть выведен по этой программе вместе со значениями корней.

На блок-схеме этой программы хорошо заметны особенности программы разветвляющегося вычислительного процесса: в ромб, изображающий логический блок, который должен сделать вывод о знаке Δ, упирается одна стрелка, но из него выходят две; дальнейший вычислительный процесс будет продолжен только по одной из них в зависимости от того, каков будет ответ на вопрос $\Delta \geqslant 0$ – "да" или "нет".

Линейные программы

Выше (см. с. 67) был рассмотрен алгоритм для вычисления tg α по заданному значению α в градусах. Алгоритм очень громоздкий, поэтому, если требуется выполнить соответствующие вычисления для некоторых аргументов подряд, удобнее составить программу, по которой программируемый микрокалькулятор автоматически выполнит всю последовательность вычислений для поочередно вводимых значений аргумента.

Рассмотренный алгоритм имел вид

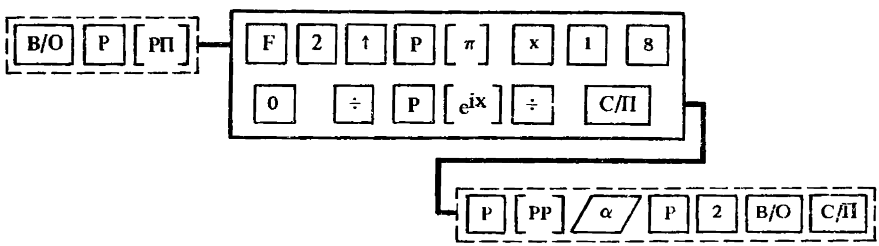
/α/ [↑] /180/ [÷] [P] [π] [×] [P] [e^{ix}] [÷] → (tg α).

По этому алгоритму следует ввести в память машины значение α в градусах, разделить полученное на 180, умножить его на π, затем найти действительную часть значения e^{ix} (cos x) и разделить на нее коэффициент при мнимой части (sin x).

Пусть значение α записывается во вторую ячейку памяти – P_2. При переходе в режим программирования, если программа будет заноситься начиная с адреса 00, нажимают клавишу [В/О] (при этом очищается счетчик адреса команд) или [БП], а затем клавиши, которые обеспечат переход на требуемый адрес, с которого будет заноситься программа. Затем, нажимая клавиши [Р] и [РП], переводят калькулятор для работы в режиме "Программирование" и последовательно вводят команды программы. Правильность ввода кодов операций и показаний счетчика адреса команд контролируется по индикатору. Действия и их индикацию представим в следующем виде (табл. 10).

Когда составление программы окончено, нажатием клавиш [Р] [РР] калькулятор переводится в режим "Работа", в ячейку № 2 оперативной памяти вводится значение α в градусах и клавишей [С/П] (здесь – "Пуск") запускается программа вычислительного процесса, начиная с адреса команд 00 ([В/О]).

Программу можно записать значительно проще. Напомним, в какой последовательности нажимались клавиши:



Нажатием первых трех клавиш мы переводим калькулятор в режим "Программирование" с нулевого (00) адреса команд. Эта часть вычислительного алгоритма обведена пунктирной рамкой. Далее идет собственно программа вычислений (по шесть команд в строку, которые начинаются одной и той же цифрой). Эта программа обведена сплошной прямоуголь-

Таблица 10

Адрес	Обозначение клавиши	Код	Примечание
	В/О		Очистка счетчика адреса команд
	Р РП		Перевод в режим "Программирование"
00	F 2	22	Из регистра P_2 памяти вызвать значение α
01	↑	06	Ввод содержимого регистра X (числа, хранившегося в регистре P_2) в регистр У
02	Р π	23	Ввод в регистр X числа π
03	×	26	Умножение α на π
04	1	14	Ввод в регистр X числа 180
05	8	84	В режиме "Программирование" при вводе многоразрядного числа каждому разряду автоматически присваивается свой код
10	0	04	
11	÷	36	Деление $\alpha\pi$ на 180° (=a рад)
12	Р e^{ix}	03	Ввод в регистры X и У значений $\cos\alpha$ и $\sin\alpha$ ($e^{i\alpha} = \cos\alpha + i\cdot\sin\alpha$)
13	÷	36	Деление $\sin\alpha$ на $\cos\alpha$ (= $\mathrm{tg}\,\alpha$)
14	С/П	78	Команда "Стоп". По этой команде выполнение программы заканчивается, результат посылается в регистр X или в ячейки памяти по указанию программиста

ной рамкой. Затем идет группа команд, с помощью которых калькулятор переводится в режим "Работа" (Р РР), вводятся исходные данные в предусмотренные программой регистры памяти (здесь α Р 2), после чего калькулятор запускается для вычислений по заданной программе (В/О С/П) для данных значений аргумента. После окончания вычислений на индикаторе высвечивается результат.

Если теперь ту же программу требуется использовать для вычислений над другими аргументами, следует в те же регистры памяти ввести новые значения аргументов и снова запустить калькулятор для вычисления по программе, т.е. выполнить следующую последовательность при нажатии клавиш:

Р 2 В/О С/П

Эта запись по существу не что иное, как представление программы на алгоритмическом машинно-ориентированном языке – формальном языке программирования в обозначениях и символах клавиш "Б3-21", предназначенном для записи и ввода соответствующего вычислительного алгоритма. Конечно, это не проблемно-ориентированный язык высокого уровня, предназначенный для записи алгоритмов в самом общем виде, безотносительно к каким-либо конкретным вычислительным машинам, как, например, АЛГОЛ, ФОРТРАН или КОБОЛ, но все же он значительно упрощает работу, освобождая от числового кодирования команд, хотя числовые коды используются для проверки и отладки программы (и в некоторых других случаях).

Дело в том, что при составлении программы и при ее вводе возможно появление ошибок. Процесс их обнаружения и устранения непосредственно на вычислительной машине называется отладкой программы. Этот процесс – обязательный этап работы на больших и малых ЭВМ, в том числе и на программных микрокалькуляторах.

Как следует производить отладку программы на "Б3-21"? Переведя после ввода программы нажатием клавиш [Р] [РР] калькулятор в режим "Работа" и введя необходимые исходные данные в соответствующие регистры памяти, нажимаем клавишу [В/О], если пуск программы должен производиться с начального адреса 00, или же клавишу [БП] и клавишу, обеспечивающую начало выполнения программы с любого другого адреса (если это требуется). С помощью клавиши [ПП] шаг за шагом анализируем по индикатору выполнение программы, сверяя правильность введенных команд по их кодам. Вот здесь-то и окажется полезным знание числовых кодов различных операций на данной модели. Впрочем, достаточно иметь соответствующую таблицу. Сводная таблица назначения каждой из клавиш вместе с кодами операций уже приводилась (см. с. 90), однако при отладке удобнее пользоваться более компактной таблицей кодов с двумя входами (табл. 11).

Если в процессе отладки будет обнаружена ошибка при вводе той или иной команды, следует перейти на адрес ошибочно введенной команды, нажимая клавиши [ШГ] или [ШГ] соответствующее количество раз. К нужному адресу можно перейти и с помощью клавиши безусловного перехода [БП], нажимая вслед за ней клавиши, обеспечивающие переход на нужный адрес. Перейдя после этого в режим "Программирование" ([Р][РП]), следует убедиться по индикатору, что счетчик адреса команд остановился как раз на адресе ошибочно введенной команды, после чего нажатием соответствующих клавиш ввести правильную команду. Может оказаться, что какая-то команда является лишней и не должна выполняться. В этом случае, перейдя на адрес этой команды, исключаем ненужную операцию из программы нажатием клавиш [Р][НОП].

Приводя таблицу кодов команд и символов, напомним, что программная память "Б3-21" разбита на 10 частей-страниц, номер каждой из которых определяет первую цифру кода.

Как пользоваться этой таблицей, покажем на следующих примерах. Пусть мы ввели в калькулятор программу для вычисления тангенса. Проверим правильность ввода. Возвратившись в режим программирования ([В/О] [Р] [РП]) и нажимая раз за разом на клавишу [ШГ], на индикаторе, в правой его части, видим меняющиеся номера команд, а слева – смещающиеся каждый раз направо и уходящие затем числа, представляющие

Таблица 11

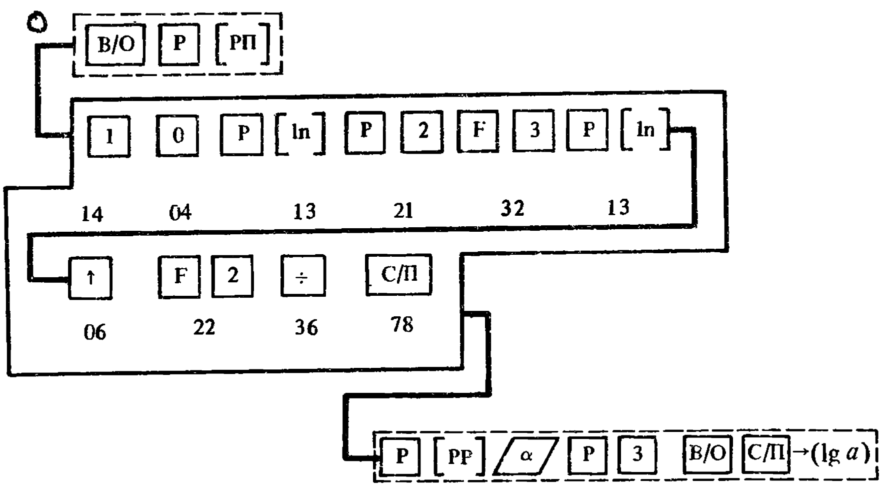
Номер текущей команды на странице – вторая цифра кода	Номер страницы – первая цифра кода операции									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	P 0	P 1	P 2	P 3	P 4	P 5	P 6	P 7	P 8	P 9
2	F 0	F 1	F 2	F 3	F 4	F 5	F 6	F 7	F 8	F 9
3	P ↑ [e^{ix}]	P $x\rightleftarrows y$ [ln x]	P x [π]	P ÷ [e^x]	P · [↻]	P /–/ [↺]	P ВП	P C_x	P – [cos]	P + [sin]
4	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
5	F ↑	F $x\rightleftarrows y$	F x	F ÷	F ·	F /–/	F ВП	F C_x	F –	F +
6	↑	$x\rightleftarrows y$	x	÷	·	/–/	ВП	C_x	–	+
7				F x^y	F В/О	F БП	F ПП	F С/П		
8				x^y	В/О	БП	ПП	С/П		
9				P x^y [НОП]	P В/О [$x \geq 0$]	P БП [$x = 0$]	P ПП [$x < 0$]	P С/П [$x \neq 0$]		

собой коды соответствующих команд и символов 22, 06, 23, 26, 14, 84, 04, 96, ... Сверяем эти коды с таблицей и программой. Первый код 22 обозначает, как видим в таблице на пересечении второго столбца и второй строки, вызов числа, хранящегося во второй ячейке памяти (P_2). Верно — туда было введено значение α. Далее 06 — это ввод данного числа в регистр У. И это предусмотрено программой. Затем 23 — вызов в регистр X числа π. Продолжая таким образом проверку, приходим к тому, что на индикаторе появляется число 96. В таблице на пересечении 9-го столбца и 6-й строки видим, что это код сложения (+). Но по программе здесь 11-й командой предусмотрено деление (÷). Значит, при вводе команды вместо клавиши [÷] была ошибочно нажата клавиша [+]. Нажав клавишу [ШГ], возвращаемся к 11-й команде, которая высветится на счетчике адреса команд, после чего исправляем ошибку, нажимая клавишу [÷]. На индикаторе слева появляется 36, т.е. код нужной нам операции деления. Ошибка исправлена.

При желании (или необходимости) можно наблюдать пошаговое выполнение калькулятором вычислений, что тоже бывает полезным при проверке и отладке программы. Для этого, введя полностью программу и исходные данные, нажимаем клавишу [В/О] (если пуск программы производится с адреса 00), а затем соответствующее число раз клавишу [ПП].

Если положить $\alpha = 30°$, на индикаторе в ходе такой проверки последовательно появятся следующие числа: 30; 3,141592; 94,24778; 1; 18; 180; 0,535987; 0,866025; 0,5773502. Все это — последовательные результаты вычислений по данной программе, последний результат и есть tg 30°.

Рассмотрим еще несколько простых примеров вычислений по линейным программам. В "Б3-21" есть подпрограмма, по которой автоматически вычисляется натуральный логарифм данного числа ($\ln x$). Как перейти от натуральных логарифмов к десятичным? Натуральный и десятичный логарифмы некоторого числа a связаны между собой соотношением $\lg a = \frac{1}{\ln a} \ln a$. Здесь $\frac{1}{\ln 10}$ является числом постоянным, равным 0,4342945... Запоминать его, однако, не стоит. Вычислительный алгоритм в данном случае прост и не нуждается в особых комментариях. Вот он:



Как и в предыдущем примере, собственно вычислительная программа заключена в сплошную прямоугольную рамку. Под шагами программы записаны для удобства проверки числовые коды соответствующих команд и символов.

Составленная программа пригодна для вычисления десятичных логарифмов любых допустимых значений аргумента. Например:

lg 2 [2] [P] [3] [В/О] [С/П] (3,0103–01) (=0,30103)

lg 8 [8] [P] [3] [В/О] [С/П] (9,0309–01) (=0,90309)

lg π [F] [π] [P] [3] [В/О] [С/П] (4,971497–01) и т.д.

Пусть теперь нам понадобилось провести серию вычислений, связанных с нахождением объема тела, имющего форму кругового усеченного конуса. Вычисления в этом случае должны вестись в соответствии с формулой

$$V = 1/3\,\pi H\,(R^2 + r^2 + Rr),$$

где H – высота усеченного конуса, R – радиус нижнего, а r – верхнего оснований. Собственно вычислительную программу заключим в прямоугольную сплошную рамку и под каждой командой поместим соответствующий ей код:

[В/О] [P] [РП]

	0	1	2	3	4	5
0	[F] [3] 32	[F] [x²] 55	[P] [5] 51	[F] [4] 42	[F] [x²] 55	[F] [6] 61
1	[F] [3] 32	[↑] 06	[F] [4] 42	[×] 26	[↑] 06	[F] [5] 52
2	[+] 96	[↑] 06	[F] [6] 62	[+] 96	[↑] 06	[F] [2] 22
3	[×] 26	[↑] 06	[P] [π] 23	[×] 26	[3] 34	[÷] 36
4	[С/П] 78					

Р6

[P] [PP] /H/ [P] [2] /R/ [P] [3] /r/ [P] [4] [В/О] [С/П] → (V)

Обращаем внимание на особенности записи программы: в прямоугольной таблице шесть столбцов. Номер каждого из них начиная с нуля (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6) означает вторую цифру номера команды в данной программе, а номер каждой (по порядку) строки (также начиная с нуля) – первую цифру двузначного номера команды. Таким образом, номер команды (увеличенный на единицу) может быть в любой момент определен по мес-

Таблица 12

Адрес (номер) команды	Алгоритмический код команды по обозначению соответствующих клавиш	Машинный код команды	Примечание
00	F 3	32	Вызвать в регистр X содержимое ячейки памяти P_3
01	F x^2	55	Возвести содержимое регистра X в квадрат
02	P 5	51	Занести содержимое регистра в X ячейку памяти P_5
...	...	...	...

ту ее записи в таблице без указания его подряд по всей программе. В пунктирных рамках выделены те части программы, которые вводятся в рабочем режиме, в сплошной – в режиме программирования.

Теперь, записывая в ячейки P_2, P_3 и P_4 исходные данные H, R и r, можем определить объем V усеченного конуса для любых допустимых значений H, R, r.

Примеры для проверки:

Пусть $H = 6, R = 4, r = 3$; $V \cong 232{,}4778 \cong 232{,}5$ (куб. ед.),

$H = 9, R = 5, r = 2$; $V \cong 367{,}5663 = 367{,}6$ (куб. ед.)

и т.д.

Это весьма компактная форма записи программы на "Б3-21". Можно, особенно на первых порах, составлять программу и в более подробной записи (табл. 12). Примерно по такой форме составлялись в свое время программы для первых ЭВМ.

Такая запись нагляднее, но занимает много места. Тем не менее мы воспользуемся ею в ряде случаев. Рассмотрим теперь следующий пример – вычисление определителя третьего порядка:

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

По одному из возможных вариантов оно сводится к вычислению следующего выражения:

$$D = a_1(b_2c_3 - c_2b_3) \mp b_1(\pm a_2c_3 \mp c_2a_3) + c_1(a_2b_3 - b_2a_3).$$

В определителе третьего порядка 9 элементов, поэтому для их размещения регистров P_2–P_8 уже будет недостаточно, кроме того, понадобятся по крайней мере еще два регистра памяти для записи результатов промежуточных вычислений. Придется использовать стековую память.

Здесь очень важно распределить вводимые в стек данные в порядке, противоположному тому, в котором эти данные будут использоваться в вычислениях. Регистры P_7 и P_8 отведем для записи промежуточных результатов, в оставшиеся P_2-P_6 сможем записать лишь 5 из 9 элементов определителя. Остальные введем в стек – это прежде всего встречающиеся в разложении определителя по одному разу a_1, b_1 и c_1, а также встречающееся два раза c_2. Прикинув по формуле порядок вычислений, приходим к выводу, что в стек соответствующие данные следует ввести в следующем порядке: c_1, b_1, c_3, a_1, c_3. Это будет достигнуто такой последовательностью действий:

$c_1 \to$ [P] [↻] ; $b_1 \to$ [P] [↻] ; $c_3 \to$ [P] [↻] ; $a_1 \to$ [P] [↻] ; $c_3 \to$ [P] [↻] .

Остальные данные разместим так:

$a_2 \to P_2$; $b_2 \to P_3$; $c_2 \to P_4$; $a_3 \to P_5$; $b_3 \to P_6$.

Вычислительная программа будет выглядеть следующим образом:

	0	1	2	3	4	5
0	[F] [4] 42	[↑] 06	[F] [6] 62	[x] 26	[P] [7] 71	[P] [↻] 53
1	[↑] 06	[F] [3] 32	[x] 26	[↑] 06	[F] [7] 72	[–] 86
2	[↑] 06	[P] [↻] 53	[x] 26	[P] [7] 71	[F] [2] 22	[↑] 06
3	[P] [↻] 53	[x] 26	[P] [8] 81	[F] [4] 42	[↑] 06	[F] [5] 52
4	[x] 26	[↑] 06	[F] [8] 82	[–] 86	[↑] 06	[P] [↻] 53
5	[x] 26	[↑] 06	[F] [7] 72	[+] 96	[P] [7] 71	[F] [3] 32
6	[↑] 06	[F] [5] 52	[x] 26	[P] [8] 81	[F] [2] 22	[↑] 06
7	[F] [6] 62	[x] 26	[↑] 06	[F] [8] 82	[–] 86	[↑] 06
8	[P] [↻] 53	[x] 26	[↑] 06	[F] [7] 72	[+] 96	[С/П] 78

На этом не столь уж сложном примере ясно видны ограничения, которые налагаются на работу с "Б3-21" в связи с лимитированным объемом ее оперативной и программной памяти. Модели "Б3-34" и "МК-54" имеют увеличенную программную память – до 98 шагов программы против 60 у "Б3-21". Готовятся к выпуску модели с еще большей оперативной памятью.

После ввода данной программы следует перевести калькулятор в режим "Работа", ввести элементы определителя в оперативную память, включая стековую, и запустить вычисления. Для проверки вычислим определитель

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 6 & -2 & 3 \\ 7 & -5 & -3 \end{vmatrix}.$$

Его элементы распределим в памяти так:

$a_2 = 6 \to P_2$; $b_2 = -2 \to P_3$; $c_2 = 3 \to P_4$; $a_3 = 7 \to P_5$; $b_3 = -5 \to P_6$;
$c_1 = 5 \to \boxed{\text{P}}\ \boxed{\text{Q}}$; $b_1 = 4 \to \boxed{\text{P}}\ \boxed{\text{Q}}$; $c_3 = -3 \to \boxed{\text{P}}\boxed{\text{Q}}$; $a_1 = 2 \to \boxed{\text{P}}\ \boxed{\text{Q}}$;
$c_3 = -3 \to \boxed{\text{P}}\ \boxed{\text{Q}}$.

В результате вычисления, если программа была введена верно, получим 118.

Перейдем к особенностям составления более сложных программ, с помощью которых могут быть решены достаточно широкие классы задач.

Разветвляющиеся вычислительные процессы и их программирование

При решении многих задач приходится сталкиваться со случаем, когда в зависимости от конкретных значений промежуточных результатов вычислительный процесс на определенных этапах разделяется на два или более направлений. С этим мы встречаемся даже при решении квадратных уравнений: если дискриминант неотрицателен, т.е. $b^2 - 4ac \geqslant 0$, получаем два действительных различных или равных корня, если же $b^2 - 4ac < 0$ – два комплексных корня. Другой пример: $\int\limits_0^x x^n dx$ вычисляется совершенно различными путями в зависимости от того, равно или не равно -1 значение n, что можно выразить так:

$$\int\limits_0^x x^n dx = \begin{cases} \dfrac{x^{n+1}}{n+1} & \text{при } n \neq -1, \\ \ln x \text{ при } n = -1. \end{cases}$$

С подобной ситуацией мы встречаемся также при вычислении функций, аналитические выражения которых различны для разных промежутков области их определения. Вычислительные процессы такого рода называются разветвляющимися, так же называются и реализующие их на ЭВМ программы. При составлении таких программ широко используются команды безусловного и условного переходов. При их выполнении естественный порядок прохождения программы всегда или при определенном условии нарушается – вместо следующей по порядку команды выполняется та, номер которой соответствующим образом указан в программе.

В микрокалькуляторе "Б3-21" для осуществления безусловного перехода имеется клавиша $\boxed{\text{БП}}$, условный переход при соответствующих значениях содержимого регистра X обеспечивается нажатием клавиш

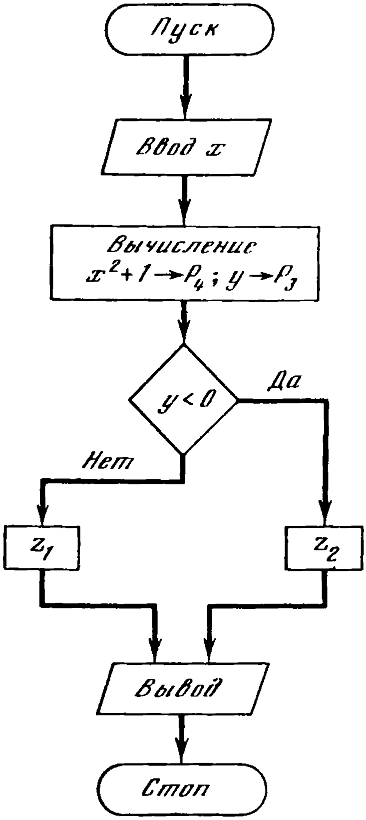


Рис. 17. Блок-схема вычислительного процесса (пример на с. 107)

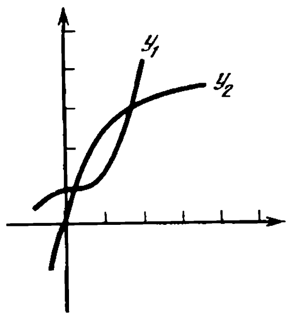


Рис. 18. График функции к задаче на с. 107

P [x ≠ 0], P [x < 0], P [x = 0], P [x ≥ 0]. Для осуществления условного перехода после нажатия указанных клавиш записывается команда, код которой в соответствии с табл. 10 (или табл. 3 заводской инструкции) на единицу больше адреса команды, к которой нужно перейти, если условие перехода не выполняется.

Поясним сказанное на таком фрагменте программы:

Адрес команды	Обозначение клавиш	Код
15	P x < 0	69
20	F ÷	35
21	2	24
22	↑	06
...	...	...

По адресу 15 записана команда перехода по условию $x < 0$ (P [x < 0]). Команда по адресу 20 предписывает перейти к выполнению команды 34 (35–1), если данное условие $x < 0$ не выполняется. Если же оно выполняется, должны быть выполнены следующие по порядку команды начиная с 22.

Таблица 13

Адрес команды	Обозначение клавиш	Код	Примечание
00	F 2	22	Вызов числа, хранящегося в регистре P_2
01	F x^2	55	Возведение числа в регистре X в квадрат
02	1	14	Вычисление $x^2 + 1$ и его запись в регистр P_4
03	+	96	
04	P 4	41	
05	3	34	Вычисление и запись в регистр P_3 выражения $y = 3x\ (x^2 + 1)$
10	×	26	
11	↑	06	
12	F 2	22	
13	×	26	
14	P 3	31	
15	P $x < 0$	69	Переход по условию $x < 0$ к команде 34 (= 35 – 1) (код номера адреса перехода определяется по таблице)
20	F [illegible] 22	35	
21	2	24	Вычисление $z_2 = \frac{2}{x^2 + 1} + y$
22	↑	06	
23	F 4	42	
24	÷	36	
25	↑	06	
30	F 3	32	
31	+	96	
32	БП	58	Безусловный переход к команде 45 (=46 – 1)
33	[illegible] 29	46	
34	F 2	22	Вычисление $z_1 = \frac{x}{x^2 + 1} - y$
35	↑	06	
40	F 4	42	
41	÷	36	
42	↑	06	
43	F 3	32	
44	–	86	
45	С/П	78	

Рассмотрим теперь составление разветвляющейся программы на достаточно характерном (но не слишком громоздком) примере. Составим ее для вычисления функции

$$z = \begin{cases} \dfrac{x}{x^2 + 1} - y \text{ при } y \geqslant 0, \\ \dfrac{2}{x^2 + 1} + y \text{ при } y < 0, \end{cases}$$

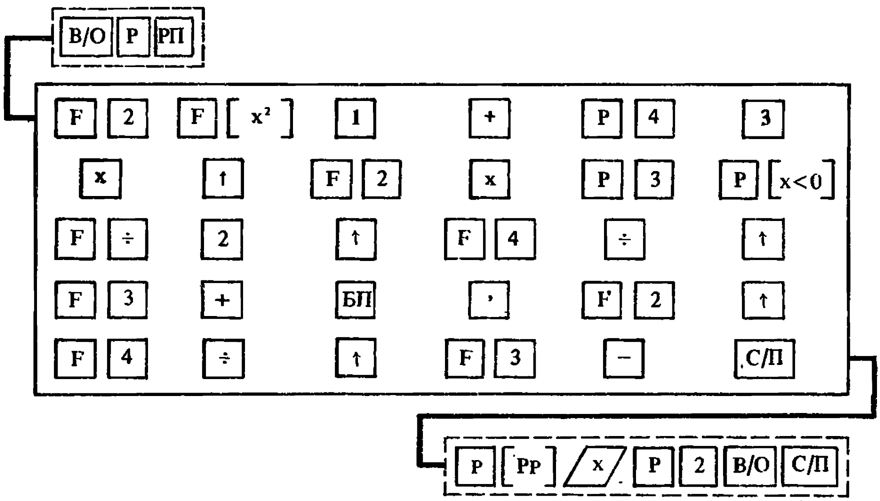
если $y = 3x(x^2 + 1)$. Вычислить значения z при $x = -0{,}8$; 1,0; 3,0.

Для записи значения аргумента выделим ячейку (регистр) памяти P_2 : $x \to P_2$. Составим прежде всего блок-схему вычислительного процесса (рис. 17), имея в виду, что часть вычислений, общую для обеих ветвей программы, лучше выполнить до перехода к разветвлениям. Затем приступим к составлению самой программы, которую представим сначала в более пространном виде с соответствующими примечаниями (табл. 13).

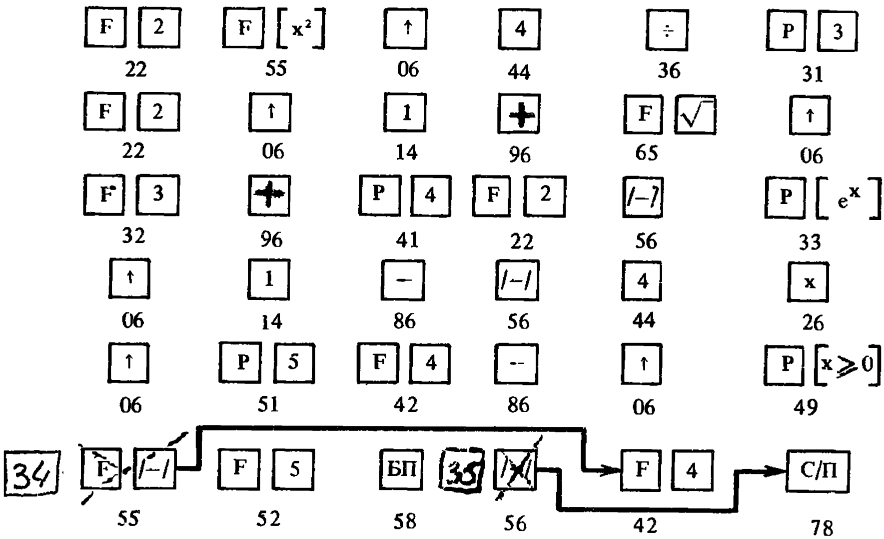
Перед вводом программы калькулятор переводится в режим "Программирование" ([Р] [РП]) с команды 00 ([В/О]), после ее ввода – в режим "Работа" ([Р] [РР]), затем вводится значение x в соответствующий регистр памяти (здесь – P_2) и нажатием клавиш [В/О] [С/П] калькулятор запускается в работу. Через несколько секунд на индикаторе можно прочесть результат вычислений. Если требуется произвести вычисления с другими аргументами, вводим их значение в соответствующие регистры памяти и снова запускаем калькулятор в работу. Например, при $x = -0{,}8$ выполняем: /–0,8/ [Р] [2] [В/О] [С/П] → (–2,7165); при $x = 1$ получаем –5,5 и т.д.

Заметим, что аргументы в память можно вводить и перед программой, до перевода калькулятора в режим "Программирование".

Запишем программу в компактном виде:



Рассмотрим еще один характерный пример разветвленной программы: пусть даны функции $y_1 = x^2/4 + \sqrt{1 + x}$ и $y_2 = 4(1 - e^{-x})$. Для данных значений $x \geqslant -1$ надо вычислить значения обеих функций, выбрать из них ту, значение которой для данного x больше, и выдать это значение на индикатор. Приведем ту часть программы, которая вводится в режиме программирования после нажатия клавиш [В/О] [Р] [РП] :



В 50-й и 53-й командах обозначения клавиш определяются по таблицам, исходя из того, что в одном случае требуется перейти по условию $x \geqslant 0$ к команде 54 (= 55 − 1), а во втором – по команде безусловного перехода к команде 55 (= 56 − 1).

Проверим правильность вычислений по данной программе:

$x = 1$	$x = 2$	$x = 3$
y_1 1,664213	2,732050	4,25
y_2 2,528482	3,458658	3,800852
На индикаторе (2,528482)	(3,458658)	(4,25)

Для ориентировки приведем графики обеих функций (рис. 18). Значения y_1 и y_2 для каждого x можно сопоставить, вызвав их поочередно на индикатор из регистров P_4 и P_5, где они хранятся после выполнения вычисления для каждого данного x.

Подпрограммы

При составлении программ для решения сложных задач на программируемых микрокалькуляторах (и вообще на ЭВМ) довольно часты случаи, когда одна и та же последовательность вычислений встречается несколько раз. Естественно, что ее надо запрограммировать один раз и затем при необходимости к ней обращаться. Соответствующую часть программы принято называть подпрограммой. Даже в простых моделях калькуляторов часто предусмотрена подпрограмма вычисления квадратного корня, выполняемая при нажатии клавиши $\boxed{\sqrt{\ }}$. В более сложных моделях инженерных калькуляторов заложены готовые подпрограммы для вычисления прямых и обратных тригонометрических функций, значений показательных и логарифмических функций и т.д. Имеются такие подпрограммы и в модели "Б3-21". Можно составить подпрограммы вычислительных процессов, ко-

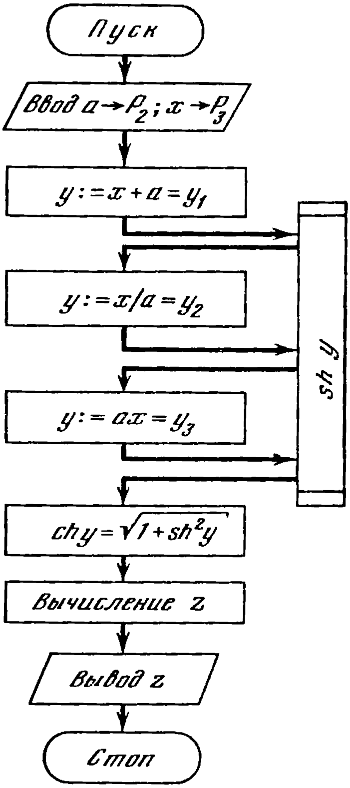


Рис. 19. Блок-схема программы с подпрограммами

торые заранее запрограммированы, но могут упростить составление основной программы. Эти подпрограммы следует записать в части памяти микрокалькулятора, свободной от других частей программы. Такие подпрограммы являются самовосстанавливающимися – к ним в ходе решения данной задачи можно обращаться неоднократно.

Для обращения к подпрограмме на "Б3-21" предусмотрена клавиша $\boxed{\text{ПП}}$ (переход к подпрограмме). После ввода этой команды клавишей $\boxed{\text{ПП}}$ следует в качестве кода операции набрать число, на единицу превышающее номер команды, с которой начинается подпрограмма. В приводимом ниже примере (табл. 14) следует обратить внимание на оформление команд 04; 05; 15; 20; 30, 31. Во всех этих случаях в качестве кода операции берется число 54, на единицу большее адреса команды, с которого начинается подпрограмма (в данном случае 53).

Особенности вычислений на калькуляторе "Б3-21" с использованием подпрограмм рассмотрим на следующем примере. Составим программу для вычисления функции $z = \dfrac{\text{sh}\,(x + a) + \text{sh}\,(x/a)}{\text{sh}\,(ax)}$ и найдем значения z для x = 0,6; 0,6; 1,0; для a = 1,0; 2,0; 2,0. Здесь, как видим, необходимо дважды вычислять значения гиперболического синуса, но от разных аргументов и один раз значение гиперболического косинуса. Однако если учесть, что $\text{ch}\,ax = \sqrt{1 + \text{sh}^2\,x}$, то дело сведется к трехкратному нахождению sh от разных аргументов. Естественно для вычисления sh составить отдельную подпрограмму и при необходимости использовать, расположив ее в конце основной программы. Блок-схема программы представлена на рис. 19. Здесь подпрограмма заключена в вертикальный прямоугольник, обозначение := заимствовано из универсального языка программирования АЛГОЛ-60, называется оно оператором присваивания и читается "присвоить значение". Например, $y := x$ читается так: "y присвоить значение x".

Заметим, что для данной функции x может принимать любые действительные значения, так как sh x определен для $]-\infty, \infty[$, а ch x для $[0, 1[$.

При составлении программы следует учесть, что для решения поставленной задачи в каждом отдельном случае в памяти калькулятора должны

Таблица 14

Адрес	Обозначение клавиш	Код	Примечание
00	F 2	22	Вычисление $y := (a + x)$
01	↑	06	
02	F 3	32	
03	+	96	
04	ПП	68	Переход к подпрограмме вычисления sh y = sh $(a + x)$
05	5	54	
10	P 4	41	Запись sh $(a + x)$ в P_4
11	F 3	32	Вычисление $y := x/a$
12	↑	06	
13	F 2	22	
14	÷	36	
15	ПП	68	Переход к подпрограмме вычисления sh y = sh x/a
20	5	54	
21	P 5	51	Запись sh x/a в P_5
22	F 2	22	Вычисление $y := ax$
23	↑	06	
24	F 3	32	
25	×	26	
30	ПП	68	Переход к подпрограмме вычисления sh y = sh (ax)
31	5	54	
32	F x^2	55	Вычисление ch (ax)
33	1	14	
34	+	96	
35	F √	65	
40	P 6	61	Запись ch (ax) в P_6
41	F 4	42	
42	↑	06	
43	F 5	52	Вычисление z
44	+	96	
45	↑	06	
50	F 6	62	
51	÷	36	
52	С/П	78	
53	P e^x	33	Подпрограмма для вычисления sh y. В конце подпрограммы содержится команда В/О для возобновления вычислений по основной программе (начиная с адреса, следующего за тем, в котором был указан адрес перехода к подпрограмме)
54	↑	06	
55	F 1/x	45	
60	−	86	
61	2	24	
62	÷	36	
63	В/О	48	

содержаться значения a и x, кроме того, в процессе решения должны запоминаться значения промежуточных переменных $\mathrm{sh}(x + a)$, $\mathrm{sh}\ (x/a)$ и $\mathrm{ch}(ax)$. С самого начала предусмотрим следующее распределение регистров памяти под эти величины:

$$a \to P_2;\ x \to P_3;\ \mathrm{sh}(x+a) \to P_4;\ \mathrm{sh}\ (x/a) \to P_5;\ \mathrm{ch}\ (ax) \to P_6.$$

Программа в подробной записи представлена в табл. 14.

После ввода очередных a и x по программе будут выполнены соответствующие вычисления с трехкратным обращением к подпрограмме $\mathrm{sh}\ y$. Для проверки приводим значения z, $\mathrm{sh}\ (x + a)$; $\mathrm{sh}\ (x/a)$ и $\mathrm{ch}(ax)$, хранящиеся в регистрах P_4, P_5, P_6, которые можно вызвать на индикатор и в регистр индикации операциями $\boxed{F}\ \boxed{n}$ (n = 4, 5, 6) для заданных в условии значений аргументов a и x:

a	x	z	$\mathrm{sh}\ (x + a)$	$\mathrm{sh}\ x/a$	$\mathrm{ch}\ xa$
1	0,6	2,540961	2,375567	0,6366535	1,185465
2	0,6	3,865589	6,694730	0,3045202	1,810655
2	1,0	2,801281	10,01787	0,5210951	3,762195

Обратим внимание еще на одно обстоятельство: при новой серии исходных данных (a и x в этом примере) в калькулятор достаточно ввести лишь те, которые отличаются от предыдущих, остальные сохраняются. В нашем примере во второй серии достаточно заменить только значение a по сравнению с первой серией, а в третьей заменить x.

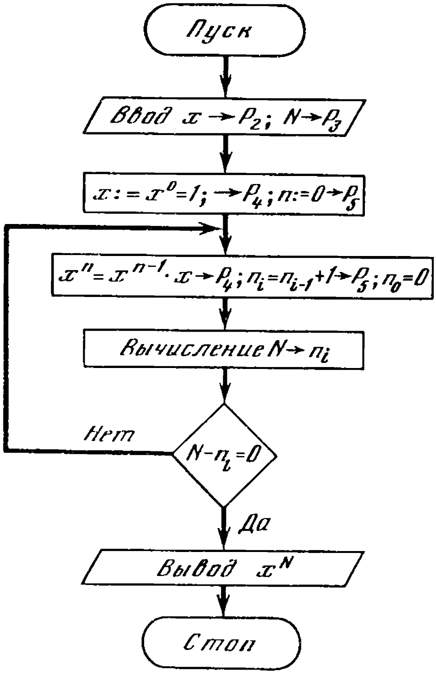
Циклические вычислительные процессы и их программирование

В отличие от программ с подпрограммами, когда после их выполнения происходит обращение к очередной команде, могут оказаться еще группы из одних и тех же команд, после выполнения которых происходит возврат или обращение к команде, определяемой особенностями программы. Такие группы из одной и той же последовательности команд называются циклами, соответствующие вычислительные процессы и реализующие их программы – циклическими. Циклы являются составными частями большинства сложных программ.

Различают структурные (арифметические) и итерационные циклы. С помощью структурных циклов реализуются многократно повторяющиеся участки вычислительных процессов, в которых число повторений либо заранее известно, либо задается в процессе вычислений перед началом выполнения цикла. Управление повторением таких циклов осуществляется с помощью счетчика циклов.

Итерационные циклы предназначены для реализации итерационных вычислительных методов, когда решение уточняется повторным применением некоторых математических операций или их совокупностей. Выход из итерационного цикла осуществляется после достижения заданной точности вычислений или многократного исполнения цикла, при котором заведомо обеспечивается требуемая точность вычислений. В случае, когда выход из цикла должен быть осуществлен после достижения заданной точности вычислений, при каждом его прохождении это условие должно

Рис. 20. Блок-схема программы для вычисления функции $y = x^N$



проверяться. Если оно не выполнено, цикл повторяется, иначе происходит выход из цикла, и на этом соответствующий этап вычислений заканчивается. Если же известно заранее, что при n-кратном выполнении цикла будет достигнута необходимая точность результата вычислений, управление циклическим процессом ведется с помощью счетчика, как и в случае структурных циклов.

Циклы могут быть простыми, не содержащими в себе других циклов, и кратными, содержащими в себе другие циклы.

Для организации циклов в "БЗ-21" используются команды условного перехода (клавиши [Р] [x ≥ 0], [Р] [x ≠ 0], [Р] [x < 0], [Р] [x = 0]) и безусловного (клавиша [БП]).

Циклические программы со структурным циклом. В качестве простейшего образца программы со структурным циклом рассмотрим такую: составим программу для вычисления функции $y = x^N$, где N – целое число. Конечно, это вычисление может быть выполнено автоматически, так как соответствующая подпрограмма постоянно хранится в памяти и программируемого и любого инженерного микрокалькулятора и вызывается командой [F] [x^y]. В этом случае также желательно предварительное составление блок-схемы (рис. 20).

Приведем эту программу в подробной записи (табл. 15).

После перевода калькулятора в режима "Работа" ([Р] [РР]) и ввода в оперативную память значений x и N ($x \to P_2$, $N \to P_3$) нажатием клавиш [В/О] [С/П] поручаем калькулятору выполнить автоматически всю запрограммированную совокупность вычислений. На нескольких примерах проверим правильность составления и ввода данной программы.

Пусть $x = 2, N = 7; x^N = 128$.

$x = 3, N = 5; x^N = 243$.

$x = 1{,}5, N = 4; x^N = 5{,}0625$.

$x = 1{,}755, N = 6; x^N = 29{,}21882$ и т.д.

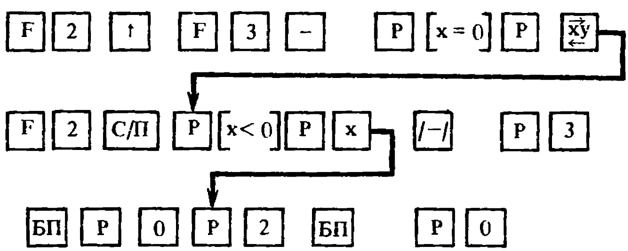
Приведем в компактной записи еще три примера характерных программ, содержащих структурные циклы.

Нахождение наибольшего общего делителя двух целых чисел ("алго-

Таблица 15

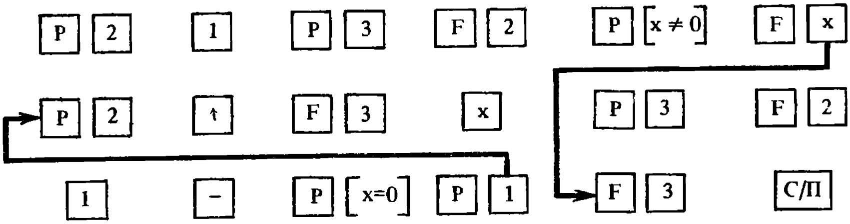
Адрес	Обозначение клавиш	Код	Примечание
00	[1]	14	
01	[↑]	06	$x^n := x^0 = 1 \to P_4$
02	[P][4]	41	
03	[0]	04	
04	[↑]	06	$n_i := n_0 = 0 \to P_5$
05	[P][5]	51	
10	[F][4]	42	
11	[↑]	06	$x^n := x^{n-1} \cdot x; x^1 := x^0 \cdot x = 1 \cdot x \to P_4$
12	[F][2]	22	
13	[x]	26	
14	[P][4]	41	
15	[F][5]	52	
20	[↑]	06	
21	[1]	14	$n_i := n_{i-1} + 1; n_1 := n_0 + 1 = 1 - P_5$
22	[+]	96	
23	[P][5]	51	
24	[F][3]	32	
25	[↑]	06	$N - n_i$
30	[F][5]	52	
31	[−]	86	
32	[P][x = 0]	59	$N - n_i = 0?$
33	[P][1]	11	
34	[F][4]	42	Вывод x^N
35	[С/П]	78	

ритм Евклида"). Пусть дано два неравных целых числа a и b. Для определенности положим $a > b$. Распределим память так: $a \to P_2$; $b \to P_3$. Алгоритм нахождения наибольшего общего делителя этих чисел на "Б3-21" можно представить в следующем виде:



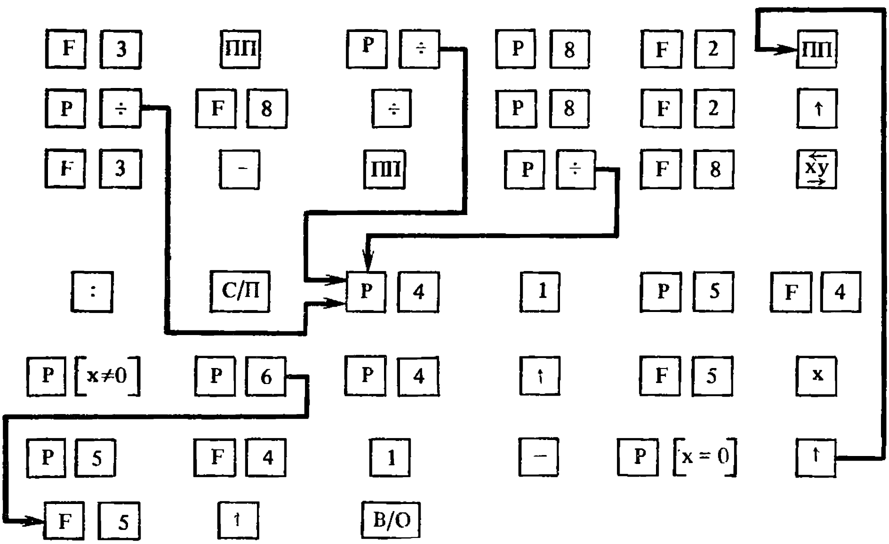
Вычисление факториала ($N!$) сводится к последовательности вычисления произведений N ($N-1$) ($N-2$)... до тех пор, пока последний сомножитель станет равным единице. При этом следует учесть и случай $N = 0$ ($0!$ принимается равным единице).

Программа вычисления (выполняемая калькулятором за 1,5–2,0 секунды) выглядит так:



После ввода программы и перевода калькулятора в режим "Работа" достаточно ввести значение N в один из регистров оперативной памяти – в программе P_2 – и нажатием клавиш [В/О] [С/П] поручить калькулятору выполнить вычисления по данной программе.

Вычисление числа сочетаний из n элементов по m, C_n^m. Как известно, $C_n^m = \dfrac{n!}{m!(n-m)!}$. Для вычисления C_n^m удобно воспользоваться программой вычисления $N!$, используя ее в качестве подпрограммы для вычисления $n!$, $m!$, $(n-m)!$ В этом случае, выделив для записи n и m регистры P_2 и P_3, программу можем представить таким образом:



Циклические программы с итерационным циклом. Достаточно часто приходится применять циклические программы, в которых количество повторений циклов заранее неизвестно – оно определяется в ходе вычислений. Для примера рассмотрим процесс извлечения квадратного корня из числа с заданной точностью. В качестве критерия точности используем условие, чтобы абсолютная величина разности между очередными приближениями $|y_{i-1} - y_i|$ была меньше некоторого наперед заданного достаточно малого положительного числа ϵ. Обозначим подкоренное число через x и выделим для него регистр P_2, а для числа ϵ — регистр P_5. При составлении программы используем описанное еще Героном Александрийским соотношение $y_i = 1/2\ (y_{i-1} + x/y_{i-1})$.

Ниже приводится программа (без команд перехода в РП и в конце — в РР).

00	F 2	22	$y_0 \to P_3$
01	2	24	
02	+	36	
03	P 3	31	
04	F 2	22	$y_2 = 1/2\,(y_0 + x/y_0) \to P_4$
05	↑	06	$y_i = 1/2\,(y_{i-1} + x/y_{i-1}) \to P_4$
10	F 3	32	
11	÷	36	
12	↑	06	
13	F 3	32	
14	÷	36	
15	2	24	
20	+	36	
21	P 4	41	
22	F 4	42	$y_1 - y_2$
23	↑	06	$(y_{i-1} - y_i)$
24	F 2	32	
25	−	86	
30	P x<0	69	$y_1 - y_2 < 0$?
31	F ÷	35	$(y_{i-1} - y_i < 0?)$
32	/−/	56	$\lvert y_{i-1} - y_i\rvert$
33	↑	06	
34	F 5	52	$\lvert y_{i-1} - y_i\rvert - \varepsilon$
35	−	86	
40	P 6	61	
41	F 4	42	$y_1 \to y_0$
42	P 3	31	$(y_i \to y_{i-1})$
43	F 6	62	
44	P x<0	69	$\lvert y_{i-1} - y_i\rvert - \varepsilon < 0$
45	Б ↑	05	
50	F 4	42	
51	С/П	78	

Положим $\epsilon = 0{,}00001$, получим $\sqrt{2} = 1{,}414212$; $\sqrt{3} = 1{,}732050$; $\sqrt{5} = 2{,}2360679$; $\sqrt{7} = 2{,}645751$ и т.д.

МИКРОКАЛЬКУЛЯТОРЫ "ЭЛЕКТРОНИКА Б3-34" И "ЭЛЕКТРОНИКА МК-54"

Модель "Б3-34" – усовершенствованный вариант "Б3-21" и отличается от нее прежде всего расширенным набором выполняемых операций (автоматически находятся обратные тригонометрические функции, непосредственно вычисляется tg x и др.). Калькулятор "Б3-34" автоматически выполняет вычисления по программам, содержащим до 98 команд (т.е. более чем на 60% превосходит возможности предыдущей модели), имеет 14 регистров памяти, обозначаемых не только одноразрядными десятичными числами, но и буквами A, B, C, D, одновходовый стек, содержащий кроме операционных регистров X и У вспомогательные регистры Z и T. Кроме того, имеется регистр восстановления предыдущего результата (X 1), в который автоматически переписывается содержимое регистра X перед выполнением любой операции.

В адресной системе этой модели в качестве кодов использованы обычные двузначные десятичные числа, что упрощает составление программ и обеспечивает возможность изменения адресации переходов и обращений к регистрам памяти в процессе автоматических вычислений.

Обозначения клавиш этой модели несколько отличаются от модели "Б3-21", в частности, есть клавиша совмещенной функции $\boxed{\text{К}}$, обеспечивающей ввод операторов косвенных переходов – безусловного $\boxed{\text{К}}$ $\boxed{\text{БП}}$ $\boxed{N}$ (где N – номер регистра памяти) и условных $\boxed{\text{К}}$ $\boxed{x<0}$ $\boxed{N}$, $\boxed{\text{К}}$ $\boxed{x \geqslant 0}$ $\boxed{N}$, $\boxed{\text{К}}$ $\boxed{x=0}$ $\boxed{N}$, $\boxed{\text{К}}$ $\boxed{x \neq 0}$ $\boxed{N}$ и обращение к подпрограмме $\boxed{\text{К}}$ $\boxed{\text{ПП}}$ $\boxed{N}$. Кроме того, имеется оператор ВХ восстановления результата предыдущей операции. Есть операторы-счетчики L0, L1, L2, L3, с помощью которых из содержимого регистров 0, 1, 2 и 3 соответственно вычитается единица и полученный результат проверяется по условию $x = 0$. Если это условие не выполняется, управление передается по адресу, записанному в программе после оператора-счетчика. В противном случае продолжается выполнение программы, записанной после адреса перехода.

При выполнении операторов косвенных переходов содержимое регистров памяти N = 0, 1, 2, 3 с адресом условного перехода уменьшается на единицу, а регистров N = 4, 5, 6, 7 увеличивается на единицу. Для остальных регистров памяти оно остается неизменным.

Преимуществом входного языка модели "Б3-34" является то, что операнды автоматически смещаются "вверх" в регистрах операционного стека не только при наборе числового операнда (после выполнения любой операции), но и при вызове в регистр X содержимого любого регистра памяти 0, 1, ..., 9, A, B, C, D, что исключает необходимость использования оператора $\boxed{\uparrow}$ при вызове в регистр X содержимого регистров памяти и обеспечивает некоторое сокращение длины программы.

Перевод программ с языка микрокалькулятора "Б3-21" на язык "Б3-34" обычно не вызывает затруднений, хотя следует помнить об имеющихся различиях. Обратный перевод с языка "Б3-34" на язык "Б3-21" значительно труднее (как обычно с языка программирования более высокого уровня на язык более низкого уровня).

Следует отметить, что при кодировании операций и команд в режиме "Программирование" (F ПРГ) применяются не только соответствующие цифры, но и другие комбинации сегментов семисегментного индикатора, в частности –, L, C, Г, E. Полная таблица кодов операций, команд и цифр при программировании на "Б3-34" содержит свыше 200 комбинаций нажатий клавиш. При попытке выполнить невыполнимую операцию (например, деление на 0 или извлечение корня четной степени из отрицательного числа) на индикаторе высвечивается слово error – ошибка (англ.).

Приведем программы для вычисления суммы (S) и произведения (P) числовой последовательности.

Вычисления производятся по формулам

$$S = \sum_{i=1}^{n} i; \qquad P = \prod_{i=1}^{n} i.$$

После включения микрокалькулятора и перевода его в режим программирования (F ПРГ) заносим программу (табл. 16).

Таблица 16

Адрес	Обозначение клавиш	Код	Адрес	Обозначение клавиш	Код
00	П 2	42	09	П 2	42
01	1	01	10	ИП 3	63
02	–	11	11	БП	51
03	П 3	43	12	0 1	01
04	F x ≠ 0	57	13	ИП 2	62
05	1 4	14	14	С/П	50
06	↑	02	15	БП	51
07	ИП 2	62	16	0 0	00
08	+ или ×	10 или 12			

Далее следует очистить программный счетчик (F АВТ В/О), набрать на клавиатуре значение n, вычислить нажатием клавиши С/П значения S или P и для вычисления суммы или произведения с новым значением n повторно его ввести и нажать клавишу С/П .

Новейшая модель программируемого микрокалькулятора "Электроника "МК-54" отличается от "Б3-34" главным образом габаритами (167Х78Х Х36 мм против 185Х100Х40 мм у "Б3-34" и "Б3-21") и массой (250 г против 390 г). Внутреннее питание обеспечивается тремя батарейками А-316 "Квант". Эта модель в полном смысле слова – компьютер в кармане, по габаритным размерам и массе (а также по стоимости) она не отличается от инженерных микрокалькуляторов, имея значительно более широкие вычислительные возможности. Особенности работы с данной моделью такие же, как и с "Б3-34".

ВМЕСТО ЗАКЛЮЧЕНИЯ

Мы рассмотрели некоторые особенности применения микрокалькуляторов в тех вычислениях, с которыми приходится иметь дело непрофессионалам. По мере совершенствования микрокалькуляторов возможности их использования постоянно расширяются. Достигнут ли предел? И в каком направлении должна происходить дальнейшая модернизация?

Уменьшения размеров? По крайней мере для простых и инженерных калькуляторов таких моделей, как "БЗ-30" или "БЗ-38", оптимальные размеры, можно считать, уже достигнуты: дальнейшее уменьшение габаритов снизило бы удобство их использования*. Что же касается программируемых калькуляторов, снижение их габаритов желательно и уже постепенно осуществляется (что видно на примере новой модели "МК-54").

Не следует ожидать и существенного расширения выполняемых автоматически операций на инженерных микрокалькуляторах – почти все, что может понадобиться вычислителю, уже предусмотрено в выпускаемых моделях.

Желательно дальнейшее расширение функций индикатора, который должен высвечивать не только операнды и результаты операций, но и сам вычислительный алгоритм, включая знаки и символы операций. Впрочем, высвечивать – не то слово. Лучше сказать – индицировать или показывать, поскольку наблюдается тенденция к использованию индикаторов на жидких кристаллах, отличающихся низким потреблением электроэнергии.

Следует также ожидать дальнейшего совершенствования запоминающих устройств – появятся устройства, хранящие записанные в них данные и после выключения питания. Получат распространение также микрокалькуляторы, печатающие промежуточные и окончательные результаты на бумаге (они уже выпускаются нашей промышленностью – "Электроника МК-41"), что существенно повышает удобство работы. На многих моделях облегчится ввод чисел и команд – будут использоваться сенсорные устройства, срабатывающие при легком прикасании к клавишам.

Следует ожидать дальнейшего развития программируемых калькуляторов. Кроме уменьшения размеров, будет увеличено число регистров обычной (до нескольких сот) и программной (до нескольких тысяч шагов) памяти. Широкое применение получат программируемые микрокалькуляторы, в которых программы будут храниться на магнитных картах. Вынув такую карту из библиотеки программ и вставив ее в калькулятор, мы тем самым подготовим его к работе (останется ввести только исходные данные). Грань между программируемыми микрокалькуляторами и универсальными микроЭВМ постепенно будет стираться. Более того, уже сейчас ведется речь о "домашних компьютерах" – бытовых микроЭВМ настольного типа с очень широкими вычислительными и информационными возможностями.

---

*Впрочем, известны микрокалькуляторы, совмещаемые с электронными наручными часами или корпусом авторучек, однако из-за миниатюрности их вряд ли можно рассматривать как серьезных помощников при систематических вычислениях.

СОДЕРЖАНИЕ

60 коп.

ИЗДАТЕЛЬСТВО "НАУКА" ВЫХОДИТ ИЗ ПЕЧАТИ КНИГА:

Давыдов Г.Б.

ИНФОРМАЦИЯ И СЕТИ СВЯЗИ.
10 л. 65 к.

Рассказывается о достижениях и проблемах в области средств передачи и распределения информации. Описаны современные методы передачи и распределения информации и основные технические средства, обеспечивающие решение этой задачи. Показано взаимодействие технических средств между собой и с потребителями в рамках единой сети связи. Особое внимание уделено новым тенденциям развития этой сети — внедрению новой технологии и слиянию сети электросвязи с ЭВМ. Расчитана на широкий круг читателей.

Заказы просим направлять по одному из перечисленных адресов магазинов "Книга—почтой" "Академкнига":
480091 **Алма-Ата,** 91, ул. Фурманова, 91/97; 370005 **Баку,** 5, ул. Джапаридзе, 13; 320093 **Днепропетровск,** проспект Ю. Гагарина, 24; 734001 **Душанбе,** проспект Ленина, 95; 252030 **Киев,** ул. Пирогова, 4; 277012 **Кишинев,** проспект Ленина, 148; 443002 **Куйбышев,** проспект Ленина, 2; 197345 **Ленинград,** Петрозаводская ул., 7; 220012 **Минск,** Ленинский проспект, 12; 117192 **Москва,** В-192, Мичуринский проспект, 12; 630090 **Новосибирск,** Академгородок, Морской проспект, 22; 620151 **Свердловск,** ул. Мамина-Сибиряка, 137; 700187 **Ташкент,** ул. Дружбы народов, 6; 450059 **Уфа,** 59, ул. Р. Зорге, 10; 720001 **Фрунзе,** бульвар Дзержинского, 42; 310078 **Харьков,** ул. Чернышевского, 87.