

# СПРАВОЧНИК

Ш.Е.ЦИМРИНГ

СПЕЦИАЛЬНЫЕ  
ФУНКЦИИ  
И ОПРЕДЕЛЕННЫЕ  
ИНТЕГРАЛЫ  
•  
АЛГОРИТМЫ  
•  
ПРОГРАММЫ  
ДЛЯ  
МИКРОКАЛЬКУЛЯТОРОВ



МОСКВА „РАДИО И СВЯЗЬ”  
1988

Рецензент: докт. физ.-мат. наук В. И. ГАЙДУК

Редакция литературы по вычислительной технике

Цимринг Ш. Е.

Ц 61 Специальные функции и определенные интегралы. Алгоритмы. Программы для микрокалькуляторов: Справочник. — М.: Радио и связь, 1988. — 272 с.: ил.

ISBN 5-256-00106-X

Содержит алгоритмы вычисления значений специальных функций вещественного и комплексного аргумента и соответствующие программы для микрокалькуляторов «Электроника» БЗ-34, МК-54, МК-56, МК-52, МК-61. Приведены алгоритмы и программы вычисления нулей специальных функций и нулей их производных, определенных интегралов, в том числе несобственных, и интегралов от функций комплексного переменного. В справочнике около 250 программ.

Для инженерно-технических работников, преподавателей высших и средних учебных заведений, студентов вузов.

Ц 2402020000-146  
046(01)-88 100-88

ББК 32.937

Справочное издание

ЦИМРИНГ ШУЛИМ ЕФИМОВИЧ

СПЕЦИАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ И ОПРЕДЕЛЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ.  
АЛГОРИТМЫ. ПРОГРАММЫ ДЛЯ МИКРОКАЛЬКУЛЯТОРОВ

Справочник

Заведующая редакцией Г. И. Козырева. Редактор Т. М. Толмачева  
Художественный редактор Н. С. Шенин. Переплет художника Н. А. Пашур  
Технический редактор З. Н. Ратникова. Корректор Л. А. Буданцева

ИБ № 1557

Сдано в набор 10.12.87. Подписано в печать 02.08.88. Т-14662.  
Формат 50×88<sup>1</sup>/<sub>16</sub>. Бумага офсетная № 2. Гарнитура литературная. Печать офсетная.  
Усл. печ. л. 16,66. Усл. кр.-тт. 16,66. Уч.-изд. л. 19,63. Тираж 30 000 экз. Изд. № 21851  
Зак. № 871. Цена 1 р. 30 к.  
Издательство «Радио и связь», 101000 Москва, Почтамт, а/я 693

Московская типография № 4 Союзполиграфпрома при Государственном комитете СССР  
по делам издательства, полиграфии и книжной торговли.  
Москва, И-41, Б. Переславская, 46

ISBN 5-256-00106-X

© Издательство «Радио и связь», 1988

## Предисловие

К настоящему времени выпущено несколько справочных изданий, содержащих среди других разделов программы вычисления специальных функций на программируемых микрокалькуляторах (ПМК) (например, [1—4, 15]). Потребность в такого рода изданиях продиктована, с одной стороны, достоинствами ПМК как дешевых и портативных средств решения простых, но весьма часто возникающих задач, а с другой — широким применением специальных функций не только в теоретических исследованиях, но и в самых разных технических приложениях.

И все же нужно констатировать далеко не полную реализацию возможностей серийных ПМК. Прежде всего это относится к специальным функциям комплексного аргумента. Сравнительно скромное место, которое занимают таблицы этих функций в известных публикациях, объясняется, по-видимому, лишь большим объемом таблиц функций, у которых минимум два аргумента и два значения. Отметим также, что в указанных выше книгах рассматривается вычисление лишь значений функций. Между тем в той же, а иногда и в большей степени необходимо располагать значениями нулей, производных и пр., т. е. тем, что обычно составляет заметную часть содержания соответствующих справочных руководств.

Что касается определенных интегралов, то применительно к ПМК публиковались в основном программы, базирующиеся на формулах прямоугольников, трапеций и парабол. В ряде случаев эти формулы дают низкую скорость сходимости, что существенно для ПМК с их малым быстродействием. Наконец, интегрес представляет вычисление несобственных интегралов и интегралов в плоскости комплексного переменного, через которые выражаются и многие специальные функции.

В предлагаемой книге акцент делается на функциях комплексного аргумента. Представлены программы для большинства используемых специальных функций. Если некоторая программа охватывает не всю область определения функции, то, как правило, даются программы, основанные на альтернативных алгоритмах, указывается погрешность получаемого результата по каждому из них. Точность результата в основном соответствует пяти или шести верным значащим цифрам. Во всех случаях приводятся более короткие программы функций вещественного аргумента.

Для функций Бесселя, Эйри и частично для ортогональных многочленов включены программы вычисления производных, нулей функций и нулей их производных, а также значения функций и производных в нулях.

В разделе, посвященном определенным интегралам, кроме стандартных программ даются программы, реализующие алгоритмы квадратур Гаусса и Чебышева, отличающихся высокой скоростью сходимости для достаточно гладких функций. Квадратуры Чебышева, кроме того, экономичны по числу команд и требуемых регистров памяти и потому особенно эффективны при реализации на ПМК. Приводятся программы определенных интегралов в комплексной области, программы несобственных интегралов, в том числе некоторых несобственных интегралов в комплексной области.

В приложении приведены программы интерполяции функций по Лагранжу, где вычисляются непосредственно значения интерполированной величины для числа равноотстоящих узлов интерполяции до 10 включительно. Интерполяция в совокупности с программами основных разделов книги или табличными дан-

ными может использоваться для вычисления значений специальных функций или связанных с ними величин (как это практикуется при составлении таблиц). В приложении 2 дана программа вычисления значений функций  $w(z)$  комплексного аргумента, которая используется в ряде разделов теоретической физики.

В справочнике достаточно подробно описываются алгоритмы вычисления специальных функций и определенных интегралов, даются сравнительные оценки их эффективности при реализации на ЭВМ. Следует подчеркнуть, что ограниченные ресурсы ПМК по необходимости ведут к отбору предельно экономичных алгоритмов. Думается, что некоторые из них вместе с результатами их численной реализации могут оказаться полезными для работающих на других типах ЭВМ, и особенно для пользователей персональных ЭВМ. Вместе с тем отметим, что погрешности вычислений при непосредственной реализации рассматриваемых в этой книге алгоритмов на большинстве современных мини- и микроЭВМ оказываются на один-два порядка большими (в режимах с одинарной точностью), чем на ПМК.

Программы, приведенные в книге, ориентированы на ПМК «Электроника» БЗ-34, МК-54, МК-56, МК-61, МК-52 и включают только те команды, которые могут быть реализованы на любом из названных микрокалькуляторов.

В начале каждого параграфа, посвященного определенному классу функций или интегралов, напоминаются их определения и описываются применяемые методы и алгоритмы, а затем даются сами программы и инструкции к ним. В более сложных случаях поясняются структуры программ, что также может быть использовано при трансляции программ на другие ЭВМ. Применяются общепринятые определения и обозначения специальных функций [5—11], соответствующие, в частности, наиболее полным справочникам [9, 11]. В отдельных случаях разноточений автор придерживался классических справочных руководств Бэйтмена, Эрдейи [5] и Градштейна, Рыжика [6].

## Введение

Описания программ состоят из собственно текста и инструкций. Предполагается, что читатель знаком с заводским руководством по эксплуатации ПМК (см., например, [13]) и владеет основными навыками работы на них. Тем не менее ниже приводятся сведения, необходимые для работы с программами.

**Текст программы.** Применяется компактная система записи программ, предложенная Трохименко и Любичем [1,3], кроме обозначений команд, требующих использования префиксной клавиши F. Здесь они приводятся в полим виде, т. е. в соответствии с заводским руководством. Программы записываются начиная с адреса 00 построчно по 10 команд в каждой полной строке. Фиксированное число команд в строке помогает быстро определить адрес нужной команды для внесения корректив в программу или организации переходов, циклов и операций с косвенной адресацией. Набор программы осуществляется в режиме программирования, переход к которому (на адрес 00) из рабочего режима (в этом режиме ПМК всегда оказывается после включения) производится нажатием клавиш В/О ПРГ. При наборе программы нужно следить за показаниями счетчика адресов команд (два последних разряда на индикаторе). Адрес первой команды в каждой строке должен заканчиваться цифрой 0, а адрес последней команды в каждой строке — цифрой 9. Соответственно после набора последней команды такой строки на индикаторе в последних двух разрядах должно быть число, кратное 10. Мы подробно останавливаемся на этом потому, что пропуск отдельных команд — наиболее распространенная ошибка при наборе программы.

Обозначения команд в тексте программы соответствуют обозначениям клавиш (на самих клавишах, сверху или снизу) на ПМК «Электроника БЗ-34».

В книге сделаны лишь два исключения: команда  $\overleftrightarrow{XY}$  (обмен содержимого регистров X и Y) для упрощения обозначается без стрелок прописными буквами XY, команда кольцевого перемещения чисел в стеке, как F, что соответствует надписи «» на стековой клавише.

В руководствах по эксплуатации ПМК «Электроника» МК-54, МК-56, МК-61 и МК-52 некоторые тождественные по смыслу и числовым кодам с ПМК «Электроника БЗ-34» команды обозначены по-другому — в соответствии с отличающимся обозначением клавиш:

Содержание команды	БЗ-34	МК-54, МК-56, МК-61, МК-52
Вызов числа из регистра памяти Н Занесение числа в регистр памяти Н Занесение числа в регистр РУ Операции вычисления обратных тригонометрических функций	ИПН ПН ↑ F arcsin, F arccos, F arctg $\overleftrightarrow{XY}$	П→х Н х→П Н В ↑ F sin <sup>-1</sup> , F cos <sup>-1</sup> , F tg <sup>-1</sup>
Обмен содержимым регистров X и Y	$\overleftrightarrow{XY}$	↔

Примечание. Н=0, 1, 2, ..., 9, А, В, С, Д. В микрокалькуляторах «Электроника» МК-52 и МК-61 имеется еще и 15-й регистр памяти Е. В программах данной книги он не используется.

**Инструкции к программам.** Включают следующие сведения (кроме гл. 10):

5. Погрешность — данные о погрешности (абсолютной или относительной) результатов вычислений. В инструкции этот пункт опускается, если алгоритм вычислений не вносит дополнительных погрешностей в результат по сравнению с относительными погрешностями основных операций и функций, указанными в заводском руководстве по эксплуатации, т. е. они не превышают  $1 \cdot 10^{-6}$  для  $xu$  и  $4 \cdot 10^{-7}$  для остальных операций и функций. В книге за *абсолютную погрешность* комплексной величины  $\omega \equiv u + jv$  по отношению к точному или таблич-

Ниже для справок приводятся коды операций, которые представляют собой двузначные пятнадцатеричные числа. Цифрами являются  $N = 0, 1, 2, \dots, 9, \text{—}, \sqcup, \sqsubset, \sqsupset, \text{E}$ . Большинство команд связано с операциями, имеющими прямое отношение к регистрам памяти: ввод и вывод числа, условные и безусловные переходы с прямой и косвенной адресацией и т. д. В кодах этих команд первая цифра обозначает тип операции (она может быть и нулем), вторая — адрес регистра из всех регистров памяти. Например, команда П9 (запись числа в Р9) имеет код 49, команда ИПВ (вызов числа из РВ) — код 6I. Вызов числа из произвольного регистра N имеет код 6N, где значениям  $N = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, \text{A}, \text{B}, \text{C}, \text{D}$  соответствуют  $N = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, \text{—}, \sqcup, \sqsubset, \sqsupset, \text{E}$ . Коды команд этой группы приведены в таблице.

Код	Команда	Содержание команды
4N	ПН	Заисенение числа в РН (в регистр Н)
6N	ИПН	Вызов числа из РН
7N	Kx $\neq$ 0N	Косвенный переход по условию $x \neq 0$ по модифицированному адресу в РН
8N	КБПН	Косвенный безусловный переход по адресу в РН
9N	Kx $\geq$ 0N	Косвенный переход по условию $x \geq 0$ по адресу в РН
—N	КППН	Косвенное обращение к подпрограмме по адресу в РН
L N	КПН	Косвенное занесение числа по адресу в РН
└ N	Kx<0N	Косвенный переход по условию $x < 0$ по адресу в РН
└ N	КИПН	Косвенный вызов числа по адресу в РН
EN	Kx=0N	Косвенный переход по условию $x = 0$ по адресу в РН

Коды остальных операций (с первой цифрой кода 0, 1, 2, 5):  
 0N, где  $N = 0, 1, \dots, 9$  — набор цифры  $N$  на клавиатуре,  
 0N, где  $N = -, \square, \square, \square, \square, \square, \square, \square, \square, \square$  — команды соответственно, /—/ ВП Сх ↑  
 1N, где  $N = 0, 1, 2, 3, 4$  — команды операций  $+$   $-$   $\times$   $\div$  XY  
 1N, где  $N = 5, 6, 7, 8, 9, -, \square, \square, \square, \square, \square$  — команды вычисления функций  
 соответственно  $F10^x$ ,  $Fe^x$ ,  $Flg$ ,  $Fln$ ,  $F \arcsin$ ,  $F \arccos$ ,  $F \arctg$ ,  $F \sin$ ,  
 $F \cos$ ,  $F tg$ ,  
 2N, где  $N = 0, 1, 2, 3, 4$  — команды соответственно  $F \pi$ ,  $F \sqrt{\phantom{x}}$ ,  $F x^2$ ,  $F 1/x$ ,  
 $F xy$ ;  
 5N, где  $N = 0, 1, 2, 3$  — команды соответственно С/П, БП, В/О, ПП;  
 5N, где  $N = 7, 9, 1, \square$  — команды условных переходов соответственно  
 $F x \neq 0$ ,  $F x \geq 0$ ,  $F x < 0$ ,  $F x = 0$ ;  
 5N, где  $N = \square, \square, \square, \square, \square, \square, \square, \square, \square, \square$  — команды организации циклов соответственно FL0,  
 FL1, FL2, FL3.

Общее число реальных команд меньше полиого набора двузначных пятнадцатеричных чисел (225).

Перечислим также коды тех операций ПМК «Электроника» МК-52» и «Электроника МК-61», которые отсутствуют у ПМК других типов (в скобках обозначены соответствующие команды):

2—; 30 ( $\vec{O}''$ ;  $\vec{O}'''$ ) — перевод времени, выраженного в часах, минутах, секундах и долях секунд, в часы (десятичная дробь) и обратно;

26; 33 ( $\vec{O}'$ ;  $\vec{O}'$ ) — перевод угловых величин, выраженных в градусах, минутах и долях минут, в градусы (десятичная дробь) и обратно;

31 ( $\vec{K} |x|$ ) — определение модуля числа;

32 ( $\vec{K} 3H$ ) — определение знака числа (значения функции  $\operatorname{sgn}$ );

34 ( $\vec{K} \{x\}$ ) — выделение целой части числа;

35 ( $\vec{K} \{x\}$ ) — выделение дробной части числа;

36 ( $\vec{K} \max$ ) — определение наибольшего из двух чисел;

37 ( $\vec{K} \wedge$ ) — логическое умножение;

38 ( $\vec{K} \vee$ ) — логическое сложение;

39 ( $\vec{K} \oplus$ ) — логическая операция ИЛИ;

3— ( $\vec{K} \text{ИНВ}$ ) — логическая операция ИНВЕРСИЯ;

4E; 6E — перевод числа из регистра РХ в РЕ и обратно.

Обращаем внимание читателя на то, что числа остающихся свободными регистров памяти, указанные в инструкциях к программам, должны быть увеличены на единицу, когда используются ПМК «Электроника МК-52» и «Электроника МК-61».

## Глава 1

### Арифметические действия над комплексными числами. Рациональные, алгебраические и элементарные трансцендентные функции

Рациональные, алгебраические и элементарные трансцендентные функции (РАЭТФ) помимо самостоятельного значения лежат в основе определения и вычислительных алгоритмов высших трансцендентных функций (ВТФ). Поэтому оптимальные схемы расчета последних существенно зависят от экономичности программ расчета РАЭТФ. Для ПМК прежде всего необходимы программы, обеспечивающие максимальную точность при минимуме числа шагов и требуемых регистров памяти. Важное, хотя и непринципиальное значение имеет время вычисления функции, которое определяется алгоритмом. Далеко не всегда удается реализовать кратчайшие программы, которые одновременно использовали бы минимальное число регистров памяти. Ниже в необходимых случаях приводятся программы того или иного вида.

Программы РАЭТФ чаще всего используются в качестве служебных (подпрограмм или других фрагментов программ), и не только при вычислении ВТФ, но и в других расчетах. Поэтому предпочтение отдается коротким программам, в каждой из которых вычисляется только одна функция. В большинстве случаев комплексная величина  $z_p = x_p + jy_p$ , являющаяся значением искомой функции, после окончания счета по программе оставляется в регистрах РХ и РY. Это удобно и для продолжения счета, когда программы применяются в качестве служебных. По тем же причинам программы РАЭТФ по возможности не занимают регистров Р0—Р6, которые могут понадобиться для организации циклов и операций с косвенной адресацией по модифицированным адресам.

#### 1.1. Арифметические действия над комплексными числами

##### Суммирование комплексных чисел

$$z_3 = z_1 + z_2, \quad \text{где } z_{1,2,3} = x_{1,2,3} + jy_{1,2,3}.$$

Ниже приводятся две программы, отличающиеся расположением исходной величины  $z_2$  и результата  $z_3$  в регистрах стека РХ, РY.

##### Программа 1.1. Суммирование комплексных чисел.

ИПС + XY ИПД + С/П

##### Инструкция

1. Исходные данные: ( $x_1 = \text{PC}$ ,  $y_1 = \text{PD}$ ), ( $y_2 = \text{PY}$ ,  $x_2 = \text{PX}$ ).
2. Пуск: В/О С/П.
3. Результат:  $\text{PX} = y_3$ ,  $\text{PY} = x_3$ .
4. Регистры: рабочие PC, PD; оперативные — ; свободные P0 — PB.
5. Время счета  $t \approx 1$  с.

## Программа 1.2. Суммирование комплексных чисел.

ИПД + ХУ ИПС + С/П

Инструкция

1. Исходные данные:  $(x_1 = PC, y_1 = PD), [x_2 = PY, y_2 = PX]$ .
2. Пуск: В/О С/П.
3. Результат:  $PX = x_3, PY = y_3$ .
4. Регистры: рабочие PC, PD; оперативные — ; свободные P0 — P9.
5. Время счета  $t \approx 1$  с.

Умножение и деление комплексных чисел выполняются по формулам

$$z_3 = z_1 z_2; x_3 = x_1 x_2 - y_1 y_2; y_3 = x_1 y_2 + x_2 y_1; \quad (1.1)$$

$$z_3 = \frac{z_1}{z_2}; x_3 = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}; y_3 = \frac{y_1 x_2 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}, \quad (1.2)$$

где  $z_{1,2,3} = x_{1,2,3} + jy_{1,2,3}$ .

Программы деления целесообразно использовать как комбинированные для выполнения с их помощью и операции умножения путем пуска с промежуточного адреса. В связи с этим запишем операцию деления как умножение на обратное число:

$$z_4 = z_3 z_1, \text{ где } z_3 = 1/z_2; \quad (1.3)$$

$$x_3 = x_2/(x_2^2 + y_2^2); y_3 = -y_2/(x_2^2 + y_2^2).$$

## Программа 1.3.. Умножение комплексных чисел (1.1).

ИПВ ИПС × ИПА ИПД × + ИПА ИПС ×  
ИПВ ИПД × — С/П

15 шагов, 4 регистра памяти

Инструкция

1. Исходные данные:  $(x_1 = PA, y_1 = PB, x_2 = PC, y_2 = PD)$ .
2. Пуск: В/О С/П.
3. Результат:  $PX = x_3, PY = y_3$ .
4. Регистры: рабочие PA — PD; оперативные — ; свободные P0 — P9.
5. Время счета  $t \approx 5$  с.

Пример.  $(3 + j4)(5 + j6) = -9 + j38$ .

## Программа 1.4. Умножение комплексных чисел (1.1).

ПС ИПВ × ХУ ПД ИПА × + ИПА ИПС  
ИПВ ИПД × — С/П

16 шагов, 4 регистра памяти. В отличие от программы 1.3 один из операндов так же, как и результат, располагается в PX и PY, что упрощает выполнение последовательности действий.

Инструкция

1. Исходные данные:  $(x_1 = PA, y_1 = PB), [y_2 = PY, x_2 = PX]$ .
2. Пуск: В/О С/П.
3. Результат:  $PX = x_3, PY = y_3$ .
4. Регистры: рабочие PA, PB; оперативные PC, PD; свободные P0 — P9.
5. Время счета  $t \approx 5$  с.

Пример.  $(5 + j7)(2 - j3) = 31 - j$ .

## Программа 1.5. Умножение комплексных чисел (1.1).

ХУ FBx ИПВ × ХУ ПС ИПА × + ХУ  
ИПА × ИПС ИПВ × — С/П

17 шагов, 3 регистра памяти. По сравнению с программой 1.3 число требуемых регистров памяти сокращено, но длина программы возросла.

Инструкция

1. Исходные данные:  $(x_1 = PA, y_1 = PB), [y_2 = PY, x_2 = PX]$ .
2. Пуск: В/О С/П.
3. Результат:  $PX = x_3, PY = y_3$ .
4. Регистры: рабочие PA, PB; оперативные PC; свободные P0 — P9, PD.
5. Время счета  $t \approx 5$  с.

Пример.  $(8 + j9)(-6 + j12) = -156 + j42$ .

## Программа 1.6. Умножение комплексных чисел (1.1).

Вариант 1.

ХУ FBx ИПВ × ХУ ИПА ХУ × FBx F,  
+ ИПА ХУ F, × ХУ ИПВ × — С/П

20 шагов, 2 регистра памяти. По сравнению с предыдущими программами число требуемых регистров памяти сокращено до двух, длина программы возросла.

Инструкция

1. Исходные данные:  $(x_1 = PA, y_1 = PB), [y_2 = PY, x_2 = PX]$ .
2. Пуск: В/О С/П.
3. Результат:  $PX = x_3, PY = y_3$ .
4. Регистры: рабочие PA, PB; оперативные — ; свободные P0 — P9, PC, PD.
5. Время счета  $t \approx 5$  с.

Вариант 2.

ХУ FBx ИПА × ХУ ИПВ ХУ × FBx F,  
— ИПВ ХУ F, × ХУ ИПА × + С/П

Этот вариант программы отличается только обратным расположением в PX, PY действительной и мнимой частей результата, все остальные пункты инструкции те же, что в варианте 1 программы. Результат:  $PX = y_3, PY = x_3$ .

Пример.  $(15 - j12)(21 - j5) = 255 - j327$ .

## Программа 1.7. Умножение и сложение комплексных чисел $z_4 = z_1 z_2 + z_3$ .

ИПВ ИПС × ИПА ИПД × + + ИПА ИПС  
× ИПВ ИПД × — ИП9 + С/П

18 шагов, 4 регистра памяти. Программа полезна при выполнении последовательности арифметических действий.

Инструкция

1. Исходные данные:  $(x_1 = PA, y_1 = PB, x_2 = PC, y_2 = PD, x_3 = P9), [y_3 = PY]$ .
2. Пуск: В/О С/П.
3. Результат:  $PX = x_4, PY = y_4$ .
4. Регистры: рабочие P9 — PD; оперативные — ; свободные P0 — P8.
5. Время счета  $t \approx 5$  с.

Пример.  $(15 - j12)(21 - j5) + 187 - j210 = 442 - j537$ .

## Программа 1.8. Обратная величина комплексного числа

/—/ ↑ Fx<sup>2</sup> ИПД Fx<sup>2</sup> + ÷ ИПД FBx ÷  
С/П

11 шагов, 1 регистр памяти.

Инструкция

1. Исходные данные:  $(x = PD), [y = PX]$ .
2. Пуск: В/О С/П.

3. Результат:  $PX = x_1, PY = y_1$ .  
 4. Регистры: рабочие РД; оперативные—; свободные Р0 — РС.  
 5. Время счета  $t \approx 3$  с.  
 Пример.  $z_1 = 1/(3 + j4) = 0,12 - j0,16$ .

**Программа 1.9.** Деление или умножение комплексных чисел с занесением в память делимого и обратной величины делителя (1.1), (1.2),

$$z_3 = \frac{z_1}{z_2} = \frac{1}{z_2} z_1, z_3 = z_1 z_2.$$

/—/    ↑    Fx<sup>2</sup>    ИПС    Fx<sup>2</sup>    +    ÷    ИПС    FBx    ÷  
 ПС    ИПВ    ×    ХУ    ПД    ИПА    ×    +    ИПА    ИПС  
 ×    ИПВ    ИПД    ×    —    С/П

26 шагов, 4 регистра памяти.

**Инструкция**

1. Исходные данные: деление  $z_3 = z_1/z_2$  ( $x_1 = PA, y_1 = PB, x_2 = PC, y_2 = PX$ ); умножение  $z_3 = z_1 z_2$  ( $x_1 = PA, y_1 = PB, y_2 = PY, x_2 = PX$ ).  
 2. Пуск: деление В/О С/П; умножение БП 10 С/П.  
 3. Результат: деление  $PX = x_3, PY = y_3, PC = \text{Re}(1/z_2), PD = \text{Im}(1/z_2)$ ; умножение  $PX = x_3, PY = y_3$ .  
 4. Регистры: рабочие РА — РС, РД; оперативные —; свободные Р0 — Р9.  
 5. Время счета: деление  $t \approx 8$  с, умножение  $t \approx 5$  с.  
 Примеры.  $(3 + j4) / (7 + j9) = 0,43846154 + j0,0076923$ ;  $1/(7 + j9) = 0,053846153 - j0,069230769$ ;  $(5 + j7)(8 + j3) = 19 + j71$ .

**Программа 1.10.** Деление или умножение комплексных чисел с занесением в память делимого (1.1), (1.2),  $z_3 = z_1/z_2 = (1/z_2) z_1$ ;  $z_3 = z_1 z_2$ .

/—/    ↑    Fx<sup>2</sup>    ИПС    Fx<sup>2</sup>    +    ÷    ИПС    FBx    ÷  
 ХУ    FBx    ИПВ    ×    ХУ    ПС    ИПА    ×    +    ХУ  
 ИПА    ×    ИПС    ИПВ    ×    —    С/П

27 шагов, 3 регистра памяти. Число требуемых регистров памяти по сравнению с программой 1.9 сокращено на один, но увеличилась длина программы.

**Инструкция**

1. Исходные данные: деление  $z_3 = z_1/z_2$  ( $x_1 = PA, y_1 = PB, x_2 = PC, y_2 = PX$ ); умножение  $z_3 = z_1 z_2$  ( $x_1 = PA, y_1 = PB, y_2 = PY, x_2 = PX$ ).  
 2. Пуск: деление В/О С/П; умножение БП 10 С/П.  
 3. Результат: деление и умножение  $PX = x_3, PY = y_3$ .  
 4. Время счета: деление  $t \approx 8$  с, умножение  $t \approx 5$  с.  
 Примеры.  $(8 + j9)/(3 + j) = 3,3 + j1,9$ ;  $(17 + j2)(11 - j) = 189 + j5$ .

**Программа 1.11.** Деление комплексных чисел с занесением в память делителя и квадрата его модуля (1.2).

ПС    ИПА    ×    ХУ    ПД    ИПВ    ×    +    ИПА    ИПД  
 ×    ИПС    ИПВ    ×    —    ИПА    Fx<sup>2</sup>    ИПВ    Fx<sup>2</sup>    +  
 ПД    ÷    ХУ    ИПД    ÷    С/П

26 шагов, 4 регистра памяти.

**Инструкция**

1. Исходные данные: ( $x_2 = PA, y_2 = PB$ ), [ $y_1 = PY, x_1 = PX$ ].  
 2. Пуск: В/О С/П.  
 3. Результат:  $PX = x_3, PY = y_3, PD = |z_2|^2 = x_2^2 + y_2^2$ .  
 4. Регистры: рабочие РА, РВ, РД; оперативные РС; свободные Р0 — Р9.  
 5. Время счета  $t \approx 8$  с.  
 Примеры.  $(3 + j4)/(5 + j6) = 0,63934426 + j0,032786885$ ;  $|5 + j6|^2 = 61$ .

## 1.2. Многочлены вещественного и комплексного аргументов. Целая степень комплексного числа

Приводятся программы вычисления следующих функций:

$$z_1 = z^{\pm n}, \quad n = 1, 2, \dots; \quad (1.4)$$

$$S = \sum_{k=0}^n a_k x^k, \quad n = 1, 2, \dots, 11; \quad (1.5)$$

$$z_1 = \sum_{k=0}^n a_k z^k, \quad n = 1, 2, \dots, 9; \quad (1.6)$$

$$z_1 = \sum_{k=0}^n A_k z^k, \quad n = 1, 2, \dots, 5; \quad (1.7)$$

$$S = x^m \sum_{k=0}^n a_k x^k, \quad n = 1, 2, \dots, 10; m = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots; \quad (1.8)$$

$$z_1 = z^m \sum_{k=0}^n a_k z^k, \quad n = 1, 2, \dots, 8; m = 1, 2, \dots, \quad (1.9)$$

где  $z = x + jy$ ;  $z_1 = x_1 + jy_1$ ;  $A_k = a_k^{(1)} + ja_k^{(2)}$ ;  $a_k^{(1)}, a_k^{(2)}$  — вещественные числа.

Программы для многочленов (1.5), (1.6) с большими  $n$  можно найти в [1,3], однако они существенно длинее, чем приводимые ниже.

Для многочленов используется схема Горниера. Например, для (1.7)

$$z_1 = [\dots [(A_n z + A_{n-1}) z + A_{n-2}] z + \dots + A_1] z + A_0. \quad (1.10)$$

Эта схема, эквивалентная вычислению  $z_1$  по рекуррентной формуле

$$B_k = A_k + B_{k+1} z, \quad k = n, n-1, \dots, 0; \\ B_{n+1} = 0; \quad z_1 = B_0, \quad (1.11)$$

дает существенный выигрыш в числе операций по сравнению с прямым вычислением многочленов ( $(2n+1)$  умножений и  $n$  сложений для (1.5) — (1.9) и  $n$  сложений и  $n$  умножений для (1.10)). Ясно, что наибольшее значение это имеет для рядов с комплексным аргументом. При реализации на ПМК схема Горниера по сравнению с прямым суммированием рядов обеспечивает также более рациональное распределение памяти. Так, для комплексных многочленов экономится 4 регистра памяти, что соответственно увеличивает на 4 максимальную степень рассчитываемых многочленов (при работе в полностью автоматическом режиме). Погрешности округления коэффициентов многочленов и аргумента влияют на погрешность результата, полученного по схеме Горниера и формулам (1.5) — (1.9). примерно одинаково [10].

В программах вычисления многочленов (1.6), (1.9) коэффициент при старшем члене может быть комплексным  $|a_n \rightarrow A_n = a_n^{(1)} + ja_n^{(2)}|$ .

**Программа 1.12.** Целая положительная степень комплексного числа  $z_1 = z^n, n = 2, 3, \dots$

ПС    ИПВ    ×    ХУ    ПД    ИПА    ×    +    ИПА    ИПС  
 ×    ИПВ    ИПД    ×    —    FLO    00    С/П

18 шагов, 5 регистров памяти.

# Инструкция

1. Исходные данные:  $(n-1) = P0, [y = PB, x = PA]$ .

2. Пуск: В/О С/П.

3. Результат:  $PX = x_1, PY = y_1$ .

4. Регистры: рабочие PA, PB; оперативные P0, PC, PD; свободные P1 — P9.

5. Время счета  $t \approx (5n)$  с.

Пример.  $(3 + j4)^4 = -527 - j336, t = 15$  с.

**Программа 1.13.** Целая положительная степень комплексного числа  $z_1 = z^n, n = 2, 3, \dots$

XY FBx ИПД × XY ИПС XY × FBx F,  
+ ИПС XY F, × XY ИПД × — FLO  
00 С/П

22 шага, 3 регистра памяти. Число требуемых регистров памяти по сравнению с программой 1.12 сокращено до трех, но длина программы возросла на четыре шага.

## Инструкция

1. Исходные данные:  $(n-1) = P0, [y = PD, x = PC]$ .

2. Пуск: В/О С/П.

3. Результат:  $PX = x_1, PY = y_1$ .

4. Регистры: рабочие PC, PD; оперативные P0; свободные P1 — P9.

5. Время счета  $t \approx (5n)$  с.

Пример.  $(3 + j4)^3 = -117 + j44, t = 12$  с.

**Программа 1.14.** Целая положительная степень комплексного числа  $z_1 = z^n$  (операция умножения комплексных чисел выделена в подпрограмму).

ПП 05 FLO 00 С/П ПС ИПВ × XY ПД  
ИПА × + ИПА ИПС × ИПВ ИПД × —  
В/О

21 шаг, 5 регистров памяти.

## Инструкция

1. Исходные данные: возведение в степень  $z_1 = z^n (n-1) = P0, [y = PB, x = PA]$ ; умножение  $z_3 = z_1 z_2 (x_1 = PA, y_1 = PB), [y_2 = PY, x_2 = PX]$ .

2. Пуск: возведение в степень В/О С/П; умножение — вызов операции умножения командой ПП 05 из внешней программы, использующей данную программу как фрагмент.

3. Результат: возведение в степень  $PX = x_1, PY = y_1$ ; умножение  $PX = x_3, PY = y_3$ .

4. Время счета: возведение в степень  $t \approx (5n)$  с; умножение  $t \approx 5$  с.

Пример.  $(2 - j)^5 = -38 - j41$ .

**Программа 1.15.** Целая положительная степень комплексного числа  $z_1 = z^n$  (операция умножения комплексных чисел выделена в подпрограмму).

ПП 05 FLO 00 С/П XY FBx ИПД × XY  
ИПС XY × FBx F, + ИПС XY F, ×  
XY ИПД × — В/О

25 шагов, 3 регистра памяти. По сравнению с программой 1.14 число регистров памяти сокращено на два, но длина программы возросла.

## Инструкция

1. Исходные данные: возведение в степень  $z_1 = z^n (n-1) = P0, [y = PD, x = PC]$ ; умножение  $z_3 = z_1 z_2 (x_1 = PC, y_1 = PD), [y_2 = PY, x_2 = PX]$ .

2. Пуск: возведение в степень В/О С/П; умножение — вызов операции умножения внешней программой по команде ПП 05.

3. Результат: возведение в степень  $PX = x_1, PY = y_1$ ; умножение  $PX = x_3, PY = y_3$ .

4. Регистры: рабочие PC, PD; оперативные P0; свободные P1 — P9.

5. Время счета: возведение в степень  $t \approx (5n)$  с; умножение  $t \approx 5$  с.

Пример.  $(2 + j3)^2 = -5 + j12$ .

**Программа 1.16.** Целая отрицательная степень комплексного числа  $z_1 = z^{-n}, n = 1, 2, \dots$  (в память заносится также квадрат модуля аргумента  $|z|^2$ ).

ПС ИПА × XY ПД ИПВ × + ИПА ИПД  
× ИПС ИПВ × — ИПА Fx<sup>2</sup> ИПВ Fx<sup>2</sup> +  
ПД ÷ XY ИПД ÷ FLO 00 С/П

28 шагов, 5 регистров памяти. За основу взята программа 1.11.

## Инструкция

1. Исходные данные:  $(x = PA, y = PB), n = P0, [0 = PY, 1 = PX]$ .

2. Пуск: В/О С/П.

3. Результат:  $PX = x_1, PY = y_1, PD = |z|^2$ .

4. Регистры: рабочие PA, PB; оперативные P0, PC, PD; свободные P1 — P9.

5. Время счета  $t \approx (8n)$  с.

Пример.  $(1 + j3)^{-5} = 3,16 \cdot 10^{-3} + j1,2 \cdot 10^{-4}; |1 + j3|^2 = 10, t = 40$  с.

**Программа 1.17.** Многочлены вещественного аргумента  $S = \sum_{k=0}^n a_k x^k, n = 1, 2, \dots, 11$ .

2, ..., 11.

↑ ↑ КИПО × КИПО + FL1 03 С/П

9 шагов,  $n + 3$  регистра памяти.

## Инструкция

1. Исходные данные:  $(a_n = PD, a_{n-1} = PC, a_{n-2} = PB, \dots, a_0 = PK), 14 = P0, n = P1, [x = PX]$ . Здесь  $K = 13 - n$  (номера  $K = 10, 11, 12, 13$  присваиваются соответственно регистрам PA, PB, PC, PD).

2. Пуск: В/О С/П.

3. Результат:  $PX = S$ .

4. Регистры: рабочие PK, ..., PD; оперативные P0, P1; свободные P2, P3, ..., PL, где  $L = 12 - n$  (при  $n \leq 10$ ). Если  $n = 11$ , то свободных регистров нет.

5. Время счета  $t < 20$  с.

Пример.  $S = \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{11!}\right)_{x=1,25} = 3,4903428 (3,4903426)$ .

Значение в скобках соответствует табличному значению  $e^{1,25}$ .

**Программа 1.18.** Многочлены  $z_1 = a_0 + a_1 z + \dots + a_{n-1} z^{n-1} + A_n z^n$  комплексного аргумента  $z = x + jy, n = 1, 2, \dots, 9, A_n = a_n^{(1)} + ja_n^{(2)}; a_0, a_1, \dots, a_{n-1}; a_n^{(1)}, a_n^{(2)}$  — вещественные коэффициенты.

XY FBx ИП1 × XY П2 ИП0 × + XY  
ИП0 × ИП2 ИП1 × — КИП4 + FL3 00  
С/П

21 шаг,  $n + 5$  регистров памяти.

## Инструкция

1. Исходные данные:  $(a_{n-1} = P5, a_{n-2} = P6, \dots, a_0 = PK), (x = P0, y = P1), n = P3, 4 = P4, [a_n^{(2)} = PY, a_n^{(1)} = PX]$ . Здесь  $K = n + 4$ .



Номера  $K = 10, 11, 12, 13$  присваиваются регистрам соответственно РА, РВ, РС, РД.

2. Пуск: В/О С/П.

3. Результат:  $PX = x_1, PY = y_1$ .

4. Регистры: рабочие Р0, Р1, Р5, Р6, ..., РК; оперативные Р2, Р3, Р4; свободные РL — РД, где  $L = n + 5$ . Если  $n = 9$ , то свободных регистров нет.

5. Время счета при  $n = 9$   $t \approx 50$  с.

$$\text{Пример. } z_1 = (1 + z + z^2/2! + \dots + z^9/9!)_{z=0,5+j0,9} = 1,0248617 + \\ + j1,2914881 \quad (1,0248618 + j1,2914878).$$

**Программа 1.19.** Многочлены с комплексными коэффициентами  $z_1 = A_0 + A_1 z + \dots + A_n z^n$ ,  $z = x + jy$ ;  $A_k = a_k^{(1)} + ja_k^{(2)}$ ;  $n = 1, 2, \dots, 5$ .

XY FBx ИП1  $\times$  XY П2 ИП0  $\times$  + КИП4  
+ XY ИП0  $\times$  ИП2 ИП1  $\times$  — КИП4 +  
FL3 00 С/П

23 шага,  $2n + 5$  регистров памяти. При  $n = 1, 2, 3, 4$ , и  $n = 5$  ввод исходных данных и расположение результатов в регистрах памяти несколько различаются.

**Инструкция**

1. Исходные данные при  $n = 1, 2, 3, 4$ :  $a_{n-1}^{(2)} = P5, a_{n-1}^{(1)} = P6, a_{n-2}^{(2)} = P7, a_{n-2}^{(1)} = P8, \dots, a_0^{(2)} = PK, a_0^{(1)} = P(K+1)$ , ( $x = P0, y = P1$ ),  $n = P3, 4 = P4$ , [ $a_n^{(2)} = PY, a_n^{(1)} = PX$ ]. Здесь  $K = 2n + 3$ , номера  $K = 10, 11, 12, 13$  присваиваются соответственно регистрам РА, РВ, РС, РД.

2. Пуск: В/О С/П.

3. Результат:  $PX = x_1, PY = y_1$ .

4. Регистры: рабочие Р0, Р1, Р5, ..., РК; оперативные Р2 — Р4; свободные РL — РД,  $L = 2n + 5$ . Если  $n = 4$ , то свободен только регистр РД.

5. Время счета при  $n = 4$   $t \approx 40$  с.

6. Исходные данные при  $n = 5$ : ( $a_4^{(2)} = P5, a_4^{(1)} = P6, a_3^{(2)} = P7, a_3^{(1)} = P8, a_2^{(2)} = P9, a_2^{(1)} = PA, a_1^{(2)} = PB, a_1^{(1)} = PD, a_0^{(2)} = PD$ ), ( $x = P0, y = P1$ ),  $5 = P3, 4 = P4, [a_5^{(2)} = PY, a_5^{(1)} = PX]$ .

7. Пуск: В/О С/П.

Для  $a_0^{(1)}$  не хватает регистра памяти, и последней операцией программы оказывается сложение промежуточной суммы с  $x$ , а не с  $a_0^{(1)}$ .

8. Результат:  $PX = x_1 + x - a_0^{(1)}, PY = y_1$ . Искомое значение  $x_1$ :  $x_1 = PX - x + a_0^{(1)}$ . Значение  $x$  может быть взято из Р0.

**Пример.**

$$z_1 = [j + (1 + j)z + (1 + j)z^2/2! + \dots + (1 + j)z^5/5!]_{z=0,5+j0,9} = \\ = -1,2679353 + j2,3142186).$$

Содержимое регистров РХ и РY после окончания счета при  $n = 5$ : РХ =  $-0,7679353$ , РY =  $2,3142186$ .

**Программа 1.20.** Многочлены вещественного аргумента  $S = x^m \sum_{k=0}^n a_k x^k$ ,  $n = 1, 2, \dots, 10$ ;  $m = \pm 1, \pm 2, \dots$ .

Приводится два варианта программы для положительных и отрицательных  $m$ , инструкция к обоим вариантам одна и та же.

При  $m = 1, 2, \dots$

↑ ↑ КИП0  $\times$  КИП0 + FL1 03  $\times$  FL2  
08 С/П

12 шагов,  $n + 4$  регистра памяти.

При  $m = -1, -2, \dots$

↑ ↑ КИП0  $\times$  КИП0 + FL1 03 XY  $\div$   
FBx FL2 09 XY С/П

15 шагов,  $n + 4$  регистра памяти.

**Инструкция**

1. Исходные данные: ( $a_n = PD, a_{n-1} = PC, a_{n-2} = PB, \dots, a_0 = PK$ ),  $14 = P0, n = P1, |m| = P2, [x = PX]$ . Здесь  $K = 13 - n$  (номера  $K = 10, 11, 12, 13$  присваиваются соответственно регистрам РА, РВ, РС, РД).

2. Пуск: В/О С/П.

3. Результат:  $PX = S$ .

4. Регистры: рабочие РК, ..., РД; оперативные Р0, Р1, Р2; свободные Р3, Р4, ..., РL, где  $L = 12 - n$  при  $n \leq 9$ ; при  $n = 10$  свободных регистров нет.

5. Время счета  $t < (15 + |m|)$  с.

**Примеры.**

$$S = [x^{25} (1 + x + x^2/2! + \dots + x^{10}/10!)]_{x=1,25} = \\ = 923,88578 (1,25^{25} e^{1,25} = 923,88555), t = 35 \text{ с;}$$

$$S = [x^{-37} (1 + x + x^2/2! + \dots + x^{10}/10!)]_{x=1,25} = \\ = 9,0614424 \cdot 10^{-4} (1,25^{-37} e^{1,25} = 9,061453 \cdot 10^{-4}), t = 50 \text{ с.}$$

**Программа 1.21.** Многочлены  $z_1 = z^m (a_0 + a_1 z + \dots + a_{n-1} z^{n-1} + A_n z^n)$  комплексного аргумента  $z = x + jy$ ,  $A_n = a_n^{(1)} + ja_n^{(2)}$ ;  $a_0, a_1, \dots, a_n^{(1)}$ ,  $a_n^{(2)}$  — вещественные коэффициенты,  $n = 1, 2, \dots, 8$ ;  $m = 1, 2, \dots$ .

КИП3 F, XY FBx ИП1  $\times$  XY ПД ИП0  $\times$   
+ XY ИП0  $\times$  ИПД ИП1  $\times$  — ИП3 Fx = 0  
25 FL2 01 F, С/П F, КИП4 + БП 00

30 шагов,  $n + 6$  регистров памяти.

**Инструкция**

1. Исходные данные: ( $a_{n-1} = P5, a_{n-2} = P6, \dots, a_0 = PK, x = P0, y = P1$ ),  $m = P2, n + 1 = P3, 4 = P4, [a_n^{(2)} = PY, a_n^{(1)} = PX]$ . Здесь  $K = n + 4$  (номера  $K = 10, 11, 12$  присваиваются соответственно регистрам РА, РВ, РС).

2. Пуск: В/О С/П.

3. Результат:  $PX = x_1, PY = y_1$ .

4. Регистры: рабочие Р0, Р1, Р5, ..., РК; оперативные Р2 — Р4, РД; свободные РL — РС ( $L = n + 5$ ). При  $n = 8$  свободных регистров нет.

5. Время счета  $t \approx 8(m + n)$  с.

**Пример.**  $z^2 (1 + z + z^2/2! + \dots + z^8/8!)_{z=0,5+j} = -2,0554666 - j0,1497027$ .

### 1.3. Многочлены по обратным степеням вещественного и комплексного аргументов

Приводятся программы следующих функций:

$$z_1 = b_0 + b_1/z; \quad (1.12)$$

$$z_1 = B_0 + B_1/z; \quad (1.13)$$

$$S = \sum_{k=0}^n b_k x^{-k}, \quad n=1, 2, \dots, 11; \quad (1.14)$$

$$S = x^m \sum_{k=0}^n b_k x^{-k}, \quad n=1, 2, \dots, 10; m=\pm 1, \pm 2, \dots; \quad (1.15)$$

$$z_1 = \sum_{k=0}^n b_k z^{-k}, \quad n=1, 2, \dots, 9; \quad (1.16)$$

$$z_1 = \sum_{k=0}^n B_k z^{-k}, \quad n=1, 2, \dots, 5; \quad (1.17)$$

$$z_1 = z^m \sum_{k=0}^n b_k z^{-k}, \quad n=1, 2, \dots, 8; m=1, 2, \dots; \quad (1.18)$$

$$z_1 = z^{-m} \sum_{k=0}^n b_k z^{-k}, \quad n=1, 2, \dots, 8; m=1, 2, \dots \quad (1.19)$$

Здесь  $z = x + jy$ ;  $z_1 = x_1 + jy_1$ ;  $B_k = b_k^{(1)} + jb_k^{(2)}$ ,  $b_k$ ,  $b_k^{(1)}$ ,  $b_k^{(2)}$  — вещественные константы. При вычислениях используется схема Горнера (1.10), где следует заменить  $z$  на  $1/z$ . В программах вычисления многочленов (1.16), (1.18), (1.19) коэффициент при старшем члене может быть комплексным, т. е.  $b_n \rightarrow B_n = b_n^{(1)} + jb_n^{(2)}$ .

Многочлены типа (1.14) — (1.19) фигурируют в асимптотических разложениях ряда специальных функций.

**Программа 1.22.** Функция  $z_1 = b_0 + b_1/z$  комплексного аргумента  $z = x + jy$  ( $b_0$  и  $b_1$  — вещественные константы).

/—/ ↑ Fx² ИПВ Fx² + ИПС ÷ ÷ ИПВ  
FBx ÷ ИПД + С/П

15 шагов, 3 регистра памяти.

Инструкция

1. Исходные данные: ( $x = PB$ ,  $b_1 = PC$ ,  $b_0 = PD$ ), [ $y = PX$ ].

2. Пуск: В/О С/П.

3. Регистры: рабочие  $PB$ ,  $PC$ ,  $PD$ ; оперативные —; свободные  $P0$  —  $PA$ .

4. Результат:  $PX = x_1$ ,  $PY = y_1$ .

5. Время счета  $t \approx 5$  с.

Пример.  $z_1 = 25/(4 + j3) + 7 = 11 - j3$ .

**Программа 1.23.** Функция  $z_1 = B_0 + B_1/z$  комплексного аргумента  $z = x + jy$ ;  $B_0 = b_0^{(1)} + jb_0^{(2)}$ ,  $B_1 = b_1^{(1)} + jb_1^{(2)}$  сохраняются в памяти ПМК.

/—/ ↑ Fx² ИП9 Fx² + ÷ ИП9 FBx ÷  
XY FBx ИПВ × XY П9 ИПА × + ИПД  
+ XY ИПА × ИП9 ИПВ × — ИПС +  
С/П

31 шаг, 5 регистров памяти.

Инструкция

1. Исходные данные: ( $b_1^{(1)} = PA$ ,  $b_1^{(2)} = PB$ ,  $b_0^{(1)} = PC$ ,  $b_0^{(2)} = PD$ ),

[ $x = P9$ ,  $y = PX$ ].

2. Пуск: В/О С/П.

3. Результат:  $PX = x_1$ ,  $PY = y_1$ .

4. Регистры: рабочие  $PA$  —  $PD$ ; оперативные  $P9$ ; свободные  $P0$  —  $P8$ .

5. Время счета  $t \approx 5$  с.

Пример.  $z_1 = (8 - j6)/(3 + j4) + (5 + j7) = 5 + j5$ .

**Программа 1.24.** Функция  $z_1 = B_0 + B_1/z$  комплексного аргумента  $z = x + jy$  и квадрат модуля  $|z|^2$ ;  $B_0 = b_0^{(1)} + jb_0^{(2)}$ ,  $B_1 = b_1^{(1)} + jb_1^{(2)}$ .

XY FBx ИП8 × XY ПД ИП9 × + XY  
ИП8 ИПД × XY ИП9 × — ИП8 Fx² ИП9  
Fx² + ПД ÷ ИПВ + XY ИПД ÷ ИПА  
+ С/П

32 шага, 5 регистров памяти. Комплексная константа  $B_1$  и результат располагаются в регистрах  $PX$ ,  $PY$ . Это облегчает организацию цикла при вычислении многочленов по обратным степеням аргумента в схеме Горнера (см. программы 1.27—1.30).

Инструкция

1. Исходные данные: ( $x = P8$ ,  $y = P9$ ,  $b_0^{(1)} = PA$ ,  $b_0^{(2)} = PB$ ),

[ $b_1^{(2)} = PY$ ,  $b_1^{(1)} = PX$ ].

2. Пуск: В/О С/П.

3. Результат:  $PX = x_1$ ,  $PY = y_1$ ,  $PD = |z|^2 = x^2 + y^2$ .

4. Регистры: рабочие  $P8$  —  $PB$ ,  $PD$ ; оперативные —; свободные  $P0$  —  $P7$ ,  $PC$ .

5. Время счета  $t \approx 10$  с.

Пример.  $(8 - j6)/(3 + j4) + (5 + j9) = 5 + j7$ ,  $|3 + j4|^2 = 25$ .

**Программа 1.25.** Многочлены по обратным степеням вещественного аргумента  $S = \sum_{k=0}^n b_k x^{-k}$ ,  $n = 1, 2, \dots, 11$ .

F1/x ↑ ↑ КИП0 × КИП0 + FL1 04 С/П

10 шагов,  $n + 3$  регистра памяти.

Инструкция

1. Исходные данные: ( $b_n = PD$ ,  $b_{n-1} = PC$ , ...,  $b_0 = PK$ ),  $14 = P0$ ,  $n = P1$ , [ $x = PX$ ]. Здесь  $K = 13 - n$  (номера  $K = 10, 11, 12$  присваиваются регистрам  $PA$ ,  $PB$ ,  $PC$  соответственно).

2. Пуск: В/О С/П.

3. Результат:  $PX = S$ .

4. Регистры: рабочие  $PK$ , ...,  $PD$ ; оперативные  $P0$ ,  $P1$ ; свободные  $P2$ ,  $P3$ , ...,  $PL$ , где  $L = 12 - n$ ; если  $n = 11$ , то свободных регистров нет.

5. Время счета при  $n = 11$   $t \approx 15$  с.

Пример.  $S = (1 + 1/x + 1/2! x^2 + \dots + 1/11! x^{11})_{x=5} = 1,2214028$  ( $e^{1/5} = 1,2214028$ ).

**Программа 1.26.** Многочлены по обратным степеням вещественного аргумента  $S = x^m \sum_{k=0}^n b_k x^{-k}$ ,  $n = 1, 2, \dots, 10$ ;  $m = \pm 1, \pm 2, \dots$ .

Приводятся два варианта программы для положительных и отрицательных  $m$ , инструкция к обоим вариантам одна и та же.

$m = 1, 2, \dots$

FL1/x  $\uparrow \uparrow$  КИП0  $\times$  КИП0  $+$  FL1 04 XY  
FL1/x  $\times$  FBx FL2 11 XY C/П

17 шагов,  $n + 4$  регистра памяти.  
 $m = -1, -2, \dots$

FL1/x  $\uparrow \uparrow$  КИП0  $\times$  КИП0  $+$  FL1 04  $\times$   
FL2 09 C/П

13 шагов,  $n + 4$  регистра памяти.

Инструкция

1. Исходные данные: ( $b_n = \text{РД}$ ,  $b_{n-1} = \text{РС}$ , ...,  $b_0 = \text{РК}$ ),  $14 = \text{Р0}$ ,  $n = \text{Р1}$ ,  $|m| = \text{Р2}$ ,  $[x = \text{РХ}]$ ,  $K = 13 - n$ ; номера  $K = 10, 11, 12$  присваиваются соответственно регистрам РА, РВ, РС.

2. Пуск: В/О С/П.

3. Результат:  $\text{РХ} = S$ .

4. Регистры: рабочие РК, ..., РД; оперативные Р0, Р1, Р2; свободные Р3, Р4, ..., РL, где  $L = 12 - n$ ; если  $n = 10$ , то свободных регистров нет.

5. Время счета  $t \approx (2n + m)$  с.

Примеры.

$S = 4^{64} [1 + 1/4 + 1/(2! 4^2) + \dots + 1/(10! 4^{10})] = 4,3693124 \cdot 10^{38}$  ( $4^{64} e^{0,25} = 4,3693119 \cdot 10^{38}$ );

$S = 4^{-64} [1 + 1/4 + 1/(2! 4^2) + \dots + 1/(10! 4^{10})] = 3,7734115 \cdot 10^{-39}$  ( $4^{-64} e^{0,25} = 3,7734115 \cdot 10^{-39}$ ).

**Программа 1.27.** Многочлены по степеням обратной величины комплексного аргумента  $z = x + jy$ ;  $z_1 = b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_{n-1} z^{-(n-1)} + B_n z^{-n}$ ,  $B_n = b_n^{(1)} + j b_n^{(2)}$ ,  $n = 1, 2, \dots, 9$ ;  $b_0, b_1, \dots, b_{n-1}$ ;  $b_n^{(1)}, b_n^{(2)}$  — вещественные константы.

XY FBx ИП0  $\times$  XY П2 ИП1  $\times$   $+$  XY  
ИП0 ИП2  $\times$  XY ИП1  $\times$   $-$  ИП0 Fx<sup>2</sup> ИП1  
Fx<sup>2</sup>  $+$  П2  $\div$  XY ИП2  $\div$  КИП4  $+$  FL3  
00 C/П

32 шага,  $n + 5$  регистров памяти.

Инструкция

1. Исходные данные: ( $b_{n-1} = \text{Р5}$ ,  $b_{n-2} = \text{Р6}$ , ...,  $b_0 = \text{РК}$ ,  $x = \text{Р0}$ ,  $y = \text{Р1}$ ),  $n = \text{Р3}$ ,  $4 = \text{Р4}$ , [ $b_n^{(2)} = \text{РУ}$ ,  $b_n^{(1)} = \text{РХ}$ ]. Здесь  $K = n + 4$ , номера  $K = 10, 11, 12, 13$  присваиваются соответственно регистрам РА, РВ, РС, РД.

2. Пуск: В/О С/П.

3. Результат:  $\text{РХ} = x_1$ ,  $\text{РУ} = y_1$ .

4. Регистры: рабочие Р0, Р1, Р5, ..., РК; оперативные Р2, Р3, Р4; свободные РL — РД, где  $L = n + 5$ ; если  $n = 9$ , то свободных регистров нет.

5. Время счета  $t \approx (9n)$  с.

Пример.

$z_1 = (1 + z^{-1} + z^{-2}/2! + \dots + z^{-9}/9!)_{z=3+j4} = 1,1130957 - j0,17963078$ ,

$t = 1$  мин 20 с. Контрольная величина:  $e^{1/z} = e^{1/(3+j4)} = 1,1130957 - j0,17963077$ .

**Программа 1.28.** Многочлены комплексного аргумента  $1/z$  с комплексными коэффициентами  $z_1 = B_0 + B_1 z^{-1} + \dots + B_n z^{-n}$ ,  $B_n = b_n^{(1)} + j b_n^{(2)}$ ,  $n = 1, 2, \dots, 5$ .

XY FBx ИП0  $\times$  XY П2 ИП1  $\times$   $+$  XY  
ИП0 ИП2  $\times$  XY ИП1  $\times$   $-$  ИП0 Fx<sup>2</sup> ИП1  
Fx<sup>2</sup>  $+$  П2  $\div$  КИП4  $+$  XY ИП2  $\div$  КИП4  
 $+$  FL3 00 C/П

34 шага,  $2n + 5$  регистров памяти. При  $n = 1, 2, 3, 4$  и  $n = 5$  ввод исходных данных и расположение результатов в регистрах памяти несколько отличаются.

Инструкция

1. Исходные данные при  $n = 1, 2, 3, 4$ : ( $b_{n-1}^{(2)} = \text{Р5}$ ,  $b_{n-1}^{(1)} = \text{Р6}$ ,  $b_{n-2}^{(2)} = \text{Р7}$ ,  $b_{n-2}^{(1)} = \text{Р8}$ , ...,  $b_0^{(2)} = \text{РК}$ ,  $b_0^{(1)} = \text{Р}(K+1)$ ), ( $x = \text{Р0}$ ,  $y = \text{Р1}$ ),  $n = \text{Р3}$ ,  $4 = \text{Р4}$ , [ $b_n^{(2)} = \text{РУ}_n^{(1)}$ ,  $b_n^{(1)} = \text{РХ}$ ];  $K = 2n + 3$  (номера  $K = 10, 11, 12, 13$  присваиваются соответственно регистрам РА, РВ, РС, РД).

2. Пуск: В/О С/П.

3. Результат:  $\text{РХ} = x_1$ ,  $\text{РУ} = y_1$ .

4. Регистры: рабочие Р0, Р1, Р5, ..., РК; оперативные Р2 — Р4; свободные РL — РД, где  $L = 2n + 5$ ; если  $n = 4$ , то свободен только регистр РД.

5. Время счета  $t \approx (12n)$  с.

6. Исходные данные при  $n = 5$ : ( $b_4^{(2)} = \text{Р5}$ ,  $b_4^{(1)} = \text{Р6}$ ,  $b_3^{(2)} = \text{Р7}$ ,  $b_3^{(1)} = \text{Р8}$ ,  $b_2^{(2)} = \text{Р9}$ ,  $b_2^{(1)} = \text{РА}$ ,  $b_1^{(2)} = \text{РВ}$ ,  $b_1^{(1)} = \text{РС}$ ,  $b_0^{(2)} = \text{РД}$ ), ( $x = \text{Р0}$ ,  $y = \text{Р1}$ ),  $5 = \text{Р3}$ ,  $4 = \text{Р4}$ , [ $b_5^{(2)} = \text{РУ}$ ,  $b_5^{(1)} = \text{РХ}$ ].

7. Пуск: В/О С/П.

Для  $b_0^{(1)}$  не хватает регистра памяти, и последней операцией программы оказывается сложение промежуточной суммы с  $x$ , а не с  $b_0^{(1)}$ .

8. Результат:  $\text{РХ} = x_1 + x - b_0^{(1)}$ ,  $\text{РУ} = y_1$ . Искомое значение  $x_1$ :  $x_1 = \text{РХ} - x + b_0^{(1)}$ .

Значение  $x$  может быть взято из Р0.

Пример. При  $n = 5$

$z_1 = [j + (1 + j) z^{-1}/1! + (1 + j) z^{-2}/2! + \dots + (1 + j) z^{-5}/5!]_{z=3+j4} = 0,2927264 + j0,9334647$ .

Содержимое РХ и РУ после окончания счета:  $\text{РХ} = 3,2927264$ ,  $\text{РУ} = 0,9334647$  ( $((1 + j)e^{1/(3+j4)} - 1 = 0,2927265 + j0,9334649)$ ).

**Программа 1.29.** Многочлены  $z_1 = z^m (b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_{n-1} z^{-(n-1)} + B_n z^{-n})$  комплексного аргумента  $z^{-1} = (x + jy)^{-1}$ ,  $B_n = b_n^{(1)} + jb_n^{(2)}$ ,  $n = 1, 2, \dots, 8$ ;  $m = 1, 2, \dots$ ;  $b_0, b_1, \dots, b_{n-1}$  — вещественные константы.

XY	FBx	ИПО	×	XY	ПД	ИП1	×	+	XY
ИПО	ИПД	×	XY	ИП1	×	—	ИПО	FX <sup>2</sup>	ИП1
FX <sup>2</sup>	+	ПД	÷	XY	ИПД	÷	КИП4	+	FL3
00	XY	FBx	ИП1	×	XY	ПД	ИПО	×	+
XY	ИПО	×	ИПД	ИП1	×	—	FL2	31	С/П

50 шагов,  $n + 6$  регистров памяти.

**Инструкция**

1. Исходные данные: ( $b_{n-1} = P5$ ,  $b_{n-2} = P6$ , ...,  $b_0 = PK$ ), ( $x = P0$ ,  $y = P1$ ),  $m = P2$ ,  $n = P3$ ,  $4 = P4$ , [ $b_n^{(2)} = PY$ ,  $b_n^{(1)} = PX$ ]. Здесь  $K = n + 4$  (номера  $K = 10, 11, 12$  присваиваются регистрам PA, PB, PC соответственно).

2. Пуск: В/О С/П.

3. Результат:  $PX = x_1$ ,  $PY = y_1$ .

4. Регистры: рабочие P0, P1, P5, ..., PK; оперативные P2 — P4, PD; свободные PL — PC, где  $L = n + 5$ ; при  $n = 8$  свободных регистров нет.

5. Время счета  $t \approx 9(m + n)$  с

**Пример.**  $z_1 = [z^2(1 + z^{-1} + z^{-2}/2! + \dots + z^{-8}/8!)]_{z=3+j4} = -3,480531 + j27,971713$ .

**Программа 1.30.** Многочлены  $z_1 = z^{-m} (b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_{n-1} z^{-(n-1)} + B_n z^{-n})$  комплексного аргумента  $z^{-1} = (x + jy)^{-1}$ ,  $B_n = b_n^{(1)} + jb_n^{(2)}$ ,  $n = 1, 2, \dots, 8$ ;  $m = 1, 2, 3, \dots$ ;  $b_0, b_1, \dots, b_{n-1}$  — вещественные константы.

XY	FBx	ИПО	×	XY	ПД	ИП1	×	+	XY
ИПО	ИПД	×	XY	ИП1	×	—	ИПО	FX <sup>2</sup>	ИП1
FX <sup>2</sup>	+	ПД	÷	XY	ИПД	÷	FL3	32	FL2
00	С/П	КИП4	+	БП	00				

36 шагов,  $n + 6$  регистров памяти.

**Инструкция**

1. Исходные данные: ( $b_{n-1} = P5$ ,  $b_{n-2} = P6$ , ...,  $b_0 = PK$ ), ( $x = P0$ ,  $y = P1$ ),  $m = P2$ ,  $n + 1 = P3$ ,  $4 = P4$ , [ $b_n^{(2)} = PY$ ,  $b_n^{(1)} = PX$ ]. Здесь  $K = n + 4$  (номера  $K = 10, 11, 12$  присваиваются соответственно регистрам PA, PB, PC).

2. Пуск: В/О С/П.

3. Результат:  $x_1 = PX$ ,  $y_1 = PY$ .

4. Регистры: рабочие P0, P1, P5, ..., PK; оперативные P2, P3, P4, PD; свободные PL — PC, где  $L = n + 5$ ; при  $n = 8$  свободных регистров нет.

5. Время счета  $t \approx 9(m + n)$  с.

**Примеры.**

$z_1 = [z^{-4}(1 + z^{-1} + z^{-2}/2! + \dots + z^{-8}/8!)]_{z=3+j4} = -1,3471883 \cdot 10^{-3} + j1,1997838 \cdot 10^{-3}$ ;

$(z^{-4} e^{1/z})_{z=3+j4} = -1,3471884 \cdot 10^{-3} + j1,19971839 \cdot 10^{-3}$ .

## 1.4. Показательная, логарифмическая и степенная функции комплексного аргумента

Показательная функция  $e^z$  определяется [12] и вычисляется по формуле

$$e^z = e^{x+jy} = e^x (\cos y + j \sin y). \quad (1.20)$$

Логарифм комплексного переменного  $\text{Ln}z$  — обратная к  $e^z$  бесконечнозначная функция. Логарифмическая функция  $\text{ln}z$  — однозначная аналитическая функция, определяется [9] как одна из ветвей  $\text{Ln}z$  на плоскости  $z$ , разрезанной по отрицательной части действительной оси  $|\arg z| < \pi$ . Обычно выбирается ветвь  $\text{Ln}z$ , вещественная при вещественных положительных  $z$ . Таким образом,

$$\left. \begin{aligned} \text{Re } \ln z &= \ln |z| = \ln \sqrt{x^2 + y^2}; \\ \text{Im } \ln z &= \text{sgn}(y) \arccos(x/|z|). \end{aligned} \right\} \quad (1.21)$$

Иногда целесообразно использовать укороченную программу вычисления  $\text{ln}z$ , в которой  $0 \leq \arg z < \pi$ . В этом случае

$$\ln z = \ln |z| + j \arccos(x/|z|). \quad (1.22)$$

Тогда значения  $\text{ln}z$  при  $-\pi < \arg z < 0$  можно получить, найдя из (1.22)  $\text{ln}z$  и затем используя соотношение

$$\ln z = \overline{\text{ln } \bar{z}}. \quad (1.23)$$

Здесь и далее черта сверху означает комплексное сопряжение.

Степенная функция  $z^w$  ( $w = u + jv$ ) — также бесконечнозначная. Исключения составляют вещественные целые  $w$ , при которых  $z^w$  — рациональная функция, и  $w = m/n$ , где  $m/n$  — несократимая рациональная дробь. В последнем случае  $z^w$  —  $n$ -значная функция.

Если вновь определить  $z^w$  на плоскости  $z$ , разрезанной по отрицательной части действительной оси, и выбрать ветвь  $z^w$ , вещественную и положительную при вещественных положительных  $w$ , то  $z^w$  оказывается однозначной аналитической функцией, связанной с  $\text{ln}z$  соотношением

$$z^w = e^{w \ln z}. \quad (1.24)$$

Степенная функция  $z^w$  при вещественных  $w = u$  и ограничении  $0 \leq \arg z < \pi$  определяется согласно (1.24) и (1.22) формулой

$$z^u = |z|^u [\cos[u \arccos(x/|z|)] + j \sin[u \arccos(x/|z|)]]. \quad (1.25)$$

Значения  $z^u$  при  $-\pi < \arg z \leq 0$  найдутся из (1.25) для  $z^u$  и очевидной формулы (ср. с (1.23))

$$z^u = \overline{z^u}. \quad (1.26)$$

Приведем также формулу для многозначной функции  $z^w$  на плоскости  $z$ , разрезанной по отрицательной части действительной оси:

$$z^w = e^{(u+jv)[\text{Ln}z + j2(n-1)\pi \pm \arccos(x/|z|)]}, \quad (1.27)$$

где  $n$  — номер ветви; знак перед  $\arccos$  совпадает со знаком  $y$ .

**Программа 1.31.** Показательная функция  $e^z$  (1.20) комплексного аргумента  $z = x + jy$ .

ПД Fsin XY Fe<sup>x</sup> × FBx ИПД Fcos × С/П  
10 шагов, 1 регистр памяти.

### Инструкция

1. Исходные данные:  $[x = PY, y = PX]$ .
2. Пуск: В/О С/П.
3. Результат:  $PX = \operatorname{Re} e^z, PY = \operatorname{Im} e^z$ .
4. Регистры: рабочие — ; оперативные РД; свободные Р0 — РС.
5. Погрешность относительная меньше  $5 \cdot 10^{-7}$ .
6. Время счета  $t \approx 7$  с.

Пример.

$$e^z = e^{(\ln 2 + j\pi/3)} = 1,0000001 + j1,7320509. \text{ Точное значение } e^z = 1 + j\sqrt{3} = 1 + j1,73205081 \dots$$

**Программа 1.32.** Логарифмическая функция  $\ln z$  комплексного аргумента  $z = x + jy, 0 \leq \arg z < \pi$  (1.22). Модуль аргумента  $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ .

↑  $Fx^2$  ИПС  $Fx^2 + Fy^2$  ПД ÷  $\operatorname{Farccos}$  ИПД  
 $F \ln$  С/П

12 шагов, 2 регистра памяти.

### Инструкция

1. Исходные данные:  $(y = PC), [x = PX]$ .
2. Пуск: В/О С/П.
3. Результат:  $PX = \operatorname{Re} \ln z, PY = \operatorname{Im} \ln z, РД = |z|$ .
4. Регистры: рабочие РС, РД; оперативные — ; свободные Р0 — РВ.
5. Погрешность относительная меньше  $5 \cdot 10^{-7}$ .
6. Время счета  $t \approx 7$  с.

Пример.  $\ln(3 + j4) = 1,6094379 + j0,9272951; |z| = 5$ .

**Программа 1.33.** Логарифмическая функция  $\ln z$  комплексного аргумента  $z = x + jy, -\pi < \arg z < \pi$  (1.21). Модуль аргумента  $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ .

↑  $Fx^2$  ИПС  $Fx^2 + Fy^2$  ПД ÷  $\operatorname{Farccos}$  ИПС  
 $Fx < 0$  15  $F, /-/ XY XY$  ИПД  $F \ln$  С/П

19 шагов, 2 регистра памяти.

### Инструкция

1. Исходные данные:  $(y = PC), [x = PX]$ .
2. Пуск: В/О С/П.
3. Результат:  $PX = \operatorname{Re} \ln z, PY = \operatorname{Im} \ln z, РД = |z|$ .
4. Регистры: рабочие РС, РД; оперативные — ; свободные Р0 — РВ.
5. Погрешность относительная меньше  $5 \cdot 10^{-7}$ .
6. Время счета  $t \approx 8$  с.

Пример.  $\ln(3 - j4) = 1,6094379 - j0,9272951$ .

**Программа 1.34.** Степенная функция  $z^w$  комплексного аргумента  $z = x + jy$  и комплексного показателя  $w = u + jv, 0 \leq \arg z < \pi$  (1.24).

↑  $Fx^2$  ИПС  $Fx^2 + Fy^2$  ПД ÷  $\operatorname{Farccos}$  ИПД  
 $F \ln$  ПС ИПА ×  $XY$  ПД ИПВ × — ИПА  
 ИПД × ИПВ ИПС × + ПД  $F \sin XY Fe^x$   
 ×  $FVx$  ИПД  $F \cos$  × С/П

36 шагов, 4 регистра памяти. Программа представляет собой последовательность программ 1.32, 1.4, 1.31.

### Инструкция

1. Исходные данные:  $(u = PA, v = PB), y = PC, [x = PX]$ .
2. Пуск: В/О С/П.
3. Результат:  $PX = \operatorname{Re} z^w, PY = \operatorname{Im} z^w$ .
4. Регистры: рабочие РА, РВ; оперативные РС, РД; свободные Р0 — Р9.
5. Погрешность относительная меньше  $1 \cdot 10^{-6}$ .
6. Время счета  $t \approx 20$  с.

Пример.  $(3 + j4)^{2 - j\pi/3} = 65,075961 + j11,116535$ .

**Программа 1.35.** Степенная функция  $z^w$  комплексного аргумента  $z = x + jy$  и комплексного показателя  $w = u + jv, -\pi < \arg z < \pi$  (1.24).

↑  $Fx^2$  ИПС  $Fx^2 + Fy^2$  ПД ÷  $\operatorname{Farccos}$  ИПС  
 $Fx < 0$  15  $F, /-/ XY XY$  ИПД  $F \ln$  ПС ИПА  
 ×  $XY$  ПД ИПВ × — ИПА ИПД × ИПВ  
 ИПС × + ПД  $F \sin XY Fe^x$  ×  $FVx$  ИПД  
 $F \cos$  × С/П

43 шага, 4 регистра памяти. Программа построена как последовательность программ 1.33, 1.4, 1.31.

### Инструкция

1. Исходные данные:  $(u = PA, v = PB), y = PC, [x = PX]$ .
2. Пуск: В/О С/П.
3. Результат:  $PX = \operatorname{Re} z^w, PY = \operatorname{Im} z^w$ .
4. Регистры: рабочие РА, РВ; оперативные РС, РД; свободные Р0 — Р9.
5. Погрешность относительная меньше  $1 \cdot 10^{-6}$ .
6. Время счета  $t \approx 20$  с.

Примеры.

$$(3 + j4)^{2 - j\pi/3} = 65,075961 + j11,116535; (3 - j4)^{2 - j\pi/3} = -8,7256061 + j3,6726498;$$

$$e^{2 - j\pi/3} = 3,6945284 - j6,3991091 (3,6945278 - j6,3991099).$$

**Программа 1.36.** Степенная функция  $z^u$  комплексного аргумента  $z = x + jy$  и вещественного показателя  $u, 0 \leq \arg z < \pi$  (1.25). При  $-\pi < \arg z \leq 0$   $z^u = \overline{z^u}$ .

$Fx^2$  ИПВ  $Fx^2 + Fy^2$  ПД  $Fx^y$  ИПВ ИПД ÷  
 $\operatorname{Farccos}$  ИПС × ПД  $F \sin XY$  ×  $FVx$  ИПД  $F \cos$   
 × С/П

22 шага, 3 регистра памяти.

### Инструкция

1. Исходные данные:  $(x = PB), [u = PC, y = PX]$ .
2. Пуск: В/О С/П.
3. Результат:  $PX = \operatorname{Re} z^u, PY = \operatorname{Im} z^u$ .
4. Регистры: рабочие РВ; оперативные РС, РД; свободные Р0 — РА.
5. Погрешность относительная меньше  $1 \cdot 10^{-6}$ .
6. Время счета  $t \approx 15$  с.

Пример.  $(-3 + j4)^{1/2} = 0,99999999 + j2 (1 + j2)$ .

**Программа 1.37.** Степенная многозначная функция  $z^w$  комплексного аргумента  $z = x + jy$  и комплексного показателя  $w = u + jv$ ,  $|\arg z| < \pi$  (1.27).

0	П6	ИП8	↑	Fx <sup>2</sup>	ИП9	Fx <sup>2</sup>	+	Fy <sup>2</sup>	ПС
÷	Farccos	ИП9	Fx < 0	18	F,	/—/	XY	XY	Fπ
ИП6	×	2	×	+	ИПС	F ln	ПС	ИПА	×
XY	ПД	ИПВ	×	—	ИПА	ИПД	×	ИПВ	ИПС
×	+	ПС	F sin	XY	Fe <sup>x</sup>	×	ПД	F Bx	ИПС
F cos	×	ПС	КИП6	ИП6	С/П	БП	02		

58 шагов, 7 регистров памяти. В программе путем последовательных пусков находятся ветви многозначной функции  $z^w$ .

**Инструкция**

1. Исходные данные: ( $x = P8$ ,  $y = P9$ ,  $u = PA$ ,  $v = PB$ ).
  2. Пуск: для первой ветви В/О С/П; для каждой последующей ветви С/П.
  3. Результат:  $PX = n$  (номер ветви),  $PC = \operatorname{Re}(z^w)_n$ ,  $PD = \operatorname{Im}(z^w)_n$  (значения действительной и мнимой части  $z^w$  текущей  $n$ -й ветви).
  4. Регистры: рабочие  $P8 - PD$ ; оперативные  $P6$ ; свободные  $P0 - P5$ .
  5. Погрешность относительная меньше  $5 \cdot 10^{-6}$ .
  6. Время счета каждой ветви  $t \approx 20$  с.
- Примеры.**

$$(3+j4)_1^{1/3} = 1,6289372 + j0,52017441;$$

$$(3+j4)_2^{1/3} = -1,2649528 - j1,1506137;$$

$$(3+j4)_3^{1/3} = -0,36398476 - j1,670788.$$

### 1.5. Тригонометрические и гиперболические функции комплексного аргумента. Гиперболические функции вещественного аргумента

Ограничимся функциями  $\sin z$ ,  $\cos z$ ,  $\operatorname{tg} z$ ,  $\operatorname{sh} z$ ,  $\operatorname{ch} z$ ,  $\operatorname{th} z$ . Они аналитичны во всей плоскости  $z$ , кроме изолированных полюсов у  $\operatorname{tg} z$  и  $\operatorname{th} z$ . Расчетные формулы (см., например, [9]):

$$\sin z = \sin x \operatorname{ch} y + j \cos x \operatorname{sh} y; \quad (1.28)$$

$$\cos z = \cos x \operatorname{ch} y - j \sin x \operatorname{sh} y; \quad (1.29)$$

$$\operatorname{tg} z = (\sin 2x + j \operatorname{sh} 2y) / (\cos 2x + \operatorname{ch} 2y); \quad (1.30)$$

$$\operatorname{sh} z = \operatorname{sh} x \cos y + j \operatorname{ch} x \sin y; \quad (1.31)$$

$$\operatorname{ch} z = \operatorname{ch} x \cos y + j \operatorname{sh} x \sin y; \quad (1.32)$$

$$\operatorname{th} z = (\operatorname{sh} 2x + j \sin 2y) / (\operatorname{ch} 2x + \cos 2y). \quad (1.33)$$

При вычислении гиперболических функций можно объединить соответствующие программы с программами тригонометрических функций, модифицируя лишь ввод исходных данных и расположение действительной и мнимой частей результата в регистрах памяти. Видно, в частности, что (1.28) переходит в (1.31), а (1.30) — в (1.33) при замене  $x$  на  $y$  и  $y$  на  $x$ , а также действительных частей (1.28) и (1.30) на мнимые (1.31), (1.33), а мнимых — на действительные. Для перехода от (1.29) к (1.32) следует лишь поменять  $x$  на  $y$ , а  $y$  на  $x$ .

**Программа 1.38.** Синус  $\sin z$  и гиперболический синус  $\operatorname{sh} z$  комплексного аргумента  $z = x + jy$  (1.28), (1.31).

Fe <sup>x</sup>	↑	F1/x	ПД	+	2	÷	↑	ИПД	—
ИПС	F cos	×	XY	ИПС	F sin	×	С/П		

18 шагов, 2 регистра памяти. Вычисляется функция  $\sin z$  или  $\operatorname{sh} z$  в зависимости от способа ввода исходных данных.

**Инструкция**

1. Исходные данные: а) для  $\sin z$  ( $x = PC$ ,  $y = PX$ ); б) для  $\operatorname{sh} z$  ( $y = PC$ ,  $x = PX$ ).
  2. Пуск: В/О С/П.
  3. Результат: а)  $PX = \operatorname{Re} \sin z$ ,  $PY = \operatorname{Im} \sin z$ ; б)  $PX = \operatorname{Im} \operatorname{sh} z$ ,  $PY = \operatorname{Re} \operatorname{sh} z$ .
  4. Регистры: рабочие  $PC$ ; оперативные  $PD$ ; свободные  $P0 - PB$ .
  5. Погрешность относительная меньше  $1 \cdot 10^{-6}$ .
  6. Время счета  $t \approx 10$  с.
- Примеры.**  $\sin(\pi/6 + j) = 0,77154033 + j1,0177541$ ;  $\operatorname{sh}(1 + j\pi/6) = 1,0177541 + j0,77154033$ .

**Программа 1.39.** Синус  $\sin z$  и гиперболический синус  $\operatorname{sh} z$  комплексного аргумента  $z = x + jy$  (1.28), (1.31).

F cos	F Bx	F sin	ИПД	Fe <sup>x</sup>	↑	F1/x	ПД	—	2
÷	ИПД	XY	ПД	+	×	XY	ИПД	×	С/П

20 шагов, 1 регистр памяти. По сравнению с предыдущей программой за счет удлинения сокращено число требуемых регистров памяти. Программа в зависимости от способа ввода исходных данных вычисляет  $\sin z$  или  $\operatorname{sh} z$ .

**Инструкция**

1. Исходные данные: а) для  $\sin z$   $y = PD$ ,  $x = PX$ ; б) для  $\operatorname{sh} z$   $x = PD$ ,  $y = PX$ .
  2. Пуск: В/О С/П.
  3. Результат: а)  $PX = \operatorname{Im} \sin z$ ,  $PY = \operatorname{Re} \sin z$ ; б)  $PX = \operatorname{Re} \operatorname{sh} z$ ,  $PY = \operatorname{Im} \operatorname{sh} z$ .
  4. Регистры: рабочие —; оперативные  $PD$ ; свободные  $P0 - PC$ .
  5. Погрешность относительная меньше  $1 \cdot 10^{-6}$ .
  6. Время счета  $t \approx 12$  с.
- Примеры.**  $\sin(\pi/6 + j) = 0,77154033 + j1,0177541$ ;  $\operatorname{sh}(1 + j\pi/6) = 1,0177541 + j0,77154033$ .

**Программа 1.40.** Косинус  $\cos z$  и гиперболический косинус  $\operatorname{ch} z$  комплексного аргумента  $z = x + jy$  (1.29), (1.32).

F sin	F Bx	F cos	ИПД	Fe <sup>x</sup>	F1/x	F Bx	ПД	—	2
÷	ИПД	XY	ПД	+	×	XY	ИПД	×	С/П

20 шагов, 1 регистр памяти. Вычисляется функция  $\cos z$ , или  $\operatorname{ch} z$  в зависимости от способа ввода исходных данных.

**Инструкция**

1. Исходные данные: а) для  $\cos z$   $y = PD$ ,  $x = PX$ ; б) для  $\operatorname{ch} z$   $x = PD$ ,  $y = PX$ .
2. Пуск: В/О С/П.
3. Результат: а)  $PX = \operatorname{Im} \cos z$ ,  $PY = \operatorname{Re} \cos z$ ; б)  $PX = \operatorname{Im} \operatorname{ch} z$ ,  $PY = \operatorname{Re} \operatorname{ch} z$ .
4. Регистры: рабочие —; оперативные  $PD$ ; свободные  $P0 - PC$ .
5. Погрешность относительная меньше  $1 \cdot 10^{-6}$ .
6. Время счета  $t \approx 10$  с.

Примеры.  $\cos(2 + j3) = -4,1896257 - j9,1092272$ ;  $\operatorname{ch}(2 + j3) = -3,7245453 + j0,51182233$ .

**Программа 1.41.** Косинус  $\cos z$  и гиперболический косинус  $\operatorname{ch} z$  комплексного аргумента  $z = x + jy$  (1.29), (1.32).

Fe<sup>x</sup> F1/x FBx ПД + 2 ÷ ↑ ИПД —  
ИПС F sin × XY ИПС F cos × C/П

18 шагов, 2 регистра памяти. Длина программы по сравнению с программой 1.40 сокращена на два шага за счет увеличения числа требуемых регистров памяти. В зависимости от способа ввода исходных данных вычисляется  $\cos z$  или  $\operatorname{ch} z$ .

Инструкция

1. Исходные данные: а) для  $\cos z$  ( $x = PC$ ), [ $y = PX$ ]; б) для  $\operatorname{ch} z$  ( $-y = PC$ ), [ $x = PX$ ].

2. Пуск: В/О C/П.

3. Результат: а)  $PX = \operatorname{Re} \cos z$ ,  $PY = \operatorname{Im} \cos z$ ; б)  $PX = \operatorname{Re} \operatorname{ch} z$ ,  $PY = \operatorname{Im} \operatorname{ch} z$ .

4. Регистры: рабочие PC; оперативные PD; свободные P0 — PB.

5. Погрешность относительная меньше  $1 \cdot 10^{-6}$ .

6. Время счета  $t \approx 10$  с.

Примеры.  $\cos(3 + j4) = -27,034944 - j3,8511514$ ;  $\operatorname{ch}(3 + j4) = -6,5806624 - j7,5815525$ .

**Программа 1.42.** Синус  $\sin z$ , косинус  $\cos z$ , гиперболические синус  $\operatorname{sh} z$  и косинус  $\operatorname{ch} z$  комплексного аргумента  $z = x + jy$  (1.28), (1.29), (1.31), (1.32).

Fe<sup>x</sup> ↑ F1/x ПД + 2 ÷ PC ИПД —  
ИПВ F sin XY × /—/ ПД FBx ИПВ F cos ×  
ИПВ F sin ИПС × FBx ИПВ F cos × PC F,  
C/П

31 шаг, 3 регистра памяти. В зависимости от способа ввода исходных данных программа вычисляет одну из пар функций  $\sin z$ ,  $\cos z$  или  $\operatorname{sh} z$ ,  $\operatorname{ch} z$ .

Инструкция

1. Исходные данные: а) для  $\sin z$ ,  $\cos z$  ( $x = PB$ ), [ $y = PX$ ]; б) для  $\operatorname{sh} z$ ,  $\operatorname{ch} z$  ( $y = PB$ ), [ $x = PX$ ].

2. Пуск: В/О C/П.

3. Результат:

а)  $PX = \operatorname{Re} \sin z$ ,  $PY = \operatorname{Im} \sin z$ ,  $PC = \operatorname{Re} \cos z$ ,  $PD = \operatorname{Im} \cos z$ .

б)  $PX = \operatorname{Re} \operatorname{sh} z$ ,  $PY = \operatorname{Im} \operatorname{sh} z$ ,  $PC = \operatorname{Re} \operatorname{ch} z$ ,  $PD = \operatorname{Im} \operatorname{ch} z$ .

4. Регистры: рабочие PB; оперативные PC, PD; свободные P0 — PA.

5. Погрешность относительная меньше  $1 \cdot 10^{-6}$ .

6. Время счета  $t \approx 20$  с.

Примеры.

$\sin(5 + j7) = -525,79447 + j155,53658$ ;  $\cos(5 + j7) = 155,53684 + j525,7936$ ;  
 $\operatorname{sh}(5 + j7) = 55,941963 + j48,754951$ ;  $\operatorname{ch}(5 + j7) = 55,947042 + j48,750524$ .

**Программа 1.43.** Синус  $\sin z$ , косинус  $\cos z$ , гиперболические синус  $\operatorname{sh} z$  и косинус  $\operatorname{ch} z$  комплексного аргумента  $z = x + jy$  (1.28), (1.29), (1.31), (1.32).

Fe<sup>x</sup> ↑ F1/x ПД — 2 ÷ ПА ИПД +  
ПД ИПВ F cos × PC FBx ИПА × ИПД ИПВ  
F sin × FBx ИПА × /—/ ПД F, C/П

29 шагов, 4 регистра памяти. По сравнению с программой 1.42 программа сокращена на два шага, но число требуемых регистров памяти возросло на 1. В зависимости от способа ввода исходных данных программа вычисляет одну из пар функций:  $\sin z$ ,  $\cos z$  или  $\operatorname{sh} z$ ,  $\operatorname{ch} z$ .

Инструкция

1. Исходные данные: а) для  $\sin z$ ,  $\cos z$  ( $x = PB$ ), [ $y = PX$ ]; б) для  $\operatorname{sh} z$ ,  $\operatorname{ch} z$  ( $y = PB$ ), [ $x = PX$ ].

2. Пуск: В/О C/П.

3. Результат: а)  $PX = \operatorname{Re} \sin z$ ,  $PY = \operatorname{Im} \sin z$ ,  $PC = \operatorname{Re} \cos z$ ,  $PD = \operatorname{Im} \cos z$ ; б)  $PX = \operatorname{Re} \operatorname{sh} z$ ,  $PY = \operatorname{Im} \operatorname{sh} z$ ,  $PC = \operatorname{Re} \operatorname{ch} z$ ,  $PD = \operatorname{Im} \operatorname{ch} z$ .

4. Регистры: рабочие PB; оперативные PA, PC, PD; свободные P0 — P9.

5. Погрешность относительная  $1 \cdot 10^{-6}$ .

6. Время счета  $t \approx 15$  с.

Примеры.  $\sin(2 + j3) = 9,1544984 - j4,168907$ ;  $\cos(2 + j3) =$

$-4,1896257 - j9,1092272$ ;

$\operatorname{sh}(2 + j3) = -3,5905644 + j0,53092084$ ;  $\operatorname{ch}(2 + j3) = -3,7245453 + j0,51182233$ .

**Программа 1.44.** Тангенс  $\operatorname{tg} z$  и гиперболический тангенс  $\operatorname{th} z$  комплексного аргумента  $z = x + jy$  (1.30), (1.33).

ИПД 2 × Fe<sup>x</sup> ↑ F1/x ПД — 2 ÷  
↑ ИПД + ИПС 2 × ПС F cos + ÷  
FBx F1/x ИПС F sin × C/П

26 шагов, 2 регистра памяти. В зависимости от способа ввода исходных данных программа вычисляет функцию  $\operatorname{tg} z$  или  $\operatorname{th} z$ .

Инструкция

1. Исходные данные: а) для  $\operatorname{tg} z$   $x = PC$ ,  $y = PD$ ; б) для  $\operatorname{th} z$   $x = PD$ ,  $y = PC$ .

2. Пуск: В/О C/П.

3. Результат: а)  $PX = \operatorname{Re} \operatorname{tg} z$ ,  $PY = \operatorname{Im} \operatorname{tg} z$ ; б)  $PX = \operatorname{Re} \operatorname{th} z$ ,  $PY = \operatorname{Im} \operatorname{th} z$ .

4. Регистры: рабочие —; оперативные PC, PD; свободные P0 — PB.

5. Погрешность относительная меньше  $1 \cdot 10^{-6}$ .

6. Время счета  $t \approx 20$  с.

Примеры.  $\operatorname{tg}(2 + j3) = -3,7640263 \cdot 10^{-3} + j1,0032386$ ;  $\operatorname{th}(2 + j3) = 0,96538587 - j9,8843723 \cdot 10^{-3}$ .

**Программа 1.45.** Гиперболические функции  $\operatorname{sh} x$ ,  $\operatorname{ch} x$ ,  $\operatorname{th} x$  вещественного аргумента.

Fe<sup>x</sup> ↑ F1/x ПД — 2 ÷ ПВ ↑ ИПД  
+ ПС ÷ ПД C/П

15 шагов, 3 регистра памяти.

Инструкция

1. Исходные данные:  $x = PX$ .

2. Пуск: В/О C/П

3. Результат:  $PB = \operatorname{sh} x$ ,  $PC = \operatorname{ch} x$ ,  $PD = \operatorname{th} x$ .

4. Регистры: рабочие PB, PC, PD; оперативные —; свободные P0 — PA.

5. Погрешность относительная меньше  $5 \cdot 10^{-7}$ .

6. Время счета  $t \approx 10$  с.

Примеры.  $\operatorname{sh} 2 = 3,6268602$ ;  $\operatorname{ch} 2 = 3,7621955$ ;  $\operatorname{th} 2 = 0,96402757$ .

## 1.6. Обратные тригонометрические и гиперболические функции комплексного аргумента. Обратные гиперболические функции вещественного аргумента

Тригонометрические и гиперболические функции выражаются, как известно, через показательную функцию, поэтому обратные функции определяются через логарифмы (см., например, [12]):

$$\operatorname{arcsin} z = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arccos} z = \frac{\pi}{2} + j \ln(z + \sqrt{z^2 - 1}); \quad (1.34)$$

$$\operatorname{arctg} z = -\frac{j}{2} \ln \frac{1+jz}{1-jz}; \quad (1.35)$$

$$\operatorname{arsh} z = \ln(z + \sqrt{z^2 + 1}); \quad (1.36)$$

$$\operatorname{arch} z = \ln(z + \sqrt{z^2 - 1}); \quad (1.37)$$

$$\operatorname{arth} z = \frac{1}{2} \ln \frac{1+z}{1-z}. \quad (1.38)$$

Если здесь  $\ln$  обозначает просто функцию, обратную показательной функции, то все приведенные выше функции, очевидно, бесконечнозначны. Можно, однако, произведя необходимые разрезы плоскости комплексного переменного  $z$ , выделить ветви функций, являющиеся однозначными аналитическими функциями. Согласно [9]  $\operatorname{arcsin} z$ ,  $\operatorname{arccos} z$  и  $\operatorname{arch} z$  определяются в плоскости  $z$ , разрезанной по действительной оси от  $-\infty$  до  $-1$  и от  $+1$  до  $+\infty$ ,  $\operatorname{arctg} z$  и  $\operatorname{arsh} z$  — в плоскости  $z$ , разрезанной по мнимой оси от  $-j\infty$  до  $-j$  и от  $+j$  до  $+j\infty$ ,  $\operatorname{arch} z$  — в плоскости  $z$ , разрезанной по действительной оси от  $-\infty$  до  $+1$ . Нужные ветви выбираются так, чтобы при вещественных  $z$  в соответствующих интервалах  $x$  функции совпадали со стандартными функциями вещественного переменного  $\operatorname{arcsin} x$ ,  $\operatorname{arccos} x$ ,  $\operatorname{arctg} x$ ,  $\operatorname{arsh} x$ ,  $\operatorname{arch} x$ ,  $\operatorname{arth} x$ .

При вычислении  $\operatorname{arcsin} z$ ,  $\operatorname{arccos} z$  по формуле (1.34) указанные условия дают, что функция  $\sqrt{w} = \sqrt{z^2 - 1}$  должна вычисляться на плоскости  $w$ , разрезанной по положительной части действительной оси, а функция  $\ln \zeta = \ln(z + \sqrt{z^2 - 1})$  — на плоскости  $\zeta$ , разрезанной по отрицательной части действительной оси. Требуемые ветви определяются условиями

$$\arg w = \arg(z^2 - 1) = \begin{cases} \operatorname{arccos}(\operatorname{Re} w / |w|), & \operatorname{Im} w > 0, \\ 2\pi - \operatorname{arccos}(\operatorname{Re} w / |w|), & \operatorname{Im} w < 0; \end{cases} \quad (1.39)$$

$$\arg \zeta = \arg(z + \sqrt{z^2 - 1}) = \begin{cases} \operatorname{arccos}(\operatorname{Re} \zeta / |\zeta|), & \operatorname{Im} \zeta > 0, \\ -\operatorname{arccos}(\operatorname{Re} \zeta / |\zeta|), & \operatorname{Im} \zeta < 0. \end{cases} \quad (1.40)$$

Для функции  $\operatorname{arctg} z$ , определяемой (1.35), плоскость комплексного переменного  $x = (1 + jz)/(1 - jz)$  должна быть разрезана по отрицательной части действительной оси, а  $\arg x$  должен отвечать условию (1.40).

Обратные гиперболические функции проще всего находить из соотношений (например, [9])

$$\operatorname{arsh} z = -j \operatorname{arcsin}(jz); \quad (1.41)$$

$$\operatorname{arch} z = j \operatorname{arccos} z; \quad (1.42)$$

$$\operatorname{arth} z = -j \operatorname{arctg}(jz). \quad (1.43)$$

Эти формулы позволяют использовать для вычислений обратных гиперболических функций те же программы, что и для соответствующих обратных тригонометрических функций, изменив лишь способ задания исходных данных и расположение действительных и мнимых частей искомых функций в регистрах памяти (программы 1.46 и 1.47).

**Программа 1.46.** Обратные тригонометрические и гиперболические функции  $\operatorname{arcsin} z$ ,  $\operatorname{arccos} z$ ,  $\operatorname{arsh} z$ ,  $\operatorname{arch} z$  комплексного аргумента  $z = x + jy$  (1.34), (1.39) — (1.42).

ИПС	Fx <sup>2</sup>	ИПД	Fx <sup>2</sup>	—	1	—	↑	Fx <sup>2</sup>	ИПД
ИПС	×	2	×	ПА	Fx <sup>2</sup>	+	F√—	ПВ	÷
F arccos	ИПА	Fx < 0	31	F,	/—/	Fπ	2	×	+
F Bx	F,	2	÷	ПА	F cos	ИПВ	F√—	×	F Bx
ИПА	F sin	×	ИПД	+	ПВ	XY	ИПС	+	↑
Fx <sup>2</sup>	ИПВ	Fx <sup>2</sup>	+	F√—	ПД	÷	F arccos	ИПВ	Fx < 0
64	F,	/—/	XY	XY	ПС	ИПД	F ln	ПВ	/—/
ПД	XY	/—/	1	F arcsin	+	ПА	C/П		

В зависимости от способа ввода исходных данных программа вычисляет или функции  $\operatorname{arccos}$ ,  $\operatorname{arcsin}$ ,  $\operatorname{arch} z$ , или функцию  $\operatorname{arsh} z$ .

**Структура программы**

00 — 32: вычисление  $\operatorname{Re} w$  и  $\operatorname{Im} w$  ( $w = z^2 - 1$ ) с учетом того, что разрез плоскости  $w$  должен проходить по положительной части действительной оси и с учетом выбора ветви  $\sqrt{w}$  (1.39),

33—48: вычисление  $\zeta = z + \sqrt{z^2 - 1} = z + \sqrt{w} = z + \sqrt{|w|} [\cos(\arg w/2) + j \sin(\arg w/2)]$ ,

49—78: вычисление  $\ln(z + \sqrt{z^2 - 1})$ , выбор ветви этой функции (1.40) и занесение результатов вычисления искомых функций в регистры памяти.

**И н с т р у к ц и я**

1. Исходные данные: а) для  $\operatorname{arcsin} z$ ,  $\operatorname{arccos} z$ ,  $\operatorname{arch} z$   $x = \text{PC}$ ,  $y = \text{PD}$ ; б) для  $\operatorname{arsh} z$   $x = \text{PD}$ ,  $y = \text{PC}$ .

2. Пуск: В/О С/П.  
3. Результат: а)  $\text{PA} = \operatorname{Re} \operatorname{arcsin} z$ ,  $\text{PB} = \operatorname{Im} \operatorname{arcsin} z$ ,  $\text{PC} = \operatorname{Re} \operatorname{arccos} z$ ,  $\text{PD} = \operatorname{Im} \operatorname{arccos} z$ ,  $\text{PC} = \operatorname{Im} \operatorname{arch} z$ ,  $\text{PD} = -\operatorname{Re} \operatorname{arch} z$ ; б)  $\text{PA} = -\operatorname{Im} \operatorname{arsh} z$ ,  $\text{PB} = \operatorname{Re} \operatorname{arsh} z$ .

4. Регистры: рабочие  $\text{PA} - \text{PD}$ ; оперативные —; свободные  $\text{P0} - \text{P9}$ .

5. Погрешность относительная: а) для  $\operatorname{arcsin} z$ ,  $\operatorname{arccos} z$ ,  $\operatorname{arch} z$  при  $y > 0$  меньше  $1 \cdot 10^{-6}$ ; при  $y < 0$  в выражении  $z + \sqrt{z^2 - 1}$  знаки слагаемых противоположны и при больших  $|z|$  возникают значительные погрешности округления — приблизительно  $|z|^2 \cdot 10^{-6}$ ; б) для  $\operatorname{arsh} z$  при  $x > 0$  меньше  $1 \cdot 10^{-6}$ ; при  $x < 0$  приблизительно  $|z|^2 \cdot 10^{-6}$ .

6. Время счета  $t \approx 30$  с.

**Примеры.**

$\operatorname{arcsin}(9,1544984 - j4,168907) = 1,1416143 - j3,0000024$  (точное значение  $\pi - 2 - j3 \approx 1,1415926 - j3$ );  
 $\operatorname{arccos}(-4,1896257 - j9,1092272) = 2,00014 + j3,000008$  (точное значение  $2 + j3$ ).

Значения  $\operatorname{arcsin} z$  на разрезе (т. е. при  $z = x \pm je$ , где  $|x| > 1$ ,  $e \ll 1$ ):  
 $\operatorname{arcsin}(2 \pm j1 \cdot 10^{-6}) = 1,5707963 \pm j1,3169579 (\pi/2 \pm j1,3169579)$ ;  
 $\operatorname{arch}(55,947042 + j48,750524) = 5 + j0,71681479$  (точное значение  $5 + j(7 - 2\pi) \approx 5 + j0,7168148$ );  
 $\operatorname{arsh}(55,941963 + j48,754951) = 5 + j0,7168148$  (точное значение  $5 + j0,7168148 \dots$ ).



**Программа 1.47.** Обратные тригонометрические и гиперболические функции  $\text{arctg } z$  и  $\text{arth } z$  комплексного аргумента  $z = x + jy$  (1.35), (1.43).

ИПС	/—/	ПВ	1	ИПД	+	ПА	ИПС	1	ИПД
—	ПС	ИПА	×	ХУ	ПД	ИПВ	×	+	ИПА
ИПД	×	ИПС	ИПВ	×	—	ИПА	$Fx^2$	ИПВ	$Fx^2$
+	ПД	÷	ПС	ХУ	ИПД	÷	↑	$Fx^2$	ИПС
$Fx^2$	+	$F\sqrt{-}$	ПД	÷	$F\arccos$	ИПС	$Fx < 0$	52	F,
/—/	ХУ	ХУ	2	÷	ПА	ИПД	$F \ln$	/—/	2
÷	ПВ	С/П							

В зависимости от способа ввода исходных данных программа вычисляет функцию  $\text{arctg } z$  или  $\text{arth } z$ .

Структура программы

00—33: вычисление функции  $\kappa = (1 + jz)/(1 - jz)$  с помощью программы 1.11 (деление комплексных чисел).

34—63: вычисление функции  $\ln \kappa/2$  с выполнением стандартного требования к аргументу логарифма ( $|\arg \kappa| < \pi$ ). В этом случае автоматически удовлетворяются условия на разрезе для функции  $\text{arctg } z$  (см. выше). Далее вычисление  $\text{arctg } z = -j \ln \kappa/2$  путем переадресации действительной и мнимой частей функции  $\ln \kappa/2$  и смены знака  $\text{Re } \ln \kappa$ .

Инструкция

1. Исходные данные: а) для  $\text{arctg } z$   $x = \text{PC}$ ,  $y = \text{PD}$ ; б) для  $\text{arth } z$   $x = \text{PD}$ ,  $y = \text{PC}$ .

2. Пуск: В/О С/П.

3. Результат: а)  $\text{PA} = \text{Re } \text{arctg } z$ ,  $\text{PB} = \text{Im } \text{arctg } z$ ; б)  $\text{PB} = \text{Re } \text{arth } z$ ,  $\text{PA} = -\text{Im } \text{arth } z$ .

4. Регистры: рабочие PA, PB; оперативные PC, PD; свободные P0—P9.

5. Погрешность относительная меньше  $5 \cdot 10^{-6}$ .

6. Время счета  $t \approx 30$  с.

Примеры.

$\text{arctg} (-3,7640263 \cdot 10^{-3} + j1,0032386) = -1,1415905 + j3,0000018$  (точное значение  $2 - \pi + j3 \approx 1,1415926 + j3$ ).

Значение  $\text{arth } z$  на разрезе (т. е. при  $z = x \pm je$ , где  $|x| > 1$ ,  $e \ll 1$ ):  $\text{arth} (5 \pm j1 \cdot 10^{-6}) = 0,20273255 \pm j1,5707963$  (точное значение:  $(1/2) \ln (3/2) \pm j(\pi/2) \approx 0,20273255 \pm j1,5707963$ ).

**Программа 1.48.** Обратные гиперболические функции  $\text{arsh } x$ ,  $\text{arch } x$ ,  $\text{arth } x$  вещественного аргумента (1.36)—(1.38),  $x \geq 1$  для  $\text{arch } x$ ,  $|x| < 1$  для  $\text{arth } x$ .

ПД	$Fx^2$	1	+	$F\sqrt{-}$	ИПД	+	$F \ln$	ПВ	ИПД
$Fx^2$	1	—	$Fx < 0$	20	1	/—/	ПС	БП	25
$F\sqrt{-}$	ИПД	+	$F \ln$	ПС	ИПД	1	+	1	ИПД
—	÷	$F\sqrt{-}$	$F \ln$	ПД	С/П				

Инструкция

1. Исходные данные:  $x = \text{PX}$ .

2. Пуск: В/О С/П.

3. Результат:  $\text{PB} = \text{arsh } x$ ,  $\text{PC} = \text{arch } x$ , если  $x \geq 1$ . Если  $x < 1$ , то  $\text{PC} = -1$ , т. е.  $\text{arch } x$  не существует.  $\text{PD} = \text{arth } x$ , если  $|x| < 1$ . Если  $|x| \geq 1$ , то происходит авост и на индикаторе ЕГГОГ, что, однако, не влияет на значения  $\text{arsh } x$  и  $\text{arch } x$  в  $\text{PB}$  и  $\text{PC}$ .

4. Регистры: рабочие PB, PC, PD; оперативные —; свободные P0—PA.

5. Погрешность относительная меньше  $1 \cdot 10^{-6}$ .

6. Время счета  $s \approx 15$  с.

Примеры.  $\text{arsh } 2 = 1,4436355$ ;  $\text{arch } 2 = 1,3169579$ ;  $\text{arsh} (-0,7) = -0,6526667$ ;  $\text{arth} (-0,7) = -0,8673006$ .

## Указатель программы

Номер программы	Тип действия	Число шагов	Число регистров памяти	Примечание
1.1	Сложение	6	2	Программы отличаются расположением результата в PX, PY
1.2	Умножение	15	4	
1.3	Умножение	16	4	
1.4	Умножение	17	3	
1.5	Умножение	20	2	Один из операндов располагается в PX, PY
1.6	Умножение	18	4	
1.7	Умножение и сложение	11	1	
1.8	Обратная величина числа	26	4	
1.9	Деление или умножение	27	3	В памяти сохраняются значения делимого и обратной величины делителя
1.10	Деление или умножение	26	4	
1.11	Деление	18	5	
1.12	Целая положительная степень комплексного числа	22	3	
1.13	То же	21	5	В памяти сохраняется делемое
1.14	»	25	3	
1.15	»	28	5	
1.16	Целая отрицательная степень комплексного числа	9	$n+3$	Операция умножения комплексных чисел выделена в подпрограмму
1.17	Многочлены вещественного аргумента, $n \leq 11$	21	$n+5$	
1.18	Многочлены комплексного аргумента, $n \leq 9$	23	$2n+5$	
1.19	Многочлены комплексного аргумента, $n \leq 5$	12	$n+4$	
1.20	Комбинированные многочлены вещественного аргумента, $n \leq 10$	30	$n+6$	Коэффициент при старшем члене комплексный
1.21	Комбинированные многочлены комплексного аргумента, $n \leq 8$ , $m=1, 2, \dots$	15	3	
1.22	Двучлены обратной величины комплексного аргумента $z$	31	5	
1.23	Двучлены аргумента $1/z$	32	6	
1.24	Двучлены аргумента $1/z$	10	$n+3$	Вычисляется также $ z ^2$
1.25	Многочлены по обратным степеням вещественного аргумента, $n \leq 11$			

Номер программы	Тип действия	Число шагов	Число регистров памяти	Примечание
1.26	Комбинированные многочлены по обратным степеням вещественного аргумента, $n \leq 10$	17	$n+4$	Два варианта программы
1.27	Многочлены комплексного аргумента $(1/z)$ , $n \leq 9$	32	$n+5$	Коэффициент при старшем члене комплексный
1.28	Многочлены комплексного аргумента $(1/z)$ , $n \leq 5$	34	$2n+5$	Коэффициенты многочленов комплексные
1.29	Комбинированные многочлены комплексного аргумента $1/z$ , $n \leq 8$ , $m=1, 2, \dots$	50	$n+6$	Коэффициент при старшем члене $(1/z)^{m+n}$ комплексный
1.30	Комбинированные многочлены комплексного аргумента $1/z$ , $n \leq 8$ , $m=-1, -2, \dots$	36	$n+6$	Коэффициент при старшем члене $(1/z)^{m+n}$ комплексный

Номер программы	Функция	Область определения	Число шагов	Число регистров памяти	Примечания
1.31	$e^z$	$\infty$	10	1	Вычисляется также модуль $z$ Вычисляется также модуль $z$
1.32	$\ln z$	$0 \leq \arg z < \pi$	12	2	
1.33	$\ln z$	$ \arg z  < \pi$	19	2	
1.34	$z^w$ ( $w=u+jv$ )	$0 \leq \arg z < \pi$	36	4	
1.35	$z^w$	$ \arg z  < \pi$	43	4	Показатель $u$ вещественный Многозначная функция; последовательно вычисляются все ветви
1.36	$z^u$	$0 \leq \arg z < \pi$	22	3	
1.37	$z^w$	$ \arg z  < \pi$	58	7	

Номер программы	Функция	Число шагов	Число регистров памяти	Примечание
1.38	$\sin z$ или $\operatorname{sh} z$	18	2	
1.39	$\sin z$ или $\operatorname{sh} z$	20	1	
1.40	$\cos z$ или $\operatorname{ch} z$	20	1	
1.41	$\cos z$ или $\operatorname{ch} z$	18	2	
1.42	$\sin z$ , $\cos z$ или $\operatorname{sh} z$ , $\operatorname{ch} z$	31	3	
1.43	$\sin z$ , $\cos z$ или $\operatorname{sh} z$ , $\operatorname{ch} z$	29	4	

Номер программы	Функция	Число шагов	Число регистров памяти	Примечание
1.44	$\operatorname{tg} z$ или $\operatorname{th} z$	26	2	Аргумент $x$ вещественный
1.45	$\operatorname{sh} x$ , $\operatorname{ch} x$ , $\operatorname{th} x$	15	3	
1.46	$\arcsin z$ , $\arccos z$ , $\operatorname{arch} z$ или $\operatorname{arsh} z$	78	4	Аргумент $x$ вещественный; $x \geq 1$ для $\operatorname{arch} x$ , $ x  < 1$ для $\operatorname{arsh} x$
1.47	$\operatorname{arctg} z$ или $\operatorname{arth} z$	63	4	
1.48	$\operatorname{arsh} x$ , $\operatorname{arch} x$ , $\operatorname{arth} x$	36	3	

## Глава 2

## Гамма-функция вещественного и комплексного аргументов и родственные ей функции

## 2.1. Гамма-функция и логарифм гамма-функции. Факториал

Гамма-функция в области  $\operatorname{Re} z > 0$  выражается через интеграл Эйлера

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt. \quad (2.1)$$

$\Gamma(z)$  как аналитическое продолжение (2.3) в область  $\operatorname{Re} z < 0$  является однозначной аналитической функцией на всей комплексной плоскости, кроме точек  $z = 0, -1, -2, \dots$ , где она имеет простые полюсы.

Для продолженной функции применимы асимптотическое разложение — формула Стирлинга

$$\Gamma'(z) \approx \sqrt{2\pi z} \exp \left[ (z-1) \ln z - z + 1/(12z) \right] \left( 1 - 1/(360z^3) + \dots \right), \quad |\arg z| < \pi, \quad (2.2)$$

и рекуррентная формула

$$\Gamma(z+1) = z \Gamma(z). \quad (2.3)$$

При  $\operatorname{Re} z \geq 12$  достаточную точность (относительная погрешность  $1 \cdot 10^{-6}$ ) дает асимптотическая формула

$$\Gamma(z) \approx \sqrt{2\pi z} \exp \left[ (z-1) \ln z - z + 1/(12z) \right]. \quad (2.4)$$

Удобный алгоритм вычисления  $\Gamma(z)$  в вещественной области ( $z = x$ ) состоит в следующем. Увеличим аргумент  $x \equiv A + M$  ( $A$  — целая часть числа,  $M$  — мантисса ( $0 \leq M < 1$ )) до  $S = 12 + M$ , а затем применим к  $S$  асимптотическое разложение (2.4). Используя затем последовательно рекуррентную формулу (2.3) в сторону уменьшения  $z$ , получаем

$$\Gamma(x) \approx \frac{\sqrt{2\pi} \exp[S(\ln S - 1) + 1/(12S)]}{S(S-1) \dots (1+x)}, \quad (2.5)$$

$$\text{где} \quad S = 12 + M. \quad (2.6)$$

Относительная погрешность  $\delta\Gamma(z)$  гамма-функции определяется согласно (2.5) в основном абсолютной погрешностью экспоненциального множителя  $A \equiv S(\ln S - 1)$ , т. е. величиной  $|A|\delta A$ . Следовательно, при прочих равных условиях погрешность  $\delta\Gamma(z)$  возрастает с увеличением  $|z|$ . Ориентировочно при  $z \gg 1$   $\delta\Gamma(z) \approx |z| \cdot 10^{-7}$ . Вычисление  $\Gamma(z)$  в комплексной области по формуле типа (2.5) связано с чрезмерным числом операций над комплексными числами. Удобнее выразить результат через  $\ln \Gamma(z)$ .

Логарифм гамма-функции является однозначной функцией, аналитической в плоскости  $z$ , разрезанной вдоль отрицательной части действительной осн. При этом выбирается такая ветвь  $\ln \Gamma(z)$ , чтобы  $(\ln z)_{y=0} = \ln x$ . Согласно (2.4) асимптотическое разложение  $\ln \Gamma(z)$  имеет вид

$$\ln \Gamma(z) \approx \ln \sqrt{2\pi} + (z-1/2) \ln z - z + 1/(12z), \quad (2.7)$$

а рекуррентная формула

$$\ln \Gamma(z) = \ln \Gamma(z+1) - \ln z. \quad (2.8)$$

Применим процедуру, аналогичную (2.5), (2.6), для вычисления  $\ln \Gamma(z)$  в комплексной области. Представим аргумент  $z$  в виде

$$z = x + jy = A + M + jy, \quad (2.9)$$

где  $A$  и  $M$  — соответственно целая часть и мантисса  $\operatorname{Re} z$ . Увеличим целую часть до 12, введя комплексную величину

$$t = 12 + M + jy. \quad (2.10)$$

Тогда

$$\ln \Gamma(z) \approx \ln \sqrt{2\pi} + (t-1/2) \ln t - t - 1/(12t) - [\ln(t-1) + \ln(t-2) + \dots + \ln(z+1) + \ln z] \quad (2.11)$$

и  $\Gamma(z)$  можно найти по формуле

$$\Gamma(z) = e^{\ln \Gamma(z)}. \quad (2.12)$$

Факториал аргумента  $x$  равен по определению

$$x! = \Gamma(x+1). \quad (2.13)$$

Обычно используются только целые положительные  $x = n$  или нуль:

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n, \quad n \geq 1; \quad 0! = 1. \quad (2.14)$$

Расчет  $n!$  на ПМК непосредственно перемножением по формуле (2.14) возможен до  $n = 69$ . При больших  $n$  результат превышает  $10^{100}$  и возникает переполнение. Простой способ увеличения максимума  $n$  — переход к  $\lg n$ , определяемому по (2.13) и асимптотической формуле (2.7):

$$\lg n! \approx \lg \sqrt{2\pi n} + n \lg n + (1/12n - n)/\ln 10 = A + M. \quad (2.15)$$

Целая часть  $A$  и мантисса  $M$  ( $0 \leq M < 1$ ) легко отделяются после вычисления  $\lg n!$ . Тогда

$$n! = 10^M \cdot 10^A, \quad (2.16)$$

где  $A$  — порядок;  $10^M$  — мантисса факториала  $n!$  ( $1 \leq 10^M < 10$ ). Переполнение при вычислении этих величин наступает лишь при  $n \lg n \approx 10^{100}$ , что соответствует  $n \approx 1 \cdot 10^{98}$ . Отметим, что при выделении из числа, равного  $\lg n!$ , мантиссы  $M$  количество значащих цифр, приходящихся на долю  $M$ , сокращается по мере увеличения  $n$ . При  $A > 1 \cdot 10^7$  ( $n > 1,6 \cdot 10^6$ ) на долю  $M$  не остается ни одной значащей цифры. В этом случае данным способом можно определить лишь порядок  $n!$ .

Иногда находят применение произведения последовательных четных или нечетных чисел, которые обозначаются двойным факториалом

$$p!! = p(p-2) \dots 1, \quad (2.17)$$

так что  $(2n)!! = 1 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n$ ,  $(2n-1)!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)$ .

**Программа 2.1.** Гамма-функция  $\Gamma(x)$  вещественного аргумента (2.5), (2.6),  $x \neq 0, -1, -2, \dots$ ;  $x \leq 69$ .

ИП4	ИП5	1	+	П5	×	П4	ИП5	1	2
—	Fx	≥ 0	00	F Bx	ИП5	×	F1/x	ИП5	F ln 1
—	ИП5	×	+	Fe <sup>x</sup>	ИП4	÷	Fл	2	×
ИП5	×	F	√	×	C/П				

**И н с т р у к ц и я**

1. Исходные данные:  $x = P4 = P5$ .
2. Пуск: В/О С/П.
3. Результат:  $PX = \Gamma(x)$ .
4. Регистры: рабочие —; оперативные P4, P5; свободные P0 — P3, P6 — PД.
5. Погрешность относительная меньше  $1 \cdot 10^{-6}$  при  $x \approx 1$  и  $x \cdot 10^{-7}$  при  $x \gg 1$ .
6. Время счета  $t \approx (1 - x/15)$  мин при  $x \leq 12$  и  $t \approx 20$  с при  $x \geq 12$ .

**Пример.**  $\Gamma(1,395) = 0,88754726$  (0,88754726 [9]);  $\Gamma(3,395)/7 = -0,42361678$  (0,42361694 [9]).

Программу можно использовать для расчета функции  $\Gamma(x+1)/k$  (где  $k$  — произвольная вещественная константа), следует лишь изменить ввод исходных данных (п. 1 инструкции):  $k = P4$ ,  $x = P5$ . После пуска В/О С/П в регистре  $PX$  оказывается величина  $\Gamma(x+1)/k$ .

**Программа 2.2.** Логарифм гамма-функции  $\ln \Gamma(z)$  комплексного аргумента  $z = x + jy$ ,  $0 \leq \arg z < \pi$  (2.10), (2.11). При  $-\pi \leq \arg z \leq 0$  следует находить  $\ln \Gamma(z)$  по формуле  $\ln \Gamma(z) = \overline{\ln \Gamma(\bar{z})}$ .

0	П2	П3	ПП	70	ПП	62	ИП1	1	+
П1	1	2	—	Fx ≥ 0	03	ПП	70	2	F1/x
ИП1	—	П7	ИП4	×	ИП5	ИП0	×	+	ИП5
ИП7	×	ИП4	ИП0	×	—	ПП	62	ИП1	ИП6
1	2	×	П6	÷	ИП1	—	ИП0	/—/	ИП6
÷	ИП0	—	ПП	62	Fл	2	×	F√	F ln
+	C/П	ИП3	+	П3	XY	ИП2	+	П2	В/О
ИП1	↑	Fx <sup>2</sup>	ИП0	Fx <sup>2</sup>	+	П6	F√	П7	÷
Farccos	/—/	П5	ИП7	F ln	/—/	П4	XY	В/О	

# Инструкция

1. Исходные данные:  $x = P1, (y = P0)$ .

2. Пуск: В/О С/П.

3. Результат:  $PX = \operatorname{Re} \ln \Gamma(z), PY = \operatorname{Im} \ln \Gamma(z)$ .

4. Регистры: рабочие P0, P3; оперативные P1, P2, P4 — P7; свободные P8—

РД.

5. Погрешность относительная меньше  $3 \cdot 10^{-6}$ .

6. Время счета  $t \approx (4 - x/4)$  мин при  $x \leq 12$  и  $t \approx 1$  мин при  $x \geq 12$ .

Примеры.

$\ln \Gamma(1,9 + j4,7) = -4,2794835 + j4,5752812$  ( $-4,27948395 + j4,57528305$ ),  
 $t = 3$  мин;

$\ln \Gamma(-3,5 + j0) = -1,3090055 - j12,56637$  ( $-1,3090055 - j4\pi$ ,  
 $4\pi = 12,56637$ ),  $t = 4$  мин;

$\ln \Gamma(1,4 + j10) = -12,715858 + j14,403257$   
( $-12,7158587 + j14,4032576$ ),  $t = 3$  мин.

Значения в скобках взяты из таблиц  $\ln \Gamma(z)$  [9].

**Программа 2.3.** Гамма-функция  $\Gamma(z)$  комплексного аргумента  $z = x + jy, 0 \leq \arg z < \pi$  (2.10) — (2.12). При  $-\pi < \arg z \leq 0$   $\Gamma(z)$  следует находить по формуле  $\Gamma(z) = \overline{\Gamma(\bar{z})}$ ,  $|z| \leq 69$ .

0	П2	П3	ПП	79	ПП	71	ИП1	1	+
П1	1	2	—	$Fx \geq 0$	03	ПП	79	2	$F1/x$
ИП1	—	П7	ИП4	×	ИП5	ИП0	×	+	ИП5
ИП7	×	ИП4	ИП0	×	—	ПП	71	ИП1	ИП6
1	2	×	П6	÷	ИП1	—	ИП0	/—/	ИП6
÷	ИП0	—	ПП	71	$F\pi$	2	×	$FV^-$	$F\ln$
+	$Fe^x$	ИП3	$F\sin$	XY	×	$FBx$	ИП3	$F\cos$	×
С/П	ИП3	+	П3	XY	ИП2	+	П2	В/О	ИП1
↑	$Fx^2$	ИП0	$Fx^2$	+	П6	$FV^-$	П7	÷	$F\arccos$
/—/	П5	ИП7	$F\ln$	/—/	П4	XY	В/О		

## Структура программы

00—17: вычисление суммы логарифмов (в квадратных скобках в формуле (2.11)) и занесение ее в P2, P3. Этот фрагмент связан также с подпрограммами вычисления  $\ln z$  (адреса 79 — 97) и суммирования комплексных чисел (адреса 71—78).

18—60: вычисление остальных слагаемых в (2.11) и полной величины  $\ln \Gamma(z)$ .

61—70: вычисление  $\Gamma(z)$  по формуле (2.12).

## Инструкция

1. Исходные данные:  $x = P1, (y = P0)$ .

2. Пуск: В/О С/П.

3. Результат:  $PX = \operatorname{Re} \Gamma(z), PY = \operatorname{Im} \Gamma(z)$ .

4. Регистры: рабочие P0; оперативные P1 — P7; свободные P8 — РД.

5. Погрешность относительная меньше  $2 \cdot 10^{-6}$  при  $|z| \approx 1$  и  $3|z| \cdot 10^{-7}$  при  $|z| \gg 1$ .

6. Время счета:  $t \approx (4 - x/4)$  мин при  $x \leq 12$  и  $t \approx 1$  мин при  $x \geq 12$ .

Примеры.

$\Gamma(1,8 + j3,6) = -4,5257904 \cdot 10^{-2} + j1,4387914 \cdot 10^{-2}$  ( $-4,5257948 \cdot 10^{-2} + j1,4387887 \cdot 10^{-2}$  [9]),  $t = 3$  мин;

$\Gamma(-3,5 + j0) = 0,27008855 + j1,0803542 \cdot 10^{-7}$  ( $0,2700882 + j0$  [9]),  $t = 4$  мин.

## Программа 2.4. Факториал $n!$ (2.14).

Приведены два варианта программы, инструкция к обоим вариантам отличается только способом ввода исходных данных.

1.  $0 < n \leq 69$

1 ИП0 × FL0 01 С/П

2.  $0 \leq n \leq 69$

ВП П0 1 ИП0 × FL0 03 С/П

Последний вариант программы предложен в [2] и основан на применении команды ВП, которая замещает 0 в регистре PX на 1, не изменяя другие числа в PX.

## Инструкция

1. Исходные данные: вариант 1  $n = P0$ , вариант 2  $n = PX$ .

2. Пуск: В/О С/П.

3. Результат:  $n! = PX$ .

4. Регистры: рабочие —; оперативные P0; свободные P1 — РД.

5. Время счета  $t \approx n$  с.

Пример.  $7! = 5040$ .

## Программа 2.5. Факториал $n! = B \cdot 10^A, 10 \leq n \leq 1 \cdot 10^8$ , (2.15), (2.16).

ПД	$F\lg$	ИПД	×	ИПД	2	×	$F\pi$	×	$FV^-$
$F\lg$	+	ИПД	1	2	×	$F1/x$	ИПД	—	1
0	$F\ln$	÷	+	ПД	КИПД	$F$ ,	ИПД	—	9
9	XY	—	$Fx \geq 0$	37	$FBx$	$F10^x$	ИПД	XY	С/П

## Инструкция

1. Исходные данные:  $n = PX$ .

2. Пуск: В/О С/П.

3. Результат: при  $10 \leq n \leq 1,5 \cdot 10^6$   $B = PX, A = PY$ ; при  $1,5 \cdot 10^6 \leq n \leq 1 \cdot 10^8$   $A = [PY]$ . В последнем случае достоверен только порядок факториала, а содержащее PX не имеет значения (квадратная скобка — округление до ближайшего целого).

4. Регистры: рабочие —; оперативные РД; свободные P0 — PC.

5. Погрешность относительная мантиссы  $B$  меньше  $1 \cdot 10^{-6} + [\lg A]$  (квадратная скобка — округление  $\lg A$  до целого в меньшую сторону).

6. Время счета  $t \approx 15$  с.

Примеры.  $10! = 3,6288076 \cdot 10^6$  (3628800);

$1000! = 4,0243892 \cdot 10^{2567}$  ( $4,0238726 \cdot 10^{2567}$  [9]);  $(1 \cdot 10^{80})! = 10^{10^{82}}$ .

## Программа 2.6. Двойной факториал $p!! = p(p-2) \dots 1, p \leq 119$ .

1 ИП0 × FL0 05 FL0 01 С/П

Программа взята из [2].

## Инструкция

1. Исходные данные:  $p = P0$ .

2. Пуск: В/О С/П.

3. Результат:  $PX = p!!$

4. Регистры: рабочие —; оперативные P0; свободные P1 — РД.

5. Время счета  $t \approx (p)$  с.

Примеры.  $15!! = 2027025; 116!! = 6,7750296 \cdot 10^{85}$ .

## 2.2. Обратная величина гамма-функции. Отношение гамма-функций различных аргументов. Бета-функция

Обратная величина гамма-функции  $1/\Gamma(z)$  является целой функцией, имеющей простые нули в точках  $z = 0, -1, -2, \dots$ . Метод вычисления  $1/\Gamma(z)$  такой же, как и  $\Gamma(z)$ , т. е. используются асимптотическое разложение и рекуррентная формула. Рабочая формула сразу получается из (2.5):

$$\frac{1}{\Gamma(z)} \approx \sqrt{\frac{1}{2\pi}} (t-1)(t-2)\dots(1+z) z \exp \left[ \left( \frac{1}{2} - t \right) \ln t + t - \frac{1}{12t} \right], \quad (2.18)$$

где  $t$  определяется (2.10) ( $0 \leq \arg z < \pi$ ). Отметим, что по сравнению с (2.5) формула (2.18) удобнее для расчетов функций комплексного аргумента, поскольку в (2.18) отсутствует операция деления комплексных чисел. Поэтому по (2.18) можно вычислять функцию  $1/\Gamma(z)$  комплексного аргумента полностью в автоматическом режиме ПМК, не находя предварительно  $\ln \Gamma(z)$ , что сокращает время счета.

При расчетах обратной величины гамма-функции вещественного аргумента удобнее оперировать функцией

$$\frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma(x)} \approx \sqrt{S} (S-1)(S-2)\dots(x+1)x \exp \left\{ - \left[ S (\ln S - 1) + \frac{1}{12S} \right] \right\}, \quad (2.19)$$

где  $S = 12 + M$  (2.6). Функция (2.19) по сравнению с (2.18) упрощает вычисления отношения гамма-функций и более сложных дробей, содержащих в числителе и знаменателе гамма-функции. Через эти дроби выражается бета-функция; они также существуют при вычислении гипергеометрических функций (см. гл. 6).

Отношение гамма-функций различных аргументов  $\Gamma(z)/\Gamma(w)$  имеет простые полюсы в точках  $z = 0, -1, -2, \dots$  и простые нули в точках  $w = 0, -1, -2, \dots$ . Вычислить это отношение можно, умножив  $\Gamma(z)$  на  $1/\Gamma(w)$ . Для вещественных  $z = x, w = u$  лучше, однако, использовать соотношение

$$\frac{\Gamma(x)}{\Gamma(u)} = \frac{1/\Gamma(u)}{1/\Gamma(x)} \quad (2.20)$$

ввиду относительной простоты формулы (2.19) для  $1/\Gamma$  и отсутствия у этой функции особых точек.

Бета-функция может быть определена соотношением [6]

$$B(z, w) \equiv \Gamma(z) \Gamma(w) / \Gamma(z+w), \quad (2.21)$$

где  $z = x + jy; w = u + jv; |\arg z| < \pi, |\arg w| < \pi$ . При вещественных  $z$  и  $w$  ( $z = x, w = u$ ) можно использовать (2.19) и (2.20).

При комплексных аргументах эти соотношения получаются слишком громоздкими, что затрудняет реализацию программ на ПМК (работу в автоматическом режиме). Можно, однако, использовать упрощенную формулу для  $\ln \Gamma(z)$ , получаемую из (2.11) путем замены слагаемого  $1/12z$  на  $1/12x$ . После простых преобразований с учетом (2.10), (2.11) и (2.21) получаем

$$\ln B(z, w) = \ln \sqrt{2\pi} + P_1 + P_2 - P_3;$$

$$P_i \approx (t_i - 1/2) \ln t_i - \operatorname{Re} t_i + 1/(12 \operatorname{Re} \xi_i) - [\ln(t_i - 1) + \ln(t_i - 2) + \dots + \ln(\xi_i + 1) + \ln \xi_i]; \quad (2.22)$$

$$t_i = 20 + M_i + j \operatorname{Im} \xi_i, \quad i = 1, 2, 3; \quad \xi_1 = z, \quad \xi_2 = w, \quad \xi_3 = z + w.$$

В формулах (2.22)  $M_i$  — мантиссы действительных частей  $\xi_i$ .

Применение (2.22) обеспечивает относительную погрешность для  $\ln B(z, w)$  не более  $2 \cdot 10^{-4}$ , время счета 15 мин. Можно довести точность до  $5 \cdot 10^{-8}$ , заменив 20 в формулах для  $t_i$  на 60. Но при этом время счета возрастает примерно втрое.

**Программа 2.7.** Обратная величина гамма-функции вещественного аргумента (вычисляется функция  $k \sqrt{2\pi}/\Gamma(x)$ , где  $k$  — задаваемая вещественная константа) (2.19)  $x \leq 69$ .

ИП4	ИП5	×	П4	ИП5	1	+	П5	1	2
—	Fx ≥ 0	00	FBx	ИП5	×	F1/x	ИП5	Fln	1
—	ИП5	×	+	/—/	Fe <sup>x</sup>	ИП5	Fv <sup>—</sup>	×	ИП4
×	П4		С/П						

### Инструкция

1. Исходные данные:  $k = P4, x = P5$ .
2. Пуск: В/О С/П.
3. Результат:  $PX = P4 = k \sqrt{2\pi}/\Gamma(x)$ .
4. Регистры: рабочие P4; оперативные P5; свободные P0 — P3, P6 — PД.
5. Погрешность относительная меньше  $1 \cdot 10^{-6}$  при  $x \approx 1$  и  $x \cdot 10^{-6}$  при  $x \gg 1$ .
6. Время счета:  $t \approx (1 - x/15)$  мин при  $x < 12$  и  $t \approx 20$  с при  $x \geq 12$ .

Пример.  $2 \sqrt{2\pi}/\Gamma(3,5) = 1,5084935$  (1,5084944 [9]).

**Программа 2.8.** Обратная величина гамма-функции  $1/\Gamma(z)$  комплексного аргумента  $z = x + jy$  (2.18), (2.10),  $0 \leq \arg z < \pi, |z| \leq 69$ . Функция  $1/\Gamma(z)$  в области  $-\pi < \arg z < 0$  находится из равенства  $\Gamma(\bar{z}) = \overline{\Gamma(z)}$ .

Fv <sup>—</sup>	F1/x	0	XY	FBx	F,	ПП	81	ИПС	1
+	ПС	ПА	1	2	—	Fx ≥ 0	05	F,	П7
XY	П8	ИПС	↑	Fx <sup>2</sup>	ИПД	Fx <sup>2</sup>	+	П6	Fv <sup>—</sup>
÷	Farccos	ПВ	ИП6	Fv <sup>—</sup>	Fln	ПА	ИПД	/—/	2
F1/x	ИПС	—	ПП	81	ИПС	+	П9	XY	ИПД
+	ИПД	ИП6	1	2	×	П6	÷	+	ИП9
ИПС	ИП6	÷	—	XY	П9	Fsin	XY	Fe <sup>x</sup>	×
ПВ	FBx	ИП9	Fcos	×	ПА	ИП8	ИП7	ПП	81
С/П	XY	FBx	ИПВ	×	XY	П9	ИПА	×	+
XY	ИПА	×	ИП9	ИПВ	×	—	В/О		

### Инструкция

1. Исходные данные:  $x = PA = PC, y = PB = PD, [2\pi = PX]$ .
2. Пуск: В/О С/П.
3. Результат:  $PX = \operatorname{Re} [1/\Gamma(z)], PY = \operatorname{Im} [1/\Gamma(z)]$ .
4. Регистры: рабочие —; оперативные P6 — PД; свободные P0 — P5.
5. Погрешность относительная меньше  $2 \cdot 10^{-6}$  при  $|z| \approx 1$  и  $3|z| \cdot 10^{-7}$  при  $|z| > 7$ .
6. Время счета:  $t \approx (2,5 - x/8)$  мин при  $x \leq 12$  и  $t \approx 1$  мин при  $x \geq 12$ .

Примеры.

$$1/\Gamma(2 + j8) = -693,2097 + j4968,5299 \quad (-693,2034 + j4968,5256), \quad t = 2 \text{ мин};$$

$$1/\Gamma(-3,5 + j0) = 3,7024902 + j0 \quad (3,7024942 \text{ [9]}), \quad t = 3 \text{ мин}.$$

**Программа 2.9.** Отношение гамма-функций вещественных аргументов (вычисление  $\Gamma(x)/k\Gamma(y)$ ,  $x \neq 0, -1, -2, \dots; |x|, |y| \leq 69; k$  — задаваемая вещественная константа) (2.20), (2.19), программа 2.7.

ИП6	ПП	09	F1/x	П4	ИП7	ПП	09	С/П	П5
ИП4	ИП5	×	П4	ИП5	1	+	П5	1	2
—	Fx ≥ 0	10	FVx	ИП5	×	F1/x	ИП5	Fln	1
—	ИП5	×	+	/—/	Fe <sup>x</sup>	ИП5	Fy <sup>—</sup>	×	ИП4
×	В/О								

#### Инструкция

- Исходные данные:  $k = P4$ , ( $x = P6$ ,  $y = P7$ ).
- Пуск: В/О С/П.
- Результат:  $PX = \Gamma(x)/k \Gamma(y)$ .
- Регистры: рабочие P6, P7; оперативные P4, P5; свободные P0—P3, P8—PД.
- Погрешность относительная меньше:  $1 \cdot 10^{-6}$  при  $x, y \approx 1$  и  $(x + y) \cdot 10^{-7}$  при  $x, y \gg 1$ .
- Время счета:

$$t \approx \begin{cases} [2 - (x + y)/15] \text{ мин} & \text{при } x \leq 12, \quad y \leq 12, \\ (1 - x/15) \text{ мин} & \text{при } x \leq 12, \quad y \geq 12, \\ (1 - y/15) \text{ мин} & \text{при } x \geq 12, \quad y \leq 12, \\ 0,5 \text{ мин} & \text{при } x \geq 12, \quad y \geq 12. \end{cases}$$

Пример.  $\Gamma(1,1)/3 \Gamma(-0,8) = -0,055260776 (-0,055260762 [9])$ ,  $t = 2$  мин.

**Программа 2.10.** Бета-функция вещественных аргументов  $B(x, y)$ ,  $x, y \neq 0, -1, -2, \dots$ ;  $x, y, (x + y) \leq 69$  ((2.21), (2.20), (2.19)).

ИП7	П5	1	П6	ПП	26	П6	ИП8	П5	ПП
26	F1/x	П6	ИП7	ИП8	+	П5	ПП	26	Fl
2	×	Fy <sup>—</sup>	×	П6	С/П	ИП6	ИП5	×	П6
ИП5	1	+	П5	1	2	—	Fx ≥ 0	26	FVx
ИП5	×	F1/x	ИП5	Fln	1	—	ИП5	×	+
/—/	Fe <sup>x</sup>	ИП5	Fy <sup>—</sup>	×	ИП6	×	В/О		

#### Инструкция

- Исходные данные: ( $x = P7$ ,  $y = P8$ ).
- Пуск: В/О С/П.
- Результат:  $PX = P6 = B(x, y)$ .
- Регистры: рабочие P6—P8; оперативные P5; свободные P0—P4, P9—PД.
- Погрешность относительная меньше  $1 \cdot 10^{-6}$  при  $x, y \approx 1$  и  $(x + y) \times 10^{-7}$  при  $x, y \gg 1$ .
- Время счета:

$$t \approx \begin{cases} [3 - (x + y)/10] \text{ мин} & \text{при } x \leq 12, \quad y \leq 12, \\ (1,5 - x/10) \text{ мин} & \text{при } x \leq 12, \quad y \geq 12, \\ 0,5 \text{ мин} & \text{при } x \geq 12, \quad y \geq 12. \end{cases}$$

Примеры.

$B(5,6) = 7,9365107 \cdot 10^{-4}$  ( $7,9365079 \cdot 10^{-4} = 1/1260$ ),  $t = 1,5$  мин;

$B(0,5; 0,5) = 3,1415954$  ( $3,1415926 = \pi$ ),  $t = 3$  мин.

**Программа 2.11.** Логарифм бета-функции  $\ln B(z, w)$  комплексных аргументов  $z = x + jy$ ,  $w = u + jv$ ,  $0 \leq \arg z < \pi$ ,  $0 \leq \arg w < \pi$ ;  $w, z + w \neq 0, -1, -2, \dots$ ;  $|z|, |w|, |z + w| \leq 64$ .

П3	ПП	27	/—/	П2	XY	/—/	П3	ИПА	П8
ИПВ	П9	ПП	27	ИПС	П8	ИПД	П9	ПП	27
Fл	2	×	Fy <sup>—</sup>	Fln	+	С/П	ПП	79	ПП
71	ИП8	1	+	П8	2	0	—	Fx ≥ 0	27
ПП	79	2	F1/x	ИП8	—	П7	ИП4	×	ИП5
ИП9	×	+	1	2	ИП8	×	F1/x	+	ИП8
—	ИП5	ИП7	×	ИП4	ИП9	×	—	ПП	71
В/О	ИП3	+	П3	XY	ИП2	+	П2	В/О	ИП8
↑	Fx <sup>2</sup>	ИП9	Fx <sup>2</sup>	+	Fy <sup>—</sup>	П7	÷	Farccos	/—/
П5	ИП7	Fln	/—/	П4	XY	В/О			

#### Структура программы

27—70: подпрограмма вычисления  $\ln \Gamma(z)$  по упрощенной формуле (2.22),  
00—26: вычисление алгебраической суммы логарифмов (2.22),  
71—78: подпрограмма суммы комплексных чисел,  
79—96: подпрограмма функций  $\ln z$ .

#### Инструкция

- Исходные данные: ( $x = PA$ ,  $y = PB$ ,  $u = PC$ ,  $v = PD$ ),  $x + u = P8$ ,  $y + v = P9$ ,  $[0 = P2]$ .
- Пуск: В/О С/П.
- Результат:  $PX = \operatorname{Re} \ln B(z, w)$ ,  $PY = P3 = \operatorname{Im} \ln B(z, w)$ .
- Регистры: рабочие P3, PA—PD; оперативные P2, P4, P5, P7, P8, P9; свободные P0, P1, P6.
- Погрешность относительная меньше  $3 \cdot 10^{-4}$ .
- Время счета:  $t \approx 3[6 - (x + u)/8]$  мин при  $x \leq 20$ ,  $u \leq 20$  и  $t \approx 3$  мин при  $x \geq 20$ ,  $u \geq 20$ .

Пример.

$\ln B(1 + j3,6; 1 + j1,7) = -0,6944325 - j3,981416$  ( $-0,6943195 - j3,9814594$ ),

$t = 14$  мин.

Число в скобках — результат вычисления  $\ln B$  по таблице  $\ln \Gamma(z)$  в [9].

### 2.3. Логарифмическая производная гамма-функции и поигамма-функции

Логарифмическая производная гамма-функции (дигамма-функция) равна по определению

$$\psi(z) = \frac{d[\ln \Gamma(z)]}{dz}. \quad (2.23)$$

Для  $\psi(z)$  известны (см., например, [9]) следующие асимптотическое разложение и рекуррентная формула:

$$\psi(z) \approx \ln z - 1/12z - 1/12z^2 + 1/120z^4 - 1/252z^6 + \dots; \quad (2.24)$$

$$\psi(z) = \psi(z+1) - 1/z. \quad (2.25)$$

Относительная погрешность при использовании (2.24) меньше  $1 \cdot 10^{-6}$  для  $|z| > 4$ .

$$\psi^n(z) = \frac{d^n \psi}{dz^n} \quad (2.26)$$

Случаю  $n = 1$  соответствует *тригамма-функция*,  $n = 2, 3, 4$  — соответственно *тетрагамма*-, *пентагамма*- и *гексагамма-функции*. Все функции  $\psi^{(n)}$  являются однозначными аналитическими функциями на плоскости  $z$ , кроме точек  $z = 0, -1, -2, \dots$ , где они имеют полюсы порядка  $n+1$ . Дигамма-функция в указанных точках имеет полюсы первого порядка.

Для полигамма-функций известны следующие асимптотические разложения и рекуррентные формулы:

$$\psi^{(n)}(z) \sim (-1)^{n+1} \frac{(n-1)!}{z^n} \left[ 1 + \frac{n}{2z} + \frac{n(n+1)}{12z^2} - \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{720z^4} + \dots \right]; \quad (2.27)$$

$$\psi^{(n)}(z) = \psi^{(n)}(z+1) - (-1)^n n! z^{-n-1}. \quad (2.28)$$

Применение формулы (2.27) (без последнего слагаемого в квадратных скобках) приводит к относительной погрешности, меньшей  $5 \cdot 10^{-6}$  при  $|z| > 6n$ .

В приведенных далее программах используются следующие формулы, которые вытекают соответственно из (2.24), (2.25) и (2.27), (2.28):

$$\psi(z) \approx \ln t + \left[ \left( \frac{1}{120t^2} - \frac{1}{12} \right) \frac{1}{t} - \frac{1}{2} \right] \frac{1}{t} - \left( \frac{1}{t-1} + \frac{1}{t-2} + \dots + \frac{1}{z+1} + \frac{1}{z} \right); \quad (2.29)$$

$$\psi^{(n)}(z) \approx (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{t^n} \left[ \left( \frac{n+1}{12t} + \frac{1}{2} \right) \frac{n}{t} + 1 \right] + + (-1)^{n-1} n! \left[ \frac{1}{(t-1)^{n+1}} + \frac{1}{(t-2)^{n+1}} + \dots + \frac{1}{(z+1)^{n+1}} + \frac{1}{z^{n+1}} \right], \quad (2.30)$$

где  $t = N + M + jy, \quad (2.31)$

$M$  — мантисса числа  $x = \text{Re}z$ ;  $N$  — минимальное целое число, при котором относительная погрешность, создаваемая асимптотическими разложениями, не превышает  $5 \cdot 10^{-6}$ . Для дигамма-функции  $\psi(x)$  вещественного аргумента в формуле (2.24) с целью сокращения длины программы достаточно удерживать только три члена. При этом следует брать  $N = 14$ . Для полигамма-функций вещественного аргумента при использовании формулы (2.30) минимальное  $N = 9n$ .

У функций  $\psi(z)$  комплексного аргумента используется полная формула (2.29) и принимается  $N = 4$ . Для функций  $\psi^{(n)}(z)$  (2.30) следует брать  $N = 9$  при  $n = 1$ ,  $N = 14$  при  $n = 2$  и  $N = 6n$  для  $n \geq 3$ . При указанных условиях относительная погрешность  $\psi(z)$  и  $\psi^{(n)}(z)$  не превышает  $5 \cdot 10^{-6}$  (см. программу 2.15).

**Программа 2.12.** Логарифмическая производная гамма-функции (дигамма-функция) вещественного аргумента  $\psi(x)$ ,  $x \neq 0, -1, -2, \dots$  (2.24) (без последнего слагаемого) и (2.25).

ПО	0	↑	F, ИПО	F1/x	—	ИПО	1	+
ПО	1	4	—	Fx ≥ 0	03	F, ИПО	Fln	FVx
2	×	F1/x	—	FVx	Fx²	3	÷	—
С/П								

#### Инструкция

1. Исходные данные:  $[x = \text{PX}]$ .
2. Пуск: В/О С/П.
3. Результат:  $\text{PX} = \psi(x)$ .
4. Регистры: рабочие —; оперативные РД; свободные Р0 — РС.
5. Погрешность относительная меньше  $1 \cdot 10^{-6}$ .
6. Время счета:  $t \approx (70-4x)$  с при  $x \leq 14$  и  $t \approx 10$  с при  $x \geq 14$ .

#### Примеры.

$\psi(1) = -0,5772159$  ( $-0,57721566$  [9]),  $t = 50$  с;

$\psi(100) = 4,6001618$  ( $4,60016185$  [9]),  $t = 10$  с

**Программа 2.13.** Логарифмическая производная гамма-функции (дигамма-функция)  $\psi(z)$  комплексного аргумента  $z = x + jy$ ,  $0 \leq \arg z < \pi$ ,  $z \neq 0, -1, -2, \dots$  (2.29). При  $-\pi < \arg z \leq 0$   $\psi(z) = \psi(\bar{z})$ .

0	ПО	П1	1	ПС	0	ПД	ПП	61	ПП
88	ИПА	1	+	ПА	4	—	Fx ≥ 0	03	0
ПД	П5	П8	2	F1/x	П7	6	÷	П6	1
0	÷	/—/	ПС	4	П2	П4	ПП	61	КИП4
+	ПС	FL2	37	ПП	88	ИПА	ИП9	Fy	П9
÷	Farccos	/—/	ПД	ИП9	Fln	/—/	ПС	ПП	88
С/П	ИПА	ИПС	×	ИПВ	ИПД	×	+	ИПА	ИПД
×	ИПВ	ИПС	×	—	ИПА	Fx²	ИПВ	Fx²	+
П9	÷	ПД	ХУ	ИП9	÷	ПС	В/О	ИПО	ИПС
—	ПО	ИП1	ИПД	—	П1	В/О			

#### Структура программы

00 — 18: вычисление суммы  $\left( \frac{1}{t-1} + \frac{1}{t-2} + \dots + \frac{1}{z+1} + \frac{1}{z} \right)$ .

19 — 60: вычисление остальных слагаемых (2.29) и получение  $\psi(z)$ ,

61 — 87: подпрограмма деления комплексных чисел,

88 — 97: подпрограмма сложения комплексных чисел.

#### Инструкция

1. Исходные данные:  $x = \text{PA}$ , ( $y = \text{PB}$ ).
2. Пуск: В/О С/П.
3. Результат:  $\text{PY} = \text{P0} = \text{Re } \psi(z)$ ,  $\text{PX} = \text{P1} = \text{Im } \psi(z)$ .
4. Регистры: рабочие Р0, Р1, РВ; оперативные Р2, Р4 — Р9, РА, РС, РД; свободные Р3.
5. Погрешность относительная меньше  $2 \cdot 10^{-6}$ .
6. Время счета:  $t \approx (2,5-x/4)$  мин при  $x < 4$  и  $t \approx 1,5$  мин при  $x \geq 4$ .

#### Примеры

$\psi(1,1 + j10) = 2,3039689 + j1,5108183$  ( $2,30396 + j1,51082$  [9]),  $t = 2$  мин;

$\psi(2 + j9) = 2,2104498 + j1,4054846$  ( $2,21045 + j1,40548$  [9]),  $t = 1,5$  мин.

**Программа 2.14.** Полнгамма-функции  $\psi^{(n)}(x)$  вещественного аргумента  $x \neq 0, -1, -2, \dots, n = 1, 2, \dots$  (2.30), (2.31) при  $y = 0$ .

ИПВ	9	×	П9	ИПВ	1	+	ПС	0	ПД
ПП	46	ИПА	÷	ИПД	+	ПД	ИПА	1	+
ПА	ИП9	—	$Fx \geq 0$	10	ПП	46	ИПА	2	×
$F1/x$	↑	$Fx^2$	3	÷	ИПС	×	+	ИПВ	$F1/x$
+	×	ИПД	+	/—/	С/П	ИПВ	П1	1	ИП1
/—/	×	ИПА	÷	FL1	49	В/О			

#### Инструкция

1. Исходные данные:  $x = PA, (n = PB)$ .
2. Пуск: В/О С/П.
3. Результат:  $PX = \psi^{(n)}(x)$ .
4. Регистры: рабочие  $PB$ ; оперативные  $P1, P9, PA, PC, PD$ ; свободные  $P0, P2 - P8$ .
5. Погрешность относительная меньше  $1 \cdot 10^{-6}$ .
6. Время счета:  $t \approx (2n + 1 - x/4)$  мин при  $x \leq 9$   $t \approx (2n - 1)$  мин при  $x > 9$ .

#### Примеры.

$\psi^{(3)}(2) = 0,49393938$  (0,493939402 [9]),  $t = 5$  мин;

$\psi^{(2)}(1) = -2,404114$  (-2,4041138 [9]),  $t = 3$  мин;

$\psi^{(1)}(2) = 0,64493462$  (0,64493407 [9]),  $t = 1$  мин.

**Программа 2.15.** Полнгамма-функции  $\psi^{(n)}(z)$  комплексного аргумента  $z = x + jy, z \neq 0, -1, -2, \dots, n = 1, 2, \dots$  (2.30), (2.31).  $N$  задается отдельно (пп. 1,5 инструкции).

1	ПС	0	ПД	ИП0	П1	ПП	59	FL1	06
ПП	59	ПП	89	ИПА	1	+	ПА	ИП3	—
$Fx \geq 0$	00	ИП0	1	П6	+	П1	2	П2	$F1/x$
/—/	П5	6	÷	ПС	0	ПД	ПП	59	КИП4
—	ПС	КИП1	FL2	37	ИП1	$Fx \neq 0$	52	ПП	59
FL1	48	1	П1	ПП	59	ПП	89	С/П	ИПА
ИПС	×	ИПВ	ИПД	×	+	ИПА	ИПД	×	ИПВ
ИПС	×	—	ИПА	$Fx^2$	ИПВ	$Fx^2$	+	ИП1	/—/
÷	П9	÷	ПД	XY	ИП9	÷	ПС	В/О	ИП7
+	П7	ИП8	ИПД	+	П8	В/О			

#### Структура программы

00—21: расчет суммы  $(-1)^{n-1} n! \left[ \frac{1}{z^{n+1}} + \frac{1}{(z+1)^{n+1}} + \dots + \frac{1}{(t-1)^{n+1}} \right]$ .

22—58: расчет отрезка асимптотического разложения

$(-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{t^n} \left[ \left( \frac{n+1}{12t} + \frac{1}{2} \right) \frac{n}{t} + 1 \right]$  и всей искомой функции  $\psi^{(n)}$ ,

59—88: подпрограмма деления комплексных чисел,

89—97: подпрограмма сложения комплексных чисел.

#### Инструкция

1. Исходные данные:  $x = PA, (y = PB, n = P0, N = P3), 0 = P7 = P8, 4 = P4$ .
2. Пуск: В/О С/П.
3. Результат:  $P7 = PY = \operatorname{Re} \psi^{(n)}(z), P8 = PX = \operatorname{Im} \psi^{(n)}(z)$ .
4. Регистры: рабочие  $P0, P3, P7, P8, PB$ ; оперативные  $P1, P2, P4, P5, P6, P9, PA, PC, PD$ ; свободные —.
5. Погрешность зависит от значения аргумента  $z$  (или  $t$ ) асимптотического ряда (2.27), (2.30) и порядка  $n$  функции  $\psi^{(n)}(z)$ . В свою очередь, аргумент  $t$  (ср. (2.30) и (2.31)) определяется задаваемым значением  $N$ . Ниже приведены рекомендуемые значения  $N$  и соответствующие им максимальные относительные погрешности  $\delta$  при различных  $n$ .

$\delta$		$\leq 1 \cdot 10^{-4}$	$\leq 1 \cdot 10^{-5}$	$\leq 5 \cdot 10^{-6}$
$N$	$n=1$	5	8	9
	$n=2$	7	11	14
	$n \geq 3$	$3n$	$5n$	$6n$

6. Время счета  $t \approx [n(N-1-x)/3 + 1]$  мин.

#### Примеры.

$\psi^{(1)}(1) = 1,6449347$  (1,64493407 [9]),  $N = 9, t = 5$  мин;

$\psi^{(2)}(1) = -2,4041138$  (-2,4041138 [9]),  $N = 14, t = 10$  мин;

$\psi^{(3)}(1) = 6,4939395$  (6,49393940 [9]),  $N = 18, t = 16$  мин;

$\psi^{(3)}(16+j) = 5,2275627 \cdot 10^{-4} - j1,0217238 \cdot 10^{-4}, N = 18, t = 3$  мин;

$\psi^{(2)}(16+j) = -4,1065766 \cdot 10^{-3} + j5,3154321 \cdot 10^{-4}, N = 12, t = 1,5$  мин.

## 2.4. Неполные гамма-функции

Неполные гамма-функции  $\Gamma(a, z)$  и  $\gamma(a, z)$  характеризуются интегральными представлениями

$$\Gamma(a, z) = \int_z^{\infty} e^{-t} t^{a-1} dt, \quad \operatorname{Re} a > 0, \quad (2.32)$$

$$\gamma(a, z) = \int_0^z e^{-t} t^{a-1} dt, \quad \operatorname{Re} a > 0. \quad (2.33)$$

Из этих соотношений и определения гамма-функции следует, что

$$\Gamma(a, z) = \Gamma(a) - \gamma(a, z). \quad (2.34)$$

При нецелых  $a$  функции  $\Gamma(a, z)$  и  $\gamma(a, z)$  как функции  $z$  многозначны с точкой ветвления  $z = 0$ .

Наряду с  $\gamma(a, z)$  (2.33) используется функция, которая является целой функцией от  $a$  и  $z$ :

$$\gamma^*(a, z) = \frac{z^{-a}}{\Gamma(a)} \gamma(a, z) = \frac{z^{-a}}{\Gamma(a)} \int_0^z e^{-t} t^{a-1} dt. \quad (2.35)$$



Через неполные гамма-функции могут быть выражены (см., например, [5]) интегральная показательная функция, интегральные синус и косинус, интеграл вероятностей и некоторые другие.

Разложения в ряды функций  $\gamma(a, z)$  и  $\gamma^*(a, z)$  [5]:

$$\gamma(a, z) = z^a e^{-z} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{a(a+1)\dots(a+n)} = z^a \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-z)^n}{n!(a+n)}; \quad (2.36)$$

$$\gamma^*(a, z) = e^{-z} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(a+n+1)} = \frac{1}{\Gamma(a)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-z)^n}{n!(a+n)}. \quad (2.37)$$

В отличие от (2.33) формула (2.36) определяет  $\gamma(a, z)$  и при  $\operatorname{Re} a < 0$  (кроме  $a = -1, -2, \dots$ ). Запишем первую из формул (2.36) и вторую из (2.37) в форме, соответствующей схеме Горнера:

$$\gamma(a, z) = z^a e^{-z} \left\{ \dots \left[ \left( \frac{z}{a+N} + 1 \right) \frac{z}{a+N-1} + 1 \right] \times \right. \\ \left. \times \frac{z}{a+N-2} + \dots \right] \frac{z}{a+1} + 1 \left] \frac{1}{a} \right\}; \quad (2.38)$$

$$\gamma^*(a, z) = \frac{1}{\Gamma(a)} \left\{ \dots \left[ \left( \frac{1}{a+N} \right) \left( -\frac{z}{N} \right) + \frac{1}{a+N-1} \right] \left( -\frac{z}{N-1} \right) + \right. \\ \left. + \dots + \frac{1}{a+1} \right] \left( -\frac{z}{1} \right) + \frac{1}{a} \right\}. \quad (2.39)$$

При использовании последних двух формул необходимо задавать заранее число  $N$  членов рядов. Для вещественных  $z = x > 0$  следует применять (2.38) или первую из формул (2.36), а для  $z = x < 0$  — формулу (2.39) или вторую из формул (2.37). В этих случаях ряды не знакопеременны, и существенная потеря точности из-за ошибок округления здесь происходит при значительно больших  $|x|$ , чем в указанных противоположных случаях (см. § 3.1). Ввиду того, что  $\gamma(a, z)$  и  $\gamma^*(a, z)$  связаны простым соотношением (2.35), формулы (2.38) и (2.39) в известной степени дополняют друг друга.

Как уже упоминалось,  $\gamma^*(a, z)$  — целая функция от  $a$  и  $z$ . В частности, можно получить, что при  $a = -n$ , где  $n = 0, 1, 2, \dots$ ,

$$\gamma^*(-n, z) = z^n. \quad (2.37a)$$

Эту формулу необходимо учитывать отдельно при программировании (2.37) или (2.39), если желательно включить в область определения  $\gamma^*(a, z)$  целые отрицательные  $a$  или нуль.

Асимптотическое разложение  $\Gamma(a, z)$  имеет вид

$$\Gamma(a, z) \approx z^{a-1} e^{-z} \left( 1 + \frac{a-1}{z} + \frac{(a-1)(a-2)}{z^2} + \dots \right), \\ |\arg z| \leq \frac{3\pi}{2}. \quad (2.40)$$

Этот ряд также удобно вычислять по схеме Горнера:

$$\Gamma(a, z) \approx z^{a-1} e^{-z} \{ \dots [ (A_N + 1) A_{N-1} + 1 ] A_{N-2} + 1 ] A_{N-3} + \\ + \dots + 1 ] A_N + 1 \}, \quad (2.41)$$

где  $A_N = (a - n)/z$ . Число членов ряда  $N$ , которое следует задавать, зависит от  $a$  и  $z$ . Можно рекомендовать (в предположении, что  $|z| \geq 5$ ,  $|z| > |a|$ ) следующую формулу для выбора  $N$ :

$$N = \begin{cases} |z| + \operatorname{Re} a, & |z| + \operatorname{Re} a \leq 18, \\ 18, & |z| + \operatorname{Re} a \geq 18. \end{cases} \quad (2.42)$$

Асимптотический ряд (2.40) при целых положительных  $a = n$  обрывается на  $(n+1)$ -м члене, образуя конечную сумму, которая равна точному значению  $\Gamma(a, z)$  [5]:

$$\Gamma(n, z) = z^{n-1} e^{-z} [ 1 + (n-1)/z + (n-1)(n-2)/z^2 + \dots + (n-1)!/z^{n-1} ] = \\ = (n-1)! e^{-z} [ 1 + z + z^2/2! + \dots + z^{n-1}/(n-1)! ]. \quad (2.43)$$

Разложение  $\Gamma(a, z)$  в непрерывную дробь:

$$\Gamma(a, z) = \frac{e^{-z} z^a}{z + \frac{1-a}{1 + \frac{1}{z + \frac{2-a}{1 + \dots}}}}. \quad (2.44)$$

При вычислении дробей типа (2.44) используются в основном рекуррентные формулы для последовательных подходящих дробей, и процесс заканчивается на определенном числе итераций, когда достигается сходимость к определенному пределу. Указанная процедура применительно к ПМК и комплексным  $a$  и  $z$ , однако, слишком громоздка по числу программных шагов и особенно по числу требуемых регистров памяти (ср. рекуррентные формулы, например, в [9, с. 28]).

Более экономичный алгоритм состоит в следующем. Обозначим  $(N+1)$ -й остаток непрерывной дроби (2.44) через

$$A_N \equiv z + \frac{N+1-a}{1 + \frac{N+1}{z + \frac{N+2-a}{1 + \frac{N+2}{z + \dots}}}}. \quad (2.45)$$

Естественно, что  $A_N$  также является бесконечной непрерывной дробью.  $N$ -й остаток дроби (2.44)

$$A_{N-1} = z + \frac{N-a}{1 + \frac{N}{A_N}}. \quad (2.46)$$

Это соотношение можно рассматривать как рекуррентную формулу. Последовательное применение (2.46) в сторону уменьшения  $N$  приводит к  $A_0$ , дающему искомую функцию:

$$\Gamma(a, z) = e^{-z} z^a / A_0. \quad (2.47)$$

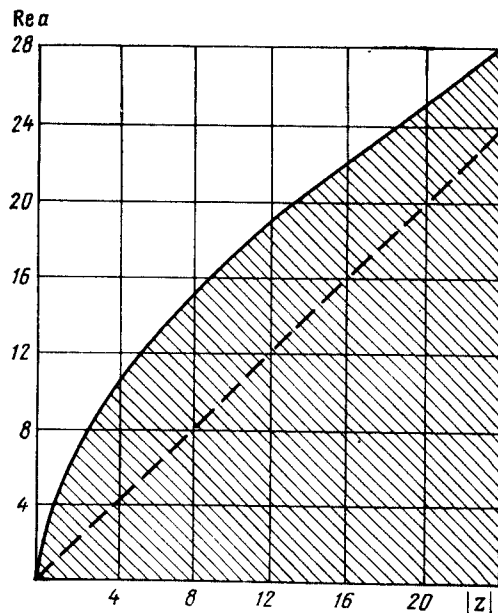


Рис. 2.1. Рабочие области двух алгоритмов (разложение в непрерывную дробь и разложение в ряд) и основанных на них программ вычисления неполных гамма-функций (соответственно (2.44)–(2.47) и (2.38), (2.34))

зависит от  $A_N$  при изменении  $A_N$  в широких пределах, давая с хорошим приближением  $\Gamma(a, z)$  (формула (2.47)). Например, при  $N = 20$  и положительных  $\operatorname{Re} z > a$  относительная погрешность  $\Gamma(a, z)$  не превышает  $5 \cdot 10^{-6}$  в диапазоне  $A_N$  по крайней мере от  $1 + j$  до  $5 + j5$ . Заметим, что  $A_N$  из (2.46в) при  $|z| \approx 1$  по порядку величины равно  $\sqrt{N}$ .

При вещественных  $z = x$  и  $a$  можно принять

$$N \approx 7 \left[ 3 + \frac{1}{x(|a| + 1)} \right], \quad A_N = 4. \quad (2.48)$$

Рассмотренные алгоритмы вычисления  $\Gamma(a, z)$  и  $\gamma(a, z)$  формально охватывают в совокупности практически полные плоскости комплексных переменных  $a$  и  $z$ . Однако область значений этих переменных, где результаты достаточно мало зависят от погрешностей округления, существенно уже. Например, при целых  $a = n > 0$  непрерывная дробь (2.44), обрываясь на  $n$ -й ступени, переходит в замкнутую формулу для  $\Gamma(n, z)$ . Тем не менее прямой подсчет дробей «снизу» при  $|z| < 1$  дает уже для  $n = 5$  большие ошибки округления. Непосредственным источником ошибок является величина  $A_0$  (см. (2.47)), которая в рассмотренном случае оказывается весьма малой, являясь в то же время разностью двух относительно больших чисел.

Отметим, что алгоритм, основанный на вычислении непрерывной дроби методом подходящих дробей, более устойчив, т. е. применим при больших  $n$ . Однако и здесь начиная с некоторого  $n_{\max}$  устойчивость резко нарушается (например,  $n_{\max} = 7$  при  $x = 0,1$ ).

Если при некотором  $N$  значение  $A_N$  известно, то (2.46), (2.47) образуют простой алгоритм вычисления  $\Gamma(a, z)$ . Величину  $A_N$  можно оценить, предполагая, что при достаточно большом  $N$  различие между  $A_N$  и  $A_{N-1}$  незначительно. Приравняв эти значения, получаем из (2.46) уравнение для  $A_N$ :

$$A_N^2 + A_N(a - z) - zN = 0 \quad (2.46a)$$

Решение этого уравнения

$$A_N = (z - a)/2 + \sqrt{(z - a)^2/4 + zN} \quad (2.46б)$$

при  $N \gg |z|$ ,  $N \gg |a|$  сводится к

$$A_N \approx \sqrt{zN}. \quad (2.46в)$$

Отметим, что при комплексных  $z$  использование в программе даже простейшего соотношения (2.46в) потребует много шагов. Однако устойчивость итерационного процесса (2.46) настолько значительна, что начиная с некоторого  $N$  значение  $A_0$  практически не зависит от  $A_N$ .

На рис. 2.1 заштрихована область значений  $\operatorname{Re} a$  и  $|z|$  при  $x > 0$ , где относительная погрешность  $\Gamma(a, z)$  с использованием формул (2.44) — (2.47) не превышает  $5 \cdot 10^{-6}$ . Эту область можно расширить в сторону положительных  $x$  и  $\operatorname{Re} a$  до значений  $|z| \approx \operatorname{Re} a \approx 70$ , при которых  $|\Gamma(a, z)| \approx 10^{100}$ . Однако при  $|z| < 1$  время счета по указанному алгоритму чрезмерно возрастает (см. (2.48)), и целесообразнее применять метод рядов (2.38), (2.34). Вычисления  $\Gamma(a, z)$  по этим формулам устойчивы к погрешностям округления в области над кривой рис. 2.1. Фактически относительная погрешность расчета  $\Gamma(a, z)$  по формулам (2.38), (2.34) не превышает  $5 \cdot 10^{-6}$  в области над прямой  $\operatorname{Re} a = |z|$  (штриховая линия на рис. 2.1) при учете достаточно малого числа членов ряда. Исключением являются лишь случаи очень малых или, наоборот, очень больших  $|z|$  (см. программу 2.17). Таким образом, области практической применимости обоих методов расчета  $\Gamma(a, z)$  перекрываются\*. Отметим, что для функции  $\gamma(a, z)$  метод рядов обеспечивает точность  $1 \cdot 10^{-6}$  во всей той области  $| \operatorname{Re} a | \geq |z|$ , где не происходит переполнения разрядной сетки.

Асимптотическое разложение (2.41) имеет важное значение при  $x < 0$  и особенно при  $y = \operatorname{Im} z < 1$  для больших по модулю отрицательных  $x$ , где не только разложение в ряды, но и метод непрерывных дробей приводит к значительным погрешностям округления. Конкретные значения погрешностей, связанных с применением (2.41), приводятся в программе 2.23.

**Программа 2.16.** Неполная гамма-функция  $\Gamma(a, x)$  вещественных аргументов. Разложение в непрерывную дробь (2.46) — (2.48),  $a$  и  $x$  должны быть в заштрихованной области на рис. 2.1.

ИПЗ	Fx <sup>2</sup>	FV <sup>-</sup>	1	+	ИП4	×	F1/x	3	+
7	×	П2	КИП2	ИП2	П5	ИП4	Fln	ИП3	×
ИП4	—	Fe <sup>x</sup>	4	F1/x	ИП2	×	1	+	F1/x
ИП2	ИП3	—	×	ИП4	+	FL2	24	÷	П2

С/П

#### Инструкция

1. Исходные данные: ( $a = P3$ ,  $x = P4$ ).
2. Пуск: В/О С/П.
3. Результат:  $PX = P2 = \Gamma(a, x)$ ,  $P5 = N$  (число итераций).
4. Регистры: рабочие  $P2 - P5$ ; оперативные — ; свободные  $P0, P1, P6, \dots$

РД.

5. Погрешность относительная меньше  $5 \cdot 10^{-6}$ .
  6. Время счета  $t \approx [2 + 1/2x(1 + |a|)]$  мин.
- Примеры.

$\Gamma(0, 1) = 0,21938393$  ( $0,219383934$ ),  $N = 27$ ,  $t = 2$  мин;  
 $\Gamma(0; 0, 1) = 1,8229202$  ( $1,8229239$ ),  $N = 90$ ,  $t = 6,5$  мин;  
 $\Gamma(-2, 5) = 3,5112045 \cdot 10^{-5}$  ( $3,51121 \cdot 10^{-5}$ ),  $N = 20$ ,  $t = 2$  мин;  
 $\Gamma(25, 20) = 5,2317753 \cdot 10^{23}$  ( $5,2317876 \cdot 10^{23}$ ),  $N = 20$ ,  $t = 1,5$  мин;  
 $\Gamma(64, 60) = 1,3490368 \cdot 10^{87}$  ( $1,3490332 \cdot 10^{87}$ ),  $N = 20$ ,  $t = 1,5$  мин.

Значения в скобках для первых трех примеров получены по таблицам интегральной показательной функции [9] и формуле  $\Gamma(-n, x) = x^{-n} E_{n+1}(x)$ , а для последних двух примеров — из программы 2.18, основанной на точной формуле (2.43). Как видно, при  $x \leq 0,1$  время счета весьма велико. Здесь лучше использовать разложение в ряд (программа 2.17).

\* Ниже расчет  $\Gamma(a, z)$  по формулам (2.38), (2.34) реализован для вещественных  $a$  и  $z$  (программа 2.17).  $\gamma(a, z)$  рассчитывается и при комплексных  $a, z$  (программа 2.21).

**Программа 2.17.** Неполные гамма-функции  $\Gamma(a, x)$  и  $\gamma(a, x)$  вещественных аргументов. Разложение в ряд (2.38) и (2.34),  $0 < x \leq 69$ ,  $x \leq a \leq 69$  ( $x$  и  $a$  лежат в области над штриховой линией на рис. 2.1). Число членов ряда выбирается равным  $N \approx 9 + x$ .

ИПС	9	+	ПЗ	КИПЗ	ИПС	Flп	ИПД	×	ИПС
—	Fe <sup>x</sup>	1	ИПС	×	ИПД	ИПЗ	+	÷	1
+	FL3	13	ИПД	÷	×	ПВ	ИПД	П9	ПА
ИП9	ИПА	1	+	ПА	×	П9	ИПА	1	2
—	Fx ≥ 0	30	FBx	ИПА	×	Fl/x	ИПА	Flп	1
—	ИПА	×	+	Fe <sup>x</sup>	ИП9	÷	Flп	2	×
ИПА	×	Fy	×	ИПВ	—	ПА	С/П		

#### Инструкция

1. Исходные данные: ( $x = PC$ ,  $a = PD$ ).
2. Пуск: В/О С/П.
3. Результат:  $PX = PA = \Gamma(a, x)$ ,  $PB = \gamma(a, x)$ .
4. Регистры: рабочие PA — PD; оперативные P3, P9; свободные P0 — P8.
5. Погрешность относительная для  $\gamma(a, x)$  меньше  $1 \cdot 10^{-6}$ , для  $\Gamma(a, x)$ :

$x$	$>1 \cdot 10^{-4}$	$>1 \cdot 10^{-3}$	$>1 \cdot 10^{-2}$	$>1 \cdot 10^{-1}$	$>20$ и $\leq 70$
$\delta$	$\leq 1 \cdot 10^{-3}$	$\leq 2 \cdot 10^{-4}$	$\leq 3 \cdot 10^{-5}$	$\leq 5 \cdot 10^{-6}$	$\leq 2 \cdot 10^{-7}$

6. Время счета:  $t \approx (1,5 - x/30)$  мин при  $x \leq 12$  и  $t \approx (1 + x/20)$  мин при  $x > 12$ .

#### Примеры.

$\Gamma(1 \cdot 10^{-2}, 1 \cdot 10^{-2}) = 3,942839 (3,9427351)$ ,  $t \approx 1,5$  мин;

$\gamma(1 \cdot 10^{-2}, 1 \cdot 10^{-2}) = 95,489821$ .

Число в скобке получено разложением в непрерывную дробь (программа 2.16); время счета 50 мин.

$\Gamma(0,2; 0,2) = 1,0814452 (1,0814452)$ ,  $\gamma(0,2; 0,2) = 3,5093994$ ,  $t \approx 1,5$  мин;

$\Gamma(10, 10) = 166173,96 (166173,5)$ ,  $\gamma(10, 10) = 196706,16$ ,  $t \approx 1,2$  мин;

$\Gamma(69, 68) = 1,319838 \cdot 10^{96} (1,3198547 \cdot 10^{96})$ ;  $\gamma(69, 68) = 1,1601796 \cdot 10^{96}$ ,

$t \approx 4$  мин.

Для последних двух примеров значения в скобках получены по программе 2.18, основанной на формуле (2.43).

**Программа 2.18.** Неполная гамма-функция  $\Gamma(n, x)$  вещественных аргументов  $n = 1, 2, \dots, 69$  и  $x$ ,  $-8 \leq x \leq 69$  (2.43).

ИПД	/—/	Fe <sup>x</sup>	ИП0	1	—	Fx ≠ 0	27	ВП	П1
П0	F,	ИП1	×	FL1	12	1	ИПД	×	ИП0
÷	1	+	FL0	17	×	С/П	ХУ	С/П	

#### Инструкция

1. Исходные данные: ( $x = PD$ ),  $n = P0$ .
2. Пуск: В/О С/П.
3. Результат:  $PX = \Gamma(n, x)$ .

4. Регистры: рабочие — ; оперативные P0, P1, PD; свободные P2 — PC.
5. Погрешность относительная:

$x$	$\geq -8$	$\geq -6$	$\geq -4$	$\geq -3$	$\geq -2$ и $\leq 69$
$\delta$	$\leq 2 \cdot 10^{-3}$	$\leq 5 \cdot 10^{-4}$	$\leq 2 \cdot 10^{-5}$	$\leq 3 \cdot 10^{-6}$	$\leq 1 \cdot 10^{-6}$

6. Время счета  $t \approx (4n)$  с.

#### Примеры.

$\Gamma(5, 1) = 23,912165$ ,  $t \approx 20$  с;

$\Gamma(64, 60) = 1,349033 \cdot 10^{87}$ ,  $t = 4$  мин;

$\Gamma(50, -6) = 6,0790076 \cdot 10^{62} (6,0828179 \cdot 10^{62})$ ,  $t = 3$  мин.

Значение в скобках получено из соотношения  $\Gamma(n, x) \approx (n-1)!$ , справедливого при  $n \gg 1$  и  $n \gg |x|$ .

**Программа 2.19.** Неполная гамма-функция  $\Gamma(n, z)$  комплексного аргумента  $z = x + jy$ ,  $n = 1, 2, \dots, 69$ ,  $|\arg z| < \pi$ . Формула (2.43) с использованием схемы Горнера.

ИПВ	Fcos	ИПА	/—/	Fe <sup>x</sup>	×	П8	FBx	ИПВ	/—/
Fsin	×	ИП0	1	—	Fx ≠ 0	55	ВП	П0	П1
F,	1	ИП1	×	FL1	22	×	П9	FBx	ИП8
×	П8	1	↑	0	ИП0	÷	ХУ	ИП0	÷
ПП	57	1	+	ХУ	FL0	35	ПВ	ХУ	ПА
ИП9	ИП8	ПП	57	С/П	ХУ	С/П	ПС	ИПВ	×
ХУ	ПД	ИПА	×	+	ИПА	ИПС	×	ИПВ	ИПД
×	—	В/О							

#### Инструкция

1. Исходные данные:  $x = PA$ ,  $y = PB$ ,  $n = P0$ .
2. Пуск: В/О С/П.
3. Результат:  $PX = \operatorname{Re} \Gamma(n, z)$ ,  $PY = \operatorname{Im} \Gamma(n, z)$ .
4. Регистры: рабочие — ; оперативные P0, P1, P8 — PD; свободные P2 — P7.
5. Погрешность возрастает с увеличением  $|z|$  и  $\arg z$ . Относительная погрешность меньше  $5 \cdot 10^{-6}$  при следующих значениях  $\arg z$  и  $|z|$ :  $|\arg z| \leq \pi$ ,  $|z| \leq 3$ ;  $|\arg z| \leq \pi/2$ ,  $|z| \leq 7,5$ ;  $|\arg z| \leq \pi/4$ ,  $|z| \leq 15$ .
6. Время счета  $t \approx (10n)$  с.

#### Примеры.

$\Gamma(10; -1 + j2, 5) = 363156,92 + j4887,44$ ,  $t = 2$  мин;

$\Gamma(5; 0,1 + j6) = 934,32659 - j473,76262$ ,  $t = 1$  мин;

$\Gamma(7; 15 - j14) = -27,054031 - j8,329689$ ,  $t = 1,5$  мин;

$\Gamma(69; 18 - j7) = 2,4800346 \cdot 10^{96} + j7 \cdot 10^{96} (2,4800354 \cdot 10^{96})$ ,  $t = 11$  мин.

Значение в скобках получено из соотношения  $\Gamma(n, z) \approx (n-1)!$ , справедливого при  $n \gg 1$ ,  $n \gg |z|$ .

**Программа 2.20.** Неполная гамма-функция  $\Gamma(a, z)$  комплексных аргументов  $a = a_1 + ja_2$ ,  $z = x + jy$ ,  $0 \leq \arg z \leq \pi$ . При  $-\pi \leq \arg z < 0$  следует использовать формулу  $\Gamma(a, z) = \Gamma(\bar{a}, \bar{z})$ . Разложение в непрерывную дробь (2.44)—(2.47). Значения  $a_1 = \operatorname{Re} a$  и  $|z|$  должны лежать в заштрихованной области на рис. 2.1,  $|z| \leq 64$ .

ИП6	ИП5	XY	FBx	Fx <sup>2</sup>	XY	Fx <sup>2</sup>	+	FV <sup>-</sup>	П9
÷	Farccos	П1	ИП9	Flп	П0	ИП4	ИП3	ПП	82
ИП5	—	Fe <sup>x</sup>	XY	ИП6	—	ПА	Fsin	XY	×
ПВ	FBx	ИПА	Fcos	×	ПА	4	П9	ИП2	П0
0	ПП	69	1	+	П9	XY	ИП2	ИП3	—
П0	ИП4	/—/	ПП	69	ИП5	+	П9	XY	ИП6
+	FL2	38	ИПА	П0	ИПВ	ПП	69	С/П	П1
F,	F,	/—/	↑	Fx <sup>2</sup>	ИП9	Fx <sup>2</sup>	+	÷	ИП9
FBx	÷	П9	ИП1	×	XY	ПД	ИП0	×	+
ИП0	ИП9	×	ИП1	ИПД	×	—	В/0		

#### Структура программы

- 00—35: вычисление  $\Pi = e^{-z} z^a$  и размещение  $\operatorname{Re} \Pi$  и  $\operatorname{Im} \Pi$  соответственно в РА и РВ;  
 36—62: вычисление  $A_0$  по рекуррентной формуле (2.46) с использованием подпрограммы деления и величины  $A_N = 4 + j4$ ,  
 63—68: получение искомой функции по формуле (2.47),  
 69—97: подпрограмма деления комплексных чисел.

#### Инструкция

1. Исходные данные: ( $a_1 = P3$ ,  $a_2 = P4$ ,  $x = P5$ ,  $y = P6$ ),  $N = P2$ . Число итераций  $N$  (ср. (2.46)) предварительно рассчитать по первой формуле (2.48), заменив в ней  $x$  на  $|z|$  и округлив  $N$  до целого значения в большую сторону.

2. Пуск: В/О С/П.

3. Результат:  $PX = \operatorname{Re} \Gamma(a, z)$ ,  $PY = \operatorname{Im} \Gamma(a, z)$ .

4. Регистры: рабочие P3 — P6; оперативные P0, P1, P2, P9, PA, PB, PD; свободные P7, P8, PC.

5. Погрешность относительно стабильна при  $x > 0$  — меньше  $5 \cdot 10^{-6}$ , но при отрицательных  $x$  быстро возрастает по мере приближения  $\arg z$  к  $\pi$ ; при  $x < 0$  относительная погрешность меньше  $1 \cdot 10^{-5}$  при  $y \geq 2$  и  $5 \cdot 10^{-3}$  при  $y \geq 1$ . Рекомендуется при  $x < 0$  увеличивать  $N$ , рассчитанное по п. 1 инструкции, на 10—15%.

6. Время счета  $t \approx (N/2,5)$  мин.

#### Примеры.

$$\Gamma(1+j2, 8+j14) = -2,2318928 \cdot 10^{-5} - j3,9531695 \cdot 10^{-5}, \quad N=22, \quad t \approx 9 \text{ мин};$$

$$\Gamma(0, -4+j) = -14,788309 + j9,119071 \quad (-14,8067 + j9,13842),$$

$$N=24, \quad t \approx 10 \text{ мин};$$

$$\Gamma(0, -4+j2) = -3,5166396 + j14,363511 \quad (-3,51658 + j14,3638),$$

$$N=24, \quad t \approx 10 \text{ мин};$$

$$\Gamma(0, -10+j) = -1568,4205 + j1911,1929 \quad (-1568,28 + j1911,03),$$

$$N=24, \quad t \approx 10 \text{ мин};$$

$$\Gamma(0, -10+j5) = 489,7711 - j2091,7575 \quad (489,772 - j2091,76),$$

$$N=24, \quad t \approx 10 \text{ мин}.$$

Значения в скобках соответствуют табличным данным интегральной показательной функции [9], учитывая, что  $\Gamma(0, z) = E_1(z)$  (см. гл. 3). Отметим, что при  $|z| > 15$  существенный выигрыш во времени счета без ухудшения точности дает разложение в асимптотический ряд (2.40) — программа 2.23.

**Программа 2.21.** Неполная гамма-функция  $\gamma(a, z)$  комплексных аргументов  $a = a_1 + ja_2$ ,  $z = x + jy$ . Разложение в ряд (2.38),  $|a|, |z| \leq 64$ ,  $a \neq 0$ ,  $-1, -2, \dots, 0 \leq \arg z < \pi$ . При  $-\pi < \arg z < 0$  следует использовать формулу  $\gamma(a, z) = \gamma(\bar{a}, \bar{z})$ .

ИП5	↑	Fx <sup>2</sup>	ИП6	Fx <sup>2</sup>	+	FV <sup>-</sup>	ПС	÷	Farccos
П1	ИПС	Flп	П0	ИП4	ИП3	ПП	79	XY	ИП5
—	Fe <sup>x</sup>	XY	ИП6	—	П7	Fsin	XY	×	П8
FBx	ИП7	Fcos	×	П7	0	П1	1	П0	ИП6
ИП5	ПП	79	ИП3	ИП2	+	П9	ИП4	ПП	69
XY	1	+	П0	FL2	39	ИП3	П9	ИП4	ПП
69	ИП8	ИП7	ПП	79	П8	XY	П7	С/П	/—/
↑	Fx <sup>2</sup>	ИП9	Fx <sup>2</sup>	+	÷	ИП9	FBx	÷	П9
ИП1	×	XY	ПД	ИП0	×	+	ИП0	ИП9	×
ИП1	ИПД	×	—	П0	XY	П1	В/0		

#### Структура программы

- 00—35: вычисление  $\Pi \equiv e^{-z} z^a$ , занесение  $\operatorname{Re} \Pi$  и  $\operatorname{Im} \Pi$  соответственно в P7 и P8,  
 36—55: построение цикла для вычисления выражения в фигурных скобках в (2.38), при этом используется подпрограмма деления-умножения комплексных чисел (адреса 69—97),  
 56—68: вычисление  $\gamma(a, z)$  путем деления предыдущего результата на  $a$  и умножения на  $e^{-z} z^a$ .

#### Инструкция

1. Исходные данные: ( $a_1 = P3$ ,  $a_2 = P4$ ,  $x = P5$ ,  $y = P6$ ),  $N = P2$ . Число членов ряда  $N$  выбирается по значениям аргументов  $a, z$  и задаваемой погрешности (п. 5 инструкции).

2. Пуск: В/О С/П.

3. Результат:  $PX = P7 = \operatorname{Re} \gamma(a, z)$ ,  $PY = P8 = \operatorname{Im} \gamma(a, z)$ .

4. Регистры: рабочие P3 — P8; оперативные P0, P1, P2, P9, PC, PD; свободные PA, PB.

5. Погрешность зависит от числа учитываемых членов ряда и значений  $a$  и  $z$ . Ниже приведены некоторые достаточные критерии для задания  $N$  с указанной гарантированной относительной погрешностью:

$$| \operatorname{Re} a | > | z | \begin{cases} N = \operatorname{Re} a + 12, & \operatorname{Re} a > 0, \\ N = 3 | \operatorname{Re} a | + 12, & \operatorname{Re} a < 0, \end{cases} \quad \delta < 1 \cdot 10^{-6};$$

$$\operatorname{Re} a > -1 \begin{cases} | z | \leq 10, & -5 \leq x \leq 10, & N = 27, & \delta < 5 \cdot 10^{-3}; \\ | z | \leq 8, & N = 25, & \delta < 5 \cdot 10^{-4}; \\ | z | \leq 5, & N = 20, & \delta = 5 \cdot 10^{-6}. \end{cases}$$

6. Время счета  $t \approx (N/2,5)$  мин.

#### Примеры.

$$\gamma(1,8+j5; 3+j2) = -8,1639713 \cdot 10^{-3} - j6,8666075 \cdot 10^{-3} \quad (-8,163974 \cdot 10^{-3} - j6,866607 \cdot 10^{-3}), \quad N=20, \quad t=8 \text{ мин}.$$

Значение в скобках получено по  $\Gamma(a, z)$ , вычисленной по программе 2.20 и формуле (2.34) с использованием табличных значений функции  $\Gamma(a)$  комплексного аргумента [9].

$\gamma(1, -5) = -147,41379$  ( $-147,41316$ ),  $N = 20$ , 8 мин; значение в скобках получено из соотношения (ср. (2.43))  $\gamma(1, x) = 1 - e^{-x}$ .

**Программа 2.22.** Неполная гамма-функция  $\gamma^*(a, x)$  вещественных аргументов. Разложение в ряд (2.37), (2.37а),  $|a|, |x| \leq 60$ . Число  $N$  членов ряда выбирается программой из условия обращения в машинный ноль разности двух последовательных частичных сумм.

0	П6	1	ПЗ	ИПА	$Fx \neq 0$	68	ПД	$F1/x$	ПС
КИП6	ИПЗ	ИПВ	/—/	×	ИП6	÷	ПЗ	ИПА	ИП6
+	$Fx \neq 0$	68	÷	ИПС	+	ПС	FBx	—	$Fx = 0$
10	ИПС	ИПД	×	ПС	ИПД	1	+	ПД	1
2	—	$Fx \geq 0$	31	FBx	ИПД	×	$F1/x$	ИПД	Fln
1	—	ИПД	×	+	/—/	$Fe^x$	ИПД	Fл	÷
2	÷	$F\sqrt{-}$	×	ИПС	×	ПС	С/П	ИПА	/—/
ПЗ	1	ИПВ	×	FL3	72	ПС	С/П		

#### Структура программы

- 00—09: подготовка данных,  
10—30: расчет суммы в формуле (2.37),  
31—67: расчет функции  $1/\Gamma(a)$  (программа 2.7) и затем вычисление  $\gamma^*(a, x)$  при  $a \neq 0, -1, -2, \dots$ ,  
68—77: вычисление  $\gamma^*(a, x)$  при  $a = 0, -1, -2, \dots$  по формуле (2.37а).

#### Инструкция

1. Исходные данные: ( $a = PA, x = PB$ ).
2. Пуск: В/О С/П.
3. Результат:  $PX = PC = \gamma^*(a, x)$ .
4. Регистры: рабочие PA, PB, PC; оперативные P3, P6, PД; свободные P0, P1, P2, P4, P5, P7, P8, P9.
5. Погрешность относительная:

$a$	0, -1, -2, ...	$>-1$	$>-1$	$>-10$
$x$	—	$<0$	$\leq 8$	$\leq 10$
$\delta \leq$	$2 \cdot 10^{-7}$	$1 \cdot 10^{-6}$	$5 \cdot 10^{-6}$	$1 \cdot 10^{-5}$

#### 6. Время счета:

$$t \approx \begin{cases} (1,5 - a/12 + |x|/3) \text{ мин при } a \leq 12, \\ (0,5 + |x|/3) \text{ мин при } a \geq 12, \\ |a|/8 \text{ мин при } a = -1, -2, \dots \end{cases}$$

#### Примеры.

$\gamma^*(1; -9,5) = 1406,1811$  ( $1406,1816$ ),  $t = 4$  мин; значение в скобках получено по формуле  $\gamma^*(1, x) = (1 - e^{-x})/x$ ;

$\gamma^*(-6,73; 10) = 5370313,9$  ( $5370317,7$ ),  $t = 4$  мин; значение в скобках получено по формулам (2.34), (2.35) и программам для  $\Gamma(a, x)$  и  $\Gamma(a)$  (программы 2.16 и 2.1);

$\gamma^*(8,12; -8) = 2,9692248 \cdot 10^{-2}$  ( $2,9692241 \cdot 10^{-2} + j \cdot 1 \cdot 10^{-9}$ ),  $t = 3,5$  мин; значение в скобках получено по формуле (2.35), связывающей  $\gamma^*(a, z)$  и  $\gamma(a, z)$ , и по программе 2.21 для  $\gamma(a, z)$ ;

$\gamma^*(-7, -5) = -78125$  (точное значение),  $t = 1$  мин.

**Программа 2.23.** Неполная гамма-функция  $\Gamma(a, z)$  комплексных аргументов  $a = a_1 + j a_2$  и  $z = x + j y$ . Асимптотическое разложение (2.40) и формулы (2.41) и (2.42).  $|\arg z| < 3\pi/2$ ,  $|z| \geq 5$ . При целых положительных  $a = n$  см. программу 2.19.

ИП2	ИП1	1	—	П0	ИП5	↑	$Fx^2$	ИП6	$Fx^2$
+	П7	$F\sqrt{-}$	П9	÷	Farccos	ИП9	Fln	ПП	81
ИП5	—	XY	ИП6	—	П9	Fsin	XY	$Fe^x$	×
ПС	FBx	ИП9	Fcos	×	ПД	ИП1	ИПЗ	—	П0
КИПЗ	ПП	72	ПА	1	+	П0	XY	ПВ	П2
ИПВ	ИП8	+	ПВ	ИПА	ИП7	+	ПА	ПП	81
1	+	П0	XY	П2	FL3	50	ИПС	ИПД	ПП
81	С/П	ИП6	/—/	ИП7	÷	П8	ИП5	ИП7	÷
П7	XY	FBx	ИП2	×	XY	П9	ИП0	×	+
XY	ИП0	×	ИП9	ИП2	×	—	В/О		

Программа при  $|z| + \text{Re}a > 12$  обеспечивает высокую точность (см. п.5 инструкции и примеры) и существенное сокращение времени счета по сравнению с программой 2.20.

#### Структура программы

- 00—35: вычисление  $T \equiv z^{a-1} e^{-z}$  и занесение  $\text{Re}T$  и  $\text{Im}T$  в РД, РС соответственно,  
36—42: расчет  $A_n \equiv (a - n)/z$  по формуле (2.41),  
43—66: последовательное вычисление по рекуррентной формуле  $A_{n-k} = [a - (n-k)]/z = A_{n-k+1} + 1/z$  ( $k = 1, 2, \dots$ ) и построение схемы Горнера (выражение в фигурных скобках в (2.41)) с помощью оператора цикла,  
67—71: получение  $\Gamma(a, z)$  умножением предыдущего результата на  $T$ ,  
72—97: комбинированная подпрограмма деления и умножения комплексных чисел, а также получения обратной величины комплексного числа (программа 1.9).

#### Инструкция

1. Исходные данные: ( $a_1 = P1, x = P5, y = P6$ ),  $a_2 = P2, N = P3$  ( $N$  выбирается по (2.42)).
2. Пуск: В/О С/П.
3. Результат:  $PX = \text{Re}\Gamma(a, z)$ ,  $PY = \text{Im}\Gamma(a, z)$ ,  $PД = \text{Re}T$ ,  $PC = \text{Im}T$ , где  $T = z^{a-1} e^{-z}$ .
4. Регистры: рабочие P1, P5, P6, PC, PД; оперативные P0, P2, P3, P7—PВ; свободные P4.
5. Погрешность возрастает при уменьшении  $\text{Re}a$  (в любом случае предполагается, что  $|z| > |a|$ ), так как при этом приходится уменьшать число учитываемых членов  $N$  асимптотического ряда (ср. (2.42)). Если выбрать  $N$  по (2.42), то относительная погрешность ориентировочно меньше  $(|z|)^{-N/3}$ .
6. Время счета  $t \approx (N/5)$  мин.

### Примеры.

$$\Gamma(1+j2; 8+j14) = -2,2318944 \cdot 10^{-8} - j3,9531671 \cdot 10^{-5}, \quad N=17, \\ t=3,5 \text{ мин};$$

$$\Gamma(0, -10+j) = -1569,2567 + j1913,3189 \quad (-1568,28 + j1911,03), \\ N=10, \quad t=2 \text{ мин};$$

$$\Gamma(0, -17+j) = -896417,77 + j1219576,9 \quad (-896417 + j1219580), \\ N=17, \quad t=3,5 \text{ мин}.$$

Значения в скобках взяты из таблиц [9] для  $E_1(z)$ .

В заключение главы приведем две программы неполной гамма-функции  $\Gamma(a, jx)$ , где  $a$  и  $x$  — вещественные переменные. Указанные функции полезны для вычислений, в частности, обобщенных интегралов Френеля (гл. 4). Программы 2.24 и 2.25 основаны соответственно на разложениях в непрерывную дробь и в асимптотический ряд. Область применимости первой программы существенно шире по сравнению с программой 2.25. Однако последняя несколько короче и сокращает время счета.

Программа 2.24 использует итерационную процедуру (2.46), (2.47). Начальный остаток  $A_N$  непрерывной дроби уточняется по формуле (2.46в). Это позволяет сократить число  $N$  итераций, которое определяется в программе, в отличие от (2.48), по формуле  $N = 15 + 7/x$ . Множитель  $z^a e^{-z}$  в (2.47) равен, очевидно,  $x^a e^{j(\pi a/2 - x)}$ .

Программа 2.25. основана на формулах (2.40), (2.41). Число  $N$  членов асимптотического ряда рассчитывается по формуле (2.42).

В данном случае в (2.41)  $z^{a-1} e^{-z} = x^{a-1} \exp\{j[\pi(a-1)/2 - x]\}$ .

**Программа 2.24.** Неполная гамма-функция  $\Gamma(a, jx)$ ,  $0 < x \leq 64$ . Для отрицательных  $x$  следует использовать формулу  $\Gamma(a, jx) = \Gamma(a - jx)$ . Значения  $a$ ,  $x$  должны находиться в заштрихованной области на рис. 2.1 с заменой  $|z| = x$ .

7	ИП4	÷	1	5	+	ПО	ИПЗ	ИП4	Fx <sup>y</sup>
1	Farcsin	ИПЗ	×	ИП4	—	ПА	Fsin	XY	×
ПВ	FVx	ИПА	Fcos	×	ПА	ИП4	ИП0	×	Fv <sup>—</sup>
ПС	ИП0	ПП	67	1	+	ПС	XY	ИП0	ИПЗ
—	ПП	67	XY	ИП4	+	FL0	31	1	ПП
67	ПС	ИПВ	×	XY	ПД	ИПА	×	+	ИПС
ИПА	×	ИПВ	ИПД	×	—	С/П	ПД	F,	/—/
↑	Fx <sup>2</sup>	ИПС	Fx <sup>2</sup>	+	F1/x	ИПД	×	×	ИПС
FVx	×	ПС	V/O						

### Инструкция

1. Исходные данные: ( $a = P3$ ,  $x = P4$ ).
2. Пуск: В/О С/П.
3. Результат:  $PX = \operatorname{Re} \Gamma(a, jx)$ ,  $PY = \operatorname{Im} \Gamma(a, jx)$ .
4. Регистры: рабочие P3, P4; оперативные P0, PA — PД; свободные P1, P2, P5 — P9.
5. Погрешность относительная меньше  $5 \cdot 10^{-6}$ .
6. Время счета  $t \approx (4,5 + 2/x)$  мин.

### Примеры.

$$\Gamma(0, j5) = 0,19002974 - j0,020865096 \quad (0,19003 - j0,0208651), \quad t=5 \text{ мин},$$

число в скобках — значение  $E_1(j5)$  из [9];

$$\Gamma(10, j15,7) = -2,6200707 \cdot 10^{10} - j4,3893042 \cdot 10^{10}, \quad t=4,5 \text{ мин}.$$

**Программа 2.25.** Неполная гамма-функция  $\Gamma(a, jx)$ ,  $x \geq 5$ ,  $|a| \leq x$ . Для отрицательных  $x \leq -5$  достаточно использовать формулу  $\Gamma(a, jx) = \Gamma(a, -jx)$ .

ИП6	ИП7	+	ПЗ	1	9	—	Fx $\geq 0$	11	FVx
ПЗ	КИПЗ	ИП7	1	—	ПС	1	Farcsin	×	ИП6
—	ПА	Fsin	ИПС	ИП6	Fln	×	Fe <sup>x</sup>	×	ПД
FVx	ИПА	Fcos	×	ПС	0	ПА	ПВ	1	+
ПА	ИПЗ	ИП7	—	ИП6	÷	0	ПП	60	FL3
38	ИПА	1	+	ПА	ИПД	ИПС	ПП	60	С/П
П9	ИПА	×	XY	П8	ИПВ	×	—	ИПВ	ИП9
×	ИПА	ИП8	×	+	ПВ	XY	ПА	V/O	

### Инструкция

1. Исходные данные: ( $a = P7$ ,  $x = P6$ ).
2. Пуск: В/О С/П.
3. Результат:  $PX = PA = \operatorname{Re} \Gamma(a, jx)$ ,  $PY = PB = \operatorname{Im} \Gamma(a, jx)$ .
4. Регистры: рабочие P6, P7, PA, PB; оперативные P3, P8, P9, PC, PD; свободные P1, P2, P4, P5, PE.
5. Погрешность относительная меньше:  $5 \cdot 10^{-2}$  при  $x + \epsilon a \geq 5$ ;  $5 \cdot 10^{-4}$  при  $x + \epsilon a \geq 10$ ;  $5 \cdot 10^{-6}$  при  $x + \epsilon a \geq 15$ , где  $x \geq |a|$ ,  $\epsilon = 0$  или 1 при  $a \geq 0$  или  $a \leq 0$  соответственно.
6. Время счета:  $t \approx (x + a)/5$  мин при  $x + a \leq 18$  и  $t \approx 3,5$  мин при  $x + a \geq 18$ .

### Примеры.

$$\Gamma(0, j5) = 0,19242993 - j0,025221085 \quad (0,19003 - j0,0208651);$$

$$\Gamma(0, j10) = 0,045451268 + j0,087575222 \quad (0,0454565 + j0,0875512);$$

$$\Gamma(0, j15) = -0,046278698 + j0,047397887 \quad (-0,0462787 + j0,0473982);$$

$$\Gamma(10; 15,7) = -2,620067 \cdot 10^{10} - j4,3893005 \cdot 10^{10}, \quad t \approx 3,5 \text{ мин}.$$

Значения в скобках получены из табличных данных [9] для  $E_1(z) = \Gamma(0, z)$ .

### Указатель программ

Номер программы	Функция	Область определения	Число шагов	Число регистров памяти	Примечание
2.1	$\Gamma(x)$	$x < 69$	35	2	Возможен расчет функции $\Gamma(x+1)/x$
2.2	$\ln \Gamma(z)$	$0 < \arg z < \pi$	89	8	
2.3	$\Gamma(z)$	$0 < \arg z < \pi,  z  < 69$	98	8	

Номер програм- мы	Функция	Область определения	Число шагов	Число регистров памяти	Примечание
2.4	$n!$	$0 < n \leq 69$ или $0 \leq n \leq 69$	5 или 8	1	Два варианта программы
2.5	$n!$	$10 \leq n \leq 1 \cdot 10^{98}$	40	1	
2.6	$p!!$	$0 < p \leq 119$	8	1	
2.7	$k2\pi/\Gamma(x)$	$x \leq 69$	33	2	$k$ — задаваемая вещественная константа
2.8	$1/\Gamma(z)$	$0 \leq \arg z < \pi$ , $ z  \leq 69$	98	8	
2.9	$\Gamma(x)/[\Gamma(y)]$	$x, y \leq 69$	42	4	$k$ — задаваемая вещественная константа
2.10	$B(x, y)$	$x, y, (x+y) \leq 69$	58	4	
2.11	$\ln B(z, w)$	$0 \leq \arg z < \pi$ , $0 \leq \arg w < \pi$ , $ z ,  w ,  z+w  \leq 64$ $x \neq 0, -1, -2, \dots$	97	11	
2.12	$\psi(x)$		31	1	Аргумент $x$ вещественный
2.13	$\psi(z)$	$0 \leq \arg z < \pi$	97	13	
2.14	$\psi^{(n)}(x)$	$x \neq 0, -1, -2, \dots$	57	6	Аргумент $x$ вещественный
2.15	$\psi^{(n)}(z)$	$z \neq 0, -1, -2, \dots$	97	14	
2.16	$\Gamma(a, x)$	$a, x$ — в заштрихованной области на рис. 2.1	41	5	$a, x$ — вещественные аргументы
2.17	$\Gamma(a, x)$ $\gamma(a, x)$	$0 < x \leq 69$ , $x < a \leq 69$	68	6	$a, x$ — в области над штриховой линией на рис. 2.1
2.18	$\Gamma(n, x)$	$-8 \leq x \leq 69$ , $n = 1, 2, \dots, 69$	29	3	
2.19	$\Gamma(n, z)$	$ \arg z  < \pi$ , $n = 1, 2, \dots, 69$	73	8	
2.20	$\Gamma(a, z)$ $a = a_1 + ja_2$	$0 \leq \arg z < \pi$ , $ z  \leq 64$	98	11	$a_1,  z $ — в заштрихованной области на рис. 2.1
2.21	$\gamma(a, z)$ $a = a_1 + ja_2$	$0 \leq \arg z < \pi$ , $ a ,  z  \leq 64$	98	12	$a \neq 0, -1, -2, \dots$
2.22	$\gamma^*(a, x)$	$ a ,  x  \leq 60$	78	6	Аргументы $a, x$ вещественные
2.23	$\Gamma(a, z)$ $a = a_1 + ja_2$	$ \arg z  < 3\pi/2$ , $ z  >  a ,  z  \geq 5$	98	13	Высокая точность при больших $ z $
2.24	$\Gamma(a, jx)$	$0 < x \leq 64$ , $a, x$ — в заштрихованной области на рис. 2.1	84	7	Аргументы $a, x$ вещественные
2.25	$\Gamma(a, jx)$	$x \geq 5,  a  \leq x$	79	9	Аргументы $a, x$ вещественные. Высокая точность при больших $x$

## Интегральная показательная функция вещественного и комплексного аргументов и родственные ей функции

### 3.1. Интегральные показательные функции различного порядка. Интегральный логарифм

Интегральная показательная функция комплексного аргумента

$$E_1(z) = \int_z^\infty \frac{e^{-t}}{t} dt, \quad |\arg z| < \pi. \quad (3.1)$$

При вещественном  $z = -x < 0$  интеграл (3.1) существует в смысле главного значения. В этом случае интегральная показательная функция определяется как

$$Ei(x) = -VP \int_{-x}^\infty \frac{e^{-t}}{t} dt, \quad x > 0. \quad (3.2)$$

Обобщением  $E_1(z)$  являются функции

$$E_n(z) = \int_1^\infty \frac{e^{-zt}}{t^n} dt, \quad \operatorname{Re} z > 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.3)$$

Аналитическое продолжение (3.3) в область  $\operatorname{Re} z < 0$  приводит в общем к многозначным функциям с точками ветвления  $z = 0$  и  $z = \infty$ . В плоскости  $z$ , разрезанной по отрицательной части действительной оси, эти функции однозначны и регулярны.

Интегральный логарифм определяется как

$$li(x) = VP \int_0^x \frac{dt}{\ln t} = Ei(\ln x), \quad x > 1. \quad (3.4)$$

Функция  $li(z)$  имеет точки ветвления  $0, 1, \infty$ .

Удобный алгоритм вычисления  $Ei(x)$  основан на разложении этой функции в степенной ряд:

$$Ei(x) = \gamma + \ln x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n! n}, \quad x > 0, \quad (3.5)$$

где постоянная Эйлера  $\gamma = 0,57721566 \dots$ . Формулу (3.5) можно использовать и для расчетов на ЭВМ при  $x \gg 1$ , так как все члены ряда имеют одинаковый знак и погрешности округления по сравнению со знакопеременяющимися рядами здесь играют меньшую роль. Тем не менее и в этом случае ошибки округления при достаточно больших  $x$  могут быть существенными. Их основной источник связан с монотонным увеличением частичных сумм и одновременным убыванием (начиная с некоторого  $n$ ) членов ряда. В результате при суммировании имеет место прогрессирующее округление членов ряда до все меньшего числа знача-

щих цифр. В то же время по мере увеличения  $x$  число таких слагаемых, которые в сумме дают весомый вклад в общий результат, возрастает. Можно убедиться в том, что влияние ошибок округления на ряды типа (3.5) (подобные ряды будут встречаться и в других разделах книги) не носит случайного характера. Результат всегда оказывается меньше точной предельной суммы. Ориентировочно относительная погрешность округления  $\delta \approx N' \cdot 5 \cdot 10^{-T}$ , где  $N'$  — число учитываемых убывающих членов ряда;  $5 \cdot 10^{-T}$  — наибольшее изменение мантиссы при округлении (для используемых в книге ПМК  $5 \cdot 10^{-8}$ ). Примем для определенности  $N' = N/5$ , где  $N$  — полное число учитываемых членов ряда (обычно оно соответствует условию обращения в машинный ноль разности двух последовательных частичных сумм). Тогда для относительной погрешности округления получается простая оценка

$$\delta \approx N \cdot 10^{-8}. \quad (3.6a)$$

Численные данные свидетельствуют о приемлемости (3.6a).

С увеличением  $x$  необходимо брать все большее число  $N$  членов ряда и время счета пропорционально возрастает. Ориентировочно при  $x \gg 1$

$$N \approx 2x. \quad (3.6b)$$

Из (3.6a) и (3.6b)

$$\delta \approx 2x \cdot 10^{-8}. \quad (3.6b)$$

Функция  $E_1(z)$  разлагается в следующий ряд [9]:

$$E_1(z) = -\gamma - \ln z - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n z^n}{n! n}, \quad |\arg z| < \pi. \quad (3.7)$$

Ряд (3.7) в отличие от (3.5) не является знакопостоянным, и формула (3.7) не может использоваться при  $|z| \gg 1$  без существенной потери точности из-за погрешностей округления. Исключение составляет случай вещественных отрицательных  $z$ , когда все слагаемые в (3.7) положительны. Для комплексных  $z$  погрешности округления максимальны при  $\arg z = 0$  и уменьшаются по мере приближения  $\arg z$  к  $\pm \pi$ .

Далее ограничимся областью  $\arg z \geq 0$ . Учитывая, что согласно определению  $E_1(z)$  плоскость  $z$  разрезана по отрицательной полуоси, значения

$E_1(z)$  при  $y < 0$  определяются из соотношения  $E_1(z) = \overline{E_1(\bar{z})}$ .

Вычисление рядов (3.5) и (3.7) для вещественного аргумента можно производить непосредственно, прерывая суммирование, когда частичные суммы ряда в определенном приближении перестают изменяться. Наиболее просто реализуется условие обращения в машинный ноль разности двух последовательных частичных сумм (условие «максимальной точности» [3]). При комплексном аргументе этот способ, однако, усложняет программу и увеличивает время счета. Менее громоздкая процедура состоит в задании числа  $N$  членов ряда, исходя из определенных оценок типа (3.6b). В этом случае преимущества имеет схема Горнера как по простоте реализации, так и по времени счета (см. § 1.2). Указанная схема дает заметный выигрыш и для вещественной функции (3.5) (ср. программы 3.1 и 3.2). Запишем разложения (3.5), (3.7) по схеме Горнера:

$$E_1(x) \approx \gamma + \ln x + \left[ \dots \left[ \left( \frac{x}{NN} + \frac{1}{N-1} \right) \frac{x}{N-1} + \frac{1}{N-2} \right] \frac{x}{N-2} + \dots + 1 \right] x; \quad (3.8a)$$

$$E_1(z) \approx -\gamma - \ln z - \left[ \dots \left[ \left( \frac{(-z)}{NN} + \frac{1}{N-1} \right) \frac{(-z)}{N-1} + \frac{1}{N-2} \right] \times \right. \\ \left. \times \frac{(-z)}{N-2} + \dots + 1 \right] (-z). \quad (3.8b)$$

Применение схемы Горнера и непосредственное суммирование рядов приводят практически к совпадающим погрешностям округления. Это утверждение не относится, однако, к знакоперевающимся рядам. Для последних схема Горнера менее устойчива к погрешностям округления, когда аргумент  $z$  возрастает.

Оценки показывают, что при  $\arg z > \pi/2$  ( $x < 0$ ,  $y > 0$ ) удастся обеспечить достаточную точность вычисления  $E_1(z)$  вплоть до  $|z| = 30$ , выбирая число членов ряда

$$N \approx 30 + |z|. \quad (3.9)$$

При положительных  $x$  погрешности округления быстро возрастают с уменьшением  $y$ . В результате для  $x > 0$  гарантированная точность вычисления  $E_1(z)$  сохраняется только при  $|z| \leq 5$ .

Разложение в ряд функций  $E_n(z)$  ( $n = 2, 3, 4, \dots$ ) имеет намного более громоздкий вид (см., например, [9]). Проще использовать рекуррентную формулу

$$E_n(z) = \frac{1}{n-1} [e^{-z} - z E_{n-1}(z)], \quad n = 2, 3, 4, \dots \quad (3.10)$$

Для области  $\arg z < \pi/2$ , по-видимому, наиболее эффективный алгоритм основан на разложении  $E_n(z)$  в непрерывную дробь:

$$E_n(z) = \frac{e^{-z}}{z + \frac{n}{1 + \frac{1}{z + \frac{n+1}{1 + \frac{2}{z + \dots}}}}} \quad (3.11)$$

Структура (3.11) аналогична разложению в непрерывную дробь неполной гамма-функции (2.44), что вытекает из формулы

$$E_n(z) = z^{n-1} \Gamma(1-n, z). \quad (3.12)$$

В соответствии с (2.45) — (2.47) запишем рекуррентную формулу и выражение для  $E_n(z)$ :

$$A_{N-1} = z + \frac{n+N-1}{1+N/A_N}; \quad (3.13)$$

$$E_n(z) = e^{-z}/A_0. \quad (3.14)$$

Вычисляя из (3.13) остатки непрерывных дробей  $A_k$  по убывающей последовательности  $k$ , находим  $A_{N-2}, A_{N-3}, \dots, A_1, A_0$ . Подставив  $A_0$  в формулу (3.14), получим искомое значение  $E_n(z)$  при любом  $n$ . Оценки показывают, что при  $\operatorname{Re} z \geq 0$  относительная погрешность  $E_n(z)$  не превышает  $5 \cdot 10^{-6}$ , когда число итераций

$$N \approx 6[3 + 1/(n|z|)]. \quad (3.15)$$

Необходимые для начала итерационного процесса  $A_N$  могут быть оценены по (2.46b) (при  $a = 1-n$ ) или по более простой формуле (2.46в). Практически, как отмечалось в § 2.4, значения  $A_N$  могут изменяться в широких пределах при  $N > 20$ . В данном случае ориентировочно

$$A_N \approx z + (N+n)/2. \quad (3.16)$$



Для вещественных  $z = x \geq 0,5$  вместо (3.15) и (3.16), учитывая некритичность результата вычислений к  $N$  и  $A_N$ , можно принять

$$N = A_N = 25. \quad (3.17)$$

Слабая зависимость результата от задания  $A_N$  имеет место не только при  $\arg z < \pi/2$ , но и при отрицательных  $x$ . И в этом случае погрешности невелики, кроме  $y < 1$ , т. е. окрестности границы области определения  $E_n(z)$ .

В целом программы, основанные на разложении функций  $E_n(z)$  в ряды и в непрерывную дробь, дополняют друг друга: наивысшая точность при использовании ряда типа (3.7) достигается именно в тех областях, где плохо работает (3.11), и наоборот. Существенно, что области, где каждый из указанных алгоритмов дает удовлетворительную точность, перекрываются. Так, для вещественного аргумента программы 3.1—3.3 (метод рядов) дают высокую точность при  $|z| \leq 3$ , а программы 3.7 и 3.8 (непрерывные дроби) — при  $|z| \geq 0,5$ . Для комплексного аргумента в области  $\operatorname{Re} z > 0$  программы 3.5, 3.6 (метод рядов) обеспечивают достаточную точность при  $|z| \leq 2$ , а программы 3.9, 3.10, основанные на разложении в непрерывную дробь, имеют малые погрешности при  $\operatorname{Re} z \geq 0,5$ . В области  $x < 0$  ( $\arg z > \pi/2$ ) программы 3.5, 3.6 (метод рядов) обеспечивают высокую точность при  $y < 0,5|x|$  вплоть до  $|z| = 30$ . Программы 3.9, 3.10 (разложение в непрерывную дробь) захватывают область с  $y > 1$  при весьма больших  $|z|$ .

Представляет также интерес расчет  $E_n(z)$  численным интегрированием (3.3). Преобразуем (3.3), подставив  $u = zt$ :

$$E_n(z) = \int_1^\infty \frac{e^{-zt}}{t^n} dt = z^{n-1} \int_z^\infty \frac{e^{-u}}{u^n} du. \quad (3.18)$$

Целесообразно в (3.18) в качестве пути интегрирования выбрать прямую, начинающуюся в точке  $u = z$  и идущую в  $\infty$  параллельно действительной оси, т. е.  $u = s + jy$ , где  $0 \leq s < \infty$ . Тогда

$$E_n(z) = z^{n-1} e^{-ly} \int_x^\infty \frac{e^{-s}}{(s+jy)^n} ds. \quad (3.19)$$

Интеграл (3.19) является регулярной функцией на плоскости  $z$ , разрезанной по отрицательной части действительной оси, т. е. при  $|\arg z| < \pi$ , и фактически является аналитическим продолжением (3.3) в указанную область.

В программе 3.11 интеграл (3.19) вычисляется на основе квадратуры Чебышева (см. § 10.2) при числе узлов на единичном интервале  $n = 6$  (см. программу 10.13). Шаг интегрирования принят равным 2, что позволяет ограничить число  $N$  интервалов величиной 6—8. При этом изменение экспоненциального множителя в (3.19)  $e^{-s}$  достаточно для приближения к бесконечному пределу. Следует, однако, иметь в виду, что выбранная величина шага не позволяет получить высокую точность при малых  $y$  и  $x < 0$ , т. е. в окрестности разреза (соответствующие погрешности указаны в программе 3.11). В целом здесь ситуация аналогична методу разложения в непрерывную дробь, но время счета существенно больше. Поэтому программа представляет в основном методический интерес.

**Программа 3.1.** Интегральная показательная функция  $E_i(x)$  и интегральный логарифм  $li(x)$  вещественного аргумента. Разложение в ряд (3.5) формулы (3.4), (3.6в),  $x > 0$  для  $E_i(x)$  и  $x > 1$  для  $li(x)$ . Суммирование ряда (3.5) прерывается в программе при обращении в нуль (машинный нуль) разности двух последовательных частичных сумм.

Flп	ПД	Flп	ИПС	+	ПВ	0	П6	1	ПА
КИП6	ИПА	ИПД	×	ИП6	÷	ПА	ИП6	÷	ИПВ
+	ПВ	FBx	—	Fx=0	10	ИПВ	С/П		

#### Инструкция

1. Исходные данные:  $(\gamma = 5,7721566 \cdot 10^{-1} = PC)$ ,  $[x = PX]$ .
2. Пуск: для  $E_i(x)$  БП 01 С/П; для  $li(x)$  В/О С/П.
3. Результат:  $PX = PV = E_i(x)$ ,  $P6 = N$ ;  $PX = PV = li(x)$ ,  $P6 = N$ .
4. Регистры: рабочие P6, PV, PC; оперативные PA, PD; свободные P0—P5, P7, P8, P9.
5. Погрешность относительная:  $(10 + 2x) \cdot 10^{-8}$  для  $E_i(x)$  и  $(100 + 2 \ln x) \times 10^{-8}$  для  $li(x)$ .
6. Время счета при  $x \gg 1$ :  $t \approx x/6$  мин для  $E_i(x)$  и  $t \approx (\ln x)/6$  мин для  $li(x)$ .

#### Примеры.

$E_i(1) = 1,895118$  (1,895118 [9]),  $N = 10$ ,  $t \approx 1$  мин;

$E_i(100) = 2,7155481 \cdot 10^{41}$  (2,7155541  $\cdot 10^{41}$  [9]),  $N = 158$ ,  $t \approx 16$  мин;

$li(100) = 30,126141$ ,  $N = 20$ ,  $t \approx 2$  мин.

Здесь  $N$  — число учтенных программой членов ряда.

**Программа 3.2.** Интегральная показательная функция  $E_i(x)$  и интегральный логарифм  $li(x)$  вещественного аргумента. Разложение в ряд (3.5) по схеме Горнера (3.8а), формулы (3.4), (3.6а);  $x > 0$  для  $E_i(x)$  и  $x > 1$  для  $li(x)$ . Число подлежащих учету членов ряда в программе рассчитывается по формуле  $N \approx 8 + 2x$  или  $N \approx 8 + 2 \ln x$ .

Flп	ПД	2	×	9	+	П0	ИПС	ИПД	Flп
+	0	ИП0	F1/x	+	FBx	×	ИПД	×	FL0
12	+	С/П							

#### Инструкция

1. Исходные данные:  $(\gamma = 5,7721566 \cdot 10^{-1} = PC)$ ,  $[x = PX]$ .
2. Пуск: для  $E_i(x)$  БП 01 С/П; для  $li(x)$  В/О С/П.
3. Результат:  $PX = E_i(x)$  и  $PX = li(x)$ .
4. Регистры: рабочие PC, PD; оперативные P0; свободные P1—PV.
5. Погрешность относительная:  $(10 + 2x) \cdot 10^{-8}$  для  $E_i(x)$  и  $(100 + 2 \ln x) \times 10^{-8}$  для  $li(x)$ .
6. Время счета  $t = (0,4 + x/11)$  мин для  $E_i(x)$ ,  $t \approx [0,4 + (\ln x)/11]$  мин для  $li(x)$ .

#### Примеры.

$E_i(1) = 1,8951179$  (1,8951178),  $t \approx 30$  с;

$E_i(100) = 2,715544 \cdot 10^{41}$  (2,7155541  $\cdot 10^{41}$ ),  $t \approx 10$  мин;

$li(100) = 30,126138$ ,  $t \approx 50$  с.

Сравнение программ 3.1 и 3.2 демонстрирует преимущества схемы Горнера: программа 3.2 короче, требует меньше регистров памяти и время счета сокращается в 1,5—2 раза.

**Программа 3.3.** Интегральная показательная функция  $E_1(x)$  вещественного аргумента. Разложение в ряд по схеме Горнера (3.8б),  $x \leq 5$ . Число  $N$  учтенных членов ряда в программе рассчитывается по формуле  $N \approx 4x + 9$ .

ПД	4	×	9	+	П0	0	ИП0	F1/x	+
FBx	×	ИПД	/—/	×	FL0	07	/—/	ИПС	—
ИПД	Flп	—	С/П						

### Инструкция

- Исходные данные: ( $\gamma = 5,7721566 \cdot 10^{-1} = PC$ ), [ $x = PX$ ].
- Пуск: В/О С/П.
- Результат:  $PX = E_1(x)$ .
- Регистры: рабочие PC; оперативные P0, PД; свободные P1 — PV.
- Погрешность относительная меньше:

$$1 \cdot 10^{-6} \text{ при } x \leq 2, \quad 1 \cdot 10^{-4} \text{ при } x \leq 4, \\ 1 \cdot 10^{-5} \text{ при } x \leq 3, \quad 5 \cdot 10^{-4} \text{ при } x \leq 5.$$

6. Время счета  $t \approx (0,5 + x/5)$  мин.

Примеры.

$$E_1(1) = 0,21938394 \text{ (0,21938393 [9])}, \quad t = 40 \text{ с};$$

$$E_1(5) = 1,1484 \cdot 10^{-3} \text{ (1,1482955} \cdot 10^{-3} \text{ [9])}, \quad t = 1,5 \text{ мин.}$$

**Программа 3.4.** Интегральные показательные функции  $E_n(x)$  вещественного аргумента. Суммирование ряда (3.7) по схеме Горнера (3.86) для вычисления  $E_1(x)$  и рекуррентная формула (3.10) для  $E_n(x)$ . Число  $N$  учитываемых членов ряда устанавливается программой по формуле  $N \approx 4x + 9$ .

ПД	4	×	9	+	ПО	КИП	0	П5	ИПО
F1/x	+	FVx	×	ИПД	/—/	×	FL0	09	/—/
ИПС	—	ИПД	Fln	—	ПВ	ПО	КИП5	ИПД	/—/
Fe <sup>x</sup>	ИПД	ИПО	×	—	ИП5	÷	FL1	26	С/П

### Инструкция

- Исходные данные:  $n = P1$  ( $n = 2, 3, 4, \dots$ ), ( $\gamma = 5,7721566 \cdot 10^{-1} = PC$ ), [ $x = PX$ ].
- Пуск: В/О С/П.
- Результат:  $PX = E_n(x)$ ,  $P0 = E_{n-1}(x)$ ,  $PВ = E_1(x)$ ,  $P5 = (n - 1)$ ,  $PД = x$ . Для нахождения  $E_{n+1}(x)$  при том же значении аргумента достаточно произвести дополнительный пуск БП 26 С/П, не изменяя содержимого регистров P1, P5, PД и сохраняя в РХ значения  $E_n(x)$ . После останова (время счета 6 с)  $PX = E_{n+1}(x)$ ,  $P0 = E_n(x)$ ,  $P5 = n$ . Дополнительные пуски могут быть продолжены для получения  $E_{n+2}$ ,  $E_{n+3}$ , ...
- Регистры: рабочие P0, P1, P5, PC, PV; оперативные PД; свободные P2, P3, P4, P6 — PA.
- Погрешность относительная меньше:

$$1 \cdot 10^{-6} \text{ при } x \leq 2, \quad 5 \cdot 10^{-4} \text{ при } x \leq 4, \\ 1 \cdot 10^{-5} \text{ при } x \leq 3, \quad 5 \cdot 10^{-3} \text{ при } x \leq 5.$$

6. Время счета  $t \approx (0,5 + x/5 + n/10)$  мин.

Примеры.

$$E_1(2) = 0,04890053 \text{ (0,04890053 [9])}, \quad t = 1 \text{ мин};$$

$$E_{20}(2) = 6,4143063 \cdot 10^{-3} \text{ (6,4143} \cdot 10^{-3} \text{ [9])}, \quad t = 2,5 \text{ мин};$$

$$E_1(5) = 1,1484 \cdot 10^{-3} \text{ (1,1492955} \cdot 10^{-3} \text{ [9])}, \quad t = 1,5 \text{ мин};$$

$$E_{10}(5) = 4,6854275 \cdot 10^{-4} \text{ (4,69105} \cdot 10^{-4} \text{ [9])}, \quad t = 2,5 \text{ мин};$$

$$E_{20}(5) = 2,7827457 \cdot 10^{-3} \text{ (2,78275} \cdot 10^{-3} \text{ [9])}, \quad t = 3,5 \text{ мин.}$$

**Программа 3.5.** Интегральная показательная функция  $E_1(z)$  комплексного аргумента  $z = x + jy$  при  $y \geq 0$ . Суммирование ряда (3.7) по схеме Горнера (3.86),  $|z| \leq 30$  при  $x \leq 0$  и  $|z| \leq 5$  при  $x > 0$ . При  $y < 0$  функцию  $E_1(z)$  можно получить из равенства  $E_1(z) = E_1(\bar{z})$ . Число учитываемых членов ряда устанавливается в программе по формуле  $N \approx |z| + 30$ .

ИП5	Fx <sup>2</sup>	ИП6	Fx <sup>2</sup>	+	FV <sup>~</sup>	П8	3	1	+
ПО	0	↑	ПВ	XY	ИП0	F1/x	+	ПА	ИП6
FVx	/—/	×	FVx	ИП5	×	ПС	ИПА	×	XY
ПД	ИПВ	×	—	ИПС	ИПВ	×	ИПД	ИПА	×
+	FL0	13	/—/	ИП5	ИП8	÷	Farcos	—	ПВ
XY	/—/	ИП8	F1п	—	ИП7	—	ПА	С/П	

### Инструкция

- Исходные данные: ( $x = P5$ ,  $y = P6$ ,  $\gamma = 5,7721566 \cdot 10^{-1} = P7$ ).
- Пуск: В/О С/П.
- Результат:  $PX = PA = \operatorname{Re} E_1(z)$ ,  $PY = PB = \operatorname{Im} E_1(z)$ ,  $P8 = |z|$ .
- Регистры: рабочие P5 — P8, PA, PB; оперативные P0, PC, PД; свободные P1 — P4, P9.
- Погрешность относительная:

$x$	$ y/x  \leq 0,5$		$> 0$			
$ z $	$\leq 30$	$\leq 25$	$\leq 2$	$\leq 3$	$\leq 4$	$\leq 5$
$\delta$	$\leq 5 \cdot 10^{-6}$	$\leq 3 \cdot 10^{-6}$	$\leq 1 \cdot 10^{-6}$	$\leq 1 \cdot 10^{-5}$	$\leq 1 \cdot 10^{-4}$	$\leq 1 \cdot 10^{-3}$

6. Время счета  $t \approx (5 + |z|/6)$  мин.

Примеры.

$$E_1(-19 + j0) = -9950903,7 - j\pi \text{ (} -9950905 - j\pi \text{)}, \quad t = 8 \text{ мин};$$

$$E_1(-19 + j10) = 8659662 - j571013,66 \text{ (} 8659668 - j571013 \text{)}, \quad t \approx 9 \text{ мин};$$

$$E_1(1 + j4) = 3,373604 \cdot 10^{-2} + j7,35236 \cdot 10^{-2} \text{ (} 3,37559 \cdot 10^{-2} + j7,35234 \times 10^{-2} \text{)}, \quad t = 5 \text{ мин};$$

$$E_1(4 + j3) = -2,90686 \cdot 10^{-3} + j1,29326 \cdot 10^{-3} \text{ (} -2,9066 \cdot 10^{-3} + j1,29353 \cdot 10^{-3} \text{)}, \quad t = 5,5 \text{ мин.}$$

В скобках указаны табличные данные из [9].

**Программа 3.6.** Интегральные показательные функции  $E_n(z)$  комплексного аргумента  $z = x + jy$  при  $y \geq 0$ . Суммирование ряда (3.7) по схеме Горнера (3.86) для вычисления  $E_1(z)$  и рекуррентная формула (3.10) для  $E_n(z)$ ,  $n = 2, 3, \dots$ ,  $|z| \leq 30$  при  $x \leq 0$  и  $|z| \leq 5$  при  $x > 0$ . При  $y < 0$  функции  $E_n(z)$  можно получить из равенства  $E_n(z) = E_n(\bar{z})$ . Число учитываемых членов ряда устанавливается в программе по формуле  $N \approx |z| + 30$ .

ИП5	Fx <sup>2</sup>	ИП6	Fx <sup>2</sup>	+	F √	П8	3	1	+
П0	0	П4	↑	ПВ	XY	ИП10	F1/x	+	ПА
ИП6	F Bx	/—/	×	F Bx	ИП5	×	ПП	80	FL0
14	/—/	ИП5	ИП8	÷	Farccos	—	ПВ	П1	XY
/—/	ИП8	F ln	—	ИП7	—	ПА	П0	КИП3	КИП4
ИП6	ИП5	ПП	80	ИП5	/—/	Fe <sup>x</sup>	ПС	ИП6	F sin
×	+	/—/	ПВ	ИПС	ИП6	Fcos	×	ИП9	—
ИП4	÷	ПА	XY	ИП4	÷	ПВ	FL3	49	С/П
ПС	ИПА	×	XY	ПД	ИПВ	×	—	П9	ИПС
ИПВ	×	ИПД	ИПА	×	+	В/О			

#### Структура программы

- 00—47: расчет  $E_1(z)$  и занесение  $\text{Re } E_1(z)$  и  $\text{Im } E_1(z)$  в регистры P0, PA и P1, PV соответственно,  
 48—79: нахождение функций  $E_n(z)$  при заданном  $n$  по рекуррентной формуле (3.10),  
 80—96: подпрограмма умножения комплексных чисел.

#### Инструкция

- Исходные данные:  $n = P3$  ( $n = 2, 3, 4, \dots$ ), ( $x = P5$ ,  $y = P6$ ,  $\gamma = 5,7721566 \cdot 10^{-1} = P7$ ).
- Пуск: В/О С/П.
- Результат:  $PX = PV = \text{Im } E_n(z)$ ,  $PY = PA = \text{Re } E_n(z)$ ,  $P0 = \text{Re } E_1(z)$ ,  $P1 = \text{Im } E_1(z)$ ,  $P4 = n - 1$ ,  $P8 = |z|$ .

Для получения следующей по порядку функции  $E_{n+1}(z)$  при том же значении аргумента можно произвести дополнительный пуск БП 49 С/П (не изменяя содержимого регистров P3, P4, P5, P6, PA, PV). После останова (время счета 20 с)  $PX = PV = \text{Im } E_{n+1}(z)$ ,  $PE = PA = \text{Re } E_{n+1}(z)$ ,  $P4 = n$ . Допустимы и дальнейшие дополнительные пуски с увеличением  $n$  на единицу при каждом пуске. Возможен и прямой переход от  $E_n(z)$  к  $E_{n+p}(z)$ . Для этого следует ввести  $p$  в P2 и пуск БП 50 С/П. Время счета (P/3) мин.

- Регистры: рабочие P0, P1, P3 — P8, PA, PV; оперативные: P9, PC, PD; свободные P2.
- Погрешность относительная при  $n \leq 10$ :

$x$	$\leq 0$		$> 0$		
	$ y/x  \leq 0,5$				
$ z $	30	15	2	3	4
$\delta$	$\leq 1 \cdot 10^{-5}$	$\leq 5 \cdot 10^{-6}$	$\leq 2 \cdot 10^{-6}$	$\leq 2 \cdot 10^{-5}$	$\leq 1 \cdot 10^{-3}$

- Время счета  $t \approx [5 + |z|/6 + (n - 1)/3]$  мин.

#### Примеры.

$$E_1(4 + j0) = 3,77914 \cdot 10^{-3} + j0 \quad (3,77935 \cdot 10^{-3} + j0), \quad t = 6 \text{ мин};$$

$$E_{10}(4 + j0) = 1,3756297 \cdot 10^{-3} + j0 \quad (1,3754784 \cdot 10^{-3} + j0), \quad t = 9 \text{ мин};$$

$$E_1(-3 + j) = -7,8231344 + j2,9559271 \quad (-7,82314 + j2,95593);$$

$$E_2(-3 + j) = -9,661215 - j0,21048, \quad t = 6,5 \text{ мин}.$$

В скобках указаны табличные значения  $E_n(z)$  из [9].

**Программа 3.7.** Интегральные показательные функции  $E_n(x)$  вещественного аргумента. Разложение в непрерывную дробь (3.11), (3.13) — (3.16),  $x \geq 0,1$

ИПС	ИП5	x	F1/x	3	+	6	×	П2	ИП2
ИПС	+	2	÷	ИП5	+	F1/x	ИП2	×	1
+	F1/x	ИП2	1	—	ИПС	+	×	ИП5	+
FL2	16	ИП5	Fe <sup>x</sup>	×	F1/x	ПД	С/П		

#### Инструкция

- Исходные данные: ( $x = P5$ ,  $n = PC$ ).
- Пуск: В/О С/П.
- Результат:  $PX = PD = E_n(x)$ .
- Регистры: рабочие P5, PC, PD; оперативные P2; свободные P0, P1, P3, P4, P6 — PV.
- Погрешность относительная меньше:  $5 \cdot 10^{-7}$  при  $x \geq 1$ ;  $1 \cdot 10^{-6}$  при  $x \geq 0,5$ ;  $5 \cdot 10^{-6}$  при  $x \geq 0,1$ .
- Время счета  $t \approx [1,5 + 1/2nx]$  мин.

#### Примеры.

$$E_1(1) = 0,21938393 \text{ (все цифры верные), } t = 2 \text{ мин};$$

$$E_{10}(50) = 3,2232959 \cdot 10^{-24} \text{ (все цифры верные), } t = 1,5 \text{ мин};$$

$$E_1(0,1) = 1,8228532 \text{ (1,8229234 [9])}, t = 6 \text{ мин};$$

$$E_{10}(0,1) = 0,099298436 \text{ (все цифры верные), } t = 2 \text{ мин}.$$

**Программа 3.8.** Интегральные показательные функции вещественного аргумента  $E_n(x)$ . Разложение в непрерывную дробь (3.11), (3.13), (3.14), (3.17),  $x \geq 0,5$ .

2	5	П2	F1/x	ИП2	×	1	+	F1/x	ИП2
1	—	ИПС	+	×	ИП5	+	FL2	03	ИП5
Fe <sup>x</sup>	×	F1/x	ПД	С/П					

Использование фиксированных значений  $N$  и  $A_N$  (3.17) способствует существенному укорочению программы по сравнению с программой 3.7 ценой некоторого повышения предельного минимума  $x_{\min}$ , при котором сохраняется максимальная точность.

#### Инструкция

- Исходные данные: ( $x = P5$ ,  $n = PC$ ).
- Пуск: В/О С/П.
- Результат:  $PX = PD = E_n(x)$ .
- Регистры: рабочие P5, PC, PD; оперативные P2; свободные P0, P1, P3, P4, P6 — PV.
- Погрешность относительная меньше:  $5 \cdot 10^{-6}$  при  $x \geq 0,5$ ,  $5 \cdot 10^{-7}$  при  $x \geq 1$ .
- Время счета  $t = 2$  мин.

#### Примеры.

$$E_1(0,5) = 0,55977081 \text{ (0,5597736 [9])};$$

$$E_{10}(0,5) = 0,063458299 \text{ (0,0634583 [9])};$$

$$E_1(2) = 0,048900513 \text{ (0,048900511 [9])}.$$

**Программа 3.9.** Интегральные показательные функции  $E_n(z)$  комплексного аргумента  $z = x + jy$ . Разложение в непрерывную дробь (3.11), (3.13) — (3.15),  $y \geq 0$ .  $N$ -й остаток непрерывной дроби, задаваемый в программе, равен  $A_N = 2 + j2$ .

ИП6	Fsin	ИП5	Fe <sup>x</sup>	×	ПВ	FBx	ИП6	Fcos	×
ПА	ИП3	ИП5	Fx <sup>2</sup>	ИП6	Fx <sup>2</sup>	+	F $\sqrt{\phantom{x}}$	×	F1/x
3	+	6	×	П2	2	П7	П8	ИП2	ПП
77	1	+	П7	ХУ	П8	ИП3	ИП2	+	1
—	ПП	77	ИП5	+	П7	ХУ	ИП6	+	П8
FL2	28	ПД	ИПА	×	ХУ	ПС	ИПВ	×	+
ИПА	ИПС	×	ИПВ	ИПД	×	—	П7	ХУ	П8
1	ПП	77	П0	ХУ	П1	С/П	П4	ИП8	/—/
↑	Fx <sup>2</sup>	ИП7	Fx <sup>2</sup>	+	ИП4	÷	÷	ИП7	FBx
÷	В/О								

#### Инструкция

1. Исходные данные: ( $x = P5$ ,  $y = P6$ ,  $n = P3$ ).
2. Пуск: В/О С/П.
3. Результат:  $PX = P1 = \text{Im } E_n(z)$ ,  $PY = P0 = \text{Re } E_n(z)$ .
4. Регистры: рабочие P0, P1, P3, P5, P6; оперативные P2, P4, P7, P8, PA — PД; свободные P9.
5. Погрешность относительная меньше:

$$5 \cdot 10^{-6} \text{ при } x \geq 0,5; \quad 1 \cdot 10^{-3} \text{ при } x \leq -5, y \geq 1;$$

$$5 \cdot 10^{-3} \text{ при } x \leq -1, y \geq 1; \quad 1 \cdot 10^{-4} \text{ при } x \leq -10, y \geq 1.$$

#### 6. Время счета $t \approx [5 + 2/(n|z|)]$ мин.

##### Примеры.

- 1)  $E_{10}(4+j0) = 1,3754761 \cdot 10^{-3} - j 5,5299255 \cdot 10^{-15}$  ( $1,3754784 \cdot 10^{-3} + j0$ ),  $t = 6$  мин;
- 2)  $E_1(-15+j10) = 189948,4 + j 9248,1006$  ( $189948 + j 9248,04$ ),  $t \approx 6$  мин;
- 3)  $E_2(4+j3) = -2,6249783 \cdot 10^{-3} + j 9,6120078 \cdot 10^{-4}$  ( $-2,62498 \times 10^{-3} + j 9,61204 \cdot 10^{-4}$ ),  $t = 6$  мин;
- 4)  $E_1(0,5+j0,2) = 0,4927683 - j 0,22342484$  ( $0,492769 - j 0,223425$ );
- 5)  $E_1(-1+j) = -1,7645017 - j 0,75434969$  ( $-1,76462 - j 0,753822$ );
- 6)  $E_1(-15+j) = -140522,44 + j 187515,42$  ( $-140523 + j 187515$ ).

Пример 1 иллюстрирует устойчивость итерационного процесса (3.13): несмотря на то, что исходный остаток  $A_N = 2 + j2$  имеет значительную мнимую часть, мнимая часть результата  $E_{10}(4+j0)$  оказывается, как и должно быть, пренебрежимо малой. Отметим, что при больших  $|z|$  приемлемая точность получается даже в области  $x < 0$  (пример 6).

**Программа 3.10.** Интегральные показательные функции  $E_n(z)$  комплексного аргумента  $z = x + jy$ . Разложение в непрерывную дробь (3.11), (3.13), (3.14),  $y \geq 0$ .

ИП6	Fsin	ИП5	Fe <sup>x</sup>	×	ПВ	FBx	ИП6	Fcos	×
ПА	2	П7	П8	ИП2	ПП	59	1	+	П7
ХУ	П8	ИП3	ИП2	+	1	—	ПП	59	ИП5
+	П7	ХУ	ИП6	+	П8	FL2	14	ПД	ИПА
×	ХУ	ПС	ИПВ	×	+	П8	ИПА	ИПС	×
ИПВ	ИПД	×	—	П7	1	ПП	59	С/П	П4
ИП8	/—/	↑	Fx <sup>2</sup>	ИП7	Fx <sup>2</sup>	+	ИП4	÷	÷
ИП7	FBx	÷	В/О						

Программа сокращена по сравнению с программой 3.9 за счет выделения числа итераций  $N$  в разряд исходных данных, определяемых таблицей в п. 5 инструкции. Это также позволяет в отдельных случаях сократить время счета путем ограничения точности в необходимых пределах (п. 5). Задаваемый программой остаток непрерывной дроби  $A_N = 2 + j2$ .

#### Инструкция

1. Исходные данные: ( $x = P5$ ,  $y = P6$ ,  $n = P3$ ),  $N = P2$ .
2. Пуск: В/О С/П.
3. Результаты:  $PX = \text{Re } E_n(z)$ ,  $PY = \text{Im } E_n(z)$ .
4. Регистры: рабочие P3, P5, P6; оперативные P2, P7, P8, PA — PД; свободные P0, P1, P9.
5. Погрешность и время счета определяются задаваемым в качестве исходной величины числом итераций  $N$ . В таблице приведены соответствующие значения для функции  $E_1(z)$ . Погрешности  $E_n(z)$  при  $n \geq 2$  меньше и монотонно уменьшаются с ростом  $n$ .

N	t, мин	x ≥ 0				x < 0, y ≥ 1		
		z  ≥ 0,5	z  ≥ 1	z  ≥ 2	z  ≥ 5	z  ≥ 1	z  ≥ 5	z  ≥ 10
5	2	1·10 <sup>-2</sup>	1·10 <sup>-3</sup>	5·10 <sup>-4</sup>	5·10 <sup>-5</sup>	0,3	5·10 <sup>-2</sup>	5·10 <sup>-4</sup>
10	3	5·10 <sup>-4</sup>	1·10 <sup>-4</sup>	5·10 <sup>-5</sup>	5·10 <sup>-6</sup>	0,2	1·10 <sup>-2</sup>	5·10 <sup>-5</sup>
20	6	5·10 <sup>-5</sup>	1·10 <sup>-5</sup>	2·10 <sup>-6</sup>	1·10 <sup>-6</sup>	0,1	5·10 <sup>-3</sup>	1·10 <sup>-5</sup>
25	7,5	5·10 <sup>-6</sup>	1·10 <sup>-6</sup>	1·10 <sup>-6</sup>	5·10 <sup>-7</sup>	5·10 <sup>-2</sup>	1·10 <sup>-3</sup>	5·10 <sup>-6</sup>

##### Примеры.

$$E_1(1+j0,8) = 0,054668534 - j 0,18243168 \quad (0,054674 - j 0,182512), \quad N = 5, \quad t = 2 \text{ мин};$$

$$E_2(4+j3) = -2,6249625 \cdot 10^{-3} + j 9,61182 \cdot 10^{-4}, \quad N = 5, \quad t = 2 \text{ мин};$$

$$E_2(4+j3) = -2,6249783 \cdot 10^{-3} + j 9,6120078 \cdot 10^{-4}, \quad N = 10, \quad t = 3 \text{ мин}.$$

$$\text{Табличное значение [9]: } E_2(4+j3) = -2,6249835 \cdot 10^{-3} + j 9,612045 \cdot 10^{-4}.$$

**Программа 3.11.** Интегральные показательные функции  $E_n(z)$  комплексного аргумента  $z = x + jy$ . Расчет несобственного интеграла (3.19) по квадратурной формуле Чебышева (10.14) при  $n = 6$ .

0	ПС	ПД	КИП2	9	ПО	КИП0	КИП0	/—/	ПВ
ИП2	+	ИП9	+	П5	Fe <sup>x</sup>	3	×	0	XY
ПП	73	ПЗ	XY	/—/	↑	Fx <sup>2</sup>	ИПЗ	Fx <sup>2</sup>	+
÷	ИПЗ	F Bx	÷	ИПС	+	ПС	XY	ИПД	+
ПД	ИПВ	Fx ≥ 0	08	FL0	06	FL2	03	ИПА	Fsin
/—/	П6	ИПА	Fcos	П5	ИПД	ИПС	1	ПП	74
С/П	ИПА	П6	ИП9	П5	F,	F,	ИП8	1	—
ПП	74	С/П	ИП8	ПЗ	F,	XY	FBx	ИП6	×
XY	ИП5	XY	×	FBx	F,	+	ИП5	XY	F,
×	XY	ИП6	×	—	FL3	76	B/O		

Структура программы

00—09: вызов из регистров памяти абсцисс  $y_k$  очередных узлов квадратурной формулы,

10—33: вычисление подынтегральной функции  $f(s) = e^{-s/(s+jy)^n}$  в узлах с коэффициентом 1/3, входящим в квадратурную формулу (см. (9.14), (9.8))

34—48: суммирование слагаемых по всем узлам, что дает приближенное значение интеграла  $S_n = \int_0^{\infty} f(s) ds$ ,

49—60: умножение  $S_n$  на  $e^{-iy}$ , результат равен  $E_n(z)$  при  $n = 1$ .

61—72: умножение предыдущего результата на  $z^{n-1}$  — получение  $E_n(z)$  при  $n \geq 2$ ,

73—97: подпрограмма  $n$ -кратного умножения на комплексное число, содержащееся в регистрах P5, P6.

Инструкция

1. Исходные данные: ( $y_1 = 8,6624682 \cdot 10^{-1} = P1$ ,  $y_2 = 4,2251865 \cdot 10^{-1} = P4$ ,  $y_3 = 2,666354 \cdot 10^{-1} = P7$ ,  $x = P9$ ,  $n = P8$ ),  $y = P6 = PA$ ,  $2N = P2$ .

2. Пуск 1: B/O C/П.

3. Результат:  $PX = \operatorname{Re} E_n(z)$ ,  $PY = \operatorname{Im} E_n(z)$  при  $n = 1$ . Для получения  $E_n(z)$  при  $n > 1$  необходимо произвести второй пуск, не меняя содержания регистров PX, PY после останова.

4. Пуск 2: C/П.

5. Результат:  $PX = \operatorname{Re} E_n(z)$ ,  $PY = \operatorname{Im} E_n(z)$ .

6. Регистры: рабочие P1, P4, P7 — P9; оперативные P0, P2, P3, P5, P6, PA — PD; свободные —.

7. Погрешность относительная меньше:

$$\begin{aligned} x > 0 & \quad x < 0 \\ 2 \cdot 10^{-3} \text{ при } |z| \geq 0,5, & \quad 5 \cdot 10^{-4} \text{ при } y \geq 1, \\ 1 \cdot 10^{-4} \text{ при } |z| \geq 1, & \quad 5 \cdot 10^{-5} \text{ при } y \geq 3. \\ 5 \cdot 10^{-6} \text{ при } |z| \geq 3, & \end{aligned}$$

Эти данные относятся к  $n = 1, 2$ , и  $2N = 12$ . При увеличении  $n$  погрешность возрастает. Увеличение  $2N$  практически не влияет на погрешность, так как при этом шаг не меняется (он равен 2), а расширяется интервал интегрирования.

8. Время счета  $t \approx 2N \{1 + (n-1)/2\}$  мин.

Примеры. При  $2N = 12$

$$E_4(2) = 0,025005643 / (0,0250228 [9]), \quad t \approx 27 \text{ мин};$$

$$E_1(0,5 + j0,2) = 0,49277201 - j0,22267009 (0,492769 - j0,223425 [9]), \quad t = 13 \text{ мин};$$

$$\begin{aligned} E_2(4 + j3) &= -2,6249806 \cdot 10^{-3} + 9,611974 \cdot 10^{-4} (-2,62498 \cdot 10^{-3} + \\ &+ 9,61204 \cdot 10^{-4} [9]), \quad t = 19 \text{ мин}; \\ E_2(-3 + j) &= -9,6940866 - j0,1934868 (-9,66121 - j0,21048 [9]), \quad t = 19 \text{ мин}. \end{aligned}$$

### 3.2. Интегральные синус и косинус. Интегральные гиперболические синус и косинус

Интегральный синус

$$\operatorname{Si}(z) = \int_0^z \frac{\sin t}{t} dt. \quad (3.20)$$

Интегральный косинус

$$\operatorname{Ci}(z) = \gamma + \ln z + \int_0^z \frac{\cos t - 1}{t} dt, \quad |\arg z| < \pi, \quad (3.21)$$

где постоянная Эйлера  $\gamma = 0,57721566 \dots$

Интегральный гиперболический синус

$$\operatorname{Shi}(z) = \int_0^z \frac{\operatorname{sh} t}{t} dt. \quad (3.22)$$

Интегральный гиперболический косинус

$$\operatorname{Chi}(z) = \gamma + \ln z + \int_0^z \frac{\operatorname{ch} t - 1}{t} dt, \quad |\arg z| < \pi. \quad (3.23)$$

$\operatorname{Si}(z)$  и  $\operatorname{Shi}(z)$  являются целыми функциями. Функции  $\operatorname{Ci}(z)$  и  $\operatorname{Chi}(z)$  однозначны и регулярны на плоскости  $z$ , разрезанной по отрицательной части действительной оси. Указанные особенности связаны с входящим в (3.21) и (3.23)  $\ln z$ , для которого нужна ветвь выбирается обычным образом.

Разложения в ряды указанных функций:

$$\operatorname{Si}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)(2n+1)!}; \quad (3.24)$$

$$\operatorname{Ci}(z) = \gamma + \ln z + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{2n(2n)!}; \quad (3.25)$$

$$\operatorname{Shi}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)(2n+1)!}; \quad (3.26)$$

$$\operatorname{Chi}(z) = \gamma + \ln z + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{2n}}{2n(2n)!}. \quad (3.27)$$

Ряды (3.26) и (3.27) при вещественных  $z$  знакопостоянны, и формулы можно использовать для вычисления  $\text{Shi}(x)$  и  $\text{Chi}(x)$  при достаточно больших  $x$  (§ 3.1). Разложения (3.24), (3.25) при вещественных  $z$ , а также все ряды для комплексного аргумента указанным свойством не обладают, и влияние погрешностей округления существенно ограничивает область их применения. В этих случаях предпочтительно *прямое численное интегрирование* (3.20) — (3.23). Преобразуем интегралы (3.20), (3.24) подстановкой  $t = zu$  к следующей сумме вещественных интегралов:

$$\text{Si}(z) = \int_0^1 \frac{\text{Re} \sin(zu)}{u} du + j \int_0^1 \frac{\text{Im} \sin(zu)}{u} du; \quad (3.20a)$$

$$\text{Ci}(z) = \gamma + \ln z + \int_0^1 \frac{\text{Re} \cos(zu) - 1}{u} du + j \int_0^1 \frac{\text{Im} \cos(zu)}{u} du. \quad (3.21a)$$

Расчет  $\text{Si}(z)$  и  $\text{Ci}(z)$  по указанным формулам реализован в программах 3.18, 3.19, базирующихся на квадратурных формулах Чебышева при  $n = 6$ . За основу бралась программа 10.13. Для нахождения  $\text{Shi}(z)$  и  $\text{Chi}(z)$  достаточно использовать формулы (3.31), связывающие эти функции с  $\text{Si}(z)$  и  $\text{Ci}(z)$ . Указанная связь учтена в программах 3.18, 3.19.

С целью уменьшения погрешностей округления при малых  $|z|$  целесообразно преобразовать разности  $(\cos t - 1)$  и  $(\text{ch } t - 1)$  в (3.21) и (3.23), переписав эти формулы в виде

$$\text{Ci}(z) = \gamma + \ln z - \int_0^z \frac{\sin^2(t/2)}{t/2} dt; \quad (3.28)$$

$$\text{Chi}(z) = \gamma + \ln z + \int_0^z \frac{\text{sh}^2(t/2)}{t/2} dt. \quad (3.29)$$

Численное интегрирование (3.28) при вещественных  $z$  реализовано в программе 3.15.

Для вычисления функций  $\text{Si}(x)$  и  $\text{Ci}(x)$  вещественного аргумента можно также использовать их связь с *интегральной показательной функцией* [5]:

$$\text{Ci}(x) = -\text{Re } E_1(jx); \quad \text{Si}(x) = \text{Im } E_1(jx) + \pi/2. \quad (3.30)$$

Соответствующий алгоритм оказывается достаточно эффективным, особенно для больших  $x$ , если применять разложение  $E_1(jx)$  в непрерывную дробь (ср. программы 3.9 и 3.10 для  $E_n(z)$ ). В данном случае  $n = 1$ , а аргумент чисто мнимый, что упрощает расчет (программа 3.20).

Нахождение сходных интегральных тригонометрических и гиперболических функций комплексного аргумента удобно объединить в общие программы, используя связь  $\text{Si}(z)$  с  $\text{Shi}(z)$  и  $\text{Ci}(z)$  с  $\text{Chi}(z)$ . Легко получить из определений (3.20) и (3.22):

$$\text{Shi}(z) = -j \text{Si}(jz) = \text{Im } \text{Si}(-y + jx) - j \text{Re } \text{Si}(-y + jx); \quad (3.31a)$$

$$\text{Chi}(z) = \text{Ci}(jz) + \ln z - \ln jz = \text{Ci}(jz) - j\pi/2 = \text{Re } \text{Ci}(-y + jx) + j[\text{Im } \text{Ci}(-y + jx) - \pi/2]. \quad (3.31b)$$

Отметим, что при вычислении  $\text{Ci}(z)$  по формуле (3.19) используется программа 1.32, в которой введено ограничение  $y = \text{Im } z > 0$ . Поэтому для  $\text{Ci}(z) = \text{Ci}(-y + jx)$  следует в (3.31b) полагать  $x > 0$ . В результате эта формула при-

менима для вычисления  $\text{Chi}(z)$ , лишь когда  $x > 0$ . Функцию  $\text{Chi}(z)$  при  $x < 0$  легко получить из соотношения [9]

$$\text{Chi}(-z) = \text{Chi}(z) - j\pi. \quad (3.32)$$

Сопоставление вычисленных значений  $\text{Si}(z)$ ,  $\text{Ci}(z)$ ,  $\text{Shi}(z)$ ,  $\text{Chi}(z)$  с табличными данными можно произвести на основе таблиц для  $E_1(z)$  с помощью формул

$$\text{Si}(z) = \pi/2 + j[E_1(-jz) - E_1(jz)]/2; \quad (3.33)$$

$$\text{Ci}(z) = -[E_1(jz) + E_1(-jz)]/2; \quad (3.34)$$

$$\text{Shi}(z) = [E_1(z) - E_1(-z)]/2 - j\pi/2; \quad (3.35)$$

$$\text{Chi}(z) = -[E_1(z) + E_1(-z)]/2 - j\pi/2. \quad (3.36)$$

Формулы (3.33), (3.34) применимы при  $|\arg z| < \pi/2$  [9], (3.35) и (3.36) — при  $-\pi < \arg z \leq 0$ .

**Программа 3.12.** Интегральный синус  $\text{Si}(x)$  вещественного аргумента. Разложение в ряд (3.24) по схеме Горнера,  $0 \leq x \leq 20$  (Повышение точности для  $x > 6$  — см. программу 3.20.)

ПС	Fx <sup>2</sup>	/—/	ПД	5	0	ПО	0	FВх	×
ИПД	×	ИПО	÷	FL0	16	ИПО	F1/x	+	FL0
08	ИПС	×	С/П						

#### Инструкция

1. Исходные данные:  $[x = \text{PX}]$ .
2. Пуск: В/О С/П.
3. Результат:  $\text{PX} = \text{Si}(x)$ ,  $\text{PC} = x$ .
4. Регистры: рабочие РС; оперативные Р0, РД; свободные Р1—РВ.
5. Погрешность относительная:

$x \leq$	6	10	13,5	15	20
$\delta \leq$	$1 \cdot 10^{-6}$	$1 \cdot 10^{-5}$	$1 \cdot 10^{-4}$	$1 \cdot 10^{-3}$	$5 \cdot 10^{-2}$

6. Время счета  $t \approx 1,5$  мин.

*Примеры.*  $\text{Si}(10) = 1,658337$  (1,6583476 [9]);  $\text{Si}(6) = 1,424688$  (1,4246876 [9]);  $\text{Si}(20) = 1,608094$  (1,5482417 [9]).

**Программа 3.13.** Интегральный косинус  $\text{Ci}(x)$  вещественного аргумента. Разложение в ряд (3.25) по схеме Горнера,  $0 < x \leq 10$ . Повышение точности для  $x > 5$  — см. программу 3.20.

ПС	Fx <sup>2</sup>	/—/	ПД	3	3	ПО	0	FВх	×
ИПД	×	ИПО	÷	FL0	16	ИПО	F1/x	+	FL0
08	ИПВ	—	ИПС	F1п	+	С/П			

#### Инструкция

1. Исходные данные:  $(1 - \gamma = 4,2278434 \cdot 10^{-1} = \text{PB})$ ,  $x = \text{PX}$ .
2. Пуск: В/О С/П.
3. Результат:  $\text{PX} = \text{Ci}(x)$ ,  $\text{PC} = x$ .
4. Регистры: рабочие РВ, РС; оперативные Р0, РД; свободные Р1—РВ.
5. Погрешность абсолютная меньше:  $5 \cdot 10^{-7}$  при  $x \leq 5$ ;  $1 \cdot 10^{-6}$  при  $x \leq 6$ ;  $1 \cdot 10^{-5}$  при  $x \leq 10$ .
6. Время счета  $t \approx 1$  мин.

Примеры.  $Ci(5) = -0,1900295$  ( $-0,19002975$ ),  $Ci(10) = -0,0454442$  ( $-0,0454564$ ).

**Программа 3.14.** Интегральный синус  $Si(x)$  вещественного аргумента. Интегрирование (3.20) методом Чебышева при  $n = 6$  (программа 10.13),  $x > 0$ . Число интервалов в составной квадратурной формуле задается в программе по формуле  $N = [3 + x/3]$ , где квадратные скобки означают округление до целого числа.

ИПС	3	÷	3	+	П2	КИП2	ИПС	ИП2	2
×	П2	÷	ПВ	0	ПД	КИП2	6	П0	КИП0
/—/	ПА	ИП2	+	ИПВ	×	F sin	F Bx	÷	ИПД
+	ПД	ИПА	$Fx \geq 0$	20	FL0	19	FL2	16	ИПД
ИПВ	×	3	÷	С/П					

#### Инструкция

1. Исходные данные: ( $y_1 = 8,6624682 \cdot 10^{-1} = P1$ ,  $y_2 = 4,2251865 \cdot 10^{-1} = P3$ ,  $y_3 = 2,666354 \cdot 10^{-1} = P5$ ,  $x = PC$ ).
2. Пуск: В/О С/П.
3. Результат:  $PX = Si(x)$ .
4. Регистры: рабочие P1, P3, P5, PC; оперативные P0, P2, PA, PB, PD; свободные P4, P6—P9.
5. Погрешность относительная меньше  $1 \cdot 10^{-6}$ .
6. Время счета  $t \approx (1 + x/4)$  мин.

#### Примеры.

$Si(2,9) = 1,8421901$  ( $1,84219019$  [9]),  $t = 1,5$  мин;

$Si(40) = 1,5869852$  ( $1,5869851$  [9]),  $t = 10$  мин.

**Программа 3.15.** Интегральный косинус вещественного аргумента  $Ci(x)$ . Интегрирование (3.28) методом Чебышева при  $n = 6$  (программа 10.13),  $x > 0$ . Число частных интервалов  $N$  в составной формуле Чебышева (10.14) задается программой по формуле  $N = [3 + x/3]$ , где квадратные скобки означают округление до ближайшего целого числа.

ИПС	3	÷	3	+	П2	КИП2	ИПС	ИП2	2
×	П2	÷	ПВ	0	ПД	КИП2	6	П0	КИП0
/—/	ПА	ИП2	+	ИПВ	×	2	÷	F1/x	F Bx
F sin	$Fx^2$	×	ИПД	+	ПД	ИПА	$Fx \geq 0$	20	FL0
19	FL2	16	ИПС	F ln	ИП9	+	ИПД	ИПВ	×
3	÷	—	С/П						

#### Инструкция

1. Исходные данные: ( $y_1 = 8,6624682 \cdot 10^{-1} = P1$ ,  $y_2 = 4,2251865 \cdot 10^{-1} = P3$ ,  $y_3 = 2,666354 \cdot 10^{-1} = P5$ ,  $\gamma = 5,7721566 \cdot 10^{-1} = P9$ ,  $x = PC$ ).
2. Пуск: В/О С/П.
3. Результат:  $PX = Ci(x)$ .
4. Регистры: рабочие P1, P3, P5, P9, PC; оперативные P0, P2, PB, PA, PD; свободные P4, P6—P8.
5. Погрешность абсолютная меньше  $2 \cdot 10^{-7}$ .
6. Время счета  $t \approx [1,5 + x/4]$  мин.

#### Примеры.

$Ci(0,1) = -1,7278684$  ( $-1,7278684$  [9]),  $t = 1,5$  мин;

$Ci(10) = -0,0454565$  ( $-0,045456433$  [9]),  $t = 4$  мин;

$Ci(40) = 0,0190199$  ( $0,0190199998$  [9]),  $t = 12$  мин.

**Программа 3.16.** Интегральный гиперболический синус  $Shi(x)$  вещественного аргумента. Разложение в ряд (3.26) с использованием схемы Горнера.  $0 \leq x \leq 230$ .

ПС	$Fx^2$	ПД	ИПС	4	+	П0	0	FVx	×
ИПД	×	ИП0	2	×	÷	FVx	1	—	F1/x
+	FL0	08	ИПС	×	С/П				

#### Инструкция

1. Исходные данные:  $[x = PX]$ .
2. Пуск: В/О С/П.
3. Результат:  $PX = Shi(x)$ ,  $PC = x$ .
4. Регистры: рабочие PC; оперативные P0, PD; свободные P1—PB.
5. Погрешность относительная  $5 \cdot 10^{-7} < \delta < 2x \cdot 10^{-8}$ .
6. Время счета  $t \approx (0,5 + x/12)$  мин.

#### Примеры.

$Shi(1) = 1,0572509$ ,  $t = 30$  с;  $Shi(10) = 1246,1139$ ,  $t = 1,5$  мин;

$Shi(100) = 1,3577728 \cdot 10^{41}$ ,  $t = 7$  мин.

**Программа 3.17.** Интегральный гиперболический косинус  $Chi(x)$  вещественного аргумента. Разложение в ряд (3.27) с использованием схемы Горнера,  $0 \leq x \leq 230$ .

ПС	$Fx^2$	ПД	ИПС	5	+	П0	0	ИП0	2
×	П1	F1/x	+	FVx	×	ИПД	×	КИП1	F,
ИП1	÷	FL0	08	ИПС	F ln	+	ИПВ	+	С/П

#### Инструкция

1. Исходные данные: ( $\gamma = 5,7721566 \cdot 10^{-1} = PB$ ),  $[x = PX]$ .
2. Пуск: В/О С/П.
3. Результат:  $PX = Chi(x)$ ,  $PC = x$ .
4. Регистры: рабочие PB, PC; оперативные P0, PD; свободные P1—PA.
5. Погрешность относительная  $5 \cdot 10^{-7} < \delta < 2x \cdot 10^{-8}$ .
6. Время счета  $t \approx (0,5 + x/12)$  мин.

#### Примеры.

$Chi(1) = 0,83786694$ ,  $t = 30$  с;  $Chi(10) = 1246,1144$ ,  $t = 1$  мин;  $Chi(200) = 1,8156107 \cdot 10^{84}$ ,  $t = 16$  мин.

**Программа 3.18.** Интегральный синус  $Si(z)$  и интегральный гиперболический синус  $Shi(z)$  комплексного аргумента  $z = x \times jy$ . Интегрирование (3.20а) с помощью квадратур Чебышева при  $n = 6$ . Значения  $Si(z)$  и  $Shi(z)$  вычисляются при раздельных пусках программы и различном вводе исходных данных (см. пп. 1, 3 инструкции). Число шагов интегрирования выбирается программой по формуле  $2N = 2[|z|/5 + 3]$ , где квадратные скобки означают округление до целого.

ИП6	Fx <sup>2</sup>	ИП7	Fx <sup>2</sup>	+	FV	5	÷	3	+
П2	КИП2	ИП2	2	×	П2	F1/x	П8	0	ПС
ПД	КИП2	6	П0	КИП0	/—/	ПА	ИП2	+	ИП8
×	ПВ	ИП6	×	П4	ИПВ	ИП7	×	ПВ	Fe <sup>x</sup>
↑	F1/x	ПВ	+	2	÷	↑	ИПВ	—	ИП4
Fcos	×	ХУ	ИП4	Fsin	×	ИПА	ИП2	+	3
×	ПВ	÷	ИПС	+	ПС	ХУ	ИПВ	÷	ИПД
+	ПД	ИПА	Fx <sup>≥0</sup>	25	FL0	24	FL2	21	С/П

#### Инструкция

1. Исходные данные: ( $y_1 = 8,6624682 \cdot 10^{-1} = P1$ ,  $y_2 = 4,2251865 \cdot 10^{-1} = P3$ ,  $y_3 = 2,666354 \cdot 10^{-1} = P5$ ); ввод аргумента  $z = x + jy$  различен для функций Si (z) и Shi (z) соответственно ( $x = P6$ ,  $y = P7$ ) и ( $-y = P6$ ,  $x = P7$ ).

2. Пуск: В/О С/П.

3. Результат: PC = Re Si (z), РД = Im Si (z) или РД = Re Shi (z), PC = — Im Shi (z).

4. Регистры: рабочие P1, P3, P5, P6, P7, PC, РД; оперативные P0, P2, P4, P8, PA, PB; свободные P9.

5. Погрешность относительная меньше  $1 \cdot 10^{-5}$ .

6. Время счета  $t \approx (4 + 0,4/|z|)$  мин.

Примеры.

Si (3 — j4) = 6,747994 + j3,4986618 (6,74799 + j3,49866),  $t \approx 7$  мин.

Значения в скобках найдены из табличных данных для  $E_1(4 + j3)$  и  $E_1(-4 + j3)$  [9] и далее по формуле (3.33).

Si (20 + j0) = 1,5482416 (1,5482417),  $t = 12$  мин.

Shi (20 + j0) = 12807779 (12807823),

Значения в скобках получены по программам 3.14, 3.16 для функций вещественного аргумента с погрешностью, не превышающей соответственно  $1 \cdot 10^{-6}$  и  $5 \cdot 10^{-7}$ .

**Программа 3.19.** Интегральный косинус Ci (z) и интегральный гиперболический косинус Chi (z) комплексного аргумента  $z = x + jy$  (3.31б),  $y > 0$  для Ci (z) и  $x > 0$  для Chi (z). Интегрирование (3.21а) по формулам Чебышева при  $n = 6$ . Число шагов интегрирования выбирается программой по формуле  $2N = 2(|z|/5 + 3)$ , где квадратные скобки означают округление до целого.

ИП6	↑	Fx <sup>2</sup>	ИП7	Fx <sup>2</sup>	+	FV	ПА	÷	Farccos
ПД	ИПА	Fln	ИП9	+	ПС	ИПА	5	÷	3
+	П2	КИП2	ИП2	2	×	П2	F1/x	П8	КИП2
6	П0	КИП0	/—/	ПА	ИП2	+	ИП8	×	ПВ
ИП6	×	П4	ИПВ	ИП7	×	ПВ	Fe <sup>x</sup>	F1/x	FBx
ПВ	+	2	÷	↑	ИПВ	—	ИП4	Fsin	×
ХУ	ИП4	Fcos	×	1	—	ИПА	ИП2	+	3
×	ПВ	÷	ИПС	+	ПС	ХУ	ИПВ	÷	ИПД
+	ПД	ИПА	Fx <sup>≥0</sup>	33	FL0	32	FL2	29	С/П

Значения Ci (z) и Chi (z) вычисляются при отдельных пусках программы и различном вводе исходных данных (пп. 1, 3 инструкции).

#### Инструкция

1. Исходные данные: ( $y_1 = 8,6624682 \cdot 10^{-1} = P1$ ,  $y_2 = 4,2251865 \cdot 10^{-1} = P3$ ,  $y_3 = 2,666354 \cdot 10^{-1} = P5$ ,  $\gamma = 5,7721566 \cdot 10^{-1} = P9$ ); ввод аргумента  $z = x + jy$  различен для функций Ci (z) и Chi (z): ( $x = P6$ ,  $y = P7$ ) и ( $-y = P6$ ,  $x = P7$ ) соответственно.

2. Пуск: В/О С/П.

3. Результат: для Ci (z) PC = Re Si (z), РД = Im Ci (z); для Chi (z) PC = Re Chi (z), РД = Im Chi (z) +  $\pi/2$ , т. е. Im Chi (z) = РД —  $\pi/2$ .

4. Регистры: рабочие P1, P3, P5 — P7, P9, PC РД; оперативные P0, P2, P4, P8, PA, PB; свободные —.

5. Погрешность относительная меньше:

$1 \cdot 10^{-5}$  при  $|z| \leq 5$ ,  $1 \cdot 10^{-4}$  при  $|z| \leq 20$ ,

$5 \cdot 10^{-5}$  при  $|z| \leq 10$ ,  $5 \cdot 10^{-4}$  при  $|z| \leq 40$ .

6. Время счета  $t \approx (4 + 0,4 |z|)$  мин.

Примеры.

Ci (1 + j3) = 3,9096723 — j1,4839555,  $t \approx 4,5$ ;

Ci (0,8 + j) = 0,88863224 + j0,48487663 (0,888632 + j0,484876),  $t = 4,5$  мин;

Chi (4 — j3) = —3,4957553 — j6,7467006 (—3,49575 — j6,74666),  $t = 6,5$  мин.

Значения в скобках получены по формулам (3.34) и (3.36) и табличным данным для  $E_1(1 + j0,8)$ ,  $E_1(-1 + j0,8)$ ,  $E_1(4 + j3)$  и  $E_2(-4 + j3)$  из [9].

Ci (40 + j0) = 0,01902625 (0,0190199998 [9]),  $t = 20$  мин;

Chi (40 + j0) = 3,0198058  $\cdot 10^{15}$  (3,0198565  $\cdot 10^{15}$ ),  $t = 20$  мин. Значение в скобках получено по программе 3.17 с погрешностью, меньшей  $1 \cdot 10^{-6}$ .

**Программа 3.20.** Интегральный синус Si(x) и косинус Ci(x) вещественного аргумента. Представление функций через  $E_1(jx)$  и разложение  $E_1(jx)$  в непрерывную дробь — формулы (3.30), (3.11), (3.13), (3.14),  $x \geq 0,5$ ; для малых  $x$  см. программы 3.12, 3.13. В программе задаются  $N = 15$  и  $A_N = 2 + j2$ .

1	5	П0	2	П7	ПП	49	1	+	П7
ХУ	ПП	49	П7	ХУ	ИП6	+	FL0	05	П0
ИП6	Fcos	П7	×	ХУ	ПА	ИП6	Fsin	П9	×
+	П8	ИП7	ИПА	×	ИП9	ИП0	×	—	П7
1	ПП	51	/—/	ХУ	1	Farcsin	+	С/П	П8
ИП0	ПА	ИП8	/—/	↑	Fx <sup>2</sup>	ИП7	Fx <sup>2</sup>	+	ИПА
÷	÷	ИП7	FBx	÷	В/О				

#### Инструкция

1. Исходные данные: ( $x = P6$ ).

2. Пуск: В/О С/П.

3. Результат: PX = Si (x), PY = Ci (x).

4. Регистры: рабочие P6; оперативные P0, P7 — PA; свободные P1 — P5, PB — РД.

5. Погрешность относительная для Si (x) и абсолютная для Ci (x):

$x \geq$		0,5	1	3
$\delta <$	Si (x)	$5 \cdot 10^{-4}$	$3 \cdot 10^{-5}$	$1 \cdot 10^{-6}$
$\Delta <$	Ci (x)	$1 \cdot 10^{-5}$	$2 \cdot 10^{-7}$	$5 \cdot 10^{-8}$



6. Время счета  $t \approx 4$  мин.

Примеры.

$Si(0,5) = 0,4929696$  (0,4931074),  $Ci(0,5) = -0,1777936$  ( $-0,17778408$ );

$Si(3) = 1,8486525$  (1,84865252),  $Ci(3) = 0,11962975$  (0,119629786);

$Si(100) = 1,5622254$  (1,5622254),  $Ci(100) = -5,1488101 \cdot 10^{-3}$

( $-5,1488106 \cdot 10^{-3}$ ).

### Указатель программ

Номер программы	Функция	Область определения	Число шагов	Число регистров памяти	Примечание
3.1	$Ei(x)$ $li(x)$	$x > 0$ $x > 1$	29	5	Непосредственное суммирование степенного ряда; аргумент $x$ вещественный
3.2	$Ei(x)$ $li(x)$	$x > 0$ $x > 1$	24	3	Суммирование степенного ряда по схеме Горнера
3.3	$E_1(x)$	$x \leq 5$	24	3	То же
3.4	$E_n(x)$	$x \leq 5, n=2,3,4, \dots$	40	6	
3.5	$E_1(z)$	$ z  \leq 30$ при $x \leq 0$ , $ z  \leq 5$ при $x > 0$	59	9	
3.6	$E_n(z)$	$ z  \leq 30$ при $n \leq 0$ , $ z  \leq 5$ при $x > 0$ , $n=2,3,4, \dots$	97	13	Суммирование степенного ряда и рекуррентная формула
3.7	$E_n(x)$	$x \geq 0,1$	38	4	Разложение в непрерывную дробь; аргумент $x$ вещественный. Число $N$ итераций вычисляется в программе
3.8	$E_n(x)$	$x \geq 0,5$	25	4	Разложение в непрерывную дробь; число итераций фиксировано
3.9	$E_n(z)$	$y \geq 0$	92	13	Разложение в непрерывную дробь, число $N$ итераций вычисляется в программе
3.10	$E_n(z)$	$y \geq 0$	74	11	Разложение в непрерывную дробь; число итераций задается таблицей
3.11	$E_n(z)$	$ z  \geq 0,5$ при $x > 0$ , $y \geq 1$ при $x < 0$	98	14	Вычисление несобственного интеграла
3.12	$Si(x)$	$0 \leq x \leq 20$	24	3	Аргумент $x$ вещественный
3.13	$Ci(x)$	$0 < x \leq 10$	27	4	То же

Окончание

Номер программы	Функция	Область определения	Число шагов	Число регистров памяти	Примечание
3.14	$Si(x)$	$x > 0$	45	9	Аргумент $x$ вещественный. Интегрирование методом Чебышева
3.15	$Ci(x)$	$x > 0$	54	10	То же
3.16	$Shi(x)$	$0 \leq x \leq 230$	26	3	Аргумент $x$ вещественный. Суммирование степенного ряда
3.17	$Chi(x)$	$0 \leq x \leq 230$	30	4	Интегрирование методом Чебышева
3.18	$Si(z)$ или $Shi(z)$	$\infty$	80	13	То же
3.19	$Ci(z)$ или $Chi(z)$	$y > 0$ для $Ci(z)$ , $x > 0$ для $Chi(z)$	90	14	То же
3.20	$Si(x), Ci(x)$	$x \geq 0,5$	66	6	Разложение в непрерывную дробь

## Глава 4

### Интеграл вероятности вещественного и комплексного аргументов и родственные ему функции

#### 4.1. Интеграл вероятности и его производная. Дополнительный интеграл вероятности. Кратные интегралы вероятности. Интеграл Досона

Интеграл вероятности определяется [6—9] как

$$\operatorname{erf} z = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-t^2} dt. \quad (4.1)$$

Дополнительный интеграл вероятности

$$\operatorname{erfc} z = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_z^\infty e^{-t^2} dt = 1 - \operatorname{erf} z. \quad (4.2)$$

В теории вероятностей под интегралом вероятности обычно [7,8] понимают функцию вещественного аргумента

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-t^2/2} dt. \quad (4.3)$$

В этом случае  $\operatorname{erf} x$  из (4.1) называют *функцией ошибок* [8]. Функция  $\Phi(x)$  имеет смысл вероятности события  $\{X \leq x\}$ , где  $X$  — случайная величина, нормально распределенная с единичной дисперсией  $\sigma$  и нулевым математическим ожиданием  $m$ . При произвольных  $m$  и  $\sigma$

$$\Phi_{m,\sigma}(x) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x \exp \left[ -\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2} \right] dt. \quad (4.4a)$$

Соответствующая *плотность вероятности*

$$p_{m,\sigma}(x) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \exp \left[ -\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2} \right]. \quad (4.4b)$$

Легко видеть, что

$$\Phi_{m,\sigma}(x) = \frac{1}{2} \left[ \operatorname{erf} \left( \frac{x-m}{\sigma \sqrt{2}} \right) + 1 \right]. \quad (4.5)$$

*Кратные интегралы вероятности*

$$i^n \operatorname{erfc} z = \int_z^{\infty} i^{n-1} \operatorname{erfc} t dt, \quad n=0, 1, 2, \dots \quad (4.6)$$

Здесь принимается

$$i^0 \operatorname{erfc} z = \operatorname{erfc} z, \quad i^{-1} \operatorname{erfc} z = 2e^{-z^2}/\sqrt{\pi}. \quad (4.7)$$

Для  $i^n \operatorname{erfc} z$  справедливы рекуррентные формулы

$$i^n \operatorname{erfc} z = -\frac{z}{n} i^{n-1} \operatorname{erfc} z + \frac{1}{2n} i^{n-2} \operatorname{erfc} z, \quad n=1, 2, 3, \dots \quad (4.8)$$

*Интеграл Досона* [5, 9]

$$F(x) = e^{-x^2} \int_0^x e^{t^2} dt \equiv e^{-x^2} \operatorname{Erfi} x. \quad (4.9)$$

$F(x)$  и  $\operatorname{erf} x$  связаны соотношением

$$F(x) = (-i \sqrt{\pi}/2) e^{-x^2} \operatorname{erf}(ix). \quad (4.10)$$

Функции комплексного переменного  $\operatorname{erf} z$ ,  $\operatorname{erfc} z$  являются целыми. Для них известны следующие представления в виде рядов и асимптотическое разложение:

$$\operatorname{erf} z = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{n! (2n+1)}; \quad (4.11)$$

$$\operatorname{erf} z = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-z^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n z^{2n+1}}{(2n+1)!!}; \quad (4.12)$$

$$\operatorname{erfc} z \approx \frac{e^{-z^2}}{z \sqrt{\pi}} \left[ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n-1)!!}{(2z^2)^n} \right], \quad |\arg z| < \frac{3\pi}{4}. \quad (4.13)$$

Экономичные алгоритмы вычисления рядов основываются на схеме Горнера, особенно выгодной при комплексном аргументе функций. Перепишем (4.11) — (4.13), используя схему Горнера:

$$\operatorname{erf} z \approx \frac{2z}{\sqrt{\pi}} \left[ \left[ \dots \left[ \left( \frac{-z^2}{N(2N+1)} + \frac{1}{2N-1} \right) \frac{(-z^2)}{N-1} + \frac{1}{2N-3} \right] \frac{(-z^2)}{N-2} + \dots + \frac{1}{3} \right] \frac{(-z^2)}{1} + 1 \right]; \quad (4.14)$$

$$\operatorname{erf} z \approx \frac{2z}{\sqrt{\pi}} e^{-z^2} \left[ \left[ \dots \left[ \left( \frac{2z^2}{2N+1} + 1 \right) \frac{2z^2}{2N-1} + 1 \right] \frac{2z^2}{2N-3} + \dots + 1 \right] \frac{2z^2}{3} + 1 \right]; \quad (4.15)$$

$$\operatorname{erfc} z \approx \frac{e^{-z^2}}{z \sqrt{\pi}} \left[ \left[ \dots \left[ \left( \frac{2N-1}{-2z^2} + 1 \right) \times \frac{(2N-3)}{(-2z^2)} + 1 \right] \frac{(2N-5)}{(-2z^2)} + \dots + 1 \right] \frac{1}{(-2z^2)} + 1 \right]. \quad (4.16)$$

В вещественной области ( $z = x$ ) целесообразно применять из разложений в ряд  $\operatorname{erf} z$  формулу (4.12) или соответственно (4.15). Этот ряд в отличие от (4.11) не является знакоперевающим при любом знаке  $x$ . Аналогичным свойством обладает разложение в ряд интеграла Досона (4.9) [5]

$$F(x) = e^{-x^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{n! (2n+1)}, \quad (4.17)$$

для которого схема Горнера имеет вид

$$F(x) = x e^{-x^2} \left[ \left[ \dots \left[ \left( \frac{x^2}{N(2N+1)} + \frac{1}{2N-1} \right) \times \frac{x^2}{N-1} + \frac{1}{2N-3} \right] \frac{x^2}{N-2} + \dots + \frac{1}{3} \right] \frac{x^2}{1} + 1 \right]. \quad (4.18a)$$

Напомним, что при использовании схемы Горнера для суммирования бесконечных рядов требуется задавать заранее (в отличие от прямого суммирования) число учитываемых членов ряда  $N$ . Естественно, что предпочтение следует отдавать минимальному  $N$ , которое в каждом конкретном случае по-разному зависит от допустимой погрешности результата и аргумента  $z$ . Сравнение (4.17) и (3.5) (интегральная показательная функция) позволяет использовать оценку погрешности округления (3.66) и числа членов ряда (3.66). Применительно к (4.17), (4.18) получаем следующие ориентировочные значения:

$$\delta \approx 2x^2 \cdot 10^{-8}, \quad x \gg 1; \quad (4.18b)$$

$$N \approx 12 + 2x^2. \quad (4.18b)$$

Эффективный алгоритм вычисления  $\operatorname{erf} cz$  и  $\operatorname{erf} z$  основан на разложении  $\operatorname{erfc} z$  в непрерывную дробь (см., например, [9]):

$$\operatorname{erfc} z = \frac{e^{-z^2}/\sqrt{\pi}}{z + \frac{1/2}{z + \frac{1}{z + \frac{3/2}{z + \dots}}}}, \quad \operatorname{Re} z > 0. \quad (4.19)$$

Используем для расчетов по (4.19) процедуру, описанную в гл. 2,3 (ср. формулы (2.25)—(2.47) и (3.13,) (3.14)). Обозначим через  $A_N$   $N$ -й остаток непрерывной дроби (4.19):

$$A_N(z) = + \frac{N/2}{z + \frac{(N+1)/2}{z + \frac{N+2/2}{z + \dots}}} \quad (4.20)$$

Из (4.20) следует рекуррентная формула

$$A_N = z + N/2A_{N+1} \quad (4.21)$$

Применяя (4.20) последовательно в направлении уменьшения  $N$ , получаем  $A_1$  и искомую функцию

$$\operatorname{erfc} z = e^{-z^2} / (A_1 \sqrt{\pi}) \quad (4.22)$$

Результат этой итерационной процедуры, как и в предыдущих случаях, слабо зависит от  $A_N$  при достаточно больших  $N$ . Для вещественного аргумента ориентировочно можно принять

$$N \approx 6 + (5/x)^2; \quad A_N \approx 5 \quad (4.23a)$$

(в этом случае при  $x > 0,25$  относительная погрешность  $\operatorname{erfc} x$  не превышает  $1 \cdot 10^{-6}$ ). Для комплексных  $z$

$$N \approx 20 + 25/|z|^2 \quad (4.23b)$$

Желательно также уточнить  $A_N$ . Применяя способ оценки  $A_N$ , использованный при выводе (2.466), получаем из (4.21), при  $N \gg z^2, 2$

$$A_N \approx z/2 + \sqrt{N/2} \quad (4.23b)$$

Эта формула достаточно проста и легко может быть включена в программу. Вычисления показывают, что ее учет существенно ускоряет сходимость итерационного процесса, особенно при малых  $\operatorname{Re} z$ , т. е. у границы области, где применимо разложение в непрерывную дробь (4.19).

Разложение (4.13) неприменимо вследствие ограничения  $|\arg z| < 3\pi/4$  в окрестности отрицательной полуоси и тем более при вещественных отрицательных  $z = x$ . Это относится и к (4.19) ( $\operatorname{Re} z > 0$ ). Здесь полезны следующие соотношения симметрии:

$$\operatorname{erf}(-z) = -\operatorname{erf} z; \quad (4.24)$$

$$\operatorname{erf} \bar{z} = \overline{\operatorname{erf} z}; \quad (4.25)$$

$$\operatorname{erfc}(-z) = 2 - \operatorname{erfc} z; \quad (4.26)$$

$$\operatorname{erfc} \bar{z} = \overline{\operatorname{erfc} z}. \quad (4.27)$$

Методы разложения в ряд и в непрерывную дробь при вещественных  $z = x$  дополняют друг друга. Первый из указанных методов практически неприменим для расчета  $\operatorname{erfc} x$  при  $x > 3$  из-за погрешностей округления, а также увеличения требуемого числа членов ряда и времени счета. Метод разложения в непрерывную дробь непригоден для малых  $x$  (примерно начиная с  $x = 0,3$ ) также из-за погрешностей округления и увеличения времени счета (ср. (4.22)). В связи с этим представляет интерес комбинированная программа, в которой до определенного значения  $x = x_1$  счет производится по формуле (4.15), а при  $x > x_1$  — по формулам разложения в непрерывную дробь (4.21), (4.22). Величина  $x_1$ , а также чис-

ла  $N$  членов ряда в (4.15) и итераций в (4.21) выбираются такие, чтобы обеспечить одинаковую точность и время счета. Баланс достигается при времени счета и относительной погрешности, меньших 1 мин и  $5 \cdot 10^{-7}$  во всей области  $x > 0$  (граничное значение  $x_1 \approx 1,4$ , число членов ряда 11 и число итераций 14).

Аналогичная методика используется в программе вычисления функции  $\Phi_{m,\sigma}(x)$  из (4.4a), хотя здесь для включения области  $x < 0$  требуется увеличить число членов ряда и соответственно время счета (см. программу 4.4).

Ситуация существенно усложняется при комплексных  $z$ . В частности, разложение  $\operatorname{erf} z$  (4.11) при  $|z| > 2$  неприемлемо в окрестности вещественной оси, а (4.12) — в окрестности мнимой оси (практически, когда  $|\arg z|$  переходит через  $\pi/4$ ). В этих случаях ряды в «возрастающей» степени становятся знакопеременными и влияние погрешностей округления сильно возрастает. Разложение в непрерывную дробь (4.19) не требует чрезмерного времени счета: начиная примерно с  $|z| = 1,8$ , но при  $\operatorname{Re} z > 0,5$ , так как в окрестности мнимой оси (т. е. у границы области применимости (4.19)) погрешности округления возрастают. Лишь при  $|z| = 4$  разложение (4.19) применимо для любых  $\operatorname{Re} z > 0$  с точностью не хуже  $2 \cdot 10^{-6}$  (относительная погрешность). Асимптотическое разложение (4.13) дает хорошие результаты начиная с  $|z| = 4$ . Отметим, что здесь погрешности округления минимальны на мнимой оси, где члены ряда имеют одинаковый знак. Программа, основанная на асимптотическом разложении, требует минимальное время счета (около 2 мин).

Таким образом, чтобы охватить всю плоскость, нужны практически все четыре формулы (4.11)—(4.13), (4.19). На рис. 4.1 показано разбиение первого квадранта на области, в каждой из которых указаны программы, дающие наилучшие (по точности и времени счета) или равноценные результаты. Здесь I — программа 4.7, основанная на формулах (4.12), (4.15); II — программа 4.8, использующая ряд (4.11) (схему Горнера (4.14)); III — программа 4.9 (разложение в непрерывную дробь (4.19)); IV — программа 4.10 (асимптотическое разложение (4.13) и схема Горнера (4.16)). Штриховая линия — граница области, где пригодна программа III; точки — граница для программы I, крестики — для программы II; непрерывная линия — граница области для программы IV.

Отметим, что указанные программы применимы без изменений в области  $y < 0$  ( $-\pi \leq \arg z \leq 0$ ). Разбиение этой области на участки, где должны использоваться разные программы I—IV, симметрично со схемой на рис. 4.1 относительно оси  $x = 0$ . Значения функций при  $|\arg z| > \pi/2$  легко находятся по формулам симметрии (4.24) — (4.27).

**Программа 4.1.** Интеграл вероятности  $\operatorname{erf} x$ , производная интеграла вероятности  $(\operatorname{erf} x)' = 2 \exp(-x^2)/\sqrt{\pi}$  вещественного аргумента. Разложение в ряд (4.12), (4.15). Для  $\operatorname{erf} x$   $|x| \leq 3,5$  (при  $|x| > 3,5$   $|\operatorname{erf} x| = 1$  с погрешностью, меньшей  $5 \cdot 10^{-7}$ ).

7	0	П0	ИПС	Fx <sup>2</sup>	2	×	ПД	/—/	Fe <sup>x</sup>
1	Farctg	÷	Fy <sup>—</sup>	ПВ	ИПС	×	1	ИП0	1
+	÷	ИПД	×	1	+	FL0	28	FL0	18
×	С/П								

#### Инструкция

1. Исходные данные:  $(x = \operatorname{PC})$ .
2. Пуск: В/О С/П.
3. Результат:  $PX = \operatorname{erf} x$ ,  $PB = (\operatorname{erf} x)'$ .
4. Регистры: рабочие PB, PC; оперативные P0, PD; свободные P1 — PA.
5. Погрешность относительная  $\operatorname{erf} x$  и  $(\operatorname{erf} x)'$  меньше  $5 \cdot 10^{-7}$ .
6. Время счета  $t \approx 2$  мин.

### Примеры.

$\operatorname{erf} 1,5 = 0,9661051$  ( $0,966105146$  [9]),  $(\operatorname{erf} 1,5)' = 0,11893029$  ( $0,118930289$  [9]);  
 $\operatorname{erf} (-3) = -0,99997774$  ( $-0,9999779$  [9]),  $[\operatorname{erf} (-3)]' = 1,3925306 \cdot 10^{-4}$   
 ( $1,3925305 \cdot 10^{-4}$  [9]).

**Программа 4.2.** Дополнительный интеграл вероятности  $\operatorname{erfc} x$ , интеграл вероятности  $\operatorname{erf} x$  вещественного аргумента. Разложение в непрерывную дробь (4.19) — (4.23) при  $x > 0$ ; при  $x < 0$  формулы симметрии (4.24), (4.26).

5	ИПС	÷	$Fx^2$	6	+	ПО	5	$F1/x$	ИПО
×	2	÷	ИПС	+	FL0	08	ИПС	$Fx^2$	$Fe^x$
×	$F\pi$	$F\gamma^-$	×	$F1/x$	ПД	/—/	1	+	С/П

### Инструкция

1. Исходные данные: ( $x = PC$ ).
2. Пуск: В/О С/П.
3. Результат:  $PX = \operatorname{erf} x$ ,  $PD = \operatorname{erfc} x$ .

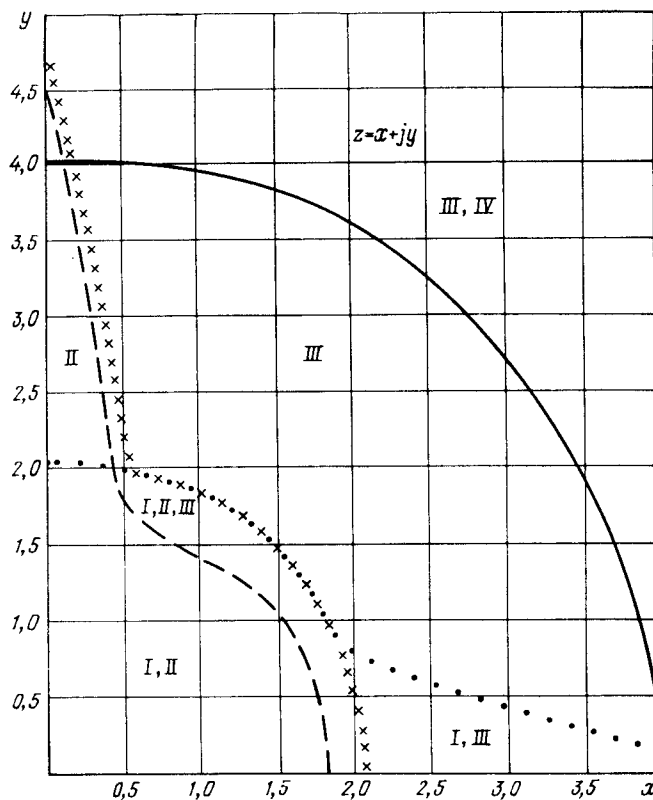


Рис. 4.1. Рабочие области четырех формул (4.11), (4.12), (4.13), (4.19) и основных на них программ вычисления интегралов вероятности

4. Регистры: рабочие PC, PD; оперативные P0; свободные P1 — PV.

5. Погрешность относительная меньше  $5 \cdot 10^{-7}$  при  $x > 0,3$ .

6. Время счета  $t \approx (0,3 + 1/x^2)$  мин. Согласно этой формуле, которая связана с числом  $N$  итераций, задаваемых в программе по формуле (4.23), время счета меньше 1 мин для всех  $x > 1,2$ . При  $x < 1$  время счета быстро возрастает и уже при  $x = 0,3$  превышает 10 мин. Очевидно, что для малых  $x$  предпочтительна программа 4.1, основанная на разложении  $\operatorname{erf} x$  в ряд. Представляет интерес комбинированная программа 4.3, в которой при малых  $x$  используется разложение в ряд, а при больших разложение в непрерывную дробь. Отметим, что для  $\operatorname{erf} x$  существенна только область  $|x| < 4$ , вне которой  $\operatorname{erf} x$  в пределах точности ПМК не отличается от  $\pm 1$ .

### Примеры.

$\operatorname{erfc} 10 = 2,0884864 \cdot 10^{-45}$  ( $2,0884863 \cdot 10^{-45}$  [9]),  $t = 20$  с,  $\operatorname{erf} 10 = 1$ ;

$\operatorname{erfc} 2 = 4,6777349 \cdot 10^{-3}$  ( $4,6777358 \cdot 10^{-3}$  [9]),  $t = 30$  с,

$\operatorname{erf} 2 = 0,9953223$  ( $0,99532227$  [9]);

$\operatorname{erfc} 0,5 = 0,47950035$ ,  $t = 4$  мин,  $\operatorname{erf} 0,5 = 0,5204997$  ( $0,520499878$  [9]).

**Программа 4.3.** Интеграл вероятности  $\operatorname{erf} x$ , дополнительный интеграл вероятности  $\operatorname{erfc} x$ , производная интеграла вероятности  $(\operatorname{erf} x)' = 2 \exp(-x^2)/\sqrt{\pi}$  вещественного аргумента  $x \geq 0$ . Разложение в ряд при  $x < \ln 4$  (4.12), (4.15) и разложение в непрерывную дробь при  $x \geq \ln 4$  (4.19) — (4.22), при  $x < 0$  используются (4.24), (4.26).

PC	$Fx^2$	2	×	ПД	/—/	$Fe^x$	1	$\operatorname{Farctg}$	÷
$F\gamma^-$	PB	ИПС	4	$F\ln$	—	$Fx \geq 0$	41	1	4
ПО	5	$F1/x$	ИПО	×	2	÷	ИПС	+	FL0
22	$F1/x$	2	÷	ИПВ	×	ПА	/—/	1	+
С/П	2	2	ПО	ИПВ	ИПС	×	1	ИПО	1
+	÷	ИПД	×	1	+	FL0	58	FL0	48
×	1	XY	—	ПА	FBx	С/П			

### Инструкция

1. Исходные данные:  $x = PX$ .

2. Пуск: В/О С/П.

3. Результат:  $PX = \operatorname{erf} x$ ,  $PA = \operatorname{erfc} x$ ,  $PB = (\operatorname{erf} x)'$ .

4. Регистры: рабочие PA, PB; оперативные P0, PC, PD; свободные P1 — PV.

5. Погрешность относительная при любых  $x \geq 0$  меньше  $5 \cdot 10^{-7}$ .

6. Время счета  $t \approx 50$  с.

### Примеры.

$\operatorname{erf} 0,25 = 0,27632637$  ( $0,27632639$  [9]),  $\operatorname{erfc} 0,25 = 0,7236736$ ,

$(\operatorname{erf} 0,25)' = 1,0600141$  ( $1,06001413$  [9]);

$\operatorname{erf} 1,8 = 0,9890905$  ( $0,989090502$  [9]),  $\operatorname{erfc} 1,8 = 0,010909497$ ,

$(\operatorname{erf} 1,8)' = 0,044191724$  ( $0,0441917233$  [9]);

$\operatorname{erf} 10 = 1$ ,  $\operatorname{erfc} 10 = 2,0884864 \cdot 10^{-45}$  ( $2,0884863 \cdot 10^{-45}$  [9]),

$(\operatorname{erf} 10)' = 4,1976539 \cdot 10^{-44}$  ( $4,1976562 \cdot 10^{-44}$  [9]).

**Программа 4.4.** Интеграл вероятности  $\Phi_{m,\sigma}(x)$  и плотность вероятности  $p_{m,\sigma}(x)$  как функции вещественного аргумента  $x$ , математического ожидания  $m$  и дисперсии  $\sigma$  (4.4). Разложение в ряд и в непрерывную дробь,  $-9 \cdot 10^{99} \leq x \leq 9 \cdot 10^{99}$ .

ИП8	ИПА	—	ИП9	÷	ПС	$Fx^2$	ПД	/—/	$Fe^x$
$F\pi$	÷	2	÷	$F\sqrt{}$	ИП9	÷	ПВ	ИПС	7
$Fln$	÷	$Fx \geq 0$	57	ИПС	5	—	$Fx < 0$	55	7
0	И0	ИПВ	ИПС	>	ИП9	>	1	ИП0	1
÷	÷	ИПД	×	1	÷	$FL0$	48	$FL0$	38
×	2	$F1/x$	+	С/П	1	С/П	1	4	П0
ИПД	2	÷	$F\sqrt{}$	ПС	5	$F1/x$	ИП0	×	2
÷	ИПС	+	$FL0$	66	$F1/x$	ИПВ	×	2	$F\sqrt{}$
÷	ИП9	×	С/П						

Структура программы

00—17: вычисление  $p_{m,\sigma}(x)$ ,

18—54: вычисление  $\Phi_{m,\sigma}(x)$  в области  $-\ln 7 \leq (x-m)/\sigma < 5$  из разложения в ряд ((4.5), (4.15) при  $N=70$ ),

57—83: вычисление  $\Phi_{m,\sigma}(x)$  в области  $(x-m)/\sigma < -\ln 7$  из разложения в непрерывную дробь ((4.21), (4.22) при  $N=14$  и  $A_N=5$ ). При этом используется соотношение  $2\Phi_{m,\sigma}(x) = \operatorname{erfc}[(m-x)/(\sigma\sqrt{2})]$ , которое согласно (4.5), (4.24), (4.2) имеет место при  $(x-m)/\sigma < 0$ .

В программе полагается  $\Phi_{m,\sigma}(x) = 1$  при  $(x-m)/\sigma \geq 5$  (адреса команд 24—28, 55, 56).

**Инструкция**

1. Исходные данные:  $(x = P8, \sigma = P9, m = PA)$ .
2. Пуск: В/О С/П.
3. Результат:  $PX = \Phi_{m,\sigma}(x)$ ,  $PB = p_{m,\sigma}(x)$ .
4. Регистры: рабочие  $P8 - PB$ ; оперативные  $P0, PC, PD$ ; свободные  $P1 - P7$ .
5. Погрешность относительная меньше  $5 \cdot 10^{-7}$ .
6. Время счета:  $t \approx 1$  мин при  $(x-m)/\sigma < -\ln 7 \approx -2$ ,  $t \approx 2$  мин при  $(x-m)/\sigma > -\ln 7$ ,  $t \approx 15$  с при  $(x-m)/\sigma > 5$ .

**Примеры.**

$$\Phi_{6,2}(1,0502526) = 6,6641644 \cdot 10^{-3} \quad (6,6641645 \cdot 10^{-3}), \quad t = 1 \text{ мин},$$

$$p_{6,2}(1,0502526) = 9,32939 \cdot 10^{-3} \quad (9,3293901 \cdot 10^{-3}),$$

$$\Phi_{6,2}(8,8284271) = 0,92135034 \quad (0,9213504), \quad t = 2 \text{ мин},$$

$$p_{6,2}(8,8284271) = 7,3381335 \cdot 10^{-2} \quad (7,3381332 \cdot 10^{-2}).$$

Числа в скобках найдены из табличных значений  $\operatorname{erf} x$  в [9].

**Программа 4.5.** Кратные интегралы вероятности  $i^n \operatorname{erfc} x$  вещественного аргумента, интеграл вероятности  $\operatorname{erf} x$ , дополнительный интеграл вероятности  $\operatorname{erfc} x$ , производная интеграла вероятности  $(\operatorname{erf} x)' = 2 \exp(-x^2)/\sqrt{\pi}$ ,  $n = 1, 2, \dots, x \geq 0$ .

ИПС	$Fx^2$	2	×	ПД	/—/	$Fe^x$	1	$\operatorname{Farctg}$	÷
$F\sqrt{}$	ПВ	ИПС	1	—	$Fx \geq 0$	42	3	0	П0
5	$F1/x$	ИП0	×	2	÷	ИПС	÷	$FL0$	21
$F1/x$	2	÷	ИПВ	×	ПА	/—/	1	+	П9
БП	67	2	2	П0	ИПВ	ИПС	×	1	ИП0
1	+	÷	ИПД	×	1	+	$FL0$	59	$FL0$
49	×	П9	1	XY	—	ПА	0	П6	ИП7
П0	ИПА	ПД	ИПВ	П8	КИП6	ИП8	2	÷	ИПД
П8	ИПС	×	—	ИП6	÷	ПД	$FL0$	75	С/П
БП	75								

Структура программы

00—11: вычисление  $(\operatorname{erf} x)'$ ,

17—39: вычисление  $\operatorname{erfc} x$  и  $\operatorname{erf} x$  в области  $x \geq 1$  разложением в непрерывную дробь ((4.21), (4.22) при  $N=30$ ,  $A_N=5$ ),

42—66: вычисление  $\operatorname{erf} x$  и  $\operatorname{erfc} x$  в области  $x < 1$  разложением в ряд ((4.15) (4.2) при  $N=22$ ),

67—89: вычисление  $i^n \operatorname{erfc} x$  по рекуррентной формуле (4.8).

**Инструкция**

1. Исходные данные:  $(x = PC, n = P7)$ .
2. Пуск: основной В/О С/П; дополнительные пуски С/П, применяются при необходимости получения следующих по порядку интегралов  $i^{n+1} \operatorname{erfc} x$ ,  $i^{n+2} \operatorname{erfc} x, \dots$  при том же значении аргумента. В паузе перед дополнительными пусками нельзя нажимать клавишу ПП и любую из клавиш ШГ, а также менять содержимое регистров  $P0, P6, P8, PC, PD$ .

3. Результат: после основного пуска  $PX = PD = i^n \operatorname{erfc} x$ ,  $P8 = i^{n-1} \times \operatorname{erfc} x$ ,  $P9 = \operatorname{erf} x$ ,  $PA = \operatorname{erfc} x$ ,  $PB = (\operatorname{erf} x)'$ ,  $P6 = n$  (порядок кратности интеграла  $i^n \operatorname{erfc} x$ , значение которого находится в  $PD$ ); после  $k$ -го дополнительного пуска  $PX = PD = i^{n+k} \operatorname{erfc} x$ ,  $P8 = i^{n+k-1} \operatorname{erfc} x$ ,  $P6 = n + k$ . Содержимое регистров  $P9, PA, PB$  не изменяется при дополнительных пусках.

4. Регистры: рабочие  $P0, P6 - PD$ ; оперативные — свободные  $P1 - P5$ .

5. Погрешность  $i^n \operatorname{erfc} x$  определяется исключительно ошибками округления при использовании рекуррентной формулы (4.8), которая неустойчива при изменении  $n$  в сторону увеличения. Неустойчивость усиливается с увеличением  $x$  в области  $x > 1$ . Таким образом, погрешность существенно нарастает при увеличении  $x$  и  $n$ . Сопоставление результатов вычислений с табличными данными (см., например, [9]) показывает, что рассматриваемый алгоритм все же применим в области  $x \leq 5$ ,  $n \leq 11$ . Для оценки относительной погрешности  $i^n \operatorname{erfc} x$  при  $nx \gg 1$  можно использовать следующую формулу:  $\delta \approx 1 \cdot 10^{-k}$ , где  $k \approx [1 + 30/nx]$ , квадратная скобка означает округление до ближайшего целого.

6. Время счета для основного пуска при любых  $n$  и  $x$  из указанной в предыдущем пункте области (см. примеры) 1—3 мин; при дополнительном пуске 6 с.

**Примеры.**

$$\operatorname{erf} 0,9 = 0,79690822 \quad (0,796908212),$$

$$\operatorname{erfc} 0,9 = 0,2030918 \quad (0,2030918) \quad (\operatorname{erf} 0,9)' = 0,5019686 \quad (0,50196857);$$

$$i^5 \operatorname{erfc} 0,9 = 2,9874208 \cdot 10^{-4} \quad (2,9874214 \cdot 10^{-4}), \quad t = 1,5 \text{ мин};$$

$$i^{11} \operatorname{erfc} 0,9 = 1,4571469 \cdot 10^{-8} \quad (1,4571607 \cdot 10^{-8}), \quad t = 2 \text{ мин};$$

$$\operatorname{erf} 2,5 = 0,9995931 \quad (0,9995931), \quad \operatorname{erfc} 2,5 = 4,0695198 \cdot 10^{-4} \quad (4,0695203 \cdot 10^{-4}),$$

$$(\operatorname{erf} 2,5)' = 2,1782841 \cdot 10^{-3} \quad (2,1782842 \cdot 10^{-3});$$

$$i^4 \operatorname{erfc} 2,5 = 2,9771545 \cdot 10^{-7} \quad (2,98765625 \cdot 10^{-7}), \quad t = 2 \text{ мин};$$

$$i^{10} \operatorname{erfc} 2,5 = 2,711015 \cdot 10^{-12} \quad (2,045874 \cdot 10^{-12}) \quad t = 2,5 \text{ мин};$$

$$(\operatorname{erf} 5,0)' = 1,5670865 \cdot 10^{-11} \quad (1,5670866 \cdot 10^{-11}),$$

$$\operatorname{erfc} 5,0 = 1,5374596 \cdot 10^{-12} \quad (1,5374596 \cdot 10^{-12});$$

$$i^2 \operatorname{erfc} 5,0 = 1,402865 \cdot 10^{-14} \quad (1,4029225 \cdot 10^{-14});$$

$$i^4 \operatorname{erfc} 5,0 = 1,1858125 \cdot 10^{-16} \quad (1,198725 \cdot 10^{-16}), \quad t = 2 \text{ мин}.$$

Числа в скобках относятся к табличным данным из [9].

**Программа 4.6.** Интеграл Досона  $F(x)$  (4.9). Разложение в ряд (4.17) по схеме Горнера (4.18а) и формула (4.18в).

ПС	$Fx^2$	ПД	2	×	1	2	+	ПО	ИПС
ИПД	$Fe^x$	÷	0	ИПД	×	ИПО	÷	ИПО	2
×	1	—	$F1/x$	+	$FL0$	14	×	$C/P$	

#### Инструкция

1. Исходные данные:  $[x = PX]$
2. Пуск: В/О С/П.
3. Результат:  $PX = F(x)$ ,  $PC = x$ .
4. Регистры: рабочие РС; оперативные Р0, РД; свободные Р1 — РВ.
5. Погрешность относительная (ср. (4.186))  $\delta \approx 2x^2 \cdot 10^{-8}$ ,  $x \gg 1$ .
6. Время счета  $t \approx (0,7 + x^2/7)$  мин.

#### Примеры.

$$F(1) = 0,53807948 \quad (0,5380795 \text{ [9]}), \quad t = 50 \text{ с};$$

$$F(2,5) = 0,22308372 \quad (0,22308372 \text{ [9]}), \quad t = 5 \text{ мин};$$

$$F(10) = 0,050253732 \quad (0,0502538471 \text{ [9]}), \quad t = 15 \text{ мин}.$$

**Программа 4.7.** Интеграл вероятности  $\operatorname{erf} z$ , производная интеграла вероятности  $(\operatorname{erf} z)'$  комплексного аргумента  $z = x + jy$ . Разложение в ряд (4.12) по схеме Горнера (4.15),  $|z| \leq 3$  для  $\operatorname{erf} z$ .

ИП7	ПВ	ИП6	ПА	ПП	73	ПА	/—/	1	$\operatorname{Farctg}$
$Fy'$	$Fln$	—	$Fe^x$	XY	ПВ	/—/	$Fsin$	XY	×
П9	$FBx$	ИПВ	$Fcos$	×	П8	1	2	ИП6	$Fx^2$
ИП7	$Fx^2$	+	2	×	+	ПО	0	$Fл$	ИПО
2	×	1	+	2	÷	ПД	÷	XY	ИПД
÷	XY	ПП	73	1	+	$FL0$	39	ПА	XY
ПВ	ИП7	ИП6	ПП	73	ПА	XY	ПВ	ИП9	ИП8
ПП	73	С/П	ПС	ИПВ	×	XY	ПД	ИПА	×
+	ИПС	ИПА	×	ИПД	ИПВ	×	—	В/О	

#### Структура программы

- 00 — 25: вычисление  $(\operatorname{erf} z)' = (2/\sqrt{\pi})e^{-z^2}$ ,
- 26 — 60: вычисление суммы  $\frac{1}{z} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} z^{2n-1}}{(2n-1)!}$  в (4.12) по схеме Горнера (выражение в квадратных скобках (4.15)) и занесение результата в РА, РВ,
- 61 — 72: окончательный расчет  $\operatorname{erf} z$  умножением суммы на  $z$  и на  $(\operatorname{erf} z)'$ ,
- 73 — 88: подпрограмма перемножения комплексных чисел.

#### Инструкция

1. Исходные данные:  $(x = P6, y = P7)$ .
2. Пуск: В/О С/П. Для получения только  $(\operatorname{erf} z)'$  можно остановить счет примерно через 30 с после пуска.

3. Результат:  $PX = \operatorname{Re} \operatorname{erf} z$ ,  $PY = \operatorname{Im} \operatorname{erf} z$ ,  $P8 = \operatorname{Re} (\operatorname{erf} z)'$ ,  $P9 = \operatorname{Im} (\operatorname{erf} z)'$ .

4. Регистры: рабочие Р6 — Р9; оперативные Р0, РА — РД; свободные Р1 — Р5.

5. Погрешность относительная  $\operatorname{erf} z$  меньше:

$$1 \cdot 10^{-3} \text{ при } |z| \leq 3, \quad |\arg z| \leq \pi;$$

$$4 \cdot 10^{-4} \text{ при } |z| \leq 3, \quad |\arg z| \leq \pi/4;$$

$$2 \cdot 10^{-6} \text{ при } |z| \leq 2, \quad |\arg z| \leq \pi.$$

Относительная погрешность  $(\operatorname{erf} z)'$  при произвольных  $z$  не превышает  $5 \cdot 10^{-7}$ .

6. Время счета  $t = (3 + |z|^2/3)$  мин.

#### Примеры.

$$\operatorname{erf} (0,1 + j0,8) = 0,21237732 + j1,1216728 \quad (0,212377 + j1,12167);$$

$$[\operatorname{erf} (0,1 + j0,8)]' = 2,0915958 - j0,33754058;$$

$$\operatorname{erf} (2,1 - j2,1) = 1,1874921 + j2,37166 \cdot 10^{-2} \quad (1,18709 + j2,36668 \cdot 10^{-2}),$$

$t = 4$  мин;

$$[\operatorname{erf} (2,1 - j2,1)]' = -0,92823684 + j0,64157307.$$

Числа в скобках взяты из таблиц интеграла вероятности комплексного аргумента в [9].

**Программа 4.8.** Интеграл вероятности  $\operatorname{erf} z$ , производная интеграла вероятности  $(\operatorname{erf} z)'$  комплексного аргумента  $z = x + jy$ . Разложение в ряд (4.11) по схеме Горнера (4.14),  $|z| \leq 3$ .

ИП7	ПВ	ИП6	ПА	ПП	69	/—/	ПА	1	$\operatorname{Farctg}$
$Fy'$	П5	$Fln$	—	$Fe^x$	XY	/—/	ПВ	$Fsin$	XY
×	П9	$FBx$	ИПВ	$Fcos$	×	П8	1	2	ИП6
$Fx^2$	ИП7	$Fx^2$	+	2	×	+	ПО	0	$Fл$
ИПО	÷	XY	ИПО	÷	XY	ПП	69	ИПО	2
×	1	—	$F1/x$	+	$FL0$	40	ПА	XY	ПВ
ИП7	ИП5	÷	ИП6	ИП5	÷	ПП	69	С/П	ПС
ИПВ	×	XY	ПД	ИПА	×	+	ИПС	ИПА	×
ИПД	ИПВ	×	—	В/О					

#### Структура программы

00—25: вычисление  $(\operatorname{erf} z)' = 2e^{-z^2}/\sqrt{\pi}$ ,

26—59: вычисление суммы  $\frac{1}{z} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} z^{2n-1}}{(2n-1)!}$  в (4.11) и занесение ее в РА, РВ (вещественную и мнимую части соответственно),

60—68: окончательный расчет  $\operatorname{erf} z$  умножением  $\sum$  на  $2z/\sqrt{\pi}$ ,

69—84: подпрограмма перемножения комплексных чисел.

#### Инструкция

1. Исходные данные:  $(x = P6, y = P7)$ .
2. Пуск: В/О С/П; для получения только  $(\operatorname{erf} z)'$  можно остановить счет примерно через 30 с после пуска.
3. Результат:  $PX = \operatorname{Re} \operatorname{erf} z$ ,  $PY = \operatorname{Im} \operatorname{erf} z$ ,  $P8 = \operatorname{Re} (\operatorname{erf} z)'$ ,  $P9 = \operatorname{Im} (\operatorname{erf} z)'$ .
4. Регистры: рабочие Р6 — Р9; оперативные Р0, Р5, РА — РД; свободные Р1 — Р4.

5. Погрешность относительная  $\operatorname{erf} z$  меньше:

$2 \cdot 10^{-6}$  при  $\operatorname{Re} z = 0$ ;

$3 \cdot 10^{-3}$  при  $|z| \leq 3$ ,  $\pi/4 \leq |\arg z| \leq 3\pi/4$ ;

$2 \cdot 10^{-5}$  при  $|z| \leq 3$ ,  $0,4\pi \leq |\arg z| \leq 0,6\pi$ ;

$2 \cdot 10^{-6}$  при  $|z| \leq 2$ ,  $|\arg z| \leq \pi$ .

Относительная погрешность  $(\operatorname{erf} z)'$  меньше  $5 \cdot 10^{-7}$  при произвольных  $z$ .

6. Время счета  $t \approx (8 + |z|^2/3)$  мин.

Примеры.

$\operatorname{erf}(j5) = 0 + j8,2982722 \cdot 10^9$  ( $0 + j8,29825 \cdot 10^9$  [8]),  $t = 8$  мин;

$\operatorname{erf}(2,1 - j2,1) = 1,1892435 + j2,581386 \cdot 10^{-2}$  ( $1,18709 +$

$+ j2,3668 \cdot 10^{-2}$  [9]),  $t = 5,5$  мин;

$[\operatorname{erf}(2,1 - j2,1)]' = -0,92823684 + j0,64157307$ ;

$\operatorname{erf}(1 + j2,8) = -161,54765 + j88,61866$  ( $-161,550 + j88,6185$  [8]).

**Программа 4.9.** Дополнительный интеграл вероятности  $\operatorname{erfc} z$ , производная интеграла вероятности  $(\operatorname{erf} z)'$  комплексного аргумента  $z = x + jy$ . Разложение в непрерывную дробь (4.19), (4.21), (4.22), (4.23в) при  $\operatorname{Re} z \geq 0$ , при  $\operatorname{Re} z < 0$  формула симметрии (4.26).

ИП7	ПВ	ИП6	ПА	ПП	53	$\operatorname{Fe}^x$	1	$\operatorname{Farctg}$	$F\sqrt{-}$
$\times$	ХУ	ПД	/—/	$\operatorname{Fsin}$	ХУ	$\div$	ПВ	$F Bx$	ИПД
$F \cos$	ХУ	$\div$	ПА	2	7	П0	2	$\div$	$F\sqrt{-}$
ИП6	2	$\div$	+	ПД	ИП7	2	$\div$	ПП	69
ИП6	+	ПД	ХУ	ИП7	+	FL0	38	ПП	69
ПП	53	С/П	ПС	ИПВ	$\times$	ХУ	ПД	ИПА	$\times$
+	ИПА	ИПС	$\times$	ИПВ	ИПД	$\times$	—	В/О	/—/
$\uparrow$	$Fx^2$	ИПД	$Fx^2$	+	ИП0	2	$\div$	$\div$	$\div$
ИПД	$F Bx$	$\div$	В/О						

Структура программы

00—23: вычисление  $(\operatorname{erf} z)' = 2e^{-z^2}/\sqrt{\pi}$ ,

24—37: задание  $N = 27$  и  $A_N$  по формуле (4.23 в),

38—52: итерационная процедура (4.21) и вычисление  $\operatorname{erfc} z$  по формуле (4.22),

53—68: подпрограмма перемножения комплексных чисел,

69—83: подпрограмма вычисления обратной величины комплексного аргумента  $a_1 + ja_2$ , деленного на произвольное число  $K/2$ , где  $K$  — в Р0,  $a_1$  — в РД,  $a_2$  — в РХ.

Инструкция

1. Исходные данные: ( $x = P6, y = P7$ ).

2. Пуск: В/О С/П.

3. Результат:  $PX = \operatorname{Re} \operatorname{erfc} z$ ,  $PY = \operatorname{Im} \operatorname{erfc} z$ ,  $PA = \operatorname{Re} (\operatorname{erf} z)'$ ,  $PB = \operatorname{Im} (\operatorname{erf} z)'$ ,

4. Регистры: рабочие Р6, Р7, РА, РВ; оперативные Р0, РС, РД; свободные Р1 — Р5, Р8, Р9.

5. Погрешность относительная функции  $\operatorname{erfc} z$  при  $|z| \geq 1,8$ ,  $\operatorname{Re} z \geq 0,5$  меньше  $2 \cdot 10^{-6}$ , а  $(\operatorname{erf} z)'$  меньше  $5 \cdot 10^{-7}$  при произвольных  $z$ . Указанная погрешность  $\operatorname{erfc} z$  сохраняется и при  $\operatorname{Re} z < 0,5$ , если  $|\operatorname{Im} z| > 4$ .

6. Время счета  $t \approx 4,5$  мин. При получении только  $(\operatorname{erf} z)'$  можно остановить счет примерно через 30 с после пуска.

Примеры.

$\operatorname{erfc}(2 - j1,5) = 3,6382421 \cdot 10^{-2} + j1,1003376 \cdot 10^{-2}$  ( $3,63824 \cdot 10^{-2} +$   
 $+ j1,10033 \cdot 10^{-2}$  [9]);

$[\operatorname{erf}(2 - j1,5)]' = 0,1882730 - j0,054788587$ ;

$\operatorname{erfc}(0,5 + j3,9) = 271294,47 + j379173,28$  ( $271294 + j379172$  [9]);

$\operatorname{erf}(3 + j0,2) = 7,004280 \cdot 10^{-6} - j2,185811 \cdot 10^{-5}$  (все цифры верные).

**Программа 4.10.** Дополнительный интеграл вероятности  $\operatorname{erfc} z$ , производная интеграла вероятности  $(\operatorname{erf} z)'$  комплексного аргумента  $z = x + jy$ . Асимптотическое разложение (4.13), (4.16),  $|z| \geq 3$ .

ИП7	ПВ	ИП6	ПА	ПП	77	$\operatorname{Fe}^x$	FL	$F\sqrt{-}$	$\times$
ИП5	/—/	$\operatorname{Fsin}$	ХУ	$\div$	П9	$F Bx$	ИП5	$F \cos$	ХУ
$\div$	П8	С/П	ИП7	/—/	$\uparrow$	$Fx^2$	ИП6	$Fx^2$	+
$\div$	ПВ	ИП6	$F Bx$	$\div$	ПА	ИП9	ИП8	ПП	77
П8	ХУ	П9	ИПВ	ИПА	ПП	77	ПА	ХУ	ПВ
9	П0	0	П5	2	$F1/x$	ИП0	—	$\times$	$F Bx$
ИП5	$\times$	ХУ	ПП	77	1	+	FL0	54	ПА
ХУ	ПВ	ИП9	ИП8	ПП	77	С/П	ПС	ИПВ	$\times$
ХУ	ПД	ИПА	$\times$	+	П5	ИПА	ИПС	$\times$	ИПВ
ИПД	$\times$	—	В/О						

Структура программы

00—22: вычисление  $(\operatorname{erf} z)'/2 = e^{-z^2}/\sqrt{\pi}$ ,

23—35: расчет  $1/z$ ,

36—49: вычисление фактора  $e^{-z^2}/z\sqrt{\pi}$  и  $1/z^2$ ,

50—76: расчет асимптотического ряда (выражение в квадратных скобках (4.16)) и результата  $\operatorname{erfc} z$ ,

77—93: подпрограмма перемножения комплексных чисел.

Инструкция

1. Исходные данные: ( $x = P6, y = P7$ ).

2. Пуск: а) для  $(\operatorname{erf} z)'/2$  В/О С/П; б) для  $\operatorname{erfc} z$  С/П. Пуск б производится после останова на предыдущем пуске без изменения содержимого регистров Р6 — Р9.

3. Результат и время счета: а)  $PX = P8 = \operatorname{Re} (\operatorname{erf} z)'/2$ ,  $PY = P9 = \operatorname{Im} (\operatorname{erf} z)'/2$ ,  $t = 20$  с; б)  $PX = \operatorname{Re} \operatorname{erfc} z$ ,  $PY = \operatorname{Im} \operatorname{erfc} z$ ,  $t = 2$  мин.

4. Регистры: рабочие Р6 — Р8; оперативные Р0, Р5, РА — РД; свободные Р1 — Р4.

5. Погрешность относительная:  $(\operatorname{erf} z)'$  меньше  $5 \cdot 10^{-7}$ ,  $\operatorname{erfc} z$  меньше  $2 \cdot 10^{-6}$  при  $|z| \geq 4$  и  $5 \cdot 10^{-4}$  при  $|z| \geq 3$ . Погрешность максимальна при  $\operatorname{Re} z = 0$ . Напомним, что относительная погрешность функции комплексного аргумента определяется (см. введение) как отношение модуля отклонения к модулю функции. Относительные отклонения от точных значений действительной или мнимой составляющей могут быть при этом значительными, в частности в асимптотическом приближении  $\operatorname{Re} \operatorname{erfc}(jx) = 0$ , тогда как точное значение  $\operatorname{Re} \operatorname{erfc}(jx) = 1$ .

Примеры.

$$\begin{aligned} \operatorname{erf}(0,5+j4)' &= -2552138,1+j2954920; \\ \operatorname{erfc}(0,5+j4) &= 663334,54+j748716,18 \quad (663332+j748715); \\ \operatorname{erfc}(3+j0,2) &= 7,0027905 \cdot 10^{-6} - j2,1859474 \cdot 10^{-5} \quad (7,00428 \cdot 10^{-6} - \\ &- j2,18581 \cdot 10^{-5}), \end{aligned}$$

Время счета  $t \approx 2$  мин.

## 4.2. Интегралы Френеля. Обобщенные интегралы Френеля

Интегралы Френеля [5,7]

$$C(z) = \int_0^z \frac{\cos t}{\sqrt{t}} dt; \quad S(z) = \int_0^z \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt. \quad (4.28)$$

В ряде источников (например, [8,9]) даются несколько отличающиеся определения:

$$C_1(z) = \int_0^z \cos\left(\frac{\pi}{2} t^2\right) dt; \quad S_1(z) = \int_0^z \sin\left(\frac{\pi}{2} t^2\right) dt. \quad (4.29)$$

В тех случаях, когда за основу берется (4.29), интегралы Френеля также обозначаются через  $C(z)$ ,  $S(z)$ . Далее, однако, во избежание путаницы за интегралами (4.29) сохраняются обозначения  $C_1(z)$ ,  $S_1(z)$ . Они связаны с (4.28) соотношениями

$$C_1(z) = C\left(\frac{\pi}{2} z^2\right); \quad S_1(z) = S\left(\frac{\pi}{2} z^2\right). \quad (4.30)$$

Обобщениями (4.28) являются интегралы [5] вида

$$C(z, a) = \int_z^\infty t^{a-1} \cos t dt; \quad S(z, a) = \int_z^\infty t^{a-1} \sin t dt. \quad (4.31)$$

$C(z)$  и  $S(z)$  выражаются через обобщенные интегралы Френеля при  $a=1/2$ :

$$C(z) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} C\left(z, \frac{1}{2}\right); \quad S(z) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} S\left(z, \frac{1}{2}\right). \quad (4.32)$$

Функции  $C_1(z)$ ,  $S_1(z)$  — целые, тогда как  $C(z)$ ,  $S(z)$  — двулистные с точкой ветвления  $z=0$ . Обычно выбирается ветвь, принимающая вещественные значения на положительной части действительной оси.

Разложения  $C(z)$  и  $S(z)$  в степенной ряд в окрестности нуля имеют вид

$$C(z) = \sqrt{\frac{2z}{\pi}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k}}{(2k)!(4k+1)}; \quad (4.33)$$

$$S(z) = \sqrt{\frac{2z}{\pi}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k+1}}{(2k+1)!(4k+3)}. \quad (4.34)$$

Ряды для  $C_1(z)$  и  $S_1(z)$  на действительной и мнимой осях являются знакочередующимися (см. (4.30)). Поэтому погрешности округления для них максимальны при  $z=x, j y$  и уменьшаются по мере приближения  $|\arg z|$  к  $\pi/4$ , где ряды знакостоянны.

Асимптотические разложения функций [9]:

$$C_1(z) = \frac{1}{2} + f(z) \sin\left(\frac{\pi z^2}{2}\right) - g(z) \cos\left(\frac{\pi z^2}{2}\right); \quad (4.35)$$

$$S_1(z) = \frac{1}{2} - f(z) \cos\left(\frac{\pi z^2}{2}\right) - g(z) \sin\left(\frac{\pi z^2}{2}\right), \quad (4.36)$$

где

$$f(z) \approx \frac{1}{\pi z} \left[ 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m 1 \cdot 3 \dots (4m-1)}{(\pi z^2)^{2m}} \right]; \quad (4.37)$$

$$g(z) \approx \frac{1}{\pi z} \left[ \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m 1 \cdot 3 \dots (4m+1)}{(\pi z^2)^{2m+1}} \right], \quad z \rightarrow \infty, |\arg z| < \frac{\pi}{2}. \quad (4.38)$$

Функции  $f(z)$  и  $g(z)$  с точностью до слагаемых второго порядка малости по  $1/\pi z^2$  включительно равны:

$$f(z) \approx \frac{1}{\pi z} \left[ 1 - \frac{3}{(\pi z^2)^2} \right]; \quad g(z) \approx \frac{1}{\pi z} \frac{1}{\pi z^2}. \quad (4.39)$$

Эти функции в том же приближении можно заменить на

$$f(z) \approx \frac{1}{\pi z} \cos\left(\frac{\sqrt{6}}{2t}\right); \quad g(z) \approx \frac{1}{\pi z \sqrt{6}} \sin\left(\frac{\sqrt{6}}{2t}\right), \quad (4.40)$$

где

$$t = \pi z^2/2. \quad (4.41)$$

Отметим, что учет в (4.40) членов третьего порядка по  $1/\pi z^2$  делает эти приближения лучшими, чем (4.39). Подстановка (4.40) в (4.35), (4.36) приводит к следующим соотношениям:

$$C_1(z) \approx \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi z} \sin t \cos\left(\frac{\sqrt{6}}{2t}\right) - \frac{1}{\sqrt{6}} \cos t \sin\left(\frac{\sqrt{6}}{2t}\right); \quad (4.42)$$

$$S_1(z) \approx \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi z} \cos t \cos\left(\frac{\sqrt{6}}{2t}\right) + \frac{1}{\sqrt{6}} \sin t \sin\left(\frac{\sqrt{6}}{2t}\right)$$

или

$$\begin{aligned} C_1(z) \approx \frac{1}{2} + \frac{1}{2\pi z} \left[ \left(1 - \frac{1}{\sqrt{6}}\right) \sin\left(t + \frac{\sqrt{6}}{2t}\right) + \right. \\ \left. + \left(1 + \frac{1}{\sqrt{6}}\right) \sin\left(t - \frac{\sqrt{6}}{2t}\right) \right]; \end{aligned}$$



$$S_1(z) \approx \frac{1}{2} - \frac{1}{2\pi z} \left[ \left(1 - \frac{1}{\sqrt{6}}\right) \cos\left(t + \frac{\sqrt{6}}{2t}\right) + \left(1 + \frac{1}{\sqrt{6}}\right) \cos\left(t - \frac{\sqrt{6}}{2t}\right) \right] \quad (4.43)$$

Формулы (4.42) проще для программирования при вещественных  $z = x$ , (4.43) — при комплексных.

Погрешности округления разложений (4.37), (4.38) минимальны на вещественной оси, где ряды знакопередающиеся. Это обычно благоприятно для асимптотических разложений, где учитывается небольшое число убывающих по модулю слагаемых. При увеличении  $|\arg z|$  погрешности возрастают. На мнимой оси значения  $C_1(z)$  и  $S_1(z)$ , даваемые асимптотическими разложениями, вообще недопустимы при любых  $|z|$ . В этом легко убедиться из соотношений симметрии [9]

$$\begin{aligned} C_1(-z) &= -C_1(z), \quad S_1(-z) = -S_1(z); \\ C_1(jz) &= j C_1(z), \quad S_1(jz) = -j S_1(z); \\ C_1(\bar{z}) &= \overline{C_1(z)}, \quad S_1(\bar{z}) = \overline{S_1(z)}. \end{aligned} \quad (4.44)$$

Согласно равенствам во второй строке (4.44) при  $z \rightarrow \infty$   $C_1 = -S_1 = -j \lim_{x \rightarrow \infty} C_1(x) = j0,5$ , тогда как из (4.35)–(4.38) следует, что  $C_1(j\infty) = S_1(j\infty) = 0,5$ . Целесообразно применять (4.42) или (4.43) только до  $|\arg z| = \pi/4$ . При  $|\arg z| > \pi/4$  функции  $C_1(z)$  и  $S_1(z)$  легко привести к значениям  $|\arg z| < \pi/4$ , пользуясь (4.44). В этом случае относительные погрешности (4.42), (4.43) при  $|z| < 4$  (см. программу (4.16)) превышают  $1 \cdot 10^{-4}$ . Разложения в ряды (4.33), (4.34) с учетом формул (4.30) приводят к погрешностям  $C_1(z)$  и  $S_1(z)$ , меньшим  $1 \cdot 10^{-4}$  только при  $|z| \leq 2,7$  (программа 4.15). Таким образом, в промежуточной области  $2,5 < |z| < 4$  применение указанных альтернативных методов не гарантирует точности  $1 \cdot 10^{-4}$ .

Высокую точность при соответствующем числе шагов обеспечивает *прямое численное интегрирование* (4.29) в комплексной области. Используя подстановку  $t = uz$ , преобразуем (4.29) к виду

$$S_1(z) = z \int_0^1 \sin\left(\frac{\pi}{2} u^2 z^2\right) du. \quad (4.29a)$$

Примем за линию интегрирования в исходном интеграле прямую, соединяющую точки  $t=0$  и  $t=z$ . Тогда переменная  $u$  является вещественной, и (4.29a) легко рассчитывается по квадратурным формулам для вещественных интегралов. Отличие состоит лишь в необходимости отдельно суммировать действительные и мнимые части подынтегральных функций в узлах квадратур. Соответствующий алгоритм реализован для  $S_1(z)$  и  $C_1(z)$  в программе 4.17 на базе формул Чебышева ( $n = 6$ ) (ср. с программой 10.13). Недостатком программы является большое время счета (см. примеры).

Отметим, что (4.29a) при замене  $u^2 z^2 \rightarrow u^2 z^2 + 1$  переходит в формулу для  $C_1(z)$ .

Для вещественных  $z = x$  эффективен алгоритм, использующий связь  $C(x)$ ,  $S(x)$  с обобщенными интегралами Френеля (4.32), а последних — с неполной гамма-функцией:

$$e^{-j\pi a/2} \Gamma(a, x) = C(x, a) - j S(x, a). \quad (4.45)$$

Две программы вычисления  $\Gamma(a, jx)$  приведены в гл. 2 (программы 2.24, 2.25). Более универсальной является программа 2.24, основанная на *разложении  $\Gamma(a, z)$  в непрерывную дробь*. Согласно (2.47).

$$e^{-j\pi a/2} \Gamma(a, jx) = x^a (\cos x - j \sin x) / A_0, \quad (4.46)$$

где  $A_0$  определяется итерационной процедурой (2.46). Функция в (4.46) проще для вычислений, чем  $\Gamma(a, jx)$ .

Ниже приведена программа для обобщенных интегралов Френеля (программа 4.13). Дается также отдельная программа для  $C(x)$ ,  $S(x)$ , (в ней возможны дальнейшие упрощения). В этой программе перекрывается вся область  $x \geq 0,3$ , недостатком программы являются большая длина и все же значительное время счета (не меньше 4,5 мин). Наиболее быстродействующими являются программы 4.12 и 4.16, основанные на асимптотических формулах (4.42), (4.43).

**Программа 4.11.** Интегралы Френеля вещественных аргументов  $C(x)$ ,  $S(x)$ ,  $C_1(u)$ ,  $S_1(u)$ . Разложения в ряды (4.33), (4.34) по схеме Горнера и формулы (4.30),  $0 \leq x \leq 14$ ,  $0 \leq u \leq 3$ .

Fx <sup>2</sup>	1	Farcsin	×	ПС	Fx <sup>2</sup>	ПД	4	0	ПО
F1/x	ИПД	×	ИПО	ИПВ	+	÷	1	FVx	—
÷	FVx	2	×	1	+	F1/x	—	FL0	30
FL0	11	ИПС	1	Farcsin	÷	F√	×	ИПС	ИПВ
×	F,	FVx	ВП	×	C/П				

#### И н с т р у к ц и я

1. Исходные данные для получения функций:  $C(x)$  ( $0 = \text{PB}$ ),  $[x = \text{PX}]$ ;  $C_1(u)$  ( $0 = \text{PB}$ ),  $[u = \text{PX}]$ ;  $S(x)$  ( $1 = \text{PB}$ ),  $[x = \text{PX}]$ ;  $S_1(u)$  ( $1 = \text{PB}$ ),  $[u = \text{PX}]$ .
2. Пуск: для  $C(x)$ ,  $S(x)$  БП 04 C/П; для  $C_1(u)$ ,  $S_1(u)$  В/О C/П.
3. Результат:  $\text{PX} = C(x)$ , или  $\text{PX} = S(x)$ , или  $\text{PX} = C_1(u)$ , или  $\text{PX} = S_1(u)$ .
4. Регистры: рабочие  $\text{PB}$ ; оперативные  $\text{P0}$   $\text{PC}$ ,  $\text{PD}$ ; свободные  $\text{P1} - \text{PA}$ .
5. Погрешность относительная меньше:

$$\begin{aligned} 1 \cdot 10^{-6} & \text{ при } x \leq 5 \ (u \leq 1,8), \quad 1 \cdot 10^{-4} \text{ при } x \leq 11 \ (u \leq 2,7), \\ 1 \cdot 10^{-5} & \text{ при } x \leq 9 \ (u \leq 2,5), \quad 1 \cdot 10^{-3} \text{ при } x \leq 14 \ (u \leq 3,0). \end{aligned}$$

6. Время счета  $t \approx 2$  мин.

#### Примеры.

$$\begin{aligned} C(12) &= 0,43457829 \ (0,4346 \ [7]), \quad S(12) = 0,40581753 \ (0,4058 \ [7]); \\ C_1(2) &= 0,4882534 \ (0,4882534 \ [9]), \quad S_1(2) = 0,34341503 \ (0,3434157[9]). \end{aligned}$$

**Программа 4.12.** Интегралы Френеля вещественных аргументов  $C(x)$ ,  $S(x)$ ,  $C_1(u)$ ,  $S_1(u)$ . Асимптотические формулы (4.42) и формулы (4.30),  $x \geq 8$ ,  $u \geq 2,2$ .

Fx <sup>2</sup>	1	Farcsin	×	П9	F1/x	6	F√	×	2
÷	ПВ	Fcos	ПД	ИП9	Fsin	ПА	×	ИП9	Fcos
ПС	ИПВ	Fsin	ПВ	×	6	F√	÷	—	ИП9
2	×	Fπ	×	F√	П9	÷	2	F1/x	+
ИПС	ИПД	×	ИПА	ИПВ	×	6	F√	÷	+
/—/	ИП9	÷	2	F1/x	+	C/П			

### Инструкция

1. Исходные данные:  $[x = PX]$  или  $[u = PX]$ .
2. Пуск: для  $C(x)$ ,  $S(x)$  БП 04 С/П; для  $C_1(u)$ ,  $S_1(u)$  В/О С/П.
3. Результат:  $PX = S(x)$ ,  $PY = C(x)$  или  $PX = S_1(u)$ ,  $PY = C_1(u)$ .
4. Регистры: рабочие —; оперативные P9—PД; свободные P0—P8.
5. Погрешность относительная меньше:
  - $1 \cdot 10^{-6}$  при  $x \geq 50$  ( $u \geq 5,7$ ),  $1 \cdot 10^{-4}$  при  $x \geq 15$  ( $u \geq 3,1$ ),
  - $1 \cdot 10^{-5}$  при  $x \geq 27$  ( $u \geq 4,2$ ),  $1 \cdot 10^{-3}$  при  $x \geq 18$  ( $u \geq 2,2$ ).
6. Время счета  $t \approx 30$  с.

### Примеры.

$S(15) = 0,57576177$  (0,5758 [7]),  $C(15) = 0,56936621$  (0,5693 [7]);  
 $S_1(5) = 0,49918953$  (0,4991914 [9]),  $C_1(5) = 0,56363102$  (0,5636312[9]).

**Программа 4.13.** Обобщенные интегралы Френеля вещественных аргументов  $C(x, a)$ ,  $S(x, a)$ . Разложение  $e^{-j\pi a/2} \Gamma(a, jx)$  в непрерывную дробь (4.31), (4.45), (4.46), (2.46в),  $x \geq 0,3$ .

7	ИП8	÷	1	5	+	ПО	ИП9	ИП8	$Fx^y$
ИП8	Fcos	XY	×	ПА	F Bx	ИП8	Fsin	/—/	×
ПВ	ИП8	ИПО	×	F √—	ПС	ИПО	ПП	63	1
+	ПС	XY	ИПО	ИП9	—	ПП	63	XY	ИП8
+	FL0	26	1	ПП	63	ПС	ИПВ	×	XY
ПД	ИПА	×	+	/—/	ИПС	ИПА	×	ИПВ	ИПД
×	—	С/П	ПД	F,	/—/	↑	$Fx^2$	ИПС	$Fx^2$
+	F1/x	ИПД	×	×	ИПС	F Bx	×	ПС	В/О

### Инструкция

1. Исходные данные:  $(x = P8, a = P9)$ .
2. Пуск: В/О С/П.
3. Результат:  $PX = C(x, a)$ ,  $PY = S(x, a)$ .
4. Регистры: рабочие P8, P9; оперативные P0, PA — PД; свободные P1—P7.
5. Погрешность относительная меньше:  $2 \cdot 10^{-5}$  при  $x \geq 0,3$ ,  $2 \cdot 10^{-6}$  при  $x \geq 1,0$ .
6. Время счета  $t \approx (4,5 + 2/x)$  мин.

**Примеры.**  $C(5,1) = 0,95892426$ ,  $S(5,1) = 0,28366226$ .

**Программа 4.14.** Интегралы Френеля вещественного аргумента  $C(x)$ ,  $S(x)$ , (4.32), (4.45), (4.46), (2.46в),  $x \geq 0,3$ .

7	ИП9	÷	1	5	+	ПО	ИП9	Fcos	ИП9
F √—	×	ПА	F Bx	ИП9	Fsin	/—/	×	ПВ	ИП9
ИПО	×	F √—	ПС	ИПО	ПП	66	1	+	ПС
XY	ИПО	2	F1/x	—	ПП	66	XY	ИП9	+
FL0	24	1	ПП	66	ПС	ИПВ	×	XY	ПД
ИПА	×	+	ИПВ	ИПД	×	ИПА	ИПС	×	—
ПП	83	XY	ПП	83	С/П	ПД	F,	/—/	↑
$Fx^2$	ИПС	$Fx^2$	+	F1/x	ИПД	×	×	ИПС	F Bx
×	ПС	В/О	Fπ	2	×	F √—	÷	2	F1/x
+	В/О								

### Структура программы

- 00—23: расчет фактора  $x^{1/2} e^{ix}$ , а также констант  $N = 15 + 7/x$  и  $A_N = \sqrt{xN}$ , необходимых для начала итерационной процедуры (формулы (4.46), (2.46), (2.46в)),  
 24—41: вычисление  $A_0$  по итерационной формуле (2.46) при условиях  $a = 1/2$  и  $z = jx$ ,  
 42—65: окончательный расчет  $C(x)$ ,  $S(x)$  по формулам (4.45), (4.46), (4.32),  
 66—82: подпрограмма обратной величины комплексного числа, умноженной на вещественную константу, находящуюся в  $PX$ ,  
 83—92: подпрограмма вычисления  $C(x)$  и  $S(x)$  по формуле (4.32).

### Инструкция

1. Исходные данные:  $(x = P9)$ .
2. Пуск: В/О С/П.
3. Результат:  $PX = S(x)$ ,  $PY = C(x)$ .
4. Регистры: рабочие P9; оперативные P0, PA — PД; свободные: P1 — P8.
5. Погрешность абсолютная меньше:  $2 \cdot 10^{-5}$  при  $x \geq 0,3$ ,  $5 \cdot 10^{-6}$  при  $x \geq 0,5$ ,  $5 \cdot 10^{-7}$  при  $x \geq 1$ .
6. Время счета  $t \approx (4,5 + 2/x)$  мин.

### Примеры.

$S(2\pi) = 0,34341569$  (0,3434157 [9]),  $C(2\pi) = 0,48825341$  (0,4882534 [9]);  
 $S(0,3041062) = 0,04429553$  (0,0443088 [9]),  $C(0,3041062) = 0,4359414$  (0,4359482 [9]).

**Программа 4.15.** Интегралы Френеля  $C_1(z)$ ,  $S_1(z)$  комплексного аргумента  $z = x + jy$ . Разложение в ряд (4.33), (4.34) по схеме Горниера и формулы (4.30),  $|z| \leq 3$ .

ИП9	ПВ	1	Farcisin	×	F Bx	ИП8	ПА	×	ПП
73	ПВ	П7	XY	ПА	П6	ПП	73	ПВ	XY
ПА	5	0	ПО	0	Fπ	ПП	73	1	ИПО
ИП5	+	—	F Bx	×	÷	ИП4	F Bx	÷	ИПО
ИП5	+	2	×	3	—	F1/x	+	FL0	50
FL0	26	ПА	XY	ПВ	ИП9	ИП8	ПП	73	ПВ
XY	ПА	ИП5	$Fx \neq 0$	71	ИП7	ИП6	ПП	73	XY
С/П	F,	С/П	ПС	ИПА	×	XY	ПД	ИПВ	×
—	П4	ИПС	ИПВ	×	ИПД	ИПА	×	+	В/О

### Инструкция

1. Исходные данные:  $(x = P8, y = P9, k = P5)$ . Задается  $k = 0$  или  $k = 1$  при вычислении соответственно  $C_1(z)$  или  $S_1(z)$ .
2. Пуск: В/О С/П.
3. Результат:  $PX = \text{Re}C_1(z)$  ( $\text{Re}S_1(z)$ ),  $PY = \text{Im}C_1(z)$  ( $\text{Im}S_1(z)$ ).
4. Регистры: рабочие P5, P8, P9; оперативные P0, P4, P6, P7, PA — PД; свободные P1, P2, P3.
5. Погрешность относительная меньше:

$$1 \cdot 10^{-6} \text{ при } |z| \leq 1,8, \quad 1 \cdot 10^{-4} \text{ при } |z| \leq 2,7,$$

$$1 \cdot 10^{-5} \text{ при } |z| \leq 2,5, \quad 1 \cdot 10^{-3} \text{ при } |z| \leq 3,0.$$

6. Время счета  $t \approx 6$  мин.

### Примеры.

$$S_1(2 + j) = -15,587742 - j36,725462 \quad (-15,587659 - j36,725485);$$

$$C_1(2 + j) = -36,225683 + j16,087866 \quad (-36,225709 + j16,087785);$$

$$S_1(2,5 + j2,5) = -11017302 + j11017302 \quad (-11017290 + j11017282),$$

$$C_1(2,5 + j2,5) = 11017310 + j11017310 \quad (11017282 + j11017290).$$

В скобках приведены значения функций, вычисленные прямым интегрированием (4.29) по программе 4.17, обеспечивающей в данном случае не менее шести верных значащих цифр. Обращает на себя внимание сравнительно высокая точность разложений в ряд при таком большом аргументе, как  $2,5 + j2,5$  ( $|z| > 3,5$ ). Это объясняется малым влиянием ошибок округления при  $\arg z = \pi/4$ , где ряды (4.33), (4.34) (при учете (4.30)) знакопостоянны.

**Программа 4.16.** Интегралы Френеля  $C_1(z)$  и  $S_1(z)$  комплексного аргумента  $z = x + jy$ . Асимптотические формулы (4.43),  $|z| \geq 2$ ,  $|\arg z| \leq \pi/4$ . При  $|\arg z| > \pi/4$  используются соотношения симметрии (4.44), например  $C_1(x + jy) = -jC_1(y - jx) = -jC_1(-y + jx)$ .

1	Farcsin	×	П9	FBx	ИПА	×	П8	ПП	68
П7	ПП	85	ИП6	+	ПС	XY	ИП7	+	Fe <sup>x</sup>
↑	F1/x	ПД	+	2	÷	↑	ИПД	—	ИПС
Fcos	×	ПД	XY	ИПС	Fsin	×	2	ИП5	—
×	FVx	ИПД	×	С/П	ИП5	/—/	П5	ИП7	БП
11	ИПВ	+	ПВ	XY	ИПА	+	ПА	8	П5
ИП8	П6	ИП9	ПП	85	ПП	68	С/П	ПС	ИПА
×	XY	ПД	ИПВ	×	—	П6	ИПС	ИПВ	×
ИПД	ИПА	×	+	В/О	/—/	↑	Fx <sup>2</sup>	ИП6	Fx <sup>2</sup>
+	ИП5	×	÷	ИП6	FVx	÷	В/О		

Данный вариант программы относится к  $C_1(z)$ . Для перехода к  $S_1(z)$  заменяются четыре команды по следующей схеме:

Адрес	Программа $C_1(z)$	Программа $S_1(z)$	Адрес	Программа $C_1(z)$	Программа $S_1(z)$
20	↑	F1/x	30	Fcos	Fsin
21	F1/x	FBx	35	Fsin	Fcos

Инструкция к обоим вариантам программы общая, кроме п. 3 (результат).  
Инструкция

- Исходные данные:  $2/\sqrt{6} = 8,1649559 \cdot 10^{-1} = P5$ ,  $x = PA$ ,  $[Y = PB]$ .
- Пуск: программа реализуется тремя последовательными пусками: 1) В/О С/П; 2) ПВ XY ПА С/П; 3) БП 51 С/П. В паузе между пусками не должно изменяться содержимое регистров PX, PY, P5 — РД.
- Результат: для  $C_1(z)$   $PX = \text{Im}C_1(z)$ ,  $PY = \text{Re}C_1(z) - 0,5$ , т. е.  $\text{Re}C_1(z) = PY + 0,5$ ; для  $S_1(z)$   $PX = -\text{Im}S_1(z)$ ,  $PY = 0,5 - \text{Re}S_1(z)$ .
- Регистры: рабочие —; оперативные P5 — РД; свободные P0 — P4.

### 5. Погрешность относительная:

$ z  \geq$	1,5	2,8	4	5,5	7
$\delta \leq$	$1 \cdot 10^{-1}$	$1 \cdot 10^{-3}$	$1 \cdot 10^{-4}$	$1 \cdot 10^{-5}$	$1 \cdot 10^{-6}$

### 6. Время счета суммарное для всех трех пусков $t \approx 1,5$ мин.

#### Примеры.

$$C_1(5 + j5) = 2,0608052 \cdot 10^{32} + j2,0608052 \cdot 10^{32} \quad (2,06080 \cdot 10^{32} + j2,06080 \cdot 10^{32});$$

$$S_1(5 + j5) = -2,0608052 \cdot 10^{32} + j2,0608052 \cdot 10^{32} \quad (-2,06080 \cdot 10^{32} + j2,06080 \cdot 10^{32}).$$

В скобках приведены значения функций, полученные интегрированием (4.29) по программе 4.17. Выбранное число шагов интегрирования гарантирует шесть верных значащих цифр.

**Программа 4.17.** Интегралы Френеля  $S_1(z)$ ,  $C_1(z)$  комплексного аргумента  $z = x + jy$ . Интегрирование (4.29а) по составной формуле Чебышева ( $n = 6$ , программа 10.13) при заданном числе  $N$  частных интервалов.

ИП7	ИП6	ПП	82	ПА	XY	ПВ	0	ПС	ПД
ИП2	П8	КИП2	6	ПО	КИПО	/—/	П9	ИП2	+
ИП8	÷	Fx <sup>2</sup>	П4	ИПА	×	0	+	1	Farcsin
×	FBx	ИП4	×	ИПВ	×	П4	XY	Fcos	FBx
Fsin	ИП4	Fe <sup>x</sup>	↑	F1/x	П4	—	2	÷	ИП4
XY	П4	+	×	XY	ИП4	×	ИПД	+	ПД
XY	ИПС	+	ПС	ИП9	Fx $\geq 0$	16	FL0	15	FL2
12	ИПД	ИП8	3	×	÷	ИПС	FBx	÷	ПП
82	С/П	П4	ИП7	×	XY	П8	ИП6	×	+
ИП6	ИП4	×	ИП7	ИП8	×	—	В/О		

Данный вариант программы предназначен для вычисления  $S_1(z)$ . Для перехода к  $C_1(z)$  заменить команду 0 (адрес 26) на 1.

- Структура программы
- 00—06: расчет  $z^2$  и занесение в регистры PA, PB значений  $\text{Re} z^2$ ,  $\text{Im} z^2$ .
  - 07—57: вызов из памяти абсцисс очередных узлов квадратурной формулы  $\pm y_k$  и вычисление соответствующих действительных и мнимых частей подынтегральной функции  $\sin(\pi z^2 u^2/2)$  или  $\cos(\pi z^2 u^2/2)$ .
  - 58—81: суммирование найденных значений функций по всем узлам и всем  $N$  интервалам и вычисление  $S_1(z)$  (или соответственно  $C_1(z)$ ) умножением сумм на  $(1/3)(z/2N)$  (здесь  $1/2N$  играет роль шага).
  - 82—97: подпрограмма умножения комплексных чисел.

- Инструкция
- Исходные данные: ( $y_1 = 8,6624682 \cdot 10^{-1} = P1$ ,  $y_2 = 4,2251865 \cdot 10^{-1} = P3$ ,  $y_3 = 2,666354 \cdot 10^{-1} = P5$ ,  $x = P6$ ,  $y = P7$ ),  $2N = P2$ . Задаваемое число  $2N$  предварительно рассчитывается по формуле  $2N = 2[2 + |z|^2]$ , где квадратные скобки означают округление до ближайшего большего целого.
  - Пуск: В/О С/П.
  - Результат:  $PX = \text{Re}S_1(z)$ ,  $PY = \text{Im}S_1(z)$  (или  $PX = \text{Re}C_1(z)$ ,  $PY = \text{Im}C_1(z)$  при другом варианте программы).

4. Регистры: рабочие P1, P3, P5 — P7; оперативные P0, P2, P4, P8 — PД; свободных нет.  
 5. Погрешность относительная меньше  $5 \cdot 10^{-6}$ .  
 6. Время счета  $t \approx 2N$  мнн.  
**Примеры.**  
 $S_1(1+j) = -2,0618878 + j \ 2,0618878$ ,  $C_1(1+j) = 2,5557932 + j \ 2,5557932$ ,  
 $2N = 8$ ,  $t = 7,5$  мнн;  
 $C_1(2) = 0,48825344 + j \ 0(0,4882534 \ [9])$ ,  $2N = 12$ ,  $t = 11,5$  мнн;  
 $S_1(2+j3) = -5815903,7 - j \ 3788097,7$ ,  $2N = 30$ ,  $t = 30$  мнн.

### Указатель программ

Номер программ	Функция	Область определения	Число шагов	Число регистров памяти	Примечание
4.1	$\operatorname{erf} x, (\operatorname{erf} x)'$	$ x  \leq 3,5$ для $\operatorname{erf} x$	32	4	Аргумент $x$ вещественный; $\operatorname{erf} x \approx 1$ при $ x  > 3,5$
4.2	$\operatorname{erfc} x, \operatorname{erf} x$	$x > 0$	30	3	Разложение в непрерывную дробь. Время счета при $x < 0,3$ велико
4.3	$\operatorname{erf} x, \operatorname{erfc} x, (\operatorname{erf} x)'$	$x \geq 0$	67	5	Во всем диапазоне $x$ (вещественный аргумент) время счета меньше 50 с
4.4	$\Phi_{m, \sigma}(x), p_{m, \sigma}(x)$	$-9 \cdot 10^{99} \leq x \leq 9 \cdot 10^{99}$	84	7	Аргумент $x$ вещественный
4.5	$i^n \operatorname{erfc} x, \operatorname{erfc} x, \operatorname{erf} x, (\operatorname{erf} x)'$	$x \geq 0, n=1, 2, \dots$	92	9	То же
4.6	$F(x)$		29	3	
4.7	$\operatorname{erf} z, (\operatorname{erf} z)'$	$ z  \leq 3$ для $\operatorname{erf} z$ , $ \arg z  \leq \pi$	89	9	Суммирование степенного ряда (4.12)
4.8	$\operatorname{erf} z, (\operatorname{erf} z)'$	$ \arg z  \leq \pi$	85	10	Суммирование степенного ряда (4.11)
4.9	$\operatorname{erfc} z, (\operatorname{erf} z)'$	$x \geq 0$	84	7	Разложение в непрерывную дробь
4.10	$\operatorname{erfc} z (\operatorname{erf} z)'$	$ z  \geq 3$	94	10	Асимптотическое разложение. Оптимальное использование программ 4.7—4.10 по точности и времени счета — см. рис. 4.1
4.11	$C(x), S(x)$ или $C_1(u), S_1(u)$	$0 \leq x \leq 14$ , $0 \leq u \leq 3$	46	4	$x, u$ — вещественные аргументы
4.12	$C(x), S(x)$ или $C_1(u), S_1(u)$	$x > 8$ $u \geq 2,2$	57	5	Асимптотические разложения
4.13	$C(x, a), S(x, a)$	$x \geq 0,3$	80	7	Разложение в непрерывную дробь; $x, a$ — вещественные аргументы

Окончание

Номер программы	Функция	Область определения	Число шагов	Число регистров памяти	Примечание
4.14	$C(x), S(x)$	$x \geq 0,3$	92	6	То же
4.15	$C_1(z)$ или $S_1(z)$	$ z  \leq 3$	90	11	Суммирование степенных рядов
4.16	$C_1(z)$ или $S_1(z)$	$ z  \geq 2,  \arg z  \leq \pi/4$	98	9	Асимптотические формулы
4.17	$C_1(z)$ или $S_1(z)$	$\infty$	98	14	Прямое вычисление интеграла. Дает наибольшую точность во всей области определения

## Глава 5

### Функции Бесселя вещественного и комплексного аргументов и родственные им функции

#### 5.1. Определения и основные расчетные соотношения

Функции Бесселя первого рода  $J_\nu(z)$  и второго рода (функции Неймана)  $Y_\nu(z)$  удовлетворяют дифференциальному уравнению

$$\frac{d^2 Z_\nu}{dz^2} + \frac{1}{z} \frac{dZ_\nu}{dz} + \left(1 - \frac{\nu^2}{z^2}\right) Z_\nu = 0. \quad (5.1)$$

Решениями этого уравнения являются также функции Ханкеля

$$H_\nu^{(1)}(z) = J_\nu(z) + jY_\nu(z); \quad H_\nu^{(2)}(z) = J_\nu(z) - jY_\nu(z). \quad (5.2)$$

Каждая из указанных функций аналитична во всей комплексной плоскости  $z$ , разрезанной вдоль отрицательной части действительной оси. Функции  $J_\nu(z)$  и  $Y_\nu(z)$ , а также  $H_\nu^{(1)}(z)$  и  $H_\nu^{(2)}(z)$  являются линейно независимыми парами решений (5.1). Параметр  $\nu$  далее полагается вещественным.

Модифицированная функция Бесселя первого рода  $I_\nu(z)$  и функция  $K_\nu(z)$  — функция Макдональда или модифицированная функция Бесселя третьего рода [5] — удовлетворяют дифференциальному уравнению

$$\frac{d^2 Z_\nu}{dz^2} + \frac{1}{z} \frac{dZ_\nu}{dz} - \left(1 + \frac{\nu^2}{z^2}\right) Z_\nu = 0, \quad (5.3)$$

и также линейно независимы.

Для указанных пар функций определителя Вронского равны

$$W[J_\nu(z), Y_\nu(z)] = J_{\nu+1}(z) Y_\nu(z) - J_\nu(z) Y_{\nu+1}(z) = 2/\pi z; \quad (5.4)$$

$$W[I_\nu(z), K_\nu(z)] = I_\nu(z) K_{\nu+1}(z) - I_{\nu+1}(z) K_\nu(z) = 1/z. \quad (5.5)$$

Характерной особенностью  $J_\nu(z)$  и  $I_\nu(z)$  является ограниченность при  $z$ , стремящемся к нулю по любому направлению в комплексной плоскости  $z$ . В окрестности  $z = 0$  функции разлагаются в следующие степенные ряды:

$$J_\nu(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^\nu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-z^2/4)^k}{k! \Gamma(\nu+k+1)}, \quad |\arg z| < \pi; \quad (5.6)$$

$$I_\nu(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^\nu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z^2/4)^k}{k! \Gamma(\nu+k+1)}, \quad |\arg z| < \pi. \quad (5.7)$$

Аналогичные разложения для функций Неймана и Макдональда для целых  $\nu = n$ :

$$Y_n(z) = \frac{2}{\pi} J_n(z) \ln\left(\frac{z}{2}\right) - \frac{(2/z)^n}{\pi} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-k-1)! (z^2/4)^k}{k!} - \frac{(z/2)^n}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} [\psi(k+1) + \psi(n+k+1)] \frac{(-z^2/4)^k}{k! (n+k)!}; \quad (5.8)$$

$$K_n(z) = (-1)^{n+1} I_n(z) \ln\left(\frac{z}{2}\right) + \frac{(2/z)^n}{2} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-k-1)!}{k!} \left(-\frac{z^2}{4}\right)^k + + (-1)^n \frac{(z/2)^n}{2} \sum_{k=1}^{\infty} [\psi(k+1) + \psi(n+k+1)] \frac{(z^2/4)^k}{k! (n+k)!}. \quad (5.9)$$

Здесь  $\psi(k)$  — логарифмическая производная гамма-функции (см. гл. 2). При целых значениях аргумента

$$\psi(k+1) = -\gamma + \sum_{m=1}^k \frac{1}{m}, \quad k > 1; \quad \psi(1) = -\gamma, \quad (5.10)$$

где  $\gamma = 0,57721566...$  — постоянная Эйлера.

Если параметр  $\nu$  не является целым, то  $Y_\nu(z)$  и  $K_\nu(z)$  могут быть выражены через  $J_\nu(z)$  и  $I_\nu(z)$ :

$$Y_\nu(z) = \frac{J_\nu(z) \cos(\nu\pi) - J_{-\nu}(z)}{\sin(\nu\pi)}; \quad (5.11)$$

$$K_\nu(z) = \frac{\pi}{2} \frac{I_{-\nu}(z) - I_\nu(z)}{\sin(\nu\pi)}. \quad (5.12)$$

Ввиду того, что при целых  $\nu = n$  функция  $J_{-n}(z) = J_n(z) \cos(n\pi)$ , а  $I_{-n}(z) = I_n(z)$ , формулы (5.11) и (5.12) определяют  $Y_n$  и  $K_n$  лишь как результат предельного перехода  $\nu \rightarrow n$ , а потому в этом случае малоэффективны при вычислениях с ограниченной точностью ПМК. Формулу (5.12) нельзя также применять

для вещественных  $z = x \gg |\nu|$ . Здесь при вычислении разности  $I_{-\nu}(x) - I_\nu(x)$  существенно возрастают ошибки округления, так как  $I_{-\nu}$  и  $I_\nu$  быстро увеличиваются и сближаются при больших  $x$ .

Асимптотические разложения Ханкеля функций Бесселя и модифицированных функций Бесселя при больших значениях аргумента ( $z \rightarrow \infty$ ,  $\nu$  фиксировано):

$$J_\nu(z) = \sqrt{2\pi/z} [P(\nu, z) \cos \chi - Q(\nu, z) \sin \chi], \quad |\arg z| < \pi; \quad (5.13)$$

$$Y_\nu(z) = \sqrt{2\pi/z} [P(\nu, z) \sin \chi + Q(\nu, z) \cos \chi], \quad |\arg z| < \pi, \quad (5.14)$$

где

$$P(\nu, z) \approx 1 - \frac{(\nu^2 - 1/4)(\nu^2 - 9/4)}{2! (2z)^2} + \frac{(\nu^2 - 1/4)(\nu^2 - 9/4)(\nu^2 - 25/4)(\nu^2 - 49/4)}{4! (2z)^4} - \dots; \\ Q(\nu, z) \approx \frac{\nu^2 - 1/4}{2z} - \frac{(\nu^2 - 1/4)(\nu^2 - 9/4)(\nu^2 - 25/4)}{3! (2z)^3} + \dots; \\ \chi = z - \left(\nu + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi}{2}; \quad (5.15)$$

$$I_\nu(z) \approx \frac{e^z}{\sqrt{2\pi z}} \left[ 1 - \frac{\nu^2 - 1/4}{2z} + \frac{(\nu^2 - 1/4)(\nu^2 - 9/4)}{2! (2z)^2} - \dots \right]; \quad (5.16)$$

$$K_\nu(z) \approx \sqrt{\frac{\pi}{2z}} e^{-z} \left[ 1 + \frac{\nu^2 - 1/4}{2z} + \frac{(\nu^2 - 1/4)(\nu^2 - 9/4)}{2! (2z)^2} + \dots \right], \\ |\arg z| < \frac{3\pi}{2}. \quad (5.17)$$

Асимптотические разложения при больших значениях порядка  $\nu$  ( $z = x > 0$ ,  $\nu \gg 1$ ,  $x/\nu < 1$ ) — разложения Дебая — полезны для вычисления  $J_\nu(x)$  и  $I_\nu(x)$  в сочетании с рекуррентными соотношениями, применяемыми в обратном направлении (см. ниже). Далее приведены разложения Дебая до слагаемых  $\nu^{-2}$  включительно. Запись последних членов в скобках у всех разложений является результатом аппроксимации, приемлемой при  $|x/\nu| < 0,5$ :

$$J_\nu(x) \approx \frac{e^{\nu(\text{th} \alpha - \alpha)}}{\sqrt{2\pi\nu \text{th} \alpha}} \left[ 1 + \frac{3 \text{cth} \alpha - 5 \text{cth}^3 \alpha}{24\nu} + \frac{e^{8|z| - 5}}{2\nu^2} \right]; \quad (5.18)$$

$$Y_\nu(x) \approx \frac{e^{\nu(\alpha - \text{th} \alpha)}}{\sqrt{\pi\nu \text{th} \alpha/2}} \left[ 1 - \frac{3 \text{cth} \alpha - 5 \text{cth}^3 \alpha}{24\nu} + \frac{e^{8|z| - 5}}{2\nu^2} \right]; \quad (5.19)$$

$$I_\nu(x) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi\nu}} \frac{e^{\nu\eta}}{(1+z^2)^{1/4}} \left[ 1 + \frac{3t - 5t^3}{24\nu} + \frac{2 - 25|z|}{(20\nu)^2} \right]; \quad (5.20)$$

$$K_\nu(x) \approx \sqrt{\frac{\pi}{2\nu}} \frac{e^{-\nu\eta}}{(1+z^2)^{1/4}} \left[ 1 - \frac{3t - 5t^3}{24\nu} + \frac{2 - 25|z|}{(20\nu)^2} \right], \quad (5.21)$$

$$\text{где } \text{ch} \alpha = \frac{\nu}{x}; \quad z = \frac{x}{\nu}; \quad t = \frac{1}{\sqrt{1+z^2}}; \quad \eta = \sqrt{1+z^2} + \ln \frac{z}{1 + \sqrt{1+z^2}}.$$

Рекуррентные формулы ( $z = x + j y$ ):

$$R_{v-1}(z) + R_{v+1}(z) = (2v/z) R_v(z); \quad (5.22)$$

$$R'_v(z) = -R_{v+1}(z) + (v/z) R_v(z). \quad (5.23)$$

Здесь  $R_v(z)$  означают  $J_v(z)$ ,  $Y_v(z)$ ,  $H_v^{(1)}(z)$ ,  $H_v^{(2)}(z)$  или любую их линейную комбинацию, коэффициенты которой не зависят от  $v$  и  $z$ .

Для модифицированных функций Бесселя

$$T_{v-1}(z) - T_{v+1}(z) = (2v/z) T_v(z); \quad (5.24)$$

$$T'_v(z) = T_{v+1}(z) + (v/z) T_v(z). \quad (5.25)$$

Здесь  $T_v(z)$  означают  $I_v(z)$ ,  $e^{j\pi v} K_v(z)$  или любую их линейную комбинацию. Для целых  $v = n$

$$K_{n+1}(z) - K_{n-1}(z) = (2n/z) K_n(z); \\ K'_n(z) = (n/z) K_n(z) - K_{n+1}(z). \quad (5.26)$$

Остановимся подробнее на применении указанных рекуррентных формул. Согласно (5.18)–(5.21)  $J_v(z)$  и  $I_v(z)$  как функции  $v$  в области  $v > x$  быстро уменьшаются с увеличением  $v$  (примерно как  $v^{-v}$ ), тогда как  $Y_v(z)$  и  $K_v(z)$  возрастают и также приблизительно по этому же закону. Применим рекуррентные формулы (5.22) к функциям  $F_v(z)$  и  $F_{v-1}(z)$ , являющимся линейными комбинациями вида  $F_v(z) = C_1 J_v(z) + C_2 Y_v(z)$ . Очевидно, что  $N$ -кратное повторение рекуррентного преобразования (5.22) приведет к такой результирующей функции  $F_{v+N}(z)$ , которая определяется коэффициентом  $C_2$  и практически не зависит от  $C_1$ . Это же справедливо для функций  $\Phi_v = D_1 I_v(z) + D_2 K_v(z)$ : при достаточно больших  $N\Phi_{v+N} \sim D_2$ . Если рекуррентные формулы применяются в обратном направлении, т. е. в сторону уменьшения  $v$ , ситуация естественно меняется на противоположную.

Указанные соображения прежде всего делают очевидным вывод о вычислительной неустойчивости разностных схем, связанных с многократным применением рекуррентных формул в прямом направлении к убывающим функциям порядка  $v J_v(z)$  и  $I_v(z)$  или в обратном направлении к  $Y_v(z)$  и  $K_v(z)$ . Действительно, приближенные значения, например, исходной пары функций  $J_{v-1}(z)$ ,  $J_v(z)$  можно рассматривать как суперпозицию точных значений этих функций и некоторой «примеси»  $Y_{v-1}(z)$  и  $Y_v(z)$ , которая, возрастая после выполнения достаточного числа итераций, очевидно, и определит результирующее значение функции. Наоборот, рекуррентные формулы для  $Y_v(z)$  или  $K_v(z)$  образуют в прямом направлении устойчивую разностную схему. Применение рекуррентных формул в обратном направлении является устойчивым для  $J_v(z)$  и  $I_v(z)$  и неустойчивым для  $Y_v(z)$  и  $K_v(z)$ . Отметим, что неустойчивые рекуррентные схемы все же можно применять в области  $v < x$ , где не происходит указанного монотонного изменения функций.

«Однонаправленность» рекуррентных формул может быть эффективно использована для вычислений. Соответствующий алгоритм был разработан Миллером [14] (см. также [9, 10]), который применил (5.22) в обратном направлении для расчета  $J_n(x)$ . Допустим, что для начала процесса при  $N \gg n$ , где  $n$  — порядок искомой функции  $J_n(z)$ , выбраны функции  $F_{N+1}(z)$  и  $F_N(z)$ . Следуя [14], примем  $F_{N+1} = 0$ ,  $F_N = 1$ . Используя многократно рекуррентную формулу (5.22), получаем последовательность функций  $F_{N-1}(z)$ ,  $F_{N-2}(z)$ , ...,  $F_n(z)$ .

Если  $N$  выбрано достаточно большим, то начиная с некоторого  $m > n$   $F_m(z)$ ,  $F_{m-1}(z)$ , ...,  $F_n(z)$  пропорциональны  $J_m(z)$ ,  $J_{m-1}(z)$ , ...,  $J_n(z)$ , т. е.

$$F_k(z) = P(z) J_k(z), \quad k = m, m-1, \dots, n, \quad (5.27)$$

где  $P(z)$  не зависит от  $k$ . Множитель  $P(z)$ , в общем комплексный, может быть получен сравнением одной из функций с табличным значением  $J_m(z)$ . Некоторые методы нормировки, в которых не требуется прибегать к таблицам функций, указаны в [9, 10].

Ниже описывается более простой способ, использующий асимптотические разложения  $Y_M(z)$  или  $K_M(z)$  относительно  $M \gg 1$ . Рассмотрим два набора значений  $F_{N+v+1}$ ,  $F_{N+v}$ , каждый из которых можно независимо применять для начала разностной схемы:

$$F_{N+v}^{(1)} = 1, \quad F_{N+v+1}^{(1)} = 0; \\ F_{N+v}^{(2)} = 0, \quad F_{N+v+1}^{(2)} = 1. \quad (5.28)$$

Для каждой из этих пар получаем согласно (5.27) после достаточного числа итераций по рекуррентной формуле (5.22) в обратном направлении функции

$$F_{k+v}^{(1)} = P^{(1)}(z) J_{k+v}(z); \quad F_{k+v}^{(2)} = P^{(2)}(z) J_{k+v}(z), \\ k = m, m-1, \dots, 0, \quad m \ll N. \quad (5.29)$$

Выполним те же итерации, приняв в качестве начальных значений  $F_{N+v}^{(3)} = A$ ,  $F_{N+v+1}^{(3)} = B$ . Ввиду линейности рекуррентных формул при учете (5.28) и (5.29) после достаточного числа шагов должны сформироваться функции

$$F_{k+v}^{(3)} = [AP^{(1)}(z) + BP^{(2)}(z)] J_{k+v}(z), \quad k = m, m-1, \dots, 0. \quad (5.30)$$

Установим теперь  $A = J_{N+v}(z)$ ,  $B = J_{N+v+1}(z)$ . Тогда на любом шаге в обратном направлении вследствие устойчивости (5.22) это рекуррентное соотношение будет приводить к  $F_{n+v}$ , совпадающим с правильными значениями  $J_{n+v}(z)$ ,  $n < N$ . Следовательно, из (5.30) получим

$$J_{N+v}(z) P^{(1)}(z) + J_{N+v+1}(z) P^{(2)}(z) = 1. \quad (5.31)$$

Сравним (5.31) с вронскианом (5.4). Ввиду того, что оба эти соотношения должны выполняться тождественно.

$$P^{(1)}(z) = -Y_{N+v+1}(z) \pi z / 2; \quad P^{(2)}(z) = Y_{N+v}(z) \pi z / 2. \quad (5.32)$$

Таким образом, для получения  $J_v(z)$  путем многократного применения (5.22) в обратном направлении достаточно задать

$$F_{N+v}(z) = -2/\pi z Y_{N+v+1}(z), \quad F_{N+v+1} = 0. \quad (5.33)$$

или

$$F_{N+v} = 0, \quad F_{N+v+1}(z) = 2/\pi z Y_{N+v}(z).$$

Аналогично для вычисления  $I_v(z)$  по рекуррентным формулам (5.24) в обратном направлении можно задать (ср. с. (5.5))

$$F_{N+v}(z) = -1/z K_{N+v+1}(z), \quad F_{N+v+1} = 0 \\ \text{или} \quad (5.34)$$

$$F_{N+v}(z) = 0, \quad F_{N+v+1}(z) = 1/z K_{N+v}(z).$$

Функции  $Y_{N+v}(z)$  или  $K_{N+v}(z)$  находятся из асимптотических разложений Дебая. Ввиду того, что расчеты по рекуррентным формулам типа (5.22), (5.24) производятся с большой скоростью, а разрядность чисел в ПМК достаточно ве-

лика, можно брать большие  $N$  и использовать с высокой точностью простейшие приближения типа (5.18)—(5.21). Этот способ реализован в программе 5.11.

Отметим, что при выводе (5.33) не использовался конкретный вид рекуррентных формул. Важно лишь, чтобы эти соотношения были линейными и трехчленными и им удовлетворяли линейно независимые функции с противоположным монотонным изменением в зависимости от  $v$  (при больших  $v$ ).

*Сферические и модифицированные сферические функции Бесселя* по определению пропорциональны функциям Бесселя порядка  $(n + 1/2)$ :

$$\begin{aligned} j_n(z) &= \sqrt{\pi/2z} J_{n+1/2}(z), \quad y_n(z) = \sqrt{\pi/2z} Y_{n+1/2}(z), \\ i_n(z) &= \sqrt{\pi/2z} I_{n+1/2}(z), \quad k_n(z) = \sqrt{\pi/2z} K_{n+1/2}(z) \end{aligned} \quad (5.35)$$

и удовлетворяют дифференциальному уравнению

$$z^2 \frac{d^2 W}{dz^2} + 2z \frac{dW}{dz} + [z^2 + n(n+1)] W = 0, \quad n=0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (5.36)$$

где верхние знаки относятся к  $j_n(z)$ ,  $y_n(z)$ , а нижние — к  $i_n(z)$ ,  $k_n(z)$ . Заметим, что асимптотические разложения Ханкеля (5.13)—(5.17) при  $v = n + 1/2$  обрываются на  $n$ -м слагаемом и переходят в конечные суммы. Эти суммы оказываются точными представлениями функций  $J_{n+1/2}$ ,  $Y_{n+1/2}$ ,  $K_{n+1/2}$ . Указанные функции и соответствующие им сферические функции образуют единственную разновидность функций Бесселя, выражающихся в виде конечных сумм элементарных функций.

*Функции Кельвина* определяются для действительных  $z = x$  следующими формулами:

$$\begin{aligned} \text{ber}_v(x) + j \text{ber}_v(x) &= J_v(xe^{i3\pi/4}) = W_1; \\ \text{ker}_v(x) + j \text{ker}_v(x) &= e^{-jv\pi/2} K_v(xe^{j\pi/4}) = W_2 \end{aligned} \quad (5.37)$$

(при  $v = 0$  индекс 0 у функций Кельвина не пишется) и удовлетворяют дифференциальному уравнению

$$x^2 \frac{d^2 W}{dx^2} + \frac{xdW}{dx} - (jx^2 + v^2) W = 0. \quad (5.38)$$

*Функции Эйри* удовлетворяют дифференциальному уравнению

$$\frac{d^2 W}{dz^2} - zW = 0. \quad (5.39)$$

Обычно в качестве линейно независимых решений используются функции  $Ai(z)$  и  $Bi(z)$ , которые в окрестности  $z = 0$  разлагаются в следующие степенные ряды:

$$Ai(z) = C_1 f(z) - C_2 g(z); \quad Bi(z) = \sqrt{3}[C_1 f(z) + C_2 g(z)], \quad (5.40)$$

где

$$\begin{aligned} f(z) &= 1 + \frac{1}{3!} z^3 + \frac{1 \cdot 4}{6!} z^6 + \frac{1 \cdot 4 \cdot 7}{9!} z^9 + \dots; \\ g(z) &= z + \frac{2}{4!} z^4 + \frac{2 \cdot 5}{7!} z^7 + \frac{2 \cdot 5 \cdot 8}{10!} z^{10} + \dots; \end{aligned} \quad (5.40a)$$

$$C_1 = 3^{-2/3} \Gamma(2/3) = 3,5502805 \cdot 10^{-1}; \quad C_2 = 3^{-1/3} \Gamma(1/3) = 2,5881940 \cdot 10^{-1}.$$

## 5.2. Функции Бесселя, Неймана, Ханкеля, модифицированные функции Бесселя, функции Макдональда и Кельвина целого порядка

Здесь приведены лишь те алгоритмы и программы, которые применимы к функциям целого порядка  $v = n$ . Случаи, относящиеся одновременно к целым и дробным  $v$  или только к дробным  $v$ , включены в § 5.3. К ним принадлежат, в частности, расчеты функций по асимптотическим формулам Ханкеля и Дебая.

*Разложение (5.6) функции  $J_v(z)$  в бесконечный ряд* для целых  $v = n$  удобно записать в виде

$$J_n(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^n \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-z^2/4)^k}{k! (n+1)(n+2) \dots (n+k)}, \quad (5.41)$$

Представим (5.41) в виде, соответствующем схеме Горнера:

$$J_n(z) \approx \left(\frac{z}{2}\right)^n n! \left\{ \left[ \dots \left( \frac{(-z^2/4)}{N(N+N)} + 1 \right) \frac{(-z^2/4)}{(N-1)(N+N-1)} + \dots \right] \frac{(-z^2/4)}{1 \cdot (n+1)} + 1 \right\}. \quad (5.42)$$

Ряд для  $I_n(z)$  и схема Горнера будут отличаться лишь знаком при множителях  $z^2/4$  (ср. формулы (5.6), (5.7)).

Преобразуем ряды (5.8), (5.9) для функций  $Y_n(z)$  и  $K_n(z)$  к удобному для вычислений виду. С этой целью заменим  $J_n(z)$  и  $I_n(z)$ , входящие в (5.6), (5.7), на соответствующие ряды типа (5.41). В результате получим

$$\pi Y_n(z) = S_1 + \left(\frac{z}{2}\right)^n \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-z^2/4)^k}{k! (n+1)(n+2) \dots (n+k)} M_k; \quad (5.43)$$

$$-2K_n(z) = S_2 - \left(-\frac{z}{2}\right)^{-n} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z^2/4)^k}{k! (n+1)(n+2) \dots (n+k)} M_k, \quad (5.44)$$

где

$$S_{1,2} = -\left(\frac{z}{2}\right)^{-n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-k-1)! (\pm z^2/4)}{k!}$$

(знаки  $(+)$  и  $(-)$  соответствуют  $S_1$  и  $S_2$ ); при  $n = 0, 1$   $S_1 = S_2$  и равны соответственно 0 и  $-2/z$ ;

$$M_k = \ln z + 2\gamma - \sum_{m=1}^n \frac{1}{m} - \sum_{m=1}^k \left( \frac{1}{m} + \frac{1}{m+n} \right), \quad k=1, 2, \dots;$$

$$M_0 = \ln z + 2\gamma - \sum_{m=1}^n \frac{1}{m}, \quad \gamma = 0,57721566.$$

Вычисление  $Y_n(z)$  и  $K_n(z)$  может быть реализовано на ПМК при любом  $n$  непосредственно по формулам (5.43), (5.44). Однако программы получаются более короткими, а погрешности — меньшими, если сначала вычислить  $Y_0$ ,  $Y_1$  (соответственно  $K_0$ ,  $K_1$ ), а затем применить рекуррентные формулы в прямом направлении, которые, как отмечалось выше, устойчивы для указанных функций.

Запишем для этих случаев разложения (5.43), (5.44) по схеме Горнера ( $n = 0, 1$ ):

$$\pi Y_n(z) \approx -\frac{2n}{z} + \left(\frac{z}{2}\right)^n \left\{ \left[ \dots \left( \frac{(-z^2/4)}{N(N+n)} + \Pi_{N-1} - \frac{n}{N} \right) \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \frac{(-z^2/4)}{(N-1)(N-1+n)} + \dots \right] \frac{(-z^2/4)}{1(1+n)} + \Pi_0 - \frac{n}{1} \right\}; \quad (5.45)$$

$$2K_n(z) \approx \frac{2n}{z} - \left(\frac{z}{2}\right)^n \left\{ \left[ \dots \left( \frac{(z^2/4)}{N(N+n)} + \Pi_{N-1} - \frac{n}{N} \right) \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \frac{(z^2/4)}{(N-1)(N-1+n)} + \dots \right] \frac{(z^2/4)}{1(1+n)} + \Pi_0 - \frac{n}{1} \right\}, \quad (5.46)$$

где

$$\Pi_N = \ln\left(\frac{z^2}{4}\right) + 2\gamma - \sum_{m=1}^N \frac{2}{m}; \quad \Pi_0 = \ln\left(\frac{z^2}{4}\right) + 2\gamma, \quad N = 1, 2, \dots$$

Целесообразно при вычислениях использовать очевидную рекуррентную формулу  $\Pi_{k-1} = \Pi_k + 2/k$  ( $k = 1, 2, \dots$ ).

Заметим, что хотя бесконечный ряд для  $K_n(x)$ , входящий в (5.46), не выглядит как знакопередающийся, однако из-за изменения знака  $\Pi_k$  при некотором  $k$  он равен разности двух больших величин. С увеличением  $\text{Re} z = x$  данные величины заведомо сближаются, так как  $|K_n(z)|$  при  $x \gg 1$  экспоненциально малы (ср. асимптотическое разложение (5.17)). Это приводит к значительным погрешностям округления уже при  $x > 6$ . Указанный недостаток компенсируется при вычислении  $K_n(x)$  по асимптотическим формулам (5.17) (программа 5.7). Расчет ведется в два этапа. Сначала по (5.17) находятся  $K_0(x)$  и  $K_1(x)$ , в этом случае имеет место наилучшая сходимость (5.17). Затем используется рекуррентная формула (5.24) для нахождения  $K_n(x)$ , образующая устойчивую разностную схему в прямом направлении.

**Программа 5.1.** Функции Бесселя  $J_n(x)$  и модифицированные функции Бесселя  $I_n(x)$  вещественного аргумента  $x > 0, n = 0, 1, 2, \dots$ . Разложение в ряд по схеме Горнера (5.42).

П1	2	÷	ПС	Fx <sup>2</sup>	/—/	ПД	9	ИП1	+
П0	ИПВ	ВП	П1	ИПВ	ИПС	Fx <sup>4</sup>	1	ИПД	×
ИП0	÷	ИП0	ИПВ	+	÷	1	+	FL0	18
×	ИП1	÷	FL1	31		C/П			

Данный вариант программы относится к  $J_n(x)$ . Для перехода к  $I_n(x)$  следует заменить команду /—/ (адрес 05) на КНОП. Число учитываемых членов ряда в программе  $N = x + 9$ .

**Инструкция**

1. Исходные данные: ( $n = \text{PB}$ ), [ $x = \text{PX}$ ].
2. Пуск: В/О С/П.
3. Результат:  $\text{PX} = J_n(x)$  (или  $I_n(x)$ ).
4. Регистры: рабочие PB; оперативные P0, P1, PC, PD; свободные P2—PA.
5. Погрешность:
  - а) для  $J_n(x)$  следует различать область  $x \geq n$ , где функции осциллируют около нуля с амплитудой  $\sim 0,1$ , и область монотонного изменения  $x \leq n$ , где функции меняются на много порядков. В первом случае следует оперировать абсолютной погрешностью  $\Delta$ , а во втором — относительной  $\delta$ . Максимальные погрешности равны:

$x \geq n$	$\Delta$	$x \leq n$	$\delta$	$x \geq n$	$\Delta$	$x \leq n$	$\delta$
$x \leq 12$ $x \leq 9$	$\leq 2 \cdot 10^{-4}$ $\leq 1 \cdot 10^{-5}$	$x \leq 25$ $x \leq 20$	$\leq 2 \cdot 10^{-3}$ $\leq 1 \cdot 10^{-4}$	$x \leq 6$ $x \leq 4$	$\leq 1 \cdot 10^{-6}$ $\leq 1 \cdot 10^{-7}$	$x \leq 15$ $x \leq 8$	$\leq 1 \cdot 10^{-5}$ $\leq 1 \cdot 10^{-6}$

б) для  $I_n(x)$  относительная погрешность меньше  $2 \cdot 10^{-6}$  (при  $x \leq 100$ ).  
6. Время счета  $t \approx (0,6 + x/15 + n/30)$  мин.

**Примеры.**

$J_0(7) = 0,3000779$  ( $0,30007927$  [9]),  $t \approx 1$  мин;

$J_0(10) = -0,2459225$  ( $-0,2459358$  [9]),  $t \approx 1$  мин;

$J_{20}(10) = 1,1513342 \cdot 10^{-5}$  ( $1,1513369 \cdot 10^{-5}$  [9]),  $t \approx 2$  мин;

$I_0(100) = 1,0737501 \cdot 10^{42}$  ( $1,07375171 \cdot 10^{42}$  [9]),  $t \approx 7$  мин.

Здесь преимущество может иметь программа, использующая асимптотический ряд (см. § 5.3).

**Программа 5.2.** Функции Неймана  $Y_0(x)$ ,  $Y_1(x)$  вещественного аргумента  $0 < x \leq 12$ . Разложение в ряд по схеме Горнера (5.45).

П8	2	÷	ПС	Fx <sup>2</sup>	/—/	ПД	1	1	ИП8
+	П8	П0	ИПВ	ИПС	Flп	+	ИП0	F1/x	—
FL0	17	П9	ИП8		1	ИПД	×	ИП0	÷
ИП0	ИПА	+	÷	ИП9	ИП0	F1/x	+	П9	FBx
2	÷	ИПА	×	—	+	FL0	26	1	Farc sin
÷	П9	ИПС	×	ИПС	F1/x	Fл	÷	—	C/П

**Инструкция**

1. Исходные данные: ( $\gamma = 5,7721566 \cdot 10^{-1} = \text{PB}$ ,  $n = \text{PA}$ ), [ $x = \text{PX}$ ]. При вычислении  $Y_0(x)$  и  $Y_1(x)$  следует задавать соответственно  $n = 0$  и  $n = 1$ .
2. Пуск В/О С/П.
3. Результат:  $\text{PX} = Y_1(x)$  (при  $n = 1$ ),  $\text{P9} = Y_0(x)$  (при  $n = 0$ ).
4. Регистры: рабочие P9, PA, PB; оперативные P0, P8, PC, PD; свободные P1—P7.
5. Погрешность: при  $x \leq 0,8$  (относительная) меньше  $5 \cdot 10^{-7}$ , при  $x > 0,8$  (абсолютная)  $2 \cdot 10^{-5}$  при  $x \leq 12$ ,  $2 \cdot 10^{-6}$  при  $x \leq 10$ ,  $2 \cdot 10^{-7}$  при  $x \leq 7$ .
6. Время счета  $t \approx (1,5 + x/7)$  мин.

**Примеры.**

$Y_0(12) = -0,22525097$  ( $-0,2252373126$  [9]),  $t \approx 3$  мин;

$Y_0(5) = -0,30851766$  ( $-0,308517625$  [9]),  $t \approx 2,5$  мин;

$Y_1(5) = 0,14786312$  ( $0,14786314$  [9]),  $t \approx 2,5$  мин.

**Программа 5.3.** Функции Бесселя второго рода  $Y_n(x)$  и производные  $Y'_n(x)$  вещественного аргумента  $0 < x \leq 12, n = 0, 1, 2, \dots$ . Разложение в ряды по схеме Горнера  $Y_0(x)$  и  $Y_1(x)$  (5.45) и рекуррентные формулы (5.22), (5.23).



ПВ	2	÷	ПС	Fx <sup>2</sup>	ПД	6	ИПВ	2	×
+	ПО	П7	ИП8	ИПД	Flп	+	2	ИПО	÷
—	FL0	17	ПА	1	ПП	69	ИПС	×	ИПС
F1/x	—	ПВ	0	ПП	69	ПА	ИП1	Fx≠0	65
КИП6	ИПА	/—/	ИП6	ИПС	÷	ИПВ	ПА	×	ПД
+	ПВ	FL1	40	ИПВ	Flп	÷	П7	ИПА	Flп
÷	П9	ИПД	2	÷	ИПВ	—	ПД	С/П	П6
ИПА	П9	ИП7	ПО	1	ИПД	/—/	×	ИПО	÷
ИПО	ИП6	+	÷	ИП9	2	ИПО	÷	+	П9
ИП6	ИПО	÷	—	÷	FL0	75	В/О		

#### Инструкция

- Исходные данные: ( $2\gamma = 1,1544313 = P8$ ),  $n = P1$ ,  $[x = PX]$ .
- Пуск: В/О С/П.
- Результат: при  $n \neq 0$   $PX = PД = \pi Y'_n(x)$ ,  $P9 = Y_n(x)$ ,  $P7 = Y_{n+1}(x)$ ; при  $n = 0$   $PX = PД = \pi Y'_0(x)$ ,  $PA = \pi Y_0(x)$ ,  $PВ = \pi Y_1(x)$ .
- Регистры: рабочие P6, P8 — PД; оперативные P0, P1; свободные P2—P5.
- Погрешность: в области  $x > n$  функции осциллируют около нуля с амплитудой  $\sim 0,1$  (за исключением  $Y_0(x)$  при малых  $x$ ) и следует оперировать абсолютной погрешностью  $\Delta$ . При  $x < n$  функции меняются монотонно на много порядков и необходимо использовать относительную погрешность  $\delta$ . Максимальные погрешности равны:

$x$	$\Delta(x > n)$	$\delta(x < n)$	$x$	$\Delta(x > n)$	$\delta(x < n)$
$\leq 12$	$\leq 2 \cdot 10^{-5}$	$\leq 2 \cdot 10^{-4}$	$\leq 7$	$\leq 2 \cdot 10^{-7}$	$\leq 2 \cdot 10^{-6}$
$\leq 10$	$\leq 2 \cdot 10^{-6}$	$\leq 2 \cdot 10^{-5}$	$\leq 5$	$\leq 1 \cdot 10^{-7}$	$\leq 1 \cdot 10^{-6}$

Для функции  $Y_0(x)$  при  $x \leq 0,5$  относительная погрешность меньше  $1 \cdot 10^{-6}$ .

6. Время счета  $t \approx (1,5 + 0,6x + n/12)$  мин.

Примеры.

$$Y_0(8) = 0,2235216 \quad (0,22352149 \text{ [9]}), \quad Y_1(8) = -0,15806059 \quad (-0,15806046 \text{ [9]}),$$

$$t \approx 6,5 \text{ мин};$$

$$Y_{20}(5) = -5,9339667 \cdot 10^8 \quad (-5,9339653 \cdot 10^8 \text{ [9]}), \quad Y_{21}(5) = -4,6676099 \cdot 10^9,$$

$$Y'_{20}(5) = 2,2940234 \cdot 10^9, \quad t = 6 \text{ мин}.$$

При необходимости рассчитать дополнительно функцию  $Y_{n+k}(x)$  с увеличенным на  $k$  ( $k = 1, 2, \dots$ ) порядком и прежним значением аргумента  $x$  следует, не изменяя содержимого регистров P6, P7, PA — PД, ввести в регистр P1 число  $k$ . Пуск: БП 40 С/П. Результат:  $PX = PД = \pi Y'_{n+k}(x)$ ,  $P9 = Y_{n+k}(x)$ ,  $P7 = Y_{n+k+1}(x)$ . Время счета при дополнительных пусках  $k/12$  мин.

**Программа 5.4.** Функции Бесселя  $J_n(x)$  и Неймана  $Y_n(x)$  вещественного аргумента (действительная и мнимая части функций Ханкеля  $H_n^{(1)}(x)$  и  $H_n^{(2)}(x)$ ),  $0 < x \leq 12$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ . Разложения в ряд по схеме Горнера для  $J_n$ ,  $Y_0$  и  $Y_1$  и рекуррентные формулы (5.22).

4	÷	ПС	Fx <sup>2</sup>	ПД	6	ИП4	+	ПО	П4
ИП8	ИПД	Flп	+	2	ИПО	÷	—	FL0	14
ПВ	0	П7	ПП	65	ПА	П3	1	ПП	65
ИПС	×	ИПС	F1/x	—	ПВ	ИПА	/—/	ИП6	ИПС
÷	ИПВ	ПА	×	+	ПВ	КИП6	FL1	36	1
П7	ИП5	ПП	65	ИП5	Fx≠0	64	F,	ИПС	×
ИП2	÷	FL2	58	С/П	П6	ИПВ	П9	ИП4	ПО
1	ИПД	/—/	×	ИПО	÷	ИПО	ИП6	+	÷
ИП7	Fx=0	94	÷	ИП9	2	ИПО	÷	+	П9
ИП6	ИПО	÷	—	+	FL0	71	В/О		

#### Структура программы

- 00—19: вычисление параметров рядов (5.42), (5.45)  $N$ ,  $x^2/4$ ,  $P_N$ ,  
 20—35: вычисление  $Y_0(x)$ ,  $Y_1(x)$  по формулам (5.45),  
 36—48: вычисление  $Y_n(x)$ ,  $Y_{n+1}(x)$  по рекуррентной формуле (5.22),  
 49—64: вычисление  $J_n(x)$  по формуле (5.42),  
 65—97: подпрограмма расчета текущего члена ряда для рядов (5.42), (5.45).

#### Инструкция

- Исходные данные: ( $2\gamma = 1,1544313 = P8$ ),  $n = P5 = P1 = P2$ ,  $[2x = P4]$ . Если  $n = 0$ , то вводить  $1 = P1$ , а не  $0 = P1$ .
- Пуск: В/О С/П.
- Результат: для  $n \neq 0$   $PX = J_n(x)$ ,  $PA = \pi Y_n(x)$ ,  $PВ = \pi Y_{n+1}(x)$ ; для  $n = 0$   $PY = J_0(x)$ ,  $P3 = \pi Y_0(x)$ .
- Регистры: рабочие P3, P8, PA, PB; оперативные все остальные, свободных нет.
- Погрешность  $Y_n(x)$  совпадает с погрешностью в программе 5.3,  $J_n(x)$  — с погрешностью в программе 5.1.
- Время счета  $t \approx (2,5 + 0,8x + 0,1n)$  мин.

Примеры.

$$\left. \begin{aligned} J_0(10) &= -0,2459225 \quad (-0,24593976 \text{ [9]}), \\ Y_0(10) &= 0,055673163 \quad (0,055671167 \text{ [9]}), \\ Y_{20}(1) &= -4,1139707 \cdot 10^{22} \quad (-4,1139703 \cdot 10^{22} \text{ [9]}), \\ Y_{21}(1) &= -1,6445048 \cdot 10^{24} \end{aligned} \right\} t = 11 \text{ мин};$$

$$J_{20}(1) = 3,873502 \cdot 10^{-25} \quad (3,823503 \cdot 10^{-25}), \quad \left. \begin{aligned} & \\ & \end{aligned} \right\} t = 5,5 \text{ мин}.$$

**Программа 5.5.** Функции Бесселя  $J_n(z)$  и модифицированные функции Бесселя  $I_n(z)$  первого рода комплексного аргумента  $z = x + jy$ , функции Кельвина  $\text{ber}_n(t)$ ,  $\text{bei}_n(t)$ ,  $|z| \leq 12$ ,  $t \leq 12$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ . Разложение в ряд (5.42) и формула (5.37).

Fx <sup>2</sup>	ИПД	Fx <sup>2</sup>	+	Fy <sup>2</sup>	9	+	П1	ИПС	2
÷	ПА	ПС	ИПД	2	÷	ПВ	ПД	ПП	59
ПА	ХУ	ПВ	0	Flп	ИП1	ИПО	+	ИП1	/—/
×	П9	÷	ХУ	ИП9	÷	ПП	59	1	+
FL1	25	ПА	ХУ	ПВ	ИПО	Fx≠0	58	ИПС	ИПО
÷	ИПД	ИПО	÷	ПП	59	FL0	42	С/П	П8
ИПА	×	ХУ	П7	ИПВ	×	+	ИПА	ИП7	×
ИПВ	ИП8	×	—	В/О					

Данный вариант программы относится к  $J_n(z)$ . Для перехода к  $I_n(z)$  заменить команду /—/ (адрес 29) на КНОП.

#### Инструкция

1. Исходные данные:  $n = P0$ ,  $x = PC$ ,  $[\pm y = PD]$ .
  2. Пуск: В/О С/П.
  3. Результат: для  $n \neq 0$   $PX = \operatorname{Re} \Pi_n(z)$ ,  $PY = \operatorname{Im} \Pi_n(z)$ ; для  $n = 0$   $PA = \operatorname{Re} \Pi_0(z)$ ,  $PB = \operatorname{Im} \Pi_0(z)$ .
- Здесь под  $\Pi_n(z)$  подразумевается в зависимости от варианта программы  $J_n(z)$  или  $I_n(z)$ .
4. Регистры: рабочие — ; оперативные  $P0, P1, P7$  — РД; свободные  $P2$  — Р6.
  5. Погрешность относительная меньше:

$$4 \cdot 10^{-3} \text{ при } |z| \leq 12, \quad 1 \cdot 10^{-5} \text{ при } |z| \leq 6,$$

$$1 \cdot 10^{-4} \text{ при } |z| \leq 9, \quad 1 \cdot 10^{-6} \text{ при } |z| \leq 4.$$

Эти критерии, однако, несправедливы в окрестности нулей функций, которые расположены у  $J_n(z)$  на действительной оси при  $|x| > n$ , а у  $I_n(z)$  на мнимой оси при  $|y| > n$ . Поэтому для  $J_n(z)$ , если  $|y| < 0,1$  и  $|x| > n$ , или соответственно для  $I_n(z)$ , если  $|x| < 0,1$  и  $|y| > n$ , абсолютная погрешность меньше:

$$5 \cdot 10^{-4} \text{ при } |z| \leq 12, \quad 1 \cdot 10^{-6} \text{ при } |z| \leq 6,$$

$$1 \cdot 10^{-5} \text{ при } |z| \leq 9, \quad 1 \cdot 10^{-7} \text{ при } |z| \leq 4.$$

6. Время счета  $t = (1,5 + |z|/6 + n/4)$  мин.

При вычислении функций Кельвина следует для приведенного варианта программы вводить  $x = -t\sqrt{2}/2$ ,  $y = t\sqrt{2}/2$ . Остальные пункты такие же, как в тексте инструкции. Результат: для  $n \neq 0$   $PX = \operatorname{ber}_n(t)$ ,  $PY = \operatorname{bei}_n(t)$ ; для  $n = 0$   $PA = \operatorname{ber}(t)$ ,  $PB = \operatorname{bei}(t)$ .

#### Примеры.

$$\operatorname{ber}_1(5) = 0,3597761 \quad (0,35977666 \text{ [9]}), \quad \operatorname{bei}_1(5) = -5,7979071 \quad (-5,7979079 \text{ [9]}),$$

$$t = 2,5 \text{ мин};$$

$$J_0(2,4048256 + j0,01) = -1,08 \cdot 10^{-5} - j5,1915312 \cdot 10^{-3}.$$

Здесь  $x_0 = 2,4048256$  — приближенное значение нуля  $J_0(x)$ . Учитывая, что при малых  $y$  в окрестности нуля  $J_0(x_0 + jy) \approx jJ'_0(x_0)$ , получаем  $J'_0(x_0) \approx -0,51915312$ , табличное значение  $J'_0(x_0) = -0,51914749$ . Таким образом, вводя малую мнимую добавку к известному нулю функции, можно вычислить значение  $J'_0(x)$  в нуле (см. также § 5.4).

**Программа 5.6.** Модифицированные функции Бесселя третьего рода  $K_n(x)$  (функции Макдональда) вещественного аргумента, производные  $K'_n(x)$ ,  $0 < x \leq 6$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ . Разложение  $K_0(x)$ ,  $K_1(x)$  в ряд (5.46) и рекуррентные формулы (5.26).

ПВ	2	÷	ПС	$Fx^2$	ПД	6	ИПВ	2	×
+	ПО	П7	ИП8	ИПД	Flп	+	2	ИПО	÷
—	FL0	17	ПА	1	ПП	69	ИПС	×	ИПС
$F1/x$	+	ПВ	0	ПП	69	/—/	ПА	ИП1	$Fx \neq 0$
65	КИП6	ИПА	ИП6	ИПС	÷	ИПВ	ПА	×	ПД
+	ПВ	FL1	41	ИПВ	2	÷	П7	ИПА	2
÷	П9	ИПД	2	÷	ИПВ	—	ПД	С/П	П6
ИПА	П9	ИП7	ПО	1	ИПД	×	ИПО	÷	ИПО
ИП6	+	÷	ИП9	2	ИПО	÷	+	П9	ИП6
ИПО	÷	—	+	FL0	75	В/О			

#### Инструкция

1. Исходные данные:  $(2\gamma = 1,1544313 = P8)$ ,  $n = P1$ ,  $[x = PX]$ .
  2. Пуск: В/О С/П.
  3. Результат: для  $n = 0$   $PX = PD = 2K'_0(x)$ ,  $PA = 2K_0(x)$ ,  $PB = 2K_1(x)$ ; для  $n > 0$   $PX = PD = 2K'_n(x)$ ,  $P9 = K_n(x)$ ,  $P7 = K_{n+1}(x)$ .
- При необходимости рассчитать дополнительно функцию  $K_{n+m}(x)$  для того же аргумента ( $m = 1, 2, \dots$ ) следует, не изменяя содержимого регистров  $P6, PA$  — РД, ввести в регистр  $P1$  число  $m$ , а затем пуск: БП 41 С/П. Результат:  $PX = PD = 2K'_{n+m}(x)$ ,  $P9 = K_{n+m}(x)$ ,  $P7 = K_{n+m+1}(x)$ . Время счета при дополнительном пуске ( $m/12$ ) мин.
4. Регистры: рабочие  $P7$  — РД; оперативные  $P0, P1, P6$ ; свободные  $P2$  — Р5.
  5. Погрешность относительная меньше:

$$2 \cdot 10^{-3} \text{ при } x \leq 6, \quad 1 \cdot 10^{-5} \text{ при } x \leq 3,5$$

$$1 \cdot 10^{-4} \text{ при } x \leq 5, \quad 1 \cdot 10^{-6} \text{ при } x \leq 2,5.$$

6. Время счета  $t \approx (1,5 + 0,6x + n/12)$  мин.

#### Примеры.

$$K_0(4) = 0,0111591 \quad (0,011159671 \text{ [9]}), \quad K_1(4) = 0,0124841 \quad (0,012483499 \text{ [9]}),$$

$$t = 4 \text{ мин};$$

$$\left. \begin{aligned} K_{20}(5) &= 4,8271027 \cdot 10^8 \quad (4,8270005 \cdot 10^8 \text{ [9]}), \\ K'_{20}(5) &= -1,9932376 \cdot 10^9, \\ K_{21}(5) &= 3,9240787 \cdot 10^9, \end{aligned} \right\} t = 6 \text{ мин.}$$

**Программа 5.7.** Модифицированные функции Бесселя  $K_n(x)$  вещественного аргумента и производные  $K'_n(x)$ ,  $|x| \geq 3$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ . Асимптотическое разложение (5.17) для  $K_0(x)$ ,  $K_1(x)$  и рекуррентные формулы (5.26).

Fl	ИПС	2	÷	П9	4	×	ПД	÷	$FV$
ИПС	$Fx^x$	÷	П8	0	ПП	47	ПА	1	ПП
47	ПВ	ИП1	$Fx \neq 0$	43	0	П6	КИП6	ИПА	ИП6
ИП9	÷	ИПВ	ПА	×	ПД	+	ПВ	FL1	27
ИПД	2	÷	ИПВ	—	ПД	С/П	ПВ	9	ПО
1	ИПВ	ИПО	2	$F1/x$	—	$Fx^2$	—	×	ИПО
÷	ИПД	÷	1	+	FL0	51	ИП8	×	В/О

#### Инструкция

1. Исходные данные:  $(x = PC)$ ,  $n = P1$ .
2. Пуск: В/О С/П.
3. Результат:  $PX = PD = K'_n(x)$ ,  $PA = K_n(x)$ ,  $PB = K_{n+1}(x)$ .
4. Регистры: рабочие  $PA$  — РД; оперативные  $P0, P1, P6, P8, P9$ ; свободные  $P2$  — Р5, Р7.
5. Погрешность относительная меньше:

$$1 \cdot 10^{-3} \text{ при } x \geq 3, \quad 1 \cdot 10^{-5} \text{ при } x \geq 4,8,$$

$$1 \cdot 10^{-4} \text{ при } x \geq 3,8, \quad 1 \cdot 10^{-6} \text{ при } x \geq 6.$$

6. Время счета  $t \approx (2 + n/12)$  мин.

### Примеры.

$$\left. \begin{aligned} K_0(5) &= 0,0036910763 \quad (0,0036910983 \text{ [9]}), \\ K_1(5) &= 0,0040446375 \quad (0,0040446134 \text{ [9]}), \\ K_{17}(10) &= 3,0868696 \quad (3,08686999 \text{ [9]}), \\ K'_{17}(10) &= -6,129307 \quad (-6,129308 \text{ [9]}), \\ K_{18}(10) &= 11,376986 \quad (11,3769872 \text{ [9]}), \end{aligned} \right\} \begin{aligned} t &= 2 \text{ мин;} \\ t &= 3,5 \text{ мин.} \end{aligned}$$

### 5.3. Функции Бесселя, Неймана, Ханкеля, модифицированные функции Бесселя, функции Макдональда дробного порядка. Сферические функции Бесселя

Схему Горнера разложения  $J_\nu(x)$  в бесконечный ряд (5.6) запишем, вынеся за знак суммы фактор  $1/\Gamma(\nu + N + 1)$ , где  $N$  — число учитываемых членов ряда:

$$J_\nu(z) \approx \left(\frac{z}{2}\right)^\nu \frac{1}{\Gamma(\nu + N + 1)} \left\{ \left[ \left[ \dots \left( \frac{-z^2/4}{N} + \nu + N \right) \frac{(-z^2/4)}{N-1} + \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. + (\nu + N)(\nu + N - 1) \right] \frac{(-z^2/4)}{N-2} + \dots \right] \frac{(-z^2/4)}{1} + \right. \\ \left. + (\nu + N)(\nu + N - 1) \dots (\nu + 1) \right\}. \quad (5.47)$$

Такая запись удобна тем, что при достаточно больших  $N$  значения  $\Gamma(\nu + N + 1)$  можно найти сразу по асимптотической формуле (2.4).

Ряд для  $I_\nu(z)$  получается из (5.47) изменением знака у множителей  $z^2/4$ . Оба разложения пригодны также и для  $\nu < 0$ . Это позволяет, в частности, использовать соотношения (5.11) и (5.12) при дробных  $\nu$  для вычисления  $Y_\nu(z)$  и соответственно  $K_\nu(z)$ . При этом следует иметь в виду ограничения, упомянутые в связи с формулой (5.12).

Асимптотические разложения Ханкеля функций  $J_\nu(z)$ ,  $Y_\nu(z)$ ,  $I_\nu(z)$ ,  $K_\nu(z)$  (формулы (5.13) — (5.17)) также целесообразно реализовать по схеме Горнера. В данном случае эта схема не имеет существенных особенностей и соответствующие ряды не выписываются. Отметим, что наилучшей сходимостью обладает разложение для  $K_\nu(x)$ , применимое начиная с  $x = 2$ .

Асимптотические разложения Дебая (5.19), (5.21), в сочетании с рекуррентными формулами (5.22) (см. также (5.33), (5.34)) позволяют находить  $J_\nu(x)$  и  $I_\nu(x)$  в наиболее широкой области вещественного аргумента при равномерной погрешности практически во всей области. Для получения хорошего приближения  $Y_{N+\nu}(x)$  и  $K_{N+\nu}(x)$ , входящих в (5.33), (5.34), требуются достаточно большие  $N$ . При очень малых  $x$  ( $\sim 10^{-3}$ ) значения этих функций могут оказаться настолько большими ( $\sim (2/x)^N N!$ ), что выйдут за разрядную сетку ЭВМ. На рис. 5.1. представлены максимальные в указании смысле значения  $N + \nu$  как функции  $x$  (максимальный порядок чисел принимался равным  $10^{99}$ ). График можно использовать для задания  $N$  в программе 5.11. Допустимая область значений  $x$  и  $\nu$  может быть расширена программными средствами. Однако необходимые коррективы программы связаны с добавлением чрезмерно большого числа команд.

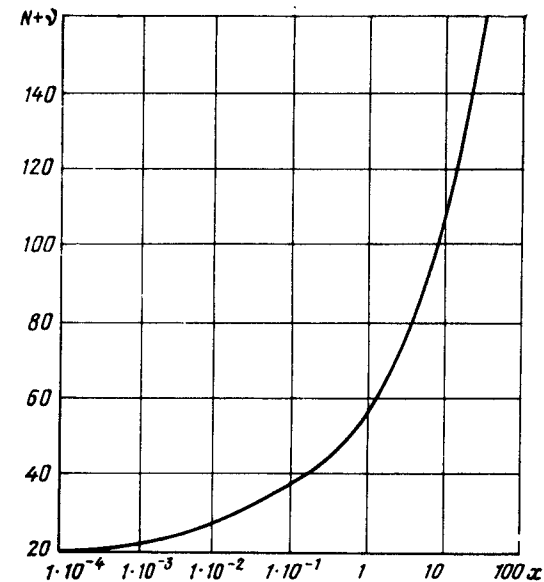


Рис. 5.1. Предельные значения числа итераций  $N$  при вычислении функций Бесселя  $J_\nu(z)$ ,  $I_\nu(z)$  по асимптотическим формулам Дебая, рекуррентным формулам (5.33) и формулам (5.34)

**Программа 5.8.** Функции Бесселя  $J_\nu(x)$  и модифицированные функции Бесселя  $I_\nu(x)$  вещественного аргумента. Разложение в ряд (5.47),  $x > 0$ .

2	÷	ПС	Fx <sup>2</sup>	/—/	ПД	ИПВ	ИПС	Fx <sup>y</sup>	ИПО
ИПВ	+	1	П9	+	ПА	Flп	1	—	ИПА
×	ИПА	1	2	×	F1/x	+	Fe <sup>x</sup>	÷	Flп
2	×	ИПА	÷	Fy <sup>—</sup>	÷	1	ИПД	×	ИПО
÷	ИПО	ИПВ	+	ИП9	×	П9	+	FL0	37
×		С/П							

Данный вариант программы относится к  $J_\nu(x)$ . Для перехода к  $I_\nu(x)$  следует заменить команду /—/ (адрес 04) на КНОП.

#### Инструкция

1. Исходные данные: ( $\nu = \text{PB}$ ),  $N = \text{P0}$ , [ $x = \text{PC}$ ]. Число  $N$  учитываемых членов ряда задается исходя из формул  $N = x + 12$  при  $\nu \geq 0$  и  $N = r + 12$  при  $\nu < 0$ , где  $r$  — наибольшее из чисел:  $x$  или  $2|\nu|$ .

2. Пуск: В/О С/П.

3. Результат:  $PX = J_\nu(x)$  (или  $I_\nu(x)$ ).

4. Регистры: рабочие  $\text{PB}$ ; оперативные  $\text{P0}$ ,  $\text{P9}$ ,  $\text{PA}$ ,  $\text{PC}$ ,  $\text{PD}$ ; свободные  $\text{P1}—\text{P8}$ .

5. Погрешность несколько больше, чем в программе 5.1, за счет неточностей, связанных с асимптотическим приближением для гамма-функции. Максимальные погрешности  $\delta = 5 \cdot 10^{-6}$  для  $I_n(x)$ . Максимальные погрешности для  $J_n(x)$ :

$ v  \leq x$	$\Delta$	$x \leq  v  \leq 50$	$\delta$	$ v  \leq x$	$\Delta$	$x \leq  v  \leq 50$	$\delta$
$x \leq 12$ $x \leq 9$	$\leq 2 \cdot 10^{-4}$ $\leq 1 \cdot 10^{-5}$	$x \leq 25$ $x \leq 20$	$\leq 2 \cdot 10^{-3}$ $\leq 1 \cdot 10^{-4}$	$x \leq 6$ $x \leq 4$	$\leq 5 \cdot 10^{-6}$ $\leq 5 \cdot 10^{-7}$	$x \leq 15$ $x \leq 8$	$\leq 1 \cdot 10^{-5}$ $\leq 5 \cdot 10^{-6}$

6. Время счета  $t \approx N/12$  мин.

Примеры.

$J_{7,5}(10) = 0,28608956$  (0,28608884),  $J_{-7,5}(10) = 0,10724901$  (0,1072491),

$t = 2$  мин;

$I_{5,5}(5) = 1,3294269$  (1,3294238),  $t = 1,5$  мин.

Числа в скобках взяты из таблиц [9] сферических функций и модифицированных сферических функций Бесселя (см. (5.35)).

**Программа 5.9.** Функции Бесселя  $J_v(x)$ ,  $Y_v(x)$  дробного порядка и вещественного аргумента (действительная и мнимая части функций Ханкеля  $H_v^{(1)}(x)$ ,  $H_v^{(2)}(x)$ ),  $x > 0$ . Разложение в ряд (5.47) и формула (5.11).

2	÷	ПС	$Fx^2$	/—/	ПД	ПП	26	П7	ИПВ
/—/	ПВ	ПП	26	ИП7	ИПВ	Пл	×	ПА	Fcos
×	—	ИПА	Fsin	÷	С/П	ИПВ	ИПС	$Fx^y$	ИП8
ПО	ИПВ	+	1	П9	+	ПА	Fln	1	—
ИПА	×	ИПА	1	2	×	F1/x	+	$Fe^x$	÷
Пл	2	×	ИПА	÷	$Fv^{\sim}$	÷	1	ИПД	×
ИПО	÷	ИПО	ИПВ	+	ИП9	×	П9	+	FL0
58	×	В/О							

Инструкция

1. Исходные данные: ( $N = P8$ ),  $v = PB$ , [ $x = P7$ ]. Число  $N$  учитываемых членов ряда предварительно находится по формуле  $N = r + 15$ , где  $r$  — наибольшее из чисел  $x$  или  $2|v|$ .

2. Пуск: В/О С/П.

3. Результат:  $PX = Y_v(x) = J_m H_v^{(1)}(x) = -J_m H_v^{(2)}(x)$ ;  $P7 = J_v(x) = \text{Re } H_v^{(1)}(x) = \text{Re } H_v^{(2)}(x)$ .

4. Регистры: рабочие P7, P8; оперативные P0, P9 — PД; свободные P1 — P6.

5. Погрешность в основном такая же, как и в программе 5.8, за исключением тех случаев, когда  $v$  близки к целым ( $|v - n| < 0,05$ ); здесь погрешности  $Y_v(x)$  могут оказаться существенно большими из-за ошибок округления.

6. Время счета  $t \approx N/6$  мин.

Примеры.

$J_{\epsilon,5}(5) = 0,19056374$  (0,19056436 [9]),  $Y_{\epsilon,5}(5) = -0,5717502$  ( $-0,5717494$  [9]),

$t = 3,5$  мин;

$J_{1/3}(3,4641016) = -0,22891859$  ( $-0,22891758$ ),  $t = 3$  мин.

Для последнего примера значение в скобках получено из таблиц функций Эйри в [9], связанных с  $J_{1/3}(x)$ .

**Программа 5.10.** Функции Бесселя  $J_v(x)$ ,  $Y_v(x)$  целого и дробного порядков вещественного аргумента (действительная и мнимая части функций Ханкеля  $H_v^{(1)}(x)$ ,  $H_v^{(2)}(x)$ ),  $x \geq 3$ ,  $v \leq x$ ; сферические функции Бесселя  $j_n(x)$ ,  $y_n(x)$ . Асимптотические разложения (5.13)—(5.15).

$Fx^2$	П7	4	$F1/x$	—	ИПС	2	×	÷	П1
FBx	$Fx^2$	ПД	ИПС	ИП6	2	$F1/x$	+	1	ПО
Farcisin	×	—	Fcos	П4	FBx	Fsin	П5	0	ПП
59	ИПС	1	Farcisin	×	$Fv^{\sim}$	П6	÷	ПА	1
ПП	59	ИП6	÷	ПВ	ИП4	×	ИПА	ИП5	×
+	ИПА	ИП4	×	ИПВ	ИП5	×	—	С/П	ПВ
ИП9	П2	ИП2	2	×	ИПВ	+	П8	2	$F1/x$
—	$Fx^2$	ИП7	—	×	FBx	ИП8	2	×	—
2	+	×	ИП8	÷	1	ИП8	—	÷	ИПД
÷	1	+	FL2	62	КИПВ	×	В/О		

Инструкция

1. Исходные данные: ( $x = PC$ ,  $N = P9$ ), [ $v = P6$ ]. Число  $N$  учитываемых членов ряда предварительно находится по формуле  $N = v + 2$ .

2. Пуск: В/О С/П.

3. Результат:  $PX = J_v(x) = \text{Re } H_v^{(1)}(x) = \text{Re } H_v^{(2)}(x)$ ;  $PY = Y_v(x) = \text{Im } H_v^{(1)}(x) = -\text{Im } H_v^{(2)}(x)$ .

4. Регистры: рабочие P9, PC; оперативные P0 — P2, P4 — PB, PД; свободные P3.

5. Погрешность относительная:

$x \geq$	3	4,5	6	8	10
$\delta \leq$	$1 \cdot 10^{-2}$	$1 \cdot 10^{-3}$	$1 \cdot 10^{-4}$	$1 \cdot 10^{-5}$	$1 \cdot 10^{-6}$

Погрешности указаны для функций Ханкеля и определяются по общему правилу для комплексных функций (см. введение):

$$\delta = \sqrt{(\Delta \text{Re } H_n)^2 + (\Delta \text{Im } H_n)^2} / |H_n|.$$

6. Время счета  $t \approx (1,5 + v/3)$  мин.

Вычисление сферических функций  $j_n(x)$ ,  $y_n(x)$  производится путем ввода в качестве исходных данных аргумента  $x$  и порядка  $v = n + 1/2$ . Получающиеся функции Бесселя связаны с  $j_n(x)$  и  $y_n(x)$  соотношениями (5.35). Как уже упоминалось в § 5.1, асимптотические разложения, используемые в данной программе, переходят при  $v = n + 1/2$  в конечные суммы с  $n$  слагаемыми. Формулы становятся применимыми при любых сколь угодно малых  $x$ . Однако для функций  $j_n(x)$  при  $x \ll 1$  возрастают ошибки округления, так как эти функции малы ( $\sim x^n/2^n n!$ ), а слагаемые, входящие в (5.13), велики. Для функций  $y_n(x)$  при любых  $x$  относительная погрешность меньше  $1 \cdot 10^{-6}$ .

Примеры.

$J_3(5) = 0,36485051$  (0,36483123 [9]),

$Y_3(5) = 0,14620964$  (0,14626716 [9]),  $t = 2,5$  мин;

$j_2(0,1) = 0,0006499857$  (0,0006661906 [9]),

$y_2(0,1) = -3005,0127$  ( $-3005,0125$  [9]),  $t = 2$  мин.

**Программа 5.11.** Функции Бесселя  $J_v(x)$  и  $Y_v(x)$  вещественного аргумента. Асимптотическое разложение Дебая (5.19), рекуррентные формулы (5.22) с исходными данными (5.33) и формула (5.11).

ИПА	П8	3	ИП9	П0	ИПД	+	П7	Fx <sup>2</sup>	↑
ИПС	Fx <sup>2</sup>	—	ПВ	÷	5	×	—	1	2
÷	ИПВ	Fv <sup>—</sup>	ПВ	÷	2	—	8	ИПС	×
ИП7	÷	5	—	Fe <sup>x</sup>	ИП7	Fx <sup>2</sup>	÷	—	F1/x
ИПВ	ИПВ	ИП7	+	ИПС	÷	Fln	ИП7	×	—
Fe <sup>x</sup>	×	ИПС	÷	ИПВ	8	×	Fπ	÷	Fv <sup>—</sup>
×	ПВ	0	ПА	ИПВ	/—/	ИПА	ПВ	ИП7	×
2	×	ИПС	÷	+	ПА	ИП7	1	—	П7
FL0	64	ИПА	ИПД	Fx<0	96	Fπ	×	П7	Fcos
ИП8	×	—	ИП7	Fsin	÷	С/П			

**Инструкция.** Для вычисления  $Y_v(x)$  требуется проведение двух последовательных пусков и возможно по данной программе лишь при дробных  $v$ .

1. Исходные данные для пуска 1 (расчет  $J_v(x)$ ), ( $x = PC$ ,  $v = PD$ ,  $N = P9$ ). Число  $N$  итераций в рекуррентной формуле предварительно рассчитывается по формуле  $N = A$  при  $A \geq 10$  и  $N = 10$  при  $A \leq 10$ , где  $A = [20 + 2x - v](1) - \text{округление до целого}$ . Значения  $N$  могут быть взяты также из рис. 5.1. Однако при больших  $x$  эти предельные значения слишком велики и их использование сильно увеличит время счета.

2. Пуск 1: В/О С/П.

3. Результат:  $PY = PA = J_v(x)$ ,  $PB = J_{v+1}(x)$ .

4. Исходные данные для пуска 2 (вычисление  $Y_v(x)$ ):  $-v = PD$ ,  $N = [20 + 2x + v] = P9$  (округление до целого числа). В паузе между пусками 1 и 2 не должно изменяться содержимое регистров P8, PA, PC.

5. Пуск 2: В/О С/П.

6. Результат:  $PX = Y_v(x)$ ,  $P8 = J_v(x)$ ,  $PA = J_{-v}(x)$ ,  $PB = J_{1-v}(x)$ .

7. Регистры: рабочие P8 — PD; оперативные P0, P7; свободные P1—P6.

8. Погрешность: при  $x \geq |v|$  (абсолютная) меньше  $5 \cdot 10^{-7}$ ; при  $x < |v|$  (относительная)  $5 \cdot 10^{-6}$  и  $1 \cdot 10^{-5}$  для  $J_v(x)$  и  $Y_v(x)$  соответственно.

9. Время счета при каждом пуске  $(0,5 + N/10)$  мин.

**Внимание:** при  $v \gg 1$ ,  $x \ll v$  возможен авост, связанный с переполнением разрядной сетки, что происходит, когда  $J_v(x)$  близки по абсолютной величине к границе разрядной сетки. Так, при  $x = 0,0001$  и  $v = 10$  происходит авост:  $J_{10}(0,0001) \approx 2,7 \cdot 10^{-50}$ .

**Примеры.**

$$\left. \begin{aligned} J_{15,5}(10) &= 0,0026834563 \quad (0,0026834591 [9]), \\ J_{16,5}(10) &= 8,9799218 \cdot 10^{-4} \quad (8,9799312 \cdot 10^{-4} [9]), \\ Y_{15,5}(10) &= -10,072511 \quad (-10,072526 [9]), \\ J_{100}(100) &= 9,636734 \cdot 10^{-2} \quad (9,63666739 \cdot 10^{-2}), \end{aligned} \right\} \begin{aligned} N &= 24; \\ t &= 3 \text{ мин}; \\ N &= 55, \quad t = 5 \text{ мин}; \\ t &= 12 \text{ мин}. \end{aligned}$$

**Программа 5.12.** Функции Бесселя  $J_v(z)$ ,  $I_v(z)$ ,  $Y_v(z)$ ,  $K_v(z)$  комплексного аргумента  $z = x + jy$ ,  $|z| \leq 12$ . Разложение в ряд по схеме Горнера (5.47) и формулы (5.11), (5.12).

ИПВ	ПП	82	/—/	ПА	XY	/—/	ПВ	ИП1	ИПС
Fx <sup>2</sup>	ИПД	Fx <sup>2</sup>	+	Fv <sup>—</sup>	P9	Fx <sup>y</sup>	ИП0	ИП1	+
1	П7	+	П8	Fln	1	—	ИП8	×	ИП8
1	2	×	F1/x	+	Fe <sup>x</sup>	÷	ИП8	Fv <sup>—</sup>	×
ИПС	ИП9	÷	Farcos	ИП1	×	П9	Fcos	XY	×
ПС	FBx	ИП9	Fsin	×	ПД	0	Fπ	ИП0	÷
XY	ИП0	÷	ПП	82	ИП0	ИП1	+	ИП7	×
П7	+	FL0	58	ПА	XY	ПВ	ИПС	ИПД	ПП
82	С/П	П9	ИПА	×	XY	П8	ИПВ	×	+
ИПА	ИП8	×	ИПВ	ИП9	×	—	В/О		

Данный вариант программы относится к  $J_v(z)$ . Для перехода к  $I_v(z)$  следует исключить команды /—/ с адресами 03 и 06, заменив их на КНОП. Вычисления  $J_v(z)$  и  $I_v(z)$  производятся полностью в автоматическом режиме после набора исходных данных (пп. 1—6) инструкции. Для расчета  $Y_{-v}(z)$  и  $K_v(z)$  требуется произвести по одному дополнительному пуску и некоторое число ручных операций (пп. 46—9в инструкции).

**Инструкция**

А. Расчет  $J_v(z)$  или  $I_v(z)$  (в зависимости от использованного варианта программы).

1. Исходные данные: ( $v = P1$ ),  $N = P0$ ,  $y/2 = PB = PD$ ,  $[x/2 = PA = PC]$ . Число  $N$  учитываемых членов ряда предварительно находится по формуле  $N = r + 15$ , где  $r$  — наибольшее из чисел:  $|z|$  или  $2|v|$ .

2. Пуск: В/О С/П.

3. Результат:  $PX = \sqrt{2\pi} \operatorname{Re} J_v(z)$ ,  $PY = \sqrt{2\pi} \operatorname{Im} J_v(z)$  или

$$PX = \sqrt{2\pi} \operatorname{Re} I_v(z), \quad PY = \sqrt{2\pi} \operatorname{Im} I_v(z).$$

4. Регистры: рабочие P1; оперативные P0, P7 — PD; свободные P2 — P6.

5. Погрешность относительная меньше:

$$\begin{aligned} 4 \cdot 10^{-3} & \text{ при } |z| \leq 12, & 1 \cdot 10^{-5} & \text{ при } |z| \leq 6, \\ 1 \cdot 10^{-4} & \text{ при } |z| \leq 9, & 1 \cdot 10^{-6} & \text{ при } |z| \leq 4. \end{aligned}$$

Эти оценки, однако, несправедливы в окрестности нулей функций, которые расположены на действительной оси для  $J_v(z)$  и на мнимой оси для  $I_v(z)$  соответственно при  $x > v$  и  $y > v$ . Поэтому для  $J_v(z)$ , если  $|y| \geq 0,05$  и  $x > v$ , или для  $I_v(z)$ , если  $|x| \leq 0,05$  и  $y > v$ , абсолютная погрешность меньше:

$$\begin{aligned} 5 \cdot 10^{-4} & \text{ при } |z| \leq 12, & 1 \cdot 10^{-6} & \text{ при } |z| \leq 6, \\ 1 \cdot 10^{-5} & \text{ при } |z| \leq 9, & 1 \cdot 10^{-7} & \text{ при } |z| \leq 4. \end{aligned}$$

6. Время счета  $t \approx (0,5 + N/5)$  мин.

Б. Расчет  $Y_v(z)$ . После останова при пуске 1 (пп. 1—3) производится дополнительный пуск с соответствующим вводом исходных данных и последующими ручными операциями. В паузе между пусками не должно изменяться содержимое регистров PX, PY. Используется первый вариант программы (для  $J_v(z)$ ).

46. Ручной ввод содержимого регистров PX, PY в P2, P4; П2 XY П4. Исходные данные для пуска 2: ( $-v = P1$ ),  $N = P0$ ,  $y/2 = PB = PD$ ,  $[x/2 = PA = PC]$ .  $N$  выбирается так же, как в п. 1.

56. Пуск 2: В/О С/П.

66. Результат:  $PX = \operatorname{Re} \sqrt{2\pi} J_{-\nu}(z)$ ,  $PY = \operatorname{Im} \sqrt{2\pi} J_{-\nu}(z)$ .

Далее рассчитывается  $Y_{\nu}(z)$  с помощью следующих ручных операций (формула (5.11)).

76. Подготовительные операции:

ПЗ ХУ ПБ ИП1 Фл  $\times$  ПБ 6 ПО Фл 2  $\times$  FV<sup>-</sup> П7.

86. Не меняя содержимого всех регистров, дважды подряд выполнить следующую серию команд:

КИПО КИПО ИП6 Fcos  $\times$  — ИП6 Fsin  $\div$  ИП7  $\div$

96. Результат:  $PX = \operatorname{Re} Y_{\nu}(z)$ ,  $PY = \operatorname{Im} Y_{\nu}(z)$ .

В. Расчет  $K_{\nu}(z)$ . Также выполняется дополнительный пуск после пп. 1—3, но со вторым вариантом программы (на первом пуске вычисляется  $I_{\nu}(z)$ ). При этом реализуются пп. 46 — 76.

8в. Не меняя содержимого регистров после п. 76, дважды подряд выполнить следующую серию команд:

КИПО КИПО — ИП6 /—/ Fsin  $\div$  1 Farcsin  $\times$  ИП7  $\div$

9в. Результат:  $PX = \operatorname{Re} K_{\nu}(z)$ ,  $PY = \operatorname{Im} K_{\nu}(z)$ .

10б,в. Погрешности  $Y_{\nu}(z)$  и  $K_{\nu}(z)$  примерно такие же, как  $J_{\nu}(z)$  и  $I_{\nu}(z)$ , исключая близкие к целым значения  $\nu$  ( $|\nu - m| \leq 0,05$ ), где существенно возрастают ошибки округления. Для  $K_{\nu}(z)$  это происходит также при всех вещественных  $x > 5$ , погрешности в этом случае см. в программе 5.13.

Примеры.

$J_{1/2}(-3+j4) = -9,237498 - j3,0813277$  ( $-9,2374853 - j3,0813247$ ),

$t = 9$  мин;

$Y_{1/2}(-3+j4) = 3,0850518 - j9,2428897$  ( $3,0850431 - j9,2428604$ );

$I_{-1/2}(-3+j4) = 1,3695636 + j3,3100949$  ( $1,3695598 + j3,3100842$ );

$K_{1/2}(-3+j4) = 4,329654 + j10,392089$  ( $4,3296454 + j10,392067$ ).

Значения в скобках получены из следующих соотношений [9]:

$$J_{1/2}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin z}{\sqrt{z}}; \quad Y_{1/2} = -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\cos z}{\sqrt{z}};$$

$$I_{-1/2}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\operatorname{ch} z}{z}; \quad K_{1/2} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{-z}}{z}.$$

**Программа 5.13.** Модифицированные функции Бесселя дробного порядка и вещественного аргумента,  $x > 0$  для  $I_{\nu}(x)$  и  $0 < x \leq 5$  для  $K_{\nu}(x)$ . Разложение в ряд (5.47) и формула (5.12).

2	$\div$	ПС	Fx <sup>2</sup>	ПД	ПП	25	П7	ИПВ	/—/
ПВ	ПП	25	ИП7	—	ИПВ	/—/	Фл	$\times$	Fsin
$\div$	1	Farcsin	$\times$	С/П	ИПВ	ИПС	Fx <sup>y</sup>	ИП8	ПО
ИПВ	+	1	П9	+	ПА	Flп	1	—	ИПА
$\times$	ИПА	1	2	$\times$	Fl/x	+	Fe <sup>x</sup>	$\div$	Фл
2	$\times$	ИПА	$\div$	FV <sup>-</sup>	$\div$	1	ИПД	$\times$	ИПО
$\div$	ИПО	ИПВ	+	ИП9	$\times$	П9	+	FL0	57
$\times$	В/О								

Инструкция

1. Исходные данные: ( $N = P8$ ),  $\nu = PB$ , [ $x = PC$ ]. Число  $N$  учитываемых членов ряда находится так же, как в программе 5.9.

2. Пуск: В/О С/П.

3. Результат:  $PX = K_{\nu}(x)$ ,  $P7 = I_{\nu}(x)$ .

4. Регистры: рабочие P7, P8; оперативные P0, P9 — PД; свободные P1—P6.

5. Погрешность: для  $I_{\nu}(x)$  в основном определяется асимптотическим представлением Г-функции, в области  $0 < x \leq 40$  относительная погрешность не превышает  $5 \cdot 10^{-6}$ , для  $K_{\nu}(x)$  погрешность существенно больше и связана с использованием формулы (5.12). Входящие в нее  $I_{\nu}$  и  $I_{-\nu}$  при увеличении  $x$  экспоненциально возрастают и заведомо сближаются, так как  $K_{\nu}(x)$  экспоненциально малы. В результате влияние погрешностей округления сказывается уже при  $x > 1$ . Относительные погрешности  $K_{\nu}(x)$ :

$x \leq$	5	4	3	2	1
$\delta \leq$	$2 \cdot 10^{-2}$	$1 \cdot 10^{-3}$	$1 \cdot 10^{-4}$	$1 \cdot 10^{-5}$	$5 \cdot 10^{-6}$

6. Время счета  $t \approx (N/6)$  мин.

Примеры.

$I_{1/2}(4) = 10,887134$  ( $10,887102$  [9]),

$K_{1/2}(4) = 1,1473096 \cdot 10^{-2}$  ( $1,1477617 \cdot 10^{-2}$  [9]),  $t \approx 3$  мин;

$I_{10,5}(40) = 3,7193046 \cdot 10^{15}$  ( $3,7193049 \cdot 10^{15}$  [9]),  $t \approx 8$  мин.

**Программа 5.14.** Модифицированные функции Бесселя  $K_{\nu}(x)$  целого или дробного порядка и вещественного аргумента  $x \geq 2$ . Модифицированные сферические функции Бесселя  $k_n(x)$ ,  $x > 0$ . Асимптотическое разложение (5.17) по схеме Горнера и формула (5.35).

ИПВ	Fx <sup>2</sup>	ПА	ИПВ	4	+	ПО	ИПС	2	$\times$
ПД	1	ИПА	ИПО	2	Fl/x	—	Fx <sup>2</sup>	—	$\times$
ИПО	$\div$	ИПД	$\div$	1	+	FL0	12	ИПС	Fe <sup>x</sup>
$\div$	Фл	ИПД	$\div$	$\times$	$\uparrow$	FBx	FV <sup>-</sup>	$\div$	С/П

Инструкция

1. Исходные данные: ( $\nu = PB$ ,  $x = PC$ ). Для  $k_n(x)$   $\nu = n + 1/2$ .

2. Пуск: В/О С/П.

3. Результат:  $PX = K_{\nu}(x)$ ,  $PY = k_n(x)$ .

4. Регистры: рабочие PB, PC; оперативные P0, PA, PД; свободные P1 — P9.

5. Погрешность относительная  $K_{\nu}(x)$ :

$x \geq$	2	3	4	7	11
$\delta$	$1 \cdot 10^{-2}$	$1 \cdot 10^{-3}$	$1 \cdot 10^{-4}$	$1 \cdot 10^{-5}$	$1 \cdot 10^{-6}$

Для модифицированных сферических функций  $k_n(x)$ , как отмечалось в § 5.1, асимптотический ряд переходит в замкнутую точную формулу. Практически при всех  $x > 0$  относительная погрешность меньше  $1 \cdot 10^{-6}$ .

6. Время счета  $t \approx (0,5 + \nu/12)$  мин.

Примеры.

$k_{10}(0,1) = 1,0281753 \cdot 10^{20}$  ( $1,0281754 \cdot 10^{20}$  [9]),  $t \approx 1,5$  мин;

$K_{20}(4) = 4,705281 \cdot 10^{10}$  ( $4,705007 \cdot 10^{10}$  [9]),  $t \approx 2,5$  мин.

#### 5.4. Функции Эйри. Нули функций Эйри и их производных. Значения функций Эйри и их производных в нулях производных и функций

Степенные ряды (5.40а), которые определяют функции Эйри  $Ai(z)$  и  $Bi(z)$  (5.40), удобно суммировать по следующей схеме Горнера:

$$\Phi(z) \approx \left[ \dots \left[ \left( \frac{z^3}{3N(3N+A)} + 1 \right) \frac{z^3}{(3N-3)(3N-3+A)} + 1 \right] \times \right. \\ \left. \times \frac{z^3}{(3N-6)(3N-6+A)} + \dots + 1 \right] \frac{z^3}{3(3+A)} + 1, \quad (5.48)$$

где  $\Phi(z) = f(z)$  при  $A = -1$ ,  $\Phi(z) = g(z)/z$  при  $A = 1$ . Ряды (5.48) при  $z = x < 0$  являются знакопередающимися, как показывают оценки, пригодны для вычислений начиная с  $x = -7$ . В случае положительных  $x$ , хотя ряды знакопостоянны и их суммирование возможно при любых  $x$ , вследствие экспоненциальной малости функций  $Ai(z)$  для больших  $x$  члены  $C_1(z)$  и  $C_2(z)$  компенсируют друг друга (см. (5.40)). В результате существенное снижение точности, связанное с погрешностями округления, наступает уже при  $x = 3$ . Функция  $Bi(z)$  является, наоборот, суммой указанных величин, и точность не снижается (все это справедливо при операциях с 8 значащими цифрами).

Расширение расчетной области  $Ai(z)$  на значения  $\operatorname{Re} z = x > 3$  возможно путем использования асимптотического разложения (5.17) для функции Макдональда, связанной с  $Ai(z)$  соотношением

$$Ai(z) = (1/\pi) \sqrt{z/3} K_{1/3}(2z^{3/2}/3). \quad (5.49)$$

Совместное применение рядов и асимптотического разложения позволяет находить с достаточной точностью обе функции  $Ai(z)$  и  $Bi(z)$  в области  $z > -7$ .

Все нули функции  $Ai(z)$  и ее производной  $Ai'(z)$  расположены на отрицательной части действительной оси. Функции  $Bi(z)$  и  $Bi'(z)$  имеют также комплексные нули в секторе  $\pi/3 < |\arg z| < \pi/2$ .

Обозначим  $s$ -е отрицательные нули функций  $Ai(z)$ ,  $Ai'(z)$ ,  $Bi(z)$ ,  $Bi'(z)$  через  $a_s$ ,  $a'_s$ ,  $b_s$ ,  $b'_s$ , а комплексные нули  $Bi(z)$ ,  $Bi'(z)$  через  $\beta_s$ ,  $\beta'_s$  ( $s$  — номер нуля в порядке возрастания его абсолютной величины).

Удобный алгоритм вычисления нулей функций Эйри связан (см. [9]) с использованием асимптотических разложений по параметрам

$$t_1 = 3\pi(4s-1)/8, \quad t_2 = 3\pi(4s-3)/8. \quad (5.50)$$

Последние оказываются большими уже начиная с  $s=2$ , что обеспечивает быструю сходимость разложений. Отметим, что расчет нулей  $a_s$  лежит в основе эффективного алгоритма нахождения нулей функций Бесселя (§ 5.5).

Приведем далее асимптотические разложения [9] нулей до членов  $t_1^{-4}$ ,  $t_2^{-4}$  включительно, записанные в удобном для вычислений виде:

$$a_s \approx t_1^{2/3} \left[ \frac{1}{9,6t_1^2} \left( \frac{4}{3t_1^2} - 1 \right) - 1 \right], \quad (5.51)$$

$$b_s \approx t_2^{2/3} \left[ \frac{1}{9,6t_2^2} \left( \frac{4}{3t_2^2} - 1 \right) - 1 \right]; \quad (5.52)$$

$$b'_s \approx t_1^{2/3} \left[ \frac{7}{48t_1^2} \left( 1 - \frac{5}{6t_1^2} \right) - 1 \right], \quad (5.53)$$

$$a'_s \approx t_2^{2/3} \left[ \frac{7}{48t_2^2} \left( 1 - \frac{5}{6t_2^2} \right) - 1 \right]. \quad (5.54)$$

Значения функций Эйри в нулях производных ( $Ai(a'_s)$ ,  $Bi(b'_s)$ ) и производных функций Эйри в нулях функций ( $Ai'(a_s)$ ,  $Bi'(b_s)$ ) определяются аналогичными асимптотическими разложениями по тем же параметрам:

$$Ai(a'_s) \approx (-1)^s \frac{1}{\sqrt{\pi t_1^{1/3}}} \left[ \frac{7}{96t_1^2} \left( 1 - \frac{\sqrt{14}}{t_1^2} \right) - 1 \right], \quad (5.55)$$

$$Bi(b'_s) \approx (-1)^{s+1} \frac{1}{\sqrt{\pi t_1^{1/3}}} \left[ \frac{7}{96t_1^2} \left( 1 - \frac{\sqrt{14}}{t_1^2} \right) - 1 \right]; \quad (5.56)$$

$$Ai'(a_s) \approx (-1)^s \sqrt{\frac{t_1^{1/3}}{\pi}} \left[ \frac{5}{48t_1^2} \left( \frac{\pi}{t_1^2} - 1 \right) - 1 \right], \quad (5.57)$$

$$Bi'(b_s) \approx (-1)^s \sqrt{\frac{t_2^{1/3}}{\pi}} \left[ \frac{5}{48t_2^2} \left( \frac{\pi}{t_2^2} - 1 \right) - 1 \right]. \quad (5.58)$$

Комплексные нули функции  $Bi(z)$  и производных  $Bi'(z)$  представляются асимптотическими разложениями по комплексным параметрам

$$z_1 = t_1 + j \frac{\ln 8}{4}; \quad z_2 = t_2 + j \frac{\ln 8}{4}. \quad (5.59)$$

Запишем эти разложения с точностью до  $z_1^{-4}$  и  $z_2^{-4}$ :

$$\beta_s \approx (z_1^2 e^{j\pi})^{1/3} \left[ \frac{-5}{48z_1^2} \left( \frac{1}{0,75z_1^2} - 1 \right) + 1 \right]; \quad (5.60)$$

$$\beta'_s \approx (z_2^2 e^{j\pi})^{1/3} \left[ \frac{7}{48z_2^2} \left( \frac{1}{1,2z_2^2} - 1 \right) + 1 \right]. \quad (5.61)$$

Значения функций  $Bi(\beta'_s)$  и производных в соответствующих комплексных нулях определяются с той же точностью выражениями

$$-Bi(\beta'_s) \approx (-1)^s \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left( \frac{4}{|y_2|} \right)^{1/6} e^{j(\pi - \arg y_2)/6} \times \\ \times \left[ \frac{7}{6y_2^2} \left( \frac{60}{y_2^2} - 1 \right) + 1 \right]; \quad (5.62)$$

$$Bi'(\beta_s) \approx (-1)^s \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left( \frac{|y_1|}{4} \right)^{1/6} e^{j(\arg y_1 - \pi)/6} \times \\ \times \left[ \frac{-5}{3y_1^2} \left( \frac{51}{y_1^2} - 1 \right) + 1 \right], \quad (5.63)$$

где  $y_1 = (3\pi/2)(4s-1) + j \ln 8$ ;  $y_2 = (3\pi/2)(4s-3) + j \ln 8$ ;  
 $\arg y = \arccos(\operatorname{Re} y / |y|)$ .

**Программа 5.15.** Функции Эйри вещественного аргумента,  $-7 \leq x \leq 4$  для  $Ai(x)$  и  $x \geq -7$  для  $Bi(x)$ . Разложение в ряд (5.40), (5.40а) и (5.48).

ПВ	↑	$Fx^2$	×	ПА	1	/—/	ПП	29	ИПС
×	П8	1	ПП	29	ИПВ	×	ИПД	×	П9
ИП8	+	3	$Fv^-$	×	ИП8	ИП9	—	С/П	П9
ИПВ	$Fx^2$	$Fv^-$	2	+	3	×	ПО	1	ИПО
3	×	÷	$FVx$	ИП9	+	÷	ИПА	×	1
+	FL0	39	V/O						

#### Инструкция

1. Исходные данные:  $(C_1 = 3,5502805 \cdot 10^{-1} = PC, C_2 = 2,588194 \cdot 10^{-1} = PD), [x = PX]$ .

2. Пуск: В/О С/П.

3. Результат:  $PX = Ai(x), PY = Bi(x)$ .

4. Регистры: рабочие PC, PD; оперативные PO, P8 — PB; свободные P1 — P7.

5. Погрешность: при  $x < 0$  функции  $Ai(x)$  и  $Bi(x)$  осциллируют между  $\pm 1$ , и здесь целесообразно использовать абсолютные погрешности; при  $x > 0$  функция  $Ai(x)$  монотонно уменьшается, а  $Bi(x)$  монотонно возрастает и используются относительные погрешности. Максимальные погрешности приближенно равны:

$x < 0$	$\Delta$	$x > 0$	$\delta$ (для $Ai(x)$ )	$x < 0$	$\Delta$	$x > 0$	$\delta$ (для $Ai(x)$ )
$\geq -7$	$\leq 2 \cdot 10^{-4}$	$\leq 4$	$\leq 1 \cdot 10^{-3}$	$\geq -3$	$\leq 2 \cdot 10^{-7}$	$\leq 2,7$	$\leq 1 \cdot 10^{-5}$
$\geq -4$	$\leq 1 \cdot 10^{-6}$	$\leq 3,5$	$\leq 1 \cdot 10^{-4}$			$\leq 2$	$\leq 1 \cdot 10^{-6}$

Относительная погрешность  $Bi(x)$  при  $x > 0$  меньше  $1 \cdot 10^{-6}$ .

6. Время счета  $t \approx (1 + 0,4|x|)$  мин.

Примеры.

$Ai(-7) = 0,18410391$  (0,1842808 [9]),  $Bi(-7) = 0,29390184$  (0,29376207 [9]);

$Ai(3,831547) = 0,001341$  (0,00134139 [9]),  $Bi(3,831547) = 60,797489$  (60,79749 [9]).

**Программа 5.16.** Функция Эйри  $Ai(x)$  вещественного аргумента  $x \geq 2$ . Асимптотическое разложение (5.17) функции Макдональда  $K_{1/3}(x)$  и формула (5.49).

ПС	↑	$Fv^-$	4	×	ПВ	×	3	÷	ПД
7	ПО	1	↑	9	$F1/x$	ИПО	2	$F1/x$	—
$Fx^2$	—	×	ИПО	÷	ИПД	÷	1	+	FL0
14	ИПД	$Fe^x$	$Fv^-$	÷	ИПВ	Fl	×	$Fv^-$	÷
С/П									

#### Инструкция

1. Исходные данные  $[x = PX]$ .

2. Пуск: В/О С/П.

3. Результат:  $PX = Ai(x)$ .

4. Регистры: рабочие PC; оперативные PO, PB, PD; свободные P1 — PA.

5. Погрешность относительная меньше:

$5 \cdot 10^{-3}$  при  $x \geq 2$ ,  $1 \cdot 10^{-5}$  при  $x \geq 3,5$ ,

$1 \cdot 10^{-4}$  при  $x \geq 3$ ,  $1 \cdot 10^{-6}$  при  $x \geq 4$ .

6. Время счета  $t \approx 40$  с.

Пример.  $Ai(4,641589) = 2,4221671 \cdot 10^{-4}$  ( $2,42217 \cdot 10^{-4}$  [9]).

**Программа 5.17.** Функции Эйри  $Ai(z)$  и  $Bi(z)$  комплексного аргумента  $z = x + jy$ . Разложение в ряд (5.40), (5.40а), (5.48),  $|z| \leq 7$ . Кроме того, для функции  $Ai(z)$   $Re z = x \leq 4$ .

ПП	81	XY	ПП	81	П2	XY	П1	ИПД	ИП4
×	П4	ИПД	ИП3	×	П3	1	ПП	54	П8
XY	П9	ИПС	П3	0	П4	1	/—/	ПП	54
ПА	ИП8	+	3	$Fv^-$	×	П5	XY	ПВ	ИП9
+	3	$Fv^-$	×	П6	ИПА	ИП8	—	П8	ИПВ
ИП9	—	П9	С/П	ПА	ИП7	ПО	ИП4	ИП3	ПП
81	ИПО	3	×	П5	ИПА	+	ИП5	×	П5
÷	ИП4	+	XY	ИП5	÷	ИП3	+	FL0	59
В/О	П5	ИП1	×	XY	П6	ИП2	×	—	ИП1
ИП6	×	ИП2	ИП5	×	+	В/О			

#### Инструкция

1. Исходные данные:  $(C_1 = 3,5502805 \cdot 10^{-1} = PC, C_2 = 2,588194 \cdot 10^{-1} = PD, N = P7) [y = P2, P4, x = P1, P3]$ . Число  $N$  учитываемых членов ряда предварительно рассчитывается по формуле  $N = 3(|z| + 2)$ .

2. Пуск: В/О С/П.

3. Результат:  $PX = P9 = Im Ai(z), PY = P8 = Re Ai(z), P5 = Re Bi(z), P6 = Im Bi(z)$ .

4. Регистры: рабочие P5 — P9, PC, PD; оперативные PO — P4, PA, PB; свободных регистров нет.

5. Погрешность:

а)  $x = Re z < 0$ . При  $y > 0,05$  относительная погрешность меньше:

$2 \cdot 10^{-3}$  при  $|z| \leq 7$ ,  $1 \cdot 10^{-5}$  при  $|z| \leq 4$ ,

$1 \cdot 10^{-4}$  при  $|z| \leq 5$ ,  $2 \cdot 10^{-6}$  при  $|z| \leq 3$ .

При  $y < 0,05$  следует оперировать абсолютной погрешностью, которую можно считать близкой к погрешности функций  $Ai(x)$  и  $Bi(x)$  в программе 5.15 при  $x < 0$ .

б)  $x = Re z > 0$ . Для функций  $Ai(z)$ , которая здесь экспоненциально мала при больших  $x$ , относительная погрешность меньше:

$2 \cdot 10^{-3}$  при  $x \leq 4, |z| \leq 7$ ,  $1 \cdot 10^{-5}$  при  $x \leq 2,7, |z| \leq 4$ ,

$1 \cdot 10^{-4}$  при  $x \leq 3,5, |z| \leq 5$ ,  $2 \cdot 10^{-6}$  при  $x \leq 2, |z| \leq 3$ .

Для функции  $Bi(z)$  погрешность такая же, как в п. 5а, кроме окрестностей комплексных нулей, которые расположены в секторе  $\pi/3 < |\arg z| < \pi/2$ . Поэтому, когда  $|Bi(z)| < 1$ , следует оперировать абсолютной погрешностью, которая в этом случае меньше:

$2 \cdot 10^{-4}$  при  $|z| \leq 7$ ,  $1 \cdot 10^{-6}$  при  $|z| \leq 4$ ,

$1 \cdot 10^{-5}$  при  $|z| \leq 5$ ,  $2 \cdot 10^{-7}$  при  $|z| \leq 3$ .

6. Время счета  $t \approx (2,5 + 1,5|z|)$  мин.



### Примеры.

$Ai(e^{j2\pi/3}) = 0,55665287 - j0,24327259$  ( $0,55665286 - j0,24327256$ );

$Bi(e^{j2\pi/3}) = 0,47760592 + j0,42136044$ .

Значение в скобках получено из равенства [9]  $Ai(te^{j2\pi/3}) = 0,5 e^{j\pi/3} [Ai(t) - j Bi(t)]$ .

**Программа 5.18.** Нули  $a_s$  и  $b_s$  функций Эйри  $Ai(x)$  и  $Bi(x)$ . Асимптотические формулы (5.51), (5.52),  $s \geq 2$ .

Фл	3	×	8	÷	ПВ	ИПС	4	×	1
—	×	ПА	FBx	2	—	ИПВ	×	ПП	25
ПВ	ИПА	ПП	25	С/П	Fx <sup>2</sup>	ПД	3	F1/x	ИПД
Fx <sup>y</sup>	4	ИПД	÷	3	÷	1	—	9	,
6	÷	ИПД	÷	1	—	×		V/O	

### Инструкция

1. Исходные данные: ( $s = PC$ ).
2. Пуск: В/О С/П.
3. Результат:  $PX = a_s$ ,  $PB = b_s$ .
4. Регистры: рабочие РВ, РС; оперативные РА, РД; свободные Р0 — Р9.
5. Погрешность относительная меньше:  $2 \cdot 10^{-5}$  для  $s=2$ ,  $5 \cdot 10^{-7}$  для  $s \geq 3$ .
6. Для  $s = 1$  табличные данные:  $a_1 = -2,33810741$ ,  $b_1 = -1,173713$ .
7. Время счета  $t \approx 0,5$  мин.

**Примеры.**  $a_0 = -11,936013$  ( $-11,936016$  [9]);  $b_0 = -11,476951$  ( $-11,476954$  [9]).

**Программа 5.19.** Нули  $a'_s$ ,  $b'_s$  производных функций Эйри  $Ai'(x)$  и  $Bi'(x)$ . Асимптотические формулы (5.53), (5.54),  $s \geq 2$ .

Фл	3	×	8	÷	ПВ	ИПС	4	×	1
—	×	ПА	FBx	2	—	ИПВ	×	ПП	25
ПВ	ИПА	ПП	25	С/П	Fx <sup>2</sup>	ПД	3	F1/x	ИПД
Fx <sup>y</sup>	7	ИПД	÷	4	8	÷	↑	ИПД	÷
9	÷	5	×	—	1	—	×	V/O	

### Инструкция

1. Исходные данные: ( $s = PC$ ).
2. Пуск: В/О С/П.
3. Результат:  $PX = b'_s$ ,  $PB = a'_s$ .
4. Регистры: рабочие РВ, РС; оперативные РА, РД; свободные Р0 — Р9.
5. Погрешность относительная меньше  $2 \cdot 10^{-5}$  при  $s=2$  и  $5 \cdot 10^{-7}$  при  $s \geq 3$ . Табличные значения для  $s = 1$ :  $a'_1 = -1,018793$ ,  $b'_1 = -2,294440$ .
6. Время счета  $t \approx 0,5$  мин.

**Примеры.**  $a'_0 = -9,5354474$  ( $-9,5354491$  [9]),

$b'_0 = -10,037694$  ( $-10,037696$  [9]).

**Программа 5.20.** Значения функций Эйри в нулях производных  $Ai(a'_s)$ ,  $Bi(b'_s)$ . Асимптотические формулы (5.55), (5.56),  $s \geq 2$ .

Фл	3	×	8	÷	ПВ	ИПС	4	×	1
—	×	ПА	FBx	2	—	ИПВ	×	ПП	26
ПВ	ИПА	ПП	26	/—/	С/П	Fx <sup>2</sup>	ПД	6	F1/x
ИПД	Fx <sup>y</sup>	Фл	×	FV <sup>—</sup>	F1/x	Фл	ИПС	×	Fcos
×	7	ИПД	÷	9	6	÷	↑	ИПД	÷
1	4	FV <sup>—</sup>	×	—	1	—	×	V/O	

### Инструкция

1. Исходные данные: ( $s = PC$ ).
2. Пуск: В/О С/П.
3. Результат:  $PX = Bi(b'_s)$ ,  $PB = Ai(a'_s)$ .
4. Регистры: рабочие РВ, РС; оперативные РА, РД; свободные Р0 — Р9.
5. Погрешность относительная меньше:  $5 \cdot 10^{-5}$  при  $s=2$ ,  $2 \cdot 10^{-6}$  при  $s=3$ ,  $5 \cdot 10^{-7}$  при  $s \geq 4$ . Для  $s = 1$  приведенные табличные значения функций:  $Ai(a'_1) = 0,53565666$ ,  $Bi(b'_1) = -0,45494438$ .
6. Время счета  $t \approx 0,5$  мин.

**Примеры.**  $Ai(a'_0) = 0,30651732$  ( $0,30652729$  [9]);

$Bi(b'_0) = -0,30352769$  ( $-0,30352766$  [9]).

**Программа 5.21.** Значения производных функций Эйри  $Ai'(a_s)$ ,  $Bi'(b_s)$  в нулях функций. Асимптотические формулы (5.57), (5.58),  $s \geq 2$ .

Фл	3	×	8	÷	ПВ	ИПС	4	×	1
—	×	ПА	FBx	2	—	ИПВ	×	ПП	25
ПВ	ИПА	ПП	25	С/П	Fx <sup>2</sup>	ПД	6	F1/x	ИПД
Fx <sup>y</sup>	Фл	÷	FV <sup>—</sup>	Фл	ИПС	×	Fcos	×	Фл
ИПД	÷	1	—	9	,	6	÷	ИПД	÷
1	—	×	V/O						

### Инструкция

1. Исходные данные: ( $s = PC$ ).
2. Пуск: В/О С/П.
3. Результат:  $PX = Ai'(a_s)$ ,  $PB = Bi'(b_s)$ .
4. Регистры: рабочие РВ, РС; оперативные РА, РД; свободные Р0 — Р9.
5. Погрешность относительная меньше:  $6 \cdot 10^{-5}$  при  $s = 2$ ;  $2 \cdot 10^{-6}$  при  $s = 3$ ,  $5 \cdot 10^{-7}$  при  $s \geq 4$ . Табличные данные при  $s = 1$ :  $Ai'(a_1) = 0,70121082$ ,  $Bi'(b_1) = 0,60195789$ .
6. Время счета  $t \approx 0,5$  мин.

**Примеры.**  $Ai'(a_0) = 1,0487204$  ( $1,04872065$  [9]);

$Bi'(b_0) = 1,0384941$  ( $1,0384943$  [9]).

**Программа 5.22.** Комплексные нули  $\beta_s$ ,  $\beta'_s$  функции Эйри  $Bi(z)$  и ее производной  $Bi'(z)$ . Асимптотические формулы (5.59)—(5.61),  $s \geq 2$ .

8	Flп	4	÷	ПВ	ИПС	Flп	×	3	×
8	÷	ПА	ПП	82	ПВ	ХУ	ПА	6	F1/x
ИПА	Fx²	ИПВ	Fx²	+	П7	Fx <sup>y</sup>	ИПА	ИП7	Fy <sup>-</sup>
÷	Farccos	Flп	+	3	÷	П5	Fsin	ХУ	×
П6	FBx	ИП5	Fcos	×	П5	ИПА	ИП7	÷	ПА
ИПВ	/—/	ИП7	÷	ПВ	ИП8	÷	ИПА	ИП8	÷
1	—	ПП	82	ИП9	4	8	÷	П7	×
ПВ	ХУ	ИП7	×	1	+	ПА	ИП6	ИП5	ПП
82	С/П	ПС	ИПА	×	ХУ	ПД	ИПВ	×	—
ИПА	ИПД	×	ИПВ	ИПС	×	+	В/О		

#### И н с т р у к ц и я

1. Исходные данные: для  $\beta_s$  ( $0,75 = P8$ ,  $-5 = P9$ ),  $(4s - 1) = PC$ ; для  $\beta'_s$  ( $1,25 = P8$ ,  $7 = P9$ ),  $(4s - 3) = PC$ .

2. Пуск: В/О С/П.

3. Результат:  $PX = \text{Im } \beta_s$ ,  $PY = \text{Re } \beta_s$  или  $PX = \text{Im } \beta'_s$ ,  $PY = \text{Re } \beta'_s$ .

4. Регистры: рабочие P8, P9, PC; оперативные P5, P6, P7, PA, PB, PD; свободные P0 — P4.

5. Погрешность относительная меньше:  $1 \cdot 10^{-4}$  для  $s=2$ ;  $5 \cdot 10^{-6}$  для  $s=3$ ;  $5 \cdot 10^{-7}$  для  $s \geq 4$ . Табличные значения для  $s=1$ :  $\beta_1 = 0,97831 + j2,14121$ ,  $\beta'_1 = 0,21457 + j1,10027$ .

6. Время счета  $t \approx 1$  мин.

Примеры.

$$\beta_2 = 1,8967678 + j3,6272843 \quad (1,896 + j3,627 [9]);$$

$$\beta'_2 = 1,4581977 + j2,912268 \quad (1,458 + j2,912 [9]).$$

**Программа 5.23.** Функции Эйри  $Bi(\beta_s)$  в комплексных нулях производных, производные функций Эйри  $Bi'(\beta_s)$  в комплексных нулях функций. Асимптотические формулы (5.62), (5.63),  $s \geq 2$ .

8	Flп	ПВ	ИП9	ИП6	1	Farcsin	×	ПА	Fx²
ИПВ	Fx²	+	Fy <sup>-</sup>	ПД	4	÷	Fx <sup>y</sup>	Flп	ИП5
×	Fcos	×	1	Farcsin	Fy <sup>-</sup>	÷	ИПА	ИПД	÷
Farccos	Flп	—	ИП9	×	П3	Fsin	ХУ	×	П4
FBx	ИП3	Fcos	×	П3	ИПВ	/—/	ИПД	Fx²	÷
ПВ	ИПА	FBx	÷	ПА	ПП	82	ПВ	ИП7	×
ХУ	ПА	ИП7	×	1	—	ПП	82	ИП8	×
ПВ	ХУ	ИП8	×	1	+	ПА	ИП4	ИП3	ПП
82	С/П	ПС	ИПА	×	ХУ	ПД	ИПВ	×	—
ИПД	ИПА	×	ИПС	ИПВ	×	+	В/О		

#### И н с т р у к ц и я

1. Исходные данные: для  $Bi(\beta'_s)$  ( $s = P5$ ,  $3(4s - 3) = P6$ ,  $60 = P7$ ,  $7/6 = P8$ ,  $-1/6 = P9$ ); для  $Bi'(\beta_s)$  ( $s = P5$ ,  $3(4s - 1) = P6$ ,  $51 = P7$ ,  $-5/3 = P8$ ,  $1/6 = P9$ ).

2. Пуск: В/О С/П.

3. Результат:  $PX = -\text{Im } Bi(\beta'_s)$ ,  $PY = -\text{Re } Bi(\beta'_s)$  или  $PX = \text{Im } Bi'(\beta_s)$ ,  $PY = \text{Re } Bi'(\beta_s)$ .

4. Регистры: рабочие P5 — P9; оперативные P3, P4, PA — PD; свободные P0 — P2.

5. Погрешность относительная меньше  $1 \cdot 10^{-4}$  при  $s=2$ ;  $2 \cdot 10^{-6}$  при  $s=3$ ;  $5 \cdot 10^{-7}$  при  $s \geq 4$ .

Табличные значения для  $s=1$ :  $Bi(\beta'_1) = 0,670 + j0,337$ ,  $Bi'(\beta_1) = -0,871 + j0,4766$ .

6. Время счета  $t \approx 1$  мин.

Примеры.

$$Bi(\beta'_2) = -0,51710285 - j0,28871421 \quad (-0,517 - j0,289 [9]);$$

$$Bi'(\beta_2) = 0,98971692 - j0,55787637 \quad (0,990 - j0,558 [9]).$$

### 5.5. Нули функций Бесселя и их производных. Функции Бесселя в нулях производных и производные функций Бесселя в нулях функций. Нули комбинаций из произведений функций Бесселя первого и второго рода и их производных

Функции Бесселя  $J_\nu(z)$ ,  $J'_\nu(z)$ ,  $Y_\nu(z)$ ,  $Y'_\nu(z)$  имеют бесконечное множество нулей. Все нули  $J_\nu(z)$ ,  $J'_\nu(z)$  для  $\nu \geq 0$  лежат на действительной оси при  $|x| \geq \nu$ . Вещественные нули  $Y_\nu(z)$  и  $Y'_\nu(z)$  также располагаются при  $|x| \geq \nu$ . Но последние функции имеют при  $\nu \geq 0$  и бесконечное множество комплексных нулей. Далее  $s$ -е положительные нули перечисленных функций будут обозначаться соответственно как  $j_{\nu s}$ ,  $j'_{\nu s}$ ,  $y_{\nu s}$ ,  $y'_{\nu s}$ . Исключение составляет лишь  $J'_0(z)$ , для которой первым нулем считается точка  $z = 0$ , а следующие нули удовлетворяют условию

$$j'_{0,s} = j_{1,s-1} \quad s = 2, 3, \dots \quad (5.64)$$

Нумерация всех нулей ведется в порядке возрастания их значений (для положительных нулей). В этом случае нули указанных выше функций перемежаются согласно следующим неравенствам:

$$\begin{aligned} \nu &\leq j'_{\nu,1} < y_{\nu,1} < y'_{\nu,1} < j_{\nu,1} < j'_{\nu,2} < y_{\nu,2} < y'_{\nu,2} < j_{\nu,2} < j'_{\nu,3} < \dots; \\ j_{\nu,1} &< j_{\nu+1,1} < j_{\nu,2} < j_{\nu+1,2} < j_{\nu,3} < \dots; \\ y_{\nu,1} &< y_{\nu+1,1} < y_{\nu,2} < y_{\nu+1,2} < y_{\nu,3} < \dots \end{aligned} \quad (5.65)$$

Свойства нулей модифицированных функций Бесселя  $I_\nu(z)$  и их производных  $I'_\nu(z)$  вытекают из свойств нулей  $J_\nu(z)$ ,  $J'_\nu(z)$  с учетом соотношений

$$I_\nu(z) = e^{-j\nu\pi/2} J_\nu(ze^{j\pi/2}); \quad -\pi < \arg z \leq \pi/2. \quad (5.66)$$

Вычисление нулей и связанных с ними величин основывается на асимптотических разложениях (например, [9]). Обычно эти разложения сходятся достаточно быстро. Для нулей начиная с  $s = 2$  и  $\nu \geq 1$  эффективны *равномерные асимптотические разложения*, базирующиеся на асимптотических разложениях нулей функций Эйри и связанных с ними величин по степеням  $\nu^{-1}$ . Ниже приводятся разложения до членов  $\nu^{-2}$  включительно, что обеспечивает четыре-пять верных значащих цифр результата (см. программы (5.24—5.27). Указанные соотноше-

ния после приведения к форме, приемлемой для вычислений на ПМК, приобретает следующий вид:

$$j_{v,s} \approx vz_1 + \left\{ \frac{1}{65v} \exp \left[ \zeta_1 \left( \frac{\zeta_1}{403,4} - 0,2276 \right) \right] \right\}, \quad (5.67)$$

$$J'_v(j_{v,s}) \approx \frac{(-1)^s}{z_1} \left( \frac{\sqrt{z_1^2 - 1} 2\zeta_1^{3/2}}{\pi t_1} \right)^{1/2} \left\{ 1 - \frac{0,00206}{v^2 \zeta_1^{3/2}} \right\}; \quad (5.68)$$

$$j'_{v,s} \approx vz_2 - \left\{ \frac{1}{v\zeta_2} \left[ \frac{1}{(12v\zeta_2)^2} + \left[ \left( \frac{\zeta_2 - \sqrt{6}}{4} \right)^2 + \sqrt{39} \right]^{-1} \right] \right\}, \quad (5.69)$$

$$J_v(j'_{v,s}) \approx (-1)^{s-1} (1+T) \left( \frac{\sqrt{T}}{2\pi v \sqrt{z_2^2 - 1}} \right)^{1/2} \left\{ 1 + \frac{1}{8\pi^2 v^2 (z_2^2 - 1)} \right\}, \quad (5.70)$$

где

$$T = 1 - \frac{7}{48t_2^2} \left\{ 1 - \frac{2}{t_2^2} \right\}; \quad t_1 = 3\pi(4s-1)/8; \quad t_2 = 3\pi(4s-3)/8; \quad (5.71)$$

$$\zeta_1 = v^{-2/3} (-a_s), \quad \zeta_2 = v^{-2/3} (-a'_s); \quad (5.72)$$

$a_s$  и  $a'_s$  — нули функций Эйри  $Ai(z)$ ,  $Ai'(z)$  (формулы (5.51), (5.52)). Величины  $z_k$  и  $\zeta_k$  связаны соотношением [9]

$$2\zeta_k^{3/2}/3 = \sqrt{z_k^2 - 1} - \arccos(1/z_k), \quad k = 1, 2. \quad (5.73)$$

Если в уравнениях (5.68), (5.71), (5.72) заменить  $t_1$ ,  $t_2$ ,  $a_s$ ,  $a'_s$  на  $t_2$ ,  $t_1$ ,  $b_s$ ,  $b'_s$  соответственно ( $b_s$  и  $b'_s$  — действительные нули функций Эйри  $Bi(z)$  и  $Bi'(z)$  — формулы (5.52), (5.54)), то в левых частях уравнений (5.67) — (5.70) вместо  $j_{v,s}$ ,  $J'_v(j_{v,s})$ ,  $j'_{v,s}$ ,  $J_v(j'_{v,s})$  окажутся соответственно  $y_{v,s}$ ,  $-Y'_v(y_{v,s})$ ,  $y'_{v,s}$ ,  $Y_v(y'_{v,s})$ .

Значения функции  $z(\zeta)$ , являющейся решением трансцендентного уравнения (5.73), легко рассчитываются методом итераций. Пусть  $z^{(k)}$  — значение  $z$  на  $k$ -й итерации. Тогда

$$z^{(k+1)} = z^{(k)} + \Delta^{(k)}, \quad (5.74)$$

где невязка  $\Delta^{(k)}$  определяется из (5.73):  $\Delta^{(k)} = 2[\zeta^{(k)}]^{2/3}/3 + \arccos(1/z^{(k)}) - \sqrt{(z^{(k)})^2 - 1}$ . Процесс останавливается, когда  $|\Delta^{(n)}| < 1 \cdot 10^{-6}$ .

Отметим, что фигурные скобки в формулах (5.67) — (5.71) являются результатом аппроксимации более громоздких выражений в строгих асимптотических разложениях из [9].

Соотношения (5.67), (5.68) приводят к значительным погрешностям при  $s = 1$ . В этом случае преимущество имеют следующие асимптотические формулы [9], справедливые при  $v \gg 1$ :

$$\rho_k \approx v + 10^{-5} v^{1/3} \{ [(A_1^{(k)} x + A_2^{(k)}) x + A_3^{(k)}] x + A_4^{(k)} x + A_5^{(k)} \}, \quad (5.75)$$

где  $x = v^{-2/3}$ ;  $\rho_1 \equiv j_{v,1}$ ;  $\rho_2 \equiv y_{v,1}$ ;  $\rho_3 \equiv j'_{v,1}$ ;  $\rho_4 \equiv y'_{v,1}$ . Значения коэффициентов  $A_m^{(k)}$  ( $m = 1, 2, \dots, 5$ ;  $k = 1, 2, 3, 4$ ) приведены в программе 5.28.

Аналогично строятся разложения для  $J'_v(j_{v,1})$ ,  $Y'_v(y_{v,1})$ ,  $J_v(j'_{v,1})$ ,  $Y_v(y'_{v,1})$ :

$$R'_k \approx 10^5 x / \{ [(B_1^{(k)} x + B_2^{(k)}) x + B_3^{(k)}] x + B_4^{(k)} x + B_5^{(k)} \}; \quad (5.76)$$

$$R_k \approx 10^{-5} v^{-1/3} \{ [(C_1^{(k)} x + C_2^{(k)}) x + C_3^{(k)}] x + C_4^{(k)} \}, \quad k = 1, 2. \quad (5.77)$$

Здесь  $R'_1 \equiv J'_v(j_{v,1})$ ;  $R'_2 \equiv Y'_v(y_{v,1})$ ;  $R_1 \equiv J_v(j'_{v,1})$ ;  $R_2 \equiv Y_v(y'_{v,1})$ ;  $x = v^{-2/3}$ .

Значения  $B_m^{(k)}$  и  $C_m^{(k)}$  приведены в программах 5.29, 5.30.

Наконец, при  $s \geq 2$  и  $0 \leq v \leq s$  хорошие результаты дают асимптотические разложения Макмагона (см., например, [9]). Далее они записаны до членов порядка  $s^{-5}$ :

$$j_{v,s}, y_{v,s} \approx \beta - \frac{\mu - 1}{8\beta} \left\{ \left[ \frac{32[(83\mu - 982)\mu + 3779]}{15(8\beta)^2} + \frac{4(7\mu - 31)}{3} \right] \frac{1}{(8\beta)^2} + 1 \right\}; \quad (5.78)$$

$$j'_{v,s}, y'_{v,s} \approx \beta - \left\{ \left[ \frac{32[(83\mu + 2075)\mu - 3039]\mu + 3537}{15(8\beta)^2} + \frac{4[(7\mu + 82)\mu - 9]}{3} \right] \frac{1}{(8\beta)^2} + \mu + 3 \right\} \frac{1}{8\beta}, \quad (5.79)$$

где  $8\beta = (8s + 4v - 2)\pi$  для  $j_{v,s}$  и  $y'_{v,s}$ ,  $8\beta = (8s + 4v - 6)\pi$  для  $y_{v,s}$  и  $j'_{v,s}$ ;

$\mu = 4v^2$ .

Асимптотические разложения больших положительных нулей функций, являющихся комбинацией из произведений функций Бесселя первого и второго рода (все эти нули действительные и простые)  $J_v(x) Y'_v(\lambda x) - J'_v(\lambda x) Y_v(x)$  ( $\lambda > 1$ ), имеют следующий вид [9]:

$$x_{v,s,\lambda} \approx \beta + \frac{p}{\beta} + \frac{q - p^2}{\beta^3} + \frac{r - 4pq + 2p^3}{\beta^5} + \dots, \quad (5.80)$$

где

$$\beta = \frac{s\pi}{\lambda - 1}; \quad p = \frac{(v^2 - 1/4)}{2\lambda}; \quad q = \frac{(v^2 - 1/4)(6,25 - v^2)(1/\lambda^3 - 1)}{24(\lambda - 1)}; \quad (5.81)$$

$$r = \frac{(v^2 - 1/4)[(v^2 - 28)v^2 + 67](1/\lambda^5 - 1)}{80(\lambda - 1)}.$$

Указанные нули  $x_{v,s,\lambda}$  при  $v = m = 0, 1, 2, \dots$  пропорциональны волновым числам Е-волн в коаксиальных волноводах [16]. Критические волновые числа Н-волн пропорциональны нулям  $x'_{v,s,\lambda}$  функций  $J'_\lambda(x) Y'_v(\lambda x) - J'_v(\lambda x) Y_\lambda(x)$  ( $\lambda > 1$ ). Асимптотические разложения нулей  $x'_{v,s,\lambda}$  также определяются формулой (5.80), но в этом случае [9]

$$\beta = \frac{(s-1)\pi}{\lambda - 1}; \quad p = \frac{v^2 + 3/4}{2\lambda}; \quad q \approx \frac{[4 - (12 + v^2)v^2](1/\lambda^3 - 1)}{24(\lambda - 1)}; \quad (5.82)$$

$$r \approx \frac{[128 - v^2(46 + v^2)] - 30](1/\lambda^5 - 1)}{80(\lambda - 1)}.$$

Обращаем внимание читателя на то, что приведенные здесь асимптотические формулы определяют приближенные значения нулей  $x'_{v,s,\lambda}$  начиная с  $s=2$ . Некоторые значения нулей  $x'_{v,s,\lambda}$  при  $v \geq 1$  приведены в таблице к программе 5.34. При  $v=0$  первым нулем считается  $x'_{0,1,\lambda}=0$ . Последующие нули вычисляются по формулам (5.80), (5.82) при  $s=2, 3, \dots$

**Программа 5.24.** Действительные нули  $j_{v,s}$ ,  $y_{v,s}$  функций Бесселя  $J_v(z)$ ,  $Y_v(z)$ ,  $s \geq 2$ ,  $v \geq 0,1$ . Асимптотическая формула (5.67).

ПС	4	×	1	—	Фл	×	3	×	8
÷	Fx <sup>2</sup>	ПА	3	ПВ	F1/x	ИПА	ИПД	Fx <sup>2</sup>	÷
Fx <sup>y</sup>	9	,	6	F1/x	ИПА	÷	↑	ИПА	÷
4	×	3	÷	—	1	+	×	П8	П9
↑	Fv <sup>—</sup>	×	1	,	5	÷	П7	1	2
/—/	F10 <sup>x</sup>	ИПВ	ИП9	+	П9	F1/x	Farccos	ИП9	Fx <sup>2</sup>
1	—	Fv <sup>—</sup>	—	ИП7	+	ПВ	Fx <sup>2</sup>	—	Fx $\geq 0$
48	ИП9	ИПД	×	ИП8	6	Fe <sup>x</sup>	÷	3	Flg
Fx <sup>2</sup>	—	ИП8	×	Fe <sup>x</sup>	6	5	÷	ИПД	÷
+	П7	С/П							

Данный вариант программы относится к  $j_{v,s}$ . Для перехода к  $y_{v,s}$  заменить цифру 1 (адрес 03) на 3.

Структура программы

00—09: вычисление  $t_1$  (или  $t_2$ ),

10—39: вычисление нулей функций Эйри  $a_s$  (или  $b_s$ ) по формулам (5.51) или (5.52)

и факторов  $\zeta = v^{-2/3}a_s$  (или  $\zeta = v^{-2/3}b_s$  в зависимости от выбранного варианта программы),

40—70: решение уравнения (5.73) методом итераций (5.74),

71—92: вычисление  $j_{v,s}$  (или  $y_{v,s}$ ) по формуле (5.67).

Инструкция

1. Исходные данные: ( $v = \text{РД}$ ), [ $s = \text{РХ}$ ].

2. Пуск: В/О С/П.

3. Результат:  $\text{РХ} = \text{Р7} = j_{v,s}$  (или  $\text{РХ} = \text{Р7} = y_{v,s}$ ).

4. Регистры: рабочие РД; оперативные Р7—РС; свободные Р0—Р6.

5. Погрешность относительная меньше  $1 \cdot 10^{-3}$  при  $v \geq 0,1$ ,  $5 \cdot 10^{-5}$  при  $v \geq 1$ ,  $1 \cdot 10^{-5}$  при  $v \geq 2$ .

6. Время счета  $t \approx 1,5$  мин при  $v/s \leq 10$ ; с увеличением  $v/s$  время счета медленно возрастает.

Примеры.

$j_{1,2} = 7,0158415$  (7,01559 [9]),  $y_{1,2} = 5,4298308$  (5,42968 [9]),  $t = 1$  мин;  
 $j_{8,5} = 26,266798$  (26,26681 [9]),  $y_{8,5} = 24,612552$  (24,612558 [9]),  $t = 1,5$  мин;  
 $j_{0,1;2} = 5,6713694$  (5,6757 [7]),  $t = 1,5$  мин.

**Программа 5.25.** Производные функции Бесселя  $J'_v(j_{v,s})$ ,  $Y'_v(y_{v,s})$  в нулях функций  $J_v(z)$ ,  $Y_v(z)$ ,  $s \geq 2$ ,  $v \geq 0,1$ . Асимптотическая формула (5.68).

4	×	1	—	Фл	×	3	×	8	÷
Fx <sup>2</sup>	ПА	3	ПВ	F1/x	ИПА	ИПД	Fx <sup>2</sup>	÷	Fx <sup>y</sup>
5	ИПА	÷	4	8	÷	↑	ИПА	÷	ИП5
×	—	1	+	×	П8	П9	↑	Fv <sup>—</sup>	×
2	×	3	÷	П7	1	2	/—/	F10 <sup>x</sup>	ИПВ
ИП9	+	П9	F1/x	Farccos	ИП9	Fx <sup>2</sup>	1	—	Fv <sup>—</sup>
П6	—	ИП7	+	ПВ	Fx <sup>2</sup>	—	Fx $\geq 0$	45	ИП6
ИПА	Fv <sup>—</sup>	÷	ИП7	×	3	×	Фл	÷	Fv <sup>—</sup>
ИП9	÷	ИПС	Фл	×	Fcos	×	↑	ИПД	2
7	×	Fx <sup>2</sup>	÷	ИП7	÷	—	С/П		

Данный вариант программы относится к  $J'_v(j_{v,s})$ . Для перехода к  $Y'_v(y_{v,s})$  заменить цифру 1 (адрес 02) на 3.

Инструкция

1. Исходные данные: (4/3=Р5,  $v = \text{РД}$ ), [ $s = \text{РХ}$ ].

2. Пуск: В/О С/П.

3. Результат:  $\text{РХ} = J'_v(j_{v,s})$  (или  $\text{РХ} = -Y'_v(y_{v,s})$ ). Данная программа позволяет также получить ориентировочные значения (три-четыре верные значащие цифры) нулей  $j_{v,s}$  (или  $y_{v,s}$ ). Для этого следует перемножить содержимые регистров Р9 и РД:  $j_{v,s}; y_{v,s} = \text{Р9} \times \text{РД}$ .

4. Регистры: рабочие Р5, Р9, РС, РД; оперативные Р6—Р8, РА, РВ; свободные Р0—Р4.

5. Погрешность относительная меньше:  $1 \cdot 10^{-3}$  при  $v \geq 0,1$ ,  $1 \cdot 10^{-4}$  при  $v \geq 1$ ,  $5 \cdot 10^{-5}$  при  $v \geq 2$ .

6. Время счета  $t \approx 1,5$  мин при  $v/s \leq 10$ ; с увеличением  $v/s$  медленно возрастает.

Примеры.

$J'_1(j_{1,2}) = 0,30008481$  (0,30012),  $j_{1,2} = 7,0095185$  (7,01559), [9];

$Y'_1(y_{1,2}) = -0,34031253$  (—0,34032),  $y_{1,2} = 5,422328$  (5,42968), [9];

$J'_2(j_{2,4}) = 0,1964326$  (0,19644),  $j_{2,4} = 16,221009$  (16,22347), [9];

$Y'_2(y_{2,4}) = -0,20649697$  (—0,20650),  $y_{2,4} = 14,620444$  (14,62308), [9];

$J'_{0,1}(j_{0,1;2}) = 0,33470323$ ,  $j_{0,1;2} = 5,6663717$  (5,6757), [7].

**Программа 5.26.** Действительные нули  $j'_{v,s}$ ,  $y'_{v,s}$  производных функций Бесселя  $J'_v(z)$ ,  $Y'_v(z)$ ,  $s \geq 2$ ,  $v \geq 0,1$ . Асимптотическая формула (5.69).

ПС	4	×	3	—	Фл	×	3	×	8
÷	Fx <sup>2</sup>	ПА	3	ПВ	F1/x	ИПА	ИПД	Fx <sup>2</sup>	÷
Fx <sup>y</sup>	8	Fcos	ИПА	÷	↑	ИПА	÷	5	×
6	÷	—	1	+	×	П8	П9	ИПД	×
П6	1	,	5	ИП9	Fx <sup>y</sup>	ХУ	÷	П7	1
2	/—/	F10 <sup>x</sup>	ИПВ	ИП9	+	П9	F1/x	Farccos	ИП9
Fx <sup>2</sup>	1	—	Fv <sup>—</sup>	—	ИП7	+	ПВ	Fx <sup>2</sup>	—
Fx $\geq 0$	49	ИП9	ИПД	×	ИП8	6	Fv <sup>—</sup>	—	4
÷	Fx <sup>2</sup>	3	9	Fv <sup>—</sup>	+	F1/x	ИП6	1	2
×	Fx <sup>2</sup>	F1/x	+	ИП6	÷	—	С/П		

Данный вариант программы относится к  $j'_{v,s}$ . Для перехода к  $y'_{v,s}$  заменить цифру 3 (адрес 03) на цифру 1.

#### Инструкция

1. Исходные данные: ( $v = \text{РД}$ ), [ $s = \text{РХ}$ ].

2. Пуск: В/О С/П.

3. Результат:  $\text{РХ} = j'_{v,s}$  (или  $\text{РХ} = y'_{v,s}$ ).

4. Регистры: рабочие РД; оперативные Р6 — РС; свободные Р0 — Р5.

5. Погрешность относительная меньше:

$$5 \cdot 10^{-3} \text{ при } v \geq 0,1, \quad 5 \cdot 10^{-5} \text{ при } v \geq 3,$$

$$1 \cdot 10^{-4} \text{ при } v \geq 2, \quad 1 \cdot 10^{-5} \text{ при } v \geq 4.$$

6. Время счета  $t \approx 1,5$  мин при  $v/s \leq 10$ ; с увеличением  $v/s$  медленно возрастает.

#### Примеры.

$$j'_{1,2} = 5,3313203 (5,33144 [9]), \quad y'_{2,2} = 8,3509609 (8,35072 [9]);$$

$$j'_{3,20} = 65,113693 (65,11315 [9]), \quad y'_{3,20} = 66,686284 (66,68571 [9]);$$

$$j'_{0,1;2} = 4,0158148 (3,99105), \quad y'_{0,1;2} = 5,612705 (5,58771).$$

В последних двух примерах значения в скобках получены по программе 5.32, в них все цифры — верные.

**Программа 5.27.** Функции Бесселя  $J_v(j'_{v,s})$ ,  $Y_v(y'_{v,s})$  в нулях производных  $J'_v(z)$ ,  $Y'_v(z)$ ,  $s \geq 2$ ,  $v \geq 0,1$ . Асимптотическая формула (5.70).

4	×	3	—	Фл	×	3	×	8	÷
Фх <sup>2</sup>	ПА	3	ПВ	Ф1/х	ИПА	ИПД	Фх <sup>2</sup>	÷	Фх <sup>у</sup>
8	Фcos	ИПА	÷	↑	ИПА	÷	2	×	—
1	+	П5	×	П8	П9	↑	Ф $\gamma$ <sup>—</sup>	×	2
×	3	÷	П7	1	2	/—/	Ф10 <sup>х</sup>	ИПВ	ИП9
+	П9	Ф1/х	Farccos	ИП9	Фх <sup>2</sup>	1	—	Ф $\gamma$ <sup>—</sup>	П6
—	ИП7	+	ПВ	Фх <sup>2</sup>	—	Фх $\geq 0$	44	ИП5	Ф $\gamma$ <sup>—</sup>
2	Фл	×	ИПД	×	ИП6	×	ПВ	÷	Ф $\gamma$ <sup>—</sup>
ИП5	1	+	×	ИПС	Фл	×	Фcos	×	/—/
↑	ИПВ	Фх <sup>2</sup>	2	×	÷	+	С/П		

Данный вариант программы относится к  $J_v(j'_{v,s})$ . Для перехода к  $Y_v(y'_{v,s})$  заменить цифру 3 (адрес 02) на цифру 1.

#### Инструкция

1. Исходные данные: ( $v = \text{РД}$ ), [ $s = \text{РС}$ ].

2. Пуск: В/О С/П.

3. Результат:  $\text{РХ} = J_v(j'_{v,s})$  (или  $\text{РХ} = Y_v(y'_{v,s})$ ). Программа позволяет также получить ориентирующие значения (две — четыре верные значащие цифры) нулей производных  $j'_{v,s}$  (или  $y'_{v,s}$ ). Для этого следует перемножить содержимое регистров Р9 и РД:  $j'_{v,s}$ ;  $y'_{v,s} = \text{Р9} \times \text{РД}$ .

4. Регистры: рабочие Р9, РС, РД; оперативные Р5 — Р8, РА, РВ; свободные Р0 — Р4.

5. Погрешность относительная меньше:  $5 \cdot 10^{-3}$  при  $v \geq 0,1$ ,  $1 \cdot 10^{-4}$  при  $v \geq 1$ ,  $5 \cdot 10^{-5}$  при  $v \geq 2$ .

6. Время счета  $t \approx 1,5$  мин при  $v/s \leq 10$ , с увеличением  $v/s$  медленно возрастает.

#### Примеры.

$$J_1(j'_{1,2}) = -0,34611291 (-0,34613), \quad j'_{1,2} = 5,381349 (5,33144), [9];$$

$$Y_1(y'_{1,2}) = -0,3031878 (-0,30317), \quad y'_{1,2} = 6,9797082 (6,9415), [9];$$

$$J_5(j'_{5,3}) = 0,22038802 (0,22039), \quad j'_{5,3} = 14,006805 (13,98719), [9];$$

$$Y_5(y'_{5,3}) = 0,2068647 (0,20687), \quad y'_{5,3} = 15,678001 (15,6608), [9];$$

$$J_{0,1}(j'_{0,1;4}) = -0,24784307, \quad j'_{0,1;4} = 10,357349 (10,33062);$$

$$Y_{0,1}(y'_{0,1;4}) = -0,2309539, \quad y'_{0,1;4} = 11,929449 (11,90623).$$

Для последних двух примеров значения в скобках получены по программе 5.31, в них все цифры — верные.

**Программа 5.28.** Первые нули  $j_{v,1}$ ,  $y_{v,1}$ ,  $j'_{v,1}$ ,  $y'_{v,1}$  функций Бесселя  $J_v(z)$ ,  $Y_v(z)$  и их производных,  $v \geq 1$ . Асимптотическая формула (5.75).

3	Ф1/х	ИПД	Фх <sup>у</sup>	Фх <sup>2</sup>	ПС	ФВх	5	ПО	Ф10 <sup>х</sup>
÷	0	П6	ИПС	÷	КИП6	+	FL0	13	×
ИПД	+	С/П							

#### Инструкция

1. Исходные данные: ( $A_1 = \text{Р1}$ ,  $A_2 = \text{Р2}$ ,  $A_3 = \text{Р3}$ ,  $A_4 = \text{Р4}$ ,  $A_5 = \text{Р5}$ ,  $v = \text{РД}$ ). Значения констант  $A_k$  следующие:

	$A_1$	$A_2$	$A_3$	$A_4$	$A_5$
$j_{v,1}$	4300	—9080	—397	103315	185576
$y_{v,1}$	—100	—600	1198	26035	93158
$j'_{v,1}$	0	940	—5097	7249	80862
$y'_{v,1}$	0	—4500	—5808	94000	182110

2. Пуск: В/О С/П.

3. Результат:  $\text{РХ} = j_{v,1}$ ,  $y_{v,1}$ ,  $j'_{v,1}$ ,  $y'_{v,1}$ .

4. Регистры: рабочие Р1—Р5, РД; оперативные Р0, Р6, РС; свободные Р7 — РВ.

5. Погрешность неодинакова для нулей разных функций. Максимальные относительные погрешности следующие:

$v \geq$	1	2	3	5
$j_{v,1}$	$1 \cdot 10^{-3}$	$1 \cdot 10^{-4}$	$1 \cdot 10^{-5}$	$2 \cdot 10^{-6}$
$y_{v,1}$	$1 \cdot 10^{-4}$	$5 \cdot 10^{-6}$	$5 \cdot 10^{-6}$	$2 \cdot 10^{-6}$
$j'_{v,1}$	$1 \cdot 10^{-3}$	$1 \cdot 10^{-4}$	$4 \cdot 10^{-5}$	$1 \cdot 10^{-5}$
$y'_{v,1}$	$1 \cdot 10^{-2}$	$1 \cdot 10^{-3}$	$5 \cdot 10^{-4}$	$5 \cdot 10^{-5}$

6. Время счета  $t \approx 20$  с.

Примеры.

$j_{5,1} = 8,7714959$  (8,77148),  $j_{5/2;1} = 5,7636489$  (5,763459), [9];  
 $y_{5,1} = 6,7471952$  (6,74718),  $y_{5/2;1} = 3,9595472$  (3,959528), [9];  
 $j'_{5,1} = 6,4155621$  (6,41562),  $j'_{5/2;1} = 3,6325305$  (3,632797), [9];  
 $y'_{5,1} = 8,6490584$  (8,64956),  $y'_{5/2;1} = 6,8619101$  (6,863232), [9].

**Программа 5.29.** Производные функций Бесселя  $J'_\nu(j_{\nu,1})$ ,  $Y'_\nu(y'_{\nu,1})$  в первых нулях функций,  $\nu \geq 1$ . Асимптотическая формула (5.76).

3 F1/x ИПД Fx<sup>y</sup> Fx<sup>2</sup> ПС 5 П0 F10<sup>x</sup> ИПС  
 ÷ 0 П6 ИПС ÷ КИП6 + FL0 13 ÷  
 С/П

Инструкция

1. Исходные данные: ( $B_1 = P1$ ,  $B_2 = P2$ ,  $B_3 = P3$ ,  $B_4 = P4$ ,  $B_5 = P5$ ), ( $\nu = PД$ ). Значения констант  $B_k$ :

Функция	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$	$B_5$
$J'_\nu(j_{\nu,1})$	-1707	17456	-38895	-133375	-89839
$Y'_\nu(y'_{\nu,1})$	-314	-1936	11418	77993	104652

2. Пуск: В/О С/П.

3. Результат:  $PX = J'_\nu(j_{\nu,1})$ ,  $Y'_\nu(y'_{\nu,1})$ .

4. Регистры: рабочие P1 — P5, PД; оперативные P0, P6, РС; свободные P7 — РВ.

5. Погрешность неодинакова для  $J'_\nu(j_{\nu,1})$  и  $Y'_\nu(y'_{\nu,1})$ . Максимальные относительные погрешности для каждой функции:

$\nu \geq$		1	3	5
$\delta \leq$	$J'_\nu(j_{\nu,1})$	$8 \cdot 10^{-3}$	$5 \cdot 10^{-4}$	$1 \cdot 10^{-4}$
	$Y'_\nu(y'_{\nu,1})$	$1 \cdot 10^{-3}$	$5 \cdot 10^{-5}$	$1 \cdot 10^{-5}$

6. Время счета  $t \approx 15$  с.

Примеры.

$J'_8(j_{8,1}) = -0,19944536$  (-0,19944 [9]),

$J'_{5/2}(j_{5/2;1}) = -0,31735578$  (-0,3171058 [9]);

$Y'_8(y_{8,1}) = 0,20026852$  (0,20027 [9]),  $Y'_{5/2}(y_{5/2;1}) = 0,36187116$  (0,3618468 [9]).

**Программа 5.30.** Функции Бесселя  $J_\nu(j'_{\nu,1})$ ,  $Y_\nu(y'_{\nu,1})$  в первых нулях производных,  $\nu \geq 1$ . Асимптотическая формула (5.77).

4 П0 3 F1/x /—/ ИПД Fx<sup>y</sup> ПС 5 F10<sup>x</sup>  
 ÷ 0 П5 ИПС Fx<sup>2</sup> × КИП5 + FL0 13  
 × С/П

Инструкция

1. Исходные данные: ( $C_1 = P1$ ,  $C_2 = P2$ ,  $C_3 = P3$ ,  $C_4 = P4$ ), ( $\nu = PД$ ). Значения констант следующие:

Функция	$C_1$	$C_2$	$C_3$	$C_4$
$J_\nu(j'_{\nu,1})$	-459	1969	-10914	67489
$Y_\nu(y'_{\nu,1})$	1250	5203	-20877	57319

2. Пуск: В/О С/П.

3. Результат:  $PX = J_\nu(j'_{\nu,1})$ ,  $Y_\nu(y'_{\nu,1})$ .

4. Регистры: рабочие P1 — P4, PД; оперативные P0, P5, РС; свободные P6 — РВ.

5. Погрешность неодинакова для  $J_\nu(j'_{\nu,1})$  и  $Y_\nu(y'_{\nu,1})$ . Максимальные относительные погрешности для каждой функции:

$\nu \geq$		1	2	3	5
$\delta$	$J_\nu(j'_{\nu,1})$	$2 \cdot 10^{-3}$	$2 \cdot 10^{-4}$	$5 \cdot 10^{-5}$	$2 \cdot 10^{-6}$
	$Y_\nu(y'_{\nu,1})$	$3 \cdot 10^{-2}$	$5 \cdot 10^{-3}$	$2 \cdot 10^{-3}$	$4 \cdot 10^{-4}$

6. Время счета  $t \approx 15$  с.

Примеры.

$J_2(j'_{2,1}) = 0,48638175$  (0,48650),  $J_{7/2}(j'_{7/2;1}) = 0,41551611$  (0,41533), [9];

$Y_2(y'_{2,1}) = 0,36942495$  (0,36766),  $Y_{7/2}(y'_{7/2;1}) = 0,32499451$  (0,324651), [9].

**Программа 5.31.** Нули функций Бесселя  $j_{\nu,s}$ ,  $y_{\nu,s}$  малого порядка,  $0 \leq \nu < s$ . Асимптотическое разложение Макмагона (5.78).

ПС 8 × ИПД 4 × + 2 — FL  
 × ПВ 8 ÷ ИПД 2 × Fx<sup>2</sup> ПА 8  
 3 × 9 8 2 — ИПА × 3 7  
 7 9 + 3 2 × 1 5 ÷ ИПВ  
 Fx<sup>2</sup> ÷ ИПА 7 × 3 1 — 4 ×  
 3 ÷ + ИПВ Fx<sup>2</sup> ÷ 1 + ИПА 1  
 — × ИПВ ÷ — С/П

Программа относится к  $j_{v,s}$ . Для перехода к  $y_{v,s}$  заменить цифру 2 (адрес 07) на цифру 6.

#### Инструкция

- Исходные данные: ( $v = \text{РД}$ ), [ $s = \text{РХ}$ ].
- Пуск: В/О С/П.
- Результат:  $\text{РХ } j_{v,s} (\text{РХ } y_{v,s})$ .
- Регистры: рабочие РД; оперативные РА, РВ, РС; свободные Р0 — Р9.
- Погрешность относительная:

Функция	$v \leq s=1$	$v \leq s=2$	$v \leq s=3$	$s \geq 3, v \leq s-1$
$\delta$	$j_{v,s}$	$\leq 2 \cdot 10^{-5}$	$\leq 2 \cdot 10^{-6}$	$\leq 2 \cdot 10^{-6}$
	$y_{v,s}$	$\leq 1 \cdot 10^{-3}$	$\leq 6 \cdot 10^{-6}$	$\leq 2 \cdot 10^{-6}$

При  $s \leq v \leq s+2$  и любых  $s$  погрешность не превышает  $5 \cdot 10^{-3}$  для  $y_{v,s}$  и  $5 \cdot 10^{-4}$  для  $j_{v,s}$ .

6. Время счета  $t \approx 20$  с.

#### Примеры.

$y_{5,20} = 68,147987$  (68,14799 [9]),  $j_{5,20} = 69,72289$  (69,72289 [9]);

$y_{1/2;3} = 7,8539815$  (7,853982 [9]),  $j_{0,33;1} = 2,8980009$  (2,8978 [7]).

**Программа 5.32.** Нули  $j'_{v,s}, (y'_{v,s})$  производных функций Бесселя  $J'_v(z)$  ( $Y'_v(z)$ ) малого порядка,  $0 \leq v < s$  (5.79).

ПД	8	×	ИПД	4	×	+	6	—	Рл
×	ПВ	8	÷	ИПД	2	×	Рх <sup>2</sup>	ПА	8
3	×	2	0	7	5	+	ИПА	×	3
0	3	9	—	ИПА	×	3	5	3	7
+	3	2	×	1	5	÷	ИПВ	Рх <sup>2</sup>	÷
ИПА	7	×	8	2	+	ИПА	×	9	—
4	×	3	÷	+	ИПВ	Рх <sup>2</sup>	÷	3	+
ИПА	+	ИПВ	÷	—	С/П				

Программа относится к  $j'_{v,s}$ .

Для перехода к  $y'_{v,s}$  заменить цифру 6 (адрес 07) на цифру 2.

#### Инструкция

- Исходные данные: ( $v = \text{РД}$ ), [ $s = \text{РХ}$ ].
- Пуск: В/О С/П.
- Результат:  $\text{РХ} = j'_{v,s}$  или  $\text{РХ} = y'_{v,s}$  в зависимости от использованного варианта программы.
- Регистры: рабочие РД; оперативные РА, РВ, РС; свободные Р0 — Р9.

5. Максимальная относительная погрешность для  $j'_{v,s}$  и  $y'_{v,s}$  следующая:

s	1	2	2	3	$\geq 5$	$\geq 5$
$v \leq$	1	1	2	2	s	s-1
$\delta \leq$	$j'_{v,s}$	$2 \cdot 10^{-2}$	$2 \cdot 10^{-5}$	$1 \cdot 10^{-4}$	$5 \cdot 10^{-6}$	$8 \cdot 10^{-6}$
	$y'_{v,s}$	$7 \cdot 10^{-4}$	$2 \cdot 10^{-6}$	$2 \cdot 10^{-5}$	$8 \cdot 10^{-7}$	$5 \cdot 10^{-6}$

Напомним, что при  $v = 0$  первым нулем является  $z = 0$ . Второй и последующие нули получаются при  $s = 2, 3, \dots$ .

6. Время счета  $t \approx 0,5$  мин.

#### Примеры.

$j'_{8,18} = 66,269614$  (66,26961),  $j'_{9/2;6} = 23,105332$  (23,105297), [9];

$y'_{8,18} = 67,851849$  (67,85185),  $y'_{9/2;6} = 24,705964$  (24,705942), [9].

**Программа 5.33.** Нули  $x_{v,s,\lambda}$  функции  $J_v(x) Y_v(\lambda x) - J_v(\lambda, x) Y_v(x)$ ,  $\lambda > 1$ . Асимптотическое разложение (5.80), (5.81) по параметру  $\beta = s\pi/(\lambda - 1)$ .

ИП1	Рл	×	ИП2	1	—	П6	÷	П7	Рх <sup>2</sup>
П8	ИП0	Рх <sup>2</sup>	П3	4	Р1/х	—	2	÷	П4
ИП2	÷	ПС	3	/—/	ИП2	Рх <sup>y</sup>	1	—	6
,	2	5	ИП3	—	×	ИП4	×	ИП6	÷
1	2	÷	П5	ИПС	Рх <sup>2</sup>	—	ПВ	5	/—/
ИП2	Рх <sup>y</sup>	1	—	2	8	ИП3	—	ИП3	×
6	7	—	×	ИП4	×	ИП6	÷	4	0
÷	ПА	ИПВ	ИП5	+	ИПС	×	2	×	—
ИП8	÷	ИПВ	+	ИП8	÷	ИПС	+	ИП7	÷
ИП7	+	С/П							

#### Инструкция

- Исходные данные: ( $v = \text{Р0}$ ,  $s = \text{Р1}$ ,  $\lambda = \text{Р2}$ ).
- Пуск: В/О С/П.
- Результат:  $\text{РХ} = x_{v,s,\lambda}$ .
- Регистры: рабочие Р0, Р1, Р2; оперативные Р3 — Р8, РА, РВ, РС; свободные Р9, РД.
- Погрешность относительная меньше:  $1 \cdot 10^{-4}$  при  $s/\lambda \geq 1$  ( $v \leq 5$  или  $2v < s/(\lambda - 1) > 10$ ) и  $1 \cdot 10^{-5}$  при  $s/\lambda \geq 2$  ( $v \leq 3$  или  $3v < s/(\lambda - 1) > 9$ ).
- Время счета  $t \approx 0,5$  мин.

Примеры.  $x_{5/2;6,2} = 18,928798$  (18,9288 [7]);  $x_{0,3,4} = 3,132036$  (3,132 [16]).

Программа 5.34. Нули  $x'_{v,s,\lambda}$ , функции  $J'_v(x) Y'_{v(\lambda x)} - J'_v(\lambda x) Y'_v(x)$ ,  $s \geq 2$ ,  $\lambda > 1$ . Асимптотическое разложение (5.80), (5.82) по параметру  $\beta = (s-1)\pi/(\lambda-1)$ .

ИП1	Фл	×	ИП2	1	—	П6	÷	П7	Фх <sup>2</sup>
П8	ИП0	Фх <sup>2</sup>	П3	0	,	7	5	+	2
÷	ИП2	÷	ПС	3	/—/	ИП2	Фх <sup>y</sup>	1	—
4	ИП3	1	2	+	ИП3	×	—	2	4
÷	ИП6	÷	×	П5	ИПС	Фх <sup>2</sup>	—	ПВ	5
/—/	ИП2	Фх <sup>y</sup>	1	—	1	2	8	ИП3	4
6	+	ИП3	×	—	ИП3	×	3	0	—
×	8	0	÷	ИП6	÷	ПА	ИПВ	ИП5	+
ИПС	×	2	×	—	ИП8	÷	ИПВ	+	ИП8
÷	ИПС	+	ИП7	÷	ИП7	+	С/П		

#### Инструкция

- Исходные данные: ( $v = P0$ ,  $s - 1 = P1$ ,  $\lambda = P2$ ).
- Пуск: В/О С/П.
- Результат:  $PX = x'_{v,s,\lambda}$ . Напоминаем, что данная программа позволяет рассчитывать нули  $x'_{v,s,\lambda}$  при  $s \geq 2$ . Приводим для справок некоторые первые нули  $x'_{v,1,\lambda}$ :

$\lambda$	1,2	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0
$x'_{1,1,\lambda}$	0,910	0,805	0,677	0,585	0,514	0,457	0,411
$x'_{2,1,\lambda}$	1,821	1,608	1,341	1,137	0,977	0,852	0,752
$x'_{3,2,\lambda}$	2,731	2,407	1,979	1,643	1,388	1,196	1,048

4. Регистры: рабочие P0, P1, P2; оперативные P3 — P8, PA, PB, PC; свободные P9, PD.

5. Погрешность относительная меньше:  $2 \cdot 10^{-4}$  при  $(s-1)/\lambda \geq 1$  ( $v \leq 5$  или  $2v < (s-1)/(\lambda-1) > 10$ ) и  $2 \cdot 10^{-5}$  при  $(s-1)/\lambda \geq 2$  ( $v \leq 3$  или  $3v < (s-1)/(\lambda-1) > 9$ ).

6. Время счета  $t \approx 40$  с.

Примеры.  $x'_{0,2,2} = 3,1970261$  (3,197 [16]);  $x'_{3,5,2} = 12,760756$  (12,761 [16]).

#### Указатель программ

Номер программы	Функция	Область определения	Число шагов	Число регистров памяти	Примечание
5.1	$J_n(x), I_n(x),$ $n=0, 1, 2, \dots$	$0 < x \leq 25$ ( $J_n(x)$ ) $x > 0$ ( $I_n(x)$ )	36	5	Суммирование степенного ряда
5.2	$Y_0(x), Y_1(x)$	$0 < x \leq 12$	60	7	То же

Продолжение

Номер программы	Функция	Область определения	Число шагов	Число регистров памяти	Примечание
5.3	$Y_n(x), Y'_n(x),$ $n=0, 1, 2, \dots$	$0 < x \leq 12$	98	10	Суммирование степенного ряда и рекуррентные формулы
5.4	$J_n(x), Y_n(x)$ $(H_n^{(1)}(x), H_n^{(2)}(x)),$ $n=0, 1, 2, \dots$	$0 < x \leq 12$	98	14	То же
5.5	$J_n(z), I_n(z)$ $\text{ber}_n(t), \text{bei}_n(t),$ $n=0, 1, 2, \dots$	$ z  \leq 12,$ $0 \leq t \leq 12$	75	9	Суммирование степенных рядов, аргумент $t$ вещественный
5.6	$K_n(x), K'_n(x),$ $n=0, 1, 2, \dots$	$0 < x \leq 6$	97	10	Суммирование степенного ряда и рекуррентные формулы
5.7	$K_n(x), K'_n(x),$ $n=0, 1, 2, \dots$	$x \geq 3$	70	9	Асимптотическое разложение и рекуррентные формулы
5.8	$J_v(x)$ или $I_v(x)$	$x > 0$	52	6	Суммирование степенных рядов
5.9	$J_v(x), Y_v(x)$	$x > 0$	73	8	То же
5.10	$J_v(x), Y_v(x)$ $(j_n(x), y_n(x))$	$x \geq 3, v \leq x$	98	13	Асимптотические разложения Ханкеля
5.11	$J_v(x), Y_v(x)$	$x > 0$	97	8	Асимптотическое разложение Дебая и рекуррентная формула
5.12	$J_v(z), I_v(z)$ $(Y_v(z), K_v(z))$	$ z  \leq 12$	98	9	Суммирование степенных рядов
5.13	$I_v(x)$ $K_v(x)$	$x > 0$ $0 < x \leq 5$	72	8	Суммирование степенного ряда
5.14	$K_v(x)$ $k_n(x)$	$x \geq 2$ $x > 0$	40	5	Асимптотическое разложение Ханкеля
5.15	$\text{Ai}(x)$ $\text{Bi}(x)$	$-7 \leq x \leq 4$ $x \geq -7$	54	7	Суммирование степенного ряда
5.16	$\text{Ai}(x)$	$x \geq 2$	41	4	Асимптотическое разложение
5.17	$\text{Ai}(z), \text{Bi}(z)$	$ z  \geq 7,$ $x \leq 4$ для $\text{Ai}(z)$	97	14	Суммирование степенного ряда
5.18	$a_s, b_s$	$s=2, 3, \dots$	48	4	Асимптотическое разложение
5.19	$a'_s, b'_s$	$s=2, 3, \dots$	49	4	То же
5.20	$\text{Ai}(a'_s), \text{Bi}(b'_s)$	$s=2, 3, \dots$	59	4	»
5.21	$\text{Ai}'(a_s), \text{Bi}'(b_s)$	$s=2, 3, \dots$	54	4	»



Номер программы	Функция	Область определения	Число шагов	Число регистров памяти	Примечание
5.22	$\beta_s, \beta'_s$	$s=2, 3, \dots$	98	9	Асимптотическое разложение
5.23	$\text{Bi}(\beta'_s), \text{Bi}'(\beta_s)$	$s=2, 3, \dots$	98	11	То же
5.24	$j_{v,s}, y_{v,s}$	$v \geq 0, 1; s=2, 3$	93	7	Асимптотическая формула
5.25	$J'_v(j_{v,s}), Y'_v(y_{v,s})$	$v \geq 0, 1; s=2, 3, \dots$	98	8	»
5.26	$j'_{v,s}, y'_{v,s}$	$v \geq 0, 1; s=2, 3, \dots$	98	8	»
5.27	$J_v(j'_{v,s}), Y_v(y'_{v,s})$	$v \geq 0, 1; s=2, 3, \dots$	98	9	»
5.28	$j_{v,1}, y_{v,1}$ $(j'_{v,1}, y'_{v,1})$	$v \geq 1$	23	9	»
5.29	$J'_v(j_{v,1}), Y'_v(y_{v,1})$	$v \geq 1$	21	9	»
5.30	$J_v(j'_{v,1}), Y_v(y'_{v,1})$	$v \geq 1$	22	8	»
5.31	$j_{v,s}, y_{v,s}$	$0 \leq v \leq s$	66	4	Асимптотическое разложение Мак-Магона
5.32	$j'_{v,s}, y'_{v,s}$	$0 \leq v \leq s$	76	4	То же
5.33	$x_{v,s}, \lambda$	$\lambda > 1, s \geq \lambda$	93	12	Асимптотическое разложение
5.34	$x'_{v,s}, \lambda$	$\lambda > 1, (s-1) \geq \lambda$	98	12	То же

## Глава 6

## Гипергеометрические и вырожденные гипергеометрические функции вещественного и комплексного аргументов

### 6.1. Гипергеометрический ряд и его аналитические продолжения. Функции Лежандра (сферические функции) как частный случай гипергеометрических функций

Гипергеометрические функции являются решениями дифференциального уравнения (гипергеометрического уравнения или уравнения Гаусса)

$$z(1-z) \frac{d^2 u}{dz^2} + [c - (a+b+1)z] \frac{du}{dz} - abu = 0, \quad (6.1)$$

где  $a, b, c$  — произвольные комплексные числа.

Фундаментальное решение (6.1), регулярное в окрестности точки  $z=0$ , имеет вид степенного ряда

$$F(a, b; c; z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n n!} z^n. \quad (6.2)$$

Символы типа  $(z)_n$  — символы Похгаммера [5] — означают

$$(r)_n = r(r+1) \dots (r+n-1), \quad n=1, 2, 3, \dots, \quad r_0 = 1. \quad (6.3)$$

Функция  $F(a, b; c; z)$  называется гипергеометрическим рядом. Ряд абсолютно сходится внутри круга  $|z|=1$ . На границе круга сходимости ряд абсолютно сходится только при  $\text{Re}(c-a-b) > 0$ . Гипергеометрический ряд сводится к многочлену степени  $n$  относительно  $z$ , если  $a = -n$  или  $b = -n$  ( $n=0, 1, 2, \dots$ ). Ряд (6.2) теряет смысл, когда параметр  $c=m$  ( $m=0, -1, -2, \dots$ ), а  $a$  или  $b$  не равны отрицательному целому  $n < m$ . Функция  $F(a, b; c; z)/\Gamma(c)$  является целой аналитической функцией параметров  $a, b, c$  в любой конечной области комплексного пространства этих параметров.

Гипергеометрический ряд при вычислениях удобно записывать по схеме Горнера

$$F(a, b; c; z) \approx \left\{ \left[ \frac{(a+N-1)(b+N-1)}{(c+N-1)N} z + 1 \right] \times \right. \\ \left. \times \frac{(a+N-2)(b+N-2)}{(c+N-2)(N-1)} z + \dots \right\} \frac{ab}{c} z + 1. \quad (6.4)$$

Линейно независимое по отношению к  $F(a, b; c; z)$  решение гипергеометрического уравнения (6.1) (при условии, что  $(c-a-b)$  не является целым числом) имеет вид

$$F_2(z) = (1-z)^{c-a-b} F(c-a, c-b; c; z), \quad |z| < 1. \quad (6.5)$$

Производные

$$\frac{d}{dz} F(a, b; c; z) = \frac{ab}{c} F(a+1, b+1; c+1; z). \quad (6.6)$$

Гипергеометрическая функция может быть определена на всей плоскости  $z$ , разрезанной соответствующим образом по действительной оси (см., например, [5, 17]). Известен ряд аналитических продолжений гипергеометрического ряда, позволяющих представить гипергеометрическую функцию вне круга  $|z|=1$  также в виде степенного ряда. Ниже приводятся два таких продолжения, применимых к функциям вещественного аргумента (они также обозначаются как  $F(a, b; c; z)$ ):

$$F(a, b; c; z) = A_1 z^{-a} F(a, a+1-c; a+b+1-c; 1-z^{-1}) + \\ + A_2 z^{a-c} (1-z)^{c-a-b} F(c-a, 1-a; c+1-a-b; 1-z^{-1}), \\ \text{Re } z = x > 1/2; \quad (6.7)$$

$$F(a, b; c; z) = B_1 (-z)^{-a} F(a, 1-c+a; 1-b+a; z^{-1}) + \\ + B_2 (-z)^{-b} F(b, 1-c+b; 1-a+b; z^{-1}), \quad |z| > 1, \quad (6.8)$$

где

$$A_1 = \frac{\Gamma(c) \Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a) \Gamma(c-b)}, \quad A_2 = \frac{\Gamma(c) \Gamma(a+b-c)}{\Gamma(a) \Gamma(b)}; \quad (6.9)$$

$$B_1 = \frac{\Gamma(c) \Gamma(b-a)}{\Gamma(b) \Gamma(c-a)}, \quad B_2 = \frac{\Gamma(c) \Gamma(a-b)}{\Gamma(a) \Gamma(c-b)}. \quad (6.10)$$

Разложение (6.7) в случае вещественных функций применимо на интервале  $0,5 < x \leq 1$ . В отличие от (6.2) оно эффективно вблизи  $x = 1$ , где гипергеометрический ряд (6.2) в общем сходится весьма медленно. Разложение (6.8) в вещественной области пригодно для всех  $x < -1$ .

Многие специальные функции выражаются через гипергеометрическую функцию. Отметим среди них функции Лежандра, которые в гл. 8 рассматриваются лишь при частных значениях параметров. Функциями Лежандра называются решения дифференциального уравнения

$$(1-z^2) \frac{d^2 w}{dz^2} - 2z \frac{dw}{dz} + \left[ v(v+1) - \frac{\mu^2}{1-z^2} \right] w = 0, \quad (6.11)$$

однозначные и регулярные на плоскости комплексного переменного  $z$ , разрезанной вдоль действительной оси от 1 до  $\infty$ ;  $v$  и  $\mu$  — произвольные комплексные константы. Фундаментальные линейно независимые решения уравнения (6.11) обозначаются как  $P_v^\mu(z)$ ,  $Q_v^\mu(z)$ . При  $\mu \neq 0$  эти функции называются присоединенными функциями Лежандра (сферическими функциями) соответственно первого и второго рода.

Приведем два соотношения, связывающие функции Лежандра вещественного аргумента с гипергеометрической функцией (см. [5]) при  $-1 < x < 1$ ,  $\mu \neq 0$ :

$$P_v^\mu(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\mu)} \left| \frac{1+x}{1-x} \right|^{\mu/2} F\left(-v, v+1; 1-\mu; \frac{1-x}{2}\right), \quad -1 < x < 1; \quad (6.12)$$

$$Q_v^\mu(x) = \frac{\pi}{2} \operatorname{ctg}(\pi\mu) P_v^\mu(x) - \frac{\pi}{2 \sin(\pi\mu)} \frac{\Gamma(v+\mu+1)}{\Gamma(v-\mu+1)} P_v^{-\mu}(x). \quad (6.13)$$

Известен ряд других соотношений такого типа для функций комплексного аргумента [5, 9]. Эти соотношения в совокупности охватывают всю область определения функций Лежандра, однако их трудно реализовать на ПМК.

Отметим, что отрезок  $-1 < x < 1$  лежит на линии разреза плоскости  $z$ . Функции  $P_v^\mu(x)$  на этом участке и функции  $Q_v^\mu(x)$  оказываются модифицированными в том смысле, что не являются аналитическими продолжениями  $P_v^\mu(z)$  и  $Q_v^\mu(z)$  [5]. Тем не менее эти функции удовлетворяют уравнению (6.11) и широко используются в математической физике.

**Программа 6.1.** Гипергеометрический ряд  $F(a, b; c; x)$  вещественного аргумента,  $|x| < 1$ ,  $c \neq 0, -1, -2, \dots$ . Суммирование (6.4) по схеме Горнера.

1	2	ИП9	Fx <sup>2</sup>	Flg	/—/	÷	П0	1	ИПА
ИП0	1	—	ПД	+	×	ИПВ	ИПД	+	×
ИПС	ИПД	+	÷	ИП0	÷	ИП9	×	1	+
FL0	09	С/П							

Число членов ряда задается в программе по формуле  $N = 12/(-\lg x^2)$ .

**Инструкция**

1. Исходные данные:  $(x = P9, a = PA, b = PB, c = PC)$ .
2. Пуск: В/О С/П.
3. Результат:  $PX = F(a, b; c; x)$ .
4. Регистры: рабочие P9 — PC; оперативные P0, PД; свободные P1 — P8.
5. Погрешность относительная меньше  $2 \cdot 10^{-6}$  при положительных  $x, a, b, c$  и при условии  $2(a+b-c) < N$ . Если хотя бы одна из указанных переменных отрицательна, то ряд становится знакопеременным и оценка погрешности усложняется.

а) Отрицательна одна из переменных  $x, a, b, c$ . Рассчитывается максимальный по модулю член ряда (6.2) — программа 6.2. Пусть модуль указанного чле-

на равен  $M$ . Если  $M < |F(a, b; c; x)|$ , то указание выше оценка сохраняется. В противном случае за максимальную абсолютную погрешность следует принять  $2 \cdot 10^{-6} M$ .

б) Отрицательны две или больше переменных  $x, a, b, c$ . Вычисляются суммы  $S_r$  первых  $N_r$  членов ряда, где  $r = |a|, |b|, |c|$  (учитываются только отрицательные параметры). Для нахождения  $S_r$  следует, кроме исходных данных п. 1 настоящей инструкции, ввести  $N_r = 1 + |z|$  в регистр P0 и затем пуск: БП 08 С/П. Здесь  $|z|$  — модуль каждой из отрицательных констант  $a, b$  или  $c$ . За абсолютную погрешность принимается  $2 \cdot 10^{-6} R$ , где  $R$  — наибольшая из следующих величин:  $|F(a, b; c; x)|, M, |S_r|$ .

6. Время счета  $t \approx 4/(-3 \lg x^2)$  мин.

**Примеры.**

$F(1/2, 1; 3/2; 0,9025) = 1,9281902$  (1,9281903),  $t \approx 16$  мин;

$F(1/2, 1; 3/2; 0,64) = 1,3732653$  (1,3732653),  $t \approx 3,5$  мин.

В скобках — значения функции  $\frac{1}{2\sqrt{x}} \ln \frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}$ , которая при указанных параметрах  $a, b, c$  совпадает с гипергеометрической функцией [5].

**Программа 6.2.** Наибольший по модулю  $M$  член гипергеометрического ряда  $F(a, b; c; x)$ ,  $c \neq 0, -1, -2, \dots$ , из заданного числа  $N$  первых членов ряда.

1	ПД	0	П6	П8	ИП8	ИПД	ИПА	ИП6	+
×	ИПВ	ИП6	+	×	ИПС	ИП6	+	÷	КИП6
F,	ИП6	÷	ИП9	×	ПД	Fx <sup>2</sup>	Fv <sup>—</sup>	—	Fx < 0
33	FBx	П8	FL0	05	С/П				

**Инструкция**

1. Исходные данные:  $(x = P9, a = PA, b = PB, c = PC)$ ,  $N = P0$ . Для перебора всех существенных членов ряда в качестве  $N$  следует ввести  $N = 9(1+x) + |a| + |b| + |c|$ .

2. Пуск: В/О С/П.

3. Результат: P8 = M.

4. Регистры: рабочие P8 — PC; оперативные P0, P6, PД; свободные P1 — P5, P7.

5. Время счета  $t \approx (N/7)$  мин.

**Пример.** Для  $F(0,5, 1; -3,5, 0,64)$ ,  $N = 22$

$M = 7,1499558, t = 3$  мин.

**Программа 6.3.** Производная гипергеометрического ряда (6.6). Функция  $F_2(x)$ , являющаяся линейно независимым к  $F(a, b; c; x)$  решением гипергеометрического уравнения (6.5),  $|x| < 1$ ,  $c \neq 0, -1, -2, \dots$ . Для  $F_2(x)$  число  $(c - a - b)$  не должно быть целым.

1	2	ИП9	Fx <sup>2</sup>	Flg	/—/	÷	П0	ПД	ИПА
1	+	П6	ИПВ	1	+	П7	ИПС	1	+
П8	ПП	51	ИПА	×	ИПВ	×	ИПС	÷	П5
ИПД	П0	ИПС	П8	ИПА	—	П6	ИПС	ИПВ	—
П7	ИПА	—	1	ИП9	—	Fx <sup>y</sup>	ПП	51	×
С/П	1	ИП0	1	—	П1	ИП6	+	×	ИП7
ИП1	+	×	ИП8	ИП1	+	÷	ИП0	÷	ИП9
×	1	+	FL0	52	В/О				

# Инструкция

1. Исходные данные: ( $x = P9, a = PA, b = PB, c = PC$ ).
2. Пуск: В/О С/П.
3. Результат:  $PX = F_2(x), P5 = d[F(a, b; c; x)]/dx$ .
4. Регистры: рабочие P5, P9 — PC; оперативные P0, P1, P6 — P8, PД; свободные P2, P3, P4.
5. Погрешность такая же, как и в программе 6.1.
6. Время счета  $t \approx 3/(-\lg x^2)$  мин.

## Примеры.

$$\frac{d}{dx} [F(1/2, 1; 3/2; 0,9025)] = 4,6139646 (4,6139722),$$

$$F_2(0,9025) = 1,9281902, \quad t = 34 \text{ мин};$$

$$\frac{d}{dx} [F(1/2, 1; 3/2; 0,64)] = 1,0972739 (1,0972753),$$

$$F_2(0,64) = 1,3732653, \quad t = 8,5 \text{ мин}.$$

Числа в скобках — значения производной функции  $\frac{1}{2\sqrt{x}} \ln \frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}$  (см.

пример к программе 6.1). В данных примерах  $F_2(x)$  не является линейно независимой функцией, так как здесь  $c = a - b = 0$ .

**Программа 6.4.** Гипергеометрический ряд  $F(a, b; c; z)$  комплексного аргумента  $z = x + jy, |z| < 1, c \neq 0, -1, -2, \dots$ . Суммирование (6.4) по схеме Горнера.

8	ИП9	Fx <sup>2</sup>	ИП8	Fx <sup>2</sup>	+	Flg	/—/	÷	П0
0	П7	1	ИП0	1	—	ПД	ИПА	+	ИПД
ИПВ	+	×	ИПД	ИПС	+	÷	ИП0	÷	×
П6	FBx	ИП7	×	ПД	ИП9	×	ИП6	ИП8	×
+	П7	ИП6	ИП9	×	ИПД	ИП8	×	—	1
+	FL0	13	С/П						

Число учитываемых членов ряда задается в программе по формуле  $N = 8/(-\lg |z|^2)$ .

## Инструкция

1. Исходные данные: ( $x = P9, y = P8, a = PA, b = PB, c = PC$ ).
2. Ввод В/О С/П.
3. Результат:  $PX = \operatorname{Re} F(a, b; c; x), PY = P7 = \operatorname{Im} F(a, b; c; x)$ .
4. Регистры: рабочие P8 — PC; оперативные P0, P6, P7; свободные P1 — P5.
5. Погрешность относительная меньше  $1 \cdot 10^{-5}$  при положительных  $a, b, c$ , при условии  $2(a + b - c) < N$ , а также  $0 \leq |\arg z| \leq \pi/4$ . Если константы отрицательны или  $|\arg z| > \pi/4$ , то оценка погрешности требует дополнительных вычислений.

а) Отрицательна одна из констант  $a, b, c$  или  $|\arg z| > \pi/4$ . Рассчитывается по программе 6.2 максимальный по модулю член ряда. В этой программе в качестве  $x$  используется  $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ . Пусть модуль указанного члена равен  $M$ . Если  $M < |F(a, b; c; z)|$ , то указанная выше оценка сохраняется. В противном случае за максимальную абсолютную погрешность следует принять  $1 \cdot 10^{-5}M$ .

б) Отрицательны две или больше переменных или одна из них, но при этом не выполняется условие  $0 \leq |\arg z| \leq \pi/4$ . В этом случае используется та же методика, как и в программе 6.1 (см. п. 5 инструкции к программе).

6. Время счета  $t \approx 1,7/(-\lg |z|^2)$  мин.

## Пример.

$$F(1/2, 1; 3/2; 0,39 + j0,8) = 0,9695109 + j0,30732848 \quad (0,96951055 + j0,30732883), \quad t \approx 16,5 \text{ мин}.$$

Число в скобках является значением функции  $\frac{1}{2\sqrt{z}} \ln \frac{1+\sqrt{z}}{1-\sqrt{z}}$ , которая совпадает с гипергеометрическим рядом пдн данных значениях параметров  $a, b, c$  [5] (здесь  $\sqrt{z} = 0,8 + j0,5$ ).

**Программа 6.5.** Гипергеометрическая функция  $F(a, b; c; x)$  как аналитическое продолжение гипергеометрического ряда (6.7),  $0,5 < x \leq 1; c \neq 0, -1, -2, \dots; (a + b - c) \neq 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ .

1	П4	ИП7	F1/x	—	П8	ИПА	ИП7	Fx <sup>y</sup>	ИП4
×	П4	ИПД	ПП	64	1	ПП	62	F1/x	П4
1	ИПВ	ПП	63	1	ИПА	+	ПП	62	ИП2
+	П2	0	П6	ИП4	ИПА	ИП6	+	ИПВ	ИП6
+	×	ИПС	ИП6	+	÷	КИП6	F,	ИП6	÷
×	ИП8	×	П4	ИП2	+	П2	FBx	—	Fx=0
34	С/П	ИПС	—	П5	ИП4	ИП5	×	П4	ИП5
1	+	П5	1	2	—	Fx≥0	65	FBx	ИП5
×	F1/x	ИП5	Fln	1	—	ИП5	×	+	/—/
Fe <sup>x</sup>	ИП5	Fv <sup>—</sup>	×	ИП4	×	П4	В/О		

Программа рассчитана на два последовательных пуска, на которых вычисляются и суммируются слагаемые, входящие в (6.7). Перед вторым пуском рассчитывается отдельно и засылается в регистр P4 фактор  $(1-x)^{a+b-c}$ .

Структура программы (при пуске 1)

- 00—11: расчет  $(1-x^{-1})$  и  $x^a$ ,
- 12—31: расчет фактора  $A_1$ , образованного из гамма-функций (формула (6.9)),
- 32—61: вычисление гипергеометрического ряда  $F(a, a+1-c; a+b+1-c; 1-x^{-1})$  и полной величины первого слагаемого в (6.7). Расчет  $F$  ведется непосредственным суммированием ряда типа (6.2) до обращения в машинный ноль разности двух последовательных частичных сумм ряда,
- 62—97: подпрограмма обратной величины гамма-функции (см. программу 2.7).

## Инструкция

1. Исходные данные для пуска 1 ( $x = P7, a = PA, (1+a-c) = PB$ ),  $((1+a+b-c) = PC, c = PД), 0 = P2$ .
2. Пуск 1: В/О С/П.
3. Исходные данные для пуска 2:  $((c-a) = PA, (1-a) = PB, (1-a-b+c) = PC)$ . Содержимое регистров P2, P7, PД сохраняется.
4. Выполнить команды нажатием клавиш

1 ИПС — 1 ИП7 — Fx<sup>y</sup> П4

(вычисление  $(1-x)^{a+b-c}$ ).

5. Пуск 2: БП 06 С/П.

6. Результат: P2 =  $F(a, b; c; x)$ . После каждого пуска в регистре P6 — число учтенных при суммировании членов гипергеометрического ряда.

7. Регистры: рабочие P2, P6, P7, PA — PД; оперативные P4, P5, P8; свободные P0, P1, P3, P9.

8. Погрешность относительная меньше  $5 \cdot 10^{-6}$  при  $|a|, |b|, |c| \sim 1$ . В противном случае следует оценить максимальный по модулю член гипергеометрического ряда при значениях параметров, указанных в качестве исходных данных для пусков 1 и 2, а также —  $S_7$ . Расчет ведется с помощью программ 6.2, 6.1. Более подробно — см. п. 5. инструкции к программе 6.1.

9. Время счета (суммарное для обоих пусков)  $t \approx 8 + 6/[-\lg(1-x^{-1})^2]$  мин. Пример. Рассчитать  $F(a, -a; 1/2; \sin^2 y) = \cos 2ay$  [5] при  $a = 0,1, y = 1,47$ . Тогда  $x = \sin^2 y = 0,98987446$ . Это значение настолько близко к 1, что фундаментальный ряд (6.2) для данной функции будет сходиться чрезвычайно медленно, и его использование практически невозможно. В то же время величина  $1 - x^{-1} = 1,0229100 \cdot 10^{-2}$  мала, и гипергеометрические ряды, входящие в (6.7), сходятся быстро. Результат расчета:

$F(1/10, -1/10; 1/2; \sin^2 1,47) = 0,95709256$  (0,95709242). Число в скобках — значение  $\cos(0,2 \cdot 1,47)$ . Полное время счета  $t \approx 10$  мин. После пуска 1 результат:  $P2 = 0,95086344$ .

**Программа 6.6.** Гипергеометрическая функция  $F(a, b; c; x)$  как аналитическое продолжение гипергеометрического ряда (6.8),  $x < -1; c \neq 0, -1, -2, \dots; (a-b) \neq 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ .

0	P2	ИП7	F1/x	P8	ИПА	ИП7	/—/	Fx <sup>y</sup>	P4
ИПД	ПП	62	1	ПП	60	F1/x	P4	1	ИПВ
ПП	61	1	ИПА	+	ПП	60	ИП2	+	P2
0	P6	ИП4	ИПА	ИП6	+	ИПВ	ИП6	+	×
ИПС	ИП6	+	÷	КИП6	F,	ИП6	÷	×	ИП8
×	P4	ИП2	+	P2	FBx	—	Fx=0	32	С/П
ИПС	—	P5	ИП4	ИП5	×	P4	ИП5	1	+
P5	1	2	—	Fx $\geq 0$	63	FBx	ИП5	×	F1/x
ИП5	Fln	1	—	ИП5	×	+	/—/	Fe <sup>x</sup>	ИП5
Fy <sup>—</sup>	×	ИП4	×	P4	В/О				

Программа рассчитана на два последовательных пуска, на которых вычисляются каждое из слагаемых в (6.8).

#### Инструкция

1. Исходные данные для пуска 1:  $(x = P7, a = PA, (1 + a - c) = PB, (1 + a - b) = PC, c = PD)$ .

2. Пуск 1: В/О С/П.

3. Исходные данные для пуска 2:  $(b = PA, (1 + b - c) = PB, (1 + b - a) = PC)$ . Содержимое регистров P2, P7, PD сохраняется.

4. Пуск 2: БП 05 С/П.

5. Результат: После пуска 1 в P2 — первое слагаемое из (6.8). Окончательный результат после пуска 2  $P2 = F(a, b; c; x)$ . После каждого пуска в P6 — числа учитываемых членов при суммировании гипергеометрических рядов, входящих в слагаемые (6.8).

6. Погрешность относительная меньше  $5 \cdot 10^{-6}$  при  $|a|, |b|, |c| \sim 1$ . В других случаях оценка погрешности производится так же, как в программе 6.5 (ср. также программу 6.1).

7. Время счета (суммарное для обоих пусков)  $t \approx [8 + 3,6/\lg x^2]$  мин.

8. Регистры: рабочие P2, P6, P7, PA — РД; оперативные P4, P5, P8; свободные P0, P1, P3, P9.

Пример. Вычислить  $(\arctg y)/y = F(1/2, 1; 3/2; -y^2)$  [5] при  $y = 2$ :  $F(1/2, 1; 3/2; -4) = 0,55357472$  (0,5535743),  $t \approx 10$  мин.

В скобках значение  $(\arctg y)/y$  при  $y = 2$ . После пуска 1 результат: P2 = 0,78539851.

**Программа 6.7.** Присоединенные функции Лежандра первого рода  $P_v^\mu(x)$  вещественного аргумента (6.12),  $-1 < x < 3$ .

1	ИП8	—	ПС	П7	1	ИПА	+	ПВ	ИП8
1	↑	ИП5	—	2	÷	П9	—	ИП9	÷
Fx <sup>2</sup>	Fxy	Fy <sup>—</sup>	Fл	÷	2	÷	Fy <sup>—</sup>	ПД	0
П6	ИПД	ИП7	×	ПД	ИП7	1	+	П7	1
2	—	Fx $\geq 0$	31	FBx	ИП7	×	F1/x	ИП7	Fln
1	—	ИП7	×	+	/—/	Fe <sup>x</sup>	ИП7	Fy <sup>—</sup>	×
ИПД	×	ПД	П7	ИПД	ИП6	ИПА	—	×	ИПВ
ИП6	+	×	ИПС	ИП6	+	÷	КИП6	F,	ИП6
÷	ИП9	×	ПД	ИП7	+	П7	FBx	—	Fx=0
64	С/П								

#### Инструкция

1. Исходные данные:  $(x = P5, \mu = P8, \nu = PA)$ .

2. Пуск: В/О С/П.

3. Результат:  $P7 = P_v^\mu(x)$ .

4. Регистры: рабочие P5, P7, P8, PA; оперативные P6, P9, PB — РД; свободные P0 — P4.

5. Погрешность относительная меньше  $2 \cdot 10^{-6}$  при положительных  $\nu$  и  $\mu < 1$ . В остальных случаях см. инструкцию к программе 6.1 (с заменой  $(-v) \rightarrow a, (v+1) \rightarrow b, (1-\mu) \rightarrow c, (1-x)/2 \rightarrow x$ ).

6. Время счета  $t \approx \left\{ 1 + 2 / \left[ -\lg \frac{(1-x)^2}{4} \right] \right\}$  мин.

#### Примеры.

$P_{1,7}^{-1,7}(2,5) = 0,81572567$  (0,81572586),  $t \approx 5,5$  мин. Число в скобках — значение функции  $2^{-\nu}(x^2-1)^{\nu/2}/\Gamma(\nu+1)$  при  $\nu=1,7, x=2,5$ , которая совпадает с данной функцией Лежандра [9];

$P_{1,7}^{-0,5}(\cos 0,7) = 0,45164249$  (0,45164278),  $t \approx 2,5$  мин. В скобках значение совпадающей с  $P_v^{-1/2}$  функции

$$\sin \left[ \left( \nu + \frac{1}{2} \right) \theta \right] / \left[ \left( \nu + \frac{1}{2} \right) \sqrt{\frac{\pi \sin \theta}{2}} \right] \text{ при } \nu=1,7, \theta=0,7.$$

**Программа 6.8.** Присоединенные функции Лежандра второго рода  $Q_v^\mu(x)$  вещественного аргумента на разрезе (6.13), (6.12),  $-1 < x < 1$ .

ИПВ	ИП8	—	ПП	64	F1/x	ПД	ИПВ	ИП8	+
ПП	64	0	П6	ИП8	1	ИП9	—	ИП9	÷
Fxy	Fл	÷	2	÷	Fy <sup>—</sup>	ИПД	×	ПД	1
ИП8	—	ПС	ПП	64	П7	ИПД	ИП6	ИПА	—
×	ИПВ	ИП6	+	×	ИПС	ИП6	+	÷	КИП6
F,	ИП6	÷	ИП9	×	ПД	ИП7	+	П7	FBx
—	Fx=0	36	С/П	П7	ИПД	ИП7	×	ПД	ИП7
1	+	П7	1	2	—	Fx $\geq 0$	65	FBx	ИП7
×	F1/x	ИП7	Fln	1	—	ИП7	×	+	/—/
Fe <sup>x</sup>	ИП7	Fy <sup>—</sup>	×	ИПД	×	ПД	В/О		

Программа рассчитана на два последовательных пуска, на которых вычисляются слагаемые, входящие в (6.13). Эти слагаемые выражаются через  $P_v^{\pm\mu}(x)$ , определяемые (6.12). Перед вторым пуском результат предыдущего счета записывается в регистр P5.

Структура программы (при пуске 1)

00—35: вычисление фактора  $A = -\frac{\pi \Gamma(v+\mu+1)}{2 \sin(\pi\mu) \Gamma(-v+\mu+1)}$ ,  
36—63: вычисление гипергеометрического ряда  $F(-v, v+1; 1+\mu; (1-x)/2)$  и функции  $AP_v^{-\mu}(x)$ ,

64—97: подпрограмма расчета гамма-функции.

Инструкция

1. Исходные данные для пуска 1:  $(-\mu = P8, (1-x)/2 = P9, v = PA, (1+v) = PB, -2 \sin(\pi\mu)/\pi = PD$ .

2. Пуск 1: В/О С/П.

3. Результат:  $P7 = AP_v^{-\mu}(x)$ . Этот результат заносится в регистр P5: ИП7 П5.

4. Исходные данные для пуска 2:  $(\mu = P8), \pi \operatorname{ctg}(\pi\mu)/2 = PD$ .

5. Пуск 2: БП 12 С/П.

6. Результат получается суммированием содержимого регистров P7 и P5:  $P7 + P5 = Q_v^{\mu}(x)$ .

7. Регистры: рабочие P5, P8 — PB; оперативные P6, P7, PC, PD; свободные P0 — P4.

8. Погрешность относительная меньше  $5 \cdot 10^{-6}$  при  $v, \mu \approx 1$ . В противном случае оценить максимальный по модулю член гипергеометрического ряда  $F(-v, v+1; 1+\mu; (1-x)/2)$  или  $F(-v, v+1; 1-\mu; (1-x)/2)$ , а также величины  $S_r$  (подробнее см. программы 6.1, 6.2).

9. Время счета  $t \approx \left[ 4 + 4/\lg \frac{(1-x)^2}{4} \right]$  мин.

Примеры.

$Q_{1,0}^{0,3}(\cos 0,7) = 0,37655606 - 0,57596301 = -0,19940695, t \approx 9$  мин,  
слагаемые в примере — результаты после пусков 1 и 2;

$Q_{1,0}^{0,3}(0,8) = -1,5985994 (-1,5986005), t \approx 4$  мин.

В скобках — значение совпадающей с  $Q_v^{\mu}(x)$  функции  $(-\pi/2) \sin[(v+1/2)\theta]/\sqrt{\pi \sin \theta/2}$  при  $\theta = \arccos x$ . В этом примере второй пуск не требуется, так как  $\operatorname{ctg} \pi\mu = 0$  (ср. (6.13)).

## 6.2. Вырожденные гипергеометрические функции (функция Куммера и функция второго типа). Функция параболического цилиндра как частный случай вырожденных гипергеометрических функций

Дифференциальное уравнение вырожденных гипергеометрических функций

$$z \frac{d^2 w}{dz^2} + (b-z) \frac{dw}{dz} - aw = 0. \quad (6.14)$$

Одно из частных решений этого уравнения — функция Куммера — выражается в виде следующего степенного ряда:

$$\Phi(a, b; z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n}{(b)_n n!} z^n. \quad (6.15)$$

Символы  $(a)_n$  и т. д. были определены в (6.3);  $\Phi(a, b; z)$  — целая функция от  $z$  и  $a$ , как функция параметра  $b$  имеет полюсы в точках  $b = 0, -1, -2, \dots$ . Функция  $\Phi(a, b; z)/\Gamma(b)$  — целая от всех трех переменных  $a, b, z$ . При  $a = -m$ , где  $m$  — целое положительное число,  $\Phi(a, b; z)$  вырождается в многочлен степени  $m$ . Иногда функцию Куммера обозначают как  $M(a, b, z)$  [9].

При суммировании рядов типа (6.15), а особенно для комплексных  $z$  и  $a$  существенный выигрыш дает схема Горнера. Применительно к (6.15) указанная схема имеет вид

$$\Phi(a, b; z) = \left[ \dots \left( \frac{a+N-1}{(b+N-1)n} z + 1 \right) \frac{a+N-2}{(b+N-2)(n-1)} z + \dots \right] \frac{a}{b} z + 1. \quad (6.16)$$

Здесь некоторую трудность представляет выбор числа  $N$  учитываемых членов ряда. Для  $b > -2$  и  $|z|, |a| < 50$  достаточное число членов ряда определяет эмпирической формулой

$$N \approx 15 + 1,5(|z|^2 + |a|^2)^{1/2}. \quad (6.17)$$

Эта формула при некоторых  $z, a, b$  приводит к завышенным значениям  $N$ . Поэтому для вещественных  $a, b, z = x$  целесообразно непосредственно суммировать (6.15) до совпадения с определенной точностью двух последовательных частичных сумм ряда (обычно до обращения в машинный ноль их разности).

Погрешности вычисления  $\Phi(a, b; z)$  существенно зависят от знака  $a, b$  и величины  $\arg z$ . При отрицательных значениях  $a, b$  и  $\arg z \neq 0$  ряды знакопеременны и точность снижается. В данном случае может оказаться полезным преобразование Куммера

$$\Phi(a, b; z) = e^z \Phi(b-a, b; -z). \quad (6.18)$$

Второе решение уравнения (6.14), линейно независимое с функцией Куммера, связано с последней соотношением [7]

$$\Psi(a, b; z) = \frac{\Gamma(1-b)}{\Gamma(a-b+1)} \Phi(a, b; z) + \frac{\Gamma(b-1)}{\Gamma(a)} z^{1-b} \Phi(a-b+1, 2-b; z). \quad (6.19)$$

Формула (6.19) пригодна в принципе и для целых  $b$ . Хотя в этом случае оба слагаемых обращаются в бесконечность, но бесконечности вычитаются и предельный переход приводит к конечной функции, содержащей логарифмический член  $\ln z$  [5].

В отличие от  $\Phi$  функция  $\Psi$  многозначна. Обычно рассматривается главная ветвь  $\Psi(a, b; z)$  в плоскости, разрезанной по отрицательной части действительной оси, т. е. при  $|\arg z| < \pi$ . Для вещественных  $z = x$  эта ветвь определена при  $x > 0$ :

$$\Psi(a, b; x) = \frac{\Gamma(1-b)}{\Gamma(a-b+1)} \Phi(a, b; x) + \frac{\Gamma(b-1)}{\Gamma(a)} x^{1-b} \Phi(a-b+1, 2-b; x). \quad (6.20)$$

При произвольных  $a$  и условиях  $\operatorname{Re} z > 0, \operatorname{Re} a > 0$  справедливо интегральное представление

$$\Psi(a, b; z) = \frac{1}{\Gamma(a)} \int_0^{\infty} e^{-zt} t^{a-1} (1+t)^{b-a-1} dt. \quad (6.21)$$

При больших  $|z|$  функция  $\Psi(a, b; z)$  определяется асимптотическим рядом

$$\Psi(a, b; z) \approx z^{-a} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (1+a-b)_n}{n!} (-z)^{-n}. \quad (6.22)$$

Согласно оценкам следует выбирать число членов ряда

$$N = \begin{cases} u = |z| + b - a & \text{при } u < 15, \\ 15 & \text{при } u \geq 15. \end{cases} \quad (6.23)$$

Вычисление  $\Psi$  удобно производить по схеме Горнера:

$$\Psi(a, b; z) \approx z^{-a} \left[ \left[ \dots \left( \frac{r_N}{N(-z)} + 1 \right) \frac{r_{N-1}}{(N-1)(-z)} + \dots \right] \frac{r_1}{(-z)} + 1 \right], \quad (6.24)$$

где  $r_k = (a+k-1)(1+a-b+k-1)$ .

Асимптотическое разложение  $\Phi(a, b; z)$  имеет вид

$$\Phi(a, b; z) \approx e^z z^{a-b} \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(a)} \sum_{n=0}^N \frac{(b-a)_n (1-a)_n}{n!} z^{-n}, \quad b \neq 0, -1, -2, \dots \quad (6.25)$$

Формулу (6.25) можно использовать при  $\operatorname{Re} z > 0$  и дополнительном условии (для вещественных  $z = x$ )

$$x + (2a-b) \ln x \gg 1. \quad (6.26)$$

Асимптотическое разложение  $\Phi(a, b; x)$  при произвольных  $a, b$  более громоздко (см., например, [9]), и его трудно реализовать на ПМК.

Вырожденные гипергеометрические функции при частных значениях параметров порождают ряд специальных функций [5,9]. Остановимся на функциях параболического цилиндра, которые в гл. 8 рассматриваются лишь при целых значениях параметра. Эти функции удовлетворяют дифференциальному уравнению

$$\frac{d^2 y}{dz^2} + \left( v + \frac{1}{2} - \frac{z^2}{4} \right) y = 0. \quad (6.27)$$

Функции параболического цилиндра являются целыми функциями  $z$  и выражаются в виде линейной комбинации функций Куммера [9]. Запишем эти соотношения для двух линейно независимых решений уравнения (6.27) и вещественных значений аргумента:

$$U(a, x) = \frac{e^{-x^2/4}}{2^{a/2+1/4}} \left[ \cos \vartheta \Phi \left( \frac{a}{2} + \frac{1}{4}, \frac{1}{2}; \frac{x^2}{2} \right) \frac{\Gamma \left( \frac{1}{4} - \frac{a}{2} \right)}{\sqrt{\pi}} - \right. \\ \left. - x \sqrt{2} \sin \vartheta \Phi \left( \frac{a}{2} + \frac{3}{4}, \frac{3}{2}; \frac{x^2}{2} \right) \frac{\Gamma \left( \frac{3}{4} - \frac{a}{2} \right)}{\sqrt{\pi}} \right]; \quad (6.28)$$

$$V(a, x) = 2^{a/2+1/4} e^{-x^2/4} \left[ \frac{\sin \vartheta \Phi \left( \frac{a}{2} + \frac{1}{4}, \frac{1}{2}; \frac{x^2}{2} \right)}{\Gamma \left( \frac{3}{4} - \frac{a}{2} \right)} + \right. \\ \left. + \frac{x \sqrt{2} \cos \vartheta \Phi \left( \frac{a}{2} + \frac{3}{4}, \frac{3}{2}; \frac{x^2}{2} \right)}{\Gamma \left( \frac{1}{4} - \frac{a}{2} \right)} \right], \quad \vartheta = \pi \left( \frac{a}{2} + \frac{1}{4} \right). \quad (6.29)$$

Здесь вместо  $D_v(x)$  использованы обозначения из [9], согласно которым  $a = -v - 1/2$  и первое из решений  $U(a, x) \equiv D_{-a-1/2}(x)$ . Для  $U(a, x)$  и  $V(a, x)$  дифференциальное уравнение (6.27) принимает вид

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - \left( a + \frac{x^2}{4} \right) y = 0. \quad (6.30)$$

Функция  $U(a, x)$  при больших  $x$  экспоненциально мала, исключая случаи больших по модулю отрицательных  $a$  (6.31). В формуле (6.28) оба слагаемых в квадратных скобках возрастают с увеличением  $x$  и асимптотически сравниваются по модулю (это легко видеть из асимптотического разложения (6.25)), имея противоположные знаки. В результате их сумма стремится к нулю, что при вычислениях приводит к значительным погрешностям округления уже при  $x > 2$ . Для  $a = 1$  формула (6.28) применима лишь при  $x \leq 3$ . Для  $a < 0$  предельные  $x$  несколько больше, но даже при  $a = -3$   $x < 5$ . В связи с этим целесообразно при больших  $x$  использовать следующее асимптотическое разложение [5]:

$$U(a, x) \equiv D_{-a-1/2}(x) \approx x^{-a-1/2} e^{-x^2/4} \sum_{n=0}^N \frac{\left( \frac{a}{2} + \frac{1}{4} \right)_n \left( \frac{a}{2} + \frac{3}{4} \right)_n}{n! \left( -\frac{x^2}{2} \right)^n}. \quad (6.31)$$

Формула применима при  $x \geq 4$  (см. подробнее программу 6.17). Отметим, что для  $a = -n - 1/2$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ) асимптотический ряд обрывается на члене  $N \approx n/2$ , переходя в точное представление  $U(-n-1/2, x) \equiv D_n(x)$  в элементарных функциях. В этом случае формула (6.31) применима при любых сколь угодно малых  $x > 0$ .

**Программа 6.9.** Функция Куммера  $\Phi(a, b; x)$  вещественного аргумента,  $b \neq 0, -1, -2, \dots$ . Суммирование ряда (6.15).

0	П4	1	П9	ПС	ИПА	ИП4	+	ИПВ	ИП4
+	÷	ИП9	×	ИП5	×	КИП4	F,	ИП4	÷
П9	ИПС	+	ПС	FBx	—	Fx=0	05	C/П	

#### Инструкция

1. Исходные данные: ( $x = P5, a = PA, b = PB$ ).
2. Пуск: В/О С/П.
3. Результат: РС =  $\Phi(a, b; x)$ .
4. Регистры: рабочие P5, PA — PC; оперативные P4, P9; свободные P0—P3, P6—P8, PД.
5. Погрешность относительная меньше  $5 \cdot 10^{-7}$  при положительных  $x, a, b$  и возрастает при отрицательных значениях любой из переменных. Тем не менее относительная погрешность не превышает  $1 \cdot 10^{-3}$  при  $x$  и  $a$ , больших — 30.

Погрешность также существенно возрастает при отрицательных  $b$ . Общим способом оценки абсолютной погрешности является определение максимального по модулю  $M$  члена ряда. Это легко определить путем пошагового выполнения программы. На каждом цикле значение очередного члена ряда засылается программой в регистр Р9 (цикл охватывает команды с адресами 05—27, засылка числа в Р9 — команда с адресом 20). Если  $M$  определен, то абсолютная погрешность не больше  $1 \cdot 10^{-7} M$ .

6. Время счета не превышает  $t \approx (1,7 + (1/6)\sqrt{x^2 + a^2})$  мин.

*Примеры.*

$\Phi(1, 1; 5) = 148,41317$  (148,41316 [9]),  $t = 2,5$  мин;

$\Phi(1, 1; 10) = 22026,463$  (22026,466 [9]),  $t = 3,5$  мин;

$\Phi(-52,5, 0, 1; 1) = -16,399262$  (-16,34 [9]),  $t = 3,5$  мин;

$\Phi(-0,9, 0,8; 9) = -44,939401$  (-44,939410 [9]),  $t = 3,5$  мин.

**Программа 6.10.** Функция Куммера  $\Phi(a, b; z)$  комплексного аргумента  $z = x + jy$ ,  $b \neq 0, -1, -2, \dots$ . Суммирование ряда по схеме Горнера (6.16).

ИПА	Fx <sup>2</sup>	ИП8	Fx <sup>2</sup>	+	ИП9	Fx <sup>2</sup>	+	Fy <sup>-</sup>	1
Farcisin	×	1	5	+	П0	0	ПС	Fл	ИП0
1	—	ПД	ИПА	+	ИПД	ИПВ	+	÷	ИП0
÷	×	П7	FBx	ИПС	×	ПД	ИП8	×	ИП7
ИП9	×	+	ПС	ИП7	ИП8	×	ИП9	ИПД	×
—	1	+	FL0	19	С/П				

#### Инструкция

1. Исходные данные: ( $x = P8, y = P9, a = PA, b = PB$ ).

2. Пуск: В/О С/П.

3. Результат:  $PX = \text{Re } \Phi(a, b; z), PY = \text{Im } \Phi(a, b; z)$ .

4. Регистры: рабочие Р8 — РС; оперативные Р0, Р7, РД; свободные Р1 — Р6.

5. Погрешность относительная меньше:  $5 \cdot 10^{-6}$  при  $b > 0, |a|, |z| < 10$  и  $1 \cdot 10^{-4}$  при  $b > -2, |a|, |z| < 10$ .

6. Время счета не более  $(3 + 0,4\sqrt{|z|^2 + a^2})$  мин.

*Пример.*

$\Phi(1, 2; 2 - j\pi/3) = 2,3721963 - j1,957461$ ,  $t \approx 3,5$  мин.

Точное значение [9]:  $\frac{\sin(j + \pi/6)}{j + \pi/6} e^{1 - j\pi/6} = 2,372190 - j1,9574762$ .

**Программа 6.11.** Функция Куммера  $\Phi(a, b; z)$  комплексного аргумента  $z = x + jy$  и комплексного параметра  $a = a_1 + ja_2, b \neq 0, -1, -2, \dots$ . Суммирование ряда по схеме Горнера (6.16).

1	Farcisin	ИПА	Fx <sup>2</sup>	ИП9	Fx <sup>2</sup>	×	ИП6	Fx <sup>2</sup>	+
ИП5	Fx <sup>2</sup>	+	Fy <sup>-</sup>	×	1	5	+	П0	1
ПС	0	ПД	ИП0	1	—	П1	ИПВ	+	ИП0
×	F1/x	ИП9	ХУ	×	FBx	ИПА	ИП1	+	×
ПП	57	ПС	ХУ	ПД	ИП6	ИП5	ПП	57	1
+	ПС	ХУ	ПД	FL0	23	С/П	П4	ИПД	×
ХУ	ПЗ	ИПС	×	+	ИПС	ИП4	×	ИПД	ИПЗ
×	—	В/О							

#### Инструкция

1. Исходные данные: ( $x = P5, y = P6, a_1 = PA, a_2 = P9, b = PB$ ).

2. Пуск: В/О С/П.

3. Результат:  $PX = \text{Re } \Phi(a, b; z), PY = \text{Im } \Phi(a, b; z)$ .

4. Регистры: рабочие Р5, Р6, Р9 — РД; оперативные Р0, Р1, РЗ, Р4; свободные Р2, Р7, Р8.

5. Погрешность относительная меньше:  $5 \cdot 10^{-6}$  при  $b > 0$  и  $|a|, |z| \leq 10$  и  $1 \cdot 10^{-4}$  при  $b > -2$  и  $|a|, |z| \geq 10$ .

6. Время счета  $t \approx (5 + 0,5\sqrt{|z|^2 + |a|^2})$  мин.

*Пример.*  $\Phi(2 + j, 3; 4 - j) = 26,696048 + j5,428623$ ,  $t = 7,5$  мин.

**Программа 6.12.** Функция Куммера  $\Phi(a, b; x)$  вещественного аргумента. Асимптотическое разложение (6.25),  $b \neq 0, -1, -2, \dots; a \neq 0, x > 0$  и условие (6.26).

1	ИПА	—	П7	ИПА	ИПВ	ИПА	—	П6	—
ИП5	+	П0	КИП0	ИП6	ИП5	Fxy	ИП5	Fe <sup>x</sup>	÷
П4	ИПВ	ПП	61	F1/x	П4	ИПА	ПП	61	П4
ИП0	1	4	—	Fx <sup>≥0</sup>	38	FBx	П0	1	ИП7
ИП0	1	—	+	FBx	ИП6	+	×	ИП0	÷
ИП5	÷	×	1	+	FL0	39	ИП4	×	П9
С/П	П8	ИП4	ИП8	×	П4	ИП8	1	+	П8
1	2	—	Fx <sup>≥0</sup>	62	FBx	ИП8	×	F1/x	ИП8
Fln	1	—	ИП8	×	+	/—/	Fe <sup>x</sup>	ИП8	Fy <sup>-</sup>
×	ИП4	×	В/О						

#### Структура программы

00—12: подготовка данных,

13—20: расчет  $x^{b-a} e^{-x}$ ,

21—29: расчет  $e^{ax} a^{-b} \Gamma(b)/\Gamma(a)$ ,

30—60: окончательный расчет  $\Phi(a, b; x)$  по формуле (6.25),

61—93: подпрограмма вычисления гамма-функции.

#### Инструкция

1. Исходные данные:  $x = P5, a = PA, b = PB$ .

2. Пуск: В/О С/П.

3. Результат:  $PX = P9 = \Phi(a, b; x)$ .

4. Регистры: рабочие Р5, Р9 — РВ; оперативные Р0, Р4, Р6—Р8; свободные Р1 — РЗ, РС, РД.

5. Погрешность возрастает с уменьшением  $x$ ,  $a$  и увеличением  $b$ . Относительная погрешность меньше:

$x \geq$	10	15	10	10
$a \geq$ $\delta \leq$	$ b /2$ $5 \cdot 10^{-5}$	$ b /2$ $1 \cdot 10^{-6}$	$-0,5 (b \leq 1)$ $3 \cdot 10^{-3}$	$0,2 (b \leq 1)$ $6 \cdot 10^{-4}$

6. Время счета (максимальное)  $t \approx 3,5$  мин.

*Примеры.*

$\Phi(1, 0,9; 10) = 29632,752$  (29632,738 [9]);

$\Phi(-0,3, 0,9; 10) = -419,79554$  (-419,00643 [9]);

$\Phi(1, 2; 10) = 2202,6468$  (2202,5466).

В последнем примере в скобках — значение функции  $e^{5x/5}$ , которая совпадает в  $\Phi(1, 2; 10)$  [5].

**Программа 6.13.** Вторая вырожденная гипергеометрическая функция  $\Psi(a, b; x)$  вещественного аргумента,  $x > 0$ ,  $b \neq 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  (6.20), (6.15).

П6	ИП1	ИПА	+	П7	0	П4	ПЗ	КИП0	/—/
ИП5	FXУ	П9	ПС	ИПА	ИП4	+	ИПВ	ИП4	+
÷	ИП9	×	ИП5	×	КИП4	F,	ИП4	÷	П9
ИПС	+	ПС	FBx	—	FX=0	14	ИПС	F1/x	П4
ИП1	ПП	65	F1/x	П4	ИП7	ПП	65	П2	ИП6
+	П6	1	ИП1	/—/	П1	—	ПВ	ИП7	ПА
ИПД	П7	FL0	05	С/П	П8	ИП4	ИП8	×	П4
ИП8	1	+	П8	1	2	—	FX≥0	66	FBx
ИП8	×	F1/x	ИП8	Fln	1	—	ИП8	×	+
/—/	Fe <sup>x</sup>	ИП8	FV <sup>—</sup>	×	ИП4	×	В/О		

#### Инструкция

1. Исходные данные: ( $x = P5$ ,  $a = PA = PD$ ,  $b = PB$ ,  $1 - b = P1$ ),  $4 = P0$ . Обращаем внимание на то, что содержимое регистров PA, PB, P1 при преждевременном прекращении счета может измениться. Поэтому в случае досрочного останова следует заново ввести указанные исходные данные.

2. Пуск: Сх В/О С/П.

3. Результат:  $P6 = \Psi(a, b; x)$ ,  $P2 = \Sigma^{(2)}$  ( $\Sigma^{(2)}$  — второе слагаемое в (6.19)).

4. Регистры: рабочие P1, P2, P5, P6, PA, PB, PD; оперативные P0, P3, P4, P7 — P9, PC; свободных нет.

5. Погрешность возрастает с увеличением  $x$  при  $x > 1$  за счет ошибок округления при суммировании первого и второго слагаемых в формуле (6.20). Последние имеют противоположные знаки и возрастают с увеличением  $x$ , тогда как искомая функция меняется значительно слабее или даже убывает. Согласно (6.22) асимптотическое поведение  $\Psi(a, b; x)$  характеризуется экспоненциальным убыванием с ростом  $x$  при  $a > 0$ , поэтому погрешности при прочих равных условиях существенно больше при положительных  $a$ . Оценку абсолютной погрешности для конкретных значений параметров  $a, b$  и аргумента  $x$  легко получить по формуле  $\Delta\Psi \approx 1 \cdot 10^{-6} |\Sigma^{(2)}|$ , где  $\Sigma^{(2)}$  — второе слагаемое в (6.20), заносимое в регистр P2 в процессе счета (см. п. 3 инструкции).

6. Время счета  $t \approx (7 + 0,6 \sqrt{|x|^2 + |a|^2})$  мин.

#### Примеры.

$\Psi(0, 1, 0, 2; 1) = 0,9475167$  (0,94752) [9]),  $t = 7,5$  мин;

$\Psi(-1, 25, 0, 5; 12, 5) = 21,738$  (21,7366),  $t = 13$  мин.

Число в скобках в последнем примере — значение функции  $2^a e^{x/2} D_{-2a}(\sqrt{2x})$ , равной искомой функции [9]. Значение функции параболического цилиндра  $D_{2,5}(5) = U(-3,5) = 9,9802 \cdot 10^{-2}$  взято из таблиц в [9].

**Программа 6.14.** Вторая вырожденная гипергеометрическая функция  $\Psi(a, b; x)$  вещественного аргумента. Асимптотическое разложение (6.24) и формула (6.23).

ИПА	ИПВ	—	1	+	П6	ИПА	ИП5	FXУ	ПС
ИП5	ИПВ	+	ИПА	2	×	—	П0	КИП0	ИП0
1	4	—	FX≥0	27	FBx	П0	1	ИПА	ИП0
1	—	+	FBx	ИП6	+	×	ИП0	÷	ИП5
/—/	÷	×	1	+	FL0	28	ИПС	÷	ПД
С/П									

#### Инструкция

1. Исходные данные: ( $x = P5$ ,  $a = PA$ ,  $b = PB$ ).

2. Пуск: В/О С/П.

3. Результат:  $PX = PD = \Psi(a, b, x)$ .

4. Регистры: рабочие P5, PA, PB, PD; оперативные P0, P6, PC; свободные P1 — P4, P7 — P9.

5. Погрешность относительная меньше:  $5 \cdot 10^{-2}$  при  $x \geq 5$ ;  $5 \cdot 10^{-4}$  при  $x \geq 10$ ;  $5 \cdot 10^{-6}$  при  $x \geq 14$ .

6. Время счета (максимальное)  $t \approx 1,5$  мин.

#### Примеры.

$\Psi(1, 0, 1; 100) = 0,009815305$  (0,0098153 [9]);

$\Psi(1, 1; 10) = 0,09158192$  (0,09156333);

$\Psi(1, 1; 5) = 0,1664$  (0,170422).

В последних двух примерах в скобках указаны табличные значения [9]  $e^x E_1(x) = \Psi(1, 1; x)$ , где  $E_1(x)$  — интегральная показательная функция.

**Программа 6.15.** Вторая вырожденная гипергеометрическая функция  $\Psi(a, b; z)$  комплексного аргумента  $z = x + jy$ . Асимптотическое разложение (6.24) и формула (6.23),  $|\arg z| < \pi/2$ .

ИПА	ИПВ	—	1	+	П9	1	ПС	0	ПД
ИП5	FX <sup>2</sup>	ИП6	FX <sup>2</sup>	+	П4	FV <sup>—</sup>	ИП9	—	П0
КИП0	ИП0	1	4	—	FX≥0	29	FBx	П0	ИП6
/—/	ИПА	ИП0	1	—	+	FBx	ИП9	+	×
ИП0	/—/	÷	ИП4	÷	×	FBx	ИП5	×	ПП
82	1	+	ПС	XY	ПД	FL0	29	ИП5	ИП4
FV <sup>—</sup>	ПЗ	÷	Farccos	ИПА	/—/	×	П1	FBx	ИПЗ
FXУ	↑	ИП1	F sin	×	XY	ИП1	F cos	×	ПП
82	С/П	П1	ИПД	×	XY	П2	ИПС	×	+
ИПС	ИП1	×	ИПД	ИП2	×	—	В/О		

#### Инструкция

1. Исходные данные: ( $x = P5$ ,  $y = P6$ ,  $a = PA$ ,  $b = PB$ ).

2. Пуск: В/О С/П.

3. Результат:  $PX = \operatorname{Re} \Psi(a, b; z)$ ,  $PY = \operatorname{Im} \Psi(a, b; z)$ .

4. Регистры: рабочие P5, P6, PA, PB; оперативные P0 — P4, P9, PC, PD; свободные P7, P8.

5. Погрешность относительная меньше:  $1 \cdot 10^{-1}$  при  $|z| \geq 5$ ;  $5 \cdot 10^{-3}$  при  $|z| \geq 10$ ;  $2 \cdot 10^{-5}$  при  $|z| \geq 14$ .

6. Время счета (максимальное)  $t \approx 3,5$  мин.



Примеры.

$\Psi(1,1; j5) = 0,0304 - j0,184$  ( $0,033896 - j0,188143$ ),  $t \approx 1,5$  мин;

$\Psi(1,1; j10) = 9,4696 \cdot 10^{-3} - j9,820832 \cdot 10^{-2}$  ( $9,488568 \cdot 10^{-3} - j9,8191061 \cdot 10^{-2}$ ),  $t \approx 2,5$  мин;

$\Psi(1,1; j5\pi) = 3,9612548 \cdot 10^{-3} - j6,316858 \cdot 10^{-2}$  ( $3,9612 \cdot 10^{-3} - j6,31685 \cdot 10^{-2}$ ),  $t \approx 3$  мин.

В приведенных примерах в скобках указаны значения функции  $e^{ix} [-\text{Ci}(x) + j(\text{Si}(x) - \pi/2)]$ , равной  $\Psi(1,1; jx)$ . Значения интегральных синуса и косинуса взяты из таблиц [9].

**Программа 6.16.** Функция параболического цилиндра  $U(a, x) \equiv D_{-a-1/2}(x)$  вещественного аргумента,  $a \neq 2n + 1/2$ ,  $2n + 3/2$ , где  $n = 0, 1, 2, \dots$ ; для  $D_\nu(x)$  это означает, что  $\nu \neq -1, -2, \dots$  (6.28).

ПА	2	Fx <sup>y</sup>	П8	ИПВ	Fv <sup>-</sup>	ПП	29	ПД	ИПА
ИПВ	+	ПА	ИПВ	3	×	ПВ	ИП7	ПП	29
ИПД	+	ИП9	Fe <sup>x</sup>	Fv <sup>-</sup>	÷	ИП8	÷	С/П	П4
ИПВ	ИПА	—	П5	0	П6	ИП4	ИП5	×	П4
ИП5	1	+	П5	1	2	—	Fx ≥ 0	36	FBx
ИП5	×	F1/x	ИП5	Fln	1	—	ИП5	×	+
Fe <sup>x</sup>	ИП5	Fv <sup>-</sup>	÷	ИП4	÷	ИПА	Fл	×	Fcos
×	П4	ПС	ИПА	ИП6	+	ИПВ	ИП6	+	÷
ИП4	×	ИП9	×	КИП6	F,	ИП6	÷	П4	ИПС
+	ПС	FBx	—	Fx = 0	73	ИПС	В/О		

Инструкция

1. Исходные данные:  $(1/2x = P7, x^2/2 = P9)$ ,  $0,5 = PB$ ,  $[a/2 + 0,25 = PX]$ .

2. Пуск: В/О С/П.

3. Результат:  $PX = U(a, x) = D_{-a-1/2}(x)$ ,  $PD = A_1$ ,  $PC = A_2$ , где  $A_1$  и  $A_2$  — слагаемые в квадратных скобках (6.28).

4. Регистры: рабочие P7, P9, PC, PD; оперативные P4 — P6, P8, PA, PB; свободные P0 — P3.

5. Погрешность относительная меньше:

$\frac{a}{x}$	$\leq -2$	$\leq 0$	$\leq 2$	$\leq 5$	$\frac{a}{x}$	$\leq -2$	$\leq 0$	$\leq 2$	$\leq 5$
$\leq 1$	$1 \cdot 10^{-6}$	$2 \cdot 10^{-6}$	$3 \cdot 10^{-6}$	$5 \cdot 10^{-5}$	$\leq 3$	$3 \cdot 10^{-6}$	$1 \cdot 10^{-4}$	$2 \cdot 10^{-2}$	1
$\leq 2$	$1 \cdot 10^{-6}$	$7 \cdot 10^{-6}$	$5 \cdot 10^{-4}$	$7 \cdot 10^{-3}$	$\leq 4$	$5 \cdot 10^{-6}$	$1 \cdot 10^{-1}$	$2 \cdot 10^{-1}$	1

Относительная погрешность по результатам счета ориентировочно (при  $a > -10$  оценивается по формуле  $\delta \approx |A_2/(A_1 + A_2)| \cdot 10^{-6}$ , где  $A_1, A_2$  берутся из регистров PD, PC после окончания счета (см. п. 3 настоящей инструкции).

6. Время счета  $t \approx \left(3 + 1,8 \sqrt{x^2 + \left|\frac{a}{2}\right|}\right)$  мин.

Примеры.  $U(-0,8; 2) = 0,46263946$  ( $0,46264$  [9]);

$U(1,4) = 1,7751588 \cdot 10^{-3}$  ( $2,0704 \cdot 10^{-3}$  [9]);  $U(-5,5) = 1,8799838$  ( $1,8800$  [9]).

**Программа 6.17.** Функция параболического цилиндра  $U(a, x) \equiv D_{-a-1/2}(x)$  вещественного аргумента,  $4 \leq x \leq 21$ ;  $-1,3x \leq a \leq x$ . Разложение в асимптотический ряд (6.31).

П8	Fx <sup>2</sup>	2	÷	/—/	П9	ИПА	2	F1/x	+
ПД	2	÷	ПС	2	F1/x	+	ПВ	0	П6
ИПД	/—/	ИП8	Fxy	ИП9	Fe <sup>x</sup>	Fv <sup>-</sup>	×	П8	П7
ИП8	ИП6	ИПС	+	×	ИП6	ИПВ	÷	×	КИП6
F,	ИП6	÷	ИП9	÷	ИП7	XY	+	П7	F Bx
ИП8	XY	П8	÷	Fx <sup>2</sup>	1	—	Fx ≥ 0	65	ИП6
1	5	—	Fx ≥ 0	30	С/П				

Суммирование асимптотического ряда прекращается, когда  $N = 14$  или начинается нарастание по модулю членов ряда.

Инструкция

1. Исходные данные:  $(a = PA)$ ,  $[x = PX]$ .

2. Пуск: В/О С/П.

3. Результат:  $P7 = U(a, x) = D_{-a-1/2}(x)$ . Как указывалось выше, при  $a = -n - 1/2$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ) ряд (6.31) обрывается, переходя в замкнутое выражение для  $U(-n - 1/2, x) = D_n(x)$ , справедливое и для малых  $x$ . В этом случае следует в программу за командой П8 (адрес 52) вставить команды F1/x, БП 30, остальные команды не нужны. Останов для этого варианта программы может происходить как результат некорректной операции.

4. Регистры: рабочие P7, P8, PA; оперативные P6, P9. PB — PD: свободные P0 — P5.

5. Погрешность относительная меньше:

$\frac{a}{x}$	$\leq x$	$\leq x-2$	$\leq x-4$	$\frac{a}{x}$	$\leq x$	$\leq x-2$	$\leq x-4$
$\geq 4$	0,5	$2 \cdot 10^{-2}$	$1 \cdot 10^{-4}$	$\geq 8$	$2 \cdot 10^{-4}$	$5 \cdot 10^{-6}$	$1 \cdot 10^{-6}$
$\geq 6$	$3 \cdot 10^{-2}$	$5 \cdot 10^{-4}$	$5 \cdot 10^{-6}$	$\geq 10$	$5 \cdot 10^{-6}$	$1 \cdot 10^{-6}$	$1 \cdot 10^{-6}$

Относительная погрешность по результатам счета удовлетворительно оценивается по формуле  $\delta = |P8/U| \cdot 10^{-6}$ , где  $U$  — вычисленное значение функции; P8 — значение минимального члена ряда, который берется из регистра P8 по окончании счета.

Для варианта программы, соответствующего  $a = -n - 1/2$  (см. п. 3 инструкции), относительная погрешность меньше  $1 \cdot 10^{-6}$ , если  $0 < x \leq 21$ .

6. Время счета (максимальное)  $t \approx 3$  мин.

Примеры.

$U(-5, 3) = 3,202125$  ( $3,2021$  [9]);

$U(1,5) = 1,6137839 \cdot 10^{-4}$  ( $1,6138 \cdot 10^{-4}$  [9]);

$U(-4,5; 0,1) = D_4(0,1) = 2,9327586$  ( $2,9328$  [9]),  $t \approx 1$  мин.

**Программа 6.18.** Вторая функция параболического цилиндра  $Y(a, x)$  вещественного аргумента  $x > -4$  (6.29).

2	Fx <sup>y</sup>	П8	ИПВ	Fy <sup>-</sup>	ПП	28	ПД	ИПА	ИПВ
+	ПА	ИПВ	3	×	ПВ	ИП7	ПП	28	ИПД
+	ИП9	Fe <sup>x</sup>	Fv <sup>-</sup>	÷	ИП8	×	С/П	П4	1
ИПА	—	П5	0	П6	ИП4	ИП5	×	П4	ИП5
1	+	П5	1	2	—	Fx ≥ 0	35	FBx	ИП5
×	F1/x	ИП5	Fln	1	—	ИП5	×	—	—
Fe <sup>x</sup>	ИП5	Fv <sup>-</sup>	×	ИП4	×	ИПА	Fл	—	Fsin
×	П4	ПС	ИПА	ИП6	+	ИПВ	ИП6	+	÷
ИП4	×	ИП9	×	КИП6	F,	ИП6	÷	П4	ИПС
+	ПС	FBx	—	Fx = 0	73	ИПС	В/О		

#### Инструкция

1. Исходные данные: ( $x = P7, x^2/2 = P9$ ),  $0,5 = PB, [a/2 + 0,25 = PA]$ .

2. Пуск: В/О С/П.

3. Результат:  $PX = \sqrt{\pi} Y(a, x)$ .

4. Регистры: рабочие P7, P9; оперативные P4 — P6, P8, PA — PD; свободные P0 — P3, P7.

5. Погрешность относительная меньше  $1 \cdot 10^{-6}$  при  $x > 0, a > -10$ . При  $-4 \leq x \leq 0$  погрешность определяется так же, как в программе 6.16 при положительных  $x$  с теми же значениями  $|x|$  и  $a$ . Для  $a < -10$  погрешность такая же, как у функции Куммера при больших отрицательных  $a$  (см. программу 6.9, где в качестве параметра  $a$  следует считать  $a/2$  из данной программы, а в качестве  $x$  принимать  $x^2/2$ ).

6. Время счета  $t \approx (3 + 1,8 \sqrt{x^2 + |a/2|})$  мин.

Примеры.

$V(1,4) = 86,395431$  (86,395 [9]),  $t \approx 10$  мин;

$V(-5,5) = 0,18370447$  (0,18370 [9]),  $t \approx 12$  мин.

#### Указатель программ

Номер программы	Функция	Область определения	Число шагов	Число регистров памяти	Примечание
6.1	$F(a, b; c; x)$	$ x  < 1; c \neq 0, -1, -2, \dots$	33	6	Суммирование степенного ряда
6.2	Наибольший по модулю член гипергеометрического ряда из отрезка первых $N$ членов ряда	$c \neq 0, -1, -2, \dots$	36	8	Аргумент $x$ вещественный
6.3	$\frac{d}{dx} [F(a, b; c; x)], F_2(x)$	$ x  < 1; c \neq 0, -1, -2, \dots$ , для $F_2(x)$ число $(c-a-b)$ не целое	76	11	То же

Окончание

Номер программы	Функция	Область определения	Число шагов	Число регистров памяти	Примечание
6.4	$F(a, b; c; z)$	$ z  < 1; c \neq 0, -1, -2, \dots$	54	9	Суммирование степенного ряда
6.5	$F(a, b; c; x)$	$0,5 < x \leq 1; c \neq 0, -1, -2, \dots; (a+b-c) \neq 0, \pm 1, \pm 2, \dots$	98	10	Аналитическое продолжение гипергеометрического ряда
6.6	$F(a; b; c; x)$	$x < -1; c \neq 0, -1, -2, \dots; (a-b) \neq 0, \pm 1, \pm 2, \dots$	96	10	То же
6.7	$P_V^\mu(x)$	$-1 < x < 3$	92	9	
6.8	$Q_V^\mu(x)$	$-1 < x < 1$	98	9	
6.9	$\Phi(a, b; x)$	$b \neq 0, -1, -2, \dots$	29	6	Суммирование степенного ряда; аргумент $x$ вещественный
6.10	$\Phi(a, b; z)$	$b \neq 0, -1, -2, \dots$	56	8	Суммирование степенного ряда; $a, b$ вещественные
6.11	$\Phi(a, b; z)$ $a = a_1 + ja_2$	$b \neq 0, -1, -2, \dots$	73	11	Суммирование степенного ряда; $b$ вещественный
6.12	$\Phi(a, b; x)$	$x > 0; a \neq 0; b \neq 0, -1, -2, \dots$	94	9	Асимптотическое разложение; $a, b, x$ вещественные
6.13	$\Psi(a, b; x)$	$x > 0; b \neq 0, \pm 1, \pm 2, \dots$	98	14	Асимптотическое разложение; $a, b$ вещественные
6.14	$\Psi(a, b; x)$	$x \geq 5$	51	7	Асимптотическое разложение; $a, b$ вещественные
6.15	$\Psi(a, b; z)$	$ \arg z  < \pi/2,  z  \geq 5$	98	12	То же
6.16	$U(a, x)$	$a \neq 2n + 1/2, 2n + 3/2, n = 0, 1, 2, \dots; x \leq 4$	98	11	
6.17	$U(a, x)$	$x \geq 4, -1,3 \leq a \leq x$	66	8	Разложение в асимптотический ряд. Ряд переходит в замкнутое выражение при $a = -n - 1/2$
6.18	$V(a, x)$	$x > -4$	98	10	

## Эллиптические интегралы. Эллиптические функции вещественного и комплексного аргументов. Тета-функции

### 7.1. Эллиптические интегралы. Параметр Якоби. Дзета-функция Якоби

Эллиптическим в общем случае называется интеграл

$$\int R(x, y) dx,$$

где  $R(x, y)$  — рациональная функция от  $x$  и  $y$ , а  $y^2$  — многочлен третьей или четвертой степени от  $x$ . Известны преобразования (см., например, [5]), позволяющие выразить любой эллиптический интеграл через интеграл от рациональной функции  $x$  и следующие три канонических интеграла.

Эллиптический интеграл первого рода

$$F(\varphi, k) = \int_0^{\varphi} \frac{dt}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 t}}. \quad (7.1)$$

Эллиптический интеграл второго рода

$$E(\varphi, k) = \int_0^{\varphi} \sqrt{1-k^2 \sin^2 t} dt. \quad (7.2)$$

Эллиптический интеграл третьего рода

$$\Pi(n, \varphi, k) = \int_0^{\varphi} \frac{dt}{(1-n^2 \sin^2 t) \sqrt{1-k^2 \sin^2 t}}. \quad (7.3)$$

Здесь  $\varphi$  — амплитуда;  $k$  — модуль;  $n$  — параметр эллиптического интеграла (третьего рода).

Интегралы, у которых амплитуда  $\varphi = \pi/2$ , называются *полными*. Для интегралов первого и второго рода применяются соответственно обозначения

$$K(k) \equiv F(\pi/2, k); \quad (7.4)$$

$$E(k) \equiv E(\pi/2, k). \quad (7.5)$$

Если модуль вещественный, то без ограничения общности можно считать, что  $k \leq 1$  [9]. Используется также *дополнительный модуль*, равный по определению

$$k_1 = \sqrt{1-k^2}. \quad (7.6)$$

В таблицах эллиптических интегралов принято амплитуду выражать в градусах. Кроме того, часто величины  $F$ ,  $E$ ,  $K$ ,  $E$  рассматриваются как функции модулярного угла  $\alpha$  — угла, заменяющего модуль и выраженного в градусах:

$$\alpha = (180^\circ/\pi) \arcsin k. \quad (7.7)$$

Таким образом,

$$k = \sin \alpha; \quad k_1 = \cos \alpha. \quad (7.8)$$

Для эллиптических функций важное значение имеет *полный эллиптический интеграл первого рода как функция дополнительного модуля*  $K(k_1)$ . Эта функция обозначается как  $K'(k)$ :

$$K'(k) \equiv K(k_1). \quad (7.9)$$

В теории тета-функций важное значение имеет *параметр Якоби*

$$q \equiv \exp[-\pi K'(k)/K(k)]. \quad (7.10)$$

При вычислении  $K(k)$  одним из наиболее эффективных является итерационный метод арифметико-геометрического среднего (АГС) [9]. Начиная с пары чисел  $a_0 = 1$ ,  $b_0 = k_1 = \cos \alpha$ , находятся следующие среднее арифметическое и среднее геометрическое, которые образуют две сближающиеся последовательности:

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{a_0 + b_0}{2}, \quad b_1 = \sqrt{a_0 b_0}, \\ a_2 &= \frac{a_1 + b_1}{2}, \quad b_2 = \sqrt{a_1 b_1}, \\ &\dots \dots \dots \end{aligned} \quad (7.11)$$

$$a_N = \frac{a_{N-1} + b_{N-1}}{2}, \quad b_N = \sqrt{a_{N-1} b_{N-1}}.$$

Процесс заканчивается при таком  $N$ , для которого  $a_N = b_N$  с заданной точностью. Искомое значение  $K(k)$  определяется по формуле

$$K(k) = \pi/2 a_N. \quad (7.12a)$$

Требуемые значения  $N$  растут по мере приближения  $k$  к единице, а  $k_1$  к нулю. Сходимость итерационного процесса (7.11), однако, настолько быстрая, что даже при  $k_1 = 1 \cdot 10^{-7}$  практически точное (для ПМК) значение искомого интеграла получается уже при  $N = 6$ . Отметим, что при  $k_1 \leq 1 \cdot 10^{-4}$  максимальную для ПМК точность обеспечивает формула

$$K(k) = \ln(4/k_1). \quad (7.12b)$$

В этом случае погрешность определяется операцией  $\ln x$  на ПМК.

Вычисление *полного эллиптического интеграла второго рода* производится по той же схеме АГС (7.11) с использованием разностей

$$c_n = (a_n - b_n)/2, \quad n = 1, 2, \dots, N, \quad (7.13)$$

получаемых на каждой итерации. Тогда

$$E(k) = \left(1 - \frac{1}{2} \sum_{n=0}^N 2^n c_n^2\right) K(k), \quad (7.14)$$

где  $c_0 = k$ . Для дополнительного модуля  $k_1 \leq 1 \cdot 10^{-4}$  значение  $E(k) \approx 1$  с погрешностью, меньшей  $1 \cdot 10^{-8}$ .

Расчет *полных эллиптических интегралов третьего рода* выполняется по более сложной схеме АГС\*. Алгоритм распространяется на обобщенные полные интегралы третьего рода вида

$$N(n, a, k) \equiv \int_0^{\pi/2} \frac{(1 + a \sin^2 t) dt}{(1 - n \sin^2 t) \sqrt{1 - k^2 \sin^2 t}}. \quad (7.15)$$

\* Bartky W. Numerical Calculation of Generalized Elliptic Integrals // Rev. Mod. Phys. — 1938. — Vol. 10, N 14. — P. 264.

Модуль  $k$  также может быть заменен модулярным углом. Стандартная форма полного эллиптического интеграла третьего рода  $\Pi(n, \pi/2, k)$  соответствует  $a=0$ . Из (7.15) как частные случаи получаются полные эллиптические интегралы  $K(k)$  ( $a=-n$ ) и  $E(k)$  ( $a=-k^2$ ;  $n=0$ ).

Итерационная схема АГС строится по пяти параметрам:  
 $m_0=1$ ,  $p_0=k_1$ ,  $s_0=1$ ,  $z_0=(1+a)/(1-n)$ ,  $t_0=(1-n)/p_0$ ;  
 $m_1=\frac{m_0+p_0}{2}$ ,  $p_1=\sqrt{m_0 p_0}$ ,  $s_1=\frac{s_0+z_0}{2}$ ,  $z_1=\frac{s_0+z_0 t_0}{1+t_0}$ ,  $t_1=\frac{p_1(1+t_0)^2}{4m_1 t_0}$ ;  
 (7.16)

$$\dots$$

$$m_N=\frac{m_{N-1}+p_{N-1}}{2}, p_N=\sqrt{m_{N-1} p_{N-1}}, s_N=\frac{s_{N-1}+z_{N-1}}{2},$$

$$z_N=\frac{s_{N-1}+t_{N-1} z_{N-1}}{1+t_{N-1}}, t_N=\frac{p_N(1+t_{N-1})^2}{4m_N t_{N-1}}.$$

Процесс заканчивается, когда  $s_N=z_N$  или  $t_N=1$  с заданной точностью (удобно исходить из равенства разности  $1-t_N$  машинному нулю — см. программу 7.6.). Значение искомого интеграла

$$N(n, a, k) = (\pi/2) (s_N/m_N). \quad (7.17)$$

Вычислить *неполный эллиптический интеграл*  $F(\varphi, \alpha)$  можно с помощью *понижающего преобразования Ландена* [9], при котором производится последовательный переход к эллиптическим интегралам с прогрессивно уменьшающимся модулем или модулярным углом. Модулярный угол, амплитуда и интеграл преобразуются следующим образом:

$$\sin \alpha_1 = \frac{2}{1 + \cos \alpha_0} - 1 = \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha_0}{2}, \quad \varphi_1 = \varphi_0 + \operatorname{Arctg}(\cos \alpha \operatorname{tg} \varphi_0), \quad (7.18)$$

$$F(\varphi_1, \alpha_1) = 2F(\varphi_0, \alpha_0)/(1 + \sin \alpha_1),$$

где  $\alpha_0 = \alpha$ ,  $\varphi_0 = \varphi$ . Выбирается ветвь  $\operatorname{Arctg}$ , для которой  $\operatorname{Arctg}(\cos \alpha \operatorname{tg} \varphi_0) > \varphi_0 - \pi/2$ .  $N$ -кратное повторение указанного преобразования должно привести к эллиптическому интегралу  $F(\varphi_N, \alpha_N)$  с настолько малым  $\alpha_N$ , что  $F(\varphi_N, \alpha_N) \approx \varphi_N$  (ср. (7.1)). Возвращение обратным преобразованием к старому значению  $\varphi$  приводит к формуле

$$F(\varphi, \alpha) = \frac{\varphi_N}{2^N} \prod_{s=1}^N (1 + \sin \alpha_s). \quad (7.19)$$

Понижающее преобразование Ландена является также основой для вычисления одновременно неполных эллиптических интегралов первого и второго рода  $F(\varphi, \alpha)$ ,  $E(\varphi, \alpha)$  и дзета-функции Якоби  $Z(\varphi, \alpha)$ . Последняя по определению равна логарифмической производной тета-функции Якоби  $\vartheta_4(u, k)$  (§ 7.2). Дзета-функцию Якоби можно определить также равенством [9]

$$Z(\varphi, \alpha) = E(\varphi, \alpha) - [E(\alpha)/K(\alpha)] F(\varphi, \alpha). \quad (7.20)$$

Здесь (как и везде ниже) под  $E(\alpha)$ ,  $K(\alpha)$ ,  $Z(\varphi, \alpha)$  подразумеваются  $E[k(\alpha)]$ ,  $K[k(\alpha)]$ ,  $Z[\varphi, k(\alpha)]$ , где  $k(\alpha) = \sin \alpha$ . В данном алгоритме понижающее преобразование Ландена используется совместно с итерационной схемой АГС

((7.11), (7.13), (7.14)). Амплитуда эллиптического интеграла преобразуется по формуле, аналогичной (7.18):

$$\alpha_0 \equiv \alpha, \quad \varphi_0 \equiv \varphi, \quad \varphi_{n+1} = \varphi_n + \operatorname{Arctg}\left(\frac{b_n}{a_n} \operatorname{tg} \varphi_n\right), \quad n=0, 1, 2, \dots, N. \quad (7.21)$$

Модулярный угол преобразуется так же, как и в (7.18). Аналогично выбираются и ветви  $\operatorname{Arctg}$ . Значения  $a_n$ ,  $b_n$  в (7.21) вычисляются по схеме АГС (7.11), которая выполняется параллельно с (7.21).

Итерационный процесс должен заканчиваться при достаточно малом модулярном угле  $\alpha_N$  и соответственно модуле  $k_N$ , чтобы

$$F(\varphi_N, k_N) = \int_0^{\varphi_N} \frac{dt}{\sqrt{1-k_N^2 \sin^2 t}} \approx \varphi_N. \quad (7.22)$$

Возвращение к старому значению  $\varphi_0 = \varphi$  приводит к формулам

$$F(\varphi, \alpha) = \varphi_N / (2^N a_N); \quad (7.23)$$

$$E(\varphi, \alpha) = \frac{E(\alpha)}{K(\alpha)} E(\varphi, \alpha) + \sum_{n=1}^N c_n \sin \varphi_n. \quad (7.24)$$

Сравнение (7.24) с (7.20) показывает, что сумма в последней формуле равна дзета-функции Якоби

$$Z(\varphi, \alpha) = \sum_{n=1}^N c_n \sin \alpha. \quad (7.25)$$

Вычисление неполных эллиптических интегралов третьего рода  $\Pi(n, \varphi, k)$  (7.3) производится численным интегрированием. Далее приводится программа 7.8, которая базируется на составной формуле Гаусса — Чебышева, одной из наиболее удобных для программирования (см. § 10.2 и программу 10.14). Такой же метод применяется и для вычисления неполных эллиптических интегралов первого и второго рода. Хотя время счета здесь больше, чем для метода, основанного на понижающем преобразовании Ландена, программы оказываются короче (ср. программы 7.5 и 7.7).

**Программа 7.1.** Полный эллиптический интеграл первого рода  $K(k)$ . Метод АГС (7.11), (7.12). Переключатель Р — Г в положении Г.

Farcsin	F cos	ПВ	1	ПА	6	ПО	ИПА	ИПВ	+
2	÷	ИПА	ИПВ	×	F <sub>Г</sub>	ПВ	XY	ПА	FLO
07	Fπ	2	÷	ИПА	÷	С/П			

Использование программы при задании в качестве исходных данных модуля, модулярного угла или дополнительного модуля отличается лишь способом пуска.

#### И н с т р у к ц и я

1. Исходные данные и пуск при различных заданиях аргумента:

а) модуль [ $k = PX$ ] В/О С/П;

б) модулярный угол в градусах [ $\alpha = PX$ ] БП 01 С/П;

в) дополнительный модуль [ $k_1 = PX$ ] БП 02 С/П.

2. Результат:  $PX = K(k)$ . Здесь при задании  $\alpha$  и  $k_1$  аргумент интеграла равен соответственно  $k = \sin \alpha$ ,  $k = \sqrt{1-k_1^2}$ .

3. Регистры: рабочие — ; оперативные P0, PA, PB; свободные P1 — P9, PC, PD.

4. Погрешность относительная меньше  $1 \cdot 10^{-7}$  при  $1 \geq k_1 > 1 \cdot 10^{-7}$ , что соответствует  $0 \leq k \leq 1 - 5 \cdot 10^{-15}$  или  $0 \leq \alpha \leq (90 - 1 \cdot 10^{-5})^\circ$ . При  $k_1 < 5 \cdot 10^{-3}$  следует задавать именно  $k_1$ , если эта величина может быть вычислена с достаточной точностью; при других способах задания аргумента неизбежна потеря точности. Для  $k_1 \leq 1 \cdot 10^{-4}$  можно использовать формулу  $K(k) = \ln(4/k_1)$ , которая в этом случае гарантирует точность  $5 \cdot 10^{-7}$ . Можно также использовать программу 7.3.

5. Время счета  $t \approx 30$  с.

Примеры.  $K(\sqrt{0.99}) = 3,6956373$  (3,69563736 [9]);  
 $K(15^\circ) = 1,5981419$  (1,59814200 [9]);  $K(k)_{k_1=3 \cdot 10^{-6}} = 14,103194$  (14,103193).

Число в скобках в последнем примере получено по формуле (7.126).

Программа 7.2. Параметр Якоби  $q(k)$ , полный эллиптический интеграл первого рода  $K(k)$ . Метод АГС (формулы (7.10) — (7.12а)). Переключатель Р — Г в положении Г.

Farcsin	Fsin	ПС	FBx	Fcos	ПВ	ПП	20	П9	ИПС
ПВ	ПП	20	ИП9	÷	Fл	×	/—/	Fe <sup>x</sup>	С/П
1	ПА	6	ПО	ИПА	ИПВ	÷	2	÷	ИПА
ИПВ	×	F√	ПВ	XY	ПА	FL0	24	Fл	ИПА
÷	2	÷	В/О						

Использование программы при задании в качестве исходных данных модуля, модулярного угла или дополнительного модуля отличается лишь способом пуска.

#### Инструкция

- Исходные данные и пуск при различных заданиях аргумента:
  - модуль  $[k = PX]$  В/О С/П,
  - модулярный угол в градусах  $[\alpha = PX]$  БП 01 С/П,
  - дополнительный модуль (при  $k_1 < 1 \cdot 10^{-3}$ )  $k_1 = PB, 1 = PC$  БП 06 С/П.
- Результат:  $PX = q(k), P9 = K(k)$ . При задании  $\alpha$  и  $k_1$  аргумент равен  $k = \sin \alpha$  и  $k = \sqrt{1 - k_1^2}$  соответственно.
- Погрешность относительная меньше  $1 \cdot 10^{-6}$  при  $0 \leq k_1 \leq 1 \cdot 10^{-7}$ .
- Регистры: рабочие P9, PC; оперативные P0, PA, PB; свободные P1 — P8, PD.
- Время счета  $t \approx 1$  мин.

#### Примеры.

$q(\sqrt{0.95}) = 0,17931605$  (0,179316007 [9]),  $K(\sqrt{0.95}) = 2,9083372$  (2,908337248 [9]);

$q(1^\circ) = 1,9039554 \cdot 10^{-5}$  (1,9039555  $\cdot 10^{-5}$  [9]),  $K(1^\circ) = 1,5709159$  (1,57091596 [9]);

$q(k)_{k_1=1 \cdot 10^{-7}} = 0,75433554, K(k) = 17,504389.$

Программа 7.3. Полные эллиптические интегралы  $E(k), K(k)$ . Метод АГС (формулы (7.6) — (7.8) (7.11), (7.12а), (7.13), (7.14)),  $1 \cdot 10^{-99} \leq k_1 \leq 1$ . Переключатель Р — Г в положении Г.

Farcsin	Fcos	ПВ	Fx <sup>2</sup>	1	ПА	ПД	—	/—/	П9
ИПА	ИПВ	×	F√	ИПА	ИПВ	+	2	÷	ПА
ИПВ	—	ПС	XY	ПВ	ИПС	Fx <sup>2</sup>	ИПД	2	×
ПД	×	ИП9	+	П9	FBx	—	Fx=0	10	Fл
2	÷	ИПА	÷	ПД	1	ИП9	2	÷	—
×	С/П								

Использование программы при задании в качестве исходных данных модуля, модулярного угла или дополнительного модуля отличается лишь способом пуска.

#### Инструкция

- Исходные данные и пуск при различных заданиях аргумента:
  - модуль  $[k = PX]$  В/О С/П,
  - модулярный угол в градусах  $[\alpha = PX]$  БП 01 С/П,
  - дополнительный модуль  $[k_1 = PX]$  БП 02 С/П.
- Результат:  $PX = E(k), PD = K(k)$ . При задании  $\alpha$  и  $k_1$  аргумент равен соответственно  $k = \sin \alpha$  и  $k = \sqrt{1 - k_1^2}$ .
- Регистры: рабочие PD; оперативные P9 — PC; свободные P0 — P8.
- Погрешность относительная меньше  $5 \cdot 10^{-7}$  для  $K(k)$  и меньше  $5 \cdot 10^{-6}$  для  $E(k)$  при  $1 \cdot 10^{-99} \leq k_1 \leq 1$ , что соответствует  $0 \leq k \leq (1 - 5 \cdot 10^{-199})$  или  $0 \leq \alpha \leq (90 - 5 \cdot 10^{-99})^\circ$ . При  $k_1 < 5 \cdot 10^{-3}$  следует задавать именно  $k_1$ , если  $k_1$  можно вычислить с достаточной точностью; в противном случае неизбежна потеря точности. Для  $k_1 \leq 1 \cdot 10^{-4}$  можно полагать  $E(k) = 1$  с погрешностью  $\delta < 1 \cdot 10^{-8}$ .

5. Время счета (максимальное)  $t \approx 1,5$  мин.

#### Примеры.

$E(0,9) = 1,1716971$  (1,17169705 [9]),  $K(0,9) = 2,2805491$  (2,28054914 [9]),  
 $t \approx 50$  с;

$E(k) = 1,0401145$  (1,040114396 [9]),  $K(k) = 3,1533853$  (3,15338525 [9]),  
 $\alpha = 80^\circ, t \approx 50$  с;

$E(k) = 1,0000018$  (1,0),  $K(k) = 56,648339$  (56,648337),  $k_1 = 1 \cdot 10^{-24}$ ,  
 $t \approx 1,5$  мин.

В последнем примере значение  $K(k)$  в скобках получено по формуле (7.126).

Программа 7.4. Неполный эллиптический интеграл первого рода  $F(\varphi, k)$ . Понижающее преобразование Ландена (7.18), (7.19). Переключатель Р — Г в положении Г.

Farcsin	Fcos	ПВ	Fл	1	8	0	П8	÷	ПД
ИПД	ИПВ	1	+	F1/x	×	ПД	FBx	2	×
ПС	ИПВ	ИПА	Ftg	×	Farctg	П9	9	0	÷
ИПА	—	Fx < 0	39	ИП9	ИП8	+	БП	26	ИП9
ИПА	—	ПА	2	ИПС	—	ИПС	×	F, —	ПВ
1	—	Fx	0 10	ИПД	ИПА	×	С, П		

Предусматривается задание в качестве исходных данных модуля, модулярного угла или дополнительного модуля. Использование программы в каждом из этих случаев отличается лишь способом пуска.

#### Инструкция

- Исходные данные и пуск при различных заданиях аргумента:
  - модуль  $\varphi = PA, [k = PX]$  В/О С/П,
  - модулярный угол в градусах  $\varphi = PA, [\alpha = PX]$  БП 01 С/П,
  - дополнительный модуль  $\varphi = PA, [k_1 = PX]$  БП 02 С/П.
- Амплитуда  $\varphi$  задается в градусах. При вычислении по этой программе полного эллиптического интеграла  $K(k) = F(\pi/2, k)$  следует задавать  $\varphi = 89,999999^\circ$ , но не  $\varphi = 90^\circ$ .
- Результат:  $PX = F(\varphi, k)$ .
- Регистры: рабочие — ; оперативные P8 — PD; свободные P0 — P7.
- Погрешность относительная меньше  $1 \cdot 10^{-6}$  при  $5 \cdot 10^{-4} < k_1 < 1$ , что соответствует  $0 \leq k \leq (1 - 1 \cdot 10^{-7})$  или  $0 \leq \alpha \leq (90 - 0,02)^\circ$ .

5. Время счета (максимальное)  $t \approx 3$  мин (в окрестности  $\varphi, \alpha = 90^\circ$ ). Среднее время счета 2 мин (см. примеры).

Примеры.

$$F(85^\circ, 0,5) = 1,5850261 \text{ (1,58502624 [9])}, t \approx 1 \text{ мин};$$

$$F(85^\circ, 88^\circ) = 3,0944889 \text{ (3,09448898 [9])}, t \approx 2 \text{ мин};$$

$$F(89,999999^\circ, k) = 8,9871841 \text{ (8,9871968)}, k_1 = 5 \cdot 10^{-4}, t \approx 3 \text{ мин}.$$

Число в скобках — значение  $K(k)$ , полученное по формуле (7.126).

**Программа 7.5.** Дзета-функция Якоби  $Z(\varphi, k)$ , неполные эллиптические интегралы первого и второго рода  $F(\varphi, k)$ ,  $E(\varphi, k)$ , полные эллиптические интегралы первого и второго рода  $K(k)$ ,  $E(k)$ . Понижающее преобразование Ландена и схема АГС.

Faresin	F cos	ПВ	Farcos	F sin	Fx <sup>2</sup>	ПД	0	П9	1
ПА	П8	Faresin	П5	ИПВ	ИПА	÷	ИП7	Ftg	×
Farctg	П6	ИП7	—	ИП5	+	Fx < 0	33	ИП6	Fπ
+	БП	21	ИП6	ИП7	+	П7	ИПА	ИПВ	×
F√—	ИПА	ИПВ	+	2	÷	ПА	ИПВ	—	ПС
XY	ПВ	ИП7	Fsin	ИПС	×	ИП9	+	П9	ИПС
Fx <sup>2</sup>	ИП8	2	×	П8	×	ИПД	+	ПД	FVx
—	Fx = 0	14	ИП5	ИПА	÷	ПВ	1	ИПД	2
÷	—	ПС	×	ПД	ИП7	ИП8	÷	ИПА	÷
ПА	ИПС	×	ИП9	+	С/П				

Использование программы при задании в качестве исходных данных модуля, модулярного угла или дополнительного модуля отличается лишь способом пуска.

Структура программы

00—13: подготовка начальных значений параметров для понижающего преобразования Ландена и схемы АГС,  
14—37: понижающее преобразование Ландена ((7.18), (7.21)),  
37—72: схема АГС (7.11), (7.13), вычисление дзета-функции Якоби (7.25).  
33—97: окончательное вычисление искомых функций по формулам (7.12а), (7.14). (7.19), (7.24).

Инструкция

1. Исходные данные и пуск при различных заданиях аргумента:  
а) модуль  $\varphi = P7, [k = PX]$  В/О С/П.  
б) модулярный угол в радианах  $\varphi = P7, [\alpha = PX]$  БП 01 С/П.  
в) дополнительный модуль  $\varphi = P7, [k_1 = PX]$ , БП 02 С/П. Амплитуда  $\varphi$  задается в радианах.  
2. Результат:  $PX = E(\varphi, k)$ ,  $P9 = Z(\varphi, k)$ ,  $PA = F(\varphi, k)$ ,  $PB = K(k)$ ,  $PD = E(k)$ . Здесь при задании  $\alpha$  или  $k_1$  аргумент  $k$  соответственно равен  $\sin \alpha$  или  $\sqrt{1 - k_1^2}$ .  
3. Регистры: рабочие P9, PA, PB, PD; оперативные P5—P8, PC; свободные P0—P4.

4. Погрешность относительная меньше  $1 \cdot 10^{-6}$  при  $0 \leq \varphi < \pi/2$ ,  $1 \cdot 10^{-6} \leq k_1 \leq 1$ . Последнему условию соответствуют при задании  $k$  и  $\alpha$  неравенства  $0 \leq k \leq (1 - 5 \cdot 10^{-13})$ ,  $0 \leq \alpha \leq (\pi/2 - 1 \cdot 10^{-6})$ .

5. Время счета возрастает по мере приближения  $\varphi$  и  $k_1$  к предельным значениям  $\pi/2$  и  $1 \cdot 10^{-6}$ . При  $\varphi = 0,99999999 \pi/2 = 1,5707962$  и  $k_1 = 1 \cdot 10^{-6}$  время счета  $t \approx 4$  мин, в среднем при умеренных значениях  $\varphi$  и  $\alpha$  время счета  $t \approx 2$  мин (см. примеры).

Примеры.

$$1) \varphi = \pi/4, k = 0,5, t \approx 2 \text{ мин};$$

$$E(\varphi, k) = 0,76719601 \text{ (0,76719599)}; Z(\varphi, k) = 0,06698737 \text{ (0,0669873)};$$

$$F(\varphi, k) = 0,80436609 \text{ (0,80436610)};$$

$$K(k) = 1,6857503 \text{ (1,68575036)};$$

$$E(k) = 1,4674623 \text{ (1,46746221)}.$$

$$2) \varphi = 1,4835298 \text{ (85}^\circ), \alpha = 1,5358897 \text{ (88}^\circ), t \approx 2,5 \text{ мин};$$

$$E(\varphi, k) = 0,99748398 \text{ (0,99748392)}; Z(\varphi, k) = 0,34332616 \text{ (0,3433262)};$$

$$F(\varphi, k) = 3,0944884 \text{ (3,09448898)};$$

$$K(k) = 4,7427168 \text{ (4,74271727)}; E(k) = 1,0025842 \text{ (1,00258409)}.$$

$$3) \varphi = 1,5620696 \text{ (89,5}^\circ), k_1 = 1 \cdot 10^{-5}, t \approx 3 \text{ мин};$$

$$E(\varphi, k) = 0,99996211; F(\varphi, k) = 5,434511; Z(\varphi, k) = 0,57865654;$$

$$K(k) = 12,89922; E(k) = 1,0000004.$$

В скобках указаны табличные данные из [9].

**Программа 7.6.** Полный обобщенный интеграл третьего рода  $N(n, a, k)$  (7.15). Схема АГС (7.16), (7.17). Переключатель P — Г в положении Г.

Faresin	F cos	П7	1	П9	П8	ИПА	+	1	ИПВ
	÷	ПС	FVx	ИП7	÷	ПД	ИПС	ИПД	×
ИП9	+	ИПД	1	÷	÷	ИП9	ИПС	+	2
	П9	XY	ПС	ИП7	ИП8	+	2	÷	ИП7
ИП8	×	F√—	П7	XY	П8	÷	ИПД	1	+
Fx <sup>2</sup>	×	4	÷	ИПД	÷	ПД	1	—	Fx = 0
17	Fπ	2	÷	ИП9	×	ИП8	÷	С/П	

Использование программы при задании в качестве одного из аргументов модуля, модулярного угла или дополнительного модуля отличается лишь способом пуска.

Инструкция

1. Исходные данные (кроме аргумента, связанного с модулем  $k$ ): ( $a = PA, n = PB$ ).  
2. Задание модульного аргумента и пуск:  
а) модуль  $[k = PX]$  В/О С/П,  
б) модулярный угол в градусах  $[\alpha = PX]$  БП 01 С/П,  
в) дополнительный модуль  $[k_1 = PX]$ , БП 02 С/П.  
3. Результат:  $PX = N(n, a, k)$ . При задании  $\alpha$  и  $k_1$  аргумент интеграла равен соответственно  $k = \sin \alpha$  и  $k = \sqrt{1 - k_1^2}$ .  
4. Регистры: рабочие PA, PB; оперативные P7—P9, PC, PD; свободные P0—P6.  
5. Погрешность относительная меньше  $1 \cdot 10^{-6}$  при  $0 \leq n \leq 0,99999999$ ,  $1 \cdot 10^{-45} \leq k_1 \leq 1$ . Последнему условию соответствуют допустимые интервалы для  $k$  и  $\alpha$ :  $0 \leq k \leq (1 - 5 \cdot 10^{-91})$ ,  $0 \leq \alpha \leq (90 - 1 \cdot 10^{-43})^\circ$ . Для  $k_1 \leq 5 \cdot 10^{-3}$  следует задавать именно  $k_1$ , если эта величина может быть вычислена с достаточной точностью; при других способах задания модульного аргумента в этом случае неизбежна потеря точности.  
6. Время счета (максимальное)  $t \approx 2,5$  мин.

### Примеры.

$N(0, -0,81; 0,9) = E(0,9) = 1,1716978 (1,17169705 [9]), t \approx 1 \text{ мин};$

$N(-0,5; 0,5; k) = K(k) = 105,00263 (105,00262 [9]), k_1 = 1 \cdot 10^{-45}, t \approx 2,5 \text{ мин};$

$N(0,7; 0; 75^\circ) = \Pi(0,7; k) = 6,1103062 (6,11030 [9]), \alpha = 75^\circ, t \approx 1,5 \text{ мин};$

$N(0,9999998; 1,2; k) = 1,0625668 \cdot 10^9, k_1 = 1 \cdot 10^{-45}, t \approx 2,5 \text{ мин}.$

**Программа 7.7.** Неполные эллиптические интегралы  $F(\varphi, k), E(\varphi, k)$ . Интегрирование (7.1), (7.2) по составной формуле Гаусса — Чебышева (§ 10.2, программа 10.14 при  $a = 0$ ). Переключатель Р—Г в положении Г.

Fsin	ПД	ИПС	ПП	50	F1/x	П6	КИП6	ИПС	ИП6
2	+	6	×	П0	÷	ПВ	0	П6	КИП0
3	F √	F1/x	/—/	ПА	ИП0	÷	ИПВ	×	ПП
50	F1/x	ИП6	+	П6	ИПА	$Fx \geq 0$	23	FL0	19
ИП6	ИПВ	×	Fπ	×	1	8	0	÷	С/П
Fsin	ИПД	×	Fx²	/—/	1	+	F √	V/O	

Данный вариант программы предназначен для  $F(\varphi, k)$ . Переход к  $E(\varphi, k)$  производится заменой команды F1/x (адрес 31) на ↑. В программе число шагов задается приближенно равным  $N \approx 6 + 3/\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}$ . Предусматривается задание в качестве аргумента модуля или модулярного угла.

### Инструкция

1. Исходные данные и пуск:

а)  $(\varphi = PC), [\alpha = PX]$  В/О С/П,

б)  $(\varphi = PC), [k = PX]$  БП 01 С/П.

Амплитуда  $\varphi$  и модулярный угол  $\alpha$  задаются в градусах.

2. Результат:  $PX = F(\varphi, k)$  (или  $PX = E(\varphi, k)$  в зависимости от используемого варианта программы). Напомним, что  $k = \sin \alpha$ .

3. Регистры: рабочие PC; оперативные P0, P6, PA, PB, PD; свободные P1 — P5, P7 — P9.

4. Погрешность относительная  $E(\varphi, k)$  меньше  $1 \cdot 10^{-6}$ , а  $F(\varphi, k)$  меньше:  $1 \cdot 10^{-6}$  при  $\varphi \leq 75^\circ$  и  $\alpha \leq 75^\circ$  ( $k \leq 0,97$ ),

$5 \cdot 10^{-6}$  при  $\varphi \leq 80^\circ$  и  $\alpha \leq 86^\circ$  ( $k \leq 0,997$ ).

$1 \cdot 10^{-5}$  в остальных случаях. Максимальная погрешность частично корректируется изменением числа  $N$  шагов. В рамках данной программы заменяется число  $n_0 = 6$  (адрес 12) на четные числа  $n = 2, 4, 8$ . При этом пропорционально  $n$  изменяется время счета. Максимальная погрешность  $\delta_n \approx (n_0/n)^4 \delta_{n_0}$ .

5. Время счета  $t \approx (2 + 1/\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi})$  мин.

### Примеры.

$F(75^\circ, k) = 1,8871335 (1,88713308 [9]), \alpha = 76^\circ, t \approx 5 \text{ мин};$

$F(85^\circ, 1) = 3,1312689 (3,1313013 [9]), t \approx 14 \text{ мин};$

$E(75^\circ, k) = 0,99517588 (0,99517606 [9]), \alpha = 76^\circ, t \approx 5 \text{ мин};$

$E(85^\circ, 1) = 0,99619472 (0,99619470 [9]), t \approx 14 \text{ мин}.$

**Программа 7.8.** Эллиптический интеграл третьего рода  $\Pi(n, \varphi, k)$ . Интегрирование (7.3) по составной формуле Гаусса — Чебышева (§ 10.2, программа 10.14 при  $a = 0$ ). Переключатель Р — Г в положении Г.

Fsin	ПД	ИПС	ПП	50	+	П6	КИП6	ИПС	ИП6
3	+	2	×	П0	÷	ПВ	0	П6	КИП0
3	F √	F1/x	/—/	ПА	ИП0	+	ИПВ	×	ПП
50	×	ИП6	+	П6	ИПА	$Fx \geq 0$	23	FL0	19
ИП6	ИПВ	×	Fπ	×	1	8	0	÷	С/П
Fsin	П8	Fx²	/—/	ИП9	×	1	÷	F1/x	1
ИП8	ИПД	×	Fx²	—	F √	F1/x	V/O		

Число шагов (частных интервалов) задается в программе по формуле  $N \approx [3 + 1/(1 - n \sin^2 \varphi) + 1/\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}]$ , где квадратные скобки означают округление до целого в большую сторону. Предусматривается возможность задания в качестве аргумента модуля или модулярного угла.

### Инструкция

1. Исходные данные и пуск:

а)  $(n = P9, \varphi = PC), [\alpha = PX]$ , В/О С/П;

б)  $(n = P9, \varphi = PC), [k = PX]$  БП 01 С/П.

Модулярный угол  $\alpha$  и амплитуда  $\varphi$  задаются в градусах.

2. Результат:  $PX = \Pi(n, \varphi, k)$  ( $k = \sin \alpha$ ).

3. Регистры: рабочие P9, PC; оперативные P0, P6, P8, PA — PD; свободные P2 — P5, P7.

4. Погрешность относительная меньше:

$1 \cdot 10^{-6}$  при  $n \leq 0,9, \varphi \leq 90^\circ, \alpha \leq 75^\circ, \left. \begin{array}{l} 3 \cdot 10^{-5} \text{ при } n \leq 1, \varphi \leq 75^\circ, \alpha \leq 75^\circ, \\ 6 \cdot 10^{-5} \text{ при } n \leq 1, \varphi \leq 75^\circ, \alpha \leq 90^\circ, k \leq 1. \end{array} \right\} k \leq 0,96;$

$6 \cdot 10^{-5}$  при  $n \leq 1, \varphi \leq 75^\circ, \alpha \leq 90^\circ, k \leq 1.$

Погрешность можно уменьшить, заменив в программе число  $n_0 = 2$  (адрес 12) четными числами  $n = 4, 6, 8$ . При этом относительная погрешность уменьшается примерно в  $(n/n_0)^4$  раз, а время счета возрастает  $\sim (n/n_0)$ .

5. Время счета  $t \approx 1 + 1/[2(1 - n \sin^2 \varphi) + 1/(2\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi})]$  мин.

### Примеры.

$\Pi(0,4, 90^\circ, k) = 2,9076153 (2,90761 [9]), \alpha = 60^\circ, t \approx 3 \text{ мин};$

$\Pi(0,9, 90^\circ, k) = 12,464093 (12,46407 [9]), \alpha = 75^\circ, t \approx 7,5 \text{ мин};$

$\Pi(1, 75^\circ, 1) = 8,2230527 (8,22356 [9]), t \approx 9,5 \text{ мин}.$

## 7.2. Эллиптические функции Якоби.

### Тета-функции

Эллиптические функции Якоби могут быть определены через обратную функцию эллиптического интеграла первого рода. Пусть в интеграле

$$u(\varphi, k) = \int_0^\varphi \frac{dt}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 t}} \quad (7.26)$$

$u$  и  $\varphi$  являются комплексными переменными. Рассмотрим обратную к  $u$  функцию

$$\varphi = am(u, k), \quad (7.27)$$

называемую *амплитудой*. Тогда эллиптическими функциями Якоби являются

$$\operatorname{sn}(u, k) = \sin \varphi = \sin \operatorname{am}(u, k); \quad (7.28)$$

$$\operatorname{cn}(u, k) = \cos \varphi = \cos \operatorname{am}(u, k); \quad (7.29)$$

$$\operatorname{dn}(u, k) = \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} = \sqrt{1 - k^2 \sin^2 [\operatorname{am}(u, k)]}. \quad (7.30)$$

Они называются соответственно *эллиптическим синусом*, *эллиптическим косинусом* и *дельта-амплитудой* [6].

Функции (7.28)–(7.30) — мероморфные, двояко-периодические во всей плоскости комплексного переменного. Отношение их периодов не является действительным числом. В элементарном (основном) параллелограмме, построенном на наименьших периодах как на векторах, эллиптические функции Якоби имеют по два изолированных полюса и нуля. Отметим, что совокупность указанных свойств функций Якоби может служить их определением, математически эквивалентным соотношениям (7.26) — (7.30) [5].

Всего существует 12 функций Якоби. Указанные выше функции  $\operatorname{sn}$ ,  $\operatorname{cn}$ ,  $\operatorname{dn}$  называются определяющей тройкой, остальные девять находятся через отношения пар функций из определяющей тройки или их обратные величины [9]. Обозначения всех функций строятся на базе четырех букв  $s$ ,  $c$ ,  $d$ ,  $n$  путем их попарного сочетания ( $sc$ ,  $cs$ ,  $cd$  и т. д.).

Ниже приводятся основные периоды для определяющей тройки, а также положения нулей и полюсов ( $m$ ,  $n$  — любые целые числа, включая нули):

Функция	Основные периоды	Нули	Полюсы
$\operatorname{sn}(u, k)$	$4K, j 2K'$	$2mK + j 2nK'$	$2mK + j (2n+1)K'$
$\operatorname{cn}(u, k)$	$4K, 2K + j 2K'$	$(2m+1)K + j 2nK'$	$2mK + j (2n+1)K'$
$\operatorname{dn}(u, k)$	$2K, j 4K'$	$(2m+1)K + j (2n+1)K'$	$2mK + j (2n+1)K'$

Здесь  $K(k)$  и  $K'(k)$  — полные эллиптические интегралы (7.4), (7.9). При вычислении функций можно ограничиться диапазоном  $0 \leq \operatorname{Re} u \leq K$  и  $0 \leq \operatorname{Im} u \leq K'$ , если использовать их периодичность, а также формулы приведения, аналогичные формулам приведения тригонометрических функций.

Формулы приведения по аргументу  $\operatorname{sn}(u, k)$ ,  $\operatorname{cn}(u, k)$ ,  $\operatorname{dn}(u, k)$  (далее параметр  $k$  опускается в обозначениях функций):

$$\operatorname{sn}(-u) = -\operatorname{sn}(u), \quad \operatorname{sn}(u \pm K) = \pm \frac{\operatorname{cn}(u)}{\operatorname{dn}(u)}, \quad \operatorname{sn}(u \pm 2K) = -\operatorname{sn}(u), \quad (7.31)$$

$$\operatorname{sn}(u + jK') = \frac{1}{k \operatorname{sn}(u)}, \quad \operatorname{sn}(u + K + jK') = \frac{\operatorname{dn}(u)}{k \operatorname{cn}(u)};$$

$$\operatorname{cn}(-u) = \operatorname{cn}(u), \quad \operatorname{cn}(u \pm K) = \pm \frac{k_1 \operatorname{sn}(u)}{\operatorname{dn}(u)}, \quad \operatorname{cn}(u \pm 2K) = -\operatorname{cn}(u), \quad (7.32)$$

$$\operatorname{cn}(u + jK') = -j \frac{\operatorname{dn}(u)}{\operatorname{sn}(u)}, \quad \operatorname{cn}(u + K + jK') = -j \frac{k_1}{k \operatorname{cn}(u)};$$

$$\operatorname{dn}(-u) = \operatorname{dn}(u), \quad \operatorname{dn}(u \pm K) = \frac{k_1}{\operatorname{dn}(u)}, \quad \operatorname{dn}(u + j2K') = -\operatorname{dn}(u), \quad (7.33)$$

$$\operatorname{dn}(u + jK') = -j \frac{\operatorname{cn}(u)}{\operatorname{sn}(u)}, \quad \operatorname{dn}(u + K + jK') = j \frac{k_1 \operatorname{sn}(u)}{\operatorname{cn}(u)}.$$

Формулы приведения по параметру позволяют рассчитывать эллиптические функции при  $k^2 < 0$  и  $k^2 > 1$ :

$$k^2 < 0. \text{ Пусть } k^2 = -p^2, \quad u^* \equiv u \sqrt{1+p^2}, \quad p^* \equiv p/\sqrt{1+p^2}$$

$$\operatorname{sn}(u, k) = \frac{1}{\sqrt{1+p^2}} \frac{\operatorname{sn}(u^*, p^*)}{\operatorname{dn}(u^*, p^*)}; \quad (7.34)$$

$$\operatorname{cn}(u, k) = \frac{\operatorname{cn}(u^*, p^*)}{\operatorname{dn}(u^*, p^*)}; \quad \operatorname{dn}(u, k) = \frac{1}{\operatorname{dn}(u^*, p^*)}.$$

$k > 1$

$$\operatorname{sn}(u, k) = \frac{1}{k} \operatorname{sn}\left(uk, \frac{1}{k}\right); \quad \operatorname{cn}(u, k) = \operatorname{dn}\left(uk, \frac{1}{k}\right);$$

$$\operatorname{dn}(u, k) = \operatorname{cn}\left(uk, \frac{1}{k}\right). \quad (7.35)$$

Вычисление эллиптических функций Якоби может производиться многими методами (см., например, [9]). Ниже рассматриваются метод АГС и понижающее преобразование Ландена, примененные ранее для расчета эллиптических интегралов.

Метод АГС.

1. Исходная тройка чисел и итерационная схема совпадают с (7.11), (7.13):

$$a_0 = 1, \quad b_0 = k_1 = \sqrt{1-k^2} = \cos \alpha, \quad c_0 = k = \sin \alpha;$$

$$a_m = \frac{a_{m-1} + b_{m-1}}{2}, \quad b_m = \sqrt{a_{m-1} b_{m-1}}, \quad c_m = \frac{a_{m-1} - b_{m-1}}{2}, \quad (7.36)$$

$$m = 1, 2, \dots, N.$$

Процесс заканчивается на таком  $N$ , при котором  $c_N \approx 0$  с заданной точностью.

2. Находим амплитуду

$$\varphi_N = 2^N a_N u, \quad (7.37)$$

где  $u$  — аргумент (вещественный) искомой эллиптической функции.

3. Строим обратную рекуррентную схему:

$$\varphi_{m-1} = \frac{1}{2} \left[ \varphi_m + \arcsin \left( \frac{c_m}{a_m} \sin \varphi_m \right) \right], \quad m = N, N-1, \dots, 1. \quad (7.38)$$

4. Искомые функции вычисляются по формулам

$$\operatorname{sn}(u, k) = \sin \varphi_0; \quad (7.39)$$

$$\operatorname{cn}(u, k) = \cos \varphi_0; \quad (7.40)$$

$$\operatorname{dn}(u, k) = (\cos \varphi_0) / \cos(\varphi_1 - \varphi_0). \quad (7.41)$$

Как видно, для проведения преобразований по формулам (7.38) значения  $c_m/a_m$ , которые определяются из (7.36), должны на этапе АГС заноситься в память ПМК. Фактически при использовании ПМК это ограничивает максималь-



ное число итераций значением  $N = 8$ . Однако, ввиду очень быстрой сходимости схемы АГС допустимый диапазон  $k$  достаточно велик:

$$1 \cdot 10^{-35} \leq k_1 \leq 1, \text{ т. е. } 0 \leq k \leq 1 - 5 \cdot 10^{-71}. \quad (7.42)$$

При оценке погрешностей можно ограничить интервал изменения аргумента неравенством

$$0 \leq u \leq K(k). \quad (7.43)$$

За пределами этой области величины  $sn$ ,  $cn$ ,  $dn$  могут быть легко пересчитаны по формулам приведения (7.31)–(7.33) и из условий периодичности (см. выше). На рис. 7.1 показана зависимость  $K(k)$  от дополнительного модуля  $k_1$  (нижняя граница заштрихованной области). Ориентировочные значения  $K(k)$  совпадают с предельными значениями аргумента, после которых целесообразно для повышения точности использовать формулы приведения.

Понижающее преобразование Ландена для функции  $sn(u, k)$  описано в [9]. Однако непосредственное использование приведенных в [9] формул дает значительные погрешности округления при  $k \rightarrow 1$ , т. е. при дополнительном модуле  $k_1 \ll 1$ . Ниже дается улучшенное соотношение, которое позволяет повысить точность (7.48).

1. Преобразование дополнительного модуля (увеличение)

$$k_1^{(m+1)} = 2 \sqrt{k_1^{(m)} / (1 + k_1^{(m)})}, \quad k_1^{(1)} = k_1. \quad (7.44)$$

2. Преобразование аргумента

$$u_{m+1} = u_m (1 + k_1^{(m)}) / 2, \quad m = 1, 2, \dots, N; \quad u_1 = u. \quad (7.45)$$

Соответственно преобразуются и  $sn(u_m, k^{(m)})$  [9].

$N$ -кратное выполнение указанных преобразований приводит к значению  $k_1^{(N+1)} \rightarrow 1$ , а  $k^{(N+1)} = \sqrt{1 - k_1^{(N+1)2}} \ll 1$ . В этом случае соответствующая функция  $sn$  с достаточной точностью равна

$$sn(u_{N+1}, k^{(N+1)}) \approx \sin u_{N+1}. \quad (7.46)$$

Располагая значениями  $k_1^{(N)}, k_1^{(N-1)}, \dots, k_1^{(1)}$ , можно выполнить обратное преобразование эллиптической функции к старому значению аргумента и модуля с помощью рекуррентной формулы

$$sn(u_m, k^{(m)}) = \frac{sn(u_{m+1}, k^{(m+1)})}{\frac{1 + k_1^{(m)}}{2} + \frac{1 - k_1^{(m)}}{2} sn^2(u_{m+1}, k^{(m+1)})}, \quad (7.47)$$

где  $m = N, N-1, \dots, 1$ ;  $sn(u_1, k^{(1)}) = sn(u, k)$ .

Значение функции  $dn(u, k)$ , относительно свободное от погрешностей округления, определяется по формуле

$$dn(u, k) = sn(u, k) sn(u_2, k^{(2)}) (k_1 - 1) + 1, \quad (7.48)$$

где  $sn(u_2, k^{(2)})$  находится при реализации (7.47) на предпоследней итерации. Вычислив  $dn$ , получим  $cn$  по известной формуле [9]

$$cn(u, k) = \sqrt{(dn^2(u, k) - k_1^2) / (1 - k_1^2)}. \quad (7.49)$$

Последняя формула не учитывает изменение знака  $sn$  при переходе через  $u = K(k)$ . Для корректировки знака можно использовать рис. 7.1, где заштрихованная область между  $u = K(k)$  и  $u = 3K(k)$  соответствует  $sn < 0$ .

$K(k), 3K(k), u$

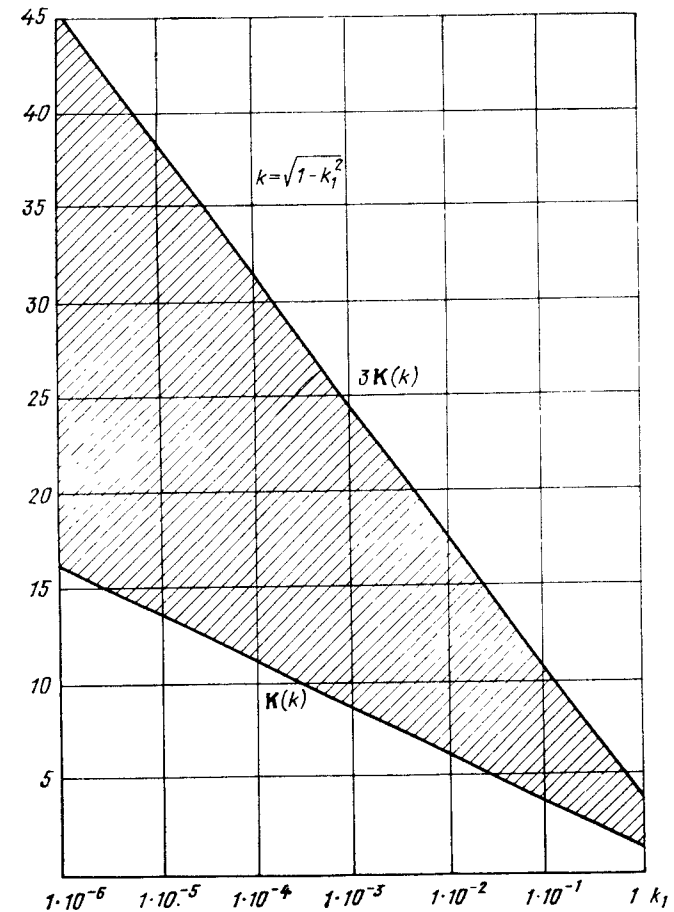


Рис. 7.1. Зависимость полного эллиптического интеграла первого рода и утроенного его значения от дополнительного модуля. Эллиптическая функция Якоби  $sn(u, k)$  отрицательна при значениях аргумента  $u$ , лежащих в заштрихованной области

Отметим, что в целом понижающее преобразование Ландена при прочих равных условиях обеспечивает лучшую точность, чем метод АГС, хотя нуждается в корректировке знака  $sn(u, k)$  и имеет программу большей длины (ср. программы 7.9, 7.10).

Расчет эллиптических функций Якоби комплексного аргумента может производиться по формулам [9]

$$sn(u, k) = (sd_1 + j cds_1 c_1) / (c_1^2 + (kss_1)^2);$$

$$cn(u, k) = (cc_1 - j sds_1 d_1) / (c_1^2 + (kss_1)^2);$$

$$dn(u, k) = (dc_1 d_1 - j k^2 scs_1) / (c_1^2 + (kss_1)^2). \quad (7.50)$$

Здесь  $u = x + j y$ ;  $s \equiv \operatorname{sn}(x, k)$ ;  $c \equiv \operatorname{cn}(x, k)$ ;  $d \equiv \operatorname{dn}(x, k)$ ;

$s_1 \equiv \operatorname{sn}(y, k_1)$ ;  $c_1 \equiv \operatorname{cn}(y, k_1)$ ;  $d_1 \equiv \operatorname{dn}(y, k_1)$ .

Ввиду того, что расчет сводится к вычислению эллиптических функций вещественного аргумента, оценить погрешность нетрудно. Отметим, что совместное использование довольно громоздких формул (7.50) и алгоритма АГС (или Ландена) требует значительного числа программных шагов. Поэтому соответствующие программы включают три последовательных пуска с промежуточным набором исходных данных и выполнением некоторого (небольшого) числа «ручных» команд.

*Тета-функции* определяются следующими степенными рядами по параметру Якоби  $q(k)$  (7.10) [9]:

$$\vartheta_s(u, k) = \left( \frac{2\pi q^{1/2}}{k k_1 K(k)} \right)^{1/2} \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m q^{m(m+1)} \sin(2m+1)v; \quad (7.51)$$

$$\vartheta_c(u, k) = \left( \frac{2\pi q^{1/2}}{k K(k)} \right)^{1/2} \sum_{m=0}^{\infty} q^{m(m+1)} \cos(2m+1)v; \quad (7.52)$$

$$\vartheta_d(u, k) = \left( \frac{\pi}{2K(k)} \right)^{1/2} \left( 1 + \sum_{m=1}^{\infty} q^{m^2} \cos 2mv \right); \quad (7.53)$$

$$\vartheta_n(u, k) = \left( \frac{\pi}{2k_1 K(k)} \right)^{1/2} \left( 1 + \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m q^{m^2} \cos 2mv \right), \quad (7.54)$$

где  $v = \pi u / 2K(k)$ . Ввиду того, что параметр Якоби  $q \ll 1$  (для не слишком малых  $k_1$ ), ряды (7.51) — (7.54) сходятся чрезвычайно быстро. Функции, определенные этими формулами, называются *тета-функциями Невилля* [9]. Их важной особенностью является то, что отношение любых двух функций равно одной из эллиптических функций Якоби. Обозначение соответствующей эллиптической функции Якоби складывается из индекса функции в числителе (первая буква) и индекса функции в знаменателе (вторая буква):

$$\operatorname{sn}(u, k) = \frac{\vartheta_s(u, k)}{\vartheta_n(u, k)}; \quad \operatorname{ns}(u, k) = \frac{\vartheta_n(u, k)}{\vartheta_s(u, k)}; \quad \operatorname{cd}(u, k) = \frac{\vartheta_c(u, k)}{\vartheta_d(u, k)} \quad (7.55)$$

и т. д. В итоге получаются все 12 эллиптических функций Якоби. Ряды (7.51) — (7.54) применимы при любых комплексных  $u$  [5].

Суммирование рядов в (7.51) — (7.54) удобно производить по схеме Горниера. Ниже приведены эти схемы для (7.51) и (7.54). Остальные два ряда записываются аналогично (в программах они непосредственно получаются из (7.56), (7.57) путем изменения параметров), где  $p = q^2$ :

$$\sum_{m=0}^n (-1)^m q^{m(m+2)} \sin(2m+1)v \approx [\dots [((-p^n) + \sin(2n-1)v)(-p^{n-1}) + \sin(2n-3)v](-p^{n-2}) + \dots](-p) + \sin v; \quad (7.56)$$

$$\sum_{m=1}^n (-1)^m q^{m^2} \cos 2mv \approx [\dots [\cos 2\pi v (-q^{2n-1}) + \cos 2(n-1)v](-q^{2n-3}) + \dots](-q^3) + (\cos 2v)(-q). \quad (7.57)$$

Отметим, что входящие в формулы функции  $K(k)$  и  $q(k)$  вычисляются в программах методом АГС. Это позволяет несколько упростить формулы, заменив

$$v = \pi u / 2K(k) = a_N u; \quad q = e^{-\pi K/K'} = e^{-\pi a_N / a'_N}. \quad (7.58)$$

Здесь  $a_N$  и  $a'_N$  ( $a'_N$  — константа, соответствующая дополнительному модулю как аргументу) находятся непосредственно методом АГС (см. (7.11), (7.9), (7.10)).

С помощью  $\vartheta_s, \vartheta_c, \vartheta_d, \vartheta_n$  легко получить *тета-функции Якоби*  $\vartheta_1$  —  $\vartheta_4$  [5] (и наоборот):

$$\vartheta_1(u, k) = \left( \frac{2k k_1 K(k)}{\pi} \right)^{1/2} \vartheta_s(u, k); \quad \vartheta_2(u, k) = \left( \frac{2k K(k)}{\pi} \right)^{1/2} \vartheta_c(u, k); \quad (7.59)$$

$$\vartheta_3(u, k) = \left( \frac{2K(k)}{\pi} \right)^{1/2} \vartheta_d(u, k); \quad \vartheta_4(u, k) = \left( \frac{2k_1 K(k)}{\pi} \right)^{1/2} \vartheta_n(u, k).$$

**Программа 7.9.** Эллиптические функции Якоби  $\operatorname{sn}(u, k)$ ,  $\operatorname{cn}(u, k)$ ,  $\operatorname{dn}(u, k)$  вещественного аргумента. Метод АГС, (7.36) — (7.39).

Farcsin	Fcos	П4	П6	1	4	П0	7	П5	1
ПЗ	ИПЗ	ИП4	—	2	÷	↑	ИП4	+	÷
КП0	F Bx	ИП4	ИПЗ	×	F v <sup>-</sup>	П4	XУ	ПЗ	8
ИП0	—	Fx = 0	11	6	П0	6	4	ИПЗ	×
ИП2	×	ПЗ	F sin	КИП5	×	Farcsin	ИПЗ	+	2
÷	FL0	42	F sin	ПВ	F Bx	F cos	ПС	Fx <sup>2</sup>	XУ
ИП6	×	Fx <sup>2</sup>	+	F v <sup>-</sup>	ПД	C/П			

Использование программы отличается способом пуска при задании в качестве исходного параметра модуля, модулярного угла или дополнительного модуля.

#### Инструкция

- Исходные данные и пуск:
  - модуль ( $u = P2$ ), [ $k = PX$ ], В/О С/П,
  - модулярный угол в радианах ( $u = P2$ ), [ $\alpha = PX$ ] БП 01 С/П,
  - дополнительный модуль ( $u = P2$ ), [ $k_1 = PX$ ] БП 02 С/П.
- Результат:  $PX = PД = \operatorname{dn}(u, k)$ ,  $PC = \operatorname{cn}(u, k)$ ,  $PВ = \operatorname{sn}(u, k)$ .
- Регистры: рабочие  $P2, PВ$  —  $PД$ ; оперативные  $P0, PЗ$  —  $P6, P8$  —  $PA$ ; свободные  $P1, P7$ .
- Погрешность относительная меньше:  $1 \cdot 10^{-5}$  при  $1 \cdot 10^{-3} \leq k_1 \leq 1$  ( $0 \leq k \leq (1 - 5 \cdot 10^{-7})$ ) и  $1 \cdot 10^{-6}$  при  $1 \cdot 10^{-2} \leq k_1 \leq 1$  ( $0 \leq k \leq (1 - 5 \cdot 10^{-5})$ ). Данные оценки относятся к интервалу  $0 \leq u \leq K(k)$ .
- Время счета  $t \approx 1,5$  мин.

*Примеры.*  $k_1 = 5 \cdot 10^{-3}$  ( $k = 0,99998749$ ),  $u = 3,342324 = K(k)/2$

$\operatorname{sn}(u, k) = 0,99750942$  (0,99750933 [9]);

$\operatorname{cn}(u, k) = 0,070534585$  (0,070534561 [9]);

$\operatorname{dn}(u, k) = 0,070710701$  (0,070710678 [9]).

**Программа 7.10.** Эллиптические функции Якоби  $\operatorname{sn}(u, k)$ ,  $\operatorname{cn}(u, k)$ ,  $\operatorname{dn}(u, k)$  вещественного аргумента. Понижающее преобразование Ландена (7.44) — (7.49).

Faresin	Fcos	ПД	6	П1	1	4	ПО	ИПД	КПО
ПЗ	1	+	2	÷	ИП2	XY	×	П2	FBx
ИПЗ	F1	XY	÷	FL1	09	6	П1	7	П4
ИП2	Fsin	П2	КИП4	1	+	2	÷	↑	↑
1	—	ИП2	Fx <sup>2</sup>	×	—	÷	FL1	32	ПВ
ИП2	×	ИПД	1	—	×	1	÷	ПА	Fx <sup>2</sup>
ИПД	Fx <sup>2</sup>	—	FBx	/—/	1	÷	F1	—	ПС
С/П									

Использование программы при задании в качестве исходного параметра модуля, модулярного угла или дополнительного модуля отличается лишь способом пуска.

#### И н с т р у к ц и я

- Исходные данные и пуск:
  - модуль  $u = P2$ ,  $[k = PX]$  В/О С/П,
  - модулярный угол в радианах  $u = P2$ ,  $[\alpha = PX]$  БП 01 С/П,
  - дополнительный модуль  $u = P2$ ,  $[k_1 = PX]$  БП 02 С/П.
- Результат:  $PX = PC = \text{sp}(u, k)$ ,  $PB = \text{sn}(u, k)$ ,  $PA = \text{dn}(u, k)$ .
- Регистры: рабочие  $PA - PC$ ; оперативные  $P0 - P4$ ,  $P8$ ,  $P9$ ,  $PD$ ; свободные  $P5$ ,  $P6$ ,  $P7$ .
- Погрешность относительная меньше:  $1 \cdot 10^{-5}$  при  $5 \cdot 10^{-4} \leq k_1 \leq 1$  ( $0 \leq k \leq 1 - 1 \cdot 10^{-7}$ ) и  $1 \cdot 10^{-6}$  при  $1 \cdot 10^{-3} \leq k_1 \leq 1$  ( $0 \leq k \leq 1 - 5 \cdot 10^{-7}$ ). Данные оценки относятся к интервалу  $0 \leq u \leq K(k)$ .

5. Время счета  $t \approx 1,5$  мин.

#### Примеры.

$\text{sp}(0,2; 0,9) = 0,9802785$  ( $0,980278$  [9]);  $\text{dn}(0,2; 0,9) = 0,984056$  ( $0,98406$  [9]);

$\text{sn}(0,61802, \sqrt{0,5}) = 0,56457576$  ( $0,56458$  [9]).

**Программа 7.11.** Эллиптические функции Якоби  $\text{sn}(u, k)$ ,  $\text{sn}(u, k)$ ,  $\text{dn}(u, k)$  комплексного аргумента  $u = x + jy$ . Метод АГС (7.36) — (7.39) и (7.50).

ИП8	ИП2	—	2	÷	↑	ИП2	÷	КПО
FBx	ИП2	ИП8	×	F1	П2	XY	П8	9
—	Fx = 0	00	5	ПО	3	2	ИП8	×
×	П8	Fsin	КИП4	×	Faresin	ИП8	÷	ИП3
FL0	31	КП5	С/П	2	ПО	5	П4	КИП4
КП5	FBx	Fcos	КП5	Fx <sup>2</sup>	XY	КИП3	×	Fx <sup>2</sup>
F1	КП5	FL0	48	ИПС	Fx <sup>2</sup>	ИП1	ИПВ	×
✓	Fx <sup>2</sup>	÷	÷	ПД	FBx	ИП9	XY	÷
ИПС	×	П5	ИПВ	ИПА	×	×	П4	FBx
ИП8	ИПД	×	П3	×	П6	ИПА	С/П	/—/

При выполнении программы предусматриваются три последовательных пуска, ввод дополнительных данных в паузах между пусками, а также ручной набор 15 команд после третьего пуска.

#### И н с т р у к ц и я

- Исходные данные для пуска 1:  $x = P3$ ,  $k_1 = P2$ ,  $14 = P0$ ,  $8 = P4$ ,  $5 = P5$ ,  $1 = P8$ .

2. Пуск 1: В/О С/П (получение амплитуды  $\Phi_0(x, k)$ , входящей в формулы (7.39), и занесение ее в  $P6$ ),  $t \approx 1$  мин.

3. Исходные данные для пуска 2:  $y = P3$ ,  $k = P2$ ,  $14 = P0$ ,  $8 = P4$ ,  $1 = P8$ .

4. Пуск 2: В/О С/П (получение амплитуды  $\Phi_0(y, k_1)$ , входящей в формулы (7.39), и занесение ее в  $P7$ ) ( $t \approx 1$  мин).

5. Исходные данные для пуска 3:  $k = P1$ ,  $k_1 = P2$ ,  $3 = P3$ .

6. Пуск 3: С/П ( $t \approx 30$  с).

7. После останова нужно, не меняя содержимого регистра  $PX$ , выполнить вручную следующие 15 операций:

ИПС  $\times$  ИПД  $\times$  П7 ИП1 Fx<sup>2</sup> ИП8  $\times$  ИП9  
 $\times$  ИПВ  $\times$  /—/ П8

8. В паузе между пусками 1, 2 и 2, 3 не следует менять содержимого регистров  $P5$ ,  $P6$ ,  $P7$ .

9. Результат:  $P3 = \text{Re sn}(u, k)$ ,  $P4 = \text{Im sn}(u, k)$ ,  $P5 = \text{Re sp}(u, k)$ ,  $P6 = \text{Im sp}(u, k)$ ,  $P7 = \text{Re dn}(u, k)$ ,  $P8 = \text{Im dn}(u, k)$ .

10. Регистры: рабочие  $P3 - P8$ ; оперативные  $P0 - P2$ ,  $P9 - PD$ ; свободных регистров нет.

11. Погрешность относительная ориентировочно такая же, как при вычислении эллиптических функций вещественного аргумента по программе 7.9.

12. Время автоматического счета (полное)  $t \approx 2,5$  мин.

Примеры. При  $k = 0,9$ ,  $u = 1,1402745 + j 0,82730835$

$\text{sn}(u, k) = 1,0274022 + j 0,23570227$  ( $1,0274023 + j 0,23570225$ );

$\text{sp}(u, k) = 0,49209861 - j 0,49209858$  ( $0,49209861 - j 0,49209861$ );

$\text{dn}(u, k) = 0,55941478 - j 0,35063506$  ( $0,55941482 - j 0,35063505$ ). Числа в скобках — результат вычисления функций по формулам из [9] для функций, аргумент которых равен  $[K(k) + j K'(k)]/2$ . (В данном случае он выбран именно таким:  $K(k) = 2,280549$ ,  $K'(k) = 1,6546167$ .)

**Программа 7.12.** Эллиптические функции Якоби  $\text{sn}(u, k)$ ,  $\text{sn}(u, k)$ ,  $\text{dn}(u, k)$  комплексного аргумента  $u = x + jy$ . Понижающее преобразование Ландена (7.44) — (7.49) и (7.50).

КПО	1	+	2	÷	ИП2	XY	×	П2	FBx
КИП↑	F1	XY	÷	FL1	00	6	П1	ИП2	Fsin
П2	КИП4	1	+	2	÷	↑	↑	1	—
ИП2	Fx <sup>2</sup>	×	—	÷	FL1	20	КП3	ИП2	×
ИПД	1	—	×	1	+	КП3	Fx <sup>2</sup>	ИПД	Fx <sup>2</sup>
—	FBx	/—/	1	+	÷	F1	КП3	С/П	↑
Fx <sup>2</sup>	ИПД	ИП7	×	ИПА	×	Fx <sup>2</sup>	+	÷	П8
FBx	ИП7	XY	÷	П7	ИП9	×	ПО	/—/	ИП6
ИПА	×	×	П3	FBx	ИП5	ИП8	×	П2	×
П1	ИПД	Fx <sup>2</sup>	ИП5	×	ИП7	×	С/П		

При выполнении программы предусматриваются три последовательных пуска, ввод дополнительных данных в паузе между первым и вторым пусками, а также ручное выполнение 10 команд после третьего пуска. Используемая в программе команда  $\text{КИП} \uparrow$  выполняется только на ПМК «Электроника БЗ-34», «Электроника МК-54» и их аналогах, для других ПМК необходима соответствующая корректировка программы.

#### И н с т р у к ц и я

- Исходные данные для пуска 1:  $x = P2$ ,  $14 = P0$ ,  $6 = P1$ ,  $8 = P3$ ,  $7 = P4$ ,  $[k_1 = PX]$ .

2. Пуск 1 : В/О С/П (1 мин).  
 3. Исходные данные для пуска 2:  $y = P2, 14 = P0, 6 = P1, 11 = P3, 7 = P4, [k = PX]$ .  
 4. Пуск 2: В/О С/П ( $t \approx 1$  мин). После останова не менять содержимое регистра РХ.  
 5. Пуск 3: С/П ( $t \approx 30$  с).  
 6. После останова, не меняя содержимое регистра РХ, выполнить вручную следующие 10 операций:

ИПА  $\times$  /—/ ПС ИП6 ИП8  $\times$  ИП9  $\times$  ПВ

В паузе между пусками нельзя также менять содержимое регистров Р5 — РА.

7. Результат:  $P0 = \text{Re sn}(u, k), P1 = \text{Im sn}(u, k), P2 = \text{Re cn}(u, k), P3 = \text{Im cn}(u, k), PV = \text{Re dn}(u, k), PC = \text{Im dn}(u, k)$ .  
 8. Регистры: рабочие Р0 — Р3, РВ, РС; оперативные Р4 — РА, РД; свободных регистров нет.

9. Время автоматического счета (полное)  $t \approx 2,5$  мин.

**Примеры.** Рассмотрим пример предыдущей программы: вычислить функции для аргумента  $u = 1,1402745 + j0,82730835$ , при модуле  $k = 0,9$  (дополнительный модуль  $k_1 = \sqrt{0,19}$ ).

$$\begin{aligned} \text{sn}(u, k) &= 1,0274023 + j0,23570228 \quad (1,0274023 + j0,23570225); \\ \text{cn}(u, k) &= 0,49209862 - j0,49209865 \quad (0,49209861 - j0,49209861); \\ \text{dn}(u, k) &= 0,55941482 - j0,35063507 \quad (0,55941482 - j0,35063505). \end{aligned}$$

Данная программа по сравнению с программой 7.11 обеспечивает более высокую точность при  $k_1 \ll 1$ . Однако функции  $\text{sn}(x, k)$  и  $\text{cn}(y, k)$ , через которые выражаются искомые функции, здесь вычисляются только по модулю (ср. формулу (7.49)). Поэтому программу можно использовать, лишь когда  $\text{sn}(x, k)$  и  $\text{cn}(y, k)$  положительны, т. е. при  $x \leq K(k)$  (ниже заштрихованной области на рис. 7.1) и при  $y \leq K'(k)$  (ниже заштрихованной области на рис. 7.1, если на нем независимой переменной является (в том же масштабе)  $k$ ).

**Программа 7.13.** Тета-функции Невилля  $\vartheta_s(u, k), \vartheta_c(u, k)$  вещественного аргумента. Разложения в ряды (7.51), (7.52) и схема Горнера (7.56). Переключатель Р — Г в положении Г.

Farsin	Fcos	ПВ	Farccos	Fsin	ПС	П8	ИП6	Fx $\neq 0$	14
ИПВ	ИП8	$\times$	П8	ПП	79	П9	ИПД	$\times$	1
8	0	$\times$	Фл	$\div$	П7	ИПС	ПВ	ПП	79
ИП9	$\div$	F1/x	Фл	$\times$	Fe <sup>x</sup>	ПА	Fx <sup>2</sup>	ПВ	Fx <sup>2</sup>
Fx <sup>2</sup>	Fx <sup>2</sup>	ИП6	2	$\times$	Fcos	$\times$	ПС	7	П0
ИПС	ИПВ	$\div$	ПС	$\div$	ИП0	2	$\times$	1	—
ИП7	$\times$	ИП6	—	Fcos	+	FL0	50	4	ИП9
$\times$	ИПА	Fv <sup>—</sup>	$\div$	ИП8	$\div$	Fv <sup>—</sup>	$\times$	С/П	1
ПА	6	П0	ИПА	ИПВ	+	2	$\div$	ИПА	ИПВ
Fv <sup>—</sup>	ПВ	ХУ	ПА	FL0	83	В/О			

Использование программы при задании модуля, модулярного угла или дополнительного модуля отличается способом пуска.

Структура программы

- 00—13: расчет исходных параметров,  
 14—36: вычисление обратной величины параметра Якоби  $q$  и параметра  $v$ , входящего в ряды ((7.51) — (7.54), (7.58)),  
 37—67: суммирование ряда по формуле (7.51),  
 68—78: окончательное вычисление  $\vartheta_s$  или  $\vartheta_c$ ,  
 79—97: подпрограмма вычисления полного эллиптического интеграла первого рода с использованием схемы АГС (7.11).

## Инструкция

1. Исходные данные (кроме модульного параметра):

- а) функция  $\vartheta_s(u, k)$  ( $u = \text{РД}$ ),  $90 = \text{Р6}$ ,  
 б) функция  $\vartheta_c(u, k)$  ( $u = \text{РД}$ ),  $0 = \text{Р6}$ .

2. Ввод модульного параметра и пуск:

- а) модуль  $[k = \text{РХ}]$  В/О С/П,  
 б) модулярный угол в градусах  $[\alpha = \text{РХ}]$  БП 01 С/П,  
 в) дополнительный модуль  $[k_1 = \text{РХ}]$  БП 02 С/П.

3. Результат:  $\text{РХ} = \vartheta_s(u, k)$  (или  $\text{РХ} = \vartheta_c(u, k)$  в зависимости от числа, введенного в регистр Р6),  $\text{РА} = 1/q(k)$ .

4. Регистры: рабочие РА, РД; оперативные Р0, Р6 — Р9, РВ, РС; свободные Р1 — Р5.

5. Погрешность относительная меньше  $5 \cdot 10^{-7}$  при  $0 \leq k \leq (1 - 1 \cdot 10^{-12})$ .

6. Время счета для каждой из функций  $\vartheta_s(u, k), \vartheta_c(u, k)$   $t \approx 2,5$  мин.

**Примеры.**

$$\vartheta_s(0,5360162; 0,3) = 0,51187555; \vartheta_c(0,5360162; 0,3) = 0,86599541.$$

Отношение вычисленных функций равно эллиптической функции Якоби  $\text{cs}(0,5360162; 0,3) = \vartheta_c/\vartheta_s = 1,6918085$  (1,6918083 [9]).

**Программа 7.14.** Тета-функции Невилля  $\vartheta_n(u, k), \vartheta_d(u, k)$  вещественного аргумента. Разложения в ряды (7.53), (7.54) и схема Горнера (7.57). Переключатель Р — Г в положении Г.

Farsin	Fcos	ПВ	Farccos	Fsin	ПС	ИПВ	П8	ИП6	Fx $\geq 0$
13	1	П8	ПП	73	П9	ИПД	$\times$	1	8
0	$\times$	Фл	$\div$	П7	ИПС	ПВ	ПП	73	ИП9
$\div$	F1/x	Фл	$\times$	/—/	Fe <sup>x</sup>	ПА	Fx <sup>2</sup>	ПВ	Fx <sup>2</sup>
Fx <sup>2</sup>	Fx <sup>2</sup>	ИПА	$\div$	ИП6	$\times$	ПС	7	П0	ИП0
2	$\times$	ИП7	$\times$	Fcos	+	ИПС	ИПВ	$\div$	ПС
$\times$	FL0	49	2	$\times$	1	+	ИП9	ИП8	$\div$
Fv <sup>—</sup>	$\times$	С/П	1	ПА	6	П0	ИПА	ИПВ	+
2	$\div$	ИПА	ИПВ	$\times$	Fv <sup>—</sup>	ПВ	ХУ	ПА	FL0
77	В/О								

Использование программы при задании в качестве исходных данных модуля, модулярного угла и дополнительного модуля отличается лишь способом ввода.

## Инструкция

1. Исходные данные (кроме модульного параметра):

- а) функция  $\vartheta_n(u, k)$  ( $u = \text{РД}$ ),  $-1 = \text{Р6}$ ;  
 б) функция  $\vartheta_d(u, k)$  ( $u = \text{РД}$ ),  $1 = \text{Р6}$ .

2. Ввод модульного параметра и пуск:

- а) модуль  $[k = \text{РХ}]$  В/О С/П,  
 б) модулярный угол в градусах  $[\alpha = \text{РХ}]$  БП 101 С/П,  
 в) дополнительный модуль  $[k_1 = \text{РХ}]$  БП 02 С/П.

3. Результат:  $\text{РХ} = \vartheta_n(u, k)$  (или  $\text{РХ} = \vartheta_d(u, k)$  в зависимости от числа, введенного в регистр Р6),  $\text{РА} = q(k)$ .

4. Регистры: рабочие РА, РД; оперативные Р0, Р6 — Р9, РВ, РС; свободные Р1 — Р5.

5. Погрешность относительная меньше  $5 \cdot 10^{-7}$  при  $0 \leq k \leq (1 - 1 \cdot 10^{-12})$ .

6. Время счета для каждой из функций  $t \approx 2$  мин.

**Примеры.**

$$\vartheta_n(0,20, 0,9) = 1,0096639; \vartheta_d(0,20, 0,9) = 0,99356568, q = 0,10235243$$

Отношение вычисленных функций равно эллиптической функции Якоби:  $\vartheta_d/\vartheta_n = \text{dn}(0,20; 0,9) = 0,98405586$  (0,98406 [9]).

# Указатель программ

Номер программы	Функция	Область определения	Число шагов	Число регистров памяти	Примечание
7.1	$K(k)$	$0 \leq k \leq (1 - 1 \cdot 10^{-15})$	27	3	Метод АГС
7.2	$K(k), q(k)$	$0 \leq k \leq (1 - 1 \cdot 10^{-18})$	44	5	То же
7.3	$K(k), E(k)$	$0 \leq k \leq (1 - 1 \cdot 10^{-199})$	52	5	»
7.4	$F(\varphi, k)$	$0 \leq k \leq (1 - 1 \cdot 10^{-8})$	58	6	Понижающее преобразование Ландена
7.5	$F(\varphi, k), E(\varphi, k), Z(\varphi, k), K(k), E(k)$	$0 \leq k \leq (1 - 1 \cdot 10^{-13})$	96	9	Понижающее преобразование Ландена, схема АГС
7.6	$N(n, a, k)$	$0 \leq k \leq (1 - 1 \cdot 10^{-13})$	69	7	Метод АГС
7.7	$F(\varphi, k)$ или $E(\varphi, k)$	$0 \leq k \leq 1$	59	6	Прямое вычисление интегралов
7.8	$\Pi(n, \varphi, k)$	$0 \leq k \leq 1$	68	9	То же
7.9	$sn(u, k), cn(u, k), dn(u, k)$	$0 \leq u \leq K(k), 0 \leq k \leq (1 - 1 \cdot 10^{-7})$	67	12	Метод АГС
7.10	$sn(u, k), cn(u, k), dn(u, k)$	$0 \leq u \leq K(k), 0 \leq k \leq (1 - 1 \cdot 10^{-8})$	71	11	Понижающее преобразование Ландена. Требуется знака $cn(u, k)$ . Погрешность меньше, чем для программы 7.9. Метод АГС
7.11	$sn(u, k), cn(u, k), dn(u, k), u = x + jy$	$0 \leq x \leq K(k), 0 \leq y \leq K'(k), 0 \leq k \leq (1 - 1 \cdot 10^{-7})$	98	14	
7.12	$sn(u, k), cn(u, k), dn(u, k), u = x + jy$	$0 \leq x \leq K(k), 0 \leq y \leq K'(k), 0 \leq k \leq (1 - 1 \cdot 10^{-8})$	98	14	Понижающее преобразование Ландена. Требуется три последовательных пуска, корректировка знаков промежуточных величин. Погрешность меньше, чем для программы 7.11

Окончание

Номер программы	Функция	Область определения	Число шагов	Число регистров памяти	Примечание
7.13	$\vartheta_s(u, k)$ или $\vartheta_c(u, k)$	$0 \leq k \leq (1 - 1 \cdot 10^{-12})$	98	9	Разложение в ряды по параметру Якоби, схема АГС
7.14	$\vartheta_n(u, k)$ или $\vartheta_d(u, k)$	$0 \leq k \leq (1 - 1 \cdot 10^{-12})$	92	9	То же

## Глава 8

### Ортогональные многочлены вещественного и комплексного аргументов

Далее приведены алгоритмы и программы вычисления значений ряда ортогональных многочленов и некоторых других связанных с ними величин. Каждый из многочленов удовлетворяет соответствующему дифференциальному уравнению второго порядка (линейному однородному) и некоторым дополнительным условиям, позволяющим выделить нужную функцию из семейства решений. Эти условия носят характер разложений в степенные ряды, асимптотических разложений и пр. Ниже за основную взяты определения первых двух многочленов (степеней 0 и 1). Вместе с трехчленными рекуррентными формулами они образуют простой алгоритм для вычислений значений многочленов и их производных.

#### 8.1. Многочлены Чебышева первого и второго рода и их производные. Нули многочленов

Дифференциальное уравнение для  $T_n(x)$ , совпадающее с уравнением для  $\sqrt{1-x^2}U_{n-1}(x)$ , имеет вид

$$(1-x^2) \frac{d^2 T_n}{dx^2} - x \frac{dT_n}{dx} + n^2 T_n = 0. \quad (8.1)$$

$T_n(x)$  и  $U_n(x)$  — многочлены Чебышева соответственно первого и второго рода;  $n$  — степень многочлена.

Рекуррентные формулы

$$Z_{n+1}(x) = 2xZ_n(x) - Z_{n-1}(x), \quad (8.2)$$

где  $Z_n(x) = T_n(x), U_n(x)$ . Кроме того,  $T_n$  связаны с  $U_n$ :

$$\begin{aligned} T_n(x) &= U_n(x) - xU_{n-1}(x); \\ U_n(x) &= [T_n(x) - xT_{n+1}(x)]/(1-x^2). \end{aligned} \quad (8.3)$$

Производные многочленов удовлетворяют следующим рекуррентным формулам:

$$T'_n(x) = \frac{n}{1-x^2} [T_{n-1}(x) - xT_n(x)] = nU_{n-1}; \quad (8.4)$$

$$U'_n(x) = \frac{1}{1-x^2} [(n+1)U_{n-1}(x) - nxU_n(x)].$$

Нулевые и первые многочлены:

$$\begin{aligned} T_0 &= 1, \quad T_1 = x; \\ U_0 &= 1, \quad U_1 = 2x. \end{aligned} \quad (8.5)$$

Для вычисления  $T_n(x)$  и  $U_n(x)$  применимы также тригонометрические формулы

$$\begin{aligned} T_n(x) &= \cos(n \arccos x); \\ U_n(x) &= \sin[(n+1) \arccos x] / \sin \arccos x. \end{aligned} \quad (8.6)$$

$T_n(x)$  ортогональны на интервале  $(-1, 1)$  с весом  $(1-x^2)^{-1/2}$ :

$$\int_{-1}^1 (1-x^2)^{-1/2} T_n(x) T_m(x) dx = \frac{\pi}{2} \varepsilon \delta_{m,n}, \quad (8.7)$$

где  $\varepsilon = 2$  при  $m = n = 0$ ,  $\varepsilon = 1$  при всех других  $m, n$ . Условие ортогональности для  $U_n(x)$ :

$$\int_{-1}^1 (1-x^2)^{1/2} U_n(x) U_m(x) dx = \frac{\pi}{2} \delta_{mn}. \quad (8.8)$$

Нули многочленов Чебышева (как и других ортогональных многочленов) действительные и простые. Все  $n$  нулей каждого многочлена  $T_n$  и  $U_n$  расположены на интервале ортогональности. Нули  $\tau_m^{(n)}$  и  $u_m^{(n)}$  соответственно многочленов  $T_n(x)$  и  $U_n(x)$ :

$$\tau_m^{(n)} = \cos \frac{2m-1}{2n} \pi; \quad u_m^{(n)} = \cos \frac{m}{n+1} \pi, \quad m=1, 2, \dots, n. \quad (8.9)$$

**Программа 8.1.** Многочлены  $T_n(x)$ ,  $U_n(x)$  вещественного аргумента. Тригонометрические формулы (8.6).

Farccos ПС ИПД 1 + × Fsin ИПС Fsin ÷  
ПВ С/П ИПД ИПС × Fcos С/П

Программа предусматривает два последовательных пуска.

Инструкция

1. Исходные данные: ( $n = \text{РД}$ ), [ $x = \text{РХ}$ ].
2. Пуск 1: В/О С/П.
3. Результат:  $\text{РХ} = \text{РВ} = U_n(x)$ .
4. Пуск 2: С/П.
5. Результат:  $\text{РХ} = T_n(x)$ ,  $\text{РВ} = U_n(x)$ .
6. Регистры: рабочие РВ, РД; оперативные РС; свободные Р0 — РА.
7. Погрешность абсолютная меньше  $1 \cdot 10^{-6}$ .
8. Время счета  $t \approx 15$  с.

Примеры.  $U_{12}(0,8) = 1,4533249$  (1,45332536 [9]);

$$T_{12}(0,8) = 0,13158518$$
 (0,13158561 [9]).

**Программа 8.2.** Многочлены Чебышева  $T_{n-1}$ ,  $T_n$ ,  $T_{n+1}$ ,  $U_n$ . Рекуррентные формулы (8.2), (8.3) и формулы (8.5).

П7 2 × П8 1 П9 ИП7 ПВ ИП9 ПА  
/—/ ИПВ П9 ИП8 × — FL0 07 ПС С/П  
ИПВ ИПС ИП7 × — 1 ИП7 Fx² — ÷  
ПД С/П

Программа предусматривает два последовательных пуска.

Инструкция

1. Исходные данные:  $n = \text{Р0}$ , [ $x = \text{РХ}$ ].
2. Пуск 1 (вычисление  $T_h$ ): В/О С/П.
3. Результат:  $\text{РА} = T_{n-1}(x)$ ,  $\text{РВ} = T_n(x)$ ,  $\text{РС} = T_{n+1}(x)$ .
4. Пуск 2 (вычисление  $U_n$ ): С/П.
5. Результат:  $\text{РХ} = \text{РД} = U_n(x)$ ,  $\text{РА} = T_{n-1}(x)$ ,  $\text{РВ} = T_n(x)$ ,  $\text{РС} = T_{n+1}(x)$ .
6. Регистры: рабочие РА — РД; оперативные Р0, Р7 — Р9; свободные Р1 — Р6.
7. Погрешность абсолютная меньше  $5 \cdot 10^{-8}$ .
8. Время счета  $t \approx (4n)$  с.

Примеры.

$$T_{10}(0,6) = -0,98849658$$
 (−0,988496589 [9]),

$$T_{11}(0,6) = -0,71409250$$
 (−0,71409248 [9]),

$$T_{12}(0,6) = 0,13158558$$
 (0,13158561 [9]);

$$U_{11}(0,6) = -1,23913100$$
 (−1,23913101 [9]).

**Программа 8.3.** Производные многочленов Чебышева  $T'_n(x)$ ,  $U'_n(x)$ , значения многочленов Чебышева  $T_{n-1}(x)$ ,  $T_n(x)$ ,  $T_{n+1}(x)$ ,  $U_{n-1}(x)$ ,  $U_n(x)$ . Рекуррентные формулы (8.2) — (8.4) и формулы (8.5).

П4 2 × П8 1 П9 ИП4 ПВ ИП9 ПА  
/—/ ИПВ П9 ИП8 × + FL0 07 ПС ИПВ  
ИПС ИП4 × — 1 ИП4 Fx² — П6 ÷  
П9 ИПА ИПВ ИП4 × — ИП6 ÷ П8 ИП5  
× ПД ИП8 ИП5 1 + × ИП9 ИП4 ×  
ИП5 — — ИП6 ÷ П7 С,П

Инструкция

1. Исходные данные:  $n = \text{Р0}$  — Р5, [ $x = \text{РХ}$ ].
2. Пуск: В/О С/П.
3. Результат:  $\text{Р8} = U_{n-1}(x)$ ,  $\text{Р9} = U_n(x)$ ,  $\text{РА} = T_{n-1}(x)$ ,  $\text{РВ} = T_n(x)$ ,  $\text{РС} = T_{n+1}(x)$ ,  $\text{РД} = T'_n(x)$ ,  $\text{Р7} = U'_n(x)$ ,  $\text{Р5} = n$ .
4. Регистры: рабочие Р7 — РД; оперативные Р0, Р4 — Р6; свободные Р1 — Р3.
5. Погрешность абсолютная меньше  $5 \cdot 10^{-8}$ .
6. Время счета  $t \approx (5n)$  с.

Примеры.

$$T_7(0,5) = 0,5, \quad T_8(0,5) = -0,5, \quad T_9(0,5) = -1;$$

$$U_7(0,5) = 1, \quad U_8(0,5) = 0;$$

$$T'_8(0,5) = 8, \quad U'_8(0,5) = 12.$$

Все результаты точные.

**Программа 8.4.** Нули  $\tau_m^{(n)}$ ,  $u_m^{(n)}$  многочленов  $T_n(x)$ ,  $U_n(x)$  соответственно (8.9).

ПС	0	П6	КИП6	ИП6	2	×	1	—	Flп
×	2	÷	ИПС	÷	Fcos	ПВ	ИП6	Fπ	×
ИПС	1	+	÷	Fcos	ПА	ИП6	С/П	ИПВ	/—/
Fx>0	03	/—/	Flп						

Последовательно вычисляются нули от  $m = 1$  (наибольший положительный нуль) до  $m = (n + \epsilon)/2$ , где  $\epsilon = 0; 1$  соответственно для четных и нечетных  $n$ . Остальные нули отличаются только знаком от указанных выше:  $\tau_m^{(n)} = -\tau_{n-m+1}^{(n)}$ ,  $u_m^{(n)} = -u_{n-m+1}^{(n)}$ .

- Программа предусматривает серию последовательных пусков.
- И н с т р у к ц и я**
1. Исходные данные:  $[n = PX]$ .
  2. Пуск 1 (вычисление 1-го нуля): В/О С/П.
  3. Результат:  $PX = P6 = 1$  (номер вычисленного нуля),  $PВ = \tau_1^{(n)}$ ,  $РА = u_1^{(n)}$ .
  4. Пуск 2 (вычисление 2-го нуля): С/П.
  5. Результат:  $PX = P6 = 2$  (номер вычисленного нуля),  $PВ = \tau_2^{(n)}$ ,  $РА = u_2^{(n)}$ . Далее пуски повторяются. После исчерпания всех неотрицательных нулей, т. е. при выполнении  $((n + \epsilon)/2 + 1)$ -го пуска, на индикаторе появляется символ ЕГГОГ.
  6. Регистры: рабочие P6, РА — РС; оперативные — ; свободные РО — P5, P7 — P9, PД.
  7. Погрешность абсолютная меньше  $1 \cdot 10^{-7}$ .
  8. Время счета одного нуля  $t \approx 15$  с.

**Пример.** Нули  $T_5$  и  $U_5$ :

$$\tau_1^{(5)} = 0,95105655, \tau_2^{(5)} = 0,58778526, \tau_3^{(5)} = 0;$$

$$u_1^{(5)} = 0,86602544, u_2^{(5)} = 0,50000005, u_3^{(5)} = 0.$$

Остальные нули получаются изменением знака вычисленных:

$$\tau_4^{(5)} = -0,58778526, \tau_5^{(5)} = -0,95105655;$$

$$u_4^{(5)} = -0,50000005, u_5^{(5)} = -0,86602544.$$

## 8.2. Суммирование рядов по многочленам Чебышева.

### Разложение степенной функции по многочленам Чебышева.

#### Экономизация степенных рядов

Важным свойством  $T_n(x)$ , используемым, в частности, в теории аппроксимации, является минимальность отклонения многочленов  $T_n(x)/2^{n-1}$  от нуля на интервале  $(-1, 1)$  по сравнению с любым другим многочленом степени  $n$ , имеющим равный 1 коэффициент при старшем члене  $(x^n)$ . Ввиду того, что  $|T_n(x)| \leq 1$ , это отклонение не превышает  $1/2^{n-1}$ . Указанное свойство позволяет строить наилучшие приближения в смысле минимума отклонения приближенного значения функции  $\bar{f}(x)$  от истинного  $f(x)$  на заданном интервале путем их аппроксимации рядами по многочленам Чебышева:

$$\bar{f}(x) = \sum_{k=0}^N a_k T_k(x) \quad (8.10)$$

Если функция  $f(x)$  четная, или нечетная, то суммы (8.10) содержат только многочлены Чебышева четного или нечетного порядка:

$$\bar{f}(x) = \sum_{k=0}^N b_k T_{2k}(x); \quad (8.11)$$

$$\bar{f}(x) = \sum_{k=0}^N c_k T_{2k+1}(x). \quad (8.12)$$

В ряде случаев удобны «смещенные» многочлены Чебышева

$$T_n^*(x) = T_n(2x-1), \quad (8.13)$$

которые ортогональны на интервале  $0 \leq x \leq 1$  (ср. (8.7)):

$$\int_0^1 \frac{T_n^*(x) T_m^*(x)}{[x(1-x)]^{1/2}} dx = \frac{\pi}{2} \delta_{nm}. \quad (8.14)$$

Они обладают аналогичными с  $T_n(x)$  аппроксимирующими свойствами на интервале  $(0, 1)$ , и соответствующее разложение имеет вид

$$\bar{f}(x) = \sum_{k=0}^N a_k^* T_k^*(x). \quad (8.15)$$

Табулирование (8.10) — (8.12), (8.15) можно производить путем вычисления  $T_k$  или  $T_k^*$  по соответствующим формулам и подстановки этих значений в ряды. Второй способ состоит в подстановке в ряды явных выражений для многочленов Чебышева

$$T_n(x) = \sum_{m=0}^n g_m x^m. \quad (8.16)$$

Получающиеся после этого степенные ряды можно суммировать, например, по схеме Горнера. Однако наиболее экономичным является, по-видимому, использование рекуррентных соотношений Кленшо (см., например, [10]), которые аналогичны схеме Горнера (ср. (1.11) и непосредственно дают значения  $f(x)$ , минуя вычисление  $T_n$ . Применение подобных соотношений приводит к таким же [10] и даже меньшим [19] погрешностям округления, чем схема Горнера для степенных рядов, получаемых из (8.10) — (8.12) путем подстановки в них (8.16).

Ниже приведены соотношения Кленшо для соответствующих сумм. Эти трехчленные рекуррентные формулы определяют последовательность величин  $B_{N+2}$ ,  $B_{N+1}$ ,  $B_N, \dots, B_1, B_0$ . Схемы используются в обратном порядке начиная с  $B_{N+2} = B_{N+1} = 0$ . Члены  $B_1, B_0$  дают искомые значения функций.

*Общее разложение по многочленам Чебышева (8.10):*

$$B_n = 2xB_{n+1} - B_{n+2} + a_n, \quad n = N, N-1, \dots, 1, 0; \quad (8.17)$$

$$\bar{f}(x) = B_0 - xB_1.$$

*Разложение по четным многочленам (8.11):*

$$B_n = 2(2x^2 - 1)B_{n+1} - B_{n+2} + b_n, \quad n = N, N-1, \dots, 1, 0; \quad (8.18)$$

$$\bar{f}(x) = B_0 - (2x^2 - 1)B_1.$$

*Разложение по нечетным многочленам (8.12):*

$$B_n = 2(2x^2 - 1)B_{n+1} - B_{n+2} + c_n, \quad n = N, N-1, \dots, 1, 0; \quad (8.19)$$

$$\bar{f}(x) = x(B_0 - b_1).$$

Разложение по смещенным многочленам Чебышева (8.13):

$$B_n = 2(2x-1)B_{n+1} - B_{n+2} + a_n^*, \quad n=N, N-1, \dots, 1, 0; \quad (8.20)$$

$$f(x) = B_0 - (2x-1)B_1.$$

Указанные алгоритмы реализованы далее в программах 8.5—8.8 при учете  $N$  вплоть до  $N_{\max} = 11$ , обеспечивая высокую скорость и точность (погрешность не превышает нескольких единиц последней значащей цифры результата). Это позволяет использовать значительное число известных разложений по многочленам Чебышева, которые найдены для ряда специальных функций и их интегралов (см., например, [10]). Аналогичные алгоритмы получены для вычисления производных функций, определяемых соотношениями типа (8.10) [10]. Однако в этом случае погрешности аппроксимации существенно выше.

Многочлены Чебышева позволяют эффективно экономизировать степенные ряды, т. е. аппроксимировать их с гарантированной точностью укороченными отрезками рядов на требуемом интервале (см., например, [20]). Пусть функция  $f(x)$  определена отрезком степенного ряда

$$f(x) = \sum_{p=0}^n a_p x^p. \quad (8.21)$$

Разложим степени  $x^p$  по многочленам Чебышева:

$$x^p = \sum_{k=0}^p d_k^{(p)} T_k(x) \quad (8.22)$$

и подставим (8.22) в (8.21):

$$f(x) = \sum_{p=0}^n \sum_{k=0}^p a_p d_k^{(p)} T_k(x) = \sum_{p=0}^n r_p^{(n)} T_p(x). \quad (8.23)$$

Если  $r_p^{(n)}$  убывают с ростом  $p$ , то, учитывая неравенство

$$|T_p(x)| \leq 1. \quad (8.24)$$

можно отбросить в (8.23) некоторое число членов с  $N+1 \leq p \leq n$ . Усеченный ряд

$$\overline{f(x)} = \sum_{p=0}^N r_p^{(n)} T_p(x), \quad N < n, \quad (8.25)$$

дает приближенное значение  $f(x)$  на интервале  $[-1, 1]$  с известной верхней границей погрешности. Действительно, из (8.24) следует

$$|\overline{f(x)} - f(x)| \leq \sum_{p=N+1}^n |r_p^{(n)}|. \quad (8.26)$$

Если подставить в (8.25) явные выражения  $T_p$  через  $x$ , то получится *экономизированный степенной ряд* порядка  $N < n$ , дающий значения  $f(x)$  с погрешностью, меньшей, чем (8.26). На практике, однако, не всегда целесообразно выполнять последнюю процедуру, достаточно непосредственно суммировать усеченные ряды по многочленам Чебышева, пользуясь формулами (8.17) (или (8.18) — (8.20), если применять разложения по  $T_{2n}$ ,  $T_{2n+1}$ ,  $T_n^*$  соответственно).

Далее приводится программа 8.10 нахождения коэффициентов  $r_p^{(n)}$  экономизированного ряда (8.25) при любом числе членов исходного степенного ряда

(8.21). Программа основана на разложении степенной функции по многочленам Чебышева (программа 8.9). Перепишем (8.22) явно для четных и нечетных  $p$ :

$$x^{2m+\varepsilon} = \sum_{k=0}^m d_k^{(p)} T_{2k+\varepsilon}(x), \quad (8.27)$$

где  $p = 2m + \varepsilon$ ,  $\varepsilon = 0, 1$ . Коэффициенты  $d_k^{(p)}$  определяются формулами [10]

$$d_k^{(p)} = \frac{g_{\varepsilon, k} (2m + \varepsilon)!}{2^{2m+\varepsilon} (m-k)! (m+k+\varepsilon)!}. \quad (8.28)$$

Здесь  $g_{\varepsilon, k} = \begin{cases} 1, & \varepsilon = k = 0, \\ 2 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$

Погрешность экономизации можно оценить, вычислив  $r_p^{(n)}$  для  $N+1 \leq p \leq n$ . При  $n = 12$  (степень исходного ряда) погрешность приближению равна

$$\sum_{k=N+1}^7 |r_p^{(n)}| + \frac{1}{100} \left[ |a_8| + \frac{1}{2} |a_9| + 2 |a_{10}| + |a_{11}| + 4 |a_{12}| \right]. \quad (8.29)$$

Здесь  $N$  — степень экономизированного ряда (в программе  $N_{\max} = 7$ ), коэффициенты  $r_p^{(n)}$ , входящие в  $\sum_{N+1}^n$ , непосредственно вычисляются в программе.

**Программа 8.5.** Суммирование рядов по многочленам Чебышева  $S_N = \sum_{k=0}^N a_k T_k(x)$ ,  $N \leq 11$ . Рекуррентная формула (8.17).

ПС 0    ↑    FBx    F,    XY    FBx    ИПС    × 2  
×    —    /—/    КИПД    +    ИПД    1    —    ПД    Fx < 0  
04   F,   XY   ИПС   ×   —    С/П

Инструкция

1. Исходные данные:  $a_0 = P0$ ,  $a_1 = P1$ , ...,  $a_N = PN$ ,  $N = PД$ ,  $[x = PX]$ .

Здесь  $P10 \equiv PA$ ,  $P11 \equiv PB$ .

2. Пуск: В/О С/П.

3. Результат:  $PX = S_N$ .

4. Регистры: рабочие  $P0 - PN$ ; оперативные  $РС$ ,  $РД$ ; свободные  $P(N+1) - PB$  (при  $N < 11$ ); при  $N = 11$  свободных регистров нет.

5. Погрешность абсолютная меньше  $1 \cdot 10^{-7} M$ , где  $M = \max |a_k|$ .

6. Время счета  $t \approx (N/10)$  мин.

Пример. Вычисление модифицированной функции Бесселя  $K_1(x)$  при больших значениях аргумента. Согласно [10] при  $x \geq 5$

$$e^x K_1(x) \approx \sqrt{\frac{\pi}{2x}} \sum_{k=0}^N a_k T_k\left(\frac{10}{x} - 1\right).$$

Коэффициенты  $a_k$  убывают настолько быстро, что достаточно для точности  $1 \cdot 10^{-8}$  ограничиться  $N = 5$ :

$$a_0 = 1,0359509, \quad a_1 = 3,5465291 \cdot 10^{-2}, \quad a_2 = -4,6847503 \cdot 10^{-4},$$

$$a_3 = 1,6185064 \cdot 10^{-5}, \quad a_4 = -8,4517 \cdot 10^{-7}, \quad a_5 = 5,71 \cdot 10^{-8} \quad (\text{в [10] приведены } a_k \text{ до } k=20 \text{ включительно});$$

даны  $a_k$  до  $k=20$  включительно);

$$e^8 K_1(8) = 0,46314909 \quad (0,46314909 [9]), \quad t \approx 30 \text{ с};$$

$$e^{20} K_1(20) = 0,28542547 \quad (0,28542550 [9]), \quad t \approx 30 \text{ с}.$$



**Программа 8.6.** Суммирование рядов по четным многочленам Чебышева

$$S_{2N} = \sum_{k=0}^N b_k T_{2k}(x), N \leq 11. \text{ Рекуррентная формула (8.18)}$$

FX <sup>2</sup>	2	×	1	—	ПС 0	↑	FBx	F,
XY	FBx	ИПС	×	2	×	—	/—/	КИПД +
ИПД	1	—	ПД	Fx<0	09	F,	XY	ИПС ×
—	С/П							

**Инструкция**

1. Исходные данные:  $b_0 = P0, b_1 = P1, \dots, b_N = PN, N = PД, [x = PX]$ .  
Здесь  $P10 \equiv PA, P11 \equiv PB$ .
2. Пуск: В/О С/П.
3. Результат:  $PX = S_{2N}$ .
4. Регистры: рабочие  $P0 - PN$ ; оперативные РС, РД; свободные  $P(N+1) - PB$  (при  $N < 11$ ); при  $N = 11$  свободных регистров нет.
5. Погрешность абсолютная меньше  $1 \cdot 10^{-7} M$ , где  $M = \max |b_k|$ .
6. Время счета  $t \approx (N/10)$  мин.

*Пример.* Вычисление функции Бесселя  $J_0(x)$  при  $-8 \leq x \leq 8$ . Согласно

$$[10] J_0(x) \approx \sum_{k=0}^N b_k T_{2k}(x/8). \text{ Значения } b_k \text{ до } k = 17 \text{ приведены в [10]. Ограничимся } N = 10:$$

$$\begin{aligned} b_0 &= 1,5772797 \cdot 10^{-1}, b_1 = -8,723442 \cdot 10^{-3}, b_2 = 2,6517861 \cdot 10^{-1}, \\ b_3 &= -3,7009499 \cdot 10^{-1}, b_4 = 1,580671 \cdot 10^{-1}, b_5 = -3,489377 \cdot 10^{-2}, \\ b_6 &= 4,81918 \cdot 10^{-3}, b_7 = -4,60626 \cdot 10^{-4}, b_8 = 3,246 \cdot 10^{-5}, \\ b_9 &= -1,762 \cdot 10^{-6}, b_{10} = 7,6 \cdot 10^{-8}; \\ J_0(4) &= 0,3971498 (-0,3971498 [9]), \\ J_0(8) &= 0,17165081 (0,17165081 [9]), t = 1 \text{ мин.} \end{aligned}$$

**Программа 8.7.** Суммирование рядов по нечетным многочленам Чебышева

$$S_{2N+1} = \sum_{k=0}^N c_k T_{2k+1}(x), N \leq 11. \text{ Рекуррентная формула (8.19).}$$

ПС 0	↑	FBx	F,	ИПС	FX <sup>2</sup> 2	×	1
— 2	×	XY	×	FBx	F,	—	/—/ КИПД
+ XY	F,	ИПД	1	—	ПД	Fx<0	04 F,
XY	—	ИПС	×	С/П			

**Инструкция**

1. Исходные данные:  $c_0 = P0, c_1 = P1, \dots, c_N = PN, N = PД, [x = PX]$ .  
( $P10 \equiv PA, P11 \equiv PB$ ).
2. Пуск: В/О С/П.
3. Результат:  $PX = S_{2N+1}$ .
4. Регистры: рабочие  $P0 - PN$ ; оперативные РС, РД; свободные  $P(N+1) - PB$ ; при  $N = 11$  свободных регистров нет.
5. Погрешность абсолютная меньше  $1 \cdot 10^{-7} M$ , где  $M = \max |c_k|$ .
6. Время счета  $t \approx (N - 8)$  мин.

*Пример.* Вычисление функции Бесселя  $J_1(x)$  при  $-8 \leq x \leq 8$ . Согласно

$$[10] J_1(x) \approx \sum_{k=0}^N c_k T_{2k+1}(x/8). \text{ Значения } c_k \text{ до } k = 17 \text{ с 20 десятичными зна-}$$

ками приведены в [10]. Ниже выписаны значения  $c_k$  до  $k = 10$  с 8 десятичными знаками:

$$\begin{aligned} c_0 &= 5,245819 \cdot 10^{-2}, c_1 = 4,809647 \cdot 10^{-2}, c_2 = 3,1327508 \cdot 10^{-1}, \\ c_3 &= -2,4186741 \cdot 10^{-1}, c_4 = 7,42668 \cdot 10^{-2}, c_5 = -1,2967627 \cdot 10^{-2}, \\ c_6 &= 1,48991 \cdot 10^{-3}, c_7 = -1,2228 \cdot 10^{-4}, c_8 = 7,563 \cdot 10^{-6}, c_9 = -3,66 \cdot 10^{-7}, \\ c_{10} &= 1,43 \cdot 10^{-8}, \\ J_1(3) &= 0,33905895 (0,33905896 [9]), \\ J_1(7) &= -0,004682834 (-0,004682824 [9]), t \approx 1,5 \text{ мин.} \end{aligned}$$

**Программа 8.8.** Суммирование рядов по смещенным многочленам Чебышева

$$S_N^* = \sum_{k=0}^N a_k^* T_k^*(x), N \leq 11. \text{ Рекуррентная формула (8.20).}$$

↑	2	×	1	—	ПС 0	↑	FBx	F,
XY	FBx	ИПС	×	2	×	—	/—/	КИПД +
ИПД	1	—	ПД	Fx<0	09	F,	XY	ИПС ×
—	С/П							

**Инструкция**

1. Исходные данные:  $a_0^* = P0, a_1^* = P1, \dots, a_N^* = PN, N = PД, [x = PX]$ .  
Здесь  $P10 \equiv PA, P11 \equiv PB$ .
2. Пуск: В/О С/П.
3. Результат:  $PX = S_N^*$ .
4. Регистры: рабочие  $P0 - PN$ ; оперативные РС, РД; свободные  $P(N+1) - PB$ ; при  $N = 11$  свободных регистров нет.
5. Погрешность абсолютная меньше  $1 \cdot 10^{-7} M$ , где  $M = \max |a_k|$ .
6. Время счета  $t \approx (N/10)$  мин.

*Пример.* Вычисление модифицированной функции Бесселя  $I_0(x)$  при больших значениях аргумента. При  $x \geq 8$  [10]

$$e^{-x} I_0(x) \approx (2\pi x)^{-1/2} \sum_{k=0}^N a_k^* T_k^*(8/x).$$

Значения  $a_k^*$  до  $k = 33$  с 20 десятичными знаками приведены в [10]. При вычислениях с 8 значащими цифрами достаточно принять  $N = 5$ :

$$\begin{aligned} a_0^* &= 1,0082792, a_1^* = 8,445123 \cdot 10^{-3}, a_2^* = 1,727 \cdot 10^{-4}, a_3^* = 7,248 \cdot 10^{-6}, \\ a_4^* &= 5,14 \cdot 10^{-7}, a_5^* = 5,7 \cdot 10^{-8}; \\ e^{-8,5} I_0(8,5) &= 0,13900184 (0,139001843 [9]), \\ e^{-19,8} I_0(19,8) &= 0,090238628 (0,090238617 [9]). \end{aligned}$$

**Программа 8.9.** Разложение степенной функции в ряд по многочленам Чебышева

$$x^p = \sum_{k=0}^m d_k^{(p)} T_{2k+\varepsilon}(x), p \equiv 2m + \varepsilon \leq 83, \varepsilon = 0, 1 (8.28).$$

ПО	2	÷	ПД	КИПД	ИПО	ИПД	2	×	—
ПА	ПС	1	ИПО	×	2	÷	FL0	13	ПВ
БП	32	ИПС	2	×	ИПА	—	С/П	ИПС	1
+	ПС	ИПС	Fx≠0	36	ИПВ	ИПВ	+	ИПС	ИПД
+	ПО	XY	ИПО	÷	FL0	43	ИПД	ИПС	—
ИПА	+	ПО	Fx≠0	62	F,	ИПО	÷	FL0	56
БП	22	ИПС	ИПД	+	XY	FLn			

Вычисление всех  $m + 1$  коэффициентов ряда  $d_k^{(p)}$  реализуется в результате  $m + 1$  последовательных пусков. После каждого пуска (за исключением последнего — см. инструкцию) в регистре РХ оказывается порядок соответствующего многочлена Чебышева (т. е. числа 0, 2, 4, ... для четных  $p$  и 1, 3, 5, ... — для нечетных  $p$ ), а в регистре РY — значение  $d_k^{(p)}$ .

#### Инструкция

- Исходные данные:  $[p = PX]$ .
- Пуск 1: В/О С/П.
- Результат после пуска 1:  $PX = \varepsilon$ ,  $PY = d_0^{(p)}$  ( $\varepsilon = 0,1$  при соответственно четных и нечетных  $p$ ).
- Пуск 2: С/П
- Результат после пуска 2:  $PX = \varepsilon + 2$ ,  $PY = d_1^{(p)}$ .
- .....
- Результат после пуска  $k$ :  $PX = \varepsilon + 2(k - 1)$ ,  $PY = d_{k-1}^{(p)}$ .
- Последний ( $m + 1$ )-й пуск: С/П.
- Результат после последнего пуска:  $PX = \text{ЕГГОГ}$ ,  $PY = p$ ,  $PZ = d_m^{(p)}$ .
- Регистры: рабочие —; оперативные Р0, РА — РД; свободные Р1 — Р9.
- Погрешность — единицы в последней значащей цифре.
- Время счета при первом пуске  $t \approx (4p)$ с, при последующих пусках по  $\sim 2p$  с. Полное время счета  $t \approx p^2$  с.

**Примеры.** Разложение  $x^9 = d_0^{(9)} T_1(x) + d_1^{(9)} T_3(x) + d_2^{(9)} T_5(x) +$

$$+ d_3^{(9)} T_7(x) + d_4^{(9)} T_9(x)$$

Номер пуска	1	2	3	4	5
$d_k^{(9)}$	$d_0^{(9)}=0,4921875$	$d_1^{(9)}=0,328125$	$d_2^{(9)}=0,140625$	$d_3^{(9)}=0,03515625$	$d_4^{(9)}=0,00390625$

Разложение  $x^8 = d_0^{(8)} T_0(x) + d_1^{(8)} T_2(x) + d_2^{(8)} T_4(x) + d_3^{(8)} T_6(x) + d_4^{(8)} T_8(x)$

Номер пуска	1	2	3	4	5
$d_0^{(8)}$	$d_0^{(8)}=0,2734375$	$d_1^{(8)}=0,4375$	$d_2^{(8)}=0,21875$	$d_3^{(8)}=0,0625$	$d_4^{(8)}=0,0078125$

Все результаты в обоих примерах — точные.

**Программа 8.10.** Экономизация степенного ряда  $f(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$  отрезком ряда  $\overline{f(x)} = \sum_{p=0}^N r_p^{(n)} T_p(x)$ ,  $N < n$ ,  $N \leq 7$ .

1	4	ПО	П1	0	КП1	FL0	04	1	ПА
С/П	ИПД	ИПА	/—/	П9	—	ПД	F,	1	ИПА
—	ПА	ПС	ИПД	2	×	+	ПО	1	ИПО
×	2	÷	FL0	29	ПВ	F,	F,	БП	48
ПП	84	ИПС	1	+	ПС	F,	F,	ИПС	Fx≠0
53	F,	ИПВ	ИПВ	+	ИПС	ИПД	+	ПО	F,
ИПО	÷	FL0	60	ИПД	ИПС	—	ИПА	+	ПО
Fx≠0	79	F,	ИПО	÷	FL0	73	БП	40	F,
ПП	84	БП	10	×	ИП9	2	+	П9	9
—	Fx<0	10	F,	КИП9	+	КП9	В/О		

В программе вычисляются коэффициенты  $r_0^{(n)}, r_1^{(n)}, \dots, r_N^{(n)}$  при произвольных  $n$ . Если получающийся в результате экономизации ряд должен содержать число членов ряда, меньшее 8, то остальные  $7 - N$  ( $N < 7$ ) используются для оценки погрешности экономизации (при  $n \leq 12$  — формула (8.29)). Реализация программы предполагает  $n$  последовательных пусков, где  $n$  — степень старшего члена исходного ряда. На первом пуске производится очистка регистров Р2 — РД, на втором вычисляются коэффициенты  $r_p^{(2)}$  ( $p = 0,1,2$ ) для ряда  $a_0 + a_1x + a_2x^2$ . На следующем пуске — коэффициенты  $r_p^{(3)}$  ( $p = 0,1,2,3$ ) для ряда  $a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$ , и так далее до исчерпания всего ряда. Время счета на первом пуске  $\sim 20$  с, на каждом последующем возрастает примерно на 15 с.

#### Инструкция

- Пуск 1: В/О С/П.
- Исходные данные для пуска 2:  $a_0 = P1$ ,  $a_1 = P2$ ,  $[a_2 = PX]$ .
- Пуск 2: С/П.
- Исходные данные для пуска 3:  $[a_3 = PX]$ .
- Пуск 3: С/П.
- .....
- Исходные данные для последнего ( $n$ -го) пуска:  $[a_n = PX]$ .
- Последний пуск: С/П.
- Результат:  $P1 = r_0^{(n)}$ ,  $P2 = r_1^{(n)}$ ,  $P3 = r_2^{(n)}$ , ...,  $P8 = r_7^{(n)}$  (если  $N = 7$ ).
- Регистры: рабочие Р1 — Р8; оперативные Р0, Р9 — РД; свободные —.
- Погрешность относительная меньше  $1 \cdot 10^{-6}$ .
- Время счета (полное)  $t \approx (0,1 n^2)$  мин.

**Пример.** Экономизировать многочлен

$$f(x) = 1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + \dots + \frac{x^{11}}{12},$$

приняв в качестве результирующего  $\overline{f(x)} = \sum_{p=0}^6 r_p^{(11)} T_p(x)$ . Вычислить максимальную погрешность экономизации.

Ниже показано содержимое регистров Р1, Р2, Р3, Р4, Р8 после 1-го, 2-го, 3-го и 11-го пусков.

Номер пуска	P1	P2	P3	P4	P8
1	-99999999	0	0	0	0
2	1,16666667	0,5	0,16666667	0	0
3	1,16666667	0,6875	0,16666667	0,0625	0
11	1,3390637	0,94684245	0,41952899	0,21526693	0,00994466

Числа в последней строке — часть искоемых коэффициентов:  $r_0^{(11)}$ ,  $r_1^{(11)}$ ,  $r_2^{(11)}$ ,  $r_3^{(11)}$ ,  $r_4^{(11)}$ . Поскольку требуется найти ряд, содержащий многочлены Чебышева до шестого порядка включительно, то коэффициент  $z_7^{(11)}$  используется для оценки погрешности. Согласно (8.29)

$$|\bar{f}(x) - f(x)| \leq |z_7^{(11)}| + 0,01(1/9 + 1/20 + 2/11 + 1/12) = 0,00994466 + 0,00426262 \approx 0,0142.$$

Таким образом, ряд  $f(x) = \sum_{p=0}^6 r_p^{(11)} T_p(x)$  аппроксимирует исходную сумму с погрешностью 0,01 на промежутке  $-1 \leq x \leq 1$ .

### 8.3. Многочлены Лежандра и функции Лежандра целого порядка. Производные и нули многочленов Лежандра. Коэффициенты квадратурной формулы Гаусса

Присоединенные функции Лежандра первого и второго рода (см. определения в (6.11) — (6.13)) при  $\mu = 0$  называются *функциями Лежандра*. При целых  $v = n$  функции Лежандра первого рода являются многочленами степени  $n$  и называются *многочленами Лежандра*  $P_n(z)$ . Функции Лежандра второго рода целого порядка  $Q_n(z)$  имеют логарифмические точки ветвления при  $z = \pm 1$  и регулярны на бесконечности. В итоге  $Q_n(z)$  однозначны и регулярны на плоскости  $z$ , разрезанной на интервале  $(-1, 1)$  вдоль действительной оси.

Для  $P_n(z)$  и  $Q_n(z)$  имеет место рекуррентная формула ( $n \geq 1$ )

$$(n+1)W_{n+1} = (2n+1)zW_n - nW_{n-1}, \quad (8.30)$$

где  $W_n = P_n(z)$ ,  $Q_n(z)$ .

Первые функции  $P_n(z)$  и  $Q_n(z)$  имеют вид

$$P_0(z) = 1, \quad P_1(z) = z; \\ Q_0(z) = \frac{1}{2} \ln \frac{z+1}{z-1}, \quad Q_1(z) = \frac{z}{2} \ln \frac{z+1}{z-1} - 1. \quad (8.31)$$

При вычислении  $Q_n(z)$  удобно положить  $0 \leq \arg z < \pi$ , тогда знак  $\operatorname{Im} \left( \frac{z+1}{z-1} \right)$  определен (отрицателен) и алгоритм упрощается. При  $-\pi < \arg z < \pi$  функции  $Q_n(z)$  комплексно-сопряженные от  $Q_n(z)$  при  $0 \leq \arg z < \pi$ .

На верхнем и нижнем берегах разреза мнимая часть  $Q_n(z)$  имеет противоположные знаки, при этом

$$\operatorname{Im} Q_n(x \pm j0) = \mp (\pi/2) P_n(x). \quad (8.32)$$

В связи с этим вводится *вещественная функция на разрезе* [5]

$$\overline{Q_n(x)} = \frac{1}{2} [Q_n(x+j0) + Q_n(x-j0)] = \operatorname{Re} Q_n(z) |_{\operatorname{Im} z = 0}. \quad (8.33)$$

Обычно  $\overline{Q_n(x)}$  обозначается как  $Q_n(x)$ . Отличие этой функции от  $Q_n(z)$  учитывается только в записи аргумента. Отметим, что для  $Q_n(x)$  справедливы рекуррентная формула (8.30) и дифференциальное уравнение (6.11) при  $\mu = 0$  и  $\nu = n$ . Первые две функции  $Q_n(x)$ :

$$Q_0(x) = \frac{1}{4} \ln \left( \frac{x+1}{x-1} \right)^2; \quad Q_1(x) = \frac{1}{4} x \ln \left( \frac{x+1}{x-1} \right)^2. \quad (8.34)$$

Формулы (8.34) справедливы на действительной оси и вне разреза. Однако использование рекуррентных формул (8.30) для вычисления функций  $Q_n(x)$  вне разреза при возрастающих  $n$  малоэффективно, так как  $Q_n(x)$  быстро убывает с увеличением  $n$  и имеет место потеря точности за счет погрешностей округления (ср. § 5.1). В этих случаях, т. е. при  $|x| > 1$ , лучшие результаты дает вычисление  $Q_n(x)$  через *гипергеометрический ряд* [5]:

$$Q_n(x) = \frac{n!}{(2n+1)!! x^{n+1}} F \left( \frac{n+2}{2}, \frac{n+1}{2}; n + \frac{3}{2}; \frac{1}{x^2} \right). \quad (8.35)$$

Производные многочленов и функций Лежандра вычисляются по одной и той же рекуррентной формуле

$$\frac{dW_n}{dx} = \frac{n}{1-x^2} (W_{n-1} - xW_n). \quad (8.36)$$

Нули  $p_m^{(n)}$  ( $m = 1, 2, \dots$ ) *многочленов Лежандра*  $P_n(z)$  расположены на интервале ортогональности  $(-1, 1)$ . Приближенно  $p_m^{(n)}$  определяется по асимптотической (по отношению к  $n$ ) формуле

$$p_{m1}^{(n)} = \cos [(2m-0,5)\pi]/(2n+1). \quad (8.37)$$

Для уточнения  $p_m^{(n)}$  эффективна итерационная процедура, использующая значения производных при  $x = p_{m1}^{(n)}$ . Второе приближение для  $p_m^{(n)}$

$$p_{m2}^{(n)} = p_{m1}^{(n)} - P_n(p_{m1}^{(n)}) / \frac{dP_n(p_{m1}^{(n)})}{dx}, \quad (8.38)$$

где  $dP_n/dx$  определяется по (8.36). Далее процедура повторяется. Расчеты показывают, что три итерации обеспечивают точность  $\sim 1 \cdot 10^{-8}$  при любых  $m$  и  $n$ . *Квадратурная формула Гаусса* [9,21]

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx \sum_{m=1}^n \omega_m^{(n)} f(x_m), \quad (8.39)$$

где *узлы* и *весовые коэффициенты*:

$$x_m = p_m^{(n)}; \quad \omega_m^{(n)} = 2 / \left[ (1-x_m^2) \left( \frac{dP_n(x_m)}{dx} \right)^2 \right]. \quad (8.40)$$

В приводимой далее программе 8.15 значения производных  $dP_n(x_m)/dx$  находятся по рекуррентной формуле (8.30), применяемой в прямом направлении, значениям первых двух многочленов и рекуррентной формуле (8.36). Нули определяются по формуле (8.37) и итерационной схеме (8.38).

**Программа 8.11.** Многочлены Лежандра  $P_n(x)$  вещественного аргумента. Производные многочленов Лежандра (8.30), (8.31), (8.36).

ПО	ПС	1	ПА	П6	ИП7	ИП6	КИП6	Ф,	ИП6
÷	ПД	ИПА	П9	×	/—/	ХУ	ПА	ИПД	1
+	×	ИП7	×	+	FL0	06	ПВ	ИП9	ИП7
ИПА	×	—	ИПС	×	1	ИП7	FX²	—	÷
П8	С/П								

#### Инструкция

1. Исходные данные:  $(x = P7), [n = PX]$ .
2. Пуск: В/О С/П.
3. Результат:  $PX = P8 = P'_n(x), P9 = P_{n-1}(x), PA = P_n(x), PB = P_{n+1}(x)$ .
4. Регистры: рабочие  $P7 - PB$ ; оперативные  $P0, P6, PC, PD$ ; свободные  $P1 - P5$ .
5. Погрешность абсолютная меньше  $5 \cdot 10^{-7}$  при  $|x| \leq 1,05$ ; относительная меньше  $5 \cdot 10^{-6}$  при  $|x| \geq 1,05$ ;
6. Время счета  $t \approx (n/8)$  мин.

#### Примеры.

$$P_8(0,6) = 0,2123392, P_9(0,6) = -0,004610305 (-0,0460304 [9]);$$

$$P_{10}(0,6) = -0,24366276 (-0,2436627 [9]),$$

$$P'_8(0,6) = 3,3750145 (3,3750144 [9]).$$

**Программа 8.12.** Функции Лежандра второго рода  $Q_n(x)$  целого порядка вещественного аргумента, производные функций Лежандра (8.30), (8.34), (8.36),  $x| \neq 1$ .

ПО	ПС	1	П6	ИП7	+	FBx	1	—	÷
FX²	FV—	FV—	Fln	ПА	ИП7	×	1	—	ИП6
КИП6	Ф,	ИП6	÷	ПД	ИПА	П9	×	/—/	ХУ
ПА	ИПД	1	+	×	ИП7	×	+	FL0	19
ПВ	ИП9	ИП7	ИПА	×	—	ИПС	×	1	ИП7
FX²	—	÷	П8	С/П					

#### Инструкция

1. Исходные данные:  $(x = P7), [n = PX]$ .
2. Пуск: В/О С/П.
3. Результат:  $PX = P8 = Q'_n(x), P9 = Q_{n-1}(x), PA = Q_n(x), PB = Q_{n+1}(x)$ .
4. Регистры: рабочие  $P7 - PB$ ; оперативные  $P0, P6, PC, PD$ ; свободные  $P1 - P5$ .
5. Погрешность абсолютная меньше  $5 \cdot 10^{-7}$  при  $|x| < 1,1$ , относительная меньше  $5 \cdot 10^{-6}$  при  $1,1 \leq |x| \leq 2, n \leq 4$  и  $5 \cdot 10^{-4}$  при  $1,1 \leq |x| \leq 4, n \leq 3$ ;
6. Если при  $|x| < 1 |Q'_n(x)| < 0,1$ , то вместо указаний выше оценки следует оперировать абсолютной погрешностью, которая в этом случае меньше  $5 \cdot 10^{-7}$ .
6. Время счета  $t \approx (n/7)$  мин.

#### Примеры.

$$\left. \begin{aligned} Q_8(0,6) &= -0,34516396; \\ Q_9(0,6) &= -0,44832985 (-0,44832986 [9]), \\ Q'_9(0,6) &= -1,0710850 (-1,0710851 [9]); \\ Q_{10}(0,6) &= -0,20044847 (-0,20044847 [9]); \end{aligned} \right\} t \approx 1 \text{ мин } 10 \text{ с}$$

$$\left. \begin{aligned} Q_2(2) &= 0,02118383 (0,0211838 [9]), \\ Q_3(2) &= 4,871235 \cdot 10^{-3} (4,87112 \cdot 10^{-3} [9]), \\ Q'_3(2) &= -0,01144136 (-0,0114416 [9]), \\ Q_4(2) &= 1,161449 \cdot 10^{-3}, \end{aligned} \right\} t \approx 30 \text{ с}$$

**Программа 8.13.** Многочлены Лежандра  $P_n(z)$  комплексного аргумента  $z = x + jy$  (8.30), (8.31).

ПО	1	П6	П8	0	П9	ИПВ	ИПА	ИП6	КИП6
Ф,	ИП6	÷	П5	ИП8	П1	×	П3	Ф,	П8
Ф,	ИП5	ИП9	П2	×	П4	Ф,	П9	ИП5	1
+	×	FBx	ИП8	×	ПС	ИПВ	×	ХУ	ПД
ИПА	×	+	ИПА	ИПС	×	ИПВ	ИПД	×	—
ИП3	—	ХУ	ИП4	—	ХУ	FL0	08	ПС	ХУ
ПД	С/П								

#### Инструкция

1. Исходные данные:  $(x = PA, y = PB), [n = PX]$ .
2. Пуск: В/О С/П.
3. Результат:  $PX = PD = \text{Im } P_{n+1}(z), PY = PC = \text{Re } P_{n+1}(z),$   
 $P1 = \text{Re } P_{n-1}(z), P2 = \text{Im } P_{n-1}(z), P8 = \text{Re } P_n(z), P9 = \text{Im } P_n(z).$
4. Регистры: рабочие  $P1, P2, P8 - PD$ ; оперативные  $P0, P3 - P6$ ; свободные  $P7$ .
5. Погрешность: относительная меньше  $1 \cdot 10^{-6}$  при  $|P_n(z)| \geq 0,1$ , абсолютная меньше  $1 \cdot 10^{-7}$  при  $|P_n(z)| \leq 0,1$ .
6. Время счета  $t \approx (n/4)$  мин.

#### Примеры.

$$P_2(2+j) = 4 + j6 (4 + j6), P_3(2+j) = 2,0000007 + j26 (2 + j26);$$

$$P_4(2+j) = -41,499998 + j90,000001 (-41,5 + j90),$$

$$P_9(2+j) = -17694,246 - j102649,61;$$

$$P_{10}(2+j) = 142126,48 - j405902,67, P_{11}(2+j) = 1333655,5 - j1185160.$$

**Программа 8.14.** Функции Лежандра второго рода  $Q_n(z)$  целого порядка комплексного аргумента  $z = x + jy$  (8.30), (8.31),  $|\arg z| < \pi$ .

ИП7	1	П6	+	ПА	2	—	ПС	ИП8	ПП
71	ИП7	ПА	F,	↑	Fx <sup>2</sup>	ИП9	Fx <sup>2</sup>	+	Fv <sup>—</sup>
П1	÷	Farccos	/—/	2	÷	П2	ИП1	Fv <sup>—</sup>	Flп
П1	ПП	81	1	—	ИП6	КИП6	F,	ИП6	÷
П5	ИП1	×	П3	F,	П1	F,	ИП2	ИП5	×
П4	F,	П2	ИП5	1	+	×	FBx	ИП1	×
ПП	81	ИП3	—	ХУ	ИП4	—	ХУ	FL0	35
С/П	/—/	↑	Fx <sup>2</sup>	ИПС	Fx <sup>2</sup>	+	÷	ИПС	FBx
÷	ПС	ИП8	×	ХУ	ПД	ИПА	×	+	П9
ИПА	ИПС	×	ИП8	ИПД	×	—	В/О		

#### Структура программы

- 00 — 10: вычисление дроби  $(z + 1)/(z - 1)$ ,  
 11 — 34: вычисление  $Q_0(z)$  и  $Q_1(z)$  по формулам (8.31) и занесение их действительных и мнимых частей соответственно в регистры Р1, Р2 и РХ, Р9,  
 35 — 70: расчет  $Q_2, Q_3, \dots, Q_n$  по рекуррентной формуле (8.30); при этом текущие  $kQ_{k-1}/(k+1)$  (их действительная и мнимая части) содержатся в регистрах Р3, Р4, действительные и мнимые части  $Q_k$  — в Р1, Р2 и  $Q_{k+1}$  — в РХ, РУ,  
 71 — 97: подпрограмма деления-умножения комплексных чисел (ср. программу 1.9).

#### Инструкция

- Исходные данные:  $(x = P7, y = P8), (n - 1) = P0$ .
- Пуск: В/О С/П.
- Результат:  $PX = \text{Re } Q_n(z), PY = \text{Im } Q_n(z), P1 = \text{Re } Q_{n-1}(z), P2 = \text{Im } Q_{n-1}(z)$ .
- Регистры: рабочие Р1, Р2, Р7, Р8; оперативные Р0, Р3 — Р6, Р9, РА, РС, РД; свободные РВ.
- Погрешность относительная меньше  $5 \cdot 10^{-6}$  при  $|z| < 1$  и  $5 \cdot 10^{-4}$  при  $|z| \leq 4, n \leq 3$ .
- Время счета  $t \approx (n/3)$  мин.

#### Примеры.

$$Q_3(0,8 + j1 \cdot 10^{-9}) = -0,84544435 - j0,12566361 \quad (-0,84544435 - j0,12566367);$$

$$Q_3(0,8 + j1 \cdot 10^{-9}) = 0,43299312 - j0,29508234 \quad (0,43299312 - j0,29508237).$$

Здесь  $y = \text{Im } z \ll 1$  и фактически вычисляются значения функций на разрезе. Поэтому действительная часть искомых функций равна  $Q_n(x)$ , а мнимая  $(-\pi/2)P_n(x)$  ((8.33), (8.32)).

$$Q_4(0,9 + j2) = 3,90338 \cdot 10^{-4} + j1,443853 \cdot 10^{-4};$$

$$Q_5(0,9 + j2) = 5,360848 \cdot 10^{-5} - j5,3735 \cdot 10^{-5}.$$

**Программа 8.15.** Нули  $p_m^{(n)}$  многочленов Лежандра  $P_n(x)$ , значения  $P_{n-1}(x), P_{n+1}(x)$  и производных  $P_n'(x)$  в нулях  $p_m^{(n)}$ , весовые коэффициенты  $w_m^{(n)}$  квадратурной формулы Гаусса (8.37), (8.38), (8.30), (8.31), (8.36), (8.39), (8.40).

ПС	0	П5	БП	07	ИП5	С/П	3	П1	КИП5
ИП5	4	F1/x	—	ИПС	2	F1/x	+	÷	Fл
×	Fcos	П7	1	ПА	П6	ИПС	П0	ИП7	ИП6
КИП6	F,	ИП6	÷	ПД	ИПА	П9	×	/—/	ХУ
ПА	ИПД	1	+	×	ИП7	×	÷	FL0	29
ПВ	ИП9	ИП7	ИПА	×	—	ИПС	×	1	ИП7
Fx <sup>2</sup>	—	П4	÷	П8	ИП7	ИПА	ИП8	÷	—
FL1	22	П7	2	ИП4	÷	ИП8	Fx <sup>2</sup>	÷	П6
ХУ	Fx<0	05	Flп						

Нули  $p_m^{(n)}$  многочленов  $P_n(x)$  являются абсциссами узлов квадратурной формулы Гаусса (8.39). Нумерация ведется от наибольшего,  $p_1^{(n)}$ . Последний, а также  $w_1^{(n)}, P_{n-1}(p_1^{(n)}), P_{n+1}(p_1^{(n)}), P_n(p_1^{(n)})$  определяются на первом пуске. На следующем пуске находятся  $w_2^{(n)}, p_2^{(n)}, P_{n-1}(p_2^{(n)}), P_{n+1}(p_2^{(n)}), P_n'(p_2^{(n)})$  и т. д. Общее число пусков равно  $n/2$  при четном  $n$  и  $(n+1)/2$  — при нечетном. Остальные нули находятся по формуле  $p_m^{(n)} = -P_{n-m+1}^{(n)}$ . Весовые множители в симметричных узлах относительно  $x = 0$  одинаковы:  $w_m^{(n)} = w_{n-m+1}^{(n)}$ . Также симметричны значения многочленов и производных с учетом их четности:  $P_k(x) = (-1)^k P_k(-x), \Delta P_k'(x) = (-1)^{k+1} P_k'(-x)$ .

#### Структура программы

- 00—22: ввод начальных параметров и вычисление нулей  $p_m^{(n)}$  в первом приближении по формуле (8.37),  
 24—64: вычисление значений многочленов  $P_{k-1}(x), P_k(x), P_{k+1}(x)$  и производных  $P_k'(x)$  (ср. программу 8.11),  
 23—72: итерационное уточнение значений нулей  $p_m^{(n)}$  ((8.38) — три итерации) с одновременным вычислением  $P_{n-1}(p_m^{(n)}), P_{n+1}(p_m^{(n)}), P_n'(p_m^{(n)})$  при уточненных значениях  $p_m^{(n)} = p_m^{(n)}$ .  
 73—83: вычисление весовых коэффициентов  $w_m^{(n)}$  по формуле (8.40).

#### Инструкция

- Исходные данные:  $[n = PX]$ .
- Пуск 1: В/О С/П.

Результат 1:  $PX = N_1 = 1, P6 = w_1^{(n)}, P7 = p_1^{(n)}, P8 = P_n'(p_1^{(n)})$ ,

$$P9 = P_{n-1}(p_1^{(n)}), PV = P_{n+1}(p_1^{(n)}) \quad (N_1 — порядковый номер нуля).$$

- Пуск 2: С/П.

Результат 2:  $PX = N_2 = 2, P6 = w_2^{(n)}, P7 = p_2^{(n)}, P8 = P_n'(p_2^{(n)})$ ,

$$P9 = P_{n-1}(p_2^{(n)}), PV = P_{n+1}(p_2^{(n)}).$$

- Пуск 3: С/П.

Последний пуск: С/П

6. Результат:  $PX = \text{ЕГГОГ}$ ,  $P6 = \omega_{n/2+1}^{(n)}$  при четном  $n$  или  $P6 = \omega_{(n+3)/2}^{(n)}$  при нечетном  $n$ ,  $P7 = x^n = P_{n/2+1}^{(n)}$  при четном  $n$  или  $P7 = x^{(n)} = P_{(n+3)/2}^{(n)}$  при нечетном  $n$ ,  $P8 = P_n'(x^{(n)})$ ,  $P9 = P_{n-1}(x^{(n)})$ ,  $PB = P_{n+1}(x^{(n)})$ .

7. Регистры: рабочие  $P0, P5 - P9, PB, PC$ ; оперативные  $P1, P4, PA, PD$ ; свободные  $P2, P3$ .

8. Погрешность относительная меньше  $1 \cdot 10^{-6}$ .

9. Время счета после каждого пуска  $t \approx (1 + 0,3n)$  мин.

Примеры. Для  $n = 5$

$\omega_1^{(5)} = 0,23692686$  (0,23692689);  $p_1^{(5)} = 0,90617985$  (0,90617985);

$P_4(p_1^{(5)}) = 0,24573548$ ;  $P_6(p_1^{(5)}) = -0,20477955$ ;  $P'_5(p_1^{(5)}) = 6,8703335$ ,

$t \approx 2,5$  мин (после пуска 1);

$\omega_2^{(5)} = 0,47862863$  (0,47862867);  $p_2^{(5)} = 0,53846931$  (0,53846931);

$P_4(p_2^{(5)}) = -0,34450089$ ;  $P_6(p_2^{(5)}) = 0,28708408$ ;  $P'_5(p_2^{(5)}) = -2,4258891$ ,

$t \approx 2,5$  мин (после пуска 2);

$\omega_3^{(5)} = 0,56888888$  (0,56888889);  $p_3^{(5)} = 0$  (0);

$P_4(0) = 0,375$ ;  $P_6(0) = -0,3125$ ;  $P'_5(0) = 1,875$ ,  $t \approx 2,5$  мин (после пуска 3).

#### 8.4. Многочлены Эрмита. Функции параболического цилиндра целого порядка. Обобщенные многочлены Лагерра

Многочлены Эрмита удовлетворяют дифференциальному уравнению

$$\frac{d^2 H_n}{dz^2} - 2z \frac{dH_n}{dz} + 2nH_n = 0. \quad (8.41)$$

Рекуррентная формула

$$H_n(z) = 2zH_{n-1}(z) - 2(n-1)H_{n-2}(z). \quad (8.42)$$

Первые два многочлена

$$H_0(z) = 1, \quad H_1(z) = 2z. \quad (8.43)$$

Отметим, что второе слагаемое в (8.42) при  $n = 1$  обращается в нуль и при этом указанная формула дает правильное значение  $H_1(z)$ . Таким образом, для «запуска» (8.42) достаточно задать  $H_0(z) = 1$  и произвольное значение  $H_{-1}(z)$ .

Производная многочленов Эрмита

$$dH_n(z)/dz = 2nH_{n-1}(z). \quad (8.44)$$

Функция параболического цилиндра  $D_n(z) = U(-n - 1/2, z)$  была определена в § 6.2 ((6.28), (6.31)). Она удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{d^2 D_n}{dz^2} + \left(n + \frac{1}{2} - \frac{z^2}{4}\right) D_n = 0 \quad (8.45)$$

и при целых  $n$  связана с многочленом Эрмита следующим соотношением:

$$D_n(z) = 2^{-n/2} e^{-z^2/4} H_n(z/\sqrt{2}). \quad (8.46)$$

Производные функций параболического цилиндра:

$$D'_n(z) = \sqrt{2} 2^{-n/2} e^{-z^2/4} [nH_{n-1}(z/\sqrt{2}) - (z/\sqrt{2}) H_n(z/\sqrt{2})]. \quad (8.47)$$

Обобщенные многочлены Лагерра  $L_n^{(\alpha)}(z)$  удовлетворяют дифференциальному уравнению

$$z \frac{d^2 L_n^{(\alpha)}}{dz^2} + (\alpha + 1 - z) \frac{dL_n^{(\alpha)}}{dz} + nL_n^{(\alpha)} = 0. \quad (8.48)$$

Рекуррентная формула ( $n \geq 2$ )

$$nL_n^{(\alpha)}(z) = (2n + \alpha - 1 - z)L_{n-1}^{(\alpha)}(z) - (n + \alpha - 1)L_{n-2}^{(\alpha)}(z) = 0. \quad (8.49)$$

Первые два многочлена

$$L_0^{(\alpha)}(z) = 1, \quad L_1^{(\alpha)}(z) = \alpha + 1 - z. \quad (8.50)$$

Как видно, формулу (8.49) можно использовать и при  $n = 1$ , если принять

$$L_{-1}^{(\alpha)}(z) = 0. \quad (8.51)$$

Производные обобщенных многочленов Лагерра

$$z \frac{dL_n^{(\alpha)}}{dz} = nL_n^{(\alpha)} - (n + \alpha)L_{n-1}^{(\alpha)}. \quad (8.52)$$

Обобщенные многочлены нулевого порядка обозначаются как  $L_n(z)$ :

$$L_n(z) = L_n^{(0)}(z)$$

и называются *многочленами Лагерра*.

**Программа 8.16.** Многочлены Эрмита  $H_{n-1}(x)$ ,  $H_n(x)$  вещественного аргумента, производные  $H'_n(x)$  (8.42) — (8.44).

ПО П8 1 ПА ИП0 ИП8 — ИП9 × ИП7  
ИПА П9 × + 2 × ПА FL0 04 ИП8  
2 × ИП9 × С/П

И н с т р у к ц и я

1. Исходные данные:  $(x = P7)$ ,  $[n = PX]$ .

2. Пуск: В/О С/П.

3. Результаты:  $PX = H'_n(x)$ ,  $P9 = H_{n-1}(x)$ ,  $PA = H_n(x)$ .

4. Регистры: рабочие  $P7, P9, PA$ ; оперативные  $P0, P8$ ; свободные  $P1 - P6, PB - PD$ .

5. Погрешность относительная меньше  $5 \cdot 10^{-7}$ .

6. Время счета  $t \approx (n/10)$  мин.

Примеры.  $H_4(3) = 876$  (876);  $H_5(3) = 3816$  (3816);  $H'_5(3) = 8760$  (8760).

**Программа 8.17.** Многочлены Эрмита  $H_n(z)$ ,  $H_{n-1}(z)$  комплексного аргумента  $z = x + jy$ , производные  $H'_n(z)$  (8.42) — (8.44).

ПО П8 1 ПА 0 ПВ ИПС ИП0 ИП8 —  
× П9 ИПД FBx × ИПА ПС ИП6 × ИПВ  
ИП7 + + 2 × ИПА ИП7 ×  
ИПВ ИП6 × — ИП9 + 2 × ПА ХУ  
ИВ FL0 06 ИПД ИП8 2 × × ИПС FBx  
× С/П

# Инструкция

1. Исходные данные: ( $x = P7, y = P6$ ), [ $n = PX$ ].

2. Пуск: В/О С/П.

3. Результат:  $PX = \operatorname{Re} H'_n(z), PY = \operatorname{Im} H'_n(z), PA = \operatorname{Re} H_n(z), PB = \operatorname{Im} H_n(z), PC = \operatorname{Re} H_{n-1}(z), PD = \operatorname{Im} H_{n-1}(z)$ .

4. Регистры: рабочие P6, P7, PA — PD; оперативные P0, P8, P9; свободные P1 — P5.

5. Погрешность относительная меньше  $5 \cdot 10^{-7}$ .

6. Время счета  $t \approx (n/5)$  мин.

Примеры.

$$H_4(2+j) = -244 + j192 \quad (-244 + j192);$$

$$H_5(2+j) = -1296 - j328 \quad (-1296 - j328),$$

$$H'_5(2+j) = -2440 + j1920 \quad (-2440 + j1920).$$

**Программа 8.18.** Функции параболического цилиндра  $D_n(x)$  целого порядка вещественного аргумента и их производные  $D'_n(x)$  (8.46), (8.47), (8.42), (8.43).

П0	ПВ	2	Flп	×	ИПС	2	Fv <sup>-</sup>	÷	ПД
Fx <sup>2</sup>	+	Fe <sup>x</sup>	Fv <sup>-</sup>	F1/x	ПА	ИП0	ИПВ	—	ИП9
×	ИПД	ИПА	П9	×	+	2	×	ПА	FL0
16	ИПВ	ИП9	×	ИПД	ИПА	×	2	÷	—
2	Fv <sup>-</sup>	×	С/П						

# Инструкция

1. Исходные данные: ( $x = PC$ ), [ $n = PX$ ].

2. Пуск: В/О С/П.

3. Результат:  $PX = D'_n(x), PA = D_n(x)$ .

4. Регистры: рабочие PA, PC; оперативные P0, P9, PB, PD; свободные P1 — P8.

5. Погрешность относительная меньше  $1 \cdot 10^{-6}$ .

6. Время счета  $t \approx (n/10)$  мин.

Примеры.

$$D_4(5) = 0,92275666 \quad (0,92275712), \quad D'_4(5) = -1,4574921 \quad (-1,4574917);$$

$$D_9(5) = 326,43972, \quad D'_9(5) = 469,23523.$$

**Программа 8.19.** Функции параболического цилиндра  $D_n(z)$  целого порядка комплексного аргумента  $z = x + jy$  (8.46), (8.42), (8.43).

П0	П1	2	Flп	×	ИПД	2	Fv <sup>-</sup>	÷	ПВ
ИПС	FBx	÷	ПА	Fx <sup>2</sup>	XY	Fx <sup>2</sup>	—	+	Fe <sup>x</sup>
Fv <sup>-</sup>	F1/x	ИПА	ИПВ	×	/—/	П9	Fsin	XY	×
FBx	ИП9	Fcos	×	П6	ИПВ	×	XY	П7	ИПА
×	+	ИП0	ИП1	—	П5	ИП9	×	+	2
×	ИП6	ИПА	×	ИП7	П9	ИПВ	×	—	ИП5
ИП8	×	+	2	×	ИП6	П8	F,	FL0	34
С/П									

# Инструкция

1. Исходные данные: ( $x = PC, y = PD$ ), [ $n = PX$ ].

2. Пуск: В/О С/П.

3. Результат:  $PX = \operatorname{Re} D_n(z), PY = \operatorname{Im} D_n(z)$ .

4. Регистры: рабочие PC, PD; оперативные P0, P1, P5 — PB; свободные — P4.

5. Погрешность относительная меньше  $1 \cdot 10^{-6}$ .

6. Время счета  $t \approx (n/4)$  мин.

Примеры.

$$D_5(2+j5) = 446906 + j1006915,8 \quad (446905,59 + j1006915,5);$$

$$D_4(2+j) = -5,6148562 + j8,7446222 \quad (-5,6148565 + j8,74462111).$$

**Программа 8.20.** Обобщенные многочлены Лагерра  $L_n^{(\alpha)}(x)$ ,  $L_{n-1}^{(\alpha)}(x)$  вещественного аргумента, производные  $L_n^{(\alpha)'}(x)$  (8.49) — (8.52).

П0	0	П5	П9	1	ПА	КИП5	1	ИП6	—
ИП5	—	П8	ИП9	×	ИП5	ИП8	—	ИП7	—
ИПА	П9	×	+	ИП5	ПА	FL0	06	ИП8	
1	—	ИП9	×	ИП5	ИПА	×	+	ИП7	÷
С/П									

# Инструкция

1. Исходные данные: ( $\alpha = P6, x = P7$ ), [ $n = PX$ ].

2. Пуск: В/О С/П.

3. Результат:  $PX = L_n^{(\alpha)'}(x), P9 = L_{n-1}^{(\alpha)}(x), PA = L_n^{(\alpha)}(x)$ .

4. Регистры: рабочие P6, P7, P9, PA; оперативные P0, P5, P8; свободные P1 — P4, PB — PD.

5. Погрешность относительная меньше  $1 \cdot 10^{-6}$ .

6. Время счета  $t \approx (n/8)$  мин.

Примеры.

$$L_4(11) = L_4^{(0)}(11) = 42,708332 \quad (42,7083333);$$

$$L_5(11) = L_5^{(0)}(11) = 40,783334 \quad (40,7833333);$$

$$L'_5(11) = L_5^{(0)'}(11) = -0,87499909 \quad (-0,875);$$

$$L_{12}(10) = L_{12}^{(0)}(10) = -9,9037466 \quad (-9,90374646 \quad [9]);$$

$$L_{10}^{(5)}(0) = 3268760 \quad (3268760).$$

В последнем примере число в скобках получено по формуле  $L_n^{(m)}(0) = (m+n)!/(m!n!)$ . Отметим, что при нулевом аргументе программа не вычисляет производную  $L_n^{(\alpha)'}(0)$  и дает АВОСТ. Однако значения  $L_n^{(\alpha)}(0)$  и  $L_{n-1}^{(\alpha)}(0)$  вычисляются без сбоев и заносятся в соответствующие регистры памяти.

**Программа 8.21.** Обобщенные многочлены Лагерра  $L_n^{(\alpha)}(z)$ ,  $L_{n-1}^{(\alpha)}(z)$  комплексного аргумента  $z = x + jy$  (8.49) — (8.51).

П0	0	П5	П8	ПС	ПД	1	П7	КИП5	ИП5
1	ИП6	—	ИП5	—	П4	—	ИП9	—	ПА
ИП7	ИПА	×	ИП8	ИПВ	×	+	ИП	ИП4	×
1	ИП5	÷	ИПА	ИП8	×	ИПВ	ИП7	ПС	×
—	ИПД	ИП4	×	+	ИП5	÷	ИП8	ПД	F,
ИП8	XY	П7	FL0	8	С/П				

# И н с т р у к ц и я

1. Исходные данные: ( $x = P9$ ,  $y = P8$ ,  $\alpha = P6$ ), [ $n = PX$ ].

2. Пуск: В/О С/П.

3. Результат:  $PX = \operatorname{Re} L_n^{(\alpha)}(z)$ ,  $PY = P8 = \operatorname{Im} L_n^{(\alpha)}(z)$ ,  $PC = \operatorname{Re} L_{n-1}^{(\alpha)}(z)$ ,

$PD = \operatorname{Im} L_{n-1}^{(\alpha)}(z)$ .

4. Регистры: рабочие  $P6 - P9$ ,  $P8 - PD$ ; оперативные  $P0, P4, P5, PA$ ; свободные  $P1 - P3$ .

5. Погрешность относительная меньше  $5 \cdot 10^{-7}$ .

6. Время счета  $t \approx (n/4)$  мин.

Примеры.

$L_3^{(0)}(2,7 + j0,9) = 0,433 + j1,431$  ( $0,433 + j1,431$ );

$L_4^{(0)}(2,7 + j0,9) = 1,65745 + j0,9684$  ( $1,65745 + j0,9684$ ).

Числа в скобках получены по прямому представлению  $L_n^{(0)}(z)$  в виде суммы

$$L_n^{(0)}(z) = 1 - nz + \frac{n(n-1)}{(2!)^2} z^2 - \frac{n(n-1)(n-2)}{(3!)^2} z^3 + \dots + (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{n!}{(n!)^2} z^n.$$

$L_2^{(2)}(2,7 + j0,9) = -1,56 - j1,17$ ;  $L_3^{(2)}(2,7 + j0,9) = -2,987 - j0,009$ .

Результаты — точные.

## Указатель программ

Номер программы	Функция	Область определения	Число шагов	Число регистров памяти	Примечание
8.1	$T_n(x), U_n(x)$	$0 \leq  x  \leq 1$	17	3	Тригонометрические формулы
8.2	$T_{n-1}(x), T_n(x), T_{n+1}(x), U_n(x)$	$0 \leq  x  \leq 1$	32	8	Рекуррентные формулы. Точность выше, чем для программы 8.1
8.3	$T'_n(x), U'_n(x), T_{n-1}(x), T_n(x), T_{n+1}(x), U_{n-1}(x), U_n(x)$	$0 \leq x \leq 1$	57	11	Рекуррентные формулы
8.4	$\tau_m^{(n)}, u_m^{(n)}$	$-1 \leq \tau_m^{(n)}, u_m^{(n)} \leq 1$	34	4	
8.5	$S_N = \sum_{k=0}^N a_k T_k(x)$	$N \leq 11$	27	$N+3$	Рекуррентные формулы
8.6	$S_{2N} = \sum_{k=0}^N b_k T_{2k}(x)$	$N \leq 11$	32	$N+3$	То же

Окончание

Номер программы	Функция	Область определения	Число шагов	Число регистров памяти	Примечание
8.7	$S_{2N+1} = \sum_{k=0}^N c_k T_{2k+1}(x)$	$N \leq 11$	35	$N+3$	Рекуррентные формулы
8.8	$S_N^* = \sum_{k=0}^N a_k^* T_k^*(x)$	$N \leq 11$	32	$N+3$	То же
8.9	$d_k^{(p)}$	$p \leq 83$	67	5	Коэффициенты разложения $x^p$ в ряд по многочленам Чебышева
8.10	$r_p^{(n)}, p=1,2,\dots,N$	$N < n, N \leq 7$	98	14	Коэффициенты экономизированного ряда для $f(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$
8.11	$P_n(x), P'_n(x)$	$\infty$	42	9	Аргумент $x$ вещественный
8.12	$Q_n(x), Q'_n(x)$	$ x  \neq 1,  x  \leq 4$	55	9	То же
8.13	$P_n(z), P_{n \pm 1}(z)$	$\infty$	62	13	$z$ — комплексный аргумент
8.14	$Q_n(z), Q_{n-1}(z)$	$ z  \neq 1,  z  \leq 4$	98	13	То же
8.15	$p_m^{(n)}, w_m^{(n)}, p_{n-1}(p_m^{(n)}), p_{n+1}(p_m^{(n)}), p'_n(p_m^{(n)})$		84	12	$p_m, w_m$ — узлы и веса квадратурной формулы Гаусса
8.16	$H_{n-1}(x), H_n(x), H'_n(x)$	$\infty$	25	5	Аргумент $x$ вещественный
8.17	$H_{n-1}(z), H_n(z), H'_n(z)$	$\infty$	52	9	
8.18	$D_n(x), D'_n(x)$	$\infty$	44	6	Аргумент $x$ вещественный
8.19	$D_n(z)$	$\infty$	71	10	
8.20	$L_{n-1}^{(\alpha)}, L_n^{(\alpha)}(x), L_n^{(\alpha)'}(x)$	$\infty$	41	7	Аргумент $x$ вещественный
8.21	$L_{n-1}^{(\alpha)}(z), L_n^{(\alpha)}(z)$	$\infty$	56	11	То же



## Функции Матье

## 9.1. Определения, расчетные соотношения

Уравнение Матье:

$$\frac{d^2 y}{dz^2} + (a - 2q \cos 2z) y = 0. \quad (9.1)$$

По теореме Флоке общее решение (9.1) при  $j\mu \neq 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  имеет вид

$$y = Ae^{\mu z} P(z) + Be^{-\mu z} P(-z), \quad (9.2)$$

где  $P(z)$  — функция периодическая по  $z$  с периодом  $\pi$ . Характеристический показатель  $\mu$  в зависимости от параметров  $a, q$  может быть чисто мнимым, вещественным или комплексным. При мнимых  $\mu$  решения (9.2) ограничены (устойчивы) для действительных  $z$ . При других  $\mu$  возникают неограниченно нарастающие функции. Области на плоскости  $(a, q)$ , соответствующие устойчивым и неустойчивым решениям (диаграмма Матье — см., например, Мак-Лахлан Н.В. Теория и применение функций Матье. — М.: ИЛ, 1953), отделяются друг от друга кривыми, на которых

$$j\mu = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (9.3)$$

На этих кривых одно из линейно независимых решений уравнения (9.1) имеет период  $\pi$  или  $2\pi$ . Термин «функции Матье» обычно относится к указанным периодическим решениям.

Условие (9.3) выполняется при определенных значениях  $a = a_r(q)$  — собственных значениях уравнения Матье. Функции Матье в результате зависят только от  $z$  и  $q$  как независимых переменных и принадлежат к одному из следующих классов:

$$\begin{aligned} \text{se}_{2n}(z, q) & \text{— четные функции по } z \text{ с периодом } \pi; \\ \text{se}_{2n+1}(z, q) & \text{— четные с периодом } 2\pi; \\ \text{se}_{2n+2}(z, q) & \text{— нечетные с периодом } \pi; \\ \text{se}_{2n+1}(z, q) & \text{— нечетные с периодом } 2\pi, \\ n & = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (9.4)$$

Собственные значения  $a_r(q)$  этих функций обозначаются соответственно как  $a_{2n}(q), a_{2n+1}(q), b_{2n+2}(q), b_{2n+1}(q)$ .

Запишем, следуя (9.4), разложения функций Матье в ряды Фурье:

$$\begin{aligned} \text{se}_{2n}(z, q) &= \sum_{m=0}^{\infty} A_{2m} \cos 2mz; \\ \text{se}_{2n+1}(z, q) &= \sum_{m=0}^{\infty} A_{2m+1} \cos (2m+1)z; \\ \text{se}_{2n+2}(z, q) &= \sum_{m=0}^{\infty} B_{2m+2} \sin (2m+2)z; \end{aligned} \quad (9.5)$$

$$\begin{aligned} \text{se}_{2n+1}(z, q) &= \sum_{m=0}^{\infty} B_{2m+1} \sin (2m+1)z, \\ n &= 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Определение функций Матье включает в себя также условие нормировки [5] ( $y(z)$  — любая из функций (9.5))  $\int_0^{2\pi} |y|^2 dz = \pi$ . Это условие приводит к нормировочным формулам для коэффициентов:

$$2|A_0|^2 + \sum_{m=1}^{\infty} |A_{2m}|^2 = 1; \quad \sum_{m=0}^{\infty} |A_{2m+1}|^2 = 1; \quad (9.6)$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} |B_{2m+2}|^2 = 1; \quad \sum_{m=0}^{\infty} |B_{2m+1}|^2 = 1.$$

Из (9.5) и (9.1) следуют рекуррентные формулы для отношений амплитуд гармоник (см., например, [9]):

$$G_m^{(a,b)} = \frac{1}{(a_r - m^2)/q - G_{m+2}^{(a,b)}}; \quad (9.7)$$

$$G_{m+2}^{(a,b)} = (a_r - m^2)/q - 1/G_m^{(a,b)}, \quad (9.8)$$

где  $G_m^{(a)} = A_m/A_{m-2}$ ;  $G_m^{(b)} = B_m/B_{m-2}$  при  $m \geq 3$ , а при  $m=2, 3$

$$\begin{aligned} G_2^{(a)} &= a_{2n}/q; \quad G_4^{(a)} = (a_{2n} - 4)/q - 2/G_2^{(a)}; \quad G_3^{(a)} = (a_{2n+1} - 1)/q - 1; \\ G_4^{(b)} &= (b_{2n+2} - 4)/q; \quad G_3^{(b)} = (b_{2n+1} - 1)/q + 1. \end{aligned} \quad (9.9)$$

Собственные значения  $a_r(q)$  удовлетворяют следующим уравнениям, содержащим сходящиеся непрерывные дроби:

$$\frac{a_{2n}}{q} = \frac{1}{V_2(a_{2n}) - \frac{1}{V_4(a_{2n}) - \frac{1}{V_6(a_{2n}) - \dots}}}; \quad (9.10)$$

$$\frac{a_{2n+1} - 1}{q} = \frac{1}{V_3(a_{2n+1}) - \frac{1}{V_5(a_{2n+1}) - \dots}} + 1; \quad (9.11)$$

$$\frac{b_{2n+2} - 4}{q} = \frac{1}{V_4(b_{2n+2}) - \frac{1}{V_6(b_{2n+2}) - \dots}}; \quad (9.12)$$

$$\frac{b_{2n+1} - 1}{q} = \frac{1}{V_3(b_{2n+1}) - \frac{1}{V_5(b_{2n+1}) - \dots}} - 1, \quad (9.13)$$

где  $V_m(x) = (x - m^2)/q$ ,  $n=0, 1, 2, \dots$

Каждое из уравнений имеет бесконечное множество корней, соответствующих различным  $n$ . Запишем уравнения в виде

$$x = F_i(x), \quad i = 1, 2, 3, 4, \quad (9.14)$$

где  $F_i$  — правые части уравнений соответственно (9.10)–(9.13). Табулирование  $F_i(x)$  можно производить, используя рекуррентные соотношения для остатков непрерывных дробей (ср. § 2.4). Рассмотрим, например,  $m$ -й остаток дроби в уравнении (9.10)

$$P_m(x) = \frac{1}{V_{2(m+1)}(x) - \frac{1}{V_{2(m+2)}(x) - \dots}} \quad (9.15)$$

Видно, что имеет место следующая рекуррентная формула:

$$P_m(x) = \frac{1}{V_{2(m+1)}(x) - P_{m+1}(x)}, \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (9.16)$$

Применяя (9.16) в направлении убывания  $m$ , получаем

$$F_1(a_{2n}) = P_0(a_{2n}). \quad (9.17)$$

Эта величина практически не зависит от начального элемента  $P_N$ , если  $m = N$  достаточно велико, и представляет собой предел сходящейся непрерывной дроби. Вычислительная практика показывает, что здесь достаточно  $N = 5 \dots 10$ .

Для дробей в правых частях уравнений (9.11)–(9.13) получаем

$$\begin{aligned} F_2(a_{2n+1}) &= 1 + Q_1(a_{2n+1}); \\ F_3(b_{2n+2}) &= P_1(b_{2n+2}); \\ F_4(b_{2n+1}) &= -1 + Q_1(b_{2n+1}), \end{aligned} \quad (9.18)$$

где

$$Q_m(x) = \frac{1}{V_{2m+1}(x) - \frac{1}{V_{2m+3}(x) - \dots}} \quad (9.19)$$

Численное решение непосредственно уравнений (9.10)–(9.13) встречает определенные трудности, особенно при  $|q| \leq r+1$  ( $r$  — порядок функции Матье). В этом случае величины  $V_r(a_r)$ , входящие в соответствующий «этаж» непрерывных дробей, малы, что приводит к значительным погрешностям округления и связанной с этим неустойчивости итерационной процедуры решения уравнений. Модифицированные уравнения и детали расчетной схемы рассматриваются в § 9.2.

В области  $|q| \ll r+1$  целесообразно применять разложения собственных значений в степенные ряды. При больших  $r$  и достаточно малых  $|q|$  [9]

$$a_r \approx b_r \approx r^2 + \frac{q^2}{2(r^2-1)} + \frac{(5r^2+7)q^4}{3r(r^2-1)^2(r^2-4)} + \dots \quad (9.20)$$

Эта формула пригодна практически начиная с  $r = 6$ . Для меньших  $r$  известны [5,9] следующие степенные ряды:

$$\begin{aligned} a_0(q) &\approx -q^2/2 + 7q^4/128 - 29q^6/2304 + \dots; \\ a_1(q) &\approx b_1(-q) \approx 1 + q - q^2/8 - q^3/64 - q^4/1536 + \dots; \\ b_2(q) &\approx 4 - q^2/12 + 5q^4/13824 - \dots; \\ a_2(q) &\approx 4 + 5q^2/12 - 763q^4/13824 + \dots; \\ a_3(q) &\approx b_3(-q) \approx 9 + q^2/16 + q^3/64 + 13q^4/20480 - \dots; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_4(q) &\approx 16 + q^2/30 - 317q^4/864000 + \dots; \\ a_4(q) &\approx 16 + q^2/30 + 433q^4/864000 - \dots; \\ a_5(q) &\approx b_5(-q) \approx 25 + q^2/48 + 11q^4/774144 + q^5/147456 + \dots \end{aligned} \quad (9.21)$$

Программы 9.4–9.6, реализующие приведенные разложения, работают намного быстрее, чем программы 9.1–9.3, основанные на решении уравнений (9.10)–(9.13), хотя и значительно уступают последним в универсальности. Получаемые из программы 9.4 значения  $a_r, b_r$  при больших  $r$  могут использоваться в качестве исходных при более точных расчетах по программам 9.1–9.3. Отметим, что пользователь при необходимости может составить значительно более короткие программы для отдельных величин из  $a_0, a_1, \dots, b_5$ , применяя для этой цели соответствующие фрагменты программ 9.5, 9.6.

## 9.2. Вычисление собственных значений функций Матье

Как уже упоминалось, погрешности округления при получении элементов дробей, содержащих  $V_r = (a_r - r^2)/q$ , приводят к неустойчивости итерационной схемы. Целесообразно преобразовать уравнения (9.10)–(9.13) так, чтобы указанный элемент был вынесен из непрерывной дроби. После простых преобразований получаем

$$a_{2n} = (2n)^2 + q \left[ \frac{1}{V_{2(n-1)} - \frac{1}{V_{2(n-2)} - \dots - \frac{1}{V_0 - a_{2n}/2q}}} + \frac{1}{V_{2(n+1)} - \frac{1}{V_{2(n+2)} - \dots}} \right]; \quad (9.22)$$

$$a_{2n+1}, b_{2n+1} = (2n+1)^2 + q \left[ \frac{1}{V_{2n-1} - \frac{1}{V_{2n-3} - \dots - \frac{1}{V_1 - \varepsilon}}} + \frac{1}{V_{2n+1} - \frac{1}{V_{2n+3} - \dots}} \right]; \quad (9.23)$$

$$b_{2n+2} = (2n+2)^2 + q \left[ \frac{1}{V_{2(n-1)} - \frac{1}{V_{2(n-2)} - \dots - \frac{1}{V_4}}} + \frac{1}{V_{2(n+1)} - \frac{1}{V_{2(n+2)} - \dots}} \right]. \quad (9.24)$$

Здесь  $e = \pm 1$  для  $a_{2n+1}$  и  $b_{2n+1}$  соответственно,  $n = 1, 2, \dots$ . Собственные значения  $a_0, a_1, b_1, b_2$  определяются уравнениями (9.10)–(9.13).

Уравнения (9.22) — (9.24) также относятся к типу (9.14), хотя в правые части  $F_i(x)$  теперь помимо бесконечных непрерывных дробей входят в качестве слагаемого и конечные дроби. Ясно, что для табулирования последних также применимы рекуррентные формулы типа (9.16), с тем отличием, что порядок этих дробей и значения их последнего элемента теперь фиксированы.

Численное решение уравнений (9.14) реализуется далее *методом итераций*. Простейший способ состоит в последовательной подстановке получающихся из уравнений значений  $x$  снова в правые части уравнений. На  $k$ -й итерации

$$x_{k+1} = F_i(x_k), \quad i = 1, 2, 3, 4. \quad (9.25)$$

Эта схема недостаточно устойчива при неизбежных отклонениях начальных значений  $x_0$  от точного корня  $\bar{x}$ , даже если «в малом» итерационная процедура устойчива. Повышение устойчивости и одновременно скорости сходимости требует уменьшения приращений аргумента на соседних итерациях. В программах 9.1–9.3 применяется следующая схема:

$$x^{(k)} = F_i(x_k); \quad x_{k+1} = x_k + (x^{(k)} - x_k)/d. \quad (9.26)$$

В начале процедуры параметр  $d$  принимается равным 10–300, в зависимости от скорости изменения  $F_i(x)$ , т. е. от производной  $dF_i(x)/dx$ , которая существенно отличается для разных  $a_r$ . На каждой последующей итерации  $d$  уменьшается вдвое, если знак невязки  $x^{(k)} - x_k$  совпадает со знаком невязки на предыдущей итерации. В противном случае  $d$  умножается на число 4. Указанная схема позволяет осуществить близкое к наискорейшему аperiodическому стремление невязки к нулю. Отметим, что (9.26) сводится к (9.25) при  $d = 1$ . Данная схема все же требует значительных затрат машинного времени (10–30 мин на одно значение  $a_r$  при заданной погрешности  $1 \cdot 10^{-6}$ ), что главным образом связано с громоздкостью  $F_i$ . Скорость счета существенно зависит от удачного выбора  $x_0$ , который должен быть возможно ближе к  $x$ . Напомним, что  $x_0$  можно оценивать с помощью степенных рядов (при этом допустима погрешность до 10 %). Для этой же цели на рис. 9.1 приведены кривые  $a_r(q)$  для первых шести функций Матье.

**Программа 9.1.** Собственные значения  $a_{2n}(q)$  четных функций Матье периода  $\pi$ . Решение уравнений (9.22) методом итераций ((9.15) — (9.17), (9.26)).

6	/—/	F10 <sup>x</sup>	ПА	0	П5	6	Fe <sup>x</sup>	П6	ИПД
Fx <sup>2</sup>	П8	ИПС	ИПВ	÷	2	÷	П9	ИПД	Fx ≠ 0
29	2	П7	÷	П0	ПП	74	БП	32	ИП9
ПП	90	0	П9	7	П0	2	/—/	П7	ПП
74	ИПС	—	ИП5	XY	П5	×	Fx < 0	54	ИП6
4	×	БП	57	ИП6	2	÷	П6	ИП5	XY
÷	↑	ИПС	+	ПС	÷	Fx <sup>2</sup>	Fy <sup>—</sup>	ИПА	—
Fx < 0	09	ИПС	С/П	ИПС	ИПД	ИП0	ИП7	×	—
Fx <sup>2</sup>	—	ИПВ	÷	ИП9	—	F1/x	П9	FL0	74
ИПВ	×	ИП8	+	П8	В/О				

#### Инструкция

1. Исходные данные:  $(2n = \text{РД}, q = \text{РВ}) x_0 = \text{РС}$ .
2. Пуск: В/О С/П.
3. Результат:  $\text{РХ} = \text{РС} = a_{2n}(q)$ .
4. Регистры: рабочие РВ, РС, РД; оперативные Р0, Р5 — РА; свободные Р1 — Р4.

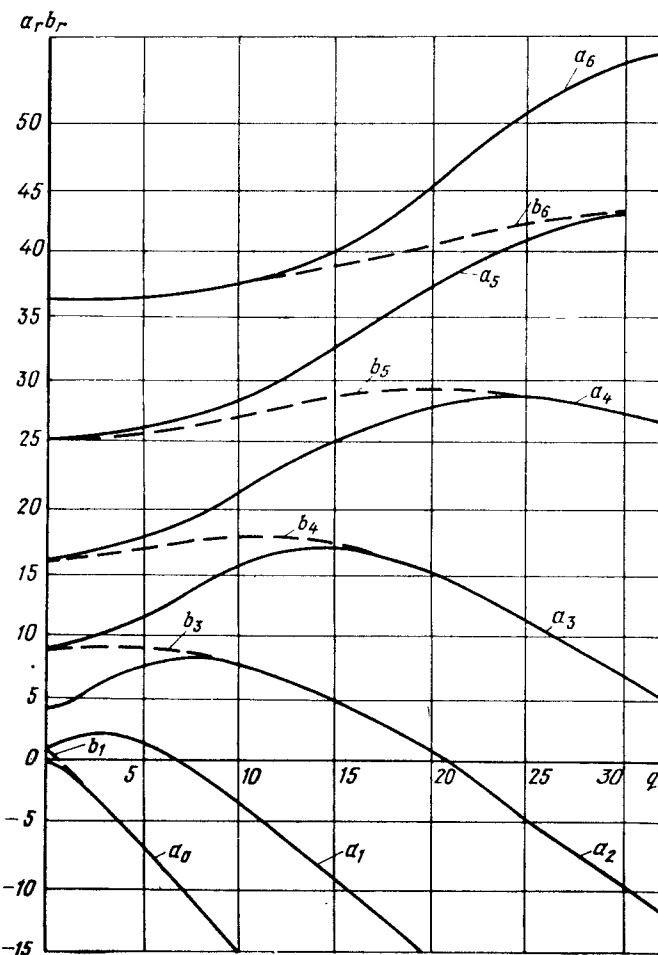


Рис. 9.1. Собственные значения функций Матье  $a_r, b_r, r = 0, 1, 2, \dots, 6$

5. Погрешность относительная меньше  $2 \cdot 10^{-6}$ , кроме окрестности нуля  $a_{2n}(q)$ , где  $|a_{2n}(q)| \ll (2n+1)^2$ . В этом случае абсолютная погрешность меньше  $(2n+1)^2 \cdot 10^{-6}$ .

6. Время счета 10–30 мин, в зависимости от скорости сходимости итераций.

#### Примеры

$a_2(25) = -3,5221657$  ( $-3,52216473$  [9]),  $x_0 = -3, t \approx 14$  мин;

$a_{10}(25) = 103,23017$  ( $103,230205$  [9]),  $x_0 = 100, t \approx 25$  мин.

**Программа 9.2.** Собственные значения  $a_{2n+1}(q), b_{2n+1}(q)$  четных и нечетных функций Матье периода  $2\pi$ . Решение уравнений (9.23) методом итераций ((9.26), (9.18), (9.19)).

6	/—/	F10 <sup>x</sup>	ПА	0	П5	3	Fe <sup>x</sup>	П6	ИПД
Fx <sup>2</sup>	П8	ИПД	2	—	Fx ≥ 0	28	1	+	П0
ИП4	П9	1	П7	ПП	74	БП	30	ИП4	ПП
92	0	П9	1	/—/	П7	1	4	П0	ПП
74	ИПС	—	ИП5	ХУ	П5	×	Fx < 0	54	ИП6
4	×	БП	57	ИП6	2	÷	П6	ИП5	ХУ
÷	↑	ИПС	+	ПС	÷	Fx <sup>2</sup>	Fy <sup>—</sup>	ИПА	—
Fx < 0	09	ИПС	С/П	ИПС	ИПД	ИП0	ИП7	×	—
Fx <sup>2</sup>	—	ИПВ	÷	ИП9	—	F1/x	П9	КИП0	FL0
74	F,	ИПВ	×	ИП8	+	П8	В/О		

#### Инструкция

1. Исходные данные: ( $q = РВ$ ,  $(2n + 1) = РД$ ,  $ε = Р4$ ),  $x_0 = РС$ ;  $ε = ±1$  для  $a_{2n+1}$  и  $b_{2+1}$  соответственно. Выбор  $x_0$  см. рис. 9.1 или (9.20).

2. Пуск: В/О С/П.

3. Результат:  $PX = PC = a_{2n+1}(b_{2n+1})$ .

4. Регистры: рабочие Р4, РВ, РС, РД; оперативные Р0, Р5 — РА; свободные Р1 — Р3.

5. Погрешность относительная меньше  $2 \cdot 10^{-6}$ , кроме окрестности нулей  $a_{2n+1}$ ,  $b_{2n+1}$ , где  $|a_r| \ll r^2$ . В этих случаях абсолютная погрешность меньше  $(2n + 1)^2 \cdot 10^{-6}$ .

6. Время счета 10—30 мин, в зависимости от скорости сходимости итераций.

Примеры.

$a_1(20) = -14,491292$  ( $-14,4913014$  [24]),  $x_0 = -15$ ,  $t \approx 10$  мин;

$b_9(1) = 9,047744$  ( $9,0477394$  [24]),  $x_0 = 9,5$ ,  $t \approx 16$  мин;

$a_{15}(25) = 226,40081$  ( $226,40072$  [9]),  $x_0 = 225$ ,  $t \approx 19$  мин.

**Программа 9.3.** Собственные значения  $b_{2n+2}(q)$  нечетных функций Матье периода л. Решение уравнений (9.24) методом итераций ((9.26), (9.18), (9.15)).

6	/—/	F10 <sup>x</sup>	ПА	0	П5	2	Fe <sup>x</sup>	П6	ИПД
Fx <sup>2</sup>	П8	ИПД	2	П7	÷	П0	КИП0	ИПД	2
—	Fx ≠ 0	25	ПП	65	7	П0	2	/—/	П7
ПП	65	ИПС	—	ИП5	ХУ	П5	×	Fx < 0	45
ИП6	4	×	БП	48	ИП6	2	÷	П6	ИП5
ХУ	÷	↑	ИПС	+	ПС	÷	Fx <sup>2</sup>	Fy <sup>—</sup>	ИПА
—	Fx < 0	09	ИПС	С/П	0	П9	ИПС	ИПД	ИП0
ИП7	×	—	Fx <sup>2</sup>	—	ИПВ	÷	ИП9	—	F1/x
П9	FL0	67	ИПВ	×	ИП8	+	П8	В/О	

#### Инструкция

1. Исходные данные: ( $q = РВ$ ,  $(2n + 2) = РД$ ),  $x_0 = РС$ .

2. Пуск: В/О С/П.

3. Результат:  $PX = PC = b_{2n+2}$ .

4. Регистры: рабочие РВ, РС, РД; оперативные Р0, Р5 — РА; свободные Р1 — Р4.

5. Погрешность относительная меньше  $2 \cdot 10^{-6}$ , кроме окрестности нулей  $b_{2n+2}$ , где  $|b_{2n+2}| \ll (2n + 2)^2$ . В этом случае абсолютная погрешность меньше  $(2n + 2)^2 \cdot 10^{-6}$ .

6. Время счета  $t \approx 10—30$  мин, в зависимости от скорости сходимости итераций.

Примеры.

$b_2(25) = -21,314838$  ( $-21,3148606$  [9]),  $x_0 = -20$ ,  $t \approx 11$  мин;

$b_{10}(10) = 100,50686$  ( $100,50677$  [9]),  $x_0 = 100$ ,  $t \approx 12$  мин.

**Программа 9.4.** Собственные значения  $a_r \approx b_r$  функций Матье при больших значениях порядка ( $r \geq 6$ ). Разложение в ряд (9.20).

Fx <sup>2</sup>	↑	↑	ИПД	Fx <sup>2</sup>	1	—	ПС	5	×
1	2	+	×	1	6	÷	ИПС	Fx <sup>2</sup>	÷
ИПС	3	—	÷	1	+	×	2	÷	ИПС
÷	ИПС	+	1	+	С/П				

#### Инструкция

1. Исходные данные: ( $r = РД$ ), [ $q = РХ$ ].

2. Пуск: В/О С/П.

3. Результат:  $PX \approx b_r \approx a_r$ .

4. Регистры: рабочие РД; оперативные РС; свободные Р0 — РВ.

5. Погрешность относительная:

$q <$	$0,1 r^2$	$0,3 r^2$	$0,4 r^2$
$\delta \leq$	$1 \cdot 10^{-7}$	$1 \cdot 10^{-5}$	$1 \cdot 10^{-3}$

6. Время счета  $t \approx 15$  с.

Пример.  $a_{15}(25) \approx b_{15}(25) = 226,40065$  ( $226,40072$  [9]).

**Программа 9.5.** Собственные значения  $a_0(q)$ ,  $a_2(q)$ ,  $b_2(q)$ ,  $a_4(q)$ ,  $a_6(q)$ ,  $b_6(q)$  при малых  $|q|$ . Разложения в ряды (9.21).

Fx <sup>2</sup>	↑	↑	↑	2	9	×	1	8	÷
7	—	×	6	4	÷	1	+	2	÷
/—/	×	П0	F,	↑	1	,	5	1	÷
/—/	5	+	1	2	÷	×	4	+	П1
F,	↑	5	×	1	1	5	2	÷	/—/
1	+	1	2	÷	×	/—/	4	+	П2
F,	↑	6	6	,	5	1	3	÷	1
+	3	0	÷	×	1	6	+	П4	F,
↑	3	3	5	4	÷	1	+	7	0
÷	×	3	6	+	П6	С/П			

#### Инструкция

1. Исходные данные: [ $q = РХ$ ].

2. Пуск: В/О С/П.

- 3 Результат:  $P0=a_0$ ,  $P1=a_2$ ,  $P2=b_2$ ,  $P4=a_4$ ,  $PX=P6=a_6 \approx b_6$ .  
 4. Регистры: рабочие  $P0$ ,  $P1$ ,  $P2$ ,  $P4$ ,  $P6$ ; оперативные — ; свободные  $P3$ ,  $P5$ ,  $P7$  — РД.  
 5. Погрешность относительная меньше:

$a_0$	$1 \cdot 10^{-4}$ при $ q  \leq 0,5$	$1 \cdot 10^{-2}$ при $ q  \leq 1$
$a_2$	$5 \cdot 10^{-5}$ при $ q  \leq 0,5$	$5 \cdot 10^{-3}$ при $ q  \leq 1$
$b_2$	$1 \cdot 10^{-6}$ при $ q  \leq 1$	$1 \cdot 10^{-5}$ при $ q  \leq 2$
$a_4$	$1 \cdot 10^{-7}$ при $ q  \leq 1$	$1 \cdot 10^{-5}$ при $ q  \leq 2$
	$1 \cdot 10^{-2}$ при $ q  \leq 4$	
$a_6, b_6$	$1 \cdot 10^{-7}$ при $ q  \leq 2$	$1 \cdot 10^{-5}$ при $ q  \leq 4$
	$5 \cdot 10^{-4}$ при $ q  \leq 8$	

6. Время счета  $t \approx 30$  с.  
 Примеры.

$$a_0(1) = -0,4578993 \text{ } (-0,4551386 \text{ [24]}),$$

$$a_2(1) = 4,361479 \text{ } (4,37113010 \text{ [24]}), \quad b_2(1) = 3,9170284 \text{ } (3,9170248 \text{ [24]});$$

$$a_4(1) = 16,033835 \text{ } (16,033832 \text{ [24]}), \quad a_6(1) = b_6(1) = 36,01429 \text{ } (36,01429 \text{ [24]}).$$

**Программа 9.6.** Собственные значения  $a_1(q)$ ,  $b_1(q)$ ,  $a_3(q)$ ,  $b_3(q)$ ,  $b_4(q)$ ,  $a_5(q)$ ,  $b_5(q)$ . Разложение в ряд (9.21).

/—/	↑	↑	↑	2	4	÷	1	+	8
÷	×	/—/	1	—	8	÷	×	1	+
×	1	+	П1	F,	↑	1	3	×	3
2	0	÷	1	+	4	÷	×	1	+
×	×	1	6	÷	9	+	П3	F,	↑
×	9	0	,	8	5	2	÷	/—/	1
+	×	×	3	0	÷	1	6	+	П4
F,	↑	1	1	×	×	1	6	1	2
8	÷	1	+	×	×	4	8	÷	2
5	+	П5	С/П						

#### Инструкция

- Исходные данные:  $[q = PX]$ .
- Пуск: для  $b_1, b_3, b_4, a_5, b_5$  В/О С/П; для  $a_1, a_3$  БП 01 С/П.
- Результат:  $P1=a_1$ ,  $b_1$ ,  $P3=a_3$ ,  $b_3$ ,  $P4=b_4$ ,  $PX=P5=a_5 \approx b_5$ .
- Регистры: рабочие  $P1$ ,  $P3$ ,  $P4$ ,  $P5$ ; оперативные — ; свободные  $P0$ ,  $P2$ ,  $P4$ ,  $P6$  — РД.
- Погрешность относительная меньше:

$a_1, b_1$	$5 \cdot 10^{-5}$ при $ q  \leq 0,5$	$5 \cdot 10^{-4}$ при $ q  \leq 1$
$a_3, b_3$	$5 \cdot 10^{-5}$ при $ q  \leq 1$	$1 \cdot 10^{-3}$ при $ q  \leq 2$
$b_4$	$3 \cdot 10^{-7}$ при $ q  \leq 1$	$1 \cdot 10^{-5}$ при $ q  \leq 2$
	$1 \cdot 10^{-3}$ при $ q  \leq 4$	
$a_5, b_5$	$3 \cdot 10^{-7}$ при $ q  \leq 1$	$1 \cdot 10^{-5}$ при $ q  \leq 2$
	$1 \cdot 10^{-3}$ при $ q  \leq 5$	

6. Время счета  $t \approx 30$  с.

Примеры.

$$a_1(1) = 1,858724 \text{ } (1,8591081 \text{ [24]}), \quad b_1(1) = -0,110026 \text{ } (-0,1102488 \text{ [24]});$$

$$a_3(1) = 9,0787598 \text{ } (9,0783688 \text{ [24]}), \quad b_3(1) = 9,0475098 \text{ } (9,0477393 \text{ [24]});$$

$$b_4(5) = 16,604023 \text{ } (16,6482199 \text{ [24]});$$

$$a_5(5) = 25,529714 \text{ } (25,549972 \text{ [9]}), \quad b_5(5) = 25,529714 \text{ } (25,5108 \text{ [9]}).$$

### 9.3. Разложение функций Матье в тригонометрические ряды

В предлагаемых далее программах вычисляются амплитуды первых 18—20 гармоник рядов Фурье (9.5) по рекуррентным формулам (9.7), (9.8). Сначала находятся ненормированные величины при единичной амплитуде первого члена соответствующего ряда (одна из величин  $A_0, A_1, B_1, B_2$ . Нормировка производится делением всех вычисленных амплитуд на норму  $N$ , где  $N^2$  — соответствующая сумма в левых частях равенств (9.6). Точность этой процедуры достаточна, когда квадраты амплитуд неучитываемых гармоник пренебрежимо малы.

Разностная схема, связанная с применением рекуррентных формул, устойчива до тех пор, пока получаемые из них последовательные амплитуды возрастают по модулю при изменении  $m$  в соответствующую сторону (для (9.7) должно уменьшаться, а для (9.8) — увеличиваться \*). Очевидно, что устойчивость (9.8) должна иметь место при работе с функциями Матье больших порядков  $n \approx 10$ , у которых максимальны достаточно высокие гармоники, а устойчивость (9.7) — для функций низших порядков  $n \approx 1$ . Неустойчивость при превышении некоторого порогового числа шагов приводит к возрастанию модулей амплитуд тех гармоник, которые должны были бы стремиться к нулю. Это может привести к значительным погрешностям вычисленных значений не только «неправильно» растущих амплитуд, но через норму  $N$  всех остальных амплитуд, хотя отношения последних не зависят от неустойчивости. Отметим, что этот вычислительный эффект сразу заметен по расчетным данным, что позволяет, повторив расчет с меньшим числом гармоник, получить скорректированные значения устойчивых амплитуд. Эффективный способ исключения неустойчивости, не связанный с сокращением числа учитываемых членов ряда Фурье, состоит в применении альтернативных рекуррентных формул (если неустойчивость возникает при расчете по формуле (9.7), то применяется (9.8), и наоборот).

Ниже приводятся программы гармонического анализа обоих типов. Расчеты по формуле (9.7) должны начинаться со стороны больших  $m = N \gg n$ . В этом случае можно положить  $G_{N+2} = 0$ . Указанное приближение ввиду устойчивости рекуррентной схемы (очевидно, что при достаточно больших  $N$  амплитуды гармоник будут нарастать с уменьшением  $m$ ) практически не сказывается на результатах вычислений, приводя лишь к малой погрешности амплитуды  $N$ -й — самой высокой из учитываемых гармоник (ср. пример к программе 9.8). Действительно, поскольку амплитуды при больших  $m$  убывают с ростом  $m$ , то  $G_{N+2} < 1$ , тогда как второе слагаемое в знаменателе (9.7)  $|(a_r - N^2)/q| \sim N^2/q \gg 1$ .

**Программа 9.7.** Коэффициенты  $A_{2m}$  ряда Фурье функций  $se_{2n}(z, q)$  (9.8), (9.9), (9.6).

\* Фактически (9.7) и (9.8) — это одна рекуррентная формула, которая применяется в прямом или обратном направлениях.

7	ПО	1	2	П2	ИП4	ИП3	÷	ПД	2
÷	/—/	F1/x	ИП4	4	—	ИП3	÷	÷	ПС
П1	ИП4	9	ИП0	—	2	×	Fx <sup>2</sup>	—	ИП3
÷	ИП1	F1/x	—	КП2	FL0	20	8	ПО	1
4	П1	2	КИП1	КИП1	×	ИП1	1	÷	П1
F,	КП1	Fx <sup>2</sup>	÷	ИП1	1	÷	П1	F,	FL0
43	ИПД	Fx <sup>2</sup>	÷	Fv <sup>—</sup>	П2	9	ПО	1	4
П1	КИП1	ИП2	÷	ИП1	1	÷	П1	F,	КП1
FL0	71	ИП2	F1/x	С/П					

#### Инструкция

1. Исходные данные: ( $q = P3$ ,  $a_{2n} = P4$ ).

2. Пуск: В/О С/П.

3. Результат:  $PX = A_0$ ,  $PD = A_2$ ,  $PC = A_4, \dots$ ,  $P5 = A_{18}$ .

4. Регистры: рабочие P3 — PD; оперативные P0, P1, P2; свободных нет.

5. Погрешность относительная меньше  $1 \cdot 10^{-6}$  при подстановке точного значения  $a_{2n}$  и в области устойчивости рекуррентной формулы (9.8) ( $m \leq N$ , где  $A_N$  — максимальная по модулю амплитуда). При сильном развитии неустойчивости (наличие при  $m > N$  растущих по модулю с увеличением  $m$  амплитуд) следует перейти к программе 9.8 или исключить гармоники с нарастающими после максимума амплитудами (см. пример). Пусть число таких гармоник равно  $k$ . Тогда числа 7 и 9 в программе (адреса 00 и 22) заменяются соответственно 7 —  $k$  и 9 —  $k$ . Одновременно при вводе исходных данных заносятся нули в  $k$  регистров памяти: P5, P6, ..., P ( $4 + k$ ).

6. Время счета  $t \approx 2$  мин.

Пример. Коэффициенты  $A_{2m}$  для функции  $se_0(z, 25)$ . Собственное значение  $a_0(25) = -40,256780$ . Ниже в левом столбце помещены вычисленные значения коэффициентов при максимальном числе учитываемых гармоник, в среднем — результат после исключения гармоник  $A_{16}, A_{18}$ , которые нарастают вследствие неустойчивости, в правом столбце — табличные значения из [9]:

$A_0$	0,42973778	0,42974103	0,429741038
$A_2$	-0,69199438	-0,69199961	-0,69199961
$A_4$	0,36554215	0,36554491	0,36554489
$A_6$	-0,13057461	-0,1305756	-0,130575523
$A_8$	$3,2745855 \cdot 10^{-2}$	$3,2746102 \cdot 10^{-2}$	$3,2745863 \cdot 10^{-2}$
$A_{10}$	$-5,9844819 \cdot 10^{-3}$	$-5,9845272 \cdot 10^{-3}$	$-5,983606 \cdot 10^{-3}$
$A_{12}$	$8,2871128 \cdot 10^{-4}$	$8,2871755 \cdot 10^{-4}$	$8,23792 \cdot 10^{-4}$
$A_{14}$	$-1,2334522 \cdot 10^{-4}$	$-1,2334615 \cdot 10^{-4}$	$-8,7961 \cdot 10^{-5}$
$A_{16}$	$3,3693451 \cdot 10^{-4}$	—	$7,466 \cdot 10^{-6}$
$A_{18}$	$-3,86942 \cdot 10^{-3}$	—	$-5,14 \cdot 10^{-7}$

#### Программа 9.8. Коэффициенты $A_{2m}$ функций $se_{2n}(z, q)$ (9.7), (9.6).

8	ПО	4	П4	ИП2	ИП3	÷	ПД	0	П1
ИП2	ИП0	1	+	2	×	Fx <sup>2</sup>	—	ИП3	÷
ИП1	—	F1/x	КП4	FL0	09	8	ПО	1	4
П1	2	КИП1	КИП1	×	ИП1	1	÷	П1	F,
КП1	Fx <sup>2</sup>	÷	ИП1	1	÷	П1	F,	FL0	32
ИПД	Fx <sup>2</sup>	÷	Fv <sup>—</sup>	П4	9	ПО	1	4	П1
КИП1	ИП4	÷	ИП1	1	÷	П1	F,	КП1	FL0
60	ИП4	F1/x	С/П						

#### Инструкция

1. Исходные данные: ( $q = P3$ ,  $a_{2n} = P2$ ).

2. Пуск: В/О С/П.

3. Результат:  $PX = A_0$ ,  $PD = A_2$ ,  $PC = A_4, \dots$ ,  $P5 = A_{18}$ .

4. Регистры: рабочие P2, P3, P5 — PD; оперативные P0, P1, P4; свободных нет.

5. Погрешность относительная меньше  $1 \cdot 10^{-6}$  при использовании точного значения  $a_{2n}$  и в области устойчивости рекуррентной формулы (9.7) ( $m > N$ , где  $A_N$  — максимальная по модулю амплитуда). При сильном развитии неустойчивости (появление при  $m < N$  растущих по модулю с уменьшением  $m$  коэффициентов  $A_m$ ) перейти к программе 9.7.

6. Время счета  $t \approx 2$  мин.

Пример. Коэффициенты  $A_{2m}$  для  $se_0(z, 25)$  — пример из предыдущей программы.

$A_0 = 0,42974105$ ;  $A_2 = -0,69199964$ ;  $A_4 = 0,3655449$ ;  $A_6 = -0,13057552$ ;  $A_8 = 3,2745663 \cdot 10^{-2}$ ;  $A_{10} = -5,9836061 \cdot 10^{-3}$ ;  $A_{12} = 8,23792 \cdot 10^{-4}$ ;  $A_{14} = -8,7961225 \cdot 10^{-5}$ ;  $A_{16} = 7,46595588 \cdot 10^{-6}$ ;  $A_{18} = -5,1241042 \cdot 10^{-7}$ .

Как видно, здесь амплитуды гармоник возрастают с уменьшением  $m$ , кроме  $A_0$ , что и обеспечивает высокую точность при использовании рекуррентной формулы (9.7) (ср. табличные данные в примере к программе 9.7). Исключение составляет лишь  $A_{18}$ , которая является начальной для данной схемы, и при ее вычислении допускается систематическая погрешность (см. выше).

#### Программа 9.9. Коэффициенты $A_{2m+1}(B_{2m+1})$ функций $se_{2n+1}(z, q)$ и $se_{2n+1}(z, q)$ (9.8), (9.9), (9.6).

8	ПО	1	3	П2	ИП4	1	—	ИП3	÷
1	—	ПД	П1	ИП4	9	ИП0	—	2	×
1	+	Fx <sup>2</sup>	—	ИП3	÷	ИП1	F1/x	—	КП2
FL0	13	8	ПО	1	4	П1	1	КИП1	КИП1
×	ИП1	1	+	П1	F,	КП1	Fx <sup>2</sup>	÷	ИП1
1	+	П1	F,	FL0	38	ИПД	Fx <sup>2</sup>	÷	Fv <sup>—</sup>
П2	9	ПО	1	4	П1	КИП1	ИП2	÷	ИП1
1	+	П1	F,	КП1	FL0	66	ИП2	F1/x	С/П

Данная программа предназначена для вычисления  $A_{2m+1}$ . Переход к  $B_{2m+1}$  осуществляется заменой команды — (адрес 11) на +.

## Инструкция

1. Исходные данные: для  $A_{2m+1}$  ( $q=P3$ ,  $a_{2n+1}=P4$ ), для  $B_{2m+1}$  ( $q=P3$ ,  $b_{2n+1}=P4$ ).

2. Пуск: В/О С/П.

3. Результат:  $PX=A_1$  ( $B_1$ ),  $РД=A_3$  ( $B_3$ ),  $PC=A_5$  ( $B_5$ ), ...,  $P5=A_{19}$  ( $B_{19}$ ).

4. Регистры: рабочие  $P3$  —  $РД$ ; оперативные  $P0$  —  $P2$ ; свободных нет.

5. Погрешность относительная меньше  $1 \cdot 10^{-6}$  при использовании точных значений  $a_{2n+1}$  ( $b_{2n+1}$ ) и в области устойчивости рекуррентной формулы (9.8) ( $m < N$ , где  $A_N$  (или  $B_N$ ) — максимальные по модулю амплитуды). При сильном развитии неустойчивости (наличие растущих по модулю с увеличением  $m$  амплитуд при  $m > N$ ) перейти к программе 9.10 или исключить гармоники с нарастающими после максимума амплитудами. Выполняется это так же, как и в программе 9.7 (п. 5 инструкции), уменьшаются числа по адресам 00 и 15.

6. Время счета  $t \approx 2$  мин.

Пример. Коэффициенты  $B_{2m+1}$  для функции  $se_{15}(z, 5)$ . Собственное значение  $b_{15}(5) = 225,05581$ .

$B_1 = 5,3432261 \cdot 10^{-11}$  (0);  $B_7 = 4,2274757 \cdot 10^{-6}$  ( $4,227 \cdot 10^{-6}$ );

$B_{11} = 4,2813929 \cdot 10^{-3}$  ( $4,281392 \cdot 10^{-3}$ );  $B_{13} = 8,8952014 \cdot 10^{-2}$  ( $8,8952014 \cdot 10^{-2}$ );

$B_{15} = 0,99297408$  ( $0,99297409$ );  $B_{17} = -7,7868437 \cdot 10^{-2}$  ( $-7,7867942 \cdot 10^{-2}$ );

$B_{19} = 2,8728002 \cdot 10^{-3}$  ( $2,866409 \cdot 10^{-3}$ ).

В скобках — значения  $B_{2m+1}$  из [9]. Как видно, неустойчивость рекуррентной схемы возникает после  $2m+1 = 15$ .

**Программа 9.10.** Коэффициенты  $A_{2m+1}$  ( $B_{2m+1}$ ) функций  $se_{2n+1}(z, q)$  и  $se_{2n+1}(z, q)$  (9.7), (9.6).

8	ПО	4	П4	ИП2	1	—	ИП3	÷	1
—	ПД	0	П1	ИП2	ИП0	1	+	2	×
1	+	$Fx^2$	—	ИП3	÷	ИП1	—	$F1/x$	КП4
FL0	13	8	ПО	1	4	П1	1	КИП1	КИП1
×	ИП1	1	+	П1	F,	КП1	$Fx^2$	+	ИП1
1	+	П1	F,	FL0	38	ИПД	$Fx^2$	+	$Fv^-$
П4	9	ПО	1	4	П1	КИП1	ИП4	÷	ИП1
1	+	П1	F,	КП1	FL0	66	ИП4	$F1/x$	С/П

Данная программа предназначена для  $A_{2m+1}$ . Переход к  $B_{2m+1}$  осуществляется заменой команды — (адрес 10) на команду +.

## Инструкция

1. Исходные данные: для  $A_{2m+1}$  ( $q=P3$ ,  $a_{2n+1}=P2$ ); для  $B_{2m+1}$  ( $q=P3$ ,  $b_{2n+1}=P2$ ).

2. Пуск: В/О С/П.

3. Результат:  $PX=A_1$  ( $B_1$ ),  $РД=A_3$  ( $B_3$ ),  $PC=A_5$  ( $B_5$ ), ...,  $P5=A_{19}$  ( $B_{19}$ )

4. Регистры: рабочие  $P2$ ,  $P3$ ,  $P5$  —  $РД$ ; оперативные  $P0$ ,  $P1$ ,  $P4$ ; свободных нет.

5. Погрешность относительная меньше  $1 \cdot 10^{-6}$  при использовании точных значений  $a_{2n+1}(q)$  и  $b_{2n+1}(q)$  и в области устойчивости рекуррентной формулы (9.7) ( $m > N$ , где  $A_N$  (или  $B_N$ ) — максимальные по модулю амплитуды). При наличии растущих по модулю с уменьшением  $m$  амплитуд для  $m < N$  перейти к программе 9.9.

6. Время счета  $t \approx 2$  мин.

Пример. Вычисление коэффициентов  $A_{2m+1}$  функции  $se_1(z, 25)$ ,  $a_1(25) = -21,314900$ :

$A_1 = 0,39125227$  ( $0,391252265$ );  $A_3 = -0,74048248$  ( $-0,740482467$ );

$A_{17} = 1,0052574 \cdot 10^{-5}$  ( $1,0053 \cdot 10^{-5}$ );  $A_{19} = -6,5734912 \cdot 10^{-7}$  ( $-6,60 \cdot 10^{-7}$ )

В скобках указаны табличные данные из [9].

В этом примере  $A_{2m+1}$  возрастают с уменьшением  $m$  практически при всех  $m$ , так как функция невысокого порядка и максимальной является 3-я гармоника. Поэтому при использовании рекуррентной формулы (9.7) неустойчивость не наблюдается, и совпадение вычисленных и табличных данных хорошее.

**Программа 9.11.** Коэффициенты  $B_{2m+1}$  функций  $se_{2n+1}(z, q)$  (9.8), (9.9), (9.6).

8	ПО	1	3	П2	ИП4	4	—	ИП3	÷
ПД	П1	ИП4	1	0	ИП0	—	2	×	$Fx^2$
—	ИП3	÷	ИП1	$F1/x$	—	КП2	FL0	11	8
ПО	1	4	П1	1	КИП1	КИП1	×	ИП1	1
+	П1	F,	КП1	$Fx^2$	+	ИП1	1	+	П1
F,	FL0	35	ИПД	$Fx^2$	+	$Fv^-$	П2	9	ПО
1	4	П1	КИП1	ИП2	÷	ИП1	1	+	П1
F,	КП1	FL0	63	ИП2	$F1/x$	С/П			

## Инструкция

1. Исходные данные: ( $q=P3$ ,  $b_{2n+2}=P4$ ).

2. Пуск: В/О С/П.

3. Результат:  $PX=B_2$ ,  $РД=B_4$ ,  $PC=B_6$ , ...,  $P5=B_{20}$ .

4. Регистры: рабочие  $P3$  —  $РД$ ; оперативные  $P0$  —  $P2$ ; свободных регистров нет.

5. Погрешность относительная меньше  $1 \cdot 10^{-6}$  при использовании точных значений  $b_{2n+2}$  и при работе в области устойчивости рекуррентной формулы (9.8) ( $m < n$ , где  $B_N$  — максимальная по модулю амплитуда). Возрастание в области  $m > N$  по модулю амплитуд с увеличением  $m$  требует перейти к программе 9.12 или исключить возрастающие амплитуды (ср. пример к программе 9.7). Пусть число таких  $B_{2m+2}$  равно  $k$ . Тогда числа 8 и 10 в программе (адреса соответственно 00 и 13,14) заменяются соответственно 8 —  $k$  и 10 —  $k$ , а также заносятся нули в те  $k$  регистров памяти, в которых содержатся являющиеся  $B_{2m+2}$ .

6. Время счета  $t \approx 2$  мин.

Пример. Коэффициенты  $B_{2m+2}$  функций  $se_{10}(z, 25)$ ,  $b_{10}(25) = 103,22568$ .

$B_2 = 1,8003595 \cdot 10^{-2}$  ( $1,8003596 \cdot 10^{-2}$ );  $B_4 = 7,1456759 \cdot 10^{-2}$  ( $7,1456752 \cdot 10^{-2}$ );

$B_{10} = 0,63250872$  ( $0,63250875$ );  $B_{18} = 2,5236471 \cdot 10^{-3}$  ( $2,522676 \cdot 10^{-3}$ );

$B_{20} = -2,2210567 \cdot 10^{-4}$  ( $-2,13694 \cdot 10^{-4}$ ).

В скобках табличные данные из [9].

**Программа 9.12.** Коэффициенты  $B_{2m+2}$  функций  $se_{2n+2}(z, q)$  (9.7), (9.6).

8	П0	4	П4	ИП2	4	—	ИП3	÷	ПД
0	П1	ИП2	ИП0	2	+	2	×	$Fx^2$	—
ИП3	÷	ИП1	—	$F1/x$	КП4	FL0	11	8	П0
1	4	П1	1	КИП1	КИП1	×	ИП1	1	+
П1	F,	КП1	$Fx^2$	+	ИП1	1	+	П1	F,
FL0	34	ИПД	$Fx^2$	+	$F\sqrt{-}$	П4	9	П0	1
4	П1	КИП1	ИП4	÷	ИП1	1	+	П1	F,
КП1	FL0	62	ИП4	$F1/x$	C/П				

**Инструкция**

1. Исходные данные: ( $q = P3$ ,  $b_{2n+2} = P2$ ).
2. Пуск: В/О С/П.
3. Результат:  $PX = B_2$ ,  $PD = B_4$ ,  $PC = B_6$ , ...,  $P5 = B_{20}$ .
4. Регистры: рабочие P2, P3, P5 — РД; оперативные P0, P1, P4; свободных нет.

5. Погрешность относительная меньше  $1 \cdot 10^{-6}$  при использовании точного значения  $b_{2n+2}$  и при работе в области устойчивости рекуррентной формулы (9.7) ( $m > N$ , где  $B_N$  — максимальная по модулю амплитуда). При сильном развитии неустойчивости (появление при  $m < N$  растущих по модулю с уменьшением  $m$  коэффициентов  $B_{2m+2}$ ) перейти к программе 9.7.

6. Время счета  $t \approx 2$  мин.

**Пример.** Коэффициенты  $B_{2m+2}$  функции  $se_2(z, 5)$ ,  $b_2(5) = 2,0994605$ . Ниже приводятся значения части вычисленных коэффициентов.

$$B_2 = 0,93342948 \quad (0,93342944); \quad B_4 = -0,35480392 \quad (-0,3548039);$$

$$B_{10} = 2,1979641 \cdot 10^{-4} \quad (2,19797 \cdot 10^{-4}); \quad B_{16} = -3,9396029 \cdot 10^{-9} \quad (-4 \cdot 10^{-9});$$

$$B_{20} = -7,6909674 \cdot 10^{-13}.$$

В скобках — табличные данные из [9].

**Указатель программ**

Номер программы	Собственные значения функций Матые	Метод	Число шагов	Число регистров памяти	Примечание
9.1	$a_{2n}(q)$	Итерации	96	10	Четные функции периода $\pi$
9.2	$a_{2n+1}(q), b_{2n+1}(q)$	»	98	11	Четные и нечетные функции периода $2\pi$
9.3	$b_{2n+2}(q)$	»	89	10	Нечетные функции периода $\pi$
9.4	$a_r(q) \approx b_r(q)$	Разложение в ряд	36	2	Большие значения порядка $r \geq 6$
9.5	$a_0(q), a_2(q), b_2(q)$ $a_4(q), a_6(q), b_6(q)$	То же	97	5	Малые $q$

Окончание

Номер программы	Собственные значения функций Матые	Метод	Число шагов	Число регистров памяти	Примечание
9.6	$a_1(q), b_1(q), a_3(q), b_3(q), b_4(q), a_5(q), b_5(q)$	Разложение в ряд	94	4	Малые $q$
9.7	$A_{2m}$	Рекуррентная формула (9.8)	85	14	Четные функции периода $\pi$
9.8	$A_{2m}$	Рекуррентная формула (9.7)	74	14	То же
9.9	$A_{2m+1}, B_{2m+1}$	Рекуррентная формула (9.8)	80	14	Четные и нечетные функции периода $2\pi$
9.10	$A_{2m+1}, B_{2m+1}$	Рекуррентная формула (9.7)	80	14	То же
9.11	$B_{2m+2}$	Рекуррентная формула (9.8)	77	14	Нечетные функции периода $\pi$
9.12	$B_{2m+2}$	Рекуррентная формула (9.7)	76	14	То же

## Глава 10

### Вычисление определенных интегралов

#### 10.1. Вводные замечания

Использование того или иного алгоритма вычисления интегралов

$$F = \int_a^b f(x) dx \quad (10.1)$$

диктуется стремлением достичь наивысшую скорость счета при заданной точности, что равносильно обеспечению максимальной точности с заданным числом интервалов, на которые делится промежуток интегрирования. Эта проблема, как известно, не имеет однозначного решения, и здесь многое зависит от поведения подынтегральной функции. В частности, для  $f(x)$ , имеющих разрывную первую производную, даже простейший метод трапеций может оказаться более производительным, чем метод Гаусса [22]. Немаловажное значение имеет также способ оценки точности в рамках данного алгоритма и уточнения результата.

При выборе алгоритма и построении программы нужно принимать во внимание и следующее:

число программных операторов и свободных регистров памяти, которое можно использовать в подпрограмме  $f(x)$ ;

удобство работы с программой (простота ввода исходных данных и вывода результатов).



Для ПМК наибольшее значение имеет первое, с которым вообще связана возможность постановки соответствующей задачи интегрирования при достаточно сложной подынтегральной функции. В таких случаях использование менее быстрых, но более простых алгоритмов может быть выходом из положения.

Число шагов (команд), которое отводится на программирование ( $N$ ), можно увеличить, исключив из программы расчет  $f(a)$  или  $f(b)$  или даже обеих этих величин, которые входят в качестве слагаемых в квадратурные формулы трапеций и парабол. Они могут быть вычислены отдельно и введены в программу в качестве исходных данных. Подобный прием целесообразен, когда граничные значения  $f(x)$  вычисляются достаточно просто. Иногда на одном или обоих концах  $x=a$ ,  $x=b$  функция  $f(x)$  имеет устранимые особенности и соответствующие значения  $f(a)$ ,  $f(b)$  находятся предельным переходом. Тогда отдельный ввод  $f(a)$  и  $f(b)$  практически необходим. В последнем случае преимущество имеют формулы открытого типа, для которых не требуется вычисление  $f(a)$ ,  $f(b)$ . К ним принадлежат, в частности, формула прямоугольников (имеется в виду вариант, использующий срединные ординаты элементарных прямоугольников), формулы Гаусса и Чебышева. При вычислении несобственных интегралов от неограниченных функций с алгебраической особенностью и интегралов в смысле главного значения предпочтительны квадратурные формулы замкнутого типа (§ 10.3).

Если функция  $f(x)$  сложна, то желательно сначала составить для нее подпрограмму и после этого подобрать подходящий вариант основной программы. В комментариях предполагается, что основная программа набрана и остается ввести подпрограмму  $f(x)$  и исходные данные. В инструкциях в п. 1 «Подпрограмма  $f(x)$ » помещается следующая информация:

*адреса* первой и последней команд подпрограммы (при максимальной длине  $f(x)$ ), максимальное число команд в подпрограмме  $n_{\max}$ ;

*регистры памяти*, отводимые на подпрограмму; отдельно указываются свободные регистры, которые можно занимать без ограничений, и оперативные регистры (если они имеются), которые хотя и используются в основной программе, но могут заполняться в подпрограмме на одном шаге интегрирования для хранения промежуточных результатов;

*аргумент и результат подпрограммы*: регистры, в которые к началу подпрограммы занесена независимая переменная (в общем комплексная) и регистры для вычисленного значения подынтегральной функции.

В отличие от предыдущих глав значения погрешностей оцениваются с меньшей определенностью. Информация, даваемая остаточными членами квадратурных формул, должна использоваться с осторожностью, учитывая, что они применимы лишь к гладким функциям, имеющим достаточное число непрерывных производных. Распространенным способом оценки погрешностей и уточнения результатов является последовательное кратное увеличение (обычно удвоение) числа шагов интегрирования до тех пор, пока разность между вычисленными значениями интеграла на двух соседних итерациях не станет по порядку величины близкой к заданной погрешности (обычно используется относительная погрешность  $\epsilon$ ). В § 10.1, 10.2 приведены программы, в которые включен этот процесс. Следует, однако, иметь в виду, что при чрезмерном уменьшении задаваемой погрешности такой способ может и не привести к желаемому результату; с уменьшением шага интегрирования растут погрешности округления [23]. Кроме того, и время счета может оказаться слишком большим.

В помещенном ниже указателе в графе «Порядок погрешности» фигурируют степени  $p$  в факторе  $h^p$ , входящие в остаточные члены квадратурных формул (для метода Чебышева  $p$  ориентировочно равно  $n+1$ , где  $n$  — число узлов). В графе «Коррекция точности» указываются задаваемые в программе величины ( $N$  или  $\epsilon$ ), изменение которых позволяет уточнить результат. В графах «Число шагов» (длина подпрограммы) и «Число регистров памяти» даются соответственно числа шагов и свободных регистров памяти, которые могут использоваться в подпрограмме подынтегральной функции.

## 10.2. Интегрирование по формулам трапеций, прямоугольников и парабол [формула Симпсона] при заданном числе шагов или заданной точности

*Формула трапеций:*

$$F = \int_a^b f(x) dx = \frac{h}{2} \{f(a) + 2f(a+h) + 2f(a+2h) + \dots + 2f[a+(N-1)h] + f(b)\} - \frac{(b-a)h^2}{12} f''(\xi), \quad a \leq \xi \leq b, \quad (10.2)$$

где шаг интегрирования  $h = (b-a)/N$ ,  $N$  — число шагов.

*Формула прямоугольников для централизованной схемы:*

$$F = \int_a^b f(x) dx = h \left\{ f\left(a + \frac{h}{2}\right) + f\left(a + \frac{3h}{2}\right) + \dots + f\left[a + \frac{(2N-1)h}{2}\right] \right\} + \frac{(b-a)h^2}{24} f''(\xi), \quad a < \xi < b, \quad (10.3)$$

где  $h = (b-a)/N$ .

Приведенный выше вариант формулы прямоугольников несколько превосходит по точности формулу трапеций и в отличие от последней принадлежит к открытому типу, т. е. не требует вычисления  $f(x)$  в конечных точках.

*Формула парабол (Симпсона):*

$$F = \int_a^b f(x) dx = \frac{h}{3} \{f(a) + 4f(a+h) + 2f(a+2h) + 4f(a+3h) + \dots + 4f[a+(2N-1)h] + f(b)\} - \frac{(b-a)h^4}{180} f^{(4)}(\xi), \quad a \leq \xi \leq b, \quad (10.4)$$

где  $h = (b-a)/2N$ . Формула (10.4) имеет четвертый порядок точности относительно  $h$ , тогда как (10.2) и (10.3) — только второй. Отметим, что во всех указанных случаях подынтегральная функция при одинаковом шаге  $h$  должна вычисляться практически одно и то же число раз ( $\sim (b-a)/h$ ). Поэтому формула Симпсона при достижении одинаковой точности дает, как правило, существенный выигрыш по времени счета по сравнению с (10.2), (10.3). Ситуация может быть иной лишь для негладких функций или для функций, имеющих большую величину четвертой производной (см. примеры к программе 10.5).

Далее для всех трех формул приводятся программы, использующие заданное число шагов интегрирования. Даются также программы численного интегрирования с заданной относительной погрешностью. Программы основаны на последовательном удвоении или утроении (для метода прямоугольников) числа шагов и сравнении относительного изменения вычисленных значений интегралов на соседних итерациях с заданной погрешностью. Отметим, что в используемом варианте формулы прямоугольников дробление шагов приводит к новым узлам интегрирования, не совпадающим со старыми, и каждый раз расчет должен производиться по полному числу новых узлов.

В формулах Симпсона и трапеций при удвоении числа шагов половина узлов оказывается на прежнем месте, и, следовательно, для них уже вычислены значения функций на предыдущей итерации. Это позволяет, сохраняя в памяти соот-

ветствующие суммы, существенно сократить объем вычислений при незначительном увеличении длины программы (см. программы 10.2, 10.8).

**Программа 10.1.** Вычисление интеграла  $F = \int_a^b f(x) dx$  по формуле трапеций (10.2) при заданном числе шагов  $N$ .

ПА	—	ИПО	÷	ПД	ПП	28	4	÷	ПС
ПП	21	FLO	10	2	÷	ИПС	...	ИПД	×
С/П	ИПС	+	ПС	ИПА	ИПД	+	ПА	ИПА	...
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
...	...	...	...	...	...	...	...	...	В/О

#### Инструкция

1. Подпрограмма  $f(x)$ :  
адрес первой команды 29, последней — 97 (при максимальном числе команд  $n_{\max} = 69$ ), в конце подпрограммы В/О;  
регистры свободные: Р1 — Р9, РВ;  
аргумент  $x$  — в регистрах РА, РХ, результат: РХ =  $f(x)$ .

Необходимые данные для подпрограммы  $f(x)$  предполагаются введенными перед п. 2.

2. Исходные данные:  $N = P0$ ,  $[b = PY, a = PX]$ .

3. Пуск: В/О С/П.

4. Результат: РХ =  $F$ .

Примеры.

$$F = \int_0^2 10x^9 dx = \begin{cases} 1477,2266, N=4, t=0,5 \text{ мин}, \\ 1031,4931, N=32, t=3,5 \text{ мин}. \end{cases}$$

Точное значение  $F = 1024$ .

$$\int_0^{10} e^x dx = \begin{cases} 24821,355, N=8, t=40 \text{ с}, \\ 22204,417, N=32, t=3 \text{ мин}. \end{cases}$$

Точное значение  $F = 22\,026,467$ .

$$\int_0^{3\pi} \sin x dx = \begin{cases} 1,7631473, N=8, t=45 \text{ с}, \\ 1,9855217, N=32, t=3 \text{ мин}. \end{cases}$$

Точное значение  $F = 2$ .

$$\int_0^9 \sqrt{x} dx = \begin{cases} 17,368642, N=4, t=30 \text{ с}, \\ 17,970091, N=32, t=2,5 \text{ мин}. \end{cases}$$

Точное значение  $F = 18$ .

$$\int_0^{11} \frac{dx}{1+x^2} = \begin{cases} 1,5127989, N=8, t=45 \text{ с}, \\ 1,480122, N=32, t=2,5 \text{ мин}. \end{cases}$$

Точное значение  $F = 1,4801364 \dots$

Подпрограмма подынтегральной функции для последнего примера:

$Fx^3 \ 1 \ + \ F1/x \ \text{В/О}.$

**Программа 10.2.** Вычисление интеграла  $F = \int_a^b f(x) dx$  по формуле трапеций (10.2) при заданной относительной погрешности  $\varepsilon$ .

...	ПЗ	П4	0	ПД	ИПА	ПП	38	ИПД	2
÷	ПД	ИПЗ	П4	2	÷	ПЗ	ИПА	+	ПП
38	ИПД	ИПЗ	×	ИПС	ХУ	ПС	—	ИПС	÷
Fx <sup>2</sup>	Fy <sup>—</sup>	ИП9	—	Fx < 0	12	ИПС	С/П	П5	ИП5
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
...	...	...	БП	86	...	ИПД	+	ПД	ИПВ
ИП5	ИП4	+	П5	—	Fx < 0	39	В/О		

Если значения  $f(a)$  и  $f(b)$  должны быть вычислены вне программы (например, при устранимой особенности  $f(x)$  в точках  $x = a, b$ ), то следует исключить команды ПД, ПП, 38 (адреса соответственно 04, 06, 07), заменив каждую на ХУ. Величина  $[f(a) + f(b)]$  должна вводиться в качестве исходной в регистр РД.

#### Инструкция

1. Подпрограмма  $f(x)$ :

адрес первой команды 40, последней — 85 (при  $n_{\max} = 46$ ); если адрес последней команды меньше 84, то в конце подпрограммы поставить команду БП 86; окончание основной программы, следующее за подпрограммой, начинается с адреса 86;

регистры свободные: Р0 — Р2, Р6 — Р8;

аргумент  $x$  — в регистрах РХ, Р5, результат: РХ =  $f(x)$ .

Необходимые данные для подпрограммы следует ввести перед п.2.

2. Исходные данные:  $(5\varepsilon = P9)$ ,  $[b = PB, a = PA = PC]$ .

3. Пуск: В/О С/П.

4. Результат: РХ = РС =  $F$ .

Примеры.

$$\int_0^9 \sqrt{x} dx = 17,989312 \ (18), \quad \varepsilon = 4 \cdot 10^{-4}, \quad t = 6 \text{ мин};$$

$$\int_0^{3\pi} \sin x dx = 1,9990968 \ (2), \quad \varepsilon = 4 \cdot 10^{-4}, \quad t = 13 \text{ мин};$$

$$\int_0^{10} e^x dx = 22036,67 \ (22026,467), \quad \varepsilon = 4 \cdot 10^{-4}, \quad t = 13 \text{ мин};$$

$$\int_0^{11} \frac{dx}{1+x^2} = 1,4801329 \ (1,4801364), \quad \varepsilon = 4 \cdot 10^{-6}, \quad t = 6,5 \text{ мин};$$

$$\int_0^2 10x^9 dx = 1024,4687 \ (1024), \quad \varepsilon = 4 \cdot 10^{-4}, \quad t = 15 \text{ мин}.$$

Подпрограмма подынтегральной функции для последнего примера:

↑  $Fx^2 \ Fx^2 \ Fx^2 \ \times \ 1 \ 0 \ \times \ \text{БП} \ 86$

**Программа 10.3.** Вычисление интеграла  $F = \int_a^b f(x) dx$  по формуле прямоугольников (10.3) при заданном числе шагов  $N$ .

...	ИПО	÷	ПД	2	÷	+	ПС	0	ПВ
ИПС	ИПД	—	ПС	ПП	24	ИПВ	+	ПВ	FLO
10	ИПД	×	С/П	...	...	...	...	...	В/О

## Инструкция

- Подпрограмма  $f(x)$ :  
адрес первой команды 24, последней — 97 (при  $n_{\max} = 74$ ), в конце подпрограммы В/О;  
регистры свободные: Р1 — РА;  
аргумент  $x$  — в регистрах РХ, РС, результат: РХ =  $f(x)$ .  
Необходимые данные для подпрограммы следует ввести перед п. 2.
- Исходные данные:  $N = P0$ ,  $[b = PX, \uparrow, a = PX]$ .
- Пуск: В/О С/П.
- Результат: РХ =  $F$ .

### Примеры.

$$\int_0^2 10x^9 dx = 1020,256 (1024), \quad t \approx 3 \text{ мин};$$

$$\int_0^{10} e^x dx = 21936,098 (22026,467), \quad t \approx 2,5 \text{ мин};$$

$$\int_0^9 \sqrt{x} dx = 18,008593 (18), \quad t \approx 2 \text{ мин};$$

$$\int_0^{11} \frac{dx}{1+x^2} = 1,4801437 (1,4801364), \quad t \approx 2,5 \text{ мин};$$

$$\int_0^{3\pi} \sin x dx = 2,0072471 (2), \quad t \approx 2,5 \text{ мин}.$$

В последнем примере подпрограмма  $f(x)$ :  $F \sin$  В/О. Во всех примерах  $N = 32$ .

**Программа 10.4.** Вычисление интеграла  $F = \int_a^b f(x) dx$  по формуле прямоугольников (10.3) при заданной относительной погрешности  $\varepsilon$ .

—	П4	1	П8	ИП4	ИП8	3	×	П8	П0
÷	ПД	2	÷	ИПВ	+	ПС	0	ПЗ	ИПС
ИПД	—	ПС	ПП	46	ИПЗ	+	ПЗ	FL0	19
ИПД	×	ИПА	ХУ	ПА	—	ИПА	÷	Fx <sup>2</sup>	Fv <sup>—</sup>
ИП9	—	Fx < 0	04	ИПА	С/П	...	...	...	...
...	...	...	...	...	...	В/О			

## Инструкция

- Подпрограмма  $f(x)$ :  
адрес первой команды 46, последней — 97 (при  $n_{\max} = 52$ ); в конце подпрограммы В/О;  
регистры свободные: Р0 — Р2, Р5 — Р7;  
аргумент  $x$  — в регистрах РХ, РС, результат: РХ =  $f(x)$ .  
Необходимые данные для подпрограммы следует ввести перед п. 2.
- Исходные данные:  $(15\varepsilon = P9)$ ,  $[b = PV, a = PA]$ .
- Пуск: В/О С/П.
- Результат: РХ = РА =  $F$ .

## Примеры.

$$\int_0^{3\pi} \sin x dx = 2,001129 (2), \quad \varepsilon = 4 \cdot 10^{-4}, \quad t \approx 10 \text{ мин};$$

$$\int_0^9 \sqrt{x} dx = 18,002172 (18), \quad \varepsilon = 1 \cdot 10^{-4}, \quad t \approx 8 \text{ мин};$$

$$\int_0^2 10x^9 dx = 1023,4132 (1024), \quad \varepsilon = 5 \cdot 10^{-4}, \quad t \approx 12 \text{ мин};$$

$$\int_0^{11} \frac{dx}{1+x^2} = 1,4801358 (1,4801364), \quad \varepsilon = 4 \cdot 10^{-4}, \quad t \approx 9 \text{ мин};$$

$$\int_0^{10} e^x dx = 22011,478 (22026,467), \quad \varepsilon = 5 \cdot 10^{-4}, \quad t \approx 10 \text{ мин}.$$

Для последнего примера подпрограмма  $f(x)$ :  $Fe^x$  В/О.

Сравнение приведенных примеров для всех четырех программ (10.1—10.4) свидетельствует о некоторых преимуществах использованного варианта формулы прямоугольников перед формулой трапеций: программы короче и время счета несколько меньше при той же точности, особенно для случая заданного числа шагов (программа 10.3).

**Программа 10.5.** Вычисление интеграла  $F = \int_a^b f(x) dx$  по формуле Симпсона (10.4) при заданном числе шагов  $2N$ .

ИПЗ	÷	ПС	0	ПД	ПП	32	1	КИПЗ
ИПЗ	26	4	ПП	27	2	FL3	09	F, ИПД
ИПС	×	3	÷	С/П	F,	×	ИПД	+
ИПД	ИПС	ИПА	+	ПА	...	...	В/О	

## Инструкция

- Подпрограмма  $f(x)$ :  
адрес первой команды 35, последней — 97 (при  $n_{\max} = 63$ ), в конце подпрограммы В/О;  
регистры свободные: Р0 — Р2, Р4 — Р9, РВ;  
аргументы  $x$  — в регистрах РХ, РА, результат: РХ =  $f(x)$ .
- Исходные данные:  $2N = P3$ ,  $[b = PX, \uparrow, a = PA]$ . Необходимые данные для подпрограммы следует ввести перед п. 2.
- Пуск: В/О С/П.
- Результат: РХ =  $F$ .

### Примеры.

$$1. \int_0^{3\pi} \sin x dx = 2,0013949 (2), \quad 2N = 16, \quad t = 1,5 \text{ мин};$$

$$2. \int_0^2 10x^9 dx = 1024,4313 (1024), \quad 2N = 16, \quad t = 2 \text{ мин};$$

$$3. \int_0^{10} e^x dx = 22043,302 (22026,467), \quad 2N = 16, \quad t = 1,5 \text{ мин};$$

$$4. \int_0^9 \sqrt{x} dx = 17,987892 \text{ (18)}, 2N=32, t=2,5 \text{ мин};$$

$$5. \int_0^{11} \frac{dx}{1+x^2} = \begin{cases} 1,4800238, 2N=32, t=3 \text{ мин}, \\ 1,4801365, 2N=64, t=6 \text{ мин}. \end{cases}$$

Точное значение 1,4801364...

Сравнение первых трех примеров с аналогичными примерами в программах 10.1, 10.3 показывает, что интегрирование достаточно гладких функций по формуле Симпсона дает существенный выигрыш в точности и скорости счета по сравнению с формулами трапеций и прямоугольников. Для функции  $\sqrt{x}$ , которая имеет разрывную производную в нуле, формулы трапеций и прямоугольников точнее. Функция  $1/(1+x^2)$  имеет относительно большую производную  $f'(x)$  при  $0 \leq x < 2$ , т. е. в области, которая вносит наибольший вклад в величину интеграла, и поэтому остаточный член в формуле Симпсона здесь велик. Лишь при малых  $h$  (в данном случае при  $2N=64$ ) формула Симпсона дает сравнимую точность (ср. пример в программе 10.4).

**Программа 10.6.** Вычисление  $F = \int_a^b f(x) dx$  по формуле Симпсона (10.4)

при заданном числе шагов  $2N$ . Значения  $f(x)$  в точках  $x=a$  или  $x=b$  рассчитываются отдельно и используются как исходные данные.

—	ИПЗ	÷	ПС	0	ПП	23	4	КИПЗ	ПП
22	2	FL3	05	F,	ИПД	+	ИПС	×	3
÷	С/П	F,	×	ИПД	+	ПД	ИПА	ИПС	+
ПА	...	...	...	...	...	...	...	В/О	

Данный вариант программы рассчитан на отдельный ввод  $f(a)$ . Для варианта, соответствующего вводу  $f(b)$ , следует команду + (адрес 29) заменить на —.

**И н с т р у к ц и я**

1. Подпрограмма  $f(x)$ :

адрес первой команды 31, последней — 97 (при  $n_{\max} = 67$ ), в конце подпрограммы В/О;

регистры свободные: P0 — P2, P4 — P9, PБ;

аргумент  $x$  — в регистрах РХ, РА, результат: РХ =  $f(x)$ .

2. Исходные данные: а)  $f(a)$  — РД,  $2N = P3$ ,  $[b = PХ, \uparrow, a = PА]$ ;

$f(b)$  — РД,  $2N = P3$ ,  $[b = PА, a = PХ]$ .

3. Пуск: В/О С/П.

4. Результат: РХ =  $F$ .

**Примеры.**

$$Si(2) = \int_0^2 \frac{\sin x}{x} dx = 1,605414 \text{ (1,605413 [9])}, 2N=12; t \approx 1,5 \text{ мин};$$

$$Si(5) = \int_0^5 \frac{\sin(5-x)}{5-x} dx = 1,5499279 \text{ (1,5499312 [9])} \text{ при } 2N=20, t \approx 2,5 \text{ мин}.$$

Для второго примера использовался второй вариант программы. Подпрограмма  $f(x)$  для этого примера:

1. — 5 + Fsin FBx ÷ В/О.

**Программа 10.7.** Вычисление интеграла  $F = \int_a^b f(x) dx$  по формуле Симпсона (10.4) при заданном числе шагов  $2N$  (укороченный вариант).

—	ИПЗ	÷	ПС	2	ПА	КИПЗ	ИПВ	ИПС	—
ПВ	ПП	24	6	ИПА	—	ПА	×	ИПД	+
ПД	FL3	07	С/П	...	...	...	...	...	...
...	...	...	...	...	В/О				

Данный вариант программы предусматривает вычисление только суммы в фигурных скобках в (10.4). По окончании счета ее надо умножить на  $h/3$  для получения  $F$  (п.4 инструкции). Кроме того, сумма  $[f(a) + f(b)]$  рассчитывается отдельно и вводится в память ПМК как исходная величина.

**И н с т р у к ц и я**

1. Подпрограмма  $f(x)$ :

адрес первой команды 24,  $n_{\max} = 74$ , в конце подпрограммы В/О;

регистры свободные: P0 — P2, P4 — P9;

аргумент  $x$  — в регистрах РХ, РВ, результат: РХ =  $f(x)$ .

2. Исходные данные:  $f(a) + f(b)$  — РД,  $2N = P3$ ,  $[b = PВ, a = PХ]$ .

3. Пуск: В/О С/П.

4. Результат: РХ = РД =  $S = 3F/h$ . Искомое значение  $F = (h/3)S$  получается с помощью четырех операций, непосредственно следующих за остановом: ИПС  $\times 3 \div$ .

**Пример.**

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2} dx = 0,27220564 \text{ (0,2721983)}, 2N=8, t=1 \text{ мин}.$$

Подпрограмма  $f(x)$  для данного примера:

1 + Flп ИПВ Fx<sup>2</sup> 1 + ÷ В/О

**Программа 10.8.** Вычисление интеграла  $f = \int_a^b f(x) dx$  по формуле Симпсона (10.4) при заданной относительной погрешности  $\epsilon$ .

—	ПЗ	П4	ПП	48	ИПД	П9	0	ПД	ИПА
ИП4	ПЗ	2	÷	П4	—	П2	ПП	44	ИПД
2	×	↑	ИП9	+	П9	+	ИП4	×	3
÷	ИП5	ХУ	П5	—	ИП5	÷	Fx <sup>2</sup>	F √	ИПС
...	Fx < 0	07	С/П	ИП2	ИПЗ	+	П2	ИП2	...
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
...	...	...	...	БП	87	...	ИПД	+	ПД
ИПВ	ИП2	—	ИПЗ	—	Fx < 0	44	В/О		

Если значения  $f(x)$  при  $x=a$  или  $x=b$  должны быть вычислены вне программы (например, при наличии устранимых особенностей  $f(x)$  в указанных точках), то следует заменить каждую из команд ПП 48 (адреса 03, 04) на ХУ и изменить ввод данных (п. 2 инструкции).

## Инструкция

### 1. Подпрограмма $f(x)$ :

адрес первой команды 49, последней — 86 (при  $n_{\max} = 38$ ); если адрес последней команды меньше 85, то в конце подпрограммы поставить команду БП 87; окончание основной программы, следующее за подпрограммой, начинается с адреса 87;

регистры свободные: P0, P1, P6 — P8 — 5 регистров;

аргумент  $x$  — в регистрах PX, P2, результат: PX =  $f(x)$ .

Необходимые данные для подпрограммы следует вводить перед п. 2.

2. Исходные данные:  $(20\epsilon = PC)$ ,  $0 = PD$ ,  $[b = P5 = PB, a = P2 = PA]$ . Если значения  $f(x)$  при  $x = a, b$  должны быть вычислены вне программы (см. выше), то в регистр PD вместо 0 вводится  $[f(a) + f(b)]$ .

3. Пуск: В/О С/П.

4. Результат: P5 =  $F$ .

### Примеры.

$$\int_0^{11} \frac{dx}{1+x^2} = 1,48011364 \text{ (1,4801364)}, t \approx 8 \text{ мин};$$

$$\int_1^3 10x^9 dx = 59048,31 \text{ (59048)}, t \approx 5 \text{ мин};$$

$$\int_0^{3\pi} \sin x dx = 2,0000053 \text{ (2)}, t \approx 9 \text{ мин}.$$

Подпрограмма  $f(x)$  для последнего примера: Fsin БП 87. Во всех примерах  $\epsilon = 5 \cdot 10^{-6}$ .

## 10.3. Квадратуры Гаусса и Чебышева. Вычисление интегралов по составным формулам Гаусса и Чебышева с заданным числом интервалов или заданной точностью.

### Квадратуры с переменным шагом

Квадратурные формулы Гаусса и Чебышева для  $n$  узлов на промежутке интегрирования:

$$F = \int_a^b f(x) dx = \frac{b-a}{2} \sum_{k=1}^n w_k f(x_k) + R_n. \quad (10.5)$$

Абсциссы узлов интегрирования

$$x_k + y_k (b-a)/2 + (b+a)/2, \quad (10.6)$$

где  $y_k$  — константы, являющиеся абсциссами узлов на интервале  $(-1,1)$ , для формул Гаусса равны  $k$ -му нулю многочлена Лежандра  $P_n(x)$ . В формулах Чебышева  $y_k$  выражены более сложно [9], они вещественны только для  $n=2, \dots, 7, 9$ . Значения  $y_k$  для обеих квадратурных формул см., например, в [9]. Для квадратур Гаусса  $y_k$  и  $w_k$  рассчитываются также в программе 8.15.

Весовые коэффициенты в формулах Гаусса (числовые значения см. также в [9]):

$$w_k = 2 / (1 - y_k^2) [P'_n(y_k)]^2, \quad (10.7)$$

где  $P'_n$  — производные многочленов Лежандра. В формулах Чебышева весовые коэффициенты одинаковы и равны

$$w_k = 2/n. \quad (10.8)$$

Остаточный член квадратурной формулы Гаусса [21]:

$$R_n = \frac{(b-a)^{2n+1} (n!)^4}{(2n+1) [(2n!)]^3} f^{(2n)}(\xi) \approx \frac{b-a}{2,5 \sqrt{n}} \left( \frac{b-a}{3n} \right)^{2n} f^{(2n)}(\xi), \quad a < \xi < b. \quad (10.9)$$

Для формул Чебышева остаточный член  $R_n$  в общем не имеет столь простого выражения, как в (10.9) [9]. Для  $n = 3$  [8]

$$R_3 = \frac{1}{360} \left( \frac{b-a}{2} \right)^5 f^{(4)}(\xi). \quad (10.10)$$

При  $n = 2$  квадратурные формулы Гаусса и Чебышева совпадают:

$$w_1 = w_2 = 1, \quad y_1 = -y_2 = \sqrt{3/3} = 5,7735027 \cdot 10^{-1}. \quad (10.11)$$

Если производная  $f^{(2n)}(\xi)$  подынтегральной функции не слишком быстро увеличивается с ростом  $n$ , то остаточный член (10.9) весьма мал, и формулы Гаусса обеспечивают высокую точность даже при умеренных значениях  $n$ . Квадратуры Гаусса для  $f(x)$  как многочленов степеней  $2n-1$  дают нулевую погрешность без учета ошибок округления. Точность формул Чебышева в этом смысле ниже. Однако у них есть преимущество, связанное с равенством весовых коэффициентов (10.8). Это упрощает вычисления (и программы) и способствует сокращению времени счета. Для ПМК существенно, что при одинаковых  $n$  формулы Чебышева по сравнению с формулами Гаусса содержат вдвое меньше констант, а потому при программной реализации требуют соответственно меньше регистров памяти.

Для обеих квадратур узлы располагаются симметрично относительно точки  $y = 0$  ( $x = (a+b)/2$ ). При нечетных  $n$  точка  $x = (a+b)/2$  также входит в число узлов. В результате число различных по модулю констант  $y_k$  равно  $n/2$  для четных  $n$  и  $(n+1)/2$  — для нечетных. Это в определенной степени делает предпочтительным использование формул с четными  $n$ .

Весовые коэффициенты  $w_k$  для формул Гаусса одинаковы в симметричных узлах. Учитывая указанную симметрию  $w_k$  и  $y_k$ , представим (10.5) в виде

$$F = \frac{b-a}{2} \left[ \sum_{k=1}^{n/2} w_k f(x_k^+) + \sum_{k=1}^{n/2} w_k f(x_k^-) \right], \quad n = 2, 4, 6, \dots; \quad (10.12)$$

$$F = \frac{b-a}{2} \left[ \sum_{k=2}^{(n+1)/2} w_k f(x_k^+) + \sum_{k=1}^{(n+1)/2} w_k f(x_k^-) + w_1 f(x_0) \right], \quad n = 3, 5, 7, \dots \quad (10.13)$$

Здесь  $x_k^+ = (b-a)y_k/2 + (b+a)/2$ ;  $x_k^- = (b-a)(-y_k)/2 + (b+a)/2$ ;  $x_0 = (b+a)/2$ .

Максимум  $n$  для квадратур Гаусса практически равен 10 при программировании на ПМК с 14 регистрами памяти прямого доступа (Электроника БЗ-34, МК-54 и др.). Формулы Чебышева такого ограничения не имеют, но, как упоминалось выше, для  $n \geq 10$  абсциссы узлов  $y_k$  комплексные.

Оценка точности и уточнение результатов для указанных формул сложнее, чем для формул § 10.1. Например, вычисление  $R_n$  по (10.9) связано с нахождением производных подынтегральной функции высокого порядка. Для формул

Чебышева подобные расчеты еще сложнее. Уточнение результатов и оценка погрешности путем перехода к большим  $n$  громоздка и практически неосуществима в ПМК, так как требует смены всех  $y_k$  и  $w_k$ , всегда разных при различных  $n$ .

По-видимому, наиболее простым является использование *составных формул* путем разбиения интервала интегрирования на некоторое число  $N$  отрезков с последующим применением к интегралам по каждому частному интервалу формул (10.5) или (10.12), (10.13). Пусть  $a_i$  и  $b_i$  — соответственно начало и конец каждого частного интервала ( $i = 1, 2, \dots, N$ ), причем  $a_1 = a$ ,  $b_N = b$ . Тогда

$$F = \int_a^b f(x) dx = \sum_{i=1}^N \int_{a_i}^{b_i} f(x) dx = \frac{l}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^n w_k f \left[ a + \frac{l}{2} (y_k + 2i - 1) \right] + R_n^{(N)}, \quad (10.14)$$

где  $l = (b - a)/N$ . Использование формул (10.14) при одинаковых  $n$  и различных  $N$  не связано с изменением  $w_k$  и  $y_k$  и существенно упрощает уточнение результатов и оценку погрешности. Формулы (10.14) легко записать в виде (10.12), (10.13) для четных и нечетных  $n$ .

Ввиду того, что все узлы в формулах Гаусса и Чебышева являются внутренними, какого-либо дальнейшего упрощения (10.14), которое достигается, например, в формулах Симпсона путем объединения весовых коэффициентов в совпадающих узлах, здесь не происходит.

Остаточный член

$$R_n^{(N)} = NR_n = \frac{(b-a) \cdot 4^n (n!)^4 h^{2n}}{(2n+1) [(2n)!]^3} f^{(2n)}(\xi) \approx \frac{b-a}{2,5 \sqrt{n} 9^n} h^{2n} f^{(2n)}(\xi), \quad a < \xi < b, \quad (10.15)$$

где  $h = (b - a)/(Nn)$  — средний шаг на интервале  $(a, b)$ ;  $Nn$  — полное число узлов. Например, для  $n = 2$  (формула Гаусса — Чебышева)

$$R_2^{(N)} = \frac{b-a}{270} h^4 f^{(4)}(\xi), \quad a < \xi < b, \quad h = (b-a)/(2N). \quad (10.16)$$

Сравнение (10.16) с (10.4) показывает, что погрешность рассматриваемой формулы имеет такой же порядок по  $h$ , как формула Симпсона, но противоположна по знаку и в 1,5 раза меньше. Кроме того, формула Гаусса — Чебышева в отличие от формулы Симпсона относится к открытому типу.

Формулу (10.14) легко трансформировать на случай переменных шагов. Рассмотрим простейший двухшаговый вариант, связанный с разбиением исходного интервала на два:

$$\int_0^b f(x) dx = \int_a^{b_1} f(x) dx + \int_{b_1}^b f(x) dx. \quad (10.17)$$

Предполагается, что ориентировочно известна граница  $b_1$  отрезка  $[a, b_1]$ , на котором существенно изменяется функция  $f(x)$  и при этом  $|b_1 - a|/|b - a| \ll 1$ . Применяя к каждому интервалу (10.17) формулу (10.14) с одинаковым числом  $2N$  разбиений на частные интервалы, получаем квадратурную формулу с требуемым изменением шага на разных участках. Алгоритм реализован в программах 10.16, 10.17 с использованием формул Чебышева и Гаусса — Чебышева (10.11)

Другой вариант двухшаговых формул основан на следующем разбиении отрезка  $[a, b]$ :

$$b - a = N_1 l_1 + N_2 l_2, \quad (10.18)$$

где  $N_1 = N_2 + 1 \equiv N$ ;  $l_2 = N l_1$ ;  $l_1 = (b - a)/N^2$ ;  $l_2 = (b - a)/N$ .

В этом случае квадратурная формула с учетом (10.14) имеет вид

$$F = \int_a^b f(x) dx = \frac{l_1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^n w_k f \left[ a + \frac{l_1}{2} (y_k + 2i - 1) \right] + \frac{l_2}{2} \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{k=1}^n w_k f \left[ a_2 + \frac{l_2}{2} (y_k + 2i - 1) \right], \quad a_2 = a + l_2. \quad (10.19)$$

Алгоритм реализован в программе 10.18 с использованием формулы Чебышева при  $n = 6$ .

Применение формул типа (10.17) или (10.19) целесообразно, если на одном из концов отрезка  $[a, b]$  функция  $f(x)$  имеет разрывные производные, или интегрируемый разрыв, или быстро меняется на части интервала, примыкающей к его границам. Формула (10.17) полезна также в тех случаях, когда функция  $f(x)$  в точке  $x = b_1$  испытывает скачок или имеет разрывную производную. Отметим, что при указанных способах погрешности округления, которые возникают при суммировании большого числа малых слагаемых, уменьшаются.

**Программа 10.9.** Вычисление интеграла  $F = \int_a^b f(x) dx$  методом Гаусса при

$n = 10$  (10.12), (10.7), (10.9).

—	2	÷	ПС	—	ПД	0	ПВ	1	0
ПО	КИП†	/—/	КП†	ИПС	×	ИПД	+	ПП	34
КИПО	×	ИПВ	+	ПВ	FL0	11	ИП2	Fx	≥ 0 08
F,	ИПС	×	С/П	...	...	...	...	В/О	

Данная программа может быть реализована только на ПМК «Электроника БЗ-34», «Электроника МК-54» и их аналогах. В других типах ПМК необходима равноценная замена команд КИП† и КП†.

**Инструкция**

1. Подпрограмма  $f(x)$ :

адрес первой команды 34, последней — 97 (при  $n_{\max} = 64$ ), в конце подпрограммы В/О;

регистров свободных нет, при составлении подпрограммы можно использовать только регистры операционного стека;

аргумент  $x$  — в регистре РХ, результат: РХ =  $f(x)$ .

2. Исходные данные:

а) ввод констант  $w_k$  и  $y_k$ :

$$w_1 = 2,9552422 \cdot 10^{-1} = P1, \quad y_1 = 1,4887434 \cdot 10^{-1} = P2,$$

$$w_2 = 2,6926672 \cdot 10^{-1} = P3, \quad y_2 = 4,3339539 \cdot 10^{-1} = P4,$$

$$w_3 = 2,1908636 \cdot 10^{-1} = P5, \quad y_3 = 6,7940957 \cdot 10^{-1} = P6,$$

$$w_4 = 1,4945135 \cdot 10^{-1} = P7, \quad y_4 = 8,6506337 \cdot 10^{-1} = P8,$$

$$w_5 = 6,6671344 \cdot 10^{-2} = P9, \quad y_5 = 9,7390653 \cdot 10^{-1} = P9;$$

б) пределы интегрирования:  $[b = PX, \uparrow, \uparrow, a = PX]$ . При переходе к другим пределам или изменении подпрограммы функции константы  $w_k, y_k$  сохраняются в памяти ПМК. Следует, однако, иметь в виду, что при авосте или преждевременном прекращении счета могут измениться знаки отдельных  $y_k$ . В указанных случаях их следует проверять.

3. Пуск: В/О С/П.

4. Результат: РХ = F.

### Примеры.

$$\int_0^{25} e^x dx = 7,200472 \cdot 10^{10} \quad (7,2004909 \cdot 10^{10}), \quad t = 70 \text{ с};$$

$$\int_0^{15} 27 x^{26} dx = 5,6815077 \cdot 10^{31} \quad (5,6815126 \cdot 10^{31}), \quad t \approx 1,5 \text{ мин};$$

$$\int_0^5 \sin x dx = 1,9999956 \quad (2), \quad t \approx 1,5 \text{ мин};$$

$$\int_0^9 \sqrt{x} dx = 18,002413 \quad (18), \quad t \approx 1 \text{ мин};$$

$$\int_0^{11} \frac{dx}{1+x^2} = 1,4797262 \quad (1,4801364), \quad t \approx 1,5 \text{ мин}.$$

Приведенные примеры показывают, что программа обеспечивает высокую точность для достаточно гладких функций, у которых производные первого и следующих порядков (до 20) относительно невелики, т. е. не намного превышают по модулю саму функцию. Последние два интеграла служат контрпримерами. В предпоследнем уже первая производная терпит разрыв, а в последнем примере производные высоких порядков велики по модулю в области  $0 \leq x \leq 2$ . В таких случаях результат можно уточнить, разбив интервал  $(a, b)$  на участки с различным поведением функции и выделив соответствующий интеграл. Применительно к предыдущим примерам представим интегралы в виде

$$\int_0^9 \sqrt{x} dx = \int_0^{0,5} \sqrt{x} dx + \int_{0,5}^9 \sqrt{x} dx = 0,23573386 + 17,764300 = 18,000034;$$

$$\int_0^{11} \frac{dx}{1+x^2} = \int_0^2 \frac{dx}{1+x^2} + \int_2^{11} \frac{dx}{1+x^2} = 1,1071487 + 3,7298772 \cdot 10^{-1} =$$

$$= 1,4801364.$$

Каждый интеграл рассчитывался по данной программе. Как видно, в первом примере точность повысилась примерно на два порядка, во втором — практически точный результат. Время счета возрастает вдвое по сравнению с предыдущими примерами и в каждом случае составляет 2—3 мин. Существенным недостатком программы является невозможность выделения регистров памяти на подпрограмму функции  $f(x)$ .

**Программа 10.10.** Вычисление интеграла  $F = \int_a^b f(x) dx$  методом Гаусса при  $n = 8, 6, 4$  (10.12), (10.7), (10.9).

—	2	÷	ПС	—	ПД	0	П6	1	2
ПО	КИПО	/—/	П9	ИПС	×	ИПД	+	ПП	39
КИПО	×	ИП6	+	П6	ИПО	1	+	ПО	ИП9
$Fx \geq 0$	12	КИПО	FL0	11	ИП6	ИПС	×	С/П	...
...	...	...	...	...	...	...	...	В/О	...

Данный вариант программы рассчитан на  $n = 8$ . Для перехода к  $n = 6, 4$  следует заменить команду 1 (адрес 08) соответственно на 9 или 6, а команду 2 (адрес 09) на КНОП.

### Инструкция

- Подпрограмма  $f(x)$ :  
адрес первой команды 39,  $n_{\max} = 59$ , в конце подпрограммы В/О, регистры свободные: РЗ при  $n = 8$ . РЗ, РА, РВ при  $n = 6$ , РЗ, Р7, Р8, РА, РВ при  $n = 4$ ;  
аргумент  $x$  — в регистре РХ, результат: РХ =  $f(x)$ .
- Исходные данные:  
а) Ввод констант  $w_k$  и  $y_k$ :

$n = 8$

$$w_1 = 3,6268378 \cdot 10^{-1} = P1, \quad y_1 = 1,8343464 \cdot 10^{-1} = P2,$$

$$w_2 = 3,1370665 \cdot 10^{-1} = P4, \quad y_2 = 5,2553241 \cdot 10^{-1} = P5,$$

$$w_3 = 2,2238103 \cdot 10^{-1} = P7, \quad y_3 = 7,9666648 \cdot 10^{-1} = P8,$$

$$w_4 = 1,0122854 \cdot 10^{-1} = PA, \quad y_4 = 9,6028986 \cdot 10^{-1} = PB;$$

$n = 6$

$$w_1 = 4,6791393 \cdot 10^{-1} = P1, \quad y_1 = 2,3861919 \cdot 10^{-1} = P2,$$

$$w_2 = 3,6076157 \cdot 10^{-1} = P4, \quad y_2 = 6,6120939 \cdot 10^{-1} = P5,$$

$$w_3 = 1,7132449 \cdot 10^{-1} = P7, \quad y_3 = 9,3246951 \cdot 10^{-1} = P8;$$

$n = 4$

$$w_1 = 6,5214515 \cdot 10^{-1} = P1, \quad y_1 = 3,3998104 \cdot 10^{-1} = P2,$$

$$w_2 = 3,4785485 \cdot 10^{-1} = P4, \quad y_2 = 8,6113631 \cdot 10^{-1} = P5.$$

б) Пределы интегрирования:  $[b = PX, \uparrow, \uparrow, a = PX]$ . При повторении вычислений или изменении подпрограммы значения констант  $w_k, y_k$  сохраняются в памяти ПМК.

3. Пуск: В/О С/П.

4. Результат: РХ = F.

### Примеры.

$$\int_0^{15} e^x dx = 3269010,5 \quad (3269017,4), \quad n = 8, \quad t \approx 1 \text{ мин};$$

$$\int_0^{12} 15x^{14} dx = 1,5406527 \cdot 10^{16} \quad (1,540702 \cdot 10^{16}), \quad n = 6, \quad t \approx 1 \text{ мин};$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = 0,78540295 \quad (0,7853981), \quad n = 4, \quad t \approx 30 \text{ с}.$$

Подпрограмма  $f(x)$  для последнего примера:

$$Fx^2 \quad 1 \quad + \quad F1/x \quad В/О$$

**Программа 10.11.** Вычисление интеграла  $F = \int_a^b f(x) dx$  методом Гаусса для  $n = 6$  или 4 по составной формуле (10.14) при заданном числе  $N$  частных интервалов.

ПД	—	ИПЗ	÷	ПС	0	П6	КИПЗ	9	ПО
КИПО	/—/	П9	ИПЗ	+	ИПС	×	ИПД	+	ПП
42	КИПО	×	ИП6	+	П6	ИПО	1	+	ПО
ИП9	$Fx \geq 0$	11	КИПО	FL0	10	FL3	07	ИП6	ИПС
×	С/П	...	...	...	...	..	...	В/О	

Данный вариант программы относится к  $n = 6$ . Для перехода к  $n = 4$  следует заменить команду 9 (адрес 08) на 6.

#### Инструкция

##### 1. Подпрограмма $f(x)$ :

адрес первой команды 42,  $n_{\max} = 56$ , в конце подпрограммы В/О; регистры свободные: РА, РВ при  $n = 6$ , Р7, Р8, РА, РВ при  $n = 4$ ; аргумент  $x$  — в регистре РХ, результат:  $PX = f(x)$ .

##### 2. Исходные данные:

а) Ввод констант  $w_k$  и  $y_k$ . Численные значения  $w_k, y_k$  при соответствующих  $n$  и порядок ввода такие же, как в программе 10.10:  $w_1 = P1, y_1 = P2; w_2 = P4, y_2 = P5; w_3 = P7, y_3 = P8$ . Естественно, что для  $n = 4$  вводятся только  $w_1, y_1, w_2, y_2$ . Все константы сохраняются в памяти ПМК при повторении вычислений или изменении подпрограммы.

б) Остальные данные:  $2N = P3, [b = PX, \uparrow, a = PX]$ . Число частных интервалов равно  $N$ ; общее число узлов, в которых вычисляются значения  $f(x)$ , равно  $Nn$ .

##### 3. Пуск: В/О С/П.

##### 4. Результат: $PX = F$ .

#### Примеры.

$$\int_0^{7\pi} \sin x dx = \begin{cases} 2,0052909 (2), & N=2, n=6, t \approx 2 \text{ мин}, \\ 1,9999975 (2), & N=4, n=6, t \approx 3,5 \text{ мин}; \end{cases}$$

$$\int_0^9 \sqrt{x} dx = \begin{cases} 18,011083 (18) & N=2, n=4, t \approx 1 \text{ мин}; \\ 18,001385 (18) & N=8, n=4, t \approx 4 \text{ мин}. \end{cases}$$

Подпрограмма  $f(x)$  для последнего примера:  $F \vee \text{ В/О}$ .

Сравнение этих примеров с приведенными к программе 10.5 (метод Симпсона) свидетельствует о преимуществах метода Гаусса даже применительно к негладким функциям типа  $\sqrt{x}$ . Недостатком программы (особенно при  $n = 6$ ) является малое число регистров памяти, отводимое на подпрограмму  $f(x)$ .

**Программа 10.12.** Вычисление интеграла  $F = \int_a^b f(x) dx$  методом Чебышева для  $n = 6$  или 4 по составной формуле (10.14) и формуле (10.8) при заданном числе  $N$  частных интервалов.

ПА	—	ИП2	÷	П8	0	ПД	КИП2	6	ПО
КИПО	/—/	П9	ИП2	+	ИП8	×	ИПА	+	ПП
37	ИПД	+	ПД	ИП9	$Fx \geq 0$	11	FL0	10	FL2
07	F,	ИП8	×	3	÷	С/П	...	...	...
...	...	...	...	...	...	В/О			

Данный вариант программы относится к  $n = 6$ . Для перехода к  $n = 4$  следует заменить команду 6 (адрес 08) на 4 и команду 3 (адрес 34) на 2.

#### Инструкция

##### 1. Подпрограмма $f(x)$ :

адрес первой команды 37,  $n_{\max} = 61$ , в конце подпрограммы поставить В/О; регистры свободные: Р4, Р6, Р7, Р8, РС при  $n = 6$  и Р4 — Р7, РВ, РС при  $n = 4$ ; аргумент  $x$  — в регистре РХ, результат:  $PX = f(x)$ .

##### 2. Исходные данные:

##### а) Ввод констант $y_k$ :

при  $n = 6$   $y_1 = 8,6624682 \cdot 10^{-1} = P1, y_2 = 4,2251865 \cdot 10^{-1} = P3,$

$y_3 = 2,666354 \cdot 10^{-1} = P5;$

при  $n = 4$   $y_1 = 7,9465447 \cdot 10^{-1} = P1, y_2 = 1,8759247 \cdot 10^{-1} = P3.$

При повторных вычислениях или изменении подпрограммы эти константы сохраняются в памяти ПМК.

б) Остальные данные:  $2N = P2, [b = PX, \uparrow, a = PX]$ . Число частных интервалов равно  $N$ ; общее число узлов, в которых вычисляются значения  $f(x)$ , равно  $Nn$ .

##### 3. Пуск: В/О С/П.

##### 4. Результат: $PX = F$ .

#### Примеры.

$$1. \int_0^2 10x^9 dx = \begin{cases} 1023,9964 (1024), & N=2, n=6, t \approx 1,5 \text{ мин}, \\ 1023,9863 (1024), & N=4, n=4, t \approx 2 \text{ мин}; \end{cases}$$

$$2. \int_0^{11} \frac{dx}{1+x^2} = \begin{cases} 1,4801326 (1,4801364), & N=8, n=6, t \approx 5 \text{ мин}; \\ 1,480131 (1,4801364), & N=16, n=4, t \approx 7 \text{ мин}. \end{cases}$$

Подпрограмма  $f(x)$  в последнем примере:  $Fx^2 - 1 + F1/x \text{ В/О}$ .

Сравнение с программой 10.5 (формула Симпсона) показывает, что программы, основанные на методе Чебышева, при одинаковой длине и достаточном числе регистров памяти на подпрограмму существенно повышают точность. Заметное укорочение программы достигается при нулевом нижнем примере (см. следующую программу).

**Программа 10.13.** Вычисление интеграла  $F = \int_0^b f(x) dx$  методом Чебышева ( $n = 6, 4$ ) по составной формуле (10.14) и формуле (10.8) при заданном числе  $N$  частных интервалов.

П2	÷	П8	0	ПД	КИП2	6	ПО	КИПО	/—/
П9	ИП2	÷	П	×	ПП	33	ИПД	+	ПД
ИП9	$Fx \geq 0$	09	FL0	08	FL2	05	F,	ИП8	×
3	÷	С/П	...	...	...	...	...	В/О	

Данный вариант программы относится к  $n = 6$ . Переход к  $n = 4$  осуществляется заменой двух команд 6 (адрес 06) на 4 и 3 (адрес 30) на 2.

#### Инструкция

##### 1. Подпрограмма $f(x)$ :

адрес первой команды 33,  $n_{\max} = 65$ , последней командой должна быть В/О;

регистры свободные: Р4, Р6, Р7, РА, РВ, РС при  $n = 6$ ; Р4 — Р7, РА — РС при  $n = 4$ ;

аргумент  $x$  — в регистре РХ, результат:  $PX = f(x)$ .



2. Исходные данные:  
 а) ввод констант  $y_k$ : численные значения  $y_k$  при соответствующих  $n$  и порядков ввода такие же, как в программе 10.12;  
 б) остальные данные:  $[b = PX, \uparrow, 2N = PX]$ .  
*Примеры.* См. программу 10.12.

**Программа 10.14.** Вычисление интеграла  $F = \int_a^b f(x) dx$  методом Гаусса—Чебышева по составной формуле (10.14) и формуле (10.11) при заданном числе  $N$  частных интервалов.

ПА	—	ИП0	÷	ПВ	0	ПД	КИП0	3	F √
F1/x	/—/	ПС	ИП0	+	ИПВ	×	ИПА	+	ПП
33	ИПД	+	ПД	ИПС	Fx ≥ 0	11	FL0	07	XY
ИПВ	×	С/П	...	...	...	...	...	В/О	

#### Инструкция

- Подпрограмма  $f(x)$ :  
адрес первой команды 33,  $n_{\max} = 65$ , в конце подпрограммы поставить В/О,  
регистры свободные: P1 — P9;  
аргумент  $x$  — в регистре PX, результат:  $PX = f(x)$ .
- Исходные данные:  $2N = P0$ ,  $[b = PX, \uparrow, a = PX]$ .
- Пуск: В/О С/П.
- Результат:  $PX = F$ .

*Примеры.*

$$\int_0^9 \sqrt{x} dx = 18,003075 \quad (18) \quad N = 16, \quad t \approx 3 \text{ мин};$$

$$\int_0^{11} \frac{dx}{1+x^2} = 1,4801366 \quad (1,4801364), \quad N = 27, \quad t \approx 6 \text{ мин};$$

$$\int_0^2 10x^9 dx = 1023,9818 \quad (1024), \quad N = 16, \quad t \approx 4 \text{ мин}.$$

Подпрограмма  $f(x)$  для последнего примера:

↑ Fx<sup>2</sup> Fx<sup>2</sup> Fx<sup>2</sup> × 1 0 × В/О.

**Программа 10.15.** Вычисление интеграла  $F = \int_a^b f(x) dx$  методом Гаусса—Чебышева при заданной точности  $\epsilon$  по составной формуле (10.14) и формуле (10.11).

ПА	—	П9	4	П1	ИП9	ИП1	2	×	П0
П1	÷	П8	0	ПД	КИП0	3	F √	F1/x	/—/
ПС	ИП0	+	ИП8	×	ИПА	+	ПП	54	ИПД
+	ПД	ИПС	Fx ≥ 0	19	FL0	15	XY	ИП8	×
ИПВ	XY	ПВ	—	ИПВ	÷	Fx <sup>2</sup>	F √	ИП2	—
Fx < 0	05	ИПВ	С/П	...	...	...	...	В/О	

В программе производится перерасчет интеграла путем последовательного удвоения числа шагов до тех пор, пока модуль относительного изменения вычисленного значения интеграла на двух соседних итерациях не станет меньше за-

данной величины — здесь 20  $\epsilon$ . Реальная погрешность может отличаться от задаваемой на порядок, в большую или в меньшую сторону.

#### Инструкция

- Подпрограмма  $f(x)$ :

Адрес первой команды 54,  $n_{\max} = 44$ , в конце подпрограммы поставить В/О,

регистры свободные: P3 — P7 — 5 регистров;

аргумент  $x$  — в регистре PX, результат:  $PX = f(x)$ .

- Исходные данные:  $(20\epsilon = P2)$ ,  $[b = PV, a = PX]$ .

- Пуск: В/О С/П.

- Результат:  $PV = PX = F$ .

*Примеры.*

$$\int_0^{11} \frac{dx}{1+x^2} = 1,4802176 \quad (1,4801364), \quad \epsilon = 5 \cdot 10^{-4}, \quad t \approx 6,5 \text{ мин};$$

$$\int_1^3 10x^9 dx = 59047,791 \quad (59048), \quad \epsilon = 5 \cdot 10^{-6}, \quad t \approx 8 \text{ мин};$$

$$\int_0^9 \sqrt{x} dx = 18,003075 \quad (18), \quad \epsilon = 2 \cdot 10^{-5}, \quad t \approx 6 \text{ мин};$$

$$\int_0^{3\pi} \sin x dx = 1,9999437 \quad (2), \quad \epsilon = 5 \cdot 10^{-5}, \quad t \approx 8 \text{ мин}.$$

Подпрограмма  $f(x)$  для последнего примера: Fsin В/О.

**Программа 10.16.** Вычисление интеграла  $F = \int_a^b f(x) dx$  методом Чебышева ( $n = 6$ ) по составной формуле (10.14) (двухшаговый вариант (10.17)) при заданном числе  $N$  частных интервалов на отрезках  $[a, b_1]$  и  $[b_1, b]$ .

0	ПС	2	ПЗ	F,	F,	—	ИП6	П2	÷
П8	0	ПД	КИП2	9	П0	КИП0	КИП0	/—/	П9
ИП2	+	ИП8	×	ИПА	+	ПП	57	ИПД	+
ПД	ИП9	Fx ≥ 0	18	FL0	16	FL2	13	F,	ИП8
×	3	÷	ИПС	+	ПС	ИПВ	ИП8	ИП6	×
ИПА	+	ПА	FL3	06	ИПС	С/П	...	...	...
...	...	...	...	...	...	...	В/О		

Промежуточный предел  $b_1$  может быть точкой разрыва первого рода или разрыва производной,  $b_1$  может также выбираться как ориентировочная граница промежутка  $[a, b_1]$ , где функция  $f(x)$  изменяется относительно быстро. В последнем случае предполагается, что  $(b_1 - a)/(b - b_1) \ll 1$ .

#### Инструкция

- Подпрограмма  $f(x)$ :

адрес первой команды 57,  $n_{\max} = 41$ , в конце подпрограммы поставить В/О;

регистры свободные: P5;

аргумент  $x$  — в регистре PX, результат:  $PX = f(x)$ .

- Исходные данные:  $(8,6624682 \cdot 10^{-1} = P1, 4,2251865 \cdot 10^{-1} = P4, 2,666354 \cdot 10^{-1} = P7)$ ,  $(b = PV, 2N = P6)$ ,  $[b_1 = PX, \uparrow, a = PA]$ . Напомним, что в соответствии с введением круглые скобки здесь означают, что абсциссы уз-

лов в P1, P4, P7, а также величины  $b$  и  $2N$  сохраняются в памяти при повторении вычислений.

3. Пуск: В/О С/П.

4. Результат: PC = PX = F.

Примеры.

$$\int_0^9 \sqrt{x} dx = \int_0^{0.5} \sqrt{x} dx + \int_{0.5}^9 \sqrt{x} dx = 18,000068 \quad (18), \quad 2N=8, \quad t \approx 5 \text{ мин};$$

$$\int_0^{11} \frac{dx}{1+x^2} = \int_0^2 \frac{dx}{1+x^2} + \int_2^{11} \frac{dx}{1+x^2} = 1,4801096 \quad (1,4801364), \quad 2N=4,$$

$t \approx 3$  мин;

$$\int_0^9 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \int_0^{0.2} \frac{dx}{\sqrt{x}} + \int_{0.2}^9 \frac{dx}{\sqrt{x}} = 5,9532107 \quad (6), \quad 2N=8, \quad t \approx 6 \text{ мин}.$$

Подпрограмма  $f(x)$  для последнего примера: F  $\sqrt{\quad}$  F1/x В/О ...

**Программа 10.17.** Вычисление интеграла  $F = \int_a^b f(x) dx$  методом Гаусса — Чебышева по составной формуле (10.14) (двухшаговый вариант (10.17)) при заданном числе  $N$  частных интервалов на отрезках  $[a_1, b_1], [b_1, b]$ .

0	ПС	2	П1	F,	F,	—	ИП6	П0	÷
П8	0	ПД	КИП0	3	F $\sqrt{\quad}$	F1/x	/—/	П9	ИП0
+	ИП8	×	ИПА	+	ПП	52	ИПД	+	ПД
ИП9	Fx $\geq 0$	17	FL0	13	XY	ИП8	×	ИПС	+
ПС	ИПВ	ИП8	ИП6	×	ИПА	+	ПА	FL1	06
ИПС	С/П	...	...	...	...	...	...	В/О	

Промежуточный предел  $b_1$  может быть точкой скачка функции или разрыва первой производной или ориентировочно выбираться как граница интервала быстрого изменения функции. В последнем случае предполагается, что  $|b_1 - a|/|b - b_1| \ll 1$ .

Инструкция

1. Подпрограмма  $f(x)$ :

адрес первой команды 52,  $n_{\max} = 46$ , в конце подпрограммы поставить В/О,

регистры свободные: P2 — P5, P7;

аргумент  $x$  — в регистре PX, результат: PX =  $f(x)$ .

2. Исходные данные: ( $b = PB$ ,  $2N = P6$ ), [ $b_1 = PX$ , ↑,  $a = PA$ ].

3. Пуск: В/О С/П.

4. Результат: PC = PX = F.

Примеры.

$$\int_0^9 \sqrt{x} dx = \int_0^1 \sqrt{x} dx + \int_1^9 \sqrt{x} dx = 18,000394 \quad (18), \quad t \approx 4 \text{ мин};$$

$$\int_0^{11} \frac{dx}{1+x^2} = \int_0^2 \frac{dx}{1+x^2} + \int_2^{11} \frac{dx}{1+x^2} = 1,4800574 \quad (1,4801364), \quad t \approx 4 \text{ мин}.$$

Подпрограмма  $f(x)$  для последнего примера: Fx<sup>2</sup> 1 + F1/x В/О.

В обоих примерах  $2N = 16$ .

**Программа 10.18.** Вычисление интеграла  $F = \int_a^b f(x) dx$  методом Чебышева ( $n = 6$ ) по составной формуле (10.14) (двухшаговый вариант (10.18), (10.19)) при заданном числе  $N$  частных интервалов.

ПА	—	ИП8	П2	Fx <sup>2</sup>	÷	2	ПЗ	×	ПВ
0	ПС	0	ПД	КИП2	9	ПО	КИП0	КИП0	/—/
П9	ИП2	+	ИПВ	×	ИПА	+	ПП	63	ИПД
+	ПД	ИП9	Fx $\geq 0$	19	FL0	17	FL2	14	F,
ИПВ	×	3	÷	ИПС	+	ПС	ИПА	ИП8	П2
ИПВ	×	+	ПА	FBx	2	÷	ПВ	КИП2	КИП2
FL3	12	С/П	...	...	...	...	...	...	...
...	...	...	...	...	...	...	...	В/О	...

В программе интервал  $(a, b)$  делится на два отрезка в отношении  $1/N$  с примерно одинаковым числом шагов  $N$  на каждом отрезке. Отрезок меньшей длины примыкает к точке  $x = a$ . Общее число узлов, в которых вычисляется значение функции,  $12N - 6$ .

Инструкция

1. Подпрограмма  $f(x)$ :

адрес первой команды 63,  $n_{\max} = 35$ , в конце подпрограммы поставить В/О.

регистры свободные: P5, P6;

аргумент  $x$  — в регистре PX, результат: PX =  $f(x)$ .

2. Исходные данные: ( $8,6624682 \cdot 10^{-1} = P1$ ,  $4,2251865 \cdot 10^{-1} = P4$ ,  $2,666354 \cdot 10^{-1} = P7$ ), ( $2N = P8$ ), [ $b = PX$ , ↑,  $a = PX$ ].

3. Пуск: В/О С/П.

4. Результат: PC = F.

Примеры.

$$\int_0^{11} \frac{dx}{1+x^2} = 1,4801363 \quad (1,4801364), \quad 2N=8, \quad t \approx 5 \text{ мин};$$

$$\int_0^9 \sqrt{x} dx = 18,000058 \quad (18), \quad 2N=16, \quad t \approx 10 \text{ мин};$$

$$\int_0^9 \frac{dx}{\sqrt{x}} = 5,9642763 \quad (6), \quad 2N=32, \quad t \approx 20 \text{ мин}.$$

Подпрограмма  $f(x)$  для последнего примера:

F $\sqrt{\quad}$  F1/x В/О

#### 10.4. Несобственные интегралы от неограниченных функций с алгебраической особенностью. Главное значение интеграла по Коши

Рассмотрим несобственные интегралы вида

$$F = \int_a^b \frac{\varphi(x) dx}{(x-a)^m (b-x)^n}, \quad (10.20)$$

где для сходимости интегралов должно быть  $m, n < 1$ . Функция  $\varphi(x)$  полагается непрерывной на отрезке  $[a, b]$ , за исключением устранимых разрывов в отдельных внутренних точках, которые не должны совпадать с узлами квадратурных формул. Непосредственное численное интегрирование (10.20) возможно с использованием квадратурных формул открытого типа, например формул Гаусса и Чебышева в центрированной схеме прямоугольников (10.3). Однако наличие особенностей при  $x = a, b$  приводит к чрезвычайно медленной сходимости вычислений. Иллюстрацией могут служить последние примеры к программам 10.16 и 10.18, базирующимся на двухшаговом варианте квадратурных формул. Как видно, даже дробление шага в окрестности  $x = 0$  не обеспечивает высокой точности, несмотря на большие времена счета.

Подстановка

$$x = a + L \cos^2 \vartheta, \quad L = b - a, \quad (10.21)$$

приводит интеграл (10.20) к виду

$$F = 2L^{1-m-n} \int_0^{\pi/2} \varphi(a + L \cos^2 \vartheta) (\cos \vartheta)^{1-2m} (\sin \vartheta)^{1-2n} d\vartheta. \quad (10.22)$$

Подынтегральная функция в (10.22) не имеет особенностей при  $m, n < 0,5$ , и применение приводимых выше квадратурных формул при этом условии связано с существенно меньшими погрешностями. Соответствующая программа 10.19 основана на методе Чебышева при  $n = 6$ . Для вычисления  $F$  по этой программе необходимо лишь ввести подпрограмму для функции  $\varphi(x)$ . Входящий в (10.22) фактор  $(\cos \vartheta)^{1-2m} (\sin \vartheta)^{1-2n}$  имеет разрывные производные в точках  $\vartheta = 0, \pi/2$ . Это обуславливает все же недостаточную скорость сходимости квадратурных формул (ср. пример к программе 10.19). Наибольшие трудности возникают при  $m, n > 0,5$ , когда подынтегральная функция разрывна.

Для усиления сходимости выделим части интеграла (10.22), распространенные на малые окрестности особых точек  $\vartheta = 0, \pi/2$ . Соответствующие интегралы могут быть найдены аналитически, если заменить значения  $\varphi(x)$  на  $\varphi(a)$ ,  $\varphi(b)$  и линеаризовать близкие к нулю в окрестности  $\vartheta = 0, \pi/2$ ,  $\sin \vartheta$  и  $\cos \vartheta$ . При использовании квадратуры Симпсона целесообразно выбрать интервалы в окрестности  $\vartheta = 0, \pi/2$  длиной  $2h$ , где  $h = \pi/4N$  — шаг для интеграла (10.22). В результате скорректированная формула Симпсона принимает вид

$$F = 2L^{1-m-n} \left\{ \varphi(b) \int_0^{2h} \vartheta^{1-2n} d\vartheta - \frac{h}{3} \varphi(b) [4h^{1-2n} + (2h)^{1-2n}] + \right. \\ \left. + \frac{h}{3} S + \varphi(a) \int_0^{2h} \vartheta^{1-2m} d\vartheta - \frac{h}{3} \varphi(a) [4h^{1-2m} + (2h)^{1-2m}] \right\}. \quad (10.23)$$

$(h/3) S$  означает правую часть в формуле (10.4), за вычетом  $(h/3) [f(a) + f(b)]$  и остаточного члена. После интегрирования и приведения подобных членов получаем

$$F \approx (h/3) L^{1-m-n} (A_m + 2S + A_n), \quad (10.24)$$

где

$$A_m = h^{1-2m} \left( \frac{2+m}{1-m} 4^{1-m} - 8 \right) \varphi(a); \quad (10.25)$$

$$A_n = h^{1-2n} \left( \frac{2+n}{1-n} 4^{1-n} - 8 \right) \varphi(b).$$

Отметим, что

$$A_m, A_n = 0 \quad \text{при } m, n = 0, \\ A_m = 2\varphi(a), \quad A_n = 2\varphi(b) \quad \text{при } m, n = 1/2. \quad (10.26)$$

Формула (10.24) аналогична формуле Симпсона. Здесь слагаемые  $A_m, A_n$  играют роль  $\varphi(a), \varphi(b)$  в (10.4). Расчеты по программе 10.20, в которой реализована формула (10.24), подтверждают эффективность рассматриваемого алгоритма.

Программы 10.21—10.23 относятся к более простым случаям, соответствующим (10.26). Для них возрастают числа программных шагов и регистров памяти, которые могут быть выделены на подпрограмму  $\varphi(x)$ , а также сокращается число исходных данных. Наиболее простым оказывается расчет при  $m = n = 1/2$ . В этом случае интеграл (10.22) сводится к

$$F = 2 \int_0^{\pi/2} \varphi(a + L \cos^2 \vartheta) d\vartheta. \quad (10.27)$$

Подынтегральная функция здесь регулярна, и для вычислений пригоден любой из алгоритмов § 10.1, 10.2. В программе 10.22 использована формула Гаусса — Чебышева (10.14), (10.11), что позволяет сократить программу. Кроме того, эта формула открытого типа и допускает использование функций  $\varphi(x)$  с устранимыми разрывами на границах промежутка  $[a, b]$ .

Вычисление *главного значения интеграла в смысле Коши*

$$F = VP \int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[ \int_a^{c-\varepsilon} f(x) dx + \int_{c+\varepsilon}^b f(x) dx \right] \quad (10.28)$$

( $x = c$  — особая точка  $f(x)$ ) рассматривается далее применительно к функциям

$$f(x) = \varphi(x)/(x-c). \quad (10.29)$$

$\varphi(x)$  — непрерывная функция, за исключением возможно устранимых разрывов в отдельных точках  $[a, b]$ . Интегралы (10.28) с функцией (10.29) часто встречаются в приложениях математической физики.

Будем для определенности полагать  $(c-a)/(b-c) < 1$  (т. е. считать особую точку  $x = c$  расположенной ближе к  $x = a$ , чем к  $x = b$ ). Представим (10.28) в виде

$$F = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[ \int_a^{c-\varepsilon} f(x) dx + \int_{c+\varepsilon}^{2c-a} f(x) dx \right] + \int_{2c-a}^b f(x) dx. \quad (10.30)$$

Первый и второй интегралы  $F_1, F_2$  в последней формуле распространены на промежутки одинаковой длины, и шаги интегрирования в квадратурных формулах для  $F_1$  и  $F_2$  также одинаковы. Применим формулу Симпсона (10.4) без остаточного

члена (в принципе можно использовать любую квадратурную формулу замкнутого типа):

$$F_1 + F_2 \approx \frac{h}{3} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [f(a) + S_1 + f(c - \varepsilon) + f(c + \varepsilon) + S_2 + f(2c - a)], \quad (10.31)$$

где  $S_1$  и  $S_2$  — суммы в формуле (10.4), за вычетом значений функций на концах соответствующих промежутков. При учете (10.29)

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [f(c - \varepsilon) + f(c + \varepsilon)] = 2\varphi'(c). \quad (10.32)$$

Таким образом,

$$F = \frac{2h}{3} \varphi'(c) + \int_a^c f(x) dx + \int_c^{2c-a} f(x) dx + \int_{2c-a}^b f(x) dx. \quad (10.33)$$

В первых двух интегралах при использовании формулы Симпсона должны быть пропущены слагаемые, содержащие значения функции  $f(x)$  в точке  $x = c$ . В приводимой далее программе 10.23 функция  $\varphi'(c)$  должна вычисляться отдельно, и ее значение принимается в качестве исходной величины.

**Программа 10.19.** Вычисление несобственного интеграла общего вида  $F = \int_a^b \frac{\varphi(x) dx}{(x-a)^m (b-x)^n}$  методом Чебышева ( $n = 6$ ) по формуле (10.22) и составной формуле (10.14) при заданном числе  $N$  частных интервалов,  $m, n < 1$ .

1	Farcsin	ИП2	÷	П8	0	ПД	КИП2	6	П0
КИП0	/—/	П9	ИП2	+	ИП8	×	ПС	Fcos	Fx <sup>2</sup>
ИПВ	×	ИПА	÷	...	...	...	...	...	...
...	...	...	БП	57	...	...	ИП6	ИПС	Fcos
Fx <sup>y</sup>	XY	F,	×	ИП7	ИПС	Fsin	Fx <sup>y</sup>	XY	F,
×	ИПД	+	ПД	ИП9	Fx <sup>≥0</sup>	11	FL0	10	FL2
07	F,	ИП8	×	3	÷	2	×	ИП6	ИП7
÷	ИПВ	Fx <sup>y</sup>	Fv	XY	F,	×	С.П		

#### Инструкция

- Подпрограмма  $\varphi(x)$ : адрес первой команды 24, последней — 56 (при  $n_{\max} = 33$ ); если адрес последней команды меньше 55, то в конце подпрограммы поставить БП 57; окончание основной программы начинается с адреса 57; регистры свободные: Р4; аргумент  $x$  — в регистре РХ, результат: РХ =  $\varphi(x)$ .
  - Исходные данные:  $(8,6624682 \cdot 10^{-1} = \text{P1}, 4,2251865 \cdot 10^{-1} = \text{P3}, 2,666354 \cdot 10^{-1} = \text{P5}), (1 - 2m = \text{P6}, 1 - 2n = \text{P7}, a = \text{PA}, L = b - a = \text{PB}), 2N = \text{P2}$ .
  - Пуск: В/О С/П.
  - Результат: РХ =  $F$ .
- Примеры.

$$F = \int_0^1 \frac{dx}{x^{1/4} (1-x)^{1/5} (x+2)^{(3/4+4/5)}} = \begin{cases} 0,4064602, & 2N=2, \quad t \approx 2,5 \text{ мин}, \\ 0,40511328, & 2N=4, \quad t \approx 5 \text{ мин}, \\ 0,4044937, & 2N=16, \quad t \approx 20 \text{ мин}. \end{cases}$$

Точное значение [6]:

$$F = \frac{\Gamma(3/4) \Gamma(4/5)}{3^{3/4} \cdot 2^{4/5} \Gamma(3/4 + 4/5)} = 0,4044084 \dots$$

Подпрограмма  $\varphi(x)$  для этого примера:

2 + 1, 5 5 /—/ XY Fx<sup>y</sup> БП 57

$$F = \int_0^3 \frac{1+x^2}{x^{0,8}} dx = \begin{cases} 10,125498, & 2N=2, \quad t \approx 2,5 \text{ мин}, \\ 10,634942, & 2N=8, \quad t \approx 8,5 \text{ мин}, \\ 10,928591, & 2N=32, \quad t \approx 33 \text{ мин}. \end{cases}$$

Точное значение  $F = 5 \cdot 3^{0,2} (1 + 9/11) = 11,324826$ .

Как видно, нарушение во втором примере условия  $m < 1/2$  приводит к весьма медленной сходимости вычислений по данной программе.

**Программа 10.20.** Вычисление несобственного интеграла общего вида  $F = \int_a^b \frac{\varphi(x) dx}{(x-a)^m (b-x)^n}$  по формуле Симпсона с выделением особенностей на границах интервала (формулы (10.24), (10.25), (10.4)),  $m, n < 1$ .

ПП	45	ИПВ	ПП	45	КИП3	ИП3	ИПС	×	П9
ПП	72	1	2	ИП2	—	П2	×	ИП5	ИП9
Fcos	Fx <sup>y</sup>	XY	F,	×	ИП4	ИП9	Fsin	ПП	64
FL3	06	ИП4	ИП5	+	ИПВ	Fx <sup>y</sup>	Fv	ИПС	×
ИПД	×	3	÷	С/П	ПП	76	КИП2	П8	1
+	2	Fx <sup>y</sup>	XY	÷	5	ИП8	—	×	8
—	×	ИП8	ИПС	Fx <sup>y</sup>	XY	F,	×	ИПД	+
ПД	В/О	Fcos	Fx <sup>2</sup>	ИПВ	×	ИПА	+	...	...
...	...	...	В/О						

#### Инструкция

- Подпрограмма  $\varphi(x)$ : Адрес первой команды 78, последней — 97 (при  $n_{\max} = 20$ ), в конце подпрограммы В/О. Если нижний предел интеграла  $a = 0$ , то команды ИПА + (адреса 76, 77) не нужны. Подпрограмма тогда набирается начиная с адреса 76, и ее максимальная длина 22 шага. В этом случае не следует вводить  $a = 0$  (п. 2 инструкции) в регистр РА, и этот регистр свободен. Регистры свободные: Р0, Р1, Р6, Р7. Аргумент  $x$  — в регистре РХ, результат: РХ =  $\varphi(x)$ .
- Исходные данные:  $(a = \text{PA}, L = b - a = \text{PB}, 1 - 2m = \text{P5}, 1 - 2n = \text{P4}), 6 = \text{P2}, 2N = \text{P3}, (h = \pi/4N = \text{PC}), [0 = \text{PD}]$ .
- Пуск: В/О С/П.
- Результат: РХ =  $F$ .

Примеры.

$$F = \int_0^1 \frac{dx}{x^{1/4} (1-x)^{1/5} (x+2)^{(3/4+4/5)}} = \begin{cases} = 0,40502843, & 2N=4, \quad t \approx 2 \text{ мин}, \\ = 0,40443763, & 2N=8, \quad t \approx 4 \text{ мин}. \end{cases}$$

Точное значение  $F = 0,4044084 \dots$  (см. пример к программе 10.19).

$$\int_0^3 \frac{1+x^2}{x^{0,8}} dx = \begin{cases} 11,352517, & 2N=4, \quad t \approx 1,5 \text{ мин}, \\ 11,327226, & 2N=8, \quad t \approx 3 \text{ мин}, \\ 11,325684, & 2N=16, \quad t \approx 6 \text{ мин}. \end{cases}$$

Точное значение 11,324826 (см. программу 10.19).

Подпрограмма  $\varphi(x)$  для последнего примера:  $Fx^2 \quad 1 + \quad \text{В/О}$ .

Сравнение с примерами к предыдущей программе подтверждает существенное усиление сходимости при выделении особенностей подынтегральной функции на границах промежутка  $[a, b]$ .

**Программа 10.21.** Вычисление интегралов  $F_1 = \int_a^b \frac{\varphi(x) dx}{(x-a)^m \sqrt{b-x}}$ ,

$F_2 = \int_a^b \frac{\varphi(x) dx}{\sqrt{x-a} (b-x)^m}$  по формуле Симпсона с выделением особенностей на границах интервала  $[a, b]$  (10.24) — (10.26), (10.4),  $m < 1$ .

ИПВ	ПП	71	ПД	0	ПП	41	2	П7	КИПО
ИПО	ИПС	×	П9	ПП	67	6	ИП7	—	П7
×	ИП8	ИП9	Fcos	ПП	59	FL0	10	ИП8	ИПВ
$Fx^y$	$F\sqrt{\quad}$	ИПС	×	ИПД	×	2	×	3	÷
С/П	ПП	71	ИП8	2	$Fx^y$	XY	1	+	÷
5	ИП8	—	×	4	—	×	ИП8	ИПС	$Fx^y$
XY	F,	×	ИПД	+	ПД	В/О	Fcos	$Fx^2$	ИПВ
×	ИПА	+	...	...	...	...	...	...	...
...	...	...	...	...	...	В/О	...	...	...

Данный вариант программы ориентирован на вычисление  $F_1$ . Для перехода к  $F_2$  следует внести следующие изменения в программу: заменить ИПВ (адрес 00) на 0; 0 на ИПВ (адрес 04); Fcos на Fsin (адрес 23).

#### Инструкция

##### 1. Подпрограмма $\varphi(x)$ :

Адрес первой команды 73, последней — 97 (при  $n_{\max} = 25$ ), в конце подпрограммы должна быть В/О. Если нижний предел интеграла  $a = 0$ , то можно исключить команды ИПА + (адреса 71, 72). Тогда подпрограмма набирается с адреса 71, и ее длина 27 шагов. В этом случае не следует вводить  $a = 0$  в регистр РА (п. 2 инструкции), и регистр РА свободен. Регистры свободные: Р1 — Р6.

Аргумент  $x$  — в регистре РХ, результат: РХ =  $\varphi(x)$ .

2. Исходные данные: ( $a = \text{РА}$ ,  $L = b - a = \text{РВ}$ ,  $1 - 2m = \text{Р8}$ ),  $2N = \text{Р0}$ , ( $h = \pi/4N = \text{РС}$ ).

3. Пуск: В/О С/П.

4. Результат: РХ =  $F_1$  (или РХ =  $F_2$  при втором варианте программы).

Примеры.

$$F_1 = \int_0^1 \frac{dx}{x^{1/4} \sqrt{1-x} (1+3x)^{5/4}} = \begin{cases} 0,84780473, & 2N=8, \quad t \approx 3 \text{ мин}, \\ 0,84724553, & 2N=16, \quad t \approx 6 \text{ мин}. \end{cases}$$

Точное значение  $F_1 = \sqrt{\frac{\pi}{8} \frac{\Gamma(3/4)}{\Gamma(5/4)}} = 0,8472131 \dots$  [6]. Подпрограмма  $\varphi(x)$ :

3 × 1 + 1, 2 5 /—/ XY  $Fx^y$  В/О

$$F_2 = \int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{x} (2-x)^{0,23}} = \begin{cases} 2,8409685, & 2N=6, \quad t \approx 1,5 \text{ мин}, \\ 2,8410004, & 2N=16, \quad t \approx 4 \text{ мин}. \end{cases}$$

Точное значение  $F_2 = 2^{0,27} \frac{\Gamma(0,77) \Gamma(0,5)}{\Gamma(1,27)} = 2,8410196$ . В данном случае погрешность обусловлена, по-видимому, также неточностью операции возведения в степень  $Fx^y$  на ПМК, которая многократно выполняется в программе.

**Программа 10.22.** Вычисление интеграла  $F = \int_a^b \frac{\varphi(x) dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}$

преобразованием (10.27) и по составной формуле Гаусса — Чебышева (10.14), (10.11) при заданном числе частных интервалов  $N$ .

ИПВ	ИПА	—	П8	1	Farcsin	ИПО	÷	ПС	0
ПД	КИПО	3	$F\sqrt{\quad}$	F1/x	/—/	П9	ИПО	+	ИПС
×	Fcos	$Fx^2$	ИП8	×	ИПА	+	ПП	43	ИПД
+	ПД	ИП9	$Fx \geq 0$	15	FL0	11	XY	ИПС	×
2	×	С/П	...	...	...	...	...	...	...
...	...	...	...	...	...	В/О	...	...	...

#### Инструкция

##### 1. Подпрограмма $\varphi(x)$ :

адрес первой команды 43,  $n_{\max} = 55$ , в конце подпрограммы поставить В/О;

регистры свободные: Р1 — Р7;

аргумент  $x$  — в регистре РХ, результат: РХ =  $\varphi(x)$ .

##### 2. Исходные данные: ( $a = \text{РА}$ , $b = \text{РВ}$ ), $2N = \text{Р0}$ .

##### 3. Пуск: В/О С/П.

##### 4. Результат: РХ = $F$ .

Пример.

$$F = \int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{x(3-x)(5-x)(1+x)}} = 1,152958, \quad 2N=12, \quad t \approx 2 \text{ мин}.$$

Подпрограмма  $\varphi(x)$ :

1 XY + 5 FBx — × F1 — F1/x В/О

$F$  выражается через полный эллиптический интеграл первого рода, и в данном случае точное значение  $F = K(0,9)/\sqrt{5} = 1,1529578 \dots$  [6].

**Программа 10.23.** Вычисление интегралов  $F_1 = \int_a^b \frac{\varphi(x) dx}{(x-a)^m}$ ,  $F_2 = \int_a^b \frac{\varphi(x) dx}{(b-x)^m}$

по формуле Симпсона с выделением особенностей на границах промежутка  $[a, b]$  ((10.24) — (10.26), (10.4)) при заданном числе шагов  $2N$ ,  $m < 1$ .

0	ПП	41	4	П7	КИП0	ИП0	ИПС	×	П9
ПП	67	1	2	ИП7	—	П7	×	ИП9	Fsin
×	ИП8	ИП9	Fcos	ПП	59	FL0	06	ИП8	1
+	ИПВ	Fx <sup>y</sup>	Fv <sup>—</sup>	ИПС	×	ИПД	×	3	÷
С/П	ПП	71	ИП8	1	+	2	Fx <sup>y</sup>	ХУ	÷
5	ИП8	—	×	8	—	×	ИП8	ИПС	Fx <sup>y</sup>
ХУ	F,	×	ИПД	+	ПД	В/О	Fcos	Fx <sup>2</sup>	ИПВ
×	ИПА	+	...	...	...	...	...	...	...
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...

Данная программа ориентирована на вычисление  $F_1$ . Для перехода к  $F_2$  следует внести следующие замены команд: 0 (адрес 00) на ИПВ; F sin (адрес 19) на Fcos; Fcos (адрес 23) на Fsin.

#### Инструкция

##### 1. Подпрограмма $\varphi(x)$ :

Адрес первой команды 73, последней — 97 (при  $n_{\max} = 25$ ), в конце подпрограммы поставить В/О. Если нижний предел интеграла  $a = 0$ , то можно исключить команды ИПА + (адреса 71, 72). Тогда подпрограмма набирается с адреса 71 и имеет длину 27 шагов. В этом случае не следует вводить  $a = 0$  в регистр РА (п. 2 инструкции), и регистр РА свободен. Регистры свободные: Р1 — Р6.

Аргумент  $x$  — в регистре РХ, результат: РХ =  $\varphi(x)$ .

2. Исходные данные: ( $a = RA$ ,  $L = b - a = RB$ ,  $1 - 2m = P8$ ),  $0 = RD$ ,  $2N = P0$ , ( $h = \pi/4N = PC$ ).

3. Пуск: В/О С/П.

4. Результат: РХ =  $F_1$ ,  $F_2$ .

Примеры. При  $2N = 8$

$$F_1 = \int_0^2 \frac{dx}{x^{0,6}} = 3,2988553 (3,2987697), \quad t = 2,5 \text{ мин};$$

$$F_2 = \int_0^2 \frac{1+2x}{\sqrt{2-x}} dx = 10,370335, \quad t = 2,5 \text{ мин}.$$

Точное значение  $F_2 = 22\sqrt{2}/3 = 10,370899 \dots$

Подпрограмма  $\varphi(x)$  для последнего примера:

2 × 1 + В/О

**Программа 10.24.** Вычисление главного значения интеграла по Коши

$F = VP \int_a^b \frac{\varphi(x) dx}{x-c}$  по модифицированной формуле Симпсона (10.33) при заданном числе шагов  $2N$ .

ИПС	ПА	—	ИП1	÷	П8	ПП	37	ИП8	/—/
П8	ИПС	ПА	ПП	37	ИП8	×	П9	ИПА	ПП
62	ПД	ИПВ	ИПА	—	ИП1	÷	П8	ПП	37
ИП8	×	ИП9	+	3	÷	С/П	ИП1	П0	0
ПП	55	4	КИП0	ПП	54	2	FL0	40	F,
ИПД	+	ПД	В/О	F,	×	ИПД	+	ПД	ИПА
ИП8	+	ПА	...	...	...	...	...	...	...
...	...	...	ИПА	ИПС	—	÷	В/О		

#### Структура программы

00—17: вычисление первых двух интегралов с (10.33) с пропуском слагаемых, содержащих значения подынтегральной функции в особой точке  $x = c$ ,  
18—36: расчет третьего интеграла и полной величины  $F$ ,  
37—62: подпрограмма численного интегрирования по формуле Симпсона (типа программы 10.6, где не учитываются слагаемые, содержащие одно из граничных значений функции, в данном случае — значение при  $x = c$ ),  
63 и далее: подпрограмма функции  $\varphi(x)$  (составляется пользователем),  
93—97: деление  $\varphi(x)$  на  $(x - c)$ .

#### Инструкция

##### 1. Подпрограмма $\varphi(x)$ :

адрес первой команды 63,  $n_{\max} = 30$ , в конце подпрограммы добавляется последовательность пяти команд: ИПА ИПС — ÷ В/О

регистры свободные: Р2 — Р7;

аргумент  $x$  в регистрах РХ, РА, результат: РХ =  $\varphi(x)$ .

2. Исходные данные: ( $b = RB$ ,  $c = PC$ ,  $2N = P1$ ),  $2\varphi'(c) = PD$ ,  $[a = PX]$ . Эти данные вводятся при  $(c - a)/(b - c) \leq 1$ ; особая точка  $x = c$  не ближе к  $x = b$ , чем к  $x = a$ . В другом случае  $(c - a)/(b - c) > 1$  следует при вводе исходных данных поменять  $a$  и  $b$  местами в регистрах памяти.

3. Пуск: В/О С/П.

4. Результат РХ =  $F$  при  $(c - a)/(b - c) \leq 1$  и РХ =  $-F$  при  $(c - a)/(b - c) > 1$ , когда  $a$  и  $b$  при вводе исходных данных переставляются в регистрах РВ и РХ (ср. п. 2).

Пример. Вычисление  $Ei(x) = VP \int_{-x}^{\infty} \frac{-e^{-t}}{t} dt$ . Примем верхний предел равным 11. При этом значении  $t$  подынтегральная функция пренебрежимо мала.

$$Ei(1) \approx VP \int_{-1}^{11} \frac{-e^{-t}}{t} dt = \begin{cases} 1,7784162, & 2N=4, \quad t \approx 2 \text{ мин}, \\ 1,872382, & 2N=8, \quad t \approx 4 \text{ мин}, \\ 1,8943909, & 2N=24, \quad t \approx 10 \text{ мин}. \end{cases}$$

Точное значение  $Ei(1) = 1,89511781 \dots$

Медленная сходимость интеграла с увеличением числа шагов объясняется наличием быстро меняющейся функции  $e^{-t}$ .

### 10.5. Несобственные интегралы с бесконечными пределами

• Квадратурная формула Лагерра:

$$F_1 = \int_0^{\infty} e^{-x} \varphi(x) dx = \sum_{k=1}^n w_k \varphi(x_k) + R_n, \quad (10.34)$$

где  $x_k$  —  $k$ -й нуль многочлена Лагерра  $L_n(x)$ ;

$$w_k = \frac{x_k}{(n+1)^2 [L_{n+1}(x_k)]^2}; \quad R_n = \frac{(n!)^2}{(2n)!} \varphi^{(2n)}(\xi), \quad 0 < \xi < \infty.$$

Квадратурная формула Эрмита:

$$F_2 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \varphi(x) dx = \sum_{k=1}^n w_k \varphi(x_k) + R_n, \quad (10.35)$$

где  $x_k$  —  $k$ -й нуль многочлена Эрмита  $H_n(x)$ ;

$$w_k = \frac{2^{n-1} n! \sqrt{\pi}}{n^2 [H_{n-1}(x_k)]^2}; \quad R_n = \frac{n! \sqrt{\pi}}{2^n (2n)!} \varphi^{(2n)}(\xi), \quad -\infty < \xi < \infty.$$

Значения  $x_k$ ,  $w_k$  приведены в [9] до  $n = 15, 20$  для  $F_1$  и  $F_2$  соответственно. Коэффициенты  $x_k$  и  $w_k$  у  $F_2$  симметричны относительно нуля подобно квадратурным формулам Гаусса. Это позволяет использовать при вычислении  $F_2$  формулы вдвое большего порядка, чем для  $F_1$ , при одинаковом числе коэффициентов, вводимых в память ЭВМ.

При произвольном нижнем пределе

$$F_1 = \int_a^{\infty} e^{-x} \varphi(x) dx = e^{-a} \int_0^{\infty} e^{-y} \varphi(y+a) dy. \quad (10.36)$$

Условия быстрой сходимости здесь примерно такие же, как для квадратур Гаусса и Чебышева (см. § 10.2): функции  $\varphi(x)$  должны быть гладкими с небольшими по модулю производными высокого порядка. Кроме того,  $\varphi(x)$  не должны иметь много осцилляций в той области значений  $x$ , которая дает существенный вклад в интеграл. При нарушении этих условий эффективность квадратур (10.34), (10.35) невелика, что связано с трудностями оценки погрешностей и уточнения результатов в рамках данного метода. Фактически здесь существует единственная возможность перехода к большим  $n$ . Такой способ, однако, неудобен, а для ПМК практически нереализуем из-за недостаточных ресурсов памяти.

Алгоритмы реализованы в программах 10.25, 10.26.

Рассмотрим несобственные интегралы вида

$$\int_a^{\infty} f(x) dx \quad (10.37)$$

от функций  $f(x)$ , для которых можно указать ориентировочный масштаб  $\Delta x = L$  их существенного изменения. Асимптотически  $f(x) \sim e^{-x/L}$ . Представим (10.37) как предел последовательности:

$$F = \lim_{N \rightarrow \infty} F_N, \quad (10.38)$$

где

$$F_N = S_1 + S_2 + \dots + S_N; \quad (10.39)$$

$$S_N = \int_{a+(N-1)L}^{a+NL} f(x) dx. \quad (10.40)$$

Применим для интегралов (10.40) подходящую квадратурную формулу, а суммирование в (10.39) будем проводить до тех  $N$ , при которых разность  $|F_{N+1} - F_N|$  не станет меньше некоторого заданного числа или машинным нулем. Такой алгоритм обладает достаточной гибкостью в смысле выбора квадратурной

формулы и позволяет легко уточнять результаты (и оценивать погрешность), уменьшая задаваемый масштаб  $L$ . Далее приведены программы 10.27 и 10.28, в которых использованы соответственно квадратурные формулы Гаусса — Чебышева и Чебышева при  $n = 6$ . Для интегралов  $S_k$  отпадает необходимость применять составные формулы. Достаточно выбрать  $L$  так, чтобы нужная точность обеспечивалась на одном интервале. Фактически составной формулой является вся сумма (10.39). Судя по приводимым примерам, формула Чебышева по сравнению с формулой Гаусса — Чебышева дает выигрыш в точности при том же времени счета. Однако программа 10.27 может оказаться предпочтительной для сложных  $f(x)$ , так как имеет меньшую длину, оставляет больше регистров памяти на программирование  $f(x)$  и ускоряет счет.

Модификацией данного алгоритма является вариант с переменным масштабом  $L$ . В этом случае интегралы в (10.39) будут иметь вид

$$S_N = \int_{a_N}^{a_N + L_N} f(x) dx, \quad (10.41)$$

где

$$a_{k+1} = a_k + L_k; \quad L_{k+1} = t L_k, \quad k = 1, 2, \dots; \\ a_1 = a; \quad L_1 = L. \quad (10.42)$$

$t$  — коэффициент растяжения (или, возможно, сжатия) интервалов. Целесообразность прогрессивного увеличения шага для функций  $f(x)$ , которые уменьшаются с ростом  $x$  достаточно медленно (не быстрее, чем  $e^{-ax}$ ), очевидна: при увеличении  $N$  вклад интегралов  $S_N$  в общую сумму (10.39) снижается и для них допустима большая относительная погрешность. Если, однако,  $f(x)$  изменяется быстрее (например,  $f(x) \sim e^{-x^n}$ , где  $n \gg 1$ ), то следует использовать  $t < 1$ .

Суммарная длина интегрирования на  $N$  интервалах при заданных  $L$  и  $t$ .

$$\mathcal{L} = L(t^N - 1)/(t - 1), \quad (10.43)$$

существенно превышает  $NL$  даже при сравнительно близких к 1 коэффициентах растяжения  $t$  (так, при  $t = 1, 2$  и  $N = 8$   $\mathcal{L} \approx 16,5 L$ ). Благодаря этому ускоряется сходимость и уменьшаются погрешности округления по сравнению с вариантом, использующим  $L_N = L$ .

Алгоритм реализован в программах 10.29, 10.30, основанных соответственно на квадратурах Гаусса — Чебышева и Чебышева ( $n = 6$ ) при вычислении  $S_N$ . В программе 10.29 задаваемыми величинами являются  $L$  и  $t$ . Суммирование (10.39) ведется до совпадения с машинной точностью  $S_{N+1}$  и  $S_N$ . Такой способ прерывания, однако, не всегда оправдан и может приводить к завышению времени счета, если не нужна максимальная точность. В программе 10.30 просто задается число  $N$  слагаемых в сумме (10.39). Выбор этого числа при заданных  $L$  и  $t$  можно производить с помощью формулы (10.43), исходя из такой длины  $\mathcal{L}$ , при которой модуль подынтегральной функции становится достаточно малым. Можно, наоборот, задавать  $N$ , основываясь на приемлемом времени счета, а по  $\mathcal{L}$  и  $L$  определять  $t$  и т. д.

**Программа 10.25.** Вычисление интеграла  $F_1 = \int_a^{\infty} e^{-x} \varphi(x) dx$  по формуле Лагерра (10.34) при  $n = 4$ .

8	ПО	0	ПД	ИПО	1	+	ПО	КИПО	ИПА
+	ПП	24	КИПО	×	ИПД	+	ПД	FL0	04
ИПА	Fe <sup>x</sup>	÷	С/П	...	...	...	...	...	...
...	...	...	...	...	...	...	В/О		

## Инструкция

### 1. Подпрограмма $\varphi(x)$ :

адрес первой команды 24, последней — 97 (при  $n_{\max}=74$ ), в конце подпрограммы В/О;  
регистры свободные: Р9, РВ, РС;  
аргумент  $x$  — в регистре РХ, результат:  $PX = \varphi(x)$ .

2. Исходные данные: ( $w_1=6,031541 \cdot 10^{-1}=P1$ ,  $x_1=3,2254769 \cdot 10^{-1}=P2$ ,  
 $w_2=3,5741869 \cdot 10^{-1}=P3$ ,  $x_2=1,7457611=P4$ ,  $w_3=3,8887909 \cdot 10^{-2}=P5$ ,  
 $x_3=4,5366203=P6$ ,  $w_4=5,3929471 \cdot 10^{-4}=P7$ ,  $x_4=9,3950709=P8$ ,  
 $a=PA$ ).

3. Пуск: В/О С/П.

4. Результат:  $PX = F_1$ .

Примеры.

$$F_1 = \int_0^{\infty} e^{-x} x^7 dx = 5040 \quad (F_1 = 7! = 5040,0001), \quad t \approx 30 \text{ с};$$

$$\int_0^{\infty} e^{-x} \sin\left(\frac{x}{3} + 2\right) dx = 0,69352428 \quad (0,69352365), \quad t \approx 30 \text{ с};$$

$$\int_0^{\infty} e^{-x} \sin(3x+2) dx = 0,39926999 \quad (-0,03391431), \quad t \approx 30 \text{ с}.$$

Подпрограмма  $\varphi(x)$  для последнего примера:  $3 \times 2 + F \sin$  В/О  
Величины в скобках получены по точной формуле [6]

$$\int_0^{\infty} e^{-x} \sin(ax+b) dx = \frac{1}{1+a^2} (a \cos b + \sin b).$$

Этот пример иллюстрирует рост погрешности квадратурной формулы при сильно осциллирующих функциях  $\varphi(x)$ .

**Программа 10.26.** Вычисление интеграла  $F_2 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \varphi(x) dx$  по формуле Эрмита (10.35) при  $n=6$  или 8.

8	ПО	0	ПД	ИПО	ПВ	0	ПС	КИПВ	/—/
ПВ	ПП	28	ИПС	+	ПС	ИПВ	$Fx \geq 0$	09	КИПО
ИПС	$\times$	ИПД	+	ПД	FL0	04	С/П	...	...
...	...	...	...	...	...	...	В/О		

Данный вариант программы относится к  $n=8$ . Для перехода к  $n=6$  следует заменить команду 8 (адрес 00) на 6 и скорректировать исходные данные (п. 2 инструкции).

## Инструкция

### 1. Подпрограмма $\varphi(x)$ :

адрес первой команды 28, последней — 97 (при  $n_{\max}=70$ ), в конце подпрограммы поставить В/О;  
регистры свободные: Р9, РА при  $n=8$ , Р7 — РА при  $n=6$ ,  
аргумент  $x$  — в регистрах РХ, РВ, результат:  $PX = \varphi(x)$ .

2. Исходные данные: — ввод констант  $w_k, x_k$

$n=8$

$$w_1 = 6,6114701 \cdot 10^{-1} = P1, \quad x_1 = 3,8118699 \cdot 10^{-1} = P2,$$

$$w_2 = 2,0780233 \cdot 10^{-1} = P3, \quad x_2 = 1,1571937 = P4,$$

$$w_3 = 1,7077983 \cdot 10^{-2} = P5, \quad x_3 = 1,9816568 = P6,$$

$$w_4 = 1,9960407 \cdot 10^{-4} = P7, \quad x_4 = 2,9306374 = P8;$$

$n=6$

$$w_1 = 7,246296 \cdot 10^{-1} = P1, \quad x_1 = 4,3607741 \cdot 10^{-1} = P2,$$

$$w_2 = 1,57067320 \cdot 10^{-1} = P3, \quad x_2 = 1,3358491 = P4,$$

$$w_3 = 4,5300099 \cdot 10^{-3} = P5, \quad x_3 = 2,350605 = P6.$$

Введенные константы сохраняются в памяти ПМК при повторении вычислений и изменении подпрограммы функции  $\varphi(x)$ .

3. Пуск: В/О С/П.

4. Результат:  $PX = PD = F_2$ .

Примеры.

$$\int_{-\infty}^{\infty} x e^{3x-x^2} dx = \begin{cases} 25,214665 & \text{при } n=8, \quad t \approx 1 \text{ мин}, \\ 24,920545 & \text{при } n=6, \quad t \approx 45 \text{ с}. \end{cases}$$

Точное значение интеграла [6]:  $1,5\sqrt{\pi} e^{2,25} = 25,22485 \dots$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-x^2} x^2}{1+x^2} dx = \begin{cases} 0,43326648 & \text{при } n=8, \quad t \approx 1 \text{ мин}, \\ 0,44055209 & \text{при } n=6, \quad t \approx 45 \text{ с}. \end{cases}$$

Точное значение интеграла [6]:  $\sqrt{\pi} - \text{ле} (1 - \text{erf } 1) = 0,4291605 \dots$

Большие погрешности в примерах связаны с тем, что высшие производные подынтегральных функций, определяющие остаточный член в (10.35), имеют значительную величину в той области, которая дает наибольший вклад в интеграл.

Подпрограмма  $\varphi(x)$  в последнем примере:  $Fx^2 \uparrow \uparrow 1 + \div$  В/О.

**Программа 10.27.** Вычисление интеграла  $F = \int_a^b f(x) dx$  по формулам (10.38) — (10.40) и квадратурной формуле Гаусса—Чебышева (10.5), (10.6), (10.11) для  $S_N$  при заданном масштабе  $\Delta x = L$  изменения функции  $f(x)$ .

П9	2	$\div$	ПВ	0	ПД	П4	КИП4	3	$FV$
F1/x	/—/	ПС	ИП4	+	ИПВ	$\times$	ИПА	+	ПП
39	ИПД	+	ПД	ИПС	$Fx \geq 0$	11	КИП4	ИПД	ИП9
XY	П9	—	$Fx=0$	07	ИПВ	ИП9	$\times$	С/П	...
...	...	...	...	...	...	...	...	В/О	

## Инструкция

### 1. Подпрограмма $f(x)$ :

адрес первой команды 39,  $n_{\max}=59$ , в конце подпрограммы поставить В/О;  
регистры свободные: Р0 — Р3, Р5 — Р8;  
аргумент  $x$  — в регистре РХ, результат:  $PX = f(x)$ .

2. Исходные данные: ( $a=PA$ ), [ $L=PX$ ].

3. Пуск: В/О С/П.

4. Результат:  $PX = F$ .



### Примеры.

$F_1 = \int_0^{\infty} e^{-x} dx$ . Здесь, очевидно, масштаб существенного изменения функции  $L \sim 1$ . Точное значение  $F = 1$ .

$$F_1 = \begin{cases} 0,99672136, & L=2, \quad t \approx 3 \text{ мин}, \\ 0,99977575, & L=1, \quad t \approx 5 \text{ мин}, \\ 0,99998572, & L=0,5, \quad t \approx 10 \text{ мин}; \end{cases}$$

$$F_2 = \int_0^{\infty} e^{-x} \sin(3x+2) dx = \begin{cases} -0,024429673, & L=1, \quad t \approx 9 \text{ мин}, \\ -0,033430435, & L=0,5, \quad t \approx 16 \text{ мин}. \end{cases}$$

Точное значение интеграла (см. пример к программе 10.25):

$$F_2 = -0,033911431 \dots$$

$$F_3 = \int_0^{\infty} x e^{3x-x^2} dx = \begin{cases} 25,301575, & L=1, \quad t \approx 2,5 \text{ мин}, \\ 25,29767, & L=0,5, \quad t \approx 5 \text{ мин}. \end{cases}$$

Точное значение интеграла [6]:  $F_3 = 0,5 + 0,75\sqrt{\pi} e^{2,25} (1 + \operatorname{erf} 1,5) = 25,29736 \dots$

Подпрограмма функции  $f(x)$  для последнего примера:

↑ ↑ ↑ 3 — × /—/ Fe<sup>x</sup> × В/О

**Программа 10.28.** Вычисление интеграла  $F = \int_a^{\infty} f(x) dx$  по формулам (10.38)—(10.40) и квадратурной формуле Чебышева ((10.5), (10.6), (10.8) ( $n = 6$ )) для  $S_N$  при заданном масштабе  $L$  изменения функции  $f(x)$ .

П9	2	÷	ПВ	0	ПД	6	П0	КИП0	/—/
ПС	1	+	ИПВ	×	ИПА	+	ПП	46	ИПД
+	ПД	ИПС	Fx ≥ 0	09	FL0	08	ИПА	ИПВ	2
×	+	ПА	ИПД	ИП9	ХУ	П9	—	Fx = 0	06
ИПВ	ИП9	×	3	÷	С/П	...	...	...	...
...	...	...	...	...	...	...	...	В/О	

### Инструкция

- Подпрограмма  $f(x)$ :  
адрес первой команды 46,  $n_{\max} = 52$  в конце подпрограммы поставить В/О;  
регистры свободные: Р2, Р4, Р6 — Р8;  
аргумент  $x$  — в регистре РХ, результат подпрограммы: РХ =  $f(x)$ .
- Исходные данные: ( $y_1 = 8,6624682 \cdot 10^{-1} = \text{Р1}$ ,  $y_2 = 4,2251865 \cdot 10^{-1} = \text{Р3}$ ,  $y_3 = 2,666354 \cdot 10^{-1} = \text{Р5}$ ),  $a = \text{РА}$ ,  $[L = \text{РХ}]$ .
- Пуск: В/О С/П.
- Результат РХ =  $F$ .

### Примеры

$$F_1 = \int_0^{\infty} e^{-x} dx = \begin{cases} 0,99998026, & L=4, \quad t \approx 4,5 \text{ мин}, \\ 0,9999977, & L=3, \quad t \approx 6 \text{ мин}. \end{cases}$$

Точное значение  $F_1 = 1$ .

$$F_2 = \int_0^{\infty} e^{-x} \sin(3x+2) dx = \begin{cases} -0,034685906, & L=2, \quad t \approx 12 \text{ мин}, \\ -0,033913886, & L=1, \quad t \approx 22 \text{ мин}. \end{cases}$$

Точное значение  $F_2 = -0,3391431$  (пример к программе 10.25).

$$F_3 = \int_0^{\infty} x e^{3x-x^2} dx = \begin{cases} 25,301686, & L=2, \quad t \approx 4 \text{ мин}, \\ 25,297363, & L=1, \quad t \approx 7 \text{ мин}. \end{cases}$$

Точное значение  $F_3 = 25,29736 \dots$  (пример к программе 10.27).

**Программа 10.29.** Вычисление интеграла  $F = \int_a^{\infty} f(x) dx$  по формулам (10.38), (10.39) с переменным масштабом  $L_N$  (10.41), (10.42)) при заданных  $L$  и  $t$ .  $S_N$  рассчитываются по квадратурной формуле Гаусса — Чебышева (10.5), (10.6). (10.8).

П9	2	÷	ПВ	0	П9	ИПА	П7	0	ПД
3	FV—	F1/x	/—/	ПС	1	+	ИПВ	×	ИП7
+	ПП	51	ИПД	+	ПД	ИПС	Fx ≥ 0	13	ИП7
ИПВ	2	×	+	П7	ИП8	ИПВ	×	ПВ	FBx
ИПД	×	ИП9	+	П9	FBx	—	Fx = 0	08	ИП9
С/П	...	...	...	...	...	...	В/О		

### Инструкция

- Подпрограмма  $f(x)$ :  
адрес первой команды 51,  $n_{\max} = 47$ , в конце подпрограммы поставить В/О;  
регистры свободные: Р0 — Р3, Р5, Р6;  
аргумент  $x$  — в регистре РХ, результат: РХ =  $f(x)$ .
- Исходные данные: ( $a = \text{РА}$ ,  $t = \text{Р8}$ ),  $[L = \text{РХ}]$ .
- Пуск: В/О С/П.
- Результат РХ = Р9 =  $F$ .

### Примеры.

$$F_1 = \int_0^{\infty} e^{-x} dx = 0,99998347, \quad L=0,2, \quad t=1,2 \text{ (6 мин)}.$$

Точное значение  $F_1 = 1$ .

$$F_2 = \int_0^{\infty} x e^{3x-x^2} dx = \begin{cases} 25,29458, & L=0,5, \quad t=1,3 \text{ (3 мин)}, \\ 25,2977433, & L=0,2, \quad t=1,3 \text{ (5 мин)}. \end{cases}$$

Точное значение  $F_2 = 25,29736 \dots$  (см. программу 10.27).

$$F_3 = \int_0^{\infty} e^{-x} \sin(3x+2) dx = \begin{cases} -0,033484911, & L=0,5, \quad t=1,1 \text{ (8,5 мин)}, \\ -0,033904572, & L=0,2, \quad t=1,1 \text{ (12 мин)}. \end{cases}$$

Точное значение  $F_3 = -0,0339143 \dots$  (см. программу 10.25). Подпрограмма  $f(x)$  для интеграла  $F_3$ :

/—/ Fe<sup>x</sup> 2 FBx 3 × — Fsin × В/О

**Программа 10.30.** Вычисление интеграла  $\int_a^{\infty} f(x) dx$  по формулам (10.38), (10.39) с переменным масштабом  $L_N$  (10.41), (10.42) при заданных  $L$ ,  $t$  и числе интервалов  $N$  в формуле (10.39).  $S_N$  рассчитываются по квадратурной формуле Чебышева (10.5), (10.6), (10.8) при  $n = 6$ .

ПД	2	÷	ПВ	0	ПД	6	ПО	КИПО	/—/
ПС	1	+	ИПВ	×	ИПА	+	ПП	45	ИПВ
×	ИПД	+	ПД	ИПС	$F_x \geq 0$	09	FL0	08	ИПА
ИПВ	2	×	+	ПА	ИП9	ИПВ	×	ПВ	FL2
06	ИПД	3	÷	С/П	...	...	...	...	...
...	...	...	...	...	...	В/О	...	...	...

#### Инструкция

- Подпрограмма  $f(x)$ : адрес первой команды 45,  $n_{\max} = 53$ , в конце подпрограммы поставить В/О; регистры свободные: P4, P6 — P8; аргумент  $x$  — в регистре PX, результат:  $PX = f(x)$ .
- Исходные данные: ( $y_1 = 8,6624682 \cdot 10^{-1} = P1$ ,  $y_2 = 4,2251865 \cdot 10^{-1} = P3$ ,  $y_3 = 2,666354 \cdot 10^{-1} = P5$ ,  $t = P9$ ),  $a = PA$ ,  $N = P2$ ,  $[L = PX]$ .
- Пуск: В/О С/П.
- Результат:  $PX = F$ ,  $PA = \mathcal{L}$  ( $\mathcal{L} = L_1 + L_2 + \dots + L_N$  — суммарная длина интегрирования в (10.39)).

#### Примеры

$$F_1 = \int_0^{\infty} e^{-x} \sin(3x+2) dx = \begin{cases} -0,034048246, & L=0,6, t=1,2, N=7 \text{ (8 мин)}, \\ -0,03391464, & L=0,6, t=1,2, N=10 \text{ (11,5 мин)}. \end{cases}$$

Точное значение  $F_1 = -0,0339143 \dots$  (см. программу 10.25).

$$F_2 = \int_0^{\infty} x e^{3x-x^2} dx = \begin{cases} 25,30059, & L=1,7, t=1,1, N=3 \text{ (3 мин)}, \\ 25,29733, & L=0,7, t=1,2, N=5 \text{ (3,5 мин)}. \end{cases}$$

Точное значение  $F_2 = 25,29736 \dots$  (см. программу 10.27).

$$F_3 = \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2} = \begin{cases} 0,9992484, & L=0,7, t=5, N=7 \text{ (5 мин)}, \\ 0,99999393, & L=0,5, t=2,2, N=18 \text{ (12,5 мин)}. \end{cases}$$

Точное значение  $F_3 = 1$ . Подпрограмма  $f(x)$  для последнего примера:

$Fx^2 \quad F1/x \quad В/О$

Судя по приведенным примерам, данная программа по сравнению с программами 10.27—10.29 обеспечивает максимальную скорость сходимости при подходящем выборе  $L$ ,  $t$ ,  $N$ .

## 10.6. Интегралы от функций комплексного переменного

Приводятся программы вычисления следующих интегралов. Интеграл по прямой, соединяющей точки  $a = a_1 + ja_2$  и  $b = b_1 + jb_2$ .

$$F_1 = \int_a^b f(z) dz. \quad (10.44)$$

Интеграл по дуге окружности единичного радиуса:

$$F_2 = \int_c f(z) dz. \quad (10.45)$$

Несобственный интеграл:

$$F_3 = \int_a^{\infty} f(z) dz, \quad (10.46)$$

где  $a = a_1 + ja_2$ ;  $(\operatorname{Re} z)_{z \rightarrow \infty} > 0$ .

Выразим (10.44)—(10.46) через вещественные интегралы. В случае (10.44)

$$z = a_1 + t + j(a_2 + kt), \quad (10.47)$$

где  $t$  — вещественная переменная на отрезке  $[0, b_1 - a_1]$ ;

$$k = (b_2 - a_2)/(b_1 - a_1). \quad (10.48)$$

Тогда

$$F_1 = (1 + jk) \int_0^{b_1 - a_1} f[a_1 + t + j(a_2 + kt)] dt. \quad (10.49)$$

Интеграл  $F_1$  находится как линейная функция двух вещественных интегралов

$$\int_0^{b_1 - a_1} \operatorname{Re} f(z) dt \text{ и } \int_0^{b_1 - a_1} \operatorname{Im} f(z) dt.$$

В программе 10.31 используется формула Гаусса — Чебышева, применяемая при наличии устранимых разрывов  $f(z)$  в точках  $z = a, b$ . Отдельно реализуется случай  $a = 0$ , для которого сокращается длина программы и увеличивается число регистров памяти на программирование  $f(z)$ .

Аналогичен расчет интеграла (10.45). Будем в качестве вещественной переменной использовать полярный угол  $\varphi$ . На единичной окружности  $z = e^{j\varphi}$  и интеграл (10.45) принимает вид

$$F_2 = \int_0^{\varphi_b} j e^{j\varphi} f(e^{j\varphi}) d\varphi = \int_0^{\varphi_b} (-\sin \varphi + j \cos \varphi) f(\cos \varphi + j \sin \varphi) d\varphi \quad (10.50)$$

(для простоты отсчет  $\varphi$  ведется от нуля).

В несобственном интеграле (10.46) в качестве линии интегрирования выбирается полупрямая, идущая из точки  $a$  в  $\infty$  параллельно оси абсцисс. В результате

$$F_3 = \int_0^{\infty} f(a_1 + t + ja_2) dt. \quad (10.51)$$

Процедура вычисления всех таких интегралов (10.49) — (10.51) одинакова: в каждом узле (10.11) квадратурной формулы Гаусса — Чебышева вычисляются действительные и мнимые части подынтегральных функций, которые затем суммируются отдельно, определяя приближенные значения действительных и мнимых

мых частей искомых интегралов. Число узлов  $N$  является задаваемым параметром. При вычислении интеграла (10.51) должна также задаваться граница  $\mathcal{L}$  переменной  $t$  как верхний предел интеграла, которая оценивается из условия достаточной малости  $|f(a_1 + \mathcal{L} + j a_2)|$ .

Несколько отличный способ преобразования комплексных интегралов в вещественные применен при вычислении интегральных показательных функций  $E_n(z)$  (§ 3.1, программа 3.11), интегральных тригонометрических и гиперболических функций комплексного аргумента (§ 3.2, программы 3.18, 3.19) и интегралов Френеля (§ 4.2, программа 4.17). Сравнительная простота подынтегральных функций позволила в этих случаях применить квадратурные формулы Чебышева, ускоряющие сходимость.

Приведенный здесь алгоритм имеет преимущества для более сложных функций  $f(z)$ , когда наибольшее значение имеет число свободных регистров памяти и команд, которые можно использовать для программирования  $f(z)$ .

**Программа 10.31.** Вычисление интеграла  $F_1 = \int_a^b f(z) dz$ ,  $z = x + j y$ ,  $a = a_1 + j a_2$ ,  $b = b_1 + j b_2$ , по формулам (10.48), (10.49) и квадратурной формулы Гаусса — Чебышева (10.14), (10.11),  $b_1 - a_1 \neq 0$ .

÷	П8	КИПО	3	FV	F1/x	/—/	П5	ИПО	+
ИП8	×	ИПА	ХУ	+	П6	FBx	ИПВ	×	ИП9
+	П7	...	...	...	...	...	...	...	...
...	...	БП	57	...	...	...	ИПС	+	ПС
П1	ХУ	ИПД	+	ПД	П2	ИП5	Fx ≥ 0	06	FL0
02	ИПВ	ИП8	×	FBx	ПП	78	С/П	ХУ	FBx
ИП2	×	ХУ	ИП1	ХУ	×	FBx	F,	+	ИП1
ХУ	F,	×	ХУ	ИП2	×	—	В/О		

#### Инструкция

##### 1. Подпрограмма $f(z)$ :

адрес первой команды 22, последней — 56 (при  $n_{\max} = 35$ ), если адрес последней команды подпрограммы меньше 55, то в конце ее поставить БП 57; окончание основной программы начинается с адреса 57; регистры: свободные Р3, Р4; оперативные Р1, Р2, содержимое Р1, Р2 сохраняется только на одном шаге интегрирования; аргумент  $z = x + j y$  к началу подпрограммы:  $y = PX$ , Р7,  $x = PY$ , Р6, результат:  $Re f(z) = PX$ ,  $Im f(z) = PY$ .

При программировании  $f(z)$  можно использовать подпрограмму перемножения комплексных чисел  $\omega_1 + j \omega_2 = (u_1 + j u_2)(v_1 + j v_2)$ . Подпрограмма вызывается командой ПП 78. Перед вызовом  $v_1$  и  $v_2$  заносятся соответственно в регистры Р1, Р2, а  $u_1$ ,  $u_2$  — в РХ, РУ. Результат умножения:  $\omega_1$  — в РХ,  $\omega_2$  — в РУ.

2. Исходные данные: ( $a_1 = PA$ ,  $a_2 = P9$ ,  $k = PB$ ),  $0 = PC = PD$ ,  $|b_1 - a_1| = P1$ ,  $2N = P0$ . Здесь  $k$  определено (10.48).

3. Пуск: В/О С/П.

4. Результат:  $PX = Re F_1$ ,  $PY = Im F_1$ .

Пример.

$$F_1 = \int_{-1-j}^{1+j} z^2 dz = \begin{cases} -66,66667 - j 0,333332, & 2N=2, t=45 \text{ с;} \\ -66,66665 - j 0,333333, & 2N=8, t=2,5 \text{ мин.} \end{cases}$$

Точный результат  $F_1 = -(200 + j)/3$ .

Быстрая сходимость вычислений объясняется в данном случае тем, что квадратура Гаусса — Чебышева точная для многочленов до третьего порядка включительно (ср. (10.9) при  $n = 2$ ). Подпрограмма  $f(z)$ :

П2 ХУ П1 ПП 78 БП 57

**Программа 10.32.** Вычисление интеграла  $F_0 = \int_0^b f(z) dz$ ,  $z = x + j y$ ,  $b = b_1 + j b_2$  ((10.48), (10.49) при  $a_1 = a_2 = 0$  и квадратурная формула Гаусса — Чебышева (10.14), (10.11)),  $b_1 \neq 0$ .

÷	П8	КИПО	3	FV	F1/x	/—/	П5	ИПО	+
ИП8	×	ПЗ	ИПВ	×	П4	...	...	...	...
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
...	...	БП	57	...	...	...	ИПС	+	ПС
П9	ХУ	ИПД	+	ПД	ПА	ИП5	Fx ≥ 0	06	FL0
02	ИПВ	ИП8	×	FBx	ПП	78	С/П	ХУ	FBx
ИПА	×	ХУ	ИП9	ХУ	×	FBx	F,	+	ИП9
ХУ	F,	×	ХУ	ИПА	×	—	В/О		

#### Инструкция

##### 1. Подпрограмма $f(z)$ :

адрес первой команды 16, последней — 56 (при  $n_{\max} = 41$ ), если адрес последней команды меньше 55, то в конце подпрограммы поставить БП 57; окончание основной программы начинается с адреса 57 (команда ИПС); регистры: свободные Р1, Р2, Р6, Р7; оперативные Р9, РА; содержимое Р9, РА сохраняется только на одном шаге интегрирования; аргумент  $z = x + j y$  к началу подпрограммы:  $y = PX$ , Р4,  $x = P3$ , результат:  $Re f(z) = PX$ ,  $Im f(z) = PY$ .

При программировании  $f(z)$  можно использовать подпрограмму перемножения комплексных чисел:  $\omega_1 + j \omega_2 = (u_1 + j u_2)(v_1 + j v_2)$ . Подпрограмма вызывается командой ПП 78. Перед вызовом  $v_1$  и  $v_2$  заносятся соответственно в регистры Р9, РА, а  $u_1$  и  $u_2$  — соответственно в РХ, РУ. Результат умножения:  $\omega_1$  — в РХ,  $\omega_2$  — в РУ.

2. Исходные данные: ( $k = b_2/b_1 = PB$ ),  $0 = PC = PD$ ,  $|b_1| = P9$ ,  $2N = P0$ .

3. Пуск: В/О С/П.

4. Результат:  $PX = Re F_0$ ,  $PY = Im F_0$ .

Пример.

$$F_0 = \int_0^{3+j5} \cos^2 z dz = \begin{cases} -770,516 + j 2646,8301, & 2N=16, t=7 \text{ мин,} \\ -767,9873 + j 2646,1953, & 2N=32, t=13 \text{ мин,} \\ -767,827 + j 2646,1473, & 2N=64, t=26 \text{ мин.} \end{cases}$$

Точное значение  $F_0 = 0,5(z + 0,5 \sin 2z)_{z=3+j5} = -767,817 \dots + j 2646,1447$ .

Подпрограмма  $f(z) = \cos^2 z$ :

Fe <sup>x</sup>	F1/x	FBx	П9	+	2	÷	↑	ИП9	—
ИПЗ	Fsin	×	ПА	ХУ	ИПЗ	Fcos	×	П9	ПП
78*	БП	57							

Здесь за основу взята программа 1.41 для  $\cos$  и используется подпрограмма перемножения (ПП 78).

**Программа 10.33.** Вычисление интеграла  $F_2 = \int f(z) dz$  по дуге окружности единичного радиуса  $z = x + jy = e^{j\varphi}$ , где  $\varphi$  изменяется от 0 до  $\varphi_b$ , по формуле (10.50) и квадратурной формуле Гаусса — Чебышева (10.14), (10.11).

÷	П8	КИПО	3	Fy <sup>-</sup>	F1/x	/—/	ПВ	ИПО	+
ИП8	×	F sin	П4	FBx	F cos	ПЗ	...	...	...
...	...	...	...	...	...	БП	53	...	...
...	...	...	П9	XY	ПА	ИПЗ	ИП8	×	ИП4
ИП8	×	/—/	ПП	78	ИПС	+	ПС	XY	ИПД
+	ПД	ИПВ	Fx ≥ 0	06	FL0	02	С/П	XY	FBx
ИПА	×	XY	ИП9	XY	×	FBx	F,	+	ИП9
XY	F,	×	XY	ИПА	×	—	В/О		

#### Инструкция

##### 1. Подпрограмма $f(z)$ :

адрес первой команды 17, последней 52 (при  $n_{\max} = 36$ ), если адрес последней команды подпрограммы меньше 51, то в конце ее поставить БП 53, окончание основной программы начинается с адреса 53 (команда П9);

регистры: свободные P1, P2, P5—P7, оперативные P9, PA, содержимое P9, PA сохраняется только на одном шаге интегрирования;

аргумент  $z = x + jy$  к началу подпрограммы:  $x = PX$ ,  $P3$ ,  $y = PY$ , P4, результат:  $\operatorname{Re} f(z) = PX$ ,  $\operatorname{Im} f(z) = PY$ .

При программировании  $f(z)$  можно использовать подпрограмму перемножения комплексных чисел  $\omega_1 + \omega_2 = (u_1 + u_2)(v_1 + jv_2)$ . Подпрограмма вызывается командой ПП 78. Перед вызовом  $v_1$  и  $v_2$  заносятся соответственно в регистры P9, PA, а  $u_1$  и  $u_2$  — в PX, PY. Результат умножения:  $\omega_1$  — в PX,  $\omega_2$  — в PY.

2. Исходные данные:  $0 = PC = PD$ ,  $[\varphi_b = P9, 2N = P0]$ .

3. Пуск: В/О С/П.

4. Результат:  $PC = \operatorname{Re} F_2$ ,  $PD = \operatorname{Im} F_2$ .

Пример.

$$F_2 = \oint \frac{dz}{z-1/2} = \begin{cases} -1,7 \cdot 10^{-7} + j 6,2890054, & 2N = 16, t = 6,5 \text{ мин}, \\ 4 \cdot 10^{-8} + j 6,2832072, & 2N = 32, t = 13,5 \text{ мин}, \\ 3,02 \cdot 10^{-7} + j 6,2831856, & 2N = 64, t = 27 \text{ мин}. \end{cases}$$

Точный результат равен по теореме о вычетах  $F_2 = j 2\pi = 0 + j 6,2831852$ . Подпрограмма  $f(z)$ :

2	F1/x	—	П1	XY	/—/	↑	Fx <sup>2</sup>	ИП1	Fx <sup>2</sup>
+	÷		ИП1	FBx	÷	БП	53		

**Программа 10.34.** Вычисление интеграла  $F_3 = \int_a^\infty f(z) dz$ ,  $z = x + jy$ ,

$a = a_1 + ja_2$ . Интегрирование ведется по полупрямой  $y = a_2$  от  $x = a_1$  до  $+\infty$ . Формула (10.51) и квадратурная формула Гаусса — Чебышева (10.14), (10.11) при заданных числе  $N$  шагов интегрирования и верхнем пределе  $\mathcal{L}$  в интеграле (10.51).

÷	ПВ	0	ПС	ПД	КИПО	3	Fy <sup>-</sup>	F1/x	/—/
П9	ИПО	+	ИПВ	×	ИПА	+	ПЗ	ПП	39
ИПС	+	ПС	XY	ИПД	+	ПД	ИП9	Fx ≥ 0	09
FL0	05	F,	ИПВ	×	XY	ИПВ	×	С/П	...
...	...	...	...	...	...	В/О			

#### Инструкция

##### 1. Подпрограмма $f(z)$ :

адрес первой команды 39,  $n_{\max} = 59$ , в конце подпрограммы поставить В/О;

регистры свободные: P1, P2, P5 — P8;

аргумент  $z = x + jy$  к началу подпрограммы:  $x = PX$ ,  $P3$ ,  $y = PY$ ;

результат:  $\operatorname{Re} f(z) = PX$ ,  $\operatorname{Im} f(z) = PY$ .

2. Исходные данные: ( $a_1 = PA$ ,  $a_2 = P4$ ),  $[\mathcal{L} = P9, 2N = P0]$ .

3. Пуск: В/О С/П.

4. Результат:  $PX = \operatorname{Re} F_3$ ,  $PY = \operatorname{Im} F_3$ .

Пример.

$$F_3 = \int_{2+j}^{\infty} e^{-z} dz = \begin{cases} 0,067546365 - j 0,10519723, & \mathcal{L} = 20, 2N = 8, t = 2 \text{ мин}, \\ 0,073082612 - j 0,11381943, & \mathcal{L} = 20, 2N = 32, t = 8 \text{ мин}. \end{cases}$$

Точный результат:  $F_3 = e^{-(2+j)} = 0,073121969 - j 0,11388073$ . Подпрограмма  $f(z) = e^{-z}$ :

Fe <sup>x</sup>	F1/x	ИП4	/—/	F sin	XY	×	FBx	ИП4	Fcos
×							В/О		

#### Указатель программ

Номер программы	Метод	Порядок погрешности	Максимальное число шагов в подпрограмме	Число свободных регистров памяти	Коррекция точности	Примечание
10.1	Трапеций	2	69	10	N	Дробление шага сохраняет предыдущие узлы
10.2	Трапеций	2	46	6	e	
10.3	Прямоугольников	2	74	10	N	
10.4	Прямоугольников	2	52	6	e	Отдельный расчет $f(a)$ или $f(b)$
10.5	Симпсона	4	63	10	N	
10.6	Симпсона	4	67	10	N	
10.7	Симпсона	4	76	9	N	Отдельный расчет $f(a) + f(b)$ и домножение результата на $h/3$
10.8	Симпсона	4	38	5	e	Дробление шага сохраняет предыдущие узлы
10.9	Гаусса	19	64	—	—	
10.10	Гаусса	15, 11, 7	63	1, 3, 5	—	
10.11	Гаусса	11, 7	58	2, 4	N	
10.12	Чебышева	7, 5	63	5, 6	N	

Номер программы	Метод	Порядок погрешности	Максимальное число шагов в подпрограмме	Число свободных регистров памяти	Коррекция точности	Примечание
10.13	Чебышева	7, 5	67	7, 6	N	Нулевой нижний предел
10.14	Гаусса—Чебышева	4	68	9	N	
10.15	Гаусса—Чебышева	4	47	5	8	
10.16	Чебышева	7	44	1	N	Двухшаговый вариант с выбором промежуточной точки
10.17	Гаусса—Чебышева	4	49	5	N	То же
10.18	Чебышева	7	36	2	N	Двухшаговый вариант

Номер программы	Интеграл	Метод	Максимальное число шагов в подпрограмме	Число свободных регистров памяти	Коррекция точности
10.19	$F(m, n) = \int_a^b \frac{\varphi(x) dx}{(x-a)^m (b-x)^n}$	Прямое интегрирование по составной формуле Чебышева	33	1	Изменение числа частных интервалов
10.20	$F(m, n)$	Формула Симпсона с выделением особенностей на концах промежутка	20	4	Изменение числа шагов интегрирования
10.21	$F(m, 1/2)$ или $F(1/2, n)$	То же	25	6	То же
10.22	$F(1/2, 1/2)$	Преобразование интеграла и составная формула Гаусса—Чебышева	57	7	Изменение числа частных интервалов
10.23	$F(m, 0)$ или $F(0, n)$	Формула Симпсона с выделением особенностей на концах промежутка	25	6	Изменение числа шагов интегрирования
10.24	$F_{ГЛ} = VP \int_a^b \frac{\varphi(x) dx}{x-c}$	Модифицированная формула Симпсона	30	6	То же

Номер программы	Интеграл	Метод	Максимальное число шагов в подпрограмме	Число свободных регистров памяти	Коррекция точности
10.25	$F_1 = \int_a^\infty e^{-x} \varphi(x) dx$	Формула Лагерра	74	3	—
10.26	$F_2 \equiv \int_{-\infty}^\infty e^{-x^2} \times \varphi(x) dx$	Формула Эрмита	70	2 при $n=8$ , 4 при $n=6$	Переход от $n=6$ к $n=8$
10.27	$F_a = \int_a^\infty f_x(dx)$	Последовательность частных интервалов и квадратура Гаусса—Чебышева	59	8	Изменение длины $L$ частных интервалов
10.28	$F_a$	Последовательность частных интервалов и квадратура Чебышева	52	5	То же
10.29	$F_a$	Последовательность частных интервалов переменной длины и квадратура Гаусса—Чебышева	47	6	Изменение начальной длины частных интервалов и масштаба растяжения
10.30	$F_a$	Задание числа частных интервалов переменной длины и квадратура Чебышева	53	4	Изменение числа интервалов, их начальной длины и масштаба растяжения
10.31	$F_1 = \int_a^b f(z) dz$	Сведение интеграла к вещественному и квадратура Гаусса—Чебышева	35	4	Изменение числа частных интервалов
10.32	$F_0 = (F_1)_{a=0}$	То же	41	6	То же
10.33	$F_2 = \int_c^\infty f(z) dz$	—»—	36	7	»
10.34	$F_3 = \int_a^\infty f(z) dz$	Интегрирование по полупрямой, идущей параллельно оси $x$ от начальной точки в $\infty$ и квадратура Гаусса—Чебышева	59	6	Изменение числа частных интервалов

## Приложение 1

### Интерполяция функций по Лагранжу

Приводятся две программы вычисления функций  $F(x)$  по интерполяционным формулам Лагранжа для равноотстоящих узлов:

$$h^{n-1} F(x) = \frac{(x-x_2)(x-x_3)\dots(x-x_n)}{(-1)(-2)\dots[-(n-1)]} F_1 + \frac{(x-x_1)(x-x_3)\dots(x-x_n)}{1 \cdot (-1)(-2)\dots[-(n-2)]} F_2 + \dots + \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_4)\dots(x-x_n)}{1 \cdot 2 \cdot (-1)(-2)\dots[-(n-3)]} F_3 + \dots + \frac{(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_{n-1})}{1 \cdot 2 \dots (n-1)} F_n. \quad (\text{П1.1})$$

Здесь  $F_k = F(x_k)$  — задаваемые значения функций в узлах интерполяции  $x = x_k$ ;  $h = x_{k+1} - x_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, n-1$ .

В программе П1.1 число узлов фиксировано и равно 10. Программа П1.2 рассчитана на работу с числом узлов  $2 \leq n \leq 9$ . Перед началом вычислений в память ПМК вводятся значения  $F_k$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ), а также абсцисса первого узла  $x_1$  и шаг  $h$ . При повторении вычислений с разными  $x$  вводятся вновь только  $x$ , а также  $x_1$  и  $h$ . Значения  $F_k$  сохраняются в соответствующих регистрах памяти. По окончании счета выдаются интерполированные значения  $F(x)$ .

Время счета примерно пропорционально  $n^2$ . Для  $n = 10$  время счета одного значения  $F(x)$  около 9 мин.

**Программа П1.1.** Вычисление функции  $F(x)$  по интерполяционной формуле Лагранжа (П1.1) при числе узлов  $n = 10$ .

↑	1	4	ПЗ	F,	БП	08	С/П	КПЗ	БП
07	ИПО	—	ИП1	÷	П2	1	0	ПО	0
П1	1	0	ПЗ	1	ИП2	1	0	—	ИПЗ
+	ИПЗ	ИПО	—	Fx ≠ 0	41	F1/x	×	×	БП
43	F,	F,	FL3	25	4	ИПО	+	ПЗ	F,
КИПЗ	×	ИП1	+	П1	FL0	21	С/П		

#### Инструкция

1. Ввод значений функций в узлах  $F_k = F(x_k)$  ( $k = 1, 2, \dots, 10$ ):

$F_1$  В/О С/П,  $F_2$  С/П,  $F_3$  С/П, ...,  $F_9$  С/П,  $F_{10}$  С/П.

Введенные значения  $F_k$  располагаются в следующих регистрах памяти:  $F_1 = \text{РД}$ ,  $F_2 = \text{РС}$ ,  $F_3 = \text{РВ}$ , ...,  $F_9 = \text{Р5}$ ,  $F_{10} = \text{Р4}$  — и не изменяются при повторении вычислений с разными  $x$ .

2. Ввод оперативных данных (повторяется при каждом  $x$ ):  $x_1 = \text{Р0}$ ,  $h = \text{Р1}$ ,  $[x = \text{РХ}]$ .

3. Пуск: БП 11 С/П.

4. Результат: РХ =  $F(x)$ .

5. Регистры: рабочие Р4 — РД; оперативные Р0 — РЗ; свободных нет.

**Пример.** Вычисление  $F(x) = \sin x$  по известным значениям  $\sin x$  в точках  $x_k = (k-1) 30^\circ$ ,  $k = 1, 2, \dots, 10$ :

$F_1 = \sin 0 = 0$ ,  $F_2 = \sin 30^\circ = 0,5$ ,  $F_3 = \sin 60^\circ = \sqrt{3}/2$ , ...,  $F_9 = \sin 240^\circ = -\sqrt{3}/2$ ,  $F_{10} = \sin 270^\circ = -1$ .

Результаты интерполяции:

$\sin 45^\circ = 0,7071084$  (0,707106781 [9]);  $\sin 112^\circ = 0,92718409$  (0,92718389);

$\sin 135^\circ = 0,70710656$  (0,707106781 [9]);  $\sin 220^\circ = -0,64278633$  (-0,64278765),

Для второго и последнего примеров значения в скобках получены по стандартной команде Fsin. Как видно, в средней части интервала интерполяции ( $0-270^\circ$ ) погрешность  $\delta \approx 1 \cdot 10^{-7}$ , а на краях  $\delta \approx 1 \cdot 10^{-6}$ .

**Программа П1.2.** Вычисление функции  $F(x)$  по интерполяционной формуле Лагранжа (П1.1) при заданном числе узлов  $2 \leq n \leq 9$ .

↑	1	4	ПЗ	F,	БП	08	С/П	КПЗ	БП
07	ИПО	—	ИП1	÷	П2	0	П1	ИПД	ПО
ИПД	ПЗ	1	ИП2	ИПД	—	ИПЗ	+	ИПЗ	ИПО
—	Fx ≠ 0	38	F1/x	×	×	БП	40	F,	F,
FL3	23	1	3	ИПО	+	ИПД	—	ПЗ	F,
КИПЗ	×	ИП1	+	П1	FL0	20	С/П		

#### Инструкция

1. Ввод порядка интерполяции  $n$  и значений функций в узлах  $F_k = F(x_k)$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ );  $n$  В/О С/П,  $F_1$  С/П,  $F_2$  С/П, ...,  $F_n$  С/П. Введенные значения располагаются в следующих регистрах памяти:  $n = \text{РД}$ ,  $F_1 = \text{РС}$ ,  $F_2 = \text{РВ}$ , ...,  $F_n = \text{Р}$  (13 —  $n$ ) (номера 10, 11, 12, 13 присваиваются регистрам РА — РД соответственно). Значения  $n$ ,  $F_k$  сохраняются в регистрах памяти при повторении вычислений с разными  $x$ .

2. Ввод оперативных данных (повторяется при каждом  $x$ ):  $x_1 = \text{Р0}$ ,  $h = \text{Р1}$ ,  $[x = \text{РХ}]$ .

3. Пуск: БП 11 С/П.

4. Результат: РХ =  $F(x)$ .

5. Регистры: рабочие РД, РС, ..., Р (13 —  $n$ ); оперативные Р0 — РЗ; свободные Р4 — Р (12 —  $n$ ). При  $n = 9$  свободных регистров нет.

6. Время счета  $t \approx (0,3 + n^2/12)$  мин.

**Примеры.** Расчет  $\sin 15^\circ$  при разных  $n$ . Выбираем узлы интерполяции:  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = 30^\circ$ ,  $x_3 = 60^\circ$ , ... ( $x_1 = 0$ ,  $h = 30^\circ$ ). При  $n = 2$  вводим значения  $F_1 = 0$  и  $F_2 = 0,5$ ; при  $n = 4$  добавляем к ним  $F_3 = \sqrt{3}/2$ ,  $F_4 = 1$ ; при  $n = 6$  вводятся шесть значений  $F_k$ :  $F_1 = 0$ ,  $F_2 = 0,5$ ,  $F_3 = \sqrt{3}/2$ ,  $F_4 = 1$ ,  $F_5 = \sqrt{3}/2$ ,  $F_6 = 0,5$  и т. д.

Результаты интерполяции  $\sin 15^\circ$ :

0,25,  $n = 2$ ,  $t = 30$  с; 0,26061706,  $n = 4$ ,  $t = 1$  мин 40 с;

0,25845124,  $n = 6$ ,  $t = 3,5$  мин; 0,25888729,  $n = 8$ ,  $t = 5$  мин 40 с;

0,25882894,  $n = 9$ ,  $t = 7$  мин.

Точное значение  $\sin 15^\circ = 0,25881903 \dots$

## Приложение 2

### Интеграл вероятностей

$$w(z) = e^{-z^2} \left( 1 + \frac{2j}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{t^2} dt \right)$$

Приводятся программы вычисления значений функций  $w(z)$ , охватывающих в совокупности первый квадрант плоскости комплексного переменного  $z = x + jy$ . Значения  $w(z)$  в полной плоскости  $z$  находятся с помощью формул приведения (4.27), (4.27) функции  $\operatorname{erfc} z$ , связанной с  $w(z)$  соотношением

$$\operatorname{erfc}(z) = e^{-z^2} \operatorname{erfc}(-jz) = e^{u^2} \operatorname{erfc} u, \quad u = y - jx. \quad (\text{П2.1})$$

Из (П2.1), а также из соотношений гл. 4 для  $\operatorname{erfc} z$  и  $\operatorname{erf} z$  вытекают следующие формулы для  $w(z)$ :

разложение в ряд (4.11) по схеме Горнера (4.14) и (4.2)

$$w(z) = \sqrt{\frac{4}{\pi}} e^{u^2} \left\{ \sqrt{\frac{\pi}{4}} - u \left[ \dots \left[ \left( \frac{-u^2}{N(2N+1)} + \frac{1}{2N-1} \right) \frac{-u^2}{N-1} + \frac{1}{2N-3} \right] \frac{-u^2}{N-2} + \dots + \frac{1}{3} \right] \frac{-u^2}{1} + 1 \right\}, \quad u = y - jx, \quad N = 12 + |z|^2; \quad (\text{П2.2})$$

разложение в непрерывную дробь (4.19), (4.20)

$$w(z) = 1 / [\sqrt{\pi} A_1(u)], \quad u = y - jx, \quad (\text{П2.3})$$

где  $A_1(u)$  определяется по рекуррентной формуле (4.21) и формуле (4.23в) при  $N = 27$ ;

разложение в асимптотический ряд

$$w(z) = \frac{j}{z \sqrt{\pi}} \left[ \dots \left[ \left( \frac{2N-1}{2z^2} + 1 \right) \frac{2N-3}{2z^2} + 1 \right] \frac{2N-5}{2z^2} + \dots \dots + 1 \right] \frac{1}{2z^2} + 1, \quad N = 9. \quad (\text{П2.4})$$

Практически для получения  $w(z)$  в первом квадранте с относительной погрешностью, не превышающей  $1 \cdot 10^{-6}$ , достаточно (П2.2) и (П2.3). Однако асимптотическое разложение обеспечивает по сравнению с (П2.2), (П2.3) минимальное время счета без снижения точности (при  $|z| \geq 4$ ). Формула (П2.2) в целом применима при малых  $|z|$  (см. инструкцию к программе П2.1), но в окрестности действительной оси ( $\operatorname{Im} z \leq 1$ ) эта формула обеспечивает точность порядка  $10^{-6}$  вплоть до  $|z| = 4,5$  и дальше. Это весьма существенно, так как разложение в непрерывную дробь (П2.3), применяемое в общем как при больших, так и при малых  $|z|$ , теряет точность в окрестности действительной оси при  $|z| < 4$ .

**Программа П2.1.** Интеграл вероятности  $w(z)$ . Разложение в ряд по схеме Горнера (П2.2).

П6	ПА	ХУ	/—/	П7	ПВ	ХУ	ПП	80	/—/
ПА	/—/	Fe <sup>x</sup>	1	Farctg	Fv	П5	÷	ХУ	/—/
ПВ	/—/	Fsin	ХУ	×	П9	FBx	ИПВ	Fcos	×
П8	1	2	ИП6	Fx <sup>2</sup>	ИП7	Fx <sup>2</sup>	+	2	×
+	ПО	0	Fπ	ИП0	÷	ХУ	ИП0	÷	ХУ
ПП	80	ИП0	2	×	1	—	F1/x	+	FL0
44	ПА	ХУ	ПВ	ИП7	ИП6	ПП	80	/—/	ИП5
+	ПА	ХУ	/—/	ПВ	ИП9	ИП8	ПП	80	С/П
ПС	ИПВ	×	ХУ	ПД	ИПА	×	+	ИПС	ИПА
×	ИПД	ИПВ	×	—	В/О				

#### Инструкция

1. Исходные данные:  $[x = PX, \uparrow, y = PX]$ .
2. Пуск: В/О С/П.
3. Результат:  $PX = \operatorname{Re} w(z)$ ,  $PY = \operatorname{Im} w(z)$ .
4. Регистры: рабочие —; оперативные P0, P5 — РД; свободные P1—P4.

5. Погрешность относительная меньше  $2 \cdot 10^{-6}$  при  $|z| \leq 1,4$  или при  $|z| \leq 4,5$ ,  $\operatorname{Im} z \geq 1$ .

6. Время счета  $t \approx (2,5 + 0,4 |z|^2)$  мин.

#### Примеры.

$w(4 + j) = 0,03628121 + j 0,13583874$  ( $0,036281 + j 0,135839$ ),  $t = 9$  мин;  
 $w(1 + j) = 0,3047443 + j 0,20821892$  ( $0,304744 + j 0,208219$ ),  $t = 3,5$  мин.

**Программа П2.2.** Интеграл вероятности  $w(z)$ . Разложение в непрерывную дробь (П2.3), (4.19) — (4.21), (4.23в).

ПС	ХУ	/—/	ПВ	2	7	ПО	2	÷	Fv
ИПС	2	÷	+	ПД	ИПВ	2	÷	ПП	37
ИПС	+	ПД	ХУ	ИПВ	+	FL0	18	1	Farctg
Fv	F1/x	ПО	F	ПП	37	С/П	/—/	↑	Fx <sup>2</sup>
ИПД	Fx <sup>2</sup>	+	ИПО	2	÷	÷	÷	ИПД	FBx
									÷ В/О

#### Инструкция

1. Исходные данные:  $[x = PX, \uparrow, y = PX]$ .
2. Пуск: В/О С/П.
3. Результат:  $PX = \operatorname{Re} w(z)$ ,  $PY = \operatorname{Im} w(z)$ .
4. Регистры: рабочие —; оперативные P0, PV — РД; свободные P1—PA.
5. Погрешность относительная меньше  $1 \cdot 10^{-6}$  при  $\operatorname{Im} z \geq 0,9$ ,  $\operatorname{Re} z \geq 0$  и при  $\operatorname{Im} z \geq 0$ ,  $|z| \geq 3,5$ .
6. Время счета:  $t \approx 4,5$  мин.

#### Примеры.

$w(3,5 + j 0,1) = 5,3400187 \cdot 10^{-3} + j 0,168 64518$  ( $0,005340 + j 0,168645$ );  
 $w(1,2 + j) = 0,26618923 + j 0,22416770$  ( $0,266189 + j 0,224168$ ).

Числа в скобках — табличные данные из [25].

**Программа П2.3.** Интеграл вероятности  $w(z)$ . Разложение в асимптотический ряд (П2.3).

/—/	П7	ХУ	↑	Fx <sup>2</sup>	ИП7	Fx <sup>2</sup>	÷	÷	ПА
ИП7	FBx	÷	ПВ	Fπ	Fv	F1/x	×	/—/	П8
ИПА	FBx	×	П9	ИПВ	ИПА	ПП	58	ПА	ХУ
ПВ	9	ПО	0	П7	ИПО	2	F1/x	—	×
FBx	ИП7	×	ХУ	ПП	58	1	+	FL0	35
ПА	ХУ	ПВ	ИП9	ИП8	ПП	58	С/П	ПС	ИПВ
×	ХУ	ПД	ИПА	×	+	П7	ИПА	ИПС	×
ИПВ	ИПД	×	—	В/О					

#### Инструкция

1. Исходные данные:  $[x = PX, \uparrow, y = PX]$ .
2. Пуск: В/О С/П.
3. Результат:  $PX = \operatorname{Re} w(z)$ ,  $PY = \operatorname{Im} w(z)$ .
4. Регистры: рабочие —; оперативные P0, P7 — РД; свободные P1 — P6.
5. Погрешность: относительная меньше  $1 \cdot 10^{-6}$  при  $|z| \geq 4,5$ .
6. Время счета  $t \approx 2$  мин.

#### Примеры.

$w(3 + j4) = 0,090933903 + j 0,065592327$  ( $0,090934 + j 0,065592$ ).

$w(0 + j4) = 0,33874315 + j 0$  ( $0,338744 + j 0$ );

$w(0 + j 4,5) = 0,12248482 + j 0$  ( $0,122485 + j 0$ ).

Числа в скобках — табличные данные из [25].

## Список литературы

1. Трохименко Я. К., Любич Ф. Д. Радиотехнические расчеты на микрокалькуляторах. — М.: Радио и связь, 1983. — 256 с.
2. Цветков А. Н., Епанечников В. А. Прикладные программы для микроЭВМ «Электроника БЗ-34», «Электроника МК-56», «Электроника МК-54» — М.: Финансы и статистика, 1984. — 175 с.
3. Трохименко Я. К., Любич Ф. Д. Инженерные расчеты на программируемых микрокалькуляторах. — Киев: Техника, 1985. — 324 с.
4. Цимриг Ш. Е. Специальные функции. Программы для микрокалькулятора «Электроника БЗ-21» — М.: Радио и связь, 1983. — 120 с.
5. Бейтмен Г. и Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. — В 3-х т. — М.: Наука, 1968.
6. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. — 4-е изд. — М.: Физматгиз, 1963. — 1100 с.
7. Янке Е., Эмде Ф., Лёш Ф. Специальные функции. — 2-е изд./Пер. с нем. под ред. Л. И. Седова. — М.: Наука, 1977. — 344 с.
8. Корн Г., Кори Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров: Пер. с англ./Под ред. И. Г. Арамановича. — М.: Наука, 1973.
9. Справочник по специальным функциям/Под ред. М. Абрамовица и И. Стиган; Пер. с англ. под ред. В. А. Диткина и Л. Н. Кармазиной. — М.: Наука, 1979. — 832 с.
10. Люк Ю. Специальные математические функции и их аппроксимации: Пер. с англ./Под ред. К. И. Бабенко. — М.: Мир, 1980. — 608 с.
11. Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И. Интегралы и ряды. Специальные функции. — М.: Наука, 1983. — 752 с.
12. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. — 4-е изд. — М.: Наука, 1973. — 736 с.
13. Микрокалькулятор «Электроника БЗ-34»: Руководство по эксплуатации. — Светловодск, 1980. — 156 с.
14. Таблицы функций Бесселя целого положительного индекса/ВЦ АН СССР. — М., 1960. — (Большие математические таблицы. Вып. 12).
15. Дьяконов В. П. Справочник по расчетам на микрокалькуляторах. — М.: Наука, 1985. — 224 с.
16. Справочник по волновым: Пер. с англ./Под ред. Я. Н. Фельда. — М.: Сов. радио, 1952. — 431 с.
17. Кратцер А., Франц В. Трансцендентные функции. — М.: ИЛ, 1964. — 466 с.
18. Форсайт Дж., Малкольм М., Коулер К. Машинные методы математических вычислений: Пер. с англ. — М.: Мир, 1980. — 210 с.
19. Бахвалов Н. С. Численные методы. Т. 1. — М.: Наука, 1975. — 625 с.
20. Хемминг В. Р. Численные методы. — 2-е изд. Пер. с англ./Под ред. Р. С. Гутера. — М.: Наука, 1972. — 400 с.
21. Калиткин Н. Н. Численные методы. — М.: Наука, 1978. — 512 с.
22. Копченова Н. В., Марон И. А. Вычислительная математика в примерах и задачах. — М.: Наука, 1972. — 369 с.
23. Мак-Кракен Д., Дорн У. Численные методы и программирование на Фортране. — 2-е изд.: Пер. с англ./Под ред. Б. М. Наймарка. — М.: Мир, 1977.
24. Таблицы для вычисления функций Матвея: собственные значения, коэффициенты и множители связи. — М.: ВЦ АН СССР. — 1967. — (Большие математические таблицы. Вып. 42).
25. Раддеева В. Н., Терентьев Н. М. Таблицы значений интеграла вероятностей от комплексного аргумента. — М.: ГИТТЛ, 1954. — 268 с.

## Оглавление

Предисловие . . . . .	3
Введение . . . . .	5
<b>Глава 1. Арифметические действия над комплексными числами. Рациональные, алгебраические и элементарные трансцендентные функции</b> . . . . .	9
1.1. Арифметические действия над комплексными числами . . . . .	9
1.2. Многочлены вещественного и комплексного аргументов. Целая степень комплексного числа . . . . .	13
1.3. Многочлены по обратным степеням вещественного и комплексного аргументов . . . . .	18
1.4. Показательная, логарифмическая и степенная функции комплексного аргумента . . . . .	23
1.5. Тригонометрические и гиперболические функции комплексного аргумента. Гиперболические функции вещественного аргумента . . . . .	26
1.6. Обратные тригонометрические и гиперболические функции комплексного аргумента. Обратные гиперболические функции вещественного аргумента . . . . .	30
Указатель программ . . . . .	33
<b>Глава 2. Гамма-функция вещественного и комплексного аргументов и родственные ей функции</b> . . . . .	35
2.1. Гамма-функция и логарифм гамма-функции. Факториал . . . . .	35
2.2. Обратная величина гамма-функции. Отношение гамма-функций различных аргументов. Бета-функция . . . . .	40
2.3. Логарифмическая производная гамма-функции и полигамма-функции . . . . .	43
2.4. Неполные гамма-функции . . . . .	47
Указатель программ . . . . .	59
<b>Глава 3. Интегральная показательная функция вещественного и комплексного аргументов и родственные ей функции</b> . . . . .	61
3.1. Интегральные показательные функции различного порядка. Интегральный логарифм . . . . .	61
3.2. Интегральные синус и косинус. Интегральные гиперболические синус и косинус . . . . .	73
Указатель программ . . . . .	80
<b>Глава 4. Интеграл вероятности вещественного и комплексного аргументов и родственные ему функции</b> . . . . .	81
4.1. Интеграл вероятности и его производная. Дополнительный интеграл вероятности. Кратные интегралы вероятности. Интеграл Досона . . . . .	81
4.2. Интегралы Френеля. Обобщенные интегралы Френеля . . . . .	94
Указатель программ . . . . .	102
<b>Глава 5. Функции Бесселя вещественного и комплексного аргументов и родственные им функции</b> . . . . .	103
5.1. Определения и основные расчетные соотношения . . . . .	103
5.2. Функции Бесселя, Неймана, Ханкеля, модифицированные функции Бесселя, функции Макдональда и Кельвина целого порядка . . . . .	109
5.3. Функции Бесселя, Неймана, Ханкеля, модифицированные функции Бесселя, функции Макдональда дробного порядка. Сферические функции Бесселя . . . . .	116
5.4. Функции Эйри. Нули функций Эйри и их производных. Значения функций Эйри и их производных в нулях производных и функций . . . . .	124
5.5. Нули функций Бесселя и их производных. Функции Бесселя в нулях производных и производные функции Бесселя в нулях функций . . . . .	



	Нули комбинаций из произведений функций Бесселя первого и второго рода и их производных . . . . .	131
1.	Указатель программ . . . . .	142

## Глава 6. Гипергеометрические и вырожденные гипергеометрические функции вещественного и комплексного аргументов . . . . . 144

3.	6.1. Гипергеометрический ряд и его аналитические продолжения. Функции Лежандра (сферические функции) как частный случай гипергеометрических функций . . . . .	144
4.	6.2. Вырожденные гипергеометрические функции (функция Куммера и функция второго типа). Функция параболического цилиндра как частный случай вырожденных гипергеометрических функций . . . . .	152
5.	Указатель программ . . . . .	162

## Глава 7. Эллиптические интегралы. Эллиптические функции вещественного и комплексного аргументов. Тета-функции . . . . . 164

7.	7.1. Эллиптические интегралы. Параметр Якоби. Дзета-функция Якоби . . . . .	164
8.	7.2. Эллиптические функции Якоби. Тета-функции . . . . .	173
	Указатель программ . . . . .	184

## Глава 8. Ортогональные многочлены вещественного и комплексного аргументов . . . . . 185

10.	8.1. Многочлены Чебышева первого и второго рода и их производные. Нули многочленов . . . . .	185
11.	8.2. Суммирование рядов по многочленам Чебышева. Разложение степенной функции по многочленам Чебышева. Экономизация степенных рядов . . . . .	188
12.	8.3. Многочлены Лежандра и функции Лежандра целого порядка. Производные и нули многочленов Лежандра. Коэффициенты квадратуры формулы Гаусса . . . . .	196
13.	8.4. Многочлены Эрмита. Функции параболического цилиндра целого порядка. Обобщенные многочлены Лагерра . . . . .	202
14.	Указатель программ . . . . .	206
15.		208

## Глава 9. Функции Матье . . . . . 208

16.	9.1. Определения, расчетные соотношения . . . . .	208
17.	9.2. Вычисление собственных значений функций Матье . . . . .	211
18.	9.3. Разложение функций Матье в тригонометрические ряды . . . . .	217
	Указатель программ . . . . .	222

## Глава 10. Вычисление определенных интегралов . . . . . 223

19.	10.1. Вводные замечания . . . . .	223
20.	10.2. Интегрирование по формулам трапеций, прямоугольников и парабол (формула Симпсона) при заданном числе шагов или заданной точности . . . . .	225
21.	10.3. Квадратуры Гаусса и Чебышева. Вычисление интегралов по составным формулам Гаусса и Чебышева с заданным числом интервалов или заданной точностью. Квадратуры с переменным шагом . . . . .	232
22.	10.4. Несобственные интегралы от неограниченных функций с алгебраической особенностью. Главное значение интеграла по Коши . . . . .	244
23.	10.5. Несобственные интегралы с бесконечными пределами . . . . .	251
24.	10.6. Интегралы от функций комплексного переменного . . . . .	259
25.	Указатель программ . . . . .	263
	Приложение 1. Интерполяция функций по Лагранжу . . . . .	266

	Приложение 2. Интеграл вероятностей $w(z) = e^{-z^2} \left(1 + \frac{2j}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-t^2} dt\right)$ . . . . .	267
--	---	-----

	Список литературы . . . . .	270
--	-----------------------------	-----