ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие 5

Глава 1. **Микрокалькуляторы с обратной бесскобочной логикой вычислений** 7

1.1. Функциональные возможности микрокалькуляторов с обратной бесскобочной логикой вычислений 7
1.2. Система команд и кодов программируемого микрокалькулятора Электроника Б3-34 14
1.3. Основы программирования микрокалькуляторов . . . 17
1.4. Специальные приемы программирования микрокалькуляторов 21
1.5. Погрешности вычислений на микрокалькуляторах . . 27
1.6. Инструкция по вводу и пуску программ для микрокалькуляторов 28

Глава 2. **Микрокалькуляторы с алгебраической логикой вычислений** 30

2.1. Общие сведения 30
2.2. Клавиатура и язык микрокалькуляторов с алгебраической логикой 37
2.3. Элементарное программирование микрокалькуляторов с алгебраической логикой 44
2.4. Специальные вопросы программирования микрокалькуляторов с алгебраической логикой 46
2.5. Работа с библиотекой программ пользователя 49
2.6. Операторы управления цифровым магнитофоном и принтером 51
2.7. Ввод, редактирование и перевод программ 53

Глава 3. **Программирование простых вычислений** 56

3.1. Операции с действительными числами 56
3.2. Вычисление определителей и операции с матрицами 57
3.3. Вычисление факториалов и комбинаторика 61
3.4. Операции с комплексными числами 62

Глава 4. **Вычисление элементарных функций, многочленов и цифровых последовательностей** 64

4.1. Гиперболические и обратные гиперболические функции 64
4.2. Непрерывные дроби 65
4.3. Вычисление многочленов по схеме Горнера 65
4.4. Вычисление рядов и сложных числовых последовательностей 66
4.5. Вычисление многочленов Лагерра, Лежандра, Лагранжа, Эрмита и Чебышева и их коэффициентов . . . 68
4.6. Элементарные функции комплексной переменной . . 74

Глава 5. **Программная реализация основных численных методов** 79
5.1. Решение систем линейных уравнений 79
5.2. Интерполяция и экстраполяция функций одной переменной 81
5.3. Интерполяция и экстраполяция функций двух переменных 85
5.4. Вычисление корней нелинейных уравнений 88
5.5. Поиск экстремумов функций одной переменной . . . 96
5.6. Решение алгебраических уравнений 97
5.7. Численное дифференцирование 100
5.8. Вычисление частных производных и коэффициентов чувствительности 102
5.9. Численное интегрирование 105
5.10. Решение дифференциальных уравнений 111
5.11. Спектральный анализ 120
5.12. Статистические расчеты и реализация метода Монте-Карло 133
5.13. Приближение функций 140
5.14. Сглаживание эмпирических данных 146

Глава 6. **Вычисление специальных функций** 150
6.1. Интегральная показательная и родственные ей функции 150
6.2. Интегральные синус и косинус 152
6.3. Гамма-функции 154
6.4. Функции Бесселя 156
6.5. Интегралы Френеля 163
6.6. Эллиптические интегралы 164
6.7. Дилогарифм 166
6.8. Функции Дебая 166
6.9. Интеграл вероятности и связанные с ним функции . . 167
6.10. Функции плотности вероятности и распределения случайных величин 170
6.11. Гипергеометрические функции 175

Глава 7. **Примеры расчета электрических и электронных цепей и устройств** 176
7.1. Расчет индуктивных элементов 176
7.2. Расчет емкостей 183
7.3. Расчет линий передачи и задержки 185
7.4. Расчет выпрямителя 190
7.5. Пересчет параметров транзисторов 191
7.6. Расчет малосигнальных усилительных каскадов . . 193
7.7. Моделирование нелинейных цепей второго порядка 195

Приложение 1. Инструкция по применению встроенной библиотеки программ пользователя для микрокалькуляторов TI-58C/59 198

Приложение 2. Библиотека внешних программ для микрокалькуляторов TI-58C/59 205

Приложение 3. Пакет программ с особыми приемами программирования для микрокалькуляторов Электроника Б3-34 216

Список литературы 221

Указатель алгоритмов и численных методов 223

В. П. ДЬЯКОНОВ

СПРАВОЧНИК ПО РАСЧЕТАМ НА МИКРО-КАЛЬКУЛЯТОРАХ

МОСКВА «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
1985

ББК 22.18
Д93
УДК 519.6

Справочник по расчетам на микрокалькуляторах. Дьяконов В. П.— М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1985. — 224 с.

Описаны современные отечественные и зарубежные микрокалькуляторы для инженерных и научных расчетов. Дано математическое и программное обеспечение их. В справочник включено около 300 программ, главным образом для отечественных программируемых микрокалькуляторов Электроника Б3-34, Электроника МК-54 и Электроника МК-56. Основное внимание уделено конкретной реализации основных численных методов и вычислениям специальных функций.

Для широкого круга читателей.

Рецензент: кандидат технических наук *Н. П. Брусенцов*

Владимир Павлович Дьяконов

СПРАВОЧНИК ПО РАСЧЕТАМ НА МИКРОКАЛЬКУЛЯТОРАХ

Редактор *Л. Г. Силкова*
Техн. редактор *С. Я. Шкляр* Корректор *Н. Б. Румянцева*

ИБ № 12576

Сдано в набор 01.08.84. Подписано к печати 10.06.85. Т-13689. Формат 84×108 1/32. Бумага тип. № 3. Гарнитура литературная. Печать высокая. Усл. печ. л. 11,76. Усл. кр.-отт. 11,97. Уч.-изд. л. 15,5. Тираж 220 000 экз. Заказ № 282. Цена 80 коп.

Ордена Трудового Красного Знамени издательство «Наука»
Главная редакция физико-математической литературы
117071 Москва В-71, Ленинский проспект, 15

Ленинградская типография № 2 головное предприятие ордена Трудового Красного Знамени Ленинградского объединения «Техническая книга» им. Евгении Соколовой Союзполиграфпрома при Государственном комитете СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. 198052, г. Ленинград, Л-52, Измайловский проспект, 29

Д $\frac{1702070000-102}{053(02)-85}$ 48-85

© Издательство «Наука». Главная редакция физико-математической литературы, 1985

ПРЕДИСЛОВИЕ

Заметно уступая универсальным ЭВМ в предельной сложности решаемых задач и скорости вычислений, миниатюрные и дешевые электронные калькуляторы позволяют решать большинство повседневных научных и технических задач достаточно быстро, бесшумно, в любое время и в любой обстановке, с высокой надежностью и точностью. Современные программируемые микрокалькуляторы имеют функциональные возможности, недавно присущие лишь большим ЭВМ: прямую и косвенную адресацию, организацию безусловных и условных переходов, подпрограмм и циклов, микропрограммное вычисление элементарных и отдельных специальных функций вводом одной команды, встроенные модули профессиональных программ пользователей, накопители на магнитных картах, печатающие устройства — принтеры и т. д.

Однако эффективное и грамотное использование программируемых микрокалькуляторов, как и ЭВМ других классов, требует глубокого знания языков их программирования, основ вычислительной математики, умелого выбора алгоритмов и численных методов расчетов, практических навыков в переводе программ с одного языка программирования на другой, а главное — наличия отлаженных пакетов и библиотек программ.

Справочник содержит данные о конструкции и характеристиках массовых отечественных и зарубежных микрокалькуляторов, языках и особенностях их программирования, алгоритмах вычислительных процедур и численных методах их реализации. Основной материал справочника, в отличие от книг [6—8], ориентирован на научно-технические и инженерные расчеты общего характера. Исключением является лишь последняя глава, иллюстрирующая типовые электрорадиотехнические расчеты и дополняющая книгу автора [8]. Основное внимание в справочнике уделено программной реализации разнообразных численных методов и вычислениям специальных математических функций, использующихся в самых различных областях науки и техники. Ввиду ограниченного объема справочника математическое обеспечение микрокалькуляторов дается в основном в виде

конечных формул, входящих в инструкции по использованию программ.

В справочник включена обширная библиотека программ (их свыше 250) для массовых отечественных программируемых микрокалькуляторов с обратной бесскобочной логикой вычислений Электроника Б3-34. Они пригодны для их функциональных аналогов Электроника МК-54 и Электроника МК-56, а также (после несложного перевода) для микрокалькуляторов *HP*-11*C*, *HP*-15*C*, *HP*-21*C*, *HP*-67 и др. фирмы Hewlett Packard (США). Описано также свыше 50 программ для одних из наиболее сложных программируемых микрокалькуляторов с алгебраической логикой *TI*-58*C* и *TI*-59 фирмы Texas Instruments (США). Знакомство с ними позволит читателям разобраться с множеством программ, описанных в зарубежной литературе, и получить навыки в переводе программ.

При подборе и разработке программ для основной части справочника в первую очередь учитывались их наглядность, возможность простой структурной проверки и соответствие программ алгоритму расчетов и оригиналам (для переводных программ). Во всех программах использованы только регламентированные (т. е. указанные в инструкции по эксплуатации [25, 26] операторы). Некоторые нерегламентированные операторы (см. § 1.6) и особые приемы программирования позволяют сократить длину программ, уменьшить время вычислений и повысить предельную сложность решаемых задач. Основанные на этом программы для калькуляторов Электроника Б3-34 даны в приложении 3 (в том числе несколько программ из книги [29], опубликованной после сдачи рукописи справочника в набор).

Справочник рассчитан на научных работников, инженеров и студентов вузов и техникумов. Он полезен и тем, кто впервые приступает к освоению более сложной вычислительной техники, в частности персональных ЭВМ.

Обилие числового и программного материала в справочнике, из-за крайне сжатого изложения, создает условия для отдельных неточностей и опечаток. Автор выражает глубокую признательность Н. П. Брусенцову, В. В. Козлову и другим, своими замечаниями, советами и пожеланиями способствовавшим работе автора над книгой, и с благодарностью ожидает замечаний, советов и пожеланий по улучшению материала справочника, которые следует высылать по адресу: 117071 Москва В-71, Ленинский пр., 15, Главная редакция физико-математической литературы издательства «Наука», редакция математических справочников.

В. П. Дьяконов

Глава 1

МИКРОКАЛЬКУЛЯТОРЫ С ОБРАТНОЙ БЕССКОБОЧНОЙ ЛОГИКОЙ ВЫЧИСЛЕНИЙ

1.1. Функциональные возможности микрокалькуляторов с обратной бесскобочной логикой вычислений

Микрокалькуляторы — специализированные на выполнение повседневных расчетов ЭВМ личного пользования. Их основой (рис. 1.1) является специальное устройство для проведения логических и арифметических операций — *микропроцессор* (МП). Хранение двух чисел (операндов) осуществляется с помощью запоминающих устройств —

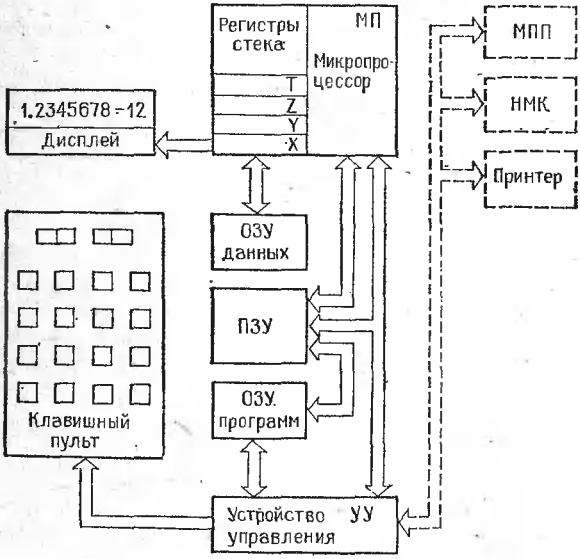

Рис. 1.1. Функциональная схема микрокалькулятора

операционных регистров X и *Y*. Результат вычислений поступает в регистр X и индицируется в десятичной форме с помощью *индикатора* (*дисплея*).

В современных микрокалькуляторах с операционными регистрами X и Y объединены еще несколько регистров (Z, T и т. д.), образуя *стек* (*магазин*). Перемещение чисел в стеке вверх (X → Y, Y → Z, Z → T и т. д.) или вниз (X ← Y, Y ← Z, Z ← T и т. д.) напоминает перемещение патронов в магазине пистолета.

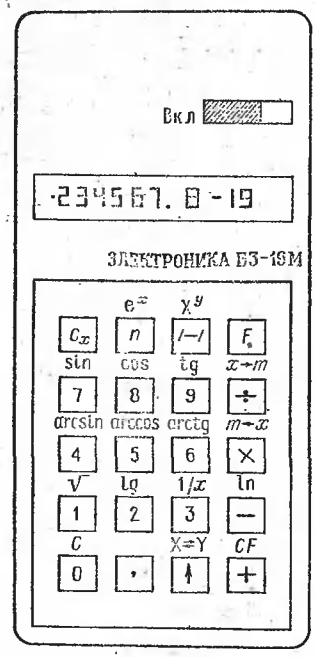

Рис. 1.2. Внешний вид микрокалькулятора Электроника Б3-19М с обратной бесскобочной логикой вычислений

К МП подключаются также постоянное запоминающее устройство (ПЗУ) и оперативные запоминающие устройства (ОЗУ) данных и программ. ОЗУ данных представляет собой от одного до нескольких сотен регистров памяти, подобных регистрам X или Y. Пользователь может обратиться к любому из них, задав его номер (*адрес*). ОЗУ программ хранит команды, задаваемые программой, которую вводит пользователь. В ПЗУ хранятся команды (*микропрограммы*) для выполнения основных операций. У непрограммируемых микрокалькуляторов ОЗУ программ отсутствует. Иногда ОЗУ данных и программ объединяются, т. е. часть ОЗУ используется для хранения данных, остальная часть — для хранения программ.

Управление всеми блоками от клавишного пульта или автоматически по программе осуществляется устройством управления. Через него к МП могут подключаться некоторые дополнительные устройства: *модуль с программами пользователя* (МПП), *накопитель информации на магнитной карте* (НМК), печатающее устройство — *принтер* и др.

Для проведения сложных расчетов весьма удобной оказалась *бесскобочная логика вычислений*, предложенная польским математиком Лукасевичем. Микрокалькуляторы с обратной бесскобочной логикой вычислений имеют специальную клавишу для ввода и перемещения чисел в стеке вверх [↑], [↑ E] или [↑ ENTER] *)

*) Иногда регистры Y, Z, T и т. д. на функциональной схеме микрокалькулятора указываются под регистром X. В этом случае

(enter — *ввод*). Арифметические операции при этом выполняются по схеме: ввод числа a, ввод оператора (команды) $\uparrow$, ввод числа b, ввод оператора соответствующей операции $*$ ($*$ — знак операции: $+$, $-$, $\times$ или $\div$). Сокращенно эта схема выглядит так: $a \uparrow b *$.

Из отечественных непрограммируемых микрокалькуляторов лишь одна модель — Электроника Б3-19М относится к рассматриваемой группе микрокалькуляторов. Она имеет стек из трех регистров X, Y и Z. Функциональные возможности микрокалькулятора очевидны из надписей на пульте управления (рис. 1.2). Габариты этого микрокалькулятора $86 \times 167 \times 41$ мм, масса 400 г, питание от сети и аккумуляторов (4 элемента Д-0,55).

Микрокалькуляторы Электроника Б3-19М, как и другие, рассмотренные в книге, оперируют с числами, представленными в показательной форме $x = M \cdot 10^E$, где M — нормализованная мантисса и $E = \pm 99$ — порядок числа. Функции, обозначения которых даны над клавишами, вводятся после нажатия префиксной клавиши F и соответствующей клавиши. Например, функция $\ln x$ вычисляется после набора x и нажатия клавиш F и $\boxed{\overset{\ln}{-}}$. Результат заносится в регистр X.

Обратная бесскобочная логика вычислений особенно удобна при вычислении сложных выражений, требующих выполнения заданной последовательности операций, например:

$$(a \times b) + (c \times d) \ldots \qquad a \uparrow b \times c \uparrow d \times + \ldots$$

$$(a - b)/(c + d) \ldots \qquad a \uparrow b - c \uparrow d + \div \ldots$$

$$a \lg \left(\frac{b + c}{d}\right) \ldots \qquad b \uparrow c + \uparrow d \div \mathrm{F} \lg \uparrow a \times \ldots$$

Операции с тремя числами a, b и c могут выполняться после их ввода, например:

$$(a + b) \times c \qquad c \uparrow b \uparrow a + \times$$

$$(a \times b) + c \qquad c \uparrow b \uparrow a \times +$$

В этих примерах отчетливо видны особенности обратной бесскобочной логики вычислений: ввод чисел в порядке, обратном их использованию, и разделение их при вводе оператором $\uparrow$, выполнение подряд двух операторов арифметических действий, отсутствие скобок. Более детальное описание дается в следующих параграфах этой главы.

Применение обратной бесскобочной логики в программируемых микрокалькуляторах позволяет заметно уменьшить число шагов программы, особенно если при вызове очередного числа предшествующие числа автоматически смещаются в верхние регистры стека,

---

стрелка на клавише ENTER обращена острием вниз. Однако такое обозначение встречается очень редко.

Таблица 1.1

Характеристики отечественных программируемых микрокалькуляторов

Параметр	Тип ЭВМ				
	Электроника				
	Б3-21	МК-46	Б3-34	МК-56	МК-54
Число разрядов мантиссы/порядка	7,8/2	7,8/2	8/2	8/2	8/2
Число регистров операционного блока	2	2	4	4	4
Регистр восстановления результата предшествующей операции	Нет	Нет	Есть	Есть	Есть
Число добавочных регистров (ячеек) памяти	6 + стек на 6 чисел	6 + стек на 6 чисел	14	14	14
Максимальное число шагов программы	60	66	98	98	98
Вычисление функций x: $1/x$, x^2, $\sqrt{x}$; e^x, $\ln x$, $\sin x$, $\cos x$	Есть	Есть	Есть	Есть	Есть
Вычисление функций x: $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{arctg} x$, $\arcsin x$, $\arccos x$, 10^x, $\lg x$	Нет	Нет	Есть	Есть	Есть
Представление углов	Радианы	Радианы	Радианы, градусы	Радианы, градусы, грады *)	Радианы, градусы, грады *)
Адресация	Прямая	Прямая	Прямая и косвенная	Прямая и косвенная	Прямая и косвенная
Время выполнения арифметических операций не более, с	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5
Габариты, мм	185×100×48	280×240×90	185×100×48	208×205×60	167×78×36
Масса, кг	0,39	2,5	0,39	1,3	0,25
Питание	Универсальное	Сеть	Универсальное	Сеть	Универсальное
Оформление	Переносное	Настольное	Переносное	Настольное	Переносное

*) Град — мера измерения углов, равная 1/100 части прямого угла.

а при выполнении операций — в нижние регистры. Тогда операция $(a+b)\times c$ выполняется символически так: $cba+\times$. Для сравнения укажем, что у микрокалькуляторов с алгебраической логикой (см. главу 2) те же вычисления символически записываются в виде $(a+b)\times c=$. Таким образом, в программе они займут 8 шагов, тогда как в первом случае только 5.

Указанные обстоятельства привели к массовому применению программируемых микрокалькуляторов с обратной бесскобочной логикой вычислений. К этой группе относятся отечественные программируемые микрокалькуляторы, технические характеристики которых даны в табл. 1.1.

Микрокалькуляторы Электроника Б3-21, Электроника МК-46 условно можно отнести к первому поколению программируемых микрокалькуляторов. Они имеют ограниченный набор команд и вычисляемых по ним функций, небольшое предельное число шагов программы, а главное — только прямую адресацию (см. ниже). Особенности вычислений и программирование этих микрокалькуляторов детально описаны в книгах [6—9] и поэтому далее не рассматриваются.

Гораздо большими функциональными возможностями обладают программируемые микрокалькуляторы второго поколения: Электроника Б3-34, Электроника МК-54 и Электроника МК-56 (настольная микро-ЭВМ). Эти микрокалькуляторы, а также подобные модели зарубежных фирм (см. табл. 1.2 с параметрами широко распространенных калькуляторов фирмы Hewlett Packard (HP) США), удовлетворяют важнейшим требованиям, предъявляемым к современным микро-ЭВМ индивидуального пользования, ориентированным на научно-технические расчеты. В их числе:

— простота в работе и обслуживание одним пользователем, как правило, неспециалистом в области программирования,

— малые габариты и масса, питание от автономного источника и сети переменного тока,

— простота языка программирования, ввода и редактирования программ,

— вычисление по встроенным микропрограммам важнейших элементарных функций аргумента x ($1/x$, x^2, $\sqrt{x}$, y^x или x^y, e^x, 10^x, $\ln x$, $\lg x$, $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\arcsin x$, $\arccos x$, $\operatorname{arctg} x$ и др.),

— достаточное число регистров памяти с произвольным доступом (не менее 10),

— достаточное максимальное число шагов программной памяти (≈ 100 и выше),

— развитые программные возможности (наличие команд прямой и косвенной адресации, организации условных и безусловных переходов, подпрограмм и циклов),

— возможность выполнения всех операций с клавишного пульта,

Таблица 1.2

Характеристики зарубежных микрокалькуляторов с обратной бесскобочной логикой вычислений для инженерных и научных расчетов (в модели, помеченные знаком *, встроен принтер)

Параметр	Тип ЭВМ							
	HP-15C	HP-25C	HP-29C	HP-55	HP-91*	HP-67	HP-97*	HP-41C
Программируемость	Есть	Есть	Есть	Есть	Нет	Есть	Есть	Есть
Число регистров памяти	64	8	30	20	16	26	26	320
Число шагов программы	448	49	98	49	—	224	224	2240
Вычисление функций $1/x$, $\sqrt{x}$, y^x, $\ln x$, $\lg x$, e^x, 10^x	Есть	Есть	Есть	Есть	Есть	Есть	Есть	Есть
Тригонометрические и обратные им функции	Есть	Есть	Есть	Есть	Есть	Есть	Есть	Есть
Гиперболические и обратные им функции	Есть	Нет	Нет	Нет	Нет	Нет	Нет	Нет
Статистические расчеты	Есть	Есть	Есть	Есть	Есть	Есть	Есть	Есть
Число разрядов мантиссы/порядка	10/2	8/2	8/2	10/2	10/2	10/2	10/2	10/2
Запоминание программ при выключении	Есть	Есть	Есть	Нет	Нет	Нет	Нет	Есть
Запись на магнитные карты	Нет	Нет	Нет	Нет	Нет	Есть	Есть	Есть
Число флажков/меток	10/25	Нет	Нет	Нет	Нет	4/10	4/10	56
Косвенная адресация	Есть	Нет	Нет	Нет	Нет	Есть	Есть	Есть
Подключение принтера	Нет	Нет	Нет	Нет	Есть	Есть	Есть	Есть
Габариты, мм	128×80×15	130×68×30	130×68×30	152×81×34	229×203×64	152×81×34	229×203×64	144×79×33

— низкая стоимость, делающая микро-ЭВМ доступными для широкого круга пользователей (инженерно-технических и научных работников, студентов и т. д.).

Развитие современных программируемых микрокалькуляторов с обратной бесскобочной логикой вычислений идет по следующим направлениям: увеличение числа регистров памяти и шагов программы (см., например, модель HP-41C — табл. 1.2), использование дополнительных ОЗУ, ПЗУ с записями программ (твердотельных и в виде цифровых магнитофонов с записью программ на миниатюрные магнитные карты), обеспечение работы с внешним периферийным оборудованием (кассетные магнитофоны, принтеры, устройства сопряжения с телефонной сетью и др.).

У некоторых последних зарубежных моделей таких микрокалькуляторов существенно расширен набор функций, выполняемых микропрограммно. Так, микрокалькуляторы HP-15C имеют емкость программной памяти на 448 шагов, выполняют различные операции с матрицами (размер до 8×8), решают системы из 2—7 линейных уравнений, выполняют операции с комплексными числами, вычисляют определенные интегралы, проводят статистические расчеты и др. У микрокалькуляторов с буквой C в названии (HP-15C, HP-41C и др.) программа и данные в регистрах памяти сохраняются после отключения питания, что дает большие удобства при отладке сложных программ и проведении трудоемких вычислений.

Для отечественных программируемых микрокалькуляторов базовой является модель Электроника Б3-34. Микрокалькуляторы Электроника МК-54 и Электроника МК-56 полностью совместимы с этой моделью по языку программирования и системе команд. Эта совместимость предусматривается и у новых моделей (Электроника МК-52, Электроника МК-61 и др.), имеющих расширенный набор микропрограмм, встроенные ПЗУ и ОЗУ, разъемы для подключения периферийных устройств.

Отечественные и зарубежные (серии HP) микрокалькуляторы имеют простой символьно-кодовый язык программирования с тщательно продуманной системой команд. Это означает, что операции вводятся нажатием клавиш с изображенными на них символами и им присваиваются коды в виде чисел и знаков, отображаемых дисплеем в ходе ввода программ и их редактирования*). Наиболее распространенные операции (ввод чисел в регистры памяти и их вызов, безусловные переходы и обращения к подпрограммам с косвенной адресацией и др.) выполняются одношаговыми операторами, что заметно сокращает общее число шагов программ. Не составляет

---

*) У микрокалькуляторов HP-41C операторы, в том числе буквенные, отображаются алфавитно-цифровым жидкокристаллическим дисплеем.

труда перевод программ для отечественных микрокалькуляторов на язык программирования калькуляторов серии HP и наоборот.

Символьно-кодовое программирование имеют также некоторые настольные микро-ЭВМ: Электроника Д3-28, 15ВСМ-5, Искра-124, Искра-125 и др. [11, 12]. Микро-ЭВМ Электроника Д3-28 с емкостью ОЗУ 16 или 32 кбайт имеет емкость программируемой памяти до 32 256 шагов и допускает с пульта прямое обращение к 166 десятичным регистрам памяти (ср. с 98 шагами и 14 регистрами у микрокалькулятора Электроника Б3-34). Время вычисления на ней примерно в 100 раз меньше, чем у микрокалькуляторов. Особенности программирования данной ЭВМ на символьно-кодовом языке описаны в [8]. Эти микро-ЭВМ программируются и на языке высокого уровня бейсик [12, 13].

Микро-ЭВМ Искра-124 имеет емкость программной памяти на 180 шагов, 10 регистров памяти и 3 стековых регистра. Время выполнения операций сложения и вычитания около 0,02 с, умножения и деления 0,1 с, извлечения квадратного корня 0,3 с и вычисления функций около 1 с.

Микро-ЭВМ Искра-125 имеет блок отображения информации на электронно-лучевой трубке, обеспечивающей индикацию результатов вычислений и вводимой программы. Емкость ОЗУ 1 кбайт, постоянного ЗУ 4 кбайт. Предусмотрены прямое и косвенное обращение к 256 регистрам памяти и возможность записи программ и данных на магнитную ленту накопителя.

Символьно-кодовое программирование этих микро-ЭВМ в принципе подобно программированию микрокалькуляторов. Однако система символов клавиатуры и кодов операторов у них иная.

1.2. Система команд и кодов программируемого микрокалькулятора Электроника Б3-34

Внешний вид программируемого микрокалькулятора Электроника Б3-34 приведен на рис. 1.3. В верхней части передней панели его расположен 12-разрядный люминесцентный индикатор, под которым располагаются выключатель питания и переключатель Р — Г (радианы — градусы).

Пульт управления микрокалькулятором имеет 30 клавиш с двойным или тройным управлением. Основная операция, вводимая клавишей, обозначена символом прямо на клавише. Операции, обозначенные символами красного цвета над клавишами, вводятся после нажатия *префиксной* клавиши F, а операции, обозначенные символами черного цвета под клавишами, вводятся после нажатия префиксной клавиши К, которая используется также для ввода операций косвенной адресации.

Отметим назначение специальных символов:

АВТ — перевод в режим автоматических вычислений,

ПРГ — перевод в режим программирования,

π — вызов числа $\pi = 3{,}1415926$,

○ — поворот стека для вывода чисел из него в регистр X,

Вх — вызов числа из регистра восстановления результата предшествующей операции,

Сх — сброс содержимого операционного регистра X на нуль,

CF — сброс действия префиксной клавиши F,

$x < 0$, $x = 0$, $x \geqslant 0$ и $x \neq 0$ — ввод операций условных переходов,

БП — ввод операции безусловных переходов,

ПП — ввод подпрограмм,

П — запись чисел в регистры памяти,

ИП — вызов чисел из регистров памяти,

$\overrightarrow{\text{ШГ}}$ — смещение программы на один шаг в направлении ввода,

$\overleftarrow{\text{ШГ}}$ — смещение программы на один шаг против направления ввода,

/—/ — смена знака мантиссы или порядка,

В/0 — установка программы на нулевой шаг и ввод операции возврата из подпрограммы,

С/П — ввод операции остановки и пуска вычислений по программе,

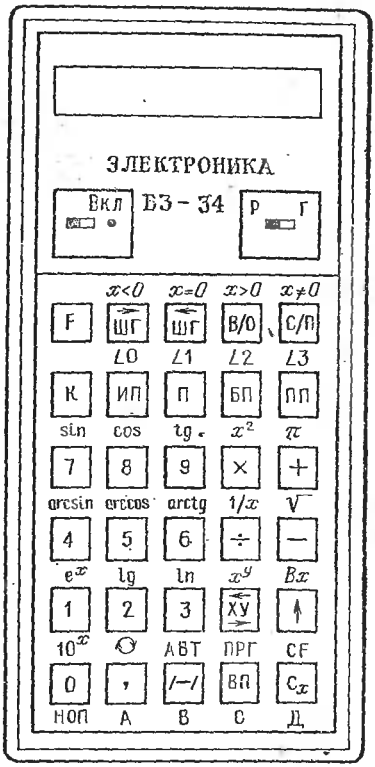

Рис. 1.3. Внешний вид программируемого микрокалькулятора Электроника Б3-34 с обратной бесскобочной логикой вычислений

L0, L1, L2 и L3 — ввод операций для организации циклов,

НОП — ввод операции нейтрализации ошибочно введенной в программу команды,

А, В, С и Д — обозначение регистров памяти с номерами 10, 11, 12 и 13,

↑ — смещение чисел в стеке вверх на одну ступень.

При включении микрокалькулятора автоматически устанавливается режим *автоматических вычислений* и обнуляются все регист-

ры памяти и операционные регистры. *Сброс* ошибочно введенного числа выполняется нажатием клавиши *Сх*. В этом режиме микрокалькулятор обеспечивает выполнение арифметических операций, вычисление функций, отмеченных в табл. 1.1, вызов числа π, запись чисел в 14 регистров памяти и вызов их из этих регистров, запись чисел в регистры стека и управление их продвижением, изменение знака мантиссы и порядка числа x в регистре X, обмен содержимого регистров X и Y, восстановление результата предшествующей операции и проведение сложных последовательных вычислений по обратной бесскобочной схеме вычислений.

Все эти вычисления могут проводиться вручную или по введенной программе. Различие заключается лишь в том, что вводимые подряд с клавиатуры числа разделяются операцией ↑. В связи с идентичностью ручных вычислений и вычислений по программе правила их проведения подробно описаны в следующем параграфе, посвященном организации вычислений по программе.

Таблица 1.3

Операция	Код	Операция	Код	Операция	Код	Операция	Код
0	00	П0	40	К$x\neq$00	70	КПП0	–0
...	...	...	...	...	...	...	...
9	09	П9	49	К$x\neq$09	79	КПП9	–9
.	0–	ПА	4–	К$x\neq$0А	7–	КППА	––
/–/	0L	ПВ	4L	К$x\neq$0В	7L	КППВ	–L
ВП	0⊏	ПС	4⊏	К$x\neq$0С	7⊏	КППС	–⊏
Сx	0Г	ПД	4Г	К$x\neq$0Д	7Г	КППД	–Г
↑	0E	FВx	0	КБП0	80	КП0	L0
+	10	С/П	50	...	...	...	...
–	11	БП	51	КБП9	89	КП9	L9
×	12	В/0	52	КБПА	8–	КПА	L–
÷	13	ПП	53	КБПВ	8L	КПВ	LL
XY	14	КНОП	54	КБПС	8⊏	КПС	L⊏
F10^x	15	F$x\neq$0	57	КБПД	8Г	КПД	LГ
Fe^x	16	FL2	58	К$x\geqslant$00	90	КИП0	Г0
F lg	17	F$x\geqslant$00	59	...	...	...	...
F ln	18	Fx=0	5E	К$x\geqslant$09	99	КИП9	Г9
F arcsin	19	Fx<0	5⊏	К$x\geqslant$0А	9–	КИПА	Г–
F arccos	1–	FL0	5Г	К$x\geqslant$0В	9L	КИПВ	ГL
F arctg	1L	FL1	5L	К$x\geqslant$0С	9⊏	КИПС	Г⊏
F sin	1⊏	FL3	5–	К$x\geqslant$0Д	9Г	КИПД	ГГ
F cos	1Г	ИП0	60	Кx<01	⊏1	Кx=00	E0
F tg	1E	...	...	...	...	...	...
Fπ	20	ИП9	69	Кx<09	⊏9	Кx=09	E9
F$\sqrt{\ }$	21	ИПА	6–	Кx<0А	⊏–	Кx=0А	E–
Fx^2	22	ИПВ	6L	Кx<0В	⊏L	Кx=0В	EL
F1/x	23	ИПС	6⊏	Кx<0С	⊏⊏	Кx=0С	E⊏
Fx^y	24	ИПД	6Г	Кx<0Д	⊏Г	Кx=0Д	EГ

После перевода в *режим программирования* (нажатием клавиш F и ПРГ) каждая операция или команда вводится нажатием соответствующих клавиш и кодируется определенным символом. Все операции микрокалькулятора и их *коды* даны в табл. 1.3. Коды имеют вид цифр и знаков, отображаемых семисегментными элементами индикатора в процессе ввода программы и ее редактирования.

1.3. Основы программирования микрокалькуляторов

Рассмотрим основные понятия программирования микрокалькуляторов Электроника Б3-34.

Ввод и представление чисел. Числа-*операнды* вводятся в микрокалькулятор нажатием соответствующих клавиш. Порядок числа вводится нажатием клавиши ВП. Знак минус вводится нажатием клавиши /—/ после ввода мантиссы или порядка числа. Числа, большие 1, но меньшие 10^8, представляются в обычном виде, например 9725 или 14,1256. Числа за этими пределами представляются в экспоненциальной форме $M \cdot 10^E$, где M — нормализованная мантисса с первым знаком от 1 до 9, E — порядок числа (до ± 99). Нормализация числа происходит при записи чисел в любой регистр (см. ниже).

Операторы. Совокупность символов, обеспечивающих по программе выполнение одной из элементарных операций, называется *оператором*. Операторы вводятся нажатием одной или нескольких клавиш. Например, вычисление e^x сводится к набору числа x и нажатию клавиш F и e^x. В программе это соответствует оператору Fe^x, который занимает один шаг (см. ниже). Некоторые операторы являются двухшаговыми.

Регистры. Для хранения чисел и результатов вычислений служат *регистры памяти*. По своему назначению они подразделяются на три типа. Первый тип — *операционные регистры* X и Y, в которые вводятся два операнда двухместных арифметических операций. Второй тип регистров — *регистры памяти* — служит для записи исходных данных и промежуточных результатов вычислений. Эти регистры обозначаются буквами А, В, С, Д и цифрами $0 \div 9$ (всего 14 регистров). Кроме того, еще два таких регистра Z и T объединяются с регистрами X и Y, образуя *стек*. К третьему типу регистров относится *регистр восстановления результата предшествующей операции* X.

Структура стека и перемещение в нем чисел при различных операциях показаны на рис. 1.4: а) операция ↑, б) ввод числа x в регистр X после операции ↑, в) вызов в регистр X числа π или числа из регистра N (см. ниже), г) обмен содержимым регистров X и Y X ⇄ Y, д) одноместная операция ①, например вычисление e^x, е) двухместная арифметическая операция ②, ж) кольцевое переме-

шение чисел в стеке — оператор F◯, з) вызов числа из регистра X1 — оператор FB$_x$. В дальнейшем операторы X⇄F и F◯ будут указываться упрощенными символами XY и F. .

Ввод чисел в регистры памяти. Число можно ввести в регистр памяти N набором и нажатием клавиш П и N. Здесь N — символ

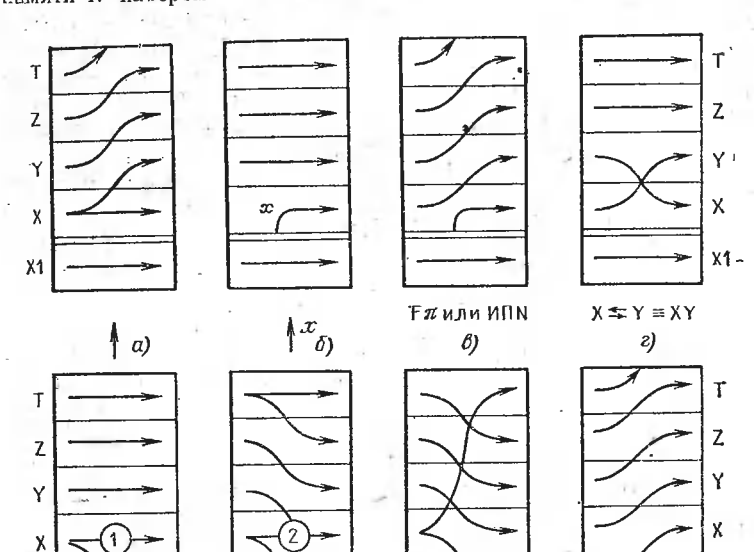

Рис. 1.4. Перемещение чисел в регистрах стека при основных операциях

регистра (А, В, С, Д, 0 ÷ 9). В программах ввод соответствует оператору ПN.

Вызов чисел из регистров памяти. Вызывается число из регистра памяти N нажатием клавиш ИП и N (оператор ИПN).

Шаги программы и их адреса. Каждому оператору в программе соответствует свой *шаг*. Шаги последовательно нумеруются двухзначными десятичными числами от 00 до 97 (всего 98 шагов). В режиме программирования (после нажатия клавиш F и ПРГ) номера шагов высвечиваются в правом конце индикатора. Операторы в программе удобно записывать построчно, по 10 операторов в каждой строке. В этом случае положение оператора в программе позволяет легко найти номер шага, именуемый его *адресом*.

Прямая адресация. Непосредственное указание адреса (номера шага программы или символа регистра памяти) называется *прямой адресацией*. Так, описанный выше ввод чисел в регистры и их вызов проводились с использованием прямой адресации.

Косвенная адресация. Если адрес указан содержимым одного из регистров памяти, то адресация будет косвенной. *Косвенная адресация* вводится нажатием клавиши К. Например, при выполнении по программе оператора КП5 число $x =$ РХ будет записано в регистр памяти, номер которого указан содержимым регистра 5. Аналогично, оператор КИПА обеспечивает вызов числа из регистра с номером, указанным содержанием регистра А, в регистр Х. Числам $0 \div 13$ в регистре адресации соответствуют регистры $0 \div 9$, А(10), В(11), С(12) и Д(13).

Модификация адресов при косвенной адресации. Если в качестве регистра адресации, в котором хранится адрес обращения, взять один из регистров 7, 8, 9, А, В, С или Д, то при выполнении операторов косвенной адресации содержимое регистра адресации не изменяется. Если регистр адресации имеет номер 0, 1, 2 или 3, то при каждом выполнении операторов косвенной адресации содержимое регистра адресации уменьшается на 1, а при регистрах адресации 4, 5 или 6 увеличивается на 1. Таким образом, происходит *модификация адресов*.

Безусловные прямые и косвенные переходы. Для построения разветвляющихся программ используются *безусловные переходы*. Безусловный переход на шаг программы с адресом N вводится оператором БП N. Например, во фрагменте программы

ИПА	ИПВ	+	БП	17	...	...	...	...	...
...	...	...	...	...	...	...	ИПС	×	С/П

после выполнения операции $(a + b)$ при $a =$ РА и $b =$ РВ происходит безусловный переход на адрес 17, т. е. $(a + b)$ умножается на c ($c =$ РС), после чего вычисления останавливаются (оператор С/П). Для простоты пропущенные операторы обозначены точками. Одношаговая команда КБПM обеспечивает *безусловный косвенный переход* по адресу, указанному содержимым регистра адресации M ($M =$ А, В, С, Д, $0 \div 9$).

Условные прямые и косвенные переходы. Переход к адресу N может проводиться по данным анализа содержимого x регистра Х на выполнение одного из условий: $x < 0$, $x = 0$, $x \geqslant 0$ или $x \neq 0$. Такие переходы вводятся операторами Fx < 0, Fx $= 0$, Fx $\geqslant 0$ и Fx $\neq 0$, после которых указывается оператор — адрес перехода N. Если условие перехода не выполняется, то происходит переход на шаг программы с адресом N, если выполняется — адрес перехода игнорируется и выполняется следующая за ним часть программы. Одношаговая команда К$x < 0M$, К$x = 0M$, К$x \geqslant 0M$ или К$x \neq 0M$,

где M — символ регистра адресации (M = А, В, С, Д, $0 \div 9$) обеспечивает условный переход по адресу, указанному содержимым регистра M.

Подпрограммы. Повторяющиеся фрагменты программ можно оформить в виде *подпрограммы*, которая должна начинаться с адреса N и кончаться оператором возврата из подпрограммы В/0. Обращение к подпрограмме из любого места программы задается двухшаговой командой, содержащей операторы ПП и N.

Пусть подпрограмма имеет n шагов и повторяется m раз. Тогда она в программе займет $n+1$ шагов. Кроме того, придется дать m обращений к подпрограмме, что займет $2m$ шагов. Без введения подпрограммы вычисления займут $m \cdot n$ шагов. Следовательно, если $2m+n+1 < m \cdot n$ или $n > (2m+1)/(m-1)$, то введение подпрограммы сокращает общее число шагов программы. Однако число операций при этом возрастает, растет и время вычислений. Можно использовать до пяти подпрограмм, вложенных друг в друга. Одношаговая команда КППM обеспечивает косвенное обращение к подпрограмме с адресом N, определяемым содержимым регистра адресации M (M = А, В, С, Д, $0 \div 9$).

Организация циклов. Для организации *циклов* циклических программ служат операторы построения счетчиков FL0, FL1, FL2 и FL3 в регистрах 0, 1, 2 и 3. После этих операторов указывается адрес перехода N. При выполнении этих операторов содержимое соответствующего регистра-счетчика уменьшается на 1. Если оно не равно нулю, то происходит переход по адресу N, а если оно становится равным 0 — переход идет к шагу программы, следующему вслед за оператором N. Одношаговые команды KL0M, KL1M, KL2M и KL3M обеспечивают косвенные переходы с адресом N, указанным содержимым регистра адресации M.

Остановка и пуск программы. Для остановки программы в нужном месте вводится оператор С/П. Нажатие клавиши с этим символом ведет к запуску программы. Для запуска программы с нулевого адреса нажимаются клавиши В/0 и С/П.

Ввод и редактирование программы. Программа вводится нажатием соответствующих клавиш после перевода калькулятора в режим программирования (нажатием клавиш F и ПРГ). При этом на индикаторе отображаются коды трех последних операций и адрес последующей операции, например:

Показания индикатора	10	6L	6—	10
Операторы	+	ИПВ	ИПА	
Направление ввода программы	⟶			

При ошибочно нажатой префиксной клавише F сброс ее действия производится нажатием клавиши CF. Для установки программы на заданный адрес используются клавиши сдвига программы на

один шаг вправо ШГ или влево ШГ. С их помощью можно установить программу на шаг с ошибочно набранным оператором и исправить его. Для этого (в режиме автоматических вычислений после нажатия клавиш F и АВТ) можно использовать команды БП и *N* (установка программы на шаг с адресом *N*). Двухшаговые команды, набранные ошибочно, заменяются новыми полностью (т. е. с вводом обоих операторов). На место лишнего оператора вставляется оператор КНОП (нет операции).

Индикация некорректных операций. При выполнении *некорректных операций* (деление на 0, переполнение разрядной сетки ЭВМ, возведение $x = 0$ в степень y, вычисление квадратного корня из отрицательного числа, вычисление $1/x$ при $x = 0$ и т. д.) вычисления останавливаются и на индикаторе появляется символ ЕГГОГ (от английского слова *error* — ошибка). После этого можно проводить ввод чисел и продолжать вычисления.

Представление углов. Аргумент тригонометрических функций можно выражать в градусах или радианах. Для этого служит переключатель Р — Г (радианы — градусы).

Примеры для контроля программ. Составленные и отлаженные программы должны сопровождаться *контрольным примером* (или примерами, если программа разветвляющаяся). Приступать к основным вычислениям можно только после проверки программы по контрольному примеру. Если будет обнаружена ошибка, следует проверить правильность ввода программы по кодам основных операций (см. табл. 1.3). При отладке программ бывает полезно проверить вычисления по шагам; для этого в режиме автоматических вычислений нажимается клавиша ПП.

1.4. Специальные приемы программирования микрокалькуляторов

Операторы косвенной адресации обеспечивают дополнительные возможности, не отмеченные в инструкции к пользованию микрокалькуляторами. Так, при вводе числа x ($1 < x < 10^8$) в регистры 7, 8, 9, А, В, С и Д и последующем выполнении операторов КП*М* или КИП*М* происходит автоматическое отбрасывание дробной части числа x. Например, введя в регистр Х число $x = 421{,}756$ и выполнив операторы П9 КИП9 ИП9, получим результат в виде числа 00000421. При любой последующей операции это число приобретает обычный вид числа 421. Таким образом, всего два оператора П*М* и КИП*М* обеспечивают *выделение целой части x*.

Если регистр $M = 0$, 1, 2 или 3, то наряду с отбрасыванием дробной части при выполнении оператора КИП*М* или КП*М* происходит уменьшение целой части числа в регистре *М* на 1, а если $M = 4$, 5 или 6, то происходит увеличение целой части на 1. Это

позволяет строить счетчики вида $n=(n-1)$ и $n=(n+1)$ вводом всего одного оператора КИПM или КПM, причем текущие значения n заносятся в регистр M и могут в дальнейшем без модификации вызываться оператором ИПM. Повторяя операторы КИПM или КПM a раз, можно организовать построение счетчиков вида $n=(n-a)$ и $n=(n+a)$. Предпочтение следует отдавать оператору КИПM, так как при использовании оператора КПM в регистры, номера которых соответствуют n, будут заноситься результаты предшествующих операций.

Для последовательного ввода до $N_0=13$ чисел $a_{13}, a_{12}, \ldots, a_1$ в регистры 1, 2, ..., 9, А, В, С и Д можно использовать циклическую программу с косвенной адресацией к регистрам при вводе в них чисел:

Если $n=N_0$

N П0 0 С/П КП0 ИП0 1 — Fx=0 02 ...

Если $n<N_0$

Здесь $N=(N_0+1)$. Если $N>9$, адрес 02 в конце программы надо заменить на 03. При каждом цикле меняется на —1 адрес в регистре адресации 0 и соответственно каждое новое число попадает в новый регистр: Д, С, В, А, 9, ..., 1. После ввода всех чисел происходит выход из цикла.

Еще один фрагмент программы обеспечивает ввод до 8 чисел в регистры 6, 7, 8, 9, А, В, С и Д

Если $n=N_0$

5 П4 8 П0 С/П КП4 FL0 04 ...

Если $n<N_0=8$

В этом фрагменте номера регистров, в которые заносятся числа, формируются в регистре 0 при выполнении оператора FL0.

Отметим, что ввод N_0 чисел фрагментом программы с прямой адресацией

П1 С/П П2 С/П П3 С/П П4 С/П и т. д.

занимает $(2N_0-1)$ шагов, т. е. 15 шагов при $N_0=8$ и 25 при $N_0=13$, что существенно больше, чем при организации ввода с использованием косвенной адресации.

В общем случае программы могут быть *линейными*, *разветвляющимися* и *циклическими*. Примером линейной программы является программа вычисления функции

$$y=(\sin \pi nft)/\pi nft \qquad (1.1)$$

с вводом t в регистр X. Отведем под запись n и f регистры 8 и 9 ($n=$ Р8, $f=$ Р9, $t=$ РХ). Будем записывать программу с нулевого

адреса. В полном виде программа имеет вид (внизу дано размещение чисел в регистрах X, Y, Z, T и X1 стека после ввода n, f и t и выполнения программы по шагам):

Адрес	00	01	02	03	04	05	06	07	08	09
Код	20	68	69	12	12	12	1[	0	13	50
Оператор	Fπ	ИП8	ИП9	×	×	×	Fsin	FBx	÷	С/П
T 0	n	f	t	t	t	t	t	t	t	t
Z n	f	t	π	t	t	t	t	t	t	t
Y f	t	π	n	π	t	t	t	$\sin \pi nft$	t	t
X t	π	n	f	nf	πnf	πnft	$\sin \pi nft$	πnft	y	y
X1 0	t	t	t	f	nf	πnf	πnft	πnft	πnft	πnft

При вычислении по этой программе используются все регистры стека. Перед пуском программы нажимается клавиша В/0 и программа устанавливается на нулевой адрес. После этого вводятся исходные данные. Перемещения чисел в стеке даны под программой. При $n = 2$, $f = 1000$ и $t = 1{,}2 \cdot 10^{-4}$ получаем $y = 9{,}0790883 \cdot 10^{-1}$.

Эту программу можно записать несколько иначе, выполняя операции умножения по мере ввода каждого нового сомножителя:

Fπ × ИП8 × ИП9 × Fsin FBx ÷ С/П

Обычно такой способ предпочтителен, так как слабее загружает стек и предотвращает потерю числа из регистра T при случайных переполнениях стека.

В дальнейшем адреса и коды приводиться не будут. Адрес легко определяется положением команды при записи программы построчно с десятью операторами в каждой строке. Коды нужны только при проверке программ неопытными пользователями, так как на первых порах ошибочное нажатие клавиш не редкость. Если пользователь критически оценивает свою пунктуальность при вводе программ, он может составить дополнительную таблицу кодов нужной программы, используя табл. 1.3. При некотором навыке коды операций быстро запоминаются.

Теперь рассмотрим простейшую разветвляющуюся программу. Нетрудно заметить, что при $t = 0$ значение y по (1.1) определять нельзя, так как $(\sin \pi nft)/\pi nft$ дает неопределенность вида 0/0, а деление на 0 относится к некорректным операциям. При вводе $t=0$ вычисления по описанным программам приводят к появлению знака ошибки ЕГГОГ. Между тем значение $\sin x/x = 1$ при $x = 0$. Следовательно, более точно определять y по двум формулам

$$\begin{aligned} y &= 1 && \text{при} \quad t = 0, \\ y &= (\sin \pi nft)/\pi nft && \text{при} \quad t \neq 0. \end{aligned} \qquad (1.2)$$

Переход от одной из них к другой можно осуществить, используя условные переходы по условиям $x = 0$ или $x \neq 0$. Тогда получим

такую программу:

$Fx=0$	04	1	С/П	$F\pi$	ИП8	ИП9	×	×	×
Fsin	FBx	÷	С/П						

Если ввести $t=0$, то условие $t=x=0$ выполняется, адрес перехода 04 игнорируется и на индикацию выводится 1. Если $t=x\neq 0$ условие не выполняется и происходит переход по адресу 04, т. е. вычисление по второй формуле (1.2). Отметим, что при вводе каждого нового значения t надо нажимать клавиши В/0 и С/П.

Модифицируем программу так, чтобы после ввода каждого значения t требовалось нажимать только клавишу С/П:

$Fx=0$	06	1	С/П	БП	00	$F\pi$	ИП8	ИП9	×
×	×	Fsin	FBx	÷	БП	03			

Допустим введено $t=0$. Тогда после пуска будет выдано значение $y=1$. Набрав новое значение t и нажав клавишу С/П, мы обеспечим безусловный переход (команда БП 00) на адрес 00. Если $t\neq 0$, то условие $t=x=0$ не выполняется и продолжение программы пойдет с адреса 06. После деления $\sin \pi nft$ на πnft (операция с адресом 14) происходит безусловный переход на адрес 03 (операторы БП 03), т. е. к команде остановки вычислений С/П.

Рассмотрим пример составления программы с подпрограммой и косвенной адресацией регистров памяти. Пусть надо вычислить выражение

$$f=\left(ae^{\pi x^2/2}-be^{\pi y^2/2}\right)/ce^{\pi z^2/2}. \qquad (1.3)$$

Будем руководствоваться следующим алгоритмом:

1. Значение $\pi/2$ вычислим один раз в начале программы, что сократит общее время счета.

2. Вычисление похожих членов $ae^{\pi x^2/2}$, $be^{\pi y^2/2}$ и $ce^{\pi z^2/2}$ оформим подпрограммой.

3 Так как при выполнении п. 2 значения x, a, y, b, z и c должны вызываться поочередно, то это целесообразно сделать, используя косвенную адресацию регистров памяти и разместить x, a, y, b, z и c последовательно в регистрах 7, 8, 9, А, В и С.

Тогда получим программу в виде

$F\pi$	2	÷	П6	6	П5	ПП	15	ПП	15
—	ПП	15	÷	С/П	КИП5	Fx^2	ИП6	×	Fe^x
КИП5	×	В/0							

Запись числа 6 в регистр адресации 5 задает вызов первого числа x из регистра 7 при первом обращении к подпрограмме. Оно начинается с операции косвенной адресации КИП5 по адресу 15. При выполнении этого оператора содержимое регистра 5 (число 6),

увеличивается на 1. Следовательно, происходит вызов числа x из регистра $7=(6+1)$. Далее x возводится в квадрат, умножается на $\pi/2=$ Р6 и вычисляется $e^{\pi x^2/2}$. Затем (оператор КИП5 по адресу 20) происходит вызов числа a из регистра 8, так как содержимое регистра 5, указывающее на номер регистра, из которого вызывается операнд, вновь увеличивается на 1. Подпрограмма заканчивается умножением $e^{\pi x^2/2}$ на a и возвратом (оператор В/0) к основной программе. Аналогично (со сменой пар y, b и z, c) происходят второе и третье выполнение подпрограммы.

Сравним эту программу с программой вычисления (1.3) без подпрограммы:

Fπ	2	÷	П6	ИП7	Fx^2	×	Fe^x	ИП8	×
ИП9	Fx^2	ИП6	×	Fe^x	ИПА	×	—	ИПВ	Fx^2
ИП6	×	Fe^x	ИПС	×	÷	С/П			

Нетрудно заметить, что в данном случае введение подпрограммы сократило общее число шагов программы на 4 шага. Однако время вычисления при введении подпрограммы несколько увеличивается. Действительно, при $x=3$, $a=100$, $y=2$, $b=5$, $z=4$ и $c=0{,}01$ получим результат $f=1{,}6775483\cdot10^{-1}$ за время около 15 с по первой и около 12 с по второй программе.

Теперь рассмотрим составление циклических программ. Пусть надо вычислить функцию

$$f(x)=\ln\frac{e^x+1}{x+1}$$

для $x=1, 2, 3, \ldots$ Один из простейших вариантов программы вычисления $f(x)$ имеет вид (0=Р4)

КИП4	ИП4	Fe^x	1	+	ИП4	1	+	÷	F ln
С/П	БП	00							

Первые два оператора обеспечивают увеличение содержимого регистра Р4 → x на 1 при каждом пуске программы. Последующие операторы (с адресами 03—10) служат для вычисления $f(x)$. Операторы БП 00 обеспечивают переход к началу программы. Таким образом, при нажатии клавиши С/П происходит циклическое вычисление $f(x)$, причем при каждом цикле x возрастает на 1. Нажимая клавишу С/П (перед первым пуском В/0 и С/П), будем получать $f(1)=0{,}6201145$, $f(2)=1{,}0283157$, $f(3)=1{,}6622929$ и т. д.

Вычисления можно автоматизировать в еще большей степени. Пусть надо автоматически вычислить до 12 значений $f(x)$ для $x=1, 2, 3, \ldots, 12$ с записью результатов без вмешательства оператора в регистры 1, 2, ..., 9, А, В, С. В этом случае требуется дополнительно решить две задачи: организовать до $n\leqslant12$ циклов вычислений и предусмотреть автоматический выбор регистров для

записи результатов. Первая задача решается использованием оператора организации цикла, например в регистре 0 — FL0. Вторая — использованием косвенной адресации. Один из вариантов такой программы следующий (n = P0):

ИП0	ПД	Fe^x	1	+	ИПД	1	+	÷	Fln
КПД	FL0	00	С/П						

В начале программы содержимое регистра счетчика 0 (при первом пуске n) переписывается в регистр адресации РД — операторы ИП0 ПД. Затем (операторы с адресами 01—09) вычисляется $f(x)$. Оператор КПД обеспечивает запись $f(x)$ в тот регистр, номер которого указан содержимым регистра Д. Оператор FL0 обеспечивает возврат к началу программы (адрес 00) и уменьшение на 1 содержимого регистра 1. Циклы продолжаются, пока содержимое регистра 0 не станет равным 0. Введя, например, $n = 10$, спустя минуту счета получим $f(1) = 0{,}6201145$. Извлекая из регистров 2, 3, ..., 9, А другие значения $f(x)$, получим: $f(2) = 1{,}0283157$, $f(3) = 1{,}6622929$, ..., $f(10) = 7{,}6021501$.

Большое число конкретных примеров программирования читатель найдет в последующих разделах книги. Однако внимательное знакомство с приведенными простыми примерами поможет разобраться в алгоритмах вычислений, реализованных в более сложных программах. Эти примеры иллюстрируют также большие функциональные возможности косвенной адресации и операторов организации циклов.

Следует обратить внимание на то, что в некоторых микрокалькуляторах первых выпусков нельзя по программе производить смену знака вычислений и заканчивать подпрограммы следующими операторами: Fsin, Fcos, Ftg, Farcsin, Farccos, Farctg, Fe^x, Flg, Fln, Fx^2, $F1/x$, $F\sqrt{\ }$, Fπ, $F10^x$ и Fx^y. Если по условию задачи надо провести смену знака результата, то при умножении и делении это можно сделать, присвоив знак минус одному из сомножителей, либо делимому, либо делителю. Например, если надо вычислить число $-ab$ (a = РА, b = РВ), то фрагмент программы должен быть ИПА /—/ ИПВ × или ИПА ИПВ /—/ ×, а не ИПА ИПВ × /—/. Отмеченные выше операции допустимо проводить перед засылкой результата в какой-либо неиспользованный регистр памяти (в том числе в регистр Y командой ↑).

Описанные в книге программы составлены с учетом этого ограничения с тем, чтобы они были пригодны для любых микрокалькуляторов данного типа. В выпускаемых в дальнейшем микрокалькуляторах эти ограничения отсутствуют, что несколько упрощает составление программ.

Для уменьшения времени вычислений в циклических программах рекомендуется выносить за пределы цикла фрагменты программ,

вычисляющие члены уравнений, которые не меняются от цикла к циклу. Полезно также нормирование уравнений и приведение их к возможно более простому виду.

1.5. Погрешности вычислений на микрокалькуляторах

Получаемый в результате вычислений результат y отличается от точного y_0. *Абсолютная погрешность* вычисления

$$\Delta_y = |\Delta y| = |y_0 - y|,$$

а *относительная*

$$\delta_y = \Delta_y / |y_0|.$$

Поскольку значения y_0 не всегда заранее известны, иногда задают Δy независимо. Например, если $\Delta y = \pm 2$, то при $y_0 = 5$ имеем $y = 5 \pm 2 = 3 \div 7$, а при $y_0 = 100$ $y = 100 \pm 2 = 98 \div 102$. Часто задают y числом верных знаков результата. *Верными* называют знаки, если представленный ими результат имеет абсолютную погрешность не более 1/2 младшего разряда. Например, если результат $y = 50{,}0124$ задан тремя верными знаками, то можно принять, что $49{,}95 < y < 50{,}05$.

Поскольку результат вычислений микро-ЭВМ выдает с конечным числом знаков, ему всегда присуща *погрешность округления*. Обычно ее считают равной ± 1 последнего разряда.

При вычислении элементарных и специальных функций наблюдается *методическая погрешность*. Она связана с тем, что такие вычисления проводятся разложением функций в ряд или непрерывную дробь с конечным числом членов. Отбрасываемые члены создают погрешность результата, оцениваемую остаточным членом R. Эта погрешность обычно зависит от аргумента x (см. табл. 1.4 для микрокалькуляторов Электроника Б3-34).

При вычислении функций нескольких переменных $y = f(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$ относительная погрешность вычисления

$$\delta_y = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (S_i \delta_i)^2},$$

где S_i — коэффициент чувствительности к относительному изменению δ_i i-го параметра.

Погрешность, получаемая в результате проведения операций над приближенными числами, называется *операционной погрешностью*. Операционная погрешность арифметических операций равна сумме погрешностей чисел, над которыми проводятся эти операции. Существуют определенные правила уменьшения этой погрешности. Так, суммировать числа рекомендуется с меньших значений. При умножении следует умножать меньшее число на большее. Если промежуточный результат при этом $y_i > 1$, его надо умножить на меньшее

Таблица 1.4

Функция	Допустимые значения x	Максимальная относительная погрешность
$\sin x$	$1\cdot10^{-49}<\lvert x\rvert<10^{9}$	$3\cdot10^{-7}$
$\cos x$	$1\cdot10^{-49}<\lvert x\rvert<10^{9}$	$3\cdot10^{-7}$
$\operatorname{tg} x$	$1\cdot10^{-99}<\lvert x\rvert<10^{9}$	$3\cdot10^{-7}$
$\arcsin x$	$\lvert x\rvert\leqslant1$	$3\cdot10^{-7}$
$\arccos x$	$\lvert x\rvert\leqslant1$	$3\cdot10^{-7}$
$\operatorname{arctg} x$	$1\cdot10^{-99}\leqslant\lvert x\rvert\leqslant9{,}9999999\cdot10^{99}$	$3\cdot10^{-7}$
x^{y}	$x\geqslant0$	$1\cdot10^{-6}$
e^{x}	$\lvert x\rvert<100\ln10$	$4\cdot10^{-7}$
x^{2}	$\lvert x\rvert<10^{50}$	$1\cdot10^{-7}$
10^{x}	$\lvert x\rvert<99{,}999999$	$4\cdot10^{-7}$
$1/x$	$x\neq0$	$1\cdot10^{-7}$
$\sqrt{x}$	$x>0$	$1\cdot10^{-4}$
$\ln x$	$x>0$	$3\cdot10^{-7}$
$\lg x$	$x>0$	$3\cdot10^{-7}$

из оставшихся чисел, если $y_i<1$, то надо умножить на большее. Операции умножения и деления целесообразно чередовать друг с другом, избегая переполнения операционного регистра X. Следует избегать вычитания близких чисел, так как результат может попасть в область машинного нуля, что может привести к большим погрешностям, например, при последующем умножении даже на большое число.

Для уменьшения операционной погрешности полезно проводить преобразования функций с учетом отмеченных выше правил. Например, $y=(a+b)^2-a^2$ при $b\ll a$ следует представить в виде $y=2ab+b^2$, что позволит избежать вычитания близких чисел $(a+b)^2$ и b^2. К таким преобразованиям относится также нормирование уравнений, степенных полиномов и других функций, проводимое так, чтобы вычисления велись с числами, далекими от машинного нуля или бесконечности.

1.6. Инструкция по вводу и пуску программ для микрокалькуляторов

1. Перед использованием программ следует внимательно ознакомиться с алгоритмом вычислений и правилами работы с программой.

2. Включив микрокалькулятор, переводим его в режим программирования, нажав клавиши F и ПРГ, затем вводим программу, нажимая указанные в ней клавиши.

3. Нажав клавиши F, АВТ и В/0, переводим калькулятор в режим автоматических вычислений и устанавливаем программу на нулевой шаг.

4. В точном соответствии с инструкцией вводим исходные данные: обозначение вида $x_i = PN$ означает ввод x_i прямо в регистр N, обозначение $x_i = PX$ означает ввод x_i в регистр X с фиксацией ввода нажатием клавиши С/П. Для ввода $x_i = PY$ нажимаем клавишу ↑.

5. Пускаем программу, нажав клавишу С/П. Вычисления сопровождаются миганием индикатора. Если время счета не оговорено, результат должен появиться спустя 30—40 с. Обозначения вида $y_i \to PX$, $z_i \to PX$ и так далее указывают на то, что результат y_i появляется на индикаторе регистра X (для получения затем z_i надо нажать клавишу С/П и т. д.). Обозначение $y_i \to PN$ означает, что результат заносится в регистр N (результат из регистра N вызывается нажатием клавиш ИП и N). Если программа зациклилась, счет прерывается нажатием клавиши С/П.

6. Программу следует проверить по контрольному примеру. Если его результат ошибочен, необходимо внимательно проанализировать программу по кодам (см. табл. 1.3) и уточнить правильность ввода исходных данных. Иногда полезно провести вычисления по шагам, что позволяет выявить и затем устранить ошибки.

7. Приведенные в основном тексте справочника программы пригодны для микрокалькуляторов Электроника Б3-34, Электроника МК-54 и Электроника МК-56 с учетом эквивалентности символов: ↑ = В↑, ИП = П → x, П = x → П, arcsin = $\sin^{-1}$, arccos = $\cos^{-1}$, arctg = tg^{-1}, A = a, $B = b$, C = c, $Д = d$ и XY = X ⇄ Y.

Внимание! Операторы косвенной адресации КИП↑ (код ⌈E), КП↑ (код ⌊E), КБП↑ (код 8E) и т. д. аналогичны операторам КИП0, КП0, КБП0 и т. д. с регистром адресации 0. Однако при их исполнении содержимое регистра 0 не модифицируется. Операторы К7 (код 34), ..., КД (код 3—) обеспечивают вызов одной командой знака ошибки ЕГГОГ. Оператор ВП при $x = 0 = PX$ засылает в этот регистр 1. Поскольку данные операторы не регламентированы, программы с их применением даны отдельно в приложении 3. При завершении выполнения циклов с операторами FL0 ÷ FL3 в адресном регистре остается число 1 (т. е. при последнем их исполнении вычитание 1 не происходит).

Глава 2

МИКРОКАЛЬКУЛЯТОРЫ С АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ ЛОГИКОЙ ВЫЧИСЛЕНИЙ

2.1. Общие сведения

Микрокалькуляторы с *алгебраической логикой* выполняют вычисления в более естественном виде благодаря использованию клавиш ввода *скобок* [( ], [[( ], [ )], [ )]] и равенства [=]. В таких микрокалькуляторах числа вводятся в стек при нажатии клавиши с открывающимися скобками, а выводятся — при нажатии клавиши с закрывающимися скобками. Число скобок, иногда только круглых, может быть от 1 до 16 и определяется числом регистров в стеке. Такие калькуляторы подразделяются на: 1) непрограммируемые, 2) программируемые с обычной алгебраической логикой, 3) программируемые по системе *AER* (*Algebraic Expression Reserve — алгебраическое выражение условий*) и 4) программируемые на упрощенной версии языка высокого уровня бейсик.

В табл. 2.1 даны характеристики отечественных непрограммируемых микрокалькуляторов для научных и инженерных расчетов. В функциональном отношении они различаются мало. Поэтому рассмотрим наиболее современную модель миниатюрного микрокалькулятора Электроника Б3-38 с наибольшим числом выполняемых операций. Этот калькулятор (рис. 2.1) имеет тройное управление большинством клавиш, достигаемое применением двух функциональных (префиксных) клавиш F_1 и F_2. Общий сброс осуществляется клавишей С, сброс ошибочно набранного числа осуществляется клавишей СК. Имеется один дополнительный регистр памяти (ввод чисел в него задается нажатием клавиш F_1 ЗП, а вызов — нажатием клавиш F_2 ИП). Скобки [(и)] двойные.

Для непрограммируемых микрокалькуляторов очень полезно составлять программы вычислений. Так, обозначая операнды-числа в кружках, вычисление выражения $a+(b+(c+d))=?$ можно выполнить по такой программе:

$$ⓐ \; + \; (\; ⓑ \; + \; (\; ⓒ \; + \; ⓓ \;) \;) \; =$$

Таблица 2.1

Характеристики отечественных непрограммируемых микрокалькуляторов с алгебраической логикой вычислений, предназначенных для инженерных и научно-технических расчетов

Параметр	Тип ЭВМ						
	Электроника						
	С3-15	Б3-32	Б3-35	Б3-36	Б3-37	Б3-38	МК-51
Число разрядов индикатора	15	9	12	12	9	9	9
Число разрядов мантиссы/порядка	10/2	5/2	8/2	8/2	8/0	5/2	5/2
Число дополнительных регистров памяти	2	1	1	1	1	1	1
Скобки	( )	[( )]	[( )]	[( )]	[( )]	[( )]	[( )]
Вычисление функций: $1/x$; x^2; $\sqrt{x}$; x^y; $\ln x$; $\lg x$; e^x; 10^x	Есть, кроме 10^x	Есть	Есть	Есть	Есть	Есть	Есть
Вычисление тригонометрических и обратных тригонометрических функций, вызов π	Есть	Есть	Есть	Есть	Есть	Есть	Есть
Операции в регистрах памяти	Нет	П+	П+П−П× П÷x ⇄ П	П+П−П× П÷x ⇄ П	П+П−П+x^2 П ⇄ x	П+П−П ⇄ x	П+П−П ⇄ x
Другие функции	$\sqrt{x^2+y^2}$	Корни квадратных уравнений	$n!$	$n!$		$n!$ ° ′ ″	$n!$ ° ′ ″
Статистические расчеты	Нет	Нет	Нет	Нет	Нет	Есть	Есть
Представление углов	Радианы	Радианы Градусы	Градусы	Радианы Градусы	Радианы Градусы	Радианы Градусы Грады	Радианы Градусы Грады
Габариты, мм	170×90×32	120×73×30,4	143×79×22	145×78,5×17	155×78×28	55×91×5,5	139×71×8
Масса, кг	0,4	0,3	0,25	0,2	0,2	0,05	0,1
Потребляемая мощность, Вт	1,2	0,3	0,3	0,35	0,3	0,0096	0,0006
Питание У—универсальное, Б—от батареек	У	У	У	У	У	Б	Б

Подставляя вместо $a \div b$ числа 2, 3, 4 и 5, получим результат 29. Нередко с помощью непрограммируемых микрокалькуляторов можно вести вычисления по программам, составленным для программируемых микрокалькуляторов (если к этому вынуждает их отсутствие).

Одноместные операции выполняются указанием их оператора после набора числа x. Например, sin 30° вычисляем, набрав число 30 и нажав клавиши F_1 sin (указываем только действующую надпись на клавише или над ней).

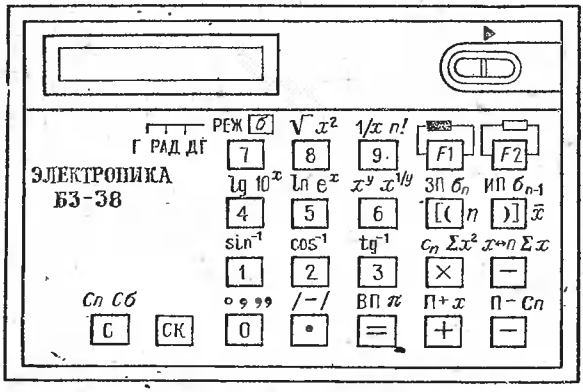

Рис. 2.1. Внешний вид микрокалькулятора Электроника Б3-38 с алгебраической логикой вычислений

Приведем примеры более сложных вычислений:

1. Вычисление гиперболического косинуса $\operatorname{ch} x = (e + 1/e^x)/2$

$$(x) \quad F_2 \quad e^x \quad + \quad F_1 \quad 1/x \quad \div \quad (2) \quad =$$

Для $x = 1$ получим $\operatorname{ch}(1) = 1{,}5430806$.

2. Вычисление обратного гиперболического косинуса $\operatorname{arch} x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$

$$\begin{array}{cccccccc} (x) & F_1 & ЗП & + & [(& F_2 & ИП & F_2 \\ 1 &)] & F_1 & \sqrt{\ } & = & F_1 & \ln & \end{array} \quad x^2 \quad -$$

Этот пример иллюстрирует применение регистра памяти. Для $x = 2$ получим $\operatorname{arch}(2) = 1{,}3169678$.

3. Вычисление числа сочетаний $C_9^3 = 9!/(3!\,(9-3)!)$

$$\begin{array}{cccccccc} (9) & F_2 & n! & \div & [(& [(& (3) & F_2 \\ \times & [(& (9) & - & (3) &)] & F_2 & n! \end{array} \quad \begin{array}{c} n! \\ )] \\ )] \\ = \end{array}$$

Получим $C_9^3 = 84$.

4. Для пяти чисел 7, 8, 8, 9 и 9,5 найти среднее и дисперсию. Ввод проводим по программе:

$$\begin{array}{cccccccccc} F_2 & \boxed{\sigma} & (7) & F_2 & x & (8) & F_2 & x & (8) & F_2 \\ x & (9) & F_2 & x & (9{,}5) & F_2 & x & & & \end{array}$$

Нажав клавишу с надписью справа $\bar{x}$, получим $\bar{x} = 8{,}3$, нажав клавишу с надписью справа n, получим $n = 5$ (число введенных чисел), нажав клавишу F_2 и клавишу с надписью сверху σ_n, получим $\sigma_n = 0{,}8717797$, и, нажав клавишу F_2 и клавишу с надписью сверху σ_{n-1}, получим $\sigma_{n-1} = 0{,}9746794$. Также можно вычислить $\sum x = 41{,}5$ и $\sum x^2 = 348{,}25$.

5. Найти корни квадратного уравнения $x^2 + px + q = 0$ по формулам $x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$. Программа вычислений имеет вид

$$\begin{array}{cccccccccc} (p) & F_2 & x^2 & \div & (4) & - & (q) & = & F_1 & \sqrt{\ } \\ F_1 & ЗП & (p) & \div & (2) & - & - & F_1 & ИП & \boxed{=} \\ F_1 & ИП & F_1 & /-/ & \boxed{=} & & & & & \end{array}$$

Корни получаем после исполнения операторов $\boxed{=}$. Если $p = 2{,}736$ и $q = -5{,}219$, то имеем $x_1 = 1{,}294785$ и $x_2 = -4{,}030785$ В этой программе член $p/2$ становится константой после исполнения подряд операторов — и —.

6. Найти, сколько граммов радия

$$m(t) = m_0 e^{-\ln 2t/T_{1,2}}$$

останется после его радиоактивного распада за время $t = 2000$ лет, если исходная масса $m_0 = 125$ г, а период его полураспада $T_{1/2} = 1620$ лет. Программа вычислений $m(t)$ в общем виде следующая:

$$\begin{array}{cccccccccc} (2) & F_1 & \ln & \times & (t) & \div & (T_{1,2}) & = & F_1 & /-/ \\ F_2 & e^x & \times & m_0 & = & & & & & \end{array}$$

Для приведенных данных $m(t) = 53{,}12122$ г.

Сложные и многократно повторяющиеся вычисления удобно проводить на программируемых микрокалькуляторах. Отечественные программируемые микрокалькуляторы с алгебраической логикой вычислений к моменту подготовки данной книги находились в стадии разработки. Поэтому далее рассмотрены основные типы широкораспространенных зарубежных калькуляторов (табл. 2.2).

Таблица 2.2

Характеристики зарубежных программируемых микрокалькуляторов с алгебраической логикой вычислений

Параметр	Тип ЭВМ						
	SR-52	SR-56	TI-58C	TI-59	FX-502P	FL-5100	FL-5101
Фирма (страна) изготовитель	TI (США)	TI (США)	TI (США)	TI (США)	Casio (Япония)	Sharp (Япония)	Sharp (Япония)
Число регистров памяти	20	10	60	100	22	25	12
Число шагов программы	100	224	480	960	256	80 членов формул	48 членов формул
Функции y^x, $\sqrt{x}$, $\ln x$, $\lg x$, e^x, 10^x, $1/x$, вызов π	Есть	Есть	Есть	Есть	Есть	Есть	Есть
Тригонометрические и обратные тригонометрические функции	Есть	Есть	Есть	Есть	Есть	Есть	Есть
Статистические расчеты	Есть	Есть	Есть	Есть	Есть	Есть	Есть
Гиперболические функции	Нет	Нет	Нет	Нет	Нет	Есть	Есть
Число разрядов мантиссы/порядка	10/2	10/2	10/2	10/2	10/2	10/2	10/2
Запоминание программ и данных	Нет	Нет	Есть	Нет	Нет	Есть	Есть
Логика вычислений (О — обычная или *ARE*)	О	О	О	О	О	*ARE*	*ARE*
Запись программ на магнитные карты	Есть	Нет	Нет	Есть	Нет	Нет	Нет
Подключение принтера	Нет	Нет	Есть	Есть	Нет	Нет	Нет
Встроенный модуль с библиотекой программ пользователя	Нет	Нет	Есть	Есть	Нет	Нет	Нет
Габариты, мм	90×160×40	80×150×30	162×80×36	162×80×36	141×71×9,6	175×70×9,8	175×70×9,3
Масса, г	350	235	350	350	72	120	110
Питание У — универсальное, Б — от батареек	У	У	У	У	Б	Б	Б

Калькуляторы этого класса обычно имеют *иерархию операций*, т. е. выполнение их в определенном порядке: 1 — вычисление математических функций, 2 — вычисление функций x^y и $\sqrt[y]{x}$ (или y^x и $\sqrt[x]{y}$), 3 — умножение и деление, 4 — сложение и вычитание и 5 — окончание вычислений (оператор =). Так, при наличии иерархии выражение $2+3\times4$ вычисляется как $2+(3\times4)=14$, а при отсутствии ее как $(2+3)\times4=20$. Наличие иерархии позволяет более экономно использовать скобки и сокращать длину программ, которая обычно бывает несколько больше, чем у калькуляторов с обратной бесскобочной логикой вычислений.

Калькуляторы EL-5100 и EL-5101 фирмы Sharp (Япония) реализуют метод программирования *AER*. Его суть заключается в формульном представлении программ. Например, вычисление функции

$$f(A,\ B,\ C)=0{,}5\ AB\ \sin C$$

выполняется по такой программе, вводимой в режиме *AER* [23]:

2nd $f(\ \ )=ABC$ $f(\ \ )=5\ A\ B\ \sin C$

Вначале резервируются переменные *A B C* в виде букв, а затем записывается формула для вычисляемой функции.

Вычисления сводятся к вводу исходных данных по подсказке калькулятора путем нажатия клавиши COMP. Первое ее нажатие ведет к появлению на дисплее сообщения $A=?$ (надо ввести *A*), второе к сообщению $B=?$ (надо ввести *B*), третье к сообщению $C=?$ (вводим *C*). Нажав клавишу COMP, еще раз получим значение $f(A\ B\ C)$. При системе *AER* число нажатий клавиш существенно меньше, чем при обычной алгебраической логике вычислений.

Микрокалькуляторы с системой программирования *AER* явились шагом к разработке наиболее совершенных микрокалькуляторов, программируемых на языке высокого уровня бейсик [13]. Его особенности заключаются в выражении сложных операторов в виде сокращенных английских слов (INPUT — ввести, LET — присвоить, PRINT — напечатать, GOTO — идти к строке, GOBUS — идти к подпрограмме, RETURN — возврат из подпрограммы, END — конец и т. д.), возможности ввода словесных комментариев, диалоговом режиме общения с пользователем. Так, программа вычисления функции F = f(A, B, C) на бейсике имеет наглядный и не требующий особых пояснений вид:

```
10 INPUT ' ВВЕДИТЕ A, B, C' A, B, C
20 LET   F = 0.5 * A * B * SIN (C)
30 PRINT F : GOTO 10 : END
```

Подробное описание микрокалькуляторов, программируемых на бейсике (см. табл. 2.3), и самого языка выходит за рамки данной

Таблица 2.3

Характеристики микрокалькуляторов, программируемых на языке бейсик

Параметр	Тип ЭВМ				
	PC-1210	PC-1211	PC-1500	ZX80 *) ZX81	ZX *) Spectrum
Фирма (страна) изготовитель	Sharp (Япония)	Sharp (Япония)	Sharp (Япония)	Sinclair (Англия)	Sinclair (Англия)
Объем ПЗУ, кбайт	Данных нет	Данных нет	16	16	16
Объем ОЗУ, кбайт	Данных нет	Данных нет	3,5 + 3,5	16	16/48
Число регистров памяти	26/40	178	Данных нет	Данных нет	Данных нет
Число шагов программы	400	400 + 1024	Данных нет	Данных нет	Данных нет
Встроенный дисплей	24 знака	24 знака	7 × 156 точек	Нет	Нет
Вывод информации на стандартный телевизор	Нет	Нет	Нет	Есть (цифры, буквы, графика)	Есть (цифры, буквы, графика, 8 цветов)
Периферийные устройства: П — принтер, Т — телевизор, КМ — кассетный магнитофон, ВПЗУ — внешнее ПЗУ	П	П	П КМ ПЗУ	Т КМ П	Т КМ П Дисковый накопитель на 100 кбайт
Размеры, мм	175×71×15	175×71×15	196×86×25,5	229×178×51	233×144×30
Масса, г	163	163	375	340	300

*) Модели ZX относятся к простейшим персональным ЭВМ. Они не имеют встроенного дисплея и для отображения программ и данных должны подключаться к стандартному телевизору — цветному для ZX Spectrum.

книги, поскольку они ближе к сложным персональным ЭВМ, чем к обычным программируемым микрокалькуляторам. Нередко подобные микрокалькуляторы оснащаются многочисленным *периферийным оборудованием.* Так, один из наиболее сложных калькуляторов RL-H1000 ННС фирмы Panasonic (США) имеет следующее периферийное оборудование: акустический телефонный модем для передачи данных по телефонным линиям со скоростью 110 или 300 бит/с (разрядность от 5 до 8, предусмотрен контроль четности), внешняя программируемая память на 8 кбайт с автономным питанием, устройство термопечати с шириной строки на 16 символов, адаптер к телевизору для отображения 16—32 символьных строк, адаптер для подключения одного-двух кассетных магнитофонов для записи данных и программ, последовательный интерфейс для передачи данных со скоростью от 110 до 9600 бит/с, драйвер управления до 6 периферийных устройств ввода-вывода и т. д. Следует отметить, что стоимость подобных калькуляторов (учитывая микроминиатюрность всего комплекса оборудования) выше стоимости персональных ЭВМ и даже мини-ЭВМ. Поэтому широкого распространения они пока не получили.

В то же время ряд широко распространенных современных моделей микрокалькуляторов (например, TI-58C, TI-59, HP-67, HP-97 и др.) также приобрел присущие ЭВМ черты: встроенные библиотеки программ пользователя, встроенные магнитофоны для записи данных и программ, периферийные (иногда встроенные) устройства печати — принтеры. Причем это сочетается с умеренной стоимостью и доступностью.

2.2. Клавиатура и язык микрокалькуляторов с алгебраической логикой

С клавиатурой и языком современных микрокалькуляторов с алгебраической логикой можно ознакомиться на примере широко распространенных моделей программируемых микрокалькуляторов высокого класса TI Programmable 58C и 59 (TI-58C/59). Пульт управления их (рис. 2.2) содержит 45 клавиш, которыми вводятся 108 операций. Это достигается с помощью *клавиши двойной операции* 2nd (она нажимается, если выполняется операция, обозначение которой находится над основной клавишей) и клавиши инвертирования операции INV (см. ниже). В программах нажатие клавиши 2nd не указывается, так как на него прямо указывает расположение функциональной надписи основной клавиши. Например, нажав клавишу $\overset{\log}{\boxed{\ln x}}$, вводим оператор $\ln x$, нажав клавиши 2nd и $\overset{\log}{\boxed{\ln x}}$,

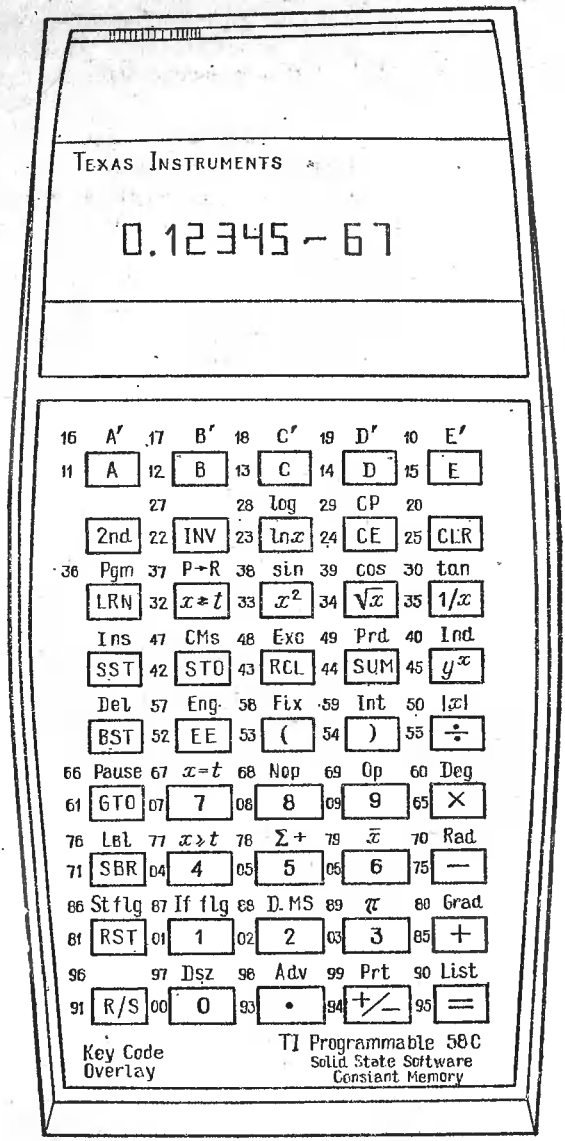

Рис. 2.2. Внешний вид программируемого микрокалькулятора TI-58C с алгебраической логикой вычислений

вводим оператор $\log(\log x)$, нажав клавиши INV 2nd $\boxed{\overset{\log}{\ln x}}$, вводим оператор 10^x и т. д.

Операторы ввода чисел. К ним относятся цифры 0, 1 ... 9, разделительная точка . , оператор смены знака мантиссы или порядка +/—, оператор ввода порядка EE и оператор вызова числа $\pi = 3{,}141592653590$ (выводится 10 знаков из 13 используемых при вычислениях).

Операторы стирания (сброса). Общий сброс вводится оператором CLR. При этом устанавливается на 0 содержимое регистра X, устанавливается стандартная форма представления чисел, прекращается индикация ошибок (мигание индикатора). Содержимое регистров памяти сохраняется.

Оператор CE (*clear entry — стирание ввода*) обеспечивает только стирание числа в регистре X (за исключением числа π). Стирание программы обеспечивается вводом вручную оператора CP (*clear program — стирание программы*), а очистка всех регистров памяти осуществляется оператором CMs (*clear memory — стирание памяти*). Оператор CP в программе обеспечивает стирание содержимого регистра сравнения *t*.

Операторы прямых и обратных функций. Операторы *прямых функций* вводятся нажатием основных клавиш, *обратных функций* — после нажатия клавиши INV.

Прямая функция		Обратная функция	
EE	(ввод порядка)	INV EE	(сброс порядка)
Eng	(ввод инженерного формата)	INV Eng	(сброс инженерного формата)
Fix	(ввод ограничения числа знаков)	INV Fix	(сброс ограничения числа знаков)
log	(десятичный логарифм)	INV log	(функция $y=10^x$)
ln x	(натуральный логарифм)	INV ln x	(функция $y=e^x$)
y^x	(y в степени x)	INV y^x	(корень степени x из числа y)
Int	(выделение целой части x)	INV Int	(выделение дробной части x)
sin	(sin x)	INV sin	(arcsin x)
cos	(cos x)	INV cos	(arccos x)
tan	(tg x)	INV tan	(arctg x)
Prd	(умножение в регистре)	INV Prd	(деление в регистре)
SUM	(суммирование в регистре)	INV SUM	(вычитание в регистре)
D. MS	(преобразование угла в градусы с десятичными долями)	INV D. MS	(преобразование угла в градусы, минуты, секунды)
$P \to R$	(преобразование полярных координат в декартовы)	INV $P \to R$	(преобразование декартовых координат в полярные)

Прямая функция		Обратная функция	
$\Sigma+$	(накопление с суммированием)	INV $\Sigma+$	(накопление с вычитанием)
$\bar{x}$	(среднее значение)	INV $\bar{x}$	(стандартное отклонение)
list	(печать программы)	INV list	(печать данных из регистров)
SBR	(обращение к подпрограмме)	INV SBR	(возврат из подпрограммы)
$x=t$	(условие перехода)	INV $x=t$	($x \neq t$)
$x \geqslant t$	(условие перехода)	INV $x \geqslant t$	($x < t$)
if flg	(проверка подъема флага)	INV if flg	(проверка спуска флага)
st flg	(поднять флаг)	INV st flg	(опустить флаг)
Dsz	(скачок, если $R_x=0$)	INV Dsz	(скачок, если $R_x \neq 0$)
Write	(запись программы)	INV Write	(считывание программы)

Операторы установки формата чисел. *Нормальный формат* соответствует выводу десяти знаков мантиссы в виде десятичного числа с фиксированной запятой. При вводе порядка оператором EE устанавливается *научный* (экспоненциальный) формат чисел $x = M \cdot 10^E$, где M — нормированная мантисса, содержащая 8 знаков, и E—порядок, содержащий два знака. Например:

Знак мантиссы	Мантисса	Знак порядка	Порядок
—	2. 5786431	—	16

Диапазон чисел лежит в пределах от $\pm 1 \cdot 10^{-99}$ до $x_M = 9{,}9999999 \cdot 10^{99}$.

Инженерный формат вводится оператором Eng. При этом порядок чисел равен 0 или кратен трем. Например, разделив 1 на 3, получим .3333333333. Нажав клавиши EE и =, получим 3.3333333 — 01, нажав далее клавиши 2nd и Eng, получим 333.33333 — 03.

Формат с фиксацией числа знаков после запятой N устанавливается вводом оператора Fix N. Например, при $N = 2$ предшествующий результат получим (после нажатия клавиш 2nd Fix 2) в виде 333.33 — 03.

Операторы арифметических операций. К ним относятся операторы сложения +, вычитания —, умножения ×, деления ÷, ввода открывающих (и закрывающих) скобок и знака равенства =. Допустим ввод до девяти пар скобок.

Операторы алгебраических функций. К операторам *алгебраических функций* относятся вычисление натурального логарифма $\ln x$, десятичного логарифма $\log(\lg x)$, функции e^x — INV $\ln x$, функции 10^x — INV log, квадрата x — x^2, квадратного корня $\sqrt{x}$, функций y^x и $\sqrt[x]{y}$ — INV y^x. За исключением функций y^x и $\sqrt[x]{y}$ остальные

функции вычисляются после ввода числа x в регистр X. Например, нажав клавиши 2 INV ln x, получим $e^2 = 7.389056099$.

Для вычисления функции y^x вводится число x, исполняется оператор y^x, вводится число y и исполняется оператор =. Для вычисления функции $\sqrt[x]{y} = y^{1/x}$ вводится число y, затем исполняется оператор INV y^x, вводится число x и исполняется оператор =. Например, для вычисления $\sqrt[3]{64} = 4$ нажимаем клавиши 6 4 INV y^x 3 = .

Тригонометрические и обратные тригонометрические функции. Эти функции вычисляются при представлении углов в градусах (оператор Deg), радианах (оператор Rad) и градах (оператор Grad).

Синус, косинус и тангенс вычисляются вводом операторов sin, cos и tan *). Если после них исполняется оператор $1/x$, то вычисляются косеканс $\csc x = 1/\sin x$, секанс $\sec x = 1/\cos x$ и котангенс $\cot x = 1/\mathrm{tg}\, x$. Аргумент может находиться в пределах $\pm 36\,000°$, $\pm 200\pi$ радиан и $\pm 40\,000$ град.

Обратные тригонометрические функции вычисляются, если перед операторами вводится оператор INV. Результат при этом представляется в следующих пределах:

arcsin x	$0 \div 90°$, $\pi/2$ радиан, 100 град,
arcsin $(-x)$	$0 \div -90°$, $-\pi/2$ радиан, -100 град,
arccos x	$0 \div 90°$, $\pi/2$ радиан, 100 град,
arccos $(-x)$	$90 \div 180°$, $\pi/2 \div \pi$ радиан, $100 \div 200$ град,
arctg x	$0 \div 90°$, $\pi/2$ радиан, 100 град,
arctg $(-x)$	$0 \div -90°$, $-\pi/2$ радиан, -100 град.

Арккосеканс arccsc x, арксеканс arsec x и арккотангенс arcot x вычисляются с помощью операторов $1/x$ INV sin, $1/x$ INV cos и $1/x$ INV tan.

Если угол задан в градусах, минутах и секундах, то его можно преобразовать в градусы с десятичными долями с помощью оператора D.MS. Например, угол $24° 17' 29''$ вводим в виде 24.1729 и, нажав клавиши 2nd и D.MS, получим $\varphi = 24.29138889°$. Обратное преобразование производится вводом оператора INV D.MS (нажимаются клавиши INV 2nd и D.MS).

Операторы выделения абсолютного значения, целой и дробной частей чисел. Абсолютное значение (*модуль*) дробного числа x выделяется при исполнении оператора $|x|$. Операторы Int и INV Int обеспечивают выделение целой и дробной частей числа x.

Операторы управления регистрами памяти. Запись чисел в регистр XX (XX — двухзначное число — адрес регистра) производится операторами вида STO XX (*store — записывать*). Вызов числа из регистра XX производится операторами RCL XX (*recall — вызвать*).

---

*) Обозначение функций соответствует приведенным в [26].

Обмен содержимым между регистрами X и XX производится при исполнении оператора Exc XX (*exchange — менять*). Оператор $x \rightleftarrows t$ обеспечивает обмен между регистрами X и t.

Операторы арифметических операций в регистрах памяти. С содержимым регистров X и XX можно выполнять арифметические операции с занесением результата в регистр XX. Такие операции вводятся операторами: сложение SUM XX, умножение Prd XX, вычитание INV SUM XX и деление INV Prd XX.

Пример. Разделить число 12, хранящееся в регистре 00, на число 2,5 = RX.

Нажимаем клавиши 1 2 STO 00 (ввод числа 12 в регистр 00) 2 . 5 INV 2nd Prd 00. Теперь, нажав клавиши RCL 00, вызываем из регистра 00 результат — число 4,8. При этих операциях содержимое регистра X не меняется.

Преобразования систем координат. Пусть в системе полярных координат (P) имеется радиус-вектор с длиной R и углом θ (рис. 2.3, *а*). Нужно найти координаты x и y в декартовой системе

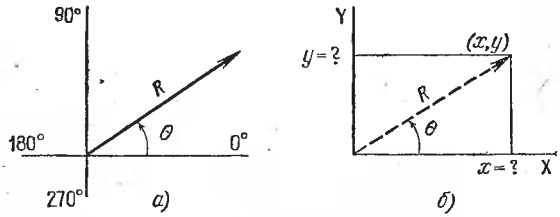

Рис. 2.3. К преобразованию координат: из полярных в декартовы (а) и из декартовых в полярные (б)

координат (рис. 2.3, *б*). Для этого служит оператор $P \to R$. Обратное преобразование выполняется с помощью операторов INV $P \to R$ (означает $R \to P$). Для проведения этих преобразований используется регистр t. Порядок преобразований следующий:

	$P \to R$	$R \to P$
Вводим	R	x
Исполняем оператор	$x \rightleftarrows t$	$x \rightleftarrows t$
Вводим	θ	y
Исполняем оператор	$P \to R$	INV $P \to R$
Получаем	y	θ
Исполняем оператор	$x \rightleftarrows y$	$x \rightleftarrows t$
Получаем	x	R

Угол θ вычисляется в пределах $-90° \leqslant \theta \leqslant 270°$ или $-\pi/2$ рад $\leqslant \theta \leqslant 3\pi/2$ рад или -100 град $\leqslant \theta \leqslant 300$ град.

Пример. $R = 5$, $\theta = 25°$, найти y и x.

Нажимаем клавиши 5 $x \rightleftarrows t$ 25 2nd $P \to R$ и получаем $y = 2.113091309$, нажав клавишу $x \rightleftarrows t$, получим $x = 4.531538935$.

Операторы управления вычислениями по программе. *Стирание программ* (*clear program*) в ОЗУ производится оператором CP. Перевод в режим программирования (обучения ЭВМ) и наоборот

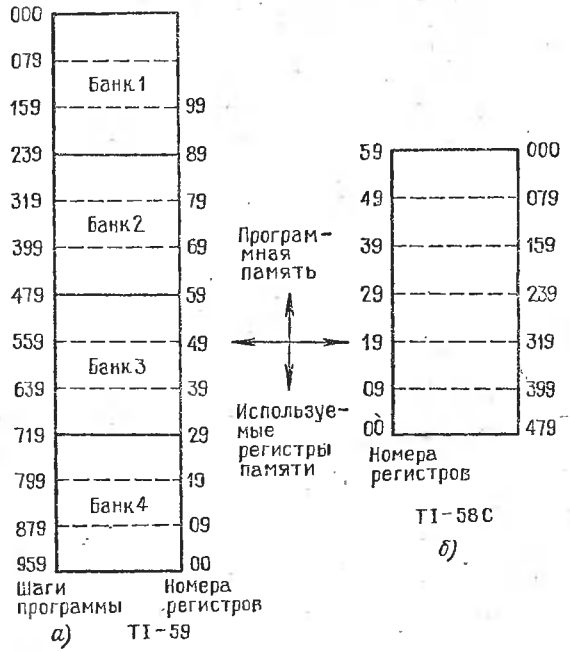

Рис. 2.4. Структура ОЗУ

производится нажатием клавиши LRN (*learne — учить*). *Останов вычислений* по программе и *пуск программы* производятся вводом оператора R/S (*run — stop*). В программе этот оператор обеспечивает останов вычислений для выдачи результата. В режиме счета он используется для пуска программы с того адреса, на котором она остановилась.

Оператор RST (*reset — возврат к нулю*) обеспечивает переход на нулевой адрес (000) программы. Кратковременный останов (на $\approx 0{,}5$ с) вычислений по программе обеспечивается вводом в нее оператора Pause (*пауза*).

Распределение объема ОЗУ. Емкость ОЗУ может распределяться пользователем между регистрами памяти и шагами программы (рис. 2.4). Каждые 10 регистров памяти занимают в ОЗУ место для 80 шагов программы.

Число десятков регистров N задается пользователем с помощью операторов N Op 17. При нажатии клавиш N 2nd Op 17 на индикаторе высвечиваются максимальный адрес программы и максимальный номер регистра памяти. Например, если $N = 3$, то на индикаторе будут цифры 239.29 (239 — максимальный номер шага и 29 — максимальный номер регистра памяти). Переполнение памяти, отведенной под регистры или программу, индицируется как *ошибка* мганием дисплея.

Операторы статистических расчетов. Простейшие статистические расчеты могут выполняться микропрограммно после очистки регистров оператором CMs. Для ввода чисел, подлежащих статистической обработке, служат клавиши 2nd $\Sigma+$, нажимаемые после ввода каждого числа x_i. Если какое-то число введено ошибочно, его исключают повтором набора и нажатием клавиш INV 2nd $\Sigma+$. Среднее значение ряда введенных чисел $\bar{x}$ можно вызвать на индикацию, нажав клавиши 2nd $\bar{x}$. Для вычисления дисперсии, коэффициента парной корреляции и параметров линейной регрессии (см. § 5.12 и 5.13) служат специальные операторы Op 11 ÷ Op 15 (см. далее). Их использование поясняет пример в приложении 1 (описание программы *ML*-01).

2.3. Элементарное программирование микрокалькуляторов с алгебраической логикой

Элементарное программирование микрокалькуляторов с алгебраической логикой мало отличается от такового для микрокалькуляторов с обратной бесскобочной логикой вычислений. Очевидные отличия заключаются в использовании операторов ввода скобок (до 9 пар) и оператора = (они достаточно очевидны), а также в учете приоритета операций. Рассмотрим несколько типовых примеров.

1. Вычисление

$$e = a + b \times (c - d) = ? \qquad (2.1)$$

при $a = R00$, $b = R01$, $c = R02$ и $d = R03$ с занесением результата в регистр $R04$ выполняется по программе

```
RCL  00  +  RCL  01   ×  (   RCL  02  —
RCL  03  )  =    STO  04  R/S
```

2. Иногда можно сократить программу, исключив скобки и создав приоритет выполнения операций вводом оператора =. Например, (2.1) можно вычислить по программе:

```
RCL  02  —  RCL  03  =   ×  RCL  01  +
RCL  00  =  STO  04  R/S
```

В данном случае сначала вычисляем $(c - d)$, умножаем результат на b и прибавляем затем a,

3. Вычисление

$$y = 7{,}06 \cdot 10^{-3} e^{2x} = 7.06 \cdot 10^{-3} \times (\exp(2 \times x)) = ? \qquad (2.2)$$

формально выполняется по программе ($x = R00$):

```
7  ·  0   6  EE  3   +/—  ×  (  (
2  ×  RCL  00  )  INV  ln x  )  =  R/S
```

Для $x = 2$ получаем $y = 3{,}8546294 \cdot 10^{-1}$.

4. Введя число $7{,}06 \cdot 10^{-3}$ в регистр $R01$ и несколько изменив порядок вычислений (2.2), можно заметно сократить программу:

```
2  ×  RCL  00  =  INV  ln x  ×  RCL  01
=  R/S
```

5. Вычисление

$$y = x - (\ln x + 1) = ? \qquad (2.3)$$

формально требует запоминания x для последующего ввода его в скобки и вычисления $\ln x$:

```
STO  00  —  (  RCL  00  ln x  +  1  )
=  R/S
```

Для $x = 3$ получим $y = 0{,}9013877113$.

6. Вычисление (2.3) можно выполнить по более простой программе:

```
—  (  ln x  +  1  )  =  R/S
```

учитывая, что после исполнения операторов — и (число x сохраняется в регистре X. Этот прием можно использовать, если после оператора (стоит оператор вычисления математической функции или оператор CE.

Операторы безусловных переходов. Безусловные переходы задаются к метке N (вводится любой клавишей, имеющей код) или трехзначному адресу $n\ nn$ с помощью операторов GTO N (двухшаговых) и GTO $n\ nn$ (трехшаговых). Символ GTO (*go to*) означает «идти к». Например, переход к началу программы задается оператором GTO 0 00. Такой переход дает и специальный оператор *RST*.

Операторы условных переходов. Имеется четыре типа операторов условных переходов.

Операторы	Условие перехода
$x \geqslant t$ N или $n\ nn$	$x \geqslant t$,
$x = t$ N или $n\ nn$	$x = t$,
INV $x \geqslant t$ N или $n\ nn$	$x < t$,
INV $x = t$ N или $n\ nn$	$x \neq t$.

Здесь t — содержимое регистра сравнения t. Если условие перехода выполняется, то происходит переход к метке N или адресу $n\ nn$. Если условие не выполняется, происходит выполнение оператора,

указанного после метки или адреса *n nn*. Оператор $x \rightleftarrows t$ обеспечивает обмен содержимого регистров X и *t*, например для ввода *t*. Оператор CP в программе обеспечивает очистку регистра *t* ($t = 0$).

Пример. Вычислить

$$y = \sin x/x \quad \text{при} \quad x \neq 0,$$
$$y = 1 \quad \text{при} \quad x = 0.$$

Программа

CP	Rad	$x = t$	0	13	STO	00	sin	÷	RCL	
00	=	R/S	1	R/S						

при $x = 0$ (в регистре *t* число 0) обеспечивает условный переход по адресу 013, т. е. вывод на индикацию числа 1. Если $x \neq 0$, то вычисляется $\sin x/x$.

Операторы ввода подпрограмм. Подпрограмма, начинающаяся с адреса *n nn*, выполняется при исполнении трехшагового оператора SBR *n nn* (SBR сокращение слова *subroutine — подпрограмма*). Если подпрограмма начинается операторами ввода метки Lbl *N* (см. ниже), то она выполняется при исполнении двухшагового оператора SBR *N*. В конце подпрограммы вводится оператор INVSBR (возврат из подпрограммы) *). Число вложений подпрограмм друг в друга не должно превышать 6.

2.4. Специальные вопросы программирования микрокалькуляторов с алгебраической логикой

Операторы ввода меток. *Метки* (*labels*) вводятся операторами вида Lbl *N*, где *N* — символ любой клавиши, кроме цифровых, имеющей код (общая метка). Очень удобны 10 меток, вводимые клавишами верхнего ряда и обозначенные буквами A, B, C, D, E, A′, B′, C′, D′ и E′. Ввод такого символа обеспечивает выполнение программы с адреса, следующего за операторами метки.

Пример. Вычислить (2.1), обозначив переменные *a*, *b*, *c*, *d* и *e* метками A, B, C, D и E.

Программа при этом будет иметь вид

Lbl	A	STO	00	R/S	Lbl	B	STO	01	R/S	
Lbl	C	STO	02	R/S	Lbl	D	STO	03	R/S	
Lbl	E	RCL	02	−	RCL	03	=	×	RCL	
01	+	RCL	00	=	R/S					

Теперь числа A, B, C и D можно вводить в любом порядке, указав после ввода соответствующий буквенный символ. Например, если A = 2, B = 5, C = 4 и D = 3, ввод можно выполнить так: 3 D 5 B 2 A 4 C. Теперь, указав символ E, получим $e = 7$.

---

*) В программах оператор INVSBR сокращенно обозначен как ISBR.

Операторы организации циклов. Циклы организуются операторами Dsz X N и Dsz X n nn, где X — номер регистра R_x (от 0 до 9). При каждом исполнении этого оператора от содержимого $R_x > 0$ отнимается 1, а к содержимому $R_x < 0$ прибавляется 1, после чего, если $R_x \neq 0$, происходит переход к метке N или к адресу n nn. Если $R_x = 0$, метка N (или адрес n nn) игнорируется и выполняется следующий за ними оператор.

Пример. Вычислить ряд

$$y = \sum_{k=1}^{m} k^n.$$

Программа имеет вид ($m = RX$; $n = RX$):

CMs	STO	00	R/S	STO	01	RCL	00	y^x	RCL
01	=	SUM	02	Dsz	0	0	06	RCL	02
R/S	RST								

Здесь оператор Dsz 0 0 06 организует в регистре $R00$ счетчик $k = (k - 1)$ с начальным значением $k = m$ и цикл вычисления k^n, начинающийся с адреса 0 06 и кончающийся оператором Dsz 0 0 06. При $k = 0$ программа выходит из цикла, и содержимое суммирующего регистра $R02$ вызывается на индикацию. Для $m = 5$ и $n = 6$ получим $y = 20\,515$ при времени счета 5 с.

Операторы установки и контроля флагов. *Флаг* — специальный указатель перехода в программе (аналог флагу в руках регулировщика уличного движения). Флаг имеет номер $y = 0, 1, 2, \ldots, 9$. Подъем флага выполняется вводом оператора St flg y, а спуск — оператором INV St flg y. Проверка условия установки флага в нужном месте программы обеспечивается исполнением оператора If flg y N или If flg y n nn. Если флаг y поднят, то осуществляется переход к метке N или к шагу программы n nn. Если флаг y опущен, такой переход не происходит. При исполнении операторов INV If flg y N или INV If flg y n nn переход происходит, если флаг y опущен, и не происходит, если он поднят.

Пример. Составить программу перевода мер длины в соответствии с формулами:

1 км = 1000 м; 1 м = 3,28084 фут; 1 миля = 5,280 фут. Один из вариантов такой программы имеет вид

LbI	A	×	1	0	0	0	StFlg	0	GTO
C	LbI	B	INV	StFlg	0	LbL	C	×	3
•	2	8	0	4	INV	IFlg	0	=	÷
5	2	8	0	LbI	=	=	ISBR		

Здесь, если вводятся километры (метка A), флаг $y = 0$ поднимается, если метры (метка B) — флаг $y = 0$ опускается. В зависимости от этого пересчет ведется по той или иной формуле. Пусть

надо узнать, сколько миль в 75 км. Вводим число 75 и указываем метку А. Получим 46,6 мили. Теперь выясним, сколько футов в 1,78 м. Вводим 1,78 и указываем метку В. Получим 5,84 фута (результаты округлены на третьей цифре).

Специальные операторы Ор. Командой вида Ор *nn*, где *nn* = 00 ÷ 39 вводятся 40 *специальных операторов*:

nn	Назначение оператора Ор *nn*.
00 ÷ 08	Управление печатью принтера (описаны далее).
09	Запись в ОЗУ программы из блока *ML* (см. далее).
10	Вычисление сигнум-функции ($y = 1$ при $x > 0$, $y = 0$ при $x = 0$ и $y = -1$ при $x < 0$, причем $y \to RX$).
11	Вычисление дисперсии и наклона прямой при линейной регрессии.
12	Вычисление $y(0)$ при линейной регрессии.
13	Вычисление коэффициента корреляции.
14	Вычисление y по заданному x при линейной регрессии.
15	Вычисление x по заданному y при линейной регрессии.
16	Проверка распределения памяти.
17	Установка заданного распределения памяти.
18	Подъем флага $y = 7$, если нет ошибки.
19	Подъем флага $y = 7$, если есть ошибка.
20 ÷ 29	Увеличение содержимого регистра $R00 \div R09$ на 1.
30 ÷ 39	Уменьшение содержимого регистра $R00 \div R09$ на 1.

Операторы косвенной адресации. К ним относятся следующие операторы (XX — номер регистра адресации):

Оператор	Код	Назначение оператора
STO Ind*) XX	72 XX	Запись в регистр памяти *R*
RCL Ind XX	73 XX	Вызов из регистра памяти *R*
EXC Ind XX	63	Обмен $R \rightleftarrows X$
(INV)SUM Ind XX	(22) 74 XX	Суммирование или вычитание в регистре памяти *R*
(INV)Prd Ind XX	(22) 64 XX	Умножение и деление в регистре памяти
GTO Ind XX	83 XX	Безусловный переход
Pgm Ind XX	62 XX	Обращение к программе
Op Ind XX	84 XX	Выполнение оператора Ор
SBR Ind XX	71 40 XX	Обращение к подпрограмме
Fix Ind XX	58 40 XX	Задание числа цифр после запятой

*) Операторы косвенной адресации STOInd, RCLInd и т. д. в программах сокращенно обозначаются как STOI, RCLI и т. д.

(INV) $x = t$ Ind XX	(22) 67 40 XX	Условные переходы
(INV) $x \geqslant t$ Ind XX	(22) 77 40 XX	
(INV) St flg Ind XX	(22) 86 40 XX	Подъем (спуск) флага
(INV) If flg Ind XX	(22) 87 40 XX, *N* или *n nn*	Анализ положения флага
(INV) Dsz X Ind XX *N* или *n nn*	(22) 97 40 XX, *N* или *n nn*	Организация циклов

Напомним, что при косвенной адресации адреса программы, номера регистров и номера флагов указываются содержимым регистра адресации XX. Для модификации его могут использоваться операторы Op 20 ÷ Op 39 и Dsz. Например, в программе

CMs	+	1	STO	00	=	$x \rightleftarrows t$	RCL	00	R/S
STOI	00	Op	20	RCL	00	INV	$x = t$	0	09
R /S	...	...	...	...	...	...	...	...	...

обеспечивается запись *N* чисел последовательно в регистры памяти от *R*01 до *RN* с использованием косвенной адресации (регистр адресации 00) и модификацией адреса, обеспечиваемой исполнением оператора Op 20. При пуске программы в регистр *t* вводим число *N*, а в регистр *R*00 — число 1. Для $N = 5$, нажав клавиши *RST* и *R/S*, получим на индикаторе номер числа, которое надо вводить — номер 1. Введем $x_1 = 12$ и, нажав клавишу *R/S*, получим новый номер 2. Вводим $x_2 = 7$ и т. д., например $x_3 = 7$, $x_4 = 9$ и $x_5 = 1{,}5$. Теперь нетрудно убедиться, что эти числа окажутся записанными в регистрах *R*01 ÷ *R*05. В этой программе выход из цикла осуществляется по условию $x_{00} = t = N$. Если $x_{00} \neq N$ происходит переход на адрес 0 09 (начало цикла с оператором записи в регистры памяти с косвенной адресацией).

2.5. Работа с библиотекой программ пользователя

В микрокалькуляторы TI-58C/59 встроен сменный модуль с *библиотекой программ пользователя ML* (*Master Library*). Он представляет собой твердотельное постоянное запоминающее устройство емкостью около 40 кбит, в котором может храниться библиотека из нескольких десятков простых программ либо сложная программа с числом шагов до 5000. Смена блока *ML* позволяет мгновенно переориентировать микрокалькулятор на выполнение различных профессиональных вычислений: научно-технических, деловых (экономических), статистических, биологических и т. д.

Типовой блок *ML* (модуль 1) содержит 25 программ, в основном реализующих научно-технические расчеты. Перечень этих программ и инструкции по их применению даны в приложении 1.

Программы *ML* могут использоваться самостоятельно. В этом случае они вводятся с клавиатуры нажатием клавиш 2nd Pgm *mm*, где *mm* — двухзначный номер программы *ML*. Следует отметить, что введенная таким образом программа *ML* не занимает ту часть ОЗУ, которая отводится под внешние (вводимые пользователем) программы. Поэтому число шагов программ *ML* может превышать допустимое для внешних программ. Однако при работе с программами *ML* используется часть регистров памяти (их номера указаны в описании программ *ML*), что должен учитывать пользователь при составлении своих (внешних) программ.

Программы *ML* можно переписать в ОЗУ вводом команд 2nd Pgm *mm* Op 09. Это возможно, если число шагов программы *ML* — *mm* меньше максимального числа шагов программной памяти (480 у TI-58C и 960 у TI-59). Такая перезапись позволяет детально проанализировать программу *ML* — *mm* и изменить ее. Запись измененной программы в блок *ML* невозможна, что обеспечивает защиту программ *ML*.

В программах *ML* широко используются *метки*, которые делят каждую программу на части, имеющие самостоятельное значение. Программу *ML* — *mm* полностью или частично можно использовать в качестве подпрограммы, входящей во внешние программы, составляемые пользователем. И напротив, внешние программы можно использовать в качестве подпрограмм для программ *ML*. Эти возможности реализуются операторами:

Pgm	*mm*	*N*	Обращение к части программы *ML* — *mm*, помеченной меткой *N*.
Pgm	*mm*	SBR *N*	Возврат из подпрограммы *ML*—*mm* к выполнению внешней программы.
Pgm	*mm*	R/S	Обращение к программе *ML*—*mm* с остановкой.
SBR	*n*	*nn*	Обращение из программы *ML*—*mm* к подпрограмме, внесенной в ОЗУ с адреса *n nn*.
SBR	*N*		Обращение к подпрограмме в ОЗУ, помеченной меткой *N*.

Такое комбинированное использование программ нередко позволяет реализовать вычисления, которые потребовали бы составления программ с общим числом шагов до 5000.

Поясним комбинированное использование программ *ML* и внешних программ на примере вычисления выражения

$$f(a, b) = \int_a^b \sqrt{2x+1}\,dx + be^a = I + be^a,$$

содержащего интеграл *I*, который вычисляется программой *ML*—09

численного интегрирования. Из ее описания выясняем использование регистров памяти: $R01 = a$, $R02 = b$, $R03 = n$, $R04 = I$, $R05 = n$. Программа, вводимая в ОЗУ, имеет вид:

Ввод	Фрагмент программы	Пояснения
a *b* *c*	Pgm 09 A R/S Pgm 09 B R/S Pgm 09 C Pgm 09 D	Ввод *a* по программе *ML*—09. Ввод *b* по программе *ML*—09. Ввод *c* по программе *ML*—09. Вычисление *I* по программе *ML*—09.
	RCL 01 INV ln *x* × RCL 02 + RCL 04 = R/S	Вычисление $be^a + I$ и остановка основной программы.
	Lbl A′ (STO 06 RCL 06 × 2 + 1) $\sqrt{x}$ INVSBR	Подпрограмма в ОЗУ для вычисления подынтегральной функции $\sqrt{2x+1}$.

В этой программе 4 раза части программы *ML*—09 используются в качестве подпрограмм для выполнения основной программы. С другой стороны, заключительный фрагмент программы — вычисление $f(x) = \sqrt{2x+1}$ используется в качестве подпрограммы для вычисления интеграла по программе *ML*—09. Для $a = 0$, $b = 1$ и $c = n = 8$ получим $f(a, b) = 2{,}398713896$.

2.6. Операторы управления цифровым магнитофоном и принтером

В микрокалькулятор TI-59 встроен миниатюрный магнитофон для записи данных и программ с двух сторон магнитных карт (длина 7,62 см). Данные вводятся оператором вида *n* 2nd Write, где *n* — номер банка данных (*n* = 1, 2, 3 или 4). Запись программ выполняется вводом оператора 2nd Write. Считывание данных производится оператором *n* INV 2nd Write, а программ — INV 2nd Write. При этом недопустима установка формата Fix (сброс его выполняется вводом оператора INV 2nd Fix).

К микрокалькуляторам TI-58C и TI-59 могут подключаться миниатюрные принтеры PC-100A и PC-100C. Вывод данных на печать обеспечивается вводом в программу оператора Prt (от слова *print* — *печать*). Его работа иллюстрируется следующим примером.

Пример.

Образец печати программы			Образец печати данных
Адрес	Код	Оператор	
000	85	+	3
001	03	3	6
002	95	=	9
003	99	PRT	12
004	81	RST	15
005	00	0	18

При вводе перед оператором Prt (PRT) оператора Adv увеличивается пробел между строками. Распечатка текста (*листинга*) программы (см. пример выше) обеспечивается вводом с пульта оператора List.

Предусмотрена возможность печати алфавитно-цифровых символов в любом месте строки. Строка разбивается на 20 знакомест, устанавливаемых вводом операторов Op1 ÷ Op4:

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19
Op1 Op2 Op3 Op4

Каждый из 64 символов задается кодом:

Вторая цифра кода

Первая цифра кода	0	1	2	3	4	5	6	7
0	Пробел	0	1	2	3	4	5	6
1	7	8	9	A	B	C	D	E
2	—	F	G	H	I	J	K	L
3	M	N	□	P	Q	R	S	T
4	•	U	V	W	X	Y	Z	+
5	×	*	⊤	π	e	(	)	,
6	⊣	%	⊣	√	=	//	X	$\overline{X}$
7	²	?	÷	!	Ш	Δ	П	Σ

Печатаемые символы

Печатаемые символы

Коды символов указываются перед вводом операторов Op1 ÷ Op4. Допустим, нужно напечатать фразу INPUT X, Y, Z. Распределяем знакоместа строки печати:

Символ	I	N	P	U	T		X	,	Y	,	Z								
Код	24	31	33	41	37	00	44	57	45	57	46	00	00	00	00	00	00	00	00

Программа печати данной фразы имеет вид:

Оператор	Показания дисплея	Пояснения
CLR Op 00	0.	Сброс регистра принтера
2431334137 Op 01	2431334137	Печать слова INPUT
0044574557 Op 02	0044574557	Печать знаков X, Y
4600000000 Op 03	4600000000	Печать знака Z
0000000000 Op 04	0000000000	Печать пробелов

Таким образом, при работе с принтером оператор имеет возможность вывода на печать не только цифр, но и специальных знаков и словесных комментариев. С помощью оператора Op 07 можно печатать символом * простые графики. При этом результат вычислений надо нормировать так, чтобы содержимое регистра X не превышало 20 (зона печати разбивается на 20 знакомест). Так, печать синусоиды знаками * производится с помощью программы:

Lbl A RCL 01 sin + 1 = × 9
• 9 = Op 07 1 8 SUM 1 A

Амплитуда синусоиды нормирована, так что печать в строке занимает 18 интервалов.

Оператор Op 08 обеспечивает вывод на печать текста (листинга программы), как и оператор List. Оператор *NN* INV List обеспечивает распечатку содержимого десяти регистров памяти, начиная с номера *NN* в виде (*NN* = 20):

Образец печати данных

Содержимое регистра	Номер регистра	Содержимое регистра	Номер регистра
12,73964896	20	0.	26
148,9657318	21	0.	27
0.	22	0.	28
9,1786109−15	23	0,000124564	29
−1,2256434 08	24		
0.	25		

2.7. Ввод, редактирование и перевод программ

Перед вводом новой программы иногда полезно стереть старую, нажав клавиши 2nd CP, и очистить все регистры памяти нажатием клавиш 2nd и CMs. Для ввода программы нажимается клавиша LRN. На дисплее насвечивается символ 000 00 (первое число—номер шага или адрес, второе — код). После этого вводится программа соответствующим нажатием клавиш.

Пример. Введем программу вычисления факториала $E! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots E$ с учетом значения $0! = 1$:

Lbl	E	STO	0	CP	$x=t$	A	Lbl	B	RCL
0	×	Dsz	0	B	Lbl	A	1	=	R/S

Более детально процесс ввода виден из подробного описания программы:

Показания дисплея		Оператор	Пояснения
Адрес	Код		
000	76	Lbl	Ввод
001	15	E	метки E
002	42	STO	Запись числа E
003	00	0	в регистр $R00$
004	29	CP	Сброс на 0 регистра t
005	67	$x=t$	Сравнение E с $0=t$
006	11	A	Если $E=0$, переход к метке A: задание $0!=1$
007	76	Lbl	Ввод
008	12	B	метки B
009	43	RCL	Вызов
010	00	0	содержимого регистра $R00$
011	65	×	Операция умножения
012	97	Dsz	Выполнение оператора организации цикла с воз-
013	00	0	вратом по метке B
014	12	B	
015	76	Lbl	Ввод
016	11	A	метки A
017	01	1	Вывод числа 1
018	95	=	Фиксация конца вычислений
019	91	R/S	Останов вычислений

Коды операций нанесены на прозрачной пластмассовой накладке с прорезями для клавиш (см. рис. 2.2). Если при вводе программы или при ее редактировании допущена и обнаружена ошибочная операция, ее стирают нажатием клавиш 2nd Del (от слова *delete — стирать*). Пропущенный оператор можно вставить: он вводится после нажатия клавиш 2nd Ins (от слова *insert — вставлять*). При этом автоматически меняются адреса всех последующих операторов (уменьшаются или увеличиваются).

Просмотр программы по шагам производится при нажатии клавиш SST (*шаг вперед*) и BST (*шаг назад*). Переход в режим вычислений происходит после нажатия клавиши LRN. Если пуск программы проводится с нулевого адреса, нажимаются клавиши RST (*установка нулевого адреса*) и R/S (*run/stop — пуск/стоп*). Пуск с адреса *n nn* обеспечивается вводом оператора GTO *n nn*, пуск с метки *N* (кроме буквенных) производится вводом оператора GTO *N*. Пуск с буквенных меток A, B, C, D, E, A′, B′, C′, D′ и E′ произ-

водится указанием нужной буквы путем нажатия соответствующей клавиши (для букв A′—E′ перед этим нажимается клавиша 2nd).

Провести вычисления по шагам можно, нажимая в режиме счета клавишу SST. Результаты вычисления на каждом шаге выводятся на индикатор.

Важным источником программного обеспечения микрокалькуляторов является *перевод программ*. В справочной [6—9] и периодической литературе описано множество программ для различных моделей микрокалькуляторов с разной логикой вычислений и символикой клавиатуры. Это затрудняет перевод программ и требует детального знакомства с языком программирования различных моделей калькуляторов. Тем не менее самостоятельное составление сложных программ более трудоемко, чем перевод готовых программ. Здесь та же ситуация, что и с написанием или переводом литературных произведений.

Обычно при переводе учитываются следующие обстоятельства:

1. Легким является перевод с простого языка программирования на более сложный. Обратный перевод значительно труднее.

2. Формальный перевод заменой символов (ИП на RCL, П на STO, БП на GTO, ПП на SBR и т. д.) возможен, если модели калькуляторов имеют одинаковую логику вычислений и систему команд. Так, весьма простым является перевод программ с языка отечественных микрокалькуляторов Электроника Б3-34 (МК-54, МК-56) на язык калькуляторов серии HP (HP-65, HP-67, HP-97 и др.) и наоборот.

3. При различиях в логике вычислений они должны быть внимательно изучены и учтены при переводе. Особых трудностей такой перевод не вызывает, но требует повышенного внимания.

4. Наиболее важной обычно является детальная и конкретная реализация алгоритма вычислений в найденной программе. Поэтому нередко проще разобраться в частях алгоритма, а затем воспроизвести их на языке используемого микрокалькулятора с учетом всех его функциональных возможностей.

Для читателей, желающих освоить технику перевода, полезно внимательно ознакомиться с реализацией важнейших численных методов на различных калькуляторах. Основной материал данной книги посвящен программному обеспечению массовых отечественных программируемых микрокалькуляторов. Однако в приложениях 1 и 2 можно найти ряд примеров составления программ (от простейших до сложных) для микрокалькуляторов TI-58C и TI-59. Сопоставление их с программами для отечественных микрокалькуляторов явится хорошей школой для освоения техники перевода и использования программ, описанных в зарубежной литературе. Кроме того, язык калькуляторов TI-58C/59 типичен для большинства зарубежных моделей, а также для некоторых отечественных моделей.

Глава 3

ПРОГРАММИРОВАНИЕ ПРОСТЫХ ВЫЧИСЛЕНИЙ

3.1. Операции с действительными числами

Программа 3.1. Выделение целой части чисел $x(1 < x < 10^8)$. Ввод: $x =$ РХ *) ($M = 7$, 8, 9, А, В, С или Д).

ПМ КИПМ ИПМ С/П

Программа 3.2. Выделение дробной части чисел $x(0 < x < 10^8)$. Ввод: $x =$ РХ.

↑ 1 + ПМ КИПМ XY ИПМ − С/П

Программа 3.3. Усечение числа $x(0 < x < 10^8)$ с погрешностью $\varepsilon = 1 \cdot 10^{-n}$. Ввод: $\varepsilon =$ РД, $x =$ РХ.

ИПД ÷ ПС КИПС ИПС ИПД × С/П

Для $\varepsilon = 1 \cdot 10^{-2}$ и $x = 123{,}4567$ получим результат 123,45.

Программа 3.4. Округление числа x любого знака с коррекцией последней цифры результата (она сохраняется, если последующий знак x меньше 5 и увеличивается на 1, если он больше 5). Ввод: $\varepsilon = 1 \cdot 10^{-n} =$ РД, $x =$ РХ.

↑	Fx < 0	04	/—/	÷	П9	FBx	ИПД	÷	ПС
КИПС	XY	ИПС	−	F1/x	2	−	Fx < 0	23	ИПС
1	+	ПС	ИПС	ИПД	×	ИП9	×	С/П	

Для $x = \pm 12{,}345678$ и $\varepsilon = 1 \cdot 10^{-2}$ получаем округленное значение $x_0 = \pm 12{,}35$, а для $x = \pm 12{,}344999$ округленное значение $x = \pm 12{,}34$.

Программа 3.5. Выделение модуля $|x|$ числа x. Ввод: $x =$ РХ.

... ... Fx < 0 N /—/ ... ...

Здесь N — адрес шага после оператора /—/.

Программа 3.6. Преобразование угла, выраженного в радианах φ, в угол, выраженный в градусах φ°, минутах φ' и секундах φ''.

---

*) Операция ввода числа x в регистр X($x \to$ РХ) обозначается $x =$ РХ. Операция вывода числа y в регистр X обозначается $y \to$ РХ.

Ввод: $\varphi = РХ$.

Fπ	÷	1	8	0	ПП	19	ИП8	6	0
ПП	19	ИП8	6	0	×	С/П	БП	00	×
ПП	27	ИП9	1	—	С/П	В/0	1	+	П9
КИП9	XY	ИП9	—	П8	В/0				

Для $\varphi = 2$ рад, нажав трижды клавишу С/П, получим $\varphi^\circ = 114$, $\varphi' = 35$ и $\varphi'' = 29{,}616$, т. е. $\varphi = 114^\circ 35' 29{,}616''$.

Программа 3.7. Перевод угла, выраженного в градусах, минутах и секундах в угол

$$\varphi = \left(\left(\frac{\varphi''}{60} + \varphi'\right)\frac{1}{60} + \varphi^\circ\right)\frac{\pi}{180},$$

выраженный в радианах. Ввод: φ°, φ' и φ'' в регистр X.

П8	С/П	П9	С/П	↑	6	0	÷	ИП9	+
6	0	÷	ИП8	+	П0	1	8	0	÷
Fπ	×	С/П	БП	00					

Для $\varphi = 114^\circ 35' 29{,}616''$, вводя 114°, $35'$ и $29{,}616''$, получим $\varphi = 2$. Кроме того, из регистра 0 можно вызвать значение $\varphi_{град} = 114{,}59156^\circ$.

3.2. Вычисление определителей и операции с матрицами

Программа 3.8. Вычисление определителя второго порядка:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 = P8 & b_1 = P9 \\ a_2 = P5 & b_2 = P6 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1.$$

ИП8 ИП6 × ИП5 ИП9 × — С/П

Пример. $\begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 1{,}5 & 3 \end{vmatrix} = 9.$

Программа 3.9. Вычисление определителя третьего порядка:

$$\begin{vmatrix} a_1 = P7 & b_1 = P8 & c_1 = P9 \\ a_2 = P4 & b_2 = P5 & c_2 = P6 \\ a_3 = P1 & b_3 = P2 & c_3 = P3 \end{vmatrix} =$$

$$= c_1(a_2 b_3 - a_3 b_2) + c_2(a_3 b_1 - a_1 b_3) + c_3(a_1 b_2 - a_2 b_1).$$

ИП4	ИП2	×	ИП1	ИП5	×	—	ИП9	×	ИП1
ИП8	×	ИП7	ИП2	×	—	ИП6	×	+	ИП7
ИП5	×	ИП4	ИП8	×	—	ИП3	×	+	С/П

Пример.

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 & -3 \\ 1 & 4 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 10.$$

Время счета около 10 с.

Программа 3.10. Вычисление определителя четвертого порядка

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 = \text{РА} & b_2 = \text{Р7} & c_2 = \text{Р8} & d_2 = \text{Р9} \\ a_3 = \text{РВ} & b_3 = \text{Р4} & c_3 = \text{Р5} & d_3 = \text{Р6} \\ a_4 = \text{РС} & b_4 = \text{Р1} & c_4 = \text{Р2} & d_4 = \text{Р3} \end{vmatrix} = a_1A_1 - b_1B_1 + c_1C_1 - d_1D_1,$$

где

$$A_1 = \begin{vmatrix} b_2 & c_2 & d_2 \\ b_3 & c_3 & d_3 \\ b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix}, \quad B_1 = \begin{vmatrix} a_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix},$$

$$C_1 = \begin{vmatrix} a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & d_4 \end{vmatrix}, \quad D_1 = \begin{vmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 \end{vmatrix}.$$

Сх	П0	ПП	54	ИП7	ПА	XY	П7	ИПВ	ИП4
ПВ	XY	П4	ИПС	ИП1	ПС	XY	П1	ПП	54
ИП8	ПА	XY	П8	ИПВ	ИП5	ПВ	XY	П5	ИПС
ИП2	ПС	XY	П2	ПП	54	ИП9	ПА	XY	П9
ИПВ	ИП6	ПВ	XY	П6	ИПС	ИП3	ПС	XY	П3
ПП	54	ИП0	С/П	ИП4	ИП2	×	ИП1	ИП5	×
—	ИП9	×	ИП1	ИП8	×	ИП7	ИП2	×	—
ИП6	×	+	ИП7	ИП5	×	ИП4	ИП8	×	—
ИП3	×	+	С/П	×	ИП0	+	П0	ИПА	В/0

После ввода программы и исходных данных, нажав клавишу С/П, получим значение A_1. Вводим $a_1 = \text{РХ}$ и, нажав клавишу С/П, получим B_1. Вводим $-b_1 = \text{РХ}$ и получим C_1, вводим $c_1 = \text{РХ}$ и получим D_1, наконец вводим $-d_1 = \text{РХ}$ и получим Δ.

Пример:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 6 & 3 & 0 & 3 \\ 4 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 4 & 2 \\ 7 & 7 & 8 & 5 \end{vmatrix}$$

Получаем: $A_1 = 8$, $B_1 = 16$, $C_1 = 52$, $D_1 = 72$. Вводим: $a_1 = 6$, $-b_1 = -3$, $c_1 = 0$, $-d_1 = -3$. Окончательно $\Delta = -216$.

Определители более высокого порядка могут вычисляться путем разложения на определители 2, 3 и 4-го порядка. Однако более рационально проводить такие вычисления на настольных или универсальных ЭВМ по стандартным программам.

С помощью микрокалькуляторов легко проводить операции над матрицами с числом элементов, не превышающим числа регистров памяти (16 у микрокалькулятора Электроника Б3-34, включая регистры Z и T стека). Поясним это примерами.

Пусть надо сложить неограниченное число матриц с числом строк 4 и столбцов 3. Удобно эту операцию представить в виде

$$\begin{vmatrix} a_7 & a_8 & a_9 \\ a_4 & a_5 & a_6 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ a_0 & a_{10} & a_{11} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_7 & b_8 & b_9 \\ b_4 & b_5 & b_6 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ b_0 & b_{10} & b_{11} \end{vmatrix} + \ldots = \begin{vmatrix} m_7 & m_8 & m_9 \\ m_4 & m_5 & m_6 \\ m_1 & m_2 & m_3 \\ m_0 & m_{10} & m_1 \end{vmatrix},$$

где индексы у элементов матриц заменены номерами регистров, в которые эти элементы заносятся (Р10 = РА, Р11 = РВ).

Программа 3.11. Сложение матриц размера 4×3. Ввод: $a_0 \div a_{11}$ = Р0 ÷ Р11, $b_0 \div b_{11}$ = РХ ... Результат $m_0 \div m_{11}$ заносится в регистры Р0 ÷ Р11.

7	С/П	ИП7	+	П7	8	С/П	ИП8	+	П8
9	С/П	ИП9	+	П9	4	С/П	ИП4	+	П4
5	С/П	ИП5	+	П5	6	С/П	ИП6	+	П6
1	С/П	ИП1	+	П1	2	С/П	ИП2	+	П2
3	С/П	ИП3	+	П3	0	С/П	ИП0	+	П0
1	0	С/П	ИПА	+	ПА	1	1	С/П	ИПВ
+	ПВ	БП	00						

При использовании этой программы сначала в регистры Р0 ÷ ÷ Р11 вводятся числа первой матрицы. Затем, после нажатия клавиши С/П, построчно вводятся значения элементов второй матрицы. При этом программа всякий раз подсказывает номер числа матрицы. Например 7, 8 и 9, при вводе первой строки. Если матриц несколько, то в той же последовательности вводятся значения элементов последующих матриц. Проверить программу можно, присвоив значениям элементов складываемых двух матриц номера регистров (получим их удвоение).

Часто возникает необходимость в умножении матриц. Произведением матрицы A размера $m \times n$ на матрицу B размера $n \times p$ является матрица $C = AB$ размера $m \times p$, элемент C_{ij} которой, расположенный в ij клетке, равен сумме произведений элементов i-ой строки матрицы A на соответствующие элементы j-го столбца матрицы B:

$$C_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}.$$

Таким образом, число столбцов матрицы A должно быть равно числу строк матрицы B.

Программа 3.12. Умножение матрицы A размера 3×4 на матрицу B размера 4×2. Ввод элементов матрицы B и вывод значений элементов матрицы C соответствуют указанным в формуле.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} b_{11} = \text{Р7} & b_{12} = \text{Р8} \\ b_{21} = \text{Р4} & b_{22} = \text{Р5} \\ b_{31} = \text{Р1} & b_{32} = \text{Р2} \\ b_{41} = \text{Р0} & b_{42} = \text{РА} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c_{11} = \text{Р9} & c_{12} = \text{РВ} \\ c_{21} = \text{Р6} & c_{22} = \text{РС} \\ c_{31} = \text{Р3} & c_{32} = \text{РД} \end{vmatrix}.$$

ПП	16	ИП3	П9	ИПД	ПВ	ПП	16	ИП3	П6
ИПД	ПС	ПП	16	0	С/П	1	С/П	↑	ИП7
×	П3	F,	ИП8	×	ПД	2	С/П	↑	ИП4
×	ИП3	+	П3	F,	ИП5	×	ИПД	+	ПД
3	С/П	↑	ИП1	×	ИП3	+	П3	F,	ИП2
×	ИПД	+	ПД	4	С/П	↑	ИП0	×	ИП3
+	П3	F,	ИПА	×	ИПД	+	ПД	В/0	

Работу этой программы можно проверить на примере:

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 & 1 \\ 5 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \\ 4 & 0 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 2\cdot 1 + 0\cdot 2 + 3\cdot 4 + 1\cdot 3 = 17 & 2\cdot 3 + 0\cdot 1 + 3\cdot 0 + 1\cdot 5 = 11 \\ 5\cdot 1 + 1\cdot 2 + 2\cdot 4 + 0\cdot 3 = 15 & 5\cdot 3 + 1\cdot 1 + 2\cdot 0 + 0\cdot 5 = 16 \\ 0\cdot 1 + 0\cdot 2 + 4\cdot 4 + 1\cdot 3 = 19 & 0\cdot 3 + 0\cdot 1 + 4\cdot 0 + 1\cdot 5 = 5 \end{vmatrix}$$

Введем элементы матрицы B. Нажав клавишу С/П, получим на индикаторе цифру 1, указывающую на ввод первого элемента первой строки a_{11} матрицы A. Вводим его, затем нажав клавишу С/П, получим цифру 2 — надо вводить a_{12}. Введя таким образом построчно все элементы матрицы A, получим на индикаторе цифру 0, указывающую на конец вычислений. Из регистров 9, 6, 3, В, С и Д вызываем результат вычислений — числа 17, 15, 19, 11, 16 и 5.

Иногда нужны обратные матрицы A^{-1}, удовлетворяющие условию $A \cdot A^{-1} = 1$. Правила обращения матрицы A в обратную матрицу A^{-1} описаны в [4—7]. На микрокалькуляторе легко провести обращение квадратных матриц размера 2×2 и 3×3. Обращение матриц большего размера можно проводить, разбивая их на блоки меньшего размера.

Программа 3.13. Обращение матрицы размера 2×2. Ввод:

$$\begin{vmatrix} a_{11} = \text{Р7} & a_{21} = \text{Р8} \\ a_{12} = \text{Р4} & a_{22} = \text{Р5} \end{vmatrix}.$$

Обращенная матрица заносится на место исходной.

ИП4	ИП8	×	П2	ИП7	П9	ИП5	×	ИП2	—
П2	ИП5	XY	÷	П7	ИП9	ИП2	÷	П5	ИП4
ИП2	/—/	÷	П4	ИП8	ИП2	/—/	÷	П8	С/П
БП	00								

Для контроля программы можно выполнить следующие вычисления:

$$A = \begin{vmatrix} 7 & 8 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}; \qquad A^{-1} = \begin{vmatrix} 1{,}6666666 & -2{,}6666666 \\ -1{,}3333333 & 2{,}3333333 \end{vmatrix}.$$

Программа 3.14. Обращение матрицы размера 3×3. Ввод:

$$\begin{vmatrix} a_{11} = \text{P7} & a_{12} = \text{P8} & a_{13} = \text{P9} \\ a_{21} = \text{P4} & a_{22} = \text{P5} & a_{23} = \text{P6} \\ a_{31} = \text{P1} & a_{32} = \text{P2} & a_{33} = \text{P3} \end{vmatrix}$$

Обращенная матрица заносится на место исходной.

3	П0	ИП4	ИП7	+	ПД	ИПД	/—/	ПС	ИП5
ИПД	ИП8	×	—	ПА	ИП6	ИПД	ИП9	×	—
ПВ	ИП1	ИП7	÷	ПД	ИПД	/—/	П6	ИП2	ИПД
ИП8	×	—	П4	ИП3	ИПД	ИП9	×	—	П5
ИП8	ИП7	÷	П1	ИП9	ИП7	+	П2	ИП7	F1/x
П3	ИПА	П7	ИПВ	П8	ИПС	П9	FL0	02	С/П

Работу программы можно проверить на примере:

$$A = \begin{vmatrix} 4 & 8 & 0 \\ 8 & 8 & 8 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}; \qquad A^{-1} = \begin{vmatrix} 0{,}08333333 & -0{,}08333333 & 0{,}66666666 \\ 0{,}08333333 & 0{,}04166667 & -0{,}33333333 \\ -0{,}16666666 & 0{,}16666666 & -0{,}33333333 \end{vmatrix}.$$

Повторное обращение матрицы A^{-1} даст матрицу A с небольшими операционными погрешностями.

3.3. Вычисление факториалов и комбинаторика

Программа 3.15. Вычисление факториала $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots \cdot n$ с исключением заведомо известного значения $0! = 1$ при $n = \text{РХ}$

П0 1 ИП0 × FL0 02 С/П

Пример. $10! = 3628800$ вычисляется за 10 с.

Программа 3.16. Вычисление факториала $n!$ для любых n, включая 0, при $n = \text{РХ}$.

П0 $Fx \neq 0$ 11 1 ИП0 × FL0 04 С/П БП
00 1 БП 08

Примеры. $0! = 1$, $1! = 1$, $3! = 6$, $10! = 3628800$, $20! = 2{,}432902 \cdot 10^{18}$ (время счета $t_c \simeq n$ с).

Программа 3.17. Вычисление факториала $n!$ больших чисел (при $n > 10$ верны пять первых знаков результата) по уточненной формуле Стирлинга [1, 2]:

$$n! = n^n \sqrt{2\pi n} \exp\left[-n + \frac{1}{12n}\left(1 - \frac{1}{30n}\right)\right]. \tag{3.1}$$

Ввод: $n = \text{РХ}$ при максимальном $n = 56$.

П9 ↑ Fx^y 1 ИП9 3 0 × F1/x —
1 2 ÷ ИП9 ÷ ИП9 — Fe^x × 2
Fπ × ИП9 × F$\sqrt{\ }$ × С/П БП 00

Примеры. $10! = 3628711{,}6$ (точно 3628800), $20! = 2{,}4328826 \cdot 10^{18}$ (время счета 12 с), $56! = 7{,}1100172 \cdot 10^{74}$.

Программа 3.18. Вычисление факториала $n!$ при $n \leqslant 12$ по точной формуле, а при $n > 12$ — по формуле (3.1).

П0	1	3	—	$Fx < 0$	20	ИП0	$Fx \neq 0$	17	1
ИП0	×	FL0	10	С/П	БП	00	1	БП	14
ИП0	↑	Fx^y	1	ИП0	3	0	×	$F1/x$	—
1	2	÷	ИП0	÷	ИП0	—	Fe^x	×	2
$F\pi$	×	ИП0	×	$F\sqrt{\ }$	×	БП	14		

Примеры. $3! = 6$, $10! = 362880$, $15! = 1{,}3076567 \cdot 10^{12}$.

Программа 3.19. Расчет числа перестановок $P_n = n!$, числа размещений из n элементов по m:

$$A_n^m = n!/(n-m)!$$

и числа сочетаний из n элементов по m:

$$C_n^m = n!/((n-m)!\, m!).$$

Ввод: $n = РХ$, $m = РХ$. Вывод: $m! \to Р4$, $P_n = n! \to Р5$, $(n-m)! \to Р6$, $A_n^m \to РА$, $C_n^m \to РС = РХ$.

П9	С/П	П8	ПП	26	П4	ИП9	ПП	26	П5
ИП9	ИП8	—	ПП	26	П6	ИП5	XY	÷	ПА
ИП4	÷	ПС	С/П	БП	00	П0	1	ИП0	×
FL0	28	В/0							

Для $n = 10$, $m = 5$ получим (спустя 30 с счета) $C_{10}^5 = 252$, $A_{10}^5 = 30240$ и $P_{10} = 3628800$.

3.4. Операции с комплексными числами

Программа 3.20. Преобразование комплексного числа из алгебраической формы $Z = a + jb$ в тригонометрическую $Z = Me^{j\varphi}$, где $M = \sqrt{a^2 + b^2}$ и $\varphi = \arccos(a/|M|)$ при $b \geqslant 0$ и $\varphi = -\arccos(a/|M|)$ при $b < 0$ ($-180° \leqslant \varphi \leqslant 180°$). Ввод: $a = РХ$, $b = РХ$. Вывод: результата $M \to РХ$, φ (в градусах) $\to РУ$. Переключатель Р—Г в положении Г.

ПА	С/П	ПВ	ИПА	↑	Fx^2	ИПВ	Fx^2	+	$F\sqrt{\ }$
П8	÷	Farccos	П9	ИПВ	$Fx < 0$	20	ИП9	/—/	П9
ИП9	ИП8	С/П	БП	00					

Примеры. Для $Z = -1 + j \cdot 1$ $M = 1{,}4142135$ и $\varphi = 135°$, для $Z = -1 - j \cdot 1$ $M = 1{,}4142135$ и $\varphi = -135°$, для $Z = -1 + j \cdot 0$ $M = 1$ и $\varphi = 180°$.

Арифметические операции над комплексными числами в алгебраической форме выполняются по формулам:

$$Z_0 = Z_1 + Z_2 = (a_1 + a_2) + j(b_1 + b_2)$$

$$Z_0 = Z_1 \cdot Z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + j(a_1 b_2 + b_1 a_2)$$

$$Z_0 = \frac{Z_1}{Z_2} = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + j\,\frac{b_1 a_2 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2}$$

Программа 3.21. Арифметические операции (сложение — код 0, умножение — код 1 и деление — код 2) над парами комплексных чисел $Z_1 = a_1 + jb_1$ и $Z_2 = a_2 + jb_2$. Ввод: a_1, b_1, a_2, b_2 в регистр X, код операции в регистр X, a_3, b_3, код в регистр X и т. д. Результат $Z_0 = a_0 + jb_0$: $a_0 \to$ P4 = PX, $b_0 \to$ P5 = PY.

П4	С/П	П5	С/П	П2	С/П	П3	0	С/П	$Fx \neq 0$
52	1	—	$Fx \neq 0$	30	ИП2	Fx^2	ИП3	Fx^2	+
П8	ИП2	ИП8	÷	П2	ИП3	/—/	ИП8	÷	П3
ИП3	ИП5	×	П0	ИП4	ИП3	×	П1	ИП2	ИП5
×	ИП1	+	П5	ИП2	ИП4	×	ИП0	—	П4
БП	03	ИП5	ИП3	+	П5	ИП4	ИП2	+	П4
БП	03								

Пример. Вычислить

$$Z_0 = \frac{(5 - j\cdot 3)(3 + j\cdot 2)}{(5 + j\cdot 3)(2 - j\cdot 4)} + (0{,}5 + j\cdot 1).$$

Вводим 5, —3, 3, 2, 1 (код умножения), 5, 3, 2 (код деления), 2, —4, 2 (код деления), 0,5, 1, 0 (код сложения). Получим $Z_0 = 1{,}1588235 + j\cdot 1{,}4647059$.

Программа 3.22. Последовательное умножение и деление комплексных чисел в тригонометрической форме:

$$Z_0 = Z_1 Z_2 = M_1 M_2 e^{j(\varphi_1 + \varphi_2)}; \qquad Z_0 = \frac{Z_1}{Z_2} = \frac{M_1}{M_2}\, e^{j(\varphi_1 - \varphi_2)}.$$

Ввод: M_1, φ_1, M_2, φ_2, код операции (1 для умножения и 2 для деления). Результат $Z_0 = M_0 e^{j\varphi_0}$: $M_0 \to$ PX = P6, $\varphi_0 \to$ PY = P7.

П6	С/П	П7	С/П	П8	С/П	П9	0	С/П	↑
1	—	$Fx \neq 0$	24	ИП7	ИП9	—	П7	ИП6	ИП8
÷	П6	БП	03	ИП7	ИП9	+	П7	ИП6	ИП8
×	П6	БП	03						

Пример. Вычислить

$$Z_0 = \frac{Z_1 Z_2}{Z_3} = \frac{2e^{j\cdot 30^\circ}\cdot 6e^{j\cdot 20^\circ}}{4e^{-j\cdot 40^\circ}}.$$

Вводим 2, 30, 6, 20, 1 (код умножения), 4, —40, 2 (код деления). Получаем $Z_0 = 3e^{j\cdot 90^\circ}$ ($M_0 = 3$, $\varphi_0 = 90^\circ$). Перед вводом кода в программах 3.21 и 3.22 индицируется цифра 0.

Глава 4

ВЫЧИСЛЕНИЕ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ФУНКЦИЙ, МНОГОЧЛЕНОВ И ЦИФРОВЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ

4.1. Гиперболические и обратные гиперболические функции

Программа 4.1. Вычисление гиперболического синуса $\operatorname{sh} x = (e^x - 1/e^x)/2$. Ввод: $x = PX$.

$$Fe^x \quad \uparrow \quad F1/x \quad - \quad 2 \quad \div \quad C/\Pi$$

Для $x = 1$ имеем $\operatorname{sh}(1) = 1{,}1752012$.

Программа 4.2. Вычисление гиперболического косинуса $\operatorname{ch} x = (e^x + 1/e^x)/2$. Ввод: $x = PX$.

$$Fe^x \quad \uparrow \quad F1/x \quad + \quad 2 \quad \div \quad C/\Pi$$

Для $x = 1$ имеем $\operatorname{ch}(1) = 1{,}5430806$.

Программа 4.3. Вычисление гиперболического тангенса $\operatorname{th} x = \operatorname{sh} x/\sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 x}$. Ввод: $x = PX$.

$$Fe^x \quad \uparrow \quad F1/x \quad - \quad 2 \quad \div \quad \uparrow \quad Fx^2 \quad 1 \quad +$$
$$F\sqrt{\ } \quad \div \quad C/\Pi$$

Для $x = 1$ получаем $\operatorname{th}(1) = 0{,}76159417$. Для вычисления $\operatorname{cth} x = 1/\operatorname{th} x$ перед оператором С/П ввести оператор F1/x.

Программа 4.4. Вычисление обратного гиперболического синуса $\operatorname{arsh} x = \ln\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right)$ при $x = PX$ в диапазоне значений от $-\infty$ до $+\infty$.

$$\uparrow \quad Fx^2 \quad 1 \quad + \quad F\sqrt{\ } \quad + \quad F\ln \quad C/\Pi$$

Для $x = 1$ имеем $\operatorname{arsh}(1) = 0{,}88137355$.

Программа 4.5. Вычисление обратного гиперболического косинуса $\operatorname{arch} = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)$ для $x = PX > 1$.

$$\uparrow \quad Fx^2 \quad 1 \quad /-/ \quad + \quad F\sqrt{\ } \quad + \quad F\ln \quad C/\Pi$$

Для $x = 2$ получаем $\operatorname{arch}(2) = 1{,}3169579$.

Программа 4.6. Вычисление обратного гиперболического тангенса $\operatorname{arth} x = \ln\sqrt{(x + 1)/(1 - x)}$ для $x = PX$ в диапазоне значений от -1 до $+1$.

$$\uparrow \quad 1 \quad XY \quad + \quad FBx \quad 1 \quad XY \quad - \quad \div \quad F\sqrt{\ }$$
$$F\ln \quad C/\Pi$$

При $x = 0{,}7615942$ получим $\operatorname{arth} x = 1{,}0000001$.

Программа 4.7. Вычисление обратного гиперболического котангенса $\operatorname{arcth} x = \ln\sqrt{1+2/(x-1)}$ для $x = \text{РХ} > 1$.

↑ 1 − 2 XY ÷ 1 + F √ F ln
С/П

Для $x = 1{,}3130352$ получим $\operatorname{arcth} x = 1{,}0000001$.

В некоторых микро-ЭВМ, например Электроника Д3-28, эти функции вычисляются микропрограммно.

4.2. Непрерывные дроби

Программа 4.8. Вычисление непрерывных дробей вида

$$f = a_0 + \cfrac{b_1}{a_1 + \cfrac{b_2}{a_2 + \cfrac{b_3}{a_3 + \dots}}} = \left[a_0;\ \frac{b_1}{a_1};\ \frac{b_2}{a_2};\ \frac{b_3}{a_3};\ \dots\right].$$

Ввод: a_m, b_m, a_{m-1}, b_{m-1}, ..., a_1, b_1, a_0 в регистр X.

↑ С/П XY ÷ ↑ С/П + БП 00

Пример. $f = \left[5;\ \frac{8}{4};\ \frac{2}{7};\ \frac{3}{5}\right] = 6{,}8765432$.

Непрерывной дробью можно представить некоторые дробно-рациональные функции, что упрощает их вычисления [1—5].

Программа 4.9. Вычисление дробно-рациональной функции

$$f(x) = \frac{15 - 21x^2 + x^4}{15 - 6x^2} = \left[1;\ \frac{-x^2}{1};\ \frac{-x^2}{3};\ \frac{-x^2}{5}\right].$$

Ввод: $x = \text{РХ}$.

П9 ИП9 /—/ × П8 5 ÷ 3 + ИП8
XY ÷ 1 + ИП8 XY ÷ 1 + С/П
БП 00

Для $x = 0$ имеем $f(0) = 1$, для $x = 1$ $f(1) = -0{,}5555554$, для $x = 2$ $f(2) = 5{,}8888889$.

4.3. Вычисление многочленов по схеме Горнера

Программа 4.10. Вычисление многочлена действительного переменного степени $n \leqslant 11$ по схеме Горнера $P(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n = (\dots(a_nx + a_{n-1})x + \dots + a_1)x + x_0$. Ввод: $a_0 = \text{РС}$,

$a_1 \div a_n = \text{P1} \div \text{P}n$, $x = \text{PX}$ (при смене x вводится только новое значение x и нажимается клавиша С/П). *)

ПД	...	...	П0	ИПn	↑	XY	ИПД	×	КИП0
+	ИП0	Fx = 0	06	XY	ИПС	+	С/П	БП	00

Для многочлена $P(x) = 0 + 1x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4$ $(n = 4)$ получим $P(1) = 10$, $P(2) = 98$ и т. д. Эту программу нетрудно приспособить для вычисления многочленов только с четными или нечетными степенями.

Программа 4.11. Вычисление многочлена комплексного переменного $Z = a + jb$ степени $n \leqslant 10$ по схеме Горнера. Ввод: $a_0 = \text{P0}$, $a_1 = \text{P1}, \ldots, a_9 = \text{P9}$, $a_{10} = \text{PA}$, $a = \text{PY}$ и $b = \text{PX}$. Результат $P(Z) = c + jd$: $c \to \text{PX}$, $d \to \text{PY}$.

ПС	XY	ПВ	ИПА	×	ИП9	+	ИПС	ИПА	×
ПД	XY	ИП8	ПП	42	ИП7	ПП	42	ИП6	ПП
42	ИП5	ПП	42	ИП4	ПП	42	ИП3	ПП	42
ИП2	ПП	42	ИП1	ПП	42	ИП0	ПП	42	С/П
БП	00	ИПД	ИПС	×	−	XY	ИПВ	×	+
XY	ИПС	×	ИПД	ИПВ	×	+	ПД	XY	В/0

Для многочлена $P(Z) = 1 + Z + 2Z^2 + \ldots + 8Z^8$ $(a_9 = a_{10} = 0)$ при $Z = 1 + j \cdot 1$ получим $P(Z) = 144 - j \cdot 113$ при времени счета $t_c \approx 70$ с. При усложнении ввода исходных данных и нормировке (делении на a_{13}) степень многочлена можно повысить до $n = 13$, а при действительной переменной x — до 16 [7].

4.4. Вычисление рядов и сложных числовых последовательностей

В основе вычислений рядов и сложных числовых последовательностей лежат циклические программы с циклами, вычисляющими главный член последовательности. Изменение этого члена задается последовательностью чисел, формируемых счетчиками вида $i = i + 1$ или $i = i - 1$. Такие счетчики создаются операторами косвенной адресации вида КИПN ИПN или операторами организации циклов FL0, FL1 или FL3. Проиллюстрируем методику составления таких программ на конкретных примерах.

Программа 4.12. Вычисление суммы целых чисел

$$S = \sum_{i=1}^{i=n} i = 1 + 2 + 3 + \ldots + (n-1) + n.$$

---

*) На место многоточия вводится число n, состоящее из двух цифр, например, 5 вводится как 0 и 5.

Ввод: $x = \text{РХ}$

П0 0 ИП0 + FL0 02 С/П

Главный член последовательности — сами числа i, которые создаются в регистре Р0: n, $n-1$ ... 3, 2, 1 и суммируются в регистре X по мере выполнения каждого цикла. Число 0 (оператор по адресу 01) служит для обнуления накапливающего регистра X перед выполнением циклов. Взяв $n = 10$ и нажав клавиши В/0 и С/П, получим $S = 55$.

В некоторых случаях текущее значение главного члена легко найти с помощью рекуррентных соотношений. Так, при вычислении последовательности

$$S = \sum_{i=1}^{n} n! = 1 + 1\cdot 2 + 1\cdot 2\cdot 3 + 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4 + \ldots + (n-1)! + n!$$

каждый последующий член равен предыдущему, умноженному на текущее значение i, т. е. $i! = (i-1)!i$.

Программа 4.13. Вычисление суммы факториалов $S(n!)$. Ввод: $n = \text{РХ}$.

П7	0	П9	П6	1	П8	КИП6	ИП6	ИП8	×
П8	ИП9	+	П9	ИП6	ИП7	—	Fx=0	06	ИП9
С/П	БП	00							

В этой программе n вводится в регистр 7, накопление сумм происходит в регистре 9, текущие значения i формируются в регистре 6. Регистр 8 используется для запоминания предшествующего значения главного члена последовательности. Счет останавливается при $i - n = 0$. Взяв $n = 4 = \text{РХ}$, получим $S(n!) = 33$.

Программа 4.14. Вычисление произведения факториалов $P(n!) = 1\cdot(1\cdot 2)\cdot(1\cdot 2\cdot 3)\ \ldots\ i!\ \ldots\ (n-1)!n!$. Ввод: $n = \text{РХ}$.

П7	0	П6	1	П8	П9	КИП6	ИП6	ИП8	×
П8	ИП9	×	П9	ИП6	ИП7	—	Fx=0	06	ИП9
С/П	БП	00							

В этой программе для вычисления главного члена — факториала — также используется рекуррентное соотношение $i! = (i-1)!i$. Для $n = 4 = \text{РХ}$ получим $P(n!) = 288$.

Программа 4.15. Вычисление последовательности

$$y = \sum_{k=1}^{m} k^n.$$

Ввод: m и n в регистр X.

П7	С/П	П9	0	П4	П8	КИП4	ИП4	ИП9	XY
Fx^y	ИП8	+	П8	ИП7	ИП4	—	Fx=0	06	ИП8
С/П	БП	00							

Главный член последовательности в этом случае K^n, где $K = 1, 2, 3, \ldots, m$. Для $m = 20$ и $n = 4$ значение $y = 722665{,}91$ (точное значение 722666), а $t_c \approx 2$ мин.

Если знаки главного члена должны попеременно меняться, вводится умножение его в каждом цикле на -1. Вычисление рядов с бесконечным числом членов заменяется суммированием конечного числа членов с контролем значений каждого из них. Если они становятся меньше малого числа ε, задающего погрешность вычислений, последние останавливают.

Приведенные выше рекомендации широко используются в программах вычисления специальных функций по их разложению в ряды.

4.5. Вычисление многочленов Лагерра, Лежандра, Лагранжа, Эрмита и Чебышева и их коэффициентов

Широко распространенные в научно-технических расчетах дифференциальные уравнения второго порядка часто имеют решения в виде ортогональных многочленов Лагерра, Лежандра, Эрмита и Чебышева [1—3]. В [6] описан пакет программ вычисления их коэффициентов на микрокалькуляторе Электроника Б3-21. Приведенные ниже программы получены переводом этих программ. Во всех программах степень многочлена n вводится в регистр X (после нажатия клавиш F, АВТ и В/0). Каждое нажатие клавиши С/П ведет к выдаче очередного коэффициента многочлена до тех пор, пока не высветится цифра 0, указывающая на конец вычислений.

Программа 4.16. Вычисление коэффициентов многочлена Лагерра.

П2	0	П3	ИП2	Fπ	×	F cos	П8	С/П	ИП3
П9	1	+	П3	ИП9	ИП2	—	Fx^2	ИП8	×
ИП3	/—/	÷	БП	07					

Для $n = 5$, нажимая клавишу С/П до появления цифры 0, будем получать коэффициенты многочлена Лагерра

$$L_5(x) = -1x^5 + 25x^4 - 200x^3 + 600x^2 - 600x + 120$$

в виде последовательности чисел -1, 25, -200, 600, -600, $+120$ и 0 (конец вычислений). Переключатель Р — Г в положении Р.

Программа 4.17. Вычисление коэффициентов многочлена Лежандра.

П2	1	П6	П8	+	П3	2	П7	×	3
—	П5	П4	ИП8	×	ИП6	÷	П8	ИП6	1
+	П6	ИП4	2	—	F$x<0$	12	ИП8	С/П	ИП3
1	—	П9	1	—	П3	ИП9	×	ИП8	×
ИП7	÷	ИП5	/—/	÷	П8	ИП7	2	+	П7
ИП5	2	—	П5	БП	27				

Для $n = 5$ получим коэффициенты многочлена

$$P_5(x) = 7{,}875x^5 - 8{,}75x^3 + 1{,}875x. \qquad (4.1)$$

Программа 4.18. Вычисление коэффициентов многочлена Эрмита.

П2	1	П3	П8	+	П4	2	П5	ИП8	С/П
ИП4	1	—	П9	1	—	П4	ИП9	×	ИП8
×	ИП5	/—/	÷	П8	ИП5	2	+	П5	БП
08									

Для $n = 8$ получим коэффициенты многочлена

$$H_8(x) = 1x^8 - 28x^6 + 210x^4 - 420x^2 + 105.$$

Программа 4.19. Вычисление коэффициентов многочлена Чебышева по формуле

$$T_n(x) = \frac{n}{2} \sum_{m=0}^{n/2} (-1)^m \frac{(n-m-1)!}{m!\,(n-2m)!} (2x)^{n-2m}.$$

П2	2	П4	П8	—	П3	ИП4	2	×	П4
ИП3	1	П5	—	П3	Fx=0	06	ИП4	С/П	/—/
ИП2	×	4	÷	П9	ИП5	×	С/П	ИП9	ИП8
÷	П4	ИП8	1	П5	+	П8	П7	2	—
П6	ИП7	П9	1	+	П7	ИП9	ИП2	—	ИП5
×	П5	ИП6	1	—	П6	Fx=0	40	ИП4	БП
22									

Для $n = 8 =$ РХ получим округленные коэффициенты многочлена Чебышева 8-й степени:

$$T_8(x) = 128x^8 - 256x^6 + 160x^4 - 32x^2 + 1.$$

Вычисление значений ортогональных многочленов можно организовать непосредственно по их разложениям в степенные ряды, примеры которых приведены выше. Однако в этом случае для каждого многочлена с заданным n придется составлять свою программу. Более рационально воспользоваться известными рекуррентными соотношениями [2].

Программа 4.20. Вычисление значений $L_n(x)$ многочлена Лагерра

$$L_n(x) = \frac{e^x}{n!} \cdot \frac{d^n(x^n e^{-x})}{dx^n}$$

по рекуррентной формуле ($L_0(x) = 1$; $L_1(x) = 1 - x$):

$$L_{i+1}(x) = \frac{1}{i+1}\left[(2i+1-x)\,L_i(x) - iL_{i-1}(x)\right] \quad (i = 1, 2, \ldots, n-1).$$

Ввод: n = РД, x = РХ.

П7	1	XY	—	П9	1	П8	П6	ИП6	ИП8
/—/	×	ИП6	2	×	1	+	ИП7	—	ИП9
П8	×	+	ИП6	1	+	П6	÷	П9	ИП6
ИПД	—	Fx⩾0	08	ИП9	С/П	БП	00		

Для $x = 3$ имеем $L_2(3) = -0{,}5$; $L_3(3) = 1$; $L_4(3) = 1{,}375$ ($t_c \approx 25$ с).

Программа 4.21. Вычисление значений $P_n(x)$ многочлена Лежандра

$$P_n(x) = (-1)^n \frac{2^{-n}}{n!} \cdot \frac{d^n(1-x^2)}{dx^n}$$

по рекуррентной формуле ($P_0(x) = 1$, $P_1(x) = x$):

$$P_{i+1}(x) = \frac{1}{i+1}\left[(2i+1)\,xP_i(x) - iP_{i-1}(x)\right] \quad (i = 1, 2, \ldots, n-1).$$

Ввод: n = РД, x = РХ.

П7	П9	1	П8	П6	ИП6	/—/	ИП8	×	ИП6
2	×	1	+	ИП7	×	ИП9	П8	×	+
ИП6	1	+	П6	÷	П9	ИП6	ИПД	—	Fx⩾0
05	ИП9	С/П	БП	00					

Для $x = 2$ имеем $P_2(2) = 5{,}5$, $P_3(2) = 17$, $P_4(2) = 55{,}375$.

Программа 4.22. Вычисление значений $H_n(x)$ многочлена Эрмита

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n(e^{-x^2})}{dx^n},$$

по рекуррентной формуле ($H_0(x) = 1$, $H_1(x) = 2x$):

$$H_{i+1}(x) = 2xH_i(x) - 2iH_{i-1}(x) \quad (i = 1, 2, \ldots, n-1).$$

П7	2	×	П9	1	П8	П6	ИП6	2	×
ИП8	/—/	×	ИП7	2	×	ИП9	П8	×	+
П9	КИП6	ИП6	ИПД	—	Fx⩾0	07	ИП9	С/П	БП
00									

Для $x = 3$ получим $H_2(3) = 34$, $H_3(3) = 180$, $H_4(3) = 876$.

Многочлены Чебышева первого рода $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$ и второго рода $U_n(x) = \sin((n+1)\arccos x)/\sin(\arccos x)$ несложно вычислить непосредственно по приведенным формулам (ввиду простоты их программы не приводятся).

Особый интерес представляет вычисление коэффициентов интерполяционных полиномов Лагранжа, которые применяются для интерполяции функции $y(x)$, заданной рядом ординат $y_0 \div y_n$ при абсциссах $x_0 \div x_n$. В качестве нулевого узла можно использовать любой узел, например, при трех узлах и нулевом центральном узле значения функций будут обозначаться: $y_{-1} = y(x_{-1})$, $y_0 = y(x_0)$ и

$y_{+1} = y(x_{+1})$. Полином Лагранжа может записываться в двух формах.

Первая форма имеет вид [1]:

$$y(x) = A_0(x)\,y_0 + A_1(x)\,y_1 + \ldots + A_n(x)\,y_n = \sum_{m=0}^{n} A_m(x)\,y_m, \quad (4.2)$$

где коэффициенты определяются из формулы

$$A_m(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{m-1})(x-x_{m+1})\ldots(x-x_n)}{(x_m-x_0)(x_m-x_1)\ldots(x_m-x_{m-1})(x_m-x_{m+1})\ldots(x_m-x_n)}.$$

Ввиду сложности этого выражения на микрокалькуляторах значения $A_m(x)$ можно вычислять раздельно для полиномов с $n \leqslant 5$ при $n+1$ ординатах. При нормировке

$$x = x_0 + ph,$$

где h — разность абсцисс соседних узлов,

$$p = (x - x_0)/h, \quad (4.3)$$

и будем вычислять значения нормированных коэффициентов Лагранжа $A_m(p)$. Ниже дан пакет программ, позволяющих вычислить $A_m(p)$ для $n+1$, равного 3, 4, 5 или 6 по формулам, приведенным в [3].

Программа 4.23. Вычисление коэффициентов полинома Лагранжа при трех ординатах y_{-1}, y_0, y_{+1}:

$$A_m(p) = (-1)^{m+1}\frac{p(p^2-1)}{(1+m)!\,(1-m)!\,(p-m)}.$$

ПД	Fx^2	1	—	ИПД	×	ПС	0	П6	ПП
27	2	÷	П1	ПП	27	/—/	П0	ПП	27
2	÷	ПА	3	С/П	БП	00	КИП6	ИПС	ИПД
ИП6	—	2	+	÷	В/0				

Для $p = 0{,}45 =$ РХ, нажав клавишу С/П, получим цифру 3 (указание на 3 ординаты). Коэффициенты полинома заносятся в регистры $A_{-1} = -0{,}12375 \to$ Р1, $A_0 = 0{,}7975 \to$ Р0, $A_{+1} = 0{,}32625 \to$ $\to$ РА.

Программа 4.24. Вычисление коэффициентов полинома Лагранжа при четырех ординатах y_{-1}, y_0, y_{+1} и y_{+2}:

$$A_m(p) = (-1)^{m+2}\frac{p(p^2-1)(p-2)}{(1+m)!\,(2-m)!\,(p-m)}.$$

ПД	Fx^2	1	—	ИПД	×	ИПД	2	—	×
ПС	0	П6	ПП	39	6	/—/	÷	П1	ПП
39	2	÷	П0	ПП	39	2	/—/	÷	ПА
ПП	39	6	÷	ПВ	4	С/П	БП	00	КИП6
ИПС	ИПД	ИП6	—	2	+	÷	В/0		

Для $p = 0{,}15$, нажав клавишу С/П, получим цифру 4 (число ординат). Коэффициенты полинома заносятся в регистры: $A_{-1} = -0{,}0393125 \to$ Р1, $A_0 = 0{,}9041875 \to$ Р0, $A_{+1} = 0{,}1595625 \to$ РА и $A_{+2} = -0{,}0244375 \to$ РВ.

Программа 4.25. Вычисление коэффициентов полинома Лагранжа при пяти ординатах y_{-2}, y_{-1}, y_0, y_{+1} и y_{+2}:

$$A_m(p) = (-1)^{m+2} \frac{p(p^2-1)(p^2-4)}{(2+m)!\,(2-m)!\,(p-m)}. \qquad (4.4)$$

ПД	Fx^2	ПС	1	—	ИПС	4	—	×	ИПД
×	ПС	0	П6	ПП	47	2	4	÷	П2
ПП	47	6	/—/	÷	П1	ПП	47	4	÷
П0	ПП	47	6	/—/	÷	ПА	ПП	47	2
4	÷	ПВ	5	С/П	БП	00	КИП6	ИПС	ИПД
ИП6	—	3	+	÷	В/0				

Для $p = 0{,}3$, нажав клавишу С/П, получим цифру 5 (число ординат). Коэффициенты полинома заносятся в регистры: $A_{-2} = 0{,}0193375 \to$ Р2, $A_{-1} = -0{,}13685 \to$ Р1, $A_0 = 0{,}889525 \to$ Р0, $A_{+1} = 0{,}25415 \to$ РА и $A_{+2} = -0{,}0261625 \to$ РВ.

Программа 4.26. Вычисление коэффициентов полинома Лагранжа при шести ординатах y_{-2}, y_{-1}, y_0, y_{+1}, y_{+2} и y_{+3}:

$$A_m(p) = (-1)^{m+3} \frac{p(p^2-1)(p^2-4)(p-3)}{(2+m)!\,(3-m)!\,(p-m)}.$$

ПД	Fx^2	П8	1	—	ИП8	4	—	×	ИПД
3	—	×	ИПД	×	П8	0	П6	ПП	63
1	2	0	/—/	÷	П2	ПП	63	2	4
÷	П1	ПП	63	1	2	/—/	÷	П0	ПП
63	1	2	÷	ПА	ПП	63	2	4	/—/
÷	ПВ	ПП	63	1	2	0	÷	ПС	6
С/П	БП	00	КИП6	ИП8	ИПД	ИП6	—	3	+
÷	В/0								

Для $p = 1{,}45 =$ РХ, нажав клавишу С/П, получим цифру 6 (число ординат). Коэффициенты полинома заносятся в регистры: $A_{-2} = -0{,}011356897 \to$ Р2, $A_{-1} = 0{,}079961829 \to$ Р1, $A_0 = -0{,}27021584 \to$ Р0, $A_{+1} = 0{,}8706955 \to$ РА, $A_{+2} = 0{,}35619361 \to$ РВ и $A_{+3} = -0{,}025278255 \to$ РС.

Во второй форме записи интерполяционного полинома Лагранжа

$$y(x) = B_0(y) + B_1(y)(x-x_0) + B_2(y)(x-x_0)(x-x_1) + \ldots$$
$$\ldots + B_n(y)(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{n-1}) \qquad (4.5)$$

коэффициенты $B_0(y) \div B_n(y)$, или сокращенно $B_0 \div B_n$, являются функциями ординат $y_0 \div y_n$ [1]. Алгоритм их вычисления по схеме

Эйткена поясняется табл. 4.1. При известных $B_0 \div B_n$ вычисление $y(x)$ для любого x можно провести по схеме Горнера.

Таблица 4.1

x	y	q	r	s
$x_0 \to$ Р0	$y_0 \to$ РА $= B_0$			
$x_1 \to$ Р1	$y_1 \to$ РВ	$\frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = q = B_1 \to$ РВ		
$x_2 \to$ Р2	$y_2 \to$ РС	$\frac{y_2 - y_0}{x_2 - x_0} = q_2 \to$ РС	$\frac{q_2 - q_1}{x_2 - x_1} = r_2 = B_2 \to$ РС	
$x_3 \to$ Р3	$y_3 \to$ РД	$\frac{y_3 - y_0}{x_3 - x_0} = q_3 \to$ РД	$\frac{q_3 - q_1}{x_3 - x_1} = r_3 \to$ РД	$\frac{r_3 - r_2}{x_3 - x_2} = s_3 = B_1 \to$ РД

Программа 4.27. Вычисление коэффициентов B_0, B_1 и B_2 по вводимым в регистр X значениям x_0, y_0, x_1, y_1, x_2 и y_2.

П0	С/П	ПА	С/П	П1	С/П	ПВ	С/П	П2	С/П
ПС	ИПВ	ИПА	—	ИП1	ИП0	—	÷	ПВ	ИПС
ИПА	—	ИП2	ИП0	—	÷	ИПВ	—	ИП2	ИП1
—	÷	ПС	0	С/П	БП	00			

Для $x_0 = 1{,}3$, $y_0 = 0{,}934$, $x_1 = 1{,}4$, $y_1 = 0{,}9523$, $x_2 = 1{,}5$ и $y_2 = 0{,}9661$ получим цифру 0 (окончание вычислений). Коэффициенты полинома заносятся в регистры: $B_0 = 0{,}934 \to$ РА, $B_1 = 0{,}183 \to$ РВ и $B_2 = -0{,}225 \to$ РС.

Программа 4.28. Вычисление коэффициентов B_0, B_1, B_2 и B_3. Ввод: $x_0 \div x_3 =$ Р0 ÷ Р3, $y_0 \div y_3 =$ РА ÷ РД; результат $B_0 \div B_3 \to$ РА ÷ РД.

ИПВ	ИПА	—	ИП1	ИП0	—	÷	ПВ	ИПС	ИПА
—	ИП2	ИП0	—	÷	ИПВ	—	ИП2	ИП1	—
÷	ПС	ИПД	ИПА	—	ИП3	ИП0	—	÷	ИПВ
—	ИП3	ИП1	—	÷	ИПС	—	ИП3	ИП2	—
÷	ПД	0	С/П						

Для $x_0 = 1{,}3$, $x_1 = 1{,}4$, $x_2 = 1{,}5$, $x_3 = 1{,}6$, $y_0 = 0{,}934$, $y_1 = 0{,}9523$, $y_2 = 0{,}9661$ и $y_3 = 0{,}9763$ получим, нажав клавишу С/П, цифру 0 (указывает на конец счета). Коэффициенты полинома заносятся в регистры: $B_0 = 0{,}934 \to$ РА, $B_1 = 0{,}183 \to$ РВ, $B_2 = -0{,}225 \to$ РС и $B_3 = 0{,}15 \to$ РД.

Программа 4.29. Вычисление коэффициентов B_0, B_1, B_2, B_3 и B_4. Ввод: $x_0 \div x_4 =$ Р0 ÷ Р4, $y_0 =$ Р9 и $y_1 \div y_4 =$ РА ÷ РД; результат $B_0 \to$ Р9, $B_1 \div B_4 \to$ РА ÷ РД.

ИПА	ИП9	—	ИП1	ИП0	—	÷	ПА	ИПВ	ИП9
—	ИП2	ИП0	—	÷	ИПА	—	ИП2	ИП1	—
÷	ПВ	ИПС	ИП9	—	ИП3	ИП0	—	÷	ИПА
—	ИП3	ИП1	—	÷	ИПВ	—	ИП3	ИП2	—
÷	ПС	ИПД	ИП9	—	ИП4	ИП0	—	÷	ИПА
—	ИП4	ИП1	—	÷	ИПВ	—	ИП4	ИП2	—
÷	ИПС	—	ИП4	ИП3	—	÷	ПД	0	С/П

Для $x_0 = 2{,}2$, $x_1 = 2{,}3$, $x_2 = 2{,}4$, $x_3 = 2{,}5$, $x_4 = 2{,}6$, $y_0 = 0{,}4860966$, $y_1 = 0{,}4892759$, $y_2 = 0{,}4918025$, $y_3 = 0{,}4937903$ и $y_4 = 0{,}4953388$ получим, нажав клавишу С/П, цифру 0, указывающую на конец вычислений. Результаты: $B_0 = 0{,}4860966$, $B_1 = 3{,}1793 \cdot 10^{-2}$, $B_2 = -3{,}2635 \cdot 10^{-2}$, $B_3 = 1{,}89833 \cdot 10^{-2}$ и $B_4 = -5{,}99965 \cdot 10^{-3}$.

4.6. Элементарные функции комплексной переменной

В приведенных ниже программах комплексная переменная обозначена как $Z = x + jy$, где $x =$ Р8 и $y =$ Р9. Результат вычисления функции $f(Z) = u + jv$ ($u \to$ РХ $=$ Р5, $v \to$ РУ $=$ Р6). Контрольные примеры приведенного ниже пакета программ вычисления элементарных функций комплексной переменной даны для числа $Z = 3 + j \cdot 2$. Формулы для вычисления функций комплексной переменной взяты из [1—3].

Программа 4.30. Возведение комплексного числа в квадрат:

$$Z^2 = (x^2 - y^2) + j \cdot 2xy.$$

ИП8	Fx^2	ИП9	Fx^2	—	П5	ИП8	ИП9	2	×
×	П6	ИП5	С/П						

Имеем $f(Z) = 5 + j \cdot 12$.

Программа 4.31. Обращение комплексного числа:

$$\frac{1}{Z} = \frac{x}{x^2 + y^2} - j\,\frac{y}{x^2 + y^2}.$$

ИП8	↑	Fx^2	ИП9	Fx^2	+	П7	÷	П5	ИП9
/—/	ИП7	÷	П6	ИП5	С/П				

Имеем $f(Z) = 0{,}23076923 - j \cdot 0{,}15384615$.

Программа 4.32. Обращение квадрата комплексного числа:

$$\frac{1}{Z^2} = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} - j\,\frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}.$$

ИП8	Fx^2	ИП9	Fx^2	—	ИП8	Fx^2	ИП9	Fx^2	+
Fx^2	П7	÷	П5	ИП8	/—/	ИП9	2	×	×
ИП7	÷	П6	ИП5	С/П					

Получаем $f(Z) = 2{,}9585798 \cdot 10^{-2} - j \cdot 7{,}1005917 \cdot 10^{-2}$,

Программа 4.33. Обращение разности комплексного числа $Z = x + jy$ с числом $(a + jb)$:

$$\frac{1}{Z-(a+jb)} = \frac{x-a}{(x-a)^2+(y-b)^2} - j\,\frac{y-b}{(x-a)^2+(y-b)^2}.$$

ИП8 ИПА — ↑ Fx^2 ИП9 ИПВ — Fx^2 +
П7 ÷ П5 ИПВ ИП9 — ИП7 ÷ П6 ИП5
С/П

Для $a = 2 =$ РА, $b = 1 =$ РВ находим $f(Z, a, b) = 0{,}5 - j\cdot 0{,}5$.

Программа 4.34. Вычисление квадратного корня из комплексного числа:

$$\sqrt{Z} = \pm\sqrt{\frac{x+\sqrt{x^2+y^2}}{2}} \pm j\sqrt{\frac{-x+\sqrt{x^2+y^2}}{2}}.$$

ИП8 Fx^2 ИП9 Fx^2 + F$\sqrt{\ }$ П7 ИП8 + 2
÷ F$\sqrt{\ }$ П5 ИП7 ИП8 — 2 ÷ F$\sqrt{\ }$ П6
ИП5 С/П

Имеем $f(Z) = \pm 1{,}817354 \pm j\cdot 0{,}55025048$.

Программа 4.35. Вычисление e^Z:

$$e^Z = e^x \cos y + je^x \sin y.$$

Переключатель Р — Г в положении Р.

ИП8 Fe^x П7 ИП9 F cos × П5 ИП7 ИП9 F sin
× П6 ИП5 С/П

Имеем $f(Z) = -8{,}3585327 + j\cdot 18{,}263726$.

Программа 4.36. Вычисление $\ln Z$:

$$\ln Z = \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2) + j\left(\operatorname{arctg}\frac{y}{x} + 2k\pi\right),$$

где $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ Переключатель Р — Г в положении Р.

ИП8 Fx^2 ИП9 Fx^2 + F ln 2 ÷ П5 ИП9
ИП8 ÷ F arctg П6 ИП5 С/П

Находим $f(Z) = 1{,}2824746 + j\cdot 0{,}58800261$.

Программа 4.37. Вычисление синуса комплексной переменной:

$$\sin Z = \sin x \operatorname{ch} y + j\cos x \operatorname{sh} y.$$

ИП9 Fe^x ↑ F1/x + 2 ÷ ИП8 F sin ×
П5 ИП9 Fe^x ↑ F1/x — 2 ÷ ИП8 F cos
× П6 ИП5 С/П

Получаем $f(Z) = 0{,}53092084 - j\cdot 3{,}5905644$.

Программа 4.38. Вычисление косинуса комплексной переменной:

$$\cos Z = \cos x \operatorname{ch} y - j\sin x \operatorname{sh} y.$$

ИП9 Fe^x ↑ F1/x + 2 ÷ ИП8 F cos ×
П5 ИП9 Fe^x ↑ F1/x — 2 ÷ ИП8 /—/
F sin × П6 ИП5 С/П

Находим $f(Z) = -3{,}7245453 - j \cdot 0{,}51182233$.

Программа 4.39. Вычисление тангенса комплексной переменной:

$$\operatorname{tg} Z = \frac{\sin 2x}{\cos 2x + \operatorname{ch} 2y} + j\,\frac{\operatorname{sh} 2y}{\cos 2x + \operatorname{ch} 2y}.$$

ИП9	2	×	Fe^x	↑	F1/x	+	2	÷	ИП8
2	×	F cos	+	П6	ИП8	2	×	F sin	ИП6
÷	П5	ИП9	2	×	Fe^x	↑	F1/x	−	2
÷	ИП6	÷	П6	ИП5	С/П				

Имеем $f(Z) = -9{,}8843723 \cdot 10^{-3} + j \cdot 0{,}96538587$.

Программа 4.40. Вычисление гиперболического синуса комплексной переменной:

$$\operatorname{sh} Z = \operatorname{sh} x \cos y + j \operatorname{ch} x \sin y.$$

ИП8	Fe^x	↑	F1/x	−	2	÷	ИП9	F cos	×
П5	ИП8	Fe^x	↑	F1/x	+	2	÷	ИП9	F sin
×	П6	ИП5	С/П						

Находим $f(Z) = -4{,}168907 + j \cdot 9{,}1544984$.

Программа 4.41. Вычисление гиперболического косинуса комплексной переменной:

$$\operatorname{ch} Z = \operatorname{ch} x \cos y + j \operatorname{sh} x \sin y.$$

ИП8	Fe^x	↑	F1/x	+	2	÷	ИП9	F cos	×
П5	ИП8	Fe^x	↑	F1/x	−	2	÷	ИП9	F sin
×	П6	ИП5	С/П						

Имеем $f(Z) = -4{,}1896257 + j \cdot 9{,}1092272$.

Программа 4.42. Вычисление гиперболического тангенса комплексной переменной:

$$\operatorname{th} Z = \frac{\operatorname{sh} 2x}{\operatorname{ch} 2x + \cos 2y} + j\,\frac{\sin 2y}{\operatorname{ch} 2x + \cos 2y}.$$

ИП8	2	×	Fe^x	↑	F1/x	+	2	÷	ИП9
2	×	F cos	+	П6	ИП8	2	×	Fe^x	↑
F1/x	−	2	÷	ИП6	÷	П5	ИП9	2	×
F sin	ИП6	÷	П6	ИП5	С/П				

Получаем $f(Z) = 1{,}0032386 - j \cdot 3{,}7640263 \cdot 10^{-3}$.

Обратные тригонометрические функции комплексного переменного вычисляются по следующим формулам:

$$\arcsin Z = \arcsin B + j \ln\left[A + \sqrt{A^2 - 1}\right],$$

$$\arccos Z = \arccos B - j \ln\left[A + \sqrt{A^2 - 1}\right],$$

$$\operatorname{arctg} Z = \frac{1}{2} \operatorname{arctg}\left(\frac{2x}{1 - x^2 - y^2}\right) + \frac{j}{4} \ln\left(\frac{x^2 + (y+1)^2}{x^2 + (y-1)^2}\right),$$

где

$$A=\frac{1}{2}\sqrt{(x+1)^2+y^2}+\frac{1}{2}\sqrt{(x-1)^2+y^2}$$

и

$$B=\frac{1}{2}\sqrt{(x+1)^2+y^2}-\frac{1}{2}\sqrt{(x-1)^2+y^2}.$$

Программа 4.43. Вычисление арксинуса комплексной переменной.

ИП8	1	+	Fx^2	ИП9	Fx^2	П7	+	F $\sqrt{}$	2
÷	П6	ИП8	↓	—	Fx^2	ИП7	+	F $\sqrt{}$	2
÷	П5	+	ПА	ИП6	ИП5	—	ПВ	F arcsin	П5
ИПА	Fx^2	1	—	F $\sqrt{}$	ИПА	+	F ln	П6	ИП5
С/П									

Для $Z=x+jy=3+j\cdot 2$ получаем $\arcsin Z=0{,}9646583+j\cdot 1{,}9686379$.

Программа 4.44. Вычисление арккосинуса комплексной переменной.

ИП8	1	+	Fx^2	ИП9	Fx^2	П7	+	F $\sqrt{}$	2
÷	П6	ИП8	1	—	Fx^2	ИП7	+	F $\sqrt{}$	2
÷	П5	+	ПА	ИП6	ИП5	—	ПВ	F arccos	П5
ИПА	Fx^2	1	—	F $\sqrt{}$	ИПА	+	F ln	↑	/—/
П6	ИП5	С/П							

Для $Z=3+j\cdot 2$ находим $\arccos Z=0{,}60613793-j\cdot 1{,}9686379$.

Программа 4.45. Вычисление арктангенса комплексного переменного.

ИП8	2	×	1	ИП8	Fx^2	П7	—	ИП9	Fx^2
—	÷	F arctg	2	÷	П5	ИП7	ИП9	1	+
Fx^2	+	ИП7	ИП9	1	—	Fx^2	+	÷	F ln
4	÷	П6	ИП5	С/П					

С учетом допустимой области определения Z для $Z=0{,}3+j\cdot 0{,}2$ получим $\operatorname{arctg} Z=0{,}30187467+j\cdot 0{,}18499461$.

Для вычисления обратных гиперболических функций комплексной переменной воспользуемся связью с обратными тригонометрическими функциями: $\operatorname{arsh} Z=-j\arcsin(jZ)$, $\operatorname{arch} Z=\pm j\arccos Z$ и $\operatorname{arth} Z=-j\operatorname{arctg}(jZ)$.

Программа 4.46. Вычисление обратного гиперболического синуса комплексного переменного.

ИП9	/—/	1	+	Fx^2	ИП8	Fx^2	П7	+	F $\sqrt{}$
2	÷	П6	ИП9	/—/	1	—	Fx^2	ИП7	+
F $\sqrt{}$	2	÷	П5	+	ПА	ИП6	ИП5	—	ПВ
F arcsin	↑	/—/	П6	ИПА	Fx^2	1	—	F $\sqrt{}$	ИПА
+	F ln	П5	С/П						

Для $Z=3+j\cdot 2$ получим $\operatorname{arsh} Z=1{,}983387+j\cdot 0{,}5706528$.

Программа 4.47. Вычисление обратного гиперболического косинуса комплексной переменной.

ИП8	1	+	Fx^2	ИП9	Fx^2	П7	+	F $\sqrt{}$	2
÷	П6	ИП8	1	−	Fx^2	ИП7	+	F $\sqrt{}$	2
÷	П5	+	ПА	ИП6	ИП5	−	ПВ	F arccos	П6
ИПА	Fx^2	1	−	F $\sqrt{}$	ИПА	+	F ln	↑	/−/
П5	ИП6	XY	С/П						

Для $Z = 3 + j \cdot 2$ имеем $\operatorname{arch} Z = \mp 1{,}9686379 \pm j \cdot 0{,}60613793$.

Программа 4.48. Вычисление обратного гиперболического тангенса комплексной переменной.

ИП9	/−/	2	×	1	ИП9	Fx^2	П7	−	ИП8
Fx^2	−	÷	F arctg	2	/−/	÷	П6	ИП7	ИП8
1	+	Fx^2	+	ИП7	ИП8	1	−	Fx^2	+
÷	F ln	4	÷	П5	ИП6	XY	С/П		

Для $Z = 0{,}3 + j \cdot 0{,}2$ находим $\operatorname{arth} Z = 0{,}29574995 + j \cdot 0{,}2154745$.

Программа 4.49. Вычисление отношения многочленов $f(Z) = A(Z)/B(Z)$ комплексной переменной при степени $A(Z)$ $n \leqslant 3$ и $B(Z)$ $m \leqslant 4$ [7]. Ввод: $b_0 \div b_4 =$ Р0 ÷ Р4, $a_0 =$ Р5, ..., $a_3 =$ Р8, 0 = Р9 $x =$ РУ и $y =$ РХ. Результат: $u \to$ РА = РХ, $v \to$ РВ = РУ.

ПВ	XY	ПА	ИП7	ИП8	ПП	47	ИП6	ПП	54
ИП5	+	ПС	ИП9	ПД	ИП3	ИП4	ПП	47	ИП2
ПП	54	ИП1	ПП	54	ИП0	+	↑	Fx^2	ИП9
Fx^2	+	÷	ПА	ИП9	FВx	÷	ПВ	ИПС	П9
ИПД	ПП	55	ИП9	С/П	БП	00	↑	ИПВ	×
П9	F,	ИПА	×	+	↑	ИПВ	×	ИПА	ИП9
×	+	ИП9	XY	П9	F,	ИПВ	×	XY	ИПА
×	XY	−	В/0						

Для $f(2 + j \cdot 1) = (Z^2 + 2Z + 1)/(3Z^3 + 2Z^2 + Z + 0{,}5)$ получим $u = 0{,}1863999$ и $v = -0{,}12612384$ при $t_c \approx 70$ с.

Глава 5

ПРОГРАММНАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ ОСНОВНЫХ ЧИСЛЕННЫХ МЕТОДОВ

5.1. Решение систем линейных уравнений

Решение систем линейных уравнений выполняется по программам, описанным в [28].

Программа 5.1. Решение системы из $n \leqslant 4$ уравнений

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \dots \\ b_n \end{bmatrix} \tag{5.1}$$

или ($b_i = a_{i,\,j+1}$)

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i = a_{i,\,j+1}, \tag{5.2}$$

где $i = 1, 2, \dots, n$ методом оптимального исключения переменных. Ввод: $n =$ P0, коэффициенты $a_{ij} =$ PX, $a_{i,\,j+1} =$ PX (построчно, не обращая внимания на вывод промежуточных результатов и завершая ввод каждого коэффициента нажатием клавиши С/П). Вывод: $x_i \to$ PX ($x_1 \to$ РД, $x_2 \to$ РС, $x_3 \to$ РВ и $x_4 \to$ РА).

П4	1	4	П2	ИП0	П1	С/П	ИП4	÷	КП2
FL1	06	1	4	П3	ИП0	П1	FL1	23	КИП3
С/П	БП	19	Сx	КП2	FL1	24	КП2	ИП0	ИП2
+	П1	П2	ИП3	—	Fx≠0	42	С/П	ПП	84
БП	28	КИП0	ИП0	П3	С/П	КИП2	—	П4	С/П
КИП2	—	ИП4	÷	КП1	FL3	49	ИП1	ИП0	+
П3	1	4	П1	П2	КИП1	/—/	ПП	84	ИП3
+	П3	ИП1	—	Fx=0	65	ИП0	П1	КИП3	КП2
FL1	78	БП	12	ИП0	XY	↑	КИП3	×	КИП1
+	КП2	F,	FL0	86	F,	П0	В/0		

Для системы из трех уравнений ($n = 3$)

$$\begin{bmatrix} 4 & 0{,}24 & -0{,}08 \\ 0{,}09 & 3 & -0{,}15 \\ 0{,}04 & -0{,}08 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 9 \\ 20 \end{bmatrix} \tag{5.3}$$

получим $x_1 = 1{,}9091983$, $x_2 = 3{,}1949644$ и $x_3 = 5{,}0448073$ при $t_c \approx$ ≈ 2 мин. Более простые программы для решения систем из 2 и 3 уравнений описаны в [6—8].

Программа 5.2. Решение систем из $n < 11$ уравнений в полуавтоматическом режиме по методу Жордана с циклической перестановкой строк и применением вычислительного бланка (см. пример ниже).

↑	Cx	XY	ИП1	÷	П0	XY	1	ПС	XY
С/П	ИПД	ИПС	1	+	ПС	—	Fx≥0	26	XY
КИПС	ИП0	×	—	БП	10	XY	ИП0	БП	02

Пример. Решить систему

$$\begin{bmatrix} 4 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & -2 & 3 \\ 2 & -3 & 4 & -2 \\ 1 & 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 \\ 16 \\ 0 \\ -4 \end{bmatrix}. \qquad (5.4)$$

Вычислительный бланк для решения системы уравнений (5.4)

p	$j=1$	$j=2$	$j=3$	$j=4$	$j=5$	$\sum$
0	4	−2	3	1	13	19
	0	5	−2	3	16	22
	2	−3	4	−2	0	1
	1	0	−3	1	−4	−5
1		5	−2	3	16	22
		−2	2,5	−2,5	−6,5	−8,5
		0,5	−3,75	0,75	−7,25	−9,75
	1	−0,5	0,75	0,25	3,25	4,75
2			1,7	−1,3	−0,1	0,3
			−3,55	0,45	−8,85	−11,95
		1	0,55	0,55	4,85	6,95
		1	−0,4	0,6	3,2	4,4
3				−2,2647059	−9,0588235	−11,323529
			1	0,97058823	4,8823529	6,8529412
			1	0,29411765	3,1764706	4,4705882
			1	−0,76470588	−0,58823529	0,17647058
4				1	$x_1=1,0000001$	2,0000003
				1	$x_2=2$	3
				1	$x_3=2,9999999$	3,9999998
				1	$x_4=3,9999999$	4,9999997

Графа для $p = 0$ бланка заполняется коэффициентами уравнения, вводится $n =$ РД. Далее последовательно заполняются графы для $p = 1, 2$ и т. д. Для этого вводится первый столбец в регистры $1, 2, \ldots, n$ (сверху вниз). Затем вводится первый элемент следующего столбца и нажимаются клавиши В/0 и С/П — высвечивается 0.

Далее вводятся остальные элементы в регистр X и нажимается клавиша С/П (после ввода последнего элемента клавиша С/П нажимается дважды). Полученные результаты вписываются в графу под вводимым столбцом, а в графе слева снизу дописывается 1. После заполнения бланка для $p = n$ получаем $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и контрольные суммы.

У некоторых микрокалькуляторов (HP-15C, TI-58C, TI-59 и др.) решение систем из $n \leqslant (6 \div 10)$ уравнений реализовано микропрограммно или с помощью встроенных программ пользователя.

5.2. Интерполяция и экстраполяция функций одной переменной

Интерполяция заключается в нахождении значений функции $y(x)$, заданной n узлами, в промежутках между ними. При этом функция заменяется тем или иным полиномом $P(x)$, значения которого в узлах совпадают со значениями $y(x)$. Ниже дан пакет программ, реализующих интерполяцию с помощью полинома Лагранжа [3]. Коэффициенты интерполяционного полинома при произвольном расположении узлов вычисляются методом Эйткена (см. § 4.5). С помощью приведенных ниже программ можно производить и экстраполяцию, т. е. вычисление $y(x)$ при x, выходящем за пределы интервала интерполяции.

Программа 5.3. Линейная интерполяция при $n = 2$ по формуле

$$y(x) = y_0 + (x - x_0)(y_1 - y_0)/h. \qquad (5.5)$$

Ввод: $h =$ P9, x_0, y_0, y_1 и (после индикации цифры 0) x в регистр X.

П0	С/П	ПА	С/П	ИПА	—	ИП9	÷	ПВ	0
С/П	ИП0	—	ИПВ	×	ИПА	+	БП	10	

Для $h = 0{,}01$, $x_0 = 2{,}47$, $y_0 = 0{,}4932443$ и $y_1 = 0{,}4934309$ получим $y(2{,}475) = 0{,}4933376$ (интерполяция). Набрав новое значение $x = 2{,}485$ и нажав клавишу С/П, получим $y(2{,}485) = 0{,}4935242$ (экстраполяция).

Программа 5.4. Квадратичная интерполяция при $n = 3$ по формуле

$$y(x) = B_0 + B_1(x - x_0) + B_2(x - x_0)(x - x_1) \qquad (5.6)$$

при произвольном расположении узлов. Ввод в регистр X: x_0, y_0, x_1, y_1, x_2, y_2 и x (после пуска программы и индикации цифры 0). Коэффициенты B_0, B_1 и B_2 после вычисления заносятся в регистры A, B и C.

П0	С/П	ПА	С/П	П1	С/П	ПВ	С/П	П2	С/П
ПС	ИПВ	ИПА	—	ИП1	ИП0	—	÷	ПВ	ИПС

ИПА	—	ИП2	ИП0	—	÷	ИПВ	—	ИП2	ИП1
—	÷	ПС	0	С/П	П8	ИП1	—	ИПС	×
ИПВ	+	ИП8	ИП0	—	×	ИПА	+	БП	34

Для $x_0 = 1{,}3$, $y_0 = 0{,}934$, $x_1 = 1{,}4$, $y_1 = 0{,}9523$, $x_2 = 1{,}5$ и $y_2 = 0{,}9661$ получим $y(1{,}43) = 0{,}9569125$. При смене x набираем только его новое значение и нажимаем клавишу С/П.

Программа 5.5. Квадратичная интерполяция при равноотстоящих узлах по формуле

$$y(x_0 + ph) = \frac{p(p-1)}{2} y_{-1} + (1 - p^2) y_0 + \frac{p(p+1)}{2} y_{+1}, \qquad (5.7)$$

где $p = (x - x_0)/h$. Ввод: h — Р9, x_0, y_{-1}, y_0, y_{+1} и (после индикации цифры 0) x в регистр Х.

П8	С/П	П1	С/П	П2	С/П	П3	0	С/П	П7
ИП8	—	ИП9	÷	П6	1	—	ИП6	×	2
÷	ИП1	×	1	ИП6	Fx^2	—	ИП2	×	+
ИП6	1	+	ИП6	×	2	÷	ИП3	×	+
БП	08								

Для $h = -0{,}1$, $x_0 = 1{,}4$, $y_0 = 0{,}9661$, $y_1 = 0{,}9523$ и $y_2 = 0{,}934$, нажав клавиши В/0 и С/П, получим цифру 0. Введя $x = 1{,}43$ и нажав клавишу С/П, получим $y(1{,}43) = 0{,}9569125$ — интерполяция назад ($h < 0$).

Программа 5.6. Интерполяция при четырех произвольно расположенных узлах при $n = 4$ по формуле

$$y(x) = [[B_3(x - x_2) + B_2](x - x_1) + B_1](x - x_0) + B_0. \qquad (5.8)$$

Ввод: $x_0 \div x_3$ — Р0 ÷ Р3, $y_0 \div y_3$ — РА ÷ РД и x — РХ (после пуска программы и индикации цифры 0). Коэффициенты $B_0 \div B_3$ заносятся в регистры А ÷ Д.

ИПВ	ИПА	—	ИП1	ИП0	—	÷	ПВ	ИПС	ИПА
—	ИП2	ИП0	—	÷	ИПВ	—	ИП2	ИП1	—
÷	ПС	ИПД	ИПА	—	ИП3	ИП0	—	÷	ИПВ
—	ИП3	ИП1	—	÷	ИПС	—	ИП3	ИП2	—
÷	ПД	0	С/П	П9	ИП2	—	ИПД	×	ИПС
+	ИП9	ИП1	—	×	ИПВ	+	ИП9	ИП0	—
×	ИПА	+	БП	43					

Для $x_0 = 1{,}3$, $x_1 = 1{,}4$, $x_2 = 1{,}5$, $x_3 = 1{,}6$, $y_0 = 0{,}934$, $y_1 = 0{,}9523$, $y_2 = 0{,}9661$ и $y_3 = 0{,}9763$ получим $y(1{,}43) = 0{,}95687155$ при точном значении 0,9569.

Программа 5.7. Интерполяция при четырех равноотстоящих узлах по формуле

$$y(x_0 + ph) \simeq -\frac{p(p-1)(p-2)}{6} y_{-1} + \frac{(p^2-1)(p-2)}{2} y_0 - \frac{p(p+1)(p-2)}{2} y_{+1} + \frac{p(p^2-1)}{6} y_{+2}. \qquad (5.9)$$

Ввод: h = Р9, y_{-1}, y_0, y_{+1}, y_{+2}, x_0 и x в регистр X.

П1	С/П	П2	С/П	П3	С/П	П4	С/П	П8	С/П
П7	ИП8	—	ИП9	÷	П6	2	—	2	÷
П5	3	÷	ИП6	1	—	×	ИП6	/—/	×
ИП1	×	ИП6	Fx^2	1	—	ПА	ИП5	×	ИП2
×	+	ИП6	1	+	ИП6	×	ИП5	×	ИП3
×	—	ИПА	ИП6	×	6	÷	ИП4	×	+
БП	09								

Для приведенного выше примера при $h = 0{,}1$, $y_{-1} = 0{,}934$, $y_0 = 0{,}9523$, $y_{+1} = 0{,}9661$, $y_{+2} = 0{,}9763$, $x_0 = 1{,}4$ и $x = 1{,}43$ получим $y(1{,}43) = 0{,}9568716$.

Программа 5.8. Интерполяция при пяти произвольно расположенных узлах по формуле

$$y(x) = [[[B_4(x - x_3) + B_3](x - x_2) + B_2](x - x_1) + B_1](x - x_0) + B_0.$$

Ввод: $x_0 \div x_4$ = Р0 ÷ Р4, y_0 = Р9, $y_1 \div y_4$ = РА ÷ РД и x = РХ (после пуска и индикации цифры 0). Коэффициенты B_0, $B_1 \div B_2$ заносятся в регистры 9, А ÷ Д.

ИПА	ИП9	—	ИП1	ИП0	—	÷	ПА	ИПВ	ИП9
—	ИП2	ИП0	—	÷	ИПА	—	ИП2	ИП1	—
÷	ПВ	ИПС	ИП9	—	ИП3	ИП0	—	÷	ИПА
—	ИП3	ИП1	—	÷	ИПВ	—	ИП3	ИП2	—
÷	ПС	ИПД	ИП9	—	ИП4	ИП0	—	÷	ИПА
—	ИП4	ИП1	—	÷	ИПВ	—	ИП4	ИП2	—
÷	ИПС	—	ИП4	ИП3	—	÷	ПД	0	С/П
П8	ИП3	—	ИПД	×	ИПС	+	ИП8	ИП2	—
×	ИПВ	+	ИП8	ИП1	—	×	ИПА	+	ИП8
ИП0	—	×	ИП9	+	БП	69			

В табл. 5.1 даны значения функции

$$y(x) = \Phi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-t^2}\,dt$$

Таблица 5.1

x	y	B	$B \to PN$
$x_0 = 2{,}2$	$y_0 = 0{,}4860966$	$B_0 = 4{,}860986 \cdot 10^{-1}$	Р9
$x_1 = 2{,}3$	$y_1 = 0{,}4892759$	$B_1 = 3{,}1793 \cdot 10^{-2}$	РА
$x_2 = 2{,}4$	$y_2 = 0{,}4918025$	$B_2 = -3{,}2635 \cdot 10^{-2}$	РВ
$x_3 = 2{,}5$	$y_3 = 0{,}4937903$	$B_3 = 1{,}89833 \cdot 10^{-2}$	РС
$x_4 = 2{,}6$	$y_4 = 0{,}4953388$	$B_4 = -5{,}99965 \cdot 10^{-2}$	РД

в узлах интерполяции и вычисленные по данной программе значения B_0, $B_1 \div B_4$. При $x = 2{,}45$ получим $y(2{,}45) = 0{,}49285719$ при точном значении 0,4928572.

Программа 5.9. Интерполяция при пяти равноотстоящих узлах по формуле

$$y(x_0 + ph) = \frac{(p^2-1)\,p\,(p-2)}{24}\,y_{-2} - \frac{(p-1)\,p\,(p^2-4)}{6}\,y_{-1} + \frac{(p^2-1)\,(p^2-4)}{4}\,y_0 - \frac{(p+1)\,p\,(p^2-4)}{6}\,y_{+1} + \frac{(p^2-1)\,p\,(p+2)}{24}\,y_{+2}. \qquad (5.10)$$

Ввод: h = Р9, y_{-2}, y_{-1}, y_0, y_{+1}, y_{+2}, x_0 и x в регистр X.

П1	С/П	П2	С/П	П3	С/П	П4	С/П	П5	С/П
П8	С/П	П7	ИП8	—	ИП9	÷	П6	Fx^2	ПД
1	—	4	÷	ПА	ИП6	2	—	×	ИП6
×	6	÷	ИП1	×	ИПД	4	—	ПС	6
÷	ПВ	ИП6	×	ИП6	1	—	×	ИП2	×
—	ИПА	ИПС	×	ИП3	×	+	ИП6	1	+
ИП6	×	ИПВ	×	ИП4	×	—	ИП6	2	+
ИП6	×	ИПА	×	6	÷	ИП5	×	+	БП
11									

Для приведенного выше примера, взяв $x_0 = 2{,}4$ и $y_0 = 0{,}4918025$, для $x = 2{,}45$ получим $y(2{,}45) = 0{,}49285719$.

Программа 5.10. Интерполяция при шести равноотстоящих узлах по формуле

$$y(x_0 + ph) = -\frac{p\,(p^2-1)\,(p-2)\,(p-3)}{120}\,y_{-2} + \frac{p\,(p-1)\,(p^2-4)\,(p-3)}{24}\,y_{-1} - \frac{(p^2-1)\,(p^2-4)\,(p-3)}{12}\,y_0 + \frac{p\,(p+1)\,(p^2-4)\,(p-3)}{12}\,y_{+1} - \frac{p\,(p^2-1)\,(p+2)\,(p-3)}{24}\,y_{+2} + \frac{p\,(p^2-1)\,(p^2-4)}{120}\,y_{+3}.$$

Ввод: x_0 = Р8, h = Р9, y_{-2} = Р2, y_{-1} = Р1, y_0 = Р0, y_{+1} = РА, y_{+2} = РВ, y_{+3} = РС и x = РХ.

П7	ИП8	—	ИП9	÷	П7	Fx^2	1	—	П3
2	4	÷	ПД	ИП7	3	—	×	ИП7	/—/
×	П4	ИП7	2	—	×	5	÷	ИП2	×
ИП7	Fx^2	4	—	П5	ИП7	3	—	×	1

2	÷	П6	ИП7	×	ИП7	1	—	×	2
÷	ИП1	×	+	ИП6	ИП3	×	ИП0	×	—
ИП7	1	+	ИП7	×	ИП6	×	ИПА	×	+
ИП4	ИП7	2	+	×	ИПВ	×	+	ИП7	ИПД
×	ИП5	×	5	÷	ИПС	×	+	С/П	БП
00									

Для контроля этой программы воспользуемся табулированными данными функции $P(x)$ нормального распределения вероятностей [3] при $x_{-2} = 0{,}5$, $x_{-1} = 0{,}6$, $x_0 = 0{,}7$, $x_{+1} = 0{,}8$, $x_{+2} = 0{,}9$, $x_{+3} = 1{,}0$ (т. е. $x_0 = 0{,}7$ и $h = 0{,}1$). Для этих значений x имеем $y_{-2} = 0{,}6914625$, $y_{-1} = 0{,}7257469$, $y_0 = 0{,}7580363$, $y_{+1} = 0{,}7881446$, $y_{+2} = 0{,}8159399$ и $y_{+3} = 0{,}8413447$. Введя эти данные и положив $x = 0{,}86 =$ РХ, найдем $p(0{,}86) = 0{,}80510553$ при известном точном значении $0{,}80510547$ и $t_c \approx 1$ мин.

Программы, обеспечивающие интерполяцию функции $y(x)$ при произвольном расположении узлов, могут использоваться и для обратной интерполяции, т. е. нахождения значений x при заданном y. Для этого значения x_i в узлах интерполяции заносятся в регистры, отведенные под запись y_i, а значения y_i — в регистры, отведенные под запись x_i в узлах.

Приведенные выше программы обеспечивают минимальное время интерполяции благодаря вычислению коэффициентов полиномов Лагранжа по готовым формулам с заранее вычисленными членами, содержащими факториалы. Однако при этом для каждого n приходится использовать свою программу.

В [22] описаны универсальные программы для интерполяции полиномами Лагранжа и Ньютона ($n \leqslant 6$ при произвольном и $n \leqslant 10$ при равномерном расположении узлов), а также кубическими сплайнами. Однако время интерполяции по ним велико (в 3—4 раза больше, чем по описанным выше программам). Поэтому подобные программы удобнее использовать для представления (аппроксимации) функций степенными полиномами (см. § 5.13).

5.3. Интерполяция и экстраполяция функций двух переменных

Часто встречаются функции $f(x, y)$ двух переменных y и x. Ограничившись доступными для микрокалькуляторов Электроника Б3-34 методами интерполяции и экстраполяции функций $f(x, y)$ с постоянным шагом $h = \Delta x$ и $k = \Delta y$ [3], введем наряду с параметром

$$p = (x - x_0)/h$$

параметр

$$q = (y - y_0)/k.$$

Точку (x_0, y_0) условно обозначим как 0, а значение функции для нее $f_{00} = f(x_0, y_0)$. Тогда $f_{10} = f(x_1, y_0)$, $f_{01} = f(\tilde{x}_0, y_1)$, $f_{11} = f(x_1, y_1)$, $f_{0-1} = f(x_0, y_{-1})$ и т. д.

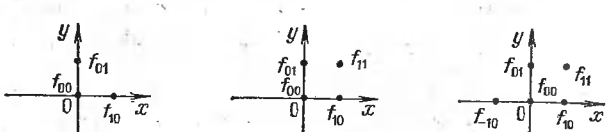

Рис. 5.1. Расположение узлов при интерполяции функций двух переменных при трех (*а*), четырех (*б*) и шести (*в*) точках

Программа 5.11. Интерполяция и экстраполяция функции $f(x, y)$ двух переменных x и y по формуле для трех точек (рис. 5.1, *а*):

$$f(x, y) = (1 - p - q) f_{00} + p f_{10} + q f_{01}$$

с погрешностью $O(h^2)$, пропорциональной h^2. Ввод: h = Р8, k = Р9 и далее в регистр X: x_0, y_0, f_{00}, f_{01}, f_{10}, x и y (при повторных пусках программы для новых x и y вводятся только последние).

П0	С/П	П1	С/П	П2	С/П	П3	С/П	П4	С/П
П5	С/П	П6	ИП1	—	ИП9	÷	П6	ИП5	ИП0
—	ИП8	÷	П5	1	XY	—	ИП6	—	ИП2
×	ИП5	ИП4	×	+	ИП6	ИП3	×	+	БП
09									

Для контроля программы рассмотрим значения (см. табл. 5.2) функции последействия [5]

$$f(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2 z^2 - z - x e^{-z}} dz.$$

Таблица 5.2

y \ x	0,4	0,7	1,0
0,00	2,500	1,429	1,000
0,05	2,487	1,419	0,955
0,10	2,456	1,400	0,981

Для выбранных узлов имеем $h = 0{,}3$, $k = 0{,}1$, $x_0 = 0{,}4$, $y_0 = 0$, $f_{00} = 2{,}5$, $f_{01} = 2{,}456$ и $f_{10} = 1{,}429$. Введя эти данные и придавая x и y различные, отмеченные ниже значения, получим $f(0{,}7;\ 0{,}05) = 1{,}407$ при точном значении 1,419, $f(0{,}7;\ 0{,}1) = 1{,}385$ при точном значении 1,4; $f(0{,}4;\ 0{,}05) = 2{,}478$ при точном значении 2,487 и т. д.

В узлах интерполяции расчетные значения $f(x, y)$ совпадают с исходными. Время вычисления одного значения $f(x, y)$ около 12 с.

Программа 5.12. Интерполяция и экстраполяция функции $f(x, y)$ двух переменных x и y по формуле для четырех точек (рис. 5.1, *б*):

$$f(x, y) = (1-p)(1-q)f_{00} + p(1-q)f_{10} + q(1-p)f_{01} + pqf_{11}$$

с погрешностью $O(h^2)$, пропорциональной h^2. Ввод: h = Р1, k = Р2 и далее, после нажатия клавиши С/П, в регистр X значений x_0, y_0, f_{00}, f_{01}, f_{10}, f_{11}, x и y.

4	П4	6	П0	С/П	КП4	FL0	04	С/П	П3
С/П	П4	ИП6	—	ИП2	÷	П4	ИП3	ИП5	—
ИП1	÷	П3	1	ИП3	—	ПВ	1	ИП4	—
ПС	×	ИП7	×	ИПВ	ИП4	×	ИП8	×	+
ИПС	ИП3	×	ИП9	×	+	ИП3	ИП4	×	ИПА
×	+	БП	08						

Для проверки этой программы воспользуемся данными табл. 5.2. Введя $h = 0{,}3$ = Р1 и $k = 0{,}1$ = Р2, нажимаем клавишу С/П — высвечивается цифра 6, указывающая на ввод шести параметров: $x_0 = 0{,}4$, $y_0 = 0$, $f_{00} = 2{,}5$, $f_{01} = 2{,}456$, $f_{10} = 1{,}429$ и $f_{11} = 1{,}4$. При вводе их в регистр X нажимается клавиша С/П. Далее, после ввода в регистр X текущих значений x и y, получим значение $f(x, y)$. Например, будем иметь $f(0{,}4;\ 0{,}05) = 2{,}478$ при точном значении 2,487, $f(0{,}7;\ 0{,}05) = 1{,}4145$ при точном значении 1,419, $f(0{,}5;\ 0{,}08) = 2{,}1118001$ и т. д.

Программа 5.13. Интерполяция и экстраполяция функции $f(x, y)$ двух переменных x и y по формуле для шести точек (рис. 5.1, *в*):

$$f(x, y) = \frac{q(q-1)}{2} f_{0-1} + \frac{p(p-1)}{2} f_{-10} + (1 + pq - p^2 - q^2) f_{00} + \frac{p(p-2q+1)}{2} f_{10} + \frac{q(q-2p+1)}{2} f_{01} + pqf_{11}$$

с погрешностью $O(h^3)$, пропорциональной h^3. Ввод h = Р1, k = Р2 и далее, после нажатия клавиши С/П и высвечивания цифры 8, в регистр X: x_0, y_0, f_{00}, f_{10}, f_{0-1}, f_{-10}, f_{01}, f_{11}, x и y.

4	П4	8	П0	С/П	КП4	FL0	04	С/П	П3
С/П	П4	ИП6	—	ИП2	÷	П4	ИП3	ИП5	—
ИП1	÷	П3	ИП4	1	—	ИП4	×	ИП9	×
ИП3	1	—	ИП3	×	ИПА	×	+	ИП3	ИП4
×	ПД	1	+	ИП3	Fx^2	—	ИП4	Fx^2	—
2	×	ИП7	×	+	ИП3	ИП4	2	×	—
1	+	ИП3	×	ИП8	×	+	ИП4	ИП3	2
×	—	1	+	ИП4	×	ИПВ	×	+	ИПД
ИПС	×	2	×	+	2	÷	БП	08	

Для контроля этой программы вновь воспользуемся данными табл. 5.2, взяв в качестве центральной точки точку $x_0=0{,}7$, $y_0=0{,}05$. Тогда исходными будут следующие данные: $h=0{,}3$, $k=0{,}05$, $x_0=0{,}7$, $y_0=0{,}05$, $f_{00}=1{,}419$, $f_{10}=0{,}995$, $f_{0-1}=1{,}429$, $f_{-10}=2{,}487$, $f_{01}=1{,}4$ и $f_{11}=0{,}981$. Введя указанные далее значения x и y, получим $f(1{,}0)=1$ при точном значении 1, $f(0{,}4;\ 0)=2{,}502$ при точном значении 2,5, $f(0{,}5;\ 0{,}03)=2{,}0658579$ и т. д. Время счета около 25 с.

5.4. Вычисление корней нелинейных уравнений

Нелинейное, в частности трансцендентное, уравнение

$$F(x)=0 \tag{5.12}$$

имеет один или несколько корней $x=\xi_i$, обращающих $F(x)$ в нуль. Их нахождение сводится к оценке интервала изоляции корня $[a,\ b]$ (т. е. интервала, в котором находится один корень) и его последующему сужению до тех пор, пока приближенное значение корня $\bar{x}_i$ в этом интервале не станет отличаться от точного ξ_i на заданную малую величину ε. Ниже дан пакет программ вычисления корней функции $F(x)$ различными методами [4—8]. Вычисление $F(x)$ оформляется фрагментом программы, вписываемым в текст основной программы на место многоточия.

Программа 5.14. Определение корня (5.12), приведенного к виду $x=f(x)$, методом простых итераций, реализованным выражениями

$$x_{n+1}=f(x_n) \quad \text{пока} \quad (x_{n+1}-x_n)^2>\varepsilon^2.$$

Ввод: данные $f(x)$, $\varepsilon^2=$ РС, начальное приближение $x_0=$ РХ.

ПД	...	...	...	...	...	...	...	...		ИПД
XY	ПД	→	Fx^2	ИПС	—	F$x<0$	01	ИПД		С/П

Отметим, что метод простых итераций сходится, если в интервале $[a,\ b]$ $f'(x)<1$.

Пример. Найдем корень уравнения

$$F(x)=x-\sin x-0{,}25=0. \tag{5.13}$$

Приведем его к виду

$$x=f(x)=\sin x+0{,}25. \tag{5.14}$$

Поскольку $f'(x)=\cos x<1$, то метод простых итераций применим для решения (5.14). При $k=0{,}25=$ P9 фрагмент программы для вычисления $f(x)$ имеет вид: ИПД F sin ИП9 + . Для $x_0=1{,}2$ и $\varepsilon^2=1\cdot10^{-6}$ получим $\bar{x}=1{,}1718537$ при $t_c\approx22$ с.

Программа 5.15. Реализация метода простых итераций с остановкой по *критерию машинного нуля*, т. е. при $x_{n+1} = x_n$ с точностью до последнего знака. Ввод: данные $f(x)$, $x_0 =$ РХ.

ПД	...	...	...	...	...	...	...	...	...
...	...	ИПД	XY	ПД	—	Fx=0	01	ИПД	С/П

Для приведенного выше примера получим $\bar{x} = 1{,}1712298$ при $t_c \approx 60$ с.

Высокую скорость сходимости итерационного процесса имеет метод Ньютона (касательных), реализуемый итерационным уравнением вида

$$x_{n+1} = x_n - F(x_n)/F'(x_n). \qquad (5.15)$$

Сходимость обеспечивается при выборе начального приближения x_0, удовлетворяющего условию

$$F(x_0) \cdot F''(x_0) > 0. \qquad (5.16)$$

В качестве x_0 выбирается тот конец интервала $[a, b]$, на котором знаки $F(x)$ и $F''(x)$ совпадают.

Программа 5.16. Реализация метода Ньютона с остановкой вычислений по критерию машинного нуля. Ввод: данные $F(x_n)/F'(x)$ при $x_n =$ РД, $x_0 =$ РХ.

ПД	...	...	...	...	...	...	...	...	...
...	ИПД	XY	—	ПД	FBx	Fx=0	01	ИПД	С/П

Программа 5.17. Реализация метода Ньютона с остановкой вычислений по критерию $(x_{n+1} - x_n)^2 < \varepsilon^2$. Ввод: данные $F(x_n)/F'(x_n)$ при $x_n =$ РД, $\varepsilon^2 =$ РС, $x_0 =$ РХ.

ПД	...	...	...	...	...	...	...	ИПД	XY
—	ПД	FBx	Fx^2	ИПС	—	Fx<0	01	ИПД	С/П

Для контроля двух последних программ вычислим корень уравнения (5.13). В этом случае

$$\frac{F(x)}{F'(x)} = \frac{x - \sin x - 0{,}25}{1 - \cos x}$$

и фрагмент программы, вычисляющий $F(x)/F'(x)$, имеет вид (0,25=Р9):

ИПД	↑	F sin	—	ИП9	—	1	ИПД	F cos	—
÷									

Поскольку $F''(x) = \sin x > 0$ и $F(x) > 0$ при $x = b$, то надо взять $x_0 = b = 1{,}3$. По программе 5.16 получим $\bar{x} = 1{,}1712297$ при $t_c \approx 30$ с.

Если нахождение производной $F'(x)$ затруднено или нежелательно, можно использовать модифицированный метод Ньютона, реализуемый выражением

$$x_{n+1} = x_n - F(x_n)/K,$$

где K — константа, близкая к среднему значению $F'(x)$ в интервале $[a, b]$.

Программа 5.18. Реализация модифицированного метода Ньютона с остановкой вычислений по критерию машинного нуля. Ввод: данные $F(x_n)$ при x_n = РД, K = РВ, x_0 = РХ.

ПД	...	...	...	...	...	...	...	...	ИПВ
÷	ИПД	XY	—	ПД	FBx	Fx=0	01	ИПД	С/П

Для приведенного выше примера при $K = 0{,}64$ получим $\bar{x} = 1{,}1712297$ при времени счета ≈ 35 с. Фрагмент программы вычисления $F(x_n)$ имеет вид: ИПД ↑ F sin — ИП9 —.

Вычисление корней (5.12) возможно также методом хорд. При этом методе каждое новое значение $\bar{x}$ находится как точка пересечения хорды, проведенной через точки $F(a)$ и $F(b)$ функции $F(x)$, с осью абсцисс, причём одна из этих точек фиксируется — та, для которой знак $F(x)$ совпадает со знаком $F''(x)$. Условие сходимости этого метода аналогично (5.16). Если неподвижен конец хорды с $x = a$, то

$$x_{n+1} = x_n - \frac{F(x_n)}{F(x_n) - F(a)}(x_n - a),$$

а если неподвижен конец хорды с $x = b$, то

$$x_{n+1} = x_n - \frac{F(x_n)}{F(b) - F(x_n)}(b - x_n).$$

Полученное значение x_{n+1} присваивается значению b в первом случае и a во втором, что обеспечивает сужение интервала $[a, b]$. Вычисления прекращаются при $(x_{n+1} - x_n)^2 \leqslant \varepsilon^2$.

Программа 5.19. Реализация метода хорд при неподвижном конце a. Ввод: данные $F(x_n)$, a = РА, ε^2 = РД, b = РХ.

ПВ	ИПА	ПП	28	ПС	ИПВ	ПП	28	↑	ИПС
—	÷	ИПВ	ИПА	—	×	ИПВ	XY	—	ПВ
FBx	Fx^2	ИПД	—	Fx < 0	05	ИПВ	С/П	...	В/0

Программа 5.20. Реализация метода хорд при неподвижном конце b. Ввод: данные $F(x_n)$, b = РВ, ε^2 = РД и a = РХ.

ПА	ИПВ	ПП	28	ПС	ИПА	ПП	28	↑	ИПС
—	÷	ИПВ	ИПА	—	×	ИПА	XY	+	ПА
FBx	Fx^2	ИПД	—	Fx < 0	05	ИПА	С/П	...	В/0

В этих программах вычисление $F(x_n)$ оформляется подпрограммой, причем значения x_n заносятся в начало подпрограммы. Пусть надо вычислить корень уравнения

$$F(x) = x^3 - 0{,}2x^2 - 0{,}2x - 1{,}2 = ((x - 1/5)x - 1/5)x - 1{,}2,$$

лежащий в интервале $[1; 1{,}5]$. Вычисление значений $F(x)$ и $F''(x)$ показывают, что их знаки одинаковы при $x = a = 1$. Следовательно,

надо использовать программу 5.19, дополнив ее программой вычисления $F(x)$:

П0	5	F1/x	—	ИП0	×	5	F1/x	—	ИП0	
×	1	,		2	—					

Введя $a = 1 =$ РА, $\varepsilon^2 = 1 \cdot 10^{-16} =$ РД и $b = 1{,}5 =$ РХ, получим $\bar{x} = 1{,}1712297$ при $t_c \approx 2$ мин.

Для контроля программы 5.20 найдем корень уравнения (5.13), введем в нее программу вычисления функции $F(x)$ (0,25 = Р9): ↑ F sin — ИП9 — . Для $b = 1{,}3$, $\varepsilon^2 = 1 \cdot 10^{-16}$ и $a = 1{,}1$ получим $\bar{x} = 1{,}1712297$ при времени счета около 1 мин.

При методе хорд абсциссы a и b выбираются по обе стороны от корня. Если их взять с одной стороны, реализуется метод секущих. Недостатком методов хорд и секущих является реализация их по одной из двух итерационных формул (по двум программам).

На практике предпочтение часто отдается методам, не требующим анализа $F(x)$ на сходимость. К таким методам относится комбинированный метод секущих — хорд. В его основе лежит итерационная формула Ньютона (5.15), но точное значение производной $F'(x)$ заменяется приближенным — множитель после $F(x_n)$:

$$x_{n+1} = x_n - F(x_n)\frac{x_n - x_{n-1}}{F(x_n) - F(x_{n-1})}.$$

Метод дает сходимость при произвольном выборе в пределах отрезка $[a, b]$ нулевого x_0 и первого x_1 приближений.

Программа 5.21. Реализация комбинированного метода секущих — хорд. Ввод: данные $F(x_n)$, $x_0 =$ РА, $x_1 =$ РВ и $\varepsilon^2 =$ Р0.

ИПА	ПП	34	ПС	ИПВ	ПП	34	ПД	ИПА	ИПС
↑	ИПД	ПС	XY	—	÷	ИПА	ИПВ	—	×
+	ИПВ	XY	ПВ	XY	ПА	—	Fx^2	ИП0	—
Fx < 0	04	ИПВ	С/П	...	...	...	...	...	В/0

В табл. 5.3 даны результаты вычисления корня (5.13) по программе 5.21. Фрагмент программы вычисления $F(x_n)$ при x_n, заноси-

Таблица 5.3

x_0	x_1	$\bar{x}$	Время счета t_c, с
$1{,}1 = a$	1,15	1,1712297	50
$1{,}1 = a$	$1{,}3 = b$	1,1712297	80
$1{,}3 = b$	$1{,}1 = a$	1,1712297	80
$1{,}3 = b$	1,25	1,1712297	80
$1{,}1 = a$	1,2	1,1712297	50

мом в его начало и 0,25 = P9, имел вид: ↑ F sin — ИП9 —. Вычисления велись при $\varepsilon^2 = 1 \cdot 10^{-16}$.

Гарантированную сходимость при простой программной реализации имеет метод деления отрезка пополам. В нем интервал $[a, b]$ делится пополам, затем выбирается тот полуинтервал, в котором $F(x)$ переходит через нуль, он делится вновь пополам и т. д., пока ширина суженного интервала не станет меньше ε [4, 5].

Программа 5.22. Реализация метода деления отрезка пополам. Ввод: данные $F(x)$ при $x \to$ РА, $a =$ РА, $(b - a) =$ РВ, любое число со знаком, совпадающим со знаком $F(a)$, $n =$ РС и $\varepsilon^2 =$ РД.

ИПВ	2	÷	ПВ	↑	ИПА	+	ПА	÷	Fx^2
ИПД	—	Fx < 0	16	ИПА	С/П	...	...	...	...
ИПС	XY	ПС	×	Fx < 0	00	ИПВ	/—/	БП	01

Решим для контроля этой программы уравнение

$$F(U_д) = E - U_д - RI_0\left(e^{\nu U_д} - 1\right) = 0,$$

определяющее падение напряжения на диоде $\bar{x} = U_д$, подключенным через резистор R к источнику напряжения E. Тогда при $E =$ P1, $RI_0 =$ P2 и $\nu =$ P3 фрагмент программы, вычисляющий $F(x) = F(U_д)$, имеет вид

ИПА	ИП3	×	Fe^x	1	—	ИП2	×	ИПА	+
ИП1	XY	—							

Для $E = 0{,}5$ В; $I_0R = 1 \cdot 10^{-3}$ В; $\nu = 20$ 1/В; $n = F(0) = 0{,}5$, $a = 0$, $b = 0{,}5$ В и $\varepsilon^2 = 1 \cdot 10^{-6}$ получим $U_д = 0{,}27172852$ при $t_c \approx 2$ мин и при $\varepsilon^2 = 1 \cdot 10^{-14}$ $U_д = 0{,}27174234$ В при $t_c \approx 4$ мин. Из этого примера видно, что сходимость метода деления отрезка пополам медленная, ибо функция $F(x) = F(U_д)$ относительно простая.

Гарантированную сходимость имеет также метод случайных проб (Монте-Карло). В нем приближениям $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$ задают случайные значения в интервале $[a, b]$, каждый раз сужая этот интервал. Например, если значения $F(a) > 0$ и $F(x_n) > 0$ функции $F(x)$, то a присваивается значение x_n, если $F(x_n) < 0$, то b присваивается значение x_n и т. д. до тех пор, пока разность $b - a$ не станет меньше ε. Генерация случайных чисел с равномерным распределением описана далее в § 5.12.

Программа 5.23. Реализация метода случайных проб. Ввод: данные $F(x_n)$ при $x_n =$ РС, начальное случайное число $V_0 =$ P0 $(V_0 < 1)$, $a =$ РА, $b =$ РВ, $\varepsilon =$ РД.

ИП0	3	7	×	1	+	ПС	КИПС	XY	ИПС
—	П0	ИПВ	ИПА	—	×	ИПА	+	ПС	...
...	...	...	F$x \geqslant 0$	N	ИПС	ПА	БП	(N+2)	ИПС
ПВ	ИПВ	ИПА	—	ИПД	—	Fx < 0	00	ИПА	С/П

В этой программе N — число, дающее номер шага команды ИПС после записи в программу фрагмента, вычисляющего $F(x_n)$. Для предшествующего примера при $V_0 = 0{,}1234567$, $E = 0{,}5$ В = Р1, $I_0R = 1 \cdot 10^{-3}$ В = Р2, $\nu = 20$ 1/В = Р3, $a = 0{,}2$ В = РА, $b = 0{,}3$ В = РВ и $\varepsilon = 1 \cdot 10^{-3}$ = РД получим $U_д = 0{,}27144498$ В при $t_c \approx 70$ с. Фрагменг программы вычисления $F(x_n)$ имеет при этом вид:

ИП3 × Fe^x 1 − ИП2 × ИПС + ИП1
XY −

Процесс формирования значений $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$ можно упорядочить, в частности, формируя эти значения поразрядно [8]. Например, можно формировать значения x_n с шагом

$$x_n = x_{n-1} + \Delta x_N, \tag{5.17}$$

вычисляя каждый раз $F(x_n)$. Если $F(x_n)/\Delta x_N \geqslant 0$, даем x_n очередное приращение Δx_N. Если $F(x_n)/\Delta x_N < 0$, то делим Δx_N на некоторое число $-R$ (показатель разрядности), т. е. получаем новое значение

$$\Delta x_N = -\Delta x_{N-1}/R.$$

Если $(\Delta x_N)^2 > \varepsilon^2$, вычисляем x_n по формуле (5.17), если $(\Delta x_N)^2 \leqslant \varepsilon^2$, заканчиваем счет. При $R = 10$ метод поразрядного приближения становится методом подекадного приближения [8], причем результат вычислений автоматически усекается (точными являются все цифры результата).

Программа 5.24. Реализация метода подекадного приближения. Ввод: данные $F(x_n)$ при $x_n \to$ РА, $x_0 =$ РА, $\Delta x_1 =$ РВ и $\varepsilon^2 =$ РС.

ИПА	ИПВ	+	ПА	...	...	...	...	...	...
...	...	...	ИПВ	÷	$Fx < 0$	00	ИПВ	/—/	1
0	÷	ПВ	Fx^2	ИПС	−	$Fx < 0$	00	ИПА	С/П

Для приведенного выше примера при $\Delta U_{д1} = \Delta x_1 = 0{,}1$ В и $\varepsilon^2 = 1 \cdot 10^{-6}$ получим $U_д = 0{,}272$ В при $t_c \approx 65$ с.

Ввиду невысокого быстродействия микро-ЭВМ индивидуального пользования значительный интерес представляют методы решения нелинейных уравнений, обеспечивающие повышенную скорость сходимости итерационных процессов.

Корень уравнения (5.12) можно найти путем обратной интерполяции/экстраполяции. При этом в интервале $[a, b]$ задается N значений абсцисс x_n и вычисляется N ординат $F(x_n)$. Записав значения x_n в регистры, отведенные в программах интерполяции с произвольно расположенными узлами (§ 5.2) под запись ординат, а значения $F(x_n)$ — в регистры, отведенные под запись абсцисс, найдем сразу приближенное значение корня x_1. После этого можно сузить интервал $[a, b]$ и повторить расчет.

Программа 5.25. Реализация метода нахождения корней с помощью квадратичной обратной интерполяции/экстраполяции. Вводятся данные $F(x)$ при x, заносимом в начало подпрограммы, $x_0 =$ РА, $x_1 =$ РВ и $x_2 =$ РС.

ИПА	ПП	46	П0	ИПВ	ПП	46	П1	ИПС	ПП
46	П2	ИПВ	ИПА	—	ИП1	ИП0	—	÷	ПВ
ИПС	ИПА	—	ИП2	ИП0	—	÷	ИПВ	—	ИП2
ИП1	—	÷	ПС	ИП1	/—/	ИПС	×	ИПВ	+
ИП0	/—/	×	ИПА	+	С/П	...	...	...	В/0

Пусть надо найти напряжение на стоке мощного МДП-транзистора (рис. 5.2, *а* и *б*) из решения уравнения

$$\frac{E_c - U_c}{R_c} - I_c(U_c, U_з) = 0, \qquad (5.18)$$

если зависимость тока стока I_c от напряжений на стоке U_c и затворе $U_з$ описывается выражением

$$I_c(U_c, U_з) = S\left(U_з - U_0 - bU_з^2\right)\left[e^{-pU_c/\left(U_з - U_0 - bU_з^2\right)} - 1\right], \qquad (5.19)$$

где S — крутизна, p и b — параметры аппроксимации вольт-амперной характеристики.

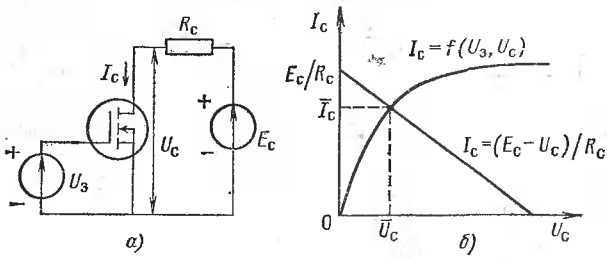

Рис. 5.2. Каскад на мощном МДП-транзисторе (*а*) и графическое определение положения его рабочей точки (*б*)

Подставляя (5.18) в (5.19), получим окончательно

$$F(U_c) = E_c - U_c - R_c S\left(bU_з^2 - U_з + U_0\right)\left[e^{pU_c/\left(bU_з^2 - U_з + U_0\right)} - 1\right]. \qquad (5.20)$$

При $E_c =$ Р4, $U_з =$ Р5, $SR_c =$ Р6, $p =$ Р7, $b =$ Р8 и $U_0 = +1$ В вписываемый в подпрограмму фрагмент вычисления функции $F(U_c)$ имеет вид:

↑	ИП7	×	ИП8	ИП5	Fx^2	×	1	+	ИП5
—	П9	÷	Fe^x	1	—	ИП9	×	ИП6	×
+	ИП4	XY	—						

Для $E_c = 40$ В, $U_з = 10$ В, $\mathcal{R}_c = 10$ В, $p = 1$, $b = 0{,}02$ 1/В, $U_{c0} = x_0 = 4$ В, $U_{c1} = x_1 = 5$ В, $U_{c2} = x_2 = 6$ В получим $U_c = 4{,}8762113$ В при точном значении $\xi = 4{,}876727$ В и времени счета ≈ 40 с. Таким образом, уже при одном цикле интерполяции U_c определено с точностью до 4-х верных знаков, что более чем достаточно для практических расчетов.

Автоматическое уточнение корня при методе обратной интерполяции/экстраполяции можно выполнить различными способами. Так, для данного примера лучшим оказался следующий способ: левая граница интервала изоляции корня берется равной $x_0 = 0$ (при этом $F(U_{c0}) = E_c$), значение $x_1 = \bar{x}$ и $x_2 = x_1 + \Delta x$, где $\Delta x = \Delta U_c = \text{const}$ (например 1 В).

Программа 5.26. Расчет U_c для схемы рис. 5.2, *а* методом обратной интерполяции/экстраполяции с автоматическим уточнением корня. Ввод: начальное значение U_c = РВ, U_0 = Р0, E_c = Р4, ε^2 = Р5, R_cS = Р6, p = Р7, b = Р8 и $U_з$ = РХ.

П9	Fx^2	ИП8	×	ИП0	+	ИП9	—	П9	ИПВ
ПП	57	П1	ИПВ	1	+	ПС	ПП	57	П2
ИПВ	ИП1	ИП4	—	÷	ПД	ИПС	ИП2	ИП4	—
÷	ИПД	—	ИП1	ИП2	—	÷	ИП1	×	ИПД
+	ИП4	/—/	×	ИПВ	XY	ПВ	—	Fx^2	ИП5
—	F$x<0$	09	ИПВ	С/П	БП	00	↑	ИП7	×
ИП9	÷	Fe^x	1	—	ИП6	×	ИП9	×	+
ИП4	XY	—	В/0						

При $U_{c0} = 5$ В, $\varepsilon^2 = 1 \cdot 10^{-10}$, $U_з = 10$ В и указанных выше других данных $F(U_c)$ получим $U_c = 4{,}8767272$ В, при $U_з = 6$ В $U_c = 6{,}522966$ В, при $U_з = 4$ В $U_c = 13{,}381808$ В, при $U_з = 2$ В $U_c = 30{,}8$ В. При повторных вычислениях вводится только значение $U_з$ = РХ и нажимается клавиша С/П. Время вычисления одного значения U_c около 2 мин.

Ускоренную сходимость при сложных уравнениях (5.12) имеет также метод Эйткена — Стеффенсона. При его реализации уравнение (5.12) приводится к виду $x = f(x)$, вычисляется первое приближение для $x = x_0$: $x_1 = f(x_0)$, затем второе: $x_2 = f(x_1)$. По ним находится уточненное значение корня [2]

$$\bar{x} = \left(x_0 x_2 - x_1^2\right) / (x_0 - 2x_1 + x_2). \qquad (5.21)$$

Оно присваивается x_0, после чего процесс повторяется до тех пор, пока разность $(\bar{x} - x_0)^2$ не станет равной или меньшей ε^2. В программе следует предусмотреть контроль знаменателя (5.21) на нулевое значение, которое может возникать при равенстве x_0, x_1 и x_2 в конце итераций. Если такая ситуация возникает, следует перейти к выдаче значения $x_0 = \bar{x}$.

Программа 5.27. Реализация метода Эйткена — Стеффенсона. Ввод: данные $f(x)$ при $x_n \to$ РХ, $\varepsilon^2 =$ РВ и $x_0 =$ Р0.

ИП0	ПП	33	ПА	ПП	33	↑	ИП0	×	ИПА
Fx^2	—	XY	ИП0	+	ИПА	2	×	—	F$x \neq 0$
31	÷	ИП0	XY	П0	—	Fx^2	ИПВ	—	F$x < 0$
00	ИП0	С/П	...	...	...	...	...	...	В/0

Программу 5.27 можно проверить вычислением корня уравнения (5.14). При $x_0 = 1{,}2$ и $\varepsilon^2 = 1 \cdot 10^{-6}$ получим $\bar{x} = 1{,}1714285$ при $t_c \approx 27$ с.

5.5. Поиск экстремумов функции одной переменной

Поиск экстремумов функций нескольких переменных $F(x, y, z, \ldots)$ относится к довольно сложным вычислительным задачам, алгоритмы которых детально описаны в [24]. Реализация простейших из них на программируемых микрокалькуляторах дана в [7], но требует чрезмерно больших затрат времени. Поэтому поиск экстремумов функций нескольких переменных целесообразно выполнять на настольных микро-ЭВМ. В связи с этим ограничимся описанием поиска экстремумов функции одной переменной.

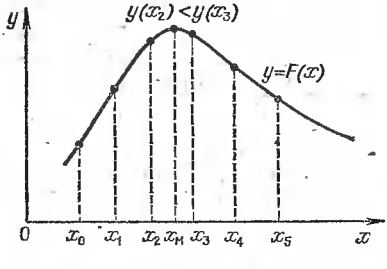

Рис. 5.3. Иллюстрация к поиску экстремума функции $F(x)$

Пусть некоторая целевая функция $F(x)$ имеет экстремумы при изменении x. Задача их поиска близка к решению нелинейных уравнений и сводится к определению интервала $[a, b]$, в котором находится экстремум, и его сужению. Будем искать максимум $F(x)$, так как функция $f(x)$, имеющая минимум, сводится к функции $F(x)$ умножением $f(x)$ на -1. Будем решать эту задачу методом поразрядного приближения.

Поскольку при однократном прохождении экстремума (x меняется с шагом Δx) знак приращения $F(x)$ может не изменяться (см. рис. 5.3), то следует перед дроблением Δx предусмотреть возврат назад на два шага после изменения знака приращения $F(x)$.

Программа 5.28. Определение максимума $F(x)$. Ввод: данные $F(x)$, $x_0 =$ РА, $\Delta x_0 =$ РВ, $\varepsilon/4 =$ Р0. Значения $x = x_M$ и $F(x_M)$ в точке максимума заносятся в регистры РХ = РД и РС соответственно, текущее значение $x \to$ РА.

ПП	29	ПС	ИПА	ИПВ	+	ПА	ПП	29	ИПС
XY	ПС	—	$Fx \geqslant 0$	03	ИПВ	2	/—/	÷	ПВ
$Fx < 0$	23	/—/	ИП0	—	$Fx < 0$	03	ИПА	С/П	...
...	...	...	...	...	...	...	...	...	В/0

Для $F(x) = 10x - 2x^2$, вписав в программу фрагмент вычисления $F(x)$ вида

1 0 ИПА × FBx Fx^2 2 × —

при $x_0 = 0$, $\Delta x_0 = 1$ и $\varepsilon/4 = 2{,}5 \cdot 10^{-4}$ найдем (нажав клавиши В/0 и С/П) $x_м = 2{,}5$ при $t_c \approx 190$ с. Из регистра С вызываем значение $F(x_м) = 12{,}5$.

5.6. Решение алгебраических уравнений

Решение алгебраических уравнений выполняется по приведенным ниже программам, которые описаны также в [7, 27].

Программа 5.29. Вычисление корней квадратного уравнения

$$a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0 \qquad (5.22)$$

по формулам $x_{1,2} = -a_1/(2a_2) \pm \sqrt{(a_1/(2a_2))^2 - a_0/a_2}$. Ввод: $a_0 = $ Р0, $a_1 = $ Р1 и $a_2 = $ Р2. Вывод результатов (после нажатия клавиш В/0 и С/П): 7 → РХ, x_1 → РУ, x_2 → Р7, если корни вещественные, и 4 → РХ, m → РУ и d → Р4, если корни $x_{1,2} = d \pm jm$ комплексно сопряженные.

ИП1	/—/	ИП2	÷	2	÷	П4	Fx^2	ИП0	ИП2
÷	—	F$x < 0$	18	/—/	F$\sqrt{\ }$	4	С/П	F$\sqrt{\ }$	П3
ИП4	+	П7	ИП4	ИП3	—	7	С/П		

Для уравнения $2x^2 - 5x - 10 = 0$ получим $x_1 = -1{,}3117376$ и $x_2 = 3{,}8117376$, а для уравнения $x^2 + 2x + 15 = 0$ получим $x_{1,2} = -1 \pm j \cdot 3{,}7416573$.

Программа 5.30. Решение квадратного уравнения (5.22) с уменьшенной погрешностью вычисления вещественных корней (меньший по модулю вещественный корень вычисляется по формуле $x_2 = -a_0/(x_1a_2)$, где x_1 — больший по модулю корень). Ввод: $a_0 = $ РС, $a_1 = $ РВ, и $a_2 = $ РА. Вывод результатов (после нажатия В/0 С/П): 7 → РХ, x_1 → Р7, x_2 → Р8, если корни вещественные, и 4 → РХ, d → Р4, m → Р5; если корни $x_{1,2} = d \pm jm$ комплексно сопряженные.

ИПС	ИПА	÷	П9	ИПВ	/—/	ИПА	2	×	÷
П4	Fx^2	—	F$x < 0$	31	/—/	F$\sqrt{\ }$	ИП4	F$x < 0$	23
XY	—	0	+	П7	ИП9	XY	÷	П8	7
С/П	F$\sqrt{\ }$	П5	4	С/П					

Для уравнения $3x^2 + 20\,000x + 12 = 0$ получим по этой программе $x_1 = -6666{,}666$ и $x_2 = -6{,}0000006 \cdot 10^{-4}$. По программе 5.29

$x_1 = -6666{,}666$ и $x_2 = -6{,}66666666 \cdot 10^{-4}$ (точное значение $x_2 = 6 \cdot 10^{-4}$).

Программа 5.31. Решение кубического уравнения

$$x^3 + a_3x^2 + a_1x + a_0 = 0 \qquad (5.23)$$

выделением вещественного корня $\bar{x}$, делением (5.23) на $(x - \bar{x})$ и вычислением корней полученного квадратного уравнения. Ввод: $a_0 = P0$, $a_1 = P1$, $a_2 = P2$, $1 + |a_{макс}| = PX$ (здесь $|a_{макс}|$ — взятое по модулю значение коэффициента с максимальным численным значением). Вывод результатов (после нажатия клавиши В/0 и С/П): $7 \to PX$, $x_1 \to P7$, $x_2 \to P8$ и $x_3 \to P9$ (если корни вещественные) и $4 \to PX$, $d \to P4$, $m \to P5$ и $x_3 \to P9$ (если есть пара комплексно-сопряженных корней).

ПА	Cx	XY	FBx	↑	↑	ИП2	+	П6	×
ИП1	+	П3	×	ИП0	+	Fx < 0	22	F,	ИПА
+	↑	F,	ИПА	2	÷	ПА	—	П9	—
Fx = 0	03	ИП6	/—/	2	÷	П4	Fx²	ИП3	—
Fx < 0	47	/—/	F√	П5	4	С/П	F√	П5	ИП4
+	П7	ИП4	ИП5	—	П8	7	С/П		

Для уравнения $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$ найдем корни $x_1 = 2{,}9999996$, $x_2 = 2{,}0000006$ и $x_3 = 0{,}99999982$, а для уравнения $x^3 - 6x^2 + 21x - 52 = 0$ получим $x_{1,2} = 1 \pm j \cdot 3{,}4641015$ и $x_3 = 4$.

Программа 5.32. Вычисление корней алгебраического уравнения четвертой степени

$$x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0 \qquad (5.24)$$

путем разложения на два квадратичных множителя. Ввод: $a_0 \div a_3 = P0 \div P3$, $2(1 + |a_{макс}|) = PA$. Вывод результатов (после нажатия клавиш В/0 и С/П): $x_1 \to PX$, $x_2 \to PY$, если корни $x_{1,2}$ действительные, и ЕГГОГ, если корни комплексно-сопряженные (тогда, нажав клавишу С/П, получим $d \to PX$ и $m \to PY$). Для вычисления аналогичным образом $x_{3,4}$ нажимается клавиша С/П.

ИП3	/—/	2	÷	ПД	ИПД	↑	↑	ИП3	+
П6	×	ИП2	+	П5	×	ИП1	+	Fx = 0	65
ИП1	ИП3	÷	↑	Fx²	ИП0	—	Fx ⩾ 0	65	F√
+	П7	ИПД	2	÷	↑	Fx²	ИП7	—	Fx < 0
50	/—/	F√	0	÷	Cx	F,	XY	БП	54
F√	+	÷	FBx	С/П	ИП3	/—/	ИПД	—	ПД
ИП0	ИП7	÷	БП	31	XY	ИП6	+	Fx ≠ 0	84
÷	П7	↑	ИП5	—	×	ИП0	+	Fx < 0	84
ИПД	ИПА	—	ПД	ИПА	2	÷	ПА	ИПД	+
ПД	FBx	—	Fx = 0	05	ИП7	БП	32		

Для уравнения $x^4 + 9x^3 + 31x^2 + 59x + 60 = 0$ получим $x_{1,2} = -1 \pm j \cdot 1{,}9999999$ ($t_c \approx 7$ мин) и $x_3 = -3$ и $x_4 = -4$ ($t_c \approx 10$ с). Из регистров Д и 7 можно вызвать значения коэффициентов квадратичных множителей (—2 и 4,9999998) *). Для x_3 и x_4 получаем значения —3 и —4 ($t_c \approx 10$ с).

Программа 5.32. Решение алгебраического уравнения пятой степени

$$x^5 + a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0 \qquad (5.25)$$

выделением вещественного корня и приведением к уравнению четвертой степени. Ввод: $a_0 \div a_4 =$ Р0 ÷ Р4, $2(1 + |a_{макс}|) =$ РА = РВ. Вывод результатов (после нажатия клавиши В/0 и С/П): 1. $x_1 \to$ РХ, $x_2 \to$ РУ и $x_3 \to$ РД, если корни $x_{1,2,3}$ действительные, 2. ЕГГОГ, если корни $x_{1,2}$ комплексно сопряженные. В случае 2, нажав клавишу XY, получим $d_{1,2}$, нажав клавиши XY /—/ F $\sqrt{\ }$, получим $m_{1,2}$ ($x_3 \to$ РД). Далее, нажав клавиши БП 76 С/П, получим: 1. $x_4 \to$ РХ, $x_5 \to$ РУ или 2. ЕГГОГ (нажав клавишу XY, получим $d_{4,5}$, далее, нажав клавиши XY /—/ F $\sqrt{\ }$, получим $m_{4,5}$).

С/П	ПС	XY	FВx	↑	↑	ИП4	+	П8	×
ИП3	+	П7	×	ИПС	Fx = 0	63	F,	ИП2	+
П6	×	ИП1	+	П5	×	ИП0	+	Fx < 0	34
F,	ИПА	+	↑	F,	ИПА	2	÷	ПА	—
П9	—	Fx = 0	03	ИПС	Fx = 0	76	ИПВ	ПА	ПС
ИП9	ПД	ИП5	П0	ИП7	П3	ИП8	П4	/—/	2
÷	БП	35	F,	ИП6	+	XY	ИП8	+	÷
П5	↑	ИП7	—	БП	25	ИП0	ИП5	÷	П5
ИП4	/—/	ИП9	—	П9	2	÷	↑	Fx^2	ИП5
—	F $\sqrt{\ }$	+	÷	FВx	С/П				

Для уравнения $x^5 + 8x^4 + 31x^3 + 80x^2 + 94x + 20 = 0$ получим $x_{1,2} = -1 \pm j \cdot 3{,}0000178$, $x_3 = -3{,}7320507$, $x_4 = -0{,}2679458$ и $x_5 = -2{,}000032$ (при времени счета около 13 мин).

Уравнения более высоких степеней ($n \geqslant 6$) могут быть сведены к уравнениям меньшей степени, описанным выше (для $n = 2, 3, 4$ и 5), выделением вещественного корня при нечетных n и разложением на множители с пониженной степенью. Однако в этом случае вычисления приходится проводить по нескольким программам [7, 27], что ведет к значительному росту времени вычислений и снижению их достоверности. Поэтому решение алгебраических уравнений со степенью $n \geqslant 6$ целесообразно проводить на более быстродействующих настольных ЭВМ (либо на микрокалькуляторах с большим объемом памяти) по единым программам.

---

*) После вычисления первой пары корней.

5.7. Численное дифференцирование

Численное дифференцирование гладкой функции $y = f(x)$, заданной ординатами y_i и абсциссами x_i, изменяющимися с шагом $h = \Delta x = \text{const}$, заключается в приближенном нахождении производной $y'(x)$. Для этого $y = f(x)$ заменяется интерполяционным полиномом, аналитическое выражение для производной которого нетрудно найти. Таким образом выводятся формулы численного дифференцирования [2—5], используемые в приведенном ниже пакете программ. Отметим, что в них связь p и x соответствует (4.3).

Программа 5.34. Нахождение производной при трех ординатах:

$$y'(x) = [(p - 1/2)\, y_{-1} - 2p y_0 + (p + 1/2)\, y_{+1}]/h.$$

Ввод: h = Р9, y_{-1}, y_0, y_1, x_0 и x в регистр X (при смене только x вводится новое значение x = РХ).

П1	С/П	П0	С/П	ПА	С/П	П8	С/П	П7	ИП8
—	ИП9	÷	ПД	2	F1/x	—	ИП1	×	ИПД
2	×	ИП0	×	—	ИПД	2	F1/x	+	ИПА
×	+	ИП9	÷	БП	07				

Для $h = 0{,}02$, $y_{-1} = 0{,}3555325$, $y_0 = 0{,}3520653$, $y_{+1} = 0{,}3484925$, $x_0 = 0{,}5$ и $x = 0{,}49$ получим $y'(x) = -0{,}17336$, для $x = 0{,}52$ получим $y'(x) = -0{,}18128$ при точном значении $y'(x) = -0{,}1812161$.

Программа 5.35. Нахождение производной при четырех ординатах:

$$y'(x) = \frac{1}{h}\left(-\frac{3p^2 - 6p + 2}{6}\, y_{-1} + \right.$$
$$\left. + \frac{3p^2 - 4p - 1}{2}\, y_0 - \frac{3p^2 - 2p - 2}{2}\, y_{+1} + \frac{3p^2 - 1}{6}\, y_{+2}\right).$$

Ввод: h = Р9 и (после нажатия клавиш В/0 и С/П и индикации цифры 4) y_{-1}, y_0, y_{+1}, y_{+2}, x_0 и x в регистр X.

0	П6	5	П0	4	С/П	КП6	FL0	05	С/П
П7	ИП5	—	ИП9	÷	ПД	Fx^2	3	×	ПС
ИПД	4	×	—	1	—	2	÷	ИП2	×
ИПС	ИПД	6	×	—	2	+	6	÷	ИП1
×	—	ИПС	ИПД	2	×	—	2	—	2
÷	ИП3	×	—	ИПС	1	—	6	÷	ИП4
×	+	ИП9	÷	БП	09				

Дополнив данные предшествующего примера значением $y_{+2} = 0{,}344818$, получим для $x = 0{,}51$ значение $y'(x) = -0{,}1786483$, а для $x = 0{,}52$ значение $y'(x) = -0{,}1812155$ при точном значении $-0{,}1812161$.

Программа 5.36. Нахождение производной при пяти ординатах:

$$y'(x) = \frac{1}{h}\left(\frac{2p^3 - 3p^2 - p + 1}{12} y_{-2} - \frac{4p^3 - 3p^2 - 8p + 4}{6} y_{-1} + \right.$$
$$\left. + \frac{2p^3 - 5p}{2} y_0 - \frac{4p^3 + 3p^2 - 8p - 4}{6} y_{+1} + \frac{2p^3 + 3p^2 - p - 1}{12} y_{+2}\right).$$

Ввод: $y_{-2} = P2$, $y_{-1} = P1$, $y_0 = P0$, $y_{+1} = PA$, $y_{+2} = PB$, $h = P9$, $x_0 = P8$ и $x = PX$.

П6	ИП8	—	ИП9	÷	П7	2	×	3	—
ИП7	×	1	—	ИП7	×	1	+	1	2
÷	ИП2	×	ИП7	4	×	3	—	ИП7	×
8	—	ИП7	×	4	+	6	÷	ИП1	×
—	ИП7	Fx^2	2	×	5	—	ИП7	×	2
÷	ИП0	×	+	ИП7	4	×	3	+	ИП7
×	8	—	ИП7	×	4	—	6	÷	ИПА
×	—	ИП7	2	×	3	+	ИП7	×	1
—	ИП7	×	1	—	1	2	÷	ИПВ	×
+	ИП9	÷	С/П	БП	00				

Для $y_{-2} = 0{,}35889029$, $y_{-1} = 0{,}35553253$, $y_0 = 0{,}35206533$, $y_{+1} = 0{,}34849251$, $y_{+2} = 0{,}34481800$, $x_0 = 0{,}5$, $h = 0{,}02$ и $x = 0{,}51$ получим $y'(x) = -0{,}1786488$, а для $x = 0{,}5$ получим $y'(x) = -0{,}17603265$ при точном значении $-0{,}17603266$. В этом и двух предшествующих примерах вычислялись производные функции $y(x) = Z(x) = e^{-x^2/2}/\sqrt{2\pi}$ нормального распределения вероятностей по округленным данным таблиц [3].

Если нужно найти $y'(x)$ только в узлах интерполяции, формулы численного дифференцирования резко упрощаются. Например, при трех ординатах и $p = 0$

$$y'(x_0) = (y_{+1} - y_{-1})/2h, \tag{5.26}$$

а при пяти ординатах и $p = 0$

$$y'(x_0) = (y_{-2} - 8y_{-1} + 8y_{+1} - y_{+2})/12h. \tag{5.27}$$

Иногда, используя эти формулы, целесообразно вычислять $y'(x = x_0)$ аналитически заданной функции, производную которой нежелательно или сложно найти в аналитическом виде. При этом вычисления ординат $y(x)$ оформляются подпрограммой.

Программа 5.37. Вычисление производной функции $y = f(x)$, заданной аналитически по формуле (5.26). Ввод: данные $f(x)$, $h/x_0 = PC$ и $x_0 = PX$.

ПД	ИПС	XY	÷	ПВ	ИПД	ИПВ	—	ПП	29
ПА	ИПД	ПП	29	С/П	ИПД	ИПВ	+	ПП	29
ИПА	—	2	÷	ИПВ	÷	С/П	БП	00	...
...	...	...	...	...	...	...	...	...	В/0

Так как значения x_0 могут меняться в широких пределах, то задается не абсолютное изменение x, а относительное $\Delta x/x_0 = h/x_0$. Значение h/x_0 для гладких функций на практике легко оценивается.

Пусть надо вычислить производную функции $y(x) = Z(x) = e^{-x^2/2}\sqrt{2\pi}$ в точке $x_0 = 0{,}5$ при $h/x_0 = 0{,}01$. В текст программы вписываем подпрограмму вычисления $Z(x)$: Fx^2 2 /—/ ÷ Fe^x Fπ 2 × F$\sqrt{\ }$ ÷. Нажав клавиши В/0 и С/П, получим значение $Z(0{,}5) = 0{,}35206532$, еще раз нажав клавишу С/П, получим $Z'(0{,}5) = -0{,}1760005$ при точных значениях $Z(0{,}5) = 0{,}35206533$ и $Z'(0{,}5) = -0{,}1760327$ соответственно.

Программа 5.38. Вычисление производной аналитически заданной функции $f(x)$ в точке $x = x_0$ по пяти ее ординатам с помощью формулы (5.27). Ввод: h/x_0 = РС и x_0 = РХ.

ПД	ИПС	XY	÷	ПВ	ИПД	ИПВ	2	×	—
ПП	56	ПА	ИПД	ИПВ	—	ПП	56	8	×
ИПА	XY	—	ПА	ИПД	ПП	56	С/П	ИПД	ИПВ
+	ПП	56	8	×	ИПА	+	ПА	ИПД	ИПВ
2	×	+	ПП	56	ИПА	XY	—	1	2
÷	ИПВ	÷	С/П	БП	00	...	...	...	В/0

Для приведенного выше примера получим $Z(0{,}5) = 0{,}35206532$ и $Z'(0{,}5) = -0{,}1760325$.

5.8. Вычисление частных производных и коэффициентов чувствительности

Нередко необходимо найти частные производные функции $f(x, y, z, \ldots)$ нескольких переменных при $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0$ и т. д. В отличие от численного дифференцирования по одному параметру, при вычислении частных производных необходимо выбирать один изменяемый параметр и фиксировать значения остальных параметров. Это можно обеспечить с помощью косвенной адресации регистров памяти, отведенных под ввод соответствующих параметров. Например, если x_0 = Р1, y_0 = Р2, z_0 = Р3 и т. д., то программу можно составить так, чтобы указание номера регистра (кода переменной), например цифры 2, при вычислении $\partial f/\partial y$ и т. д. непосредственно указывало на то, по какому параметру выполняется дифференцирование. В конце вычисления параметру присваивается исходное значение.

Программа 5.39. Вычисление частных производных аналитически заданной функции $f(x, y, z, \ldots)$ по трем ее ординатам. Ввод: h = РС, данные $f(x, y, z, \ldots)$, коды переменных.

ПД	КИПД	ПА	ИПС	—	КПД	ПП	27	ПВ	ИПА
ИПС	+	КПД	ПП	27	ИПВ	—	2	÷	ИПС
÷	ИПА	КПД	XY	С/П	БП	00	...	...	В/0

Пусть надо найти частные производные функции

$$f(x, y, z) = 2x^2 + y^2 - 3z^2 - 3xy - 2xz, \qquad (5.28)$$

при $x = x_0 = 0$, $y = y_0 = 0$ и $z = z_0 = 1$. Фрагмент программы вычисления функции $f(x, y, z)$ при $x =$ Р1, $y =$ Р2 и $z =$ Р3:

ИП1	Fx^2	2	×	ИП2	Fx^2	+	ИП3	Fx^2	3
×	—	ИП1	ИП2	×	3	×	—	ИП1	ИП3
×	2	×	—						

Вводим программу с этим фрагментом и исходные данные: $h = 0{,}001 =$ РС, $0 =$ Р1, $0 =$ Р2 и $1 =$ Р3. Для вычисления $\partial f/\partial x$ набираем цифру 1 (код переменной x) и, нажав клавишу С/П, получим результат $\partial f/\partial y = -2$ при $t_c \approx 20$ с. Набрав цифру 2 (код переменной y) и нажав клавишу С/П, получим $\partial f/\partial y = 0$. Наконец, набрав цифру 3 (код переменной z), получим $\partial f/\partial z = -6$. Эти значения полностью совпадают с точными.

Программа 5.40. Вычисление частных производных аналитически заданной функции $f(x, y, z, \ldots)$ по пяти ее ординатам. Ввод: $h =$ РС, данные $f(x, y, z, \ldots)$, коды переменных.

ПД	КИПД	ПА	ИПС	—	КПД	ПП	53	ПВ	ИПА
ИПС	+	КПД	ПП	53	ИПВ	—	8	×	ПВ
ИПА	ИПС	2	×	—	КПД	ПП	53	ИПВ	+
ПВ	ИПА	ИПС	2	×	+	КПД	ПП	53	ИПВ
XY	—	1	2	÷	ИПС	÷	ИПА	КПД	XY
С/П	БП	00	...	...	...	...	...	...	В/0

Работу этой программы можно проверить по приведенному выше примеру.

Нередко переменные функции $f(x, y, z, \ldots)$ имеют резко отличные исходные значения. В этом случае целесообразно задание относительного изменения h/p каждой переменной p ($p = x, y, z, \ldots$).

Программа 5.41. Вычисление частных производных аналитически заданной функции $f(x, y, z, \ldots)$ по трем ее ординатам при задании относительного приращения h/p каждого параметра. Ввод: $h/p =$ Р9, данные $f(x, y, z, \ldots)$, коды переменных.

ПД	КИПД	ПА	↑	ИПС	×	—	КПД	ПП	34
ПВ	ИПА	↑	ИПС	×	+	КПД	ПП	34	ИПВ
—	2	÷	ИПС	÷	ИПА	÷	ПВ	ИПА	КПД
ИПВ	С/П	БП	00	...	...	...	...	...	В/0

Для приведенного выше контрольного примера получим при $h/p = 0{,}01$, $x_0 = 1$, $y_0 = 2$ и $z_0 = 3$ значения $\partial f/\partial x = -8$, $\partial f/\partial y = 1$ и $\partial f/\partial z = -20$, которые также совпадают с точными значениями.

Общее абсолютное приращение функции нескольких переменных при изменении каждой из них

$$\Delta f(x, y, z, \ldots) = \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial f}{\partial z}\Delta z + \ldots$$

Частные производные при приращениях Δx, Δy, Δz и т. д. называются *абсолютными* коэффициентами чувствительности функции к изменению соответствующего параметра.

В практике научно-технических расчетов предпочитают использовать безразмерные относительные коэффициенты нестабильности по каждому параметру, например:

$$S_x = \frac{\partial f/f}{\partial x/x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f/f}{\Delta x/x}$$

и т. д. В этом случае легко вычисляются относительные общие приращения функции

$$\frac{\Delta f}{f(x_0, y_0, z_0, \ldots)} = S_x \frac{\Delta x}{x_0} + S_y \frac{\Delta y}{y_0} + S_z \frac{\Delta z}{z_0} + \ldots$$

Приведенные выше программы легко приспособить для вычисления относительных коэффициентов нестабильности.

Программа 5.42. Вычисление значения функции $f(x, y, z, \ldots)$ и относительных коэффициентов нестабильности при трех ординатах функции. Ввод: h/p = РС, данные $f(x, y, z, \ldots)$, коды переменных. Значение $f(x_0, y_0, z_0, \ldots) \to$ РА.

ПД	КИПД	ПА	↑	ИПС	×	—	КПД	ПП	37
ПВ	ИПА	↑	ИПС	×	+	КПД	ПП	37	ИПВ
—	ИПС	÷	2	÷	ПВ	ИПА	КПД	ПП	37
ПА	ИПВ	XY	÷	С/П	БП	00	...	...	В/0

Для иллюстрации вычислим коэффициенты относительной нестабильности периода повторения импульсов, формируемых релаксационным генератором на однопереходном транзисторе

$$t_п = RC \ln(1 - \eta)^{-1},$$

где $R = 1 \cdot 10^5$ Ом — величина времязадающего резистора, $C = 1 \cdot 10^{-8}$ Ф — емкость времязадающего конденсатора, $\eta = 0{,}66$ — коэффициент деления.

Вписываемая в программу 5.41 подпрограмма вычисления $t_п(R, C, \eta)$ при R = Р1, C = Р2 и η = Р3 имеет вид:

1 ИП3 — F1/x F ln ИП1 × ИП2 ×

Введя значения R, C, η и $h/p = 0{,}1$, набираем код 1. Нажав клавишу С/П, спустя $t_c = 25$ с получим $S_R = 0{,}99999999$. Набрав код 2 и нажав клавишу С/П, получим $S_C = 0{,}99999999$ и, наконец, набрав код 3, получим $S_\eta = 1{,}8224953$. Из регистра A можно вызвать исходное значение $t_п = 1{,}0788096 \cdot 10^{-3}$ с.

Программа 5.43. Вычисление значения функции $f(x, y, z, \ldots)$ и относительных коэффициентов нестабильности при пяти ординатах функции. Ввод: $h/p =$ РС, данные $f(x, y, z, \ldots)$, коды переменных. Значение $f(x_0, y_0, z_0, \ldots) \to$ РА.

ПД	КИПД	ПА	ПП	53	2	ПП	57	ПВ	ПП
52	ПП	58	8	/—/	ПП	48	+	ПП	59
8	ПП	48	2	×	+	ПП	59	ИПВ	XY
—	ИПС	÷	1	2	÷	ПВ	ИПА	КПД	ПП
59	ИПВ	XY	ПА	÷	С/П	БП	00	×	ИПВ
+	ПВ	ИПА	↑	ИПС	×	В/0	×	—	КПД
...	...	...	...	...	...	...	...	...	В/0

Для предшествующего примера при $h/p = 0{,}01$ получим $S_R = 0{,}9999949$, $S_C = 0{,}9999949$, $S_\eta = 1{,}7993745$ и $t_п = 1{,}0788096 \times 10^{-3}$ с при $t_с \approx 50$ с.

5.9. Численное интегрирование

Основная задача численного интегрирования сводится к нахождению значения собственного определенного интеграла

$$I = \int_a^b f(x)\,dx. \tag{5.29}$$

В общем случае интервал интегрирования $[a, b]$ разбивается на m частей. В свою очередь каждая из них делится на n частей, в пределах каждой части $y = f(x)$ аппроксимируется полиномом, интегрирование которого возможно по достаточно простым формулам [1—5]. Приведенные ниже программы отличаются степенью полинома и числом ординат $f(x)$, вычисляемых на каждой из m частей. Последний член приводимых формул характеризует погрешность интегрирования.

Программа 5.44. Численное интегрирование методом прямоугольников по формуле

$$I = h\sum_{i=0}^{m-1} y_i = \frac{b-a}{m}\sum_{i=0}^{m-1} y_i,$$

где $h = (b-a)/m$. Ввод: данные $f(x)$, m, b и a в регистр X. Текущие значения $x \to$ РА, регистры 0, А, В и С заняты.

ПЭ	0	ПС	С/П	ПВ	С/П	ПА	—	ИПС	+
ПЭ	...	...	ИПС	+	ПС	ИПА	ИП0	+	ПА
ИПВ	—	Fx≥0	11	ИПС	ИП0	×	С/П	БП	00

Пусть надо вычислить значения интегралов, приведенных в табл. 5.4.

Таблица 5.4

Интеграл и его точное значение	Программа	Метод	m	Результат	Время счета, мин
$I=\int_1^5 \frac{x^3}{x^4+16}\,dx=$ $=0{,}9074539$	5.44	Прямоугольников	16	0,88939982	1,7
			64	0,90313381	7
	5.45	Прямоугольников модифицированный	16	0,90797012	1,7
			64	0,90748612	7
	5.46	Трапеций	16	0,906642285	1,5
			64	0,9073897	6
	5.47	Симпсона	8	0,9074589	2,2
			32	0,9074541	10
$I=\int_0^1 \sqrt{2x+1}\,dx=$ $=1{,}3987175$	5.44	Прямоугольников	16	1,3757033	1,4
			64	1,3929898	5,5
	5.45	Прямоугольников модифицированный	16	1,3987863	1,5
			64	1,3987217	6
	5.46	Трапеций	16	1,3985799	1,5
			64	1,3987089	6
	5.47	Симпсона	4	1,3987137	1,2
			8	13987172	2,5

Для первого интеграла фрагмент программы, вычисляющей $f(x)$, имеет вид (число 16 вводим в регистр 8):

ИПА ↑ Fx^2 × FBx Fx^2 ИП8 + ÷

Для второго интеграла фрагмент программы, вычисляющий $f(x)$, следующий:

ИПА 2 × 1 + F$\sqrt{\ }$ ↑

Результаты вычислений для различных m даны в табл. 5.4.

Программа 5.45. Численное интегрирование модифицированным методом прямоугольников

$$I=h\sum_{i=0}^{m-1} f(x_i+0{,}5h)+\frac{h^2(b-a)}{24}f''(\xi),$$

где $f''(\xi)$ — значение второй производной $f(x)$ в точке $x=\xi$, где $f''(x)$ максимальна. Ввод аналогичен описанному для программы 5.44.

П0	0	ПС	С/П	ПВ	С/П	ПА	—	ИП0	÷
П0	2	÷	ИПА	+	ПА	...	...	...	...
...	...	...	ИПС	+	ПС	ИПА	ИП0	+	ПА
ИПВ	—	F$x\geqslant 0$	16	ИПС	ИП0	×	С/П	БП	00

Данные контрольных примеров см. в табл. 5.4.

Программа 5.46. Численное интегрирование методом трапеций:

$$I=\frac{h}{2}\sum_{i=0}^{m-1}(y_i+y_{i+1})-\frac{h^2(b-a)}{12}f(\xi).$$

Ввод аналогичен описанному для программы 5.44. Регистры 0, А, В и С заняты, текущее значение $x \to$ РА.

П0	С/П	ПВ	ПП	41	ПС	ИПВ	С/П	ПП	41
ИПС	+	2	÷	ПС	ИПВ	ИПА	—	ИП0	÷
ПВ	ИП0	1	—	П0	ИПА	ИПВ	+	ПП	41
ИПС	+	ПС	FL0	25	ИПС	ИПВ	×	С/П	БП
00	ПА	...	...	...	...	...	...	...	В/0

В приведенных выше программах $n=1$. Для повышения точности интегрирования каждый из m отрезков разбивается на n частей, так что на нем $f(x)$ задается $n+1$ ординатами. Это позволяет повысить степень полинома, аппроксимирующего $f(x)$.

Программа 5.47. Численное интегрирование методом парабол (Симпсона) при $n=2$:

$$I=\int_a^b f(x)\,dx=\frac{h}{3}[f(a)+4f(a+h)+2f(a+2h)+$$
$$+4f(a+3h)+\ldots+4f(b-h)+f(b)]-\frac{mh^5}{90}f^{IV}(\xi).$$

Ввод: данные $f(x)$ при $x \to$ РВ, $2m$ (четные числа), b и a в регистр X.

П0	С/П	ПВ	С/П	ПА	ПП	44	ПС	ИПВ	ИПА
ПВ	—	ИП0	÷	ПА	ПП	44	1	ПП	32
4	ПП	32	2	БП	18	ИПС	3	÷	ИПА
×	С/П	×	ИПС	+	ПС	FL0	40	БП	26
ИПВ	ИПА	+	ПВ	...	...	...	...	...	В/0

Как видно из табл. 5.4, из простых методов интегрирования метод Симпсона дает наиболее высокую точность — ошибка пропорциональна h^5 [3]. Он применяется наиболее часто. Однако, если подпрограмма вычисления $f(x)$ вписывается в программу, то применение более точных методов (с $n>2$) позволяет сократить время интегрирования (при заданной точности). В приводимых ниже программах $h=(b-a)/n$, а интервал $[a, b]$ соответствует при $m=1$ интервалу $[x_0, x_n]$, в пределах которого равномерно расположены абсциссы $x_0, x_1, x_2, \ldots x_n$. Предусмотрена возможность разбивки интервала $[a, b]$ на m интервалов $[x_0, x_n]$.

Программа 5.48. Численное интегрирование методом Ньютона — Котеса при $n = 4$ (формула Бодэ):

$$\int_{x_0}^{x_4} f(x)\,dx = \frac{2h}{45}(7y_0 + 32y_1 + 12y_2 + 32y_3 + 7y_4) - \frac{8h^7}{945} f^{VI}(\xi).$$

Ввод: данные $f(x)$ при $x \to$ РА, m, b и a в регистр X (регистры 0, A, B и C заняты).

П0	0	ПС	С/П	↑	С/П	ПА	—	ИП0	÷
4	÷	ПВ	ПП	26	FL0	13	ИПС	ИПВ	×
2	×	4	5	÷	С/П	ИПА	ПП	58	7
ПП	50	3	2	ПП	50	1	2	ПП	50
3	2	ПП	50	7	×	ИПС	+	ПС	В/0
×	ИПС	+	ПС	ИПА	ИПВ	+	ПА	...	В/0

Программа 5.49. Численное интегрирование методом Ньютона — Котеса при $n = 6$:

$$\int_{x_0}^{x_6} f(x)\,dx = \frac{h}{140}(41y_0 + 216y_1 + 27y_2 + 272y_3 + 27y_4 + 216y_5 + 41y_6) - \frac{9h^9}{1400} f^{VIII}(\xi).$$

Ввод см. в программе 5.48.

П0	0	ПС	С/П	↑	С/П	ПА	—	ИП0	÷
6	÷	ПВ	ПП	25	FL0	13	ИПС	ИПВ	×
1	4	0	÷	С/П	ИПА	ПП	70	4	1
ПП	62	2	1	6	ПП	62	2	7	ПП
62	2	7	2	ПП	62	2	7	ПП	62
2	1	6	ПП	62	4	1	×	ИПС	+
ПС	В/0	×	ИПС	+	ПС	ИПА	ИПВ	+	ПА
...	...	...	...	...	...	...	...	...	В/0

Программа 5.50. Численное интегрирование методом Уэддля для $n = 6$:

$$\int_{x_0}^{x_6} f(x)\,dx = \frac{3h}{10}(y_0 + 5y_1 + y_2 + 6y_3 + y_4 + 5y_5 + y_6) + \frac{47h^7}{12\,600} f^{VI}(\xi).$$

Ввод см. в программе 5.48.

П0	0	ПС	С/П	↑	С/П	ПА	—	ИП0	÷
6	÷	ПВ	ПП	26	FL0	13	ИПС	ИПВ	×
3	×	1	0	÷	С/П	ИПА	ПП	59	1
ПП	51	5	ПП	51	1	ПП	51	6	ПП
51	1	ПП	51	5	ПП	51	ИПС	+	ПС
В/0	×	ИПС	+	ПС	ИПА	ИПВ	+	ПА	...
...	...	...	...	...	...	...	...	...	В/0

При интегрировании методом Чебышева интеграл (5.29) подстановкой

$$x = \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2} t \tag{5.30}$$

приводится к виду

$$I = \int_{-1}^{+1} f(t)\,dt = \frac{2}{n} \sum_{i=1}^{n} f(t_i). \tag{5.31}$$

Выбор значений t_i производится из условия, что выражение (5.31) будет точным для $f(t)$ вида t, t^2, t^3, ..., t^n, т. е. для полиномов вплоть до n-й степени. Для микро-ЭВМ представляют интерес случаи, когда $n = 2$ ($t_{1,2} = \mp\sqrt{3}/3 = \mp 0{,}57735$ для $i = 1, 2$) и $n = 3$ ($t_{1,3} = \mp\sqrt{2}/2 = \mp 0{,}707107$ для $i = 1, 3$ и $t_2 = 0$ для $i = 2$).

Программа 5.51. Интегрирование методом Чебышева для $n = 2$. Ввод: данные $f(x)$ при x, заносимом в начало фрагмента вычисления $f(x)$, m, b и a в регистр X (регистры 0, 1, 2, A, B, C и Д заняты).

П0	3	F√	FBx	÷	ПД	0	ПС	С/П	↑
С/П	П1	—	ИП0	÷	П2	ИП1	↑	ИП2	+
П1	XY	ПП	30	FL0	16	ИПС	ИПВ	×	С/П
ПВ	+	2	÷	ПА	ИПВ	—	ПВ	ИПД	/—/
ПП	44	ИПВ	ИПД	×	ИПА	+	...	...	...
...	...	...	...	...	...	ИПС	+	ПС	В/0

Программа 5.52. Интегрирование методом Чебышева при $n = 3$. Ввод см. в программе 5.51.

П0	2	F√	FBx	÷	ПД	0	ПС	С/П	↑
С/П	П1	—	ИП0	÷	П2	ИП1	↑	ИП2	+
П1	XY	ПП	34	FL0	16	ИПС	ИПВ	×	2
×	3	÷	С/П	ПВ	+	2	÷	ПА	ИПВ
—	ПВ	ИПД	/—/	ПП	51	ИПА	ПП	54	ИПВ
ИПД	×	ИПА	+	...	...	ИПС	+	ПС	В/0

При интегрировании методом Гаусса также выполняется подстановка (5.30), причем

$$\int_{-1}^{+1} f(t)\,dt = \sum_{i=1}^{n} A_i f(t_i), \tag{5.32}$$

а t_i выбираются как корни полинома Лежандра. Абсциссы t_i расположены неравномерно из условия наилучшего приближения $f(t)$ полиномом Лежандра. При этом (5.32) оказывается точной для полиномов до $(2n-1)$-й степени.

При $n=2$, $i=1$, 2 имеем $A_{1,2}=1$ и $t_i=\mp\sqrt{1/3}=$ $=\mp 0{,}57735027$, при $n=3$, $i=1$, 2, 3 имеем $A_{1,3}=5/9$, $A_2=8/9$, $t_{1,3}=\mp\sqrt{0{,}6}=\mp 0{,}77459667$ и $t_2=0$.

Программа 5.53. Интегрирование методом Гаусса при $n=2$. Ввод см. в программе 5.51.

П0	3	F1/x	F√‾	ПД	0	ПС	С/П	↑	С/П
П1	—	ИП0	÷	П2	ИП1	↑	ИП2	+	П1
XY	ПП	27	FL0	15	ИПС	С/П	ПВ	+	2
÷	ПА	ИПВ	—	ПВ	ИПД	/—/	ПП	41	ИПВ
ИПД	×	ИПА	+	ПП	52	ИПВ	×	ИПС	+
ПС	В/0	...	...	...	...	...	...	...	В/0

Программа 5.54. Интегрирование методом Гаусса при $n=3$. Ввод см. в программе 5.51.

П0	0	,	6	F√‾	ПД	0	ПС	С/П	↑
С/П	П1	—	ИП0	÷	П2	ИП1	↑	ИП2	+
П1	XY	ПП	28	FL0	16	ИПС	С/П	ПВ	+
2	÷	ПА	ИПВ	—	ПВ	ИПД	/—/	ПП	48
ИПА	ПП	63	8	ПП	54	ИПВ	ИПД	×	ИПА
+	ПП	63	5	×	ИПВ	×	9	÷	ИПС
+	ПС	В/0	...	...	...	...	...	...	В/0

Погрешности, присущие методу численного интегрирования Гаусса при $n=2$, 3, определяются остаточными членами [5]

$$R_2=\frac{1}{135}\left(\frac{b-a}{2}\right)^5 f^{IV}(\xi),\qquad R_3=\frac{1}{15\,750}\left(\frac{b-a}{2}\right)^7 f^{VI}(\xi).$$

Из табл. 5.4 и 5.5 следует, что с ростом n и m точность интегрирования растет. Обычно для получения требуемой точности находят I при разных m (2, 4, 8, 16 и т. д.). Точными считают совпадающие знаки результата. Кроме точности при проведении интегрирования надо учитывать сложность программы, число занятых ею регистров памяти и наличие у подынтегральной функции особенностей, например вида 0/0, ∞/∞ или $f(x)\to\infty$. Если есть особенность при $x\to a$ или $x\to b$, то предпочтение отдается методу Гаусса, т. к. у него абсциссы $f(x)$ никогда не попадают на концы интервала $[a, b]$. Если особенность появляется в середине интервала $[a, b]$, предпочтительней использование методов с равномерным и легко предсказываемым положением абсцисс (Симпсона, Ньютона — Котеса, Уэддля).

Интегрирование таблично заданных функций обеспечивается по следующей программе. Число интервалов разбиения n при вычислениях по этой программе должно быть четным.

Таблица 5.5

Интеграл и его точное значение	Программа	Метод	m	Результат I	Время счета, мин
$I=\int_1^5 \frac{x^3}{x^4+16}\,dx=$ $=0{,}9074539$	5.48	Бодэ	4	0,907455186	2
	5.49	Ньютона—Котеса при $n=6$	4	0,90745414	3
	5.50	Уэддля	4	0,90745401	3
	5.51	Чебышева при $n=2$	8	0,90745077	2,5
	5.52	Чебышева при $n=3$	8	0,9074528	3
	5.53	Гаусса при $n=2$	4	0,90737764	1,5
	5.54	Гаусса при $n=3$	4	0,90745631	2,5
$I=\int_0^1 \sqrt{1+2x}\,dx=$ $=1{,}3987175$	5.48	Бодэ	4	1,3987174	2
	5.49	Ньютона—Котеса при $n=6$	4	1,3987175	3
	5.50	Уэддля	2	1,3987174	2
	5.51	Чебышева при $n=2$	8	1,3987176	2,2
	5.52	Чебышева при $n=3$	8	1,3987175	2,6
	5.53	Гаусса при $n=2$	4	1,3987198	1,6
	5.54	Гаусса при $n=3$	4	1,3987174	2

Программа 5.55. Интегрирование таблично заданных функций методом Симпсона. Ввод: h = Р8, число интервалов разбиения n, ординаты $y_0, y_1, \ldots, y_n$ в регистр X.

П0	С/П	П9	С/П	КИП0	XY	4		×	ИП9	+
П9	С/П	↑	ИП9	+	+	FL0	02	FBx	ИП8	
×	3	÷	С/П	БП	00					

Если $h = 0{,}25$, $n = 4$, $y_0 = 3$, $y_1 = 4$, $y_2 = 5$, $y_3 = 6$ и $y_4 = 7$, получим $I = 5$.

5.10. Решение дифференциальных уравнений

Решение обыкновенного дифференциального уравнения (вида Коши)

$$y' = dy/dx = f(x, y) \tag{5.33}$$

заключается в нахождении функции $y(x)$, удовлетворяющей уравнению (5.33) при известных начальных условиях x_0 и $y_0 = y(x_0)$.

При одношаговых методах решения каждое новое значение y_{i+1} находится по известному предшествующему значению y_i. Этим методам присуще «самостартование», а также возможность изменения шага $h = x_{i+1} - x_i$ в процессе вычислений. Реализация численных методов решения (5.33) заключается в разложении функции $y(x)$ в

ряд Тейлора, у которого берется некоторое число членов, определяющее порядок n метода [1—8]. Погрешность решения (5.33) пропорциональна h^{n+1}.

Программа 5.56. Решение дифференциального уравнения простым методом Эйлера (первого порядка):

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i).$$

Ввод: данные $f(x_i, y_i)$ при $x_i \to$ РВ, $y_i \to$ РС, $x_0 =$ РВ, $y_0 =$ РС и $h =$ РД.

ИПВ	ИПД	+	ПВ	...	...	...	...	...	...
...	ИПД	×	ИПС	+	ПС	ИПВ	С/П	БП	00

Для контроля этой и последующих программ решим простое дифференциальное уравнение

$$y' = dy/dx = -y/\tau, \tag{5.34}$$

аналитическое решение для которого известно:

$$y(x) = \exp(-x/\tau).$$

Фрагмент вычисления $f(x, y) = -y/\tau$ имеет вид:

ИПС	/—/	ИП9	÷

Введя исходные данные: $x_0 = 0$, $y_0 = 1$, $h = 0{,}1$ и $\tau = 1 =$ Р9, нажав клавиши В/0 и С/П, получим $x_1 = 0{,}1$. Нажав клавишу XY, из регистра Y вызываем $y_1 = 0{,}9$. Далее, нажимая поочередно клавиши С/П и XY, будем получать значения $x_2 = 0{,}2$, $y_2 = 0{,}81$, $x_3 = 0{,}3$, $y_3 = 0{,}729$ и т. д.

Для повышения точности вычислений шаг h целесообразно делать малым, а вывод результатов производить с большим шагом $H = Nh$. Это реализует следующая программа.

Программа 5.57. Реализация простого метода Эйлера с выдачей результатов с шагом $H = Nh$. Ввод: данные $f(x, y)$ при $x \to$ РВ и $y \to$ РС, $N =$ РА, $x_0 =$ РВ, $y_0 =$ РС и $h =$ РД.

ИПА	П0	ИПВ	ИПД	+	ПВ	...	...	ИПД	×
ИПС	+	ПС	FL0	02	ИПС	ИПВ	С/П	БП	00

Для приведенного выше примера и $N = 5$ будем получать $x_1 = 0{,}5$, $y_1 = 0{,}59049$, $x_2 = 1$, $y_2 = 0{,}34867844$, $x_3 = 1{,}5$, $y_3 = 0{,}20589114$ и т. д.

Программа 5.58. Решение дифференциального уравнения модифицированным методом Эйлера (второго порядка):

$$y_{i+1} = y_i + hf\left(x_i + h/2;\ y^*_{i+0,5}\right),$$

где

$$y^*_{i+0,5} = y_i + hf\left(x_i, y_i\right)/2.$$

Ввод: данные $f(x, y)$ при $x \to$ P0 и $y \to$ PA, $x_0 =$ PB, $y_0 =$ PC и $h =$ РД. Вывод: $x_i \to$ PX $=$ PB, $y_i \to$ PY $=$ PC.

ИПВ	П0	ИПС	ПА	ПП	33	ИПД	×	2	÷
ИПС	+	ПА	ИПВ	ИПД	2	÷	+	П0	ПП
33	ИПД	×	ИПС	+	ПС	ИПВ	ИПД	+	ПВ
С/П	БП	00	...	...	...	...	...	...	В/0

Для ранее приведенного примера имеем $x_1 = 0{,}1$, $y_1 = 0{,}905$, $x_2 = 0{,}2$, $y_2 = 0{,}819025$, $x_3 = 0{,}3$, $y_3 = 0{,}74121763$ и т. д.

Простейшей реализацией методов прогноза и коррекции является усовершенствованный метод Эйлера — Коши. В нем сначала вычисляется приближенное значение

$$y^*_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i)$$

простым методом Эйлера (прогноз). Затем оно корректируется с помощью формулы

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{2} h \left[f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y^*_{i+1}) \right].$$

Программа 5.59. Решение дифференциального уравнения усовершенствованным методом Эйлера — Коши. Ввод: данные $f(x, y)$ при $x \to$ PB, $y \to$ PA, $x_0 =$ PB, $y_0 =$ PC и $h =$ РД. Вывод: $x_i \to$ PX $=$ PB, $y_i \to$ PY $=$ PC.

ИПС	ПА	ПП	29	П0	ИПД	×	ИПС	+	ПА
ИПВ	ИПД	+	ПВ	ПП	29	ИП0	+	2	÷
ИПД	×	ИПС	+	ПС	ИПВ	С/П	БП	00	...
...	...	...	...	...	...	...	...	...	В/0

Для использованного выше примера имеем $x_1 = 0{,}1$, $y_1 = 0{,}905$, $x_2 = 0{,}2$, $y_2 = 0{,}819025$, $x_3 = 0{,}3$, $y_3 = 0{,}74121763$ и т. д.

Программа 5.60. Решение дифференциального уравнения методом Рунге — Кутта 4-го порядка:

$$y_{i+1} = y_i + (K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4)/6,$$

где

$$K_1 = hf(x_i, y_i); \quad K_2 = hf(x_i + h/2, \; y_i + K_1/2);$$

$$K_3 = hf(x_i + h/2, \; y_i + K_2/2); \quad K_4 = hf(x_i + h, \; y_i + K_3).$$

Ввод: данные $f(x, y)$ при $x \to$ P0 и $y \to$ PB, $h/2 =$ PA, $x_0 =$ P0, $y_0 =$ PX (регистры 0, А, В, С и Д заняты). Вывод: $x_i \to$ PX $=$ P0, $y_i \to$ PY $=$ PB.

ПВ	ПС	3	×	ПД	ПП	34	ПД	ПП	30
+	ПД	ПП	34	+	ПД	F,	ИПВ	+	ПВ
ПП	30	3	÷	ПВ	ИП0	С/П	ИПВ	БП	01
ИПА	ИП0	+	П0	...	...	...	↑	ИПА	×
↑	ИПС	+	ПВ	F,	↑	↑	ИПД	+	В/0

Для указанного ранее контрольного примера будем иметь $x_1 = 0{,}1$, $y_1 = 0{,}9048375$, $x_2 = 0{,}2$, $y_2 = 0{,}81873086$, $x_3 = 0{,}3$; $y_3 = 0{,}7408184$ и т. д.

В табл. 5.6 дано сравнение результатов решения уравнения (5.34) методами Эйлера и Рунге — Кутта. Хотя точность последнего существенно выше, время вычисления также возрастает. Поэтому, если погрешность решения дифференциального уравнения относительно велика (порядка единиц процентов), то применение даже простого метода Эйлера вполне возможно (табл. 5.6).

Таблица 5.6

x	Метод *)				Точное решение
	Эйлера простой	Эйлера модифицированный	Эйлера — Коши	Рунге — Кутта	
0	1	1	1	1	1
0,1	0,9	0,905	0,905	0,9048375	0,90483743
0,5	0,59049	0,60707576	0,60707578	0,6065309	0,60653064
1,0	0,34867844	0,36854098	0,368541	0,36787976	0,36787944
1,5	0,20589114	0,2237323	0,22373232	0,22313042	0,22313016
2,0	0,12157667	0,13582248	0,13582247	0,13533549	0,13533529

*) Время вычислений указанными методами составляет на одном шаге соответственно 5, 13, 12 и 30 с.

К многошаговым методам решения дифференциальных уравнений относится метод Адамса. В нем по ряду предшествующих значений $y'(x)$ с помощью полинома Лагранжа вычисляется очередное значение $y(x)$. В зависимости от числа предшествующих значений $y'(x)$ порядок метода Адамса может быть различным. Достоинство метода — вычисление очередного значения y_{i+1} требует лишь одного обращения к функции $f(x, y)$, что заметно ускоряет счет при сложных $f(x, y)$. Однако метод Адамса лишен возможности «самостартования», так как предварительно надо найти ряд предшествующих значений $y'(x)$ какими-либо другими методами.

Программа 5.61. Реализация метода Адамса второго порядка:

$$y_{i+1} = y_i + h\left(3y'_i - y'_{i-1}\right)/2.$$

Ввод: данные $y' = f(x, y)$ при $x \to$ РА и $y \to$ РВ, $(x_0 + h) =$ РА, $y_1 =$ РВ, $y'_0 =$ РС и $h =$ РД. Вывод: $x_i \to$ РХ $=$ РА, $y_i \to$ РУ $=$ РВ.

ПП	23	ИПС	XY	ПС	3	×	—	ИПД	/—/
×	2	÷	ИПВ	+	ПВ	ИПА	ИПД	+	ПА
С/П	БП	00	...	...	...	...	...	...	В/0

Решим уравнение (5.34) при $x_0 = 0$, $y_0 = 1$, $\tau = 1$ и $h = 0{,}1$. Для старта воспользуемся результатом расчета $y_1 = 0{,}905$ при $x_1 = 0{,}1$, вычисленный по методу Эйлера — Коши. Имеем также $y'_0 = -y_0/\tau = -1$. Введя эти данные, будем получать значения x_i и y_i, начиная с $i = 2$, приведенные в табл. 5.7.

Таблица 5.7

x	Метод *)				Точное значение
	Адамса 2	Адамса 3	Адамса 4	Эйлера — Адамса 2/2	
0	—	—	—	1	1
0,1	—	—	—	0,905	0,90483743
0,2	0,81925	—	—	0,81925	0,81873072
0,3	0,7416125	0,74078578	—	0,7416125	0,74081822
0,4	0,67133313	0,6702644	0,67032315	0,67133313	0,67032004
0,5	0,60771379	0,60645471	0,60653567	0,60771379	0,60653064
...	...	...	...	...	...
1,0	0,36940619	0,36775653	0,36789008	0,36940619	0,36787944
...	...	...	...	...	...
1,5	0,22454802	0,22300898	0,22314117	0,22454802	0,22313016
...	...	...	...	...	...
2,0	0,13649423	0,13523351	0,13534472	0,13649423	0,13533529

*) Время вычисления указанными методами на одном шаге составляет соответственно 8, 10, 13 и 10 с.

Программа 5.62. Реализация метода Адамса третьего порядка:

$$y_{i+1} = y_i + h\left(23y'_i - 16y'_{i-1} + 5y'_{i-2}\right)/12.$$

Ввод: данные $y' = f(x, y)$ при $x \to$ P0 и $y \to$ PA, $(x_0 + 2h) =$ P0, $y_2 =$ PA, $y'_1 =$ PB, $y'_0 =$ PC и $h =$ PД. Вывод: $x_i \to$ PX $=$ P0, $y_i \to$ PY $=$ PA.

ИПС	5	×	ИПВ	ПС	1	6	×	—	П1
ПП	33	ПВ	2	3	×	ИП1	+	ИПД	×
1	2	÷	ИПА	+	ПА	ИП0	ИПД	+	П0
С/П	БП	00	...	...	...	...	...	...	В/0

Для контроля этой программы по приведенному выше примеру воспользуемся дополнительно результатами, полученными методом Рунге — Кутта: $y_2 = 0{,}81873086$, $y'_1 = -0{,}9048375$ и $y'_0 = -1$. Результаты вычислений даны в табл. 5.7.

Программа 5.63. Реализация метода Адамса четвертого порядка:

$$y_{i+1} = y_i + h\left(55y'_i - 59y'_{i-1} + 37y'_{i-2} - 9y'_{i-3}\right)/24.$$

Ввод: данные $y' = f(x, y)$ при $x \to$ P1 и $y \to$ P0, $(x_0 + 3h) =$ P1, $y_3 =$ P0, $y_2' =$ PA, $y_1' =$ PB, $y_0' =$ PC и $h =$ РД. Вывод: $x_i \to$ PX $=$ $=$ P1, $y_i \to$ PY $=$ P0.

ИП С	/—/	9	×	ИПВ	ПС	3	7	×	+
ИПА	ПВ	5	9	×	—	П2	ПП	40	ПА
5	5	×	ИП2	+	ИПД	×	2	4	÷
ИП0	+	П0	ИП1	ИПД	+	П1	С/П	БП	00
...	...	...	...	...	...	...	...	...	В/0

Результаты вычислений контрольного примера-решения (5.34) по этой программе даны в табл. 5.7. Значения $y_3' = -1$, $y_1' =$ $= -0{,}904837$, $y_2' = -0{,}81873086$ и $y_3 = 0{,}7408184$ взяты из решения дифференциального уравнения (5.34) методом Рунге — Кутта.

Как видно из сравнения табл. 5.6 и 5.7, метод Адамса дает существенный выигрыш во времени вычислений на одном шаге по сравнению с одношаговыми методами аналогичного порядка. Это достоинство можно сочетать с возможностью «самостартования» одношаговых методов, что иллюстрируется следующей программой.

Программа 5.64. Реализация комбинированного метода Эйлера — Адамса. Ввод: данные $y' = f(x, y)$ при $x \to$ PA и $y \to$ PB, $x_0 =$ PA, $y_0 =$ PB и $h =$ РД. Вывод: $x_i \to$ PX$=$PA, $y_i \to$ PY $=$ PB.

ПП	44	ПС	ПП	33	ПП	44	ИПС	+	ИПД
×	2	÷	ИП0	+	ПВ	ИПА	С/П	ПП	44
ИПС	XY	ПС	3	×	—	2	/—/	÷	ПП
33	БП	17	ИПД	×	ИПВ	П0	+	ПВ	ИПА
ИПД	+	ПА	В/0	...	...	...	...	...	В/0

При нажатии клавиш В/0 и С/П эта программа сначала вычисляет $y_1 \to$ PB и $y_0' \to$ PC усовершенствованным методом Эйлера. Затем при нажатии только клавиши С/П значения x_i и y_i вычисляются методом Адамса. Если по ходу вычислений надо сменить шаг h, новое значение h заносится в регистр Д и нажимаются (как при первом пуске) клавиши В/0 и С/П (далее только С/П). Результаты вычислений приведены в табл. 5.7.

Помимо описанного ранее метода прогноза и коррекции (усовершенствованного метода Эйлера — Коши) на микрокалькуляторах просто реализовать двухшаговый метод [6], базирующийся на формулах прогноза

$$y_{i+1}^{*} = y_i + 2hf(x_i, y_i) \tag{5.35}$$

и коррекции

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}\left[f(x_i, y_i) + f(x_i, y_{i+1}^{*})\right]. \tag{5.36}$$

Программа 5.65. Реализация метода прогноза (5.35) и коррекции (5.36) второго порядка. Ввод: данные $y' = f(x, y)$ при $x \to$ PB,

$y \to$ P1, $f(x_1, y_1) =$ P0, $y_0 =$ PA, $x_1 =$ PB, $y_1 =$ PC и $h =$ РД. Вывод: $x_i \to$ PX $=$ PB, $y_i \to$ PY $=$ PC.

ИПВ	ИПД	+	ПВ	ИП0	ИПД	×	2	×	ИПА
ПП	30	ИП0	+	ИПД	×	2	÷	ИПС	ПП
30	П0	ИПС	ПА	ИП1	ПС	ИПВ	С/П	БП	00
+	П1	...	...	...	...	...	...	...	В/0

Возьмем для старта данные модифицированного метода Эйлера (см. выше контрольный пример): $x_0 = 0$, $y_0 = 1$, $x_1 = 0{,}1$, $y_1 = 0{,}905$, $f(x_1, y_1) = -y_1/\tau = -0{,}905$ при $\tau = 1$ и $h = 0{,}1$; нажимая клавиши С/П (при первом пуске В/0 и С/П) и XY, будем получать данные: $x_2 = 0{,}2$, $y_2 = 0{,}8188$, $x_3 = 0{,}3$, $y_3 = 0{,}740798$, $x_4 = 0{,}4$, $y_4 = 0{,}67022608$ и т. д.

Точность методов прогноза и коррекции можно несколько повысить, уточнив окончательное значение $y_{i+1} = y_{i+1}^{(2)}$ по результатам вычисления $y_{i+1}^{(0)}$ при прогнозе и $y_{i+1}^{(1)}$ при коррекции по формуле [6]

$$y_{i+1}^{(2)} = \left[4y_{i+1}^{(1)} + y_{i+1}^{(0)}\right]/5. \qquad (5.37)$$

Программа 5.66. Реализация метода прогноза и коррекции с уточнением результата по формуле (5.37). Ввод и вывод см. в программе 5.65.

ИПВ	ИПД	+	ПВ	ИП0	ИПД	×	2	×	ИПА
+	ПП	37	ИП0	+	ИПД	×	2	÷	ИПС
ПА	+	4	×	ИП1	+	5	÷	ПС	ПП
37	П0	ИПС	ИПВ	С/П	БП	00	П1	...	В/0

Воспользовавшись для старта этой программы значениями $y_1 = 0{,}9048375$ и $f(x_1, y_1) = -0{,}9048375$, найденными методом Рунге — Кутта, будем получать следующие данные: $x_2 = 0{,}2$, $y_2 = 0{,}8187217$, $x_3 = 0{,}3$, $y_3 = 0{,}7408034$, $x_4 = 0{,}4$, $y_4 = 0{,}67030034$ и т. д.

Недостатком всех описанных выше методов является возникновение числовой неустойчивости решения при большом шаге h. Так, при решении дифференциального уравнения (5.34) неустойчивость возникает при $h \geqslant \tau$, поэтому следует брать $h < \tau$. Неустойчивость отсутствует у так называемых неявных методов, у которых y_{i+1} находится по значению $f(x_i, y_{i+1})$. Детальное рассмотрение этих специальных методов выходит за рамки данной книги. Отметим лишь, что сочетание явного и неявного методов Эйлера приводит к выражению

$$y_{i+1} = y_i + h[Af(x_i, y_i) + (1 - A)f(x_i, y_{i+1})], \qquad (5.38)$$

причем при $A = 1$ реализуется явный метод Эйлера, при $A = 0$ — неявный, а при $0 < A < 1$ — комбинированный [16]. При этом неустойчивость отсутствует, если $0 < A < 0{,}5$. Погрешности явного и

неявного методов по модулю близки (пропорциональны h^2), но по знаку различны. Поэтому при $A \approx 0{,}5$ имеет место значительно меньшая погрешность, чем у этих методов, используемых в отдельности.

В общем случае уравнение (5.38) решается итерационным методом. Однако иногда его можно разрешить относительно y_{i+1} в явном виде. Приведем пример.

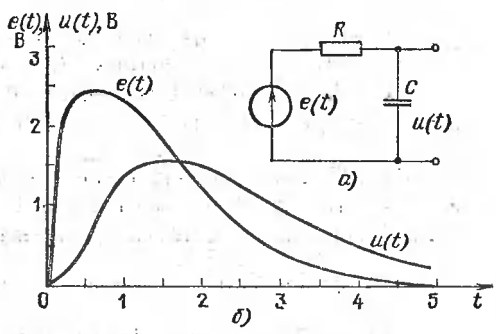

Рис. 5.4. Интегрирующая RC-цепь (*а*) и пример расчета ее реакции на заданное входное воздействие (*б*)

Реакция $u(t)$ интегрирующей RC-цепи (рис. 5.4) на воздействие $e(t)$ определяется из решения дифференциального уравнения

$$u'(t) = \frac{du}{dt} = \frac{e(t) - u}{\tau},$$

где $\tau = RC$. Для такого уравнения из (5.38) при $x = e(t)$ и $y = u(t)$ имеем

$$u_{i+1} = u_i + \frac{[e(t_i) - u_i]\,Ah}{\tau} + \frac{(1 - A)\,[e(t_{i+1}) - u_{i+1}]\,h}{\tau}.$$

Разрешим последнее уравнение относительно u_{i+1} и получим

$$u_{i+1} = \frac{u_i + [e(t_i) - u_i]\,Ah/\tau + (1 - A)\,e(t_{i+1})\,h/\tau}{1 + (1 - A)\,h/\tau}. \qquad (5.39)$$

Программа 5.67. Вычисление реакции RC-цепи на воздействие $e(t)$ комбинированным (явным и неявным) методом Эйлера (5.39). Ввод: данные $e(t)$ при $t \to$ РВ, $A =$ РА, $t_0 =$ РВ, $u_0 =$ РС, $h =$ РД и $\tau = RC =$ Р9. Вывод: $t_i \to$ РХ, $u_i \to$ РУ $=$ РС и $e(t_i) \to$ Р6.

ИПВ	ПП	42	ИПС	−	ИПА	×	ИПД	ИП9	÷
П8	×	ИПС	+	П7	ИПВ	ИПД	+	ПВ	ПП
42	ИП8	×	1	ИПА	−	×	ИП7	+	1
ИПА	−	ИП8	×	1	+	÷	ПС	ИПВ	С/П
БП	00	...	...	...	...	...	...	П6	В/0

Пусть надо найти реакцию RC-цепи на двухэкспоненциальный импульс

$$e(t) = U_0\left(e^{-t/\tau_1} - e^{-t/\tau_2}\right).$$

Для этого в программу вписываем фрагмент вычисления $e(t)$ в виде подпрограммы (τ_1 = P1, τ_2 = P2, U_0 = P0)

ИПВ /—/ ИП1 ÷ Fe^x ИПВ /—/ ИП2 ÷ Fe^x
— ИП0 ×

Введя исходные данные $A = 0{,}5$, $t_0 = 0$, $u_0 = 0$, $h = 0{,}2$, $U_0 = 10$, $\tau = 1$, $\tau_1 = 1$ и $\tau_2 = 0{,}5$, получим $t_1 = 0{,}2$, $u(t_1) = 0{,}1349188$, $t_2 = 0{,}4$, $u(t_2) = 0{,}44620789$, $t_3 = 0{,}6$, $u(t_3) = 0{,}7910869$ и т. д. (рис. 5.4, *б*). Единицы измерения t, τ, τ_1, τ_2, U_0 и u — секунды и вольты.

Системы дифференциальных уравнений первой степени решаются описанными выше методами. Остановимся на решении часто встречающихся систем из двух дифференциальных уравнений вида

$$y' = \frac{dy}{dx} = f(x, y, z), \qquad z' = \frac{dz}{dx} = \varphi(x, y, z). \qquad (5.40)$$

Решение системы (5.40) простым методом Эйлера сводится к вычислениям y_{i+1} и z_{i+1} по формулам Эйлера.

Программа 5.68. Реализация простого метода Эйлера для системы из двух дифференциальных уравнений вида (5.40). Ввод: данные $f(x, y, z)$ и $\varphi(x, y, z)$ при $x \to$ РА, $y \to$ РВ и $z \to$ РС, x_0 = РА, y_0 = РВ, z_0 = РС и h = РД. Вывод: $x_i \to$ РХ = РА, $y_i \to$ РУ = РВ и $z_i \to$ РС.

...	...	...	...	...	ИПД	×	ИПВ	+	П0
...	...	...	...	...	...	ИПД	×	ИПС	+
ПС	ИП0	ПВ	ИПА	ИПД	+	ПА	С/П	БП	00

Модифицированный метод Эйлера (второго порядка) для системы (5.40) реализуется выражениями

$$y^*_{i+1} = y_i + \frac{h}{2} f\left(x_i, y_i, z_i\right), \quad y_{i+1} = y_i + hf\left(x_i + \frac{h}{2}, y^*_{i+1}, z_i\right),$$

$$z^*_{i+1} = z_i + \frac{h}{2} \varphi\left(x_i, y_i, z_i\right), \quad z_{i+1} = z_i + h\varphi\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i, z^*_{i+1}\right)$$

и следующей программой.

Программа 5.69. Реализация модифицированного метода Эйлера для системы (5.40). Ввод: данные $f(x, y, z)$ и $\varphi(x, y, z)$ при $x \to$ P0, $y \to$ РА и $z \to$ РС, $h/2$ = P9, x_0 = P0, y_0 = РА = РВ, z_0 = РС = РД. Вывод: $x_i \to$ РХ = P0, $y_i \to$ РУ = РА и $z_i \to$ РС.

ПП	24	×	П9	FB^x	ИП0	+	П0	ПП	24
XY	÷	П9	ИП0	+	П0	ИПС	ПД	ИПА	ПВ

ИП0	С/П	БП	00	...	...	...	...	...	...
ИП9	×	ИПВ	+	П1	...	...	...	...	...
ИП9	×	ИПД	+	ПС	ИП1	ПА	2	ИП9	В/0

Для проверки двух последних программ решим систему дифференциальных уравнений

$$\frac{dy}{dx} = z, \quad \frac{dz}{dx} = \left(\frac{n^2 y}{x} - z\right)\frac{1}{x} - y,$$

определяющих табулированные функции Бесселя n-го порядка [1, 2, 6]. При $h/2 = 0{,}025$, $n = 1$, $x_0 = 0{,}2$, $y_0 = 0{,}09950083$ и $z_0 = 0{,}49235$ будем получать данные, приведенные в табл. 5.8 (даны выборочно).

Таблица 5.8

x_i	Метод		Точное решение $y(x)=I(x)$
	Эйлера простой	Эйлера модифицированный	
0,2	0,09950083	0,09950083	0,09950083
0,3	0,14855151	0,14832009	0,14831881
0,4	0,19667502	0,19603182	0,19602657
0,5	0,24350396	0,2422791	0,2422684
1	0,44633959	0,44008729	0,44005058
2	0,59549752	0,57669725	0,57672480
4	−0,074593343	−0,06634331	−0,066044332
4,5	−0,25419072	−0,23126802	−0,231060431

Дифференциальные уравнения n-го порядка сводятся к системам из n уравнений первого порядка, которые решаются описанными выше методами (см. приложение 3 и [29]).

5.11. Спектральный анализ

Периодическая функция, зависящая от времени, с периодом $T - y(t)$, удовлетворяющая условиям Дирихле [1, 2], может быть разложена в ряд Фурье

$$y(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{m} (a_n \cos n\omega_1 t + b_n \sin n\omega_1 t) \tag{5.41}$$

или

$$y(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{m} A_n \cos(n\omega_1 t - \varphi_n), \tag{5.42}$$

где n — номер гармоники, $\omega_1 = 2\pi f_1$ — угловая частота повторения, f_1 — частота повторения первой гармоники; a_0, a_n и b_n — коэффици-

сны ряда Фурье. Точное представление $y(t)$ возможно при $m \to \infty$, однако на практике обычно используются укороченные ряды Фурье с конечным значением m.

Программа 5.70. Вычисление $y(t)$ по разложению в ряд Фурье (5.41) с $m \leqslant 6$. Ввод: $a_0 \div a_6 =$ Р0 ÷ Р6; $b_1 \div b_3 =$ Р7 ÷ Р9; $b_4 \div b_6 =$ РА ÷ РС, $t/T =$ РХ. При смене t/T очищается операционный блок (нажатием клавиш *Сх* ↑↑↑) и вводится новое значение t/T. Переключатель Р — Г устанавливается в положение Р.

Fπ	×	2	×	ПД	↑	F cos	ИП1	×	XY
F sin	ИП7	×	+	+	2	ИПД	×	↑	F cos
ИП2	×	XY	F sin	ИП8	×	+	+	3	ИПД
×	↑	F cos	ИП3	×	XY	F sin	ИП9	×	+
+	4	ИПД	×	↑	F cos	ИП4	×	XY	F sin
ИПА	×	+	+	5	ИПД	×	↑	F cos	ИП5
×	XY	F sin	ИПВ	×	+	+	6	ИПД	×
↑	F cos	ИП6	×	XY	F sin	ИПС	×	+	+
ИП0	2	÷	+	С/П	БП	00			

Если нас интересует только форма $y(t)$, то член $a_0/2$ может быть отброшен. Тогда регистр 0 можно использовать для вычисления номеров гармоник $n = 1, 2, \ldots, m$ $(m \leqslant 6)$ и организации косвенной адресации вызова a_n и b_n из регистров памяти. Использование квадратных скобок объясняется в описании программы 5.71.

Программа 5.71. Вычисление $y(t)$ по разложению в ряд Фурье (5.41) без члена $a_0/2$. Ввод: $a_1 =$ Р1, $b_1 =$ Р2, ..., $a_5 =$ Р9, $b_5 =$ РА, $a_6 =$ РВ, $b_6 =$ РС (вводятся коэффициенты до a_m, b_m включительно), $m =$ РХ и $t/T =$ РХ. При изменении t/T повторяется ввод только m и t/T. Переключатель Р — Г в положении Р.

↑	2	×	1	+	П0	0	С/П	Fπ	×
2	×	ПД	0	↑	XY	ИПД	ИП0	1	—
2	÷	×	↑	F sin	КИП0	×	XY	F cos	КИП0
×	+	+	ИП0	1	—	Fx = 0	15	XY	С/П
БП	00								

Для контроля этих программ вычислим значение ряда (5.41) при $m = 3$ и следующих данных: $a_0 = 0$, $a_1 = -5{,}23$, $a_2 = 0$, $a_3 = 5{,}1$, $b_1 = 25{,}3$, $b_2 = 0$ и $b_3 = 3{,}47$. Так как $m = 3 < 6$, то из программы 5.70 можно исключить фрагмент, заключенный в квадратные скобки. Введя коэффициенты a_n, b_n с помощью программ 5.70 и 5.71, будем получать следующие значения $y(i/T)$: $y(1/24) = -7{,}5562347$, $y(8/24) = 29{,}625443$, $y(13/24) = -7{,}5562351$, $y(20/24) = -29{,}625444$ и т. д. Время счета около 32 с.

Программа 5.72. Вычисление $y(t)$ по разложению (5.42) без члена $a_0/2$. Ввод: $A_1 =$ Р1, $\varphi_1 =$ Р2, ..., $A_5 =$ Р9, $\varphi_5 =$ РА, $A_6 =$ РВ, $\varphi_6 =$ РС (вводятся A_n и φ_n до A_m и φ_m включительно), $m =$

$=$ РХ и $t/T =$ РХ. При изменении t/T повторяется ввод только m и t/T.

↑	2	×	1	+	П0	0	С/П	Fπ	×
2	×	ПД	0	↑	XY	ИПД	ИП0	1	—
2	÷	×	КИП0	—	F cos	КИП0	×	+	ИП0
1	—	Fx = 0	15	XY	С/П	БП	00		

Пример: для $A_1 = 25{,}9$, $\varphi_1 = -0{,}203$ рад, $A_2 = 0$, $\varphi_2 = 0$, $A_3 = 6$, $\varphi_3 = 0{,}973$ рад, вводя $m = 3$ и разные t/T, будем получать $y(0) = 28{,}745108$, $y(1/24) = 29{,}047034$, $y(3/24) = 15{,}364754$, $y(7/24) = -12{,}728526$ и т. д.

При исследовании систем с малой нелинейностью зависимости $y(x)$, где x — входное воздействие в виде гармонического сигнала $x = x_M \cos \omega_1 t + x_0$, применяется метод пяти ординат [6—8]. С его помощью по пяти ординатам $y(x)$ (рис. 5.5) определяются среднее значение y_0 и амплитуды первых 4-х гармоник зависимости $y(t)$:

$$y_0 = [(y_1 + y_5) + 2(y_2 + y_4)]/6,$$
$$y_{м1} = [(y_1 - y_5) + (y_2 - y_4)]/3,$$
$$y_{м2} = [(y_1 + y_5)/2 - y_3]/2,$$
$$y_{м3} = [y_{м1} - (y_2 - y_4)]/2,$$
$$y_{м4} = y_{м2} - y_0 + y_3.$$

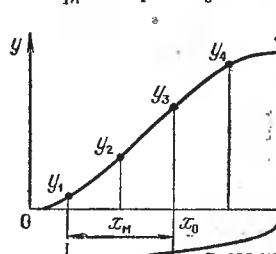

Рис. 5.5. Иллюстрация к методу пяти ординат

Коэффициент нелинейных искажений

$$K_г = \sqrt{y_{м2}^2 + y_{м3}^2 + y_{м4}^2} / y_{м1}.$$

Программа 5.73. Реализация метода пяти ординат. Ввод: $y_1 =$ Р9, $y_2 =$ РА, $y_3 =$ РВ, $y_4 =$ РС и $y_5 =$ РД. Вывод: $y_0 \to$ Р0, $y_{м1} \div y_{м4} \to$ Р1 ÷ Р4, $K_г \to$ РХ.

ИПА	ИПС	+	2	×	ИП9	ИПД	+	П6	+
6	÷	П0	ИП9	ИПД	—	П8	ИПА	ИПС	—
+	3	÷	П1	ИП6	2	÷	ИПВ	—	2
÷	П2	Fx²	ИП1	ИПА	—	ИПС	+	2	÷
П3	Fx²	+	ИП2	ИП0	—	ИПВ	+	П4	Fx²
+	F√	ИП1	÷	С/П					

Пусть зависимость $U_с(U_з)$ каскада на мощном МДП-транзисторе задана значениями: 46,6(1); 38,9(3,5); 32(6); 26(8,5) и 21(11), причем $U_{с1} \div U_{с5} \equiv y_1 \div y_5$. Введя эти значения, получим $K_с = 7{,}0177955 \cdot 10^{-2}$, $y_0 = U_{с0} = 32{,}9$ В, $y_{м1} = U_{см1} = 12{,}833333$ В, $y_{м2} = U_{см2} = 0{,}9$ В, $y_{м3} = U_{см3} = -0{,}0333335$ В, $y_{м4} = U_{см4} = 0$.

Если нелинейная функция $y(x)$ при воздействии $x = x_M \cos \omega_1 t$ задана 12-ю ординатами, то коэффициенты $a_0/2$, a_n и b_n ряда (5.41)

могут быть определены методом 12 ординат по следующей методике [1]:

1. Записываем 12 ординат функции $y(t)$ и определяем почленно их суммы s_i и разности по схеме:

	$y_1=$P1	$y_2=$P2	$y_3=$P3	$y_4=$P4	$y_5=$P5	$y_6=$P6
$y_{12}=$PC	$y_{11}=$PB	$y_{10}=$PA	$y_9=$P9	$y_8=$P8	$y_7=$P7	
$s_0\to$PC	$s_1\to$P1	$s_2\to$P2	$s_3\to$P3	$s_4\to$P4	$s_5\to$P5	$s_6\to$P6
	$d_1\to$PB	$d_2\to$PA	$d_3\to$P9	$d_4\to$P8	$d_5\to$P7	

2. Вычисляем суммы σ_i и разности δ_i по схеме:

s_0	s_1	s_2	s_3
s_6	s_5	s_4	
$\sigma_0\to$PC	$\sigma_1\to$P1	$\sigma_2\to$P2	$\sigma_3\to$P3
$\delta_0\to$P6	$\delta_1\to$P5	$\delta_2\to$P4	

3. Вычисляем суммы θ_i и разности η_i по схеме:

d_1	d_2	d_3
d_5	d_4	
$\theta_1\to$PB	$\theta_2\to$PA	$\theta_3\to$P9
$\eta_1\to$P7	$\eta_2\to$P8	

4. Находим значения коэффициентов $b_1 \div b_5$, $a_0 \div a_5$ и значение $2a_6$ по формулам:

$$b_1=\frac{\theta_1/2+\theta_3+\theta_2\sqrt{3}/2}{6};\qquad a_0=\frac{\sigma_0+\sigma_2+\sigma_1+\sigma_3}{12};$$

$$b_2=\frac{(\eta_1+\eta_2)\sqrt{3}/2}{6};\qquad a_1=\frac{\delta_2/2+\delta_0+\delta_1\sqrt{3}/2}{6};$$

$$b_3=\frac{\theta_1-\theta_3}{6};\qquad a_2=\frac{\sigma_0-\sigma_2/2+\sigma_1/2-\sigma_3}{6};$$

$$b_4=\frac{\sqrt{3}}{2}(\eta_1-\eta_2);\qquad a_3=\frac{\delta_0-\delta_2}{6};$$

$$b_5=\frac{\theta_1/2+\theta_3-\theta_2\sqrt{3}/2}{6};\qquad a_4=\frac{\sigma_0-\sigma_2/2-\sigma_1/2+\sigma_3}{6};$$

$$a_5=\frac{\delta_2/2+\delta_0-\delta_1\sqrt{3}/2}{6};$$

$$2a_6=\frac{\sigma_0+\sigma_2-(\sigma_1+\sigma_3)}{6}.$$

Эти расчеты на микрокалькуляторе Электроника Б3-34 реализуются двумя согласованными программами.

Программа 5.74, *а*. Подготовка данных для расчета методом 12 ординат. Ввод: $y_1 \div y_{12} =$ Р1 ÷ РС.

ИП1	ИПВ	—	ПВ	ИП1	FВ*x*	+	П1	ИП2	ИПА
—	ПА	ИП2	FВ*x*	+	П2	ИП3	ИП9	—	П9
ИП3	FВ*x*	+	П3	ИП4	ИП8	—	П8	ИП4	FВ*x*
+	П4	ИП5	ИП7	—	П7	ИП5	FВ*x*	+	П5
ИПС	ИП6	—	П6	ИПС	FВ*x*	+	ПС	ИП1	ИП5
—	П5	ИП1	FВ*x*	+	П1	ИП2	ИП4	—	П4
ИП2	FВ*x*	+	П2	ИПВ	ИП7	—	П7	ИПВ	FВ*x*
+	ПВ	ИПА	ИП8	—	П8	ИПА	FВ*x*	+	ПА
3	F$\sqrt{\ }$	2	÷	ПД	2	С/П			

В конце этой программы значение $\sqrt{3}/2$ заносится в регистр Д, а на индикацию выводится цифра 2, указывающая на окончание вычислений и необходимость ввода второй программы.

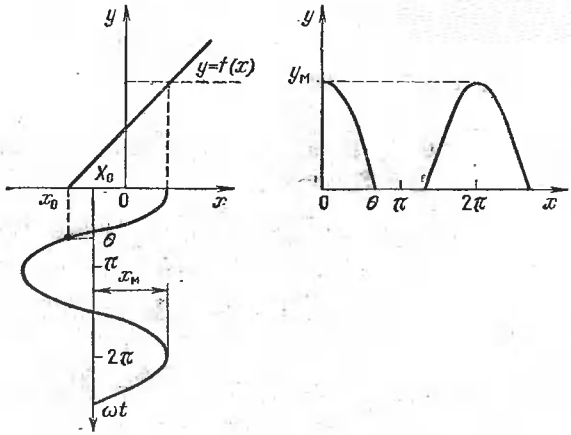

Рис. 5.6. Иллюстрация к методу Берга

Программа 5.74, *б*. Расчет $b_1 \div b_5$, $a_0 \div a_5$ и $2a_6$.

ИПВ	2	÷	ИП9	+	П0	ИПА	ИПД	×	+
ПП	92	ИП7	ИП8	+	ИПД	×	ПП	92	ИПВ
ИП9	ПП	91	ИП7	ИП8	—	ИПД	×	ПП	92
ИП0	ИПА	ИПД	×	ПП	91	ИПС	ИП2	+	П9
ИП1	ИП3	+	П8	+	2	÷	ПП	92	ИП4
2	÷	ИП6	+	П7	ИП5	ИПД	×	ПА	+
ПП	92	ИПС	ИП2	2	÷	—	ПВ	ИП1	2
÷	ИП3	—	ПД	+	ПП	92	ИП6	ИП4	ПП
91	ИПВ	ИПД	ПП	91	ИП7	ИПА	ПП	91	ИП9
ИП8	—	6	÷	С/П	В/0				

Пусть $y = f(x)$ задана следующими ординатами [1]: $y_1 = 1$, $y_2 = 4$, $y_3 = 5$, $y_4 = 4$, $y_5 = 3$, $y_6 = 3{,}5$, $y_7 = 3{,}5$, $y_8 = 3$, $y_9 = 1$, $y_{10} = 0{,}5$, $y_{11} = 0{,}2$ и $y_{12} = 0$. Расчет по программе 5.74, *а* дает $\sigma_0 = 3{,}5$, $\sigma_1 = 7{,}7$, $\sigma_2 = 11{,}5$, $\sigma_3 = 6$, $\theta_1 = 0{,}3$, $\theta_2 = 4{,}5$, $\theta_3 = 4$, $\delta_0 = -3{,}5$, $\delta_1 = -5{,}3$, $\delta_2 = -2{,}5$, $\eta_1 = 1{,}3$ и $\eta_2 = 2{,}5$. Расчет по программе 5.74, *б* дает $b_1 = 1{,}3411857$, $b_2 = 0{,}54848275$, $b_3 = -6{,}1666666$, $b_4 = -0{,}17320508$, $b_5 = 0{,}042147616$, $a_0 = 2{,}3916666$, $a_1 = -1{,}5566557$, $a_2 = -0{,}73333333$, $a_3 = -0{,}16666666$, $a_4 = -0{,}016666666$, $a_5 = -0{,}026677566$ и $2a_6 = 0{,}21666666$. Данные вычислений по этим программам и приведенные в [1] полностью совпадают. Отметим, что обозначения a_n и b_n в [1] соответствуют b_n и a_n, принятым в (5.41).

Часто нелинейная функция $y = f(x)$ может быть представлена двумя отрезками прямых (рис. 5.6). Тогда действующая часть входного воздействия

$$x(t) = x_м \cos \omega t + X_0$$

характеризуется углом отсечки

$$\theta = \arccos [(x_0 - X_0)/x_м].$$

Спектр выходных косинусоидальных импульсов для этого случая вычислен Бергом [6—8] и задается относительными средним значением α_0 и амплитудами гармоник:

$$\alpha_0 = \frac{y_0}{y_м} = \frac{\sin\theta - \theta\cos\theta}{\pi(1 - \cos\theta)}, \quad \alpha_1 = \frac{y_{м1}}{y_м} = \frac{\theta - \sin\theta\cos\theta}{\pi(1 - \cos\theta)},$$

$$\alpha_n = \frac{y_{мn}}{y_м} = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\sin n\theta \cos\theta - n\cos n\theta \cdot \sin\theta}{n(n^2 - 1)(1 - \cos\theta)}.$$

Программа 5.75. Расчет коэффициентов α_0, α_1 и α_n Берга. Ввод: n и θ (в градусах) в регистр X. Переключатель Р — Г в положении Р.

П0	С/П	Fπ	×	1	8	0	÷	П9	F cos
П7	1	—	Fπ	×	П8	ИП0	Fx = 0	28	ИП9
ИП7	×	ИП9	F sin	—	ИП8	÷	В/0	ИП0	Fx²
1	—	П5	Fx = 0	44	ИП9	F sin	ИП7	×	ИП9
—	ИП8	÷	В/0	ИП0	ИП9	×	F cos	ИП9	F sin
×	ИП0	×	ИП0	ИП9	×	F sin	ИП7	×	—
2	×	ИП5	÷	ИП0	÷	ИП8	÷	В/0	

Найдем α_0 при $\theta = 30°$. Введя $n = 0 =$ РХ, а затем $\theta = 30 =$ РХ, получим $\alpha_0(30) = 0{,}11059842$. Аналогично: $\alpha_0(90) = 0{,}31830985$; $\alpha_1(30) = 0{,}21522308$; $\alpha_2(90) = 0{,}2122066$ и т. д.

В общем случае для функции $y(t)$, представленной рядом Фурье (5.41), коэффициенты a_n и b_n определяются выражениями [6—8]:

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T y(t) \cos n\omega_1 t \, dt \tag{5.43}$$

и

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T y(t) \sin n\omega_1 t \, dt. \tag{5.44}$$

Для ряда (5.41)

$$A_n(\omega) = \sqrt{a_n(\omega)^2 + b_n(\omega)^2} \tag{5.45}$$

определяет амплитудно-частотную характеристику спектра (АЧХ), а

$$\varphi_n(\omega) = -\operatorname{arctg}[b_n(\omega)/a_n(\omega)] \tag{5.46}$$

фазо-частотную характеристику (ФЧХ). Отметим, что здесь $\omega = 2\pi f = 2\pi n f_1 = 2\pi n/T$.

Если функция $y(t)$ задана N ординатами y_i с разбиением периода $T = 1/f_1$ на равные отрезки времени Δt, то для численного интегрирования (5.43) и (5.44) можно использовать метод прямоугольников. Тогда будем иметь

$$a_n = \frac{2}{N} \sum_{i=1}^{N} y_i \cos 2\pi n f_1 i \, \Delta t, \tag{5.47}$$

$$b_n = \frac{2}{N} \sum_{i=1}^{N} y_i \sin 2\pi n f_1 i \, \Delta t. \tag{5.48}$$

Если $y(t)$ — непериодическая функция, определенная на конечном интервале времени $[0, t_0]$, то она характеризуется спектральной плотностью

$$S(j\omega) = S_c(\omega) + jS_s(\omega) = S(\omega) e^{j\varphi(\omega)}, \tag{5.49}$$

где

$$S_c(\omega) = \int_0^{t_0} y(t) \cos \omega t \, dt, \tag{5.50}$$

$$S_s(\omega) = \int_0^{t_0} y(t) \sin \omega \, dt. \tag{5.51}$$

Интегрирование (5.50) и (5.51) методом прямоугольников с учетом условия $t_0 = N\Delta t$ дает

$$S_c = \Delta t \sum_{i=1}^{N} y_i \cos(2\pi f \Delta t i), \tag{5.52}$$

$$S_s = \Delta t \sum_{i=1}^{N} y_i \sin(2\pi f \Delta t i). \tag{5.53}$$

Сравнивая (5.52) с (5.47) и (5.53) с (5.48), нетрудно заметить, что при $f = nf_1$

$$\frac{S_c}{\Delta t} = \frac{a_n N}{2} = \sum_{i=1}^{N} y_i \cos(2\pi f i \Delta t), \tag{5.54}$$

$$\frac{S_s}{\Delta t} = \frac{b_n N}{2} = \sum_{i=1}^{N} y_i \sin(2\pi f i \Delta t). \tag{5.55}$$

Эти соотношения позволяют строить единые программы спектрального анализа как периодических, так и непериодических функций $y(t)$. После определения (5.54) и (5.55) находится АЧХ спектра

$$\frac{S(f)}{\Delta t} = \frac{A_n(f) N}{2} = \frac{\sqrt{S_c(f)^2 + S_s(f)^2}}{\Delta t} \tag{5.56}$$

и ФЧХ

$$\varphi(f) = \operatorname{arctg}[S_s(f)/S_c(f)]. \tag{5.57}$$

Для удобства вычислений программы спектрального анализа строятся так, чтобы по мере ввода y_i индицировался номер i ординаты y_i. Кроме того, если начиная с некоторого номера $i > i_м$ ординаты $y_i = 0$, следует предусмотреть возможность прерывания вычислений.

Программа 5.76. Спектральный анализ. Ввод: Δt = РА, $i_м$ = РВ, f = РХ и (после нажатия клавиш В/0 и С/П и высвечивания цифры 1) $y_1, y_2, \ldots, y_м$ в регистр X. Переключатель Р—Г в положении Р. Вывод: $S \to$ РХ = Р6, $\varphi \to$ РУ = Р7, $NA_s/2 \to$ Р8, $NA_c/2 \to$ Р9.

Fπ	×	2	×	ИПА	×	ПС	0	П6	П8
П9	КИП6	ИП6	С/П	П7	ИПС	ИП6	×	П5	F sin
×	ИП8	+	П8	ИП5	F cos	ИП7	×	ИП9	+
П9	ИПВ	ИП6	—	Fx = 0	11	ИП8	ИП9	÷	F arc g
1	8	0	/—/	×	Fπ	÷	П7	ИП8	Fx^2
ИП9	Fx^2	+	F√	ИПА	×	П6	С/П	БП	00

Вычислим $S(f)$ и $\varphi(f)$ для прямоугольного импульса с амплитудой, равной 1 (условная единица), длительностью 1 мкс и периодом повторения $T = 4$ мкс. Взяв $N = 32$, y_i задаем восемью еди-

ничными отсчетами (остальные нулевые). Вводим $\Delta t = 4 \cdot 10^{-6}/32$ с $=$ $= 0{,}125 \cdot 10^{-6}$ с $=$ РА, $i_м = 8 =$ РВ и частоту $f = 2{,}5 \cdot 10^5$ Гц $=$ РХ. Нажав клавиши В/0 и С/П, получим на индикаторе цифру 1, указывающую на необходимость ввода первого значения $y_i = y_1 = 1$. Введя $y_1 = 1$, нажимаем клавишу С/П и после обработки первого отсчета (за время около 10 с) получим на индикаторе цифру 2 и т. д. После ввода последнего ненулевого отсчета $y_8 = 1$ программа автоматически переходит к вычислению $S = 9{,}0176423 \cdot 10^{-7}$, $\varphi =$ $= -50{,}624991°$, $Nb/2 = 5{,}5765853$ (вызывается из регистра 8) и $Na/2 = 4{,}5765856$ (вызывается из регистра 9).

Иногда для периодических функций $y(t)$ удобно использовать разложение в ряд Фурье по синусам:

$$y(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{N} A_n \sin(2\pi nt/T). \tag{5.58}$$

Для такого ряда при $\Delta t = T/N$

$$A_0 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} y_i, \quad A_{sn} = \frac{2}{N}\sum_{i=1}^{N} y_i \sin(2\pi ni/N),$$

$$A_{cn} = \frac{2}{N}\sum_{i=1}^{N} y_i \cos(2\pi ni/N), \quad A_n = \sqrt{A_{sn}^2 + A_{cn}^2},$$

$$\varphi_n = \operatorname{arctg}(A_{cn}/A_{sn}).$$

Программа 5.77. Вычисление коэффициентов ряда Фурье (5.58). Ввод: $N =$ РВ, n, y_1, y_2, ..., y_N в регистр X. Вывод: $A_n \to$ РХ $=$ Р3, φ_n (в градусах) $\to$ РУ $=$ Р4, φ_n (в радианах) $\to$ Р5, $A_{sn} \to$ Р6, $A_{cn} \to$ $\to$ Р7, $A_s N/2 \to$ Р8 и $A_c N/2 \to$ Р9. Переключатель Р — Г в положении Р.

ПА	0	П6	П8	П9	ИПА	Fx = 0	25	КИП6	ИП6
С/П	ИП8	+	П8	ИПВ	ИП6	—	Fx = 0	08	ИП8
ИПВ	÷	С/П	БП	00	2	×	Fπ	×	ИПВ
÷	ПА	КИП6	ИП6	С/П	ПД	ИПА	ИП6	×	ПС
F sin	×	ИП8	+	П8	ИПД	ИПС	F cos	×	ИП9
+	П9	ИПВ	ИП6	—	Fx = 0	32	ИП9	ИП8	÷
F arctg	П5	1	8	0	×	Fπ	÷	П4	ИП8
2	×	ИПВ	÷	П6	Fx^2	ИП9	2	×	ИПВ
÷	П7	Fx^2	+	$F\sqrt{\ }$	П3	БП	22		

Пусть надо найти спектральный состав функции $y(t)$, представленной на рис. 5.7 при $n \leqslant 3$. Поскольку $y(t)$ симметрична относительно оси абсцисс, то $A_0 = 0$ и $A_2 = 0$. Следовательно, достаточно найти A_1, A_3, φ_1 и φ_3. Зададим $y(t)$ при $N = 24$ только по-

ложительными ординатами: $y_1 = 7$, $y_2 = 11$, $y_3 = 13{,}5$, $y_4 = 15{,}4$, $y_5 = 17{,}4$, $y_6 = 20{,}5$, $y_7 = 25{,}4$, $y_8 = 32{,}5$, $y_9 = 27{,}7$, $y_{10} = 19{,}2$, $y_{11} = 10$ и $y_{12} = 0$. Введя $N = 24 =$ РВ и $n = 1 =$ РХ, нажимаем клавишу С/П. Высвечивается цифра 1, указывающая на необходимость ввода y_1. Вводим $y_1 = 7 =$ РХ, нажимаем клавишу С/П и т. д. После ввода $y_{12} = 0$ и нажатия клавиши С/П высвечивается число 13. Теперь прерываем ввод, задаем $N/2 = 12 =$ РВ и нажимаем клавиши БП 57 С/П. Получим $A_1 = 25{,}836556$, нажав клавишу XY, получим $\varphi_1 = -11{,}407519°$. Кроме того, из регистров, указанных в инструкции к программе, получим $\varphi_1 = -0{,}1990988$ рад, $A_{s1} = 25{,}326161$, $A_{c1} = -5{,}1101083$, $A_{s1}N/2 = 151{,}95697$ и $A_{c1}N/2 = -30{,}66065$.

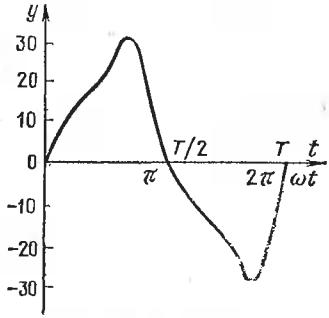

Рис. 5.7. Зависимость $y(t)$

Проведя аналогичные действия для $n = 3$, получим $A_3 = 6{,}1575834$, $\varphi_3 = 56{,}131231°$, $\varphi_3 = 0{,}9796748$ рад, $A_{s3} = 3{,}431579$, $A_{c3} = 5{,}1127416$, $A_{s3}N/2 = 20{,}58945$, $A_{c3}N/2 = 30{,}67645$. Полученные результаты практически аналогичны приведенным в [15], оттуда взят данный пример.

При использовании программ 5.76 и 5.77 усеченный $m \leqslant 2N$ членами ряд Фурье дает приближение к $y(t)$ с минимальной среднеквадратической погрешностью. Однако эта погрешность значительна в силу двух причин: функция $y(t)$ трактуется как решетчатая и интегрирование выражений (5.43) и (5.44), содержащих быстроосциллирующие множители, методом прямоугольников сопряжено с большими погрешностями.

Для повышения точности спектрального анализа целесообразно аппроксимировать $y(t)$ ступенчатой линией и сместить ее на половину шага Δt, добавив $\Delta t/2$ к текущему времени. Кроме того, можно вычислять интегралы в (5.43) и (5.44) на каждом отрезке по точным аналитическим формулам. Так, для a_n в этом случае получим выражение

$$a_n = \frac{2}{T \cdot 2\pi} \sum_{i=1}^{N} y_i \int_{(i-1)\Delta t}^{i\Delta t} \cos\left[2\pi n f_1 \left(t + \frac{\Delta t}{2}\right)\right] d\left[2\pi n f_1 \left(t + \frac{\Delta t}{2}\right)\right].$$

После аналитического вычисления интеграла находим окончательно [8]:

$$\frac{S_c}{\Delta t} = \frac{a_n N}{2} = \left(\frac{\sin \pi n f_1 \Delta t}{\pi n f_1 \Delta t}\right) \sum_{i=1}^{N} y_i \cos(2\pi n f_1 \Delta t i). \qquad (5.59)$$

Аналогичво (5.59) получим

$$\frac{S_s}{\Delta t} = \frac{b_n N}{2} = \left(\frac{\sin \pi n f_1 \Delta t}{\pi n f_1 \Delta t}\right) \sum_{i=1}^{N} y_i \sin (2\pi n f_1 \Delta t i). \qquad (5.60)$$

От (5.43) и (5.44) формулы (5.59) и (5.60) отличаются наличием корректирующего множителя, существенно повышающего точность вычисления a_n и b_n.

Повторное умножение на корректирующий множитель соответствует кусочно-линейной аппроксимации $y(t)$.

Программа 5.78. Спектральный анализ повышенной точности с вычислением a_n и b_n по формулам (5.59) и (5.60). Ввод: $\Delta t =$ РА, $i_м =$ РВ, $f =$ РХ (после нажатия клавиш В/0 и С/П и высвечивания цифры 1) $y_1, y_2, \ldots, y_м$ в регистр Х. Переключатель Р — Г в положении Р. Вывод: $S(f) \to$ РХ $=$ Р0, $A_n(f) \to$ Р7, $\varphi(f) \to$ Р8 (в радианах), $\varphi(f) \to$ Р9 $=$ РУ (в градусах), $\pi f \Delta t \to$ РС, $\sin n f \Delta t / \pi f \Delta t \to$ Р4, $Nb/2 \to$ Р5, $Na/2 \to$ Р6, нескорректированные значения $Nb/2 \to$ Р1, $Na/2 \to$ Р2.

Fπ	×	ИПА	×	ПС	0	П6	П1	П2	КИП6
ИП6	С/П	ПД	ИП6	ИПС	×	2	×	П3	F sin
×	ИП1	+	П1	ИП3	F cos	ИПД	×	ИП2	+
П2	ИПВ	ИП6	−	F$x=0$	09	ИПС	F sin	ИПС	÷
П4	ИП1	×	П5	Fx^2	ИП2	ИП4	×	П6	Fx^2
+	F $\sqrt{\ }$	П7	ИПА	×	П0	ИП5	ИП6	÷	F arctg
↑	/−/	П8	1	8	0	×	Fπ	÷	П9
ИПО	С/П	БП	00						

Описанный метод спектрального анализа повышенной точности дает весьма малую погрешность особенно в том случае, когда ступенчатая аппроксимация $y(t)$ точна, например, при вычислении спектра прямоугольных импульсов. Так, для примера, приведенного к программе 5.76, вычисления по программе 5.78 при $f = 2{,}5 \cdot 10^5$ Гц дают $S(f) = 9{,}0031637 \cdot 10^{-7}$, $\varphi(f) = -50{,}624991°$ (−0,8835728 рад), $A_1(f) = 7{,}202531$, $aN/2 = 4{,}5692374$, $bN/2 = 5{,}5676318$ (нескорректированные значения равны 4,5765854 и 5,5765854, корректирующий множитель равен 0,99835443). Из табл. 5.9 видно, что погрешность значения $S(f)$ не превышает $1 \cdot 10^{-7}$.

Недостатком программ 5.76 ÷ 5.78 является необходимость повторного ввода всех ординат y_i при смене n или f. Кроме того, даже при $i_м = 10$ время вычисления $S(f)$ и $\varphi(f)$ значительно — около 2—3 мин. При $i_м \leqslant 10$ можно организовать запоминание y_i в регистрах памяти, используя косвенную адресацию к ним, — см. пример ниже. У микрокалькуляторов Т1-58С/59 с большим числом регистров памяти можно организовать запоминание до 30 и более (у Т1-59) отсчетов y_i, что исключает необходимость их повторного

Таблица 5.9

Частота f кГц	$S(f)$	$\varphi(f)$	Точное значение $S(f)$
250	$9{,}0031637\cdot10^{-7}$	$-50{,}624991°$	$9{,}0031632\cdot10^{-7}$
500	$6{,}366193\cdot10^{-7}$	$78{,}750007°$	$6{,}3661977\cdot10^{-7}$
750	$3{,}0010541\cdot10^{-7}$	$28{,}124997°$	$3{,}0010544\cdot10^{-7}$
1000	$1{,}5835548\cdot10^{-14}$	—	0
1250	$1{,}8006325\cdot10^{-7}$	$-73{,}124931°$	$1{,}8006326\cdot10^{-7}$

ввода. Такое число отсчетов достаточно для большинства практических задач.

Важным приложением спектрального анализа является расчет АЧХ и ФЧХ линейных систем по их переходным характеристикам

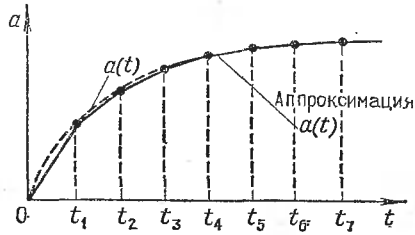

Рис. 5.8. К аппроксимации $a(t)$

(ПХ), заданным в конечном интервале времени $[0, t_0]$. Связь ПХ $a(t)$ с АЧХ и ФЧХ дается известными выражениями

$$A(j\omega) = a(0) + A_c(\omega) + jA_s(\omega), \tag{5.61}$$

где

$$A_c(\omega) = \int_0^{t_0} a'(t)\cos\omega t\,dt, \tag{5.62}$$

$$A_s(\omega) = \int_0^{t_0} a'(t)\sin\omega t\,dt, \tag{5.63}$$

$$A(f) = \sqrt{A_c(f)^2 + A_s(f)^2}, \tag{5.64}$$

$$\varphi(f) = \operatorname{arctg}[A_s(f)/A_c(f)] \tag{5.65}$$

Для повышения точности вычислений заменим $a'(t)$ ступенчатой кривой, смещенной во времени на $-\Delta t/2$. Это означает, что ПХ $a(t)$ аппроксимируется кусочно-линейной функцией — рис. 5.8. При этом в пределах каждого отрезка времени

$$a'(t) \simeq \frac{\Delta a(t)}{\Delta t} = \frac{a_i - a_{i-1}}{\Delta t}. \tag{5.66}$$

Воспользуемся описанным выше приемом — интегрированием (5.62) и (5.63) в пределах каждого шага по точным аналитическим формулам. Тогда будем иметь [8]:

$$A_c(f) = \frac{\sin \pi f \Delta t}{\pi f \Delta t} \sum_{i=1}^{N} (a_i - a_{i-1}) \cos \pi f \Delta t (2i - 1), \qquad (5.67)$$

$$A_s(f) = \frac{\sin \pi f \Delta t}{\pi f \Delta t} \sum_{i=1}^{N} (a_i - a_{i-1}) \sin \pi f \Delta t (2i - 1). \qquad (5.68)$$

Для микрокалькуляторов Электроника Б3-34 объем памяти позволяет запоминать до 11 значений a_i (три оставшихся регистра используются как служебные). Ввод и вывод a_i в процессе вычислений для упрощения программы целесообразно организовать с помощью косвенной адресации.

Программа 5.79. Расчет АЧХ и ФЧХ по ПХ, заданной 11-ю ординатами. Ввод: a_{10} = РУ, a_9, a_8, ..., a_0, $f\Delta t$ в регистр X. Переключатель Р — Г в положении Р. При смене $f\Delta t$ после расчета $A(f)$ и $\varphi(f)$ вводится только новое значение $f\Delta t$.

1	1	П0	XY	С/П	—	КП0	FBx	ИП0	1
—	Fx=0	03	С/П	Fπ	×	ПВ	1	1	П0
0	ПС	ПД	ИП0	1	—	2	×	1	—
ИПВ	×	↑	F sin	XY	F cos	КИП0	XY	FBx	×
ИПС	+	ПС	F,	×	ИПД	+	ПД	ИП0	1
—	Fx=0	23	ИПС	Fx²	ИПД	Fx²	+	F√	ИПВ
÷	ИПВ	F sin	×	С/П	ИПС	Fx<0	70	1	8
0	П0	ИПД	ИПС	÷	ПВ	Fx≥0	81	ИП0	/—/
П0	ИПВ	F arctg	1	8	0	/—/	×	Fπ	÷
ИП0	—	БП	13						

В этой программе с помощью анализа знаков $A_c(f)$ и $A_s(f)$ обеспечивается представление углов $\varphi(f)$ в расширенном до $\pm 180°$ диапазоне.

Пусть надо построить АЧХ и ФЧХ системы, ПХ которой показана на рис. 5.9, *а*. Введя программу, нажимаем клавиши В/0 0 С/П. Набираем $a_{10} = 1$ и, нажав клавишу ↑, $a_9 = 1{,}02$. Нажав клавишу С/П и дождавшись обработки отсчета (он вновь выводится на индикатор), вводим $a_8 = 1{,}08$ и т. д. После ввода a_0 и нажатия клавиши С/П высвечивается цифра 0. Вводим $f\Delta t = 0{,}01$ и, вновь нажав клавишу С/П, через время ≈ 2 мин получим результат $A(f) = 1{,}0088276$; нажав еще раз клавишу С/П, получим $\varphi(f) = -6{,}1442791°$. Значения $A(f)$ и $\varphi(f)$ для разных $f\Delta t$ даны в табл. 5.10. Графики рассчитанных зависимостей $A(f)$ и $\varphi(f)$ показаны на рис. 5.9.

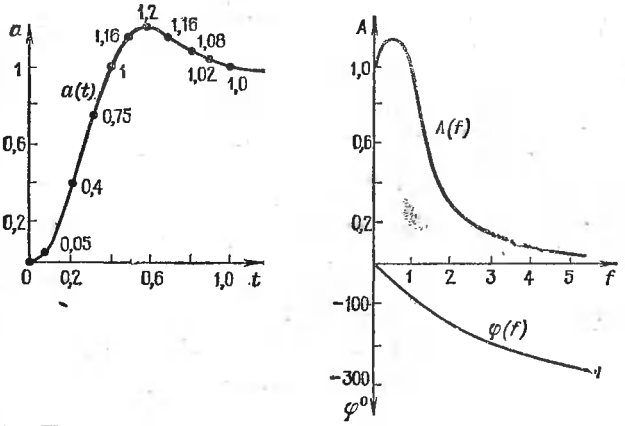

Рис. 5.9. Переходная характеристика (слева) и рассчитанные по ней АЧХ и ФЧХ (справа)

Таблица 5.10

$f\Delta t$	$A(f)$	$\varphi(f)$
0,01	1,0088276	−6,1442791
0,02	1,0331342	−12,82609
0,05	1,1341967	−38,690029
0,1	1,0438664	−95,20238
0,125	0,83008103	−125,96085
0,15	0,56762792	−151,63527
0,2	0,23672042	−160,43524
0,3	0,15961459	−193,81658 *)
0,5	0,050929582	−269,99994 *)

*) От показаний индикатора отнимается 180°, так как $\varphi(f)$ вышло за пределы определения отрицательных углов.

5.12. Статистические расчеты и реализация метода Монте-Карло

Совокупность N некоторых величин x_i (например, данных эксперимента) характеризуется начальными и центральными моментами k-го порядка [1—10]

$$m_k(x) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i^k, \quad M_k(x) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}[x_i - m_1(x)]^k, \; k = 1, 2, 3, 4, \ldots$$

Центральный момент $M_1(x) = 0$. Обычно $k \leq 4$.

Для исключения запоминания всех x_i M_k рассчитываются по значениям m_k:

$$M_2 = m_2 - m_1^2,$$

$$M_3 = m_3 - 3m_1m_2 + 2m_1^3,$$

$$M_4 = m_4 - 4m_1m_3 + 6m_1^2m_2 - 3m_1^4.$$

Наиболее вероятное (среднее) значение числа в массиве

$$\bar{x} = m_1 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i.$$

Вероятная степень отклонения x_i от $\bar{x}$ — дисперсия

$$D = \sigma^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2 = M_2.$$

Величина $\sigma = \sqrt{D}$ является стандартным отклонением (или среднеквадратичной погрешностью).

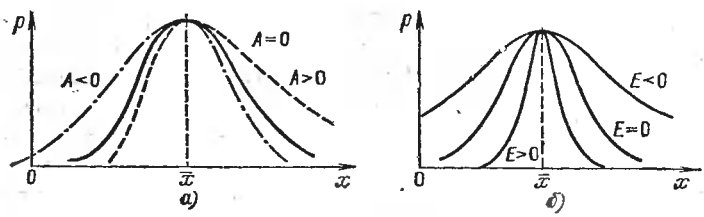

Рис. 5.10. Функции плотности распределения при разной асимметрии (*а*) и эксцессе (*б*)

Для нормального распределения вычисленная дисперсия является смещенной. Несмещенная дисперсия

$$D_0 = \sigma_{N-1}^2 = M_2N/(N-1).$$

Характер скошенности функции плотности распределения $p(x)$ (рис. 5.10, *а*) определяется значением асимметрии

$$A = \frac{1}{ND^{3/2}}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^3 = M_3/M_2^{3/2}.$$

При $A = 0$ кривая $p(x)$ симметрична, при $A > 0$ вытянут ее правый участок спада, а при $A < 0$ — левый участок спада (рис. 5.10, *а*).

Показателем остроты пика $p(x)$ (рис. 5.10, *б*), в сравнении с нормальным распределением, является эксцесс

$$E = \frac{1}{ND^2} \sum_{i=1}^{N} (x_i - \bar{x})^4 = \frac{M_4}{M_2^2} - 3$$

Программа 5.80. Вычисление начальных и центральных моментов, среднего, дисперсии, асимметрии и эксцесса. Порядок ввода и вывода результатов дан в контрольном примере (см. ниже).

ИП6	С/П	П6	ИП1	+	П1	ИП6	Fx^2	ИП2	+
П2	ИП6	Fx^2	ИП6	×	ИП3	+	П3	ИП6	Fx^2
Fx^2	ИП4	+	П4	FL0	00	ИП1	ИПА	÷	П1
С/П	ИП2	ИПА	÷	П2	ИП3	ИПА	÷	П3	ИП4
ИПА	÷	П4	ИП2	ИП1	Fx^2	—	ПВ	С/П	ИП1
Fx^2	2	×	ИП2	3	×	—	ИП1	×	ИП3
+	ПС	ИП2	2	×	ИП1	Fx^2	—	ИП1	×
3	×	4	÷	ИП3	—	ИП1	×	4	×
ИП4	+	ПД	ИПС	ИПВ	↑	Fx^2	×	F$\sqrt{\ }$	÷
С/П	ИПД	ИПВ	Fx^2	÷	3	—	С/П		

Допустим, надо найти статические характеристики массива из $N = 10$ случайных чисел: 9, 8, 10, 9, 11, 12, 10, 10, 9 и 11. После ввода программы вводим $N = 10$ в регистры 0 и А и обнуляем регистры 1, 2, 3, 4, 5 и 6. Нажимаем клавиши В/0 и С/П — на индикаторе высвечивается цифра 0. Вводим последовательно все значения x_i, нажимая клавишу С/П после обработки каждого отсчета (время обработки около 10 с). После ввода последнего x_i нажатие клавиши С/П ведет к выдаче значения $\bar{x} = 9{,}9$. Еще раз нажав клавишу С/П, получим $D = 1{,}29$. Для определения D_0 умножим D на $N/(N-1)$, нажав клавиши ИПА × ИПА 1 — ÷ (значение N хранится в регистре А). Получим $D_0 = 1{,}4333333$. Далее, нажав дважды клавишу С/П, получим $A = 0{,}19656579$ и $E = -0{,}752539$. Значения $m_1 \div m_4$ можно вызвать из регистров $1 \div 4$, а M_2, M_3 и M_4 — из регистров В, С и Д.

По вычисленным значениям $\bar{x}$, D, A и E можно в первом приближении судить о возможных законах распределения чисел x_n. Так, для наиболее часто встречаемого нормального закона $A=0$ и $E=0$. Можно принять закон распределения за нормальный, если значения A и E в 2—3 раза меньше значений вспомогательных коэффициентов [2];

$$U_3 = \sqrt{\frac{6(N-1)}{(N+1)(N+3)}}, \quad U_4 = \sqrt{\frac{24N(N-2)(N-3)}{(N-1)^2(N+3)(N+5)}}.$$

Программа 5.81. Вычисление вспомогательных коэффициентов U_3 и U_4. Ввод: $N =$ РХ.

П0	1	—	6	×	ИП0	1	+	÷	ИП0
3	+	÷	F $\sqrt{}$	С/П	ИП0	2	4	×	ИП0
2	—	×	ИП0	3	—	×	ИП0	1	—
Fx^2	÷	ИП0	5	БП	07				

Для $N = 10$ получаем $U_3 = 0{,}61450986$ и $U_4 = 0{,}92244356$.

Часто случайные величины X и Y с нормальными законами распределения описывают некоторую функциональную зависимость $Y(X)$. Взаимосвязь (корреляция) между ними может быть установлена с помощью выборочного коэффициента корреляции

$$r = \frac{\sum\limits_{N=1}^{N} XY - \sum\limits_{N=1}^{N} X \sum\limits_{N=1}^{N} Y/N}{\sqrt{\left(\sum\limits_{N=1}^{N} X^2 - \left(\sum\limits_{N=1}^{N} X\right)^2 \Big/ N\right)\left(\sum\limits_{N=1}^{N} Y^2 - \left(\sum\limits_{N=1}^{N} Y\right)^2 \Big/ N\right)}}.$$

Программа 5.82. Вычисление выборочного коэффициента корреляции. Ввод: $N =$ РХ, затем после нажатия клавиш В/0 и С/П высвечиваются значения X_1, Y_1, X_2, Y_2, ..., X_N, Y_N в регистр X.

П0	П1	0	П3	П4	П5	П6	П7	П9	ИП9
С/П	П8	ИП7	+	П7	ИП8	Fx^2	ИП6	+	П6
ИП8	С/П	П9	ИП5	+	П5	ИП9	Fx^2	ИП4	+
П4	ИП8	ИП9	×	ИП3	+	П3	FL0	09	ИП6
ИП7	Fx^2	ИП1	÷	—	ИП4	ИП5	Fx^2	ИП1	÷
—	×	F $\sqrt{}$	П2	ИП3	ИП7	ИП5	×	ИП1	÷
—	ИП2	÷	П2	С/П	БП	00			

Пример. Найти r для $N = 5$ значений $Y(X)$: 2(0,95), 4,05(2,1), 5,8(3), 8,1(4,1) и 9,2(4,9). Введя N и попарно значения X и Y, получим $r = 0{,}99872802$.

Выборочный коэффициент корреляции может принимать значения от -1 до $+1$. Близость r к 1 указывает на то, что величины X и Y коррелированы.

Нередко массив случайных чисел характеризуют гистограммой их распределения, т. е. количеством чисел, попадающих в интервалы с границами d_1, d_2, ..., d_M. Гистограммы интегрального распределения строятся путем подсчета числа попаданий в интервалы $(-\infty, d_1]$, $(-\infty, d_2]$ и т. д.

Программа 5.83. Обработка массива случайных чисел x_1, x_2, ..., x_N для построения гистограмм. Порядок ввода и вывода дан ниже в контрольном примере.

П0	ИП0	С/П	П0	ИП8	—	$Fx<0$	13	ИП1	1
+	П1	В/0	ИП0	ИП9	—	$Fx<0$	23	ИП2	1
+	П2	В/0	ИП0	ИПА	—	$Fx<0$	33	ИП3	1
+	П3	В/0	ИП0	ИПВ	—	$Fx<0$	40	КИП4	В/0
ИП0	ИПС	—	$Fx<0$	47	КИП5	В/0	ИП0	ИПД	—
$Fx<0$	54	КИП6	В/0	ИП7	1	+	П7	В/0	КНОП
ИП1	С/П	ИП2	+	С/П	ИП3	+	С/П	ИП4	+
С/П	ИП5	+	С/П	ИП6	+	С/П	ИП7	+	С/П
0	F1/x	С/П							

Пусть нужно построить гистограмму для 20 случайных чисел: 2,5; 5,15; 3,05; 1,1; 1,7; 3,6; 4,7; 4,65; 6,8; 5,6; 2,3; 2,9; 3,2; 3,8; 4,2; 3,5; 4,8; 5,7; 4,9 и 7,5. Вводим программу, затем границы $d_1 = 1 = P8$, $d_2 = 2 = P9$, $d_3 = 3 = PA$, $d_4 = 4 = PB$, $d_5 = 5 = PC$ и $d_6 = 6 = PД$ и записываем 0 в регистры $0 \div 7$. Нажимаем клавиши В/0 и С/П (высвечивается 0), после чего последовательно вводим все значения x_i. Из регистров $1 \div 7$ вызываем числа 0, 2, 3, 5, 5, 3 и 2, характеризующие число попаданий x_i в интервалы с 1-го по 7-й. Нажав клавиши БП 60 и С/П, переходим к вычислению данных для построения гистограммы интегральной функции распределения. По мере нажатия клавиши С/П (до появления знака ЕГГОГ, сигнализирующего конец вычислений) будем получать числа 0; 2; 5; 10; 15; 18 и 20 — число попаданий x в интервалы $(-\infty, d_1]$, $(-\infty, d_2]$, ..., $(-\infty, d_6]$. На рис. 5.11 построены гистограммы данного примера.

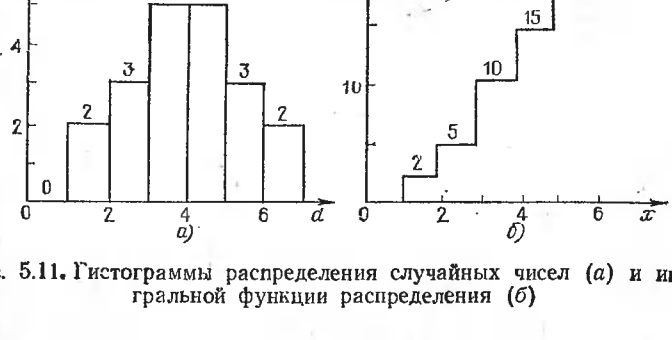

Рис. 5.11. Гистограммы распределения случайных чисел (*а*) и интегральной функции распределения (*б*)

Для построения гистограмм с большим числом интервалов (до 12—13) можно вписать значения $d_1, d_2, \ldots, d_N$ непосредственно в программу либо формировать их в программе (см. пример ниже).

Пусть нужно построить гистограмму напряжений стабилизации кремниевых стабилитронов типа Д814А — Д814Д, изготовляемых по единой технологии с разбивкой на группы по значениям $U_{ст}$. Такая

разбивка, естественно, требует знания статистического разброса $U_{ст}$. Ограничимся рабочим диапазоном $U_{ст} = 6 \div 15{,}5$ В и составим программу, позволяющую группировать $U_{ст}$ в 13 интервалах с шириной каждого из них $\Delta U_{ст} = 1$ В.

Программа 5.84. Обработка значений $U_{ст}$ для построения гистограммы на 13 интервалах (—∞; 5 В), [5; 6 В), [6; 7 В), ..., [15; 16 В) и [16 В; ∞). Ввод: $U_{ст}$ = РХ (после нажатия клавиш В/0 и С/П).

1	3	П0	0	КП0	ИП0	$Fx=0$	03	1	ПД
ИП0	С/П	П0	ИП0	ИПД	4	+	—	$Fx<0$	26
КИПД	1	+	КПД	БП	08	ИПД	1	+	ПД
БП	13								

Пусть для $U_{ст}$ имеем значения: 9,3; 10,5; 9,7; 5,6; 6,1; 15,5; 11,2; 8,9; 12,2; 8,3; 7,8; 9,2; 13,8; 9,05; 10,3. По окончании ввода из регистров $1 \div 9$, А, В и С вызываем данные для построения функции $p(U_{ст})$ — числа: 0; 1; 1; 1; 2; 4; 2; 1; 1; 1; 0; 1.

В основе ряда статистических расчетов лежит метод Монте-Карло. Он заключается в многократном расчете выходных параметров $y = f(x_i, y_i, z_i, \ldots)$ системы под воздействием входных параметров $x_i, y_i, z_i, \ldots$ с заданными законами распределения. В результате получается информация о работоспособности системы, разбросе ее выходных параметров, законах их распределения и т. д.

Основой реализации метода Монте-Карло является генерация случайных чисел с равномерным в интервале [0; 1] распределением. Путем соответствующих преобразований можно получить иные законы распределения.

Программа 5.85. Формирование случайных чисел с равномерным распределением мультипликативным способом

$$V_{n+1} = D(KV_n), \tag{5.69}$$

где $K = 8t \pm 3$ и $D(KV_n)$ — дробная часть KV_n (в программе взято $t = 5$ и $K = 8 \cdot 5 - 3 = 37$). Ввод: начальное случайное число $V_0 < 1$ = РУ.

3	7	×	1	+	ПД	КИПД	XY	ИПД	—
С/П	БП	00							

Так, введя $V_0 = 0{,}1234567$ = РУ, нажимая клавишу С/П, будем получать числа: 0,5678979; 0,012222; 0,452214; 0,731918 и т. д. Время генерации одного числа 4 с.

Программа 5.86. Формирование до 9000 неповторяющихся случайных чисел с равномерным распределением по формуле (см. [9]):

$$V_{n+1} = D(11V_n + \pi).$$

Ввод: $V_0 < 1$ = РУ.

1	1	×	$F\pi$	+	ПД	КИПД	XY	ИПД	—
С/П	БП	00							

Для $V_0 = 0{,}002 =$ РУ, нажимая клавишу С/П, будем получать числа: 0,1635926; 0,9411112; 0,493816 и т. д.

Программа 5.87. Формирование случайных чисел с равномерным распределением по (5.69) преобразованием их в интервал $[a, b]$:

$$X_n = a + (b - a) V_n.$$

Ввод: $a =$ РА, $b =$ РВ, $V_0 =$ Р0.

ИП0	3	7	×	1	+	ПД	КИПД	XY	ИПД
—	П0	ИПВ	ИПА	—	×	ИПА	+	С/П	БП
00									

При $a = 2$, $b = 3$ и $V_0 = 0{,}1234567$, нажимая клавишу С/П, будем получать числа: 2,5678979; 2,012222; 2,452214 и т. д.

Случайные числа с некоторыми законами распределения можно получать с помощью простых формул преобразования [8, 10]. Наиболее часто встречается необходимость в генерации случайных чисел с нормальным распределением. Пару таких чисел R'_n и R''_n, имеющих $\sigma = 1$ и $\bar{x} = \bar{R} = 0$, можно получить из пары чисел V_{n-1} и V_n с помощью формул

$$R'_n = \sqrt{2 \ln (1/V_n)} \cos (2\pi V_{n-1}), \quad R''_n = \sqrt{2 \ln (1/V_n)} \sin (2\pi V_{n-1}). \tag{5.70}$$

Программа 5.88. Генерация чисел с нормальным распределением

$$r_n = \bar{R} + R_n \sigma \tag{5.71}$$

с заданным $\bar{R}$ и σ по формулам (5.69)—(5.71). Ввод: $V_0 =$ Р0, $\bar{R} =$ РВ и $\sigma =$ РС. Переключатель Р — Г в положении Р.

ИП0	3	7	×	1	+	ПД	КИПД	XY	ИПД
—	ИП0	2	×	Fπ	×	F sin	XY	П0	F1/x
Fln	2	×	F √	×	ИПС	×	ИПВ	+	С/П
БП	00								

При $V_0 = 0{,}1234567$; $\bar{R} = 1$ и $\sigma = 0{,}1$, нажимая клавишу С/П, будем получать следующие числа: 1,0744877; 0,8771866; 1,0096652 и т. д. Время выдачи одного числа около 11 с.

Следует отметить, что реализация метода Монте — Карло на микрокалькуляторах из-за большого числа вычислений весьма трудоемка и рациональна, если $f(x_i, y_i, \ldots)$ является функцией не более 2—3-х переменных. Поэтому данный метод более рационально применять при расчетах на быстродействующих микро-ЭВМ. При этом нужно особое внимание уделять проверке необходимых законов распределения случайных чисел, которые нередко заметно отличаются от принимаемых при расчете, что может приводить к значительным погрешностям.

5.13. Приближение функций

Пусть некоторая функция $y_i(x_i)$ задана N парами значений абсцисс x_i и ординат y_i. Пусть далее приближенно известен аналитический вид функции $y(x)$ и нужно найти основные параметры аналитической функции, которая с минимальной среднеквадратической погрешностью приближалась бы к исходной функции $y_i(x_i)$. Ниже дан ряд программ, обеспечивающих такое приближение по методу наименьших квадратов [1, 2, 17] при произвольном расположении абсцисс x_i. Исходные данные во всех программах вводятся в регистр X в следующем порядке: N, x_1, y_1, x_2, y_2, ..., x_N, y_N.

Программа 5.89. Вычисление коэффициентов b_0 и b_1 линейного приближения

$$y = b_0 + b_1 x$$

по формулам:

$$b_1 = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i \sum_{i=1}^{N} y_i - N \sum_{i=1}^{N} x_i y_i}{\left(\sum_{i=1}^{N} x_i\right)^2 - N \sum_{i=1}^{N} x_i^2};$$

$$b_0 = \frac{1}{N}\left(\sum_{i=1}^{N} y_i - b_1 \sum_{i=1}^{N} x_i\right).$$

П1	П0	0	П4	П5	П6	П7	ИП1	ИП0	—
1	+	С/П	П2	С/П	П3	ИП6	+	П6	ИП2
ИП4	+	П4	ИП2	Fx^2	ИП5	+	П5	ИП2	ИП3
×	ИП7	+	П7	FL0	07	ИП4	Fx^2	ИП1	ИП5
×	—	П8	ИП4	ИП6	×	ИП1	ИП7	×	—
ИП8	÷	ПА	С/П	ИП6	ИПА	ИП4	×	—	ИП1
÷	ПВ	С/П							

Пусть $y_i = f(x_i)$ задана $N = 5$ значениями $y_i(x_i)$: 5,5(2), 6,3(4), 7,2(6), 8(8) и 8,6(10). Введя эти данные, получим $b_1 = 0{,}395$ и $b_0 = 4{,}75$. Следовательно, функция $y(x)$ имеет вид $y = 4{,}75 + 0{,}395x$.

Программа 5.90. Вычисление коэффициентов b_0 и b_1 гиперболического приближения

$$y = b_0 + b_1/x$$

из решения системы уравнений:

$$b_0 N + b_1 \sum_{i=1}^{N} 1/x_i = \sum_{i=1}^{N} y_i, \quad b_0 \sum_{i=1}^{N} 1/x_i + b_1 \sum_{i=1}^{N} 1/x_i^2 = \sum_{i=1}^{N} y_i/x_i.$$

П0	П7	0	П3	П5	П6	П8	ИП7	ИП0	—
1	+	С/П	П9	С/П	П2	ИП6	+	П6	ИП9

F1/x	ИП8	+	П8	ИП9	Fx²	F1/x	ИП5	+	П5
ИП2	ИП9	÷	ИП3	+	П3	FL0	07	ИП7	ИП5
×	ИП8	ИП8	×	−	П0	ИП6	ИП5	×	ИП3
ИП8	×	−	ПА	ИП3	ИП7	×	ИП6	ИП8	×
−	ПВ	ИПА	ИП0	÷	С/П	ИПВ	ИП0	÷	С/П

Пусть $y = f(x)$ задана $N = 8$ значениями $y_i(x_i)$: 12,2(1), 6,8(2), 5,2(3), 4,6(4), 3,9(5), 3,7(6), 3,5(7) и 3,2(8). Введя эти данные, получим $b_0 = 1{,}9357621$ и $b_1 = 10{,}160173$. Следовательно, функция $y = f(x)$ имеет вид $y \simeq 1{,}936 + 10{,}16/x$.

Программа 5.91. Вычисление параметров b_1 и b_0 степенного приближения функцией

$$y = b_0 x^{b_1}$$

по формулам:

$$b_1 = \frac{\sum_{i=1}^{N} \ln x_i \sum_{i=1}^{N} \ln y_i - N \sum_{i=1}^{N} \ln x_i \ln y_i}{\left(\sum_{i=1}^{N} \ln x_i\right)^2 - N \sum_{i=1}^{N} (\ln x_i)^2},$$

$$b_0 = \exp\left[\frac{1}{N}\left(\sum_{i=1}^{N} \ln y_i - b_1 \sum_{i=1}^{N} \ln x_i\right)\right].$$

П0	П7	0	П3	П4	П5	П6	ИП7	ИП0	−
1	+	С/П	П1	F ln	П8	ИП3	+	П3	ИП8
Fx²	ИП4	+	П4	ИП1	С/П	П2	F ln	П9	ИП5
+	П5	ИП8	ИП9	×	ИП6	+	П6	FL0	07
ИП3	ИП5	×	ИП7	ИП6	×	−	ИП3	Fx²	ИП7
ИП4	×	−	÷	ПВ	ИП5	ИП3	ИПВ	×	−
ИП7	÷	Fe^x	ПА	С/П	ИПВ	С/П			

Пусть функция $y_i = f(x_i)$ задана $N = 6$ значениями $y_i(x_i)$: 3(1), 12(2), 27(3), 48(4), 75(5) и 108(6). Тогда получим $b_0 = 2{,}9999996$ и $b_1 = 2$. Следовательно, $y(x)$ имеет вид $y \simeq 3x^2$.

Программа 5.92. Вычисление параметров a и b приближения показательной функцией

$$y = 10^{a+bx}$$

путем решения системы уравнений:

$$aN + b\sum_{i=1}^{N} x_i = \sum_{i=1}^{N} \lg y_i, \quad a\sum_{i=1}^{N} x_i + b\sum_{i=1}^{N} x_i^2 = \sum_{i=1}^{N} (x_i \lg y_i).$$

П0	П7	0	П3	П5	П6	П8	ИП7	ИП0	−
1	+	С/П	П9	С/П	П2	F lg	П1	×	ИП3

+	П3	ИП1	ИП6	+	П6	ИП9	ИП8	+	П8
ИП9	Fx^2	ИП5	+	П5	FL0	07	ИП7	ИП5	×
ИП8	ИП8	×	—	П0	ИП6	ИП5	×	ИП3	ИП8
×	—	ПА	ИП3	ИП7	×	ИП6	ИП8	×	—
ПВ	ИПА	ИП0	÷	С/П	ИПВ	ИП0	÷	С/П	

Пусть при $N = 6$ $y_i(x_i)$ имеет значения: 5(1), 9(2), 12(3), 20(4), 32(5) и 50(6). Введя эти данные, получим $a = 0{,}51880038$ и $b = 0{,}19641628$, т. е. $y(x)$ имеет вид $y \simeq 10^{0{,}519+0{,}196x}$.

При приближении функцией

$$y = \exp(a + bx)$$

в программе 5.92 достаточно заменить оператор Flg по адресу 16 на оператор F ln.

Программа 5.93. Вычисление параметров b_1 и b_0 приближения экспоненциальной функцией

$$y = b_0 \exp(b_1 x)$$

по формулам:

$$b_1 = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i \sum_{i=1}^{N} \ln y_i - N \sum_{i=1}^{N} x_i \ln y_i}{\left(\sum_{i=1}^{N} x_i\right)^2 - N \sum_{i=1}^{N} x_i^2},$$

$$b_0 = \exp\left[\frac{1}{N}\left(\sum_{i=1}^{N} \ln y_i - b_1 \sum_{i=1}^{N} x_i\right)\right].$$

П0	П7	0	П3	П4	П5	П6	ИП7	ИП0	—
1	+	С/П	П1	ИП3	+	П3	ИП1	Fx^2	ИП4
+	П4	ИП1	С/П	F ln	П8	ИП5	+	П5	ИП8
ИП1	×	ИП6	+	П6	FL0	07	ИП3	ИП5	×
ИП6	ИП7	×	—	ИП3	Fx^2	ИП4	ИП7	×	—
÷	ПВ	ИП5	ИП3	ИПВ	×	—	ИП7	÷	Fe^x
ПА	С/П	ИПВ	С/П						

Пусть функция $y_i(x_i)$ задана $N = 9$ значениями $y_i(x_i)$: 3,5(2), 5(3), 6,2(4), 9(5), 13(6), 16(7), 23(8), 30(9) и 40(10). Тогда получим $b_0 = 1{,}9394789$ и $b_1 = 0{,}30528351$. Следовательно, функция $y(x)$ имеет вид $y \simeq 1{,}94 \exp(0{,}3053x)$.

Программа 5.94. Вычисление параметров a и b приближения показательной функцией

$$y = ab^x$$

из системы уравнений:

$$N \lg a + \lg b \sum_{i=1}^{N} x_i = \sum_{i=1}^{N} \lg y_i, \quad \lg a \sum_{i=1}^{N} x_i + \lg b \sum_{i=1}^{N} x_i^2 = \sum_{i=1}^{N} (x_i \lg y_i).$$

П0	П7	0	П3	П5	П6	П8	ИП7	ИП0	—
1	+	С/П	П9	С/П	F lg	П1	ИП6	+	П6
ИП9	ИП8	+	П8	ИП9	Fx^2	ИП5	+	П5	ИП9
ИП1	×	ИП3	+	П3	FL0	07	ИП7	ИП5	×
ИП8	ИП8	×	—	П0	ИП6	ИП5	×	ИП3	ИП8
×	—	ПА	ИП3	ИП7	×	ИП6	ИП8	×	—
ПВ	ИПА	ИП0	÷	F10^x	С/П	ИПВ	ИП0	÷	F10^x
С/П									

Пусть функция $y_i(x_i)$ задана $N = 5$ значениями $y_i(x_i)$: 6(1), 7(2), 8,7(3), 10,4(4) и 12,4(5). Введя эти данные, получим $a = 4{,}9419892$ и $b = 1{,}2029501$. Следовательно, $y(x)$ имеет вид $y \simeq 4{,}942 \cdot 1{,}203^x$.

Программа 5.95. Вычисление параметров a и b приближения логарифмической функцией

$$y = a + b \lg x$$

из системы уравнений:

$$aN + b \sum_{i=1}^{N} \lg x_i = \sum_{i=1}^{N} y_i, \quad a \sum_{i=1}^{N} \lg x_i + b \sum_{i=1}^{N} (\lg x_i)^2 = \sum_{i=1}^{N} (y_i \lg x_i).$$

П0	П7	0	П3	П5	П6	П8	ИП7	ИП0	—
1	+	С/П	П9	С/П	П2	ИП6	+	П6	ИП9
F lg	П1	ИП8	+	П8	ИП9	F lg	Fx^2	ИП5	+
П5	ИП1	ИП2	×	ИП3	+	П3	FL0	07	ИП7
ИП5	×	ИП8	ИП8	×	—	П0	ИП6	ИП5	×
ИП3	ИП8	×	—	ПА	ИП3	ИП7	×	ИП6	ИП8
×	—	ПВ	ИПА	ИП0	÷	С/П	ИПВ	ИП0	÷
С/П									

Пусть $y_i = f(x_i)$ задана $N = 6$ значениями $y_i(x_i)$: 1(1), 1,451(2), 1,716(3), 1,903(4), 2,048(5) и 2,167(6). Введя эти данные, получим $a = 0{,}99993157$ и $b = 1{,}4997935$. Следовательно, функция $y(x)$ имеет вид: $y \simeq 1 + 1{,}5 \lg x$.

Параметры a и b логарифмического приближения функцией

$$y = a + b \ln x$$

могут также определяться по последней программе, если в ней оператор F lg по адресам 20 и 26 заменить на оператор F ln.

Параметры b_0, b_1 и b_2 приближения параболической функцией

$$y = b_0 + b_1 x + b_2 x^2$$

определяются из решения системы из трех уравнений:

$$b_0N + b_1 \sum_{i=1}^{N} x_i + b_2 \sum_{i=1}^{N} x_i^2 = \sum_{i=1}^{N} y_i,$$

$$b_0 \sum_{i=1}^{N} x_i + b_1 \sum_{i=1}^{N} x_i^2 + b_2 \sum_{i=1}^{N} x_i^3 = \sum_{i=1}^{N} x_i y_i, \qquad (5.72)$$

$$b_0 \sum_{i=1}^{N} x_i^2 + b_1 \sum_{i=1}^{N} x_i^3 + b_2 \sum_{i=1}^{N} x_i^4 = \sum_{i=1}^{N} x_i^2 y_i.$$

Программа 5.96. Вычисление коэффициентов b_0, b_1 и b_2 при параболической аппроксимации [7]. Ввод: 0 = P1 = P2 = ... = P9 и y_i = PY, x_i = PX (после ввода каждой пары y_i, x_i нажимаем клавиши В/0 и С/П, время счета около 50 с). По окончании ввода нажимаем клавишу С/П и получаем $b_0 \to$ P7, $b_1 \to$ P8 и $b_2 \to$ P9 (время счета около 60 с).

ПА	XY	ПВ	1	ПС	ПД	ПП	79	ИП3	П4
5	ПД	ПП	81	ИПВ	ПС	ПП	79	С/П	ПП
26	ПП	32	ПП	37	С/П	ИП6	ИП4	↑	ПП
74	П6	ИП3	ИП2	ПП	73	П3	ИП8	ИП7	ПА
ПП	73	П7	ИП9	ИПА	ИП4	ПП	74	П8	ИПА
ИП1	÷	П9	ИП5	ИП4	ПП	73	ПА	ИП4	ИП1
÷	П5	ИП2	ИП1	÷	П4	ИПА	П2	ИП3	П1
ИП6	П3	В/0	ИП2	×	ИП1	÷	—	В/0	ПП
83	ПП	83	ИПС	КИПД	+	КПД	ИПС	ИПА	×
ПС	ИПД	1	+	ПД	В/0				

Для $y_i(x_i)$, равных 3,76(2), 4,44(4), 5,04(6), 5,56(8), 6(10), 6,36(12) и 6,64(14), получаем $b_0 = 3$, $b_1 = 0{,}4$ и $b_2 = -0{,}01$.

Часто используется приближение $y_i(x_i)$ интерполяционными полиномами. Значения $y(x)$ в узлах в этом случае точно совпадают со значениями $y_i(x_i)$, но в промежутках между ними погрешность может быть большей, чем при приближении по методу наименьших квадратов. Кроме того, в этом случае степень полинома n однозначно определяется числом ординат.

Интерполирующая функция может быть представлена полиномом Ньютона:

$$y(x) = b_0 + \sum_{i=1}^{n} b_i \prod_{j=0}^{i} (x - x_j). \qquad (5.73)$$

Для практики удобнее представление в виде

$$y(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n, \qquad (5.74)$$

которое можно получить, воспользовавшись следующим алгоритмом, реализованным в программе 5.97 [22]:

1. Задаем $j = 0$ и $b_n = 0$.
2. Прибавляем 1 к j.
3. Вычисляем

$$b_i^{(j)} = \begin{cases} b_i^{(j-1)} - b_{i+1}^{(j-1)} & \text{при} \quad j + i = n, \\ b_i^{(j-1)} & \text{при} \quad j + i < n. \end{cases}$$

4. Если $j = n + 1$, принимаем $a_i = b_i^{(n+1)}$ и заканчиваем вычисления, в противном случае идем к п. 2.

Программа 5.97. Вычисление коэффициентов b_i и a_i степенных многочленов (5.73) и (5.74) при $n + 1 \leqslant 6$. Ввод: $y_i =$ РХ↑, $x_i =$ РХ $(i = 0, 1, \ldots, n)$. Получаем: $b_0 \to$ Р7, ..., $b_5 \to$ Р2. Для получения $a_0 \to$ Р7, ..., $a_5 \to$ Р2 нажимаем клавиши БП 40 С/П. Для получения $y(x)$ вводим $n + 1 =$ Р9 для каждого $x =$ РХ и нажимаем клавишу С/П. Для смещения начала отсчета x в точку $x_0' = x_0 + \Delta$ вводим $\Delta =$ РД $=$ РС $= \ldots =$ Р$(14 - n)$, $(7 - n) =$ Р1 и нажимаем клавиши БП 40 С/П $(a_0' \to$ Р7, ... $a_5' \to$ Р2$)$.

ПД	ХУ	П7	7	П1	1	4	П9	С/П	П8
П,	ИП8	КИП0	—	ХУ	ИП0	5	—	П0	F,
КИП0	—	ХУ	÷	ИП0	6	+	П0	6	—
ИF1	—	F$x = 0$	10	F,	КП1	ИП8	КП9	БП	05
ИП1	1	+	П8	7	+	П0	6	—	П1
9	—	F$x \neq 0$	79	КИП0	↑	F,	↑	КИП1	ХУ
КИП1	×	—	ИП1	2	+	П1	F,	КП1	F,
ИП1	ИП8	—	F$x = 0$	56	ИП0	2	БП	45	С/П
↑	ИП9	П1	Сx	ИП8	П0	F,	×	КИП0	+
ИП0	2	+	FL1	85	F,	БП	79		

Пример. Найти b_i и a_i многочленов, аппроксимирующих зависимость $y_i(x_i)$, заданную табл. 5.1. Введя $y_i(x_i)$, получим: $b_0 = 0{,}4860966$, $b_1 = 0{,}031793$, $b_2 = -0{,}032635$, $b_3 = 0{,}0189833$, $b_4 = -0{,}00599965$, $a_0 = -0{,}16166365$, $a_1 = 0{,}79047151$, $a_2 = -0{,}36226819$, $a_3 = 0{,}07538001$ и $a_4 = -0{,}00599965$. Далее можно найти для $x = 2{,}45$ $y(2{,}45) = 0{,}49285713$.

Максимальную степень многочлена можно повысить с 5 до 9, если абсциссы x_i расположены равномерно с шагом h относительно значения x_0.

Программа 5.98. Вычисление коэффициентов α_i многочлена (5.73), a_i и функции $y(z)$, где $z = x - x_0$, по формуле (5.74) [22]. Ввод: $y_0 =$ Р0, $y_1 =$ Р1, ..., $y_n =$ Рn и $n =$ РХ. Нажав клавиши В/0 и С/П, получаем $\alpha_0 \to$ Р0, $\alpha_1 \to$ Р1, ..., $\alpha_n \to$ Рn. Далее вводим $h =$ РХ и, нажимая клавишу С/П, получаем a_0, a_1, ..., $a_n \to$ РХ

(a_0, a_1, a_2, ..., a_n заносятся также в регистры P0, P1, P2, ..., Pn). Для определения $y(z)$ по формуле (5.74) для каждого z вводим n = РД, $z = x - x_0$ = РХ и нажимаем клавиши БП 78 С/П.

ПА	Сx	ПД	КИПД	ПВ	ИПД	1	+	ПС	ИПД
1	+	ПД	ИПВ	КИПД	ПВ	XY	—	ИПС	÷
КПД	ИПД	ИПА	—	Fx=0	09	ИПС	ПД	ИПА	—
Fx=0	03	ИПА	1	—	ПС	ПВ	ИПВ	1	+
ПД	КИПВ	КИПД	ИПС	×	—	КПВ	ИПВ	1	+
ПВ	ИПА	—	Fx=0	37	ИПС	1	—	Fx=0	35
ПД	С/П	ПВ	КИПД	ИПС	÷	КПД	С/П	ИПС	ИПВ
×	ПС	ИПД	1	+	ПД	БП	63	↑	1
↑	Сx	↑	F,	×	КИПД	+	ИПД	1	—
ПД	Fx<0	83	F,	С/П	БП	78			

Для указанного выше примера получим $\alpha_0 = 0{,}4860966$, $\alpha_1 = 0{,}0035472167$, $\alpha_2 = -0{,}0003899$, $\alpha_3 = 2{,}2583333 \cdot 10^{-5}$, $\alpha_4 = -6 \cdot 10^{-7}$, $a_0 = 0{,}4860966$, $a_1 = 3{,}5472167 \cdot 10^{-2}$, $a_2 = -0{,}3899 \cdot 10^{-2}$, $a_3 = 0{,}022583333$, $a_4 = -6 \cdot 10^{-3}$. Для $x = 2{,}45$ ($z = 0{,}25$) получаем $y(x) = 0{,}49285719$.

5.14. Сглаживание эмпирических данных с ошибками

Нередко функция $y_i(x_i)$ задается значениями y_i при равноотстоящих абсциссах x_i. Значения y_i могут содержать случайные отклонения. По ряду y_i, используя усреднение на основе интерполяционных формул, можно уточнить значения ординат, т. е. провести сглаживание зависимости $y_i(x_i)$. Сглаженные ординаты записываются в виде $\tilde{y}_i$.

Программа 5.99. Линейное сглаживание по трем ординатам с помощью формул:

$$\tilde{y}_0 = (5y_0 + 2y_1 - y_2)/6, \qquad i = 0,$$
$$\tilde{y}_i = (y_{i-1} + y_i + y_{i+1})/3, \qquad 1 \leqslant i \leqslant N-1,$$
$$\tilde{y}_N = (5y_N + 2y_{N-1} - y_{N-2})/6, \qquad i = N.$$

Ввод: y_0 = P7, y_1 = P8, y_2 = P9 и далее (после нажатия клавиш В/0 и С/П) y_3, y_4, ..., y_N в регистр X. Вывод $\tilde{y}_0$, $\tilde{y}_1$, $\tilde{y}_2$, ..., $\tilde{y}_N$ в регистр X.

ИП7	5	×	ИП8	2	×	+	ИП9	—	6
÷	С/П	ИП7	ИП8	ИП9	+	+	3	÷	С/П
П6	ИП8	П7	ИП9	П8	ИП6	П9	БП	12	ИП9
5	×	ИП8	2	×	+	ИП7	—	6	÷
С/П									

После ввода y_0, y_1 и y_2 нажимаем клавиши В/0 и С/П и получаем $\tilde{y}_0$. Еще раз нажав клавишу С/П, получаем $\tilde{y}_1$. Теперь вводим

y_3 и, нажав клавишу С/П, получаем $\tilde{y}_2$ и т. д. После ввода последнего значения y_N и получения $\tilde{y}_{N-1}$ нажимаем клавиши БП 29 и С/П и получаем $\tilde{y}_N$. Результаты сглаживания для функции $y \simeq 10x$ при $x = 0{,}1 \div 1$ даны в табл. 5.11.

Таблица 5.11

y_i	Сглаживание по трем ординатам	Сглаживание по пяти ординатам	Точное значение $y=10x$
0,9	0,97	0,992	1
2,12	1,98	1,995	2
2,92	3,0633333	2,998	3
4,15	3,99	4,038	4
4,9	5,05	4,998	5
6,1	5,9733333	6,044	6
6,92	7,0566666	7,024	7
8,15	8,04	8,004	8
9,05	9	8,957	9
9,8	9,825	9,91	10

Программа 5.100. Линейное сглаживание при пяти ординатах по формулам:

$$\tilde{y}_0 = (3y_0 + 2y_1 + y_2 - y_4)/5, \qquad i = 0,$$

$$\tilde{y}_1 = (4y_0 + 3y_1 + 2y_2 + y_3)/10, \qquad i = 1,$$

$$\tilde{y}_i = (y_{i-2} + y_{i-1} + y_i + y_{i+1} + y_{i+2})/5, \qquad 2 \leqslant i \leqslant N-2,$$

$$\tilde{y}_{N-1} = (y_{N-3} + 2y_{N-2} + 3y_{N-1} + 4y_N)/10, \qquad i = N-1,$$

$$\tilde{y}_N = (3y_N + 2y_{N-1} + y_{N-2} - y_{N-3})/5, \qquad i = N.$$

Ввод: $y_0 = $ Р5, $y_1 = $ Р6, $y_2 = $ Р7, $y_3 = $ Р8, $y_4 = $ Р9, $y_5, y_6, \ldots, y_N$ в регистр X (см. пояснения в контрольном примере).

ИП5	3	×	ИП6	2	×	+	ИП7	+	ИП9
−	5	÷	С/П	ИП5	4	×	ИП6	3	×
+	ИП7	2	×	+	ИП8	+	1	0	÷
С/П	ИП5	ИП6	+	ИП7	+	ИП8	+	ИП9	+
5	÷	С/П	П4	ИП6	П5	ИП7	П6	ИП8	П7
ИП9	П8	ИП4	П9	БП	31	ИП9	4	×	ИП8
3	×	+	ИП7	2	×	+	ИП6	+	1
0	÷	С/П	ИП9	3	×	ИП8	2	×	+
ИП7	+	ИП5	−	5	÷	С/П			

Проведем сглаживание значений y_i, приведенных в табл. 5.11. Введя $y_0 \div y_4$ и нажав клавиши В/0 и трижды С/П (с перерывами на время счета), получим $\tilde{y}_0$, $\tilde{y}_1$, $\tilde{y}_2$. Далее вводим y_5 и получаем $\tilde{y}_3$

н т. д. Аналогично получаем $\tilde{y}_4$, $\tilde{y}_5$, ..., $\tilde{y}_{N-2}$. После ввода y_N нажимаем клавиши БП 56 С/П и получаем $\tilde{y}_{N-1}$, затем еще раз нажимаем клавишу С/П и получаем $\tilde{y}_N$ (числовые данные см. в табл. 5.11).

Для функций $y_i(x_i)$, заметно отличающихся от линейных, используется нелинейное сглаживание с помощью полиномов высоких степеней m. При $m = 3$ необходимое число ординат составляет 7.

Программа 5.101. Нелинейное сглаживание при семи ординатах по формуле

$$\tilde{y}_i = (a_7 y_{i-3} + a_8 y_{i-2} + a_9 y_{i-1} + a_A y_i + a_B y_{i+1} + a_C y_{i+2} + a_Д y_{i+3}),$$

где индексы у коэффициентов a соответствуют номерам регистров, из которых берутся их численные значения. Ввод: $y_0 \div y_6 =$ Р0 ÷ Р6

Таблица 5.12

i	Р7	Р8	Р9	РА	РВ	РС	РД	Пуск программы
0	39	8	−4	−4	1	4	−2	В/0 С/П
1	8	19	16	6	−4	−7	4	В/0 С/П
2	−4	16	19	12	2	−4	1	В/0 С/П
3	−4	6	12	14	12	6	−4	В/0 С/П
4	−4	6	12	14	12	6	−4	С/П
...	...	...	...	...	...	...	...	С/П
$N-2$	1	−4	2	12	19	16	−4	В/0 С/П
$N-1$	4	−7	−4	6	16	19	8	В/0 С/П
N	−2	4	1	−4	−4	8	39	В/0 С/П

Таблица 5.13

i	y_i	$\tilde{y}_i$ (сглаженные)	y точные
0	0,7	0,70142857	0,69314717
1	1,08	1,0807142	1,0986122
2	1,39	1,385	1,3862944
3	1,64	1,6242857	1,6094379
4	1,76	1,7995238	1,7917594
5	1,99	1,9509523	1,9459101
6	2,04	2,0733333	2,0794415
7	2,22	2,1914285	2,1972245
8	2,28	2,3028571	2,3025851
9	2,42	2,412619	2,3978952

и далее в соответствии с табл. 5.12 и указаниями контрольного примера.

ИП0	ИП7	×	ИП1	ИП8	×	+	ИП2	ИП9	×
+	ИП3	ИПА	×	+	ИП4	ИПВ	×	+	ИП5
ИПС	×	+	ИП6	ИПД	×	+	4	2	÷
С/П	ИП1	П0	F,	ИП2	П1	F,	ИП3	П2	F,
ИП4	П3	F,	ИП5	П4	F,	ИП6	П5	F,	П6
БП	00								

Пусть нужно провести нелинейное сглаживание функций $y_i(x_i)$, представленных в табл. 5.13. Вводим $y_0 \div y_6$ в регистры $0 \div 6$ и a_i для $i = 0$ согласно табл. 5.12. Нажав клавиши В/0 и С/П, получим $\tilde{y}_0 = 0{,}70142857$. Далее, не меняя значения $\tilde{y}_0 \div \tilde{y}_6$, вводим значения a_i для $i = 1$, 2 и 3. Получим $\tilde{y}_1$, $\tilde{y}_2$ и $\tilde{y}_3$. После этого, не меняя значений a_i, набираем очередное значение $y_i = y_7, y_8, \ldots, y_N$. Нажимая в конце набора только клавишу С/П, будем получать значения $\tilde{y}_4, \tilde{y}_5, \ldots, \tilde{y}_{N-3}$. Для получения $\tilde{y}_{N-2}$, $\tilde{y}_{N-1}$ и $\tilde{y}_N$ вводим новые a_i и при каждом пуске нажимаем клавиши В/0 и С/П. Данные сглаживания приведены в табл. 5.13.

К процедурам сглаживания относится также регрессивный анализ (приближение функций), описанный в § 5.13. Спектральный анализ (§ 5.11) обеспечивает сглаживание с помощью усеченного тригонометрического ряда Фурье. Ряд других программ сглаживания (в том числе с одной, двумя и тремя произвольными функциями) описан в [29].

Глава 6

ВЫЧИСЛЕНИЕ СПЕЦИАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

6.1. Интегральная показательная и родственные ей функции

Программа 6.1. Вычисление интегральной показательной функции разложением в ряд:

$$Ei(x) = -Vp\int_{-x}^{\infty}\frac{e^{-t}}{t}\,dt = \gamma + \ln x + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n\,n!}. \qquad (6.1)$$

Ввод: постоянная Эйлера $\gamma = 5{,}7721566\cdot 10^{-1}$ = РД, $0 < x$ = РХ.

П9	1	П8	П5	0	П4	П6	КИП4	ИП4	ИП5
×	П5	ИП4	×	ИП9	ИП8	×	П8	XY	÷
ИП6	+	ИП6	XY	П6	—	F $x=0$	07	ИП6	ИПД
+	ИП9	F ln	+	П0	С/П	БП	00		

Для $x = 0{,}5$ получим $Ei(0{,}5) = 0{,}4542199$ при $t_c \approx 1$ мин, для $x = 5$ получим $Ei(5) = 40{,}185274$ при $t_c \approx 2$ мин.

Программа 6.2. Вычисление функции $E_1(x)$ разложением в ряд:

$$E_1(x) = \int_{x}^{\infty}\frac{e^{-t}}{t}\,dt = -\gamma - \ln x - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{n\cdot n!}. \qquad (6.2)$$

Ввод: $\gamma = 5{,}771566\cdot 10^{-1}$ = РД, x = РХ.

П9	1	П8	П5	0	П4	П6	КИП4	ИП4	ИП5
×	П5	ИП4	×	ИП9	/—/	ИП8	×	П8	XY
÷	ИП6	+	ИП6	XY	П6	—	F $x=0$	07	ИП6
/—/	ИПД	—	ИП9	F ln	—	П0	С/П	БП	00

Для $x = 0{,}5$ получим $E_1(x) = 0{,}5597736$ при $t_c \approx 1$ мин, для $x = 5$ получим $E_1(x) = 1{,}1481\cdot 10^{-3}$ при $t_c \approx 2{,}5$ мин.

Программа 6.3. Вычисление функции

$$E_n(x) = \int_{1}^{\infty}\frac{e^{-xt}}{t^n}\,dt$$

для $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$ по рекуррентной формуле

$$E_{n+1}(x) = \frac{1}{n}\left[e^{-x} - xE_n(x)\right], \qquad n = 1, 2, 3, \ldots, \tag{6.3}$$

при $E_0(x) = e^{-x}/x$ и $E_1(x)$, вычисляемом разложением в ряд (6.2). Ввод: $\gamma = 5{,}7721566 \cdot 10^{-1} =$ РД, $x =$ РХ. Вывод: $n \to$ РХ, $E_n(x) \to$ РУ.

П9	/—/	Fe^x	ИП9	÷	П0	0	П4	П6	С/П
1	П8	П5	КИП4	ИП4	ИП5	×	П5	ИП4	×
ИП9	/—/	ИП8	×	П8	XY	÷	ИП6	+	ИП6
XY	П6	—	$Fx = 0$	13	ИП6	/—/	ИПД	—	ИП9
F ln	—	П0	1	П4	С/П	КИП4	ИП9	/—/	Fe^x
ИП0	ИП9	×	—	ИП4	1	—	÷	П0	ИП4
С/П	БП	46							

Для $x = 0{,}5$ будем получать $n = 0$, $E_0(0{,}5) = 1{,}2130612$ (1,2130612), $n = 1$, $E_1(0{,}5) = 0{,}5597736$ (0,559773595), $n = 2$, $E_2(0{,}5) = 0{,}32664384$ (0,3266439), ... $n = 10$, $E_{10}(0{,}5) = 0{,}063458298$ (0,06344583) и т. д.

Программа 6.4. Вычисление $E_n(x)$ по заданному значению $E_m(x)$ при $n > m$. Ввод: $x =$ РХ, $E_m(x) =$ РХ и $m =$ РХ. Вывод: $n \to$ РХ, $E_n(x) \to$ РУ.

П5	С/П	П6	П9	С/П	П4	КИП4	ИП5	/—/	Fe^x
ИП6	ИП5	×	—	ИП4	1	—	÷	П6	ИП4
С/П	БП	06							

Эту программу легко проверить по примеру, приведенному для программы 6.3.

Программа 6.5. Вычисление функции

$$\alpha_n(x) = \int_1^\infty t^n e^{-xt}\,dt, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

по рекуррентной формуле

$$\alpha_n(x) = \left[e^{-x} + n\alpha_{n-1}(x)\right]/x$$

при $\alpha_0(x) = (\exp(-x))/x$. Ввод: $x =$ РХ. Вывод результатов: $n \to$ РХ, $\alpha_n(x) \to$ РУ $=$ Р0.

П9	/—/	Fe^x	П8	ИП9	÷	П0	0	П4	С/П
КИП4	ИП4	ИП0	×	ИП8	+	ИП9	÷	П0	ИП4
С/П	БП	10							

Для $x = 2$ имеем $\alpha_0(2) = 0{,}067667645$, $\alpha_1(2) = 0{,}10150147$, $\alpha_2(2) = 0{,}16916911$, ..., $\alpha_6(2) = 5{,}5994975$ и т. д.

Программа 6.6. Вычисление функции

$$\beta_n(x) = \int_{-1}^{1} t^n e^{-xt}\,dt, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

по рекуррентной формуле

$$\beta_n(x) = \left[(-1)^n e^x - e^{-x} + n\beta_{n-1}(x)\right]/x$$

при $\beta_0(x) = (e^x - e^{-x})/x$. Ввод $x = PX$. Вывод результатов: $n \to PX$, $\beta_n(x) \to PY = P0$.

П9	Fe^x	↑	F1/x	—	ИП9	÷	П0	0	П4
С/П	1	П8	КИП4	ИП4	ИП0	×	ИП9	/—/	Fe^x
—	ИП9	Fe^x	ИП8	/—/	П8	×	+	ИП9	÷
П0	ИП4	С/П	БП	13					

Для $x = 4$ получим $\beta_0(4) = 13{,}644957$, $\beta_1(4) = -10{,}242876$, $\beta_2(4) = 8{,}5235195$, $\beta_3(4) = -7{,}2614757$ и т. д.

Если промежуточные значения $E_n(x)$, $\alpha_n(x)$ или $\beta_n(x)$ не нужны, можно составить программы с остановкой вычислений по заданному значению n. Примером является приведенная ниже программа.

Программа 6.7. Вычисление функции $\alpha_n(x)$ для заданных x и n. Ввод: $x = PX$ и (после высвечивания цифры 0) $n = PX$.

П9	/—/	Fe^x	П8	ИП9	÷	П0	0	С/П	П7
ИП0	П6	0	П4	КИП4	ИП4	ИП6	×	ИП8	+
ИП9	÷	П6	ИП7	ИП4	—	Fx = 0	14	ИП6	БП
08									

Пусть надо вычислить $\alpha_6(2)$. Введя $x = 2$ и $n = 6$, получим $\alpha_6(2) = 5{,}5994975$.

Интегральная функция

$$\mathrm{li}(x) = Vp\int_0^x \frac{dt}{\ln t} = Ei(\ln x), \qquad x > 1,$$

вычисляется по программе 6.1 при вводе вместо x значения $\ln x$.

6.2. Интегральные синус и косинус (включая гиперболические)

Программа 6.8. Вычисление интегрального синуса разложением в ряд:

$$\mathrm{Si}(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t}\,dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)(2n+1)!}. \qquad (6.4)$$

Ввод: $x = PX$ $(x < 10)$.

П6	П7	П8	Fx^2	2	/—/	+	П9	0	П4
КИП4	ИП4	2	×	1	+	Fx^2	П5	ИП4	2
×	1	—	ИП9	×	ИП7	×	ИП4	÷	ИП5
÷	П7	ИП8	+	П8	FBx	—	Fx = 0	10	ИП8
С/П	БП	00							

Контрольные примеры: $\mathrm{Si}(0{,}1) = 0{,}099944467$ ($t_c \approx 30$ с) и $\mathrm{Si}(10) = 1{,}6583514$ ($t_c \approx 4$ мин).

Программа 6.9. Вычисление интегрального синуса при больших $x > 8$ асимптотическим разложением:

$$\mathrm{Si}(x) \simeq \frac{\pi}{2} - \frac{\cos x}{x}\left(1 - \frac{2}{x^2}\left(1 - \frac{12}{x^2}\left(1 - \frac{12}{x^2}\right)\right)\right) - \\ - \frac{\sin x}{x^2}\left(1 - \frac{6}{x^2}\left(1 - \frac{20}{x^2}\left(1 - \frac{20}{x^2}\right)\right)\right).$$

Ввод: $x = \mathrm{PX}$. Переключатель Р — Г в положении Р.

П8	$\mathrm{F}x^2$	F1/x	П9	1	2	×	↑	↑	1
—	×	1	+	4	×	ИП9	×	2	—
ИП8	F cos	×	ИП8	÷	П7	ИП9	2	0	×
↑	↑	1	—	×	1	+	1	2	×
ИП9	×	2	—	ИП8	F sin	×	ИП9	×	ИП7
+	Fπ	+	2	÷	С/П	БП	00		

Для $x = 10$ получаем $\mathrm{Si}(10) = 1{,}6583685$ при $t_c \approx 20$ с.

Программа 6.10. Вычисление интегрального косинуса разложением в ряд:

$$\mathrm{Ci}(x) = \gamma + \ln x + \int_0^x \frac{\cos t - 1}{t}\,dt = \gamma + \ln x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2n\,(2n)!}. \quad (6.5)$$

Ввод: $\gamma = 5{,}7721566 \cdot 10^{-1} = \mathrm{РД}$, $x = \mathrm{PX}$.

П9	$\mathrm{F}x^2$	П8	0	П4	П5	1	П3	П7	КИП4
ИП4	2	×	П6	1	—	ИП6	×	ИП7	/—/
×	П7	ИП6	×	ИП3	ИП8	×	П3	XY	÷
ИП5	+	ИП5	XY	П5	—	$\mathrm{F}x = 0$	09	ИП5	ИП9
Fln	+	ИПД	+	С/П	БП	00			

Для $x = 1$ имеем $\mathrm{Ci}(1) = 0{,}33740392$ ($t_c \approx 1$ мин).

Интегральные гиперболические синус и косинус можно разложить в ряды:

$$\mathrm{Shi}(x) = \int_0^x \frac{\mathrm{sh}\,t}{t}\,dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)\,(2n+1)!},$$

$$\mathrm{Chi}(x) = \gamma + \ln x + \int_0^x \frac{\mathrm{ch}\,t - 1}{t}\,dt = \gamma + \ln x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!\,2n}.$$

Они вычисляются по программам 6.8 и 6.10, если оператор /—/ по адресам 05 и 19 заменить оператором КНОП (нет операции).

Функции этого параграфа могут вычисляться и по программам численного интегрирования. Однако при этом время вычислений больше.

6.3. Гамма-функции (включая неполные)

Вычисление гамма-функций

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1}\, dt$$

ввиду сложности разложения в ряд целесообразно выполнять по аппроксимациям [3].

Программа 6.11. Вычисление $\Gamma(x)$ при $x \geqslant 1$ по формуле Стирлинга с коррекцией последнего члена [3, 6]:

$$\Gamma(x) = \sqrt{\frac{2\pi}{x}}\, e^{-x} x^x \mathrm{H}(x),$$

где

$$\mathrm{H}(x) = 1 + \frac{1}{12x} + \frac{1}{288x^2} - \frac{0{,}7}{288x^3},$$

с преобразованием

$$\Gamma(x) = \Gamma(x+1)/x \text{ при } x < 1,$$
$$\Gamma(-x) = -\pi/[x\Gamma(x)\sin \pi x] \quad \text{при} \quad x < 0.$$

Ввод: $x =$ РХ. Переключатель Р — Г в положении Р.

П9	F $x<0$	21	/—/	П9	ПД	25	Fπ	ИП9	×
F sin	×	ИП9	×	F 1/x	Fπ	/—/	×	С/П	БП
00	ПП	25	БП	18	↑	↑	1	+	×
П8	ИП9	2	+	↑	П7	1	Fe^x	÷	Fx^y
ИП8	÷	П8	Fπ	2	×	ИП7	÷	F $\sqrt{\ }$	ИП8
×	П8	0	,	7	ИП7	÷	1	XY	—
2	4	÷	ИП7	÷	1	+	1	2	÷
ИП7	÷	1	+	ИП8	×	В/0			

Контрольные примеры. $\Gamma(0{,}5) = 1{,}7724781$ ($t_c \approx 22$ с), точное значение $\sqrt{\pi} = 1{,}7724538$, $\Gamma(1{,}2) = 0{,}91817537$, $\Gamma(4{,}7) = 15{,}431423$, $\Gamma(-3{,}2) = 0{,}68905558$ ($t_c \approx 25$ с).

Программа 6.12. Вычисление $\Gamma(x+1)$ при $x < 1$ с погрешностью не более $2 \cdot 10^{-7}$ аппроксимацией

$$\Gamma(x+1) = (((((((b_8 x + b_7)\, x + b_6)\, x + b_5)\, x + b_4)\, x + b_3)\, x + b_2)\, x + b_1)\, x \cdot 10^{-8} + 1.$$

Ввод: $b_1 = -57719165 = P1$, $b_2 = 98820589 = P2$, $b_3 = -89705694 = P3$, $b_4 = 91820688 = P4$, $b_5 = -75670408 = P5$, $b_6 = 48219934 = P6$, $b_7 = -19352782 = P7$, $b_8 = 3586835 = P8$ и $x = PX$.

ПД	8	П0	ИП8	↑	XY	ИПД	×	КИП0	+
ИП0	$Fx=0$	05	XY	1	ВП	8	÷	1	+
С/П	БП	00							

При $x = 0{,}2$ $\Gamma(1{,}2) = 0{,}9181689$ (точное значение 0,91816874), при $x = 0{,}8$ $\Gamma(1{,}8) = 0{,}9313837$ (точное значение 0,931383771); $t_c \approx 22$ с.

Неполные гамма-функции представлены соотношениями [3]:

$$P(a, x) = \frac{1}{\Gamma(a)} \int_0^x e^{-t} t^{a-1}\, dt,$$

$$\gamma(a, x) = P(a, x)\,\Gamma(a) = \int_0^x e^{-t} t^{a-1}\, dt,$$

$$\Gamma(a, x) = \Gamma(a) - \gamma(a, x) = \int_x^\infty e^{-t} t^{a-1}\, dt.$$

Все эти функции могут быть определены через функцию

$$\gamma^*(a, x) = x^{-a} P(a, x) = \frac{x^{-a}}{\Gamma(a)}\,\gamma(a, x) = \frac{x^{-a}}{\Gamma(a)} \int_0^x e^{-t} t^{a-1}\, dt.$$

Программа 6.13. Вычисление функции $\gamma^*(a, x)$ разложением в ряд

$$\Gamma(a)\,\gamma^*(a, x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x^n)}{(a+n)\,n!}, \qquad a \neq 0, -1, -2, \ldots$$

Ввод: $a = PX$ и $x = PX$.

П8	С/П	П9	1	П3	П5	0	П6	П4	КИП4
ИП4	ИП5	×	П5	ИП8	ИП4	+	×	П7	ИП9
/—/	ИП3	×	П3	XY	÷	ИП6	+	ИП6	XY
П6	—	$Fx=0$	09	ИП8	$F1/x$	ИП6	+	П0	С/П

Пример. Найти $\gamma^*(1; 4)$ и $\gamma^*(-0{,}5; -3)$. Вводим $a = 1$ и $x = 4$, получаем $\Gamma(1)\gamma^*(1; 4) = 0{,}2454211$ при $t_c \approx 2{,}5$ мин. Но $\Gamma(1) = \Gamma(1+0) = 0! = 1$, следовательно, $\gamma^*(1; 4) = 0{,}2454211$. Для второго случая, введя $a = -0{,}5$ и $x = -3$, получим

$\Gamma(-0{,}5)\gamma^*(-0{,}5;\ -3) = 10{,}495471$. По описанным выше программам или таблицам [3] находим $\Gamma(-0{,}5)$. В данном случае $\Gamma(-0{,}5) = -2\sqrt{\pi}$. Следовательно, $\gamma^*(-0{,}5;\ -3) = 10{,}495471/(-2\sqrt{\pi}) = -2{,}9607177$.

6.4. Функции Бесселя (включая модифицированные)

Функции Бесселя являются решениями дифференциального уравнения [1, 2]

$$z^2 \frac{d^2w}{dz^2} + z\frac{dw}{dz} + (z^2 - \nu^2)\, w = 0. \qquad (6.6)$$

при $z = (x + jy)$. Ограничимся вычислением функций Бесселя для действительных $z = x$ и целых $\nu = n$ (порядок функций). Двум независимым решениям (6.6) соответствуют функции Бесселя первого $J_n(x)$ и второго $Y_n(x)$ рода.

Программа 6.14. Вычисление $J_n(x)$ разложением в ряд

$$J_n(x) = \frac{1}{n!}\left(\frac{x}{2}\right)^n \left[1 - \frac{(x/2)^2}{1!\,(n+1)} + \frac{(x/2)^4}{2!\,(n+1)(n+2)} - \ldots\right]. \qquad (6.7)$$

Ввод: $n =$ P5, $x =$ PX.

П9	0	П4	1	П6	ИП5	F$x \neq 0$	17	П8	ИП6
×	П6	ИП8	1	—	F$x = 0$	08	ИП9	2	÷
П0	Fx^2	П9	ИП5	ИП0	Fx^y	ИП6	÷	П7	П8
КИП4	ИП4	ИП5	+	ИП4	×	ИП9	÷	ИП7	/—/
XY	÷	П7	ИП8	+	П8	FBx	—	F$x = 0$	30
ИП8	С/П	БП	00						

Имеем $J_0(0{,}5) = 0{,}93846981$ ($t_c \approx 40$ с); $J_0(4) = -0{,}39714976$; $J_{30}(20) = 1{,}2401602 \cdot 10^{-4}$ ($t_c \approx 3$ мин).

Ряд для $Y_n(x)$ весьма сложен [3]. Кроме того, вычисления $J_n(x)$ и $Y_n(x)$ разложением в ряд занимают много времени. Поэтому целесообразно вычисление $J_0(x)$, $J_1(x)$, $Y_0(x)$ и $Y_1(x)$ аппроксимацией с последующим вычислением $J_n(x)$ и $Y_n(x)$ по рекуррентным формулам.

Программа 6.15. Вычисление $J_0(x)$ и $Y_0(x)$ аппроксимацией

$$J_0(x) = 1 - a_1(x/3)^2 + a_2(x/3)^4 - a_3(x/3)^6 + a_4(x/3)^8 - a_5(x/3)^{10} + a_6(x/3)^{12}$$

для $-3 \leqslant x \leqslant 3$ с погрешностью до $5 \cdot 10^{-8}$ и

$$Y_0(x) = \frac{2}{\pi}\ln\frac{x}{2}\, J_0(x) + b_0 + b_1(x/3)^2 - b_2(x/3)^4 + b_3(x/3)^6 - b_4(x/3)^8 + b_5(x/3)^{10} - b_6(x/3)^{12}$$

для $0 \leqslant x \leqslant 3$ с погрешностью до $1{,}4 \cdot 10^{-8}$. Ввод: $a_1 = 2{,}2499997 =$ P1, $a_2 = 1{,}2656208 =$ P2, $a_3 = 0{,}3163866 =$ P3, $a_4 = 0{,}0444479 =$ P4, $a_5 = 0{,}0039444 =$ P5, $a_6 = 0{,}00021 =$ P6, $b_0 = 3{,}6746691 \cdot 10^{-1} =$

$= P7$, $b_1 = 6{,}0559366 \cdot 10^{-1} = P8$, $b_2 = 7{,}4350384 \cdot 10^{-1} = P9$, $b_3 = 2{,}5300117 \cdot 10^{-1} = P0$, $b_4 = 0{,}4261214 \cdot 10^{-1} = PA$, $b_5 = 0{,}0427916 \cdot 10^{-1} = PB$, $b_6 = 0{,}0024846 \cdot 10^{-1} = PC$ и $x = PX$.

↑	3	÷	Fx^2	ПД	1	ИПД	ИП6	×	ИП5
−	ИПД	×	ИП4	+	ИПД	×	ИП3	−	ИПД
×	ИП2	+	ИПД	×	ИП1	−	ИПД	×	+
С/П	2	×	Fπ	÷	ИПД	F$\sqrt{}$	3	×	2
÷	Fln	×	ИП7	+	ИПВ	ИПС	ИПД	×	−
ИПД	×	ИПА	−	ИПД	×	ИП0	+	ИПД	×
ИП9	−	ИПД	×	ИП8	+	ИПД	×	+	С/П
БП	00								

Контрольные примеры (в скобках даны точные значения результатов). $J_0(0{,}5) = 0{,}9384698$ (0,9384698072); $Y_0(0{,}5) = -0{,}44451888$ (−0,4445187335); $J_0(1) = 0{,}7651977$ (0,7651976865); $Y_0(1) = 0{,}088256943$ (0,0882569642); $J_0(2) = 0{,}2238908$ (0,2238907791); $Y_0(2) = 0{,}51037568$ (0,5103756726).

Программа 6.16. Вычисление функций $J_1(x)$ и $Y_1(x)$ аппроксимацией:

$$x^{-1}J_1(x) = \frac{1}{2} - a_1\left(\frac{x}{3}\right)^2 + a_2\left(\frac{x}{3}\right)^4 - a_3\left(\frac{x}{3}\right)^6 + a_4\left(\frac{x}{3}\right)^8 - a_5\left(\frac{x}{3}\right)^{10} + a_6\left(\frac{x}{3}\right)^{12}$$

для $-3 \leqslant x \leqslant 3$ с погрешностью менее $1{,}3 \cdot 10^{-8}$ и

$$xY_1(x) = \left(\frac{2}{\pi}\right) x \ln\left(\frac{x}{2}\right) J_1(x) - b_0 + b_1\left(\frac{x}{3}\right)^2 + b_2\left(\frac{x}{3}\right)^4 - b_3\left(\frac{x}{3}\right)^6 + b_4\left(\frac{x}{3}\right)^8 - b_5\left(\frac{x}{3}\right)^{10} + b_6\left(\frac{x}{3}\right)^{12}$$

для $0 \leqslant x \leqslant 3$ с погрешностью менее $1{,}1 \cdot 10^{-7}$. Ввод: $a_1 = 5{,}6249985 \cdot 10^{-1} = P1$, $a_2 = 2{,}1093573 \cdot 10^{-1} = P2$, $a_3 = 0{,}3954289 \cdot 10^{-1} = P3$, $a_4 = 0{,}0443319 \cdot 10^{-1} = P4$, $a_5 = 0{,}0031761 \cdot 10^{-1} = P5$, $a_6 = 0{,}0001109 \cdot 10^{-1} = P6$, $b_0 = 0{,}6366198 = P7$, $b_1 = 0{,}2212091 = P8$, $b_2 = 2{,}1682709 = P9$, $b_3 = 1{,}3164827 = P0$, $b_4 = 0{,}3123951 = PA$, $b_5 = 0{,}0400976 = PB$, $b_6 = 0{,}0027873 = PC$ и $x = PX$.

↑	↑	↑	3	÷	Fx^2	ПД	ИП6	×	ИП5
−	ИПД	×	ИП4	+	ИПД	×	ИП3	−	ИПД
×	ИП2	+	ИПД	×	ИП1	−	ИПД	×	2
F1/x	+	×	С/П	XY	×	FBx	2	÷	Fln
×	2	×	Fπ	÷	ИПС	ИПД	×	ИПВ	−
ИПД	×	ИПА	+	ИПД	×	ИП0	−	ИПД	×
ИП9	+	ИПД	×	ИП8	+	ИПД	×	+	ИП7
−	ИПД	F$\sqrt{}$	3	×	÷	С/П	БП	00	

Для $x = 0{,}5$ и 3 получим (в скобках даны точные значения): $J_1(0{,}5) = 0{,}24226846$ $(0{,}2422684577)$, $Y_1(0{,}5) = -1{,}4714725$ $(-1{,}4714723927)$, $J_1(3) = 0{,}33905898$ $(0{,}3390589585)$, $Y_1(3) = 0{,}3246744$ $(0{,}324674448)$.

Программа 6.17. Вычисление функций Бесселя $J_n(x)$ и $Y_n(x)$ по рекуррентному соотношению

$$B_{n+1}(x) = \frac{2n}{x} B_n(x) - B_{n-1}(x),$$

где B означает J, Y или любую линейную комбинацию этих функций, коэффициенты которых не зависят от x и n. Ввод: x, $B_{n-1}(x)$ и $B_n(x)$ в регистр X. Вывод: $n \to$ PX, $B_n(x) \to$ PY.

П7	С/П	П8	С/П	П9	0	П4	КИП4	ИП4	2
×	ИП9	×	ИП7	÷	ИП8	−	ИП9	П8	XY
П9	ИП4	1	+	С/П	БП	07			

Введя $x = 1$, $Y_0(1) = 8{,}8256943 \cdot 10^{-2}$ и $Y_1(1) = -7{,}8121282 \cdot 10^{-1}$, нажимая клавиши С/П и XY, будем получать следующие результаты (в скобках даны точные значения):

$n = 2$ $Y_2(1) = -1{,}6506825$ $(-1{,}65068261)$

$n = 3$ $Y_3(1) = -5{,}8215172$ $(-5{,}8215)$

$n = 4$ $Y_4(1) = -33{,}27842$ $(-33{,}278)$ и т д.

При $x \geqslant 3$ функции $J_0(x)$ и $Y_0(x)$ могут вычисляться с помощью аппроксимаций:

$$J_0(x) = x^{-1/2} f_0 \cos\theta_0 \quad \text{и} \quad Y_0(x) = x^{-1/2} f_0 \sin\theta_0,$$

где

$$f_0 = \left[a_0 + a_1\left(\frac{3}{x}\right) + a_2\left(\frac{3}{x}\right)^2 + a_3\left(\frac{3}{x}\right)^3 + a_4\left(\frac{3}{x}\right)^4 + a_5\left(\frac{3}{x}\right)^5 + a_6\left(\frac{3}{x}\right)^6\right] \Big/ 10^8$$

вычисляется с погрешностью менее $1{,}6 \cdot 10^{-8}$ и

$$\theta_0 = x - \left[b_0 + b_1\left(\frac{3}{x}\right) + b_2\left(\frac{3}{x}\right)^2 + b_3\left(\frac{3}{x}\right)^3 + b_4\left(\frac{3}{x}\right)^4 + b_5\left(\frac{3}{x}\right)^5 + b_6\left(\frac{3}{x}\right)^6\right] \Big/ 10^8$$

вычисляется с погрешностью менее $7 \cdot 10^{-8}$. Значения коэффициентов $a_0 \div a_6$ и $b_0 \div b_6$ указаны в табл. 6.1.

Функции $J_1(x)$ и $Y_1(x)$ при $x > 3$ находятся по аппроксимациям

$$J_1(x) = x^{-1/2} f_1 \cos\theta_1 \quad \text{и} \quad Y_1(x) = x^{-1/2} f_1 \sin\theta_1,$$

Таблица 6.1

n	Функция Бесселя			
	$J_0(x)$, $Y_0(x)$		$J_1(x)$, $Y_1(x)$	
	a_n	b_n	a_n	b_n
0	79788456	−78539816	79788456	$-2{,}3561945\cdot10^{5}$
1	−77	−4166397	156	12499612
2	−552740	−3954	1659667	5650
3	−9512	262573	17105	−637879
4	137237	−54125	−249511	74348
5	−72805	−29333	113653	79824
6	14476	13558	−20033	−29166

где

$$f_1=\left[a_0+a_1\left(\frac{3}{x}\right)+a_2\left(\frac{3}{x}\right)^2+a_3\left(\frac{3}{x}\right)^3+a_4\left(\frac{3}{x}\right)^4+\right.$$
$$\left.+a_5\left(\frac{3}{x}\right)^5+a_6\left(\frac{3}{x}\right)^6\right]\Big/10^8$$

вычисляется с погрешностью менее $4\cdot10^{-8}$ и

$$\theta_1=x-\left[b_0+b_1\left(\frac{3}{x}\right)+b_2\left(\frac{3}{x}\right)^2+b_3\left(\frac{3}{x}\right)^3+b_4\left(\frac{3}{x}\right)^4+\right.$$
$$\left.+b_5\left(\frac{3}{x}\right)^5+b_6\left(\frac{3}{x}\right)^6\right]\Big/10^8$$

вычисляется с погрешностью менее $9\cdot10^{-8}$. Значения коэффициентов $a_0\div a_6$ и $b_0\div b_6$ даны в табл. 6.1.

Программа 6.18. Вычисление функций Бесселя $J_0(x)$, $Y_0(x)$, $J_1(x)$ и $Y_1(x)$ аппроксимациями (6.8)÷(6.11) для $x\geqslant3$. Ввод: см. в инструкции к программе (после ее текста). Переключатель Р — Г в положении Р.

F1/x	3	×	ПД	ИП6	×	ИП5	+	ИПД	×
ИП4	+	ИПД	×	ИП3	+	ИПД	×	ИП2	+
ИПД	×	ИП1	+	ИПД	×	7	9	7	8
8	4	5	6	+	1	ВП	8	÷	ИПД
3	÷	F1/x	F √	÷	ИПС	ИПД	×	ИПВ	+
ИПД	×	ИПА	+	ИПД	×	ИП0	+	ИПД	×
ИП9	+	ИПД	×	ИП8	+	ИПД	×	ИП7	+
1	ВП	8	÷	ИПД	3	÷	F1/x	+	ПД
F cos	XY	×	С/П	XY	ИПД	F sin	×	С/П	БП
00									

Для вычисления функций $Y_0(x)$ и $J_0(x)$ вводятся коэффициенты $a_1\div a_6=$ P1 ÷ P6 (значение a_0 занесено в текст программы),

$b_0 \div b_2 =$ P7 $\div$ P9, $b_3 =$ P0, $b_4 \div b_6 =$ PA $\div$ PC (см. табл. 6.1). Затем вводится значение $x =$ PX, нажимаются клавиши В/0 и С/П (получим $J_0(x)$) и С/П (получим $Y_0(x)$). При смене $x =$ PX нажимается дважды только клавиша С/П. Для вычисления $J_1(x)$ и $Y_1(x)$ все операции повторяются заново с вводом значений коэффициентов аппроксимаций для этих функций.

Контрольные примеры (в скобках даны точные значения функций Бесселя). $J_0(4) = -0{,}3971498$ ($-0{,}3971498098$), $Y_0(4) = -0{,}01694076$ ($-0{,}01969407393$), $J_0(10) = -0{,}24593577$ ($-0{,}245937644$), $Y_0(10) = 0{,}055671124$ ($0{,}0556711673$), $J_1(4) = -0{,}066043332$ ($-0{,}0660433280$), $Y_1(4) = 0{,}3979257$ ($0{,}3979257106$), $J_1(10) = 0{,}043472698$ ($0{,}043727462$), $Y_1(10) = 0{,}24901544$ ($0{,}2490154242$).

Решениями дифференциального уравнения

$$z^2 \frac{d^2w}{dz^2} + z \frac{dw}{dz} - (z^2 + \nu^2)\, w = 0$$

являются модифицированные функции Бесселя $J_\nu(z)$ и $K_\nu(z)$. Как и прежде ограничимся вычислением этих функций для действительных $z = x$ и целых $\nu = n$.

Функции $I_n(x)$ имеют разложение в ряд

$$I_n(x) = \frac{1}{n!}\left(\frac{x}{2}\right)^n \left[1 + \frac{(x/2)^2}{1!\,(n+1)} + \frac{(x/2)^4}{2!\,(n+1)\,(n+2)} + \ldots\right] \quad (6.12)$$

и могут вычисляться по программе 6.14, если в ней оператор смены знака /—/ по адресу 39 заменить оператором КНОП (нет операции). Тогда получим $I_0(2) = 2{,}2795892$, $I_1(2) = 1{,}5906368$, $I_0(10) = 2815{,}7168$.

Программа 6.19. Вычисление модифицированных функций Бесселя $I_0(x)$ и $I_1(x)$ при $-3{,}75 < x < 3{,}75$ аппроксимацией:

$$I_0(x) = 1 + a_1t^2 + a_2t^4 + a_3t^6 + a_4t^8 + a_5t^{10} + a_6t^{12}$$

с погрешностью не более $1{,}6 \cdot 10^{-7}$ и

$$x^{-1}I_1(x) = 0{,}5 + b_1t^2 + b_2t^4 + b_3t^6 + b_4t^8 + b_5t^{10} + b_6t^{12}$$

с погрешностью не более $8 \cdot 10^{-9}$, причем $t = x/3{,}75$, а также функции $I_n(x)$ по рекуррентному соотношению

$$I_{n+1}(x) = -2nI_n(x)/x + I_{n-1}(x), \qquad n \geqslant 2.$$

Ввод: $a_1 = 3{,}5156229 =$ P1, $a_2 = 3{,}0899424 =$ P2, $a_3 = 1{,}2067492 =$ P3, $a_4 = 0{,}2659732 =$ P4, $a_5 = 0{,}0360768 =$ P5, $a_6 = 0{,}0045813$ (вписан в программу), $b_1 = 0{,}87890594 =$ P7, $b_2 = 0{,}51498869 =$ P8, $b_3 = 0{,}15084934 =$ P9, $b_4 = 0{,}02658733 =$ P0, $b_5 = 0{,}00301532 =$ PA, $b_6 = 0{,}00032411 =$ PB и $x =$ PX. Вывод: $n \to$ PX $=$ P6, $I_n(x) \to$ PY.

ПС	3	,	7	5	÷	Fx^2	ПД	0	П6
ИПД	4	5	8	1	3	ВП	7	/—/	×
ИП5	+	ИПД	×	ИП4	+	ИПД	×	ИП3	+
ИПД	×	ИП2	+	ИПД	×	ИП1	+	ИПД	×
1	+	ИПД	ИПВ	×	ИПА	+	ИПД	×	ИП0
+	ИПД	×	ИП9	+	ИПД	×	ИП8	+	ИПД
×	ИП7	+	ИПД	×	2	F1/x	+	ИПС	×
XY	ПД	0	С/П	F,	F,	КИП6	F,	ИП6	С/П
XY	2	/—/	×	ИПС	+	XY	×	FBx	XY
ИПД	+	XY	ПД	XY	БП	76			

Для $x = 2$, нажимая клавиши С/П и XY, будем получать: $n = 0$, $I_0(2) = 2{,}2795853$, $n = 1$, $I_1(2) = 1{,}5906369$, $n = 2$, $I_2(2) = 0{,}6889484$ и т. д.

Программа 6.20. Вычисление $I_0(x)$ или $I_1(x)$ по аппроксимациям ($x > 3{,}75$)

$$x^{1/2}e^{-x}I_{0,1}(x) = a_0 + \frac{a_1}{t} + \frac{a_2}{t^2} + \frac{a_3}{t^3} + \frac{a_4}{t^4} + \frac{a_5}{t^5} + \frac{a_6}{t^6} + \frac{a_7}{t^7} + \frac{a_8}{t^8},$$

где $t = x/3{,}75$, с погрешностью не более $1{,}6 \cdot 10^{-7}$ для функции $I_0(x)$ и $2{,}2 \cdot 10^{-7}$ для $I_1(x)$. Ввод для вычисления $I_0(x)$: $a_0 = 0{,}39894228 =$ $=$ РА, $a_1 = 0{,}01328592 =$ Р1, $a_2 = 0{,}00225319 =$ Р2, $a_3 =$ $= -0{,}00157565 =$ Р3, $a_4 = 0{,}00916281 =$ Р4, $a_5 = -0{,}02057706 =$ Р5; $a_6 = 0{,}02635537 =$ Р6, $a_7 = -0{,}01647633 =$ Р7, $a_8 = 0{,}00392377 =$ $=$ Р8, $x =$ РХ. Ввод для вычисления $I_1(x)$ в регистры, указанные выше: $a_0 = 0{,}39894228$, $a_1 = -0{,}03988024$, $a_2 = -0{,}00362018$, $a_3 =$ $= 0{,}00163801$, $a_4 = -0{,}01031555$, $a_5 = 0{,}02282967$, $a_6 = -0{,}02895312$, $a_7 = 0{,}01787654$, $a_8 = -0{,}00420059$ и $x =$ РХ.

ПД	3	,	7	5	÷	ПС	8	П0	ИП8
↑	XY	ИПС	÷	КИП0	+	ИП0	Fx=0	11	XY
ИПА	+	ИПД	F √	÷	ИПД	Fe^x	×	С/П	БП
00									

Для $x = 10$ получим $I_0(10) = 2815{,}7168$ (точное значение 2815,7166), $I_1(10) = 2670{,}9884$ (точное значение 2670,9884).

Программа 6.21. Вычисление модифицированных функций Бесселя $K_0(x)$ при $0 \leqslant x \leqslant 2$ по аппроксимации

$$K_0(x) = -\ln\left(\frac{x}{2}\right) I_0(x) - a_0 + a_1\left(\frac{x}{2}\right)^2 + a_2\left(\frac{x}{2}\right)^4 +$$
$$+ a_3\left(\frac{x}{2}\right)^6 + a_4\left(\frac{x}{2}\right)^8 + a_5\left(\frac{x}{2}\right)^{10} + a_6\left(\frac{x}{2}\right)^{12},$$

с погрешностью не более $8 \cdot 10^{-9}$. Ввод: $a_0 = 0{,}57721566 =$ РА, $I_0(x) =$ РВ, $a_1 = 0{,}42278420 =$ Р1, $a_2 = 0{,}23069756 =$ Р2, $a_3 =$

$= 0{,}03488590 =$ P3, $a_4 = 0{,}00262698 =$ P4, $a_5 = 0{,}00010750 =$ F5, $a_6 = 0{,}00000740 =$ P6, $x =$ PX.

ПД	2	÷	Fx^2	ПС	6	П0	ИП6	↑	XY
ИПС	×	КИП0	+	ИП0	$Fx=0$	09	XY	ИПА	—
ИПД	2	÷	Fln	ИПВ	×	—	С/П	БП	00

Для $x = 0{,}5$, учитывая, что $I_0(0{,}5) = 1{,}0634834$, получим $K_0(0{,}5) = 0{,}9244191$.

Программа 6.22. Вычисление модифицированных функций Бесселя $K_1(x)$ при $0 < x \leqslant 2$ по аппроксимации

$$xK_1(x) = x \ln(x/2)\, I_1(x) + 1 + a_1(x/2)^2 + a_2(x/2)^4 + a_3(x/2)^6 + \\ + a_4(x/2)^6 + a_5(x/2)^{10} + a_6(x/2)^{12}$$

с погрешностью не более $8 \cdot 10^{-9}$. Ввод: $a_1 = 0{,}15443144 =$ P1, $a_2 = -0{,}67278579 =$ P2, $a_3 = -0{,}18156897 =$ P3, $a_4 = -0{,}01919402 =$ P4, $a_5 = -0{,}00110404 =$ P5, $a_6 = -0{,}00004686 =$ P6, $I_1(x) =$ PB и $x =$ PX.

ПД	2	÷	Fx^2	ПС	6	П0	ИП6	↑	XY
ИПС	×	КИП0	+	ИП0	$Fx=0$	09	XY	1	+
ИПД	÷	ИПД	2	÷	Fln	ИПВ	×	+	С/П
БП	00								

Для $x = 0{,}5$ и $I_1(0{,}5) = 0{,}2578949$ получаем $K_1(0{,}5) = 1{,}6564404$ при точном значении 1,656441.

Программа 6.23. Вычисление модифицированных функций Бесселя $K_0(x)$ и $K_1(x)$ для $x \geqslant 2$ по аппроксимации

$$e^x x^{1/2} K_{0,1}(x) = a_0 + a_1(2/x) + a_2(2/x)^2 + a_3(2/x)^3 + \\ + a_4(2/x)^4 + a_5(2/x)^5 + a_6(2/x)^6$$

с погрешностью не более $8 \cdot 10^{-9}$ для $K_0(x)$ и $2{,}2 \cdot 10^{-7}$ для $K_1(x)$. Ввод для вычисления $K_0(x)$: $a_0 = 1{,}2533141 =$ PA, $a_1 = -0{,}07832358 =$ P1, $a_2 = 0{,}02189568 =$ P2, $a_3 = -0{,}01062446 =$ P3, $a_4 = 0{,}00587872 =$ P4, $a_5 = -0{,}00251540 =$ P5, $a_6 = 0{,}00053208 =$ P6 и $x =$ PX. Ввод для вычисления $K_1(x)$ в указанные выше регистры: $a_0 = 1{,}2533141$; $a_1 = 0{,}23498619$; $a_2 = -0{,}03655620$, $a_3 = 0{,}01504268$; $a_4 = -0{,}00780353$; $a_5 = 0{,}00325614$; $a_6 = -0{,}00068245$ и $x =$ PX.

ПД	2	XY	÷	ПС	6	П0	ИП6	↑	XY
ИПС	×	КИП0	+	ИП0	$Fx=0$	09	XY	ИПА	+
ИПД	Fe^x	÷	ИПД	$F\sqrt{}$	+	С/П	БП	00	

Для $x = 5$ и 10: $K_0(10) = 1{,}7780061 \cdot 10^{-5}$, $K_0(5) = 3{,}6910982 \cdot 10^{-8}$, $K_1(10) = 1{,}8348772 \cdot 10^{-5}$ и $K_1(5) = 4{,}0446133 \cdot 10^{-8}$.

6.5. Интегралы Френеля

Программа 6.24. Вычисление интеграла Френеля $C(x)$ разложением в ряд при $x < 3$ ($x = РХ$):

$$C(x) = \int_0^x \cos(\pi t^2/2)\, dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (\pi/2)^{2n}}{(2n)!\,(4n+1)} x^{4n+1}.$$

П9	П8	Fx^2	Fπ	×	Fx^2	4	÷	П7	0
П4	КИП4	ИП4	2	×	П3	1	—	ИП3	×
П3	ИП4	4	×	3	—	П0	4	+	ИП0
XY	÷	ИП3	÷	ИП7	×	ИП8	/—/	×	П8
ИП9	+	П9	FBx	—	Fx=0	11	ИП9	С/П	БП
00									

Примеры. $C(0{,}5) = 0{,}49234422$; $C(1) = 0{,}77989341$ и $C(2) = 0{,}48825334$ (время вычисления от 50 до 160 с).

Программа 6.25. Вычисление интеграла Френеля $S(x)$ по разложению в ряд при $x < 3$ ($x = РХ$):

$$S(x) = \int_0^x \sin(\pi t^2/2)\, dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (\pi/2)^{2n+1}}{(2n+1)!\,(4n+3)} x^{4n+3}.$$

П8	Fx^2	Fπ	×	2	÷	П9	Fx^2	П5	ИП9
ИП8	×	3	÷	П7	П8	0	П4	КИП4	ИП4
2	×	П6	1	+	ИП6	×	П6	ИП4	4
×	1	—	П9	4	+	ИП9	XY	÷	ИП6
÷	ИП5	×	ИП7	/—/	×	П7	ИП8	+	П8
FBx	—	Fx=0	18	ИП8	С/П	БП	00		

Примеры. $S(0{,}5) = 0{,}064732433$, $S(1) = 0{,}43825912$ и $S(2) = 0{,}34341539$ (время вычисления от 50 до 165 с).

С интегралами Френеля связаны вспомогательные функции

$$f(x) = \left[\frac{1}{2} - S(x)\right] \cos\left(\frac{\pi x^2}{2}\right) - \left[\frac{1}{2} - C(x)\right] \sin\left(\frac{\pi x^2}{2}\right),$$

$$g(x) = \left[\frac{1}{2} - C(x)\right] \cos\left(\frac{\pi x^2}{2}\right) + \left[\frac{1}{2} - S(x)\right] \sin\left(\frac{\pi x^2}{2}\right).$$

Программа 6.26. Вычисление $f(x)$ и $g(x)$ по аппроксимациям

$$f(x) = \frac{1 + a_0 x}{2 + a_1 x + a_2 x^2} \quad \text{и} \quad g(x) = \frac{1}{2 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3}$$

с погрешностью менее $2 \cdot 10^{-3}$ ($0 \leqslant x \leqslant \infty$), а также

$$S(x) = \frac{1}{2} - f(x) \cos\left(\frac{\pi x^2}{2}\right) - g(x) \sin\left(\frac{\pi x^2}{2}\right),$$

$$C(x) = \frac{1}{2} + f(x) \sin\left(\frac{\pi x^2}{2}\right) - g(x) \cos\left(\frac{\pi x^2}{2}\right).$$

Ввод: $a_0 = 0{,}926 =$ P1, $a_1 = 1{,}792 =$ P2, $a_2 = 3{,}104 =$ P3, $b_1 = 4{,}142 =$ P4, $b_2 = 3{,}492 =$ P5, $b_3 = 6{,}67 =$ P6 и $x =$ PX. Вывод результатов: $f(x) \to$ PA, $g(x) \to$ PB, $C(x) \to$ PC и $S(x) \to$ PX $=$ PД. Переключатель Р — Г в положении Р.

П9	ИП1	×	1	+	ИП9	ИП3	×	ИП2	+
ИП9	×	2	+	÷	ПА	ИП9	ИП6	×	ИП5
+	ИП9	×	ИП4	+	ИП9	×	2	+	F1/x
ПВ	ИП9	Fx^2	Fπ	×	2	÷	П8	F sin	ПД
ИПА	×	ИП8	F cos	П8	ИПВ	×	—	2	F1/x
+	ПС	FBx	ИПА	ИП8	×	—	ИПВ	ИПД	×
—	ПД	С/П	БП	00					

Имеем $S(0{,}5) = 0{,}06567349$ и $C(0{,}5) = 0{,}49256592$ ($t_c = 23$ с).

Программа 6.27. Вычисление $C(x)$ и $S(x)$ при больших $x \gg 1$ по асимптотическим разложениям:

$$C(x) = \frac{1}{2} + \frac{\sin(\pi x^2/2)}{\pi x}\left(1 - \frac{3}{(\pi x^2)^2}\right) - \frac{\cos(\pi x^2/2)}{\pi^2 x^3}\left(1 - \frac{5}{(\pi x^2)^2}\right),$$

$$S(x) = \frac{1}{2} - \frac{\cos(\pi x^2/2)}{\pi x}\left(1 - \frac{3}{(\pi x^2)^2}\right) - \frac{\sin(\pi x^2/2)}{\pi^2 x^3}\left(1 - \frac{5}{(\pi x^2)^2}\right)$$

с погрешностью менее $5/(\pi^4 x^7)$ (при $x \geqslant 4$ верны не менее пяти знаков результата). Ввод: $x =$ PX. Вывод результатов: $C(x) \to$ PX, $S(x) \to$ PX. Переключатель Р — Г в положении Р.

↑	Fπ	×	П8	×	П9	2	÷	F cos	П7
FBx	F sin	П6	ИП9	Fx^2	3	XY	÷	1	—
ИП6	×	ИП8	÷	П5	ИП9	Fx^2	5	XY	÷
1	—	ИП7	×	ИП9	÷	ИП8	÷	2	F1/x
+	ИП5	—	С/П	ИП7	/—/	↑	ИП6	/—/	П7
XY	БП	12							

Для $x = 4$ имеем $C(4) = 0{,}49841993$ и $S(4) = 0{,}42051702$.

6.6. Эллиптические интегралы

Программа 6.28. Вычисление полного эллиптического интеграла первого рода по его разложению в ряд:

$$K(m) = \int_0^{\pi/2} (1 - m\sin^2\theta)^{-1/2} d\theta =$$

$$= \frac{\pi}{2}\left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 m + \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2 m^2 + \ldots\right].$$

Ввод: $m = РХ$.

П9	0	П5	1	П4	П6	П8	КИП5	КИП5	ИП4
ИП5	÷	Fx^2	ИП9	×	ИП6	×	П6	КИП4	КИП4
ИП6	ИП8	+	ИП8	XY	П8	—	$Fx=0$	07	ИП8
Fπ	×	2	÷	С/П	БП	00			

Примеры (в скобках даны точные значения результатов). $K(0{,}1) = 1{,}6124415$ (1,61244135), $K(0{,}2) = 1{,}6596237$ (1,659623599), $K(0{,}5) = 1{,}8540744$ (1,85407468). Время вычисления одного значения $K(m)$ в этих примерах от 1 до 2,5 мин.

Программа 6.29. Вычисление полного эллиптического интеграла второго рода по его разложению в ряд:

$$E(m) = \frac{\pi}{2}\left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 \frac{m}{1} - \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2 \frac{m^2}{3} - \left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^2 \frac{m^3}{5} - \ldots\right].$$

Ввод: $m = РХ$.

П9	0	П5	П8	1	П4	П6	КИП5	КИП5	ИП4
ИП5	÷	Fx^2	ИП9	×	ИП6	×	П6	ИП4	÷
П7	КИП4	КИП4	ИП7	ИП8	+	ИП8	XY	П8	—
$Fx=0$	07	1	ИП8	—	Fπ	×	2	÷	С/П
БП	00								

Примеры (в скобках даны точные значения результатов). $E(0{,}1) = 1{,}5307576$ (1,530757637), $E(0{,}2) = 1{,}4890351$ (1,489035058); $E(0{,}5) = 1{,}3506438$ (1,35064388). Время вычисления от 1 до 2,5 мин.

Эллиптические интегралы общего вида (неполные):

$$F(\varphi \setminus \alpha) = F(\varphi \mid m) = \int_0^{\varphi} (1 - m\sin^2\theta)^{-1/2}\, d\theta,$$

$$E(\varphi \mid m) = \int_0^{\varphi} (1 - m\sin^2\theta)^{1/2}\, d\theta$$

могут вычисляться по программам численного интегрирования. Так, для вычисления $F(\varphi|m)$ можно воспользоваться программой 5.54 интегрирования методом Гаусса, вписав в нее фрагмент вычисления подынтегральной функции ($m = P9$):

F sin Fx^2 ИП9 × 1 XY — F√ F1/x.

При $m = 0{,}5 = P9$, $\varphi = \pi/2 = b$ и $a = 0$, деля отрезок интегрирования на 8 частей, получим $F(\pi/2|0{,}5) = 1{,}8540742$ при $t_c \approx$ ≈ 5 мин. Для вычисления $E(\varphi|m)$ достаточно убрать оператор F1/x в конце приведенного фрагмента.

6.7. Дилогарифм

Программа 6.30. Вычисление дилогарифма по его разложению в ряд (x = РХ):

$$f(x) = -\int_1^x \frac{\ln t}{t-1}\,dt = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(x-1)^n}{n^2}, \quad 0 \leqslant x \leqslant 2.$$

↑	1	П8	—	П9	0	П6	П7	КИП6	ИП9
/—/	ИП8	×	П8	ИП6	Fx^2	÷	ИП7	+	ИП7
XY	П7	—	Fx=0	08	ИП7	С/П	БП	00	

Примеры (в скобках указаны точные значения результатов). $f(0{,}1) = 1{,}2997151$ $(1{,}299714723)$, $f(0{,}5) = 0{,}58224055$ $(0{,}582240526)$; время вычисления составляет 6,5 и 2,5 мин.

При точности, меньше предельной, и малых x время вычисления дилогарифма можно существенно уменьшить, используя для этого программы численного интегрирования.

6.8. Функции Дебая

Функции Дебая

$$D_n(x) = \frac{n}{x^n}\int_0^x \frac{t^n\,dt}{e^t-1} = \int_0^x \frac{nt^n}{x^n(e^t-1)}\,dt, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots,$$

ввиду сложности разложения в ряд целесообразно вычислять по программам численного интегрирования. Так как при $t = 0$ подынтегральная функция имеет особенность 0/0, то целесообразно использовать метод Гаусса.

Организация единой программы (для всех n) нецелесообразна, так как вычисление микрокалькуляторами функций x^n и t^n операцией вида x^y занимает много времени. Ниже дан пример вычисления функции $D_4(x)$. Подобным образом могут вычисляться функции Дебая при других n.

Для вычисления функции $D_4(x)$ воспользуемся программой 5.54, написав в нее фрагмент вычисления функции $4t^4/x^4(e^t-1)$:

П8	Fx^2	Fx^2	ИП8	Fe^x	1	—	÷	4	×
ИП9	Fx^2	Fx^2	÷						

Выполнив ввод (m = РХ, $x = b$ = Р9 и $a = 0$), для $m = 2$ и $x = 1$ получим $D_4(1) = 0{,}6548742$ при точном значении 0,654874, а для $m = 4$ и $x = 10$ $D_4(10) = 0{,}00967427$ при точном значении 0,009674.

6.9. Интеграл вероятности и связанные с ним функции

К важнейшим функциям теории вероятности относятся плотность Гауссовского стандартного распределения

$$\psi(x) = p(x) = e^{-x^2/2}/\sqrt{2\pi} \tag{6.13}$$

и функция распределения (интеграл вероятности)

$$\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2/2}\, dt. \tag{6.14}$$

Площадь между кривой $\psi(x)$ и осью абсцисс слева от вертикали, проходящей через точку $(x, 0)$

$$\Pi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-t^2/2}\, dt. \tag{6.15}$$

Полагая $t\sqrt{2} = u$ и $y = x/\sqrt{2}$, получим [1]:

$$\Phi(y) = \Phi\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^y e^{-u^2/2}\, du. \tag{6.16}$$

Эта функция связана с $\Pi(x)$ простым соотношением

$$\Phi\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) + 1 = 2\Pi(x). \tag{6.17}$$

Программа 6.31. Вычисление функции $\Phi(y)$ разложением в ряд [6] ($y = \text{РХ}$):

$$\Phi(y) = y\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(1 - \frac{(y/2)^2}{1!3} + \frac{(y/2)^4}{2!5} - \frac{(y/2)^6}{3!7} + \ldots\right). \tag{6.18}$$

П9	Fx^2	2	/—/	÷	П6	2	Fπ	÷	F$\sqrt{\ }$
ИП9	×	П7	П8	0	П4	КИП4	ИП4	2	×
1	+	П5	ИП4	2	×	1	—	ИП6	×
ИП4	÷	ИП5	÷	ИП7	×	П7	ИП8	+	П8
FBx	—	Fx=0	16	ИП8	С/П	БП	00		

Примеры. $\Phi(0{,}1) = 0{,}079655675$ вычисляется за 33 с, $\Phi(1) = 0{,}6826895$ — за 80 с и $\Phi(4) = 0{,}99993495$ — за 5 мин.

Программа 6.32. Вычисление $\Phi(y)$ при $y > 4$ асимптотическим разложением ($y = \text{РХ}$):

$$\Phi(y) = 1 - \frac{e^{-y^2/2}}{y}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(1 - \frac{1}{y^2} + \frac{1\cdot 3}{y^4} - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{y^6} \ldots\right). \tag{6.19}$$

П9	Fx^2	П8	2	/—/	÷	Fe^x	2	Fπ	÷
F√	×	ИП9	÷	П9	3	ИП8	÷	1	XY
—	ИП8	÷	1	—	ИП9	×	1	+	С/П
БП	00								

Пример. $\Phi(4) = 0{,}9999365$ вычисляется за 10 с.

Программа 6.33. Вычисление $\Phi(y)$ при любых y разложением (6.18) для $y < 4$ и (6.19) при $y \geqslant 4$.

П9	4	—	F$x<0$	52	ИП9	Fx^2	2	/—/	÷
П6	2	Fπ	÷	F√	ИП9	×	П7	П8	0
П4	КИП4	ИП4	2	×	1	+	П5	ИП4	2
×	1	—	ИП6	×	ИП4	÷	ИП5	÷	ИП7
×	П7	ИП8	+	П8	FBx	—	F$x=0$	21	ИП8
БП	81	ИП9	Fx^2	П6	2	/—/	÷	Fe^x	2
Fπ	÷	F√	×	ИП9	÷	П9	3	ИП6	÷
1	XY	—	ИП6	÷	1	—	ИП9	×	1
+	С/П	БП	00						

При $y = 0{,}1$ получим $\Phi(0{,}1) = 0{,}079655675$, а при $y = 4$ $\Phi(4) = 0{,}9999365$.

Функцию $\Pi(x)$ можно вычислить по соотношению (6.17). Для этого в конце вычислений нажимаем на клавиши ↑ 1 + 2 ÷. Так, для $x = 0{,}1$ имеем $\Pi(0{,}1) = 0{,}53982785$.

Если в описанные программы перед оператором С/П ввести фрагмент

ИП8	1	+	2	÷	П0	ИП9	Fx^2	2	/—/
÷	Fe^x	2	Fπ	×	F√	÷	П1	ИП0	

то будут вычисляться функция $\Pi(x) \to$ P1 = PX и ее производная $\Pi'(x) = e^{-x^2/2}/\sqrt{2\pi} \to$ PY. Например, для $x = 0{,}1$ получим $\Pi(0{,}1) = 0{,}53982785$ и $\Pi'(0{,}1) = 0{,}39695256$.

Функцию $\Phi(x)$ можно рассчитывать также с помощью программ, вычисляющих $\Phi(y)$. Для нахождения $\Phi(x)$ надо вместо y ввести значение $x\sqrt{2}$. Например, чтобы вычислить $\Phi(x)$ при $x = 0{,}5$ перед пуском программы надо нажать клавиши 0 , 5 ↑ 2 F√ ×. Получим $\Phi(x) = \Phi(0{,}5) = 0{,}52049986$. Для ускоренного вычисления функции $\Phi(x)$ предложен ряд аппроксимаций [2, 3].

Программа 6.34. Вычисление $\Phi(x)$ при $x > 0$ аппроксимацией с погрешностью менее $2{,}5 \cdot 10^{-5}$

$$\Phi(x) = 1 - (\lambda(a_1 + \lambda(a_2 + a_3\lambda)))/e^{x^2}, \qquad (6.20)$$

где $\lambda = 1/(1 + px)$. Ввод: $p = 0{,}47047 =$ P0, $a_1 = 0{,}3480242 =$ P1, $a_2 = -0{,}0958798 =$ P2, $a_3 = 0{,}7478556 =$ P3 и $x =$ PX.

↑	ИП0	×	1	+	F1/x	П9	ИП3	×	ИП2
+	ИП9	×	ИП1	+	ИП9	×	XY	Fx^2	Fe^x
÷	1	XY	—	С/П	БП	00			

Имеем $\Phi(0{,}1) = 0{,}1124832$, $\Phi(0{,}5) = 0{,}5204876$, $\Phi(1) = 0{,}8427168$ и $\Phi(3) = 0{,}9999776$. Время счета одного значения $\Phi(x)$ около 10 с. При $x < 0$ вычисления можно выполнить, используя соотношение

$$\Phi(-x) = 1 - \Phi(x).$$

Упростив коэффициенты в (6.20), эту формулу можно записать в виде

$$\Phi(x) = 1\,[(\lambda\,(348 + \lambda\,(-96 + 748\lambda)))/e^{x^2}]\,10^3 \qquad (6.21)$$

и проводить расчет по программе с одним занятым регистром памяти.

Программа 6.35. Вычисление $\Phi(x)$ по формуле (6.21) с погрешностью порядка $1 \cdot 10^{-4}$. Ввод $x = \text{РХ}$.

↑	↑	0	,	4	7	×	1	+	F1/x
П9	7	4	8	×	9	6	—	ИП9	×
3	4	8	+	ИП9	×	1	ВП	3	÷
XY	Fx²	Fe^x	÷	1	XY	—	С/П	БП	00

Для $x = 0{,}1$ и 1 имеем $\Phi(0{,}1) = 0{,}1123962$, $\Phi(1) = 0{,}8426262$.

Программа 6.36. Вычисление $\Phi(x)$ аппроксимацией

$$\Phi(x) = 1 - (a_1\lambda + a_2\lambda^2 + a_3\lambda^3 + a_4\lambda^4 + a_5\lambda^5)/e^{x^2},$$

где $\lambda = 1/(1 + a_6 x)$ с погрешностью не более $1{,}5 \cdot 10^{-7}$. Ввод: $a_1 = 0{,}2548295 = \text{P1}$, $a_2 = -0{,}28449673 = \text{P2}$, $a_3 = 1{,}4214137 = \text{P3}$, $a_4 = -1{,}453152 = \text{P4}$, $a_5 = 1{,}0614054 = \text{P5}$, $a_6 = 0{,}3275911 = \text{P6}$ и $x = \text{РХ}$.

П9	ИП6	×	1	+	F1/x	П8	5	П0	ИП5
↑	XY	ИП8	×	КИП0	+	ИП0	Fx=0	11	XY
ИП9	Fx²	Fe^x	÷	1	XY	—	С/П	БП	00

Для $x = 0{,}1$ и 2 имеем $\Phi(0{,}1) = 0{,}1124632$, $\Phi(2) = 0{,}9953221$.

Программа 6.37. Одновременное вычисление функций $\Psi(x)$ по формуле (6.13), $\Pi(x)$ с погрешностью до $1 \cdot 10^{-5}$ аппроксимацией

$$\Pi(x) = 1 - \psi(x)\,(a_1\lambda - a_2\lambda^2 + a_3\lambda^3),$$

где $\lambda = 1/(1 + px)$, а также функций

$$Q(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^{\infty} e^{-t^2/2}\,dt = 1 - \Pi(x)$$

и

$$A(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-x}^{x} e^{-t^2/2}\,dt = 2\Pi(x) - 1.$$

Ввод: $p = 0{,}33267 =$ P9, $a_1 = 0{,}4361836 =$ P1, $a_2 = 0{,}1201676 =$ P2; $a_3 = 0{,}937298 =$ P3 и $x =$ PX. Вывод: $\lambda \to$ P8, $\Psi(x) \to$ PX $=$ РД, $\Pi(x) \to$ PX $=$ PB, $Q(x) \to$ PX $=$ PC и $A(x) \to$ PX $=$ PA.

П7	ИП9	×	1	+	F1/x	П8	ИП7	Fx²	2
/—/	÷	Fe^x	2	Fπ	×	F √	÷	ПД	С/П
1	ИП3	ИП8	×	ИП2	—	ИП8	×	ИП1	+
ИП8	×	ИПД	×	—	ПВ	С/П	1	ИПВ	—
ПС	С/П	ИПВ	2	×	1	—	ПА	С/П	БП
00									

Для $x = 1$ получим $\Psi(1) = 0{,}24197072$ (точное значение 0,2419707245), $\Pi(1) = 0{,}8413513$ (точное значение 0,8413447), $Q(1) = 0{,}1586487$ и $A(1) = 0{,}6827026$.

Программа 6.38. Вычисление функций $\Psi(x)$, $\Pi(x)$, $Q(x)$ и $A(x)$ с применением аппроксимации

$$\Pi(x) = 1 - \Psi(x)(a_1\lambda + a_2\lambda^2 + \ldots + \lambda_5\lambda^5),$$

где $\lambda = 1/(1 + px)$, с погрешностью не более $1 \cdot 10^{-7}$. Ввод: $p = 0{,}2316419 =$ P9, $a_1 = 0{,}31938153 =$ P1, $a_2 = -0{,}35656378 =$ P2, $a_3 = 1{,}7814779 =$ P3, $a_4 = -1{,}821256 =$ P4, $a_5 = 1{,}3302744 =$ P5 и $x =$ PX. Вывод см. в программе 6.37.

П7	ИП9	×	1	+	F1/x	П8	ИП7	Fx²	2
/—/	÷	Fe^x	2	Fπ	×	F √	÷	ПД	С/П
5	П0	ИП5	↑	XY	ИП8	×	КИП0	+	ИП0
Fx=0	24	XY	ИПД	/—/	×	1	+	ПВ	С/П
1	ИПВ	—	ПС	С/П	ИПВ	2	×	1	—
ПА	С/П	БП	00						

Для $x = 1$ получим $\Psi(1) = 0{,}24197072$, $\Pi(1) = 0{,}8413448$, $Q(1) = 0{,}1586552$, $A(1) = 0{,}6826896$.

6.10. Функции плотности вероятности и распределения случайных величин

Частота появления случайной величины x в интервале dx:

$$p(x) = dF(x)/dx$$

определяет плотность вероятности случайных величин. Интеграл

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} p(x)\,dx$$

задает функцию распределения случайных величин.

Для многих законов распределения $p(x)$ и $F(x)$ задаются простыми формулами [10] и составление программ для их вычислений

не представляет трудностей. Ниже дан пакет программ вычисления $p(x)$ и $F(x)$ для тех законов, у которых вычисления $p(x)$ и $F(x)$ требуют специального подхода.

Программа 6.39. Вычисление $p(x) = \Psi(x)$ (6.13) и $\Pi(x)$ (6.15) для гауссовского стандартного распределения аппроксимацией

$$\Pi(x) = 1 - (1 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots + c_6 x^6)^{-16}/2$$

с погрешностью до $1{,}5 \cdot 10^{-7}$. Ввод: $c_1 = 49867347 \cdot 10^{-9} =$ P1, $c_2 = 21141006 \cdot 10^{-9} =$ P2, $c_3 = 3277626 \cdot 10^{-9} =$ P3, $c_4 = 38004 \cdot 10^{-9} =$ P4, $c_5 = 48891 \cdot 10^{-9} =$ P5, $c_6 = 5383 \cdot 10^{-9} =$ P6 и $x =$ PX (при смене x вводится только новое значение x).

П9	$Fx<0$	04	/—/	ПА	Fx^2	2	/—/	÷	Fe^x
$F\pi$	2	×	$F\sqrt{\ }$	÷	П8	С/П	6	П0	ИП6
↑	XY	ИПА	×	КИП0	+	ИП0	$Fx=0$	21	XY
1	+	1	6	/—/	XY	Fx^y	2	/—/	÷
1	+	ИП9	$Fx\geqslant 0$	50	XY	П7	С/П	БП	00
XY	1	XY	—	БП	46				

Для $x = 0{,}5$ $p(x) = 0{,}35206532$, $\Pi(x) = 0{,}6914625$, а для $x = -1$ $p(x) = 0{,}24197072$ и $F(x) = 0{,}1586552$. При $x < 0$ используется формула $\Pi(x) = 1 - \Pi(|x|)$.

Программа 6.40. Вычисление

$$p(x) = \exp\left[-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right] \Big/ (\sigma\sqrt{2\pi}) \quad \text{и} \quad F(x) = \Pi\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)$$

для нормального (гауссовского) распределения с дисперсией σ. Ввод: $c_1 \div c_6$ (см. программу 6.39), $m =$ PC, $\sigma =$ РД и $x =$ PX.

ИПС	—	ИПД	÷	П9	$Fx<0$	08	/—/	ПА	Fx^2
2	/—/	÷	Fe^x	$F\pi$	2	×	$F\sqrt{\ }$	÷	ИПД
÷	П8	С/П	6	П0	ИП6	↑	XY	ИПА	×
КИП0	+	ИП0	$Fx=0$	27	XY	1	+	1	6
/—/	XY	Fx^y	2	/—/	÷	1	+	ИП9	$Fx\geqslant 0$
56	XY	П7	С/П	БП	00	XY	1	XY	—
БП	52								

Для $m = 1{,}5$ и $\sigma = 0{,}5$ $p(1) = 0{,}48394144$, $F(1) = 0{,}1586552$ и $p(2) = 0{,}48394144$ и $F(2) = 0{,}8413448$.

Программа 6.41. Вычисление

$$p(x) = \frac{\lg e}{x\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(\lg x - m)^2}{2\sigma^2}\right] \quad \text{и} \quad F(x) = \Pi\left(\frac{\lg x - m}{\sigma}\right)$$

для логарифмического гауссовского распределения. Ввод см. в программе 6.40.

П9	F lg	ИПС	—	ИПД	÷	ПВ	Fx<0	10	/—/
ПА	Fx^2	2	/—/	÷	Fe^x	1	Fe^x	F lg	×
ИП9	÷	ИПД	÷	Fπ	2	×	F $\sqrt{\ }$	÷	П8
С/П	6	П0	ИП6	↑	XY	ИПА	×	КИП0	+
ИП0	Fx=0	35	XY	1	+	1	6	/—/	XY
Fx^y	2	/—/	÷	1	+	ИПВ	Fx≥0	64	XY
П7	С/П	БП	00	XY	1	XY	—	БП	60

Для $m = 1$ и $\sigma = 0{,}1$ $p(8) = 0{,}13541585$, $F(8) = 0{,}1662477$ и $p(10) = 0{,}17325843$ и $F(10) = 0{,}5$.

Программа 6.42. Вычисление

$$p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\left\{\exp\left[-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right] + \exp\left[-\frac{(x+m)^2}{2\sigma^2}\right]\right\}$$

и

$$F(x) = \Pi\left(\frac{x-m}{\sigma}\right) + \Pi\left(\frac{x+m}{\sigma}\right) - 1$$

для распределения модуля гауссовской случайной величины. Ввод см. в программе 6.40 ($x > 0$).

П9	ИПС	—	ИПД	÷	П7	ИП9	ИПС	+	ИПД
÷	ПВ	Fx^2	2	/—/	÷	Fe^x	ИП7	Fx^2	2
/—/	÷	Fe^x	+	ИПД	÷	Fπ	2	×	F $\sqrt{\ }$
÷	С/П	ИП7	Fx<0	36	/—/	ПП	59	ИП7	Fx≥0
44	XY	БП	48	XY	1	XY	—	ПА	ИПВ
ПП	59	ИПА	+	1	—	С/П	БП	00	П8
6	П0	ИП6	↑	XY	ИП8	×	КИП0	+	ИП0
Fx=0	64	XY	1	+	1	6	/—/	XY	Fx^y
2	/—/	÷	1	+	В/0				

Для $m = 2$ и $\sigma = 1$ $p(1) = 0{,}24640257$, $F(1) = 0{,}1573054$ и $p(3) = 0{,}24197221$ и $F(3) = 0{,}8413445$.

Программа 6.43. Вычисление

$$p(x) = \lambda e^{-\lambda|x-\mu|}/2$$

и

$$F(x) = \begin{cases} e^{-\lambda|x-\mu|}/2, & -\infty < x < \mu, \\ 1 - e^{-\lambda|x-\mu|}/2, & \mu < x < \infty, \end{cases}$$

для распределения Лапласа. Ввод: μ = P0, λ = P1 и x = PX.

П2	ИП0	—	Fx<0	06	/—/	ИП1	/—/	×	Fe^x
2	÷	П3	ИП1	×	С/П	ИП2	ИП0	—	Fx<0
25	ИП3	С/П	БП	00	1	ИП3	—	БП	22

Для $\mu = 1$ и $\lambda = 2$ $p(-0{,}5) = 0{,}049787072$, $F(-0{,}5) = 0{,}024893536$ и $p(1{,}5) = 0{,}36787944$ и $F(1{,}5) = 0{,}8160603$.

Программа 6.44. Вычисление $p(x) = x^m e^{-x}/m!$ для показательно-степенного распределения. Ввод: $m = \text{РА}$, $x = \text{РХ} > 0$.

П9	ИПА	П0	$Fx \neq 0$	12	1	ИП0	×	FL0	06
БП	13	1	П8	ИПА	ИП9	Fx^y	ИП9	/—/	Fe^x
×	ИП8	÷	П7	С/П	БП	00			

Для $x = m = 3$ $p(3) = 0{,}22404176$, а для $x = m = 1$ $p(1) = 0{,}36787944$.

Программа 6.45. Вычисление

$$p(x) = \frac{a}{2\,\mathrm{ch}^2\,ax} \quad \text{и} \quad F(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\,\mathrm{th}\,ax$$

для распределения $\mathrm{sch}^2\,x$. Ввод: $a = \text{РА}$, $x = \text{РХ}$. Вывод результатов: $p(x) \to \text{РХ}$, $F(x) \to \text{РУ}$.

П9	ИПА	×	П6	Fe^x	↑	$F1/x$	—	2	÷
↑	Fx^2	1	+	$F\sqrt{\ }$	÷	2	÷	2	$F1/x$
+	П8	ИП6	Fe^x	↑	$F1/x$	+	Fx^2	$F1/x$	ИПА
×	2	×	П7	С/П	БП	00			

Для $a = 1$ и $x = -1$ $p(x) = 0{,}20998718$ и $F(x) = 0{,}11920292$.

Программа 6.46. Вычисление

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi N}} \cdot \frac{\Gamma[(N+1)/2]}{\Gamma(N/2)} \left(1 + \frac{x^2}{N}\right)^{-(N+1)/2}$$

для распределения Стьюдента с применением для гамма-функций формулы Стирлинга, т. е. [6]

$$p(x) \simeq \sqrt{\frac{N(N+2)}{17{,}08}} \left(\frac{N+3}{N+2}\right)^N \cdot \frac{(6N+19)}{(N+1)(6N+13)} \times$$
$$\times \left(1 + \frac{x^2}{N}\right)^{-(N+1)/2}$$

Ввод: $N = \text{Р0}$, $x = \text{РХ}$ (при первом пуске $x = \text{Р9}$).

ИП0	↑	↑	3	+	ИП0	2	+	÷	Fx^y
×	ИП0	2	+	×	1	7	,	0	8
÷	$F\sqrt{\ }$	ИП0	6	×	П8	1	9	+	×
ИП0	1	+	÷	ИП8	1	3	+	÷	П8
ИП9	П9	Fx^2	ИП0	÷	1	+	ИП0	1	+
2	/—/	÷	XY	Fx^y	ИП8	×	С/П	БП	41

Для $N = 3$ и $x = 2$ получим $p(x) = 0{,}067514971$.

Программа 6.47. Вычисление

$$p(x) = \frac{x^\alpha e^{-x/\beta}}{\beta^{\alpha+1}\Gamma(\alpha+1)}$$

для гамма-распределения при целых α, когда $\Gamma(\alpha+1)=\alpha!$. Ввод: $\alpha=$ РА, $\beta=$ РВ и $x=$ РХ (при первом пуске $x=$ Р9).

ИПА	П0	$Fx\neq 0$	11	1	ИП0	×	FL0	05	БП
12	1	П6	ИПА	1	+	ИПВ	Fx^y	ИП6	×
П5	ИП9	П9	ИПА	XY	Fx^y	ИП9	ИПВ	/—/	÷
Fe^x	×	ИП5	÷	П7	С/П	БП	22		

Для $\alpha=0$, $\beta=1$ и $x=0{,}2$ $p(x)=0{,}81873072$.

Программа 6.48. Вычисление

$$p(x)=x^{N-1}e^{-x^2/2}/2^{N/2-1}\Gamma(N/2)$$

для χ-распределения с применением для $\Gamma(N/2)$ формулы Стирлинга, т. е.

$$p(x)\simeq\frac{Nx^{N-1}e^{-x^2/2}}{2^{N/2}\sqrt{2\pi/a}\,(a/e)^a\,(1+1/(12a))},\quad \text{где}\quad a=1+\frac{N}{2}.$$

Ввод: $N=$ Р0, $x=$ РХ (при первом пуске $x=$ Р9).

ИП0	2	÷	П7	2	Fx^y	Fπ	2	×	ИП7
1	+	П7	÷	F√	×	1	ИП7	1	2
×	F1/x	+	×	ИП0	÷	П8	ИП7	1	Fe^x
÷	ИП7	XY	Fx^y	ИП8	×	П8	ИП9	П9	ИП0
1	—	XY	Fx^y	ИП9	Fx^2	2	/—/	÷	Fe^x
×	ИП8	÷	П7	С/П	БП	38			

Для $N=1$ и $x=0{,}1$ $p(x)=0{,}79449834$.

Программа 6.49. Вычисление

$$p(x)=x^{N/2-1}e^{-x/2}/2^{N/2}\Gamma(N/2)$$

для распределения χ^2 с применением соотношения

$$\Gamma(N/2)=2\Gamma(1+N/2)/N=2\Gamma(a)/N$$

и формулы Стирлинга для $\Gamma(a)$, что дает

$$p(x)\simeq\frac{Nx^{N/2-1}e^{-x/2}}{2^a\sqrt{2\pi/a}\,(a/e)^a\,(1+1/(12a))},\quad \text{где}\quad a=1-N/2.$$

Ввод: $N=$ Р0, $x=$ РХ (при первом пуске $x=$ Р9).

ИП0	2	÷	1	+	П7	2	Fx^y	Fπ	2
×	ИП7	÷	F√	×	ИП0	÷	1	ИП7	1
2	×	F1/x	+	×	П8	ИП7	1	Fe^x	÷
ИП7	XY	Fx^y	ИП8	×	П8	ИП9	П9	ИП0	2
÷	1	—	XY	Fx^y	ИП9	2	/—/	÷	Fe^x
×	ИП8	÷	С/П	БП	37				

Для $N=20$ и $x=10$ $p(x)=0{,}01813276$.

Программа 6.50. Вычисление плотности распределения Эрланга K-го порядка (K — целое число)

$$p(x)=\frac{\lambda^{K+1}}{\Gamma(K+1)}x^K e^{-\lambda x}=\frac{\lambda^{K+1}}{K!}x^K e^{-\lambda x}.$$

Ввод: λ = РА, K = РВ, x = РХ (при первом пуске программы x = Р9).

ИПВ	П0	$Fx\neq 0$	11	1	ИП0	×	FL0	05	БП
12	1	П6	ИПВ	1	+	ИПА	Fx^y	ИП6	÷
П5	ИП9	П9	ИПВ	XY	Fx^y	ИП9	ИПА	/—/	×
Fe^x	×	ИП5	×	П7	С/П	БП	22		

Для $K=3$ и $\lambda=2$ имеем $p(0{,}5)=0{,}12262644$ и $p(2)=$ $=0{,}39073354$.

6.11. Гипергеометрические функции

Программа 6.51. Вычисление гипергеометрического ряда по разложению [29]

$$F(a,b,c,x)=1+\sum_{i=1}^{N}\left[\prod_{j=0}^{i-1}\frac{(a+j)(b+j)}{(1+j)(c+j)}x\right]+\theta_{N+1}.$$

Ввод: a, b, c и x в регистр X.

П2	С/П	П3	С/П	П4	С/П	Fπ	Fe^x	П0	Flg
ИП0	1	—	П1	ИП2	+	×	ИП1	ИП3	+
×	ИП1	ИП4	+	÷	ИП0	÷	×	1	+
FL0	10	С/П							

Для $a=b=c=1$ и $x=0{,}8$ получим $F(1;\ 1;\ 1;\ 0{,}8)=4{,}978539$ (точно 5). Погрешность вычисления $\delta<0{,}5\%$ при $-0{,}1\leqslant x\leqslant 0{,}8$.

Программа 6.52. Вычисление вырожденной гипергеометрической функции по разложению [29]

$$\widetilde{\Phi}(a,c,x)=1+\sum_{i=1}^{N}\left[\prod_{j=0}^{i-1}\frac{(a+j)}{(1+j)(c+j)}x\right]+\theta_{N+1}.$$

Ввод: a, c и x в регистр X.

П2	С/П	П3	С/П	Fπ	Fe^x	П0	Flg	ИП0	1
—	П1	ИП2	+	×	×	ИП1	ИП3	+	÷
ИП0	÷	1	+	FL0	08	С/П			

Для $a=c=1$ и $x=5$ получим $\widetilde{\Phi}(1{,}1{,}5)=148{,}41315$ (точно 148,41316). Погрешность вычисления $\delta<1\cdot 10^{-4}$ при $0\leqslant a\leqslant c$ и $-5\leqslant x\leqslant 10$, $t_c\approx 2$ мин.

Глава 7

ПРИМЕРЫ РАСЧЕТА ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ И ЭЛЕКТРОННЫХ ЦЕПЕЙ И УСТРОЙСТВ

7.1. Расчет индуктивных элементов

Индуктивность проводов, катушек и других индуктивных элементов $L(w, x_1, x_2, \ldots, x_n)$ в справочной литературе обычно задается функцией числа витков w и конструктивных параметров $x_1, x_2, \ldots, x_n$ [14]. Однако чаще требуется найти w (или какой-либо параметр $x_1, x_2, \ldots, x_n$) по заданной $L = L_0$. Если $L(w, x_1, x_2, \ldots, x_n)$ разрешима в виде $w = (L, x_1, x_2, \ldots, x_n)$, расчет сводится к формульному счету. В противном случае w определяется численными методами решения нелинейного уравнения

$$L_0 - L(w, x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0.$$

В приведенных ниже программах L_0 задана в наногенри, а геометрические размеры катушек — в сантиметрах.

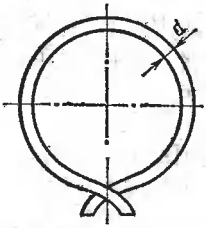

Рис. 7.1. Виток в свободном пространстве

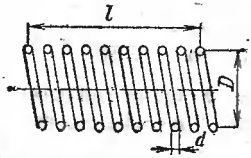

Рис. 7.2. Однослойная катушка

Программа 7.1. Расчет индуктивности круглого витка со средним диаметром D и диаметром провода d по формуле $L = 2\pi D(\ln(8D/d) - 1{,}75)$. Ввод: D = РХ, d = РХ.

↑	С/П	÷	8	×	F ln	1	,	7	5
−	×	2	×	Fπ	×	С/П	БП	00	

Для $D = 2$ см, $d = 0{,}1$ см получим $L = 41{,}785364$ нГн.

Программа 7.2. Расчет числа витков w однослойной катушки заданной длины l (рис. 7.2) из уравнения

$$L_0 - L(Aw + B/w - C) = 0,$$

где $A = (\pi D)^2/(l + 0{,}45D)$; $B = 3{,}5lD/d$ и $C = 4D$. Ввод: D = P4, l = P5, d = P6 и L_0 = PX.

П7	Fπ	ИП4	×	Fx^2	0	,	4	5	ИП4
×	ИП5	+	÷	ПА	ИП5	ИП6	÷	ИП4	×
3	,	5	×	ПВ	ИП4	4	×	ПС	0
П2	1	0	П3	ИП2	ИП3	+	П2	ИПА	×
ИПВ	ИП2	÷	+	ИПС	—	ИП2	/—/	×	ИП7
+	Fx < 0	34	ИП2	ИП3	—	П2	С/П	ИП3	1
0	÷	П3	БП	34					

Для $D = 2$ см, $l = 2$ см, $d = 0{,}05$ см и $L_0 = 5 \cdot 10^3$ нГн, нажав трижды клавишу С/П (с перерывами на время счета), получим $w = 18{,}9$. Если сечение катушки не круглое и имеет вид правильного многоугольника, то в приведенных выше формулах берется $D = D_0 \cos^2(\pi/(2n))$.

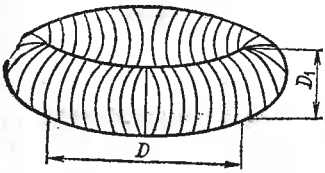

Рис. 7.3. Тороидальная катушка круглого сечения

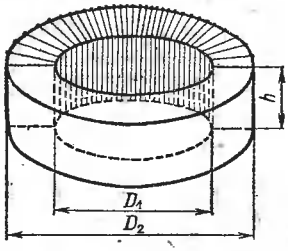

Рис. 7.4. Тороидальная катушка прямоугольного сечения

Программа 7.3. Расчет w однослойной тороидальной катушки круглого сечения (рис. 7.3):

$$w = \sqrt{L_0/2\pi\left(D - \sqrt{D^2 - D_1^2}\right)}.$$

Ввод: D, D_1 и L_0 в регистр X.

П9	С/П	П8	С/П	↑	2	÷	Fπ	÷	ИП9
↑	Fx^2	ИП8	Fx^2	—	F √	—	÷	F √	БП
03									

Для $D = 3$ см, $D_1 = 1$ см, $L_0 = 10^5$ нГн получим $w = 304{,}56901$.

Программа 7.4. Расчет w тороидальной однослойной катушки прямоугольного сечения (рис. 7.4):

$$w = \sqrt{L_0/2h \ln(D_2/D_1)}.$$

Ввод: D_2, D_1, h и L_0 в регистр X.

П9	С/П	П8	С/П	П7	С/П	ИП7	÷	2	÷
ИП9	ИП8	÷	F ln	÷	F √	БП	05		

Для $D_2 = 3$ см, $D_1 = 1$ см, $h = 1$ и $L_0 = 1 \cdot 10^3$ нГн получим $w = 213$, 33533.

Программа 7.5. Расчет w многослойной тороидальной катушки круглого сечения (рис. 7.3):

$$w = \sqrt{L_0/2\pi D \left(\ln \frac{8D}{D_1} - 1{,}75\right)}.$$

Ввод: D, D_1 и L_0 в регистр X.

П9	С/П	П8	С/П	ИП9	8	×	ИП8	÷	F ln
1	,	7	5	−	ИП9	×	Fπ	×	2
×	+	F√	С/П	БП	03				

Для $D = 4$ см, $D_1 = 0{,}8$ см и $L_0 = 10^7$ нГн получим $w =$ $= 453{,}00673$.

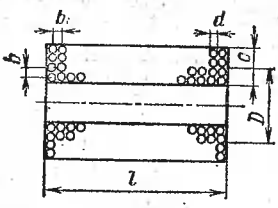

Рис. 7.5. Многослойная короткая цилиндрическая катушка

Программа 7.6. Расчет w многослойной короткой цилиндрической катушки (рис. 7.5):

$$w = \sqrt{L_0 (3D + 9l + 10c)/25\pi D^2}.$$

Ввод: D, l, c и L_0 в регистр X.

П9	С/П	П8	С/П	П7	С/П	ИП9	3	×	ИП8
9	×	+	ИП7	1	0	×	+	×	2
5	÷	Fπ	÷	ИП9	Fx²	÷	F√	БП	05

Для $D = 2{,}5$ см, $l = c = 1$ см и $L_0 = 2 \cdot 10^5$ нГн получим $w =$ $= 103{,}90895$.

Программа 7.7. Расчет w катушки на кольцевом ферромагнитном сердечнике:

$$w = \sqrt{L_0 (d_н + d_в)/4\mu h (d_н - d_в)} \quad \text{при} \quad d_н/d_в < 1{,}75,$$

$$w = \sqrt{L_0/2\mu h \ln (d_н/d_в)} \quad \text{при} \quad d_н/d_в > 1{,}75,$$

где $d_н$ и $d_в$ — наружный и внутренний диаметры сердечника, h — его высота. Ввод: $d_н$, $d_в$, h, μ и L_0 в регистр X.

П9	С/П	П8	С/П	П7	С/П	П6	С/П	П5	ИП9
ИП8	÷	П4	1	,	7	5	−	Fx < 0	38
ИП9	ИП8	+	ИП5	×	4	÷	ИП6	÷	ИП7
÷	ИП9	ИП8	−	÷	F√	БП	07	ИП5	2
÷	ИП6	÷	ИП7	+	ИП4	F ln	÷	F√	БП
07									

Для $d_н = 4$ см, $d_в = 2$ см, $h = 1$ см, $\mu = 1000$ и $L_0 = 2 \cdot 10^7$ нГн получим $w = 120{,}11223$, а для $d_в = 3$ см и этих же данных получим $w = 187{,}08286$.

Программа 7.8. Расчет w катушки на броневом сердечнике (рис. 7.6):

$$w = \sqrt{L_0 (A + B)/19{,}74\mu},$$

где

$$A = (h_1 + h_2)\left(\frac{1}{d_4^2 - d_3^2} + \frac{1}{d_2^2 - d_1^2}\right),$$

$$B = \frac{1}{h_2 - h_1} \ln\left(\frac{d_3 + d_4}{d_1 + d_2}\right).$$

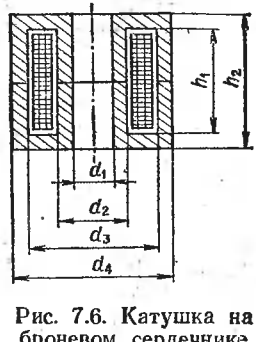

Рис. 7.6. Катушка на броневом сердечнике

Ввод (после нажатия клавиш В/0 и С/П): d_1, d_2, d_3, d_4, h_1, h_2, μ и L_0 в регистр X. При смене L_0 набирается новое значение L_0 и нажимается клавиша С/П.

8	П0	0	С/П	КП0	ИП0	1	—	Fx=0	02
С/П	П8	ИП4	Fx²	ИП5	Fx²	—	F1/x	ИП6	Fx²
ИП7	Fx²	—	F1/x	+	ИП3	ИП2	+	×	ПА
ИП5	ИП4	+	ИП7	ИП6	+	÷	F ln	ИП2	ИП3
—	÷	ПА	+	ИП8	×	ИП1	÷	1	9
,	7	4	÷	F√	БП	10			

Для $d_1 = 1$ см, $d_2 = 2$ см, $d_3 = 4$ см, $d_4 = 5$ см, $h_1 = 3$ см, $h_2 = 4$ см, $\mu = 10$ и $L_0 = 5 \cdot 10^5$ нГн получим $w = 103{,}26144$. Для $L_0 = 1 \cdot 10^5$ нГн $w = 46{,}179922$.

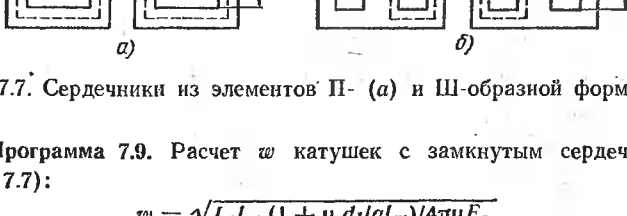

Рис. 7.7. Сердечники из элементов П- (*а*) и Ш-образной формы (*б*)

Программа 7.9. Расчет w катушек с замкнутым сердечником (рис. 7.7):

$$w = \sqrt{L_0 l_m (1 + \mu\, d_l/a l_m)/4\pi\mu F_c},$$

где F_c — площадь поперечного сечения сердечника, l_m — средняя длина магнитной линии. Ввод: F_c, l_m, a, d_l, μ и L_0 в регистр X. При смене L_0 набирается новое значение L_0 и нажимается клавиша С/П.

П9	С/П	П8	С/П	П7	С/П	П6	С/П	П5	С/П
ИП8	×	4	÷	Fπ	÷	ИП9	÷	ИП5	÷
ИП5	ИП6	×	ИП7	÷	ИП8	+	1	+	×
F√	БП	09							

Для $F_c = 1$ см², $l_m = 10$ см, $a = 1{,}5$ см, $d_t = 0{,}05$ см, $\mu = 1000$ и $L_0 = 5 \cdot 10^7$ нГн получим $w = 415{,}23228$. Для $L_0 = 1 \cdot 10^7$ нГн получим $w = 185{,}69752$.

Программа 7.10. Расчет w тонкопленочной катушки (рис. 7.8) с заданными размерами $A_н$ и $A_{вн}$:

$$w = \left\{ L_0 \Big/ \left[k_1 (A_н + A_{вн}) \ln \left(k_2 \frac{A_н + A_{вн}}{A_н - A_{вн}} \right) \right] \right\}^{3/5},$$

где $k_1 = 2{,}33$ и $k_2 = 4$ для круглой катушки и $k_1 = 12{,}05$ и $k_2 = 8$ — для квадратной (k_1 и k_2 — коэффициенты, учитывающие гео-

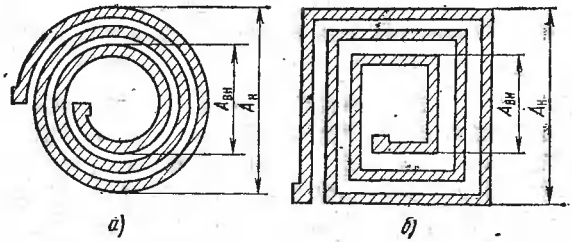

Рис. 7.8. Тонкопленочные катушки с витками круглой (*а*) и квадратной (*б*) формы

метрическую форму витка). Ввод: k_1, k_2, $A_н$, $A_{вн}$ и L_0 в регистр X. При вводе нового значения L_0 нажимается только клавиша С/П.

П9	С/П	П8	С/П	П7	С/П	П6	С/П	ИП9	÷
ИП7	ИП6	+	П5	÷	ИП5	ИП8	×	ИП7	ИП6
—	÷	F ln	÷	3	↑	5	÷	XY	Fx^y
БП	07								

Для $k_1 = 2{,}33$, $k_2 = 4$, $A_н = 1$ см, $A_{вн} = 0{,}5$ см и $L_0 = 200$ нГн получим $w = 6{,}5669484$. Для $L_0 = 500$ нГн и $w = 11{,}379616$.

Программа 7.11. Расчет w тонкопленочной катушки (рис. 7.8) с заданным шагом l из решения уравнения

$$L_0 - k_1 \left(1 + \frac{2A_{вн}}{wl}\right) l w^{2/3} \ln \left[k_2 \left(1 + \frac{2A_{вн}}{wl}\right) \right] = 0.$$

Ввод: k_1, k_2, $A_{вн}$, l и L_0 в регистр X. Для круглой катушки $k_1 = 2{,}33$ и $k_2 = 4$, для квадратной $k_1 = 12{,}05$ и $k_2 = 8$.

П7	С/П	П9	С/П	П4	С/П	П5	С/П	П6	0
П2	1	П3	ИП2	ИП3	+	П2	ИП4	2	×

ИП2	÷	ИП5	÷	1	+	П8	ИП9	×	Fin
ИП5	×	ИП8	×	ИП7	×	П8	8	↑	3
÷	ИП2	Fx^y	ИП8	/—/	×	ИП6	+	$Fx<0$	13
ИП2	ИП3	—	П2	С/П	ИП3	1	0	÷	П3
БП	13								

Для $k_1 = 2{,}33$, $k_2 = 4$, $A_{вн} = 0{,}2$ см, $l = 0{,}05$ см и $L_0 = 100$ нГн получим $w = 7{,}14$, нажимая три раза (с перерывами на время счета) клавишу С/П.

Дроссель фильтра обычно выполняется на П или Ш-образном сердечнике для стальных пластин (или ленты). Он должен обеспечить заданную индуктивность L_0 при токе I_0, текущем через обмотку дросселя.

Расчет дросселя выполняется по методике [8] с помощью двух программ.

Программа 7.12. Расчет ширины стержня a, поперечного сечения Q, оптимального зазора $l_z/2$, коэффициента M, относительной длины воздушного зазора l_z (в % от l_m), эффективной магнитной проницаемости материала сердечника μ_z и толщины набора c. Ввод: $I_0 =$ = P0, $L_0 =$ P1.

ИП0	Fx^2	ИП1	×	П9	$F\sqrt{\ }$	$F\sqrt{\ }$	2	,	6
×	С/П	Fx^2	1	,	5	×	С/П	ИПА	÷
ПС	ИП9	ИП2	÷	ИП4	÷	П5	Fx^2	1	5
ВП	3	×	П9	ИП5	3	3	0	×	ИП9
—	П6	ИП5	/—/	4	0	1	×	Fe^x	1
1	4	×	5	0	+	П7	ИП6	ИП4	×
2	0	÷	С/П						

Пусть нужно рассчитать дроссель, имеющий $L_0 = 3 \cdot 10^{-4}$ Гн при рабочем токе $I_0 = 15$ А. Введя I_0 и L_0 и, нажав клавиши В/0 и С/П, находим $a = 2{,}6\sqrt[4]{L_0 I_0^2} = 1{,}3252545$ см. Еще раз нажав клавишу С/П, находим $Q = 1{,}5a^2 = 2{,}6344491$ см². По нормали Н0.666.002 «Магнитопроводы ленточные» выбираем подходящий сердечник ШЛ 16×16. Вводим в машину его уточненные данные: $a = 1{,}6$ см = = PA, $b = 1{,}6$ см = PB, $h = 4$ см = P3, $l_m = 13{,}7$ см = P4 и $Q =$ = 2,65 = P2 = PX. Нажав клавишу С/П, получим: $M = L_0 I_0^2/(acl_m) =$ $= 1{,}859248 \cdot 10^{-3} \to$ P5, $l_{z\%} = 330M - 15 \cdot 10^3 M^2 = 0{,}56169979$ мм $\to$ $\to$ P6, $\mu_z = 114\exp(-401M) + 50 = 104{,}08949 \to$ P7, $c = Q/a =$ $= 1{,}65625$ см $\to$ PC и $l_z/2 = l_{z\%} l_m/20 = 0{,}38476435$ мм $\to$ PX. Переходим к следующей программе.

Программа 7.13. Расчет диаметра провода d, числа витков w, омического сопротивления r и коэффициента заполнения окна медью $k_м$. Ввод (после выполнения программы 7.12): допустимая плотность тока $\delta =$ P8.

ИП0	ИП8	÷	F√	1	,	1	3	×	П9
С/П	ИП1	ИП4	×	1	,	2	6	÷	ИП7
÷	ИП2	÷	F√	1	ВП	4	×	ПД	С/П
ИПА	ИПС	+	2	×	ИПВ	Fπ	×	+	ИПД
×	2	,	2	5	ВП	4	/—/	×	ИП9
Fx²	П9	÷	С/П	ИП9	ИПД	×	8	ВП	3
/—/	×	ИПВ	÷	ИП3	÷	С/П			

Введя $\delta = 3$ А/мм² и нажав клавиши В/0 и С/П, найдем $d = 1{,}13\sqrt{I_0/\delta} = 2{,}5267567$ мм. Нажав еще раз клавишу С/П, получим $w = 10^4\sqrt{L_0 l_m/(1{,}26\mu_z ac)} = 34{,}388184$, далее, дважды нажав клавишу С/П, получим $r = 2{,}25\cdot 10^{-4} w[2(a+c)+\pi B]/d^2 = 1{,}3984111\cdot 10^{-2}$ Ом и $k_м = 8\cdot 10^{-3}\ wd^2/(bh) = 0{,}27443915$.

Исходными данными при расчете силового трансформатора являются: габаритная мощность $P_г$, максимальная индукция в сердечнике B_m, число стержней сердечника с обмотками s, допустимая плотность тока δ, коэффициент заполнения окна сердечника медью $k_м$, к. п. д. трансформатора η, напряжения U_1 и U_2 и токи I_1 и I_2 первичной и вторичной обмотки. Порядок технического расчета силового трансформатора следующий.

1. Находим произведение сечений стали $Q_{ст}$ и окна $Q_о$ сердечника

$$Q_{ст}Q_о = P_г/0{,}022fB_m\delta\eta s k_c k_м.$$

Подбираем подходящий тип сердечника и уточняем для него значения $Q_{ст}$ и $Q_о$.

2. Определяем э. д. с. одного витка $e = 4{,}44\cdot 10^{-4}\ fB_m Q_{ст} k_c$.

3. Находим число витков вторичной обмотки $w_2 = U_2/e$.

4. Находим приближенное число витков первичной обмотки $w_1 = U_1/e$.

5. Определяем диаметр провода вторичной обмотки (без изоляции) $d_2 = 1{,}13\sqrt{I_2/\delta}$.

6. Определяем диаметр провода первичной обмотки (без изоляции) $d_1 = 1{,}13\sqrt{I_1/\delta}$.

7. Находим длину провода первичной обмотки $l_1 = w_1[2(a+c)+\pi b]\cdot 10^{-2}$, где a — ширина сердечника, b — ширина окна и c — толщина набора.

8. Рассчитываем падение напряжения на активном сопротивлении первичной обмотки $\Delta U_1 = 2{,}25\cdot 10^{-2} I_1 l_1/d_1^2$.

9. Уточняем число витков первичной обмотки $w_1 = (U_1 - \Delta U_1)/e$.

Программа 7.14. Расчет силового трансформатора. Ввод: fB_m = Р1, δ = Р2, η = Р3, s = Р4, k_c = Р5, $k_м$ = Р6 и далее в соответствии с табл. 7.1.

Таблица 7.1

Ввод	$P_г$=РХ	a=РА, b=РВ c=РС	U_2=РХ	U_1=РХ	I_2=РХ	I_1=РХ	–	–	–
Вывод	$Q_{ст}Q_о$	e	w_2	w_1	d_2	d_1	e	ΔU_1	w_1

ИП1	÷	ИП2	÷	ИП3	÷	ИП4	÷	ИП5	÷
ИП6	÷	4	5	×	С/П	ИПА	ИПС	×	ИП1
×	ИП5	×	4	4	4	ВП	6	/—/	×
П0	С/П	ИП0	÷	С/П	П7	ИП0	÷	П8	С/П
ИП2	÷	F√	1	,	1	3	×	С/П	П9
ИП2	÷	F√	1	,	1	3	×	ПД	С/П
ИПА	ИПС	+	2	×	ИПВ	Fπ	×	+	ИП8
×	1	0	0	÷	С/П	ИП9	×	0	,
0	2	2	5	×	ИПД	Fx^2	÷	С/П	/—/
ИП7	+	ИП0	÷	С/П					

Пусть нужно рассчитать силовой трансформатор при следующих исходных данных: $fB_m = 60$ Гц·Тл ($f = 50$ Гц, $B_m = 1{,}2$ Тл), $\delta = 2$ А/мм^2, $\eta = 0{,}96$, $s = 2$, $k_c = 0{,}95$, $k_м = 0{,}32$ и $P_г = 215$ Вт. Пустив программу нажатием клавиш В/0 и С/П, получим $Q_{ст}Q_о = 138{,}13218$ см^2. Выбираем магнитопровод ленточный ПЛ 25 × 50 — 65, имеющий $Q_{ст}Q_о = 140$ см^4 ($a = 2{,}5$ см, $b = 2$ см и $c = 5$ см). Введя эти данные в регистры А, В и С, получим (нажав клавишу С/П) $e = 0{,}31635$ В. Далее, введя $U_2 = 450$ В, получим $w_2 = 1422{,}4751$; введя $U_1 = 127$ В, получим $w_1 = 401{,}45408$; введя $I_2 = 0{,}475$ А получим $d_2 = 0{,}55069387$ мм; введя $I_1 = 1{,}7$ А, получим $d_1 = 1{,}0418085$ мм и, далее, $l_1 = 85{,}442214$ м, $\Delta U_1 = 3{,}0111205$ В и $w_1 = 391{,}93576$.

7.2. Расчет емкостей

Расчет емкостей конденсаторов обычно проводится при их разработке. Конструкторы электротехнической и электронной аппаратуры используют их как готовые элементы. Характерное исключение составляют пленочные конденсаторы гибридно-пленочных интегральных микросхем.

Расчет пленочных конденсаторов с заданной емкостью C, числом обкладок m, толщиной его диэлектрика d и относительной диэлектрической проницаемостью ε сводится к определению удельной емкости $C_0 = 0{,}0885\ \varepsilon(m-1)/d$ и площади обкладок $S = C/C_0$. После этого по заданному отношению сторон $Q = A/B$ прямоугольника обкладок находятся стороны $A = \sqrt{QS}$ и $B = \sqrt{S/Q}$.

Программа 7.15. Расчет плеиочного кондеисатора. Ввод: m = Р1, d_1 = Р2, ε = Р3, Q = Р4 и C = РХ. Вывод результатов: $C_0 \to$ Р0, $A_1 \to$ РА, $B \to$ РВ, $S \to$ РС = РХ.

ИП3	ИП1	1	—	×	ИП2	÷	0	,	0
8	8	5	×	П0	÷	ПС	ИП4	×	F√
ПА	ИПС	ИП4	÷	F√	ПВ	ИПС	С/П	БП	00

Для $m = 3$, $d = 0{,}01$ см, $\varepsilon = 4{,}7$, $Q = 2$ и $C = 100$ пФ получим $C_0 = 83{,}19$ пФ/см², $A = 1{,}5505273$ см, $B = 0{,}77526366$ см и $S = 1{,}2020675$ см².

Расчет емкости проводников в свободиом пространстве проводится по формуле

$$C = k_1 \varepsilon l / \lg(k_2 x/d),$$

где значения k_1, k_2 и наименование параметра x указаны в табл. 7.2, l — длина провода и d — его диаметр.

Таблица 7.2

Емкость	k_1	k_2	Наименование x
Между двумя проводами вдали от земли	0,12	2	Расстояние между проводами
Между горизоитальным проводом и землей	0,24	4	Высота подвески
Между вертикальным проводом и землей при расстоянии от земли до нижнего конца $h > l/4$	0,24	1	Длина провода
Между вертикальным проводом и землей при расстоянии от земли до нижнего конца $h < l/4$	0,24	1,15	Длина провода
Между проводом и корпусом при вводе провода через отверстие	0,24	2	Диаметр отверстия

Программа 7.16. Расчет емкости проводника в свободиом пространстве. Ввод: k_1 = Р1, k_2 = Р2, ε = Р3, l = Р4, d = Р5 и x = РХ.

ИП2 × ИП5 ÷ Flg · ИП1 ИП3 × ИП4 ×
ХУ ÷ С/П БП 00

Для $k_1 = 0{,}24$, $k_2 = 4$, $\varepsilon = 1$, $l = 10^3$ см, $d = 0{,}2$ см и $x = 200$ см получаем $C = 66{,}62854$ пФ.

Иногда некоторый конструктивный параметр x, определяющий емкость C_0, можно определить из решения нелинейного уравнения

$$C(x) - C_0 = 0$$

численными методами (см. пример ниже).

Программа 7.17. Расчет расстояния x между центрами двух шаров по заданной емкости C_0 между ними при $C(x)$ вида

$$C(x) = 0{,}278\varepsilon D\left[1 + \frac{D(4x^2 - D^2)}{2x(4x^2 - D^2 - 2xD)}\right].$$

Ввод: C_0, диаметр шаров D и ε в регистр X.

П9	С/П	П8	С/П	П7	ИП8	П6	1	0	П5
ИП6	ИП5	+	П6	Fx^2	4	×	ИП8	Fx^2	—
П4	ИП8	×	2	÷	ИП6	÷	ИП4	ИП6	2
×	ИП8	×	—	÷	1	+	0	,	2
7	8	×	ИП7	×	ИП8	×	ИП9	—	F$x<0$
10	ИП6	ИП5	—	П6	С/П	ИП5	1	0	÷
П5	БП	10							

В этой программе $x > D$ (при $x = D$ шары соприкасаются и $C(x) \to \infty$) возрастает поразрядно. Для $C_0 = 5$ пФ, $D = 10$ см и $\varepsilon = 1$ получим $x = 12{,}259$ см, нажав пять раз клавишу С/П с перерывами на время выдачи каждой цифры.

7.3. Расчет линий передачи и задержки

Линии передачи могут быть проводные, коаксиальные, полосковые и др. Полосковые несимметричные (рис. 7.9, *а*) и симметричные (рис. 7.9, *б*) линии широко используются в радиоэлектронной аппаратуре. Расчет линий обычно сводится к определению некоторого

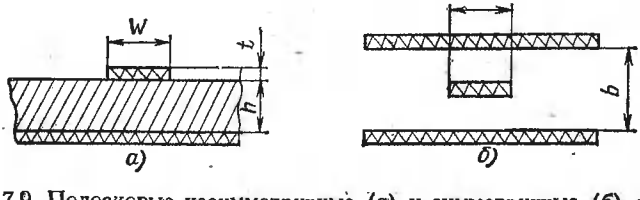

Рис. 7.9. Полосковые несимметричные (*а*) и симметричные (*б*) линии

конструктивного параметра x по заданному входному сопротивлению линии Z_0, а также определению фазовой скорости v. Для длинных линий существенна оценка потерь на единицу геометрической длины линии.

Для некоторых линий

$$x = \frac{D}{d} = \frac{\exp\left(Z_л \sqrt{\varepsilon}/60\right)}{k}, \qquad (7.3)$$

где ε — относительная диэлектрическая проницаемость диэлектрика, d — диаметр внутреннего проводника, а D и k определяются следующим образом:

1. Для линии в виде круглого проводника, расположенного в середине между проводящими плоскостями, расположенными на расстоянии D друг от друга, $k = 1{,}27$.

2. Для линии в виде круглого проводника, помещенного в экран с квадратным сечением и стороной D, $k = 1{,}08$.

3. Для линии в виде круглого проводника, помещенного в экран круглого сечения с диаметром D, $k = 1$ (коаксиальная линия).

4. Для линии в виде круглого проводника, расположенного на биссектрисе прямого угла, образованного двумя полубесконечными проводящими плоскостями, на расстоянии $D/2$ от каждой плоскости, $k = 1{,}4$.

Программа 7.18. Расчет x по формуле (7.3):

ε F√ $Z_л$ × 6 0 ÷ Fe^x k ÷

Вычисление (7.3) по этой программе проводится вручную.

Пример. Для воздушной коаксиальной линии $\varepsilon = 1$, $k = 1$ и $Z_л = 100$ Ом получим $x = D/d = 5{,}2944895$.

Программа 7.19. Расчет ширины полоски W и v/c (где c — скорость света в вакууме) несимметричной полосковой линии (рис. 7.9, *а*) по формулам

$$W = 1{,}25\left[\frac{5{,}98h}{\exp\left[Z_л(\varepsilon + 1{,}41)^{1/2}/87\right]} - t\right],$$

$$v/c = 1/\left[0{,}475\varepsilon + 0{,}67\right)^{1/2}].$$

Ввод: $Z_л$, h, t и ε в регистр X. Вывод результатов: $v/c \to$ PX, $w \to$ $\to$ PY = РД.

П7	С/П	П8	С/П	П9	С/П	П6	1	,	2
5	ИП8	5	,	9	8	×	ИП6	1	,
4	1	+	F√	ИП7	×	8	7	÷	Fe^x
÷	ИП9	—	×	ПД	ИП6	0	,	4	7
5	×	0	,	6	7	+	F√	F1/x	С/П
БП	00								

Для $Z_л = 75$ Ом, $h = 1$ мм, $t = 0{,}05$ мм и $\varepsilon = 4{,}7$ получим $v/c = 0{,}58696727$ и (нажав клавишу XY) $W = 0{,}82501161$ мм.

Программа 7.20. Расчет v/c и ширины полоски W симметричной полосковой линии (рис. 7.8, *б*) по формулам

$$W = 0{,}59\left[\frac{4b}{\exp\left(Z_л\sqrt{\varepsilon}/60\right)} - 2{,}1t\right], \quad v/c = 1/\sqrt{\varepsilon}.$$

Ввод: $Z_л$, b, t и ε в регистр X. Вывод: $v/c \to$ PX, $W \to$ PY.

П7	С/П	П8	С/П	П9	С/П	П6	0	,	5
9	ИП8	4	×	ИП6	F√¯	ПД	ИП7	×	6
0	÷	Fe^x	÷	ИП9	2	,	1	×	—
×	ИПД	F1/x	С/П	БП	00				

Для $Z_л = 50$ Ом, $b = 2{,}5$ мм, $t = 0{,}5$ мм и $\varepsilon = 4{,}7$ получим $v/c = 0{,}46126561$ и (нажав клавишу XY) $W = 0{,}34932508$ мм.

Для ряда линий передачи выражение для $Z_л$ неразрешимо или трудно разрешимо относительно конструктивного параметра x, определение которого является целью расчета. Тогда, задав требуемое значение $Z_{л0}$, его можно найти из решения нелинейного уравнения

$$Z_{л0} - Z_л(x) = 0,$$

например, методом подекадного приближения с выдачей каждой очередной цифры результата нажатием клавиши С/П.

Программа 7.21. Расчет диаметра d внутреннего проводника коаксиальной линии, смещенного относительно внешнего проводника с отверстием, имеющим диаметр D, на расстояние l, из уравнения

$$Z_{л0} - \frac{60}{\sqrt{\varepsilon}} \operatorname{arch} \frac{D^2 + d^2 - 4l^2}{2dD} = 0.$$

Ввод: D, l, $Z_{л0}$ и ε в регистр X.

П5	С/П	П6	С/П	П7	С/П	F√¯	6	0	XY
÷	П4	0	П2	0	.	1	П3	ИП2	ИП3
+	П2	Fx^2	ИП5	Fx^2	+	ИП6	Fx^2	4	×
—	2	÷	ИП2	÷	ИП5	÷	↑	Fx^2	1
/—/	+	F√¯	+	Fln	ИП4	×	ИП7	—	$Fx < 0$
18	ИП2	ИП3	—	П2	С/П	ИП3	1	0	÷
П3	БП	18							

Для $D = 1$ см, $l = 0{,}25$ см, $Z_{л0} = 100$ Ом и $\varepsilon = 1$ получим, нажав четыре раза клавишу С/П (с перерывами на время выдачи очередной цифры результата), $d = 0{,}1403$ см.

Программа 7.22. Расчет параметра $x = a/d$ линии в виде двух одинаковых проводников с диаметром d, расположенных на расстоянии a друг от друга из уравнения

$$Z_{л0} - \frac{120}{\sqrt{\varepsilon}} \operatorname{arch} x = 0.$$

Ввод: $Z_{л0}$ и ε в регистр X.

П9	С/П	F√¯	1	2	0	XY	÷	П8	0
П2	1	П3	ИП2	ИП3	+	П2	↑	Fx^2	1
/—/	+	F√¯	+	Fln	ИП8	×	ИП9	XY	—
$Fx < 0$	13	ИП2	ИП3	—	П2	С/П	ИП3	1	0
÷	П3	БП	1	3					

Для $Z_{л0} = 300$ Ом и $\varepsilon = 1$ получим, нажав клавишу С/П четыре раза, $x = 6{,}132$.

Программа 7.23. Расчет параметра $x = D/d$ линии в виде круглого проводника с диаметром d, расположенного на расстоянии D от проводящей плоскости, из уравнения

$$Z_{л0} - \frac{60}{\sqrt{\varepsilon}} \operatorname{arch} x = 0.$$

Ввод: $Z_{л0}$ и ε в регистр X.

П9	С/П	F√	6	0	XY	÷	П8	0	П2
1	0	П3	ИП2	ИП3	+	П2	↑	Fx²	1
/—/	+	F√	+	Fln	ИП8	×	ИП9	XY	—
Fx < 0	13	ИП2	ИП3	—	П2	С/П	ИП3	1	0
÷	П3	БП	13						

Для $Z_{л0} = 300$ Ом и $\varepsilon = 1$ получим $x = 74{,}2$, нажав клавишу С/П три раза.

Программа 7.24. Расчет расстояния a между двумя проводниками линии в виде двух одинаковых проводников с диаметром d, расположенных на расстоянии D от проводящей плоскости, из уравнения

$$Z_{л0} - \frac{120}{\sqrt{\varepsilon}} \left[\operatorname{arch} \frac{a}{d} - \ln \sqrt{1 + \left(\frac{a}{2D}\right)^2} \right] = 0.$$

Ввод: D, d, $Z_{л0}$ и ε в регистр X.

П9	С/П	П8	С/П	П6	С/П	F√	1	2	0
XY	÷	П5	0	П2	1	П3	ИП2	ИП3	+
П2	ИП8	÷	↑	Fx²	1	/—/	+	F√	+
Fln	ИП2	2	÷	ИП9	÷	Fx²	1	+	F√
Fln	—	ИП5	×	ИП6	XY	—	Fx < 0	17	ИП2
ИП3	—	П2	С/П	ИП3	1	0	÷	П3	БП
17									

Для $D = 1{,}5$ см, $d = 0{,}1$ см, $Z_{л0} = 200$ Ом и $\varepsilon = 1$ получим $a = 0{,}275$ см после четырех нажатий клавиши С/П.

Программа 7.25. Расчет расстояния a между двумя проводниками линии с разными диаметрами d_1 и d_2, расположенными в свободном пространстве, из уравнения

$$Z_{л0} - \frac{60}{\sqrt{\varepsilon}} \operatorname{arch} \frac{4a^2 - d_1^2 - d_2^2}{2d_1 d_2} = 0.$$

Ввод: d_1, d_2, $Z_{л0}$ и ε в регистр X.

П9	С/П	П8	С/П	П7	С/П	F√	6	0	XY
÷	П6	0	П2	1	П3	ИП2	ИП3	+	П2
Fx²	4	×	ИП9	Fx²	—	ИП8	Fx²	—	2

÷	ИП9	÷	ИП8	÷	↑	Fx^2	1	/—/	+
F√	+	Fln	ИП6	×	ИП7	XY	—	Fx < 0	16
ИП2	ИП3	—	П2	С/П	ИП3	1	0	+	П3
БП	16								

Для $d_1 = 0{,}1$ см, $d_2 = 0{,}05$ см, $Z_{л0} = 300$ Ом и $\varepsilon = 1$ получим $a = 0{,}434$, нажав клавишу С/П четыре раза.

Для получения больших $Z_л$ используются коаксиальные линии, внутренний проводник которых выполнен в виде спирали, содержащей n витков на 1 см длины линии. Для этой линии

$$Z_л = Z_{лк} F_W, \quad v = v_к F_W,$$

где $Z_{лк}$ и $v_к$ — волновое сопротивление и фазовая скорость коаксиальной линии с обычным внутренним проводником, имеющим диаметр d (как и у внешнего диаметра спирали), F_W — поправочный коэффициент, имеющий вид

$$F_W = \sqrt{1 + n^2 \frac{(\pi d)^2}{2 \ln (D/d)} \left[1 - \left(\frac{d}{D}\right)^2\right]}. \qquad (7.4)$$

Программа 7.26. Расчет n для линии со спиральным проводником с внешним диаметром d, расположенным внутри проводящего экрана с внутренним диаметром D, из уравнения

$$F_{W_0} - F_W(n) = 0,$$

где $F_W(n)$ определяется выражением (7.4). Ввод: F_{W_0}, d и D в регистр X.

П6	С/П	П8	С/П	П9	÷	Fx^2	1	XY	—
ИП8	Fπ	×	Fx^2	×	2	÷	ИП9	ИП8	+
Fln	÷	П7	0	П2	1	П3	ИП2	ИП3	+
П2	Fx^2	ИП7	×	1	+	F√	ИП6	XY	—
Fx < 0	27	ИП2	ИП3	—	П2	С/П	ИП3	1	0
÷	П3	БП	27						

Для $F_{W_0} = 4$, $d = 0{,}5$ см и $D = 1$ см получим $n = 3{,}35$.

Искусственные линии задержки строятся на основе LC-фильтров нижних частот. По заданным волновому сопротивлению $Z_л$, времени задержки $t_з$ и длительности фронта на выходе линии $t_ф$ определяются число ее звеньев $n = k_1 (t_з/t_ф)^{1,5}$ и значения индуктивности L и емкости C звеньев $C = t_з/k_2 n Z_л$, $L = t_з Z_л/k_2 n$, где $k_1 = 1{,}1$ и $k_2 = 1{,}07$ для линий на фильтрах K-типа и $k_1 = 0{,}94$ и $k_2 = 1{,}2$ для линий на фильтрах M-типа.

Программа 7.27. Расчет параметров n, C и L искусственных линий задержки. Ввод: $k_1 =$ Р1, $k_2 =$ Р2, $Z_л$, $t_з$ и $t_ф$ в регистр X.

После получения n число ячеек округляется в сторону увеличения, уточненное значение вводится в регистр X.

П7	С/П	П9	С/П	П8	÷	1	,	5	XY
Fx^y	ИП1	×	С/П	П6	ИП9	ИП2	÷	ИП6	÷
П5	ИП7	÷	С/П	ИП5	ИП7	×	С/П	БП	00

Для $k_1 = 0{,}94$, $k_2 = 1{,}2$, $Z_л = 600$ Ом, $t_з = 1 \cdot 10^{-6}$ с и $t_ф = 0{,}05 \cdot 10^{-6}$ с получим $n = 84{,}07614$. Округляем до $n = 85$ и набираем уточненное значение n. Получим $C = 1{,}6339869 \cdot 10^{-11}$ Ф и $L = 5{,}8823529 \cdot 10^{-6}$ Гн.

7.4. Расчет выпрямителя

Рассмотрим расчет m-фазной схемы выпрямителя, работающего на конденсатор фильтра (см. мостовую схему для $m = 2$ на рис. 7.10). Угол отсечки θ диодов определяется из решения трансцендентного уравнения

$$\operatorname{tg}\theta - \theta = \pi r / m R_н = A, \tag{7.5}$$

где r — внутреннее сопротивление открытых вентилей и обмотки трансформатора, $R_н$ — сопротивление нагрузки.

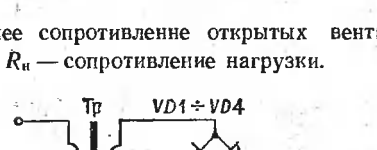

Рис. 7.10. Мостовой выпрямитель

После нахождения θ определяются вспомогательные коэффициенты:

$$K(\theta) = \sin\theta - \theta\cos\theta, \quad F(\theta) = \pi(1 - \cos\theta)/K(\theta),$$

$$B(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2}\cos\theta}, \quad D(\theta) = \frac{\sqrt{\pi\,[\theta\,(1 + \cos 2\theta/2) - 3\sin 2\theta/4]}}{K(\theta)},$$

с помощью которых определяются требуемое напряжение $U_2 = U_0 B(\theta)$ на вторичной обмотке трансформатора, пиковое значение тока вентиля $I_{вm} = I_0 F(\theta)/m$, действующее значение тока вентиля $I_в = D(\theta) I_0/m$, ток вторичной обмотки $I_2 = \sqrt{2}\, I_в$ и емкость конденсатора фильтра $C = \left(\frac{1}{m} + \frac{\theta}{\pi}\right)/2k_{пв} f R_н$, где f — частота сети и $k_{пв}$ — коэффициент пульсаций выходного напряжения.

Программа 7.28. Расчет выпрямителя, работающего на емкость. Ввод: r = P1, $R_н$ = P2, m = P3, f = P4, $k_{пв}$ = P5 и ε = P6. Вы-

вод результатов: $\theta \to$ P0, $K(\theta) =$ PA, $B(\theta) \to$ PB, $F(\theta) \to$ PC, $D(\theta) \to$ PД и $C \to$ PX. Переключатель Р — Г в положении Р.

ИП1	ИП2	÷	ИП3	÷	Fπ	×	П9	0	П0
1	П8	ИП0	ИП8	+	П0	Ftg	ИП0	—	ИП9
—	$Fx \geqslant 0$	12	ИП0	ИП8	—	П0	ИП8	3	÷
П8	ИП6	—	$Fx < 0$	12	ИП0	F sin	ИП0	F cos	П7
ИП0	×	—	ПА	2	$F\sqrt{}$	ИП7	×	$F1/x$	ПВ
1	ИП7	—	Fπ	×	ИПА	÷	ПС	ИП0	2
×	П8	F cos	2	÷	1	+	ИП0	×	3
ИП8	F sin	×	4	÷	—	Fπ	×	$F\sqrt{}$	ИПА
÷	ПД	ИП3	$F1/x$	ИП0	Fπ	÷	+	2	÷
ИП4	÷	ИП2	÷	ИП5	÷	С/П			

Пусть $r = 100$ Ом, $R_н = 1000$ Ом, $m = 2$, $f = 50$ Гц, $k_{пв} = 0{,}1$, $U_0 = 150$ В и $I_0 = 0{,}15$ А. Введя первые пять параметров и задав $\varepsilon = 10^{-4}$, получим: $C = 7{,}29187 \cdot 10^{-5}$ Ф, $\theta = 0{,}7200122$ рад, $K(\theta) = 0{,}11809036$, $B(\theta) = 0{,}94055459$, $F(\theta) = 6{,}6029987$ и $D(\theta) = 2{,}2940527$. Следовательно, $U_2 = 150 \cdot 0{,}94055459 = 141{,}08319$ В, $I_{вm} = 0{,}15 \cdot 6{,}6029987/2 = 0{,}4952249$ А, $I_в = 0{,}15 \cdot 2{,}2940527/2 = 0{,}17205395$ А и $I_2 = \sqrt{2}\, I_в = 0{,}24332101$ А.

7.5. Пересчет параметров транзисторов

Нередко нужно найти физические параметры транзистора (сопротивления эмиттера $r_э$, базы $r_б$, коллектора $r_к$ и коэффициент передачи тока эмиттера $a = r_m/r_к$) по h-параметрам транзистора, характеризующим его как четырехполюсник. Пересчет ведется по формулам табл. 7.3 [20] и реализуется одной программой.

Таблица 7.3

Параметр	Схема с общей базой	Схема с общим эмиттером
$r_э$	$h_{11б} - (1 + h_{21б})\, h_{12б}/h_{22б}$	$h_{12э}/h_{22э}$
$r_б$	$h_{12б}/h_{22б}$	$h_{11э} - h_{12э}\,(1 + h_{21э})/h_{22э}$
$r_к$	$(1 - h_{12б})/h_{22б}$	$(1 + h_{21э})/h_{22э}$
r_m	$-(h_{12б} + h_{21б})/h_{22б}$	$(h_{12э} + h_{21э})/h_{22э}$
a	$-(h_{12б} + h_{21б})/(1 - h_{12б})$	$(h_{12э} + h_{21э})/(1 + h_{21э})$

Программа 7.29. Расчет физических параметров по h-параметрам. Ввод: $h_{11} =$ PA, $h_{12} =$ PB, $h_{21} =$ PC, $h_{22} =$ PД и код (0 для схемы с общей базой и 1 с общим эмиттером) в регистр X. Вывод результатов: $r_б \to$ P1, $r_э \to$ P2, $r_к \to$ P3, $r_m \to$ P4 и $a \to$ P6 = PX.

П5	ИПА	1	ИПС	+	ИПВ	×	ИПД	÷	—
П2	ИПВ	ИПД	÷	П1	ИПВ	ИПС	+	П9	ИПД

÷	П4	ИП5	Fx=0	44	1	ИПВ	—	ИПД	÷
П3	ИП4	/—/	П4	ИП9	/—/	1	ИПВ	—	÷
П6	С/П	БП	00	ИП1	ИП2	ХУ	П2	ХУ	П1
1	ИПС	+	ИПД	÷	П3	ИП9	1	ИПС	+
÷	П6	БП	41						

Пример. Для $h_{11б} = 25$ Ом, $h_{12б} = 0{,}25 \cdot 10^{-3}$, $h_{21б} = -0{,}98$ и $h_{22б} = 3 \cdot 10^{-6}$ См, введя код 0 = РХ, получим $r_б = 83{,}333333$ Ом, $r_э = 23{,}333333$ Ом, $r_к = 333\,250$ Ом, $r_m = 326583{,}33$ Ом и $a = 0{,}97999499$. Для $h_{11э} = 2800$ Ом, $h_{12э} = 2 \cdot 10^{-3}$, $h_{21э} = 60$ и $h_{22э} = 5 \cdot 10^{-5}$ Ом, введя код 1 = РХ, получим $r_б = 360$ Ом, $r_э = 40$ Ом, $r_к = 1\,220\,000$ Ом, $r_m = 1\,200\,040$ Ом и $a = 0{,}98363934$.

Обратное преобразование физических параметров в h-параметры проводится по формулам [20], приведенным в табл. 7.4.

Таблица 7.4

Параметр	Схема		
	С общим эмиттером	С общей базой	С общим коллектором
h_{11}	$r_б + \frac{r_э r_к}{r_э + r_к - a r_к}$	$r_э + \frac{(1-a) r_б r_к}{r_б + r_к}$	$r_б + \frac{r_э r_к}{r_э + r_к - a r_к}$
h_{12}	$\frac{r_э}{r_э + r_к - a r_к}$	$\frac{r_б}{r_к + r_б}$	$\frac{r_к - a r_к}{r_э + r_к - a r_к}$
h_{21}	$\frac{a r_к - r_э}{r_э + r_к - a r_к}$	$-\frac{r_б + a r_к}{r_б + r_к}$	$-\frac{r_к}{r_э + r_к - a r_к}$
h_{22}	$\frac{1}{r_э + r_к - a r_к}$	$\frac{1}{r_к + r_б}$	$\frac{1}{r_э + r_к - a r_к}$

Программа 7.30. Расчет h-параметров биполярного транзистора по физическим параметрам. Ввод: $r_б$ = Р1, $r_э$ = Р2, $r_к$ = Р3 и a = Р4. Вывод результатов: $h_{11} \to$ РА, $h_{12} \to$ РВ, $h_{21} \to$ РС = РХ и $h_{22} \to$ РД. При первом пуске получаем параметры схемы с общим эмиттером, при втором — схемы с общим коллектором и при третьем — схемы с общей базой.

ИП1	ИП3	+	F1/x	П9	ИП2	ИП3	+	ИП3	ИП4
×	П7	—	F1/x	П8	ПД	ИП2	×	ПВ	ИП2
ИП3	ИП8	×	×	ИП1	+	ПА	ИП7	ИП2	—
ИП8	×	ПС	С/П	ИП3	ИП7	—	ИП8	×	ПВ
ИП3	/—/	ИП8	×	ПС	С/П	1	ИП4	—	ИП1
×	ИП3	×	ИП9	×	ИП2	+	ПА	ИП9	ПД
ИП1	×	ПВ	ИП1	ИП4	ИП3	×	+	ИП9	/—/
×	ПС	С/П							

Пример. Для $r_б = 400$ Ом, $r_э = 25$ Ом, $r_к = 10^6$ Ом и $a = 0{,}985$ получим при первом нажатии клавиши С/П $h_{11э} = 2063{,}8935$ Ом, $h_{12э} = 1{,}6638935 \cdot 10^{-3}$, $h_{21э} = 65{,}55574$ и $h_{22э} = 6{,}655574 \cdot 10^{-5}$ См. При втором нажатии клавиши С/П получим $h_{11к} = 2063{,}8935$ Ом, $h_{12к} = 0{,}9983361$, $h_{21к} = -66{,}55574$ и $h_{22к} = 6{,}655574 \cdot 10^{-5}$ См. При третьем нажатии клавиши С/П получим $h_{11б} = 30{,}997601$ Ом, $h_{12б} = 3{,}9984006 \cdot 10^{-4}$, $h_{21б} = -0{,}98500599$ и $h_{22б} = 9{,}9960015 \cdot 10^{-7}$ См.

7.6. Расчет малосигнальных усилительных каскадов

На рис. 7.11 представлены три упрощенные схемы усилительных каскадов на биполярных транзисторах. Цепи питания (по постоянному току) не показаны. Эквивалентные схемы этих каскадов даны на рис. 7.12.

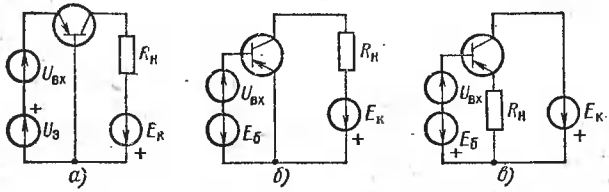

Рис. 7.11. Упрощенные схемы каскадов с общей базой (*а*), общим эмиттером (*б*) и общим коллектором (*в*)

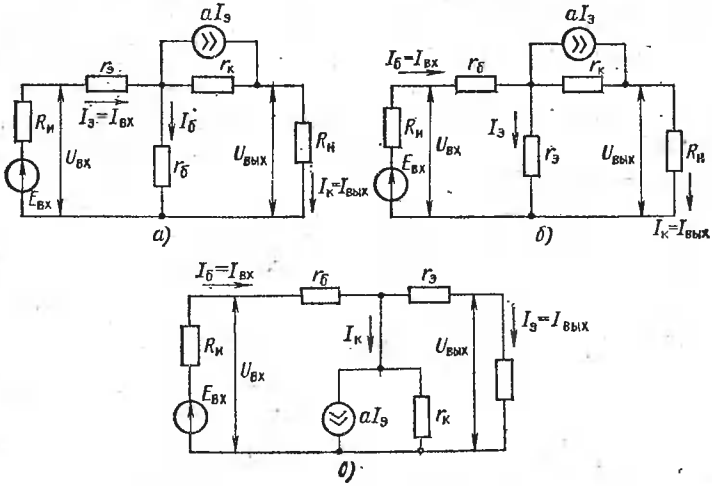

Рис. 7.12. Эквивалентные схемы каскадов с общей базой (*а*), общим эмиттером (*б*) и общим коллектором (*в*)

Основными параметрами усилителей в области средних частот являются входное сопротивление $R_{вх} = U_{вх}/I_{вх}$, коэффициент усиления по току $K_I = I_{вых}/I_{вх}$, коэффициент усиления по напряжению

$K_U = U_{вых}/U_{вх}$, сквозной коэффициент усиления по напряжению $K_E = U_{вых}/E_{вх}$ и выходное сопротивление $R_{вых} = \Delta U_{вых}/\Delta I_{вых}$ при $\Delta I_{вых}$, задаваемом изменением нагрузки. Рассмотрим расчет этих параметров [20].

Для каскада с общей базой (рис. 7.11, *а* и рис. 7.12, *а*):

$$R_{вх} = r_э + r_б \frac{(1-a)\, r_к + R_н}{r_к + r_б + R_н}, \quad K_I = \frac{a r_к + r_б}{r_к + r_б + R_н},$$

$$K_U = \frac{(a r_к + r_б)\, R_н}{r_э (r_к + r_б + R_н) + r_б r_к (1-a) + r_б R_н},$$

$$K_E = \frac{(a r_к + r_б)\, R_н}{(R_и + r_э)(r_к + r_б + R_н) + r_б r_к (1-a) + r_б R_н},$$

$$R_{вых} = r_к + r_б \left(1 - \frac{a r_к + r_б}{r_э + r_б + R_н}\right).$$

Программа 7.31. Расчет параметров каскада с общей базой. Ввод: $r_б$ = Р1, $r_э$ = Р2, $r_к$ = Р3, $R_и$ = Р4, $R_н$ = Р5 и a = Р6. Вывод результатов: $K_E \to$ Р0 = РХ, $K_U \to$ РА, $K_I \to$ РВ, $R_{вх} \to$ РС и $R_{вых} \to$ РД.

ИП6	ИП3	×	ИП1	+	П7	ИП3	ИП1	ИП5	+
+	П8	÷	ПВ	1	ИП6	−	ИП3	×	ИП5
+	П9	ИП1	×	ИП4	ИП2	+	ИП8	×	+
F1/*x*	ИП7	×	ИП5	×	П0	ИП7	ИП5	×	ИП2
ИП8	×	ИП1	ИП9	×	+	÷	ПА	ИП9	ИП8
÷	ИП1	×	ИП2	+	ПС	1	ИП7	ИП2	ИП1
+	ИП4	+	÷	−	ИП1	×	ИП3	+	ПД
ИП0	С/П								

Найдем параметры усилителя на транзисторе, имеющем параметры: $r_б = 400$ Ом, $r_э = 25$ Ом, $r_к = 10^6$ Ом и $a = 0{,}98$, если $R_н = 100$ Ом и $R_н = 5000$ Ом. При этих данных получим $K_U = 139{,}51899$, $K_E = 36{,}130459$, $K_I = 0{,}97513427$, $R_{вх} = 34{,}94629$ Ом и $R_{вых} = 253428{,}6$ Ом.

Для каскада с общим эмиттером (рис. 7.11, *б* и рис. 7.12, *б*):

$$R_{вх} = r_б + \frac{r_э (r_к + R_н)}{r_к (1-a) + r_э + R_н}, \quad K_I = -\frac{(a r_к - r_э)}{r_к (1-a) + r_э + R_н},$$

$$K_U = \frac{-(a r_к - r_э)\, R_н}{r_э (r_к + R_н) + r_б [(1-a) r_к + r_э + R_н]},$$

$$K_E = \frac{-(a r_к - r_э)\, R_н}{r_э (r_к + R_н) + (R_и + r_б)[(1-a) r_к + r_э + R_н]},$$

$$K_{вых} = r_к (1-a) + r_э \left(1 + \frac{a r_к + r_э}{r_э + r_б + R_и}\right).$$

Программа 7.32. Расчет параметров каскада с общим эмиттером. Ввод и вывод результатов см. в программе 7.31.

ИП6	ИП3	×	ИП2	—	П7	1	ИП6	—	ИП3
×	ИП2	+	ИП5	+	П8	ИП4	ИП1	+	П9
ИП8	×	ИП3	ИП5	+	ИП2	×	ПС	+	F1/x
ИП5	ИП7	/—/	×	ПВ	×	П0	ИПВ	ИП1	ИП8
×	ИПС	+	÷	ПА	ИП7	/—/	ИП8	÷	ПВ
ИП2	ИП5	ИП3	+	×	ИП8	÷	ИП1	+	ПС
ИП3	ИП6	×	ИП2	—	ИП9	ИП2	+	÷	1
+	ИП2	×	1	ИП6	—	ИП3	×	+	ПД
ИП0	С/П								

Найдем параметры каскада с общим эмиттером при $r_б = 400$ Ом, $r_э = 25$ Ом, $r_к = 10^6$ Ом, $R_и = 1000$ Ом, $R_н = 5000$ Ом и $a = 0{,}98$. Для этих данных получим $K_U = -139{,}45851$, $K_E = -81{,}447388$, $K_I = -39{,}15984$, $R_{вх} = 1403{,}996$ Ом и $R_{вых} = 37217{,}544$ Ом.

Для каскада с общим коллектором (рис. 7.11, *в* и рис. 7.12, *в*):

$$R_{вх} = r_б + \frac{r_к (r_э + R_н)}{r_к (1 - a) + r_э + R_н}, \qquad K_I = \frac{r_к}{r_к (1 - a) + r_э + R_н},$$

$$K_U = \frac{r_к R_н}{r_к (r_э + R_н) + r_б [r_к (1 - a) + r_э + R_н]},$$

$$K_E = \frac{r_к R_н}{r_к (r_э + R_н) + (r_б + R_н) [r_к (1 - a) + r_э + R_н]},$$

$$R_{вых} = r_э + (r_б + R_н) \frac{r_к (1 - a)}{r_к + r_б + R_и}.$$

Программа 7.33. Расчет параметров каскада с общим коллектором. Ввод и вывод результатов см. в программе 7.31.

1	ИП6	—	ИП3	×	П8	ИП2	ИП5	+	П9
+	П7	ИП1	ИП4	+	ПД	×	ИП9	ИП3	×
ПВ	+	ИП3	ИП5	×	ПА	XY	÷	П0	ИПА
ИП1	ИП7	×	ИПВ	+	÷	ПА	ИП3	ИП7	÷
ПВ	ИП3	ИП9	×	ИП7	÷	ИП1	+	ПС	ИПД
ИП3	×	1	ИП6	—	×	ИПД	ИП3	+	÷
ИП2	+	ПД	ИП0	С/П					

Найдем параметры каскада с общим коллектором при $r_б = 400$ Ом, $r_э = 25$ Ом, $r_к = 10^6$ Ом, $R_и = 10^4$ Ом, $R_н = 500$ Ом и $a = 0{,}98$. Получим $K_U = 0{,}93771684$, $K_E = 0{,}67708474$, $K_I = 48{,}421071$, $R_{вх} = 25978{,}562$ Ом и $R_{вых} = 230{,}85906$ Ом.

7.7. Моделирование нелинейных цепей второго порядка

В радиоэлектронике важное место занимают нелинейные цепи, описываемые нелинейными дифференциальными уравнениями второго порядка. К ним относятся релаксационные и *LC*-генераторы,

Микро-ЭВМ являются удобным инструментом для математического моделирования таких цепей (рис. 7.13, *а*).

Цепь рис. 7.13, *а* описывается системой дифференциальных уравнений

$$\frac{di}{dt}=\frac{E-iR-u}{L}, \tag{7.6}$$

$$\frac{du}{dt}=\frac{i-I(u)}{C}, \tag{7.7}$$

относительно переменных состояния — тока i и напряжения u. Форма колебаний в первую очередь зависит от нелинейной зависимости $I(u)$, описывающей статическую вольтамперную характеристику нелинейного прибора НЭ (рис. 7.13, *б*). Далее предполагается, что

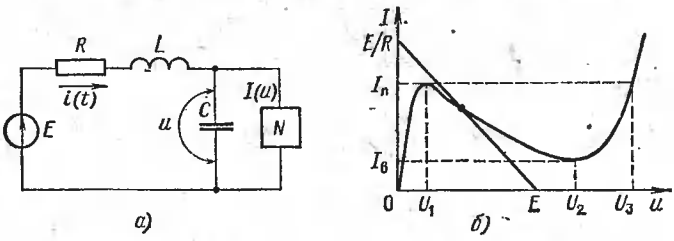

Рис. 7.13. Цепь с нелинейным элементом (*а*) и его *N*-образная вольт-амперная характеристика (*б*)

инерционность НЭ учитывается его емкостью, составляющей часть общей емкости C.

Пусть в качестве НЭ применен туннельный диод, *N*-образная вольт-амперная характеристика которого описывается выражением

$$I(u)=Aue^{-\alpha u}+D\left(e^{\beta u}-1\right), \tag{7.8}$$

где параметры A, α, D и β выражаются через напряжение U_1 при пике тока $I_п$, обратный ток I_0 и тепловой потенциал $\varphi_т$ в соответствии с формулами $A=eI_п/U_1$; $\alpha=1/U_1$; $D=I$ и $\beta=1/m\varphi_т$, где m — поправочный множитель ($m\approx 2$).

Используя программу решения системы из двух дифференциальных уравнений (7.6) и (7.7) с учетом (7.8), получим программу 7.34, позволяющую найти зависимость $i(t)$ и $u(t)$.

Программа 7.34. Расчет зависимостей $i(t)$ и $u(t)$ автоколебательного релаксатора на туннельном диоде. Ввод: $A=$ Р2, $\alpha=$ Р3, $D=$ Р4, $\beta=$ Р5, $E=$ Р6, $R=$ Р7, $L=$ Р8, $C=$ Р9, $i_0=$ РВ, $u_0=$ РС, $\Delta t=h=$ РД и $t_0=$ РА. Вывод результатов: $t_n\to$ РХ, $i(t_n)\to$ РУ и $u(t_n)\to$ РС.

ИП6	ИПВ	ИП7	×	—	ИПС	—	ИП8	÷	ИПД
×	ИПВ	+	П0	ИПВ	ИПС	ИП3	/—/	×	Fe^x
ИПС	×	ИП2	×	—	ИП5	ИПС	×	Fe^x	1

—	ИП4	×	—	ИП9	÷	ИПД	×	ИПС	+
ПС	ИП0	ПВ	ИПА	ИПД	+	ПА	С/П	БП	00

При $A = 0{,}2718$ В (диод с $I_s = 10 \cdot 10^{-3}$ А и $U_1 = 0{,}1$ В), $\alpha = 10$ 1/В, $D = 1 \cdot 10^{-6}$ А, $\beta = 20$ 1/В, $E = 0{,}3$ В, $R = 10$ Ом, $L = 100 \cdot 10^{-9}$ Гн, $C = 10 \cdot 10^{-12}$ Ф, $i_0 = 0$, $u_0 = 0$, $t_0 = 0$ и $\Delta t = 0{,}1 \cdot 10^{-9}$ с, нажимая клавиши С/П, XY и ИПС, будем получать следующие данные:

t_n, с	$i(t_n)$, А	$u(t_n)$, В
$1 \cdot 10^{-10}$	$3 \cdot 10^{-4}$	0
$2 \cdot 10^{-10}$	$5{,}97 \cdot 10^{-4}$	$3 \cdot 10^{-3}$
$3 \cdot 10^{-10}$	$8{,}8803 \cdot 10^{-4}$	$1{,}0569807 \cdot 10^{-3}$
$4 \cdot 10^{-10}$	$1{,}1780927 \cdot 10^{-3}$	$7{,}0946111 \cdot 10^{-3}$
$5 \cdot 10^{-10}$	$1{,}4592172 \cdot 10^{-3}$	$9{,}130329 \cdot 10^{-4}$ и т. д.

Внимательный просмотр значений $u(t_n)$ обнаруживает характерную для моделирования таких систем периодическую численную

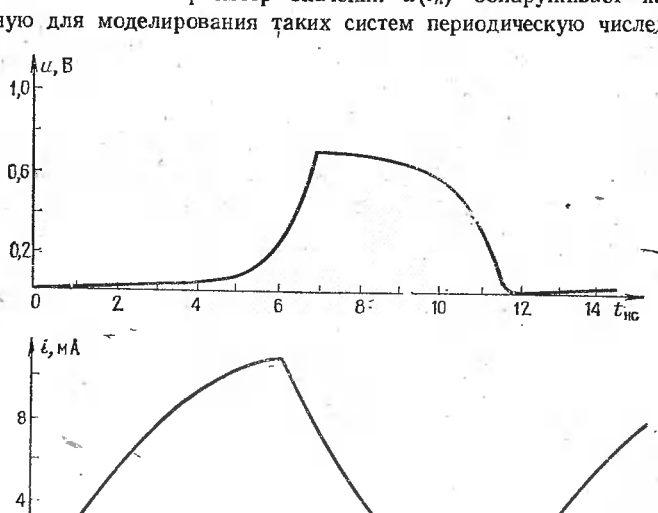

Рис. 7.14. Временные зависимости $i(t)$ (внизу) и $u(t)$ (вверху) релаксатора (рис. 7.13, а) на туннельном диоде

неустойчивость решения. При выбранном Δt она проявляется только тогда, когда рабочая точка туннельного диода попадает на крутые участки вольтамперной характеристики. Усредняя значения $u(t_n)$, получим приведенные на рис. 7.14 графики зависимостей $i(t)$ и $u(t)$, которые хорошо описывают реальную форму колебаний. Для уменьшения численной неустойчивости следует уменьшать шаг Δt.

Приложение 1

ИНСТРУКЦИЯ ПО ПРИМЕНЕНИЮ ВСТРОЕННОЙ БИБЛИОТЕКИ ПРОГРАММ ПОЛЬЗОВАТЕЛЯ ДЛЯ МИКРОКАЛЬКУЛЯТОРОВ TI-58C/59

Программа *ML*-01. Диагностика, статистические вычисления, линейная регрессия и управление принтером. Диагностика проводится командами 2nd Pgm 01 SBR = (спустя примерно 15 с исправный микрокалькулятор выдает цифру 1). Контроль модуля *ML* библиотеки программ проводится командами 2nd Pgm 01 SBR 2nd R/S(должны получить цифру 1). При вводе операций 2nd Pgm 01 SBR CLR калькулятор готов к проведению линейного регрессивного анализа. После ввода операторов 2nd Pgm 01 STO 00 подключенный к микрокалькулятору принтер готов к работе.

Статистические расчеты, вычисление коэффициентов b_0 и b_1 линейной регрессии (§ 5.13) и коэффициента парной корреляции выполняются по программе *ML*-01 в следующем порядке:

1. Подготовка к вычислениям задается командами 2nd Pgm 01 SBR CLR.

2. Вводятся значения x_1, y_1, x_2, y_2, ..., x_N, y_N в следующем порядке для каждой пары чисел x_i и y_i: x_i $x \rightleftarrows t$ y_i 2nd $\Sigma+$.

3. Находим среднее значение $\bar{y}$, нажав клавиши 2nd $\bar{x}$, и среднее значение $\bar{x}$, нажав клавишу $x \rightleftarrows t$.

4. Находим стандартное среднеквадратическое отклонение σ_y, нажав клавиши INV 2nd $\bar{x}$, и σ_x, нажав клавишу $x \rightleftarrows t$.

5. Находим дисперсию D_y, нажав клавиши 2nd Op 11, и дисперсию D_x, нажав клавишу $x \rightleftarrows t$.

6. Находим параметр b_0 линейной регрессии, нажав клавиши 2nd Op 12, затем, нажав клавишу $x \rightleftarrows t$, находим параметр b_1.

7. Коэффициент корреляции $r = m\sigma_x/\sigma_y$ находим, нажав клавиши 2nd Op 13.

8. Для значения x находим $y = b_0 + b_1x$, нажав клавиши 2nd Op 14.

9. Для значения y находим $x = (y - b_0)/b_1$, нажав клавиши 2nd Op 15.

Для массива $y_i(x_i)$: 2(0,95), 4,05(2,1), 5,8(3), 8,1(4,1) и 9,2(4,9) находим $b_0 = 0{,}2112006713$, $b_1 = 1{,}86671074$, $r = 0{,}9987280191$. Для $x = 5$ получим $y = 9{,}544754373$, а для $y = 5$ получим $x = 2{,}565367641$.

В программе *ML*-01 заняты регистры $R01 = \sum y$, $R02 = \sum y^2$, $R03 = N$, $R04 = \sum x$, $R05 = \sum x^2$, $R06 = \sum xy$, $R09$ и регистр t.

Программа *ML*-02. Вычисление детерминанта матрицы A, вычисление обратной матрицы A^{-1} и решение системы линейных уравнений $Ax = B$.

Размер матрицы A $(n \times n)$	2×2	3×3	4×4	5×5	6×6	7×7	8×8	9×9
Максимальный номер регистра для вычисления A^{-1}	13	19	27	37	49	63	79	97
Максимальный номер регистра для решения системы уравнений $Ax = B$	15	22	31	42	55	70	87	—

Вычисление детерминанта матрицы

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

производится командами 2nd Pgm 02 n A 1 B

a_{11} R/S a_{21} R/S ... a_{n1} R/S a_{12} R/S a_{22} R/S
... a_{n2} R/S a_{1n} R/S a_{2n} R/S ... a_{nn} R/S C.

Пример. Для матрицы

$$A = \begin{vmatrix} 4 & 8 & 0 \\ 8 & 8 & 8 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$(n = 3)$ получим детерминант $|\Delta| = 96$.

Решение системы уравнений проводится после вычисления детерминанта с помощью команд 1 D b_1 R/S b_2 R/S ... b_n R/S CLR E 1 2nd A′ R/S (получаем x_1) R/S (получаем x_2) R/S (получаем x_3) ... Для системы уравнений

$$\begin{vmatrix} 4 & 8 & 0 \\ 8 & 8 & 8 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 \\ 4 \\ 6 \end{vmatrix}$$

получим $x_1 = 4$, $x_2 = -1{,}5$ и $x_3 = -2$.

Вычисление обратной матрицы A^{-1} проводится с помощью команд CLR 2nd B′ 1 2nd C′ R/S (получаем a_{11}^{-1}) R/S (получаем a_{21}^{-1}) ... R/S (получаем a_{n1}^{-1}) и т. д. (выводим элементы других столбцов).

В программе заняты регистры $R01 \div R08$ ($\Delta = R06$, $n = R07$) и следующие до указанного выше максимального номера.

Программа *ML*-03. Сложение и умножение матриц. Первая часть программы вычисляет сумму матриц A и B, умноженных на постоянные множители λ_1 и λ_2:

$$\lambda_1 \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{vmatrix} + \lambda_2 \begin{vmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & \dots & b_{mn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c_{11} & \dots & c_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ c_{m1} & \dots & c_{mn} \end{vmatrix}.$$

Ввод: 2nd Pgm 03 m A n A 1 B a_{11} R/S a_{21} R/S ... a_{m1} R/S a_{12} R/S a_{22} R/S ... a_{mn} R/S 1 C (ввод матрицы B) λ_1 D λ_2 D CRL E 1 2nd A′ R/S R/S ... R/S (выводим по столбцам элементы матрицы C). Работу программы можно проверить на примере:

$$1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 5 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -6 & 3 & 2 \\ -5 & -4 & -7 \end{vmatrix}.$$

Вторая часть программы служит для вычисления произведения двух матриц:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} b_{11} & \dots & b_{1p} \\ \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & \dots & b_{np} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c_{11} & \dots & c_{1p} \\ \dots & \dots & \dots \\ c_{m1} & \dots & c_{mp} \end{vmatrix}.$$

Повторяем операции ввода элементов матрицы A. Далее вводим команды 1 2nd B′ b_{11} R/S ... b_{np} R/S (ввод по столбцам матрицы B) 1 2nd D′ R/S R/S ... R/S (вывод по столбцам элементов матрицы C). Заняты регистры $R01 \div R08$ ($m = R03$, $n = R04$, $\lambda_1 = R05$, $\lambda_2 = R06$) и последующие с номерами до R_{2mn+7} — для первой части программы и до $R_{mn+2n+7}$ — для второй части программы.

Программа *ML*-04. Действия с комплексными числами $X = a + jb$ и $Y = c + jd$. Результат — комплексное число $Z = e + jg$. Ввод: 2nd Pgm 04 a A b A c 2nd A′ d 2nd A′. Далее вводятся следующие команды.

Действия, выполняемые над комплексными числами	$X+Y$	$X-Y$	$X \times Y$	X/Y	Y^X	$\log_Y X$	$\sqrt[X]{Y}$
Команды для получения e	B	2nd B′	C	2nd C′	D	2nd D′	E
Команды для получения g	$x \gtrless t$	$x \gtrless t$	$x \gtrless t$	$x \gtrless t$	$x \gtrless t$	$x \gtrless t$	$x \gtrless t$

Завершение вычислений: 2nd E′ (ввод новых X и Y).

Пример. Вычислить

$$[(2 + j \cdot 3)(1 - j \cdot 1)]^{(1+j \cdot 1)}.$$

Вводим команды 2nd Pgm 04 2 A 3 A 1 2nd A′ 1 +/− 2nd A′ C $x \rightleftarrows t$ (получаем результат умножения комплексных чисел, заключенных в квадратные скобки) 2nd E′ 1 A 1 A D (получаем $e = -1{,}058423508$) $x \rightleftarrows t$ (получаем $g = 4{,}09577726$).

В программе заняты регистры $R01 \div R04$ (числа a, b и результаты e и g заносятся в регистры $R01$ и $R02$).

Программа *ML*-05. Функции комплексного переменного $X = a + jb$. Результат $Y = c + jd$. Ввод: 2nd Pgm 05 a A b A. Далее вводятся следующие команды.

Вычисление полярного радиуса r и угла θ: B (получаем r) $x \rightleftarrows t$ (получаем θ).

Функции комплексного переменного	X^2	$\sqrt{X}$	$1/X$	$\ln X$	e^X
Команды для получения c	C	D	E	2nd A′	2nd B′
Команды для получения g	$x \rightleftarrows t$	$x \rightleftarrows t$	$x \rightleftarrows t$	$x \rightleftarrows t$	$x \rightleftarrows t$

Пример. Вычислить $e^{(2+j3)}$. Вводим команды 2nd Pgm 05 2 A 3 A 2nd B′ (получаем $c = -7{,}315110095$) $x \rightleftarrows t$ (получаем $d = 1{,}042743656$). Распределение регистров памяти см. в программе *ML*-04.

Программа *ML*-06. Вычисление тригонометрических и обратных тригонометрических функций комплексного переменного $X = a + jb$. Результат $Z = c + jd$. Ввод: 2nd Pgm 06 a A b A. Далее вводятся следующие команды.

Тригонометрические и обратные тригонометрические функции комплексного переменного	Команды для получения c	Команды для получения g
$\sin X$	B	$x \rightleftarrows t$
$\cos X$	C	$x \rightleftarrows t$
$\mathrm{tg}\, X$	D	$x \rightleftarrows t$
$\arcsin X$	2nd B′ *)	$x \rightleftarrows t$
$\arccos X$	2nd C′ **)	$x \rightleftarrows t$
$\mathrm{arctg}\, X$	2nd D′	$x \rightleftarrows t$

*) Если $b < 0$, вводятся операторы +/− STO 02.
**) Если $b < 0$, вводятся операторы +/− STO 01.

Пример. Вычислить $\sin(3 + j \cdot 2)$. Вводим команды 2nd Pgm 06 3 A 2 A B (получаем $c = 0{,}5309210863$) $x \rightleftarrows t$ (получаем $d = -3{,}5905645$). Распределение регистров памяти см. в программе *ML*-04.

Программа *ML*-07. Вычисление значений полинома

$$P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n.$$

Ввод: 2nd Pgm 07 n A 0 B a_0 R/S a_1 R/S ... a_n R/S x C (получаем $P(x)$).

Пример. Вычислить значение полинома

$$P(x) = 0 + 1x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4$$

для $x = 1$ и $x = 2$. Вводим команды 2nd Pgm 07 4 A 0 B 0 R/S 1 R/S 2 R/S 3 R/S 4 R/S 1 (значение x) C (получаем $P(1) = 10$) 2 (новое значение x) C (получаем $P(2) = 98$).

Программа *ML*-08. Вычисление корней уравнения $F(x) = 0$ с погрешностью ε в интервале $[a, b]$ изменения x с начальным шагом Δx. Вычисление $F(x)$ оформляем подпрограммой, помеченной меткой Lbl A′ и заканчивающейся оператором INVSBR. Текущее значение x заносится в начало подпрограммы. Ввод: данные $F(x)$ 2nd Pgm 08 a A b B Δx C ε D E E ... (нажимаем клавишу E каждый раз для выдачи нового значения корня до тех пор, пока не получим число $9.9999999 \cdot 10^{99}$ (переполнение, означающее, что корней больше нет).

Пример. Найти корни уравнения $F(x) = 4 \sin x + 1 - x$ в интервале $[-3,3]$ с начальным шагом $\Delta x = 0,5$ и погрешностью $\varepsilon = 0,01$. Решение состоит из следующих частей.

1. Ввод подпрограммы вычисления $F(x)$: RST LRN 2nd Lbl 2nd A′ (STO 10 2nd sin × 4 + 1 − RCL 10) INVSBR LRN.
2. Ввод программы *ML*-08: 2nd Pgm 08.
3. Установка значений x в радианах: 2nd Rad.
4. Ввод исходных данных a, b, Δx и ε: 3 +/− A 3 B . 5 C . 01 D E (получаем $x_1 = -2,20703125$) E (получаем $x_2 = -0,33984375$) E (получаем $x_3 = 2,69921875$) E (получаем число $9.9999999 \cdot 10^{99}$, т. е. больше корней нет).

Распределение регистров памяти: a, $a + \Delta x = R01$, $b = R02$, $\Delta x = R03$, $R04 \div R08$ заняты, $\varepsilon = R09$, остальные регистры свободны.

Программа *ML*-09. Численное интегрирование аналитически заданной функции $f(x)$ методом Симпсона. Подынтегральная функция $f(x)$ в выражении

$$I = \int_a^b f(x)\,dx$$

должна вычисляться подпрограммой, начинающейся меткой Lbl A′ и заканчивающейся оператором INVSBR (текущее значение x заносится в начало подпрограммы). Далее ввод выполняется командами: 2nd Pgm 09 a A b B n C D (получаем I), где n число интервалов разбиения $[a, b]$.

Пример. Вычислить

$$I = \int_0^1 \sqrt{2x+1}\, dx$$

при $n = 8$. Вводим подпрограмму вычисления $f(x) = \sqrt{2x+1}$: RST LRN 2nd Lbl 2nd A′ × 2 + 1 = $\sqrt{x}$ INVSBR LRN. Далее вводим программу *ML*-09: 2nd Pgm 09 0 (ввод a) A 1 (ввод b) B 8 (ввод n) C D (получаем $I = 1{,}398713896$).

Использование регистров памяти: $a = R01$, $b = R02$, $h = R03$, $I = R04$, $n = R05$ (остальные регистры свободны).

Программа *ML*-10. Численное интегрирование методом Симпсона функции $f(x_i)$, заданной четным числом n ординат f_0, f_1, f_2, ..., f_n. Ввод: 2nd Pgm 10 n A h B 0 C f_0 R/S ... f_n R/S D (получаем I). Для $h = 1$ и $f_i = 1$, 8, 27, 64 и 125 получим $I = 156$. Распределение регистров памяти: заняты регистры $R01 \div R05$, причем $h = R03$, $I = R04$, $n = R05$, ординаты f_0, f_1, ..., f_n заносятся в регистры от R_{06} для f_0 до R_{n+6} для f_n. Число ординат ограничивается допустимым числом свободных регистров памяти.

Программы *ML*-11 ÷ *ML*-13 предназначены для проведения элементарных вычислений (углы и стороны треугольников, сегменты окружностей и т. д.). Поэтому подробное описание их опущено.

Программа *ML*-14. Вычисление функций $Z(x)$ и $Q(x)$ нормального распределения вероятности с $x = (m - \mu)/\sigma$. Значение $Z(x) = e^{-x^2/2}/\sqrt{2\pi}$, $Q(x)$ площадь под кривой $Z(x)$ при $m \geqslant x$. Ввод: 2nd Pgm 14 x A (получаем $Z(x)$) B (получаем $Q(x)$). Площадь под кривой $Z(x)$ при $m < x$ вычисляется как $P(x) = 1 - Q(x)$.

Пример. Для $x = 0{,}5$ получим $Z(x) = 0{,}3520653268$; $Q(x) = 0{,}3085375322$ и $P(x) = 0{,}6914624678$. Распределение регистров: $Z(x) = R01$, $R02$ занят, $x = R03$.

Программа *ML*-15. Генерация случайных чисел. Ввод: 2nd Pgm 15 2nd E′ x_0 (начальное число от 0 до 199017) E. Далее в соответствии со следующими режимами работы.

1. Генерация случайных чисел с равномерным распределением в интервале $[a, b]$: a A b B C C ... C (получаем ряд случайных чисел).

2. Генерация случайных чисел с нормальным распределением и заданным средним значением $\bar{x}$ и σ: $\bar{x}$ A σ B 2nd C′ 2nd C′ ... ... 2nd C′ (получаем ряд случайных чисел).

3. Вычисление $\bar{x}$ и σ для чисел, полученных по п. 2: 2nd $\bar{x}$ (получаем $\bar{x}$) INV 2nd $\bar{x}$ (получаем σ) RCL 03 (получаем N).

4. Генерация случайных чисел с равномерным распределением в интервале [0, 1]: SBR 2nd D.MS SBR 2nd D.MS ... SBR 2nd D.MS и т. д. (получаем ряд случайных чисел).

Пример. Для $x_0 = 1$, $\bar{x} = 1$ и $\sigma = 0{,}1$ получим следующий ряд чисел с нормальным распределением: 1,093261476; 1,068422521; 0,8696010813; 0,9655443104; 0,8812833351 и т. д. Распределение регистров памяти: заняты регистры $R01 \div R11$ $\left(\sum y = R01, \sum y^2 = R02, N = R03, \sum x = R04, \sum x^2 = R05, x_0 = R09, a, \bar{x} = R10 \text{ и } b, \sigma = R11\right)$.

Программа ***ML*-16.** Вычисление факториала $n!$ перестановок P_r^n и сочетаний C_r^n ($\leqslant 69!$). Ввод: 2nd Pgm 16 n A r B C (получаем $n!$) или D (получаем P_r^n) или E (получаем C_r^n).

Пример. Для $n = 10$ и $r = 4$ имеем $n! = 3628800$, $P_4^{10} = 5040$ и $C_4^{10} = 210$ (при вычислениях P_4^{10} и C_4^{10} повторить ввод n и r). Распределение регистров памяти: $n = R01$, $r = R02$, $R03$ заняты $n!$, P, $C = R04$.

Программа ***ML*-17.** Усреднение данных по мере их ввода:

$$m_{\text{ср}} = (m_k + m_{k+1} + \ldots + m_{k+n-1})/n \qquad k = 1, 2, 3, \ldots$$

Ввод: 2nd Pgm 17 2nd E′ n A m_1 B m_2 B m_3 B и т. д. (получаем $m_{\text{ср}}$). Распределение регистров памяти: заняты $R01 \div R06$, $n = R02$.

Программы ***ML*-18** и ***ML*-19** служат для проведения деловых расчетов (займы, ренты, накопления и т. д.). Описание этих программ не приводится, поскольку оно не соответствует профилю книги.

Программа ***ML*-20.** Вычисление дня недели и числа дней между двумя датами. Даты задаются двухзначными числами месяца *MM*, дня *DD* и (через точку) года *YYYY*. Нельзя задавать $DD > 31$, $MM > 12$ и $YYYY < 1582$. Ввод: 2nd Pgm 20 и далее в соответствии с режимом использования программы.

1. Число дней между двумя датами: *MMDD.YYYY* (ввод первой даты) A *MMDD.YYYY* (ввод второй даты) B C (получаем число дней).

2. День недели, соответствующий определенной дате: *MMDD.YYYY* (ввод даты) D (получаем день недели: 0 — суббота, 1 — воскресенье, 2 — понедельник 3 — вторник, 4 — среда, 5 — четверг и 6 — пятница).

Пример. Найти, какой день недели соответствует дате 1 января 1984 г. ($MM = 01$, $DD = 01$). Вводим: 2nd Pgm 20 0101.1984 D (получим число 1, т. е. этот день — воскресенье). Распределение регистров памяти: заняты $R01 \div R05$, $MM = R01$, $DD = R02$ и $YYYY = R03$.

Программа ***ML*-21.** Игра с цифрами *Hi-LO Game*.

Программа ***ML*-22.** Деловые расчеты, связанные с платежами.

Программа ***ML*-23.** Операции с переводом мер измерения времени и углов.

Программа ***ML*-24.** Перевод мер длины.

Программа *ML*-25. Перевод мер измерения температуры и веса.

Программы *ML*-21 ÷ *ML*-25 реализуют элементарные вычисления общего характера, выходящие за рамки тематики данной книги. Поэтому они подробно не описываются.

Приложение 2

БИБЛИОТЕКА ВНЕШНИХ ПРОГРАММ ДЛЯ МИКРОКАЛЬКУЛЯТОРОВ TI-58C/59

Контрольные примеры см. в соответствующих программах для калькулятора Электроника Б3-34 *).

Программа П1. Вычисление значений многочлена Чебышева 1-го рода. Ввод: $n = R01$, $x = RX$.

INV	cos	×	RCL	01	=	cos	R/S	RST

Программа П2. Вычисление значений многочлена Чебышева 2-го рода. Ввод: $n = R01$, $x = RX$.

INV	cos	STO	00	×	(	RCL	01	+	1
)	=	sin	÷	RCL	00	sin	=	R/S	RST

Программа П3. Вычисление значений многочлена Эрмита. Ввод: $i = (n - 1) = RX$, $x = RX$.

STO	01	R/S	STO	04	×	2	=	STO	03
1	STO	02	STO	05	RCL	05	×	RCL	02
+/−	+	RCL	04	×	RCL	03	STO	02	=
×	2	=	STO	03	Op	25	Dsz	1	0
15	R/S	RST							

Программа П4. Вычисление значений многочлена Лагерра. Ввод: $i = (n - 1) = RX$, $x = RX$.

STO	01	R/S	STO	07	+/−	+	1	STO	08
STO	06	=	STO	09	RCL	06	×	RCL	08
+/−	+	(	RCL	06	×	2	+	1	−
RCL	07	)	×	RCL	09	STO	08	=	÷
Op	26	RCL	06	=	STO	09	Dsz	1	0
15	R/S	RST							

Программа П5. Вычисление значений многочлена Лежандра. Ввод: $i = (n - 1) = RX$, $x = RX$.

STO	01	R/S	STO	07	STO	09	1	STO	08
STO	06	RCL	06	+/−	×	RCL	08	+	(

---

*) Время вычислений на микрокалькуляторах TI-58C/59 в 5—7 раз меньше, чем для микрокалькуляторов Электроника Б3-34.

RCL	06	×	2	+	1	)	×	RCL	07
×	RCL	09	STO	08	=	÷	Op	26	RCL
06	=	STO	09	Dsz	1	0	12	R/S	RST

Программа П6. Вычисление гиперболических функций действительного переменного $x = RX$.

а) $\operatorname{sh} x$ ($\operatorname{sh} 1 = 1{,}1755201194$):

INV $\ln x$ − $1/x$ = ÷ 2 = R/S RST

б) $\operatorname{ch} x$ ($\operatorname{ch} 1 = 1{,}543080635$):

INV $\ln x$ + $1/x$ = ÷ 2 = R/S RST

в) $\operatorname{th} x$ ($\operatorname{th} 1 = 0{,}761594156$)

INV $\ln x$ x^2 + 1 = ÷ 2 = $1/x$
+/− + 1 = R/S RST

г) Для вычисления $\operatorname{cth} x$ перед оператором R/S следует поставить оператор $1/x$.

Программа П7. Вычисление обратных гиперболических функций действительного переменного $x = RX$.

а) $\operatorname{arsh} x$ ($\operatorname{arsh} 1 = 0{,}881373587$):

+ (x^2 + 1) $\sqrt{x}$ = $\ln x$ R/S RST

б) $\operatorname{arch} x$ ($\operatorname{arch} 2 = 1{,}316957897$) вычисляется по программе П7 а) с заменой знака + по адресу 003 на знак −.

в) $\operatorname{arth} x$ ($\operatorname{arth} 0{,}5 = 0{,}5493061443$):

$1/x$ − 1 = ÷ 2 = $1/x$ + 1
= $\sqrt{x}$ $\ln x$ R/S RST

г) $\operatorname{arcth} x$ ($\operatorname{arcth} 2 = 0{,}5493061443$):

− 1 = ÷ 2 = $1/x$ + 1 =
$\sqrt{x}$ $\ln x$ R/S RST

Программа П8. Вычисление гиперболических функций комплексного переменного $Z = a + jb$. Ввод: $a = RX$, $b = RX$. Вывод результата $f(Z) = c + jd$: $c \to RX$, $d \to RX$.

а) $\operatorname{sh} Z = \operatorname{sh}(3 + j \cdot 2) = -4{,}16890696 + j \cdot 9{,}154499147$:

STO 02 R/S +/− STO 01 Pgm 06 B $x \rightleftarrows t$
R/S $x \rightleftarrows t$ +/− R/S RST

б) $\operatorname{ch} Z = \operatorname{ch}(3 + j \cdot 2) = -4{,}189625691 + j \cdot 9{,}109227894$:

STO 02 R/S +/− STO 01 Pgm 06 C R/S
$x \rightleftarrows t$ R/S RST

в) $\operatorname{th} Z = \operatorname{th}(3 + j \cdot 2) = 1{,}003238697 - j \cdot 0{,}0037640256$:

STO 02 R/S +/− STO 01 Pgm 06 D $x \rightleftarrows t$
R/S $x \rightleftarrows t$ +/− R/S RST

Программа П9. Вычисление обратных гиперболических функций комплексного переменного $Z = a + jb$. Ввод и вывод см. в программе П8.

а) $\operatorname{arsh} Z = \operatorname{arsh}(3 + j \cdot 2) = 1{,}98338703 + j \cdot 0{,}5706527843$:

STO	02	R/S	+/—	STO	01	Pgm	06	B′
$x \rightleftarrows t$	R/S	$x \rightleftarrows t$	+/—	R/S	RST			

б) $\operatorname{arch} Z = \operatorname{arch}(3 + j \cdot 2) = \mp 1{,}968637926 \pm j \cdot 0{,}6061378224$:

STO	01	R/S	STO	02	Pgm	06	C′	$x \rightleftarrows t$
R/S	$x \rightleftarrows t$	R/S	RST					

в) $\operatorname{arth} Z = \operatorname{arth}(0{,}3 + j \cdot 0{,}2) = 0{,}2957499202 + j \cdot 0{,}2154744937$:

STO	02	R/S	+/—	STO	01	Pgm	06	D′
$x \rightleftarrows t$	R/S	$x \rightleftarrows t$	+/—	R/S	RST			

Программа П10. Интерполяция по формуле Лагранжа для трех точек. Ввод: y_{-1}, y_0, y_{+1}, h, x_0 и x в регистр X.

STO	00	R/S	STO	01	R/S	STO	02	R/S	STO
03	R/S	STO	04	R/S	—	RCL	04	=	÷
RCL	03	=	STO	05	×	(	RCL	05	—
1	)	×	RCL	00	÷	2	+	(	1
—	RCL	05	x^2	)	×	RCL	01	+	RCL
05	×	(	RCL	05	+	1	)	×	RCL
02	÷	2	=	GTO	0	14			

Программа П11. Интерполяция по формуле Лагранжа для пяти точек. Ввод (после нажатия клавиш RST и R/S): y_{-2}, y_{-1}, y_0, y_{+1}, y_{+2}, h, x_0 и x в регистр X.

CMs	7	STO	00	R/S	STOI	0	Dsz	0	0
04	0	R/S	—	RCL	01	=	÷	RCL	02
=	STO	08	(	RCL	08	x^2	—	1	)
STO	09	×	RCL	08	×	(	RCL	08	—
2	)	×	RCL	07	÷	2	4	—	(
RCL	08	—	1	)	×	RCL	08	×	(
RCL	08	x^2	—	4	)	STO	10	×	RCL
06	÷	6	+	RCL	09	×	RCL	10	×
RCL	05	÷	4	—	(	RCL	08	+	1
)	×	RCL	08	×	RCL	10	×	RCL	04
÷	6	+	RCL	09	×	RCL	08	×	(
RCL	08	+	2	)	×	RCL	03	÷	2
4	=	GTO	0	12					

Программа П12. Вычисление корней нелинейного уравнения $F(x) = 0$ методом подекадного приближения. Ввод: данные $F(x)$, $x_0 = R00$, $\Delta x_1 = R01$, $\varepsilon = 02$.

CP	RCL	01	SUM	00	SBR	A	÷	RCL	01
=	$x \geqslant t$	0	00	1	0	+/−	INV	Prd	01
RCL	02	$x \rightleftarrows t$	RCL	01	$\lvert x \rvert$	$x \geqslant t$	0	00	RCL
00	R/S	Lbl	A	...	...	...	...	...	ISBR

Программа П13. Вычисление корней нелинейного уравнения $F(x) = 0$ комбинированным методом секущих — хорд. Ввод: данные $F(x)$, $x_0 = R00$, $x_1 = R01$, $\varepsilon = R02$, $R03$ занят.

RCL	00	SBR	A	$x \rightleftarrows t$	RCL	01	SBR	A	STO
03	RCL	01	−	RCL	03	×	(	RCL	01
−	RCL	00	)	÷	(	RCL	03	−	$x \rightleftarrows t$
)	=	$x \rightleftarrows t$	RCL	01	STO	00	$x \rightleftarrows t$	STO	01
−	RLC	00	=	$\lvert x \rvert$	$x \rightleftarrows t$	RCL	02	INV	$x \geqslant t$
0	00	RCL	01	R/S	Lbl	A	...	...	ISBR

Программа П14. Численное дифференцирование таблично заданной функции в трех точках. Ввод: f_{-1}, f_0, f_{+1}, h, x_0 и x в регистр X.

STO	00	R/S	STO	01	R/S	STO	02	R/S	STO
03	R/S	STO	04	R/S	−	RCL	04	=	÷
RCL	03	=	STO	05	(	RCL	05	−	·
5	)	×	RCL	00	−	2	×	RCL	05
×	RCL	01	+	(	RCL	05	+	·	5
)	×	RCL	02	=	÷	RCL	03	=	GTO
0	14								

Программа П15. Численное дифференцирование таблично заданной функции в пяти точках. Ввод: f_{-2}, f_{-1}, f_0, f_{+1}, f_{+2}, h, x_0 и x в регистр X. Перед вводом нажать клавиши RST и R/S (высвечивается число 7).

7	STO	00	R/S	STOI	0	Dsz	0	0	03
0	R/S	−	RCL	01	=	÷	RCL	02	=
STO	08	x^2	×	3	=	STO	10	RCL	08
x^2	×	RCL	08	×	2	=	STO	09	(
RCL	09	−	RCL	10	−	RCL	08	+	1
)	×	RCL	07	÷	1	2	−	(	2
×	RCL	09	−	RCL	10	−	8	×	RCL
08	+	4	)	×	RCL	06	÷	6	+
(	RCL	09	−	5	×	RCL	08	)	×
RCL	05	÷	2	−	(	2	×	RCL	09
+	RCL	10	−	8	×	RCL	08	−	4
)	×	RCL	04	÷	6	+	(	RCL	09
+	RCL	10	−	RCL	08	−	1	)	×
RCL	03	÷	1	2	=	÷	RCL	02	=
GTO	0	11							

Программа П16. Вычисление частных производных и относительных коэффициентов нестабильности по трем ординатам функции $f(x_i)$. Ввод: данные $f(x)$, $\Delta x_i/x_i = R01$, коды x_i (в виде номеров регистров, отведенных под переменные x_i). Вывод результатов: $S_i \to RX$, $\partial f/\partial x_i \to R04$, $f(x_{i0}) \to R05$, регистры $R00 \div R05$ заняты.

STO	00	RCLI	00	STO	02	×	RCL	01	+
STO	03	RCL	02	=	STOI	00	SBR	A	STO
04	RCL	02	—	RCL	03	=	STOI	00	SBR
A	INV	SUM	04	RCL	02	STOI	00	SBR	A
STO	05	RCL	04	÷	2	÷	RCL	03	×
STO	04	RCL	02	÷	RCL	05	=	R/S	RST
Lbl	A	...	...	...	...	...	...	...	ISBR

Программа П17. Вычисление частных производных и относительных коэффициентов нестабильности по пяти ординатам функции $f(x)$. Ввод и вывод результатов см. в описании программы П16.

STO	00	RCLI	00	STO	02	—	RCL	01	×
RCL	02	×	STO	03	2	SBR	B	STO	04
RCL	02	—	RCL	03	SBR	B	×	8	=
INV	SUM	04	RCL	02	+	RCL	03	SBR	B
×	8	=	SUM	04	RCL	02	+	2	×
RCL	03	SBR	B	INV	SUM	04	RCL	02	SBR
B	STO	05	RCL	04	÷	1	2	÷	RCL
03	=	STO	04	×	RCL	02	÷	RCL	05
=	R/S	RST	Lbl	B	=	STOI	00	...	ISBR

Программа П18. Численное интегрирование методом Гаусса ($n = 3$). Ввод: данные $f(x)$, b, a и m в регистр X. Заняты регистры $R00 \div R07$. Подпрограмма вычисления $f(x)$ должна начинаться со знака равенства = и заканчиваться операторами × INVSBR (см. конец программы). Текущее значение x получается после исполнения первого оператора = подпрограммы.

CMs	—	R/S	STO	01	=	÷	R/S	STO	00
=	SUM	07	·	6	$\sqrt{x}$	STO	03	Lbl	B
RCL	01	+	RCL	07	—	STO	02	RCL	01
=	÷	2	+	STO	04	RCL	01	—	STO
05	(	RCL	04	×	RCL	03	)	SBR	A
5	=	SUM	06	RCL	05	SBR	A	8	=
SUM	06	RCL	04	×	RCL	03	+	RCL	05
SBR	A	5	=	SUM	06	RCL	02	STO	01
Dsz	0	B	RCL	06	×	RCL	04	÷	9
=	R/S	Lbl	A	=	...	...	...	×	ISBR

Программа П19. Решение дифференциального уравнения первого порядка методом Рунге — Кутта. Ввод: данные $f(x, y)$ при $x \to R00$, y заносим в начало подпрограммы (после знака =), $x_0 = R00$, $h/2 = R03$ и $y_0 = RX$. Заняты регистры $R00 \div R04$.

STO	01	STO	02	SBR	SBR	STO	04	RCL	03
SUM	00	RCL	04	SBR	E	SUM	04	SBR	E
SUM	04	$x \rightleftarrows t$	RCL	03	SUM	00	$x \rightleftarrows t$	×	2
SBR	E	RCL	04	×	RCL	03	÷	3	+
RCL	01	=	R/S	RST	Lbl	E	×	RCL	03
+	RCL	02	SBR	SBR	SUM	04	ISBR	Lbl	SBR
=	...	...	...	...	...	...	...	=	ISBR

Программа П20. Гармонический анализ методом пяти ординат (§ 5.11). Ввод: $y_1 \div y_5 = R01 \div R05$. Вывод результатов: $y_0 \to R10$, $y_{м1} \to R11$, $y_{м2} \to R12$, $y_{м3} \to R13$, $y_{м4} \to R14$, $k_г \to RX$.

RCL	05	+	RCL	01	+	2	×	(	RCL
04	+	RCL	02	)	=	÷	6	=	STO
10	RCL	05	−	RCL	01	+	RCL	04	−
RCL	02	=	÷	3	=	STO	11	RCL	05
+	RCL	01	−	2	×	RCL	03	=	÷
4	=	STO	12	RCL	11	−	RCL	04	+
RCL	02	=	÷	2	=	STO	13	RCL	12
−	RCL	10	+	RCL	03	=	STO	14	x^2
+	RCL	13	x^2	+	RCL	12	x^2	=	$\sqrt{x}$
÷	RCL	11	=	R/S					

Программа П21. Расчет $\varphi(f)$ и $S(f)$ см. § 5.11. Ввод: 4 2nd Op 17 N и затем $y_1, y_2, \ldots, y_N$ (при вводе отсчетов y_i индицируется их текущий номер), Δt и f ($N \leqslant 32$ ненулевых y_i).

CMs	+	1	STO	0	=	STO	33	$x \rightleftarrows t$	RCL
0	R/S	STOI	00	Op	20	RCL	0	INV	$x = t$
0	11	0	R/S	STO	39	R/S	STO	38	×
RCL	39	=	×	π	=	STO	37	Rad	sin
÷	RCL	37	=	STO	36	0	STO	35	STO
34	1	STO	00	RCL	00	×	2	=	×
RCL	37	=	STO	38	sin	×	RCLI	00	=
SUM	35	RCL	38	cos	×	RCLI	00	=	SUM
34	Op	20	RCL	00	INV	$x = t$	0	54	RCL
36	Prd	35	Prd	34	Deg	RCL	34	$x \rightleftarrows t$	RCL
35	INV	P → R	+/−	INV	Eng	R/S	$x \rightleftarrows t$	×	RCL
39	=	STO	37	RCL	33	$x \rightleftarrows t$	RCL	37	Eng
GTO	0	26							

Программа П22. Расчет амплитудно- и фазо-частотной характеристик по переходной. Ввод: 4 2nd Op 17 и далее N, a_1, a_2, ..., n_N, Δt и f ($N < 32$)

CMs	+	1	STO	0	=	STO	32	$x \rightleftarrows t$	RCL
0	R/S	STO	39	—	RCL	38	=	STOI	00
RCL	39	STO	38	Op	20	RCL	0	INV	$x = t$
0	11	0	R/S	STO	39	R/S	STO	38	×
RCL	39	=	×	π	=	STO	37	Rad	sin
÷	RCL	37	=	STO	36	0	STO	35	STO
34	1	STO	00	RCL	00	×	2	=	—
1	=	×	RCL	37	=	STO	33	sin	×
RCLI	00	=	SUM	35	RCL	33	cos	×	RCLI
00	=	SUM	34	Op	20	RCL	00	INV	$x = t$
0	64	RCL	36	Prd	35	Prd	34	Deg	RCL
34	$x \rightleftarrows t$	RCL	35	INV	P → R	+/—	R/S	$x \rightleftarrows t$	STO
31	RCL	32	$x \rightleftarrows t$	RCL	31	GTO	0	36	

Программа П23. Статистическая обработка. Ввод (после нажатия клавиши RST) $x_i = RX$. Вывод результатов (после нажатия клавиши A): $\bar{x}$, D, D_0, A, E, U_3 и U_4 ($m_1 \div m_4 \to R01 \div R04$, $N \to R00$, $M_2 \to R12$, $M_3 \to R13$, $M_4 \to R14$, $D_0 \to R15$, $A \to R16$. $E \to R17$, $U_3 \to R18$, $U_4 \to R19$).

CMs	Lbl	B	STO	09	SUM	05	x^2	SUM	06
x^2	SUM	08	÷	RCL	09	=	SUM	07	Op
20	RCL	09	R/S	GTO	B	Lbl	A	RCL	05
÷	RCL	00	=	STO	01	R/S	RCL	06	÷
RCL	00	=	STO	02	RCL	07	÷	RCL	00
=	STO	03	RCL	08	÷	RCL	00	=	STO
04	RCL	02	—	RCL	01	x^2	=	STO	12
R/S	×	RCL	00	÷	(	RCL	00	—	1
)	=	STO	15	R/S	RCL	03	—	3	×
RCL	01	×	RCL	02	+	2	×	RCL	01
y^x	3	=	STO	13	÷	RCL	12	y^x	(
3	÷	2	)	=	STO	16	R/S	RCL	04
—	4	×	RCL	01	×	RCL	03	+	6
×	RCL	01	x^2	×	RCL	02	—	3	×
RCL	01	x^2	x^2	=	STO	14	÷	RCL	12
x^2	—	3	=	STO	17	R/S	6	×	(
RCL	00	—	1	)	÷	(	RCL	00	+
1	)	÷	(	RCL	00	+	3	)	=
$\sqrt{x}$	STO	18	R/S	2	4	×	RCL	00	×
(	RCL	00	—	2	)	×	(	RCL	00
—	3	)	÷	(	RCL	00	—	1	)
x^2	÷	(	RCL	00	+	3	)	÷	(
RCL	00	+	5	)	=	$\sqrt{x}$	STO	19	R/S

Примечание. После вычисления статистических характеристик массива партии чисел x_i можно вернуться к вводу новой партии, набрав ее первое число и нажав клавишу В.

Программа П24. Генерация случайных чисел с повышенной скоростью (в 3—4 раза выше, чем по программе *ML*-15).

1. Для чисел с равномерным распределением в интервале [0, 1]. Ввод: $V_0 = RX < 1$.

× 1 1 + π = INV Int R/S RST

Для $V_0 = 0{,}123456789$, нажимая клавишу R/S, будем получать $V_1 = 0{,}4996173326$, $V_2 = 0{,}6373833121$, $V_3 = 0{,}1528090865$, $V_4 = 0{,}8224926048$, $V_5 = 0{,}189011306$ и т. д. (время генерации одного числа менее 1 с).

2. Для чисел с равномерным распределением в интервале $[a, b]$. Ввод: $V_0 = R01 < 1$, $a = R02$ и $b = R03$.

RCL	01	×	3	7	=	INV	Int	STO	01
×	(	RCL	03	−	RCL	02	)	+	RCL
02	=	R/S	RST						

Для $V_0 = 0{,}123456789$, $a = 1$ и $b = 2$ получим $X_1 = 1{,}567901193$, $X_2 = 1{,}012344141$, $X_3 = 1{,}456733217$, $X_4 = 1{,}899129029$ и т. д. (время выдачи одного числа 1,5 с).

3. Для чисел с нормальным распределением. Ввод: $V_0 = R01 < 1$, $\sigma = R02$ и $\bar{R} = R03$. Перед пуском нажать клавиши 2nd и Rad.

RCL	01	×	3	7	=	INV	Int	$x \rightleftarrows t$	RCL
01	×	2	×	π	=	sin	×	(	$x \rightleftarrows t$
STO	01	$1/x$	$\ln x$	×	2	)	$\sqrt{x}$	×	RCL
02	+	RCL	03	=	R/S	RST			

Для $V_0 = 0{,}1234567$, $\sigma = 0{,}1$ и $\bar{R} = 1$ получим, нажимая клавишу R/S, $R_1 = 1{,}074487657$, $R_2 = 0{,}8771869012$, $R_3 = 1{,}00966529$, $R_4 = 1{,}023339944$, $R_5 = 0{,}7849199467$ и т. д. (время выдачи одного числа 2 с).

Программа П25 *). Вычисление коэффициентов b_0 и b_1 приближения гиперболической функцией $y = b + b_1/x$. Ввод (после нажатия клавиш RST и R/S): $x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots, x_N, y_N$ в регистр X (после ввода каждой пары x_i, y_i высвечивается номер i). Вывод результатов: после нажатия клавиши А получим коэффициент b_0, после нажатия клавиши $x \rightleftarrows t$ — коэффициент b_1. Для вычисления $y(x)$ набираем $x = RX$, нажимаем клавишу В и т. д.

---

*) В программах П25 ÷ П29 приближение нелинейной функцией осуществляется с помощью линеаризирующих преобразований [17] и линейной регрессии, выполняемой оператором Ор 12 и программой *ML*-1.

Pgm	01	SBR	CLR	Lbl	R/S	R/S	$1/x$	$x \rightleftarrows t$	CLR
R/S	$\sum +$	GTO	R/S	Lbl	A	Op	12	R/S	Lbl
B	$1/x$	Op	14	R/S					

Программа П26. Вычисление коэффициентов b_0 и b_1 приближения степенной функцией $y = b_0 x^{b_1}$. Ввод и вывод результатов см. в программе П25.

Pgm	01	SBR	CLR	Lbl	R/S	R/S	log	$x \rightleftarrows t$	CLR
R/S	log	$\sum +$	GTO	R/S	Lbl	A	Op	12	INV
log	$x \rightleftarrows t$	$x \rightleftarrows t$	R/S	Lbl	B	log	Op	14	INV
log	R/S								

Программа П27. Вычисление коэффициентов b_0 и b_1 приближения показательной функцией $y = b_0 b_1^x$. Ввод и вывод результатов см. в программе П25.

Pgm	01	SBR	CLR	Lbl	R/S	R/S	$x \rightleftarrows t$	CLR	R/S
log	$\sum +$	GTO	R/S	Lbl	A	Op	12	INV	log
$x \rightleftarrows t$	INV	log	$x \rightleftarrows t$	R/S	Lbl	B	Op	14	INV
log	R/S								

Программа П28. Вычисление коэффициентов b_0 и b_1 приближения экспоненциальной функцией $y = b_0 \exp(b_1 x)$. Ввод и вывод результатов см. в программе П25.

Pgm	01	SBR	CLR	Lbl	R/S	R/S	$x \rightleftarrows t$	CLR	R/S
$\ln x$	$\sum +$	GTO	R/S	Lbl	A	Op	12	INV	$\ln x$
$x \rightleftarrows t$	$x \rightleftarrows t$	R/S	Lbl	B	Op	14	INV	$\ln x$	R/S

Программа П29. Вычисление коэффициентов b_0 и b_1 приближения логарифмической функцией $y = b_0 + b_1 \log x$. Ввод и вывод результатов см. в программе П25.

Pgm	01	SBR	CLR	Lbl	R/S	R/S	log	$x \rightleftarrows t$	CLR
R/S	$\sum +$	GTO	R/S	Lbl	A	Op	12	R/S	Lbl
B	log	Op	14	R/S					

Программа П30. Вычисление коэффициентов a и b приближения показательной функцией $y = 10^{(a+bx)}$. Ввод (после нажатия клавиши RST): x_1, y_1, x_2, y_2, ..., x_N, y_N в регистр X. Для получения a нажать клавишу A, для получения b — нажать клавишу R/S.

CMs	Lbl	E	STO	09	SUM	08	×	R/S	STO
02	log	SUM	06	=	SUM	03	RCL	09	x^2
SUM	05	Op	20	RCL	02	R/S	GTO	E	Lbl
A	RCL	00	×	RCL	05	—	RCL	08	x^2
=	STO	07	RCL	06	×	RCL	05	—	RCL
03	×	RCL	08	=	STO	10	RCL	03	×

RCL	00	—	RCL	06	×	RCL	08	=	STO
11	RCL	10	÷	RCL	07	=	R/S	RCL	11
÷	RCL	07	=	R/S					

Программа П31. Вычисление коэффициентов b_0, b_1 и b_2 приближения параболической функцией $y = b_0 + b_1x + b_2x^2$. Ввод: RST 2nd CMs и далее x_1, y_1, x_2, y_2, ..., x_N, y_N в регистр X. Вывод результатов: нажав клавиши 2nd E′, получим b_0, нажав клавишу R/S дважды, получим сначала b_1, затем b_2.

STO	24	SUM	09	SUM	11	x^2	SUM	10	SUM
12	SUM	14	x^2	SUM	16	÷	RCL	24	=
SUM	13	SUM	15	RCL	24	×	R/S	STO	25
SUM	30	=	SUM	31	×	RCL	24	=	SUM
32	Op	28	RCL	25	R/S	RST	Lbl	E′	3
Pgm	02	A	1	Pgm	02	B	Pgm	02	C
1	Pgm	02	D	RCL	30	SBR	D′	RCL	31
SBR	D′	RCL	32	SBR	D′	CLR	Pgm	02	E
1	Pgm	02	A′	SBR	D′	R/S	SBR	D′	R/S
SBR	D′	R/S	Lbl	D′	Pgm	02	R/S	ISBR	

Программа П32. Вычисление коэффициентов α_0, α_1, ..., α_N интерполирующего многочлена Ньютона и коэффициентов полинома $y(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$ при равномерном расположении узлов $y_i(x_i)$ с шагом h. Ввод (после нажатия клавиши RST): $y_0 = R0$, $y_1 = R1$, ..., $y_n = Rn$ ($n \leqslant 15$) и $n = RX$. Нажав клавишу R/S, получаем $0 \to RX$, $\alpha_0 \to R0$, $\alpha_1 \to R1$, ..., $\alpha_n \to Rn$. Вводим $h = RX$ и, нажимая $n+1$ раз клавишу R/S, получаем a_0, a_1, ..., a_n (они заносятся в регистры $R0 \div Rn$). Для вычисления $y(Z)$, где $Z = x - x_0$, нажимаем клавишу A (получаем $0 \to RX$), вводим Z и, нажав клавишу R/S, получаем $y(Z) \to RX$.

STO	16	0	STO	19	RCLI	19	STO	17	RCL
19	+	1	=	STO	18	1	SUM	19	RCL
17	—	RCLI	19	STO	17	=	+/—	÷	RCL
18	=	STOI	19	RCL	19	$x \rightleftarrows t$	RCL	16	INV
$x=t$	0	16	RCL	18	STO	19	$x \rightleftarrows t$	RCL	16
INV	$x=t$	0	05	RCL	16	—	1	=	STO
18	STO	17	RCL	17	+	1	=	STO	19
RCLI	17	—	RCLI	19	×	RCL	18	=	STOI
17	1	SUM	17	RCL	17	$x \rightleftarrows t$	RCL	16	INV
$x=t$	0	63	0	$x \rightleftarrows t$	RCL	18	—	1	=
INV	$x=t$	0	59	STO	19	R/S	STO	17	RCLI
19	÷	RCL	18	=	STOI	19	R/S	RCL	17
Prd	18	1	SUM	19	GTO	1	09	Lbl	A
RCL	00	STO	18	0	R/S	STO	17	RCL	16
STO	00	RCLI	00	=	×	RCL	17	+	Dsz
0	1	42	RCL	18	=	GTO	1	35	

Программа П33. Решение системы из двух дифференциальных уравнений методом Рунге — Кутта. Ввод: $x_0 = R00$, $y_0 = R01 = R02$, $Z_0 = R03 = R04$, $h/2 = R07$, данные $y'(x, y, z)$ и $z'(x, y, z)$ при $x \to R00$, $y \to R02$ и $z \to R04$.

SBR	SBR	STO	06	+	RCL	03	=	STO	04
$x \rightleftarrows t$	STO	05	+	RCL	01	=	STO	02	RCL
07	SUM	00	SBR	SBR	SUM	06	SUM	06	+
RCL	03	=	STO	04	$x \rightleftarrows t$	SUM	05	SUM	05
+	RCL	01	=	STO	02	SBR	SBR	SUM	06
SUM	06	×	2	+	RCL	03	=	STO	04
$x \rightleftarrows t$	SUM	05	SUM	05	×	2	+	RCL	01
=	STO	02	RCL	07	SUM	00	RCL	00	R/S
SBR	SBR	+	RCL	06	=	÷	3	+	RCL
03	=	STO	03	STO	04	R/S	$x \rightleftarrows t$	+	RCL
05	=	÷	3	+	RCL	01	=	STO	01
STO	02	R/S	RST	Lbl	SBR	...	...	×	RCL
07	=	$x \rightleftarrows t$	...	...	×	RCL	07	=	ISBR

Для примера к программе 5.69 при $x_0 = 0{,}2$, $y_0 = 0{,}0995008326$ и $z_0 = 0{,}49235$ получим при $h = 0{,}1$:

x	z	y
0,3	0,4831085134	0,1483051274
0,4	0,4702289079	0,1960019786
0,5	0,4538403861	0,2422342378
0,6	0,4340847683	0,2866579678
0,7	0,4111281313	0,3289445709
0,8	0,3851618702	0,3687833162
0,9	0,3564017201	0,4058838367
1,0	0,3250861121	0,4399784873

Программа П34. Решение системы из трех дифференциальных уравнений методом Руиге — Кутта. Ввод: $x_0 = R00$, $y_0 = R01 = R02$, $z_0 = R03 = R04$, $w_0 = R05 = R06$, $h/2 = R11$, данные $y'(x, y, z, w)$, $z'(x, y, z, w)$ и $w'(x, y, z, w)$ при $x \to R00$, $y \to R02$, $z \to R04$ и $w \to R06$. Вывод результатов: x, w, z и y в регистр X.

SBR	SBR	STO	09	+	RCL	05	=	STO	06
$x \rightleftarrows t$	STO	08	+	RCL	03	=	STO	04	RCL
10	STO	07	+	RCL	01	=	STO	02	RCL
11	SUM	00	SBR	SBR	SUM	09	SUM	09	+
RCL	05	=	STO	06	$x \rightleftarrows t$	SUM	08	SUM	08
+	RCL	03	=	STO	04	RCL	10	SUM	07
SUM	07	+	RCL	01	=	STO	02	SBR	SBR
SUM	09	SUM	09	×	2	+	RCL	05	=
STO	06	$x \rightleftarrows t$	SUM	08	SUM	08	×	2	+

RCL	03	=	STO	04	RCL	10	SUM	07	SUM
07	×	2	+	RCL	01	=	STO	02	RCL
11	SUM	00	RCL	00	R/S	SBR	SBR	+	RCL
09	=	÷	3	+	RCL	05	=	STO	05
STO	06	R/S	$x \rightleftarrows t$	+	RCL	08	=	÷	3
+	RCL	03	=	STO	03	STO	04	R/S	RCL
10	+	RCL	07	=	÷	3	+	RCL	01
=	STO	01	STO	02	R/S	RST	Lbl	SBR	...
...	...	...	...	×	RCL	11	=	STO	10
...	...	...	...	...	×	RCL	11	=	$x \rightleftarrows t$
...	...	...	...	...	×	RCL	11	=	ISBR

Для системы

$$\frac{dy}{dx} = z; \qquad \frac{dz}{dx} = -6z - 11y - 6w; \qquad \frac{dw}{dx} = y$$

при $x_0 = 0$, $z_0 = -11$, $y_0 = 3$, $w_0 = 0$ и $h = 0{,}1$ получим:

x	z	y	w	w (точное)
0,1	−8,13280	2,05030	0,25010	0,2513
0,2	−5,98340	1,34971	0,41830	0,41833
0,5	−2,26691	0,19219	0,62202	0,62205
1,0	−0,25380	−0,31568	0,55062	0,55064
2,0	0,17508	−0,22660	0,24987	0,24988
3,0	0,08855	−0,09425	0,09697	0,09697
4,0	0,03523	−0,03523	0,03629	0,03629
5,0	0,01329	−0,01338	0,01343	0,01343

Точное решение $w(x) = 2e^{-x} - e^{-2x} - e^{-3x}$.

Время счета по программам П33 и П34 составляет около 20 и 25 с на каждый шаг. Программы П32—34 наглядно иллюстрируют возможности программируемых микрокалькуляторов с повышенной емкостью запоминающих устройств.

Приложение 3

ПАКЕТ ПРОГРАММ С ОСОБЫМИ ПРИЕМАМИ ПРОГРАММИРОВАНИЯ ДЛЯ МИКРОКАЛЬКУЛЯТОРОВ ЭЛЕКТРОНИКА Б3-34

Программа П3.1. Вычисление факториала $n!$ при $n = РХ$, включая случай $n = 0$ (см. программу 3.16).

ВП П0 1 ИП0 × FL0 03 С/П

Программа П3.2. Вычисление значений многочлена степени $n \leqslant 12$ по схеме Горнера. Ввод: $a_0 = РД$, $a_1 \div a_n = Р1 \div Рn$ и да-

лее для каждого x n = P0 и x = PX (см. программу 4.10).

↑	↑	Cx	КИП↑	+	×	FL0	03	ИПД	+
С/П	БП	00							

Программа П3.3. Решение системы из $n \leqslant 13$ нелинейных уравнений $X_i = F_i(X_i)$ модифицированным методом Зейделя [29]. Подпрограмма должна заносить $x_1 \to$ РД, $x_2 \to$ РС, ..., $x_{13} \to$ Р1. Ввод: начальное значение x_1 В/0 С/П, начальное значение x_2 С/П и т. д., затем число итераций m = PX БП 09 С/П (получаем $\bar{x}_1$) С/П (получаем $\bar{x}_2$) и т. д.

ПД	1	3	П0	XY	С/П	КП0	БП	05	П0
ПП	21	FL0	10	1	4	П0	КИП0	С/П	БП
17	...	...	...	...	...	...	...	...	В/0

Для системы $x_1 = \sqrt{[x_1(x_2+5)-1]/2}$; $x_2 = \sqrt{x_1 + 3\ln x_1}$ подпрограмма имеет вид

ИПС	5	+	ИПД	×	1	−	2	÷	F√
ПД	↑	Fln	3	×	+	F√	ПС		

При начальных $x_1 = 4$, $x_2 = 2{,}5$ и $m = 6$ получим $\bar{x}_1 = 3{,}7607299$ (точное значение 3,7568) и $\bar{x}_2 = 2{,}7811093$ (точное значение 2,7798) при $t_c \approx 70$ с.

Программа П3.4. Поиск экстремума функции $F(x)$ одной переменной x методом ее квадратичной аппроксимации в интервале $x_i \pm h$. Ввод: данные $F(x)$ при x заносимом в начало подпрограммы, h = РВ, ε^2 = РС, начальное значение $x = x_1$ = РХ. Результат: $x_м \to$ РХ, $F(x_м) \to$ Р1. Заняты регистры 0, 1, А, В и С. Программа вычисляет $x_i = x_м$ для аппроксимирующей $F(x)$ параболы до тех пор, пока $(x_{i+1} - x_i)^2$ не станет меньше ε^2.

ПА	ИПА	ИПВ	−	ПП	58	П0	ИПА	ПП	58
П1	ИПА	ИПВ	+	ПП	58	↑	ИПА	2	×
ИПВ	−	×	ИПА	2	×	ИПВ	+	ИП0	×
+	ИП1	4	×	ИПА	×	−	XY	ИП0	+
ИП1	2	×	−	÷	2	÷	ИПА	XY	ПА
−	Fx^2	ИПС	−	F$x<0$	01	ИПА	С/П	...	В/0

Для $F(x) = 10x - 2x^2 + 0{,}1x^3$ при $x_1 = 3$; $h = 0{,}1$; $\varepsilon^2 = 1 \cdot 10^{-6}$ получим $x_м = 3{,}33375$ и $F(x_м) = 14{,}814815$ при $t_c \approx 90$ с.

Программа П3.5. Минимизация гладких функций $F(x_i)$ с $n \leqslant 9$ переменными методом координатного спуска. Ввод: данные $F(x_i)$

при $x_i \to$ Pi, $1 \cdot 10^{99}$ = P0, $(\varepsilon/9)^2$ = PA, 1 = PB, Δx = PC = PД, $x_i(0)$ = Pi. Результат: $F(x_{i\,\text{мин}}) \to$ PX = P0, $x_{i\,\text{мин}} \to$ Pi.

КИПВ	ИПД	+	КПВ	...	...	ИП0	XY	П0	XY
—	$Fx \geqslant 0$	00	ИПД	/—/	3	÷	ПД	Fx^2	ИПС
3	÷	Fx^2	—	$Fx < 0$	00	ИПС	ПД	n	ИПВ
1	+	ПВ	—	$Fx < 0$	00	1	ПВ	ИПА	ИПС
9	÷	ПС	ПД	Fx^2	—	$Fx \geqslant 0$	00	ИП0	С/П

Для $F(x_i) = \exp(x_1 + x_2 + x_3)/(x_1 x_2^2 x_3^3)$ при $\varepsilon = 1 \cdot 10^{-4}$, $\Delta x = x_i(0) = 0{,}5$ и $n = 3$ получим $F(x_{i\,\text{мин}}) = 3{,}7354517$; $x_{1\,\text{мин}} = 1{,}0001271$; $x_{2\,\text{мин}} = 2{,}0001018$; $x_{3\,\text{мин}} = 3{,}0002796$ ($t_c \approx 21$ мин).

Программа П3.6. Минимизация выпуклых функций $n \leqslant 10$ переменных методом спирального спуска. Ввод: данные $F(x_i)$ при $x_i \to$ Pi, $1 \cdot 10^{99}$ = P0, $(\varepsilon/5)^2$ = PB, 1 = PC, Δx = PД и $x_i(0)$ = Pi. Результат: $F(x_{i\,\text{мин}}) \to$ PX = P0, $x_{i\,\text{мин}} \to$ Pi.

КИПС	ИПД	+	КПС	...	...	...	...	...	...
...	ИП0	XY	П0	XY	—	$Fx \geqslant 0$	00	n	ИПС
1	+	ПС	—	$Fx < 0$	00	1	ПС	ИПВ	ИПД
/—/	5	÷	ПД	Fx^2	—	$Fx \geqslant 0$	00	ИП0	С/П

Для примера к программе П3.6 получим $F(x_{i\,\text{мин}}) = 3{,}7354523$; $x_{1\,\text{мин}} = 0{,}999872$; $x_{2\,\text{мин}} = 2{,}000672$; $x_{3\,\text{мин}} = 3{,}001184$ ($t_c \approx 15$ мин).

Программа П3.7. Численное интегрирование методом Симпсона с заданной погрешностью ε. Ввод: данные $f(x)$, $(15\varepsilon)^2$ = РД и далее b ПВ a ПА — П7 В/0 С/П.

ИПВ	ПП	58	П9	ИПА	ПП	58	ИП9	+	П9
ИП7	2	÷	П7	ИПА	+	П8	0	ПС	ИП8
ПП	58	2	×	ИПС	+	ПС	ИП7	2	×
ИП8	+	П8	ИПВ	—	$Fx \geqslant 0$	19	ИПС	↑	ИП9
+	П9	+	3	÷	ИП7	×	ИП6	XY	П6
—	Fx^2	ИПД	—	$Fx < 0$	10	ИП6	С/П	...	В/0

При $\varepsilon = 1 \cdot 10^{-5}$ второй интеграл табл. 5.4 вычисляется за $t_c \approx 1{,}5$ мин, что дает $I = 1{,}3987138$.

Программа П3.8. Решение системы из двух дифференциальных уравнений $y' = f(x, y, z)$ и $z' = g(x, y, z)$ методом Рунге — Кутта [29]. Подпрограмма должна вычислять $z' \to$ P3 и $y' \to$ PX при $x \to$ P6, $y \to$ PA и $z \to$ PB (свободны регистры 0, 1, 2; для записи промежуточных результатов можно использовать регистры 3, 4, 5). Ввод: x_0 = P6, $h/2$ = P7, $3y_0$ = PC = PX и (после нажатия клавиш В/0 и С/П) $3z_0$ = РД = PX. Вывод результата по мере нажатия клавиши С/П: y_1, z_1, y_2, z_2 ... в регистр X.

В/0	3	÷	П8	ПА	С/П	ИПД	3	÷	П9
ПВ	С/П	ПП	28	ПП	24	ПП	46	ПП	28
ИПВ	ИПА	ПП	39	ИП6	ИП7	+	П6	ПП	55
ИП7	×	П5	ИП3	ИП7	×	П4	ИП9	ИП8	ИП5
+	ПА	XY	ИП4	+	ПВ	ИПД	ИП4	+	ПД
ИПС	ИП5	+	ПС	В/0	...	...	...	...	В/0

Для системы $y' = xy + z$ и $z' = x + yz$ при $x_0 = y_0 = z_0 = 1$, $h = 0{,}1$ будем получать y_i и z_i: 1; 1; 1,2275429; 1,2284363; 1,5224128; 1,5320161 и т. д. ($t_c \approx 70$ с на одну пару y_i, z_i).

Программа П3.9. Решение дифференциального уравнения 2-го порядка $y'' = f(x, y, y')$ методом Рунге — Кутта [29]. Подпрограмма должна заносить $y'' \to$ РХ при $x \to$ Р6, $y \to$ РА и $y' \to$ РВ (свободны регистры $0 \div 3$, промежуточные результаты можно заносить в регистры 4 и 5). Ввод: $h/2 =$ Р7, $x_0 =$ Р6, $3y_0 =$ РС, $3y_0' =$ $=$ РД $=$ РХ. Выводы результатов: y_1, y_2, y_3 и т. д. в регистр X.

В/0	3	÷	П9	ПВ	ИПС	3	÷	П8	ПА
С/П	ПП	27	ПП	23	ПП	45	ПП	27	ИПВ
ИПА	ПП	38	ИП6	ИП7	+	П6	ПП	54	ИП7
×	П4	ИПВ	ИП7	×	П5	ИП9	ИП8	ИП5	+
ПА	XY	ИП4	+	ПВ	ИПС	ИП5	+	ПС	ИПД
ИП4	+	ПД	В/0	...	...	...	...	...	В/0

Для уравнения $y'' = \frac{3}{4}\left(\frac{xy'}{\sqrt{y}} + 1\right)$ при $h/2 = 0{,}05$; $x_0 = y_0 = y_0' = 1$ будем получать y_i: 1; 1,1077563; 1,2321001; 1,3747563 и т. д. ($t_c \approx 70$ с на шаг).

Программа П3.10. Решение дифференциального уравнения 3-го порядка $y''' = f(x, y, y', y'')$ методом Рунге — Кутта 2-го порядка [29]. Подпрограмма должна заносить $y''' \to$ РХ при $x \to$ Р7, $y \to$ Р5 $y' \to$ Р3 и $y'' \to$ Р1 (свободны регистры А ÷ Д, для промежуточных результатов можно использовать регистр 9). Ввод: $h =$ Р8, $x_0 =$ Р7, $y_0 =$ Р6, $y_0' =$ Р4, $y_0'' =$ Р2. Результат: y_1, y_2, y_3, ... и т. д. в регистре X.

В/0	ИП2	П1	ИП4	П3	ИП6	П5	С/П	ПП	14
ИП7	ИП8	+	П7	7	П0	ПП	37	П9	ИП3
ПП	26	ИП1	ПП	26	ИП9	ИП8	×	2	÷
↑	КИП0	+	КП↑	+	КП0	В/0	...	...	В/0

Для уравнения $y''' = xy(2y'' - 3/2)/(y')^2$ при $x_0 = 2$; $y_0 = 3{,}0625$; $y_0' = 3{,}5$ и $y_0'' = 3{,}75$ будем получать: y_i: 3,4313; 3,8405; 4,2936; 4,7938 и т. д. при $t_c \approx 45$ с на 1 шаг ($h = 0{,}1$).

Программа П3.11. Решение дифференциального уравнения 4-го порядка $y^{IV} = f(x, y, y', y'', y''')$ методом Рунге — Кутта 2-го по-

рядка [29]. Подпрограмма должна заносить $y^{IV} \to$ РХ при $x \to$ Р9, $y \to$ Р7, $y' \to$ Р5, $y'' \to$ Р3 и $y''' \to$ Р1 (свободны регистры Д и С, промежуточные результаты можно заносить в регистр В). Ввод: $h =$ РА, $x_0 =$ Р9, $y_0 =$ Р8, $y_0' =$ Р6, $y_0'' =$ Р4, $y_0''' =$ Р2. Результат: $y_1, y_2, y_3 \ldots$ и т. д. в регистр Х.

В/0	ИП2	П1	ИП4	П3	ИП6	П5	ИП8	П7	С/П
ПП	16	ИП9	ИПА	+	П9	9	П0	ПП	42
ПВ	ИП5	ПП	31	ИП3	ПП	31	ИП1	ПП	31
ИПВ	ИПА	×	2	÷	↑	КИП0	+	КП↑	+
КП0	В/0	...	...	...	...	...	...	...	В/0

Для уравнения $y^{IV} = \frac{3}{2}\left[\frac{3y''}{(y''')^2} - \frac{y}{(y')^2}\right]$ при $h = 0{,}1$; $x_0 = 3$, $y_0 = 9$, $y_0' = 9$, $y_0'' = 7{,}5$ и $y_0''' = 4{,}5$ будем получать y_i: 9,937; 10,955; 12,056; 13,246 и т. д. при $t_c \approx 55$ с на 1 шаг.

Программа П3.12. Вычисление 5 смежных гармоник по схеме параллельного спектрального анализа. Ввод: (после нажатия клавиш В/0 и СП и индикации цифры 0) номер начальной гармоники $n_н =$ РС, $2\pi/N =$ РД (или $360/N$, если переключатель Р — Г в положении Г), номер начального ненулевого отсчета $i_н =$ РУ, $y_{i_н} =$ РХ С/П $y_{i_н+1} =$ РХ С/П и т. д. Вывод результатов (после ввода последнего отсчета): $A_0 \to$ Р0, $a_1N/2 \to$ Р1, $b_1N/2 \to$ Р2, ..., $a_5N/2 \to$ Р9 и $b_5N/2 \to$ РА.

1	0	П0	Сx	КП↑	FL0	03	П0	С/П	ПВ
ИП0	+	П0	ПП	69	ИП1	+	П1	F,	ИП2
+	П2	ПП	69	ИП3	+	П3	F,	ИП4	+
П4	ПП	69	ИП5	+	П5	F,	ИП6	+	П6
ПП	69	ИП7	+	П7	F,	ИП8	+	П8	ПП
69	ИП9	+	П9	F,	ИПА	+	ПА	F,	ИПС
5	—	ПС	F,	1	+	↑	БП	08	F,
↑	ИПД	×	ИПС	×	ИПС	1	+	ПС	F,
F cos	FBx	F sin	ИПВ	×	XY	ИПВ	×	В/0	

Для $N = 32$ и $y_{10} \div y_{17} = 1$ (остальные $y_i = 0$) введя $n_п = 1$, $2\pi/32 =$ РД и $i_н = 10$ получим: $A_0 = 8$ (сумма всех y_i), $a_1N/2 = -6{,}3622798$; $b_1N/2 = 3{,}4007106$; $a_2N/2 = 2{,}8477578$; $b_2N/2 = -4{,}2619737$; $a_3N/2 = -0{,}23875957$; $b_3N/2 = 2{,}424179$; $a_4N/2 = 1 \cdot 10^{-8}$; $b_4N/2 = 6{,}7 \cdot 10^{-7}$; $a_5N/2 = -1{,}1595353$; $b_5N/2 = -0{,}95160494$. Число вводимых отсчетов y_i при использовании программы не ограничено.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Анго А. Математика для электро- и радиоинженеров/Пер. с франц.; под ред. К. С. Шифрина. — М.: Наука, 1965. — 772 с.

2. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. — М.: Наука, 1984. — 832 с.

3. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами/Под ред. М. Абрамовица и И. Стигана. — М.: Наука, 1979. — 832 с.

4. Бахвалов Н. С. Численные методы. — М.: Наука, 1973.— 632 с.

5. Демидович Б. П., Марон И. А. Основы вычислительной математики. — М.: Наука, 1970. — 644 с.

6. Трохименко Я. К., Любич Ф. Д. Инженерные расчеты на микрокалькуляторах. — Киев: Техника, 1980. — 383 с.

7. Трохименко Я. К., Любич Ф. Д. Радиотехнические расчеты на микрокалькуляторах. — М.: Радио и связь, 1983. — 256 с.

8. Дьяконов В. П. Расчет нелинейных и импульсных устройств на программируемых микрокалькуляторах. — М.: Радио и связь, 1984. — 176 с.

9. Цветков А. Н. Прикладные программы для микро-ЭВМ Электроника Б3-21. — М.: Финансы и статистика, 1982. — 127 с.

10. Горяинов В. Г., Журавлев А. Г., Тихонов В. И. Статистическая радиотехника: Примеры и задачи. — М.: Советское радио, 1980. — 544 с.

11. Вычисления на электронных клавишных вычислительных машинах ряда Искра/Б. А. Баклан, А. Бухштаб, М. Е. Левин и др. М.: Статистика, 1978.— 160 с.

12. Иванов В. И., Иванов Е. А., Муренко Л. Л. Малогабаритные вычислительные комплексы индивидуального пользования. — Радиотехника, 1983, № 1, с. 24.

13. Уорт Т. Программирование на языке бейсик./Пер. с англ.; под ред. В. Ф. Шаньгина. — М.: Машиностроение, 1981. — 225 с.

14. Мейнке Х., Гундлах Ф. Радиотехнический справочник: В 2-х т. — М.: Госэнергоиздат, 1961. Т. 1. — 416 с.

15. Бессонов Л. А. Теоретические основы электротехники. — М.: Высшая школа, 1964. — 750 с.

16. Ильин В. Н. Основы автоматизации схемотехнического проектирования. — М.: Энергия, 1979. — 392 с.

17. Львовский Е. Н. Статистические методы построения эмпирических формул. — М.: Высшая школа, 1982. — 224 с.

18. Волков Е. А. Численные методы. — М.: Наука, 1982. — 256 с.

19. Харкевич А. А. Основы радиотехники. — М.: Связьиздат, 1962. — 560 с.

20. Сигорский В. П., Петренко А. И. Основы теории электронных схем. — Киев: Вища школа, 1971. — 568 с.

21. Дьяконов В. П. Вычисление амплитудно- и фазо-частотных характеристик по переходным с помощью микро-ЭВМ индивидуального пользования. — Изв. вузов. Приборостроение. 1983, № 4, с. 69.

22. Трохименко Я. К., Любич Ф. Д. Искусство программирования программируемых микрокалькуляторов, 7. Интерполирование табличных моделей. — Изв. вузов. Радиоэлектроника. 1983, № 12, с. 40.

23. Варламов Р. Г. Эксплуатация и ремонт современных микрокалькуляторов. — М.: Легкая и пищевая промышленность, 1983. — 120 с.

24. Щуп Т. Решение инженерных задач на ЭВМ. — М.: Мир, 1982. — 238 с.

25. Микрокалькулятор Электроника Б3-34. Руководство по эксплуатации. — Светловодск, 1980. — 156 с.

26. TI Programmable 58C/59. Personal Programming. Master Library. — Dallas: Texas Instr. Inc., 1979.

27. Трохименко Я. К., Любич Ф. Д. Искусство программирования программируемых микрокалькуляторов, 8. Численное решение нелинейных уравнений. — Изв. вузов. Радиоэлектроника, 1984, № 1, с. 50.

28. Трохименко Я. К., Любич Ф. Д. Искусство программирования программируемых микрокалькуляторов, 10. Численное решение систем уравнений. — Изв. вузов. Радиоэлектроника, 1984, № 3, с. 43.

29. Цветков А. Н., Епанечников В. А. Прикладные программы для микро-ЭВМ «Электроника Б3-34», «Электроника МК-56» и «Электроника МК-54». — М.: Финансы и статистика, 1984. — 175 с.

УКАЗАТЕЛЬ АЛГОРИТМОВ И ЧИСЛЕННЫХ МЕТОДОВ

Анализ спектральный 120
— — повышенной точности 129
Аппроксимация полиномом 144

Вычисление АЧХ 131
— многочленов 65
— определителей 57
— перестановок 62
— производных 102
— размещений 62
— рядов 66
— факториала 61

Гамма-функции 154
— — неполные 156
Гистограмма, построение 136

Дилогарифм 166
Дроби непрерывные 65

Емкость шаров 185

Задача Коши 111

Интеграл вероятности 167
Интегралы Френеля 163
— эллиптические 165
Интегральный косинус 152
— синус 152
Интегрирование таблиц 111
— численное 105
Интерполяция 81
— обратная 93
— таблиц 81

Логика алгебраическая 30
— — обратная бесскобочная 8

Матрицы, обращение 60
—, сложение 59
—, умножение 59

Метод Адамса 114
— Адамса — Эйлера 115
— Горнера 65
— деления пополам 92
— интегрирования Гаусса 110
— — трапеции 107
— — Уэддля 108
— — Чебышева 109
— итераций 88
— — Ньютона 89
— Коши 113
— Монте — Карло 133
— подекадного приближения 93
— решения дифференциальных уравнений неявный 117
— Рунге — Кутта 113
— секущих-хорд 91
— случайных проб 92
— Стеффенсона 95
— хорд 90
— Эйлера 112
— Эйткена 73
Методы интегрирования Ньютона — Котеса 108
— — прямоугольников 105
— прогноза-коррекции 116
Многочлен Лагерра 68
— Лагранжа 71
— Лежандра 68
Многочлены комплексного переменного 66
— ортогональные 68
— Чебышева 69
— Эрмита 69
Модуль, выделение 56

Обработка статистическая 133
Основы программирования 17, 44

Преобразование координат 42
— углов 56

Расчет выпрямителя 190
— дросселя 181
— емкости 183
— индуктивных элементов 176
— линий передачи 185
— трансформатора 182
— усилителей 193
Релаксатор, моделирование 196

Сглаживание данных 146
Случайная величина, распределение 170

Транзистор, параметры 191

Уравнения алгебраические, корни 87
— дифференциальные, решение 111
— —, системы 119
— линейные, системы 79
— нелинейные, решение 98

Формула интегрирования Бодэ 156
Функции Бесселя 156
Функции Бесселя модифицированные 159
— гиперболические 64
— — обратные 64
— — комплексного переменного 77
— Дебая 166
— интегральные показательные 150
— комплексного переменного 74
—, приближение 140

Числа комплексные 62
—, округление 56
— случайные, генерация 138
—, усечение 56

Экстраполяция 81
Экстремум, поиск 97