32.97

В.А.Епанечников
А.Н.Цветков

СПРАВОЧНИК

по прикладным программам для микрокалькуляторов

Москва
"Финансы и статистика"
1988

ББК 32.973—01
Е65

УДК 681.321.069

Рецензент: канд. физ.-мат. наук Ю. Б. Котов

Епанечников В. А., Цветков А. Н.

Е65 Справочник по прикладным программам для микрокалькуляторов. — М.: Финансы и статистика, 1988. — 320 с.
ISBN 5-279-00118-X

В книге авторов, известных читателям по работам о программируемых микрокалькуляторах, предлагается широкий набор программ, реализующих численные методы решения математических, технических и экономико-статистических задач. Наибольшее внимание уделяется статистическим методам обработки данных. Представленные программы охватывают все типы программируемых отечественных микрокалькуляторов.

Для специалистов, обладающих разными по уровню навыками работы с программируемыми микрокалькуляторами.

Е $\frac{2405000000-17}{010(01)-88}$ 112—88 ББК 32.973—01

Справочное издание

Виктор Александрович Епанечников
Алексей Николаевич Цветков

СПРАВОЧНИК ПО ПРИКЛАДНЫМ ПРОГРАММАМ ДЛЯ МИКРОКАЛЬКУЛЯТОРОВ

Зав. редакцией *И. Г. Дмитриева.* Редактор *Т. А. Петрова*
Мл. редакторы *А. А. Емельянова, Т. А. Студеникина*
Худож. редактор *С. Л. Витте.* Техн. редактор *Л. Г. Челышева*
Корректоры *Г. А. Башарина, С. Г. Мазурина, Е. В. Люминарская* и *М. М. Виноградова*
Переплет художника *В. К. Бисенгалиева*

ИБ № 2123

Сдано в набор 18.09.87. Подписано в печать 25.12.87. А-04631. Формат 60×88 1/16. Бум. кн.-журн. офсетная. Гарнитура «Литературная». Печать офсетная. Усл. п. л. 19,6. Усл. кр.-отт. 19,6. Уч.-изд. л. 21,63. Тираж 40 000 экз. Заказ 681. Цена 1 р. 40 к.

Издательство «Финансы и статистика».
101000, Москва, ул. Чернышевского, 7.
Московская типография № 4 Союзполиграфпрома
при Государственном комитете СССР
по делам издательств, полиграфии и книжной торговли
129041, Москва, Б. Переяславская ул., 46.

ISBN 5-279-00118-X

© Издательство «Финансы и статистика», 1988

ВВЕДЕНИЕ

Авторам в своей повседневной деятельности приходилось оказывать помощь в работе на микрокалькуляторах людям самых разных профессий. Сформировавшийся в процессе этой работы круг наиболее, на наш взгляд, интересных для пользователей вопросов рассмотрен в данной книге.

Для работы со справочником достаточно ознакомиться с инструкцией по эксплуатации используемого микрокалькулятора [1—5].

Принятые обозначения.

1. В книге приведены программы для различных микрокалькуляторов. Указанием на обобщенный тип машины, для которой написана программа, служит набор чисел, отделенных от номера программы или инструкции косой чертой. Так, IV. 2.5.1/52 означает реализацию для микрокалькулятора «Электроника» МК-61 и МК-52; III.1.1.1/21 — для Б3-21; II.2.2.1/54 — для Б3-34, МК-56, МК-54; V.4.4/54,52 — для всех, кроме Б3-21; V.1.1/21,54,52 — для всех калькуляторов.

2. Обозначения некоторых операций с целью унификации заменены: для Б3-21

Обозначение	Код	Операция
P,	43	Кольцевое передвижение информации в стеке — по часовой стрелке
P/—/	53	То же — против часовой стрелки
↔	16	Обмен содержимым регистров X и Y

для остальных машин

Обозначение	Код	Операция
П→x N	6N	Вызов в регистр X содержимого регистра N
К П→x N	ГN	Вызов в регистр X из регистра с модифицированным адресом
x→П N	4N	Пересылка содержимого регистра X в регистр N
К x→П N	LN	Пересылка содержимого регистра X по модифицируемому адресу
B↑	0E	Пересылка содержимого регистра X в регистр Y
$F\sin^{-1}$	19	Вычисление arcsin

Обозначение	Код	Операция
$F\cos^{-1}$	1—	Вычисление arccos
$F\,\mathrm{tg}^{-1}$	1L	Вычисление arctg
$F.$	25	Кольцевое передвижение информации в стеке
↔	14	Обмен содержимым регистров X и Y

В объединенных инструкциях используется обозначение В↑ и для Б3-21.

Работа с программами. Описание программы содержит:

краткое пояснение;

алгоритм вычислений и расчетные формулы;

требования к подпрограммам (если они необходимы);

текст программы;

инструкцию по работе с программой (номер инструкции совпадает с номером программы);

таблицу занятости регистров памяти (регистры, не указанные в таблице, программой не используются);

оценку времени работы программы;

пример.

Предполагается, что читатель знаком с руководством по эксплуатации микрокалькулятора и умеет, если необходимо, составить и оформить подпрограмму вычисления значений конкретной функции.

Инструкции по работе с программой даются двух типов: полная, в виде таблицы, или краткая, когда требуется лишь ввести аргументы и выполнить команды В/О С/П. В краткой инструкции запись Р/Г в Р или Г означает установку переключателя «Радианы-Градусы» в положение «Радианы» или «Градусы». В полной инструкции в графе «Содержание» описаны действия пользователя, в графах «Набрать число» и «Выполнить команды» — операции, необходимые для осуществления этих действий. В графе «Результат» указаны только итоговые и важные промежуточные показания индикатора.

Безвременная кончина Алексея Николаевича Цветкова — инициатора книги, автора интересных идей и вдохновителя многих работ по программированию на микроЭВМ — затруднила работу над справочником. Поэтому весьма полезной была помощь, оказанная Н. А. Цветковым, который завершил ряд программ и раздел дискриминационного анализа.

Глава I

АЛГЕБРА И ТЕОРИЯ ЧИСЕЛ

I.1. ПЕРЕВОД ЧИСЕЛ ИЗ ОДНОЙ СИСТЕМЫ СЧИСЛЕНИЯ В ДРУГУЮ

Приводятся программы для перевода положительных чисел из системы счисления с основанием m в систему счисления с основанием n (m; n ⩽ 10). Для перевода из десятичной и в десятичную системы счисления используются единые программы.

В общем случае для перевода из системы счисления с основанием m в систему счисления с основанием n в программах используется перевод N_m вначале в десятичную систему счисления N_{10}, а затем перевод N_{10} в систему счисления с основанием n.

I.1.1. ПЕРЕВОД ЦЕЛЫХ ЧИСЕЛ

I.1.1.1. ПЕРЕВОД ИЗ ДЕСЯТИЧНОЙ И В ДЕСЯТИЧНУЮ СИСТЕМЫ СЧИСЛЕНИЯ (m=10 ИЛИ n=10)

Используется метод деления исходного числа N_m последовательно на n^i (i = 1,2, ...). Полученные в результате остатки от деления умножаются соответственно на m^j (j = 0, 1, 2, ...) и складываются. В результате получаем число N_n в системе счисления с основанием n [11].

Программа I.1.1.1/21

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	↑	06	33	+	96	70	×	26
01	1	14	34	↔	16	71	Р 2	21
02	Р2	21	35	—	86	72	Р /—/	53
03	Сх	76	40	Р3	31	73	↑	06
04	↔	16	41	↑	06	74	F 3	32
05	↔	16	42	F5	52	75	Р x=0	59
10	Р,	43	43	×	26	80	↑	06
11	F5	52	44	↑	06	81	↔	16
12	:	36	45	Р/—/	53	82	С/П	78
13	↔	16	50	↔	16			
14	Р,	43	51	—	86		Инструкция	
15	↔	16	52	↑	06			

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	
20	1	14	53	F2	22	m—в рег. 4
21	,	46	54	×	26	n—в рег. 5
22	8	84	55	↑	06	N_m В/О С/П
23	F1/x	45	60	P /—/	53	
24	—	86	61	+	96	Регистры
25	1	14	62	P ,	43	
30	ВП	66	63	F 2	22	2; 3 оперативные
31	7	74	64	↑	06	4 m
32	↔	16	65	F 4	42	5 n

Программа I.1.1.1/54,52

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	П→x 0	60	14	П→x 3	63	28	С/П	50
01	F 1/x	23	15	П→x 1	61			
02	x→П 2	42	16	×	12		Инструкция	
03	Сx	0Г	17	—	11			
04	↔	14	18	П→x 2	62		m—в рег. 0	
05	В↑	0E	19	П→x 0	60		n—в рег. 1	
06	П→x 1	61	20	×	12		N_m В/О С/П	
07	:	13	21	x→П 2	42			
08	1	01	22	×	12		Регистры	
09	+	10	23	+	10			
10	x→П 3	43	24	П→x 3	63		0 m	
11	К П→x 3	Г3	25	F x=0	5E		1 n	
12	F .	25	26	05	05		2; 3 оперативные	
13	F .	25	27	↔	14			

Программа I.1.1.1/52 может быть сокращена на 5 команд при замене команд с адресами 08—14 двумя командами К [x] x → П3. Время вычисления — 10—60 с.

Примеры.

1. Перевод из десятичной системы счисления $m = 10$, $N_{10} = 127$, $n = 4$. $N_4 = 1333$.
2. Перевод в десятичную систему счисления $m = 4$, $N_4 = 1333$, $n = 10$. $N_{10} = 127$.

I.1.1.2. ПЕРЕВОД ИЗ СИСТЕМЫ СЧИСЛЕНИЯ С ОСНОВАНИЕМ m В СИСТЕМУ СЧИСЛЕНИЯ С ОСНОВАНИЕМ n

Программа I.1.1.2/54,52

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	П→x A	6—	19	П→x 0	60	38	F .	25
01	1	01	20	:	13	39	П→x 3	63

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
02	0	00	21	1	01	40	F x=0	5E
03	ПП	53	22	+	10	41	18	18
04	10	10	23	x→П 3	43	42	↔	14
05	П→x 0	60	24	К П→x 3	Г3	43	В/О	52
06	П→x B	6L	25	F .	25			
07	ПП	53	26	F .	25		Инструкция	
08	10	10	27	П→x 3	63			
09	С/П	50	28	П→x 0	60		m—в рег. A	
10	x→П 0	40	29	×	12		n—в рег. B	
11	F .	25	30	—	11		N_m В/О С/П	
12	x→П 2	42	31	П→x 1	61			
13	F .	25	32	×	12		Регистры	
14	1	01	33	+	10			
15	x→П 1	41	34	П→x 1	61		0—3 оперативные	
16	Сx	0Г	35	П→x 2	62	A	m	
17	↔	14	36	×	12	B	n	
18	В↑	0E	37	x→П 1	41			

Программа I.1.1.2/52 может быть сокращена на 5 команд при замене команд с адресами 21—27 двумя командами К [x] x → П3. Время вычисления — 0,5—2,5 мин.

Пример. $m = 5$, $N_5 = 32$, $n = 2$. $N_2 = 10001$.

I.1.2. ПЕРЕВОД ДРОБНЫХ ЧИСЕЛ

I.1.2.1. ПЕРЕВОД ИЗ ДЕСЯТИЧНОЙ И В ДЕСЯТИЧНУЮ СИСТЕМЫ СЧИСЛЕНИЯ (m=10 ИЛИ n=10)

Для перевода используется метод, состоящий в умножении исходного числа N_m последовательно на значения n^i ($i = 1, 2, \ldots$). Полученные в результате умножения целые числа делятся соответственно на m^j ($j = 1, 2, \ldots$). В результате получаем число N_n [11].

Программа I.1.2.1/21

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	↑	06	33	↔	16	70	↑	06
01	1	14	34	—	86	71	F 6	62
02	P 5	51	35	P 6	61	72	—	86
03	↔	16	40	F 5	52	73	↑	06
04	8	84	41	↑	06	74	F 7	72
05	P 7	71	42	F 2	22	75	P x=0	59
10	Сx	76	43	×	26	80	P ↔	13
11	P ,	43	44	P 5	51	81	P /—/	53
12	F 3	32	45	↔	16	82	С/П	78
13	×	26	50	F 6	62			
14	P 4	41	51	↔	16		Инструкция	
15	1	14	52	:	36			

Продолжение

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
20	,	46	53	↑	06
21	8	84	54	Р /—/	53
22	F 1/x	45	55	+	96
23	—	86	60	Р ,	43
24	1	14	61	F 7	72
25	ВП	66	62	1	14
30	7	74	63	—	86
31	←→	16	64	Р 7	71
32	+	96	65	F 4	42

m—в рег. 2
n—в рег. 3
N_m В/О С/П

Регистры

2	m
3	n
4—7	оперативные

Программа I.1.2.1/54,52

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	К НОП	54	14	П→х 2	62
01	1	01	15	П→х 3	63
02	х→П 3	43	16	П→х 0	60
03	Сх	0Г	17	×	12
04	←→	14	18	х→П 3	43
05	П→х 1	61	19	:	13
06	×	12	20	+	10
07	х→П 4	44	21	П→х 4	64
08	1	01	22	П→х 2	62
09	+	10	23	—	11
10	х→П 2	42	24	F х=0	5E
11	К П→х 2	Г2	25	05	05
12	F .	25	26	←→	14
13	F .	25	27	С/П	50

Инструкция

m—в рег. 0
n—в рег. 1
N_m В/О С/П

Регистры

0	m
1	n
2—4	оперативные

Программа I.1.2.1/52

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	К НОП	54	11	×	12
01	1	01	12	х→П 3	43
02	х→П 3	43	13	:	13
03	Сх	0Г	14	+	10
04	←→	14	15	П→х 2	62
05	П→х 1	61	16	К {х}	35
06	×	12	17	F х=0	5E
07	х→П 2	42	18	05	05
08	К [х]	34	19	←→	14
09	П→х 3	63	20	С/П	50
10	П→х 0	60			

Инструкция

m—в рег. 0
n—в рег. 1
N_m В/О С/П

Регистры

0	m
1	n
2—3	оперативные

Время вычисления — 5—60 с.

Примеры.

1. Перевод из десятичной системы счисления $m = 10$, $N_{10} = 0{,}46875$, $n = 4$. $N_4 = 0{,}132$.
2. Перевод в десятичную систему счисления $m = 4$, $N_4 = 0{,}132$, $n = 10$. $N_{10} = 0{,}46875$.

I.1.2.2. ПЕРЕВОД ИЗ СИСТЕМЫ СЧИСЛЕНИЯ С ОСНОВАНИЕМ m В СИСТЕМУ СЧИСЛЕНИЯ С ОСНОВАНИЕМ n

Программа I.1.2.2/54,52

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	П→х А	6—	19	←→	14	38	—	11
01	1	01	20	П→х 4	64	39	F х≠0	57
02	0	00	21	×	12	40	43	43
03	х→П 3	43	22	х→П 2	42	41	F L 3	5—
04	ПП	53	23	1	01	42	20	20
05	12	12	24	+	10	43	←→	14
06	П→х 4	64	25	х→П 1	41	44	В/О	52
07	х→П 3	43	26	F .	25			
08	П→х В	6L	27	К П→х 1	Г1			
09	ПП	53	28	←→	14			
10	12	12	29	П→х 1	61			
11	С/П	50	30	П→х 5	65			
12	х→П 4	44	31	П→х 0	60			
13	F .	25	32	×	12			
14	х→П 0	40	33	х→П 5	45			
15	F .	25	34	:	13			
16	1	01	35	+	10			
17	х→П 5	45	36	П→х 2	62			
18	Сх	0Г	37	П→х 1	61			

Инструкция

m—в рег. А
n—в рег. В
N_m В/О С/П

Регистры

0—5	оперативные
А	m
В	n

Программа I.1.2.2/52

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	П→х А	6—	18	х→П 2	42	36	F L3	5—
01	1	01	19	F .	25	37	20	20
02	0	00	20	П→х 4	64	38	←→	14
03	х→П 3	43	21	×	12	39	В/О	52
04	ПП	53	22	В↑	0E			
05	12	12	23	К [х]	34			
06	П→х 4	64	24	П→х 5	65			
07	х→П 3	43	25	П→х 2	62			
08	П→х В	6L	26	×	12			
09	ПП	53	27	х→П 5	45			
10	12	12	28	:	13			
11	С/П	50	29	П→х Д	6Г			
12	х→П 4	44	30	+	10			
13	Сх	0Г	31	х→П Д	4Г			
14	х→П Д	4Г	32	←→	14			
15	ВП	0С	33	К {х}	35			
16	х→П 5	45	34	F х≠0	57			
17	F .	25	35	38	38			

Инструкция

m—в рег. А
n—в рег. В
N_m В/О С/П

Регистры

2—5	оперативные
А	m
В	n
Д	N_n

Время вычисления — 0,5 — 2,5 мин.

Пример. $m = 4$, $N_4 = 0{,}101$, $n = 8$. $N_8 = 0{,}21$.

I.1.3. ПЕРЕВОД ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

Перевод целой и дробной части исходного числа N_m производится раздельно по методам, приведенным в разделах I.1.1. и I.1.2.

I.1.3.1. ПЕРЕВОД ИЗ ДЕСЯТИЧНОЙ И В ДЕСЯТИЧНУЮ СИСТЕМЫ СЧИСЛЕНИЯ (m=10 ИЛИ n=10)

Программа 1.1.3.1/54,52

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	x→П 2	42	25	П→x 2	62	50	П→x 3	63
01	1	01	26	П→x 1	61	51	F x=0	5E
02	x→П 4	44	27	—	11	52	32	32
03	x→П 5	45	28	F L0	5Г	53	←→	14
04	+	10	29	13	13	54	С/П	50
05	x→П 3	43	30	←→	14	55	1	01
06	9	09	31	П→x 3	63	56	+	10
07	x→П 0	40	32	П→x В	6L	57	x→П 1	41
08	К П→x 3	Г3	33	:	13	58	F .	25
09	Сх	0Г	34	ПП	53	59	К П→x 1	Г1
10	П→x 2	62	35	55	55	60	F .	25
11	П→x 3	63	36	П→x 3	63	61	В/О	52
12	—	11	37	П→x 1	61			
13	П→x В	6L	38	x→П 3	43			
14	×	12	39	П→x В	6L			
15	x→П 2	42	40	×	12			
16	ПП	53	41	—	11			
17	55	55	42	П→x 5	65			
18	П→x 1	61	43	×	12			
19	П→x 4	64	44	+	10			
20	П→x А	6—	45	П→x 5	65			
21	×	12	46	П→x А	6—			
22	x→П 4	44	47	×	12			
23	:	13	48	x→П 5	45			
24	+	10	49	←→	14			

Инструкция

m—в рег. А
n—в рег. В
N_m В/О С/П

Регистры

0—5 оперативные
А m
В n

Программа 1.1.3.1/52

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	x→П 2	42	19	:	13	38	x→П 1	41
01	К [x]	34	20	+	10	39	↔	14
02	x→П 3	43	21	F L0	5Г	40	П→x 3	63
03	1	01	22	09	09	41	F x=0	5E
04	x→П 4	44	23	П→x 3	63	42	24	24
05	x→П 1	41	24	В↑	0E	43	↔	14
06	9	09	25	П→x В	6L	44	С/П	50
07	x→П 0	40	26	:	13			
08	0	00	27	К [x]	34			
09	П→x 2	62	28	x→П 3	43			
10	К {x}	35	29	П→x В	6L			
11	П→x В	6L	30	×	12			
12	×	12	31	—	11			

Инструкция

m—в рег. А
n—в рег. В
N_m В/О С/П

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
13	x→П 2	42	32	П→x 1	61
14	К [x]	34	33	×	12
15	П→x 4	64	34	+	10
16	П→x А	6—	35	П→x 1	61
17	×	12	36	П→x А	6—
18	x→П 4	44	37	×	12

Регистры

0—4 оперативные
А m
В n

Время вычисления — 1 — 2 мин.

Примеры.

1. Перевод из десятичной системы счисления m = 10, N_{10} = 16,312, n = 5. N_5 = 31,124.
2. Перевод в десятичную систему счисления m = 5, N_5 = 31,124, n = 10.N_{10} = 16,312.

I.1.3.2. ПЕРЕВОД ИЗ СИСТЕМЫ СЧИСЛЕНИЯ С ОСНОВАНИЕМ m В СИСТЕМУ СЧИСЛЕНИЯ С ОСНОВАНИЕМ n

Программа 1.1.3.2/54,52

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	П→x А	6—	29	↔	14	58	×	12
01	1	01	30	В↑	0E	59	—	11
02	0	00	31	К ПП 8	—8	60	П→x 5	65
03	x→П 0	40	32	x→П 3	43	61	×	12
04	x→П 8	48	33	—	11	62	+	10
05	ПП	53	34	П→x 7	67	63	П→x 5	65
06	21	21	35	×	12	64	П→x 6	66
07	ПП	53	36	x→П 2	42	65	×	12
08	18	18	37	К ПП 8	—8	66	x→П 5	45
09	С/П	50	38	П→x 4	64	67	F .	25
10	1	01	39	П→x 6	66	68	П→x 1	61
11	+	10	40	×	12	69	F x=0	5E
12	x→П 1	41	41	x→П 4	44	70	53	53
13	К П→x 1	Г1	42	:	13	71	F .	25
14	F .	25	43	+	10	72	В/О	52
15	F .	25	44	П→x 2	62			
16	П→x 1	61	45	П→x 1	61			
17	В/О	52	46	—	11			
18	П→x 7	67	47	F x≠0	57			
19	x→П 0	40	48	51	51			
20	П→x В	6L	49	F L0	5Г			
21	x→П 7	47	50	34	34			
22	F .	25	51	F .	25			
23	x→П 6	46	52	П→x 3	63			
24	F .	25	53	В↑	0E			
25	1	01	54	П→x 7	67			
26	x→П 4	44	55	:	13			
27	x→П 5	45	56	К ПП 8	—8			
28	Сх	0Г	57	П→x 7	67			

Инструкция

m—в рег. А
n—в рег. В
N_m В/О С/П

Регистры

0—8 оперативные
А m
В n

Программа I.1.3.2/52

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	П→x A	6—	25	×	12	50	П→x 5	65
01	1	01	26	x→П 2	42	51	×	12
02	0	00	27	К [x]	34	52	+	10
03	x→П 0	40	28	П→x 4	64	53	П→x 5	65
04	ПП	53	29	П→x 6	66	54	П→x 6	66
05	11	11	30	×	12	55	×	12
06	П→x 7	67	31	x→П 4	44	56	x→П 5	45
07	x→П 0	40	32	:	13	57	F .	25
08	К ПП 7	—7	33	+	10	58	П→x 1	61
09	С/П	50	34	П→x 2	62	59	F x=0	5E
10	П→x B	6L	35	К {x}	35	60	42	42
11	x→П 7	47	36	Fx≠0	57	61	F .	25
12	F .	25	37	40	40	62	В/О	52
13	x→П 6	46	38	F L0	5Г			
14	F .	25	39	24	24			
15	1	01	40	F .	25			
16	x→П 4	44	41	П→x 3	63			
17	x→П 5	45	42	В↑	0E			
18	Сх	0Г	43	П→x 7	67			
19	↔	14	44	:	13			
20	В↑	0E	45	К [x]	34			
21	К [x]	34	46	x→П 1	41			
22	x→П 3	43	47	П→x 7	67			
23	—	11	48	×	12			
24	П→x 7	67	49	—	11			

Инструкция

m—в рег. A
n—в рег. B
N_m В/О С/П

Регистры

0—7 оперативные
A m
B n

Время вычисления — 1 — 4 мин.
Пример. m = 2, N_2 = 1101, 11, n = 5. N_5 = 23,333333.

I.2. НЕПРЕРЫВНЫЕ (ЦЕПНЫЕ) ДРОБИ

Действительное положительное число b может быть разложено в цепную дробь

$$b=[a_0,\ a_1,\ a_2,\ \ldots]=a_0+\cfrac{1}{a_1+\cfrac{1}{a_2+\ldots}},$$

где a_i (i = 0, 1, 2, ...) — целые положительные числа $a_i > 0$.

I.2.1. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ ЧИСЕЛ В ЦЕПНУЮ ДРОБЬ

Для заданного действительного числа b вычисляются элементы цепной дроби a_0, a_1, a_2, ... по формулам:

$$a_0=\mathrm{int}\,[b];\quad a_1=\mathrm{int}\left[\frac{1}{b-a_0}\right];\quad a_2=\mathrm{int}\left[\frac{1}{\frac{1}{b-a_0}-a_1}\right];\quad \ldots$$

Для вычисления вводится исходное значение b, а затем выполнение каждой команды С/П выводит на индикатор очередное значение a_i, в результате получается ряд значений: a_0, a_1, a_2,...

Программа I.2.1/21

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	Р 2	21	15	←→	16
01	1	14	20	—	86
02	,	46	21	↑	06
03	8	84	22	F 2	22
04	F 1/x	45	23	←→	16
05	—	86	24	С/П	78
10	1	14	25	—	86
11	ВП	66	30	F 1/x	45
12	7	74	31	БП	58
13	←→	16	32	Р0	01
14	+	96			

Инструкция

в В/О С/П С/П С/П...

Результат

a_0, a_1, a_2, ...

Регистр

2 оперативный

Программа I.2.1/54,52

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	x→П 1	41	06	П→x 0	60
01	1	01	07	С/П	50
02	+	10	08	—	11
03	x→П 0	40	09	F 1/x	23
04	К П→x 0	Г0	10	БП	51
05	П→x 1	61	11	00	00

Инструкция

в В/О С/П С/П С/П...

Результат

a_0, a_1, a_2, ...

Регистры

0 a_1
1 оперативный

Программа I.2.1/52

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	В↑	0E	04	F 1/x	23
01	К [x]	34	05	БП	51
02	С/П	50	06	00	00
03	—	11			

Инструкция

в В/О С/П С/П С/П...

Результат

a_0, a_1, a_2, ...

Время вычисления очередного значения a_i — 2—3 с.
Пример. b = ln 9. a_0 = 2, a_1 = 5, a_2 = 14, a_3 = 4, a_4 = 1, ...

I.2.2. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЦЕПНОЙ ДРОБИ В ДЕЙСТВИТЕЛЬНОЕ ЧИСЛО

Цепная дробь, заданная в виде последовательности значений a_0, a_1, a_2, ..., по программе преобразуется последовательно в действительные числа соответственно b_0, b_1, b_2, ..., ($b_i = [a_0, a_1, \ldots, a_i]$; $\lim\limits_{i\to\infty} b_i = b$).

Для вычисления b_i представляем в виде $b_i = c_i/d_i$, где c_i и d_i определяются из рекуррентных соотношений [11]:

$$c_i = c_{i-1} a_i + c_{i-2} \quad \text{при } c_0 = 1,\ c_1 = a_0;$$

$$d_i = d_{i-1} a_i + d_{i-2} \quad \text{при } d_0 = 0,\ d_1 = 1.$$

После ввода каждого последующего значения a_i и выполнения команды С/П на индикаторе высвечивается очередное значение $b_i = [a_0, a_1, \ldots, a_i]$.

Программа I.2.2/21

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	Р 4	41	23	×	26	50	↑	06
01	0	04	24	↑	06	51	F 4	42
02	Р 2	21	25	Р /—/	53	52	←→	16
03	Р e^x	33	30	+	96	53	БП	58
04	Р 5	51	31	Р 4	41	54	↑	06
05	Р 3	31	32	F 2	22			
10	:	36	33	Р ,	43			
11	С/П	78	34	F 3	32			
12	Р 6	61	35	Р 2	21			
13	F 5	52	40	↑	06			
14	Р ,	43	41	F 6	62			
15	F 4	42	42	×	26			
20	Р 5	51	43	↑	06			
21	↑	06	44	Р /—/	53			
22	F 6	62	45	+	96			

Инструкция

В/О a_0 С/П a_1 С/П a_2 С/П...

Результат

$в_0, в_1, в_2, \ldots$

Регистры

2—5 оперативные

6 a_i

Программа I.2.2/54,52

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	x→П 2	42	12	x→П 3	43
01	0	00	13	×	12
02	x→П 0	40	14	+	10
03	ВП	0С	15	x→П 2	42
04	x→П 3	43	16	П→x 0	60
05	x→П 1	41	17	П→x 1	61
06	:	13	18	x→П 0	40
07	С/П	50	19	П→x 4	64
08	x→П 4	44	20	×	12
09	П→x 3	63	21	+	10
10	←→	14	22	БП	51
11	П→x 2	62	23	05	05

Инструкция

В/О a_0 С/П a_1 С/П a_2 С/П...

Результат

$в_0, в_1, в_2, \ldots$

Регистры

0—3 оперативные

4 a_i

Время вычисления после ввода одного значения a_i — 5 с.

Пример. $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 3$. $в_0 = 0$, $в_1 = 1$, $в_2 = 0{,}6667$, $в_3 = 0{,}7$.

I.3. ДЕЛЕНИЕ ЧИСЕЛ С ПРОИЗВОЛЬНОЙ ТОЧНОСТЬЮ

Производится деление «углом» действительных положительных чисел а/в.

I.3.1. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТА В ВИДЕ ЧИСЛА С ПЛАВАЮЩЕЙ ЗАПЯТОЙ

Вначале определяется целая десятичная степень частного М, а затем последовательно при выполнении команд С/П С/П С/П ... вычисляются и выводятся на индикатор десятичные цифры c_i ($i = 1, 2, 3, \ldots$) дробной части. В результате получаем десятичное число с требуемым количеством десятичных цифр.

Программа I.3.1/54,52

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	x→П 1	41	21	43	43	42	25	25
01	Сх	0Г	22	П→x 4	64	43	П→x 4	64
02	x→П 4	44	23	С/П	50	44	1	01
03	←→	14	24	П→x 3	63	45	—	11
04	x→П 3	43	25	1	01	46	x→П 4	44
05	П→x 1	61	26	0	00	47	П→x 3	63
06	:	13	27	×	12	48	1	01
07	F lg	17	28	x→П 3	43	49	БП	51
08	F x≥0	59	29	П→x 1	61	50	14	14
09	18	18	30	:	13			
10	К П→x 4	Г4	31	1	01			
11	П→x 3	63	32	+	10			
12	1	01	33	x→П 2	42			
13	/—/	0L	34	К П→x 2	Г2			
14	F 10	15	35	П→x 3	63			
15	×	12	36	П→x 2	62			
16	БП	51	37	С/П	50			
17	04	04	38	П→x 1	61			
18	1	01	39	×	12			
19	+	10	40	—	11			
20	F x≥0	59	41	БП	51			

Инструкция

В/О а В↑ в С/П С/П С/П...

Результат

$M, c_1, c_2, \ldots$

Регистры

1 в

2—4 оперативные

Программа I.3.1/52 может быть сокращена на 5 команд при замене команды с адресом 21 на команду 38 и команд с адресами 28—36 на четыре команды В↑ П → x 1 : К [x].

Время вычисления М — 15 с, время вычисления каждого c_i — 5 с.

Пример. Разделить 100 на 2,3 с 10 значащими цифрами (а = 100, b = 2,3).

Решение. $M = 2$, $c_1 = 4$, $c_2 = 3$, $c_3 = 4$, $c_4 = 7$, $c_5 = 8$, $c_6 = 2$, $c_7 = 6$, $c_8 = 0$, $c_9 = 8$, $c_{10} = 6$, ...

Результат: $100/2{,}3 = 10^2 \cdot 0{,}4347826086 \ldots$

1.3.2. ЕСТЕСТВЕННОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТА

Вначале определяется и выводится на индикатор целая часть частного c_0, а затем последовательно при выполнении команд С/П С/П С/П... выводятся десятичные знаки частного c_i ($i = 1, 2, \ldots$).

Программа 1.3.2/21

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	Р 2	21	21	↑	06
01	←→	16	22	F 2	22
02	1	14	23	—	86
03	/—/	56	24	/—/	56
04	Р 3	31	25	Р x≥0	49
05	×	26	30	Р 1	11
10	/—/	56	31	F 3	32
11	Р ,	43	32	С/П	78
12	F 3	32	33	←→	16
13	1	14	34	ВП	66
14	+	96	35	1	14
15	Р 3	31	40	БП	58
20	Р /—/	53	41	Р↑	03

Инструкция
В/О а↑в С/П С/П С/П...
Результат
$c_0, c_1, c_2, \ldots$
Регистры
2 в
3 c_i

Время вычисления каждого значения c_i ($i = 0, 1, 2, \ldots$) — $T = 2(c_i + 1)$ с.

Программа 1.3.2/54,52

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	x→П 1	41	13	+	10
01	←→	14	14	F x≥0	59
02	1	01	15	06	06
03	/—/	0L	16	П→x 2	62
04	x→П 2	42	17	С/П	50
05	×	12	18	×	12
06	П→x 2	62	19	←→	14
07	1	01	20	/—/	0L
08	+	10	21	1	01
09	x→П 2	42	22	0	00
10	←→	14	23	×	12
11	В↑	0E	24	БП	51
12	П→x 1	61	25	02	02

Инструкция
В/О а В↑ в С/П С/П С/П ...
Результат
$c_0, c_1, c_2, \ldots$
Регистры
1 в
2 оперативный

Время вычисления каждого значения c_i ($i = 0, 1, 2, \ldots$) — $T = 3.(c_i + 2)$ с.

Пример. Разделить 100 на 2,3 с 10 значащими цифрами ($a = 100$, $b = 2,3$).

Решение. $c_0 = 43$, $c_1 = 4$, $c_2 = 7$, $c_3 = 8$, $c_4 = 2$, $c_5 = 6$, $c_6 = 0$, $c_7 = 8$, $c_8 = 6$, ...

Результат: 100/2,3 = 43,47826086 ...

1.4. РЕШЕНИЕ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

1.4.1. РЕШЕНИЕ КВАДРАТНОГО УРАВНЕНИЯ

Корни квадратного уравнения

$$ax^2 + bx + c = 0$$

вычисляются по формулам [12]:

а) если $D \geqslant 0$, т. е. корни уравнения действительные, то

$$x_1 = u + \operatorname{sign}(u)\cdot\sqrt{D},\quad x_2 = \frac{c}{ax_1};$$

б) если $D < 0$, т. е. корни уравнения комплексно-сопряженные, то

$$x_1 = u + iv,\quad x_2 = u - iv,$$

где

$$u = -\frac{b}{2a},\quad D = u^2 - \frac{c}{a},\quad v = \sqrt{-D}.$$

Выбранный алгоритм при $D \geqslant 0$ позволяет уменьшить ошибки вычисления, если значения в/2а и $\sqrt{D}$ близки по абсолютной величине.

Программа построена так, что при $D < 0$ счет останавливается и на индикатор выводится сигнал ошибки (080000000 000 — для Б3-21 или ЕГГОГ — для МК-54 и МК-52). На самом деле ошибки нет — просто получен сигнал о том, что корни уравнения — комплексно-сопряженные. После нового нажатия клавиши С/П счет продолжается, а результатом является действительная и мнимая часть корней.

Программа 1.4.1/21

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	/—/	56	23	+	96	50	:	36
01	F 1/x	45	24	F √	65	51	F 1/x	45
02	Р 2	21	25	Р НОП	39	52	←→	16
03	2	24	30	Р x≥0	49	53	С/П	78
04	:	36	31	F /—/	55	54	/—/	56
05	С/П	78	32	↑	06	55	F √	65
10	×	26	33	F 3	32	60	↑	06
11	Р 3	31	34	Р x<0	69	61	F 3	32
12	F x²	55	35	Р ,	43	62	С/П	78
13	Р ,	43	40	←→	16			
14	F 2	22	41	/—/	56			
15	С/П	78	42	+	96			
20	×	26	43	↑	06			
21	↑	06	44	Р ,	43			
22	Р /—/	53	45	/—/	56			

Регистры
2 —1/а
3 —в/2а

Программа I.4.1/54,52

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	x→П 2	42	12	—	11	24	+	10
01	С/П	50	13	F Bx	0	25	:	13
02	/—/	0L	14	←→	14	26	F Bx	0
03	←→	14	15	F √	21	27	С/П	50
04	:	13	16	К НОП	54	28	/—/	0L
05	2	02	17	F x≥0	59	29	F √	21
06	:	13	18	28	28	30	П→x 3	63
07	x→П 3	43	19	П→x3	63	31	С/П	50
08	F x^2	22	20	F x < 0	5C			
09	С/П	50	21	24	24		Регистры	
10	П→x 2	62	22	←→	14		2	a
11	:	13	23	/—/	0L		3	— в/2a

Для обеих программ используется единая инструкция.

Инструкция I.4.1/21,54,52

Содержание	Набрать число	Выполнить команды	Результат
1. Занести величины a, в и c	a b c	В/О С/П С/П	
2. Вычислить корни: а) если D≥0		С/П	x_1—в рег. X x_2—в рег. Y
б) если D<0		С/П	080000000 000—для I.4.1/21 ЕГГОГ—для I.4.1/54,52 u—в рег. X, 3 v—в рег. Y

Время вычисления — 7 — 10 с.

Примеры.

1. $x^2 + x - 2 = 0$. $x_1 = -2$; $x_2 = 1$.
2. $x^2 + 2x + 2 = 0$. $x_1 = -1 + i1$; $x_2 = -1 - i \cdot 1$.

I.4.2. РЕШЕНИЕ КУБИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

Кубическое уравнение в канонической форме

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

делим на a и вводим новую переменную $y = x + b/3a$, в результате получаем кубическое уравнение относительно новой переменной y:

$$y^3 + 3py + 2q = 0,$$

где

$$q = \frac{b^3}{27a^3} - \frac{bc}{6a^2} + \frac{d}{2a}, \quad p = \frac{3ac - b^2}{3a^2}.$$

Решение такого уравнения $y_{1,2,3}$ запишем в виде таблицы |13|

p < 0		p > 0
$q^2+p^3 \leqslant 0$	$q^2+p^3 > 0$	
$\cos\varphi = q/r^3$	$\operatorname{ch}\varphi = q/r^3$	$\operatorname{sh}\varphi = q/r^3$
$y_1 = -2r\cos\varphi/3$ $y_2 = 2r\cos\left(\frac{\pi-\varphi}{3}\right)$ $y_3 = 2r\cos\left(\frac{\pi+\varphi}{3}\right)$	$y_1 = -2r\operatorname{ch}\varphi/3$ $y_2 = r\operatorname{ch}\varphi/3 + i\sqrt{3}\, r\operatorname{sh}\varphi/3$ $y_3 = r\operatorname{ch}\varphi/3 - i\sqrt{3}\, r\operatorname{sh}\varphi/3$	$y_1 = -2r\operatorname{sh}\varphi/3$ $y_2 = r\operatorname{sh}\varphi/3 + i\sqrt{3}\, r\operatorname{ch}\varphi/3$ $y_3 = r\operatorname{sh}\varphi/3 - i\sqrt{3}\, r\operatorname{ch}\varphi/3$

где

$$r = \operatorname{sign}(q) \cdot \sqrt{|p|}.$$

В случае, если корни $y_{2,3}$ комплексные, обозначим $y_{2,3} = u \pm iv$.

Программа I.4.2/54, 52

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	x→П 1	41	35	:	13	70	:	13
01	←→	14	36	x→П1	41	71	F e^x	16
02	x→П 0	40	37	F cos	1Г	72	x→П 1	41
03	F x^2	22	38	/—/	0L	73	:	13
04	F √	21	39	П→x 2	62	74	П→x 1	61
05	П→x 1	61	40	2	02	75	—	11
06	П→x 1	61	41	×	12	76	x→П 0	40
07	×	12	42	×	12	77	2	02
08	:	13	43	С/П	50	78	:	13
09	F √	21	44	F Bx	0	79	П→x 1	61
10	×	12	45	П→x 1	61	80	+	10
11	x→П 2	42	46	F π	20	81	П→x 2	62
12	B↑	0E	47	3	03	82	×	12
13	F x^2	22	48	:	13	83	3	03
14	×	12	49	x→П 0	40	84	F √	21
15	:	13	50	—	11	85	×	12
16	1	01	51	F cos	1Г	86	П→x 0	60
17	П→x 0	60	52	×	12	87	П→x 2	62
18	F x<0	5C	53	П→x 1	61	88	×	12
19	59	59	54	П→x 0	60	89	С/П	50
20	←→	14	55	+	10	90	0	00
21	/—/	0L	56	F cos	1Г	91	F 1/x	23
22	←→	14	57	БП	51	92	К НОП	54
23	B↑	0E	58	39	39	93	F .	25
24	F x^2	22	59	F .	25	94	2	02
25	×	12	60	x→П 1	41	95	:	13
26	П→x 1	61	61	←→	14	96	/—/	0L
27	F x^2	22	62	B↑	0E	97	С/П	50

Продолжение

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
28	+	10	63	F x^2	22
29	F x<0	5C	64	П→x 1	61
30	59	59	65	+	10
31	F .	25	66	F $\sqrt{\ }$	21
32	←→	14	67	+	10
33	F $\cos^{-1}$	1—	68	F ln	18
34	3	03	69	3	03

Регистры оперативные 0; 1 2 г

Инструкция I.4.2/54,52

Содержание	Набрать число	Выполнить команды	Результат
1. Переключатель Р/Г поставить в положение Р			
2. Ввести значения p и q	p q	В↑	p q
3. Вычислить действительный корень		В/О С/П	y_1
4. Вычислить остальные корни:		С/П	
а) если корни действительные			y_2—в рег. X y_3—в рег. Y
б) если корни мнимые		С/П	ЕГГОГ u—в рег. X v—в рег. Y

Время вычисления — 30 с.

Примеры.

1. $y^3 - 9y + 8 = 0$ ($p = -3$, $q = 4$).
   Ответ: $y_1 = -3{,}3723$, $y_2 = 1$, $y_3 = 2{,}3723$.
2. $y^3 - 6y - 40 = 0$ ($p = -2$, $q = -20$).
   Ответ: $y_1 = 4$, $y_{2,3} = -2 \pm i \cdot 2{,}4495$.
3. $y^3 + 12y - 32 = 0$ ($p = 4$, $q = -16$).
   Ответ: $y_1 = 2$, $y_{2,3} = -1 \pm i \cdot 3{,}873$.

I.4.3. РЕШЕНИЕ СИСТЕМЫ ДВУХ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y = p_1, \\ a_2 x + b_2 y = p_2. \end{cases}$$

Значение а, в, р вводятся в регистры памяти 1—6 согласно следующей таблице:

$$\begin{Vmatrix} a_1 & b_1 & p_1 \\ a_2 & b_2 & p_2 \end{Vmatrix} \Rightarrow \begin{Vmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{Vmatrix}.$$

В Б3-21 регистр памяти 1 совпадает с регистром Y, поэтому при расчете по программе I.4.3/21 значение a_2 в Р1 вводится последним после ввода остальных коэффициентов а, в,р.

Программа I.4.3/21

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	P 7	71	32	ПП	68
01	F 5	52	33	F 4	42
02	×	26	34	↑	06
03	P ,	43	35	P /—/	53
04	F 4	42	40	С/П	78
05	↑	06	41	↑	06
10	F 2	22	42	F 6	62
11	×	26	43	×	26
12	↑	06	44	P ,	43
13	P /—/	53	45	F 5	52
14	—	86	50	↑	06
15	P 8	81	51	F 3	32
20	F 2	22	52	×	26
21	ПП	68	53	↑	06
22	F 4	42	54	P /—/	53
23	/—/	56	55	—	86
24	P ,	43	60	↑	06
25	F 4	42	61	F 8	82
30	P 5	51	62	:	36
31	F 7	72	63	В/О	48

Инструкция
p_1—в Р6, $в_1$—в Р5,
a_1—а Р4, p_2—в Р3,
$в_2$—в Р2, a_2—в Р1
В/О С/П

Результат
x—в рег. X
y—в рег. Y

Регистры

2	$в_2$
3	p_2
4	a_1
5 оперативный	
6	p_1
7	a_2
8	a_1 $в_2$—a_2 $в_1$

Программа I.4.3/54,52

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	П→x 6	66	15	В↑	0E
01	П→x 1	61	16	П→x 6	66
02	×	12	17	←→	14
03	П→x 3	63	18	П→x 5	65
04	П→x 4	64	19	×	12
05	×	12	20	—	11
06	—	11	21	П→x 4	64
07	П→x 5	65	22	:	13
08	П→x 1	61	23	С/П	50
09	×	12			
10	П→x 4	64			
11	П→x 2	62			
12	×	12			
13	—	11			
14	:	13			

Инструкция
a_1 x→П 4, $в_1$ x→П 5
p_1 x→П 6, a_2 x→П 1
$в_2$ x→П 2, p_3 x→П 3
В/О С/П

Результат
x—в рег. X
y—в рег. Y

Регистры

1	a_2
2	$в_2$
3	p_2
4	a_1
5	$в_1$
6	p_1

Время вычисления — 8 с.

Пример $\begin{cases} 3x + 5y = -9, \\ 2x - y = 7. \end{cases}$

Ответ: $x = 2$, $y = -3$.

1.4.4. РЕШЕНИЕ СИСТЕМЫ ТРЕХ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y + c_1 z = p_1, \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z = p_2, \\ a_3 x + b_3 y + c_3 z = p_3, \end{cases} \text{ при } a_1 \neq 0, \ \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Значения а, в, с, р вводятся по столбцам.

Программа 1.4.4/54,52

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	x→П Д	4Г	27	П→x 9	69	54	П→x С	6С
01	F .	25	28	×	12	55	×	12
02	x→П С	4С	29	П→x 3	63	56	+	10
03	←→	14	30	П→x 8	68	57	—	11
04	x→П В	4L	31	×	12	58	x→П А	4—
05	1	01	32	—	11	59	С/П	50
06	1	01	33	П→x 5	65			
07	x→П 1	41	34	П→x 9	69			
08	3	03	35	×	12			
09	x→П 0	40	36	П→x 6	66			
10	С/П	50	37	П→x 8	68			
11	П→x Д	6Г	38	×	12			
12	:	13	39	—	11			
13	К x→П 1	L1	40	:	13			
14	x→П 2	42	41	x→П С	4С			
15	П→x С	6С	42	П→x 4	64			
16	×	12	43	П→x 2	62			
17	—	11	44	П→x 5	65			
18	К x→П 1	L1	45	П→x С	6С			
19	F .	25	46	×	12			
20	П→x 2	62	47	—	11			
21	П→x В	6L	48	П→x 8	68			
22	×	12	49	:	13			
23	—	11	50	x→П В	4L			
24	К x→П 1	L1	51	П→x А	6—			
25	F L0	5Г	52	×	12			
26	10	10	53	П→x 7	67			

Инструкция

В/О

a_1 В↑ a_2 В↑ a_3 С/П
$в_1$ В↑ $в_2$ В↑ $в_3$ С/П
c_1 В↑ c_2 В↑ c_3 С/П
p_1 В↑ p_2 В↑ p_3 С/П

Результат

x—в рег. X , A
y—в рег. B
z—в рег. C

Регистры

0—9; Д оперативные
A x
B y
C z

Время вычисления после ввода последнего столбца — 15 с.

Пример.
$$\begin{cases} 2x - 5y - 4z = -28, \\ -x + 2y + 3z = 17, \\ 3x - 2y + 3z = 5. \end{cases}$$

Ответ: $x = -1$, $y = 2$, $z = 4$.

1.4.5. РЕШЕНИЕ СИСТЕМЫ ЧЕТЫРЕХ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

$$\begin{cases} a_{11} x + a_{12} y + a_{13} z + a_{14} t = b_1, \\ a_{21} x + a_{22} y + a_{23} z + a_{24} t = b_2, \\ a_{31} x + a_{32} y + a_{33} z + a_{34} t = b_3, \\ a_{41} x + a_{42} y + a_{43} z + a_{44} t = b_4. \end{cases}$$

Решение производится методом приведения матрицы коэффициентов $||a_{ij}||$ к диагональному виду. На все главные миноры матрицы $||a_{ij}||$, содержащие a_{11}, накладываются ограничения:

$$a_{11} \neq 0; \ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0; \ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Элементы системы уравнений a_{ij}, $в_i$ вводятся построчно.

Программа 1.4.5/54,52

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	x→П 3	43	37	x→П 8	48	74	x→П 1	41
01	4	04	38	ПП	53	75	ПП	53
02	x→П 0	40	39	63	63	76	77	77
03	x→П 4	44	40	←→	14	77	С/П	50
04	С/П	50	41	:	13	78	П→x 1	61
05	П→x 3	63	42	x→П 3	43	79	ПП	53
06	:	13	43	7	07	80	86	86
07	К x→П 4	L4	44	x→П 4	44	81	П→x 2	62
08	x→П Д	4Г	45	П→x Д	6Г	82	К П→x 4	Г4
09	П→x 9	69	46	П→x В	6L	83	×	12
10	x→П А	4—	47	ПП	53	84	—	11
11	Сх	0Г	48	85	85	85	П→x 3	63
12	К x→П 4	L4	49	x→П Д	4Г	86	К П→x 4	Г4
13	F L0	5Г	50	П→x 7	67	87	×	12
14	04	04	51	×	12	88	—	11
15	x→П 9	49	52	—	11	89	В/О	52
16	ПП	53	53	П→x С	6С			
17	62	62	54	П→x Д	6Г			
18	П→x 2	62	55	П→x 6	66			
19	:	13	56	ПП	53			
20	x→П С	4С	57	83	83			
21	←→	14	58	x→П С	4С			
22	П→x 2	62	59	П→x 5	65			
23	:	13	60	ПП	53			
24	x→П 9	49	61	83	83			
25	П→x 1	61	62	x→П В	4L			
26	П→x 2	62	63	С/П	50			
27	:	13	64	x→П 3	43			
28	x→П 6	46	65	4	04			
29	ПП	53	66	x→П 4	44			
30	63	63	67	С/П	50			
31	П→x 1	61	68	ПП	53			
32	:	13	69	85	85			
33	x→П В	4L	70	x→П 2	42			
34	←→	14	71	С/П	50			
35	П→x 1	61	72	ПП	53			
36	:	13	73	81	81			

Инструкция

В/О a_{11} С/П a_{12} С/П...
... $в_1$ С/П
. . . . . .
a_{41} С/П a_{42} С/П...
...$в_4$ С/П

Результат

x—в рег. X, B
y—в рег. C
z—в рег. Д
t—в рег. 3

Регистры

0—2; 4—9; A оперативные
3 t
B x
C y
Д z

Полное время вычисления — 2 мин.

Пример.
$$\begin{cases} x+2y+3z+t=2, \\ 2x-3y+z-t=15, \\ 3x+y-2z+2t=-13, \\ 4x-5y+2z-3t=32. \end{cases}$$

Ответ: $x = 1$, $y = -2$, $z = 3$, $t = -4$.

1.4.6. РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ f(x)=0

Подпрограмма вычисления значений функции f (x) размещается в памяти машины сразу за основной программой и заканчивается командой возврата В/О. Аргумент x для вычисления f (x) помещается в регистр X. После вычисления подпрограммы значение f (x) также помещается в регистр X.

1.4.6.1. МЕТОД ДИХОТОМИИ

Корень уравнения f $(x) = 0$ ищется на интервале неопределенности $a \leqslant x \leqslant в$ в предположении, что на этом интервале находится только один корень, откуда $f(a) \cdot f(b) < 0$. За каждый шаг итерации интервал неопределенности уменьшается вдвое [15], таким образом за n шагов итерации интервал неопределенности становится равным $(в - a) \cdot 2^{-n}$.

Программа 1.4.6.1/21

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	Р 5	51	23	ПП	68	50	Р /—/	53
01	←→	16	24	F 6	62	51	1	14
02	Р 4	41	25	↑	06	52	—	86
03	ПП	68	30	F 3	32	53	Р x=0	59
04	F 6	62	31	×	26	54	F 1	12
05	Р 3	31	32	Р x<0	69	55	F 2	22
10	С/П	78	33	Р ,	43	60	С/П	78
11	Р ,	43	34	F 2	22			
12	F 4	42	35	Р 5	51		Регистры	
13	↑	06	40	БП	58			
14	F 5	52	41	Р 5	51	2	x_0	
15	+	96	42	←→	16	3	$f(x_0)$	
20	2	24	43	Р 3	31	4; 5 оперативные		
21	:	36	44	F 2	22			
22	Р 2	21	45	Р 4	41			

Программа 1.4.6.1/54,52

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	x→П В	4L	13	x→П 2	42	26	x→П 3	43
01	←→	14	14	ПП	53	27	П→x 2	62
02	x→П А	4—	15	33	33	28	x→П А	4—
03	ПП	53	16	П→x 3	63	29	F L0	5Г
04	33	33	17	←→	14	30	08	08
05	x→П 3	43	18	×	12	31	П→x 2	62
06	С/П	50	19	F x<0	5С	32	С/П	50
07	x→П 0	40	20	25	25			
08	П→x А	6—	21	П→x 2	62		Регистры	
09	П→x В	6L	22	x→П В	4L			
10	+	10	23	БП	51	0, А, В оперативные		
11	2	02	24	29	29	2	x_0	
12	:	13	25	F Вх	0	3	$f(x_0)$	

Инструкция 1.4.6.1/21, 54, 52

Содержание	Набрать число	Выполнить команды	Результат
1. Ввести программу и подпрограмму вычисления f(x)			
2. Занести начальные границы интервала неопределенности	а в	В↑ В/О С/П	а f(a)
3. Занести требуемое число итераций n и вычислить корень	n	С/П	x_0—в рег. X, 2 $f(x_0)$—в рег. 3

Пример.

Найти корень уравнения $f(x) = e^x - \sqrt{x^2+1} - 3 = 0$ на интервале 0—2, выполнив 10 итераций.

Решение. Подпрограмма вычисления значений функции $f(x) = e^x - \sqrt{x^2+1} - 3$ имеет вид:

а) для программы 1.4.6.1/21 ↑ Р , ↔ F x^2 1 + F √ ↑ Р /—/ Р e^x — 3 + /—/ В/О

б) для программы 1.4.6.1/54,52 Fe^xF BxF$x^2$1+F √ — 3— В/О

Ответ: $x_0 = 1{,}584$; точное значение $x_0 = 1{,}5837$.

Время вычисления по программе 1.4.6.1/21 — 1 мин 20 с; по программе 1. 4.6.1/54, 52 — 1 мин 45 с.

1.4.6.2. МЕТОД ХОРД

Для нахождения корня уравнения f (x) = 0 используется метод хорд [15]. Подпрограмма вычисления f (x) располагается, начиная с адреса 44, и заканчивается командой В/О. Значение аргумента x для вычисления f (x) располагается в регистре X, туда же помещается вычисленное значение f (x). Корень x лежит на интервале (a, b).

Программа I.4.6.2/54,52

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	x→П 0	40	17	—	11	34	П→x 2	62
01	F.	25	18	П→x 2	62	35	БП	51
02	x→П B	4L	19	П→x 1	61	36	40	40
03	←→	14	20	—	11	37	П→x C	6C
04	x→П A	4—	21	:	13	38	x→П B	4L
05	ПП	53	22	x→П C	4C	39	П→x 3	63
06	44	44	23	ПП	53	40	F L 0	5Г
07	x→П 1	41	24	44	44	41	11	11
08	П→xB	6L	25	x→П 3	43	42	П→x C	6C
09	ПП	53	26	П→x 1	61	43	С/П	50
10	44	44	27	×	12			
11	x→П 2	42	28	F x⩾0	59		Регистры	
12	П→x A	6—	29	37	37			
13	×	12	30	П→x 3	63	1, 2, A, B	оперативные	
14	П→x B	6L	31	x→П 1	41	3	$f(x_0)$	
15	П→x 1	61	32	П→x C	6C	C	(x_0)	
16	×	12	33	x→П A	4—			

Инструкция I.4.6.2/54,52

Содержание	Набрать число	Выполнить команды	Результат
1. Ввести программу и подпрограмму вычисления функции f(x)			
2. Занести два значения аргумента и количество итераций	а в п	В↑ В↑	а в п
3. Вычислить x_0		В/О С/П	x_0— в рег. X, C $f(x_0)$—в рег. Y

Пример. Найти корень уравнения $x^3 + e^x = 0$ при $n = 10$ $a = -2$, $b = 2$.

Решение. Программа вычисления значений функции $f(x) = x^3 + e^x$ имеет вид Fe^x F Bx B↑ Fx^2 × + В/О

Ответ: $\tilde{x}_0 = -0{,}77014$; точное значение $x_0 = -0{,}7729$. Время вычисления примера — 2 мин.

I.4.6.3. МЕТОД ХОРД ПРИ ОДНОМ ФИКСИРОВАННОМ УЗЛЕ

Для нахождения корня уравнения $f(x) = 0$ используется метод хорд с фиксированным узлом в точке а. Подпрограмма вычисления f (x) располагается непосредственно за основной программой и заканчивается командой В/О. Значение аргумента x для вычисления f (x) располагается в регистре X, туда же помещается вычисленное значение f (x).

Программа I.4.6.3/21

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	Р /—/	53	23	F 3	32	50	Р /—/	53
01	←→	16	24	×	26	51	1	14
02	Р 3	31	25	Р ,	43	52	—	86
03	ПП	68	30	F 2	22	53	Р x=0	59
04	F 6	62	31	←→	16	54	F 1	12
05	Р 4	41	32	Р 2	21	55	Р ,	43
10	С/П	78	33	F 4	42	60	С/П	78
11	Р ,	43	34	×	26			
12	Р 2	21	35	↑	06		Регистры	
13	ПП	68	40	Р /—/	53			
14	F 6	62	41	—	86		2 $f(x_0)$	
15	↑	06	42	↑	06		3 a	
20	F 4	42	43	Р /—/	53		4 f(a)	
21	—	86	44	:	36			
22	Р ,	43	45	/—/	56			

Инструкция I.4.6.3/21

Содержание	Набрать число	Выполнить команды	Результат
1. Ввести программу и подпрограмму вычислений функции f(x)			
2. Занести начальные значения a и b	а в	↑ В/О С/П	а f(a)
3. Занести требуемое число итераций п и вычислить x_0	п	С/П	x_0—в рег. X $f(x_0)$—в рег. 2

Программа I.4.6.3/54,52

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	x→П 0	40	11	В↑	0E	22	x→П B	4L
01	F .	25	12	П→x A	6—	23	F L 0	5Г
02	x→П B	4L	13	×	12	24	09	09
03	←→	14	14	П→x 1	61	25	С/П	50
04	x→П A	4—	15	П→x B	6L			
05	ПП	53	16	×	12		Регистры	
06	26	26	17	—	11	0	счетчик	
07	x→П 1	41	18	←→	14	1	f(a)	
08	П→x B	6L	19	П→x 1	61	A	a	
09	ПП	53	20	—	11	B	x_0	
10	26	26	21	:	13			

Инструкция I.4.6.3./54,52

Содержание	Набрать число	Выполнить команды	Результат
1. Ввести программу и подпрограмму вычисления f(x)			
2. Занести начальные значения a, b и количество итераций n	a b n	B↑ B↑	a b n
3. Вычислить x_0 и $f(x_0)$		В/О С/П	x_0—в рег. X,B $f(x_0)$—в рег. Y
4. Для выполнения n_1 добавочных итераций	n_1	x→П 0 БП 08 С/П	x_0—в рег. X,B $f(x_0)$—в рег. Y

Пример. Найти корень уравнения $x^3 + e^x = 0$ при $n = 10$, $a = -2$, $b = 2$.

Решение. Подпрограмма вычисления значений функции $f(x) = x^3 + e^x$ имеет вид:

а) для программы I.4.6.3/21 ↑ $Fx^2 \times$ ↔ Pe^x + В/О

б) для программы I.4.6.3/54,52 Fe^x F Bx B↑ F x^2 × + В/О

Ответ: $\tilde{x}_0 = -0{,}7701$; точное значение $x_0 = -0{,}7729$.

Время вычисления примера: для программы I.4.6.3/21 — 1 мин 10 с; для программы I.4.6.3/54,52—1 мин 30 с.

I.4.6.4. МЕТОД ЗАЙДЕЛЯ

Уравнение $f(x) = 0$ приводится предварительно к виду $x = f_1(x)$.

Для вычисления корня x_0 используется итерационная процедура: значение x_{k+1} определяется как $x_{k+1} = f_1(x_k)$ [15].

Программа вычисления очень короткая и не требует установки всего интервала неопределенности, а лишь начального значения x. Этот метод сходится в случае $\left|\frac{df_1(x)}{dx}\right| \leqslant 1$.

Подпрограмма вычисления $f_1(x)$ располагается непосредственно за основной программой и заканчивается командой В/О. Используемое при этом значение аргумента x и вычисленная функция f(x) располагаются в регистре X.

Программа I.4.6.4/21

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	↔	16	11	P /—/	53
01	P /—/	53	12	1	14
02	↔	16	13	—	86
03	P ,	43	14	P x=0	59
04	P 2	21	15	0	04
05	ПП	68	20	P ,	43
10	P ×	23	21	С/П	78

Регистр

2 x_0

Программа I.4.6.4/54,52

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	x→П 3	43	04	08	08
01	↔	14	05	F L 3	5—
02	x→П 2	42	06	02	02
03	ПП	53	07	С/П	50

Регистры

2 x_0

3 оперативный

Для обеих программ используется единая инструкция.

Инструкция I.4.6.4/21,54,52

Содержание	Набрать число	Выполнить команды	Результат
1. Ввести программу и подпрограмму вычисления $f_1(x)$			
2. Занести начальное значение x_1	x_1	B↑	x
3. Занести количество итераций n	n		n
4. Вычислить x		В/О С/П	$f(x_0)$—в рег. X x_0—в рег. 2

Пример. Найти корень уравнения $f(x) = x - e^{-x/2} = 0$ при $n = 10$ итерациях и начальном $x_1 = 1$.

Решение. $x = f_1(x) = e^{-x/2}$; подпрограмма вычисления имеет вид:

а) для программы I.4.6.4/21 /—/$Pe^xF\sqrt{\ }$ В/О

б) для программы I.4.6.4/54,52/—/$Fe^xF\sqrt{\ }$ В/О

Ответ: $\tilde{x}_0 = 0{,}703444$, $f_1(\tilde{x}_0) = 0{,}703476$; точное значение $x_0 = f_1(x_0) = 0{,}703467$.

Время вычисления примера — 30—40 с.

I.4.7. РЕШЕНИЕ СИСТЕМЫ ТРАНСЦЕНДЕНТНЫХ УРАВНЕНИЙ

Система трансцендентных уравнений представлена в виде

$$\begin{cases} x = f_1(x, y, \ldots, t), \\ y = f_2(x, y, \ldots, t), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ t = f_k(x, y, \ldots, t) \end{cases}$$

и решается при задании начальных значений $x_1, y_1, \ldots, t_1$ с помощью модификации Зайделя [15] по итерационным формулам:

$$x_{m+1} = f_1(x_m, y_m, \ldots, t_m),$$
$$y_{m+1} = f_2(x_{m+1}, y_m, \ldots, t_m),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$t_{m+1} = f_k(x_{m+1}, y_{m+1}, \ldots, t_m).$$

Итерационный процесс сходится, если суммы модулей частных производных каждой функции f_1 по всем переменным не превышают 1.

Подробно о сходимости итерационного процесса в [15]. Подпрограмма вычисления значений $f_1, f_2, \ldots, f_k$ по вычисленным ранее аргументам располагается непосредственно за основной программой и заканчивается командой В/О.

При вычислении по программе I.4.7/54,52 максимальное количество уравнений k системы 13 ($k \leqslant 13$).

Подпрограмма вычисляет последовательно значение f_1 по предыдущим значениям $x_m, y_m, \ldots, t_m$, находящимся соответственно в регистрах Д, С, В, ..., 14 — k, и помещает вычисленное значение f_1 в регистр Д; аналогично вычисляется f_2 и помещается в регистр С и т.д.

Программа I.4.7/54,52

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	x→П Д	4Г	09	ПП	53	18	БП	51
01	1	01	10	20	20	19	16	16
02	3	03	11	F L 0	5Г			
03	x→П 0	40	12	09	09		Регистры	
04	С/П	50	13	1	01			
05	К x→П 0	L0	14	4	04		0	счетчик
06	БП	51	15	x→П 0	40		(14—к)—Д x, y,..., t	
07	04	04	16	К П→x 0	Г0			
08	x→П 0	40	17	С/П	50			

При вычислении по программе I.4.7/52 максимальное количество уравнений к системы увеличивается до 14 ($k \leqslant 14$) за счет использования дополнительного регистра памяти Е.

При этом подпрограмма вычисляет последовательно значение f_1 по предыдущим значениям $x_m, y_m, \ldots, t_m$, находящимся в регистрах памяти Е, Д, С, ..., (15 — k), и помещает вычисленное значение в регистр Е; затем аналогично вычисляется f_2 и помещается в регистр Д и т. д.

Программа I.4.7/52

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	x→П Е	4Е	09	ПП	53	18	БП	51
01	1	01	10	20	20	19	16	16
02	4	04	11	F L 0	5Г			
03	x→П 0	40	12	09	09		Регистры	
04	С/П	50	13	1	01			
05	К x→П 0	L0	14	5	05		0	счетчик
06	БП	51	15	x→П 0	40		(15—k)—Е x, y,..., t	
07	04	04	16	К П→x 0	Г0			
08	x→П 0	40	17	С/П	50			

Для обеих программ используется единая инструкция.

Инструкция I.4.7/54,52

Содержание	Набрать число	Выполнить команды	Результат
1. Ввести программу и подпрограмму			
2. Занести начальные приближения	x_1	В/О С/П	13 или 14
	y_1	С/П	y_1
	. . . . .	. . . . .	. . . . .
	t_1	С/П	t_1
3. Занести требуемое количество итераций п и найти решение	п	БП 08 С/П	x
		С/П	y
		. . . . .	. . .
		С/П	t
4. При необходимости уточнения результата — к п. 3			

Пример. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} x = \sqrt{xy + 1}, \\ y = e^{-x} \end{cases}$$

при начальных значениях $x_1 = 1$, $y_1 = 1$, выполнив 5 итераций.

Решение. Подпрограмма вычисления f_1 и f_2 имеет вид:

а) для программы I.4.7/54,52

П→ x Д П→ x С×1 + F √ x → П Д/—/Fe^x x → П С В/О

б) для программы I.4.7/52

П→ x Е П→ xД×1 + F √ x → П Е/—/Fe^x x → П Д В/О

Ответ: $\tilde{x} = 1{,}1675856$, $\tilde{y} = 0{,}31111722$; точные значения $x = 1{,}1675855$, $y = 0{,}31111724$.

I.5. ЭЛЕМЕНТЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ

I.5.1. ВЫЧИСЛЕНИЕ ДЕТЕРМИНАНТОВ

I.5.1.1. ВТОРОГО ПОРЯДКА

$$D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

Ввод элементов a_{ij} $(i,j = 1,2)$ производится построчно.

Программа I.5.1.1/21

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	
00	Р 2	21	11	Р ,	43	Инструкция
01	С/П	78	12	F 2	22	
02	↑	06	13	×	26	В/О a_{11} С/П a_{12} С/П
03	С/П	78	14	↑	06	a_{21} С/П a_{22} С/П
04	×	26	15	Р /—/	53	
05	С/П	78	20	—	86	Регистр
10	←→	16	21	С/П	78	2 a_{11}

Программа I.5.1.1/54,52

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	F .	25	05	F .	25
01	×	12	06	←→	14
02	F .	25	07	—	11
03	×	12	08	С/П	50
04	←→	14			

Инструкция

В/О a_{11} В↑ a_{12} В↑ a_{21} В↑ a_{22} С/П

Время вычисления — 2 с.

Пример. $\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -3 & 7 \end{vmatrix} = 26.$

I.5.1.2. ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

$$D_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{21} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

При вычислении D_3 по программе I.5.1.2/21 элементы a_{ij} (i,j = = 1—3) вводятся построчно.

Программа I.5.1.2/21

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	Р4	41	35	F6	62	74	↑	06
01	С/П	78	40	—	86	75	F3	32
02	Р2	21	41	/—/	56	80	×	26
03	С/П	78	42	↑	06	81	↑	06
04	Р3	31	43	Р/—/	53	82	F4	42
05	С/П	78	44	×	26	83	—	86
10	Р,	43	45	Р6	61	84	↑	06
11	С/П	78	50	С/П	78	85	Р/—/	53
12	Р,	43	51	Р5	51	90	×	26
13	С/П	78	52	↑	06	91	↑	06
14	Р,	43	53	F4	42	92	F6	62
15	С/П	78	54	×	26	93	—	86
20	Р7	71	55	Р4	41	94	В/О	48
21	↑	06	60	F7	72			
22	F2	22	61	ПП	68			
23	×	26	62	FCx	75			
24	Р6	61	63	Р6	61			
25	С/П	78	64	F5	52			
30	Р8	81	65	↑	06			
31	↑	06	70	F2	22			
32	F4	42	71	×	26			
33	×	26	72	Р4	41			
34	↑	06	73	F8	82			

Инструкция

В/О a_{11} С/П a_{12} С/П a_{13} С/П ... a_{33} С/П

Регистры

2—8 оперативные

При вычислении D_3 по программе I.5.1.2/54,52 элементы a_{ij} (i,j = = 1—3) заносятся в регистры памяти 1—9 согласно таблице

$$\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{Vmatrix} \Rightarrow \begin{Vmatrix} 7 & 8 & 9 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{Vmatrix}.$$

Программа I.5.1.2/54,52

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	П→х 3	63	15	—	11
01	П→х 5	65	16	П→х 1	61
02	×	12	17	×	12
03	П→х 2	62	18	+	10
04	П→х 6	66	19	П→х 2	62
05	×	12	20	П→х 9	69
06	—	11	21	×	12
07	П→х 7	67	22	П→х 3	63
08	×	12	23	П→х 8	68
09	П→х 8	68	24	×	12
10	П→х 6	66	25	—	11
11	×	12	26	П→х 4	64
12	П→х 5	65	27	×	12
13	П→х 9	69	28	+	10
14	×	12	29	С/П	50

Инструкция

Ввести a_{ij}(i, j=1—3) согласно приведенной таблице

В/О С/П

Регистры

1	a_{31}
2	a_{32}
3	a_{33}
4	a_{21}
5	a_{22}
6	a_{23}
7	a_{11}
8	a_{12}
9	a_{13}

Время вычисления — 10 с.

Пример. $\begin{vmatrix} 4 & 5 & 1 \\ 2 & -3 & 4 \\ 7 & 2 & -5 \end{vmatrix} = 243.$

I.5.1.3. ВЫЧИСЛЕНИЕ ДЕТЕРМИНАНТА ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА

$$D_4 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}.$$

Ввод элементов a_{ij} производится построчно.

Программа I.5.1.3/54,52

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	x→П 1	41	25	П→x C	6C	50	П→x 1	61
01	С/П	50	26	×	12	51	×	12
02	x→П 2	42	27	—	11	52	/—/	0L
03	4	04	28	П→x 5	65	53	С/П	50
04	x→П 4	44	29	×	12	54	П→x 1	61
05	3	03	30	П→x Д	6Г	55	:	13
06	x→П 0	40	31	П→x 8	68	56	x→П 3	43
07	С/П	50	32	×	12	57	F .	25
08	С/П	50	33	П→x A	6—	58	П→x 2	62
09	ПП	53	34	П→x B	6L	59	П→x 3	63
10	53	53	35	×	12	60	×	12
11	←→	14	36	—	11	61	С/П	50
12	B↑	0E	37	П→x 6	66	62	—	11
13	ПП	53	38	×	12	63	К x→П 4	L4
14	59	59	39	—	11	64	F .	25
15	←→	14	40	П→x 8	68	65	В/О	52
16	B↑	0E	41	П→x C	6C			
17	ПП	53	42	×	12			
18	59	59	43	П→x 9	69			
19	FL0	5Г	44	П→x B	6L			
20	09	09	45	×	12			
21	П→x Д	6Г	46	—	11			
22	П→x 9	69	47	П→x 7	67			
23	×	12	48	×	12			
24	П→x A	6—	49	+	10			

Инструкция

В/О a_{11} С/П a_{12} С/П... ... a_{44} С/П

Регистры

0—Д оперативные

Время вычисления после ввода одного элемента a_{ij} — 1 — 3 с. Время вычисления D_4 после ввода a_{44} — 13 с.

Пример.
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & -2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 5 & -4 \\ 7 & 0 & 2 & 6 \end{vmatrix} = 484.$$

I.5.1.4. ВЫЧИСЛЕНИЕ ДЕТЕРМИНАНТА ПЯТОГО ПОРЯДКА

$$D_5 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{vmatrix}.$$

Ввод элементов a_{ij} производится построчно.

Программа I.5.1.4/54,52

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	x→П 0	40	31	48	48	62	П→x 1	61
01	4	04	32	П→x 1	61	63	С/П	50
02	x→П 1	41	33	:	13	64	ПП	53
03	x→П 4	44	34	x→П B	4L	65	75	75
04	С/П	50	35	←→	14	66	x→П 1	41
05	П→x 0	60	36	П→x 1	61	67	F .	25
06	:	13	37	:	13	68	ПП	53
07	К x→П 4	L4	38	x→П 8	48	69	71	71
08	x→П Д	4Г	39	ПП	53	70	×	12
09	П→x 9	69	40	48	48	71	С/П	50
10	x→П A	4—	41	←→	14	72	П→x 1	61
11	Cx	0Г	42	:	13	73	ПП	53
12	К x→П 4	L4	43	ПП	53	74	79	79
13	FL1	5L	44	49	49	75	П→x 2	62
14	04	04	45	←→	14	76	ПП	53
15	x→П 9	49	46	—	11	77	79	79
16	x→П B	4L	47	F .	25	78	П→x 3	63
17	ПП	53	48	1	01	79	К П→x 4	Г4
18	54	54	49	x→П 1	41	80	×	12
19	П→x 2	62	50	FBx	0	81	—	11
20	:	13	51	П→x 0	60	82	В/О	52
21	x→П C	4C	52	×	12			
22	←→	14	53	x→П 0	40			
23	П→x 2	62	54	С/П	50			
24	:	13	55	x→П 3	43			
25	x→П 9	49	56	4	04			
26	П→x 1	61	57	x→П 4	44			
27	П→x 2	62	58	С/П	50			
28	:	13	59	ПП	53			
29	x→П 6	46	60	78	78			
30	ПП	53	61	x→П 2	42			

Инструкция

В/О a_{11} С/П a_{12} С/П... ... a_{55} С/П

Регистры

0 D_5

1—Д оперативные

Время вычисления после ввода одного элемента a_{ij} — 2—13 с. Время вычисления D_5 после ввода a_{55} — 10 с.

Пример.
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 5 & 4 & 3 & 2 \\ 2 & -4 & 1 & 6 & 1 \\ 3 & 5 & 4 & 0 & 7 \\ 2 & 0 & 1 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 980.$$

I.5.2. ОБРАЩЕНИЕ МАТРИЦ

I.5.2.1. ВТОРОГО ПОРЯДКА

Значения элементов исходной матрицы заносятся в регистры памяти 4,5,7,8 согласно следующей таблице:

$$a = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{Vmatrix} \Rightarrow \begin{Vmatrix} 7 & 8 \\ 4 & 5 \end{Vmatrix}.$$

Полученная в результате вычисления обратная матрица заносится аналогично в те же регистры памяти

$$A = a^{-1} = \begin{Vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{Vmatrix} \Rightarrow \begin{Vmatrix} 7 & 8 \\ 4 & 5 \end{Vmatrix}.$$

Следовательно, двукратное исполнение программы даст в результате исходную матрицу а.

Программа I.5.2.1/21

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	F4	42	24	:	36	52	F3	32
01	↑	06	25	↑	06	53	/—/	56
02	F8	82	30	F7	72	54	:	36
03	×	26	31	←→	16	55	P4	41
04	P3	31	32	P7	71	60	С/П	78
05	F5	52	33	F3	32			
10	↑	06	34	:	36			
11	F7	72	35	P5	51			
12	×	26	40	F8	82			
13	↑	06	41	↑	06			
14	F3	32	42	F3	32			
15	—	86	43	/—/	56			
20	P3	31	44	:	36			
21	↑	06	45	P8	81			
22	F5	52	50	F4	42			
23	←→	16	51	↑	06			

Регистры

3 детерминант
4 a_{21}; A_{21}
5 a_{22}; A_{22}
7 a_{11}; A_{11}
8 a_{12}; A_{12}

Программа I.5.2.1/54,52

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	П→х 5	65	12	:	13	24	х→П 4	44
01	В↑	0E	13	х→П 5	45	25	С/П	50
02	П→х 7	67	14	F.	25			
03	×	12	15	х→П 7	47			
04	П→х 4	64	16	П→х 8	68			
05	П→х 8	68	17	П→х Д	6Г			
06	×	12	18	/—/	0L			
07	—	11	19	:	13			
08	х→П Д	4Г	20	х→П 8	48			
09	:	13	21	П→х 4	64			
10	П→х 7	67	22	FBx	0			
11	П→х Д	6Г	23	:	13			

Регистры

4 a_{21}; A_{21}
5 a_{22}; A_{22}
7 a_{11}; A_{11}
8 a_{12}; A_{12}
Д детерминант

Для обенх программ используется единая инструкция.

Инструкция I.5.2.1/21,54,52

Содержание	Набрать число	Выполнить команды	Результат
1. Занести в регистры памяти элементы исходной матрицы а	a_{11}	х→П 7	a_{11}
	a_{12}	х→П 8	a_{12}
	a_{21}	х→П 4	a_{21}
	a_{22}	х→П 5	a_{22}
2. Вычислить обратную матрицу А		В/О С/П	A_{11}—в рег. 7 A_{12}—в рег. 8 A_{21}—в рег. X,4 A_{22}—в рег. 5

Время вычисления — 8 с.

Пример. $a = \begin{Vmatrix} 4 & 3 \\ 6 & 7 \end{Vmatrix}$. $A = a^{-1} = \begin{Vmatrix} 0{,}7 & -0{,}3 \\ -0{,}6 & 0{,}4 \end{Vmatrix}$.

I.5.2.2. ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

По программе производится обращение матрицы

$$a = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{Vmatrix}$$

при ограничениях:

$$a_{11} \neq 0; \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Элементы исходной матрицы a_{ij} заносятся вручную в регистры памяти 1—9 согласно следующей таблице:

$$\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{Vmatrix} \Rightarrow \begin{Vmatrix} 7 & 8 & 9 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{Vmatrix}.$$

Обратная матрица $A = a^{-1}$ размещается в тех же регистрах памяти, но «зеркально отражена» относительно главной диагонали:

$$A = a^{-1} = \begin{Vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{Vmatrix} \Rightarrow \begin{Vmatrix} 7 & 4 & 1 \\ 8 & 5 & 2 \\ 9 & 6 & 3 \end{Vmatrix}.$$

Двукратное исполнение приводит матрицу а к исходному виду.

Программа I.5.2.2/54,52

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	3	03	22	:	13	44	×	12
01	x→П 0	40	23	/—/	0L	45	x→П 2	42
02	П→x 5	65	24	x→П 6	46	46	П→x A	6—
03	П→x 4	64	25	×	12	47	x→П 7	47
04	П→x 7	67	26	П→x 2	62	48	П→x C	6C
05	:	13	27	+	10	49	x→П 9	49
06	/—/	0L	28	x→П 4	44	50	FL0	5Г
07	x→П C	4C	29	F.	25	51	02	02
08	П→x 8	68	30	П→x 3	63	52	С/П	50
09	×	12	31	П→x 6	66			
10	+	10	32	П→x 9	69			
11	x→П A	4—	33	×	12			
12	П→x 8	68	34	+	10			
13	П→x 6	66	35	x→П 5	45			
14	П→x C	6C	36	F.	25			
15	П→x 9	69	37	П→x 7	67			
16	×	12	38	:	13			
17	+	10	39	x→П 1	41			
18	x→П 8	48	40	П→x 9	69			
19	F.	25	41	П→x 7	67			
20	П→x 1	61	42	F1/x	23			
21	П→x 7	67	43	x→П 3	43			

Регистры

0, A, C, оперативные
1 a_{31}; A_{13}
2 a_{32}; A_{23}
3 a_{33}; A_{33}
4 a_{21}; A_{12}
5 a_{22}; A_{22}
6 a_{23}; A_{32}
7 a_{11}; A_{11}
8 a_{12}; A_{21}
9 a_{13}; A_{31}

Инструкция I.5.2.2/54,52

Содержание	Набрать число	Выполнить команды	Результат
1. Занести в регистры памяти элементы исходной матрицы a	a_{11}	x→П 7	a_{11}
	a_{12}	x→П 8	a_{12}
	a_{13}	x→П 9	a_{13}
	a_{21}	x→П 4	a_{21}
	a_{22}	x→П 5	a_{22}
	a_{23}	x→П 6	a_{23}
	a_{31}	x→П 1	a_{31}
	a_{32}	x→П 2	a_{32}
	a_{33}	x→П 3	a_{33}
2. Вычислить обратную матрицу $A=a^{-1}$		В/О С/П	A_{11}—в рег. 7
			A_{12}—в рег. 4
			A_{13}—в рег. 1
			A_{21}—в рег. 8
			A_{22}—в рег. 5
			A_{23}—в рег. 2
			A_{31}—в рег. X,9
			A_{32}—в рег. 6
			A_{33}—в рег. 3

Время вычисления — 50 с.

Пример. $a=\begin{Vmatrix} 3 & 3 & 5 \\ 4 & 6 & 6 \\ 0 & 8 & -1 \end{Vmatrix}$. $A=a^{-1}=\begin{Vmatrix} -5{,}4 & 0{,}4 & 3{,}2 \\ 4{,}3 & -0{,}3 & -2{,}4 \\ -1{,}2 & 0{,}2 & 0{,}6 \end{Vmatrix}$.

I.5.3. УМНОЖЕНИЕ МАТРИЦ

I.5.3.1. ВТОРОГО ПОРЯДКА

Перемножаются матрицы:

$$A=\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{Vmatrix} \text{ и } B=\begin{Vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{Vmatrix}.$$

В результате перемножения получаем матрицу C:

$$C=\begin{Vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{Vmatrix},$$

элементы которой определяются как

$$c_{ik}=\sum_{j=1}^{2} a_{ij}\, b_{jk}.$$

При вычислении по программе I.5.3.1/21 элементы матриц A и B вводятся построчно.

Программа I.5.3.1/21

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	P4	41	35	P8	81	74	↑	06
01	С/П	78	40	F5	52	75	P,	43
02	P8	81	41	↑	06	80	+	96
03	С/П	78	42	P,	43	81	В/О	48
04	P5	51	43	+	96			
05	С/П	78	44	P5	51			
10	P6	61	45	С/П	78			
11	ПП	68	50	F4	42			
12	P5	51	51	С/П	78			
13	ПП	68	52	←→	16			
14	P5	51	53	×	26			
15	P,	43	54	P,	43			
20	P,	43	55	F5	52			
21	ПП	68	60	×	26			
22	6	64	61	P,	43			
23	P7	71	62	В/О	48			
24	F5	52	63	F6	62			
25	↑	06	64	С/П	78			
30	P,	43	65	←→	16			
31	+	96	70	×	26			
32	P4	41	71	P5	51			
33	ПП	68	72	F8	82			
34	6	64	73	×	26			

Инструкция

В/О a_{11} С/П a_{12} С/П
a_{21} С/П a_{22} С/П $в_{11}$ С/П
$в_{12}$ С/П
$в_{21}$ С/П $в_{22}$ С/П

Результат

c_{11}—в рег. 7
c_{12}—в рег. 8
c_{21}—в рег. 4
c_{22}—в рег. X,5

Регистры

3; 6 оперативные
4 c_{21}
5 c_{22}
7 c_{11}
8 c_{12}

При вычислении по программе I.5.3.1/54,52 ввод матриц A и B и вывод матрицы C производятся с использованием регистров памяти 0 — B согласно следующей таблице:

$$\begin{Vmatrix} a_{11} & b_{11} & c_{11} \\ a_{12} & b_{12} & c_{12} \\ a_{21} & b_{21} & c_{21} \\ a_{22} & b_{22} & c_{22} \end{Vmatrix} \Rightarrow \begin{Vmatrix} 7 & 8 & 9 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & A & B \end{Vmatrix}.$$

Элементы матрицы A вводятся в первый столбец регистров памяти — 0,1, 4, 7; элементы матрицы B — во второй столбец регистров памяти — A, 2,5,8 и после вычисления элементы матрицы C выводятся в третий столбец регистров памяти — регистры B, 3, 6, 9.

Программа I.5.3.1/54,52

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	П→x 7	67	16	П→x 1	61	32	С/П	50
01	П→x 8	68	17	П→x 8	68			
02	×	12	18	×	12		Регистры	
03	П→x 4	64	19	П→x 0	60			
04	П→x 2	62	20	П→x 2	62	0	a_{22}	
05	×	12	21	×	12	1	a_{21}	
06	+	10	22	+	10	2	b_{31}	
07	x→П 9	49	23	x→П 3	43	3	c_{21}	
08	П→x 7	67	24	П→x 1	61	4	a_{12}	
09	П→x 5	65	25	П→x 5	65	5	b_{12}	
10	×	12	26	×	12	6	c_{12}	
11	П→x 4	64	27	П→x 0	60	7	a_{11}	
12	П→x A	6—	28	П→x A	6—	8	b_{11}	
13	×	12	29	×	12	9	c_{11}	
14	+	10	30	+	10	A	b_{22}	
15	x→П 6	46	31	x→П B	4L	B	c_{22}	

Инструкция I.5.3.1/54,52

Содержание	Набрать число	Выполнить команды	Результат
1. Занести элементы матрицы A	a_{11}	x→П 7	a_{11}
	a_{12}	x→П 4	a_{12}
	a_{21}	x→П 1	a_{21}
	a_{22}	x→П 0	a_{22}
2. Ввести элементы матрицы B	b_{11}	x→П 8	b_{11}
	b_{12}	x→П 5	b_{12}
	b_{21}	x→П 2	b_{21}
	b_{22}	x→П A	b_{22}
3. Вычислить матрицу C		В/О С/П	c_{11}—в рег. 9
			c_{12}—в рег. 6
			c_{21}—в рег. 3
			c_{22}—в рег. X,B

Время вычисления — 10 с.

Пример. $A = \begin{Vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{Vmatrix}$, $B = \begin{Vmatrix} 3 & -7 \\ 8 & 1 \end{Vmatrix}$. $C = \begin{Vmatrix} 19 & -5 \\ 41 & -17 \end{Vmatrix}$.

I.5.3.2. ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

Перемножаются матрицы A и B:

$$A = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{Vmatrix}, \quad B = \begin{Vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{Vmatrix}.$$

В результате перемножения получаем матрицу C:

$$C = \begin{Vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{Vmatrix},$$

элементы которой определяются как [14]

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^{3} a_{ij} b_{jk}.$$

Элементы матрицы B заносятся в регистры памяти 1—9 согласно схеме

$$\begin{Vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{Vmatrix} \Rightarrow \begin{Vmatrix} 7 & 8 & 9 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{Vmatrix}.$$

Затем элементы матрицы A вводятся построчно.

После ввода каждой строки матрицы A вычисляются значения соответствующей строки матрицы C, которые заносятся в регистры памяти A, B, C согласно инструкции. Командами П→x A, П→x B, П→xC элементы матрицы C выводятся в регистр X и считываются.

Программа I.5.3.2/54,52

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код		Регистры
00	B↑	0E	17	+	10		
01	1	01	18	x→П C	4C		
02	0	00	19	F.	25	0	оперативный
03	x→П 0	40	20	B↑	0E	1	b_{31}
04	Cx	0Г	21	КП→x 0	Г0	2	b_{32}
05	x→П A	4—	22	×	12	3	b_{33}
06	x→П B	4L	23	П→xB	6L	4	b_{21}
07	x→П C	4C	24	+	10	5	b_{22}
08	+	10	25	x→П B	4L	6	b_{23}
09	ПП	53	26	F.	25	7	b_{11}
10	13	13	27	КП→x 0	ГО	8	b_{12}

Продолжение

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
11	ПП	53	28	×	12
12	13	13	29	П→х А	6—
13	В↑	0Е	30	+	10
14	К П→х 0	Г0	31	х→П А	4—
15	×	12	32	С/П	50
16	П→х С	6С	33	В/О	52

Регистры

9	$в_{13}$
В	c_{11}; c_{21}; c_{31}
А	c_{12}; c_{22}; c_{32}
С	c_{13}; c_{23}; c_{33}

Инструкция 1.5.3.2/54,52

Содержание	Набрать число	Выполнить команды	Результат
1. Занести в регистры памяти матрицу В	$в_{11}$	х→П 7	$в_{11}$
	$в_{12}$	х→П 8	$в_{12}$
	$в_{13}$	х→П 9	$в_{13}$
	$в_{21}$	х→П 4	$в_{21}$
	$в_{22}$	х→П 5	$в_{22}$
	$в_{23}$	х→П 6	$в_{23}$
	$в_{31}$	х→П 1	$в_{31}$
	$в_{32}$	х→П 2	$в_{32}$
	$в_{33}$	х→П 3	$в_{33}$
2. Ввести первую строку матрицы А и считать первую строку матрицы С		В/О	
	a_{11}	С/П	
	a_{12}	С/П	
	a_{13}	С/П	c_{11}—в рег. X, А c_{12}—в рег. В c_{13}—в рег. С
3. Ввести вторую строку матрицы А и считать вторую строку матрицы С	a_{21}	С/П	
	a_{22}	С/П	
	a_{23}	С/П	c_{21}—в рег. X, А c_{22}—в рег. В c_{23}—в рег. С
4. Ввести третью строку матрицы А и считать третью строку матрицы С	a_{31}	С/П	
	a_{32}	С/П	
	a_{33}	С/П	c_{31}—в рег. X, А c_{32}—в рег. В c_{33}—в рег. С
5. Для нового счета при другой матрице А — к п. 2			

Время вычисления одной строки матрицы С — 30 с.

Пример.

$$A = \begin{Vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 4 \\ -6 & 7 & 1 \end{Vmatrix}, \quad B = \begin{Vmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 2 & 7 & 5 \\ 0 & 6 & 1 \end{Vmatrix}. \quad C = \begin{Vmatrix} 9 & 55 & 19 \\ 4 & 38 & 14 \\ -4 & 31 & 42 \end{Vmatrix}.$$

1.5.4. ВЕКТОРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ДВУХ ВЕКТОРОВ

В результате перемножения векторов $A = (a_1, a_2, a_3)$, $B = (в_1, в_2, в_3)$ получаем вектор $C = (c_1, c_2, c_3)$.

Элементы исходных векторов А, В и результирующего вектора С размещаются по столбцам в регистрах памяти согласно следующей схеме:

$$\begin{Vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{Vmatrix} \Rightarrow \begin{Vmatrix} 7 & 8 & 9 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{Vmatrix}.$$

Элементы вектора С вычисляются как [14] $c_1 = a_2в_3 - a_3в_2$, $c_2 = a_3в_1 - a_1в_3$, $c_3 = a_1в_2 - a_2в_1$.

Программа 1.5.4/54,52

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	П→х 4	64	13	×	12
01	П→х 2	62	14	—	11
02	×	12	15	х→П 6	46
03	П→х 1	61	16	П→х 7	67
04	П→х 5	65	17	П→х 5	65
05	×	12	18	×	12
06	—	11	19	П→х 4	64
07	х→П 9	49	20	П→х 8	68
08	П→х 1	61	21	×	12
09	П→х 8	68	22	—	11
10	×	12	23	х→П 3	43
11	П→х 7	67	24	С/П	50
12	П→х 2	62			

Регистры

1	a_3
2	$в_3$
3	c_3
4	a_2
5	$в_2$
6	c_2
7	a_1
8	$в_1$
9	c_1

Инструкция 1.5.4/54,52

Содержание	Набрать число	Выполнить команды	Результат
1. Занести матрицу А	a_1	х→П 7	a_1
	a_2	х→П 4	a_2
	a_3	х→П 1	a_3
2. Занести матрицу В	$в_1$	х→П 8	$в_1$
	$в_2$	х→П 5	$в_2$
	$в_3$	х→П 2	$в_3$
3. Вычислить матрицу С		В/О С/П	c_1—в рег. 9 c_2—в рег. 6 c_3—в рег. X, 3
4. Для нового счета при другой матрице В — к п. 2			

Время вычисления — 8 с.

Пример. А = (2,3, —4), В = (1,3,5). С = (27, —14,3).

I.6. СУММЫ И ПРОИЗВЕДЕНИЯ

I.6.1. СУММА СТЕПЕНЕЙ ЧИСЕЛ НАТУРАЛЬНОГО РЯДА

$$y = 1^n + 2^n + \ldots + i^n + \ldots + m^n = \sum_{i=1}^{m} i^n.$$

Программа I.6.1/54,52

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	x→П 0	40	06	П→x 1	61
01	Cx	0Г	07	+	10
02	x→П 1	41	08	F L0	5Г
03	←→	14	09	02	02
04	П→x 0	60	10	С/П	50
05	F xy	24			

Инструкция

n В↑ m В/О С/П

Регистры
1 y
0 счетчик

Время вычисления — T = 4 · mc.
Пример. n = 2, m = 4. y = 30.

I.6.2. ФАКТОРИАЛ

Факториал целого неотрицательного числа n ($0 \leqslant n \leqslant 69$) вычисляется по формуле

$$n! = \begin{cases} n(n-1) \ldots 2.1 & \text{при } n \geqslant 1; \\ 1 & \text{при } n = 0. \end{cases}$$

I.6.2.1. ВЫЧИСЛЕНИЕ n! ПРИ ФИКСИРОВАННОМ n

Программа I.6.2.1/54,52

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	ВП	0С	04	×	12
01	x→П 0	40	05	F L0	5Г
02	1	01	06	03	03
03	П→x 0	60	07	С/П	50

Инструкция

n В/О С/П

Регистр
0 оперативный

Время вычисления — T = (n + 2) с.
Пример. n = 5. n! = 120.

I.6.2.2. ПОШАГОВЫЙ ВЫВОД n!

При последовательном нажатии В/О С/П С/П С/П ... С/П...выводятся соответственно значения 0!, 1!, 2!, ..., n! ,...

Значения n помещаются при этом в регистр Y. Для вывода соответствующего значения n следует произвести обмен содержимого регистров X и Y командой ↔. Для продолжения вывода n! следует восстановить прежние значения регистров X и Y командой ↔.

Программа I.6.2.2/54,52

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	Cx	0Г	06	+	10
01	К НОП	54	07	×	12
02	1	01	08	F Bx	0
03	С/П	50	09	←→	14
04	←→	14	10	БП	51
05	1	01	11	03	03

Инструкция

В/О С/П С/П С/П...

Результат

n! — в рег. X
n — в рег. Y

Время вычисления одного значения n! — 2 с.
Пример. 0! = 1, 1! = 1, 2! = 2, 3! = 6, ...

I.6.3. СУММА ФАКТОРИАЛОВ

$$S = 1! + 2! + \ldots + n! = \sum_{i=1}^{n} i!$$

вычисляется для $1 \leqslant n \leqslant 69$.

Программа I.6.3/54,52

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	x→П 0	40	06	F L0	5Г
01	1	01	07	02	02
02	П→x 0	60	08	1	01
03	×	12	09	—	11
04	1	01	10	С/П	50
05	+	10			

Инструкция

n В/О С/П

Регистр

0 счетчик

Время вычисления — $T = (1{,}3n + 3)$ с.
Пример. n = 3. S = 9.

I.6.4. ПРОИЗВЕДЕНИЕ ФАКТОРИАЛОВ

Произведение факториалов

$$P = 1! \cdot 2! \ \ldots \ n! = \prod_{i=1}^{n} i!$$

вычисляется для $1 \leqslant n \leqslant 16$.

Программа I.6.4/54,52

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Инструкция
00	x→П 0	40	07	F.	25	
01	1	01	08	×	12	n В/О С/П
02	x→П 4	44	09	×	12	
03	F x^2	22	10	F L0	5Г	Регистры
04	F Вх	0	11	04	04	
05	П→x 4	64	12	С/П	50	0; 4 счетчики
06	К П→x 4	Г4				

Время вычисления — T = (2n + 3) с.

Пример. n = 3. P = 12.

I.6.5. ФУНКЦИЯ *n*!!

Функция n!! ($1 \leqslant n \leqslant 119$) вычисляется для четных и нечетных n по формулам:

$$n!! = \begin{cases} n(n-2)\ \ldots\ 3\cdot 1 \text{ при } n \text{ нечетном;} \\ n(n-2)\ \ldots\ 4\cdot 2 \text{ при } n \text{ четном.} \end{cases}$$

Программа I.6.5/54,52

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Инструкция
00	x→П 0	40	05	06	06	n В/О С/П
01	1	01	06	F L0	5Г	
02	П→x 0	60	07	02	02	Регистр
03	×	12	08	С/П	50	0 счетчик
04	F L0	5Г				

Время вычисления — T = (0,8 n + 2) с.

Примеры. n = 7. n!! = 105.

n = 8. n!! = 384.

I.6.6. РАЗМЕЩЕНИЯ

Число размещений A_n^m из n элементов по m определяется для целых положительных чисел $1 \leqslant m \leqslant n$ по формуле [13]

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!} = n(n-1)\ldots(n-m+1).$$

I.6.6.1. ВЫЧИСЛЕНИЕ A_n^m ПРИ ФИКСИРОВАННОМ m

Программа I.6.6.1/54,52

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Инструкция
00	x→П0	40	06	F L1	5L	n В↑ m В/О С/П
01	←→	14	07	08	08	Регистры
02	x→П1	41	08	F L0	5Г	0; 1 счетчики
03	1	01	09	04	04	
04	П→x1	61	10	С/П	50	
05	×	12				

Время вычисления — T = 1,5 (m + 1) с.

Пример. n = 5, m = 3. $A_5^3 = 60$.

I.6.6.2. ПОШАГОВЫЙ ВЫВОД A_n^m

По программе при последовательном выполнении команд В/О С/П С/П С/П ... С/П выводятся соответственно значения A_n^m (m = 0,1, ..., n—1): A_n^0, A_n^1, ..., A_n^{n-1}.

Значение m помещается при этом в регистр Y. Для вывода m следует выполнить команду ↔. Для продолжения вывода A_n^m следует восстановить прежние значения регистров X и Y командой ↔.

Программа I.6.6.2/54,52

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Инструкция
00	x→П 0	40	07	←→	14	n В/О С/П СП . . .
01	0	00	08	1	01	Результат
02	К НОП	54	09	+	10	
03	1	01	10	←→	14	A_n^m—в рег. X
04	С/П	50	11	F L0	5Г	m—в рег. Y
05	П→x 0	60	12	04	04	Регистр
06	×	12				0 оперативный

Время вывода одного значения A_n^m — 3 с.

Пример. n = 5. A_n^m = 1, 5, 20, 60, 120.

I.6.7. СОЧЕТАНИЯ

Число сочетаний C_n^m из n элементов по m определяется по формуле [13]

$$C_n^m = \binom{n}{m} = \frac{n!}{m!\,(n-m)!}.$$

I.6.7.1. ВЫЧИСЛЕНИЕ C_n^m ПРИ ФИКСИРОВАННОМ m

По программе вычисление C_n^m производится для ускорения счета с использованием более короткой из двух формул:

$$C_n^m = \begin{cases} \dfrac{n(n-1)\ldots(n-m+1)}{m!} & \text{при } m \leqslant \dfrac{n}{2}; \\ \dfrac{n(n-1)\ldots(m+1)}{(n-m)!} & \text{при } m > \dfrac{n}{2}. \end{cases}$$

Программа I.6.7.1/54,52

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Инструкция
00	x→П 1	41	10	1	01	
01	←→	14	11	П→x 1	61	m В↑ n В/О С/П
02	—	11	12	×	12	
03	x→П 0	40	13	П→x 0	60	Регистры
04	F Bx	0	14	:	13	
05	—	11	15	F L1	5L	0; 1 счетчики
06	F x≥0	59	16	17	17	
07	10	10	17	F L0	5Г	
08	F Bx	0	18	11	11	
09	x→П 0	40	19	С/П	50	

Время вычисления — $T = 2(m + 2)$ с.

Пример. $n = 5$, $m = 2$. $C_5^2 = 10$.

I.6.7.2. ПОШАГОВЫЙ ВЫВОД C_n^m

По программе при последовательном нажатии В/О С/П С/П С/П... выводятся соответственно значения C_n^0, C_n^1, C_n^2, ... ($m = 0, 1, 2, \ldots, n - 1$).

Значение m помещается при этом в регистр Y. Для вывода m следует выполнить команду ↔. Для продолжения вывода C_n^m следует восстановить прежние значения регистров X и Y командой ↔.

Программа I.6.7.2/54,52

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Инструкция
00	x→П 0	40	08	1	01	В/О n С/П С/П...
01	0	00	09	+	10	Результат
02	К НОП	54	10	:	13	C_n^m — в рег. X
03	1	01	11	F Bx	0	m — в рег. Y
04	С/П	50	12	←→	14	
05	П→x 0	60	13	F L0	5Г	Регистр
06	×	12	14	04	04	
07	←→	14				0 оперативный

Время вычисления одного значения C_n^m — 3 с.

Пример. $n = 6$. $C_n^m = 1, 6, 15, 20, 15, 6$.

I.6.8. МУЛЬТИНОМИАЛЬНЫЕ КОЭФФИЦИЕНТЫ

Определяются мультиномиальные коэффициенты [11]

$$P(n, n_1, n_2, \ldots, n_k) = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \ldots n_k!},$$

где $n = n_1 + n_2 + \ldots + n_k$; $0 \leqslant n_1 \leqslant n$, представляющие собой число сочетаний из n элементов k различных видов, причем n_1 — число одинаковых элементов 1-го вида, n_2 — 2-го и т. д.

Частным случаем мультиномиальных коэффициентов при $k = 2$ являются биномиальные коэффициенты C_n^m.

Для уменьшения ошибки вычислений применен алгоритм

$$P = \left[\frac{n(n-1)\ldots(n-n_1+1)}{n_1!}\right] \cdot \left[\frac{(n-n_1)(n-n_1-1)\ldots(n-n_1-n_2+1)}{n_2!}\right] \ldots$$

$$\ldots \left[\frac{(n-n_1-\ldots-n_{k-1})\ldots 2.1}{n_k!}\right].$$

Программа I.6.8/54,52

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Инструкция
00	x→П 0	40	11	П→x 0	60	
01	1	01	12	×	12	n В/О С/П
02	С/П	50	13	←→	14	n_1 С/П
03	ВП	0С	14	F L0	5Г	n_2 С/П
04	x→П 1	41	15	16	16	. . . . .
05	F.	25	16	F L1	5L	n_k С/П
06	1	01	17	08	08	
07	В↑	0Е	18	:	13	Регистры
08	П→x 1	61	19	×	12	
09	×	12	20	БП	51	0; 1 счетчики
10	←→	14	21	02	02	

Ошибку вычислений можно уменьшить, вводя значения n_1 в порядке убывания их величины.

Пример. $P(10, 5, 3, 2) = \dfrac{10!}{5!\,3!\,2!} = 2520.$

Время вычисления — 27 с.

I.7. ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Вычисляются функции комплексной переменной, представленной в алгебраической форме

$$z = a + ib$$

или в показательной форме

$$z = \rho e^{i\varphi}.$$

Результаты вычислений представляются в алгебраической форме.

I.7.1. АРИФМЕТИЧЕСКИЕ ДЕЙСТВИЯ, ВОЗВЕДЕНИЕ В СТЕПЕНЬ

Выполняются сложение, вычитание, умножение и деление комплексных чисел

$$z_1 = a + ib \text{ и } z_2 = c + id.$$

Программа I.7.1/21

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	Р 3	31	33	+	96	70	F 2	22
01	←→	16	34	F 1/x	45	71	×	26
02	Р 2	21	35	↑	06	72	↑	06
03	С/П	78	40	F 5	52	73	F 5	52
04	/—/	56	41	×	26	74	—	86
05	←→	16	42	Р 5	51	75	Р 2	21
10	/—/	56	43	F 4	42	80	F 4	42
11	←→	16	44	×	26	81	↑	06
12	Р 6	61	45	↑	06	82	F 3	32
13	F 2	22	50	F 5	52	83	×	26
14	+	96	51	Р 5	51	84	↑	06
15	Р 2	21	52	←→	16	85	F 6	62
20	F 3	32	53	Р 4	41	90	+	96
21	БП	58	54	F 2	22	91	↑	06
22	F—	85	55	×	26	92	F 2	22
23	/—/	56	60	Р 6	61	93	←→	16
24	Р 5	51	61	F 3	32	94	БП	58
25	F x^2	55	62	×	26	95	Р 0	01
30	←→	16	63	Р 5	51			
31	Р 4	41	64	F 4	42			
32	F x^2	55	65	↑	06			

Регистры 2—6 оперативные

Инструкция I.7.1/21

Содержание	Набрать число	Выполнить команды	Результат
1. Занести первый операнд $z_1 = a + ib$	a в	↑ В/О С/П	a a
2. Занести второй операнд $z_2 = c + id$	c d	↑	c d
3. Выполнить одно из действий: а) сложение б) вычитание в) умножение г) деление		БП Р ←→ С/П С/П БП F 5 С/П БП 2 С/П	a—в рег. X, 2 b—в рег. Y, 3
4. Для выполнения операции, в которой используется результат предыдущей и следующее число, — к п. 2			

Время сложения — 3 с, вычитания — 4 с, умножения — 5 с, деления — 7 с.

Примеры.

$(3 + i4) + (1 + i2) = 4 + i6;$

$(3 + i4) - (1 + i2) = 2 + i2;$

$(3 + i4) \times (1 + i2) = -5 + i10;$

$(3 + i4) : (1 + i2) = 2{,}2 - i0{,}4;$

$$\frac{(3 + i5) + (1 + i2)}{3 + i4} \times (3 - i2) - (4 - i1{,}5) = 1{,}2 - i1{,}1.$$

Программа I. 7.1/54, 52 работает в радианах.

Программа I.7.1/54,52

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	В/О	52	32	×	12	64	×	12
01	x→П 1	41	33	П→x 3	63	65	П→x 1	61
02	←→	14	34	П→x 1	61	66	F sin	1C
03	x→П 0	40	35	×	12	67	П→x 0	60
04	С/П	50	36	—	11	68	×	12
05	/—/	0L	37	П→x 0	60	69	В/О	52
06	←→	14	38	П→x 3	63	70	П→x 0	60
07	/—/	0L	39	×	12	71	В↑	0E
08	←→	14	40	П→x 1	61	72	F x^2	22
09	П→x 1	61	41	П→x 2	62	73	П→x I	61
10	+	10	42	×	12	74	F x^2	22
11	←→	14	43	+	10	75	+	10

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
12	П→x 0	60	44	В/О	52	76	F √	21
13	+	10	45	x→П 3	43	77	:	13
14	←→	14	46	←→	14	78	F Bx	0
15	В/О	52	47	x→П 2	42	79	←→	14
16	/—/	0L	48	ПП	53	80	F $\cos^{-1}$	1—
17	x→П 3	43	49	70	70	81	П→x 1	61
18	←→	14	50	x→П 1	41	82	F x<0	5C
19	В↑	0E	51	←→	14	83	87	87
20	F x^2	22	52	F ln	18	84	F.	25
21	П→x 3	63	53	x→П 0	40	85	/—/	0L
22	F x^2	22	54	П→x 2	62	86	В↑	0E
23	+	10	55	ПП	53	87	F.	25
24	:	13	56	32	32	88	В/О	52
25	П→x 3	63	57	x→П 1	41			
26	F Bx	0	58	←→	14			
27	:	13	59	F e^x	16		Регистры	
28	x→П 3	43	60	x→П 0	40		0	a
29	←→	14	61	П→x 1	61		1	в
30	x→П 2	42	62	F cos	1Г		2	c
31	П→x 0	60	63	П→x 0	60		3	d

Инструкция 1.7.1/54,52

Содержание	Набрать число	Выполнить команды	Результат
1. Переключатель Р/Г — в положение Р			
2. Занести первый операнд $z_1 = a + ib$	a в	В↑ В/О С/П	a a
3. Занести второй операнд $z_2 = c + id$	c d	В↑	c d
4. Выполнить одно из действий: а) сложение б) вычитание в) умножение г) деление д) возведение в степень		БП 09 С/П БП 05 С/П БП 28 С/П БП 16 С/П БП 45 С/П	a—в рег. X, 0 b—в рег. Y, 1
5. Перевод числа $a + ib$ в показательную форму $\rho e^{i\varphi}$	a b	В↑ В/О С/П БП 70 С/П	a ρ—в рег. X, 0 φ—в рег. Y, 1
6. Перевод числа $\rho e^{i\varphi}$ в алгебраическую форму $a + ib$	ρ φ	В↑ В/О С/П БП 61 С/П	ρ ρ a—в рег. X, 0 b—в рег. Y, 1

Время выполнения арифметических действий — от 5 до 10 с, возведения в степень — 22 с, перевода из одной формы в другую — 8 с.

Примеры.

1. $(1 + i2) + (3 + i4) = 4 + i6;$
2. $(3 - i4) - (1 + i2) = 2 - i6;$
3. $(1 + i2) \times (3 + i4) = -5 + i10;$
4. $(1 + i2) : (3 + i4) = 0{,}44 + i0{,}08;$
5. $\dfrac{(2 + i3) + (4 - i5)}{(1 - i2)} \times (2 - i5) = 14 - i6;$
6. $(3 + i4)^{(3 + i4)} = -2{,}9980 + i\,0{,}62379;$
7. $\sqrt{3 + i4} = (3 + i4)^{(0{,}5 + i0)} = 2 + i1;$
8. $2^{i3} = -0{,}487 + i0{,}8734;$
9. $3 + 4i = 5e^{i0{,}9273}.$

1.7.2. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ И ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ, ЭКСПОНЕНТА, ЛОГАРИФМ

Расчетные формулы [11]:

$$\sin(a + ib) = \sin a \cdot \operatorname{ch} b + i \cos a \cdot \operatorname{sh} b;$$

$$\cos(a + ib) = \cos a \cdot \operatorname{ch} b - i \sin a \cdot \operatorname{sh} b;$$

$$\operatorname{tg}(a + ib) = \frac{\sin 2a + i \operatorname{sh} 2b}{2(\cos^2 a \cdot \operatorname{ch}^2 b + \sin^2 a \cdot \operatorname{sh}^2 b)};$$

$$\operatorname{sh}(a + ib) = \operatorname{sh} a \cdot \cos b + i \cdot \operatorname{ch} a \cdot \sin b;$$

$$\operatorname{ch}(a + ib) = \operatorname{ch} a \cdot \cos b + i \operatorname{sh} a \cdot \sin b;$$

$$\operatorname{th}(a + ib) = \frac{\operatorname{sh} 2a + i \sin 2b}{2(\operatorname{ch}^2 a \cdot \cos^2 b + \operatorname{sh}^2 a \cdot \sin^2 b)};$$

$$e^{a + ib} = \rho e^{i\varphi} = e^a \cdot e^{i\varphi};$$

$$\ln(a + ib) = \ln(\rho e^{i\varphi}) = \ln \rho + i\varphi \quad (-\pi < \varphi \leqslant \pi),$$

$$\rho = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \varphi = \operatorname{sign} b \cdot \arccos \frac{a}{\rho} \quad (-\pi < \varphi \leqslant \pi);$$

$$a = \rho \cos \varphi, \quad b = \rho \sin \varphi.$$

Программа I.7.2/21

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	В/О	48	33	В/О	48	70	Р 6	61
01	Р 3	31	34	Р 3	31	71	F 4	42
02	←→	16	35	←→	16	72	Р cos	83
03	Р 2	21	40	/—/	56	73	×	26
04	С/П	78	41	2	24	74	Р 7	71
05	Р e^x	33	42	×	26	75	F 6	62
10	←→	16	43	↑	06	80	↑	06
11	Р sin	93	44	Рπ	23	81	F 5	52
12	×	26	45	+	96	82	+	96
13	Р 4	41	50	2	24	83	↑	06
14	F 3	32	51	:	36	84	F 4	42
15	Р cos	83	52	Р 4	41	85	Р sin	93
20	×	26	53	F 3	32	90	×	26
21	↑	06	54	Р e^x	33	91	↑	06
22	F 4	42	55	↑	06	92	F 7	72
23	В/О	48	60	F 1/x	45	93	В/О	48
24	Р 3	31	61	Р 5	51		Регистры	
25	←→	16	62	—	86		2 а	
30	ПП	68	63	2	24		3 в	
31	Р /—/	53	64	:	36		4—7 оперативные	
32	←→	16	65	↑	06			

Инструкция I.7.2/21

Содержание	Набрать число	Выполнить команды	Результат
1. Занести исходное число:			
а) если число задано в алгебраической форме a+ib	a b	↑ В/О С/П	a a
б) если число задано в показательной форме $\rho e^{i\varphi}$	ρ φ	↑ В/О С/П БП Р 1 С/П	ρ ρ {a—в рег. X, 2 {b—в рег. Y, 3
2. Вычислить составляющие одной из функций:			
а) e^z б) sin z в) cos z г) sh z д) ch z		БП ↑ С/П БП Р /—/ С/П БП F4 С/П БП F × С/П БП F ÷ С/П	a—в рег. X, 2 b—в рег. Y, 3
3. Для вычисления функции от полученного результата выполнить		F 2 ↑ F 3 В/О С/П	b a
4. Идти к п. 2			

Время вычисления — 9 — 12 с.

Примеры.

$$e^{3+i4} = -13{,}129 - i15{,}201;$$

$$\sin(3+i4) = 3{,}8537 - i27{,}017;$$

$$\cos(3+i4) = -27{,}035 - i3{,}8512;$$

$$\mathrm{sh}(3+i4) = -6{,}5481 - i7{,}6192;$$

$$\mathrm{ch}(3+i4) = -6{,}5807 - i7{,}5815;$$

$$2e^{i1} = 1{,}0806 + i1{,}6829.$$

Программа I.7.2/54,52

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	В/О	52	34	←→	14	68	42	42
01	x→П 3	43	35	F ln	18	69	F x^2	22
02	←→	14	36	←→	14	70	←→	14
03	x→П 2	42	37	В/О	52	71	F x^2	22
04	С/П	50	38	ПП	53	72	+	10
05	F e^x	16	39	48	48	73	2	02
06	x→П 0	40	40	←→	14	74	×	12
07	←→	14	41	В/О	52	75	x→П 5	45
08	F cos	1Г	42	←→	14	76	0	00
09	×	12	43	/—/	0L	77	П→x 2	62
10	П→x 0	60	44	1	01	78	2	02
11	П→x 3	63	45	F $\sin^{-1}$	19	79	×	12
12	F sin	1C	46	+	10	80	ПП	53
13	×	12	47	←→	14	81	48	48
14	В/О	52	48	F e^x	16	82	П→x 5	65
15	В ↑	0E	49	В↑	0E	83	:	13
16	F x^2	22	50	F 1/x	23	84	П→x 3	63
17	П→x 3	63	51	x→П 0	40	85	2	02
18	F x^2	22	52	+	10	86	×	12
19	x→П 0	40	53	2	02	87	F sin	1C
20	+	10	54	:	13	88	П→x 5	65
21	F √	21	55	x→П 1	41	89	:	13
22	:	13	56	←→	14	90	В/О	52
23	F Вх	0	57	x→П 4	44	91	x→П 3	43
24	←→	14	58	F sin	1C	92	←→	14
25	F $\cos^{-1}$	1—	59	×	12	93	x→П 2	42
26	П→x 3	63	60	П→x 1	61	94	ПП	53
27	П→x 0	60	61	П→x 0	60	95	67	67
28	F √	21	62	—	11	96	←→	14
29	:	13	63	П→x 4	64	97	В/О	52
30	×	12	64	F cos	1Г		Регистры	
31	В/О	52	65	×	12		2 а	
32	ПП	53	66	В/О	52		3 в	
33	15	15	67	ПП	53		0, 4, 5 оперативные	

Содержание	Набрать число	Выполнить команды	Результат
1. Переключатель Р/Г — в положение Р			
2. Занести исходное число:			
а) если число задано в алгебраической форме a + bi	a b	В↑ В/О С/П	a
б) если число задано в показательной форме $\rho e^{i\varphi}$	ρ φ	В↑ В/О С/П ЬП 06 С/П	ρ ρ a—в рег. X, 2 b—в рег. Y, 3
3. Вычислить составляющие одной из функций:			
а) e^z		БП 05 С/П	a—в рег. X, 2 b—в рег, Y, 3
б) ln z		БП 32 С/П	
в) sin z		БП 47 С/П	
г) cos z		БП 44 С/П	
д) tg z		БП 91 С/П	
е) sh z		БП 38 С/П	
ж) ch z		БП 42 С/П	
з) th z		БП 67 С/П	
4. Для вычисления тех же функций от полученного результата выполнить и перейти к п. 3		П→x 2 П→x 3 В/О С/П	b a
5. Для перевода результата в показательную форму $\rho e^{i\varphi}$		П→x 2 П→x 3 В/О С/П БП 15 С/П	b a ρ—в рег. X, 2 φ—в рег. Y, 3

Время вычисления тангенса — 30 с, перевода из одной формы в другую — 8 с, остальные функции — по 12 с.

Примеры.

$$e^{3+i4} = -13{,}129 - i15{,}201;$$
$$\ln(3+i4) = 1{,}6094 + i0{,}92730;$$
$$\sin(3+i4) = 3{,}8537 - i27{,}017;$$
$$\cos(3+i4) = -27{,}035 - i3{,}8512;$$
$$\mathrm{tg}(3+i4) = -1{,}873\cdot 10^{-4} + i0{,}99936;$$
$$\mathrm{sh}(3+i4) = -6{,}5481 - i7{,}6192;$$
$$\mathrm{ch}(3+i4) = -6{,}5807 - i7{,}5816;$$
$$\mathrm{th}(3+i4) = 1{,}00071 + i4{,}908\cdot 10^{-3};$$
$$(3+i4) = 5e^{i0{,}9273} = 5e^{i53{,}130^\circ} = 5e^{i59{,}033\ \text{град.}}$$
$$2e^{i1} = 1{,}0806 + i1{,}6829.$$

I.7.3. ОБРАТНЫЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ И ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

Расчетные формулы [11]:

$$\arcsin z = \arcsin B + i \ln\left[A + \sqrt{A^2 - 1}\right];$$
$$\arccos z = \arccos B - i \ln\left[A + \sqrt{A^2 - 1}\right];$$
$$\mathrm{arctg}\, z = \frac{1}{2}\,\mathrm{arctg}\,\frac{2a}{1 - a^2 - b^2} + i\,\frac{1}{2}\ln\sqrt{\frac{a^2 + (b+1)^2}{a^2 + (b-1)^2}},$$

где $z = a + ib$;

$$A = \frac{1}{2}\left[\sqrt{(a+1)^2 + b^2} + \sqrt{(a-1)^2 + b^2}\right];$$
$$B = \frac{1}{2}\left[\sqrt{(a+1)^2 + b^2} - \sqrt{(a-1)^2 + b^2}\right];$$
$$\mathrm{arsh}\, z = -i \arcsin(iz);$$
$$\mathrm{arch}\, z = \pm i \arccos z;$$
$$\mathrm{arth}\, z = -i\,\mathrm{arctg}(iz).$$

Программа I.7.3/54,52

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	В/О	52	35	П→x2	62	70	П→x 2	62
01	x→П 3	43	36	/—/	0L	71	F x^2	22
02	←→	14	37	1	01	72	П→x 3	63
03	x→П 2	42	38	+	10	73	F x^2	22
04	С/П	50	39	F x^2	22	74	+	10
05	ПП	53	40	П→x 3	63	75	1	01
06	12	12	41	F x^2	22	76	—	11
07	/—/	0L	42	+	10	77	:	13
08	П→x В	6L	43	F √	21	78	F tg^{-1}	1L
09	F $\cos^{-1}$	1—	44	В/О	52	79	2	02
10	←→	14	45	x→П 3	43	80	:	13
11	В/О	52	46	←→	14	81	В/О	52
12	ПП	53	47	/—/	0L	82	/—/	0L
13	32	32	48	x→П 2	42	83	←→	14
14	—	11	49	ПП	53	84	x→П 2	42
15	FВx	0	50	12	12	85	ПП	53
16	←→	14	51	←→	14	86	59	59
17	2	02	52	/—/	0L	87	БП	51
18	:	13	53	В/О	52	88	56	56
19	x→П	4L	54	ПП	53	89	П→x 2	62
20	+	10	55	05	05	90	П→x 3	63
21	П→x В	6L	56	/—/	0L	91	F cos	1Г
22	F $\sin^{-1}$	19	57	←→	14	92	×	12
23	←→	14	58	В/О	52	93	П→x 2	62
24	В↑	0E	59	←→	14	94	П→x 3	63
25	F x^2	22	60	/—/	0L	95	F sin	1C

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
26	1	01	61	x→П3	43	96	×	12
27	—	11	62	ПП	53	97	В/О	52
28	F √	21	63	32	32			
29	+	10	64	:	13		Регистры	
30	F ln	18	65	F √	21			
31	В/О	52	66	F ln	18		2 a	
32	П→x 2	62	67	П→x 3	63		3 в	
33	ПП	53	68	2	02		В В	
34	37	37	69	×	12			

Инструкция I.7.3/54,52

Содержание	Набрать число	Выполнить команды	Результаты
1. Переключатель Р/Г — в положение Р			
2. Занести исходное число:			
а) если число задано в алгебраической форме $a + ib$	a b	В↑ В/О С/П	a a
б) если число задано в показательной форме $\rho e^{i\varphi}$	ρ φ	В↑ В/О С/П БП 89 С/П	ρ ρ { a—в рег. X, 2 { b—в рег. Y, 3
3. Вычислить составляющие одной из функций:			
а) arcsin z		БП 12 С/П	a—в рег. X, 2 b—в рег. Y, 3
б) arccos z		БП 05 С/П	
в) arctg z		БП 82 С/П	
г) arsh z		БП 45 С/П	
д) arch z		БП 54 С/П	
е) arth z		БП 59 С/П	

Время вычисления — 15 — 20 с.

Примеры.

1. arcsin (3+i4) = 0,63398+i2, 3055;
2. arccos (3+i4) = 0,93681 — i2,3055;
3. arctg (3 + i4) = — 0,12249 + i0,15900;
4. arsh (3+i4) = 2,2999 + i0,91762;
5. arch (3 + i4) = 2,3055 + i0,93681;
6. arth (3 + i4) = 0,1175 — i0,1609.

Глава II

ТРИГОНОМЕТРИЯ И АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

II.1. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ КООРДИНАТ

II.1.1. ПЕРЕНОС И ПОВОРОТ ДЕКАРТОВЫХ ОСЕЙ КООРДИНАТ

При переносе и повороте осей координат координаты точки Р в новой системе координат запишем в виде [13]

$$x' = (x - x_0)\cos\varphi + (y - y_0)\sin\varphi;$$

$$y' = -(x - x_0)\sin\varphi + (y - y_0)\cos\varphi,$$

где x, y — координаты точки Р в старой системе координат;
x_0, y_0 — координаты нового начала в старой системе координат;
φ — угол поворота новой системы координат относительно старой (φ > 0 при повороте против часовой стрелки).

Программа II.1.1/21

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	↑	06	25	Р 4	41	54	Р ,	43
01	Р cos	83	30	F 8	82	55	↑	06
02	Р 8	81	31	×	26	60	Р ,	43
03	←→	16	32	Р /—/	53	61	+	96
04	Р sin	93	33	↑	06	62	↑	06
05	Р 7	71	34	F 6	62	63	F 4	42
10	С/П	78	35	—	86	64	←→	16
11	Р 6	61	40	↑	06	65	БП	58
12	←→	16	41	F 7	72	70	F ←→	15
13	Р 5	51	42	×	26			
14	С/П	78	43	Р /—/	53		Регистры	
15	Р ,	43	44	F 8	82			
20	F 5	52	45	×	26		4 оперативный	
21	—	86	50	↑	06		5 x_0	
22	↑	06	51	F 4	42		6 y_0	
23	F 7	72	52	—	86		7 sinφ	
24	×	26	53	Р 4	41		8 cosφ	

Инструкция II.1.1/21

Содержание	Набрать число	Выполнить команды	Результат
1. Занести угол поворота φ	φ	В/О С/П	sinφ
2. Занести координаты нового начала x_0, y_0	x_0 y_0	↑ С/П	
3. Занести координаты x, y точки P в старой системе координат	x y	↑	
4. Вычислить координаты x′, y′ точки P′ в новой системе координат		С/П	x′ — в рег. X y′ — в рег. Y
5. Для вычисления координат другой точки P — к п. 3			

Время вычисления — 5 с.

Программа II.1.1/54,52

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	x→П A	4—	13	П→x C	6C	26	П→x C	6C
01	F ·	25	14	x	12	27	×	12
02	x→П 9	49	15	←→	14	28	+	10
03	←→	14	16	П→x 9	69	29	БП	51
04	F cos	1Г	17	—	11	30	09	09
05	x→П C	4C	18	x→П 8	48			
06	F Bx	0	19	П→x B	6L			
07	F sin	1C	20	×	12			
08	x→П B	4L	21	—	11			
09	С/П	50	22	П→x 7	67			
10	П→x A	6—	23	П→x B	6L			
11	—	11	24	×	12			
12	x→П 7	47	25	П→x 8	68			

Регистры

7; 8 оперативные
9 x_0
A y_0
B sin φ
C cos φ

Инструкция II.1.1/54,52

Содержание	Набрать число	Выполнить команды	Результат
1. Переключатель Р/Г поставить в положение, соответствующее форме представления угла поворота φ			
2. Занести угол поворота φ и координаты нового начала x_0, y_0	φ x_0 y_0	В↑ В↑ В/О С/П	

Содержание	Набрать число	Выполнить команды	Результат
3. Занести координаты точки P в старой системе координат	x y	В↑	
4. Вычислить координаты x′, y′ точки P′ в новой системе координат		С/П	x′ — в рег. X y′ — в рег. Y
5. Для вычисления координат другой точки — к п. 3			

Время ввода φ, x_0, y_0 — 5 с, время вычисления x′, y′ — 7 с.

Примеры.

1. $\varphi = 0{,}5$ рад; $x_0 = 5$, $y_0 = 6$; $x = 10$, $y = -20$.
$x' = -8{,}077$, $y' = -25{,}214$.
2. $\varphi = -30^\circ$; $x_0 = 3$, $y_0 = -7$; $x = -5$, $y = 10$.
$x' = -15{,}428$, $y' = 10{,}722$.

II.1.2. ПЕРЕХОД ОТ ДЕКАРТОВЫХ КООРДИНАТ К ПОЛЯРНЫМ

Полярные координаты точки P (радиус-вектор ρ и полярный угол φ) определяются по формулам [13]:

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2};$$

$$\varphi = (\operatorname{sign} y) \cdot \arccos \frac{x}{\rho}; \quad -\pi < \varphi < \pi,$$

где x и y — декартовы координаты той же точки. При этом начало декартовых координат принято за полюс, а ось абсцисс — за полярную ось.

II.1.2.1. ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫЙ ВЫВОД ρ И φ

Вычисление и вывод результатов ρ и φ выполняются последовательно при двукратном исполнении команды С/П (при $y \neq 0$).

Программа II.1.2.1/54,52

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	В↑	0E	08	С/П	50	16	×	12
01	F x^2	22	09	:	13	17	С/П	50

Продолжение

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
02	С/П	50	10	F $\cos^{-1}$	1—
03	F x^2	22	11	←→	14
04	F Bx	0	12	B↑	0E
05	F .	25	13	F x^2	22
06	+	10	14	F √	21
07	F √	21	15	:	13

Инструкция
В/О x С/П y С/П С/П

Результат
ρ, φ

Программа II.1.2.1/52

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	B↑	0E	07	+	10
01	F x^2	22	08	F √	21
02	С/П	50	09	С/П	50
03	F x^2	22	10	:	13
04	F Bx	0	11	F $\cos^{-1}$	1—
05	К ЗН	32	12	×	12
06	F .	25	13	С/П	50

Инструкция
В/О x С/П y С/П С/П

Результат
ρ, φ

Время вычисления — 5 с.

Пример. x = —2; y = 2. ρ = 2,828; φ = 2,356 рад. = 135° = = 150 град.

II.1.2.2. ОДНОВРЕМЕННОЕ ВЫЧИСЛЕНИЕ ρ И φ

Программа может быть использована как подпрограмма при замене в последнем адресе команды С/П на команду В/О.

Программа II.1.2.2/54,52

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	←→	14	12	F e^x	16
01	B↑	0E	13	:	13
02	F Bx	0	14	F $\cos^{-1}$	1—
03	F x^2	22	15	←→	14
04	←→	14	16	F x<0	5C
05	F x^2	22	17	21	21
06	+	10	18	F .	25
07	F √	21	19	/—/	0L
08	B↑	0E	20	B↑	0E
09	F .	25	21	F .	25
10	Fx=0	5E	22	С/П	50
11	13	13			

Инструкция
x B↑ y В/О С/П

Результат
φ—в рег. X
ρ—в рег.Y

Время вычисления — 5 — 8 с.

Пример. x = 3, y = — 2. ρ = 3,606; φ = — 0, 5880 рад. = = — 33,690° = — 37,437 град.

II.1.3. ПЕРЕХОД ОТ ПОЛЯРНЫХ КООРДИНАТ К ДЕКАРТОВЫМ

Декартовы координаты точки P определяются по формулам [13]:

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi; \\ y = \rho \sin \varphi, \end{cases}$$

где ρ и φ — полярные координаты той же точки. Начало декартовых координат принято за полюс, а ось абсцисс — за полярную ось.

II.1.3.1. ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫЙ ВЫВОД x И y

Вычисление и вывод результатов x и y выполняются последовательно при двукратном исполнении команды С/П.

Программа может работать как в радианах, так и в градусах (или градах) в зависимости от установки переключателя Р/Г.

Программа II.1.3.1/54,52

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	B↑	0E	05	F .	25
01	С/П	50	06	×	12
02	F cos	1Г	07	С/П	50
03	F Bx	0	08	БП	51
04	F sin	1С	09	05	05

Инструкция
В/О ρ С/П φ С/П С/П

Результат
x, y

Полное время вычисления — 7 с.

Примеры.

1. ρ = 3; φ = 2 рад. x = — 1,248; y = 2,728.
2. ρ = 1,5; φ = — 60°. x = 0,75; y = — 1,299.

II.1.3.2. ОДНОВРЕМЕННОЕ ВЫЧИСЛЕНИЕ x И y

Программы могут быть использованы как подпрограммы при замене в последнем адресе команды С/П на команду В/О.

Программа II.1.3.2/21

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	P 2	21	05	P sin	93
01	P cos	83	10	×	26
02	×	26	11	↑	06
03	P ,	43	12	P /—/	53
04	F 2	22	13	С/П	78

Инструкция
ρ ↑ φ В/О С/П

Результат
x—в рег. X
y—в рег. Y
Регистр
2 φ

Время вычисления — 6 с.

Программа II.1.3.2/54, 52 может работать как в радианах, так и в градусах (или градах) в зависимости от установки переключателя Р/Г.

Программа II.1.3.2/54,52

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	F sin	1C	06	×	12
01	F Bx	0	07	F ·	25
02	F cos	1Г	08	×	12
03	1	01	09	←→	14
04	×	12	10	F ·	25
05	F ·	25	11	С/П	50

Инструкция

ρ В↑ φ В/О С/П

Результат

x—в рег. X
y—в рег. Y

Время вычисления — 8 с.

Примеры.

1. $\rho = 2$; $\varphi = -1$ рад. $x = 1{,}081$; $y = -1{,}683$.

2. $\rho = 5$; $\varphi = 35°$. $x = 4{,}096$; $y = 2{,}868$.

II.2. РЕШЕНИЕ ТРЕУГОЛЬНИКОВ

При описании треугольников приняты следующие обозначения: a, b, c — стороны треугольника; A, B, C — соответственно противолежащие им углы; S — площадь треугольника.

По заданным трем сторонам, по двум сторонам и углу и по стороне и двум углам определяются остальные стороны и углы, а также площадь треугольника [13].

В соответствии с положением переключателя Р/Г расчет углов ведется в радианах, градусах или градах.

II.2.1. ПО ТРЕМ СТОРОНАМ

Дано: a, b, c.

A, B, C, S вычисляются по формулам:

$$A = \arccos \frac{-a^2+b^2+c^2}{2bc}; \quad B = \arccos \frac{a^2-b^2+c^2}{2ac};$$

$$C = \pi - (A+B); \quad S = \frac{1}{2} a \cdot b \sin C.$$

Программа II.2.1/54,52

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	x→П 3	43	23	ПП	53	46	В/О	52
01	F x^2	22	24	40	40			
02	x→П С	4С	25	x→П В	4L			
03	←→	14	26	+	10			
04	x→П 2	42	27	F cos	1Г			
05	F x^2	22	28	/—/	0L			
06	x→П В	4L	29	F $\cos^{-1}$	1—			
07	+	10	30	x→П С	4С			
08	←→	14	31	F sin	1С			
09	x→ П 1	41	32	П→x 1	61			
10	F x^2	22	33	×	12			
11	x→П Д	4Г	34	П→x 2	62			
12	—	11	35	×	12			
13	П→x 2	62	36	2	02			
14	ПП	53	37	:	13			
15	40	40	38	x→П Д	4Г			
16	x→П А	4—	39	С/П	50			
17	П→x Д	6Г	40	:	13			
18	П→x С	6С	41	П→x 3	63			
19	+	10	42	:	13			
20	П→x В	6L	43	2	02			
21	—	11	44	:	13			
22	П→x 1	61	45	F $\cos^{-1}$	1—			

Инструкция

В/О а В↑ в В↑ с С/П

Результат

S—в рег. X, Д
A—в рег. A
B—в рег. B
C—в рег. C

Регистры

1	a
2	в
3	c
A	A
B	B
C	C
Д	S

Время вычисления — 23 с.

Пример. a = 4, b = 5, c = 6.

Ответ: A = 0,7227 рад = 41, 41°; B = 0,9734 рад = 55,77°; C = 1,4455 рад = 82,82°; S = 9,92.

II.2.2. ПО ДВУМ СТОРОНАМ И УГЛУ МЕЖДУ НИМИ

Дано: a, b, C.

c, A, B, S вычисляются по формулам:

$$c = (a^2+b^2-2ab\cos C)^{\frac{1}{2}}; \quad A = \arccos \frac{-a^2+b^2+c^2}{2b \cdot c};$$

$$B = \pi - (B+C); \quad S = \frac{1}{2} a \cdot c \sin B.$$

Программа II.2.2/54,52

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	x→П С	4С	23	П→xA	6—	46	С/П	50
01	F·	25	24	—	11			
02	x→П2	42	25	П→x3	63			
03	Fx²	22	26	:	13			
04	x→ПВ	4L	27	+	10			
05	←→	14	28	П→xД	6Г			
06	x→П 1	41	29	:	13			
07	F x²	22	30	F cos⁻¹	1—			
08	x→П А	4—	31	x→П А	4—			
09	+	10	32	П→x С	6С			
10	П→x С	6С	33	+	10			
11	F cos	1Г	34	F cos	1Г			
12	П→x 1	61	35	/—/	0L			
13	×	12	36	F cos⁻¹	1—			
14	П→x 2	62	37	x→П В	4L			
15	2	02	38	F sin	1С			
16	×	12	39	П→x 3	63			
17	x→П Д	4Г	40	×	12			
18	×	12	41	П→x 1	61			
19	—	11	42	×	12			
20	F √	21	43	2	02			
21	x→П 3	43	44	:	13			
22	П→x В	6L	45	x→П Д	4Г			

Инструкция

а В↑ в В↑ С В/О С/П

Результат

S — в рег. X, Д
c — в рег. 3
A — в рег. A
B — в рег. B

Регистры

1	a
2	в
3	c
A	A
B	B
C	C
Д	S

Время вычисления — 22 с.

Пример. a = 3, b = 2, C = 1 рад. = 57,3°.

Ответ: c = 2,553; A = 1,422 рад = 81, 46°; B = 0,72 рад = = 41,24°; S = 2,524.

II.2.3. ПО ДВУМ СТОРОНАМ И УГЛУ ПРОТИВ ОДНОЙ ИЗ НИХ

Дано: b, c, B.

a, A, C, S вычисляются по формулам:

$$C = \arcsin \frac{c \sin B}{b}; \quad A = \pi - B - C; \quad a = \frac{b \sin A}{\sin B};$$

$$S = \frac{1}{2} a \cdot c \sin B.$$

При в < с имеется и второе решение:

$$C' = \pi - C; \quad A' = \pi - B - C'; \quad a' = \frac{b \sin A'}{\sin B}.$$

Программа II.2.3/54,52

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	x→П В	4L	15	x→П 0	40	30	2	02
01	F sin	1С	16	П→x В	6L	31	:	13
02	←→	14	17	—	11	32	x→П Д	4Г
03	x→П 3	43	18	x→П А	4—	33	С/П	50
04	×	12	19	F sin	1С			
05	←→	14	20	П→x 2	62			
06	x→П 2	42	21	×	12			
07	:	13	22	В↑	0Е			
08	F sin⁻¹	19	23	П→x В	6L			
09	x→П С	4С	24	F sin	1С			
10	1	01	25	:	13			
11	/—/	0L	26	x→П 1	41			
12	F cos⁻¹	1—	27	←→	14			
13	←→	14	28	П→x 3	63			
14	—	11	29	×	12			

Регистры

0	оперативный
1	a; a′
2	в; в′
3	c; c′
A	A; A′
B	B; B′
C	C; C′
Д	S; S′

Инструкция II.2.3/54,52

Содержание	Набрать число	Выполнить команды	Результат
1. Переключатель Р/Г поставить в положение, соответствующее форме представления углов			
2. Ввести b, c, B	в c B	В↑ В↑	в c B
3. Вычислить a, A, C, S		В/О С/П	a — в рег. 1 A — в рег. A C — в рег. C S — в рег. X, Д
4. Если b<c, вычислить a′, A′, C′, S′		П→x 0 БП 09 С/П	a′ — в рег. 1 A′ — в рег. A C′ — в рег. C S′ — в рег. X, Д

Время вычисления — 15 с.

Пример. в = 2, c = 3; B = 0,5 рад = 28,65°.

Ответ:

1) a = 4,022;
A = 1,839 рад = 105,37°;
C = 0,803 рад = 45,987°;
S = 2,893.

2) a′ = 1,243;
A′ = 0,303 рад = 17,337°;
C′ = 2,339 рад = 134,013°;
S = 0,894.

II.2.4. ПО ДВУМ УГЛАМ И СТОРОНЕ МЕЖДУ НИМИ

Дано: a, B, C.
b, c, A, S вычисляются по формулам:

$$A = \pi - B - C;\ b = a\frac{\sin B}{\sin A};\ C = a\frac{\sin C}{\sin A};$$

$$S = \frac{1}{2}a \cdot c \cdot \sin B.$$

Программа II.2.4/54,52

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	x→П C	4C	18	×	12
01	←→	14	19	x→П 2	42
02	x→П B	4L	20	←→	14
03	+	10	21	П→x C	6C
04	F cos	1Г	22	F sin	1C
05	/—/	0L	23	×	12
06	F cos⁻¹	1—	24	x→П 3	43
07	x→П A	4—	25	×	12
08	←→	14	26	×	12
09	x→П 1	41	27	2	02
10	←→	14	28	:	13
11	F sin	1C	29	x→П Д	4Г
12	:	13	30	С/П	50
13	F Bx	0			
14	←→	14			
15	B↑	0E			
16	П→x B	6L			
17	F sin	1C			

Инструкция

a B↑ B B↑ C В/О С/П

Результат

S — в рег. X, Д
A — в рег. A
в — в рег. 2
c — в рег. 3

Регистры

1	a
2	в
3	c
A	A
B	B
C	C
Д	S

Время вычисления — 16 с.
Пример. a = 2; B = 0,8 рад = 45,837°; C = 1 рад = 57,3°.
Ответ: b = 1,473; c = 1,728; A = 1,342 рад = 76, 863°; S = = 1,24.

II.2.5. ПО ДВУМ УГЛАМ И СТОРОНЕ ПРОТИВ ОДНОГО ИЗ НИХ

Дано: a, A, C.
b, c, B, S вычисляются по формулам:

$$B = \pi - A - C;\ b = a\frac{\sin B}{\sin A};\ c = a\frac{\sin C}{\sin A};$$

$$S = \frac{1}{2}b \cdot c \cdot \sin A.$$

Программа II.2.5/54,52

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	x→П C	4C	18	×	12
01	←→	14	19	x→П 2	42
02	x→П A	4—	20	F Bx	0
03	+	10	21	П→x C	6C
04	F cos	1Г	22	F sin	1C
05	/—/	0L	23	×	12
06	F cos⁻¹	1—	24	x→П 3	43
07	x→П B	4L	25	×	12
08	F sin	1C	26	×	12
09	←→	14	27	2	02
10	x→П 1	41	28	:	13
11	←→	14	29	x→П Д	4Г
12	П→x A	6—	30	С/П	50
13	F sin	1C			
14	←→	14			
15	П→x 1	61			
16	F Bx	0			
17	:	13			

Инструкция

a B↑ A B↑ C В/О С/П

Результат

S — в рег. X, Д
в — в рег. 2
c — в рег. 3
B — в рег. B

Регистры

1	a
2	в
3	c
A	A
B	B
C	C
Д	S

Время вычисления — 16 с.
Пример. a = 3; A = 1 рад = 57,3°; C = 1,5 рад = 85,944°.
Ответ: *b* = 2,13; c = 3,556; B = 0,642 рад = 36,76°; S = 3,192.

II.3. ВЫЧИСЛЕНИЕ РАССТОЯНИЙ

Приведены программы вычисления обобщенных расстояний в n-мерном пространстве ($1 \leqslant n$), от точки до n-мерной плоскости и между парой (n — 1)-мерных плоскостей.

II.3.1. ОТ ТОЧКИ ДО ПЛОСКОСТИ

Расстояние от точки с координатами (x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0) до (n — 1)-мерной плоскости, заданной уравнением $\sum_{i=1}^{n} A_i x_i + B = 0$, вычисляется по формуле

$$d = \frac{\left|\sum_{i=1}^{n} A_i x_i^0 + B\right|}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} A_i^2}}.$$

Программа II.3.1/21

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	Р 2	21	15	F x^2	55	34	F x^2	55
01	Сх	76	20	↑	06	35	↑	06
02	Р 3	31	21	F 4	42	40	F 4	42
03	Р 4	41	22	+	96	41	:	36
04	F 2	22	23	Р 4	41	42	F √	65
05	×	26	24	С/П	78	43	С/П	78
10	↑	06	25	Р 2	21			
11	F 3	32	30	БП	58		Регистры	
12	+	96	31	↑	06			
13	Р 3	31	32	F 3	32		2—4 оперативные	
14	F 2	22	33	+	96			

Программа II.3.1/54,52

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	К НОП	54	09	П→х 0	60	18	F x^2	22
01	0	00	10	+	10	19	П→ х 0	60
02	В↑	0E	11	х→П 0	40	20	:	13
03	х→П 0	40	12	F ·	25	21	F √	21
04	F ·	25	13	+	10	22	С/П	50
05	F ·	25	14	С/П	50			
06	×	12	15	БП	51		Регистр	
07	F Вх	0	16	06	06			
08	F x^2	22	17	+	10		0 оперативный	

Для обеих программ используется единая инструкция.

Инструкция II.3.1/21,54,52

Содержание	Ввести число	Выполнить команды	Результат
1. Перейти к началу программы		В/О	
2. Ввести пару чисел x_i^0, A_i	x_i^0 A_i	В↑ С/П	
3. Если данные исчерпаны, далее, если нет — к п. 2			
4. Ввести В и вычислить d:			
а) для программы II.3.1/21	В	БП F 3 С/П	d в рег. X
б) для программы II.3.1/54, 52	В	БП 17 С/П	

Время вычисления после ввода одной пары x_i^0, A_i — 3 с. Время вычисления после ввода В — 3 с.

Примеры.

1. Вычислить расстояние на плоскости от точки с координатами: $x_1^0 = 1$, $x_2^0 = 2$ до прямой, заданной уравнением $5x_1 - 3x_2 + 4 = 0$.
Ответ: $d = 0{,}5145$.

2. Вычислить расстояние в трехмерном пространстве от точки с координатами: $x_1^0 = 1$, $x_2^0 = 2$, $x_3^0 = 3$ до плоскости $2x_1 + 3x_2 - 4x_3 - 5 = 0$.
Ответ: $d = 1{,}671$.

II.3.2. РАССТОЯНИЕ МЕЖДУ ПАРАЛЛЕЛЬНЫМИ ПЛОСКОСТЯМИ

Расстояние между парой (n — 1)-мерных параллельных плоскостей, заданных в виде $\sum_{i=1}^{n} A_i x_i + B_{1;2} = 0$, вычисляется по формуле [13]

$$d = \frac{|B_1 - B_2|}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} A_i^2}}.$$

Программа II.3.2/21

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	F x^2	55	11	Р ↑	03	22	С/П	78
01	0	04	12	—	86			
02	+	96	13	F x^2	55		Регистр	
03	Р 2	21	14	↑	06			
04	С/П	78	15	F 2	22		2 оперативный	
05	F x^2	55	20	:	36			
10	БП	58	21	F √	65			

Программа II.3.2/54,52

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	F x^2	22	05	БП	51	10	:	13
01	0	00	06	02	02	11	F √	21
02	+	10	07	—	11	12	С/П	50
03	С/П	50	08	F x^2	22			
04	F x^2	22	09	←→	14			

Для обеих программ используется единая инструкция.

Инструкция II.3.2/21,54,52

Содержание	Набрать число	Выполнить команды	Результат
1. Перейти к началу программы		В/О	
2. Ввести очередное значение A_i	Ai	С/П	
3. Если данные исчерпаны, далее, если нет — к п. 2			
4. Ввести B_1, B_2	B_1 B_2	В↑	
5. Вычислить d: а) для программы II.3.2/21 б) для программы II.3.2/54, 52		 БП Р ←→ С/П БП 07 С/П	 } d — в рег. X

Время вычисления после ввода A_1 — 2 с; после ввода B_1, B_2 — 2с.

Примеры.

1. Вычислить расстояние на плоскости между двумя параллельными прямыми: $x_1 - 2x_2 + 3 = 0$ и $x_1 - 2x_2 + 8 = 0$.

Ответ: $d = 2{,}236$.

2. Вычислить в трехмерном пространстве расстояние между двумя параллельными плоскостями: $2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5 = 0$ и $2x_1 + 3x_2 + 4x_3 - 5 = 0$.

Ответ: $d = 1{,}857$.

II.4. СПЕКТРАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

Периодическая с периодом 2π функция f (t) может быть представлена на интервале $(-\pi < t < \pi)$ рядом Фурье [16]

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kt + b_k \sin kt) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} c_k \sin (kt + \varphi_k).$$

При n равномерных разбиениях интервала $(-\pi < t < \pi)$ коэффициенты a_k и b_k определяются приближенно из соотношений:

$$a_k = \frac{2}{n} \sum_{i=1}^{n} f(z_i) \cos kz_i, \quad b_k = \frac{2}{n} \sum_{i=1}^{n} f(z_i) \sin kz_i,$$

где $z_i = \frac{\pi}{n}(2i - n - 1)$, а c_k и φ_k связаны с a_k и b_k

$$c_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}; \quad \varphi_k = \operatorname{arctg} \frac{a_k}{b_k}.$$

II.4.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЕРВЫХ ЧЕТЫРЕХ ГАРМОНИК ФУНКЦИИ f(t)

По приведенной программе определяются $a_0 - a_4$ и $b_1 - b_4$. Количество разбиений оси t вводится вручную.

Подпрограмма вычисления значения аналитической функции f (t) размещается в ячейках памяти непосредственно за основной программой и заканчивается командой В/О. Аргумент t для вычисления f(t) выбирается из регистра X. Вычисленное значение f (t) также помещается в регистр X. Переключатель Р/Г установить в положение Р.

Программа II.4.1/54,52

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	x→П 2	42	28	П→x 0	60	56	К x→П 4	L4
01	2	02	29	:	13	57	F .	25
02	:	13	30	В↑	0E	58	П→x 3	63
03	x→П 0	40	31	ПП	53	59	В/О	52
04	9	09	32	49	49			
05	x→П 1	41	33	П→x 1	61		Инструкция	
06	4	04	34	×	12			
07	x→П 4	44	35	F cos	1Г		Р/Г — в Р	
08	0	00	36	ПП	53		п В/О С/П	
09	К x→П 4	L4	37	48	48			
10	F L 1	5L	38	П→x 1	61		Результат	
11	09	09	39	×	12			
12	4	04	40	F sin	1C		a_0 — в рег. 5	
13	x→П 1	41	41	ПП	53		a_1 — в рег. C	
14	x→П 4	44	42	48	48		a_2 — в рег. A	
15	П→x 2	62	43	F L1	5L		a_3 — в рег. 8	
16	2	02	44	33	33		a_4 — в рег. 6	
17	F 1/x	23	45	F L2	58		$в_1$ — в рег. Д	
18	—	11	46	12	12		$в_2$ — в рег. B	
19	П→x 0	60	47	С/П	50		$в_3$ — в рег. 9	
20	:	13	48	×	12		$в_4$ — в рег. 7	
21	1	01	49	К П→x 4	Г4			
22	—	11	50	+	10		Регистры	
23	F π	20	51	П→x 4	64			
24	×	12	52	1	01		0 п/2	
25	x→П 3	43	53	—	11		1—4 оперативные	
26	ПП	53	54	x→П 4	44		5—Д $a_к$, $в_к$	
27	60	60	55	F .	25			

Время вычисления — $T = (1{,}3 + T_f) \cdot n$ мин, где T_f — время вычисления одного значения функции f (t).

Пример. $n = 10$, $f(t) = \cos \frac{t}{2}$.

При этом подпрограмма вычисления функции f (t) содержит команды 2 : F cos В/О

Ответ дан в виде таблицы:

	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	b_1	b_2	b_3	b_4
Вычисленное значение	1,278	0,419	—0,0788	0,0292	—0,011	$-3{,}7\cdot10^{-9}$	$3\cdot10^{-9}$	$-3\cdot10^{-9}$	$-1\cdot10^{-9}$
Точное значение	1,273	0,424	—0,085	0,0364	—0,020	0	0	0	0

II.4.2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ m-Й ГАРМОНИКИ

По приведенным программам определяется m-я гармоника — a_m, b_m разложения функции f (t) в ряд Фурье. Количество n разбиений интервала ($-\pi < t < \pi$) вводится вручную.

Подпрограмма вычисления f (t) размещается в ячейках памяти непосредственно после основной программы. Аргумент t и вычисленное значение f (t) помещаются в регистр X. Переключатель Р/Г установлен в положение Р.

Программа II.4.2/54,52

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	x→П 1	41	23	2	02	46	+	10
01	0	00	24	×	12	47	F √	21
02	x→П A	4—	25	B↑	0E	48	x→П C	4C
03	x→П B	4L	26	П→x 3	63	49	С/П	50
04	F π	20	27	П→x 1	61			
05	П→x 0	60	28	×	12			
06	x→П 2	42	29	x→П C	4C			
07	:	13	30	F cos	1Г			
08	B↑	0E	31	×	12			
09	+	10	32	П→x A	6—			
10	x→П 4	44	33	+	10			
11	F Bx	0	34	x→П A	4—			
12	F π	20	35	F x²	22			
13	+	10	36	←→	14			
14	x→П 3	43	37	П→x C	6C			
15	П→x 3	63	38	F sin	1C			
16	П→x 4	64	39	×	12			
17	—	11	40	П→x B	6L			
18	x→П 3	43	41	+	10			
19	ПП	53	42	x→П B	4L			
20	50	50	43	F L 2	58			
21	П→x 0	60	44	15	15			
22	:	13	45	F x²	22			

Инструкция

Р/Г — в Р
n x→П 0 m В/О С/П

Результат

с — в рег. X, C
a — в рег. A
в — в рег. B

Регистры

0 n
1 m
2—4 оперативные
A a
B в
C c

Пример. Определить составляющие третьей гармоники функции $f(t) = \sin\frac{t}{4}$ при 20 разбиениях оси t.

Решение. n = 20, m = 3. Подпрограмма вычисления f (t) имеет вид 4 : F sin В/О

Ответ: $\tilde{a}_3 \approx 0$; $\tilde{в}_3 = 0{,}1568$; $\tilde{c}_3 = 0{,}1568$; точные значения $a_3 = 0$; $в_3 = 0{,}1511$; $c_3 = 0{,}1511$.

Время вычисления примера — 4 мин.

II.4.3. СИНТЕЗ ФУНКЦИИ В ОДНОЙ ТОЧКЕ

По программе вычисляется значение функции f (t) в фиксированной точке t при задании произвольного числа гармоник разложения функции f (t) в ряд Фурье.

Функция f (t) представляется в точке t как

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_k (a_k \cdot \cos kt + b_k \sin kt).$$

(При k = 0 следует установить $в_0 = 2$).

Программа II.4.3/21

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	P 5	51	30	P sin	93	60	P5	51
01	0	04	31	↑	06	61	БП	58
02	P 7	71	32	F 3	32	62	0	04
03	С/П	78	33	×	26			
04	P 3	31	34	↑	06			
05	С/П	78	35	F 7	72			
10	P4	41	40	+	96			
11	P x=0	59	41	P 7	71			
12	P×	23	42	F5	52			
13	F 5	52	43	↑	06			
14	2	24	44	F 6	62			
15	:	36	45	P cos	83			
20	БП	58	50	×	26			
21	F 5	52	51	↑	06			
22	↑	06	52	F 7	72			
23	F 2	22	53	+	96			
24	×	26	54	P 7	71			
25	P 6	61	55	С/П	78			

Регистры

2 t
3—6 оперативные
7 f(t)

Программа II.4.3/54,52

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	КНОП	54	11	×	12	22	x→П 7	47
01	0	00	12	x→П1	41	23	С/П	50
02	x→П 7	47	13	F sin	1С	24	БП	51
03	+	10	14	×	12	25	04	04
04	Fx=0	5Е	15	←→	14			
05	10	10	16	П→x1	61			
06	+	10	17	F cos	1Г			
07	:	13	18	×	12			
08	БП	51	19	+	10			
09	20	20	20	П→x 7	67			
10	П→x2	62	21	+	10			

Регистры

1	к
2	t
7	f(t)

Для обеих программ используется общая инструкция.

Инструкция II.4.3/21,54,52

Содержание	Набрать число	Выполнить команды	Результат
1. Переключатель Р/Г поставить в положение Р			
2. Занести t в регистр памяти 2	t	x→П2	
3. Перейти к началу программы		В/О	
4. Занести $a_к$, $b_к$, ($b_0=2$):			
а) для программы II.4.3/21	$a_к$	С/П	0
	$в_к$	С/П	$b_к$
б) для программы II.4.3/54, 52	$a_к$	В↑	$a_к$
	$в_к$	В↑	$в_к$
5. Занести k и вычислить f (t)	к	С/П	f(t)—в рег. X,7
6. Для продолжения вычисления f (t) — к п. 4			

Время вычисления для одной гармоники — 5 с.

Пример. Определить значение $f\left(\frac{\pi}{4}\right)$ при следующих значениях гармоник: $a_0 = 4$, $a_2 = 5$, $в_2 = 3$, $a_5 = 6$, $в_5 = -2$.

Решение. После ввода $\pi/4$ в регистр памяти 2 ввести значения $a_к$, $в_к$, k согласно п. 4.5 инструкции ($в_0 = 2$).

Результат представлен в виде следующей таблицы:

k	0	2	5
f (t)	2	5	2,1716

II.4.4. СИНТЕЗ ФУНКЦИИ f(t) ПО ШЕСТИ ГАРМОНИКАМ

Определяется функция f (t) при задании нулевой и первых шести гармоник (a_0 — a_6; $в_2$ — $в_6$). Гармоники заносятся в регистры памяти один раз, после чего вычисляется значение f (t) в произвольном числе точек t.

Программа II.4.4/52

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	x→ПЕ	4Е	15	К П→x 0	Г0
01	П→xД	6Г	16	×	12
02	2	02	17	←→	14
03	:	13	18	F sin	1С
04	6	06	19	КП→x0	Г0
05	x→П 0	40	20	×	12
06	П→x Е	6Е	21	+	10
07	×	12	22	+	10
08	П→x0	60	23	П→x0	60
09	7	07	24	6	06
10	+	10	25	—	11
11	x→П0	40	26	Fx=0	5Е
12	F.	25	27	05	05
13	В↑	0Е	28	←→	14
14	F cos	1Г	29	С/П	50

Регистры

0; Е	оперативные
1	a_1
2	$в_1$
3	a_2
4	$в_2$
5	a_3
6	$в_3$
7	a_4
8	$в_4$
9	$в_5$
А	a_5
В	$в_6$
С	a_6
Д	a_0

Инструкция II.4.4/52

Содержание	Набрать число	Выполнить команды	Результат
1. Переключатель Р/Г поставить в положение Р			
2. Занести значения гармоник a_0 — a_6, b_1 — b_6 в регистры памяти	a_0—a_6	x→П (Д,1,3,5,7, А,С)	
	$в_1$—$в_6$	x→П (2,4,6,8,9,В)	
3. Занести t и вычислить f (t)	t	В/О С/П	f(t)
4. Для вычисления f (t) при другом значении t — к п. 3			

Время вычисления — 1 мин.

Пример. Вычислить f (1) при задании следующих значений гармоник: $a_0 = a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = a_5 = a_6 = в_1 = в_2 = в_3 = в_4 = в_5 = в_6 = 1$.

Решение. Занести значения а, в в соответствующие регистры памяти и выполнить команды 1 В/О С/П.

В результате получаем f (1) = 0,121.

II.5. ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЕ И ОБРАТНЫЕ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

II.5.1. ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

Расчетные формулы [13]:

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}; \quad \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}; \quad \operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}.$$

Программа II.5.1/21

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	Pe^x	33	13	F2	22
01	↑	06	14	+	96
02	F1/x	45	15	P4	41
03	P2	21	20	:	36
04	—	86	21	P5	51
05	2	24	22	С/П	78
10	:	36			
11	P3	31		Инструкция	
12	↑	06	x	В/О С/П	

Результат

sh x—в рег. 3
ch x—в рег. 4
th x—в рег. X, 5

Регистры

2 оперативный
3 sh x
4 ch x
5 th x

Время вычисления — 4 с.

При вычислении по программе II.5.1/54,52 вычисленные значения функций shx, chx и thx помещаются программой в регистры, номера которых расположены соответственно под надписями sin, cos, tg. Это облегчает чтение результатов.

Программа II.5.1/54,52

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	Fe^x	16	08	—	11
01	B↑	0E	09	x→П 7	47
02	B↑	0E	10	FBx	0
03	F1/x	23	11	:	13
04	+	10	12	x→П 9	49
05	2	02	13	С/П	50
06	:	13		Инструкция	
07	x→П 8	48		x В/О С/П	

Результат

sh x—в рег. 7
ch x—в рег. 8
th x—в рег. X, 9

Регистры

7 sh x
8 ch x
9 th x

Время вычисления — 6 с.

Примеры.

1. x = 1. shx = 1,1752; chx = 1,5431; thx = 0,7616.
2. x = — 2. shx = — 3,6269; chx = 3,7622; thx = — 0,9640.

II.5.2. ОБРАТНЫЕ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

Расчетные формулы [13]:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{arsh} x &= \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) \\ \operatorname{arch} x &= \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right) \end{aligned}\right\} x > 1,$$

$$\operatorname{arth} x = \ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \quad |x| < 1.$$

По программам вычисляются arshx, archx и arth (1/x).

Программа II.5.2/21

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	P6	61	23	↑	06
01	Fx^2	55	24	F6	62
02	1	14	25	+	96
03	+	96	30	P ln	13
04	F √	65	31	P5	51
05	↑	06	32	F6	62
10	F6	62	33	1	14
11	+	96	34	+	96
12	P ln	13	35	2	24
13	P4	41	40	—	86
14	F6	62	41	:	36
15	Fx^2	55	42	F √	65
20	1	14	43	P ln	13
21	—	86	44	P6	61
22	F√	65	45	С/П	78

x В/О С/П

Результат

arsh x—в рег. 4
arch x—в рег. 5
arth 1/x—в рег. X,6

Регистры

4 arsh x
5 arch x
6 arth 1/x

Время вычисления — 10 с.

При вычислении по программе II.5.2/54, 52 для удобства вывода результатов вычислений значения функций arshx, archx и arth (1/x) помещаются в регистры, номера которых расположены соответственно под надписями $\sin^{-1}$, $\cos^{-1}$ и tg^{-1}.

Программа II.5.2/54,52

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	B↑	0E	14	+	10
01	B↑	0E	15	F ln	18
02	Fx^2	22	16	x→П5	45
03	1	01	17	F.	25
04	+	10	18	1	01
05	F√	21	19	+	10
06	+	10	20	←→	14
07	F ln	18	21	1	01
08	x→П 4	44	22	—	11
09	F.	25	23	:	13
10	Fx^2	22	24	F√	21
11	1	01	25	F ln	18
12	—	11	26	x→П6	46
13	F√	21	27	С/П	50

x В/О С/П

Результат

arsh x—в рег. 4
arch x—в рег. 5
arth 1/x—в рег. X,6

Регистры

4 arsh x
5 arch x
6 arth 1/x

Время вычисления — 12 с.

Пример. x = 3. arsh (3) = 1,818; arch (3) = 1,763; arth (1/3)= = 0,347.

Глава III
ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

III.1. ИНТЕРПОЛЯЦИЯ

III.1.1. ИНТЕРПОЛЯЦИЯ ФУНКЦИЕЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Интерполирующая функция f (x) аппроксимирует истинную функцию y = y (x), совпадая с ней в n узлах f (x_i) = y (x_i), i = 1, 2, ..., n.

Приведены программы вычисления функции f (x) в произвольной точке x при равномерном шаге выбранных узлов x_i ($x_i - x_{i-1} = \Delta x$ = const, i = 2, 3, ..., n) и выборе в качестве интерполирующей функции полинома (n — 1)-й степени

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i x^{i-1}, \quad 2 \leqslant n \leqslant 8.$$

Значение x может выходить за пределы интервала $x_1 - x_n$, при этом получаем экстраполяцию функции y (x).

Для вычисления f (x) используется интерполяционная формула Лагранжа [14]:

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} y_i \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} = \sum_{i=1}^{n} y_i \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \frac{p - j + 1}{i - j},$$

где

$$p = \frac{x - x_1}{\Delta x}.$$

Для вычисления f (x) по программам III.1.1. .../21 значения y_i помещаются вручную в регистры памяти, имеющие номер i + 1 (y_1 — в рег. 2, y_2 — в рег. 3 и т. д.).

По программам III.1.1. .../54, 52 значения y_i помещаются в регистры памяти с совпадающими номерами (y_1 — в рег. 1, y_2 — в рег. 2 и т. д.).

После ввода последнего значения y_n в очередные по номерам регистры памяти вводятся соответственно x_1 и Δx.

Вычисление каждого значения f (x) производится командами x В/О С/П.

III.1.1.1. ЛИНЕЙНАЯ ИНТЕРПОЛЯЦИЯ

$$f(x) = y_1 + (y_2 - y_1)\, p.$$

Программа III.1.1.1/21

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	↑	06	13	Р/—/	53
01	F4	42	14	×	26
02	—	86	15	↑	06
03	Р,	43	20	F5	52
04	F3	32	21	:	36
05	↑	06	22	↑	06
10	F2	22	23	F2	22
11	—	86	24	+	96
12	↑	06	25	С/П	78

Инструкция

$y_1 \to$ Р2, $y_2 \to$ Р3,
$x_1 \to$ Р4, $\Delta x \to$ Р5
x В/О С/П x В/О С/П...

Регистры

2	y_1
3	y_2
4	x_1
5	Δx

Программа III.1.1.1/54,52

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	П→x3	63	06	П→x4	64
01	—	11	07	:	13
02	П→x2	62	08	П→x1	61
03	П→x1	61	09	+	10
04	—	11	10	С/П	50
05	×	12			

Инструкция

y_1 x→П1, y_2 x→П2
x_1 x→П3, Δx x→П4
x В/О С/П x В/О С/П...

Регистры

1	y_1
2	y_2
3	x_1
4	Δx

Время вычисления — 2 — 3 с.

Пример. Зная координаты двух точек $x_1 = 1$, $y_1 = 5$, $x_2 = 3$, $y_2 = 9$ ($\Delta x = 2$) некоторой функции y (x), найти приближенно ее значение в точке x = 2,5.

Ответ: f (2, 5) = 8.

III.1.1.2. КВАДРАТИЧНАЯ ИНТЕРПОЛЯЦИЯ

$$f(x) = \frac{p-1}{2}\,[p \cdot y_3 + (p-2)\, y_1] - p\,(p-2)\, y_2.$$

Программа III.1.1.2/21

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	↑	06	31	Р/—/	53	62	Р/—/	53
01	F5	52	32	+	96	63	←→	16
02	—	86	33	↑	06	64	—	86
03	↑	06	34	Р/—/	53	65	С/П	78
04	F6	62	35	Р7	71			
05	:	36	40	×	26			
10	↑	06	41	—	86			

Инструкция

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
11	P,	43	42	/—/	56
12	F4	42	43	2	24
13	×	26	44	:	36
14	P,	43	45	P,	43
15	←→	16	50	F7	72
20	2	24	51	↑	06
21	—	86	52	F8	82
22	P8	81	53	×	26
23	↑	06	54	↑	06
24	F2	22	55	F3	32
25	×	26	60	×	26
30	↑	06	61	↑	06

Инструкция

$y_1 \to P2$ $y_2 \to P3$
$y_3 \to P4$
$x_1 \to P5$ $\Delta x \to P6$
x В/О С/П x В/О С/П...

Регистры

2	y_1
3	y_2
4	y_3
5	x_1
6	Δx
7	p
8	оперативный

Программа III.1.1.2/54,52

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	П→x4	64	14	П→x6	66
01	—	11	15	1	01
02	П→x5	65	16	—	11
03	:	13	17	×	12
04	x→П6	46	18	2	02
05	П→x3	63	19	:	13
06	×	12	20	П→x6	66
07	П→x6	66	21	П→x7	67
08	2	02	22	×	12
09	—	11	23	П→x2	62
10	x→П7	47	24	×	12
11	П→x1	61	25	—	11
12	×	12	26	С/П	50
13	+	10			

Инструкция

y_1 x→П1 y_2 x→П2
y_3 x→П3 x_1x→П4
Δx x→П5
x В/О С/П x В/О С/П...

Регистры

1	y_1
2	y_2
3	y_3
4	x_1
5	Δx
6	p
7	p—2

Время вычисления — 6 — 8 с.

Пример. Зная три точки $y_1 = 1$, $y_2 = 10$, $y_3 = 37$, $x_1 = 1$; $\Delta x = 3$ некоторой функции y (x), найти приближенно ее значения в точке x = 5,5.

Ответ: f (5,5) = 21,25.

III.1.1.3. КУБИЧЕСКАЯ ИНТЕРПОЛЯЦИЯ

$$f(x) = \frac{(p-1)(p-2)}{6}[py_4 - (p-3)y_1] + \frac{p(p-3)}{2}[(p-2)y_2 - (p-1)y_3].$$

Программа III.1.1.3/21

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	↑	06	41	P,	43	82	P/—/	53
01	F6	62	42	F8	82	83	×	26
02	—	86	43	3	34	84	←→	16
03	↑	06	44	—	86	85	×	26
04	F7	72	45	↑	06	90	+	96
05	:	36	50	P/—/	53	91	↑	06
10	P8	81	51	×	26	92	P/—/	53
11	1	14	52	P,	43	93	—	86
12	—	86	53	F2	22	94	С/П	78
13	↑	06	54	×	26			
14	F4	42	55	P,	43			
15	×	26	60	F8	82			
20	P,	43	61	↑	06			
21	F3	32	62	F5	52			
22	←→	16	63	×	26			
23	×	26	64	↑	06			
24	—	86	65	P/—/	53			
25	↑	06	70	—	86			
30	P/—/	53	71	6	64			
31	+	96	72	:	36			
32	↑	06	73	P,	43			
33	F8	82	74	F8	82			
34	×	26	75	2	24			
35	2	24	80	—	86			
40	:	36	81	↑	06			

Инструкция

$y_1 \to P2$ $y_2 \to P3$ $y_3 \to P4$
$y_4 \to P5$ $x_1 \to P6$ $\Delta x \to P7$
x В/О С/П x В/О С/П...

Регистры

2	y_1
3	y_2
4	y_3
5	y_4
6	x_1
7	Δx
8	p

Программа III.1.1.3/54,52

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	П→x5	65	19	×	12	38	+	10
01	—	11	20	П→x3	63	39	С/П	50
02	П→x6	66	21	—	11			
03	:	13	22	×	12			
04	x→П7	47	23	П→x7	67			
05	Fx²	22	24	П→x4	64			
06	П→x7	67	25	×	12			
07	3	03	26	П→x7	67			
08	×	12	27	3	03			
09	—	11	28	—	11			
10	x→П8	48	29	П→x1	61			
11	2	02	30	×	12			
12	:	13	31	—	11			
13	П→x7	67	32	П→x8	68			
14	2	02	33	2	02			
15	—	11	34	+	10			
16	П→x2	62	35	×	12			
17	П→x3	63	36	6	06			
18	—	11	37	:	13			

Инструкция

y_1 x→П1 y_2 x→П2
y_3 x→П3 y_4 x→П4
x_1 x→П5 Δx x→П6
x В/О С/П x В/О С/П...

Регистры

1	y_1
2	y_2
3	y_3
4	y_4
5	x_1
6	Δx
7	p
8	оперативный

Время вычисления — 12 с.

Пример. $y_1 = 2$, $y_2 = 4$, $y_3 = 8$, $y_4 = 13$, $x_1 = 1$, $\Delta x = 2$, $x = 3{,}5$.

Решение. $f(3{,}5) = 4{,}852$.

III.1.1.4. ИНТЕРПОЛЯЦИЯ ПОЛИНОМОМ ЧЕТВЕРТОЙ СТЕПЕНИ

$$f(x) = \frac{p-2}{6}\left\{\frac{(p-3)(p-4)}{4}[(p-4)y_1 + py_5] - p(p-4)[(p-3)y_1 + (p-1)y_4] + \frac{p(p-1)(p-3)(p-4)}{4}y_3\right\}.$$

Программа III.1.1.4/54,52

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	П→x6	66	22	4	04	44	П→x8	68
01	—	11	23	:	13	45	П→x3	63
02	П→x7	67	24	П→x9	69	46	×	12
03	:	13	25	1	01	47	П→xA	6—
04	x→П9	49	26	—	11	48	×	12
05	П→x5	65	27	П→x4	64	49	4	04
06	×	12	28	×	12	50	:	13
07	П→x9	69	29	П→x9	69	51	+	10
08	4	04	30	3	03	52	С/П	50
09	—	11	31	—	11			
10	x→П8	48	32	П→x2	62			
11	П→x1	61	33	×	12			
12	×	12	34	+	10			
13	+	10	35	П→x8	68			
14	П→x9	69	36	×	12			
15	П→x8	68	37	—	11			
16	×	12	38	П→x9	69			
17	x→П8	48	39	2	02			
18	3	03	40	—	11			
19	+	10	41	×	12			
20	x→ПА	4—	42	6	06			
21	×	12	43	:	13			

Инструкция

y_1—y_5 x→П(1—5), x_1 x→П6 Δx x→П7 x В/О С/П x В/О С/П...

Регистры

1—5 y_1—y_5
6 x_1
7 Δx
8—А оперативные

Время вычисления — 18 с.

Пример. $y_1 = 1$, $y_2 = 3$, $y_3 = 7$, $y_4 = 9$, $y_5 = 8$, $x_1 = 2$, $\Delta x = 4$, $x = 8$.

Решение. $f(8) = 5{,}07$.

III.1.1.5. ИНТЕРПОЛЯЦИЯ ПОЛИНОМОМ ПЯТОЙ СТЕПЕНИ

$$f(x) = \frac{1}{12}\left\{\frac{(p-2)(p-3)}{2}\left[\frac{(p-1)(p-4)}{5}(py_6 - (p-5)y_1) + p(p-5)((p-4)y_2 - (p-1)y_5)\right] + p(p-1)(p-4)(p-5) \times [(p-2)y_4 - (p-3)y_3]\right\}.$$

Программа III.1.1.5/54,52

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	П→x7	67	26	П→xД	6Г	52	+	10
01	—	11	27	П→x2	62	53	П→xC	6C
02	П→x8	68	28	×	12	54	4	04
03	:	13	29	П→xB	6L	55	—	11
04	x→П9	49	30	П→x5	65	56	×	12
05	П→x6	66	31	×	12	57	П→xC	6C
06	×	12	32	—	11	58	×	12
07	П→x9	69	33	П→xC	6C	59	+	10
08	5	05	34	4	04	60	1	01
09	—	11	35	—	11	61	2	02
10	П→x1	61	36	×	12	62	:	13
11	×	12	37	+	10	63	С/П	50
12	—	11	38	П→xC	6C			
13	П→x9	69	39	2	02			
14	1	01	40	+	10			
15	—	11	41	×	12			
16	x→ПB	4L	42	2	02			
17	П→x9	69	43	:	13			
18	4	04	44	П→x9	69			
19	—	11	45	2	02			
20	x→ПД	4Г	46	—	11			
21	×	12	47	П→x4	64			
22	x→ПC	4C	48	П→x3	63			
23	×	12	49	—	11			
24	5	05	50	×	12			
25	:	13	51	П→x3	63			

Инструкция

y_1—y_6 x→П (1—6) x_1 x→П7 Δx x→П8 x В/О С/П x В/О С/П...

Регистры

1—6 y_1—y_6
7 x_1
8 Δx
9 p
А—Д оперативные

Время вычисления — 21 с.

Пример. $y_1 = 2$, $y_2 = 3$, $y_3 = 5$, $y_4 = 7$, $y_5 = 12$, $y_6 = 20$, $x_1 = 3$, $\Delta x = 2$, $x = 10$.

Решение. $f(10) = 8{,}973$.

III.1.1.6. ИНТЕРПОЛЯЦИЯ ПОЛИНОМОМ ШЕСТОЙ СТЕПЕНИ

$$f(x)=\frac{1}{12}\left\{\frac{(p-2)(p-3)(p-4)}{20}\left[\frac{(p-1)(p-5)}{6}((p-6)y_1+py_7)-\right.\right.$$

$$\left.-p(p-6)((p-5)y_2+(p-1)y_6)\right]+p(p-1)(p-5)(p-6)\times$$

$$\left.\times\left[\frac{(p-3)}{4}((p-4)y_3+(p-2)y_5)-\frac{(p-2)(p-4)}{3}y_4\right]\right\}.$$

Программа III.1.1.6/54,52

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	П→x8	68	31	П→x2	62	62	П→xA	6—
01	—	11	32	×	12	63	8	08
02	П→x9	69	33	+	10	64	+	10
03	:	13	34	П→xA	6—	65	П→x4	64
04	x→ПВ	4L	35	×	12	66	×	12
05	П→x1	61	36	—	11	67	6	06
06	П→x7	67	37	П→xA	6—	68	:	13
07	+	10	38	8	08	69	—	11
08	×	12	39	+	10	70	П→xA	6—
09	6	06	40	×	12	71	×	12
10	:	13	41	2	02	72	П→xC	6C
11	П→x1	61	42	0	00	73	×	12
12	—	11	43	:	13	74	+	10
13	П→xB	6L	44	П→xB	6L	75	6	06
14	П→xB	6L	45	3	03	76	:	13
15	6	06	46	—	11	77	С/П	50
16	—	11	47	×	12			
17	×	12	48	FBx	0			
18	x→ПА	4—	49	x→ПВ	4L			
19	5	05	50	П→x3	63			
20	+	10	51	П→x5	65			
21	x→ПС	4C	52	+	10			
22	×	12	53	×	12			
23	П→xB	6L	54	П→x3	63			
24	1	01	55	—	11			
25	—	11	56	П→x5	65			
26	П→x6	66	57	+	10			
27	×	12	58	П→xB	6L			
28	П→xB	6L	59	×	12			
29	5	05	60	8	08			
30	—	11	61	:	13			

Инструкция

y_1—y_7 x→П (1—7)
x_1 x→П8 Δx x→П9
x В/О С/П x В/О С/П...

Регистры

1—7	y_1—y_7
8	x_1
9	Δx
A—C	оперативные

Время вычисления — 27 с.

Пример. $y_1 = 7$, $y_2 = 4$, $y_3 = 2$, $y_4 = 3$, $y_5 = 5$, $y_6 = 8$, $y_7 = 9$, $x_1 = 5$, $\Delta x = 5$, $x = 22$.

Решение. $f(22) = 3{,}722$.

III.1.1.7. ИНТЕРПОЛЯЦИЯ ПОЛИНОМОМ СЕДЬМОЙ СТЕПЕНИ

$$f(x)=\frac{(p-1)(p-2)(p-5)(p-6)}{3!\ 4!}\left\{p(p-7)[(p-4)y_4-(p-3)y_5]-\right.$$

$$-\frac{(p-3)(p-4)}{35}[(p-7)y_1-py_8]\Big\}+\frac{p(p-3)(p-4)(p-7)}{2\cdot 5!}\times$$

$$\times\left\{\frac{(p-2)(p-3)}{3}[(p-6)y_2-(p-1)y_7-\right.$$

$$\left.-(p-1)(p-6)[(p-5)y_3-(p-2)y_6]\right\}.$$

Программа III.1.1.7/54,52

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	П→x9	69	37	—	11	74	4	04
01	—	11	38	×	12	75	+	10
02	П→xA	6—	39	+	10	76	×	12
03	:	13	40	П→xД	6Г	77	3	03
04	x→ПС	4C	41	×	12	78	:	13
05	П→x8	68	42	П→xД	6Г	79	+	10
06	П→x1	61	43	4	04	80	П→xД	6Г
07	—	11	44	+	10	81	Fx^2	22
08	×	12	45	×	12	82	3	03
09	7	07	46	3	03	83	6	06
10	:	13	47	:	13	84	—	11
11	П→x1	61	48	x→ПВ	4L	85	×	12
12	+	10	49	П→xC	6C	86	5	05
13	5	05	50	2	02	87	:	13
14	:	13	51	—	11	88	П→xB	6L
15	П→xC	6C	52	П→x6	66	89	+	10
16	1	01	53	×	12	90	4	04
17	—	11	54	П→xC	6C	91	8	08
18	П→xC	6C	55	5	05	92	:	13
19	6	06	56	—	11	93	С/П	50
20	—	11	57	П→x3	63			
21	×	12	58	×	12			
22	x→ПД	4Г	59	—	11			
23	6	06	60	П→xД	6Г			
24	+	10	61	×	12			
25	×	12	62	П→xC	6C			
26	П→xC	6C	63	6	06			
27	4	04	64	—	11			
28	—	11	65	П→x2	62			
29	П→x4	64	66	×	12			
30	П→x5	65	67	П→xC	6C			
31	—	11	68	1	01			
32	×	12	69	—	11			
33	П→x5	65	70	П→x7	67			
34	—	11	71	×	12			
35	П→xД	6Г	72	—	11			
36	6	06	73	П→xД	6Г			

Инструкция

y_1—y_8 x→П (1—8)
x_1 x→П9 Δx x→ПА
x В/О С/П x В/О С/П...

Регистры

1—8	y_1—y_8
9	x_1
A	Δx
B, Д	оперативные
C	p

Время вычисления — 32 с.

Пример. $y_1 = -2$, $y_2 = 1$, $y_3 = 5$, $y_4 = 6$, $y_5 = 6$, $y_6 = 4$, $y_7 = 2$, $y_8 = 3$, $x_1 = 2$, $\Delta x = 4$, $x = 12$.

Решение. $f(12) = 5{,}656$.

III.1.1.8. ИНТЕРПОЛЯЦИЯ ПОЛИНОМОМ СТЕПЕНИ m

Приводится универсальная программа для вычисления f (x) при интерполяции полиномом степени $m = n - 1 \leqslant 7$.

При использовании МК-52 замена в адресах 04 и 24 соответственно команд x → ПД на x → ПЕ и П → x Д на П → xE позволяет увеличить количество узлов до 9 и, таким образом, производить интерполяцию полиномом до восьмой степени, помещая значение y_9 в регистр памяти ПД. Регистр Е используется для хранения значения р, а остальные регистры остаются без изменений.

Программа III.1.1.8/54,52

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	П→x2	62	21	Fx≠0	57	42	Fx=0	5E
01	—	11	22	31	31	43	09	09
02	П→x3	63	23	:	13	44	+	10
03	:	13	24	П→xД	6Г	45	С/П	50
04	x→ПД	4Г	25	П→x0	60			
05	0	00	26	+	10		Инструкция	
06	В↑	0E	27	П→x1	61		n x→П1 x_1 x→П2	
07	4	04	28	—	11		Δx x→П3	
08	x→П4	44	29	×	12		y_1—y_8 x→П (5—С)	
09	F.	25	30	0	00		x В/О С/П x В/О С/П...	
10	1	01	31	+	10			
11	П→x1	61	32	FL0	5Г		Регистры	
12	x→П0	40	33	14	14			
13	F.	25	34	КП→x4	Г4		0—4 оперативные	
14	П→x4	64	35	×	12		1 n	
15	П→x0	60	36	+	10		2 x_1	
16	+	10	37	П→x4	64		3 Δx	
17	4	04	38	П→x1	61		5—С y_1—y_8	
18	—	11	39	—	11		Д p	
19	П→x1	61	40	4	04			
20	—	11	41	—	11			

Время вычисления составляет $T \simeq \frac{(n+1)^2}{9}$ мин.

В качестве примеров следует использовать примеры, помещенные в разделах III.1.1.1 — III.1.1.7.

III.1.2. ИНТЕРПОЛЯЦИЯ ПЛОСКОСТЬЮ

Для интерполяции в пространстве используется интерполяция двумерной функции z (x, y) плоскостью по формуле

$$f = f(x, y) = A + Bx + Cy$$

при задании значений истинной функции $z = z(x, y)$ в трех произвольных узлах: $z_1 = z(x_1, y_1)$, $z_2 = z(x_2, y_2)$, $z_3 = z(x_3, y_3)$.

Для вычисления f используется соотношение [13]

$$\begin{vmatrix} z_1 - f & z_2 - f & z_3 - f \\ y_1 - y & y_2 - y & y_3 - y \\ x_1 - x & x_2 - x & x_3 - x \end{vmatrix} = 0.$$

Исходные значения $x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3, z_1, z_2, z_3$ вручную вводятся в регистры памяти согласно приведенной таблице

$$\begin{Vmatrix} z_1 & z_2 & z_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{Vmatrix} \Rightarrow \begin{Vmatrix} 7 & 8 & 9 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{Vmatrix}.$$

Программа III.1.2/54,52

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	6	06	21	×	12	42	БП	51
01	x→П 0	40	22	П→x 6	66	43	27	27
02	П→x 6	66	23	П→x 4	64	44	—	11
03	П→x 4	64	24	ПП	53	45	П→x 8	68
04	ПП	53	25	51	51	46	П→x 7	67
05	44	44	26	x→П С	4С	47	—	11
06	x→П А	4—	27	С/П	50	48	×	12
07	КП→x 0	Г0	28	П→x 4	64	49	П→x 9	69
08	П→x 3	63	29	—	11	50	П→x 7	67
09	П→x 1	61	30	П→x В	6L	51	—	11
10	ПП	53	31	×	12	52	К П→x 0	Г0
11	44	44	32	←→	14	53	К П→x 0	Г0
12	x→П В	4L	33	П→x 1	61	54	—	11
13	3	03	34	—	11	55	×	12
14	x→П 0	40	35	П→x А	6—	56	—	11
15	П→x 3	63	36	×	12	57	В/О	52
16	П→x 1	61	37	—	11			
17	—	11	38	П→x С	6С		Регистры	
18	П→x 5	65	39	:	13			
19	П→x 4	64	40	П→x 7	67		0, А—С оперативные	
20	—	11	41	+	10		1—9 y_1—y_9	

Инструкция III.1.2/54,52

Содержание	Набрать число	Выполнить команды	Результат
1. Занести $x_1 - x_3$, $y_1 - y_3$, $z_1 - z_3$ в регистры памяти 1—9	$x_1 - x_3$ $y_1 - y_3$ $z_1 - z_3$	x→П (1—3) x→П (4—6) x→П (7—9)	
2. Выполнить предварительное вычисление		В/О С/П	
3. Занести значения x и y и вычислить f (x, y)	x y	В↑ С/П	f(x, y)
4. Для интерполяции в другой точке — к п. 3			

Время выполнения предварительного вычисления — 15 с, вычисления f (x, y) — 5 с.

Пример.

Исходные значения задаются таблично

$$\left\|\begin{matrix} z_1 & z_2 & z_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{matrix}\right\| \Rightarrow \left\|\begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 6 \\ 2 & 1 & 2 \end{matrix}\right\|.$$

Вычислить f (x, y,) при x = 1,5; y = 2,5.

Решение. f (1,5; 2,5) = 0,8333.

III.2 НАХОЖДЕНИЕ ЭКСТРЕМУМА ФУНКЦИИ

По приведенным программам определяется локальный минимум заданной функции f (x) или f (x, y). Для определения максимума функции f следует преобразовать ее к виду $f_1 = -f$ или $f_1 = f^{-1}$ и искать минимум функции f_1.

III.2.1. ФУНКЦИЯ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Подпрограмма вычисления функции f (x) располагается в ячейках памяти непосредственно за основной программой и заканчивается командой В/О. Для вычисления f (x) аргумент x берется из регистра X, туда же помещается вычисленное значение f (x).

Перед вычислением начальное значение шага изменения x (Δx) помещается в регистр памяти 4, а x — в регистр X.

Программа III.2.1/21

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	P3	31	22	P3	31
01	5	54	23	ПП	68
02	Pe^x	33	24	F,	45
03	Pe^x	33	25	↑	06
04	P2	21	30	F2	22
05	F4	42	31	←→	16
10	4	44	32	P2	21
11	:	36	33	—	86
12	/—/	56	34	Px≥0	49
13	P4	41	35	↑	06
14	F3	32	40	Px=0	59
15	↑	06	41	F←→	15
20	F4	42	42	F3	32
21	—	86	43	С/П	78

Инструкция

Δx→P4
x В/О С/П

Результат

x_0—в рег. X, 3
f (x_0)—в рег. 2

Регистры

2 f (x_0)
3 x_0
4 Δx

Программа III.2.1/54,52

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	x→П3	43	13	ПП	53
01	9	09	14	25	25
02	F10^x	15	15	П→x2	62
03	x→П2	42	16	←→	14
04	П→x4	64	17	x→П2	42
05	/—/	0L	18	—	11
06	4	04	19	F x≥0	59
07	:	13	20	0 4	04
08	x→П4	44	21	F x=0	5E
09	П→x3	63	22	0 9	09
10	П→x4	64	23	П→x3	63
11	—	11	24	С/П	50
12	x→П3	43			

Инструкция

Δx x→П4
x В/О С/П

Результат

x_0—в рег. X, 3
f (x_0)—в рег. 2

Регистры

2 f (x_0)
3 x_0
4 Δx

Пример. Найти минимум функции f (x) = e^x — x при начальных значениях x = — 1, Δx = 0,3.

Подпрограмма вычисления функции f (x) имеет вид:

а) для программы III.2.1/21 ↑ Pe^x ↔ — В/О

б) для программы III.2.1/54, 52 Fe^x F Bx — В/О

Ответ: $\tilde{x}_0 = \pm (1 - 2) \cdot 10^{-4}$, f ($\tilde{x}_0$) = 1; точные значения соответственно 0 и 1.

Время вычисления примера составляет 3 — 3,5 мин.

III.2.2. ФУНКЦИЯ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ

Определяется минимум функции двух переменных f (x, y).

Подпрограмма вычисления f (x, y) располагается в ячейках памяти непосредственно за основной программой и заканчивается командой В/О. Аргументы x и y для вычисления f (x, y) берутся из регистров 1 и 2 соответственно; вычисленное значение f (x, y) помещается в регистр X.

III.2.2.1. МЕТОД ПОКООРДИНАТНОГО СПУСКА

Программа работает с разной точностью в зависимости от положения переключателя Р/Г: Г — с грубой точностью, Р — с большей точностью.

Программа III.2.2.1/54,52

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Инструкция
00	9	09	22	Fπ	20	
01	F 10^x	15	23	/—/	0L	x x→П1
02	x→ПД	4Г	24	:	13	y x→П2
03	ПП	53	25	x→П4	44	Δx x→П3
04	36	36	26	П→x3	63	Δy x→П4
05	F x≥0	59	27	FBx	0	В/О С/П
06	13	13	28	:	13	
07	П→x3	63	29	x→П3	43	Результат
08	П→x1	61	30	F cos	1Г	
09	+	10	31	F $\cos^{-1}$	1—	f (x_0, y_0)—в рег. X, Д
10	x→П1	41	32	Fx=0	5E	x_0—в рег. 1
11	БП	51	33	07	07	y_0—в рег. 2
12	03	03	34	П→xД	6Г	
13	П→x4	64	35	С/П	50	Регистры
14	П→x2	62	36	ПП	53	
15	+	10	37	43	43	1 x_0
16	x→П2	42	38	П→xД	6Г	2 y_0
17	ПП	53	39	←→	14	3 Δx_0
18	36	36	40	x→ПД	4Г	4 Δy_0
19	Fx<0	5C	41	—	11	Д f (x_0, y_0)
20	13	13	42	В/О	52	
21	П→x4	64				

Пример. Найти минимум функции $f(x, y) = (x-2)^2 + (xy-1)^2$ при начальных значениях $x = 1$, $y = 1$, $\Delta x = 0{,}3$, $\Delta y = 0{,}3$. (Точные значения $x_0 = 2$, $y_0 = 0{,}5$, $f(x_0, y_0) = 0$.)

Подпрограмма вычисления f (x, y) имеет вид П→ x 1 2 — F x^2 П→ x 1 П→ x 2×1 — Fx^2 + В/О

Ответ:

а) переключатель Р/Г в положении Г.

$$\tilde{x}_0 = 1{,}7136,\ \tilde{y}_0 = 0{,}8529,\ f(\tilde{x}_0, \tilde{y}_0) = 0{,}2951.$$

Время вычисления примера — 7 мин.

б) переключатель Р/Г в положении Р.

$$\tilde{x}_0 = 1{,}9812,\ \tilde{y}_0 = 0{,}5234,\ f(\tilde{x}_0, \tilde{y}_0) = 1{,}72\cdot 10^{-3}.$$

Время вычисления примера — 1 ч 10 мин.

III.2.2.2. МЕТОД ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОГО ПРИБЛИЖЕНИЯ

Для нахождения минимума функции f (x, y) используется метод квазислучайного поиска.

Шаг изменения по x и y одинаков $\Delta x = \Delta y = \Delta$, начальное значение $\Delta \simeq 0{,}05$ устанавливается программно.

Программа III.2.2.2/54,52

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	9	09	24	53	53	48	×	12
01	x→П4	44	25	x→ПС	4C	49	П→x1	61
02	F10^x	15	26	П→xД	6Г	50	+	10
03	x→ПС	4C	27	—	11	51	x→П1	41
04	F ln	18	28	Fx≥0	59	52	В/О	52
05	F1/x	23	29	07	07			
06	x→П3	43	30	П→x3	63		Инструкция	
07	П→xС	6C	31	/—/	0L		Р/Г—в Р	
08	x→ПД	4Г	32	ПП	53		x x→П1	
09	Fπ	20	33	38	38		y x→П2	
10	F ln	18	34	КП→x4	Г4		В/О С/П	
11	П→x3	63	35	2	02			
12	×	12	36	БП	51		Результат	
13	x→П3	43	37	10	10		f (x_0, y_0)—в рег. X, Д	
14	F cos	1Г	38	В↑	0E		x_0—в рег. 1	
15	F $\cos^{-1}$	1—	39	П→x4	64		y_0—в рег. 2	
16	Fx=0	5E	40	F cos	1Г			
17	20	20	41	×	12		Регистры	
18	П→xД	6Г	42	П→x2	62			
19	С/П	50	43	+	10		1 x,	
20	П→x3	63	44	x→П2	42		2 y_0	
21	ПП	53	45	←→	14		3 Δ	
22	38	38	46	П→x4	64		4, С оперативные	
23	ПП	53	47	F sin	1C		Д f (x_0, y_0)	

Пример. Найти минимум функции $f(x, y) = (x-2)^2 + (xy-1)^2$ при начальных значениях $x = 1$, $y = 1$.

Подпрограмма вычисления f (x, y) имеет вид П→ x 1 2 — F x^2 П→ x 1 П→ x 2×1 — F x^2 + В/0.

Ответ: $\tilde{x}_0 = 1{,}99993$, $\tilde{y}_0 = 0{,}50013$, $f(\tilde{x}_0, \tilde{y}_0) = 5\cdot 10^{-8}$.

Время вычисления примера — 45 мин.

III.3. ИНТЕГРИРОВАНИЕ

III.3.1. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ФУНКЦИИ, ЗАДАННОЙ АНАЛИТИЧЕСКИ

III.3.1.1. ПО ФОРМУЛЕ ПРЯМОУГОЛЬНИКОВ

Приближенное значение интеграла

$$F = \int_a^b f(x)\,dx$$

вычисляется по формуле [17]

$$\tilde{F} = \Delta \sum_{i=1}^{n} f\left(a - \frac{\Delta}{2} + i\Delta\right),$$

где $\Delta = (b - a)/n$, с фиксированным числом шагов n.

Подпрограмма вычисления значения подынтегральной функции f (x) располагается непосредственно за основной программой. Аргумент x и ответ f (x) размещаются в регистре X.

Программа III.3.1.1/21

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	P 5	51	22	F 5	52	44	F 2	22
01	—	86	23	↑	06	45	×	26
02	0	04	24	F 2	22	50	С/П	78
03	P 2	21	25	+	96			
04	F 4	42	30	P 2	21			
05	:	36	31	F 4	42			
10	P 3	31	32	1	14			
11	2	24	33	—	86			
12	:	36	34	P 4	41			
13	↑	06	35	↑	06			
14	F 5	52	40	F 3	32			
15	+	96	41	←→	16			
20	P 5	51	42	P x=0	59			
21	ПП	68	43	F ←→	15			

Инструкция

n→P 4

b ↑ a В/О С/П

Регистры

2 Σ

3 Δ

4; 5 оперативные

Программа III.3.1.1/54,52

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	x→П В	4L	12	Cx	0Г	24	П→x Д	6Г
01	←→	14	13	x→П С	4C	25	×	12
02	—	11	14	П→x В	6L	26	С/П	50
03	←→	14	15	П→x Д	6Г			
04	x→П О	40	16	—	11			
05	:	13	17	x→П В	4L			
06	x→П Д	4Г	18	ПП	53			
07	2	02	19	27	27			
08	:	13	20	П→x С	6C			
09	П→x В	6L	21	+	10			
10	+	10	22	F L0	5Г			
11	x→П В	4L	23	13	13			

Инструкция

n В↑ a В↑ b В/О С/П

Регистры

0	счетчик
В	x_f
С	F/Δ
Д	Δ

Время вычисления — $T \approx n(3 + \tau_f)$ с, где τ_f — время вычисления f (x).

Пример. Определить приближенное значение интеграла

$$F = \int_0^2 x^4\,dx \text{ при } n = 32.$$

Подпрограмма имеет вид F x^2 F x^2 В/О

Ответ: $\tilde{F} = 6{,}3948$; точное значение $F = 6{,}4$. Время вычисления — 1 мин 40 с — 2 мин 20 с.

III.3.1.2. ПО ФОРМУЛЕ СИМПСОНА С ЗАДАННОЙ ТОЧНОСТЬЮ

Приближенное значение интеграла

$$F = \int_a^b f(x)\,dx$$

вычисляется по формуле [11]

$$\tilde{F} = F_n = \frac{\Delta}{3}\left[f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + \ldots + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)\right],$$

где $\Delta = (b-a)/n$, $x_i = x_0 + i\Delta$ $(i = 0, 1, 2, \ldots, n)$, $x_0 = a$, $x_n = b$.

Абсолютная погрешность оценивается соотношением

$$\delta = \frac{|F_n - F_{2n}|}{15}.$$

Вычисления ведутся для n = 2, 4, 8, ... до тех пор, пока не будет выполнено соотношение $\delta < \varepsilon$, где ε — заданная величина.

При вычислении интеграла по удвоенному числу интервалов используются результаты предыдущих вычислений и дополнительно рассчитываются значения функции f (x) только в n точках.

Подпрограмма вычисления значений подынтегральной функции f (x) располагается в ячейках памяти, начиная с адреса 61. Аргумент x и ответ f (x) размещаются в регистре X.

Программа III.3.1.2/54,52

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	ПП	53	27	2	02	54	—	11
01	61	61	28	:	13	55	F x<0	5C
02	2	02	29	—	11	56	16	16
03	:	13	30	x→П 8	48	57	П→x 6	66
04	П→x 6	66	31	ПП	53	58	3	03
05	+	10	32	61	61	59	:	13
06	x→П 6	46	33	П→x C	6C	60	С/П	50
07	x→П 9	49	34	+	10			
08	С/П	50	35	x→П C	4C			
09	П→x B	6L	36	П→x 8	68			
10	П→x A	6—	37	П→x 7	67			
11	—	11	38	—	11			
12	x→П A	4—	39	F L0	5Г			
13	2	02	40	30	30			
14	F 1/x	23	41	П→x 6	66			
15	x→П 5	45	42	П→x C	6C			
16	Cx	0Г	43	B↑	0E			
17	x→П C	4C	44	П→x 9	69			
18	П→x B	6L	45	+	10			
19	П→x A	6—	46	x→П 9	49			
20	П→x 5	65	47	+	10			
21	2	02	48	П→x 7	67			
22	×	12	49	×	12			
23	x→П 5	45	50	x→П 6	46			
24	x→П 0	40	51	—	11			
25	:	13	52	F x²	22			
26	x→П 7	47	53	П→x Д	6Г			

Инструкция

Cx x→П 6
а x→П A B/O С/П
в x→П B B/O С/П
(45 ε)² x→П Д С/П

Регистры

0	счетчик
5	п/2
6	$3F_n$
7	2Δ
8	x_1
9	оперативный
A	а; (в—а)
B	в
C	Σ f
Д	(45 ε)²

Пример. Определить приближенное значение интеграла $F = \int_0^2 e^x\,dx$ с абсолютной погрешностью $\delta \leqslant 0{,}003$.

Решение. $\varepsilon = 0{,}003$. Подпрограмма вычисления значений подынтегральной функции имеет вид Fe^x B/O

Ответ: $\tilde{F} = 6{,}3912$; точное значение $F = 6{,}3891$.

Время вычисления примера — 35 с.

III. 3.1.3. ПО ФОРМУЛЕ БОДЕ С ЗАДАННОЙ ТОЧНОСТЬЮ

Приближенное значение интеграла вычисляется по формуле

$$F = \int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{16S_{2n} - S_n}{15} = F_n,$$

где $$S_n = \frac{1}{3}\,\frac{(b-a)}{n}\,[f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + \ldots + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)];$$

$$x_i = x_0 + i\,\frac{(b-a)}{n}\ (i = 0, 1, \ldots, n),\ x_0 = a,\ x_n = b.$$

Абсолютная погрешность оценивается соотношением [11]

$$\delta = \frac{|F_{2n} - F_n|}{63}.$$

Вычисления ведутся для $n = 2, 4, 8, \ldots$ до тех пор, пока не будет выполнено соотношение $\delta < \varepsilon$, где ε — заданная величина.

При вычислении интеграла по удвоенному числу интервалов используются результаты предыдущих вычислений и дополнительно рассчитываются значения функции f (x) только в n точках.

Подпрограмма вычисления значений подынтегральной функции располагается в ячейках памяти, начиная с адреса 68. Аргумент x и ответ f (x) — в регистре X.

Программа III.3.1.3/54,52

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	ПП	53	30	ПП	53	60	15	15
01	68	68	31	68	68	61	П→x 6	66
02	2	02	32	П→x 9	69	62	2	02
03	:	13	33	+	10	63	2	02
04	П→x C	6C	34	x→П 9	49	64	.	0—
05	+	10	35	П→x 8	68	65	5	05
06	x→П C	4C	36	П→x 7	67	66	:	13
07	С/П	50	37	+	10	67	С/П	50
08	П→x A	6—	38	F L0	5Г			
09	П→x B	6L	39	29	29			
10	—	11	40	П→x 6	66			
11	x→П A	4—	41	П→x 4	64			
12	2	02	42	П→x C	6C			
13	F 1/x	23	43	П→x 9	69			
14	x→П 5	45	44	+	10			
15	Cx	0Г	45	x→П C	4C			
16	x→П 9	49	46	П→x 9	69			
17	П→x B	6L	47	+	10			
18	П→x A	6—	48	x→П 4	44			
19	П→x 5	65	49	8	08			
20	2	02	50	×	12			
21	×	12	51	—	11			
22	x→П 5	45	52	П→x 7	67			
23	x→П 0	40	53	×	12			
24	:	13	54	x→П 6	46			
25	x→П 7	47	55	—	11			
26	2	02	56	F x²	22			
27	:	13	57	П→x Д	6Г			
28	+	10	58	—	11			
29	x→П 8	48	59	F x<0	5C			

Инструкция

Cx x→П C
а x→П A B/O С/П
в x→П B B/O С/П
(423 ε)² x→П Д С/П

Регистры

0	счетчик
4	$16 \cdot S_{2n}$
5	n
6	$22{,}5 \cdot F_n$
7	(а—в)/п
8	x_1
9	оперативный
A	а; (а—в)
B	в
C	Σ f
Д	(423 ε)²

Пример. Определить приближенное значение интеграла $F = \int_2^5 e^x dx$ с абсолютной погрешностью $\delta \leqslant 1 \cdot 10^{-5}$.

Решение. $\varepsilon = 1 \cdot 10^{-5}$.

Подпрограмма вычисления значений подынтегральной функции имеет вид Fe^x В/О

Ответ: $\widetilde{F} = 141,02408$; точное значение $F = 141,02420$.

Время вычисления примера — 3 мин 50 с.

III.3.1.4. ПО МЕТОДУ СУММИРОВАНИЯ С ПЕРЕМЕННЫМ ШАГОМ

Используется представление интеграла F в виде [7]

$$F = \int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{h}{2} \sum_{i=1}^{2n} f(x_i) = \widetilde{F}$$

$$\text{с узлами } x_i : x_{2j-1} = a + \frac{h}{2}(2j - 1 - 1/\sqrt{3}),\ x_{2j} = a + \frac{h}{2}(2j - 1 + 1/\sqrt{3}),\ j = 1, 2, \ldots, n,$$

где $h = (b - a)/n$.

Подпрограмма вычисления значений подынтегральной функции располагается в ячейках памяти непосредственно за основной программой. Аргумент x и вычисленное значение f (x) помещаются в регистр X.

Программа III.3.1.4/21

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	—	86	30	Р 7	71	60	/—/	56
01	С/П	78	31	ПП	68	61	Р x⩾0	49
02	:	36	32	Р Сх	73	62	1	14
03	2	24	33	↑	06	63	F 6	62
04	:	36	34	F 6	62	64	↑	06
05	Р 4	41	35	+	96	65	F 4	42
10	3	34	40	Р 6	61	70	×	26
11	F √	65	41	F 4	42	71	С/П	78
12	:	36	42	↑	06		Инструкция	
13	Р 5	51	43	F 7	72		Сх Р 6 в Р 3 а Р 2	
14	↑	06	44	+	96		В/О С/П n С/П	
15	F 2	22	45	+	96		Регистры	
20	+	96	50	↑	06	2	а	
21	↑	06	51	F 3	32	3	в	
22	F 4	42	52	—	86	4	h/2	
23	+	96	53	Р x⩾0	49	5	h/2√3	
24	↑	06	54	×	26	6	Σ	
25	←→	16	55	F 5	52	7	x_i	

Время вычисления — $T = 8 + n(7 + 2\tau_f)$ с, где τ_f — время вычисления f (x).

Программа III.3.1.4/54,52

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	Сх	0Г	18	+	10	36	16	16
01	x→П 7	47	19	П→x 4	64	37	П→x 7	67
02	С/П	50	20	+	10	38	П→x 4	64
03	x→П 1	41	21	x→П6	46	39	×	12
04	—	11	22	ПП	53	40	В/О	52
05	←→	14	23	41	41			
06	x→П 2	42	24	П→x 7	67		Инструкция	
07	x→П 0	40	25	+	10		В/О С/П	
08	:	13	26	x→П 7	47		n В↑в В↑ а С/П	
09	x→П 3	43	27	П→x 6	66		Регистры	
10	2	02	28	П→x 3	63	0	счетчик	
11	:	13	29	F L0	5Г	1	а	
12	x→П 4	44	30	20	20	2	n	
13	3	03	31	П→x 2	62	3	h	
14	F √	21	32	x→П 0	40	4	h/2	
15	:	13	33	П→x 5	65	5	h/2√3	
16	x→П 5	45	34	/—/	0L	6	x_i	
17	П→x 1	61	35	F x⩾0	59	7	$\widetilde{F}$	

Время вычисления — $T = 11 + n(6 + 2\tau_f)$ с, где τ_f — время вычисления f (x).

Пример. Вычислить приближенное значение интеграла $F = \int_0^5 x^4 dx$ при $n = 5$.

Подпрограмма вычисления f (x) имеет вид F x^2 F x^2 В/О

Ответ: $\widetilde{F} = 624,972$; точное значение $F = 625$.

Время вычисления примера — 50 с.

III.3.2. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ФУНКЦИИ, ЗАДАННОЙ ТАБЛИЧНО

Исходная подынтегральная функция y (x) задана в (n + 1) равноотстоящих узлах $y_0 = y(x_0)$, $y_1 = y(x_1)$, ..., $y_n = y(x_n)$.

Интегрирование y (x) производится на интервале $x_0 - x_n$. Введем $\Delta x = \frac{x_n - x_0}{n}$. При четном n интеграл вычисляется по формуле Симпсона [13]

$$\widetilde{F}_n = \frac{\Delta x}{3}[y_0 + 4y_1 + 2y_2 + \ldots + 2y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n]\ (n \geqslant 4).$$

При нечетном n к функции F_{n-1}, вычисленной по первым (n — 1) узлам, добавляется интеграл по интервалу x_{n-1}, x_n, вычисленный по последним трем точкам при параболической аппроксимации,

$$\Delta\tilde{F} = \frac{\Delta x}{12}[5y_n + 8y_{n-1} - y_{n-2}].$$

Программа III.3.2/54,52

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	x→П B	4L	18	×	12	36	4	04
01	2	02	19	+	10	37	:	13
02	x→П C	4C	20	БП	51	38	—	11
03	С/П	50	21	05	05	39	П→x 9	69
04	x→П A	4—	22	П→x C	6C	40	+	10
05	П→x A	6—	23	F sin	1C	41	3	03
06	С/П	50	24	F x≥0	59	42	:	13
07	←→	14	25	30	30	43	П→x B	6L
08	П→x 9	69	26	F .	25	44	×	12
09	x→П 8	48	27	—	11	45	С/П	50
10	F.	25	28	БП	51			
11	x→П 9	49	29	41	41		Регистры	
12	F.	25	30	F .	25			
13	x→П A	4—	31	1	01	8	y_{n-2}	
14	6	06	32	1	01	9	y_{n-1}	
15	П→x C	6C	33	×	12	A	y_n	
16	—	11	34	П→x 8	68	B	Δ x	
17	x→П C	4C	35	+	10	C	2 или 4	

Инструкция III.3.2/54,52

Содержание	Набрать число	Выполнить команды	Результат
1. Переключатель Р/Г поставить в положение Р			
2. Занести величину шага Δx	Δ x	В/О С/П	
3. Занести очередное значение функции y_i	y_i	С/П	y_i
4. Если исходные данные не исчерпаны — к п. 3			
5. Вычислить величину $\tilde{F}$		БП 22 С/П	$\tilde{F}$

Время ввода одного значения y_i — 5 с.

Время вычисления F после ввода последнего значения y_n — 8 с.

Примеры.

1. Вычислить приближенное значение интеграла

$$\int_2^8 (x^4 - 2x)\,dx$$

при нечетном $n = 3$: $y_0 = 12$, $y_1 = 248$, $y_2 = 1284$, $y_3 = 4080$. Величина шага $\Delta x = 2$.

Решение. $\tilde{F} = 6596$; $F = 6487{,}2$.

2. Вычислить приближенное значение этого же интеграла на интервале (1—9) $\int_1^9 (x^4 - 2x)\,dx$

при четном $n = 4$; $y_0 = -1$, $y_1 = 75$, $y_2 = 615$, $y_3 = 2387$, $y_4 = 6543$. Величина шага $\Delta x = 2$.

Решение. $\tilde{F} = 11746{,}667$; $F = 11729{,}6$.

III.4. РЕШЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Приведены программы приближенного решения дифференциальных уравнений первого — пятого порядков:

$y^{(m)} = f(x, y, \ldots, y^{(m-1)})$ (m = 1 — 5 — порядок уравнения)

и систем, включающих до четырех уравнений первого порядка:

$$\begin{cases} y' = f(x, y, \ldots, v), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ v' = r(x, y, \ldots, v), \end{cases}$$

разрешенных относительно старшей производной (x — независимая переменная, по которой берутся все производные) методом Рунге-Кутта. Расчетные формулы хорошо известны (см., например, [11]). Независимая переменная x изменяется с шагом h, который выбирается пользователем и при необходимости может им корректироваться.

Вопросы точности решения изложены в специальной литературе [11].

Универсальный способ контроля точности — повторить вычисления с половинным шагом и сравнить результаты.

Примечание. После вычисления машиной решения на очередном шаге с ним можно в ручном режиме делать различные преобразования, например вычислить отклонение от ожидаемого значения. Можно изменить величину шага h. Программы составлены так, что после нажатия клавиши С/П вычисления продолжаются независимо от содержимого регисторов X и Y. Следует только избегать использования регистров, обслуживающих основную программу (они указаны в тексте).

III.4.1. УРАВНЕНИЕ ПЕРВОГО ПОРЯДКА $y' = f(x, y)$

III.4.1.1. РЕШЕНИЕ МЕТОДОМ РУНГЕ-КУТТА ВТОРОГО ПОРЯДКА

Подпрограмма вычисления f (x, y) располагается в ячейках памяти непосредственно за основной программой и заканчивается командой В/О. Аргументы берутся: x — из регистра 5, y — из регистра 7. Вычисленное значение f (x, y) помещается в регистр X.

Программа III.4.1.1/21

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	Р 6	61	20	Р 5	51
01	Р 7	71	21	ПП	68
02	С/П	78	22	:	36
03	ПП	68	23	↑	06
04	F 2	22	24	F 4	42
05	+	96	25	×	26
10	Р 7	71	30	↑	06
11	F 4	42	31	F 6	62
12	↑	06	32	+	96
13	F 5	52	33	Р 6	61
14	+	96	34	В/О	48
15	+	96			

Инструкция

h/2 Р 4
x_0 Р 5
y_0 В/О С/П С/П С/П ...

Результат

$y_0, y_1, y_2, \ldots$

Регистры

4 h/2
5 x_1
6; 7 y_1

Очередное значение y_i вычисляется за $(5+\tau_f)$ с, где τ_f — время вычисления f (x, y).

Программа III.4.1.1/54,52

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	x→П 6	46	11	ПП	53
01	x→П 7	47	12	22	22
02	С/П	50	13	2	02
03	ПП	53	14	:	13
04	11	11	15	П→x 4	64
05	+	10	16	×	12
06	x→П 7	47	17	В↑	0E
07	П→x 5	65	18	П→x 6	66
08	П→x 4	64	19	+	10
09	+	10	20	x→П 6	46
10	x→П 5	45	21	В/О	52

Инструкция

h x→П 4
x_0 x→П 5
y_0 В/О С/П С/П С/П ...
С/П...

Результат

$y_0, y_1, y_2, \ldots$

Регистры

4 h
5 x_1
6; 7 y_1

Очередное значение y_1 вычисляется за $(8 + \tau_f)$ с, где τ_f — время вычисления f (x, y).

Пример. Решить дифференциальное уравнение $y' = xe^{-y}$ при начальных значениях $x_0 = 0$, $y_0 = 1$. Шаг $h = 0{,}5$.

Подпрограмма имеет вид:

а) для программы III.4.1.1/21 F 5 ↑ F 7 Р e^x: В/О

б) для программы III.4.1.1/54, 52 П → x 5 П → x 7 Fe^x : В/О

Таблица результатов

i	0	1	2	3	4	5
x_1	0	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5
y_1	1	1,0460	1,1704	1,3475	1,5519	1,7650
Уточн	1	1,0450	1,1688	1,3463	1,5514	1,7653

Время вычисления одного значения y_1 — 8 — 16 с.

III.4.1.2. РЕШЕНИЕ МЕТОДОМ РУНГЕ-КУТТА ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА

Подпрограмма вычисления f (x, y) располагается в памяти непосредственно за основной программой и заканчивается командой В/О. Аргументы берутся: x — из регистра 3, y — из регистра 5. Вычисленное значение f (x, y) помещается в регистр X.

Программа III.4.1.2/21

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	Р 4	41	25	+	96	54	+	96
01	3	34	30	Р 5	51	55	Р 4	41
02	:	36	31	F 2	22	60	В/О	48
03	Р 5	51	32	↑	06			
04	Р 6	61	33	F 3	32			
05	С/П	78	34	+	96			
10	ПП	68	35	Р 3	31			
11	Р4	41	40	ПП	68			
12	ПП	68	41	F 6	62			
13	F 3	32	42	↑	06			
14	+	96	43	F 2	22			
15	Р 4	41	44	×	26			
20	ПП	68	45	↑	06			
21	Р 4	41	50	F 6	62			
22	+	96	51	+	96			
23	Р 4	41	52	Р 5	51			
24	F 5	52	53	F 4	42			

Инструкция

h/2 Р 2
x_0 Р 3
$3y_0$ В/О С/П С/П С/П...

Результат

$y_0, y_1, y_2, \ldots$

Регистры

2 h/2
3 x_0
4 $3y_1$
5; 6 y_1

Очередное значение y_1 вычисляется за $(13 + \tau_f)$ с, где τ_f — время вычисления f (x, y).

Программа III.4.1.2/54,52

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	x→П 4	44	17	П→x 5	65	34	+	10
01	3	03	18	+	10	35	x→П 4	44
02	:	13	19	x→П 5	45	36	В/О	52
03	x→П 5	45	20	П→x 2	62			
04	x→П 6	46	21	П→x 3	63			
05	С/П	50	22	+	10			
06	ПП	53	23	x→П 3	43			
07	24	24	24	ПП	53			
08	ПП	53	25	37	37			
09	20	20	26	П→x 2	62			
10	ПП	53	27	×	12			
11	33	33	28	П→x 6	66			
12	ПП	53	29	←→	14			
13	24	24	30	+	10			
14	ПП	53	31	x→П 5	45			
15	33	33	32	П→x 4	64			
16	F Bx	0	33	F Bx	0			

Инструкция

h/2	x→П 2
x_0	x→П 3

$3y_0$ В/О С/П С/П С/П...

Результат

$y_0, y_1, y_2, \ldots$

Регистры

2	h/2
3	x_1
4	$3y_1$
5; 6	y_1

Очередное значение y_1 вычисляется за $(22 + \tau_f)$ с, где τ_f — время вычисления f (x, y).

Пример. Решить дифференциальное уравнение $y' = ye^{-x}$ при начальных значениях $x_0 = 0$, $y_0 = 1$. Шаг $h = 0{,}5$.

Подпрограмма имеет вид:

а) для программы III.4.1.2/21 F 5 ↑ F 3 P e^x: В/О

б) для программы III.4.1.2/54, 52 П→x5 П → x 3 F e^x : В/О

Таблица результатов

i	0	1	2	3	4	5
x_1	0	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5
y_1	1	1,4820	1,8814	2,1745	2,3740	2,5038
Уточн	1	1,4821	1,8816	2,1747	2,3742	2,5041

III.4.2. СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

$$\begin{cases} y' = f(x, y, \ldots, v), \\ z' = g(x, y, \ldots, v), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ v' = r(x, y, \ldots, v). \end{cases}$$

$$\begin{cases} y' = f(x, y, z), \\ z' = g(x, y, z). \end{cases}$$

III.4.2.1.1. Решение методом Рунге-Кутта второго порядка

Подпрограмма вычисления функций f и g располагается в ячейках памяти непосредственно за основной программой и заканчивается командой В/О.

При вычислении по программе III.4.2.1.1/21 аргументы для вычисления f и g берутся: x_1 — из регистра 4, y_1 — из регистра 5, z_1 — из регистра 2. Порядок вычисления f и g следующий: вначале вычисляется значение g и командой Р /—/ (код 53) заносится в регистр S 6, затем вычисляется f и помещается в регистре X.

Программа III.4.2.1.1/21

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	P 3	31	30	↑	06	60	P 2	21
01	F 6	62	31	F 7	72	61	В/О	48
02	P 5	51	32	×	26			
03	F 3	32	33	↑	06			
04	P 2	21	34	F 6	62			
05	F 4	42	35	+	96			
10	С/П	78	40	P 6	61			
11	ПП	68	41	+	96			
12	F x	25	42	P 5	51			
13	F 7	72	43	P ,	43			
14	2	24	44	↑	06			
15	×	26	45	F 7	72			
20	↑	06	50	×	26			
21	F 4	42	51	↑	06			
22	+	96	52	F 3	32			
23	P 4	41	53	+	96			
24	ПП	68	54	P 3	31			
25	P ВП	63	55	+	96			

Инструкция

h/2	P 7
x_0	P 4
y_0	P 6

Z_0 В/О С/П С/П С/П...

Результат

$x_0, x_1, x_2, \ldots$

Регистры

2; 3	z_1
4	x_1
5; 6	y_1
7	h/2
S6	g

Очередные значения y_1 и z_1 вычисляются за $(13 + \tau_f g)$ с, где $\tau_f g$ — время вычисления f и g, и командами F 6 и F 3 соответственно могут быть выведены на индикатор.

При вычислении по программе III.4.2.1.1/54 и III.4.2.1.1/52 аргументы для вычисления f и g берутся: x_1 — из регистра 1, y_1 — из регистра 5 и z_1 — из регистра 2. Порядок вычисления f и g следующий: вначале вычисляется g (x, y, z) и заносится в регистр 4, затем вычисляется f (x, y, z) и оставляется в регистре X.

Программа III.4.2.1.1/54

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	x→П 3	43	15	x→П 0	40
01	П→x 6	66	16	ПП	53
02	x→П 5	45	17	30	30
03	П→x 3	63	18	П→x Д	6Г
04	x→П 2	42	19	×	12
05	П→x 1	61	20	В↑	0E
06	С/П	50	21	К П→x В↑	ГE
07	ПП	53	22	+	10
08	14	14	23	К x→П В↑	LE
09	П→x Д	6Г	24	+	10
10	2	02	25	К x→П 0	L0
11	×	12	26	К П→x 0	Г0
12	+	10	27	F L0	5Г
13	x→П 1	41	28	18	18
14	6	06	29	В/О	52

Инструкция

h/2	x→П Д
x_0	x→П 1
y_0	x→П 6

z_0 В/О С/П С/П С/П...

Результат

$x_0, x_1, x_2, \ldots$

Регистры

0	счетчик
1	x_1
2;3	z_1
4	g
5;6	y_1
Д	h/2

Программа III.4.2.1.1/52

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	x→П 3	43	18	35	35
01	П→x 6	66	19	П→x Д	6Г
02	x→П 5	45	20	×	12
03	П→x 3	63	21	В↑	0E
04	x→П 2	42	22	К П→x E	ГE
05	П→x 1	61	23	+	10
06	С/П	50	24	К x→П E	LE
07	ПП	53	25	+	10
08	14	14	26	К x→П0	L0
09	П→x Д	6Г	27	П→x E	6E
10	2	02	28	3	03
11	×	12	29	—	11
12	+	10	30	x→П E	4E
13	x→П 1	41	31	К П→x 0	Г0
14	6	06	32	F L0	5Г
15	x→П 0	40	33	19	19
16	x→П E	4E	34	В/О	52
17	ПП	53			

Инструкция

h/2	x→П Д
x_0	x→П 1
y_0	x→П 6

z_0 В/О С/П С/П С/П...

Результат

$x_0, x_1, x_2, \ldots$

Регистры

0,E	счетчики
I	x_1
2;3	z_1
4	g
5;6	y_1
Д	h/2

Очередные значения y_1 и z_1 вычисляются за $(22 + \tau_f g)$ с, где $\tau_f g$ — время вычисления f (x, y, z) и g (x, y, z), и комаидами П → x6 и П → x3 соответственно могут быть выведены на индикатор.

Пример. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} y' = xy + z, \\ z' = x + yz \end{cases}$$

при начальных значениях $x_0 = 1$, $y_0 = 1$, $z_0 = 1$. Шаг h = 0,05.

Подпрограмма вычисления f и g имеет вид:

а) для программы III.4.2.1.1/21

F 5 ↑ F 2× ↑ F 4 + Р/—/ F 4 ↑ F 5× ↑ F 2 + В/О

б) для программ III.4.2.1.1/54 и III.4.2.1.1/52

П → x 1 П → x 5 П → x 2 × + x → П 4 П → x 1 П → x 5 × × П → x 2 + В/О

Таблица результатов

1	0	1	2	3	4	5
x_1	1	1,05	1,10	1,15	1,20	1,25
y_1	1	1,1064	1,2271	1,3645	1,5213	1,7006
$y_{точн}$	1	1,1066	1,2275	1,3653	1,5224	1,7024
z_1	1	1,1065	1,2281	1,3680	1,5308	1,7224
$z_{точн}$	1	1,1067	1,2284	1,3687	1,5320	1,7243

III.4.2.1.2. Решение методом Рунге-Кутта четвертого порядка

Подпрограмма вычисления значений функций f и g располагается в ячейках памяти, начиная с адреса 55, и может использовать регистры 0,1, 2, E. Аргументы берутся: x_1 — из регистра 6, y_1 — из регистра A, z_1 — из регистра B. Вначале вычисляется g (x, y, z) и заносится в регистр 3, а затем вычисляется f (x, y, z) и оставляется в регистре X.

Программа III.4.2.1.2/54,52

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	x→П Д	4Г	25	П→x 7	67	50	П→x C	6C
01	3	03	26	+	10	51	П→x 5	65
02	:	13	27	x→П 6	46	52	+	10
03	x→П 8	48	28	ПП	53	53	x→П C	4C
04	x↔П A	4—	29	55	55	54	В/О	52
05	П→x Д	6Г	30	П→x 7	67			
06	3	03	31	×	12			
07	:	13	32	x→П 5	45			
08	x→П 9	49	33	П→x 3	63			
09	x→П B	4L	34	П→x 7	67			
10	П→x 6	66	35	×	12			
11	С/П	50	36	x→П 4	44			
12	ПП	53	37	П→x 9	69			
13	28	28	38	П→x 8	68			
14	ПП	53	39	П→x 5	65			
15	24	24	40	+	10			
16	ПП	53	41	x→П A	4—			
17	46	46	42	←→	14			
18	ПП	53	43	П→x 4	64			
19	28	28	44	+	10			

Инструкция

h/2	x→П 7
x_0	x→П 6
$3y_0$	x→П C

$3z_0$ В/О С/П С/П С/П...

Результат

$x_0, x_1, x_2, \ldots$

Регистры

3	g
4	gh/2
5	fh/2
6	x_1

Продолжение

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
20	П→x B	6L	45	x→П B	4L
21	П→x A	6—	46	П→x Д	6Г
22	ПП	53	47	П→x 4	64
23	39	39	48	+	10
24	П→x 6	66	49	x→П Д	4Г

Регистры

7	h/2
8, A	y_1
9, B	z_1
C	$3y_1$
Д	$3z_1$

Очередные значения y_1 и z_1 вычисляются за $(48 + \tau_f g)$ с, где $\tau_f g$ — время вычисления f (x, y, z) и g (x, y, z), и командами П → x 8 и П → x 9 соответственно могут быть выведены на индикатор.

Пример. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} y' = xy + z, \\ z' = x + yz \end{cases}$$

при начальных значениях $x_0 = 1$, $y_0 = 1$, $z_0 = 1$. Шаг $h = 0{,}1$.

Подпрограмма вычисления f и g имеет вид:

П → x 6 П → x A П → x B × + x → П 3 П → x 6 П → x A × П → x B + В/О

Таблица результатов

x	1	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5
y	1	1,22754	1,52241	1,90912	2,42456	3,12741
$y_{точн}$	1	1,22755	1,52243	1,90915	2,42463	3,12759
z	1	1,22844	1,53202	1,95373	2,57444	3,55937
$z_{точн}$	1	1,22843	1,53201	1,95373	2,57445	3,55945

III.4.2.2. СИСТЕМА ТРЕХ УРАВНЕНИЙ

Система уравнений

$$\begin{cases} y' = f(x, y, z, t), \\ z' = g(x, y, z, t), \\ t' = p(x, y, z, t) \end{cases}$$

решается методом Рунге-Кутта второго порядка.

Подпрограмма вычисления значений функций f, g и p располагается в ячейках памяти непосредственно за основной программой и заканчивается командой В/О. Аргументы для вычисления f и g берутся: x_1 — из регистра 1, y_1 — из регистра 8, z_1 — из регистра 5, t_1 — из регистра 2. Порядок вычисления f и g следующий: вначале вычисляется g и заносится в регистр 7, затем p и заносится в регистр 4 и, наконец, f и оставляется в регистре X.

В подпрограммах могут быть использованы регистры памяти:

а) для программы III.4.2.2/54 A, B, C, а также 4; 7 в качестве оперативных;

б) для программы III.4.2.2/52 A, B, E, а также 4; 7 в качестве оперативных.

На каждом шаге вычисления значения y_1, z_1 и t_1 могут быть выведены на индикатор командами П → x 9, П → x 6 и П → x 3 соответственно.

Программа III.4.2.2/54

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	x→П 3	43	16	9	09
01	П→x 9	69	17	x→П 0	40
02	x→П 8	48	18	ПП	53
03	П→x 6	66	19	32	32
04	x→П 5	45	20	П→x Д	6Г
05	П→x 3	63	21	×	12
06	x→П 2	42	22	B↑	0E
07	П→x 1	61	23	K П→x B↑	ГЕ
08	С/П	50	24	+	10
09	ПП	53	25	K x→П B↑	LE
10	16	16	26	+	10
11	П→x Д	6Г	27	K x→П 0	L0
12	2	02	28	K П→x 0	Г0
13	×	12	29	F L0	5Г
14	+	10	30	20	20
15	x→П 1	41	31	В/О	52

Инструкция

h/2	x→П Д
x_0	x→П 1
y_0	x→П 9
z_0	x→П 6
t_0	В/О С/П С/П С/П...

Результат

x_0, x_1, x_2,...

Регистры

0	счетчик
1	x_1
2;3	t_1
4	p
5;6	z_1
7	g
8;9	y_1
Д	h/2

Программа III.4.2.2/52

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	x→П 3	43	19	ПП	53
01	П→x 9	69	20	37	37
02	x→П 8	48	21	П→x Д	6Г
03	П→x 6	66	22	×	12
04	x→П 5	45	23	B↑	0E
05	П→x 3	63	24	K П→x C	ГС
06	x→П 2	42	25	+	10
07	П→x 1	61	26	K x→П C	LC
08	С/П	50	27	+	10
09	ПП	53	28	K x→П 0	L0
10	16	16	29	П→x C	6C
11	П→x Д	6Г	30	3	03
12	2	02	31	—	11
13	×	12	32	x→П C	4C
14	+	10	33	K П→x 0	Г0
15	x→П 1	41	34	F L0	5Г
16	9	09	35	21	21
17	x→П 0	40	36	В/О	52
18	x→П C	4C			

Инструкция

h/2	x→П Д
x_0	x→П 1
y_0	x→П 9
z_0	x→П 6
t_0	В/О С/П С/П С/П...

Результат

x_0, x_1, x_2, ...

Регистры

0,C	счетчики
1	x_1
2;3	t_1
4	p
5;6	z_1
7	g
8;9	y_1
Д	h/2

Очередные значения неизвестных y, z и t вычисляются за $(32+\tau_{f,g,p})$ с, где $\tau_{f,g,p}$ — время вычисления f (x, y, z, t), g (x, y, z) и p (x, y, z).

Пример. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} y' = x(z+t)+y, \\ z' = t(x+y)+z, \\ t' = y(z+t)+x \end{cases}$$

при начальных значениях $x_0 = 1$, $y_0 = 1$, $z_0 = 1$, $t_0 = 1$. Шаг $h = 0{,}02$.

Подпрограмма имеет вид:

П → x 2 П → x 1 П → x 8 + × П → x 5 + x → П 7 П → x 8 П → x 5 П → x 2 + × П → x 1 + x → П 4 П → x 1 П → x 5 П → x 2 + × П → x 8 + В/О

Таблица результатов

i	x_1	y_1	$y_{точн}$	z_1	$z_{точн}$	i_1	$i_{точн}$
0	1,00	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
1	1,02	1,0622	1,0623	1,0626	1,0627	1,0627	1,0627
2	1,04	1,1293	1,1293	1,1311	1,1312	1,1313	1,1314
...	....	....	....	....	....	....	....
5	1,10	1,3642	1,3645	1,3797	1,3801	1,3821	1,3825

III.4.2.3. СИСТЕМА ЧЕТЫРЕХ УРАВНЕНИЙ

$$\begin{cases} y' = f(x, y, z, t, v), \\ z' = g(x, y, z, t, v), \\ t' = p(x, y, z, t, v), \\ v' = r(x, y, z, t, v) \end{cases}$$

решается методом Рунге-Кутта второго порядка.

Подпрограмма вычисления значений функций f, g, p и r располагается в ячейках памяти непосредственно за основной программой и может использовать в качестве оперативных регистры памяти 4, 7 и A. Полностью свободных регистров памяти не имеется. Аргументы для вычисления f, g, p, и r берутся: x_1 — из регистра 1, y_1 — из регистра B, z_1 — из регистра 8, t_1 — из регистра 5, v_1 — из регистра 2. Вначале вычисляется g, результат — в регистр A, затем p, результат — в регистр 7, затем r, результат — в регистр 4, наконец, f, результат оставляется в регистре X.

Программа III.4.2.3/54

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	x→П 3	43	18	1	01
01	П→x C	6C	19	2	02
02	x→П B	4L	20	x→П 0	40
03	П→x 9	69	21	ПП	53
04	x→П 8	48	22	35	35
05	П→x 6	66	23	П→x Д	6Г
06	x→П 5	45	24	×	12
07	П→x 3	63	25	B↑	0E
08	x→П 2	42	26	K П→x B↑	ГE
09	П→x 1	61	27	+	10
10	С/П	50	28	K x→П B↑	LE
11	ПП	53	29	+	10
12	18	18	30	K x→П 0	L0
13	П→x Д	6Г	31	K П→x 0	Г0
14	2	02	32	F L0	5Г
15	×	12	33	23	23
16	+	10	34	В/О	52
17	x→П 1	41			

Инструкция

h/2 x→П Д
x_0 x→П 1
y_0 x→П C
z_0 x→П 9
t_0 x→П 6
v_0 В/О С/П С/П С/П...

Результат

x_0, x_1, x_2, ...

Регистры

0, E	счетчик
1	x_1
2;3	v_1
4	r
5;6	t_1
7	p
8;9	z_1
A	g
B;C	y_1
Д	h/2

Программа III.4.2.3/52

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	x→П 3	43	20	x→П 0	40
01	П→x C	6C	21	x→П E	4E
02	x→П B	4L	22	ПП	53
03	П→x 9	69	23	40	40
04	x→П 8	48	24	П→x Д	6Г
05	П→x 6	66	25	×	12
06	x→П 5	45	26	B↑	0E
07	П→x 3	63	27	K П→x E	ГE
08	x→П 2	42	28	+	10
09	П→x 1	61	29	K x→ ПE	LE
10	С/П	50	30	+	10
11	ПП	53	31	K x→П 0	L0
12	18	18	32	П→x E	6E
13	П→x Д	6Г	33	3	03
14	2	02	34	—	11
15	×	12	35	x→П E	4E
16	+	10	36	K П→x 0	Г0
17	x→П 1	41	37	F L0	5Г
18	1	01	38	24	24
19	2	02	39	В/О	52

Инструкция

h/2 x→П Д
x_0 x→П 1
y_0 x→П C
z_0 x→ П 9
t_0 x→П 6
v_0 В/О С/П С/П С/П...

Результат

x_0, x_1, x_2, ...

Регистры

0,E	счетчики
1	x_1
2;3	v_1
4	r
5;6	t_1
7	p
8;9	z_1
A	g
B;C	y_1
Д	h/2

Очередные значения неизвестных y, z, t и v вычисляются за $(40 + \tau_\varepsilon)$ с, где τ_ε — время вычисления f, g, p и r, и командами П → x C, П → x 9, П → x 6 и П → x 3 соответственно могут быть выведены на индикатор.

Пример.

Решить систему уравнений

$$\begin{cases} y' = x + y + v, \\ z' = yz + 2, \\ t' = z + t, \\ v' = tv \end{cases}$$

при начальных значениях $x_0 = 1$, $y_0 = 1$, $z_0 = 1$, $t_0 = 1$, $v_0 = 1$. Шаг $h = 0{,}04$.

Подпрограмма имеет вид:

П → x В П → x 8×2 + x → П А П → x 8 П → x 5 + x → П 7
П → x 5 П → x 2× x → П 4 П → x 1 П → x В + П → x 2 + В/О

Таблица результатов

i	x_1	y_1	z_1	t_1	v_1
0	1,00	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
1	1,04	1,1240	1,1251	1,0840	1,0425
2	1,08	1,2565	1,2618	1,1767	1,0906
3	1,12	1,3982	1,4127	1,2791	1,1453
4	1,16	1,5496	1,5808	1,3921	1,2080

При x = 1,16 ошибки составляют:
$\delta_y = 0{,}0005$; $\delta_z = 0{,}0003$; $\delta_t = 0{,}0007$; $\delta_v = 0{,}0005$.

III.4.3. УРАВНЕНИЕ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

$$y^{(m)} = f(x, y, y', y'', \ldots, y^{(m-1)}).$$

III.4.3.1. УРАВНЕНИЕ ВТОРОГО ПОРЯДКА

$$y'' = f(x, y, y').$$

III.4.3.1.1. Решения методом Рунге-Кутта второго порядка

При вычислении по программе III.4.3.1.1/21 подпрограмма вычисления значений функции f (x, y, y′) располагается в ячейках памяти, начиная с адреса 64 и может использовать регистры 8, S1 — S5. Аргументы берутся: x_1 — из регистра 6, y_1 — из регистра 4, y_i' — из регистра 2, ответ оставляется в регистре X.

Программа III.4.3.1.1/21

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	Р 3	31	30	↑	06	60	Р 2	21
01	F 3	32	31	F 7	72	61	В/О	48
02	Р 2	21	32	×	26			
03	F 5	52	33	↑	06			
04	Р 4	41	34	F 5	52			
05	С/П	78	35	+	96			
10	ПП	68	40	Р 5	51			
11	Р×	23	41	+	96			
12	F 7	72	42	Р 4	41			
13	↑	06	43	Р ,	43			
14	F 6	62	44	↑	06			
15	+	96	45	F 7	72			
20	+	96	50	×	26			
21	Р 6	61	51	↑	06			
22	ПП	68	52	F 3	32			
23	Р ВП	63	53	+	96			
24	Р /—/	53	54	Р 3	31			
25	F 2	22	55	+	96			

Инструкция

h/2	Р 7
x_0	Р 6
y_0	Р 5

y_0' В/О С/П С/П С/П...

Результат

$y_0, y_1, y_2, \ldots$

Регистры

2;3	y_i'
4;5	y_1
6	x_1
7	h/2
S6	f

Время вычисления очередного значения y_1 — $(10 + \tau_f)$ с, где τ_f — время вычисления f (x, y, y′).

При вычислении по программе III.4.3.1.1/54, 52 подпрограмма вычисления значений функции f (x, y, y′) располагается в ячейках памяти, начиная с адреса 34, и может использовать регистры 8 — Д (Е). Аргументы берутся: x_1 — из регистра 6, y_1 — из регистра 4, y_i' — из регистра 2, ответ оставляется в регистре X.

Программа III.4.3.1.1/54,52

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	x→П 3	43	17	ПП	53
01	П→x 3	63	18	34	34
02	x→П 2	42	19	П→x 2	62
03	П→x 5	65	20	ПП	53
04	x→П 4	44	21	22	22
05	С/П	50	22	П→x 7	67
06	ПП	53	23	×	12
07	14	14	24	В↑	0E
08	П→x 6	66	25	К П→x 0	Г0
09	П→x 7	67	26	+	10
10	2	02	27	К x→П 1	L1
11	×	12	28	+	10
12	+	10	29	К x→П 0	L0
13	x→П 6	46	30	F L1	5L
14	6	06	31	32	32
15	x→П 0	40	32	←→	14
16	x→П 1	41	33	В/О	52

Инструкция

h/2	x→П 7
x_0	x→П 6
y_0	x→П 5

y_0' В/О С/П С/П С/П...

Результат

$y_0, y_1, y_2, \ldots$

Регистры

0;1	счетчики
2;3	y_i'
4;5	y_1
6	x_1
7	h/2

Время вычисления очередного значения y_1 — $(20 + \tau_f)$ с, где τ_f — время вычисления f (x, y, y′).

Пример. Решить дифференциальное уравнение

$$y'' = \frac{3}{4}\left(\frac{xy'}{\sqrt{y}} + 1\right)$$

при $x_0 = 1$, $y_0 = 1$, $y'_0 = 1$. Шаг h = 0,05.

Подпрограммы вычисления f (x, y, y′) имеют вид:

а) для программы III. 4.3. 1.1/21

F 6 ↑ F 2 × ↑ F 4 F √⁻ : 1 + 3×4 : В/О

б) для программы III. 4.3.1.1/54, 52

П → x 6 П → x 2×П → x 4 F √⁻ : 1 + 3×4: В/О

Таблица результатов

1	0	1	2	3	4	5
x_1	1,00	1,05	1,10	1,15	1,20	1,25
y_1	1,00000	1,05188	1,10769	1,16765	1,23196	1,30085
$y_{точн}$	1,00000	1,05191	1,10776	1,16775	1,23210	1,30103

III.4.3.1.2. Решение методом Рунге-Кутта четвертого порядка

Подпрограмма вычисления f (x, y, y′) располагается в ячейках памяти, начиная с адреса 54, и может использовать регистры 0—3 (и E). Аргументы берутся: x_1 — из регистра 6, y_1 — из регистра A, y'_i — из регистра B. Ответ f оставляется в регистре X.

Программа III.4.3.1.2/54,52

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	x→П Д	4Г	24	П→x 7	67	48	x→П C	4C
01	3	03	25	+	10	49	П→x Д	6Г
02	:	13	26	x→П 6	46	50	П→x 4	64
03	x→П 9	49	27	ПП	53	51	+	10
04	x→П B	4L	28	54	54	52	x→П Д	4Г
05	П→x C	6C	29	П→x 7	67	53	В/О	52
06	3	03	30	×	12			
07	:	13	31	x→П 4	44			
08	x→П 8	48	32	П→x B	6L			
09	x→П A	4—	33	П→x 7	67			
10	С/П	50	34	×	12			
11	ПП	53	35	x→П 5	45			
12	27	27	36	П→x 9	69			
13	ПП	53	37	П→x 8	68			
14	23	23	38	П→x 5	65			
15	ПП	53	39	+	10			

Инструкция

h/2	x→П 7
x_0	x→П 6
$3y_0$	x→П C

$3y'_0$ В/О С/П С/П С/П...

Результат

y_0, y_1, y_2, ...

Регистры

4	fh/2

Продолжение

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
16	45	45	40	x→П A	4—
17	ПП	53	41	←→	14
18	27	27	42	П→x 4	64
19	П→x B	6L	43	+	10
20	П→x A	6—	44	x→П B	4L
21	ПП	53	45	П→x C	6C
22	38	38	46	П→x 5	65
23	П→x 6	66	47	+	10

Регистры

5	y′h/2
6	x_1
7	h/2
8,A	y_1
9,B	y'_i
C	$3y_1$
Д	$3y'_i$

Очередные значения y_1 вычисляются за $(60 + 2\tau_f)$ с, где τ_f — время вычисления f (x, y, y′).

Пример. Решить дифференциальное уравнение

$$y'' = \frac{3}{4}\left(\frac{xy'}{\sqrt{y}} + 1\right)$$

при $x_0 = 1$, $y_0 = 1$, $y'_0 = 1$. Шаг h = 0,1.

Подпрограмма имеет вид:

П → x 6 П → x B×П → x A F √⁻ : 1 + 3×4 : В/О

Таблица результатов

i	0	1	2	3	4	5
x_1	1	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5
y_1	1	1,1077563	1,2321001	1,3747563	1,5376002	1,7226564
$y_{точн}$	1	1,1077562	1,2321000	1,3747562	1,5376000	1,7226562

III.4.3.2. УРАВНЕНИЕ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

Уравнение y‴ = f (x, y, y′, y″) решается методом Рунге-Кутта второго порядка.

Подпрограмма вычисления f (x, y, y′, y″) располагается в ячейках памяти, начиная с адреса 39 и может использовать регистры А—Д (и Е). Аргументы берутся: x_1 — из регистра 8, y_1 — из регистра 6, y'_i — из регистра 4, y''_i — из регистра 2. Ответ оставляется в регистре X.

Программа III.4.3.2/54,52

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	x→П 3	43	20	39	39
01	П→x 3	63	21	П→x 4	64
02	x→П 2	42	22	ПП	53
03	П→x 5	65	23	27	27

Инструкция

h/2	x→П 9
x_0	x→П 8
y_0	x→П 7
y'_0	x→П 5

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
04	x→П 4	44	24	П→x 2	62
05	П→x 7	67	25	ПП	53
06	x→П 6	46	26	27	27
07	С/П	50	27	П→x 9	69
08	ПП	53	28	×	12
09	16	16	29	В↑	0E
10	П→x 8	68	30	К П→x 0	Г0
11	П→x 9	69	31	+	10
12	2	02	32	К x→П 1	L1
13	×	12	33	+	10
14	+	10	34	К x→П 0	L0
15	x→П 8	48	35	F L 1	5L
16	8	08	36	37	37
17	x→П 0	40	37	←→	14
18	x→П 1	41	38	В/О	52
19	ПП	53			

y''_0 В/О С/П С/П С/П...

Результат

$y_0, y_1, y_2, \ldots$

Регистры

0;1	счетчики
2;3	y''
4;5	y'_i
6;7	y_1
8	x_1
9	h/2

Очередные значения y_1 вычисляются за $(33 + \tau_f)$ с, где τ_f — время вычисления $f(x, y, y', y'')$.

Пример. Решить дифференциальное уравнение

$$y''' = \frac{xy}{(y')^2}\left(2y'' - \frac{3}{2}\right)$$

при $x_0 = 2$, $y_0 = 3{,}0625$, $y'_0 = 3{,}5$, $y''_0 = 3{,}75$. Шаг $h = 0{,}1$.

Подпрограмма имеет вид:

П→ x 8 П → x 6×П → x 4 Fx²: П→ x 2 2×1 · 5 —× В/О

Таблица результатов

i	0	1	2	3	4	5
x_1	2	2,1	2,2	2,3	2,4	2,5
y_1	3,0625	3,4313	3,8405	4,2936	4,7938	5,3446
Уточн	3,0625	3,4318	3,8416	4,2953	4,7961	5,3477

III.4.3.3. УРАВНЕНИЕ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА

Уравнение $y^{(IV)} = f(x, y, y', y'', y''')$ решается методом Рунге-Кутта второго порядка. Подпрограмма вычисления $f(x, y, y', y'', y''')$ размещается в памяти машины, начиная с адреса 45. Она может использовать регистры С, Д (и Е). Аргументы берутся: x_1 — из регистра А, y_1 — из регистра 8, y'_i — из регистра 6, y''_i — из регистра 4, y'''_i — из регистра 2. Ответ f оставляется в регистре X.

Программа III.4.3.3/54,52

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	x→П 3	43	23	45	45
01	П→x 3	63	24	П→x 6	66
02	x→П 2	42	25	ПП	53
03	П→x 5	65	26	33	33
04	x→П 4	44	27	П→x 4	64
05	П→x 7	67	28	ПП	53
06	x→П 6	46	29	33	33
07	П→x 9	69	30	П→x 2	62
08	x→П 8	48	31	ПП	53
09	С/П	50	32	33	33
10	ПП	53	33	П→x В	6L
11	18	18	34	×	12
12	П→x А	6—	35	В↑	0E
13	П→x В	6L	36	К П→x 0	Г0
14	2	02	37	+	10
15	×	12	38	К x→П I	LI
16	+	10	39	+	10
17	x→П А	4—	40	К x→П 0	L0
18	1	01	41	F L1	5L
19	0	00	42	43	43
20	x→П 0	40	43	←→	14
21	x→П 1	41	44	В/О	52
22	ПП	53			

Инструкция

h/2	x→П В
x_0	x→П А
y_0	x→П 9
y'_0	x→П 7
y''_0	x→П 5

y''' В/О С/П С/П С/П...

Результат

$y_0, y_1, y_2, \ldots$

Регистры

0;1	счетчики
2;3	y'''_i
4;5	y''_i
6;7	y'_i
8;9	y_1
A	x_1
B	h/2

Очередные значения y_1 вычисляются за $(42 + \tau_f)$ с, где τ_f — время вычисления $f(x, y, y', y'', y''')$.

Пример. Решить дифференциальное уравнение

$$y^{(IV)} = (y''')^2 - xyy'y''$$

при $x_0 = 1$, $y_0 = 1$, $y'_0 = 1$, $y''_0 = 1$, $y'''_0 = 1$. Шаг $h = 0{,}1$.

Подпрограмма имеет вид:

П→ x 3 Fx² П→ x А П→ x 9×П→ x 7×П→ x 5× — В/О

Таблица результатов

i	0	1	2	3	4	5
x_1	1	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5
y_1	1	1,1050	1,2210	1,3490	1,4898	1,6441
Уточн	1	1,1052	1,2213	1,3494	1,4902	1,6442

III.4.3.4. УРАВНЕНИЕ ПЯТОГО ПОРЯДКА

Уравнение $y^{(V)} = f(x, y, y', y'', y''', y^{(IV)})$ решается методом Рунге-Кутта второго порядка. При вычислении по программе III.4.3.4/54 подпрограмма вычисления $f(x, y, y', y'', y''', y^{(IV)})$ размещается в ячейках памяти, начиная с адреса 45, и может использовать регистр Д. Аргументы берутся: x_1 — из регистра В, y_1 — из регистра 9, y_i' — из регистра 7, y_i'' — из регистра 5, y_i''' — из регистра 3, $y_i^{(IV)}$ — из регистра 1. Ответ f оставляется в регистре X.

Программа III.4.3.4/54

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	x→П 2	42	23	П→x 7	67
01	1	01	24	ПП	53
02	0	00	25	35	35
03	x→П 0	40	26	П→x 5	65
04	К П→x В↑	ГЕ	27	ПП	53
05	К x→П 0	L0	28	35	35
06	F L0	5Г	29	П→x 3	63
07	04	04	30	ПП	53
08	П→x А	6—	31	35	35
09	С/П	50	32	П→x 1	61
10	ПП	53	33	ПП	53
11	18	18	34	35	35
12	П→x В	6L	35	П→x С	6С
13	П→x С	6С	36	×	12
14	2	02	37	В↑	0Е
15	×	12	38	К П↑x 0	Г0
16	+	10	39	+	10
17	x→П В	4L	40	К x→П В↑	LE
18	1	01	41	+	10
19	1	01	42	К x→П 0	L0
20	x→П 0	40	43	←→	14
21	ПП	53	44	В/О	52
22	46	46			

Инструкция

h/2	x→П С
x_0	x→П В
y_0	x→П А
y_0'	x→П 8
y_0''	x→П 6
y_0'''	x→П 4
$y^{(IV)}$	В/О С/П С/П С/П...

Результат

$y_0, y_1, y_2, \ldots$

Регистры

0	счетчик
1; 2	$y_i^{(IV)}$
3; 4	y_i'''
5; 6	y_i''
7; 8	y_i'
9; А	y_1
В	x_1
С	h/2

Очередные значения y_1 вычисляются за $(50 + \tau_f)$ с, где τ_f — время вычисления $f(x, y, y', y'', y''', y^{(IV)})$.

При вычислении по программе III.4.3.4/54,52 подпрограмма вычисления $f(x, y, y', y'', y''', y^{(IV)})$ размещается в ячейках памяти, начиная с адреса 50, и может использовать регистр Е. Аргументы берутся: x_1 — из регистра С, y_1 — из регистра А, y_i' — из регистра 8, y_i'' — из регистра 6, y_i''' — из регистра 4, $y_i^{(IV)}$ — из регистра 2. Ответ f оставляется в регистре X.

Программа III.4.3.4/54,52

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	x→П 3	43	25	50	50
01	П→x 3	63	26	П→x 8	68
02	x→П 2	42	27	ПП	53
03	П→x 5	65	28	38	38
04	x→П 4	44	29	П→x 6	66
05	П→x 7	67	30	ПП	53
06	x→П 6	46	31	38	38
07	П→x 9	69	32	П→x 4	64
08	x→П 8	48	33	ПП	53
09	П→x В	6L	34	38	38
10	x→П А	4—	35	П→x 2	62
11	С/П	50	36	ПП	53
12	ПП	53	37	38	38
13	20	20	38	П→x Д	6Г
14	П→x С	6С	39	×	12
15	П→x Д	6Г	40	В↑	0Е
16	2	02	41	К П→x 0	Г0
17	×	12	42	+	10
18	+	10	43	К x→П 1	L1
19	x→П С	4С	44	+	10
20	1	01	45	К x→П 0	L0
21	2	02	46	F L1	5L
22	x→П 0	40	47	48	48
23	x→П 1	41	48	←→	14
24	ПП	53	49	В/О	52

Инструкция

h/2	x→П Д
x_0	x→П С
y_0	x→П В
y_0'	x→П 9
y_0''	x→П 7
y_0'''	x→П 5
$y^{(IV)}$	В/О С/П С/П С/П...

Результат

$y_0, y_1, y_2, \ldots$

Регистры

0; 1	счетчики
2; 3	$y_i^{(IV)}$
4; 5	y_i'''
6; 7	y_i''
8; 9	y_i'
А; В	y_1
С	x_1
Д	h/2

Очередные значения y_1 вычисляются за $(56 + \tau_f)$ с, где τ_f — время вычисления $f(x, y, y', y'', y''', y^{(IV)})$.

Пример. Решить дифференциальное уравнение

$$y^{(V)} = 1{,}2\, y^{(IV)} + 13\, y''' + 2x\sqrt{y}$$

при $x_0 = 1$, $y_0 = 1$, $y_0' = 1$, $y_0'' = 1$, $y_0''' = 1$, $y_0^{(IV)} = 1$. Шаг $h = 0{,}05$.

Подпрограммы имеют вид:

для программы III.4.3.4/54

П→x 1 1 . 2 × П→x 3 1 3 × + П→x В П→x 9 F √ × 2 × + В/О

для программы III.4.3.4/54, 52

П→x 2 1 . 2 × П→x 4 1 3 × + П→x С П→x А F √ × 2 × + В/О

Таблица результатов

i	0	1	2	3	4	5
x_i	1	1,05	1,1	1,15	1,2	1,25
y_i	1	1,05125	1,10513	1,16177	1,22133	1,28399
Уточн	1	1,05127	1,10517	1,16184	1,22144	1,28415

Глава IV

СГЛАЖИВАНИЕ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ЗАВИСИМОСТЕЙ

При работе с числовыми данными часто возникает задача приближенного аналитического представления функции y (функция y может быть и случайной), заданной значениями в n узлах x_i, $y_i = y(x_i', x_i'', \ldots, x_i^{(m)})$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Такими заданными в узлах значениями могут быть результаты экспериментальных исследований, таблицы и даже аналитические функции, использование которых связано с расчетными трудностями.

Целью аппроксимации является как получение наглядного (хотя и приближенного) аналитического представления о зависимости y от параметров $x^{(l)}$, $l = 1,2, \ldots, m$, так и оценка значения y в произвольной точке $\bar{x} = (x', x'', \ldots, x^{(m)})$. Поэтому аппроксимирующую функцию $f(\bar{x})$ следует выбирать по возможности более простой.

Для того чтобы $f(\bar{x}_i)$ была близка к y_i в n узлах $\bar{x}_i$, в функцию $f(\bar{x}_i)$ вводят k ($k < n$) неопределенных параметров $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_k$, так что аппроксимирующая функция имеет общий вид $f(\bar{x}_i, a_1, a_2, \ldots, a_k)$, и затем тем или иным способом оптимизируют эти параметры.

Обычно в качестве меры различия f и y выбирают среднеквадратическую (или квадратическую) ошибку [13]

$$\sigma^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} [y_i - f(\bar{x}_i, a_1, a_2, \ldots, a_k)]^2.$$

Дифференцируя σ^2 по параметрам a_j ($j = 1,2, \ldots, k$), получаем систему уравнений $\partial\sigma^2/\partial a_j = 0$ ($j = 1,2, \ldots, k$), которая разрешима относительно неизвестных параметров $a_1, a_2, \ldots, a_k$, если $f(\bar{x}_i, a_1, a_2, \ldots, a_k)$ линейна относительно этих параметров. В общем случае для определения оптимальных значений этих параметров используют различные методы: линеаризации, итерационные и т. д.

IV.1. СГЛАЖИВАНИЕ ФУНКЦИЕЙ С ОДНИМ НЕИЗВЕСТНЫМ ПАРАМЕТРОМ

IV.1.1. ПРЯМАЯ С ЗАДАННЫМ НАКЛОНОМ (УГЛОВЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ k)

Исходные данные (x_i, y_i) сглаживаются прямой $f = a + kx$ с неизвестным параметром a. Требуется найти значение параметра a и средний квадрат ошибки σ^2.

Расчетные формулы:

$$a = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (y_i - kx_i); \quad \sigma^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (y_i - kx_i)^2 - a^2.$$

Программа IV.1.1/21

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	P 2	21	25	F x^2	55	54	×	26
01	Cx	76	30	↑	06	55	↑	06
02	P 3	31	31	F 4	42	60	F 3	32
03	P 4	41	32	+	96	61	F x^2	55
04	P 5	51	33	P 4	41	62	—	86
05	С/П	78	34	F 5	52	63	P 4	41
10	P 6	61	35	1	14	64	↑	06
11	F 2	22	40	+	96	65	F 3	32
12	×	26	41	БП	58	70	С/П	78
13	↑	06	42	F ↑	05			
14	F 6	62	43	F 1/x	45			
15	—	86	44	↑	06		Регистры	
20	↑	06	45	F 3	32	2	к	
21	F 3	32	50	/—/	56	3	Σ (кх—у); a	
22	+	96	51	×	26	4	Σ $(кх—у)^2$; σ^2	
23	P 3	31	52	P 3	31	5	i; n	
24	←→	16	53	F 4	42	6	y	

Программа IV.1.1/54,52

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	x→П 0	40	14	+	10	28	F Bx	0
01	3	03	15	x→П 4	44	29	П→x 0	60
02	F 10^x	15	16	←→	14	30	:	13
03	x→П 3	43	17	F L3	5—	31	:	13
04	Cx	0Г	18	06	06	32	П→x 3	63
05	x→П 4	44	19	3	03	33	F x^2	22
06	С/П	50	20	F 10^x	15	34	—	11
07	П→x 0	60	21	П→x 3	63	35	x→П 4	44
08	:	13	22	—	11	36	П→x 3	63
09	—	11	23	П→x 0	60	37	С/П	50

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
10	—	11	24	:	13
11	F Bx	0	25	:	13
12	F x^2	22	26	x→П 3	43
13	П→x 4	64	27	П→x 4	64

Регистры

0	к
3	(1000—i); a
4	Σ $(y/к—x)^2$; σ^2

Для обеих программ используется единая инструкция.

Инструкция IV.1.1/21, 54, 52

Содержание	Набрать число	Выполнить команды	Результат
1. Занести угловой коэффициент	к	В/О С/П	0
2. Занести числа очередной пары исходных данных	x_i y_i	В↑ С/П	x_i i
3. Если исходные данные исчерпаны, далее, нет — к п. 2			
4. Вычислить a и σ^2:			
а) для программы IV.1.1/21		БП 4 С П	a—в рег. X, 3
б) для программы IV.1.1/54, 52		БП 19 С/П	σ^2—в рег Y, 4

Время обработки одной пары чисел — 4 — 5 с, время вычисления a и σ^2 — 4—7 с.

Пример. Сгладить совокупность данных — 1; 0 0 ; 2 2; 8 3; 11 3; 10 6; 20 прямой с угловым коэффициентом к = 3. Определить a и σ^2. Ответ: a = 2,0; σ^2 = 0,333.

IV.1.2. ФУНКЦИЯ С НЕИЗВЕСТНЫМ МНОЖИТЕЛЕМ

Опытные данные сглаживаются функцией $y = в\,\varphi(x)$, где $\varphi(x)$ полностью известна. Требуется найти значение параметра b и средний квадрат ошибки σ^2.

Расчетные формулы:

$$b = \frac{\Sigma y_i \varphi(x_i)}{\Sigma \varphi^2(x_i)}; \quad \sigma^2 = \frac{1}{n}[\Sigma y_i^2 - b\Sigma y_i \varphi(x_i)].$$

Подпрограмма вычисления φ (x) размещается в ячейках памяти непосредственно за основной программой и заканчивается командой В/О. Аргумент x и ответ φ (x) — в регистре X.

В подпрограммах для расчета φ (x) могут быть использованы регистры:

а) для программы IV.1.2/21 8, S1 — S6, а также 7 в качесте оперативного;

б) для программы IV. 1.2/54, 52 5 — Д (и Е).

Программа IV.1.2/21

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	Cx	76	32	↑	06	64	×	26
01	P 2	21	33	F 2	22	65	↑	06
02	P 3	31	34	+	96	70	F 4	42
03	P 4	41	35	P 2	21	71	—	86
04	P 5	51	40	F 6	62	72	↑	06
05	С/П	78	41	F x^2	55	73	F 5	52
10	P 6	61	42	↑	06	74	:	36
11	←→	16	43	F 4	42	75	/—/	56
12	ПП	68	44	+	96	80	↑	06
13	F —	85	45	P 4	41	81	P 7	71
14	P 7	71	50	F 5	52	82	F 6	62
15	F x^2	55	51	1	14	83	С/П	78
20	↑	06	52	+	96			
21	F 3	32	53	БП	58			
22	+	96	54	F ↑	05			
23	P 3	31	55	F 2	22			
24	F 7	72	60	↑	06			
25	↑	06	61	F 3	32			
30	F 6	62	62	:	36			
31	×	26	63	P 6	61			

Регистры

2	Σ y φ
3	$\Sigma\varphi^2$
4	Σy^2
5	i; n
6	y; b
7	φ; σ^2

Программа IV.1.2/54,52

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	Cx	0Г	17	×	12	34	×	12
01	x→П 6	46	18	П→x 6	66	35	П→x 2	62
02	x→П 7	47	19	+	10	36	—	11
03	x→П 2	42	20	x→П 6	46	37	/—/	0L
04	x→П 4	44	21	←→	14	38	П→x 4	64
05	С/П	50	22	П→x 7	67	39	:	13
06	x→П 3	43	23	+	10	40	x→П 7	47
07	F x^2	22	24	x→П 7	47	41	П→x 6	66
08	П→x 2	62	25	К П→x 4	Г4	42	С/П	50
09	+	10	26	П→x 4	64			
10	x→П 2	42	27	БП	51			
11	←→	14	28	05	05			
12	ПП	53	29	П→x 6	66			
13	43	43	30	В↑	0E			
14	F x^2	22	31	П→x 7	67			
15	F Bx	0	32	:	13			
16	П→x 3	63	33	x→П 6	46			

Регистры

2	Σy^2
3	y
4	i; n
6	$\Sigma y\varphi$; b
7	$\Sigma\varphi^2$; σ^2

Для обеих программ используется единая инструкция.

Инструкция IV.1.2/21, 54, 52

Содержание	Набрать число	Выполнить команды	Результат
1. Очистить сумматоры		В/О С/П	0
2. Занести числа очередной пары исходных данных	x_i y_i	В↑ С/П	x_i
3. Если данные исчерпаны, далее, нет — к п. 2			
4. Вычислить b и σ^2:			
а) для программы IV.1.2/21		БП /—/ С/П	в—в рег. X, 6
б) для программы IV.1.2/54, 52		БП 29 С/П	σ^2—в рег. Y, 7

Время обработки одной пары чисел — 7—10 с; время вычисления b и σ^2 — 5 с.

Пример. Сгладить совокупность данных (x_i, y_i) 1; 2 1,5; 7 2; 12 2; 13 2,5; 18 функцией $y = bx^2$. Определить b и σ^2.

Подпрограмма вычисления функции $\varphi(x) = x^2$ имеет вид: Fx^2 В/О

Выполнив требования инструкции, получим ответ b = 2,985; σ^2 = 0,522.

IV.1.3. ФУНКЦИЯ С НЕИЗВЕСТНЫМ СЛАГАЕМЫМ

Опытные данные сглаживаются функцией $y = a + \varphi(x)$, где $\varphi(x)$ полностью известна. Требуется найти значение параметра a и средний квадрат ошибки σ^2.

Расчетные формулы:

$$a = \frac{1}{n}\Sigma[y_i - \varphi(x_i)];\quad \sigma^2 = \frac{1}{n}\Sigma[y_i - \varphi(x_i)]^2 - a^2.$$

Подпрограмма вычисления $\varphi(x)$ размещается в ячейках памяти машины непосредственно за основной программой и заканчивается командой В/О. Аргумент x и ответ $\varphi(x)$ — в регистре X.

Программа IV.1.3/21

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	Cx	76	25	F 3	32	54	F 5	52
01	P 2	21	30	←→	16	55	:	36
02	P 3	31	31	F x^2	55	60	↑	06
03	P 5	51	32	+	96	61	F 2	22
04	С/П	78	33	P 3	31	62	F x^2	55
05	P 4	41	34	F 5	52	63	—	86
10	←→	16	35	1	14	64	P 3	31
11	ПП	68	40	+	96	65	↑	06

Продолжение

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
12	P Cx	73	41	БП	58	70	F 2	22
13	↑	06	42	0	04	71	С/П	78
14	F 4	42	43	F 2	22			
15	←→	16	44	↑	06			
20	—	86	45	F 5	52			
21	↑	06	50	:	36			
22	F 2	22	51	P 2	21			
23	+	96	52	F 3	32			
24	P 2	21	53	↑	06			

Регистры

2 Σ (y—φ); a
3 Σ $(y-\varphi)^2$; σ^2
4 y
5 i; n

Программа IV.1.3/54,52

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	Cx	0Г	15	x→П 2	42	30	:	13
01	x→П 2	42	16	←→	14	31	П→x 2	62
02	x→П 3	43	17	П→x 3	63	32	F x^2	22
03	x→П 5	45	18	+	10	33	—	11
04	С/П	50	19	x→П 3	43	34	x→П 3	43
05	x→П 4	44	20	К П→x 5	Г5	35	П→x 2	62
06	←→	14	21	П→x 5	65	36	С/П	50
07	ПП	53	22	БП	51			
08	37	37	23	04	04			
09	П→x 4	64	24	П→x 2	62			
10	—	11	25	П→x 5	65			
11	F x^2	22	26	:	13			
12	П→x 2	62	27	x→П 2	42			
13	F Bx	0	28	П→x 3	63			
14	—	11	29	П→x 5	65			

Регистры

2 Σ (y—φ); a
3 Σ $(y-\varphi)^2$; σ^2
4 y_i
5 i; n

Для обеих программ используется единая инструкция.

Инструкция IV.1.3/21, 54, 52

Содержание	Набрать число	Выполнить команды	Результат
1. Очистить сумматоры		В/О С/П	0
2. Занести числа очередной пары исходных данных	x_i y_i	В↑ С/П	x_i i
3. Если данные исчерпаны, далее, нет — к п. 2			
4. Вычислить a, σ^2:			
а) для программы IV.1.3/21		БП 4 С/П	a—в рег. X, 2
б) для программы IV.1.3/54, 52		БП 24 С/П	σ^2—в рег. Y, 3

Время обработки одной пары чисел — 6—10 с, время вычисления a и σ^2 — 5 с.

Пример. Сгладить совокупность данных (x_1, y_1) 1; —1 2; 0,4 3; 2,3 4; 4,5 5; 7 функцией $y = a + x \ln x$. Определить a и σ^2.

Подпрограмма вычисления функции $\varphi(x)$ имеет вид:

а) для программы IV.1.3/21 ↑ P ln×B/O

б) для программы IV.1.3/54,52 B↑ F ln×B/O

Выполнив требования инструкции, получим ответ $a = -1{,}015$, $\sigma^2 = 6{,}73 \cdot 10^{-4}$.

IV.1.4. ПРОИЗВОЛЬНАЯ НЕПРЕРЫВНАЯ ФУНКЦИЯ

Исходные данные сглаживаются функцией f (x, a), в общем случае нелинейной по a.

IV.1.4.1. РАЗЛОЖЕНИЕ В РЯД ТЕЙЛОРА

Если сглаживающая функция f (x, a) непрерывна и дифференцируема по переменной a, ее можно представить отрезком ряда Тейлора в некоторой окрестности точки a_0, ограничившись линейным приближением:

$$f(x, a) \approx f(x, a_0) + (a - a_0) f'(x, a_0).$$

Задача о сглаживании при этом сводится к решению системы уравнений относительно приращения неизвестного параметра $\Delta a = a - a_0$. Применяя алгоритм несколько раз, можно найти решение с требуемой точностью.

Вопрос о сходимости здесь не рассматривается; отметим только, что сходимость зависит от вида сглаживающей функции, начального приближения и разброса исходных данных.

Расчетные формулы:

$$\widehat{\sigma_j^2} = n\sigma_j^2 = \sum_{i=1}^{n} [y_i - f(x_i, a_j)]^2; \quad a_{j+1} = a_j + \Delta a_j;$$

$$\Delta a_j = \frac{\Sigma (y_i - f) f'}{\Sigma (f')^2}.$$

Последовательность вычислений такова. Вводится начальное приближение a_0, затем исходные данные. Вычисляется величина $\hat{\sigma}_0^2$, пропорциональная среднему квадрату ошибки ($\widehat{\sigma_0^2} = n\sigma_0^2$), и затем следующее приближение неизвестного параметра a. Цикл «ввод данных — вычисление $\hat{\sigma}_j^2$ и a_j» повторяется до тех пор, пока значение среднего квадрата ошибки не установится.

Пользователем должна быть составлена подпрограмма вычисления значений функции f (x, a) и ее производной $f' = \frac{df}{dx}$, размещаемая в ячейках памяти непосредственно за основной программой и имеющая в конце команду возврата B/O.

Аргумент x берется из регистров X или 5, значение a_j — из регистра 7. Вычисленное значение f′ помещается в регистр 4, а значение f оставляется в регистре X.

В подпрограмме можно использовать следующие регистры:

а) для программы IV.1.4.1/21 S1 — S6, а также P4 в качестве оперативного;

б) для программы IV.1.4.1/54,52 8 — Д (и Е).

Программа IV.1.4.1/21

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	B/O	48	31	F 4	42	62	↔	16
01	F 5	52	32	×	26	63	—	86
02	C/П	78	33	↑	06	64	P 7	71
03	P 6	61	34	F 2	22	65	P 5	51
04	↔	16	35	+	96	70	Cx	76
05	P 5	51	40	P 2	21	71	P 8	81
10	ПП	68	41	F 4	42	72	P 2	21
11	Cx	76	42	F x^2	55	73	P 3	31
12	↑	06	43	↑	06	74	B/O	48
13	F 6	62	44	F 8	82			
14	—	86	45	+	96		Регистры	
15	P 6	61	50	P 8	81			
20	F x^2	55	51	B/O	48	2	$\Sigma (f-y)f'$	
21	↑	06	52	F 2	22	3	$\Sigma (f-y)^2$	
22	F 3	32	53	↑	06	4	f′	
23	+	96	54	F 8	82	5	x; a_{j+1}	
24	P 3	31	55	:	36	6	y; (f—y)	
25	F 6	62	60	↑	06	7	a_j	
30	↑	06	61	F 7	72	8	$\Sigma (f')^2$	

Инструкция IV.1.4.1/21

Содержание	Набрать число	Выполнить команды	Результат
1. Ввести программу и подпрограмму вычисления f(x, a) и f′(x, a)			
2. Занести исходное значение параметра a	a_0	БП F ВП С/П	a_0
3. Занести число очередной пары исходных данных	x_1 y_1	↑ С/П	x_1 x_1
4. Если данные исчерпаны, далее, нет — к п. 3			
5. Вывести значение $\widehat{\sigma_j^2}$		F 3	$\hat{\sigma}_j^2$
6. Вычислить очередное приближение параметра a		БП P /—/ С/П	a_{j+1}—в рег. X, 5, 7
7. Для осуществления следующей итерации — к п. 3			

Программа IV.1.4.1/54,52

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	x→П 7	47	16	П→x 4	64	32	06	06
01	x→П 5	45	17	F Вх	0	33	П→x 7	67
02	Сх	0Г	18	×	12	34	П→x 2	62
03	x→П 1	41	19	П→x 2	62	35	П→x 1	61
04	x→П 2	42	20	+	10	36	:	13
05	x→П 3	43	21	x→П 2	42	37	—	11
06	П→x 5	65	22	←→	14	38	БП	51
07	С/П	50	23	П→x 3	63	39	00	00
08	x→П 6	46	24	+	10		Регистры	
09	←→	14	25	x→П 3	43	1	$\Sigma (f')^2$	
10	x→П 5	45	26	П→x 4	64	2	$\Sigma (f-y) f'$	
11	ПП	53	27	F x^2	22	3	$\Sigma (f-y)^2$; $\hat{\sigma}^2$	
12	40	40	28	П→x 1	61	4	f'	
13	П→x 6	66	29	+	10	5	x;	a_{j+1}
14	—	11	30	x→П 1	41	6	y;	(f—y)
15	F x^2	22	31	БП	51	7	aj	

Инструкция IV.1.4.1/54,52

Содержание	Набрать число	Выполнить команды	Результат
1. Ввести программу и подпрограмму вычисления f(x, a) и f′(x, a)			
2. Занести исходное значение параметра a	a_0	В/О С/П	a_0
3. Занести числа очередной пары исходных данных	x_i y_i	В↑ С/П	x_i x_i
4. Если данные исчерпаны, далее, нет — к п. 3			
5. Вывести значение $\hat{\sigma}_j^2$		П→x 3	$\hat{\sigma}_j^2$
6. Вычислить очередное приближение параметра a		БП 33 С/П	a_{j+1}—в рег. X,5,7
7. Для осуществления следующей итерации — к п. 3			

Время обработки одной пары чисел — 7 — 11 с, время вычисления a — 3—4 с.

Пример. Сгладить совокупность данных (x_i, y_i) 1; 0,4 2; 1,1 3;1,5 4; 1,8 функцией y = ln ax. Определить a и $\hat{\sigma}^2$. В качестве начального приближения принять a_0 = 1,0.

Производная сглаживающей функции по параметру a есть $\frac{1}{a}$. Подпрограмма вычисления значений f и f'_a имеет вид:

а) для программы IV.1.4.1/21 ↑ F 7 F 1/x P 4: P ln В/О

б) для программы IV.1.4.1/54,52 П→x 7 F 1/x x→П 4: F ln В/О

Выполнив четыре итерации, получим:

i	0	1	2	3	4
a_i	1	1,405	1,497	1,500	1,500
$\hat{\sigma}_i^2$	0,658	0,0171	$1{,}33\cdot10^{-4}$	$1{,}16\cdot10^{-4}$	$1{,}16\cdot10^{-4}$

IV.1.4.2. МЕТОД ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ

Производится оптимизация параметра a аппроксимирующей функции f (x, a) при задании исходной функции y в n узлах. Оптимальное значение a определяется методом последовательного приближения при минимизации величины невязки

$$\hat{\sigma}^2 = \sum_{i=1}^{n} [f(x_i, a) - y_i]^2.$$

По приведенным программам вычисляется оптимальное значение a и соответствующее минимальное значение $\hat{\sigma}^2$.

Подпрограмма вычисления f(x, a) размещается непосредственно за основной программой и заканчивается командой В/О. Для вычисления f (x, a) значение x берется из регистра X, а значение a — из регистра A. Вычисленное значение f (x, a) помещается в регистр X.

IV.1.4.2.1. Произвольное распределение узлов x_i

Узлы x_i функции y заданы произвольно ($x_i - x_{i-1} \neq$ const; i = 2, 3, ..., n), количество узлов n не превышает 5 (n ⩽ 5). Значения узлов и соответствующих y (x_i) вводятся вручную в регистры памяти соответственно 0 — 4 и 5 — 9 и в процессе вычислений не изменяются.

Программа IV.1.4.2.1/54,52

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	x→П В	4L	29	П→x 7	67	58	БП	51
01	—	11	30	ПП	53	59	06	06
02	x→П А	4—	31	65	65	60	П→x А	6—
03	9	09	32	П→x 3	63	61	П→x В	6L
04	F 10^x	15	33	ПП	53	62	—	11
05	x→П С	4C	34	71	71	63	x→П А	4—
06	П→x А	6—	35	П→x 8	68	64	С/П	50
07	П→x В	6L	36	ПП	53	65	—	11
08	+	10	37	65	65	66	F x^2	22
09	x→П А	4—	38	П→x 4	64	67	П→x С	6C

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
10	П→x С	6С	39	ПП	53	68	+	10
11	x→П Д	4Г	40	71	71	69	x→П С	4С
12	Сх	0Г	41	П→x 9	69	70	В/О	52
13	x→П С	4С	42	ПП	53		Регистры	
14	П→x 0	60	43	65	65			
15	ПП	53	44	П→x Д	6Г		0	x_1
16	71	71	45	—	11		1	x_2
17	П→x 5	65	46	F x≥0	59		2	x_3
18	ПП	53	47	06	06		3	x_4
19	65	65	48	П→x В	6L		4	x_5
20	П→x 1	61	49	F cos	1Г		5	y_1
21	ПП	53	50	F $\cos^{-1}$	1—		6	y_2
22	71	71	51	F x≠0	57		7	y_3
23	П→x 6	66	52	60	60		8	y_4
24	ПП	53	53	П→x В	6L		9	y_5
25	65	65	54	3	03		А	a
26	П→x 2	62	55	:	13		В	h
27	ПП	53	56	/—/	0L		С оперативный	
28	71	71	57	x→П В	4L		Д	$\hat{\sigma}^2$

Программа IV.1.4.2.1/52

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	x→П В	4L	28	ПП	53	56	←→	14
01	—	11	29	55	55	57	ПП	53
02	x→П А	4—	30	П→x 4	64	58	66	66
03	9	09	31	П→x 9	69	59	П→x Е	6Е
04	F 10^x	15	32	ПП	53	60	—	11
05	x→П С	4С	33	55	55	61	F x^2	22
06	П→x А	6—	34	П→x Д	6Г	62	П→x С	6С
07	П→x В	6L	35	—	11	63	+	10
08	+	10	36	F x≥0	59	64	x→П С	4С
09	x→П А	4—	37	06	06	65	В/О	52
10	П→x С	6С	38	П→x В	6L			
11	x→П Д	4Г	39	F cos	1Г		Регистры	
12	Сх	0Г	40	F $\cos^{-1}$	1—			
13	x→П С	4С	41	F x≠0	57		0	x_1
14	П→x 0	60	42	50	50		1	x_2
15	П→x 5	65	43	П→x В	6L		2	x_3
16	ПП	53	44	3	03		3	x_4
17	55	55	45	:	13		4	x_5
18	П→x 1	61	46	/—/	0L		5	y_1
19	П→x 6	66	47	x→П В	4L		6	y_2
20	ПП	53	48	БП	51		7	y_3
21	55	55	49	06	06		8	y_4
22	П→x 2	62	50	П→x А	6—		9	y_5
23	П→x 7	67	51	П→x В	6L		А	a
24	ПП	53	52	—	11		В	h
25	55	55	53	x→П А	4—		С, Е оперативные	
26	П→x 3	63	54	С/П	50		Д	$\hat{\sigma}^2$
27	П→x 8	68	55	x→П Е	4Е			

Для обеих программ используется единая инструкция.

Инструкция IV.1.4.2.1/54,52

Содержание	Набрать число	Выполнить команды	Результат
1. Ввести программу и подпрограмму вычисления f(x, a)			
2. При n<5 ввести в программу изменения (согласно приведенной ниже в тексте таблице)			
3. Переключатель Р/Г поставить либо в положение Г для грубой оценки a, либо в положение Р для более точной оценки a			
4. Занести значения x_1 — x_5, y_1 — y_5	x_1	x→П 0	x_1
	x_2	x→П 1	x_2
	. . .	. . .	. . .
	x_5	x→П 4	x_5
	y_1	x→П 5	y_1
	y_2	x→П 6	y_2
	. . .	. . .	. . .
	y_5	x→П 9	y_5
5. Занести начальные значения a_0 и h_0 (шаг изменения a)	a_0 h_0	В↑	a_0
6. Вычислить конечные значения a и $\hat{\sigma}^2$		В/О С/П	a — в рег. X, A $\hat{\sigma}^2$ — в рег. Д

Программы IV.1.4.2.1/54,52 и IV.1.4.2.1/52 используются без изменений при n = 5. При n < 5 в обе программы следует ввести изменения в соответствии с приведенной ниже таблицей. При этом часть регистров памяти в основной программе не используется, в регистры памяти необходимо ввести лишь n пар используемых значений x_i, y_i (i = 1.2, ..., n).

Таблица изменений в программах IV.1.4.2.1/54,52 и IV.1.4.2.1/52 при $n < 5$

n	Программа IV.1.4.2.1/54,52		Программа IV.1.4.2.1/52		Регистры, не используемые в программе
	изменяемые адреса	новые команды	изменяемые адреса	новые команды	
2	26;27	БП 44	22;23	БП 34	2—4; 7—9
3	32;33	БП 44	26;27	БП 34	3; 4; 8; 9
4	38:39	БП 44	30;31	БП 34	4; 9
5	Без изменений				Нет

Время вычисления — T = (10 — 12)·n мин.

Пример. Определить оптимальное значение a и соответствующее значение невязки $\hat{\sigma}^2$ при сглаживании исходных данных в четырех точках:

$$x_i = 0 \quad 1 \quad 4 \quad 9$$

$$y_i = 0{,}71 \quad 1{,}57 \quad 3{,}4 \quad 100{,}0$$

при задании аппроксимирующей функции f (x, a) в виде

$$f(x, a) = \sqrt{e^{ax}/(a + x^4)}$$

и начальных значениях $a_0 = 1$, $h_0 = 0{,}4$.

Решение.

Согласно инструкции и таблице изменений произвести следующие изменения в программах:

в программе IV.1.4.2.1/54, 52 в адресах 38; 39 записать соответственно новые команды БП 44;

в программе IV.1.4.2.1/52 в адресах 30; 31 записать соответственно новые команды БП 34.

Ввести подпрограмму вычисления f (x, a), которая имеет вид:
В↑ П→ x A × Fe^x ↔ Fx² Fx² П→ xA + : F√ B/O

Занести значения x_i и y_i (i = 1—4) в регистры памяти 0—3 и 5—8 соответственно. Переключатель Р/Г поставить в положение: либо Г — для грубой оценки a, либо Р — для более точной оценки a. Ввести a_0, h_0 и запустить программу на счет.

Ответ:

1. переключатель Р/Г в положении Г.

$$a = 1{,}9975;\ \hat{\sigma}^2 = 1{,}17;\ h_{кон} = 4{,}9 \cdot 10^{-3}.$$

Время вычисления примера — 11 мин.

2. переключатель Р/Г в положении Р.

$$a = 1{,}9999;\ \hat{\sigma}^2 = 3{,}47 \cdot 10^{-4};\ h_{кон} = -1{,}8 \cdot 10^{-4}.$$

Время вычисления примера — 25 мин.

IV.1.4.2.2. Равномерный шаг по x

Значения функции y_i в равномерно отстоящих узлах ($x_i - x_{i-1} = \Delta x = const$; $i = 2, 3, \ldots, n$), а также значение первого узла x_1 и шаг Δx заносятся вручную в регистры памяти согласно схемам заполнения регистров, представленных в конце приведенных программ.

Приведены две программы вычислений: IV.1.4.2.2/54 ($n \leqslant 7$) и IV.1.4.2.2/52 ($n \leqslant 8$).

При значениях n, меньших максимального, в обе программы следует внести изменения, поместив значение используемого n в адрес 10 основной программы. При этом в регистры памяти требуется занести только n значений y_i, в результате чего часть регистров памяти оказывается неиспользованной в основной программе и может быть использована в подпрограмме для вычисления f (x, a).

Программа IV.1.4.2.2/54

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	x→П B	4L	22	x→П 8	48	44	3	03
01	—	11	23	ПП	53	45	:	13
02	x→П A	4—	24	55	55	46	/—/	0L
03	9	09	25	К П→x B↑	ГЕ	47	x→П B	4L
04	F 10^x	15	26	—	11	48	БП	51
05	x→П Д	4Г	27	F x²	22	49	06	06
06	П→x A	6—	28	П→x C	6C	50	П→x A	6—
07	П→x B	6L	29	+	10	51	П→x B	6L
08	+	10	30	F L0	5Г	52	—	11
09	x→П A	4—	31	18	18	53	x→П A	4—
10	7	07	32	П→x Д	6Г	54	С/П	50
11	x→П 0	40	33	←→	14			
12	П→x 9	69	34	x→П Д	4Г		Регистры	
13	×	12	35	—	11			
14	П→x 8	68	36	F x<0	5C	0, С	оперативные	
15	+	10	37	06	06	1—7	y_1—y_7	
16	x→П 8	48	38	П→x B	6L	8	x_1	
17	Cx	0Г	39	F cos	1Г	9	Δ x	
18	x→П C	4C	40	F cos⁻¹	1—	A	a	
19	П→x 8	68	41	F x≠0	57	B	h	
20	П→x 9	69	42	50	50	Д	$\hat{\sigma}^2$	
21	—	11	43	П→x B	6L			

Программа IV.1.4.2.2/52

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	x→П B	4L	23	П→x E	6E	46	54	54
01	—	11	24	П→x 9	69	47	П→x B	6L
02	x→П A	4—	25	—	11	48	3	03
03	9	09	26	x→П E	4E	49	:	13
04	F 10^x	15	27	ПП	53	50	/—/	0L
05	x→П Д	4Г	28	59	59	51	x→П B	4L
06	П→x A	6—	29	К П→x 0	Г0	52	БП	51
07	П→x B	6L	30	—	11	53	06	06
08	+	10	31	F x²	22	54	П→x A	6—
09	x→П A	4—	32	П→x C	6C	55	П→x B	6L
10	8	08	33	+	10	56	—	11
11	x→П 0	40	34	F L0	5Г	57	x→П A	4—
12	П→x 9	69	35	18	18	58	С/П	50
13	×	12	36	П→x Д	6Г			
14	П→x E	6E	37	←→	14		Регистры	
15	+	10	38	x→П Д	4Г			
16	x→П E	4E	39	—	11	0, С	оперативные	
17	Cx	0Г	40	F x<0	5C	1—8	y_1—y_8	
18	x→П C	4C	41	06	06	9	Δ x	
19	П→x 0	60	42	П→x B	6L	A	a	
20	1	01	43	F cos	1Г	B	h	
21	+	10	44	F cos⁻¹	1—	Д	$\hat{\sigma}^2$	
22	x→П 0	40	45	F x≠0	57	E	x_1	

Для обеих программ используется единая инструкция.

Иструкция IV.1.4.2.2/54,52

Содержание	Набрать число	Выполнить команды	Результат
1. Ввести программу и подпрограмму вычисления f(x, a)			
2. Занести в адрес 10 основной программы требуемое значение n			
3. Переключатель Р/Г поставить либо в положение Г — для грубой оценки a, либо в положение Р — для более точной оценки a			
4. Занести в регистры памяти значения x_i, Δx, y_i (i=1, 2, ..., n):			
а) для программы IV.1.4.2.2/54	x_1	x→П 8	x_1
	Δx	x→П 9	Δx
	y_1	x→П 1	y_1
	. . .	. . .	. . .
	y_7	x→П 7	y_7
б) для программы IV.1.4.2.2/52	x_1	x→П E	x_1
	Δx	x→П 9	Δx
	y_1	x→П 1	y_1
	. . .	. . .	. . .
	y_8	x→П 8	y_8
5. Занести начальные значения a_0 и h_0 (шаг изменения a)	a_0 h_0	В↑	a_0 h_0
6. Вычислить конечные значения a и $\hat{\sigma}^2$		В/О С/П	a — в рег. X, A $\hat{\sigma}^2$ — в рег. Д

Пример. Вычислить оптимальное значение a и соответствующее минимальное значение $\hat{\sigma}^2$ при аппроксимации Г-функции $y = \Gamma(x)$ функцией вида $f(x, a) = \exp\left[\frac{(x-1)(x-2)}{a}\right]$ на интервале $1{,}1 \leqslant x \leqslant 1{,}9$ при задании y_i в пяти равноотстоящих узлах и начальных значениях $a_0 = 1$, $h_0 = 0{,}3$.

Решение.

Занести значение n = 5 в адрес 10 основной программы.

Ввести подпрограмму вычисления f (x, a), которая имеет вид:

1 — Fx^2 F Bx — П → xA : Fe^x В/О

Составить таблицу значений Г-функции в пяти равноотстоящих узлах (например, из [13])

$x_i = 1{,}1 \quad 1{,}3 \quad 1{,}5 \quad 1{,}7 \quad 1{,}9$

$y_i = 0{,}95135 \quad 0{,}89747 \quad 0{,}88623 \quad 0{,}90864 \quad 0{,}96177.$

Занести значения x_1, Δx, y_1 (i = 1—5) в регистры памяти согласно схеме заполнения регистров.

Переключатель Р/Г поставить либо в положение Г — для грубой оценки a, либо Р — для более точной оценки a.

Занести значения a_0 и h_0 и запустить программу на счет.

Ответ:

1. переключатель Р/Г в положении Г.

$$a = 2{,}0556;\ \hat{\sigma}^2 = 1{,}196 \cdot 10^{-4};\ h = -1{,}11 \cdot 10^{-2}.$$

Время вычисления примера — 18 мин.

2. переключатель Р/Г в положении Р.

$$a = 2{,}0595;\ \hat{\sigma}^2 = 1{,}179 \cdot 10^{-4};\ h = -1{,}37 \cdot 10^{-4}.$$

Время вычисления примера — 35 мин.

IV.2. СГЛАЖИВАНИЕ ФУНКЦИЕЙ С ДВУМЯ НЕИЗВЕСТНЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

IV.2.1. ПРЯМАЯ

Исходные данные x_i, y_i (i = 1,2, ..., n) сглаживаются прямой $f = ax + b$ с неизвестными параметрами a и b.

По программе находятся оптимальные параметры a и b, а также соответствующее минимальное значение σ^2.

Расчетные формулы:

$$b = \frac{n\Sigma xy - \Sigma x \Sigma y}{n\Sigma x^2 - (\Sigma x)^2};$$

$$a = \frac{\Sigma y - b\Sigma x}{n};$$

$$\sigma^2 = \frac{\Sigma y^2 - a\Sigma y - b\Sigma xy}{n}.$$

Программа IV.2.1/54,52

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	x→П B	4L	28	П→x 1	61	56	:	13
01	0	00	29	+	10	57	x→П A	4—
02	x→П 0	40	30	x→П 1	41	58	×	12
03	x→П 1	41	31	П→x A	6—	59	П→x B	6L
04	x→П 2	42	32	П→x 3	63	60	П→x 0	60
05	x→П 3	43	33	+	10	61	×	12
06	x→П 4	44	34	x→П 3	43	62	+	10
07	x→П 5	45	35	П→x 5	65	63	П→x 4	64
08	+	10	36	С/П	50	64	—	11
09	x→П B	4L	37	БП	51	65	/—/	0L
10	←→	14	38	09	09	66	П→x 5	65
11	x→П A	4—	39	:	13	67	:	13
12	×	12	40	П→x 1	61	68	x→П 1	41
13	П→x 0	60	41	×	12	69	П→x B	6L

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
14	+	10	42	П→x 0	60	70	П→x A	6—
15	x→П 0	40	43	—	11	71	С/П	50
16	К П→x 5	Г5	44	П→x 3	63			
17	П→x A	6—	45	F x^2	22		Регистры	
18	F x^2	22	46	П→x 5	65			
19	П→x 2	62	47	:	13	0	Σ xy	
20	+	10	48	П→x 2	62	1	Σ y; σ^2	
21	x→П 2	42	49	—	11	2	Σ x^2	
22	П→x B	6L	50	:	13	3	Σ x	
23	F x^2	22	51	x→П B	4L	4	Σ y^2	
24	П→x 4	64	52	П→x 3	63	5	n	
25	+	10	53	×	12	A	x_1; a	
26	x→П 4	44	54	—	11	B	y_1; b	
27	П→x B	6L	55	П→x 5	65			

Инструкция IV.2.1/54,52

Содержание	Набрать число	Выполнить команды	Результат
1. Перейти к началу программы		В/О	
2. Занести очередную пару исходных данных x_i, y_i	x_i y_i	В↑ С/П	x_i i
3. Если данные исчерпаны, далее, иначе — к п. 2			
4. Вычислить a, b, σ^2		БП 39 С/П	a — в рег. X, A b — в рег. Y, B σ^2 — в рег. Z, I

Время обработки одной пары чисел x_i, y_i — 10 с, время вычисления a, b, σ^2 — 8 с.

Пример. Определить оптимальные a,b и соответствующее минимальное σ^2 при сглаживании прямой $y = ax + b$ исходных данных (x_i, y_i):

1; 1,5 2; 3 4; 5 9; 11 3; 4

Ответ: $a = 0{,}4536$; $b = 1{,}170$; $\sigma^2 = 1{,}55 \cdot 10^{-2}$.

IV.2.2. ФУНКЦИЯ, ЛИНЕЙНО ЗАВИСЯЩАЯ ОТ ПАРАМЕТРОВ

При сглаживании экспериментальных данных функцией $f = a\psi(x) + b\varphi(x)$, где $\psi(x)$ и $\varphi(x)$ известны, искомые параметры a, b и средний квадрат ошибки σ^2 вычисляются по формулам:

$$b = \frac{\Sigma y\psi \, \Sigma \psi\varphi - \Sigma y\varphi \, \Sigma\psi^2}{(\Sigma\psi\varphi)^2 - \Sigma\psi^2 \, \Sigma\varphi^2};$$

$$a = \frac{\Sigma y\psi - b\,\Sigma\psi\varphi}{\Sigma\psi^2};$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{n}\left[\Sigma y^2 - a\,\Sigma y\psi - b\,\Sigma y\varphi\right].$$

Для вычисления значений функций $\psi(x)$ и $\varphi(x)$ пользователем составляется подпрограмма, которая размещается в ячейках памяти непосредственно за основной программой и заканчивается командой В/О.

При заполнении подпрограммой всех свободных ячеек памяти для возврата в программу может использоваться команда В/О, находящаяся в адресе 00 основной программы.

В подпрограмме используется аргумент x, находящийся в регистре X. Вычисленные значения функций помещаются в регистры: $\psi(x)$ — в 8; $\varphi(x)$ — в 9.

Приведены две программы вычисления.

Программа IV.2.2/54,52

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	В/О	52	29	×	12	58	—	11
01	С/П	50	30	П→x B	6L	59	П→x 2	62
02	x→П B	4L	31	П→x 9	69	60	:	13
03	F x^2	22	32	×	12	61	x→П A	4—
04	П→x 1	61	33	П→x 5	65	62	П→x 1	61
05	+	10	34	+	10	63	П→x A	6—
06	x→П 1	41	35	x→П 5	45	64	П→x 4	64
07	←→	14	36	П→x 8	68	65	×	12
08	x→П A	4—	37	F x^2	22	66	—	11
09	ПП	53	38	П→x 2	62	67	П→x B	6L
10	74	74	39	+	10	68	П→x 5	65
11	П→x 9	69	40	x→П 2	42	69	×	12
12	F x^2	22	41	×	12	70	—	11
13	П→x 3	63	42	—	11	71	П→x 6	66
14	+	10	43	П→x 6	66	72	:	13
15	x→П 3	43	44	В/О	52	73	С/П	50
16	К П→x 6	Г6	45	←→	14			
17	П→x B	6L	46	П→x 7	67		Регистры	
18	П→x 8	68	47	F x^2	22			
19	×	12	48	П→x 2	62	1	Σ y^2	
20	П→x 4	64	49	П→x 3	63	2	Σ ψ^2	
21	+	10	50	×	12	3	Σ φ^2	
22	x→П 4	44	51	—	11	4	Σ y ψ	
23	П→x 8	68	52	:	13	5	Σ y φ	
24	П→x 9	69	53	x→П B	4L	6	n	
25	×	12	54	П→x 4	64	7	Σ ψφ	
26	П→x 7	67	55	П→x B	6L	8; 9	оперативные	
27	+	10	56	П→x 7	67	A	x_i; a	
28	x→П 7	47	57	×	12	B	y_i; b	

Программа IV.2.2/54

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	В/О	52	26	×	12	52	:	13
01	8	08	27	К П→х 0	Г0	53	х→П А	4—
02	х→П 0	40	28	+	10	54	×	12
03	П→х 7	67	29	К х→ПВ↑	LE	55	П→х 6	66
04	С/П	50	30	F .	25	56	←→	14
05	х→П А	4—	31	В/О	52	57	—	11
06	1	01	32	П→х 3	63	58	П→х В	6L
07	ПП	53	33	П→х 4	64	59	П→х 5	65
08	27	27	34	П→х 5	65	60	×	12
09	←→	14	35	×	12	61	—	11
10	ПП	53	36	П→х 3	63	62	П→х 7	67
11	65	65	37	П→х 1	61	63	:	13
12	П→х 9	69	38	×	12	64	С/П	50
13	П→х А	6—	39	—	11		Регистры	
14	ПП	53	40	П→х 4	64	0	счетчик	
15	22	22	41	П→х 2	62	1	$\Sigma\varphi\psi$	
16	П→х А	6—	42	×	12	2	$\Sigma\ \varphi^2$	
17	П→х 8	68	43	П→х 1	61	3	$\Sigma\ \psi\ y$	
18	ПП	53	44	F x^2	22	4	$\Sigma\ \psi^2$	
19	22	22	45	—	11	5	$\Sigma\ y\ \varphi$	
20	П→х 8	68	46	:	13	6	$\Sigma\ y^2$	
21	П→х 9	69	47	х→П В	4L	7	n	
22	В↑	0E	48	П→х 1	61	8	ψ_1	
23	F x^2	22	49	×	12	9	φ_1	
24	ПП	53	50	—	11	А	a	
25	27	27	51	П→х 4	64	В	b	

Для обеих программ используется единая инструкция.

Инструкция IV.2.2/54,52

Содержание	Набрать число	Выполнить команды	Результат
1. Ввести программу и подпрограмму вычисления функций $\psi(x)$ и $\varphi(x)$			
2. Очистить сумматоры	С	х→П 1	0
		х→П 2	0
		. . .	. . .
		х→П 7	0
3. Перейти к началу программы		В/О С/П	
4. Занести очередную пару исходных данных	x_1	В↑	x_1
	y_1	С/П	i
5. Если данные исчерпаны, далее, иначе — к п. 4			
6. Вычислить a, b, σ^2:			
а) для программы IV.2.2/54,52		БП 45 С/П	σ^2—в рег. X
б) для программы IV.2.2/54		БП 32 С/П	a —в рег. A; в —в рег. B

Время ввода одной пары исходных данных — 15—20 с, время вычисления a, b, σ^2 — 11 с.

Пример. Сгладить функцией $y = ae^x + bx$ исходные данные (x_i, y_i):

0; 0,5 1; 0,4 2; 1,7 3; 7 4; 23

Подпрограмма вычисления $\psi(x)$ и $\varphi(x)$ имеет вид:

х → П 9 F e^x х → П 8 В/О

Ответ: $a = 0{,}491$; $b = -0{,}958$; $\sigma^2 = 1{,}4\cdot10^{-4}$.

IV.2.3. СТЕПЕННАЯ ФУНКЦИЯ

Исходные данные сглаживаются степенной функцией

$$f = a\cdot x^в.$$

IV.2.3.1. МЕТОД ЛОГАРИФМИРОВАНИЯ

Для сглаживания исходных данных функцию $f = ax^в$ логарифмированием преобразуем к виду

$$z = \ln f = \ln a + b\ln x$$

и ищем величины a и b, соответствующие минимуму невязки

$$\sigma^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}[\ln y_i - \ln a - b\ln x_i]^2.$$

Расчеты проводятся по программе IV.2.1/54,52 со следующей инструкцией.

Инструкция IV.2.3.1/54,52

Содержание	Набрать число	Выполнить команды	Результат
1. Перейти к началу программы		В/О	
2. Занести очередную пару исходных данных	x_i	F ln	
	y_i	F ln С/П	i
3. Если данные исчерпаны, далее, нет — к п. 2			
4. Определить ln a, b, $\hat{\sigma}^2$		БП 39 С/П	ln a—в рег. X, A; b—в рег. Y, B; $\hat{\sigma}^2$—в рег. 1
5. Определить a		П→х А F e^x	a

Время ввода x_i, y_i — 10 с, время вычисления a, в, σ^2 — 12 с.

Пример. Сгладить степенной функцией совокупность данных (x_i, y_i):

2; 13 4; 8 7; 6 10; 2

Ответ: $a = 30{,}670$; $в = -1{,}037$; $\sigma^2 = 0{,}0737$.

Следует учитывать, что полученные значения a и b могут заметно отличаться от оптимальных, поскольку вес отклонения при больших значениях переменной при логарифмировании уменьшается.

IV.2.3.2. МЕТОД ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОГО ПРИБЛИЖЕНИЯ

Для получения более точного решения можно использовать соотношения, полученные в [6]:

$$b_{j+1} = b_j + M/a_j;$$

$$a_{j+1} = 1/\sum x^{2b_j}\left[\sum_i yx^{b_j} - M\sum x^{2b_j}\ln x\right];$$

$$M = \frac{\Sigma x^{2b_j}\ln x\,\Sigma yx^{b_j} - \Sigma yx^{b_j}\ln x\,\Sigma x^{2b_j}}{\left(\Sigma x^{2b_j}\ln x\right)^2 - \Sigma x^{2b_j}\ln^2 x\,\Sigma x^{2b_j}}.$$

Вычисление повторить несколько раз до тех пор, пока разница в значениях среднего квадрата ошибки двух последних расчетов не станет близкой нулю.

В качестве начального приближения a_0 и b_0 можно использовать решение, полученное выше с помощью логарифмирования.

Программа IV.2.3.2/54

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	В/О	52	20	П→х 3	63	40	F .	25
01	1	01	21	F x^2	22	41	В/О	52
02	1	01	22	ПП	53	42	П→х 6	66
03	х→П 0	40	23	36	36	43	П→х 9	69
04	П→х 1	61	24	ПП	53	44	П→х 8	68
05	С/П	50	25	34	34	45	:	13
06	х→П 1	41	26	ПП	53	46	В↑	0E
07	←→	14	27	34	34	47	П→х 5	65
08	F ln	18	28	К П→х 4	Г4	48	×	12
09	х→П 2	42	29	П→х 3	63	49	П→х 6	66
10	П→х В	6L	30	П→х 1	61	50	—	11
11	×	12	31	×	12	51	←→	14
12	F e^x	16	32	ПП	53	52	П→х 7	67
13	х→П 3	43	33	36	36	53	×	12
14	П→х С	6C	34	П→х 2	62	54	П→х 8	68
15	×	12	35	×	12	55	—	11
16	—	11	36	В↑	0E	56	:	13
17	F x^2	22	37	К П→х 0	Г0	57	В↑	0E
18	ПП	53	38	+	10	58	П→х С	6C
19	37	37	39	К х→П В↑	LE	59	:	13

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
60	П→х В	6L	74	0	00
61	+	10	75	х→П 0	40
62	х→П В	4L	76	Сх	0Г
63	F .	25	77	К х→П В↑	LE
64	П→х 8	68	78	F L0	5Г
65	×	12	79	77	77
66	—	11	80	←→	14
67	П→х 9	69	81	х→П 1	41
68	:	13	82	В/О	52
69	х→П С	4C			
70	П→х А	6—		Регистры	
71	П→х 4	64			
72	:	13	0	счетчик	
73	1	01	1	y; σ^2	

2	ln x
3	$x^{в_j}$
4	n
5	$\Sigma yx^{в_j}\ln x$
6	$\Sigma yx^{в_j}$
7	$\Sigma x^{2в_j}\ln^2 x$
8	$\Sigma x^{2в_j}\ln x$
9	$\Sigma x^{2в_j}$
A	$\Sigma(y - a_j x^{в_j})^2$
B	b
C	a

Инструкция IV.2.3.2/54

Содержание	Набрать число	Выполнить команды	Результат
1. Очистить регистры		БП 73 С/П	
2. Занести начальные значения	a_0 $в_0$	х→П С х→П В	a_0 $в_0$
3. Занести значения очередной пары исходных данных x_1, y_1	x_1 y_1	В↑ С/П	x_1 y_1
4. Если данные исчерпаны, далее, нет — к п. 3			
5. Определить σ_j^2, a_{j+1}, $в_{j+1}$		БП 42 С/П	σ_j^2—в рег. X, 1 a_{j+1}—в рег. С b_{j+1}—в рег. В
6. Для осуществления следующей итерации — к п. 3			

Время занесения и обработки каждой пары чисел — 23 с, время вычисления σ_j^2, a_{j+1}, b_{j+1} — 23 с.

Программа IV.2.3.2/54,52

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	В/О	52	06	х→П 1	41	12	F e^x	16
01	1	01	07	←→	14	13	х→П 3	43
02	1	01	08	F ln	18	14	П→х С	6C
03	х→П 0	40	09	х→П 2	42	15	×	12
04	П→х 1	61	10	П→х В	6L	16	—	11
05	С/П	50	11	×	12	17	F x^2	22

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
18	ПП	53	49	В↑	0E	80	x→П 7	47
13	37	37	50	П→x 5	65	81	x→П 6	46
20	П→x 3	63	51	×	12	82	x→П 5	45
21	F x^2	22	52	П→x 6	66	83	x→П 4	44
22	ПП	53	53	—	11	84	←→	14
23	36	36	54	←→	14	85	x→П 1	41
24	ПП	53	55	П→x 7	67	86	В/О	52
25	34	34	56	×	12			
26	ПП	53	57	П→x 8	68			
27	34	34	58	—	11			
28	К П→x 4	Г4	59	:	13			
29	П→x 3	63	60	В↑	0E			
30	П→x 1	61	61	П→x С	6C			
31	×	12	62	:	13			
32	ПП	53	63	П→x В	6L			
33	36	36	64	+	10			
34	П→x 2	62	65	x→П В	4L			
35	×	12	66	F .	25			
36	В↑	0E	67	П→x 8	68			
37	К П→x 0	Г0	68	×	12			
38	+	10	69	—	11			
39	П→x 0	60	70	П→x 9	69			
40	x→П Д	4Г	71	:	13			
41	F .	25	72	x→П С	4C			
42	К x→П Д	LГ	73	П→x А	6—			
43	F .	25	74	П→x 4	64			
44	В/О	52	75	:	13			
45	П→x 6	66	76	0	00			
46	П→x 9	69	77	x→П А	4—			
47	П→x 8	68	78	x→П 9	49			
48	:	13	79	x→П 8	48			

Регистры

0	счетчик
1	y; σ^2
2	ln x
3	$x^{в_j}$
4	n
5	$\Sigma\, y \cdot \ln x \cdot x^{в_j}$
6	$\Sigma\, y \cdot x^{в_j}$
7	$\Sigma\, \ln^2 x \cdot x^{2в_j}$
8	$\Sigma\, x^{2в_j} \cdot \ln x$
9	$\Sigma\, x^{2в_j}$
А	$\Sigma\, (y - a_j x^{в_j})^2$
В	$в_j$
С	a_j
Д	оперативный

Инструкция IV.2.3.2/54,52

Содержание	Набрать число	Выполнить команды	Результат
1. Очистить регистры		БП 76 С/П	
2. Занести начальные значения a_0 и b_0	a_0 $в_0$	x→П С x→П В	
3. Занести значения очередной пары исходных данных	x_1 y_1	В↑ С/П	 y_1
4. Если данные исчерпаны, далее, нет — к п. 3			
5. Определить σ_j^2, a_{j+1}, $в_{j+1}$		БП 45 С/П	σ_j^2—в рег. X, 1 a_{j+1}—в рег. С $в_{j+1}$—в рег. В
6. Для осуществления следующей итерации — к п. 3			

Пример. Сгладить степенной функцией $y = ax^в$ совокупность данных (x_1, y_1):

0,6; 1,7 1; 3,2 1,5; 6 2; 10,

использовав в качестве начальных значений $a_0 = 1$, $в_0 = 1$. Ответ:

j	0	1	2	3	4
σ_j^2	22,575	119,1954	8,0441	0,20948	$3{,}532 \cdot 10^{-2}$
a_{j+1}	3,35133	2,7587	3,0902	3,22102	3,2357
b_{j+1}	3,20405	2,4775	1,7894	1,6223	1,6119

IV.2.4. ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНАЯ ФУНКЦИЯ

Исходные данные сглаживаются экспоненциальной функцией

$$f = ae^{bx}.$$

IV.2.4.1. МЕТОД ЛОГАРИФМИРОВАНИЯ

Для сглаживания исходных данных функцию $f = ae^{вx}$ логарифмированием преобразуем к виду

$$\ln f = \ln a + bx$$

и ищем величины a и b, соответствующие минимуму невязки

$$\sigma^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} [\ln y_i - \ln a - bx_i]^2.$$

Расчеты проводятся по программе IV.2.1/54,52 со следующей инструкцией.

Инструкция IV.2.4.1/54,52

Содержание	Набрать число	Выполнить команды	Результат
1. Перейти к началу программы		В/О	
2. Занести очередную пару исходных данных	x_1 y_1	В↑ F ln С/П	
3. Если данные исчерпаны, далее, нет — к п. 2			
4. Определить ln a, b, σ^2		БП 39 С/П	ln a—в рег. X, A в—в рег. Y, B σ^2—в рег. 1
5. Определить a		П→x A F e^x	a

Время ввода x_1, y_1 — 10 с, время вычисления а, в, σ^2 — 12 с.

Пример. Сгладить экспонентой совокупность данных (x_1, y_1):
0,6; 1,7 1; 3,2 1,5; 6 2; 10

Ответ: $a = 0{,}854$, $в = 1{,}259$, $\sigma^2 = 3{,}84 \cdot 10^{-3}$.

Если диапазон изменения исходных данных невелик, отличия полученных значений а и b от оптимальных незначительны.

IV.2.4.2. МЕТОД ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ

Для получения оптимального решения используются программы IV.2.3.2/54 или IV.2.3.2/54, 52 вместе с инструкциями к ним. Единственное отличие — команду F ln с адресом 08 следует заменить командой К НОП.

Расчетные формулы [7]:

$$b_{j+1} = b_j + M/a_j;$$

$$a_{j+1} = 1/\Sigma e^{2b_j x}\,[\Sigma y e^{b_j x} - M\,\Sigma x e^{2b_j x}];$$

$$M = \frac{\Sigma e^{2b_j x}\,\Sigma xy e^{b_j x} - \Sigma x e^{2b_j x}\,\Sigma y e^{b_j x}}{(\Sigma x e^{2b_j x})^2 - \Sigma e^{2b_j x}\,\Sigma x^2 e^{2b_j x}}.$$

Пример. Сгладить экспонентой совокупность данных (x_1, y_1):

0,6; 1,7 1; 3,2 1,5; 6 2; 10

Использовав в качестве начальных значения $a_0 = 0{,}854$ и $в_0 = 1{,}259$ из примера IV.2.4.1, продолжим вычисления по программе IV.2.3.2/54 или IV.2.3.2/54, 52.

Ответ:

j	0	1	2	3
a_j	0,854	1,007	1,011	1,011
b_j	1,259	1,146	1,152	1,151
σ_j^2	0,1322	$5{,}962 \cdot 10^{-2}$	$5{,}294 \cdot 10^{-2}$	. . .

IV.2.5. ПРОИЗВОЛЬНАЯ НЕПРЕРЫВНАЯ ФУНКЦИЯ

IV.2.5.1. МЕТОД ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ

Для сглаживания опытных данных непрерывной и дифференцируемой по параметрам а и b функцией разложим эту функцию в ряд Тейлора в точке начального приближения a_0, $в_0$ и ограничимся линейными членами:

$$f(x, a, b) \approx f(x, a_0, b_0) + \Delta a f'_a(x, a_0, b_0) + \Delta b \cdot f'_b(x, a_0, b_0),$$

где $\Delta a = a - a_0$, $\Delta b = b - b_0$.

Для определения приращений решается система линейных уравнений, для чего вводится начальное приближение a_0, $в_0$ и затем пары чисел x_1, y_1. Вычисляется $\hat{\sigma}_j^2$ и следующее приближение параметров a_j и b_j. Цикл «ввод данных-вычисление $\hat{\sigma}_j^2$, a_j, b_j» повторяется до тех пор, пока значение $\hat{\sigma}^2$ не установится.

Расчетные формулы:

$$\hat{\sigma}_j^2 = \sum_{i=1}^{n} [y_i - f(x_i, a_j\, b_j)]^2;\quad a_{j+1} = a_j + \Delta a_j;\quad b_{j+1} = b_j + \Delta b_j;$$

$$\Delta a_j = \frac{\sum f'_a f'_b \sum (f-y) f'_b - \sum (f'_b)^2 \sum (f-y) f'_a}{\sum (f'_a)^2 \sum (f'_b)^2 - (\sum f'_a \cdot f'_b)^2};$$

$$\Delta b_j = -\frac{1}{\sum f'_a f'_b}\,[\sum (f-y) f'_a + \Delta a_j \sum (f'_a)^2],$$

где f, f'_a и f'_b — сглаживающая функция и ее частные производные по а и b в точке $a = a_j$, $b = b_j$.

Пользователем должна быть составлена подпрограмма вычисления значений f, f'_a и $f'_в$, размещаемая в памяти, начиная с адреса 71. Аргумент x берется из регистра X, значения a_j — из регистра A, b_j — из регистра B; ответы помещаются: f'_a — в регистр 8, $f'_в$ — в регистр 9, f — в регистр X.

Программа IV.2.5.1/54,52

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	В/О	52	21	В↑	0E	42	—	11
01	7	07	22	F x^2	22	43	П→x 0	60
02	x→П 0	40	23	ПП	53	44	П→x 2	62
03	С/П	50	24	27	27	45	×	12
04	x→П С	4C	25	П→x С	6C	46	П→x 3	63
05	←→	14	26	×	12	47	—	11
06	ПП	53	27	К П→x 0	Г0	48	:	13
07	71	71	28	+	10	49	x→П 0	40
08	П→x С	6C	29	П→x 0	60	50	П→x А	6—
09	—	11	30	x→П 7	47	51	+	10
10	x→П С	4C	31	F .	25	52	x→П А	4—
11	ПП	53	32	К x→П 7	L7	53	П→x В	6L
12	25	25	33	F .	25	54	П→x 0	60
13	П→x 9	69	34	В/О	52	55	П→x 2	62
14	ПП	53	35	П→x 4	64	56	×	12
15	21	21	36	П→x 5	65	57	П→x 1	61
16	П→x 8	68	37	П→x 3	63	58	+	10
17	П→x 9	69	38	:	13	59	П→x 3	63
18	ПП	53	39	x→П 0	40	60	:	13
19	26	26	40	П→x 1	61	61	—	11
20	П→x 8	68	41	×	12	62	x→П В	4L

Адрес	Команда	Код
63	7	07
64	x→П 0	40
65	Cx	0Г
66	ПП	53
67	29	29
68	FL0	5Г
69	65	65
70	В/О	52

Регистры

0	счетчик
1	$\Sigma\ (f-y)\ f'_a$
2	$\Sigma\ (f'_a)^2$
3	$\Sigma\ f'_a \cdot f'_в$
4	$\Sigma\ (f-y)\ f'_в$
5	$\Sigma\ (f'_в)^2$
6	$\Sigma\ f;\ \hat{\sigma}^2$
7	оперативный
8	f'_a
9	$f'_в$
A	a
B	в
C	y; (f—y)

Инструкция IV.2.5.1/54,52

Содержание	Набрать число	Выполнить команды	Результат
1. Ввести программу и подпрограмму вычисления функций f, f'_a, $f'_в$			
2. Занести начальное приближение параметров	a_0 $в_0$	x→П A БП 62 С/П	a_0 7
3. Занести значения очередной пары данных	x_1 y_1	В↑ С/П	 7
4. Если данные исчерпаны, далее, нет — к п. 3			
5. Вывести $\hat{\sigma}_j^2$		П→x 6	$\hat{\sigma}_j^2$
6. Вычислить очередные значения a_{j+1} и $в_{j+1}$		БП 35 С/П	a_{j+1}—в рег. A $в_{j+1}$—в рег. B
7. Для выполнения следующей итерации — к п. 3			

Время занесения a_0 и $в_0$ — 7 с, время обработки пары чисел x_1, y_1 — $(17 + \tau)$ с, где τ — время работы подпрограммы. Время вычисления a_{j+1} и b_{j+1} — 15 с.

Пример. Сгладить совокупность данных (x_1, y_1):

0; 0,02 4; 0,8 8; 2 11; 4

(величина x задана в радианах) функцией f = atgbx. Принять $a_0 = 1,8$, $b_0 = 0,1$.

Частные производные функции f (x, a, b) равны $f'_a = \operatorname{tg} bx$, $f'_в = ax/\cos^2 bx$. Подпрограмма имеет вид:

В↑П→x В× x→П 8 F cos Fx²:П→x A × x→П 9

П→x 8F tg x→П 8 П→x A × В/О

Переключатель Р/Г поставить в положение Р.

Выполняя итерации, получим:

i	a	b	$\hat{\sigma}^2$
0	1,8	0,1	0,2382
1	1,8045	0,1047	$3{,}33 \cdot 10^{-3}$
2	1,8199	0,1040	$4{,}22 \cdot 10^{-4}$
3	1,8204	0.1040	$4{,}21 \cdot 10^{-4}$

IV.2.5.2. МЕТОД ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОГО ПРИБЛИЖЕНИЯ

Исходная функция y = y (x), заданная в n равноотстоящих узлах x_i ($x_i - x_{i-1} = \Delta x = \text{const}$, $i = 2, 3, \ldots, n$), аппроксимируется функцией f (x, a, в) с двумя определяемыми параметрами a, в, минимизирующими величину невязки

$$\hat{\sigma}^2 = \sum_{i=1}^{n} [f(x_i, a, b) - y_i]^2.$$

Оптимизация параметров a, в производится методом последовательного приближения, который состоит в том, что на каждом (j + 1)-м шаге значения a и в изменяются совместно по правилу

$$a_{j+1} = a_{j,\min} + h_{j+1} \cdot \sin \varphi_{j+1},\ b_{j+1} = b_{j,\min} + h_{j+1} \cdot \cos \varphi_{j+1},$$

где $a_{j,\min}$, $в_{j,\min}$ соответствуют минимальному значению невязки $\hat{\sigma}_j^2$ за j предыдущих шагов оптимизации. Значения h_{j+1}, φ_{j+1} устанавливаются в зависимости от предыдущих значений h_j, φ_j, $\hat{\sigma}_j^2$: начальные значения: $h_0 = 0.05$, $\varphi_0 = 9$ рад; при $\hat{\sigma}_j^2 < \hat{\sigma}_{j-1}^2$ устанавливается $h_{j+1} = h_j \cdot \ln \pi$, $\varphi_{j+1} = \varphi_j$; при $\hat{\sigma}_j^2 \geqslant \hat{\sigma}_{j-1}^2$ устанавливается $h_{j+1} = h_j \times \ln 2$, $\varphi_{j+1} = \varphi_{j+1}$; при $h_j \simeq 2 \cdot 10^{-4}$ вычисление заканчивается.

Подпрограмма вычисления функции f (x, a, в) размещается непосредственно за основной программой и заканчивается командой В/О. Значения x, a, в для вычисления f (x, a, в) берутся соответственно из регистров X, A, B. Вычисленное значение f (x, a, в) помещается в регистр X.

Приведены три программы вычисления оптимальных значений a, в: IV.2.5.2/54 (при $n \leqslant 5$), IV.2.5.2/52 (при $n \leqslant 5$) и IV.2.5.2′/52 (при ($n \leqslant 6$).

При n, меньшем максимального значения, в программы следует внести изменения, заменив в п. 23 основной программы значение n_{max} на используемое значение n.

Программы работают в радианах.

Программа IV.2.5.2/54

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	9	09	28	+	10	56	БП	51
01	x→П 6	46	29	x→П 7	47	57	10	10
02	F 10^x	15	30	0	00	58	В↑	0E
03	x→П С	4С	31	x→П С	4С	59	П→x 6	66
04	F ln	18	32	П→x 7	67	60	F cos	1Г
05	F 1/x	23	33	П→x 8	68	61	×	12
06	x→П 9	49	34	—	11	62	П→x В	6L
07	П→x С	6С	35	x→П 7	47	63	+	10
08	x→П Д	4Г	36	ПП	53	64	x→П В	4L
09	Fπ	20	37	73	73	65	←→	14
10	F ln	18	38	К П→x В↑	ГЕ	66	П→x 6	66
11	П→x 9	69	39	—	11	67	F sin	1С
12	×	12	40	F x^2	22	68	×	12
13	x→П 9	49	41	П→x С	6С	69	П→x А	6—
14	F cos	1Г	42	+	10	70	+	10
15	F $\cos^{-1}$	1—	43	F L0	5Г	71	x→П А	4—
16	F x=0	5Е	44	31	31	72	В/О	52
17	20	20	45	x→П С	4С			
18	П→x Д	6Г	46	П→x Д	6Г			
19	С/П	50	47	—	11			
20	П→x 9	69	48	F x≥0	59			
21	ПП	53	49	07	07			
22	58	58	50	П→x 9	69			
23	5	05	51	/—/	0L			
24	x→П 0	40	52	ПП	53			
25	П→x 8	68	53	58	58			
26	×	12	54	К П→x 6	Г6			
27	П→x 7	67	55	2	02			

Регистры

0;6;С	оперативные
1—5	y_1—y_5
7	x_1
8	Δx
9	h
А	a
В	в
Д	$\hat{\sigma}^2$

Программа IV.2.5.2/52

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	9	09	17	F cos	1Г	34	П→x 7	67
01	x→П 6	46	18	F $\cos^{-1}$	1—	35	П→x 8	68
02	F 10^x	15	19	F x=0	5Е	36	—	11
03	x→П С	4С	20	23	23	37	x→П 7	47
04	F ln	18	21	П→x Д	6Г	38	ПП	53
05	F 1/x	23	22	С/П	50	39	75	75
06	x→П 9	49	23	5	05	40	К П→x Е	ГЕ
07	П→x С	6С	24	x→П 0	40	41	—	11
08	x→П Д	4Г	25	П→x 8	68	42	F x^2	22
09	F π	20	26	×	12	43	П→x С	6С
10	F ln	18	27	П→x 7	67	44	+	10
11	П→x 9	69	28	+	10	45	F L0	5Г
12	×	12	29	x→П 7	47	46	31	31
13	x→П 9	49	30	0	00	47	x→П С	4С
14	ПП	53	31	x→П С	4С	48	П→x Д	6Г
15	60	60	32	П→x 0	60	49	—	11
16	П→x 9	69	33	x→П Е	4Е	50	F x≥0	59

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
51	07	07	63	×	12
52	П→x 9	69	64	П→x В	6L
53	/—/	0L	65	+	10
54	ПП	53	66	x→П В	4L
55	60	60	67	←→	14
56	К П→x 6	Г6	68	П→x 6	66
57	2	02	69	F sin	1С
58	БП	51	70	×	12
59	10	10	71	П→x А	6—
60	В↑	0Е	72	+	10
61	П→x 6	66	73	x—П А	4—
62	F cos	1Г	74	В/О	52

Регистры

0;6;С;Е	оперативные
1—5	y_1—y_5
7	x_1
8	Δx
9	h
А	a
В	b
Д	$\hat{\sigma}^2$

Программа IV.2.5.2′/52

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	9	09	30	0	00	60	1	01
01	x→П Е	4Е	31	x→П С	4С	61	+	10
02	F10^x	15	32	П→x 7	67	62	x→П Е	4Е
03	x→П С	4С	33	П→x 8	68	63	2	02
04	F ln	18	34	—	11	64	БП	51
05	F 1/x	23	35	x→П 7	47	65	10	10
06	x→П 9	49	36	ПП	53	66	В↑	0Е
07	П→x С	6С	37	81	81	67	П→x Е	6Е
08	x→П Д	4Г	38	П→x 0	60	68	F cos	1Г
09	F π	20	39	1	01	69	×	12
10	F ln	18	40	+	10	70	П→x В	6L
11	П→x 9	69	41	x→П 0	40	71	+	10
12	×	12	42	←→	14	72	x→П В	4L
13	x→П 9	49	43	К П→x 0	Г0	73	←→	14
14	F cos	1Г	44	—	11	74	П→x Е	6Е
15	F $\cos^{-1}$	1—	45	F x^2	22	75	F sin	1С
16	F x=0	5Е	46	П→x С	6С	76	×	12
17	20	20	47	+	10	77	П→x А	6—
18	П→x Д	6Г	48	F L0	5Г	78	+	10
19	С/П	50	49	31	31	79	x→П А	4—
20	П→x 9	69	50	x→П С	4С	80	В/О	52
21	ПП	53	51	П→x Д	6Г			
22	66	66	52	—	11			
23	6	06	53	F x≥0	59			
24	x→П 0	40	54	07	07			
25	П→x 8	68	55	П→x 9	69			
26	×	12	56	/—/	0L			
27	П→x 7	67	57	ПП	53			
28	+	10	58	66	66			
29	x→П 7	47	59	П→x Е	6Е			

Регистры

0,С,Е	оперативные
1—6	y_1—y_6
7	x_1
8	Δx_1
9	h
А	a
В	b
Д	$\hat{\sigma}^2$

Для трех программ используется единая инструкция.

Содержание	Набрать число	Выполнить команды	Результат
1. Ввести программу и подпрограмму вычисления f (x, a, b)			
2. Если n меньше максимального значения, занести в адрес 23 основной программы требуемое значение n			
3. Переключатель Р/Г поставить в положение Р			
4. Занести в регистры памяти значения x_1, Δx, y_1 — y_n	x_1	x→П 7	x_1
	Δx	x→П 8	Δx
	y_1	x→П 1	y_1
	. . . . .	. . . . .	. . . . .
	y_n	x→П n	y_n
5. Занести начальные значения a_0 и b_0 в регистры памяти	a_0	x→П A	a_0
	$в_0$	x→П B	$в_0$
6. Вычислить конечные значения a, b и $\hat{\sigma}^2$		В/О С/П	σ^2—в рег. X, Д a—в рег. A в—в рег. B

Время вычисления при n = 5 составляет 2—6 ч.

Пример. Вычислить оптимальные значения a, в при аппроксимации исходной функции y (x), заданной в четырех узлах:

$$x_1 = 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4$$

$$y_1 = 4{,}95 \quad 8{,}15 \quad 13{,}45 \quad 22{,}17$$

функцией вида f (x, a, в) = a·exp (x/в) и начальных значениях $a_0 = 2{,}8$ и $в_0 = 2{,}1$.

Решение. Подпрограмма вычисления значений аппроксимирующей функции f (x, a, в) имеет вид П→x B : Fe^x П → xA × В/О

Занести в адрес 23 основной программы значение n = 4.

Переключатель Р/Г поставить в положение Р.

Занести значения x_1, Δx, y_1 — y_4 в регистры памяти согласно схеме заполнения регистров.

Занести начальные значения $a_0 = 2{,}8$ и $в_0 = 2{,}1$ в регистры памяти A и B соответственно и запустить программу на счет.

Ответ: $a = 2{,}962$, $в = 1{,}986$, $\hat{\sigma}^2 = 6{,}12 \cdot 10^{-3}$, $h = 2{,}5 \cdot 10^{-4}$.

Время вычисления примера — 2 ч.

IV.3. СГЛАЖИВАНИЕ ФУНКЦИЕЙ С ТРЕМЯ НЕИЗВЕСТНЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

IV.3.1. ПАРАБОЛА

Совокупность пар исходных данных x_1, y_1 сглаживается параболой $f = ax^2 + вx + c$.

Неизвестные параметры a, в и c определяются из системы уравнений

$$a\Sigma x^4 + b\Sigma x^3 + c\Sigma x^2 = \Sigma x^2 y,$$
$$a\Sigma x^3 + b\Sigma x^2 + c\Sigma x = \Sigma xy,$$
$$a\Sigma x^2 + b\Sigma x + cn = \Sigma y.$$

Программа IV.3.1/54

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	В/О	52	33	П→x 8	68	66	×	12
01	С/П	50	34	:	13	67	П→x 1	61
02	x→П 2	42	35	x→П 2	42	68	:	13
03	←→	14	36	К ПП Д	—Г	69	—	11
04	x→П 3	43	37	x→П 1	41	70	П→x 4	64
05	1	01	38	П→x 4	64	71	:	13
06	2	02	39	П→x B	6L	72	x→П 0	40
07	x→П 0	40	40	П→x 2	62	73	П→x B	6L
08	К П→x 4	Г4	41	П→x A	6—	74	К ПП Д	—Г
09	4	04	42	К ПП Д	—Г	75	П→x 1	61
10	x→П 1	41	43	x→П B	4L	76	:	13
11	П→x 3	63	44	F x^2	22	77	x→П 1	41
12	ПП	53	45	П→x 1	61	78	П→x 5	65
13	14	14	46	:	13	79	П→x 8	68
14	B↑	0E	47	—	11	80	:	13
15	К П→x 0	Г0	48	П→x A	6—	81	П→x 2	62
16	+	10	49	П→x A	6—	82	П→x 1	61
17	Кx→ПB↑	LE	50	П→x 8	68	83	К ПП Д	—Г
18	←→	14	51	:	13	84	П→x 3	63
19	П→x 3	63	52	x→П 3	43	85	П→x 0	60
20	×	12	53	К ПП Д	—Г	86	×	12
21	F L1	5L	54	x→П 4	44	87	—	11
22	14	14	55	П→x 6	66	88	x→П C	4C
23	3	03	56	П→x 2	62	89	В/О	52
24	x→П 1	41	57	П→x 5	65	90	Cx	0Г
25	П→x 2	62	58	К ПП Д	—Г	91	1	01
26	В/О	52	59	x→П 6	46	92	2	02
27	8	08	60	П→x 7	67	93	x→П 0	40
28	6	06	61	П→x 3	63	94	Cx	0Г
29	x→П Д	4Г	62	П→x 5	65	95	Кx→ПB↑	LE
30	П→x A	6—	63	К ПП Д	—Г	96	F L0	5Г
31	П→x 9	69	64	П→x 6	66	97	95	95
32	П→x 9	69	65	П→x B	6L			

Регистры:

0 счетчик; c 2 y_i 4 i; n 6 Σxy 8 Σx^4 A Σx^2 C a

1 счетчик; b 3 x_i 5 $\Sigma x^2 y$ 7 Σy 9 Σx^3 B Σx Д 86

Инструкция IV.3.1/54

Содержание	Набрать число	Выполнить команды	Результат
1. Очистить сумматоры		БП 90 С/П	0
2. Занести числа очередной пары исходных данных	x_1 y_1	В↑ С/П	x_1 y_1
3. Если данные исчерпаны, далее, нет — к п. 2			
4. Определить a, b, c		БП 27 С/П	a — в рег. X, C в — в рег. 1 c — в рег. 0

Программа IV.3.1/52

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	В/О	52	34	П→х 9	69	68	П→х 2	62
01	С/П	50	35	:	13	69	:	13
02	х→П 3	43	36	х→П 3	43	70	—	11
03	←→	14	37	К ПП Д	—Г	71	П→х 5	65
04	х→П 4	44	38	х→П 2	42	72	:	13
05	1	01	39	П→х 5	65	73	х→П 1	41
06	3	03	40	П→х С	6С	74	П→х С	6С
07	х→П 0	40	41	П→х 3	63	75	К ПП Д	—Г
08	х→П 2	42	42	П→х В	6L	76	П→х 2	62
09	К П→х 5	Г5	43	К ПП Д	—Г	77	:	13
10	4	04	44	х→П С	4С	78	х→П 2	42
11	х→П 1	41	45	Fx²	22	79	П→х 6	66
12	П→х 4	64	46	П→х 2	62	80	П→х 9	69
13	ПП	53	47	:	13	81	:	13
14	15	15	48	—	11	82	П→х 3	63
15	В↑	0Е	49	П→х В	6L	83	П→х 2	62
16	К П→х 0	Г0	50	П→х В	6L	84	К ПП Д	—Г
17	+	10	51	П→х 9	69	85	П→х 4	64
18	К х→П 2	L2	52	:	13	86	П→х 1	61
19	←→	14	53	х→П 4	44	87	×	12
20	П→х 4	64	54	К ПП Д	—Г	88	—	11
21	×	12	55	х→П 5	45	89	х→П Е	4Е
22	F LI	5L	56	П→х 7	67	90	В/О	52
23	15	15	57	П→х 3	63	91	Сх	0Г
24	3	03	58	П→х 6	66	92	х→П 5	45
25	х→П 1	41	59	К ПП Д	—Г	93	х→П 6	46
26	П→х 3	63	60	х→П 7	47	94	х→П 7	47
27	В/О	52	61	П→х 8	68	95	х→П 8	48
28	8	08	62	П→х 4	64	96	х→П 9	49
29	7	07	63	П→х 6	66	97	х→П А	4—
30	х→П Д	4Г	64	К ПП Д	—Г	98	х→П В	4L
31	П→х В	6L	65	П→х 7	67	99	х→П С	4С
32	П→х А	6—	66	П→х С	6С	100	В/О	52
33	П→х А	6—	67	×	12			

Регистры:

0	счетчик; с	5	i; n	А	Σx^3
1	счетчик; b	6	$\Sigma x^2 y$	В	Σx^2
2	счетчик;	7	Σxy	С	Σx; a
3	y_1	8	Σy	Д	87
4	x_1	9	Σx^4		

Инструкция IV.3.1/52

Содержание	Набрать число	Выполнить команды	Результат
1. Очистить сумматоры		БП 91 С/П	0
2. Занести числа очередной пары исходных данных	x_1 y_1	В↑ С/П	x_1 y_1
3. Если данные исчерпаны, далее, нет — к п. 2			
4. Определить a, b, c		БП 28 С/П	a — в рег. X, E b — в рег. 2 c — в рег. 1

Время занесения и обработки каждой пары чисел — 25 — 30 с, время вычисления параметров a, в, c — 33 с.

Пример. Сгладить параболой совокупность данных (x_1, y_1):

1; 2,718 1,5; 4,482 2; 7,389 3; 20,085

Ответ: a = 3,856, b = — 6,801, c = 5,758.

IV.3.2. ФУНКЦИЯ, ЛИНЕЙНО ЗАВИСЯЩАЯ ОТ ПАРАМЕТРОВ

Совокупность пар опытных данных x_1, y_1 сглаживается функцией $f = a\psi(x) + b\varphi(x) + c$, где $\psi(x)$ и $\varphi(x)$ полностью известны. Параметры a, b, c определяются из системы уравнений

$$\begin{cases} a\,\Sigma\psi^2 + b\Sigma\psi\varphi + c\,\Sigma\psi = \Sigma\, y\,\psi, \\ a\,\Sigma\psi\varphi + b\,\Sigma\varphi^2 + c\,\Sigma\varphi = \Sigma\, y\,\varphi, \\ a\,\Sigma\psi + b\Sigma\,\varphi + cn = \Sigma\, y. \end{cases}$$

Программа IV.3.2/54

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	В/О	52	33	П→х В	6L	66	×	12
01	С/П	50	34	:	13	67	П→х 9	69
02	1	01	35	х→П 8	48	68	:	13
03	4	04	36	К ПП С	—С	69	—	11
04	х→П 0	40	37	х→П 9	49	70	П→х 4	64
05	К П→х 4	Г4	38	П→х 4	64	71	:	13
06	П→х 1	61	39	П→х А	6—	72	х→П 2	42
07	ПП	53	40	П→х 8	68	73	П→х А	6—
08	13	13	41	П→х Д	6Г	74	К ПП С	—С
09	П→х 2	62	42	К ПП С	—С	75	П→х 9	69
10	ПП	53	43	х→П А	4—	76	:	13
11	13	13	44	F x^2	22	77	П→х 5	65
12	С/П	50	45	П→х 9	69	78	П→х В	6L
13	В↑	0E	46	:	13	79	:	13
14	ПП	53	47	—	11	80	←→	14
15	21	21	48	П→х Д	6Г	81	х→П 1	41
16	П→ 2	62	49	П→х Д	6Г	82	П→х 8	68
17	ПП	53	50	П→х В	6L	83	К ПП С	—С
18	20	20	51	:	13	84	П→х Д	6Г
19	П→х 1	61	52	х→П Д	4Г	85	П→х 2	62
20	×	12	53	К ПП С	—С	86	×	12
21	К П→х 0	Г0	54	х→П 4	44	87	—	11
22	+	10	55	П→х 6	66	88	х→П 0	40
23	К х→П В↑	LE	56	П→х 8	68	89	В/О	52
24	←→	14	57	П→х 5	65	90	Сх	0Г
25	В↑	0E	58	К ПП С	—С	91	1	01
26	В/О	52	59	х→П 1	41	92	3	03
27	8	08	60	П→х 7	67	93	х→П 0	40
28	6	06	61	П→х Д	6Г	94	Сх	0Г
29	х→П С	4С	62	П→х 5	65	95	К х→П В↑	LE
30	П→х 9	69	63	К ПП С	—С	96	F L0	5Г
31	П→х 8	68	64	П→х 1	61	97	95	95
32	П→х 8	68	65	П→х А	6—			

Регистры:

0 счетчик; a 6 $\Sigma y\varphi$; Σyz В $\Sigma\psi^2$; Σx^2

1 x; ψ; b 7 Σy; Σz С $\Sigma\psi\varphi$; Σxy; 87

2 x; φ; y; c 8 $\Sigma\psi\varphi$; Σxy Д $\Sigma\psi$; Σx

4 i; n 9 $\Sigma\varphi^2$; Σy^2

5 $\Sigma y\psi$; Σxz А $\Sigma\varphi$; Σy

Инструкция IV.3.2/54

Содержание	Набрать число	Выполнить команды	Результат
1. Очистить сумматоры		БП 90 С/П	0
2. Вычислить $\psi(x_1)$ в режиме калькулятора и занести	$\psi(x_1)$	х→П 1	$\psi(x_1)$
3. Вычислить $\varphi(x_1)$ в режиме калькулятора и занести	$\varphi(x_1)$	х→П 2 С/П	$\varphi(x_1)$
4. Занести y_1	y_1	С/П	
5. Если исходные данные исчерпаны, далее, нет — к п. 2			
6. Определить значения параметров a, b, c		БП 27 С/П	a—в рег. X, 0 b—в рег. 1 c—в рег. 2

Программа IV.3.2/52

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	В/О	52	34	П→х В	6L	68	П→х 9	69
01	С/П	50	35	:	13	69	:	13
02	1	01	36	х→П 8	48	70	—	11
03	4	04	37	К ПП С	—С	71	П→х 4	64
04	х→П 0	40	38	х→П 9	49	72	:	13
05	х→П 3	43	39	П→х 4	64	73	х→П 2	42
06	К П→х 4	Г4	40	П→х А	6—	74	П→х А	6—
07	П→х 1	61	41	П→х 8	68	75	К ПП С	—С
08	ПП	53	42	П→х Д	6Г	76	П→х 9	69
09	14	14	43	К ПП С	—С	77	:	13
10	П→х 2	62	44	х→П А	4—	78	П→х 5	65
11	ПП	53	45	F x^2	22	79	П→х В	6L
12	14	14	46	П→х 9	69	80	:	13
13	С/П	50	47	:	13	81	←→	14
14	В↑	0E	48	—	11	82	х→П 1	41
15	ПП	53	49	П→х Д	6Г	83	П→х 8	68
16	22	22	50	П→х Д	6Г	84	К ПП С	—С
17	П→х 2	62	51	П→х В	6L	85	П→х Д	6Г
18	ПП	53	52	:	13	86	П→х 2	62
19	21	21	53	х→П Д	4Г	87	×	12
20	П→х 1	61	54	К ПП С	—С	88	—	11
21	×	12	55	х→П 4	44	89	х→П 0	40
22	К П→х 0	Г0	56	П→х 6	66	90	В/О	52
23	+	10	57	П→х 8	68	91	Сх	0Г
24	К х→П 3	L3	58	П→х 5	65	92	1	01
25	←→	14	59	К ПП С	—С	93	4	04
26	В↑	0E	60	х→П 1	41	94	х→П 0	40
27	В/О	52	61	П→х 7	67	95	х→П 1	41
28	8	08	62	П→х Д	6Г	96	Сх	0Г
29	7	07	63	П→х 5	65	97	К х→П 1	L1
30	х→П С	4С	64	К ПП С	—С	98	F L0	5Г
31	П→х 9	69	65	П→х 1	61	99	97	97
32	П→х 8	68	66	П→х А	6—	100	В/О	52
33	П→х 8	68	67	×	12			

Регистры:

0 счетчик; a	5 $\Sigma y\psi$; Σxz	A $\Sigma\varphi$; Σy	
1 x; ψ; b	6 $\Sigma y\varphi$; Σyz	B $\Sigma\psi^2$; Σx^2	
2 x; φ; y; c	7 Σy; Σz	C $\Sigma\psi\varphi$; Σxy; 87	
3 счетчик;	8 $\Sigma\psi\varphi$; Σxy	Д $\Sigma\psi$; Σx	
4 i; n	9 $\Sigma\varphi^2$ Σy^2		

Инструкция IV.3.2./52

Содержание	Набрать число	Выполнить команды	Результат
1. Очистить сумматоры		БП 91 С/П	0
2. Вычислить $\psi(x_1)$ в режиме калькулятора и занести	$\psi(x_1)$	x→П 1	$\psi(x_1)$
3. Вычислить $\varphi(x_1)$ в режиме калькулятора и занести	$\varphi(x_1)$	x→П 2 С/П	$\varphi(x_1)$
4. Занести y_1	y_1	С/П	y_1
5. Если исходные данные исчерпаны, далее, нет — к п. 2			
6. Определить значения параметров a, b, c		БП 28 С/П	a — в рег. X, 0 b — в рег. 1 c — в рег. 2

Время очистки сумматоров — 14 с, время занесения $\psi(x_1)$ и $\varphi(x_1)$ — 22 с, занесения y_1 — 9 с, вычисления a, b и c — 35 с.

Пример. Сгладить функцией $f = a/x + b \ln x + c$ ($\psi(x) = 1/x$, $\varphi(x) = \ln x$) совокупность исходных данных (x_1, y_1):

0,1; 3 0,2; — 0,7 1; — 1,5 1,5; — 1

Ответ: a = 1,0255, b = 2,0559, c = — 2,5208.

IV.3.3. ПЛОСКОСТЬ

Совокупность данных x_1, y_1, z_1 ($i = 1, 2, \ldots, n$) сглаживается плоскостью $z = ax + by + c$. Параметры плоскости определяются из системы уравнений

$$\begin{cases} a\Sigma x^2 + b\Sigma xy + c\Sigma x = \Sigma xz, \\ a\Sigma xy + b\Sigma y^2 + c\Sigma y = \Sigma yz, \\ a\Sigma x + b\Sigma y + c\cdot n = \Sigma z. \end{cases}$$

Для вычислений используются программы IV.3.2/54 и IV.3.2/52, но с другими инструкциями, соответственно IV.3.3/54 и IV.3.3/52.

Инструкция IV.3.3/54

Содержание	Набрать число	Выполнить команды	Результат
1. Очистить сумматоры		БП 90 С/П	0
2. Занести числа очередной группы исходных данных	x_1 y_1 z_1	x→П 1 x→П 2 С/П С/П	x_1 y_1 z_1
3. Если данные исчерпаны, далее, нет — к п. 2			
4. Определить значения неизвестных параметров a, b, c		БП 27 С/П	a — в рег. X, 0 b — в рег. 1 c — в рег. 2

Инструкция IV.3.3/52

Содержание	Набрать число	Выполнить команды	Результат
1. Очистить сумматоры		БП 91 С/П	0
2. Занести числа очередной группы исходных данных	x_1 y_1 z_1	x→П 1 x→П 2 С/П С/П	x_1 y_1 z_1
3. Если данные исчерпаны, далее, нет — к п. 2			
4. Определить значения неизвестных параметров a, b, c		БП 28 С/П	a — в рег. X, 0 b — в рег. 1 c — в рег. 2

Время очистки сумматоров — 14 с, время занесения исходных данных — 31 с, время вычисления параметров a, b, c — 35 с.

Пример. Сгладить плоскостью совокупность данных (x_1, y_1, z_1): 0,1; 1,1; 5,1 1; 1,2; 5,9 0,9; — 0,1; 3,9 2; 3,1; 10,5

Ответ: a = 1,035, b = 1,715, c = 3,042.

IV.3.4. ПРОИЗВОЛЬНАЯ НЕПРЕРЫВНАЯ ФУНКЦИЯ

Исходная функция y (x), заданная в n равноотстоящих узлах x_i ($x_i - x_{i-1} = \Delta x = \text{const}$, $i = 2, 3, \ldots, n$), сглаживается произвольной аппроксимирующей функцией f (x, a, в, c) методом последовательного приближения. Подпрограмма вычисления f (x, a, в, c) располагается непосредственно за основной программой и заканчивается командой В/О. Для вычисления f (x, a, в, c) значения x, a, в, c берутся соответственно из регистров X, A, B, C. Вычисленное значение f (x, a, в, c) помещается в регистр X.

Приводятся две программы IV.3.4./54 (при $n \leqslant 5$) и IV.3.4./52 (при $n \leqslant 6$) вычисления оптимальных значений a, в, c, минимизирующих невязку

$$\hat{\sigma}^2 = \sum_{i=1}^{n} [f(x_i, a, b, c) - y_i]^2.$$

При использовании n, не равном максимальному значению, в адресе 38 основной программы следует занести требуемое значение n. Переключатель Р/Г следует установить либо в положение Г — для грубой оценки a, в, c, либо в положение Р — для более точной оценки.

Программа IV.3.4/54

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	9	09	27	П→x 9	69	54	—	11
01	F 10^x	15	28	/—/	0L	55	F x^2	22
02	x→П Д	4Г	29	2	02	56	П→x 6	66
03	П→x 9	69	30	:	13	57	+	10
04	П→x A	6—	31	x→П 9	49	58	F L0	5Г
05	+	10	32	F cos	1Г	59	46	46
06	x→П A	4—	33	F $\cos^{-1}$	1—	60	П→x Д	6Г
07	ПП	53	34	F x=0	5E	61	←→	14
08	38	38	35	03	03	62	x→П Д	4Г
09	F x<0	5C	36	П→x Д	6Г	63	—	11
10	03	03	37	С/П	50	64	П→x 9	69
11	П→x 9	69	38	5	05	65	3	03
12	П→x B	6L	39	x→П 0	40	66	F ln	18
13	+	10	40	П→x 8	68	67	×	12
14	x→П B	4L	41	×	12	68	x→П 9	49
15	ПП	53	42	П→x 7	67	69	F.	25
16	38	38	43	+	10	70	В/О	52
17	F x<0	5C	44	x→П 7	47			
18	11	11	45	0	00			
19	П→x 9	69	46	x→П 6	46			
20	П→x C	6C	47	П→x 7	67			
21	+	10	48	П→x 8	68			
22	x→П C	4C	49	—	11			
23	ПП	53	50	x→П 7	47			
24	38	38	51	ПП	53			
25	F x<0	5C	52	71	71			
26	19	19	53	К П→x В↑	ГЕ			

Регистры

0;6;9	оперативные
1—5	$y_1 - y_b$
7	x_1
8	Δx
A	a
B	в
C	c
Д	σ^2

Программа IV.3.4/52

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	9	09	05	+	10	10	03	03
01	F 10^x	15	06	x→П A	4—	11	П→x 9	69
02	x→П Д	4Г	07	ПП	53	12	П→x B	6L
03	П→x 9	69	08	38	38	13	+	10
04	П→x A	6—	09	F x<0	5C	14	x→П B	4L

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
15	ПП	53	39	x→П 0	40	63	46	46
16	38	38	40	П→x 8	68	64	П→x Д	6Г
17	F x<0	5C	41	×	12	65	←→	14
18	11	11	42	П→x 7	67	66	x→П Д	4Г
19	П→x 9	69	43	+	10	67	—	11
20	П→x C	6C	44	x→П 7	47	68	П→x 9	69
21	+	10	45	0	00	69	3	03
22	x→П C	4C	46	x→П E	4E	70	F ln	18
23	ПП	53	47	П→x 0	60	71	×	12
24	38	38	48	1	01	72	x→П 9	49
25	F x<0	5C	49	+	10	73	F.	25
26	19	19	50	x→П 0	40	74	В/О	52
27	П→x 9	69	51	П→x 7	67			
28	/—/	0L	52	П→x 8	68			
29	2	02	53	—	11			
30	:	13	54	x→П 7	47			
31	x→П 9	49	55	ПП	53			
32	F cos	1Г	56	75	75			
33	F $\cos^{-1}$	1—	57	К П→x 0	Г0			
34	F x=0	5E	58	—	11			
35	03	03	59	F x^2	22			
36	П→x Д	6Г	60	П→x E	6E			
37	С/П	50	61	+	10			
38	6	06	62	F L0	5Г			

Регистры

0;9;E	оперативные
1—6	$y_1 - y_в$
7	x_1
8	Δx
A	a
B	в
C	c
Д	σ^2

Для обеих программ используется единая инструкция.

Инструкция IV.3.4/54,52

Содержание	Набрать число	Выполнить команды	Результат
1. Ввести программу и подпрограмму вычисления f(x, a, b, c)			
2. Занести требуемое значение n в адрес 38 основной программы			
3. Переключатель Р/Г поставить в положение: либо Г — для грубой оценки, либо Р — для точной оценки a, b, c			
4. Занести значения x_1, Δx, $y_1 - y_n$	x_1	x→П 7	x_1
	Δx	x→П 8	Δx
	y_1	x→П 1	y_1
	. . . . .	. . . . .	. . . . .
	y_n	x→П n	y_n

Содержание	Набрать число	Выполнить команды	Результат
5. Занести начальные значения параметров a_0, b_0, c_0 и h_0 (шаг изменения a, b, c)	a_0 b_0 c_0 h_0	x→П A x→П B x→П C x→П 9	a_0 b_0 c_0 h_0
6. Вычислить конечные значения a, b, c, $\hat{\sigma}^2$		В/О С/П	$\hat{\sigma}^2$ — в рег. X, Д a — в рег. A b — в рег. B c — в рег. C

Пример. Вычислить оптимальные значения a, b, c при аппроксимации исходной функции y (x), заданной в четырех узлах:

$$x_i = 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4$$

$$y_i = 0{,}558 \quad 0{,}433 \quad 0{,}418 \quad 0{,}446$$

функцией вида $f(x, a, b, c) = a \cdot \exp(x/b)/(1 + cx)$ и начальных значениях $a_0 = 1{,}9$, $b_0 = 3{,}1$, $c_0 = 3{,}9$, $h_0 = 0{,}2$.

Решение.

Подпрограмма вычисления аппроксимирующей функции f (x, a, b, c) имеет вид В↑ П → x В : F e^x П→ x А× ↔ П→ x С×1 + : В/О

Занести в адрес 38 основной программы значение n = 4.

Переключатель Р/Г поставить в положение: либо Г — для грубой оценки a, b, c, либо в Р — для более точной оценки a, b, c.

Занести значения x_1, Δx, y_1 — y_4 и начальные значения a_0, b_0, c_0, h_0 согласно инструкции и запустить программу на счет.

Ответ:

1. переключатель Р/Г в положении Г.

$$a = 2{,}2345, \quad b = 3{,}1321, \quad c = 4{,}4028, \quad \hat{\sigma}^2 = 4{,}31 \cdot 10^{-4}.$$

Время вычисления примера — 6 — 8 ч.

2. переключатель Р/Г в положении Р.

$$a = 2{,}2042, \quad b = 2{,}978, \quad c = 4{,}496, \quad \hat{\sigma}^2 = 2{,}09 \cdot 10^{-5}.$$

Время вычисления примера — 15—20 ч.

IV.4. ВЫЧИСЛЕНИЕ ЗНАЧЕНИЙ МНОГОЧЛЕНА

Вычисляется значение многочлена n-й степени с действительными коэффициентами $a_0, a_1, \ldots, a_n$

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$$

в произвольной точке x.

IV.4.1. ДЕЙСТВИТЕЛЬНОЕ x

IV.4.1.1. ФИКСИРОВАННОЕ n

При вычислении по программе IV.4.1.1/21 ($n \leqslant 6$) значения коэффициентов a_i ($i = 0, 1, \ldots, 6$) вводятся в регистры памяти 2—8.

Программа IV.4.1.1/21

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	P,	43	21	F4	42	42	×	26
01	F8	82	22	ПП	68	43	↑	06
02	ПП	68	23	F:	35	44	В/О	48
03	:	36	24	F3	32			
04	F7	72	25	ПП	68			
05	ПП	68	30	F:	35			
10	F:	35	31	F2	22			
11	F6	62	32	+	96			
12	ПП	68	33	С/П	78			
13	F:	35	34	+	96			
14	F5	52	35	Р/—/	53			
15	ПП	68	40	↑	06			
20	F:	35	41	P,	43			

Регистры

2	a_0
3	a_1
4	a_2
5	a_3
6	a_4
7	a_5
8	a_6

Инструкция IV.4.1.1/21

Содержание	Набрать число	Выполнить команды	Результат
1. Занести коэффициенты a_0 — a_6	a_0 a_1 . . . . . . a_6	Р2 Р3 . . . . . . Р8	
2. Ввести значение x и вычислить значение многочлена f(x)	x	В/О С/П	f (x)
3. Для вычисления f(x) при другом значении x — к п. 2			

Время вычисления — 11 с.

При расчетах по программам IV.4.1.1/54 ($n \leqslant 12$) и IV.4.1.1/52 ($n \leqslant 13$) в случае, если степень многочлена меньше максимально допустимой, нулевые коэффициенты $a_i = 0$ при $i > n$ вводить не нужно.

Программа IV.4.1.1/54

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	В↑	0E	05	+	10
01	Fπ	20	06	FL0	5Г
02	0	00	07	03	03
03	×	12	08	С/П	50
04	КП→xВ↑	ГЕ			

Регистры

0	счетчик
1—Д	a_0—a_{12}

Время вычисления — T = (1,5 + n) с.

Программа IV.4.1.1/52

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	Fп	20	07	П→x0	60
01	0	00	08	1	01
02	B↑	0E	09	—	11
03	F.	25	10	Fx=0	5E
04	×	12	11	03	03
05	КП→x0	Г0	12	+	10
06	+	10	13	С/П	50

Регистры
0 счетчик
1—E a_0—a_{13}

Время вычисления — T = (4 + 3n) с.

Для обеих программ используется единая инструкция.

Инструкция IV.4.1.1/54,52

Содержание	Набрать число	Выполнить команды	Результат
1. Занести коэффициенты a_0—a_n	a_0	x→П1	a_0
	a_1	x→П2	a_1
	. . . . .	. . . . .	. . . . .
	a_n	x→П(n+1)	a_n
2. Занести:			
а) для программы IV.4.1.1/54	n+1	x→П0	n+1
б) для программы IV.4.1.1/52	n+2	x→П0	n+2
3. Занести x и вычислить f(x)	x	В/О С/П	f(x)
4. Для вычисления f(x) при другом значении x — к п. 2			

Пример. $a_0 = 1$, $a_1 = 2$, $a_2 = 3$, x = 3. f (3) = 34.

IV.4.1.2. ПОШАГОВЫЙ ВЫВОД

Вычисление и вывод значений многочлена производятся последовательно по мере ввода коэффициентов в порядке увеличения степени при x : a_0, a_1, a_2, ... После ввода очередного значения a_i и выполнения команды С/П на индикаторе высвечивается соответствующее значение $f_i = a_0 + a_1x + \ldots a_ix^i$, i = 0, 1, 2, ... (Нулевые значения коэффициентов также надо вводить; при $a_i = 0$, очевидно, $f_i = f_{i-1}$).

Программа IV.4.1.2/21

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	P2	21	14	×	26
01	1	14	15	P3	31
02	P3	31	20	↑	06
03	С/П	78	21	F4	42
04	P5	51	22	×	26
05	С/П	78	23	↑	06
10	P4	41	24	F5	52
11	F3	32	25	+	96
12	↑	06	30	БП	58
13	F2	22	31	F↑	05

Инструкция

x В/О С/П a_0 С/П a_1 С/П...

Результат
1, f_0, f_1, ...

Регистры
2 x
3 x^i
4 a_i
5 f_i

Программа IV.4.1.2/54,52

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	x→П0	40	07	×	12
01	1	01	08	x→П1	41
02	x→П1	41	09	×	12
03	С/П	50	10	+	10
04	С/П	50	11	БП	51
05	П→x1	61	12	04	04
06	П→x0	60			

Инструкция

x В/О С/П a_0 С/П a_1 С/П...

Результат
1, f_0, f_1, ...

Регистры
0 x
1 оперативный

Время вычисления после ввода очередного значения a_i — 2 с.

Пример. x = 2:

$a_0 = 1$, $f_0 = 1$;

$a_1 = 2$, $f_1 = 5$;

$a_2 = 0$, $f_2 = 5$;

$a_3 = 5$, $f_3 = 45$;

. . . . . .

IV.4.2. КОМПЛЕКСНОЕ x

Вычисляется значение многочлена n-й степени от комплексного x = y + jz.

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n.$$

IV.4.2.1. ФИКСИРОВАННОЕ n

Вычисляется значение многочлена при фиксированном n.

Приведены три программы вычисления.

1. Программа IV.4.2.1/21 при n ⩽ 5. Время вычисления — T = 40 с.
2. Программа IV. 4.2.1/54 при n ⩽ 10. Время вычисления — T = = (8n + 12) с.

3. Программа IV.4.2.1/52 при $n \leqslant 11$. Время вычисления — $T = (7n + 3)$ с.

Коэффициенты a_i ($i = 0,1,2,\ldots, n$) вводятся в регистры памяти вручную один раз перед первым вводом x и сохраняются в них в процессе вычислений, поэтому при последующих вводах x и вычислениях f (x) повторно вводить коэффициенты a_i не нужно.

Программа IV.4.2.1/21

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	↑	06	34	С/П	78	72	Р,	43
01	0	04	35	+	96	73	×	26
02	Р/—/	53	40	Р/—/	53	74	↑	06
03	F7	72	41	↑	06	75	Р,	43
04	Р/—/	53	42	Р,	43	80	+	96
05	←→	16	43	←→	16	81	↑	06
10	ПП	68	44	×	26	82	Р/—/	53
11	F4	42	45	Р,	43	83	←→	16
12	F6	62	50	Р,	43	84	Р/—/	53
13	ПП	68	51	F8	82	85	↑	06
14	:	36	52	×	26	90	В/О	48
15	F5	52	53	Р/—/	53			
20	ПП	68	54	↑	06			
21	:	36	55	F8	82			
22	F4	42	60	×	26			
23	ПП	68	61	←→	16			
24	:	36	62	Р/—/	53			
25	F3	32	63	—	86			
30	ПП	68	64	/—/	56			
31	:	36	65	Р/—/	53			
32	F2	22	70	↑	06			
33	+	96	71	Р,	43			

Регистры

2	a_0
3	a_1
4	a_2
5	a_3
6	a_4
7	a_5
8	y

Инструкция IV.4.2.1/21

Содержание	Набрать число	Выполнить команды	Результат
1. Занести коэффициенты $a_0 - a_5$ в регистры памяти	a_0	Р2	a_0
	a_1	Р3	a_1
	. . . . .	. . . . .	. . . . .
	a_5	Р7	a_5
2. Занести z в регистр памяти	z	Р8	z
3. Занести значение y и вычислить Re(f(x))	y	В/О С/П	Re (f (x))
4. Вычислить Im(f(x))		Р,	Im (f (x))
5. Для вычисления f(x) при другом x — к п. 2			

Время вычисления — 28 с.

Программа IV.4.2.1/54

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	x→ПД	4Г	13	←→	14	26	—	11
01	←→	14	14	×	12	27	КП→xВ↑	ГЕ
02	x→ПС	4С	15	FBx	0	28	+	10
03	0	00	16	F.	25	29	FL0	5Г
04	КП→x0	Г0	17	+	10	30	07	07
05	БП	51	18	В↑	0Е	31	С/П	50
06	29	29	19	F.	25			
07	←→	14	20	F.	25			
08	FBx	0	21	П→xС	6С			
09	П→xД	6Г	22	×	12			
10	×	12	23	←→	14			
11	←→	14	24	П→xД	6Г			
12	П→xС	6С	25	×	12			

Регистры

0	счетчик
1—В	a_0—a_{10}
С	y
Д	z

Программа IV.4.2.1/52

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	x→ПЕ	4Е	15	FBx	0	30	1	01
01	←→	14	16	F.	25	31	—	11
02	x→ПД	4Г	17	+	10	32	Fx=0	5Е
03	0	00	18	В↑	0Е	33	06	06
04	В↑	0Е	19	F.	25	34	F.	25
05	В↑	0Е	20	F.	25	35	С/П	50
06	F.	25	21	П→xД	6Г			
07	←→	14	22	×	12			
08	FBx	0	23	←→	14			
09	П→xЕ	6Е	24	П→xЕ	6Е			
10	×	12	25	×	12			
11	←→	14	26	—	11			
12	П→xД	6Г	27	КП→x0	Г0			
13	←→	14	28	+	10			
14	×	12	29	П→x0	60			

Регистры

0	счетчик
1—С	a_0—a_{11}
Д	y
Е	z

Для обеих программ используется единая инструкция.

Инструкция IV.4.2.1/54,52

Содержание	Набрать число	Выполнить команды	Результат
1. Занести коэффициенты $a_0 - a_n$ в регистры памяти	a_0	x→П1	a_0
	a_1	x→П2	a_1
	. . . . .	. . . . .	. . . . .
	a_n	x→П$_{(n+1)}$	$a_{(n+1)}$
2. Занести в регистр памяти n+2 (на единицу больше количества введенных коэффициентов)	n+2	x→П0	n+2

Содержание	Набрать число	Выполнить команды	Результат
3. Ввести $x=y+jz$	y z	В↑	y
4. Вычислить f(x)		В/О С/П	Re[f(x)]—в рег. X Im[f(x)]—в рег. Y
5. Для вычисления f(x) при другом x — к п. 2			

Время вычисления — $T = (3 + 8n)$ с.

Пример. Вычислить значение многочлена $f(x) = 6+5x+4x^2+3x^3+2x^4+x^5$ при $x = 2-3j$ ($y = 2$, $z = -3$).

Ответ: $f(2-3j) = -258 + j\,747$.

IV.4.2.2. ПОШАГОВЫЙ ВЫВОД

Вычисление и вывод значения многочлена производятся последовательно по мере ввода коэффициентов в порядке увеличения степени при x : a_0, a_1, a_2, ... После ввода очередного значения a_i и выполнения команды С/П вычисленные значения $Re[f_i(x)]$ и $Im[f_i(x)]$ помещены в регистры X и Y соответственно. Для вывода значения $Im[f(x)]$ в регистр X следует использовать команду ←→ (при расчете по программе IV.4.2.2/54, 52 перед вводом последующего значения a_{i+1} при этом следует восстановить прежнее состояние регистров X и Y также командой ←→). (Нулевые значения коэффициентов также надо вводить; при $a_i = 0$, очевидно $f_i = f_{i-1}$.)

Программа IV.4.2.2/21

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	P4	41	20	F7	72	40	+	96
01	F2	22	21	×	26	41	P4	41
02	P6	61	22	↑	06	42	F3	32
03	F3	32	23	F5	52	43	↑	06
04	P7	71	24	+	96	44	F7	72
05	Cx	76	25	P5	51	45	×	26
10	P5	51	30	P/—/	53	50	P,	43
11	↑	06	31	↑	06	51	F2	22
12	F4	42	32	F6	62	52	↑	06
13	С/П	78	33	×	26	53	F6	62
14	↑	06	34	↑	06	54	×	26
15	P,	43	35	F4	42	55	↑	06

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
60	P/—/	53	74	↑	06
61	—	86	75	F7	72
62	↑	06	80	×	26
63	F6	62	81	↑	06
64	←→	16	82	P/—/	53
65	P6	61	83	+	96
70	F3	32	84	P7	71
71	×	26	85	F5	52
72	P,	43	90	БП	58
73	F2	22	91	F1	12

Регистры

2	y
3	z
4	Re (f_i)
5	Im (f_i)
6; 7	оперативные

Программа IV.4.2.2/54,52

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	x→П4	44	15	+	10	30	x→П8	48
01	1	01	16	П→x2	62	31	П→x6	66
02	x→П7	47	17	П→x7	67	32	×	12
03	Cx	0Г	18	×	12	33	П→x5	65
04	x→П8	48	19	П→x3	63	34	+	10
05	x→П5	45	20	П→x8	68	35	БП	51
06	←→	14	21	×	12	36	05	05
07	С/П	50	22	—	11			
08	x→П6	46	23	x→П7	47			
09	П→x2	62	24	П→x6	66			
10	П→x8	68	25	×	12			
11	×	12	26	П→x4	64			
12	П→x3	63	27	+	10			
13	П→x7	67	28	x→П4	44			
14	×	12	29	←→	14			

Регистры

2	y
3	z
4	Re (f_i)
5	Im (f_i)
6—8	оперативные

Для обеих программ используется единая инструкция.

Инструкция IV.4.2.2/21,54,52

Содержание	Набрать число	Выполнить команды	Результат
1. Занести в регистры памяти значение $x=y+jz$:			
а) для программы IV.4.2.2/21	y z	P2 P3	y z
б) для программы IV.4.2.2/54,52	y z	x→П2 x→П3	y z

Продолжение

Содержание	Набрать число	Выполнить команды	Результат
2. Перейти к началу программы		В/О	
3. Ввести очередное значение a_i и вычислить f_i	a_i	С/П	Re (f_i)—в рег. X,4 Im (f_i)—в рег. Y,5
4. Если данные не исчерпаны — к п. 3			

Время вычисления очередного значения f_i — 8 — 10 с.

Пример. Вычислить последовательные значения многочлена при $x = 2—3j$ и $a_0 = 1$, $a_1 = 2$, $a_2 = 3$, ...

Ответ:

$a_0 = 1$, $f_0 = 1$;

$a_1 = 2$, $f_1 = 5—6j$;

$a_3 = 3$, $f_2 = -10—42j$;

. . . . . .

Глава V

СТАТИСТИКА

V.1. МОМЕНТЫ ВЫБОРОЧНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

V.1.1. СРЕДНЕЕ И ДИСПЕРСИЯ

Для совокупности значений $x_1, x_2, \ldots, x_n$ среднее и дисперсия вычисляются по формулам [19]:

$$m_1 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i,$$

$$m_2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - m_1)^2.$$

Значения m_1 и m_2 вычисляются на каждом шаге ввода x_i: значение m_1 выводится на индикатор, а m_2 может быть выведено на индикатор командой ↔ .

Программа V.1.1/21

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	Cx	76	23	↑	06	50	Fx²	55
01	P2	21	24	F6	62	51	—	86
02	P3	31	25	:	36	52	P5	51
03	P6	61	30	P4	41	53	↑	06
04	С/П	78	31	F5	52	54	F4	42
05	P5	51	32	Fx²	55	55	БП	58
10	↑	06	33	↑	06	60	F↑	05
11	F2	22	34	F3	32			
12	+	96	35	+	96			
13	P2	21	40	P3	31			
14	F6	62	41	↑	06			
15	1	14	42	F6	62			
20	+	96	43	:	36			
21	P6	61	44	↑	06			
22	F2	22	45	F4	42			

Регистры

2	Σx
3	Σx^2
4	m_1
5	m_2
6	n

Программа V.1.1/54,52

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	Cx	0Г	12	x→П3	43	24	x→П5	45
01	x→П2	42	13	П→x6	66	25	П→x4	64
02	x→П3	43	14	:	13	26	БП	51
03	x→П6	46	15	←→	14	27	04	04
04	С/П	50	16	П→x2	62			
05	КП→x6	Г6	17	+	10		Регистры	
06	←→	14	18	x→П2	42			
07	В↑	0E	19	П→x6	66	2	Σx	
08	В↑	0E	20	:	13	3	Σx^2	
09	Fx^2	22	21	x→П4	44	4	m_1	
10	П→x3	63	22	Fx^2	22	5	m_2	
11	+	10	23	—	11	6	n	

Для обеих программ используется единая инструкция.

Инструкция V.1.1/21, 54, 52

Содержание	Набрать число	Выполнить команды	Результат
1. Очистить сумматоры		В/О С/П	
2. Занести очередное значение x_1	x_1	С/П	m_1—в рег. X,4 m_2—в рег. Y,5
3. Если данные не исчерпаны — к п. 2			

Время занесения одного числа — 5—7 с.

Пример. Вычислить среднее m_1 и дисперсию m_2 выборки: — 1; 3; 2; 0; 4.

Ответ: $m_1 = 1,6$; $m_2 = 3,44$.

V.1.2. ЧЕТЫРЕ ПЕРВЫХ ЦЕНТРАЛЬНЫХ МОМЕНТА, АСИММЕТРИЯ И ЭКСЦЕСС

Для совокупности значений $x_1, x_2, \ldots, x_n$ четыре первых центральных момента, коэффициенты асимметрии и эксцесса вычисляются по формулам [19]:

среднее $m_1 = \frac{1}{n} \sum x_i$,

дисперсия $m_2 = \frac{1}{n} \sum (x_i - m_1)^2$,

третий момент $m_3 = \frac{1}{n} \sum (x_i - m_1)^3$,

коэффициент асимметрии $g_1 = m_3/\sqrt{m_2^3}$,

четвертый момент $m_4 = \frac{1}{n} \sum (x_i - m_1)^4$,

коэффициент эксцесса $g_2 = m_4/m_2^2 - 3$.

Программа V.1.2/54

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	Cx	0Г	28	П→x2	62	56	×	12
01	x→П1	41	29	П→x3	63	57	—	11
02	x→П2	42	30	П→x4	64	58	x→П1	41
03	x→П3	43	31	Fx^2	22	59	П→x3	63
04	x→П4	44	32	x→П0	40	60	Fx^2	22
05	x→П5	45	33	—	11	61	:	13
06	4	04	34	x→П3	43	62	3	03
07	x→П0	40	35	3	03	63	—	11
08	П→x5	65	36	ПП	53	64	x→П0	40
09	С/П	50	37	66	66	65	С/П	50
10	В↑	0E	38	—	11	66	×	12
11	В↑	0E	39	x→П2	42	67	П→x0	60
12	КП→xВ↑	ГE	40	П→x3	63	68	+	10
13	+	10	41	В↑	0E	69	П→x4	64
14	Кx→ПВ↑	LE	42	F√	21	70	×	12
15	F.	25	43	×	12	71	В/О	52
16	×	12	44	:	13			
17	FL0	5Г	45	x→П6	46		Регистры	
18	11	11	46	П→x1	61			
19	КП→x5	Г5	47	П→x3	63	0	счетчик; g_2	
20	БП	51	48	6	06	1	Σx^4; m_4	
21	06	06	49	ПП	53	2	Σx^3; m_3	
22	КП→xВ↑	ГE	50	66	66	3	Σx^2; m_2	
23	П→x5	65	51	4	04	4	Σx; m_1	
24	:	13	52	П→x2	62	5	n	
25	Кx→ПВ↑	LE	53	×	12	6	g_1	
26	FL0	5Г	54	+	10			
27	22	22	55	П→x4	64			

Программа V.1.2/54,52

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	Cx	0Г	09	С/П	50	18	F.	25
01	x→П1	41	10	В↑	0E	19	×	12
02	x→П2	42	11	В↑	0E	20	FL0	5Г
03	x→П3	43	12	П→x0	60	21	11	11
04	x→П4	44	13	F→ПД	4Г	22	КП→x5	Г5
05	x→П5	45	14	F.	25	23	БП	51
06	4	04	15	КП→xД	ГГ	24	06	06
07	x→П0	40	16	+	10	25	П→x0	60
08	П→x5	65	17	Кx→ПД	LГ	26	x→ПД	4Г

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
27	F.	25	48	F√	21	69	—	11
28	КП→хД	ГГ	49	×	12	70	х→П0	40
29	П→х5	65	50	:	13	71	С/П	50
30	:	13	51	х→П6	46	72	×	12
31	Кх→ПД	LГ	52	П→х1	61	73	П→х0	60
32	FL0	5Г	53	П→х3	63	74	+	10
33	25	25	54	6	06	75	П→х4	64
34	П→х2	62	55	ПП	53	76	×	12
35	П→х3	63	56	72	72	77	В/О	52
36	П→х4	64	57	4	04			
37	Fx²	22	58	П→х2	62			
38	х→П0	40	59	×	12			
39	—	11	60	+	10			
40	х→П3	43	61	П→х4	64			
41	3	03	62	×	12			
42	ПП	53	63	—	11			
43	72	72	64	х→П1	41			
44	—	11	65	П→х3	63			
45	х→П2	42	66	Fx²	22			
46	П→х3	63	67	:	13			
47	В↑	0E	68	3	03			

Регистры

0 счетчик; g_2
1 Σx^4; m_4
2 Σx^3; m_3
3 Σx^2; m_2
4 Σx; m_1
5 n
6 g_1
Д оперативный

Для обеих программ используется единая инструкция.

Инструкция V.1.2/54,52

Содержание	Набрать число	Выполнить команды	Результат
1. Очистить сумматоры		В/О С/П	
2. Ввести очередное значение x_i	x_i	С/П	i
3. Если данные исчерпаны, далее, нет — к п. 2			
4. Вычислить моменты:			
а) для программы V.1.2/54		БП 22 С/П	g_2—в рег. X,0
б) для программы V.1.2/54.52		БП 25 С/П	m_1—в рег. 4 m_2—в рег. 3 m_3—в рег. 2 m_4—в рег. 1 g_1—в рег. 6

Время обработки одного числа — 11 с, время вычисления моментов — 21 с.

Пример. Вычислить четыре первых центральных момента, асимметрию и эксцесс выборки

— 1 —3 0 5 —4 2 1 —2 3 1

Ответ:

$m_1 = 0{,}2$, $m_2 = 6{,}96$, $m_3 = 2{,}016$, $m_4 = 104{,}5152$, $g_1 = 0{,}10979351$, $g_2 = -0{,}8424495$.

V.1.3. МОМЕНТЫ, АСИММЕТРИЯ И ЭКСЦЕСС ВЫБОРКИ, СГРУППИРОВАННОЙ В КЛАССЫ

Вычисляются первые четыре начальных M_k и центральных m_k выборочных момента, коэффициенты асимметрии g_1 и эксцесса g_2. Весь диапазон возможных значений случайной величины x разделен на равные интервалы длины h. Выборка характеризуется значениями центров x_i каждого интервала и количествами n_i случайных величин, попавших в каждый интервал.

Программу, в частности, целесообразно применять при большом количестве исходных данных, сгруппировав их в относительно небольшом количестве интервалов. Учтены поправки Шеппарда на группирование.

Расчетные формулы [14]:

$$N = \Sigma n_i; \qquad M_1 = m_1 = \frac{1}{N}\sum n_i x_i;$$

$$M_2 = \frac{1}{N}\sum n_i x_i^2; \qquad m_2 = \frac{1}{N}\sum n_i (x_i - M_1)^2 - \frac{h^2}{12};$$

$$M_3 = \frac{1}{N}\sum n_i x_i^3; \qquad m_3 = \frac{1}{N}\sum n_i (x_i - M_1)^3;$$

$$M_4 = \frac{1}{N}\sum n_i x_i^4; \qquad m_4 = \frac{1}{N}\sum n_i (x_i - M_1)^4 - \frac{1}{2}h^2 \cdot \frac{1}{N}\sum (x_i - M_1)^2 + \frac{7}{240}h^4;$$

$$g_1 = \frac{m_3}{\sqrt{m_2^3}}; \qquad g_2 = \frac{m_4}{m_2^2} - 3.$$

Программа V.1.3/54

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	Сх	0Г	10	х→П6	46	20	12	12
01	х→П5	45	11	←→	14	21	БП	51
02	х→П4	44	12	В↑	0E	22	06	06
03	х→П3	43	13	КП→хВ↑	ГЕ	23	КП→х0	Г0
04	х→П2	42	14	+	10	24	КП→хВ↑	ГЕ
05	х→П1	41	15	Кх→ПВ↑	LE	25	П→х5	65
06	5	05	16	F.	25	26	:	13
07	х→П0	40	17	П→х6	66	27	Кх→ПВ↑	LE
08	П→х6	66	18	×	12	28	FL0	5Г
09	С/П	50	19	FL0	5Г	29	24	24

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
30	С/П	50	56	×	12	82	П→x0	60
31	П→x2	62	57	+	10	83	—	11
32	П→x3	63	58	П→x4	64	84	x→П3	43
33	П→x4	64	59	×	12	85	Fx²	22
34	Fx²	22	60	—	11	86	:	13
35	x→П0	40	61	x→П1	41	87	3	03
36	—	11	62	С/П	50	88	—	11
37	x→П3	43	63	Fx²	22	89	x→П0	40
38	3	03	64	1	01	90	П→x2	62
39	×	12	65	2	02	91	П→x3	63
40	П→x0	60	66	:	13	92	В↑	0E
41	+	10	67	x→П0	40	93	F√⁻	21
42	П→x4	64	68	0	00	94	×	12
43	×	12	69	.	0—	95	:	13
44	—	11	70	7	07	96	x→П5	45
45	x→П2	42	71	×	12	97	С/П	50
46	П→x1	61	72	П→x3	63			
47	П→x3	63	73	—	11			
48	6	06	74	П→x0	60			
49	×	12	75	6	06			
50	П→x0	60	76	×	12			
51	+	10	77	×	12			
52	П→x4	64	78	П→x1	61			
53	×	12	79	+	10			
54	П→x2	62	80	x→П1	41			
55	4	04	81	П→x3	63			

Регистры

0 счетчик; g_2
1 $\Sigma n_i x_i^4$; m_4
2 $\Sigma n_i x_i^3$; m_3
3 $\Sigma n_i x_i^2$; m_2
4 $\Sigma n_i x_i$; m_1
5 Σn_i
6 x_i; g_1

Программа V.1.3/52

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	Сх	0Г	20	П→x6	66	40	Fx²	22
01	x→П5	45	21	×	12	41	x→П0	40
02	x→П4	44	22	FL0	5Г	42	—	11
03	x→П3	43	23	12	12	43	x→П3	43
04	x→П2	42	24	БП	51	44	3	03
05	x→П1	41	25	06	06	45	×	12
06	5	05	26	КП→x0	Г0	46	П→x0	60
07	x→П0	40	27	П→x0	60	47	+	10
08	П→x6	66	28	x→ПД	4Г	48	П→x4	64
09	С/П	50	29	F.	25	49	×	12
10	x→П6	46	30	КП→xД	ГГ	50	—	11
11	←→	14	31	П→x5	65	51	x→П2	42
12	П→x0	60	32	:	13	52	П→x1	61
13	x→ПД	4Г	33	Кx→ПД	LГ	53	П→x3	63
14	F.	25	34	FL0	5Г	54	6	06
15	В↑	0E	35	27	27	55	×	12
16	КП→xД	ГГ	36	С/П	50	56	П→x0	60
17	+	10	37	П→x2	62	57	+	10
18	Кx→ПД	LГ	38	П→x3	63	58	П→x4	64
19	F.	25	39	П→x4	64	59	×	12

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
60	П→x2	62	79	—	11	98	В↑	0E
61	4	04	80	П→x0	60	99	F√⁻	21
62	×	12	81	6	06	100	×	12
63	+	10	82	×	12	101	:	13
64	П→x4	64	83	×	12	102	x→П5	45
65	×	12	84	П→x1	61	103	С/П	50
66	—	11	85	+	10			
67	x→П1	41	86	x→П1	41			
68	С/П	50	87	П→x3	63			
69	Fx²	22	88	П→x0	60			
70	1	01	89	—	11			
71	2	02	90	x→П3	43			
72	:	13	91	Fx²	22			
73	x→П0	40	92	:	13			
74	0	00	93	3	03			
75	.	0—	94	—	11			
76	7	07	95	x→П0	40			
77	×	12	96	П→x2	62			
78	П→x3	63	97	П→x3	63			

Регистры

0 счетчик; g_2
1 $\Sigma n_i x_i^4$; M_4; m_4
2 $\Sigma n_i x_i^3$; M_3; m_3
3 $\Sigma n_i x_i^2$; M_2; m_2
4 $\Sigma n_i x_i$; M_1; m_1
5 Σn_i
6 x_i; g_1
Д оперативный

Для обеих программ используется единая инструкция.

Инструкция V.1.3/54,52

Содержание	Набрать число	Выполнить команды	Результат
1. Очистить сумматоры		В/О С/П	
2. Ввести очередные значения n_i, x_i	n_i x_i	В↑ С/П	n_i x_i
3. Если ввод закончен, далее, нет — к п. 2			
4. Вычислить значения начальных моментов: а) для программы V.1.3/54 б) для программы V.1.3/52		БП 23 С/П БП 26 С/П	M_1—в рег. 4 M_2—в рег. 3 M_3—в рег. 2 M_4—в рег. X,1
5. Вычислить значения центральных моментов без поправок		С/П	m_1—в рег. 4 m_2—в рег. 3 m_3—в рег. 2 m_4—в рег. X,1
6. Ввести длину интервала h и вычислить центральные моменты, асимметрию и эксцесс с поправками Шеппарда	h	С/П	g_1—в рег. X,5 m_1—в рег. 4 m_2—в рег. 3 m_3—в рег. 2 m_4—в рег. 1 g_2—в рег. 0

Время счета: ввод одной пары очередных значений — 14 — 18 с, счет начальных моментов — 8 — 12 с, счет центральных моментов без поправок — 8 — 10 с, счет центральных моментов с поправками, асимметрии и эксцесса — 11 с.

Пример. Вычислить моменты выборки (h = 1,5).

x_i = 3 9 4 6

n_i = 10 3 2 2

Ответ:

Начальные моменты	Центральные моменты без поправок	Центральные моменты с поправками, асимметрия и эксцесс
$M_1 = 4{,}5294$	$m_1 = 4{,}5294$	$m_1 = 4{,}5294$
$M_2 = 25{,}706$	$m_2 = 5{,}1903$	$m_2 = 5{,}003$
$M_3 = 177{,}47$	$m_3 = 14{,}02$	$m_3 = 14{,}02$
$M_4 = 1388{,}06$	$m_4 = 74{,}2686$	$m_4 = 68{,}577$
		$g_1 = 1{,}2529$
		$g_2 = -0{,}26$

V.2. ГИСТОГРАММА

V.2.1. ГИСТОГРАММА (k_{max}=11 ИЛИ 12 ИНТЕРВАЛОВ)

Для построения гистограммы вводится число интервалов наблюдения k и границы изменения x : x_{max} и x_{min}. Количество разбиений интервала в общем случае не превышает 11 ($k \leqslant 11$), однако при использовании МК — 52 замена в адресах 10 и 23 регистра памяти С на Е (вместо команд x → П С, П → xС устанавливаются соответственно x → П Е, П → x Е) увеличивает предельное значение k до 12 ($k \leqslant 12$).

Значения m_j гистограммы помещаются программно в регистры памяти 1 — В (С), номер регистра совпадает с номером интервала.

Программа V.2.1/54,52

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	В↑	0E	14	П→x0	60	28	+	10
01	F.	25	15	x→ПД	4Г	29	Кx→ПД	LГ
02	—	11	16	Сx	0Г	30	+	10
03	/—/	0L	17	Кx→ПД	LГ	31	F.	25
04	←→	14	18	+	10	32	БП	51
05	x→П0	40	19	FL0	5Г	33	21	21
06	F tg⁻¹	1L	20	14	14			
07	F tg	1E	21	С/П	50			
08	:	13	22	П→xС	6С			
09	x→ПС	4С	23	:	13			
10	:	13	24	—	11			
11	1	01	25	x→ПД	4Г			
12	+	10	26	КП→xД	ГГ			
13	В↑	0E	27	1	01			

Регистры

0 счетчик

1—В m_1—m_{11}

С $(x_{min}-x_{max})/k$

Д оперативный

Инструкция V.2.1/54,52

Содержание	Набрать число	Выполнить команды	Результат
1. Переключатель Р/Г поставить в положение Р			
2. Занести значения k, x_{max}, x_{min}	k x_{max} x_{min}	В↑ В↑ В/О С/П	
3. Занести очередное значение x_i	x_i	С/П	$1-\frac{k \cdot x_{min}}{x_{max}-x_{min}}$
4. Если данные не исчерпаны — к п. 3, иначе прочесть результат			m_1—в рег. 1 m_2—в рег. 2 . . . . . . m_k—в рег. k

Время ввода k, x_{max}, x_{min} — 15 с, время ввода одного значения x_i — 4 с.

Пример. k = 5, x_{max} = 17, x_{min} = — 2,

x_i = 3 0 4 6,5 8 —2 11 17 —1 2.

Ответ: m_j = 3, 3, 2, 1, 1.

V.2.2. ГИСТОГРАММА (k_{max}=22 ИНТЕРВАЛА)

Диапазон изменения переменной x делится на k = 22 равных интервала. Попадание x в каждый интервал фиксируется соответствующим счетчиком, содержащим четыре десятичных разряда одного из регистров памяти 1 — В. По окончании ввода данных содержимое счетчиков поочередно выводится на индикатор (от меньших x к большим).

Для построения гистограммы на меньшем числе интервалов ($k_1 < 22$) следует ввести верхнюю границу $x_{max}^{(k_1)}$ по формуле

$$x_{max}^{(k_1)} = x_{min} + 22\,(x_{max} - x_{min})/k_1$$

и по окончании ввода исходных данных опросить k_1 первых счетчиков

Программа V.2.2/54

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	←→	14	07	F tg	1E	14	12	12
01	FBx	0	08	:	13	15	—	11
02	—	11	09	x→ПС	4С	16	x→ПД	4Г
03	1	01	10	:	13	17	КП→x1	Г1
04	1	01	11	1	01	18	1	01
05	x→П0	40	12	Кx→ПВ↑	LE	19	КП→xВ↑	ГЕ
06	F tg⁻¹	1L	13	FL0	5Г	20	+	10

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
21	Кх→ПВ↑	LE	37	4	04	54	×	12
22	С/П	50	38	/—/	0L	55	С/П	50
23	П→хС	6С	39	F10^x	15	56	П→хС	6С
24	:	13	40	БП	51	57	1	01
25	П→хД	6Г	41	19	19	58	—	11
26	—	11	42	1	01	59	С/П	50
27	х→П0	40	43	2	02	60	БП	51
28	КП→хВ↑	ГЕ	44	х→П0	40	61	45	45
29	←→	14	45	КП→х0	Г0			
30	П→х0	60	46	х→ПС	4С			
31	—	11	47	КП→хС	ГС			
32	2	02	48	←→	14			
33	F1/x	23	49	П→хС	6С			
34	—	11	50	—	11			
35	Fx≥0	59	51	1	01			
36	18	18	52	ВП	0С			
			53	4	04			

Регистры

0 счетчик
1—В гистограмма
С оперативный
Д $1/x_{max}/(x_{min}-x_{max})-1$

Программа V.2.2/52

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	←→	14	23	+	10	46	х→ПС	4С
01	FBx	0	24	Кх→ПД	LГ	47	КП→хС	ГС
02	—	11	25	С/П	50	48	←→	14
03	1	01	26	П→хС	6С	49	П→хС	6С
04	1	01	27	:	13	50	—	11
05	х→П0	40	28	П→хЕ	6Е	51	1	01
06	F ln	18	29	—	11	52	ВП	0С
07	Fe^x	16	30	х→ПД	4Г	53	4	04
08	:	13	31	К{х}	35	54	×	12
09	х→ПС	4С	32	2	02	55	С/П	50
10	:	13	33	F1/x	23	56	П→хС	6С
11	1	01	34	—	11	57	1	01
12	П→х0	60	35	Fx≥0	59	58	—	11
13	х→ПД	4Г	36	21	21	59	С/П	50
14	F	25	37	4	04	60	БП	51
15	Кх→ПД	LГ	38	/—/	0L	61	45	45
16	FL0	5Г	39	F10^x	15			
17	12	12	40	БП	51			
18	—	11	41	22	22			
19	х→ПЕ	4Е	42	1	01			
20	КП→х1	Г1	43	2	02			
21	1	01	44	х→П0	40			
22	КП→хД	ГГ	45	КП→х0	Г0			

Регистры

0 счетчик
1—В гистограмма
С,Д оперативные
Е $1/x_{max}/(x_{min}-x_{max})-1$

Для обеих гистограмм используется единая инструкция.

Инструкция V.2.2/54,52

Содержание	Набрать число	Выполнить команды	Результат
1. Занести границы возможных значений переменной х	x_{min} x_{max}	В↑ В/О С/П	x_{min} 1
2. Занести очередное число x_i	x_i	С/П	
3. Если данные исчерпаны, далее, нет — к п. 2			
4. Перейти к выводу результатов		БП 42	
5. Вывести содержимое очередного счетчика		С/П	m
6. Для продолжения вывода—к п. 5			

Время ввода x_{min}, x_{max} — 15—25 с, время занесения одного числа — 7 с, время расшифровки содержимого счетчика — 2—5 с.

Пример. Построить гистограмму на три интервала выборки ($0{,}4 \leqslant x \leqslant 1$):

0,7 0,4 0,43 0,62 0,9 0,85 0,96

Решение. Введем $x_{min} = 0{,}4$, $x_{max}^{(3)} = 4{,}8$ и исходную выборку. Ответ: $m_1 = 2{,}2{,}3$

V.3. МЕРА ОТКЛОНЕНИЯ χ^2

По программе вычисляется величина

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(m_i - np_i)^2}{np_i},$$

где m_i — количество случайных величин x_j, попавших в i-й интервал, $\sum_{i=1}^{k} m_i = n$,

k — количество интервалов, p_i — вероятность попадания x_j в i-й интервал.

Гипотеза о принадлежности случайной выборки x_j ($j = 1; 2; \ldots; n$) к генеральной совокупности с плотностью вероятности p (x) (с вероятностями p_i попадания в i-й интервал) может быть проверена по таблицам χ^2 [20] или по программе V.5.4.

V.3.1. С ВВОДОМ *n*

Программа V.3.1/54,52

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	/—/	0L	04	Fx^2	22	08	—	11
01	КНОП	54	05	/—/	0L	09	БП	51
02	0	00	06	←→	14	10	03	03
03	С/П	50	07	:	13			

Инструкция V.3.1/54,52

Содержание	Набрать число	Выполнить команды	Результат
1. Ввести n	n	В/О С/П	
2. Занести очередную пару p_i, m_i	p_i m_i	В↑ С/П	
3. Если исходные данные исчерпаны, далее, иначе — к п. 2			
4. Вычислить χ^2		БП 06 С/П	χ^2

Время ввода n — 1 с, одной пары p_i, m_i — 2 с; время вычисления χ^2 — 2 с.

Пример. Вычислить величину χ^2 при n = 16 для следующих значений (p_i; m_i):

0,1; 2 0,3; 5 0,4; 3 0,2; 6

Ответ: $\chi^2 = 4{,}365$.

V.3.2. БЕЗ ВВОДА *n*

Программа V.3.2/54,52

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	Сх	0Г	08	+	10	16	FBx	0
01	В↑	0Е	09	←→	14	17	—	11
02	←→	14	10	П→х2	62	18	С/П	50
03	С/П	50	11	+	10			
04	х→П2	42	12	БП	51		Регистр	
05	Fx²	22	13	02	02			
06	←→	14	14	←→	14	2	m_i	
07	:	13	15	:	13			

Инструкция V.3.2/54,52

Содержание	Набрать число	Выполнить команды	Результат
1. Очистить сумматоры		В/О С/П	0
2. Занести очередные значения p_i и m_i	p_i m_i	В↑ С/П	
3. Если данные исчерпаны, далее, нет — к п. 2			
4. Вычислить χ^2		БП 14 С/П	χ^2

Время ввода пары чисел p_i и m_i — 3 с, время вычисления χ^2 — 2с.

Пример. Вычислить величину χ^2 для выборки

p_i = 0,1 0,4 0,3 0,2

m_i = 3 14 8 5

Ответ: $\chi^2 = 0{,}6111$.

V.4. ПРОВЕРКА СТАТИСТИЧЕСКИХ ГИПОТЕЗ

По приведенным программам вычисляется статистика t случайных наблюдений, которая используется для проверки исходной гипотезы. По полученной статистике t с помощью специальных таблиц (например, [14], [20]) находится соответствующий уровень значимости Q, и если эта величина мала ($Q < Q_0$, где Q_0 — пороговое значение, выбираемое обычно в пределах 0,01—0,1 исходя из условий эксперимента), то исходная гипотеза отвергается [19].

В некоторых из приведенных программ, кроме статистики t, вычисляется также приближенная оценка уровня значимости Q.

V.4.1. ПРОВЕРКА ГИПОТЕЗЫ О РАВЕНСТВЕ СРЕДНИХ

Проверяется гипотеза о том, что у двух групп парных наблюдений $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и $y_1, y_2, \ldots, y_n$, принадлежащих двум нормально распределенным генеральным совокупностям с неизвестными средними μ_1 и μ_2, эти средние равны между собой: $\mu_1 = \mu_2$.

Вычисляется статистика t, имеющая распределение Стьюдента с n — 1 степенью свободы [14]:

$$t = \frac{\sqrt{n-1}\sum_i (x_i - y_i)}{\sqrt{n\sum_i (x_i - y_i)^2 - \left(\sum_i (x_i - y_i)\right)^2}}.$$

Программа V.4.1/54,52

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	Сх	0Г	11	П→х4	64	22	1	01
01	В↑	0Е	12	+	10	23	П→х5	65
02	х→П5	45	13	←→	14	24	—	11
03	С/П	50	14	БП	51	25	:	13
04	—	11	15	03	03	26	F√	21
05	х→П4	44	16	FBx	0	27	:	13
06	Fx²	22	17	Fx²	22	28	С/П	50
07	+	10	18	←→	14			
08	←→	14	19	П→х5	65		Регистры	
09	КП→х5	Г5	20	×	12	4	оперативный	
10	F.	25	21	—	11	5	п	

Инструкция V.4.1/54,52

Содержание	Набрать число	Выполнить команды	Результат
1. Очистить сумматор		В/О С/П	
2. Ввести значения очередной пары данных	x_1 y_1	В↑ С/П	
3. Если данные исчерпаны, далее, нет — к п. 2			
4. Вычислить значение t		БП 16 С/П	t

Время занесения одной пары чисел — 4 с, вычисление — 4 с.

Пример. Проверить гипотезу о равенстве средних для группы нормально распределенных попарных наблюдений

$x_1 = 3,\ 5\ \ 4\ \ 5{,}5\ \ 3\ \ 4$

$y_1 = 2,\ 5\ \ 3\ \ 3\ \ 3\ \ 4{,}5$

Решение.

По программе вычисляется статистика t представленной пары выборок: $t = 1{,}554$. Затем по таблицам распределения Стьюдента определяется уровень значимости Q : Q (1,554/4) ≈ 0,2. Поэтому нет оснований отвергать гипотезу $\mu_1 = \mu_2$.

V.4.2. ПРОВЕРКА ГИПОТЕЗЫ О ВЕЛИЧИНЕ РАЗНОСТИ МЕЖДУ СРЕДНИМИ ДВУХ ВЫБОРОК

Проверяется гипотеза о том, что у пары независимых выборок $x_1, x_2, \ldots, x_{n_1}$ и $y_1, y_2, \ldots, y_{n_2}$ — из двух генеральных совокупностей с нормальным распределением вероятностей и неизвестными средними значениями μ_1 и μ_2 разность $\mu_1 - \mu_2 = D$, где D — заданное число.

По программе V.4.2./54, 52 вычисляется статистика

$$t = \frac{\bar{x} - \bar{y} - D}{\left(\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}\right)^{\frac{1}{2}}} \left[\left(\frac{n_1 S_1^2}{\sigma_1^2} + \frac{n_2 S_2^2}{\sigma_2^2}\right) \Big/ (n_1 + n_2 - 2)\right]^{-\frac{1}{2}},$$

где

$$\bar{x} = \frac{1}{n_1} \sum_{i=1}^{n_1} x_i, \quad \bar{y} = \frac{1}{n_2} \sum_{j=1}^{n_2} y_j;$$

$$S_1^2 = \frac{1}{n_1} \sum_{i=1}^{n_1} x_i^2 - (\bar{x})^2, \quad S_2^2 = \frac{1}{n_2} \sum_{j=1}^{n_2} y_j^2 - (\bar{y})^2.$$

Статистика t используется для решения двух задач:

а) дисперсии генеральных совокупностей σ_1^2 и σ_2^2 не равны и априори известны;

б) дисперсии генеральных совокупностей σ_1^2 и σ_2^2 равны, но априори неизвестны.

Статистика имеет распределение Стьюдента с $n_1 + n_2 - 2$ степенями свободы.

Уровень значимости Q $(t/n_1 + n_2 - 2)$ определяется по программам V. 5.5 или с помощью таблиц распределения Стьюдента (например, [20]).

Программа V.4.2/54,52

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	П→х 2	62	26	:	13	52	+	10
01	х→П 5	45	27	х→П 2	42	53	2	02
02	П→х 3	63	28	F x^2	22	54	—	11
03	х→П 6	46	29	—	11	55	:	13
04	П→х 4	64	30	х→П 3	43	56	F $\sqrt{\ }$	21
05	х→П 7	47	31	←→	14	57	х→П 0	40
06	Сх	0Г	32	БП	51	58	С/П	50
07	х→П 0	40	33	10	10	59	/—/	0L
08	х→П 1	41	34	П→х 4	64	60	П→х 5	65
09	х→П 4	44	35	:	13	61	+	10
10	С/П	50	36	х→П 0	40	62	П→х 2	62
11	К П→х 4	Г4	37	←→	14	63	—	11
12	←→	14	38	П→х 7	67	64	П→х 0	60
13	В↑	0E	39	:	13	65	:	13
14	В↑	0E	40	х→П 1	41	66	С/П	50
15	F x^2	22	41	+	10			
16	П→х 1	61	42	П→х 3	63			
17	+	10	43	П→х 0	60			
18	х→П 1	41	44	:	13			
19	П→х 4	64	45	П→х 6	66			
20	:	13	46	П→х 1	61			
21	←→	14	47	:	13			
22	П→х 0	60	48	+	10			
23	+	10	49	×	12			
24	х→П 0	40	50	П→х 7	67			
25	П→х 4	64	51	П→х 4	64			

Регистры

0	Σy
1	Σy^2
2	$\Sigma y / n_2$
3	$[\Sigma y^2 - (\Sigma y)^2/n_2]/n_2$
4	n_2
5	$\Sigma x / n_1$
6	$[\Sigma x^2 - (\Sigma x)^2/n_1]/n_1$
7	n_1

Инструкция V.4.2/54,52

Содержание	Набрать число	Выполнить команды	Результат
1. Перейти к вводу первой выборки		В/О С/П	
2. Ввести очередное значение x_i	x_i	С/П	x_i
3. Если первая выборка исчерпана, далее, нет — к п. 2			
4. Перейти к вводу второй выборки		В/О С/П	
5. Ввести очередное значение y_j	y_j	С/П	y_j
6. Если вторая выборка исчерпана, далее, нет — к п. 5:			
7. а) если σ_1^2 и σ_2^2 известны	σ_1^2 σ_2^2	В↑ БП 34 С/П	
б) если σ_1^2 и σ_2^2 неизвестны	1	В↑ БП 34 С/П	
8. Ввести D и вычислить результат	D	С/П	t

Время ввода числа — 6 с, ввода σ_1^2 и σ_2^2 — 7 с, время счета — 3 с.

Пример. Проверить гипотезу $\mu_1 - \mu_2 = 0$ ($D = 0$) для двух выборок с одинаковыми, но неизвестными дисперсиями

x_i = 12 28 21 8 16

y_j = 20 19 6

Ответ: $t = 0{,}3506$. По таблицам распределения Стьюдента [20] определяется уровень значимости Q (0,3506/6) $\simeq$ 0,744.

Поскольку $Q > 0{,}1$, отвергать гипотезу H_0: $D = 0$ нет оснований.

V.4.3. ПРОВЕРКА ГИПОТЕЗЫ О РАВЕНСТВЕ СРЕДНЕГО ЗАДАННОМУ ЧИСЛУ

Для выборки $x_1, x_2, \ldots, x_n$ из нормально распределенной генеральной совокупности с неизвестными средним μ и дисперсией σ^2 проверяется гипотеза $\mu = \mu_0$, где μ_0 — заданное число.

По программе вычисляется статистика t [14]

$$t = \frac{\sqrt{n-1}\left(\sum_i x_i - n\mu_0\right)}{\sqrt{n\sum_i x_i^2 - \left(\sum_i x_i\right)^2}},$$

имеющая распределение Стьюдента с n-1 степенью свободы.

По полученным значениям t и n-1 по таблицам распределения Стьюдента [14,20] или по программам V.5.5 вычисляется уровень значимости Q (t/n — 1).

Программа V.4.3/54,52

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	Сх	0Г	13	БП	51	26	—	11
01	х→П 2	42	14	03	03	27	:	13
02	х→П 4	44	15	П→х 4	64	28	F √	21
03	х→П 3	43	16	×	12	29	:	13
04	П→х 2	62	17	—	11	30	С/П	50
05	С/П	50	18	П→х 3	63			
06	+	10	19	П→х 4	64		Регистры	
07	х→П 2	42	20	×	12	2	Σ x	
08	К П→х 4	Г4	21	П→х 2	62	3	Σ x²	
09	F Вх	0	22	F x²	22	4	n	
10	F x²	22	23	—	11			
11	П→х 3	63	24	П→х 4	64			
12	+	10	25	1	01			

Инструкция V.4.3/54,52

Содержание	Набрать число	Выполнить команды	Результат
1. Очистить сумматоры		В/О С/П	
2. Занести очередное значение x_i	x_i	С/П	$\sum_{j=1}^{i} x_i$
3. Если данные исчерпаны, далее, нет — к п. 2			
4. Ввести μ_0 и вычислить t	μ_0	БП 15 С/П	t

Время ввода одного числа — 4 с, время вычисления t — 6 с.

Пример. Проверить гипотезу H_0:$\mu = \mu_0$, если $\mu_0 = 8$, для выборки 12, 8, 8, 11, 5.

Решение. По программе получаем $t = 0{,}645$, откуда по таблицам [20] определяем Q (0,645/4) = 0,56. Так как $Q > 0{,}1$, то нет оснований отвергать гипотезу $\mu_0 = 8$.

V.4.4. ПРОВЕРКА ГИПОТЕЗЫ О РАВЕНСТВЕ ВЕРОЯТНОСТЕЙ ДВУХ РЕДКИХ СОБЫТИЙ

Пусть на непересекающихся интервалах времени продолжительностью t_1 и t_2 произошло соответственно k_1 и k_2 событий. Если средние количества успехов за единицу времени

$$m_1 = \frac{k_1}{t_1} \text{ и } m_2 = \frac{k_2}{t_2}$$

различны, можно ли это различие считать случайным?

Статистика

$$\chi^2 = \frac{(k_1 t_2 - k_2 t_1)^2}{t_1 t_2 (k_1 + k_2)}$$

распределена по закону «хи-квадрат» с одной степенью свободы [20].

По программам определяется χ^2 и уровень значимости Q. Используется приближенное соотношение [21]

$$Q \approx \exp\left(-(\chi^2)^{0{,}813}\right) \approx \exp\left(-6{,}5^{\lg \chi^2}\right).$$

Программа V.4.4/21

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	:	36	04	↔	16	12	×	26
01	Р ,	43	05	Р 2	21	13	↑	06
02	С/П	78	10	×	26	14	Р /—/	53
03	Р /—/	53	11	Р ,	43	15	+	96

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
20	P ,	43	33	,	46
21	F 2	22	34	8	84
22	—	86	35	1	14
23	F x^2	55	40	3	34
24	↑	06	41	←→	16
25	P /—/	53	42	x^y	38
30	:	36	43	/—/	56
31	P 2	21	44	P e^x	33
32	0	04	45	С/П	78

Инструкция

t_1 ↑ t_2 В/О С/П $к_1$ ↑ $к_2$ С/П

Результат

Q

Регистры

2 $к_1$; χ^2

S1 оперативный

Время вычисления — 7 с.

Программа V.4.4/54,52

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	←→	14	13	—	11	26	F e^x	16
01	F .	25	14	F x^2	22	27	С/П	50
02	:	13	15	←→	14			
03	x→П 0	40	16	:	13			
04	←→	14	17	x→П 1	41			
05	x→П 1	41	18	F lg	17			
06	×	12	19	6	06			
07	←→	14	20	.	0—			
08	П→x 0	60	21	5	05			
09	×	12	22	F ln	18			
10	+	10	23	×	12			
11	F Bx	0	24	F e^x	16			
12	П→x 1	61	25	/—/	0L			

Инструкция

$к_1$ В↑ t_1 В↑ $к_2$ В↑ t_2 В/О С/П

Результат

Q

Регистры

0 t_1/t_2

1 . $к_1$; χ^2

Время вычисления — 10 с.

Пример. $t_1 = 52$, $t_2 = 270$, $k_1 = 46$, $k_2 = 170$. $Q = 0{,}040$, $\chi^2 = 4{,}23$.

V.4.5. ПРОВЕРКА ГИПОТЕЗЫ О РАВЕНСТВЕ ВЕРОЯТНОСТИ ЗАДАННОМУ ЧИСЛУ

Пусть некоторое событие в n независимых опытах наступило m раз. Проверяется гипотеза о том, что вероятность этого события равна p.

Статистика

$$\chi^2 = \frac{(m - np)^2}{np(1-p)}$$

при $np \geqslant 3$—5 распределена по закону, близкому к закону распределения «хи-квадрат» с одной степенью свободы [23].

По программам рассчитываются величина χ^2 и уровень значимости Q

$$Q = \exp(-(\chi^2)^{0,813}) \approx \exp(-6{,}5^{\lg \chi^2}).$$

Программа V.4.5/21

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	×	26	20	P 2	21
01	←→	16	21	0	04
02	×	26	22	,	46
03	—	86	23	8	84
04	P 2	21	24	1	14
05	←→	16	25	3	34
10	С/П	78	30	←→	16
11	—	86	31	x^y	38
12	F x^2	55	32	/—/	56
13	↑	06	33	P e^x	33
14	F 2	22	34	С/П	78
15	:	36			

Инструкция

p ↑ n В/О С/П m С/П

Результат

Q

Регистр

2 пр (1—p); χ^2

Время вычисления — 8 с.

Программа V.4.5/54,52

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	x→П 8	48	11	x→П 8	48
01	×	12	12	F lg	17
02	—	11	13	6	06
03	F Bx	0	14	.	0—
04	F √	21	15	5	05
05	:	13	16	F ln	18
06	F x^2	22	17	×	12
07	1	01	18	F e^x	16
08	П→x 8	68	19	/—/	0L
09	—	11	20	F e^x	16
10	:	13	21	С/П	50

Инструкция

m В↑ n В↑ p В/О С/П

Результат

Q

Регистр

8 p; χ^2

Время вычисления — 10 с.

Пример. $m = 1$, $n = 10$, $p = 0{,}5$.

Ответ: $Q = 0{,}011$, $\chi^2 = 6{,}4$.

При пятипроцентном, например, уровне значимости гипотезу о том, что вероятность исследуемого события равна 0,5, следует отвергнуть.

V.4.6. ПРОВЕРКА ГИПОТЕЗЫ ОБ ОДНОРОДНОСТИ ДВУХ ВЫБОРОК

Пусть имеются две выборки $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ и $\xi'_1, \xi'_2, \ldots, \xi'_n$, каждая из которых состоит из независимых, непрерывных и одинаково распределенных случайных величин.

Для проверки гипотезы о том, что функции распределения случайных величин ξ и ξ' одинаковые, используется критерий ω^2 [20].

Статистика T критерия ω^2 зависит лишь от номеров порядковых элементов выборок в общем вариационном ряду и равна

$$T = \frac{\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}(r_i - i)^2 + \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(s_j - j)^2 - \frac{1}{6}[4mn + m + n]}{\sqrt{(m+n+1)\left[m+n+1-\frac{3}{4mn}(m+n)^2\right]}} + \frac{1}{6},$$

где r_i, s_i — порядковые номера элементов соответственно первой и второй выборок в общем вариационном ряду.

Критерий эффективен при m; n $\geqslant$ 5—7.

По программе вычисляется статистика T и приближенная оценка уровня значимости Q [7]

$$Q = e^{-5,58 \cdot T}/\lg 32$$

с относительной погрешностью не более 5 % в области значений $1 \cdot 10^{-3} \leqslant Q \leqslant 1 \cdot 10^{-1}$. Для получения точных значений Q при вычисленном значении T можно воспользоваться таблицами, приведенными, например, в [20].

Гипотеза об однородности пары выборок отвергается, если уровень значимости Q меньше порогового значения Q_0 ($Q < Q_0$).

Для вычисления T следует предварительно расположить элементы обеих выборок в виде общего вариационного ряда в порядке возрастания их величин и выделить серии $l_к$ расположенных подряд элементов каждой выборки. Полученные значения $l_к$ являются исходными для расчета T и Q.

Программа V.4.6./54,52

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	К НОП	54	15	П→x 5	65	30	С/П	50
01	0	00	16	П→x 2	62	31	БП	51
02	x→П 0	40	17	+	10	32	08	08
03	x→П 1	41	18	x→П 2	42	33	П→x 2	62
04	x→П 2	42	19	—	11	34	1	01
05	x→П 3	43	20	F x^2	22	35	+	10
06	x→П 4	44	21	П→x 5	65	36	П→x 2	62
07	+	10	22	×	12	37	F x^2	22
08	x→П 5	45	23	П→x 3	63	38	3	03
09	П→x 0	60	24	+	10	39	×	12
10	+	10	25	П→x 4	64	40	П→x 1	61
11	П→x 1	61	26	x→П 3	43	41	П→x 0	60
12	x→П 0	40	27	←→	14	42	×	12
13	←→	14	28	x→П 4	44	43	4	04
14	x→П 1	41	29	П→x 5	65	44	×	12

Продолжение

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
45	x→П 5	45	59	+	10	73	×	12
46	:	13	60	6	06	74	/—/	0L
47	—	11	61	:	13	75	F e^x	16
48	×	12	62	—	11	76	3	03
49	F $\sqrt{\ }$	21	63	←→	14	77	2	02
50	П→x 3	63	64	:	13	78	F lg	17
51	П→x 1	61	65	6	06	79	:	13
52	:	13	66	F 1/x	23	80	С/П	50
53	П→x 4	64	67	+	10			
54	П→x 0	60	68	x→П 5	45		Регистры	
55	:	13	69	5	05			
56	+	10	70	.	0—		0—4 оперативные	
57	П→x 5	65	71	5	05		5 T	
58	П→x 2	62	72	8	08			

Инструкция V.4.6/54,52

Содержание	Набрать число	Выполнить команды	Результат
1. Перейти к началу программы		В/О	
2. Занести длину очередной серии $l_к$	$l_к$	С/П	$l_к$
3. Если данные исчерпаны, далее, нет — к п. 2			
4. Вычислить T и Q		БП 33 С/П	Q — в рег. X T — в рег. 5

Время вычисления после ввода очередного $l_к$ — 8 с, время вычисления T и Q — 18 с.

Пример. Даны две выборки

8, 15, 12, 6,

и 10, 18, 9, 14, 21, 16, 11

Вычислить T и Q и проверить гипотезу об однородности этих выборок при $Q_0 = 0,1$.

Решение. Составим общий вариационный ряд и выделим серии элементов, принадлежащих одной и той же выборке (подчеркнуто),

6, 8, 9, 10, 11, 12, 14, 15, 16, 18, 21.

Длины серий (значения $l_к$) равны

2, 3, 1, 1, 1, 3.

Полученные таким образом значения $l_к$ введем в машину согласно инструкции.

Ответ: T = 0,198, Q = 0,220; так как $Q > Q_0 = 0,1$, то принимается гипотеза об однородности представленной пары выборок

V.4.7. ПРОВЕРКА ГИПОТЕЗЫ НОРМАЛЬНОСТИ ПО ВЕЛИЧИНАМ АСИММЕТРИИ И ЭКСЦЕССА

Проверяется гипотеза о нормальности распределения случайной величины x, представленной выборкой объема n ($n \geqslant 4$).

Предварительно (например, по программе V. 1.2) вычисляется асимметрия q_1 и эксцесс q_2 исходной выборки. Если q_1 и q_2 существенно превышают свои гипотетические среднеквадратичные отклонения δ_1 и δ_2

$$\delta_1 = \left[\frac{6(n-1)}{(n+1)(n+3)}\right]^{1/2},$$

$$\delta_2 = \frac{1}{(n-1)}\left[\frac{24(n-2)(n-3)}{(n+3)(n+5)}\right]^{1/2},$$

то гипотеза о нормальности распределения случайной величины отвергается.

По программе вычисляются δ_1 и δ_2.

Программа V.4.7/54,52

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	x→П 1	41	15	С/П	50
01	1	01	16	П→x 1	61
02	—	11	17	4	04
03	1	01	18	×	12
04	П→x 1	61	19	П→x 1	61
05	+	10	20	П→x 0	60
06	:	13	21	—	11
07	6	06	22	F L 0	5Г
08	×	12	23	18	18
09	П→x 1	61	24	F x^2	22
10	3	03	25	:	13
11	x→П 0	40	26	5	05
12	+	10	27	БП	51
13	:	13	28	04	04
14	F $\sqrt{\ }$	21			

Инструкция

n В/О С/П С/П

Результат

δ_1, δ_2

Регистры

0 оперативный
1 n

Время вычисления δ_1 — 5 с, δ_2 — 11 с.
Пример. n = 20. δ_1 = 0,486, δ_2 = 0,841.

V.4.8. ПРОВЕРКА ГИПОТЕЗЫ НОРМАЛЬНОСТИ ПО КРИТЕРИЮ χ^2

Проверяется гипотеза о том, что выборка $x_1, x_2, \ldots, x_n$ независимых наблюдений случайной величины x принадлежит генеральной совокупности, описываемой функцией нормального распределения $F_0(x)$ со средним значением m_1 и дисперсией m_2, определяемыми из выборки.

По программе вся область изменения x делится на 9 взаимно примыкающих интервалов, границы которых установлены так, что вероятность попадания случайной величины с функцией распределения $F_0(x)$ в каждый интервал равна 1/9. По исходной выборке вычисляется величина χ^2 и уровень значимости Q (по критерию χ^2 с 6 степенями свободы). По вычисленному значению Q проверяется гипотеза случайности отклонения наблюдавшихся частот от их ожидаемых значений [30].

Количество элементов выборки n следует брать не менее 30—50.

Алгоритм вычислений.

1. Предварительные операции:

а) вычисляются среднее значение m_1 и дисперсия m_2 исходной выборки (например, по программе V.1.1);

б) полученные значения m_1 и m_2 вводятся в калькулятор;

в) исходная выборка $x_1, x_2, \ldots, x_n$ вводится в калькулятор;

2. Операции, выполняемые программно:

а) ось x делится на 9 интервалов.

Значение x_i ($i = 1; 2; \ldots; n$) относится к интервалу k ($k = 1; 2; \ldots; 9$) по правилу

$$\frac{k-1}{9} \leqslant \Phi(z_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z_i} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt < \frac{k}{9},$$

где

$$z_i = \frac{x_i - m_1}{\sqrt{m_2}},$$

а интеграл вероятности вычисляется приближенно по формуле

$$\tilde{\Phi}(z_i) = \frac{1}{2}\left[1 + \operatorname{sign}(z_i)\cdot\sqrt{1 - e^{-(0{,}792\cdot z_i)^2}}\right];$$

б) определяется количество c_k элементов исходной выборки, попавших в каждый интервал k ($k = 1; 2; \ldots; 9$);

в) по полученным значениям c_k вычисляется величина

$$\chi^2 = \sum_{k=1}^{9} \frac{(c_k - n/9)^2}{n/9};$$

г) уровень значимости $Q(\chi^2/6)$ вычисляется по формуле [11]

$$Q(\chi^2/6) = e^{-\frac{\chi^2}{2}}\left[1 + \frac{\chi^2}{2}\left(1 + \frac{\chi^2}{4}\right)\right].$$

Программа V.4.8/54,52

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	F √‾	21	30	F x²	22	60	F .	25
01	6	06	31	/—/	0L	61	К П→x А	Г—
02	.	0—	32	F eˣ	16	62	П→x С	6С
03	2	02	33	—	11	63	—	11
04	F lg	17	34	F √‾	21	64	F x²	22
05	:	13	35	×	12	65	+	10
06	x→П Д	4Г	36	9	09	66	F L0	5Г
07	←→	14	37	×	12	67	58	58
08	x→П С	4С	38	1	01	68	П→x С	6С
09	9	09	39	1	01	69	:	13
10	x→П 0	40	40	+	10	70	x→П Д	4Г
11	П→x 0	60	41	2	02	71	4	04
12	x→П А	4—	42	:	13	72	+	10
13	0	00	43	x→П В	4L	73	П→x Д	6Г
14	К x→П А	L—	44	К П→x В	ГL	74	×	12
15	F L 0	5Г	45	1	01	75	2	02
16	11	11	46	+	10	76	+	10
17	x→П 0	40	47	К x→П В	LL	77	8	08
18	С/П	50	48	П→x 0	60	78	:	13
19	П→x С	6С	49	1	01	79	П→x Д	6Г
20	—	11	50	+	10	80	F eˣ	16
21	П→x Д	6Г	51	БП	51	81	F √‾	21
22	:	13	52	17	17	82	:	13
23	В↑	0Е	53	9	09	83	С/П	50
24	ВП	0С	54	x→П 0	40			
25	F x²	22	55	:	13			
26	F √	21	56	x→П С	4С			
27	:	13	57	0	00			
28	1	01	58	П→x 0	60			
29	F Вх	0	59	x→П А	4—			

Регистры

0; А—С	оперативные
1—9	гистограмма
Д	χ^2

Инструкция V.4.8/54,52

Содержание	Набрать число	Выполнить команды	Результат
1. Занести параметры выборки m_1, m_2	m_1	В↑	m_1
	m_2	В/О С/П	0
2. Занести очередное значение x_i	x_i	С/П	i
3. Если данные исчерпаны, далее, нет — к п. 2			
4. Определить уровень значимости		БП 53 С/П	Q—в рег. X χ^2—в рег. Д
5. Для нового счета — к п. 2			

Время ввода m_1, m_2 — 22 с, занесения одного значения x_i — 14 с, вычисления χ^2, Q — 40 с.

Пример. Вычислить χ^2 и Q для выборки из раздела V.1.1: $x_i = -1, 3, 2, 0, 4$, $m_1 = 1{,}6$, $m_2 = 3{,}44$ (такая малая выборка взята только для примера).

Ответ: $\chi^2 = 4{,}0$; $Q = 0{,}575$.

V.4.9. КРИТЕРИЙ ЗНАКОВ

Критерий знаков используется для проверки гипотезы о независимости и одинаковом распределении двух классов случайных величин x, y при одинаковом количестве элементов $n_1 = n_2 = n$ [23]. Согласно этому критерию попарно сравниваются значения x_i и y_i и из всех пар разностей $x_i - y_i$ определяется количество m положительных разностей $x_i - y_i > 0$, а пары, у которых $x_i = y_i$, из рассмотрения исключаются.

Вероятность того, что из n пар m или более разностей положительны, равна

$$P_n(m) = \frac{1}{2^n} \sum_{l=m}^{n} C_n^l.$$

По программе вычисляется $P_n(m)$ — уровень значимости критерия знаков

Программа V.4.9/21

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	Р 4	41	24	Р x≠0	79	52	+	96
01	←→	16	25	/—/	56	53	БП	58
02	—	86	30	F 4	42	54	←→	16
03	1	14	31	↑	06	55	F 3	32
04	+	96	32	F 5	52	60	С/П	78
05	Р 5	51	33	—	86			
10	F 4	42	34	1	14			
11	/—/	56	35	+	96			
12	2	24	40	↑	06			
13	xy	38	41	F 5	52			
14	Р 2	21	42	:	36			
15	Р 3	31	43	↑	06			
20	F 5	52	44	F 3	32			
21	1	14	45	×	26			
22	—	86	50	↑	06			
23	Р 5	51	51	F 2	22			

Инструкция

m ↑ n В/О С/П

Регистры

2	x^{-n}
3	P
4	n
5	оперативный

Время вычисления — T = 3 (n + 3 — m) с.

Программа V.4.9/54,52

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	x→П 0	40	12	22	22	24	С/П	50
01	←→	14	13	П→x 0	60			
02	—	11	14	П→x 1	61			
03	1	01	15	—	11			
04	+	10	16	1	01			
05	x→П 1	41	17	+	10			
06	П→x 0	60	18	П→x 1	61			
07	/—/	0L	19	:	13			
08	2	02	20	×	12			
09	F xy	24	21	+	10			
10	В↑	0E	22	F L1	5L			
11	БП	51	23	13	13			

Инструкция

m В↑ n В/О С/П

Регистры

0 n

1 оперативный

Время вычисления $T = 3(n + 2 - m)$ с.

Пример. Проверить гипотезу независимости и одинакового распределения признаков при $n = 15$, $m = 10$.

Ответ: $P_{15}(10) = 0{,}151$.

Выбрав, например, доверительный уровень 0,1, получаем, что гипотезу о принадлежности x и y одной и той же генеральной совокупности следует принять.

V.4.10. КРИТЕРИЙ ВИЛКОКСОНА

Критерий Вилкоксона используется для проверки гипотезы об относительной несмещенности двух групп наблюдений. Располагая всю совокупность обоих наблюдений в единый вариационный ряд, запишем полученный ряд в виде

$$x_1, y_1; x_2, y_2; \ldots; x_k, y_k; \ldots,$$

где x_k —количество наблюдений группы x, таких, что все значения x, относящиеся к x_k, по величине меньше значений y, относящихся к группе y_k, и больше значений наблюдений y, относящихся к группе y_{k-1}; аналогично для y_k и т. д.

Пусть m — полное количество элементов группы x, а n —полное количество элементов группы y. Для проверки гипотезы относительной несмещенности используется количество инверсий в общем вариационном ряду. Вычисляется количество инверсий и соответствующий уровень значимости.

Приводятся два способа вычисления: по точной и приближенной формулам.

Уровень значимости критерия. Вилкоксона вычисляется путем расчета относительного числа состояний, при которых количество инверсий оказывается не более полученного из выборки (порогового уровня). Ограничение на Σx_i : $\Sigma x_i \leqslant 9$, ограничений на Σy_i нет.

V.4.10.1.1. Односторонний критерий Вилкоксона

Вычисляется M —количество инверсий y относительно x и соответствующий уровень значимости P: относительное число возможных состояний, при которых число инверсий не превышает M.

Программа V.4.10.1.1/54

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	К НОП	54	32	x→П Д	4Г	64	F x≥0	59
01	0	00	33	П→x 0	60	65	75	75
02	x→П 1	41	34	1	01	66	F L0	5Г
03	x→П А	4—	35	—	11	67	62	62
04	x→П В	4L	36	x→П 0	40	68	П→x С	6С
05	x→П С	4С	37	F x≠0	57	69	1	01
06	x→П Д	4Г	38	78	78	70	+	10
07	F .	25	39	К П→x В↑	ГЕ	71	x→П С	4С
08	В↑	0E	40	В↑	0E	72	П→x А	6—
09	П→x В	6L	41	П→x 0	60	73	БП	51
10	+	10	42	—	11	74	36	36
11	x→П В	4L	43	П→x В	6L	75	П→x А	6—
12	F .	25	44	—	11	76	БП	51
13	←→	14	45	F x<0	5С	77	34	34
14	П→x А	6—	46	33	33	78	П→x А	6—
15	+	10	47	←→	14	79	x→П 0	40
16	x→П А	4—	48	1	01	80	П→x С	6С
17	×	12	49	+	10	81	П→x В	6L
18	П→x Д	6Г	50	К x→П В↑	LE	82	П→x 0	60
19	+	10	51	П→x А	6—	83	+	10
20	x→П Д	4Г	52	П→x 0	60	84	:	13
21	С/П	50	53	1	01	85	П→x 0	60
22	БП	51	54	+	10	86	×	12
23	08	08	55	x→П 0	40	87	F L0	5Г
24	П→x А	6—	56	—	11	88	81	81
25	В↑	0E	57	F x<0	5С	89	С/П	50
26	F x²	22	58	47	47			
27	+	10	59	П→x А	6—			
28	2	02	60	x→П 0	40			
29	x→П 0	40	61	П→x Д	6Г			
30	:	13	62	К П→x В↑	ГЕ			
31	+	10	63	—	11			

Регистры

0—9,С,Д оперативные

А n

В m

Программа V.4.10.1.1/52

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	К НОП	54	34	1	01	68	—	11
01	0	00	35	—	11	69	F x>0	59
02	x→П 1	41	36	x→П 0	40	70	80	80
03	x→П A	4—	37	x→П E	4E	71	F L0	5Г
04	x→П B	4L	38	F x≠0	57	72	64	64
05	x→П C	4C	39	83	83	73	П→x C	6C
06	x→П Д	4Г	40	К П→x E	ГE	74	1	01
07	F .	25	41	B↑	0E	75	+	10
08	B↑	0E	42	П→x 0	60	76	x→П C	4C
09	П→x B	6L	43	—	11	77	П→x A	6—
10	+	10	44	П→x B	6L	78	БП	51
11	x→П B	4L	45	—	11	79	36	36
12	F .	25	46	F x<0	5C	80	П→x A	6—
13	←→	14	47	33	33	81	БП	51
14	П→x A	6—	48	←→	14	82	34	34
15	+	10	49	1	01	83	П→x A	6—
16	x→П A	4—	50	+	10	84	x→П 0	40
17	×	12	51	К x→П E	LE	85	П→x C	6C
18	П→x Д	6Г	52	П→x A	6—	86	П→x B	6L
19	+	10	53	П→x 0	60	87	П→x 0	60
20	x→П Д	4Г	54	1	01	88	+	10
21	С/П	50	55	+	10	89	:	13
22	БП	51	56	x→П 0	40	90	П→x 0	60
23	08	08	57	x→П E	4E	91	×	12
24	П→x A	6—	58	—	11	92	F L0	5Г
25	B↑	0E	59	F x<0	5C	93	86	86
26	F x^2	22	60	48	48	94	С/П	50
27	+	10	61	П→x A	6—			
28	2	02	62	x→П 0	40		Регистры	
29	x→П 0	40	63	П→x Д	6Г			
30	:	13	64	П→x 0	60	0—9,C—E	оперативные	
31	+	10	65	x→П E	4E			
32	x→П Д	4Г	66	←→	14	A	n	
33	П→x 0	60	67	К П→x E	ГE	B	m	

Для обеих программ используется единая инструкция.

Инструкция V.4.10.1.1/54,52

Содержание	Набрать число	Выполнить команды	Результат
1. Перейти к началу программы		В/О	
2. Ввести пару значений x_i, y_i	x_i y_i	В↑ С/П	x_i M_i
3. Если данные исчерпаны, далее, иначе — к п. 2			
4. Вычислить уровень значимости P		БП 24 С/П	P

Пример. Вычислить количество инверсий M и уровень значимости P для выборки, состоящей из $x_1 = 0$, $y_1 = 3$; $x_2 = 1$, $y_2 = 1$; $x_3 = 2$, $y_3 = 0$.

Решение. Введя согласно инструкции попарно исходные значения x_i, y_i ($i = 1 — 3$), получаем $M = 1$, $P = 0{,}057$. Время вычисления примера около 6 мин.

V.4.10.1.2. Двусторонний критерий Вилкоксона

Вычисляется количество M_1 инверсий y относительно x и M_2 — количество инверсий x относительно y, а также уровень значимости P — относительное число возможных инверсий, не превышающих минимальное из M_1 и M_2.

Программа V.4.10.1.2/54

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	С/П	50	35	x→П Д	4Г	70	65	65
01	B↑	0E	36	П→x 0	60	71	П→x C	6C
02	П→x B	6L	37	1	01	72	2	02
03	+	10	38	—	11	73	+	10
04	x→П B	4L	39	x→П 0	40	74	x→П C	4C
05	F .	25	40	F x≠0	57	75	П→x A	6—
06	←→	14	41	81	81	76	БП	51
07	П→x A	6—	42	К П→x B↑	ГE	77	39	39
08	+	10	43	B↑	0E	78	П→x A	6—
09	x→П A	4—	44	П→x 0	60	79	БП	51
10	×	12	45	—	11	80	37	37
11	П→x Д	6Г	46	П→x B	6L	81	П→x A	6—
12	+	10	47	—	11	82	x→П 0	40
13	x→П Д	4Г	48	F x<0	5C	83	П→x C	6C
14	БП	51	49	36	36	84	П→x B	6L
15	00	00	50	←→	14	85	П→x 0	60
16	П→x A	6—	51	1	01	86	+	10
17	П→x B	6L	52	+	10	87	:	13
18	×	12	53	К x→П B↑	LE	88	П→x 0	60
19	П→x Д	6Г	54	П→x A	6—	89	×	12
20	—	11	55	П→x 0	60	90	F L0	5Г
21	—	11	56	1	01	91	84	84
22	F x>0	59	57	+	10	92	F ln	18
23	26	26	58	x→П 0	40	93	F x>0	59
24	F Bx	0	59	—	11	94	97	97
25	x→П Д	4Г	60	F x<0	5C	95	1	01
26	П→x Д	6Г	61	50	50	96	F .	25
27	П→x A	6—	62	П→x A	6—	97	F Bx	0
28	B↑	0E	63	x→П 0	40	98	С/П	50
29	F x^2	22	64	П→x Д	6Г		Регистры	
30	+	10	65	К П→x B↑	ГE			
31	2	02	66	—	11	0—9,C,Д	оперативные	
32	x→П 0	40	67	F x>0	59	A	n	
33	:	13	68	78	78	B	m	
34	+	10	69	F L0	5Г			

Программа V.4.10.1.2/52

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	С/П	50	36	П→х Е	6Е	72	F L0	5Г
01	В↑	0Е	37	1	01	73	65	65
02	П→х В	6L	38	—	11	74	П→х С	6С
03	+	10	39	х→П Е	4Е	75	2	02
04	х→П В	4L	40	F x≠0	57	76	+	10
05	F .	25	41	84	84	77	х→П С	4С
06	←→	14	42	К П→х Е	ГЕ	78	П→х А	6—
07	П→х А	6—	43	В↑	0Е	79	БП	51
08	+	10	44	П→х Е	6Е	80	39	39
09	х→П А	4—	45	—	11	81	П→х А	6—
10	×	12	46	П→х В	6L	82	БП	51
11	П→х Д	6Г	47	—	11	83	37	37
12	+	10	48	F x<0	5С	84	П→х А	6—
13	х→П Д	4Г	49	36	36	85	х→П 0	40
14	БП	51	50	←→	14	86	П→х С	6С
15	00	00	51	1	01	87	П→х В	6L
16	П→х А	6—	52	+	10	88	П→х 0	60
17	П→х В	6L	53	К х→П Е	LE	89	+	10
18	×	12	54	П→х А	6—	90	:	13
19	П→х Д	6Г	55	П→х Е	6Е	91	П→х 0	60
20	—	11	56	1	01	92	×	12
21	—	11	57	+	10	93	F L0	5Г
22	F x≥0	59	58	х→П Е	4Е	94	87	87
23	26	26	59	—	11	95	F ln	18
24	F Вх	0	60	F x<0	5С	96	F x≥0	59
25	х→П Д	4Г	61	50	50	97	. 0	—0
26	П→х Д	6Г	62	П→х А	6—	98	1	01
27	П→х А	6—	63	х→П 0	40	99	F .	25
28	В↑	0Е	64	П→х Д	6Г	100	F Вх	0
29	F x^2	22	65	П→х 0	60	101	С/П	50
30	+	10	66	х→П Е	4Е			
31	2	02	67	←→	14			
32	х→П Е	4Е	68	К П→х Е	ГЕ			
33	:	13	69	—	11			
34	+	10	70	F x>0	59			
35	х→П Д	4Г	71	81	81			

Регистры

0—9,С—Е	оперативные
А	n
В	m

Для обеих программ используется единая инструкция.

Инструкция V.4.10.1.2/54,52

Содержание	Набрать число	Выполнить команды	Результат
1. Обнулить регистры памяти	0	х→П (1—Д)	0
2. Перейти к началу программы		В О С/П	
3. Ввести пару значений x_i, y_i	x_i	В↑	x_i
	y_i	С/П	$M_{i,i}$
4. Если данные исчерпаны, далее, иначе — к п. 3			
5. Вычислить уровень значимости Р		БП 16 С/П	Р

Пример. Вычислить количество инверсий M_1 и M_2 и уровень значимости Р двустороннего критерия Вилкоксона для выборки, состоящей из $x_1 = 3$, $y_1 = 1$; $x_2 = 1$, $y_2 = 2$.

Решение. Введя исходные значения x_i, y_i ($i = 1, 2$), получаем $M_1 = 11$, $M_2 = nm - M_1 = 1$, $P = 0{,}114$.

Время вычисления примера — 10 мин.

V.4.10.2. ВЫЧИСЛЕНИЕ ПРИБЛИЖЕННОГО ЗНАЧЕНИЯ Р

При больших значениях $n = \sum_i x_i$ и $m = \sum_i y_i$, если верна нулевая гипотеза, число инверсий М распределено асимптотически нормально со средним значением $a = \frac{n \cdot m}{12}$ и дисперсией $\sigma^2 = \frac{n \cdot m}{2}(n + m + 1)$ [23].

По программе вычисляется число инверсий M_1 у относительно х и уровень значимости Р, для вычисления которого используется приближенное представление интеграла вероятностей

$$\Phi(z) \simeq \sqrt{1 - e^{\frac{-2z^2}{\pi}}}, \text{ где } z^2 = \frac{(a - M)^2}{\sigma^2}.$$

Программа V.4.10.2/54,52

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	К НОП	54	19	С/П	50	38	+	10
01	0	00	20	БП	51	39	:	13
02	х→П А	4—	21	06	06	40	6	06
03	х→П В	4L	22	1	01	41	×	12
04	х→П С	4С	23	←→	14	42	F π	20
05	F .	25	24	2	02	43	:	13
06	В↑	0Е	25	×	12	44	/—/	0L
07	П→х В	6L	26	П→х А	6—	45	F e^x	16
08	+	10	27	П→х В	6L	46	—	11
09	х→П В	4L	28	×	12	47	F √	21
10	F .	25	29	—	11	48	—	11
11	←→	14	30	F Вх	0	49	С/П	50
12	П→х А	6—	31	F √	21			
13	+	10	32	:	13			
14	х→П А	4—	33	F x^2	22			
15	×	12	34	П→х А	6—			
16	П→х С	6С	35	П→х В	6L			
17	+	10	36	+	10			
18	х→П С	4С	37	1	01			

Регистры

А	n
В	m
С	M_1

Инструкция V.4.10.2/54,52

Содержание	Набрать число	Выполнить команды	Результат
1. Перейти к началу программы		В/О	
2. Ввести пару значений x_i, y_i	x_i y_i	В↑ С/П	M_{1i}
3. Если данные исчерпаны, далее, иначе — к п. 2			
4. Вычислить уровень значимости Р		БП 22 С/П	Р

Время ввода одной пары значений x_i, y_i — 4 с, время вычисления Р после ввода последней пары значений x_i, y_i — 11 с.

Пример. Вычислить число инверсий M_1 и уровень значимости Р двустороннего критерия Вилкоксона для выборки, состоящей из $x_1 = 0$, $y_1 = 2$; $x_2 = 1$, $y_2 = 1$; $x_3 = 3$, $y_3 = 0$.

Решение. Введем попарно набор значений x_i, y_i $(i = 1 - 3)$, в результате получаем $M_1 = 1$, $P = 0{,}07$.

V.4.11. КРИТЕРИЙ АББЕ

Если случайная величина x подчиняется нормальному закону распределения, то для проверки независимости соседних измерений используется критерий Аббе, основанный на статистике u

$$u = k \cdot \sqrt{\frac{2n+1}{2-k^2}},$$

где n — количество измерений, $k = \frac{S_1^2}{2S^2} - 1$,

$$S_1^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} (x_{i+1} - x_i)^2, \quad S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} \left(x_i - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} x_j \right)^2.$$

При независимости значений x статистика u распределена асимптотически нормально со средним значением 0 и дисперсией 1.

По приведенной программе вычисляется статистика u и соответствующий уровень значимости Р двустороннего критерия согласия при допущении о нормальности закона распределения u и использовании приближенного значения $\Phi(u) \simeq \sqrt{1 - e^{\frac{-2}{\pi}u^2}}$.

Программа V.4.11/54,52

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	x→П 4	44	26	С/П	50	52	←→	14
01	0	00	27	БП	51	53	:	13
02	x→П 6	46	28	07	07	54	F √	21
03	x→П 7	47	29	1	01	55	П→x 8	68
04	x→П 8	48	30	П→x 7	67	56	×	12
05	x→П 9	49	31	П→x 8	68	57	x→П 8	48
06	←→	14	32	F x^2	22	58	F x^2	22
07	x→П 5	45	33	П→x 6	66	59	2	02
08	П→x 4	64	34	:	13	60	×	12
09	—	11	35	—	11	61	F π	20
10	F x^2	22	36	П→x 9	69	62	:	13
11	П→x 9	69	37	←→	14	63	/—/	01
12	+	10	38	:	13	64	F e^x	16
13	x→П 9	49	39	2	02	65	—	11
14	П→x 5	65	40	:	13	66	F √	21
15	x→П 4	44	41	1	01	67	—	11
16	F x^2	22	42	—	11	68	П→x 8	68
17	П→x 7	67	43	x→П 8	48	69	С/П	50
18	+	10	44	F x^2	22			
19	x→П 7	47	45	—	11		Регистры	
20	П→x 5	65	46	+	10			
21	П→x 8	68	47	П→x 6	66	4;5	оперативные	
22	+	10	48	2	02	6	n	
23	x→П 8	48	49	×	12	7	Σx^2	
24	К П→x 6	Г6	50	1	01	8	Σx; u	
25	П→x 6	66	51	+	10	9	$\Sigma (x_i - x_{i-1})^2$	

Инструкция V.4.11/54,52

Содержание	Набрать число	Выполнить команды	Результат
1. Перейти к началу программы		В/О	
2. Ввести очередное значение x_i	x_i	С/П	i
3. Если данные исчерпаны, далее, иначе — к п. 2			
4. Вычислить u и Р		БП 29 С/П	Р—в рег. X u—в рег. Y

Время ввода одного числа x_i — 7 с, время вычисления u и Р после ввода последнего x_n — 15 с.

Пример. Проверить независимость соседних элементов массива

1, 3, 5, 2, 6, 1.

Ответ: u = 0,8326; P = 0,403.

V.4.12. КРИТЕРИЙ СЕРИЙ

Критерий серий служит для проверки случайности расположения элементов двух классов наблюдений, представленных в виде единого вариационного ряда. Рассматривается статистика

$$u = \frac{(k-0{,}5)(m+n)-2mn}{\sqrt{2mn\,\dfrac{2mn-m-n}{m+n-1}}},$$

где m, n — соответственно количество элементов первого и второго классов; k — количество серий: количество групп элементов, принадлежащих одному классу.

Статистика u имеет асимптотически (при m, n → ∞) нормальное распределение N (0; 1).

По программе вычисляется статистика u и уровень значимости P при использовании двустороннего критерия и замене интеграла вероятностей его приближенным значением $\Phi(u) \simeq \sqrt{1-e^{-\frac{2}{\pi}u^2}}$.

В случае, если m; n ⩽ 20, можно воспользоваться таблицами [20].

Программа V.4.12/54,52

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	К НОП	54	20	F 1/x	23	40	x→П 1	41
01	0	00	21	—	11	41	F x^2	22
02	x→П 6	46	22	×	12	42	2	02
03	←→	14	23	←→	14	43	×	12
04	0	00	24	2	02	44	F π	20
05	+	10	25	×	12	45	:	13
06	x→П 1	41	26	—	11	46	/—/	0L
07	К П→x 6	Г6	27	F Вх	0	47	F e^x	16
08	F .	25	28	В↑	0E	48	—	11
09	←→	14	29	П→x 1	61	49	F √	21
10	С/П	50	30	—	11	50	—	11
11	БП	51	31	×	12	51	П→x 1	61
12	05	05	32	П→x 1	61	52	С/П	50
13	×	12	33	1	01			
14	F Вх	0	34	—	11		Регистры	
15	П→x 1	61	35	1	01			
16	+	10	36	F .	25		1 u	
17	x→П 1	41	37	:	13		6 k	
18	П→x 6	66	38	F √	21			
19	2	02	39	:	13			

Инструкция V.4.12/54,52

Содержание	Набрать число	Выполнить команды	Результат
1. Перейти к началу программы		В/О	
2. Ввести k_1 — количество элементов одного класса	k_1	С/П	
3. Если данные исчерпаны, далее, иначе — к п. 2			
4. Вычислить статистику u и уровень значимости P		БП 13 С/П	u—в рег. X,1 P—в рег. Y

Время ввода одного значения k_1 — 3 с, время вычисления u и P — 15 с.

Пример. Вычислить статистику u и уровень значимости P для значений k_1 = 5, 1, 3, 2, 4, 6.

Решение. Ввести последовательно значения k_1 = 5, 1, 3, 2, 4, 6 согласно инструкции. Выполнить команды БП 13 С/П. В результате получаем $u = -2{,}19$; P = 0,024.

Задав, например, доверительный уровень 0,1, получаем, что гипотезу о случайном расположении элементов первого и второго классов следует отвергнуть.

V.4.13. КРИТЕРИЙ КОЛМОГОРОВА

Критерий Колмогорова основан на оценке статистики расхождения выборочной функции распределения $S_n(x)$ и заданной непрерывной гипотетической функции распределения F (x), не содержащей неизвестных параметров.

Эмпирическая функция распределения $S_n(x)$ определяется исходной выборкой и имеет вид

$$S_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < x_1, \\ i/n & \text{при } x_1 \leqslant x < x_{i+1},\ i = 1;\ 2;\ \ldots;\ n-1, \\ 1 & \text{при } x_n \leqslant x, \end{cases}$$

где x_i — упорядоченные в виде вариационного ряда значения выборки: $x_1 \leqslant x_2 \leqslant \ldots \leqslant x_n$.

Приведены программы вычисления уровней значимости одностороннего и двустороннего критерия Колмогорова.

V.4.13.1. ОДНОСТОРОННИЙ КРИТЕРИЙ КОЛМОГОРОВА

В одностороннем критерии Колмогорова используется статистика Δ_n^+, определяемая как

$$\Delta_n^+ = \max[F(x) - S_n(x)] \quad (-\infty < x < +\infty).$$

Уровень значимости критерия $\beta_n(y)$ имеет вид

$$\beta_n^+(y) = \text{Вер}(\Delta_n^+ > y).$$

Значение $\beta_n^+(y)$ вычисляется по формуле [24]

$$\beta_n^+(y) = \sum_{i=0}^{k} C_n^i y\left(y + \frac{i}{n}\right)^{i-1} \cdot \left(1 - y - \frac{i}{n}\right)^{n-i}, \quad 0 < y < 1,$$

где $k = E\{n(1-y)\}$ — целая часть от $n(1-y)$.

Вручную вводятся значения n — объем выборки и y — максимальное расхождение $F(x)$ и $S_n(x)$.

Программа V.4.13.1/54,52

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	x→П 2	42	20	П→x 3	63	40	×	12
01	←→	14	21	1	01	41	+	10
02	x→П 1	41	22	—	11	42	F e^x	16
03	П→x 2	62	23	П→x 2	62	43	+	10
04	×	12	24	:	13	44	F L3	5—
05	—	11	25	П→x 1	61	45	11	11
06	2	02	26	+	10	46	П→x 1	61
07	+	10	27	x→П 5	45	47	×	12
08	x→П 3	43	28	F ln	18	48	С/П	50
09	К П→x 3	Г3	29	П→x 3	63			
10	0	00	30	2	02			
11	П→x 2	62	31	—	11			
12	П→x 3	63	32	×	12			
13	1	01	33	1	01			
14	—	11	34	П→x 5	65			
15	—	11	35	—	11			
16	x→П 4	44	36	F x≠0	57			
17	П→x 3	63	37	44	44			
18	:	13	38	F ln	18			
19	×	12	39	П→x 4	64			

Инструкция

y В↑ n В/О С/П

Регистры

1 y

2 n

3—5 оперативные

Время вычисления — $T = 5(3 \cdot E\{n(1-y)\} + 2)$ с.

Пример. $n = 7$, $y = 0{,}3$. $\beta_7^+(0{,}3) = 0{,}235$.

Задавшись, например, доверительным уровнем 0,1, получаем, что гипотеза о принадлежности случайной выборки гипотетической генеральной совокупности непротиворечива.

V.4.13.2. ДВУСТОРОННИЙ КРИТЕРИЙ КОЛМОГОРОВА ПРИ МАЛОМ ОБЪЕМЕ ВЫБОРКИ

В двустороннем критерии Колмогорова используется статистика Δ_n, определяемая как [24]

$$\Delta_n = \max|F(x) - S_n(x)| \quad (-\infty < x < +\infty).$$

Уровень значимости критерия $\beta_n(y)$ запишем как

$$\beta_n(y) = \text{Вер}(\Delta_n > y).$$

По программе значение $\beta_n(y)$ вычисляется по точной формуле [25] ($n \leqslant 8$)

$$\beta_n(y) = 1 - n!\, I_{n,0},$$

а $I_{n,0}$ определяется из рекуррентного соотношения

$$I_{n,i} = \sum_{k=i+1}^{n} \frac{E_0^{k-i}(b_{i+1} - a_k)}{(k-i)!}(-1)^{k-i-1} \cdot I_{n,k}, \quad (i = n-1;$$

$$n-2;\ \ldots;\ 1;\ 0),$$

где

$$I_{n,n} = 1, \quad a_k = E_0\left(\frac{k}{n} - y\right), \quad b_k = E_0\left(\frac{k-1}{n} + y\right),$$

$$E_0(z) = \begin{cases} z \text{ при } z \geqslant 0, \\ 0 \text{ при } z < 0. \end{cases}$$

Вручную вводятся значение n — объем выборки и y — максимальное расхождение $|F(x) - S_n(x)|$.

Программа V.4.13.2/54,52

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	x→П 1	41	27	F ln	18	54	—	11
01	x→П 3	43	28	П→x 0	60	55	П→x 3	63
02	←→	14	29	x→П 2	42	56	:	13
03	x→П Д	4Г	30	×	12	57	П→x Д	6Г
04	1	01	31	F e^x	16	58	/—/	0L
05	x→П 5	45	32	П→x 2	62	59	x→П Д	4Г
06	П→x 3	63	33	/—/	0L	60	—	11
07	1	01	34	:	13	61	F x<0	5С
08	+	10	35	F L2	58	62	65	65
09	П→x 1	61	36	32	32	63	Сх	0Г
10	—	11	37	К П→x 4	Г4	64	В/О	52
11	x→П 0	40	38	×	12	65	1	01
12	4	04	39	—	11	66	—	11
13	x→П 4	44	40	F L0	5Г	67	F x≥0	59
14	0	00	41	15	15	68	70	70
15	П→x 1	61	42	К x→П 4	L4	69	Сх	0Г
16	ПП	53	43	F L1	5L	70	1	01
17	53	53	44	06	06	71	+	10
18	П→x 0	60	45	П→x 3	63	72	В/О	52
19	П→x 1	61	46	×	12			
20	+	10	47	F L3	5—			
21	ПП	53	48	45	45			
22	53	53	49	/—/	0L			
23	ПП	53	50	1	01			
24	60	60	51	+	10			
25	F x≠0	57	52	С/П	50			
26	37	37	53	1	01			

Инструкция

y В↑ n В/О С/П

Регистры

0—Д оперативные

Время вычисления — $T \simeq 0{,}25 \cdot n^2$ мин.

Пример. $n = 4$, $y = 0{,}4$. $\beta_4(0{,}4) = 0{,}4374$.

Задавшись, например, доверительным уровнем 0,1, получаем, что гипотеза о принадлежности случайной выборки гипотетической генеральной совокупности непротиворечива.

V. 4.14. КРИТЕРИЙ СМИРНОВА

Критерий Смирнова основан на оценке статистики максимального расхождения между парой выборочных эмпирических функций распределения $S_1(x)$ и $S_2(x)$, принадлежащих двум различным классам [24].

Элементы обоих классов располагаются в вариационный ряд и соседние элементы каждого класса объединяются, в результате чего получаем ряд

$$k_1^{(1)},\ k_2^{(1)},\ k_1^{(2)},\ k_2^{(2)},\ \ldots,\ k_1^{(q)},\ k_2^{(q)},$$

где $k_j^{(i)}$ — количество элементов j-го класса ($j = 1;2$) в i-й серии.

При этом максимум D расхождения эмпирических функций распределения $S_1(x)$ и $S_2(x)$ определяется из соотношения

$$D = \max_r \left\{ \left| \frac{\sum_{i=1}^{r} k_1^{(i)}}{N_1} - \frac{\sum_{i=1}^{r-1} k_2^{(i)}}{N_2} \right|,\ \left| \frac{\sum_{i=1}^{r} k_2^{(i)}}{N_2} - \frac{\sum_{i=1}^{r-1} k_1^{(i)}}{N_1} \right| \right\},$$

где $r = 1, 2, \ldots, q$; N_1, N_2 — количество элементов выборок соответственно первого и второго классов.

Уровень значимости вычисляется приближенно по формуле [24]

$$\beta = e^{-\frac{2D^2}{1/N_1 + 1/N_2}}.$$

По программе вычисляются значения D и β.

При малых значениях N_1, $N_2 < 20$ можно воспользоваться точным выражением β, приведенным в [20].

Программа V.4.14/54,52

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	/—/	0L	09	П→x 1	61	18	П→x 2	62
01	x→П 2	42	10	ПП	53	19	F 1/x	23
02	←→	14	11	29	29	20	П→x 1	61
03	x→П 1	41	12	П→x 2	62	21	F 1/x	23
04	Cx	0Г	13	ПП	53	22	—	11
05	x→П 3	43	14	29	29	23	:	13
06	x→П 4	44	15	БП	51	24	F e^x	16
07	С/П	50	16	07	07	25	F x^2	22
08	←→	14	17	П→x 3	63	26	П→x 3	63

Продолжение

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
27	F √	21	35	←→	14	43	В/О	52
28	С/П	50	36	—	11			
29	:	13	37	F x<0	5C			
30	П→x 4	64	38	42	42		Регистры	
31	+	10	39	F Bx	0			
32	x→П 4	44	40	x→П 3	43	1	N_1	
33	F x^2	22	41	F .	25	2	$-N_2$	
34	П→x 3	63	42	F .	25	3;4	оперативные	

Инструкция V.4.14/54,52

Содержание	Набрать число	Выполнить команды	Результат
1. Ввести полные объемы выборок N_1 и N_2	N_1 N_2	В↑ В/О С/П	
2. Ввести количество элементов в группе первого и второго классов $k_1^{(1)}$, $k_2^{(1)}$	$k_1^{(i)}$ $k_2^{(i)}$	В↑ С/П	
3. Если данные исчерпаны, далее, иначе — к п. 2			
4. Вычислить максимальное расхождение D и уровень значимости β		БП 17 С/П	D—в рег. X β—в рег. Y

Время ввода одной пары $k_1^{(i)}$, $k_2^{(i)}$ — 9 с, время вычисления D, β — 5 с.

Пример. Вычислить D и β для элементов двух классов, сгруппированных в ряд 1, 3, 2, 1, 5, 2.

Решение. Ввести значение полных объемов выборок $N_1 = 8$, $N_2 = 6$. Ввести согласно инструкции $k_1^{(1)} = 1$, $k_2^{(1)} = 3$, $k_1^{(2)} = 2$, $k_2^{(2)} = 1$, $k_1^{(3)} = 5$, $k_2^{(3)} = 2$. Выполнить команды БП 17 С/П.

Ответ: $D = 0{,}375$; $\beta = 0{,}381$.

V.4.15. ПРОВЕРКА НЕЗАВИСИМОСТИ ДВУХ ПРИЗНАКОВ (АНАЛИЗ ТАБЛИЦЫ 2x2)

V.4.15.1. ПО ДВУМ КАТЕГОРИЯМ

Пусть каждый из n объектов характеризуется двумя признаками. По каждому из признаков может быть две категории: А и В. Четыре возникших класса отображают «таблицей сопряженности признаков

2×2», в каждой клетке которой — количество объектов в соответствующем классе (в последнем столбце и строке указана сумма элементов соответственной строки и столбца)

a	b	a+b
c	d	c+d
a+c	b+d	n

Проверяется нулевая гипотеза о независимости признаков. Для этого вычисляют уровень значимости Q и сравнивают его с заданной величиной.

Если не существенно, в какую сторону происходит отклонение от нуль-гипотезы, применяют двусторонний критерий. Если отклонение в какую-то одну сторону невозможно, применяют односторонний критерий.

V.4.15.1.1. При больших количествах ожидаемых объектов в каждом классе

Если количество ожидаемых объектов в каждом классе таково, что

$$\frac{(a+b)\cdot(a+c)}{n},\ \frac{(b+a)\cdot(b+d)}{n},\ \frac{(c+a)\cdot(c+d)}{n}\ \text{и}\ \frac{(d+b)\cdot(d+c)}{n}$$

не менее пяти, величина

$$\chi^2=\frac{n\left(|ad-bc|-\frac{n}{2}\right)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$$

распределена по закону «хи-квадрат» с одной степенью свободы [27]. Уровень значимости Q определяют по таблицам (например, [14, 20]), либо по программе V.5.4, либо с помощью приближенной формулы [21].

Величина $\frac{n}{2}$ в числителе выражения для χ^2 представляет собой поправку на непрерывность признака, введенную Йейтсом. Если признак по своей сути дискретен (например, «ДА — НЕТ»), поправку вводить не нужно.

По программе V. 4.15.1.1/21 вычисляется величина χ^2. Если исследуемые признаки дискретны, команду в ячейке памяти с адресом 83 следует заменить командой Р НОП.

Программа V.4.15.1.1/21

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	Р 3	31	42	+	96	84	F x^2	55
01	←→	16	43	↑	06	85	×	26
02	Р 2	21	44	F 8	82	90	2	24
03	+	96	45	×	26	91	×	26
04	Р 6	61	50	Р 8	81	92	↑	06
05	Р 8	81	51	F 3	32	93	F 8	82
10	С/П	78	52	↑	06	94	:	36
11	Р 5	51	53	F 5	52	95	С/П	78
12	←→	16	54	+	96			
13	Р 4	41	55	↑	06			
14	+	96	60	F 8	82			
15	↑	06	61	×	26			
20	F 8	82	62	Р 8	81			
21	×	26	63	F 3	32			
22	Р 8	81	64	↑	06			
23	F 6	62	65	F 4	42			
24	+	96	70	×	26			
25	2	24	71	↑	06			
30	:	36	72	F 7	72			
31	Р 6	61	73	—	86			
32	F 2	22	74	F x^2	55			
33	↑	06	75	F √	65			
34	F 5	52	80	↑	06			
35	×	26	81	F 6	62			
40	Р 7	71	82	←→	16			
41	F 4	42	83	—	86			

Инструкция

a В↑ b В/О С/П c В↑ d С/П

Результат

χ^2

Регистры

2 a
3 в
4 c
5 d
6 n/2
7;8 оперативные

Время вычисления — 10 с.

По программе V.4.15.1.1/54,52 вычисляются величина χ^2, а также уровень значимости Q (χ^2/1) по приближенной формуле [21]:

$$Q(\chi^2/1)\approx\exp(-(\chi^2)^{0,813}),$$

погрешность которой не превышает 6 % при $0{,}001<Q<0{,}1$.

Способ учета поправки на непрерывность признаков указан в инструкции к программе.

Программа V.4.15.1.1/54,52

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	x→П 4	44	06	x→П 2	42	12	×	12
01	←→	14	07	+	10	13	П→x 2	62
02	x→П 3	43	08	П→x 5	65	14	П→x 3	63
03	+	10	09	+	10	15	×	12
04	x→П 5	45	10	←→	14	16	—	11
05	F .	25	11	П→x 4	64	17	F x^2	22

Продолжение

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
18	F √	21	36	x→П 5	45
19	←→	14	37	:	13
20	2	02	38	←→	14
21	:	13	39	П→x 5	65
22	П→x 6	66	40	—	11
23	×	12	41	:	13
24	—	11	42	x→П 5	45
25	F x^2	22	43	F ln	18
26	×	12	44	6	06
27	П→x 5	65	45	.	0–
28	:	13	46	5	05
29	←→	14	47	F lg	17
30	П→x 5	65	48	×	12
31	—	11	49	F e^x	16
32	:	13	50	/—/	0L
33	П→x 2	62	51	F e^x	16
34	П→x 4	64	52	С/П	50
35	+	10			

Инструкция

В рег. 6 { 1 — если признаки непрерывны; 0 — если признаки дискретны

а В↑ в В↑ с В↑ d
В/О С/П

Результат

Q — в рег. X
χ^2 — в рег. 5

Регистры

2 в
3 с
4 d
5 χ^2
6 1 или 0

Время вычисления — 18 с.

Пример. a = 11, b = 89, c = 21, d = 79. Признаки непрерывны.
Ответ: $\chi^2 = 3{,}01$; Q = 0,086.

V.4.15.1.2. При малых количествах ожидаемых объектов в каждом классе

Если количество ожидаемых объектов хотя бы в одном из четырех классов меньше пяти, критерий χ^2 становится малоэффективным и приходится применять более трудоемкий точный критерий Фишера.

Переставим строки и столбцы исходной таблицы 2×2, чтобы число a в левом верхнем углу таблицы было минимальным. Будем изменять это число, позаботившись о том, чтобы суммы элементов столбцов и строк были постоянны. Числа b, c и d при этом будут также изменяться.

Вероятность реализации каждой из полученных таблиц равна [27]

$$\frac{(a+b)!\,(c+d)!\,(a+c)!\,(b+d)!}{n!\;a!\;b!\;c!\;d!}.$$

Построим распределение этих вероятностей в зависимости от величины a.

Сумма вероятностей реализации таблиц с a, не превышающим исходного значения (левая ветвь распределения), будучи сопоставлена с заданной величиной *Q*, дает односторонний критерий значимости.

Для получения двустороннего критерия надо сложить вычисленную вероятность левой ветви с суммой вероятностей правой ветви, куда входят все таблицы с такой же или меньшей вероятностью, чем у исходной таблицы.

V.4.15.1.2.1. Точный односторонний критерий Фишера

Перестановкой строк и столбцов исходной таблицы

a	b
c	d

надо добиться одновременного выполнения неравенств

$$\begin{cases} a \leqslant b; \\ a \leqslant c; \\ a \leqslant d. \end{cases}$$

По программе вычисляется уровень значимости

$$Q = \sum_{a=0}^{a_{исх}} \frac{(a+b)!\,(c+d)!\,(a+c)!\,(b+d)!}{n!\;a!\;b!\;c!\;d!}.$$

Программа составлена на основе разработки В. В. Козлова.

Программа V.4.15.1.2.1/54,52

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	x→П 2	42	15	x→П Д	4Г	30	←→	14
01	1	01	16	П→x 4	64	31	К П→x 3	Г3
02	x→П Д	4Г	17	П→x 3	63	32	К П→x 4	Г4
03	←→	14	18	ПП	53	33	К П→x 5	Г5
04	С/П	50	19	47	47	34	П→x Д	67
05	x→П 4	44	20	П→x 5	65	35	F Bx	0
06	+	10	21	П→x 2	62	36	П→x 4	64
07	С/П	50	22	F x≠0	57	37	:	13
08	x→П 5	45	23	45	45	38	П→x 5	65
09	С/П	50	24	ПП	53	39	:	13
10	x→П 3	43	25	47	47	40	+	10
11	+	10	26	П→x 2	62	41	x→П Д	4Г
12	ПП	53	27	×	12	42	F Bx	0
13	47	47	28	П→x 3	63	43	F L2	58
14	F 1/x	23	29	×	12	44	26	26

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
45	П→x Д	6Г	59	62	62
46	С/П	50	60	←→	14
47	+	10	61	x→П 0	40
48	x→П 1	41	62	П→x Д	6Г
49	F Bx	0	63	П→x 1	61
50	x→П 0	40	64	×	12
51	F x=0	5E	65	П→x 0	60
52	54	54	66	:	13
53	B/O	52	67	F L1	5L
54	—	11	68	69	69
55	B↑	0E	69	F L0	5Г
56	F Bx	0	70	63	63
57	—	11	71	x→П Д	4Г
58	F x<0	5C	72	B/O	52

Инструкция
a B/O С/П в С/П c С/П d С/П

Регистры

0	c+d
1	n
2	a
3	d
4	в
5	c
Д	Q

Пример. a = 2, b = 4, c = 5, d = 3. Q = 0,296.
Время решения примера — 60 с.

V.4.15.1.2.2. Точный двусторонний критерий Фишера

Перестановкой строк и столбцов исходной таблицы

a	b
c	d

надо добиться одновременного выполнения неравенств

$$\begin{cases} ad < (b+1)(c+1); \\ a \leqslant d; \\ b \leqslant c. \end{cases}$$

По программе вычисляются

$$Q_{лев} = \sum_{i=0}^{a} Q_i, \text{ где } Q_0 = \frac{C_{b+d}^{b} C_{a+c}^{a}}{C_n^{a+b}}, \quad Q_{i+1} = Q_i \frac{a_i d_i}{b_{i+1} \cdot c_{i+1}},$$

а также $Q_{лев} + Q_{прав}$,

где

$$Q_{прав} = \sum_{j=0}^{k} Q_j, \; Q\,(j=0) = \frac{C_{b+d}^{0} \; C_{a+c}^{a+b}}{C_n^{a+b}},$$

k определяется из соотношения Q (j = k) — наибольшая из вероятностей правой ветви, не превышающая $Q_{(i=a)}$.

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	x→П A	4—	37	F Bx	0	74	F Bx	0
01	6	06	38	+	10	75	x→П 0	40
02	x→П 6	46	39	x→П A	4—	76	—	11
03	С/П	50	40	F Bx	0	77	B↑	0E
04	x→П 3	43	41	П→x 2	62	78	F Bx	0
05	←→	14	42	F x≠0	57	79	—	11
06	x→П 5	45	43	59	59	80	F x<0	5C
07	+	10	44	×	12	81	84	84
08	F .	25	45	П→x 3	63	82	←→	14
09	x→П 4	44	46	×	12	83	x→П 0	40
10	←→	14	47	←→	14	84	П→x 0	60
11	x→П 2	42	48	К П→x 2	Г2	85	F x≠0	57
12	F .	25	49	К П→x 3	Г3	86	97	97
13	+	10	50	К П→x 4	Г4	87	П→x 9	69
14	1	01	51	К П→x 5	Г5	88	П→x 1	61
15	x→П 9	49	52	F Bx	0	89	×	12
16	F .	25	53	П→x 4	64	90	П→x 0	60
17	ПП	53	54	:	13	91	:	13
18	72	72	55	П→x 5	65	92	F L1	5L
19	F 1/x	23	56	:	13	93	94	94
20	x→П 9	49	57	БП	51	94	F L0	5Г
21	П→x 3	63	58	31	31	95	88	88
22	П→x 4	64	59	П→x A	6—	96	x→П 9	49
23	ПП	53	60	С/П	50	97	B/O	52
24	72	72	61	Cx	0Г			
25	П→x 5	65	62	П→x 5	65			
26	П→x 2	62	63	П→x 4	64			
27	ПП	53	64	—	11			
28	72	72	65	П→x 4	64			
29	П→x 9	69	66	П→x 3	63			
30	К x→П 6	L6	67	+	10			
31	П→x 7	67	68	П→x 4	64			
32	←→	14	69	F .	25			
33	—	11	70	БП	51			
34	F x≥0	59	71	04	04			
35	59	59	72	+	10			
36	П→x A	6—	73	x→П 1	41			

Инструкция
Cx B/O С/П a B↑ в B↑ c B↑ d С/П С/П

Результат

$Q_{лев}$, $Q_{лев} + Q_{прав}$

Регистры

0;1;6;	счетчики
2—5	a, d, в, c
7;9	оперативные
A	Q

Время вычисления $Q_{лев}$ — 1 мин 20 с; $Q_{лев} + Q_{прав}$ — 1мин.

Пример. a = 2, b = 3, c = 3, d = 1. Переставив строки и столбцы, получим a = 1, b = 3, c = 3, d = 2.

$$Q_{лев} = 0{,}3571, \; Q_{лев} + Q_{прав} = 0{,}5238.$$

V.4.15.2. ПО n>2 КАТЕГОРИЯМ

Проверка независимости двух признаков (таблица R × D).

Если каждый из двух признаков, характеризующих данные n объектов, можно описать более чем двумя категориями, необходимо проанализировать таблицу сопряженности R×D

q_{11}	q_{12}	...	q_{1i}	...	q_{1D}	M_1
q_{21}	q_{22}	...	q_{2i}	...	q_{2D}	M_2
...	...	...	...	...	...	...
q_{j1}	q_{j2}	...	q_{ji}	...	q_{jD}	M_j
...	...	...	...	...	...	...
q_{R1}	q_{R2}	...	q_{Ri}	...	q_{RD}	M_R
C_1	C_2	...	C_i	...	C_D	n

Если количество ожидаемых объектов в каждом классе

$$Q_{ij} = \frac{M_i C_j}{n}$$

не менее пяти, величина

$$\chi^2 = \sum_i \sum_j \frac{(Q_{ij} - q_{ij})^2}{Q_{ij}} = n \left(\sum_i \sum_j \frac{q_{ij}^2}{M_i C_j} - 1 \right)$$

распределена по закону «хи-квадрат» с (R — 1) (D — 1) степенями свободы.

По программам вычисляется величина χ^2. Уровень значимости определяется по таблицам [14, 20] или по программам V.5.4.

Программы составлены на основе разработки В.В. Козлова.

При расчете по программе V.4.15.2/21 число строк $R \leqslant 6$, число столбцов не ограничено.

Программа V.4.15.2/21

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	/—/	56	15	F 6	62	34	P x=0	59
01	P 2	21	20	1	14	35	F←→	15
02	С/П	78	21	+	96	40	F 2	22
03	P 3	31	22	P 6	61	41	С/П	78
04	/—/	56	23	P x≥0	49	42	P 4	41
05	P 6	61	24	P 1	11	43	F 3	32
10	С/П	78	25	6	64	44	P 5	51
11	↑	06	30	—	86	45	С/П	78
12	F 2	22	31	↑	06	50	F x^2	55
13	:	36	32	F 3	32	51	↑	06
14	P ,	43	33	+	96	52	F 4	42

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
53	:	36	71	P 2	21	85	P ×	23
54	↑	06	72	F 5	52			
55	F 6	62	73	1	14		Регистры	
60	P ,	43	74	—	86			
61	P 6	61	75	P x=0	59	2	—n; χ^2	
62	:	36	80	F ,	45	3	R	
63	↑	06	81	F 6	62	4	C_1	
64	F 2	22	82	P ,	43	5	счетчик	
65	←→	16	83	0	04	6	оперативный	
70	—	86	84	БП	58		S_1—S_6 M_1—M_6	

При расчете по программе V.4.15.2/54 и V.4.15.2/52 число строк $R \leqslant 10$, число столбцов не ограничено.

Время ввода n — 1 с, R — 1 с, M — 2 — 10 с, C — 1с, q —3—13 с.

Программа V.4.15.2/54

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	/—/	0L	12	x→П B	4L	24	F L0	5Г
01	x→П Д	4Г	13	П→x C	6C	25	15	15
02	С/П	50	14	x→П 0	40	26	БП	51
03	x→П C	4C	15	П→x Д	6Г	27	11	11
04	x→П 0	40	16	С/П	50			
05	С/П	50	17	F x^2	22		Регистры	
06	П→x Д	6Г	18	П→x B	6L			
07	:	13	19	:	13	0	счетчик	
08	К x→П B↑	LE	20	К П→x B↑	ГЕ	1	—A M_j	
09	F L0	5Г	21	:	13	B	C_1	
10	05	05	22	—	11	C	R	
11	С/П	50	23	x→П Д	4Г	Д	—n; χ^2	

Программа V.4.15.2/52

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	/—/	0L	13	С/П	50	26	—	11
01	x→П Д	4Г	14	x→П B	4L	27	x→П Д	4Г
02	С/П	50	15	П→x C	6C	28	F L0	5Г
03	x→П C	4C	16	x→П 0	40	29	17	17
04	x→П 0	40	17	П→x 0	60	30	БП	51
05	П→x 0	60	18	x→П E	4E	31	13	13
06	x→П E	4E	19	П→x Д	6Г		Регистры	
07	С/П	50	20	С/П	50			
08	П→x Д	6Г	21	F x^2	22		0; E счетчики	
09	:	13	22	П→x B	6L		1—A M_j	
10	К x→П E	LE	23	:	13		B C_1	
11	F L0	5Г	24	К П→x E	ГЕ		C R	
12	05	05	25	:	13		Д —n; χ^2	

Время ввода n — 1 с, R — 1 с, M — 2 с, C — 2 с, q — 4 с.
Для всех трех программ используется единая инструкция:

Инструкция V.4.15.2/21,54,52

Содержание	Набрать число	Выполнить команды	Результат
1. Занести число объектов	n	В/О С/П	
2. Занести число строк	R	С/П	
3. Занести сумму объектов в очередной строке	M_j	С/П	
4. Если введены суммы по всем строкам, далее, нет — к п. 3			
5. Занести сумму объектов в очередном столбце	C_i	С/П	
6. Занести количество объектов в очередной строке i-го столбца	q_{ij}	С/П	
7. Если введена не вся информация i-го столбца, то — к п. 6, иначе далее			
8. Если введена информация не по всем столбцам, — к п. 5, иначе прочитать ответ на индикаторе			χ^2

Пример. Определить значение χ^2 для таблицы сопряженности 3×2 (число степеней свободы $(3-1)(2-1)=2$)

65	26	8	99
32	41	24	97
97	67	32	196

Ответ: $\chi^2 = 22{,}57$.

V.4.16. ВЫЧИСЛЕНИЕ ДОВЕРИТЕЛЬНОГО ИНТЕРВАЛА ДЛЯ НЕИЗВЕСТНОЙ ВЕРОЯТНОСТИ ПО ЧАСТОТЕ

Пусть некоторое событие при n испытаниях произошло m раз. Тогда границы доверительного интервала p_1 и p_2, накрывающего неизвестную вероятность p с вероятностью $P = 1 - Q$ (Q — уровень значимости), определятся как решение квадратного уравнения [23]

$$p^2\left(1+\frac{\psi^2}{n}\right)-p\left(2\frac{m}{n}+\frac{\psi^2}{n}\right)+\left(\frac{m}{n}\right)^2=0,$$

где $\psi(1-Q)$ — обратный интеграл вероятности.

Использовано приближенное выражение $\psi \approx [-\ln Q]^{0.61}$.

При $0{,}001 < Q < 0{,}2$ погрешность вычисления $p_{1,2}$ не превышает 4 %.

Программа V.4.16/21

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	P ln	13	34	:	36	72	/—/	56
01	/—/	56	35	↑	06	73	P 5	51
02	1	14	40	F 4	42	74	F 6	62
03	,	46	41	+	96	75	+	96
04	2	24	42	↑	06	80	↑	06
05	2	24	43	F 5	52	81	F 5	52
10	←→	16	44	:	36	82	С/П	78
11	x^y	38	45	P 6	61			
12	P 6	61	50	F 4	42		Инструкция	
13	С/П	78	51	F x^2	55			
14	P 5	51	52	↑	06		Q В/О С/П m ↑n С/П	
15	:	36	53	F 5	52			
20	P 4	41	54	:	36		Результат	
21	F 6	62	55	↑	06			
22	↑	06	60	F 6	62		p_1 — в рег. X, 5	
23	F 5	52	61	F x^2	55		p_2 — в рег. Y	
24	:	36	62	←→	16			
25	1	14	63	—	86		Регистры	
30	+	96	64	F √	65			
31	P 5	51	65	↑	06	4	m/n	
32	←→	16	70	F 6	62	5	p_1	
33	2	24	71	—	86	6	$(m+\psi^2/2)/(n+\psi^2)$	

Программа V.4.16/54,52

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	x→П 2	42	18	+	10	36	—	11
01	:	13	19	П→x 2	62	37	С/П	50
02	x→П 3	43	20	1	01			
03	←→	14	21	+	10		Инструкция	
04	F ln	18	22	x→П 4	44			
05	/—/	0L	23	:	13		Q В↑ m В↑ n В/О С/П	
06	F ln	18	24	x→П 2	42			
07	1	01	25	В↑	0E		Результат	
08	.	0—	26	F x^2	22			
09	2	02	27	П→x 3	63		p_1 — в рег. X	
10	2	02	28	F x^2	22		p_2 — в рег. Y	
11	×	12	29	П→x 4	64			
12	F e^x	16	30	:	13		Регистры	
13	П→x 2	62	31	—	11			
14	:	13	32	F √	21	2	оперативный	
15	x→П 2	42	33	+	10	3	m/n	
16	2	02	34	П→x 2	62	4	$1+\psi^2/n$	
17	:	13	35	F Bx	0			

Время вычисления — 10 с.
Пример. $Q = 0{,}05$, $m = 4$, $n = 100$.
Ответ: $p_1 = 0{,}0157$, $p_2 = 0{,}0981$.

V.5. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

V.5.1. БИНОМИАЛЬНЫЙ ЗАКОН

Биномиальный закон распределения вероятностей описывает вероятность появления события точно m раз в последовательности из n независимых испытаний, когда вероятность события в одном испытании p [13]

$$P(n, m, p) = C_n^m \cdot p^m (1-p)^{n-m}.$$

При этом вероятность Q появления событий не более m раз при n испытаниях равна

$$Q(n, m, p) = \sum_{i=0}^{m} P(n, i, p) = \sum_{i=0}^{m} C_n^i p^i (1-p)^{n-i}.$$

Приводятся две программы одновременного вычисления P и Q.

V.5.1.1. ПРИ ФИКСИРОВАННОМ m

Программа V.5.1.1/21

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	P 2	21	34	F 3	32	72	P 3	31
01	C/П	78	35	←→	16	73	F 6	62
02	P 3	31	40	—	86	74	↑	06
03	Cx	76	41	↑	06	75	F 5	52
04	P7	71	42	F 7	72	80	C/П	78
05	Pe^x	33	43	:	36			
10	—	86	44	↑	06			
11	/—/	56	45	F 4	42			
12	P 5	51	50	×	26			
13	:	36	51	↑	06			
14	P 4	41	52	F 6	62			
15	F 3	32	53	×	26			
20	↑	06	54	P 6	61			
21	F 5	52	55	↑	06			
22	x^y	38	60	F 5	52			
23	P 6	61	61	+	96			
24	БП	58	62	P 5	51			
25	P ВП	63	63	F 2	22			
30	F 7	72	64	↑	06			
31	1	14	65	F 7	72			
32	+	96	70	—	86			
33	P 7	71	71	P x=0	59			

Инструкция

В/О m С/П p ↑ n С/П

Результат

Q—в рег. X, 5
P—в рег. Y, 6

Регистры

2 m
3 n
4 p/(1—p)
5 Q
6 P
7 счетчик

Программа V.5.1.1/54,52

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	К НОП	54	18	В↑	0E	36	21	21
01	1	01	19	БП	51	37	С/П	50
02	+	10	20	35	35			
03	x→П 1	41	21	П→x 2	62			
04	x→П 2	42	22	П→x 1	61			
05	F .	25	23	—	11			
06	В↑	0E	24	:	13			
07	К НОП	54	25	П→x 0	60			
08	1	01	26	F Вх	0			
09	←→	14	27	—	11			
10	—	11	28	1	01			
11	:	13	29	+	10			
12	x→П 3	43	30	×	12			
13	F Вх	0	31	П→x 3	63			
14	F ln	18	32	×	12			
15	П→x 0	60	33	+	10			
16	×	12	34	F Вх	0			
17	F e^x	16	35	F L1	5L			

Инструкция

n x→П 0
p В↑ m В/О С 11

Результат

P—в рег. X
Q—в рег. Y

Регистры

0 n
1 счетчик
2 m+1
3 p/(1—p)

Время вычисления — T = 5 (m + 2) с.
Пример. n = 8, m = 3, p = 0,7.
Ответ: P = 0,0467, Q = 0,058.

V.5.1.2. ЗНАЧЕНИЯ P_m И Q_m ВЫВОДЯТСЯ ПОШАГОВО

При вычислении по программе V.5.1.2/21 значение Q_m помещается в регистры X и 5, P_m — в регистры Y и 6, а m — в регистр 7. Значения P_m и m могут быть выведены в регистр X на каждом шаге вычисления.

Программа V.5.1.2/21

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	P 3	31	22	P 6	61
01	Cx	76	23	P 5	51
02	P 7	71	24	С/П	78
03	P e^x	33	25	F 7	72
04	—	86	30	1	14
05	/—/	56	31	+	96
10	P 5	51	32	P 7	71
11	:	36	33	F 3	32
12	P 4	41	34	←→	16
13	F 3	32	35	—	86
14	↑	06	40	↑	06
15	F 5	52	41	F 7	72
20	x^y	38	42	:	36
21	↑	06	43	↑	06

Инструкция

В/О p ↑ n С/П С/П С/П...

Результат

Q—в рег. X, 5
P—в рег. Y, 6
m—в рег. 7

Продолжение

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
44	F 4	42	54	↑	06
45	×	26	55	F 5	52
50	↑	06	60	+	96
51	F 6	62	61	БП	58
52	×	26	62	2	24
53	P 6	61			

Регистры

3	n
4	p/(1—p)
5	Q
6	P
7	m

При вычислении по программе V.1.2/54,52 значения P_m и Q_m помещаются в регистры X и Y, а m — в регистр 2. Для вывода в регистр X значения Q_m следует выполнить команду ↔, а затем перед последующим нажатием С/П следует восстановить исходное положение командой ↔.

Для вывода в регистр X значения m следует выполнить команду П → x 2, а перед последующим нажатием С/П выполнить команду F.

Программа V.5.1.2/54,52

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	x→П 0	40	17	П→x 0	60
01	↔	14	18	—	11
02	0	00	19	1	01
03	x→П 2	42	20	—	11
04	ВП	0C	21	×	12
05	↔	14	22	П→x 2	62
06	—	11	23	:	13
07	x→П 1	41	24	1	01
08	F ln	18	25	П→x 1	61
09	×	12	26	F 1/x	23
10	F e^x	16	27	—	11
11	В↑	0E	28	×	12
12	С/П	50	29	+	10
13	П→x 2	62	30	F Вх	0
14	1	01	31	БП	51
15	+	10	32	12	12
16	x→П 2	42			

Инструкция

p В↑ n В/О С/П С/П ...

Результат

P—в рег. X
Q—в рег. Y
m—в рег. 2

Регистры

0	n
1	1—p
2	m

Время вычисления одной пары P_m и Q_m — 6 с.

Пример. p = 0,5, n = 12.

Ответ: $Q_0 = 2{,}44 \cdot 10^{-4}$, $P_0 = 2{,}44 \cdot 10^{-4}$, $Q_1 = 3{,}17 \cdot 10^{-3}$, $P_1 = 2{,}93 \cdot 10^{-3}$, ...

V.5.2. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ПУАССОНА

Случайная величина x имеет распределение Пуассона с параметром $\lambda > 0$, если вероятность того, что x = m, имеет вид

$$P(m, \lambda) = \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}, \quad m = 0, 1, 2, \ldots$$

При этом вероятность Q того, что x окажется не больше m, равна

$$Q(m, \lambda) = \sum_{i=0}^{m} P(i, \lambda) = \sum_{i=0}^{m} \frac{\lambda^i}{i!} e \quad .$$

V.5.2.1. ПРИ ФИКСИРОВАННОМ m

Вычисления производятся при фиксированных значениях m и λ, вводимых вручную.

Программа V.5.2.1/21

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	P 4	41	25	F 6	62
01	/—/	56	30	↔	16
02	P e^x	33	31	:	36
03	P 6	61	32	↑	06
04	P 7	71	33	F 4	42
05	↔	16	34	×	26
10	P 5	51	35	P 6	61
11	БП	58	40	↑	06
12	P 5	51	41	F 7	72
13	1	14	42	+	96
14	—	86	43	P 7	71
15	P 8	81	44	↑	06
20	↑	06	45	F 8	82
21	F 5	52	50	P x=0	59
22	↔	16	51	1	14
23	—	86	52	F 6	62
24	↑	06	53	С/П	78

Инструкция

m ↑ λ В/О С/П

Результат

P—в рег. X, 6
Q—в рег. Y, 7

Регистры

4	λ
5	m
6	P
7	Q
8	счетчик

Программа V.5.2.1/54,52

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	К НОП	54	04	x→П 1	41	08	F e^x	16
01	1	01	05	↔	14	09	В↑	0E
02	+	10	06	x→П 2	42	10	БП	51
03	x→П 0	40	07	/—/	0L	11	20	20

Продолжение

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
12	П→x 2	62	18	+	10
13	×	12	19	F Bx	0
14	П→x 1	61	20	F L0	5Г
15	П→x 0	60	21	12	12
16	—	11	22	С/П	50
17	:	13			

Инструкция

λ В↑ m В/О С/П

Результат

Р—в рег. X
Q—в рег. Y

Регистры

0; 1 оперативные
2 λ

Время вычисления — T = (3 m + 5) с.

Пример. m = 2, λ = 0,5.

Ответ: P (2; 0,5) = 0,0758, Q (2; 0,5) = 0,9856.

V.5.2.2. ПОШАГОВЫЙ ВЫВОД

Вычисление и вывод P_m и Q_m производятся пошагово. После каждого нажатия С/П значение m увеличивается на единицу, а вычисленные значения Q (m, λ) и P (m, λ) помещаются соответственно в регистры X и Y.

При вычислении по программе V.5.2.2/21 значение Q_m помещается в регистры X и 4, P_m — в регистры Y и 5, а m — в регистр 3.

Значения P_m и m могут быть выведены в регистр X на каждом шаге вычисления.

Программа V.5.2.2/21

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	P 2	21	22	↑	06
01	/—/	56	23	F 2	22
02	P e^x	33	24	×	26
03	0	04	25	P 5	51
04	P 3	31	30	F 3	32
05	P 4	41	31	1	14
10	+	96	32	+	96
11	P 5	51	33	P3	31
12	↑	06	34	↑	06
13	F 4	42	35	F 5	52
14	+	96	40	↔	16
15	P 4	41	41	:	36
20	С/П	78	42	БП	58
21	F 5	52	43	F 1	12

Инструкция

В/О λ С/П С/П С/П...

Результат

Q—в рег. X, 4
P—в рег. Y, 5
m—в рег. 3

Регистры

2 λ
3 m
4 Q
5 P

При вычислении по программе V.5.2.2/54,52 для ввода в регистр X вычисленного значения P (m, λ) следует выполнить команду ↔,

а затем перед новым нажатием С/П восстановить содержимое регистров X и Y такой же командой ↔. Значение m помещается в регистр 0 и для его вывода в регистр X следует выполнить команду П→x 0, а для восстановления содержимого регистров X и Y перед новым нажатием С/П следует выполнить команду F. .

Программа V.5.2.2/54,52

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	В↑	0E	11	x→П 1	41
01	/—/	0L	12	С/П	50
02	F e^x	16	13	F .	25
03	0	00	14	×	12
04	x→П 0	40	15	П→x 0	60
05	x→П 1	41	16	1	01
06	ВП	0C	17	+	10
07	:	13	18	x→П 0	40
08	В↑	0E	19	БП	51
09	П→x 1	61	20	07	07
10	+	10			

Инструкция

В/О λ С/П С/П С/П...

Результат

Q—в рег. X, 1
P—в рег. Y
m—в рег. 0

Регистры

0 m
1 оперативный

Время вычисления очередной пары Q и P — 5 с.

Пример. λ = 0,3. Q_0 = 0,741, P_0 = 0,741; Q_1 = 0,963, P_1 = 0,222; ...

V.5.3. НОРМАЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ

V.5.3.1. ИНТЕГРАЛ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Интеграл вероятностей Φ (x) определяется как [13]

$$\Phi(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

Приведены программы вычисления приближенных значений с разной точностью и временем расчета.

V.5.3.1.1. Вычисление $\tilde{\Phi}(x)$ по формуле [11]

$$\tilde{\Phi}(x) = 1 - (1 + 10^{-6} x (C_6 + x (C_5 + x (C_4 + x (C_3 + x (C_2 + xC_1)))))^{-16}.$$

Требуемые значения C_1 — C_6 помещаются в регистры 1—6 и приведены в таблице распределения регистров в конце программы и в инструкции. Абсолютная погрешность вычислений Δ не превышает $5 \cdot 10^{-7}$.

Программа V.5.3.1.1/54.52

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	В↑	0E	14	F 10^x	15
01	К НОП	54	15	:	13
02	6	06	16	1	01
03	x→П 0	40	17	+	10
04	Сх	0Г	18	F x^2	22
05	П→x0	60	19	F x^2	22
06	x→П Д	4Г	20	F x^2	22
07	F .	25	21	F x^2	22
08	К П→x Д	ГГ	22	F 1/x	23
09	+	10	23	1	01
10	×	12	24	—	11
11	F L0	5Г	25	/—/	0L
12	05	05	26	С/П	50
13	6	06			

Регистры

0;	Д оперативные
1	C_1 = 49867,347
2	C_2 = 21141,006
3	C_3 = 3277,626
4	C_4 = 38,004
5	C_5 = 48,891
6	C_6 = 5,383

Инструкция V.5.3.1.1/54,52

Содержание	Набрать число	Выполнить команды	Результат
1. Занести константы C_1 — C_6	49867,347	x→П 1	
	21141,006	x→П 2	
	3277,626	x→П 3	
	38,004	x→П 4	
	48,891	x→П 5	
	5,383	x→П 6	
2. Вычислить Ф(x)	x	В/О С/П	$\tilde{\Phi}$(x)
3. Для нового счета — к п. 2			

Время вычисления после ввода x — 20 с.

Пример. x = 1. $\tilde{\Phi}$ (1) = 0,6826895; Ф (1) = 0,682690.

V.5.3.1.2. Представление $\tilde{\Phi}$(x) в виде суммы ряда по степеням x [11] при x⩽4

$$\tilde{\Phi}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, x \sum_{i=0}^{N} \frac{\left(-\frac{x^2}{2}\right)^i}{i!\,(2i+1)}.$$

V.5.3.1.2.1. При N = 9

Программа V.5.3.1.2.1/54,52

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	F x^2	22	10	П→x 0	60	20	Fπ	20
01	2	02	11	2	02	21	:	13
02	:	13	12	F 1/x	23	22	F $\sqrt{\ }$	21
03	9	09	13	—	11	23	С/П	50
04	x→П 0	40	14	F 1/x	23			
05	0	00	15	+	10			
06	П→x 0	60	16	F L0	5Г			
07	:	13	17	06	06			
08	×	12	18	F x^2	22			
09	/—/	0L	19	×	12			

Инструкция
x В/О С/П

Регистр
0 оперативный

Относительная погрешность вычисления δ^*

$$\delta^* = \frac{|\tilde{\Phi}(x) - \Phi(x)|}{\mathrm{Min}\,[\Phi(x);\ 1-\Phi(x)]}$$

при x ⩽ 2 (0 < Ф (x) ⩽ 0,955) не превышает 0,3 %.

Время вычисления — 30 с.

Пример. x = 2. $\tilde{\Phi}$ (2) = 0,9546; Ф (2) = 0,95450.

V.5.3.1.2.2. С остановом по машинному нулю

Программа V.5.3.1.2.2/21

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	F x^2	55	30	—	86	60	+	96
01	P 2	21	31	F 1/x	45	61	P 4	41
02	2	24	32	+	96	62	—	86
03	×	26	33	+	96	63	P x=0	59
04	↑	06	34	2	24	64	P 2	21
05	P π	23	35	+	96	65	+	96
10	:	36	40	↑	06	70	С/П	78
11	F $\sqrt{\ }$	65	41	F 2	22			
12	P 3	31	42	←→	16			
13	P 4	41	43	:	36			
14	0	04	44	/—/	56			
15	P 5	51	45	↑	06			
20	F 5	52	50	F 3	32			
21	1	14	51	×	26			
22	+	96	52	P 3	31			
23	P 5	51	53	↑	06			
24	2	24	54	F 4	42			
25	F 1/x	45	55	←→	16			

Инструкция
x В/О С/П

Регистры

2	x^2
3	оперативный
4	$\tilde{\Phi}$(x)
5	счетчик

Программа V.5.3.1.2.2/54,52

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	F x^2	22	14	П→x 3	63	28	—	11
01	2	02	15	1	01	29	F x=0	5E
02	:	13	16	—	11	30	12	12
03	x→П 1	41	17	x→П 3	43	31	F Bx	0
04	F π	20	18	:	13	32	С/П	50
05	:	13	19	П→x 2	62			
06	F $\sqrt{\ }$	21	20	×	12		Инструкция	
07	0	00	21	x→П 2	42			
08	x→П 3	43	22	2	02		x В/О С/П	
09	←→	14	23	F 1/x	23			
10	БП	51	24	П→x 3	63		Регистры	
11	21	21	25	—	11			
12	F Bx	0	26	:	13		1 $x^2/2$	
13	П→x 1	61	27	+	10		2;3 оперативные	

Относительная погрешность вычисления δ не превышает $2\cdot 10^{-6}$ при $x \leqslant 4$.

Время вычисления — $T = 20\,(2x + 1)$ с.

Пример. $x = 3$. $\tilde{\Phi}(3) = 0{,}9973001$; $\Phi(3) = 0{,}9973002$.

V.5.3.1.3. Представление Ф(x) в виде суммы ряда по x^{-1} [11] при $x \geqslant 4$

$$\tilde{\Phi}(x) = 1 - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{x} \sum_{i=0}^{N} \frac{(2i-1)!!}{(-x^2)^i}.$$

Для более точной оценки $\tilde{\Phi}(x)$ полученное в процессе расчета значение $1 - \tilde{\Phi}(x)$ заносится в регистр памяти 2 и может быть прочитано командой П→x 2.

Программа V.5.3.1.3/21

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	F x^2	55	12	—	86	24	1	14
01	P 2	21	13	/—/	56	25	+	96
02	6	64	14	↑	06	30	P 4	41
03	P 4	41	15	F 4	42	31	F 3	32
04	P 3	31	20	×	26	32	1	14
05	↑	06	21	↑	06	33	—	86
10	+	96	22	F 2	22	34	P x=0	59
11	1	14	23	:	36	35	F ↑	05

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
40	F 2	22	53	F $\sqrt{\ }$	65	70	С/П	78
41	↑	06	54	↑	06			
42	P e^x	33	55	F 4	42		Инструкция	
43	×	26	60	←→	16		x В/О С/П	
44	2	24	61	:	36			
45	:	36	62	1	14		Регистры	
50	↑	06	63	←→	16			
51	P π	23	64	P 2	21		2 $1-\tilde{\Phi}(x)$	
52	×	26	65	—	86		3;4 оперативные	

Программа V.5.3.1.3/54,52

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	F x^2	22	13	F L2	58	26	←→	14
01	6	06	14	03	03	27	x→П 2	42
02	x→П 2	42	15	←→	14	28	—	11
03	1	01	16	B↑	0E	29	С/П	50
04	П→x 2	62	17	F e^x	16			
05	—	11	18	×	12		Инструкция	
06	П→x 2	62	19	2	02			
07	—	11	20	:	13		x В/О С/П	
08	×	12	21	F π	20			
09	←→	14	22	×	12		Регистр	
10	:	13	23	F $\sqrt{\ }$	21			
11	1	01	24	:	13		2 счетчик; $1-\tilde{\Phi}(x)$	
12	+	10	25	1	01			

Относительная погрешность вычисления δ^* при $x \geqslant 4$ ($0{,}9999 \leqslant \Phi(x) < 1$) не превышает 0,5 %. Время вычисления — 25 с.

Пример. $x = 5$. $\tilde{\Phi}(5) = 0{,}9999994$; $\Phi(5) = 0{,}9999994266$; $1 - \tilde{\Phi}(5) = 5{,}7344\cdot 10^{-7}$, $1 - \Phi(5) = 5{,}7340\cdot 10^{-7}$.

V.5.3.1.4. Вычисление $\tilde{\Phi}(x)$ по формуле [11]

$$\tilde{\Phi}(x) = \sqrt{1 - e^{\frac{-2}{\pi}\cdot x^2}}.$$

Относительная погрешность вычисления δ^* при $x \leqslant 2$ ($0 < \Phi(x) \leqslant 0{,}955$) не превышает 0,114.

Программа V.5.3.1.4/21

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	F x^2	55	10	F x^2	55
01	↑	06	11	1	14
02	P π	23	12	←→	16
03	:	36	13	—	86
04	/—/	56	14	F $\sqrt{-}$	65
05	P e^x	33	15	С/П	78

Инструкция

x В/О С/П

Программа V.5.3.1.4/54,52

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	F x^2	22	05	F x^2	22	10	С/П	50
01	/—/	0L	06	1	01			
02	F π	20	07	←→	14			
03	:	13	08	—	11			
04	F e^x	16	09	F $\sqrt{-}$	21			

Инструкция

x В/О С/П

Время вычисления — 5 с.

Пример. x = 1. $\tilde{\Phi}$ (1) = 0,6862; Φ (1) = 0,682690.

V.5.3.1.5. Вычисление $\tilde{\Phi}(x)$ по формуле [7]

$$\tilde{\Phi}(x) = \sqrt{1 - \frac{e^{-x^2\left(\frac{2}{\pi} - k\right)}}{1 + kx^2}}, \quad k = 0{,}1523.$$

Относительная погрешность вычисления δ* при $x \leqslant 4$ ($0 < \Phi(x) \leqslant 1 - 6 \cdot 10^{-5}$) не превышает 1 %.

Значение k = 0,1523 вводится в регистр памяти 3 вручную и в процессе вычисления не изменяется, так что при повторных вычислениях $\tilde{\Phi}$ (x) значение k вводить не требуется.

Программа V.5.3.1.5/21

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	F x^2	55	05	:	36	14	F 2	22
01	P 2	21	10	↑	06	15	←→	16
02	2	24	11	F 3	32	20	×	26
03	↑	06	12	—	86	21	P e^x	33
04	P π	23	13	↑	06	22	P 2	21

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
23	F 3	32	34	F 1/x	45
24	×	26	35	1	14
25	1	14	40	←→	16
30	+	96	41	—	86
31	↑	06	42	F $\sqrt{-}$	65
32	F 2	22	43	С/П	78
33	×	26			

Инструкция

0,1523 Р3

x В/О С/П

Регистры

2 x^2

3 0,1523

Программа V.5.3.1.5/54,52

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	F x^2	22	10	×	12
01	П→x 3	63	11	1	01
02	2	02	12	+	10
03	F π	20	13	:	13
04	:	13	14	1	01
05	—	11	15	←→	14
06	×	12	16	—	11
07	F e^x	16	17	F $\sqrt{-}$	21
08	←→	14	18	С/П	50
09	П→x 3	63			

Инструкция

0,1523 x→П 3

x В/О С/П

Регистр

3 0,1523

Время вычисления — 7 с.

Пример. x = 4. $\tilde{\Phi}$ (4) = 0,999937, Φ (4) = 0,9999366.

V.5.3.2. ФУНКЦИЯ, ОБРАТНАЯ ИНТЕГРАЛУ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Обозначим $x(z) = z^{-1}$, где

$$z = \Phi(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt.$$

Приводятся программы вычисления $\tilde{x}$ (z) с разной степенью точности и с разным временем счета.

V.5.3.2.1. Вычисление $\tilde{x}(z)$ по формуле [11]

$$\tilde{x}(z) = \sqrt{-\pi \cdot \ln \sqrt{1 - z^2}}.$$

Программа V.5.3.2.1/21

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	F x^2	55	10	↑	06
01	1	14	11	P π	23
02	←→	16	12	×	26
03	—	86	13	/—/	56
04	F $\sqrt{\ }$	65	14	F $\sqrt{\ }$	65
05	P ln	13	15	С/П	78

Инструкция

z В/О С/П

Программа V.5.3.2.1/54,52

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	F x^2	22	05	F ln	18	10	С/П	50
01	1	01	06	F π	20			
02	←→	14	07	×	12			
03	—	11	08	/—/	0L			
04	F $\sqrt{\ }$	21	09	F $\sqrt{\ }$	21			

Инструкция

z В/О С/П

Относительная погрешность вычисления $\delta = \frac{|\tilde{x}(z) - x(z)|}{x(z)}$ при $z < 0,99$ $(x(z) < 2,6)$ не превышает 3,7 %. Время вычисления — 4с.

Пример. $z = 0,9876$. $\tilde{x}(0,9876) = 2,412$; $x(0,9876) = 2,500$.

V.5.3.2.2. Вычисление $\tilde{x}(z)$ по формуле [7]

$$\tilde{x}(t) = \sqrt{\frac{\pi}{2} \cdot [-\ln(1 - z^k)]^{1/k}}, \quad k = 1,898.$$

Программа V.5.3.2.2/21

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	↑	06	15	F 1/x	45
01	F 3	32	20	←→	16
02	←→	16	21	x^y	38
03	x^y	38	22	2	24
04	1	14	23	F $\sqrt{\ }$	65
05	←→	16	24	:	36
10	—	86	25	↑	06
11	P ln	13	30	P π	23
12	/—/	56	31	F $\sqrt{\ }$	65
13	↑	06	32	×	26
14	F 3	32	33	С/П	78

Инструкция

1,898 P 3

z В/О С/П

Регистр

3 1,898

Программа V.5.3.2.2/54,52

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	F lg	17	09	F ln	16	18	С/П	50
01	П→x Д	6Г	10	П→x Д	6Г			
02	×	12	11	:	13			
03	F 10^x	15	12	F e^x	16			
04	1	01	13	F π	20			
05	—	11	14	2	02			
06	/—/	0L	15	:	13			
07	F ln	18	16	F $\sqrt{\ }$	21			
08	/—/	0L	17	×	12			

Инструкция

1,898 x→П Д

z В/О С/П

Регистр

Д 1,898

Время вычисления — 10 с.

Относительная погрешность вычисления δ при $z < 1 - 1 \cdot 10^{-7}$ $(0 < x \leqslant 5,327)$ не превышает 1 %.

Пример. $z = 0,9973$. $\tilde{x}(0,9973) = 3,01$; $x(0,9973) = 3,0$.

V.5.3.2.3. Вычисление $\tilde{x}(z)$ по формуле [7]

$$\tilde{x}(z) = \sqrt{\pi \left\{ \frac{1}{41} [-\ln(1 - z^4)]^{3/2} - \ln \sqrt{1 - z^2} \right\}}.$$

Программа V.5.3.2.3/21

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	F x^2	55	21	/—/	56	42	P π	23
01	1	14	22	1	14	43	×	26
02	—	86	23	,	46	44	F $\sqrt{\ }$	65
03	/—/	56	24	5	54	45	С/П	78
04	F $\sqrt{\ }$	65	25	←→	16			
05	P ln	13	30	x^y	38			
10	P 3	31	31	4	44			
11	←→	16	32	1	14			
12	F x^2	55	33	:	36			
13	1	14	34	↑	06			
14	←→	16	35	F 3	32			
15	—	86	40	—	86			
20	P ln	13	41	↑	06			

Инструкция

z В/О С/П

Регистр

3 ln $\sqrt{1 - z^2}$

Программа V.5.3.2.3/54,52

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	F x^2	22	10	×	12	20	—	11
01	B ↑	0E	11	4	04	21	F π	20
02	F x^2	22	12	1	01	22	×	12
03	1	01	13	:	13	23	F $\sqrt{\ }$	21
04	—	11	14	←→	14	24	С/П	50
05	/—/	0L	15	1	01			
06	F ln	18	16	—	11			
07	/—/	0L	17	/—/	0L			
08	B ↑	0E	18	F $\sqrt{\ }$	21			
09	F $\sqrt{\ }$	21	19	F ln	18			

Инструкция

z В/О С/П

Время вычисления — 11 с.

Относительная погрешность δ при $z < 1 - 1 \cdot 10^{-7}$ ($x \leqslant 5{,}327$) не превышает 0,3 %.

Пример. z = 0,9545. $\tilde{x}$ (0,9545) = 1,9955; x (0,9545) = 2,0.

V.5.3.2.4. Вычисление $\tilde{x}$ (z) при $z \simeq 1$

При z, близких к 1, ввод точного значения z невозможен из-за ограниченной разрядности представления числа.

Приведена программа вычисления $\tilde{x}$ (z) при вводе вместо z дополнения z до 1: q = 1 — z.

Вычисления производятся по формуле

$$\tilde{x}(1-q) = \sqrt{\pi\left\{\frac{1}{23}\left[-\ln(5q)\right]^{5/4} - \ln\sqrt{2q}\right\}}.$$

Относительная погрешность вычисления δ при $0{,}0455 > q > 1{,}244 \cdot 10^{-15}$ ($2 \leqslant x \leqslant 8$) не превышает 0,6 %.

Программа V.5.3.2.4/21

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	↑	06	20	2	24	40	×	26
01	+	96	21	5	54	41	F$\sqrt{\ }$	65
02	F $\sqrt{\ }$	65	22	←→	16	42	С/П	78
03	P ln	13	23	x^y	38			
04	P 2	21	24	2	24			
05	←→	16	25	3	34			
10	5	54	30	:	36			
11	×	26	31	↑	06			
12	P ln	13	32	F 2	22			
13	/—/	56	33	—	86			
14	1	14	34	↑	06			
15	,	46	35	P π	23			

Инструкция

q В/О С/П

Регистр

2 ln $\sqrt{2q}$

Программа V.5.3.2.4/54,52

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	B ↑	0E	09	2	02	18	F π	20
01	F 1/x	23	10	3	03	19	×	12
02	5	05	11	:	13	20	F $\sqrt{\ }$	21
03	:	13	12	←→	14	21	С/П	50
04	F ln	18	13	B ↑	0E			
05	B ↑	0E	14	+	10			
06	F $\sqrt{\ }$	21	15	F $\sqrt{\ }$	21			
07	F $\sqrt{\ }$	21	16	F ln	18			
08	×	12	17	—	11			

Инструкция

q В/О С/П

Время вычисления — 10 с.

Пример. $q = 2 \cdot 10^{-9}$ ($z = 1 - 2 \cdot 10^{-9}$). $\tilde{x}(1 - 2 \cdot 10^{-9}) = 5{,}965$; $x(1 - 2 \cdot 10^{-9}) = 6$.

V.5.4. χ^2-РАСПРЕДЕЛЕНИЕ

Сумма квадратов m независимых случайных величин $y = (x_k - \bar{x})/\sigma$ ($k = 1; 2; \ldots; m$) имеет χ^2-распределение с m степенями свободы.

V.5.4.1. ПЛОТНОСТЬ ВЕРОЯТНОСТИ

Плотность вероятности χ^2-распределения определяется из соотношения [14]

$$\varphi_m(x) = \frac{x^{\frac{m}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}}{2^{\frac{m}{2}} \cdot \Gamma\left(\frac{m}{2}\right)} \quad (x > 0).$$

По программе вычисляются значения φ_m (x) при $m \geqslant 1$.

Программа V.5.4.1/21

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	P 7	71	12	:	36	24	—	86
01	←→	16	13	P 7	71	25	P e^x	33
02	P 8	81	14	↑	06	30	↑	06
03	2	24	15	F 6	62	31	F 8	82
04	:	36	20	P ln	13	32	:	36
05	P 6	61	21	×	26	33	P 8	81
10	F 7	72	22	↑	06	34	F 7	72
11	2	24	23	F 6	62	35	1	14

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
40	—	86	53	↑	06
41	P 7	71	54	P π	23
42	↑	06	55	P ln	13
43	F 8	82	60	×	26
44	↔	16	61	P e^x	33
45	P x≠0	79	62	↑	06
50	5	54	63	F 8	82
51	P x<0	69	64	×	26
52	P :	33	65	С/П	78

Инструкция

x ↑ m В/О С/П

Регистры

6 x/2
7;8 оперативные

Программа V.5.4.1/54,52

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	x→П 0	40	13	П→x 0	60	26	F e^x	16
01	2	02	14	:	13	27	×	12
02	:	13	15	П→x 2	62	28	С/П	50
03	x→П 1	41	16	1	01			
04	F ln	18	17	—	11			
05	↔	14	18	x→П 2	42			
06	2	02	19	F x≠0	57			
07	:	13	20	23	23			
08	x→П 2	42	21	F x<0	5С			
09	×	12	22	14	14			
10	П→x 1	61	23	F π	20			
11	—	11	24	F ln	18			
12	F e^x	16	25	×	12			

Инструкция

m В↑ x В/О С/П

Регистры

0 x
1 x/2
2 оперативный

Время вычисления — T = (10 + m) с.
Пример. m = 3; x = 2. φ_3 (2) = 0,20755.

V.5.4.2. ИНТЕГРАЛЬНЫЙ ЗАКОН РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Интегральный закон χ^2-распределения определяется соотношением

$$F_m(x) = \int_0^x \varphi_m(t)\,dt = \frac{1}{2^{\frac{m}{2}}\,\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)} \int_0^x t^{\frac{m}{2}-1} e^{-\frac{t}{2}}\,dt.$$

Приведены программы вычисления F_m (x) как при четных m — как более короткая и требующая малое время для расчета, так и более длинная — вычисления F_m (x) при произвольном m.

V.5.4.2.1. Вычисление $F_m(x)$ при четных m

При четных m ⩾ 2 величина F_m (x) представляется в виде конечного ряда по x^i:

$$F_m(x) = 1 - e^{-\frac{x}{2}} \sum_{i=0}^{\frac{m}{2}-1} \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^i}{i!}.$$

Программа V.5.4.2.1/21

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	P 2	21	24	×	26	52	1	14
01	↔	16	25	P 4	41	53	↔	16
02	P 3	31	30	↑	06	54	—	86
03	/—/	56	31	F 5	52	55	С/П	78
04	P e^x	33	32	+	96			
05	F √	65	33	P 5	51			
10	P 4	41	34	F 6	62			
11	P 5	51	35	2	24			
12	2	24	40	+	96			
13	↑	06	41	P 6	61			
14	P 6	61	42	↑	06			
15	F 3	32	43	F 2	22			
20	↔	16	44	—	86			
21	:	36	45	P x=0	59			
22	↑	06	50	↔	16			
23	F 4	42	51	F 5	52			

Инструкция

x ↑ m В/О С/П

Регистры

2 m
3 x
4—6 оперативные

Программа V.5.4.2.1/54,52

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	x→П 0	40	09	F L0	5Г	18	С/П	50
01	0	00	10	02	02			
02	П→x 0	60	11	↔	14			
03	:	13	12	F e^x	16			
04	×	12	13	F √	21			
05	1	01	14	:	13			
06	+	10	15	1	01			
07	F L0	5Г	16	↔	14			
08	09	09	17	—	11			

Инструкция

x В↑ m В/О С/П

Регистр

0 счетчик

Время вычисления — T = (m + 5) с.
Пример. m = 6, x = 1,635. F_6 (1,635) = 0,04997.

V.5.4.2.2. Вычисление $F_m(x)$ при произвольных m

При произвольных целых m для вычисления $F_m(x)$ используется следующее представление: при нечетных m ($m \geqslant 3$) функция $F_m(x)$ имеет вид

$$F_m(x) = \Phi(\sqrt{x}) - \sqrt{\frac{2x}{\pi}} \cdot e^{-\frac{x}{2}} \sum_{i=0}^{\frac{m-3}{2}} \frac{x^i}{(2i+1)!!},$$

где $\Phi(\sqrt{x})$ — интеграл вероятностей;

а при четных m ($m \geqslant 2$) используется представление $F_m(x)$ из предыдущего раздела.

Интеграл вероятностей $\Phi(\sqrt{x})$ представляется приближенно в виде

$$\Phi(\sqrt{x}) \simeq \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\sqrt{x}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \simeq \sqrt{1 - \frac{e^{-x(2/\pi - k)}}{1 + kx}}, \quad k = 0{,}145;$$

при $m \leqslant 29$ и $0{,}02 < F_m(x) < 0{,}99$ относительная погрешность δ^* вычисления $\hat{F}_m(x)$ не превышает 1 %.

Программа V.5.4.2.2/54,52

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	x→П Д	4Г	24	2	02	48	F √‾	21
01	П→x 0	60	25	:	13	49	+	10
02	×	12	26	x→П 1	41	50	П→x Д	6Г
03	x→П 3	43	27	2	02	51	F L1	5L
04	П→x Д	6Г	28	×	12	52	40	40
05	В↑	0E	29	F π	20	53	F e^x	16
06	+	10	30	×	12	54	F √‾	21
07	F π	20	31	F cos	1Г	55	:	13
08	:	13	32	F x⩾0	59	56	—	11
09	x→П 2	42	33	37	37	57	С/П	50
10	—	11	34	x→П 2	42			
11	F e^x	16	35	0	00		Инструкция	
12	П→x 3	63	36	x→П 3	43			
13	1	01	37	Сх	0Г		Р/Г—в Р	
14	x→П 3	43	38	БП	51		0,145 x→П/О	
15	+	10	39	50	50		m В↑ x В/О С/П	
16	:	13	40	×	12			
17	1	01	41	П→x 1	61		Регистры	
18	—	11	42	2	02			
19	/—/	0L	43	×	12		0 0,145	
20	F √‾	21	44	П→x 3	63		1—3 оперативные	
21	←→	14	45	+	10		Д x	
22	2	02	46	:	13			
23	+	10	47	П→x 2	62			

Время вычисления — T = (2 n + 16) с.

Примеры. m = 8, x = 3,49. F_8 (3,49) = 0,1.
m = 9, x = 4,168. F_9 (4,168) = 0,1.

V.5.5. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ СТЬЮДЕНТА

Распределению Стьюдента с n степенями свободы подчиняется отношение независимых случайных величин вида

$$t_n = \frac{z_n}{\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} z_i^2}},$$

где z_i ($i = 0; 1; \ldots; n$) распределены нормально с $\overline{z_i} = 0$ и одинаковыми дисперсиями σ_z^2 [14].

При этом распределение t_n не зависит от величины дисперсии σ_z^2.

V.5.5.1. ПЛОТНОСТЬ ВЕРОЯТНОСТИ

Случайная величина t_n имеет плотность вероятности (при $n \geqslant 1$) [14]

$$p_n(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi n}} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}.$$

Программа V.5.5.1/21

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	F x^2	55	33	P 6	61	70	P 7	71
01	←→	16	34	P π	23	71	F 8	82
02	P 5	51	35	↑	06	72	1	14
03	P 8	81	40	БП	58	73	—	86
04	:	36	41	ВП	66	74	P 8	81
05	1	14	42	F 7	72	75	P x=0	59
10	+	96	43	2	24	80	P ,	43
11	P ln	13	44	×	26	81	F 7	72
12	P 6	61	45	↑	06	82	↑	06
13	F 8	82	50	P π	23	83	F 6	62
14	1	14	51	×	24	84	×	26
15	+	96	52	P 7	26	85	С/П	78
20	/—/	56	53	F 5	52			
21	↑	06	54	↑	06		Инструкция	
22	F 6	62	55	F 8	82			
23	×	26	60	—	86		n ↑ t В/О С/П	
24	P e^x	33	61	↑	06			
25	↑	06	62	F 7	72		Регистры	
30	F 8	82	63	←→	16			
31	:	36	64	:	36		5 n	
32	F √‾	65	65	F 1/x	45		6—8 оперативные	

Время вычисления — T = 4 (n + 1) с.

Программа V.5.5.1/54,52

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	F x^2	22	14	П→x 0	60	28	F 1/x	23
01	←→	14	15	:	13	29	F L0	5Г
02	x→П 0	40	16	F $\sqrt{\ }$	21	30	20	20
03	x→П 1	41	17	F π	20	31	×	12
04	:	13	18	БП	51	32	С/П	50
05	1	01	19	28	28			
06	+	10	20	2	02		Инструкция	
07	F ln	18	21	×	12			
08	П→x 0	60	22	F π	20		n В↑ t В/О С/П	
09	1	01	23	×	12			
10	+	10	24	П→x 1	61		Регистры	
11	/—/	0L	25	П→x 0	60			
12	×	12	26	—	11		0 оперативный	
13	F e^x	16	27	:	13		1 n	

Время вычисления — T = (2n + 11) с.

Пример. n = 5, t = 2. p_8 (2) = 0,0651.

V.5.5.2. ИНТЕГРАЛЬНЫЙ ЗАКОН РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Интегральный закон распределения Стьюдента получаем из p_n (t) в виде [14]

$$S_n(t) = \int_{-t}^{t} p_n(x)\,dx = \frac{2}{\sqrt{\pi n}} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \cdot \int_0^t \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}} dx.$$

Обозначая $\varphi = \operatorname{arctg} \frac{t}{\sqrt{n}}$, запишем S_n (t) в виде [7]:

$$S_n(t) = \begin{cases} \sin\varphi \cdot \sum\limits_{i=0}^{\frac{n}{2}-1} \cos^{2i}\varphi \prod\limits_{j=0}^{i-1} \dfrac{j+\frac{1}{2}}{j+1} & \text{при n-четном,} \\ \dfrac{2}{\pi} \cdot \left\{ \varphi + \operatorname{tg}\varphi \sum\limits_{i=1}^{\frac{n-1}{2}} \cos^{2i}\varphi \prod\limits_{j=1}^{i-1} \dfrac{j}{j+\frac{1}{2}} \right\} & \text{при n-нечетном.} \end{cases}$$

По программе V.5.5.2/21 S_n (t) вычисляется только при четных n.

Программа V.5.5.2/21

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	P 5	51	25	←→	16	54	1	14
01	F $\sqrt{\ }$	65	30	P x=0	59	55	+	96
02	:	36	31	:	36	60	P 6	61
03	F x^2	55	32	F 4	42	61	БП	58
04	1	14	33	×	26	62	←→	16
05	P 6	61	34	С/П	78			
10	+	96	35	F 3	32		Инструкция	
11	P 3	31	40	:	36			
12	:	36	41	P 6	61		t ↑ n В/О С/П	
13	F $\sqrt{\ }$	65	42	F 5	52			
14	P 4	41	43	F 1/x	45		Регистры	
15	F 5	52	44	1	14			
20	2	24	45	←→	16		3 $1+t^2/n$	
21	—	86	50	—	86		4 $1/\sqrt{1+n/t^2}$	
22	P 5	51	51	↑	06		5;6 оперативные	
23	↑	06	52	F 6	62			
24	F 6	62	53	×	26			

Время вычисления — T = (2n + 1) с.

По программе V.5.5.2/54,52 S_n (t) вычисляется как при четных, так и при нечетных n.

Программа V.5.5.2/54,52

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	x→П 0	40	18	С/П	50	36	1	01
01	F $\sqrt{\ }$	21	19	П→x 3	63	37	+	10
02	:	13	20	×	12	38	F L0	5Г
03	x→П 2	42	21	П→x 0	60	39	19	19
04	F tg^{-1}	1L	22	:	13	40	×	12
05	F L0	5Г	23	F L0	5Г	41	С/П	50
06	09	09	24	34	34			
07	БП	51	25	П→x 2	62			
08	29	29	26	×	12		Инструкция	
09	x→П1	41	27	П→x 1	61			
10	F sin	1C	28	+	10		Р/Г—в Р	
11	FB x	0	29	Fπ	20		t В↑n В/О С/П	
12	F cos	1Г	30	:	13			
13	F x^2	22	31	2	02		Регистры	
14	x→П3	43	32	БП	51		0 оперативный	
15	F L0	5Г	33	40	40		1 $tg^{-1}(t/\sqrt{n})$	
16	21	21	34	П→x 0	60		2 $t/\sqrt{n}$	
17	←→	14	35	×	12		3 $n/(n+t^2)$	

Время вычисления — $T=2(3+n)$ с.

Примеры.

$n=3,\ t=0{,}277.\quad S_3(0{,}277)=0{,}2.$

$n=4,\ t=0{,}271.\quad S_4(0{,}271)=0{,}2.$

V.5.6. r-РАСПРЕДЕЛЕНИЕ

Статистика случайной величины $x = r\sqrt{n-1}$, где r — выборочный коэффициент корреляции, а n — объем выборки, имеет r-распределение с n-2 степенями свободы [14]. При этом значение x лежит в пределах $-\sqrt{n-1} < x < \sqrt{n-1}$.

r-распределение используется для проверки гипотезы о некоррелированности ($\rho = 0$) пар случайных величин x_i, y_i ($i = 1, 2, \ldots, n$), описываемых двумерным нормальным распределением.

V.5.6.1. ПЛОТНОСТЬ ВЕРОЯТНОСТИ

Плотность вероятности случайной величины x имеет вид [14]

$$\varphi_n(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi(n-1)}}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-2}{2}\right)}\cdot\left(1-\frac{x^2}{n-1}\right)^{\frac{n-4}{2}}.$$

Программа V.5.6.1/54,52

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	Fx²	22	16	2	02	32	F1/x	23
01	←→	14	17	—	11	33	F L0	5Г
02	1	01	18	×	12	34	24	24
03	—	11	19	Fex	16	35	×	12
04	x→П 1	41	20	П→x 1	61	36	С/П	50
05	:	13	21	F √‾	21			
06	1	01	22	БП	51		Инструкция	
07	—	11	23	30	30			
08	/—/	0L	24	2	02		n В↑x В/О С/П	
09	F √‾	21	25	×	12			
10	F ln	18	26	П→x 2	62		Регистры	
11	П→x 1	61	27	П→x 0	60			
12	1	01	28	—	11		0 оперативный	
13	—	11	29	:	13		1 n—1	
14	x→П 0	40	30	Fπ	20		2 n—2	
15	x→П 2	42	31	×	12			

Время вычисления — $T = (3n + 2)$ с.

Пример. $n = 5$, $x = 0{,}8$. $\varphi_5(2) = 0{,}2917$.

V.5.6.2. ИНТЕГРАЛЬНЫЙ ЗАКОН РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Интегральный закон распределения $F_n(x)$ случайной величины x определяется из соотношения

$$F_n(R)=2\int_0^R\varphi_n(x)\,dx=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-2}{2}\right)}\int_0^{R/\sqrt{n-1}}(1-x^2)^{\frac{n-4}{2}}\,dx,$$

$$0\leqslant R<\sqrt{n-1}.$$

Для вычисления $F_n(R)$ при $n \geqslant 4$ используем соотношения [7]:

$$F_n(R)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-2}{2}\right)}A_n,$$

где A_n определяется из рекуррентного уравнения

$A_i=\cos^{i-4}\varphi\cdot\sin\varphi+(i-4)A_{i-2}$ ($i=5, 7, \ldots, n$ или $i=4, 6, \ldots, n$)

при $A_3=\varphi=\arcsin\frac{R}{\sqrt{n-1}}$.

Программа V.5.6.2/54,52

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	x→П 2	42	23	Fπ	20	46	×	12
01	1	01	24	:	13	47	П→x 5	65
02	x→П 1	41	25	x→П 1	41	48	×	12
03	—	11	26	П→x 5	65	49	1	01
04	F √‾	21	27	F √‾	21	50	+	10
05	:	13	28	П→x 4	64	51	F L2	58
06	x→П 4	44	29	×	12	52	37	37
07	F sin⁻¹	19	30	x→П 4	44	53	П→x 4	64
08	F cos	1Г	31	FBx	0	54	×	12
09	Fx²	22	32	F sin⁻¹	19	55	+	10
10	x→П 5	45	33	К П→x 2	Г2	56	П→x 1	61
11	П→x 2	62	34	Cx	0Г	57	×	12
12	2	02	35	БП	51	58	С/П	50
13	:	13	36	49	49			
14	x→П 2	42	37	П→x 2	62		Инструкция	
15	Fπ	20	38	2	02			
16	×	12	39	×	12		Р/Г—в Р	
17	F sin	1C	40	П→x 3	63		R В↑n В/О С/П	
18	Fx²	22	41	+	10			
19	x→П 3	43	42	F1/x	23		Регистры	
20	Fx≠0	57	43	1	01			
21	33	33	44	—	11		1—5 оперативные	
22	2	02	45	/—/	0L			

Время вычисления при четных n — $T = 2{,}5(n + 2)$ с, при нечетных n — $T = 3(n + 2)$ с.

Примеры. $n = 6$, $R = 0{,}7$. $F_6(0{,}7) = 0{,}4542$.

$n = 7$, $R = 0{,}7$. $F_7(0{,}7) = 0{,}4656$.

V.5.7. F-РАСПРЕДЕЛЕНИЕ

Отношение двух случайных величин, имеющих χ^2-распределение соответственно с m и n степенями свободы, имеет F-распределение.

Так как сумма квадратов случайных величин, имеющих нормальное распределение, подчиняется распределению χ^2, то случайная величина z, имеющая F-распределение, определяется через случайные величины x и y, имеющие нормальное распределение, в виде [14]

$$z = \frac{\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} x_i^2}{\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} y_j^2}.$$

V.5.7.1. ПЛОТНОСТЬ ВЕРОЯТНОСТИ

Плотность вероятности F-распределения запишем с использованием бета-функции:

$$p_F(m, n, z) = \left(\frac{m}{2}\right)^{\frac{m}{2}} \cdot B^{-1}\left(\frac{m}{2}, \frac{n}{2}\right) \cdot z^{\frac{m}{2}-1} \left(1 + \frac{m}{n} z\right)^{-\frac{m+n}{2}}.$$

Программа V.5.7.1/54,52

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	x→П 2	42	21	6	06	42	F π	20
01	←→	14	22	x→П 0	40	43	F ln	18
02	2	02	23	F.	25	44	×	12
03	:	13	24	←→	14	45	F eˣ	16
04	x→П 1	41	25	П→x 5	65	46	×	12
05	:	13	26	×	12	47	F 1/x	23
06	←→	14	27	—	11	48	F L0	5Г
07	2	02	28	F eˣ	16	49	31	31
08	:	13	29	П→x 2	62	50	С/П	50
09	x→П 5	45	30	×	12			
10	×	12	31	К П→x 0	Г0		Инструкция	
11	F ln	18	32	F.	25			
12	F Bx	0	33	1	01		m B↑ n B↑ z В/О С/П	
13	1	01	34	F Bx	0			
14	+	10	35	—	11		Регистры	
15	F ln	18	36	F x<0	5C			
16	П→x 5	65	37	42	42	0	счетчик	
17	П→x 1	61	38	/—/	0L	1	n/2	
18	+	10	39	×	12	3	(m+n)/2	
19	x→П 3	43	40	БП	51	4	z	
20	×	12	41	33	33	5	m/2	

Время вычисления — T = 3 (7 + m + n) с.

Пример. m = 4, n = 5, z = 6. p_F (4, 5, 6) = 0,0123.

V.5.7.2. ИНТЕГРАЛЬНЫЙ ЗАКОН

Интегральный закон F-распределения представляется в виде

$$F(m, n, z) = \int_0^z p_F(m, n, x)\,dx =$$

$$= \left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{m}{2}} \cdot B^{-1}\left(\frac{m}{2}, \frac{n}{2}\right) \int_0^z x^{\frac{m}{2}-1} \left(1 + \frac{m}{n} x\right)^{-\frac{m+n}{2}} dx.$$

Полученный интеграл вычисляется в элементарных функциях, однако получающееся в общем случае выражение сложно.

Ниже приведены три программы вычисления функции F (m, n, z) — для четного n, для четного m и для случая, когда n и m одновременно нечетные.

V.5.7.2.1. n — четное

Функция F (m, n, z) при четном n вычисляется по формуле [7]:

$$F(m, n, z) = \frac{n}{\left(1 + \frac{n}{mz}\right)^{m/2}} \cdot \left(\prod_{i=1}^{n/2} \frac{m+2i-2}{2i}\right) \cdot X_{n/2},$$

где $X_{n/2}$ определяется с помощью рекуррентного соотношения

$$X_i = \frac{2(i-1)X_{i-1} + \left(1 + \frac{mz}{n}\right)^{1-i}}{2i+m-2}, \quad i = 1; 2; \ldots; \frac{n}{2}.$$

Программа V.5.7.2.1/54,52

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	П→x 0	60	11	1	01	22	×	12
01	:	13	12	+	10	23	П→x 1	61
02	П→x 1	61	13	x→П 4	44	24	2	02
03	×	12	14	x→П 5	45	25	:	13
04	B↑	0E	15	:	13	26	1	01
05	П→x 0	60	16	F↑	21	27	—	11
06	2	02	17	F ln	18	28	П→x 3	63
07	:	13	18	П→x 1	61	29	:	13
08	x→П 2	42	19	×	12	30	1	01
09	x→П 3	43	20	F eˣ	16	31	+	10
10	F.	25	21	П→x 0	60	32	×	12

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
33	FL3	5—	45	:	13
34	23	23	46	x→П 4	44
35	В↑	0E	47	+	10
36	П→x 0	60	48	П→x 1	61
37	П→x 2	62	49	П→x 3	63
38	—	11	50	+	10
39	П→x 2	62	51	:	13
40	—	11	52	F L2	58
41	x→П 3	43	53	36	36
42	×	12	54	×	12
43	П→x 4	64	55	С/П	50
44	П→x 5	65			

Инструкция

n x→П 0
m x→П 1
z В/О С/П

Регистры

0 n
1 m
2—5 оперативные

Время вычисления — T = 5 (n + 2) с.
Пример. m = 3, n = 4, z = 5. F (3, 4, 5) = 0,945.

V.5.7.2.2. m — четное

При четном m значение F (m, n, z) вычисляется по формуле [7]:

$$F(m, n, z) = m\left\{\prod_{i=1}^{m/2} \frac{n+2i-2}{2i}\right\}\cdot Y_{m/2},$$

где $Y_{m/2}$ определяется из рекуррентного соотношения

$$Y_j = \frac{2(j-1)\,Y_{j-1}}{2j-m-2} + \frac{1-\cos^{m+n-2}\varphi}{m+n-2}, \quad j = 2; 3; \ldots; m/2$$

при $Y_1 = \dfrac{1-\cos^{m+n-2}\varphi}{m+n-2}$, $\varphi = \arccos\left(\dfrac{1}{\sqrt{1+\dfrac{mz}{n}}}\right)$.

Программа V.5.7.2.2/54,52

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	П→x 0	60	11	П→x 1	61	22	П→x 2	62
01	П→x 1	61	12	+	10	23	П→x 3	63
02	:	13	13	×	12	24	—	11
03	:	13	14	Fex	16	25	П→x 2	62
04	1	01	15	x→П 4	44	26	:	13
05	+	10	16	П→x 1	61	27	×	12
06	F 1/x	23	17	2	02	28	1	01
07	x→П 5	45	18	:	13	29	П→x 4	64
08	F√	21	19	x→П 2	42	30	П→x 5	65
09	Fln	18	20	x→П 3	43	31	:	13
10	П→x 0	60	21	1	01	32	x→П 4	44

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
33	—	11	45	2	02
34	П→x 2	62	46	:	13
35	В↑	0E	47	П→x 1	61
36	+	10	48	×	12
37	П→x 0	60	49	x→П 1	41
38	+	10	50	F.	25
39	2	02	51	+	10
40	—	11	52	F L2	58
41	:	13	53	22	22
42	F Bx	0	54	П→x 1	61
43	П→x 2	62	55	×	12
44	:	13	56	С/П	50

Инструкция

n x→П0
m x→П1
z В/О С/П

Регистры

0 n
1 m
2—5 оперативные

Время вычисления — T = (5m + 12) с.
Пример. m = 4, n = 5, z = 6. F (4, 5, 6) = 0,96212.

V.5.7.2.3. m и n — нечетные

При нечетных как m, так и n функция F (m, n, z) определяется из соотношения [7]

$$F(m, n, z) = A_{m-1,\,n-1}\cdot\frac{2}{\pi}\left[\prod_{i=1}^{\frac{m-1}{2}} \frac{m+n-2i}{m-2i}\right]\cdot\left[\prod_{j=1}^{\frac{n-1}{2}} \frac{n-2j+1}{n-2j}\right],$$

где $A_{m-1,\,n-1}$ определяется из рекуррентного соотношения

$$A_{i,n-1} = -\frac{\sin^{i-1}\varphi\cdot\cos^{n}\varphi}{n+i-1} + \frac{i-1}{n+i-1}\,A_{i-2,\,n-1}, \quad i = 2, 4, \ldots, m-1,$$

а $A_{0,n-1}$ — из рекуррентного соотношения

$$A_{0,j} = \frac{\sin\varphi\cdot\cos^{j-1}\varphi}{j} + \frac{j-1}{j}\,A_{0,j-2}, \quad j = 2, 4, \ldots, n-1$$

при $A_{0,0} = \varphi = \operatorname{arctg}\sqrt{\dfrac{mz}{n}}$.

Программа V.5.7.2.3/54,52

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	x→П 1	41	05	F tg⁻¹	1L	10	F cos	1Г
01	×	12	06	x→П 4	44	11	x→П С	4C
02	П→x 0	60	07	F sin	1C	12	x→П 7	47
03	:	13	08	x→П 5	45	13	F π	20
04	F√	21	09	F Bx	0	14	2	02

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
15	:	13	39	1	01	63	←→	14
16	x→П 9	49	40	x→П 3	43	64	П→x 5	65
17	1	01	41	—	11	65	П→x 7	67
18	x→П 6	46	42	2	02	66	П→x 8	68
19	П→x 0	60	43	:	13	67	:	13
20	ПП	53	44	x→П 2	42	68	x→П 7	47
21	39	39	45	П→x 7	67	69	:	13
22	x→П 4	44	46	F x^2	22	70	П→x 4	64
23	П→x 5	65	47	x→П 8	48	71	:	13
24	x→П 7	47	48	П→x 4	64	72	—	11
25	П→x C	6C	49	П→x 3	63	73	FL 2	58
26	F ln	18	50	2	02	74	49	49
27	П→x 0	60	51	—	11	75	В/О	52
28	x→П 6	46	52	x→П 3	43			
29	×	12	53	В↑	0E			
30	Fe^x	16	54	П→x 6	66			
31	/—/	0L	55	—	11			
32	x→П 5	45	56	x→П 4	44			
33	П→x 1	61	57	:	13			
34	ПП	53	58	×	12			
35	39	39	59	F В x	0			
36	П→x 9	69	60	П→x 9	69			
37	:	13	61	×	12			
38	С/П	50	62	x→П 9	49			

Инструкция

Р/Г—в Р
n x→П 0
z В↑ m В/О С/П

Регистры

0 n
1 m
2—9 оперативные
$C1 / \sqrt{1+n/mz}$

Время вычисления — T = 5 (m + n + 3) с.

Пример. m = 5, n = 7, z = 9. F (5, 7, 9) = 0,994114.

V.6. ГЕНЕРАЦИЯ ПСЕВДОСЛУЧАЙНЫХ ЧИСЕЛ

По приведенным программам генерируются псевдослучайные числа с различными законами распределения.

V.6.1. РАВНОМЕРНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ

Генерируются псевдослучайные числа ξ_1 с равномерным законом распределения: $p(x) = 1$ при $0 \leqslant x \leqslant 1$, $p(x) = 0$ в остальных случаях.

Значения ξ_1 используются также в других разделах для генерации псевдослучайных чисел с законом распределения, отличным от нормального.

V.6.1.1. ЛИНЕЙНЫЙ КОНГРУЭНТНЫЙ МЕТОД

Используется алгоритм генерации [11]

$$\xi_{i+1} = F\{11\xi_i + \pi\},$$

где F {z} — дробная часть от z.

При начальном значении $\xi_0 = 0{,}5$ программа дает около 8000 неповторяющихся чисел. При других ξ_0 количество неповторяющихся чисел может оказаться существенно меньшим.

Программа V.6.1.1/21

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	F8	82	20	—	86
01	1	14	21	1	14
02	1	14	22	ВП	66
03	×	26	23	7	74
04	↑	06	24	←→	16
05	Pπ	23	25	+	96
10	+	96	30	—	86
11	P8	81	31	↑	06
12	1	14	32	F8	82
13	.	46	33	+	96
14	8	84	34	P8	81
15	F1/x	45	35	С/П	78

Инструкция

0,5 Р 8
В/О С/П В/О С/П
В/О С/П...

Результат

$\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots$

Регистр

8 ξ_i

Программа V.6.1.1/54,52

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	П→xД	6Г	07	КП→xД	ГГ
01	1	01	08	←→	14
02	1	01	09	П→xД	6Г
03	×	12	10	—	11
04	Fπ	20	11	x→ПД	4Г
05	+	10	12	С/П	50
06	x→ПД	4Г			

Инструкция

0,5 x→П Д
В/О С/П В/О С/П
В/О С/П...

Результат

$\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots$

Регистр

Дξ_i

Программа V.6.1.1/52 может быть сокращена на 4 команды при замене команд с адресами 06 — 10 одной командой К {x}.

Время генерации одного числа — 2 — 4 с.

Пример. $\xi_1 = 0{,}6416$, $\xi_2 = 0{,}1991$, $\xi_3 = 0{,}3318$, ...

V.6.1.2. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ СЧЕТЧИКА

Алгоритм генерации [7]

$$\xi_{(i+1)} = F\{\xi_i / z_i + \pi\},$$

где

$$\xi_0 = 0,\ z_0 = 0{,}011,\ z_{i+1} = z_i + 1 \cdot 10^{-8}.$$

Программа дает около 10^8 неповторяющихся чисел.

Программа V.6.1.2/54,52

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Инструкция
00	К П→х 4	Г4	07	К П→х Д	ГГ	0,009 х→П 4 0 х→П Д
01	F π	20	08	←→	14	В/О С/П В/О С/П
						В/О С/П...
02	П→х Д	6Г	09	П→х Д	6Г	Результат
03	П→х 4	64	10	—	11	$\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots$
04	:	13	11	х→П Д	4Г	Регистры
05	+	10	12	С/П	50	4 z_1
06	х→П Д	4Г				Д ξ_1

Программа V.6.1.2/52 может быть сокращена на 4 команды при замене команд с адресами 06—10 одной командой К {х}.

Время генерации одного числа — 3 — 4 с.

Пример. $\xi_1 = 0{,}1416$, $\xi_2 = 0{,}8741$, $\xi_3 = 0{,}2642, \ldots$

V.6.1.3. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЙ МЕТОД

Алгоритм генерации [7]

$$\xi_{i+1} = \frac{1}{\pi} \arccos [\cos (10^9 \cdot \xi_i)].$$

Программа V.6.1.3/54,52

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Инструкция
00	П→х Д	6Г	05	Fπ	20	
01	ВП	0С	06	:	13	Р/Г—в Р
02	9	09	07	х→П Д	4Г	
03	F cos	1Г	08	С/П	50	0 х→П Д
04	F $\cos^{-1}$	1—				В/О С/П В/О С/П
						В/О С/П...
						Результат
						$\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots$
						Регистр
						Д ξ_1

При начальном значении $\xi_0 = 0$ генерируются около 4500 неповторяющихся чисел.

Время генерации одного числа — 4,5 с.

Пример. $\xi_1 = 0{,}386$, $\xi_2 = 0{,}881, \ldots$

V.6.1.4. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЙ МЕТОД СО СЧЕТЧИКОМ

Алгоритм генерации [7]

$$\xi_{i+1} = \frac{1}{\pi} \arccos \{\cos [(i + 100)\, \xi_i]\}.$$

Алгоритм дает около 10^9 неповторяющихся чисел.

Программа V.6.1.4/54,52

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Инструкция
00	КП→х 4	Г4	06	F $\cos^{-1}$	1—	Р/Г—в Р
01	П→х 4	64	07	Fπ	20	100 х→П 4
02	П→х Д	6Г	08	:	13	Сх х→П Д
03	ВП	0С	09	х→ПД	4Г	В/О С/П В/О С/П
04	×	12	10	С/П	50	В/О С/П...
05	F cos	1Г				Результат
						$\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots$
						Регистры
						4 счетчик
						Д ξ_1

Время генерации одного числа — 5,5 с.

Пример. $\xi_1 = 0{,}1493$, $\xi_2 = 0{,}8474$, $\xi_3 = 0{,}2178, \ldots$

V.6.2. НОРМАЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ

Генерируются псевдослучайные числа η_i, распределенные по нормальному закону

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Значения η_{2i-1}, η_{2i} генерируются из ξ_i ($i = 1, 2, 3, \ldots$) по правилу [33]

$$\eta_{2i-1} = (-2 \ln \xi_i)^{\frac{1}{2}} \cdot \cos (e^9 \cdot \xi_i);$$

$$\eta_{2i} = (-2 \ln \xi_i)^{\frac{1}{2}} \cdot \sin (e^9 \cdot \xi_i).$$

V.6.2.1. Значения ξ_i вырабатываются с помощью линейного конгруэнтного метода (V.6.1.1).

Между обращениями к программе регистр используется для хранения ξ_i, поэтому его нельзя использовать для других целей.

Программа V.6.2.1/21

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	F8	82	31	↑	06	62	P sin	93
01	1	14	32	F8	82	63	↑	06
02	1	14	33	+	96	64	F7	72
03	×	26	34	P8	81	65	×	26
04	↑	06	35	9	94	70	С/П	78
05	Pπ	23	40	Pex	33	71	БП	58
10	+	96	41	×	26	72	P0	01
11	P8	81	42	P6	61			
12	1	14	43	P cos	83			
13	,	46	44	↑	06			
14	8	84	45	F8	82			
15	F1/x	45	50	Fx²	55			
20	—	86	51	P ln	13			
21	1	14	52	/—/	56			
22	ВП	66	53	F√	65			
23	7	74	54	P7	71			
24	←→	16	55	×	26			
25	+	96	60	С/П	78			
30	—	86	61	F6	62			

Инструкция

0,5 P 8
В/О С/П С/П С/П...

Результат

$\eta_1, \eta_2, \eta_3, \ldots$

Регистры

6; 7 оперативные
8 ξ_1

Программа V.6.2.1/54,52

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	П→x 8	68	16	F cos	1Г
01	1	01	17	П→x 8	68
02	1	01	18	F x²	22
03	×	12	19	F ln	18
04	Fπ	20	20	/—/	0L
05	+	10	21	F√	21
06	x→П 8	48	22	x→ПВ	4L
07	К П→x 8	Г8	23	×	12
08	←→	14	24	С/П	50
09	П→x 8	68	25	П→x С	6С
10	—	11	26	F sin	1С
11	x→П 8	48	27	П→x В	6L
12	9	09	28	×	12
13	F ex	16	29	С/П	50
14	×	12	30	БП	51
15	x→П С	4С	31	00	00

Инструкция

Р/Г—в Р
0,5 x→П 8
В/О С/П С/П С/П...

Результат

$\eta_1, \eta_2, \eta_3, \ldots$

Регистры

В, С оперативные
8 ξ_1

Программа V.6.2.1/52 может быть сокращена на 4 команды при замене команд с адресами 06—10 одной командой К {x}.

Время вычисления одного значения η_1 — 3 — 13 с.

Пример. $\eta_1 = -0{,}845$, $\eta_2 = 0{,}416$, ...

V.6.2.2. Значения ξ_1 вырабатываются с помощью метода V.6.1.2.

В регистрах 4 и Д хранятся промежуточные результаты для вычисления последующих значений η_1, поэтому эти регистры нельзя использовать для других целей.

Программа V.6.2.2/54,52

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	КП→x 4	Г4	16	F cos	1Г
01	Fπ	20	17	П→x Д	6Г
02	П→x Д	6Г	18	Fx²	22
03	П→x 4	64	19	F ln	18
04	:	13	20	/—/	0L
05	+	10	21	F√	21
06	x→П Д	4Г	22	x→П В	4L
07	КП→x Д	ГГ	23	×	12
08	←→	14	24	С/П	50
09	П→x Д	6Г	25	П→x С	6С
10	—	11	26	F sin	1С
11	x→П Д	4Г	27	П→x В	6L
12	9	09	28	×	12
13	Fex	16	29	С/П	50
14	×	12	30	БП	51
15	x→П С	4С	31	00	00

Инструкция

Р/Г—в Р
0,011 x→П 4
0,3 x→П Д
В/О С/П С/П С/П...

Результат

$\eta_1, \eta_2, \eta_3, \ldots$

Регистры

4 счетчик
В,С оперативные
Д ξ_1

Программа V.6.2.2/52 может быть сокращена на 4 команды при замене команд с адресами 06—10 одной командой К {x}.

Время вычисления одного значения η_1 — 3 — 12 с.

Пример. $\eta_1 = -0{,}5816$, $\eta_2 = 1{,}1933$, $\eta_3 = -0{,}6147$, ...

V.6.3. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ПУАССОНА

Генерируются псевдослучайные целые числа n_1, распределенные по закону Пуассона

$$p(n) = \frac{\lambda}{n!} e^{-\lambda}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Алгоритм генерации состоит в определении n_1, при котором выполняется соотношение [31]

$$\prod_{k=1}^{n_i} \xi_k \geqslant e^{-\lambda} > \prod_{k=1}^{n_i+1} \xi_k,$$

где ξ_k генерируются по программе V.6.1.2.

В регистрах 5, Д хранятся промежуточные результаты, поэтому эти регистры нельзя использовать для других целей.

Программа V.6.3/54,52

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	/—/	0L	16	К П→х Д	ГГ
01	F ex	16	17	F.	25
02	х→П С	4С	18	П→х Д	6Г
03	1	01	19	—	11
04	х→П 4	44	20	х→П Д	4Г
05	+	10	21	×	12
06	К П→х 4	Г4	22	—	11
07	К П→х 5	Г5	23	Fx≥0	59
08	П→х С	6С	24	06	06
09	F Вх	0	25	П→х 4	64
10	П→х Д	6Г	26	2	02
11	П→х 5	65	27	—	11
12	:	13	28	С/П	50
13	F π	20	29	БП	51
14	+	10	30	03	03
15	х→П Д	4Г			

Инструкция

0 х→П Д
0,011 х→П 5
λВ/О С/П С/П С/П...

Результат

n_1, n_2, n_3, ...

Регистры

4 n_i+2
5 оперативный
С $e^{-\lambda}$
Д ξ_k

Программа V.6.3/52

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	/—/	0L	14	Fπ	20
01	Fex	16	15	+	10
02	х→П С	4С	16	К{х}	35
03	Сх	0Г	17	х→П Д	4Г
04	х→П 4	44	18	×	12
05	1	01	19	—	11
06	+	10	20	Fx≥0	59
07	К П→х 4	Г4	21	07	07
08	К П→х 5	Г5	22	П→х 4	64
09	П→х С	6С	23	1	01
10	F Вх	0	24	—	11
11	П→х Д	6Г	25	С/П	50
12	П→х 5	65	26	БП	51
13	:	13	27	03	03

Инструкция

0 х→П Д
0,011 х→П 5
λ В/О С/П С/П С/П...

Результат

n_1, n_2, n_3, ...

Регистры

4 n_i+2
5 оперативный
С$e^{-\lambda}$
Д ξ_k

Время генерации одного значения n_1 — T = [(4—6)·n_1 + 10] с.
Пример. $\lambda = \pi$. $n_1 = 1$, $n_2 = 6$, $n_3 = 9$, $n_4 = 2$, ...

V.6.4. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ РЭЛЕЯ

Для генерации псевдослучайных чисел, распределенных по закону Рэлея

$$p(x) = xe^{-\frac{x^2}{2}},$$

используется алгоритм [31]

$$\eta_i = \sqrt{-2\ln \xi_i},$$

где ξ_i генерируются по программе V.6.1.1.

Регистр Д используется для хранения ξ_i и не может быть использован для других целей.

Программа V.6.4/21

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	F 8	82	22	ВП	66
01	1	14	23	7	74
02	1	14	24	←→	16
03	×	26	25	+	96
04	↑	06	30	—	86
05	Pπ	23	31	↑	06
10	+	96	32	F 8	82
11	P 8	81	33	+	96
12	1	14	34	P 8	81
13	,	46	35	F x^2	55
14	8	84	40	P ln	13
15	F 1/x	45	41	/—/	56
20	—	86	42	F$\sqrt{\ }$	65
21	1	14	43	С/П	78

Инструкция

0,5 Р 8
В/О С/П В/О С/П
В/О С/П ...

Результат

η_1, η_2, η_3, ...

Регистр

8 ξ_i

Программа V.6.4/54,52

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	П→х Д	6Г	09	П→х Д	6Г
01	1	01	10	—	11
02	1	01	11	х→П Д	4Г
03	×	12	12	F x^2	22
04	Fπ	20	13	F ln	18
05	+	10	14	/—/	0L
06	х→П Д	4Г	15	F$\sqrt{\ }$	21
07	К П→х Д	ГГ	16	С/П	50
08	←→	14			

Инструкция

0,5 х→П Д
В/О С/П В/О С/П
В/О С/П...

Результат

η_1, η_2, η_3, ...

Регистр

Д ξ_i

Программа V.6.4/52 может быть сокращена на 4 команды при замене команд с адресами 06—10 одной командой К {х}.

Время генерации одного значения η_1 — 5 – 6 с.

Пример. $\eta_1 = 0{,}9421$, $\eta_2 = 1{,}7966$, ...

V.7. СТАТИСТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

В этом разделе рассматривается корреляционный и регрессионный анализ, дисперсионный анализ, дискриминационный анализ и метод конкордации (согласованности мнений экспертов).

V.7.1. КОРРЕЛЯЦИОННЫЙ И РЕГРЕССИОННЫЙ АНАЛИЗ

V.7.1.1. КОЭФФИЦИЕНТ КОРРЕЛЯЦИИ И УРАВНЕНИЕ РЕГРЕССИИ

Вычисляется коэффициент корреляции последовательности пар случайных величин x_i, y_i ($i = 1, 2, \ldots, n$):

$$r = \frac{\sum_i x_i y_i - \frac{1}{n}\sum_i x_i \sum_i y_i}{\sqrt{\left[\sum_i x_i^2 - \frac{1}{n}\left(\sum_i x_i\right)^2\right]\left[\sum_i y_i^2 - \frac{1}{n}\left(\sum_i y_i\right)^2\right]}};$$

где

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_i x_i, \quad \bar{y} = \frac{1}{n}\sum_i y_i;$$

$$\sigma_x^2 = \sum_i x_i^2 - (\bar{x})^2;$$

$$\sigma_y^2 = \sum_i y_i^2 - (\bar{y})^2;$$

а также коэффициенты a и b уравнения регрессии Y на X:

$$y = a + bx;$$

$$b = \frac{\sum_i x_i y_i - \frac{1}{n}\sum_i x_i \sum_i y_i}{\sum_i x_i^2 - \frac{1}{n}\left(\sum_i x_i\right)^2};$$

$$a = \frac{1}{n}\left(\sum_i y_i - b\sum_i x_i\right)$$

(при расчете по программе V.7.1.1/21 σ_y^2 не вычисляется).

Программа V.7.1.1/21

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	В/О	48	42	+	96	84	F 4	42
01	Р 6	61	43	Р /—/	53	85	:	36
02	С/П	78	44	↑	06	90	↑	06
03	Р 2	21	45	В/О	48	91	Р /—/	53
04	×	26	50	Р /—/	53	92	+	96
05	Р 3	31	51	Р 5	51	93	↑	06
10	Р /—/	53	52	F x^2	55	94	F 6	62
11	ПП	68	53	ПП	68	95	:	36
12	F :	35	54	8	84			
13	F 2	22	55	←→	16		Регистры	
14	←→	16	60	Р 6	61			
15	ПП	68	61	Р /—/	53	2	y_i; a	
20	F :	35	62	Р 7	71	3	x_i y_i; b	
21	F 3	32	63	F x^2	55	4	—i; —n	
22	+	96	64	ПП	68	5	Σx	
23	Р /—/	53	65	8	84	6	r	
24	1	14	70	F 6	62	7	Σy	
25	—	86	71	Р 8	81	8	$n\cdot\sigma_x^2$	
30	Р 4	41	72	×	26	S1	Σx	
31	Р /—/	53	73	F √	65	S2	Σx^2	
32	F 4	42	74	Р 6	61	S3	Σy	
33	В/О	48	75	F 5	52	S4	Σy^2	
34	+	96	80	↑	06	S5	Σxy	
35	Р /—/	53	81	F 7	72	S6	—i; —n	
40	←→	16	82	×	26			
41	F x^2	55	83	↑	06			

Время занесения и обработки одной пары чисел — 5 с, время дальнейших вычислений в автоматическом режиме — 10 с.

Инструкция V.7.1.1/21

Содержание	Набрать число	Выполнить команды	Результат
1. Очистить стек		шесть раз Сх Р /—/	
2. Перейти к началу программы		В/О С/П	0
3. Занести очередную пару чисел x_i, y_i	x_i y_i	↑ С/П	x_i −1
4. Если данные исчерпаны, далее, иначе — к п. 3			
5. Вычислить коэффициент корреляции r		БП Р 5 С/П	r—в рег. X; 6
6. Вычислить коэффициент b уравнения регрессии		F 8 : Р 3	b—в рег. X, 3

Содержание	Набрать число	Выполнить команды	Результат
7. Вычислить параметр a уравнения регрессии		↑ F 5 × ↑ F 7 — ↑ F 4 : P 2	a—в рег. X, 2
8. Вычислить $\bar{x}$		F 5 ↑ F 4 : /—/	$\bar{x}$
9. Вычислить $\bar{y}$		F 7 ↑ F 4 : /—/	$\bar{y}$
10 Вычислить σ_x^2		F 8 ↑ F 4 : /—/	σ_x^2

Программа V.7.1.1/54,52

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	Cx	0Г	29	x→П 4	44	58	F x²	22
01	x→П 1	41	30	К П→x 6	Г6	59	—	11
02	x→П 3	43	31	П→x 7	67	60	x→П 5	45
03	x→П 4	44	32	П→x 2	62	61	×	12
04	x→П 5	45	33	+	10	62	F ¹/	21
05	x→П 6	46	34	БП	51	63	:	13
06	x→П 2	42	35	06	06	64	x→П 0	40
07	П→x 6	66	36	5	05	65	П→x 3	63
08	С/П	50	37	x→П 0	40	66	П→x 8	68
09	x→П 8	48	38	П→x 0	60	67	П→x 4	64
10	←→	14	39	x→П 9	49	68	:	13
11	x→П 7	47	40	К П→x 9	Г9	69	x→П 8	48
12	×	12	41	П→x 6	66	70	П→x 2	62
13	П→x 1	61	42	:	13	71	×	12
14	+	10	43	К x→П 9	L9	72	—	11
15	x→П 1	41	44	F L0	5Г	73	x→П 7	47
16	П→x 8	68	45	38	38	74	С/П	50
17	П→x 3	63	46	П→x 2	62			
18	+	10	47	П→x 3	63			
19	x→П 3	43	48	×	12			
20	П→x 8	68	49	—	11			
21	F x²	22	50	x→П 8	48			
22	П→x 5	65	51	П→x 4	64			
23	+	10	52	П→x 2	62			
24	x→П 5	45	53	F x²	22			
25	П→x 7	67	54	—	11			
26	F x²	22	55	x→П 4	44			
27	П→x 4	64	56	П→x 5	65			
28	+	10	57	П→x 3	63			

Регистры

0	счетчик; r
1	Σxy
2	Σx; $\bar{x}$
3	Σy; $\bar{y}$
4	Σx^2; σ_x^2
5	Σy^2; σ_y^2
6	i; n
7	x_1; a
8	y_1; b
9	счетчик

Время занесения и обработки одной пары чисел —8 — 10 с, время вычисления параметров — 18 — 25 с.

Инструкция V.7.1.1/54,52

Содержание	Набрать число	Выполнить команды	Результат
1. Очистить сумматоры		В/О С/П	0
2. Занести очередную пару чисел x_1, y_1	x_1 y_1	В↑ С/П	x_1 i
3. Если исходные данные исчерпаны, далее, нет — к п. 2			
4. Вычислить искомые параметры		БП 36 С/П	a—в рег. X,7 b—в рег. 8 r—в рег. 0 $\bar{x}$—в рег. 2 $\bar{y}$—в рег. 3 σ_x^2—в рег. 4 σ_y^2—в рег. 5

Пример. Вычислить параметры распределения по выборке (x_1; y_1) 1;1 2;2 4;3.
Ответ: a = 0,5, b = 0,643 (уравнение регрессии Y на X: y = 0,5+ +0,643 x), r = 0,982, $\bar{x}$ = 2,333, $\bar{y}$ = 2, σ_x^2 = 1,556, σ_y^2 = 0,667.

V.7.1.2. ИНТЕРВАЛЬНАЯ ОЦЕНКА КОЭФФИЦИЕНТА КОРРЕЛЯЦИИ

Вычисляются значения границ доверительного интервала ρ_1 и ρ_2, в котором с заданной вероятностью P находится истинный коэффициент корреляции генеральной совокупности ρ.

Для определения ρ_1 и ρ_2 используются вычисленное значение коэффициента корреляции *r* и соотношения, полученные на основе *z*-преобразования Фишера [20]

$$\rho_{1,2} \cong \operatorname{th} z_{1,2} = \frac{\exp(2z_{1,2})-1}{\exp(2z_{1,2})+1},$$

где

$$z_{1,2} = \frac{1}{2}\ln\frac{1+r}{1-r} \mp \frac{\psi(P)}{\sqrt{n-3}};$$

r — выборочный коэффициент корреляции; n — объем выборки, а ψ (P) — обратный интеграл вероятности, определяемый

из соотношения $P = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\psi(P)} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt.$

Для расчета ψ (P) используется соотношение

$$\psi(P) \cong [-\ln(1-P)]^{0,6},$$

относительная погрешность которого при $0,81 \leqslant P \leqslant 0,999$ не превышает 3,5 %.

Программа V.7.1.2/21

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	P 4	41	34	0	04	72	↑	06
01	F 2	22	35	,	46	73	F 4	42
02	С/П	78	40	6	64	74	:	36
03	P 2	21	41	←→	16	75	↑	06
04	←→	16	42	x^y	38	80	В/О	48
05	1	14	43	↑	06			
10	—	86	44	F 2	22			
11	2	24	45	:	36			
12	+	96	50	P e^x	33			
13	:	36	51	F x^2	55			
14	P 3	31	52	P 5	51			
15	F 2	22	53	ПП	68			
20	3	34	54	P ВП	63			
21	—	86	55	P 2	21			
22	F √	65	60	F 5	52			
23	P 2	21	61	F 1/x	45			
24	F 4	42	62	↑	06			
25	1	14	63	F 3	32			
30	←→	16	64	—	86			
31	—	86	65	P 4	41			
32	P 1п	13	70	F 3	32			
33	/—/	56	71	+	96			

Инструкция

В/О Р С/П r ↑ n С/П

Результат

ρ_2—в рег. X
ρ_1—в рег. Y, 2

Регистры

2 ρ_1
3 $(r-1)/(r+1)$
4—6 оперативные

Время ввода Р — 1 с , время вычисления ρ_1, ρ_2 — 14 с.

Программа V.7.1.2/54,52

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	←→	14	19	3	03	38	F Вх	0
01	1	01	20	—	11	39	—	11
02	/—/	0L	21	F √	21	40	:	13
03	ПП	53	22	:	13	41	В/О	52
04	34	34	23	F e^x	16			
05	x→П 1	41	24	F x^2	22			
06	Сх	0Г	25	В↑	0E			
07	F e^x	16	26	ПП	53			
08	С/П	50	27	33	33			
09	—	11	28	←→	14			
10	F 1п	18	29	F 1/x	23			
11	/—/	0L	30	ПП	53			
12	F 1п	18	31	33	33			
13	0	00	32	С/П	50			
14	.	0—	33	П→x 1	61			
15	6	06	34	+	10			
16	×	12	35	В↑	0E			
17	F e^x	16	36	F Вх	0			
18	←→	14	37	—	11			

Инструкция

В/О r В↑ n С/П Р С/П

Результат

ρ_1—в рег. X
ρ_2—в рег. Y

Регистр

1 $(r-1)/(r+1)$

Время ввода r, n — 7 с, время вычисления ρ_1, ρ_2 — 20 с.

Пример. Вычислить границы доверительного интервала ρ при $r = 0{,}4$, $n = 20$, $P = 0{,}9$.

Ответ: $\rho_1 = 0{,}0236$, $\rho_2 = 0{,}6771$.

V.7.1.3. РАНГОВАЯ КОРРЕЛЯЦИЯ ПО СПИРМЕНУ

Если у n случайных элементов, каждый из которых обладает парой ранжируемых признаков, эти признаки расположить в порядке убывания так, что i-й элемент занимает x_i-е место по первому признаку и y_i-е место по второму признаку ($1 \leqslant x_i \leqslant n$; $1 \leqslant y_i \leqslant n$), то ранговая корреляция между этими признаками оценивается по формуле [14]:

$$R = 1 - \frac{6}{n(n^2-1)} \sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2.$$

При независимости признаков R распределено асимптотически (при $n \to \infty$) нормально с центром в 0 и дисперсией $1/(n-1)$. При этом $\rho = 2 \sin \frac{\pi R}{6}$ является состоятельной оценкой корреляции между x_i и y_i.

По приведенной программе вычисляются величина ранговой корреляции R и приближенно уровень значимости P независимости признаков. Для расчета P используется приближенное представление интеграла вероятностей $\Phi(x) \simeq \sqrt{1 - e^{\frac{-2}{\pi}x^2}}$.

При $n < 10$ для вычисления точного значения P следует пользоваться таблицами, например [20].

Программа V.7.1.3/21

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	—	86	31	×	26	62	↑	06
01	0	04	32	←→	16	63	F 6	62
02	P 5	51	33	—	86	64	×	26
03	P 6	61	34	6	64	65	—	86
04	—	86	35	←→	16	70	P e^x	33
05	F x^2	55	40	:	36	71	1	14
10	↑	06	41	↑	06	72	←→	16
11	F 5	52	42	F 5	52	73	—	86
12	+	96	43	×	26	74	F √	65
13	P 5	51	44	/—/	56	75	—	86
14	F 6	62	45	1	14	80	P 6	61
15	1	14	50	+	96	81	↑	06
20	+	96	51	P 5	51	82	F 5	52
21	P 6	61	52	F x^2	55	83	С/П	78
22	С/П	78	53	2	24			
23	БП	58	54	×	26			
24	F ↑	05	55	↑	06			
25	↑	06	60	P п	23			
30	F x^2	55	61	:	36			

Регистры

5 R
6 P

Программа V.7.1.3/54,52

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	—	11	16	×	12	32	П→x 6	66
01	0	00	17	П→x 6	66	33	—	11
02	x→П 6	46	18	:	13	34	×	12
03	←→	14	19	П→x 6	66	35	F e^x	16
04	F Bx	0	20	F x^2	22	36	—	11
05	1	01	21	1	01	37	F $\sqrt{\ }$	21
06	F .	25	22	—	11	38	—	11
07	—	11	23	:	13	39	x→П 6	46
08	F x^2	22	24	—	11	40	П→x 5	65
09	+	10	25	x→П 5	45	41	С/П	50
10	К П→x 6	Г6	26	F x^2	22			
11	F .	25	27	2	02		Регистры	
12	С/П	50	28	×	12			
13	БП	51	29	F π	20	5	R	
14	07	07	30	:	13	6	P	
15	6	06	31	1	01			

Для обеих программ используется единая инструкция.

Инструкция V.7.1.3/21,54,52

Содержание	Набрать число	Выполнить команды	Результат
1. Перейти к началу программы		В/О	
2. Ввести очередную пару значений мест x_i, y_i	x_i y_i	В↑ С/П	
3. Если данные исчерпаны, далее, иначе — к п. 2			
4. Вычислить R, P:			
а) по программе V.7.1.3/21		БП × С/П	R — в рег. X,5
б) по программе V7.1.3/54.52		БП 15 С/П	P — в рег. Y,6

Время ввода одной пары значений x_i, y_i — T = 3 с, время вычисления R, P — T = 9 с.

Пример. Пусть значения мест x_i, y_i пяти объектов заданы в виде таблицы

x_i = 1 2 3 4 5

y_i = 2 1 3 5 4

Вычислить R, P и проверить гипотезу о независимости признаков x, y при доверительном уровне значимости 0,1.

Решение. Ввести попарно значения мест x_i, y_i согласно инструкции и выполнить команды БП × С/П для программы V.7.1.3/21 или БП 15 С/П для программы V.7.1.3/54, 52.

Ответ: R = 0,8, P = 0,1033.

Так как P > 0,1, то следует принять гипотезу о независимости признаков x и y.

V.7.2. ДИСПЕРСИОННЫЙ АНАЛИЗ

Дисперсионный анализ предназначен для проверки несмещенности разных классов выборок, имеющих нормальное распределение с одинаковыми дисперсиями [14].

Рассмотрим случай одинакового количества n элементов каждого класса:

$$x_1', x_2', \ldots, x_n'; \; x_1'', x_2'', \ldots, x_n''; \ldots; x_1^{(r)}, x_2^{(r)}, \ldots, x_n^{(r)}.$$

Проверяется гипотеза равенства средних значений

$$\bar{x}' = \bar{x}'' = \ldots = \bar{x}^{(r)}.$$

Для этого вычисляется статистика $F = \frac{S_1^2}{S_2^2} = \frac{(N-r)\,Q_1}{(r-1)\,Q_2}$,

где r — количество классов; N = nr — полное количество элементов;

$$Q_1 = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{n} \left(x_j^{(i)} - M\right)^2, \quad Q_2 = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{n} \left(x_j^{(i)} - \bar{x}^{(i)}\right)^2;$$

$M = \frac{1}{r} \sum_{i=1}^{r} \bar{x}^{(i)}$ — среднее значение по всем классам.

Истинные значения $\bar{x}^{(i)}$ (i = 1 — r) различны, если F существенно превышает единицу.

При больших значениях N — r, r > 30 статистика $\frac{1}{2}\ln F$ распределена асимптотически нормально со средним значением

$$\frac{N+1-2r}{2(N-r)(r-1)} \text{ и дисперсией } \frac{N-1}{2(N-r)(r-1)}.$$

По программе вычисляется значение F и приближенное значение уровня значимости P.

При малых значениях N — r, r для точного вычисления P можно пользоваться таблицами [14].

Программа V.7.2/54,52

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	x→П 0	40	10	П→x 8	68	20	x→П 3	43
01	0	00	11	С/П	50	21	П→x 7	67
02	x→П 2	42	12	x→П 8	48	22	П→x 8	68
03	x→П 3	43	13	П→x 2	62	23	+	10
04	x→П 4	44	14	+	10	24	x→П 7	47
05	x→П 6	46	15	x→П 2	42	25	F L1	5L
06	П→x 0	60	16	П→x 3	63	26	10	10
07	x→П 1	41	17	П→x 8	68	27	F x^2	22
08	0	00	18	F x^2	22	28	П→x 6	66
09	x→П 7	47	19	+	10	29	+	10

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
30	x→П 6	46	54	:	13	78	П→x 0	60
31	П→x 4	64	55	x→П 6	46	79	×	12
32	x→П 5	45	56	F ln	18	80	1	01
33	К П→x 4	Г4	57	П→x 0	60	81	В↑	0E
34	БП	51	58	2	02	82	F .	25
35	06	06	59	—	11	83	—	11
36	П→x 2	62	60	П→x 4	64	84	:	13
37	F x^2	22	61	×	12	85	/—/	0L
38	П→x 4	64	62	1	01	86	F e^x	16
39	П→x 6	66	63	+	10	87	—	11
40	×	12	64	П→x 3	63	88	F $\sqrt{\ }$	21
41	—	11	65	П→x 4	64	89	—	11
42	П→x 6	66	66	×	12	90	П→x 6	66
43	П→x 3	63	67	П→x 5	65	91	С/П	50
44	П→x 0	60	68	×	12			
45	×	12	69	В↑	0E			
46	—	11	70	F .	25			
47	:	13	71	:	13			
48	П→x 0	60	72	+	10			
49	1	01	73	F x^2	22			
50	—	11	74	×	12			
51	x→П 3	43	75	F π	20			
52	×	12	76	:	13			
53	П→x 5	65	77	П→x 4	64			

Регистры

0	n
1—3;8	оперативные
4	r
5	r—1
6	F
7	P

Инструкция V.7.2/54,52

Содержание	Набрать число	Выполнить команды	Результат
1. Ввести длину серий n	n	В/О С/П	
2. Ввести поочередно элементы первого, второго и т. д. классов ($x_1^{(1)}$, $x_2^{(1)}$, $x_3^{(1)}$, ..., $x_n^{(r)}$)	$x_j^{(i)}$	С/П	$x_j^{(i)}$
3. Если данные исчерпаны, далее, иначе — к п. 2			
4. Вычислить F и P		БП 36 С/П	F—в рег. X,6 P—в рег. Y,7

Время ввода одного значения $x_j^{(i)}$ — 5 с, время вычисления F, P — 25 с.

Пример. Вычислить значение F и проверить с 5 % доверительным уровнем гипотезу об одинаковых средних значениях для трех классов данных (r = 3) при n = 5, заданных в виде таблицы

$$x' = 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5$$
$$x'' = 2 \quad 1 \quad 3 \quad 5 \quad 3$$
$$x''' = 7 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \quad 8$$

Решение. Занести n = 5. Ввести последовательно значения $x_j^{(i)}$ (i = 1—3; j = 1 — 5) согласно инструкции. Выполнить команды БП 36 С/П

Ответ: F = 6,694, $\tilde{P}$ = 2,7 % < 5 %. (При использовании таблиц [14] с m = nr — r = 12 и m′ = r — 1 = 2 получаем P < 1 %.) Гипотезу об одинаковых средних значениях элементов между классами следует отвергнуть.

V.7.3. ДИСКРИМИНАЦИОННЫЙ АНАЛИЗ

Заданы две выборки $(x'_A, y'_A), (x''_A, y''_A), \ldots, (x^n_A, y^n_A)$ и $(x'_B, y'_B), (x''_B, y''_B) \ldots, (x^n_B, y^n_B)$ одинакового объема n из двумерных нормальных генеральных совокупностей. Алгоритм Фишера (30) позволяет найти прямую $y + ax = x'_0$, разделяющую эти две совокупности. Расчетные формулы:

$$a = \frac{d_y S_{xx} - d_x S_{xy}}{d_x S_{yy} - d_y S_{xx}}, \quad \text{где } d_y = \bar{d}_A - \bar{d}_B, \; d_x = \bar{x}_A - \bar{x}_B,$$

$$x'_0 = \frac{S'_A \cdot x'_B - S'_B \cdot x'_A}{S'_A + S'_B}, \quad \bar{y}_A = \frac{1}{n}\Sigma y^A, \; \bar{y}_B = \frac{1}{n}\Sigma y^B, \; \bar{x}_A = \frac{1}{n}\Sigma x^A,$$

$$\bar{x}_B = \frac{1}{n}\Sigma x^B,$$

$$S_{xx} = \frac{S^A_{xx} + S^B_{xx}}{2}, \quad S^A_{xx} = \frac{1}{n-1}\left[\Sigma (x^A)^2 - \frac{(\Sigma x^A)^2}{n}\right],$$

$$S_{xy} = \frac{S^A_{xy} + S^B_{xy}}{2}, \quad S^A_{xy} = \frac{1}{n-1}\left[\Sigma x^A y^A - \frac{\Sigma x^A \cdot \Sigma y^A}{n}\right],$$

$$S_{yy} = \frac{S^A_{yy} + S^B_{yy}}{2}, \quad S^A_{yy} = \frac{1}{n-1}\left[\Sigma (y^A)^2 - \frac{(\Sigma y^A)^2}{n}\right],$$

$$\bar{x}'_A = \bar{x}_A + a\bar{y}_A, \quad S^B_{xx} = \frac{1}{n-1}\left[\Sigma (x^B)^2 - \frac{(\Sigma x^B)^2}{n}\right],$$

$$\bar{x}'_B = \bar{x}_B + a\bar{y}_B,$$

$$S^B_{xy} = \frac{1}{n-1}\left[\Sigma x^B y^B - \frac{\Sigma x^B \cdot \Sigma y^B}{n}\right],$$

$$S'_A = \sqrt{S^A_{xx} + 2aS^A_{xy} + a^2 S^A_{yy}}, \quad S^B_{yy} = \frac{1}{n-1}\left[\Sigma (y^B)^2 - \frac{(\Sigma y^B)^2}{n}\right],$$

$$S'_B = \sqrt{S^B_{xx} + 2aS^B_{xy} + a^2 S^B_{yy}}.$$

Вероятность неправильного отнесения нового наблюдения может быть вычислена по формуле

$$\alpha_A = \alpha_B = \Phi\left(-\frac{\bar{x}'_B - \bar{x}'_A}{S'_A + S'_B}\right),$$

где Ф — интеграл вероятности.

Программа V.7.3/54

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	С/П	50	33	F L0	5Г	66	П→х Д	6Г
01	×	12	34	28	28	67	×	12
02	К ПП Д	−Г	35	П→х 9	69	68	+	10
03	П→х С	6С	36	П→х 3	63	69	К х→П В↑	LE
04	х→П 0	40	37	—	11	70	←→	14
05	С/П	50	38	П→х В	6L	71	К П→х 0	Г0
06	ПП	53	39	П→х 5	65	72	П→х Д	6Г
07	09	09	40	—	11	73	F x^2	22
08	←→	14	41	:	13	74	×	12
09	В↑	0E	42	х→П Д	4Г	75	+	10
10	К ПП Д	−Г	43	П→х А	6—	76	П→х Д	6Г
11	В↑	0E	44	П→х 4	64	77	2	02
12	F x^2	22	45	+	10	78	×	12
13	К П→х 0	Г0	46	×	12	79	К П→х 0	Г0
14	+	10	47	П→х 7	67	80	×	12
15	К х→П В↑	LE	48	П→х 1	61	81	+	10
16	F .	25	49	+	10	82	К х→П В↑	LE
17	В/О	52	50	х→П 6	46	83	F L0	5Г
18	К П→х 0	Г0	51	—	11	84	62	62
19	В↑	0E	52	П→х 8	68	85	П→х 7	67
20	F x^2	22	53	П→х 2	62	86	:	13
21	П→х С	6С	54	+	10	87	F $\sqrt{\ }$	21
22	:	13	55	П→х 6	66	88	х→П 8	48
23	К П→х 0	Г0	56	П→х Д	6Г	89	П→х 9	69
24	—	11	57	×	12	90	×	12
25	К х→П В↑	LE	58	—	11	91	+	10
26	F .	25	59	:	13	92	П→х 8	68
27	В/О	52	60	х→П Д	4Г	93	1	01
28	К ПП Д	−Г	61	С/П	50	94	+	10
29	К ПП Д	−Г	62	К П→х 0	Г0	95	:	13
30	×	12	63	К П→х 0	Г0	96	П→х С	6С
31	ПП	53	64	←→	14	97	:	13
32	21	21	65	К П→х 0	Г0			

Регистры: 0 — С оперативные, Д а.

Программа V.7.3/52

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	С/П	50	10	К ПП Д	−Г	20	F .	25
01	×	12	11	В↑	0E	21	К х→П Е	LE
02	К ПП Д	−Г	12	F x^2	22	22	В/О	52
03	П→х С	6С	13	К П→х 0	Г0	23	К П→х 0	Г0
04	х→П 0	40	14	ПП	53	24	В↑	0E
05	С/П	50	15	30	30	25	F x^2	22
06	ПП	53	16	В/О	52	26	П→х С	6С
07	09	09	17	+	10	27	:	13
08	←→	14	18	П→х 0	60	28	К П→х 0	Г0
09	В↑	0E	19	х→П Е	4E	29	/—/	0L

Продолжение

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
30	ПП	53	55	+	10	80	F x^2	22
31	17	17	56	х→П 6	46	81	×	12
32	F .	25	57	—	11	82	+	10
33	В/О	52	58	П→х 8	68	83	П→х Д	6Г
34	К ПП Д	−Г	59	П→х 2	62	84	2	02
35	К ПП Д	−Г	60	+	10	85	×	12
36	×	12	61	П→х 6	66	86	К П→х 0	Г0
37	ПП	53	62	П→х Д	6Г	87	×	12
38	26	26	63	×	12	88	ПП	53
39	F L0	5Г	64	—	11	89	17	17
40	34	34	65	:	13	90	F L0	5Г
41	П→х 9	69	66	х→П Д	4Г	91	68	68
42	П→х 3	63	67	С/П	50	92	П→х 7	67
43	—	11	68	К П→х 0	Г0	93	:	13
44	П→х В	6L	69	К П→х 0	Г0	94	F $\sqrt{\ }$	21
45	П→х 5	65	70	←→	14	95	х→П 8	48
46	—	11	71	К П→х 0	Г0	96	П→х 9	69
47	:	13	72	П→х Д	6Г	97	×	12
48	х→П Д	4Г	73	×	12	98	+	10
49	П→х А	6—	74	+	10	99	П→х 8	68
50	П→х 4	64	75	ПП	53	100	1	01
51	+	10	76	18	18	101	+	10
52	×	12	77	←→	14	102	:	13
53	П→х 7	67	78	К П→х 0	Г0	103	П→х С	6С
54	П→х 1	61	79	П→х Д	6Г	104	:	13

Регистры: 0 — С, Е оперативные, Д а.

Для обеих программ используется единая инструкция.

Инструкция V.7.3/54,52

Содержание	Набрать число	Выполнить команды	Результат
1. Очистить регистры	Сх	х→П 1 х→П 2 х→П 3 х→П 4 х→П 5 х→П 6 х→П 7 х→П 8 х→П 9 х→П А х→П В	
2. Подготовить программу к вводу первой выборки	13 6	х→П Д х→П С БП 03 С/П	6
3. Ввести очередную пару значений первой выборки	x_i^A y_i^A	В↑ С/П	6
4. Если ввод первой выборки окончен, далее, нет — к п. 3			
5. Подготовить программу к вводу второй выборки	12	х→П С БП 03 С/П	12

Содержание	Набрать число	Выполнить команды	Результат
6. Ввести очередную пару значений второй выборки	x_i^B	В ↑	
	y_i^B	С/П	12
7. Если ввод второй выборки окончен, далее, нет—к п. 6			
8. Ввести количество точек в выборке	n	x→П С	
9. Вычислить a:			
а) для программы V.7.3/54	18	x→П Д БП 28 С/П	a—в рег. X,Д
б) для программы V.7.3/52	23	x→П Д БП 34 С/П	
10. Вычислить x_0'	12	x→П 0 С/П	x_0'—в рег. X

Время ввода пары чисел — 12 с, вычисления a — 29 с, вычисления x_0' — 20 с.

Пример.

x^A	y^A	x^B	y^B
—5	7	—1	9
—2	1	2	3
—3	—2	5	2
—3	—7		—1

Ответ

a = 2

$x_0' = 2$

V.7.4. МЕТОД КОНКОРДАЦИИ

Пусть m специалистам требуется расположить k факторов исследуемого явления в порядке их значимости, т. е. проранжировать их, присвоив каждому фактору соответствующий порядковый номер (ранг) a_{ij} ($i = 1, 2, \ldots, k$; $j = 1, 2, \ldots, m$; $1 \leqslant a_{ij} \leqslant k$), соответствующий занимаемому месту в ранжированном ряду.

Принимать обоснованное решение об относительной значимости факторов можно только в случае согласованности мнений всех специалистов.

Для оценки согласованности мнений результаты ранжирования обрабатываются следующим образом [26]. Подсчитывается разность между суммой рангов каждого фактора и средней суммой рангов

$$\Delta_i = \sum_{j=1}^{m} a_{ij} - \frac{m(k+1)}{2}$$

и вычисляется величина $S = \sum_{i=1}^{k} \Delta_i^2$.

Коэффициент конкордации вычисляется по формуле

$$W = \frac{12 \cdot S}{m^2 (k^3 - k)}.$$

Величина W лежит в пределах 0 — 1, причем W = 0 означает отсутствие какого-либо согласия в мнениях специалистов, W = 1 — полное согласие. Для проверки значимости W используется величина $\chi_p^2 = W \cdot m\,(k - 1)$, имеющая χ^2 распределение с (k — 1) степенью свободы.

Приводится программа вычисления значений *W* и χ_p^2. Уровень значимости проверяется по вычисленному значению χ_p^2 с (k — 1) степенью свободы с использованием таблиц χ^2, например [14, 20].

Программа V.7.4/21

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	P 3	31	34	←→	16	72	—	86
01	Cx	76	35	F x²	55	73	P 4	41
02	P ,	43	40	↑	06	74	F 2	22
03	←→	16	41	P ,	43	75	:	36
04	P 4	41	42	+	96	80	F 1/x	45
05	1	14	43	↑	06	81	←→	16
10	—	86	44	P ,	43	82	—	86
11	P /—/	53	45	P x=0	59	83	3	34
12	P /—/	53	50	↑	06	84	×	26
13	P /—/	53	51	F 3	32	85	↑	06
14	0	04	52	F x²	55	90	F 3	32
15	P ,	43	53	:	36	91	×	26
20	F 3	32	54	4	44	92	P 2	21
21	1	14	55	×	26	93	F 4	42
22	—	86	60	↑	06	94	:	36
23	P /—/	53	61	F 4	42	95	С/П	78
24	С/П	78	62	:	36			
25	+	96	63	P 2	21		Регистры	
30	↑	06	64	F 4	42			
31	P ,	43	65	1	14	2	χ^2	
32	P x=0	59	70	+	96	3	m	
33	F 2	22	71	2	24	4	оперативный	

Программа V.7.4/54,52

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	x→П 1	41	06	x→П 2	42	12	F x²	22
01	←→	14	07	Cx	0Г	13	+	10
02	x→П 0	40	08	С/П	50	14	F L3	5—
03	x→П 3	43	09	+	10	15	05	05
04	0	00	10	F L2	58	16	4	04
05	П→x 1	61	11	08	08	17	×	12

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
18	П→x 0	60	27	—	11	36	:	13
19	:	13	28	3	03	37	С/П	50
20	П→x 0	60	29	×	12			
21	1	01	30	x→П 2	42		Регистры	
22	+	10	31	П→x 1	61			
23	П→x 1	61	32	:	13	0	k	
24	×	12	33	П→x 0	60	1	m	
25	:	13	34	1	01	2	χ^2	
26	F Bx	0	35	—	11	3	оперативный	

Для обеих программ используется единая инструкция.

Инструкция V.7.4/21,54,52

Содержание	Набрать число	Выполнить команды	Результат
1. Ввести значения k и m	k m	В↑ В/О С/П	k
2. Ввести значения a_{ij} построчно (a_{11}, a_{12}, ..., a_{km})	a_{ij}	С/П	
3. Если данные не исчерпаны — к п. 2, иначе — читать результат			W — в рег. X χ^2 — в рег. 2

Время ввода одного значения a_{ij} — 1 — 3 с, время вычисления W, χ^2 — 10—15 с.

Пример. Три специалиста (m = 3) проранжировали 4 фактора (k = 4), в результате чего получена следующая таблица значений a_{ij}:

i \ j	1	2	3
1	1	3	2
2	2	4	1
3	4	2	3
4	3	1	4

Вычислить коэффициент конкордации W и уровень значимости P согласованности мнений специалистов.

Решение. Ввести k = 4 и m = 3. Ввести значения a_{ij} из приведенной таблицы по строкам (1 3 2 2 4 1 4 2 3 3 1 4). В результате получаем W = 0,111, χ^2 = 1.

По таблицам [14] находим P ≃ 0,4.

Глава VI

СПЕЦИАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ

VI.1. СПЕЦИАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ ОБЩЕГО НАЗНАЧЕНИЯ

VI.1.1. ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ

VI.1.1.1. ИНТЕГРАЛЬНАЯ ПОКАЗАТЕЛЬНАЯ ФУНКЦИЯ

Интегральная показательная функция Ei (x) определяется как

$$\mathrm{Ei}(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{e^t}{t}\,dt.$$

Для расчета используется представление $\widetilde{\mathrm{Ei}}$ (x) в виде [13]

$$\widetilde{\mathrm{Ei}}(x) = C + \ln|x| + \sum_{i=1}^{N} \frac{x^i}{i \cdot i!},$$

где C = 0,5772157 — постоянная Эйлера.

VI.1.1.1.1. Вычисление $\widetilde{\mathrm{Ei}}$ (x) при заданном N = int (9 + 2 |x|)

Программа VI.1.1.1.1/54,52

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	В↑	0E	11	+	10	22	С/П	50
01	F x^2	22	12	F Bx	0			
02	F $\sqrt{}$	21	13	×	12		Инструкция	
03	В↑	0E	14	×	12			
04	x→П 1	41	15	F L2	58		0,5772157 x→П 3	
05	9	09	16	09	09		x В/О С/П	
06	+	10	17	П→x 1	61			
07	+	10	18	F ln	18		Регистры	
08	x→П 2	42	19	+	10	1	|x|	
09	П→x 2	62	20	П→x 3	63	2	оперативный	
10	F 1/x	23	21	+	10	3	0,5772157	

Время вычисления — T = 5 (|x| + 4) с.

Относительная погрешность δ при $-1{,}6 \leqslant x \leqslant 10$ $(x \neq 0)$ не превышает $1{,}4 \cdot 10^{-4}$.

Пример. $x = 4$. $\widetilde{Ei}(4) = 19{,}631695$; точное значение $Ei(4) = 19{,}63087$.

VI.1.1.1.2. Вычисление $\widetilde{Ei}(x)$ с остановом по машинному нулю

Программа VI.1.1.1.2/21

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	P 3	31	25	↑	06	54	P 2	21
01	F x^2	55	30	F 3	32	55	←→	16
02	F $\sqrt{}$	65	31	×	26	60	С/П	78
03	P ln	13	32	↑	06			
04	↑	06	33	F 6	62			
05	F 2	22	34	×	26			
10	+	96	35	P 6	61			
11	P 4	41	40	↑	06			
12	1	14	41	F 5	52			
13	P 6	61	42	:	36			
14	0	04	43	↑	06			
15	P 5	51	44	F 4	42			
20	F 5	52	45	←→	16			
21	1	14	50	+	96			
22	+	96	51	P 4	41			
23	P 5	51	52	—	86			
24	F 1/x	45	53	P x=0	59			

Инструкция

0,5772157 P 2
x В/О С/П

Регистры

2 0,5772157
3 x
4 Ei
5;6 оперативные

Время вычисления — $T = 9\,(|x| + 4)$ с.

Программа VI.1.1.1.2/54,52

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	x→П 1	41	14	П→x 1	61	28	F Bx	0
01	F x^2	22	15	×	12	29	С/П	50
02	F $\sqrt{}$	21	16	П→x 2	62			
03	F ln	18	17	1	01			
04	П→x 0	60	18	+	10			
05	+	10	19	x→П 2	42			
06	1	01	20	:	13			
07	x→П 3	43	21	x→П 3	43			
08	Cx	0Г	22	П→x 2	62			
09	x→П 2	42	23	:	13			
10	+	10	24	+	10			
11	F .	25	25	—	11			
12	F Bx	0	26	F x=0	5E			
13	П→x 3	63	27	12	12			

Инструкция

0,5772157 x→П 0
x В/О С/П

Регистры

0 0,5772157
1 x
2;3 оперативные

Время вычисления — $T = 10\,(|x| + 5)$ с.

Относительная погрешность вычисления δ составляет:

$$\delta \leqslant 1 \cdot 10^{-4} \text{ при } -4 \leqslant x < 0, \quad \delta \leqslant 5 \cdot 10^{-7} \text{ при } 0 \leqslant x \leqslant 20.$$

Пример. $x = -4$. $\widetilde{Ei}(-4) = -0{,}00377907$; точное значение $Ei(-4) = -0{,}00377935$.

VI.1.1.2. ИНТЕГРАЛЬНЫЙ СИНУС

Интегральный синус $Si(x)$ определяется формулой

$$Si(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t}\, dt.$$

Для расчета приближенного значения $\widetilde{Si}(x)$ используется представление в виде ряда [14]

$$Si(x) = x \sum_{i=1}^{N} \frac{(-x^2)^i}{(2i+1)(2i+1)!}.$$

VI.1.1.2.1. Вычисление $\widetilde{Si}(x)$ при заданном $N = \text{int}\,(x + \pi)$

Программа VI.1.1.2.1/54,52

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	В↑	0E	11	F Bx	0
01	F π	20	12	—	11
02	+	10	13	F 1/x	23
03	x→П 2	42	14	+	10
04	0	00	15	F Bx	0
05	×	12	16	×	12
06	П→x 2	62	17	×	12
07	В↑	0E	18	F L2	58
08	+	10	19	05	05
09	:	13	20	С/П	50
10	1	01			

Инструкция

x В/О С/П

Регистр

2 счетчик

Время вычисления — $T = 4\,(x + 5)$ с.

Относительная погрешность вычисления δ при $0 < x \leqslant 7$ не превышает $4 \cdot 10^{-4}$.

Пример. $x = 2$. $\widetilde{Si}(2) = 1{,}6054082$; точное значение $Si(2) = 1{,}6054130$.

VI.1.1.2.2. Вычисление $\widetilde{Si}$ (x) с остановом по машинному нулю

Программа VI.1.1.2.2/21

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	P 5	51	30	×	26	60	←→	16
01	0	04	31	P ,	43	61	+	96
02	P 4	41	32	F 3	32	62	P 4	41
03	1	14	33	2	24	63	—	86
04	P 3	31	34	—	86	64	P x=0	59
05	Б П	58	35	P 3	31	65	F 1	12
10	F 3	32	40	↑	06	70	+	96
11	F 3	32	41	P /—/	53	71	С/П	78
12	1	14	42	←→	16			
13	—	86	43	:	36			
14	/—/	56	44	↑	06			
15	↑	06	45	P ,	43			
20	P /—/	53	50	:	36			
21	←→	16	51	↑	06			
22	:	36	52	F 5	52			
23	↑	06	53	×	26			
24	F 5	52	54	↑	06			
25	F x^2	55	55	F 4	42			

Инструкция

x В/О С/П

Регистры

3 оперативный

4 $\widetilde{Si}$ (x)

5 x

Время вычисления — T = 8 (x + 4) с.

Программа VI.1.1.2.2/54,52

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	x→П 1	41	14	:	13	28	06	06
01	Cx	0Г	15	П→x 3	63	29	+	10
02	1	01	16	2	02	30	С/П	50
03	x→П 3	43	17	—	11			
04	БП	51	18	x→П 3	43			
05	15	15	19	:	13			
06	F Bx	0	20	x→П 2	42			
07	П→x 2	62	21	П→x 3	63			
08	П→x 1	61	22	:	13			
09	F x^2	22	23	П→x 1	61			
10	×	12	24	×	12			
11	1	01	25	+	10			
12	П→x 3	63	26	—	11			
13	—	11	27	F x=0	5E			

Инструкция

x В/О С/П

Регистры

1 x

2;3 оперативные

Время вычисления — T = 10 (x + 4) с.

Относительная погрешность вычисления δ при $0 < x \leqslant 10$ не превышает $1 \cdot 10^{-6}$

Пример. x = 2. $\widetilde{Si}$ (2) = 1,605413.

VI.1.1.3. ИНТЕГРАЛЬНЫЙ КОСИНУС

Интегральный косинус Ci(x) определяется как

$$Ci(x) = -\int_x^\infty \frac{\cos t}{t}\,dt \quad (x > 0).$$

Для расчета приближенного значения $\widetilde{Ci}$ (x) используется представление в виде ряда [14]

$$Ci(x) = C + \ln x + \sum_{i=1}^{N} \frac{(-x^2)^i}{2i\,(2i)!}.$$

где C = 0,5772157 — постоянная Эйлера.

VI.1.1.3.1. Вычисление Ci (x) при заданном N = int (8 + x)

Программа VI.1.1.3.1/54,52

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	x→П 1	41	13	:	13	26	+	10
01	2	02	14	П→x 2	62	27	С/П	50
02	:	13	15	F 1/x	23			
03	F x^2	22	16	+	10			
04	/—/	0L	17	F Bx	0			
05	П→x 1	61	18	×	12			
06	8	08	19	×	12			
07	+	10	20	F L2	58			
08	x→П 2	42	21	09	09			
09	П→x 2	62	22	П→x 1	61			
10	2	02	23	F ln	18			
11	F 1/x	23	24	+	10			
12	+	10	25	П→x 3	63			

Инструкция

0,5772157 x→П 3

x В/О С/П

Регистры

1 x

2 оперативный

3 0,5772157

Время вычисления — T = 4 (x + 10) с.

Абсолютная погрешность вычисления Δ при $0{,}01 \leqslant x \leqslant 10$ не превышает $2 \cdot 10^{-5}$.

Пример. x = 2. $\widetilde{Ci}$ (2) = 0,422981; точное значение Ci (2) = = 0,4229808.

VI.1.1.3.2. Вычисление $\widetilde{Ci}$ (x) с остановом по машинному нулю

Программа VI.1.1.3.2/21

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	P 4	41	10	0	04	20	+	96
01	P ln	13	11	P 5	51	21	P 5	51
02	↑	06	12	1	14	22	1	14
03	F 2	22	13	P 6	61	23	—	86
04	+	96	14	F 5	52	24	×	26
05	P 3	31	15	2	24	25	↑	06

Продолжение

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
30	F 4	42	45	:	36
31	F x^2	55	50	↑	06
32	/—/	56	51	F 3	32
33	←→	16	52	←→	16
34	:	36	53	+	96
35	↑	06	54	P 3	31
40	F 6	62	55	—	86
41	×	26	60	P x=0	59
42	P 6	61	61	F ←→	15
43	↑	06	62	+	96
44	F 5	52	63	С/П	78

Инструкция

0,5772157 P2
x В/О С/П

Регистры

2 0,5772157
3 C_i
4—6 оперативные

Время вычисления — T = (9x + 20) с.

Программа VI.1.1.3.2/54,52

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	x→П 2	42	15	1	01	30	10	10
01	F Iп	18	16	П→x 3	63	31	F Вх	0
02	П→x 1	61	17	—	11	32	С/П	50
03	+	10	18	:	13			
04	1	01	19	П→x 3	63			
05	x→П 4	44	20	2	02			
06	Сх	0Г	21	—	11			
07	x→П 3	43	22	x→П 3	43			
08	←→	14	23	:	13			
09	+	10	24	x→П 4	44			
10	F Вх	0	25	П→x 3	63			
11	П→x 4	64	26	:	13			
12	П→x 2	62	27	—	11			
13	F x^2	22	28	—	11			
14	×	12	29	F x=0	5E			

Инструкция

0,5772157 x→П 1
x В/О С/П

Регистры

1 0,5772157
2 x
3;4 оперативные

Время вычисления — T = (11x + 30) с.

Абсолютная погрешность вычисления Δ при $0{,}01 \leqslant x < 10$ не превышает $1 \cdot 10^{-6}$.

Пример. x = 2. $\widetilde{Ci}$ (2) = 0,422981.

VI.1.1.4. ИНТЕГРАЛЫ ФРЕНЕЛЯ

Интегралы Френеля S (x) и C (x) определяются как

$$S(x) = \int_0^x \sin(\pi \cdot t^2/2)\, dt,$$

$$x \geqslant 0$$

$$C(x) = \int_0^x \cos(\pi t^2/2)\, dt.$$

VI.1.1.4.1. Вычисление S(x) и C(x) при $x \leqslant 3$

Приближенные значения $\widetilde{S}(x)$ и $\widetilde{C}(x)$ вычисляются с помощью представления в виде рядов [11]

$$\widetilde{S}(x) = \sum_{k=0}^{N} \frac{(-1)^k x^{4k+3} \cdot \left(\frac{\pi}{2}\right)^{2k+1}}{(2k+1)! \cdot (4k+3)},$$

$$\widetilde{C}(x) = \sum_{k=0}^{N} \frac{(-1)^k x^{4k+1} \cdot \left(\frac{\pi}{2}\right)^{2k}}{(2k)! \cdot (4k+1)}.$$

Приведены две программы вычисления $\widetilde{S}$ (x) и $\widetilde{C}$ (x).

По программе VI.1.1.4.1.1/21 в зависимости от предварительной установки значений + 1 или 0 в регистре памяти 2 вычисляется соответственно либо $\widetilde{S}$ (x), либо $\widetilde{C}$ (x).

Программа VI.1.1.4.1.1/21

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	P 3	31	40	P 6	61	80	F 3	32
01	P 5	51	41	1	14	81	←→	16
02	F x^2	55	42	—	86	82	+	96
03	↑	06	43	×	26	83	P 3	31
04	P π	23	44	↑	06	84	—	86
05	×	26	45	F 4	42	85	P x=0	59
10	2	24	50	F x^2	55	90	3	34
11	:	36	51	/—/	56	91	+	96
12	P 4	41	52	←→	16	92	С/П	78
13	F 2	22	53	:	36			
14	P 6	61	54	↑	06			
15	P x≠0	79	55	F 5	52			
20	3	34	60	×	26			
21	F 3	32	61	P 5	51			
22	↑	06	62	F 6	62			
23	F 4	42	63	2	24			
24	×	26	64	×	26			
25	P 5	51	65	1	14			
30	3	34	70	+	96			
31	:	36	71	↑	06			
32	P 3	31	72	F 5	52			
33	F 6	62	73	←→	16			
34	2	24	74	:	36			
35	+	96	75	↑	06			

Инструкция

в рег. 2 { 1 для S; 0 для C }
x В/О С/П

Регистры

2 1 или 0
3 S или C
4 $x^2 \cdot \frac{\pi}{2}$
5;6 оперативные

Относительная погрешность вычисления δ при $x \leqslant 2{,}5$ не превышает $1 \cdot 10^{-4}$.

Время вычисления — 0,5 — 2 мин.

По программе VI.1.1.4.1.1/54,52 в зависимости от предварительной установки значения ∓ 1 в регистре памяти C вычисляется либо $\widetilde{S}(x)$ (-1 в регистре C), либо $\widetilde{C}(x)$ ($+1$ в регистре C).

Программа VI.1.1.4.1.1/54,52

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	x→П 2	42	19	×	12	38	F e^x	16
01	F x^2	22	20	П→x 3	63	39	F √	21
02	F π	20	21	4	04	40	×	12
03	×	12	22	×	12	41	П→x 2	62
04	2	02	23	2	02	42	×	12
05	:	13	24	—	11	43	С/П	50
06	F x^2	22	25	П→x C	6C			
07	F Bx	0	26	—	11			
08	9	09	27	F 1/x	23			
09	+	10	28	+	10			
10	x→П 3	43	29	F L3	5—			
11	П→x 3	63	30	11	11			
12	B↑	0E	31	←→	14			
13	+	10	32	F √	21			
14	:	13	33	F ln	18			
15	П→x C	6C	34	1	01			
16	F Bx	0	35	П→x C	6C			
17	—	11	36	—	11			
18	:	13	37	×	12			

Инструкция

В рег. C { —1 для S; +1 для C }

x В/О С/П

Регистры

2	x
3	оперативный
C	—1 или 1

Время вычисления — $T = 10(5x + 1)$ с.

Относительная погрешность вычисления δ при $x \leqslant 2{,}5$ не превышает $1 \cdot 10^{-4}$.

Пример. $x = 2$. $\widetilde{S}(2) = 0{,}343416$, $\widetilde{C}(2) = 0{,}48825$; точные значения $S(2) = 0{,}3434157$, $C(2) = 0{,}4882534$.

VI.1.1.4.1.2. По программе одновременно вычисляются значения $\widetilde{S}(x)$ и $\widetilde{C}(x)$

Программа VI.1.1.4.1.2/54,52

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	x→П 1	41	08	ПП	53	16	+	10
01	x→П 2	42	09	25	25	17	x→П 2	42
02	x→П 4	44	10	+	10	18	F Bx	0
03	0	00	11	П→x 4	64	19	—	11
04	B↑	0E	12	/—/	0L	20	F x=0	5E
05	x→П 3	43	13	ПП	53	21	06	06
06	←→	14	14	25	25	22	+	10
07	П→x 4	64	15	П→x 2	62	23	П→x 2	62

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
24	С/П	50	35	F x^2	22
25	П→x 3	63	36	×	12
26	1	01	37	x→П 4	44
27	+	10	38	П→x 3	63
28	x→П 3	43	39	2	02
29	:	13	40	×	12
30	F π	20	41	1	01
31	×	12	42	+	10
32	2	02	43	:	13
33	:	13	44	В/О	52
34	П→x 1	61			

Инструкция

x В/О С/П

Результат

C (x) — в рег. X.2

S (x) — в рег. Y

Регистры

1	x
2	C (x)
3;4	оперативные

Относительная погрешность вычисления δ не превышает $2 \cdot 10^{-6}$.

Пример. $x = 2$. $\widetilde{S}(2) = 0{,}34341618$, $\widetilde{C}(2) = 0{,}48825281$.

Время вычисления примера — 4 мин.

VI.1.1.4.2. Вычисление значений $\widetilde{S}(x)$ и $\widetilde{C}(x)$ при $x \geqslant 3$

Приближенные значения $\widetilde{S}(x)$ и $\widetilde{C}(x)$ при $x \geqslant 3$ представляются в виде [11]:

$$\widetilde{S}(x) = \frac{1}{2} - \frac{\cos\frac{\pi x^2}{2}}{\pi x}\left[1 - \frac{3}{(\pi x^2)^2}\right] - \frac{\sin\frac{\pi x^2}{2}}{\pi^2 x^3}\left[1 - \frac{15}{(\pi x^2)^2}\right],$$

$$\widetilde{C}(x) = \frac{1}{2} + \frac{\sin\frac{\pi x^2}{2}}{\pi x}\left[1 - \frac{3}{(\pi x^2)^2}\right] - \frac{\cos\frac{\pi x^2}{2}}{\pi^2 x^3}\left[1 - \frac{15}{(\pi x^2)^2}\right].$$

По программе одновременно вычисляются $\widetilde{S}(x)$ и $\widetilde{C}(x)$.

Программа VI.1.1.4.2/54,52

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	B↑	0E	13	ПП	53	26	F x^2	22
01	F π	20	14	23	23	27	:	13
02	×	12	15	П→x 2	62	28	1	01
03	x→П 0	40	16	П→x 3	63	29	—	11
04	×	12	17	/—/	0L	30	×	12
05	x→П 1	41	18	x→П 2	42	31	П→x 1	61
06	2	02	19	F .	25	32	:	13
07	:	13	20	ПП	53	33	3	03
08	F sin	1C	21	23	23	34	П→x 1	61
09	x→П 2	42	22	С/П	50	35	F x^2	22
10	F Bx	0	23	1	01	36	:	13
11	F cos	1Г	24	5	05	37	1	01
12	x→П 3	43	25	П→x 1	61	38	—	11

Продолжение

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
39	П→x 2	62	44	2	02
40	×	12	45	F 1/x	23
41	—	11	46	+	10
42	П→x 0	60	47	В/О	52
43	:	13			

Инструкция

Р/Г—в Р
x В/О С/П

Результат

S (x)—в рег. X
C (x)—в рег. Y

Регистры

0 πx
1 πx²
2;3 оперативные

Время вычисления — 30 с.

Абсолютная погрешность вычисления Δ не превышает

$$\Delta < \begin{cases} 5\cdot 10^{-4} \text{ для S,} \\ 3,5\cdot 10^{-3} \text{ для C.} \end{cases}$$

Пример. x = 3,5. $\tilde{S}$ (3,5) = 0,41525213, $\tilde{C}$ (3,5) = 0,53257167. точные значения S (3,5) = 0,4152480, C (3,5) = 0,5325724.

VI.1.1.5.ПОЛНЫЕ ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ ИНТЕГРАЛЫ

Полные эллиптические интегралы 1-го и 2-го рода соответственно K (x) и E (x) определяются по формулам [11]:

$$K(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{\sqrt{1 - x^2 \sin^2 t}},$$

$$E(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - x^2 \sin^2 t}\, dt.$$

Приведены программы вычисления K (x) и E (x) с разной степенью точности.

VI.1.1.5.1. K (x) и E (x) представляются приближенно в виде рядов [28]

$$K(x) = \frac{\pi}{2}\left\{1 + \sum_{k=1}^{N}\left[\frac{(2k-1)!!}{2^k\cdot k!}\right]^2\cdot x^{2k}\right\},$$

$$E(x) = \frac{\pi}{2}\left\{1 - \sum_{k=1}^{N}\left[\frac{(2k-1)!!}{2^k\cdot k!}\right]^2\cdot \frac{x^{2k}}{2k-1}\right\}.$$

VI.1.1.5.1.1. По программе одновременно вычисляются K (x) и E (x)

Программа VI.1.1.5.1.1/54,52

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	x→П 1	41	19	×	12	38	←→	14
01	0	00	20	П→x 2	62	39	П→x 4	64
02	x→П 3	43	21	×	12	40	С/П	50
03	F π	20	22	x→П 2	42			
04	2	02	23	F x²	22			
05	:	13	24	1	01			
06	x→П 4	44	25	П→x 3	63			
07	В↑	0 E	26	—	11			
08	F √	21	27	:	13			
09	x→П 2	42	28	+	10			
10	←→	14	29	П→x 2	62			
11	П→x 1	61	30	F x²	22			
12	П→x 3	63	31	П→x 4	64			
13	2	02	32	+	10			
14	+	10	33	x→П 4	44			
15	x→П 3	43	34	F Вх	0			
16	F 1/x	23	35	—	11			
17	1	01	36	F x=0	5E			
18	—	11	37	10	10			

Инструкция

x В/О С/П

Результат

K (x)—в рег. X,4
E (x)—в рег. Y

Регистры

1 x
2;3 оперативные
4 K (x)

Относительная погрешность вычисления δ не превышает $1\cdot 10^{-6}$.

Пример. x = 0,5. $\tilde{K}$ (0,5) = 1,6857504, $\tilde{E}$ (0,5) = 1,4674622.

Время вычисления примера — 2,5 мин.

VI.1.1.5.1.2. По программе VI.1.1.5.1.2/21 вычисляется K (x) или E (x) в зависимости от установки соответственно + 1 или — 1 в регистр памяти 2.

Программа VI.1.1.5.1.2/21

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	Р 4	41	32	F x²	55	64	+	96
01	Р π	23	33	↑	06	65	Р 3	31
02	2	24	34	F 5	52	70	—	86
03	:	36	35	×	26	71	Р x=0	59
04	Р 3	31	40	Р 5	51	72	Р 1п	13
05	Р 5	51	41	F 2	22	73	+	96
10	0	04	42	1	14	74	С/П	78
11	Р 6	61	43	—	86			
12	F 6	62	44	↑	06			
13	1	14	45	F 6	62			
14	+	96	50	×	26			
15	Р 6	61	51	1	14			
20	2	24	52	+	96			
21	×	26	53	↑	06			
22	F 1/x	45	54	F 5	52			
23	1	14	55	←→	16			
24	—	86	60	:	36			
25	↑	06	61	↑	06			
30	F 4	42	62	F 3	32			
31	×	26	63	←→	16			

Инструкция

в рег. 2 { +1 для K
—1 для E }
x В/О С/П

Регистры

2 +1 или —1
3 K (x) или E (x)
4 x
5;6 оперативные

Относительная погрешность вычисления σ не превышает 1.10^{-6}

Примеры. x = 0,8. $\tilde{K}$ (0,8) = 1,995302, $\tilde{E}$ (0,8) = 1,27635; точные значения K (0,8) = 1,99530278, E (0, 8) = 1,27634994.

Время вычисления примера — 3 мин.

По программе VI. 1.1.5.1 2/54, 52 вычисляется K (x) или E (x) в зависимости от предварительной установки значения соответственно 0 или 1 в регистре памяти C.

Программа VI.1.1.5.1.2/54,52

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	F x²	22	14	П→x 0	60	28	2	02
01	9	09	15	—	11	29	:	13
02	x→П 0	40	16	П→x C	6C	30	C/П	50
03	F 1/x	23	17	×	12			
04	П→x 0	60	18	2	02			
05	2	02	19	×	12			
06	×	12	20	1	01			
07	F 1/x	23	21	+	10			
08	1	01	22	F 1/x	23			
09	—	11	23	+	10			
10	F x²	22	24	F L0	5Г			
11	×	12	25	04	04			
12	×	12	26	F π	20			
13	1	01	27	×	12			

Инструкция

В рег. C { 0 для K; 1 для E;

x В/О С/П

Регистры

0 счетчик

C 0 или 1

Время вычисления 1 мин.

Относительная погрешность вычисления

$$\delta_K < \begin{cases} 1{,}1\cdot 10^{-3} & \text{при } 0 \leqslant x \leqslant 0{,}8, \\ 1{,}3\cdot 10^{-2} & \text{при } 0{,}8 < x \leqslant 0{,}9, \end{cases}$$

$$\delta_E < \begin{cases} 4\cdot 10^{-4} & \text{при } 0 < x \leqslant 0{,}9, \\ 2{,}3\cdot 10^{-2} & \text{при } 0{,}9 < x \leqslant 1. \end{cases}$$

Пример. x = 0,8. $\tilde{K}$ (0,8) = 1,99307, $\tilde{E}$ (0,8) = 1,27658; точные значения K (0,8) = 1,99530278, E (0,8) = 1,27634994.

VI.1.1.5.1.3. По программе вычисляется K (x) или E (x) в зависимости от предварительной установки переключателя Р/Г: K (x) — если переключатель в положении Г, E (x) — если переключатель в положении Р.

Программа VI.1.1.5.1.3/54,52

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	x→П 1	41	18	+	10	36	F x=0	5E
01	0	00	19	x→П 3	43	37	14	14
02	x→П 3	43	20	F 1/x	23	38	+	10
03	F π	20	21	1	01	39	C П	50
04	F cos	1Г	22	—	11			
05	F x=0	59	23	×	12			
06	08	08	24	П→x 2	62			
07	0	00	25	×	12			
08	x→П 4	44	26	x→П 2	42			
09	F π	20	27	F x²	22			
10	2	02	28	П→x 4	64			
11	:	13	29	П→x 3	63			
12	F 1/—	21	30	×	12			
13	x→П 2	42	31	1	01			
14	F Bx	0	32	+	10			
15	П→x 1	61	33	:	13			
16	П→x 3	63	34	+	10			
17	2	02	35	—	11			

Инструкция

Р Г { в Г для K; в Р для E

x В/О С/П

Регистры

1 x

2;3 оперативные

4 0; —1

Относительная погрешность вычисления δ не превышает 1.10^{-6}

Примеры. x = 0,5.

1) Переключатель Р/Г в положении Г.

$\tilde{K}$ (0,5) = 1,6857504

2) Переключатель Р/Г в положении Р.

$\tilde{E}$ (0,5) = 1,4674622.

Время вычисления примера — 1,5 мин.

VI.1.1.5.2. Вычисление приближенного значения $\tilde{E}$ (x) по формуле 7]

$$E(x) = \frac{\pi - (\pi - 2)\,x^3}{2}$$

Программа VI.1.1.5.2/21

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	↑	06	11	↑	06	22	2	24
01	F x²	55	12	P /—	53	23	:	36
02	×	26	13	×	26	24	C П	78
03	P ,	43	14	↑	06			
04	P π	23	15	P π	23			
05	2	24	20	←→	16			
10	—	86	21	—	86			

Инструкция

x В/О С П

Программа VI.1.1.5.2/54,52

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	F x^2	22	06	×	12
01	F Bx	0	07	F π	20
02	×	12	08	+	10
03	2	02	09	2	02
04	F π	20	10	:	13
05	—	11	11	С/П	50

Инструкция

x В/О С/П

Время вычисления — 4 с.

Относительная погрешность δ не превышает 2 %.

Пример. x = 0,8. $\tilde{E}$ (0,8) = 1,2785.

VI.1.1.5.3. Вычисляется приближенное значение $\tilde{K}$ (x) по формуле [7]

$$\tilde{K}(x) = \frac{\pi}{2} - 0{,}47 \cdot \ln(1 - x^{9/4}).$$

Программа VI.1.1.5.3/21

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	↑	06	13	P ln	13	30	—	86
01	F x^2	55	14	0	04	31	2	24
02	←→	16	15	,	46	32	:	36
03	F $\sqrt{\ }$	65	20	9	94	33	С/П	78
04	F $\sqrt{\ }$	65	21	4	44			
05	×	26	22	×	26			
10	1	14	23	↑	06			
11	←→	16	24	P π	23			
12	—	86	25	←→	16			

Инструкция

x В/О С/П

Программа VI.1.1.5.3/54,52

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	F π	20	08	×	12	16	7	07
01	2	02	09	1	01	17	×	12
02	:	13	10	←→	14	18	—	11
03	←→	14	11	—	11	19	С/П	50
04	F x^2	22	12	F ln	18			
05	F Bx	0	13	0	00			
06	F $\sqrt{\ }$	21	14	,	0—			
07	F $\sqrt{\ }$	21	15	4	04			

Инструкция

x В/О С/П

Время вычисления — 7 с.

Относительная погрешность вычисления δ при x < 0,999 не превышает 2 %.

Пример. x = 0,8. $\tilde{K}$ (0,8) = 2,008

VI.1.1.6. ДИЛОГАРИФМ И ТРИЛОГАРИФМ

Дилогарифм определяется как

$$Li_2(x) = -\int_0^x \frac{\ln(1-t)}{t}\,dt, \quad |x| \leqslant 1$$

и представляется в виде ряда [29]:

$$Li_2(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k^2}.$$

Трилогарифм определяется через дилогарифм как

$$Li_3(x) = \int_0^x \frac{Li_2(t)}{t}\,dt, \quad |x| \leqslant 1$$

и представляется в виде ряда [29]:

$$Li_3(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k^3}.$$

По программам одновременно вычисляются Li_2 (x) и Li_3 (x). В результате вычисления Li_2 (x) размещается в регистре X, а Li_3 (x) — в регистре Y.

Программа VI.1.1.6/21

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	P 4	41	31	↑	06	62	P x=0	59
01	0	04	32	F 6	62	63	F 1	12
02	P 2	21	33	←→	16	64	F 3	32
03	P 3	31	34	:	36	65	←→	16
04	P 5	51	35	↑	06	70	С/П	78
05	1	14	40	F 3	32			
10	P 6	61	41	+	96			
11	F 6	62	42	P 3	31			
12	↑	06	43	F 6	62			
13	F 4	42	44	↑	06			
14	×	26	45	F 5	52			
15	P 6	61	50	F x^2	55			
20	F 5	52	51	:	36			
21	1	14	52	↑	06			
22	+	96	53	F 2	22			
23	P 5	51	54	←→	16			
24	↑	06	55	+	96			
25	F x^2	55	60	P 2	21			
30	×	26	61	—	86			

Инструкция

x В/О С/П

Результат

Li_2—в рег. X, 2

Li_3—в рег. Y, 3

Регистры

2	Li_2
3	Li_3
4	x
5;6	оперативные

Программа VI.1.1.6/54,52

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	x→П 1	41	16	:	13
01	0	00	17	+	10
02	x→П 3	43	18	F Bx	0
03	x→П 4	44	19	П→x 3	63
04	1	01	20	:	13
05	x→П 2	42	21	П→x 4	64
06	←→	14	22	+	10
07	П→x 1	61	23	x→П 4	44
08	П→x 2	62	24	F Bx	0
09	×	12	25	—	11
10	x→П 2	42	26	F x=0	5E
11	П→x 3	63	27	06	06
12	1	01	28	←→	14
13	+	10	29	П→x 4	64
14	x→П 3	43	30	←→	14
15	F x^2	22	31	С/П	50

Инструкция

x В/О С/П

Результат

$Li_2(x)$ — в рег. X
$Li_3(x)$ — в рег. Y, 4

Регистры

1 x
2;3 оперативные
4 $Li_3(x)$

Время вычисления при $0,1 \leqslant x \leqslant 0,9$ составляет $T \simeq (5x^2 + 1)$ мин.

Относительная погрешность вычисления δ при $x \leqslant 0,9$ не превышает 1.10^{-5}.

Пример. $x = 0,5$. $\widetilde{Li}_2(0,5) = 0,5822405$, $\widetilde{Li}_3(0,5) = 0,5372132$; точные значения $Li_2(0,5) = 0,582240526$, $Li_3(0,5) = 0,5372132$.

VI.1.1.7. ФУНКЦИЯ ЛОБАЧЕВСКОГО

Функция Лобачевского L (x) определяется как [28]:

$$L(x) = -\int_0^x \ln\cos t\,dt, \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi/2.$$

VI.1.1.7.1. Функция L (x) вычисляется приближенно с помощью ряда [28]

$$L(x) = x\ln 2 - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}(-1)^i\frac{\sin 2ix}{i^2}.$$

Программа VI.1.1.7.1/21

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	P 2	21	05	P 3	31	14	↑	06
01	2	24	10	9	94	15	F 2	22
02	P 4	41	11	8	84	20	×	26
03	P ln	13	12	P 5	51	21	P sin	93
04	×	26	13	F 5	52	22	↑	06

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
23	F 5	52	41	+	96
24	F x^2	55	42	P 3	31
25	:	36	43	F 5	52
30	↑	06	44	2	24
31	F 4	42	45	—	86
32	/—/	56	50	P 5	51
33	P 4	41	51	P x = 0	59
34	×	26	52	1	14
35	↑	06	53	F 3	32
40	F 3	32	54	С/П	78

Инструкция

x В/О С/П

Регистры

2 x
3 L
4;5 оперативные

Программа VI.1.1.7.1/54,52

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	B ↑	0E	12	×	12
01	+	10	13	F sin	1C
02	9	09	14	2	02
03	8	08	15	:	13
04	x→П 0	40	16	П→x 0	60
05	F Bx	0	17	F x^2	22
06	2	02	18	:	13
07	F ln	18	19	—	11
08	×	12	20	F L0	5Г
09	/—/	0L	21	09	09
10	←→	14	22	С/П	50
11	П→x 0	60			

Инструкция

Р/Г — в Р
x В/О С/П

Регистр

0 оперативный

Время вычисления — 5 —7 мин.

Абсолютная погрешность вычисления Δ не превышает 1.10^{-4}.

Пример. $x = \pi/3$. $\widetilde{L}(\pi/3) = 0,2184$.

VI.1.1.7.2. Функция L (x) представляется приближенно в виде [7]

$$\widetilde{L}(x) = \frac{7x^3}{42 - \pi x^2 e^{x^2/\pi}}.$$

Программа VI.1.1.7.2/21

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	↑	06	05	:	36	14	↑	06
01	P /—/	53	10	P /—/	53	15	P π	23
02	←→	16	11	P π	23	20	×	26
03	F x^2	55	12	:	36	21	7	74
04	6	64	13	P e^x	33	22	:	36

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
23	↑	06	32	↑	06
24	P ,	43	33	P ,	43
25	F 1/x	45	34	←→	16
30	←→	16	35	:	36
31	—	86	40	С/П	78

Инструкция

x В/О С/П

Программа VI.1.1.7.2/54,52

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	В↑	0E	07	:	13	14	:	13
01	F x^2	22	08	F e^x	16	15	С/П	50
02	6	06	09	F π	20			
03	←→	14	10	×	12			
04	:	13	11	7	07			
05	F Вх	0	12	:	13			
06	F π	20	13	—	11			

Инструкция

x В/О С/П

Время вычисления — 7 с.

Относительная погрешность вычисления δ не превышает 1,6 %.

Пример. $x = \pi/4$, $L(\pi/4) = 0{,}08555$; точное значение $L(\pi/4) = 0.0864135$.

VI.1.2. ОРТОГОНАЛЬНЫЕ ПОЛИНОМЫ

VI.1.2.1. ПОЛИНОМЫ ЛАГЕРРА

Обобщенные полиномы Лагерра записываются в виде

$$L_n^{(\alpha)}(x) = \frac{e^x x^{-\alpha}}{n!} \cdot \frac{d^n}{dx^n}(e^{-x} x^{n+\alpha}).$$

Для вычисления $L_n^{(\alpha)}(x)$ используется их представление в виде рекуррентного соотношения [11]

$$k \cdot L_k^{(\alpha)} = (2k + \alpha - 1 - x) L_{k-1}^{(\alpha)}(x) - (k + \alpha - 1) L_{k-2}^{(\alpha)}(x)$$

при $L_{-1}^{(\alpha)}(x) \equiv 0$, $L_0^{(\alpha)}(x) \equiv 1$.

VI.1.2.1.1. ВЫЧИСЛЕНИЕ $L_n^{(\alpha)}(x)$ при фиксированном n

Перед вычислением $L_n^{(\alpha)}(x)$ значение α помещается в регистр памяти 1 и сохраняется в нем по окончании вычислений.

Программа VI.1.2.1.1/54,52

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	x→П 3	43	14	П→x 5	65	28	F L3	5—
01	←→	14	15	К П→x 5	Г5	29	07	07
02	x→П 2	42	16	F .	25	30	С П	50
03	0	00	17	П→x 5	65			
04	x→П 4	44	18	+	10			
05	x→П 5	45	19	П→x 2	62			
06	1	01	20	—	11			
07	П→x 5	65	21	П→x 1	61			
08	П→x 1	61	22	+	10			
09	+	10	23	×	12			
10	П→x 4	64	24	—	11			
11	×	12	25	/—/	0L			
12	←→	14	26	П→x 5	65			
13	x→П 4	44	27	:	13			

Инструкция

α x→П 1

x В↑ n В/О С П

Регистры

1	α
2	x
3 — 5	оперативные

Время вычисления — $T = 2(4n + 1)$ с.

Пример. $\alpha = 3$, $x = 2{,}5$, $n = 5$. $L_5^{(3)}(2{,}5) = -4{,}7096$.

VI.1.2.1.2. Вычисление $L_k^{(\alpha)}(x)$ в пошаговом режиме

Для вычисления $L_k^{(\alpha)}(x)$ в пошаговом режиме ($k = 0, 1, 2 \ldots$) значение α перед вычислением помещается в регистр памяти 2.

Программа VI.1.2.1.2/54,52

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	x→П 3	43	15	F .	25
01	0	00	16	П→x 5	65
02	x→П 4	44	17	+	10
03	x→П 5	45	18	П→x 2	62
04	1	01	19	+	10
05	С П	50	20	П→x 3	63
06	П→x 4	64	21	—	11
07	П→x 5	65	22	×	12
08	П→x 2	62	23	—	11
09	+	10	24	/—/	0L
10	×	12	25	П→x 5	65
11	←→	14	26	:	13
12	x→П 4	44	27	БП	51
13	П→x 5	65	28	05	05
14	К П→x 5	Г5			

Инструкция

α x→П 2

x В/О С/П С/П С/П...

Результат

$L_0^{(\alpha)}(x)$, $L_1^{(\alpha)}(x)$, $L_2^{(\alpha)}(x)$, ...

Регистры

2	α
3	x
4;5	оперативные

Время вычисления одного значения $L_k^{(\alpha)}(x)$ — 8 с.

Пример. $\alpha = 2$, $x = 3$. $L_k^{(2)}(3) = 1; 0; -1{,}5; -2; \ldots$

VI.1.2.1.3. Частный случай $L_n(x) = L_n^{(0)}(x)$ при фиксированном n представляется в виде конечной суммы

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} C_n^i \frac{(-x)^i}{i!}.$$

Программа VI.1.2.1.3/21

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	Р 3	31	24	:	36	52	Р 3	31
01	←→	16	25	↑	06	53	Р x=	59
02	Р 2	21	30	F 2	22	54	Р ln	13
03	1	14	31	×	26	55	F 4	42
04	Р 4	41	32	↑	06	60	С/П	78
05	Р 5	51	33	F 5	52			
10	0	04	34	—	56			
11	Р 6	61	35	×	26			
12	F 6	62	40	Р 5	51			
13	1	14	41	↑	06			
14	+	96	42	F 4	42			
15	Р 6	61	43	+	96			
20	F 3	32	44	Р 4	41			
21	↑	06	45	F 3	32			
22	F 6	62	50	1	14			
23	F x^2	55	51	—	86			

Инструкция

x ↑ n В/О С/П

Регистры

2 x
3 n
4 $L_n(x)$
5;6 оперативные

Программа VI.1.2.1.3/54,52

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	x→П 0	40	09	F x^2	22
01	←→	14	10	:	13
02	—	0L	11	×	12
03	1	01	12	×	12
04	x→П 6	46	13	1	01
05	П→x 6	66	14	+	10
06	К П→x 6	Г6	15	F L0	5Г
07	F .	25	16	05	05
08	П→x 0	60	17	С/П	50

Инструкция

x В↑ n В/О С/П

Регистры

0;6 оперативные

Время вычисления — T = (5n) с.

Пример. x = 0,7, n = 2. $L_2(0{,}7) = -0{,}155$.

VI.1.2.1.4. Пошаговый вывод $L_k(x)$

Для вычисления $L_k(x)$ (k = 0,1,2, ...) используется рекуррентное соотношение VI.1.2.1 при $\alpha = 0$.

Программа VI.1.2.1.4/21

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	Р 2	21	24	↑	06	52	Р /—/	53
01	0	04	25	F 2	22	53	←→	16
02	Р 3	31	30	—	86	54	:	36
03	1	14	31	↑	06	55	БП	58
04	Р 4	41	32	F 4	42	60	F ↑	05
05	С/П	78	33	Р 5	51			
10	F 3	32	34	×	26			
11	↑	06	35	↑	06			
12	F 5	52	40	Р /—/	53			
13	×	26	41	—	86			
14	Р ,	43	42	Р ,	43			
15	F 3	32	43	F 3	32			
20	2	24	44	1	14			
21	×	26	45	+	96			
22	1	14	50	Р 3	31			
23	+	96	51	↑	06			

Инструкция

x В/О С/П С/П С/П ...

Результат

$L_0(x)$, $L_1(x)$, $L_2(x)$, ...

Регистры

2 x
3 k
4 L_k
5 L_{k-1}

Программа VI.1.2.1.4/54,52

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	x→П 3	43	12	F .	25
01	Сх	0Г	13	П→x 5	65
02	x→П 5	45	14	+	10
03	1	01	15	П→x 3	63
04	С/П	50	16	—	11
05	П→x 4	64	17	×	12
06	П→x 5	65	18	—	11
07	×	12	19	/—/	0L
08	←→	14	20	П→x 5	65
09	x→П 4	44	21	:	13
10	П→x 5	65	22	БП	51
11	К П→x 5	Г5	23	04	04

Инструкция

x В/О С/П С/П С/П ...

Результат

$L_0(x)$, $L_1(x)$, $L_2(x)$, ...

Регистры

3 x
4;5 оперативные

Время вычисления одного значения $L_k(x)$ — 5—7 с.

Пример. x = 0,6. $L_k(x) = 1;\ 0{,}4;\ -0{,}02;\ -0{,}296;\ \ldots$

VI.1.2.2. ПОЛИНОМЫ ЛЕЖАНДРА

Полиномы Лежандра определяются соотношением [11]

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n \cdot n!} \cdot \frac{d^n}{dx^n}(x^2 - 1)^n.$$

Для вычисления $P_n(x)$ используется рекуррентное соотношение

$$k \cdot P_k(x) = (2k-1) \cdot x \cdot P_{k-1}(x) - (k-1) \cdot P_{k-2}(x),$$

где

$$P_0(x) \equiv 1,\ P_1(x) = x.$$

VI.1.2.2.1. Вычисление $P_n(x)$ при фиксированном n

Программа VI.1.2.2.1/21

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	Р 3	31	31	×	26	62	↑	06
01	←→	16	32	↑	06	63	F 6	62
02	Р 2	21	33	F 4	42	64	—	86
03	0	04	34	Р 5	51	65	Р x=0	59
04	Р 6	61	35	×	26	70	F 1	12
05	1	14	40	↑	06	71	F 4	42
10	Р 4	41	41	Р /—/	53	72	С/П	78
11	F 6	62	42	—	86			
12	↑	06	43	Р ,	43			
13	F 5	52	44	F 6	62			
14	×	26	45	1	14			
15	Р ,	43	50	+	96			
20	F 6	62	51	Р 6	61			
21	2	24	52	↑	06			
22	×	26	53	Р /—/	53			
23	1	14	54	←→	16			
24	+	96	55	:	36			
25	↑	06	60	Р 4	41			
30	F 2	22	61	F 3	32			

Инструкция

x ↑ n В/О С/П

Регистры

2 x
3 n
4 P_n
5 P_{n-1}
6 оперативный

Программа VI.1.2.2.1/54,52

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	x→П 3	43	11	F Вх	0	22	С/П	50
01	←→	14	12	←→	14			
02	x→П 2	42	13	—	11			
03	Сх	0Г	14	F Вх	0			
04	x→П 4	44	15	К П→x 4	Г4			
05	1	01	16	F .	25			
06	←→	14	17	П→x 4	64			
07	F Вх	0	18	:	13			
08	П→x 2	62	19	+	10			
09	×	12	20	F L3	5—			
10	—	11	21	06	06			

Инструкция

x В↑ n В/О С/П

Регистры

2 x
3:4 оперативные

Время вычисления — T = (6n) с.
Пример. x = 0,7, $n = 2$. $P_2(0,7) = 0,235$.

VI.1.2.2.2. Пошаговый вывод $P_k(x)$

Значения $P_k(x)$ (k = 0,1, 2, ...) выводятся последовательно при выполнении команд В/О С/П С/П С/П ...

Программа VI.1.2.2.2/54,52

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	x→П 4	44	11	←→	14
01	Сх	0Г	12	—	11
02	x→П 5	45	13	F Вх	0
03	1	01	14	К П→x 5	Г5
04	С/П	50	15	F .	25
05	←→	14	16	П→x 5	65
06	F Вх	0	17	:	13
07	П→x 4	64	18	+	10
08	×	12	19	БП	51
09	—	11	20	04	04
10	F Вх	0			

Инструкция

x В/О С/П С/П С/П...

Результат

$P_0(x)$, $P_1(x)$, $P_2(x)$,...

Регистры

4 x
5 оперативный

Время вычисления одного значения $P_k(x)$ — 6 с.
Пример. x = 0,6. $P_k(0,6)$ = 1; 0,6; 0,04; — 0,36; ...
Для пошагового вывода полиномов Лежандра на Б3-21 используется программа VI.1.2.1.4/21 с заменой в адресе 30 команды (—) на команду (×).

VI.1.2.3. ПОЛИНОМЫ ЭРМИТА

Полиномы Эрмита $H_n(x)$ определяются как

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \cdot \frac{d^n}{dx^n}(e^{-x^2}).$$

Для вычисления $H_n(x)$ используется рекуррентное соотношение [11]

$$H_{k+1}(x) = 2x \cdot H_k(x) - 2kH_{k-1}(x),$$

где $H_0(x) = 1$.

VI.1.2.3.1. Вычисление $H_n(x)$ при фиксированном n

Программа VI.1.2.3.1/21

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	Р 3	31	05	1	14	14	×	26
01	←→	16	10	Р 4	41	15	Р ,	43
02	Р 2	21	11	F 5	52	20	F 4	42
03	0	04	12	↑	06	21	Р 5	51
04	Р 6	61	13	F 6	62	22	↑	06

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
23	F 2	22	41	+	96
24	×	26	42	P 6	61
25	↑	06	43	↑	06
30	P /—/	53	44	F 3	32
31	—	86	45	—	86
32	2	24	50	P x=0	59
33	×	26	51	F 1	12
34	P 4	41	52	F 4	42
35	F 6	62	53	С/П	78
40	1	14			

Инструкция

x ↑ n В/О С/П

Регистры

2 x
3 n
4 H_n
5 H_{n-1}
6 оперативный

Программа VI.1.2.3.1/54,52

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	x→П 0	40	10	←→	14
01	x→П 2	42	11	П→x 1	61
02	←→	14	12	×	12
03	x→П 1	41	13	+	10
04	1	01	14	В↑	0E
05	←→	14	15	+	10
06	П→x 2	62	16	F L2	58
07	П→x 0	60	17	05	05
08	—	11	18	С/П	50
09	×	12			

Инструкция

x В↑ n В/О С/П

Регистры

0 n
1 x
2 счетчик

Время вычисления — T = (4n) с.
Пример. n = 3, x = 1. H_3 (1) = — 4.

VI.1.2.3.2. Пошаговый вывод $H_k(x)$ [k=0, 1, 2, ...]

Программа VI.1.2.3.2/21

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	P 2	21	21	+	96	42	F ↑	05
01	0	04	22	P 3	31			
02	P 3	31	23	F 2	22			
03	1	14	24	↑	06			
04	P 4	41	25	F 4	42			
05	С/П	78	30	P 5	51			
10	F 3	32	31	×	26			
11	↑	06	32	↑	06			
12	F 5	52	33	P /—/	53			
13	×	26	34	—	86			
14	P ,	43	35	2	24			
15	F 3	32	40	×	26			
20	1	14	41	БП	58			

Инструкция

x В/О С/П С/П С/П ...

Результат

$H_0(x)$, $H_1(x)$, $H_2(x)$ ...

Регистры

2 x
3 k
4 H_k
5 H_{k-1}

Программа VI.1.2.3.2/54,52

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	x→П 1	41	09	×	12
01	1	01	10	←→	14
02	x→П 2	42	11	П→x 1	61
03	С/П	50	12	×	12
04	←→	14	13	+	10
05	П→x 2	62	14	2	02
06	1	01	15	×	12
07	—	11	16	БП	51
08	x→П 2	42	17	0 3	03

Инструкция

x В/О С/П С/П С/П ...

Результат

$H_0(x)$, $H_1(x)$, $H_2(x)$, ...

Регистры

1 x
2 оперативный

Время вычисления одного значения H_k (x) — 4 с.
Пример. x = 0,5. H_k (0,5) = 1,1, —1, —5, 1, ...

VI.1.2.4. ФУНКЦИЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ЦИЛИНДРА

Функция параболического цилиндра φ_n (x) связана с полиномом Эрмита H_n (x) соотношением [28]

$$\varphi_n(x) = H_n(x) \cdot \frac{e^{-x/2}}{\sqrt{n!\,2^n \sqrt{\pi}}}.$$

По приведенной программе одновременно вычисляются полином Эрмита H_n (x) и функция параболического цилиндра φ_n (x) при фиксированном n ⩾ 1.

Программа VI.1.2.4/54,52

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	x→П 1	41	15	+	10	30	F √	21
01	x→П 2	42	16	F L2	58	31	:	13
02	←→	14	17	05	05	32	С/П	50
03	x→П 0	40	18	В↑	0E			
04	1	01	19	F π	20			
05	←→	14	20	F √	21			
06	П→x 2	62	21	П→x 1	61			
07	П→x 1	61	22	×	12			
08	—	11	23	В↑	0E			
09	×	12	24	+	10			
10	←→	14	25	F L1	5L			
11	П→x 0	60	26	21	21			
12	×	12	27	П→x 0	60			
13	+	10	28	F e^x	16			
14	В↑	0E	29	×	12			

Инструкция

x В↑ n В/О С/П

Результат

$\varphi_n(x)$ — в рег. X
$H_n(x)$ — в рег. Y

Регистры

0 x
1;2 оперативные

Время вычисления — T = (6n + 5) с.
Пример. x = 2, n = 5. φ_5 (2) = — 0,071346, H_5 (2) = — 16.

VI.1.3. ФУНКЦИИ ЭЙРИ

Функции Эйри являются решениями дифференциального уравнения $x'' - xy = 0$ [11].

Пара линейно независимых решений Ai (x) и Bi (x) этого уравнения может быть представлена в виде

$$A_1(x) = c_1 \cdot f_1(x) - c_2 \cdot x \cdot f_2(x),$$

$$B_1(x) = [c_1 \cdot f_1(x) + c_2 \cdot f_2(x)] \cdot \sqrt{3}.$$

Функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ записываются в виде рядов

$$f_{1,2}(x) = 1 + \sum_{i=1}^{\infty} \prod_{j=1}^{i} \frac{x^3}{3j(3j \mp 1)},$$

где в правой части знак «—» относится к $f_1(x)$, а «+» — к $f_2(x)$. c_1 и c_2 — численные коэффициенты, равные соответственно

$$c_1 = [3^{2/3} \cdot \Gamma(^2/_3)]^{-1} = 0{,}35502805,$$

$$c_2 = \left[3^{1/3} \cdot \Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\right]^{-1} = 0{,}25881940.$$

Программа VI.1.3/54,52

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	x→П 1	41	26	П→x 3	63	52	3	03
01	В↑	0E	27	П→x 5	65	53	F √	21
02	x→П 3	43	28	:	13	54	×	12
03	x→П 4	44	29	П→x 5	65	55	←→	14
04	F x²	22	30	1	01	56	П→x 6	66
05	×	12	31	+	10	57	—	11
06	x→П 6	46	32	:	13	58	С/П	50
07	1	01	33	П→x 6	66			
08	x→П 2	42	34	×	12			
09	0	00	35	x→П 3	43			
10	x→П 5	45	36	П→x 4	64			
11	←→	14	37	+	10			
12	П→x 2	62	38	x→П 4	44			
13	П→x 6	66	39	F Вх	0			
14	×	12	40	—	11			
15	П→x 5	65	41	F x=0	5E			
16	3	03	42	11	11			
17	+	10	43	+	10			
18	x→П 5	45	44	П→x 7	67			
19	:	13	45	×	12			
20	П→x 5	65	46	В↑	0E			
21	1	01	47	П→x 4	64			
22	—	11	48	П→x 8	68			
23	:	13	49	×	12			
24	x→П 2	42	50	x→П 6	46			
25	+	10	51	+	10			

Инструкция

0, 35502805 x→П 7
0, 2588194 x→П 8
x В/О С/П

Результат

Ai(x) — в рег. X
Bi(x) — в рег. Y

Регистры

1 x
2—6 оперативные
7 0,35502805
8 0,2588194

Время вычисления при $|x| \leqslant 5$ — 1 — 3 мин.

Абсолютная погрешность вычисления Δ при $|x| \leqslant 5$ не превышает $3 \cdot 10^{-5}$.

Пример. x = — 2. $\tilde{Ai}$ (—2) = 0,22740743, $\tilde{Bi}$ (— 2) = — 0,41230258; точные значения Ai (—2) = 0,22740743, Bi (—2) = — 0,41230259.

VI.1.4. ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

VI.1.4.1. ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ РЯД

Гипергеометрический ряд F (a, в, c, x) (при $|x| < 1$; $c \neq 0, -1, -2, \ldots$) представляет собой частный случай решения дифференциального гипергеометрического уравнения

$$x(1-x)y'' + [c - (a+b+1)x]y' - aby = 0.$$

Для вычисления функции F (a, в, c, x) используется представление приближенного значения F (a, в, c, x) в виде ряда [14]

$$\tilde{F}(a, b, c, x) = 1 + \sum_{i=1}^{N} \prod_{j=0}^{i-1} \frac{(a+j)(b+j)}{(1+j)(c+j)} x.$$

Программа VI.1.4.1/21

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	Р 2	21	40	Р ,	43	80	↑	06
01	С/П	78	41	F 5	52	81	F 6	62
02	Р 3	31	42	↑	06	82	←→	16
03	С/П	78	43	F 8	82	83	+	96
04	Р 4	41	44	+	96	84	Р 6	61
05	С/П	78	45	Р ,	43	85	—	86
10	Р 5	51	50	F 8	82	90	Р x=0	59
11	1	14	51	1	14	91	Р 2	21
12	Р 6	61	52	+	96	92	F 6	62
13	Р 7	71	53	Р 8	81	93	С/П	78
14	0	04	54	↑	06			
15	Р 8	81	55	Р /—/	53			
20	F 3	32	60	×	26			
21	↑	06	61	↑	06			
22	F 8	82	62	Р /—/	53			
23	+	96	63	←→	16			
24	Р ,	43	64	:	36			
25	F 4	42	65	↑	06			
30	↑	06	70	F 2	22			
31	F 8	82	71	×	26			
32	+	96	72	↑	06			
33	↑	06	73	F 7	72			
34	Р /—/	53	74	×	26			
35	×	26	75	Р 7	71			

Инструкция

В/О x С/П a С/П в С/П c С/П

Регистры

2 x
3 a
4 b
5 c
6 F
7;8 оперативные

Программа VI.1.4.1/54,52

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	x→П 0	40	18	+	10	36	+	10
01	F .	25	19	П→x 1	61	37	—	11
02	x→П C	4C	20	П→x B	6L	38	F x=0	5E
03	F .	25	21	+	10	39	12	12
04	x→П B	4L	22	×	12	40	F Bx	0
05	←→	14	23	П→x 1	61	41	С/П	50
06	x→П A	4—	24	1	01			
07	1	01	25	+	10			
08	x→П 2	42	26	:	13			
09	0	00	27	П→x 1	61			
10	Б П	51	28	П→x C	6C			
11	16	16	29	+	10			
12	F Bx	0	30	:	13			
13	П→x 1	61	31	П→x 0	60			
14	1	01	32	×	12			
15	+	10	33	П→x 2	62			
16	x→П 1	41	34	×	12			
17	П→x A	6—	35	x→П 2	42			

Инструкция

а В↑ в В↑ с В↑ x В/О С/П

Регистры

0—2 оперативные

A a

B в

C c

Относительная погрешность δ не превышает $1 \cdot 10^{-6}$.

Пример. а = 1, в = 1, с = 1, x = 0,8.

$\tilde{F}$ (1; 1; 1; 0,8) = 5, 000000; точное значение F (1; 1; 1; 0,8) = 5,0.

Время вычисления примера — 6—8 мин.

VI.1.4.2. ВЫРОЖДЕННАЯ ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ФУНКЦИЯ

Вырожденная гипергеометрическая функция Ф (a, c, x) является решением вырожденного гипергеометрического дифференциального уравнения [14]

$$xy'' + (c - x)\,y' - ay = 0$$

при $c \neq 0; -1, -2, \ldots$

Функция Ф (a, c, x) представляется приближенно в виде ряда

$$\tilde{\Phi}(a, c, x) = 1 + \sum_{i=0}^{N} \prod_{j=0}^{i-1} \frac{a+j}{(1+j)(c+j)}\, x.$$

Программа VI.1.4.2/21

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	Р 2	21	32	F 7	72	64	←→	16
01	С/П	78	33	1	14	65	+	96
02	Р 3	31	34	+	96	70	Р 5	51
03	С/П	78	35	Р 7	71	71	—	86
04	Р 4	41	40	↑	06	72	Р x=0	59
05	1	14	41	Р /—/	53	73	F ←→	15
10	Р 5	51	42	×	26	74	F 5	52
11	Р 6	61	43	↑	06	75	С/П	78
12	0	04	44	Р /—/	53			
13	Р 7	71	45	←→	16			
14	F 3	32	50	:	36			
15	↑	06	51	↑	06			
20	F 7	72	52	F 2	22			
21	+	96	53	×	26			
22	Р ,	43	54	↑	06			
23	F 4	42	55	F 6	62			
24	↑	06	60	×	26			
25	F 7	72	61	Р 6	61			
30	+	96	62	↑	06			
31	Р ,	43	63	F 5	52			

Инструкция

x В/О С/П а С/П с С/П

Регистры

2 x

3 a

4 c

5 Ф(a, c, x)

6;7 оперативные

Программа VI.1.4.2/54,52

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	x→П 0	40	16	+	10	32	F x=0	5E
01	F .	25	17	П→x 1	61	33	10	10
02	x→П C	4C	18	П→x C	6C	34	F Bx	0
03	←→	14	19	+	10	35	С/П	50
04	x→П A	4—	20	:	13			
05	1	01	21	1	01			
06	x→П 2	42	22	П→x 1	61			
07	0	00	23	+	10			
08	БП	51	24	:	13			
09	14	14	25	П→x 0	60			
10	F Bx	0	26	×	12			
11	П→x 1	61	27	П→x 2	62			
12	1	01	28	×	12			
13	+	10	29	x→П 2	42			
14	x→П 1	41	30	+	10			
15	П→x A	6—	31	—	11			

Инструкция

а В↑ с В↑ x В/О С/П

Регистры

0 x

1;2 оперативные

A a

C c

Пример. а = 1, с = 1, x = 5, $\tilde{\Phi}$ (1; 1; 5) = 148, 413.

Время вычисления примера — 2 — 3 мин.

VI.2. СПЕЦИАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ ДЛЯ СТАТИСТИЧЕСКИХ РАСЧЕТОВ

VI.2.1. ГАММА-ФУНКЦИЯ И РОДСТВЕННЫЕ ЕЙ ФУНКЦИИ

VI.2.1.1. ГАММА-ФУНКЦИЯ

Гамма-функция $\Gamma(x)$ определяется как решение функционального уравнения [13]

$$\Gamma(x+1) = x \cdot \Gamma(x) \text{ при } \Gamma(1) = 1.$$

Для $x > 0$ имеет место представление

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1}\, dt.$$

VI.2.1.1.1. Вычисление значения Г(x) на интервале $-66 \leqslant x \leqslant 70$ с использованием представления Стирлинга

Для вычисления $\Gamma(x)$ удобным оказывается приближенное представление Стирлинга

$$\tilde{\Gamma}(x+1) \simeq \left(\frac{x}{e}\right)^x e^{\frac{1}{12x}} \cdot \sqrt{2\pi x}, \quad x \geqslant 9.$$

Рекуррентным преобразованием $\Gamma(x+1) = x\,\Gamma(x)$ это соотношение можно распространить на все допустимые значения x.

Программа VI.2.1.1.1/21

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	P 3	31	32	P ln	13	64	P π	23
01	P 4	41	33	1	14	65	2	24
02	1	14	34	—	86	70	×	26
03	P 2	21	35	↑	06	71	↑	06
04	F 2	22	40	F 5	52	72	F 5	52
05	↑	06	41	×	26	73	×	26
10	F 3	32	42	P ,	43	74	F √	65
11	P 5	51	43	F 5	52	75	↑	06
12	:	36	44	1	14	80	P /—/	53
13	P 2	21	45	2	24	81	×	26
14	F 3	32	50	×	26	82	С/П	78
15	1	14	51	F 1/x	45			
20	+	96	52	↑	06		Инструкция	
21	P 3	31	53	P /—/	53			
22	F 5	52	54	+	96		x В/О С П	
23	9	94	55	P e^x	33			
24	—	86	60	↑	06		Регистры	
25	P x⩾0	49	61	F 2	22			
30	F ↑	05	62	×	26		2—5 оперативные	
31	F 5	52	63	P ,	43			

Программа VI.2.1.1.1/54,52

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	К НОП	54	16	F .	25	32	2	02
01	1	01	17	П→x 6	66	33	×	12
02	←→	14	18	1	01	34	П→x 6	66
03	В↑	0E	19	2	02	35	×	12
04	F .	25	20	×	12	36	F √	21
05	x→П 6	46	21	F 1/x	23	37	×	12
06	:	13	22	П→x 6	66	38	С/П	50
07	1	01	23	F ln	18			
08	П→x 6	66	24	1	01		Инструкция	
09	+	10	25	—	11			
10	9	09	26	П→x 6	66		x В/О С/П	
11	П→x 6	66	27	×	12			
12	—	11	28	+	10		Регистр	
13	F x<0	5C	29	F e^x	16			
14	04	04	30	×	12		6 оперативный	
15	F .	25	31	F π	20			

$$\text{Время вычисления} — T = \begin{cases} 13\,\text{с} & \text{при } x > 9, \\ (40-3x)\,\text{с} & \text{при } x \leqslant 9. \end{cases}$$

Относительная погрешность δ не превышает $1 \cdot 10^{-5}$.

Пример. $x = -3{,}5$. $\tilde{\Gamma}(-3{,}5) = 0{,}27009$; точное значение $\Gamma(-3{,}5) = 0{,}270088$.

VI.2.1.1.2. Вычисление приближенного значения Г(x) при x>0 по формуле [7]

$$\Gamma(x) = \frac{e^{\frac{x(x-1)}{2}}}{x}, \quad 0 < x \leqslant 1.$$

При $x > 1$ рекуррентным преобразованием $\Gamma(x+1) = x\,\Gamma(x)$ значение x переводится в область $0 < x \leqslant 1$.

Программа VI.2.1.1.2/21

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	P 2	21	15	P 4	41	34	↑	06
01	P 3	31	20	1	14	35	F 3	32
02	F x^2	55	21	—	86	40	×	26
03	F 1/x	45	22	P 2	21	41	С/П	78
04	P 4	41	23	P x<0	69			
05	F 3	32	24	↑	06		Инструкция	
10	↑	06	25	↑	06			
11	F 4	42	30	F 4	42		x В/О С/П	
12	×	26	31	×	26			
13	P 3	31	32	P e^x	33		Регистры	
14	F 2	22	33	F √	65		2—4 оперативные	

Программа VI.2.1.1.2/54,52

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	В↑	0E	07	F .	25	14	F e^x	16
01	В↑	0E	08	F .	25	15	F $\sqrt{\ }$	21
02	F x^2	22	09	1	01	16	×	12
03	F 1/x	23	10	—	11	17	С/П	50
04	←→	14	11	F x<0	5C			
05	F .	25	12	05	05		Инструкция	
06	×	12	13	×	12		x В/О С/П	

Время вычисления T = 2 (x + 3) с.

Относительная погрешность вычисления δ не превышает 1 %.

Пример. x = 4,5. $\widetilde{\Gamma}$ (4,5) = 11, 5828; точное значение Г (4,5) = = 11,6317.

VI.2.1.2. ЛОГАРИФМИЧЕСКАЯ ПРОИЗВОДНАЯ ГАММА-ФУНКЦИИ

Логарифмическая производная гамма-функции ψ (x) представляется как [11]:

$$\psi(x)=\frac{d}{dx}\ln\Gamma(x)=\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}.$$

Для вычисления ψ (x) представляется приближенно в виде ряда

$$\widetilde{\psi}(x)=-C+(x-1)\left[\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{i(i+x-1)}+\frac{1}{N+\frac{x}{2}}\right],\ N=9,$$

где C = 0,5772157 — постоянная Эйлера.

Программа VI.2.1.2/21

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	↑	06	24	×	26	52	↑	06
01	1	14	25	F 1/x	45	53	F 5	52
02	—	86	30	↑	06	54	—	86
03	P 4	41	31	F 3	32	55	С/П	78
04	←→	16	32	+	96			
05	2	24	33	P 3	31		Инструкция	
10	:	36	34	F 2	22			
11	9	94	35	1	14		0,5772157 P 5	
12	P 2	21	40	—	86		x В/О С/П	
13	+	96	41	P 2	21			
14	F 1/x	45	42	P x=0	59		Регистры	
15	P 3	31	43	F 2	22			
20	F 2	22	44	F 4	42		2;3 оперативные	
21	↑	06	45	↑	06	4	x—1	
22	F 4	42	50	F 3	32	5	0,5772157	
23	+	96	51	×	26			

Программа VI.2.1.2/54,52

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	x→П 1	41	11	П→x 2	62	22	С/П	50
01	1	01	12	+	10			
02	—	11	13	F Вх	0		Инструкция	
03	9	09	14	×	12			
04	x→П 2	42	15	F 1/x	23		0,5772157 x→П 3	
05	П→x 1	61	16	+	10		x В/О С/П	
06	2	02	17	F L2	58			
07	:	13	18	10	10		Регистры	
08	+	10	19	×	12	1	x	
09	F 1/x	23	20	П→x 3	63	2	оперативный	
10	←→	14	21	—	11	3	0,5772157	

Время вычисления — 25 с.

Абсолютная погрешность вычисления Δ при $1 \leqslant x \leqslant 2$ не превышает $5\cdot 10^{-5}$.

Пример. x = 1,5. $\widetilde{\psi}$(1,5) = 0,03652; точное значение ψ (1,5) = = 0,03649.

VI.2.1.3. ФУНКЦИЯ β(x)

Функция β (x) определяется через пару логарифмических производных гамма-функции ψ (x) как

$$\beta(x)=\frac{1}{2}\left[\psi\left(\frac{x+1}{2}\right)-\psi\left(\frac{x}{2}\right)\right].$$

Для вычисления используется приближенное представление β (x) в виде ряда [28]

$$\beta(x)=\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{(2i+x-2)(2i+x-1)}+\frac{1}{4N+2x-1},\ N=9.$$

Программа VI.2.1.3/21

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	↑	06	22	—	86	44	P x=0	59
01	1	14	23	1	14	45	P 2	21
02	8	84	24	—	86	50	F 4	42
03	P 3	31	25	P 2	21	51	С/П	78
04	+	96	30	×	26			
05	P 2	21	31	F 1/x	45		Инструкция	
10	2	24	32	↑	06			
11	×	26	33	F 4	42		x В/О С/П	
12	1	14	34	+	96			
13	—	86	35	P 4	41		Регистры	
14	F 1/x	45	40	F 3	32			
15	P 4	41	41	2	24		2;3 оперативные	
20	F 2	22	42	—	86	4	β	
21	1	14	43	P 3	31			

Программа VI.2.1.3/54.52

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	В↑	0E	11	F 1/x	23	22	F L1	5L
01	9	09	12	П→x 2	62	23	12	12
02	x→П 1	41	13	1	01	24	С/П	50
03	В↑	0E	14	—	11			
04	+	10	15	П→x 2	62		Инструкция	
05	+	10	16	2	02			
06	x→П 2	42	17	—	11		x В/О С/П	
07	В↑	0E	18	x→П 2	42			
08	+	10	19	×	12		Регистры	
09	1	01	20	F 1/x	23			
10	—	11	21	+	10		1;2 оперативные	

Время вычисления — 30 — 40 с.

Абсолютная погрешность вычисления Δ не превышает $1 \cdot 10^{-4}$.

Пример. $x = 2$. $\tilde{\beta}(2) = 0{,}30687$; точное значение $\beta(2) = 0{,}306845$.

VI.2.1.4. БЕТА-ФУНКЦИЯ

Бета-функция $B(x, y)$ при $x > 0$, $y > 0$ имеет представление [11]

$$B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,dt$$

и определяется с помощью гамма-функций:

$$B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\cdot\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}.$$

VI.2.1.4.1. x, y — произвольные

При произвольных значениях x, y ($x > 0$, $y > 0$) используется представление приближенного значения гамма-функции как $\tilde{\Gamma}(x) = \exp[x(x-1)/2]/x$ ($0 < x \leqslant 1$), а в случае $x > 1$ рекуррентным преобразованием $\Gamma(x+1) = x\,\Gamma(x)$ значение x переводится в область $0 < x \leqslant 1$.

Программа VI.2.1.4.1/21

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	Р 5	51	05	F :	35	14	Р 7	71
01	←→	16	10	Р 8	81	15	F 4	42
02	Р 4	41	11	F 5	52	20	ПП	68
03	+	96	12	ПП	68	21	F :	35
04	ПП	68	13	F :	35	22	Р 6	61

Продолжение

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
23	↑	06	50	×	26	73	F 3	32
24	F 7	72	51	Р 3	31	74	×	26
25	×	26	52	F 2	22	75	В/О	48
30	↑	06	53	Р 6	61			
31	F 8	82	54	1	14		Инструкция	
32	:	36	55	—	86			
33	С/П	78	60	Р 2	21		x ↑ y В/О С/П	
34	Р 2	21	61	Р x<0	69			
35	Р 3	31	62	4	44		Регистры	
40	F x²	55	63	↑	06			
41	F 1/x	45	64	F 6	62		2;3 оперативные	
42	Р 6	61	65	×	26		4 x	
43	F 3	32	70	Р eˣ	33		5 y	
44	↑	06	71	F √—	65		6 Г(x)	
45	F 6	62	72	↑	06		7 Г(y)	
							8 Г(x+y)	

Программа VI.2.1.4.1/54,52

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	x→П 1	41	17	П→x 0	60	34	F eˣ	16
01	←→	14	18	:	13	35	F √—	21
02	x→П 0	40	19	С/П	50	36	×	12
03	ПП	53	20	x→П 3	43	37	В/О	52
04	20	20	21	F 1/x	23			
05	x→П 2	42	22	БП	51		Инструкция	
06	П→x 0	60	23	27	27			
07	П→x 1	61	24	x→П 3	43		x В↑ y В/О С/П	
08	+	10	25	F .	25			
09	ПП	53	26	×	12		Регистры	
10	20	20	27	П→x 3	63			
11	x→П 0	40	28	П→x 3	63		0 x; Г(x+y)	
12	П→x 1	61	29	1	01		1 y	
13	ПП	53	30	—	11		2 Г(y)	
14	20	20	31	F x<0	5C		3 оперативный	
15	П→x 2	62	32	24	24			
16	×	12	33	×	12			

Время вычисления — $T = 5(x + y + 5)$ с.

Относительная погрешность вычисления δ не превышает 2 %.

Пример. $x = 2{,}5$; $y = 4$. $\tilde{B}(2{,}5;\ 4) = 0{,}0277056$; точное значение $B(2{,}5;\ 4) = 0{,}027705627$.

VI.2.1.4.2. x, y — целые и полуцелые

Для вычисления B (x, y) при целых и полуцелых значениях x, y ($x = n/2$, $y = m/2$; n, m — целые числа) используется точное представление гамма-функции.

Программа VI.2.1.4.2/21

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	P 3	31	25	P 4	41	54	P e^x	33
01	←→	16	30	С/П	78	55	↑	06
02	P 2	21	31	↑	06	60	F 4	42
03	+	96	32	F 4	42	61	×	26
04	1	14	33	×	26	62	В/О	48
05	P 4	41	34	P 4	41			
10	←→	16	35	←→	16		Инструкция	
11	ПП	68	40	1	14			
12	P 4	41	41	—	86		x ↑ y В/О С/П	
13	F 1/x	45	42	P x≠0	79			
14	P 4	41	43	P 5	51		Регистры	
15	F 2	22	44	P x<0	69			
20	ПП	68	45	F 3	32		2 x	
21	P 4	41	50	↑	06		3 y	
22	P 4	41	51	P π	23		4 оперативный	
23	F 3	32	52	P ln	13			
24	ПП	68	53	×	26			

Программа VI.2.1.4.2/54,52

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	←→	14	13	ПП	53	26	×	12
01	x→П 1	41	14	19	19	27	F e^x	16
02	F Bx	0	15	С/П	50	28	×	12
03	+	10	16	/—/	0L	29	В О	52
04	1	01	17	×	12			
05	←→	14	18	F Bx	0		Инструкция	
06	ПП	53	19	1	01			
07	19	19	20	—	11		x В↑ y В/О С/П	
08	F 1/x	23	21	/—/	0L			
09	П→x 1	61	22	F x≥0	59		Регистр	
10	ПП	53	23	16	16			
11	19	19	24	F π	20		1 x	
12	←→	14	25	F ln	18			

Время вычисления — $T = 4\ (x + y + 4)$ с.
Пример. $x = 1{,}5$, $y = 4$. B (1, 5; 4) $= 0{,}101587$.

VI.2.1.4.3. Вычисление $\tilde{B}$ (x, y) с использованием представления гамма-функции по формуле Стирлинга

Программа VI.2.1.4.3/54,52

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	x→П 2	42	24	x→П 6	46	48	F e^x	16
01	←→	14	25	:	13	49	×	12
02	x→П 1	41	26	1	01	50	F π	20
03	+	10	27	П→x 6	66	51	2	02
04	ПП	53	28	+	10	52	×	12
05	20	20	29	9	09	53	П→x 6	66
06	x→П 5	45	30	П→x 6	66	54	×	12
07	П→x 1	61	31	—	11	55	F [illegible]	21
08	ПП	53	32	F x<0	5C	56	×	12
09	20	20	33	23	23	57	В/О	52
10	x→П 3	43	34	F .	25			
11	П→x 2	62	35	F .	25		Инструкция	
12	ПП	53	36	П→x 6	66			
13	20	20	37	1	01		x В↑ y В/О С/П	
14	x→П 4	44	38	2	02			
15	П→x 3	63	39	×	12		Регистры	
16	×	12	40	F 1/x	23			
17	П→x 5	65	41	П→x 6	66		1 x	
18	:	13	42	F ln	18		2 y	
19	С/П	50	43	1	01		3 Г(x)	
20	1	01	44	—	11		4 Г(y)	
21	←→	14	45	П→x 6	66		5 Г(x+y)	
22	В↑	0E	46	×	12		6 оперативный	
23	F .	25	47	+	10			

Пример. $x = 4$, $y = 1{,}5$. $\tilde{B}$ (4; 1,5) $= 0{,}10158753$; точное значение B (4; 1,5), $= 0{,}1015873$.
Время вычисления примера — 2,5 мин.

VI.2.1.5. НЕПОЛНАЯ ГАММА-ФУНКЦИЯ

Неполная гамма-функция γ (a, x) определяется как [11]

$$\gamma(a,\ x) = \int_0^x e^{-t} \cdot t^{a-1}\, dt,\ x \geqslant 0,\ a > 0.$$

Для вычисления используется представление γ (a, x) в виде ряда

$$\tilde{\gamma}(a,\ x) = e^{-x} \cdot \frac{x^a}{a} \left(1 + \sum_{i=0}^{N} \prod_{j=1}^{i} \frac{x}{a+j}\right),\ a \neq 0,\ -1,\ -2,\ \ldots$$

VI.2.1.5.1. Вычисление $\tilde{\gamma}(a, x)$ при фиксированном числе слагаемых в сумме $N = int(9 + 2x)$

Программа VI.2.1.5.1/21

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	P 3	31	32	0	04	64	P 4	41
01	←→	16	33	P 7	71	65	F 5	52
02	P 2	21	34	F 7	72	70	1	14
03	P ln	13	35	1	14	71	—	86
04	×	26	40	+	96	72	P 5	51
05	↑	06	41	P 7	71	73	P x<0	69
10	F 2	22	42	↑	06	74	F :	35
11	—	86	43	F 3	32	75	F 4	42
12	P e^x	33	44	+	96	80	С/П	78
13	↑	06	45	↑	06			
14	F 3	32	50	F 2	22			
15	:	36	51	←→	16			
20	P 4	41	52	:	36			
21	P 6	61	53	↑	06			
22	F 2	22	54	F 6	62			
23	2	24	55	×	26			
24	×	26	60	P 6	61			
25	9	94	61	↑	06			
30	+	96	62	F 4	42			
31	P 5	51	63	+	96			

Инструкция

x ↑ a В/О С/П

Регистры

2 x
3 a
4 γ
5;6 оперативные

Программа VI.2.1.5.1/54,52

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	x→П 1	41	12	×	12	24	F e^x	16
01	←→	14	13	П→x 1	61	25	:	13
02	B↑	0E	14	F 1/x	23	26	С/П	50
03	B↑	0E	15	+	10			
04	+	10	16	F L2	58			
05	9	09	17	08	08			
06	+	10	18	F .	25			
07	x→П 2	42	19	F .	25			
08	П→x 1	61	20	F ln	18			
09	П→x 2	62	21	П→x 1	61			
10	+	10	22	×	12			
11	:	13	23	—	11			

Инструкция

x B↑ a В/О С/П

Регистры

1 a
2 оперативный

Время вычисления — T = 6 (x + 5) с.

Относительная погрешность вычисления δ не превышает $1 \cdot 10^{-5}$.

Пример. a = 3, x = 5. $\tilde{\gamma}$ (3; 5) = 1,75070; точное значение γ (3; 5) = 1,750696.

VI.2.1.5.2. Вычисление $\tilde{\gamma}(a, x)$ до машинного нуля

Программа VI.2.1.5.2/21

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	P 3	31	31	↑	06	62	—	86
01	F 1/x	45	32	F 6	62	63	P e^x	33
02	P 4	41	33	×	26	64	↑	06
03	P 6	61	34	P 6	61	65	F 4	42
04	←→	16	35	↑	06	70	×	26
05	P 2	21	40	F 4	42	71	С/П	78
10	0	04	41	←→	16			
11	P 5	51	42	+	96			
12	F 5	52	43	P 4	41			
13	1	14	44	—	86			
14	+	96	45	P x=0	59			
15	P 5	51	50	P ←→	13			
20	↑	06	51	F 2	22			
21	F 3	32	52	P ln	13			
22	+	96	53	↑	06			
23	F 1/x	45	54	F 3	32			
24	↑	06	55	×	26			
25	F 2	22	60	↑	06			
30	×	26	61	F 2	22			

Инструкция

x ↑ a В/О С/П

Регистры

2 x
3 a
4—6 оперативные

Программа VI.2.1.5.2/54,52

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	x→П 1	41	14	П→x 2	62	28	13	13
01	←→	14	15	П→x 0	60	29	+	10
02	x→П 0	40	16	×	12	30	С/П	50
03	F ln	18	17	П→x 3	63			
04	×	12	18	1	01			
05	П→x 0	60	19	+	10			
06	—	11	20	x→П 3	43			
07	F e^x	16	21	П→x 1	61			
08	0	00	22	+	10			
09	←→	14	23	:	13			
10	0	00	24	x→П 2	42			
11	БП	51	25	+	10			
12	20	20	26	—	11			
13	F Bx	0	27	Fx=0	5E			

Инструкция

x B↑ a В/О С/П

Регистры

0 x
1 a
2;3 оперативные

Время вычисления — T = 12 (x + 5) с.

Относительная погрешность вычисления δ не превышает $1 \cdot 10^{-6}$.

Пример. a = 1, x = 3. $\tilde{\gamma}$ (1;3) = 0,950212; точное значение γ (1; 3) = 0,9502129.

VI.2.2. ФУНКЦИИ БЕССЕЛЯ И СВЯЗАННЫЕ С НИМИ ФУНКЦИИ

VI.2.2.1. ФУНКЦИИ БЕССЕЛЯ $J_k(x)$ И $I_k(x)$

Функция Бесселя $J_к(x)$ определяется как [11]

$$J_k(x) = \frac{2\left(\frac{x}{2}\right)^k}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(k+{}^1/_2)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x\cos t)\cdot\sin^{2k} t\,dt,$$

а модифицированная функция Бесселя $I_к(x)$ связана с $J_к(x)$ соотношением

$$I_k(x) = i^{-k}\cdot J_k(ix).$$

Функции $J_к(x)$ и $I_к(x)$ могут быть представлены в виде ряда

$$J_k(x);\ I_k(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(\mp 1)^i \left(\frac{x}{2}\right)^{k+2i}}{i!\,\Gamma(k+i+1)},$$

где в правой части знак минус относится к $J_k(x)$, а знак плюс относится к $I_к(x)$.

VI.2.2.1.1. Вычисления $J_k(x)$ и $I_k(x)$ при целых значениях

Для вычисления используется разложение $J_k(x)$ и $I_k(x)$ в ряд и представление $\Gamma(k+i+1) = (k+i)!$. В зависимости от предварительной установки в регистре памяти 7 значения -1 или $+1$ по программе вычисляется соответственно $J_k(x)$ или $I_k(x)$.

Программа VI.2.2.1.1/21

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Комачда	Код
00	Р 3	31	21	F 4	42	42	1	14
01	←→	16	22	↑	06	43	+	96
02	2	24	23	F 4	42	44	Р 5	51
03	:	36	24	:	36	45	↑	06
04	Р 2	21	25	F 1/x	45	50	F 3	32
05	0	04	30	Р 4	41	51	+	96
10	Р 5	51	31	Р 6	61	52	×	26
11	F 3	32	32	←→	16	53	↑	96
12	←→	16	33	1	14	54	F 2	22
13	x^y	38	34	—	86	55	F x^2	55
14	Р 4	41	35	БП	58	60	←→	16
15	←→	16	40	Р 2	21	61	:	36
20	Р x≠0	79	41	F 5	52	62	↑	06

Продолжение

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
63	F 7	72	81	F 5	52
64	×	26	82	↑	06
65	↑	06	83	F 2	22
70	F 4	42	84	—	86
71	×	26	85	9	94
72	Р 4	41	90	—	86
73	↑	06	91	Р x⩾0	49
74	F 6	62	92	F 4	42
75	+	96	93	F 6	62
80	Р 6	61	94	С/П	78

Инструкция

В рег. 7 { —1 для J; 1 для I }

x ↑ k В/О С/П

Регистры

2 x/2
3 k
4;5 оперативные
6 J или I
7 —1 или 1

Программа VI.2.2.1.1/54,52

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	x→П 2	42	17	П→x 1	61	34	F L1	5L
01	←→	14	18	F x^2	22	35	25	25
02	2	02	19	П→x 7	67	36	С/П	50
03	:	13	20	×	12			
04	x→П 1	41	21	П→x 1	61			
05	F ln	18	22	8	08			
06	×	12	23	+	10			
07	F e^x	16	24	x→П 1	41			
08	П→x 2	62	25	П→x 1	61			
09	ВП	0С	26	П→x 2	62			
10	x→П 3	43	27	+	10			
11	F .	25	28	:	13			
12	П→x 3	63	29	П→x 1	61			
13	:	13	30	:	13			
14	F L3	5—	31	×	12			
15	12	12	32	П→x 3	63			
16	x→П 3	43	33	+	10			

Инструкция

В рег. 7 { —1 для J; 1 для I }

x В↑ k В/О С/П

Регистры

1;3 оперативные
2 k
7 ∓1

Время вычисления — $T = 3(x+20)$ с.

Абсолютная погрешность вычисления Δ при $x \leqslant 11$ не превышает $1\cdot 10^{-5}$.

Примеры. $x = 3$, $k = 2$. $\tilde{J}_2(3) = 0{,}48609$, $\tilde{I}_2(3) = 2{,}24521$; точные значения $J_2(3) = 0{,}48609126$, $\tilde{I}_2(3) = 2{,}2452125$.

VI.2.2.1.2. Вычисление $J_k(x)$ и $I_k(x)$ при произвольном значении k

Для вычисления используются разложение $J_k(x)$ и $I_k(x)$ в ряд, перевод $\Gamma(z)$ в область $z > 9$ с помощью рекуррентного соотношения $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ и вычисление полученного $\Gamma(z)$ по формуле Стирлинга.

По программе вычисляется $J_k(x)$ или $I_k(x)$ в зависимости от предварительной установки в регистре памяти С соответственно — 1 или + 1.

Программа VI.2.2.1.2/54,52

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	x→П 0	40	25	П→x 0	60	50	F e^x	16
01	←→	14	26	+	10	51	F π	20
02	2	02	27	×	12	52	2	02
03	:	13	28	F L3	5—	53	×	12
04	x→П 1	41	29	24	24	54	П→x 3	63
05	F x^2	22	30	П→x 1	61	55	×	12
06	П→x 1	61	31	F ln	18	56	F √	21
07	9	09	32	П→x 0	60	57	:	13
08	x→П 3	43	33	×	12	58	×	12
09	+	10	34	П→x 0	60	59	С/П	50
10	x→П 2	42	35	9	09			
11	П→x 2	62	36	+	10			
12	:	13	37	x→П 3	43			
13	П→x 2	62	38	F ln	18			
14	П→x 0	60	39	1	01			
15	+	10	40	—	11			
16	:	13	41	П→x 3	63			
17	П→x С	6С	42	×	12			
18	×	12	43	—	11			
19	×	12	44	П→x 3	63			
20	1	01	45	1	01			
21	+	10	46	2	02			
22	F L2	58	47	×	12			
23	11	11	48	F 1/x	23			
24	П→x 3	63	49	—	11			

Инструкция

В рег. С $\begin{cases} -1 \text{ для } J \\ +1 \text{ для } I \end{cases}$

x В↑ k В/О С/П

Регистры

0 k

1 x/2

2;3 оперативные

С — 1 или 1

Время вычисления — $T = 3(x + 2 + |k|)$ с.

Абсолютная погрешность вычисления Δ при $x \leqslant 11$ не превышает $1 \cdot 10^{-5}$.

Примеры. $x = 3$, $k = 6$. $\tilde{J}_6(3) = 0{,}011394$, $\tilde{I}(3) = 0{,}021684$; точные значения $J_6(3) = 0{,}011394$, $I_6(3) = 0{,}021684$.

VI.2.2.1.3. k — полуцелые

Вычисление $J_k(x)$ при полуцелых значениях k ($k = n + 1/2 \geqslant 3/2$) производится с использованием рекуррентного соотношения [13]

$$J_m(x) = \frac{2(m-1)}{x} \cdot J_{m-1}(x) - J_{m-2}(x), \quad m = {}^3/_2,\ {}^5/_2,\ {}^7/_2,\ \ldots$$

$$\text{при } J_{-1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cdot \cos x, \quad J_{1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cdot \sin x.$$

Программа VI.2.2.1.3/21

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	Р 3	31	31	×	26	62	F 3	32
01	←→	16	32	Р 2	21	63	1	14
02	Р 2	21	33	F 4	42	64	—	86
03	F 1/x	45	34	↑	06	65	Р 3	31
04	Р 4	41	35	F 5	52	70	1	14
05	2	24	40	—	86	71	—	86
10	×	26	41	Р 4	41	72	Р x<0	69
11	Р 5	51	42	↑	06	73	3	34
12	↑	06	43	F 2	22	74	F 2	22
13	Р π	23	44	×	26	75	С/П	78
14	:	36	45	↑	06			
15	F √	65	50	Р /—/	53			
20	↑	06	51	+	96			
21	F 2	22	52	/—/	56			
22	Р cos	83	53	↑	06			
23	×	26	54	F 2	22			
24	Р ,	43	55	Р ,	43			
25	F 2	22	60	←→	16			
30	Р sin	93	61	Р 2	21			

Инструкция

x ↑ k В/О С/П

Регистры

2 J

3—5 оперативные

Программа VI.2.2.1.3/54,52

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	x→П 2	42	14	F Вх	0	28	F L2	58
01	←→	14	15	П→x 3	63	29	18	18
02	x→П 3	43	16	F sin	1С	30	С/П	50
03	F cos	1Г	17	×	12			
04	П→x 3	63	18	x→П 3	43			
05	F 1/x	23	19	П→x 4	64			
06	x→П 4	44	20	П→x 1	61			
07	В↑	0Е	21	—	11			
08	+	10	22	x→П 4	44			
09	x→П 1	41	23	×	12			
10	F π	20	24	+	10			
11	:	13	25	/—/	0L			
12	F √	21	26	П→x 3	63			
13	×	12	27	←→	14			

Инструкция

Р/Г—в Р

x В↑ k В/О С/П

Регистры

1 2/x

2—4 оперативные

Время вычисления — $T = (4k + 7)$ с.

Пример. $x = 2$, $k = 3{,}5$. $\tilde{J}_{7/2}(2) = 0{,}068517$; точное значение $J_{7/2}(2) = 0{,}068517$.

VI.2.2.2. ФУНКЦИИ БЕССЕЛЯ-МАКДОНАЛЬДА

Функции Бесселя-Макдональда $K_n(x)$ связаны с функциями Бесселя $I_{\pm y}(x)$ предельным соотношением [13]

$$K_n(x) = \frac{\pi}{2} \cdot \lim_{y \to n} \frac{I_{-y}(x) - I_y(x)}{\sin \pi y}.$$

VI.2.2.2.1. Вычисление приближенного значения $K_0(x)$ [при $x \leqslant 12$, $2 \cdot 10^{-6} \leqslant K_0(x)$]

$\widetilde{K}_0(x)$ вычисляется с использованием соотношения [7]

$$\widetilde{K}_0(x) = e^{-1,03x} \ln\left[\frac{9}{8} \cdot \frac{1+1,2x+0,68\sqrt{x}}{x}\right].$$

Программа VI.2.2.2.1/21

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	P 2	21	22	8	84	44	P ln	13
01	1	14	23	×	26	45	↑	06
02	,	46	24	↑	06	50	P /—/	53
03	0	04	25	F 2	22	51	:	36
04	3	34	30	F 1/x	45	52	С/П	78
05	×	26	31	+	96			
10	P e^x	33	32	1	14			
11	P ,	43	33	,	46			
12	←→	16	34	2	24			
13	F 1/x	45	35	+	96			
14	F √	65	40	9	94			
15	0	04	41	×	26			
20	,	46	42	8	84			
21	6	64	43	:	36			

Инструкция

x В/О С/П

Регистр

2 x

Программа VI.2.2.2.1/54,52

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	В↑	0E	11	.	0—	22	0	00
01	F 1/x	23	12	2	02	23	3	03
02	В↑	0E	13	+	10	24	×	12
03	F √	21	14	9	09	25	F e^x	16
04	0	00	15	×	12	26	:	13
05	.	0—	16	8	08	27	С/П	50
06	6	06	17	:	13			
07	8	08	18	F ln	18			
08	×	12	19	←→	14			
09	+	10	20	1	01			
10	1	01	21	.	0—			

Инструкция

x В/О С/П

Время вычисления — 10 с.

Относительная погрешность вычисления δ не превышает 2 %.

Пример. $x = 2$. $\widetilde{K}_0(2) = 0,1143886$; точное значение $K_0(2) = 0,1138939$.

VI.2.2.2.2. Вычисление приближенного значения $K_1(x)$ [при $x \leqslant 12$; $2 \cdot 10^{-6} \leqslant K_1(x)$]

$\widetilde{K}_1(x)$ вычисляется с использованием соотношения [7]:

$$\widetilde{K}_1(x) = \frac{\sqrt{1+x\ln 5}}{x} \cdot e^{-x}$$

Программа VI.2.2.2.2/21

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	↑	06	11	×	26	22	С/П	78
01	P e^x	33	12	1	14			
02	×	26	13	+	96			
03	P ,	43	14	F √	65			
04	←→	16	15	↑	06			
05	5	54	20	P /—/	53			
10	P ln	13	21	:	36			

Инструкция

x В/О С/П

Программа VI.2.2.2.2/54,52

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	F e^x	16	06	F ln	18	12	С/П	50
01	F Вх	0	07	×	12			
02	×	12	08	+	10			
03	1	01	09	F √	21			
04	F Вх	0	10	←→	14			
05	5	05	11	:	13			

Инструкция

x В/О С/П

Время вычисления — 7 с.

Относительная погрешность вычисления δ не превышает 2 %.

Пример. $x = 0,5$. $\widetilde{K}_1(0,5) = 1,6296$; точное значение $K(0,5) = 1,656441$.

VI.2.2.2.3. Вычисление приближенного значения $K_n(x)$ при $n \geqslant 1$

$\widetilde{K}_n(x)$ вычисляется при $n \geqslant 1$ с использованием приведенных выше оценок $\widetilde{K}_0(x)$ и $\widetilde{K}_1(x)$ и рекуррентного соотношения [11]

$$K_{k+1}(x) = K_{k-1}(x) + \frac{2k}{x} K_k(x).$$

Программа VI.2.2.2.3/54,52

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	x→П 3	43	24	←→	14	48	F Bx	0
01	Cx	0Г	25	1	01	49	2	02
02	x→П 4	44	26	.	0—	50	×	12
03	←→	14	27	0	00	51	П→x 2	62
04	x→П 2	42	28	3	03	52	:	13
05	B↑	0E	29	×	12	53	K П→x 4	Г4
06	F 1/x	23	30	F e^x	16	54	F .	25
07	0	00	31	:	13	55	П→x 4	64
08	.	0—	32	П→x 2	62	56	×	12
09	6	06	33	F e^x	16	57	+	10
10	8	08	34	F Bx	0	58	F L3	5—
11	F Bx	0	35	×	12	59	47	47
12	F √	21	36	F Bx	0	60	C/П	50
13	:	13	37	5	05			
14	+	10	38	F ln	18			
15	1	01	39	×	12			
16	.	0—	40	1	01			
17	2	02	41	+	10			
18	+	10	42	F √	21			
19	9	09	43	←→	14			
20	×	12	44	:	13			
21	8	08	45	БП	51			
22	:	13	46	58	58			
23	F ln	18	47	←→	14			

Инструкция

x B↑ n B/O C/П

Регистры

2 x

3;4 оперативные

Время вычисления — T = (4,5n + 15) с.

Относительная погрешность вычисления δ при x ⩽ 10, n ⩽ 10 не превышает 2 %.

Пример. x = 2. *n* = 2, $\tilde{K}_2$ (2) = 0,25338; точное значение $K_2(2)$ = 0,25376.

VI.2.2.3. ФУНКЦИИ СТРУВЕ

Функции Струве $H_к$ (x) и $L_к$ (x) определяются из соотношений [28]:

$$H_k(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^k}{\Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right)} \cdot \int_0^{\pi/2} \sin(x\cdot\cos t)\cdot\sin^{2k} t\,dt,$$

$$x > 0$$

$$L_k(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^k}{\Gamma(k+1/2)} \int_0^{\pi/2} \mathrm{sh}(x\cdot\cos t)\cdot\sin^{2k} t\,dt.$$

Вычисляются приближенные значения $\tilde{H}_к$ (x) и $\tilde{L}_к$ (x) при целых и полуцелых значениях k с помощью разложения в ряд [28]:

$$\tilde{H}_k(x);\ \tilde{L}_k(x) = \frac{x\left(\frac{x}{2}\right)^k}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(k+3/2)} \left[1 + \sum_{i=1}^{N} \frac{(\mp x^2)^i}{(2i+1)!!} \prod_{m=0}^{i-1} \frac{1}{2k+2m+1}\right].$$

В правой части уравнения знак минус относится к $\tilde{H}_к$ (x), а знак плюс относится к $\tilde{L}_k$ (x).

По программе вычисляется $\tilde{H}_k$ (x) или $\tilde{L}_к$ (x) в зависимости от предварительной установки соответственно — 1 или + 1 в регистре памяти C.

Программа VI.2.2.3/54,52

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	x→П 0	40	24	←→	14	48	П→x 0	60
01	1	01	25	1	01	49	+	10
02	+	10	26	—	11	50	:	13
03	x→П 2	42	27	:	13	51	П→x C	6C
04	2	02	28	F Bx	0	52	×	12
05	F 1/x	23	29	F L2	58	53	1	01
06	+	10	30	25	25	54	+	10
07	←→	14	31	F 1/x	23	55	F L1	5L
08	B↑	0E	32	F π	20	56	39	39
09	B↑	0E	33	F ln	18	57	×	12
10	+	10	34	×	12	58	C/П	50
11	3	03	35	F e^x	16			
12	+	10	36	F √	21			
13	x→П 1	41	37	:	13			
14	F .	25	38	1	01			
15	2	02	39	П→x 3	63			
16	:	13	40	F x^2	22			
17	x→П 3	43	41	×	12			
18	F ln	18	42	П→x 1	61			
19	П→x 2	62	43	2	02			
20	×	12	44	F 1/x	23			
21	F e^x	16	45	+	10			
22	2	02	46	:	13			
23	×	12	47	F Bx	0			

Инструкция

B рег. C {— 1 для H; + 1 для L}

x B↑ к B/O C/П

Регистры

0 к

1;2 оперативные

3 x/2

C — 1 или 1

Время вычисления — T = (12x + 2к + 35) с.

Абсолютная погрешность вычисления Δ не превышает $2\cdot10^{-5}$ при x ⩽ 10 и $2\cdot10^{-4}$ при x ⩽ 13.

Примеры. x = π, к = 1/2. $\tilde{H}_{1/2}$ (π) = 0,90031651, $\tilde{L}_{1/2}$ (π) = 4,7680542; точные значения $H_{1/2}$ (π) = 0,90031629, $L_{1/2}$ (π) = 4,7680539.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Особенности выполнения некоторых операций, использованные при составлении программ .../54 и .../52.

1. Команда Fx^y дает иногда неверный результат. Вместо нее используются операции $e^{y\ln x}$ или $10^{y\lg x}$.

2. Комаиды К x → П В↑ и К П → x В↑ аналогичны командам соответственно Кx → П0 и КП → x0, отличаясь, однако, тем, что из содержимого регистра 0 единица не вычитается.

3. При аварийном останове продолжение счета командой С/П сохраняет предыдущее содержимое регистра X, но приводит к пропуску одной команды.

4. Комаида В/О, помещенная вне подпрограммы, осуществляет безусловный переход по адресу 01.

5. Команды Кx → ПN и КП → xN (N = 0—6) в случае, если содержимое а регистра N по модулю меньше 1, уменьшает (при N = 0 —3) или увеличивает (при N = 4—6) величину /a/ на величину δ (δ < 1) в зависимости от а.

6. Зависимость результатов вычисления тригонометрических функций от установки переключателя Р/Г позволяет создавать программы вычисления двух вариантов одной и той же задачи при различном положении переключателя Р/Г.

7. Последовательное выполнение команд F cos и $F\cos^{-1}$ в зависимости от установки переключателя Р/Г обращает содержимое x регистра X в 0 при следующих исходных значениях x: при $|x| < 2{,}1\cdot10^{-4}$ (Р/Г в Р) или при $|x| < 1{,}2\cdot10^{-2}$ (Р/Г в Г).

8. Последовательное выполнение прямой и обратной функции (например, Ftg^{-1} Ftg или $FlnFe^x$) приводит в некоторых диапазонах исходных значений x к относительно малому изменению x (уменьшению или увеличению).

ЛИТЕРАТУРА

1. Микрокалькулятор «Электроника Б3-21».— Инструкция по эксплуатации.

2. Микрокалькулятор «Электроника Б3-34». — Инструкция по эксплуатации.

3. Микрокалькулятор «Электроника МК-54». — Инструкция по эксплуатации.

4. Микрокалькулятор «Электроника МК-52». — Инструкция по эксплуатации.

5. Микрокалькулятор «Электроника МК-61». — Инструкция по эксплуатации.

6. Цветков А. Н. Прикладные программы для микроЭВМ «Электроника Б3-21». — М.: Финансы и статистика, 1982.

7. Цветков А. Н., Епанечников В. А. Прикладные программы для микроЭВМ «Электроника Б3-34», «Электроника МК-56», «Электроника МК-54»— — М.: Финансы и статистика, 1984.

8. Цветков А. Н., Епанечников В. А. Прикладные программы для микрокалькулятора «Электроника Б3-34». — М., 1982 (Препринт/ ИРЭ АН СССР; № 19 (346)).

9. Цветков А. Н. Сглаживание экспериментальных зависимостей с помощью микрокалькулятора «Электроника Б3-34». — М., 1982 (Препринт/ ИРЭ АН СССР; № 20 (347)).

10. Епанечников В. А. Прикладные программы для расчета специальных функций на микрокалькуляторе «Электроника Б3-34». — М., 1982 (Препринт/ ИРЭ АН СССР; № 27 (354)).

11. Справочник по специальным функциям /Под ред. М. Абрамовица, И. Стиган.— М.: Наука, 1979.

12. Форсайт Дж., Малькольм М., Моулер К. Машинные методы математических вычислений. — М.: Мир, 1980.

13. Бронштейн И. Н., Семендяев К. А. Справочник по математике. — М.: Наука, 1986.

14. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике. — М.: Наука, 1977.

15. Демидович Б. П., Марон И. А., Основы вычислительной математики. — М.: Наука, 1970.

16. Романовский П. И. Ряды Фурье. Теория поля. Аналитические и специальные функции. Преобразование Лапласа. — М.: Наука, 1980.

17. Выгодский М. Я. Справочник по элементарной математике. — М.: Физматгиз, 1969.

18. Бусленко Н. П., Шрейдер Ю. А. Метод статистических испытаний. — М.: Физ-мат лит, 1961.

19. Крамер Г. Математические методы статистики. — М.: Мир, 1976.

20. Большев Л. Н., Смирнов Н. В. Таблицы математической статистики. — М.: Наука, 1983.

21. Цветков А. Н. Искусство программирования программируемых микрокалькуляторов //Изв. вузов МВ и ССО СССР. Сер. Радиоэлектроника. — — Киев, 1984. — Т. XXVII. — № 8.

22. Дуинн-Барковский И. В., Смирнов Н. В. Теория вероятностей и математическая статистика в технике. — М.: ГИТЛ, 1955.

23. Ван дер Варден Б. Л. Математическая статистика. — М.: Иностранная литература, 1960.

24. Гнеденко Б. В. Курс теории вероятностей. — М.: Наука, 1969.

25. Епанечников В. А. Уровень значимости и мощность двустороннего критерия Колмогорова при малых объемах выборок // Теория вероятностей и ее применения. — М. 1968. — Т.13. — Вып. 4.

26. Загнидзе И. Г. Планирование эксперимента для исследования многокомпонентных систем. — М.: Наука, 1976.

27. Бейли Н. Статистические методы в биологии. — М.: Мир, 1963.

28. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. — М.: Наука, 1971.

29. Lewin L. Dilogarithms and associated functions. — London: Macdonald, 1958.

30. Кендалл М., Стьюарт А. Статистические выводы и связи. — М.: Наука, 1973.

31. Кнут Д. Искусство программирования для ЭВМ/Т.II, Получисленные алгоритмы.— М.: Мир, 1977.

32. Аптон Г. Анализ таблиц сопряженности. — М.: Финансы и статистика, 1982.

33. Хастингс Н., Пикок Дж. Справочник по статистическим распределениям. — М.: Статистика, 1980.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение 3

Глава I. АЛГЕБРА И ТЕОРИЯ ЧИСЕЛ 5

I. 1. Перевод чисел из одной системы счисления в другую . . . 5
I. 1.1. Перевод целых чисел 5
I. 1.2. Перевод дробных чисел 7
I. 1.3. Перевод действительных чисел 10
I. 2. Непрерывные (цепные) дроби 12
I. 2.1. Преобразование действительных чисел в цепную дробь 12
I. 2.2. Преобразование цепной дроби в действительное число 13
I.3. Деление чисел с произвольной точностью 15
I. 3.1. Представление результата в виде числа с плавающей запятой 15
I. 3.2. Естественное представление результата 16
I.4. Решение алгебраических уравнений 17
I. 4.1. Решение квадратного уравнения 17
I.4.2. Решение кубического уравнения 18
I. 4.3. Решение системы двух линейных уравнений 20
I. 4.4. Решение системы трех линейных уравнений 22
I. 4.5. Решение системы четырех линейных уравнений . . . 22
I. 4.6. Решение уравнения $f(x) = 0$ 24
I. 4.7. Решение системы трансцендентных уравнений 29
I.5. Элементы линейной алгебры 31
I.5.1. Вычисление детерминантов 31
I. 5.2. Обращение матриц 35
I.5.3. Умножение матриц 39
I. 5.4. Векторное произведение двух векторов 43
I.6. Суммы и произведения 44
I.6.1. Сумма степеней чисел натурального ряда 44
I. 6.2. Факториал 44
I.6.3. Сумма факториалов 45
I. 6.4. Произведение факториалов 45
I. 6.5. Функция n !! 46
I. 6.6. Размещения 46
I. 6.7. Сочетания 47
I. 6.8. Мультиномиальные коэффициенты 49
I.7. Функции комплексной переменной 50
I.7.1. Арифметические действия, возведение в степень 50
I.7.2. Тригонометрические и гиперболические функции, экспонента, логарифм 53
I. 7.3. Обратные тригонометрические и гиперболические функции 57

Глава II. ТРИГОНОМЕТРИЯ И АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ . 59

II.1. Преобразование координат 59
II. 1.1. Перенос и поворот декартовых осей координат . . . 59
II.1.2. Переход от декартовых координат к полярным 61
II. 1.3. Переход от полярных координат к декартовым . . . 63
II.2. Решение треугольников 64
II.2.1. По трем сторонам 64
II.2.2. По двум сторонам и углу между ними 65
II.2.3. По двум сторонам и углу против одной из них . . 66
II.2.4. По двум углам и стороне между ними 68
II.2.5. По двум углам и стороне против одного из них 68
II.3. Вычисление расстояний 69
II. 3.1. От точки до плоскости 69
II 3.2. Расстояние между параллельными плоскостями 71

II.4. Спектральный анализ 72
II.4.1. Определение первых четырех гармоник функции f (t) . 73
II.4.2. Определение m-й гармоники 74
II.4.3. Синтез функции в одной точке 75
II.4.4. Синтез функции f (t) по шести гармоникам 77
II.5. Гиперболические и обратные гиперболические функции 78
II.5.1. Гиперболические функции 78
II.5.2. Обратные гиперболические функции 78

Глава III. ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ 80

III. 1. Интерполяция 80
III.1.1. Интерполяция функцией одной переменной 80
III.1.2. Интерполяция плоскостью 89
III.2. Нахождение экстремума функции 90
III.2.1. Функция одной переменной 90
III.2.2. Функция двух переменных 92
III.3. Интегрирование 94
III.3.1. Интегрирование функции, заданной аналитически 94
III.3.2. Интегрирование функции, заданной таблично 99
III.4. Решение дифференциальных уравнений 101
III.4.1. Уравнение первого порядка $y' = f(x, y)$ 102
III.4.2. Система уравнений первого порядка 104
III.4.3. Уравнения высших порядков 112

Глава IV. СГЛАЖИВАНИЕ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ЗАВИСИМОСТЕЙ 120

IV. 1. Сглаживание функцией с одним неизвестным параметром 121
IV. 1.1. Прямая с заданным наклоном (угловым коэффициентом k) 121
IV. 1.2. Функция с неизвестным множителем 122
IV.1.3. Функция с неизвестным слагаемым 124
IV.1.4. Произвольная непрерывная функция 126
IV.2. Сглаживание функцией с двумя неизвестными параметрами . . 135
IV.2.1. Прямая 135
IV. 2.2. Функция, линейно зависящая от параметров 136
IV. 2.3. Степенная функция 139
IV. 2.4. Экспоненциальная функция 143
IV. 2.5. Произвольная непрерывная функция 144
IV. 3. Сглаживание функцией с тремя неизвестными параметрами 151
IV. 3.1. Парабола 151
IV. 3.2. Функция, линейно зависящая от параметров 153
IV. 3.3. Плоскость 156
IV. 3.4. Произвольная непрерывная функция 157
IV. 4. Вычисление значений многочлена 160
IV. 4.1. Действительное x 161
IV. 4.2. Комплексное x 163

Глава V. СТАТИСТИКА 169

V.1. Моменты выборочного распределения 169
V.1.1. Среднее и дисперсия 169
V.1.2. Четыре первых центральных момента, асимметрия и эксцесс 170
V.1.3. Моменты, асимметрия и эксцесс выборки, сгруппированной в классы 173
V.2. Гистограмма 176
V.2.1. Гистограмма (k_{max} = 11 или 12 интервалов) 176
V.2.2. Гистограмма (k_{max} = 22 интервала) 177

V.3. Мера отклонения χ^2 . . . 179
V.3.1. С вводом n. . . . 179
V. 3.2. Без ввода n . . . 180
V.4. Проверка статистических гипотез . . . 181
V.4.1. Проверка гипотезы о равенстве средних . . . 181
V.4.2. Проверка гипотезы о величине разности между средними двух выборок . . . 182
V.4.3. Проверка гипотезы о равенстве среднего заданному числу 184
V. 4.4. Проверка гипотезы о равенстве вероятностей двух редких событий . . . 185
V.4.5. Проверка гипотезы о равенстве вероятности заданному числу . . . 186
V.4.6. Проверка гипотезы об однородности двух выборок . . 187
V.4.7. Проверка гипотезы нормальности по величинам асимметрии и эксцесса . . . 190
V.4.8. Проверка гипотезы нормальности по критерию χ^2 . . 190
V. 4.9. Критерий знаков . . . 193
V.4.10. Критерий Вилкоксона . . . 194
V.4.11. Критерий Аббе . . . 200
V.4.12. Критерий серий . . . 202
V.4.13. Критерий Колмогорова . . . 203
V.4.14. Критерий Смирнова . . . 206
V.4.15. Проверка независимости двух признаков (анализ таблицы 2×2) . . . 207
V.4.16. Вычисление доверительного интервала для неизвестной вероятности по частоте . . . 216
V.5. Распределение вероятностей . . . 218
V.5.1. Биномиальный закон . . . 218
V.5.2. Распределение Пуассона . . . 221
V.5.3. Нормальное распределение . . . 223
V.5.4. χ^2-распределение . . . 233
V.5.5. Распределение Стьюдента . . . 237
V.5.6. r-распределение . . . 240
V.5.7. F-распределение . . . 242
V.6. Генерация псевдослучайных чисел . . . 246
V.6.1. Равномерное распределение . . . 246
V.6.2. Нормальное распределение . . . 249
V.6.3. Распределение Пуассона . . . 251
V.6.4. Распределение Рэлея. . . . 252
V.7. Статистический анализ . . . 254
V. 7.1. Корреляционный и регрессионный анализ . . . 254
V.7.2. Дисперсионный анализ . . . 261
V.7.3. Дискриминационный анализ . . . 263
V.7.4. Метод конкордации . . . 266

Глава VI. СПЕЦИАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ . . . 269

VI.1. Специальные функции общего назначения . . . 269

VI. 1.1 Интегральные функции . . . 269
VI.1.2. Ортогональные полиномы. . . . 286
VI. 1.3. Функции Эйри . . . 294
VI. 1.4. Гипергеометрические функции . . . 295
VI.2. Специальные функции для статистических расчетов . . . 298
VI.2.1. Гамма-функция и родственные ей функции . . . 298
VI. 2.2. Функции Бесселя и связанные с ними функции . . . 308

Приложение . . . 316

Литература . . . 316