И. АБДУЛЛАЕВ

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ С МИКРОКАЛЬКУЛЯТОРОМ

Книга для учащихся

МОСКВА
«ПРОСВЕЩЕНИЕ» 1990

ББК 22.19
А13

Рецензенты:
кандидат педагогических наук *Е. А. Лодатко*;
учитель математики школы № 5 г. Люберцы *В. В. Гузеев*

Абдуллаев И.
А13 Математические задачи с микрокалькулятором: Кн. для учащихся.— М.: Просвещение, 1990.— 80 с.: ил.— ISBN 5-09-002849-4

Книга знакомит юного читателя с организацией вычислений с помощью микрокалькулятора. В ней автор в занимательной форме предлагает материал о магических квадратах, последовательностях, сложных процентах, системах счисления.

А $\frac{4306020000-533}{103(03)-90}$ 218—90 **ББК 22.19**

ISBN 5-09-002849-4

ВВЕДЕНИЕ

Сегодня микрокалькуляторы прочно вошли в нашу жизнь и сам факт их существования уже мало кого удивляет. Они стали привычной принадлежностью для ученых, инженеров, экономистов, рабочих многих профессий и даже школьников и студентов — словом, для всех, кому приходится иметь дело со всевозможными расчетами. Микрокалькуляторы пришли на смену счетной линейке, таблицам логарифмов, арифмометру и счетам — традиционным средствам вычислений — и предоставили в наше распоряжение такие возможности вычислений, о которых раньше приходилось только мечтать.

В настоящее время использование вычислительных средств в различных сферах деятельности человека идет по трем основным направлениям. Первое — хорошо известное и широко распространенное — связано с непосредственными вычислениями, часто очень громоздкими и выполняемыми, как правило, с помощью компьютеров по заранее разработанным алгоритмам. Второе — хорошо известное как математикам, так и специалистам по прикладным исследованиям — касается получения предварительного численного результата (как правило, с применением вычислительных средств), иногда носящего оценочный характер и дающего возможность угадать правильный ответ и впоследствии его строго обосновать. Третье направление — известное в основном только специалистам-математикам — состоит в использовании компьютеров (и других вычислительных средств) при проведении строгих математических рассуждений, например при доказательстве различных неравенств.

Разумеется, серьезные достижения в этих трех направлениях можно получить, используя большие универсальные ЭВМ или мощные персональные компьютеры. А вот что касается микрокалькуляторов, то подавляющее большинство пользователей убеждены, что они ни на что, кроме вычислений типа $2+3$ или $5\cdot8$, «неспособны», т. е. их применение ограничивается только первым из отмеченных направлений. Так ли это? А нельзя ли попробовать применить наш помощник — микрокалькулятор для получения предварительных результатов-оценок или при доказательстве каких-либо утверждений? Ведь каждый из вас знает, сколь богата различными фактами школьная математика, и если микрокалькулятор нам в чем-то поможет, то это и будет ответом на вопрос.

О микрокалькуляторах уже написано довольно много книг и журнальных статей. Мы знаем, что «умеет микрокалькулятор», что «можно делать с микрокалькулятором в руках», знаем, как «играть с микрокалькулятором» и т. д.

Но давайте посмотрим на микрокалькулятор иначе. Он, как известно, предназначен для выполнения различных вычислений: от довольно простых до самых сложных. Конечно, выполняя вычисления, каждый старается быть внимательным и действовать безошибочно, чтобы быстрее достичь цели — получить необходимый результат. А что, если не торопиться нажимать клавиши и немного порассуждать? Ведь вычисления традиционно связаны с рассуждениями и, наверное, могут служить еще не одно тысячелетие пищей для фантазии многим любителям математики и серьезным исследователям. И наш микрокалькулятор поможет нам в этом деле: даст возможность выполнять сложные вычисления и решать шуточные задачи, выдвигать гипотезы и подмечать закономерности — словом, совершать небольшие математические экскурсы. Иначе говоря, микрокалькулятор даст нам пищу для размышлений.

Итак, берем в руки микрокалькулятор — и в путь. Какой микрокалькулятор для этого подойдет? Конечно же, тот, который у вас есть: арифметический, инженерный или программируемый. Автор пользовался в расчетах тремя микрокалькуляторами наиболее распространенных марок: «Электроника МК-60», «Электроника БЗ-36» и «Электроника МК-71», но это не означает, что предлагаемые экскурсы нельзя совершить без этих микрокалькуляторов. Каждый, кто имеет свой микрокалькулятор, знает его достоинства и возможности и, конечно же, сможет организовать все необходимые вычисления с учетом особенностей своего микрокалькулятора.

Автор надеется, что предлагаемые экскурсы с микрокалькулятором будут интересны читателю и он не остановится только на чтении, а сможет достичь успеха в самостоятельных упражнениях, завершающих эти экскурсы.

Свои замечания, пожелания и предложения читатель может направлять по адресу: 129846, Москва, 3-й проезд Марьиной рощи, д. 41, редакция математики издательства «Просвещение».

ВАШ ПОМОЩНИК — МИКРОКАЛЬКУЛЯТОР

Итак, уважаемый читатель, у вас в руках эта книга и микрокалькулятор. Но прежде чем совершить несколько математических экскурсов с помощью вашего микрокалькулятора, давайте с ним познакомимся.

Впервые электронный калькулятор появился в Англии в 1962 г. Его схема была выполнена на печатных платах и содержала несколько тысяч одних только транзисторов. В конструкции его индикатора применялись электронные лампы наподобие тех, которые используются в автоматах по продаже билетов на пригородные поезда. Размеры такого микрокалькулятора были, как у пишущей машинки, а выполнял он лишь арифметические операции с многоразрядными числами. На рисунке 1 показан отечественный калькулятор «Электроника» этого поколения.

С начала 70-х гг. в конструкциях калькуляторов стали применяться БИСы (большие интегральные схемы) и компактные индикаторы на катодно-люминесцентных трубках и светодиодах. Типичными представителями семейства микрокалькуляторов этого периода могут служить арифметический микрокалькулятор «Электроника БЗ-26» (рис. 2) и инженерный микрокалькулятор «Электроника БЗ-36» (рис. 3).

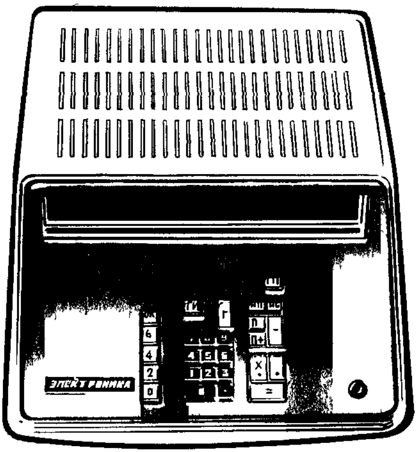


Рис. 1

Рис 2

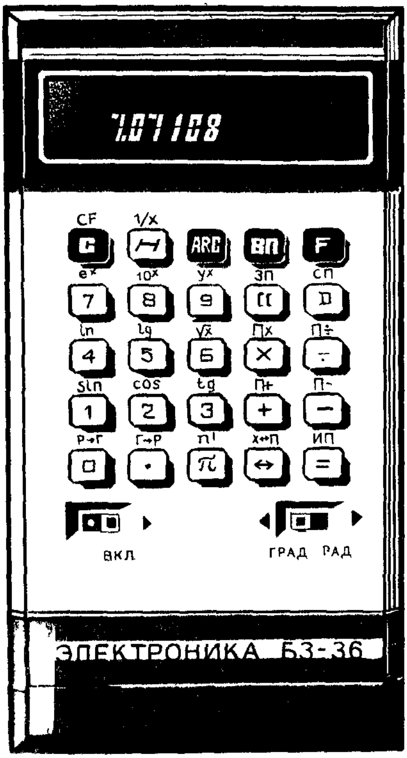


Рис 3

В конце 70 – начале 80-х гг. в конструкциях микрокалькуляторов начали применяться большие интегральные схемы с большой степенью интеграции элементов, а в конструкциях индикаторов — жидкие кристаллы. Это позволило существенно уменьшить размеры микрокалькуляторов и потребление ими электроэнергии. Вычислительные возможности их значительно возросли. На рисунках 4 и 5 показаны такие микрокалькуляторы: «Электроника МК-60» и «Электроника МК-71». У них впервые в качестве источника питания применена батарея солнечных элементов.

Большая интегральная схема микрокалькулятора «Электроника МК-71», выпуск которого начат в 1985 г., содержит около 80 тыс. транзисторов, в то время как большая интегральная схема микрокалькулятора «Электроника БЗ-36» содержит только 18 тыс. транзисторов.

Естественно, микрокалькулятор «Электроника МК-71» «умеет» больше, чем «Электроника БЗ-36», хотя и тот и другой относятся к классу инженерных микрокалькуляторов. Например, «Электроника МК-71» выполняет операции с обыкновенными дробями, устанавливает старшинство операций в процессе вы-

Рис 4

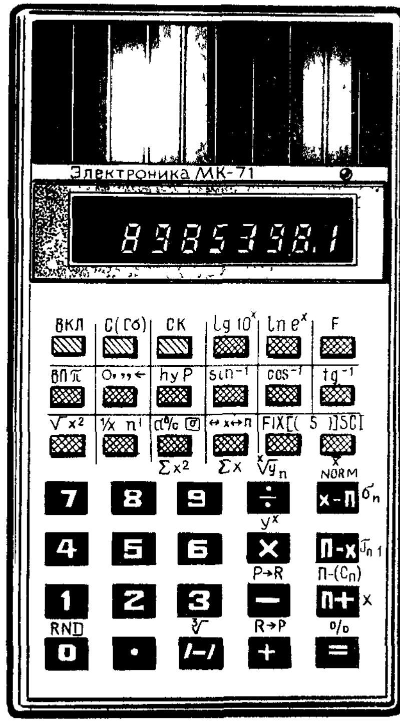


Рис 5

числений и выполняет вычисления с пятиуровневыми вложенными скобками, округляет результаты в процессе вычислений и т. п., чего не может сделать «Электроника БЗ-36».

Вообще, за 25 лет существования микрокалькуляторы многому научились и в соответствии со своими возможностями разделились на три типа: арифметические, инженерные и программируемые. Каждый тип объединяет микрокалькуляторы различных марок, которые могут удовлетворить даже самого требовательного пользователя.

Вместе с тем существование достаточно большого числа различных марок микрокалькуляторов не помеха в применении их для одних и тех же расчетов. Смена марки микрокалькулятора, как вы знаете, не требует овладения основными типами выполняемых на нем вычислений «с нуля». Микрокалькуляторы всех марок имеют в своей основе ряд общих идей и конструктивных особенностей, что позволяет при смене марки микрокалькулятора применять те же вычислительные приемы, что применялись ранее, на другой марке микрокалькулятора.

Поэтому мы специально не акцентируем внимание на отдельных марках микрокалькуляторов и не обсуждаем детали организации вычислений для каждой из них. Напомним только, что вычисления в данной книге проводились на таких микрокалькуляторах: арифметический — «Электроника МК-60», инженерный с восьмиразрядным индикатором — «Электроника БЗ-36» и инженерный с десятиразрядным индикатором — «Электроника МК-71». И поэтому не удивляйтесь, если встретите примеры вычислений с десятиразрядными числами: значит, в этом случае был применен микрокалькулятор «Электроника МК-71». Но если у вас его нет, не огорчайтесь и пользуйтесь имеющимся: он для предлагаемых вычислений вполне пригоден, даже если относится к арифметическому типу.

Чтобы в дальнейшем быстро и эффективно выполнять необходимые вычисления, остановимся кратко на основных приемах вычислений, характерных для микрокалькуляторов большинства марок.

Арифметические операции (сложение, вычитание, умножение и деление) выполняются практически на всех микрокалькуляторах подобно тому, как делаются записи в тетради, например $a+b=$, т. е. вводится в микрокалькулятор первый компонент операции (число a) и нажимается клавиша необходимой арифметической операции, затем вводится второй операнд операции (число b) и нажимается клавиша итога $\boxed{=}$.

Полученный таким образом результат может принимать участие в дальнейших вычислениях в качестве операнда, т. е. операции с помощью микрокалькулятора могут выполняться последовательно, как показано ниже:

$$1 \boxed{+} 2 \boxed{=} \boxed{+} 5 \boxed{=} \boxed{-} 3 \boxed{=}.$$

Заметим, что клавиши арифметических операций микрокалькуляторов действуют так: при их нажатии выполняется не только операция, на них обозначенная, но и выдается результат предыдущей операции, если такая была задана. Поэтому можно отказаться от использования в промежуточных вычислениях клавиши итога $\boxed{=}$, что сократит время расчетов. С учетом сказанного схема примера, приведенного выше, примет вид:

$$1 \boxed{+} 2 \boxed{+} 5 \boxed{-} 3 \boxed{=}.$$

В таких случаях говорят, что выполняется цепочка арифметических операций. Сами же операции, которые при вычислениях с микрокалькулятором могут быть «выстроены» в цепочку, обычно называют цепочечными. Ниже в таблице 1 приведены возможные элементарные цепочечные операции, которые могут быть использованы в организации более сложных вычислений, подобных выполненым выше.

Таблица 1

Выражение	Возможные программы вычислений	Выражение	Возможные программы вычислений
$a+b$	$a\boxed{+}b\boxed{=}$ $a\boxed{+}b\boxed{+}$ $a\boxed{+}b\boxed{-}$ $a\boxed{+}b\boxed{\times}$ $a\boxed{+}b\boxed{\div}$	$a-b$	$a\boxed{-}b\boxed{=}$ $a\boxed{-}b\boxed{+}$ $a\boxed{-}b\boxed{-}$ $a\boxed{-}b\boxed{\times}$ $a\boxed{-}b\boxed{\div}$
$a\times b$	$a\boxed{\times}b\boxed{=}$ $a\boxed{\times}b\boxed{+}$ $a\boxed{\times}b\boxed{-}$ $a\boxed{\times}b\boxed{\times}$ $a\boxed{\times}b\boxed{\div}$	$a\div b$	$a\boxed{\div}b\boxed{=}$ $a\boxed{\div}b\boxed{+}$ $a\boxed{\div}b\boxed{-}$ $a\boxed{\div}b\boxed{\times}$ $b\boxed{\div}b\boxed{\div}$

Микрокалькуляторы (за исключением микрокалькулятора «Электроника МК-71») выполняют операции с целыми числами или числами, представленными в виде десятичных дробей. А как быть, если необходимо выполнить вычисления с обыкновенными дробями?

Тут на помощь придут цепочечные операции. Известно, что всякое число, представленное в виде обыкновенной дроби $\frac{a}{b}$, может быть переписано так: $a:b$. Если число задано смешанной дробью $A\frac{b}{c}$, то представление его может быть таким: $b:c+A$. Основываясь на этих соображениях, можно вводить в микрокалькулятор десятичные приближения обыкновенных (и смешанных) дробей. Как это делается, показано в таблице 2 на примере чисел $\frac{18}{23}$, $-\frac{3}{7}$, $14\frac{15}{32}$.

Таблица 2

Вводимая дробь	Последовательность нажимаемых клавиш
$\frac{18}{23}$	$\boxed{1}\ \boxed{8}\ \boxed{\div}\ \boxed{2}\ \boxed{3}\ \boxed{=}$
$-\frac{3}{7}$	$\boxed{3}\ \boxed{\div}\ \boxed{7}\ \boxed{/-/}\ \boxed{=}$
$14\frac{15}{32}$	$\boxed{1}\ \boxed{5}\ \boxed{\div}\ \boxed{3}\ \boxed{2}\ \boxed{+}\ \boxed{1}\ \boxed{4}\ \boxed{=}$

Еще одним важным видом вычислений, характерных для микрокалькуляторов, являются константные вычисления. Они основываются на том, что при нажатии клавиши любой арифметической операции ($\boxed{+}$, $\boxed{-}$, $\boxed{\times}$, $\boxed{\div}$) микрокалькулятор фиксирует ее вместе с последним введенным числом. И если затем последует нажатие клавиши итога $\boxed{=}$ (или ее заменяющей, например, одной из клавиш арифметических операций), то будет выполнена зафиксированная операция с зафиксированным числом и предыдущим результатом. Посмотрите, как можно, основываясь на константных операциях, сократить вычисления. В качестве примера рассмотрим нахождение значения 2^{10} сначала с использованием цепочечных, а затем константных операций. Программы этих вычислений будут такими:

$$2\boxed{\times}2\boxed{\times}2\boxed{\times}2\boxed{\times}2\boxed{\times}2\boxed{\times}2\boxed{\times}2\boxed{\times}2\boxed{\times}2\boxed{=}$$

и соответственно

$$2\boxed{\times}\boxed{=}\boxed{=}\boxed{=}\boxed{=}\boxed{=}\boxed{=}\boxed{=}\boxed{=}\boxed{=}.$$

Как в первом, так и во втором случаях результат тот же — 1024, но при константных вычислениях нам не пришлось десять раз вводить операнд (число 2) и девять раз нажимать клавишу $\boxed{\times}$.

Аналогично в качестве константных могут выступать и другие арифметические операции: сложение, вычитание, деление, что позволяет с помощью клавиш сложения $\boxed{+}$ и вычитания $\boxed{-}$ находить значения выражений вида $\pm n \cdot a$, а с помощью клавиши деления — значения выражений вида $\frac{1}{a^n}$.

Какие изменения числовых данных на индикаторе микрокалькулятора при этом происходят, можно увидеть из таблицы 3, в которой показано также содержимое операционного регистра, который предназначается у микрокалькуляторов для хранения числа, ставшего константой в каких-либо вычислениях. Проследить за содержимым операционного регистра можно с помощью клавиши обмена $\boxed{\leftrightarrow}$. При ее нажатии в регистр индикации (и на индикатор) вызывается число, хранящееся в операционном регистре, а на его место помещается число, находящееся до нажатия клавиши $\boxed{\leftrightarrow}$ на индикаторе и в регистре индикации.

Таблица 3

Программа		Регистр индикации и индикатор	Операционный регистр
Вариант I	Вариант II		
a	a	a	0
$\boxed{+}$	n раз: $\boxed{+}$	a	a
$n-1$ раз: $\boxed{=}$	$\boxed{+}$	$2a$	a
$\boxed{=}$	$\boxed{+}$	$3a$	a
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\boxed{=}$	$\boxed{+}$	na	a
b	b	b	0
$\boxed{-}$	$n+2$ раз: $\boxed{-}$	b	b
$n+1$ раз: $\boxed{=}$	$\boxed{-}$	0	b
$\boxed{=}$	$\boxed{-}$	$-b$	b
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\boxed{=}$	$\boxed{-}$	$-n \cdot b$	b
c	c	c	0
$\boxed{\times}$	n раз: $\boxed{\times}$	c	c
$n-1$ раз: $\boxed{=}$	$\boxed{\times}$	c^2	c
$\boxed{=}$	$\boxed{\times}$	c^3	c
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\boxed{=}$	$\boxed{\times}$	c^n	c
d	d	d	0
$\boxed{\div}$	$n+2$ раз: $\boxed{\div}$	d	d
$n+1$ раз: $\boxed{=}$	$\boxed{\div}$	1	d
$\boxed{=}$	$\boxed{\div}$	$\frac{1}{d}$	d
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\boxed{=}$	$\boxed{\div}$	$\frac{1}{a^n}$	d

Попробуйте проследить за содержимым этих двух регистров, повторно выполнив нахождение значения 2^{10} с такой «модернизацией». После ввода чисел или нажатия клавиши арифметической операции нажимайте клавишу обмена (если она есть у вашего микрокалькулятора). Начальный фрагмент «модернизированной» программы приведен ниже:

$$2 \boxed{\leftrightarrow} \boxed{\leftrightarrow} \boxed{\times} \boxed{\leftrightarrow} \boxed{\leftrightarrow} \boxed{=} \boxed{\leftrightarrow} \boxed{\leftrightarrow} \boxed{=} \ldots$$

Заметим, что если вы пользуетесь микрокалькулятором «Электроника МК-71», то установление константной операции производится двукратным нажатием необходимой клавиши: $\boxed{+}$, $\boxed{-}$, $\boxed{\times}$ или $\boxed{\div}$.

Кроме арифметических операций, константными могут становиться и некоторые другие, например операция возведения в степень с помощью клавиши $\boxed{x^y}$ или извлечения корня с помощью клавиши $\boxed{\sqrt[x]{y}}$. Для микрокалькулятора типа «Электроника Б3-36» константой можно сделать показатель степени y следующим образом: $1 \boxed{F} \boxed{x^y} \, y \boxed{=}$. После этого, вводя в микрокалькулятор последовательно значения x и нажимая клавишу $\boxed{=}$, будем получать соответствующие значения степени числа x.

Попробуйте, пользуясь этой программой, последовательно найти значения 2^3, 3^3, 4^3, 5^3, 6^3, 7^3, 8^3, 9^3, 10^3. Программа вычислений в этом случае будет такой:

$$1 \boxed{F} \boxed{x^y} 3 \boxed{=} 2 \boxed{=} 3 \boxed{=} 4 \boxed{=} 5 \boxed{=} 6 \boxed{=} 7 \boxed{=} 8 \boxed{=} 9 \boxed{=} 10 \boxed{=}.$$

Чтобы установить такого типа константную операцию для микрокалькулятора «Электроника МК-71», необходимо дважды нажать клавишу $\boxed{x^y}$ вместе с клавишей $\boxed{F}$. После этого константой станет показатель степени, а основания могут задаваться произвольно, лишь бы ни одно из них не было отрицательным или нулевым.

В тексте для сокращения записей принято:

— цифровые клавиши не обозначать, т. е. вместо записей типа $\boxed{1} \boxed{\cdot} \boxed{2}$ употреблять общепринятые записи типа 1, 2 или для обозначения числа-операнда в общем виде использовать буквы, например, a, x и т. п.;

— символ $\boxed{F}$ совмещения функций клавиш в инженерных микрокалькуляторах в записях опускать, например, вместо записи $\boxed{F} \boxed{1/x}$ применять запись $\boxed{1/x}$ и т. п.;

— группу повторяющихся клавишных операций выделять указанием типа «повторять», «повторять, пока...» и т. п.

Ряд полезных сведений, касающихся особенностей вычислений на микрокалькуляторах большинства отечественных моделей, приведены в разделе «Справочные материалы».

Мы кратко остановились на некоторых важных для нас в дальнейшем вычислениях с помощью микрокалькулятора. На их основе будут организованы все необходимые вычисления. Для тех же, кому понадобится помощь в процессе вычислений, в конце книги имеются справочные материалы в виде таблиц, обращение к которым поможет устранить затруднения.

ЧИСЛА-СЛОВА И МИКРОКАЛЬКУЛЯТОР

В изображении некоторых букв латинского алфавита и цифр на индикаторе микрокалькулятора (рис. 6) есть сходство. Например, буква *O* по начертанию похожа на цифру 0, а буква *I* — на цифру 1 и т. п. Если таким образом изображенные цифры перевернуть «вверх ногами», то практически для каждой цифры можно указать букву, похожую по начертанию (рис. 7). Это сходство послужило основой для появления игры в числа-слова. В игре в числа-слова обычно дается некоторое числовое выражение, значение которого, перевернув микрокалькулятор, можно прочесть как слово.

Например, если вычислить выражение $170 \cdot \sqrt{123^2 - 12^2 \cdot 91}$, то получим на индикаторе микрокалькулятора число 7734, «перевертыш» которого можно прочесть как HELL, что в переводе с немецкого означает светлый, ясный.

Рис. 6

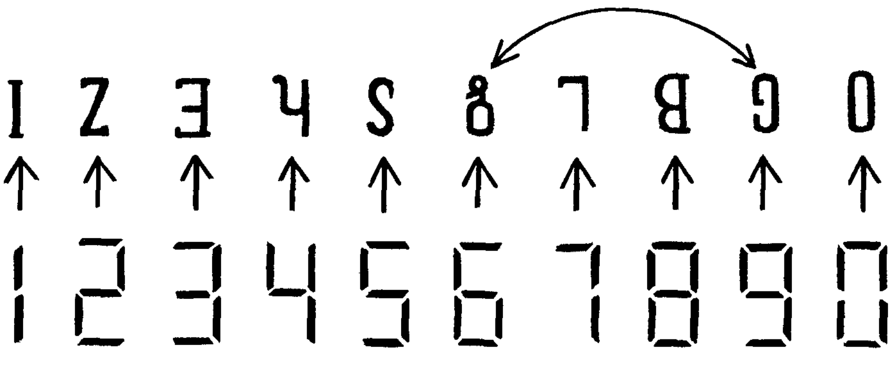


Рис. 7

Попробуйте самостоятельно сделать переводы некоторых русских слов на английский, французский и немецкий языки, находя значения данных выражений и соответствующие им слова-«перевертыши».

1. *Русско-английский словарь*

1. Пчела $\longrightarrow \sqrt{152^2+302^2-8^2} \longrightarrow$?
2. Колокол $\longrightarrow 606{,}385\cdot 12{,}5+(12{,}5^2\cdot 1{,}0124):0{,}05-262 \longrightarrow$?
3. Большой $\longrightarrow 31^2-19^2+\sqrt{259{,}2\cdot 1{,}25} \longrightarrow$?
4. Капелька $\longrightarrow \left(\frac{12\,345}{\sqrt{6{,}25}}+2\right)\cdot 1{,}5+26^2-2^3 \longrightarrow$?
5. Кипятить $\longrightarrow (85{,}2\cdot 45{,}5+1:2{,}5)\cdot 1{,}85-1289:20 \longrightarrow$?
6. Яйцо $\longrightarrow (458\cdot 0{,}85+0{,}7)\cdot 1{,}5+31{,}2\cdot 2{,}5 \longrightarrow$?
7. Кабриолет $\longrightarrow 0{,}875\cdot 400+0{,}35\cdot 760 \longrightarrow$?
8. Хихикать $\longrightarrow (222\cdot 355+1190)\cdot 4{,}5+25{,}6\cdot 649{,}0625 \longrightarrow$?
9. Глобус $\longrightarrow 16^3\cdot 3^2+5\cdot 3^5-3 \longrightarrow$?
10. Рот $\longrightarrow \frac{22}{0{,}16}+\frac{368}{0{,}64}+\frac{130{,}9}{1{,}4} \longrightarrow$?
11. Простак $\longrightarrow (544\cdot 6{,}25+56{,}5\cdot 32)\cdot 6{,}75-4\cdot 37 \longrightarrow$?
12. Крен $\longrightarrow (8{,}125\cdot 4{,}4+0{,}25)^2+298{,}4\cdot 16{,}25+116\cdot 10{,}25 \longrightarrow$?
13. Холм $\longrightarrow (50{,}25^2-1:16)\cdot 2{,}8+\frac{724{,}5}{\sqrt{1{,}265625}} \longrightarrow$?
14. Высокий $\longrightarrow \left(\frac{1}{0{,}008}+\frac{75}{0{,}03125}\right)\cdot 1{,}8+69 \longrightarrow$?
15. Мотыга $\longrightarrow (7^3-18^2):0{,}0625 \longrightarrow$?
16. Полка $\longrightarrow \frac{1{,}065}{0{,}005}+\frac{1{,}35}{0{,}0025}+\frac{63{,}75}{1{,}25}+3 \longrightarrow$?
17. Нора $\longrightarrow 2^{12}-2^8-2^7-2^3 \longrightarrow$?
18. Остров $\longrightarrow 35^2+36^2+37^2-139 \longrightarrow$?
19. Подставка $\longrightarrow (\sqrt{179{,}56}-0{,}4)\cdot\left(\frac{1}{0{,}142857}-0{,}000007\right)^2 \longrightarrow$?
20. Потеря $\longrightarrow 38^2+39^2+40^2+41^2-739 \longrightarrow$?
21. Полено $\longrightarrow 2{,}65\cdot 1{,}14+5{,}16\cdot 0{,}45-3{,}343+5\cdot 11^2 \longrightarrow$?
22. Торговать $\longrightarrow (5\cdot 1{,}24-1{,}2)(8\cdot 1{,}75-7)(11\cdot 1{,}65-5\cdot 1{,}03)\times$
$\times(14\cdot 1{,}5^2-14{,}5) \longrightarrow$?
23. Осада $\longrightarrow 5\cdot 7\cdot 9+\frac{6^2}{0{,}1}\left(\frac{1}{0{,}0032}-\left(15^2-\frac{25}{2}\right)\right) \longrightarrow$?
24. Раковина $\longrightarrow (13+100)\cdot 13\cdot\sqrt{6\cdot 1{,}25-5\cdot 1{,}175}:0{,}1 \longrightarrow$?
25. Пятно $\longrightarrow \frac{38\cdot\sqrt{38^2-3\cdot 5^2}+15}{1{,}4^2-1{,}1\cdot 1{,}6} \longrightarrow$?

2. *Русско-немецкий словарь*

1. Рычаг $\longrightarrow 153^2+155^2+157^2+17\cdot 103 \longrightarrow$?
2. Рубанок $\longrightarrow 1248\cdot 84{,}21-1:12{,}5-171^2-2^{11}-1 \longrightarrow$?
3. Пещера $\longrightarrow 2^2\cdot 3^2\cdot(33^2-2\cdot 5^2) \longrightarrow$?
4. Блеск $\longrightarrow ((4{,}5)^4+0{,}9375)\cdot 3^4+1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7-15\cdot 419 \longrightarrow$?
5. Ад $\longrightarrow 12{,}5\cdot(1:3{,}125+6{,}5\cdot 464) \longrightarrow$?
6. Брюки $\longrightarrow 6{,}25\cdot(4{,}4\cdot 15^2-3\cdot 143{,}12) \longrightarrow$?
7. Счастье $\longrightarrow (1:0{,}03125+1:0{,}008)\cdot 14{,}85+5\cdot(31^2-0{,}7^2) \longrightarrow$?
8. Лай $\longrightarrow 876^2+79^2+19^2-\sqrt{20\,164} \longrightarrow$?
9. Колея $\longrightarrow 26\cdot(\sqrt{240100}+\sqrt{242064}+\sqrt{246016}+\sqrt{248004}) \longrightarrow$?
10. Ограда $\longrightarrow ((101:0{,}015625-3)\cdot 9+0{,}76)\cdot 6{,}25 \longrightarrow$?
11. Скрипка $\longrightarrow 33^3+14^2+\sqrt{(3{,}86\cdot 1{,}25-1{,}825)\cdot 3} \longrightarrow$?
12. Лещ $\longrightarrow 11^3+3{,}5^3+33\cdot 0{,}125 \longrightarrow$?
13. Справка $\longrightarrow (7^3+8^3+9^3)\cdot 42{,}5-31{,}25\cdot 114{,}624 \longrightarrow$?
14. Топор $\longrightarrow (3^5+5^5+7^5):3{,}75+1{,}5\cdot 1172 \longrightarrow$?
15. Справедливый $\longrightarrow 27^2-11+(8{,}5^3+25\cdot 0{,}115):0{,}001 \longrightarrow$?
16. Луковица $\longrightarrow \left(\left(\frac{52}{3{,}25}\right)^3+17^2-100\right)\cdot 8{,}8 \longrightarrow$?
17. Петля $\longrightarrow 6\cdot 7\cdot 8+\sqrt{1369}-\sqrt{529} \longrightarrow$?
18. Борона $\longrightarrow 3\cdot(6^4-\sqrt{5625}) \longrightarrow$?
19. Отлив $\longrightarrow 34^2+36^2+38^2-13 \longrightarrow$?
20. Победа $\longrightarrow \dfrac{3\cdot(21^2-20)}{5{,}33\cdot 0{,}71-14{,}3372\cdot 0{,}25} \longrightarrow$?
21. Подошва $\longrightarrow \dfrac{7481\cdot 6{,}25}{6{,}33-5{,}08} \longrightarrow$?
22. Толстая доска $\longrightarrow \dfrac{4\cdot 7\cdot((13{,}4)^2-12{,}56)}{2{,}13\cdot 0{,}87-1{,}7281} \longrightarrow$?
23. Жребий $\longrightarrow 3\cdot(7^2-6^2)^2 \longrightarrow$?
24. Парус $\longrightarrow 14\cdot(11^3+12^3+13^3-7^3-2^2)+793 \longrightarrow$?

3. *Русско-французский словарь*

1. Шарик $\longrightarrow 29\cdot 1300+\sqrt{22{,}5^2-13{,}5^2} \longrightarrow$?
2. Зерно $\longrightarrow 7^3+\sqrt{84{,}5\cdot 52-6{,}25\cdot 507{,}04} \longrightarrow$?
3. Холодный северный ветер $\longrightarrow 21^3-17^3-12{,}5\cdot 65{,}76-2^3 \longrightarrow$?
4. Роща $\longrightarrow 2^3\cdot(54{,}5\cdot 28-555\cdot 1{,}6)+4 \longrightarrow$?
5. Пиала $\longrightarrow 15^2+16^2+17^2-108{,}5:1{,}75 \longrightarrow$?
6. Поле $\longrightarrow 18{,}75\cdot 2^{11}-0{,}75\cdot 2^5 \longrightarrow$?
7. Глобус $\longrightarrow 18{,}75\cdot 2030{,}72+1{,}83-\sqrt{4{,}57\cdot 1{,}3-2{,}5921} \longrightarrow$?
8. Бузина $\longrightarrow 151{,}3\cdot 673{,}4+21^2\cdot 25^2+12{,}5\cdot 64{,}2864 \longrightarrow$?
9. Остров $\longrightarrow 7{,}1^3+3\cdot 4{,}363 \longrightarrow$?
10. Пробковая кора $\longrightarrow 23\cdot(11^2\cdot 13+6) \longrightarrow$?

11. Лилия $\longrightarrow (0{,}517\cdot 1{,}25\cdot 6{,}25):0{,}0078125 \longrightarrow ?$
12. Гладкий $\longrightarrow 2{,}5\cdot 3\cdot 4\cdot(34^2+0{,}9\cdot 31) \longrightarrow ?$
13. Квартира $\longrightarrow 37^3+31^2-7 \longrightarrow ?$
14. Ложа $\longrightarrow 3\cdot(35^2+4)-80 \longrightarrow ?$
15. Толстый $\longrightarrow \frac{1}{0{,}05}\cdot(1{,}6\cdot 1105+1) \longrightarrow ?$
16. Гусь $\longrightarrow 6{,}2\cdot 7^2+4{,}96\cdot 1{,}25 \longrightarrow ?$
17. Щавель $\longrightarrow (154\cdot 287+153\cdot 204+17)\cdot\frac{1}{0{,}02} \longrightarrow ?$
18. Шелк $\longrightarrow 3^3\cdot 5\cdot 23 \longrightarrow ?$
19. Солнце $\longrightarrow 5\cdot(147\cdot 861+107\cdot 91+69\cdot 93+20) \longrightarrow ?$
20. Соль $\longrightarrow \frac{1}{0{,}2}\cdot(12^2+\sqrt{13^2-12^2-4^2} \longrightarrow ?$

МИКРОКАЛЬКУЛЯТОР ЗНАКОМИТ С ЧИСЛАМИ

При выполнении вычислений на микрокалькуляторе мы, как правило, не обращаем внимания на какие-либо закономерности в появлении цифр того или иного числа, его какую-то «необычность». Попробуем восполнить этот пробел и компенсировать наше недостаточное внимание некоторыми забавными закономерностями. Все необходимые вычисления нам поможет выполнить микрокалькулятор. Начнем с простого примера.

Умножение на девятку

Возьмем серию чисел 12, 123, 1234, ... и каждое из них умножим на 9. Посмотрите на результаты:

12	$\cdot 9=108$
123	$\cdot 9=1107$
1234	$\cdot 9=11\,106$
12 345	$\cdot 9=111\,105$
123 456	$\cdot 9=1\,111\,104$
1 234 567	$\cdot 9=11\,111\,103$
12 345 678	$\cdot 9=111\,111\,102$
123 456 789	$\cdot 9=1\,111\,111\,101$

Увидели закономерность?

А теперь «перевернем» множимые, т. е. запишем их теми же цифрами, только расположенными справа налево:

21	$\cdot 9=189$
321	$\cdot 9=2889$
4321	$\cdot 9=38\,889$
54 321	$\cdot 9=488\,889$
654 321	$\cdot 9=5\,888\,889$
7 654 321	$\cdot 9=68\,888\,889$
87 654 321	$\cdot 9=788\,888\,889$
987 654 321	$\cdot 9=8\,888\,888\,889$

Какую закономерность в образовании произведения вы видите в этой серии вычислений?

Возьмем примеры на деление:

$$
\begin{array}{ll}
117 & :9=13 \\
1116 & :9=124 \\
11\,115 & :9=1235 \\
111\,114 & :9=12\,346 \\
1\,111\,113 & :9=123\,457 \\
11\,111\,112 & :9=1\,234\,568 \\
111\,111\,111 & :9=12\,345\,679
\end{array}
$$

Выбирая в левых частях делимые, составленные из единиц и одной из цифр 2, 3, ..., 7 и заведомо делящиеся на 9, в правых частях получили последовательности цифр, каждая из которых начинается с единицы и имеет в качестве следующей цифры (если она не последняя) цифру, на единицу большую предыдущей. Разность же между последней и предпоследней цифрами постоянна и равна двум.

«Перевернем» теперь делимые в левых частях равенств:

$$
\begin{array}{ll}
711 & :9=79 \\
6111 & :9=679 \\
51\,111 & :9=5679 \\
411\,111 & :9=45\,679 \\
3\,111\,111 & :9=345\,679 \\
21\,111\,111 & :9=2\,345\,679 \\
111\,111\,111 & :9=12\,345\,679
\end{array}
$$

Получили группу чисел с общей для них закономерностью: две последние цифры частного постоянны и равны 7 и 9, а слева к ним последовательно приписываются новые цифры, каждая из которых на единицу меньше правостоящей. При этом, как и в примере выше, число разрядов в частном на единицу меньше числа разрядов в делимом.

Умножение на число без восьмерки

Запишем число 12 345 679 (содержит последовательно все цифры от 1 до 9, кроме цифры 8) и последовательно найдем его произведения на 9, 8, ..., 1:

$12\,345\,679 \cdot 9 = 111\,111\,111$

$12\,345\,679 \cdot 8 = 98\,765\,432$ (все цифры, кроме 1)

$12\,345\,679 \cdot 7 = 86\,419\,753$ (все цифры, кроме 2)

$12\,345\,679 \cdot 6 = 74\,074\,074$

$12\,345\,679 \cdot 5 = 61\,728\,395$ (все цифры, кроме 4)

$12\,345\,679 \cdot 4 = 49\,382\,716$ (все цифры, кроме 5)

$12\,345\,679 \cdot 3 = 37\,037\,037$

$12\,345\,679 \cdot 2 = 24\,691\,358$ (все цифры, кроме 7)

$12\,345\,679 \cdot 1 = 12\,345\,679$ (все цифры, кроме 8)

Деление на число без восьмерки

Теперь возьмем число, составленное выше, и найдем частные от деления чисел 9, 8, ..., 1 на это число:

$$1:12\,345\,679 = 0,(000000081)$$
$$2:12\,345\,679 = 0,(000000162)$$
$$3:12\,345\,679 = 0,(000000243)$$
$$4:12\,345\,679 = 0,(000000324)$$
$$5:12\,345\,679 = 0,(000000405)$$
$$6:12\,345\,679 = 0,(000000486)$$
$$7:12\,345\,679 = 0,(000000567)$$
$$8:12\,345\,679 = 0,(000000648)$$
$$9:12\,345\,679 = 0,(000000729)$$

Полученные частные представляют собой периодические десятичные дроби, т. е. дроби, у которых бесконечно повторяется группа цифр, записанных в скобках.

Обратите внимание, что последняя цифра периода совпадает с делимым, а предшествующая ей группа цифр (без нулей) получается в результате умножения числа 8 (цифры 8 нет в делителе) на делимое, т. е. последовательно на 1, 2, ..., 9.

Произведение с числом без восьмерки

Возьмем опять то же число 12 345 679 (без восьмерки) и будем последовательно умножать его на однозначные числа, а затем на 9. Посмотрите, что получается:

$$12\,345\,679 \cdot 1 \cdot 9 = 12\,345\,679 \cdot 9 = 111\,111\,111$$
$$12\,345\,679 \cdot 2 \cdot 9 = 24\,691\,358 \cdot 9 = 222\,222\,222$$
$$12\,345\,679 \cdot 3 \cdot 9 = 37\,037\,037 \cdot 9 = 333\,333\,333$$
$$12\,345\,679 \cdot 4 \cdot 9 = 49\,382\,716 \cdot 9 = 444\,444\,444$$
$$12\,345\,679 \cdot 5 \cdot 9 = 61\,728\,395 \cdot 9 = 555\,555\,555$$
$$12\,345\,679 \cdot 6 \cdot 9 = 74\,074\,074 \cdot 9 = 666\,666\,666$$
$$12\,345\,679 \cdot 7 \cdot 9 = 86\,419\,753 \cdot 9 = 777\,777\,777$$
$$12\,345\,679 \cdot 8 \cdot 9 = 98\,765\,432 \cdot 9 = 888\,888\,888$$
$$12\,345\,679 \cdot 9 \cdot 9 = 111\,111\,111 \cdot 9 = 999\,999\,999$$

Мы полагаем, что в последнем примере закономерность образования результатов двукратных умножений понятна читателю. Математические соображения, которые могут быть положены в основу этой и отмеченных ранее закономерностей предлагаем высказать самостоятельно.

Удивительное число

Возьмем число 142 857. Это удивительное число при умножении на 1, 2, 3, 4, 5, 6 дает результат, состоящий из тех же цифр, причем... Впрочем, посмотрите сами:

$$142\,857 \cdot 1 = 142\,857$$
$$142\,857 \cdot 2 = 285\,714$$
$$142\,857 \cdot 3 = 428\,571$$
$$142\,857 \cdot 4 = 571\,428$$
$$142\,857 \cdot 5 = 714\,285$$
$$142\,857 \cdot 6 = 857\,142$$

Если же умножить это число на 7, то получим число, состоящее из одних девяток:

$$142\,857 \cdot 7 = 999\,999$$

Продолжим умножение:

$$142\,857 \cdot 8 = \underline{1}\ 142\,85\underline{6}$$
$$142\,857 \cdot 9 = \underline{1}\ 285\,71\underline{3}$$
$$142\,857 \cdot 10 = \underline{1}\ 428\,57\underline{0}$$
$$142\,857 \cdot 11 = \underline{1}\ 571\,42\underline{7}$$
$$142\,857 \cdot 12 = \underline{1}\ 714\,28\underline{4}$$
$$142\,857 \cdot 13 = \underline{1}\ 857\,14\underline{1}$$
$$142\,857 \cdot 14 = \underline{1}\ 999\,99\underline{8}$$
$$142\,857 \cdot 15 = \underline{2}\ 142\,85\underline{5}$$
$$142\,857 \cdot 16 = \underline{2}\ 285\,71\underline{2}$$
$$142\,857 \cdot 17 = \underline{2}\ 428\,56\underline{9}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$142\,857 \cdot 69 = \underline{9}\ 857\,13\underline{3}$$

Посмотрите на числа в правых частях равенств. В каждом из них имеется по пять (четыре) цифр, входящих в состав первого множителя. Причем если в числах, стоящих в правых частях, отбросить первую цифру и прибавить ее к последней цифре оставшегося числа (эти цифры в равенствах подчеркнуты), то получим снова число 142 857 или число, составленное из тех же цифр, как и ранее:

$$1\ \ 142\,856 \rightarrow 142\,856 + 1 \rightarrow 142\,857$$
$$1\ \ 285\,713 \rightarrow 285\,713 + 1 \rightarrow 285\,714$$
$$1\ \ 428\,570 \rightarrow 428\,570 + 1 \rightarrow 428\,571$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$2\ \ 142\,855 \rightarrow 142\,855 + 2 \rightarrow 142\,857$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$9\ \ 857\,133 \rightarrow 857\,133 + 9 \rightarrow 857\,142$$

Сравните полученные путем таких преобразований числа с теми, которые получены путем умножения числа 142 857 на 1, 2, ..., 7.

Вернемся теперь к произведению, «выпадающему» из общего ряда закономерностей: $142\,857 \cdot 7 = 999\,999$. Давайте попробуем к числу 142 857 приписать справа такое же число, а затем полученное число умножить на 7.

Поскольку наш микрокалькулятор не может иметь двенадцатиразрядный индикатор, то попробуем найти произведение иначе. Так как $142\,857\,142\,857 = 142\,857\,000\,000 + 142\,857$, то с учетом равенства $142\,857 \cdot 7 = 999\,999$ получим

$$142\,857\,142\,857 \cdot 7 = (142\,857\,000\,000 + 142\,857) \cdot 7 = \\ = 142\,857\,000\,000 \cdot 7 + 142\,857 \cdot 7 = 999\,999\,000\,000 + 999\,999 = \\ = 999\,999\,999\,999.$$

А если к числу 142 857 приписать справа это же число 2 раза, 3 раза и т. д., а затем умножить на 7, то что мы получим? Оставляем ответ на этот вопрос за читателем.

Теперь возьмем дробь, целая часть которой равна нулю, а дробная содержит наше удивительное число 0,142857. Найдем произведение этой дроби на 7:

$$0{,}142857 \cdot 7 = 0{,}999999.$$

Как и в предыдущем случае, припишем к дроби справа число 142 857, а затем умножим полученную дробь на 7:

$$0{,}142857142857 \cdot 7 = 0{,}999999999999.$$

Продолжая приписывать справа бесконечное число раз группу цифр 142 857, будем получать число, произведение которого на 7 даст число, дробная часть которого состоит из девяток:

$$0{,}142857142857142857 \cdot 7 = 0{,}999999999999\ldots$$

Таким образом, в левой части равенства мы получили бесконечную периодическую десятичную дробь с периодом 142 857, а в правой части — бесконечную периодическую десятичную дробь с периодом 9. Но как известно, $0,(9) = 1$. Значит, последнее равенство перепишется в виде $0,(142857) \cdot 7 = 1$, откуда

$$0{,}(142857) = \frac{1}{7}.$$

Вот такая неожиданная связь нашего удивительного числа с обыкновенной дробью $\frac{1}{7}$.

Извлечение корней

Возьмем число 16 и извлечем из него квадратный корень. Получим 4. Запишем

$$\sqrt{16} = 4.$$

Между цифрами числа 16 поместим число 15. Попробуем из полученного числа 1 156 извлечь квадратный корень:

$$\sqrt{1\,156} = 34.$$

Как видим, результат оказался целым числом.

Еще раз проделаем вписывание числа 15 в «середину» предыдущего числа (т. е. между цифрами 1 и 5) и попробуем извлечь из полученного числа квадратный корень:

$$\sqrt{111\,556} = 334.$$

Опять результат оказался целым числом.

А что, если попробовать еще раз вписать 15? Будет ли квадратный корень из нового числа целым? Проверяем:

$$\sqrt{11\,115\,556}=3\,334.$$

Как видим, ответ утвердительный.

Если у нас есть микрокалькулятор с десятиразрядным индикатором, повторим указанную операцию еще раз:

$$\sqrt{1\,111\,155\,556}=33\,334$$

Получим опять целое число. «Процесс, по-видимому, происходит закономерно, но для полной уверенности в его закономерности следует, конечно, доказать, что всякое число, у которого n старших разрядов (где n — любое натуральное число), занято цифрой 1, $n-1$ следующих разрядов занято цифрой 5, а последний разряд, разряд единиц, занят цифрой 6, т. е. число

$$N=\underbrace{11\ldots1}_{n\text{ раз}}\underbrace{55\ldots5}_{n-1\text{ раз}}6$$

является точным квадратом какого-то целого числа. Доказать это можно по-разному»[1].

Предлагаем такое доказательство:

«Уменьшим испытуемое число на 1 и припишем ее отдельным слагаемым. Тогда число примет вид:

$$\underbrace{11\ldots1}_{n\text{ раз}}\underbrace{55\ldots5}_{n\text{ раз}}+1.$$

При $n=1$ это будет $15+1=16$; при $n=2$ это будет $1155+1=$ $=1\,156$ и т. д. Заметим, далее, что число $\underbrace{11\ldots1}_{n\text{ раз}}$ можно выразить как сумму степеней числа 10 плюс 1:

$$\underbrace{11\ldots1}_{n\text{ раз}}=10^{n-1}+10^{n-2}+\ldots+10+1.$$

Если это ясно, то обратимся снова к испытуемому числу и подвергнем его следующим преобразованиям:

$$\underbrace{11\ldots1}_{n\text{ раз}}\underbrace{55\ldots5}_{n\text{ раз}}+1=\underbrace{11\ldots1}_{n\text{ раз}}\underbrace{00\ldots0}_{n\text{ раз}}+\underbrace{55\ldots5}_{n\text{ раз}}+1=$$

$$=\underbrace{11\ldots1}_{n\text{ раз}}\cdot10^n+5\cdot\underbrace{11\ldots1}_{n\text{ раз}}+1=\underbrace{11\ldots1}_{n\text{ раз}}\cdot(10^n+5)+1=$$

$$=(10^{n-1}+10^{n-2}+\ldots+10+1)\cdot(10^n+5)+1.$$

Выражение в первой скобке преобразуется по формуле

$$10^{n-1}+10^{n-2}+\ \ldots\ +10+1=\frac{10^n-1}{10-1},$$

[1] Кордемский Б. А. Математическая смекалка — 4-е изд — М. ГИТТЛ, 1957 — С. 315

тогда

$$\underbrace{11\ \ldots\ 1}_{n\ \text{раз}}\underbrace{55\ \ldots\ 5}_{n\ \text{раз}}+1=\frac{(10^n-1)\cdot(10^n+5)}{10-1}+1=$$

$$=\frac{10^{2n}+4\cdot 10^n+4}{9}=\left(\frac{10^n+2}{3}\right)^2,$$

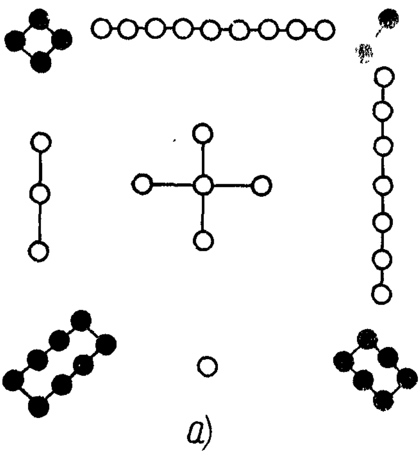
что и требовалось доказать. Итак, ... число $\underbrace{11\ \ldots\ 1}_{n\ \text{раз}}\underbrace{55\ \ldots\ 5}_{n-1\ \text{раз}}6$ всегда будет квадратом числа $\frac{10^n+2}{3}$»[1].

МАГИЧЕСКИЙ КЛАВИШНЫЙ КВАДРАТ

Одной из наиболее древних и наиболее совершенных математических таблиц является так называемый волшебный (или магический) квадрат. Придуманы волшебные квадраты очень давно. Одно из ранних упоминаний о них встречается в китайской книге, написанной за 4—5 тыс. лет до н. э.

Волшебный квадрат, описанный китайцами, представляет собой квадратную таблицу, в девяти клетках которой размещены девять последовательных натуральных чисел так, что суммы чисел вдоль каждой строки, каждого столбца и каждой из двух диагоналей таблицы одинаковы (рис. 8, *а*), современное изображение этого квадрата приведено на рисунке 8, *б*.

Более поздние сведения о волшебных квадратах дошли из Индии (I в. н. э.). Один из них — волшебный квадрат, составленный из шестнадцати чисел (рис. 9). В ту далекую эпоху «вол-



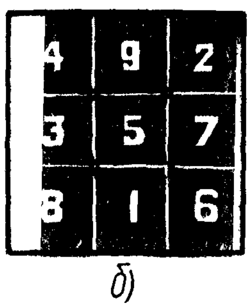


Рис. 8

[1] Кордемский Б. А. Математическая смекалка.— 4-е изд.— М.: ГИТТЛ. 1957.— С. 315.

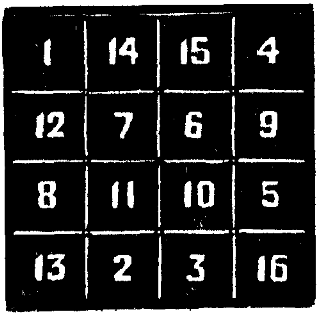


Рис. 9

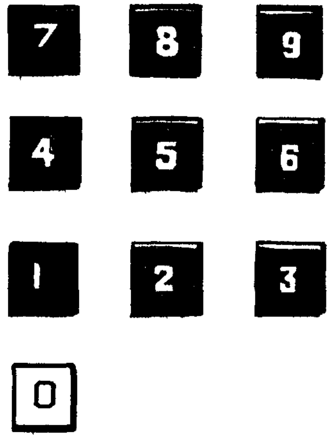


Рис 10

шебные» свойства квадрата были для людей не просто своеобразной мозаикой чисел. И древние индусы, и древние греки, и вслед за ними арабы приписывали подобным числовым мозаикам таинственные, магические свойства.

В Европе с этими квадратами познакомились гораздо позже, примерно в начале XVI в. Они привлекли внимание не только математиков. Известный немецкий художник, гравер и математик Альбрехт Дюрер даже воспроизвел волшебный квадрат на одной из своих гравюр, названной «Меланхолия» (1514 г.).

А теперь посмотрим на клавиатуру микрокалькулятора. Цифровые клавиши располагаются обычно так, как показано на рисунке 10, и девять из них образуют квадрат 3×3. Вот об этом квадрате и пойдет речь.

Он имеет три строки, три столбца и две диагонали. Попробуем определить, какими свойствами он обладает.

Если в китайском волшебном квадрате сумма чисел вдоль каждой строки, каждого столбца и каждой диагонали была одинакова, то в нашем квадрате цифры, написанные на клавишах вдоль каждой строки, каждого столбца и каждой диагонали, образуют числа, делящиеся на 3 (рис. 11—13):

123:3=41	456:3=152	789:3=263
147:3=49	258:3=86	369:3=123
321:3=107	654:3=218	987:3=329
741:3=247	852:3=284	963:3=321
159:3=53	951:3=317	357:3=119
753:3=251.		

Если теперь упорядочить полученные частные 41, 49, 53, 86, 107, 119, 123, 152, 218, 247, 251, 263, 284, 317, 321, 329, а затем

А Дюрер «Меланхолия»

найти разности всевозможных пар соседних чисел (разности записаны во второй строке)

41 49 53 86 107 119 123 152 218 247 251 263 284 317 321 329,
8 4 33 21 12 4 29 60 29 4 12 21 33 4 8

то можно заметить, что разности между парами чисел, равноотстоящими от концов ряда, равны

Итак, числа, образованные следующими подряд цифрами каждой строки, каждого столбца и каждой диагонали делятся на три!

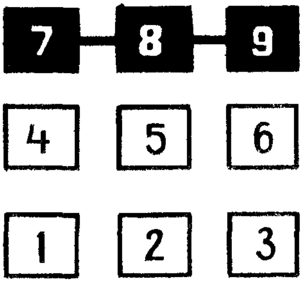


Рис 11

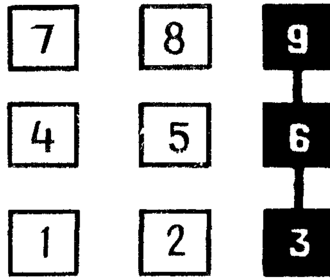


Рис 12

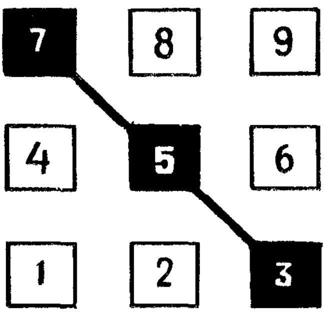


Рис 13

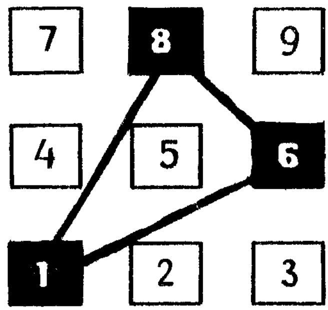


Рис 14

Но это еще не все Выделим в нашем клавишном квадрате треугольники, одна вершина которых лежит в любой из четырех вершин числового квадрата, а две другие — на серединах сторон, не проходящих через нее (рис 14) Выпишем числа, образованные из цифр-вершин таких треугольников, причем первая цифра расположена в вершине квадрата 168, 186, 348, 384, 726, 762, 924, 942 Нетрудно заметить, что и каждое из этих чисел также делится на 3

168 : 3 = 56	186 : 3 = 62	348 : 3 = 116
384 : 3 = 128	726 : 3 = 242	762 : 3 = 254
924 : 3 = 308	942 : 3 = 314	

Если теперь так же, как и ранее, упорядочить полученные частные 56, 62, 116, 128, 242, 254, 308, 314, а затем найти разности всевозможных пар соседних чисел (они записаны во второй строке)

56 62 116 128 242 254 308 314,
6 54 12 114 12 54 6

то разности между числами, равноотстоящими от концов этого ряда, также будут равны

Если теперь числа из обоих рядов «смешать», упорядочить по возрастанию и найти разности соседних чисел, то также окажется, что разности равноудаленных от концов ряда чисел будут равны:

41 49 53 56 62 86 107 116 119 123 128 152 218
8 4 3 6 24 21 9 3 4 5 24 66 24

242 247 251 254 263 284 308 314 317 321 329.
5 4 3 9 21 24 6 3 4 8

Рассмотрим теперь тот же квадрат чисел из цифровых клавиш, но будем брать только те их них, которые образуют тройки последовательных цифр вдоль строк, столбцов и диагоналей. Разделив каждое из них на 11, получим в частных периодические десятичные дроби:

123:11=11,(18)	321:11=29,(18)	1-я строка
456:11=41,(45)	654:11=59,(45)	2-я строка
789:11=71,(72)	987:11=89,(72)	3-я строка
147:11=13,(36)	741:11=67,(36)	1-й столбец
258:11=23,(45)	852:11=77,(45)	2-й столбец
369:11=33,(54)	963:11=87,(54)	3-й столбец
159:11=14,(45)	951:11=86,(45)	1-я диагональ
357:11=32,(45)	753:11=68,(45)	2-я диагональ

Сравнивая периоды частных от деления на 11 чисел из строк, столбцов и диагоналей, нетрудно заметить пары чисел с равными периодами.

Среди этих периодов чаще всего встречается 45. Его имеют те частные, которые соответствуют делимому, образованному из цифр второй строки, второго столбца и диагоналей, т. е. тех чисел, у которых число десятков равно 5 (рис. 15).

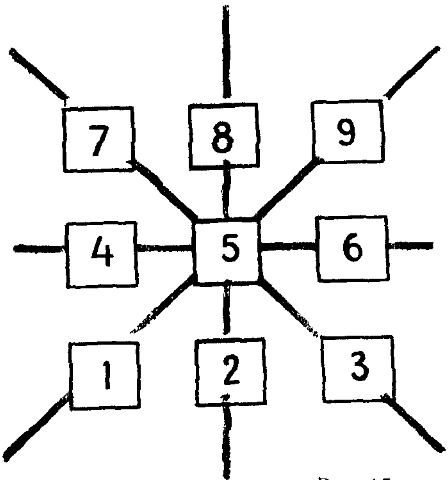


Рис 15

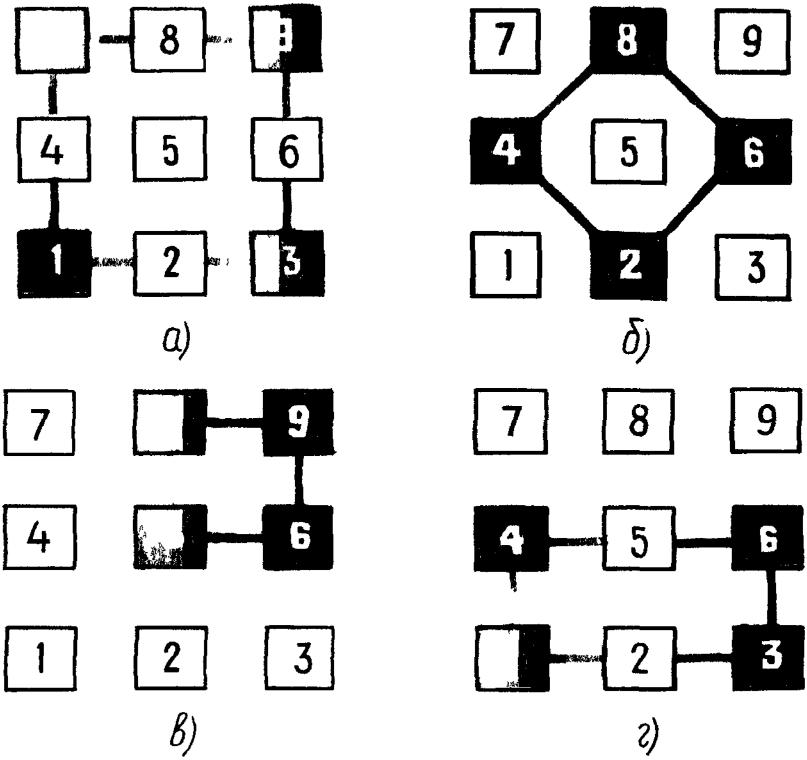
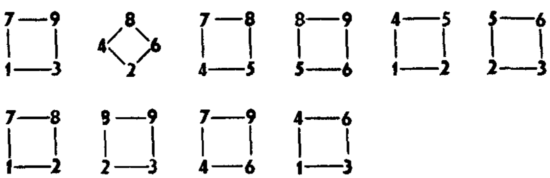


Рис 16

Если теперь выписать в порядке возрастания группы цифр, стоящих в периодах частных (кроме периода из цифр 45), то получим несколько членов арифметической прогрессии: 18, 36, 54, 72, разность которой равна 18.

Из нашего магического квадрата 3×3 выделим всевозможные квадраты 2×2, например четыре из них изображены на рисунке 16. Всего таких квадратов будет десять:



Двигаясь по часовой стрелке (или против часовой стрелки), из цифр, стоящих в вершинах квадратов, образуем числа. Например, взяв первый квадрат, получим 7 931, 9 317, 3 179, 1 793, 7 139, 1 397, 3 971, 9 713. Как, по-вашему, каким общим свойством обладают числа этого ряда? А числа, полученные аналогичным образом из других квадратов?

Может быть, читатель уже заметил, что каждое из таких чисел делится на 11. Посмотрите:

$$1\,397:11=127 \quad 1\,793:11=163 \quad 3\,179:11=289$$
$$3\,971:11=361 \quad 7\,139:11=649 \quad 7\,931:11=721$$
$$9\,317:11=847 \quad 9\,713:11=883$$

С полученными частными поступим аналогично. Выпишем их в порядке возрастания: 127, 163, 289, 361, 649, 721, 847, 883 — и найдем разности между соседними членами этого ряда. Получим

127 163 289 361 649 721 847 883.
36 126 72 288 72 126 36

И опять разности между равноотстоящими от концов ряда членами оказываются равны!

Читателю нетрудно с помощью своего микрокалькулятора проверить, будут ли обладать аналогичным свойством ряды чисел, полученных из других квадратов. А если из всех таких чисел составить один ряд? Попробуйте!

Еще раз выпишем группу чисел, полученных из квадрата
7—9
| | : 1397, 1793, 3179, 3971, 7139, 7931, 9317, 9713. Чем они приме-
1—3
чательны? Оказывается, у каждого из них сумма цифр, стоящих на четных местах, равна сумме цифр, стоящих на нечетных местах. Действительно,

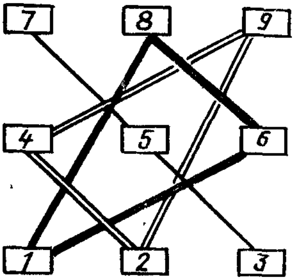
10 10 10 10 10 10 10 10
1 3 9 7, 1 7 9 3, 3 1 7 9, 3 9 7 1, 7 1 3 9, 7 9 3 1, 9 3 1 7, 9 7 1 3.
10 10 10 10 10 10 10 10

Если теперь взять любое из выписанных чисел и приписать к нему слева или справа другое любое число из этого ряда (в том числе и равное взятому), то опять получим число, делящееся на 11. Например,

$13\,971\,793:11=1\,270\,163$; $31\,799\,713:11=2\,890\,883$ и т. п. У каждого из таких чисел сумма цифр, стоящих на четных местах, также равна сумме цифр, стоящих на нечетных местах.

Итак, этот небольшой пример позволяет сделать достаточно серьезный вывод: если в числе сумма цифр, стоящих на четных местах, равна сумме цифр, стоящих на нечетных местах, то число делится на 11.

Полученный вывод является частным случаем более общего утверждения — признака делимости на одиннадцать: на 11 делятся те и только те числа, у которых разность между суммами цифр, стоящих на четных и нечетных местах, делится на 11.



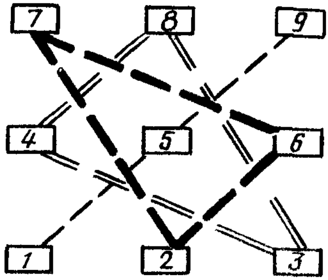


Рис 17

Вернемся еще раз к нашему клавишному квадрату. Выпишем его:

$$\begin{matrix} 7 & 8 & 9 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{matrix}$$

Если мы раньше из этого квадрата выписывали числа, образованные из цифр, последовательно расположенных в строках, столбцах и на диагоналях квадрата, то теперь будем рассматривать произведения троек чисел, стоящих на диагоналях и в вершинах треугольников (рис. 17), «вложенных» в квадрат. На рисунке 17 показаны тройки чисел, из которых образуются произведения.

Отдельно просуммируем произведения тех из них, которые соединены сплошными линиями, и тех, которые соединены штриховыми линиями. Получим

$$A=7\cdot5\cdot3+1\cdot6\cdot8+9\cdot4\cdot2=225;$$
$$B=1\cdot5\cdot9+3\cdot8\cdot4+7\cdot2\cdot6=225, \text{ т. е. } A=B.$$

Вот еще одно свойство нашего клавишного квадрата, который поистине оказался магическим.

МОЖЕТ ЛИ МИКРОКАЛЬКУЛЯТОР ДАТЬ ОТВЕТ?

Наверное, каждому из вас приходилось доказывать числовые равенства и неравенства. Причем, как вы, наверное, помните, делалось это в ряде случаев достаточно громоздко и сложно, особенно когда встречались числовые выражения, содержащие степени или тригонометрические функции.

А можно ли применять для подобных целей микрокалькулятор? На этот вопрос мы и попробуем ответить. Начнем с примеров.

а) Найти наименьшее натуральное число m, для которого выполняется неравенство $0{,}3<\{\sqrt{m}\}<0{,}(3)$.

Очевидно, чтобы дробная часть числа $\sqrt{m}$ удовлетворяла данному неравенству, достаточно, чтобы в ней, начиная с первого знака после запятой, была записана некоторая последовательность троек, а затем следовала хотя бы одна цифра (1 или 2) или хотя бы один нуль, но при условии, что ему предшествовало не менее двух троек; если же после запятой имеется одна тройка и один нуль, то в следующем разряде может стоять любая цифра, кроме нуля, т. е. условию задачи удовлетворяет число, квадратный корень из которого имеет в дробной части одну из следующих последовательностей цифр:

0,301..., 0,302..., 0,303..., 0,304..., 0,305..., 0,306..., 0,307..., 0,308..., 0,309..., или 0,31..., 0,32..., или 0,330..., 0,331..., 0,332... и т. д.

Возьмем микрокалькулятор и начнем перебирать все натуральные числа, начиная с 2 и опуская те, из которых квадратный корень извлекается нацело. Итак, в результате этой акции получим

$$\sqrt{2}=1,41\ldots \qquad \sqrt{3}=1,73\ldots$$
$$\sqrt{5}=2,23\ldots \qquad \sqrt{6}=2,44\ldots$$
$$\sqrt{7}=2,64\ldots \qquad \sqrt{8}=2,82\ldots$$
$$\sqrt{10}=3,16\ldots \qquad \sqrt{11}=3,31\ldots$$

Как видим, нам не пришлось долго искать такое натуральное число, которое удовлетворяло бы условию задачи: им является 11.

Можно ли эту задачу решить иначе? Давайте посмотрим. Для этого представим число $\sqrt{m}$ в виде суммы целой и дробной частей:

$$\sqrt{m}=[\sqrt{m}]+\{\sqrt{m}\}.$$

Тогда искомое число m будет равно: $m=(\sqrt{m})^2=[m]^2+$ $+2[\sqrt{m}]\cdot\{\sqrt{m}\}+\{\sqrt{m}\}^2$. Учитывая, что $0,3<\{\sqrt{m}\}<0,(3)$, запишем

$$0,09<\{\sqrt{m}\}^2<0,(1)$$

А значит, для того, чтобы выполнялось условие задачи, необходимо, чтобы сумма $2\cdot[\sqrt{m}]\cdot\{\sqrt{m}\}+\{\sqrt{m}\}^2$ отличалась от целого числа самое меньшее на 0,09 и самое большее на 0,(1), и поэтому дробная часть второго слагаемого этой суммы должна быть не менее 0,(8) и не более 0,91, т. е. быть «почти целым» числом.

Но для всех возможных дробных частей, выписанных выше, произведение $2\cdot[\sqrt{m}]\cdot\{\sqrt{m}\}$ может быть «почти целым» числом только тогда, когда произведение $[\sqrt{m}]\cdot\{\sqrt{m}\}$ «почти целое». Кроме того, если оно «почти равно» единице, то число $\left[\left(\frac{1}{\{\sqrt{m}\}}+\{\sqrt{m}\}\right)^2\right]$ будет искомым (так как требуется найти минимальное число m). А это возможно тогда, когда $[\sqrt{m}]=3$.

Возьмем микрокалькулятор и проверим сделанное предположение. Для этого последовательно возведем в квадрат числа, целая часть которых равна 3, а дробная — 0,309, или 0,31, или 0,32, или 0,33:

$$3{,}309^2 = 10{,}949481 \qquad 3{,}31^2 = 10{,}9561$$
$$3{,}32^2 = 11{,}0224 \qquad 3{,}33^2 = 11{,}0889$$

Таким образом, квадраты этих чисел «почти равны» 11, т. е. это число может рассматриваться как претендент в искомое. Удостоверимся, что наше предположение верно. Вычислив $\sqrt{11} \approx$ $\approx 3{,}316624...$, видим, что его дробная часть удовлетворяет условию задачи:

$$0{,}3 < 0{,}316624... < 0{,}(3).$$

б) Какое из чисел больше: $2^{3^{2^3}}$ или $3^{2^{3^2}}$?

Воспользовавшись микрокалькулятором, найдем числовые значения показателей степеней: $3^{2^3} = 6561$; $2^{3^2} = 512$. Тогда условие задачи перепишется в виде «Что больше: 2^{6561} или 3^{512}?».

Составим отношение $\frac{2^{6561}}{3^{512}}$. Если числитель окажется в результате вычислений больше знаменателя, то отношение будет больше единицы.

Преобразуем отношение следующим образом:

$$\frac{2^{6561}}{3^{512}} = \frac{2^{512}}{3^{512}} \cdot 2^{6049} = \left(\frac{2}{3}\right)^{512} \cdot 2^{6049}.$$

С помощью микрокалькулятора нетрудно найти значение $\left(\frac{2}{3}\right)^{512} \approx 7 \cdot 10^{-91} = \frac{7}{10^{91}}$. Тогда если мы установим, что $2^{6049} >$ $> \frac{10^{91}}{7}$, то тем самым и будет установлено неравенство $2^{6561} > 3^{512}$, а значит, и $2^{3^{2^3}} > 3^{2^{3^2}}$.

Возьмем 1024 $(1024 = 2^{10})$ и, воспользовавшись программой

1024 $\boxed{\times}$ $\boxed{=}$

повторять, пока не будет достигнута степень больше 91

после 30-ти нажатий клавиши $\boxed{=}$ получим на индикаторе микрокалькулятора число $2{,}0859227 \cdot 10^{93}$, которое будет больше, чем $\frac{10^{91}}{7}$. Но $2{,}0859227 \cdot 10^{93}$ получено нами в результате возведения в 31-ю степень числа 1024, т. е. 2^{10}. Значит, $(2^{10})^{31} \approx 2{,}0859227 \cdot 10^{93}$.

Но $(2^{10})^{31}=2^{310}<2^{6049}$. Поэтому $\left(\frac{2}{3}\right)^{512}\cdot 2^{6049}>1$, а значит, число $2^{3^{2^3}}$ больше числа $3^{2^{3^2}}$.

Можно предложить и иной путь решения задачи, основывающийся на вычислениях с помощью микрокалькулятора. Аналогично предыдущему варианту решения составим отношение степеней $\frac{2^{6561}}{3^{512}}$, которое, в случае когда числитель окажется больше знаменателя, должно быть больше единицы.

Прологарифмируем его и, пользуясь логарифмическим тождеством $\ln\frac{x}{y}=\ln x-\ln y$, представим логарифм частного в виде разности логарифмов числителя и знаменателя:

$$\ln\frac{2^{6561}}{3^{512}}=\ln 2^{6561}-\ln 3^{512}.$$

Полученную разность преобразуем еще раз: воспользовавшись другим логарифмическим тождеством $\ln x^p=p\cdot\ln x$, получим

$$\ln 2^{6561}-\ln 3^{512}=6561\cdot\ln 2-512\cdot\ln 3.$$

Значение последнего выражения нетрудно найти с помощью микрокалькулятора. Если оно окажется положительным, то это будет свидетельствовать, что числитель отношения больше знаменателя.

Воспользовавшись программой

$$2\,\boxed{\ln}\,\boxed{\times}\,6561\,\boxed{=}\,\boxed{\text{ЗП}}\,3\,\boxed{\ln}\,\boxed{\times}\,512\,\boxed{=}\,\boxed{\text{П}-}\,\boxed{\text{ИП}}$$

(для микрокалькулятора типа «Электроника БЗ-36») или программой

$$6561\,\boxed{\times}\,2\,\boxed{\ln}\,\boxed{-}\,512\,\boxed{\times}\,3\,\boxed{\ln}\,\boxed{=}$$

(для микрокалькулятора типа «Электроника МК-71»), получим на индикаторе число $3985{,}24916>0$, что свидетельствует о том, что $2^{3^{2^3}}>3^{2^{3^2}}$.

Действительно, найденное значение логарифма отношения $\frac{2^{6561}}{3^{512}}$ — это не что иное, как показатель степени, в которую нужно возвести число $e=2{,}718281828459054\ldots$, чтобы получить это отношение, т. е. $\frac{2^{6561}}{3^{512}}=e^{3985{,}24916}$, что, очевидно, больше единицы.

В качестве замечания можно отметить, что логарифмировать мы могли бы и по основанию 10. Тогда $6561\cdot\lg 2-512\cdot\lg 3$ после вычислений дало бы на индикаторе 1730,771719, т. е. составленное отношение было бы «пересчитано» в степень числа 10:

$$\frac{2^{6561}}{3^{512}}=10^{1730,771}>1.$$

Рассмотрим еще один путь решения данной задачи, также основывающийся на вычислениях с помощью микрокалькулятора.

Известно, что если $\sqrt[n]{a}>\sqrt[n]{b}$, $a>1$ и $b>1$, то $a>b$. Возьмем $2^{3^{2^3}}=2^{6561}$ и $3^{2^{3^2}}=3^{512}$ и извлечем из каждой из этих степеней корень 512-й степени:

$$\sqrt[512]{2^{6561}}=2^{\frac{6561}{512}}>2^{12}=4096;$$

$$\sqrt[512]{3^{512}}=3.$$

Так как $4096>3$, то $2^{6561}>3^{512}$, т. е. $2^{3^{2^3}}>3^{2^{3^2}}$.

Не правда ли, простое и даже не требующее обращения к микрокалькулятору решение?

И еще один вариант решения этой задачи, в котором уже пригодится микрокалькулятор.

Степень $3^{2^{3^2}}=3^{512}$ приведем к основанию 2. Для этого представим $3=2\cdot 1{,}5$. Но, как нетрудно подсчитать, $(1{,}5)^3=3{,}375<4$, т. е. $(1{,}5)^3<2^2$, а значит, $1{,}5<\sqrt[3]{2^2}=2^{\frac{2}{3}}$.

Тогда $3=2\cdot 1{,}5<2\cdot 2^{\frac{2}{3}}=2^{\frac{5}{3}}$, а значит,

$$(2^{\frac{5}{3}})^{512}=2^{853\frac{1}{3}}>3^{512}.$$

И очевидно, что $2^{6561}>2^{853}>3^{512}$.

в) В какой из точек $x_1=\log_5 4$, $x_2=\log_5 6$ функция $y=x+\frac{1}{x}$ принимает большее значение?

При вычислениях воспользуемся микрокалькулятором.

Поскольку микрокалькулятор может находить значения логарифмов по основанию 10 или по основанию $e=2{,}71828182845...$, то преобразуем данные логарифмы к логарифмам, например, с основанием 10.

Для этого воспользуемся формулой

$$\log_a c=\frac{\log_b c}{\log_b a}.$$

Тогда в соответствии с нею $x_1=\log_5 4=\frac{\lg 4}{\lg 5}=\frac{0{,}60206}{0{,}69897}=0{,}8613531$ и $x_2=\log_5 6=\frac{\lg 6}{\lg 5}=\frac{0{,}778151}{0{,}69897}=1{,}1132827.$

Воспользовавшись программой x $\boxed{+}$ $\boxed{1/x}$ $\boxed{=}$, нетрудно найти $y_1=2{,}0223172$ и $y_2=2{,}0115272$, откуда становится ясно, что данная функция принимает большее значение в точке $x_1=\log_5 4$.

Можно ли верить этим вычислениям?

Да, можно, поскольку известно, что микрокалькулятор находит значения логарифмов с точностью до 10^{-7} (точнее, до $3\cdot 10^{-7}$), а значит, значения x_1 и x_2 найдены минимум как с шестью верными цифрами после запятой, а значения y_1 и y_2 имеют как минимум по пять верных цифр после запятой. А различаются они уже во втором разряде после запятой, т. е. в сотых долях, что дает основание говорить о правильности сделанного вывода.

Для тех, кто хочет попробовать свои силы в самостоятельных вычислениях, предлагаем несколько заданий.

Проверь себя

1. Пользуясь микрокалькулятором, выясните, какое из чисел больше:

а) $\sqrt{3}^{\sqrt{2}}$ или $\sqrt{2}^{\sqrt{3}}$;

б) $\sqrt{5}^{\sqrt{6}}$ или $\sqrt{6}^{\sqrt{5}}$;

в) e^{π} или π^{e}, где $e=2{,}71828182845...$;

г) $5^{2^{2^{2}}}$ или $3^{3^{3}}$;

д) 789^{987} или 987^{789}?

НА МНОГО ЛИ ОШИБАЕТСЯ МИКРОКАЛЬКУЛЯТОР?

Каждый, кто имеет дело с микрокалькулятором, знает, что вычисления чаще всего выполняются с приближенными значениями величин и эти приближенные значения величин ограничены, как, правило, восемью разрядами индикатора.

Действительно, если попробовать выполнить деление 1:3, то на индикаторе микрокалькулятора мы получим не точное значение частного 0,333..., а лишь его приближенное значение 0,3333333, т. е. наш микрокалькулятор из-за «неумения обращаться» с бесконечными десятичными дробями допустил погрешность в вычислениях, которая в данном случае не превышает 0,00000004. (Сказанное не относится к микрокалькуляторам, оперирующим с обыкновенными дробями, например к «Электронике МК-71».) Много это или мало? И каковы вычислительные погрешности при выполнении других операций, предусмотренных в микрокалькуляторах?

Ответить на последний вопрос можно сразу. Для этого достаточно обратиться к инструкции, прилагаемой к микрокалькулятору, в которой, как правило, дается таблица погрешностей вычислений, подобная той, что приводится ниже (табл. 4).

Таблица 4

Функция	Допустимые значения аргумента	Максимальная относительная погрешность
$\sin x$	$\lvert x\rvert \leqslant 157$ (рад)	$3\cdot 10^{-7}$
$\cos x$	$\lvert x\rvert \leqslant 155$ (рад)	$3\cdot 10^{-7}$
$\operatorname{tg} x$	$\lvert x\rvert \leqslant 157$ (рад)	$3\cdot 10^{-7}$
$\arcsin x$	$\lvert x\rvert \leqslant 1$	$3\cdot 10^{-7}$
$\arccos x$	$\lvert x\rvert \leqslant 1$	$3\cdot 10^{-7}$
$\operatorname{arctg} x$	$\lvert x\rvert \leqslant 290\,000$	$3\cdot 10^{-7}$
x^n	$x>0$	$1\cdot 10^{-6}$
e^n	$\lvert n\rvert < 100 \ln 10$	$5\cdot 10^{-7}$
x^2	$\lvert x\rvert < 10^{50}$	$1\cdot 10^{-7}$
10^n	$\lvert n\rvert < 100$	$4\cdot 10^{-7}$
$\frac{1}{x}$	$x\neq 0$	$1\cdot 10^{-7}$
$\sqrt{x}$	$x>0$	$1\cdot 10^{-7}$
$\ln x$	$x>0$	$3\cdot 10^{-7}$
$\lg x$	$x>0$	$3\cdot 10^{-7}$

Из нее видно, что практически все основные вычисления микрокалькуляторы обеспечивают с точностью не выше 0,0000001, если исходные данные содержат не больше семи знаков после запятой.

Давайте предположим, что в наш микрокалькулятор введено максимально возможное число 99 999 999 или оно получено в результате каких-то расчетов, причем известно, что его погрешность не превышает единицы в младшем разряде. Попробуем оценить величину такой погрешности.

Представим себе, что мы достигли такого мастерства, что ежесекундно увеличиваем число, высвеченное на индикаторе, на единицу до тех пор, пока не будет записано максимально возможное число, т. е. 99 999 999 — число, которое можно записать в восьмиразрядном индикаторе.

Подсчитаем время, которое нам понадобится для получения на индикаторе этого числа. Очевидно, мы для этой цели израсходовали 99 999 999 с. С учетом того что в сутках $60\times 60\times 24 = 86\,400$ с, получим, что максимальное число в восьмиразрядном индикаторе мы смогли бы записать за $99\,999\,999:86\,400 = 1157{,}4074$ дней. Но 365,25 дней составляют 1 год.

Тогда 1157,4074 дней $\approx$ 3,169 года $\approx$ 3 года 2 месяца.

Если наш микрокалькулятор дает погрешность в одну единицу в восьмом разряде, то погрешность в описанном примере следует рассматривать как интервал времени в 1 с. А значит, если в процессе вычислений возникла такая погрешность, причем за все время до получения на индикаторе максимального числа, то ее можно сравнить с ошибкой часов в 1 с за 3 года 2 месяца.

Поразительный результат, не правда ли? Если бы у нас были часы, «идущие» с такой точностью, то мы могли бы по нескольку лет не задумываться над вопросом: отстали или ушли вперед наши часы и на сколько? Это были бы суперчасы!

Теперь возьмем микрокалькулятор с десятиразрядным индикатором, например «Электронику МК-71», и аналогичным образом оценим погрешность вычислений в одну единицу в младшем разряде числа.

Итак, максимальное число, которое может быть введено в такой микрокалькулятор, 9 999 999 999, и если начиная с единицы ежесекундно увеличивать показания индикатора, пока не будет достигнуто это число, то потребуется $9\,999\,999\,999:86\,400 \approx \approx 115740{,}75$ дней, или 316 лет 10 месяцев.

Тогда погрешность в одну единицу в младшем разряде микрокалькулятора «Электроника МК-71» можно сравнить с ошибкой часов в 1 с за 316 лет 10 месяцев.

Вы слышали о таких часах? Думаем, что нет. Но не расстраивайтесь. Сейчас в мире делается столько открытий, и, наверное, недалек тот день, когда вы услышите об изобретении подобных часов.

А пока мы говорим лишь о точности вычислений, обеспечиваемой нашим микрокалькулятором. Конечно, все сказанное справедливо при условии обеспечения нами необходимой точности исходных данных, точности порядка не меньшего, чем порядок требующейся точности результата. Итак, если мы хотим получить результат с точностью до единицы в шестом разряде, то для этого необходимо взять исходные данные с точностью до седьмого или восьмого разряда.

Спросим себя: возможно ли достичь такой точности в исходных данных, являющихся, как правило, результатами измерений? Наверное, нет, да и нет в этом необходимости, так как в дальнейшем, как правило, этим «достижением» не удается воспользоваться либо из-за нецелесообразности такой точности, либо из-за более низкой точности других данных, либо по другим причинам.

Таким образом, наш микрокалькулятор считает сам по себе очень даже хорошо, но достоверность результатов полностью зависит от нас.

Поскольку микрокалькулятор ошибается на столь малые величины, то при грамотной организации вычислений итоговая ошибка (которая в ходе вычислений накапливается) может быть также очень мала.

МИКРОКАЛЬКУЛЯТОР И ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

Кто из читателей не встречался с такими известными числовыми последовательностями, как арифметическая и геометрическая прогрессии? Наверняка каждый из вас имел с ними дело, может быть, недавно, а может быть, давно. На всякий случай напомним основное.

Арифметической прогрессией называют числовую последовательность, в которой каждый член (за исключением первого) получается из предыдущего путем прибавления к нему одного и того же числа d. Записывают арифметическую прогрессию так: a, $a+d$, $a+2d$, $a+3d$, ... Число d называют разностью прогрессии.

Если же члены этой числовой последовательности занумеровать, то получим запись вида a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ... , где $a_1=a$, $a_2=a+d$, $a_3=a+2d$ и т. д.

Простейшим примером арифметической прогрессии может служить ряд натуральных чисел: 1, 2, 3, ..., n, ..., где $a_1=a=1$ и разность $d=1$.

Геометрической прогрессией называют числовую последовательность, каждый член которой (за исключением первого) получается из предыдущего путем умножения на одно и то же число $q\neq 0$, называемое знаменателем прогрессии.

Записывают геометрическую прогрессию так: a, $a\cdot q$, $a\cdot q^2$, $a\cdot q^3$, ... Если же члены этой числовой последовательности занумеровать, то получим запись вида a_1, a_2, a_3, ..., где $a_1=a$, $a_2=a\cdot q$, $a_3=a\cdot q^2$ и т. д.

Из сказанного следует, что любой член арифметической прогрессии может быть записан в виде $a_{i+1}=a_i+d$, а любой член геометрической прогрессии — в виде $a_{i+1}=a_i\cdot q$.

А теперь возьмем в руки микрокалькулятор и попробуем найти несколько первых членов каких-нибудь конкретных прогрессий.

Пусть первый член арифметической прогрессии равен 2, а ее разность равна 0,5. Тогда, используя режим константных вычислений нашего микрокалькулятора, составим следующую программу вычислений: $a_1 \boxed{+} d \underbrace{\boxed{=}\boxed{=}\boxed{=}\ldots\boxed{=}}_{9\text{ раз.}}$, по которой для данных значений a_1 и d можно получить значения 10 первых членов арифметической прогрессии: 2; 2,5; 3; 3,5; 4; 4,5; 5; 5,5; 6; 6,5.

По аналогичной программе $a_1 \boxed{\times} q \underbrace{\boxed{=}\boxed{=}\boxed{=}\ldots\boxed{=}}_{9\text{ раз}}$ или $q \boxed{\times} a_1 \underbrace{\boxed{=}\boxed{=}\boxed{=}\ldots\boxed{=}}_{9\text{ раз.}}$ (для микрокалькуляторов с первым множителем-константой) можно получить для данных a_1 и q (например, $a_1=2$, $q=0{,}5$) также 10 первых членов геометрической прогрессии: 2; 1; 0,5; 0,25; 0,125; 0,0625; 0,03125; 0,015625; 0,0078125; 0,0039062.

Сравнивая программы вычислений, можно отметить аналогию в их «конструкции».

А теперь обратимся к геометрической прогрессии еще раз, причем выберем знаменатель $0<q<1$, а затем $-1<q<0$. Пусть, например, $a_1=10$ и $q=0{,}75$. Тогда с помощью микрокалькулятора нетрудно получить несколько первых членов последовательности: 10; 7,5; 5,625; 4,21785; 3,1640625; 2,373046875; ... , каждый из которых меньше предыдущего, но больше нуля. Естественно

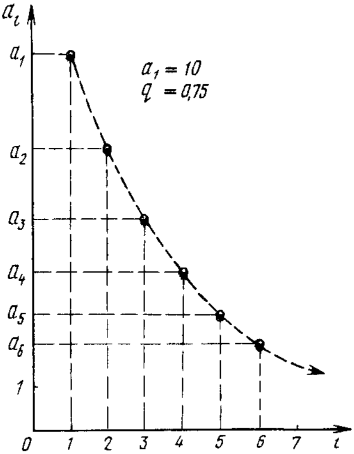


Рис. 18

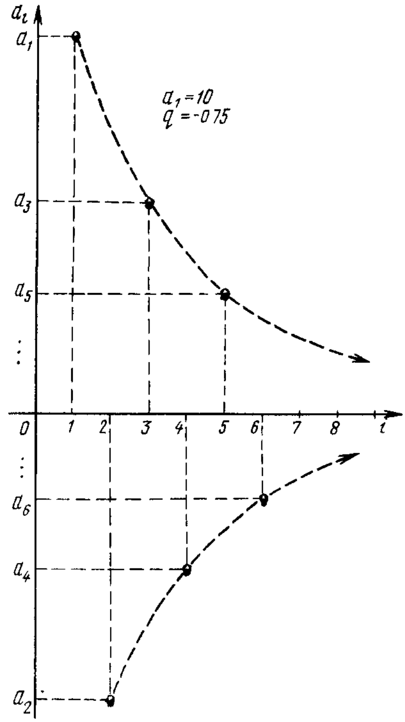


Рис 19

предположить, что чем больше номер взятого члена последовательности, тем меньше этот член отличается от нуля, т. е. при неограниченном увеличении n (пишут $n \to \infty$) значения членов такой последовательности стремятся к нулю, причем оставаясь все время больше нуля.

Если теперь взять $q = -0,75$, то для $a_1 = 10$ мы получим следующую числовую последовательность:

10; $-7,5$; 5,625; $-4,21785$; 3,1640625; $-2,373046875$; ..., два любых соседних члена которой имеют различные знаки. Для этой последовательности характерным является то, что среди положительных членов тот меньше, у которого номер больше, а среди отрицательных — тот больше, у которого номер больше. Причем с увеличением номера a_i и положительные, и отрицательные члены полученной числовой последовательности все меньше отличаются от нуля, т. е. так же, как и ранее, стремятся к нулю.

Если обратиться к графической иллюстрации этих двух случаев (рис. 18, 19), то можно понять особенности каждого из них.

А теперь от арифметической и геометрической прогрессий перейдем к рассмотрению других числовых последовательностей, при нахождении членов которых нам понадобится микрокалькулятор.

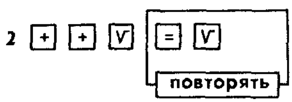
Итак, последовательность первая. Для нее $a_1=\sqrt{2}$ и $a_{i+1}=$ $=\sqrt{2+a_i}$. Начнем вычислять ее члены с помощью «Электроники МК-60». Для этого можно воспользоваться программой

(Для других видов микрокалькуляторов программы вычислений могут незначительно отличаться.)

Тогда

$a_1=1,4142135$ $\quad a_2=1,847759$ $\quad a_3=1,9615705$
$a_4=1,9903694$ $\quad a_5=1,9975908$ $\quad a_6=1,9993976$
$a_7=1,9998493$ $\quad a_8=1,9999623$ $\quad a_9=1,9999905$
$a_{10}=1,9999976$ $\quad a_{11}=1,9999993$ $\quad a_{12}=1,9999998$
$a_{13}=1,9999999$ $\quad a_{14}=1,9999999$ $\quad a_{15}=1,9999999$
$a_{16}=1,9999999$ $\quad$ ....

Учитывая, что разрядная сетка микрокалькулятора ограничена, как правило, восемью разрядами, дальнейшие вычисления к изменению результата не приведут. Но если мы возьмем микрокалькулятор с большей разрядной сеткой, например «Электроника МК-71» (имеющий десятиразрядный индикатор), то «уточненные» значения $a_{13}-a_{16}$ будут такими: $a_{13}=1,999999963$; $a_{14}=1,999999991$; $a_{15}=1,999999998$; $a_{16}=2$. Для микрокалькулятора «Электроника МК-71» программа может быть такой:



Как видим, каждое следующее вычисление приводит к появлению очередных девяток в дробной части, что дает основание предположить, что чем больше номер найденного члена последовательности, тем меньше он отличается от числа 2. Это значение получено на микрокалькуляторе «Электроника МК-71», в котором предусмотрено округление результатов. Однако в принципе такое предположение мы могли бы сделать и раньше, учтя, что целое число в микрокалькуляторе может представляться в виде десятичной дроби, у которой дробная часть состоит из одних девяток, т. е. $1,9999999...=2$. Заметим, что подобное предположение может быть строго обосновано.

Таким образом, для данной последовательности существует такое число, что каждый член последовательности, начиная с некоторого номера, отличается от него на бесконечно малую величину. Не составляет труда подсчитать разности: $2-a_1=0,5857865$; $2-a_2=0,152241$; $2-a_3=0,0384295$; $2-a_4=0,0096306$; $2-a_5=$ $=0,0024092$; $2-a_6=0,0006024$; $2-a_7=0,0001507$; $2-a_8=$

$=0{,}0000377$; $2-a_9=0{,}0000095$; $2-a_{10}=0{,}0000024$; $2-a_{11}=$ $=0{,}0000007$; $2-a_{12}=0{,}0000002$; $2-a_{13}=0{,}0000001$ и т. д., которые покажут что таким числом (его обычно называют пределом последовательности) будет 2.

Приведенные выше рассуждения и подсчеты позволяют записать нашу последовательность в иной, более «обозримой» форме, причем отметить, что ее предел равен двум:

$$\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2+\ldots}}}}}=2. \tag{1}$$

Действительно, так как обе части этого равенства неотрицательны, то его можно возвести в квадрат. Получим

$$2+\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2+\ldots}}}=4. \tag{2}$$

Перенося в равенстве (2) первое слагаемое в правую часть и приводя подобные члены, опять придем к равенству (1). Повторяя эту процедуру бесконечное число раз (по числу имеющихся слагаемых корней), будем приходить все время к равенству (1).

С другой стороны, если имеет место равенство (1), то имеет место и равенство

$$\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2+\ldots}}}-2=0, \tag{3}$$

а значит, и равенство

$$\left(\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2+\ldots}}}-2\right)^2=0. \tag{4}$$

Возводя левую часть последнего равенства в квадрат, получим

$$2+\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2+\ldots}}}-4\cdot\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2+\ldots}}}+4=0,$$

откуда после приведения подобных членов придем к равенству

$$3\cdot\left(2-\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2+\ldots}}}\right)=0,$$

т. е. фактически снова к равенству (3).

Обратимся теперь ко второй последовательности, которую образуем по аналогии с предыдущей, но в качестве первого члена возьмем $a_1=\sqrt{3}$.

Вычисляя несколько первых членов этой последовательности, как это было сделано в предыдущем примере, попробуем выяснить, имеет ли она предел, т. е. число, от которого каждый член последовательности (начиная с некоторого номера) отличается на бесконечно малую величину.

Прежде чем предположить (по аналогии), что пределом последовательности, заданной общим членом $a_{i+1}=\sqrt{3+a_i}$, $a_1=\sqrt{3}$, будет число 3, давайте снова возьмем микрокалькулятор. Выполнив вычисления, получим

$a_1=1{,}7320508$	$a_2=2{,}1753277$	$a_3=2{,}2749346$
$a_4=2{,}2967225$	$a_5=2{,}3014609$	$a_6=2{,}3024901$
$a_7=2{,}3027136$	$a_8=2{,}3027621$	$a_9=2{,}3027726$
$a_{10}=2{,}3027746$	$a_{11}=2{,}3027754$	$a_{12}=2{,}3027755$
$a_{13}=2{,}3027756$	$a_{14}=2{,}3027756$	....

Как показывают вычисления, начиная с a_{13} результат на индикаторе остается неизменным, что позволяет предположить существование предела этой последовательности $\alpha\approx 2{,}3027756...$, т. е. предела, отличного от трех:

$$\sqrt{3+\sqrt{3+\sqrt{3+...+\sqrt{3}}}}\neq 3.$$

Как видим, рассуждения по аналогии могли бы привести к ложному выводу.

Рассмотрим еще одну последовательность, определенную следующим образом: $a_{i+1}=\sqrt{a_i}$, $a_1=m$, где m — некоторое заранее заданное число. При вычислениях будем пользоваться программой

Приняв $m=3$, 50, 500, 5000 и выполнив вычисления, получим четыре последовательности, которые для удобства сведем в таблицу 5.

Таблица 5

Член последовательности	Значения членов последовательности с начальным членом			
	$a_1=3$	$a_1=50$	$a_1=500$	$a_1=5\,000$
a_2	1,7320508	7,0710678	22,360679	70,710678
a_3	1,316074	2,6591479	4,7287079	8,4089641
a_4	1,1472026	1,6306893	2,1745592	2,8998213
a_5	1,0710754	1,2769844	1,4746386	1,7028861
a_6	1,0349277	1,1300373	1,2143469	1,3049467
a_7	1,0173139	1,0630321	1,101974	1,1423426
a_8	1,0086197	1,0310344	1,0497494	1,0688042
a_9	1,0043006	1,0153986	1,0245727	1,0338298
a_{10}	1,0021479	1,0076698	1,0122117	1,0167742
a_{11}	1,0010733	1,0038275	1,0060873	1,0083522
a_{12}	1,0005365	1,0019119	1,0030392	1,0041674
a_{13}	1,0002682	1,0009554	1,0015183	1,0020815
a_{14}	1,000134	1,0004775	1,0007588	1,0010402
a_{15}	1,0000669	1,0002387	1,0003793	1,0005199
a_{16}	1,0000334	1,0001193	1,0001896	1,0002599
a_{17}	1,0000166	1,0000596	1,0000947	1,0001299
a_{18}	1,0000082	1,0000297	1,0000473	1,0000649
a_{19}	1,000004	1,0000148	1,0000236	1,0000324

Член последовательности	Значения членов последовательности с начальным членом			
	$a_1=3$	$a_1=50$	$a_1=500$	$a_1=5\,000$
a_{20}	1,0000019	1,0000073	1,0000117	1,0000161
a_{21}	1,0000009	1,0000036	1,0000058	1,000008
a_{22}	1,0000004	1,0000017	1,0000028	1,0000039
a_{23}	1,0000001	1,0000008	1,0000013	1,0000019
a_{24}	1	1,0000003	1,0000006	1,0000009
a_{25}	1	1,0000001	1,0000002	1,0000004
a_{26}	1	1	1	1,0000001
a_{27}	1	1	1	1

Значения членов последовательности в данной таблице найдены на микрокалькуляторе «Электроника МК-60». При пользовании микрокалькулятором другой марки (например, «Электроника БЗ-36») данные могут различаться в последнем разряде на одну-две единицы, что не меняет сути.

Обратив внимание на результаты таблицы, отметим, что для последовательности с первым членом $a_1=3$ результаты вычислений после 22-го нажатия клавиши $\boxed{\sqrt{}}$ (нахождение члена с номером 23) не будут изменяться. Для последовательности с $a_1=50$ такой момент наступит после 24-го нажатия клавиши $\boxed{\sqrt{}}$ (нахождение члена a_{25}), так же как и для последовательности с $a_1=$ $=500$. Для последовательности с $a_1=5000$ для получения на индикаторе микрокалькулятора 1 необходимо 25 раз нажать клавишу $\boxed{\sqrt{}}$.

Что означают эти факты? Во-первых, то, что каждая из этих конкретных последовательностей имеет своим пределом число 1. Во-вторых, 24, 25, 26, 27-й члены соответственно последовательностей, представленных в таблице, отличаются от 1 не более чем на $9\cdot10^{-8}$, т. е. на 0,00000009, в то время как первый член второй последовательности больше первого члена первой последовательности более чем в 16 раз, а первый член четвертой последовательности больше первого члена второй последовательности в 100 раз. Иначе говоря, число нажатий клавиши $\boxed{\sqrt{}}$ для получения на индикаторе единицы непропорционально взятым первым членам.

А можно ли предварительно узнать, сколько раз надо будет нажать клавишу $\boxed{\sqrt{}}$ для того, чтобы из заданного числа m получить на индикаторе микрокалькулятора единицу? Попробуем это выяснить.

Программа, которой мы пользовались в вычислениях, фактически является численной реализацией формулы

$$\sqrt{\sqrt{\ldots\sqrt{m}}}=a,$$

где m — некоторое заранее заданное число; a — результат вычислений, дающий на восьмиразрядном индикаторе число 1.

Пользуясь известным тождеством $\sqrt[k]{s}=s^{\frac{1}{k}}$, перепишем последнее равенство в виде

$$m^{\frac{1}{2^n}}=a,$$

где n — число нажатий клавиши $\boxed{\sqrt{\ }}$, приводящее к появлению на индикаторе единицы.

Таким образом, если мы найдем значение n, то сможем ответить на поставленный вопрос.

Оценим значение a. Так как первые его восемь разрядов умещаются на индикаторе и задают 1,0000000, то $a\leqslant 1{,}00000009$. Тогда $m^{\frac{1}{2^n}}\leqslant 1{,}00000009$, откуда, логарифмируя, получим

$$\frac{1}{2^n}\lg m\leqslant \lg 1{,}00000009;$$

$$\frac{1}{2^n}\leqslant\frac{\lg 1{,}00000009}{\lg m};$$

$$2^n\geqslant\frac{\lg m}{\lg 1{,}00000009}.$$

Логарифмируя еще раз, найдем n:

$$n\geqslant\frac{\lg\dfrac{\lg m}{\lg 1{,}00000009}}{\lg 2}.$$

Воспользовавшись микрокалькулятором «Электроника МК-71», найдем значения n номеров членов последовательностей из приведенной таблицы, для которых a_n на восьмиразрядном индикаторе представляется как

$$a_n\approx 1{,}0000000\ldots$$

Итак, если $m=3$, то

$$\lg 3\approx 0{,}477121254;$$
$$\lg 1{,}00000009\approx 0{,}000000039086501;$$
$$\lg 2\approx 0{,}301029995$$

и

$$n\geqslant\frac{\lg 12206803{,}76}{0{,}301029995}\approx\frac{7{,}086601963}{0{,}301029995}=23{,}54118216,$$

т. е. $n>23$, что подтверждает полученный ранее в таблице факт: начиная с 24-го нажатия клавиши показания индикатора изменяться не будут, ибо на нем высветится единица.

Аналогичные вычисления для $m=50$ дают:

$$n \geqslant \frac{\lg \dfrac{\lg 50}{\lg 1{,}00000009}}{\lg 2} = \frac{\lg \dfrac{1{,}698970004}{3{,}9086501 \cdot 10^{-8}}}{\lg 2} = \frac{\lg 43466924{,}24}{\lg 2} = \frac{7{,}63815891}{0{,}301029995} \approx$$

$\approx 25{,}37341468$, т. е. $n > 25$. (Посмотрите в таблицу!)

Вычисления при нахождении n для $m=500$ и $m=5000$ предоставляем выполнить читателю самостоятельно.

Рассмотрим еще одну последовательность — геометрическую прогрессию с первым членом 20 000 и знаменателем 1,03. Пользуясь программой

a_1 $\boxed{\times}$ q $\boxed{=}$ повторять — для микрокалькуляторов типа «Электроника БЗ-36»,

q $\boxed{\times}$ a_1 $\boxed{=}$ повторять — для микрокалькуляторов типа «Электроника МК-60»,

нетрудно получить несколько первых ее членов: 20 000; 20 600; 21 218; 21854,54; 22 510,1762; 23 185,48 149 и т. д.— с точностью до последнего знака, умещающегося на индикаторе. Но сейчас не этот вопрос нас будет интересовать. Если используется микрокалькулятор «Электроника МК-71», то программа принимает вид:

q $\boxed{\times}$ $\boxed{\times}$ a_1 $\boxed{=}$ повторять

Выясним, начиная с какого номера члены этой последовательности будут больше 30 000. Для этого можно просто продолжить вычисления и получить $a_{14}=29370{,}67426$; $a_{15}=30251{,}79449$, т. е. установить, что каждый член последовательности, начиная с пятнадцатого, будет больше 30 000. Но можно поступить и иначе, учтя, что $i+1$-й член геометрической прогрессии может быть выражен через первый член следующим образом: $a_{i+1}=a_1 \cdot q^i$. Тогда, зная $a_1=20\,000$ и $a_{i+1}=30\,000$, получим следующее уравнение относительно i: $q^i=\dfrac{30\,000}{20\,000}$ или после замены i на x получим такое уравнение: $(1{,}03)^x=1{,}5$. Известно, что его решение может быть найдено следующим образом: $x=\dfrac{\ln 1{,}5}{\ln 1{,}03} \approx \dfrac{0{,}405465108}{0{,}029558802} \approx$

≈ 14. Тогда $i+1=15$, т. е. заданное условие выполняется начиная с 15-го номера.

Теперь выясним, сколько членов этой последовательности надо просуммировать, чтобы получить сумму не меньше 500 000.

Для этого удобнее обратиться к формуле суммы геометрической прогрессии: $S=a_1\frac{q^i-1}{q-1}$. Подставляя в нее известные данные, придем к уравнению $20\,000\cdot\frac{(1{,}03)^i-1}{1{,}03-1}=500\,000$. После несложных преобразований оно примет вид: $(1{,}03)^i=1{,}75$, аналогичный решаемому ранее. Тогда $i=\frac{0{,}559615787}{0{,}029558802}\approx 19$, т. е. после суммирования девятнадцати членов ряда будет получено число, несколько превышающее 500 000.

В заключение обратимся к задаче, приводящей еще к одной знаменитой последовательности.

«Прыгун может прыгать в одном направлении вдоль разделенной на клетки полосы, перемещаясь при каждом прыжке либо в соседнюю клетку, либо через клетку. Сколькими способами может он переместиться на $n-1$ клетку и, в частности, переместиться из первой клетки в n-ю? (Способы прыгания считаются одинаковыми, если в ходе каждого из них прыгун побывает в одних и тех же клетках.)

Обозначим искомое число через x_n. Очевидно, $x_1=1$ (ибо переход из первой клетки в первую же осуществляется только одним способом — отсутствием прыжков) и $x_2=1$ (переход из первой клетки во вторую также единственен: он состоит в одном непосредственном прыжке на соседнюю клетку). Пусть целью прыгуна является достижение $n+2$-й клетки. Общее число способов осуществления этой цели в наших обозначениях равно x_{n+2}. Но с самого начала эти способы разбиваются на два класса: начинающиеся с прыжка во вторую клетку и начинающиеся с прыжка в третью клетку. Из второй клетки прыгун может переместиться в $n+2$-ю x_{n-1} способами, а из третьей x_n способами. Таким образом, последовательность чисел удовлетворяет рекуррентному соотношению

$$x_n+x_{n+1}=x_{n+2}.$$

И так как $x_1=1$ и $x_2=1$, то она является последовательностью Фибоначчи». (Воробьев Н. Н. Числа Фибоначчи.— 5-е изд.— М.: Наука, 1984.— С. 14.)

«А при чем здесь микрокалькулятор?»— спросите вы. Конечно же, для нахождения членов этой последовательности быстрым и экономным способом.

Чтобы понять, как это можно сделать, обратимся к табличной иллюстрации начального движения операндов в регистрах микрокалькулятора в процессе вычисления первых членов последовательности.

Пусть вычисления организованы так, что в микрокалькулятор вводится первый член последовательности, затем нажимается клавиша операции сложения $\boxed{+}$ и вводится второй член последовательности, затем снова нажимается клавиша $\boxed{+}$ и вводится число, равное второму члену последовательности, затем снова нажимается клавиша $\boxed{+}$ и вводится число, равное третьему члену последовательности, и т. д. При этом очередной член последовательности (кроме первого и второго) получается на индикаторе каждый раз после нажатия клавиши $\boxed{+}$. Описанные действия представлены в таблице 6.

Таблица 6

Действие	Клавишная операция	Содержимое	
		регистра индикации	операционного регистра
Ввод $x_1=1$		x_1	0
	$\boxed{+}$	x_1	x_1
Ввод $x_2=1$		x_2	x_1
Нахождение $x_3=x_1+x_2$	$\boxed{+}$	x_3	x_2
Ввод x_2		x_2	x_3
Нахождение $x_4=x_2+x_3$	$\boxed{+}$	x_4	x_2
Ввод x_3		x_3	x_4
Нахождение $x_5=x_3+x_4$	$\boxed{+}$	x_5	x_3
Ввод x_4		x_4	x_5
Нахождение $x_6=x_4+x_5$	$\boxed{+}$	x_6	x_4
...	...	...	...
Ввод x_k		x_k	x_{k+1}
Нахождение $x_{k+2}=x_k+x_{k+1}$	$\boxed{+}$	x_{k+2}	x_k
...	...	...	...

Очевидно, предложенная тактика вычислений не совсем хороша из-за большого числа вводимых данных, что существенно увеличивает время вычислений.

Однако если учесть, что в данных вычислениях операция $\boxed{+}$ является константной и при ее выполнении текущим значением индикатора заполняется операционный регистр (к содержимому которого возможен доступ с помощью клавиши $\boxed{\leftrightarrow}$), то можно обратить внимание на наличие в регистре индикации члена x_3 и в операционном регистре-члена x_2 после нахождения члена x_3, а на следующем шаге — при смещении x_3 в операционный регистр — на ввод x_2 в регистр индикации, т. е. фактически в результате этих двух шагов вычислений (нахождение x_3 и ввод x_2) содержимое регистра индикации заменено содержимым операционного регистра, а содержимое операционного регистра заменено на содержимое регистра индикации.

Но ведь для этого можно использовать клавишу обмена $\boxed{\leftrightarrow}$ (если она имеется в вашем микрокалькуляторе). Тогда вместо двух шагов вычислений будет сделан один шаг, причем следующий за ним шаг (нахождение x_4) заполнит регистр индикации *и операционный регистр* соответственно членами x_4 и x_3 последовательности Фибоначчи, которые также можно обменять местами, и т. д. Происходящие при этом движения операндов в регистрах микрокалькулятора показаны в таблице 7.

Таблица 7

Действие	Клавишная операция	Содержимое	
		регистра индикации	операционного регистра
Ввод x_1		x_1	0
	$\boxed{+}$	x_1	x_1
Нахождение $x_2=x_1+x_1$	$\boxed{+}$	x_2	x_1
Обмен содержимым регистров	$\boxed{\leftrightarrow}$	x_1	x_2
Нахождение $x_3=x_1+x_2$	$\boxed{+}$	x_3	x_2
Обмен содержимым регистров	$\boxed{\leftrightarrow}$	x_2	x_3
Нахождение $x_4=x_2+x_3$	$\boxed{+}$	x_4	x_3
Обмен содержимым регистров	$\boxed{\leftrightarrow}$	x_3	x_4
Нахождение $x_5=x_3+x_4$	$\boxed{+}$	x_5	x_4
...	...	...	...

Для достижения единообразия в выполнении операций (что снижает вероятность ошибок) начальный фрагмент программы вычислений для микрокалькулятора типа «Электроника Б3-36» можно переписать иначе: $x_1 \boxed{+}$. Тогда с учетом продолжения программы (последовательного нажатия клавиш $\boxed{\leftrightarrow}$ и $\boxed{+}$) можно кратко записать всю программу вычислений так:

x_1 $\boxed{+}$ $\boxed{\boxed{\leftrightarrow}\ \boxed{+}}$ повторять

При этом следует помнить, что повторение n раз выделенного фрагмента программы позволит найти $n+1$-й член последовательности Фибоначчи.

Итак, в этом небольшом экскурсе в последовательности вы познакомились с некоторыми особенностями вычисления членов наиболее известных последовательностей, а также с не совсем привычными последовательностями — родоначальниками некоторых математических тождеств. Чтобы читатель мог проверить, насколько успешно он самостоятельно может справиться с подобной работой, ниже приводятся некоторые задачи, рассчитанные на использование микрокалькуляторов.

Проверь себя

1. С помощью микрокалькулятора оцените, к какому числу стремится последовательность, заданная следующим образом: $a_{k+1}=\sqrt{4+a_k}$, $a_1=\sqrt{4}$.

2. С помощью микрокалькулятора выясните истинность следующих равенств:

а) $\sqrt{5+\sqrt{5+\sqrt{5+\sqrt{5+\ldots+\sqrt{5\ldots}}}}}=2{,}7912878;$

б) $\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6+\ldots+\sqrt{6\ldots}}}}}=3;$

в) $\sqrt{12+\sqrt{12+\sqrt{12+\sqrt{12+\ldots+\sqrt{12\ldots}}}}}=4;$

г) $\sqrt{20+\sqrt{20+\sqrt{20+\sqrt{20+\ldots+\sqrt{20\ldots}}}}}=5;$

д) $\sqrt{30+\sqrt{30+\sqrt{30+\sqrt{30+\ldots+\sqrt{30\ldots}}}}}=6;$

е) $\sqrt{42+\sqrt{42+\sqrt{42+\sqrt{42+\ldots+\sqrt{42\ldots}}}}}=7;$

ж) $\sqrt{49+\sqrt{49+\sqrt{49+\sqrt{49+\ldots+\sqrt{49\ldots}}}}}=7{,}5178234.$

3. Даны числа: 999 999, 99 999 999, 0,0001, 0,0000001. Корень какой степени из каждого из них необходимо извлечь, чтобы на индикаторе микрокалькулятора получить «машинную» единицу? Дайте ответ, не прибегая к логарифмированию.

4. Найдите 20, 30 и 40-й члены последовательности Фибоначчи, пользуясь программой, приведенной в тексте.

ЧИСЛА-ВЕЛИКАНЫ, ЧИСЛА-МАЛЮТКИ И МИКРОКАЛЬКУЛЯТОР

Есть притча, которой много лет и которая встречается в различных вариантах у многих народов. Вот один из таких вариантов.

К одному купцу, очень богатому, как-то пришел человек с очень странным предложением.

— Давай,— говорит человек купцу,— составим с тобой уговор, по которому я тебе каждый день в течение месяца буду приносить по 50 000 р., а ты мне в первый день дашь 1 к., во второй день — 2 к., в третий день — 4 к. и далее каждый день будешь давать вдвое больше прежнего.

Купец был удивлен такому предложению. «Что хочет этот сумасшедший,— думал купец,— неужели ему некуда девать деньги? Ведь он мне за месяц уплатит $30 \cdot 50\,000 = 1\,500\,000$ р., а я ему какие-то копейки».

— Хорошо,— говорит купец,— по рукам, но смотри не обмани. Деньги будешь приносить каждое утро в 7 ч, а если опоздаешь, то наш уговор теряет силу.

— Ладно, купец, будь по твоему, но смотри и ты не обмани. Если не выдержишь уговора 30 дней, то вернешь все, что я тебе уплачу.

Ударили они по рукам, ушел человек, а купец стал с нетерпением ждать завтрашнего утра.

И действительно, утром в 7 ч человек уже стучал в дверь дома купца.

— Я принес тебе деньги, купец. Давай мне, что причитается по уговору.

Взял купец 50 000 р., уплатил человеку 1 к. и радуется: вот чудак человек, деньги ему девать некуда.

На следующее утро опять в 7 ч человек постучал в дом купца.

— Вставай, купец, я принес тебе деньги! Плати и ты мне, как полагается по уговору, вдвое больше прежнего и я пойду. У меня еще дел много.

Взял купец 50 000 р., а взамен уплатил 2 к. С тем и ушел человек.

На третье утро история повторилась: человек, уплатив купцу снова 50 000 р., получил взамен 4 к.

Радуется купец: деньги к нему так и плывут. Шутка ли, за три дня он получил 150 000 р., отдав взамен лишь 7 к.!

Прошло еще двадцать дней, в течение которых каждое утро приходил человек, приносил 50 000 р. и, забрав у купца свои деньги, уходил. Задумался вдруг купец, что стал он уже много платить за каждые 50 000 р. Ведь в двадцать третий день он, получив 50 000 р., уплатил незнакомцу 41 943 р. 4 к., а на следующее утро предстояло платить вдвое больше, т. е. 83 886 р. 8 к.!

— Ну, ничего,— думал купец,— осталось 7 дней до конца нашего уговора, уплачу я человеку все, что полагается и еще останусь с прибылью.

Но не суждено было оправдаться надеждам купца. Почему?

Попытаемся ответить на этот вопрос. Микрокалькулятор нам в этом поможет. Зная, что плата купца за получаемые каждое утро 50 000 р. удваивается, составим программу для ее подсчета:

2 [x] 0,01 [=] (повторять) **для "Электроники МК-60"**

2 $\boxed{\times}$ $\boxed{\times}$ 0,01 $\boxed{=}$ повторять для "Электроники МК-71"

0,01 $\boxed{\times}$ 2 $\boxed{=}$ повторять для "Электроники Б3-36"

и заполним таблицу 8.

Таблица 8

День	Сумма, уплаченная купцу	Сумма, уплаченная купцу с начала месяца	Сумма уплаченная купцом	Сумма, уплаченная купцом с начала месяца
1-й	50 000	50 000	0,01	0,01
2-й	50 000	100 000	0,02	0,03
3-й	50 000	150 000	0,04	0,07
4-й	50 000	200 000	0,08	0,15
5-й	50 000	250 000	0,16	0,31
6-й	50 000	300 000	0,32	0,63
7-й	50 000	350 000	0,64	1,27
8-й	50 000	400 000	1,28	2,55
9-й	50 000	450 000	2,56	5,11
10-й	50 000	500 000	5,12	10,23
11-й	50 000	550 000	10,24	20,47
12-й	50 000	600 000	20,48	40,95
13-й	50 000	650 000	40,96	81,91
14-й	50 000	700 000	81,92	163,83
15-й	50 000	750 000	163,84	327,67
16-й	50 000	800 000	327,68	655,35
17-й	50 000	850 000	655,36	1310,71
18 й	50 000	900 000	1310,72	2621,43
19-й	50 000	950 000	2621,44	5242,87
20-й	50 000	1 000 000	5242,88	10 485,75
21-й	50 000	1 050 000	10 485,76	20 971,51
22-й	50 000	1 100 000	20 971,52	41 943,03
23-й	50 000	1 150 000	41 943,04	83 886,07
24-й	50 000	1 200 000	83 886,08	167 772,15
25-й	50 000	1 250 000	167 772,16	335 554,31
26-й	50 000	1 300 000	335 554,32	671 088,63
27-й	50 000	1 350 000	671 088,64	1 342 177,27
28-й	50 000	1 400 000	1 342 177,28	2 684 354,55
29-й	50 000	1 450 000	2 684 354,56	5 368 709,11
30-й	50 000	1 500 000	5 368 709,12	10 737 418,23

Если у читателя имеется микрокалькулятор другой марки с иными правилами определения константных операций, то программа будет иной.

Как видно из таблицы, действительно не суждено было оправдаться надеждам купца. Он, позарившись на 1,5 млн., оказался вынужденным уплатить 10 737 418 р. 23 к.!

Немецкий вариант этой легенды следующий:

«Некий кузнец подковал лошадь. Каждую из четырех подков он прибил 6 гвоздями, а всего на ковку у него ушло 24 гвоздя. Когда работа была закончена, кузнец спросил у владельца лошади: «Как ты предпочитаешь расплатиться со мной? Заплатить за 24 гвоздя 50,00 марок или заплатить за первый гвоздь 1 пфенинг, за второй — 2 пфенинга, за третий — 4 пфенинга и т. д.?» Владелец лошади решил, что расплатиться пфенингами будет дешевле. Сколько ему пришлось бы уплатить кузнецу?» (Гильде В., Альтрихтер З. С микрокалькулятором в руках: Пер. с немецкого.— 2-е изд.— М.: Мир, 1987.— С. 54.)

Нетрудно видеть, что для ответа на вопрос задачи можно воспользоваться данными нашей таблицы и в двадцать четвертой строке найти сумму к оплате: 167 тысяч 772 марки 15 пфенингов. Жадность наказала владельца лошади: ведь при таких условиях он вынужден уплатить сумму, более чем в 3355 раз превышающую 50 марок!

Третий, древневосточный вариант этой легенды связан с именем изобретателя игры в шахматы Сеты (шахматы впервые появились в Индии около V в.), который, отказавшись от денег, в виде вознаграждения за свое изобретение попросил раджу выдать ему столько рисовых зерен, сколько их наберется, если на первую клетку шахматной доски положить 1 зерно, на вторую — 2 зерна, на третью — 4 зерна и т. д., каждый раз удваивая число зерен. Легенда гласит, что раджа очень разгневался на Сету и велел ему, забрав свой мешок риса, убираться прочь.

Когда ему на следующий день доложили, что такого количества риса нет в его закромах, раджа очень удивился, а затем еще больше разгневался: ведь он вчера дал слово рассчитаться с этим упрямым невеждой Сетой. Но, увы, лучшие вычислители раджи сказали дальше, что такого количества риса нет вообще во всем мире!

«Так ли это на самом деле?»— спросит читатель. Возьмем в руки микрокалькулятор и попробуем ответить на этот вопрос. Но не беспокойтесь: таблицу вычислений мы составлять не будем, а начнем с рассуждений.

Как говорится в легенде, на первую клетку шахматной доски требовалось положить 1 зернышко риса, на вторую — 2 зернышка, на третью — 4 зернышка и т. д., т. е. каждый раз вдвое больше прежнего. Если выписать число зерен, которые нужно положить на первые десять клеток доски, то мы получим числовую последовательность: 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, ...

Эта последовательность является геометрической прогрессией со знаменателем 2 и первым членом $a_1 = 1$. Известно, что сумма k первых членов геометрической прогрессии может быть найдена

по формуле $S_k = a_1 \cdot \frac{q^k - 1}{q - 1}$.

Тогда для нашего случая необходимо вычислить сумму первых 64 членов прогрессии ($k=64$):

$$S_{64}=1\cdot\frac{2^{64}-1}{2-1}=2^{64}-1.$$

Значит, для уплаты Сете потребовалось бы $2^{64}-1$ рисовых зерен.

Если мы теперь предположим, что одно зернышко риса или пшеницы весит 0,04 г (0,04 г = 0,00004 кг = 0,00000004 т = $4\cdot10^{-8}$ т), то масса всех требующихся зерен была бы равна:

$$4\cdot10^{-8}\,(2^{64}-1)\approx2^{64}\cdot2^{2}\cdot10^{-8}\text{ т}.$$

Далее, представляя $10=8\cdot1{,}25$ и заменяя $1{,}25\approx\sqrt[3]{2}$, получим

$10\approx2^{3}\cdot\sqrt[3]{2}=2^{3}\cdot2^{\frac{1}{3}}=2^{\frac{10}{3}}$. Тогда $10^{-8}\approx\left(2^{\frac{10}{3}}\right)^{-8}=2^{-\frac{80}{3}}\approx2^{-27}$.

Значит, для того, чтобы уплатить Сете, потребовалось бы $2^{64}\cdot2^{2}\cdot2^{-27}=2^{64+2-27}=2^{39}$ т $\approx$ 549 755 800 000 т.

Если учесть, что сейчас во всем мире урожай пшеницы составляет лишь около 250 000 000 т, и считать, что по сравнению с этим числом всех зерновых (риса, кукурузы, овса, ячменя и т. п.) собирается в 1000 раз больше, то все равно оказывается недостаточно зерен, чтобы расплатиться с Сетой даже в наше время, не говоря уже о V веке, когда зерна собирали гораздо меньше.

А теперь вернемся к предыдущим вариантам легенды и попробуем ответить на такие вопросы:

1) На какой день выплаченная купцом сумма будет равна сумме, уплаченной им незнакомцу? (I вариант легенды.)

2) На сколько гвоздей была бы подкована лошадь, если бы ее владелец расплатился пфенингами на общую сумму в 50,00 марок? (II вариант легенды.)

Обратимся к нашей таблице. Просматривая ее по строкам, видим, что на 27-й день сумма, уплаченная купцом, будет примерно равна сумме, полученной им от незнакомца.

Владелец лошади, как видно из таблицы, при такой оплате смог бы подковать ее лишь на 12 гвоздей, т. е. по три гвоздя на одну подкову. Скажи кузнец ему об этом сразу, вряд ли он согласился бы на такую оплату!

А теперь из мира чисел-гигантов окунемся в мир чисел-карликов. В этом нам поможет следующая задача: «Каковы масса и размер одного атома?»

Мы думаем, что читателя не нужно убеждать в том, что все вещества состоят из молекул, которые в свою очередь состоят из атомов.

Как известно, независимо от химического состава вещества в одном его моле содержится $6{,}02\cdot10^{26}$ атомов. Это число ($6{,}02\cdot10^{26}$) известно как число Авогадро.

Пользуясь микрокалькулятором, произведем некоторые расчеты. Известно, что молярная масса железа равна 56 г/моль, значит 56 г железа содержат $6{,}02\cdot10^{23}$ атомов. Следовательно, масса одного атома может быть найдена как результат деления 56 на $6{,}02\cdot10^{23}$ и составит $\frac{56}{6{,}02\cdot10^{23}}=9{,}3\cdot10^{-23}$ г. Полученный результат достаточно хорошо согласуется с тем, который известен на практике и применяется в различных расчетах.

Найдем теперь радиус одного атома. Для этого вычислим объем, который занимают 56 г железа, а затем, разделив его на число атомов, содержащихся в 56 граммах железа, получим объем одного атома.

Как известно, плотность железа составляет 7,8 г/см^3, тогда 56 г железа занимают $\frac{56}{7{,}8}\approx7{,}18$ см^3.

В этих 7,18 см^3 содержится $6{,}02\cdot10^{23}$ атомов; следовательно, объем, занимаемый 1 атомом, будет равен:

$$V=\frac{7{,}19}{6{,}02\cdot10^{23}}=1{,}19\cdot10^{-23}\text{ см}^3.$$

С другой стороны, объем атома может быть найден как объем шара радиуса r: $V=\frac{4}{3}\pi r^3$. Тогда

$$r=\sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}}=\sqrt[3]{\frac{3\cdot1{,}19\cdot10^{-23}}{4\cdot3{,}14}}=1{,}4\cdot10^{-8}\text{ см}.$$

Итак, мы нашли требуемые величины-карлики, и в этом нам помог микрокалькулятор. Для тех, кто хочет попробовать свои силы в подобных вычислениях, предлагаем следующее задание.

Проверь себя

Зная радиус Земли (6 370 км) и ее плотность (5,5 г/см^3), найдите, из скольких атомов состоит Земля. В расчетах принять среднюю молярную массу вещества Земли равной 100 г/моль.

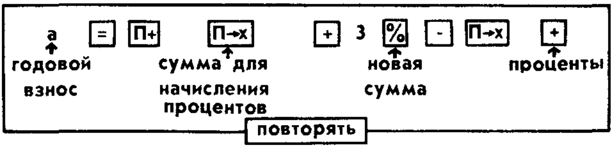
МИКРОКАЛЬКУЛЯТОР И СЛОЖНЫЕ ПРОЦЕНТЫ

Предположим, что вы открыли счет в сберегательном банке и первоначально внесли 500 р., а затем ежегодно продолжали вносить такую же сумму до тех пор, пока сбережения не достигли 10 000 р. Сколько лет должно пройти со времени первого взноса, если сберегательный банк ежегодно начисляет 3% годовых?

Конечно, ответить на этот вопрос без подсчетов трудно. Наверняка можно сказать лишь, что со времени первого взноса пройдет не более 20 лет в том случае, если не учитывать ежегодную процентную надбавку. А если ее учесть, то конечно же, число лет несколько уменьшится. Попробуем выполнить требующиеся расчеты с помощью микрокалькулятора.

Известно, что увеличение числа a на $p\%$ от него выполняется чаще всего по программам $a\boxed{+}p\boxed{\%}$ или $a\boxed{\times}p\boxed{\%}\boxed{+}$ (в зависимости от типов микрокалькуляторов). Учитывая это, а также то, что общая сумма вклада, начиная со второго года, складывается из имеющейся на счету суммы, процентов с нее и годового взноса, составим программу расчетов так, чтобы на индикаторе фиксировалась сумма, с которой начисляются проценты, плюс начисленные проценты, а в регистре памяти — сумма вклада на конец предыдущего года.

С учетом этих условий, вычисления могут быть организованы по следующей программе:



Эта программа, ориентированная на микрокалькулятор «Электроника МК-60», имеет еще одну особенность: она составлена так, что сумма годового взноса (величина a) не обязательно должна быть фиксированной, т. е. величина a может меняться (иначе говоря, годовой взнос может быть любым, например, в первый год — 500 р., во второй — 600 р., в третий — 980 р. и т. п.).

Выполняя вычисления по этой программе, заполним таблицу 9 (результаты будем округлять «до копеек» по известным правилам):

Таблица 9

Год	Сумма, с которой начисляются проценты, р	Проценты, р	Новая сумма вклада, р
1-й	500	15	515
2-й	1 015	30,45	1045,45
3-й	1545,45	46,36	1591,81
4-й	2091,81	62,75	2154,57
5-й	2654,57	79,64	2734,20
6-й	3234,20	97,03	3331,23
7-й	3831,23	114,94	3946,17
8-й	4446,17	133,39	4579,55
9-й	5079,55	152,39	5231,94
10-й	5731,94	171,96	5903,90
11-й	6403,90	192,12	6596,01
12-й	7096,01	212,88	7308,90
13-й	7808,90	234,27	8043,16
14-й	8543,16	256,29	8799,46
15-й	9299,46	278,98	9578,44
16-й	10078,44	302,35	

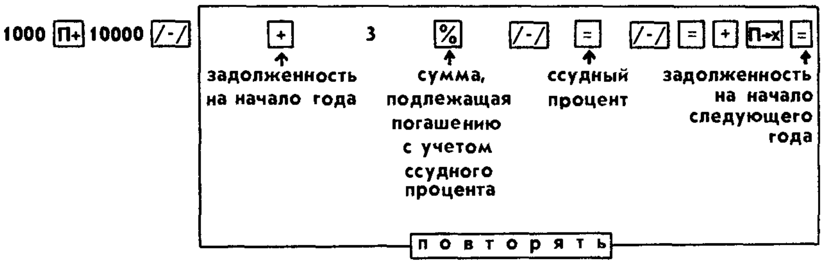
(Для инженерного микрокалькулятора типа «Электроника МК-71» необходимые изменения в программу читатель может внести самостоятельно.)

Как видно из таблицы, нужная сумма денег будет получена через 16 лет за счет того, что начислено в общей сложности 2380,80 р. процентов.

А теперь предположим, что вы взяли ссуду на 10 000 р. для постройки дома, которую необходимо погасить вместе со ссудным процентом (пусть он равен 3% от суммы остаточной задолженности в год). Сколько лет потребуется на погашение ссуды и какая сумма будет выплачена в счет ссудных процентов, если ежегодно выплачивать 1 000 р.?

Снова возьмем микрокалькулятор и примемся за вычисления, которые будем сопровождать заполнением таблицы. При этом условимся вносить в нее по годам сумму, подлежащую погашению, ссудный процент с этой суммы, сумму разовой годовой выплаты и остаточную на начало следующего года задолженность.

С учетом требуемых данных составим программу вычислений, ориентируясь на микрокалькулятор типа «Электроника МК-60», так чтобы в процессе ее выполнения можно было заполнить все необходимые графы таблицы, приведенной далее:



Данная программа составлена с таким расчетом, что все суммы, подлежащие погашению, представлены числами со знаком минус, а все суммы выплат в счет погашения ссуды — со знаком плюс.

Если не ставить целью вычисление в отдельности ссудного процента с суммы, подлежащей погашению, а ограничиться лишь нахождением суммы задолжности на начало года и суммы, подлежащей погашению с учетом ссудного процента (на конец года), то программа может несколько упроститься.

Имея микрокалькулятор другой модели, в котором процентные вычисления выполняются по другой схеме, читатель может самостоятельно составить аналогичные программы расчетов ссудных процентов и сумм погашения.

Полученные данные занесем в таблицу 10, округляя результаты «до копеек», как это делалось ранее.

Таблица 10

Год	Сумма, с которой *начисляются проценты* (задолженность на начало года), р	*Начисляемый* ссудный процент	Сумма, подлежащая погашению с учетом ссудного процента	Выплата в счет *погашения* задолженности
1-й	10 000	300	10 300	1 000
2-й	9 300	279	9 579	1 000
3-й	8 579	257,37	8836,37	1 000
4-й	7836,37	235,09	8071,46	1 000
5-й	7071,46	212,14	7283,60	1 000
6-й	6283,60	188,51	6472,11	1 000
7-й	5472,11	164,16	5636,28	1 000
8-й	4636,28	139,09	4775,36	1 000
9-й	3775,36	113,26	3888,62	1 000
10-й	2888,62	86,66	2975,28	1 000
11-й	1975,28	59,26	2034,53	1 000
12-й	1034,53	31,03	1065,58	1 000
13-й	65,58	1,97	67,54	

Наблюдая за изменениями данных в таблице, отметим, что ссуда будет погашена на тринадцатом году, и общая сумма выплат составит, как нетрудно подсчитать, $13 \cdot 1\,000 + 65{,}54 = 13\,065$ р. 54 к., т. е. выплата в счет погашения ссудного процента составит 3 065 р. 54 к.

Сравним эти две задачи. Прежде всего отметим, что в каждой из них изменение начальных сумм происходит на один и тот же процент; но в первой задаче рост суммы вклада обеспечивался, кроме этого, еще и за счет ежегодного вклада, а во второй задаче — только за счет ссудного процента при ежегодном погашении остаточной задолженности. Нетрудно установить, что эти задачи аналогичны по действующим связям между компонентами — данными задач. Действительно, если не принимать во внимание процентные надбавки, то и при решении первой задачи, и при решении второй задачи сумма на начало текущего года отличается от суммы на начало предыдущего года на некоторую постоянную величину (соответственно 500 и 1 000 р.). Значит, решения их могут быть основаны на применении прогрессий, в частности геометрической, поскольку рост сумм обеспечивается процентными надбавками.

Чтобы понять, как можно применить известные сведения о прогрессиях, обратимся еще раз к пункту «Микрокалькулятор и последовательности». Вспомнили? Очень хорошо.

А теперь будем рассуждать. По условию первой задачи сумма вклада в первый год 500 р.; во второй год сумма вклада будет состоять из суммы вклада предыдущего года, увеличенной на 3%, и вновь внесенных 500 р.; в третий год сумма вклада будет состоять из суммы вклада предыдущего года, увеличенной на 3%, и вновь внесенных 500 р. и т. д. Так как 3% от числа a — это $a \cdot 0{,}03$, поэтому величина за каждый год примет вид:

$$S_1=500$$
$$S_2=S_1+S_1\cdot 0{,}03+S_1=S_1\,(1+0{,}03)+S_1$$
$$S_3=S_2+S_2\cdot 0{,}03+S_1=S_2\,(1+0{,}03)+S_1=(S_1\,(1+0{,}03)+S_1)\times$$
$$\times(1+0{,}03)+S_1=S_1\,(1+0{,}03)^2+S_1\,(1+0{,}03)+S_1=S_1+$$
$$+S_1\,(1+0{,}03)+S_1\,(1+0{,}03)^2$$
$$S_4=S_3+S_3\cdot 0{,}03+S_1=S_1+S_3\,(1+0{,}03)=$$
$$=S_1+(S_1+S_1\,(1+0{,}03)+S_1\,(1+0{,}03)^2)\,(1+0{,}03)=$$
$$=S_1+S_1\,(1+0{,}03)+S_1\,(1+0{,}03)^2+S_1\,(1+0{,}03)^3$$
....
$$S_{n+1}=S_1+S_1\,(1+0{,}03)+S_1\,(1+0{,}03)^2+\ldots+S_1\,(1+0{,}03)^{n-1}+$$
$$+S_1\,(1+0{,}03)^n,$$
....

где S_n — величина вклада n-го года.

Как видим, мы пришли к геометрической прогрессии, первый член которой $S_1=500$, а знаменатель $q=(1+0{,}03)$. Но раньше мы отмечали, что сумма n членов такой прогрессии может быть подсчитана по формуле $S_n=a_1\,\frac{q^n-1}{q-1}$, которая для нашего случая примет вид:

$$S_n=S_1\cdot\frac{(1+0{,}03)^n-1}{(1+0{,}03)-1}.$$

Пользуясь ею, можно быстро ответить на вопрос первой задачи, поскольку известна конечная сумма вклада $S=10\,000$ р.:

$$10\,000=500\,\frac{(1+0{,}03)^k-1}{(1+0{,}03)-1},$$

откуда, последовательно выполняя преобразования, получим

$$\frac{(1+0{,}03)^k-1}{(1+0{,}03)-1}=20;\ (1+0{,}03)^k-1=20\,((1+0{,}03-1);$$
$$(1+0{,}03)^k=20\,((1+0{,}03)-1)+1;\ (1+0{,}03)^k=20\cdot 0{,}03+1;$$
$$1{,}03^k=1{,}6.$$

Логарифмируя это уравнение, найдем

$$\ln\,(1{,}03)^k=\ln 1{,}6;\ k\cdot\ln 1{,}03=\ln 1{,}6,\ k=\frac{\ln 1{,}6}{\ln 1{,}3}.$$

С помощью микрокалькулятора найдем

$$\ln 1{,}6\approx 0{,}4700036;\ \ln 1{,}03\approx 0{,}0295588;\ k=15{,}9,$$

т. е. необходимая сумма будет накоплена на шестнадцатом году.

Теперь обратимся ко второй задаче. Ссуда составляет $S=10\,000$ р. и погашается ежегодно (с учетом 3% годового роста) взносами $a=1\,000$ р. Тогда за первый год погашение составит взнос без ссудного процента от начальной суммы; за второй год погашение составит взнос без ссудного процента от оставшейся к погашению суммы и т. д. Учитывая, что годовой рост ссуды составляет 3%, запишем кратко фактические суммы погашения ссуды по годам:

$$S=10\,000$$
$$S_1=a-S\cdot 0{,}03$$
$$S_2=a-(S-S_1)\cdot 0{,}03=a-(S-a+S\cdot 0{,}03)\cdot 0{,}03=a+a\cdot 0{,}03-$$
$$-S\,(1+0{,}03)\cdot 0{,}03=a\,(1+0{,}03)-S\,(1+0{,}03)\cdot 0{,}03=$$
$$=\underbrace{(a-S\cdot 0{,}03)}_{S_1}(1+0{,}03)=S_1\,(1+0{,}03)$$
$$S_3=a-(S-S_1-S_2)\cdot 0{,}03=a-(S-S_1-S_1\,(1+0{,}03))\cdot 0{,}03=$$
$$=\underbrace{a-S\cdot 0{,}03}_{S_1}+S_1\cdot 0{,}03+S_1\cdot(1+0{,}03)\cdot 0{,}03=S_1+S_1\cdot 0{,}03+$$
$$+S_1\,(1+0{,}03)\cdot 0{,}03=S_1\,(1+0{,}03)+S_1\,(1+0{,}03)\cdot 0{,}03=$$
$$=S_1\,(1+0{,}03)\,(1+0{,}03)=S_1\,(1+0{,}03)^2$$
$$S_4=a-(S-S_1-S_2-S_3)\cdot 0{,}03=\underbrace{a-S\cdot 0{,}03}_{S_1}+S_1\cdot 0{,}03+S_2\times$$
$$\times 0{,}03+S_3\cdot 0{,}03=S_1+S_1\cdot 0{,}03+(S_1\,(1+0{,}03)+S_1\,(1+0{,}03)^2)\times$$
$$\times 0{,}03=S_1\,(1+0{,}03)+S_1\,(1+0{,}03)\cdot 0{,}03+S_1\,(1+0{,}03)^2\cdot 0{,}03=$$
$$=S_1\,(1+0{,}03)^2+S_1\,(1+0{,}03)^2\cdot 0{,}03=S_1\,(1+0{,}03)^2\cdot(1+0{,}03)=$$
$$=S_1\,(1+0{,}03)^3$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$S_{n+1}=S_1\,(1+0{,}03)^n$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Так как через $n+1$ год ссуда будет погашена, то

$$S=S_1+S_2+S_3+\ldots+S_{n+1}.$$

Заменяя S_i их выражением через сумму первого фактического (после вычета ссудных процентов) погашения $S_1=a-S\cdot 0{,}03$, получим геометрическую прогрессию с первым членом S_1 и знаменателем $q=(1+0{,}03)$, сумма n первых членов которой выражается следующим образом:

$$S=S_1\,\frac{(1+0{,}03)^n-1}{(1+0{,}03)-1}\,.$$

Как видим, мы пришли к выражению того же вида, что и в первой задаче о росте вклада в сберегательной кассе.

Применим эту формулу для получения ответа ко второй задаче, т. е. найдем, сколько лет потребуется для погашения взятой ссуды в 10 000 р. частями по 1 000 р. ежегодно.

Для этого найдем сумму первого фактического погашения ссуды. Она образуется из суммы первого погашения без трех ссудных процентов от всей ссуды, т. е. $S_1=1\,000-10\,000\cdot 0{,}03=700$ р.

Тогда имеем уравнение относительно k:

$$10\,000=700\cdot\frac{(1+0{,}03)^k-1}{(1+0{,}03)-1}\,.$$

Упростив его

$$\frac{(1{,}03)^k-1}{0{,}03}=\frac{100}{7};\ (1{,}03)^k-1=\frac{3}{7};\ (1{,}03)^k=\frac{3}{7}+1;\ (1{,}03)^k=\frac{10}{7}$$

и прологарифмировав, получим

$$k=\frac{\ln\frac{10}{7}}{\ln 1{,}03},\ \text{или}\ k=\frac{\ln 10-\ln 7}{\ln 1{,}03}.$$

Находя значения $\ln\frac{10}{7}\approx 0{,}3566749$; $\ln 1{,}03\approx 0{,}0295588$, вычислим $k=12{,}066623\approx 12{,}07$.

Так как ссуда погашается на $k+1$-м году, то $k+1=13{,}07$, т. е. она будет погашена на четырнадцатом году.

Мы надеемся, что читатель, проделавший вместе с нами этот небольшой экскурс в вычисления сложных процентов, теперь сможет самостоятельно в случае необходимости выполнить все требующиеся расчеты подобно тому, как это делают работники сберегательных банков.

Проверь себя

1. Вы, открыв счет в сберегательном банке на 700 р., продолжали вносить ежегодно такую же сумму в течение 10 лет. Какая сумма окажется на вашем счету, если сберегательный банк выплачивал 2% годовых? Какую сумму составят выплаты за счет процентов?

2. Родители, когда их ребенку исполнился 1 год, открыли детский счет в сберегательном банке на 1 000 р. Какова будет сумма вклада к восемнадцатилетию ребенка, если сберегательный банк выплачивает по детскому вкладу 4% годовых?

3. Двое соседей взяли ссуду в банке на 20 000 р. для постройки домов. Один из них решил погашать ее годовыми взносами в 1000 р., а другой — взносами в 800 р. За какой срок каждый из них погасит ссуду, если банк взимает ежегодно 3% за предоставленную ссуду? Кому из них придется выплатить бо́льшую сумму (и на сколько) в счет уплаты ссудных процентов?

МИКРОКАЛЬКУЛЯТОР И ИЗВЛЕЧЕНИЕ КОРНЕЙ

Ваш микрокалькулятор извлекает корни? Только квадратные? Это как раз то, что нужно. А мы попробуем с его помощью извлекать корни любых степеней.

Начнем с рассуждений. Пусть задано некоторое число a, например $a=65\,536$. Мы знаем, что для извлечения квадратного корня из числа a достаточно ввести число в микрокалькулятор и нажать клавишу $\boxed{\sqrt{\ }}$, т. е. выполнить вычисления по программе $a\boxed{\sqrt{\ }}$.

Так поступим и с нашим числом — на индикаторе получим 256.

А что, если, не сбрасывая этого числа с индикатора, еще раз нажать клавишу $\boxed{\sqrt{\ }}$? Получается, что мы извлечем квадратный корень из квадратного корня, т. е. $\sqrt{\sqrt{a}}$. Но $\sqrt{\sqrt{a}}=\sqrt[4]{a}$. И на индикаторе получим число 16.

А что, если еще раз нажать клавишу $\boxed{\sqrt{\ }}$, а потом еще и т. д.? Какие корни мы будем извлекать? При третьем нажатии клавиши $\boxed{\sqrt{\ }}$ мы извлечем квадратный корень из корня четвертой степени, т. е. $\sqrt{\sqrt[4]{a}}=\sqrt[8]{a}$; при четвертом нажатии — $\sqrt{\sqrt[8]{a}}=\sqrt[16]{a}$; при пятом нажатии $\sqrt{\sqrt[16]{a}}=\sqrt[32]{a}$ и т. д.

Выписывая показатели корней 2, 4, 8, 16, 32, ..., нетрудно понять, что любой из них является степенью числа 2, т. е. имеет вид 2^k, где k — число нажатий клавиши $\boxed{\sqrt{\ }}$. Иначе говоря, для извлечения, например, корня 32-й степени из числа a потребуется пять раз (так как $32=2^5$) нажать клавишу $\boxed{\sqrt{\ }}$.

Итак, непосредственное n-кратное нажатие клавиши $\boxed{\sqrt{\ }}$ позволяет извлекать с помощью микрокалькулятора корни 2, 4, 8, 16-й, ... степеней.

А если необходимо извлечь корень, степень которого нельзя представить в виде 2^k, $k=1, 2, 3, \ldots$, например $\sqrt[3]{a}$. Как быть в этом случае?

Снова обратимся к рассуждениям. Кубический корень из числа a является решением уравнения $x^3=a$. Умножая обе части этого уравнения на x, придем к уравнению четвертой степени $x^4=x\cdot a$.

Решением этого уравнения является $x=\sqrt[4]{x\cdot a}$, или $x=\sqrt{\sqrt{xa}}$, при нахождении которого с помощью микрокалькулятора мы сможем пользоваться клавишей $\boxed{\sqrt{\ }}$ извлечения квадратного корня. Иначе формулу для нахождения значения x можно переписать в виде $x_{i+1}=\sqrt{\sqrt{x_i\cdot a}}$, аналогичном выражению n-го члена геометрической прогрессии через $(n-1)$-й член: $b_n=b_{n-1}\cdot q$, где q — знаменатель прогрессии. С ее помощью можно получить последовательность приближений значения x_i с любой точностью: x_1, x_2, x_3, x_4, ..., x_n, ... При этом нетрудно догадаться, что точность найденного значения $\sqrt[3]{a}$ тем выше, чем больший номер имеет взятое из последовательности значение x_i. Значение x_1 для удобства может быть взято равным 1. Обратимся к примеру.

Пусть требуется найти значение $\sqrt[3]{8}$ по формуле, приведенной выше. На самом деле мы знаем, что $\sqrt[3]{8}=2$, и это нам поможет в оценке точности получаемых результатов. Выполняя последовательно вычисления на «Электронике МК-60» по формуле $x_{i+1}=$ $=\sqrt{\sqrt{x_i\cdot 8}}$, получим следующие результаты:

$$x_1=1$$
$$x_2=\sqrt{\sqrt{1\cdot 8}}=1{,}6817928$$

$$x_3 = \sqrt{\sqrt{1{,}6817928 \cdot 8}} = 1{,}9152065$$
$$x_4 = \sqrt{\sqrt{1{,}9152065 \cdot 8}} = 1{,}9784559$$
$$x_5 = \sqrt{\sqrt{1{,}9784559 \cdot 8}} = 1{,}994592$$
$$x_6 = \sqrt{\sqrt{1{,}994592 \cdot 8}} = 1{,}9986466$$
$$x_7 = \sqrt{\sqrt{1{,}9986466 \cdot 8}} = 1{,}9996615$$
$$x_8 = \sqrt{\sqrt{1{,}9996615 \cdot 8}} = 1{,}9999153$$
$$x_9 = \sqrt{\sqrt{1{,}9999153 \cdot 8}} = 1{,}9999787$$
$$x_{10} = \sqrt{\sqrt{1{,}9999787 \cdot 8}} = 1{,}9999946$$
$$x_{11} = \sqrt{\sqrt{1{,}9999946 \cdot 8}} = 1{,}9999985$$
$$x_{12} = \sqrt{\sqrt{1{,}9999985 \cdot 8}} = 1{,}9999995$$
$$x_{13} = \sqrt{\sqrt{1{,}9999995 \cdot 8}} = 1{,}9999998$$
$$x_{14} = \sqrt{\sqrt{1{,}9999998 \cdot 8}} = 1{,}9999999$$

Попытка дальнейших вычислений к изменениям на индикаторе не приведет, т. е. повысить точность вычислений нам более не удастся, но и в этом случае полученное значение x_{14} является очень хорошим приближением к точному значению $\sqrt[3]{8}$, ибо абсолютная погрешность составляет $2 - 1{,}9999999 = 0{,}0000001 = 10^{-7}$. Соответственно погрешность предшествующих вычислений не превышает 10^{-6}, 10^{-6}, 10^{-5}, 10^{-5}, 10^{-4}, 10^{-4}, 10^{-3}, 10^{-2}, 10^{-2}, 10^{-1}, 10^{-1}, 10^{0}, 10^{0}, о чем можно судить по группам одинаковых цифр в последовательно полученных приближениях x_{i+1} и x_i.

В общем виде проделанные вычисления можно представить следующей программой:

$$a \ \boxed{П+} \ 1 \ \underbrace{\boxed{\times} \ \boxed{П\to x} \ \boxed{=} \ \boxed{\sqrt{}} \ \boxed{\sqrt{}}}_{\text{повторять}}$$

Отмеченный фрагмент требуется повторять до тех пор, пока на индикаторе микрокалькулятора перестанет изменяться (по сравнению с предыдущим результатом) столько цифр, сколько было оговорено заранее, т. е. какова была указана точность результата. Кроме того, для удобства вычислений значение x_1 взято равным 1, а значение величины a (в данном примере $a = 8$) хранится в регистре памяти микрокалькулятора, что освобождает нас от необходимости неоднократного ввода каких-либо числовых значений и экономит время вычислений. Применительно к рассмотренному примеру программа вычислений будет выглядеть так:

$$8 \ \boxed{П+} \ 1 \ \underbrace{\boxed{\times} \ \boxed{П\to x} \ \boxed{=} \ \boxed{\sqrt{}} \ \boxed{\sqrt{}}}_{\text{повторить 13 раз}}$$

Попробуем теперь научиться извлекать корни пятой степени из числа, т. е. находить $\sqrt[5]{a}$. Рассуждая аналогично, заметим, что значение корня $\sqrt[5]{a}$ является решением уравнения пятой степени $x^5=a$. Разделив обе части на x (а это в данном случае можно сделать, так как для нахождения возможного значения корня $x=0$ не требуется применять микрокалькулятор), получим уравнение четвертой степени $x^4=\frac{a}{x}$. Находя x из его левой части, получим решение: $x=\sqrt[4]{\frac{a}{x}}$, или $x=\sqrt{\sqrt{\frac{a}{x}}}$, которое так же, как и ранее, можно переписать в виде $x_{i+1}=\sqrt{\sqrt{\frac{a}{x_i}}}$, где x_i и x_{i+1} — последовательные приближения значения $x=\sqrt[5]{a}$. Организовав вычисления по программе

$$a \; \boxed{П+} \; 1 \; \underbrace{\boxed{:}\;\boxed{=}\;\boxed{\times}\;\boxed{П\to x}\;\boxed{=}\;\boxed{\sqrt{\ }}\;\boxed{\sqrt{\ }}}_{\text{повторять}}$$

(для микрокалькулятора, не имеющего клавиши обмена содержимого регистра индикации и операционного регистра) или по программе

$$a \; \boxed{П+} \; 1 \; \underbrace{\boxed{:}\;\boxed{П\to x}\;\boxed{\leftrightarrow}\;\boxed{=}\;\boxed{\sqrt{\ }}\;\boxed{\sqrt{\ }}}_{\text{повторять}}$$

(для микрокалькулятора, содержащего клавишу обмена $\boxed{\leftrightarrow}$), можем получить путем последовательного повтора выделенной серии операций значение $x=\sqrt[5]{a}$ с максимальной точностью 10^{-7} при восьмиразрядном индикаторе.

Рассмотрим еще один пример. Покажем, как можно организовать вычисления при извлечении корня шестой степени из числа a, т. е. нахождении решения уравнения $x^6=a$.

Умножив обе части уравнения на x^2 и найдя x из левой его части, получим формулу для вычисления значения x с любой точностью: $x=\sqrt{\sqrt{\sqrt{ax^2}}}$, или $x=\sqrt{\sqrt{x\sqrt{a}}}$. С учетом последней формулы нетрудно составить программу вычислений:

$$a \; \boxed{\sqrt{\ }} \; \boxed{П+} \; \underbrace{\boxed{\times}\;\boxed{П\to x}\;\boxed{=}\;\boxed{\sqrt{\ }}\;\boxed{\sqrt{\ }}}_{\text{повторять}}$$

Как читатель уже успел заметить, все преобразования уравнений, решениями которых являются значения корней 3, 4, 5, 6-й степеней, а также возможные преобразования формул направлены на использование в программах вычислений имеющейся у микрокалькуляторов клавиши квадратного корня $\boxed{\sqrt{}}$. Конечно, имея инженерный микрокалькулятор, нет нужды обращаться к подобной организации вычислений при нахождении значений корней степени выше двух. Инженерные микрокалькуляторы могут выполнять такие вычисления с помощью специальной клавиши $\boxed{x^y}$ или $\boxed{y^x}$. Но давайте не будем спешить отвергать рассмотренный способ — вдруг он окажется полезным в других вычислениях. Пока же остановимся на геометрическом смысле примененного метода вычислений.

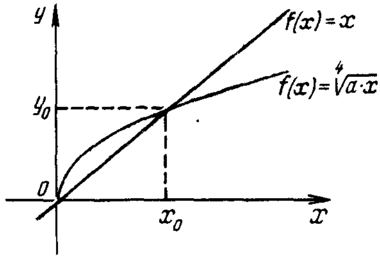


Рис 20

Обратимся к уравнению $x=\sqrt[4]{ax}$. Правая часть его представляет собой функцию $f(x)=\sqrt[4]{xa}$, а левая — функцию $f(x)=x$. Построим их графики (рис. 20). Они имеют общую точку (x_0, y_0), абсцисса которой x_0, как нетрудно догадаться, является решеиием исходного уравнения. Мы, взяв в качестве x_1 значение 1 и находя по приведенной программе значения x_2, x_3, ..., x_{14}, фактически «приближались» к искомому значению корня по ломаной так, как показано на рисуике 21. Если бы мы в качестве x_1 взяли число, лежащее правее корня (являющееся большим, чем корень уравнения), то в процессе вычислений мы «приближались» бы к нему так, как показано на рисунке 22. В математике описанный процесс иазывается итерационным и применяется достаточно широко для приближенного решения уравнений и их систем.

Но вернемся к извлечению корней, а именно к особенностям организации вычислений с использованием итераций. Применительно к микрокалькулятору, способному извлекать квадратиые корни, такая особенность заключается в том, что мы стремились так преобразовать данное уравнение, чтобы его правая часть

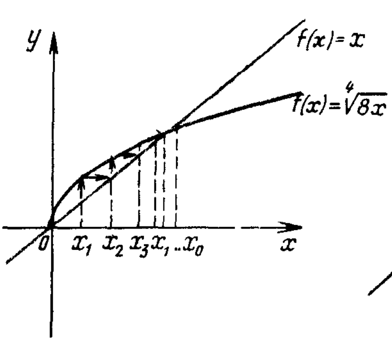


Рис 21

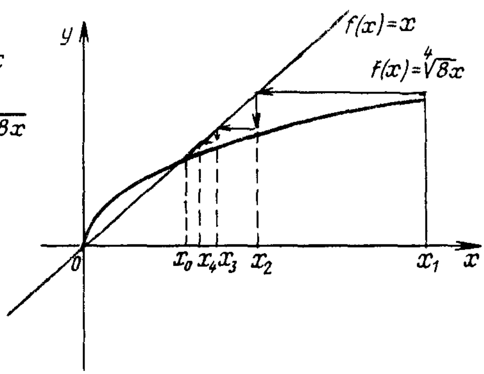


Рис. 22

содержала корни (корень), степень которых представляется в виде 2^k, где $k=1, 2, 3, \ldots$ Нетрудно заметить, что при малых значениях k между соседними членами последовательности 2, 4, 8, 16, ... разность невелика, и поэтому корни степеней, близких к 4-й и 8-й, можно вычислить по несложным программам так, как было показано выше. Однако не всегда можно эффективно организовать подобные вычисления. Например, при решении уравнения $x^{23}=a$ (т. е. нахождении $\sqrt[23]{a}$) после преобразований может быть получена одна из итерационных формул: $x_{i+1}=\sqrt{\sqrt{x_i\sqrt{\sqrt{\sqrt{ax_i}}}}}$ или $x_{i+1}=\sqrt{\frac{\sqrt{\sqrt{\sqrt{ax_i}}}}{x_i}}$, вычисления по которым несколько сложнее, чем выполнялись ранее.

Обобщим задачу. Найдем формулу, пригодную для извлечения корней любой степени из данного числа a.

Возьмем уравнение $x^n=a$, решением которого является $\sqrt[n]{a}$, и преобразуем его следующим образом. К обеим частям прибавим выражение nx^n, получим:

$$x^n+nx^n=nx^n+a.$$

Перенесем x^n из левой части в правую: $nx^n=nx^n-x^n+a$. Вынесем его за скобки и получим следующее уравнение:

$$nx^n=(n-1)\,x^n+a.$$

Разделив обе части этого уравнения на nx^{n-1} и вынеся в правой части общий множитель $\frac{n-1}{n}$ за скобки, получим формулу

$$x=\frac{n-1}{n}\cdot\left(x+\frac{a}{(n-1)\,x^{n-1}}\right),$$

пригодную для нахождения корней любой степени, причем без обращения к клавише $\boxed{\sqrt{\ }}$.

Покажем, как можно применить эту формулу для нахождения $\sqrt[6]{64}$. Переписав ее в виде

$$x_{i+1}=\frac{n-1}{n}\left(x_i+\frac{a}{(n-1)\,x_i^{n-1}}\right)$$

и заменив a и n их значениями (64 и 6 соответственно), получим следующую формулу для вычислений:

$$x_{i+1}=\frac{5}{6}\left(x_i+\frac{64}{5x_i^5}\right).$$

Ориентируясь на микрокалькулятор типа «Электроника БЗ-36», составим программу вычислений:

x_i $\boxed{П+}$ $\boxed{\times}$ $\boxed{=}$ $\boxed{=}$ $\boxed{=}$ $\boxed{=}$ $\boxed{\times}$ 5 $\boxed{:}$ 64 $\boxed{\leftrightarrow}$ $\boxed{+}$ $\boxed{П\to x}$ $\boxed{\times}$ 5 $\boxed{:}$ 6 $\boxed{=}$ $\boxed{СП}$

повторять, пока не будет достигнута заданная точность

В этой программе вычислений x_i — начальное приближение корня; новое приближение x_{i+1} получается после нажатия предпоследней клавиши — клавиши $\boxed{=}$.

Структура этой программы легко обозрима и читатели, имеющие микрокалькуляторы другого типа, могут без существенных затруднений разработать аналогичную программу вычислений, в которой будут учтены особенности клавишных операций конкретной модели микрокалькулятора.

Полагая $x_1=3$, найдем последовательно по приведенной программе:

$$x_2=\frac{5}{6}\cdot\left(3+\frac{64}{5\cdot 3^5}\right)=2{,}5438956$$

$$x_3=\frac{5}{6}\cdot\left(2{,}5438956+\frac{64}{5\cdot(2{,}5438956)^5}\right)=2{,}2200355$$

$$x_4=\frac{5}{6}\cdot\left(2{,}2200355+\frac{64}{5\cdot(2{,}2200355)^5}\right)=2{,}0478308$$

$$x_5=\frac{5}{6}\cdot\left(2{,}0478308+\frac{64}{5\cdot(2{,}0478308)^5}\right)=2{,}0027073$$

$$x_6=\frac{5}{6}\cdot\left(2{,}0027073+\frac{64}{5\cdot(2{,}0027073)^5}\right)=2{,}0000091$$

$$x_7=\frac{5}{6}\cdot\left(2{,}0000091+\frac{64}{5\cdot(2{,}0000091)^5}\right)=2$$

Итак, мы рассказали о возможных способах вычисления корней с помощью арифметических микрокалькуляторов, о способах, основывающихся на применении так называемых итерационных процессов. Удобство их при работе с микрокалькулятором состоит в том, что вычисления можно организовать с минимальным вводом числовых данных с клавиатуры и сериями из одинаковых последовательностей клавишных операций.

И если читатель хочет проверить, правильно ли он понял прочитанное и сумеет ли самостоятельно находить корни с помощью микрокалькулятора так, как описано выше, то он может обратиться к следующим упражнениям.

Проверь себя

1. Применяя программы, приведенные в тексте, найдите с точностью до 10^{-5} значения:

а) $\sqrt[3]{18}$; б) $\sqrt[5]{24}$; в) $\sqrt[6]{36}$; г) $\sqrt[8]{300}$.

2. Составьте формулы и программы вычислений с использованием клавиши $\boxed{\sqrt{\ }}$ для нахождения значений следующих корней:

а) $\sqrt[7]{a}$; б) $\sqrt[9]{a}$; в) $\sqrt[10]{a}$; г) $\sqrt[15]{a}$; д) $\sqrt[17]{a}$.

3. Пользуясь составленными вами программами, вычислите с точностью до 10^{-6}:

а) $\sqrt[7]{20}$; б) $\sqrt[9]{100}$; в) $\sqrt[10]{500}$; г) $\sqrt[15]{1234}$; д) $\sqrt[17]{56\,789}$.

4. Применяя формулу для нахождения значения $\sqrt[n]{a}$, вычислите с точностью до 10^{-7}:

а) $\sqrt[7]{429}$; б) $\sqrt[3]{10}$; в) $\sqrt[6]{40}$; г) $\sqrt[9]{800}$.

МИКРОКАЛЬКУЛЯТОР И НЕПРЕРЫВНЫЕ ДРОБИ

Читатель наверняка знаком с обыкновеиными дробями и знает, как выполняются действия с ними.

Но сейчас речь пойдет о не совсем обычных дробях, а о таких дробях, которые называют непрерывными, или цепными.

Всякое выражение вида

$$a_0+\cfrac{a_1}{b_1+\cfrac{a_2}{b_2+\cfrac{a_3}{b_3+\ldots+\cfrac{a_n}{b_n}}}}, \tag{1}$$

где a_i $(i=0,\ 1,\ 2,\ldots,\ n)$ и b_j $(b_j\neq 0,\ j=1,\ 2,\ldots,\ n)$ — целые числа, будем называть непрерывной цепной дробью.

Если некоторое число представлено в виде непрерывной дроби, то говорят, что получено разложение числа в непрерывную дробь.

Например, каждая из следующих непрерывных дробей

$$\cfrac{1}{2+\cfrac{3}{4+\cfrac{5}{6+\cfrac{7}{8+\cfrac{9}{10}}}}} \qquad 5+\cfrac{5}{5+\cfrac{5}{5+\cfrac{5}{5+}}}$$

задает некоторое число.

Если в непрерывной дроби все a_i равны 1, то такую дробь называют обыкновенной непрерывной дробью. Пример такой дроби приведен ниже:

$$1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{5+\ldots}}}}$$

Непрерывная дробь может быть как конечной, так и бесконечной. В случае, когда она конечна, говорят: непрерывная дробь n-го порядка, имея в виду номер n последнего знаменателя в разложении (1).

Покажем, как можно выполнить разложение числа в непрерывную дробь. Пусть у нас имеется число, представленное неправильной обыкновенной дробью $\frac{43}{23}$. Выделяя из него целую часть, запишем $\frac{43}{23}=1+\frac{20}{23}$. Тогда, представляя $\frac{20}{23}$ в виде $\frac{1}{\frac{23}{20}}$, перепишем предыдущее равенство в виде $\frac{43}{23}=1+\frac{1}{\frac{23}{20}}$.

Взяв теперь $\frac{23}{20}$, выделим снова целую часть: $\frac{23}{20}=1+\frac{3}{20}$, а дробную представим в виде $\frac{1}{\frac{20}{3}}$. Тогда $\frac{23}{20}=1+\frac{1}{\frac{20}{3}}$.

Проделав то же самое с дробью $\frac{20}{3}$, получим $\frac{20}{3}=6+\frac{1}{\frac{3}{2}}$, или с учетом того, что $\frac{3}{2}=1+\frac{1}{2}$, можно записать $\frac{20}{3}=6+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2}}$.

Тогда, заменив этим представлением дробь $\frac{20}{3}$ в представлении дроби $\frac{23}{20}$, а ею соответственно знаменатель в представлении данной дроби $\frac{43}{23}$, получим следующую непрерывную дробь:

$$\frac{43}{23}=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2}}}}$$

А теперь возьмем в руки микрокалькулятор и попробуем найти числа, представленные следующими неправильными дробями:

$$\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+}}}} \qquad \cfrac{3}{3+\cfrac{3}{3+\cfrac{3}{3+\cfrac{3}{3+}}}}$$

Пользуясь несложными программами, основывающимися на константных вычислениях, как у «Электроники Б3-36»

$\boxed{+}$ a $\boxed{-}$ $\boxed{1/x}$

повторять, пока меняется число на индикаторе или обычных, как у «Электроники МК-60» a $\boxed{:}$ $\boxed{=}$ $\boxed{+}$ a $\boxed{=}$ $\boxed{:}$ $\boxed{=}$

повторять, пока меняется число на индикаторе

найдем значеиия 0,6180339 и 0,3027756 для первой и второй дробей соответственно. При этом будем иметь ввиду, что мы получили не точное значение дроби, а лишь ее приближение с точностью до 10^{-7}.

На основе этой программы найдем теперь приближенное значение дроби:

$$1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\dots}}}}}\quad \text{полагая } a=2.$$

Если ваш микрокалькулятор ие имеет клавиши обращения к операционному регистру или нахождения обратной величины числа, можно воспользоваться первой из приведенных программ, внеся в нее незначительные изменения.

Как нетрудно заметить, после серии вычислений на индикаторе микрокалькулятора установится число 0,4142135, которое в сумме с единицей даст 1,4142135.

Не правда ли, знакомое число? Да, это $\sqrt{2}$.

Странно на первый взгляд. Но не будем спешить с выводами, а обратимся к рассуждениям и попробуем выясиить, действительно ли число $\sqrt{2}$ можно представить в виде непрерывной дроби.

Итак, приступим. Не вызывает сомнений истинность равенства

$$\sqrt{2}=1+(\sqrt{2}-1).$$

Но $\sqrt{2}-1=\frac{1}{\sqrt{2}+1}$, что нетрудно проверить:

$$(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)=(\sqrt{2})^2-1=2-1=1.$$

Теперь опять представляя $\sqrt{2}=1+(\sqrt{2}-1)$, получим, что $\sqrt{2}=1+\frac{1}{1+(1+(\sqrt{2}-1))}=1+\frac{1}{2+(\sqrt{2}-1)}$. Снова заменяя $\sqrt{2}-1$ через частное и подставляя его в последиее равенство, запишем

$$\sqrt{2}=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+(\sqrt{2}-1)}}.$$

Продолжая те же действия с $\sqrt{2}$, находящимся в самом нижнем из знаменателей выражении, придем в конце концов к равенству

$$\sqrt{2}=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\dots}}}}},$$

которое и является разложением $\sqrt{2}$ в непрерывиую дробь.

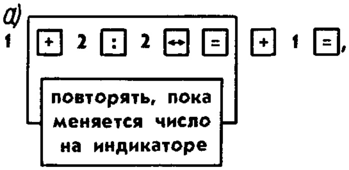
Таким образом, высказанное предположение оказалось верным и навел на эту мысль наш микрокалькулятор.

Найдем теперь приближенное значение непрерывной дроби

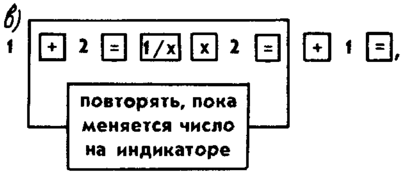
$$1+\cfrac{2}{2+\cfrac{2}{2+\cfrac{2}{2+\cfrac{2}{2+\cfrac{2}{2+\dots}}}}}. \tag{2}$$

Воспользуемся любой подходящей программой из приведенных ниже.

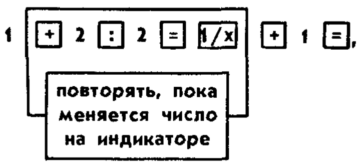
а)



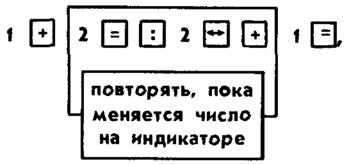
в)



б)



г)



(Для микрокалькулятора «Электроника БЗ-36» годятся программы а) — г), а для микрокалькулятора типа «Электроиика МК-71» — программы в) — г).)

Получим на индикаторе число 1,732050808.

Вычислим $\sqrt{3}$ и сравним с предыдущим результатом. Как видим, результаты совпали. На основании этого сравнения можно сделать предположение:

$$\sqrt{3}=1+\cfrac{2}{2+\cfrac{2}{2+\cfrac{2}{2+\cfrac{2}{2+\dots}}}}.$$

Действительно, аналогично примеру с разложением в непрерывную дробь $\sqrt{2}$ можно записать $\sqrt{3}=1+(\sqrt{3}-1)$. Учитывая, что $\sqrt{3}-1=\frac{2}{1+\sqrt{3}}$, получим следующее равенство:

$$\sqrt{3}=1+\frac{2}{1+\sqrt{3}}.$$

Продолжая этот процесс, придем в конце концов к разложению (2), значение которого мы уже вычисляли. Этот факт читателю нетрудно проверить.

Довольно интересное разложение в непрерывную дробь допускает знаменитое число π ($\pi=3{,}141592654$ ...):

$$\pi=\cfrac{4}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{9}{2+\cfrac{25}{2+\cfrac{49}{+2}}}}}.$$

В этом разложении числители всех дробей, кроме первого, представляют собой квадраты нечетных натуральных чисел.

Очевидно, ограничиваясь в вычислениях каким-то конкретным числом данных, мы сможем получать различные приближения числа π. Действительно, $\pi\approx\frac{4}{1}=4$

$$\pi\approx\cfrac{4}{1+\cfrac{1}{2}}=2{,}6666666...$$

$$\pi\approx\cfrac{4}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{9}{2}}}=3{,}466666... \qquad \pi\approx\cfrac{4}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{9}{2+\cfrac{}{2+\cfrac{225}{2}}}}}=3{,}252365...$$

$$\pi\approx\cfrac{4}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{9}{2+\cfrac{25}{2}}}}=2{,}895238... \qquad \pi\approx\cfrac{4}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{9}{2+\cfrac{}{2+\cfrac{625}{2}}}}}=3{,}070254618.$$

$$\pi\approx\cfrac{4}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{9}{2+\cfrac{25}{2+\cfrac{49}{2}}}}}=3{,}339682... \qquad \pi\approx\cfrac{4}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{9}{2+\cfrac{}{2+\cfrac{2025}{2}}}}}=3{,}099944...$$

Как видим, получаемые результаты достаточно медленно приближаются к известному значению числа, однако если взять достаточно большое значение в числителе последней дроби, то получим довольно близкое приближение числа π.

Еще одно представление числа π — в виде бесконечного произведения $\pi=4\cdot\frac{8}{9}\cdot\frac{24}{25}\cdot\frac{48}{49}\cdot\frac{80}{81}\cdot\frac{120}{121}\cdot\frac{168}{169}\cdot\ \ldots\ \cdot\frac{(2n-1)^2-1}{(2n-1)^2}\ \ldots$ — может заинтересовать читателя. С микрокалькулятором в руках не составляет большого труда найти необходимые приближения числа π, используя в вычислениях последовательно операции деления и умножения. Закономерность образования новых множителей произведения проста: они представляют собой дроби, знаменатели которых являются квадратами нечетных натуральных чисел, а числители их на единицу меньше знаменателей.

Для тех, кто вместе с нами проделал этот небольшой экскурс в непрерывные дроби, предлагаем попробовать свои силы в самостоятельном построении таких дробей и нахождении их приближенных значений.

Проверь себя

1. Представьте число $\sqrt{5}$ в виде непрерывной дроби и, составив программу вычислений, найдите с помощью микрокалькулятора приближенное значение этой дроби с точностью до 10^{-7}. Полученный результат проверьте, воспользовавшись клавишей $\boxed{\sqrt{\ }}$.

2. Представьте число $\sqrt{6}$ в виде непрерывной дроби и, составив программу вычислений, найдите с помощью микрокалькулятора приближенное значение этой дроби с точностью до 10^{-7}. Полученный результат возведите в квадрат и сравните с подкоренным выражением.

3. Представьте число $\sqrt{7}$ в виде непрерывной дроби и, составив программу вычислений, найдите с помощью микрокалькулятора приближенное значение этой дроби с точностью до 10^{-4}. Сравните полученный результат с найденным по методу итераций (см. «Микрокалькулятор и извлечение корней») Какой метод быстрее дает необходимую точность?

4. Можно ли представить непрерывной дробью число 2? Если да, то какой будет эта дробь?

5. Можно ли представить непрерывной дробью число 3? Если да, то какой будет эта дробь?

6. Пользуясь представлением числа π в виде бесконечного произведения, найдите с помощью микрокалькулятора первые двадцать приближенний этого числа. Какую точность дает десятое приближение? двадцатое?

СИСТЕМЫ СЧИСЛЕНИЯ И МИКРОКАЛЬКУЛЯТОР

Мы привыкли пользоваться десятичной системой счисления. Это означает, что предметы мы считаем единицами, десятками, сотнями, тысячами и т. д., причем для записи разрядов используем один и тот же набор из десяти цифр: 0, 1, 2, ..., 9. В основе такой системы счисления лежит число 10.

А если считать не десятками, а двойками или тройками? Тоже ведь можно. В этом случае для записи чисел понадобится уже не десять цифр, а соответственно две или три цифры: 0, 1 или 0, 1, 2. А система счисления в этом случае будет называться двоичной (троичной).

В десятичной системе счисления каждое число может быть записано в виде суммы разрядных слагаемых, например:

$$37\,248=3\cdot 10\,000+7\cdot 1\,000+2\cdot 100+4\cdot 10+8=$$
$$=3\cdot 10^4+7\cdot 10^3+2\cdot 10^2+4\cdot 10^1+8\cdot 10^0.$$

В двоичной системе счисления каждое число также может быть представлено аналогичным образом — только цифр для обозначения разрядных слагаемых будет использоваться не десять, а две (0 и 1), например:

$$111\,011\,001_2=1\cdot 2^8+1\cdot 2^7+1\cdot 2^6+0\cdot 2^5+1\cdot 2^4+1\cdot 2^3+0\cdot 2^2+$$
$$+0\cdot 2^1+1=1\cdot 2^8+1\cdot 2^7+1\cdot 2^6+1\cdot 2^4+1\cdot 2^3+1\cdot 2^0=256+128+$$
$$+64+16+8+1=473_{10}.$$

Еще один пример с записью числа в троичной системе счисления:

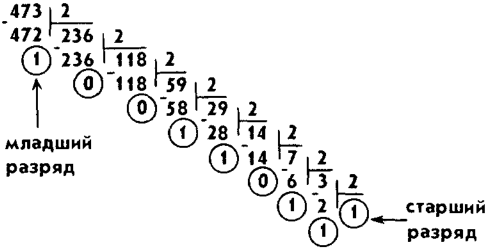
$$12\,101_3=1\cdot 3^4+2\cdot 3^3+1\cdot 3^2+0\cdot 3^1+1\cdot 3^0=$$
$$=81+54+9+0+1=145_{10}.$$

Из приведенных примеров ясно, как может выглядеть запись числа в любой системе счисления и как можно перевести его в десятичную систему счисления.

А как сделать наоборот: перевести число из десятичной системы счисления в систему счисления с другим основанием, например двоичную или троичную?

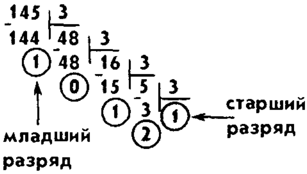
Для этой цели существует алгоритм перевода чисел из системы счисления с одним основанием в систему счисления с другим основанием. Нас в данном случае будет интересовать перевод чисел из десятичной системы счисления в систему счисления с основанием 2 и основанием 3.

Обратимся к примеру. Переведем число 473_{10} в двоичную систему счисления. Для этого будем делить на 2 и выписывать остатки от деления исходного числа и последующих частных до получения частного, меньшего двух, а затем выпишем полученные остатки начиная с последнего:



Эти остатки и образуют число в системе счисления с основанием 2: $473_{10} = 111\,011\,001_2$.

Аналогично переведем число 145_{10} в троичную систему счисления:



Из найденных остатков образуем число $12\,101_3$, которое, как было выяснено выше, в десятичной системе счисления будет записано как 145.

А можно ли для перевода чисел из десятичной системы счисления в двоичную применить микрокалькулятор?

Давайте проанализируем приведенный пример, а именно выпишем результаты деления на 2 данного числа и последующих частных, выполняемые с помощью микрокалькулятора. Их удобно представить в виде таблицы 11.

Таблица 11

Десятичная система счисления				Разрядная двоичная цифра (остаток от деления)
Делимое	Делитель	Частное	Целая часть частного (новое делимое)	
473	2	236,5	236	1
236	2	118	118	0
118	2	59	59	0
59	2	29,5	29	1
29	2	14,5	14	1
14	2	7	7	0
7	2	3,5	3	1
3	2	1,5	1	1
1	2	0,5	0	1

Как видно из этой таблицы, если в процессе последовательного деления на 2 в частном появляется дробная часть (пять десятых), то в столбец разрядных двоичных цифр заносится единица, а если в частном нет дробной части, то в столбец разрядных двоичных цифр заносится нуль. Записав в строку разрядные двоичные цифры (снизу вверх), получим двоичное представление числа.

Следует обратить внимание, что делимое в каждой строке таблицы — число целое, которое (за исключением первого, равного исходному числу) представляет собой целую часть частного от деления предыдущего делимого на 2. Наличие дробной части в частном свидетельствует о существовании остатка.

Все вычисления, результаты которых представлены в таблице, можно достаточно быстро выполнить с помощью микрокалькулятора по программе:

а $\boxed{:}$ 2 $\boxed{=}$ если на индикаторе число целое, то выписать цифру 0, а если дробное, то выписать цифру 1 и вычесть из полученного результата 0,5

повторять, пока на индикаторе не 0

После выполнения этой программы для получения двоичного представления исходного числа надо полученную последовательность двоичных цифр переписать в обратном порядке.

Пусть читателя не смущает кажущаяся сложность вычислений. На самом деле они требуют только внимания, что иллюстрируется следующим примером:

581 $\boxed{:}$ 2 $\boxed{=}$ целое? $\boxed{-}$ 0,5 $\boxed{:}$ 2 $\boxed{=}$ целое? $\boxed{:}$ 2 $\boxed{=}$ целое? $\boxed{-}$ 0,5 $\boxed{:}$
цифры числа: 1 0 1

2 $\boxed{=}$ целое? $\boxed{:}$ 2 $\boxed{=}$ целое? $\boxed{:}$ 2 $\boxed{=}$ целое? $\boxed{:}$ 2 $\boxed{=}$ целое? $\boxed{-}$ 0,5 $\boxed{:}$
0 0 0 1

2 $\boxed{=}$ целое? $\boxed{:}$ 2 $\boxed{=}$ целое? $\boxed{:}$ 2 $\boxed{=}$ целое? $\boxed{-}$ 0,5 $\boxed{=}$ на индикаторе нуль!
0 0 1

Записав полученную последовательность двоичных цифр с конца, получим $581_{10} = 10\ 010\ 000\ 101_2$.

Попробуем теперь подобным образом организовать вычисления, чтобы можно было получать троичные представления десятичных чисел, т. е. переводить числа из десятичной системы счисления в троичную с использованием микрокалькулятора.

Начнем с заполнения таблицы, аналогичной приведенной выше, на примере перевода числа 424_{10} в троичную систему счисления (табл. 12).

Таблица 12

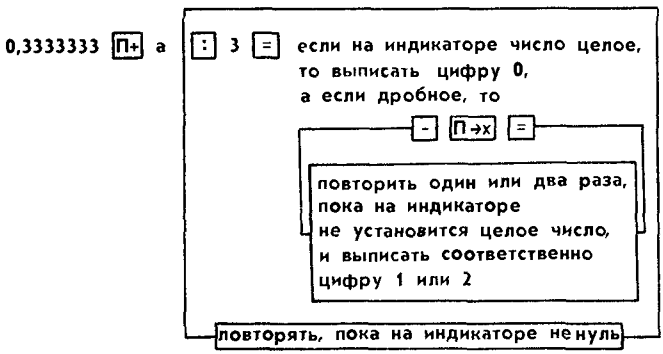
Десятичная система счисления				Разрядная троичная цифра (остаток от деления)
Делимое	Делитель	Частное	Целая часть частного (новое делимое)	
424	3	141,333	141	1
141	3	47	47	0
47	3	15,666	15	2
15	3	5	5	0
5	3	1,666	1	2
1	3	0,333	0	1

Из приведенной таблицы нетрудно заметить, что дробная часть 0,333... частного дает троичную разрядную цифру 1; дробная часть 0,666... частного дает троичную разрядную цифру 2; если же частное целое, то в качестве разрядной троичной цифры берется 0.

Действительно, наличие в частном дробной части 0,333... свидетельствует о том, что делимое может быть представлено в виде $a=3k+1$, т. е. при делении на 3 будет давать в остатке 1. Наличие в частном дробной части 0,666... свидетельствует о возможности представления делимого в виде $a=3k+2$, которое дает при делении на 3 в остатке 2. Если частное является целым числом, то, очевидно, делимое делится на 3, а значит, представимо в виде $a=3k$ и имеет нулевой остаток.

Выписав из нашей таблицы разрядные троичные цифры снизу вверх, получим 120 201 — число, являющееся троичным представлением десятичного числа 424.

Учитывая сказанное, составим программу вычислений для перевода чисел из десятичной системы счисления в троичную. При этом учтем, что 0,666... = 0,333... + 0,333..., а значит, при выделении целой части числа вида 0,666... можно будет дважды вычесть из него 0,333..., которое удобно сохранять в регистре памяти. Возможный вариант такой программы приведен ниже:



Вычисления по этой программе также не представляют какой-либо сложности, о чем можно судить по следующему конкретному примеру, дающемуся без комментариев:

$$0{,}3333333\ \boxed{П+}\ 424\ \boxed{:}\ 3\ \boxed{=}\ \boxed{-}\ \boxed{П\to x}\ \boxed{=}\ \boxed{:}\ 3\ \boxed{=}$$

троичные цифры числа: 1 0

$$\boxed{:}\ 3\ \boxed{=}\ \boxed{-}\ \boxed{П\to x}\ \boxed{-}\ \boxed{П\to x}\ \boxed{:}\ 3\ \boxed{=}\ \boxed{-}\ \boxed{П\to x}\ \boxed{-}\ \boxed{П\to x}\ \boxed{:}\ 3\ \boxed{=}\ \boxed{-}\ \boxed{П\to x}\ \boxed{=}$$

2 0 2 1

Выписывая полученные троичные цифры числа начиная с конца, найдем, что $424_{10}=120\ 201_3$.

Конечно, читатель заметил аналогию в вычислениях при переводе чисел из десятичной системы счисления в двоичную и троичную системы счисления, аналогию, на основе которой могут быть составлены программы и для систем счисления с другими основаниями, например 4 и 5.

В заключение этого небольшого экскурса предлагаем несколько заданий.

Проверь себя

1. Пользуясь имеющимся у вас микрокалькулятором, переведите из десятичной системы счисления в двоичную следующие числа:

а) 771; б) 2 914; в) 4 096; г) 1 888.

2. Пользуясь имеющимся у вас микрокалькулятором, переведите из десятичной системы счисления в троичную следующие числа:

а) 97; б) 827; в) 1 111; г) 2 187.

3. Составьте таблицу перевода числа 1 234 из десятичной системы счнсления в четверичную.

4. Разработайте программу вычислений для перевода чисел из десятичной системы счисления в четверичную.

ЧТО МОЖНО ПРОЧЕСТЬ О МИКРОКАЛЬКУЛЯТОРАХ

Сейчас издано достаточно много литературы о вычислениях с помощью микрокалькуляторов. Среди этой литературы имеются и специальные издания, рассчитанные на специалистов, и издания, предназначенные для широкого круга пользователей. Много книг посвящено вычислениям с применением программируемых микрокалькуляторов.

Предлагаемый ниже список литературы лишь небольшая часть выпущенного за последние годы. Мы надеемся, что каждый, кого заинтересовали предложенные в этой книге вопросы и различные применения микрокалькуляторов, в процессе их рассмотрения сможет расширить свои знания, прочтя следующие издания:

1. Виленкин Н. Я. и др. Микрокалькулятор — школьнику: Книга для учащихся.— М.: Просвещение, 1986.—95 с.

2. Гильде В., Альтрихтер З. С микрокалькулятором в руках: Пер. с нем.—2-е изд.— М.: Мир, 1987.—215 с.

3. Кибернетика. Микрокалькуляторы в играх и задачах.— М.: Наука, 1986.—160 с.

4. Кройль Г. Что умеет мой микрокалькулятор: Пер. с нем.— М.: Мир, 1981.—133 с.

5. Лодатко Е. А. Школьнику о вычислениях с микрокалькулятором: Книга для учащихся.— М.: Просвещение, 1985.—96 с.

6. Романовский Т. Б. Микрокалькуляторы в рассказах и играх.— Минск: Изд-во Университета, 1987.—192 с.

7. Романовский Т. Б. Микрокомпьютер в школе: Пособие для учащихся.— Рига: Звайгзне, 1986.—239 с.

8. Трохименко Я. К., Любич Ф. Д. Микрокалькулятор, Ваш ход! — М.: Радио и связь, 1985.—224 с.

9. Трохименко Я. К. Игры с микроЭВМ.— Киев: Техника, 1986.—120 с.

10. Чакань А. Что умеет карманная ЭВМ?: Пер. с венгерск.— М.: Радио и связь, 1982.—144 с.

Тем, кто при чтении этой книги заинтересовался математическими идеями, положенными нами в основу экскурсов, можно рекомендовать такие книги:

1. Воробьев Н. Н. Числа Фибоначчи.—5-е изд.— М.: Наука, 1984.—144 с.

2. Кордемский Б. А. Математическая смекалка.—4-е изд.— М.: ГИТТЛ, 1957.—575 с.

3. Кордемский Б. А., Ахадов А. А. Удивительный мир чисел: Математические головоломки и задачи для любознательных: Книга для учащихся.— М.: Просвещение, 1986.—144 с.

4. Леман И. Увлекательная математика: Пер. с нем.— М.: Знание, 1985.—272 с.

5. Нагибин Ф. Ф. Математическая шкатулка.—4-е изд.— М.: Просвещение, 1984.—144 с.

Применение клавиши обмена в арифметических операциях

Таблица 1

Выражение	Программа вычисления	
	без клавиши обмена	с клавишей обмена
$a-b$	$a \boxed{-} b \boxed{=}$	$b \boxed{-} a \boxed{\langle-\rangle} \boxed{=}$
$a \div b$	$a \boxed{\div} b \boxed{=}$	$b \boxed{\div} a \boxed{\langle-\rangle} \boxed{=}$

Движение операндов в регистрах микрокалькулятора при вычислениях со скобками

Таблица 2

Нажимаемая клавиша	Содержимое			
	регистра индикации	операционного регистра	стекового регистра A	стекового регистра B
3	3	0	0	0
$\boxed{+}$	3	3	0	0
$\boxed{[\ (}$	3	3	3	0
4	4	3	3	0
$\boxed{+}$	4	4	3	0
$\boxed{[\ (}$	4	4	4	3
5	5	4	4	3
$\boxed{+}$	5	5	4	3
6	6	5	4	3
$\boxed{)\ ]}$	11	4	3	0
$\boxed{)\ ]}$	15	3	0	0
$\boxed{=}$	18	15	0	0

Основные процентные вычисления

Таблица 3

№ п/п	Процентные вычисления	Программа
1	Нахождение $m\%$ от числа a	$a \boxed{\times} m \boxed{\%}$
2	Нахождение процентного отношения чисел a и b	$a \boxed{\times} b \boxed{\%}$
3	Нахождение числа, $m\%$ которого равны числу a	$a \boxed{\div} m \boxed{\%}$
4—5	Увеличение (уменьшение) числа a на $m\%$	$a \boxed{\pm} m \boxed{\%}$ или $a \boxed{\pm} m \boxed{\%} \boxed{=}$
6	Умножение числа a на $m\%$ от него	$a \boxed{\times} m \boxed{\%} \boxed{=}$
7	Деление числа a на $m\%$ от него	$a \boxed{\div} m \boxed{\%} \boxed{=}$

Действия клавиш обращения к регистру памяти

Таблица 4

Нажимаемая клавиша	Действие
$\boxed{\text{П}+}$	К числу, хранящемуся в регистре памяти, прибавляется число, находящееся в регистре индикации. Результат помещается в регистр памяти
$\boxed{\text{П}-}$	Из числа, хранящегося в регистре памяти, вычитается число, находящееся в регистре индикации. Результат помещается в регнстр памяти
$\boxed{\text{П}\times}$	Число, хранящееся в регистре памяти, умножается на число, находящееся в регистре индикации. Результат помещается в регистр памяти
$\boxed{\text{П}\div}$	Число, хранящееся в регистре памяти, делится на число, находящееся в регистре индикации. Результат помещается в регистр памяти
$\boxed{\text{П}+x^2}$	К числу, хранящемуся в регистре памяти, прибавляется квадрат числа, находящегося в регистре индикации. Результат помещается в регистр памяти
$\boxed{\text{ЗП}}$ или $\boxed{x\to\text{П}}$	Число, хранящееся в регистре индикации, записывается в регистр памяти. Содержимое регистра индикации ие изменяется
$\boxed{\text{ИП}}$ или $\boxed{\text{П}\to x}$	Число, хранящееся в регистре памяти, вызывается в регистр индикации. Содержимое регистра памяти ие изменяется
$\boxed{x\to\text{П}}$	Обмен содержимым регистров индикации и памяти
$\boxed{\text{СП}}$	Запись нуля в регистр памяти

Правила вычисления значений функций

Таблица 5

Функция	Допустимые значения аргумента	Правила вычисления на микрокалькуляторе
$y={}^{1}/_{x}$ $y=\sqrt{x}$ $y=\lg x$ $y=\ln x$ $y=e^{n}$ $y=n!$ $y=\sin x$ $y=\cos x$ $y=\operatorname{tg} x$ $y=x^{2}$ $y=\sqrt[3]{x}$	$x\neq 0$ $x\geqslant 0$ $x>0$ $x>0$ $-288\leqslant n\leqslant 231$ $0<n<70$ $\|x\|\leqslant 157$ (рад) $\|x\|\leqslant 9000°$ $\|x\|\leqslant 157$ (рад) $\|x\|\leqslant 8\,910°$ $\|x\|\leqslant 157$ (рад) $\|x\|\leqslant 9\,000°$	1) Вводится значение аргумента — число x 2) Нажимается префиксная клавиша $\boxed{F}$ (если это необходимо) 3) Нажимается одна из клавиш: $\boxed{{}^{1}/_{x}}$, $\boxed{\sqrt{\ }}$, $\boxed{\lg}$, $\boxed{\ln}$, $\boxed{e^{n}}$, $\boxed{n!}$, $\boxed{\sin}$, $\boxed{\cos}$, $\boxed{\operatorname{tg}}$, $\boxed{x^{2}}$, $\boxed{\sqrt[3]{x}}$ Общий вид программы: $x\,\boxed{F}\,\boxed{*}$
$y=\arcsin x$ $y=\arccos x$ $y=\operatorname{arctg} x$	$\|x\|\leqslant 1$ $\|x\|\leqslant 1$ $\|x\|\leqslant 210\,000$	1) Вводится значение аргумента — число x 2) Нажимается клавиша обратной функции $\boxed{\mathrm{ARC}}$ (если необходимо, вместе с префиксной клавишей) 3) Нажимается одна из клавиш: $\boxed{\sin}$, $\boxed{\cos}$, $\boxed{\operatorname{tg}}$ Общий вид программы: $x\,\boxed{\mathrm{ARC}}\,\boxed{*}$ или $x\,\boxed{F}\,\boxed{\mathrm{ARC}}\,\boxed{*}$
$y=x^{n}$ $z=\sqrt[x]{y}$	$x>0$, $n\leqslant 230/\ln x$	1) Вводится значение основания — число x 2) Нажимается клавиша показательной функции $\boxed{F}\,\boxed{x^{y}}$ или корня $\boxed{F}\,\boxed{\sqrt[x]{y}}$ 3) Нажимается клавиша итога $\boxed{=}$ (или одна из клавиш операций $\boxed{+}$, $\boxed{-}$, $\boxed{\times}$, $\boxed{\div}$) Общий вид программы: $x\,\boxed{F}\,\boxed{x^{y}}\,n\,\boxed{*}$

СОДЕРЖАНИЕ

Учебное издание

Абдуллаев Исмаил

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ С МИКРОКАЛЬКУЛЯТОРОМ

Зав. редакцией *Т. А. Бурмистрова*
Редактор *Л. М. Котова*
Младшие редакторы *Л. И. Заседателева, Н. А. Шагирова*
Художник *М. И. Суворов*
Художественный редактор *Т. Г. Никулина*
Техиический редактор *С. С. Якушкина*
Корректор *О. В. Ивашкина*

ИБ № 13470

Сдано в набор 15.12.89. Подписано к печати 07.05.90. Формат $60\times90^1/_{16}$. Бум. офс. № 2. Гарнитура литературная. Печать офсет. Усл. печ. л. 5,0. Усл. кр.-отт. 5,62. Уч.-изд. л. 4,47. Тираж 300 000 экз. Заказ 2665. Цена 20 к.

Ордена Трудового Красного Знамени издательство «Просвещение» Государственного комитета РСФСР по делам издательств, полиграфин и книжной торговли. 129846, Москва, 3-й проезд Марьиной рощи, 41.

Набрано на Саратовском ордена Трудового Красного Знамени полиграфическом комбинате Государственного комитета РСФСР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. 410004, Саратов, ул. Чернышевского, 59.

Отпечатано на Смоленском полиграфкомбинате Госкомиздата РСФСР. 214020, Смоленск, ул. Смольянинова, 1.