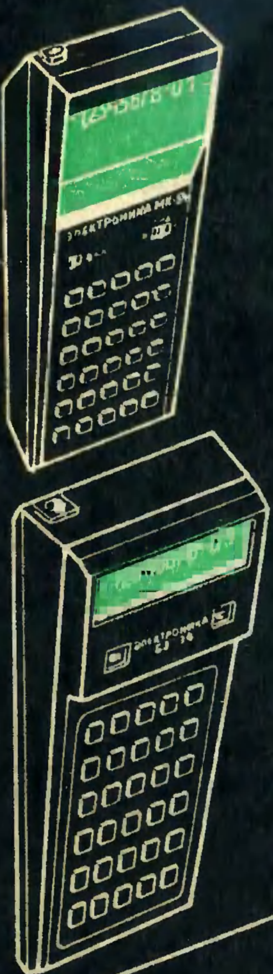
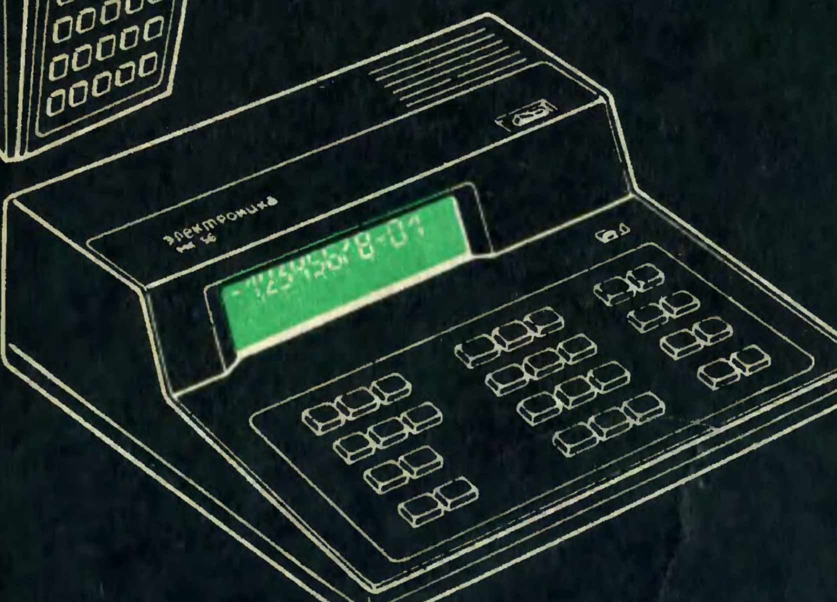
А. Н. Цветков, В. А. Епанечников

ПРИКЛАДНЫЕ ПРОГРАММЫ ДЛЯ МИКРОЭВМ

„Электроника Б3-34" „Электроника МК-56" „Электроника МК-54"





А.Н. Цветков, В.А. Епанечников

ПРИКЛАДНЫЕ ПРОГРАММЫ ДЛЯ МИКРОЭВМ „Электроника БЗ-34" „Электроника МК-56" „Электроника МК-54"

Москва
«Финансы и статистика»
1984

ББК 32.973.2
Ц27

Рецензент Б. А. ХАДЖИ

Цветков А. Н., Епанечников В. А.
Ц27 Прикладные программы для микроЭВМ «Электроника Б3-34», «Электроника МК-56», «Электроника МК-54». — М.: Финансы и статистика, 1984. — 175 с., ил.

60 к. 30 000 экз.

Книга содержит алгоритмы и программы, позволяющие автоматизировать процесс решения типовых математических, научно-технических, экономико-статистических и учебных задач.
Для работников ВЦ, отделов вычислительной техники, научно-исследовательских и проектно-конструкторских организаций, экономистов и статистиков.

Ц $\frac{2405000000-037}{010(01)-84}$ 106—84

ББК 32.973.2
6Ф7.3

ВВЕДЕНИЕ

«Электроника Б3-34» (и ее аналоги «Электроника» МК-54 и МК-56) — вторая отечественная микроЭВМ индивидуального пользования. По сравнению с первой моделью Б3-21 она обладает заметными преимуществами. Значительно больший объем памяти, возможность косвенной адресации, наличие операционного стека дают возможность решать с помощью новых машин существенно более широкий круг задач.

Многое в микроЭВМ стало более удобным: проще система адресации, указание адресов переходов; проще организуются циклы; стековая память заменена регистрами прямого доступа. Устранены многие конструктивные недостатки, свойственные, как правило, первым моделям.

Для реализации потенциальных возможностей, заложенных в машине, авторы попытались разработать типовые программы, снабдив их подробными инструкциями и примерами, чтобы на подготовку и вычисления уходило минимальное время. При этом учтен опыт предыдущих публикаций [16, 18, 15, 14] и проанализированы предложения читателей книги [17].

Для использования прикладных программ достаточно ознакомиться с руководством по эксплуатации машины.

Работа с прикладными программами. Все программы, приведенные в книге, с точностью до обозначений годятся для микроЭВМ «Электроника» Б3-34, МК-56 и МК-54. Отдельные тождественные по существу операции, обозначенные на этих типах машин по-разному, с целью унификации приведены к обозначениям машины Б3-34. В частности,

1. Операции пересылки чисел из одного регистра в другой

ПN⟶x	обозначены	ИПN
x⟶ПN	»	ПN
x⟷y и $\overset{\rightarrow}{\underset{\leftarrow}{xy}}$	»	⇄
В↑	»	↑

2. Операция кольцевого передвижения информации в стеке обозначена $\boxed{F,}$.

3. Операции вычисления обратных тригонометрических функций

$\sin^{-1}$	обозначены	arcsin
$\cos^{-1}$	»	arccos
tg^{-1}	»	arctg

Описание каждой программы содержит:

алгоритм вычислений и расчетные формулы;

текст программы;

таблицу распределения числовой памяти машины (адресуемых регистров);

требования к подпрограммам (если они используются);

инструкцию по работе с программой;

данные о времени вычислений в автоматическом режиме;

один или два примера.

Предполагается, что читатель знаком с руководством по эксплуатации машины и умеет, если нужно, составить подпрограмму вычисления значений конкретной функции. Для этого могут оказаться полезными подпрограммы, содержащиеся в примерах.

Алгоритмы и расчетные формулы даются без выводов; имеются, как правило, лишь ссылки на специальную литературу.

После текста программы указано, какая информация хранится в регистрах 0÷Д. Это сделано для удобства контроля при возможной отладке программы или поэтапном контроле вычислений. Регистры, не упомянутые в списке, основной программой не используются. Пометка «оперативный» означает, что в данный регистр засылаются промежуточные результаты вычислений.

Инструкции по работе с программами даются в двух вариантах: подробном, в виде таблицы, или упрощенном, когда для пуска программы нужно лишь ввести аргументы и выполнить команды В/0 С/П.

В подробной инструкции в графе «Содержание» дано описание очередного действия пользователя, а в графах «Набрать число» и «Выполнить команды» — операции, нужные для его осуществления. В графе «Результат», чтобы не загромождать текста, отмечены только итоговые и некоторые промежуточные показания индикатора, необходимые для контроля.

По скорости вычисления отдельные экземпляры машин различаются на 20—25%. Время вычисления, указанное в программе, — среднее для партии машин.

Примеры в конце программ служат для контроля правильности ввода. Ответы в примерах в ряде случаев округлены.

В книге принята многоступенчатая нумерация разделов и программ. Первая цифра — номер главы, затем номер раздела, подраздела и т. д. Все номера разделены точками. Номера формул состоят из двух чисел: номера главы и номера формулы, разделенных точкой.

Авторы признательны академику Ю. Б. Кобзареву, а также профессорам Н. А. Арманду и Г. И. Натансону за внимание к работе и предложения, позволяющие более полно использовать возможности машины для решения ряда прикладных задач.

Глава I

АЛГЕБРА И ТЕОРИЯ ЧИСЕЛ

1.1. ПЕРЕВОД ЧИСЕЛ ИЗ ОДНОЙ СИСТЕМЫ СЧИСЛЕНИЯ В ДРУГУЮ

Приводятся программы перевода целых, дробных и действительных (т. е. содержащих как целую, так и дробную части) положительных чисел из системы счисления с основанием m $(2 \leqslant m \leqslant 10)$ в систему счисления с основанием n $(2 \leqslant n \leqslant 10)$, где m и n — целые числа.

1.1.1. ПЕРЕВОД ЦЕЛЫХ ЧИСЕЛ ИЗ ДЕСЯТИЧНОЙ И В ДЕСЯТИЧНУЮ СИСТЕМЫ СЧИСЛЕНИЯ

Осуществляется перевод целых положительных чисел N_{10} из системы счисления с основанием $m=10$ в систему счисления с основанием n—N_n и чисел N_m из системы счисления с основанием m в десятичную систему счисления $n=10$—N_{10}.

Для перевода используется метод последовательного деления исходного числа N_m с основанием m на n^i $(i=1, 2, \ldots)$; последовательность остатков от деления умножается на m^j $(j=0, 1, \ldots)$ и складывается. Результатом является число N_n в системе счисления с основанием n [11].

Примеры

1. $m=10$; $N_{10}=113$; $n=5$.
$113:5=22+3:5,$
$22:5=4+2:5,$
$4:5=0+4:5.$

$N_5=3\cdot10^0+2\cdot10^1+4\cdot10^2=423.$

2. $m=5$; $N_5=423$, $n=10$.
$423:10=42+3:10,$
$42:10=4+2:10,$
$4:10=0+4:10.$

$N_{10}=3\cdot5^0+2\cdot5^1+4\cdot5^2=113.$

Программа 1.1.1.

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	КНОП	54	03	Cx	0Г	06	ИП1	61
01	1	01	04	⇆	14	07	:	13
02	П2	42	05	↑	0E	08	1	01

Продолжение

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
09	+	10	20	+	10		Инструкция	
10	П3	43	21	ИП2	62			
11	КИП3	Г3	22	ИП0	60	m — в регистр 0;		
12	F ,	25	23	×	12	n — в регистр 1;		
13	F ,	25	24	П2	42	N_m В/0 С/П		
14	ИП3	63	25	F ,	25		**Регистры**	
15	ИП1	61	26	ИП3	63			
16	×	12	27	Fx=0	5E	0 m		
17	—	11	28	05	05	1 n		
18	ИП2	62	29	F ,	25	2;3 оперативные		
19	×	12	30	С/П	50			

Время вычисления (10÷70) с.

1.1.2. ПЕРЕВОД ДРОБНЫХ ЧИСЕЛ ИЗ ДЕСЯТИЧНОЙ И В ДЕСЯТИЧНУЮ СИСТЕМЫ СЧИСЛЕНИЯ

Осуществляется перевод дробных положительных чисел N_{10} из системы счисления с основанием $m=10$ в систему счисления с основанием $n—N_n$ и чисел N_m из системы счисления с основанием m в десятичную систему счисления $n=10—N_n$.

Для перевода используется метод последовательного умножения исходного числа N_m с основанием m на n^i ($i=1, 2, \ldots$); последовательность целых частей после умножения делится на m^j ($j=1, 2, \ldots$). В результате получаем дробное число N_n в системе счисления с основанием n [11].

Примеры

$m=10$; $N_{10}=0{,}8125$; $n=2$.
$0{,}8125\cdot 2=0{,}625+1,$
$0{,}625\cdot 2=0{,}25+1,$
$0{,}25\cdot 2=0{,}5+0,$
$0{,}5\cdot 2=0+1.$

$N_2=1:10^1+1:10^2+0:10^3+1:10^4=0{,}1101.$

$m=2$; $N_2=0{,}1101$; $n=10$.
$0{,}1101\cdot 10=0{,}101+1,$
$0{,}101\cdot 10=0{,}01+1,$
$0{,}01\cdot 10=0{,}1+0,$
$0{,}1\cdot 10=0+1.$

$N_{10}=1:2^1+1:2^2+0:2^3+1:2^4=0{,}8125.$

Время вычисления (10÷70) с.

Программа 1.1.2.

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	КНОП	54	06	⇆	14	12	П2	42
01	1	01	07	ИП1	61	13	КИП2	Г2
02	П5	45	08	×	12	14	F ,	25
03	F 10^x	15	09	П4	44	15	F ,	25
04	П3	43	10	1	01	16	ИП2	62
05	Cx	0Г	11	+	10	17	ИП5	65

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
18	ИПО	60	25	—	11			
19	×	12	26	F x≠0	57			
20	П5	45	27	30	30			
21	:	13	28	F L3	5—			
22	+	10	29	07	07			
23	ИП4	64	30	F ,	25			
24	ИП2	62	31	С/П	50			

Инструкция

m — в регистр 0;
n — в регистр 1;
N_m В/0 С/П

Регистры

0 m
1 n
2÷5 оперативные

1.1.3. ПЕРЕВОД ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ ЧИСЕЛ ИЗ ДЕСЯТИЧНОЙ И В ДЕСЯТИЧНУЮ СИСТЕМЫ СЧИСЛЕНИЯ

Осуществляется перевод действительных положительных чисел N_{10} в N_n или N_m в N_{10}.

Целая и дробная части числа переводятся раздельно по методам, описанным в п. 1.1.1 и п. 1.1.2.

Программа 1.1.3.

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	П2	42	26	П4	44	52	ИП5	65
01	1	01	27	:	13	53	×	12
02	П4	44	28	+	10	54	+	10
03	П5	45	29	ИП2	62	55	ИП5	65
04	+	10	30	ИП1	61	56	ИПА	6—
05	П3	43	31	—	11	57	×	12
06	КИП3	Г3	32	F x≠0	57	58	П5	45
07	9	09	33	36	36	59	F ,	25
08	ПО	40	34	F L0	5Г	60	ИП3	63
09	Cx	0Г	35	13	13	61	F x=0	5E
10	ИП2	62	36	F ,	25	62	38	38
11	ИП3	63	37	ИП3	63	63	F ,	25
12	—	11	38	ИПВ	6L	64	С/П	50
13	ИПВ	6L	39	:	13			
14	×	12	40	1	01			
15	П2	42	41	+	10			
16	1	01	42	П2	42			
17	+	10	43	КИП2	Г2			
18	П1	41	44	F ,	25			
19	КИП1	Г1	45	F ,	25			
20	F ,	25	46	ИП3	63			
21	F ,	25	47	ИП2	62			
22	ИП1	61	48	П3	43			
23	ИП4	64	49	ИПВ	6L			
24	ИПА	6—	50	×	12			
25	×	12	51	—	11			

Инструкция

m — в регистр A;
n — в регистр B;
N_m В/0 С/П

Регистры

0÷5 оперативные
A m
B n

Время вычисления (0,5÷2) мин.

Примеры: $m=10$; $n=2$. $N_{10}=11,375$. $N_2=1011,011$.
$m=2$; $n=10$. $N_2=1011,011$. $N_{10}=11,375$.

1.1.4. ПЕРЕВОД ЦЕЛЫХ ЧИСЕЛ ИЗ СИСТЕМЫ СЧИСЛЕНИЯ С ОСНОВАНИЕМ m В СИСТЕМУ СЧИСЛЕНИЯ С ОСНОВАНИЕМ n

По программе целые положительные числа N_m вначале переводятся из системы счисления с основанием m в десятичную систему счисления, а затем в систему счисления с основанием n.

Программа 1.1.4.

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	П5	45	17	П4	44	34	+	10
01	F ,	25	18	F ,	25	35	ПД	4Г
02	1	01	19	П2	42	36	ИП1	61
03	0	00	20	ИП0	60	37	ИП4	64
04	ПП	53	21	:	13	38	×	12
05	11	11	22	1	01	39	П1	41
06	ИП0	60	23	+	10	40	ИП3	63
07	ИП5	65	24	П3	43	41	F x=0	5E
08	ПП	53	25	КИП3	Г3	42	19	19
09	11	11	26	ИП2	62	43	ИПД	6Г
10	С/П	50	27	ИП3	63	44	В/О	52
11	П0	40	28	ИП0	60			
12	Сх	0Г	29	×	12			
13	ПД	4Г	30	—	11			
14	ВП	0С	31	ИП1	61			
15	П1	41	32	×	12			
16	F ,	25	33	ИПД	6Г			

Инструкция

$N_m \uparrow m \uparrow n$ В/0 С/П

Регистры

0÷5 оперативные
Д N_n

Время вычисления (0,5÷2,5) мин.
Пример: $m=9$; $n=2$. $N_9=111$. $N_2=1011011$.

1.1.5. ПЕРЕВОД ДРОБНЫХ ЧИСЕЛ ИЗ СИСТЕМЫ СЧИСЛЕНИЯ С ОСНОВАНИЕМ m В СИСТЕМУ СЧИСЛЕНИЯ С ОСНОВАНИЕМ n

По программе дробные положительные числа N_m вначале переводятся из системы счисления с основанием m в десятичную систему счисления, а затем в систему счисления с основанием n.

Программа 1.1.5.

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	П6	46	05	ПП	53	10	ПП	53
01	F ,	25	06	13	13	11	13	13
02	1	01	07	ИП4	64	12	С/П	50
03	0	00	08	П3	43	13	П4	44
04	П3	43	09	ИП6	66	14	Сх	0Г

Продолжение

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
15	ПД	4Г	28	ИП1	61	41	F x≠0	57
16	ВП	ОС	29	ИП5	65	42	44	44
17	П5	45	30	ИПО	60	43	F L3	5—
18	F ,	25	31	×	12	44	21	21
19	ПО	40	32	П5	45	45	ИПД	6Г
20	F ,	25	33	:	13	46	В/0	52
21	ИП4	64	34	ИПД	6Г			
22	×	12	35	+	10			
23	П2	42	36	ПД	4Г			
24	1	01	37	ИП2	62			
25	+	10	38	ИП1	61			
26	П1	41	39	—	11			
27	КИП1	Г1	40	↑	ОЕ			

Инструкция

N_m ↑ m ↑ n В/0 С/П

Регистры

0÷6 оперативные

Д N_n

Время вычисления (0,5÷2,5) мин.

Примеры: m=2; n=8. $N_2=0{,}101$. $N_8=0{,}5$.

1.1.6. ПЕРЕВОД ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ ЧИСЕЛ ИЗ СИСТЕМЫ СЧИСЛЕНИЯ С ОСНОВАНИЕМ m В СИСТЕМУ СЧИСЛЕНИЯ С ОСНОВАНИЕМ n

По программе осуществляется перевод действительных положительных чисел N_m в десятичную систему счисления N_{10}, а затем перевод N_{10} в N_n.

Программа 1.1.6.

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	П8	48	21	⇄	14	42	45	45
01	F ,	25	22	↑	ОЕ	43	F L0	5Г
02	1	01	23	ПП	53	44	27	27
03	0	00	24	68	68	45	F ,	25
04	ПО	40	25	П3	43	46	ИП3	63
05	ПП	53	26	—	11	47	↑	0Е
06	13	13	27	ИП7	67	48	ИП7	67
07	ИП7	67	28	×	12	49	:	13
08	ПО	40	29	П2	42	50	ПП	53
09	ИП8	68	30	ПП	53	51	68	68
10	ПП	53	31	68	68	52	ИП7	67
11	13	13	32	ИП4	64	53	×	12
12	С/П	50	33	ИП6	66	54	—	11
13	П7	47	34	×	12	55	ИП5	65
14	F ,	25	35	П4	44	56	×	12
15	П6	46	36	:	13	57	+	10
16	F ,	25	37	+	10	58	ИП5	65
17	1	01	38	ИП2	62	59	ИП6	66
18	П4	44	39	ИП1	61	60	×	12
19	П5	45	40	—	11	61	П5	45
20	Cx	ОГ	41	F x≠0	57	62	F ,	25

Продолжение

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
63	ИП1	61	70	П1	41		**Инструкция**	
64	F x=0	5E	71	КИП1	Г1		N_m ↑ m ↑ n В/0 С/П	
65	47	47	72	F ,	25			
66	F ,	25	73	F ,	25		**Регистры**	
67	В/О	52	74	ИП1	61			
68	1	01	75	В/0	52		0÷8 оперативные	
69	+	10						

Время вычисления (1÷4) мин.
Пример: $m=2$; $n=8$. $N_2=1011{,}101$. $N_8=13{,}5$.

1.2. НЕПРЕРЫВНЫЕ (ЦЕПНЫЕ) ДРОБИ

Каждое действительное число b может быть представлено в виде цепной дроби [11]

$$b=a_0+\cfrac{1}{a_1+\cfrac{1}{a_2+\cdots}},$$

где a_0, a_1, a_2, ... — целые числа.
Обозначим $b=[a_0, a_1, a_2 \ldots]$.

1.2.1. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ДЕСЯТИЧНОГО ЧИСЛА В ЦЕПНУЮ ДРОБЬ

По заданному десятичному числу b определяются соответствующие значения a_0, a_1, a_2, ... цепной дроби:

$$a_0=E[b];\ a_1=E\left[\frac{1}{b-a_0}\right];\ a_2=E\left[\frac{1}{\frac{1}{b-a_0}-a_1}\right];\ldots$$

После ввода числа b каждое последующее нажатие С/П выводит на индикатор соответствующее значение a_i: a_0, a_1, ...

Программа 1.2.1.

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	
00	П1	41	06	ИП0	60	**Инструкция**
01	1	01	07	С/П	50	В/0 в С/П С/П С/П...
02	+	10	08	—	11	**Регистры**
03	П0	40	09	F 1/x	23	
04	КИП0	Г0	10	БП	51	0 a_i
05	ИП1	61	11	00	00	1 оперативный

Время вычисления одного значения a_i 5 с.

Примечание. Появление после очередного i-го нажатия С/П на индикаторе ЕГГОГ означает, что $a_{i-1}=\infty$ и цепная дробь содержит последним элементом a_{i-2}. При этом значение b представляется в виде конечной цепной дроби $b=[a_0, a_1, \ldots, a_{i-2}]$.

Пример: $b=\pi$ представить в виде цепной дроби.

Ответ: $b=\pi=[3; 7; 15; 1; 244; 1; 2; \ldots]$.

1.2.2. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЦЕПНОЙ ДРОБИ В ДЕСЯТИЧНОЕ ЧИСЛО

Цепная дробь, заданная в виде набора чисел $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$, преобразуется в десятичное число b.

Для вычисления используется представление b в виде $b=b_n=c_n/d_n$, где c_n и d_n определяются из рекуррентных соотношений [11]:

$$c_i=c_{i-1}\cdot a_i+c_{i-2} \quad \text{при} \quad c_0=1, \quad c_1=a_0;$$
$$d_i=d_{i-1}\cdot a_i+d_{i-2} \quad \text{при} \quad d_0=0, \quad d_1=1.$$

После ввода каждого последующего значения a_i на индикатор выводится значение $b_i=[a_0, a_1, \ldots, a_i]$.

Программа 1.2.2.

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	П2	42	11	ИП2	62	22	БП	51
01	0	00	12	П3	43	23	05	05
02	П0	40	13	×	12			
03	ВП	0C	14	+	10			
04	П3	13	15	П2	42			
05	П1	41	16	ИП0	60			
06	:	13	17	ИП4	64			
07	С/П	50	18	ИП1	61			
08	П4	44	19	П0	40			
09	ИП3	63	20	×	12			
10	ИП4	64	21	+	10			

Инструкция

В/0 a_0 С/П a_1 С/П...

Регистры

0÷3 оперативные
4 a_i

Время вычисления b после ввода одного значения a_i 5 с.

Пример

Дана цепная дробь [3; 7; 15; 1; 244; 1; 2; 2; 1]. Определить соответствующее десятичное число b.

Ответ

$b_0=3$; $b_1=3{,}1428571$; $b_2=3{,}1415094$; $b_3=3{,}1415929$; $b_4=b_5=\ldots=b=3{,}1415926$.

1.3. ДЕЛЕНИЕ ЧИСЕЛ С ПРОИЗВОЛЬНОЙ ТОЧНОСТЬЮ

Производится деление десятичных чисел a/b. Вначале определяется целая часть от деления a/b—$A_0=E[a/b]$ и остаток, затем для получения каждого последующего i-го десятичного знака остаток от предыдущего деления, домноженный на 10, делится на b и определяется целая часть — A_i и остаток. A_0 представляет собой целую часть, а A_i ($i=1; 2; \ldots$) — десятичные знаки результирующей десятичной дроби. В результате получается десятичное число с произвольным количеством десятичных знаков. (Дробная часть делителя b должна содержать не более семи, а произведение $b \cdot E\{a/b\}$ — не более восьми значащих цифр.)

Программа 1.3.

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	П0	40	10	ИП1	61
01	⟷	14	11	С/П	50
02	П2	42	12	ИП0	60
03	ИП0	60	13	×	12
04	:	13	14	—	11
05	1	01	15	1	01
06	+	10	16	0	00
07	П1	41	17	×	12
08	КИП1	Г1	18	БП	51
09	ИП2	62	19	02	02

Инструкция

В/0 a ↑ b С/П
С/П С/П...

Регистры

0 b
1; 2 оперативные

После первого нажатия С/П на индикатор выводится целая часть результата, после каждого последующего нажатия С/П на индикатор выводится один следующий десятичный знак результата.

Время вывода одного десятичного знака 5 с.

Пример

Разделить $a=800$ на $b=2{,}3$ с десятью десятичными знаками.

Решение

После ввода a и b и выполнения команд С/П С/П ... на индикатор выводится последовательность значений

347; 8; 2; 6; 0; 8; 6; 9; ...

Ответ

800 : 2,3 = 347,8260869 ...

1.4. РЕШЕНИЕ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

1.4.1. РЕШЕНИЕ КВАДРАТНОГО УРАВНЕНИЯ

Корни квадратного уравнения

$$ax^2+bx+c=0$$

вычисляются по формулам [8]:

$$D=k^2-ac\,;\; k=b/2\,;\;\; u=-k/a\,;\;\; v=\sqrt{-D}/a.$$

Если $D \geqslant 0$, корни уравнения действительные:

$$x_1 = \begin{cases} \dfrac{-k-\sqrt{D}}{a} & \text{при } b \geqslant 0, \\ \dfrac{-k+\sqrt{D}}{a} & \text{при } b < 0, \end{cases}$$

$$x_2 = c/ax_1.$$

Если $D < 0$, уравнение имеет комплексно-сопряженные корни:

$$x_1 = u + iv; \quad x_2 = u - iv.$$

Выбранный алгоритм при $D > 0$ позволяет уменьшить ошибки вычисления, если значения k и $\sqrt{D}$ близки по абсолютной величине.

Программа I.4.1.

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	ПО	40	13	−	11	26	БП	51
01	С/П	50	14	F √	21	27	33	33
02	↑	0E	15	КНОП	54	28	/−/	0L
03	2	02	16	F x⩾0	59	29	F √	21
04	:	13	17	28	28	30	ИП0	60
05	/−/	0L	18	⇄	14	31	:	13
06	↑	0E	19	F x<0	5C	32	⇄	14
07	F x²	22	20	23	23	33	ИП0	60
08	ИП0	60	21	⇄	14	34	:	13
09	С/П	50	22	/−/	0L	35	С/П	50
10	×	12	23	+	10			
11	F ВХ	0	24	:	13		**Регистры**	
12	F ,	25	25	F ВХ	0	0 a		

Инструкция

Содержание	Набрать число	Выполнить команды	Результат
1. Ввести программу		F ПРГ ввод F АВТ	
2. Занести величины a, b и c	a b c	В/0 С/П С/П	a c
3. Вычислить корни		С/П	
а) если $D \geqslant 0$			x_1 — в рег. X, 0 x_2 — в рег. Y, 1
б) если $D < 0$.			ЕГГОГ
		С/П	u — в рег. X, 0 v — в рег. Y, 1
4. Для нового счета — к п. 2			

Время вычисления после ввода последнего числа (7÷10) с.
Примеры
1. $x^2+x-2=0$. $x_1=-2$; $x_2=1$.
2. $x^2+2x+2=0$. $x_1=-1+i$; $x_2=-1-i$.

1.4.2. РЕШЕНИЕ СИСТЕМЫ ДВУХ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

$$\begin{cases} a_1x+b_1y=p_1, \\ a_2x+b_2y=p_2 \qquad (a_2\neq 0). \end{cases}$$

Система решается методом Гаусса [12].

Коэффициенты и свободные члены системы уравнений вводятся в машину по столбцам.

Программа 1.4.2.

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	П6	46	13	—	11
01	⇄	14	14	КП1	L1
02	П7	47	15	F L0	5Г
03	6	06	16	07	07
04	П1	41	17	ИП4	64
05	2	02	18	:	13
06	П0	40	19	С/П	50
07	С/П	50	20	ИП5	65
08	ИП6	66	21	×	12
09	:	13	22	ИП3	63
10	КП1	L1	23	⇄	14
11	ИП7	67	24	—	11
12	×	12	25	С/П	50

Инструкция

a_1 ↑ a_2 В/0 С/П
b_1 ↑ b_2 С/П
p_1 ↑ p_2 С/П

Результат

y — в рег. X
С/П x — в рег. X

Регистры

0 счетчик
1 счетчик; x
2 оперативный; y
3÷5 оперативные
6 a_2
7 a_1

Время занесения каждого столбца 3 с, время вычисления каждого неизвестного 1 с.

Пример

Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 2x+3y=7, \\ 5x+7y=17. \end{cases}$$

Ответ: $x=2$; $y=1$.

1.4.3. РЕШЕНИЕ СИСТЕМЫ ТРЕХ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=p_1, \\ a_2x+b_2y+c_2z=p_2, \\ a_3x+b_3y+c_3z=p_3 \qquad (a_3\neq 0). \end{cases}$$

Система решается методом Гаусса—Крамера [12].

Коэффициенты и свободные члены системы уравнений вводятся в машину по столбцам.

Время занесения каждого столбца (3÷5) с, время вычисления каждого неизвестного 4 с.

Пример

Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 2x+10y+\ \ 6z=32, \\ 3x+\ 9y+\ \ 6z=33, \\ 5x+15y+20z=65. \end{cases}$$

Ответ: $x=3$; $y=2$; $z=1$.

Программа 1.4.3.

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	ПД	4Г	28	ИП3	63	56	×	12
01	F ,	25	29	×	12	57	—	11
02	ПС	4С	30	ИП9	69	58	ИПА	6—
03	F ,	25	31	ИП2	62	59	ИПВ	6L
04	ПВ	4L	32	×	12	60	×	12
05	1	01	33	—	11	61	—	11
06	1	01	34	ИП8	68	62	ПА	4—
07	П1	41	35	ИП6	66	63	С/П	50
08	3	03	36	×	12			
09	П0	40	37	ИП9	69			
10	С/П	50	38	ИП5	65			
11	ИПД	6Г	39	×	12			
12	:	13	40	—	11			
13	КП1	L1	41	:	13			
14	П2	42	42	ПС	4С			
15	ИПС	6С	43	С/П	50			
16	×	12	44	ИП2	62			
17	—	11	45	ИП5	65			
18	КП1	L1	46	ИПС	6С			
19	F ,	25	47	×	12			
20	ИП2	62	48	—	11			
21	ИПВ	6L	49	ИП8	68			
22	×	12	50	:	13			
23	—	11	51	ПВ	4L			
24	КП1	L1	52	С/П	50			
25	F L0	5Г	53	ИП4	64			
26	10	10	54	ИП7	67			
27	ИП8	68	55	ИПС	6С			

Инструкция

$a_1 \uparrow a_2 \uparrow a_3$ В/0 С/П

$b_1 \uparrow b_2 \uparrow b_3$ С/П

$c_1 \uparrow c_2 \uparrow c_3$ С/П

$p_1 \uparrow p_2 \uparrow p_3$ С/П

Результат

z — в рег. X, C

С/П y — в рег. X, B

С/П x — в рег. X, A

Регистры

0, 1 счетчики

2÷9, Д оперативные

A x

B y

C z

1.4.4. РЕШЕНИЕ СИСТЕМЫ ЧЕТЫРЕХ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

$$\begin{cases} a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z+a_{14}t=b_1, \\ a_{21}x+a_{22}y+a_{23}z+a_{24}t=b_2, \\ a_{31}x+a_{32}y+a_{33}z+a_{34}t=b_3, \\ a_{41}x+a_{42}y+a_{43}z+a_{44}t=b_4. \end{cases}$$

Система четырех линейных уравнений решается методом приведения к диагональному виду матрицы коэффициентов $\|a_{ij}\|$

[12]. При этом все главные миноры матрицы до третьего порядка включительно, содержащие a_{11}, должны быть отличны от нуля:

$$a_{11} \neq 0; \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0; \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Если это условие не выполнено, следует поменять местами исходные уравнения.

Ввод элементов a_{ij} и b_j построчный.

Программа 1.4.4.

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	П3	43	38	П8	48	76	ПП	53
01	4	04	39	ПП	53	77	78	78
02	П0	40	40	64	64	78	С/П	50
03	П4	44	41	⇄	14	79	ИП1	61
04	С/П	50	42	:	13	80	ПП	53
05	ИП3	63	43	П3	43	81	87	87
06	:	13	44	7	07	82	ИП2	62
07	КП4	L4	45	П4	44	83	КИП4	Г4
08	ПД	4Г	46	ИПД	6Г	84	×	12
09	ИП9	69	47	ИПВ	6L	85	—	11
10	ПА	4—	48	ПП	53	86	ИП3	63
11	Cx	0Г	49	85	86	87	КИП4	Г4
12	КП4	L4	50	ПВ	4L	88	×	12
13	F L0	5Г	51	ИП7	67	89	—	11
14	04	04	52	×	12	90	В/О	52
15	ПВ	4L	53	—	11			
16	П9	49	54	ИПС	6С			
17	ПП	53	55	ИПВ	6L			
18	64	64	56	ИП6	66			
19	ИП2	62	57	ПП	53			
20	:	13	58	84	84			
21	ПС	4С	59	ПС	4С			
22	⇄	14	60	ИП5	65			
23	ИП2	62	61	ПП	53			
24	:	13	62	84	84			
25	П9	49	63	ПД	4Г			
26	ИП1	61	64	С/П	50			
27	ИП2	62	65	П3	43			
28	:	13	66	4	04			
29	П6	46	67	П4	44			
30	ПП	53	68	С/П	50			
31	64	64	69	ПП	53			
32	ИП1	61	70	86	86			
33	:	13	71	П2	42			
34	ПВ	4L	72	С/П	50			
35	⇄	14	73	ПП	53			
36	ИП1	61	74	82	82			
37	:	13	75	П1	41			

Инструкция

В/0 a_{11} С/П a_{12} С/П ... $в_1$ С/П

....

a_{41} С/П a_{42} С/П ... b_4 С/П

Результат

x — в рег. Д, X
y — в рег. С
z — в рег. В
t — в рег. 3

Регистры

0÷2,4÷А оперативные
3 оперативный; t
В оперативный; z
С оперативный; y
Д оперативный; x

Полное время вычисления 2 мин.
Пример

$$\begin{cases} x+y+z+t=10, \\ x+2y-2z+3t=11, \\ 2x+z=5, \\ 3x+y+2z+2t=19. \end{cases}$$

Ответ: $x=1$; $y=2$; $z=3$; $t=4$.

1.4.5. РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ f(x)=0

Методом дихотомии (половинного деления) [3] разыскивается корень уравнения $f(x)=0$ на интервале $a\leqslant x<b$. Предполагается, что корень на этом интервале один и, следовательно,

$$f(a)\cdot f(b)<0.$$

За каждую итерацию интервал неопределенности, внутри которого находится корень x_0, уменьшается вдвое. За n итераций, таким образом, интервал неопределенности уменьшается в 2^n раз.

Подпрограмма вычисления значений функции $f(x)$ размещается в памяти машины начиная с адреса 35. Аргумент x и ответ $f(x)$ — в регистре X.

Программа 1.4.5.

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	ПА	4—	14	ПП	53	28	ПД	4Г
01	ПП	53	15	35	35	29	ИПС	6С
02	35	35	16	F x≠0	57	30	ПА	4—
03	ПД	4Г	17	33	33	31	F L0	5Г
04	С/П	50	18	ИПД	6Г	32	08	08
05	ПВ	4L	19	⇆	14	33	ИПС	6С
06	С/П	50	20	×	12	34	С/П	50
07	П0	40	21	F x<0	5С			
08	ИПА	6—	22	27	27			
09	ИПВ	6L	23	ИПС	6С			
10	+	10	24	ПВ	4L			
11	2	02	25	БП	51			
12	:	13	26	31	31			
13	ПС	4С	27	F ВХ	0			

Регистры
0,А,В оперативные
С x_0
Д $f(x_0)$

Инструкция

Содержание	Набрать число	Выполнить команды	Результат
1. Ввести программу и подпрограмму			
2. Занести границы исходного интервала неопределенности	a b	В/0 С/П С/П	f(a) b
3. Занести требуемое число итераций n и вычислить корень	n	С/П	x_0 — в рег. X, C $f(x_0)$ — в рег. Д
4. Для выполнения n_1 добавочных итераций занести n_1 и вычислить корень	n_1	БП 07 С/П	x_0 — в рег. X, C $f(x_0)$ — в рег. Д

Пример

Найти корень уравнения $\ln x+x-2=0$ на интервале (1; 2), выполнив 10 итераций.

Решение

Подпрограмма вычисления значений функции $f(x)=\ln x+x-2$ имеет вид ↑ F ln+2—В/0.

Ответ: $x_0=1{,}5576$; точное значение 1,5571456.

Время вычисления 1 мин 20 с.

1.4.6. РЕШЕНИЕ СИСТЕМЫ ТРАНСЦЕНДЕНТНЫХ УРАВНЕНИЙ

Система уравнений

$$\begin{cases} x=f_1(x, y, \ldots, t), \\ y=f_2(x, y, \ldots, t), \\ \cdots\cdots\cdots \\ t=f_k(x, y, \ldots, t) \end{cases}$$

решается итерационным методом с помощью модификации Зайделя по формулам [3]:

$$\begin{aligned} x_{m+1} &= f_1(x_m, y_m, \ldots, t_m), \\ y_{m+1} &= f_2(x_{m+1}, y_m, \ldots, t_m), \\ &\cdots\cdots\cdots \\ t_{m+1} &= f_k(x_{m+1}, y_{m+1}, \ldots, t_m) \end{aligned}$$

при заданном начальном приближении $x_1, y_1, \ldots, t_1$.

Для сходимости итерационного процесса необходимо, чтобы суммы модулей частных производных каждой функции f по всем переменным не превышали единицы. Подробнее об этом — в работе [3].

Количество уравнений системы $1 \leqslant k \leqslant 13$ определяется подпрограммой, по которой вычисляются все правые части уравнений. Вначале вычисляется значение f_1 по аргументам x, y, ..., t, находящимся соответственно в регистрах Д, С, В,..., (14—k), и помещается в регистр Д. Затем вычисляется f_2 по аргументам из тех же регистров Д, С, В, ..., (14—k) и помещается в регистр С. Аналогично вычисляются значения всех функций f. Подпрограмма размещается в памяти машины начиная с адреса 21 и заканчивается командой В/0.

Программа I.4.6

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	ПД	4Г	09	П0	40	18	С/П	50
01	1	01	10	ПП	53	19	БП	51
02	3	03	11	21	21	20	17	17
03	П0	40	12	F L0	5Г			
04	⟷	14	13	10	10			
05	С/П	50	14	1	01			
06	КП0	L0	15	4	04			
07	БП	51	16	П0	40			
08	05	05	17	КИП0	Г0			

Регистры

0 счетчик
(14 — к)÷Д x,y, ..., t

Инструкция

Содержание	Набрать число	Выполнить команды	Результат
1. Ввести программу и подпрограмму			
2. Занести начальное приближение	x_1	В/0 С/П	x_1
	y_1	С/П	y_1
	. . .	. . .	. . .
	t_1	С/П	t_1
3. Занести количество требуемых итераций и найти решение	n	БП 09 С/П	x
		С/П	y
		. . .	. . .
		С/П	t
4. При необходимости уточнения — к п. 3			

Примеры

1. Найти корень уравнения $x=\sqrt[3]{x+1}$, выполнив пять итераций. Начальное приближение $x_1=1{,}5$.

Подпрограмма вычисления значений функции имеет вид

ИПД 1 + F ln 3 : F e^x ПД В/О.

Ответ: $x=1{,}3247600$; точное значение 1,324718. Время вычисления 35 с.

2. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x=\sqrt{\frac{1}{2}[x(y+5)-1]}, \\ y=\sqrt{x+3\ln x}, \end{cases}$$

выполнив шесть итераций. Принять $x_1=4$, $y_1=2{,}5$.

Подпрограмма в данном случае имеет вид
ИПС 5 + ИПД × 1 − 2 : F $\sqrt{}$ ПД ↑ F ln 3 × + F $\sqrt{}$ ПС В/О.

Ответ: $x=3{,}7607$; $y=2{,}7811$. Точные значения $x=3{,}7568$; $y=2{,}7798$. Время вычисления 55 с.

1.5. ЭЛЕМЕНТЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ

1.5.1. ВЫЧИСЛЕНИЕ ДЕТЕРМИНАНТА ВТОРОГО ПОРЯДКА

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}.$$

Программа 1.5.1.

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	С/П	50	05	×	12
01	С/П	50	06	⇄	14
02	×	12	07	−	11
03	⇄	14	08	С/П	50
04	С/П	50			

Инструкция

В/0 a_{11} С/П a_{12} С/П a_{21} С/П a_{22} С/П

Пример

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}=-2.$$

Время вычисления после ввода a_{22} 1 с.

1.5.2. ВЫЧИСЛЕНИЕ ДЕТЕРМИНАНТА ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}\quad a_{11}\neq 0.$$

Значение детерминанта вычисляется методом обращения в нуль элементов a_{12} и a_{13}; при этом задача сводится к вычислению детерминанта второго порядка.

Программа 1.5.2.

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	П4	44	06	:	13	12	П0	40
01	2	02	07	КП ↑	LE	13	ИП2	62
02	П0	40	08	F L0	5Г	14	×	12
03	П3	43	09	04	04	15	С/П	50
04	С/П	50	10	ИП0	60	16	−	11
05	ИП4	64	11	С/П	50	17	×	12

Продолжение

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
18	ИП0	60	26	П0	40			
19	ИП1	61	27	F ,	25			
20	×	12	28	×	12			
21	С/П	50	29	ИП0	60			
22	—	11	30	—	11			
23	F L3	5—	31	ИП4	64			
24	11	11	32	×	12			
25	⟷	14	33	С/П	50			

Инструкция

В/0 a_{11} С/П a_{12} С/П a_{13} С/П ... a_{33} С/П

Регистры

0÷4 оперативные

Время вычисления после ввода последнего элемента 3 с.
Пример

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -12.$$

1.5.3. ВЫЧИСЛЕНИЕ ДЕТЕРМИНАНТА ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} \quad (a_{11} \neq 0).$$

Программа 1.5.3.

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	ПА	4—	21	ИПС	6С	42	ИП6	66
01	С/П	50	22	ПП	53	43	ИП8	68
02	ПВ	4L	23	77	77	44	×	12
03	С/П	50	24	П5	45	45	—	11
04	ПС	4С	25	ИПД	6Г	46	ИП1	61
05	С/П	50	26	ПП	53	47	×	12
06	ПД	4Г	27	77	77	48	ИП9	69
07	ПП	53	28	П6	46	49	ИП4	64
08	72	72	29	ПП	53	50	×	12
09	П1	41	30	72	72	51	ИП6	66
10	ИПС	6С	31	П7	47	52	ИП7	67
11	ПП	53	32	ИПС	6С	53	×	12
12	77	77	33	ПП	53	54	—	11
13	П2	42	34	77	77	55	ИП2	62
14	ИПД	6Г	35	П8	48	56	×	12
15	ПП	53	36	ИПД	6Г	57	—	11
16	77	77	37	ПП	53	58	ИП4	64
17	П3	43	38	77	77	59	ИП8	68
18	ПП	53	39	П9	49	60	×	12
19	72	72	40	ИП5	65	61	ИП5	65
20	П4	44	41	×	12	62	ИП7	67

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
63	×	12	72	С/П	50	81	В/0	52
64	—	11	73	ИПА	6—			
65	ИП3	63	74	:	13		**Регистры**	
66	×	12	75	П0	40	0÷9 оперативные		
67	+	10	76	ИПВ	6L			
68	ИПА	6—	77	ИП0	60	А	a_{11}	
69	×	12	78	×	12	В	a_{12}	
70	/—/	0L	79	С/П	50	С	a_{13}	
71	ПД	4Г	80	—	11	Д	a_{14}; D	

Инструкция

Содержание	Набрать число	Выполнить команды	Результат
1. Ввести программу		F ПРГ ввод F АВТ	
2. Занести поочередно элементы a_{ij} (по строкам) и вычислить D	a_{11}	В/0 С/П	
	a_{12}	С/П	
	. . .	. . . .	
	a_{44}	С/П	D — в рег. X, Д
3. Для нового счета — к п. 2			

Время вычисления после ввода a_{44} 15 с.

Пример

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 9 & 8 & 7 & 6 \end{vmatrix} = -20.$$

1.5.4. ВЫЧИСЛЕНИЕ ДЕТЕРМИНАНТА ПЯТОГО ПОРЯДКА

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{vmatrix}.$$

Значение детерминанта D вычисляется методом приведения к диагональному виду [12]. При этом все главные миноры до четвертого порядка включительно, содержащие a_{11}, должны быть отличны от нуля:

$$a_{11}\neq 0;\quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}\neq 0;\quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}\neq 0;\quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}\neq 0.$$

Если это условие не выполнено, следует в соответствии с общим правилом переставить местами строки или столбцы.

Программа 1.5.4.

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	ПО	40	33	ПП	53	66	4	04
01	4	04	34	73	73	67	П4	44
02	П1	41	35	ИП1	61	68	С/П	50
03	П4	44	36	:	13	69	ПП	53
04	С/П	50	37	ПВ	4L	70	86	86
05	ИПО	60	38	⇆	14	71	П2	42
06	:	13	39	ИП1	61	72	В/О	53
07	КП4	L4	40	:	13	73	С/П	50
08	ПД	4Г	41	П8	48	74	ПП	53
09	ИП9	69	42	ПП	53	75	83	83
10	ПА	4—	43	60	60	76	П1	41
11	Сх	ОГ	44	ПП	53	77	ПП	53
12	КП4	L4	45	73	73	78	79	79
13	F L1	5L	46	⇆	14	79	С/П	50
14	04	04	47	:	13	80	ИП1	61
15	П9	49	48	П1	41	81	ПП	53
16	ПВ	4L	49	ПП	53	82	87	87
17	ПП	53	50	60	60	83	ИП2	62
18	64	64	51	ИП1	61	84	ПП	53
19	ПП	53	52	П5	45	85	87	87
20	73	73	53	ПП	53	86	ИП3	63
21	ИП2	62	54	73	73	87	КИП4	Г4
22	:	13	55	⇆	14	88	×	12
23	ПС	4С	56	ИП5	65	89	—	11
24	⇆	14	57	×	12	90	В/О	52
25	ИП2	62	58	—	11			
26	:	13	59	F ,	25			
27	П9	49	60	F ВХ	0			
28	ИП2	62	61	ИПО	60			
29	:	13	62	×	12			
30	П6	46	63	ПО	40			
31	ПП	53	64	С/П	50			
32	60	60	65	П3	43			

Инструкция

В/0 a_{11} С/П a_{12} С/П ... a_{55} С/П

Регистры

0÷Д оперативные

Полное время вычисления 2 мин.

Пример

$$\begin{vmatrix} 1 & 6 & 7 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 9 & 4 & 6 \\ 3 & 5 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 7 \end{vmatrix} = -162.$$

1.5.5 ОБРАЩЕНИЕ МАТРИЦЫ ВТОРОГО ПОРЯДКА

$$\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{Vmatrix}^{-1} = \begin{Vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{Vmatrix}.$$

Программа 1.5.5.

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	/—/	0L	15	ПО	40
01	П4	44	16	КИП↑	ГЕ
02	С/П	50	17	ИПД	6Г
03	П2	42	18	:	13
04	С/П	50	19	КП↑	LE
05	П3	43	20	С/П	50
06	×	12	21	F LO	5Г
07	С/П	50	22	16	16
08	/—/	0L			
09	П1	41			
10	ИП4	64			
11	×	12			
12	—	11			
13	ПД	4Г			
14	4	04			

Инструкция

В/0 a_{11} С/П
a_{12} С/П
a_{21} С/П
a_{22} С/П

Результат

A_{11}
С/П A_{12}
С/П A_{21}
С/П A_{22}

Регистры

0 счетчик
1 — a_{22}; A_{22}
2 a_{12}; A_{21}
3 a_{21}; A_{12}
4 — a_{11}; A_{11}
Д — D

Инструкция

Содержание	Набрать число	Выполнить команды	Результат
1. Ввести программу		F ПРГ ввод	
		F АВТ	
2. Занести элементы a_{ij}	a_{11}	В/0 С/П	
	a_{12}	С/П	
	a_{21}	С/П	
	a_{22}		a_{22}
3. Вычислить элементы A_{ij}			
		С/П	A_{11} — в рег. X, 4
		С/П	A_{12} — в рег. X, 3
		С/П	A_{21} — в рег. X, 2
		С/П	A_{22} — в рег. X, 1
4. Для нового счета — к п. 2			

Время вычисления после ввода a_{22} 13 с.
Пример

$$\begin{Vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{Vmatrix}^{-1} = \begin{Vmatrix} -0,5 & 1,5 \\ 1 & -2 \end{Vmatrix}.$$

1.5.6. ОБРАЩЕНИЕ МАТРИЦЫ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

$$\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{Vmatrix}^{-1} = \begin{Vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{Vmatrix}.$$

Для удобства вычислений элементы «поля» исходной матрицы a_{ij} заносят в расположенные подобным образом элементы «поля» клавиатуры (регистры) [16]:

$$\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{Vmatrix} \longrightarrow \begin{Vmatrix} 7 & 8 & 9 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{Vmatrix}. \quad \text{(схема I)}$$

Программа 1.5.6.

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	ИП7	67	26	×	12	52	ИПА	6—
01	ИП8	68	27	ИП6	66	53	П4	44
02	ИП2	62	28	П5	45	54	ИП2	62
03	ИП9	69	29	ИП2	62	55	П1	41
04	П8	48	30	×	12	56	ИПО	60
05	×	12	31	—	11	57	П2	42
06	⇄	14	32	↑	OE	58	ИПС	6С
07	П7	47	33	ИП9	69	59	ИПД	6Г
08	ИП3	63	34	×	12	60	:	13
09	×	12	35	ИПС	6С	61	С/П	50
10	—	11	36	ИП1	61	62	БП	51
11	ПВ	4L	37	П3	43	63	00	00
12	⇄	14	38	×	12			
13	П9	49	39	+	10			
14	ИП7	67	40	ИПВ	6L			
15	ИП6	66	41	ИП4	64			
16	×	12	42	П6	46			
17	ИП8	68	43	×	12			
18	ИП5	65	44	+	10			
19	×	12	45	ПД	4Г			
20	—	11	46	:	13			
21	ПС	4С	47	С/П	50			
22	ИП5	65	48	ИПВ	6L			
23	ПА	4—	49	ИПД	6Г			
24	ИП3	63	50	:	13			
25	ПО	40	51	С/П	50			

Регистры

0, А, В, С оперативные
1 a_{31}
2 a_{32}
3 a_{33}
4 a_{21}
5 a_{22}
6 a_{23}
7 a_{11}
8 a_{12}
9 a_{13}
Д D

Инструкция

Содержание	Набрать число	Выполнить команды	Результат
1. Ввести программу			
2. Занести элементы исходной матрицы в память в соответствии со схемой I	a_{11}	П7	a_{11}
	a_{12}	П8	a_{12}
	. . . .	. . . .	. . . .
	a_{33}	П3	a_{33}
3. Вычислить элементы обратной матрицы A_{ij}		В/О С/П	A_{11}
		С/П	A_{12}
		. . . .	. . . .
		С/П	A_{33}
4. Для нового счета — к п. 2			

Время вычисления 1 мин.

Пример

$$\begin{Vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 8 \\ 2 & 7 & 6 \end{Vmatrix}^{-1} = \begin{Vmatrix} -3{,}2 & 1{,}7 & 0{,}4 \\ 0{,}4 & -0{,}4 & 0{,}2 \\ 0{,}6 & -0{,}1 & -0{,}2 \end{Vmatrix}.$$

1.5.7. УМНОЖЕНИЕ МАТРИЦ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Результатом перемножения матриц

$$A = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{Vmatrix} \quad \text{и} \quad B = \begin{Vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{Vmatrix}$$

является матрица

$$C = \begin{Vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{Vmatrix}.$$

Элементы матрицы C равны [12]

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^{2} a_{ij} b_{jk}.$$

Программа 1.5.7.

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	П8	48	06	03	03	12	×	12
01	7	07	07	1	01	13	ИП7	67
02	ПО	40	08	0	00	14	ИП2	62
03	С/П	50	09	ПО	40	15	ПП	53
04	КП↑	LE	10	ИП8	68	16	35	35
05	F LO	5Г	11	ИП4	64	17	ИП8	68

Продолжение

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
18	ИП3	63	32	×	12	**Результат**		
19	×	12	33	ИП5	65			
20	ИП7	67	34	ИП1	61	c_{11}		
21	ПП	53	35	×	12	С/П c_{12}		
22	34	34	36	+	10	С/П c_{21}		
23	ИП6	66	37	КПО	L0	С/П c_{22}		
24	ИП4	64	38	С/П	50			
25	×	12	39	В/О	52	**Регистры**		
26	ИП5	65				0÷5 оперативные		
27	ИП2	62	**Инструкция**			6 оперативный; c_{22}		
28	ПП	53	В/0 a_{11} С/П a_{12} С/П			7 оперативный; c_{21}		
29	35	35	a_{21} С/П a_{22} С/П b_{11}			8 оперативный; c_{12}		
30	ИП6	66	С/П b_{12} С/П b_{21} С/П			9 c_{11}		
31	ИП3	63	b_{22} С/П					

Время вычисления после ввода последнего числа 12 с.

Пример

$$A=\begin{Vmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{Vmatrix};\quad B=\begin{Vmatrix}5 & 6\\ 7 & 8\end{Vmatrix};\quad C=\begin{Vmatrix}19 & 22\\ 43 & 50\end{Vmatrix}.$$

1.5.8. УМНОЖЕНИЕ МАТРИЦ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

Результатом перемножения матриц

$$A=\begin{Vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{Vmatrix} \quad \text{и} \quad B=\begin{Vmatrix}b_{11} & b_{12} & b_{13}\\ b_{21} & b_{22} & b_{23}\\ b_{31} & b_{32} & b_{33}\end{Vmatrix}$$

является матрица

$$C=\begin{Vmatrix}c_{11} & c_{12} & c_{13}\\ c_{21} & c_{22} & c_{23}\\ c_{31} & c_{32} & c_{33}\end{Vmatrix},$$

где [12]

$$c_{ik}=\sum_{j=1}^{3} a_{ij}b_{jk}.$$

Вычисление c_{ik} производится построчно. В регистры памяти 1÷9 в соответствии со списком заполнения регистров аналогично схеме I программы 1.5.6. вручную заносят элементы матрицы B. Затем построчно вводят элементы матрицы A. После ввода каждой строки матрицы A машина вычисляет значения элементов соответствующей строки матрицы C. Командами ИПА, ИПВ и ИПС эти элементы выводят и считывают.

Программа 1.5.8.

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	КНОП	54	17	+	10
01	1	01	18	ПС	4С
02	0	00	19	F ,	25
03	П0	40	20	↑	0Е
04	Сx	0Г	21	КИП0	Г0
05	ПА	4–	22	×	12
06	ПВ	4L	23	ИПВ	6L
07	ПС	4С	24	+	10
08	F ,	25	25	ПВ	4L
09	ПП	53	26	F ,	25
10	13	13	27	КИП0	Г0
11	ПП	53	28	×	12
12	13	13	29	ИПА	6–
13	↑	0Е	30	+	10
14	КИП0	Г0	31	ПА	4–
15	×	12	32	С/П	50
16	ИПС	6С	33	В/0	52

Инструкция

В/0 a_{11} С/П a_{12} С/П a_{13} С/П a_{21} С/П a_{22} С/П a_{23} С/П a_{31} С/П a_{32} С/П a_{33} С/П

Регистры

0 счетчик
1 b_{31}
2 b_{32}
3 b_{33}
4 b_{21}
5 b_{22}
6 b_{23}
7 b_{11}
8 b_{12}
9 b_{13}
A c_{11}; c_{21}; c_{31}
B c_{12}; c_{22}; c_{32}
C c_{13}; c_{23}; c_{33}

Время вычисления одной строки 0,5 мин.

Пример

$$A=\left\|\begin{matrix}1 & 2 & 3\\4 & 5 & 6\\7 & 8 & 9\end{matrix}\right\|;\quad B=\left\|\begin{matrix}0 & 1 & 2\\3 & 4 & 5\\6 & 7 & 8\end{matrix}\right\|;\quad C=\left\|\begin{matrix}24 & 30 & 36\\51 & 66 & 81\\78 & 102 & 126\end{matrix}\right\|.$$

1.5.9. ВЕКТОРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ДВУХ ВЕКТОРОВ

Вычисляется векторное произведение двух векторов $A=(a_1, a_2, a_3)$ и $B=(b_1, b_2, b_3)$, в результате получаем вектор $C=(c_1, c_2, c_3)$. Координаты вектора C определяются из [12]:

$$c_1=a_2b_3-a_3b_2,\quad c_2=a_3b_1-a_1b_3,\quad c_3=a_1b_2-a_2b_1.$$

Программа 1.5.9.

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	П6	46	09	ИП2	62	18	ИП1	61
01	5	05	10	ИП4	64	19	ИП6	66
02	П0	40	11	×	12	20	×	12
03	С/П	50	12	–	11	21	–	11
04	КП↑	LЕ	13	П0	40	22	П1	41
05	F L0	5Г	14	С/П	50	23	С/П	50
06	03	03	15	ИП3	63	24	ИП2	62
07	ИП5	65	16	ИП4	64	25	ИП6	66
08	×	12	17	×	12	26	×	12

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
27	ИП3	63			
28	ИП5	65			
29	×	12			
30	—	11			
31	П2	42			
32	С/П	50			

Инструкция

В/0 a_1 С/П a_2 С/П a_3 С/П b_1 С/П b_2 С/П b_3 С/П

Результат

c_1 С/П c_2 С/П c_3

Регистры

0 счетчик; c_1
1 b_3; c_2
2 b_2; c_3
3 b_1
4 a_3
5 a_2
6 a_1

Время ввода одного числа 2 с; время вычисления после ввода последнего числа 10 с.

Пример: A=(1, 2, 3); B=(4, 5, 6); C=(—3, 6, —3).

1.6. СОЕДИНЕНИЯ

1.6.1. ФАКТОРИАЛ

Факториал целого неотрицательного числа n ($69 \geqslant n \geqslant 0$) вычисляется по формуле [10]

$$n! = \begin{cases} n(n-1)\ldots 2\cdot 1 & \text{при } n \geqslant 1, \\ 1 & \text{при } n = 0. \end{cases}$$

Для вычисления n! надо ввести программу, набрать число n и выполнить команды В/О С/П. По окончании счета в регистрах X и Д будет размещен результат вычислений n!

Программа 1.6.1.

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	ВП	0С	04	×	12
01	П0	40	05	F L0	5Г
02	1	01	06	03	03
03	ИП0	60	07	С/П	50

Время вычисления T=(n+2) с.

Пример: n=5. n!=120.

1.6.2. ФУНКЦИЯ n!!

Функция n!! определяется для нечетных и четных $n \geqslant 1$ как

$$n!! = \begin{cases} n\cdot(n-2)\ldots 1 & \text{при } n \text{ — нечетном}, \\ n\cdot(n-2)\ldots 2 & \text{при } n \text{ — четном}. \end{cases}$$

Для вычисления функции n!! ($119 \geq n \geq 1$) ввести программу, набрать число n и выполнить команды В/О С/П. Вычисленное значение n!! будет получено в регистрах X и Д.

Программа 1.6.2.

Адрес	Команда	Код
00	П0	40
01	1	01
02	ИП0	60
03	×	12
04	F L0	5Г
05	06	06
06	F L0	5Г
07	02	02
08	С/П	50

Время вычисления $T = (0{,}8 \cdot n + 2)$ с.
Пример: n=7. 7!!=105.

1.6.3. РАЗМЕЩЕНИЯ

Число размещений A_n^m из n элементов по m определяется как [10]

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!} = n(n-1)\ldots(n-m+1),$$

где n и m — целые положительные числа ($n \geq 1$, $1 \leq m \leq n$).

Программа 1.6.3.

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	П0	40	06	F L1	5L
01	⇄	14	07	08	08
02	П1	41	08	F L0	5Г
03	1	01	09	04	04
04	ИП1	61	10	С/П	50
05	×	12			

Инструкция

n ↑ m В/0 С/П

Регистры

0 m
1 n

Время вычисления $T = 1{,}5\,(m+1)$ с.

Пример: n=5; m=3. $A_5^3 = 60$.

1.6.4. СОЧЕТАНИЯ

Определяется число сочетаний из n элементов по m [10]

$$C_n^m = \binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!};$$

где n и m — целые положительные числа $(n \geqslant 1,\ 1 \leqslant m \leqslant n)$.

Программа 1.6.4.

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	П0	40	07	:	13
01	⇆	14	08	F L1	5L
02	П1	41	09	10	10
03	1	01	10	F L0	5Г
04	ИП1	61	11	04	04
05	×	12	12	С/П	50
06	ИП0	60			

Инструкция

n ↑ m В/0 С/П

Регистры

0: m
1: n

Время вычисления $T=2(m+1)$ с.
Пример: $n=5$; $m=2$. $C_5^2=10$.

1.7. ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Вычисляются функции комплексной переменной z [12], представленной в алгебраической форме

$$z=a+ib.$$

Ответ также представляется в алгебраической форме

$$w=x+iy.$$

Предусмотрена возможность перевода результата вычислений в показательную форму

$$w=\rho_w e^{i\varphi_w}$$

и перевода из показательной формы в алгебраическую.

1.7.1. АРИФМЕТИЧЕСКИЕ ДЕЙСТВИЯ, ИЗВЛЕЧЕНИЕ КОРНЯ

Над комплексными числами $z_1=a+ib$ и $z_2=c+id$ выполняются сложение, вычитание, умножение и деление. Из числа z_1 и из результата вычислений извлекается квадратный корень.

Программа работает как в радианах, так и в градусах в зависимости от положения переключателя Р/Г.

Программа 1.7.1.

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	КНОП	54	33	ИП3	63	66	+	10
01	П1	41	34	ИП1	61	67	/−/	0L
02	⇄	14	35	×	12	68	0	00
03	П0	40	36	−	11	69	−	11
04	С/П	50	37	ИП0	60	70	↑	0E
05	/−/	0L	38	ИП3	63	71	F ,	25
06	⇄	14	39	×	12	72	В/О	52
07	/−/	0L	40	ИП1	61	73	ПП	53
08	⇄	14	41	ИП2	62	74	45	45
09	ИП1	61	42	×	12	75	⇄	14
10	+	10	43	+	10	76	F √	21
11	⇄	14	44	В/О	52	77	П0	40
12	ИП0	60	45	ИП0	60	78	⇄	14
13	+	10	46	F x^2	22	79	2	02
14	⇄	14	47	ИП1	61	80	:	13
15	В/О	52	48	F x^2	22	81	П1	41
16	/−/	0L	49	+	10	82	ИП1	61
17	П3	43	50	F √	21	83	F cos	1Г
18	⇄	14	51	↑	0E	84	ИП0	60
19	↑	0E	52	ИП1	61	85	×	12
20	F x^2	22	53	⇄	14	86	ИП1	61
21	ИП3	63	54	:	13	87	F sin	1C
22	F x^2	22	55	F arcsin	19	88	ИП0	60
23	+	10	56	ИП0	60	89	×	12
24	:	13	57	F $x<0$	5C	90	В/О	52
25	ИП3	63	58	71	71			
26	F ВХ	0	59	F ,	25			
27	:	13	60	1	01			
28	П3	43	61	/−/	0L			
29	⇄	14	62	F arccos	1−			
30	П2	42	63	⇄	14			
31	ИП0	60	64	F $x<0$	5C			
32	×	12	65	69	69			

Регистры

0 a; x; ρ
1 b; y; φ
2 c
3 d

Инструкция

Содержание	Набрать число	Выполнить команды	Результат
1. Ввести программу			
2. Ввести первый операнд	a b	↑ В/0 С/П	a a
3. Извлечь квадратный корень из результата (если не нужно — к п. 4 или п. 7)		БП 73 С/П	x — в рег. X, 0 y — в рег. У, 1
4. Для выполнения двухместной операции ввести следующий операнд	c d	↑	c d

Содержание	Набрать число	Выполнить команды	Результат
5. Выполнить одно из действий:			
а) сложение		БП 09 С/П	x — в рег. X, 0; y — в рег. Y, 1
б) вычитание		БП 05 С/П	
в) умножение		БП 28 С/П	
г) деление		БП 16 С/П	
6. Далее — к п. 3 или п. 7			
7. Перевод числа из алгебраической формы в показательную $\rho_w e^{i\varphi_w}$		БП 45 С/П	ρ_w — в рег. X, 0; φ_w — в рег. У, 1
8. Перевод числа из показательной формы $\rho_w e^{i\varphi_w}$ в алгебраическую (если ρ_w и φ_w задаются вручную, предварительно выполнить ρ_w ↑ φ_w В/0 С/П)		БП 82 С/П	a — в рег. X, 0; b — в рег. У, 1
9. Для продолжения счета — к п. 3			

Время сложения 4 с, вычитания — 5 с, умножения — 7 с, деления — 10 с, извлечения корня — 15 с, перевода в показательную форму — 9 с, в алгебраическую — 7 с.

Примеры

1. $(7+i5)+(2+i3)=(9+i8)$;
2. $(5-i4)-(2-i3)=(3-i1)$;
3. $(1{,}2+i3)\times(3-i2)=(9{,}6+i6{,}6)$;
4. $(2-i3):(3+i4)=(-0{,}24-i0{,}68)$;
5. $\dfrac{(1+i2)+(3+i5)}{(3+i4)}\times(3-i2)=(5{,}2-i2{,}6)$;
6. $\sqrt{z_1}=\sqrt{3+i4}=2+i1$;
7. $z_1=2e^{i1}=1{,}0806046+i1{,}6829421$;
8. $w=3+i4=5e^{i0{,}9272951}$.

1.7.2. ФУНКЦИИ $\sin z$, $\cos z$, $\operatorname{sh} z$, $\operatorname{ch} z$, e^z, $\ln z$, $z_1^{z_2}$

Расчетные формулы [10]:

$$\sin(a+ib)=\sin a \operatorname{ch} b+i\cos a \operatorname{sh} b;$$
$$\cos(a+ib)=\cos a \operatorname{ch} b-i\sin a \operatorname{sh} b;$$
$$\operatorname{sh}(a+ib)=\operatorname{sh} a\cos b+i\operatorname{ch} a\sin b;$$
$$\operatorname{ch}(a+ib)=\operatorname{ch} a\cos b+i\operatorname{sh} a\sin b;$$
$$e^{a+ib}=\rho e^{i\varphi};\quad \text{где } \rho=e^a;\quad \varphi=b;$$
$$\ln(a+ib)=\ln(\rho e^{i\varphi})=\ln\rho+i\varphi \quad (-\pi<\varphi\leqslant+\pi);$$
$$(a+ib)^{(c+id)}=e^{(c+id)\ln(a+ib)}$$ (сводится к приведенным выше формулам).

Программа работает в радианах или в градусах в зависимости от положения переключателя Р/Г.

Программа I.7.2.

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	В/О	52	35	+	10	70	В/О	52
01	П3	43	36	F $\sqrt{\ }$	21	71	ПП	53
02	⇄	14	37	↑	0Е	72	79	79
03	П2	42	38	ИП0	60	73	⇄	14
04	С/П	50	39	⇄	14	74	В/О	52
05	ПП	53	40	:	13	75	/−/	0L
06	30	30	41	F arcsin	19	76	1	01
07	ИП3	63	42	ИП1	61	77	F arcsin	19
08	+	10	43	F x<0	5С	78	+	10
09	⇄	14	44	57	57	79	⇄	14
10	ИП2	62	45	F ,	25	80	F e^x	16
11	×	12	46	1	01	81	↑	0Е
12	ПП	53	47	/−/	0L	82	F 1/x	23
13	16	16	48	F arccos	1−	83	П0	40
14	⇄	14	49	⇄	14	84	+	10
15	F e^x	16	50	F x<0	5С	85	2	02
16	⇄	14	51	55	55	86	:	13
17	F cos	1Г	52	+	10	87	П1	41
18	F ВХ	0	53	/−/	0L	88	⇄	14
19	F sin	1С	54	0	00	89	П2	42
20	П0	40	55	−	11	90	F sin	1С
21	F ,	25	56	↑	0Е	91	×	12
22	⇄	14	57	F ,	25	92	ИП1	61
23	×	12	58	В/О	52	93	ИП0	60
24	ИП0	60	59	ПП	53	94	−	11
25	F ВХ	0	60	30	30	95	ИП2	62
26	×	12	61	2	02	96	F cos	1Г
27	В/О	52	62	:	13	97	×	12
28	ПП	53	63	F tg	1Е			
29	59	59	64	F arctg	1L			
30	П0	40	65	2	02			
31	F x^2	22	66	×	12			
32	⇄	14	67	⇄	14			
33	П1	41	68	F ln	18			
34	F x^2	22	69	⇄	14			

Регистры

0 a; d
1 b; c
2 a; ρ; x
3 b; φ; y

Инструкция

Содержание	Набрать число	Выполнить команды	Результат
1. Ввести программу			
2. Занести первый операнд $z = a + ib$	a b	↑	a b
3. Для выполнения одноместной операции (если нет — к п. 5 или п. 7)		В/0 С/П	

Содержание	Набрать число	Выполнить команды	Результат
4. Вычислить составляющие одной из функций:			
а) sin z		БП 80 С/П	x — в рег. X, 2 y — в рег. У, 3
б) cos z		⇄БП 76 С/П	
в) sh z		БП 71 С/П	
г) ch z		БП 75 С/П	
д) e^z		БП 14 С/П	
е) ln z		⇄БП 59 С/П	
5. Для выполнения двухместной операции		БП 28 С/П	
6. Занести второй операнд $z = c+id$ и вычислить $z_1^{z_2}$	c d	↑ С/П	c x — в рег. X, 2 y — в рег. У, 3
7. Для перевода числа $z=a+ib$ в показательную форму $\rho e^{i\varphi}$		БП 30 С/П	ρ — в рег. X, 2 φ — в рег. У, 3
8. Перевод числа из показательной формы $\rho e^{i\varphi}$ в алгебраическую (если ρ и φ задаются вручную, предварительно выполнить ρ↑φ)		БП 17 С/П	a — в рег. X, 2 b — в рег. У, 3
9. Для продолжения счета — к п. 3			

Время вычисления $z_1^{z_2}$ 40 с, остальных функций — (9÷12) с, перевода из одной формы в другую — 9 с.

Примеры

1. $\sin(1+i) = 1{,}2984576 + i0{,}63496392$;
2. $\cos(1+i) = 0{,}83373001 - i0{,}98889776$;
3. $\mathrm{sh}(1+i) = 0{,}63496392 + i1{,}2984576$;
4. $\mathrm{ch}(1+i) = 0{,}83373001 + i0{,}98889776$;
5. $e^{(1+i)} = 1{,}4686939 + i2{,}2873554$;
6. $\ln(2e^{i\pi/6}) = \ln(1{,}7320509 + i1) = \ln 2 + i\pi/6 =$
   $= 0{,}69314717 + i0{,}52359878$;
7. $(4+i3)^{(4+i3)} = 39{,}574843 + i81{,}579512$.

Глава II

ТРИГОНОМЕТРИЯ И АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

II.1. ПЕРЕНОС И ПОВОРОТ ДЕКАРТОВЫХ ОСЕЙ КООРДИНАТ

Координаты точки P в новой системе координат определяются по формулам [10]:

$$x' = (x - x_0)\cos\alpha + (y - y_0)\sin\alpha;$$
$$y' = -(x - x_0)\sin\alpha + (y - y_0)\cos\alpha,$$

где x и y — координаты точки P в старой системе, x_0 и y_0 — координаты нового начала 0′ в старой системе координат, α — угол поворота системы координат (α>0, если поворот осуществляется против часовой стрелки, α<0, если по часовой стрелке).

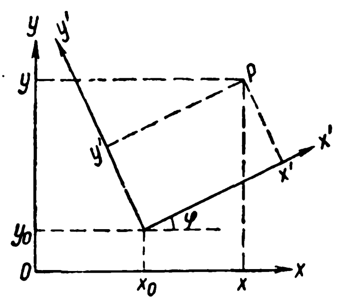


Рис. 1.

Переключатель Р/Г ставится в положение, соответствующее форме представления угла α=φ.

Программа II.1.

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	F cos	1Г	05	С/П	50	10	ИП9	69
01	ПС	4С	06	ПА	4—	11	—	11
02	F ВХ	0	07	⇄	14	12	ПД	4Г
03	F sin	1С	08	П9	49	13	ИПС	6С
04	ПВ	4L	09	С/П	50	14	×	12

Продолжение

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
15	П7	47	25	×	12	35	С/П	50
16	ИПД	6Г	26	ИП8	68	36	БП	51
17	ИПВ	6L	27	—	11	37	10	10
18	×	12	28	П8	48			
19	П8	48	29	ИПД	6Г			
20	С/П	50	30	ИПВ	6L			
21	ИПА	6—	31	×	12			
22	—	11	32	ИП7	67			
23	ПД	4Г	33	+	10			
24	ИПС	6С	34	П7	47			

Регистры

7 x'
8 y'
9 x_0
А y_0
В Sin α
С Cos α
Д оперативный

Инструкция

Содержание	Набрать число	Выполнить команды	Результат
1. Ввести программу			
2. Занести значение угла поворота α	α	В/0 С/П	sin α
3. Занести координаты нового начала x_0, y_0	x_0 y_0	↑ С/П	x_0 x_0
4. Занести координаты точки Р в старой и вычислить координаты в новой системе	x y	С/П С/П	x' — в рег. X, 7 y' — в рег. У, 8
5. Для вычисления координат еще одной точки — к п. 4			

Полное время вычисления 14 с.

Пример

Вычислить координаты точек:

$$P_1(70, 30),$$
$$P_2(10, 10)$$

в новой системе координат, начало которой находится в точке $x_0=50$, $y_0=20$, а сама она повернута на угол $\alpha=0{,}2$ радиана против часовой стрелки относительно прежней системы координат. Выполнив требования инструкции, получим новые координаты точки P_1:

$$x'=21{,}59\,;\quad y'=5{,}827$$

и новые координаты точки P_2:

$$x'=-41{,}19\,;\quad y'=-1{,}854.$$

11.2. ПЕРЕХОД ОТ ДЕКАРТОВЫХ КООРДИНАТ К ПОЛЯРНЫМ

Полярные координаты точки P (радиус-вектор ρ и полярный угол φ) определяются по формулам [10]:

$$\rho=\sqrt{x^2+y^2},$$

$$\varphi=\begin{cases}\arcsin\dfrac{y}{\rho} & \text{при } x>0\\ \pi\,\mathrm{sign}(y)-\arcsin\dfrac{y}{\rho} & \text{при } x<0,\end{cases}$$

где x и y — декартовы координаты этой же точки;

$$\mathrm{sign}(y)=\begin{cases}1 \text{ при } y>0,\\ 0 \text{ при } y=0,\\ -1 \text{ при } y<0.\end{cases}$$

При этом начало декартовых координат принято за полюс, а ось абсцисс — за полярную ось.

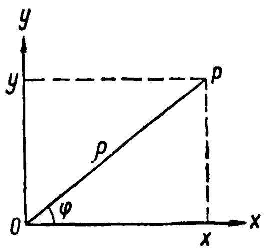


Рис. 2.

Программа работает в радианах или градусах в зависимости от положения переключателя Р/Г.

Программа 11.2.

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	ПА	4—	16	F ,	25
01	F x^2	22	17	1	01
02	С/П	50	18	/—/	0L
03	ПВ	4L	19	F arccos	1—
04	F x^2	22	20	⇄	14
05	+	10	21	F x<0	5C
06	F $\sqrt{}$	21	22	26	26
07	ПС	4C	23	+	10
08	С/П	50	24	/—/	0L
09	ИПВ	6L	25	0	00
10	⇄	14	26	—	11
11	:	13	27	↑	0E
12	F arcsin	19	28	F ,	25
13	ИПА	6—	29	ПД	4Г
14	F x<o	5C	30	С/П	50
15	28	28			

Инструкция

В/0 x С/П y С/П

Результат

ρ — в рег. X, C

С/П φ — в рег. X, Д

Регистры

A x
B y
C ρ
Д φ

Полное время вычислений 8 с.

Пример

$x=1$, $y=1$, $\rho=1{,}414$, $\varphi=0{,}7854_{\text{рад}}=45{,}00°$.

II.3. ПЕРЕХОД ОТ ПОЛЯРНЫХ КООРДИНАТ К ДЕКАРТОВЫМ

Декартовы координаты точки P определяются по формулам [10]:

$$x=\rho\cos\varphi;$$
$$y=\rho\sin\varphi;$$

где ρ и φ — полярные координаты той же точки. Начало декартовых координат принято за полюс, а ось абсцисс — за полярную ось.

Программа работает в радианах или градусах в зависимости от положения переключателя Р/Г.

Программа II.3.

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	F sin	1C	09	ИПС	6C
01	ПВ	4L	10	ИПВ	6L
02	F ВХ	0	11	×	12
03	F cos	1Г	12	ПВ	4L
01	С/П	50	13	С/П	50
05	ПС	4C			
06	×	12	**Инструкция**		
07	ПА	4—	В/0 φ С/П ρ С/П		
08	С/П	50			

Результат

С/П x — в рег. X, A
y — в рег. X, B

Регистры

A x
B y
C ρ
Д φ

Полное время вычислений 8 с.

Примеры

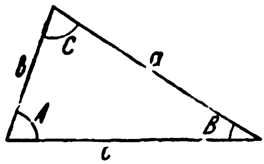
1. $\varphi=1{,}2$ радиана; $\rho=0{,}8$. $x=0{,}2899$; $y=0{,}7456$.
2. $\varphi=45{,}2°$; $\rho=1$. $x=0{,}7046$; $y=0{,}7096$.

II.4. РЕШЕНИЕ ТРЕУГОЛЬНИКОВ

По заданным трем сторонам, по двум сторонам и углу и по стороне и двум углам определяются величины остальных сторон и углов, а также площадь плоского треугольника [10].

Обозначения: a, b, c — стороны; A, B, C — противолежащие им углы; S — площадь треугольника.

В зависимости от положения переключателя Р/Г расчет ведется в радианах или градусах.



II.4.1. РЕШЕНИЕ ТРЕУГОЛЬНИКА ПО ТРЕМ СТОРОНАМ

Дано: a, b, c.

Расчетные формулы:

$$A = \arccos\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc};\quad B = \arccos\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac};\quad C = \pi-(A+B);$$

$$S = \frac{1}{2}a\cdot b\cdot \sin C.$$

Программа II.4.1.

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	П1	41	24	ИП1	61	48	:	13
01	F x²	22	25	ПП	53	49	Farccos	1—
02	ПД	4Г	26	44	44	50	В/0	52
03	С/П	50	27	ПВ	4L			
04	П2	42	28	С/П	50			
05	F x²	22	29	+	10			
06	ПВ	4L	30	F cos	1Г			
07	С/П	50	31	/—/	0L			
08	П3	43	32	F arccos	1—			
09	F x²	22	33	ПС	4С			
10	ПС	4С	34	С/П	50			
11	+	10	35	F sin	1С			
12	—	11	36	ИП1	61			
13	/—/	0L	37	×	12			
14	ИП2	62	38	ИП2	62			
15	ПП	53	39	×	12			
16	44	44	40	2	02			
17	ПА	4—	41	:	13			
18	С/П	50	42	ПД	4Г			
19	ИПД	6Г	43	С/П	50			
20	ИПС	6С	44	:	13			
21	+	10	45	ИП3	63			
22	ИПВ	6L	46	:	13			
23	—	11	47	2	02			

Инструкция

В/0 a С/П b С/П
c С/П

Результат

A — в рег. X, А
С/П B — в рег. X, В
С/П C — в рег. X, С
С/П S — в рег. X, Д

Регистры

1 a
2 b
3 c
А A
В b²; B
С c²; C
Д a²; S

Полное время вычисления 18 с.

П р и м е р

Решить треугольник по трем сторонам: a = 14,87; b = 10,46; c = 5,43.

О т в е т
$A = 2{,}3801_{\text{рад}} = 136{,}37°$;
$B = 0{,}5068_{\text{рад}} = 29{,}037°$;
$C = 0{,}2547_{\text{рад}} = 14{,}594°$;
$S = 19{,}596$.

II.4.2. РЕШЕНИЕ ТРЕУГОЛЬНИКА ПО ДВУМ СТОРОНАМ И УГЛУ МЕЖДУ НИМИ

Дано: a, b, C.
Расчетные формулы:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos C}; \quad A = \arccos\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc};$$

$$B = \pi - (A + C); \quad S = \frac{1}{2} a \cdot c \cdot \sin B.$$

Программа II.4.2.

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	П1	41	23	ИПВ	6L	46	:	13
01	F x^2	22	24	+	10	47	ПД	4Г
02	ПА	4—	25	ИПА	6—	48	С/П	50
03	С/П	50	26	—	11			
04	П2	42	27	ИПД	6Г			
05	F x^2	22	28	:	13			
06	ПВ	4L	29	ИП3	63			
07	+	10	30	:	13			
08	С/П	50	31	F arccos	1—			
09	ПС	4С	32	ПА	4—			
10	F cos	1Г	33	С/П	50			
11	ИП1	61	34	ИПС	6С			
12	×	12	35	+	10			
13	ИП2	62	36	F cos	1Г			
14	×	12	37	/—/	0L			
15	2	02	38	F arccos	1—			
16	ПД	4Г	39	ПВ	4L			
17	×	12	40	С/П	50			
18	—	11	41	F sin	1С			
19	F$\sqrt{\ }$	21	42	×	12			
20	П3	43	43	ИП1	61			
21	С/П	50	44	×	12			
22	F ВХ	0	45	2	02			

Инструкция

В/0 а С/П b С/П
С С/П

Результат

c — в рег. X, 3
С/П A — в рег. X, A
С/П B — в рег. X, B
С/П S — в рег. X, Д

Регистры

1 a
2 b
3 c
A a^2; A
B b^2; B
C c^2; C
Д 2b; S

Полное время вычисления 16 с.
П р и м е р
Решить треугольник, если дано $a = 1{,}1$; $b = 1$; $C = 1{,}4_{\text{рад}} = 80{,}214°$.
О т в е т
$c = 1{,}3550$;
$A = 0{,}9273_{\text{рад}} = 53{,}1288°$;
$B = 0{,}8143_{\text{рад}} = 46{,}6572°$;
$S = 0{,}5420$.

II.4.3. РЕШЕНИЕ ТРЕУГОЛЬНИКА ПО ДВУМ СТОРОНАМ И УГЛУ ПРОТИВ ОДНОЙ ИЗ НИХ

Дано: b, c, B.
Расчетные формулы:

$$C=\arcsin\frac{c\sin B}{b};\ A=\pi-(B+C);\ a=\frac{b\sin A}{\sin B};$$

$$S=\frac{1}{2}a\cdot c\cdot\sin B.$$

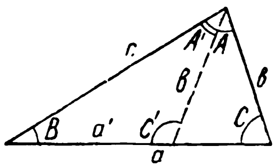


Рис. 4.

Если $b<c$, существует и второе решение:

$$C'=\pi-C;\ A'=\pi-(B+C');\ a'=\frac{b\sin A'}{\sin B};$$

$$S'=\frac{1}{2}a'\cdot c\cdot\sin B.$$

Программа II.4.3.

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	П8	48	17	П6	46	34	×	12
01	С/П	50	18	ИПВ	6L	35	2	02
02	П9	49	19	—	11	36	:	13
03	С/П	50	20	ПА	4—	37	ПД	4Г
04	ПВ	4L	21	С/П	50	38	С/П	50
05	F sin	1С	22	F sin	1С			
06	×	12	23	ИП8	68			
07	ИП8	68	24	×	12			
08	:	13	25	ИПВ	6L			
09	F arcsin	19	26	F sin	1С			
10	ПС	4С	27	:	13			
11	С/П	50	28	П7	47			
12	1	01	29	С/П	50			
13	/—	0L	30	ИП9	69			
14	F arccos	1—	31	×	12			
15	⇄	14	32	ИПВ	6L			
16	—	11	33	F sin	1С			

Регистры

6 оперативный
7 a; a′
8 b
9 c
А A; A′
В B
С C; C′
Д S; S′

Инструкция

Содержание	Набрать число	Выполнить команды	Результат
1. Ввести программу			
2. Занести значения заданных сторон и угла	b	В/0 С/П	b
	c	С/П	c
	B		B
3. Вычислить значения неизвестных углов, стороны и площади		С/П	C — в рег. X, C
		С/П	A — в рег. X, A
		С/П	a — в рег. X, 7
		С/П	S — в рег. X, Д
4. Если b<c, найти второе решение		ИП6 ПС	C′ — в рег. X, C
		БП 12 С/П	A′ — в рег. X, A
		С/П	a′ — в рег. X, 7
		С/П	S′ — в рег. X, Д

Время вычисления основных параметров 15 с, дополнительных — еще 10 с.

Пример

Решить треугольник, если дано $b=1$; $c=1{,}4$; $B=\frac{\pi}{4}$.

Ответ

$C=1{,}4289_{\text{рад}}=81{,}87°$; $C'=1{,}7127_{\text{рад}}=98{,}13°$;
$A=0{,}9273_{\text{рад}}=53{,}13°$; $A'=0{,}6435_{\text{рад}}=36{,}87°$;
$a=1{,}1314$; $a'=0{,}8485$;
$S=0{,}56$; $S'=0{,}42$.

II.4.4. РЕШЕНИЕ ТРЕУГОЛЬНИКА ПО ДВУМ УГЛАМ И СТОРОНЕ МЕЖДУ НИМИ

Дано: a, B, C.

Расчетные формулы:

$$A=\pi-(B+C);\quad b=\frac{a\sin B}{\sin A};\quad c=\frac{a\sin C}{\sin A};$$

$$S=\frac{1}{2}a\cdot c\cdot\sin B.$$

Программа II.4.4.

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	П1	41	08	F arccos	1—	16	ИПВ	6L
01	С/П	50	09	ПА	4—	17	F sin	1C
02	ПВ	4L	10	С/П	50	18	×	12
03	С/П	50	11	F sin	1C	19	П2	42
04	ПС	4C	12	:	13	20	С/П	50
05	+	10	13	F ВХ	0	21	⇄	14
06	F cos	1Г	14	⇄	14	22	ИПС	6C
07	/—/	0L	15	↑	0E	23	F sin	1C

Продолжение

Адрес	Команда	Код
24	×	12
25	П3	43
26	С/П	50
27	×	12
28	×	12
29	2	02
30	:	13
31	ПД	4Г
32	С/П	50

Инструкция

В/0 a С/П B С/П
C С/П

Результат

A — в рег. X, A
С/П b — в рег. X, 2
С/П c — в рег. X, 3
С/П S — в рег. X, Д

Регистры

1 a
2 b
3 c
A A
B B
C C
Д S

Полное время вычисления 15 с.

Пример

Решить треугольник, если дано $a=100$; $B=1_{рад}=57{,}296°$; $C=1{,}4_{рад}=80{,}214°$.

Ответ

$A=0{,}74159_{рад}=42{,}490°$; $c=145{,}89$;
$b=124{,}58$; $S=6138{,}2$.

II.4.5. РЕШЕНИЕ ТРЕУГОЛЬНИКА ПО ДВУМ УГЛАМ И СТОРОНЕ ПРОТИВ ОДНОГО ИЗ НИХ

Дано: a, A, C.

Расчетные формулы:

$$B=\pi-(A+C);\ b=\frac{a\sin B}{\sin A};\ c=\frac{a\sin C}{\sin A};$$

$$S=\frac{1}{2}b\cdot c\cdot\sin A.$$

Программа II.4.5.

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	П1	41	17	:	13
01	С/П	50	18	×	12
02	ПА	4–	19	П2	42
03	С/П	50	20	С/П	50
04	ПС	4С	21	F ВХ	0
05	+	10	22	ИПС	6С
06	F cos	1Г	23	F sin	1С
07	/–/	0L	24	×	12
08	F arccos	1–	25	П3	43
09	ПВ	4L	26	С/П	50
10	С/П	50	27	×	12
11	F sin	1С	28	×	12
12	ИПА	6–	29	2	02
13	F sin	1С	30	:	13
14	⇄	14	31	ПД	4Г
15	ИП1	61	32	С/П	50
16	F ВХ	0			

Инструкция

В/0 a С/П A С/П
C С/П

Результат

B — в рег. X, B
С/П b — в рег. X, 2
С/П c — в рег. X, 3
С/П S — в рег. X, Д

Регистры

1 a
2 b
3 c
A A
B B
C C
Д S

Полное время вычисления 15 с.

Пример

Решить треугольник, если дано $a=1$; $A=0{,}8_{рад}=45{,}837°$; $C=1{,}2_{рад}=68{,}755°$.

Ответ

$B=1{,}1416_{рад}=65{,}41°$; $b=1{,}2676$; $c=1{,}2993$; $s=0{,}59071$.

II.5. ВЫЧИСЛЕНИЕ РАССТОЯНИЙ

II.5.1. РАССТОЯНИЕ ОТ ТОЧКИ ДО ПРЯМОЙ

Расстояние от точки с координатами (x_0, y_0) до прямой, задаваемой уравнением $y=a+bx$, вычисляется по формуле [10]

$$d=\frac{|a+bx_0-y_0|}{\sqrt{b^2+1}}.$$

Программа II.5.1.

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	F ,	25	08	⇆	14
01	⇆	14	09	F x^2	22
02	×	12	10	1	01
03	F ВХ	0	11	+	10
04	F ,	25	12	:	13
05	+	10	13	F $\sqrt{\ }$	21
06	—	11	14	С/П	50
07	F x^2	22			

Инструкция

$a \uparrow b \uparrow x_0 \uparrow y_0$
В/0 С/П

Полное время вычисления 4 с.

Пример

Вычислить расстояние от точки с координатами (2; 3) до прямой, заданной уравнением $y=1+5x$.

Ответ

$d=1{,}568929$.

II.5.2. РАССТОЯНИЕ ОТ ТОЧКИ ДО ПЛОСКОСТИ

Расстояние от точки с координатами (x_0, y_0, z_0) до плоскости, заданной уравнением

$$Ax+By+Cz+D=0,$$

вычисляется по формуле [10]

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

Программа II.5.2.

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	ПД	4Г	15	ПС	4С	30	F$\sqrt{\ }$	21
01	С/П	50	16	×	12	31	С/П	50
02	П1	41	17	+	10			
03	С/П	50	18	С/П	50			
04	С/П	50	19	+	10			
05	ПА	4—	20	F x^2	22			
06	ИПД	6Г	21	ИПА	6—			
07	×	12	22	F x^2	22			
08	С/П	50	23	ИПВ	6L			
09	ПВ	4L	24	F x^2	22			
10	ИП1	61	25	+	10			
11	×	12	26	ИПС	6С			
12	+	10	27	F x^2	22			
13	⇄	14	28	+	10			
14	С/П	50	29	:	13			

Инструкция

В/0 x_0 С/П y_0 С/П z_0 С/П А С/П В С/П С С/П Д С/П

Регистры

1 y_0
А А
В В
С С
Д x_0

Время вычисления после ввода последнего аргумента 4 с.

Пример

Вычислить расстояние от точки с координатами (1; 2; 3) до плоскости, заданной уравнением $x+y+z+1=0$.

Ответ

$d=4{,}0414518$.

II.5.3. РАССТОЯНИЕ МЕЖДУ ПАРАЛЛЕЛЬНЫМИ ПЛОСКОСТЯМИ

Расстояние между двумя параллельными плоскостями, заданными уравнениями:

$$Ax+By+Cz+D_1=0$$
$$\text{и}\quad Ax+By+Cz+D_2=0,$$

вычисляется по формуле [10]

$$d=\frac{|D_1-D_2|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

Программа II.5.3

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	F x^2	22	08	С/П	50
01	С/П	50	09	—	11
02	F x^2	22	10	F x^2	22
03	+	10	11	⇄	14
04	С/П	50	12	:	13
05	F x^2	22	13	F $\sqrt{\ }$	21
06	+	10	14	С/П	50
07	С/П	50			

Инструкция

В/0 А С/П В С/П С С/П D_1 С/П D_2 С/П

Время вычисления после ввода последнего аргумента 2 с.

Пример

Вычислить расстояние между плоскостями, заданными уравнениями $x+2y+3z+4=0$ и $x+2y+3z+6=0$.

Ответ

$d=0{,}53452247$.

II.6. СПЕКТРАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

II.6.1. РАЗЛОЖЕНИЕ В РЯД ФУРЬЕ

Периодическая на интервале $(-\pi \div \pi)$ функция $f(t)$ может быть представлена рядом Фурье [7]:

$$f(t)=a_0/2+a_1\cos t+b_1\sin t+a_2\cos 2t+b_2\sin 2t+\ldots=$$
$$=a_0/2+c_1\sin(t+\varphi_1)+c_2\sin(2t+\varphi_2)+\ldots;$$

где коэффициенты a_k и b_k определяются приближенно из

$$a_k=\frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n} f(z_i)\cos kz_i,\quad b_k=\frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n} f(z_i)\sin kz_i,\quad z_i=\frac{\pi}{n}(2i-n-1),$$

а c_k и φ_k связаны с a_k и b_k соотношениями:

$$c_k=\sqrt{a^2_k+b^2_k};\quad \operatorname{tg}\varphi_k=\frac{a_k}{b_k}.$$

Приводятся две программы разложения в ряд Фурье функций, заданных аналитически на интервале $(-\pi \div \pi)$.

II.6.1.1. Определение нулевой и первых четырех гармоник ряда Фурье $a_0 \div a_4$, $в_1 \div в_4$

Количество n разбиений функции $f(t)$ задается оператором. (Следует устанавливать $n \geqslant 10$.)

Подпрограмма вычисления $f(t)$ размещается в ячейках памяти начиная с адреса 61. Аргумент t и ответ $f(t)$ — в регистре X. Программа работает в радианах.

Программа II.6.1.1.

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	П2	42	08	Cx	0Г	16	ИПО	60
01	2	02	09	КП4	L4	17	—	11
02	:	13	10	F L1	5L	18	2	02
03	П0	40	11	08	08	19	F 1/x	23
04	4	04	12	4	04	0	—	11
05	П4	44	13	П1	41	21	F π	20
06	9	09	14	П4	44	22	×	12
07	П1	41	15	ИП2	62	23	ИПО	60

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
24	:	13	43	F L1	5L			
25	П3	43	44	33	33			
26	ПП	53	45	F L2	58			
27	61	61	46	12	12			
28	ИПО	60	47	С/П	50			
29	:	13	48	×	12			
30	↑	0E	49	КИП4	Г4			
31	ПП	53	50	+	10			
32	49	49	51	ИП4	64			
33	ИП1	61	52	1	01			
34	×	12	53	—	11			
35	F cos	1Г	54	П4	44			
36	ПП	53	55	F ,	25			
37	48	48	56	КП4	L4			
38	ИП1	61	57	F ,	25			
39	×	12	58	↑	0E			
40	F sin	1C	59	ИП3	63			
41	ПП	53	60	В/О	52			
42	48	48						

Инструкция

n В/0 С/П

Результат

a_0 — в рег. 5
a_1 — в рег. С
a_2 — в рег. А
a_3 — в рег. 8
a_4 — в рег. 6
b_1 — в рег. Д
b_2 — в рег. В
b_3 — в рег. 9
b_4 — в рег. 7

Регистры

0 n/2
1÷4 оперативные
5÷Д $a_к$, $b_к$

Время вычисления $T=(1{,}3n+T_f n)$ мин, где T_f — время вычисления одного значения функции f(t).

Пример

$n=10$, $f(t)=t$. При этом подпрограмма вычисления f(t) содержит всего одну команду В/О с адресом 61.

Ответ (в скобках указаны точные значения)

$a_0=1{,}2\cdot10^{-7}$ (0); $a_1=0$ (0); $a_2=0$ (0); $a_3=0$ (0); $a_4=0$ (0); $b_1=2{,}033$ (2); $b_2=-1{,}069$ (—1); $b_3=0{,}777$ (0,667); $b_4=-0{,}661$ (—0,5).

II.6.1.2. Определение *m*-й гармоники ряда Фурье (a_m, b_m, c_m)

Количество n разбиений функции f(t) задается оператором (для уменьшения ошибок следует устанавливать $m<n/2$).

Подпрограмма вычисления f(t) размещается в ячейках памяти начиная с адреса 51. Аргумент t и ответ f(t) — в регистре X. Программа работает в радианах.

Программа II.6.1.2.

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	П1	41	05	ИПО	60	10	П4	44
01	0	00	06	П2	42	11	F BX	0
02	ПА	4—	07	:	13	12	F π	20
03	ПВ	4L	08	↑	0E	13	+	10
04	F π	20	09	+	10	14	П3	43

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
15	ИП3	63	33	+	10
16	ИП4	64	34	ПА	4—
17	—	11	35	F ,	25
18	П3	43	36	ИПС	6С
19	ПП	53	37	F sin	1С
20	51	51	38	×	12
21	ИП0	60	39	ИПВ	6L
22	:	13	40	+	10
23	↑	0Е	41	ПВ	4L
24	+	10	42	F L2	58
25	↑	0Е	43	15	15
26	ИП3	63	44	F x²	22
27	ИП1	61	45	ИПА	6—
28	×	12	46	F x²	22
29	ПС	4С	47	+	10
30	F cos	1Г	48	F √	21
31	×	12	49	ПС	4С
32	ИПА	6—	50	С/П	50

Инструкция

n П0 m В/0 С/П

Результат

c_m — в рег. X, C
a_m — в рег. A
b_m — в рег. B

Регистры

0 n
1 m
2÷4 оперативные
A a_m
B b_m
C оперативный; c_m

Время вычисления $T=2$ мин 10 с$+nT_f$, где T_f — время вычисления одного значения функции $f(t)$.

Пример

$n=10$, $m=2$, $f(t)=t$. Подпрограмма вычисления $f(t)$ содержит всего одну команду В/О с адресом 51.

Ответ (в скобках указаны точные значения)

$a_2=2\cdot10^{-7}$ (0); $b_2=-1{,}069$ (—1); $c_2=1{,}069$ (1).

II.6.2. СИНТЕЗ ФУНКЦИИ В ТОЧКЕ x

Функция F(x) представляется в точке x в виде [7]:

$$F(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_k(a_k\cos kx+b_k\sin kx)=\sum_k f_k(x)\cdot$$

Программа II.6.2.

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	КНОП	54	12	ИП0	60	24	ПД	4Г
01	0	00	13	×	12	25	С/П	50
02	ПД	4Г	14	П1	41	26	БП	51
03	F ,	25	15	F sin	1С	27	04	04
04	F x=0	5Е	16	×	12			
05	12	12	17	⇄	14			
06	F ,	25	18	ИП1	61			
07	F ,	25	19	F cos	1Г			
08	2	02	20	×	12			
09	:	13	21	+	10			
10	БП	51	22	ИПД	6Г			
11	22	22	23	+	10			

Регистры

0 x
1 kx
Д F(x)

Инструкция

Содержание	Набрать число	Выполнить команды	Результат
1. Переключатель Р/Г поставить в положение Р			
2. Ввести программу		F ПРГ ввод F АВТ	
3. Занести x в рег. 0	x	П0 В/0	x
4. Занести $a_к$	$a_к$	↑	$a_к$
5. Занести $b_к$ ($b_0=0$)	$b_к$	↑	$b_к$
6. Занести к	к		к
7. Вычислить F (x)		С/П	F (x)
8. Для продолжения вычислений F (x) при следующем значении к — к п. 4			
9. Для нового вычисления F (x) в другой точке x — к п. 3			

Время вычисления для одной гармоники 5 с.

Пример: $x=\pi/2$; $a_0=1$; $a_1=0{,}5$; $b_1=0{,}5$; $a_2=-1$; $b_2=1$; $a_3=0$; $b_3=1$.

Решение

к	0	1	2	3
F(x)	0,5	1	2	1

II.7. ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЕ И ОБРАТНЫЕ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

II.7.1. ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

Расчетные формулы [10]:

$$\mathrm{sh}x=\frac{e^x-e^{-x}}{2};\quad \mathrm{ch}x=\frac{e^x+e^{-x}}{2};\quad \mathrm{th}x=\frac{\mathrm{sh}x}{\mathrm{ch}x}.$$

Программа II.7.1.

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	F e^x	16	05	2	02
01	↑	0E	06	:	13
02	↑	0E	07	—	11
03	F 1/x	23	08	F BX	0
04	+	10	09	С/П	50

Инструкция

x В/0 С/П

Результат

chx — в рег. X;
shx — в рег. Y

Для вычисления th x после завершения работы программы нужно выполнить команду деления. Значение th x будет в регистре X.

Время вычисления 5 с.

Примеры

1.x=1. shx=1,1752; chx=1,5431; thx=0,7616.

2.x=−2. shx=−3,6269; chx=3,7622; thx=−0,9640.

II.7.2. ОБРАТНЫЕ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЕ СИНУС И КОСИНУС

Расчетные формулы [10]:

$$\mathrm{arsh}x = \ln(x+\sqrt{x^2+1});$$

$$\mathrm{arch}x = \ln(x+\sqrt{x^2-1}),\quad x>1.$$

Программа II.7.2. предназначена для вычисления arsh x.

Для вычисления arch x команду сложения с адреоом 03 следует заменить командой вычитания.

Программа II.7.2.

Адрес	Команда	Код
00	↑	OE
01	F x^2	22
02	1	01
03	+	10
04	F $\sqrt{}$	21
05	+	10
06	F ln	18
07	С/П	50

Инструкция

x В/0 С/П

Время вычисления 4 с.

Пример: x=1,5. arsh x=1.1948; arch x=0,9624.

II.7.3. ОБРАТНЫЙ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЙ ТАНГЕНС

Расчетная формула [10]:

$$\mathrm{arth}x = \ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}},\quad |x|<1.$$

Программа II.7.3.

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	↑	OE	06	—	11
01	1	01	07	:	13
02	⇄	14	08	F $\sqrt{}$	21
03	+	10	09	F ln	18
04	1	01	10	С/П	50
05	F BX	0			

Инструкция

x В/0 С/П

Время вычисления 4 с.

Пример: x=0,5. arth x=0,5493.

Глава III

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

III.1. ИНТЕРПОЛЯЦИЯ

III.1.1. ЛИНЕЙНАЯ ИНТЕРПОЛЯЦИЯ

Методом линейной интерполяции [10] приближенно находятся значения некоторой функции $y=f(x)$ по координатам двух ее известных точек (x_1, y_1) и (x_2, y_2)

$$y=y_2+\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}(x-x_2).$$

Программа III.1.1.

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	⇄	14	10	ИПС	6С	20	ПА	4—
01	С/П	50	11	:	13	21	БП	51
02	ПВ	4L	12	ПС	4С	22	13	13
03	F ,	25	13	С/П	50			
04	ПД	4Г	14	ИПД	6Г			
05	—	11	15	—	11			
06	ПС	4С	16	ИПС	6С			
07	F ,	25	17	×	12			
08	⇄	14	18	ИПВ	6L			
09	—	11	19	+	10			

Регистры

А y
В y_2
С $(y_1-y_2)/(x_1-x_2)$
Д x_2

Инструкция

Содержание	Набрать число	Выполнить команды	Результат
1. Ввести программу			
2. Занести координаты первой известной точки	x_1	↑	x_1
	y_1	В/0 С/П	x_1
3. Занести координаты второй известной точки	x_2	↑	x_2
	y_2	С/П	
4. Занести значение x и определить f(x)	x	С/П	$f(x)$ — в рег. X, A
5. Для интерполяции той же функции в другой точке — к п. 4			

П р и м е р

Зная координаты двух точек (1; 5) и (3; 9) некоторой функции $y=f(x)$, найти приближенно ее значение в точке $x=2{,}5$.

О т в е т: $y=8$.

III.1.2. КВАДРАТИЧНАЯ ИНТЕРПОЛЯЦИЯ

Методом квадратичной интерполяции приближенно находятся значения некоторой функции $y=f(x)$ по координатам трех известных равноотстоящих точек (x_1, y_1), (x_2, y_2) и (x_3, y_3). Используется формула Лагранжа [10]

$$y=\frac{p(p+1)}{2}y_1+(1-p^2)y_2+\frac{p(p-1)}{2}y_3,$$

где

$$p=\frac{x-x_2}{x_3-x_2}.$$

Программа III.1.2.

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	ПС	4С	16	ИПА	6—	32	ИПВ	6L
01	С/П	50	17	ИПС	6С	33	×	12
02	ПВ	4L	18	+	10	34	+	10
03	⇄	14	19	×	12	35	П7	47
04	П8	48	20	ИПА	6—	36	БП	51
05	С/П	50	21	—	11	37	10	10
06	ПА	4—	22	ИПС	6С			
07	F ,	25	23	+	10			
08	—	11	24	ИПД	6Г			
09	П9	49	25	×	12			
10	С/П	50	26	2	02			
11	ИП8	68	27	:	13			
12	—	11	28	1	01			
13	ИП9	69	29	ИПД	6Г			
14	:	13	30	F x^2	22			
15	ПД	4Г	31	—	11			

Регистры

7 y
8 x_2
9 x_2-x_3
А y_3
В y_2
С y_1
Д p

Инструкция

Содержание	Набрать число	Выполнить команды	Результат
1. Ввести программу			
2. Занести координаты трех известных точек	x_1	↑	x_1
	y_1	В/0 С/П	
	x_2	↑	x_2
	y_2	С/П	
	x_3	↑	x_3
	y_3	С/П	

Продолжение

Содержание	Набрать число	Выполнить команды	Результат
3. Занести значение x и определить y(x)	x	С/П	y(x) — в рег. X, 7
4. Для интерполяции той же функции в другой точке — к п. 3			

Пример

Зная три точки (1; 3), (3; 13) и (5; 31) некоторой функции $y=f(x)$, найти приближенно ее значения в точках $x=2$ и $x=3{,}3$.

Ответ: $f(2)=7$; $f(3{,}3)=15{,}19$.

III.2. НАХОЖДЕНИЕ МИНИМУМА (МАКСИМУМА) ФУНКЦИИ

Программа предназначена для нахождения минимума функции $y=f(x)$ на интервале (x_1, x_2). Если требуется найти максимум, функцию $y=f(x)$ заменяют функцией $y=-f(x)$.

Предполагается, что $f(x)$ на указанном интервале имеет только один минимум, слева от него — строго убывает, а справа — строго возрастает. В то же время функция $f(x)$ не обязательно должна быть гладкой или даже непрерывной.

По программе вычисляются и сравниваются значения функции $f(x)$ начиная с x_1 с шагом $\Delta x=(x_2-x_1)/3$. Как только значения функции начнут возрастать, величина шага Δx уменьшается втрое, а знак изменяется на обратный. Вычисления по такой схеме ведутся до тех пор, пока значения функции в соседних точках x и $x+\Delta x$ не станут равными.

Подпрограмму вычисления значений функции $f(x)$ располагают начиная с адреса 27. Аргумент **x и ответ** $f(x)$ — в регистре X.

Программа III.2.

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	ПО	40	12	ИП1	61	24	11	11
01	—	11	13	—	11	25	ИПО	60
02	П1	41	14	ПО	40	26	С/П	50
03	9	09	15	ПП	53			
04	F 10^x	15	16	27	27			
05	П2	42	17	ИП2	62			
06	ИП1	61	18	⇄	14			
07	3	03	19	П2	42			
08	:	13	20	—	11			
09	/—/	0L	21	F $x\geq0$	59			
10	П1	41	22	06	06			
11	ИПО	60	23	F $x=0$	5E			

Инструкция

x_2 ↑ x_1 В/0 С/П

Регистры

0 x
1 Δ x
2 y

Пример

Найти минимум функции $y=x^2/2-x$ на интервале (0; 3).

Подпрограмма вычисления значений функции y имеет вид

↑ F x^2 2 : — /—/ В/0

Ответ: x=1,0001529.

III.3. ИНТЕГРИРОВАНИЕ

III.3.1. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ФУНКЦИИ, ЗАДАННОЙ АНАЛИТИЧЕСКИ

III.3.1.1. По формуле прямоугольников

Интеграл

$$F=\int_a^b f(x)\,dx$$

вычисляется приближенно по формуле [18]

$$F\approx\Delta\sum_{i=1}^{n} f\left(a-\frac{\Delta}{2}+i\Delta\right)\cdot$$

где

$$\Delta=\frac{b-a}{n}.$$

Программа III.3.1.1.

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	ПО	40	12	Сх	0Г	24	14	14
01	F ,	25	13	ПС	4С	25	ИПД	6Г
02	—	11	14	ИПВ	6L	26	×	12
03	F ВХ	0	15	ИПД	6Г	27	ПВ	4L
04	⇄	14	16	+	10	28	С/П	50
05	ИПО	60	17	ПВ	4L	**Инструкция**		
06	:	13	18	ПП	53	в ↑ а ↑ n В/0 С/П		
07	ПД	4Г	19	29	29	**Регистры**		
08	2	02	20	ИПС	6С	0 n		
09	:	13	21	+	10	В а; F		
10	—	11	22	ПС	4С	С Σ		
11	ПВ	4L	23	F LO	5Г	Д Δ		

Пользователем должна быть составлена подпрограмма вычисления значений подынтегральной функции f(x). Подпрограмма должна располагаться в памяти машины начиная с адреса 29. Аргумент x и ответ f(x) — в регистре X.

Пример

Определить приближенное значение интеграла

$$F=\int_0^{\pi} e^x dx \quad \text{при} \quad n=32.$$

Подпрограмма вычисления значений подынтегральной функции имеет вид

$$F e^x \; В/О$$

Ответ: $F \approx 22{,}13181$; точное значение 22,14069.
Время вычисления 2,5 мин.

III.3.1.2. По формуле Симпсона с заданной точностью

Приближенное значение интеграла вычисляется по формуле [10]

$$F = \int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{\Delta}{3}[f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + \ldots + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)],$$

где

$$\Delta = \frac{b-a}{n}, \quad x_i = x_0 + i\Delta \;(i = 0, 1, \ldots, n), \quad x_0 = a, \; x_n = b.$$

Точность оценивается соотношением [10]

$$\delta = \frac{|F_n - F_{2n}|}{15},$$

где F_k — сумма, подсчитанная по k ординатам.

Вычисления ведутся для $n = 2, 4, 8, \ldots$ до тех пор, пока не будет выполнено соотношение $\delta \leqslant \varepsilon$,
где ε — заданная точность.

При вычислении интеграла по 2n ординатам ($n \geqslant 2$) используются результаты предыдущих вычислений и дополнительно рассчитываются значения функции f(x) только в n точках.

Пользователем должна быть составлена подпрограмма вычисления значений подынтегральной функции f(x). Подпрограмма должна располагаться в памяти машины начиная с адреса 67. Аргумент x и ответ f(x) — в регистре X.

Программа III.3.1.2.

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	ПП	53	13	ПД	4Г	26	ПС	4С
01	67	67	14	ИПВ	6L	27	ИП8	68
02	ИП9	69	15	ИПА	6—	28	ПП	53
03	+	10	16	—	11	29	67	67
04	П9	49	17	П7	47	30	↑	0Е
05	С/П	50	18	ИП7	67	31	ИПС	6С
06	↑	0Е	19	2	02	32	+	10
07	1	01	20	:	13	33	+	10
08	5	05	21	П7	47	34	ПС	4С
09	ВП	0С	22	ИПА	6—	35	ИП7	67
10	8	08	23	+	10	36	↑	0Е
11	×	12	24	П8	48	37	ИП8	68
12	F 1/x	23	25	0	00	38	+	10

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
39	+	10	53	ИП7	67
40	П8	48	54	×	12
41	ИПВ	6L	55	ИП6	66
42	—	11	56	⇄	14
43	F x≥0	59	57	П6	46
44	27	27	58	—	11
45	ИПС	6С	59	ИПД	6Г
46	↑	0Е	60	×	12
47	ИП9	69	61	F 10^x	15
48	+	10	62	F lg	17
49	П9	49	63	F x=0	5Е
50	+	10	64	18	18
51	3	03	65	ИП6	66
52	:	13	66	С/П	50

Инструкция

Сх П9
а ПА В/0 С/П
b ПВ В/0 С/П
ε С/П

Регистры

6 F
7 Δ
8 x_i
9, С счетчики
А a
В b
Д $(15\cdot 10^8\,\varepsilon)^{-1}$

Пример

Определить приближенное значение интеграла

$$F=\int_0^{\pi} e^x dx \qquad \text{с точностью} \quad \varepsilon\leqslant 0{,}003.$$

Программа вычисления значений подынтегральной функции имеет вид Fe^x В/О.

Ответ: F=22,143563; точное значение 22,140690.

Время вычисления 1 мин 15 с.

III.3.1.3. По методу суммирования с переменным шагом

Используется формула, подобная формуле Чебышева [22]:

$$F=\int_a^b f(x)dx\approx\frac{b-a}{2n}\sum_{i=1}^{2n} f(x_i)=F_{2n}(a,b),$$

но с иным выбором узлов x_i.

Для гладких функций f(x) удобным оказался выбор узлов, на который указал авторам профессор Г. И. Натансон:

$$x_{2i-1}=ih-h/2-h/2\sqrt{3}+a,\quad x_{2i}=ih-h/2+h/2\sqrt{3}+a$$
$$(i=1,2,\ldots,n),$$

где $h=(b-a)/n$.

Программа III.3.1.3.

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	П1	41	17	ПП	53	34	ИП1	61
01	—	11	18	28	28	35	+	10
02	⇄	14	19	ИП5	65	36	ПП	53
03	П2	42	20	ПП	53	37	42	42
04	:	13	21	28	28	38	ИПД	6Г
05	П3	43	22	F L2	58	39	+	10
06	2	02	23	15	15	40	ПД	4Г
07	:	13	24	ИП4	64	41	В/О	52
08	П4	44	25	×	12			
09	3	03	26	ПД	4Г			
10	F $\sqrt{}$	21	27	С/П	50			
11	:	13	28	ИП2	62			
12	П5	45	29	ИП3	63			
13	Сх	0Г	30	×	12			
14	ПД	4Г	31	+	10			
15	ИП5	65	32	ИП4	64			
16	/—/	0L	33	—	11			

Инструкция

n ↑ b ↑ a В/О С/П

Регистры

1 a
2 $(b-a)/n$
3 оперативный
4 $(b-a)/2n$
Д F_{2n}

Подпрограмма вычисления $f(x_i)$ размещается, начиная с адреса 42. Аргумент x и ответ $f(x)$ — в регистре X.

Время вычисления $T=(12n+10)$ с.

Пример: $n=5$, $b=5$, $a=0$, $f(x)=x^4$.

Подпрограмма вычисления $f(x)$ имеет вид Fx^2 Fx^2В/О.

Ответ: $F=624{,}9722$; точное значение 625.

III.3.2. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ФУНКЦИИ, ЗАДАННОЙ ТАБЛИЧНО

Пусть x_0, x_1 ..., x_n — равноотстоящие точки, в которых известны соответствующие значения функции

$$y_0, y_1, \ldots, y_n.$$

Определим интеграл от этой функции на интервале (x_0, x_n), введя

$$\Delta x=\frac{x_n-x_0}{n}.$$

Если n четно, искомый интеграл вычисляется по формуле Симпсона [10]

$$F=\frac{\Delta x}{3}[y_0+4y_1+2y_2+\ldots+4y_{n-1}+y_n] \quad (n\geqslant 2).$$

Если n нечетно, по формуле Симпсона вычисляется интеграл для первых $n-1$ точек. К нему добавляется интеграл по последнему участку от параболы, проведенной через точки y_{n-2}, y_{n-1}, y_n,

$$F_{доб}=\frac{\Delta x}{3}\left[-\frac{1}{4}y_{n-2}+2y_{n-1}+\frac{5}{4}y_n\right].$$

Программа III.3.2.

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	ПВ	4L	20	П9	49	40	4	04
01	2	02	21	БП	51	41	:	13
02	ПС	4С	22	06	06	42	—	11
03	П4	44	23	ИП4	64	43	ИПД	6Г
04	С/П	50	24	F π	20	44	+	10
05	ПД	4Г	25	$\times$	12	45	3	03
06	С/П	50	26	F cos	1Г	46	:	13
07	ПА	4—	27	F $x \geqslant 0$	59	47	ИПВ	6L
08	6	06	28	33	33	48	$\times$	12
09	ИПС	6С	29	ИПА	6—	49	ПД	4Г
10	—	11	30	/—/	0L	50	С/П	50
11	ПС	4С	31	БП	51			
12	$\times$	12	32	43	43		**Регистры**	
13	ИПД	6Г	33	ИП9	69	4 счетчик		
14	+	10	34	ИПА	6—	8 y_{n-2}		
15	ПД	4Г	35	1	01	9 y_{n-1}		
16	КИП4	Г4	36	1	01	А y_n		
17	ИП9	69	37	$\times$	12	В Δx		
18	П8	48	38	ИП8	68	С коэф. 4; 2		
19	ИПА	6—	39	+	10	Д F		

Инструкция

Содержание	Набрать число	Выполнить команды	Результат
1. Переключатель Р/Г поставить в положение Р			
2. Ввести программу			
3. Занести величину шага	Δx	В/0 С/П	2
4. Занести очередное значение функции y_i	y_i	С/П	y_i
5. Если исходные данные исчерпаны, далее, нет — к п. 4			
6. Вычислить интеграл F		БП 23 С/П	F — в рег. X, Д

Пример

Вычислить приближенное значение интеграла

$$F = \int_{-10}^{0} (x^4 + 3x^2)\,dx,$$

располагая значениями подынтегральной функции с шагом $\Delta x = 2$: $y = 10300, 4288, 1404, 304, 28, 0$.

Ответ: $F = 21016{,}666$; точное значение 21000.

III.4. РЕШЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Приведены программы приближенного решения дифференциальных уравнений первого — пятого порядков

$y^{(m)} = f(x, y, \ldots, y^{(m-1)})$ ($m = 1 \div 5$—порядок уравнения) и систем от двух до четырех уравнений первого порядка

$$\begin{cases} y'=f(x, y, \ldots, v), \\ \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \\ v'=r(x, y, \ldots, v), \end{cases}$$

разрешенных относительно старшей производной (x — независимая переменная, по которой берутся все производные). Расчетные формулы хорошо известны (см., например, [11]).

Результаты вычислений выводятся на индикатор в виде последовательности значений функций y_i, ..., v_i ($i=1,2, \ldots$). Независимая переменная x изменяется с шагом h, который выбирается пользователем и при необходимости может им корректироваться.

Вопросы точности решения изложены в специальной литературе [11]. Кроме того, имеется универсальный, но громоздкий способ контроля точности: повторить вычисления с половинным шагом и сравнить результаты.

Примечания:

1. После вычисления машиной решения на очередном шаге с ним можно в ручном режиме делать различные преобразования, например вычислить отклонение от ожидаемого значения. Можно изменить величину шага h. Программы составлены так, что после нажатия клавиши «С/П» вычисления продолжаются независимо от содержимого регистров X и У. Следует только избегать засылки в регистры, обслуживающие основную программу (они указаны в тексте).

2. Результаты приводимых расчетов для экономии места, как правило, округлены.

III.4.1. УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА $y'=f(x, y)$

III.4.1.1. Решение методом Рунге-Кутта второго порядка

Подпрограмма вычисления значений функции f(x, y)

а) может занимать ячейки памяти с адресами 22÷97 и регистры 0÷9;

б) аргументы должна брать: x_i — из регистра В, y_i — из регистра Д;

в) вычисленное значение f должна оставлять в регистре X;

г) заканчивается командой В/О.

Программа III.4.1.1.

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	В/О	52	05	+	10	10	ПВ	4L
01	ПД	4Г	06	ПД	4Г	11	ПП	53
02	С/П	50	07	ИПВ	6L	12	22	22
03	ПП	53	08	ИПА	6—	13	ИПА	6—
04	11	11	09	+	10	14	×	12

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
15	2	02	21	В/О	52		**Регистры**	
16	:	13						
17	↑	0E		**Инструкция**		А h		
18	ИПС	6С	h ПА x_0 ПВ y_0 ПС			В x_i		
19	+	10	В/0 С/П			С y_i		
20	ПС	4С	С/П y_i С/П y_2...			Д y_{i+1}		

Очередное значение y_i вычисляется за $(9+N/2)$ с, где N — количество команд в подпрограмме.

Пример

Решить дифференциальное уравнение $y'=x\sqrt{y}$ при начальных условиях $x_0=1$, $y=1$. Шаг $h=0{,}1$.

Подпрограмма имеет вид ИПВ ИПД F $\sqrt{\ }$ $\times$ В/О.

Таблица результатов

x	1	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5
y	1	1,1077	1,2319	1,3745	1,5372	1,7221
Уточн:	1	1,1078	1,2321	1,3748	1,5376	1,7227

Очередное значение y_i вычисляется за 12 с.

III.4.1.2. Решение методом Рунге-Кутта четвертого порядка

Подпрограмма вычисления значений функции $f(x, y)$:

а) может занимать ячейки памяти с адресами 37÷97 и регистры 0÷8;

б) аргументы должна брать: x_i — из регистра А, y_i — из регистра С;

в) вычисленное значение f должна оставлять в регистре X;

г) заканчивается командой В/О.

Программа III.4.1.2.

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	В/О	52	08	ПП	53	16	F ВХ	0
01	3	03	09	20	20	17	ИПС	6С
02	:	13	10	ПП	53	18	+	10
03	ПС	4С	11	33	33	19	ПС	4С
04	ПД	4Г	12	ПП	53	20	ИП9	69
05	С/П	50	13	24	24	21	ИПА	6—
06	ПП	53	14	ПП	53	22	+	10
07	24	24	15	33	33	23	ПА	4—

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
24	ПП	53	33	F ВХ	0	В/0 С/П		
25	37	37	34	+	10	С/П y_1 С/П y_2...		
26	ИП9	69	35	ПВ	4L		**Регистры**	
27	×	12	36	В/О	52			
28	ИПД	6Г				9 1/2 h		
29	⇄	14		**Инструкция**		А x_i		
30	+	10	h ↑ 2 : П9			В $3y_{i+1}$		
31	ПС	4С	x_0 ПА			С y_i		
32	ИПВ	6L	y_0 ↑ 3×ПВ			Д y_i		

Очередное значение y_i вычисляется за (23+N) с, где N — количество команд в подпрограмме.

Пример

Решить дифференциальное уравнение $y' = x\sqrt{y}$ при начальных условиях $x_0 = 0$, $y = 0{,}5625$. Шаг $h = 0{,}35$.

Подпрограмма имеет вид ИПА ИПС F $\sqrt{\ }$ × В/О.

Таблица результатов

x	0	0,35	0,70	1,05	1,40	1,75
y	0,56250	0,60937	0,76124	1,05187	1,53753	2,29699
Уточн.	0,56250	0,60938	0,76126	1,05191	1,53760	2,29712

Очередное значение y_i вычисляется за 30 с.

III.4.2. СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

$$\begin{cases} y' = f(x, y, \ldots, v), \\ z' = g(x, y, \ldots, v), \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ v' = r(x, y, \ldots, v). \end{cases}$$

III.4.2.1. Система из двух уравнений

$$\begin{cases} y' = f(x, y, z), \\ z' = g(x, y, z). \end{cases}$$

III.4.2.1.1. Решение методом Рунге-Кутта второго порядка

Система решается с помощью универсальной программы III.4.2.1.1, в которой 4 команды являются изменяемыми.

Изменяемые команды: 01 Сх ОГ   15 Сх ОГ
02 6 06   16 6 06

Регистры: 0 счетчик 2 z_i 4 операт. 6 y_{i+1}
1 x_i 3 z_{i+1} 5 y_i Д h

Подпрограмма вычисления значений функций f и g:

а) может занимать ячейки памяти с адресами 34÷97 и регистры 7÷С;

б) аргументы должна брать: x_i — из регистра 1, y_i — из регистра 5, z_i — из регистра 2;

в) вначале должна вычислить значение g(x, y, z) и результат занести в регистр 4, затем вычислить f(x, y, z) и результат оставить в регистре X;

г) заканчивается командой В/О.

Программа III.4.2.1.1.

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	В/О	52	15	*	*	30	КИП0	Г0
01	*	*	16	*	*	31	F L0	5Г
02	*	*	17	П0	40	32	20	20
03	П0	40	18	ПП	53	33	В/О	52
04	КИП ↑	ГЕ	19	34	34			
05	КП0	L0	20	ИПД	6Г		**Инструкция**	
06	С/П	50	21	×	12	h ПД		
07	КИП0	Г0	22	2	02	x_0 П1		
08	F L0	5Г	23	:	13	y_0 П6 В/0 С/П		
09	04	04	24	↑	0Е	z_0 П3 С/П		
10	ПП	53	25	КИП ↑	ГЕ			
11	15	15	26	+	10		**Результат**	
12	ИПД	6Г	27	КП ↑	LЕ	С/П y_1 С/П z_1		
13	+	10	28	+	10	С/П y_2 С/П z_2		
14	П1	41	29	КП0	L0	. . . .		

Очередные значения y_i и z_i вычисляются за (22+N/2) с, где N — количество команд подпрограммы.

Пример

Решить систему уравнений

$$\begin{cases} y' = xy + z, \\ z' = x + yz \end{cases}$$

при начальных условиях $x_0 = 1$, $y_0 = 1$, $z_0 = 1$. Шаг h = 0,05.

Подпрограмма имеет вид

ИП1 ИП5 ИП2 × + П4 ИП1 ИП5 × ИП2 + В/О

Таблица результатов

x	1	1,05	1,10	1,15	1,20	1,25
y	1	1,1064	1,2271	1,3645	1,5213	1,7006
$y_{точн.}$	1	1,1066	1,2275	1,3653	1,5224	1,7024
z	1	1,1055	1,2281	1,3580	1,5308	1,7224
$z_{точн.}$	1	1,1057	1,2284	1,3687	1,5320	1,7243

Очередные значения y_i и z_i вычисляются за 28 с.

III.4.2.1.2. Решение методом Рунге-Кутта четвертого порядка

Система уравнений

$$\begin{cases} y' = f(x, y, z), \\ z' = g(x, y, z) \end{cases}$$

решается с помощью программы III.4.2.1.2.

Подпрограмма вычисления значений функций f и g:

а) может занимать ячейки памяти с адресами 55÷97, регистры 0÷2, а также использовать в качестве оперативных регистры 3, 4, 5;

б) аргументы должны брать: x_i — из регистра 6, y_i — из регистра А, z_i — из регистра В;

в) вначале должна вычислить g(x, y, z) и занести результат в регистр 3, затем вычислить f(x, y, z) и результат оставить в регистре X;

г) заканчивается командой В/О.

Программа III.4.2.1.2.

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	В/О	52	25	ИП7	67	50	ИПС	6С
01	3	03	26	+	10	51	ИП5	65
02	:	13	27	П6	46	52	+	10
03	П8	48	28	ПП	53	53	ПС	4С
04	ПА	4—	29	55	55	54	В/О	52
05	С/П	50	30	ИП7	67			
06	ИПД	6Г	31	×	12			
07	3	03	32	П5	45			
08	:	13	33	ИП3	63			
09	П9	49	34	ИП7	67			
10	ПВ	4L	35	×	12			
11	С/П	50	36	П4	44			
12	ПП	53	37	ИП9	69			
13	28	28	38	ИП8	68			
14	ПП	53	39	ИП5	65			
15	24	24	40	+	10			
16	ПП	53	41	ПА	4—			
17	46	46	42	⇄	14			
18	ПП	53	43	ИП4	64			
19	28	28	44	+	10			
20	ИПВ	6L	45	ПВ	4L			
21	ИПА	6—	46	ИПД	6Г			
22	ПП	53	47	ИП4	64			
23	39	39	48	+	10			
24	ИП6	66	49	ПД	4Г			

Инструкция

x_0 П6
h ↑ 2 : П7
y_0 ↑ 3×ПС В/0 С/П
z_0 ↑ 3×ПД С/П

Результат

С/П y_1 С/П z_1
С/П y_2 С/П z_2
• • • • • •

Регистры

3 g
4 l/2
5 к/2
6 x_i
7 h/2
8,А y_i
9,В z_i
С $3y_{i+1}$
Д $3z_{i+1}$

Пример

Решить систему уравнений

$$\begin{cases} y' = xy + z, \\ z' = x + yz \end{cases}$$

при начальных условиях $x_0 = 1$, $y_0 = 1$, $z = 1$. Шаг $h = 0{,}1$.

Подпрограмма имеет вид

ИП6 ИПА ИПВ × + П3 ИП6 ИПА × ИПВ + В/О

Таблица результатов

x	1	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5
y	1	1,22754	1,52241	1,90912	2,42456	3,12741
$y_{точн.}$	1	1,22755	1,52243	1,90915	2,42463	3,12759
z	1	1,22814	1,53202	1,95373	2,57414	3,55937
$z_{точн.}$	1	1,22843	1,53201	1,95373	2,57445	3,55945

Очередные значения неизвестных вычисляются за 1 мин.

III.4.2.2. Система из трех уравнений

$$\begin{cases} y' = f(x, y, z, t), \\ z' = g(x, y, z, t), \\ t' = p(x, y, z, t). \end{cases}$$

Система решается методом Рунге-Кутта второго порядка с помощью универсальной программы III.4.2.1.1.

Изменяемые команды

01	Сх	ОГ
02	9	09
15	Сх	ОГ
16	9	09

Регистры

0 счетчик	6 z_{i+1}
1 x_i	7 g
2 t_i	8 y_i
3 t_{i+1}	9 y_{i+1}
4 p	Д h
5 z_i	

Подпрограмма вычисления значений функций $f(x, y, z, t)$, $g(x, y, z, t)$ и $p(x, y, z, t)$:

а) может занимать ячейки памяти с адресами 34÷97, регистры А, В, С, а также использовать в качестве оперативных регистры 4 и 7;

б) аргументы должна брать: x_i — из регистра 1, y_i — из регистра 8, z_i — из регистра 5, t_i — из регистра 2;

в) вначале должна вычислить $g(x, y, z, t)$, результат — в регистр 7, затем $p(x, y, z, t)$, результат — в регистр 4, затем $f(x, y, z,t)$, результат — в регистр X;

г) заканчивается командой В/О.

Инструкция

Содержание	Набрать число	Выполнить команды	Результат
1. Ввести программу и подпрограмму			
2. Занести значения шага и начальных условий	h	ПД	h
	x_0	П1	x_0
	y_0	П9 В/0 С/П	y_0
	z_0	П6 С/П	z_0
	t_0	П3 С/П	t_0
3. Вычислить очередные значения y_i, z_i, t_i		С/П	y_i
		С/П	z_i
		С/П	t_i
4. Для продолжения счета — к п. 3			

Очередные значения неизвестных вычисляются за (33+N/2) с, где N — количество команд подпрограммы.

Пример

Решить систему уравнений

$$\begin{cases} y' = x(z+t)+y, \\ z' = t(x+y)+z, \\ t' = y(z+t)+x \end{cases}$$

при начальных условиях $x_0=1$, $y_0=1$, $z_0=1$, $t_0=1$. Шаг $h=0{,}02$.

Подпрограмма имеет вид

ИП2 ИП1 ИП8 + × ИП5 + П7 ИП8 ИП5 ИП2
+ × ИП1 + П4 ИП1 ИП5 ИП2 + × ИП8 + В/О

Таблица результатов

x	y	$y_{точн.}$	z	$z_{точн.}$	t	$t_{точн.}$
1,00	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
1,02	1,0622	1,0623	1,0626	1,0627	1,0627	1,0627
1,04	1,1293	1,1293	1,1311	1,1312	1,1313	1,1314
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
1,10	1,3642	1,3645	1,3797	1,3801	1,3821	1,3825

Очередные значения неизвестных вычисляются за 45 с.

III.4.2.3. Система из четырех уравнений

$$\begin{cases} y' = f(x, y, z, t, v), \\ z' = g(x, y, z, t, v), \\ t' = p(x, y, z, t, v), \\ v' = r(x, y, z, t, v) \end{cases}$$

решается методом Рунге-Кутта второго порядка с помощью универсальной программы III.4.2.1.1.

Изменяемые команды			Регистры		
01	1	01	0 счетчик	5 t_i	A g
02	2	02	1 x_i	6 t_{i+1}	B y_i
15	1	01	2 v_i	7 p	C y_{i+1}
16	2	02	3 v_{i+1}	8 z_i	Д h
			4 r	9 z_{i+1}	

Подпрограмма вычисления значений функций f, g, p и r:

а) может занимать ячейки памяти с адресами 34÷97, а также в качестве оперативных регистры 4, 7 и A. Для записи констант, которые могут содержаться в правых частях системы уравнений, надо использовать командную память, отведенную для подпрограмм, так как свободных регистров не остается;

б) аргументы должны брать: x_i — из регистра 1, y_i — из регистра B, z_i — из регистра 8, t_i — из регистра 5, v_i — из регистра 2;

в) вначале должна вычислить g и поместить в регистр A,
затем p и поместить в регистр 7,
затем r и поместить в регистр 4,
затем f и оставить в регистре X;

г) заканчивается командой В/О.

Очередные значения неизвестных вычисляются за (42+N/2) с, где N — количество команд подпрограммы.

Инструкция

Содержание	Набрать число	Выполнить команды	Результат
1. Ввести программу и подпрограмму			
2. Занести значения шага и начальных условий	h	ПД	h
	x_0	П1	x_0
	y_0	ПС В/0 С/П	y_0
	z_0	П9 С/П	z_0
	t_0	П6 С/П	t_0
	v_0	П3 С/П	v_0
3. Вычислить очередные значения y, z, t, v		С/П	y_i
		С/П	z_i
		С/П	t_i
		С/П	v_i
4. Для продолжения счета — к п. 3			

Очередные значения неизвестных вычисляются за (42+N/2) с, где N — количество команд подпрограммы.

Пример

Решить систему уравнений

$$\begin{cases} y' = x + y + v, \\ z' = yz + 2, \\ t' = z + t, \\ v' = tv \end{cases}$$

при начальных условиях $x_0=1$, $y_0=1$, $z_0=1$, $t_0=1$, $v_0=1$, Шаг $h=0{,}04$.

Подпрограмма имеет вид

ИПВ ИП8 × 2 + ПА ИП8 ИП5 + П7 ИП5 ИП2 × П4 ИП1 ИПВ + ИП2 + В/О

Таблица результатов

x	y	z	t	v
1,00	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
1,04	1,1240	1,1251	1,0840	1,0425
1,08	1,2565	1,2618	1,1767	1,0906
1,12	1,3982	1,4127	1,2791	1,1453
1,16	1,5496	1,5808	1,3921	1,2080

При $x=1{,}16$ ошибки составляют
$\delta_y=0{,}0005$; $\delta_z=0{,}0003$; $\delta_t=0{,}0007$; $\delta_v=0{,}0005$.

Очередные значения неизвестных вычисляются за 1 мин.

III.4.3. УРАВНЕНИЯ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

$$y^{(m)}=f(x, y, y', y'', \ldots, y^{(m-1)}).$$

III.4.3.1. Уравнение второго порядка

$$y''=f(x, y, y').$$

III.4.3.1.1. Решение методом Рунге-Кутта второго порядка

Подпрограмма вычисления значений функции $f(x, y, y')$:

а) может занимать ячейки памяти с адресами 32÷97, регистры 8÷Д, а также использовать регистр 7 в качестве оперативного;

б) аргументы должна брать: x_i — из регистра 5, y_i — из регистра 3, y'_i — из регистра 1;

в) вычисленное значение f должна оставлять в регистре X;

г) заканчивается командой В/О.

Программа III.4.3.1.1.

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	В/О	52	07	12	12	14	ПП	53
01	ИП2	62	08	ИП5	65	15	32	32
02	П1	41	09	ИП6	66	16	П7	47
03	ИП4	64	10	+	10	17	ИП1	61
04	П3	43	11	П5	45	18	ПП	53
05	С/П	50	12	5	05	19	21	21
06	ПП	53	13	П0	40	20	ИП7	67

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
21	ИП6	66	31	В/О	52
22	×	12			
23	2	02			
24	:	13			
25	↑	0E			
26	КИП0	Г0			
27	+	10			
28	КП↑	LE			
29	+	10			
30	КП0	L0			

Инструкция

h П6 x_0 П5

y_0 П4 y'_0 П2

В/0 С/П

Результат

С/П y_1 С/П y_2...

Регистры

0 счетчик
1 y'_i
2 y'_{i+1}
3 y_i
4 y_{i+1}
5 x_i
6 h
7 оперативный

Очередное значение y_i вычисляется за $(21+N/2)$ с, где N — количество команд в подпрограмме.

Пример

Решить дифференциальное уравнение

$$y''=\frac{3}{4}\left(\frac{xy'}{\sqrt{y}}+1\right)$$

при $x_0=1$, $y_0=1$, $y_0'=1$. Шаг $h=0{,}05$.

Подпрограмма имеет вид

ИП5 ИП1 × ИП3 F $\sqrt{\ }$: 1 + 3 × 4 : В/О

Таблица результатов

x	1,00	1,05	1,10	1,15	1,20	1,25
y	1,00000	1,05188	1,10769	1,16765	1,23196	1,30085
$y_{точн}$	1,00000	1,05191	1,10776	1,16775	1,23210	1,30103

Очередное значение y_i вычисляется за 0,5 мин.

III.4.3.1.2. Решение методом Рунге-Кутта четвертого порядка

Подпрограмма вычисления значений функции f (x, y, y′):

а) может занимать ячейки памяти с адресами 54÷97, регистры 0÷3, а также регистры 4 и 5 в качестве оперативных;

б) аргументы должна брать: x_i — из регистра 6, y_i — из регистра А, y'_i — из регистра В;

в) вычисленное значение f должна оставлять в регистре X;

г) заканчивается командой В/О.

Программа III.4.3.1.2.

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	В/0	52	25	+	10	50	ИП4	64
01	3	03	26	П6	46	51	+	10
02	:	13	27	ПП	53	52	ПД	4Г
03	П9	49	28	54	54	53	В/0	52
04	ПВ	4L	29	ИП7	67			
05	ИПС	6С	30	×	12			
06	3	03	31	П4	44			
07	:	13	32	ИПВ	6L			
08	П8	48	33	ИП7	67			
09	ПА	4—	34	×	12			
10	С/П	50	35	П5	45			
11	ПП	53	36	ИП9	69			
12	27	27	37	ИП8	68			
13	ПП	53	38	ИП5	65			
14	23	23	39	+	10			
15	ПП	53	40	ПА	4—			
16	45	45	41	⇄	14			
17	ПП	53	42	ИП4	64			
18	27	27	43	+	10			
19	ИПВ	6L	44	ПВ	4L			
20	ИПА	6—	45	ИПС	6С			
21	ПП	53	46	ИП5	65			
22	38	38	47	+	10			
23	ИП6	66	48	ПС	4С			
24	ИП7	67	49	ИПД	6Г			

Инструкция

h ↑ 2 : П7
x_0 П6
y_0 ↑ 3×ПС
y'_0 ↑ 3×ПД
В/0 С/П

Результат

С/П y_1 С/П y_2...

Регистры

4 $l/2$
5 $к/2$
6 x_i
7 $h/2$
8,А y_i
9,В y'_i
С $3y_{i+1}$
Д $3y'_{i+1}$

Очередное значение y_i вычисляется примерно за (60+N) с, где N — число команд в подпрограмме.

Пример

Решить дифференциальное уравнение

$$y'' = \frac{3}{4}\left(\frac{xy'}{\sqrt{y}} + 1\right)$$

при $x_0 = 1$, $y_0 = 1$, $y_0' = 1$. Шаг $h = 0{,}1$.

Подпрограмма имеет вид

ИП6 ИПВ × ИПА F √ : 1 + 3 × 4 : В/О

Таблица результатов

x	1	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5
y	1	1,1077563	1,2321001	1,3747563	1,5376002	1,7226564
$y_{точн}$	1	1,1077562	1,2321000	1,3747562	1,5376000	1,7226562

Очередное значение y_i вычисляется примерно за 72 с.

III.4.3.2. Уравнение третьего порядка

$$y''' = f(x, y, y', y'')$$

решается методом Рунге-Кутта второго порядка.

Подпрограмма вычисления значений функции $f(x, y, y', y'')$:

а) может занимать ячейки памяти с адресами 37÷97, **регистры** А÷Д, а также использовать регистр 9 в качестве оперативного;

б) аргументы должна брать: x_i — из регистра 7, y_i — из регистра 5, y'_i — из регистра 3, y''_i — из регистра 1;

в) вычисленное значение f должна оставлять в регистре X;

г) заканчивается командой В/О.

Программа III.4.3.2.

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	В/О	52	19	ИП3	63
01	ИП2	62	20	ПП	53
02	П1	41	21	26	26
03	ИП4	64	22	ИП1	61
04	П3	43	23	ПП	53
05	ИП6	66	24	26	26
06	П5	45	25	ИП9	69
07	С/П	50	26	ИП8	68
08	ПП	53	27	×	12
09	14	14	28	2	02
10	ИП7	67	29	:	13
11	ИП8	68	30	↑	0E
12	+	10	31	КИП0	Г0
13	П7	47	32	+	10
14	7	07	33	КП↑	LE
15	П0	40	34	+	10
16	ПП	53	35	КП0	L0
17	37	37	36	В/О	52
18	П9	49			

Инструкция

h П8 x_0 П7
y_0 П6 y'_0 П4
y''_0 П2 В/0 С/П

Результат

С/П y_1 С/П y_2...

Регистры

0 счетчик
1 y''_i
2 y''_{i+1}
3 y'_i
4 y'_{i+1}
5 y_i
6 y_{i+1}
7 x_i
8 h
9 оперативный

Очередное значение y_i вычисляется примерно за (35+N/2) с, где N — количество команд в подпрограмме.

Пример

Решить дифференциальное уравнение

$$y''' = \frac{xy}{(y')^2}\left(2y'' - \frac{3}{2}\right)$$

при $x_0=2$, $y_0=3{,}0625$, $y_0'=3{,}5$, $y_0''=3{,}75$. Шаг $h=0{,}1$.

Подпрограмма имеет вид

ИП7 ИП5 × ИП3 F x^2 : ИП1 2 × 1 , 5 — × В/О

Таблица результатов

x	2	2,1	2,2	2,3	2,4	2,5
y	3,0625	3,4313	3,8405	4,2936	4,7938	5,3446
$y_{точн}$	3,0625	3,4318	3,8416	4,2953	4,7961	5,3477

Очередное значение y_i вычисляется примерно за 43 с.

III.4.3.3. Уравнение четвертого порядка

$$y^{(IV)} = f(x, y, y', y'', y''')$$

решается методом Рунге-Кутта второго порядка.

Подпрограмма вычисления значений функции $f(x, y, y', y'', y''')$:

а) может занимать ячейки памяти с адресами $42 \div 97$, регистры С и Д, а также регистр В в качестве оперативного;

б) аргументы должна брать: x_i — из регистра 9, y_i — из регистра 7, y_i' — из регистра 5, y_i'' — из регистра 3, y_i''' — из регистра 1;

в) вычисленное значение f должна оставлять в регистре X;

г) заканчивается командой В/О.

Программа III.4.3.3.

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	В/0	52	21	ИП5	65
01	ИП2	62	22	ПП	53
02	П1	41	23	31	31
03	ИП4	64	24	ИП3	63
04	П3	43	25	ПП	53
05	ИП6	66	26	31	31
06	П5	45	27	ИП1	61
07	ИП8	68	28	ПП	53
08	П7	47	29	31	31
09	С/П	50	30	ИПВ	6L
10	ПП	53	31	ИПА	6—
11	16	16	32	×	12
12	ИП9	69	33	2	02
13	ИПА	6—	34	:	13
14	+	10	35	↑	0E
15	П9	49	36	КИПО	Г0
16	9	09	37	+	10
17	П0	40	38	КП↑	LE
18	ПП	53	39	+	10
19	42	42	40	КПО	L0
20	ПВ	4L	41	В/О	52

Инструкция

h ПА x_0 П9
y_0 П8 y_0' П6
y_0'' П4 y_0''' П2
В/0 С/П

Результат

С/П y_1 С/П y_2...

Регистры

0 счетчик
1 y_i'''
2 y'''_{i+1}
3 y_i''
4 y''_{i+1}
5 y_i'
6 y'_{i+1}
7 y_i
8 y_{i+1}
9 x_i
A h
B оперативный

Очередное значение y_i вычисляется примерно за $(45+N/2)$ с, где N — количество команд в подпрограмме.

Пример

Решить дифференциальное уравнение

$$y^{(IV)} = \frac{3}{2}\left[\frac{3y''}{(y''')^2} - \frac{y}{(y')^2}\right]$$

при $x_0 = 3$, $y_0 = 9$, $y'_0 = 9$, $y_0'' = 7{,}5$, $y_0''' = 4{,}5$. Шаг $h = 0{,}1$.

Подпрограмма имеет вид

ИП3 3 × ИП1 F x² : ИП7 ИП5 F x² : — 3 × 2 : В/О

Таблица результатов

x	3	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5
y	9	9,937	10,955	12,056	13,246	14,531
Уточн	9	9,938	10,956	12,058	13,250	14,535

Очередное значение y_i вычисляется за 53 с.

III.4.3.4. Уравнение пятого порядка

$$y^{(V)} = f(x, y, y', y'', y''', y^{(IV)})$$

решается методом Рунге-Кутта второго порядка.

Подпрограмма вычисления значений функции $f(x, y, \ldots, y^{(IV)})$:

а) может занимать ячейки памяти с адресами 48÷97 и использовать регистр Д в качестве оперативного. Поскольку свободных числовых регистров не имеется, для запоминания числового материала функции f нужно использовать командную память подпрограммы подобно тому, как это сделано в приведенном ниже примере;

б) аргументы должны брать: x_i — из регистра В, y_i — из регистра 9, y_i' — из регистра 7, y_i'' — из регистра 5, y_i''' — из регистра 3, $y_i^{(IV)}$ — из регистра 1;

в) вычисленное значение f должна оставлять в регистре X;

г) заканчивается командой В/О.

Программа III.4.3.4.

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	В/О	52	09	ИПА	6—	18	1	01
01	ИП2	62	10	П9	49	19	1	01
02	П1	41	11	С/П	50	20	П0	40
03	ИП4	64	12	ПП	53	21	ПП	53
04	П3	43	13	18	18	22	48	48
05	ИП6	66	14	ИПВ	6L	23	ПД	4Г
06	П5	45	15	ИПС	6С	24	ИП7	67
07	ИП8	68	16	+	10	25	ПП	53
08	П7	47	17	ПВ	4L	26	37	37

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
27	ИП5	65	43	+	10
28	ПП	53	44	КП↑	LE
29	37	37	45	+	10
30	ИП3	63	46	КП0	L0
31	ПП	53	47	В/О	52
32	37	37			
33	ИП1	61			
34	ПП	53			
35	37	37			
36	ИПД	6Г			
37	ИПС	6С			
38	×	12			
39	2	02			
40	:	13			
41	↑	0E			
42	КИП0	Г0			

Инструкция

h ПС x_0 ПВ
y_0 ПА y'_0 П8
y_0'' П6 y_0''' П4
$y_0^{(IV)}$ П2 В/0 С/П

Результат

С/П y_1 С/П y_2...

Регистры

0 счетчик
1 $y_i^{(IV)}$
2 $y_{i+1}^{(IV)}$
3 y_i'''
4 y_{i+1}'''
5 y_i''
6 y_{i+1}''
7 y_i'
8 y_{i+1}'
9 y_i
А y_{i+1}
В x_i
С h
Д оперативный

Очередное значение y_i вычисляется за $(50+N/2)$ с, где N — количество команд в подпрограмме.

Пример

Решить дифференциальное уравнение

$$y^{(V)}=1{,}2y^{(IV)}+13y'''+2x\sqrt{y}$$

при $x_0=1$, $y_0=1$, $y_0'=1$, $y_0''=1$, $y_0'''=1$, $y_0^{(IV)}=1$. Шаг $h=0{,}05$.

Подпрограмма имеет вид

ИП1 1 , 2 × ИП3 1 3 × + ИПВ ИП9 F$\sqrt{x}$
2 × + В/О

Таблица результатов

x	1	1,05	1,1	1,15	1,2	1,25
y	1	1,05125	1,10513	1,16177	1,22133	1,28399
$y_{точн}$	1	1,05127	1,10517	1,16184	1,22144	1,28415

Глава IV

СГЛАЖИВАНИЕ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ЗАВИСИМОСТЕЙ

Под сглаживанием экспериментальных зависимостей понимается определение неизвестных параметров a, b, c, ... функции $y=f(x, a, b, c, ...)$ заданного вида, которые обеспечивали бы минимум среднего квадрата ошибки [10]

$$\sigma^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}[y_i-f(x_i, a, b, c, \ldots)]^2, \qquad (IV.1)$$

где (x_i, y_i) — совокупность пар чисел, полученных в опыте.

Параметры a, b, c, ... функции f определяются из системы уравнений

$$\begin{cases} \partial\sigma^2/\partial a=0, \\ \partial\sigma^2/\partial b=0, \\ \partial\sigma^2/\partial c=0, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \end{cases} \qquad (IV.2)$$

Система (IV.2) линейна и, следовательно, разрешима относительно параметров a, в, c,... в явном виде, если функция f линейна относительно этих параметров. Если зависимость от параметров нелинейна, используются итерационные методы, основанные на ее линеаризации. Вывод основных расчетных соотношений приведен в работе [17].

Представлены алгоритмы и прикладные программы для сглаживания функциями с одним, двумя и тремя неизвестными параметрами.

IV.1. СГЛАЖИВАНИЕ ФУНКЦИЕЙ С ОДНИМ НЕИЗВЕСТНЫМ ПАРАМЕТРОМ

IV.1.1. ПРЯМАЯ С ЗАДАННЫМ НАКЛОНОМ (УГЛОВЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ k)

Опытные данные сглаживаются прямой $y=a+kx$. Требуется найти значение параметра a и средний квадрат ошибки σ^2.

Расчетные формулы:

$$a=\frac{1}{n}\Sigma(y_i-kx_i); \quad \sigma^2=\frac{1}{n}\Sigma(y_i-kx_i)^2-a^2.$$

Программа IV.1.1.

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	П0	40	16	F x^2	22	32	ИП1	61
01	Cx	0Г	17	ИП2	62	33	F x^2	22
02	П1	41	18	+	10	34	—	11
03	П2	42	19	П2	42	35	П2	42
04	П4	44	20	КИП4	Г4	36	С/П	50
05	С/П	50	21	ИП3	63			
06	⇄	14	22	БП	51			
07	П3	43	23	05	05			
08	ИП0	60	24	ИП1	61			
09	×	12	25	ИП4	64			
10	—	11	26	:	13			
11	ИП1	61	27	П1	41			
12	⇄	14	28	С/П	50			
13	+	10	29	ИП2	62			
14	П1	41	30	ИП4	64			
15	F ВХ	0	31	:	13			

Регистры

0 k
1 $\Sigma(y-kx)$; a
2 $\Sigma(y-kx)^2$; σ^2
3 x_i
4 n

Инструкция

Содержание	Набрать число	Выполнить команды	Результат
1. Ввести программу			
2. Занести угловой коэффициент	к	В/0 С/П	0
3. Занести числа очередной пары исходных данных	x_i	↑	x_i
	y_i	С/П	x_i
4. Если исходные данные исчерпаны, далее, нет — вернуться к п. 3			
5. Определить а		БП 24 С/П	а — в рег. X, 1
6. Определить σ^2		С/П	σ^2 — в рег. X, 2

Время ввода и обработки каждой пары чисел 5 с, время вычисления a и σ^2 5 с.

Пример

Сгладить совокупность данных

2;1 2;2 3;2 4;3 5;10

прямой с угловым коэффициентом $k=2$. Определить a и σ^2.

Ответ: $a=-2{,}8$; $\sigma^2=2{,}96$.

IV.1.2. ФУНКЦИЯ С НЕИЗВЕСТНЫМ МНОЖИТЕЛЕМ

Опытные данные сглаживаются функцией $y=b\varphi(x)$, где $\varphi(x)$ полностью известна. Требуется найти значение параметра b и средний квадрат ошибки σ^2.

Расчетные формулы.

$$b=\frac{\Sigma y_i\varphi(x_i)}{\Sigma\varphi^2(x_i)};\quad \sigma^2=\frac{1}{n}\left[\Sigma y_i^2-b^2\Sigma\varphi^2(x_i)\right].$$

Пользователем должна быть составлена подпрограмма вычисления значений функции $\varphi(x)$, размещаемая в памяти машины, начиная с адреса 46. Аргумент x берется подпрограммой из регистра X; туда же помещается ответ $\varphi(x)$. Подпрограмма завершается командой возврата В/О.

Программа IV.1.2.

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	Сх	0Г	19	+	10	38	F x^2	22
01	П0	40	20	П2	42	39	ИП1	61
02	П1	41	21	ИП3	63	40	×	12
03	П2	42	22	ИП6	66	41	—	11
04	П4	44	23	×	12	42	ИП4	64
05	С/П	50	24	ИП0	60	43	:	13
06	П3	43	25	+	10	44	П1	41
07	⇄	14	26	П0	40	45	С/П	50
08	П5	45	27	КИП4	Г4			
09	ПП	53	28	ИП5	65			
10	46	46	29	БП	51			
11	П6	46	30	05	05			
12	F x^2	22	31	ИП0	60			
13	ИП1	61	32	ИП1	61			
14	+	10	33	:	13			
15	П1	41	34	П0	40			
16	ИП3	63	35	С/П	50			
17	F x^2	22	36	ИП2	62			
18	ИП2	62	37	ИП0	60			

Регистры

0 $\Sigma y\varphi$; b
1 $\Sigma\varphi^2$; σ^2
2 Σy^2
3 y_i
4 n
5 x_i
6 $\varphi(x_i)$

Инструкция

Содержание	Набрать число	Выполнить команды	Результат
1. Ввести программу и подпрограмму вычисления $\varphi(x)$			
2. Очистить сумматоры		В/0 С/П	0
3. Занести числа очередной пары исходных данных	x_i	↑	x_i
	y_i	С/П	x_i
4. Если исходные данные исчерпаны, далее, нет — к п. 3			
5. Определить b		БП 31 С/П	b — в рег. X, 0
6. Определить σ^2		С/П	σ^2 — в рег. X, 1
7. Для нового счета — к п. 2			

Время ввода и обработки одной пары чисел $(8+\tau)$ с, где τ — время вычисления $\varphi(x_i)$. Время вычисления b и σ^2 5 с.

Пример

Сгладить совокупность данных.

0,5;0,2 1;1,1 1,5;2 2;3,8 2,5;6,2

функцией $y=bx^2$. Определить b и σ^2.

Подпрограмма вычисления функции $\varphi(x)$ имеет вид F x^2 В/О. Выполнив требования инструкции, получим ответ $b=0{,}974$; $\sigma^2=1{,}53.10^{-2}$.

IV.1.3. ФУНКЦИЯ С НЕИЗВЕСТНЫМ СЛАГАЕМЫМ

Опытные данные сглаживаются функцией $y=a+\varphi(x)$, где $\varphi(x)$ полностью известна. Требуется найти значение параметра a и средний квадрат ошибки σ^2.

Расчетные формулы:

$$a=\frac{1}{n}\Sigma[y_i-\varphi(x_i)]; \quad \sigma^2=\frac{1}{n}\Sigma[y_i-\varphi(x_i)]^2-a^2.$$

Пользователем должна быть составлена подпрограмма вычисления значений функции $\varphi(x)$, размещаемая в памяти машины, начиная с адреса 39. Аргумент x берется подпрограммой из регистра X; туда же помещается ответ $\varphi(x)$. Подпрограмма завершается командой возврата В/О.

Программа IV.1.3.

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	Сх	0Г	16	П0	40	32	ИП4	64
01	П0	40	17	F ВХ	0	33	:	13
02	П1	41	18	F x^2	22	34	ИП0	60
03	П4	44	19	ИП1	61	35	F x^2	22
04	С/П	50	20	+	10	36	—	11
05	П3	43	21	П1	41	37	П1	41
06	⇄	14	22	КИП4	Г4	38	С/П	50
07	П2	42	23	ИП2	62			
08	ПП	53	24	БП	51		**Регистры**	
09	39	39	25	04	04	0 $\Sigma(y-\varphi)$; a		
10	ИП3	63	26	ИП0	60	1 $\Sigma(y-\varphi)^2$; σ^2		
11	⇄	14	27	ИП4	64	2 x_i		
12	—	11	28	:	13	3 y_i		
13	ИП0	60	29	П0	40	4 n		
14	⇄	14	30	С/П	50			
15	+	10	31	ИП1	61			

Инструкция

Содержание	Набрать число	Выполнить команды	Результат
1. Ввести программу и подпрограмму вычисления $\varphi(x)$			
2. Очистить сумматоры		В/0 С/П	0
3. Занести числа очередной пары исходных данных	x_i	↑	x_i
	y_i	СП	x_i

Содержание	Набрать число	Выполнить команды	Результат
4. Если исходные данные исчерпаны, далее, нет — к п. 3			
5. Определить a		БП 26 С/П	a — в рег. X, 0
6. Определить σ^2		С/П	σ^2 — в рег. X, 1
7. Для нового счета — к п. 2			

Время ввода и обработки одной пары чисел $(7+\tau)$ с, где τ — время вычисления $\varphi(x_i)$. Время вычисления a и σ^2 5 с.

Пример

Сгладить совокупность данных

0;1,1 0,5;2,2 1;4,5 1,5;8 2;14

функцией $y=a+2e^x$. Определить a и σ^2.

Подпрограмма вычисления функции $\varphi(x)$ имеет вид F e^x 2×В/О. Выполнив требования инструкции, получим ответ $a=-0{,}935$; $\sigma^2=1{,}06\cdot10^{-2}$.

IV.1.4. ПРОИЗВОЛЬНАЯ НЕПРЕРЫВНАЯ ФУНКЦИЯ

Опытные данные сглаживаются функцией $y=f(x, a)$, в общем случае нелинейной по a.

IV. 1.4.1. Разложение в ряд Тейлора

Если сглаживающая функция $f(x, a)$ непрерывна и дифференцируема по переменной a, ее можно представить отрезком ряда Тейлора в некоторой окрестности точки a_0, ограничившись линейным приближением:

$$f(x, a)\approx f(x, a_0)+(a-a_0)f'(x, a_0).$$

Задача о сглаживании при этом сводится к решению системы (IV.2) относительно приращения неизвестного параметра $\Delta a=a-a_0$. Применяя алгоритм несколько раз, можно найти решение с требуемой точностью.

Вопрос о сходимости здесь не рассматривается; отметим только, что сходимость зависит от вида сглаживающей функции, начального приближения и разброса исходных данных.

Расчетные формулы:

$$\hat{\sigma}_j^2=n\sigma_j^2=\sum_{i=1}^{n}[y_i-f(x_i, a_j)]^2;\quad a_{j+1}=a_j+\Delta a_j;\quad \Delta a_j=\frac{\Sigma(y_i-f)f'}{\Sigma(f')^2}.$$

Последовательность вычислений такова. Вводится начальное приближение a_0, затем исходные данные. Вычисляется величина $\hat{\sigma}_0^2$, пропорциональная среднему квадрату ошибки $(\hat{\sigma}_0^2=n\sigma_0^2)$, и затем следующее приближение неизвестного параметра a_1. Цикл «ввод данных — вычисление $\hat{\sigma}_j^2$ и a_j» повторяется до тех пор, пока значение среднего квадрата ошибки не установится.

Пользователем должна быть составлена подпрограмма вычисления значений функции $f(x, a)$ и ее производной $f' = \dfrac{df}{da}$, размещаемая в памяти машины, начиная с адреса 39. Аргумент x берется из регистров X или 5, значение a_j — из регистра 7. Вычисленное значение f' помещается в регистр 4, а значение f оставляется в регистре X.

Программа IV.1.4.1.

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	В/О	52	16	ИП4	64	32	П7	47
01	ИП5	65	17	×	12	33	П5	45
02	С/П	50	18	ИП2	62	34	Сх	0Г
03	П6	46	19	+	10	35	П1	41
04	↔	14	20	П2	42	36	П2	42
05	П5	45	21	ИП4	64	37	П3	43
06	ПП	53	22	F x^2	22	38	В/О	52
07	39	39	23	ИП1	61			
08	ИП6	66	24	+	10			
09	—	11	25	П1	41			
10	П6	46	26	В/О	52			
11	F x^2	22	27	ИП7	67			
12	ИП3	63	28	ИП2	62			
13	+	10	29	ИП1	61			
14	П3	43	30	:	13			
15	ИП6	66	31	—	11			

Регистры

0 счетчик
1 $\Sigma(f')^2$
2 $\Sigma(f-y)f'$
3 $\Sigma(f-y)^2$
4 f'
5 x
6 y; $f-y$
7 a

Инструкция

Содержание	Набрать число	Выполнить команды	Результат
1. Ввести программу и подпрограмму			
2. Занести исходное значение параметра a	a_0	БП 32 С/П	a_0
3. Занести числа очередной пары исходных данных	x_i y_i	↑ С/П	x_i x_i
4 Если данные исчерпаны, далее, нет — к п. 3			
5. Вывести значение $\hat{\sigma}_j^2$		ИП3	$\hat{\sigma}_j^2$
6. Вычислить очередное приближение параметра a		БП 27 С/П	a_{j+1} — в рег. X, 5
7. Для выполнения следующей итерации — к п. 3			

Время занесения и обработки одной пары чисел x_i, y_i $(8+\tau)$ с, где τ — время работы подпрограммы.

Пример

Сгладить совокупность данных 1;20 1,5;80 2;200 3;1300 функцией $y=3e^{ax}$. Определить a и $\hat{\sigma}^2$. В качестве начального приближения принять $a_0=1,7$.

Производная сглаживающей функции по параметру a есть $3xe^{ax}$. Подпрограмма вычисления значений f и f′ имеет вид

ИП7 × F e^x 3 × ↑ ИП5 × П4 ⇄ В/О

Выполнив пять итераций, получим

j	0	1	2	3	4	5
a	1,7	2,248	2,085	2,030	2,025	2,025
$\hat{\sigma}^2$	666623	1568706	69346	1518	1103	1103

IV.1.4.2. Метод квазислучайного поиска (при произвольном шаге по x)

Осуществляется сглаживание значений функции y_i, заданных в n $(n\leqslant 5)$ точках x_i $(i=1, \ldots, n)$, функцией f(x, a). Значения x_i, y_i вводятся один раз соответственно таблице занятости регистров в конце программы IV. 1. 4. 2: x_i в регистр О и т. д. Одномерным поиском определяется значение a, минимизирующее величину

$$\hat{\sigma}^2=n\sigma^2=\sum_{i=1}^{n}[y_i-f(x_i, a)]^2,$$

и полученное при этом значение $\hat{\sigma}^2$.

Начальное значение a_0 и начальный шаг b_0 изменения a вводятся согласно инструкции.

Подпрограмма вычисления функции f(x, a) по заданным x и a располагается в ячейках программы, начиная с адреса 64, и заканчивается командой В/О. Значение x берется из регистра X, а значение a — из регистра А. Результат вычисления f(x, a) помещается в регистр X.

Программа IV.1.4.2.

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	ПВ	4L	08	+	10	16	64	64
01	—	11	09	ПА	4—	17	ИП5	65
02	ПА	4—	10	ИПС	6С	18	ПП	53
03	9	09	11	ПД	4Г	19	58	58
04	F 10^x	15	12	Сx	0Г	20	ИП1	61
05	ПС	4С	13	ПС	4С	21	ПП	53
06	ИПА	6—	14	ИП0	60	22	64	64
07	ИПВ	6L	15	ПП	53	23	ИП6	66

Продолжение

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
24	ПП	53	43	58	58	62	ПС	4С
25	58	58	44	ИПД	6Г	63	В/О	52
26	ИП2	62	45	—	11			
27	ПП	53	46	F $x \geqslant 0$	59			
28	64	64	47	06	06			
29	ИП7	67	48	ИПВ	6L			
30	ПП	53	49	3	03			
31	58	58	50	:	13			
32	ИП3	63	51	/—/	0L			
33	ПП	53	52	ПВ	4L			
34	64	64	53	⇄	14			
35	ИП8	68	54	F $x=0$	5E			
36	ПП	53	55	06	06			
37	58	58	56	ИПА	6—			
38	ИП4	64	57	С/П	50			
39	ПП	53	58	—	11			
40	64	64	59	F x^2	22			
41	ИП9	69	60	ИПС	6С			
42	ПП	53	61	+	10			

Регистры

0 x_1
1 x_2
2 x_3
3 x_4
4 x_5
5 y_1
6 y_2
7 y_3
8 y_4
9 y_5
А a
В b
С, Д $\hat{\sigma}^2$

Инструкция

Содержание	Набрать число	Выполнить команды	Результат
1. Ввести программу и подпрограмму вычисления f(x, a)			
2. Занести в регистры значения x_i, y_i (согласно схеме заполнения регистров в конце программы)	x_1	П0	x_1
	x_2	П1	x_2
	. . .	. . .	. . .
	y_5	П9	y_5
3. Занести начальные значения a_0, $в_0$	a_0	↑	a_0
	b_0		b_0
4. Вычислить конечные значения a и $\hat{\sigma}^2$		В/0 С/П	a — в рег. X, A $\hat{\sigma}^2$ — в рег. С, Д
5 Для нового счета — к п. 2 или к п. 3			

Программа IV.1.4.2. без изменений используется для расчета при $n=5$. При $n<5$ в программу надо ввести изменения согласно приведенной ниже таблице; при этом часть регистров памяти не используется в программе и эти регистры могут быть использованы в подпрограмме для вычисления f(x, a).

n	Изменения в программе IV.1.4.2.	Не используемые в основной программе регистры
5	Без изменений	нет
4	Заменить содержимое адресов 38 и 39 командами БП 44	4;9
3	Заменить содержимое адресов 32 и 33 командами БП 44	3;4;8;9
2	Заменить содержимое адресов 26 и 27 командами БП 44	2;3;4;7;8;9

При $n<5$ для выполнения п. 2 Инструкции достаточно в соответствующие регистры памяти занести лишь n пар используемых значений x_i, y_i ($i=1, ..., n$).

Время вычисления $T=(10\div12)\,n$ мин.

Пример

Определить оптимальное значение а при сглаживании в четырех точках опытных данных:

x	1	2	3	4
y	0,6019	0,1399	0,0402	0,0125

функцией вида $f(x, a)=\sqrt{1+ax}/xe^x$ при начальных условиях $a_0=0$, $в_0=1$.

Решение

Команды в адресах 38—39 заменить на команды БП 44. Подпрограмма вычисления функции $f(x, a)$ имеет вид

$$\uparrow \text{ ИПА } \times \ 1 \ + \ F\sqrt{\ } \rightleftarrows \uparrow \ F\,e^x \ \times \ : \ \text{В/О}$$

Занести значения x_i, y_i ($i=1\div4$) соответственно в регистры $0\div3$ и $5\div9$. Ввести a_0 и b_0 и выполнить команды В/О С/П.

Ответ

$a=1{,}673$; $\hat{\sigma}^2=1{,}86\cdot10^{-6}$.

IV.1.4.3. Метод квазислучайного поиска (при равномерном шаге по x)

Значения функции y_i, заданные таблично в n ($n\leqslant7$) точках x_i ($i=1, ..., n$) с равномерным шагом Δx, сглаживаются функцией $f(x, a)$. Одномерным поиском определяется значение а, минимизирующее величину

$$\hat{\sigma}^2=n\sigma^2=\sum_{i=1}^{n}[y_i-f(x_i, a)]^2,$$

и полученное при этом значение $\hat{\sigma}^2$.

Значения y_i, x_i и Δx заносятся в машину вручную один раз соответственно таблице занятости регистров в конце программы IV.1.4.3: y_1 — в регистр 1 и т. д.

Начальные значения a_0 и b_0 (шаг изменения а) вводятся согласно инструкции.

Подпрограмма вычисления функции f(x, a) по заданным x_i и a располагается в ячейках, начиная с адреса 49, и заканчивается командой В/О. Значение x берется из регистров X и 8, значение a — из регистра A. Вычисленное значение f(x, a) помещается в регистр X.

Программа IV.1.4.3.

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	ПВ	4L	22	П8	48	44	⇄	14
01	—	11	23	ПП	53	45	F x=0	5E
02	ПА	4—	24	49	49	46	06	06
03	9	09	25	КИП ↑	ГЕ	47	ИПА	6—
04	F 10^x	15	26	—	11	48	С/П	50
05	ПД	4Г	27	F x^2	22			
06	ИПА	6—	28	ИПС	6С			
07	ИПВ	6L	29	+	10			
08	+	10	30	F L0	5Г			
09	ПА	4—	31	18	18			
10	7	07	32	ИПД	6Г			
11	П0	40	33	⇄	14			
12	ИП9	69	34	ПД	4Г			
13	×	12	35	⇄	14			
14	ИП8	68	36	—	11			
15	+	10	37	F x⩾0	59			
16	П8	48	38	06	06			
17	Cx	0Г	39	ИПВ	6L			
18	ПС	4С	40	3	03			
19	ИП8	68	41	:	13			
20	ИП9	69	42	/—/	0L			
21	—	11	43	ПВ	4L			

Регистры

0, С оперативные
1 y_1
2 y_2
3 y_3
4 y_4
5 y_5
6 y_6
7 y_7
8 x_i
9 Δx
A a
B b
Д $\hat{\sigma}^2$

Инструкция

Содержание	Набрать число	Выполнить команды	Результат
1. Ввести программу и подпрограмму вычисления f(x, a)			
2. Занести в регистры значения x_1, Δx и y_i (согласно схеме заполнения регистров в конце программы)	x_1	П8	x_1
	Δx	П9	Δx
	y_1	П1	y_1
	y_2	П2	y_2
	. . .	. . .	. . .
	y_7	П7	y_7
3. Занести начальные значения a_0 и b_0 — шаг изменения a	a_0	↑	a_0
	b_0		b_0
4. Вычислить конечные значения $\hat{a}$ и $\hat{\sigma}^2$		В/0 С/П	$\hat{a}$ — в рег. X, $\hat{\sigma}^2$ — в рег. Д
5. Для нового счета — к п. 2			

Программа IV.1.4.3. без изменений используется для расчета при $n=7$. При $n<7$ в адрес 10 следует занести требуемое значение n; при этом часть регистров памяти, занимаемая значениями y_i при $i<n$ (согласно схеме заполнения регистров в конце программы), не используется в основной программе и может быть использована в подпрограмме для вычисления $f(x, a)$.

При $n=7$ свободных регистров для использования в подпрограмме при вычислении $f(x, a)$ нет.

Время вычисления $T=(6\div10)\,n$ мин.

Пример

Определить оптимальное значение a при сглаживании в шести точках опытных данных

x	1	2	3	4	5	6
y	3,1	5,9	11,2	17,8	27,2	37,5

функцией вида $f(x, a)=ax^2+2$. Начальные значения $a_0=0$; $b_0=0{,}3$.

Решение

Занести в адрес 10 значение 6. Подпрограмма вычисления $f(x, a)$ имеет вид

F x^2 ИПА $\times$ 2 $+$ В/О.

Занести в регистры значения x_1, Δx и y_i согласно схеме заполнения регистров в конце программы. Занести a_0 и b_0 и выполнить команды В/О С/П.

Ответ

$a=0{,}9935$; $\hat{\sigma}^2=0{,}295$.

IV.2. СГЛАЖИВАНИЕ ФУНКЦИЕЙ С ДВУМЯ НЕИЗВЕСТНЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

IV.2.1. ПРЯМАЯ

Совокупность пар опытных данных x_i, y_i сглаживается прямой $y=a+bx$. Требуется найти значения параметров a и b, обеспечивающие минимум среднего квадрата ошибки, а также величину σ^2.

Расчетные формулы:

$$b=\frac{\Sigma xy-(1/n)\Sigma x\Sigma y}{\Sigma x^2-(1/n)(\Sigma x)^2},$$

$$a=1/n[\Sigma y-b\Sigma x],$$

$$\sigma^2=1/n[\Sigma y^2-a\Sigma y-b\Sigma xy].$$

Программа IV.2.1.

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	Сх	0Г	29	F x^2	22	58	ПА	4—
01	П0	40	30	ИП4	64	59	С/П	50
02	П1	41	31	+	10	60	ИПВ	6L
03	П2	42	32	П4	44	61	С/П	50
04	П3	43	33	КИП5	Г5	62	ИП4	64
05	П4	44	34	ИПВ	6L	63	ИПА	6—
06	П5	45	35	БП	51	64	ИП1	61
07	С/П	50	36	07	07	65	×	12
08	ПА	4—	37	ИП1	61	66	—	11
09	⇄	14	38	ИП3	63	67	ИПВ	6L
10	ПВ	4L	39	ИП5	65	68	ИП0	60
11	×	12	40	:	13	69	×	12
12	ИП0	60	41	ИП1	61	70	—	11
13	+	10	42	×	12	71	ИП5	65
14	П0	40	43	ИП0	60	72	:	13
15	ИПВ	6L	44	—	11	73	П1	41
16	ИП3	63	45	ИП3	63	74	С/П	50
17	+	10	46	F x^2	22			
18	П3	43	47	ИП5	65			
19	ИПА	6—	48	:	13			
20	ИП1	61	49	ИП2	62			
21	+	10	50	—	11			
22	П1	41	51	:	13			
23	ИПВ	6L	52	ПВ	4L			
24	F x^2	22	53	ИП3	63			
25	ИП2	62	54	×	12			
26	+	10	55	—	11			
27	П2	42	56	ИП5	65			
28	ИПА	6—	57	:	13			

Регистры

0 Σxy
1 Σy; σ^2
2 Σx^2
3 Σx
4 Σy^2
5 n
A y_i; a
B x_i; b

Инструкция

Содержание	Набрать число	Выполнить команды	Результат
1. Ввести программу			
2. Очистить сумматоры		В/0 С/П	0
3. Занести числа очередной пары исходных данных	x_i	↑	x_i
	y_i	С/П	x_i
4. Если исходные данные исчерпаны, далее, нет — к п. 3			
5. Определить a		БП 37 С/П	a — в рег. X, A
6. Определить b		С/П	b — в рег. X, B
7. Определить σ^2		С/П	σ^2 — в рег. X, 1
8. Для нового счета — к п. 2			

Время ввода и обработки каждой пары чисел 8 с, время вычисления, a, b и σ^2 8 с.

Пример

Сгладить совокупность данных

2;1   4;5   1;2   3;3   5;6

прямой линией. Определить a, b и σ^2.

Ответ: $a=-0{,}2$; $b=1{,}2$; $\sigma^2=0{,}56$.

IV.2.2. ФУНКЦИЯ, ЛИНЕЙНО ЗАВИСЯЩАЯ ОТ ПАРАМЕТРОВ

Опытные данные сглаживаются функцией $y = af(x) + b\varphi(x)$, где $f(x)$ и $\varphi(x)$ полностью известны.

Расчетные формулы:

$$b = \frac{\Sigma yf \Sigma f\varphi - \Sigma y\varphi \Sigma f^2}{(\Sigma f\varphi)^2 - \Sigma f^2 \Sigma \varphi^2};$$

$$a = 1/\Sigma f^2 [\Sigma yf - b\Sigma f\varphi],$$

$$\sigma^2 = 1/n[\Sigma y^2 - a\Sigma yf - b\Sigma y\varphi].$$

Пользователем должна быть составлена подпрограмма вычисления значений функций $f(x)$ и $\varphi(x)$, размещаемая в памяти машины, начиная с адреса 80. Аргумент x берется подпрограммой из регистров X или A, вычисленное значение $f(x)$ помещается в регистр 8, а $\varphi(x)$ — в регистр 9. Команда возврата В/0 имеется в ячейке с адресом 00, поэтому в конце подпрограммы ее ставить не обязательно.

Программа IV.2.2.

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	В/0	52	25	+	10	50	F x^2	22
01	С/П	50	26	П4	44	51	ИП2	62
02	ПВ	4L	27	ИПВ	6L	52	ИП3	63
03	F x^2	22	28	ИП9	69	53	×	12
04	ИП1	61	29	×	12	54	—	11
05	+	10	30	ИП5	65	55	:	13
06	П1	41	31	+	10	56	ПВ	4L
07	⇄	14	32	П5	45	57	С/П	50
08	ПА	4—	33	ИП8	68	58	ИП4	64
09	ПП	53	34	ИП9	69	59	ИПВ	6L
10	80	80	35	×	12	60	ИП7	67
11	ИП8	68	36	ИП7	67	61	×	12
12	F x^2	22	37	+	10	62	—	11
13	ИП2	62	38	П7	47	63	ИП2	62
14	+	10	39	КИП6	Г6	64	:	13
15	П2	42	40	ИПА	6—	65	ПА	4—
16	ИП9	69	41	В/0	52	66	С/П	50
17	F x^2	22	42	ИП4	64	67	ИП1	61
18	ИП3	63	43	ИП7	67	68	ИПА	6—
19	+	10	44	×	12	69	ИП4	64
20	П3	43	45	ИП5	65	70	×	12
21	ИПВ	6L	46	ИП2	62	71	—	11
22	ИП8	68	47	×	12	72	ИПВ	6L
23	×	12	48	—	11	73	ИП5	65
24	ИП4	64	49	ИП7	67	74	×	12

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
75	—	11	**Регистры**			5 $\Sigma y\varphi$		
76	ИП6	66	1 Σy^2; σ^2			6 n		
77	:	13	2 Σf^2			7 $\Sigma f\varphi$		
78	П1	41	3 $\Sigma\varphi^2$			8 f		
79	С/П	50	4 Σyf			9 φ		
						A x_i; a		
						B y_i; b		

Инструкция

Содержание	Набрать число	Выполнить команды	Результат
1. Ввести программу и подпрограмму вычисления f(x) и φ(x)			
2. Очистить сумматоры		Сх П1 П2 П3 П4 П5 П6 П7	0
3. Перейти к началу программы		В/0 С/П	0
4. Занести числа очередной пары исходных данных	x_i	↑	x_i
	y_i	С/П	x_i
5. Если исходные данные исчерпаны, далее, нет — к п. 3			
6. Определить b		БП 42 С/П	b — в рег. X, B
7. Определить a		С/П	a — в рег. X, A
8. Определить σ^2		С/П	σ^2 — в рег. X, 1
9. Для нового счета — к п. 2			

Время ввода и обработки каждой пары чисел $(10+\tau)$ с, где τ — время работы подпрограммы. Время вычисления a, b и σ^2 13 с.

Пример

Сгладить совокупность данных

0,1;0,4 0,3;—0,73 0,5;—0,37 1;0,54 1,5;1.21

функцией
$$y=\frac{a}{x+\sin x}+b\ln x.$$

Величина x задана в радианах.

Подпрограмма вычисления значений функций

$$f=\frac{1}{x+\sin x} \quad \text{и} \quad \varphi=\ln x$$

имеет вид

↑ F sin + F 1/x П8 ИПА F ln П9 В/О

Выполнив требования инструкции, получим ответ:

$b=1{,}99995$; $a=0{,}99984$; $\sigma^2=7{,}56\cdot 10^{-6}$.

IV.2.3. СТЕПЕННАЯ ФУНКЦИЯ

Опытные данные сглаживаются функцией $y=ax^b$.

IV.2.3.1. Логарифмированием степенную функцию можно превратить в функцию $z=\ln y$, линейную относительно переменных $\ln a$ и b:

$$z=\ln y=\ln a+b\ln x,$$

Найти величины $\ln a$ и b, минимизирующие выражение

$$\Sigma[\ln y_i-(\ln a+b\ln x_i)]^2, \qquad (IV.3)$$

можно с помощью программы IV.2.1, действуя по измененной инструкции, учитывающей необходимость логарифмирования.

Инструкция

Содержание	Набрать число	Выполнить команды	Результат
1. Ввести программу IV.2.1			
2. Очистить сумматоры		В/0 С/П	0
3. Занести числа очередной пары исходных данных	x_i	F ln	$\ln x_i$
	y_i	F ln С/П	$\ln x_i$
4. Если исходные данные исчерпаны, далее, нет — к п. 3			
5. Определить $\ln a$		БП 37 С/П	$\ln a$ — в рег. X, A
6. Определить a		F e^x	a
7. Определить b		С/П	b — в рег. X, B
8. Для нового счета — к п. 2			

Пример

Сгладить степенной функцией совокупность данных

1;25 2;20 7;10 40;3,5

Ответ

$\ln a=3{,}302971$; $a=27{,}193304$; $b=-0{,}54392582$.

Минимизируя выражение (IV.3), в ряде случаев можно проиграть в величине среднего квадрата ошибки в несколько раз. Действительно, цена отклонений при больших значениях переменной y при логарифмировании уменьшается. Средний квадрат ошибки тем более отличается от оптимального, чем больше диапазон значений исходных данных.

IV.2.3.2. Для уточнения решения воспользуемся соотношениями, полученными в [17]:

$$b_{j+1}=b_j+N/a_j,$$

$$a_{j+1}=1/\sum_i x^{2b_j}\Big[\sum_i yx^{b_j}-N\sum_i x^{2b_j}\ln x\Big],$$

$$N=\frac{\Sigma x^{2b_j}\ln x\,\Sigma yx^{b_j}-\Sigma yx^{b_j}\ln x\,\Sigma x^{2b_j}}{(\Sigma x^{2b_j}\ln x)^2-\Sigma x^{2b_j}\ln^2 x\,\Sigma x^{2b_j}}.$$

Вычисления по этим формулам проводят несколько раз до тех пор, пока средний квадрат ошибки не перестанет изменяться. В качестве начального приближения a_0, b_0 можно использовать решение, полученное выше с помощью логарифмирования.

Программа IV.2.3.2.

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	ПВ	4L	36	ИП1	61	72	×	12
01	⇄	14	37	×	12	73	—	11
02	ПА	4—	38	+	10	74	ИП5	65
03	С/П	50	39	П8	48	75	ИП3	63
04	Сх	0Г	40	ИП3	63	76	×	12
05	П3	43	41	ИП2	62	77	ИП4	64
06	П4	44	42	F x^2	22	78	F x^2	22
07	П5	45	43	+	10	79	—	11
08	П6	46	44	П3	43	80	:	13
09	П7	47	45	КИП6	Г6	81	П6	46
10	П8	48	46	ИП4	64	82	ИП4	64
11	П9	49	47	F ВХ	0	83	×	12
12	С/П	50	48	ИП1	61	84	—	11
13	П0	40	49	×	12	85	ИП3	63
14	⇄	14	50	+	10	86	:	13
15	F ln	18	51	П4	44	87	ИП6	66
16	П1	41	52	ИП5	65	88	ИПА	6—
17	ИПВ	6L	53	F ВХ	0	89	:	13
18	×	12	54	ИП1	61	90	ИПВ	6L
19	F e^x	16	55	×	12	91	+	10
20	П2	42	56	+	10	92	БП	51
21	ИПА	6—	57	П5	45	93	00	00
22	×	12	58	ИП0	60			
23	—	11	59	БП	51			
24	F x^2	22	60	12	12			
25	ИП9	69	61	ИП9	69			
26	+	10	62	ИП6	66			
27	П9	49	63	:	13			
28	ИП7	67	64	П9	49			
29	ИП0	60	65	С/П	50			
30	ИП2	62	66	ИП7	67			
31	×	12	67	ИП8	68			
32	+	10	68	ИП3	63			
33	П7	47	69	×	12			
34	ИП8	68	70	ИП4	64			
35	F ВХ	0	71	ИП7	67			

Регистры

0 y_i
1 $\ln x_i$
2 $x^в$
3 Σx^{2b}
4 $\Sigma x^{2b} \ln x$
5 $\Sigma x^{2b} \ln^2 x$
6 n; N
7 $\Sigma y x^b$
8 $\Sigma y x^b \ln x$
9 $\Sigma (y - a x^b)^2$; σ^2
А a
В b

Инструкция

Содержание	Набрать число	Выполнить команды	Результат
1. Ввести программу			
2. Занести исходные значения неизвестных параметров	a_0	↑	a_0
	$в_0$	В/0 С/П	a_0
3. Очистить сумматоры		С/П	0

Содержание	Набрать число	Выполнить команды	Результат
4. Занести числа очередной пары исходных данных	x_i y_i	↑ С/П	x_i y_i
5. Если исходные данные исчерпаны далее, нет — к п. 4			
6. Определить σ_j^2		БП 61 С/П	σ_j^2
7. Определить очередное приближение параметров a и b		С/П	a_{j+1} — в рег. X, A b_{j+1} — в рег. У, В
8. Для осуществления следующей итерации — к п. 3			

Время занесения и обработки одной пары чисел 15 с, время вычисления σ^2_j, a_{j+1} и b_{j+1} 10 с.

Пример

Для совокупности данных предыдущего примера определить оптимальные значения параметров a и b. В качестве начального приближения использовать решение, полученное с помощью логарифмирования.

Ответ

j	a	b	σ^2
0	27,19	—0,5439	1,7426
1	25,73	—0,4702	0,9362
2	25,83	—0,4786	0,9263
3	25,82	—0,4780	0,9262
4	25,82	—0,4708	

IV.2.4. ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНАЯ ФУНКЦИЯ

IV.2.4.1. Опытные данные сглаживаются функцией $y=ae^{bx}$. Прологарифмировав экспоненту, получим функцию $z=\ln y$, линейную относительно переменных $\ln a$ и b:

$$z=\ln y=\ln a+bx\cdot$$

С помощью программы IV.2.1. можно найти величины $\ln a$ и b, минимизирующие выражение

$$\sum_i[\ln y_i-(\ln a+bx_i)]^2\cdot$$

Инструкция

Содержание	Набрать число	Выполнить команды	Результат
1. Ввести программу IV.2.1.			
2. Очистить сумматоры		В/0 С/П	0

Продолжение

Содержание	Набрать число	Выполнить команды	Результат
3. Занести числа очередной пары исходных данных	x_i y_i	↑ Fln С/П	x_i x_i
4. Если исходные данные исчерпаны, далее, нет — к п. 3			
5. Определить lna		БП 37 С/П	ln a
6. Определить a		F e^x	a
7. Определить b		С/П	b
8. Для нового счета — к п. 2			

Пример

Сгладить экспонентой совокупность данных

0,5;1,5 1;3 2;7 4;59.

Ответ: lna = −0,045737675; a = 0,9552925; b = 1,0280634.

Полученное решение близко к оптимальному. Если диапазон изменения исходных данных невелик, отличие среднего квадрата ошибки от минимально достижимого незначительно.

IV.2.4.2. Для получения оптимального решения используется программа IV.2.3.2. вместе с инструкцией к ней. Единственное отличие — команду F ln с адресом 15 надо заменить командой КНОП.

Расчетные формулы [17]:

$$b_{j+1} = b_j + M/a_j,$$

$$a_{j+1} = 1/\sum_{i} e^{2b_j x}\left[\sum_{i} y e^{b_j x} - M\sum_{i} x e^{2b_j x}\right],$$

$$M = \frac{\Sigma e^{2b_j x}\Sigma xye^{b_j x} - \Sigma xe^{2b_j x}\Sigma ye^{b_j x}}{(\Sigma xe^{2b_j x})^2 - \Sigma e^{2b_j x}\Sigma x^2 e^{3b_j x}}.$$

Использовав найденные в примере IV.2.4.1 значения a и b в качестве начального приближения a_0 и b_0, продолжим вычисления теперь уже по программе IV.2.3.2:

j	a	b	σ^2
0	0,9553	1,0281	0,1884;
1	0,8887	1,0432	0,0736;
2	0,8892	1,0487	0,0682;
3	0,8891	1,0487	

IV.2.5. ПРОИЗВОЛЬНАЯ НЕПРЕРЫВНАЯ ФУНКЦИЯ

IV.2.5.1. Опытные данные сглаживаются непрерывной и дифференцируемой функцией параметров a и b, причем эта функция, как и в разделе IV.1.4.1, линеаризируется разложением в ряд Тейлора в точке начального приближения a_0, b_0:

$$f(x,a,b) \approx f(x,a_0,b_0) + (a-a_0)f'_a(x,a_0,b_0) + (b-b_0)f'_b(x,a_0,b).$$

Решается система уравнений (IV.2) относительно приращений неизвестных параметров $\Delta a = a - a_0$ и $\Delta b = b - b_0$.

Последовательность вычислений такова. Вводится начальное приближение неизвестных параметров a_0, b_0, затем пары чисел исходных данных x_i, y_i ($i = 1, 2, \ldots, n$). Вычисляется величина $\hat{\sigma}^2_0$, пропорциональная среднему квадрату ошибки ($\hat{\sigma}^2_0 = n\sigma^2_0$), и затем следующее приближение неизвестных параметров a_1, b_1. Цикл «ввод данных — вычисление $\hat{\sigma}^2_j$, a_j, b_j» повторяется до тех пор, пока значение среднего квадрата ошибки не установится.

Расчетные формулы:

$$\hat{\sigma}_j^2 = \sum_{i=1}^{n} [y_i - f(x_i, a_j, b_j)]^2; \quad a_{j+1} = a_j + \Delta a_j; \quad b_{j+1} = b_j + \Delta b_j;$$

$$\Delta a_j = \frac{\Sigma f'_a f'_b \Sigma (f-y) f'_b - \Sigma (f'_b)^2 \Sigma (f-y) f'_a}{\Sigma (f'_a)^2 \Sigma (f'_b)^2 - (\Sigma f'_a f'_b)^2}; \qquad \text{(IV.4)}$$

$$\Delta b_j = -\frac{1}{\Sigma f'_a f'_b} [\Sigma (f-y) f'_a + \Delta a_j \Sigma (f'_a)^2],$$

где f, f'_a и f'_b — сглаживающая функция и ее частные производные по a и b в точке $a = a_j$ и $b = b_j$.

Пользователем должна быть составлена подпрограмма вычисления значений f, f'_a и f'_b, размещаемая в памяти машины, начиная с адреса 72. Аргумент x берется из регистров X или C, значения a_j — из регистра A, b_j — из регистра B; ответы помещаются: f'_a — в регистр 8, f'_b — в регистр 9, значение f оставляется в регистре X. Команда возврата В/0 имеется в ячейке 00, поэтому в конце подпрограммы ее ставить не обязательно.

Программа IV.2.5.1.

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	В/О	52	17	ИП8	68	34	+	10
01	7	07	18	ПП	53	35	КП↑	LE
02	П0	40	19	32	32	36	В/О	52
03	ИПС	6С	20	ИПД	6Г	37	ИП4	64
04	С/П	50	21	ПП	53	38	ИП1	61
05	ПД	4Г	22	31	31	39	ИП2	62
06	⇄	14	23	ИП8	68	40	:	13
07	ПС	4С	24	↑	0Е	41	П0	40
08	ПП	53	25	ПП	53	42	ИП5	65
09	72	72	26	32	32	43	×	12
10	ИПД	6Г	27	ИП8	68	44	—	11
11	—	11	28	ПП	53	45	ИП0	60
12	ПД	4Г	29	31	31	46	ИП3	63
13	↑	0Е	30	ИП9	69	47	×	12
14	ПП	53	31	ИП9	69	48	ИП2	62
15	32	32	32	×	12	49	—	11
16	ИПД	6Г	33	КИП0	Г0	50	:	13

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
51	ПО	40	64	ПВ	4L	3 $\Sigma(f'_a)^2$		
52	ИПА	6—	65	7	07	4 $\Sigma(f-y)f'_b$		
53	+	10	66	П0	40	5 $\Sigma(f-y)f'_a$		
54	ПА	4—	67	Cx	0Г	6 $\hat{\sigma}^2$		
55	ИПВ	6L	68	КП ↑	LE	8 f'_a		
56	ИП0	60	69	F L0	5Г	9 f'_b		
57	ИП3	63	70	68	68	А a		
58	×	12	71	В/О	52	В b		
59	ИП5	65		**Регистры**		С x		
60	+	10	0 счетчик			Д y, (f — y)		
61	ИП2	62	1 $\Sigma(f'_b)^2$					
62	:	13	2 $\Sigma f'_a f'_b$					
63	—	11						

Инструкция

Содержание	Набрать число	Выполнить команды	Результат
1. Ввести программу и подпрограмму			
2. Занести исходные значения неизвестных параметров	a_0 b_0	ПА БП 64 С/П	a_0
3. Занести числа очередной пары исходных данных	x_i y_i	↑ С/П	x_i x_i
4. Если данные исчерпаны, далее, нет — к п. 3			
5. Вывести значение $\hat{\sigma}_j^2$		ИП6	$\hat{\sigma}_j^2$
6. Вычислить очередное приближение параметров a и b		БП 37 С/П	a_{j+1} — в рег. А b_{j+1} — в рег. В
7. Для выполнения следующей итерации — к п. 3			

Время занесения a_0 и b_0 7 с, время занесения и обработки одной пары чисел x_i, y_i $(17+\tau)$ с, где τ — время работы подпрограммы. Время вычисления a_{j+1}, b_{j+1} 15 с.

Пример

Сгладить совокупность данных 0;0,01 5;1 10;3 13;7 (величина x задана в радианах) функцией $y=a\ \mathrm{tg}\, bx$. Принять $a_0=1{,}8$, $b_0=0{,}105$.

Определим частные производные функции $f(x,a,b)$: $f'_a=\mathrm{tg}\, bx$; $f'_b=ax/\cos^2 bx$. Подпрограмма имеет вид

↑ ИПВ × П8 F cos F x² : ИПА × П9 ИП8
F tg П8 ИПА × В/О.

Выполнив три итерации, получим

j	a	b	$\hat{\sigma}_j^2$
0	1,8	0,105	2,65406
1	1,8522	0,10166	0,07823
2	1,8896	0,10059	0,00225
3	1,8919	0,10053	0,00207

IV.2.5.2. Сглаживание опытных данных при задании значений y в n ($n \leqslant 5$) точках и равномерном шаге по x.

Значения функции y_i, заданные в $n (n \leqslant 5)$ точках x_i ($i = 1, \ldots, n$) при равномерном шаге по $x - \Delta x$, сглаживаются функцией $f(x,a,b)$ с двумя определяемыми параметрами a и b. Определяются значения a и b, минимизирующие величину

$$\hat{\sigma}^2 = n\sigma^2 = \sum_{i=1}^{n} [y_i - f(x_i, a, b)]^2,$$

и полученное при этом значение $\hat{\sigma}^2$.

Для решения используется метод квазислучайного поиска, состоящий в изменении на $(i+1)$-м шаге значений a и b совместно по правилу $a_{i+1} = a_{i,min} + \rho_{i+1}\mathrm{Sin}\varphi_{i+1}$, $b_{i+1} = b_{i,min} + \rho_{i+1}\mathrm{Cos}\varphi_{i+1}$, где $a_{i,min}$, $b_{i,min}$ — значения a и b, соответствующие $\hat{\sigma}^2_{i;min}$ — минимальному из всех $\hat{\sigma}^2$ за предыдущие i шагов. Начальные значения устанавливаются $\rho_1 \approx 0{,}173$; $\varphi_1 = 8$ радиан. Значения ρ_{i+1} и φ_{i+1} устанавливаются в зависимости от предыдущего вычисленного значения $\hat{\sigma}^2_i$: а) при $\hat{\sigma}^2_i < \hat{\sigma}^2_{i-1}$ ($\hat{\sigma}_0^2 = 10^8$) имеем $\rho_{i+1} = 2\rho_i$, $\varphi_{i+1} = \varphi_i$; б) при $\hat{\sigma}_i^2 \geqslant \hat{\sigma}^2_{i-1}$ имеем $\rho_{i+1} = \frac{2}{3}\rho_i$, $\varphi_{i+1} = \varphi_i + 1$. Вычисления прекращаются при выполнении условия $\rho_k < 10^{-9} \leqslant \rho_{k-1}$. Начальные значения a_0 и b_0 вводятся вручную.

Подпрограмма вычисления функции $f(x, a, b)$ по заданным x_i, a и b располагается в ячейках, начиная с адреса 77, и заканчивается командой В/0. Значение x берется из регистров X или 7, значение a — из регистра A, значение b — из регистра B. Вычисленное значение $f(x,a,b)$ помещается в регистр X.

Программа IV.2.5.2.

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	ПВ	4L	16	62	62	32	Cx	0Г
01	F ,	25	17	ИП9	69	33	ПС	4С
02	ПА	4—	18	F lg	17	34	ИП7	67
03	8	08	19	9	09	35	ИП8	68
04	П6	46	20	+	10	36	—	11
05	F 10^x	15	21	F x<0	5С	37	П7	47
06	ПС	4С	22	25	25	38	ПП	53
07	F cos	1Г	23	F ,	25	39	77	77
08	П9	49	24	С/П	50	40	КИП ↑	ГЕ
09	ИПС	6С	25	5	05	41	—	11
10	ПД	4Г	26	П0	40	42	F x^2	22
11	ИП9	69	27	ИП8	68	43	ИПС	6С
12	2	02	28	×	12	44	+	10
13	×	12	29	ИП7	67	45	F L0	5Г
14	П9	49	30	+	10	46	33	33
15	ПП	53	31	П7	47	47	ПС	4С

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
48	ИПД	6Г	63	ИП6	66	**Регистры**		
49	—	11	64	F cos	1Г	0,6,9 оперативные		
50	F x⩾0	59	65	×	12	1 y_1		
51	09	09	66	ИПВ	6L	2 y_2		
52	ИП9	69	67	+	10	3 y_3		
53	/—/	0L	68	ПВ	4L	4 y_4		
54	ПП	53	69	⇄	14	5 y_5		
55	62	62	70	ИП6	65	7 x_1		
56	КИП6	Г6	71	F sin	1C	8 Δx		
57	ИП9	69	72	×	12	А a		
58	3	03	73	ИПА	6—	В b		
59	:	13	74	+	10			
60	БП	51	75	ПА	4—	С, Д $\hat{\sigma}^2$		
61	12	12	76	В/О	52			
62	↑	0E						

Инструкция

Содержание	Набрать число	Выполнить команды	Результат
1. Переключатель Р/Г поставить в положение Р			
2. Ввести программу и подпрограмму вычисления f(x,a,в)			
3. Занести в регистры значения x_1, Δx и y_1	x_1 Δx y_1 y_2 y_3 y_4 y_5	П7 П8 П1 П2 П3 П4 П5	x_1 Δx y_1 y_2 y_3 y_4 y_5
4. Занести начальные значения a_0 и b_0	a_0 b_0	↑	a_0 b_0
5. Вычислить конечные значения a, b и $\hat{\sigma}^2$		В/0 С/П	a — в рег. X, A b — в рег. B $\hat{\sigma}^2$ — в рег. C
6. Для нового счета при других a_0 и b_0 — к п. 4			

Программа IV.2.3.2 без изменений используется для расчета при n=5. При n<5 в адресе 25 следует заменить число 5 на требуемое значение n; при этом часть регистров памяти, занимаемая значениями y_i при i>n (согласно схеме заполнения регистров в конце программы), не используется в основной программе и может быть использована в подпрограмме для вычисления f(x,a,b). При n=5 свободных регистров памяти для использования в подпрограмме при вычислении f(x,a,b) нет.

Время вычисления 4÷6 часов.

Пример

Определить оптимальные значения a и b при сглаживании в четырех точках опытных данных

x	0	1	2	3
y	1,7	2,7	3,3	4,0

функцией вида $f(x,a,b)=\sqrt{a^2x+b}$. Начальные значения: $a_0=1$; $b_0=2$.

Решение

Занести в адрес 25 программы значение 4. Подпрограмма вычисления функции $f(x,a,b)$ имеет вид ИПА F x^2 × ИПВ + F $\sqrt{\ }$ В/0. Занести значения $x_1=0$ в регистр 7, $\Delta x=1$ — в регистр 8, $y_1 \div$ $\div y_4$ — соответственно в регистры 1÷4. Занести a_0 и b_0 и выполнить команды В/0 С/П.

Ответ

$a=2{,}062$; $b=2{,}887$; $\hat{\sigma}^2=8{,}438\cdot10^{-3}$.

IV.3. СГЛАЖИВАНИЕ ФУНКЦИЕЙ С ТРЕМЯ НЕИЗВЕСТНЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

IV.3.1. ПАРАБОЛА

Совокупность пар опытных данных x_i, y_i сглаживается параболой $y=ax^2+bx+c$.

Неизвестные параметры a, b и c определяются из системы уравнений

$$\begin{cases} a\sum x^4+b\sum x^3+c\sum x^2=\sum x^2y, \\ a\sum x^3+b\sum x^2+c\sum x=\sum xy, \\ a\sum x^2+b\sum x+cn=\sum y. \end{cases}$$

Программа IV.3.1.

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	КНОП	54	15	КИПО	Г0	30	ИПА	6—
01	С/П	50	16	+	10	31	ИП9	69
02	П2	42	17	КП↑	LE	32	ИП9	69
03	⇄	14	18	⇄	14	33	ИП8	68
04	П3	43	19	ИП3	63	34	:	13
05	1	01	20	×	12	35	П2	42
06	2	02	21	F L1	5L	36	КППД	—Г
07	П0	40	22	14	14	37	П1	41
08	КИП4	Г4	23	3	03	38	ИП4	64
09	4	04	24	П1	41	39	ИПВ	6L
10	П1	41	25	ИП2	62	40	ИП2	62
11	ИП3	63	26	В/О	52	41	ИПА	6—
12	ПП	53	27	8	08	42	КППД	—Г
13	14	14	28	6	06	43	ПВ	4L
14	↑	0E	29	ПД	4Г	44	F x^2	22

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
45	ИП1	61	68	:	13	91	2	02
46	:	13	69	—	11	92	П0	40
47	—	11	70	ИП4	64	93	Cx	0Г
48	ИПА	6—	71	:	13	94	КП↑	LE
49	ИПА	6—	72	П0	40	95	F L0	5Г
50	ИП8	68	73	ИПВ	6L	96	94	94
51	:	13	74	КППД	—Г	97	С/П	50
52	П3	43	75	ИП1	61			
53	КППД	—Г	76	:	13			
54	П4	44	77	П1	41			
55	ИП6	66	78	ИП5	65			
56	ИП2	62	79	ИП8	68			
57	ИП5	65	80	:	13			
58	КППД	—Г	81	ИП2	62			
59	П6	46	82	ИП1	61			
60	ИП7	67	83	КППД	—Г			
61	ИП3	63	84	ИП3	63			
62	ИП5	65	85	ИП0	60			
63	КППД	—Г	86	×	12			
64	ИП6	66	87	—	11			
65	ИПВ	6L	88	ПС	4С			
66	×	12	89	В/0	52			
67	ИП1	61	90	1	01			

Регистры

0 счетчик; с
1 счетчик; в
2 y_i
3 x_i
4 i; n
5 $\Sigma x^2 y$
6 Σxy
7 Σy
8 Σx^4
9 Σx^3
А Σx^2
В Σx
С a
Д 86

Инструкция

Содержание	Набрать число	Выполнить команды	Результат
1. Ввести программу			
2. Очистить сумматоры		БП 90 С/П	0
3. Перейти к началу программы		В/0 С/П	0
4. Занести числа очередной пары исходных данных	x_i y_i	↑ С/П	x_i y_i
5. Если исходные данные исчерпаны, далее, нет — к п. 3			
6. Определить a, b и c		БП 27 С/П	a — в рег. X, C b — в рег. 1 c — в рег. 0
7. Для нового счета — к п. 2			

Время очистки сумматоров 14 с, время занесения и обработки каждой пары чисел 27 с, время вычисления параметров a, b и c 34 с.

Пример

Сгладить параболой совокупность данных

1;2,718 1,5;4,482 2;7,389 3;20,085.

Ответ: a=3,856; b=−6,801; c=5,758.

IV.3.2. ФУНКЦИЯ, ЛИНЕЙНО ЗАВИСЯЩАЯ ОТ ПАРАМЕТРОВ

Совокупность пар опытных данных x_i, y_i $(i=1, 2, \ldots, n)$ сглаживается функцией $y=af(x)+b\varphi(x)+c$. Параметры a, b и c определяются из системы уравнений

$$\begin{cases} a\Sigma f^2+b\Sigma f\varphi+c\Sigma f=\Sigma yf, \\ a\Sigma f\varphi+b\Sigma\varphi^2+c\Sigma\varphi=\Sigma y\varphi, \\ a\Sigma f+b\Sigma\varphi+cn=\Sigma y. \end{cases}$$

Программа IV.3.2.

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	В/О	52	38	ПС	4С	76	ИП9	69
01	С/П	50	39	ИП9	69	77	:	13
02	П1	41	40	ИП8	68	78	—	11
03	С/П	50	41	ИП8	68	79	ИП4	64
04	П2	42	42	ИПВ	6L	80	:	13
05	1	01	43	:	13	81	П2	42
06	4	04	44	П8	48	82	ИПА	6—
07	П0	40	45	КППС	—С	83	КППС	—С
08	КИП4	Г4	46	П9	49	84	ИП9	69
09	ИП1	61	47	ИП4	64	85	:	13
10	ПП	53	48	ИПА	6—	86	ИП5	65
11	16	16	49	ИП8	68	87	ИПВ	6L
12	ИП2	62	50	ИПД	6Г	88	:	13
13	ПП	53	51	КППС	—С	89	⇄	14
14	16	16	52	ПА	4—	90	П1	41
15	С/П	50	53	F x^2	22	91	ИП8	68
16	↑	0E	54	ИП9	69	92	КППС	—С
17	ПП	53	55	:	13	93	ИПД	6Г
18	24	24	56	—	11	94	ИП2	62
19	ИП2	62	57	ИПД	6Г	95	×	12
20	ПП	53	58	ИПД	6Г	96	—	11
21	23	23	59	ИПВ	6L	97	П0	40
22	ИП1	61	60	:	13			
23	×	12	61	ПД	4Г			
24	КИП0	Г0	62	КППС	—С			
25	+	10	63	П4	44			
26	КП↑	LE	64	ИП6	66			
27	⇄	14	65	ИП8	68			
28	↑	0E	66	ИП5	65			
29	В/О	52	67	КППС	—С			
30	1	01	68	П1	41			
31	3	03	69	ИП7	67			
32	П0	40	70	ИПД	6Г			
33	Cx	0Г	71	ИП5	65			
34	КП↑	LE	72	КППС	—С			
35	F L0	5Г	73	ИП1	61			
36	34	34	74	ИПА	6—			
37	В/0	52	75	×	12			

Регистры

0 счетчик; a
1 x_i; $f(x_i)$; b
2 x_i; $\varphi(x_i)$; y_i; c
4 i; n
5 Σyf; Σxz
6 $\Sigma y\varphi$; Σyz
7 Σy; Σz
8 $\Sigma f\varphi$; Σxy
9 $\Sigma\varphi^2$; Σy^2
А $\Sigma\varphi$; Σy
В Σf^2; Σx^2
С $\Sigma f\varphi$; Σxy; 95
Д Σf; Σx

Инструкция

Содержание	Набрать число	Выполнить команды	Результат
1. Ввести программу			
2. Очистить сумматоры		БП 30 С/П	0
3. Занести $f(x_i)$	x_i	П2 вычислить $f(x_i)$ в режиме калькулятора С/П	x_i $f(x_i)$
4. Занести $\varphi(x_i)$		ИП2 вычислить $\varphi(x_i)$ в режиме калькулятора С/П	x_i $\varphi(x_i)$
5. Занести y_i	y_i	С/П	y_i
6. Если исходные данные исчерпаны, далее, нет — к п. 3			
7. Определить значения неизвестных параметров	95	БП 38 С/П	a — в рег. X, 0 b — в рег. 1 c — в рег. 2
8. Для нового счета — к п. 2			

Время занесения и обработки $f(x_i)$ 1 с, $\varphi(x_i)$ — 21 с, y_i — 9 с; время вычисления параметров a, b и c 35 с.

Пример

Сгладить функцией $a/x+b\ln x+c$ совокупность данных 0,1;3 0,2;−0,7 1;−1,5 1,5;−1.

В графе инструкции «Выполнить команды» для данной сглаживающей функции будет

в пункте 4: П2 F 1/x С/П

в пункте 5: ИП2 F ln С/П

Ответ: $a=1{,}0255$; $b=2{,}0559$; $c=-2{,}5208$.

IV.3.3. ПЛОСКОСТЬ

Совокупность данных x_i, y_i, z_i $(i=1,2,\ldots,n)$ сглаживается плоскостью $z=ax+by+c$. Параметры плоскости определяются из системы уравнений

$$\begin{cases} a\Sigma x^2+b\Sigma xy+c\Sigma x=\Sigma xz,\\ a\Sigma xy+b\Sigma y^2+c\Sigma y=\Sigma yz,\\ a\Sigma x+b\Sigma y+cn=\Sigma z.\end{cases}$$

Для вычислений используется программа IV.3.2, но с другой инструкцией.

Инструкция

Содержание	Набрать число	Выполнить команды	Результат
1. Ввести программу IV.3.2.			
2. Очистить сумматоры		БП 30 С/П	0
3. Занести числа очередной группы исходных данных	x_i	С/П	x_i
	y_i	С/П	y_i
	z_i	С/П	z_i
4. Если исходные данные исчерпаны, далее, нет — к п. 3			
5. Определить значения неизвестных параметров	95	БП 38 С/П	a — в рег. X, 0 b — в рег. 1 c — в рег. 2
6. Для нового счета — к п. 2			

Время занесения и обработки x_i 1 с, y_i — 21 с, z_i — 9 с; время вычисления параметров a, b и c 35 с.

Пример

Сгладить плоскостью совокупность данных

x	0,1	1	0,9	2
y	1,1	1,2	−0,1	3,1
z	5,1	5,9	3,9	10,5

Ответ: a=1,035; b=1,715; c=3,042.

IV. 4. ВЫЧИСЛЕНИЕ ЗНАЧЕНИЙ МНОГОЧЛЕНА

Вычисляются значения многочлена

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n \qquad (n \leqslant 10).$$

Если степень многочлена $n<10$, нули вместо коэффициентов при старших степенях неизвестного вводить не нужно.

Программа IV. 4.

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	КП4	L4	09	—	11
01	С/П	50	10	П2	42
02	БП	51	11	×	12
03	00	00	12	КИП3	Г3
04	ИП4	64	13	+	10
05	1	01	14	F L2	58
06	+	10	15	11	11
07	П3	43	16	С/П	50
08	5	05			

Ввод констант

4 П4 В/О a_0 С/П
a_1 С/П ... a_n С/П

Вычисление f(x)

x БП 03 С/П

Регистры

2÷4 оперативные
0,1, 5÷Д a_i

Время ввода a_i 1 с, время вычисления f(x) 2 n с.

Пример: $a_0=1$; $a_1=2$; $a_2=3$; $x=2$. $f(x)=17$.

Глава V

СТАТИСТИКА

V.1. МОМЕНТЫ ВЫБОРОЧНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

V.1.1. СРЕДНЕЕ И ДИСПЕРСИЯ

Вычисляются среднее значение m_1 и дисперсия m_2 совокупности значений $x_1, x_2, \ldots, x_n$ [12]:

$$m_1 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i,$$

$$m_2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - m_1)^2.$$

Программа V.1.1.

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	Cx	0Г	12	+	10	24	:	13
01	П0	40	13	П1	41	25	ИП0	60
02	П1	41	14	КИП4	Г4	26	F x^2	22
03	П4	44	15	ИП0	60	27	—	11
04	С/П	50	16	ИП4	64	28	П1	41
05	F x^2	22	17	БП	51	29	С/П	50
06	F ВХ	0	18	04	04			
07	ИП0	60	19	:	13			
08	+	10	20	П0	40			
09	П0	40	21	С/П	50			
10	⇄	14	22	ИП1	61			
11	ИП1	61	23	ИП4	64			

Регистры

0 Σx; m_1
1 Σx^2; m_2
4 i; n

Инструкция

Содержание	Набрать число	Выполнить команды	Результат
1. Ввести программу			
2. Очистить сумматоры		В/0 С/П	0
3. Занести очередное число x_i	x_i	С/П	i

Содержание	Набрать число	Выполнить команды	Результат
4. Если исходные данные исчерпаны, далее, нет — к п. 3			
5. Вычислить m_1		БП 19 С/П	m_1 — в рег. X, 0
6. Вычислить m_2		С/П	m_2 — в рег. X, 1

Время занесения одного числа 4 с. Время вычисления моментов 5 с.

Пример

Вычислить среднее m_1 и дисперсию m_2 выборки: 5; 4; 3; 2; 1.

Ответ

$m_1=3$; $m_2=2$.

V.1.2. ЧЕТЫРЕ ПЕРВЫХ ЦЕНТРАЛЬНЫХ МОМЕНТА, АСИММЕТРИЯ И ЭКСЦЕСС

Вычисляются четыре первых центральных момента, коэффициенты асимметрии и эксцесса [12] совокупности значений $x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_n$;

среднее $$m_1=\frac{1}{n}\sum_1 x_i,$$

дисперсия $$m_2=\frac{1}{n}\sum_1 (x_i-m_1)^2,$$

третий момент $$m_3=\frac{1}{n}\sum_1 (x_i-m_1)^3,$$

коэффицнент ассимметрии $$g_1=m_3/\sqrt{m_2^3}.$$

четвертый момент $$m_4=\frac{1}{n}\sum_1 (x_i-m_1)^4,$$

коэффициент эксцесса $$g_2=m_4/m_2^2-3.$$

Программа V.1.2.

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	Cx	0Г	07	П0	40	14	КП↑	LE
01	П1	41	08	ИП5	65	15	F BX	0
02	П2	42	09	С/П	50	16	ИП6	66
03	П3	43	10	П6	46	17	×	12
04	П4	44	11	КИП↑	ГЕ	18	F LO	5Г
05	П5	45	12	⇄	14	19	11	11
06	4	04	13	+	10	20	КИП5	Г5

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
21	БП	51	42	—	11	62	ИП4	64
22	06	06	43	П2	42	63	×	12
23	КИП↑	ГЕ	44	ИП3	63	64	—	11
24	ИП5	65	45	↑	0Е	65	П1	41
25	:	13	46	F $\sqrt{}$	21	66	ИП3	63
26	КП↑	LЕ	47	×	12	67	Fx^2	22
27	F L0	5Г	48	:	13	68	:	13
28	23	23	49	П6	46	69	3	03
29	ИП2	62	50	ИП1	61	70	—	11
30	ИП3	63	51	ИП3	63	71	П0	40
31	ИП4	64	52	6	06	72	С/П	50
32	F x^2	22	53	×	12			
33	П0	40	54	ИП0	60			
34	—	11	55	+	10			
35	П3	43	56	ИП4	64			
36	3	03	57	×	12			
37	×	12	58	ИП2	62			
38	ИП0	60	59	4	04			
39	+	10	60	×	12			
40	ИП4	64	61	+	10			
41	×	12						

Регистры

0 оперативный; g_2
1 m_4
2 m_3
3 m_2
4 m_1
5 i; n
6 g_1

Инструкция

Содержание	Набрать число	Выполнить команды	Результат
1. Ввести программу			
2. Очистить регистры 1÷5		В/0 С/П	0
3. Занести очередное число x_i	x_i	С/П	i
4. Если данные исчерпаны, далее, нет — к п. 3			
5. Вычислить моменты		БП 23 С/П	согласно схеме занятости регистров (в конце программы)

Время занесения и обработки каждого числа 12 с, время вычисления моментов 20 с.

Пример

Определить выборочные моменты совокупности: —2; —1; —0,2; 0; 0; 0; 2,5; 1,1; 0,3.

Ответ: m_1=0,077777777; m_2=1,3928394; m_3=0,56064474; m_4==6,1679079; g_1=0,34106428; g_2=0,1793315.

V.1.3. МОМЕНТЫ ВЫБОРКИ, СГРУППИРОВАННОЙ В КЛАССЫ

Вычисляются первые четыре начальных M_k и центральных m_k выборочных момента одномерного распределения вероятностей. Весь диапазон возможных значений случайной величины x разделен на равные интервалы длины h. Выборка характеризуется значениями центров x_i каждого интервала и количествами n_i случайных величин, попавших в каждый интервал.

Программу, в частности, целесообразно применять при большом количестве исходных данных, сгруппировав их в относительно небольшом количестве интервалов. Учтены поправки Шеппарда на группирование.

Расчетные формулы [12]:

$$N=\Sigma n_i; \qquad M_1=m_1=\frac{1}{N}\Sigma n_i x_i;$$

$$M_2=\frac{1}{N}\Sigma n_i x_i^2, \quad m_2=\frac{1}{N}\Sigma n_i(x_i-M_1)^2-\frac{1}{12}h^2,$$

$$M_3=\frac{1}{N}\Sigma n_i x_i^3, \quad m_3=\frac{1}{N}\Sigma n_i(x_i-M_1)^3,$$

$$M_4=\frac{1}{N}\Sigma n_i x_i^4, \quad m_4=\frac{1}{N}\Sigma n_i(x_i-M_1)^4-$$

$$-\frac{1}{2}h^2\cdot\frac{1}{N}\Sigma(x_i-M_1)^2+\frac{7}{240}h^4.$$

Программа V.1.3.

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	Cx	0Г	24	F L1	5L	48	3	03
01	П2	42	25	18	18	49	×	12
02	П3	43	26	БП	51	50	ИП7	67
03	П4	44	27	06	06	51	+	10
04	П5	45	28	П0	40	52	ИП5	65
05	П6	46	29	КИП0	Г0	53	×	12
06	6	06	30	ИП6	66	54	—	11
07	П0	40	31	:	13	55	П3	43
08	4	04	32	КП↑	LE	56	4	04
09	П1	41	33	С/П	50	57	×	12
10	ИП7	67	34	БП	51	58	ИП4	64
11	С/П	50	35	29	29	59	6	06
12	F ,	25	36	F x^2	22	60	×	12
13	П7	47	37	2	02	61	ИП7	67
14	ИП6	66	38	:	13	62	+	10
15	F ВХ	0	39	П1	41	63	ИП5	65
16	+	10	40	ИП2	62	64	×	12
17	П6	46	41	ИП3	63	65	+	10
18	КИП0	Г0	42	ИП4	64	66	ИП5	65
19	ИП7	67	43	ИП5	65	67	×	12
20	F ВХ	0	44	F x^2	22	68	—	11
21	×	12	45	П7	47	69	ИП1	61
22	+	10	46	—	11	70	7	07
23	КП↑	LE	47	П4	44	71	×	12

Продолжение

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
72	6	06	82	ИП1	61			
73	0	00	83	6	06			
74	:	13	84	:	13			
75	ИП4	64	85	—	11			
76	—	11	86	П4	44			
77	ИП1	61	87	1	01			
78	×	12	88	П6	46			
79	+	10	89	БП	51			
80	П2	42	90	27	27			
81	ИП4	64						

Регистры

0; 1 оперативные
2 M_4; m_4
3 M_3; m_3
4 M_2; m_2
5 M_1; m_1
6 Σn_i
7 x_i; m_1^2

Инструкция

Содержание	Набрать число	Выполнить команды	Результат
1. Ввести программу			
2. Очистить сумматоры		В/0 С/П	
3. Занести x_i и n_i	x_i	↑	x_i
	n_i	С/П	x_i
4. Если исходные данные исчерпаны, далее, нет — к п. 3			
5. Вычислить начальные моменты $M_к$		БП 27 С/П	M_1 — в рег. X, 5
		С/П	M_2 — в рег. X, 4
		С/П	M_3 — в рег. X, 3
		С/П	M_4 — в рег. X, 2
6. Занести h и вычислить центральные моменты $m_к$	h	БП 36 С/П	m_1 — в рег. X, 5
		С/П	m_2 — в рег. X, 4
		С/П	m_3 — в рег. X, 3
		С/П	m_4 — в рег. X, 2
7. Для нового счета — к п. 2			

Время занесения и обработки одной пары чисел x_i и n_i — 13 с, вычисления начальных моментов — 9 с, центральных — 20 с.

Пример

Вычислить моменты выборки (h=2)

x_i	2	4	6	8
n_i	8	2	3	7.

Ответ

$M_1=4{,}9$; $m_1=4{,}9$;
$M_2=31$; $m_2=6{,}657$;
$M_3=221{,}2$; $m_3=0{,}798$;
$M_4=1660$; $m_4=47{,}386$.

V.1.4. КОЭФФИЦИЕНТ КОРРЕЛЯЦИИ

Вычисляется коэффициент корреляции последовательности пар случайных величин x_i, y_i $(i=1,2,\ldots,n)$ [12]

$$r=\frac{\frac{1}{n}\sum_i x_iy_i-\frac{1}{n}\sum_i x_i\frac{1}{n}\sum_i y_i}{\sqrt{\left[\frac{1}{n}\sum_i x_i^2-\left(\frac{1}{n}\sum_i x_i\right)^2\right]\left[\frac{1}{n}\sum_i y_i^2-\left(\frac{1}{n}\sum_i y_i\right)^2\right]}};$$

а также средние $\quad \bar{x}=\frac{1}{n}\sum_i x_i \quad$ и $\quad \bar{y}=\frac{1}{n}\sum_i y_i$

и дисперсии $\quad \sigma_x^2=\frac{1}{n}\sum_i (x_i-\bar{x})^2 \quad$ и $\quad \sigma_y^2=\frac{1}{n}\sum_i (y_i-\bar{y})^2$.

Программа V.1.4.

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	Cx	0Г	25	F x^2	22	50	—	11
01	П1	41	26	ИП4	64	51	П4	44
02	П3	43	27	+	10	52	ИП5	65
03	П4	44	28	П4	44	53	ИП3	63
04	П5	45	29	КИП6	Г6	54	F x^2	22
05	П6	46	30	ИП7	67	55	—	11
06	П2	42	31	ИП2	62	56	П5	45
07	С/П	50	32	+	10	57	×	12
08	П8	48	33	БП	51	58	F $\sqrt{\ }$	21
09	⇄	14	34	06	06	59	:	13
10	П7	47	35	5	05	60	П0	40
11	×	12	36	П0	40	61	С/П	50
12	ИП1	61	37	КИП ↑	ГЕ			
13	+	10	38	ИП6	66			
14	П1	41	39	:	13			
15	ИП8	68	40	КП ↑	LE			
16	ИП3	63	41	F L0	5Г			
17	+	10	42	37	37			
18	П3	43	43	ИП2	62			
19	ИП8	68	44	ИП3	63			
20	F x^2	22	45	×	12			
21	ИП5	65	46	—	11			
22	+	10	47	ИП4	64			
23	П5	45	48	ИП2	62			
24	ИП7	67	49	F x^2	22			

Регистры

0 счетчик; r
1 Σxy
2 Σx; $\bar{x}$
3 Σy; $\bar{y}$
4 Σx^2; σ_x^2
5 Σy^2; σ_y^2
6 i; n
7 x_i
8 y_i

Инструкция

Содержание	Набрать число	Выполнить команды	Результат
1. Ввести программу			
2. Очистить регистры 1÷6		В/0 С/П	0
3. Занести пару чисел x_i, y_i	x_i	↑	x_i
	y_i	С/П	Σx_i
4. Если исходные данные исчерпаны, далее, нет — к п. 3			
5. Вычислить коэффициент корреляции, средние и дисперсии		БП 35 С/П	r — в рег. X, 0 $\bar{x}$ — в рег. 2 $\bar{y}$ — в рег. 3 σ^2_x — в рег. 4 σ^2_y — в рег. 5

Время занесения и обработки одной пары чисел 8 с, время вычисления коэффициента корреляции, средних и дисперсий 15 с.

Пример

Вычислить коэффициент корреляции, средние и дисперсии совокупности пар чисел

x_i	1	2	3	4	5
y_i	2	4	5	6	8.

Ответ

$r=0{,}9899495$; $\bar{x}=3$; $\bar{y}=5$; $\sigma^2_x=2$; $\sigma^2_y=4$.

V.2. ГИСТОГРАММЫ

V.2.1. ГИСТОГРАММА ($k\leqslant 10$ ИНТЕРВАЛОВ)

Строится статистический ряд распределения данных, вводимых в машину с клавиатуры. Графически этот ряд обычно изображают в виде гистограммы. Диапазон возможных значений переменной x делится на $k\leqslant 10$ равных интервалов. Попадание переменной x в каждый интервал фиксируется счетчиком в соответствующем числовом регистре.

Программа V.2.1.

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	—	11	08	F ВХ	0	16	ПД	4Г
01	С/П	50	09	F ,	25	17	Сх	0Г
02	П0	40	10	—	11	18	КП ↑	LE
03	ПВ	4L	11	:	13	19	F L0	5Г
04	1	01	12	ПС	4С	20	18	18
05	ВП	0С	13	:	13	21	С/П	50
06	6	06	14	1	01	22	ИПС	6С
07	/—/	0L	15	—	11	23	:	13

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
24	ИПД	6Г	32	21	21	**Регистры**		
25	—	11	33	ИПВ	6L	0 счетчик		
26	П0	40	34	П0	40	1÷А гистограмма		
27	КИП ↑	ГЕ	35	КИП ↑	ГЕ	В к		
28	1	01	36	С/П	50	С $(x_{min} - x_{max})/к$		
29	+	10	37	F L0	5Г	Д $кx_{max}/(x_{min} - x_{max}) -$ $- 1$		
30	КП ↑	LE						
31	БП	51	38	35	35			

Инструкция

Содержание	Набрать число	Выполнить команды	Результат
1. Ввести программу			
2. Занести границы возможных значений переменной	x_{min} x_{max}	↑ В/0 С/П	x_{min} $x_{min} - x_{max}$
3. Занести к	к	С/П	0
4. Занести очередное x_i	x_i	С/П	
5. Если данные исчерпаны, далее, нет — к п. 4			
6. Перейти к выводу результатов		БП 33	
7. Вывести содержимое очередного счетчика		С/П	m_j
8. Для продолжения вывода — к п. 7			

Время очистки счетчиков 10 с, время занесения одного числа 3,5 с, время вывода содержимого каждого счетчика 1,5 с.

Пример

Построить гистограмму выборки ($5,2 \leqslant x \leqslant 25,2$; $k=10$) 13; 19; 9; 10; 10; 20; 8; 15; 13; 12; 10; 11.

Ответ

$m_j = 0$; 2; 4; 3; 1; 0; 1; 1; 0; 0.

V.2.2. ГИСТОГРАММА (20 ИНТЕРВАЛОВ)

Диапазон возможных значений переменной x делится на 20 равных интервалов. Попадание переменной в каждый интервал фиксируется соответствующим счетчиком. Каждому счетчику отведено четыре десятичных разряда одного из числовых регистров 0÷9. По окончании ввода данных содержимое регистров автоматически расшифровывается и поочередно выводится на индикатор.

Программа V.2.2.

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	—	11	24	+	10	48	ПС	4С
01	1	01	25	КП↑	LE	49	КИПС	ГС
02	0	00	26	С/П	50	50	⟷	14
03	П0	40	27	ИПС	6С	51	ИПС	6С
04	1	01	28	:	13	52	—	11
05	ВП	0С	29	ИПД	6Г	53	ИПВ	6L
06	4	04	30	—	11	54	:	13
07	/—/	0L	31	П0	40	55	С/П	50
08	ПВ	4L	32	КИП↑	ГЕ	56	ИПС	6С
09	F ВХ	0	33	⟷	14	57	1	01
10	F ,	25	34	ИП0	60	58	—	11
11	—	11	35	—	11	59	С/П	50
12	:	13	36	2	02	60	БП	51
13	ПС	4С	37	F 1/x	23	61	47	47
14	:	13	38	—	11			
15	1	01	39	F x≥0	59			
16	КП↑	LE	40	22	22			
17	F L0	5Г	41	ИПВ	6L			
18	16	16	42	БП	51			
19	—	11	43	23	23			
20	ПД	4Г	44	1	01			
21	КИП1	Г1	45	1	01			
22	1	01	46	П0	40			
23	КИП↑	ГЕ	47	КИП0	Г0			

Регистры

0 счетчик
1÷А гистограмма
В $1\cdot10^{-4}$
С $(x_{min} - x_{max})/10$
Д $10x_{max}/(x_{min} - x_{max}) - 1$

Инструкция

Содержание	Набрать число	Выполнить команды	Результат
1. Ввести программу			
2. Занести границы возможных значений переменной, очистить счетчики	x_{min} x_{max}	↑ В/0 С/П	x_{min} 1
3. Занести очередное число x_i	x_i	С/П	
4. Если данные исчерпаны, далее, нет — к п. 3			
5. Перейти к расшифровке и выводу результатов		БП 44	
6. Вывести содержимое очередного счетчика		С/П	m_j
7. Для продолжения вывода — к п. 6			
8. Для нового счета — к п. 2			

Время очистки счетчиков — 13 с, время занесения одного числа — около 6 с, время расшифровки содержимого счетчиков — от 1 до 5 с.

Пример

Построить гистограмму выборки ($52{,}3 \leqslant x \leqslant 92{,}3$)
59; 55; 53; 56; 60; 54; 59; 66; 56; 58; 59; 56; 55; 61; 56.

Ответ

m_j=2; 6; 1; 4; 1; 0; 1; 0;...;0.

V.3. МЕРА ОТКЛОНЕНИЯ χ^2

Гипотеза о принадлежности выборочных данных

$$x_1, x_2, \ldots, x_n$$

генеральной совокупности с известной плотностью распределения вероятностей p(x) может быть проверена с помощью критерия χ^2 (хи-квадрат) [5; 12]. Для этого весь диапазон значений переменной x разбивают на l интервалов и подсчитывают количество наблюдений m_i ($i=1, 2, \ldots, n$), попавших в каждый i-й интервал. При этом

$$\sum_{i=1}^{l} m_i = n.$$

Объединение данных в группы рекомендуется делать так, чтобы в каждую из них попало не менее пяти наблюдений. Затем по программе V.3. вычисляют меру отклонения выборочного распределения от ожидаемого:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{l} \frac{(m_i - np_i)^2}{np_i},$$

где p_i — вероятность попадания наблюдения в i-й интервал.

Статистика χ^2 имеет хи-квадрат распределение с $l-1$ степенью свободы.

Соответствие теоретического и выборочного распределений проверяется по известным величинам χ^2 и $l-1$ с помощью программ V.5.4.2. или таблиц распределения хи-квадрат (например, [4; 6]). Заметим, что мера отклонения χ^2 имеет и другие применения.

Программа V.3.

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	Cx	0Г	08	+	10	16	F BX	0
01	↑	0E	09	⇄	14	17	—	11
02	⇄	14	10	ИП0	60	18	П0	40
03	С/П	50	11	+	10	19	С/П	50
04	П0	40	12	БП	51		**Регистр**	
05	F x^2	22	13	02	02	0 m_i; χ^2		
06	⇄	14	14	⇄	14			
07	:	13	15	:	13			

Инструкция

Содержание	Набрать число	Выполнить команды	Результат
1. Ввести программу			
2. Очистить сумматоры		В/0 С/П	0
3. Занести значения p_i и m_i	p_i m_i	↑ С/П	p_i
4. Если исходные данные исчерпаны, далее, нет — к п. 3			
5. Вычислить χ^2		БП 14 С/П	χ^2 — в рег. X, 0

Время ввода и обработки одной пары чисел p_i, m_i 3 с, время вычисления χ^2 2 с.

Пример

Вычислить величину χ^2 для выборки

p_i	0,1	0,3	0,35	0,2	0,05
m_i	8	32	44	17	6.

Ответ: $\chi^2=2{,}81085$.

V.4. ПРОВЕРКА СТАТИСТИЧЕСКИХ ГИПОТЕЗ

V.4.1. ПРОВЕРКА ГИПОТЕЗЫ О РАВЕНСТВЕ СРЕДНИХ

Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и $y_1, y_2, \ldots, y_n$ — попарные наблюдения из двух нормально распределенных генеральных совокупностей с неизвестными средними соответственно μ_1 и μ_2

Проверяется гипотеза о равенстве средних.

$$H_0 : \mu_1=\mu_2 .$$

По программе вычисляется статистика t, имеющая распределение Стьюдента с n — 1 степенью свободы [12]:

$$t=\frac{\sqrt{n-1}\sum\limits_{i} D_i}{\sqrt{n\sum\limits_{i} D_i^2-\left(\sum\limits_{i} D_i\right)^2}},$$

где $D_i=x_i-y_i$.

По программам V.5.5.2. или с помощью таблиц распределения Стьюдента (например, [4; 6]) определяется уровень значимости Q. Если эта величина мала ($Q<Q_0$), гипотезу о равенстве средних следует отвергнуть. Обычно критическое значение Q_0 выбирают в пределах $0{,}1 \div 0{,}001$ исходя из условий опыта.

Программа V.4.1.

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	Сх	0Г	12	ИП3	63	24	—	11
01	↑	0Е	13	+	10	25	:	13
02	П4	44	14	БП	51	26	F $\sqrt{}$	21
03	⇄	14	15	03	03	27	:	13
04	С/П	50	16	F ВХ	0	28	П3	43
05	—	11	17	F x^2	22	29	С/П	50
06	П3	43	18	⇄	14			
07	F x^2	22	19	ИП4	64		**Регистры**	
08	+	10	20	×	12	3 t		
09	⇄	14	21	—	11	4 n		
10	КИП4	Г4	22	1	01			
11	F .	25	23	ИП4	64			

Инструкция

Содержание	Набрать число	Выполнить команды	Результат
1. Ввести программу			
2. Очистить сумматоры		В/0 С/П	0
3. Занести числа очередной пары исходных данных	x_i y_i	↑ С/П	x_i
4. Если исходные данные исчерпаны, далее, нет — к п. 3			
5. Вычислить t		БП 16 С/П	t — в рег. X, 3

Время занесения одной пары чисел 3 с, вычисление t — 4 с.

Пример

Проверить гипотезу о равенстве средних для группы нормально распределенных попарных наблюдений

x_i	9,5	11	9	12	12,5
y_i	7	10	8	11	13.

Решение

По программе вычисляется статистика t представленной пары выборок: t=2,1082. Затем по таблицам распределения Стьюдента [4; 6] определяется уровень значимости Q: Q(2,1082/4)=0,1. Поэтому нет оснований отвергать гипотезу $H_0: \mu_1 = \mu_2$.

V.4.2. ПРОВЕРКА ГИПОТЕЗЫ О ВЕЛИЧИНЕ РАЗНОСТИ МЕЖДУ СРЕДНИМИ ДВУХ ВЫБОРОК

Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_{n_1}$ и $y_1, y_2, \ldots, y_{n_2}$ — независимые выборки из двух генеральных совокупностей с нормальным распределением вероятностей и неизвестными средними значениями соответственно μ_1 и μ_2.

Проверяется гипотеза

$$H_0: \mu_1 - \mu_2 = D,$$

где D — заданное число.

По программе V.4.2. можно решать два варианта задачи [4]:

а) дисперсии генеральных совокупностей, соответственно σ_1^2 и σ_2^2, не равны и априори известны; в этом случае вычисляется статистика t_1:

$$t_1 = \frac{\bar{x} - \bar{y} - D}{\left(\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}\right)^{1/2}} \left[\left(\frac{n_1 S_1^2}{\sigma_1^2} + \frac{n_2 S_2^2}{\sigma_2^2}\right) / (n_1 + n_2 - 2)\right]^{-1/2},$$

б) дисперсии генеральных совокупностей σ_1^2 и σ_2^2 равны, но априори неизвестны; в этом случае вычисляется статистика t_2:

$$t_2 = (\bar{x} - \bar{y} - D) \left[\frac{n_1 S_1^2 + n_2 S_2^2}{n_1 + n_2 - 2} \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)\right]^{-1/2};$$

где

$$\bar{x} = \frac{1}{n_1} \sum_i x_i; \quad \bar{y} = \frac{1}{n_2} \sum_j y_j;$$

$$S_1^2 = \frac{1}{n_1} \sum_i x_i^2 - (\bar{x})^2; \quad S_2^2 = \frac{1}{n_2} \sum_j y_j^2 - (\bar{y})^2.$$

Статистики t_1 и t_2 имеют распределение Стьюдента с n_1+n_2-2 степенями свободы.

Уровень значимости $Q(t/n_1+n_2-2)$ определяют по программам V.5.5.2. или с помощью таблиц распределения Стьюдента (например, [4;6]).

Программа V.4.2.

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	ИП2	62	14	+	10	28	:	13
01	П5	45	15	П3	43	29	—	11
02	ИП3	63	16	КИП4	Г4	30	ИП0	60
03	П6	46	17	ИП2	62	31	:	13
04	ИП4	64	18	ИП0	60	32	ИП3	63
05	П7	47	19	+	10	33	ИП2	62
06	Cx	0Г	20	П2	42	34	F x^2	22
07	П2	42	21	F ВХ	0	35	ИП4	64
08	П3	43	22	БП	51	36	:	13
09	П4	44	23	10	10	37	—	11
10	С/П	50	24	ИП6	66	38	ИП1	61
11	П0	40	25	ИП5	65	39	:	13
12	F x^2	22	26	F x^2	22	40	+	10
13	ИП3	63	27	ИП7	67	41	ИП4	64

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
42	ИП7	67	55	F $\sqrt{}$	21	68	П2	42
43	+	10	56	П3	43	69	С/П	50
44	2	02	57	ИП5	65			
45	—	11	58	ИП7	67		**Регистры**	
46	:	13	59	:	13	0 σ_1^2		
47	ИП0	60	60	ИП2	62	1 σ_2^2		
48	ИП7	67	61	ИП4	64	2 Σy; t		
49	:	13	62	:	13	3 Σy^2		
50	ИП1	61	63	—	11	4 n_2		
51	ИП4	64	64	ИП8	68	5 Σx		
52	:	13	65	—	11	6 Σx^2		
53	+	10	66	ИП3	63	7 n_1		
54	×	12	67	:	13	8 D		

Инструкция

Содержание	Набрать число	Выполнить команды	Результат
1. Ввести программу			
2. Очистить сумматоры		В/0 С/П	0
3. Занести очередное значение x_i	x_i	С/П	x_i
4. Если первая выборка исчерпана, далее, нет — к п. 3			
5. Очистить сумматоры		В/0 С/П	0
6. Занести очередное значение y_j	y_j	С/П	y_j
7. Если вторая выборка исчерпана, далее, нет — к п. 6			
8. а) если σ_1^2 и σ_2^2 известны, занести их	σ_1^2	П0	σ_1^2
	σ_2^2	П1	σ_2^2
б) если σ_1^2 и σ_2^2 неизвестны, но равны, занести единицу	1	П0 П1	1
9. Занести значение D	D	П8	D
10. Вычислить t		БП 24 С/П	t — в рег. X, 2

Время занесения одного числа 4 с, время вычисления t 15 с.

Пример

Проверить гипотезу $\mu_1 - \mu_2 = 0$ (D=0) для двух выборок с одинаковыми, но неизвестными дисперсиями

x_i	25	34	41	21	29
y_i	32	33	19.		

Решение

По программе вычисляется статистика t_2: $t_2=0,3506$.

По таблицам распределения Стьюдента [4;6] определяется уровень значимости: Q(0,3506/6) = 0,744.

Поскольку Q>0,1, отвергать гипотезу $H_0: \mu_1 - \mu_2 = 0$ нет оснований.

V.4.3. ПРОВЕРКА ГИПОТЕЗЫ О РАВЕНСТВЕ СРЕДНЕГО ЗАДАННОМУ ЧИСЛУ

Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — выборка из нормально распределенной генеральной совокупности с неизвестными средним μ и дисперсией σ^2.

Проверяется гипотеза

$$H_0 : \text{среднее } \mu = \mu_0,$$

где μ_0 — заданное число.

По программе V.4.3. вычисляется статистика t [12]:

$$t = \frac{\sqrt{n-1}\,(\sum_i x_i - n\mu_0)}{\sqrt{n\sum_i x_i^2 - (\sum_i x_i)^2}},$$

имеющая распределение Стьюдента с n — 1 степенью свободы.

Полученные значения t и n — 1 используются для вычисления уровня значимости по таблицам распределения Стьюдента [4;6] или по программам V.5.5.2.

Программа V.4.3.

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	Cx	0Г	14	БП	51	28	:	13
01	П2	42	15	04	04	29	F $\sqrt{}$	21
02	П3	43	16	ИП4	64	30	:	13
03	П4	44	17	×	12	31	С/П	50
04	ИП2	62	18	—	11			
05	С/П	50	19	ИП3	63		**Регистры**	
06	+	10	20	ИП4	64	2 Σx		
07	П2	42	21	×	12	3 Σx^2		
08	F Bx	0	22	ИП2	62	4 n		
09	F x^2	22	23	F x^2	22			
10	ИП3	63	24	—	11			
11	+	10	25	ИП4	64			
12	П3	43	26	1	01			
13	КИП4	Г4	27	—	11			

Инструкция

Содержание	Набрать число	Выполнить команды	Результат
1. Ввести программу			
2. Очистить сумматоры		В/0 С/П	0
3. Занести очередное значение x_i	x_i	С/П	x_i
4. Если исходные данные исчерпаны, далее, нет — к п. 3			
5. Занести μ_0 и вычислить t	μ_0	БП 16 С/П	t — в рег. X

Время занесения одного числа 4 с, время вычисления t 6с.

Пример

Проверить гипотезу H_0: $\mu=\mu_0$, если $\mu_0=14$ для выборки 11; 17; 14; 18; 14.

Решение

По программе вычисляется статистика t: $t=0{,}645$.

По таблицам распределения Стьюдента по t и $n-1$ определяется уровень значимости: $Q(0{,}645/4)=0{,}56$.

Поскольку $Q>0{,}1$, нет оснований отвергать гипотезу H_0: $\mu=14$.

V.4.4. ПРОВЕРКА ГИПОТЕЗЫ НОРМАЛЬНОСТИ ПО ВЕЛИЧИНЕ АСИММЕТРИИ И ЭКСЦЕССА

Для проверки гипотезы нормальности распределения случайной величины x выборочные коэффициент асимметрии g_1 и коэффициент эксцесса g_2, подсчитанные по программе V.1.2., сравниваются с их гипотетическими средними квадратическими отклонениями [6]:

$$\sigma_{g_1}=\sqrt{\frac{6(n-1)}{(n+1)(n+3)}};$$

$$\sigma_{g_2}=\sqrt{\frac{24n(n-2)(n-3)}{(n-1)^2(n+3)(n+5)}}.$$

Если g_1 и g_2 по абсолютной величине существенно превышают их гипотетические средние квадратические отклонения, это может служить основанием для браковки гипотезы нормальности исследуемого распределения [6].

По программе вычисляются значения σ_{g_1} и σ_{g_2}.

Программа V.4.4.

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	П1	41	15	С/П	50
01	1	01	16	ИП1	61
02	—	11	17	4	04
03	1	01	18	×	12
04	ИП1	61	19	ИП1	61
05	+	10	20	ИП0	60
06	:	13	21	—	11
07	6	06	22	F L0	5Г
08	×	12	23	18	18
09	ИП1	61	24	F x^2	22
10	3	03	25	:	13
11	П0	40	26	5	05
12	+	10	27	БП	51
13	:	13	28	04	04
14	F $\sqrt{}$	21			

Инструкция

n В/0 С/П

Результат

σ_{g_1}

С/П σ_{g_2}

Регистры

0 оперативный

1 n

Суммарное время счета 14 с.

Пример

Проверить гипотезу нормальности распределения по выборке, моменты которой подсчитаны в примере к программе V.1.2. ($n=9$; $g_1=0{,}34$; $g_2=0{,}18$).

Ответ

$\sigma_{g_1}=0{,}63$; $\sigma_{g_2}=0{,}92$.

Поскольку $|g_1|<\sigma_{g_1}$ и $|g_2|<\sigma_{g_2}$, приходим к выводу, что гипотезу нормальности распределения случайной величины x нельзя считать противоречащей данным наблюдений.

V.4.5. ПРОВЕРКА ГИПОТЕЗЫ НОРМАЛЬНОСТИ ПО КРИТЕРИЮ χ^2

Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — независимые наблюдения случайной величины с априори неизвестной функцией распределения $F(x)$.

Проверяется гипотеза

$$H_0: F(x)=F_0(x),$$

где $F_0(x)$ — функция нормального распределения со средним значением m_1 и дисперсией m_2, определяемыми из выборки.

Область значений величины x по программе разбивается на 9 взаимно примыкающих интервалов. Границы интервалов выбраны так, чтобы вероятности попадания нормальной случайной величины с функцией распределения $F_0(x)$ в каждый интервал были равны 1/9. По выборке $x_1, \ldots, x_n$ вычисляется величина χ^2 и по критерию χ^2 с 6 степенями свободы (поскольку m_1 и m_2 определяются из выборки) проверяется гипотеза равенства ожидаемых и наблюдавшихся частот [5]. По программе вычисляется также уровень значимости Q. Если вычисленное значение Q мало ($Q<Q_0$), гипотезу H_0 следует отвергнуть. Обычно критическое значение Q_0 выбирают в пределах $0{,}1 \div 0{,}001$ в зависимости от условий проведения эксперимента.

Количество наблюдений в выборке должно быть не менее $30 \div 50$.

Алгоритм вычислений:

1. Операции, осуществляемые перед пуском основной программы на счет:

а) вычисляются среднее значение m_1 и дисперсия m_2 выборки (например, по программе V.1.1.);

б) полученные значения m_1 и m_2 вводятся в микроЭВМ;

в) массив $x_1, x_2, \ldots, x_n$ вводится в микроЭВМ;

2. Операции, осуществляемые программно:

а) ось x разбивается на 9 интервалов.

Величина x_i ($i=1, 2, \ldots n$) относится к интервалу N_k ($k=1, 2, \ldots, 9$), если

$$\frac{k-1}{9} \leqslant \hat{\Phi}(z_i)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{z_i} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt<\frac{k}{9},$$

где

$$z_i = \frac{x_i - m_i}{\sqrt{m_2}}.$$

При этом интеграл вероятности определяется по приближенной формуле

$$\hat{\Phi}(z_i) = \frac{1}{2}\left[1 + \mathrm{Sign}\,(z_i)\sqrt{1 - e^{-(0,792 z_i)^2}}\right],$$

где

$$\mathrm{Sign}(z_i) = \begin{cases} -1, \text{ если } z_i < 0, \\ 0, \text{ если } z_i = 0, \\ 1, \text{ если } z_i < 0; \end{cases}$$

б) определяется количество c_k случайных величин x, попавших в интервал $N_k (k = 1, 2, \ldots, 9)$;

в) по полученным c_k определяется величина χ^2

$$\chi^2 = \sum_{k=1}^{9} \frac{(c_k - n/9)^2}{n/9};$$

г) уровень значимости $Q(\chi^2/6)$ для шести степеней свободы вычисляется по формуле [11]

$$Q(\chi^2/6) = e^{-\frac{\chi^2}{2}}\left(1 + \frac{\chi^2}{2}\left(1 + \frac{\chi^2}{4}\right)\right).$$

Программа V.4.5.

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	F √	21	23	1	01	46	БП	51
01	ИПА	6—	24	F ВХ	0	47	12	12
02	:	13	25	F x^2	22	48	9	09
03	ПД	4Г	26	/—/	0L	49	П0	40
04	⇄	14	27	F e^x	16	50	:	13
05	ПС	4С	28	—	11	51	ПС	4С
06	9	09	29	F √	21	52	Сх	0Г
07	П0	40	30	×	12	53	ПД	4Г
08	Сх	0Г	31	9	09	54	КИП↑	ГЕ
09	КП↑	LE	32	×	12	55	ИПС	6С
10	F L0	5Г	33	1	01	56	—	11
11	09	09	34	1	01	57	F x^2	22
12	П0	40	35	+	10	58	+	10
13	С/П	50	36	2	02	59	F L0	5Г
14	ИПС	6С	37	:	13	60	53	53
15	—	11	38	ПВ	4L	61	ИПС	6С
16	ИПД	6Г	39	КИПВ	ГL	62	:	13
17	:	13	40	1	01	63	2	02
18	↑	0Е	41	+	10	64	:	13
19	ВП	0С	42	КПВ	LL	65	ПД	4Г
20	F x^2	22	43	ИП0	60	66	2	02
21	F √	21	44	1	01	67	:	13
22	:	13	45	+	10	68	1	01

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
69	+	10	75	ИПД	6Г		**Регистры**	
70	ИПД	6Г	76	—	11	О, С, Д оперативные		
71	×	12	77	F e^x	16	1÷9 гистограмма		
72	1	01	78	ПВ	4L	А 0,792		
73	+	10	79	С/П	50	В Q		
74	F ln	18						

Инструкция

Содержание	Набрать число	Выполнить команды	Результат
1. Определить среднее m_1 и дисперсию m_2 выборочного распределения (например, по программе V.1.1.)			
2. Ввести программу V.4.5.			
3. Занести константу	0,792	ПА	0,792
4. Занести параметры выборки m_1 и m_2	m_1	↑	m_1
	m_2	В/0 С/П	0
5. Занести очередное значение x_i	x_i	С/П	i
6. Если данные исчерпаны, далее, нет — к п. 5			
7. Определить уровень значимости Q		БП 48 С/П	Q — в рег. X, B
8. Для нового счета — к п. 4			

Время очистки сумматоров 8 с, занесения одного числа — 14 с, вычисления уровня значимости — 40 с.

Пример

Дана выборка

$$-2; \quad -1; \quad -0{,}2; \quad 0; \quad 0; \quad 0; \quad 2{,}5; \quad 1{,}1; \quad 0{,}3.$$

Определить уровень значимости Q. (Столь малая выборка годится лишь для примера; для проверки гипотезы нормальности объем выборки должен быть существенно больше.)

Решение

Вычисляются значения m_1 и m_2: $m_1=0{,}07778$; $m_2=1{,}393$.

По программе V.4.5. определяется уровень значимости: $Q= =0{,}423$.

Так как полученное значение Q больше 0,1, нет оснований отвергать гипотезу нормальности распределения случайной величины x.

V.4.6. ПРОВЕРКА ГИПОТЕЗЫ ОБ ОДНОРОДНОСТИ ДВУХ ВЫБОРОК

Проверяется гипотеза о том, что две выборки,

$$\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$$

и

$$\xi'_1, \xi'_2, \ldots, \xi'_m,$$

принадлежат одной и той же (неизвестной) генеральной совокупности.

Предполагается, что элементы каждой выборки — независимые, одинаково непрерывно распределенные случайные величины. Для проверки гипотезы используется непараметрический критерий типа ω^2 (омега-квадрат) [4].

Статистика T^* этого критерия зависит лишь от длин серий элементов одной и той же выборки в общем вариационном ряду:

$$T^*=\frac{1}{6}\left[\frac{6\left[\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n}(r_i-i)^2+\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{m}(s_j-j)^2\right]-4mn-(m+n)}{\sqrt{\frac{m+n+i}{4mn}\left[4mn(m+n+1)-3(m+n)^2\right]}}+1\right];$$

где r_i — порядковые номера элементов первой выборки, а s_j — порядковые номера элементов второй выборки в общем вариационном ряду.

Критерий эффективен не только для больших выборок, но и для выборок умеренного объема (5÷7).

В работе [4] показано, что граница критической области этого критерия задается равенством $T^*=f(Q)$, причем $f(Q)$ определяется из специальной таблицы.

По программе V.4.6. определяется уровень значимости Q, зависимость которого от статистики T^* аппроксимирована выражением

$$Q=0{,}6628\,e^{-5{,}58T^*}$$

с относительной погрешностью менее 5% в области $0{,}001\leqslant Q\leqslant 0{,}1$, где обычно выбирают критическое значение Q_0. Если будет получен результат $Q<Q_0$, гипотезу об однородности выборок следует отвергнуть.

Чтобы подготовить данные к вводу в машину, нужно составить общий вариационный ряд — расположить данные обеих выборок в порядке возрастания их величины, в этом ряду выделить серии расположенных подряд элементов одной и той же выборки и определить количества l_k элементов в сериях. Числа l_k вводятся в машину.

Программа V.4.6.

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	Сх	0Г	06	С/П	50	12	⇄	14
01	П0	40	07	П5	45	13	П1	41
02	П1	41	08	ИП0	60	14	ИП5	65
03	П2	42	09	+	10	15	ИП2	62
04	П3	43	10	ИП1	61	16	+	10
05	П4	44	11	П0	40	17	П2	42

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
18	—	11	41	×	12	64	⇄	14
19	F x^2	22	42	ИП2	62	65	:	13
20	ИП5	65	43	F x^2	22	66	1	01
21	×	12	44	3	03	67	+	10
22	ИП3	63	45	×	12	68	0	00
23	+	10	46	—	11	69	,	0—
24	ИП4	64	47	×	12	70	9	09
25	П3	43	48	ИП5	65	71	3	03
26	⇄	14	49	:	13	72	×	12
27	П4	44	50	F $\sqrt{}$	21	73	/—/	0L
28	ИП5	65	51	ИП3	63	74	F e^x	16
29	/—/	0L	52	ИП1	61	75	4	04
30	БП	51	53	:	13	76	,	0—
31	06	06	54	ИП4	64	77	6	06
32	ИП2	62	55	ИП0	60	78	F lg	17
33	1	01	56	:	13	79	×	12
34	+	10	57	+	10	80	С/П	50
35	4	04	58	6	06			
36	ИП0	60	59	×	12			
37	ИП1	61	60	ИП5	65			
38	×	12	61	—	11			
39	×	12	62	ИП2	62			
40	П5	45	63	—	11			

Регистры

0÷2 счетчики
3;4 сумматоры
5 $l_к$; 4mn

Инструкция

Содержание	Набрать число	Выполнить команды	Результат
1. Ввести программу			
2. Очистить сумматоры		В/0 С/П	0
3. Занести длину очередной серии	$l_к$	С/П	$-l_к$
4. Если длины серий исчерпаны, далее, нет — к п. 3			
5. Вычислить уровень значимости		БП 32 С/П	Q

Время занесения и обработки одного числа 8 с, время вычисления Q 18 с.

Пример

Даны выборки

8, 7, 14, 41, 3, 8

и 2, 35, 60, 5, 4.

Проверить гипотезу о принадлежности этих выборок одной и той же генеральной совокупности.

Составим общий вариационный ряд:

2; 3; 4; 5; 7; 8; 8; 14; 35; 41; 60.

Здесь подчеркнуты серии элементов, принадлежащих одной и той же выборке. Длины этих серий (количество чисел в сериях) составляют результирующую последовательность

1; 1; 2; 4; 1; 1; 1,

которая подлежит вводу в машину.

Ответ: $Q=0{,}39$, отвергать гипотезу об однородности выборок нет оснований.

V.4.7. НЕПАРАМЕТРИЧЕСКОЕ СРАВНЕНИЕ ДВУХ СОВОКУПНОСТЕЙ. КРИТЕРИЙ ЗНАКОВ

Для проверки гипотезы о том, что две случайные величины x и y независимы и одинаково распределены, используется критерий знаков [12], состоящий в том, что из n пар (x_i, y_i) вычисляется количество положительных разностей $(x_i - y_i > 0)$. Пары, для которых $x_i = y_i$, из рассмотрения исключаются.

Вероятность того, что m или более разностей положительны, равна

$$P_n(m) = \frac{1}{2^n} \sum_{i=m}^{n} C_n^i \cdot$$

Вычисляется $P_n(m)$ — уровень значимости критерия знаков.

Программа V.4.7.

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	П0	40	12	23	23	24	13	13
01	—	11	13	ИП0	60	25	×	12
02	/—/	0L	14	ИП1	61	26	С/П	50
03	1	01	15	—	11			
04	+	10	16	1	01			
05	П1	41	17	+	10			
06	ИП0	60	18	ИП1	61			
07	/—/	0L	19	:	13			
08	2	02	20	×	12			
09	F x^y	24	21	1	01			
10	1	01	22	+	10			
11	БП	51	23	F L1	5L			

Инструкция

m ↑ n В/0 С/П

Регистры

0 n

1 оперативный

Время вычисления $T = (3(n-m)+6)$ с.

Пример: $n=20$; $m=16$. $P_{20}(16) = 0{,}0059089694$. Выбрав, например, $Q_0 = 0{,}01$, получаем, что $P_{20}(16) < Q_0$ и гипотезу о принадлежности x и y одной и той же генеральной совокупности следует отвергнуть.

V.4.8. КРИТЕРИЙ КОЛМОГОРОВА

Критерий Колмогорова применяется для проверки гипотезы о принадлежности случайной выборки объема n генеральной совокупности с известным законом распределения $F(x)$ [4]. При использовании одностороннего критерия Колмогорова рассматривается распределение случайной величины Δ_n^+, определяемой как

$$\Delta_n^+ = \max[F(x) - S_n(x)] \qquad (-\infty < x < \infty),$$

где $S_n(x)$ — эмпирическая функция распределения, соответствующая использованной выборке $(x_1 \leqslant x_2 \leqslant \ldots \leqslant x_n)$,

$$S_n(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x < x_1, \\ i/n \text{ при } x_i \leqslant x < x_{i+1} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-1), \\ 1 \text{ при } x_n \leqslant x. \end{cases}$$

При использовании двустороннего критерия Колмогорова рассматривается распределение случайной величины Δ_n, определяемой как

$$\Delta_n = \max|F(x) - S_n(x)| \qquad (-\infty < x < \infty).$$

V.4.8.1. Уровень значимости одностороннего критерия Колмогорова

Уровень значимости одностороннего критерия Колмогорова определяется как

$$\beta_n^+(x) = \text{Вер.}(\Delta_n^+ > x).$$

Вычисление $\beta_n^+(x)$ производится по формуле [4]

$$\beta_n^+(x) = \sum_{i=0}^{k} C_n^i \left(x + \frac{i}{n}\right)^{k-1} \left(1 - x - \frac{i}{n}\right)^{n-1},$$

где $k = E\{n(1-x)\}$.

Программа V.4.8.1.

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	П2	42	15	—	11	30	F x≠0	57
01	⇄	14	16	П6	46	31	51	51
02	П1	41	17	ИП2	62	32	F ln	18
03	ИП2	62	18	:	13	33	ИП2	62
04	×	12	19	ИП1	61	34	ИП6	66
05	—	11	20	+	10	35	—	11
06	2	02	21	—	11	36	×	12
07	+	10	22	F ВХ	0	37	+	10
08	П3	43	23	F ln	18	38	F e^x	16
09	КИП3	Г3	24	ИП3	63	39	ИП5	65
10	0	00	25	2	02	40	+	10
11	П5	45	26	—	11	41	ИП6	66
12	1	01	27	П4	44	42	F x≠0	57
13	ИП3	63	28	×	12	43	50	50
14	1	01	29	⇄	14	44	ИП2	62

Продолжение

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
45	ИП4	64	51	F L3	5—	**Инструкция**		
46	—	11	52*	11	11	x ↑ n В/0 С/П		
47	:	13	53	ИП1	61	**Регистры**		
48	:	13	54	×	12	1 x		
49	↑	0E	55	С/П	50	2 n		
50	F ,	25				3÷6 оперативные		

Время вычисления $T=(15\cdot E\{n(1-x)\}+10)$ с.
Пример: $n=5$; $x=0{,}2$. $\beta_5^+(0{,}2)=0{,}58528$.

V.4.8.2. Уровень значимости двустороннего критерия Колмогорова при малых объемах выборок

Уровень значимости двустороннего критерия Колмогорова определяется как

$$\beta_n(x)=\text{Вер.}(\Delta_n>x).$$

Вычисление $\beta_n(x)$ производится по формуле [23] $(n\leqslant 8)$

$$\beta_n(x)=1-n!\cdot I_{n,0},$$

где $I_{n,0}$ определяется из рекуррентного соотношения

$$I_{n,i}=\sum_{k=i+1}^{n}\frac{E_0^{k-i}(b_{i+1}-a_k)}{(k-i)!}(-1)^{k-i-1}\cdot I_{n,k}\qquad (i=n-1,\ldots,1,0),$$

$$I_{n,n}\equiv 1,\quad a_k=E_0\left(\frac{k}{n}-x\right);\quad b_k=E_0\left(\frac{k-1}{n}+x\right);$$

где $E_0(z)$ — функция ограничения $E_0(z)=\begin{cases} z & \text{при } z\geqslant 0,\\ 0 & \text{при } z<0.\end{cases}$

Программа V.4.8.2.

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	ПД	4Г	11	П0	40	22	53	53
01	⇆	14	12	4	04	23	ПП	53
02	П1	41	13	П4	44	24	60	60
03	П3	43	14	0	00	25	F x≠0	57
04	1	01	15	ИП1	61	26	37	37
05	П5	45	16	ПП	53	27	F ln	18
06	ИП3	63	17	53	53	28	ИП0	60
07	1	01	18	ИП0	60	29	П2	42
08	÷	10	19	ИП1	61	30	×	12
09	ИП1	61	20	+	10	31	F e^x	16
10	—	11	21	ПП	53	32	ИП2	62

Продолжение

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
33	/−/	0L	49	1	01	65	1	01
34	:	13	50	−	11	66	−	11
35	F L2	58	51	/−/	0L	67	F x⩾0	59
36	32	32	52	С/П	50	68	72	72
37	КИП4	Г4	53	1	01	69	F ,	25
38	×	12	54	−	11	70	1	01
39	−	11	55	ИП3	63	71	В/О	52
40	F L0	5Г	56	:	13	72	1	01
41	15	15	57	ИПД	6Г	73	+	10
42	КП4	L4	58	/−/	0L	74	В/О	52
43	F L1	5L	59	ПД	4Г			
44	06	06	60	−	11			
45	ИП3	63	61	F x<0	5С			
46	×	12	62	65	65			
47	F L3	5−	63	Cx	0Г			
48	45	45	64	В/О	52			

Инструкция

n ↑ x В/0 С/П

Регистры

0÷Д оперативные

Время вычисления $T=(n/2)^2$ мин.

Пример: $n=3$; $x=0{,}5$. $\beta_3(0{,}5)=0{,}3333334$.

V.5. РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

V.5.1. БИНОМИАЛЬНЫЙ ЗАКОН РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Вычисляется вероятность появления события точно m раз в серии из n независимых испытаний при вероятности p события в одном испытании [10]

$$P(n, m, p)=C_n^m\, p^m (1-p)^{n-m};$$

а также вероятность появления события в n испытаниях не более m раз

$$Q(n, m, p)=\sum_{i=0}^{m} P(n, i, p)=\sum_{i=0}^{m} C_n^i\, p^i (1-p)^{n-i}.$$

Программа V.5.1.

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	F 1/x	23	10	×	12	20	38	38
01	1	01	11	F e^x	16	21	ИП0	60
02	−	11	12	П3	43	22	1	01
03	П2	42	13	ПС	4С	23	+	10
04	F 1/x	23	14	⇆	14	24	ИП1	61
05	1	01	15	1	01	25	−	11
06	+	10	16	+	10	26	ИП1	61
07	F 1/x	23	17	П1	41	27	:	13
08	F ln	18	18	1	01	28	ИП2	62
09	ИП0	60	19	БП	51	29	:	13

Продолжение

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
30	×	12	41	×	12
31	F ВХ	0	42	ПД	4Г
32	ИПС	6С	43	С/П	50
33	×	12			
34	ПС	4С			
35	⇆	14			
36	1	01			
37	+	10			
38	F L1	5L			
39	21	21			
40	ИП3	63			

Инструкция

n — в рег. 0;
m ↑ p В/0 С/П

Результат

P — в рег. У, С
Q — в рег. X, Д

Регистры

0 n
1 оперативный
2 1/p — 1
3 1 — p
С P
Д Q

Время вычисления $T=7(m+1)$ с.
Пример: $n=10$, $m=5$, $p=0,5$.
$P=0,2460937$,
$Q=0,62304673$.

V.5.2. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ПУАССОНА

Распределение Пуассона — дискретное с параметром λ распределение вероятностей случайной величины x, принимающей целые неотрицательные значения m с вероятностью

$$P(m,\lambda)=\frac{\lambda^m}{m!}e^{-\lambda}\quad(\lambda>0;\quad m=0,1,2,\dots).$$

Вероятность того, что x окажется не более m, равна [12]

$$Q(m,\lambda)=\sum_{i=0}^{m}P(i,\lambda)=\sum_{i=0}^{m}\frac{\lambda^i}{i!}e^{-\lambda}.$$

Определяются значения $P(m,\lambda)$ и $Q(m,\lambda)$.

Программа V.5.2.

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	КНОП	54	13	ИП1	61
01	1	01	14	:	13
02	+	10	15	×	12
03	П1	41	16	F ВХ	0
04	⇆	14	17	ИПС	6С
05	ПД	4Г	18	×	12
06	/—/	0L	19	ПС	4С
07	F e^x	16	20	F ,	25
08	ПС	4С	21	+	10
09	↑	0E	22	F L1	5L
10	БП	51	23	12	12
11	22	22	24	ПД	4Г
12	ИПД	6Г	25	С/П	50

Инструкция

λ ↑ m В/0 С/П

Результат

$Q(m,\lambda)$ в регистрах Д; X
$P(m,\lambda)$ в регистре С

Регистры

1 оперативный
С $P(m,\lambda)$
Д $Q(m,\lambda)$

Время вычисления $T=(4\cdot m+5)$ с.
Пример: $m=1$; $\lambda=0{,}5$.
$P(1;0{,}5)=0{,}30326532$;
$Q(1;0{,}5)=0{,}90979596$.

V.5.3. НОРМАЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ

V.5.3.1. Интеграл вероятностей

Интеграл вероятностей $\Phi(x)$ определяется как [10]

$$\Phi(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt.$$

Приведены пять программ вычисления приближенного значения интеграла вероятностей с разной степенью точности.

Замечание. Программы работают только при $x\geqslant 0$. Для вычисления значений $\Phi(x)$ при отрицательных значениях аргумента следует пользоваться соотношением $\Phi(-x)=-\Phi(x)$.

V.5.3.1.1. Для вычисления используется формула [11]

$$\tilde{\Phi}(x)=1-(1+10^{-6}\cdot x(C_6+x(C_5+x(C_4+x(C_3+x(C_2+xC_1))))))^{-16};$$

где

$C_1=5{,}383$; $C_4=3277{,}626$;
$C_2=48{,}891$; $C_5=21141{,}006$;
$C_3=38{,}004$; $C_6=49867{,}347$.

Абсолютная погрешность вычисления не превышает $5\cdot 10^{-7}$.

Программа V.5.3.1.1.

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	6	06	14	×	12	28	⇆	14
01	П0	40	15	F L0	5Г	29	−	11
02	П7	47	16	12	12	30	БП	51
03	С/П	50	17	6	06	31	07	07
04	КП↑	LE	18	F 10^x	15			
05	F L0	5Г	19	:	13			
06	03	03	20	1	01			
07	С/П	50	21	+	10			
08	↑	0E	22	F x^2	22			
09	ИП7	67	23	F x^2	22			
10	П0	40	24	F x^2	22			
11	Сx	0Г	25	F x^2	22			
12	КИП↑	ГЕ	26	F 1/x	23			
13	+	10	27	1	01			

Регистры

0 счетчик
1 C_6
2 C_5
3 C_4
4 C_3
5 C_2
6 C_1
7 6

Инструкция

Содержание	Набрать число	Выполнить команды	Результат
1. Ввести программу			
2. Перейти к началу программы		В/0 С/П	6
3. Занести значения констант	C_1	С/П	C_1
	C_2	С/П	C_2
	. . . .	. . . . .	. . . . .
	C_6	С/П	C_6
4. Вычислить $\tilde{\Phi}$ (x)	x	С/П	$\tilde{\Phi}(x)$
5. Для вычисления $\tilde{\Phi}(x)$ от другого аргумента — к п. 4			

Время вычисления 13 с.

Пример: $x=1$. $\tilde{\Phi}(1)=0{,}6826895$; $\Phi(1)=0{,}682690$.

V.5.3.1.2. Вычисление $\tilde{\Phi}(x)$ при $x\leqslant 2$ производится с помощью разложения в ряд [13]

$$\tilde{\Phi}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}x\Big[\sum_{i=0}^{N}\frac{(-1)^i x^{2i}}{2^i i!(2i+1)}+\theta_{N+1}^{*}\Big] \qquad N=8.$$

Относительная погрешность вычисления $\delta^*=\dfrac{|\Phi(x)-\tilde{\Phi}(x)|}{\min[\Phi(x);\,1-\Phi(x)]}$ не превышает 0,3% (при $0<\Phi(x)\leqslant 0{,}95$).

Программа V.5.3.1.2.

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	F x^2	22	11	2	02	22	×	12
01	2	02	12	F 1/x	23	23	С/П	50
02	:	13	13	—	11			
03	9	09	14	F 1/x	23			
04	П0	40	15	+	10			
05	0	00	16	F L0	5Г			
06	ИП0	60	17	06	06			
07	:	13	18	⇆	14			
08	×	12	19	F π	20			
09	/—/	0L	20	:	13			
10	ИП0	60	21	F √	21			

Инструкция

x В/0 С/П

Регистр

0 оперативный

Время вычисления 30 с.

Пример: $x=2$. $\tilde{\Phi}(2)=0{,}9546$; точное значение 0,954500.

* θ_{N+1} вводится для уменьшения ошибок вычисления. Знак θ_{N+1} совпадает со знаком R_{N+1} — первого отброшенного члена суммы.

V.5.3.1.3. Вычисляется $\ddot{\Phi}(x)$ при $x \geqslant 3$ с помощью разложения в ряд [13]

$$\tilde{\Phi}(x) = 1 - \sqrt{\frac{2}{\pi} \cdot \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{x}} \left[\sum_{i=0}^{N} \frac{(-1)^i (2i-1)!!}{x^{2i}} + \theta_{N+1} \right] \qquad N=4.$$

Относительная погрешность δ^* не превышает 0,5%.

Программа V.5.3.1.3.

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	F x^2	22	13	+	10	26	П2	42
01	5	05	14	F L2	58	27	1	01
02	П2	42	15	04	04	28	—	11
03	F 1/x	23	16	⇆	14	29	/—/	0L
04	1	01	17	↑	0E	30	С/П	50
05	ИП2	62	18	F e^x	16			
06	—	11	19	×	12			
07	ИП2	62	20	F π	20			
08	—	11	21	×	12			
09	×	12	22	2	02			
10	⇆	14	23	:	13			
11	:	13	24	F √	21			
12	1	01	25	:	13			

Инструкция

x В/0 С/П

Регистр

2 оперативный; $1-\tilde{\Phi}(x)$

Время вычисления 25 с.

Пример: $x=5$. $\tilde{\Phi}(5)=0{,}9999994$; точное значение 0,9999994266; $1-\tilde{\Phi}(5)=5{,}7333\cdot10^{-7}$; точное значение $5{,}734\cdot10^{-7}$.

V.5.3.1.4. Вычисляется $\tilde{\Phi}(x)$ по формуле [11]

$$\tilde{\Phi}(x) = \sqrt{1 - e^{-\frac{2}{\pi}x^2}} \, .$$

Относительная погрешность вычисления δ^* не превышает 0,114 (при $0 < x \leqslant 1{,}96$; $0 < \Phi(x) \leqslant 0{,}95$).

Программа V.5.3.1.4.

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	F x^3	22	06	F e^x	16
01	2	02	07	1	01
02	×	12	08	—	11
03	F π	20	09	/—/	0L
04	:	13	10	F √	21
05	/—/	0L	11	С/П	50

Инструкция

x В/0 С/П

Время вычисления 5 с.

Пример: $x=1{,}5$. $\tilde{\Phi}(1{,}5)=0{,}872504$; точное значение 0,866386.

V.5.3.1.5. Вычисление $\tilde{\Phi}(x)$ по формуле

$$\tilde{\Phi}(x)=\sqrt{1-\frac{e^{-x^2(2/\pi-k)}}{1+kx^2}} \qquad (k=0{,}1523).$$

Относительная погрешность вычисления δ^* (при $0<x\leqslant5{,}327$; $0<\Phi(x)\leqslant1-1\cdot10^{-7}$) не превышает 1%.

Программа V.5.3.1.5.

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	F x^2	22	11	—	11	22	/—/	0L
01	0	00	12	×	12	23	F $\sqrt{}$	21
02	,	0—	13	F e^x	16	24	С/П	50
03	1	01	14	⇆	14			
04	5	05	15	ИПД	6Г			
05	2	02	16	×	12			
06	3	03	17	1	01			
07	ПД	4Г	18	+	10			
08	2	02	19	:	13			
09	F π	20	20	1	01			
10	:	13	21	—	11			

Инструкция

x В/0 С/П

Регистр

Д 0,1523

Время вычисления 10 с.

Пример: $x=3$.

$\tilde{\Phi}(3)=0{,}997298$; точное значение 0,997300.

V.5.3.2. Функция, обратная интегралу вероятностей

Функция, обратная интегралу вероятностей, обозначается как
$$x(z)=z^{-1},$$
где
$$z=\Phi(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt.$$

Приведены три программы вычисления приближенных значений $\tilde{x}(z)$ с разной степенью точности.

V.5.3.2.1. Вычисление $\tilde{x}(z)$ производится по формуле [11]:

$$\tilde{x}(z)=\sqrt{\frac{\pi}{2}[-\ln(1-z^2)]}.$$

Программа V.5.3.2.1.

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	F x^2	22	05	/—/	0L	10	F $\sqrt{\ }$	21
01	1	01	06	F π	20	11	С/П	50
02	—	11	07	×	12		**Инструкция**	
03	/—/	0L	08	2	02	z В/0 С/П		
04	F ln	18	09	:	13			

Время вычисления 5 с.

Относительная погрешность вычисления $\delta = \frac{|\tilde{x}(z) - x(z)|}{x(z)}$ (при $z \leqslant 0{,}99$; $x < 2{,}6$) не превышает 3,7%.

Пример: $z = 0{,}9545$. $\tilde{x}(0{,}9545) = 1{,}9496626$; точное значение 2,0.

V.5.3.2.2. Вычисление $\tilde{x}(z)$ производится по формуле

$$\tilde{x}(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2}[-\ln(1-z^k)]^{1/k}} \qquad (k = 1{,}9).$$

Программа V.5.3.2.2.

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	F ln	18	10	F ln	18	20	×	12
01	1	01	11	/—/	0L	21	С/П	50
02	,	0—	12	F ln	18		**Инструкция**	
03	9	09	13	ИПД	6Г	z В/0 С/П		
04	ПД	4Г	14	:	13		**Регистр**	
05	×	12	15	F e^x	16	Д 1,9		
06	F e^x	16	16	F π	20			
07	1	01	17	2	02			
08	—	11	18	:	13			
09	/—/	0L	19	F $\sqrt{\ }$	21			

Время вычисления 12 с.

Относительная погрешность вычисления δ (при $0 < z \leqslant 1 - 1 \cdot 10^{-7}$; $0 < x \leqslant 5{,}32$) не превышает 2%.

Пример: $z = 0{,}96$. $\tilde{x}(0{,}96) = 2{,}070358$; точное значение 2,053749.

V.5.3.2.3. Вычисление $\tilde{x}(z)$ производится по формуле

$$\tilde{x}(z) = \sqrt{\pi\left\{\frac{1}{41}[-\ln(1-z^4)]^{1/2} - \ln\sqrt{1-z^2}\right\}}$$

Программа V.5.3.2.3.

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	F x^2	22	10	×	12	20	—	11
01	↑	0E	11	4	04	21	F π	20
02	F x^2	22	12	1	01	22	×	12
03	1	01	13	:	13	23	F √	21
04	—	11	14	⇆	14	24	С/П	50
05	/—/	0L	15	1	01			
06	F ln	18	16	—	11			
07	/—/	0L	17	/—/	0L			
08	↑	0E	18	F √	21			
09	F √	21	19	F ln	18			

Инструкция

z В/0 С/П

Время вычисления 10 с.

Относительная погрешность δ (при $0<z\leqslant 1-1\cdot 10^{-7}$; $0<x\leqslant$ $\leqslant 5,327$) не превышает 0,3%.

Пример: $z=0{,}98758$. $\tilde{x}(0{,}98758)=2{,}4933213$; точное значение 2,5.

V.5.4. χ^2-РАСПРЕДЕЛЕНИЕ

Сумма квадратов m независимых случайных величин $U_к=$ $=\frac{x_к-\bar{x}}{\sigma}$ имеет χ^2_m распределение с m степенями свободы.

V.5.4.1. Плотность вероятности

Плотность вероятности $\varphi_m(x)$ определяется из соотношения [12]:

$$\varphi_m(x)=\frac{x^{\frac{m-2}{2}}e^{-\frac{x}{2}}}{2^{\frac{m}{2}}\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)} \qquad (x>0).$$

Вычисляется значение $\varphi_m(x)$ при $m\geqslant 1$.

Программа V.5.4.1.

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	П0	40	07	:	13	14	:	13
01	2	02	08	П2	42	15	ИП2	62
02	:	13	09	×	12	16	1	01
03	П1	41	10	ИП1	61	17	—	11
04	F ln	18	11	—	11	18	П2	42
05	⇆	14	12	F e^x	16	19	F x≠0	57
06	2	02	13	ИП0	60	20	23	23

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
21	F x<0	5C	27	×	12		Регистры	
22	14	14	28	С/П	50	0 x		
23	F π	20				1 x/2		
24	F ln	18		Инструкция		2 оперативный		
25	×	12	m ↑ x В/0 С/П					
26	F e^x	16						

Время вычисления T=(10+m)c.

Пример: m=3; x=2. $\varphi_3(2)=0{,}20755375$.

V.5.4.2. Интегральный закон распределения

Интегральный закон распределения $F_m(x)$ определяется [12]:

$$F_m(x)=\int_0^x \varphi_m(t)dt=\frac{1}{2^{\frac{m}{2}}\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)}\int_0^x t^{\frac{m-2}{2}}e^{-\frac{t}{2}}dt.$$

V.5.4.2.1. Вычисление $F_m(x)$ при четных m.

При четных $m\geqslant 2$ $F_m(x)$ представляется в виде

$$F_m(x)=1-e^{-\frac{x}{2}}\sum_{i=0}^{\frac{m}{2}-1}\frac{x^i}{2^i\cdot i!}$$

Программа V.5.4.2.1.

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	П0	40	10	02	02	20	С/П	50
01	0	00	11	F ln	18		Инструкция	
02	ИП0	60	12	⇆	14	x ↑ m В/0 С/П		
03	:	13	13	2	02		Регистр	
04	×	12	14	:	13	0 оперативный		
05	1	01	15	—	11			
06	+	10	16	F e^x	16			
07	F L0	5Г	17	1	01			
08	09	09	18	—	11			
09	F L0	5Г	19	/—/	0L			

Время вычисления T=(m+6) с.

Пример: m=4; x=1,064. $F_m(x)=0{,}10006$.

V.5.4.2.2. Вычисление $F_m(x)$ при произвольных m.

Для вычисления $F_m(x)$ при произвольных целых m используется приведенное выше представление $F_m(x)$ для четных m, а при нечетных m ($m \geqslant 3$) $F_m(x)$ имеет вид

$$F_m(x) = \Phi(\sqrt{x}) - \sqrt{\frac{2x}{\pi}} \cdot e^{-\frac{x}{2}} \sum_{i=0}^{\frac{m-3}{2}} \frac{x^i}{(2i+1)!!},$$

где $\Phi(\sqrt{x})$ — интеграл вероятностей от $\sqrt{x}$ представляется приближенно в виде

$$\tilde{\Phi}(\sqrt{x}) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\sqrt{x}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \cong \sqrt{1 - \frac{e^{-x(2/\pi - k)}}{1+kx}} \qquad (k=0{,}145).$$

Программа V 5.4.2.2.

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	ПД	4Г	25	/—/	0L	50	×	12
01	0	00	26	F √	21	51	ИП0	60
02	,	0—	27	⇆	14	52	+	10
03	1	01	28	2	02	53	:	13
04	4	04	29	+	10	54	ИП2	62
05	5	05	30	2	02	55	F √	21
06	П0	40	31	:	13	56	+	10
07	×	12	32	П1	41	57	F L1	5L
08	ИПД	6Г	33	2	02	58	46	46
09	↑	0Е	34	×	12	59	ИПД	6Г
10	+	10	35	F π	20	60	F e^x	16
11	F π	20	36	×	12	61	F √	21
12	:	13	37	F cos	1Г	62	:	13
13	П2	42	38	F x>0	59	63	—	11
14	—	11	39	43	43	64	С/П	50
15	F e^x	16	40	П2	42			
16	ИП0	60	41	0	00			
17	ИПД	6Г	42	П0	40			
18	×	12	43	Сх	0Г			
19	1	01	44	БП	51			
20	П0	40	45	57	57			
21	+	10	46	ИПД	6Г			
22	:	13	47	×	12			
23	1	01	48	ИП1	61			
24	—	11	49	2	02			

Инструкция

Р/Г — в Р;
m ↑ x В/0 С/П

Регистры

0;1 оперативные
2 2x/π или 1
Д x

Время вычисления T = (2m+18) с.

Примеры: m=4; x=1,064. $F_4(1{,}064) = 0{,}10006$.

m=3; x=6,4. $\tilde{F}_3(6{,}4) = 0{,}9065$; точное значение 0,90631.

V.5.5. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ СТЬЮДЕНТА

Отношение независимых случайных величин

$$t_n = \frac{z_0}{\sqrt{\frac{1}{n}(z_1^2+z_2^2+\ldots+z_n^2)}},$$

где z_i распределены нормально с $\bar{z}=0$ и одинаковыми дисперсиями, подчиняется распределению Стьюдента с n степенями свободы [12].

V.5.5.1. Плотность вероятности

Плотность вероятности случайной величины t_n $(n \geqslant 1)$ имеет вид [12]:

$$p_n(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi n}} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}.$$

Программа V.5.5.1.

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	F x^2	22	14	ИП0	60	28	F 1/x	23
01	⟵	14	15	:	13	29	F L0	5Г
02	П0	40	16	F $\sqrt{\ }$	21	30	20	20
03	П1	41	17	F π	20	31	×	12
04	:	13	18	БП	51	32	С/П	50
05	1	01	19	28	28			
06	+	10	20	2	02			
07	F ln	18	21	×	12			
08	ИП0	60	22	F π	20			
09	1	01	23	×	12			
10	+	10	24	ИП1	61			
11	/–/	0L	25	ИП0	60			
12	×	12	26	—	11			
13	F e^x	16	27	:	13			

Инструкция

n ↑ t В/0 С/П

Регистры

0 оперативный
1 n

Время вычисления $T=(2\cdot n+11)$ с.
Пример: $n=8$; $t=1$. $p_8(1)=0{,}2276076$.

V.5.5.2. Интегральный закон

Интегральный закон распределения Стьюдента определяется соотношением [12]

$$S_n(t) = \int_{-t}^{t} p_n(t)\,dt = \frac{2\cdot\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi n}\cdot\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \cdot \int_0^t \left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}} dt.$$

Интеграл в правой части вычисляется в элементарных функциях:

$$S_n(t) = \begin{cases} \sin\varphi \sum\limits_{i=0}^{\frac{n}{2}-1} \cos^{2i}\varphi \prod\limits_{j=0}^{i-1} \dfrac{2j+1}{2j+2} & n \text{ — четное,} \\ \dfrac{2}{\pi}\left\{ \varphi + \operatorname{tg}\varphi \sum\limits_{i=1}^{\frac{n-1}{2}} \cos^{2i}\varphi \prod\limits_{j=1}^{i-1} \dfrac{2j}{2j+1} \right\} & n \text{ — нечетное,} \end{cases}$$

где $\varphi = \operatorname{arctg} \dfrac{t}{\sqrt{n}}$.

Программа V 5.5.2.

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	П0	40	18	БП	51	36	ИП0	60
01	F $\sqrt{}$	21	19	43	43	37	×	12
02	:	13	20	ИП3	63	38	1	01
03	П2	42	21	×	12	39	+	10
04	F arctg	1L	22	ИП0	60	40	F L0	5Г
05	F L0	5Г	23	:	13	41	20	20
06	09	09	24	F L0	5Г	42	×	12
07	БП	51	25	36	36	43	С/П	50
08	30	30	26	ИП2	62			
09	П1	41	27	×	12			
10	F sin	1С	28	ИП1	61			
11	F ВХ	0	29	+	10			
12	F cos	1Г	30	2	02			
13	F x^2	22	31	×	12			
14	П3	43	32	F π	20			
15	F L0	5Г	33	:	13			
16	22	22	34	БП	51			
17	⇆	14	35	43	43			

Инструкция

Р/Г — в Р;
$t \uparrow n$ В/0 С/П

Регистры

0 оперативный
1 $\operatorname{arctg}(t/\sqrt{n})$
2 $t/\sqrt{n}$
3 $n/(n+t^2)$

Время вычисления $T = (6+2n)$ с.

Примеры: $n=5$; $t=2{,}015$. $S_5(2{,}015) = 0{,}8999939$.
$n=6$; $t=1{,}943$. $S_6(1{,}943) = 0{,}899975$.

V.5.6. r-РАСПРЕДЕЛЕНИЕ

r-распределение используется для проверки гипотезы о некоррелированности ($\rho=0$) пар случайных величин x_i, y_i ($i=1,2,\ldots,n$), принадлежащих двумерной нормальной совокупности. Выборочный коэффициент корреляции r определяется соотношением раздела V.1.4. и вычисляется по соответствующей программе.

Статистика $x = r\sqrt{n-1}$ при $\rho=0$ имеет r-распределение с $n-2$ степенями свободы [12].

V.5.6.1. Плотность вероятности величины x при $\rho=0$ $(n\geqslant3)$ вычисляется по формуле [12]:

$$\varphi_n(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi(n-1)}}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-2}{2}\right)}\cdot\left(1-\frac{x^2}{n-1}\right)^{\frac{n-4}{2}}$$

$$(-\sqrt{n-1}<x<\sqrt{n-1}).$$

Программа V.5.6.1.

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	F x^2	22	16	2	02	32	—	11
01	⇆	14	17	—	11	33	:	13
02	1	01	18	×	12	34	F 1/x	23
03	—	11	19	F e^x	16	35	F L0	5Г
04	П1	41	20	F π	20	36	26	26
05	:	13	21	ИП1	61	37	×	12
06	1	01	22	F √	21	38	С/П	50
07	—	11	23	×	12			
08	/—/	0L	24	БП	51			
09	F √	21	25	34	34			
10	F ln	18	26	F π	20			
11	ИП1	61	27	×	12			
12	1	01	28	2	02			
13	—	11	29	×	12			
14	П0	40	30	ИП2	62			
15	П2	42	31	ИП0	60			

Инструкция

n ↑ x В/0 С/П

Регистры

0 оперативный
1 n — 1
2 n — 2

Время вычисления $T=2{,}5(n+3)$ с.

Пример: $n=7$; $x=0{,}5$. $\varphi_7(0{,}5)=0{,}32510$.

V.5.6.2. Интегральный закон распределения случайной величины x обозначим $F_n(R)$

$$F_n(R)=\int\limits_{-R}^{R}\varphi_n(x)\,dx=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-2}{2}\right)}\cdot\int\limits_{0}^{R/\sqrt{n-1}}(1-x^2)^{\frac{n-4}{2}}\,dx$$

$$(0\leqslant R<\sqrt{n-1}).$$

Для вычисления $F_n(R)$ $(n\geqslant4)$ получено соотношение

$$F_n(R)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-2}{2}\right)}\cdot A_n,$$

где A_n определяется рекуррентно:

$$A_i = \frac{\cos^{i-4}\varphi \cdot \sin\varphi + (i-4)A_{i-2}}{i-3}$$

при $i = \begin{cases} 5, 7, \dots, n \text{ — при } n \text{ — нечетном;} \\ 4, 6, \dots, n \text{ — при } n \text{ — четном} \end{cases}$

и $A_3 = \varphi = \arcsin(R/\sqrt{n-1})$.

Программа V.5.6.2.

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	П0	40	24	F π	20	48	ИП5	65
01	1	01	25	:	13	49	×	12
02	П1	41	26	П1	41	50	1	01
03	—	11	27	ИП4	64	51	+	10
04	F √	21	28	F arcsin	19	52	F L0	5Г
05	:	13	29	П2	42	53	39	39
06	П4	44	30	ИП4	64	54	ИП4	64
07	F arcsin	19	31	ИП5	65	55	×	12
08	F cos	1Г	32	F √	21	56	ИП2	62
09	F x²	22	33	×	12	57	+	10
10	П5	45	34	П4	44	58	ИП1	61
11	ИП0	60	35	КИП0	Г0	59	×	12
12	2	02	36	1	01	60	С/П	50
13	:	13	37	БП	51			
14	П0	40	38	52	52			
15	F π	20	39	1	01			
16	×	12	40	ИП0	60			
17	F sin	1С	41	2	02			
18	F x²	22	42	×	12			
19	П3	43	43	ИП3	63			
20	П2	42	44	+	10			
21	F x≠0	57	45	F 1/x	23			
22	35	35	46	—	11			
23	2	02	47	×	12			

Инструкция

Р/Г — в Р;
R ↑ n В/0 С/П

Регистры

0÷5 оперативные

Время вычисления T=2,5(3+n) с.

Примеры: n=5; R=0,5. $F_5(0,5)=0{,}31496$.
n=6; R=0,5. $F_6(0,5)=0{,}32982$.

V.5.7. F-РАСПРЕДЕЛЕНИЕ

Этому распределению подчинено отношение z двух случайных величин, имеющих χ^2 — распределение с m и n степенями свободы, [12]

$$z = \frac{\frac{1}{m}(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_m^2)}{\frac{1}{n}(y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_n^2)}.$$

V.5.7.1. Плотность вероятности

Плотность вероятности F-распределения $p_F(m,n,z)$ определяется соотношением [12]

$$p_F(m,n,z)=\left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{m}{2}}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\cdot\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\cdot z^{\frac{m-2}{2}}\cdot\left(1+\frac{m}{n}z\right)^{-\frac{m+n}{2}}$$

Вычисляется значение $p_F(m,n,z)$

Программа V.5.7.1.

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	П3	43	22	ИП1	61	44	/—/	0L
01	⇄	14	23	×	12	45	×	12
02	2	02	24	—	11	46	БП	51
03	:	13	25	F eˣ	16	47	39	39
04	П2	42	26	ИП3	63	48	F π	20
05	:	13	27	×	12	49	F ln	18
06	⇄	14	28	ИП1	61	50	×	12
07	2	02	29	ПП	53	51	F eˣ	16
08	:	13	30	38	38	52	×	12
09	П1	41	31	ИП4	64	53	F 1/x	23
10	×	12	32	ПП	53	54	В/0	52
11	F ln	18	33	38	38			
12	F ВХ	0	34	ИП2	62			
13	1	01	35	ПП	53			
14	+	10	36	38	38			
15	F ln	18	37	С/П	50			
16	ИП1	61	38	F ,	25			
17	ИП2	62	39	1	01			
18	+	10	40	F ВХ	0			
19	П4	44	41	—	11			
20	×	12	42	F x<0	5C			
21	⇄	14	43	48	48			

Инструкция

m ↑ n ↑ z В/0 С/П

Регистры

1 m/2
2 n/2
3 z
4 (m+n)/2

Время вычисления T=3·(8+m+n) с.
Пример: m=3; n=4; z=2. $p_F(3;4;2)=0{,}1394$.

V.5.7.2. Интегральный закон

Интегральный закон F-распределения определяется как

$$F(m,n,z)=\int_0^z p_F(m,n,x)\,dx=$$

$$=\left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{m}{2}}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\cdot\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\int_0^z x^{\frac{m-2}{2}}\left(1+\frac{m}{n}x\right)^{-\frac{m+n}{2}}dx.$$

Интеграл вычисляется в элементарных функциях, однако получающееся в общем случае выражение оказывается достаточно сложным. Поэтому приведены три программы вычисления $F(m,n,z)$ для четного n, для четного m и для случая, когда n и m одновременно нечетные.

V.5.7.2.1. Для вычисления функции $F(m,n,z)$ при четном n получено соотношение

$$F(m,n,z)=n\cdot\sin^m\varphi\left\{\prod_{i=1}^{n/2}\frac{m-2+2i}{2i}\right\}\cdot X_{n/2},$$

где $X_{n/2}$ определяется из рекуррентного соотношения

$$X_i=\frac{2(i-1)X_{i-1}+\cos^{2(i-1)}\varphi}{2i+m-2}\qquad(i=2,3,\ldots,n/2),$$

где $$\varphi=\operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{mz}{n}}$$

Программа V.5.7.2.1.

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	ИП1	61	23	⇆	14	46	:	13
01	×	12	24	ИП1	61	47	П4	44
02	ИП0	60	25	2	02	48	+	10
03	:	13	26	—	11	49	ИП3	63
04	↑	0E	27	2	02	50	ИП1	61
05	КНОП	54	28	:	13	51	+	10
06	1	01	29	ИП3	63	52	:	13
07	+	10	30	:	13	53	F L2	58
08	П5	45	31	1	01	54	37	37
09	П4	44	32	+	10	55	×	12
10	:	13	33	×	12	56	С/П	50
11	F √	21	34	F L3	5—			
12	F ln	18	35	24	24			
13	ИП1	61	36	↑	0E			
14	×	12	37	ИП0	60			
15	F e^x	16	38	ИП2	62			
16	ИП0	60	39	—	11			
17	×	12	40	ИП2	62			
18	ИП0	60	41	—	11			
19	2	02	42	П3	43			
20	:	13	43	×	12			
21	П2	42	44	ИП4	64			
22	П3	43	45	ИП5	65			

Инструкция

n — в рег. 0;
m — в рег. 1;
z В/0 С/П

Регистры

0 n
1 m
2÷5 оперативные

Время вычисления $T=(5\cdot n+11)$ с.

Пример: $m=4$; $n=4$; $z=6{,}39$. $F(4;4;6{,}39)=0{,}95002$.

V.5.7.2.2. Для вычисления $F(m,n,z)$ при четном m получено соотношение

$$F(m,n,z)=m\left\{\prod_{i=1}^{m/2}\frac{n-2+2i}{2i}\right\}Y_{m/2},$$

где $Y_{m/2}$ определяется рекуррентно:

$$Y_k=\frac{2(k-1)\cdot Y_{k-1}+\sin^{2(k-1)}\varphi\cdot\cos^n\varphi}{n+2k-2}\qquad(k=2,3,\ldots,m/2),$$

$$Y_1=\frac{1-\cos^n\varphi}{n},\quad \varphi=\arccos(1/\sqrt{1+mz/n}).$$

Программа V.5.7.2.2.

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	ИП1	61	23	ИП3	63	46	2	02
01	×	12	24	—	11	47	—	11
02	ИП0	60	25	ИП2	62	48	2	02
03	:	13	26	:	13	49	:	13
04	1	01	27	×	12	50	ИП3	63
05	+	10	28	1	01	51	:	13
06	F 1/x	23	29	ИП4	64	52	1	01
07	П5	45	30	ИП5	65	53	+	10
08	F $\sqrt{}$	21	31	:	13	54	×	12
09	F ln	18	32	П4	44	55	F L3	5—
10	ИП0	60	33	—	11	56	45	45
11	ИП1	61	34	ИП2	62	57	ИП1	61
12	+	10	35	2	02	58	×	12
13	×	12	36	×	12	59	С/П	50
14	F e^x	16	37	ИП0	60		**Инструкция**	
15	П4	44	38	+	10	n — в рег. 0;		
16	ИП1	61	39	2	02	m — в рег. 1;		
17	2	02	40	—	11	z В/0 С/П		
18	:	13	41	:	13		**Регистры**	
19	П2	42	42	+	10			
20	П3	43	43	F L2	58	0 n		
21	1	01	44	22	22	1 m		
22	ИП2	62	45	ИП0	60	2÷5 оперативные		

Время вычисления $T=(8m+6)$ с.

Пример: $m=4$; $n=3$; $z=28{,}71$. $F(4;3;28{,}71)=0{,}99$.

V.5.7.2.3. Для вычисления $F(m,n,z)$ при нечетных m и n получено соотношение

$$F(m,n,z)=A_{m-1,\,n-1}\cdot\frac{2}{\pi}\left[\prod_{i=1}^{\frac{m-1}{2}}\frac{m+n-2i}{m-2i}\right]\cdot\left[\prod_{j=1}^{\frac{n-1}{2}}\frac{n+1-2j}{n-2j}\right]$$

где $A_{m-1,\,n-1}$ определяется рекуррентно:

$$A_{i,n-1}=-\frac{\sin^{i-1}\varphi\cdot\cos^n\varphi}{n+i-1}+\frac{i-1}{n+i-1}\cdot A_{i-2,n-1}\qquad(i=2,4,\ldots,m-1),$$

где $A_{0,n-1}$ определяется рекуррентно:

$$A_{0,j} = \frac{\sin\varphi \cdot \cos^{j-1}\varphi}{j} + \frac{j-1}{j} A_{0,j-2} \qquad (j=2,4,\ldots,n-1)$$

при $A_{0,0} = \varphi = \operatorname{arctg}\sqrt{mz/n}$.

Программа V.5.7.2.3.

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	ИП1	61	30	F e^x	16	60	F ВХ	0
01	×	12	31	/—/	0L	61	ИП9	69
02	ИП0	60	32	П5	45	62	×	12
03	:	13	33	ИП1	61	63	П9	49
04	F √	21	34	ПП	53	64	F ,	25
05	F arctg	1L	35	39	39	65	ИП5	65
06	П4	44	36	ИП9	69	66	ИП7	67
07	F sin	1C	37	:	13	67	ИП8	68
08	П5	45	38	С/П	50	68	:	13
09	ИП4	64	39	П3	43	69	П7	47
10	F cos	1Г	40	1	01	70	:	13
11	ПС	4С	41	—	11	71	ИП4	64
12	П7	47	42	2	02	72	:	13
13	F π	20	43	:	13	73	+	10
14	2	02	44	П2	42	74	F L2	58
15	:	13	45	ИП7	67	75	49	49
16	П9	49	46	F x^2	22	76	В/О	52
17	1	01	47	П8	48			
18	П6	46	48	ИП4	64			
19	ИП0	60	49	ИП3	63			
20	ПП	53	50	ИП2	62			
21	39	39	51	—	11			
22	П4	44	52	ИП2	62			
23	ИП5	65	53	—	11			
24	П7	47	54	↑	0E			
25	ИПС	6С	55	ИП6	66			
26	F ln	18	56	+	10			
27	ИП0	60	57	П4	44			
28	П6	46	58	:	13			
29	×	12	59	×	12			

Инструкция

Р/Г — в Р;
n — рег. 0;
m — в рег. 1;
z В/0 С/П

Регистры

0 n
1 m
2÷9 оперативные
С $1/\sqrt{1+n/mz}$

Время вычисления T=5(m+n+3) с.
Пример: m=9; n=3; z=8,81. F(9; 3; 8,81)=0,94998.

V.6. ГЕНЕРАЦИЯ ПСЕВДОСЛУЧАЙНЫХ ЧИСЕЛ

V.6.1. РАВНОМЕРНЫЙ ЗАКОН РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Генерируются псевдослучайные числа ξ_1, распределенные по равномерному закону

$$p(x) = \begin{cases} 1 \text{ при } 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ 0 \text{ при } x<0,\ x>1. \end{cases}$$

V.6.1.1. Линейный конгруэнтный метод [11]

Алгоритм генерации

$$\xi_{i+1}=F\{11\xi_i+\pi\},$$

где $F\{z\}$ — символ взятия дробной части числа.

При $\xi_0=0{,}5$ программа дает около 8000 неповторяющихся чисел.

Псевдослучайные числа получаются в регистре X, а между обращениями к данной программе хранятся в регистре Д.

Программа V.6.1.1.

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	ИПД	6Г	06	КИПД	ГГ
01	ИПС	6С	07	⇆	14
02	×	12	08	ИПД	6Г
03	F π	20	09	—	11
04	+	10	10	ПД	4Г
05	ПД	4Г	11	С/П	50

Инструкция

0,5 — в рег. Д;
11 — в рег. С;
В/0 С/П; В/0 С/П; ...

Регистры

С 11
Д ξ_i

Время генерации одного числа 3 с.

Пример: $\xi_1=0{,}6415926$; $\xi_2=0{,}199111$; ...

V.6.1.2. Алгоритм генерации

$$\xi_{i+1}=F\{\xi_i/z_i+\pi\},$$

где $\xi_0=0$; $z_{i+1}=z_i+1\cdot10^{-8}$; $z_0=0{,}011$.

Программа дает примерно $8{,}9\cdot10^7$ неповторяющихся чисел.

Программа V.6.1.2.

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	КИП5	Г5	07	КИПД	ГГ
01	ИПД	6Г	08	⇆	14
02	ИП5	65	09	ИПД	6Г
03	:	13	10	—	11
04	F π	20	11	ПД	4Г
05	+	10	12	С/П	50
06	ПД	4Г			

Инструкция

0 — в рег. Д;
0,011 — в рег. 5;
В/0 С/П; В/0 С/П; ...

Регистры

5 z_i
Д ξ_i

Время генерации одного числа 3,5 с.

Пример: $\xi_1=0{,}1415926$; $\xi_2=0{,}013645$; ...

V.6.1.3. Алгоритм генерации

$$\xi_{i+1}=\frac{1}{\pi}\arccos(\cos(10^9\xi_i)+\Delta),$$

где Δ — погрешность вычисления косинуса, при значениях аргумента порядка 10^8 достигающая 100% на микроЭВМ данного типа.

При $\xi_0=0$ программа дает около 4500 неповторяющихся чисел. Псевдослучайные числа, равномерно распределенные на интервале $(0\div1)$, помещаются в регистры X и Д и в регистре Д хранятся между обращениями к программе.

Программа V.6.1.3.

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	ИПД	6Г	05	F π	20
01	ВП	0С	06	:	13
02	9	09	07	ПД	4Г
03	F cos	1Г	08	С/П	50
04	F arccos	1—			

Инструкция

Р/Г — в Р;
0 — в рег. Д;
В/0 С/П; В/0 С/П;...

Регистр

Д ξ_i

Время генерации одного числа 4,5 с.

Пример: $\xi_0=0$; $\xi_1=0{,}38642795$; $\xi_2=0{,}88095483$;...

V.6.1.4. Алгоритм генерации

$$\xi_{i+1}=\frac{1}{\pi}\arccos(\cos((10^8-i)\xi_i)+\Delta),$$

где Δ — погрешность вычисления косинуса.

При произвольных значениях ξ_0 программа дает 10^8 неповторяющихся чисел. Псевдослучайные числа, равномерно распределенные на интервале $(0\div1)$, помещаются в регистры X и Д и в регистре Д хранятся между обращениями к программе.

Программа V.6.1.4.

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	КИПО	Г0	06	F arccos	1—
01	ИПО	60	07	F π	20
02	ИПД	6Г	08	:	13
03	ВП	0С	09	ПД	4Г
04	×	12	10	С/П	50
05	F cos	1Г			

Инструкция

Р/Г — в Р;
$1\cdot10^8$ — в рег. 0;
0 — в рег. Д;
В/0 С/П; В/0 С/П;...

Регистры

0 $1\cdot10^8-i$
Д ξ_i

Время генерации одного числа 5,5 с.

Пример: $\xi_0=0$; $\xi_1=0{,}021741641$; $\xi_2=0{,}18830284$; ...

V.6.2. НОРМАЛЬНЫЙ ЗАКОН РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Генерируются псевдослучайные числа η_i, распределенные по закону, близкому к нормальному закону распределения

$$p(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Алгоритм генерации:

Сначала генерируются псевдослучайные числа ξ_i, распределенные равномерно на интервале $(0\div1)$.

Затем из ξ_i получаем η_i функциональным преобразованием [9]

$$\eta_i=[\mathrm{sign}(2\xi_i-1)]\cdot\sqrt{-\frac{\pi}{2}\cdot\ln[4\xi_i(1-\xi_i)]},$$

где

$$\mathrm{sign}\,x=\begin{cases}1 & \text{при } x>0,\\ 0 & \text{при } x=0,\\ -1 & \text{при } x<0.\end{cases}$$

Приведены две программы генерации η_i.

V.6.2.1. Значения ξ_i получаются в соответствии с алгоритмом V.6.1.1. Программа дает около 8000 неповторяющихся чисел.

Псевдослучайные числа получаются в регистре X. Между обращениями к программе в регистре Д хранится число ξ_{i-1}, поэтому использовать регистр Д для других целей нельзя.

Перед первым обращением к программе нужно занести число $\xi_0=0{,}5$ в регистр Д.

Для получения каждого последующего числа η_i выполнить команды В/О С/П.

Программа V.6.2.1.

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	ИПД	6Г	11	ПД	4Г	22	F x^2	22
01	1	01	12	2	02	23	—	11
02	1	01	13	×	12	24	F $\sqrt{}$	21
03	×	12	14	1	01	25	F ln	18
04	F π	20	15	—	11	26	/—/	0L
05	+	10	16	↑	0E	27	F π	20
06	ПД	4Г	17	F x^2	22	28	×	12
07	КИПД	ГГ	18	F $\sqrt{}$	21	29	F $\sqrt{}$	21
08	⇄	14	19	:	13	30	×	12
09	ИПД	6Г	20	1	01	31	С/П	50
10	—	11	21	F ВХ	0			

Время генерации одного числа 9,5 с.

Пример: $\eta_1=0{,}36236256$; $\eta_2=-0{,}84040426$; ...

V.6.2.2. Значения ξ_i получаются в соответствии с алгоритмом V.6.1.2.

Программа дает примерно $8{,}9 \cdot 10^7$ неповторяющихся чисел η_i.

Перед первым обращением к программе следует занести нуль в регистр Д и 0,011 — в регистр 5.

Для получения каждого последующего числа η_i выполнить команды В/О С/П.

Получающиеся в результате псевдослучайные числа хранятся: в регистре С — η_i, распределенные по закону, близкому к нормальному; в регистре Д — ξ_i, распределенные равномерно на интервале $(0 \div 1)$.

Программа V.6 2.2.

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	КИП5	Г5	14	1	01	28	:	13
01	ИПД	6Г	15	—	11	29	F $\sqrt{}$	21
02	ИП5	65	16	↑	0Е	30	:	13
03	:	13	17	F x^2	22	31	ПС	4С
04	F π	20	18	↑	0Е	32	С/П	50
05	+	10	19	КНОП	54			
06	ПД	4Г	20	1	01		**Инструкция**	
07	КИПД	ГГ	21	—	11	0 — в рег. Д;		
08	⇆	14	22	/—/	0L	0,011 — в рег. 5;		
09	ИПД	6Г	23	F $\sqrt{}$	21	В/0 С/П; В/0 С/П; ...		
10	—	11	24	F ln	18		**Регистры**	
11	ПД	4Г	25	F π	20	5 z_i		
12	↑	0Е	26	×	12	С η_i		
13	+	10	27	/—/	0L	Д ξ_i		

Время генерации одного числа 10 с.

Пример: $\eta_1 = -1{,}064346$; $\eta_2 = -2{,}1423336$; ...

V.6.3. ЗАКОН РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПУАССОНА

Генерируются псевдослучайные числа n_i, распределенные по закону

$$p(n) = \frac{a^n}{n!} e^{-a} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

с математическим ожиданием a.

Псевдослучайное число n_i определяется из соотношения

$$\prod_{k=1}^{n_i} \xi_k \leqslant e^{-a} < \prod_{k=1}^{n_i+1} \xi_k$$

где $\xi_k (k = 1, 2, \ldots)$ — псевдослучайные числа, равномерно распределенные на интервале $(0 \div 1)$ и генерируемые согласно алгоритму раздела V.6.1.2. [9].

Программа V.6.3.

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	/—/	0L	15	+	10	30	БП	51
01	F e^x	16	16	ПД	4Г	31	03	03
02	ПС	4С	17	КИПД	ГГ			
03	Сx	0Г	18	F ,	25			
04	П4	44	19	ИПД	6Г			
05	1	01	20	—	11			
06	+	10	21	ПД	4Г			
07	КИП4	Г4	22	×	12			
08	КИП5	Г5	23	—	11			
09	ИПС	6С	24	F $x \geqslant 0$	59			
10	F ВХ	0	25	07	07			
11	ИПД	6Г	26	ИП4	64			
12	ИП5	65	27	1	01			
13	:	13	28	—	11			
14	F π	20	29	С/П	50			

Инструкция

0 — в рег. Д;
0,011 — в рег. 5;
а В/0 С/П; С/П; ...

Регистры

4 n_{i+1}
5 оперативный
С e^{-a}
Д $\xi_к$

Среднее время генерации одного числа (8+6а) с.
Пример: а=3. $n_1=1$; $n_2=6$; $n_3=7$; ...

V.6.4. ЗАКОН РАСПРЕДЕЛЕНИЯ РЭЛЕЯ

Генерируются псевдослучайные числа η_i, распределенные по закону

$$p(x)=x \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Алгоритм генерации [9]

$$\eta_i=\sqrt{-2\ln\xi_i},$$

где ξ_i — псевдослучайные числа, равномерно распределенные на интервале (0÷1).

Программа V.6.4.

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	ИПД	6Г	08	⇆	14	16	С/П	50
01	1	01	09	ИПД	6Г			
02	1	01	10	—	11			
03	×	12	11	ПД	4Г			
04	F π	20	12	F x^2	22			
05	+	10	13	F ln	18			
06	ПД	4Г	14	/—/	0L			
07	КИПД	ГГ	15	F √	21			

Инструкция

0,5 — в рег. Д;
В/0 С/П; В/0 С/П; ...

Регистр

Д ξ_i

Время генерации одного числа 6 с.
Пример: $\eta_1=0{,}94212706$; $\eta_2=1{,}7966039$; ...

Глава VI

СПЕЦИАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ

VI.1. ГАММА-ФУНКЦИЯ И РОДСТВЕННЫЕ ЕЙ ФУНКЦИИ

VI.1.1. ГАММА-ФУНКЦИЯ

Для значений $x>0$ гамма-функция $\Gamma(x)$ определяется как [11]

$$\Gamma(x)=\int\limits_0^\infty e^{-t}\cdot t^{x-1}dt\cdot$$

Приводятся две программы вычисления значения $\Gamma(x)$.

VI.1.1.1. Для вычисления $\Gamma(x)$ на интервале $-66\leqslant x\leqslant 70$ используется приближенное представление Стирлинга [10]

$$\tilde{\Gamma}(x+1)=\left(\frac{x}{e}\right)^x\cdot e^{\frac{1}{12x}}\sqrt{2\pi x}. \qquad (x\geqslant 9).$$

При $x<9$ рекуррентным преобразованием $\Gamma(z)=\Gamma(z+1)/z$ значение аргумента x переводится в область $9\leqslant x<10$.

Программа VI.1.1.1.

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	КНОП	54	19	П1	41	38	+	10
01	1	01	20	1	01	39	F e^x	16
02	—	11	21	F ВХ	0	40	ИП1	61
03	П1	41	22	1	01	41	F π	20
04	8	08	23	+	10	42	×	12
05	—	11	24	:	13	43	2	02
06	F $x\geqslant 0$	59	25	F L2	58	44	×	12
07	11	11	26	21	21	45	F $\sqrt{}$	21
08	1	01	27	ИП1	61	46	×	12
09	БП	51	28	F ln	18	47	×	12
10	27	27	29	1	01	48	С/П	50
11	2	02	30	—	11			
12	—	11	31	ИП1	61			
13	/—/	0L	32	×	12			
14	П2	42	33	ИП1	61			
15	КИП2	Г2	34	1	01			
16	ИП2	62	35	2	02			
17	ИП1	61	36	×	12			
18	+	10	37	F 1/x	23			

Инструкция

x В/0 С/П

Регистры

1;2 оперативные

Время вычисления $T = \begin{cases} 12\ с & \text{при } x \geqslant 9, \\ (30-2x)\ с & \text{при } x < 9. \end{cases}$

Относительная погрешность вычисления $\delta = \frac{|\tilde{\Gamma}(x) - \Gamma(x)|}{|\Gamma(x)|}$ не превышает $1 \cdot 10^{-5}$.

Пример: $x = -2{,}5$. $\tilde{\Gamma}(-2{,}5) = -0{,}945312$; точное значение $-0{,}94530868$.

VI.1.1.2. Для вычисления $\tilde{\Gamma}(x)$ при $x > 0$ используется соотношение

$$\tilde{\Gamma}(x) = \frac{e^{\frac{x(x-1)}{2}}}{x} \quad (\text{при } 0 < x \leqslant 1).$$

При $x > 1$ рекуррентным преобразованием $\Gamma(z) = (z-1)\Gamma(z-1)$ значение аргумента x переводится в область $0 < x \leqslant 1$.

Программа VI.1.1.2.

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	↑	0E	07	F ,	25	14	F e^x	16
01	↑	0E	08	F ,	25	15	F $\sqrt{}$	21
02	F x^2	22	09	1	01	16	×	12
03	F 1/x	23	10	—	11	17	С/П	50
04	⇆	14	11	F x<0	5C			
05	F ,	25	12	05	05	**Инструкция**		
06	×	12	13	×	12	x В/0 С/П		

Время вычисления $T = (6+2x)$ с.

Относительная погрешность вычисления δ не превышает 1%.

Пример: $x = 2{,}5$. $\tilde{\Gamma}(2{,}5) = 1{,}3237454$; точное значение 1,3293404.

VI.1.2. ЛОГАРИФМИЧЕСКАЯ ПРОИЗВОДНАЯ ГАММА-ФУНКЦИИ

Логарифмическая производная от гамма-функции обозначается как [11]:

$$\psi(x) = \frac{d}{dx} \ln \Gamma(x) = \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}.$$

Функция $\psi(x)$ представлена приближенно в виде ряда

$$\tilde{\psi}(x) = -C + (x-1)\left[\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{i(i+x-1)} + \frac{1}{N + \frac{x}{2}}\right] \qquad N=9,$$

где $C = 0{,}5772$ — постоянная Эйлера.

Программа VI.1.2.

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	П1	41	13	ИП2	62	26	—	11
01	1	01	14	×	12	27	С/П	50
02	—	11	15	F 1/x	23			
03	9	09	16	+	10			
04	П2	42	17	F L2	58			
05	ИП1	61	18	10	10			
06	2	02	19	×	12			
07	:	13	20	0	00			
08	+	10	21	,	0—			
09	F 1/x	23	22	5	05			
10	⇆	14	23	7	07			
11	ИП2	62	24	7	07			
12	+	10	25	2	02			

Инструкция

x В/0 С/П

Регистры

1 x

2 оперативный

Время вычисления 25 с. Абсолютная погрешность вычисления $\Delta = |\tilde{\psi}(x) - \psi(x)|$ при $1 \leqslant x \leqslant 2$ не превышает $1 \cdot 10^{-4}$.

Пример: $x=1,5$. $\tilde{\psi}(1,5) = 0,03654$; точное значение 0,03648997.

VI.1.3. ФУНКЦИЯ β(x)

Функция $\beta(x)$ связана с функцией $\psi(x)$ соотношением $\beta(x) = \frac{1}{2}\left[\psi\left(\frac{x+1}{2}\right) - \psi\left(\frac{x}{2}\right)\right]$ [13] и представляется приближенно в виде ряда

$$\tilde{\beta}(x) = \frac{1}{4}\left[\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{\left(i+\frac{x-2}{2}\right)\cdot\left(i+\frac{x-1}{2}\right)} + \frac{1}{N+\frac{x}{2}}\right] \qquad N=9.$$

Программа VI.1.3.

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	КНОП	54	11	1	01	22	С/П	50
01	9	09	12	—	11			
02	П1	41	13	F 1/x	23			
03	2	02	14	F ВХ	0			
04	×	12	15	1	01			
05	+	10	16	—	11			
06	П2	42	17	П2	42			
07	2	02	18	:	13			
08	×	12	19	+	10			
09	F 1/x	23	20	F L1	5L			
10	ИП2	62	21	10	10			

Инструкция

x В/0 С/П

Регистры

1;2 оперативные

Время вычисления 30 с. Абсолютная погрешность вычисления Δ при $1 \leqslant x \leqslant 2$ не превышает $1 \cdot 10^{-3}$.

Пример: $x=2$. $\tilde{\beta}(2)=0{,}30623$; точное значение 0,30684524.

VI.1.4. БЕТА-ФУНКЦИЯ

Бета-функция $B(x,y)$ определяется при $x>0$ и $y>0$ соотношением [11]:

$$B(x,y)=\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt,$$

а также через гамма-функции как

$$B(x,y)=\frac{\Gamma(x)\cdot\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}.$$

Приведены две программы вычисления бета-функции.

VI.1.4.1. Для вычисления приближенного значения $\tilde{B}(x,y)$ при произвольных значениях $x>0$ и $y>0$ используется представление $\Gamma(z)=\{\exp[z(z-1)/2]\}/z$ $(0<z\leqslant 1)$, а при $z>1$ производится рекуррентное преобразование $\Gamma(z)=\Gamma(z+1)/z$ аргумента на интервал $0<z\leqslant 1$.

Программа VI.1.4.1.

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	П1	41	17	ИП3	63	34	25	25
01	⇆	14	18	:	13	35	×	12
02	П0	40	19	С/П	50	36	F e^x	16
03	ПП	53	20	↑	0E	37	F $\sqrt{}$	21
04	20	20	21	↑	0E	38	×	12
05	П2	42	22	F x^2	22	39	В/О	52
06	ИП0	60	23	F 1/x	23			
07	ИП1	61	24	⇆	14			
08	+	10	25	↑	0E			
09	ПП	53	26	F ,	25			
10	20	20	27	F ,	25			
11	П3	43	28	×	12			
12	ИП1	61	29	F ,	25			
13	ПП	53	30	F ,	25			
14	20	20	31	1	01			
15	ИП2	62	32	—	11			
16	×	12	33	F x<0	5C			

Инструкция

x ↑ y В/0 С/П

Регистры

0 x
1 y
2 Γ(y)
3 Γ(x+y)

Время вычисления $T=(6x+6y+20)$ с.

Относительная погрешность вычисления δ не превышает 2%.

Пример: $x=3{,}5$; $y=0{,}5$. $\tilde{B}(3{,}5;\ 0{,}5)=0{,}97350$; точное значение 0,98174718.

VI.1.4.2. Вычисление $B(x,y)$ при целых и полуцелых значениях x и y $(x=n/2;\ y=m/2)$.

Вычисления производятся по точной формуле.

Программа VI.1.4.2.

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	П2	42	13	ПП	53	26	F π	20
01	⇆	14	14	16	16	27	F ln	18
02	П1	41	15	С/П	50	28	×	12
03	+	10	16	F ,	25	29	F eˣ	16
04	1	01	17	1	01	30	×	12
05	⇆	14	18	F ВХ	0	31	В/0	52
06	ПП	53	19	—	11			
07	16	16	20	F x<0	5C		**Инструкция**	
08	F 1/x	23	21	26	26	x ↑ y	В/0 С/П	
09	ИП1	61	22	/—/	0L			
10	ПП	53	23	×	12		**Регистры**	
11	16	16	24	БП	51	1 x		
12	ИП2	62	25	17	17	2 y		

Время вычисления $T=(4x+4y+18)$ с.

П р и м е р: $x=0{,}5$; $y=3$. $B(x,y)=1{,}0666667$.

VI.1.5. НЕПОЛНАЯ ГАММА-ФУНКЦИЯ

Неполная гамма-функция $\gamma(a,x)$ определяется соотношением [11]:

$$\gamma(a,x)=\int_0^x e^{t}\cdot t^{a-1}dt \qquad (x\geqslant 0;\ a>0).$$

Для вычисления приближенного значения $\tilde{\gamma}(a,x)$ используется представление в виде ряда [13]:

$$\tilde{\gamma}(a,x)=e^{-x}\frac{x^a}{a}\left[\sum_{i=0}^{N}\frac{x^i}{(a+1)(a+2)\ldots(a+i)}+\theta_{N+1}\right]$$

$$N=E\{2x+8\}.$$

Программа VI.1.5.

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	П1	41	13	1	01	26	:	13
01	⇆	14	14	+	10	27	С/П	50
02	↑	0E	15	F L2	58			
03	↑	0E	16	08	08		**Инструкция**	
04	+	10	17	F ,	25	x ↑ a	В/0 С/П	
05	9	09	18	F ,	25			
06	+	10	19	F ln	18		**Регистры**	
07	П2	42	20	ИП1	61	1 a		
08	ИП1	61	21	×	12	2 оперативный		
09	ИП2	62	22	—	11			
10	+	10	23	F eˣ	16			
11	:	13	24	:	13			
12	×	12	25	ИП1	61			

Время вычисления (30+5x) с.

Относительная погрешность вычисления δ при $a \geqslant 0{,}5$ не превышает $1 \cdot 10^{-5}$.

Пример: a=2; x=8.

$\tilde{\gamma}(2; 8) = 0{,}9969824$; точное значение 0,9969807.

VI.2. ФУНКЦИИ БЕССЕЛЯ И СВЯЗАННЫЕ С НИМИ ФУНКЦИИ

VI.2.1. ФУНКЦИИ БЕССЕЛЯ $J_k(x)$ И $I_k(x)$

Функция $J_к(x)$ определяется соотношением [11]:

$$J_k(x) = \frac{2\left(\frac{x}{2}\right)^k}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(k+{}^1/_2)} \cdot \int_0^{\pi/2} \cos(x \cdot \cos t) \cdot \sin^{2k} t\,dt,$$

а функция $I_к(x)$ связана с $J_к(x)$ соотношением

$$I_k(x) = i^{-k} \cdot J_k(i \cdot x).$$

Приведены две программы вычисления функций Бесселя.

VI.2.1.1. Вычисление $J_к(x)$ и $\tilde{I}_к(x)$ при $к > -1$. Для одновременного вычисления $\tilde{J}_к(x)$ и $\tilde{I}_к(x)$ при произвольном (в том числе и дробном) к используется представление в виде ряда [11]:

$$\left.\begin{matrix}\tilde{J}_k(x)\\ \tilde{I}_к(x)\end{matrix}\right\} = \sum_{i=0}^{N} \frac{(\mp 1)^i \left(\frac{x}{2}\right)^{k+2i}}{i!\,\Gamma(k+i+1)} + \theta_{N+1} \qquad N = E\left\{8 + \frac{x}{2}\right\};$$

где знак минус относится к $J_к(x)$, а плюс — к $I_к(x)$.

Программа VI.2.1.1.

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	П0	40	15	9	09	30	—	11
01	⇆	14	16	П3	43	31	F e^x	16
02	2	02	17	+	10	32	F π	20
03	:	13	18	П4	44	33	2	02
04	F x^2	22	19	↑	0E	34	×	12
05	П1	41	20	F ln	18	35	ИП4	64
06	9	09	21	1	01	36	×	12
07	F ВХ	0	22	—	11	37	F $\sqrt{\ }$	21
08	+	10	23	×	12	38	:	13
09	П2	42	24	—	11	39	1	01
10	F ВХ	0	25	ИП4	64	40	ИП1	61
11	F ln	18	26	1	01	41	×	12
12	ИП0	60	27	2	02	42	ИП2	62
13	×	12	28	×	12	43	:	13
14	ИП0	60	29	F 1/x	23	44	F ВХ	0

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
45	ИП0	60	54	×	12			
46	+	10	55	ИП3	63			
47	:	13	56	ИП0	60			
48	ИПС	6С	57	+	10			
49	×	12	58	×	12			
50	1	01	59	F L3	5—			
51	+	10	60	55	55			
52	F L2	58	61	С/П	50			
53	40	40						

Инструкция

В рег. С $\{ {-1 \text{ для } J; \atop +1 \text{ для } I;}$

x ↑ к В/0 С/П

Регистры

0 к
1 $(x/2)^2$
2;3 оперативные
4 к+9
С∓1

Время вычисления $T=(70+3x)$ с.

При $x \leqslant 11$ абсолютная погрешность вычисления Δ не превышает $1 \cdot 10^{-5}$.

Примеры: $x=1$; $k=5$. $\tilde{J}_5(1)=0{,}0002498$; точное значение 0,0002498.

$x=2$; $k=5$. $\tilde{I}_5(2)=0{,}0098257$; точное значение 0,0098262.

VI.2.1.2. Вычисление $J_k(x)$ при полуцелых значениях k ($k=n+{}^1/_2 \geqslant {}^3/_2$). Для вычисления используется рекуррентное соотношение [10]:

$$J_m(x)=\frac{2(m-1)}{x}\cdot J_{m-1}(x)-J_{m-2}(x),$$

при

$$J_{-1/2}=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos x \text{ и } J_{1/2}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin x.$$

Из-за ограниченной разрядности ЭВМ ошибка вычисления увеличивается с увеличением k, особенно при $x<1$.

Программа VI.2.1.2.

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	П2	42	14	F ВХ	0	28	F L2	58
01	⇄	14	15	ИП3	63	29	18	18
02	П3	43	16	F sin	1С	30	С/П	50
03	F cos	1Г	17	×	12			
04	ИП3	63	18	П3	43			
05	F 1/x	23	19	ИП4	64			
06	П4	44	20	ИП1	61			
07	↑	0Е	21	—	11			
08	+	10	22	П4	44			
09	П1	41	23	×	12			
10	Fπ	20	24	+	10			
11	:	13	25	/—/	0L			
12	F√	21	26	ИП3	63			
13	×	12	27	⇄	14			

Инструкция

Р/Г — в Р
x ↑ к В/0 С/П

Регистры

1 2/x
2 к; счетчик
3;4 оперативные

Время вычисления T=(4·k+7) с.

Пример: x=1; k=4,5. $\tilde{J}_{9/2}(1)=8{,}0849\cdot10^{-4}$; точное значение $8{,}0666\cdot10^{-4}$.

VI.2.2. ФУНКЦИИ БЕССЕЛЯ-МАКДОНАЛЬДА

Функции Бесселя-Макдональда $K_k(x)$ определяются из предельного соотношения [10]:

$$K_k(x)=\frac{\pi}{2}\lim_{y\to k}\frac{I_{-y}(x)-I_y(x)}{\sin\pi y}.$$

Приведены две программы для вычисления приближенных значений функций $\tilde{K}_0(x)$ и $\tilde{K}_1(x)$.

VI.2.2.1. Для вычисления функции $\tilde{K}_0(x)$ (при $x\leqslant12$; $2\cdot10^{-6}\leqslant\leqslant K_0(x)$) используется соотношение

$$\tilde{K}_0(x)=e^{-1{,}03\cdot x}\cdot\ln\left[\frac{9}{8}\cdot\frac{1+1{,}2x+0{,}68\cdot\sqrt{x}}{x}\right].$$

Программа VI.2.2.1.

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	↑	0E	11	,	0–	22	0	00
01	F 1/x	23	12	2	02	23	3	03
02	0	00	13	+	10	24	×	12
03	,	0–	14	9	09	25	F e^x	16
04	6	06	15	×	12	26	:	13
05	8	08	16	8	08	27	С/П	50
06	F ВХ	0	17	:	13			
07	F $\sqrt{\ }$	21	18	F ln	18		**Инструкция**	
08	:	13	19	⇄	14	x В/0 С/П		
09	+	10	20	1	01			
10	1	01	21	,	0–			

Время вычисления 10 с.
Относительная погрешность вычисления $\delta<2\%$.

Пример: x=2. $\tilde{K}_0(2)=0{,}11438862$; точное значение 0,11389388.

VI.2.2.2. Для вычисления функции $K_1(x)$ (при $x \leqslant 12$; $2 \cdot 10^{-6} \leqslant K_1(x)$) используется соотношение

$$\tilde{K}_1(x) = \frac{\sqrt{1+x \cdot \ln 5}}{x} \cdot e^{-x}.$$

Программа VI.2.2.2.

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	F e^x	16	06	×	12	12	С/П	50
01	F ВХ	0	07	1	01			
02	×	12	08	+	10			
03	F ВХ	0	09	F $\sqrt{\ }$	21			
04	5	05	10	⇆	14			
05	F ln	18	11	:	13			

Инструкция

x В/0 С/П

Время вычисления 5 с.

Относительная погрешность вычисления $\delta < 2\%$.

Пример: $x = 0{,}5$. $\tilde{K}_1(0{,}5) = 1{,}6296$; точное значение 1,656441.

VI.2.3. ФУНКЦИИ СТРУВЕ

Функции Струве $H_k(x)$ и $L_k(x)$ определяются из соотношений [13]:

$$H_k(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^k}{\Gamma(k+1/2)} \int_0^{\pi/2} \sin(x \cdot \cos t) \sin^{2k} t \, dt.$$

$$(x>0).$$

$$L_k(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^k}{\Gamma(k+1/2)} \cdot \int_0^{\pi/2} \operatorname{sh}(x \cdot \cos t) \cdot \sin^{2k} t \, dt.$$

Вычисляются приближенные значения функций Струве при целых и полуцелых значениях k ($k = n/2$) с помощью разложения $H_k(x)$ и $L_k(x)$ в ряд [13]:

$$\left.\begin{array}{l}\tilde{H}_k(x)\\ \tilde{L}_k(x)\end{array}\right\} = \frac{2\left(\frac{x}{2}\right)^{k+1}}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(k+3/2)} \left[\sum_{i=0}^{N} \frac{(\mp x^2)^i}{(2i+1)!!} \cdot \prod_{m=0}^{i-1} \frac{1}{2k+2m+1} + \theta_{N+1}\right]$$

$$N = E\{2x+2\},$$

где знак минус относится к $H_k(x)$, а плюс — к $L_k(x)$.

Программа VI.2.3.

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	П0	40	25	2	02	50	ИП0	60
01	1	01	26	×	12	51	+	10
02	+	10	27	⇆	14	52	:	13
03	П2	42	28	1	01	53	ИПС	6С
04	2	02	29	—	11	54	×	12
05	F 1/x	23	30	:	13	55	1	01
06	ПВ	4L	31	F ВХ	0	56	+	10
07	+	10	32	F L2	58	57	F L1	5L
08	⇆	14	33	28	28	58	43	43
09	↑	0E	34	2	02	59	×	12
10	↑	0E	35	×	12	60	С/П	50
11	+	10	36	F 1/x	23			
12	3	03	37	F π	20			
13	+	10	38	F ln	18			
14	П1	41	39	×	12			
15	F ,	25	40	F e^x	16			
16	F x^2	22	41	:	13			
17	4	04	42	1	01			
18	:	13	43	ИПД	6Г			
19	ПД	4Г	44	×	12			
20	F $\sqrt{\ }$	21	45	ИП1	61			
21	F ln	18	46	ИПВ	6L			
22	ИП2	62	47	+	10			
23	×	12	48	:	13			
24	F e^x	16	49	F ВХ	0			

Инструкция

в рег. С $\begin{cases} -1 & \text{для H;} \\ +1 & \text{для L;} \end{cases}$

x ↑ k В/0 С/П

Регистры

0 k
1;2 оперативные
В 0,5
С∓1
Д $(x/2)^2$

Время вычисления $T=(12\cdot x+30)$ с.
Абсолютная погрешность вычисления Δ не превышает

$$\begin{cases} 2\cdot 10^{-5} & \text{при } x<10; \\ 2\cdot 10^{-4} & \text{при } 10<x\leqslant 13. \end{cases}$$

Пример: $x=\pi$; $k=1/2$. $\tilde{H}_{1/2}(\pi)=0{,}90031635$; точное значение 0,90031629; $\tilde{L}_{1/2}(\pi)=4{,}7680534$; точное значение 4,7680539.

VI.3. ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ

VI.3.1. ИНТЕГРАЛЬНАЯ ПОКАЗАТЕЛЬНАЯ ФУНКЦИЯ

Интегральная показательная функция Ei(x) определяется соотношением

$$\mathrm{Ei}(x)=\int_{-\infty}^{x}\frac{e^t}{t}dt.$$

Приближенное значение $\widetilde{\mathrm{Ei}}(x)$ вычисляется с помощью разложения в ряд [11]:

$$\widetilde{\mathrm{Ei}}(x)=C+\ln|x|+\sum_{i=1}^{N}\frac{x^i}{i\cdot i!}+\Theta_{N+1} \qquad N=E\{2|x|+5\},$$

где $C=0{,}5772$ — постоянная Эйлера.

Программа VI.3.1.

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	↑	0E	13	ИП2	62	26	7	07
01	F x^2	22	14	F 1/x	23	27	2	02
02	F $\sqrt{\ }$	21	15	+	10	28	+	10
03	П1	41	16	F L2	58	29	С/П	50
04	2	02	17	10	10			
05	×	12	18	×	12			
06	6	06	19	ИП1	61			
07	+	10	20	F ln	18			
08	П2	42	21	+	10			
09	0	00	22	0	00			
10	F BX	0	23	,	0—			
11	×	12	24	5	05			
12	×	12	25	7	07			

Инструкция

x В/0 С/П

Регистры

1 |x|

2 оперативный

Время вычисления $T=(20+5\cdot|x|)$ с.

Относительная погрешность вычислений δ при $-3\leqslant x\leqslant 15$ не превышает $1\cdot 10^{-5}$.

Пример: $x=3$. $\tilde{E}i(1)=9{,}93379$; точное значение 9,9338382.

VI.3.2. ИНТЕГРАЛЬНЫЙ СИНУС

Интегральный синус Si(x) определяется соотношением [11]:

$$\mathrm{Si}(x)=-\int_x^\infty \frac{\sin t}{t}dt.$$

Приближенное значение $\tilde{\mathrm{S}}\mathrm{i}(x)$ вычисляется с помощью разложения в ряд [13] $(x\geqslant 0)$

$$\tilde{\mathrm{S}}\mathrm{i}(x)=-\frac{\pi}{2}+x\left[\sum_{i=0}^{N}\frac{(-x^2)^i}{(2i+1)\cdot(2i+1)!}+\Theta_{N+1}\right]\cdot \qquad N=E\{x+5\}.$$

Программа VI.3.2.

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	F x^2	22	12	F 1/x	23	24	2	02
01	6	06	13	—	11	25	:	13
02	F BX	0	14	/—/	0L	26	—	11
03	+	10	15	F BX	0	27	С/П	50
04	П2	42	16	×	12			
05	ИП2	62	17	×	12			
06	↑	0E	18	F L2	58			
07	+	10	19	05	05			
08	:	13	20	⇆	14			
09	F BX	0	21	F $\sqrt{\ }$	21			
10	1	01	22	:	13			
11	—	11	23	F π	20			

Инструкция

x В/0 С/П

Регистр

2 оперативный

Время вычисления $T=(22+12\cdot x)$ с.

Абсолютная погрешность вычисления Δ при $0<x\leqslant 10$ не превышает $2\cdot 10^{-5}$.

Пример: $x=1$. $\tilde{Si}(1)=-0{,}6247132$; точное значение $-0{,}6246963$.

VI.3.3. ИНТЕГРАЛЬНЫЙ КОСИНУС

Интегральный косинус Ci(x) определяется соотношением [11]:

$$Ci(x)=-\int_x^\infty \frac{\cos t}{t}dt \qquad (x>0).$$

Приближенное значение Ci(x) вычисляется с помощью разложения в ряд [13]:

$$\tilde{Ci}(x)=C+\ln x+\left[\sum_{i=1}^{N}\frac{(-x^2)^i}{2i\cdot(2i)!}+\theta_{N+1}\right] \qquad N=E\{x+7\},$$

где $C=0{,}5772$ — постоянная Эйлера.

Программа VI.3.3.

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	П1	41	14	F 1/x	23	28	7	07
01	2	02	15	+	10	29	7	07
02	:	13	16	/—/	0L	30	2	02
03	F x^2	22	17	F ВХ	0	31	+	10
04	ИП1	61	18	×	12	32	С/П	50
05	8	08	19	×	12			
06	+	10	20	F L2	58			
07	П2	42	21	08	08			
08	ИП2	62	22	ИП1	61			
09	2	02	23	F ln	18			
10	F 1/x	23	24	+	10			
11	+	10	25	0	00			
12	:	13	26	,	0—			
13	ИП2	62	27	5	05			

Инструкция

x В/0 С/П

Регистры

1 x

2 оперативный

Время вычисления $T=(40+4x)$ с.

Абсолютная погрешность вычисления Δ при $0<x\leqslant 10$ не превышает $2\cdot 10^{-5}$.

Пример: $x=1$. $\tilde{C}(1)=0{,}337388$; точное значение 0,3374039237.

VI.3.4. ИНТЕГРАЛЫ ФРЕНЕЛЯ

Интегралы Френеля S(x) и C(x) определяются соотношениями [11]:

$$S(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\sqrt{x}}\sin t^2 dt,$$

$$C(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^{\sqrt{x}}\cos t^2dt$$

и при $x\leqslant 8$ вычисляются с помощью разложения в ряды [13]:

$$\tilde{S}(x)=\sqrt{\frac{2x}{\pi}}\left[\sum_{i=0}^{N}\frac{(-1)^i x^{2i+1}}{(4i+3)\cdot(2i+1)!}+\Theta_{N+1}\right],$$

$$N=E\{x+8\}.$$

$$\tilde{C}(x)=\sqrt{\frac{2x}{\pi}}\left[\sum_{i=0}^{N}\frac{(-1)^i x^{2i}}{(4i+1)\cdot(2i)!}+\Theta_{N+1}\right].$$

Программа VI.3.4.

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	F x^2	22	17	2	02	34	×	12
01	F ВХ	0	18	—	11	35	F π	20
02	6	06	19	ИПС	6С	36	:	13
03	+	10	20	—	11	37	F √	21
04	П3	43	21	F 1/x	23	38	×	12
05	ИП3	63	22	+	10	39	С/П	50
06	↑	0Е	23	F L3	5—			
07	+	10	24	05	05			
08	:	13	25	⇆	14			
09	ИПС	6С	26	F √	21			
10	F ВХ	0	27	F ln	18			
11	—	11	28	2	02			
12	:	13	29	ИПС	6С			
13	×	12	30	—	11			
14	ИП3	63	31	×	12			
15	4	04	32	F e^x	16			
16	×	12	33	2	02			

Инструкция

в рег. С $\begin{cases}-1 & \text{для } S;\\ +1 & \text{для } C;\end{cases}$

x В/0 С/П

Регистры

3 оперативный

С∓1

Время вычисления $T=(40+6x)$ с.

Относительная погрешность вычислений δ не превышает $1\cdot10^{-5}$.

Пример: $x=2$. $\tilde{S}(2)=0{,}562849$; точное значение 0,5628489; $\tilde{C}(2)=0{,}753302$; точное значение 0,7533023.

VI.3.5. ПОЛНЫЕ ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ ИНТЕГРАЛЫ

Полные эллиптические интегралы 1-го рода — $K(x)$ и 2-го рода — $E(x)$ определяются соотношениями [11]:

$$K(x)=\int\limits_0^{\pi/2}\frac{d\alpha}{\sqrt{1-x^2\sin^2\alpha}};$$

$$E(x)=\int\limits_0^{\pi/2}\sqrt{1-x^2\sin^2\alpha}\,d\alpha\ .$$

Приведены три программы вычисления приближенных значений полных эллиптических интегралов.

VI.3.5.1. Вычисление $\tilde{K}(x)$ и $\tilde{E}(x)$ с помощью разложения в ряды [13]:

$$\tilde{K}(x)=\frac{\pi}{2}\left\{\sum_{i=0}^{N}\left[\frac{(2i-1)!!}{2^i\cdot i!}x^i\right]^2+\Theta_{N+1}\right\},$$

$$\tilde{E}(x)=\frac{\pi}{2}\left\{\sum_{i=0}^{N}\left[\frac{(2i-1)!!}{2^i\cdot i!}x^i\right]^2\frac{1}{2i-1}+\Theta_{N+1}\right\}. \qquad N=8.$$

Программа VI.3.5.1.

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	ПД	4Г	15	ИП2	62	30	:	13
01	9	09	16	—	11	31	ИПС	6С
02	П2	42	17	ИПС	6С	32	×	12
03	F 1/x	23	18	1	01	33	С/П	50
04	ИПД	6Г	19	—	11			
05	2	02	20	×	12			
06	:	13	21	1	01			
07	ИП2	62	22	+	10			
08	F 1/x	23	23	F 1/x	23			
09	2	02	24	+	10			
10	—	11	25	F L2	58			
11	×	12	26	04	04			
12	F x^2	22	27	F π	20			
13	×	12	28	×	12			
14	2	02	29	2	02			

Инструкция

в рег. С $\begin{cases} +1 & \text{для } K; \\ -1 & \text{для } E; \end{cases}$

x В/0 С/П

Регистры

2 оперативный

С∓1

Д x

Время вычисления 1 мин.

Относительные погрешности вычисления:

$$\delta_K<\begin{cases}1{,}1\cdot10^{-3} & \text{при } 0\leqslant x\leqslant 0{,}8,\\ 1{,}3\cdot10^{-2} & \text{при } 0{,}8<x\leqslant 0{,}9;\end{cases}$$

$$\delta_E<\begin{cases}4\cdot10^{-4} & \text{при } 0\leqslant x\leqslant 0{,}9,\\ 2{,}3\cdot10^{-2} & \text{при } 0{,}9<x\leqslant 1.\end{cases}$$

Пример: $x=0{,}8$. $\tilde{K}(0{,}8)=1{,}99307$; точное значение 1,99530278; $\tilde{E}(0{,}8)=1{,}27636$; точное значение 1,27634994.

VI.3.5.2. Приближенное значение $\tilde{E}(x)$ вычисляется по формуле

$$\tilde{E}(x)=\frac{\pi-(\pi-2)x^3}{2}.$$

Программа VI.3.5.2.

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	↑	0E	05	—	11	10	:	13
01	F x^2	22	06	×	12	11	С/П	50
02	×	12	07	F π	20			
03	2	02	08	+	10		**Инструкция**	
04	F π	20	09	2	02	x В/0 С/П		

Время вычисления 4 с.

Относительная погрешность вычисления δ при $0 \leqslant x \leqslant 1$ не превышает 2%.

Пример: $x = 0{,}8$. $\tilde{E}(0{,}8) = 1{,}2785486$; точное значение 1,27634994.

VI.3.5.3. Приближенное значение $\tilde{K}(x)$ вычисляется по формуле

$$\tilde{K}(x) = \frac{\pi - 0{,}93 \cdot \ln(1 - x^{1/4})}{2}.$$

Программа VI.3.5.3.

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	F π	20	09	/—/	0L	18	:	13
01	⇆	14	10	F ln	18	19	С/П	50
02	F x^2	22	11	0	00			
03	F ВХ	0	12	,	0—		**Инструкция**	
04	F √	21	13	9	09	x В/0 С/П		
05	F √	21	14	3	03			
06	×	12	15	×	12			
07	1	01	16	—	11			
08	—	11	17	2	02			

Время вычисления 7 с.

Относительная погрешность вычисления δ не превышает 2%.

Пример: $x = 0{,}8$. $\tilde{K}(0{,}8) = 2{,}003044$; точное значение 1,99530278.

VI.3.6. ФУНКЦИЯ ЛОБАЧЕВСКОГО

Функция Лобачевского $L(x)$ определяется соотношением

$$L(x) = -\int_0^x \ln\cos t\, dt.$$

Приводятся две программы вычисления функции $L(x)$.

VI.3.6.1. Приближенное значение $\tilde{L}(x)$ вычисляется с помощью разложения в ряд [13]:

$$\tilde{L}(x) = x \cdot \ln 2 - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} (-1)^i \frac{\sin 2ix}{i^2} + \Theta_{N+1} \qquad N = 49 \cdot$$

Программа VI.3.6.1.

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	↑	0E	11	×	12	22	С/П	50
01	+	10	12	F sin	1C			
02	5	05	13	ИП2	62			
03	0	00	14	F x^2	22			
04	П2	42	15	:	13			
05	F ВХ	0	16	2	02			
06	2	02	17	:	13			
07	F ln	18	18	+	10			
08	×	12	19	/−/	0L			
09	⇆	14	20	F L2	58			
10	ИП2	62	21	09	09			

Инструкция

Р/Г — в Р;
x В/0 С/П

Регистр

2 оперативный

Время вычисления 3 мин 40 с.
Абсолютная погрешность вычисления Δ не превышает $6\cdot 10^{-4}$.

Пример: $x=\pi/4$. $\tilde{L}(\pi/4)=0{,}0861838$; точное значение 0,0864135.

VI.3.6.2. Приближенное значение $\tilde{L}(x)$ вычисляется по формуле

$$\tilde{L}(x)=\frac{x}{\frac{6}{x^2}-\frac{\pi}{7}e^{x^2/\pi}}\,.$$

Программа VI.3.6.2.

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	↑	0E	08	F e^x	16
01	F x^2	22	09	F π	20
02	6	06	10	×	12
03	⇆	14	11	7	07
04	:	13	12	:	13
05	F ВХ	0	13	−	11
06	F π	20	14	:	13
07	:	13	15	С/П	50

Инструкция

x В/0 С/П

Время вычисления 7 с.
Относительная погрешность вычисления δ не превышает 1,6%.

Пример: $x=\pi/4$. $\tilde{L}(\pi/4)=0{,}085549136$; точное значение 0,0864135.

VI.4. ОРТОГОНАЛЬНЫЕ ПОЛИНОМЫ

VI.4.1. ПОЛИНОМЫ ЛАГЕРРА

Полиномы Лагерра $L_n(x)$ определяются соотношением

$$L_n(x) = \frac{e^x}{n!} \cdot \frac{d^n}{dx^n}(x^n e^{-x})$$

и представляются в виде конечной суммы [11]:

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} C_n^i \frac{(-x)^i}{i!}.$$

Программа VI.4.1.

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	П0	40	09	:	13
01	⇄	14	10	×	12
02	1	01	11	×	12
03	П6	46	12	/—/	0L
04	ИП6	66	13	1	01
05	КИП6	16	14	+	10
06	F ,	25	15	F L0	5Г
07	ИП0	60	16	04	04
08	F x^2	22	17	С/П	50

Инструкция

x ↑ n В/0 С/П

Регистры

0;6 оперативные

Время вычисления T = (4·n) с.

Пример: x=0,5; n=3. $L_3(0,5) = -0,1458334$.

VI.4.2. ПОЛИНОМЫ ЛЕЖАНДРА

Полиномы Лежандра $P_n(x)$ определяются как

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n \cdot n!} \cdot \frac{d^n}{dx^n}(x^2 - 1)^n$$

и вычисляются по рекуррентному соотношению (при $n \geqslant 1$) [11]:

$$k \cdot P_k(x) = (2k-1) \cdot x \cdot P_{k-1}(x) - (k-1) \cdot P_{k-2}(x) \qquad \text{при } P_0(x) \equiv 1.$$

Программа VI.4.2.

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	П3	43	08	×	12	16	ИП2	62
01	⇄	14	09	⇄	14	17	×	12
02	П2	42	10	П4	44	18	×	12
03	Cx	0Г	11	ИП5	65	19	—	11
04	П5	45	12	КИП5	15	20	/—/	0L
05	1	01	13	F ,	25	21	ИП5	65
06	ИП4	64	14	ИП5	65	22	:	13
07	ИП5	65	15	+	10	23	F L3	5—

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
24	06	06	Инструкция			Регистры		
25	С/П	50	x ↑ n В/0 С/П			2 x 3÷5 оперативные		

Время вычисления T=(6·n) с.
Пример: n=3; x=0,5. $P_3(0,5)=-0{,}4375$.

VI.4.3. ПОЛИНОМЫ ЭРМИТА

Полиномы Эрмита $H_n(x)$ определяются формулой

$$H_n(x)=(-1)^n\cdot e^{x^2}\cdot\frac{d^n}{dx^n}(e^{-x^2})$$

и вычисляются по рекуррентному соотношению (при $n\geqslant1$) [11]:

$$H_{k+1}(x)=2x\cdot H_k(x)-2k\cdot H_{k-1}(x) \qquad \text{при} \quad H_0(x)\equiv1.$$

Программа VI.4.3.

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	П0	40	10	⇆	14
01	П2	42	11	ИП1	61
02	⇆	14	12	×	12
03	П1	41	13	+	10
04	1	01	14	2	02
05	⇆	14	15	×	12
06	ИП2	62	16	F L2	58
07	ИП0	60	17	05	05
08	—	11	18	С/П	50
09	×	12			

Инструкция

x ↑ n В/0 С/П

Регистры

0 n
1 x
2 оперативный

Время вычисления T=(4·n) с.
Пример: n=3; x=1. $H_3(1)=-4$

VI.4.4. ФУНКЦИЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ЦИЛИНДРА

Функция параболического цилиндра $\varphi_n(x)$ связана с функцией Эрмита $H_n(x)$ соотношением [13]:

$$\varphi_n(x)=\frac{e^{-\frac{x}{2}}\cdot H_n(x)}{\sqrt{n!\cdot2^n\sqrt{\pi}}}.$$

Программа VI.4.4.

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	П0	40	15	↑	0E	30	×	12
01	П2	42	16	+	10	31	F √	21
02	⇆	14	17	F L2	58	32	:	13
03	П3	43	18	05	05	33	С/П	50
04	1	01	19	F π	20			
05	ИП1	61	20	F √	21			
06	ИП2	62	21	ИП0	60			
07	ИП0	60	22	×	12			
08	—	11	23	2	02			
09	×	12	24	×	12			
10	⇆	14	25	F L0	5Г			
11	П1	41	26	21	21			
12	ИП3	63	27	ИП3	63			
13	×	12	28	F x^2	22			
14	+	10	29	F e^x	16			

Инструкция

x ↑ n В/0 С/П

Регистры

0÷2 оперативные
3 x

Время вычисления $T=(6\cdot n+5)$ с.
Пример: $x=1$; $n=3$. $\varphi_3(1)=-0{,}26302963$.

VI.5. ФУНКЦИИ ЭЙРИ

Функции Эйри $Ai(x)$ и $Bi(x)$ являются парой линейно независимых решений дифференциального уравнения $y''-xy=0$ [11]:

$$Ai(x)=c_1f_1(x)-c_2xf_2(x),$$

$$Bi(x)=\sqrt{3}[c_1f_1(x)+c_2f_2(x)],$$

где

$$f_1(x)=1+\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1\cdot 4\ldots(3i-2)}{(3i)!}x^{3i},$$

$$f_2(x)=1+\sum_{i=1}^{\infty}\frac{2\cdot 5\cdots(3i-1)}{(3i+1)!}x^{3i},$$

$$c_1=3^{-2/3}\Gamma(2/3)=0{,}35502805;$$

$$c_2=3^{-1/3}\Gamma(1/3)=0{,}2588194.$$

Для вычислений используются конечные суммы с числом слагаемых $N=E\{x^{3/2}+5\}$ с добавлением малых поправок.

Программа VI.5.

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	↑	0E	24	3	03	48	+	10
01	F x^2	22	25	F $\sqrt{}$	21	49	F L3	5—
02	F BX	0	26	×	12	50	37	37
03	×	12	27	ПВ	4L	51	КИП5	Г5
04	ПА	4—	28	ИП2	62	52	×	12
05	F x^2	22	29	ИП4	64	53	В/О	52
06	F $\sqrt{}$	21	30	—	11			
07	F $\sqrt{}$	21	31	ПА	4—			
08	5	05	32	С/П	50			
09	П5	45	33	П2	42			
10	+	10	34	F ,	25			
11	ПВ	4L	35	П3	43			
12	1	01	36	Cx	0Г			
13	ПП	53	37	ИП3	63			
14	33	33	38	3	03			
15	×	12	39	×	12			
16	П4	44	40	:	13			
17	ИПВ	6L	41	F BX	0			
18	1	01	42	ИП2	62			
19	/—/	0L	43	+	10			
20	ПП	53	44	:	13			
21	33	33	45	ИПА	6—			
22	П2	42	46	×	12			
23	+	10	47	1	01			

Инструкция

$2{,}588194 \cdot 10^{-1}$ П6
$3{,}5502805 \cdot 10^{-1}$ П7
x В/0 С/П

Результат

A_i — в рег. X,A
B_i — в рег. У,В

Регистры

2÷5 оперативные
6 c_2
7 c_1
А x^3; А
В N; В

Время счета 1÷3 мин, абсолютная погрешность вычислений при $-6{,}5 \leqslant x \leqslant 4{,}6$ не превышает $1 \cdot 10^{-4}$.

Пример
Ai(—3) = —0,37881453; точное значение —0,37881429.
Bi(—3) = —0,19828955; точное значение —0,19828963.

VI.6. ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

VI. 6.1. ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ РЯД

Гипергеометрический ряд F(a,b,c,x) ($|x|<1$; $c \neq 0, -1, -2, \ldots$) является частным случаем решения гипергеометрического дифференциального уравнения

$$x(1-x)y''+[c-(a+b+1)x]y'-aby=0.$$

Функция F(a,b,c,x) представляется приближенно в виде ряда [12]

$$F(a, b, c)=1+\sum_{i=1}^{N}\left[\prod_{j=0}^{i-1}\frac{(a+j)(b+j)}{(1+j)(c+j)}x\right]+\Theta_{N+1} \qquad N=22.$$

Программа VI.6.1.

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	П2	42	14	ИП2	62	28	1	01
01	С/П	50	15	+	10	29	+	10
02	П3	43	16	×	12	30	F LO	5Г
03	С/П	50	17	ИП1	61	31	10	10
04	П4	44	18	ИП3	63	32	С/П	50
05	С/П	50	19	+	10			
06	F π	20	20	×	12			
07	Fe^x	16	21	ИП1	61			
08	ПО	40	22	ИП4	61			
09	F lq	17	23	+	10			
10	ИПО	60	24	:	13			
11	1	01	25	ИПО	60			
12	—	11	26	:	13			
13	П1	41	27	×	12			

Инструкция

В/0 а С/П в С/П с С/П х С/П

Регистры

0;1 оперативные
2 а
3 в
4 с

Время вычисления 2,5 мин.

Относительная погрешность вычисления δ (при $0 \leqslant (a,b) \leqslant c$; $-0{,}1 \leqslant x \leqslant 0{,}8$) не превышает 0,5%.

Примеры: $a=1$; $b=1$; $c=1$; $x=0{,}8$. $F(1;1;1;0{,}8)=4{,}97854$ точное значение 5,0.

VI.6.2. ВЫРОЖДЕННАЯ ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ФУНКЦИЯ

Вырожденная гипергеометрическая функция (a,c,x) представляется приближенно в виде ряда [12]

$$\tilde{\Phi}(a, c, x) = 1 + \sum_{i=1}^{N} \left[\prod_{j=0}^{i-1} \frac{(a+j)}{(1+j)(c+j)} x \right] + \theta_{N+1}; \qquad N=22.$$

Программа VI.6.2.

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	П2	42	12	ИП2	62	24	F LO	5Г
01	С/П	50	13	+	10	25	08	08
02	П3	43	14	×	12	26	С/П	50
03	С/П	50	15	×	12			
04	F π	20	16	ИП1	61			
05	F e^x	16	17	ИП3	63			
06	ПО	40	18	+	10			
07	F lg	17	19	:	13			
08	ИПО	60	20	ИПО	60			
09	1	01	21	:	13			
10	—	11	22	1	01			
11	П1	41	23	+	10			

Инструкция

В/0 а С/П с С/П х С/П

Регистры

0;1 оперативные
2 а
3 с

Время вычисления 2 мин. Относительная погрешность вычисления δ (при $0 \leqslant a \leqslant c$; $-5 \leqslant x \leqslant 10$) не превышает $1 \cdot 10^{-4}$.

Примеры: $a=1$; $c=1$; $x=5$. $\tilde{\Phi}(1;1;5)=148{,}41315$; точное значение 148,41316.

Приложение 1

ОСОБЕННОСТИ ВЫПОЛНЕНИЯ НЕКОТОРЫХ ОПЕРАЦИЙ

Выполнение некоторых операций машинами «Электроника Б3-34» и «Электроника МК-56» требует дополнительных комментариев.

1. Операция F x^y в первых партиях микроЭВМ при определенных значениях аргументов дает неверные результаты. Рекомендуется составлять программы, опираясь на тождества

$$x^y = e^{y \cdot \ln x} \quad \text{или} \quad x^y = 10^{y \cdot \lg x} \, .$$

2. Операция ВП работает по-разному в ручном и автоматическом режимах. Ее следует использовать только в точном соответствии с Руководством по эксплуатации, вслед за командой — цифрой.

3. В ряде программ данной книги использованы команды КП↑ и КИП↑, не упомянутые в Руководстве. По этим командам выполняются операции, аналогичные операциям, выполняемым по командам КП0 и КИП0, только из числа, хранящегося в регистре 0, единица не вычитается. Использование этих команд дает возможность сократить объем программы и количество занятых регистров.

4. Операции F e^x при $x < -231$ и F 10^x при $x \leqslant -100$ вместо машинного нуля дают аварийный останов.

5. При аварийном останове одну команду машина пропускает.

6. Если содержимое регистров 0÷6 меньше единицы, алгоритм выполнения команд КП0÷КП6 и КИП0÷КИП6 отличается от описанного в Руководстве по эксплуатации. В частности, при $1 \cdot 10^{-2} \leqslant x \leqslant 9{,}9999998 \cdot 10^{-2}$ исполнение команд КП0÷КП3 и КИП0÷КИП3 уменьшает, а КП4÷КП6 и КИП4÷КИП6 увеличивает содержимое соответствующего регистра на величину $1 \cdot 10^{-9}$. Эта особенность использована в программах генерации псевдослучайных чисел.

7. Команда В/О, помещенная вне подпрограммы, передает управление по адресу 01 и, таким образом, заменяет две команды: БП 01.

Приложение 2

ЗВУКОВАЯ ИНДИКАЦИЯ ЗАВЕРШЕНИЯ СЧЕТА

В ряде случаев микроЭВМ работает в автоматическом режиме достаточно долго. Пользователь в это время, естественно, занимается другими делами и не всегда вовремя фиксирует момент завершения счета.

Потери времени можно уменьшить, если использовать звуковую индикацию остановки микроЭВМ. Для этого нужен любой радиоприемник, причем не требуется никаких переделок или подключений.

Как известно, работающая ЭВМ создает радиопомехи. В этом легко убедиться, поставив включенный радиоприемник рядом с машиной. Переключатель диапазонов становится в положение «длинные волны». При включении машины приемник начинает издавать характерный шум. Если теперь нажать клавишу С/П, интенсивность и тон шума заметно изменяется. Отрегулировав громкость звучания радиоприемника, вы получите надежный способ своевременно фиксировать завершение счета машины в автоматическом режиме.

ЛИТЕРАТУРА

1. Микрокалькулятор «Электроника БЗ-34». Руководство по эксплуатации
2. Микрокалькулятор «Электроника МК-56». Руководство по эксплуатации.
3. Демидович Б. П., Марон И. А. Основы вычислительной математики. — М.: Наука, 1970.
4. Большев Л. Н., Смирнов Н. В. Таблицы математической статистики. — М.: Наука, 1965.
5. Кендалл М., Стьюарт А. Статистические выводы и связи. — М.: Наука, 1973.
6. Дунин-Барковский И. В., Смирнов Н. В. Теория вероятностей и математическая статистика в технике. — М., ГИТЛ, 1955.
7. Романовский П. И. Ряды Фурье. Теория поля. Аналитические и специальные функции. Преобразование Лапласа. — М.: Наука, 1980.
8. Форсайт Дж., Малькольм М., Моулер К. Машинные методы математических вычислений. — М.: Мир, 1980.
9. Голенко Д. И. Моделирование и статистический анализ псевдослучайных чисел на электронных вычислительных машинах. — М.: Наука, 1965.
10. Бронштейн И. Н., Семендяев К. А. Справочник по математике. — М.: Наука, 1967.
11. Справочник по специальным функциям/Под ред. Абрамовица М. и Стиган И. — М.: Наука, 1979.
12. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике. — М.: Наука, 1977.
13. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. — М.: Наука, 1971.
14. Францевич Л. И. Обработка результатов биологических экспериментов на микро-ЭВМ БЗ-21. — Киев: Наукова думка, 1979.
15. Hewlett—Packard HP—25 Application Programs, 00025—90011 Rev. E 7/76, USA, 1975.
16. Трохименко Я. К., Любич Ф. Д. Инженерные расчеты на микрокалькуляторах.— Киев: Техника, 1980.
17. Цветков А. Н Прикладные программы для микро-ЭВМ «Электроника БЗ-21». — М.: Финансы и статистика, 1982.
18. Александрова Н. И., Александров М. С. Решение алгебраических и трансцендентных уравнений с помощью микро-ЭВМ «Электроника БЗ-21». — М.: препринт № 14(317)ИРЭ АН СССР, 1981.
19. Цветков А. Н., Епанечников В. А. Прикладные программы для микрокалькулятора «Электроника БЗ-34». — М.: препринт № 19 (346) ИРЭ АН СССР, 1982.
20. Цветков А. Н. Сглаживание экспериментальных зависимостей с помощью микрокалькулятора «Электроника БЗ-34». — М.: препринт № 20(347) ИРЭ АН СССР, 1982.
21. Епанечников В. А. Прикладные программы для расчета специальных функций на микрокалькуляторе «Электроника БЗ-34». — М.: препринт № 27(354) ИРЭ АН СССР, 1982.
22. Инженерные расчеты на ЭВМ. Справочное пособие/Под ред. В. А. Троицкого. — Л.: Машиностроение, Л. О., 1979.
23. Епанечников В. А. Уровень значимости и мощность двустороннего критерия Колмогорова при малых объемах выборок. Радиотехника и электроника, т. 13, 1968, вып. 4.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Алексей Николаевич Цветков,
Виктор Александрович Епанечников

Прикладные программы для микроЭВМ
«Электроника Б3-34», «Электроника МК-56»,
«Электроника МК-54»

Редактор *Р. И. Кушкина*
Мл. редактор *Т. М. Кудинова*
Техн. редакторы *К. К. Букалова, Л. Г. Челышева*
Корректоры *О. Г. Шумская, З. С. Качдыба* и *Н. П. Сперанская*
Худож. редактор *О. Н. Поленова*
Обл. художника *А. Я. Коршунова*
ИБ № 1391

Сдано в набор 30.09.83. Подписано в печать 07.02.84. А00922. Формат $60\times90^1/_{16}$. Бум. тип. № 2. Гарнитура «Литературная». Печать высокая. Усл. п. л. 11,0. Усл. кр.-отт. 11,25. Уч.-изд. л. 11,5. Тираж 30 000 экз. Заказ 5941. Цена 60 коп.

Издательство «Финансы и статистика», 101000, Москва, ул. Чернышевского, 7.

Областная типография управления издательств, полиграфии и книжной торговли Ивановского облисполкома, 153628, г. Иваново, ул. Типографская, 6.

60 коп.

Цель данной книги – очертить круг задач, которые целесообразно решать на микроЭВМ и дать читателю конкретные программы их решения в разных областях прикладной математики.