

СПРАВОЧНИК

Я. К. ТРОХИМЕНКО
Ф. Д. ЛЮБИЧ

РАДИОТЕХНИЧЕСКИЕ РАСЧЕТЫ НА ПРОГРАММИРУЕМЫХ МИКРОКАЛЬКУЛЯТОРАХ

**ИЗДАНИЕ ВТОРОЕ
ПЕРЕРАБОТАННОЕ И ДОПОЛНЕННОЕ**



**МОСКВА „РАДИО И СВЯЗЬ“
1988**

ББК 32.973
Т 76
УДК 861.3 : 621.37 (031)

Р е ц е н з е н т: докт. техн. наук, проф. В. П. Дьяконов

Редакция литературы по вычислительной технике

Трохименко Я. К., Любич Ф. Д.
Т 76 Радиотехнические расчеты на программируемых микроКалькуляторах: Справочник. — 2-е изд. перераб. и доп. — М.: Радио и связь, 1988. — 304 с.: ил.

ISBN 5-256-00105-1

Описаны особенности пользования программируемыми микроКалькуляторами (ПМК). Приведены оптимальные программы решения типовых задач: моделирования сигналов, статистической обработки информации, анализа линейных и нелинейных цепей, расчета усилителей, фильтров и устройств с распределенными параметрами. В отличие от первого издания (1983 г.) программы для ПМК «Электроника Б3-21» и его аналогов исключены, для ПМК «Электроника» Б3-34, МК-54, МК-56 переработаны или заменены более совершенными, даны новые программы для ПМК «Электроника» МК-61 и МК-52.

Для инженерно-технических работников; может быть полезна студентам вузов.

Т 2402020000-080
046(01)-88 99-88

ББК 32.973

ISBN 5—256—00105—1

© Издательство «Радио и связь», 1988.

Предисловие

Время, прошедшее после первого издания этого пособия, характеризовалось внедрением персональных микроЭВМ, позволяющих существенно повысить эффективность труда инженеров и научных работников. Однако программируемые микрокалькуляторы остаются незаменимыми как носимые и достаточно мощные вычислительные устройства, отличающиеся простотой эксплуатации и низкой стоимостью машинного времени.

В настоящем издании исключены описания входного языка первого отечественного программируемого микрокалькулятора «Электроника Б3-21» и его аналогов, а также все программы, составленные на этом языке. Остальные программы переработаны и заменены более совершенными с учетом использования как микрокалькуляторов «Электроника Б3-34» и его модификаций, так и более современных программируемых микрокалькуляторов «Электроника МК-61» и «Электроника МК-52». Несколько расширено описание методики решения задач, часто встречающихся в радиотехнических приложениях.

В настоящее время разработаны носимые микроЭВМ «Электроника МК-85» и «Электроника МК-72» с алгоритмическими входными языками высокого уровня, представляющими упрощенные версии языков программирования Бейсик или Паскаль. Текст программ решения прикладных задач на таких языках занимает много места, и поэтому в настоящей книге они не приведены. Читатель при необходимости сможет самостоятельно перевести на алгоритмические языки высокого уровня все приведенные в книге программы, которые можно рассматривать как компактную запись алгоритмов решения радиотехнических задач.

Авторы пользуются случаем искренне поблагодарить многочисленных читателей, замечания и пожелания которых несомненно способствовали улучшению содержания настоящей книги.

Глава 1

Особенности вычислений на программируемых микрокалькуляторах

1.1. Входные языки

Программируемые микрокалькуляторы (ПМК) работают в режимах *программирования* (ввод в память программы решения задачи) и исполнения программы *нажатием клавиш*, как на непрограммируемых микрокалькуляторах, а также *пошагового и программируемого* (автоматического) исполнения программы, предварительно введенной в память. В программируемом режиме целесообразно выполнять даже относительно простые вычисления, так как в этом случае возможность проверки и отладки программы существенно уменьшает вероятность ошибок.

На клавиатуре ПМК обозначены символы вводимых нажатием соответствующих клавиш служебных команд для выбора режима работы и программных команд, обеспечивающих исполнение программы, представляющей алгоритм решения задачи на входном языке. Входные языки ПМК характеризуются алфавитом (множеством символов программных команд), словарным запасом из слов-операторов, имеющих самостоятельный смысл и образованных одной или несколькими программными командами, а также синтаксическими правилами, определяющими допустимые последовательности операторов. Последовательность операторов, приводящая к искомому результату, образует программу решения задачи.

Отечественные массовые ПМК имеют раздельную память данных на регистрах, обеспечивающих бинарное* представление десятичных чисел с восьмиразрядной мантисой и двухразрядным порядком, и программную память на восьмибитовых ячейках для хранения программы автоматических вычислений. В двоичной системе счисления одному биту соответствует двоичный разряд, но в ПМК для представления чисел используется десятично-двоичный бинарный код (называемый также кодом 8421), в котором каждый десятичный разряд независимо от других отображается четырьмя двоичными. Для представления символов в ПМК использована шестнадцатеричная система счисления с цифрами 0, 1, ..., 9, A, B, C, D, E, F, где буквами обозначают натуральные числа от 10 до 15.

Массовые ПМК в зависимости от входного языка и связанной с ним элементной базы можно разбить на три группы. Первая включает первый отечественный ПМК «Электроника Б3-21» и созданные на его элементной базе ПМК «Электроника МК-46» и «Электроника МК-64». Они имеют память данных на 13 регистрах (шесть из них соединены в стек памяти) и программную память

* Бинарным (двойным, двойственным) кодом называют представление информации последовательностью бинарных позиций с символами 0 или 1. Одну такую позицию, соответствующую минимальному количеству информации, называют битом.

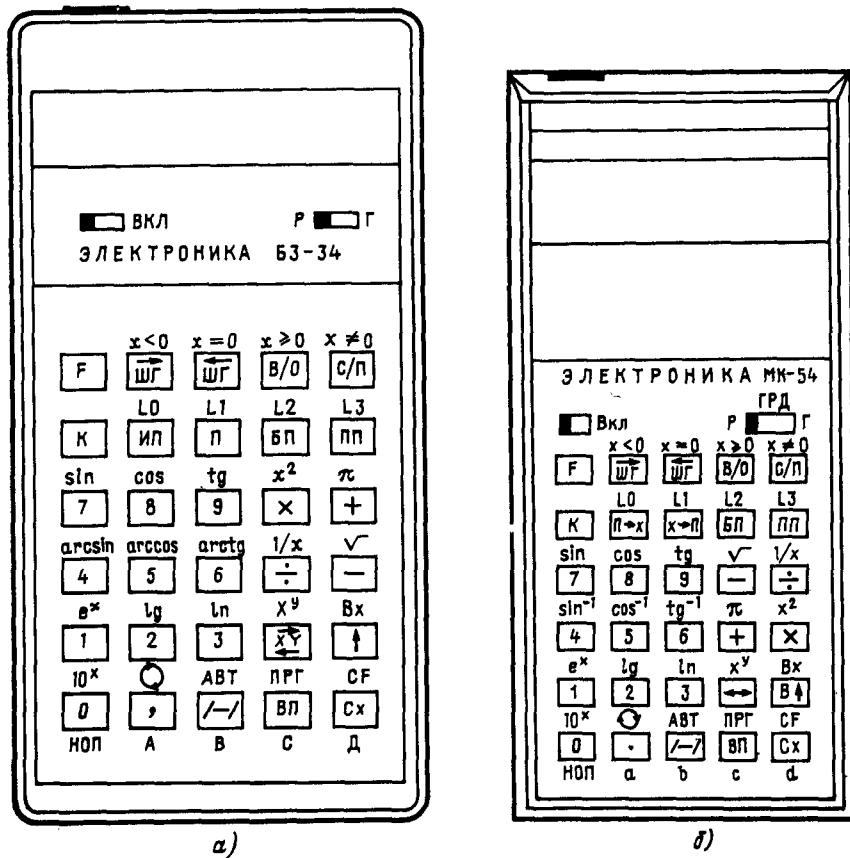


Рис. 1

емкостью 60 ячеек [14]. В настоящее время эти ПМК устарели и далее не рассматриваются.

Вторую группу составляют ПМК «Электроника Б3-34» (рис. 1, а) с автономным питанием от аккумуляторов и его модификации—«Электроника Б3-54» (отличается лишь питанием от сухих элементов), «Электроника МК-54» (рис. 1, б) и «Электроника МК-56». Эти ПМК имеют память данных на 14 регистрах с шестнадцатиричными номерами от 0 до D и программную память на 98 ячеек с адресами от 00 до 97. Входные языки этих ПМК (будем называть их ЯМК34) имеют незначительные отличия: команды, обозначенные на клавиатуре ПМК «Электроника Б3-34» символами \uparrow , $\bar{X}Y$, П, ИП, arcsin, arccos и arctg, на клавиатуре других ПМК обозначены соответственно символами $B\uparrow$, \leftrightarrow , $x\leftrightarrow\bar{P}$, $P\rightarrow x$, \sin^{-1} , \cos^{-1} и \tg^{-1} . В дальнейшем будем использовать наиболее удобные для записи в программах символы \uparrow , \leftrightarrow , П, ИП, \sin^{-1} , \cos^{-1} , \tg^{-1} , а оператор по-

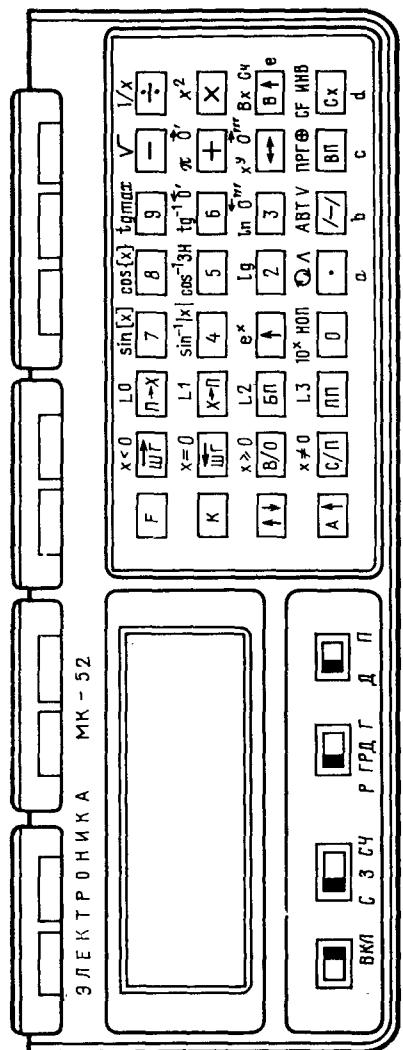


Рис. 2

— числа, над которыми выполняются операции, вводимые операторами набора чисел или вызова из памяти, и функциональные операторы, управляющие выполнением операций над операндами. Различают одноместные, выполняемые над одним операндом (например, \ln или \lg), и двухместные, выполняемые над двумя операндами (например, $+$, $-$, \times , \div , X^y), функциональные операторы. Основной синтаксической особенностью рассматриваемых входных языков является ввод функциональных операторов после операндов, например $x\ln$ или $y\lg +$.

ворота операционного стека по часовой стрелке (на клавиатуре окружность со стрелками) обозначать символом \rightarrow .

Третью группу образуют ПМК «Электроника МК-61» и «Электроника МК-52» (рис. 2) с 15 регистрами памяти данных с номерами от 0 до Е и 105 ячейками программной памяти с шестнадцатерично-десятичными адресами от 00 до A4. Кроме того, ПМК «Электроника МК-52» снабжен встроенным электрически стираемым перепрограммируемым запоминающим устройством (ППЗУ) на 1024 четырехбитовых ячейках и двумя разъемами для присоединения внешних устройств. Входной язык этих ПМК (будем называть его ЯМК52) отличается от ЯМК34 большим словарным запасом. Все программы на ЯМК34, за исключением программ, содержащих «жаргонные» операторы Π^\uparrow , ИП \uparrow , КИП \uparrow , КП \uparrow , выполняются и на этих ПМК.

Полный словарный запас входных языков ЯМК34 и ЯМК52 приведен в табл. 1.1, где указаны назначение операторов, символы нажимаемых клавиш, коды адресов и команд, высвечиваемые на индикаторе в режиме программирования, и символы операторов, используемые при записи программ, где номер регистра D будем обозначать русской буквой Д (см. рис. 1, а). Шестнадцатеричные цифры А, В, С, Д, Е высвечиваются на индикаторе соответственно как —, L, С, Г, Е, а F не высвечивается поэтому код 0F оператора Вх высвечивается как 0).

Во входных языках ЭВМ сказуемым и подлежащим соответствуют *операнды*

Таблица 1.1. Операторы входных языков ЯМК34 и ЯМК52

№ п/п	Оператор	Нажимаемые клавиши		Код	Символ оператора
		ЯМК34	ЯМК52		
1	Набрать цифру 0	0	0	00	0
2	Набрать цифру 1	1	1	01	1
...
10	Набрать цифру 9	9	9	09	9
11	Набрать запятую	,	,	0—	,
12	Изменить знак x	/—/	/—/	0L	/—/
13	Ввести порядок x	ВП	ВП	0C	ВП
14	Стереть x	Cx	Cx	0F	Cx
15	Сместить «вверх» содержимое стека		B↑	0E	↑
16	Вызвать предыдущее значение x	F Bx	F Bx	0	Bx
17	Сложить y и x	+	+	10	+
18	Вычесть x из y	—	—	11	—
19	Умножить y на x	×	×	12	×
20	Разделить y на x	÷	÷	13	÷
21	Поменять местами y и x	XY	↔	14	↔
22	Вычислить 10^x	F 10^x	F 10^x	15	10^x
23	Вычислить e^x	F e^x	F e^x	16	e^x
24	Вычислить $\lg x$	F lg	F lg	17	lg
25	Вычислить $\ln x$	F ln	F ln	18	ln
26	Вычислить $\arcsin x$	F arcsin	F \sin^{-1}	19	\sin^{-1}
27	Вычислить $\arccos x$	F arccos	F \cos^{-1}	1—	\cos^{-1}
28	Вычислить $\operatorname{arctg} x$	F arctg	F tg^{-1}	1L	tg^{-1}
29	Вычислить $\sin x$	F sin	F sin	1C	sin
30	Вычислить $\cos x$	F cos	F cos	1Г	cos
31	Вычислить $\operatorname{tg} x$	F tg	F lg	1E	tg
32	Набрать $\pi=3,1415926$	F π	F π	20	π
33	Вычислить \sqrt{x}	F $\sqrt{-}$	F $\sqrt{-}$	21	$\sqrt{-}$
34	Вычислить x^2	F x^2	F x^2	22	x^2
35	Вычислить $1/x$	F $1/x$	F $1/x$	23	$1/x$
36	Вычислить x^y	F X^Y	F X^Y	24	X^Y
37	Повернуть стек по часовой стрелке	F →	F →	25	→
38	Преобразовать x в градусах, минутах и секундах в градусы	K $0'$	K $0'$	26	МГ
39	Преобразовать x в часах, минутах и секундах в часы	K $0''$	K $0''$	2—	МЧ
40	Преобразовать x в часах в часы, минуты и секунды	K $0'''$	K $0'''$	30	ЧМ
41	Определить абсолютное значение x	K x	K x	31	x
42	Определить знак x	K 3H	K 3H	32	3H
43	Преобразовать x в градусах в градусы и минуты	K $0'$	K $0'$	33	ГМ
44	Определить целую часть x	K [x]	K [x]	34	[x]
45	Определить дробную часть x	K { x }	K { x }	35	(x)
46	Определить большее из y и x	K max	K max	36	МАХ

Продолжение табл. 1.1

№ п/п	Оператор	Нажимаемые клавиши		Код	Символ оператора
		ЯМК34	ЯМК52		
47	Выполнить логическое умножение кодов x и y		K \wedge	37	\wedge
48	Выполнить логическое сложение кодов y и x		K \vee	38	\vee
49	Выполнить логическое сложение кодов y и x над полем модуля 2		K \oplus	39	\oplus
50	Выполнить логическую инверсию кода x		K ИНВ	3—	ИНВ
51	Вызвать квазислучайное число с равномерным распределением в интервале $(0, 1)$		K СЧ	3L	СЧ
52—66	Заслать копию x в регистр N памяти	ΠN	$x \rightarrow \Pi N$	4n	ΠN
67	Прекратить выполнение программы	C/П	C/П	50	C/П
68	Перейти по адресу ab	БП ab	БП ab	51	БП ab
69	Возвратиться из подпрограммы	B/O	B/O	52	B/O
70	Перейти по адресу ab шага подпрограммы	$\Pi\Pi ab$	$\Pi\Pi ab$	53	$\Pi\Pi ab$
71	Стереть шаг программы	K НОП	K НОП	54	НОП
72	При невыполнении условия $x \neq 0$ перейти по адресу ab	$Fx \neq 0 ab$	$Fx \neq 0 ab$	57	$x \neq 0 ab$
73	При невыполнении условия $P2=1$ перейти по адресу ab	F L2 ab	F L2 ab	58	L3 ab
74	При невыполнении условия $x \geq 0$ перейти по адресу ab	$F x \geq 0 ab$	$F x \geq 0 ab$	59	$x \neq 0 ab$
75	При невыполнении условия $P3=1$ перейти по адресу ab	F L3 ab	F L3 ab	5—ab	L2 ab
76	При невыполнении условия $P1=1$ перейти по адресу ab	F L1 ab	F L1 ab	51	L1 ab
77	При невыполнении условия $x < 0$ перейти по адресу ab	$F x < 0 ab$	$F x < 0 ab$	5C ab	$x < 0 ab$
78	При невыполнении условия $P0=1$ перейти по адресу ab	F L0 ab	F L0 ab	5F ab	L0 ab
79	При невыполнении условия $x=0$ перейти по адресу ab	$F x = 0 ab$	$F x = 0 ab$	5E ab	$x = 0 ab$
80—95	Вызвать копию содержимого регистра памяти N	IП N	$\Pi \rightarrow x N$	6n	IПN
96—110	При невыполнении условия $x \neq 0$ перейти по адресу, содержащемуся в регистре памяти N	K $x \neq 0 N$	K $x \neq 0 N$	7n	$Kx \neq 0 N$
111—125	Перейти по адресу, содержащемуся в регистре памяти N	K БП N	K БП N	8n	KБП N
126—140	При выполнении условия $x \geq 0$ перейти по адресу, содержащемуся в регистре памяти N	K $x \geq 0 N$	K $x \geq 0 N$	9n	$Kx \geq 0 N$
141—	Перейти к шагу подпрограммы				

Окончание табл. 1.1.

№ п/п	Оператор	Нажимаемые клавиши		Код	Символ оператора
		ЯМК34	ЯМК52		
155	по адресу, содержащемуся в регистре памяти N	К ПП N	К ПП N	-n	КПП N
156— 170	Занести копию x в регистр памяти, номер которого содержится в регистре памяти N	К П N	К $x \rightarrow P N$	Ln	КП N
171— 185	При невыполнении условия $x < 0$ перейти по адресу, содержащемуся в регистре памяти N	К $x < 0 N$	К $x < 0 N$	Cn	К $x < 0 N$
186— 200	Вызвать копию содержимого регистра памяти, номер которого содержится в регистре памяти N	К ИП N	К $P \leftrightarrow x N$	Gn	КИП N
201— 215	При невыполнении условия $x = 0$ перейти по адресу, содержащемуся в регистре памяти N	К $x = 0 N$	К $x = 0 N$	En	К $x = 0 N$

вместо $\text{In } x$ и $y+x=$ в обычной алгебраической записи. Это существенно упрощает конструкцию ПМК, так как операторы могут быть исполнены непосредственно после ввода. Синтаксическими правилами входного языка определяются и особенности работы регистров операционного стека X, Y, Z, T и X1. Регистр X соединен с индикатором, на котором высвечивается содержимое регистра X в десятичной или шестнадцатеричной системе счисления.

Особенности входных языков ПМК подробно рассмотрены в руководствах по эксплуатации и литературе [6, 11, 14, 15]. Поэтому остановимся лишь на правилах работы операционного стека.

1. При вводе оператора Cx содержимое регистра X стирается при сохранении неизменным содержимого остальных регистров стека.

2. При вводе оператора \uparrow содержимое регистров стека смещается «вверх», причем содержимое регистров X и X1 не изменяется (рис. 3, а).

3. При вводе оператора \leftrightarrow содержимое регистра X засыпается в регистры Y и X1, замещаясь прежним содержимым регистра Y (рис. 3, б).

4. При повороте стека по часовой стрелке оператором \rightarrow содержимое регистра X засыпается в регистры T и X1, а содержимое остальных регистров смещается «вниз» (рис. 3, в).

5. При вводе оператора Вx содержимое всех регистров операционного стека смещается «вверх» (рис. 3, г).

6. При наборе десятичного знака (включая 0) после всех операторов, кроме \uparrow , Cx и операторов набора десятичных знаков, содержимое регистров смещается «вверх», а код набранного знака засыпается в регистр X (рис. 3, д).

7. При наборе десятичного знака после операторов \uparrow , Cx и операторов набора десятичных знаков код вводимого знака засыпается в регистр X, при этом содержимое остальных регистров не изменяется (рис. 3, е).

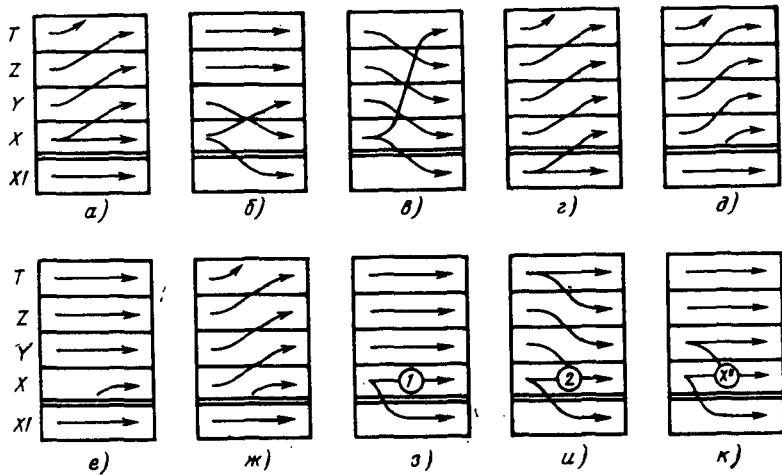


Рис. 3

8. При вызове в регистр X копии содержимого регистра N памяти оператором ИПН она заносится в регистр X , а прежнее содержимое регистров стека смещается «вверх» (рис. 3, ж).

9. При вводе одноместных функциональных операторов результат операции заносится в регистр X , прежнее содержимое которого заносится в регистр $X1$, а содержимое остальных регистров не изменяется (рис. 3, з).

10. При вводе двухместных функциональных операторов (кроме X^y) результат операции над содержимым регистров Y и X заносится в регистр X , прежнее содержимое которого заносится в регистр $X1$, а содержимое остальных регистров смещается «вниз» (рис. 3, и).

11. При вводе оператора X^y неотрицательное содержимое регистра X возводится в степень, равную содержимому регистра Y , прежнее содержимое регистра X засыпается в регистр $X1$, а содержимое остальных регистров не изменяется (рис. 3, к).

Добавим, что при выполнении операторов косвенной адресации содержимое адресного регистра N модифицируется — отбрасывается его дробная часть, а оставшаяся целая часть уменьшается на единицу при $N \leq 3$, увеличивается на единицу при $4 \leq N \leq 6$ и не изменяется при $N > 6$. После этого косвенное обращение к памяти или косвенный переход выполняются в соответствии с модифицированным содержимым адресного регистра. Это относится и к операторам цикла $L Nab$, содержимое адресного регистра ($N \leq 3$) которых уменьшается на единицу после каждого выполнения оператора, передающего управление по адресу N , если содержимое адресного регистра PN больше единицы, или следующему оператору, если оно равно единице.

1.2. Представление алгоритмов программами

Решение любой задачи состоит из нескольких этапов: формализации исходных условий (в общем случае с построением математической модели, связывающей исходные данные с искомым результатом), выбора метода и способа решения задачи, выполнения необходимых действий и проверки приемлемости полученного результата.

Составление математических моделей физических объектов и процессов является предметом естественных наук и теоретической основой подготовки инженеров, причем в практических расчетах обычно используют типовые математические модели или полученные по ним расчетные формулы. Способ решения задачи, выбранный в соответствии с общим подходом (методом) к решению соответствующего класса задач, отображают *алгоритмом* — конечной последовательностью однозначных описаний (шагов или операторов) операций, приводящих к искомому результату и выполнимых исполнителем алгоритма. Если исполнитель не может выполнить описание операции, то его заменяют последовательностью более простых и выполнимых операторов. Несмотря на разнообразие все операторы относятся к одному из двух типов.

Операторы первого типа называют *операторами присваивания* и описывают формулами вида «пусть $I = A$ », означающими, что записанный слева от знака равенства символ идентификатора (имя переменной) в дальнейшем равен числу A , значению переменной A или результату вычислений по выражению A . Например, оператор присваивания $x = x - 1$ означает, что в дальнейшем буквой x обозначается переменная, значения которой на единицу меньше предыдущих значений.

Ко второму типу относятся *операторы условного перехода*, описываемые предложениями «если выполнено (не выполнено) условие Y , то перейти к шагу m_1 , иначе — к шагу m_2 ». Часто такое описание упрощают: «если выполнено (не выполнено) условие Y , то перейти к шагу m_1 ». В этом случае предполагается, что при невыполнении (выполнении) проверяемого условия переходят к следующему по порядку оператору. *Оператор безусловного перехода* «перейти к шагу m » (который является разновидностью оператора присваивания) используют также для замыкания разветвлений, образовавшихся после операторов условного перехода.

Алгоритмы представляют словесно-формульными описаниями, схемами и программами. *Словесно-формульное описание* — перечень операторов (шагов) алгоритма, обозначенных порядковыми номерами или символами, является основным способом представления алгоритма. Более наглядно представление алгоритма *схемой*, на которой операторы присваивания обозначают прямоугольниками, а условные операторы — ромбами с выходами «Да» и «Нет», соответствующими переходам при выполнении и невыполнении проверяемого условия. Направления переходов обозначают стрелками, а начало и конец алгоритма овалами.

В качестве примера рассмотрим алгоритм определения числа $A_n^{m-1} = n(n-1), (n-2), \dots, (n-m)$ размещений из n по $m-1$ элементов. Для большинства людей эта формула и является описанием алгоритма. Однако для человека, не зна-

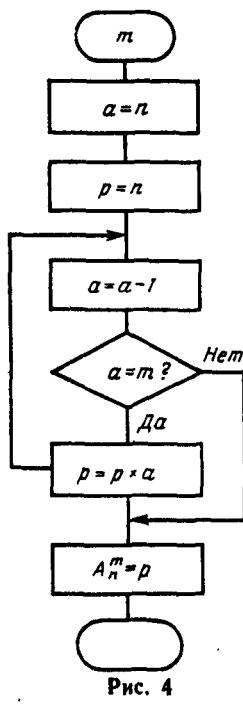


Рис. 4

шего, как ее использовать для вычислений, приходится составлять более подробное описание, например:

1. Запомнить число m .
2. Принять $a=p=n$.
3. Принять $a=a-1$.
4. Если $a=m$, то перейти к шагу 7.
5. Принять $p=p \times a$.
6. Перейти к шагу 3.
7. Принять $A_n^m=p$.
8. Закончить вычисления.

Этот алгоритм, как наглядно видно на его схеме (рис. 4), содержит замкнутую последовательность операций, называемую **циклом**, выход из которого обеспечивается условным оператором при $a=m$. Однократное выполнение операций в цикле называют итерацией.

Алгоритм решения задачи может выполняться не только человеком, но и автоматом (например, цифровой ЭВМ при решении задач преобразования информации), содержащим устройства для распознавания и выполнения операторов алгоритма. В этом случае алгоритм должен быть представлен программой на входном языке (языке программирования) автомата.

Использование ЭВМ широким кругом специалистов стало возможным лишь после разработки **алгоритмических языков** программирования высокого уровня и устройств для перевода программ с входного языка высокого уровня на язык низшего уровня в бинарных кодах, непосредственно управляющих работой ЭВМ (трансляторов).

Отличительная особенность алгоритмических языков — практическое соответствие операторов программ на этих языках операторам алгоритмов. Например, рассмотренный алгоритм вычисления A_n^{m-1} при обозначении исходных чисел буквами n и m на алгоритмическом языке Бейсик (широко используемом для персональных ЭВМ) можно представить программой

```

10 LET M = m
20 LET A = P = n
30 LET A = A - 1
40 IF A = M THEN 70
50 LET P = P * A
60 GO TO 30
70 PRINT 'A (n, m) = 'P
999 END
  
```

Звездочкой в языке Бейсик обозначен знак умножения, а ключевые слова (имена операторов) LET, IF ... THEN ..., GO TO, PRINT, END соответствуют словам ПУСТЬ, ЕСЛИ ... ТО ..., ИДТИ НА, ПЕЧАТАТЬ, КОНЕЦ.

Таблица 1.2. Программа определения числа A_n^{m-1} размещений из n по $m-1$ элементов на входных языках ЯМК34 и ЯМК52

Адрес шага	Нажимаемые клавиши	Код шага	Комментарии
00	П 7	47	Пусть $P7 = m$
01	↔	14	Вызвать число n
02	П 8	48	Пусть $P8 = n$
03	П 9	49	Пусть $P9 = n$
04	ИП 8	69	Пусть $x = P8$
05	1	01	Пусть $x = 1, y = P8$
06	—	11	Пусть $x = P8 - 1$
07	П 8	48	Пусть $P8 = x$
08	ИП 7	67	Пусть $x = P7, y = P8$
09	—	11	Пусть $x = P8 - P7$
10	F $x \neq 0$	57	Если $x = 0$, то
11	1 8	18	Перейти по адресу 18, иначе
12	ИП 8	68	Пусть $x = P8$
13	ИП 9	69	Пусть $x = P9, y = P8$
14	×	12	Пусть $x = y \times x$
15	П 9	49	Пусть $P9 = x$
16	БП	51	Перейти
17	0 4	04	по адресу 04
18	ИП 9	69	Пусть $x = P9$
19	С.П	50	Закончить вычисления

Инструкция. После ввода программы в программную память нажать клавиши F и АВТ, ввести число n в регистр Y, число m в регистр X и нажать клавиши В/О и С/П; после выполнения программы высвечивается искомое число A_n^{m-1} .

Входные языки ПМК также являются входными языками высокого уровня, отличающимися от большинства алгоритмических языков ЭВМ других классов в основном неформальным представлением операторов без ключевых слов, что ускоряет ввод программ. Например, фрагмент программы ИП8 ИП9 × П9 на входном языке ПМК можно рассматривать как оператор присваивания «пусть $P9 = P8 \times P9$ » (где PN — имя переменной, значение которой равно содержимому регистра N) или как последовательность операторов присваивания «пусть $x = P8 \times P9$ », «пусть $P9 = x$ » (где x — текущая переменная, хранящаяся в регистре X) или, наконец, как последовательность операторов «пусть $x = P8$ », «пусть $x = P9, y = P8$ », «пусть $x = y \times x$ », «пусть $P9 = x$ ».

Программы на входных языках ПМК часто записываются в виде таблицы, в каждой строке которой указывается адрес шага программы, символы нажимаемых клавиш, код шага, высвечиваемый в режиме программирования, дополнительные комментарии и иногда содержимое регистров операционного стека. Табличную запись дополняют инструкцией по выполнению программы (табл. 1.2).

Указав адреса начальных шагов фрагментов, соответствующих операторам алгоритма, эту же программу, используя символы операторов, приведенные в табл. 1.1, можно записать в следующем виде:

```

00 П7
01 ↔ П8 П9
04 ИП8 1 — П8 . 117 —
10 x≠0 18
12 ИП8 ИП9 × П9
16 БП 04
18 ИП9
19 С/П

```

Каждая строка записанной таким образом программы точно соответствует строке программы на языке Бейсик и шагу словесно-формульного описания алгоритма. Синтаксические особенности связаны лишь с обратиой записью двухместных операций, а также условным переходом при невыполнении (в языке Бейсик — при выполнении) проверяемого условия. Если дополнить эту программу ключевыми словами, то она с точностью до кодов порядковых номеров операторов и формы записи двухместных операций совпадает с программой на языке Бейсик и описанием алгоритма, что подтверждает высокий уровень входных языков ПМК.

Табличная запись программ, подобная табл. 1.2, удобна для начинающих программистов, но при составлении программ, текст которых многократно изменяют в поисках наилучшего варианта, практически неприменима. Запись программы по строкам, соответствующим операторам алгоритма, часто оказывается полезной при оптимизации программ, но занимает много места и не обеспечивает минимальных затрат времени на запись программы в процессе ее составления.

В дальнейшем будем использовать компактную запись программ по 10 (или меньше в последней строке) шагов в строке. В этом случае не нужно указывать адреса, так как адрес ab любого шага программы легко определить по номерам строки $a=0, 1, \dots$ и столбца $b=0, 1, \dots$, на пересечении которых находится нужный шаг. Операторы программы будем обозначать указанными в табл. 1.1 символами. Символы F или K префиксных клавиш для ввода команд, обозначенных над клавишами, будем опускать (исключение составляют символы операторов косвенной адресации с буквой K). Подобные префиксные команды не указывают в программах на алгоритмических языках ЭВМ других классов и в машинописных текстах, а префиксные команды F или K и соответствуют нажатию клавиши печатающего устройства для знаков верхнего ряда.

Компактную запись программ целесообразно сопровождать стандартизованной записью инструкции по их выполнению. Для указания на размещение исходных данных в регистрах памяти и операционного стека будем использовать формулы вида $a=PN$, означающие, что перед пуском программы число a должно быть введено в регистр N . В частности, запись $a=PY, b=RX$ означает, что числа a и b должны быть занесены в регистры Y и X операционного стека, для чего нужно набрать число a , нажать клавишу $B\uparrow$ и набрать число b . Аналогично запись $a=PT, b=PZ, c=PY, d=PX$ соответствует операциям набора и ввода a $B\uparrow$ b $B\uparrow$ c $B\uparrow$ d . При решении задач с многократным выполнением программы необходимо знать, какие исходные данные сохраняются после очередного выполнения программы. В инструкциях для этих данных формулы $a=PN$ будем

заключать в круглые скобки. Способ пуска программы указывается символами нажимаемых клавиш В/О С/П, БП a b или (если должна нажиматься только одна клавиша) С/П. Если клавишу В/О нажимать не обязательно, будем заключать ее в круглые скобки.

Для указания на размещение результатов выполнения программы будем использовать формулы вида $PN=a$, означающие, что результат a находится в регистре N памяти или операционного стека. В частности, запись $PX=a$, $PY=b$ означает, что результат a находится в регистре X и высвечивается на индикаторе, а для вывода результата b достаточно нажать клавишу \leftrightarrow .

В подобной компактной записи программа из табл. 2 имеет следующий вид.

Программа 1. Определение числа A_n^{m-1} размещений из n по $m-1$ элементов

П7 \leftrightarrow П8 П9 ИП8 1 — П8 ИП7 —
 $x \neq 0$ 18 ИП8 ИП9 \times П9 БП 04 ИП9 С.П

Инструкция. $n=PY$, $m=PX$ В/О С/П $PX=A_n^{m-1}$.

В компактной записи отсутствуют коды шагов программы, высвечиваемые на индикаторе в режиме программирования. При четком нажатии клавиши нет необходимости проверять правильность ввода каждого шага программы, достаточно контролировать адреса 10, 20, 30, ..., высвечиваемые после ввода крайних правых шагов строк. Контроль высвечиваемых кодов необходим в основном при отладке программ [14, 15], но в этом случае можно использовать табл. 1.1 или более компактную таблицу кодов, подобную приведенной в [11]. Пользователь легко запоминает коды наиболее часто используемых операторов, а правильность ввода остальных легко проверить, повторив ввод оператора с помощью команды ШГ. При желании пользователь может дополнить компактную запись программы кодами ее шагов [8], последовательность которых также представляет собой программу.

Программы, предназначенные для хранения в библиотеке пользователя, следует сопровождать указанием времени выполнения (особенно при наличии итерационных циклов), а в необходимых случаях (например, при вычислении специальных функций) — точности результата. Библиотечные программы следует также сопровождать контрольными примерами для проверки правильности ввода и выполнения программы.

1.3. Погрешности результатов вычислений

Численный результат a решения инженерно-технической задачи практически всегда отличается от точного значения a^* соответствующей физической величины на число $\Delta_{\text{исп}} = a - a^*$. Так как точное значение a^* обычно неизвестно, то погрешность результата оценивают предельной абсолютной погрешностью Δa , равной половине ширины интервала $a - \Delta a \leq a^* \leq a + \Delta a$, в котором по имеющейся информации находится точное значение a^* . Точность результата часто оценивают предельной относительной погрешностью $\delta a = \Delta a / |a|$, причем слово «предельный» в приведенных определениях обычно опускают.

Оценки погрешностей, равные сумме модулей слагаемых, называют мажоритарными, а оценки, полученные с учетом случайных изменений их составляю-

щих, — статистическими. Точность результата вычислений часто удобно оценивать числом k верных цифр его десятичного представления. Первые слева k значащих цифр называют *верными*, если абсолютная погрешность не превышает половины единицы содержимого k -го разряда (считая слева). При $k > 2$ верных цифр предельные погрешности результата $\Delta a = 5 \cdot 10^{-n-k}$; $\delta a = 5 \cdot 10^{-k}/M$, где n и M — порядок и мантисса представления результата в показательной форме при $1 \leq M < 10$. Если точное значение мантиссы не известно, его принимают равным минимальному значению $M=1$ и определяют по формулам $\delta M \leq 5 \cdot 10^{-k}$, $k = E[\lg(5/\delta M)]$ (E — символ целой части содержимого квадратных скобок). При известных значениях абсолютной ΔM или относительной δM погрешности мантиссы число верных цифр $k = E[\lg(5/\delta M)] = E[\lg(5M/\Delta M)]$.

Источниками погрешностей результатов решения практических задач являются погрешности математической модели исходных условий задачи и погрешности вычислений. Математические модели физических объектов всегда приближенные. Любое явление есть следствие и причинна бесконечного множества других явлений, причем во временной зависимости $x(t)$ причиной изменения физической величины x является не время, а некоторая другая физическая величина $q(t)$. Связь между воздействием (причиной) и реакцией на это воздействие (следствием) моделируют зависимостями вида

$$x(t) \circ x(q(t)) = wq(t), \quad (1.1)$$

где параметр $w = x(q(t))/q(t)$ является оператором, ставящим числа $x(t)$ в соответствие числом $q(t)$.

Влияние энергии, поступающей в канал связи от источника воздействия $q(t)$, проявляется в изменении свойств (иерархии) этого канала и зависимости $w = w(q)$ от уровня воздействия. Влияние множества других (сторонних) воздействий $z(t)$ моделируют параметрическими зависимостями $w = w(z)$. Так как число воздействий бесконечно, то их влияние проявляется в случайных изменениях параметра $w = w(z)$. Накопление энергии в канале связи приводит к его иерархии — зависимости реакции от воздействия не только в данный, но и в предыдущие моменты времени. В этом случае зависимость (1.1) является решением дифференциального уравнения. Наконец, конечная скорость распространения энергии в каналах связи приводит к необходимости учета распределенности их параметров в пространстве и решении (1.1) дифференциальных уравнений в частных производных. При моделировании сложных физических объектов приходится выделять конечное число n независимых входов (мест приложения воздействий и определения реакций) и описывать свойства объекта системой в общем случае операторных уравнений равновесия:

$$\sum_{j=1}^n w_{ji} x_i = q_i, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (1.2)$$

где w_{ji} — параметр канала связи между i -м и j -м входами. Систему (1.2) можно представить и другими моделями [13]. Однако в силу бесконечности свойств физических объектов их точные модели построить невозможно. Учет даже основных свойств каналов связи обычно приводит к чрезмерно сложным моделям, которые приходится упрощать, пренебрегая распределенностью, случайностью, параметрическостью, иерархичностью или нелинейностью. В последнем случае ли-

нейные дифференциальные уравнения с помощью преобразования Лапласа представляют алгебраическими уравнениями, определяя реакции:

$$x(p) = F(p) q(p), \quad (1.3)$$

где комплексную переменную $p = \sigma + j\omega$ называют комплексной частотой или оператором Лапласа.

Если даже пренебречь погрешностями модели, то результаты инженерных расчетов будут иметь операционные и методические погрешности вычислений. Причина операционных погрешностей — округление результатов операций до числа значащих цифр, определяемого разрядностью операндов. В частности, отличающийся от итога результат вычислений, меньший по модулю граничного значения $1 \cdot 10^{-99}$ диапазона представления чисел в ПМК, попадает в область машинного нуля и на индикаторе высвечивается 0 с предельной погрешностью $\Delta = 1 \cdot 10^{-99}$.

Погрешность округления в ПМК рассматриваемых типов зависит от выполняемой операции. Результаты деления округляются отбрасыванием избыточных цифр мантиссы, а результаты остальных арифметических операций округляются несимметричным дополнением начиная с младшего разряда избыточной части результата, например:

$$10000000 + 0,445 = 10000000 + 0,45 = 10000000 + 0,5 = 10000001;$$

$$10000000 + 0,4444 = 10000000 + 0,44 = 10000000 + 0,4 = 10000000.$$

Таким образом, предельная погрешность округления определяется весом единицы последнего разряда мантиссы, зависящим от порядка числа. Несмотря на малость этой погрешности, она может привести к грубой ошибке результата вычислений. Например, при вычислениях по формуле

$$a = ((10 : 3 - 4)6 + 4)10^8,$$

реализуемых на входном языке ЯМК34 или ЯМК52 программой

$$10 \uparrow 3 \div 4 - 6 \times 4 + 1 \text{ ВП } 8 \times$$

будет получен ошибочный результат $a = 20$. Между тем верное значение результата равно нулю, в чем можно убедиться, приведя к общему знаменателю выражение во внутренних скобках $a = ((10 - 12)2 + 4)10^8 = 0$.

Следует учитывать, что при вычислениях с ограниченной разрядностью нарушаются законы арифметики, справедливые для точных чисел. Так, при вычислениях на микрокалькуляторе $(20000 \cdot 10^{95} - 18000 \cdot 10^{95}) = (\infty)$, но $(20000 - 18000)10^{95} = 2 \cdot 10^{98}$ и, следовательно, дистрибутивный закон нарушается. Аналогично при выполнении сложения $0,4 + 0,4 = 10000000 = (10000001)$, но $0,4 + 10000000 + 0,4 = (10000000)$ и, следовательно, нарушается ассоциативный закон. Наконец, нарушается и коммутативный закон:

$$1 \cdot 10^{48} \times 3 \cdot 10^{62} \times 1,5 \cdot 10^{-64} \times 2 \cdot 10^{-36} = (\infty);$$

$$2 \cdot 10^{-36} \times 1,5 \cdot 10^{-64} \times 3 \cdot 10^{62} \times 1 \cdot 10^{48} = (0);$$

$$2 \cdot 10^{-36} \times 3 \cdot 10^{62} \times 1,5 \cdot 10^{-64} \times 1 \cdot 10^{48} = (9).$$

Для устранения грубых ошибок результатов операций при ограниченной разрядности сложение нескольких чисел начинают с меньших, а множители при умножении нескольких чисел вводят в такой последовательности, чтобы все промежуточные результаты попадали в диапазон представления чисел. В програм-

макс автоматических вычислений не всегда достаточно просто учесть все сочетания операндов, но без этого результат вычислений может оказаться ошибочным.

Таким образом, если даже погрешность округления результата операций не превышает веса единицы последнего разряда операнда, то после 10 операций погрешность округления по мажоритарной оценке перейдет в старший разряд. Например, при вычислениях на ЭВМ с быстродействием 10^6 опер./с вследствие только погрешности округления результат вычислений через 1 с может иметь ошибочные цифры в шести десятичных разрядах. Практически погрешности округления различного знака частично компенсируются, но накопление погрешностей может привести к значительным ошибкам, поэтому необходимо выбирать такие алгоритмы, при которых накопление операционных погрешностей минимально.

Наибольшие операционные погрешности возникают при вычитании близких чисел и особенно при делении на разность близких чисел. Поэтому необходимо в алгоритме вычислений устранить подобные операции. Во многих случаях это удается достичь при умножении и делении разности близких чисел на их сумму с последующим сокращением подобных членов в разности квадратов. Например, при вычислениях на ПМК рассмотренных типов по формуле $a = \sqrt{10^6 + x} - 10^3$ для $x = 100; 10; 1; 0.1; 0.01$ соответственно получим $a = 4.99 \cdot 10^{-2}; 4.99 \times 10^{-3}; 4.99 \cdot 20^{-4}; 0; 0$. Однако после предварительного преобразования этой формулы $a = (\sqrt{10^6 + x} - 10^3) / (\sqrt{10^6 + x} + 10^3) = x / (\sqrt{10^6 + x} + 10^3)$ для тех же значений x получим более точные значения: $a = 4.9998752 \cdot 10^{-2}; 4.9996877 \cdot 10^{-3}; 4.999999 \cdot 10^{-4}; 5 \cdot 10^{-5}; 5 \cdot 10^{-6}$. При вычислениях ПМК по формуле с делением на разность близких чисел $a = x / (\sqrt{10^6 + x} - 10^3)$ для $x = 1000; 100; 10; 1; 0.5; 0.4; 0.2$ соответственно получим $a = 2000, 8003; 2004, 008; 2040, 8163; 2500; 5000; \infty$ — явно ошибочный результат при малых значениях x . Между тем при вычислениях по предварительно преобразованной формуле $a = x / (\sqrt{10^6 + x} + 10^3) / (\sqrt{10^6 + x} - 10^3) = \sqrt{10^6 + x} + 10^3$ для тех же значений x получим значительно более точные результаты: $a = 2000.4998; 2000.0499; 2000.004; 2000.002; 2000.001; 2000$.

Подобная ситуация характерна и при решении часто встречающейся задачи вычисления вещественных корней алгебраического уравнения $x^2 + a_1x + a_0 = 0$. Если коэффициенты a_1 и a_0 соизмеримы по абсолютному значению, то погрешность вычисления корней $x_{1,2} = -a_1/2 \pm \sqrt{(a_1/2)^2 - a_0}$ достаточно мала. Однако при $a_1 \gg a_0$ относительная погрешность меньшего по модулю корня существенно возрастает и при $a_1 > 2 \cdot 10^4 \cdot a_0$ вычисленные по обычной формуле корни $x_1 = -a_1, x_2 = 0$. В этих случаях больший корень следует вычислять по формуле $x_1 = \pm(\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - a_0})$, где $\alpha = -|a_1|$, а знак корня противоположен знаку a_1 . Для вычисления меньшего корня эту формулу следует преобразовать, умножив и разделив ее на множитель $\alpha - \sqrt{\alpha^2 - a_0}$, откуда получим $x_2 = a_0/x_1$. В этом случае, например, при решении уравнения $x^2 + 10\,000x + 8 = 0$ получим $x_1 = -10\,000, x_2 = 0$ по обычной формуле и $x_1 = -10\,000, x_2 = -8 \cdot 10^{-4}$ по преобразованной формуле.

Рассмотренные примеры свидетельствуют, что при составлении программы вычислений, обеспечивающей получение результата с требуемой точностью, сле-

дует еще на этапе выбора метода оценить приближенно возможные погрешности результата и после этого приступать к выбору и оптимизации алгоритма.

Для оценки операционных погрешностей результат вычислений рассматривают как функцию всех операндов и результатов операций и раскладывают эту функцию в многомерный ряд Тейлора. При малых погрешностях аргумента ограничиваются линейными членами ряда, получая для абсолютной и относительной погрешности

$$\Delta a = a - a^* = \sum_{i=1}^k \frac{\partial a}{\partial w_i} \Delta w_i = \sum_{i=1}^k R_i \Delta w_i;$$

$$\delta a = \frac{\Delta a}{a} = \sum_{i=1}^k \frac{w_i}{a} \frac{\partial a}{\partial w_i} \frac{\Delta w_i}{w_i} = \sum_{i=1}^k S_i \delta w_i.$$

Формулы для вычисления коэффициентов R_i и S_i при оценке погрешностей результатов отдельных операций приведены в табл. 1.3. Если допущение о малости погрешностей w_i несправедливо, то используют нелинейные члены разложения в многомерный ряд Тейлора или другие методы оценки погрешностей.

Для проверки точности следует использовать по возможности более простые методы, например, для вычисления специальных функций сравнения с известны-

Таблица 1.3. Коэффициенты пропорциональности R_i и S_i малых приращений операндов погрешностям результатов операций

Результат	R_i	S_i
$y + x$	$R_y = R_x = 1$	$S_y = y/(y+x)$, $S_x = x/(y+x)$
$y - x$	$R_y = 1$, $R_x = -1$	$S_y = y/(y-x)$, $S_x = -x/(y-x)$
$y \times x$	$R_y = x$, $R_x = y$	$S_x = S_y = 1$
y/x	$R_y = 1/x$, $R_x = -y/x^2$	$S_y = 1$, $S_x = -1$
x^y	$R_y = x^y \ln x$, $R_x = yx^{y-1}$	$S_y = y \ln x$, $S_x = y$
$1/x$	$-1/x$	-1
\sqrt{x}	$1/2 \sqrt{x}$	$1/2$
e^x	e^x	x
10^x	$10^x \ln 10$	$x \ln 10$
$\ln x$	$1/x$	$1/\ln x$
$\lg x$	$1/x \ln 10$	$1/\ln 10 \ln x$
$\sin x$	$\cos x$	$x/\operatorname{tg} x$
$\cos x$	$-\sin x$	$-x \operatorname{tg} x$
$\operatorname{tg} x$	$1/\cos^2 x$	$2x/\sin 2x$
$\arcsin x$	$1/\sqrt{1-x^2}$	$x/(\sqrt{1-x^2} \arcsin x)$
$\arccos x$	$x/\sqrt{1-x^2}$	$1/(\sqrt{1-x^2} \arccos x)$
$\operatorname{arctg} x$	$1/(1-x^2)$	$x/((1-x^2) \operatorname{arctg} x)$

ми точными значениями, точность корней нелинейных уравнений $f(x)=0$ и систем уравнений обычно оценивают по иерархиям уравнений — значениям их левых частей при подстановке вычисленных значений корней.

Анализ операционных погрешностей несколько упрощается при использовании графов накопления погрешностей [14, 15].

При использовании прямых (точных) методов вычислений, когда точно известно число операций, операционные погрешности можно оценить заранее. При использовании косвенных методов вычислений (связанных с численным интегрированием, суммированием бесконечных рядов, решением уравнений методами последовательных приближений) точное значение результата теоретически может быть получено лишь после бесконечного числа операций. Так как практически выполнимо лишь конечное их число, то возникает методическая (остаточная) погрешность. Поэтому при использовании косвенных методов алгоритм вычислений следует выбирать так [15], чтобы минимизировать сумму операционной и методической составляющих погрешности результата.

Элементарные функции ПМК вычисляет по микропрограммам, реализующим методы последовательных приближений с методической погрешностью, причем точность результатов для уменьшения затрат времени ограничена восемью верными цифрами при выполнении операторов x^2 , \sqrt{x} и $1/x$, семью при вычислении тригонометрических и логарифмических функций (включая антилогарифмы) и только шестью при выполнении оператора X^y .

Решение уравнений методами последовательных приближений на ПМК реализуют с помощью циклов с выходом из них по достижении требуемой точности согласно условию $|x_i - x_{i-1}| \leq \epsilon$ или $|x_i - x_{i-1}/x_i| \leq \epsilon$, где x_i — текущее значение результата вычислений в цикле; ϵ — малое число. Теоретически максимальная точность достигается при $\epsilon=0$, однако, иногда эта точность не может быть достигнута и программа «зацикливается», так как на каждой итерации возникает операционная погрешность, близкая половине единицы последнего разряда или кратная ей, два очередных значения x_i и x_{i-1} будут периодически отличаться на единицу или более последнего разряда мантиссы и условие $\epsilon=0$ окажется невыполнимым [14].

Не следует добиваться точности выше требуемой по условиям задачи; это приведет лишь к затратам времени.

Следует также учитывать, что большинство физических величин не могут быть измерены с точностью более двух-четырех верных цифр. Поэтому в окончательном результате вычислений следует сохранить лишь такое число верных цифр, которое не более чем на единицу превышает число цифр, с которыми может быть измерена соответствующая физическая величина.

1.4. Оптимизация программ

Основным экономическим критерием целесообразности использования любого вычислительного средства являются затраты на решение задачи, равные при обращении к ЭВМ сумме стоимости машинного времени и рабочего времени пользователя. Стоимость 1 ч машинного времени ПМК около 10 коп. [11], что меньше стоимости рабочего времени пользователя. Поэтому оптимальность программы вычислений на ПМК определяется минимальными затратами времени

пользователя на решение задачи, равными сумме затрат на составление программы T_c , ввод программы T_k , выполнение программы T_m и вспомогательные операции ввода исходных данных и регистрации результатов вычислений T_d .

Составляющая T_c минимальна при использовании программы, взятой из справочников (или для ПМК «Электроника МК-52» из внешнего блока расширения памяти) и максимальна при составлении программы пользователем. При оптимизации программы необходимо учитывать ее назначение. Если программа не предназначена для повторного использования, то оптимальным будет первый ее вариант, обеспечивающий требуемую точность решения, так как в этом случае составляющая T_c минимальна. Если же программа предназначена для библиотеки пользователя, то $T_c = T_{c0}/k$, где T_{c0} — начальные затраты времени на составление программы; k — число выполнений (повторений) программы. Очевидно, что даже большие затраты времени T_{c0} окупаются при большом числе k .

Составляющая T_k минимальна при перезаписи программы из ППЗУ (или внешних запоминающих устройств ПМК «Электроника МК-52»). В других случаях она пропорциональна (при отсутствии ошибок) длине программы. Если в программе содержится n одиаковых фрагментов по m шагов, то можно использовать обращение к подпрограмме, заменив каждый такой фрагмент оператором ПП ab и вынося повторяющийся фрагмент в подпрограмму, оканчивающуюся оператором В/О. Следовательно, обращение к подпрограмме целесообразно при $mn > n + 2m + 1$, когда длина программы уменьшается. Если программа содержит последовательность из n одиаковых фрагментов, то ее длину можно уменьшить, используя оператор цикла $LN ab$ или условный оператор для охвата повторяющегося фрагмента циклом с выходом из него после n итераций. Однако при вводе операторов перехода время выполнения программы увеличивается, и ее оптимальность определяется суммой составляющих T_k и T_m .

Требование минимизации длины программы оказывается первоочередным, когда длина составленной программы превышает емкость программной памяти, так как решение задачи с помощью пакета программ (нескольких последовательно выполняемых программ) связано со значительными затратами времени. Иногда пакет программ используют при большом числе исходных данных, не вмещающихся в числовой памяти, но следует избегать этого, нормируя исходные данные и расчетные выражения [11, 14, 15]. Если же приходится использовать пакет программ, то следует продумать размещение данных и методику выполнения программ пакета, чтобы минимизировать затраты времени.

Если требуется небольшое число повторений программы решения задачи точными методами, то для уменьшения T_k целесообразно минимизировать длину программы. Если же программу приходится повторять для решения задачи многократно или в программе реализованы методы последовательных приближений, следует минимизировать составляющую T_m , устранив условные переходы, даже если при этом увеличивается длина программы.

Затраты времени T_d обычно небольшие, но резко возрастают при необходимости записи промежуточных результатов в вычислительный бланк, выполняющий функции внешней памяти. В этих случаях необходимо тщательно выбрать форму записи данных и методику пользования программой.

Таким образом, оптимальность программы зависит от рационального выбора путей решения задачи на всех его этапах. В частности, выбор алгоритма и

его программного представления определяется особенностями задачи и входного языка ПМК, а также назначением программы [11, 14, 15].

Например, программа определения числа A_n^m размещений из n по m элементов [18]

П0 ↔ ПЗ 1 ИПЗ × КИПЗ → Л0 04

С/П

с инструкцией: $n=PY$, $m=PX$ В/О С/П $PX=A_n^m (t \approx 2(m+1))$ с значительно короче программы 1, но в тех случаях, когда вычисление A_n^m является частью решения более сложной задачи и регистры с номерами $N \leq 3$ заняты, оптимальным может оказаться фрагмент, подобный программе 1.

Зависимость критериев оптимальности от назначения программы наглядно проявляется при вычислениях степенных многочленов

$$A(p) = \sum_{i=0}^n a_i p^i = a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0 \quad (1.4)$$

с вещественными коэффициентами a_i и в общем случае комплексным аргументом $p=\sigma+j\omega$. Такие многочлены, как правило, вычисляют по формуле

$$A(p) = ((a_n p + a_{n-1}) p + \dots + a_2) p + a_1 \quad (1.5)$$

обеспечивающей минимальное число операций и, следовательно, минимальную операционную погрешность результата. При вещественном аргументе $p=\sigma$ формулу (1.5) обычно представляют рекуррентным соотношением

$$A_k = A_{k-1} \sigma + a_{n-k}, \quad k=1, 2, \dots, n, \quad (1.6)$$

где $A_0=a_n$, $A_n=A(\sigma)$. В некоторых случаях формулу (1.5) удобнее реализовать рекуррентным выражением

$$A_k = (A_{k-1} + a_{n-k}) \sigma, \quad k=1, 2, \dots, n, \quad (1.7)$$

где $A_0=0$, $A(\sigma)=A_n+a_0$.

Выбор расчетного выражения и его программной реализации зависит от особенностей задачи. Если требуется однократное вычисление многочлена при заданном значении σ , то проще всего найти искомый результат нажатием клавиш, например, по программе

$$\sigma \uparrow \uparrow a_n \times a_{n-1} + \times \dots a_1 + \times a_0 +$$

соответствующей расчетному выражению (1.7). Однако в этом случае вероятность ошибок быстро возрастает при увеличении степени n многочлена и многозначных коэффициентах. Поэтому лучше использовать простейшую программу автоматических вычислений.

Программа 2. Вычисление многочлена $A(p)$ произвольной степени n вещественного аргумента $p=\sigma$ с минимальным временем ввода программы

ИП8 ИП9 × + П8 С/П БП 00

Инструкция. $0=P8$, $\sigma=P9$, $a_n=PX$ В/О С/П $a_{n-1}=PX$ С/П $a_{n-2}=PX$ С/П ... $a_1=PX$ С/П $a_0=PX$ С/П $PX=A(\sigma)$.

Пример. $A(2)=p^4+3p^3+2p^2+p+0,5=50,5$.

Недостаток этой программы при вычислениях многочленов большой степени — возможность ошибки в номере вводимого коэффициента. Поэтому для га-

ких многочленов целесообразно усложнить программу, обеспечив вычисление номера вводимого коэффициента.

Программа 3. Вычисление многочлена $A(p)$ произвольной степени n вещественного аргумента $p=\sigma$

П8 → П9 ↔ П3 КИПЗ ИПЗ С/П ИП8 ИП9
 $\times +$ П8 ИП3 $x=0 \quad 05$ ИП8 С/П

Инструкция. $n = PZ$, $\sigma = PY$, $a_n = RX$ В/О С/П $RX = n-1$, $a_{n-1} = RX$ С/П $RX = n-2 \dots a_1 = RX$ С/П $RX = 0$, $a_0 = RX$ С/П $RX = A(\sigma)$.

Если при относительно небольшой степени n многочлена для решения задачи требуется многократное вычисление при различных значениях аргумента, то целесообразно предварительно занести коэффициенты многочлена в регистры памяти и перед каждым пуском программы вводить лишь значение аргумента в регистр X. Однако и в этом случае оптимальность программы определяется суммой затрат времени, поэтому при относительно небольшом числе повторений программы для уменьшения затрат времени на ее ввод в программную память целесообразно минимизировать число шагов.

Программа 4. Вычисление многочлена $A(p)$ степени $n \leq 12$ ($n \leq 13$ для ЯМК52) вещественного аргумента $p=\sigma$ с минимальным временем ввода программы

↑ КИПД ИПД 1 — ПД → × КИПД +
 ИПД $x=0 \quad 03 \rightarrow C/P$

Инструкция. $(a_0 = P0, a_1 = P1, \dots, a_n = P_n)$ $n = PД$, $\sigma = RX$ В/О С/П $RX = A(\sigma)$; $t \approx 3n$ с. Для ЯМК52 обращения в программе к регистру Д заменить обращениями к регистру Е.

Пример. $A(2) = 12p^{12} + 11p^{11} + 10p^{10} + 9p^9 + 8p^8 + 7p^7 + 6p^6 + 5p^5 + 4p^4 + 3p^3 + 2p^2 + p + 0,5 = 90114,5$ ($t \approx 35$ с).

Максимальную степень многочлена можно увеличить на единицу, проинормировав многочлен — разделив его коэффициенты на коэффициент a_n .

Программа 5. Вычисление нормированного ($a_n = 1$) многочлена $A(p)$ степени $n \leq 13$ ($n \leq 14$ для ЯМК52) вещественного аргумента $p=\sigma$

↑ КИПД + ИПД 1 — ПД → × КИПД
 $+ \text{ИПД } x=0 \quad 04 \rightarrow C/P$

Инструкция. $(a_0 = P0, a_1 = P1, \dots, a_{n-1} = P(n-1))$ $n-1 = PД$, $\sigma = RX$ В/О С/П $RX = A(\sigma)$; $t \approx 3(n-1)$ с. Для ЯМК52 заменить обращения в программе к регистру Д обращениями к регистру Е.

Пример. $A(2) = p^{13} + 12p^{12} + 11p^{11} + 10p^{10} + 9p^9 + 8p^8 + 7p^7 + 6p^6 + 5p^5 + 4p^4 + 3p^3 + 2p^2 + p + 0,5 = 98306,5$ ($t \approx 35$ с).

Максимальную степень многочлена можно повысить при $a_0 = a_n = 1$, используя освободившиеся регистры для хранения других коэффициентов. Для этого коэффициенты исходного многочлена делят на коэффициент a_0 , получая многочлен с нормированным коэффициентом $a'_0 = 1$, а затем переходят к нормированной частоте $p' = p \sqrt[n]{a_n/a_0}$, получая $a'_n = 1$. Однако можно избежать

нормирования частоты, если нормировать исходный многочлен делением всех его коэффициентов на коэффициент a_n , вычислить многочлен $A_0(p) = A(p) - a_0$ с нулевым коэффициентом при нулевой степени p , а затем дополнительно вычислить $A(p) = A_0(p) + a_0$.

Программа 6. Вычисление нормированного ($a_n = 1$) многочлена $A_0(p) = A(p) - a_0$ степени $n \leq 14$ ($n \leq 16$ для ЯМК52) вещественного аргумента $p = \sigma$

$\begin{matrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow & \rightarrow & \text{КИПО} & + & \times & \text{ИПО} & 1 & - \\ x=0 & 03 & + & \text{С/П} & & & & & & & \end{matrix}$

Инструкция. ($a_1 = P1, a_2 = P2, \dots, a_{n-1} = P(n-1)$) $n = P0, \sigma = RX B/O C/P RX = A_0(\sigma); t \approx 3(n-2)c$.

Пример. Для многочлена $A(2) = p^{14} + 13p^{13} + 12p^{12} + 11p^{11} + 10p^{10} + 9p^9 + 8p^8 + 7p^7 + 6p^6 + 5p^5 + 4p^4 + 3p^3 + 2p^2 + p + 0,5$, вычислив многочлен $A_0(2) = 212994$, находим $A(2) = A_0(2) + 0,5 = 212994,5$.

Максимальную степень многочлена можно увеличить, если вводить коэффициенты при старших степенях p перед каждым пуском программы.

Программа 7. Вычисление многочлена $A(p)$ степени $n \leq 13$ ($n \leq 14$ для ЯМК52) вещественного аргумента $p = \sigma$

$\begin{matrix} \times & \text{Вх} & \leftrightarrow & \text{КИПД} & + & \text{ИПД} & 1 & - & \text{ПД} & \rightarrow \\ \times & \text{КИПД} & + & \text{ИПД} & x=0 & 06 & + & \text{С/П} & & & \end{matrix}$

Инструкция. ($a_0 = P0, a_1 = P1, \dots, a_{n-1} = P(n-1)$) $n-1 = PД, a_n = PY, \sigma = RX B/O C/P RX = A(\sigma); t \approx 3(n-1)c$. Для ЯМК52 заменить в программе обращения к регистру Д соответствующими обращениями к регистру Е.

Пример. $A(2) = 13p^{13} + 12p^{12} + 11p^{11} + 10p^{10} + 8p^9 + 7p^8 + 6p^7 + 5p^6 + 4p^5 + 3p^4 + 2p^3 + 2p^2 + p + 0,5 = 196610,5$ ($t \approx 34$ с).

Программа 8. Вычисление многочлена $A(p)$ степени $n \leq 14$ ($n \leq 15$ для ЯМК52) вещественного аргумента $p = \sigma$

$\begin{matrix} \uparrow & \rightarrow & \times & + & \times & \text{КИПД} & + & \text{ИПД} & 1 & - \\ \text{ПД} & \rightarrow & \times & \text{КИПД} & + & \text{ИПД} & x=0 & 08 & \rightarrow & \text{С/П} & \end{matrix}$

Инструкция. ($a_0 = P0, a_1 = P1, \dots, a_{n-2} = P(n-2)$) $n-2 = PД, a_{n-1} = PZ, a_n = PY, \sigma = RX B/O C/P RX = A(\sigma); t \approx 3(n-2)c$. Для ЯМК52 при $n \leq 15$ заменить в программе обращения к регистру Д соответствующими обращениями к регистру Е.

Пример. $A(2) = 14p^{14} + 13p^{13} + 12p^{12} + 11p^{11} + 10p^{10} + 9p^9 + 8p^8 + 7p^7 + 6p^6 + 5p^5 + 4p^4 + 3p^3 + 2p^2 + p + 0,5 = 425986,5$ ($t \approx 33$ с).

Программа 9. Вычисление нормированного ($a_n = 1$) многочлена $A(p)$ степени $n \leq 15$ ($n \leq 16$ для ЯМК52) вещественного аргумента $p = \sigma$

$\begin{matrix} \uparrow & \rightarrow & + & \text{Вх} & \times & + & \times & \text{КИПД} & + & \text{ИПД} \\ 1 & - & \text{ПД} & \rightarrow & \times & \text{КИПД} & + & \text{ИПД} & x=0 & 10 \\ \rightarrow & \text{С/П} & & & & & & & & & \end{matrix}$

Инструкция. ($a_0 = P0, a_1 = P1, \dots, a_{n-3} = P(n-3)$) $n-3 = PД, a_{n-2} = PZ, a_{n-1} = PY, \sigma = RX B/O C/P RX = A(\sigma); t \approx 3(n-2)$ с. Для ЯМК52 при $n \leq 16$ заменить в программе обращения к регистру Д соответствующими обращениями к регистру Е.

Пример. $A(2) = p^{16} + 14p^{14} + 13p^{13} + 12p^{12} + 11p^{11} + 10p^{10} + 9p^9 + 8p^8 + 7p^7 + 6p^6 + 5p^5 + 4p^4 + 3p^3 + 2p^2 + p + 0,5 = 458754,5$ ($t \approx 35$ с).

Программа 10. Вычисление нормированного ($a_n = a_0 = 1$) многочлена $A_0(p)$ степени $n \leq 16$ ($n \leq 17$ для ЯМК52) вещественного аргумента $p=\sigma$

$\begin{array}{ccccccccc} \uparrow & \rightarrow & + & \text{Bx} & \times & + & \times & \uparrow & \rightarrow \text{КИП0} \\ + & \times & \text{ИП0} & 1 & - & \text{x=0} & 08 & \rightarrow 1 & + \\ \text{C/P} & & & & & & & & \end{array}$

Инструкция. ($a_1 = P1, a_2 = P2, \dots, a_{n-3} = P(n-3)$) $n = 2 = P0, a_{n-2} = PZ, a_{n-1} = PY, \sigma = PX$ В/О С/П РХ = $A_0(\sigma)$; $t \approx 3(n-2)$ с.

Пример. $A(2) = p^{16} + 15p^{15} + 14p^{14} + 13p^{13} + 12p^{12} + 11p^{11} + 10p^{10} + 9p^9 + 8p^8 + 7p^7 + 6p^6 + 5p^5 + 4p^4 + 3p^3 + 2p^2 + p + 1 = 983043$ ($t \approx 33$ с).

Если по условиям задачи требуется многократное вычисление многочлена при различных значениях аргумента, то время счета оказывается значительно большим времени ввода программы, и для минимизации суммы затрат времени целесообразно отказаться от косвенных переходов, что дополнителью освободит регистр памяти для записи коэффициентов.

Программа 11. Вычисление многочлена $A(p)$ степени $n \leq 13$ ($n \leq 14$ для ЯМК52) вещественного аргумента $p=\sigma$ с минимальным временем счета

$\begin{array}{ccccccccc} \uparrow & \uparrow & \text{ИПД} & \times & \text{ИПС} & + & \times & \text{ИПВ} & + & \times \\ \text{ИПА} & + & \times & \text{ИП9} & + & \times & \text{ИП8} & + & \times & \text{ИП7} \\ + & \times & \text{ИП6} & + & \times & \text{ИП5} & + & \times & \text{ИП4} & + \\ \times & \text{ИП3} & + & \times & \text{ИП2} & + & \times & \text{ИП1} & + & \times \\ \text{ИП0} & + & \text{С/П} & \text{БП} & 00 & & & & & \end{array}$

Инструкция. Для ЯМК52 при $n=14$ заменить в программе операторы ИПД \times фрагментом ИПЕ \times ИПД + \times ; в остальных случаях для уменьшения времени счета устраниТЬ обращения к регистрам памяти, предизначеным для хранения отсутствующих при $n < 13$ коэффициентов, и следующие за ними операторы + \times (в противном случае ввести нули вместо отсутствующих коэффициентов);

($a_0 = P0, a_1 = P1, \dots, a_n = Pn$) $\sigma = PX$ (В/О) С/П РХ = $A(\sigma)$; $t \approx (2 + n)$ с.

Пример. $A(2) = 13p^{13} + 12p^{12} + 11p^{11} + 10p^{10} + 9p^9 + 8p^8 + 7p^7 + 6p^6 + 5p^5 + 4p^4 + 3p^3 + 2p^2 + p + 0,5 = 196610,5$ ($t \approx 14$ с).

Программа 12. Вычисление нормированного ($a_n = 1$) многочлена $A(p)$ степени $n \leq 14$ ($n \leq 15$ для ЯМК52) вещественного аргумента $p=\sigma$

$\begin{array}{ccccccccc} \uparrow & \uparrow & \text{ИПД} & + & \times & \text{ИПС} & + & \times & \text{ИПВ} & + \\ \times & \text{ИПА} & + & \times & \text{ИП9} & + & \times & \text{ИП8} & + & \times \\ \text{ИП7} & + & \times & \text{ИП6} & + & \times & \text{ИП5} & + & \times & \text{ИП4} \\ + & \times & \text{ИП3} & + & \times & \text{ИП2} & + & \times & \text{ИП1} & + \\ \times & \text{ИП0} & + & \text{С/П} & \text{БП} & 00 & & & & \end{array}$

Инструкция. Для ЯМК52 при $n=15$ заменить в программе ИПД фрагментом ИПЕ + \times ИПД; при $n < 14$ для уменьшения времени счета устраниТЬ фрагменты вида ИПН + \times , соответствующие старшим отсутствующим коэффициентам (в противном случае в регистры N занести нули); ($a^0 = P0, a_1 = P1, \dots, a_{n-1} = P(n-1)$) $\sigma = PX$ (В/О) С/П РХ = $A(\sigma)$; $t \approx (2 + n)$ с.

Пример. $A(2) = p^{14} + 13p^{13} + 12p^{12} + 11p^{11} + 12p^{10} + 11p^{11} + 10p^{10} + 9p^9 + 8p^8 + 7p^7 + 6p^6 + 5p^5 + 4p^4 + 3p^3 + 2p^2 + p + 0,5 = 212994,5$ ($t \approx 13$ с).

Предельную степень вычисляемых многочленов можно увеличить еще на одну или две единицы с помощью приемов, используемых в программах 6—10. Достаточно общий способ вычисления многочленов высокой степени заключается в их представлении формулой

$$A(p) = (\dots + a_{n+1}p + a_n)p^n + a_{n-1}p^{n-1} + \dots + a_1p + a_0 \quad (1.8)$$

с вычислением выражения в скобках, принимаемого в качестве коэффициента a_n при вычислении оставшейся части многочлена.

1.5. Операции над комплексными числами и векторами

В радиотехнических приложениях приходится выполнять операции над комплексными числами и векторами. Словарный запас входных языков большинства ПМК не содержит специальных операторов для выполнения таких операций, и их приходится реализовать программами автоматических вычислений.

Комплексное число A представляют в алгебраической, тригонометрической или показательной форме

$$A = \operatorname{Re} A + \operatorname{Im} A = |A|e^{j\varphi_A} = e^{\ln|A| + j\varphi_A},$$

где $\operatorname{Re} A$ и $\operatorname{Im} A$ — вещественная и мнимая составляющие комплексного числа; $|A|$ и $\varphi_A = \arg A$ — его модуль и аргумент.

Для преобразования комплексного числа из тригонометрической формы в алгебраическую используют простые выражения

$$\operatorname{Re} A = |A| \cos \varphi_A, \quad \operatorname{Im} A = |A| \sin \varphi_A,$$

легко реализуемые на ПМК.

Преобразование алгебраической формы комплексного числа в тригонометрическую несколько сложнее: ПМК вычисляют обратные тригонометрические функции в интервале $(-\pi/2, \pi/2)$, а аргумент φ_A комплексного числа определен в интервале $(0, 2\pi)$ или $(-\pi, \pi)$. Поэтому если модуль комплексного числа вычислен по формуле

$$|A| = \sqrt{\operatorname{Re}^2 A + \operatorname{Im}^2 A},$$

то для вычисления φ_A могут быть использованы различные выражения, среди которых наиболее удобно отношение

$$\varphi_A = \begin{cases} \arccos(\operatorname{Re} A / |A|) & \text{при } \operatorname{Im} A > 0, \\ -\arccos(\operatorname{Re} A / |A|) & \text{при } \operatorname{Im} A < 0. \end{cases}$$

В соответствии с этим отношением для определения аргумента в интервалах $(0, 2\pi)$ и $(-\pi, \pi)$ приходится использовать различные программы.

Программа 13. Преобразование комплексного числа A из алгебраической формы в тригонометрическую с определением φ_A в интервале $[0, 360^\circ]$, $[0, 400$ град $]$ или $[0, 2\pi$ рад $]$

```

П7  x2  ↔  П6  x2  +  √  П8  ИП6 ↔
    ÷ cos-1 П9 ИП7 x<0 23 1 sin-1 4  ×
ИП9 — П9 ИП9 ИП8 C/P

```

Инструкция. Установить переключатель Р—ГРД—Г в нужное положение; ReA=PY, ImA=PX B/O C/P RX=P8=|A|, PY=P9=φ_A ($t \approx 8$ с).

Пример. Для $A = \sqrt{-3} + j1$ получим $|A| = 1,9999999 \approx 2$, $\varphi_A = 0,5239869$ рад = 33,333328 град = 29,999995 ≈ 30°; для $A = \sqrt{-3} - j1$ получим $|A| \approx 2$, $\varphi_A = 5,7595865$ рад = 366,66667 град = 330,00001 ≈ 330°.

Программа 14. Преобразование комплексного числа A из алгебраической формы в тригонометрическую с определением φ_A в интервале $] -180^\circ, 180^\circ]$, $] -200^\circ, 200^\circ$ град] или $] -\pi, \pi$ рад]

$$\begin{array}{l} \text{П7 } x^2 \leftrightarrow \text{П6 } x^2 + \sqrt{\text{П8 }} \text{ ИП6 } \leftrightarrow \\ \div \cos^{-1} \text{ ИП7 } x < 0 \text{ 18 } \rightarrow /-/ \uparrow \rightarrow \text{ИП8 } \\ \text{С/П} \end{array}$$

Инструкция. Установить переключатель Р—ГРД—Г в нужное положение; ReA=PY, ImA=PX B/O C/P RX=P8=|A|, RX=φ_A ($t \approx 8$ с).

Пример. Для $A = \sqrt{3} \pm j1$ получим $|A| \approx 2$, $\varphi_A = \pm 0,52359869$ рад = $\pm 33,333328$ град = $\pm 29,999995 \pm 30^\circ$.

Арифметические операции над комплексными числами в алгебраической форме определяются выражениями

$$C = A \pm B = \operatorname{Re}A \pm \operatorname{Re}B + j(\operatorname{Im}A \pm \operatorname{Im}B);$$

$$C = A \times B = \operatorname{Re}A \operatorname{Re}B - \operatorname{Im}A \operatorname{Im}B + j(\operatorname{Re}A \operatorname{Im}B + \operatorname{Re}B \operatorname{Im}A);$$

$$C = A/B = (\operatorname{Re}A \operatorname{Re}B + \operatorname{Im}A \operatorname{Im}B)/(\operatorname{Re}^2B + \operatorname{Im}^2B) + j(\operatorname{Re}B \operatorname{Im}A -$$

$$-\operatorname{Re}A \operatorname{Im}B)/(\operatorname{Re}^2B + \operatorname{Im}^2B).$$

Для вычисления обратной величины $C = 1/B$ достаточно в последней формуле принять $A = 1 + j0$.

Сложение и вычитание комплексных чисел несложно выполнить нажатием клавиш, а последовательность умножений и делений можно автоматизировать с помощью одной программы.

Программа 15. Вычисление произведений $C = A \times B$ и частных $C = A/B$ от делений комплексных чисел в алгебраической форме

$$\begin{array}{l} \text{П5 } \leftrightarrow \text{П4 } 1 \text{ П9 ИП4 ИП7 } \times \text{ ИП5 ИП8 } \\ \times \text{ — ИП9 } \div \text{ ИП4 ИП8 } \times \text{ ИП5 ИП7 } \times \\ \text{— ИП9 } \div \text{ П8 } \leftrightarrow \text{ П7 С/П } /-/ \text{ П5 } x^2 \\ \leftrightarrow \text{ П4 } x^3 \text{ + БП } 04 \end{array}$$

Инструкция. ReA=P7, ImA=P8, ReB=PY, ImB=PX (если A является результатом предыдущей операции, то достаточно ввести B); для умножения B/O C/P, для деления БП 2 7 С/P; результат RX=P7=ReC, PY=P8=ImC ($t \approx 12$ с).

Пример. $(-1 + j2)(3 - j4) = 5 + j2$; $(5 + j2)/(3 + j4) = 0,92 + j1,04$; $1/(1 + j2)(3 + j4) = (1 + j0)/(1 + j2)(3 + j4) = (0,2 + j0,4)/(3 + j4) = 0,088 + j0,08$.

Ряд операций упрощается при переходе к тригонометрической форме представления комплексных чисел:

$$A \times B = |A| \times |B| e^{j(\varphi_A + \varphi_B)}; \quad A/B = (|A|/|B|) e^{j(\varphi_A - \varphi_B)}; \quad 1/B = (1/|B|) e^{-j\varphi_B};$$

$$A^n = |A|^n e^{jn\varphi_A}, \quad A^{1/n} = |A|^{1/n} e^{j\varphi_A/n}.$$

Если операнды заданы в алгебраической форме, то представление результата в тригонометрической форме будет зависеть от выбора интервала аргумента (фазового угла) результата, причем в радиотехнических расчетах часто принимают интервал $-180 \leq \phi \leq 180^\circ$.

Программа 16. Вычисление $C = A \times B$ и $C = A/B$ с представлением результата в тригонометрической форме с аргументом в интервале $[-180; 180^\circ]$ и операндов в алгебраической форме

```

ПП 26 ПА ↔ ПС С/П ПП 26 ПВ ↔
ПД С/П ИПС ИПД + ИПА ИПВ × С/П ИПС
ИПД - ИПА ИПВ ÷ С/П П7 x2 ↔ П6
x2 + √ П8 ИП6 ↔ ÷ cos-1 ИП7 x < 0
44 → /-/ ↑ → ИП8 В/О

```

Иструкция. Установить переключатель Р — ГРД — Г в нужное положение: ReA = PY, ImA = RX B/O С/П (RX = PC = φ_A, PY = PA = |A|) ReB = = PY, ImB = RX С/П (RX = РД = φ_B, PY = PB = |B|); для умножения С/П RX = |C|, PY = φ_C; для деления БП 19 С/П RX = |C|, PY = φ_C ($t \approx 18$ с).

Пример. $(-1 + j2) = 2,2360679e^{j116,56505^\circ}$; $(3 - j4) = 5e^{-j53,130^\circ}$; $(-1 + j2)(3 - j4) = 11,18034e^{j63,43495^\circ}$; $1 = 1e^{j0}$; $(1 + j2) = 2,2360679e^{j63,434947^\circ}$; $1/(1 + j2) = 0,44721361e^{-j63,434947^\circ}$.

Для решения задач с комплексными числами часто удобна универсальная программа, обеспечивающая выполнение как арифметических операций над комплексными числами, так и их преобразований из алгебраической в тригонометрическую форму или наоборот. При составлении подобной программы целесообразно использовать возможность ввода операторов обращения к памяти нажатием клавиш +, -, ×, ÷, ↔ соответственно вместо номеров 0, 1, 2, 3, 4 регистров числовой памяти.

Программа 17. Вычисление результатов С цепных операций над комплексными числами А и В

```

ПС КБПС ИП5 /-/ П5 ИП6 /-/ П6 ИП6 ИП9
+ П9 ИП5 ИП8 + П8 С/П БП 00 ИП6
/-/ ↑ x2 ИП5 x2 + ÷ П6 ИП5 Вх
÷ П5 ИП8 ИП5 × ИП9 ИП6 × - ИП8
ИП6 × ИП9 ИП5 × + П9 ↔ БП 15
ИП6 cos ИП5 × П5 Вх ИП6 sin × П6
БП 16 ИП8 ↑ x2 ИП9 x2 + √ П7
÷ cos-1 ИП9 x < 0 78 → /-/ ↑ → ИП7
БП 16 ПА 2 П1 8 П0 1 9 П3
3 2 П2 6 2 П4 БП 16

```

Иструкция. Установить переключатель Р — ГРД — Г в нужное положение: 50 = RX БП 8 2 С/П (RX = 62), ReA = P8, ImA = P9, ReB = P5, ImB = P6, нажать клавиши: для сложения ИП + С/П, для вычитания ИП - С/П, для умножения ИП × С/П, для деления ИП ÷ С/П (результат RX = P8 = ReC, PY = P9 = ImC; для выполнения следующей операции достаточно ввести очередной operand в регистры 5 и 6), для преобразования результата С или операида А (ReA = P8, ImA = P9) в тригонометрическую форму нажать клавиши

ИП \leftrightarrow С/П ($PX=P7=|A|$, $PY=\varphi_A$ в интервале $]-\pi, \pi]$ в радианах, градах или градусах в зависимости от положения переключателя Р—ГРД—Г), для преобразования очередного операнда B из тригонометрической ($|B|=P5$, $\varphi_B=P6$) в алгебраическую форму нажать клавиши ИП А С/П ($PX=P6=ImB$, $PY=P5=ReB$); для временного хранения operandов можно использовать регистры памяти А, В, С, Д (Е); для ЯМК52 можно заменить оператор ПА по адресу 82 фрагментом 5 0 ПА (в этом случае не нужно вводить 50= PX перед первым пуском программы).

Примеры. $(1+j2)+(2+j1)=3+j3$ ($t \approx 4$ с); $(3+j3)-(1-j1)=2+j4$ ($t \approx 5$ с); $(2+j4)(1+j1)=-2+j6$ ($t \approx 7$ с); $(-2+j6)/(2e^{j60^\circ})=(-2+j6)/(1+j1,7320509)$ ($t \approx 8$ с); $(-2+j6)/(1+j1,7320509)=2,0980761+j2,3660253$ ($t \approx 10$ с); $A=2,0980761+j2,3660253+3,1622775e^{j48,434947}$ ($t \approx 8$ с), нажатием клавиш вычисляем $\sqrt{A}=1,7782793e^{j24,217473}$ и пересыпаем модуль и аргумент \sqrt{A} в регистры 5 и 6 соответственно; по программе вычисляем $\sqrt{A}=1,621782+j0,72945224$. Для проверки засыпаем составляющие \sqrt{A} также в регистры 8 и 9 и по программе, выполнив операцию умножения, находим $(\sqrt{A})^2=(1,621782+j0,72945224)^2=2,0980762+j2,366025$.

В радиотехнических задачах приходится также вычислять трансцендентные элементарные функции комплексной переменной $p=\sigma+j\omega$ [4].

Программа 18. Вычисление функций $\sin p$, $\cos p$, $\operatorname{sh} p$, $\operatorname{ch} p$ и e^p комплексного аргумента $p=\sigma+j\omega$

П9	КБП9	ПП	59	ИПА	cos	\times	ИПА	sin	ПП
67	\times	С/П	БП	00	ПП	59	$/-$	ИПА	sin
\times	ИПА	cos	НОП	БП	09	ИПА	ПП	68	ИПВ
sin	\times	ИПА	ПП	60	ИПВ	cos	БП	11	ИПА
ПП	60	ИПВ	sin	\times	ИПА	ПП	68	БП	35
ИПА	e^x	ИПВ	sin	\times	ИПА	e^x	БП	35	ИПВ
e^x	\uparrow	1/x	—	2	\div	В/О	ИПВ	e^x	\uparrow
1/x	+	БП	64	2	П7	1	5	П8	2
6	П4	3	9	П5	5	0	П1	БП	12

Инструкция. Установить переключатель Р—ГРД—Г в положение Р; БП 7 4 С/П ($PX=50$), $\sigma=PA$, $\omega=PB$; для вычисления нужной функции $f(p)$ нажимать клавиши ИП Н С/П, где Н — клавиша, над которой обозначен символ нужной функции (для sh и ch — соответственно \sin^{-1} и \cos^{-1}); $PX=Ref(p)$, $PY=Im(p)$; $t \approx 16$ с.

Примеры. $\sin(2+j1)=1,4031193-j0,48905631$; $\cos(2+j1)=-0,64214817-j1,0686075$; $\operatorname{sh}(2+j1)=1,9596009+j3,1657785$; $\operatorname{ch}(2+j1)=2,0327229+j3,0518878$; $\exp(2+j1)=3,9923239+j6,2176763$.

Операции над комплексными числами можно использовать для сложения, вычитания и скалярного умножения векторов из плоскости. Однако для векторного умножения и других операций над векторами в трехмерном пространстве целесообразно составлять программы с заданием векторов координатами $[x_i, y_i]$.

$z_i]$ их концов. В этом случае при составлении программы следует реализовать умножение вектора на скаляр

$$x'_i = \alpha x_i, \quad y'_i = \alpha y_i, \quad z'_i = \alpha z_i,$$

сложение или вычитание векторов с координатами алгебраической суммы

$$x = x_1 \pm x_2, \quad y = y_1 \pm y_2, \quad z = z_1 \pm z_2,$$

векторного произведения двух векторов с координатами результата

$$x = y_1 z_2 - z_1 y_2, \quad y = z_1 x_2 - x_1 z_2, \quad z = x_1 y_2 - y_1 x_2$$

и скалярного произведения двух векторов с результатом, равным

$$a = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2.$$

Все операции, обеспечивающие получение этих результатов, целесообразно реализовать одной составной программой, что обеспечит возможность выполнения цепных операций над векторами.

Программа 19. Цепные операции сложения, вычитания, умножения на скаляр, векторного и скалярного произведения векторов, заданных координатами концов $[x_i, y_i, z_i]$

```

ПД КБПД ИП4 /—/ П4 ИП5 /—/ П5 ИП6 /—/
П6 ИП6 ИП9 + П9 ИП5 ИП8 + П8 ИП4
ИП7 + П7 С/П БП 00 ИП4 ИП7 × ИП5
ИП8 × + ИП6 ИП9 ИП5 × + ПА БП 23
ИП8 ИП6 × ИП9 ИП5 × — П3 ИП9 ИП4
    × ИП7 ИП6 × — ИП5 ИП7 × ИП4 ИП8
    × — П9 → П8 ИП3 БП 22 ИПА ИП9
    × П9 ИПА ИП8 × П8 ИПА ИП7 × БП
22 1 1 П0 2 П1 6 8 П2 2
6 ПС 4 0 ПВ БП 23

```

Инструкция. БП 8 1 С/П ($RX=40$), ввести координаты концов векторов $x_1=P7, y_1=P8, z_1=P9, x_2=P4, y_2=P5, z_2=P6$; для сложения нажать клавиши ИП + С/П, для вычитания — клавиши ИП — С/П, для умножения на вещественное число, занесенное в регистр А, — клавиши ИП × С/П, для векторного и скалярного умножения — соответственно клавиши ИП В С/П и ИП С С/П; результат скалярного умножения хранится в регистре А, результаты остальных операций $PX=P7=x, PY=P8=y, P9=z$; координаты очередного вектора ввести в регистры 4, 5, 6 и нажать клавиши для выполнения нужной операции.

Примеры. Для векторов $A=[1, 2, 3], B=[3, 2, 1], C=[1, 2, 1], D=[2, 1, 3], E=[3, 1, -2]$ получим

$$A+B=[4, 4, 4]; (A+B)/2=(A+B)0,5=[2, 2, 2]; (A+B)/2-C=[1, 0, 1];$$

$$((A+B)/2-C) \times D=[-1, -1, 1]; (((A+B)/2-C) \times D) E=-6.$$

Длину вектора определяют по формуле $d=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, а по выражениям $\alpha=\arccos(x/d)$, $\beta=\arccos(y/d)$, $\gamma=\arccos(z/d)$ вычисляют углы между вектором, заданным координатами конца $[x, y, z]$ и координатными осями.

Программа 20. Вычисление длины d вектора, заданного координатами конца $[x, y, z]$ и углов α, β и γ между вектором и координатными осями

$$\begin{array}{ccccccc} \text{П9} & x^2 & \leftrightarrow & \text{П8} & x^2 & + & \leftrightarrow \\ & \checkmark & \text{П3 ИП9 ИП3} & \div & \cos^{-1} & \text{П6 ИП8 ИП3} & \div \\ & & & & & & \\ & & & & & & \cos^{-1} \text{ П5 ИП7 ИП3} \div \cos^{-1} \text{ П4 ИП3 С/П} \end{array}$$

Инструкция. Установить переключатель Р—ГРД—Г в нужное положение $x=PZ$, $y=PY$, $z=PX$ В/О С/П $PX=P3=d$, $PY=P4=\alpha$, $P5=\beta$, $P6=\gamma$ ($P7=x$, $P8=y$, $P9=z$); $t \approx 12$ с.

Пример. Для вектора $A = -1, -2, 3$ получим $d = 3,7416573$; $\alpha = 105,50136^\circ$; $\beta = 122,31154^\circ$; $\gamma = 36, 699224^\circ$. Программы, связанные с операциями над векторами, приведены в [17].

1.6. Логические операции над бинарными переменными

При анализе и синтезе ряда импульсных (цифровых) радиотехнических устройств используют логические операции над бинарными переменными x , принимающими только значения 0 или 1. Результатом такой операции является бинарная функция, также принимающая только значения 0 или 1. Два из четырех возможных результатов одноместных операций $F(x)=0$ и $F(x)=1$ являются константами, результат $F(x)=x$ равен переменной, а результат, называемый отрицанием $F(x)=\bar{x}$, соответствует операции, называемой инверсией или логическим НЕ: $0=\bar{1}$ и $\bar{1}=0$.

Результатами двухместных операций над переменными x и y являются 16 функций [11]. Формально все они могут быть выражены через небольшое число операций (например, только через единственную операцию Шефера), но в этом случае логические уравнения связи и соответствующие им аппаратурные решения оказываются довольно громоздкими. Поэтому обычно используют двухместные операторы:

\wedge — логического умножения (логическое И), \vee — логического сложения (логическое ИЛИ) и иногда \oplus — логического сложения над полем модуля 2 (исключающее ИЛИ)*.

Логическое умножение выполняется согласно правилам

$$0 \wedge 0 = 0; 0 \wedge 1 = 0; 1 \wedge 0 = 0; 1 \wedge 1 = 1,$$

логическое сложение

$$0 \vee 0 = 0, 0 \vee 1 = 1, 1 \vee 0 = 1, 1 \vee 1 = 1,$$

а сложение над полем модуля 2

$$0 \oplus 0 = 0, 0 \oplus 1 = 1, 1 \oplus 0 = 1, 1 \oplus 1 = 0.$$

Логические операции могут выполняться и над бинарными сообщениями, содержащими любое число бит с символами 0 или 1, причем эти операции выполняются независимо над содержимым каждого бита или при двухместных операциях содержимым битов одного порядка.

Бинарными сообщениями с различными последовательностями символов 0 и 1 можно отобразить любую информацию, но способ ее представления зависит от выбранного кода. Иногда бинарные коды называют двоичными, но такое название может вызвать недоразумения, так как числа в бинарных кодах пред-

* Операциями над полем модуля 2 называют операции, результат которых над одинаковыми объектами равен нулю (пустому множеству)

ставляют различными способами, лишь один из них основан на двоичной системе счисления.

Напомним, что в позиционной m -ичной системе счисления с основанием m и цифрами $0, 1, \dots, m-1$, отображающими первые члены натурального ряда чисел, действительные целые или в общем случае дробные числа представляют последовательностями $a_{-s} \dots a_0 a_1 \dots a_{r-1}$ позиций, называемых m -ичными разрядами. При этом значащая цифра в разряде a_0 отображает соответствующее натуральное число, но в каждом соседнем левом разряде эта же цифра отображает натуральное число, в m раз большее, чем та же цифра в соседнем правом разряде. Поэтому m -ичное представление числа связано с его десятичным представлением d_{10} формулой

$$d_{10} = a_r m^r + \dots + a_1 m^1 + a_0 m^0 + a_{-1} m^{-1} + \dots + a_{-s} m^{-s}, \quad (1.9)$$

где a_i — содержимое i -го m -ичного разряда, причем диапазон представления десятичных чисел $n=r+s+1$ разрядами в m -ичной системе счисления определяется неравенством

$$m^{-n} \leq d_{10} \leq m^n - 1, \quad (1.10)$$

справедливым для естественной (с фиксированной запятой) формы представления десятичного числа.

Программа 21. Поразрядное преобразование m -ичных представлений действительных чисел в десятичные представления

ИП9 П6 × П7 ИП8 ИП6 × П6 ИП7 С/П
ИП6 × ИП7 + БП 03

Инструкция. ($m=P8, m^{-s}=P9$, для целых чисел $m^0=1=P9$) $a_{-s} = =PX$ В/О С/П $a_{1-s} = PX$ С/П ... $a_{r-1} = PX$ С/П $a_r = RX$ С/П ($t \approx 4$ с) $RX=d_{10}$ (вместо цифр, соответствующих m -ичным цифрам, большим 10, вводить соответствующие натуральные числа).

Примеры. Для $d_2=110110110$ ($2=P8, 1=P9$) $d_{10}=438$; для $d_{16}=AB9, F7(16=P8, 16^{-2}=1/256=P9)$ $d_{10}=2745,9648$.

При представлении чисел в двоичной системе счисления каждая бинарная позиция соответствует i -му двоичному разряду, содержимое 1 которого отображает число 2^i , и в соответствии с формулой (1.9) десятичное представление числа равно сумме степеней 2^i содержимого двоичных разрядов.

Кроме двоичной системы счисления применяют и другие бинарные коды чисел. В частности, в ПМК используется десятично-двоичный код 8421, при котором каждый разряд десятичного представления числа отображается четырьмя двоичными разрядами (тетрадой). Такой код обеспечивает независимое представление каждого десятичного знака, что удобно при наборе чисел на индикаторе ПМК. Часто используют представления чисел с основанием $m=2^k$. Каждая цифра такого представления отображается содержимым k двоичных разрядов, например восьмеричного с цифрами 0, 1, ..., 7 — тремя двоичными разрядами, а шестнадцатеричного с цифрами 0, 1, ..., A, B, C, D, E, F — четырьмя.

Программа 22. Преобразование представлений действительных чисел d_p в d_q при основаниях $p \leq 10, q = 10$ или $p = 19, q \leq 10$ и числах $n=r+s+1 \leq 8$ разрядов

П5 Сх П6 ИП7 ИП5 ÷ ИП9 ↓ 1 +
 П0 КИП0 → → ИП0 ИП9 × — × ИП6
 + П6 → ИП8 × ИП0 x=0 05 ИП6 С/П

Инструкция. ($p-s=P7$, $p=P8$, $q=P9$) $d_p=RX$ (дробные числа вводить без запятой) В/О С/П $RX=d_q$; $t \approx 5n_{\max}$ с.

Программа 23/52. Преобразование представленных действительных чисел d_p в d_q при основаниях $p \leq 10$, $q = 10$ или $p = 10$, $q \leq 10$ и числе разрядов $n=r+s+1 \leq 8$

П5 Сх П6 ИП7 ИП5 ↑ ИП9 ÷ [x] П4
 ИП9 × — × ИП6 + П6 → ИП8 ×
 ИП4 x=0 05 ИП6 С/П

Инструкция. ($p-s=P7$, $p=P8$, $q=P9$) $d_p=RX$ (дробные числа вводить без запятой) В/О С/П $RX=d_q$; $t \approx 6n_{\max}$ с.

Пример. Для $d_p=1011$ ($1=P7$, $2=P8$, $10=P9$) получим $d_q=11$, для $d_p=11$ ($1=P7$, $10=P8$, $3=P9$) получим $d_q=102$, для $d_q=1011$, $1011 (2^{-4}=1/16=P7, 2=P8, 10=P9)$ получим $d_q=11,6875$.

Во входном языке ЯМК52 предусмотрены операторы для выполнения логических операций над бинарными operandами: ИНВ — инверсия, \wedge — умножения, \vee — сложения и \oplus — сложения над полем модуля 2. Для увеличения длины operandов они вводятся десятичным кодом с любой отличающейся от нуля цифрой, отделенной запятой от семи или менее десятичных цифр, отображаемых в ПМК десятично-двоичным кодом 8421 (например, коду 8,3456789 соответствует 28-битовое бинарное сообщение 001101000101011001110001001). Результаты логических операций выводятся на индикатор в кодированном виде с шестнадцатеричными цифрами после запятой, причем цифры A , B , C , D , E высвечиваются соответственно как —, L, C, Г, Е, а цифра F не высвечивается. Так, высвечиваемый результат 8, — LCF 0 (соответствующий коду 8, ABCDEF0) отображает бинарный результат операции 10101011001101111011110000.

Если бинарный operand не может быть представлен в коде 8421 (тетрада отображает натуральное число больше 9), то его приходится отображать двумя слагаемыми, представимыми в десятично-двоичном коде, и выполнять последующие операции над кодом логической суммы этих слагаемых. При цепных операциях результаты операций в шестнадцатеричных кодах также приходится преобразовывать (хотя логические операции можно продолжать над этими кодами) в обычные представления. Эти неудобства можно устранить, используя восьмеричный код [11] — разбивая бинарные operandы на тройки битов и отображая каждую тройку восьмеричными цифрами 0, 1, ..., 7. В этом случае максимальная длина operandов уменьшается до 21 бита, но при выполнении двухместных операций ввод и вывод результатов выполняется в восьмеричном коде. Для инверсии operandана его восьмеричный код следует предварительно логически сложить с кодом 8,88, ..., где число восьмерок после запятой равно числу цифр после запятой в восьмеричном коде operandана. Например, для operandов $b_1=011101010$ и $b_2=010111101$ получим $8,352 \wedge 8,275 = 8,250$ (или 010101000), $8,352 \vee 8,275 = 8,377$ (или 01111111); $8,352 \oplus 8,275 = 8,127$ (или 001010111), $8,127 \vee 8,888 = 8,9$ AF = 8,650 (или 110101000).

При использовании ПМК с входным языком ЯМК34 логические операции несложно реализовать программно над восьмивитовыми частями более длинных operandов. Инверсия реализуется арифметическим вычитанием $\bar{b} = 1 - b$, а для двухместных операций следует найти арифметическую сумму operandов $S = b_1 + b_2$ и, заменив в ней единицы нулями, число B . Тогда $b_1 \wedge b_2 = B/2$, $b_1 \vee b_2 = S - B/2$, $b_1 \oplus b_2 = S - B$.

Программа 24. Цепные операции инверсии, логического умножения, сложения и сложения над полем модуля 2, сдвига на один бит влево восьмивитовых бинарных operandов y и x

P9	1	1	1	1	1	1	1	1	↔
—	C/P	P9	1	BP	7	—	$x < 0$	20	IП9
1	0	\times	C/P	PП	39	2	\div	C/P	PП
39	2	\div	—	C/P	PП	39	—	C/P	+
P9	8	P0	Cx	P8	IП9	1	BP	7	\div
P7	1	+	P1	KИP1	IП1	2	—	$x = 0$	63
2	БП	64	Cx	IП8	1	0	\times	+	P8
IП7	IП1	—	1	0	\times	L0	50	IП9	IП8
B/O									

Инструкция. $y = PY$, $x = RX$, нажать клавиши: B/O C/P для инверсии x ; БП 1 2 C/P для сдвига x на один бит влево; БП 2 4 C/P для $y \wedge x$; БП 2 9 C/P для $y \vee x$; БП 3 5 C/P для $y \oplus x$; $t \approx 4$ с для инверсии, $t \approx 65$ с для двухместных операций.

Пример. $10101010 = 01010101$; $\overleftarrow{01010101} = 10101010$; $10101010 \wedge 01101101 = 00101000$; $00101000 \vee 11011011 = 11111011$; $11111011 \oplus 10101010 = 01010001$.

Следует добавить, что к логическим операциям над бинарными сообщениями можно свести и многие операции над множествами. Для этого каждый из n элементов рассматриваемых множеств следует сопоставить определенному биту n -битового сообщения. Тогда инверсия сообщения меньшей длины, отображающего некоторое подмножество, определит дополнение этого подмножества, а пересечению и объединению двух подмножеств будут соответствовать логическое умножение и сложение соответствующих сообщений.

Пусть, например, множество всех рассматриваемых объектов представлено перечислением элементов (a, b, c, d, e, f, g, h) , которым сопоставлены биты восьмивитового сообщения. Тогда подмножествам $M_1 = (a, c, e, g)$ и $M_2 = (b, d, e, g, h)$ будут соответствовать сообщения $m_1 = 10101010$ и $m_2 = 01011011$. Их инверсии $\bar{m}_1 = 01010101$ и $\bar{m}_2 = 10100100$ будут отображать дополнения соответствующих подмножеств $\bar{M}_1 = (b, d, f, h)$ и $\bar{M}_2 = (a, c, f)$, пересечению $M_1 \cap M_2 = (e, g)$ соответствует логическое произведение $m_1 \wedge m_2 = 00001010$, а объединению $M_1 \cup M_2 = (a, b, c, d, e, g, h)$ — логическая сумма $m_1 \vee m_2 = 11111011$. Логическая разность $M_1 / M_2 = (a, c)$ представима результатом операций $m_1 \oplus (m_1 \wedge \bar{m}_2) = 10101010 \oplus (10101010 \wedge 01011011) = 10100000$.

Подобная замена операций над множествами логическими операциями над бинарными сообщениями используется, в частности, в различных поисково-информационных устройствах и системах.

Глава 2

Моделирование сигналов и обработка информации

2.1. Представление сигналов

В общем случае реакции и воздействия (являющиеся реакциями на другие воздействия), связанные соотношениями (1.1) или (1.3), представляют собой сигналы, характеризующие состояние физического объекта. Сигналы описывают непрерывными или дискретными математическими моделями в виде функциональных аналитических или обобщенных (импульсных) зависимостей, отображаемых формулами, графиками, табличными моделями в виде множества пар значений q_i (называемых узлами) и $x_i = x(q_i)$ при $i=0, 1, \dots, n$ и цифровыми моделями в виде программ работы ЭВМ для вычисления x_i по заданным q_i .

В зависимости от задачи моделирования сигналы представляют во временной или операторной областях. Естественным является временное представление сигналов $x(t)$ или $q(t)$, но при моделировании инерционных связей между воздействиями и реакциями приходится решать дифференциальные уравнения. Поэтому при слабых сигналах обычно используют операторные представления сигналов в частотной (спектральной) области или области оператора Лапласа, позволяющие перейти от дифференциальных уравнений к алгебраическим.

Спектральное представление сигнала $x(j\omega)$ связано с временным представлением интегральным соотношением

$$x(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt \quad (2.1)$$

и является непрерывной комплексной функцией переменной ω . Обратное преобразование обеспечивает переход от спектрального к временному представлению:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} x(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

Периодические сигналы однозначно представляют дискретным спектром с комплексными амплитудами

$$C_k = x(jk\Omega) = \frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} x(t) e^{-jk\Omega t} dt, \quad (2.2)$$

где t_1 — удобный для вычислений момент времени t ; T — период рассматриваемого сигнала; $\Omega = 2\pi/T$ — круговая частота. В этом случае обратное преобразование сводится к суммированию тригонометрического ряда (ряда Фурье)

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{-jk\Omega t}. \quad (2.3)$$

Сигналы, заданные на времениом интервале $[0, \infty]$, часто представляют их изображениями по Лапласу

$$x(p) = \int_0^\infty x(t) e^{-pt} dt,$$

являющимися непрерывными комплексными функциями комплексной частоты $p=\sigma+j\omega$. Обратное преобразование Лапласа

$$x(t) = \frac{1}{j2\pi} \int_{e-j\infty}^{e+j\infty} x(p) e^{pt} dp,$$

причем значение e выбирают из условия сходимости модуля произведения $x(t)$ на множитель e^{-et} ($e > \sigma$).

Сигналы в виде последовательностей достаточно коротких импульсов, используемых в импульсных (цифровых) устройствах, во времений области описывают решетчатыми функциями $x(i)$ целочисленного аргумента i (нормированного времени). Часто функции $x(i)$ получают по непрерывной функции $x(t)$ дискретизацией — выборкой значений функции $x(t)$ через равные отрезки времени $x(i) = x(t=i\theta)$. В этом случае значение θ , разделяющее два смежных отсчета, называют интервалом дискретизации.

Такое представление может быть взаимно однозначным, если дискретируемая функция $x(t)$ относится к функциям с ограниченным спектром, а интервал дискретизации θ выбран в соответствии с теоремой отсчетов Котельникова как $\theta \leq 1/2f_b$, где f_b — верхняя граничная частота спектра функции $x(t)$. В этом случае справедливо соотношение, называемое рядом Котельникова:

$$x(i) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) \frac{\sin(\omega_b(t-k\theta))}{\omega_b(t-k\theta)}. \quad (2.4)$$

Временное и спектральное представления финитных решетчатых функций, описываемых конечным множеством значений, связаны формулами дискретного преобразования Фурье (ДПФ)

$$x(kv) = \sum_{i=0}^{m-1} x(i) W^{ik}, \quad x(i) = \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{m-1} x(kv) W^{-ik}, \quad k \in (0; m-1), \quad (2.5)$$

где $v = 2\pi/m$ — нормированная частота, связанная с частотой Ω спектральных составляющих анализируемой функции соотношением $\Omega = v/\theta$; m — заданное число отсчетов функции $x(i)$; $W = e^{-jv} = e^{-j2\pi/m}$.

При вещественных значениях $x(i)$ соотношение (2.5) избыточно, так как справедливо равенство $x(kv) = x^*[(m-k)v]$, где звездочкой обозначено сопряженное значение. Вместо формул (2.5) часто удобнее использовать z -преобразование решетчатой функции

$$x(z) = \sum_{i=0}^{\infty} x(i) z^{-i}, \quad (2.6)$$

где z — комплексный аргумент, связанный с интервалом дискретизации соотношением $z = e^{j\theta}$. Обратное z -преобразование выполняют по формуле

$$x(i) = \frac{1}{j2\pi} \oint x(z) z^{i-1} dz,$$

где контур интегрирования охватывает все особые точки подынтегрального выражения, которые для ограниченных во времени функций лежат внутри окружности единичного радиуса.

Иногда вместо полного описания сигнала достаточно ограничиться его некоторыми характеристиками. К ним относятся среднее значение (постоянная составляющая)

$$\bar{x} = \frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} x(t) dt, \quad (2.7)$$

среднее квадратическое значение и энергетический спектр сигнала

$$x_{\text{ср}} = \sqrt{\bar{x}^2} = \left(\frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} x^2(t) dt \right)^{1/2};$$

$$W(\omega) = x(j\omega) x^*(j\omega) = |x(j\omega)|^2,$$

связанные соотношением

$$x_{\text{ср}} = \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} W(\omega) d\omega.$$

Временной характеристикой случайного процесса (полезного сигнала или помехи) является корреляционная функция

$$R(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [x(t_1) - m_1(t_1)] [x(t_2) - m_1(t_2)] p[x(t_1),$$

$$x(t_2)] dx(t_1) dx(t_2), \quad (2.8)$$

где $p[x(t)]$ и $p[x(t_1), x(t_2)]$ — одномерные и двумерные плотности распределения вероятности анализируемого сигнала, а математическое ожидание $m_1(t_1)$ и $m_1(t_2)$, в общем случае зависящее от времени, вычисляют по формуле

$$m_1(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) p[x(t)] dx(t).$$

Для стационарных случайных процессов математическое ожидание и одномерная плотность вероятности не зависят от времени. В этом случае вместо (2.8) используют соотношение

$$R(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [x(t) - \bar{x}] [x(t+\tau) - \bar{x}] p[x(t), x(t+\tau)] dx(t) dx(t+\tau).$$

Корреляционная функция эргодического случайного процесса определяется по его достаточно длинной реализации соотношением

$$R(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t) x(t-\tau) dt$$

и для решетчатых функций

$$R(i) = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^m x(k)x(k+i). \quad (2.9)$$

Преобразование (2.1) корреляционной функции стационарного случайного процесса в силу ее четности описывается формулой

$$W(\omega) = 2 \int_0^\infty R(t) \cos \omega t dt, \quad (2.10)$$

определенющей энергетический спектр переменной составляющей процесса.

Часто корреляционную функцию нормируют с помощью значения $R(0)$, соответствующего дисперсии σ^2 случайного процесса: $r(t) = R(t)/R(0) = R(t)/\sigma^2$.

Таким образом, практически все преобразования сигналов, выполняемые при анализе радиотехнических устройств, связаны с интегрированием, которое не всегда удается выполнить аналитическими методами даже при аналитической модели преобразуемого сигнала. В этом случае приходится использовать методы численного интегрирования, из которых наиболее употребителен метод, основанный на использовании приближенной составной формулы Симпсона (формулы парабол)

$$\begin{aligned} I = \int_a^b f(x) dx \approx & (f(a)) + 4f(a+h) + 2f(a+2h) + 4f(a+3h) + \\ & + \dots + 2f(b-2h) + 4f(b-h) + f(b)) h/3, \end{aligned} \quad (2.11)$$

где n — четное число разбиений интервала интегрирования; $h = (b-a)/n$ — шаг интегрирования.

Программа 25. Вычисление определенных интегралов $I(x)$ по составной формуле Симпсона

П3	ПП	40	П9	ИП8	ИП7	П8	—	ИП3	÷
П7	ПП	40	1	ПП	28	4	ПП	28	2
БП	14	ИП9	3	÷	ИП7	×	С/П	×	ИП9
+	П9	ИП8	ИП7	+	П8	КИП3	ИП3	$x \neq 0$	22
...	В/О								

Инструкция. Заменить в программе многоточие фрагментом вычисления подынтегральной функции при $x=P8$ и занятых регистрах 3, 7, 8, 9; нижний предел интегрирования $a=P7$, верхний предел интегрирования $b=P8$, четное число разбиений интервала интегрирования $n=PX$ В/О С/П РХ= $I(x)$.

Пример. Для интеграла

$$\Phi = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^2 e^{-t^2/2} dt = 0,95450$$

получим: при $n=2$ ($t \approx 25$ с) $\Phi=0,94721073$; при $n=4$ ($t \approx 40$ с) $\Phi=0,9544021$; при $n=8$ ($t \approx 80$ с) $\Phi=0,95449475$; при $n=16$ ($t \approx 2,5$ мин) $\Phi=0,95449937$; при $n=32$ ($t \approx 5$ мин) $\Phi=0,95449968$.

Для мажоритарной оценки погрешности интегрирования по формуле Симпсона обычно используют соотношение $\Delta I \leq h^5 f^{IV}(\theta)/90$, $\theta \in [a, b]$.

При оценке погрешности интегрирования применительно к анализу сигналов более удобен спектральный подход, при котором погрешность связывают сискажением спектра. Вводя коэффициент, равный отношению комплексной амплитуды, полученной в результате численного интегрирования гармонического сигнала, к амплитуде, являющейся результатом точного интегрирования, для формулы Симпсона получаем

$$k = A_{\text{выч}}/A_{\text{точ}} = \omega h(2 + \cos \omega h)/(3 \sin \omega h).$$

По этой формуле несложно выбрать значение h , обеспечивающее преобразование спектра интегрируемого сигнала в заданном интервале частот от 0 до $\omega_b \leq \pi/h$ с требуемой точностью. Следует лишь учитывать, что при уменьшении h и увеличении n возрастают операционные погрешности результата численного интегрирования.

Вычисление интеграла с заданной погрешностью можно полностью автоматизировать [15], учитывая, что методическая погрешность формулы Симпсона уменьшается примерно в 15 раз при уменьшении шага в 2 раза.

Программа 26. Вычисление определенного интеграла $I(x)$ по составной формуле Симпсона с заданной предельной абсолютной погрешностью ϵ

```

П9   1   5   ×   x2   П9   Сx   П2   П5   ИП8
ИП7   —   П6   ИП7   ПП   53   ИП5   П4   Сx   П5
ИП7 ИП6   2   ÷   +   ПП   53   ИП9   ИП4   ИП5
2   ×   +   П4   Вх   +   ИП6   2   ÷   П6
×   3   ÷   ИП2   ↔   П2   —   x2   —   x ≥ 0
18   ИП2   С/П   П3   ...   ИП5   +   П5   ИП8   ИП3
ИП6   +   П3   —   x < 0   54   В/О

```

Инструкция. Заменить в программе многоточие фрагментов вычисления подынтегральной функции при $x = P3$ и занятых регистрах 2..9; ($a = P7$, $b = P8$) $e = RX$ В/О С/П $RX = I(x)$.

Для интеграла из примера к программе 25 по этой программе при $\epsilon = 10^{-4}$ получим $\Phi = 0,95449473$ ($t \approx 1$ мин 45 с).

Для численного интегрирования определенных интегралов с аналитически заданным подынтегральным выражением может оказаться удобным использовать и другие методы, в частности составную формулу Гаусса второго порядка [4, 11].

При интегрировании сложных функций в связи с ограничением емкостью памяти может оказаться необходимым предварительное преобразование (в частности, нормирование операндов) подынтегрального выражения. Необходимость в аналитических преобразованиях может возникнуть при стремлении подынтегральной функции или ее производных к бесконечности в интервале интегрирования, что приведет к переполнению или чрезмерной методической погрешности результата интегрирования. Такие особенности можно устранить, заменив переменные или интегрируя по частям [4, 14].

Если в интервале интегрирования возникают неопределенностей, то их следует раскрыть и ввести в программу разветвления для вывода соответствующих значений функции. Редактирование базовой программы 25 может оказаться целесообразным и в других случаях, например, когда подынтегральная функция

имеет постоянный множитель или составляющую либо когда один или оба предела интегрирования соответствуют особым точкам.

В качестве примера рассмотрим вычисление функции плотности вероятности аддитивной смеси гармонического сигнала с амплитудой A и случайнм равнoverоятным в интервале $[-\pi; \pi]$ распределением фазы с нормально распределенным шумом (имеющим нулевое математическое ожидание и дисперсию σ^2), описываемую сверткой

$$p(z) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi^3}} \int_{-A}^{+A} \frac{\exp [-(x-z)^2/2\sigma^2]}{\sqrt{A^2-x^2}} dx, \quad (2.12)$$

где интегрируемая функция обращается в бесконечность на границах интервала интегрирования.

Для устранения указанных особенностей воспользуемся подстановкой $x = -A \cos \psi$, откуда находим

$$p(z) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi^3}} \int_0^\pi \exp \left[-\frac{(A \cos x - z)^2}{2\sigma^2} \right] dy.$$

Для уменьшения числа исходных данных примем нормировкн $B=A/\sigma$ и $\psi=z/\sigma$, получим

$$p(\psi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi^3}} \int_0^\pi \exp \left[-\frac{(B \cos y - \psi)^2}{2} \right] dy.$$

Интеграл (2.12) приходится вычислять многократно при фиксированных пределах интегрирования и различных значениях ψ . Поэтому целесообразно изменить начало базовой программы 25, сохранив шаг и пределы интегрирования после каждого выполнения программы. Для сокращения программы вычислим предварительно коэффициент $1/(3\sqrt{2\pi^3})$, используя его в качестве исходного. Тогда на основе базовой программы 25 получим следующую рабочую программу.

Программа 27. Вычисление плотности вероятности смеси гармонического сигнала со случайной фазой и гауссовского шума

```

π   П8   ↔   П3   ÷   П7   ПП   40   П9   Сx
П8   ПП   40   1   ПП   28   4   ПП   28   2
БП   14   ИП9   ИП7   ×   ИП4   ×   С/П   ×   ИП9
+   П9   ИП8   ИП7   +   П8   КИП3   ИП3   x≠0   22
ИП8   cos   ИП6   ×   ИП5   —   x²   2   ÷   e^x
1/x   В/О

```

Инструкция. Установить переключатель Р—ГРД—Г в положение Р; $(1/(3\sqrt{2\pi^3})) = P4$, $\psi = P5$, $B = P6$) $n = RX$ В/О С/П $RX = p(\psi)$.

По этой программе при $\Psi=B=1$ и $n=8$ получим $p(1)=0,23589307$ ($t \approx 85$ с), а при $n=12$ получим $p(1)=0,2358915$ ($t \approx 130$ с); следовательно, можно приять $p(1)=0,235891$ с шестью верными цифрами.

Базовую программу 25 можно использовать и для вычисления криволинейных интегралов

$$\int\limits_{ab} P(x_1, x_2) dx_1 + Q(x_1, x_2) dx_2$$

после подстановки $x_1 = \varphi(t)$, $x_2 = \psi(t)$ и перехода к обыкновенному интегралу

$$\int\limits_a^b (P(\varphi(t), \psi(t)) \varphi'(t) + Q(\varphi(t), \psi(t)) \psi'(t)) dt.$$

Для приближенного вычисления двойных и тройных интегралов предназначены программы, приведенные в [11, 15].

В тех случаях, когда интегрируемая функция задана табличной моделью $y_i = y(x_i)$, $i=0, 1, \dots, n$, проще всего использовать формулу трапеций

$$I(x) = \sum_{i=0}^n (x_i - x_{i-1}) (y_i + y_{i-1}) / 2 \quad (2.13)$$

с переменным в общем случае шагом $h = x_i - x_{i-1}$.

Программа 28. Интегрирование табулированной функции $y_i = y(x_i)$, $i=0, 1, \dots, n$, с неравноотстоящими узлами

$$\begin{aligned} \text{П8} &\leftrightarrow \text{П7 Сх П9 С/П ИП8} \leftrightarrow \text{П8} + \\ &\leftrightarrow \text{ИП7} \leftrightarrow \text{П7} \leftrightarrow - \times 2 \div \text{ИП9} \\ &+ \text{БП 04} \end{aligned}$$

Инструкция. $x_0 = PY$, $y_0 = PX$ В/О С/П $PX = 0$, $x_1 = PY$, $y_1 = PX$ С/П $PX = I_1$, $x_2 = PY$, $y_2 = PX$ С/П $PX = I_2 \dots$

При равноотстоящих узлах (постоянном шаге) табличной модели функции программирование вычислений по формуле трапеций несколько упрощается.

Программа 29. Интегрирование табулированной функции $y_i = y(x_i)$, $i=0, 1, \dots, n$, с постоянным шагом $h = x_i - x_{i-1}$ аргумента

$$\begin{aligned} \text{П7 Сх П8 С/П ИП7} &\leftrightarrow \text{П7} + 2 \div \\ &\text{ИП9} \times \text{ИП8} + \text{БП 02} \end{aligned}$$

Инструкция. ($h = P9$) $y_0 = PX$ В/О С/П $PX = 0$, $y_1 = PX$ С/П $PX = I_1$, $y_2 = PX$ С/П $PX = I_2 \dots y_n = PX$ С/П $PX = I_n = I(x)$.

Пример. Для $y_i = 0,79789; 0,48393; 0,10798; 0,0088637; 0,0002677$ с шагом $h=1$ и $x_0=0$ получим $I_1=0,640915; 0,937875; 0,99529685; 0,99986255$.

Интегрирование по формуле трапеций соответствует, строго говоря, физически нереализуемой кусочно-линейной аппроксимации табулированной функции. Поэтому во многих случаях более точными оказываются результаты численного интегрирования, основанные на квадратичной (параболической) аппроксимации по формуле Симпсона.

Программа 30. Интегрирование табулированной функции $y_i = y(x_i)$, $i=0, 1, \dots, n$, с нечетным числом $n+1$ равноотстоящих узлов по формуле Симпсона

$$\begin{aligned} \text{П3} &\rightarrow \text{П9} \leftrightarrow \text{П8 С/П КИП3} \leftrightarrow 4 \times \\ &\text{ИП8} + \text{П8 С/П} \uparrow \text{ИП8} + \text{+ L3 04} \\ &\text{Вх ИП9} \times 3 \div \text{С/П} \end{aligned}$$

Инструкция. $y_0 = PZ$, $h = PY$, $n = PX$ В/О С/П $y_1 = PX$ С/П $y_2 = PX$ С/П $y_3 = PX$ С/П ... $y_n = PX$ С/П $PX = I(x)$.

Для табулированной функции из примера к программе 29 по этой программе получим $I(x) = 0,9943775$.

Иногда приходится интегрировать функции, получаемые преобразованием табулированных функций. В качестве примера рассмотрим вычисление среднего квадратического значения периодического импульсного сигнала по его осцилограмме за период T . Поскольку в соответствии с приведенной ранее формулой необходимо интегрировать квадрат временной характеристики $x(t)$, то в программу численного интегрирования следует ввести оператор x^2 , обеспечивающий автоматическое выполнение этой операции для каждого вводимого отсчета. Для полной автоматизации расчета программы следует дополнить операциями деления на период T (так как среднее квадратическое значение инвариантно относительно периода, то для выполнения этой операции достаточно принять $h=1/n$) и извлечения корня квадратного. При нечетном числе отсчетов для численного интегрирования целесообразно использовать формулу Симпсона.

Программа 31. Вычисление среднего квадратического значения периодического сигнала $I(x)$

```
П3 1/x П9 ↔ x2 П8 С/П КИП3 ↔ 4
× ИП8 + П8 С/П x2 ↑ ИП8 + +
L3 05 Вх ИП9 × 3 ÷ √ С/П
```

Инструкция. $x_0=PY$, $n=PX$ В/О С/П $x_1=PX$ С/П $x_2=PX$ С/П... $x_n=PX$ С/П $PX=I(x)$.

Пример. Для $n=10$ ($n+1=11$) $x_i=0; 4; 6,3; 7,8; 8,6; 3,2; 1,2; 0,4; 0,2; 0,1; 0,05$ получим $I(x)=3,12131$.

Программы 28–30 применимы также для численного интегрирования функциональных зависимостей, заданных графиками или расчетными формулами. В этом случае достаточно перед интегрированием представить заданную функциональную зависимость табличной моделью с достаточно большим числом отсчетов. Точность численного интегрирования любыми методами тем выше, чем моноотоннее изменение табулированной или заданной аналитическим выражением функции на каждом интервале (шаге) интегрирования. Требование моноотонности функции на каждом шаге является основным и при экспериментальном измерении функциональных зависимостей, представляемых табличными моделями.

2.2. Дискретное преобразование Фурье

При дискретном преобразовании Фурье (ДПФ) последовательности импульсных сигналов, моделируемые решетчатыми функциями $x(i)$ в соответствии с формулой (2.5), целесообразно представлять формулой

$$x(jkv) = A_k + jB_k, \quad (2.14)$$

где с учетом избыточности $x(jkv)$

$$A_k = \sum_{i=0}^n x(i) \cos(2\pi ki/m); \quad B_k = \sum_{i=0}^n x(i) \sin(2\pi ki/m),$$

$$x(i) = \begin{cases} \frac{A}{m} + \frac{2}{m} \sum_{k=1}^{\frac{m}{2}-1} \left(A_k \cos \frac{2\pi k i}{m} + B_k \sin \frac{2\pi k i}{m} \right) + \\ + \left(\frac{A_{m/2} \cos(2\pi k i / m)}{2} \right) \text{ при четном } m, \\ \frac{A}{m} + \frac{2}{m} \sum_{k=1}^{\frac{m-1}{2}} \left(A_k \cos \frac{2\pi k i}{m} + B_k \sin \frac{2\pi k i}{m} \right) \text{ при нечетном } m; \end{cases}$$

$i = 0, 1, \dots, n; m = n+1.$

При прямом ДПФ проще всего реализовать последовательный анализ, когда за каждый цикл вычислений определяют одну пару коэффициентов A_k и B_k .

Программа 32. Вычисление отсчетов спектральной функции для заданного номера

```

П9 → П5 ↔ П3 Сх П6 П7 П8 π
2 × ИП3 ÷ ИП5 × П4 ИП6 ИП4 ×
↑ cos ИП9 × ИП7 + П7 ↔ sin ИП9
× ИП8 + П8 КИП6 ИП3 ИП6 — x≠0 45
Вх С/П П9 БП 17 ИП7 x2 ИП8 x2 +
✓ С/П

```

Инструкция. Установить переключатель Р—ГРД—Г в положение Р; $m = PZ$, $k = PY$, $x(0) = RX$ В/О С/П ($t \approx 12$ с) $RX = 1$, $x(1) = RX$ С/П ($t \approx 11$ с) $RX = 2$, $x(2) = RX$ С/П $RX = 3 \dots x(n) = RX$ С/П ($t \approx 12$ с) $RX = |x(jv)|$, $P7 = A_k$, $P8 = B_k$.

Для высвечивания номера вводимого следующим отсчетом в этой программе использован счетчик на регистре 6. Это позволяет ускорить вычисления, когда часть вводимых отсчетов равна нулю и может быть пропущена. В качестве примера рассмотрим решетчатую функцию $x(i)$, заданную отсчетами в $m=32$ равнодistantных узлах ($i=0, 1, \dots, 31$), из которых только восемь (в узлах 10, 11, ..., 17) отличны от нуля и равны единице. Выполнив программу после ввода исходных данных ($32=PZ$, $1=PY$, $0=RX$), что необходимо для выполнения подготовительных операций, изменим содержимое регистра 6, введя $10=P6$, $x(10)=1=RX$ С/П $RX=11$. Далее выполним программу при $x(i)=1$ до высвечивания $RX=18$ и снова изменим содержимое счетчика, выполнив $n=31=P6$, $0=RX$ С/П, и получим $RX=|x(jv)|=7,2141137$, $P7=A_1=-6,3622798$, $P8=B_1=3,4007106$ или $x(jv) \approx -6,3623+j3,4$.

На входном языке ЯМК34 или ЯМК52 в соответствии с формулой (2.14) можно реализовать одновременное вычисление пяти смежных отсчетов спектральной функции при $k, k+1, \dots, k+4$ и коэффициента A_0 .

Программа 33. Вычисление пяти смежных отсчетов спектральной функции $x(jvk)$

П0	П1	П3	П5	П7	П9	0	П2	П4	П6
П8	ПА	1	+	↑	С/П	ПВ	ИП0	+	П0
ПП	78	ИП1	+	П1	→	ИП2	+	П2	ПП
73	ИП3	+	П3	→	ИП4	+	П4	ПП	73
ИП5	+	П5	→	ИП6	+	П6	ПП	73	ИП7
+	П7	→	ИП8	+	П8	ПП	73	ИП9	+
П9	→	ИПА	+	ПА	→	ИПС	4	—	ПС
→	БП	12	→	ИПС	1	+	ПС	→	↑
ИПД	×	ИПС	×	↑	sin	ИПВ	×	↔	cos
ИПВ	×	В/О							

Инструкция. $2\pi/m = РД$ или $360/m = РД$ (в зависимости от положения переключателя Р—ГРД—Г); $k = PC$, $x(0) = RX$ В/О С/П $RX = 1$, $x(1) = RX$ С/П $RX = 2$, $x(2) = RX$ С/П ($t \approx 60$ с) $RX = 3 \dots RX = n$, $x(n) = RX$ С/П $RX = n + 1 = m$, $P0 = A_0$, $P1 = A_k$, $P2 = B_k$, $P3 = A_{k+1}$, $P4 = B_{k+1}$, $P5 = A_{k+2}$, $P6 = B_{k+2}$, $P7 = A_{k+3}$, $P8 = B_{k+3}$, $P9 = A_{k+4}$, $PA = B_{k+4}$.

При использовании этой программы ввод нулевого отсчета необходим даже при $x(0) = 0$, так как он обеспечивает автоматическую установку исходного содержимого регистров памяти. В качестве счетчика номера узла использованы операционные регистры и для пропуска нулевых отсчетов (кроме начального) достаточно нажать клавишу \leftrightarrow и ввести в регистры РY и RX номер следующего ненулевого отсчета. Ввод нулевых отсчетов необходимо выполнять оператором 0, а не Сx, и в том случае, когда значение вводимого отсчета случайно совпадает с его выведенным номером, следует ввести отсчет или дважды нажать клавишу В†.

Пример. Для вычисления первых пяти отсчетов спектральной функции $x(jkv)$ по решетчатой функции $x(i)$, заданной в примере к программе 32, следует выполнить (установив переключатель Р—ГРД—Г в положение Р): $2\pi/32 = \pi/16 = РД$, $k = 1 = PC$, $0 = RX$ В/О С/П $RX = 1$, $10 = RX$ В† $1 = RX$ С/П $RX = 11$, $1 = RX$ С/П $RX = 12 \dots$ С/П $RX = 17$, $1 = RX$ С/П $RX = 18$, $P0 = A_0 = 8$, $P1 = A_1 = -6,36227$, $P2 = B_1 = 3,40071$, $P3 = A_2 = 2,84775$, $P4 = B_2 = -4,26197$, $P5 = A_3 = -0,238759$, $P6 = B_3 = 2,42417$, $P7 = A_4 = 1 \cdot 10^{-8}$, $P8 = B_4 = 6,7 \cdot 10^{-7}$, $P9 = A_5 = -1,15953$, $PA = B_5 = -0,951608$.

В случае отказа от вычисления коэффициента A_0 на ПМК с входным языком ЯМК52 можно одновременно вычислять шесть смежных отсчетов спектральной функции.

Программа 34/52. Вычисление шести смежных отсчетов спектральной функции $x(jkv)$

П0	П2	П4	П6	П8	ПА	0	П1	П3	П5
П7	П9	ПВ	1	+	↑	С/П	ПС	ПП	85
ИП0	+	П0	→	ИП1	+	П1	ПП	80	ИП2
+	П2	→	ИП3	+	П3	ПП	80	ИП4	+
П4	→	ИП5	+	П5	ПП	80	ИП6	+	П6
→	ИП7	+	П7	ПП	80	ИП8	+	П8	→
ИП9	+	П9	ПП	80	ИПА	+	ПА	→	ИПВ
+	ПВ	→	ИПД	5	—	ПД	→	БП	13
→	ИПД	1	+	ПД	→	↑	ИПЕ	×	ИПД
×	↑	sin	ИПС	×	↔	cos	ИПС	×	В/О

Инструкция. В зависимости от положения переключателя Р—ГРД—Г ввести $2\pi/m = PE$ или $360^\circ/m = PE$; $k = PD$, $x(0) = PX B/O C/P RX = 1$, $x(1) = PX C/P RX = 2$, $x(2) = PX C/P RX = 3 \dots RX = n$, $x(n) = PX C/P RX = n + 1 = m$, $P0 = A_1$, $P1 = B_1$, $P2 = A_2$, $P3 = B_2$, $P4 = A_3$, $P5 = B_3$, $P6 = A_4$, $P7 = B_4$, $P8 = A_5$, $P9 = B_5$, $PA = A_6$, $PB = B_6$; время обработки одного отсчета около 80 с.

Для проверки правильности выполнения программы можно воспользоваться данными примера к предыдущей программе, дополнив их значениями $A_6 = 1,7653665$, $B_6 = 0,35115187$.

В тех случаях, когда требуется вычислять не более трех смежных или несмежных значений спектральной функции, затраты времени можно уменьшить, используя алгоритм Герцеля*, согласно которому значения A_k и B_k определяются по формулам

$$A_k = u_{s-1} \cos(2\pi k/m) - u_{s-2} + x(0); \quad B_k = u_{s-1} \sin(2\pi k/m)$$

через вспомогательную функцию u_s , вычисляемую по вводимым в обратном порядке отсчетам функции $x(i)$ согласно рекуррентному соотношению

$$u_i = 2u_{i-1} \cos(2\pi k/m) - u_{i-2} + x(m-j), \quad u_0 = 0; \quad u_1 = x(m-1) = x(n).$$

По этому алгоритму для вычисления выбранного множества значений A_k и B_k достаточно один раз вычислить функции $\cos(2\pi k/m)$ и $\sin(2\pi k/m)$, что при программной реализации алгоритма позволяет вынести эти операции за пределы многократно повторяемой части программы и соответственно сократить время вычислений.

При реализации алгоритма Герцеля на входном языке ЯМК52 можно увеличить число несмежных значений спектральной функции до четырех, но в этом случае время счета заметно увеличивается.

Программа 35. Вычисление трех смежных или несмежных значений спектральной функции $x(jkv)$

P7	P8	P9	2	π	\times	ИП0	\div	ПД	1
ПП	86	П4	2	ПП	86	П5	3	ПП	86
П6	Cx	ПА	ПВ	ПС	КИП0	КИП0	ИП0	C/P	ПД
ИП0	x=0	57	ИП7	ИП4	\times	П4	ИП8	ИП5	\times
П5	ИП9	ИП6	\times	П6	ИП1	2	\div	П1	ИП2
2	\div	П2	ИП3	2	\div	П3	ИПД	ИПА	—
ИП7	ПА	ИП1	\times	+	П7	ИПД	ИПВ	—	ИП8
ПВ	ИП2	\times	+	П8	ИПД	ИПС	—	ИП9	ПС
ИП3	\times	+	П9	БП	26	ПА	КИПА	ИПД	\times
sin	Bx	cos	2	\times	КПА	\leftrightarrow	B/O		

Инструкция. Установить переключатель Р—ГРД—Г в положение Р; $m = P0$, $k_1 = P1$, $k_2 = P2$, $k_3 = P3$, $x(n) = PX B/O C/P RX = n - 1$, $x(n - 1) = PX C/P RX = n - 2$, $x(n - 2) = PX C/P \dots RX = 1$, $x(1) = PX C/P RX = 0$, $x(0) = PX C/P RX = -99999999$, $P7 = A_{k_1}$, $P8 = A_{k_2}$, $P9 = A_{k_3}$, $P4 = B_{k_1}$, $P5 = B_{k_2}$, $P6 = B_{k_3}$; вычисления можно начинать с ввода последнего ненулевого отсчета; время обработки одного отсчета (кроме первого и последнего) около 15 с.

* Хэмминг Р. В. Численные методы: Пер. с англ. / Под. ред. Р. С. Гутера. — М.: Наука, 1968. — 268 с.

Для проверки правильности выполнения программы можно воспользоваться данными примеров к программам 32 и 33.

Трудоемкость спектрального анализа при вычислении q отсчетов функции $x(jkv)$ по m отсчетам решетчатой функции $x(i)$ с помощью алгоритма Герцеля или непосредственно ДПФ пропорциональна mq , хотя коэффициент пропорциональности для алгоритма Герцеля примерно в 4 раза меньше, чем при непосредственном ДПФ. Однако при полном спектральном анализе $q=m/2$ и $mq=m^2/2$, поэтому с увеличением числа m отсчетов трудоемкость анализа быстро возрастает.

Время спектрального анализа можно уменьшить при рациональном выборе алгоритма вычислений с устранением повторных идентичных умножений в процессе вычислений различных спектральных составляющих, что при m , кратном 2, позволяет уменьшить общее число операций до величины, пропорциональной $m \log_2 m$. Алгоритмы, в которых реализована эта возможность, называются алгоритмами быстрого преобразования Фурье (БПФ) и используют практически во всех программах спектрального анализа для ЭВМ.

При выполнении алгоритмов БПФ в памяти ЭВМ приходится хранить до $2m$ текущих переменных. Поэтому реализация алгоритмов БПФ на ПМК ограничена относительно малой емкостью памяти и соответственно предельным значением $m \leq 8$ в общем случае. Однако ПМК полезны при исследовании особенностей различных вариантов БПФ и изучении методов их программной реализации.

Алгоритмы БПФ в основном отличаются прореживанием [5] по времени с основной операцией для преобразования двух текущих переменных

$$x'_1 = x_1 + x_2 w^h, \quad x'_2 = x_1 - x_2 w^h \text{ и по частоте с основной операцией} \\ x'_1 = (x_1 + x_2)w^h, \quad x'_2 = (x_1 - x_2)w^h,$$

где w^h — поворачивающий множитель. В простейшем случае четырехточечного БПФ (при $m=4$) $w^h=1$ и алгоритмы с прореживанием по времени (рис. 5, а) и по частоте (рис. 5, б) практически совпадают по выполняемым операциям и реализуются одной программой.

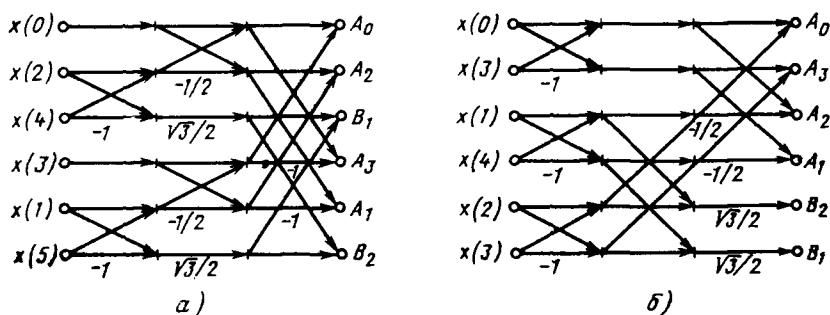


Рис. 5

Программа 36. Четырехточечное БПФ

$\Pi_4 \rightarrow \Pi_3 \rightarrow \Pi_2 \leftrightarrow \Pi_1$ ИПЗ + Π_5
 Π_5 ИП2 ИП4 + Π_6 — ПС ИП2 ИП4 — ПВ
 Π_1 ИП3 — ПА ИП5 ИП6 + П0 С/П

Инструкция. $x(0) = PT$, $x(1) = PZ$,
 $x(2) = PY$, $x(3) = RX$ В/О С/П $RX = P0 = A_0$,
 $PY = PA = A_1$, $PB = B_1$, $PC = A_2$.

Пример. Для $x(i) = 7; 5; 2; 1$ получим
 $A_0 = 15$, $A_1 = 5$, $B_1 = 4$, $A_2 = 3$.

Алгоритм восьмиточечного БПФ с прореживанием по времени, граф которого показан на рис. 6, реализуется программой без условных переходов, что обеспечивает минимальные затраты времени.

Программа 37. Восьмиточечное БПФ с прореживанием по времени

```

П2 С/П П9 С/П П5 С/П П6 ИП2 С/П —
П3 Вх ИП2 + П2 ИП9 С/П — П8 Вх
ИП9 + П9 ИП5 С/П — П4 Вх ИП5 +
П5 ИП6 С/П — П7 Вх ИП6 + ИП9 ↔
— П6 ИП9 Вх + П9 ИП7 ИП8 + П8
ИП7 Вх — П7 ИП2 ИП5 — П5 ИП2 Вх
+ П2 ИП9 — П9 ИП2 Вх + П2 ИП3
ИП7 2 √ ÷ + П7 ИП3 Вх — П3
ИП8 2 √ ÷ П8 ИП4 + П4 ИП8 Вх
— П8 ИП2 С/П

```

Инструкция. $x(0) = RX$ В/О С/П $x(1) = RX$ С/П $x(2) = RX$ С/П $x(3) = -RX$ С/П $x(4) = RX$ С/П $x(5) = RX$ С/П $x(6) = RX$ С/П $x(7) = RX$ С/П $RX = P2 = A_0$,
 $P3 = A_1$, $P4 = B_1$, $P5 = A_2$, $P6 = B_2$, $P7 = A_3$, $P8 = B_3$, $P9 = A_4$ ($t \approx 18$ с) при нулевом значении $x(i)$ необходимо вводить оператор набора цифры 0 (даже если на индикаторе высвечивается 0), а не Сх.

Пример. Для функции $x(i) = x(i\theta) = 16; 9,752108; 5,943979; 3,622897; 2,20818; 1,3459; 0,8203356; 0,5$ получим $A_0 = 40,1934$, $A_1 = 17,5276$, $B_1 = 13,2759$, $A_2 = -11,4438$, $B_2 = 6,97511$, $A_3 = 10,0559$, $B_3 = 3,02866$, $A_4 = 9,75159$.

Одни и тот же алгоритм БПФ может быть реализован различными программами, отличающимися способами реализации вычислений, а также ввода и вывода данных. Наряду с алгоритмами БПФ используют и алгоритмы, основанные на других спектральных представлениях сигнала. Примером может служить быстрое преобразование Уолша—Фурье, основанное на представлении сигнала разложением по функциям Уолша

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i \text{wal}(i, \theta),$$

где $\text{wal}(0, \theta) = 1$ при $0 \leq \theta \leq 1$ и $\text{wal}(0, \theta) = 0$ при других значениях θ .

Программа 38. Восьмиточечное быстрое преобразование Уолша—Фурье

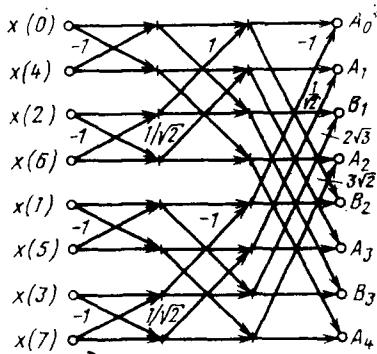


Рис. 6

$$\begin{array}{ccccccccc}
 \text{П0} & 5 & \text{П4} & 9 & \text{П5} & \text{ИП0} & \text{БП} & 11 & \text{ИП1} \\
 \text{П0} & \text{С/П} & \text{П1} & \text{ИП0} & + & 8 & \div & \text{КП4} & \text{ИП0} \\
 - & 8 & \div & \text{КП5} & \text{ИП4} & 9 & - & x=0 & 08 \\
 \text{ИП7} & + & \text{П2} & \text{ИП6} & \text{ИП7} & - & \text{П4} & \text{ИП8} & \text{ИП9} \\
 & & & & & & + & & \\
 & & \text{П3} & \text{ИП8} & \text{ИП9} & - & \text{П5} & \text{ИПА} & \text{ИПВ} \\
 & & & & & & - & & - & \text{П6} \\
 & & & & & & \text{П7} & \text{ИПС} & \text{ИПД} \\
 & & & & & & + & & + \\
 & & \text{П9} & \text{ИП2} & \text{ИП3} & + & \text{П0} & \text{ИП2} & \text{ИП3} \\
 & & & & & & - & & - & \text{П1} \\
 & & & & & & \text{П6} & \text{ИП7} & + \\
 & & & & & & + & & \\
 & & \text{П4} & \text{ИП6} & \text{ИП7} & - & \text{П5} & \text{ИП8} & \text{ИП9} \\
 & & & & & & - & & - & \text{П6} \\
 & & & & & & \text{ИП9} & + & \text{П7} \\
 & & & & & & \text{С/П} & &
 \end{array}$$

Инструкция. $x(0) = \text{РХ}$ В/О С/П РХ = $x(0)$, $x(1) = \text{РХ}$ С/П РХ = $x(1)$, $x(2) = \text{РХ}$ С/П ... $x(7) = \text{РХ}$ С/П Р0 = a_0 , Р1 = a_1 , Р2 = a_2 , ..., Р7 = РХ = a_7 ; $t \leq 30$ с.

Пример. Для $x(i) = 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7$ получим $a_0 = 3,5$, $a_1 = -2$, $a_2 = 0$, $a_3 = -1$, $a_4 = 0$; $a_5 = 0$; $a_6 = 0$; $a_7 = -0,5$.

Программы ДПФ и БПФ с комплексным представлением отсчетов преобразуемых функций применимы для прямого и обратных преобразований при соответствующем изменении знака поворачивающего множителя в (2.5).

2.3. Спектральный анализ непрерывных сигналов

Если необходимо проанализировать спектр непрерывного сигнала, заданного аналитическим (буквенным) выражением, а выполнить интегрирование в замкнутом виде не удается, то приходится прибегать к численным методам спектрального анализа. Один из них основан на предельном соотношении

$$x(j\omega) = \lim_{\theta \rightarrow \infty} x(jv) \theta$$

между спектрами непрерывного сигнала и полученного из него путем дискретизации (с интервалом θ) сигнала, ДПФ которого дает дискретные приближенные значения искомой спектральной функции. При этом следует учитывать, что для сигналов $x(t)$ со спектром, ограниченным значением f_b при $T \leq 1/(2f_b)$, спектральная функция $x(jv)$ отображает дискретные точечные значения спектральной функции $x(j\omega)$.

Практическая реализация рассматриваемого метода состоит из следующих этапов:

1. Построение табличной модели анализируемой функции $x(t)$ при выбранном интервале дискретизации θ , что можно выполнить с помощью программы вычисления этой функции с шагом θ аргумента.

2. Выполнение ДПФ полученной табличной модели в предположении, что она является моделью сигнала с огибающей $x(t)$, по программам, приведенным в § 2.2.

3. Денормировка вычисленных значений спектральной функции согласно соотношениям

$$x(j\omega) = x(jk\Omega) \approx x(jv) \theta, \quad (2.15)$$

где $\Omega = 2\pi/\theta$ для непериодических сигналов.

Комплексные амплитуды составляющих спектра периодического сигнала (при выборке $m = T/\theta$, равной целому числу)

$$C_k = 2x(j\omega)\theta/T = 2x(j\omega)/m, \quad (2.16)$$

где T — период анализируемого сигнала.

При реализации рассмотренного алгоритма особого внимания требует выбор интервала дискретизации, обеспечивающий заданную точность анализа при минимальных затратах времени. В этом случае строгая оценка методической погрешности является сложной задачей, и необходимо максимально использовать имеющуюся информацию о реальной ширине спектра анализируемого сигнала. Так, для «простых» сигналов * граничная частота спектра $f_{\max} \approx k/\tau$, где τ — длительность сигнала, а k — коэффициент, определяемый его формой и равный единицам или десяткам единиц.

Выбор θ упрощается, если задана полоса анализируемых частот. В этом случае $\theta = 1/(2f_{\max})$, но по мере приближения к граничной частоте f_{\max} погрешность вычисления $x(j\omega)$ для сигналов, ширина спектра которых превышает f_{\max} , резко возрастает. Если при анализе спектров периодических сигналов для ДПФ выбирают $m = T/\theta$, то для непериодических сигналов m следует выбирать по значению частот $\omega = k\Omega$, на которых вычисляют $x(j\omega)$, связанных с интервалом дискретизации и числом m обрабатываемых отсчетов функции $x(i)$ соотношением $\Omega = 1/(m\theta)$. Если для финитных функций величину Ω_{\max} определяют числом ненулевых отсчетов, то при введении дополнительных нулевых отсчетов значение Ω можно сделать сколь угодно малым.

В качестве примера определим спектральную плотность прямоугольного импульса $x(t) = 1$ при $0 \leq t \leq \tau = 1$ мкс и $x(t) = 0$ при $t > \tau$ на частотах, кратных 250 кГц. Полагая реальную ширину спектра примерно равной 4 МГц, выберем интервал дискретизации $\theta = 1/(2f_b) = 0,125$ мкс. Чтобы получить отсчеты спектральной функции на заданных частотах, соответствующих спектральным составляющим периодического сигнала с периодом $T = 1(250 \cdot 10^3) = 4$ мкс, найдем ДПФ решетчатой функции, заданной $m = 4/0,125 = 32$ отсчетами, из которых $1/0,125 = 8$ будут равны единице, а остальные нулю. Воспользовавшись для этого сигнала результатами ДПФ, выполненного в § 2.2, после денормировки получим следующие значения: $x(j\omega) : x(j250 \text{ кГц}) = 9,017641 \cdot 10^{-7}$ (точное значение $9,003162 \cdot 10^{-7}$); $x(j500 \text{ кГц}) = 6,407288 \cdot 10^{-7}$ (точное значение $6,366197 \times 10^{-7}$); $x(j750 \text{ кГц}) = 3,044885 \cdot 10^{-7}$ (точное значение $3,001054 \cdot 10^{-7}$); ...

Если m велико, то полный спектральный анализ связан с большими затратами времени и предпочтительнее может оказаться метод, основанный на аппроксимации анализируемой функции $x(t)$, позволяющей выполнить преобразование (2.1) и получить формулу, с достаточной точностью описывающую спектр анализируемого сигнала. Например, при кусочно-линейной аппроксимации

$$x(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < t_1, \\ \alpha_1(t - t_1) + \beta_1 & \text{при } t_1 \leq t < t_2, \\ \dots & \dots \\ \alpha_k(t - t_k) + \beta_k & \text{при } t_k \leq t \leq t_{k+1}, \\ 0 & \text{при } t_{k+1} < t \end{cases} \quad (2.17)$$

* Варакин Л. Е. Теория сложных сигналов. — М.: Сов. радио, 1970—376с.

после интегрирования по (2.1) находим

$$x(j\omega) = - \sum_{i=1}^k \frac{B_i + j\delta A_i}{\omega^2} e^{-j\omega t_i},$$

где коэффициенты $B_i = \alpha_i - a_{i-1}$, а $A_i = \beta_i - \beta_{i-1} - \alpha_{i-1}(t_i - t_{i-1})$ отличны от нуля только при наличии у функции $x(t)$ разрывов первого рода. Заметим, что при вычислении значений A_1 и B_1 следует принять $\alpha_0 = \beta_0 = 0$. Коэффициенты A_i и B_i можно вычислить непосредственно по отсчетам функции $x(t)$.

Программа 39. Вычисление коэффициентов приближенной спектральной функции

```

П3 ↔ П2 П4 Сх П5 С/П П6 ↔ П7
↑ С/П П8 ↔ — П9 ИП2 ИП7 — ИП3
ИП6 П3 — ÷ ПА ИП5 — ПВ ИПА П5
ИП8 П2 ИПВ ИП4 ИП9 П4 → БП 06

```

Инструкция. $x(t_1) = PY$, $t_1 = PX$ В/О С/П РХ = 0, $x(t_2) = PY$, $t_2 = PX$ С/П (если функция имеет разрыв в очередной точке, то, например, $x(t_2-0) = PY$, $t_2 = PX$ С/П РХ = $x(t_2-0)$, $x(t_2+0) = PX$) С/П РХ = A_1 , $PY = B_1$... С/П РХ = A_{k-1} , $PY = B_{k-1}$, $x(t_{k+1}-0) = PY$, $t_{k+1} = PX$ С/П РХ = $x(t_{k+1}-0)$, $x(t_{k+1}+0) = PX$ С/П РХ = A_k , $PY = B_k$... $x(t_r) = PY$, $t_r = PX$ С/П РХ = $= x(t_r)$, 0 = PX С/П РХ = A_{r-1} , $PY = B_{r-1}$, 0 = PY, $t_s = PX$ С/П РХ = 0 С/П РХ = A_r , $PY = B_r$ (где t_r — конец последнего участка аппроксимации, t_s — произвольное значение, удовлетворяющее условию $t_s > t_r$).

В качестве примера для временной характеристики, аппроксимированной кусочно-линейной функцией (рис. 7, а), выполняем: 10 В↑ 0 В/О С/П (РХ = 0) 8 В↑ 5 С/П (РХ = 8) 2 /-/ С/П РХ = 10 = A_1 , PY = -0,4 = B_1 ; 0 В↑ 10 С/П (РХ = 0) С/П РХ = -10 = A_2 , PY = 0,8 = B_2 ; 0 В↑ 20 С/П (РХ = 0) С/П РХ = = 0 = A_3 , PY = -0,4 = B_3 .

Следовательно, $x(j\omega) = -(-0,4 + j10\omega + (0,8 - j10\omega)e^{-j5\omega} + (-0,4)e^{-j10\omega}) \times \omega^{-2} = ((0,4 + 0,4\cos 10\omega - 0,8\cos 5\omega + 10\omega \sin 5\omega) + j(10\omega \cos 5\omega - 10\omega + 0,8\sin 5\omega - 0,4\sin 10\omega)) / \omega^2$.

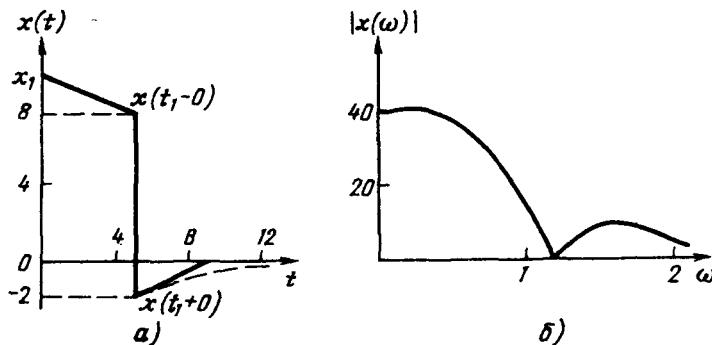


Рис. 7

По этому выражению можно вычислить минимум и вещественную составляющие или модуль и аргумент спектральной функции на заданной частоте или в заданном диапазоне частот. Для уменьшения операционных погрешностей и ускорения вычислений полученную формулу целесообразно предварительно преобразовать. Воспользовавшись, например, формулами для кратных значений аргументов тригонометрических функций, получим расчетное выражение $x(j\omega) = ((10\omega \sin 5\omega - 0.8 \cos 5\omega (1 - \cos 5\omega)) - j(10\omega - 0.8 \sin 5\omega (1 - \cos 5\omega))) / \omega^2$, где после раскрытия неопределенностей $x(0) = 40$. По этой формуле для вычисления, например, модуля спектральной функции $|x(j\omega)|$ в диапазоне частот несложно составить рабочую программу

```

П9 1 0 × П6 2 ÷ ↑ cos П7
↔ sin П8 ИП6 × 1 ИП7 — П5 ИП7
× 0 , 8 П4 × — ИП9 x2 ÷
ПА ИП6 ИП4 ИП8 × — ИП5 × ИП9 x2
÷ ПВ x2 ИПА x2 + √ С/П БП 00

```

с инструкцией: $\omega = PX$ (B/O) C/P RX = $|x(j\omega)|$, PA = Rex(jω), PB = Imx(jω); t ≈ 17 с.

График модуля $|x(j\omega)|$, построенный по результатам выполнения этой программы для $\omega \leq 3$, показан на рис. 7, б.

Многие задачи спектрального анализа связаны с вычислениями различных специальных функций. Например, анализ распределения по спектру энергии сигнала (или мощности для периодического сигнала) при кусочно-линейной аппроксимации $x(t)$ сводится к вычислению интегрального синуса

$$Si(x) = \int_0^x \frac{\sin z}{z} dz. \quad (2.18)$$

Так, для прямоугольного импульса $W(\omega) = A \tau \sin(\omega \tau / 2) / (\omega \tau / 2)^2$ и в полосе частот от ω_1 до ω_2 энергия

$$\mathcal{E} = \frac{1}{\pi} \int_{\omega_1}^{\omega_2} W(\omega) d\omega = \frac{A^2 \tau^2}{\pi} \int_{\omega_1}^{\omega_2} \left[\frac{\sin(\omega \tau / 2)}{\omega \tau / 2} \right]^2 d\omega$$

или после интегрирования по частям

$$\mathcal{E} = \frac{2A^2 \tau^2}{\pi} \left[Si\left(\frac{\omega_2 \tau}{2}\right) - Si\left(\frac{\omega_1 \tau}{2}\right) + \sin\left(\frac{\omega_2 \tau}{2}\right) \left/ \left(\frac{\omega_2 \tau}{2} \right) - \frac{\sin(\omega_1 \tau / 2)}{\omega_1 \tau / 2} \right. \right].$$

Функция Si(x) встречается и в других радиотехнических задачах, например при описании переходной характеристики идеального фильтра, с помощью которого моделируются реальные фильтрующие устройства.

Для вычисления интегрального синуса с помощью ПМК используют различные методы [3, 14, 15, 18]. Близок к оптимальному комбинированный способ, при котором для вычисления Si(x) в области малых значений аргумента используется разложение в степенной ряд, а в области больших значений аргумента — асимптотическое приближение.

Программа 40. Вычисление интегрального синуса $Si(x) = \pi/2 - si(x)$

```

П8   П7   x2   П9   ИП8   8   — x<0  34   1
П6   КИП6   ИП7   ИП6   ÷   КИП6   → /—/   ИП6   ÷
ИП9   ×   П7   ИП6   ÷   ИП8   +   П8   Вх   —
x=0   11   ИП8   С/П   ИП9   1/x   ↑   ↑   ↑   3
8   ×   1   —   ×   3   0   ×   1   +
×   2   4   ×   2   —   ×   1   +   ИП8
÷   ИП8   cos   ×   П9   →   2   1   ×   1
—   ×   1   2   0   ×   6   +   ×   1
—   ×   ИП8   sin   ×   ИП9   —   π   2   ÷
+   С/П

```

Инструкция. Установить переключатель Р—ГРД—Г в положение Р; $x=PX$ В/О С/П $PX=Si(x)$; $t \approx (22+12x)$ с при $x < 8$ и $t \approx 25$ с при $x \geq 8$. Точность результата определяется шестью верными цифрами в широком смысле.

Примеры. $Si(0,1)=0,099944467$ ($t \approx 26$ с), $Si(1)=0,94608314$ ($t \approx 44$ с), $Si(7, 9)=1,5616715$ ($t \approx 2$ мин), $Si(20)=1,5482416$ ($t \approx 25$ с).

Сигналы с угловой модуляцией $x(t)=A\cos(\omega_0 t+m\sin\Omega t)$ отображают в частотную область дискретным спектром, составляющие которого определяются с помощью функций Бесселя $J_n(x)$ порядка n с аргументом, равным индексу m угловой модуляции:

$$x(t)=A(J_0(m)+\sum_{n=1}^{\infty} J_n(m)(\cos(\omega_0-n\Omega)t+(-1)^n\sin(\omega_0 t+n\Omega)t)).$$

В ряде радиотехнических задач, связанных, в частности с электродинамикой, используют модифицированные функции Бесселя $I_n(x)$. Для вычислений функций Бесселя используют различные методы и алгоритмы [4, 14, 18]. Удовлетворительные результаты при вычислении функций Бесселя и модифицированных функций Бесселя для вещественного аргумента и целочисленного порядка дают использование разложения в степенной ряд с окончанием вычислений по условию максимальной точности ($\epsilon=0$).

Программа 41. Вычисление функций Бесселя $J_n(x)$ и $I_n(x)$ вещественного аргумента x и целочисленного порядка n

```

П15   ↔   П9   Cx   П4   1   П6   ИП5   x≠0  19
П8   ИП6   ×   П6   ИП8   1   — x=0  10   ИП9
2   ÷   x2   П9   ИП5   Вх   Xy   ИП6   ÷   П7
П8   КИП4   ИП4   ↑   ИП5   +   ×   ИП9   ÷   ИП7
/—/   ↔   ÷   П7   ИП8   +   П8   Вх   — x=0
31   ИП8   С/П

```

Инструкция. $x=PY$, $n=PX$ В/О С/П $PX=J_n(x)$; для вычисления модифицированных функций Бесселя $I_n(x)$ заменить оператор /—/ по адресу 42 в программе оператором НОП. При $x \leq 10$ и $n \geq x$ результат содержит не менее шести верных цифр. Время счета зависит от значений x и n .

Примеры. $J_0(2)=0,22389078$ ($t \approx 50$ с), $J_4(2)=0,33995718$ ($t \approx 55$ с), $J_1(1)=0,0002497577$ ($t \approx 50$ с), $J_{30}(20)=0,00012401602$ ($t \approx 3$ мин), $J_{13}(7)=0,00077022187$ ($t \approx 1$ мин 45 с), $I_5(2)=0,0098256791$ ($t \approx 55$ с).

Анализ спектра импульса с высокочастотным заполнением (радиоимпульса) при линейной частотной модуляции (ЛЧМ) приводит к необходимости вычисления интегралов Френеля

$$C(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^x \cos t^2 dt; \quad S(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^x \sin t^2 dt, \quad (2.19)$$

причем в некоторых таблицах эти интегралы даны для аргумента $z=x^2$, что соответствует интегральному представлению [18]

$$C(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\sqrt{z}} \cos t^2 dt; \quad S(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\sqrt{z}} \sin t^2 dt.$$

При решении практических задач часто используют [4, 14, 15] представление интегралов Френеля

$$C(x_1) = \int_0^{x_1} \cos \frac{\pi t^2}{2} dt; \quad S(x_1) = \int_0^{x_1} \sin \frac{\pi t^2}{2} dt, \quad (2.20)$$

связанное с представлением (2.19) соотношениями $x=x_1\sqrt{\pi/2}$ или $x_1=x\sqrt{2/\pi}$.

Значения интегралов Френеля можно найти методами численного интегрирования [14], но в области малых значений аргумента целесообразно использовать разложение в степенной ряд.

Программа 42. Вычисление интегралов Френеля $C(x)$, $S(x)$ и $C(x_1)$, $S(x_1)$ при $x < 3$

```

П9 ↑ x² √— ÷ П8 ИП9 x² x² Вх
6 + П0 ИП0 ↑ + ÷ ИП8 Вх —
÷ × ИП0 4 × 2 — ИП8 — 1/x
+ L0 13 ↔ √— ln 2 ИП8 -- ×
e^x 2 × π ÷ √— × С/П

```

Инструкция. Для вычисления $C(x)$, $S(x)$, $C(x_1)$ или $S(x_1)$ ввести соответственно $x=PX$, $-x=PX$, $x_1\sqrt{\pi/2}=PX$ или $-x_1\sqrt{\pi/2}=PX$ В/О С/П РХ= $=f(x)$; при $x < 2,1$ результат содержит не менее четырех верных цифр ($t \approx 15x+30$ с).

Примеры. $C(1)=0,72170589$, $S(1)=0,24755829$ ($t \approx 45$ с); $C(\sqrt{\pi/2})=0,77989335$, $S(\sqrt{\pi/2})=0,43825903$ ($t \approx 45$ с); $C(2)=0,3682001$, $S(2)=0,64212021$ ($t \approx 63$ с); $C(2\sqrt{\pi/2})=0,48879315$, $S(2\sqrt{\pi/2})=0,34355183$ ($t \approx 63$ с).

При значениях аргумента $x > 3$ целесообразно использовать асимптотическое разложение, приведенное в [14], преобразовав его для непосредственного вычисления интегралов (2.19) и при $x=x_1\sqrt{\pi/2}$ для интегралов (2.20).

Программа 43. Вычисление интегралов Френеля $C(x)$, $S(x)$ и $C(x_1)$, $S(x_1)$ при $x > 3$

$$\begin{array}{ccccccccc}
 x^2 & П8 & 2 & \times & x^2 & П9 & 7 & ПП & 52 & 6 \\
 \times & 2 & + & П7 & ИП8 & /—/ & sin & \times & ИП8 & cos \\
 9 & ПП & 52 & 5 & \times & 1 & + & \times & ИП8 & \div \\
 + & 2 & \pi & \times & ИП8 & \times & \sqrt{—} & \div & 1 & \leftrightarrow \\
 - & 2 & \div & С/П & ИП7 & ИП8 & cos & \times & ИП8 & sin \\
 БП & 20 & ИП9 & \div & 1 & — & ИП9 & \div & В/О
 \end{array}$$

Инструкция. Установить переключатель Р—ГРД—Г в положение Р; для вычисления $C(x)$ и $S(x)$ или $C(x_1)$ и $S(x_1)$ ввести соответственно $x=PX$ или $x_1\sqrt{\pi}/2=PX$ В/О С/П $PX=C(x)$ ($t \approx 18$ с) С/П ($t \approx 15$ с) $PX=S(x)$. При $x > 3,5$ результат содержит не менее четырех верных цифр.

Примеры. $C(3)=0,5609376$; $S(3)=0,6170662$; $C(4)=0,47433965$; $S(4)=0,5961278$; $C(6)=0,4342124$; $S(6)=0,5094184$.

Программы вычисления некоторых других специальных функций приведены далее при рассмотрении соответствующих радиотехнических задач.

2.4. Цифровое моделирование входных сигналов

Процессы в радиотехнических цепях моделируют на ЭВМ во временной области с помощью цифровых моделей в виде программ, вычисляющих значения реакций на входные воздействия, задаваемые их значениями $x(i)$ через дискретные отрезки нормированного времени (интервалы дискретизации) θ . Если заданные воздействия изменяются по определенному закону, то затраты времени на моделирование уменьшаются при автоматизации вычисления значений $x(i)$ входного воздействия с помощью фрагмента цифровой модели процесса в цепи передачи сигнала. Каждое выполнение такого фрагмента соответствует вычислению входного сигнала в момент времени, отличающийся на θ от предыдущего момента времени.

Фрагменты, моделирующие входной сигнал на языке ПМК с ограничением емкостью памяти, в общем случае должны содержать минимальное число шагов и обращений к памяти. Так как в большинстве случаев (например, при анализе линейных цепей) уровень входных воздействий иесуществен или может быть нормирован, то в таких фрагментах максимальное значение воздействия можно принимать равным удобному для программирования числу. Кроме того, в тех случаях, когда временные отрезки генерируемого сигнала выражаются через одио- или двузначные числа, кратные интервалу дискретизации, их целесообразно записывать непосредственно в текст программы.

В приводимых далее фрагментах не указаны конкретные номера регистров памяти, так как выбор их зависит от особенностей реализации цифровой модели процессов в осиевой части программы. Обычно фрагмент, моделирующий воздействие, помещают в начале программы, и поэтому адреса переходов в приводимых далее фрагментах указаны для этого случая. Если записываемые в текст программы операнды неодиозначны или модель воздействия помещена не в начале программы (например, после оператора С/П), то адреса переходов необходимо соответственно изменить.

1. Последовательность прямоугольных импульсов длительностью $\tau=k\theta$ с периодом $T=(m+k)\theta$ и амплитудой 10 моделируется фрагментом

ИПН 1 + ПН $m - x \geq 0$ 13 $k -$
 $x \neq 0$ 03 1 0 ...

В этом фрагменте на регистре N организован счетчик нормированного (относительно интервала дискретизации θ) времени, автоматически устанавливаемый в исходное положение после окончания очередного периода ($m+k$) генерируемой последовательности $x(i)$. Изменяя начальное содержимое этого регистра, можно начать генерирование воздействия с любой начальной фазы. Например, при $k=3$, $m=4$, $0=PN$ этот фрагмент генерирует последовательность $x(i)=0; 0; 0; 10; 10; 10; 0; 0; 0; 0; 10; 10; 10; 0; 0; ...$

Если имеются свободные регистры памяти, то длину рассматриваемого фрагмента можно сократить, используя операторы косвенных переходов, например

ИПН₁ 1 + ПН₁ $m - Kx \geq 0 N_2 k - Kx = 0 N_3$
 1 0

(где $N_2, N_3 \geq 6$; $PN_2=11$; $PN_3=3$) или операторы цикла, например

L0 09 L1 08 m П0 k П1 1 0 ...

при исходных данных $m=P0$, $k=P1$.

2. Пилообразный сигнал с периодом $T=m\theta$ и максимальным значением $m-1$, где m — целое число, генерируется фрагментом

ИПН 1 + ПН $m - x=0$ 03 ИПН ...

При нулевом исходном содержимом регистра N фрагмент генерирует последовательность $x(i)=1; 2; ...; m-1; 0; 1; 2; ...$. Если исключить последний оператор ИПН, то при исходном значении $0=PN$ генерируется последовательность $x(i)=1-m; 2-m; ...; -2; -1; -m; 1-m; 2-m; ...$, а при изменении мест операторов + и -, а также замене команды $x=0$ командой $x < 0$ получится генератор линейно убывающего воздействия $x(i)=m-1; m-2; ...; 2; 1; 0; m-1; m-2; ...$

Если имеются свободные регистры памяти с номерами $N < 7$, то число шагов рассматриваемого фрагмента можно уменьшить, используя операторы косвенного обращения к памяти, например

КИПН ИПН $x=0$ 06 m ПН ИПН ...

В этом случае при $N \leq 3$ и исходном значении $m=PN$ получим последовательность $x(i)=m-1; m-2; ...; 2; 1; m; m-1; ...$. Тот же результат при тех же исходных данных получим и с помощью еще более короткого фрагмента с оператором цикла

LN 04 m ПН ИПН ...

Дополняя рассмотренные фрагменты операторами, преобразующими постоянную составляющую и уровень сигнала, можно получить и модели линейно изменяющихся воздействий другой (например, треугольной) формы.

3. Экспоненциальный одиночный импульс $x(i)=Ae^{-\alpha i}$ проще всего получить с помощью фрагмента ИПН₁ ИПН₂ × ПН₁ ... при $e^{-\alpha}=PN_2$. Для того чтобы первый отсчет, генерируемый фрагментом, равнялся A , в регистр N_1 следует занести значение $Ae^{-\alpha}$.

Для формирования экспоненциального импульса вида $x(i)=aie^{-\alpha i}$, можно использовать фрагмент

$$\text{ИПN}_1 \text{ ИПN}_2 + \text{ПN}_1 \uparrow e^x \div \dots$$

при исходном содержимом $0 = \text{ПN}_1$, $a = \text{ПN}_2$. В этом случае при $a = 0,5$ получим $x(i) = 0,30326532; 0,36787944; 0,33469524; 0,27067058; 0,20521249; \dots$

4. Функция отсчетов $x(i) = \sin ai / (ai)$ при $a = \text{ПN}_2$ в общем случае генерируется фрагментом

$$\text{ИПN}_1 \text{ ИПN}_2 + \text{ПN}_1 \sin \text{ИПN}_1 \ x=0 \ 10 \ 1 \uparrow \div \dots$$

Если в выбранном интервале формирования $x(i)$ исключена возможность возникновения неопределенности вида $0/0$, то длину фрагмента можно сократить:

$$\text{ИПN}_1 \text{ ИПN}_2 + \text{ПN}_1 \sin \text{ИПN}_1 + \dots$$

Например, при $0 = \text{ПN}_1; 0,2 = \text{ПN}_2$ (переключатель Р—ГРД—Г установлен в положение Р) получим $x(i) = 0,99334665; 0,97354582; 0,94107083; 0,896669512; 0,84147103; \dots$

5. Колоколообразный импульс $x(i) = e^{-(ai)^2}$ при $a = \text{ПN}_2$ генерируется фрагментом

$$\text{ИПN}_1 \text{ ИПN}_2 + \text{ПN}_1 \ x^2 \ e^x \ 1/x \ \dots$$

Следует учитывать возможность переполнения при условии $(ai)^2 \geq \ln(10^{100} - 1)$. По этому фрагменту при $a = 0,2$ получим $x(i) = 0,96078941; 0,85214376; 0,69767633; 0,52729241; 0,36787944; \dots$

6. Последовательность усеченных косинусоидальных импульсов

$$x(i) = \begin{cases} \cos(2\pi i \theta/T) - \cos \psi & \text{при } \cos(2\pi i \theta/T) \geq \cos \psi \\ 0 & \text{при } \cos(2\pi i \theta/T) < \cos \psi \end{cases}$$

для исходных данных $2\pi\theta/T = \text{ПN}_2$, $\cos \psi = \text{ПN}_3$ генерируется фрагментом

$$\text{ИПN}_1 \text{ ИПN}_2 + \text{ПN}_1 \cos \text{ИПN}_3 - x<0 \ 10 \ Cx \ \dots$$

для которого начальная фаза определяется исходным содержимым регистра N_1 . При $\pi/10 = \text{ПN}_2; 0,5 = \text{ПN}_3, 0 = \text{ПN}_1$ по этому фрагменту получим $x(i) = -0,45105655; 0,30901763; 0,08778526; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0,087785267; 0,30901737; 0,45105657; 0,5; \dots$

7. Гармоническое колебание с периодом T при $2\pi\theta/T = \text{ПN}_2$ моделируется фрагментом

$$\text{ИПN}_1 \text{ ИПN}_2 + \text{ПN}_1 \sin (\text{или} \cos) \ \dots$$

Начальную фазу определяет исходное содержимое регистра N_1 и при $0 = \text{ПN}_1$ первый отсчет равен $\sin(2\pi\theta/T)$ или $\cos(2\pi\theta/T)$. Так, при $0 = \text{ПN}_1, \pi/10 = \text{ПN}_2$ получим $x(i) = 0,309017; 0,58778529; 0,80901704; 0,95105652; 1; 0,95105652; \dots$

8. Колебание с тональной амплитудной модуляцией (АМ) представимо решетчатой функцией

$$x(i) = (1 + m \sin(2\pi i \theta/T_m)) \sin(2\pi i \theta/T),$$

где T_m и T — периоды модулирующего и модулируемого колебаний. Обычно соотношение фаз моделируемого и моделирующего колебаний иесущественно и для генерирования АМ колебания при $2\pi\theta/T_m = \text{ПN}_2, T_m/T = \text{ПN}_3, m = \text{ПN}_4$ можно воспользоваться фрагментом

$$\begin{aligned} \text{ИПN}_1 \text{ ИПN}_2 + \text{ПN}_1 \sin \text{ИПN}_4 \times 1 + \text{ИПN}_1 \\ \text{ИПN}_3 \times \sin \times \dots \end{aligned}$$

При 100%-ной модуляции ($m = 1$) этот фрагмент упрощается:

$$\text{ИПN}_1 \text{ ИПN}_2 + \text{ПN}_1 \sin 1 + \text{ИПN}_1 \text{ ИПN}_3 \times \\ \sin \dots$$

и для $0 = \text{ПN}_1, \pi/10 = \text{ПN}_2, 0,1 = \text{ПN}_3$ получим $x(i) = 0,041117216; 0,099697863; 0,17024185; 0,24453219; 0,31286892; \dots$

9. Сигнал с угловой (частотной или фазовой) модуляцией

$$x(i) = \sin((2\pi i \theta/T) + \Phi \sin(2\pi i \theta/T_m)),$$

где T и T_m — периоды соответственно несущей и модулирующего сигнала, при $2\pi\theta/T = \text{ПN}_2, T/T_m = \text{ПN}_3, \Phi = \text{ПN}_4$ моделируется фрагментом

$$\text{ИПN}_1 \text{ ИПN}_2 + \text{ПN}_2 \text{ ИПN}_3 \times \sin \text{ИПN}_4 \times \text{ИПN}_1 \\ + \sin \dots$$

Для $0 = \text{ПN}_1, \pi/10 = \text{ПN}_2, 0,1 = \text{ПN}_3, 0,5 = \text{ПN}_4$ получим $x(i) = 0,32391496; 0,61289077; 0,83576911; 0,96854207; \dots$

10. Сигнал с линейной частотной модуляцией (ЛЧМ), когда $\omega(i) = \omega_0 + ki$, $x(i) = \sin((2\pi i \theta/T) + ki^2/2)$,

при $\sqrt{k/2} = \text{ПN}_2, 2\pi\theta/T \sqrt{k/2} = \text{ПN}_3$ генерируется фрагментом

$$\text{ИПN}_1 \text{ ИПN}_2 + \text{ПN}_1 \uparrow \text{ИПN}_3 + \times \sin \dots$$

Для $k = 8, 0 = \text{ПN}_1, 2 = \text{ПN}_2, 0,1 = \text{ПN}_3$ получим $x(i) = -0,87157584; -0,63810691; -0,89080387; 0,92208907; 0,45202783; \dots$

11. Радиоимпульс длительностью $\tau = k\theta$ с периодом $T = (m+k)\theta$ с высокочастотным заполнением $\sin(2\pi i \theta/T_v)$ при $m = \text{ПN}_1, 2\pi\theta/T_v = \text{ПN}_2$ моделируется, например, фрагментом

$$\text{ИПN}_1 1 + \text{ПN}_1 m - x < 0 11 \text{ Сх БП} \\ 19 k - x \neq 0 03 \text{ ИПN}_1 \text{ ИПN}_2 \times \cos(\text{или } \sin) \dots$$

Для $6 = \text{ПN}_1, m = 9, k = 9,2\pi\theta/T_v = \pi/5 = \text{ПN}_2$ получим $x(i) = 0; 0; 0,80901704; 1; 0,80901704; 0,30901703; -0,30901703; -0,80901704; -1; -0,80901704; -0,30901703; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0,80901704; \dots$

Приведенные примеры могут служить основой и для моделирования детерминированных сигналов другой формы.

12. Случайные сигналы $x(i)$ с известным распределением.

Работа ЭВМ по заданной программе является детерминированным процессом, с помощью которого, строго говоря, невозможно получить случайные результаты. Поэтому случайные процессы моделируют на ЭВМ последовательностями некоррелированных чисел с требуемым распределением, называемых квазислучайными или псевдослучайными числами. Общий способ получения таких последовательностей заключается в вычислении для очередного элемента последовательности x_i функции $f(x_i) > x_i$ с последующим отбрасыванием содержимого нескольких старших разрядов значения $f(x_i)$. Значение содержимого оставшихся разрядов и принимается в качестве следующего элемента x_{i+1} .

Для генерирования последовательности целых квазислучайных чисел с равномерным распределением в интервале $(0; a)$ обычно используют формулу вычетов

$$z_i = bz_{i-1} - aE(bz_{i-1}/a),$$

где a и b — целые числа ($a > b$), а $E(\cdot)$ — символ целой части содержимого скобок.

Период (число неповторяющихся элементов) последовательности z_i зависит от выбора коэффициентов a и b . Хорошие результаты дает метод Коробова, согласно которому a выбирают из множества больших простых чисел 2027, 5087, 10079, ..., а $b = a - 3^c \approx a/2$, где c — положительное целое число. Начальное значение z_0 выбирают из множества целых чисел интервала $(0; a)$. Фрагмент формирования представляет самостоятельный интерес, поэтому представим его в виде отдельной программы.

Программа 44. Генерирование целых неповторяющихся чисел z_i с равномерным распределением в интервале $(0; a)$

ИП9 ИПВ \times П8 ИПА \div 1 + П3 КИПЗ
ИП8 ИП3 ИПА \times — П9 С/П БП 00

Инструкция. ($a = PA$, $b = PB$) $z_0 = P9$ В/О С/П РХ = z_1 С/П РХ = z_2
С/П РХ = z_3 ... ($t \approx 7$ с).

Длину этой программы можно сократить на один шаг, если ее основная часть не используется в качестве начального фрагмента более сложной программы. Для этого следует исключить оператор П9 перед оператором С/П, а начальный оператор ИП9 заменить оператором П9. В этом случае формулу $z_0 = P9$ в инструкции следует заменить на $z_0 = RX$ и не изменять содержимое RX перед следующим пуском программы нажатием клавиш С/П или В/О и С/П.

Пример. При $a = 2027$, $b = 1298$, $z_0 = 100$ получим $z_i = 72; 214; 73; 1512; 440; 1533; 1347; 1132; 1788; 1936; ...$

Выбор коэффициентов a и b по методу Коробова обеспечивает максимальный период генерируемых последовательностей z_i , равный a , но каждая такая последовательность определяется выбором начального значения z_0 . Обычно квазислучайные числа с равномерным распределением генерируют в стандартном интервале $(0; 1)$ с последующим его преобразованием по мере необходимости. Для генерирования таких квазилинейных чисел x_i достаточно дополнить программу 44 фрагментом ИПА \div перед оператором С/П. В этом случае, например, при $z_0 = 100$ получим $x_i = 0,035520437; 0,10557474; 0,036013813; 0,74592994; 0,21706956; ...$

Если не требуется большого периода генерируемой последовательности квазилинейных чисел с равномерным распределением в интервале $(0; 1)$, то, выбрав простейшую функцию $f(x_i) > x_i$, обеспечивающую достаточно большой период, можно упростить программу и уменьшить время ее выполнения.

Программа 45. Генерирование квазислучайных чисел x_i с равномерным распределением в интервале $(0; 1)$

ИП9 π + e^x П9 КИП9 → ИП9 — П9
С/П БП 00

Инструкция. $x_0 = P9$ В/О С/П РХ = x_1 С/П РХ = x_2 С/П РХ = x_3 ...
($t \approx 5$ с).

Пример. Для $x_0 = 0,5$ получим $x_i = 0,152545; 0,954155; 0,084227; 0,174197; 0,544131; ...$

Эту программу (если ее основная часть не используется в качестве фрагмента более сложной программы) также можно сократить на один шаг, исключив оператор П9 перед оператором С/П и заменив начальный оператор ИП9 на оператор П9. В этом случае перед первым пуском программы значение x_0 следует набрать в регистре РХ и не изменять его содержимого перед каждым следующим пуском программы.

Последовательности квазислучайных чисел с распределениями, отличающимися от равномерного, обычно формируют путем аналитических преобразований квазислучайных чисел x_i с равномерным распределением в интервале (0; 1). Например, для получения последовательности квазислучайных чисел r_i с распределением Рэлея достаточно каждый очередной элемент x_i генерируемой последовательности квазислучайных чисел с равномерным распределением в интервале (0; 1) преобразовать по формуле $r_i = \sqrt{2\sigma^2 \ln(1/x_i)}$, реализуемой фрагментом

$1/x \ln \text{ИПД} \times 2 \times \nu$
при $x_i = \text{РХ}$, $2\sigma^2 = \text{РД}$.

Для генерирования квазислучайных чисел y_i с нормальным распределением удобно использовать аналитическое преобразование $y_i = r_i \sin(2\pi x_{i-1})$ предварительно формируемых квазислучайных чисел r_i с распределением Рэлея и x_i с равномерным распределением в интервале (0; 1).

Программа 46. Генерирование квазислучайных чисел x_i с равномерным распределением в интервале (0; 1), r_i с распределением Рэлея и y_i с нормальным распределением, дисперсией σ^2 и математическим ожиданием a

ИП9 П6	π	$+$	e^x	П9 КИП9	\rightarrow	ИП9 —			
П9	$1/x$	\ln	ИПД	\times	2	\times	ν	—	П8 ИП6
2	\times	π	\times	\sin	\times	ИПА	$+$	С/П БЛ	
00									

Инструкция. Установить переключатель Р—ГРД—Г в положение Р, ($a = \text{РА}$, $\sigma^2 = \text{РД}$) $x_0 = \text{Р9}$ В/О С/П РХ = y_1 , Р8 = r_1 , Р9 = x_1 С/П РХ = y_2 , Р8 = r_2 , Р9 = x_2 С/П РХ = y_3 , Р8 = r_3 , Р9 = x_3 ... ($t \approx 11$ с.).

Пример. При $\sigma^2 = 2$, $a = 2$, $x_0 = 0,5$ получим $y_1 = 2; 2,354544; 1,1062826; 3,3347921; 3,3865675; \dots; r_1 = 2,7424774; 0,4332625; 3,1459434; 2,6439125; 1,5602118; \dots; x_1 = 0,152445; 0,954155; 0,084227; 0,174197; 0,544131; \dots$

Может оказаться целесообразным и составление отдельной программы для квазислучайных чисел r_i с распределением Рэлея, характерным, например, для распределения помех на выходе амплитудного детектора

$$p(r) = re^{-r^2/2\sigma^2/\sigma^2}, r \geq 0.$$

При надлежащем выборе нелинейного преобразования радиометрических квазислучайных чисел можно моделировать случайные числа и с другими распределениями.

Генерирование квазислучайных чисел упрощается при использовании ПМК с входным языком ЯМК52. Так, при использовании оператора $[x]$ для выделения целой части числа длина программы 44 значительно уменьшается.

Программа 47/52. Генерирование целых неповторяющихся чисел z_i из интервала (0; a)

ИПВ \times \uparrow ИПА \div [x] ИПА \times $-$ С/П
БП 00

Инструкция. $a=PA$, $b=PB$, $z_0=RX$ В/О С/П $RX=z_1$ С/П $RX=z_2$
С/П $RX=z_3 \dots (t \approx 4 \text{ с.})$.

Для проверки правильности ввода и выполнения этой программы можно воспользоваться данными примера к программе 44.

При использовании ПМК с входным языком ЯМК52 программа 45 заменяется одним оператором СЧ, формирующим квазислучайные числа с равномерным распределением в интервале (0; 1). Соответственно упрощаются и все программы, в которых генерируются последовательности таких квазислучайных чисел.

Программа 48/52. Генерирование квазислучайных чисел x_i с равномерным распределением в интервале (0; 1), r_i с распределением Рэлея и y_i с нормальным распределением, дисперсией σ^2 и математическим ожиданием a

СЧ П6 СЧ П9 1/x ИП ИПД \times 2 \times
✓ П8 ИП6 2 \times π \times sin \times ИПА
+ С/П ИП9 В/О

Инструкция. $a=PA$, $\sigma^2=PD$ В/О С/П $RX=y_1$, $P8=r_1$, $P9=x_1$ С/П
 $RX=y_2$, $P8=r_2$, $P9=x_2$ С/П ... ($t \approx 8 \text{ с.}$)

Результаты выполнения этой программы зависят от последовательности квазислучайных чисел x_i , формируемых оператором СЧ.

2.5. Элементы синтеза сигналов

Построение непрерывной функции $x(t)$ по заданному частотному спектру называют гармоническим синтезом сигналов. Чаще всего он сводится к суммированию конечного числа $s+1$ членов усеченного тригонометрического ряда Фурье

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^s \left(a_k \cos \frac{2\pi k t}{T} + b_k \sin \frac{2\pi k T}{T} \right). \quad (2.21)$$

При небольшом числе $s \leq 6$ гармонических составляющих этого ряда функцию $x(t)$ удобно вычислять по программе с предварительным занесением коэффициентов в регистры числовой памяти микрокалькулятора.

Программа 49. Вычисление усеченного ряда Фурье с числом $s \leq 6$ гармонических составляющих

π	\times	ПД 1	3	П0 Сх	\uparrow	\leftrightarrow	КИП0
ИП0	ИПД	\times	sin	\times	+	ИП0 ИПД	\times cos
КИП0	\times	+	ИП0 1	\rightarrow	x=0 08	\leftrightarrow	...
+ C/П	БП 00						

Инструкция. Заменить в программе многоточие операторами набора числа $a_0/2$ (для ПМК с выходным языком ЯМК52 можно заменить многоточие оператором ИПЕ с вводом $a_0/2=PE$ перед первым пуском программы). Установить переключатель Р—ГРД—Г в положение Р; ($a_1=P1$, $b_1=P2$, $a_2=P3$, $b_2=P4$, ..., $a_6=PB$, $b_6=PC$) $t_1/T=RX$ В/О С/П $RX=x$ (t_1/T), $t_2/T=RX$ С/П $RX=x(t_2/T)$, $t_3/T=RX$ С/П $RX=x(t_3/T)$... ($t \approx 48 \text{ с.}$).

При $s < 6$ вместо отсутствующих коэффициентов в соответствующие регистры памяти должны быть занесены нули, но в этом случае для уменьшения затрат времени на вычисления ($t = (3+8s)c$) целесообразно заменить операторы набора числа 13 по адресам 03 и 04 операторами набора числа $2s+1$, занимающими два шага (например, при $s=3$ следует заменить 13 операторами набора цифир 07).

Пример. Для $a_0/2 = 2$, $a_1 = 10$, $b_1 = 5$, $a_2 = 8$, $b_2 = 2$, $a_3 = 4$, $b_3 = 1$, $a_4 = 1$, $b_4 = 0,2$, $a_5 = 0,1$, $b_5 = 0,05$ при замене в программе операторов 13 операторами 11 получим $x(0,1) = 16,326874$, $x(0,15) = 0,68811314$, $x(0,2) = 0,9438394$ ($t \approx 40$ с).

Когда $s > 6$ и все коэффициенты вычисляемого тригонометрического многочлена не могут быть размещены в памяти ПМК, приходится использовать программы вычисления $x(t)$ с последовательным вводом коэффициентов.

Программа 50. Вычисление усеченного ряда Фурье с произвольным числом s гармонических составляющих

П7 ↔ π × 2 × П8 Сх П4 КИП4

ИП4 С/П П9 ↔ ИП8 ИП4 × П5 cos ×

ИП5 sin ИП9 × + ИП7 -- П7 БП 09

Инструкция. $t/T = PY$, $a_0/2 = RX$ В/О С/П $RX = 1$, $a_1 = PY$, $b_1 = RX$ С/П $RX = 2$, $a_2 = PY$, $b_2 = RX$ С/П $RX = 3$... $a_s = PY$, $b_s = RX$ С/П $RX = s+1$, Р7 = $x(t/T)$; $t = 12$ с.

Для проверки программы можно воспользоваться данным примера к программе 49.

Несколько проще реализуется вычисление косинусоидального усеченного ряда Фурье

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^s C_k \cos\left(\frac{2\pi k t}{T} + \psi_k\right), \quad (2.22)$$

где $C_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}$, $\psi_k = -\arctg(b_k/a_k)$.

Программа 51. Вычисление косинусоидального усеченного ряда Фурье с числом $s \leq 6$ гармонических составляющих

π × ПД 1 3 П0 Сх ↑ ↔ КИП0

ИПД ИП0 × + cos КИП0 > ↓ ИП0 1

— x=0 08 ↔ ... + С/П БП 00

Инструкция. Заменить в программе многоточие операторами набора числа $a_0/2$ (для ПМК с входным языком ЯМК52 оператором ИПЕ с вводом $a_0/2 = PE$ перед первым пуском программы). Установить переключатель Р—ГРД — Г в положение Р. ($C_1 = P1$, $\varphi_1 = P2$, $C_2 = P3$, $\varphi_2 = P4$, ..., $C_6 = PB$, $\varphi_6 = PC$) $t_1/T = RX$ В/О С/П $RX = x(t_1/T)$, $t_2/T = RX$ С/П $RX = x(t_2/T)$... ($t \approx 42$ с).

Пример. Для $a_0/2 = 2$, $C_1 = 10$, $\varphi_1 = 0$, $C_2 = 8$, $\varphi_2 = 0,5$, $C_3 = 5$, $\varphi_3 = 0,8$, $C_4 = 2$, $\varphi_4 = 2$, $C_5 = 0,5$, $\varphi_5 = 3$, $C_6 = \varphi_6 = 0$ получим $x(0,2) = -2,57664$.

Программа 52. Вычисление усеченного косинусоидального ряда Фурье с произвольным числом s гармонических составляющих

П7 ↔ π × 2 × П8 Сх П4 КИП4

ИП4 С/П ИП8 ИП4 × + cos × ИП7 +

П7 БП 09

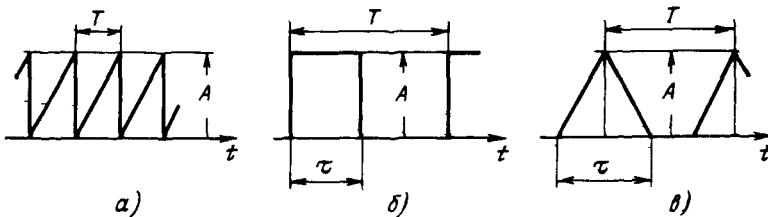


Рис. 8

Инструкция. $t/T = PY$, $a_0/2 = PX$ B/O C/P $PX=1$, $C_1 = PY$, $\varphi_1 = PX$ C/P $PX=2$, $C_2 = PY$, $\varphi_2 = PX$ C/P $PX=3 \dots C_s = PY$, $\varphi_s = PX$ C/P $PX=S+1$. $P7 = x(t, T)$; $t \approx 6$ с.

Для проверки программы можно воспользоваться данными примера к программе 51.

Вычисления по программе 50 и 52 при $s > 6$ связаны со значительными затратами времени, так как ввод всех коэффициентов приходится повторять для каждого значения t/T . Эти затраты времени можно несколько уменьшить, составляя рабочие программы для вычисления тригонометрических многочленов с конкретными значениями коэффициентов с учетом иулевых значений коэффициентов, возможности уменьшения их числа нормированием и смещением начала отсчета аргумента [14]. Вычисление тригонометрических многочленов с большим числом гармонических составляющих упрощается в тех случаях, когда коэффициенты связаны достаточно простыми соотношениями и могут быть вычислены в процессе решения задачи с помощью однотипных выражений.

В ряде случаев, например при разработке синтезаторов сигналов, представляют интерес зависимость формы синтезируемых сигналов от числа гармонических составляющих. Простейшим примером может служить формирование линейно изменяющегося пилообразного напряжения (рис. 8, a), отображаемого рядом Фурье

$$x(t) = \frac{A}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} -\frac{A}{k\pi} \sin \frac{2\pi k t}{T}. \quad (2.23)$$

Значения $x(t)$ при ограничении этого ряда конечным числом s гармонических составляющих можно вычислить по программе с автоматическим формированием членов ряда.

Программа 53. Вычисление тригонометрического ряда, аппроксимирующего пилообразное напряжение

```

 $\pi \times 2 \times \text{П7} \ 2 \ 1/x \ \text{П5} \ \text{ИП8 П0}$ 
 $\text{Сx} \ \text{П6 КИП6 ИП6 ИП7} \times \sin \text{ИП6} / - / \pi$ 
 $\times \div \text{ИП5} \div \text{П5 L0 12 ИП9} \times \text{C/P}$ 

```

Инструкция. Установить переключатель Р—ГРД—Г в положение Р: ($s = \text{П8}$, $A = \text{П9}$), $t_1/T = PX$ B/O C/P $PX = x(t_1/T)$, $t_2/T = PX$ B/O C/P $PX = x(t_2/T)$...; $t \approx (10+4s)$ с.

Пример. Для $A=1$ и $s=5$ получим $x(0,1)=0,13852093$, $x(0,2)=0,24176901$, $x(0,3)=0,27750153$, $x(0,4)=0,41013174$; $x(0,5)=0,50000003$, $x(0,6)=0,58986828$, $x(0,7)=0,72249848$, $x(0,8)=0,75823097$, $x(0,9)=0,98614786$, $x(1)=0,5$ ($t \approx 30$ с).

Прямоугольный импульс с длительностью τ , периодом T и максимальным значением A (рис. 8, б) отображается рядом Фурье

$$x(t) = \frac{A\tau}{T} + \sum_{k=1}^{\infty} 2 \frac{A\tau}{T} \frac{\sin(\pi k\tau/T)}{\pi k\tau/T} \cos \frac{2\pi kt}{T}. \quad (2.24)$$

Члены этого ряда определяются более сложными выражениями, чем члены предыдущего ряда, что соответственно усложняет и программную реализацию вычислений значений усеченного ряда.

Программа 54. Вычисление тригонометрического ряда, аппроксимирующего последовательность прямоугольных импульсов

$$\begin{array}{ccccccccc} \pi & \times & 2 & \times & \text{П4} & 1 & \text{П5} & \text{ИП7} & \text{П0} & \pi \\ \text{ИП8} & \times & \text{П3} & \text{Cx} & \text{П6} & \text{КИП6} & \text{ИП6} & \text{ИП3} & \times & \uparrow \\ \sin & \leftrightarrow & \div & \text{ИП6} & \text{ИП4} & \times & \cos & \times & 2 & \times \\ \text{ИП5} & + & \text{П5} & \text{L0} & 15 & \text{ИП9} & \times & \text{ИП8} & \times & \text{С/П} \end{array}$$

Инструкция. Установить переключатель Р—ГРД—Г в положение Р; ($s=P7$, $\tau/T=P8$, $A=P9$) $t/T=PX$ В/О С/П $PX=x(t/T)$; $t \approx (5+7)s$.

Пример. Для $s=5$, $\tau=0,5$, $A=1$ получим $x(0,1)=0,95328775$; $x(0,2)=-0,99572905$; $x(0,3)=0,00421095$; $x(0,4)=0,04671226$; $x(0,5)=-0,05173716$; $x(0,6)=0,04671218$; $x(0,7)=0,00427097$; $x(0,8)=0,9957291$; $x(1,0)=1,0517372$ ($t \approx 40$ с).

Последовательность симметричных треугольных импульсов с периодом T (рис. 8, в) отображается тригонометрическим рядом

$$x(t) = \frac{A\tau}{2T} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A\tau}{T} \left[\frac{\sin(\pi k\tau/2T)}{\pi k\tau/2T} \right]^2 \cos \frac{2\pi kt}{T}. \quad (2.25)$$

и аппроксимируется суммой конечного числа членов s этого ряда.

Программа 55. Вычисление тригонометрического многочлена, аппроксимирующего периодическую последовательность симметричных треугольных импульсов

$$\begin{array}{ccccccccc} \pi & \times & 2 & \times & \text{П4} & 2 & 1/x & \text{П5} & \text{ИП7} & \text{П0} \\ \pi & \text{ИП8} & \times & 2 & \div & \text{П3} & \text{Cx} & \text{П6} & \text{КИП6} & \text{ИП16} \\ \text{ИП4} & \times & \cos & \text{ИП3} & \text{ИП6} & \times & \uparrow & \sin & \leftrightarrow & \div \\ x^2 & \times & \text{ИП5} & + & \text{П5} & \text{L0} & 18 & \text{ИП9} & \times & \text{ИП8} \\ \times & \text{С/П} \end{array}$$

Инструкция. Установить переключатель Р—ГРД—Г в положение Р; ($s=P7$, $\tau=P8$, $A=P9$) $t/T=PX$ В/О С/П $PX=x(t/T)$; $t \approx (6+7)$ с.

Пример. Для $s=5$, $\tau=0,5$, $A=1$ получим $x(0)=0,9191702$; $x(0,1)=0,6103753$; $x(0,2)=0,19107881$; $x(0,3)=-0,01896104$; $x(0,4)=0,14864589$; $x(0,5)=-0,013885435$; $x(0,6)=0,014864611$; $x(0,7)=-0,01896104$; $x(0,8)=0,19107881$; $x(0,9)=0,6103755$; $x(1,0)=0,9191702$ ($t \approx 42$ с.).

Подобные программы можно составить и для синтеза периодических последовательностей импульсов другой формы [4]. В общем случае синтеза произвольных периодических сигналов задают их табличную модель $x(i\theta) = x_i$ ($i=0$,

1, 2, ..., n) с постоянным интервалом $\theta = t_i - t_{i-1}$, отображающую $m = n + 1$ отсчетов функции на период T , по которой методами аппроксимации или интерполяции (частично рассмотренными в § 4.1) синтезируют непрерывную функцию $x(t)$.

Значения непрерывной функции $x(t)$ с ограниченным спектром связаны с отсчетами $x(i\theta)$ ее табличной модели с постоянным интервалом рядом Котельникова

$$x(t) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} x(i\theta) \frac{\sin \pi (t - i)}{\pi (t - i)}.$$

С помощью этого ряда, в частности, сравнивают реакции идеального и реально-го интерполяционных фильтров в аналого-цифровых системах на заданную последовательность коротких импульсов. При решении такой задачи для уменьшения числа исходных данных целесообразно перейти к нормированному аргументу $\xi = t/\theta$ и не пользоваться усеченный ряд Котельникова

$$x(\xi) \approx \sum_{i=0}^n x(i) \frac{\sin \pi (\xi - i)}{\pi (\xi - i)}. \quad (2.26)$$

При целых значениях ξ значения функции $x(\xi)$ совпадают со значениями $x(i)$ отсчетов табличной модели и в использовании ряда нет необходимости. При нецелевых значениях ξ , соответствующих значениям t между узлами t_i табличной модели, автоматическое вычисление значений $x(\xi)$ как суммы усеченного ряда (многочлена) Котельникова (2.26) обеспечивают следующие программы, при использовании которых для значений $\xi = i$ высвечивается сигнал переполнения ЕГГОГ, так как для этих значений (равных отсчетам табличной модели) не предусмотрено раскрытие неопределенности вида О/О.

Программа 56. Вычисление суммы $m = n + 1 \leq 12 (m \leq 13$ для ЯМК52) членов ряда Котельникова при $\xi \neq i$.

```

Л ПД → 1 П0 0 КИП0 ИПД
БП 18 → КИП0 ИПД л = ПД sin ИПД
      ИП0 х 0 12 → С П

```

Инструкция. Установить переключатель Р—ГРД—Г в положение Р; ($x(0) = P_1, x(1) = P_2, \dots, x(n) = P(n+1)$) $m = PY$, $\xi = RX$ В/О С/П $RX \Rightarrow x(\xi)$; $t \approx 2ms$. Для ПМК с входным языком ЯМК52 заменить в программе операторы ПД и ИПД соответственно операторами ПЕ и ИПЕ.

Пример. Для $x(i) = 5; 6; 7; 8; 9; 10; 0; 1; 2; 3; 4; 0; 0$ получим $x(5.5) = 5.0259$, $x(11.3) = 3.359716$.

При отказе от косвенного вызова из памяти максимальное число членов ряда можно увеличить на единицу.

Программа 57. Вычисление суммы $m = 13$ членов ряда Котельникова при $\xi \neq i$.

$\pi \times \text{ПД} 0 \text{ ИП0 ИПД ПП 49 ИП1 ПП}$
 45 ИП2 ПП 45 ИП3 ПП 45 ИП4 ПП 45
 ИП5 ПП 45 ИП6 ПП 45 ИП7 ПП 45 ИП8
 ПП 45 ИП9 ПП 45 ИПА ПП 45 ИПВ ПП
 45 ИПС ПП 45 С П ИПД π — ПД sin
 ИПД \div \times + В.О

Инструкция. Установить переключатель Р—ГРД—Г в положение Р; ($x(0)=P_0$, $x(1)=P_1$, $x(2)=P_2$, ..., $x(11)=P_{11}$, $x(12)=P_{12}$), $\xi=RX$ В/О С/П $RX=x(\xi)$; $t \approx 65$ с.

Программа 58/52. Вычисление суммы $m=14$ членов ряда Котельникова при $\xi \neq i$.

$\pi \times \text{ПЕ} 0 \text{ ИП0 ИПЕ ПП 52 ИП1 ПП}$
 48 ИП2 ПП 48 ИП3 ПП 48 ИП4 ПП 48
 ИП5 ПП 48 ИП6 ПП 48 ИП7 ПП 48 ИП8
 ПП 48 ИП9 ПП 48 ИПА ПП 48 ИПВ ПП
 48 ИПС ПП 48 ИПД ПП 48 С/П ИПЕ π
 — ПЕ sin ИПЕ \div \times + В.О

Инструкция. Установить переключатель Р—ГРД—Г в положение Р; ($x(0)=P_0$, $x(1)=P_1$, ..., $x(12)=P_{12}$, $x(13)=P_D$), $\xi=RX$ В/О С/П $RX=x(\xi)$; $t \approx 70$ с.

Если число отсчетов табличной модели превышает емкость числовой памяти ПМК, можно воспользоваться следующей программой.

Программа 59. Вычисление суммы произвольного числа m членов ряда Котельникова при $\xi \neq i$

$P9 \cdot Cx P4 P8 C/P ИП9 ИП4 — \pi \times$
 $sin Bx \div \times ИП8 + P8 КИП4 ИП4 БП$
 04

Инструкция. Установить переключатель Р—ГРД—Г в положение Р; $\xi=RX$ В/О С/П $RX=0$, $x(0)=RX$ С/П $RX=1$, $x(1)=RX$ С/П $RX=2$, $x(2)=RX$ С/П $RX=3$... $x(\xi)=RX$ С/П $RX=n+1$, $P8=x(\xi)$.

Для проверки правильности ввода и выполнения программ 57, 58/52 и 59 можно воспользоваться данными примера к программе 56. Если требуется однократное вычисление $x(\xi)$ независимо от числа m отсчетов табличной модели, целесообразно использовать программу 59; в этом случае затраты времени на ввод исходных данных и выполнение программы минимальны. Если требуется многократное вычисление $x(\xi)$ при различных значениях ξ , то затраты времени при использовании программы 59 оказываются значительными; для каждого значения ξ приходится повторять ввод всех отсчетов табличной модели сигнала. Поэтому, если число отсчетов превышает предельное значение m для программ 56, 57 или 58, целесообразно разбить табличную модель на части с числом отсчетов, не превышающим предельное значение m , и повторить вычисления для каждой части. При этом следует лишь учитывать, что нумерация отсчетов для каждой части должна начинаться с нуля. Во многих случаях в таком разбиении табличной модели на части нет необходимости при вычислении небольшого числа значений $x(\xi)$; они в основном определяются значениями ближайших отсчетов

$x(i)$. Поэтому при большом числе отсчетов для вычисления значения $x(\xi)$ можно ограничиться частью табличной модели с предельным для выбранной программы числом m отсчетов и интервалом аргумента, в котором заданное значение ξ находится примерно посередине. В этом случае нумерация отсчетов выбранной части табличной модели должна начинаться с нуля, а значение аргумента должно быть заменено значением $\xi - m_0$, где m_0 — число отсчетов отброшенной начальной части табличной модели.

2.6. Статистическая обработка информации и корреляционный анализ

Типичной задачей статистической обработки информации является оценка начальных или центральных моментов случайной величины по ее выборке объемом n :

$$m_k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^k \text{ или } M_k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - m_1)^k.$$

Обычно ограничиваются оценкой первого начального и трех центральных моментов, по которым находят оценку дисперсии $\sigma^2 = nM_2/(n-1)$, асимметрии распределения $\gamma_3 = M_3/\sqrt{M_2^3}$ и коэффициента эксцесса $\gamma_4 = (M_4/M_2^2) - 3$.

Первые центральные и начальные моменты связаны соотношениями:

$$M_2 = m_2 - m_1^2; \quad M_3 = m_3 - 3m_2m_1 + 2m_1^3 = m_3 - 3M_2m_1 - m_1^3; \quad M_4 = m_4 - 4m_3m_1 + 6m_2m_1^2 - 3m_1^4 = m_4 - 4M_3m_1 - 6M_2m_1^2 - m_1^4. \quad (2.27)$$

Эти соотношения использованы в следующих программах статистической обработки выборки x_1, x_2, \dots, x_n случайной величины.

Программа 60. Вычисление оценок первых начальных m_1, m_2, m_3, m_4 центральных $M_2 = \sigma^2, M_3, M_4$ моментов, коэффициентов γ_3 асимметрии γ_4 эксцесса

Cx	P0	P1	P2	P3	P4	C/P	↑	↑	ИП0
+	P0	→	x^2	ИП1	+	P1	→	x^2	x^2
ИП3	+	P3	→	x^2	×	ИП2	+	P2	КИП4
ИП4	БП	06	ИП0	ИП4	÷	П5	ИП1	ИП4	÷
П6	ИП5	x^2	—	П9	ИП2	ИП4	÷	П7	ИП9
3	×	ИП5	x^2	—	ИП5	×	—	ПА	ИП9
↑	x^2	×	r^-	÷	ПС	ИП3	ИП4	÷	П8
ИП9	6	×	ИП5	x^2	+	ИП5	×	ИПА	4
×	+	ИП5	×	—	ПВ	ИП9	x^2	÷	3
—	ПД	ИП5	БП	06					

Инструкция. В/О С/П РХ=0, $x_1=\text{РХ}$ С/П РХ=1, $x_2=\text{РХ}$ С/П РХ=2, $x_3=\text{РХ}$ С/П РХ=3 ... $x_n=\text{РХ}$ С/П ($t \approx 7$ с) РХ= n БП 3 3 С/П ($t \approx 20$ с) РХ= $=P5=\tilde{m}_1$, Р6= \tilde{m}_2 , Р7= \tilde{m}_3 , Р8= \tilde{m}_4 , Р9= $\tilde{M}_2=\tilde{\sigma}^2$, РА= \tilde{M}_3 , РВ= \tilde{M}_4 , РС= $\tilde{\gamma}_3$, РД= $\tilde{\gamma}_4$; для продолжения вычислений $x_{n+1}=\text{РХ}$ С/П РХ= $n+1$, ...

Пример. Для выборки $x_i=1,01; 1,02; 1,03; 1,04; 1,05$ получим $\tilde{m}_1=1,03$, $\tilde{m}_2=1,0611$, $\tilde{m}_3=1,093345$, $\tilde{m}_4=1,1267819$; $\tilde{M}_2=\tilde{\sigma}^2=0,0002$, $\tilde{M}_3=2,185454$, $\tilde{M}_4=-9,00407$. $\tilde{y}_3=772674,67$, $\tilde{y}_4=-2,2510175 \cdot 10^8$.

Для уменьшения затрат времени программы 60 может быть преобразована — изъяты фрагменты для вычисления оценок, не требуемых для решения задачи. Во многих задачах требуется вычисление лишь оценок m_1 и σ^2 последовательности случайных чисел. Если заранее неизвестно требуемое число элементов выборки, то в этом случае можно использовать следующую программу.

Программа 61. Вычисление текущих оценок m_1 и σ^2 последовательности случайных чисел x

```

П7   x2  П8   1   П4 ИП7 С/П ИП7   —  П9
КИП4 → ИП4 ÷ ИП7 + П7 ИП9 x2 ИП4
      ÷ ИП4 2 — ИП8 × ИП4 1 — ÷
      + П8 ИП7 БП 06
  
```

Инструкция. $x_1=RX$ В/О С/П $x_2=RX$ С/П ... $x_n=RX$ С/П $RX=\tilde{m}_1$, $RY=\tilde{\sigma}^2$, $P4=i$ ($t \approx 8$ с), $x_{n+1}=RX$ С/П ...

Пример. Для $x_i=1,01; 1,02; 1,03; 1,04; 1,05$ соответственно получим $\tilde{m}_1=-1,01; 1,015; 1,02; 1,025; 1,03$ и $\tilde{\sigma}^2=1; 0,00005; 0,0001; 0,0001666667; 0,00025$.

Вычисленная по этой программе текущая оценка дисперсии отличается от оценки второго центрального момента множителем $i/(i-1)$ и при распределениях случайных величин, отличающихся от нормального, может оказаться смещенной. В частности, из сравнения данных примеров к программам 60 и 71 видно, что вычисленная по программе 61 оценка дисперсии смещена и несколько отличается от оценки M_2 , вычисленной по программе 60.

Если математическое ожидание m_1 и дисперсию σ^2 оценивают для выборки x_i заданного объема, целесообразно использовать следующую программу, в которой оценка дисперсии равна оценке второго центрального момента.

Программа 62. Вычисление оценок m_1 и σ^2 выборки из n случайных чисел

```

Сx П8 П9 П6 С/П x2 Вх ИП8 + П8
↔ ИП9 + П9 КИП6 ИП6 БП 04 ИП8 ИП6
      ÷ П7 ИП9 ИП6 ÷ ИП7 x2 — БП 04
  
```

Инструкция: В/О С/П ($t \approx 3$ с) $RX=0$, $x_1=RX$ С/П $RX=1$, $x_2=RX$ С/П $RX=2$... $x_n=RX$ С/П $RX=n$ ($t \approx 4$ с) БП 1 8 С/П ($t \approx 5$ с) $RX=\tilde{\sigma}^2$, $RY=\tilde{m}_1$; для продолжения вычислений $x_{n+1}=RX$ С/П $RX=n+1$...

Пример. Для выборки $x_i=1,01; 1,02; 1,03; 1,04; 1,05$ получим $\tilde{\sigma}^2=0,0002$, $\tilde{m}_1=1,03$.

Если для обрабатываемой выборки случайных чисел $\sigma^2 \gg m_1$, то вычисление оценок центральных моментов по формулам (2.27) может привести к значительным операционным погрешностям [15]. Их можно уменьшить, вычитая из вводимых значений x_i число a , близкое к ожидаемому значению m_1 . Тогда после окончания вычислений искомое значение $m_1=m'_1+a$, а в формулы для вычисления оценок остальных центральных моментов вместо m_1 следует подставить m'_1 .

При небольшой дисперсии случайных чисел x_i этот процесс можно автоматизировать, приняв в качестве числа a значение m_1 и соответственно изменив программу.

Программа 63. Вычисление оценок m_1 и σ^2 выборки из большого числа n случайных чисел x_i :

```

П5 Сх П6 П8 П9 КИП6 ИП6 С,П ИП5 —
x2 Вх ИП8 + П8 ↔ ИП9 + П9 БП
05 ИП8 ИП6 ÷ П7 ИП5 + П4 ИП9 ИП6
÷ ИП7 x2 — БП 07

```

Инструкция. $x_1=RX$ В/О С/П РХ=1, $x_2=RX$ С/П РХ=2 ... $x_n=RX$ ($t \approx 4$ с) РХ= n БП 2 1 С/П ($t \approx 5$ с) РХ= $\tilde{\sigma}^2$, РY=P4= \tilde{m}_1 , Р7= \tilde{m}'_1 .

Эту программу целесообразно использовать, если $m_1 \gg \sigma^2$, но числа x_i содержат не более восьми значащих цифр. В этом случае операционные погрешности результата можно уменьшить, используя оценку $m_1=\tilde{m}'_1+x_1$. Например, для $x_1=10000,015; 10000,037; 9999,99; 10000,045; 10000,095$ по этой программе получим $\tilde{\sigma}^2=0,00122384$, $\tilde{m}_1=10000,036$, $\tilde{m}'_1=0,0214$ и уточненная оценка $\tilde{m}_1=\tilde{m}'_1+x_1=10000,0364$. При обработке той же выборки, например, по программе 61 получим $\tilde{m}_1=10000,036$, $\tilde{\sigma}^2=0$, так как при вычислении дисперсии значения x^2 округляются до восьми значащих цифр. Если числа x_i содержат более восьми значащих цифр мантиссы одинакового порядка, следует выбрать число a , близкое к среднему значению выборки, вычислить по одной из приведенных программ \tilde{m}'_1 для $x'_i=x_i-a$ и лишь после этого без микрокалькулятора найти значение $\tilde{m}_1=\tilde{m}'_1+a$.

В радиотехнике большое значение имеют корреляционные соотношения между различными случайными сигналами или между значениями одного и того же сигнала в различные моменты времени. Корреляционная связь между случайными величинами y_i и x_i со средними значениями m_{1y} и m_{1x} их совместной выборки размера n определяют корреляционную функцию

$$R_{xy} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - m_{1y})(x_i - m_{1x}).$$

При анализе корреляционной связи между двумя непрерывными случайными процессами их реализации предварительно дискретизируют и чаще всего используют нормированную корреляционную функцию

$$r(xy) = \frac{R_{xy}}{\sqrt{M_{2x} M_{2y}}} = \sum_{i=1}^n \frac{(y_i - m_{1y})(x_i - m_{1x})}{(n-1) \sigma_x \sigma_y}$$

для случайных величин y_i и x_i по их совместной выборке.

Программа 64. Вычисление оценок нормированной корреляционной функции $r(xy)$

P1	↔	P2	×	P0	ИП1	x^2	P3	ИП2	x^2
P4	Cx	P5	КИП5	ИП5	C П	ПД	↔	ПС	×
ИП0	+	P0	ИПД	ИП1	+	P1	ИПС	ИП2	+
P2	ИПД	x^2	ИП3	+	P3	ИПС	x^2	ИП4	+
P4	БП	13	ИП0	ИП5	×	ИП1	ИП2	×	-
ИП3	ИП5	×	ИП1	x^2	-	ИП4	ИП5	✓	ИП2
x^2	-	×	$\sqrt{-}$	÷	БП	15			

Инструкция. $y_0 = PY$, $x_0 = RX$ В/О С/П ($RX = 1$) $y_1 = PY$, $x_1 = RX$ С/П ($RX = 2$) ... $y_n = PY$, $x_n = RX$ С/П ($RX = n+1$) БП 4 3 С/П $RX = r(xy)$.

Пример. Для $(y_i, x_i) = (1; 1,01), (2; 1,02), (3; 1,03), (4; 1,04), (5; 1,05)$ получим $r(xy) = -46$.

Отличие от нуля нормированной корреляционной функции свидетельствует о линейной зависимости между средним значением одной из случайных величин и значениями другой случайной величины, отображаемой уравнениями линейной регрессии

$$m_{1x}(y) m_{1x}(0) + \beta_{x|y} y; m_{1y}(x) = m_{1y}(0) + \beta_{y|x} x.$$

В этом случае начальные значения $m_{1x}(0)$ и $m_{1y}(0)$ называют условными, а величины $\beta_{x|y} = r_{xy}\sigma_x/\sigma_y$ и $\beta_{y|x} = r_{xy}\sigma_y/\sigma_x$ коэффициентами линейной регрессии. Для вычисления этих коэффициентов часто используют метод наименьших квадратов [9], но эти величины и условные $m_{1y}(0) = m_{1y} - \beta_{y|x} m_{1x}$, $m_{1x}(0) = m_{1x} - \beta_{x|y} m_{1y}$ можно найти по параметрам совместной выборки.

Программа 65. Вычисление коэффициентов линейной регрессии $\beta_{x|y}$, $\beta_{y|x}$, условных $m_{1x}(0)$, $m_{1y}(0)$ и оценок характеристик совместной выборки случайных величин y_i и x_i

Cx	P0	P1	P2	P3	P4	P5	C П	P7	↔
P8	×	ИП0	+	P0	ИП7	ИП1	+	P1	ИП7
x^2	ИП2	+	P2	ИП8	ИП3	+	P3	ИП8	x^2
ИП4	+	P4	КИП5	ИП5	БП	07	ИП2	ИП1	x^2
ИП5	÷	-	P7	ИП4	ИП3	x^2	ИП5	÷	-
P8	×	$\sqrt{-}$	ИП0	ИП1	-	ИП3	-	↔	÷
P9	ИП7	ИП8	÷	$\sqrt{-}$	П6	×	ПА	ИП9	ИП6
1/x	×	ПВ	ИП3	ИП1	ИПВ	×	-	ИП5	÷
ПС	ИП1	ИП3	ИПА	×	-	ИП5	÷	БП	07

Инструкция. В/О С/П $RX = 0$, $y_1 = PY$, $x_1 = RX$ С/П ($t \approx 8$ с) $RX = 1$, $y_2 = PY$, $x_2 = RX$ С/П $RX = 2$... $y_n = PY$, $x_n = RX$ С/П $RX = n$ БП 3 7 С/П ($t \approx 15$ с) $RX = m_{1x}(0)$, $PY = P0 = m_{1y}(0)$, $PA = \beta_{x|y}$, $PB = \beta_{y|x}$ ($P7 = n\tilde{\sigma}_x^2$, $P8 = n\tilde{\sigma}_y^2$, $P9 = \tilde{r}_{xy}$, $P1 = n\tilde{m}_{1x}$, $P3 = n\tilde{m}_{1y}$); для продолжения вычислений $y_{n+1} = PY$, $x_{n+1} = RX$ С/П $RX = n+1$...

Для совместной выборки из примера к программе 64 по этой программе получим $m_{1x}(0) = 4741$, $m_{1y}(0) = 2,41$, $\beta_{x|y} = -0,46$, $\beta_{y|x} = -4600(n\tilde{\sigma}_x^2 = 10^{-3}$, $n\tilde{\sigma}_y^2 = 10$, $\tilde{r}_{xy} = -46$, $n\tilde{m}_{1x} = 5,15$, $n\tilde{m}_{1y} = 15$), что соответствует уравнениям регрессии $m_{1y}(x) = 4741 - 0,46 x$, $m_{1x}(y) = 2,41 - 4600 y$.

Анализ корреляционной функции r (τ) случайного процесса можно свести к вычислению по двум выборкам случайной величины, смещенных на s отсчетов эмпирической нормированной корреляционной функции:

$$r(s\theta) = \frac{\sum_{i=1}^{n-s} x_i x_{i+s} - (n-s) \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right) / n^2}{\left[\sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2 / n \right] (n-s-1)/(n-1)}.$$

Максимальное число s отсчетов ограничено емкостью памяти ПМК при вычислении $r(s\theta)$ с помощью одной программы.

Программа 66. Вычисление стационарной временной корреляционной функции $r(s\Delta x)$

ИП7	$x=0$	63	КП0	ИП0	$x=0$	00	С/П	\uparrow	\uparrow
ИПД	\times	ИП6	+	П6	\rightarrow	ИПС	ПД	\times	ИП5
$+$	П5	\rightarrow	ИПВ	ПС	\times	ИП4	$+$	П4	\rightarrow
ИПА	ПВ	\times	ИП3	+	П3	\rightarrow	ИП9	ПА	\times
ИП2	+	П2	\rightarrow	ИП0	П9	\times	ИП1	$+$	П1
\rightarrow	x^2	ИП7	+	П7	\rightarrow	ИП8	$+$	П8	\rightarrow
П0	БП	07	ИП8	x^2	ИПА	\div	П9	$-$	ИПА
1	$-$	\div	ПД	7	П0	КИП0	ИПА	ИП0	$-$
ИПА	\div	ИП9	\times	$-$	ИПД	\div	ИПА	ИП0	$-$
1	$-$	\div	С/П	БП	76				

Инструкция. $0=P7$, $14=P0$ В/О С/П $x_1=RX$ С/П $(RX=x_1)$ $x_2=RX$ С/П $(RX=x_2)$... $x_n=RX$ С/П $(RX=x_n)$ $n=PA$ В/О С/П $RX=r(6\Delta x)$ С/П $RX=r(5\Delta x)$... С/П $RX=r(\Delta x)$.

Пример. Для $x_i=1; 3; -2; 1.5; 0.5; 0; 1; -1.5; 2; -1; 0.5; -1.5$ получим $(12=PA)$ $r(6\Delta x)=-0.782774$, $r(5\Delta x)=0.5278752$, $r(4\Delta x)=-0.196785$, $r(3\Delta x)=-0.148699$, $r(2\Delta x)=0.391689$, $r(\Delta x)=-0.616374$.

Вычисленные оценки параметров случайных величин также являются случайными, и поэтому статистическую обработку информации часто дополняют анализом точности этих оценок. С этой целью по известным размеру n обрабатываемой выборки и распределению случайной величины в соответствии с требуемой точностью оценок определяют доверительный интервал, в котором с заданной (доверительной) вероятностью $P_{\text{дов}}$ находится истинное значение оцениваемого параметра. Чаще всего возникает необходимость в определении доверительного интервала оценки математического ожидания

$$(\tilde{m}_1 - t\sigma/\sqrt{n}) < m_1 < (\tilde{m}_1 + t\sigma/\sqrt{n}), \quad (2.28)$$

где величина $t=t(n, P_{\text{дов}})$, называемая квантилем распределения выборки, равна значению аргумента функции распределения, которому с заданной вероятностью P соответствует выполнение условия $x < t$ или при симметричном распределении равенства

$$\int_0^t p(x) dx = P,$$

где $p(x)$ — плотность вероятности (при двусторонних оценках значение интеграла удваивают).

Для оценки математического ожидания случайной величины с нормальным распределением, дисперсия которой известна, используют квантили $t(p)$ нормального распределения. В общем случае эти квантили определяются решением интегрального уравнения $P = \Phi(t(p))$, где правая часть содержит специальную функцию, называемую интегралом вероятности

$$\Phi(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^x e^{-z^2/2} dz. \quad (2.29)$$

В некоторых таблицах [4] табулированы значения $\Phi_6(x) = 2\Phi(x)$, а во многих приложениях используют функцию $1 - \Phi(x)$. Если эта функция меньше $1 \cdot 10^{-8}$, то при непосредственном вычислении на ПМК по величине $\Phi(x)$ результат попадает в область машинного нуля, в связи с чем ее приходится вычислять другими способами.

В некоторых приложениях вместо интеграла вероятности используют функцию ошибок

$$\operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-z^2} dz = \Phi(x \sqrt{2}),$$

которая может быть вычислена как интеграл вероятности при соответствующем значении аргумента, а также функцию $\operatorname{erfc} x = 1 - \operatorname{erf} x$.

Программа 67. Вычисление интеграла вероятности $\Phi(x)$, функций $1 - \Phi(x)$, $\operatorname{erf} x$ и $\operatorname{erfc} x$ с шестью верными цифрами

П7	П8	x^2	П9	9	—	$x < 0$	37	Cx	П6
КИП6	ИП7	ИП8	/—	ИП9	×	ИП6	2	>	÷
П8	Bx	1	+	÷	+	П7	—	x=0	10
ИП7	2	π	÷	✓	×	C/P	ИП9	1 · x	'
↑	↑	3	,	7	×	1	—	×	1
5	×	3	+	×	1	—	×	—	—
↔	↑	1/x	e ^x	÷	2	×	π	÷	✓
×	↑	1	↔	—	C/P				

Инструкция. $x = RX$ B/O C/P RX = $\Phi(x)$, PY = $1 - \Phi(x)$: время счета менее 2 мин при $x < 3$ и около 17 с при $x \geq 3$; при $x\sqrt{2} = RX$ B/O C/P RX = $\operatorname{erf} x$. PY = $1 - \operatorname{erf} x = \operatorname{erfc} x$.

Примеры. $\Phi(0,1) = 0,079655672$ ($t \approx 23$ с); $\Phi(2,9) = 0,99626842$ ($t \approx 2$ мин); $\Phi(5,5) = 1$; $1 - \Phi(5,5) = 3,7977891 \cdot 10^{-8}$ ($t \approx 17$ с); $\operatorname{erf} 4 = \Phi(4\sqrt{2}) = 1$; $\operatorname{erfc} 4 = 1,5416369 \cdot 10^{-8}$ ($t \approx 16$ с).

Если при определении квантилей $t(p)$ нормального распределения допускается относительная погрешность до 10%, то их можно вычислять по приближенной формуле

$$t(p) = \frac{\gamma(1,47 + 0,437\gamma)}{(1 + 0,482\gamma)}, \quad \gamma = \sqrt{\ln\left(\frac{2}{1-p}\right)^2 - \sqrt{\ln 4}}.$$

Программа 68. Вычисление квантилей нормального распределения $t(P)$ с относительной погрешностью $\delta \leq 0,1$ по заданной вероятности P

```

П9 1 — 2 ↔ ÷ x2 1п √— 4
ln √— — П8 0 , 4 8 7 ×
1 , 4 7 + ИП8 × 0 , 4
8 2 ИП8 × 1 + ÷ С.П

```

Инструкция. $P = RX$ В/О С/П $RX = t(P)$; $t \approx 12$ с.

Примеры. $t(0,25) = 0,3181$, $t(0,5) = 0,6743$, $t(0,99) = 2,576$, $t(0,999) = 3,291$.

Если дисперсия случайной величины неизвестна, то в неравенство (2.29) вместо значения σ подставляют его оценку $\tilde{\sigma}$, а в качестве коэффициентов t используют квантили $t(n, P)$ нормального распределения Стьюдента [4]. Достаточную для большинства расчетов точность (не менее трех верных цифр) вычисления этих квантилей обеспечивает простое аппроксимирующее выражение:

$$t(n, P) = t(\infty, P) / \sqrt{1 - \alpha/n + \beta/n^2}, \quad (2.30)$$

где $t(\infty, P)$ — квантили нормального распределения, а коэффициенты α и β выбирают по заданному значению доверительной вероятности $P = P_{\text{дов}}$. Значения $t(\infty, P)$, α и β для наиболее употребительных значений доверительной вероятности даны в табл. 2.1, а промежуточные значения этих величин определяются интерполяцией табличных данных.

В большинстве практических задач статистическую обработку больших массивов данных целесообразно продолжать до получения оценок параметров случайных величин с требуемой точностью. В частности, оценивание m_1 и σ^2 для заданного значения доверительной вероятности следует прекращать при выполнении неравенства (2.28). Проверку выполнения этого неравенства целесообразно автоматизировать, задаваясь предельной относительной погрешностью оценки математического ожидания $\sigma \leq \Delta \tilde{m}_1 / \tilde{m}_1$.

Программа 69. Вычисление оценок m_1 и σ^2 с заданной предельной относительной погрешностью $\delta \leq \Delta \tilde{m}_1 / \tilde{m}_1$

```

П7 x2 П8 1 П4 Сх П6 КИП6 ИП6 С/П
ИП7 — ↑ ИП4 П5 1 + П4 ÷ ×
Вх ↔ ИП4 2 — ИП5 ÷ ИП8 × +
П8 ↔ ИП7 + П7 ↔ ИПВ ИП5 ÷ ИПА
— ИП5 + ÷ x ≥ 0 07 √— ИПС × П9
ИПД — x < 0 07 √— ↑ ИП8 ИП7 С/П

```

Таблица 2.1. Коэффициенты формулы (2.30) для аппроксимации квантилей распределения Стьюдента

P	0,8	0,9	0,95	0,98	0,99	0,999
$t(\infty, P)$	1,282	1,645	1,960	2,326	2,576	3,291
α	1,282	1,851	2,387	3,212	3,779	5,933
β	0,134	0,928	1,260	2,935	3,867	10,61

Инструкция. Для заданной доверительной вероятности из табл. 2.1 ввести $\alpha=PA$, $\beta=PB$, $t(\infty, P)=PC$, $\delta=PD$, $x_1=RX$ В/О С/П $RX=1$, $x_2=RX$ С/П $RX=2 \dots x_i=RX$ С/П $RX=EGGOG$ С/П $RX=P7=\tilde{m}_1$, $PY=P8=\tilde{\sigma}^2$, $P9=\Delta\tilde{m}_1/\tilde{m}_1$.

Пример. Для определения \tilde{m}_1 с предельной погрешностью 1 % при доверительной вероятности $P=P_{\text{дов}}=0,95$ ($\alpha=2,387$, $\beta=1,26$, $t(\infty, P)=1,96$, $\delta=0,01$) после ввода $x_1=1,05; 1,08; 1,03; 1,06; 0,98; 1,01; 1,03; 0,99; 1,03; 1,02; 1,05; 1,02; 1,04; 1,03; 1,06; 1,02; 1,02; 1,01; 1,04; 1,03; 1,03; 1,04; 1,02; 1,05$ и высвечивания символа ЕГГОГ получим $\tilde{m}_1=1,0308696$, $\tilde{\sigma}^2=5,0830028 \cdot 10^{-4}$, $\Delta\tilde{m}_1/\tilde{m}_1=0,00968$.

В радиотехнических задачах часто встречается необходимость в оценке распределения случайной величины. Обычно используют различные критерии для проверки непротиворечивости выбранной гипотезы о предполагаемом распределении. В некоторых случаях для проверки гипотезы о нормальном распределении случайной величины достаточно найти оценки параметров ее распределения [18].

Программа 70. Проверка гипотезы о нормальном распределении случайной величины по объему n выборки, коэффициентам асимметрии γ_3 и эксцесса γ_4

$$\begin{array}{ccccccc}
 x^2 & \sqrt{-} & \Pi 7 & \rightarrow & x^2 & \sqrt{-} & \Pi 8 \leftrightarrow \Pi 9 \quad 9 \\
 \Pi 2 & ИП 9 & 1 & - & 1 & ИП 9 & + \div 6 \times \\
 ИП 9 & 3 & П 3 & + \div & \sqrt{-} & КИП 2 & \div С/П ИП 9 \\
 4 & \times & ИП 9 & ИП 3 & - & L 3 & 32 \quad x^2 \div 5 \\
 БП & 15
 \end{array}$$

Инструкция. $n=PZ$, $\gamma_3=PY$, $\gamma_4=RX$ В/О С/П ($t \approx 8$ с) $RX=\sigma_{\gamma_3}/|\gamma_3|$ С/П ($t \approx 12$ с) $RX=\sigma_{\gamma_4}/|\gamma_4|$. Гипотеза непротиворечива, если результаты вычислений $\sigma_{\gamma_3}/|\gamma_3| > 1$. Для ПМК с входным языком ЯМК52 можно заменить фрагменты x_2 операторами $|x|$ и соответственно изменить адреса переходов.

Пример. Для $n=9$, $\gamma_3=0,34$, $\gamma_4=0,18$ получим $\sigma_{\gamma_3}/|\gamma_3|=1,8601633$, $\sigma_{\gamma_4}/|\gamma_4|=5,1031036$, и, следовательно, гипотеза о нормальном распределении непротиворечива.

Более полную информацию о распределении случайной величины x получают из анализа частот ψ_j попадания случайной величины в $j=e$ интервалы (называемые классовыми), на которые разбит отрезок $[x_{\min}, x_{\max}]$ изменения случайной величины.

Программа 71. Вычисление частот ψ_j попадания случайной величины x в $k \leq 12$ ($k \leq 13$ для ЯМК52) равных классовых интервалов отрезка $[x_{\max}, x_{\min}]$

$$\begin{array}{ccccccccc}
 ИПД & - & \times & 1 & + & ПС & \rightarrow & КИПС & 1 \quad + \\
 КПС & \rightarrow & С/П & БП & 00 & ПД & - & ИП6 & \div & ПС \\
 КИП6 & ИП6 & П0 & Сх & КП0 & ИП0 & x=0 & 23 & ИПС & 1/x \\
 \uparrow & \uparrow & БП & 12
 \end{array}$$

Инструкция. $k=P6$, $x_{\max}=PY$, $x_{\min}=RX$ БП 1 5 С/П ($t \approx 18$ с) $RX=k$ ($x_{\max}-x_{\min}$), $x_1=RX$ (В/О) С/П $x_2=RX$ (В/О) С/П ... $x_n=RX$ (В/О) С/П $P1=\psi_1$, $P2=\psi_2$, $P3=\psi_3$, ... $Pk=\psi_k$. Для ПМК с входным языком ЯМК52 при $k=13$ следует заменить операторы обращения к регистрам памяти РД и РС соответственно операторами обращения к регистрам памяти РЕ и РД; для исправления ошибочно набранного числа x_i необходимо использовать оператор Сх, не изменяя содержимого остальных регистров операционного стека.

Пример. Для $k=10$, $x_{\max}=2,6$, $x_{\min}=1,3$, $x_1=2; 1,4; 1,8; 1,65; 1,96; 2,1; 1,35; 1,72; 2,2; 2,53; 1,95; 2,15; 2,05; 2,3; 2,4$ получим $\psi_1=2$, $\psi_2=0$, $\psi_3=1$, $\psi_4=2$, $\psi_5=1$, $\psi_6=3$, $\psi_7=3$, $\psi_8=1$, $\psi_9=1$, $\psi_{10}=1$.

Предельное число классовых интервалов можно удвоить при хранении в каждом регистре двух значений ψ ; в виде числа $\psi_i \cdot 10^4 + \psi_{i+1}$ [27]. Для простоты составления программы и уменьшения затрат времени ограничимся случаем $k=20$.

Программа 72. Вычисление частот ψ_i попадания случайной величины в 20 равных классовых интервалов отрезка $[x_{\min}, x_{\max}]$

ИПС	—	ИПД	\times	1	+	ПВ	КИПВ	—	ИПВ
—	2	1/x	—	$x < 0$	22	КИПВ	1	ВП	4
БП	24	КИПВ	1	+	КПВ	С/П	БП	00	ПС
—	1	0	\div	1/x	ПД	1	1	П0	Сх
КП0	ИП0	$x = 0$	39	БП	26				

Инструкция. $x_{\max}=\text{РУ}$, $x_{\min}=\text{РХ}$ БП 2 9 С/П ($t \approx 18$ с) РХ=0, $x_1=\text{РХ}$ (В/О) С/П ($t \approx 7$ с) $x_2=\text{РХ}$ (В/О) С/П ... $x_n=\text{РХ}$ (В/О) С/П Р1= $\psi_1 \cdot 10^4 + \psi_2$, Р2= $\psi_3 \cdot 10^4 + \psi_4$, ..., РА= $\psi_{19} \cdot 10^4 + \psi_{20}$; для ПМК с входным языком ЯМК52, чтобы сократить длину программы, следует заменить фрагмент КИПВ → ИПВ оператором $|x|$ и соответственно изменить адреса переходов.

Пример. Для выборки x_i из примера к программе 71 при $x_{\max}=2,6$, $x_{\min}=-1,3$ получим Р1=10001, Р2=0, Р3=1, Р4=10001, Р5=1, Р6=20001, Р7=10002, Р8=1, Р9=10 000; РА=10 000 или $\psi_1=1$, $\psi_2=1$, $\psi_3=0$, $\psi_4=0$, $\psi_5=0$, $\psi_6=1$, $\psi_7=1$, $\psi_8=1$, $\psi_9=0$, $\psi_{10}=1$, $\psi_{11}=2$, $\psi_{12}=1$, $\psi_{13}=1$, $\psi_{14}=2$, $\psi_{15}=0$, $\psi_{16}=1$, $\psi_{17}=1$, $\psi_{18}=0$, $\psi_{19}=1$, $\psi_{20}=0$.

По частотам попадания случайной величины в различные классовые интервалы судят о параметрах ее распределения. Для этого используют различные критерии, но большинство из них отличается лишь способами решения соответствующих уравнений. После определения параметров распределения случайной величины полученные оценки (особенно в тех случаях, когда нет уверенности в правильности оценки распределения) чаще всего проверяют по критерию согласия χ^2 с помощью функции, называемой статистикой:

$$y = \sum_{j=1}^k (\psi_j^2 / np_j) - n,$$

где k — число классовых интервалов, на которые разбит исследуемый отрезок $[x_{\min}, x_{\max}]$ значений случайной величины; ψ_j — частота попадания в j -й классовый интервал; n — объем выборки; p_j — вероятность попадания случайной величины в j -й классовый интервал в соответствии с проверяемым распределением $p(x)$.

При бесконечном объеме выборки распределения статистики y стремится к распределению χ^2 с $r=k-l-1$ степенями свободы, где l — число параметров распределения $p(x)$. Подсчитав статистику y по числу степеней свободы r и выбранному уровню значимости α , определяющему вероятность отклонения гипотезы о распределении (ошибки первого рода по критерию Неймана — Пирсона), находят квантиль $\chi_{r,\alpha}^2$ из уравнения

$$P(\chi^2 > \chi^2_{r,\alpha}) \equiv \int_{\chi^2_{r,\alpha}}^{\infty} p(\chi^2) d\chi = 1 - F(\chi^2_{r,\alpha}).$$

Если оказывается, что $y > \chi^2_{r,\alpha}$, то критерий χ^2 с уровнем значимости α отрицает правильность параметров распределения. В противном случае оценка распределения верна и отсутствует противоречие между эмпирическими данными и теоретическим определением распределения.

Для автоматического вычисления статистики y следует ввести в программу фрагмент определения значений p_j для предполагаемого распределения. Если ширина классовых интервалов достаточно мала, то, используя простейшие методы численного интегрирования, относительно несложно автоматизировать проверку по критерию χ^2 большинства встречающихся на практике распределений случайных величин. В следующей программе каждый классовый интервал разбивается на четыре интервала интегрирования, что уменьшает методическую погрешность в 32 раза.

Программа 73. Вычисление статистики y для проверки согласно критерию χ^2 распределения $p(x)$ по частотам ψ ; попадания случайной величины в k классовых интервалов

```

П7 ↔ П6 Сх П5 ИП6 ИП8 — 4 ÷
П4 ИП8 ПП 57 ПП 53 4 ПП 50 2
ПП 50 4 ПП 50 ИП3 + ИП4 × 3
÷ ИП9 × ↑ ИП7 — x2 ↔ ÷ ИП5
+ П5 ИП6 П8 С/П П7 ↔ П6 БП 06
× ИП3 + П3 ИП8 ИП4 + П8 ... В/О

```

Инструкция. Заменить в программе многоточие фрагментом вычисления $p(x)$ при $x=P8$ с использованием регистров 0, 3, A, ..., D(E) $x_{\min}=P8$, $n=P9$, $0=P3$, $x_{n2}=PY$, $\psi_1=PX$ В/О С/П $x_{n3}=PY$, $\psi_2=PX$ С/П ... $x_{\max}=PY$, $\psi_k=PX$ С/П $P5=y$ (время счета зависит от числа и ширины классовых интервалов, $x_{v,j}$ — инжиний предел j -го классового интервала).

В качестве примера рассмотрим вычисление статистики y при проверке гипотезы о нормальном распределении случайной величины с параметрами $m_1=3,6$, $\sigma^2=1,2$, выборка которой с $n=100$ сгруппирована по шести классовым интервалам $[-2; 2)$, $[2; 3)$, $[3; 3,5)$, $[3,5; 4)$, $[4; 5)$, $[5; 9)$ с частотами попадания $\psi_j=3; 9; 30; 45; 9; 4$ случайной величины соответственно.

При исходных данных $\sigma^2=P1$, $m_1=P2$ вычисление функции $p(x)=\exp(-(x-m_1)^2/2)/\sqrt{2\pi}\sigma$ для нормального распределения обеспечивается фрагментом

```
ИП8 ИП2 — x2 /—/ 2 ÷ ex 2 π × ИП1 × √÷
```

записываемым в программу вместо многоточия. Выполнив программу, получим $y=91,28259$. Для $r=6-2-1=3$, выбрав, например, уровень значимости $\alpha=0,05$, по таблице квантилей распределения χ^2 находим $\chi^2_{3; 0,05}=7,815 < y$. Следовательно, принятая гипотеза о нормальном распределении несостоятельна с вероятностью ошибки 0,05, хотя по частотам попаданий эта гипотеза на первый взгляд представляется обоснованной.

Экспериментальные данные для устранения случайных погрешностей измерений подвергают усреднению (сглаживанию) различными способами, причем сред-

ние и крайние отсчеты сглаживаются по различным формулам [14]. Простейшим является линейное сглаживание по трем очередным отсчетам последовательности x , экспериментальных данных.

Программа 74. Линейное сглаживание последовательности чисел x по трем очередным отсчетам

$$\begin{array}{ccccccccc}
 \text{П7} & \rightarrow & \text{П8} & 2 & \times & \leftrightarrow & \text{П9} & 5 & \times + \\
 \text{ИП7} & - & 6 & \div & \text{ИП7} & \text{ИП8} & + & \text{ИП9} & + 3 \\
 & \div & \text{С/П} & \text{П6} & \text{ИП8} & \text{П7} & \text{ИП9} & \text{П8} & \text{ИП6} \text{ П9 БП} \\
 14 & \text{ИП9} & 5 & \times & \text{ИП8} & 2 & \times + & \text{ИП7} - \\
 6 & \div & \text{С/П} & & & & & &
 \end{array}$$

Инструкция. $x_1 = \text{РZ}$, $x_2 = \text{РY}$, $x_3 = \text{РX}$ В/О С/П РХ = \bar{x}_2 , РY = \bar{x}_1 , $x_4 = \text{РX}$ С/П РХ = \bar{x}_3 ... $x_i = \text{РX}$ С/П РХ = \bar{x}_{i-1} ... $x_n = \text{РX}$ С/П РХ = \bar{x}_{n-1} БП 3 1 С/П РХ = \bar{x}_n .

Пример. Для $x_1 = 12,1$; 12,3; 11,9; 12; 12,2; 11,8; 12,1; 11,7; 12; 12,4 получим $\bar{x}_1 = 12,2$; 12,1; 12,133333; 12,1; 12; 12,033333; 11,866666; 11,933333; 12,033333; 12,383333.

Линейное [15] или нелинейное сглаживание можно выполнять по большему числу отсчетов, причем можно повторять сглаживание. Однако при большом числе повторений будут сглажены не только малые случайные погрешности, но и истинные экспериментальные данные.

Г л а в а 3

Анализ линейных цепей

3.1. Методика анализа

Анализ радиотехнической цепи, образованной соединением (которое моделируют принципиальной или структурной схемой) реальных компонентов с известными параметрами, заключается в теоретическом определении ее реакций (выходных сигналов) на заданные воздействия (входные сигналы). Так как сигналы обычно передаются изменениями (переменными составляющими) токов и напряжений, то основой анализа радиотехнических цепей является теория электрических цепей. Методика анализа таких цепей обычно основана на замещении в выбранном диапазоне частот компонентов цепи их эквивалентными схемами с идеальными источниками токов и напряжений, а также идеальными резисторами, конденсаторами и катушками индуктивности с параметрами $r = 1/g$, C и L , являющимися соответственно мерами рассеяния энергии и накопления электрической или магнитной энергий. Соединяя схемы замещения компонентов в соответствии с принципиальной схемой, получают схему замещения анализируемой цепи.

Связь между воздействиями и реакциями на входах цепи с инерционными элементами, свойства которых описывают параметрами L и C , во временной области моделируют составляемыми по схеме дифференциальными уравнениями. При слабых сигналах, уровня которых практически не влияют на свойства це-

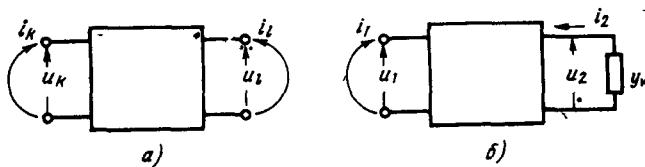


Рис. 9

пи, ее рассматривают как линейную. Для упрощения анализа линейные дифференциальные уравнения в соответствии с преобразованием Лапласа заменяют алгебраическими. В этом случае зависимости (1.1) являются линейными соотношениями (1.3), а параметры $F(p) = x(p)/q(p)$ называют функциями цепи. В частотной области функции $F(p)|_{p=j\omega} = F(j\omega)$ называют частотными характеристиками, а их модуль $|F(\omega)|$ и аргумент $\varphi(\omega)$ — амплитудно-частотными (АЧХ) и фазочастотными (ФЧХ) характеристиками.

Связь между воздействием и реакцией на любом входе цепи отображают функциями входного сопротивления $Z_{bx} = u_{bx}/i_{bx}$ или входной проводимости $Y_{bx} = 1/Z_{bx} = i_{bx}/u_{bx}$, а связь между переменными на двух независимых входах (рис. 9, а) отображают функциями передаточного сопротивления $Z_{per} = u_i/i_k$, передаточной проводимости $Y_{per} = i_i/u_k$, коэффициентов передачи напряжения $K_{Uik} = u_i/u_k$ или тока $K_{Iik} = i_i/i_k$. Вход, на котором определена только реакция (рис. 9, б), называют выходом, причем выходные ток в нагрузке i_n и напряжение u_n при проводимости y_n нагрузки связаны уравнением $i_n = -y_n u_n$, где отрицательный знак соответствует противоположным направлениям тока и падения напряжения. При анализе обычно ограничиваются определением входного сопротивления Z_{bx} и коэффициента передачи напряжения K_U , так как $Y_{bx} = 1/Z_{bx}$, $Z_{per} = Z_{bx} K_U$, $Y_{per} = -y_n K_U$, $K_I = -y_n Z_{bx} K_U$.

Среди разнообразных методов анализа линейных цепей [9, 10, 13] наиболее общими следует считать методы многополюсников, основанные на моделировании цепи с n входами системой (1.2) алгебраических (операторных) уравнений равновесия

$$\begin{bmatrix} w_{11} & w_{12} & \dots & w_{1n} \\ w_{21} & w_{22} & \dots & w_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ w_{n1} & w_{n2} & \dots & w_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \dots \\ q_n \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

или в сокращенной матричной записи $WX = Q$, где W — квадратная матрица параметров w_{ij} (являющихся в общем случае функциями p с размерностью, определяемой размерностью реакций и воздействий); X и Q — вектор-столбцы реакций и воздействий.

Решение $X = W^{-1}Q$ этой системы определяет искомые реакции

$$x_i = \sum_{j=1}^n \Delta_{ji} q_j / \Delta = \sum_{j=1}^n F_{ij} q_j, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (3.2)$$

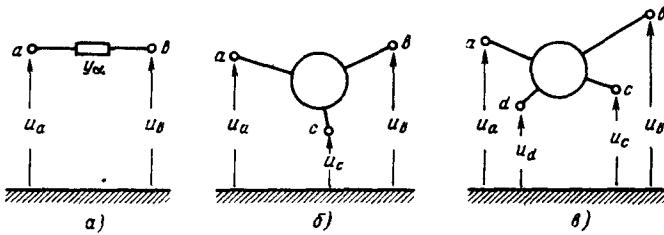


Рис. 10

где Δ_{ji} и Δ — алгебраические дополнения и определитель матрицы W , а функции цепи

$$F_{ij} = x_i/q_j = \Delta_{ji}/\Delta. \quad (3.3)$$

По матрице W (моделирующей свойства линейной цепи, не зависящие от реакций и воздействий) можно найти функции, соответствующие другой размерности сигналов, например $K_{ij} = x_i/x_j = F_{ij}/F_{jj} = \Delta_{ji}/\Delta_{jj}$.

Среди различных методов многополюсников наиболее удобен метод узловых напряжений с канонической системой выбора независимых входов, один из полюсов (узлов) которых совпадает с общим (базисным) узлом. В этом случае компоненты цепи, не соединенные с общим узлом, описываются неопределенными (плавающими) матрицами проводимостей, определители и суммы элементов строк и столбцов которых равны нулю. Например, неопределенная матрица двухполюсника (рис. 10, а)

$$\begin{bmatrix} y_\alpha & -y_\alpha \\ -y_\alpha & y_\alpha \end{bmatrix},$$

трехполюсника (рис. 10, б)

$$\begin{bmatrix} y_{aa} & y_{ab} & y_{ac} \\ y_{ba} & y_{bb} & y_{bc} \\ y_{ca} & y_{cb} & y_{cc} \end{bmatrix},$$

четырехполюсника (рис. 10, в)

$$\begin{bmatrix} y_{aa} & y_{ab} & y_{ac} & y_{ad} \\ y_{ba} & y_{bb} & y_{bc} & y_{bd} \\ y_{ca} & y_{cb} & y_{cc} & y_{cd} \\ y_{da} & y_{db} & y_{dc} & y_{dd} \end{bmatrix}.$$

При соединении компонента схемы с общим узлом в его неопределенной матрице проводимостей вычеркивают строку и столбец, соответствующие «заземляемому» узлу. Следовательно, для построения матрицы проводимостей при изменении общего узла достаточно исходную матрицу дополнить до неопределенной и в ней вычеркнуть строку и столбец, соответствующие новому выбору общего узла.

Матрицу проводимостей в канонической системе координат составляют по схеме анализируемой цепи и матрицам компонентов согласно следующим пра-

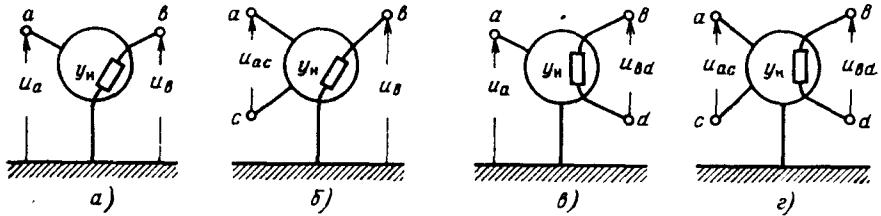


Рис. 11

виам: диагональные элементы составляемой матрицы Y приравнивают суммам диагональных элементов y_{ii} матриц компонентов, соединенных с i -м узлом схемы, а каждый недиагональный элемент матрицы Y (являющейся матрицей параметров системы уравнений узловых напряжений $YU=I$) — сумме элементов y_{ij} матриц компонентов, через которые i -й узел схемы соединен с j -м узлом.

Если в системе уравнений узловых напряжений принять равными нулю все входные токи, кроме i_a , то согласно формулам (3.2) и (3.3) для каждого i -го входа $Z_{ia}=u_i/i_a=\Delta_{ai}/\Delta$. Следовательно, для независимых (инцидентных общему узлу) входов a и b (рис. 11, а) при воздействии i_a или i_b на вход a

$$Z_{ba}=u_a/i_a=\Delta_{aa}/\Delta; K_{Ub,a}=u_b/u_a=Z_{ba}/Z_{aa}=\Delta_{ab}/\Delta_{aa}, \quad (3.4)$$

где проводимость нагрузки u_b учтена в матрице проводимостей.

При воздействии на зависимый вход, образованный «незаземленными» узлами a и c (рис. 11, б),

$$Z_{bac}=u_{ac}/i_{ac}=\Delta_{(a+c)(a+c)}/\Delta; K_{Ub,ac}=u_b/u_{ac}=\Delta_{(a+c)b}/\Delta_{(a+c)(a+c)}. \quad (3.5)$$

При воздействии на независимый вход a и определении реакции на зависимом входе, образованном узлами b и d (рис. 11, в, г),

$$Z_{ba}=u_a/i_a=\Delta_{aa}/\Delta; K_{Ub,d,a}=u_{bd}/u_a=\Delta_{a(b+d)}/\Delta. \quad (3.6)$$

Наконец, если оба входа зависимы (рис. 11, г), то

$$\begin{aligned} Z_{bac}&=u_{ac}/i_{ac}=\Delta_{(a+c)(a+c)}/\Delta; \\ K_{Ub,d,ac}&=u_{bd}/u_{ac}=\Delta_{(a+c)(b+d)}/\Delta_{(a+c)(a+c)}. \end{aligned} \quad (3.7)$$

В этих формулах суммарные алгебраические дополнения

$$\Delta_{(a+c)(b+d)}=\Delta_{ab}-\Delta_{ad}-\Delta_{cb}+\Delta_{cd}=(-1)^{a+b} M_{(a+b)(c+d)} \quad (3.8)$$

могут лишь знаком отличаться от минора $M_{(a+b)(c+d)}$, равного определителю матрицы Y , в которой вычеркнуты строка c и столбец d , а их элементы добавлены к соответственным элементам строки a и столбца b .

При использовании ЭВМ анализ в операторной или частотной областях обычно сводят к многократному решению системы уравнения (3.1) с комплексными в общем случае коэффициентами при изменениях ρ или ω в заданном диапазоне. Для определения численных значений функций цепи по системе уравнений узловых напряжений $YU=I$ все входные токи (кроме нормированного тока $i_a=1$) принимают равными нулю. Тогда решения системы численно

равны $u'_a = Z_{bx\,a}$, $u'_l = Z_{peria}$, откуда, например, $K_{Uia} = u'_l/u'_a$.

При анализе сложных цепей подобный метод связан со значительными затратами времени, однако обычно требуется определить связь между искольки-ми, а не всеми входами цепи. Поэтому часто используют методы, обеспечивающие разбиение задачи анализа цепи на последовательность более простых задач. К ним относятся методы свертывания (редукции) математической модели цепи с последовательным устранением внутренних входов и методы подсхем, при использовании которых математическую модель сложной цепи разбивают на части, по функциям которых определяют функции сложной цепи.

Таблица 3.1. Отношения между параметрами проходного четырехполюсника

	Y	D	H	Z	A
Y	$y_{11} \quad y_{12}$	$\frac{ d }{d_{22}} \quad \frac{d_{12}}{d_{22}}$	$\frac{1}{h_{11}} - \frac{h_{12}}{h_{11}}$	$\frac{z_{22}}{ z } - \frac{z_{12}}{ z }$	$\frac{a_{22}}{a_{12}} - \frac{ a }{a_{12}}$
	$y_{21} \quad y_{22}$	$-\frac{d_{21}}{d_{22}} \quad \frac{1}{d_{22}}$	$\frac{h_{21}}{h_{11}} - \frac{ h }{h_{11}}$	$-\frac{z_{21}}{ z } - \frac{z_{11}}{ z }$	$\frac{1}{a_{12}} - \frac{a_{11}}{a_{12}}$
D	$\frac{ y }{y_{22}} \quad \frac{y_{12}}{y_{22}}$	$d_{11} \quad d_{21}$	$\frac{h_{22}}{ h } - \frac{h_{12}}{ h }$	$\frac{1}{z_{11}} - \frac{z_{12}}{z_{11}}$	$\frac{a_{21}}{a_{11}} - \frac{ a }{a_{11}}$
	$-\frac{y_{21}}{y_{22}} \quad \frac{1}{y_{22}}$	$d_{21} \quad d_{22}$	$-\frac{h_{21}}{ h } - \frac{h_{11}}{ h }$	$\frac{z_{21}}{z_{11}} - \frac{ z }{z_{11}}$	$\frac{1}{a_{11}} - \frac{a_{12}}{a_{11}}$
H	$\frac{1}{y_{11}} - \frac{y_{12}}{y_{11}}$	$\frac{d_{22}}{ d } - \frac{d_{12}}{ d }$	$h_{11} \quad h_{12}$	$\frac{ z }{z_{22}} - \frac{z_{12}}{z_{22}}$	$\frac{a_{12}}{a_{22}} - \frac{ a }{a_{22}}$
	$\frac{y_{21}}{y_{11}} \quad \frac{ y }{y_{11}}$	$-\frac{d_{21}}{ d } - \frac{d_{11}}{ d }$	$h_{21} \quad h_{22}$	$-\frac{z_{21}}{z_{22}} - \frac{1}{z_{11}}$	$\frac{1}{a_{22}} - \frac{a_{21}}{a_{22}}$
Z	$\frac{y_{22}}{ y } - \frac{y_{12}}{ y }$	$\frac{1}{d_{11}} - \frac{d_{12}}{d_{11}}$	$\frac{ h }{h_{22}} - \frac{h_{12}}{h_{22}}$	$z_{11} \quad z_{12}$	$\frac{a_{11}}{a_{21}} - \frac{ a }{a_{21}}$
	$-\frac{y_{21}}{ y } \quad \frac{y_{11}}{ y }$	$\frac{d_{21}}{d_{11}} - \frac{ d }{d_{11}}$	$-\frac{h_{21}}{h_{22}} - \frac{1}{h_{22}}$	$z_{21} \quad z_{22}$	$\frac{1}{a_{21}} - \frac{a_{22}}{a_{21}}$
A	$-\frac{y_{22}}{y_{21}} \quad \frac{1}{y_{21}}$	$\frac{1}{d_{21}} - \frac{d_{22}}{d_{21}}$	$-\frac{ h }{h_{21}} - \frac{h_{11}}{h_{21}}$	$\frac{z_{11}}{z_{21}} - \frac{ z }{z_{21}}$	$a_{11} \quad a_{12}$
	$-\frac{ y }{y_{21}} \quad \frac{y_{11}}{y_{21}}$	$\frac{d_{11}}{d_{21}} - \frac{ d }{d_{21}}$	$-\frac{h_{22}}{h_{21}} - \frac{1}{h_{21}}$	$\frac{1}{z_{21}} - \frac{z_{22}}{z_{21}}$	$a_{21} \quad a_{22}$

Ряд классических методов основан на представлении цепи соединением проходных четырехполюсников или 2×2 -полюсников (см. рис. 9). В зависимости от выбора размерности переменных такой проходной четырехполюсник описывают шестью системами уравнений

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}; \\ \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}; \\ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

где индексы 1 и 2 входов соответствуют индексам k и l на рис. 9, а.

Коэффициенты (параметры проходных четырехполюсников) этих систем связаны соотношениями, приведенными в табл. 3.1, где $|w| = w_{11}w_{22} - w_{12}w_{21}$ — определитель матрицы параметров. Параметры B -матрицы совпадают с параметрами A -матрицы при изменении местами номеров входов.

Если индексом 1 обозначен вход, а индексом 2 — выход проходного четырехполюсника, нагруженного на элемент с проводимостью $y_H = 1/Z_H$ (см. рис. 9, б), то

$$\begin{aligned} Z_{Bx} &= \frac{y_{22} + y_H}{y_H y_{11} + |y|} = \frac{h_{11} y_H + |h|}{h_{22} + y_H} = \frac{d_{22} + z_H}{d_{11} z_H + |z|}, \\ &= \frac{z_{11} z_H + |z|}{z_{22} + z_H} = \frac{a_{11} - a_{12} y_H}{a_{21} - a_{22} y_H}, \\ K_U &= \frac{-y_{21}}{y_{22} + y_H} = \frac{-h_{21}}{y_H + |h|} = \frac{d_{21}}{1 + d_{22} y_H} = \frac{z_{21}}{z_{11} + |z| y_H} = \frac{1}{a_{11} - a_{12} y_H}. \end{aligned}$$

Традиционный метод анализа заключается в представлении сложной цепи регулярным соединением проходных четырехполюсников с последующим его свертыванием к четырехполюснику, эквивалентному цепи на двух ее входах. При этом регулярные параллельное (рис. 12, а), последовательно-параллельное (рис. 12, б), параллельно-последовательное (рис. 12, в) и последовательное (рис. 12, г) соединения заменяют одним эквивалентным проходным четырехпо-

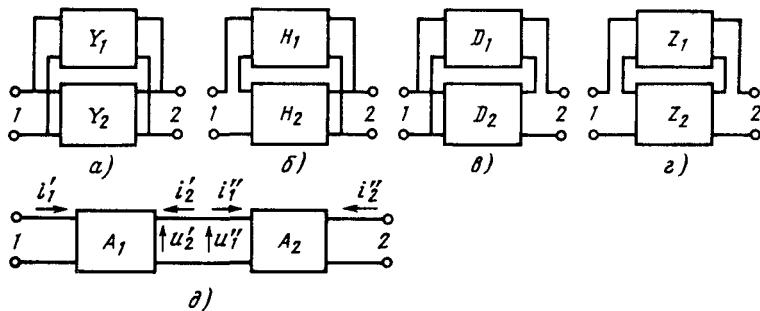


Рис. 12

люсником, матрица параметров которого равна соответственно сумме матриц Y , H , D или Z соединяемых четырехполюсников. Параметры каскадного соединения (рис. 12, δ) определяют произведением $A = A_1 \times A_2$, причем в соответствии с указанными на рис. 9 условными направлениями токов и напряжений знаки параметров a_{11} и a_{21} при умножении матриц изменяют на противоположные.

Подобный метод не всегда применим, и для свертывания цепи к эквивалентному проходному четырехполюснику используют более общие методы, не связанные с преобразованием параметров. Примером может служить свертывание цепи, описанной матрицей Y , к эквивалентному проходному четырехполюснику с матрицей Y' по формуле

$$\begin{bmatrix} y'_{11} & y'_{12} \\ y'_{21} & y'_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{22} & M_{11,22} & M_{21} & M_{11,22} \\ M_{12} & M_{11,22} & M_{11} & M_{11,22} \end{bmatrix}, \quad (3.9)$$

где миноры M_{ij} равны определителю матрицы Y с вычеркнутыми i -й строкой и j -м столбцом, а кратный минор $M_{11,22}$ — вычеркнутыми первыми и вторыми строками и столбцами.

Временные характеристики цепи, являющиеся оригиналами операторных изображений реакций $x(p) = F(p)q(p)$, находят с помощью обратного преобразования Лапласа, если воздействие можно представить изображением $q(p)$. удовлетворяющим этому преобразованию. В остальных случаях временные характеристики определяют решением дифференциальных уравнений.

Для упрощения расчетов используют нормирование операндов. Простейшее заключается в выборе рабочих размерностей (например, пикофарад вместо фарад или килогерц вместо герц), уменьшающих порядок операндов до значений, соизмеримых с единицей. Часто для сокращения числа исходных данных нормирующие коэффициенты (например, C/C_n , R/R_n или $k = Y/Y_n$, когда $C_n = C/k$, $L_n = Lk$, $R_n = Rk$) выбирают так, чтобы одна из однородных величин была равной единице. Число коэффициентов степенных многочленов от p уменьшают, деля все коэффициенты на один из них (что не изменяет корней многочлена) и нормируя p , например $p''_n = a_n p^n$ с подстановкой $p = a^{-1/n} p_n$. Дробно-рациональные функции нормируют делением числителя и знаменателя на один из коэффициентов, что не изменяет значений функции.

В процессе проектирования радиотехнических цепей часто возникает необходимость в составлении расчетных формул с буквенными (символьными) обозначениями параметров матрицы или схемы цепи. Для этого достаточно в формулах, подобных (3.4) — (3.7), разложить Δ и Λ_j по символам ненулевых элементов матрицы или схемы.

Напомним, что определитель Δ квадратной матрицы A порядка n

$$\Delta = \sum_{q=1}^n (-1)^{\delta_q} a_{1l_1} a_{2l_2} \dots a_{nl_n} \quad (3.10)$$

равен сумме членов, образованных всевозможными произведениями ненулевых элементов a_{ml} матрицы, взятых по одному от каждой строки и каждого столбца, причем знак q -го члена определяется числом инверсий элементов неупорядоченной строки в подстановке индексов

$$\begin{bmatrix} m \\ l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ l_1 & l_2 & l_3 & \dots & l_n \end{bmatrix}.$$

Число инверсий δ_q равно сумме всех больших индексов l , расположенных перед каждым индексом $l_i (i > 1)$ неупорядоченной строки.

Для разложения определителей по символам элементов матрицы обычно используют теорему Лапласа [4]. Однако этот и другие алгебраические методы разложения определителей громоздки. Между тем структура матрицы, как и структура определителей (3.10), полностью определяется множеством индексов ml ненулевых элементов a_{ml} матрицы и многие операции над матрицами и определителями можно упростить, используя только эти индексы и при необходимости индексы составляющих a_{ml} . В методе обобщенных чисел [9] структура матрицы отображается матричным числом β_m , каждая строка которого содержит индексы ml ненулевых элементов соответствующей строки матрицы, причем индекс строки m может быть вынесен за скобки. Если номера строк m упорядочены, то декартово произведение β (контурное число) элементов l строк матричного числа над полем модуля 2 равно множеству неупорядоченных строк подстановок членов определителя и однозначно определяет его структуру.

Связь матричного β_m и контурного β чисел с алгебраическим представлением Δ определителя описывается формулой

$$\Delta = \det \beta = \det (\beta_M)_{\text{mod}2},$$

реализуемой, например, следующим алгоритмом.

1. Представить матрицу матричным числом с n строками.
2. Принять $m=1$.
3. Под каждым выписаным элементом l строки m матричного числа провести линию, под которой выписать все элементы $(m+1)$ -й строки, отличающиеся от отделенными линиями верхних элементов.

4. Принять $m=m+1$.

5. Если $m=n$, то перейти к шагу 6, иначе к шагу 3.

6. В полученном контурном числе подчеркнуть столбцы (образованные элементами n -й строки и расположенные над ними элементами предыдущих строк, отделенными линиями) с нечетным числом инверсий.

7. Заменить каждый столбец элементов l с учетом номера m строки произведениями элементов a_{ml} матрицы, приписав отрицательный знак членам, соответствующим столбцам с нечетным числом инверсий, и заменив линии, отделяющие несколько элементов l , скобками.

Для разложения миноров $M_{ab}=(-1)^{a+b}\Delta_{ab}$ по этому алгоритму достаточно предварительно вычеркнуть в матричном числе a -ю строку и элементы $l=b$.

В качестве примера найдем разложение функций $z_{bx}=\Delta_{11}/\Delta$ и $K_b=\Delta_{15}/\Delta_{11}$ по матрице проводимостей

$$\left[\begin{array}{ccccc} y_{11} & y_{12} & 0 & 0 & 0 \\ y_{21} & y_{22} & y_{23} & 0 & 0 \\ 0 & y_{32} & y_{33} & y_{34} & 0 \\ 0 & 0 & y_{43} & y_{44} & y_{45} \\ 0 & 0 & 0 & y_{54} & y_{55} \end{array} \right].$$

Составив матричное число

$$\beta_M = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 5 \end{vmatrix},$$

в соответствии с описанным алгоритмом находим

$$\Delta = \det \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 5 \end{vmatrix} \mod 2$$

$$\det \begin{vmatrix} 1 & & 2 \\ \hline 2 & 2 & 3 & & 1 & 3 \\ \hline 3 & \overline{4} & \overline{2} & \overline{4} & \overline{3} & \overline{4} \\ 4 & \overline{5} & \overline{3} & \overline{5} & \overline{4} & \overline{5} \\ 5 & \underline{5} & \underline{4} & \underline{5} & \underline{4} & \underline{5} \end{vmatrix} :$$

$$= y_{11} (y_{22} (y_{33} (y_{44} y_{55} - y_{45} y_{54}) - y_{34} y_{43} y_{55}) + y_{23} y_{32} (y_{45} y_{54} - y_{44} y_{55})) + \\ + y_{12} y_{21} (y_{33} (y_{45} y_{54} - y_{44} y_{55}) + y_{34} y_{43} y_{55});$$

$$\Delta_{11} = \det \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 5 \end{vmatrix} \mod 2$$

$$\det \begin{vmatrix} 2 & & 3 \\ \hline 3 & \overline{4} & \overline{2} & \overline{4} \\ \hline 4 & \overline{5} & \overline{3} & \overline{5} & \overline{4} & \overline{5} \\ 5 & \underline{5} & \underline{4} & \underline{5} & \underline{4} \end{vmatrix} - y_{22} (y_{33} (y_{45} y_{54} - y_{44} y_{55}) - y_{34} y_{43} y_{55}) + \\ + y_{23} y_{32} (y_{45} y_{54} - y_{44} y_{55});$$

$$\Delta_{15} = \det \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 \\ 4 & 5 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} \mod 2$$

$$\det \begin{vmatrix} 1 & & 2 & 3 \\ \hline 2 & \overline{3} & \overline{4} & \overline{3} & \overline{4} & \overline{2} & \overline{4} \\ \hline 3 & \overline{4} & \overline{4} & \overline{3} & \overline{4} & \overline{3} & \overline{4} \\ 4 & \overline{3} & \overline{4} & \overline{4} & \overline{3} & \overline{4} & \overline{3} \\ 5 & \overline{4} & \overline{4} \end{vmatrix} y_{21} y_{32} y_{43} y_{54}.$$

В методе обобщенных чисел все операции выполняются над порядковыми числами, в связи с чем их несложно автоматизировать на ЭВМ. При использовании ПМК множества элементов l удобно выводить на индикатор в слитной форме, аналогично записи многозначных целых чисел, что ограничивает порядок матриц разрядностью мантиссы индикатора.

Программа 75. Формирование множества подстановок членов определителя матрицы порядка $n \leq 8$

П9	1	0	ПС	Сx	П0	1	+	ПА	КИПА
ПВ	$x < 0$	14	/—	1	+	ПД	КИПД	\leftrightarrow	ИПД
—	$x \neq 0$	83	ИПС	\times	ПД	КИПД	$x \geq 0$	78	ИП0
ИПС	\times	ИПД	+	ИП9	ИПА	—	$x \neq 0$	68	+
С/П	1	ИП0	ИПС	\div	П0	КИП0	Вx	ИП0	
—	ИПС	\times	ПД	КИПД	/—	КПД	ИПА	1	—
ПА	$x \neq 0$	40	КИПА	ИПС	\times	БП	10	\rightarrow	П0
ИПВ	КПА	КИПД	/—/	КПД	ИПА	БП	06	ИПВ	ИПС
\times	БП	10	КИПА	x^2	1	—	$x \geq 0$	41	КИПА
ИПС	\div	КПА	БП	84					

Инструкция. Множества номеров l с запятой перед первой цифрой занести в порядке номеров m строк в регистры 1, 2, ..., n ; $n = RX$ В/О С/П
 $RX = \beta_1$ (β_i — неупорядоченная строка подстановки i -го члена определителя)
 $C/P RX = \beta_2 \dots C/P RX = 0$.

Пример. Для приведенной ранее матрицы при $0,12 = P1$, $0,123 = P2$, $0,234 = P3$, $0,345 = P4$, $0,45 = P5$, $5 = RX$ получим $\beta_1 = 12345$ ($t \approx 1$ мин 25 с), $\beta_2 = 12354$ ($t \approx 30$ с), $\beta_3 = 12435$ ($t \approx 1$ мин 25 с), $\beta_4 = 13245$ ($t \approx 2$ мин 30 с), $\beta_5 = 13254$ ($t \approx 27$ с), $\beta_6 = 21345$ ($t \approx 3$ мин 55 с), $\beta_7 = 21354$ ($t \approx 26$ с), $\beta_8 = 21435$ ($t \approx 50$ с), $RX = 0$ ($t \approx 4$ мин 25 с).

Изменив способ хранения формируемых множеств элементов неупорядоченных строк, при $n \leq 6$ можно ускорить выполнение программы.

Программа 76. Формирование множества подстановок членов определителя матрицы порядка $n \leq 6$

Сx	П0	7	БП	18	КИПС	/—	КПС	ИП0	1
0	\times	ИПС	+	П0	ИПД	1	+	ПД	6
—	ПС	КИПС	$x < 0$	26	—	ПС	КПД	КИПС	$x \geq 0$
45	ИПД	1	2	—	$x \neq 0$	05	ИП0	ВП	1
ИПС	+	С П	БП	53	\leftrightarrow	ИПС	—	1	0
\times	$x = -0$	26	ИПД	1	—	ПД	КИПД	ПС	КИПС
—/	КПС	\leftrightarrow	ИП0	ИПС	—	1	0	\div	П0
$x < 0$	45	Сx	С/П						

Инструкция. При $n < 6$ вместо операторов 1 2 с адресами 32 и 33 записать в программу операторы набора числа $n+6$ (например, при $n=3$ записать 0 9); множество номеров l с запятой после первой цифры занести в порядке номеров m строк в регистры 1, 2, ..., n ; В/О С/П $RX = \beta_1$; С/П $RX = \beta_2 \dots$ С/П $RX = 0$.

Пример. Для исходных данных из примера к программе 75 при $1, 2 = P1$; $1,23 = P2$; $2,34 = P3$; $3,45 \pm P4$; $4,5 = P5$ и замене операторов 1 2 в программе

операторами 1 1 получим $\beta_1=12345$ ($t \approx 50$ с), $\beta_2=12354$ ($t \approx 20$ с) $\beta_3=12435$ ($t \approx 45$ с), $\beta_4=13245$ ($t \approx 1$ мин 30 с), $\beta_5=13254$ ($t \approx 23$ с), $\beta_6=21345$ ($t \approx 2$ мин 15 с), $\beta_7=21354$ ($t \approx 23$ с), $\beta_8=21435$ ($t \approx 20$ с), $RX=0$ ($t \approx 2$ мни 35 с).

Время счета можно еще уменьшить, изменив форму вывода результатов выполнения программы [15].

В программах 75 и 76 не предусмотрено определение числа инверсий в неупорядоченных строках β_i подстановок, но его несложно определить непосредственно по β_i или с помощью следующей программы.

Программа 77. Определение числа δ инверсий в последовательности из $k \leq 12$ порядковых чисел x_i

```
П1 Сx ПД 1   ПС ИПД С/П ИПС 1 +
ПС П0 ↔ КПС КИП0 — x<0 23 ИПД
1 + ПД ИП0 x=0 14   БП 05
```

Инструкция. $x_1=RX$ В/О С/П $x_2=RX$ С/П $x_3=RX$ С/П ... $x_k=RX$ С/П $RX=\delta$.

Пример. Для $x_i=1, 2, 4, 3, 5$ получим $\delta=1$, для $x_i=1, 3, 2, 5, 4$ получим $\delta=2$.

Для упрощения символьных преобразований используют различные методы редукции схем и подсхем, а также (когда это возможно) рационально выбирают расчетные функции. Так, часто вместо z_{bx} целесообразно определять входящую проводимость

$$Y_{bx} = 1, Z_{bx} = \Delta/\Delta_{aa} = y_{aa} + \Delta' \cdot \Delta_{aa},$$

где Δ' — определитель матрицы Y при $y_{uu}=0$.

Можно автоматизировать и другие символьные преобразования [9], например определение символьного произведения $C=A \times B$ матриц с элементами

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}, \quad (3.11)$$

где n — число столбцов матрицы A и строк матрицы B .

Программа 78. Символьное умножение матриц с произведением $C=A \times B$

```
ПС ИПД 1 + П0 ИП0 1 — x≠0 41
КИП0 ↑ ИПС ВП 2 + ПВ ↔ 1 ВП
8 + Вх — 1 0 ÷ ИПС 1 ВП
8 + Вх — ИПС ↔ — — x=0 05
ИПВ С/П БП 05
```

Инструкция. Ввести $r \leq 10$ индексов pq ненулевых элементов b_{pq} матрицы B в регистры 1, 2, ..., r , $r=RД$; очередной индекс ml ненулевого элемента a_{ml} матрицы A ввести с нажатием клавиш В/О и С/П и после вывода очередного сочетания mlq до вывода нуля клавиши С/П, ввести в регистр RX следующий индекс ml и повторить вывод сочетаний mlq ($t \approx 10 r$ с).

Выведенные по этой программе индексы mlq соответствуют слагаемым $a_{ml}b_{lq}$, расположенным в клетке mq матрицы-произведения. Например, для умножения матриц

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix} \text{ и } \begin{bmatrix} b_{11} & 0 & b_{13} \\ 0 & b_{22} & b_{23} \\ 0 & 0 & b_{33} \\ b_{41} & 0 & b_{43} \end{bmatrix}$$

по этой программе при $11=P1, 13=P2, 22=P3, 23=P4, 33=P5, 41=P6, 43=P7, 7=РД$ и последовательном вводе индексов $ml=11, 21, 22, 24, 33, 34$ получим сочетания $mlq=113, 111, 2113, 2111, 2223, 2222, 2443, 2441, 3333, 3443, 3441$, что соответствует матрице-произведению

$$\begin{bmatrix} a_{11}b_{11} & 0 & a_{11}b_{13} \\ a_{21}b_{11} + a_{24}b_{41} & a_{22}b_{22} & a_{21}b_{13} + a_{22}b_{23} + a_{24}b_{43} \\ a_{34}b_{43} & a_{33}b_{33} + a_{34}b_{43} \end{bmatrix}.$$

Символьные преобразования достаточно громоздки и не всегда практически выполнимы, так как определитель неразреженой (со всеми ненулевыми элементами) матрицы порядка n характеризуется числом членов $s=n!$. Поэтому часто прибегают к численно-символьным методам анализа, при которых символами представляют лишь некоторые параметры. Для выделения проводимости e -го элемента схемы или матрицы используют разложение $\Delta = \Delta^e + y_e \Delta_e$, где Δ^e — значение определителя при $y_e=0$, а Δ_e — при $y_e \rightarrow \infty$. Если необходимо выделить несколько элементов, то эту формулу используют для последовательного разложения миноров (алгебраических дополнений) и определителей по всем символам с численным выражением коэффициентов при этих символах [9].

3.2. Анализ безынерционных цепей

В тех случаях, когда допустимо пренебречь влиянием инерционных элементов, цепь рассматривают как безынерционную с вещественными параметрами, что существенно упрощает ее анализ по уравнениям (3.1).

Программа 79. Решение системы из двух линейных уравнений

```
П8 ↔ П9 2 П0 8 П1 С П ИП8 ÷
КП1 ИП9 × — КП1 Л0 07 ИП6 ∵ ↑
ИП7 × ИП5 — — С.П
```

Инструкция. $w_{11}=PY, w_{21}=RX$ В/О С/П $w_{12}=PY, w_{22}=RX$ С/П $q_1=PY, q_2=RX$ С/П $RX=x_1, PY=x_2$ ($t \approx 10$ с).

Если решение приходится повторять, то целесообразно хранить в памяти исходные данные.

Программа 80. Решение системы из двух линейных уравнений

```
ИП7 ИП6 × ИП4 ИП9 × — ИП7 ИП5 ×
ИП8 ИП4 × — П0 ÷ ИП5 ИП9 × ИП8
ИП6 × — ИП0 ∵ С.П
```

Инструкция. ($w_{11}=P7, w_{12}=P8, q_1=P9, w_{21}=P4, w_{22}=P5, q_2=P6$) В/О С/П $RX=x_1, PY=x_2$ ($t \approx 10$ с).

Пример. Для системы уравнений $x_1+3x_2=7, 2x_1+4x_2=10$ получим $x_1=1, x_2=2$.

Программа 81. Решение системы из трех линейных уравнений

```

ИП3 ИП6 ИП9 ПП 42 П3 ↔ П6 ИПД П9
3 П0 ИПС ИПВ ИПА ПП 42 ПВ ↔ ПА
ИПД ПС ИП2 ИП5 ИП8 ПП 42 П4 ↔ П7
ИПД П1 ИП9 П2 ИП6 П8 ИП3 П5 Л0 12
ИПА С/П ИП7 ÷ ПД ИП4 × — ↔ ИПД
ИП1 × — В/О

```

Инструкция. $w_{11}=P7$, $w_{12}=P8$, $w_{13}=P9$, $w_{21}=P4$, $w_{22}=P5$, $w_{23}=P6$,
 $w_{31}=P1$, $w_{32}=P2$, $w_{33}=P3$, $q_1=PA$, $q_2=PB$, $q_3=PC$ В/О С/П РХ=PA= x_1 ,
РВ= x_2 , РС= x_3 ($t \approx 30$ с).

Пример. Для системы уравнений

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 2 & 10 & 2 \\ 1 & 6 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 \\ 28 \\ 22 \end{bmatrix}$$

получим $x_1=1$, $x_2=2$, $x_3=3$.

Матрицы коэффициентов Y и Z взаимных цепей симметричны относительно главной диагонали, что целесообразно использовать для упрощения автоматизации решения системы уравнений с такой матрицей коэффициентов.

Программа 82. Решение системы из четырех линейных уравнений с симметричной матрицей коэффициентов

```

ПП 10 ПП 15 ПП 20 ПП 25 ИПА С/П
ИП9 ИП6 ПП 91 П9 ИП5 ИП3 ПП 91 П5
ИП2 ИП1 ПП 91 П2 ИПВ ИПА ПВ ИП1 ПП
92 ПА ИПС ИПВ ПС ИП3 ПП 92 ПВ ИПД
ИПС ПД ИП6 ПП 92 ПС ИП8 ИП6 П8 ИП3
ПП 92 ИП4 ИП1 П6 ИП3 ПП 92 П1 ↔
П4 ИП7 ИП6 ИП8 ПП 92 ИП3 ИП0 ÷ П7
↔ П3 ИП8 ИП0 ÷ П8 ИП6 ИП0 ÷ П6
ИПД ИП0 ÷ ПД ИП2 П0 ИП5 П2 ИП9 П5
В/О ↑ × ИП0 ÷ — В/О

```

Инструкция. $w_{11}=P0$, $w_{12}=P1$, $w_{13}=P2$, $w_{14}=P3$, $w_{23}=P4$, $w_{24}=P5$,
 $w_{34}=P6$, $w_{41}=P7$, $w_{42}=P8$, $w_{43}=P9$, $q_1=PA$, $q_2=PB$, $q_3=PC$, $q_4=PD$ В/О
С/П РХ=PA= x_4 , РВ= x_3 , РС= x_2 , РД= x_1 ($t \approx 60$ с).

Пример. Для системы уравнений

$$\begin{bmatrix} 20 & 2 & 0 & 4 \\ 2 & 12 & 6 & 1 \\ 0 & 6 & 8 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 40 \\ 48 \\ 48 \\ 55 \end{bmatrix}$$

получим $x_1=1$, $x_2=2$, $x_3=3$, $x_4=4$.

Для решения систем уравнений из четырех и пяти уравнений с несимметричной в общем случае матрицей коэффициентов приходится использовать метод оптимального исключения, при котором решение систем уравнений с числом $n \leq 4$ обеспечивается одной программой.

Программа 83. Решение системы из $n \leq 4$ линейных уравнений

P4	1	4	P2	ИП0	П1	C/П	ИП4	÷	КП2
L1	06	1	4	П3	ИП0	П1	L1	23	КИП3
C/П	БП	19	Cx	КП2	L1	24	КП2	ИП0	ИП2
+ БП	П1	П2	ИП3	—	$x \neq 0$	42	C/П	ПП	84
КИП2	28	КИП0	ИП0	П3	C/П	КИП2	—	П4	C/П
— П3	1	4	П1	П2	КИП1	49	ИП1	ИП0	+
+	П3	ИП1	—	$x=0$	65	ИП0	П1	КИП3	КП2
L1	78	БП	12	ИП0	↔	↑	КИП3	×	КИП1
+	КП2	→	L0	86	→	П0	B/O		

Инструкция. $n=P0$, $w_{11}=PX$ B/O C/П $w_{12}=PX$ C/П ... $w_{1n}=PX$ C/П
 $q_1=PX$ C/П $w_{21}=PX$ C/П ... $q_2=PX$ C/П ... $w_{n1}=PX$ C/П $w_{n2}=PX$ C/П ...
 $q_n=PX$ C/П $PX=RД=x_1$ C/П $PX=PC=x_2$ C/П $PX=PB=x_3$ C/П $PX=PA=x_4$. Время счета зависит от числа n уравнений.

Для проверки правильности ввода и выполнения программы можно использовать данные примеров к предыдущим программам.

Для решения системы из пяти линейных уравнений на ПМК с входными языками ЯМК34 и ЯМК52 приходится предварительно очищать регистры памяти, так как фрагмент автоматической очистки не вмещается в программную память, и вводить коэффициенты первого уравнения разделенными на коэффициент w_{11} .

Программа 84. Решение системы из пяти линейных уравнений

ИПД	↔	↑	→	↑	КИП0	×	КИПД	+	ПП
89	$x < 0$	03	→	↔	ПД	C/П	ИПД	ИП0	—
3	+	$x \geq 0$	03	→	КИПД	—	ИПД	П0	→
C/П	КИП0	—	↔	÷	Bx	↔	ПП	89	$x=0$
29	→	↔	ПД	1	3	П0	П1	→	КИП1
/—/	↑	→	↑	КИПД	×	КИП1	+	КП0	ПП
90	$x=0$	52	→	↔	ПД	ИП1	ИП0	6	—
—	—	$x=0$	48	П1	→	КИПД	КП0	Cx	ПП
89	$x < 0$	75	+	1	3	П0	БП	14	КПД
→	ИПД	1	—	ПД	1	—	B/O		

Инструкция. $13=P0$; $5=RД$; $w_{12}/w_{11}=PC$, $w_{13}/w_{11}=PB$, $w_{14}/w_{11}=PA$, $w_{15}/w_{11}=P9$, $q_1/w_{11}=P8$, $0=P3=P4=P5=P6=P7$; $w_{21}=PX$ B/O C/П $w_{22}=PX$ C/П ... $q_2=PX$ C/П $w_{31}=PX$ C/П $w_{32}=PX$ C/П ... $q_3=PX$ C/П ... $w_{51}=PX$ C/П $w_{52}=PX$ C/П ... $q_5=PX$ C/П $PC=x_1$, $PB=x_2$, $PA=x_3$, $P9=x_4$, $P8=x_5$.

Пример. Для системы уравнений

$$\begin{bmatrix} 2 & 10 & 16 & -6 & 8 \\ 3 & 2 & 4 & 0 & 8 \\ 6 & -4 & 1 & 3 & 5 \\ 8 & -2 & 4 & -3 & 1 \\ 3 & 2 & 4 & 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 106 \\ 59 \\ 42 \\ 9 \\ 48 \end{bmatrix}$$

получим $x_1=1$, $x_2=2$, $x_3=3$, $x_4=4$, $x_5=5$.

Две последние программы при использовании ПМК с входным языком ЯМК52 можно несколько упростить, но для $n > 5$ уравнений системы для ее решения приходится использовать полуавтоматический режим вычислений с записью промежуточных результатов в вычислительный бланк.

Программа 85. Решение системы из $n \leq 12$ линейных уравнений по методу Жордана с использованием вычислительного бланка

$$\begin{array}{ccccccccc} \uparrow & \text{Сх} & \leftrightarrow & \text{ИП1} & \div & \text{П0} & \leftrightarrow & 1 & \text{ПС} \leftrightarrow \\ \text{С/П} & \text{ИПД} & \text{ИПС} & 1 & + & \text{ПС} & - & x \geq 0 & 26 \leftrightarrow \\ \text{КИПС} & \text{ИП0} & \times & - & \text{БП} & 10 & \leftrightarrow & \text{ИП0} & \text{БП} 02 \end{array}$$

Инструкция. Для вычисления элементов p -й части бланка (табл. 3.2), в нулевой части которого записаны столбцы коэффициентов, столбец свободных членов $q_i = w_{i,n+1}$ и контрольный столбец, элементы которого равны суммам элементов соответствующих строк, выполнить: $n = \text{РД}$, $w_{1,p}^{(p-1)} = \text{Р1}$, $w_{2,p}^{(p-1)} = \text{Р2}$, ..., $w_{np}^{(p-1)} = \text{Рn}$ ($n < 12$); $w_{1,p+1}^{(p-1)} = \text{РХ}$ В/О С/П РХ = 0; поочередно вводить остальные элементы $(p+1)$ -го и следующих столбцов $(p-1)$ -й части бланка в регистр РХ, нажимая после каждого ввода только клавишу С/П и

Таблица 3.2. Решение системы уравнений методом Жордана с циклической перестановкой строк вычислительного бланка

p	$j=1$	$j=2$	$j=3$	$j=4$	$j=5$	Σ
0	10 2 5 6	2 12 5 2	4 20 10 6	1 2 0 2	30 94 45 36	47 130 65 52
1		11,6 4 0,8 1	19,2 8 3,6 0,2	1,8 -0,5 1,4 0,1	88 30 18 3	120,6 41,5 23,8 4,7
2			1,3793104 2,2758621 6,896552 · 10 ⁻² 1,6551724	-1,1206896 1,2758621 6,896556 · 10 ⁻² 1,5517251	-3,44827 · 10 ⁻¹ 11,931035 1,4827586 7,5862068	-8,6204 · 10 ⁻² 15,482759 2,6206898 10,396551
3				3,1249999 0,125 1,4999998 -8,1249992 · 10 ⁻¹	12,5 1,5 7,9999992 -2,4999956	15,624996 2,625 10,499996 -6,2497897 · 10 ⁻²
4				1 1 1 1	1 1,999999 3,000002 4,000001	2,0000002 2,999999 4,0000007 4,9999988

регистрируя результат на одну строку того же столбца выше, чем в предыдущей части бланка записан введенный элемент (после ввода первого элемента следующего столбца результат записывается в последней строке предыдущего столбца); после ввода последнего элемента контрольного столбца и выполнения программы записать результат в предпоследней строке контрольного столбца, еще раз нажать клавишу С/П и записать результат в последней строке контрольного столбца; после выполнения n шагов с заполнением всех n частей бланка в n -м столбце n -й части бланка будут записаны значения искомых решений (корней) системы уравнения x_i ; вычисляемые значения элементов контрольного столбца должны быть равными сумме элементов соответствующих строк бланка, включая r единиц, записываемых в r нижних строках r -го столбца r -й части бланка — нарушение этого равенства свидетельствует об ошибке в вычислениях.

Для проверки правильности ввода и выполнения программы, а также порядка заполнения бланка можно воспользоваться данными табл. 3.2. С целью уменьшения операционных погрешностей целесообразно перед началом решения уравнения системы переставить так, чтобы на главной диагонали матрицы коэффициентов находились наибольшие по абсолютному значению числа.

При определении функций безынерционных цепей по выражениям, подобным формулам (3.4)–(3.7), требуется вычислить определители, включая алгебраические дополнения, которые могут лишь знаком отличаться от миноров, равных определителям матриц с вычеркнутыми строками и столбцами.

Программа 86. Вычисление определителя Δ матрицы второго порядка

$\rightarrow \times \text{П8} \rightarrow \times \text{ИП8} - \text{С/П}$

Инструкция. $w_{11}=PT$, $w_{12}=PZ$, $w_{21}=PY$, $w_{22}=PX$ В/О С/П РХ=Δ.
Пример

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -2.$$

Программа 87. Вычисление определителя Δ матрицы третьего порядка

$$\begin{array}{l} \text{П7} \div \text{П8} \leftrightarrow \text{ИП7} \div \text{П9} \quad 2 \quad \text{П0} \quad 7 \\ \text{П1 С/П ПА ИП8} \times \quad - \quad \text{КП1} \rightarrow \text{ИПА ИП9} \\ \times - \quad \text{КП1} \quad \text{Л0} \quad 11 \quad \text{ИП6} \times \quad \text{ИП4 ИП5} \times \\ \leftrightarrow - \quad \text{ИП7} \times \quad \text{С/П} \end{array}$$

Инструкция. $w_{11}=PZ$, $w_{12}=PY$, $w_{13}=PX$ В/О С/П $w_{21}=PZ$, $w_{22}=PY$, $w_{23}=PX$ СП $w_{31}=PZ$, $w_{32}=PY$, $w_{33}=PX$ СП РХ=Δ.

Пример.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 4 & 10 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 28.$$

Программа 88. Вычисление определителя Δ матрицы порядка $n \leq 5$

P4	1	4	P2	КИП0	ИП0	П1	C/P	ИП4	÷
KП2	L1	07	1	4	П3	ИП0	П1	Cx	KП2
L1	19	ИП0	ИП2	+	П1	П2	ИП3	—	x≠0
36	C/P	ПП	83	БП	23	КИП0	ИП4	C/P	КИП2
—	×	П4	ИП0	П3	x≠0	37	Bx	C/P	КИП2
—	↔	÷	KП1	L3	37	ИП1	ИП0	+	П3
1	4	П1	П2	КИП1	/—/	ПП	83	ИП3	+
П3	ИП1	—	x=0	64	ИП0	П1	КТП3	КП2	L1
77	БП	13	ИП0	↔	↑	КИП3	×	КИП1	+
KП2	→	L0	85	↔	П0	B/O			

Инструкция. $n=P0$, $w_{11}=PX$ B/O C/P $w_{12}=PX$ C/P ... $w_{1n}=PX$ C/P $w_{21}=PX$ C/P $w_{22}=PX$ C/P ... $w_{2n}=PX$ C/P ... $w_{n1}=PX$ C/P $w_{n2}=PX$ C/P ... $w_{nn}=PX$ C/P $PX=\Delta$.

Примеры

$$\Delta = \begin{vmatrix} 10 & 4 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = 40 \quad (t \approx 23 \text{ с});$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 6 \\ 2 & -1 & 4 \\ 3 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 69,000001 \quad (t \approx 72 \text{ с});$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -60 \quad (t \approx 140 \text{ с});$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 1 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 5 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 360 \quad (t \approx 260 \text{ с}).$$

Для вычисления определителей матриц порядка $n \geq 3$ можно использовать полуавтоматический режим с записью промежуточных результатов в вычислительный бланк. В этом случае целесообразно использовать схему единственного деления Гаусса [14], так как достаточно выполнить вычисления лишь на ее прямом ходе с относительно небольшим числом строк вычислительного бланка.

Программа 89. Вычисление определителя Δ матрицы порядка $n \leq 10$ по схеме единственного деления Гаусса с использованием вычислительного бланка

ПВ	ИПС	×	ПС	ИПД	1	—	ПД	П0	ИПС
C/P	ИПВ	÷	KП0	ИП0	1	—	x=0	10	C/P
ПА	ИПД	П0	C/P	КИП0	ИПА	×	—	ИП0	1
—	x=0	36	→	БП	19	→	БП	23	

Инструкция. Записать в нулевую часть бланка столбцы коэффициентов матрицы и в контрольный столбец суммы элементов каждой строки матрицы (табл. 3.3); $n+2=R\Delta$; $1=PC$; для каждой p -й части бланка $w_{1,p-1}^{(p-1)}=PX$ B/O C/P $PX=\Delta'$, остальные элементы первого столбца $(p-1)$ -й части ввести

в регистр X, после каждого ввода нажать только клавишу С/П и контролировать высвечиваемые значения $RX = n-i-1$; для каждого столбца $j > p$ в $(p-1)$ -частях $w_{ij}^{(p-1)} = RX$ С/П $RX = n+1-p$, остальные элементы столбца ввести, нажать только клавишу С/П и регистрировать высвечиваемые значения $w_{ij}^{(p)}$ в p -й части бланка; вычисленные значения элементов контрольного столбца должны быть равны суммам элементов соответствующей строки p -й части бланка, в противном случае произошла ошибка в вычислениях; после заполнения всех p частей бланка, включая элемент $w_{1,n+1}^{(p)}$ в $(n-1)$ -й части, нажать клавиши В/О и С/П и зарегистрировать высвечиваемое значение Δ .

Для проверки правильности выполнения программы и инструкции можно воспользоваться данными табл. 3.3.

При решении систем уравнений и других задач анализа линейных цепей используют обращение квадратных матриц по формуле

$$B = A^{-1} = \begin{bmatrix} \Delta_{11}/\Delta & \Delta_{12}/\Delta & \dots & \Delta_{1n}/\Delta \\ \Delta_{21}/\Delta & \Delta_{22}/\Delta & \dots & \Delta_{2n}/\Delta \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \Delta_{n1}/\Delta & \Delta_{n2}/\Delta & \dots & \Delta_{nn}/\Delta \end{bmatrix}, \quad (3.12)$$

Таблица 3.3. Вычисление определителя по схеме единственного деления Гаусса

p	$j=1$	$j=2$	$j=3$	$j=4$	$j=5$	Σ
0	5 4 2 3 1	4 3 1 2 2	3 2 3 1 3	2 1 4 4 4	1 5 5 5 5	15 15 15 15 15
1		-0,2 -0,6 -0,4 1,2	-0,4 1,8 -0,8 2,4	-0,6 3,2 2,8 3,6	4,2 4,6 4,4 4,8	3 9 6 12
2			3 0 0	5 4 0	-8 -4 30	0 0 30
3				4 0	-4 30	0 30
4					30	30
5	$\Delta = 5 \times (-0,2) \times 3 \times 4 \times (30) = -360$					

где Δ и Δ_{ij} — определитель и алгебраические дополнения матрицы A .

Программа 90. Обращение матрицы $A=B^{-1}$ второго порядка

$$\begin{array}{l} \text{П8} \rightarrow /-/ \text{ П7} \rightarrow /-/ \text{ П6} \rightarrow \text{П5} \quad \text{ИП8} \\ \times \text{ ИП7 ИП6} \times - \text{ П9} \quad 9 \text{ П0 КИП0 ИП9} \\ \div \text{ С/П БП} \quad 18 \end{array}$$

Инструкция. $a_{11}=PT$, $a_{12}=PZ$, $a_{21}=PY$, $a_{22}=PX$ В/О С/П $PX=b_{11}$
С/П $PX=b_{21}$ С/П $PX=b_{12}$ С/П $PX=b_{22}$.

Пример.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1,5 & -0,5 \end{bmatrix}.$$

Программа 91. Обращение матрицы $A=B^{-1}$ третьего порядка

$$\begin{array}{l} \text{Сх} \quad 3 \quad \text{П0} \quad \text{ИП4 ИП1} \quad \div \quad \text{ПД} \quad /-/ \quad \text{ПС} \quad \text{ИП5} \\ \text{ИП2} \quad \text{ИПД} \times - \quad \text{ПА} \quad \text{ИП6} \quad \text{ИП3} \quad \text{ИПД} \times - \\ \text{ПВ} \quad \text{ИП7} \quad \text{ИП1} \quad \div \quad \text{ПД} \quad /-/ \quad \text{П6} \quad \text{ИП8} \quad \text{ИП2} \quad \text{ИПД} \\ \times - \quad \text{П4} \quad \text{ИП9} \quad \text{ИП3} \quad \text{ИПД} \times - \quad \text{П5} \quad \text{ИП2} \\ \text{ИП1} \quad \div \quad \text{П7} \quad \text{ИП3} \quad \text{ИП1} \quad \div \quad \text{П8} \quad \text{ИП1} \quad 1/x \quad \text{П9} \\ \text{ИПА} \quad \text{П1} \quad \text{ИПВ} \quad \text{П2} \quad \text{ИПС} \quad \text{П3} \quad \text{Л0} \quad 03 \quad \text{С/П} \end{array}$$

Инструкция. $a_{11}=P7$, $a_{12}=P8$, $a_{13}=P9$, $a_{21}=P4$, $a_{22}=P5$, $a_{23}=P6$,
 $a_{31}=P1$, $a_{32}=P2$, $a_{33}=P3$ В/О С/П $PX=P3=b_{11}$, $P7=b_{33}$, $P8=b_{32}$, $P9=b_{31}$,
 $P4=b_{23}$, $P5=b_{22}$, $P6=b_{21}$, $P1=b_{13}$, $P2=b_{12}$, $P3=b_{11}$ ($t \approx 50$ с).

Пример.

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0,34375 & -0,125 & -0,03125 \\ 0,0625 & 0,25 & -0,1875 \\ -0,15625 & -0,125 & 0,46875 \end{bmatrix}.$$

Для обращения матриц порядка $n > 3$ целесообразно использовать метод Жордана с записью промежуточных результатов в вычислительный бланк. В этом случае в нулевой части вычислительного бланка столбец свободных членов q_i системы уравнений должен быть заменен столбцами единичной матрицы порядка n . Для проверки правильности использования программы 85 при обращении матрицы можно воспользоваться данными табл. 3.4.

При использовании методов свертывания соединения проходных четырехполюсников, замещающих безынерционную цепь, целесообразно автоматизировать преобразование вещественных параметров в соответствии с формулами табл. 3.1.

Программа 92. Преобразование вещественных параметров проходных четырехполюсников

$$\begin{array}{l} \text{ИП7 ИП5} \times \text{ ИП8 ИП4} \times - \quad \text{П1} \leftrightarrow \text{x=0} \\ 30 \quad \text{ИП8 ИП1} \quad /-/ \div \quad \text{П8} \quad \text{ИП4} \quad \text{Вx} \div \text{ П4} \\ \text{ИП5} \quad \text{ИП1} \quad \div \quad \text{ИП7} \quad \text{ИП1} \quad \div \quad \text{П5} \quad \leftrightarrow \quad \text{П7} \quad \text{С/П} \\ \text{П1} \quad 1/x \quad \text{П2} \quad \times \quad \text{П3} \quad \text{БП} \quad 11 \end{array}$$

Таблица 3.4. Обращение матрицы по методу Жордана с циклической перестановкой строк

p	$j=1$	$j=2$	$j=3$	
0	3 0 1	2 5 2	1 2 3	
1		5 1,3333333 $6,6666666 \cdot 10^{-1}$	2 2,6666667 $3,3333333 \cdot 10^{-1}$	
2			2,1333334 $6,6666667 \cdot 10^{-2}$ 0,4	
3				1 1 1
p	$j=4$	$j=5$	$j=6$	Σ
0	1 0 0	0 1 0	0 0 1	7 8 7
1	0 $-3,333333 \cdot 10^{-1}$ $3,333333 \cdot 10^{-1}$	1 0 0	0 1 0	8 4,6666667 $2,3333333$
2	$-3,333333 \cdot 10^{-1}$ $3,333333 \cdot 10^{-1}$ 0	$-2,666666 \cdot 10^{-1}$ $-1,333333 \cdot 10^{-1}$ 0,2	1 0 0	2,533335 $1,2666666$ 1,6
3	0,34375 $6,2499996 \cdot 10^{-2}$ $-1,5624999 \cdot 10^{-1}$	-0,125 0,25 $-1,2499999 \cdot 10^{-1}$	$-3,125 \cdot 10^{-2}$ $-1,8749999 \cdot 10^{-1}$ $4,6874998 \cdot 10^{-1}$	1,1874999 1,125 1,1875

Инструкция. $w_{11} = P7$, $w_{12} = P8$, $w_{21} = P4$, $w_{22} = P5$, $0 = PX$ B/O C/P ($t \approx 8$ с) $PX = P7 = w_{22}/|w|$, $P8 = -w_{12}/|w|$, $P4 = -w_{21}/|w|$, $P5 = w_{11}/|w|$, $P1 = |w|$ или $w_{ij} = PX$ B/O C/P ($t \approx 10$ с) $PX = w_{22}/w_{ij}$, $P8 = -w_{12}/w_{ij}$, $P4 = -w_{21}/w_{ij}$, $P5 = w_{11}/w_{ij}$, $P2 = 1/w_{ij}$, $P3 = |w|/w_{ij}$.

Таким образом, при очистке регистра PX перед пуском программы получим результат взаимного преобразования матриц Y и Z или D и H , а при вводе в

регистр РХ перед пуском программы одного из исходных параметров — параметры других матриц проходного четырехполюсника без учета отрицательных знаков, указанных в табл. 3.1.

Пример. Для $y_{11} = 12 = P7$, $y_{12} = -1 = P8$, $y_{21} = 10 = P4$, $y_{22} = P5$ при $0 = RX$ получим $RX = P7 = z_{11} = 7,1428571 \cdot 10^{-2}$, $P8 = z_{12} = 1,4285714 \cdot 10^{-2}$, $P4 = z_{21} = -1,4285714 \cdot 10^{-1}$; $P5 = z_{22} = 1,7142857 \cdot 10^{-1}$, $P1 = |y| = 70$; для $z_{21} = -1,4285714 \times 10^{-1} = RX$ получим $RX = P7 = z_{22}/z_{21} = -a_{22} = -1,2$, $P8 = z_{12}/z_{21} = 0,1$, $P4 = -z_{21}/z_{21} = -1$, $P5 = z_{11}/z_{21} = -0,5$, $P3 = 1/z_{21} = a_{21} = -9,999999 \cdot 10^{-2}$, $P2 = |z'|/z_{21} = -a_{12} = -7,0000001$.

Вычисление A и B матриц каскадных соединений проходных четырехполюсников с вещественными параметрами и решение ряда других задач сводится к умножению двух или нескольких матриц второго порядка.

Программа 93. Вычисление произведения $C = A \times B$ вещественных матриц второго порядка

$$\begin{array}{lcl} ПД & \rightarrow & ПС \rightarrow \\ ИПС & \times & + \\ ИП7 & \leftrightarrow & П4 \\ ИПВ & \times & ИП8 \\ С/П & & \end{array} \quad \begin{array}{lcl} ПВ & \leftrightarrow & ПА \\ ИП5 & \times & ИПД \\ ИП7 & \leftrightarrow & ИП4 \\ ИПВ & \times & ИП8 \\ П8 & \leftrightarrow & П7 \end{array} \quad \begin{array}{lcl} ИП4 & \times & ИП5 \\ ИПД & \times & ИП4 \\ ИП8 & \times & ИП5 \\ ИПС & \times & + \\ + & & \end{array}$$

Инструкция. $a_{11} = P7$, $a_{12} = P8$, $a_{21} = P4$, $a_{22} = P5$, $b_{11} = PT$, $b_{12} = PZ$, $b_{21} = PY$, $b_{22} = RX$ В/О C/P $RX = P7 = c_{11}$, $PY = P8 = c_{12}$, $P4 = c_{21}$, $P5 = c_{22}$ ($t \approx 12$ с).

Так как параметрами матрицы C замещаются соответствующие параметры матрицы A , то при вычислении произведения нескольких матриц после вычисления первого произведения достаточно ввести в регистры операционного стека лишь параметры очередной умножаемой матрицы и нажать клавиши В/О и С/П.

Пример.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -47 & 50 \\ -107 & 114 \end{bmatrix}.$$

В ряде радиотехнических приложений приходится находить произведения вещественных матриц более высокого порядка.

Программа 94. Вычисление произведения $C = A \times B$ вещественных матриц третьего порядка

$$\begin{array}{lcl} ПВ & \rightarrow & ПА \leftrightarrow П0 \\ + & ИП3 & ИПВ \times + \\ ИПА & \times & + \\ \times & ИП8 & ИПА \times + \\ БП & 00 & \end{array} \quad \begin{array}{lcl} ИП1 & \times & ИП2 \\ ИП4 & \times & ИП0 \\ ИП6 & \times & ИПВ \times + \\ ИП9 & ИПВ & \times + \\ С/П & & \end{array} \quad \begin{array}{lcl} ИП2 & ИПА & \times \\ ИП0 & \times & ИП5 \\ ИП7 & ИП0 & \\ С/П & & \end{array}$$

Инструкция. ($a_{11} = P7$, $a_{12} = P8$, $a_{13} = P9$, $a_{21} = P4$, $a_{22} = P5$, $a_{23} = P6$, $a_{31} = P1$, $a_{32} = P2$, $a_{33} = P3$) $b_{11} = PZ$, $b_{21} = PY$, $b_{31} = RX$ В/О C/P $RX = c_{11}$, $PY = PC = c_{21}$, $PД = c_{31}$, $b_{12} = PZ$, $b_{22} = PY$, $b_{32} = RX$ С/П $RX = c_{12}$, $PY = PC = c_{22}$, $PД = c_{32}$, $b_{13} = PZ$, $b_{23} = PY$, $b_{33} = RX$ С/П $RX = c_{13}$, $PY = PC = c_{23}$, $PД = c_{33}$ ($t \approx 12$ с)).

Пример.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & 32 & 50 \\ 32 & 77 & 122 \\ 50 & 122 & 194 \end{bmatrix}.$$

В связи с ограниченной емкостью памяти ПМК умножение матриц с минимальным числом строк или столбцов $p > 3$ приходится выполнять в соответствии с формулой (3.11) при последовательном вводе элементов строк первой матрицы и столбцов второй матрицы.

Программа 95. Вычисление произведения прямоугольных матриц $C = A \times B$ с числом $p \leq 11$ строк матрицы B и столбцов матрицы A

```

↑   1   +  П0  С/П КП0 ИП0 1   -   x=0
04   ИПД П0 ИПС 0   ПС ↔  С П КИП0 ×
ИПС +   ПС ИП0 1   --  x=0 17   БП   11

```

Инструкция. Для каждой i -й строки матрицы A выполнить $p = РХ В$ О С/П РХ = $p+1$, $a_{i1} = РХ С/П РХ = p-1$, $a_{i2} = РХ$, С/П РХ = $p-2 \dots a_{in} = РХ$ С П РХ = p , $b_{11} = РХ С/П РХ = p-1$, $b_{21} = РХ С/П РХ = p-2 \dots b_{n1} = РХ$ С/П РХ = c_{11} , $b_{12} = РХ С/П РХ = p-1$, $b_{22} = РХ С/П РХ = p-2 \dots b_{n2} = РХ$ С/П РХ = $c_{12} \dots b_{1n} = РХ С/П РХ = p-1$, $b_{2n} = РХ С/П РХ = p-2 \dots b_{nn} = РХ С/П РХ = c_{1n}$.

Для проверки правильности выполнения программы и инструкции можно воспользоваться данными примера к программе 94.

Если известны параметры y_{ij} проходного четырехполюсника, эквивалентного цепи передачи сигнала, и проводимость нагрузки y_n (см. рис. 9, б), то все функции такой безынерционной цепи и коэффициент передачи мощности гармонического сигнала в нагрузку $K_p = -K_I K_I$ можно вычислить с помощью одной программы.

Программа 96. Вычисление функций безынерционной цепи по проводимости эквивалентного проходного четырехполюсника и нагрузки

```

П9 ИП5 + ИП4 /-/ ↔ ÷ П0 ИП8 ×
ИП7 + ПВ 1/x ПА ИП0 × П3 ИП9 ×
ПС ИП0 × ПД ИПС — ПС ИП0 /-/ ИП9
× ИП0 С/П

```

Инструкция. ($y_{11} = P7$, $y_{12} = P8$, $y_{21} = P4$, $y_{22} = P5$), $y_n = P9$, В О С/П РХ = Р0 = K_U , РY = $Y_{\text{нep}}$, Р3 = $Z_{\text{нep}}$, РА = $Z_{\text{вX}}$, РВ = $Y_{\text{вX}}$, РС = K_I , РД = K_p ($t \approx 10$ с).

Пример. Для $y_{11} = 500$, $y_{12} = -1$, $y_{21} = 50000$, $y_{22} = 50$ при $y_n = 50$ получим $K_U = -500$, $Y_{\text{нep}} = 25000$, $Z_{\text{нep}} = -0,5$, $Z_{\text{вX}} = 1 \cdot 10^{-3}$, $Y_{\text{вX}} = 1000$, $K_I = -25$, $K_p = 12500$.

Основные функции безынерционной цепи, описанной матрицей проводимостей третьего порядка, можно вычислить по программе, для упрощения которой в соответствии с формулами § 3.1 принято $K_{U21} = \Delta_{12}/\Delta_{11}$, $K_{U31} = \Delta_{13}/\Delta_{11}$, $Y_{\text{вX}} = y_{11} + y_{12} K_{U21} + y_{13} K_{U31}$. Выходные нагрузки учитывают в матрице проводимостей.

Программа 97. Вычисление функций безынерционной цепи по матрице проводимостей третьего порядка

$$\begin{array}{l} \text{ИП4 ИП2} \times \text{ИП5 ИП1} \times - \text{ИП5 ИП3} \times \\ \text{ИП6 ИП4} \times - \text{ПД} \div \text{ПВ} \text{ ИП9} \times \text{ИП6} \\ \text{ИП1} \times \text{ИП4} \text{ ИП3} \times - \text{ИПД} \div \text{ПА} \text{ ИП8} \\ \times \text{ИП7} + \text{П0} \text{ ИПА} \times \text{ПС} \text{ ИП0 ИПВ} \times \\ \text{ПД} \text{ ИП0} \uparrow \text{ПХ С П} \end{array}$$

Инструкция. ($y_{11} = P_7$, $y_{12} = P_8$, $y_{13} = P_9$, $y_{21} = P_4$, $y_{22} = P_5$, $y_{23} = P_6$, $y_{31} = P_1$, $y_{32} = P_2$, $y_{33} = P_3$) В/О С/П РХ = $Z_{\text{вх1}}$, РY = Р0 = $Y_{\text{вх1}}$, РA = K_{U21} , РB = K_{U31} , РC = $Z_{\text{пер21}}$, РД = $Z_{\text{пер31}}$ ($t \approx 13$ с).

Пример. Для матрицы проводимостей

$$\begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} & y_{13} \\ y_{21} & y_{22} & y_{23} \\ y_{31} & y_{32} & y_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,2 \cdot 10^{-3} & -4 \cdot 10^{-6} & -1 \cdot 10^{-3} \\ 5 \cdot 10^{-2} & 3 \cdot 10^{-4} & -5,03 \cdot 10^{-2} \\ -5,1 \cdot 10^{-2} & -2,96 \cdot 10^{-4} & 0,1 \end{bmatrix}$$

получим $Z_{\text{вх1}} = 830,68441$ Ом, $Y_{\text{вх1}} = 1,2038266 \cdot 10^{-3}$ См, $K_{U21} = -0,95666011$, $K_{U31} = 1,9646365 \cdot 10^{-4}$, $Z_{\text{пер21}} = -1,1516529 \cdot 10^{-3}$ Ом, $Z_{\text{пер31}} = 2,3650816 \cdot 10^{-7}$ Ом.

С помощью программы 97 при предварительном преобразовании эквивалентной схемы согласно принципу наложения и теореме об эквивалентном генераторе удается анализировать цепи, содержащие более трех незаземленных узлов.

3.3. Анализ цепи в операторной области

Функции линейной цепи в общем случае являются дробно-рациональными функциями комплексной частоты $p = \sigma + j\omega$ в виде отношения многочленов

$$F(p) = \frac{\sum_{i=0}^n a_i p^i}{\sum_{i=0}^m b_i p^i} = \frac{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0}{b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \dots + b_1 p + b_0} \quad (3.13)$$

с вещественными коэффициентами a_i и b_i . При анализе цепи приходится выполнять преобразование ее функций с численным заданием коэффициентов и символьным представлением переменной p . Одна из часто встречающихся операций связана с преобразованием коэффициентов степенного многочлена при изменении его аргумента на вещественное приращение.

Программа 98. Вычисление коэффициентов a'_i многочлена $A(z) = A(p-x_0)$ по коэффициентам a_i многочлена $A(p)$ степени $n \leq 10$

$$\begin{array}{l} \text{ПД} \text{ ПС} \rightarrow \text{КИПВ} \text{ ИПВ} 1 \text{ } - \text{ ПВ} \rightarrow \\ \times \text{ КИПВ} + \text{ КПВ} \rightarrow \text{ ИПД} \text{ ИПВ} 2 \text{ } + \text{ ПВ} \\ - \text{ x}<0 \text{ } 03 \rightarrow \text{ ИПС} 1 \text{ } - \text{ x}=0 \text{ } 01 \text{ С/П} \end{array}$$

Инструкция. $a_0 = P_0$, $a_1 = P_1$, ..., $a_n = P_n$, $x_0 = P_Y$, $n = P_X$ В/О С/П РХ = 0, Р0 = a'_0 , Р1 = a'_1 , ..., Рn = a'_n ($t \approx 20n$ с).

При использовании ПМК с входным языком ЯМК52 максимальную степень, n можно увеличить на единицу, заменив в программе обращения к регистрам В, С и Д обращением соответственно к регистрам С, Д и Е.

Пример. Для $A(p) = 5p^5 + 4p^4 + 3p^3 + 2p^2 + p + 0,5$ получим $A(p-0,5) = 5z^5 + 16,5z^4 + 23,5z^3 + 18,75z^2 + 8,8125z + 2,28125$ ($t \approx 1$ мин 30 с).

Решение многих задач анализа и синтеза цепей связано с умножением и делением степенных многочленов при символьном представлении комплексной частоты.

Программа 99. Вычисление коэффициентов c_i произведения многочлена $A(p)$ произвольной степени n на двучлен $b_1p + b_0$

П3 Сх П7 ↔ П9 ИП1 × ИП7 + П8
ИП9 ИП0 × П7 КИП3 ИП3 ИП8 С П БП 04

Инструкция. ($b_0 = P0$, $b_1 = P1$) $a_n = PY$, $n = PX$ В/О С/П $PX = c_{n+1}$, $PY = n - 1$, $a_{n-1} = PX$ С/П $PX = c_n$, $PY = n - 2$, $a_{n-2} = PX$ С/П $PX = c_{n-1}$, $PY = n - 3$... $a_0 = PX$ С/П $PX = c_1$, $P7 = c_0$ ($t \approx 5$ с).

Пример. $(2p+1)(3p^3+2p^2+p+0,5) = 6p^4 + 7p^3 + 4p^2 + 2p + 0,5$.

Программа 100. Вычисление коэффициентов c_i произведения многочлена $A(p)$ произвольной степени n на трехчлен $b_2p^2 + b_1p + b_0$

П3 Сх П7 П8 ↔ П9 ИП2 × ИП7 +
П6 ИП9 ИП1 × ИП8 + П7 ИП9 ИП0 ×
П8 КИП3 ИП3 ИП6 С/П БП 05

Инструкция. ($b_0 = P0$, $b_1 = P1$, $b_2 = P2$) $a_n = PY$, $n = PX$ В/О С/П $PX = c_{n+2}$, $PY = n - 1$, $a_{n-1} = PX$ С/П $PX = c_{n+1}$, $PY = n - 2$, $a_{n-2} = PX$ С/П $PX = c_n$... $a_0 = PX$ С/П $PX = c_2$, $P7 = c_1$, $P8 = c_0$ ($t \approx 10$ с).

Пример. $(3p^2+2p+0,5)(p^2+2p+0,5) = 3p^4 + 8p^3 + 6p^2 + 2p + 0,25$.

Программа 101. Вычисление коэффициентов c_i произведения многочлена $A(p)$ произвольной степени n на многочлен $B(p)$ степени $m \leq 6$

ПД ИП6 × ИПС + ИПД ИП5 × ИПВ +
ПС → ИПД ИП4 × ИПА + ПВ → ИПД
ИП3 × ИП9 + ПА → ИПД ИП2 × ИП8
+ П9 → ИПД ИП1 × ИП7 + П8 →
ИПД ИП0 × П7 → ИПД С/П БП 00

Инструкция. ($b_0 = P0$, $b_1 = P1$, ..., $b_6 = P6$; при $m < 6$ вместо отсутствующих коэффициентов ввести нули) $0 = P7 = P8 = \dots = PC$, $a_n = PX$ В/О С/П $PX = a_n$, $PY = c_{n+m}$, $a_{n-1} = PX$ С/П $PX = a_{n-1}$, $PY = c_{n+m-1}$... $a_0 = PX$ С/П $PX = a_0$, $PY = c_6$, $PC = c_5$, $PB = c_4$, $PA = c_3$, $P9 = c_2$, $P8 = c_1$, $P7 = c_0$ ($t \approx 15$ с).

Пример. $(6p^6 + 5p^5 + 4p^4 + 3p^3 + 2p^2 + p + 1)(5p^5 + 4p^4 + 3p^3 + 2p^2 + p + 1) = 30p^{11} + 49p^{10} + 58p^9 + 58p^8 + 50p^7 + 41p^6 + 30p^5 + 18p^4 + 10p^3 + 5p^2 + 2p + 1$.

Максимальную степень многочлена $B(p)$ можно увеличить на единицу при использовании ПМК с входным языком ЯМК52 [11], но в общем случае для многочлена $B(p)$ степени $m > 6$ можно воспользоваться разложением (1.8).

Программа 102. Вычисление коэффициентов c_i квадрата многочлена $A(p)$ степени $n \leq 10$

ПД	ПС	Cx	ИПД	ПВ	↔	КИПВ	КИПС	×	ИПВ
ИПС	—	x ≠ 0	18	↔	2	×	↔	→	+
ИПС	1	+	ПС	ИПВ	1	—	ПВ	—	1
—	x ≥ 0	05	↔	C/П	ИПВ	ИПС	+	1	—
ПВ	ИПД	—	x < 0	01	Cx	ПС	БП	06	

Инструкция. ($a_0 = P_0, a_1 = P_1, \dots, a_n = P_n$) $n = RX$ В/О С/П $RX = c_{2n}$,
С/П $RX = c_{2n-1} \dots$ С/П $RX = c_2$ С/П $RX = c_0$ ($t \approx 15$ с).

Пример. $(3p^3 + 2p^2 + p + 0,5)^2 = 9p^6 + 12p^5 + 10p^4 + 7p^3 + 3p^2 + p + 0,25$.

При использовании ПМК с входным языком ЯМК52 для повышения на единицу максимальной степени n следует заменить в программе обращения к регистрам В, С, Д соответственно обращениями к регистрам С, Д, Е. В общем случае при $n > 10$ можно воспользоваться программой 101 с возведением многочлена в степень по частям в соответствии с разложением (1.8).

Программа 103. Вычисление коэффициентов c_i произведения $A(p)A(-p)$ многочленов степени $n \leq 11$

Cx	ПС	ПД	КИПС	x ²	ИПД	x ≠ 0	32	1	—
ПД	↔	ИПС	1	+	ПС	1	2	—	x ≠ 0
31	↔	КИПС	КИПД	×	2	×	↔	—	БП
05	↔	—	ИПС	ИПД	+	2	÷	1	+
↔	C/П	↔	В/О						

Инструкция. ($a_0 = P_0, a_1 = P_1, \dots, a_{11} = P_B$; вместо отсутствующих коэффициентов ввести нули) В/О С/П $RX = c_0$ С/П $RX = c_2$ С/П $RX = c_4 \dots$ С/П $RX = c_{2n}$ (время счета от 6 до 45 с в зависимости от номера коэффициента).

Пример. Для $A(p) = 3p^3 + 2p^2 + p + 0,5$ получим $A(p)A(-p) = -9p^6 - 2p^4 + p^2 + 0,25$.

При использовании ПМК с входным языком ЯМК52 максимальную степень n можно увеличить на единицу, заменив в программе 103 обращения к регистрам С и Д обращениями соответственно к регистрам Д и Е. В общем случае при $n > 11$ можно использовать программу 101 с учетом разложения (1.8).

Программа 104. Вычисление коэффициентов c_i частного и остатка r_0 от деления многочлена $A(p)$ степени $n \leq 12$ на двучлен $p + b_0$

↑	↑	↑	→	КИПД	×	ИПД	1	—	ПД
→	КИПД	+	КПД	→	ИПД	x = 0	03	ИП0	С/П

Инструкция. $a_0 = P_0, a_1 = P_1, \dots, a_n = P_n, n = RD, -b_0 = RX$ В/О С/П $RX = r_0, P_1 = c_0, P_2 = c_1, \dots, P_n = c_{n-1}$ ($t \approx 8n$ с).

Пример. $(3p^3 + 2p^2 + 24p + 30)(p + 3) = 3p^6 - 7p^5 + 45; r_0 = -105$ ($t \approx 25$ с).

Максимальную степень n можно увеличить на единицу при использовании ПМК с входным языком ЯМК52, заменив в программе 104 обращения к регистру Д обращениями к регистру Е.

Программа 105. Вычисление коэффициентов c_i частного и остатка r_0 от деления многочлена $A(p)$ произвольной степени n на двучлен $b_1p + b_0$

P9	↔	P2	ИП0	ИП1	÷	P4	КИП2	ИП2	ИП9
ИП1	÷	C/П	ИП9	ИП4	×	—	P9	БП	07

Инструкция. ($b_0 = P0$, $b_1 = P1$) $n = PY$, $a_n = PX$ В/О С/П $PX = c_{n-1}$, $PY = n - 1$, $a_{n-1} = PX$ С/П $PX = c_{n-2}$, $PY = n - 2$... $a_1 = PX$ С/П $PX = c_0$, $PY = 0$, $a_0 = PX$ С/П $PX = r_0$ ($t \approx 8$ с).

Пример. $(3p^3 + 2p^2 + p + 0,5)(2p + 1) = 1,5p^2 + 0,25p + 0,375$; $r_0 = 0,0625$.

Программа 106. Вычисление коэффициентов c_i частного и остатка $R = r_1p + r_0$ от деления многочлена $A(p)$ степени $n \leq 9$ на трехчлен $p^2 + b_1p + b_0$

ПД	1	—	ПС КИПД	КИПС ИПС 1	—	ПС
$x \geq 0$	26	$\rightarrow \leftrightarrow$	ИПА	\times	$\rightarrow \leftrightarrow$	КИПС \leftrightarrow
КПС ИПВ	\times	—	БП	06	$\rightarrow \leftrightarrow$	С П

Инструкция. ($b_1 = PA$, $b_0 = PB$) $a_0 = P0$, $a_1 = P1$, ..., $a_n = Pn$, $n = PX$ В/О С/П $PX = r_1$, $PY = r_0$, $P0 = c_0$, $P1 = c_1$, $P2 = c_2$, ..., $P(n-2) = c_{n-2}$ ($t \approx 5$ с).

Пример. $(3p^4 + 15p^3 + 24p^2 + 30p + 10)/(p^2 + 2p + 0,5) = 3p^2 + 9p + 4,5$; $R = 16,5p + 7,75$ ($t \approx 20$ с).

Максимальную степень делимого можно увеличить на единицу при использовании микрокалькулятора с входным языком ЯМК52, заменив в программе 106 обращения к регистрам А, В, С и Д соответственно обращениями к регистрам В, С, Д и Е.

Программа 107. Вычисление коэффициентов c_i частного и остатка $R = r_1p + r_0$ от деления многочлена $A(p)$ произвольной степени на трехчлен $B(p) = b_2p^2 + b_1p + b_0$

ПА	П6	Сх	ПС \leftrightarrow	П3	ИП1	ИП2 \div	ИПА	
\times	ИПС	$+$	ПВ	ИП0	ИП2 \div	ИПА	\times	ПС
КИП3	ИП3	$x \neq 0$	35	ИП6	ПА	ИП2 \div	С П	П7
ИПВ	—	П6	БП	06	ИП7	ИПВ	—	С П ИПС
—	С/П							

Инструкция. ($b_0 = P0$, $b_1 = P1$, $b_2 = P2$) $n = PY$, $a_n = PX$ В/О С/П $PX = c_{n-2}$, $PY = n - 2$, $a_{n-1} = PX$ С/П $PX = c_{n-3}$, $PY = n - 3$, ..., $a_2 = PX$ С/П $PX = c_0$, $PY = 0$, $a_1 = PX$ С/П $PX = r_1$, $a_0 = PX$ С/П $PX = r_0$ ($t \approx 9$ с).

Пример. $(3p^3 + 12p^2 + 30p + 10)/(2p^2 + p + 0,5) = 1,5p + 5,25$; $R = 24p + 7,375$.

Составление функций цепи вида (3.13) упомянутыми ранее методами достаточно громоздко, но для цепей некоторых классов эту процедуру удается автоматизировать. Это относится к реактивным лестничным цепям, схемы которых показаны на рис. 13. Если потерями в элементах такой цепи можно преигнорировать, все продольные ветви индуктивные (емкостные), а поперечные — емкостные

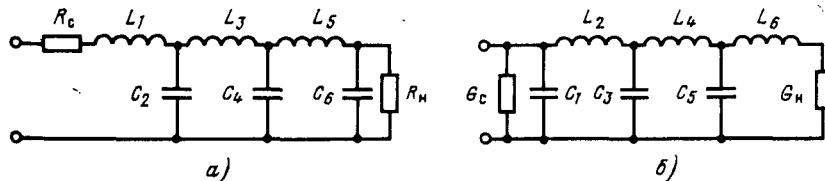


Рис. 13

(индуктивные), то входные функции (3.13) таких цепей будут содержать многочлен с четными степенями в числителе и нечетными в знаменателе или наоборот.

Программа 108. Вычисление коэффициентов входных функций реактивных лестничных цепей с однородными и поперечными $k \leq 13$ ветвями

П1 2	ПД П0	С/П	↑ КИП0	×	КПД	↔
↑ КИП0	↔	КИП0	×	+ ИП0	$x \geq 0$	28 2
- П0	→	КП0	L0	09 +	П1	ИПД 1
÷ БП	02					

Инструкция. Очистить регистры памяти: $C_k = PX$ (или $L_k = PX$) В/О С/П PX = 2, $L_{k-1} = PX$ (или $C_{k-1} = PX$) С/П PX = 3, $C_{k-2} = PX$ (или $L_{k-2} = PX$) С/П PX = 4 ... $W_1 = PX$ С/П PX = $k + 1$; если W_1 — продольная (рис. 13, а) индуктивность L_1 (или емкость C_1), то коэффициенты входного сопротивления $a_0 = 1$, P1 = b_1 , P2 = a_2 , P3 = b_3 , ..., Pk = a_k ;

если W_1 — поперечная (рис. 13, б) емкость C_1 , то коэффициенты входной проводимости $b_0 = 1$, P1 = a_1 , P2 = b_2 , P3 = a_3 , ..., Pk = a_k ; если W_1 — поперечная индуктивность L_1 , то коэффициенты входной проводимости $a_0 = 1$, P1 = b_1 , P2 = $= a_2$, P3 = b_3 , ..., Pk = b_k . Предельное число k ветвей можно увеличить на единицу при использовании микрокалькулятора с входным языком ЯМК52, заменив в программе обращения к регистру Д обращениями к регистру Е.

Пример. Для цепи с нормированными продольными индуктивностями $L_1 = L_3 = 2$ и поперечными емкостями $C_2 = C_4 = 3$ получим коэффициенты входного сопротивления $Z_{bx}(p) = (36p^4 + 18p^2 + 1)/(18p^2 + 6p)$.

Вычисление комплексных значений функций $F(p)$ для заданных значений p сводится к вычислению комплексных значений многочленов числителя и знаменателя функции с последующим определением частного от их деления.

Программа 109. Вычисление многочлена $A(p)$ степени $n \leq 9$ комплексного аргумента $p = \sigma + j\omega$

Cx	↑	ПС	Cx	↑	↑ →	↔	ПА	↔	
↑	ИПВ	×	ИПА	ИПС	×	+	↔	ИПС	×
ИПА	ИПС	×	—	КИПД	+	ИПД	1	—	ПД
$x < 0$	06	→	С/П						

Инструкция. ($a_0 = P0$, $a_1 = P1$, ..., $a_n = Pn$) $n = РД$, $\sigma = PY$, $\omega = PX$ В/О С/П PX = ReA(p), PY = ImA(p); $t \approx (10 + 8n)c$.

Пример. $A(2 + j2) = 9p^9 + 8p^8 + 7p^7 + 6p^6 + 5p^5 + 4p^4 + 3p^3 + 2p^2 + p + 0,5 = 112722,5 + j62914(t \approx 95 \text{ с})$.

Программа 110. Вычисление нормированного ($a_n = 1$) многочлена $A(p)$ степени $n \leq 10$ комплексного аргумента $p = \sigma + j\omega$

Cx	↑	1	↑ →	↔	ПА	↔	↑	ИПВ	
×	ИПА	ИПС	×	+	↔	ИПС	×	ИПА	ИПС
×	—	КИПД	+	ИПД	1	—	ПД	$x < 0$	04
→	С/П								

Инструкция. ($a_0 = P0$, $a_1 = P1$, ..., $a_{n-1} = P(n-1)n - 1 = РД$, $\sigma = PC$, $\omega = PB$ В/О С/П PX = ReA(p), PY = ImA(p); $t \approx (10 + 8n)c$).

Пример. $A(2 + j2) = p^{10} + 9p^9 + 8p^8 + 7p^7 + 6p^6 + 5p^5 + 4p^4 + 3p^3 + 2p^2 + p + 0,5 = 112\ 722,5 + j95\ 682$ ($t \approx 95$ с).

Максимальную степень многочлена можно увеличить на единицу, отказавшись от операторов косвенной адресации.

Программа 111. Вычисление многочлена $A(p)$ степени $n \leq 10$ комплексного аргумента $p = \sigma + j\omega$

```

ПС ↔ ПВ ИПА × ИП9 + ИПС ИПА ×
ПД ↔ ИП8 ПП 40 ИП7 ПП 40 ИП6 ПП
40 ИП5 ПП 40 ИП4 ПП 40 ИП3 ПП 40
ИП2 ПП 40 ИП1 ПП 40 ИП0 ПП 40 С/П
ИПД ИПС × — ↔ ИПВ × + ↔ ИПС
× ИПД ИПВ × + ПД ↔ В/О

```

Инструкция. ($a_0 = P_0, a_1 = P_1, \dots, a_n = P_n$; при $n < 10$ вместо отсутствующих коэффициентов занести нули или для сокращения времени счета изменить начало программы и адреса переходов) $\sigma = PY, \omega = RX$ В/О С/П ($t \approx 6n$ с) $PX = \operatorname{Re}A(p), PY = \operatorname{Im}A(p)$.

Пример. $A(2 + j2) = 10p^{10} + 9p^9 + 8p^8 + 7p^7 + 6p^6 + 5p^5 + 4p^4 + 3p^3 + 2p^2 + p + 0,5 = 112\ 722,5 + j390\ 594$.

Программа 112. Вычисление нормированного ($a_{11} = 1$) многочлена $A(p)$ степени $n = 11$ комплексного аргумента $p = \sigma + j\omega$

```

ПС ПД ↔ ПВ ИПА + ИП9 ПП 37 ИП8
ПП 37 ИП7 ПП 37 ИП6 ПП 37 ИП5 ПП
37 ИП4 ПП 37 ИП3 ПП 37 ИП2 ПП 37
ИП1 ПП 37 ИП0 ПП 37 С/П ИПД ИПС ×
— ↔ ИПВ × + ↔ ИПС × ИПД ИПВ
× + ПД ↔ В/О

```

Инструкция. ($a_0 = P_0, a_1 = P_1, \dots, a_{n-1} = P(n-1)$) $\sigma = PY, \omega = RX$ В/О С/П $PX = \operatorname{Re}A(p), PY = \operatorname{Im}A(p); t \approx 6n$ с.

Пример. $A(2 + j2) = p^{11} + 10p^{10} + 9p^9 + 8p^8 + 7p^7 + 6p^6 + 5p^5 + 4p^4 + 3p^3 + 2p^2 + p + 0,5 = 47186,5 + j456130$ ($t \approx 60$ с).

Максимальную степень вычисляемого многочлена можно увеличить, несколько усложнив ввод исходных данных.

Программа 113. Вычисление многочлена $A(p)$ степени $n \leq 12$ комплексного аргумента $p = \sigma + j\omega$

```

ПД → ПС ↔ × Вх ИПД × ↔ ИПВ
ПП 45 ИПА ПП 45 ИП9 ПП 45 ИП8 ПП
45 ИП7 ПП 45 ИП6 ПП 45 ИП5 ПП 45
ИП4 ПП 45 ИП3 ПП 45 ИП2 ПП 45 ИП1
ПП 45 ИП0 + С/П + ИПД ↔ . ↑ →
× ↔ ИПС ↔ × Вх → + ↑ →
→ ИПС × ↔ ИПД × — В/О

```

Инструкция. ($a_0=P0$, $a_1=PI$, ..., $a_{11}=PB$; вместо отсутствующих коэффициентов ввести нули) $a_{12}=PZ$, $\sigma=PY$, $\omega=PX$ В/О С/П $PX=ReA(p)$, $PY=ImA(p)$; $t \approx 7n$ с.

Пример. $A(2+j2) = 12p^{12} + 11p^{11} + 10p^{10} + 9p^9 + 8p^8 + 7p^7 + 6p^6 + 5p^5 + 4p^4 + 3p^3 + 2p^2 + p + 0,5 = -3753901,5 + j111490$ ($t \approx 90$ с).

Программа 114. Вычисление нормированного ($a_{13}=1$) многочлена $A(p)$ степени $n=13$ комплексного аргумента $p=\sigma+j\omega$

ПД	\uparrow	\rightarrow	\rightarrow	ПС	\leftrightarrow	ПЛ	44	ИПВ	ПП
44	ИПА	ПП	44	ИП9	ПП	44	ИП8	ПП	44
ИП7	ПП	44	ИП6	ПП	44	ИП5	ПП	44	ИП4
ПП	44	ИП3	ПП	44	ИП2	ПП	44	ИП1	ПП
44	ИП0	+	С/П	+	ИПД	\leftrightarrow	\uparrow	\rightarrow	\times
\rightarrow	ИПС	\leftrightarrow	\times	Bx	\rightarrow	$+$	\uparrow	\rightarrow	\rightarrow
ИПС	\times	\leftrightarrow	ИПД	\times	$-$				В О

Инструкция. ($a_0=P0$, $a_1=PI$, $a_{11}=PB$) $a_{12}=PZ$, $\sigma=PY$, $\omega=PX$ В/О С/П $PX=ReA(p)$, $PY=ImA(p)$; $t \approx 7n$ с.

Пример. $A(2+j2) = p^{13} + 12p^{12} + 11p^{11} + 10p^{10} + 9p^9 + 8p^8 + 7p^7 + 6p^6 + 5p^5 + 4p^4 + 3p^3 + 2p^2 + p + 0,5 = -4278189,5 + j587202$ ($t \approx 90$ с).

При необходимости максимальную степень вычисляемого многочлена $A(p)$ можно повысить еще на единицу, воспользовавшись регистром 0 для хранения коэффициента при степени p и вычисляя $A_0(p)=A(0)-a_0$ с последующим вычислением $A(p)=A_0(p)+a_0$. При использовании ПМК с входным языком ЯМК52 максимальная степень многочлена увеличивается на единицу при хранении исходных данных также в регистре Е.

Вычисление многочленов больших степеней обеспечивают программы с последовательным вводом коэффициентов перед каждым пуском программы. Для удобства пользования такими программами целесообразно организовать вывод на индикатор номера коэффициента, вводимого следующим.

Программа 115. Вычисление многочлена $A(p)$ произвольной степени n комплексного аргумента $p=\sigma+j\omega$

П9	\rightarrow	П8	\rightarrow	П7	\leftrightarrow	П0	Cx	П6	КИП0
ИП10	C/П	ИП9	ИП7	\times	ИП6	ИП8	\times	$-$	$+$
ИП9	ИП8	\times	ИП6	ИП7	\times	$+$	П6	\leftrightarrow	П9
ИП0	x=0	09	$+$	C/П					

Инструкция. $n=PT$, $\sigma=PZ$, $\omega=PY$, $a_n=PX$ В/О С/П $PX=n-1$, $a_{n-1}=PX$ С/П $PX=n-2$... $a_1=PX$ С/П $PX=0$, $a_0=PX$ С/П $PX=ReA(p)$, $PY=ImA(p)$; $t \approx 8$ с.

Пример. $A(2+j2) = 3p^3 + 2p^2 + p + 0,5 = -45,5 + j66$.

Вычисление комплексных значений функций (3.13) по комплексным значениям многочленов числителя и знаменателя обеспечивается программами 15 и 16. Выполнение всех процедур вычисления комплексных значений функции (3.13) можно совместить в одной программе.

Программа 116. Вычисление комплексного значения функции (3.13) с произвольными степенями n числителя и m знаменателя

```

ИП7 П0 Сx ПВ ПП 40 ПС ИПВ ПД ИП8
П0 Cx ПВ ПП 62 ↑ x2 ИПВ x2 +
÷ ПА ИПВ Вx ÷ П6 ИПД × ИПА ИПС
× + П0 ИПА ИПД × ИПС БP 59 ИПA
+ ПА КИП0 ИП0 x≥0 67 ИПВ П6 ИП1 ×
ИПA ИП2 × + ПВ ИПA ИП1 × ИП2 ИП6
× - ПА ИП0 С/П БP 39 ИПA B/O

```

Инструкция. ($\sigma=P1$, $\omega=P2$, $n=P7$, $m=P8$) $a_n=PX$ B/O C/P RX=
 $=n-1$, $a_{n-1}=PX$ C/P RX= $n-2$... $a_0=PX$ C/P RX= m , $b_m=PX$ C/P RX=
 $=m-1$, $b_{m-1}=PX$ C/P RX= $m-2$, ..., $b_0=PX$ C/P RX=ReF(p), PY=ImF(p).

Пример. $F(2+j1) = (p^2+2p+1)/(3p^3+2p^2+p+0,5) = 0,1863999-j0,12612384$,

Вычисление комплексных значений функций (3.13) с небольшими степенями числителя и знаменателя можно полностью автоматизировать.

Программа 117. Вычисление комплексного значения функции цепи при $n \leq 3$, $m \leq 4$

```

ПВ ↔ ПА ИП7 ИП8 ПП 47 ИП6 ПП 54
ИП5 + ПС ИП9 ПД ИП3 ИП4 ПП 47 ИП2
ПП 54 ИП1 ПП 54 ИП0 + ↑ x2 ИП9
x2 + ÷ ПА ИП9 Вx ÷ ПВ ИПС П9
ИПД ПП 55 ИП9 C/P БP 00 ↑ ИПВ ×
П9 → ИПA × + ↑ ИПВ × ИПA ИП9
× + ИП9 ↔ П9 → ИПВ × ↔ ИПA
× ↔ - B/O

```

Инструкция. ($b_0=P0$, $b_1=P1$, $b_2=P2$, $b_3=P3$, $b_4=P4$, $a_0=P5$, $a_1=P6$, $a_2=P7$) $a_3=P8$; вместо отсутствующих коэффициентов при $n < 3$, $m < 4$ ввести нули; $0=P9$, $\sigma=PY$, $\omega=RX$ (B/O) C/P RX=PA=ReF(p), PY=PB=ImF(p), PC=ReA(p), RD=ImA(p); $t \approx 70$ с.

Для проверки правильности выполнения программы и инструкции можно воспользоваться примером к предыдущей программе. При необходимости вывода результата в тригонометрической форме эту программу, как и предыдущие программы вычисления комплексных значений многочленов и их отношений, следует дополнить фрагментом из программы 16, записав его перед оператором C/P и соответственно изменив адреса переходов.

3.4. Решение алгебраических уравнений

В ряде задач анализа и синтеза линейных цепей требуется представлять функцию цепи (3.13) через произведения множителей первого или второго порядка числителя и знаменателя:

$$F(p) = h \frac{\prod_{i=0}^n (p-p_{0i})}{\prod_{i=0}^m (p-p_{Pi})} = \frac{\prod_{i=0}^r (a_{2i} p^2 + a_{1i} p + a_{0i})}{\prod_{i=0}^s (b_{2i} p^2 + b_{1i} p + b_{0i})}, \quad (3.14)$$

причем в некоторых множителях второго порядка коэффициенты при p^2 могут быть равными нулю.

Значения аргумента $p=p_0i$ и $p=p_{pi}$, при которых многочлены числителя и знаменателя равны нулю, называют иулями соответствующих многочленов или соответственно иулями и полюсами функции $F(p)$. Нули многочленов $A(p)$ и $B(p)$ равны корням алгебраических уравнений $A(p)=0$ и $B(p)=0$, и, следовательно, составление формулы (3.14) в общем случае сводится к поиску решений (корней) алгебраических уравнений вида $A(p)=0$, называемых также корнями многочлена $A(p)$ [4].

Полное число корней p_i , включая совпадающие (кратные), равно степени n многочлена:

$$A(p) = \sum_{i=0}^n a_i p^i = a_n \prod_{i=1}^n (p - p_i), \quad (3.15)$$

причем на плоскости комплексной частоты $p=\sigma+j\omega$ вещественные корни σ_i расположены на вещественной оси, а пары комплексно-сопряженных корней $p_i, i+1=\sigma_i, i+1\pm j\omega_i, i+1$ — симметрическое относительно вещественной оси. Точное число вещественных корней определяют по методу Штурма [4], но многочлен нечетной степени n имеет по крайней мере один вещественный корень.

Все корни многочлена расположены на плоскости p внутри кругового кольца, ограниченного окружностями с центрами в начале координат и радиусами:

$$R = 1 + |a_{\max}^n|/a_n, \quad r = 1/(1 + |a_{\max}^0|/a_0), \quad (3.16)$$

где a_{\max}^n и a_{\max}^0 — наибольший по модулю коэффициент многочлена, за исключением соответственно, коэффициентов a_n и a_0 . Для вещественных корней интервал $(-R, R)$ часто удается сузить, используя теорему Декарта, согласно которой верхняя граница положительных корней

$$R = 1 + \sqrt[m]{|a_m|/a_n}, \quad (3.17)$$

где $m=1, 2, \dots, n$ — номер первого отрицательного коэффициента многочлена $A(p)$, начиная от $a_n > 0$, а a_m — наибольший по модулю отрицательный коэффициент. Нижняя граница положительных корней $r = 1/R$, где R определяется по формуле (3.17) для многочлена $p^n A(1/p)$. Аналогично нижняя граница отрицательных корней определяется как $-R$, где R вычисляют по формуле (3.17) для многочлена $A(-p)$, а верхняя граница отрицательных корней $r = -1/R$, где R определяют по формуле (3.17) для многочлена $p^n A(-1/p)$. Если все коэффициенты многочлена $A(p)$ положительные, то он не имеет вещественных положительных корней, хотя может иметь комплексно-сопряженные корни в правой полуплоскости комплексной переменной p .

В качестве примера рассмотрим уравнение

$$A(p) = p^7 + 9p^6 + 36p^5 + 80p^4 + 103p^3 + 95p^2 + 68p + 24 = 0,$$

корни которого согласно формулам (3.15) находятся внутри кругового кольца с $R = 80$ и $r = 0,159$. Для многочлена $-A(-p) = p^7 - 9p^6 + 35p^5 - 65p^4 + 79p^3 - 71p^2 + 47p - 15$ с $a_7 > 0$ по формуле (3.16) определяем нижнюю границу отрицательных корней $-R = -(1 + \sqrt{9}) = -4$ и для многочлена $p^7 A(-1/p) = 15(p^7 - 47p^6/15 + 71p^5/15 - 79p^4/15 + 65p^3/15 - 35p^2/15 + 9p/15 - 1/15)$ находим верхнюю границу $-(1/1 + \sqrt{47/15}) = -0,361$. Следовательно, вещественные корни находят-

дятся в значительно более узком интервале, чем определяемом по формулам (3.15). Действительно, многочлен $A(p) = (p+1)(p+1)(p+3)(p+2+j2)(p+2-j2)(p+j1)(p-j1) = (p+1)^2(p+3) \times (p^2+4p+8)(p^2+1)$ имеет три вещественных корня, два из которых образуют корень кратности 2 и четыре комплексно-сопряженных корня, два из которых расположены на оси $j\omega$ (рис. 14).

Точность решения алгебраического уравнения $A(p)=0$ обычно оценивают по значению левой части уравнения (невязке) при подстановке корня $p=p_i$. Однако при расчетах на ЭВМ в связи с операционными погрешностями вычислений при ограничении разрядности операндов даже иulleвое значение невязки не всегда свидетельствует о точном вычислении корня. Особенные трудности возникают при решении уравнений со значительно отличающимися по порядку коэффициентами и, как следствие, значениями корней. В этих случаях достижимая точность вычисления корней и невязок уравнений зависит не только от метода решения уравнений, но и от последовательности выполняемых операций.

Если в последовательности коэффициентов многочлена

$$a_n, a_{n-1}, \dots, a_m \gg a_{m-1}, \dots, a_l \gg a_{l-1}, \dots, a_1, a_0 \quad (3.18)$$

имеются значительно отличающиеся по порядку соседние коэффициенты, то соответствующее уравнение можно приближению заменить совокупностью уравнений иизшего порядка $a_np^{n-m} + \dots + a_{m+1}p + a_m = 0, a_mp^{m-l} + \dots + a_{l+1}p + a_l = 0, \dots, a_lp^l + \dots + a_1p + a_0$, что существенно упрощает решение исходного уравнения.

Например, уравнение $p^2 + 100000p + 9 = 0$ можно приближению представить линейными уравнениями $p + 10000 = 0$ и $p + 9/100000 = 0$ с корнями $\sigma_1 = -100000, \sigma_2 = -9 \cdot 10^{-5}$ и невязками (при вычислении на 8-разрядном микрокалькуляторе) $A(\sigma_1) = 9$ и $A(\sigma_2) = 0$. Аналогично кубическое уравнение $p^3 + 1,58 \cdot 10^6 p^2 + 83,25p - 2,24 \cdot 10^{-3} = 0$ целесообразно разложить на два уравнения $p + 1,58 \cdot 10^6 = 0$ и $p^2 + 5,2689873 \cdot 10^{-5}p - 1,4177215 \cdot 10^{-8} = 0$ с корнями $\sigma_1 = -1,58 \cdot 10^6, \sigma_2 = 1,9609141 \cdot 10^{-5}, \sigma_3 = -7,2299013 \cdot 10^{-5}$ и вычисленными по исходному уравнению невязками $A(\sigma_1) = -8,2588928 \cdot 10^{-3}, A(\sigma_2) = 0, A(\sigma_3) = -2 \cdot 10^{10}$.

Решение алгебраических уравнений степени $n \leq 4$ можно найти точными (по формулам с точно известным числом операций) методами. Корни уравнения второй степени $a_2p^2 + a_1p + a_0 = 0$ обычно вычисляют по формуле

$$p_{1,2} = -a_1/2a_2 \pm \sqrt{(a_1/2a_2)^2 - a_0/a_2}, \quad (3.19)$$

легко реализуемой на входных языках микрокалькуляторов.

Программа 118. Вычисление корней уравнений $a_2p^2 + a_1p + a_0 = 0$ с соизмеримыми коэффициентами

П9	П8	\leftrightarrow	П7	\div	2	\div	$/-$	П6
x^3	ИП9	ИП7	\div	$-$	$x \geq 0$	25	\sqrt	ИП6
$\frac{C}{P}$	ИП6	$+$	C/P	\sqrt	\uparrow	$/-$	\sqrt	ИП6

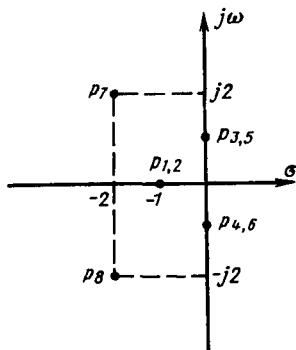


Рис. 14

Инструкция. $a_2=PZ$, $a_1=PY$, $a_0=PX$ В/О С/П $PX=\sigma_1$, $PY=\sigma_2$ (корни вещественные) или $PX=EGOG$ (корни комплексно-сопряженные) С/П $PX=Rep_{1,2}$, $PY=Imp_{1,2}$ ($t \approx 7$ с).

Пример. Для уравнения $3p^2+6p-45=0$ получим корни $\sigma_1=3$, $\sigma_2=-5$, для уравнения $2p^2+8p+10=0$ — корни $p_{1,2}=-2\pm j1$ с нулевыми невязками.

Если корни уравнения второй степени вещественны, то при $a_1 \gg \sqrt{a_0 a_2}$ возникает значительная операционная погрешность вычисленного по формуле (3.19) корня с меньшим модулем. Например, для уравнения $p^2+10000p+9=0$ по программе 118 получим $\sigma_1=-1 \cdot 10^{-3}$ и $\sigma_2=9999,999$ с невязками $A(\sigma_1) = A(\sigma_2) = -1$. При вычислениях на микрокалькуляторах рассматриваемых типов корней уравнения второй степени с $a_1 > 2 \cdot 10^4 \sqrt{a_0 a_2}$ они фактически распадаются на два уравнения, и при использовании формулы (3.19) погрешности возрастают еще больше. Так, для уравнения $p^2+100000p+9=0$ по программе 118 получим $\sigma_1=0$, $\sigma_2=-100000$ с невязками $A(\sigma_1)=A(\sigma_2)=9$. Поэтому для решения уравнений с отличающимися по порядку уравнениями целесообразно изменить алгоритм вычислений, устранив операцию вычитания близких чисел [15], характеристическую для формулы (3.19) при $a_1 \gg \sqrt{a_0 a_2}$.

Программа 119. Вычисление корней уравнения $a_2p^2+a_1p+a_0=0$ с повышенной точностью вычисления меньшего по модулю вещественного корня

$$\begin{array}{ccccccccc} \text{П9} & \rightarrow & \text{П8} & \leftrightarrow & \text{П7} & \div & 2 & \div & /-/ \text{ П6} \\ x^2 & \text{П4} & \text{ИП9} & \text{ИП7} & \div & \text{П5} & - & x \geqslant 0 & 32 \quad \vee \\ \text{ИП4} & \sqrt{} & + & \text{Вх} & \text{ИП6} & \div & \times & \uparrow & \text{ИП5} \leftrightarrow \\ \div & \text{С/П} & \sqrt{} & \uparrow & /-/ & \sqrt{} & \text{ИП6} & \text{С/П} & \end{array}$$

Инструкция. $a_2=PZ$, $a_1=PY$, $a_0=PX$ В/О С/П $PX=\sigma_1$, $PY=\sigma_2$ (корни вещественные) или $PX=EGOG$ (корни комплексно-сопряженные) С/П $PX=Rep_{1,2}$, $PY=Imp_{1,2}$ ($P7=a_2$, $P8=a_1$, $P9=a_0$); $t \approx 9$ с.

Примеры. Для уравнения $3p^2+6p^2-45=0$ получим $\sigma_1=3$, $\sigma_2=-5$, для уравнения $2p^2+8p^2+10=0$ получим $p_{1,2}=-2\pm j1$, для уравнения $p^2+10000p+9=0$ получим $\sigma_1=-9,0000009 \cdot 10^{-4}$, $\sigma_2=-9999,999$ с невязками $A(\sigma_1)=0$, $A(\sigma_2)=-0,999999$, для уравнения $p^2+100000p+9=0$ — корни $\sigma_1=-9 \cdot 10^{-5}$, $\sigma_2=-100000$ с невязками $A(\sigma_1)=0$ и $A(\sigma_2)=9$.

Решение алгебраического уравнения третьей степени $p^3+a_2p^2+a_1p+a_0=0$ с использованием формул Кардано [4] сводится к предварительным вычислениям коэффициентов $r=a_1/3-(a_2/3)^2$, $s=((a_1-2(a_2/3)^2)a_2/3-a_0)/2$, $Q=r^3+s^2$. Если $Q>0$, то решение содержит пару комплексно-сопряженных корней

$$\sigma_1=A+B-a_2/3; \quad p_{2,3}=-(A+B)/2+a_2/3 \pm j(A-B)\sqrt[3]{3}/2,$$

где $A=\sqrt[3]{s+\sqrt{Q}}$, $B=\sqrt[3]{s-\sqrt{Q}}$. Если $Q=0$, то корни вещественные, причем два из них образуют кратный корень: $\sigma_1=2A-a_2/3$; $\sigma_{2,3}=-A-a_2/3$, но если $Q<0$, то все корни вещественные и различные:

$$\sigma_1=2\sqrt{-r} \cos(\alpha/3); \quad \sigma_{2,3}=-2\sqrt{-r} \cos(\alpha/3 \pm 2\pi/3), \quad \text{где } \alpha=\arccos(s/\sqrt{-r}).$$

Программа 120. Вычисление корней уравнения $p^3+a_2p^2+a_1p+a_0=0$ с использованием формул Кардано

ИП1	3	\div	ИП2	3	\div	П3	x^2	$-$	П7
ИП1	ИП3	x^2	2	\times	$-$	ИП3	\times	ИП0	$-$
2	\div	П8	x^2	ИП7	\uparrow	x^2	\times	ПД	$+$
C/P	$x \geq 0$	72	\vee	ИП8	$+$	П9	x^2	3	$1/x$
\leftrightarrow	x^y	ИП9	\leftrightarrow	\div	ПА	ИП7	$/-$	ИПА	\div
ПВ	$+$	ПС	$/-$	2	\div	ИП3	$-$	\uparrow	ИПС
ИП3	$-$	C/P	ИПА	ИПВ	$-$	3	\vee	\times	2
\div	C/P	ИП8	ИПД	$/-$	\vee	\div	$\cos^{-1} 2$	π	
\times	$+$	П4	3	\div	\cos	ИП7	$/-$	\vee	2
\times	\times	ИП3	$-$	C/P	ИП4	БП	78		

Инструкция. Установить переключатель Р—ГРД—Г в положение Р; ($a_0 = P0$, $a_1 = P1$, $a_2 = P2$) В/О С/П ($t \approx 10$ с) $PX = Q$; если $Q > 0$, то С/П ($t \approx 12$ с) $PX = \sigma_1$, $PY = Rep_{2,3}$ С/П ($t \approx 3$ с) $PX = Imp_{2,3}$; если $Q = 0$, то С/П ($t \approx 12$ с) $PX = \sigma_{1,2}$, $PY = \sigma_3$; если $Q < 0$, то С/П ($t \approx 10$ с) $PX = \sigma_1$ С/П ($t \approx 8$ с) $PX = \sigma_2$ С/П ($t \approx 8$ с) $PX = \sigma_3$. При использовании ПМК с входным языком ЯМК52 для повышения точности определения вида корней целесообразно перед первым оператором С/П ввести фрагмент $1 + 1 -$, соответственно изменив адреса переходов.

Пример. Для уравнения $p^3 + 4p^2 + 5p + 2 = 0$ получим $\sigma_1 = -1,9999994$, $\sigma_2 = -1,0005085$, $\sigma_3 = 0,999491$; для $p^3 + p^2 + p + 1 = 0$ получим $\sigma_1 = -1$, $p_{2,3} = 1 \cdot 10^{-8} \pm j0,99999999 \approx \pm j$; для $p^3 + 6p^2 + 11p + 6 = 0$ получим $\sigma_1 = 3,000001$, $\sigma_2 = -1,9999999$, $\sigma_3 = -0,99999999$; для $p^3 + 1,58 \cdot 10^6 p^2 + 83,25p - 2,24 \cdot 10^{-3} = 0$ получим $\sigma_1 = -1,580,000$, $\sigma_2 = -7 \cdot 10^{-2}$, $\sigma_3 = 1,1 \cdot 10^{-1}$.

Таким образом, при несоизмеримых коэффициентах уравнения использование формул Кардано не обеспечивает точного вычисления корней, и в этих случаях целесообразно искать корни уравнений, расщепленных в соответствии с неравенством (3.18). Решение уравнений степени $n=4$ сводится к решению уравнений низших степеней [4], но корни уравнений с многочленами степени $n>4$ можно найти лишь численными методами. При этом целесообразно вначале найти вещественные корни σ_i исходного уравнения, а затем решать уравнение инициальной четной степени $A(p)/P(p-\sigma_i) = 0$.

В большинстве численных методов поиск вещественных корней разбивается на определение интервалов нахождения отдельных корней (отделение корней) и сужение этих интервалов (уточнение корней) до величины, определяемых требуемой или достижимой точностью. Для отделения корней можно вычислить значения $A(\sigma)$ с шагом $\Delta\sigma$ и найти приближенно отрезки вещественной оси, в которых находятся корни, с помощью программ 4—12. Важное значение имеет выбор шага, так как выбор малого шага связан со значительными затратами времени, а при большом шаге возможны пропуски интервалов корней. Следует также учитывать, что вблизи вещественных корней четной кратности функция $A(\sigma)$ не изменяется по знаку. Так, функция $A(\sigma) = \sigma^2 + 2\sigma + 1$ положительна на всей вещественной оси, кроме точки $\sigma_{1,2} = -1$.

Для уточнения вещественных корней нечетной кратности применимы все методы решения нелинейных уравнений, рассмотренные в следующей главе, но наиболее удобны простейшие методы с гарантированной сходимостью и достаточно простой программной реализацией. К ним относится равномерный поиск

с вычислением $A(\sigma)$ с шагом Δ до изменения знака функции, после чего принимают $\Delta = -\Delta/a$, где делитель шага $a > 1$. При достижении требуемой точности абсолютная погрешность корня равна текущему значению уменьшенного шага, но эта точность не всегда достижима. Например, корень $\sigma_1 = -1580000$ многочлена $p^3 + 1,58 \cdot 10^6 p^2 + 83,25p - 2,25 \cdot 10^{-3}$ может быть определен лишь с точностью $\Delta \leq 1$, так как при дальнейшем делении шага он попадает в область машинного нуля (при вычислениях с восьмью разрядами мантиссы) и не изменяет величины вычисленного корня σ_1 .

Программа 121. Отделение и уточнение вещественных корней нормированных многочленов $A(p)$ степени $n \leq 11$ ($n \leq 12$ для ЯМК52)

```

↑ ↑ ИПА + × ИП9 + × ИП8 +
× ИП7 + × ИП6 + × ИП5 + ×
ИП4 + × ИП3 + × ИП2 + × ИП1
+ × ИПВ + ИПС ↔ ПС × x≠0 54
x<0 48 → ИПД a ÷ /-/ ПД → ИПД
+ L0 00 ИПС С/П → С/П БП 00

```

Инструкция. Заменить в программе символ a оператором набора делителя $9 \geq a > 1$; для ЯМК52 при $n=12$ перед оператором ИПА записать фрагмент ИПЕ + × (с занесением перед пуском программы в регистр Е коэффициента a_{11}) и изменить адреса 54 и 48 переходов соответственно на 57 и 51 ($a_0 = \text{РВ}$, $a_1 = \text{Р1}$, $a_2 = \text{Р2}$, $a_3 = \text{Р3}$, ..., $a_{10} = \text{РA}$), число шагов $n = \text{Р0}$, число, совпадающее по знаку, или $A(\sigma_0) = \text{РС}$, начальное значение шага $\Delta_0 = \text{РД}$, граница интервала $\sigma_0 = \text{РХ}$ В/О С/П РХ = $A(\sigma_n)$ или РХ = 0 (корень найден точно и для его вызова нажать клавишу ↔); ввести $n_1 = \text{Р0}$ нажатием клавиш F и /-/ (оператор →), ввести в регистр РХ текущее значение σ_{n+1} , нажать клавишу С/П РХ = σ_{n+1} С/П РХ = $A(\sigma_{n+n_1})$...

При $a=2$ уточнение корней называют половинным делением (дихотомией). Если $n < 11$, то программу 121 целесообразно упростить, устранив фрагменты ИПН + ×, соответствующие отсутствующим коэффициентам, и при необходимости использовав освободившиеся регистры для получения дополнительной информации.

Программа 122. Отделение и уточнение вещественных корней нормированного уравнения ($a_7 = 1$) степени $n = 7$

```

↑ ↑ ИП6 + ИП5 + × ИП4 +
× ИП3 + × ИП2 + × ИП1 + ×
ИПВ + ИПС ↔ ПС × x<0 34 → ИПД
/-/ 9 ÷ ПД → П8 ИПД + П9 L0
00 ИПС С/П ИП9 БП 00

```

Инструкция. ($a_0 = \text{РВ}$, $a_1 = \text{Р1}$, $a_2 = \text{Р2}$, ..., $a_6 = \text{Р6}$), число шагов $n = \text{Р0}$, число, совпадающее по знаку, или $A(\sigma_0) = \text{РС}$, $\Delta_0 = \text{РД}$, $\sigma_0 = \text{РХ}$ В/О С/П РХ = $= A(\sigma_n)$, $\text{Р8} = \sigma_n$, $\text{Р9} = \sigma_{n+1}$, $\text{РД} = \Delta_n$, $n_1 = \text{Р0}$ С/П РХ = РС = $A(\sigma_{n+n_1})$.

В качестве примера рассмотрим поиск вещественных корней многочлена $A(p) = p^7 + 9p^6 + 36p^5 + 80p^4 + 103p^3 + 95p^2 + 68p + 24$. После ввода исходных данных ($24 = \text{РВ}$, $68 = \text{Р1}$, $95 = \text{Р2}$, $103 = \text{Р3}$, $80 = \text{Р4}$, $36 = \text{Р5}$, $9 = \text{Р6}$) и определения по формуле (3.18) нижней границы вещественных корней $\sigma_0 = -4$, выпол-

няем: $1 = P_0$, $-4 = RX$ В/О С/П $RX = A(\sigma_0) = -1224$ ($t \approx 11$ с); $\Delta_0 = 0,4 = RD$, $10 = P_0$ С/П $RX = A(\sigma_{11}) = -2,530645$; $P_9 = \sigma_{11} = -3,0074071$; $10 = P_0$ С/П $RX = A(\sigma_{21}) = -0,03035$; $P_9 = -3,000091$. Проверяем корень: $-3 = RX$ В/О С/П $RX = A(-3) = 0$. Для поиска остальных вещественных корней принимаем $-2,8 = RX$ В/О С/П $RX = A(-2,8) = 1,96$; $\Delta = 0,4 = RD$ С/П $RX = A(-2,4) = 26,58$ С/П $RX = A(-2) = 33,07$ С/П $RX = A(-1,6) = 20$ С/П $RX = A(-1,2) = 7,46$ С/П $RX = A(-0,8) = 0,785$ С/П $RX = A(-0,4) = 7,12$ С/П $RX = A(0) = 24$. Следовательно, возможен кратный корень в интервале $(-1,2; -0,8)$. Выполнив поиск в этом интервале с меньшим шагом и проверив невязки, находим корня $\sigma_{2,3} = -1$ с невязкой $A(-1) = 0$.

Численные методы могут обеспечить поиск корней многочленов с различающимися по порядку коэффициентами, если при очередном делении шага он не попадает в область машинного нуля относительно вычисляемого корня.

Программа 123. Отделение и уточнение корней нормированного ($a_3 = 1$) многочлена $A(p)$ степени $n = 3$

$$\begin{array}{ccccccccc} \uparrow & \uparrow & \text{ИП2} & + & \times & \text{ИП1} & + & \times & \text{ИПВ} & + \\ \text{ИПС} & \leftrightarrow & \text{ПС} & \times & x < 0 & 22 & \rightarrow & \text{ИПД} & /-/- & 2 \\ \div & \text{ПД} & \rightarrow & \text{П9 ИПД} & + & \text{П8 Л0} & 00 & \text{ИПС} \\ \text{С/П} & \text{ИП8 БП} & 00 & & & & & & \end{array}$$

Инструкция. ($a_0 = PB$, $a_1 = PI$, $a_2 = P2$) $n = P0$, $A(\sigma_0) = PC$, $\Delta_0 = RD$, $\sigma_0 = RX$ В/О С/П $RX = PC = A(\sigma_n)$, $P9 = \sigma_n$, $RD = \Delta_n$, $n_1 = P0$ С/П $RX = PC = A(\sigma_{n+n_1})$, $P9 = \sigma_{n+n_1}$, $RD = \Delta_{n+n_1}$... Время выполнения одного шага около 7 с.

Пример. Для многочлена $A(p) = p^3 + 1,58 \cdot 10^6 p^2 + 83,25p - 2,24 \cdot 10^{-3}$ при $(-2,24 \cdot 10^{-3} = PB; 83,25 = PI; 1,58 \cdot 10^6 = P2) 1 = P0$, $\sigma_0 = 0,001$ В/О С/П $RX = A(\sigma_0) = 1,66101$. Так как невязка $A(0) = a_0 < 0$, то вещественный корень находится в интервале $(0; 0,001)$. Приняв $\Delta_0 = 0,0001$, $\sigma_0 = 0$ за четыре выполнения программы по 10 шагов находим корень $\sigma_1 = 7,2299016 \cdot 10^{-5}$ с абсолютной погрешностью $\Delta \leq 3,752529 \cdot 10^{-13}$ и невязкой $A(\sigma_1) = 6 \cdot 10^{-10}$. Аналогично находим $\sigma_2 = -7,2299015 \cdot 10^{-5}$ с невязкой $A(\sigma_2) = -1 \cdot 10^{-10}$. Но третий корень, как показано ранее, удается найти лишь с погрешностью $\Delta \leq 1$, так как при меньшем шаге он попадает в область машинного нуля относительно $\sigma_3 = -15,800,000$.

Для поиска корней многочлена четвертой степени (после выделения, в частности, вещественных корней многочленов более высокой степени) целесообразно использовать предложенный в [15] алгоритм, обеспечивающий разложение многочлена на множители второй степени.

Программа 124. Вычисление корней многочлена $p^4 + a_3p^3 + a_2p^2 + a_1p + a_0$

$$\begin{array}{ccccccccc} \text{ПД} & \text{ИП3} & 2 & \div & - & \text{ПА} & \text{ИПА} & \uparrow & \uparrow & \text{ИП3} \\ + & \text{П6} & \times & \text{ИП2} & + & \text{П5} & \times & \text{ИП1} & + & x \neq 0 \\ 54 & \leftrightarrow & \text{ИП6} & + & x \neq 0 & 40 & \div & \text{ПВ} & \uparrow & \text{ИП5} \\ - & \times & \text{ИП0} & + & x < 0 & 40 & \text{ИПА} & \text{ИПД} & - & \text{ПА} \\ \text{ИПД} & 2 & \div & \text{ПД} & \text{ИПА} & + & \text{ПА} & \text{Вх} & - & x = 0 \\ 06 & \text{ИПВ} & \text{БП} & 66 & \text{ИП1} & \text{ИП3} & \div & \uparrow & x^2 & \text{ИП0} \\ - & x \geq 0 & 21 & \vee & + & \text{ПВ} & \text{ИПА} & 2 & \div & \uparrow \\ x^2 & \text{ИПВ} & - & x < 0 & 82 & \vee & \text{НОП} & /-/- & \vee & \leftrightarrow \\ \text{БП} & 86 & \vee & + & \div & \text{Вх} & \text{С/П} & \text{ИП0} & \text{ИПВ} & \div \\ \text{ПВ} & \text{ИП6} & /-/- & \text{БП} & 67 & & & & & \end{array}$$

Инструкция. ($a_0=P0$, $a_1=P1$, $a_2=P2$, $a_3=P3$) $2(1+|a^{n_{\max}}|)=RX$ В/О С/П $RX=\sigma_1$, $RY=\sigma_2$ или $RX=EGOG$ (пара комплексно-сопряженных корней) С/П $RX=Rep_{1,2}$, $RY=Imp_{1,2}$; для вычисления второй пары корней нажать клавишу С/П с аналогичным продолжением; время счета зависит от ширины $2(1+|a^{n_{\max}}|)$ начального интервала, определяемого формулами (3.16).

Пример. Для $A(p)=p^6+9p^5+31p^4+59p^3+60=0$ при $122=PA$ получим $p_{1,2}=-1 \pm j1,99999999 \approx -1 \pm j2$ ($t \approx 6$ мин) и $\sigma_3=-3$, $\sigma_4=-4$ ($t \approx 10$ с).

Используя алгоритм, реализованный в программе 124, удается автоматизировать выделение квадратичного множителя многочлена $A(p)$ шестой степени.

Программа 125. Выделение квадратичного множителя $p^2+b_1p+b_0$ многочлена $A(p)=p^6+a_5p^5+a_4p^4+a_3p^3+a_2p^2+a_1p+a_0$

Cx	ПД	ИПД	↑	↑	ИП5	—	×	ИП4	+
×	ИП3	--	П8	×	ИП2	+	П7	×	ИП1
—	П6	→	3	×	ИП5	—	ПВ	ИП5	—
×	ИП4	+	П9	×	ИП8	+	П8	ИП9	ИПВ
×	—	ПС	ИП6	×	ИПВ	x^2	ИП0	×	+
ИПВ	ИП7	×	ИП6	—	ИПВ	×	ИПС	ИП8	×
+	$x \neq 0$	93	÷	ПС	↑	ИПВ	×	ИП8	—
×	ИП6	+	$x < 0$	79	ИПД	ИПА	—	ПД	ИПА
2	÷	ПА	ИПД	+	ПД	Bx	—	$x=0$	02
ИПС	ИПД	С/П	ИПВ	БП	73				

Инструкция. ($a_0=P0$, $a_1=P1$, ..., $a_5=P5$) $2(1+|a^{n_{\max}}|)=PA$ В/О С/П $RX=b_1$, $RY=b_0$. Время счета зависит от ширины начального интервала.

Пример. Для $A(p)=p^6+5p^5+4p^4+3p^3+2p^2+p+0,5$ при $18=PA$ получим коэффициенты квадратичного множителя $B(p)=p^2-0,48834684p+0,42211151$ и множитель четвертой степени $A(p)/B(p)=p^4+5,4883468p^3+6,2581053p^2+3,7394315p+1,1845213=0$ ($t \approx 14$ мин).

Таким образом с помощью приведенных программ можно находить корни многочленов степени $n \leq 6+n_\sigma$, где n_σ — число вещественных корней. Для уравнений четной степени $n \geq 6$ целесообразно использовать методы численной оптимизации, рассмотренные в следующей главе.

3.5. Анализ линейной цепи в частотной области

Задача анализа линейной цепи в частотной области заключается в определении ее стационарных реакций

$$x(j\omega) = F(j\omega) q(j\omega), \quad (3.20)$$

где переменные реакции $x(j\omega)$ и воздействия $q(j\omega)$ — комплексные амплитуды, а частотные характеристики $F(j\omega)$ равны функциями цепи $F(p)$ при $p=j\omega$.

Если цепь замещена проходным четырехполюсником с комплексными параметрами, являющимися функциями $j\omega$, то ее анализ на заданной частоте ω можно свести к решению системы уравнений

$$\begin{bmatrix} \operatorname{Re} w_{11} + j \operatorname{Im} w_{11} & \operatorname{Re} w_{12} + j \operatorname{Im} w_{12} \\ \operatorname{Re} w_{21} + j \operatorname{Im} w_{21} & \operatorname{Re} w_{22} + j \operatorname{Im} w_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(j\omega) \\ x_2(j\omega) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

с нормированными переменными воздействий $q_1=1$ и $q_2=0$.

Программа 126. Решение системы из двух линейных уравнений с комплексными коэффициентами при $q_1=1$, $q_2=0$.

```

ИП7 ИП0 × ИП8 ИПА × — ИП4 ИП1 ×
— ИП5 ИП2 × + ИП9 ИП7 ИПА × ИП8
ИП0 × + ИП4 ИП2 × — ИП5 ИП1 ×
— П6 x2 ИП9 x2 + ПВ ИПА ИП9 ×
ИП0 ИП6 × — ИПВ ÷ ИП0 ИП9 × ИПА
ИП6 × + ИПВ ÷ С/П ИП2 ИП9 × ИП1
ИП6 × — /— ИПВ ÷ ИП1 ИП9 × ИП2
ИП6 × + /— ИПВ ÷ С/П

```

Инструкция. ($\text{Re}w_{11} = P7$, $\text{Im}w_{11} = P8$, $\text{Re}w_{12} = P4$, $\text{Im}w_{12} = P5$, $\text{Re}w_{21} = P1$, $\text{Im}w_{21} = P2$, $\text{Re}w_{22} = P0$, $\text{Im}w_{22} = P3$) В/О С/П ($t \approx 16$ с) $\text{РХ} = \text{Rex}_1$, $\text{PY} = \text{Im}x_1$ С/П ($t \approx 6$ с) $\text{PX} = \text{Rex}_2$, $\text{PY} = \text{Im}x_2$.

Пример. Для системы уравнений

$$\begin{bmatrix} 5+j6 & -2-j3 \\ -4-j2 & 2+j1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

получим $x_1 = 1+j0$; $x_2 = 2+j0$.

Если требуется найти реакцию x_i при $q_i \neq 1$, то достаточно вычислить по программе 126 значения реакций x'_1 и x'_2 , а затем определить $x_1 = x'_1 q_1$ и $x_2 = x'_2 q_1$. При $q_2 \neq 0$ следует дважды выполнить программу 126, изменяя положение строк системы уравнений перед повторением программы, и найти искомый результат наложением результатов выполнения программы.

При $n > 2$ емкость памяти ПМК используемых типов не обеспечивает одновременного хранения вещественных и мнимых составляющих коэффициентов систем уравнений, и в этом случае приходится использовать вычислительный бланк для регистрации промежуточных результатов. Для составления программы, как и при решении систем уравнений с вещественными коэффициентами, целесообразно использовать метод Жордана с расщеплением каждой i -й строки частей вычислительного бланка (табл. 3.5) на две строки с записью вещественных и мнимых составляющих коэффициентов уравнений, свободных членов и элементов контрольного столбца. Например, система уравнений

$$\begin{bmatrix} 1+j2 & 2+j3 & 3+j4 \\ 5+j4 & 6+j5 & 7 \\ j7 & 7+j8 & 8+j9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14+j20 \\ 38+j32 \\ 37+j50 \end{bmatrix}$$

должна быть записана в нулевую часть бланка, как показано в табл. 3.4. Вычисление элементов $w_{ij}^{(p)}$ каждой очередной p -й части бланка по элементам $w_{ij}^{(p-1)}$ предыдущей $(p-1)$ -й части бланка обеспечивается следующей программой.

Программа 127. Решение системы из $n \leq 5$ линейных уравнений с комплексными коэффициентами методом Жордана с циклической перестановкой строк

ПВ	ИП1	×	↔	ПС	ИП0	×	+	ИПВ	ИП0
×	ИПС	ИП1	×	—	ИП0	x^2	ИП1	x^2	+
ПВ	+	ПС	↔	ИПВ	+	ПВ	3	ПД	→
С/П	КИПД	ИПВ	×	—	ИПД	1	—	ПД	→
КИПД	ИПС	×	—	↔	КИПД	ИПВ	×	—	ИПД
1	+	ПД	→	КИПД	ИПС	×	+	ИПД	2
+	БП	28							

Таблица 3.5. Решение системы линейных уравнений с комплексными коэффициентами методом Жордана с циклической перестановкой строк

p	$j=1$	$j=2$	$j=3$	$j=4$	Σ
0	1 2	2 3	3 4	14 20	20 29
	5 4	6 5	7 0	38 14	56 23
	0 7	7 8	8 9	38 50	53 74
1		-2,8 -0,4	-5,6 -6,8	-22,4 -21,2	-30,8 -28,4
		5,6 -3,2	5,2 -6,4	26,8 -25,6	37,8 -35,2
	1	1,6 -0,2	2,2 -0,4	10,8 -1,6	15,6 -2,2
2			-14,4 -10,8	-43,2 -32,4	-57,6 -43,2
	1		-1,9 -3,3	-4,7 -9,8	-5,6 -13,2
		1	2,3 2,1	8,9 6,3	12,2 8,4
3	1			1 0	2 0
		1		2 0	3 0
			1	3 0	4 0

Инструкция. Для каждой p -части бланка $\text{Rew}_{1p-1}^{(p-1)} = P_0$, $\text{Im}\omega_{1p-1}^{(p-1)} = P_1$, $\text{Rew}_{2p-1}^{(p-1)} = P_2$, $\text{Im}\omega_{2p-1}^{(p-1)} = P_3$, ..., $\text{Rew}_{np-1}^{(p-1)} = P(2n-2)$, $\text{Im}\omega_{np-1}^{(p-1)} = P(2n-1)$; для каждого столбца с номером $j > p$ выполнить $\text{Rew}_{1j}^{(p-1)} = PY$, $\text{Im}\omega_{1j}^{(p-1)} = PX$ В/О С/П $PX = \text{Rew}_{nj}^{(p)}$, $PY = \text{Im}\omega_{nj}^{(p)}$, $\text{Rew}_{2j}^{(p-1)} = PY$, $\text{Im}\omega_{2j}^{(p-1)} = PX$ С/П $PX = \text{Rew}_{nj}^{(p)}$, $PY = \text{Im}\omega_{nj}^{(p)}$, ... $\text{Rew}_{nj}^{(p-1)} = PY$, $\text{Im}\omega_{nj}^{(p-1)} = PX$ С/П $PX = \text{Rew}_{nj-1}^{(p)}$, $PY = \text{Im}\omega_{nj-1}^{(p)}$; после заполнения n -й части бланка в $(n+1)$ -м столбце окажутся записанными искомые корни уравнения $x_i = -\text{Re}x_i + j\text{Im}x_i$.

Правильность вычислений проверяют по совпадению вычисленных элементов $(n+2)$ -го контрольного столбца с суммами остальных элементов строк (с учетом единиц в «ведущих» строках, записываемых снизу). Для проверки программы 127 можно воспользоваться данными табл. 3.4 с вычислением корней $x_1 = 1+j0$, $x_2 = 2+j0$, $x_3 = 3+j0$.

Так как в соотношении (3.20) частотная характеристика не зависит от воздействий и реакций и обычно является целью анализа, то в общем случае при анализе линейных цепей нет необходимости в решении систем уравнений и достаточно в соответствии с формулами (3.2) найти комплексные значения определителей в числителе и знаменателе искомой функции цепи при $p=j\omega$ (алгебраические дополнения лишь знаком отличаются от миноров, являющихся определителями квадратных матриц).

Программа 128. Вычисление определителя Δ комплексной матрицы второго порядка

$$\begin{array}{ccccccccc} \text{П5} & \rightarrow & \text{П4} & \rightarrow & \text{П8} & \leftrightarrow & \text{П7} & \text{С/П} & \text{ПА} \rightarrow \\ \text{П0} & \rightarrow & \text{П2} & \leftrightarrow & \text{П1} & \text{ИП7} & \text{ИПА} & \times & \text{ИП8} \text{ ИП0} \\ \times & + & \text{ИП1} & \text{ИП5} & \times & - & \text{ИП4} & \text{ИП2} & \times - \\ \text{ИП7} & \text{ИП0} & \times & \text{ИП8} & \text{ИПА} & \times & - & \text{ИП1} & \text{ИП4} \times \\ - & \text{ИП2} & \text{ИП1} & \times & + & & & & \text{С/П} \end{array}$$

Инструкция. $\text{Rew}_{11} = PT$, $\text{Im}\omega_{11} = PZ$, $\text{Rew}_{12} = PY$, $\text{Im}\omega_{12} = PX$ В/О С/П $\text{Rew}_{21} = PT$, $\text{Im}\omega_{21} = PZ$, $\text{Rew}_{22} = PY$, $\text{Im}\omega_{22} = PX$ С/П ($t \approx 12$ с) $PX = \text{Re}\Delta$, $PY = \text{Im}\Delta$ ($P7 = \text{Rew}_{11}$, $P8 = \text{Im}\omega_{11}$, $P4 = \text{Rew}_{12}$, $P5 = \text{Im}\omega_{12}$, $P1 = \text{Rew}_{21}$, $P2 = \text{Im}\omega_{21}$, $P0 = \text{Rew}_{22}$, $PA = \text{Im}\omega_{22}$).

Пример. $\Delta = \begin{vmatrix} 5+j6 & -2-j3 \\ -4-j2 & 2+j1 \end{vmatrix} = 2+j1$.

Программа 129. Вычисление определителя Δ комплексной матрицы третьего порядка

$$\begin{array}{ccccccccc} \text{ПП} & 40 & \text{Сх} & \leftrightarrow & - & \text{ПП} & 40 & \text{ИП0} & \text{ИП2} \text{ П0} \\ \leftrightarrow & \text{ИП4} & \text{П2} & \leftrightarrow & \text{П4} & \text{ИП1} & \text{ИП3} & \text{П1} & \leftrightarrow \text{ИП5} \\ \text{П3} & \leftrightarrow & \text{П5} & \text{ИП6} & \text{ИП8} & \text{П6} & \leftrightarrow & \text{ИПА} & \text{П8} \leftrightarrow \\ \text{ПА} & \text{ИП7} & \text{ИП9} & \text{П7} & \leftrightarrow & \text{ИПВ} & \text{П9} & \leftrightarrow & \text{ПВ} \text{ С/П} \\ \text{ИПД} & \text{ИПС} & \text{ПД} & \rightarrow & \text{ПС} & \rightarrow & \leftrightarrow & \uparrow & \text{ИП2} \times \\ \text{ИПА} & \text{ПП} & 80 & \text{ИП3} & \times & \text{ИПА} & \text{ПП} & 87 & \text{ИП3} \text{ ПП} \\ 85 & \text{ИП2} & \text{ПП} & 85 & \text{ИП8} & \times & \text{ИП4} & \text{ПП} & 87 \text{ ИП9} \\ \times & \text{ИП4} & \text{ПП} & 80 & \text{ИП9} & \text{ПП} & 78 & \text{ИП8} & \times \text{ ИП5} \\ \times & \text{ИПД} & + & \text{БП} & 91 & \times & \text{ИПВ} & \times & \text{ИПД} \leftrightarrow \\ - & \text{ПД} & \rightarrow & \leftrightarrow & \uparrow & \text{В/О} & & & \end{array}$$

Инструкция. $\text{Rew}_{21} = \text{P0}$, $\text{Imw}_{21} = \text{P1}$, $\text{Rew}_{22} = \text{P2}$, $\text{Imw}_{22} = \text{P3}$, $\text{Rew}_{23} = \text{P4}$, $\text{Imw}_{23} = \text{P5}$, $\text{Rew}_{31} = \text{P6}$, $\text{Imw}_{31} = \text{P7}$, $\text{Rew}_{32} = \text{P8}$, $\text{Imw}_{32} = \text{P9}$, $\text{Rew}_{33} = \text{P10}$, $\text{Imw}_{33} = \text{P11}$, $0 = \text{PC} = \text{РД}$, $\text{Rew}_{11} = \text{PY}$, $\text{Imw}_{11} = \text{PX}$ В/О С/П ($t \approx 1,5$ мин) $\text{Rew}_{12} = \text{PY}$, $\text{Imw}_{12} = \text{PX}$ В/О С/П ($t \approx 1,5$ мин) $\text{Rew}_{13} = \text{PY}$, $\text{Imw}_{13} = \text{PX}$ В/О С/П ($t \approx 1,5$ мин) $\text{PC} = \text{Re}\Delta$, $\text{РД} = \text{Im}\Delta$.

Пример. Для матрицы коэффициентов из табл. 3.4 получим $\Delta = -36 + j108$.

Время счета несколько уменьшается для ПМК с входным языком ЯМК52 [11], но при $n > 3$ приходится использовать вычислительный бланк. Для вычисления определителей комплексных матриц порядка $n \leq 5$ может быть использована программа 127. В этом случае в нулевую часть бланка записывают только коэффициенты матрицы и элементы контрольного столбца, а определитель

$$\Delta = w_{11} w_{22}^{(1)} w_{33}^{(2)} \dots w_{nn}^{(n-1)}$$

вычисляют как произведение комплексных элементов $w_{ij}^{(p)}$ каждой p -й части. Например, определитель матрицы коэффициентов системы уравнений из табл. 3.4 равен произведению $\Delta = (1+j2)(-2,8-j0,4)(-14,4-j10,8) = -36 + j108$.

Программа 127 может быть использована и для обращения квадратных матриц с комплексными элементами порядка $n \leq 5$. В этом случае столбец свободных членов заменяют единичной матрицей n -го порядка с диагональными элементами $1+j0$ и нулевыми недиагональными элементами, записываемыми в нулевую часть бланка. После заполнения бланка с помощью программы 127 в n -й части бланка окажутся записанными элементы обращенной матрицы.

Рассмотренные программы удобны лишь при расчетах на фиксированной частоте. Если требуется определить частотную характеристику в диапазоне частот, то по матрице параметров $W(p)$ составляют требуемую функцию цепи (3.13), по которой при $p = j\omega$ вычисляют требуемую частотную характеристику для ряда значений частоты ω . Следовательно, в этом случае приходится вычислять степенные многочлены числителя и знаменателя функции цепи вида

$$A(j\omega) = \sum_{i=0}^n a_i(j\omega)^i = (\dots + a_4\omega^4 - a_2\omega^2 - a_0) + j\omega(\dots a_5\omega^4 - a_3\omega^2 + a_1). \text{ Если такие}$$

многочлены приходится вычислять для небольшого числа значений аргумента ω , то целесообразно организовать вычисления при $p = j\omega$ согласно итерационному соотношению

$$A_k = -\omega \text{Im} A_{k-1} + a_{n-k} + j\omega \text{Re} A_{k-1}, \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad \text{где } A_0 = a_n \text{ и } A_n = A(j\omega).$$

Программа 130. Вычисление многочлена $A(p)$ степени $n \leq 11$ ($n \leq 12$ для ЯМК52) минимого аргумента $p = j\omega$ с минимальным временем ввода программы

ПС	Cx	\uparrow	\uparrow	\rightarrow	ИПС	\times	\leftrightarrow	ИПС	\times
/—/	КИПД	+	ИПД	1	—	ПД	x<0	04	\rightarrow
C/P									

Инструкция. При $n \leq 12$ (для ЯМК52) заменить обращения к регистрам С и Д соответственно обращениями к регистрам Д и Е; ($a_0 = \text{P0}$, $a_1 = \text{P1}$, ..., $a_n = \text{Pn}$) $n = \text{РД}$, $\omega = \text{PX}$ В/О С/П $\text{RX} = \text{Re } A(\omega)$, $\text{PY} = \text{Im } A(\omega)$; $t \approx (9 + 4n)$ с.

Примеры. $A(j2) = p^2 + 2p + 0,5 = -3,5 + j4$ ($t \approx 14$ с); $A(j2) = 11p^{11} + 10p^{10} + \dots + 9p^8 + 8p^8 + 7p^7 + 6p^6 + 5p^5 + 4p^4 + 3p^3 + 2p^2 + p + 0,5 = -8519,6 - j18678$ ($t \approx 50$ с).

Программа 131. Вычисление нормированного ($a_n=1$) многочлена $A(p)$ степени $n \leq 12$ ($n \leq 13$ для ЯМК52) мнимого аргумента $p=j\omega$

ПС Сх ↑ 1 ↑ → ИПС × ↔ ИПС
 $\times' /$ КИПД + ИПД 1 — ПД x<0 05
 \rightarrow С, П

Инструкция. При $n \leq 13$ (для ЯМК52) заменить обращения к регистрам С и Д соответственно обращениями к регистрам Д и Е; ($a_0 = P0$, $a_1 = P1$, ..., $a_{n-1} = P(n-1)$) $n-1 = РД$, $\omega = RX$ В/О С/П $RX = \operatorname{Re} A(\omega)$, $RY = \operatorname{Im} A(\omega)$ $t \approx (6 + 4(n-1))$ с.

Пример. $A(j2) = p^2 + 2p + 0,5 = -3,5 + j4$ ($t \approx 10$ с); $A(j2) = p^{12} + 11p^{11} + \dots + 10p^{10} + 9p^9 + 8p^8 + 7p^7 + 6p^6 + 5p^5 + 4p^4 + 3p^3 + 2p^2 + p + 0,5 = -4423,5 - j18678$ ($t \approx 47$ с).

Максимальную степень вычисляемого многочлена можно увеличить на единицу, дополнителью используя регистр памяти для хранения a_0 и вычисляя многочлен $A_0(p) = A(p) - a_0$ и при необходимости $A(p) = A_0(p) + a_0$.

Программа 132. Вычисление нормированного ($a_n=1$, $a_0=0$) многочлена $A_0(p)$ степени $n \leq 13$ ($n \leq 14$ для ЯМК52) мнимого аргумента $p=j\omega$

ПД Сх ↑ 1 ↑ → ИПД × ↔ ИПД
 $\times' /$ КИП0 + ИП0 x=0 05 → С, П

Инструкция. Для ЯМК52 заменить обращение к регистру Д обращением к регистру Е с вводом $a_{13}=РД$; ($a_1=P1$, $a_2=P2$, ..., $a_{n-1}=P(n-1)$) $n=P0$, $\omega=RX$ В/О С/П $RX=\operatorname{Re} A(\omega)$, $RY=\operatorname{Im} A(\omega)$, $t \approx (5+4(n-2))$ с.

Пример. $A_0(j2) = p^{13} + 12p^{12} + 11p^{11} + 10p^{10} + 9p^9 + 8p^8 + 7p^7 + 6p^6 + 5p^5 + 4p^4 + 3p^3 + 2p^2 + p = 40632 - j10486$ ($t \approx 45$ с).

Если требуется вычислять многочлен многократно с изменениями аргумента ω , целесообразно для уменьшения времени счета отказаться от операторов косвенной адресации, что дополнителью освободит регистр памяти для записи коэффициентов многочлена.

Программа 133. Вычисление с минимальным временем счета многочлена $A(p)$ степени $n \leq 12$ ($n \leq 13$ для ЯМК52) или нормированного многочлена ($a_n=1$) степени $n=13$ ($n=14$ для ЯМК52) мнимого аргумента $p=j\omega$

x² ↑ ↑ ↑ Сх ИПС + × ИПА —
 \times ИП8 + × ИП6 — × ИП4 + ×
 ИП2 — × ИП0 + ПД → Сх ИПВ —
 \times ИП9 + × ИП7 — × ИП5 + ×
 ИП3 — × ИП1 + ↔ V × ИПД С/П
 ПБ 00

Инструкция. При $n \leq 12$ ($a_0 = P0$, $a_1 = P1$, ..., $a_{12} = PC$; на место отсутствующих коэффициентов занести нули) $\omega = RX$ (B/O) C/P $RX = RD = ReA(\omega)$, $PY = ImA(\omega)$; для ЯМК52 при $n \leq 13$ занести в программу перед оператором ИПВ фрагмент ИПЕ + \times ($a_0 = P0$, $a_1 = P1$, ..., $a_{12} = PC$, $a_{13} = PE$) $\omega = RX$ (B/O) C/P $RX = RD = ReA(\omega)$, $PY = ImA(\omega)$; $t \approx 15$ с.

Пример. $A(j2) = 12p^{12} + 11p^{11} + 10p^{10} + 9p^9 + 8p^8 + 7p^7 + 6p^6 + 5p^5 + 4p^4 + 3p^3 + 2p^2 + p - 0,5 = 40632,5 - j18678$ ($t \approx 14$ с).

При $n < 12$ ($n < 13$ для ЯМК52) для сокращения времени счета и ввода программы 133 целесообразно устраниТЬ фрагменты вида ИПН + \times с обращениями к отсутствующим коэффициентам. Для вычисления по программе 133 нормированных многочленов степени $n = 13$ ($n = 14$ для ЯМК52) следует устранить из программы оператор Сx перед оператором ИПВ (оператором ИПС для ЯМК52).

Пример. $A(j2) = p^{13} + 12p^{12} + 11p^{11} + 10p^{10} + 9p^9 + 8p^8 + 7p^7 + 6p^6 + 5p^5 + 4p^4 + 3p^3 + 2p^2 + p + 0,5 = 40632,5 - j10485$ ($t \approx 14$ с).

Максимальную степень вычисляемых многочленов можно увеличить, если временно хранить коэффициенты при старших степенях в операционном стеке.

Программа 134. Вычисление многочленов степени $n \leq 14$ мнимого аргумента $p = j\omega$

x^2	\uparrow	\rightarrow	\times	\leftrightarrow	ΠD	\rightarrow	$/-$	ΠCS	$+$
\times	ИПА	$-$	\times	ИП8	$+$	\times	ИП6	$-$	\times
ИП4	$+$	\times	ИП2	$-$	\times	ИП0	$+$	\leftrightarrow	ИПД
\times	\leftrightarrow	ΠD	\rightarrow	ИПВ	$-$	\times	ИП9	$+$	\times
ИП7	$-$	\times	ИП5	$+$	\times	ИП3	$-$	\times	ИП1
$+$	\leftrightarrow	\vee	\times	ИПД	C/P	БП	00		

Инструкция. ($a_0 = P0$, $a_1 = P1$, ..., $a_{12} = PC$,) $a_{13} = PZ$, $a_{14} = PY$, $\omega = RX$ (вместо отсутствующих коэффициентов ввести нули) (B/O) C/P $RX = RD = ReA(\omega)$, $PY = ImA(\omega)$; $t \leq 16$ с.

Пример. $A(j2) = 14p^{14} + 13p^{13} + 12p^{12} + 11p^{11} + 10p^{10} + 9p^9 + 8p^8 + 7p^7 + 6p^6 + 5p^5 + 4p^4 + 3p^3 + 2p^2 + p + 0,5 = -188743,5 - j87818$.

Программа 135. Вычисление многочлена $A(p)$ степени $n \leq 15$ и нормированного многочлена ($a_{16} = 1$) степени $n = 16$ мнимого аргумента $p = j\omega$

x^2	ΠD	\times	ИПД	\rightarrow	\leftrightarrow	\rightarrow	$-$	ИПД	\times
ИПД	\rightarrow	ΠD	\rightarrow	1	\times	\leftrightarrow	$/-$	\times	ИПС
$+$	\times	ИПА	$-$	\times	ИП8	$+$	\times	ИП6	$-$
\times	ИП4	$+$	\times	ИП2	$-$	\times	ИП0	$+$	ИПД
\leftrightarrow	ΠD	\rightarrow	ИПВ	$-$	\times	ИП9	$+$	\times	ИП7
$-$	\times	ИП5	$+$	\times	ИП3	$-$	\times	ИП1	$+$
\leftrightarrow	\vee	\times	ИПД	C/P	БП	00			

Инструкция. Оператор $/-$ заменить оператором $-$ для вычисления нормированного многочлена степени $n = 16$ ($a_0 = P0$, $a_1 = P1$, ..., $a_{12} = PT$, $a_{14} = PZ$, $a_{15} = PY$) (при $n < 15$ вместо отсутствующих коэффициентов ввести нули) $\omega = RX$ (B/O) C/P $RX = RD = ReA(\omega)$, $PY = ImA(\omega)$; $t \approx 18$ с.

Примеры. $A(j2) = 15p^{15} + 14p^{14} + 13p^{13} + 12p^{12} + 11p^{11} + 10p^{10} + 9p^9 + 8p^8 + 7p^7 + 6p^6 + 5p^5 + 4p^4 + 3p^3 + 2p^2 + p + 0,5 = -188743,5 - j403702$; $A(j2) = p^{16} + 15p^{15} + 14p^{14} + 13p^{13} + 12p^{12} + 11p^{11} + 10p^{10} + 9p^9 + 8p^8 + 7p^7 + 6p^6 + 5p^5 + 4p^4 + 3p^3 + 2p^2 + p + 0,5 = -123207,5 - j403702$.

При вычислении многочлена $A_0(p) = A(p) - a_0$ его максимальную степень можно повысить еще на единицу, а при использовании ПМК с входным языком ЯМК52 — на две единицы. Для вычисления многочленов большей степени, как и при однократном вычислении многочленов низших степеней, целесообразно использовать программы с последовательным вводом коэффициентов перед каждым пуском.

Программа 136. Вычисление многочлена $A(p)$ произвольной степени n минимого аргумента $p=j\omega$

```
P7 Сx П8 КИП0 ИП0 С/П ИП8 /-/ ИП9 ×  
+ ИП7 ИП9 × П8 ↔ П7 ИП0 x=0 03  
→ С/П
```

Инструкция. $n = P0$, $\omega = P9$, $a_n = RX$ В/О С/П $RX = n - 1$, $a_{n-1} = RX$ С/П $RX = n - 2 \dots a_1 = RX$ С/П $RX = 0$, $a_0 = RX$ С/П $RX = P7 = \operatorname{Re}A(\omega)$, $RY = \operatorname{Im}A(\omega)$; $t \approx 5$ с.

Пример. $A(j2) = 3p^3 + 2p^2 + p + 0,5 = -7,5 - j22$.

Процедуры вычисления комплексных значений многочленов числителя и знаменателя функции (3.13) при $p=j\omega$ и определение комплексных значений частотных характеристик $F(j\omega)$ можно совместить в одной программе.

Программа 137. Вычисление модуля (АЧХ) и аргумента (ФЧХ) частотной характеристики $F(j\omega)$ функции $F(p)$ с произвольными степенями n и m многочленов числителя и знаменателя

```
ПП 14 П4 ↔ П5 С/П ПП 14 ИП4 —  
↔ ИП5 ÷ С.П П7 Сx П8 КИП0 ИП0 С/П  
ИП8 /-, ИП9 × + ИП7 ИП9 × П8 ↔  
П7 ИП0 x=0 17 → ↑ x² ИП8 x² +  
✓ ÷ Bx ↔ cos⁻¹ ИП8 x<0 51 → /-/  
↑ → B/O
```

Инструкция. Установить переключатель Р—ГРД—Г в нужное положение; $m = P0$, $\omega = P9$, $b_m = RX$ В/О С/П $RX = m - 1$, $b_{m-1} = RX$ С/П ($t \approx 5$ с) $RX = m - 2 \dots b_1 = RX$ С/П $RX = 0$, $b_0 = RX$ С/П ($t \approx 11$ с) $RX = P5 = |B(j\omega)|$, $RY = P4 = \varphi_B(\omega)$, $n = P0$, $a_n = RX$ С/П $RX = n - 1$, $a_{n-1} = RX$ С/П ($t \approx 5$ с) $RX = n - 2 \dots a_1 = RX$ С/П $RX = 0$, $a_0 = RX$ С/П ($t \approx 12$ с) $RX = F(j\omega)$, $RY = \varphi_F(\omega)$ ^{*)}.

Пример. Для функции $F(p) = (p^2 + 2p + 1) / (3p^3 + 2p^2 + p + 0,5)$ при $p=j2$

^{*)} Так как в этой программе $\varphi_A(\omega)$ и $\varphi_B(\omega)$ вычисляются в интервале $(-180^\circ, 180^\circ)$, то значение $\varphi_F(\omega) = \varphi_A(\omega) - \varphi_B(\omega)$ может оказаться вне этого интервала. В этих случаях следует принять $\varphi_F(\omega) = \varphi_F(\omega) - 360^\circ$ при $\varphi_F(\omega) > 180^\circ$ и $\varphi_F(\omega) = 360^\circ + \varphi_F(\omega)$ при $\varphi_F(\omega) < -180^\circ$.

получим $|F(j\omega)| = 0,21511595$, $\varphi_F(\omega) = 235,69461^\circ$ или после приведения в интервал $(-180^\circ, 180^\circ)$ $\varphi_F(\omega) = -360^\circ + \varphi_F(\omega) = -124,30539^\circ$. Следовательно $|F(j2)| = 0,21511595e^{-j124,30539^\circ}$.

Вычисление частотных характеристик при небольших степенях числителя и знаменателя можно ускорить, если коэффициенты функции (3.13) удается разместить в регистрах памяти и операционного стека ПМК. Хотя для входных функций степени n и m не могут отличаться более чем на единицу, для передаточных функций $n < m$, причем это неравенство сохраняется при различных значениях n и m . Поэтому для получения максимальной суммы $n+m$ коэффициенты функции приходится перераспределять в память. Примером могут служить следующие программы.

Программа 138. Вычисление АЧХ и ФЧХ функции цепи (3.13) с $n \leq 4$, $m \leq 5$.

x^2	\uparrow	\uparrow	ИПА	\searrow	ИП8	\leftarrow	\times	ИП6	$+$
\leftrightarrow	v	\times	ПВ	\rightarrow	ИП9	\times	\rightarrow	ИП7	$-$
ИП5	ПП	53	ПС	\rightarrow	ПД	\rightarrow	\uparrow	\uparrow	ИП3
$/-$	\times	ИП1	$+$	\leftrightarrow	v	\times	ПВ	\rightarrow	ИП4
\times	ИП2	$-$	\times	ИП0	ПП	53	ИПС	$-$	\leftrightarrow
ИПД	\div	C/P	$+$	\uparrow	x^2	ИПВ	x^2	$+$	v
\div	Bx	\leftrightarrow	\cos^{-1}	ИПВ	$x < 0$	70	\rightarrow	$/-$	\uparrow
\rightarrow	B/O								

Инструкция. Установить переключатель Р—ГРД—Г в нужное положение ($a_0=P0$, $a_1=P1$, ..., $a_4=P4$, $b_0=P5$, $b_1=P6$, ..., $b_5=PA$; вместо отсутствующих коэффициентов ввести нули) $\omega=RX$ В/О С/П RX= $|F(j\omega)|$, PY= $\varphi_F(\omega)$ (см. сноску на с. 112); $t \approx 37$ с.

Для проверки программы можно воспользоваться данными примера к программе 137.

Функция цепи (3.13) может быть представлена в виде

$$F(p) = \frac{h(a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + 1)}{b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \dots + b_1 p + 1}, \quad (3.21)$$

и при вычислении частотных характеристик с точностью до постоянного множителя h предельное число хранимых в памяти коэффициентов функции $n+m+2$ увеличивается на две единицы.

Программа 139. Вычисление АЧХ и ФЧХ функции цепи (3.21) при $n \leq 6$, $m \leq 8$, $h=1$.

x^2	\times	Bx	\leftrightarrow	\rightarrow	\rightarrow	ПС	Cx	$+$	$-$
\times	ПД	\rightarrow	ИПС	ИПА	$+$	\times	ИП8	$-$	\times
ИП6	$+$	\leftrightarrow	v	\times	ПВ	\rightarrow	ИПД	ИП9	$+$
\times	ИП7	ПП	67	ПС	\rightarrow	ПД	\rightarrow	\uparrow	\uparrow
ИП4	\times	ИП2	$-$	\times	ИП0	$+$	\leftrightarrow	v	\times
ПВ	\rightarrow	ИП5	$/-$	\times	ИП3	$+$	\times	ИП1	ПП
67	ИПС	$-$	\leftrightarrow	ИПД	\div	C/P	$-$	\times	1
$+$	\uparrow	x^2	ИПВ	x^2	$+$	v	\div	Bx	\leftrightarrow
\cos^{-1}	ИПВ	$x < 0$	87	\rightarrow	$/-$	\uparrow	\rightarrow	B/O	

Инструкция. ($a_1=P0$, $a_2=P1$, ..., $a_6=P5$, $b_1=P6$, $b_2=P7$, ..., $b_5=PA$)
 $b_6=PT$, $b_7=PZ$, $b_8=PY$ (вместо отсутствующих коэффициентов ввести нули)
 $\omega=PX$ В/О С/П $PX=|F(j\omega)|$, $PY=\varphi_F(\omega)$ (см. сноску на с. 119); $t \approx 35$ с.

Примеры. Для функции $F(p) = (p^2 + 2p + 1) / (3p^3 + 2p^2 + p + 0.5) = 2(p^2 + 2p + 1) / (6p^3 + 4p^2 + 2p + 1)$ при $p=j2$ получим $|F(j2)|' = 0,10755797$, $\varphi'_F(2) = -235,69461^\circ$ или $|F(j2)| = 2|F(j2)|' = 0,21511595$, $\varphi_F(2) = \varphi'_F(2) - 360^\circ = -124,30539^\circ$; для функции $F(p) = (6p^6 + 5p^5 + 4p^4 + 3p^3 + 2p^2 + p + 1) / (8p^8 + 7p^7 + 6p^6 + 5p^5 + 4p^4 + 3p^3 + 2p^2 + p + 1)$ при $p=j2$ получим $|F(j2)| = 0,20181658$, $\varphi_F(2) = 145,24078^\circ$.

Нормирование многополюсной (не имеющей нулей) функции $F(p) = h / (b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \dots + b_1 p + 1)$ — деление при необходимости на коэффициент $b_0 \neq 0$ — обеспечивает вычисление ее числителя со степенью $m \leq 16$ (в отличие от программы 135, обеспечивающей вычисление нормированного ($a_n=1$) многочлена степени $n=16$).

Программа 140. Вычисление АЧХ и ФЧХ многополюсной функции ($h=1$, $b_0=1$) со степенью знаменателя $m \leq 16$.

x^2	\times	Bx	\leftrightarrow	\rightarrow	\rightarrow	ПД	Cx	+	-
\times	ИПВ	+	\times	ИП9	-	\times	ИП7	+	\times
ИП5	-	\times	ИП3	+	\times	ИП1	-	\times	1
+	ИПД	\leftrightarrow	ПД	Cx	+	\times	ИПС	+	\times
ИПА	--	\times	ИП8	+	\times	ИП6	-	\times	ИП4
+	\times	ИП2	-	\times	ИП0	+	\leftrightarrow	ν	\times
ИПД	\leftrightarrow	ПД	Bx	\uparrow	x^2	ИПД	x^2	+	ν
\div	Bx	$1/x$	\leftrightarrow	\cos^{-1}	ИПД	$x < 0$	81	\rightarrow	$/-$
\uparrow	\rightarrow	\leftrightarrow	C/P						

Инструкция. ($b_1=P0$, $b_2=P1$, $b_3=P2$, ..., $b_{12}=PB$, $b_{13}=PC$) $b_{14}=PT$, $b_{15}=PZ$, $b_{16}=PY$ (вместо отсутствующих коэффициентов ввести нули) $\omega=PX$ В/О С/П $PX=|F(j\omega)|$, $PY=\varphi_F(\omega)$; $t \approx 25$ с.

Примеры. $F(j2) = 1/(p^2 + 2p + 1) = 0,2e^{-j126,8699^\circ}$; $F(j2) = 1/(16p^{16} + 15p^{15} + 14p^{14} + 13p^{13} + 12p^{12} + 11p^{11} + 10p^{10} + 9p^9 + 8p^8 + 7p^7 + 6p^6 + 5p^5 + 4p^4 + 3p^3 + 2p^2 + p + 1) = 9,64510026 \cdot 10^{-7} e^{j33,971287^\circ}$.

При использовании ПМК с входным языком ЯМК52 максимальную степень числителя или знаменателя функции цепи можно увеличить на единицу, используя регистр Е [11].

В ряде задач теории цепей, в частности при проектировании фильтров, функции цепи представляют отношением произведений нормированных множителей $a_i p^2 + \beta_i p + 1$ первого ($a_i=0$) и второго порядков

$$F(p) = \frac{h \prod_{i=1}^r (\alpha_{0i} p^2 + \beta_{0i} p + 1)}{\prod_{i=1}^s (\alpha_{ni} p^2 + \beta_{ni} p + 1)}, \quad (3.22)$$

где h — постоянный множитель.

Вычисление частотной характеристики такой функции сводится к вычислению ее модуля (АЧХ при $p=j\omega$)

$$|F(j\omega)| = \prod_{i=1}^r |P_{0i}| \sqrt{\prod_{i=1}^s |P_{ni}|}, \quad (3.23)$$

где модули множителей $|P_i| = \operatorname{Re}^2 P_i(\omega) + \operatorname{Im}^2 P_i(\omega)$, $\operatorname{Re} P_i(\omega) = 1 - \alpha_i \omega^2$, $\operatorname{Im} P_i(\omega) = \beta_i(\omega)$ и аргумента (фазового угла или ФЧХ)

$$\varphi_F(\omega) = \sum_{i=1}^r \varphi_{0i} - \sum_{i=1}^s \varphi_{ni}, \quad (3.24)$$

где φ_i — фазовый угол i -го множителя числителя или знаменателя.

Так как суммы фазовых углов множителей числителя и знаменателя в (3.24) могут значительно превышать 360° , целесообразно автоматизировать приведение $\varphi_F(\omega)$ в интервале $(-180^\circ, 180^\circ)$ с помощью фрагмента, используемого в следующей программе и пригодного для использования в других программах.

Программа 141. Вычисление АЧХ и ФЧХ функции (3.22) для произвольных чисел r и s множителей числителя и знаменателя первого ($\alpha_i=0$) и второго порядков

```

ПП 64 П8 ↔ П7 1 П4 Сх П5 КИП1
ИП1 x≠0 26 С/П ИПП 64 ИП8 + П8 ↔
ИП7 × П7 БП 09 КИП0 ИП0 x≠0 41 С/П
ПП 64 ИП5 + П5 ↔ ИП4 × П4 БП
25 ИП8 ИП4 — ↑ x² √ ÷ П6 Вх
3 6 0 — x<0 50 ИП6 × ПД ИП7
ИП4 ÷ ПС С/П ИП9 × П3 ↔ ИП9 x²
× 1 — /-/ ↑ x² ИП3 x² + √
÷ Вх ↔ cos⁻¹ ИП3 x<0 90 → /-/ ↑
→ В/О

```

Инструкция. Установить переключатель Р—ГРД—Г в положение Р (для вывода фазового угла в радианах заменить операторы набора числа 360° фрагментом $2 \pi \times$ и установить переключатель в положение Р); ($\omega = P9$) $r = P1$, $s = P0$, $\alpha_{0r} = PY$, $\beta_{0r} = PX$ В/О С/П $PX = r - 1$, $\alpha_{0r-1} = PY$, $\beta_{0r-1} = PX$ С/П ($t \approx 14$ с) $PX = r - 2$; ..., $\alpha_{01} = PY$; $\beta_{01} = PX$ С/П $PX = s$, $\alpha_{ns} = PY$, $\beta_{ns} = PX$ С/П $PX = s - 1$, $\alpha_{ns-1} = PY$, $\beta_{ns-1} = PX$ С/П $PX = s - 2$... $\alpha_{n1} = PY$ $\beta_{n1} = PX$ С/П ($t \approx 20$ с) $PX = PC = |F(j\omega)|$, $PY = RD = \varphi_F(\omega)$.

Пример. Для функции $F(p) = (5p^2+4p+1)(4p^2+3p+1)/(3p^2+2p+1)(2p^2+p+1)$ или $p=j2(r=s=2)$ получим $|F(j2)| = 3,9085576$, $\varphi_F(2) = -139,84656^\circ$.

Вычисление АЧХ и ФЧХ произведенной до пяти множителей $\alpha_i p^2 + \beta_i p + 1$ в диапазоне частот можно ускорить, если коэффициенты хранить в памяти ПМК.

Программа 142. Вычисление АЧХ и ФЧХ произведения из $r \leq 5$ множителей $\alpha_i p^2 + \beta_i p + 1$ первого ($\alpha_i=0$) и второго порядков

```

ПВ ↔ 2 × 1 ПД + П0 Сх ПС
1 КИП0 ИПВ x² × — ↑ x² КИП0 ИПВ
× x² + √ ÷ Вх ↔ cos⁻¹ ↔ x<0
34 ↔ /-/ ↔ ↔ ИПС + ПС ↔ ИПД
× ПД ИП0 1 — x=0 10 + С/П

```

Инструкция. Установить переключатель Р—ГРД—Г в нужное положение; ($\beta_1=P1$, $\alpha_1=P2$, $\beta_2=P3$, $\alpha_2=P4$, ..., $\beta_s=P9$, $\alpha_s=PA$) $r=PY$, $\omega=PX$ В/О С/П $PX=|A(j\omega)|$, $PY=\varphi_A(\omega)$ (см. сноска на с. 112); $t \approx (3+12r)$.

Примеры. Для $A(p)=p^2+2p+1$ получим $|A(j2)|=5$, $\varphi_A(2)=126,8699^\circ$ ($t \approx 15$ с); для $A(p)=(p^2+2p+1)(2p^2+3p+1)$ получим $|A(j2)|=46,097722$, $\varphi_A(2)=266,2686^\circ$ ($t \approx 27$ с).

В некоторых радиотехнических задачах вместо АЧХ требуется вычисление зависимости группового времени запаздывания (ГВЗ) от частоты

$$\tau_{rp}(\omega) = d\varphi(\omega)/d\omega, \quad (3.25)$$

определенного для функции (3.22) соотношением

$$\tau_{rp}(\omega) = \sum_{i=1}^r \frac{\beta_{0i}(1+\alpha_{0i}\omega^2)}{(1-\alpha_{0i}\omega^2)^2 + \beta_{0i}^2\omega^2} - \sum_{i=1}^s \frac{\beta_{ni}(1+\alpha_{ni}\omega^2)}{(1-\alpha_{ni}\omega^2)^2 + \beta_{ni}^2\omega^2}. \quad (3.26)$$

Программа 143. Вычисление ГВЗ функции (3.22) при $h=1$ и произвольных числах r и s множителей первого ($\alpha_i=0$) и второго порядков

ПП	33	П7	Сx	П8	КИП1	ИП1	$x \neq 0$	18	С/П
ПП	33	ИП7	+	П7	БП	05	КИП0	ИП0	$x \neq 0$
29	С/П	ПП	33	ИП8	+	П8	БП	17	ИП7
ИП8	—	С/П	П5	\leftrightarrow	ИП9	\times	1	+	\times
Bx	2	—	x^2	ИП15	x^2	ИП9	\times	+	\div
B/O									

Инструкция. ($\omega^2=P9$) $r=P1$, $s=P0$, $\alpha_{0r}=PY$, $\beta_{0r}=PX$ В/О С/П $PX=r-1$, $\alpha_{0r-1}=P\bar{Y}$, $\beta_{0r-1}=PX$ С/П $PX=r-2$, ..., $\alpha_{01}=PY$, $\beta_{01}=PX$ С/П $PX=s$, $\alpha_{ns}=PY$, $\beta_{ns}=PX$ С/П $PX=s-1$, $\alpha_{ns-1}=PY$, $\beta_{ns-1}=PX$ С/П $PX=s-2$, ..., $\alpha_{n1}=PY$, $\beta_{n1}=PX$ С/П $PX=\tau_{rp}(\omega)$.

Пример. Для функции $F(p)=(3p^2+10p+1)/(2p^2+4p+1)(3p^2+8p+1) \times (0,5p^2+3p+1)$ при $p=j2$ получим $\tau_{rp}(2)=-0,58816922$.

Вычисление ГВЗ в диапазоне частот ускоряется, когда коэффициенты множителей удается разместить в регистрах памяти.

Программа 144. Вычисление ГВЗ произведения $r \leq 5$ ($r \leq 6$ для ЯМК52) множителей $\alpha_ip^2+\beta_ip+1$ первого ($\alpha_i=0$) и второго порядков

x^2	ПД	\leftrightarrow	2	\times	1	+	П0	Сx	ПС
КИП0	ПВ	КИП0	ИПД	\times	1	+	\times	Bx	2
—	x^2	ИПВ	x^2	ИПД	\times	+	\div	ИПС	+
ПС	ИП0	1	—	$x=0$	10	\rightarrow	С/П	БП	00

Инструкция. Для ЯМК52 заменить обращения к регистрам В, С и Д соответственно обращениями к регистрам С, Д и Е ($\alpha_1=P1$, $\beta_1=P2$, $\alpha_2=P3$, $\beta_2=P4$, ..., $\alpha_r=P(2r+1)$, $\beta_r=P(2r+2)r=PY$, $\omega=PX$ (В/О) С/П $PX=\tau_{rp}(\omega)$; $t \approx (4+7r)$ с).

Пример. Для функции $F(p)=(3p^2+10p+1)/(2p^2+4p+1)(3p^2+8p+1) \times (0,5p^2+3p+1)$ при $p=j2$ для числителя $\tau_{rp}(2)_r=0,24952015$ ($t \approx 11$ с), для знаменателя $\tau_{rp}(2)_s=0,83768937$ ($t \approx 25$ с) и $\tau_{rp}(2)=\tau_{rp}(2)_r-\tau_{rp}(2)_s=-0,58816922$.

Некоторые линейные цепи удается анализировать в частотной области ме-

тодом свертывания схемы без предварительного составления выражений для функций цепи. Примером могут служить лестничные цепи (см. рис. 13), для которых токи в продольных ветвях и напряжения на поперечных связаны соотношением

$$i_{j-1} = Y_j u_j + i_{j+1}; \quad u_{j-2} = Z_{j-1} i_{j-1} + u_j. \quad (3.27)$$

Нормируя $u_{\text{вых}} = u_k = 1$, учитывая $i_{k+1} = 0$ и последовательно подставляя в эти формулы $Y_k, Z_{k-1}, Y_{k-2}, \dots, Z_1$, если входная ветвь продольная (см. рис. 13, а), или Y_1 , если входная ветвь поперечная (см. рис. 13, б), получаем комплексные значения $u_1 = 1/K_U$ и $i_1 = 1/Z_{\text{пер}}$, по которым несложно вычислить $Y_{\text{вх}} = 1/Z_{\text{вх}} = -u_1/i_1$, $Y_{\text{пер}} = -Y_k/u_1$ и $K_U = -Y_k/i_1$.

Программа 145. Вычисление комплексных значений $1/K_U$ и $1/Z_{\text{пер}}$ лестничной цепи с произвольным числом k ветвей

P8 ↔ П7 1 П4 Сх П5 КИП0 ИП0 С/П
П3 ↔ П2 ИП7 × ИП3 ИП8 × — ИП4
+ ИП2 ИП8 × ИП7 П4 ИП3 × + ИП5
+ ИП8 П5 → П8 → П7 БП 07

Инструкция. $k = P0$, $\text{Re}Y_k = PY$, $\text{Im}Y_k = PX$ В/О С/П $PX = k-1$, $\text{Re}Z_{k-1} = PY$, $\text{Im}Z_{k-1} = PX$ С/П $PX = r-2, \dots, \text{Re}Z_1 = PY$, $\text{Im}Z_1 = PX$ С/П $PX = 0$, $P4 = \text{Re } 1/K_U$, $P5 = \text{Im } 1/K_U$, $P7 = \text{Re } 1/Z_{\text{пер}}$, $P8 = \text{Im } 1/Z_{\text{пер}}$ или $\dots \text{Re}Y_1 = PY$, $\text{Im}Y_1 = PX$ СП $PX = 0$, $P4 = \text{Re } 1/Z_{\text{пер}}$, $P5 = \text{Im } 1/Z_{\text{пер}}$, $P7 = \text{Re } 1/K_U$, $P8 = \text{Im } 1/K_U$.

Пример. Для $Y_3 = 1 + j1$, $Z_2 = 2 + j2$, $Y_1 = 3 + j3$ получим $1/Z_{\text{пер}} = -8 + j16$, $1/K_U = 1 + j4$.

Эти программы приходится повторять k раз для каждого значения частоты. Во многих случаях удается ускорить вычисления, полнее автоматизировав выполнение итерационных формул (3.27). Так, при однотипных продольных и поперечных ветвях реактивной лестничной цепи целесообразно организовать вычисления по формулам (3.27) в замкнутом цикле с выходом из него после выполнения заданного числа итераций. Если значения параметров ветвей реактивной лестничной цепи различны, то их приходится хранить в памяти, что ограничивает предельную сложность анализируемой цепи [15]. Между тем суммарные затраты времени практически уменьшаются при вводе параметров перед каждым выполнением программы, соответствующей однородной итерации вычислений по формулам (3.27).

Программа 146. Вычисление $1/K_U$ и $1/Z_{\text{пер}}$ реактивной лестничной цепи с произвольным числом однородных продольных и однородных поперечных ветвей

ИП9 × П7 ↔ П0 1 П8 КИП0 ИП0 С/П
ИП9 × ИП7 × ИП8 + ИП7 П8 ↔ П7
БП 07

Инструкция. ($\omega = P9$), $k = PY$, $W_k = PX$ В/О С/П $PX = k-1$, $W_{k-1} = -PX$ С/П ($t \approx 5$ с) $PX = k-2, \dots, W_1 = PX$ (если вводится емкость, то $W_i = C_i$, если вводится индуктивность, то $W_i = -L_i$) С/П $PX = 0$; если входная ветвь продольная, то $P7 = 1/K_U(\omega) = \text{Re } 1/K_U(\omega)$, $P8 = 1/Z_{\text{пер}}(\omega) = \text{Im } 1/Z_{\text{пер}}(\omega)$, если

входная ветвь поперечная, то $P7 = 1/Z_{\text{неп}}(\omega) = \text{Im}1/Z_{\text{неп}}(\omega)$, $P8 = 1/K_U(\omega) = \text{Re}1/K_U(\omega)$.

Пример. Для $L_1 = 2$, $C_2 = 3$ при $\omega = 2$ получим $1/K_U = -23$, $1/Z_{\text{неп}} = j6$, откуда $K_U = -0,04347826$, $Z_{\text{неп}} = -j0,1666666$, $Y_{\text{неп}} = -j\omega C_k K_U = j0,26087956$, $K_I = -j\omega C_k Z_{\text{неп}} = -1$, $Z_{\text{вх}} = Z_{\text{неп}}/K_U = 3,8333333$.

Подобные программы могут быть составлены и для цепей с другой типовой структурой.

3.6. Анализ цепей во временной области

Задача анализа цепи во временной области заключается в определении реакции $x(t) = x(q(t))$ на заданное воздействие $q(t)$, причем в инерционных цепях свободные колебания продолжаются за счет накопления энергии и после прекращения внешних воздействий. В тех случаях, когда воздействия имеют различную форму, свойства линейных цепей во времений области оценивают по их переходным характеристикам $h(t)$, являющимся реакциями на скачок воздействия ($q=0$ при $t < t_0$ и $q=\text{const}$ при $t > t_0$), или импульсным характеристикам, $g(t) = h'(t)$, являющимся реакциями на единичный импульс δ с бесконечно малой длительностью и бесконечно большой амплитудой, площадь которого определяется эвристической нормировкой $\int \delta = 1$.

Переходная характеристика $h(t)$ связана с частотной характеристикой функции цепи $F(j\omega)$ соотношениями

$$h(t) = \text{Re } F(0) + \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\text{Im } F(\omega)}{\omega} \cos \omega t d\omega = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\text{Re } F(\omega)}{\omega} \sin \omega t d\omega$$

и может быть найдена численным интегрированием с помощью программ, приведенных в гл. 2. Для приближенной оценки $h(t)$ по графику $\text{Re } F(\omega)$ используют, например, кусочно-линейную аппроксимацию графика

$$\text{Re } F(\omega)_i = a_i + b_i \omega, \quad \omega_i \leq \omega \leq \omega_{i+1}$$

с последующим вычислением

$$h(t) \approx \frac{2}{\pi} \sum_{i=1}^l (a_i (\sin \omega_{i+1} t - \sin \omega_i t) + b_i (\cos \omega_i t - \cos \omega_{i+1} t)/t),$$

где значения интегрального синуса можно найти по программе, приведенной в гл. 2.

В общем случае реакцию $x(t)$ на воздействие $q(t)$ обычно находят с помощью обратного преобразования Лапласа $x(t) = L^{-1}x(p)$ как оригинал изображения реакции:

$$x(p) = F(p) q(p) = \frac{\sum_{i=1}^n a_i p^i}{\sum_{i=1}^m b_i p^i} = \frac{\sum_{i=1}^n a_i p^i}{\prod_{i=1}^m (p - p_{ni})} =$$

$$= \frac{\prod_{i=1}^r (\alpha_{0j} p^2 + \beta_{0j} p + \gamma_0)}{\prod_{i=1}^s (\alpha_{nj} p^2 + \beta_{nj} p + \gamma_{nj})}. \quad (3.28)$$

Для упрощения вычислений будем рассматривать функцию (3.28) с простыми вещественными $p_{ni} = \sigma_{ni}$ или комплексно-сопряженными полюсами $p_i, i+1 = \sigma_i \pm j\omega_i, i+1$, учитывая, что кратные полюсы можно представить достаточно близко расположеными простыми полюсами. В этом случае при $n < m$ такую функцию можно представить разложением на простые дроби:

$$x(p) = \sum_{i=1}^m D_i / (p - p_{ni}),$$

где коэффициенты (вычеты в простых полюсах) $D_i := (p - p_{ni}) x(p) |_{p=p_{ni}} = A(p)/B'(p)$.

Оригиналом функции (3.28) является временная характеристика

$$\begin{aligned} x(t) &= \sum_{i=1}^m D_i e^{p_{ni} t} = \sum_{j=1}^s (A_j \cos \omega_{nj} t + B_j \sin \omega_{nj} t) e^{\sigma_{nj} t} = \\ &= \sum_{j=1}^s C_j \cos(\omega_{nj} t + \varphi_j) e^{\sigma_{nj} t}, \end{aligned} \quad (3.29)$$

где s — сумма чисел вещественных полюсов ($\omega_{nj} = 0$) и пар комплексно-сопряженных полюсов.

Для вещественных полюсов ($\omega_{nj} = 0$) $\varphi_j = B_j = 0$, $A_j = C_j = D_i$, а для j -й пары комплексно-сопряженных полюсов коэффициенты D_i комплексно-сопряжены, $A_j = 2\operatorname{Re} D_i$, $B_j = -2\operatorname{Im} D_i$, $C_j = 2D_i$, $\varphi_j = \arg D_i$, где D_i определен для $\omega_{nj} > 0$.

Программа 147. Вычисление коэффициентов временных характеристик $x(t)$ по функции $x(p)$ с $n < m$ и простыми полюсами

```

П8 Сх П9 ИПА x≠0 29 П0 С/П ИП8 ИПД
× ИП9 ИПС × + ↔ ИП8 ИПС × +
ИП9 ИПД × — П8 ↔ П9 Л0 07 С/П
ИПВ × П6 Сх П7 ИПВ 1 — П0 С/П
ИП0 × ИП6 ИПД × ИП7 ИПС × + ↔
ИП6 ИПС × + ИП7 ИПД × — П6 ↔
П7 Л0 39 ИП6 ИП9 × ИП7 ИП8 × —
ИП6 x2 ИП7 x2 + ИПД x≠0 82 → 2
÷ ↑ → П5 ÷ П2 ИП6 ИП8 × ИП9
ИП7 × + ИП5 ÷ П1 С/П

```

Инструкция. ($n = \text{РА}$, $m = \text{PB}$), для каждого полюса выполнить $\sigma_{ni} = \text{PC}$, $\omega_{ni} = \text{РД}$, $a_n = \text{РХ}$ В/О С/П $a_{n-1} = \text{РХ}$ С/П ... $a_0 = \text{РХ}$ С/П $b_m = \text{РХ}$ С/П $b_{m-1} = \text{РХ}$ С/П ... $b_0 = \text{РХ}$ С/П $\text{РХ} = \text{Р1} = A_j$, $\text{РY} = B_j$ (для вычисления $\text{РХ} = \text{Р1} = \operatorname{Re} D_i$, $\text{РY} = \text{Р2} = \operatorname{Im} D_i$ в программе следует исключить фрагмент ИПД $x \neq 0$ 82 → 2 ÷ ↑ → между операторами + по адресу 74 и П5 по адресу 83).

Пример. Для полюса $p_{n1} = -0,4 + j1,2$ функции $x(p) = (90p^3 + 188p^2 + 216p + 40) / (10p^4 + 33p^3 + 36p^2 + 40p)$ получим $A_1 = 3$, $B_1 = -2,3333333$ или (при устраниии указанного в инструкции фрагмента) $D_1 = 1,5 - j1,6666666$.

Если функция (3.28) задана отношением произведений квадратичных множителей, то вычисление оригинала $x(t)$ несколько упрощается [15].

Программа 148. Вычисление полюсов и коэффициентов временных характеристик функции $x(p)$, представленной отношением произведений квадратичных множителей

```

ИП9 ИП7 x≠0 21 × 0 ПА ИП8 2 ÷
— ПС x2 — √ ПВ ИП7 ÷ ПД БП
29 ПВ ПД ИП9 ИП8 ПА ÷ — ПС ИП5
П2 П0 С/П ИП0 x≠0 32 ИПС ИП7 × ↑
ИП8 + П6 + ИПД × П1 ИП6 ИПС ×
ИПД x2 ИП7 × — ИП9 + П6 ИПА ×
ИПВ ИП1 × — ИПА ИП1 × ИПВ ИП6 ×
+ ПВ ↔ ПА L0 32 ИП2 x≠0 32 ИПВ
/-/ ИПА x2 ИПВ x2 + ÷ ПВ ИПА Вх
÷ ПА Cx П2 ИП4 БП 31

```

Инструкция. ($r = P4$, $s - 1 = P5$) $\alpha_{n1} = P7$, $\beta_{n1} = P8$, $\gamma_{n1} = P9$ В/О С/П $\alpha_{n2} = P7$, $\beta_{n2} = P8$, $\gamma_{n2} = P9$ С/П ... $\alpha_{ns} = P7$, $\beta_{ns} = P8$, $\gamma_{ns} = P9$, С/П $\alpha_{01} = P7$, $\beta_{01} = P8$, $\gamma_{01} = P9$ С/П ... $\alpha_{0r} = P7$, $\beta_{0r} = P8$, $\gamma_{0r} = P9$ (для многополюсной функции коэффициенты числителя не вводить) С/П РА = A_1 , РВ = B_1 , РС = = σ_{n1} , РД = ω_{n1} ; повторить вычисления при вводе первыми коэффициентов каждого из остальных множителей знаменателя.

Пример. Для функции $x(p) = 1/p(p + 1)(p^2 + 0,618p + 1)(p^2 + 1,618p + 1)$ выполняем: $0 = P4$, $3 = P5$, $0 = P7 = P9$, $1 = P8$ В/О С/П $1 = P9$ С/П $1 = P7$, $0,618 = P8$ С/П $1,618 = P8$ С/П РА = 1; РВ = РС = РД = 0 В/О С/П $0,618 = P8$ С/П $0 = P7$, $1 = P8$ С/П $0 = P9$ С/П РА = $-1,9888133 \cdot 10^{-4}$, РВ = $2,7525319$, РС = $-0,809$, РД = $0,58780864$, $0 = P7$, $1 = P8 = P9$ В/О С/П $0 = P9$ С/П $1 = P7 = P9$, $0,618 = P8$ С/П $1,618 = P8$ С/П РА = $-1,894212$, РВ = 0, РС = -1 , РД = 0, $1 = P7 = P9$; $0,618 = P8$ С/П $1,618 = P8$ С/П $0 = P7 = P9$, $1 = P8$ С/П $1 = P9$ С/П РА = $0,89441108$, РВ = $3,9958558 \cdot 10^{-5}$, РС = $-0,309$, РД = $0,95206203$; следовательно, $x(t) = 1 - (1,9888133 \cdot 10^{-4}) \cos 0,58780864t - 2,7525319 \sin 0,58780864t)e^{-0,809t} - 1,894212e^{-t} + (0,89441108 \cos 0,95106203t + 3,9958558 \cdot 10^{-5} \sin 0,95106203t)e^{-0,309t}$.

Вычисление временных характеристик $x(t)$ по вычисленным корням и коэффициентам A_j и B_j несложно автоматизировать.

Программа 149. Вычисление временных характеристик по значениям полюсов функции $x(p)$ и коэффициентов A_j и B_j

```

ПД → ПС → ПВ ↔ ПА ИПД ИП9 ×
cos × ИПД ИП9 × sin ИПВ × + ИПС
ИП9 × ex × ИП7 + П7 С/П БП 00

```

Инструкция. ($t = P9$) $0 = P7$, $A_1 = PT$, $B_2 = PZ$, $\sigma_{n1} = PY$, $\omega_{n1} = PX$ В/О С/П РХ = $s_1(t)$, $A_2 = PT$, $B_2 = PZ$, $\sigma_{n2} = PY$, $\omega_{n2} = PX$ С/П РХ = $s_2(t)$... $A_s = PT$, $B_s = PZ$, $\sigma_{ns} = PY$, $\omega_{ns} = PX$ С/П РХ = $x(t)$.

Пример. Для исходных данных, вычисленных в примере к предыдущей программе, при $t=0,5$ получим $x(0,5)=0,70989205$.

По этим программам импульсная характеристика с изображением единичного воздействия $q(p)=1$ вычисляется как оригинал $x(p)=F(p)$, а переходная характеристика — как оригинал $x(p)=F(p)/p$.

Во многих случаях затраты времени на вычисление временных характеристик уменьшаются при непосредственном интегрировании линейного дифференциального уравнения, описывающего процессы в анализируемой цепи

$$a_n \frac{d^n x}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dx}{dt} + a_0 x = q(t), \quad (3.30)$$

где воздействие $q(t)$ в зависимости от физических условий задачи также может содержать производные от q по времени.

Если исследуются лишь свободные колебания при $q(t)=0$, то для решения такого однородного дифференциального уравнения составляют характеристическое уравнение

$$a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0 = 0$$

с решением

$$x(t) = \sum_{i=1}^n D_i e^{p_{ij} t},$$

где p_{ij} — корни характеристического уравнения, а коэффициенты D_i определяются начальными условиями при $t=0$.

Например, переходные процессы в простейшей цепи, схема которой показана на рис. 15, после замыкания ключа описываются уравнением

$$\frac{1}{C} \int i dt + iR_1 + iR_2 = 0$$

или после умножения на R_2 и дифференцирования

$$u' + u/C(R_1 + R_2) = 0$$

с начальным напряжением $u_0 = u_{c0}R_2/(R_1 + R_2)$. Так как корень характеристического уравнения $p_{11} = -1/C(R_1 + R_2)$, то искомая зависимость

$$u(t) = (u_{c0}R_2/(R_1 + R_2)) \exp(-t/C(R_1 + R_2)).$$

При указанных на схеме нормированных параметрах и шаге вычислений $h = t_{i+1} - t_i = 1$ несложно вычислить $u(t) = 6, 4, 9123843; 4, 0219202; 3, 2928698; 2, 6959738; 2, 2072766; \dots$

Поиск аналитических решений существенно усложняется при $q(t) \neq 0$, и в этих случаях целесообразно использовать численные методы решения дифференциальных уравнений, среди которых наиболее часто используют методы Рунге—Кутта различного порядка [4, 14]. Простейшим из них является метод Эйлера для решения дифференциального уравнения первого порядка $x' = f(t, x)$ с вычислениями по формуле

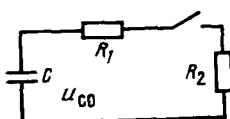


Рис. 15

$$x_{i+1} = x_i + h f(t_i, x_i), \quad i = 0, 1, 2, \dots, \quad (3.31)$$

где постоянный интервал времени $h = t_i - t_{i-1}$ называют шагом интегрирования.

Программа 150. Решение дифференциального уравнения $x' = f(t, x)$ методом Эйлера

... ИП7 × ИП9 + П9 ИП7 ИП8 + П8
 ↔ С/П БП 00

Иструкция. Заменить многоточие фрагментом вычисления функции $f(t, x)$ при $t=P8$, $x=P9$ и использовании регистров памяти, кроме 7, 8 и 9; $h=P7$, $t_0=P8$, $x_0=P9$ В/О С/П RX= x_1 С/П RX= x_2 ... С/П RX= $x_i=x(t_0+ih)$, PY= t_0+ih .

Пример. Для схемы на рис. 15 при вычислении $f(t, x) = -u/C(R_1+R_2)$ по фрагменту ИП9 /—/ ИП4 ÷ ($C/(R_1+R_2)=5=P4$) с шагом $h=1$ ($t_0=0$, $u_0=6$) получим $u(t) = (6); 4,8; 3,84; 3,072; 2,4576; 1,96608; \dots$ ($t \approx 3$ с).

Метод Эйлера отличается значительной методической погрешностью (о чем свидетельствует и сравнение результатов, полученных в примере, с аналитическим решением), и его используют лишь для грубых расчетов. Для получения более точных результатов используют методы более высокого порядка.

Программа 151. Решение дифференциального уравнения $x' = f(t, x)$ усовершенствованным методом Эйлера—Коши второго порядка

ПП 20 П6 + П9 ИП7 ИП8 + П8 ПП
 20 + ИП6 + 2 ÷ П9 С/П БП 00
 ... ИП7 × ИП9 В/О

Иструкция. Заменить многоточие фрагментом вычисления $f(t, x)$ при $t=P8$, $x=P9$ с использованием регистров памяти, кроме 6—9; $h=P7$, $t_0=P8$, $x_0=P9$ В/О С/П RX= x_1 С/П RX= x_2 ... С/П RX= x_i , PY= t_i .

Пример. При исходных данных из примера к программе 150 получим $u(t) = (6); 4,92; 4,0344; 3,308208; 2,7127305; 2,224439; \dots$ ($t \approx 10$ с).

При решении дифференциальных уравнений первого порядка на ЭВМ высокой производительности обычно используют метод Рунге—Кутта четвертого порядка, обеспечивающий высокую точность вычислений [4].

Программа 152. Решение дифференциального уравнения $x' = f(t, x)$ методом Рунге—Кутта четвертого порядка

Сx П5 ПП 31 ПП 27 + П5 ПП 31
 + П5 ↔ ИП9 + П9 ПП 27 3 ÷
 ИП6 + П6 П9 С/П БП 00 ИП7 ИП8 +
 П8 ... ИП7 × ↑ ИП6 + П9 ↔ ↑
 ↑ ИП5 + П5 В/О

Иструкция. Заменить многоточие фрагментом вычисления $f(t, x)$ при $t=P8$, $x=P9$ и использованием регистров памяти, кроме 5—9; $h/2=P7$, $t_0=P8$, $x_0=P9=P6$ В/О С/П RX= x_1 С/П RX= x_2 ... С/П RX= x_i , P8= t_i .

Пример. При исходных данных из примера к программе 150 получим $u(t) = (6); 4,9124; 4,0219456; 3,2929009; 2,6960077; 2,2073114; \dots$ ($t \approx 27$ с).

Решение дифференциальных уравнений более высокого порядка (см. гл. 4) сводят к решению системы уравнений первого порядка [4]. Во многих случаях решение дифференциальных уравнений высокого порядка упрощается при использовании конечно-разностных схем [15] и при аппроксимации сигналов решетчатыми функциями (см. гл. 6).

3.7. Обратная связь и чувствительность

Цепочки причинно-следственных связей, например $x_3 = \beta x_2$, $x_2 = \mu x_1$, $x_1 = -\theta q$ (рис. 16, а), могут образовать замкнутый контур (рис. 16, б), для которого $x_1 = \theta q + \beta x_2$, $x_2 = \mu x_1$, откуда

$$F_{\text{вх}} = x_1/q = \theta/(1-\beta\mu); \quad F_{\text{пер}} = x_2/q = \theta\mu/(1-\beta\mu). \quad (3.32)$$

Подобный контур реально не существует, если каналы прямой μ и обратной β передач взаимны, так как в этом случае между x_1 и x_2 имеется лишь один обратимый (взаимный) канал и при $\beta=0$ всегда $\mu=0$. Однако если хотя бы один из каналов β или μ невзаимен, то образуется контур с одионаправленной передачей энергии, в котором возникает *обратная связь*, проявляющаяся в зависимости причины x_1 от ее следствия x_2 .

Если обратная связь приводит к уменьшению x_2 , то ее называют отрицательной. Так как $x_2 = F_{\text{пер}}q$, то отклонения $F_{\text{пер}}$ и x_2 , вызванные действующими в контуре факторами уменьшаются, что широко используют для повышения стабильности характеристик радиотехнических устройств. Если обратная связь приводит к увеличению x_2 , то ее называют положительной, причем в определенных условиях в контуре возникает самовозбуждение.

Влияние обратной связи, разрываемой при исключении физического элемента цепи с параметром w_e , на функцию $F = \Delta_{ij}/\Delta$ или переменную $x_i = Fq$ определяется коэффициентом влияния

$$A_F(w_e) = F^0/F = \lambda_i^0/x_i = \Delta_{ij}^0/\Delta/\Delta_{ij}\Delta^0, \quad (3.33)$$

где верхним индексом ⁰ обозначены величины, соответствующие удалению e -го элемента цепи при $w_e = 0$ и разрыву соответствующей связи.

Для цепи передачи сигнала (рис. 17, а), определив аналитически или (рассматривая проходной четырехполюсник как «черный ящик») экспериментально $K_{U_{\text{вх}}} = u_1/e = \theta/(1-\beta\mu)$, $\mu = K_U = u_2/u_1$ (рис. 17, б), $\beta = u_1/u_2$ (рис. 17, в), можно в соответствии с выражением (3.32) составить формулу

$$K_{U_c} = u_2/e = \theta\mu/(1-\beta\mu) = K_{U_{\text{вх}}} K_U.$$

Согласно этой формуле для оценки влияния обратной связи часто используют величину $1-\beta\mu$, называемую глубиной обратной связи. В частности, обратную связь называют отрицательной при $1-\beta\mu > 1$ или $\beta\mu < 0$ и положительной при $1-\beta\mu < 1$ или $\beta\mu > 0$ независимо от реальных свойств каналов прямой μ и обратной β передач. Это нередко приводит не только к недоразумениям, но и принципиальным ошибкам, недопустимым при автоматизации проектирования. Пусть, например, для проходного четырехполюсника с неизвестным внутренним устройством измерено $\mu = 10$, $\beta = 0.1$. В этом случае $1-\beta\mu = 0$, но вывод о самовозбуждении в исследуемом «черном ящике» окажется неверным, напри-

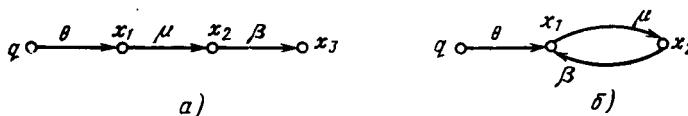


Рис. 16

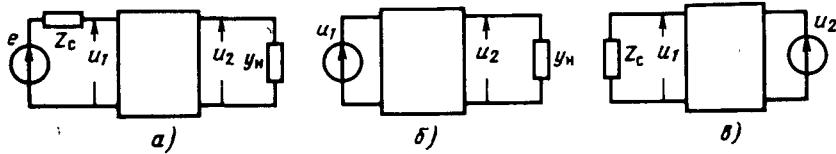


Рис. 17

мер, для трансформатора, к которому (как и взаимному элементу) неприменимо понятие обратной связи.

В качестве менее очевидного примера рассмотрим низкочастотную цепь, эквивалентная схема которой показана на рис. 18, а, с сопротивлениями резисторов \$r_1=200\$ Ом, \$r_2=10\$ кОм, \$r_3=20\$ кОм и проводимостями транзистора \$g_{ss}=6,1 \cdot 10^{-2}\$ См, \$g_{ek}=-9,5 \cdot 10^{-5}\$ См, \$g_{ka}=-6 \cdot 10^{-2}\$ См, \$g_{kk}=1 \cdot 10^4\$ См. Преобразовав источник сигнала, как показано на рис. 18, б, где \$g_1=1/r_1=5 \cdot 10^{-3}\$ См, \$g_2=1/r_2=1 \cdot 10^{-4}\$ См, \$g_3=1/r_3=5 \cdot 10^{-5}\$ См, составим для проходного четырехполюсника матрицу проводимостей.

$$\begin{bmatrix} g_1 + g_{ss} + g_2 & g_{ek} - g_2 \\ g_{ek} - g_2 & g_{kk} + g_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6,61 \cdot 10^{-2} & -1,95 \cdot 10^{-4} \\ -6,01 \cdot 10^{-2} & 2 \cdot 10^{-4} \end{bmatrix}.$$

При \$y_H=g_3=5 \cdot 10^{-5}\$ по программе 96 находим \$K_U=\mu=u_2/u_1=240,4\$; \$Z_{\text{пер}}=12506,503\$ Ом, \$Z_{\text{вх}}=52,023722\$ Ом, откуда \$K_{U_{\text{вх}}}=\theta/(1-\beta\mu)=u_1/e=g_1 Z_{\text{вх}}=0,26011861\$ и \$K_{U_{\text{c}}}=u_2/e=g_1 Z_{\text{пер}}=62,5325515\$.

Для оценки \$\beta\$ составим матрицу проводимостей при воздействии выходным напряжением

$$\begin{bmatrix} g_{kk} + g_2 & g_{ek} - g_2 \\ g_{ek} - g_2 & g_{ss} + g_1 + g_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot 10^{-4} & -6,01 \cdot 10^{-2} \\ -1,95 \cdot 10^{-4} & 6,61 \cdot 10^{-2} \end{bmatrix}$$

и при \$u_2=0\$ (так как проводимость \$g_2\$ учтена в матрице), найдем \$\beta=K_U=2,9500756 \cdot 10^{-3}\$, откуда \$\beta\mu=0,70919817\$ и \$1-\beta\mu=0,29508016\$. Таким образом, если оценивать влияние обратной связи по величине \$1-\beta\mu\$, то придется сделать вывод о том, что обратная связь положительна и при ее устраниении (\$\beta=0\$) коэффициент передачи напряжения \$K_{U_{\text{c}}}\$ уменьшится.

Для проверки этого вывода разорвем обратную связь через ветвь с проводимостью \$g_2\$, приняв \$g_2=0\$ (при этом сохранится обратная связь через транзистор, которую нельзя физически устраниить), и составим матрицу проводимостей для этого случая

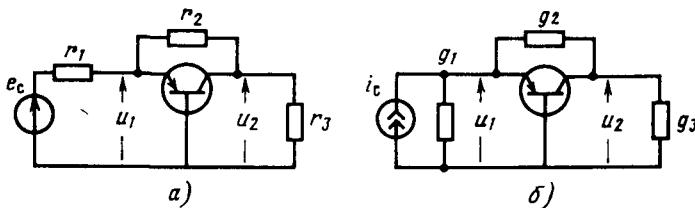


Рис. 18

$$\begin{bmatrix} g_{33} + g_1 & g_{43} \\ g_{k3} & g_{kk} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6,6 \cdot 10^{-2} & -9,5 \cdot 10^{-5} \\ -6 \cdot 10^{-2} & 1 \cdot 10^{-4} \end{bmatrix}.$$

При $y_h = g_3 = 5 \cdot 10^{-5}$ с помощью программы 96 находим $K_U = 400$, $Z_{\text{пер}}^0 = 14285,714$ Ом, $Z_{\text{вх}}^0 = 35,714285$ Ом, откуда $\theta^0 = u_1/e = K_U Z_{\text{вх}} = g_1 Z_{\text{вх}} = 1,7857143 \cdot 10^{-1}$ и $K_{U_c} = 71,42857$.

Таким образом, даже при частичном разрыве обратной связи величина K_{U_c} увеличивается, что свидетельствует об отрицательной обратной связи и ошибочности вывода о ее знаке по величине $1-\beta\mu$. Причина ошибки в том, что величина $1-\beta\mu$ полностью характеризует влияние обратной связи лишь при независимости каналов μ и β (для этого первоначально и предлагались формулы (3.32)), о чем часто забывают. При взаимности канала β , что характерно для радиотехнических цепей, по нему передается энергия и в прямом направлении, в связи с чем в $\mu = \mu^0 + \mu_\beta$ величина $\mu_\beta = 0$ при $\beta = 0$. Поэтому при взаимном канале β коэффициент влияния $A_{\text{пер}}(\beta) = (\theta^0 \mu^0 / \theta \mu) (1 - \beta \mu)$ по значению и знаку может отличаться от $1 - \beta \mu$. В частности, для рассматриваемой цепи коэффициент влияния проводимости g_2 на коэффициент передачи напряжения $A_K(g_2) = 1,1422628$, что свидетельствует об отрицательной обратной связи несмотря на неравенство $1 - \beta \mu < 1$.

Ограниченностю применения величины $1 - \beta \mu$ и практические трудности в выделении каналов β и μ для сложных цепей привели к использованию для оценки влияния обратной связи возвратной разности

$$V(\omega_e) = \Delta / \Delta^0$$

и возвратного отношения

$$T(\omega_e) = V(\omega_e) - 1 = (\Delta - \Delta^0) / \Delta^0,$$

где Δ^0 — значение определителя матрицы Y или Z анализируемой цепи при коротком замыкании ($z_e = 0$) или размыкании ($y_e = 0$) e -го ее элемента.

Оценка влияния обратной связи, разываемой при удалении e -го элемента, по возвратной разности достаточно точна для передаточных функций $F = \Delta_\Phi / \Delta$, числители которых практически не зависят от параметра ω_e и коэффициент влияния (3.33) близок по значению к возвратной разности. Например, для цепи, схема которой показана на рис. 18, определитель матрицы проводимостей (с учетом g_3) $\Delta = 4,8055 \cdot 10^{-6}$ См², а при $g_2 = 0$ его значение $\Delta^0 = 4,2 \times 10^{-6}$ См² и $\Delta / \Delta^0 = 1,1441666 \approx A_K(g_2) = 1,1422628$. Однако в тех случаях, когда числитель функции заметно зависит от g_2 , оценка его влияния на функцию по возвратной разности может оказаться неточной, например, для входного сопротивления цепи, схема которой показана на рис. 18, с коэффициентом влияния $A_{Z_{\text{вх}}} (g_2) = 1,4566642$.

Таким образом, влияние параметров и обратных связей, разываемых при удалении соответствующих элементов цепи, наиболее точно определяется коэффициентами влияния (3.33). Однако при любом методе анализа влияния обратной связи как физического явления необходимо учитывать реально существующие каналы обратной связи, образованные компонентами цепи, а не эквивалентными ветвями математических моделей (схем или графов), и не всегда однозначно соответствующими физическим элементам.

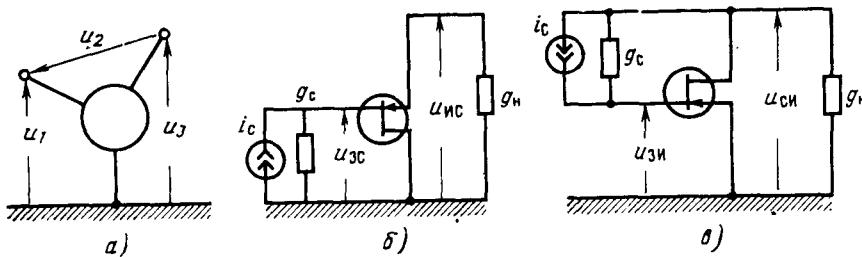


Рис. 19

Для любого трехполюсника (рис. 19, а) справедливо уравнение Кирхгофа $u_1 = u_2 + u_3$, по которому, обозначив $K = -u_3/u_2$ и $\beta = 1$, можно всегда составить выражение

$$K_{U31} = u_3/u_1 = -K/(1-\beta K), \quad (3.34)$$

совпадающее по форме с выражением (3.32). Это совпадение часто используют для «объяснения» обратной связи в катодном, истоковом и даже эмиттерном повторителях, хотя формулу (3.34) можно составить для любого трехполюсника независимо от внутренней структуры.

Так, при обычном допущении $i_3 = 0$ на низких частотах неопределенная матрица проводимостей истокового повторителя (рис. 19, б)

$$Y = \begin{bmatrix} y_{33} & y_{3C} & y_{3I} \\ y_{C3} & y_{CC} & y_{CI} \\ y_{I3} & y_{IC} & y_{II} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_c & -g_c & 0 \\ -g_c + S & g_c + g_i + g_h & -S - g_i - g_h \\ -S & -g_i - g_h & S + g_i + g_h \end{bmatrix},$$

где S и g_i — крутизна и внутренняя проводимость полевого транзистора. При выборе стока в качестве общего узла (рис. 19, б) матрица проводимостей истокового повторителя

$$Y_{OC} = \begin{bmatrix} y_{33} & y_{3I} \\ y_{I3} & y_{II} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_c & 0 \\ -S & S + g_i + g_h \end{bmatrix}.$$

откуда $K_{OC} = u_{IC}/u_{3C} = \Delta_{12}/\Delta_{11} = S/(S + g_i + g_h) < 1$, причем обратная связь между входом и выходом отсутствует, так как $y_{3I} = 0$.

Если числитель и знаменатель K_{OC} разделить на $-(g_i + g_h)$, то получим выражение $K_{OC} = -K_{OI}/(1 - \beta K_{OI})$, где $\beta = 1$, а $K_{OI} = -S/(g_i + g_h)$ — коэффициент усиления для схемы включения полевого транзистора. Совпадением полученного выражения для K_{OC} с формулами (3.32) и (3.34) обычно и «объясняют» обратную связь в истоковом (аналогично в катодном или эмиттерном) повторителе. Однако в действительности связь между напряжениями u_{CI} и u_{3I} в истоковом повторителе определяется не величиной K_{OI} , а отношением $u_{CI}/u_{3I} = -(S - g_c)/(g_i + g_c + g_h)$, в чем легко убедиться, выбрав исток в качестве общего узла (рис. 19, в) при анализе.

Обратная связь приводит к изменению стабильности характеристик цепи, в связи с чем важное значение приобретает оценка зависимости отклоения

функций цепи при отклонениях параметров. Так как любая функция цепи F может рассматриваться как функция $F(w_1, w_2, \dots, w_k)$, то при малых изменениях параметров изменения их функций определяют по формулам, связанным с вычислениями частных производных $D_i = \partial F / \partial w_i$ и чувствительностей $S_F(w_i) = (w_i/F) \partial F / \partial W_i$. Вычисление производных на ЭВМ заменяют вычислением отношений

$$D_i(w_i) \approx \frac{\Delta F(w_i)}{\Delta w_i} = \frac{F(w_i + w_i d) - F(w_i)}{w_i d},$$

где $d = \Delta w_i / w_i$ — относительное изменение параметра, %. При больших значениях d возникает значительная методическая погрешность вычисления производной, а при очень малых значениях d , соизмеримых с погрешностями округления, резко увеличивается операционная погрешность. При вычислениях с 8-разряднойmantиссой целесообразно принимать d в пределах от 10^{-3} до 10^{-5} в зависимости от значения производных.

Программа 153. Вычисление частных производных

```
ПД ПП 22 ПА КИПД ПС ↑ ИП0 × ПВ
+ КПД ПП 22 ИПА — ИПВ ÷ ИПС КПД
↔ С/П ... В/О
```

Инструкция. Заменить многоточие фрагментом вычисления функции F с размещением значений параметров w_i в регистрах $i=1, 2, \dots, 9$; ($d=P0$) $i=RX$ B/O $C/P RX=\Delta F/\Delta w_i \approx \partial F / \partial w_i$, $PA=F$.

Пример. Для схемы, показанной на рис. 18, оценим производные по параметрам от функции $K_{Uc} = u_n/e_c = g_1 Z_{\text{пер}} = g_1 K_{21}/(y_{11} + y_{12} K_{21})$, где $y_{11} = g_1 + g_2 + g_{39}$; $y_{12} = g_{k9} - g_2$; $K_{21} = (g_2 - g_{k9})/(g_2 + g_3 + g_{kk})$.

Разместив в памяти значения параметров $g_1 = 5 \cdot 10^{-3} = P1$, $g_2 = 1 \cdot 10^{-4} = P2$, $g_3 = 5 \cdot 10^{-5} = P3$, $g_{39} = 6 \cdot 10^{-2} = P4$, $g_{k9} = -9,5 \cdot 10^{-5} = P5$, $g_{kk} = -6 \cdot 10^{-2} = P6$, $g_{kk} = 1 \cdot 10^{-4} = P7$, заменив многоточие в программе фрагментом ИП2 ИП6 — ИП7 !ИП2 + ИП3 + ↑ ИП5 ИП2 — × ИП1 + ИП4 + ИП2 + ÷ ИП1 × и приняв $d = 1 \cdot 10^{-4}$, получим $K_{Uc} = 62,532515$, $\partial F / \partial g_1 = 9251,2$, $\partial F / \partial g_2 = -78000$, $\partial F / \partial g_{39} = -782105$, $\partial F / \partial g_{k9} = -3252$, $\partial F / \partial g_{kk} = -3579$, $\partial F / \partial g_3 = -859700$, $\partial F / \partial g_{kk} = -860000$.

Более удобно оценивать нестабильность функций цепи по их чувствительности к относительным изменениям параметров

$$S_F(w_i) = \frac{(w_i/F) \partial F}{\partial w_i} \approx \frac{F(w_i + w_i d) - F(w_i)}{F(w_i) \Delta w_i / w_i} = \frac{F(w_i + w_i d) / F(w_i) - 1/d}{F(w_i)},$$

где величину d целесообразно выбирать в пределах от 10^{-3} до 10^{-6} .

Программа 154. Вычисление чувствительностей функции F к малым относительным изменениям параметров цепи

```
ПД ПП 24 ПА КИПД ПС ↑ ИП0 × ПВ
+ КПД ПП 24 ИПА — ИПВ ÷ ИПС КПД
× ИПА ÷ С/П ... В/О
```

Инструкция. Заменить многоточие фрагментом вычисления функции F с размещением значений параметров ω_i в регистрах $i=1, 2, \dots, 9$; ($d=P0$) $i=PX$ В'О С/П $PX=S_F(w_i)$, РА= F .

Пример. При $d = 10^{-3}$ по данным предыдущего примера для $g_2 = 0$ получим ($t \approx 20$ с) $S_F(g_1) = 0,8212$, $S_F(g_3) = -0,7851$, $S_F(g_{33}) = -2,1739$, $S_F(g_{k3}) = 1,3589$, $S_F(g_{3k}) = 2,3603$, $S_F(g_{kk}) = -1,569$, откуда $\delta F = \sum S_F(\omega_i) \approx 0,82\delta g_1 - 0,79\delta g_3 - 2,17\delta g_{33} - 1,36\delta g_{3k} + 2,3\delta g_{k3} - 1,57\delta g_{kk}$. Если все параметры увеличатся на 10%, то $\delta F = -2,77 \cdot 0,1 = -0,28$, или $\delta F = 28\%$.

При тех же данных и $g_2 = 1 \cdot 10^{-4}$ получим соответственно $\delta F = 0,74\delta g_1 - 0,1244\delta g_3 - 0,684\delta g_{33} - 3,16\delta g_{k3} + 1,19\delta g_{3k} + 3,44\delta g_{k3} - 1,37\delta g_{kk}$, и при изменении параметров на 10% относительное изменение функции $F = K_{U_c} = 62,53251$ составит $\delta F = 0,03 \cdot 0,1 = 0,003$, или 0,3%.

Таким образом, введение отрицательной обратной связи привело к значительному уменьшению нестабильности K_{U_c} при нестабильности параметров. Однако при этом нестабильность некоторых параметров стала влиять сильнее, чем при отсутствии обратной связи. Это объясняется тем, что обычно для неинвертирующих усилителей включение резистора между входом и выходом приводит к положительной обратной связи, и рассмотренная цепь, схема которой показана на рис. 18, является одним из исключений из этого правила. Эта особенность и проявляется в увеличении чувствительности к изменениям некоторых параметров, нехарактерной для большинства цепей с отрицательной обратной связью.

Возникновение самовозбуждения при положительной обратной связи приводит к неустойчивости цепи с нарастанием колебаний и, как следствие, проявлению нелинейных свойств цепи. Поэтому условие устойчивости проектируемой цепи является основным физическим критерием ее линейности при слабых воздействиях, а также условием физической реализуемости спроектированной, но еще не проверенной экспериментально линейной цепи с активными компонентами.

Основным условием устойчивости цепи является затухание времений характеристики (3.29) после прекращения воздействия, что соответствует расположению всех корней определителя $\Delta(p)$ матрицы Y слева от оси $j\omega$ на плоскости p . В связи с громоздкостью вычисления корней обычно используют алгебраические или частотные критерии устойчивости, не требующие вычисления корней определителя матрицы Y или Z (если цепь описана матрицей Y и i -й вход короткозамкнут идеальным источником входного напряжения, то определителем является минор Δ_{ii}).

Наиболее известен алгебраический критерий Раусса—Гурвица [4], но при анализе цепей более удобен критерий Гурвица, основанный на представлении многочлена $\Delta(p) = M(p) + N(p)$ суммой четной $M(p)$ и нечетной $N(p)$ и разложении в цепную дробь отношения $M(p)/N(p)$ при четной степени m многочлена или отношения $N(p)/M(p)$ при нечетной. Анализируемый многочлен (и соответствующая цепь) устойчив, если все коэффициенты c_i разложения в цепную дробь положительны.

Программа 155. Оценка устойчивости многочлена степени $m \leq 11$ ($m \leq 12$ для ЯМК52) по разложению в цепную дробь

ПД	ПС	КИПС	ИПС	1	—	ПС	→	КИПС	÷
↑	ИПС	1	+	ПС	→	КПС	→	↑	ИПС
2	—	ПС	$x \geq 0$	45	→	КИПС	ИПС	1	—
ПС	$x < 0$	38	→	↔	0	БП	41	→	↔
КИПС	×	—	БП	11	ИПД	1	—	$x=0$	00
С П									

Инструкция. Для ЯМК52 при $m=12$ заменить обращения к регистрам С и Д соответственно обращениями к регистрам Д и Е; $a_0=P0$, $a_1=P1$, ..., $a_m=Pm$; $m=RX$ В О С/П $RX=0$, $P1=c_1$, $P2=c_2$, $P3=c_3$, ..., $Pm=c_m$.

Пример. Многочлен $\Delta(p) = 6p^6 + 5p^5 + 4p^4 + 3p^3 + 2p^2 + p + 0,5$ неустойчив, так как коэффициенты цепной дроби $c_1=3,5$, $c_2=0,28571428$, $c_3=-14$, $c_4=-0,057142857$, $c_5=1,25$, $c_6=1,2$.

В радиотехнической практике используются также частотные критерии устойчивости, основанные на построении (иапример, с помощью программ 130—136) частотных годографов — геометрических мест функции $F(j\omega)$ на комплексной плоскости с координатами $\operatorname{Re}F(\omega)$ и $\operatorname{Im}F(\omega)$. Условно принято, что годограф охватывает область, расположенную справа от него при движении в сторону увеличения частоты.

Согласно классическому критерию Найквиста цепь устойчива, если частотный годограф функции φ не охватывает точки с координатами $(1; 0)$. Однако этот критерий применим только при однозначно определенных каналах прямой μ и обратной β передач, неприменим для цепей с активными двухполюсниками и не учитывает возможность расположения полюсов функций $\mu(p)$ и $\theta(p)$ в правой полуплоскости или на оси $j\omega$, когда также возникает неустойчивость.

Более удобен обобщенный критерий Найквиста—Боде, согласно которому цепь устойчива, если частотный годограф возвратной разности [14] не охватывает начала координат. Удобен также частотный критерий Михайлова, согласно которому цепь устойчива, если частотный годограф определителя матрицы Y или Z степени m последовательно проходит через m квадрантов комплексной плоскости вокруг начала координат.

Глава 4

Анализ нелинейных цепей

4.1. Аппроксимация нелинейных характеристик

Анализ нелинейных цепей в основном связан с численными методами, поскольку аналитическое решение нелинейных уравнений удается найти лишь в исключительных случаях. Исследуя нелинейные цепи, инженер прежде всего сталкивается с задачей аппроксимации (приближения) нелинейных характеристик расчетными выражениями. Для аппроксимации нелинейных функций $x(q)$ обычно используют табличные модели с $m=n+1$ отсчетами $x_i=x(q_i)$, $i=0, 1, \dots, n$, и равноотстоящими (с постоянным шагом $h=q_i-q_{i-1}$) или неравноотстоящими узлами q_i . Такие табличные модели получают в результате экспериментальных

измерений или составляют по графикам $x(q)$ или значениям функции, заданной сложными аналитическими зависимостями, которые необходимо упростить. Узлы q_i табличной модели выбирают так, чтобы между соседними узлами функция $x(q)$ была монотонной и возможно более гладкой.

Для аппроксимации иерархических зависимостей $x(q)$ часто используют интерполирующие функции $f(q)$, совпадающие с аппроксимируемой функцией $x(q)$ в узлах q_i и достаточно близкие к ней между узлами. Простейшим примером является кусочно-линейная аппроксимация иерархических функций, при которой эти функции между узлами аппроксимируются линейными функциями

$$f(q) = a_{1i}q + a_{0i}, \quad q_i \leq q \leq q_{i+1},$$

$$\text{где } a_{1i} = \frac{x_{i+1} - x_i}{q_{i+1} - q_i}; \quad a_{0i} = \frac{x_i q_{i+1} - x_{i+1} q_i}{q_{i+1} - q_i},$$

причем узлы q_i могут быть как равноотстоящими, так и неравноотстоящими, а для повышения точности аппроксимации интерполируемые отсчеты x_i могут выбираться отличающимися от истинных.

Программа 156. Кусочно-линейная аппроксимация табулированных функций $x_i = x(q_i)$

П8 → П5 → ИП8 — ↔ ИП5 — ÷

П1 ИП5 × ИП8 ↔ — П0 ИП1 С/П ИП1
× ИП0 + БП 18

Инструкция. $q_i = PT$, $x_i = PZ$, $q_{i+1} = PY$, $x_{i+1} = RX$ В/О С/П ($t \approx 4$ с)
 $PX = P1 = a_1$, $PY = a_0$; для интерполяции $q = RX$ С/П $PX = f(q)$.

Пример. Для аппроксимации ампер-вольтной характеристики полупроводникового диода (рис. 20) при выборе узлов $U_i = 0; 0,3; 0,6$ с отсчетами $I(0) = 0$, $I(0,3) = 0$, $I(0,6) = 64$ мА получим кусочно-линейную аппроксимацию

$$I(U) = \begin{cases} 0 & \text{при } 0 \leq U \leq 0,3, \\ 213,33333U - 64 & \text{при } 0,3 < U \leq 0,6, \end{cases}$$

с интерполируемыми значениями $I(0,1) = 0$, $I(0,2) = 0$, $I(0,4) = 21,33$, $I(0,5) = 42,67$ мА; при выборе отсчетов $I(0) = 0$, $I(0,3) = 8$ мА, $I(0,6) = 64$ мА получим аппроксимацию

$$I(U) = \begin{cases} 26,67U & \text{при } 0 \leq U \leq 0,3, \\ 186,67U - 48 & \text{при } 0,3 < U \leq 0,6 \end{cases}$$

с интерполируемыми значениями $I(0,1) = 2,67$ мА, $I(0,2) = 5,33$ мА, $I(0,4) = 26,67$ мА, $I(0,5) = 45,33$ мА.

Линейная интерполяция является частным случаем интерполяции степенным многочленом, вычисляемым по формуле Лагранжа:

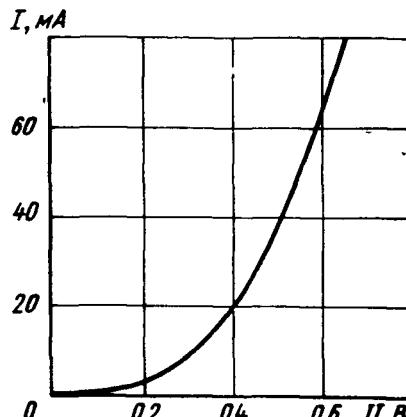


Рис. 20

$$f(q) = \sum_{i=0}^n x_i \prod_{i \neq j=0}^n (q - q_j) \quad \left| \prod_{i \neq j=0}^n (q_i - q_j), \quad (4.1)\right.$$

где q — заданное значение аргумента при интерполяции между равноотстоящими или неравноотстоящими узлами интерполяции q_i .

Программа 157. Интерполяция табулированной функции $x(q_i)$ с $m \leq 10$ ($m \leq 11$ для ЯМК52) узлами по формуле Лагранжа

ПВ	Cx	↑	↑	→	ПС	C/P	↔	→	ИПД
1	—	ПА	→	КИПС	КИПА	—	$x \neq 0$	25	÷
ИПВ	КИПА	—	×	↑	→	ИПА	$x=0$	10	→
+	ИПС	1	+	↑	ИПД	—	$x=0$	04	→
БП	04								

Инструкция. ($q_0=P0$, $q_1=P1$, $q_2=P2$, ..., $q_n=Pn$; $m=n+1=PД$)
 $q=PX$ В/О С/П $PX=0$, $x_0=PX$ С/П ($t \approx (5+4m)$ с) $x_1=PX$ С/П $x_2=PX$ С/П ... $x_n=PX$ С/П $PX=f(q)$). Для ЯМК52 при $m \leq 11$ заменить обращения к регистрам А, В, С и Д соответственно обращениями к регистрам В, С, Д и Е.

Пример. Для характеристики, показанной на рис. 20, при $I(0)=0$, $I(0,3)=8$ мА, $I(0,4)=20$ мА, $I(0,6)=64$ мА, получим $I(0,2) \approx 1,33$ мА, $I(0,5) \approx 38,33$ мА.

Вычисления по формуле Лагранжа удобны лишь при необходимости определения небольшого числа значений $x(q)$, когда не требуется аналитическое выражение аппроксимирующей функции. В противном случае используют интерполирующий многочлен Ньютона

$$f(q) = x_0 + \sum_{i=1}^n \alpha_i \prod_{j=0}^i (q - q_j),$$

но обычно удобнее представлять его в обычной форме степенного многочлена $f(x) = a_n q^n + a_{n-1} q^{n-1} + \dots + a_1 q + a_0$.

Вычисление коэффициентов многочлена Ньютона и степенного многочлена, а также коэффициентов степенного многочлена и $f(q)$ при смещении аргумента $z=q+\xi$ для равноотстоящих или неравноотстоящих узлов интерполяции удается автоматизировать с помощью одной программы.

Программа 158. Вычисление коэффициентов a_i многочлена Ньютона, коэффициентов a_i многочлена $f(q)$ и его значений, а также коэффициентов a'_i многочлена $f(q+\xi)$ и его значений при произвольном расположении $m \leq 6$ узлов q_i интерполяции

ПД	↔	П7	7	П1	1	4	П0	С/П	П8
→	ИП8	КИП0	—	↔	ИП0	5	—	П0	→
КИП0	—	↔	÷	ИП0	6	+	П0	6	—
ИП1	—	$x=0$	10	→	КП1	ИП8	КП0	БП	05
ИП1	1	+	П8	7	+	П0	6	—	П1
9	—	$x \neq 0$	79	КИП0	↑	→	↑	КИП1	↔
КИП1	×	—	ИП1	2	+	П1	→	КП1	→
ИП1	ИП8	—	$x=0$	56	ИП0	2	БП	45	С/П
↑	ИП9	П1	Cx	ИП8	П0	→	×	КИП0	+
ИП0	2	+	L1	85	→	БП	79		

Инструкция. $x_0=PY$, $q_0=PX$ В/О С/П $x_1=PY$, $q_1=PX$ С/П ... $x_n=PY$, $q_n=PX$ С/П $P7=a_0$, $P6=a_1$, $P5=a_2$, ..., $P2=a_n$, $PД=q_0$, $PC=q_1$.

$PB = q_2, \dots, P8 = q_n$; для вычисления коэффициентов степенного многочлена БП 4 0 С/П $P7 = a_0, P6 = a_1, P5 = a_2, \dots, P2 = a_8, P8 = -n$; для вычислений $f(q)$ выполнять ($m = P9$) $q = RX$ С/П $RX = f(q)$; для вычисления коэффициентов многочлена $f(q + \xi)$ выполнить $\xi = RD = PC = \dots = P(14-n)$; $7-n = P1$ БП 4 0 С/П $P7 = a'_0, P6 = a'_1, \dots, P2 = a'_8$; для вычисления $f(q + \xi)$ выполнять ($n+1 = m = P9$) $z = q + \xi = RX$ С/П $RX = f(z)$.

Пример. Для исходных данных из примера к программе 157 получим $I(0,2) = 1,333333$ мА, $I(0,5) = 38,333335$ мА.

Вычисления упрощаются при равноотстоящих узлах табличной модели с шагом $h = q_i - q_{i-1}$. Формулу Лагранжа можно записать в виде

$$f(q) = \frac{\Pi_{i+1}(k)}{n!} \sum_{i=0}^n (-1)^{n-i} \frac{x_i C_n^i}{k-i},$$

где $\Pi_{i+1}(k) = k(k-1)\dots(k-n)$; $C_n^i = n!/i!(n-i)!$; $k = (q - q_0)/h$ — нормированное значение аргумента в точке интерполяции. В этом случае не требуется хранить в памяти значения узлов интерполяции, что упрощает автоматизацию вычислений при произвольном числе узлов.

Программа 159. Интерполяция по формуле Лагранжа табулированных функций $x(q_i)$ с произвольным числом m равноотстоящих узлов с шагом h

```

ИП7 ПД ИП8 П0 π × cos П9 × ÷
ПС 1 П2 П5 ИП5 С/П ИП7 ИП5 — ↑
ИПД × ПД → ÷ ИП0 /-/ ИП9 × П9
× ИП9 ИП2 × П2 ÷ ИПС + ПС КИП5
КИП0 ИП0 x=0 14 ИПС ИПД × ИП2 ÷ С/П

```

Инструкция. Переключатель Р—ГРД—Г установить в положение Р. $k = (q - q_0)/h = P7$, $n = P8$, $x_0 = RX$ В/О С/П $RX = 1$, $x_1 = RX$ С/П $RX = 2$, $x_2 = RX$ С/П ... $x_n = RX$ С/П $RX = f(q)$.

Пример. Для характеристики, показанной на рис. 20, при $I(0) = 0$, $I(0,2) = -4$ мА, $I(0,4) = 20$ мА, $I(0,6) = 64$ мА и $k = 1,5$ и $k = 0,5/0,2 = 2,5$ соответственно получим $I(0,3) = 9,5$ мА и $I(0,5) = 37,5$ мА.

При равноотстоящих узлах интерполяции многочленом Ньютона и соответствующими степенными многочленами снижаются ограничения на максимальное число узлов.

Программа 160. Вычисление коэффициентов a_i многочлена Ньютона, коэффициентов a_i и значений $f(z)$ степенного многочлена аргумента $z = q - \xi$ при $m \leq 10$ ($m \leq 11$ для ЯМК52) равноотстоящих узлах интерполяции

```

ПА Сx ПД КИПД ПВ ИПД 1 + ПС ИПД
1 + ПД ИПВ КИПД ПВ ↔ - ИПС ÷
КПД ИПД ИПА — x=0 09 ИПС ПД ИПА —
x=0 03 ИПА 1 — ПС ПВ ИПВ 1 +
ПД КИПВ КИПД ИПС × — КПВ ИПВ 1 +
ПВ ИПА — x=0 37 ИПС 1 — x=0 36
ПД С/П ПВ КИПД ИПС ÷ КПД С/П ИПС ИПВ
× ПС ИПД 1 + ПД БП 63 ↑ 1
↑ Сx ↑ → × КИПД + ИПД 1 —
ПД x<0 83 → С/П БП 78

```

Инструкция. $x_0=P0$, $x_1=P1$, ..., $x_n=Pn$, $n=PX$ В/О С/П $PX=0$ ($P0=a_0$, $P1=a_1$, ..., $Pn=a_n$) $h=PX$ С/П $PX=P0=a_0$ С/П $PX=P1=a_1$, ..., С/П $PX=Pn=a_n$; для вычисления интерполирующего многочлена ($n=RД$) $z=q-q_0=PX$ БП 7 8 С/П $PX=f(q)$.

Пример. Для характеристики, показанной на рис. 20, при $I(0)=0$, $I(0,2)=-4$ мА, $I(0,4)=20$ мА, $I(0,6)=64$ мА получим $a_0=0$, $a_1=3,3333332$, $a_2=-1,9999998$, $a_3=2,6666666$ и $a_4=0$, $a_5=16,666666$, $a_6=-49,999995$, $a_7=333,33332$, для которых $I(0,3)=9,5$ мА, $I(0,5)=37,5$ мА, $I(0,7)=101,5$ мА.

Для интерполяции нелинейных табулированных функций при точном задании исходных данных можно использовать кубические сплайны [15]. Для приближенной аппроксимации монотонных или одноэкстремальных функций используют аппроксимирующие функции с небольшим числом параметров [15]. Наиболее общей является аппроксимация нелинейных зависимостей степенными многочленами при надлежащем выборе отсчетов, по которым выполняется интерполяция. Точность аппроксимации выбранной функции обычно оценивают по среднему квадратическому отклонению аппроксимирующей функции $f(q)$ от аппроксимируемой $x(q)$ в узлах q_i :

$$\sigma = \sum_{i=0}^n (x(q_i) - f(q_i))^2.$$

Коэффициенты многочленов небольшой степени, аппроксимирующих табулированную функцию при минимальном отклонении σ , могут быть найдены по методу наименьших квадратов решением системы уравнений

$$\begin{bmatrix} m & \Sigma q_i & \dots & \Sigma q_i^s \\ \Sigma q_i & \Sigma q_i^2 & \dots & \Sigma q_i^{s+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \Sigma q_i^s & \Sigma q_i^{s+1} & \dots & \Sigma q_i^{2s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \dots \\ a_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Sigma x_i \\ \Sigma x_i q_i \\ \dots \\ \Sigma x_i q_i^s \end{bmatrix}, \quad (4.2)$$

составляемой для произвольного числа $m>s$ отсчетов $x(q_i)$ в узлах q_i . В этом случае точность аппроксимации зависит от степени аппроксимируемого многочлена.

Программа 161. Вычисление по методу наименьших квадратов коэффициентов функции $f(q)=a_1q+a_0$, аппроксимирующей табулированную функцию $x(q_i)$ с произвольным числом произвольно расположенных узлов

```

↑ Сх П3 П4 П5 П6 П7 → П8 ↔
П9 × ИП7 + П7 ИП8 ИП5 + П5 ИП8
x2 ИП3 + П3 ИП9 ИП6 + П6 КИП4 ИП4
С/П БП 08 ИП6 ИП3 × ИП7 ИП5 × —
ИП4 ИП3 × ИП5 x2 — П2 ÷ П0 ИП4
ИП7 × ИП5 ИП6 × — ИП2 ÷ П1 С/П
ИП1 × ИП0 + БП 59

```

Инструкция. $x_0=PY$, $q_0=PX$ В/О С/П $PX=1$, $x_1=PY$, $q_1=PX$ С/П ($t \approx 7$ с) $PX=2$... $x_n=PY$, $q_n=PX$ С/П $PX=n+1=m$ ($P3=\Sigma q_i^2$, $P4=m$, $P5=\Sigma q_i$, $P6=\Sigma x_i$, $P7=\Sigma x_i q_i$) БП 3 3 С/П ($t \approx 12$ с) $PX=P1=a_1$, $PY=P0=a_0$; для вычислений $q=PX$ С/П $PX=f(q)$.

Пример. Для характеристики, показанной на рис. 20, при $I(0,2) = 4$ мА, $I(0,3) = 8$ мА, $I(0,4) = 20$ мА, $I(0,5) = 40$ мА, $I(0,6) = 64$ мА получим $a_1 = 152$, $a_0 = -33,6$ и $f(0,2) = -3,2$ мА, $f(0,35) = 19,6$ мА, $f(0,5) = 42,4$ мА.

Если начало отсчета аргумента q табулированной функции $x(q_i)$ с равноотстоящими узлами q_i совпадает со средним значением $q_{cp} = (q_0 + q_n)/2$, то суммы четных степеней q_i равны нулю, и система уравнений (4.2) распадается на две независимые системы низших порядков, что упрощает вычисление коэффициентов аппроксимирующего многочлена с помощью ПМК с ограниченной емкостью памяти [14, 15]. Если начало отсчета q не совпадает с q_{cp} , следует перейти к аргументу $z = q - q_{cp}$ и вычислять коэффициенты аппроксимирующего многочлена $f(z)$.

Программа 162. Вычисление по методу наименьших квадратов многочлена $f(z) = a_2 z^2 + a_1 z + a_0$, $z = q - q_{cp}$, аппроксимирующего табулированную функцию $x(q_i)$ с произвольным числом $m > 2$ узлов q_0, q_1, \dots, q_n , равноотстоящих с шагом h

+	Bx	\leftrightarrow	2	\div	ПД	—	ПВ	Cx	ПЗ
P4	P5	P6	P7	P8	C/P	P9	ИП6	+	P6
ИП9	ИПВ	\times	ИП7	+	P7	ИПВ	x^2	ИП9	\times
ИП8	+	P8	ИПВ	x^2	ИП3	+	P3	ИПВ	x^2
x^2	ИП5	+	P5	ИПВ	ИПС	+	ПВ	КИП4	ИП4
БП	17	ИП6	ИП5	\times	ИП8	ИП3	\times	—	ИП4
ИП5	\times	ИП3	x^2	—	ПА	\div	P0	ИП7	ИП3
\div	П1	ИП4	ИП8	\times	ИП6	ИП3	\times	—	ИПА
\div	П2	C/P	ИПД	—	↑	x^2	ИП2	\times	\leftrightarrow
ИП1	\times	+	ИП0	+	БП	82			

Инструкция. $h = PC$, $q_n = PY$, $q_0 = PX$ В/О С/П ($t \approx 5$ с) $PX = 0$, $x_0 = PX$ С/П $PX = 1$, $x_1 = PX$ С/П ($t \approx 12$ с) $PX = 2 \dots x_n = PX$ С/П $PX = m$, $P3 = \sum z_i^2$, $P4 = m$, $P5 = \sum z_i^4$, $P6 = \sum x_i$, $P7 = \sum x_i z_i$, $P8 = \sum x_i z_i^2$, $PC = h$, $PД = = q_{cp} = (q_0 + q_n)/2$ БП 5 2 С/П ($t \approx 10$ с), $PX = P2 = a_2$, $PY = P1 = a_1$, $P0 = a_0$, для вычислений $q = PX$ С/П $PX = f(q)$.

Пример. Для характеристики, показанной на рис. 20, при $h = 0,1$, $I(0,1) = = 1$ мА, $I(0,2) = 4$ мА, $I(0,3) = 8$ мА, $I(0,4) = 20$ мА, $I(0,5) = 40$ мА, $I(0,6) = = 64$ мА получим $a_2 = 301,78571$, $a_1 = 124,28571$, $a_0 = 14,03125$ и $f(0,25) = 4,62$ мА, $f(0,5) = 39,46$ мА, $f(0,55) = 50,96$ мА.

Коэффициенты аппроксимирующего многочлена $f(q)$ при необходимости можно вычислить с помощью программы 98 или по формулам $a_2 = a_2$, $a_1 = a_1 - 2a_2 q_{cp}$, $a_0 = a_0 - a_1 q_{cp} + a_2 q_{cp}^2$.

Программа 163. Вычисление по методу наименьших квадратов многочлена $f(z) = a_3 z^3 + a_2 z^2 + a_1 z + a_0$, $z = q - q_{cp}$, аппроксимирующего табулированную функцию $x(q_i)$ с произвольным числом $m > 3$ равноотстоящих узлов q_0, q_1, \dots, q_n с шагом h

П3	ИП5	+	П5	ИП9	ИП3	\times	ИП6	+	П6
ИП9	x^2	\uparrow	\uparrow	ИП3	\times	ИП7	$+$	П7	\rightarrow
ИПА	+	ПА	\rightarrow	x^2	ИПВ	$+$	ПВ	ИП9	\uparrow
x^2	\times	\uparrow	\uparrow	\times	ИПС	$+$	ПС	\rightarrow	ИП3
\times	ИП8	$+$	П8	С/П	ИП5	ИПВ	\times	ИП7	ИПА
\times	—	ИП4	ИПВ	\times	ИПА	x^2	—	П3	\div
П0	ИП7	ИП4	\times	ИП5	ИПА	\times	—	ИП3	\div
П2	ИП6	ИПС	\times	ИП8	ИПВ	\times	—	ИПА	ИПС
\times	ИПВ	x^2	—	П3	\div	П1	ИП8	ИПА	\times
ИП6	ИПВ	\times	—	ИП3	\div	П3	С/П		

Инструкция. Очистить регистры Р5, Р6, ..., РС; ($q_{cp} = (q_0 + q_n)/2 = PД$; $m = n + 1 = P4$) $z_0 = q_0 - q_{cp} = P9$, $x_0 = RX \text{ B/O } C/P$ ($t \approx 12 \text{ с}$) $z_1 = P9$, $x_1 = RX \text{ B/O } C/P \dots z_n = P9$, $x_n = RX \text{ B/O } C/P$ ($P5 = \sum x_i$, $P6 = \sum x_i z_i$, $P7 = \sum x_i z_i^2$, $P8 = \sum x_i z_i^3$, $PA = \sum z_i^2$, $PB = \sum z_i^4$, $PC = \sum z_i^6$) C/P ($t \approx 18 \text{ с}$) $RX = P3 = \alpha_3$, $P2 = \alpha_2$, $P1 = \alpha_1$, $P0 = \alpha_0$; для вычисления $f(q)$ при сохранении содержимого регистров 0...3 выполнить в ручном или автоматическом режиме программу ИПД — $\uparrow \uparrow$ ИП3 \times ИП2 $+ \times$ ИП1 $+ \times$ ИП0 $+ \times$ с вводом перед каждым ее выполнением $q = RX$.

Пример. Для отсчетов $I(0) = 0$, $I(0,1) = 1$, $I(0,2) = 4$, $I(0,3) = 8$, $I(0,4) = 20$, $I(0,5) = 40$, $I(0,6) = 64$ при $m = 7$, $q_{cp} = (q_0 + q_n)/2 = 0,3 = PД$ для $z_i = q_i - q_{cp}$ (вводить q_i ИПД — П9) по отсчетам $I(-0,3) = 0$, $I(-0,2) = 1$, $I(-0,1) = 4$, $I(0) = 8$, $I(0,1) = 20$, $I(0,2) = 40$, $I(0,3) = 64$ получим $\alpha_3 = 250$, $\alpha_2 = 257,14285$, $\alpha_1 = 84,642857$, $\alpha_0 = 9,2857142$ и $f(q) = f(0,5) = 38,5$, $f(q) = f(0,25) = 5,7$.

Коэффициенты многочлена $f(q) = a_3q^3 + a_2q^2 + a_1q + a_0$ можно вычислить с помощью программы 98 или по формулам

$$a_3 = \alpha_3, \quad a_2 = \alpha_2 - 3\alpha_3q_{cp}, \quad a_1 = \alpha_1 - 2\alpha_2q_{cp} - 3\alpha_3q_{cp}^2, \quad a_0 = \alpha_0 - \alpha_1q_{cp} + \alpha_2q_{cp}^2 + \alpha_3q_{cp}^3.$$

При аппроксимации функции $x(q_i)$ с равноотстоящими отсчетами по методу наименьших квадратов многочленом четвертой степени его коэффициенты можно найти после формирования системы уравнений.

Программа 164. Формирование по методу наименьших квадратов систем уравнений с неизвестными коэффициентами многочлена $f(z) = a_4z^4 + a_3z^3 + a_2z^2 + a_1z + a_0$, $z = q - q_{cp}$, аппроксимирующего табулированную функцию $x(q_i)$ с $m > 4$ равноотстоящими узлами q_0, q_1, \dots, q_n

+	2	\div	П0	1	4	П1	Сх	КП1	ИП1
4	—	$x=0$	07	С/П	ИП0	—	П1	\leftrightarrow	П2
ИП9	+	П9	\leftrightarrow	ИП1	ИП2	\times	ИПА	$+$	ПА
ИП1	x^2	\uparrow	ИП5	$+$	П5	\leftrightarrow	ИП2	\times	ИПВ
+	ПВ	ИП1	\uparrow	x^2	\times	\uparrow	ИП2	\times	ИПС
+	ПС	\leftrightarrow	\uparrow	\times	ИП7	$+$	П7	ИП1	x^2
x^2	\uparrow	\uparrow	ИП6	$+$	П6	\rightarrow	ИП2	\times	ИПД
+	ПД	\leftrightarrow	\uparrow	\times	ИП8	$+$	П8	КИП4	ИП4
БП	14								

Инструкция. $q_0 = PY$, $q_n = PX$ В/О С/П ($t \approx 15$ с) $PX = 0$, $x_0 = PY$, $q_0 = PX$ С/П ($t \approx 20$ с) $PX = 1$, $x_1 = PY$, $q_1 = PX$ С/П $PX = 2 \dots x_n = PY$, $q_n = PX$ С/П $P/X = P4 = m$, $P5 = \Sigma z_i^2$, $P6 = \Sigma z_i^4$, $P7 = \Sigma z_i^6$, $P8 = \Sigma z_i^8$, $P9 = \Sigma x_i$, $PA = \Sigma x_i z_i$, $PB = \Sigma x_i z_i^2$, $PC = \Sigma x_i z_i^3$, $PD = \Sigma x_i z_i^4$, $P0 = q_{cp} = (q_0 + q_n)/2$.

Пример. Для отсчетов $I(U_i)$, заданных в примере к программе 163, получим: $m = 7$, $\Sigma z_i^2 = 0,28$, $\Sigma z_i^4 = 1,96 \cdot 10^{-2}$, $\Sigma z_i^6 = 1,588 \cdot 10^{-3}$, $\Sigma z_i^8 = 1,3636 \cdot 10^{-4}$, $\Sigma x_i = 137$, $\Sigma x_i z_i = 28,6$, $\Sigma x_i z_i^2 = 7,64$, $\Sigma x_i z_i^3 = 2,056$; $\Sigma x_i z_i^4 = 0,5864$.

Для вычисления коэффициентов аппроксимирующего многочлена $f(z)$ четвертой степени по результатам выполнения программы 164 следует с помощью программ из § 3.2 решить системы уравнений

$$\left[\begin{array}{ccc|c} m & \Sigma z_i^2 & \Sigma z_i^4 & \alpha_0 \\ \Sigma z_i^2 & \Sigma z_i^4 & \Sigma z_i^6 & \alpha_2 \\ \Sigma z_i^4 & \Sigma z_i^6 & \Sigma z_i^8 & \alpha_4 \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} \alpha_0 \\ \alpha_2 \\ \alpha_4 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} \Sigma x_i \\ \Sigma x_i z_i^2 \\ \Sigma x_i z_i^4 \end{array} \right];$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} \Sigma z_i^2 & \Sigma z_i^4 & \alpha_i \\ \Sigma z_i^4 & \Sigma z_i^6 & \alpha_3 \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} \alpha_i \\ \alpha_3 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} \Sigma x_i \\ \Sigma x_i z_i^3 \end{array} \right].$$

Для преобразования аппроксимирующего многочлена четвертой степени аргумента $z = q - q_{cp}$ в многочлен $f(q)$ следует использовать программу 98 или формулы

$$a_4 = \alpha_4, \quad a_3 = \alpha_3 - 4\alpha_4 q_{cp}, \quad a_2 = \alpha_2 - 3\alpha_3 q_{cp} + 6\alpha_4 q_{cp}^2, \quad a_1 = \alpha_1 - 2\alpha_2 q_{cp} + 3\alpha_3 q_{cp}^2 - 4\alpha_4 q_{cp}^3, \quad a_0 = \alpha_0 - \alpha_1 q_{cp} + \alpha_2 q_{cp}^2 - \alpha_3 q_{cp}^3 + \alpha_4 q_{cp}^4.$$

Для аппроксимации по минимуму среднего квадратического отклонения табулированной функции $x(q_i)$ с m равноотстоящими отсчетами q_0, q_1, \dots, q_n с шагом h в интервале (q_0, q_n) аргумента используют также тригонометрический многочлен (2.21) с коэффициентами

$$a_k = \frac{2}{m} \sum_{i=0}^n x_i \cos \frac{2\pi k i}{m}; \quad b_k = \frac{2}{m} \sum_{i=0}^n x_i \sin \frac{2\pi k i}{m},$$

где $0 \leq k \leq m/2$. При четном m и $s = m/2$ многочлен (2.21) интерполирует функцию $x(q_i)$ при коэффициентах

$$a_s = \frac{1}{m} \sum_{i=0}^n (-1)^i x_i$$

и произвольном значении коэффициента b_s . Подобная аппроксимация соответствует периодической функции $x(q)$ с периодом $T = mh$ и дополнительным отсчетом $x(q_n + h) = x_0$.

Программа 165. Вычисление коэффициентов тригонометрического многочлена (2.21), аппроксимирующего табулированную функцию $x(q_i)$ с $m \leq 11$ равноотстоящими узлами q_0, q_1, \dots, q_n

\uparrow 1 2 П0 2 ПП 18 sin ПП 28
 1 ПП 18 cos ПП 28 БП 04 — $x \neq 0$
 40 2 \div ИПД ИПС \times \times В/О \times КИП0
 + ИП0 1 + П0 \rightarrow КП0 \rightarrow ИП0 В/О
 → ИП1 + П1 ИПС 1 + ПС С/П БП
 00 Сх ПС ИПС 1 + ПС КИПС ИПД \times
 π \div С/П БП 53

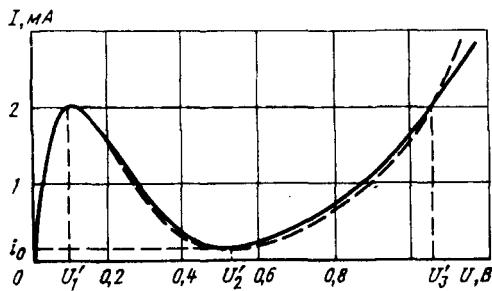


Рис. 21

ки туннельного диода (рис. 21) $I(0)=0$, $I(0,1)=2$, $I(0,2)=1,5$; $I(0,3)=0,8$, $I(0,4)=0,45$, $I(0,5)=0,25$, $I(0,6)=0,24$, $I(0,7)=0,4$, $I(0,8)=0,65$, $I(0,9)=1,2$, $I(1,0)=1,7$ получим $a_0=1,670909$, $a_1=0,54565798$, $b_1=0,1134836$; $a_2=-0,24201935$, $b_2=0,073174$; $a_3=-0,38557453$, $b_3=0,020103872$; $a_4=-0,39989707$; $b_4=-0,0028846181$, $a_5=-0,35362175$

Статические характеристики электронных приборов обычно описывают нелинейными функциями. Для их аппроксимации методом неопределенных коэффициентов r коэффициентов функции $f(q)$ определяют решением системы нелинейных уравнений $x(q_i)=f(q_i)$, $i=1, 2, \dots, r$, для r отсчетов аппроксимируемой функции $x(q)$.

В качестве примера рассмотрим методику определения параметров аппроксимирующего выражения по статической характеристике полупроводникового диода (рис. 20). Реальный диод можно рассматривать как последовательное соединение идеального диода (электронно-дырочного перехода) с характеристикой $I(U_n)=I_0 (\exp(\Lambda U_n)-1)$ и сопротивления R_0 потерь в области базы диода. Напряжения и ток на выводах реального диода связаны уравнением $I(V)=I_0 (\exp(\Lambda U - IR_0)-1)$ или после логарифмирования*.

$$U(I) = R_0 I + (1/\Lambda) \ln((I+I_0)/I_0). \quad (4.3)$$

Для определения трех неизвестных параметров R_0 , Λ и I_0 следует составить по трем отсчетам статической характеристики и решить систему из трех нели-

* При численном решении уравнений с экспоненциальными зависимостями необходимо учитывать, что в рассматриваемых ПМК функция e^x вычисляется при значениях аргумента $|x| < 100$ $\ln 10 = 230,25851$. Поэтому целесообразно, когда это возможно, переходить от экспоненциальных функций к логарифмическим.

Инструкция. Установить переключатель Р—ГРД—Г в положение Р; очистить регистры 1,2, ..., С ($2\pi/m=\text{РД}$)
 $x_0=\text{РХ В/О С/П}$ ($t \approx 95$ с)
 $\text{РХ}=1$, $x_1=\text{РХ С/П}$ $\text{РХ}=2$...
 $x_n=\text{РХ С/П}$ $\text{РХ}=m$ ($\text{Р1}=\text{mx}_0/2$,
 $\text{Р2}=ma_1/2$, $\text{Р3}=mb_1/2$, ...)
 БП 5 1 С/П ($t \approx 6$ с) $\text{РХ}=a_0$ С/П $\text{РХ}=a_1$ С/П $\text{РХ}=b_1$ С/П $\text{РХ}=a_2$...

Пример. Для $m=11$ отсчетов статической характеристики

нейных уравнений. Для упрощения решения при выборе отсчетов $I(U_i)$ целесообразно обеспечить неравенство $I'_i \gg I_0$, что позволяет заменить уравнение (4.3) упрощенным $U(I) = R_0 I + (1/\Lambda) \ln(I/I_0)$. Если выбрать $I'_2 = 2I'_1$, $I'_3 = 4I'_1$, то система уравнений

$$U'_1 = R_0 I'_1 + (1/\Lambda) \ln(I'_1/I_0),$$

$$U'_2 = 2R_0 I'_1 + (1/\Lambda) \ln(2I'_1/I_0),$$

$$U'_3 = 4R_0 I'_1 + (1/\Lambda) \ln(4I'_1/I_0)$$

имеет решение: $R_0 = (U'_1 - 2U'_2 + U'_3)/I'_1$, $\Lambda = \ln 2/(3U'_2 - 2U'_1 - U'_3)$.

$I_0 = I'_1 \exp(-\Lambda(2U'_2 - U'_3))$.

Программа 166. Определение параметров полупроводникового диода и аппроксимация его статической характеристики

```

ПЗ → П2 → П1 ↔ П0 2 ln , —
ИП3 ИП2 ↑ + — П4 ИП1 + П5 ИП1
+ ИП2 — ÷ П9 ИП4 × ex ИП0 ×
П8 ИП5 ИП0 ÷ П7 С/П ИП7 ↔ × Вх
ИП8 ÷ 1 + ln ИП9 ÷ + БП 35

```

Инструкция: $I'_1 = PT$, $U'_1 = PZ$, $U'_2 = PY$, $U'_3 = PX$ В/О С/П РХ = Р7 = R_0 , Р8 = I_0 , Р9 = Λ ; для вычислений $I = RX$ С/П РХ = $U(I)$.

Пример. Для характеристики, показанной на рис. 20, при $I'_1 = 0,02$ А, $U'_1 = 0,4$ В, $U'_2 = 0,5$ В, $U'_3 = 0,68$ В получим $R_0 = 4$ Ом, $I_0 = 3,031758 \cdot 10^{-7}$ А, $\Lambda = 34,65736$ В⁻¹ и, например, $U(0,01) = 0,34$, $U(0,02) = 0,4$, $U(0,03) = 0,45$, что достаточно хорошо совпадает с исходной характеристикой.

В рассмотренном методе требуется достаточно точное определение значений U'_i , которое не всегда удается обеспечить. Это требование можно ослабить при выборе для параметра Λ его теоретического значения, зависящего от материала и свойств полупроводника, например $\Lambda = e/kT \approx 11608/(273+T^{\circ}\text{C})$. В этом случае остальные параметры R_0 и I_0 определяют по двум точкам характеристики для I'_1 и $I'_2 = 2I'_1$, что соответствует системе уравнений

$$U'_1 = R_0 I'_1 + (1/\Lambda) \ln(I'_1/I_0),$$

$$U'_2 = 2R_0 I'_1 + (1/\Lambda) \ln(2I'_1/I_0)$$

с решением $R_0 = (U'_2 - U'_1 - \ln 2/\Lambda)/I'_1$ и $I_0 = I'_1 \exp(\Lambda(U'_2 - 2U'_1))$.

Для рассматриваемой характеристики при $T = 25^{\circ}\text{C}$, $I'_1 = 0,02$ А, $U'_1 = 0,4$ В, $I'_2 = 0,04$ А, $U'_2 = 0,5$ В получим $\Lambda = 38,95302$, $I_0 = 1,68 \cdot 10^{-7}$, $R_0 = 4,11$ Ом, что достаточно хорошо совпадает с ранее полученными значениями. Однако и в этом случае приходится учитывать сопротивление R_0 . Между тем обычно характеристики реальных диодов описывают аналитическим выражением для идеального диода без учета влияния R_0 , что упрощает моделирование цепей.

Влияние R_0 можно учесть и при аппроксимации характеристик реального диода выражением $I(U) = I_0 (\exp \Lambda U - 1)$, если соответственно определить значения параметров I_0 и Λ с учетом влияния R_0 . Для этого следует выбрать на статической характеристике два отсчета $I'_1(U'_1)$ и $I'_2(U'_2)$ при $U' > 0$ (учи-

тывая, что отсчет $I=0$ при $U=0$ учитывается коэффициентом 1) и решить уравнения $\Delta U'_1 = \ln((I'_1 + I_0)/I_0)$, $\Delta U'_2 = \ln((I'_2 + I_0)/I_0)$. Наиболее просто решить эту систему уравнений при $U'_2 = 2U'_1$, когда $I_0 = I'_1^2/(I'_2 - 2I'_1)$, $\Lambda = (1/U'_2) \times \ln(I'_2/I_0 - 1)$.

Например, если для характеристики, показанной на рис. 20, выбрать $I'_1(0,2)=0,004$ А и $I'_2(0,4)=0,02$ А, то получим $I_0=1,333333 \times 10^{-3}$, $\Lambda=-6,931472$. Найденные значения I_0 и Λ с учетом влияния R_0 значительно отличаются от значения соответствующих параметров для идеального диода, но обеспечивают удовлетворительную аппроксимацию статической характеристики. Так, при $\Delta U=0,1$ и $U_0=0$ по аппроксимирующему выражению $I(U_i)=I_0(\exp(\Lambda U_i)-1)$ с вычисленными параметрами получим $I_i=0; 1,33; 4; 9,33; 20; 41; 84; 169$ и, следовательно, для $U \leq 0,5$ аппроксимация удовлетворительна. Округлив параметры $I_0=1,34 \cdot 10^{-3}$ и $\Lambda=6,5$, для тех же значений получим $I_i=0; 1,2; 3,6; 8,1; 16,7; 33,2; 64,8$, что также практически приемлемо. Подобрав I_0 и Λ , можно значительно улучшить качество аппроксимации.

Подобные приемы применимы и для аппроксимации более сложных и нелинейных зависимостей. Например, статическую характеристику тунNELьного диода на участке прямого включения (рис. 21) моделируют аналитическим выражением

$$I(U) = A_1 U \exp(-\alpha_1 U) + A_2 (\exp(\alpha_2 U) - 1), \quad (4.4)$$

которое также можно использовать в качестве аппроксимирующей функции после уточнения численных значений параметров. Выберем для экстремального тока I_m напряжения U'_1 в точке первого максимума и напряжение U'_3 на восходящей ветви характеристики, а также точку минимума с током I'_2 и напряжением U'_2 . Четвертым условием, необходимым для формирования полной системы уравнений с четырьмя неизвестными параметрами, примем

$$dI(U)/dU = A_1(1-\alpha_1 U) \exp(-\alpha_1 U) + \alpha_2 A_2 \exp(\alpha_2 U) = 0$$

при $U=U'_1$. Для упрощения вычислений примем допущения $A_2(\exp(\alpha_2 U'_1)-1)=0$, $A_1 U'_3 \exp(-\alpha_1 U'_3)=0$ и $\exp(\alpha_2 U'_3) \gg 1$ и составим систему уравнений

$$A_1(1-\alpha_1 U'_1) \exp(-\alpha_1 U'_1) = 0; \quad A_1 U'_1 \exp(-\alpha_1 U'_1) = I_m;$$

$$A_1 U'_2 \exp(-\alpha_1 U'_2) + A_2 \exp(\alpha_2 U'_2) = I'_2;$$

$$A_2 \exp(\alpha_2 U'_3) = I_m$$

с решением $\alpha_1=1/U'_1$, $A_1=I_m e^{1/U'_1}$; $\alpha_2=\ln(I'_2/I_m - (U'_2/U'_1)) \exp((U'_1-U'_2)/U'_1)/(U'_2-U'_3))$; $A_2=I_m \exp(-\alpha_2 U'_3)$.

Программа 167. Аппроксимация статической характеристики тунNELьного диода

```

ИП5 ИП4 ÷ ИП1 1/x ПС ИП2 × ↑ ↑
1 — ex ÷ — ln ИП2 ИП3 — ÷
ПД ИП3 × ex ИП4 ↔ ÷ ПВ ИП4 1
ex × ИПС × ПА С/П П0 ↑ ИПС ×
ex ÷ ИПА × ИП0 ИПД × ex 1 —
ИПВ × + БП 35

```

Инструкция. ($U'_1 = P1$, $U'_2 = P2$, $U'_3 = P3$, $I_m = P4$, $I'_2 = P5$) В/О С/II
 $PX = PA = A_1$, $PB = A_2$, $PC = \alpha_1$, $PD = \alpha_2$; для вычислений $U = PX$ С/П $PX = I(U)$.

Пример. Выбрав на характеристике, приведенной на рис. 21, значения $I_{m,i} = 2$ мА, $U'_1 = 0,1$ В, $I'_2 = 0,2$ мА, $U'_2 = 0,55$ В, $U'_3 = 1,05$ В, получим $\alpha_1 = 10 \text{ В}^{-1}$, $A_1 = 5,43656 \cdot 10^{-2}$ А/В, $\alpha_2 = 6,493498$, $A_2 = 2,18743 \cdot 10^{-6}$ А. Результаты вычисления аппроксимированной статической характеристики показаны на рис. 21 штриховой линией.

Качество аппроксимации табулированной функции $x(q_i)$ аппроксимирующим выражением $f(q)$ обычно проверяют по абсолютным отклонениям $\Delta_i = |f(q_i) - x(q_i)|$ и среднему квадратическому отклонению (4.1) для рассматриваемого интервала аргумента.

Программа 168. Вычисление среднего квадратического отклонения Δ_i и отклонений $\Delta_i = |f(q_i) - x(q_i)|$ в выбранных узлах

```

↑ Сx П5 П6 → П7 → П8 КИП5 ...
ИП8 — П4 x2 ИП6 + П6 ИП6 ÷ П9
ИП5 ИП4 С П1 БП 05

```

Инструкция. Заменить многоточие фрагментом вычисления функции $f(q)$ при $q=P7$ с использованием регистров памяти, кроме 4..9; $x_0=PY$, $q_0 = PX$ С/П $PX=P4=A_0$, $PY P5=1$, $x_1=PY$; $q_1=PX$ С/П $PX=\Delta_1$, $PY=2$... $x_n=PY$, $q_n=PX$ С/П $PX=\Delta_n$, $PY=n+1$, $P9=\sigma$.

Пример. Для аппроксимации статической характеристики диода, показанной на рис. 20, функцией $I=10^{-7} (e^{40t}-1)$ с коэффициентами, соответствующими идеальному диоду, при $U_0=0$ и $\Delta U=0,1$ для $I_i=0$; 0,001; 0,004; 0,008; 0,02; 0,04; 0,064 соответственно получим $\Delta_i=0$; $-9,95 \cdot 10^{-4}$; $-3,7 \cdot 10^{-3}$; $8,27 \cdot 10^{-3}$; 0,869; 48,48; 2648,8 и $\sigma=2648$, что свидетельствует о весьма грубой аппроксимации; при тех же исходных данных для аппроксимирующей функции $I=1,34 \cdot 10^{-3} \times (e^{6,5t}-1)$ получим соответственно $\Delta_i=0$; $2,27 \cdot 10^{-4}$; $-4,23 \cdot 10^{-4}$; $7,84 \cdot 10^{-5}$; $-3,29 \cdot 10^{-3}$; $-6,78 \cdot 10^{-3}$; $8,59 \cdot 10^{-4}$; $\sigma=8,26 \cdot 10^{-6}$ и, следовательно, эта функция достаточно хорошо аппроксимирует характеристику.

4.2. Расчет статических режимов нелинейных цепей

Расчет статических режимов нелинейных цепей в основном сводится к решению нелинейных трансцендентных уравнений или их систем. В связи с ограниченной емкостью запоминающих устройств ПМК и значительными затратами времени на численное решение нелинейных уравнений при анализе относительно сложных цепей часто прибегать к нормированию переменных и коэффициентов, выбору упрощающих допущений и преобразованию уравнений для уменьшения числа исходных данных и длины программы. Эти приемы позволяют также уменьшить число уравнений систем или свести задачу к последовательному поиску вещественных корней нескольких или даже одного уравнения.

Точность вычисления корней при точном задании исходных данных может достигать шести-восьми верных цифр, но при их увеличении затраты времени быстро возрастают. Между тем большинство физических величин нельзя изме-

рить с высокой точностью, а аналитические выражения, аппроксимирующие нелинейные зависимости, обычно весьма приближены. Поэтому при расчете статических режимов нелинейных цепей требуемая точность, как правило, не превышает 1 %, большая точность может потребоваться лишь при теоретических расчетах в предположении точного задания исходных данных и функциональных зависимостей.

Решение нелинейных трансцендентных, как и алгебраических, уравнений $f(x)=0$ заключается в определении интервала нахождения корней, обычно определяемого условиями задачи, с последующим их отделением и уточнением. Для отделения корней следует построить график невязки $f(x)$ уравнения или использовать метод равномерного поиска интервала нахождения вещественного корня нечетной кратности с шагом Δx . Если два очередных значения $f(x_i)$ противоположны по знаку, то корень находится в интервале (x_{i-1}, x_i) и для его уточнения следует принять $\Delta x = -\Delta x/a$, где $a > 1$. Изменение знака и размера шага при каждом изменении знака невязки обеспечивает на каждой итерации сужение интервала корня в a раз и его определение как $x^* = (x_i + x_{i-1})/2$ с абсолютной погрешностью $|\Delta x/2|$.

Программа 169. Отделение и уточнение вещественных корней уравнения $f(x)=0$ методом равномерного поиска

```

ПП 24 ИП6 С/П ИП7 ИП8 + П8 ИП9 -
x≥0 14 ИП8 С/П ПП 24 x<0 04 ИП8 ↑
ИП7 -- БП 03 ... ИП6 ↔ П6 × В/О

```

Инструкция. Заменить многоточие фрагментом вычисления $f(x)$ при $x=P8$ и использованием регистров, кроме 6..9; $\Delta x=P7$, нижняя граница интервала корней $x_0=P8$, верхняя граница $x_{max}=P9$ В/О С/П $PX=f(x_0)$ С/П $PX=x_i-\Delta x$, $PY=P8=x_i$ С/П $PX=x_{i-1}$, $PY=x_{i-1}+\Delta x$... С/П $PX=x \geq x_{max}$; для уточнения корня $\Delta x=-\Delta x/a=P7$ С/П $PX=x_{i-1}$, $PY=P8=x_i$ после каждого выполнения программы.

Пример. Определить напряжение U^* , соответствующее точке пересечения падающего участка статической характеристики туннельного диода (4.4) с $A_1=5,4 \cdot 10^{-2}$, $A_2=2,2 \cdot 10^{-6}$, $a_1=10$, $a_2=6,5$ с нагрузочной прямой источника напряжения $E=5$ В с сопротивлением $R=5$ кОм. Если нагрузочная прямая источника пересекает падающий участок характеристики, то точка пересечения будет соответствовать среднему по величине корню уравнения $RI(U)-E=0$.

Разместив исходные данные ($R=P0$, $A_1=P1$, $A_2=P2$, $a_1=P3$, $a_2=P4$, $E=P5=P9$) и заменив многоточие в программе 169 фрагментом ИП8 ИП4 $\times e^x 1 -$ ИП7 \times ИП8 $/-$ ИП3 $\times e^x$ ИП1 \times ИП8 $\times +$ ИП5 \times ИП5 $-$, при $\Delta U=0,05=P7$; $U_0=0=P8$ выполним В/О С/П ($t \approx 15$ с) $PX=f(U_0)=-5$ С/П ($t \approx 15$ с) $PX=0$, $PY=0,05$ (интервал первого корня) С/П ($t \approx 80$ с) $PX=0,25$, $PY=0,3$ (интервал второго корня) С/П ($t \approx 96$ с) $PX=0,9$; 0,95 (интервал третьего корня). Для уточнения среднего корня $\Delta U=0,005$, $U_0=0,25=P8$ В/О С/П $PX=f(U_0)=0,5856$ С/П ($t \approx 40$ с) $PX=0,265$, $PY=0,27$, $\Delta U=-0,0005=P7$, С/П ($t \approx 40$ с) $PX=0,2685$, $PY=0,268$. Следовательно, за три итерации получено искомое значение напряжения $U^*=0,26825 \pm 0,00025$ с тремя верными цифрами и относительной погрешностью $\delta=0,09\%$.

Если корни отделены или интервал отдельного корня известен из физических условий задачи, то поиск корня с требуемой точностью можно полностью автоматизировать с помощью метода половинного деления (дихотомии), практически совпадающего с уточнением корня методом равномерного поиска при $a=2$. Метод половинного деления заключается в делении на каждой итерации интервала корня на две равные части с выбором в качестве сокращенного интервала корня той части, на границах которой невязки уравнения противоположны по знаку. Программные реализации метода половинного деления в основном различаются выбором критерия автоматического прекращения вычислений при достижении требуемой точности. Простейший из них заключается в прекращении вычислений после заданного числа n -итераций. При заданной предельной абсолютной погрешности ϵ и начальном интервале Δ_0 требуемое число итераций $n \geq (\ln(\Delta_0/\epsilon))/\ln 2$, но можно продолжать вычисления при задании дополнительного числа итераций.

Программа 170. Вычисление корня x^* уравнения $f(x)=0$ методом половинного деления с заданным числом n итераций

```
L0 04 ИП8 С П ИП7 2 ÷ П7 ИП8 +
П8 ... ИП9 ↔ П9 × x<0 00 ИП7 -
П7 БП 00
```

Инструкция. Заменить многоточие фрагментом вычисления $f(x)$ при $x=P8$ и использовании регистров, кроме 7, 8 и 9; $\Delta x=P7$; нижняя (если $\Delta x_0=0$) граница интервала $x_0=P8$, $0=P9$, $n=P0$ БП 11 С/П РХ= x^* , $P7=\Delta x^*$, $P9=f(x^*)$; для продолжения уточнения корня $n_i=P0$ С/П РХ= x^* , $P7=\Delta x^*$, $P9=f(x^*)$.

Пример. Найти напряжение на полупроводниковом диоде с характеристикой $I(U)=I_0(e^{U/I_0}-1)$, подключенным к источнику напряжения E через сопротивление R . Задача сводится к решению уравнения $E=R I(U)-U=0$ или после перехода к логарифмическим функциям $\ln((E-U)/R I_0+1)-\Lambda U=0$. Пусть $I_0=1,34 \cdot 10^{-3}$ А, $\Lambda=6,5$ В⁻¹, $R=250$ Ом, $E=5$ В. Разместив исходные данные в памяти ($\Lambda=P1$, $R=P2$, $E=P3$, $I_0=P4$) и заменив многоточие в программе 170 фрагментом ИП3 и ИП8 — ИП2 ÷ ИП4 ÷ 1 + ln ИП1 ИП8 × —, при $\Delta U=5$, $U_0=0$ и $n=10$ получим ($t \approx 1$ мин 40 с) $U^*=0,41992788$ с предельной погрешностью $\Delta U^*=-9,765625 \cdot 10^{-3}$ и невязкой $f(U^*)=-4,35599 \cdot 10^{-2}$. Приняв $5=P0$ С/П, получим ($t \approx 40$ с) $U^*=0,41351319$, $\Delta U^*=-3,0517577 \cdot 10^{-4}$, $f(U^*)=-6,003 \cdot 10^{-4}$ и, приняв $6=P0$ С/П, получим ($t \approx 50$ с) $U^*=0,41342258$, $\Delta U^*=4,7683712 \cdot 10^{-6}$, $f(U^*)=-6,9 \cdot 10^{-6}$.

В качестве критерия автоматического прекращения вычислений можно выбрать число m верных цифр в значении корня с помощью фрагмента ↑ ВП S + Вх —, где $S=8-m$ [15], соответственно изменив программу.

Программа 171. Вычисление корня x^* уравнения $f(x)=0$ методом половинного деления с заданным числом m верных цифр

```
ИП7 ИП8 + ↑ ВП s + Вх — ИП8
↔ П8 — x-0 17 ИП8 С П ... ИП9 ↔
П9 × x<0 00 ИП7 — 2 ÷ П7 ВО
```

Инструкция. Заменить многоточие в программе фрагментом вычисления $f(x)$ при $x=P8$ и использовании регистров, кроме 7, 8 и 9, символ S — опе-

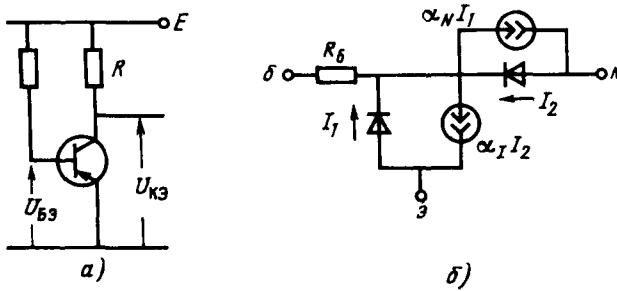


Рис. 22

ратором набора числа $S=8-m$; $\Delta x_0=P7$, $x_0=P8$, $0=P9$ БП 1 7 С/П РХ = $=P8=x^*$, $P7=\Delta x^*$, $P9=f(x^*)$.

Пример. Для решения задачи из примера к программе 170 с тремя верными цифрами принимаем $S=5$ и при $\Delta U=5$, $U_0=0$ по программе 171 получим ($t \approx 2$ мин 45 с) $U^*=0,413$, $\Delta U^*=3,05 \cdot 10^{-4}$, $f(U^*)=2,8396 \cdot 10^{-3}$.

Критерием прекращения вычислений может также служить предельная абсолютная погрешность ε по условию $|x_i - x_{i-1}| \leq \varepsilon$.

Программа 172. Вычисление корня x^* уравнения $f(x)=0$ методом половинного деления с заданной абсолютной погрешностью ε

$$\begin{aligned} & \text{ИП7 } x^2 \text{ ИП6 } - x < 0.08 \text{ ИП8 С П ИП7 2} \\ & \div \text{ П7 ИП8 } \quad \text{П8 } \dots \text{ ИП9 } \rightarrow \text{ П9 } \quad \checkmark \\ & x < 0.00 \text{ ИП7 } - \text{ П7 } \text{ БП 00} \end{aligned}$$

Инструкция. Заменить многоточие фрагментом вычисления $f(x)$ при $x=P8$ и использовании регистров, кроме 6..9: $\Delta x_0=P7$, $x_0=P8$, $0=P9$, $\varepsilon^2=P6$ БП 1 5 С/П РХ .. $P8=x^*$, $P7=\Delta x^*$, $P9=f(x^*)$.

Пример. По данным примера к программе 170 при $\varepsilon=5 \cdot 10^{-4}$ получим ($t \approx 2$ мин 30 с) $U^*=0,41351319$, $\Delta U^*=3,0517577 \cdot 10^{-4}$, $f(U^*)=6,003 \cdot 10^{-4}$.

В качестве критерия прекращения вычислений можно также выбирать предельную относительную погрешность $\delta \leq |\Delta x^*/x^*|$. В тех случаях, когда величина x в процессе вычислений принимает нулевое значение, этот критерий непригоден, но можно использовать, например, критерий $|\Delta x^*/\Delta x_0| \leq \delta$.

Рассмотрим расчет статического режима в типовой цепи на биполярном транзисторе с общим эмиттером, схема которой показана на рис. 22, а, при данном значении напряжения U_{BE} . Статические характеристики биполярных транзисторов обычно описывают уравнениями Эберса—Молла с параметрами схемы замещения, показанной на рис. 22, б:

$$I_3 = A_1 (\exp(\Lambda U') - 1) - \alpha_I A_2 (\exp[\Lambda (U' - U_{KE})] - 1); \quad (4.5)$$

$$I_K = \alpha_N A_1 (\exp(\Lambda U') - 1) - A_2 (\exp[\Lambda (U' - U_{KE})] - 1),$$

где $A_1 = I_{30} / (1 - \alpha_N \alpha_I)$; $A_2 = I_{K0} / (1 - \alpha_N \alpha_I)$; $U' = U_{BE} - I_B R_B$.

Эту систему уравнений, дополненную уравнением $I_B = I_3 - I_K$, обычно упрощают, исходя из реальных соотношений между значениями токов и напряже-

ний. Для иллюстрации путей алгоритмизации решения нелинейных уравнений попытаемся решить задачу, не прибегая к подобным упрощениям (система уравнений (4.5) также является приближенной). Обозначив $\exp(\Lambda(U_{БЭ} - I_B R_B)) = z$, из второго уравнения системы (4.5) и уравнения $U_{КЭ} = E - I_K R$ получим

$$z = (K - \Lambda U_{КЭ}) / B (C - \exp(-\Lambda U_{КЭ})),$$

где $K = \Lambda E + B(C - 1)$, $B = \Lambda R / I_{КО} / (1 - \alpha_N \alpha_I)$; $C = \alpha_N I_{ЭО} / I_{КО}$. Учитывая, что $I_B = (U_{БЭ} - \ln z / \Lambda) / R_B$, и подставив значение I_B в разность первого и второго уравнений (4.5), получим уравнение с одним искомым неизвестным

$$Gz(D + \exp(-\Lambda U_{КЭ})) + \ln z - F = 0,$$

где $G = \Lambda R_B / I_{КО} (1 - \alpha_I) / (1 - \alpha_N \alpha_I)$; $D = I_{ЭО} (1 - \alpha_N) / I_{КО} (1 - \alpha_I)$; $F = \Lambda U_{БЭ} + G(D + 1)$. Так как при вычислении экспоненциальных функций ПМК рассматриваемых типов возникает переполнение при $|x| \geq 100 \ln 10$, то для устранения переполнения при отрицательных значениях аргумента экспоненты введем в программу решения составленного уравнения фрагмент, обеспечивающий выполнение условия $\exp x = 0$ при $x < -99$.

Оценивая погрешность вычислений по величине $\delta = \Delta U_{КЭ} / U_{КЭ}$, организуем прекращение вычислений после выполнения заданного числа итераций n с контролем точности результата по относительной погрешности δ , которая не может быть заранее связана с числом n , так как при изменении $\Delta U_{КЭ}$ изменяется и $U_{КЭ}$.

Программа 173. Расчет статического режима транзистора в схеме с общим эмиттером при заданном напряжении $U_{БЭ}$

P9	ИП4	ИП3	1	+	×	+	ПА	ИП6	П7
ИП1	ИП2	1	-	×	+	ПВ	Сх	П8	ИП7
2	÷	П7	↑	ИП8	+	П8	÷	L0	31
С/П	Сх	ПД	9	9	ИП8	ИП5	×	-	$x \geq 0$
45	Вх	е ^х	1	х	ПД	ИП8	ИПВ	-	ИПД ИП2
-	÷	ИП1	÷	↑	In	ИП5	÷	ПС	↔
ИП3	ИПД	+	×	ИП4	×	+	ИПА	-	$x < 0$
19	ИП8	ИП7	-	БП	18	ИП9	ИПС	-	↔
÷	ПД	↔	ИП6	ИП8	-	↔	÷	С П	

Инструкция. ($B' = RI_{КО} / (1 - \alpha_N \alpha_I) = P1$, $C = \alpha_N I_{ЭО} / I_{КО} = P2$, $D = -I_{ЭО} (1 - \alpha_N) / I_{КО} (1 - \alpha_I) = P3$, $G' = R_6 I_{КО} / (1 - \alpha_N \alpha_I) = P4$, $\Lambda = P5$, $E = P6$) $n = P0$, $U_{БЭ} = RX$ В/О С/П РХ; $\delta = \Delta U_{КЭ} / U_{КЭ}$; $P8 = U_{КЭ}$; для продолжения вычислений $n = P0$ (для одной итерации $n = 1$ не вводить) С/П РХ = δ ; при достижении требуемой точности $R_6 = PY$, $R = RX$ БП 7 6 С/П РХ = I_K , $PY = I_B$ (время выполнения одной итерации около 18 с).

Пример. Для $B' = 5 \cdot 10^{-4} = P1$, $C = 1,96 = P2$, $D = 0,2 = P3$, $G' = 10^{-5} = P4$, $\Lambda = 39 = P5$, $E = 10 = P6$ при $n = 10$ и $U_{БЭ} = 0,24$ В получим ($t \approx 2$ мин 30 с) $\delta = 2,9498524 \cdot 10^{-3}$, $U_{КЭ} = 3,3105469$ В и при $R = 1$ кОм, $R_6 = 100$ Ом получим $I_K = 6,689453 \cdot 10^{-3}$ А, $I_B = 1,358922 \cdot 10^{-4}$ А.

Параметры цепи питания базы определяются для выбранной схемы по вычисленному значению I_B и заданному $U_{БЭ}$.

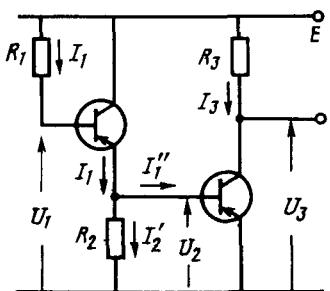


Рис. 23

Рассмотрим расчет самоустанавливающегося статического режима в более сложной цепи с непосредственной связью двух биполярных транзисторов с общим коллектором и общим эмиттером (рис. 23). Используя модель Эберса—Молла (4.5), пренебрежем влиянием сопротивления R_b , незначительным в рассматриваемом случае, и составим систему уравнений

$$\begin{aligned}I_1 &= (E - U_1) / R_1 = (1 - \alpha'_N) A'_1 (\exp [\Lambda (U_1 - U_2)] - 1) + \\&+ (1 - \alpha'_J) A'_2 (\exp [\Lambda (U_1 - E)] - 1); \\I_2 &= I'_2 + I''_2 = A'_1 (\exp [\Lambda (U_1 - U_2)] - 1) - \alpha'_J A_2 (\exp [\Lambda (U_1 - E)] - 1) + U_2 / R^2; \\I_3 &= (E - U_3) / R_3 = \alpha''_N A''_1 (\exp [\Lambda U_2] - 1) - A''_2 (\exp [\Lambda (U_2 - U_3)] - 1),\end{aligned}$$

где одним и двумя штрихами соответственно обозначены параметры первого и второго транзистора в предположении, что $\Lambda_1 = \Lambda_2 = \Lambda$.

Так как при $(U_1 - E) \Lambda \ll 0$ коллекторный $p-n$ -переход надежно закрыт у первого транзистора, то справедливо равенство $I_1 = (1 - \alpha'_N) I_2 - I'_{K0}$, соответствующее условию $\exp(\Lambda(U_1 - E)) = 0$. Выбрав в качестве независимой переменной напряжение U_3 , из последнего уравнения определим

$$\exp(\Lambda U_2) = z = (E - U_3 + A) B (C - \exp(-\Lambda U_3)),$$

где $A = (\alpha''_N A'_1 + A''_2) R_3$; $B = R_3 A''_2$; $C = \alpha''_N A'_1 / A''_2$.

Воспользовавшись вторым уравнением системы и установленной связью между токами I_1 и I_2 , запишем

$$I_1 R_1 = D (F - \exp(-\Lambda U_3)) z - G + H \ln z,$$

где $D = R_1 (1 - \alpha''_J) (1 - \alpha'_N) A''_2$; $F = (1 - \alpha''_N) A'_1 / (1 - \alpha'_J) A''_2$;

$$G = (I'_{K0} + (I'_{K0} (1 - \alpha'_N) + I''_{K0} (1 - \alpha'_J)) (1 - \alpha'_N)) / R_1 (1 - \alpha'_N \alpha''_J);$$

$H = (1 - \alpha'_N) R_1 / \Lambda R_2$. Согласно первому уравнению исходной системы должны выполняться равенства:

$$U_1 = E - I_1 R_1; \quad U_1 = (1/\Lambda) \ln (((I_1 R_1 + N) / M + 1) z),$$

где $N = R_1 (1 - \alpha'_J) A'_2$; $M = R_1 (1 - \alpha'_N) A'_1$. Следовательно, значение U_3 должно удовлетворять уравнению

$$E - I_1 R_1 - (1/\Lambda) \ln (((I_1 R_1 + N) / M + 1) z) = 0,$$

по знаку невязки которого можно судить о пути дальнейшего уточнения искомого значения корня U_3^* . Так, если реальное значение U_3 меньше выбранного, то вычисленные значения z и $I_1 R_1$ окажутся больше истинных, а невязка — отрицательной.

Программа 174. Расчет статического режима цепи на биполярных транзисторах с общим коллектором и общим эмиттером

```

ИП0 П7 Сx П9 → ИП7 2 ÷ П7 ИП9
+ П9 С/П ИП9 5 — 0 ↔ x<0 26
ИП9 ИП1 × ex 1/x ↔ → ↑ ИП2 +
ИПД × ↔ ИПС — ИПВ × ИП9 ИП0 —
ИПА — ↔ ÷ П8 × Bx ln ИП4 ×
+ ИП3 — ↑ ↑ ИП6 + ИП5 ÷ 1
+ ИП8 × ln ИП1 ÷ + ИП0 — x<0
04 → ИП9 ИП7 — БП 03 ↔ ИП0 ↔
— П7 ИП8 ln ИП1 ÷ П8 С/П

```

Инструкция. ($E = P_0$, $A = P_1$, $F = P_2$, $G = P_3$, $H = P_4$, $M = P_5$, $N = P_6$, $A = P_A$, $B = P_B$, $C = P_C$, $D = P_D$) В/О С/П РХ = $U_3^{(1)}$ С/П РХ = $U_3^{(2)}$ С/П РХ = $U_3^{(3)}$... С/П РХ = U_3^* ($t \approx 18$ с); прекратить итерации после достижения требуемого числа совпадающих цифр в двух очередных результатах; БП 7 С/П РХ = Р8 = U_2 ; РY = Р7 = U_1 .

Пример. Для $A'_1 = 2 \cdot 10^{-6}$ А, $A'_2 = 10^{-6}$ А, $\alpha'_N = 0,98$, $\alpha'_I = 0,8$, $A''_1 = 10^{-5}$ А, $A''_2 = 2 \cdot 10^{-6}$ А, $\alpha''_N = 0,95$, $\alpha''_I = 0,8$, $A = 39$ В⁻¹, $R_1 = 2$ МОм, $R_2 = 20$ кОм, $R_3 = 1$ кОм, $E = 5$ В, вычислив $F = 1,25 = P_2$, $G = 0,468 = P_3$; $H = 5,128051 \cdot 10^{-2} = P_4$, $M = 0,08 = P_5$; $N = 0,4 = P_6$, $A = 7,5 \cdot 10^{-3} = P_A$, $B = 2 \cdot 10^{-3} = P_B$, $C = 4,75 = P_C$, $D = 1,6 \cdot 10^{-2} = P_D$ при 10 итерациях получим $U_3^{(t)} = 2,5; 3,75; 3,125; 2,8125; 2,65625; 2,734375; 2,6953125; 2,6757813; 2,6660157; 2,6611329$ (корень найдем с тремя верными цифрами $U_3 = 2,66$ В), $U_2 = 0,1412115$ В, $U_1 = 0,2561444$ В; при необходимости вычислим также $I_1 = (E - U_1)/R_1 = 4,86 \cdot 10^{-6}$ А, $I_2 = U_2/R_2 = 1,4 \cdot 10^{-4}$ А, $I_3 = (E - U_3)/R_3 = 3,67 \cdot 10^{-4}$ А.

В программе 174 для устранения переполнения при аргументе экспонент $|x| > 100 \ln 10$ использован фрагмент, следующий за оператором С/П и отличающийся от использованного в предыдущей программе.

Рассмотренные методы отделения и уточнения корней нелинейных уравнений отличаются гарантированной, но медленной сходимостью результатов вычислений на каждой итерации к искомому корню. Поэтому во многих случаях целесообразно использовать методы уточнения корней с более быстрой сходимостью. Простейшим из них является метод простых итераций, заключающийся в представлении уравнения $f(x) = 0$ уравнением $x = \varphi(x)$, выбором начального приближения корня x_0 и последующим его уточнением по формуле $x_{i+1} = \varphi(x_i)$ ($i = 0, 1, 2, \dots$) до получения требуемой точности, определяемой предельной абсолютной погрешностью $|x_{i+1} - x_i| \leq \varepsilon$, где ε — заданная допустимая абсолютная погрешность. Метод простых итераций, легко реализуемый на входных языках микрокалькуляторов, сходится при условии $|\varphi'(x)| < 1$ в интервале (x_0, x^*) .

Программа 175. Уточнение корня x^* уравнения $x = \varphi(x)$ методом простых итераций с абсолютной погрешностью ε

... ИП8 ↔ П8 — x^2 ИП9 — $x < 0 \ 00$
 ИП8 С/П

Инструкция. Заменить многоточие фрагментом вычисления $\varphi(x)$ при $x=P8$ с использованием регистров, кроме 8 и 9; $x_0=P8$, $e^2=P9$ В/О С/П РХ= x .

Пример. Для уравнения $x=\cos x$ условие сходимости выполняется при $x \neq 0$ и $x=1$, и приняв $x_0=0,5$, $\varepsilon=1 \cdot 10^{-4}$, получим $x^*=0,74182654$ ($t \approx 45$ с).

К сожалению, условия сходимости не всегда удается определить по исходным данным, а приходится проверять в процессе вычислений по сходимости результатов вычислений после очередных итераций. В качестве иллюстрации определим методом простых итераций напряжение на полупроводниковом диоде с характеристикой $I=I_0(\exp(\Lambda U)-1)$ при его подключении к источнику напряжения E через сопротивление R .

Напряжения и токи в рассматриваемой цепи связаны уравнением $E=R I(U)+U$ (где $I(U)$ — статическая характеристика диода) или $E=R I + +(1/\Lambda) \ln((I+I_0)/I_0)$. Решив это уравнение относительно тока I , получим также $U=E-I R$. Рассматриваемое уравнение при обозначении $I=x$, $A=(E+\ln I_0/\Lambda)/R$, $B=A/AR$, $I_0=a$ можно представить в общей форме $x=A+B \ln(x+a)$, к которой сводятся многие уравнения, отображающие процессы в цепях с полупроводниками приборами. Продифференцировав правую часть уравнения, получим условие сходимости для метода простых итераций $|x+a| > |B|$, для выполнения которого должна быть определена величина x . В рассматриваемой задаче это условие соответствует неравенству $I > 1/\Lambda R - I_0$ и, следовательно, метод простых итераций применим лишь при $E > E_{\min}$, где напряжение E_{\min} соответствует предельному значению тока $I_{\min} = 1/\Lambda R - I_0$.

Однако этот метод можно применить и при $E < E_{\min}$, если представить исходное уравнение обратным преобразованием $I=I_0(\exp(\Lambda(E-I R))-1)$, когда сходимость обеспечивается при $E < E_{\min}$. Следовательно, для решения рассматриваемой задачи приходится составлять программу из двух частей, соответствующих условиям $E > E_{\min}$ и $E < E_{\min}$, и выбрать нужную часть по результатам вычислений.

Программа 176. Расчет статического режима диода методом простых итераций

ИП3 ↔	ИП2 ÷	П7	ИП0 +	ИП0 ÷	Ln
ИП1 ÷	П8 —	С/П БП 00	ИП3 ↔ —		
П8 ИП1 ×	e^x 1	—	ИП0 ×	П7 ИП2	
×	С/П БП 17				

Инструкция. ($I_0=P0$, $\Lambda=P1$, $R=P2$, $E=P3$) $U^{(0)}=\text{РХ}$ В/О С/П ($t \approx 5$ с)
 $\text{РХ}=U^{(1)}$ С/П $\text{РХ}=U^{(2)}$...; если результаты расходятся, то $U^{(0)}=\text{РХ}$ БП 1 7 С/П

($t \approx 5$ с) $\text{РХ}=U^{(1)}$ С/П $\text{РХ}=U^{(2)}$...; после получения с требуемой точностью $U=IR$ вызвать Р7= $I=I_d$, Р8= U_d .

Пример. Для $I_0=1,34 \cdot 10^{-3}$ А, $\Lambda=-6,5$ В⁻¹, $R=250$ Ом $E=5$ В при $U^{(0)}=2,5$ получим $U^{(1)}=4,6714359$; $4,5839463$; $4,5866586$; $4,5865738$; $4,5865765$; $4,5865764$; $I=1,8346305 \cdot 10^{-2}$, $U_d=0,41342361$.

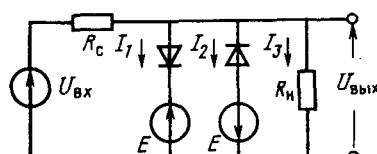


Рис. 24

Программа 176 может быть использована также и в других случаях, например для вычисления передаточной характеристики низкочастотного двустороннего диодного ограничителя (рис. 24), описываемого системой уравнений

$$U_{\text{вх}} = R_c(I_1 + I_2 + I_3) + U_{\text{вых}},$$

$$I_1 = I_0(\exp(-\Lambda(U_{\text{вых}}) - 1)); \quad I_2 = I_0(\exp(\Lambda U_{\text{вых}}) - 1); \quad I_3 = U_{\text{вых}}/R_h,$$

в предположении идентичности характеристик диодов. Можно избежать необходимости решения этой системы, если задаваться значениями $U_{\text{вых}}$, и для каждого из них с помощью программы 176 вычислить токи I_1 и I_2 . После этого, определив ток I_3 и полный ток через сопротивление R_c , несложно найти значения $U_{\text{вх}}$, соответствующие заданным значениям $U_{\text{вых}}$, и построить по полученным результатам передаточную характеристику $U_{\text{вых}} = f(U_{\text{вх}})$.

Для уточнения корней нелинейных трансцендентных уравнений с помощью ЭВМ высокой производительности обычно используют метод касательных Ньютона, основанный на последовательном вычислении приближений $x_{i+1} = x_i - f(x_i)/f'(x_i)$ ($i=0, 1, 2, \dots$), где в качестве начального приближения x_0 выбирают то граничное значение аргумента в интервале нахождения корня, для которого знаки функции $f(x)$ и ее второй производной $f''(x)$ совпадают. Метод Ньютона сходится, если во всем исходном интервале нахождения корня производные $f'(x)$ и $f''(x)$ отличны от нуля и не изменяются по знаку.

Программа 177. Уточнение корня x^* уравнения $f(x)=0$ методом касательных Ньютона

```
... П7 ... ИП7 ÷ ИП8 ↔ — ИП8 ↔
П8 — x2 ИП9 — x<0 00 ИП8 С/П
```

Инструкция. Заменить многоточия соответственно фрагментами вычисления $f'(x)$ и $f(x)$ при $x=P8$ и использовании регистров, кроме 7, 8 и 9; $x_0=P8$, заданная абсолютная погрешность $\varepsilon^2=P9$ В/О С/П РХ= x^* .

В качестве примера рассмотрим задачу определения статического режима полупроводникового диода с характеристикой $I=I_0(\exp(\Lambda U) - 1)$, соединенного с источником напряжения E через сопротивление R . Подобная цепь описывается уравнением $E - RI_0(\exp(\Lambda U) - 1) - U = 0$, производные и невязки $f'(U) = -\Lambda RI_0\exp(\Lambda U) - 1$, $f''(U) = -\Lambda^2 RI_0\exp(\Lambda U)$. По условиям задачи корень может находиться в интервале $(0, E)$, но при $U=0$ первая производная равна нулю, и, следовательно, точка $U=0$ не должна входить в интервал нахождения корня, в котором в этом случае будут соблюдаться условия сходимости. В качестве начального приближения следует выбрать $U^{(0)}=E$, так как в этом случае знаки невязки и ее второй производной совпадают. Следовательно, искомый корень может быть найден с помощью программы 177, которая после замены миготочий в базовой программе фрагментами вычисления невязки и ее производной может быть записана в виде следующей рабочей программы.

Программа 178. Расчет статического режима диода методом Ньютона

```
ИП1 ИП8 × ex ПА ИП0 ИП2 × ПВ ×
ИП1 × 1 + /—/ П7 ИП3 ИПА 1 —
ИПВ × — ИП8 — ИП7 ÷ ИП8 ↔ —
ИП8 ↔ П8 — x2 ИП9 — x<0 00 ИП8
С/П
```

Инструкция. ($I_0=P0$, $\Lambda=P1$, $R=P2$, $E=P3$) $e^2=P9$, $U^{(0)}=P8$ В/О С/П $PX=U^*$.

Пример. Для $I_0=1,34 \cdot 10^{-3}$, $\Lambda=6,5$, $R=250$ Ом, $E=5$ В при $U^{(0)}=E$, $e=1 \cdot 10^{-3}$ получим $U^*=0,41342396$ ($t \approx 3$ мин 20 с).

Можно использовать различные модификации метода Ньютона, но необходимость оценки условий сходимости усложняет вычисления и в большинстве случаев вместо этих методов [4, 14] проще использовать рассмотренные методы с гарантированной сходимостью. Эти же методы пригодны и для решения систем уравнений, когда их не удается свести к одному уравнению, но в таких случаях при использовании ПМК с ограниченной емкостью памяти наиболее целесообразным способом решения систем нелинейных уравнений часто оказываются методы нелинейного программирования, рассмотренные далее.

4.3. Анализ нелинейных цепей при гармонических воздействиях

В радиотехнике для преобразования спектра сигналов, рассматриваемых во многих задачах как гармонические, широко используют безынерционные (для рассматриваемого диапазона частот) нелинейные цепи. Реакция $x(q)$ такой цепи на гармоническое воздействие $q(t)=A\cos(\omega t+\varphi)$ будет периодической функцией времени, а составляющие ее дискретного спектра в общем случае определяют формулой (2.2). Эту формулу можно упростить, приняв $\varphi=0$. В этом случае в силу четности функции $q(t)$ независимо от вида нелинейности реакция также будет четной функцией, а фазовые сдвиги гармоник $\varphi_k=k\varphi$ при необходимости можно вычислить после определения спектральных составляющих реакции. Следовательно,

$$x(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos k\omega t, \quad (4.6)$$

$$\text{где } A_k = \frac{2}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} x(A \cos \omega t) \cos k\omega t dt.$$

При известной характеристике $x(q)$ нелинейного канала передачи сигнала после подстановки $q(t)=A\cos \omega t$ коэффициенты A_k (амплитуды гармоник) можно вычислить с помощью одной из базовых программ численного интегрирования, приведенных в гл. 2 или в [11, 15]. Задача упрощается, если характеристика канала передачи аппроксимирована степенным многочленом $x(q)=a_n q^n + \dots + a_1 q + a_0$. В этом случае для вычисления амплитуд гармоник можно воспользоваться формулами

$$\begin{aligned} x_0(t) &= a_n, \quad x_1(t) = a_{n-1} + a_n A \cos \omega t, \dots, \\ x_k(t) &= a_{n-k} + A \cos \omega t \sum_{i=0}^{k-1} A_i^{(k-1)} \cos i\omega t = \sum_{i=0}^k A_i^{(k)} \cos i\omega t. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Коэффициенты $A_i^{(k)}$ этого разложения связаны с полученными на предыдущей итерации коэффициентами $A_i^{(k-1)}$ соотношениями

$$A_0^{(k)} = a_{n-k} + AA_1^{(k-1)}/2, \quad A_1^{(k)} = A(A_0^{(k-1)} + A_2^{(k-1)}/2),$$

$$A_2^{(k)} = A(A_1^{(k-1)} + A_3^{(k-1)})/2, \dots, A_i^{(k)} = A(A_{i-1}^{(k-1)} + A_{i+1}^{(k-1)})/2, \dots,$$

$$A_{k-1}^{(k)} = AA_{k-2}^{(k-1)}/2, \quad A_k^{(k)} = AA_{k-1}^{(k-1)}/2.$$

При $k=n$ коэффициенты $A_i^{(n)}$ равны искомым амплитудам гармоник спектра реакции. Описанный алгоритм реализован в следующих программах, отличающихся максимальной степенью аппроксимирующего нелинейность многочлена и способом ввода исходных данных.

Программа 179. Вычисление спектра реакции на гармоническое воздействие при аппроксимации нелинейной характеристики многочленом степени $n \leq 6$ с коэффициентами a_i :

ПД	ИП6	\times	П8	ИП5	П7	ИПД	2	\div	ПД
Сх	П9	ПА	ПВ	ПС	ИП8	ПП	78	ИП4	\perp
П7	ИП9	ПП	70	ИП3	$+$	П7	ИПА	ПП	62
ИП2	ПП	51	ИП1	ПП	51	ИП0	$+$	П7	ИПД
\uparrow	\uparrow	\times	\times	x^2	2	\times	ИП6	\times	ПД
С/П	\perp	П7	ИПД	ИПВ	\times	ИПС	\leftrightarrow	ПС	\leftrightarrow
ИПА	$+$	ИПД	\times	ИПВ	\leftrightarrow	ПВ	\leftrightarrow	ИП9	$+$
ИПД	\times	ИПА	\leftrightarrow	ПА	\leftrightarrow	ИП8	$+$	ИПД	\times
ИП9	\leftrightarrow	П9	\leftrightarrow	ИП7	2	\times	$+$	ИПД	\times
ИП8	\leftrightarrow	П8	\leftrightarrow	ИПД	\times	В/О			

Иструкция. ($a_0=P0$, $a_1=P1$, ..., $a_6=P6$; вместо отсутствующих коэффициентов ввести нули) $A=PX$ В/О С/П $PX=PД=A_6$, $P7=A_0$, $P8=A_1$, $P9=A_2$, $PA=A_3$, $PB=A_4$, $PC=A_5$ ($t \approx 70$ с).

Пример. Для $x(q)=2q^6+10q^5+20q^4+100q^3+200q^2+1000q+1$ и $A=4$ получим $A_0=6081$, $A_1=15200$, $A_2=8000$, $A_3=4800$, $A_4=2176$, $A_5=640$, $A_6=256$.

Программа 180. Вычисление спектра реакции на гармоническое воздействие при аппроксимации нелинейной характеристики многочленом степени $n \leq 10$ с коэффициентами a_i :

ИПД	\times	П1	С/П	П0	ИПД	2	\div	ПД	
Сх	КПС	С/П	ИП1	ИПД	\times	$+$	ИП0	\leftrightarrow	П0
\leftrightarrow	2	\times	2	ПВ	\leftrightarrow	КИПВ	$+$	ИПД	\times
ИПВ	1	$-$	ПВ	ИПС	$-$	1	$+$	$x \neq 0$	50
\leftrightarrow	КИПВ	\leftrightarrow	КПВ	\leftrightarrow	ИПВ	2	$+$	БП	24
\leftrightarrow	КИПВ	\leftrightarrow	КПВ	\leftrightarrow	ИПД	\times	КПС	ИПС	1
$+$	ПС	БП	10						

Иструкция. $A=PД$, $a_n=PX$ В/О С/П $a_{n-1}=PX$ С/П ... $a_1=PX$ С/П $a_0=PX$ С/П $P0=A_0$, $P1=A_1$, ..., $P9=A_9$, $PA=A_{10}$ ($t \leq 60$ с).

Программа 181. Вычисление спектра реакции на гармоническое воздействие при аппроксимации нелинейной характеристики многочленом степени $n \leq 12$ с коэффициентами

ИПД	\times	П1	С/П	П0	ИПД	2	\div	ПД	С/П
ИП1	ПС	ИПД	\times	+	ИП0	\leftrightarrow	П0	\leftrightarrow	2
\times	ИП2	+	ИПД	\times	П1	ИП3	ИП2	ПП	82
П2	ИП4	ИП3	ПП	82	П3	ИП5	ИП4	ПП	82
П4	ИП6	ИП5	ПП	82	П5	ИП7	ИП6	ПП	82
П6	ИП8	ИП7	ПП	82	П7	ИП9	ИП8	ПП	82
П8	ИПА	ИП9	ПП	82	П9	ИПВ	ИПА	ПП	82
ПА	ИПВ	ИПД	\times	ИПС	ИПД	\times	ПВ	\leftrightarrow	ПС
БП	09	ИПС	\leftrightarrow	ПС	\rightarrow	+	ИПД	\times	В/О

Инструкция. $0 = P_0 = P_1 = \dots = P_B = P_C$, $A = P_D$, $a_n = P_X$ В/О С/П $a_{n-1} = P_X$ С/П $a_{n-2} = P_X$ С/П ... $a_0 = P_X$ С/П $P_0 = A_0$, $P_1 = A_1$, ..., $P_C = A_{12}$ ($t \approx 60$ с).

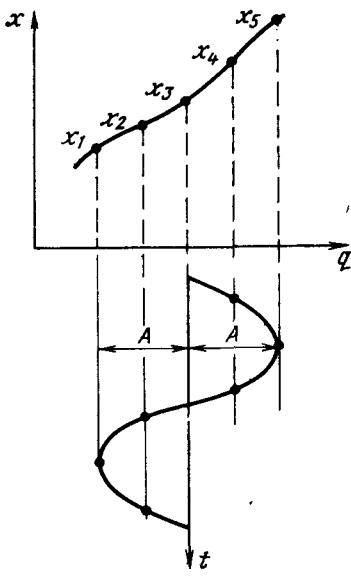


Рис. 25

Для проверки правильности ввода и выполнения программ 180 и 181 можно воспользоваться данными примера к программе 179. При использовании ПМК с входным языком ЯМК52 можно повысить на единицу максимальную степень многочлена, соответственное преобразовав программу 181. При $n \leq 10$ целесообразно использовать программу 180, а при $n \leq 6$ — программу 179, особенно удобную при изменении амплитуды воздействия. Рассмотренные программы применимы также для разложения функции $\cos^k \alpha$ на сумму косинусов кратного аргумента, для чего в исходных данных приять $a_i = 0$, кроме $a_k = 1$.

Если характеристика $x(q)$ задана таблично или графически, то спектр реакции на гармоническое воздействие можно определить, не вычисляя предварительно коэффициенты аппроксимирующего многочлена и воспользовавшись разложением в

тригонометрический ряд. Так, при слабой нелинейности функции $x(q)$ с достаточно гладкими участками между пятью равноотстоящими узлами с шагом $A/2$ коэффициенты первых четырех гармоник и постоянную составляющую в разложении (4.6) (рис. 25) можно вычислить по формулам:

$$A_0 = ((x_5 + x_1) + 2(x_4 + x_2))/6, \quad A_1 = ((x_5 - x_1) + (x_4 - x_2))/3,$$

$$A_2 = ((x_5 + x_1) - 2x_3)/4, \quad A_3 = ((x_5 - x_1) - 2(x_4 - x_2))/6,$$

$$A_5 = ((x_5 + x_1) - 4(x_4 + x_2) + 6x_3)/12.$$

По вычисленным амплитудам гармоник вычисляют и коэффициент гармоник

$$K_g = \sqrt{\sum_{i=2}^n A_i^2 / A_1^2}, \text{ используемый обычно для оценки нелинейных искажений.}$$

Программа 182. Вычисление спектра реакции и коэффициента гармоник методом пяти ординат

$$\begin{array}{ccccccccc}
 \text{ИП4} & \text{ИП0} & + & \uparrow & \text{ИП1} & \text{ИП3} & + & \text{П7} & 2 & \times \\
 + & 6 & \div & \text{П9} & \rightarrow & \text{ИП2} & 2 & \times & - & 4 \\
 \div & \text{ПВ} & \rightarrow & \text{ИП7} & 4 & \times & - & \text{ИП2} & 6 & \times \\
 + & 1 & 2 & \div & \text{ПД} & \text{ИП4} & \text{ИП0} & - & \uparrow & \text{ИП3} \\
 \text{ИП1} & - & \text{П8} & + & 3 & \div & \text{ПА} & \rightarrow & \text{ИП8} & 2 \\
 \times & - & 6 & \div & \text{ПС} & x^2 & \text{ИПД} & x^2 & + & \text{ИПВ} \\
 x^2 & + & \nu & \text{ИПА} & \div & \text{С'П}
 \end{array}$$

Инструкция. ($x_1=P0$, $x_2=P1$, $x_3=P2$, $x_4=P3$, $x_5=P4$) В/О С/П РХ=К_r, Р9=А₀, РА=А₁, РВ=А₂, РС=А₃, РД=А₄ ($t \approx 25$ с).

Пример. Для $x_1=0,5$, $x_2=4,5$, $x_3=9$, $x_4=10$, $x_5=8$ получим $K_r=0,570962$, $A_0=6,25$, $A_1=4,333333$, $A_2=-2,375$, $A_3=-0,58333333$, $A_4=0,375$.

Подобную программу особенно удобно использовать, если необходимы многократные вычисления, например при выборе рабочей точки активного компонента по минимуму нелинейных искажений, но точность анализа возрастает при увеличении числа отсчетов нелинейной характеристики. Так, при семи отсчетах в равноотстоящих узлах с шагом А/3 спектральные составляющие реакции на гармоническое воздействие:

$$\begin{aligned}
 A_0 &= x_4 + (756\alpha_2 - 270\alpha_1 + 344\alpha_3)/2560; A_1 = (1008\beta_2 - 180\beta_1 + 668\beta_3)/2560; \\
 A_2 &= (486\alpha_2 - 1215\alpha_1 + 559\alpha_3)/2560; A_3 = (450\beta_3 - 630\beta_1 - 360\beta_2)/2560; \\
 A_4 &= (270\alpha_1 - 756\alpha_2 + 306\alpha_3)/2560; A_5 = (810\beta_1 - 648\beta_2 + 162\beta_3)/2560; \\
 A_6 &= (1215\alpha_1 - 486\alpha_2 + 81\alpha_3)/2560,
 \end{aligned}$$

где $\alpha_1=x_3+x_5-2x_4$; $\alpha_2=x_6+x_2-2x_4$; $\alpha_3=x_7+x_1-2x_4$; $\beta_1=x_5-x_3$;

$$\beta_2=x_6-x_2; \quad \beta_3=x_7-x_1.$$

Программа 183. Вычисление спектра реакции методом семи ординат

$$\begin{array}{ccccccccc}
 \text{ИП3} & \text{ИП5} & + & \text{ИП4} & 2 & \times & \text{П0} & - & \text{ИП8} \times \\
 \text{ИП6} & \text{ИП2} & + & \text{ИП0} & - & \text{ИП9} & \times & + & \text{ИП7} \text{ ИП1} \\
 + & \text{ИП0} & - & \text{ИПА} & \times & + & 2 & 5 & 6 0 \\
 \text{П0} & \div & \text{ИП5} & \text{ИП3} & - & \text{ИПВ} & \times & \text{ИП6} & \text{ИП2} - \\
 \text{ИПС} & \times & + & \text{ИП7} & \text{ИП1} & - & \text{ИПД} & \times & + \text{ИП0} \\
 \div & \text{С'П}
 \end{array}$$

Инструкция. ($x_1=P1$, $x_2=P2$, $x_3=P3$, $x_4=P4$, $x_5=P5$, $x_6=P6$, $x_7=P7$) $-270=P8$; $756=P9$, $344=PA$; $-180=PB$; $1008=PC$; $668=PD$ В/О С/П РХ=А₁, РY=А₀-x₄; $-1215=P8$; $486=P9$; $559=PA$; $-630=PB$; $-360=PC$; $450=PD$ С/П РХ=А₃; РY=А₂; $270=P8$; $-756=P9$; $306=PA$; $810=PB$; $-648=PC$; $162=PD$ С/П РХ=А₅; РY=А₄; $1215=P8$; $-486=P9$; $81=PA$ С/П РХ=А₆.

Пример. Для $x_1=x_2=x_3=0$, $x_4=1$, $x_5=2$, $x_6=3$, $x_7=4$ получим $A_0-x_4=0,55625$ или $A_0=1,55625$, $A_1=2,084375$, $A_2=0,6265625$, $A_3=-0,2109375$, $A_4=-0,05625$, $A_5=0,1265625$, $A_6=-0,1265625$.

В случае нелинейной характеристики, аппроксимированной кусочно-линейной функцией $x=0$ при $q<0$, $x=Sq$ при $q \geq 0$, и отсечке θ входного воздействия $q=A \cos \omega t - q_0$ (рис. 26, а) спектральные составляющие реакции связаны с ее максимальным значением соотношениями $A_k=a_k(\theta)x_{\max}=y_k(\theta)SA$, где $x_{\max}=$

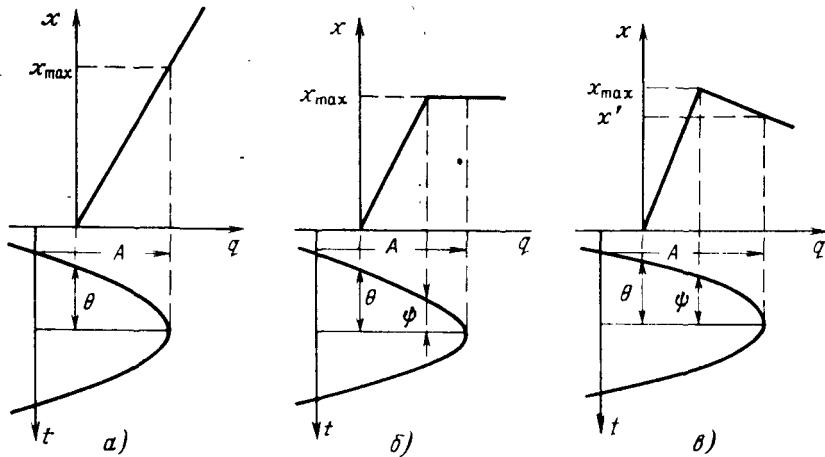


Рис. 26

$=SA(1-\cos\theta)$ и коэффициенты Берга $\alpha_0(\theta) = (\sin\theta - \theta \cos\theta)/\pi(1-\cos\theta)$, $\alpha_1(\theta) = (\theta - \sin(2\theta)/2)/\pi(1-\cos\theta)$ и при $k > 1$ $\alpha_k(\theta) = 2(\cos\theta \sin k\theta - k \sin\theta \cos k\theta)/(\pi k(k^2-1)(1-\cos\theta))$, а $\gamma_k(\theta) = \alpha_k(\theta)(1-\cos\theta)$.

Программа 184. Вычисление коэффициентов гармоник $\alpha_k(\theta)$ и $\gamma_k(\theta)$,

```

П8 ↔ π × 1 8 0 ÷ С/П П9
ИП8 x=0 22 ИП9 sin Bx ↑ cos × —
БП 60 x² 1 — x=0 37 ИП9 ИП9 2
× sin 2 ÷ — БП 60 ИП8 × 2
÷ П6 ИП9 cos ИП9 ИП8 × П7 sin ×
ИП8 ИП9 sin × ИП7 cos × — ИП6 ÷
π ÷ ↑ ИП9 cos 1 ↔ — ÷ С/П

```

Инструкция. Установить переключатель Р — ГРД — Г в положение Р; θ = PY, k = RX B/O С/П RX = θ рад (заданное значение θ рад = RX) С/П ($t \approx 10$ с) RX = $\alpha_k(\theta)$, PY = $\gamma_k(\theta)$.

Примеры. $\alpha_0(30^\circ) = 0,11059841$, $\gamma_0(30^\circ) = 0,014817379$ ($t \approx 10$ с); $\alpha_1(30^\circ) = 0,21522314$, $\gamma_1(30^\circ) = 0,028834435$ ($t \approx 10$ с); $\alpha_2(30^\circ) = 0,19799144$, $\gamma_2(30^\circ) = 0,026525824$ ($t \approx 17$ с).

Во многих задачах требуется определять последовательность коэффициентов гармоник $\alpha_k(\theta)$ или $\gamma_k(\theta)$.

Программа 185. Вычисление коэффициентов $\alpha_k(\theta)$ и $\gamma_k(\theta)$ при $k=0, 1, 2, \dots$

```

π × 1 8 0 ÷ С/П П9 1 П6
ИП9 sin Bx ↑ cos × — π ÷ ↑
ИП9 cos 1 ↔ — П8 ÷ С/П ИП9 ↑
↑ + sin 2 ÷ — π ÷ ↑ ИП8
÷ С/П КИ6 ИП9 cos ИП9 ИП6 × П7 sin
× ИП6 ИП9 sin × ИП7 cos × — 2
× ИП6 ↑ x² 1 — × ÷ БП 36

```

Инструкция. Установить переключатель Р—ГРД—Г в положение Р; $0^\circ = RX$ В/О С/П $RX = \theta$ рад (заданное значение θ рад = RX) С/ПР $X = \alpha_0(\theta)$, $RY = -\gamma_0(\theta)$ С/П $RX = \alpha_1(\theta)$, $RY = \gamma_1(\theta) \dots$ С/П $RX = \alpha_k(\theta)$, $RY = \gamma_k(\theta)$, $P9 = \theta$ рад,

Для проверки правильности ввода и выполнения программы можно воспользоваться данными примера к программе 184. Часто удобнее непосредственно вычислять амплитуды A_k гармоник по известной амплитуде сигнала A , крутизне S характеристики и углу θ отсечки.

Программа 186. Вычисление амплитуд гармоник A_k по заданным значениям S , A и θ

$$\begin{aligned}
 & \times \quad \text{П8} \leftrightarrow \pi \quad \times \quad 1 \quad 8 \quad 0 \quad \div \quad \text{С/П} \\
 & \text{П9} \quad \sin \quad \text{ИП9} \cos \quad \text{ИП9} \times - \quad \pi \quad \div \quad \text{ИП8} \\
 & \times \quad \text{С/П} \quad 1 \quad \text{П6} \quad \text{ИП9} \uparrow \uparrow + \quad \sin \quad 2 \\
 & \div - \quad \pi \quad \div \quad \text{ИП8} \times \text{С/П} \quad \text{КИП6} \quad \text{ИП9} \cos \\
 & \text{ИП9} \quad \text{ИП6} \times \quad \text{П7} \quad \sin \times \text{ИП6} \quad \text{ИП9} \quad \sin \times \\
 & \text{ИП7} \cos \times - \quad 2 \quad \times \text{ИП6} \uparrow \quad x^2 \quad 1 \\
 & - \quad \times \quad \div \quad \text{БП} \quad 32
 \end{aligned}$$

Инструкция. Установить переключатель Р—ГРД—Г в положение Р; $0^\circ = PZ$, $A = RY$, $S = RX$ В/О С/П $RX = \theta$ рад (заданное значение θ рад = RX) С/П $RX = A_0$ С/П $RX = A_1 \dots$ С/П $RX = A_k$, $P6 = k$, $P8 = SA$, $P9 = \theta$ рад.

Пример. Для $A = 5$, $S = 2$, $\theta = 39^\circ$ получим $A_0 = 0,14817379$, $A_1 = 0,28834435$, $A_2 = 0,26525824$, $A_3 = 0,22972038$.

При верхней ψ и нижней θ отсечках выходного сигнала (рис. 26, б) коэффициенты гармонических составляющих

$\alpha_0(\theta, \psi) = (\sin \theta - \theta \cos \theta - (\sin \psi - \psi \cos \psi)) / \pi (\cos \psi - \cos \theta)$, $\alpha_1(\theta, \psi) = -(\theta - \sin(2\theta)/2 - (\psi - \sin(2\psi)/2)) / \pi (\cos \psi - \cos \theta)$, $\alpha_k(\theta, \psi) = 2 (\sin k\theta \cos \theta - k \sin \theta \cos k\theta - (\psi \sin k\psi \cos k\psi - k \sin \psi \cos k\psi)) / \pi k (k^2 - 1) (\cos \psi - \cos \theta)$ при $k > 1$.

Программа 187. Вычисление коэффициентов $\alpha_k(\theta, k)$

$$\begin{aligned}
 & \text{П8} \leftrightarrow \text{П9} \quad \text{ПП} \quad 56 \quad \text{П5} \quad 1 \quad \text{П6} \quad \text{ИП8} \quad \text{ПП} \\
 & 56 \quad \text{ИП5} - \quad \text{ИП9} \cos \quad \text{ИП8} \cos - \quad \pi \quad \times \\
 & \text{П7} \div \quad \text{С/П} \quad \text{ИП9} \quad \text{ПП} \quad 63 \quad \text{П5} \quad \text{ИП8} \quad \text{ПП} \quad 63 \\
 & \text{ИП5} - \quad \text{ИП7} \div \quad \text{С/П} \quad \text{КИП6} \quad \text{ИП9} \quad \text{ПП} \quad 71 \quad \text{П5} \\
 & \text{ИП8} \quad \text{ПП} \quad 71 \quad \text{ИП5} - \quad \text{ИП6} \uparrow \quad x^2 \quad 1 \quad - \\
 & \times \quad 2 \quad \div \quad \div \quad \text{БП} \quad 32 \quad \sin \quad \text{ВХ} \quad \uparrow \quad \cos \\
 & \times - \quad \text{В/О} \uparrow \quad \uparrow + \quad \sin \quad 2 \quad \div \quad - \\
 & \text{В/О} \uparrow \quad \cos \quad \text{ВХ} \quad \text{ИП6} \times \quad \sin \times \leftrightarrow \quad \sin \\
 & \text{ВХ} \quad \text{ИП6} \times \quad \cos \times \quad \text{ИП6} \times - \quad \text{В/О}
 \end{aligned}$$

Инструкция. Установить переключатель Р—ГДР—Г в положение Р; ψ рад = $\psi^\circ \pi / 180 = RY$, θ рад = $\theta^\circ \pi / 180 = RX$ В/О С/П ($t \approx 15$ с) $RX = \alpha_0(\theta, \psi)$ С/П ($t \approx 10$ с) $RX = \alpha_1(\theta, \psi) \dots$ С/П $RX = \alpha_k(\theta, \psi)$, $P6 = k$, $P7 = \cos \psi - \cos \theta$, $P8 = \theta$ рад, $P9 = \psi$ рад ($t \approx 30$ с).

Пример. Для $\theta = 120^\circ$ и $\psi = 30^\circ$ получим $\alpha_0(\theta, \psi) = 0,43497024$, $\alpha_1(\theta, \psi) = -0,5678258$, $\alpha_2(\theta, \psi) = 0,081481957$.

Для вычисления амплитуд гармоник по значениям A и S используют соотношение $A_k = SA\gamma_k(\theta, k)$, где $\gamma_k(\theta, \psi) = a_k(\theta, \psi)(\cos \psi - \cos \theta)$. В случае уменьшения передаточной функции при верхней отсечке (рис. 26, в), характерной, например, для аппроксимации характеристик усилителей, работающих в перенапряженном режиме, $A_k = x_{\max}a_k(\theta, \psi) - x' a_k(\psi)$, где x' и x_{\max} — величины, указанные на рис. 26, в.

Анализ воздействия гармонического напряжения на полупроводниковые приборы, характеристики $p-n$ -переходов которых аппроксимированы идеализированными экспоненциальными функциями, связан с задачей определения спектра функций

$$e^{\Lambda A \cos \omega t} = I_0(\Lambda A) + 2 \sum_{k=1}^{\infty} I_k(\Lambda A) \cos \omega t,$$

где $I_k(x)$ — модифицированные функции Бесселя, которые можно вычислить с помощью программы 41 или следующей более простой программы.

Программа 188. Вычисление модифицированных функций Бесселя $I_k(x)$

```

П6 ↔ П9 x=0 06 1   П0 1     ИП0 ×
L0 08 П7 ИП9 ИП6 2   ÷ x²   П5 XУ
√ ИП7 ÷ П7 П8 Сx П4 КИП4 ИП4 ↑
ИП9 + × ИП5 ÷ ИП7 ↔ ÷ П7 ИП8
+ П8 Вx — x=0 27 ИП8 С/П

```

Иструкция. $k=PY$, $x=PX$ В/О С/П $PX=I_k(x)$.

Примеры. $I_0(0,39)=1,038388$; $I_1(0,39)=0,19873103$; $I_2(0,39)=0,019254633$; $I_3(0,39)=0,0012476051$ ($t \approx 32$ с).

При расчете параметрических цепей, в частности смесителей, и анализе побочных каналов приема в приемных или преобразовательных устройствах приходится находить спектр реакции при одновременном воздействии на нелинейную цепь двух гармонических сигналов. В этом случае спектр реакции наряду с гармониками каждой из частот сигнала содержит комбинационные составляющие с частотами $|n\omega_1 \pm m\omega_2|$. При аппроксимации нелинейной характеристики смесителей степенными многочленами спектр реакции рассчитывают аналогично спектру реакции нелинейной цепи на монохроматическое воздействие. Однако вычисления по такой схеме в связи с ограниченной емкостью памяти ПМК ограничены нелинейностями, аппроксимируемыми многочленами не выше третьей степени.

Программа 189. Определение амплитуд комбинационных составляющих при аппроксимации нелинейной характеристики смесителя кубическим многочленом третьей степени с коэффициентами a_i при амплитудах воздействий A_1 и A_2

```

ИП0 П4 ПП 32 ИП5 П6 → ИП7 П8 →
ИП9 ПА → ИПД ПС ПП 32 × ИП2 ×
ПВ ИП5 ИПС + П5 ИП6 ИПД + П6 С/П
БП 00 → ↑ ИП1 × П5 → ↑ x²
ИП2 × 2 ÷ П7 ИП4 + П4 → ↑
↑ x² × ИП3 × 4 ÷ П9 3 ×
ИП5 + П5 → ↑ → x² × ИП3 ×
3 × 4 ÷ ПД → В/О

```

Инструкция. ($a_0=P0$, $a_1=P1$, $a_2=P2$, $a_3=P3$) $A_1=PY$, $A_2=PX$ (B/O) С/П $PX=P6=A_{\omega_2}$, $P4=A_0$, $P5=A_{\omega_1}$, $P7=A_{2\omega_1}$, $P8=A_{2\omega_2}$, $P9=A_{3\omega_1}$, $PA=A_{3\omega_2}$, $PB=A_{\omega_1 \pm \omega_2}$, $PC=A_{\omega_1 \pm 2\omega_2}$, $PD=A_{2\omega_1 \pm \omega_2}$ ($t \approx 40$ с).

Пример. Для $x(q)=3+5q+10q^2+2q^3$ и $q(t)=3 \cos \omega_1 t + 0,5 \cos \omega_2 t$ получим $A_0=49,25$, $A_{\omega_1}=56,625$, $A_{\omega_2}=9,4375$, $A_{2\omega_1}=45$, $A_{2\omega_2}=1,25$, $A_{3\omega_1}=13,5$, $A_{3\omega_2}=0,0625$, $A_{\omega_1 \pm \omega_2}=15$, $A_{\omega_1 \pm 2\omega_2}=1,125$, $A_{2\omega_1 \pm \omega_2}=6,75$.

В общем случае амплитуды A_{nm} комбинационных составляющих находят с помощью преобразования Фурье с учетом четности функции $x(q)$ при нулевых начальных фазах воздействующих колебаний:

$$A_{nm} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(A_1 \cos \omega_1 t + A_2 \cos \omega_2 t) \cos((n\omega_1 \pm m\omega_2)t) dt$$

Пределы интегрирования конечны, если входные колебания имеют общий период $T_0=2\pi k/\omega_1=2\pi r/\omega_2$ при целых числах k и r . В этом случае

$$\begin{aligned} A_{nm} &= \frac{2}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(A_1 \cos k\omega_0 t + A_2 \cos r\omega_0 t) \cos((nk \pm mr)\omega_0 t) dt = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x(v) \cos(\xi v) dv, \end{aligned}$$

где $v=\omega_0 t$; $\xi=nk \pm mr$.

Переходя к ДПФ и учитывая четность интегрируемой функции, получаем

$$A_{nm} = \frac{2}{s} \left[\sum_{i=0}^{s-1} x(i\Delta v) \cos(\xi i\Delta v) + \frac{x(0)-x(\pi)}{2} \right],$$

где $s=\pi/\Delta v$ — число разбиений общего полупериода $0,5T_0$.

Программа 190. Вычисление амплитуд A_{nm} комбинационных составляющих спектра реакции безынерционной нелинейной цепи на бигармоническое воздействие

$$\begin{array}{ccccccccc} P0 & P7 & Cx & PD & PI & 30 & \pi & IP0 & \div & P9 \\ \pi & PI & 30 & 2 & \div & PD & KIP0 & IP0 & IP9 & \times \\ PI & 30 & L0 & 17 & IPD & 2 & \times & IP7 & \div & C/P \\ P8 & \dots & IPD & + & PD & B/O & & & & \end{array}$$

Иструкция. Заменить в программе многоточие фрагментом вычисления $x(i\Delta v) \cos(\xi i\Delta v)$ при $i\Delta v=P8$ с использованием регистров, кроме 0, 7, 8, 9, D; $s=PX$ B/O С/П $PX=A_{nm}$.

Для примера рассмотрим расчет амплитуд комбинационных составляющих на выходе транзисторного смесителя с идеализированной характеристикой $x(u)=e^{Au}$ при воздействии входного сигнала с амплитудой A_1 и частотой $f_0=765$ кГц и напряжения гетеродина с амплитудой A_2 и частотой $f_1=615$ кГц. Определив наибольший общий множитель $f_0=\omega_0/2\pi=1/T_0=15$ кГц при числах $k=51$ и $r=41$, представим нормированное воздействие $q=A_1 \cos 51v + A_2 \cos 41v$.

Разместив в памяти исходные данные ($\xi=P1$, $A_1=P2$, $A_2=P3$, $k=P4$, $r=P5$, $\Lambda=P6$), заменим многоточие в программе 190 фрагментом ИП1 \times ПА ИП4 \times cos ИП2 \times ИП5 \times cos ИП3 \times + ИП6 \times e^x.

Выбор числа s разбиений полупериода должен обеспечить ортогональность вычисляемой составляющей по отношению к остальным. Предположим, что в рассматриваемом случае допустимо преиебречь комбинационными составляющими $k > 4$ для напряжения гетеродина и $k > 1$ для входного сигнала. Тогда спектр будет содержать составляющие с иормированными частотами 0; 10; 31; 41; 51; 72; 82; 92; 113; 123; 133; 164; 174; 215. Для вычисления составляющей с иормированной частотой 31, равной сумме частоты сигнала и второй гармоники гетеродина напряжения, необходимо выбрать нормированную частоту дискретизации $2s$ так, чтобы с учетом преобразования $\gamma_{\text{пр}} = |\nu_i \pm 2as|$ (где a — целое число) преобразованная частота не совпала с выделяемой. Например, при $s=16$ иеобходимая частота будет определена верно и достаточно приять $\xi=31$ или $\xi=1$. Следует добавить, что для безынерционных преобразователей амплитуды составляющих с частотами $|nf_c + mf_r|$ и $|nf_c - mf_r|$ всегда равны и выбранное значение s позволяет рассчитать все гармоники рассматриваемого комбинационного спектра. Так, при $\xi=31$, $A_1=0,01$, $A_2=1$ по программе 190 (время счета около 8 мин) получим $2A_{21}/s=0,0108498$ или (после деления на $s/2=8$) $A_{21}=0,001356552$.

Отметим, что при полосе $\Delta f_{\text{пр}}$ последующего тракта изменение комбинационной частоты кратности n в этой полосе на величину $\Delta f_{\text{пр}}/2n$ сохранит ее в этой полосе. В этом случае и без анализа дискретизированных частот очевидно, что выбор значения $s > \omega_{\max}/\omega_0 = \omega_r/\omega_0 + \omega_e/\omega_0$ позволит правильно определить все учитываемые комбинационные составляющие спектра. Анализ взаимных побочных каналов приема, попадающих в полосу $f_{\min} < f_c < f_{\max}$, обеспечивает следующий алгоритм:

1. Принять $l=m+n=1$, $n=1$; $m=0$.
2. Принять $l=l+1$, $n=l-m$.
3. Вычислить $f_c = |mf_c \pm f_{\text{пр}}|/n$.
4. Если $f_{\min} < f_c < f_{\max}$, то закончить вычисления, иначе перейти к шагу 5.
5. Принять $m=m+1$, $n=m-1$.
6. Если $(mf_r - f_{\text{пр}}/n) < f_{\max}$, то перейти к шагу 7, иначе — к шагу 2.
7. Если $n=0$, то перейти к шагу 2, иначе к шагу 5.

Программа 191. Вычисление частот побочных каналов приема

P5	\rightarrow	P4	\rightarrow	P3	\leftarrow	P2	Cx	P8	ИП8
1	—	P8	Cx	P6	ИП8	÷	x^2	$\sqrt{}$	P7
$x \neq 0$	09	ИП6	ИП2	×	ПД	ИП3	—	$x \geq 0$	39
ПП	52	\leftrightarrow	ИП5	—	$x < 0$	09	БП	43	x^2
$\sqrt{}$	ПП	52	ИПД	ИП3	+	ПП	52	1	+
БП	14	ИП7	÷	↑	ИП4	—	$x \geq 0$	67	\leftrightarrow
↑	ИП5	—	$x < 0$	67	\leftrightarrow	C/P	\leftrightarrow	ИП6	B/O

Инструкция. $f_r=PT$, $f_{\text{пр}}=PZ$, $f_{\min}=PY$, $f_{\max}=PX$ B/O C/P RX= f_{c1} , $P6=m$, $P7=n$ C/P ... C/P RX= f_{ck} , $P6=m$, $P7=n$ (время счета зависит от чисел m и n).

Пример. Для $f_r=3500$ кГц, $f_{\text{пр}}=465$ кГц, $f_{\min}=2985$ кГц, $f_{\max}=3085$ кГц получим $f_{c1}=3035$ кГц ($m=n=1$) через 40 с, $f_{c2}=2994,166$ кГц ($m=5, n=6$) — примерно через 5 мни.

4.4. Нелинейное программирование

Численному результату решения многих задач можно поставить в соответствие вещественную функцию, называемую целевой и принимающей минимальное значение при требуемых (оптимальных) значениях искомых переменных. Целенаправленный поиск таких оптимальных значений переменных по минимуму целевой функции относится к математическому программированию, не имеющему непосредственного отношения к программированию ЭВМ.

Основная задача математического программирования (задача численной оптимизации) формулируется следующим образом: найти оптимальные значения переменных $X=[x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n]$, соответствующих минимуму целевой функции $\Phi(x_1, x_2, \dots, x_n)=\Phi(X)$ при ограничениях в виде равенств $H_i(X)=0$ и неравенств $G_j(X)>0$. (При отсутствии ограничений решение рассматриваемой задачи называют безусловной оптимизацией.) Если целевая функция или хотя бы одно из ограничений и есть линейны относительно оптимизируемых переменных, то задачу оптимизации решают методами линейного программирования [12, 17].

В пространстве оптимизируемых переменных каждой точке X соответствует конец направления в эту точку из начала координат вектора $X=[x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n]$ и определенное значение целевой функции $\Phi(X)$. Большинство итерационных методов линейного программирования основано на выборе для каждой итерации определенного направления в пространстве переменных и одномерного поиска вдоль этого направления минимума функции $\Phi(X)$. Многократное повторение таких итераций приводит к локальному или глобальному (наименьшему из всех) минимуму целевой функции $\min\Phi(X)=\Phi(X^*)$, которому соответствует искомый оптимальный вектор или оптимум X^* .

Простейшая задача одномерного поиска заключается в минимизации функции $\Phi(x)$ одной переменной x и, подобно решению линейных уравнений, сводится к определению интервалов нахождения минимумов, их отделению и уточнению. Так как целевая функция может иметь несколько минимумов, то для их отделения необходимо использовать программы для построения графика функции или (для сокращения затрат времени) определения возможно узких интервалов аргумента, соответствующих минимумам и расположенным между ними максимумам функции $\Phi(x)$, которые уточняются для определения оптимума x^* с требуемой точностью. Среди различных методов отделения и уточнения оптимумов [12, 15, 17] при использовании ПМК наиболее подходящим является метод равномерного поиска, отличающийся простотой программной реализации. Он заключается в последовательном вычислении значений функции $\Phi(x_i)$ с шагом Δx до изменения знака приращения $\Delta\Phi(x_i)=\Phi(x_i)-\Phi(x_{i-1})$ на границе оптимума шириной $2\Delta x$ (соответствующего экстремуму функции) со средним значением $x^*=(x_i-\Delta x)\pm\Delta x$. Для уточнения x^* принимают шаг $\Delta x=-\Delta x/a$, что обеспечивает поиск с меньшим шагом ($a>1$) другой границы интервала оптимума до его сужения в соответствии с требуемой точностью определения x^* .

Программа 192. Отделение и уточнение интервалов аргумента x^* , соответствующих экстремумам функции $\Phi(x)$:

```
ИП7 ИП8 + П8 ИП9 — x<0 10 ИП8 С/П
... ИП5 ↔ П5 — ИП6 ↔ П6 × x<0
00 С/П БП 00
```

Инструкция. Заменить многоточие фрагментом вычисления $\Phi(x)$ при $x=P8$ и использовании регистров, кроме 5..9; нижняя граница отрезка аргумента $x_0=P8$, верхняя граница $x_{\max}=P9$, шаг поиска $\Delta x=P7$, $0=P5=P6$ БП 1 0 С/П РХ= x_1 , $P5=\Phi(x_1)$, $P6=\Delta\Phi$, $P7=\Delta x$... С/П РХ= x_j , $P5=\Phi(x_j)$, $P6=\Delta\Phi(x_j)$, $P7=\Delta x$ (x_j — верхние границы интервалов аргумента, соответствующие поочередно максимумам и минимумам, при нижней границе $x_j-2\Delta x$; если при $x>x_0$ функция возрастает, то x_1 — граница первого максимума, если $\Delta\Phi<0$, то $x_1=x_0+\Delta x$) ... С/П РХ= $x \geq x_{\max}$; для уточнения оптимума принимать $\Delta\Phi=-\Delta\Phi$ (ИП6 /-/ П6); $\Delta x=-\Delta x/a$ (ИП7 a /-/ \div П7) С/П до требуемого сужения интервала аргумента; оптимальное значение $a=5$.

При использовании этой базовой программы целесообразно учитывать особенности исследуемой целевой функции. Для примера составим рабочую программу вычисления токов и напряжений туннельного диода, статическая характеристика которого (см. рис. 21) аппроксимирована функцией (4.4), для двух экстремальных областей.

Программа 193. Определение токов и напряжений в экстремальных областях статической характеристики туннельного диода

```
Сx П6 П8 П9 ИП7 ИП8 + П8 ИПС ×
ex ИП8 × ИПА × ИП8 ИПД × ex 1
— ИПВ × + ИП9 ↔ П9 — ИП6 ↔
П6 × x<0 04 ИП8 С/П БП 04
```

Инструкция. ($A_1=PA$, $A_2=PB$, $\alpha_1=PC$, $\alpha_2=PD$) $\Delta U=P7$ В/О С/П РХ= $P8=U_{\max}$, $P9=I_{\max}$, $P6=\Delta I_{\max}$ С/П РХ= $P8=U_{\min}$, $P9=I_{\min}$, $P6=\Delta I_{\min}$ (время одной итерации около 11 с); для уточнения интервалов оптимумов $\Delta U=-\Delta U/a$ (ИП7 /-/ $a \div$ П7) $\Delta I=-\Delta I$ (ИП6 /-/ П6) до достижения требуемой точности.

Пример. Для $A_1=5,43656 \cdot 10^{-2}$ А/В, $A_2=2,18743 \cdot 10^{-6}$ А, $\alpha_1=10$ В⁻¹; $\alpha_2=6,493498$ В⁻¹ при $\Delta U=0,02$ получим ($t \approx 63$ с) $U_{\max}=0,12$ В, $I_{\max}=1,9672$ мА, $\Delta I_{\max}=0,0345$ мА или $U_{\max}^*=0,1 \pm 0,02$ В, $I_{\max}^*=I_{\max}+\Delta I_{\max}=2$ мА и ($t \approx 4$ мин 15 с) $U_{\min}=0,62$ В, $I_{\min}=0,1889$ мА, $\Delta I_{\min}=-0,0025$ мА или $U_{\min}^*=0,6 \pm 0,02$, $I_{\min}^*=I_{\min}+\Delta I_{\min}=0,1863$ мА; для уточнения минимума примем $\Delta U=-0,02/5=-0,004$ и получим ($t \approx 60$ с) $U_{\min}=0,592$ В, $I_{\min}=0,18641428$ мА, $\Delta I_{\min}=-0,00013797$ мА.

Базовая программа 192 может быть также использована для определения экстремальных областей функций нескольких переменных. Для этого одномерный поиск областей экстремума одной переменной многократно повторяют при изменении на величины Δx остальных переменных [15].

Если интервал оптимума известен (поиск максимума функции может быть заменен поиском минимума обратной по величине функции), то уточнение оптимального значения x^* можно полностью автоматизировать, обеспечив автоматическое изменение шага $\Delta x = -\Delta x/a$ при достижении границы интервала с прекращением вычислений по условию $|\Delta x| \leq \varepsilon$, где ε — малая величина, определяющая требуемую точность.

Программа 194. Минимизация функции $\Phi(x)$ методом радиометрического поиска с предельной абсолютной погрешностью ε оптимума x^*

```

 $\pi \quad x^2 \quad x^2 \quad 10^x \quad \text{П9} \quad \text{ИП7 ИП8} + \quad \text{П8} \dots$ 
 $\text{ИП9} \leftrightarrow \text{П9} \quad - \quad x < 0 \quad 05 \quad \text{ИП7} / - / a \quad \div$ 
 $\text{П7} \quad x^2 \quad \text{ИП6} - \quad x < 0 \quad 05 \quad \text{ИП8 С/П}$ 

```

Инструкция. Заменить многоточие фрагментом вычисления $\Phi(x)$ при $x=P8$ с использованием регистров, кроме 6...9, и символ a — оператором набора делителя шага (целесообразно выбирать $a=5$); $\Delta x=P7$, $x_0=P8$, $(\varepsilon/a)^2=P6$ В/О С/П РХ= x , Р9= $\Phi(x^*)$, Р7= Δx^* .

Так как интервал оптимума равен $2\Delta x$ (при интервале шириной Δx точное значение оптимума может оказаться вне интервала [17]), то уточнение значение $x_{yt}^* = x^* - \Delta x^* \pm \Delta x^*$. Начальный фрагмент в программе 194 обеспечивает начальное значение $\Phi(x_0)$, заранее большое значения $\Phi(x_0 + \Delta x)$, и, следовательно, значение $\Delta \Phi > 0$ после первого шага.

Пример. Для определения корней многочлена $\Phi(x) = x^2 + 2x + 1$ с неотрицательным значением во всем интервале аргумента при $a=5$, $\Delta x=0,1$, $x_0=-2$, $\varepsilon=0,001$ или $(\varepsilon/5)^2=4 \cdot 10^{-8}$ получим $x^* = -1,0008$, $\Phi(x^*) = 6 \cdot 10^{-7}$, $\Delta x^* = 1,6 \cdot 10^{-6}$ ($t \approx 2$ мин). Следовательно, вещественные корни четной кратности могут быть найдены по минимуму невязки уравнения, а вещественные корни произвольной кратности — по минимуму модуля или квадрата $\Phi(x)$.

В качестве иллюстрации решения других задач рассмотрим определение наибольшей крутизны $g = dI/dU$ падающего участка статистической характеристики тунNELьного диода, аппроксимируемой функцией (4.4). Задача сводится к поиску максимального значения

$$g = I'(U) = A_1(1 - \alpha_1 U) \exp(-\alpha_1 U) + A_2 \alpha_2 \exp(\alpha_2 U)$$

или минимума целевой функции $\Phi(U) = (1/g)^2$.

Программа 195. Вычисление максимальной крутизны $|g_{max}|$ падающего участка статистической характеристики тунNELьного диода и соответствующего ей напряжения

```

 $\text{П7} \quad \pi \quad x^2 \quad x^2 \quad 10^x \quad \text{П9} \quad \text{ИП7 ИП8} + \quad \text{П8}$ 
 $\text{ИПС} \times \text{e}^x \quad \text{ИПА} \times \quad \text{ИПС} \text{ИП8} \times \quad 1 \quad +$ 
 $\times \quad \text{ИП8 ИПД} \times \quad \text{e}^x \quad \text{ИПД} \times \quad \text{ИПВ} \times \quad +$ 
 $x^2 \quad 1/x \quad \text{ИП9} \leftrightarrow \quad \text{П9} - \quad x < 0 \quad 06 \quad \text{ИП7} / - /$ 
 $5 \quad \div \quad \text{П7} \quad x^2 \quad \text{ИП6} - \quad x < 0 \quad 06 \quad \text{ИП9} \vee$ 
 $1/x \quad \text{С/П}$ 

```

Инструкция. ($A_1=PA$, $A_2=PB$, $-\alpha_1=PC$, $\alpha_2=PD$) $U_0=P8$, $(\varepsilon/5)^2=P6$, $\Delta U=PX$ В/О С/П РХ= $|g_{max}|$, Р9= U^* , Р7= ΔU^* .

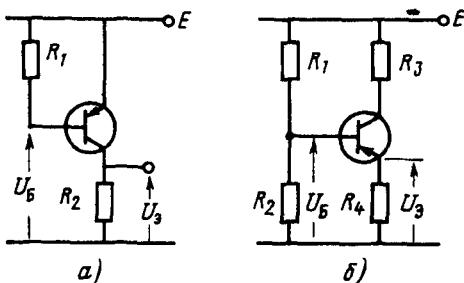


Рис. 27

диматный спуск) и выбирая Δx в зависимости от результатов вычислений. В этом случае длина базовой части программы минимальна, что существенно при минимизации сложных функций, фрагмент вычисления которых занимает значительную часть программной памяти ПМК

Программа 196. Минимизация функции $\Phi(x)$ методом неполного координатного спуска

ИП7 ИП8 + П8 ... ИП9 ↔ П9 — $x < 0$
00 ИП9 С/П БП 00

Инструкция. Заменить многоточие фрагментом вычисления $\Phi(x)$ при $x=P8$ и использовании регистров, кроме 7, 8 и 9; $\Phi(x_0)$ или $1 \cdot 10^{99}=P9$, $x_0=P8$, $\Delta x_0=P7$ В/О С/П РХ=Р9=Φ(x_1), Р8= x_1 , $\Delta x_1=P7$ С/П РХ=Р9=Φ(x_2), Р8= x_2 ... $\Delta x_{i-1}=P7$ С/П РХ=Φ(x_i), Р8= x_i , Р7= Δx_{i-1} ...; вычисления прекращать при достижении минимума $\Phi(x)$ с требуемой точностью.

Для примера рассмотрим использование неполного координатного спуска для расчета статического режима в цепи с включением транзистора по схеме с общим коллектором (рис. 27, а). Так как в рассматриваемой схеме обычно $R_6 \ll R_1$ и $\exp(\Lambda(U_{B\beta} - I_{B\beta}R_B - U_{K\beta})) \approx 0$, то в соответствии с уравнениями биполярного транзистора (4.5) для рассматриваемой цепи значение $U_{B\beta}$ определяется решением уравнения

$$\begin{aligned} E - R_1(cz - d) - R_2(az + b) - U_{B\beta} &= 0, \quad \text{где } a = I_{\beta O}/(1 - \alpha_N \alpha_I); \\ b = \alpha_I I_{K\beta} / (1 - \alpha_N \alpha_I); \quad c &= (1 - \alpha_N) I_{\beta O} / (1 - \alpha_N \alpha_I); \\ d = (1 - \alpha_I) I_{K\beta} / (1 - \alpha_N \alpha_I); \quad z &= \exp(\Lambda U_{B\beta}). \end{aligned}$$

Минимизируя квадрат невязки этого уравнения, определим $U_{B\beta}$, а затем $I_3 = az + b$, $I_B = cz - d$, $U_3 = I_3 R_2$, $U_B = E - I_B R_1$ (см. рис. 27, а).

Программа 197. Расчет статического режима цепи с биполярным транзистором, включенным по схеме с общим коллектором

ИП7 ИП8 + П8 ИП3 × e^x 1 — П4
ИПА × ИПВ + П5 ИП2 × ИП4 ИПС ×
ИПД — П6 ИП1 × + ИП8 + ИП0 —
 x^2 ИП9 ↔ П9 — $x < 0$ 00 ИП9 С/П ИП0
ИП1 ИП6 × — ИП5 ИП2 × С/П

Пример. Для $A_1=5,43656 \times 10^{-2}$ А/В; $A_2=2,18743 \cdot 10^{-6}$ А; $\alpha_1=10$ В⁻¹; $\alpha_2=6,493498$ В⁻¹; при $U_0=0,2$ В, $\epsilon=0,01$, $\Delta U=0,05$ получим ($t \approx 3$ ми 45 с) $|g_{\max}|=7,3033252 \cdot 10^{-3}$ См $\approx 7,3$ мСм, $U^*=0,202$, $\Delta U^*=0,0004$.

При решении многих задач удобно контролировать ход минимизации функции, прекращая вычисления по достижении границы оптимума (неполный коор-

Инструкция. ($E = P_0$, $R_1 = P_1$, $R_2 = P_2$, $\Lambda = P_3$, $a = I_{\Theta 0} / (1 - \alpha_N \alpha_I) = PA$, $b = \alpha_I I_{\Theta 0} / (1 - \alpha_N \alpha_I) = PB$, $c = (1 - \alpha_N) I_{\Theta 0} / (1 - \alpha_N \alpha_I) = PC$, $d = (1 - \alpha_N) I_{\Theta 0} / (1 - \alpha_N \alpha_I) = PD$) $1 \cdot 10^{99} = P_6$, $\Delta U_{B\Theta}^{(0)} = P_7$, $U_{B\Theta}^{(0)} = P_8$ В/О С/П РХ = $= \Phi$, $P_8 = U_{B\Theta}^{(1)}$, $P_7 = \Delta U^{(0)}$, $\Delta U^{(1)} = P_7$ В/О С/П РХ = $= \Phi \dots \Delta U^{(i-1)} P_7$ В/О С/П РХ = $= \Phi$ ($U_{B\Theta}^{(i)}$) $P_8 = U_{B\Theta}^i$, $P_7 = \Delta U_{B\Theta}^{(i-1)}$ С/П РХ = $= U_{\Theta}$, $P_Y = U_B$, $P_B = I_B$, $P_5 = I_{\Theta}$.

Пример. Для $E = 10$ В, $R_1 = 100$ кОм, $R_2 = 1$ кОм, $\Lambda = 39$ В $^{-1}$, $a = 10^{-6}$ А, $b = 4 \cdot 10^{-7}$ А, $c = 2 \cdot 10^{-8}$ А, $d = 1 \cdot 10^{-7}$ А при $1 \cdot 10^{99} = P_9$, $U_{B\Theta}^{(0)} = 0$, $\Delta U = 0,05$ получим ($t \approx 60$ с) $U_{B\Theta}^{(1)} = 0,25$ В, $\Phi = 1738,89$; при $\Delta U = -0,01$ получим ($t \approx 60$ с) $\Phi = 6,2040597$, $U_{B\Theta}^{(2)} = 0,2$ В; при $\Delta U = 0,002$ получим ($t \approx 60$ с) $\Phi = 1,023617$, $U_{B\Theta}^{(3)} = 0,21$ В; при $\Delta U = -0,0004$ ($t \approx 60$ с) $\Phi = 0,012088$, $U_{B\Theta}^{(4)} = 0,2072$ В; при $\Delta U = 0,00008$ ($t \approx 60$ с) $\Phi = 0,0000394$, $U_{B\Theta}^{(5)} = \Delta U$ В; при $\Delta U = -0,000016$ ($t \approx 90$ с) $\Phi = 0,000004$, $U_{B\Theta}^{(6)} = (0,207472 \pm \Delta U)$ В; $U_{\Theta} = 3,268$ В, $U_B = 3,474$ В; $I_B = 0,065$ мА, $I_{\Theta} = 3,268$ мА.

Затраты времени на решение оптимизационных задач уменьшаются при рациональном выборе начальных значений оптимизируемых переменных и стратегии поиска оптимума. В связи с простотой программной реализации метода равномерного последовательного поиска его целесообразно использовать и при одномерном поиске оптимума нескольких переменных на каждой итерации. Простейшие методы нелинейного программирования [17] основаны на одномерном поиске минимума вдоль координатных осей (координатный спуск) или по направлению градиента, соответствующего направлению максимального уменьшения функции (скорейший спуск). При использовании методов скорейшего спуска необходимо вычисление производных минимизируемой функции, которая должна быть аналитической. Это требование отпадает при координатном спуске, наиболее приемлемом для программирования микрокалькуляторов. В этом случае число операций уменьшается при определении на каждой итерации граничы оптимума последовательно для каждой переменной с последующим автоматическим изменением шага $\Delta x = -\Delta x/a$. Траектория поиска оптимума при таком исполнении координатном спуске напоминает спираль.

Программа 198. Минимизация функции $\Phi(x_1, x_2)$ двух переменных методом спирального координатного спуска

```
ИП7 ИП8 + П8 ПП 27 x<0 00 ИП7 ИП9
+ П9 ПП 27 x<0 08 ИП7 /-/ a ÷
П7 x2 ИП5 — x<0 00 С/П ... ИП6 ↔
П6 — В/О
```

Инструкция. Заменить многоточие фрагментом вычисления $\Phi(x_1, x_2)$ при $x_1 = P_8$, $x_2 = P_9$ с использованием регистров, кроме 5, ..., 9 ($e/a)^2 = P_5$, $1 \cdot 10^{99} = P_6$, $\Delta x = P_7$, $x_1 = P_8$, $x_2 = P_9$ В/О С/П РХ = $(\Delta x^*/a)^2 = (e/a)^2$, $P_7 = \Delta x^*$, $P_8 = x_1^*$, $P_9 = x_2^*$, $P_6 = \Phi(x_1^*, x_2^*)$.

Пример. Целевую функцию $\Phi(x_1, x_2) = (x_1^2 + x_2 - 11)^2 + (x_1 + x_2^2 - 7)^2$ используют [17] в качестве тестовой для сравнения качества различных алгоритмов нелинейного программирования при исходном векторе переменных $X^0 = [1 \ 1]$, что приводит к оптимуму $X^* = [3 \ 2]$ с минимумом функции $\Phi(X^*) = 0$. При той же исходной точке $(\varepsilon/3)^2 = 2.5 \cdot 10^{-9}$ и $a = 3$ по программе 198 получим для этой функции $\Phi(X^*) = 1.87361 \cdot 10^{-7}$ $x_1^* = 2.99994$, $x_2^* = 1.99994$ приблизительно за 11 миц.

Полностью автоматизированный поиск оптимума методом спирального спуска применим только для достаточно гладких и выпуклых [17] в области оптимума функций. Существенные трудности возникают при минимизации функций нескольких переменных с крутыми оврагами — вытянутыми областями равных уровней функции в пространстве переменных с резким возрастанием функции по обе стороны от оси оврага. При минимизации овражных функций, как и функций общего вида с недостаточно исследованными свойствами, целесообразно автоматизировать только поиск границ оптимума каждой переменной методом неполного координатного спуска с последующим выбором оптимизируемой переменной и ее приращения (шага поиска) в зависимости от полученных ранее результатов.

Программа 199. Минимизация функции $\Phi(x_1, x_2)$ двух переменных методом неполного координатного спуска

```
ИП7 ИП8 + П8 ПП 20 x<0 00 ИП9 С/П
ИП7 ИП9 + П9 ПП 20 x<0 10 БП 08
... ИП6 ↔ П6 — В/О
```

Иструкция. Заменить многоточие фрагментом вычисления $\Phi(x_1, x_2)$ при $x_1 = P8$, $x_2 = P9$ с использованием регистров, кроме 6...9; $1 \cdot 10^{99} = P6$, $\Delta x = P7$, $x_1 = P8$, $x_2 = P9$; для оптимизации переменной x_1 выполнять В/О С/П РХ = $\Phi(x_1, x_2)$, $P8 = x_1^{(i)}$, $\Delta x = P7$ В/О С/П ...; для оптимизации переменной x_2 после x_1 выполнять С/П РХ = $\Phi(x_1, x_2)$, $P9 = x_2^{(i)}$, $\Delta x = P7$ С/П ..., при начале оптимизации с переменной x_2 выполнять БП 1 0 С/П РХ = $\Phi(x_1, x_2)$, $P9 = x_2^{(i)}$, $\Delta x = P7$ С/П ...

После каждого выполнения этой программы определяется граница оптимума выбранной переменной, которую можно уточнить, уменьшая и изменяя знак шага, или перейти к оптимизации другой переменной в зависимости от вычисляемых значений $\Phi(x_1, x_2)$. Поиск прекращают после достижения минимума с требуемой точностью.

Среди тестовых функций, используемых для сравнения качества алгоритмов минимизации овражных функций [17], наиболее известна функция Розенброка $\Phi(x_1, x_2) = 100(x_1^2 - x_2)^2 + (1 - x_1)^2$ с изогнутым крутым оврагом, минимумом $\Phi(X^*) = 0$ при $X^* = [1 \ 1]$ и началом поиска минимума из точки $X^0 = [-1.2 \ 1]$. Применение программы 199 для минимизации этой функции обеспечивает достаточно быстрый спуск к точке минимума вдоль крутого оврага [15]. Следует отметить, что классические методы скорейшего координатного спуска не обеспечивают минимизации функции Розенброка вследствие «зацикливания» поиска на «дне» крутого оврага при достижении локального минимума. В то же время при исполнении координатном спуске точки поиска расположены на склонах оврага, что обеспечивает продвижение вдоль оси к минимуму.

Программы, подобные программе 199, целесообразно использовать во всех случаях (в частности, при решении систем из двух уравнений минимизации их невязок), когда нет информации о выпуклости плавкой функции. Для примера рассмотрим расчет статического режима в типовой цепи питания биполярного транзистора (рис. 27, б), описываемой уравнениями

$$E = I_1 R_1 + U_B; \quad E = I_K R_3 + U_{K3} + I_E R_4.$$

Так как $I_1 = I_2 + I_B \approx U_B / R_2 = (U_{B3} + I_E R_4) / R_2$, $I_K = I_E - I_B$, то получим уравнения

$$(I_E R_4 + U_{B3}) / (1 + R_1 / R_2) - E = 0; \quad I_E (R_3 + R_4) - I_B R_3 + U_{K3} = 0.$$

Учитывая, что $I_B R_B < U_{B3}$ и $\exp(\Lambda(U_{B3} - I_B R_B - U_{K3})) \approx 0$, примем, как и для программы 197, $I_E = az + b$, $I_B = cz - d$, где $z = \exp(\Lambda U_{B3}) - 1$. Тогда в соответствии с базовой программой 199 рабочий режим питания в рассматриваемой цепи определяется с помощью следующей программы.

Программа 200. Расчет напряжений U_{B3} и U_{K3} в типовой цепи питания биполярного транзистора

ИП7 ИП8 +	П8 ПП 20	x<0 00	ИП6 С/П	
ИП7 ИП9 +	П9 ПП 20	x<0 10	БП 08	
ИП8 ИП5 ×	e ^x 1	— ИПА ×	ИПВ +	
↑ ИП4 ×	ИП8 +	ИП1 ИП2 ÷	1 +	
× ИП0 —	x ² ↔	ИП3 ИП4 +	× ИП8	
ИП5 ×	e ^x 1	— ИПС ×	ИПД — ИП3	
×	— ИП9 +	ИП0 — x ²	+	ИП6 ↔
П6 —	— В/О			

Инструкция. ($E = P0$, $R_1 = P1$, $R_2 = P2$, $R_3 = P3$, $R_4 = P4$, $\Lambda = P5$, $a = I_{E0} / (1 - \alpha_N \alpha_I) = PA$, $b = \alpha_I / K_O / (1 - \alpha_N \alpha_I) = PB$, $c = (1 - \alpha_N) I_{S0} / (1 - \alpha_N \alpha_I) = PC$, $d = (1 - \alpha_I) I_{K0} / (1 - \alpha_N \alpha_I) = PD$) $1 \cdot 10^{99} = P6$, $U_{B3}^0 = P8$, $U_{K3}^0 = P9$, $\Delta U = P7$; для оптимизации U_{B3} выполнять $\Delta U = P7$ В/О С/П РХ = $\Phi(U_{B3}, U_{K3}) = \Phi(P8 = U_{B3})$; для оптимизации U_{K3} после U_{B3} выполнять $\Delta U = P7$ С/П РХ = $\Phi(P9 = U_{K3})$.

Пример. Пусть $E = 10$ В, $R_1 = 50$ кОм, $R_2 = 5$ кОм, $R_3 = 5$ кОм, $R_4 = 1$ кОм, $\Lambda = 39$ В⁻¹, $a = 10^{-6}$ А, $b = 4 \cdot 10^{-7}$ А, $c = 2 \cdot 10^{-8}$ А, $d = 1 \cdot 10^{-7}$ А. Для вычисления U_{B3} и U_{K3} с абсолютной погрешностью $\Delta = 0,01$ В необходимо минимизировать целевую функцию до значения $\Phi \leq (\Delta)^2 = 1 \cdot 10^{-4}$. Один из возможных вариантов решения задачи с помощью программы 200 приведен в табл. 4.1. По полученным результатам и хранящимся в памяти исходным данным вычисляем дополнительно $I_E = (\exp(\Lambda U_{B3}) - 1) a + b = 7,4022909 \cdot 10^{-4}$ А $\approx 0,74$ мА, $I_B = (\exp(\Lambda U_{B3}) - 1) c - d = 1,4696582 \cdot 10^{-5}$ А $\approx 0,015$ мА, $U_E = I_E R_4 = 0,74$ В, $U_B = U_{B3} + U_E = 0,909$ В, $I_2 = U_B / R_2 = 0,181$ мА, $I_1 = I_2 + I_B = 0,195$ мА, $I_K = I_E - I_B = 7,26$ мА.

При использовании микрокалькулятора с входным языком ЯМК52 дополнительный регистр памяти можно использовать, например, для сокращения про-

Таблица 4.1. Вычисление $U_{БЭ}$ и $U_{КЭ}$ по программе 200

ΔU	Пуск	t , с	$\Phi(U_{БЭ}, U_{КЭ})$	$U_{БЭ}$	$U_{КЭ}$
—	—	—	$1 \cdot 10^{99}$	0	5
0,05	В/О С/П	90	450,81719	0,02	
-0,01	В/О С/П	90	10,695906	0,16	
0,002	В/О С/П	120	0,8219403	0,172	
-0,0004	В/О С/П	65	0,3675397	0,1696	
0,1	С/П	140	0,0132875		5,7
-0,02	С/П	65	0,0044154		5,58
0,004	С/П	160	0,0039095		5,608
-0,001	С/П	120	0,0038854		5,602
0,0001	В/О С/П	22	0,0093781	0,1697	
-0,0001	В/О С/П	60	0,0012534	0,1694	
0,00002	В/О С/П	90	0,0009811	0,16948	
0,01	С/П	90	0,0008549		5,642
-0,002	С/П	220	0,0005180		5,622
-0,00001	В/О С/П	22	0,0006760	0,16949	
-0,00001	В/О С/П	140	0,00014832	0,16942	
0,000002	В/О С/П	120	0,00014123	0,16943	
0,001	С/П	242	0,00003986		5,633

грамм при времени запоминания величины $\exp(\Lambda U_{БЭ}) = 1$ или для хранения величин $I_{Э}$ или $I_{Б}$.

Процесс минимизации целевой функции при решении многих задач удобно контролировать непосредственно по величинам и знакам и связанных уравнений, связанных оптимизируемые величины. В качестве примера рассмотрим применение методов нелинейного программирования для вычисления комплексно-сопряженных корней (вещественные корни можно вычислить ранее рассмотренными методами) алгебраических уравнений с многочленами $A(p)$ степени $n > 6$ комплексного аргумента $p = \sigma + j\omega$, которые нельзя найти по программам, приведенным в § 3.3. Корни многочлена $A(p)$ можно найти методами численной оптимизации, используя модуль $|A(p)|$ в качестве целевой функции и отделяя корни с помощью программы 192 при многократном одномерном поиске экстремумов по координате σ с изменением после каждого поиска координаты ω . Уточнить корни можно с помощью программы 199 по невязкам ReA и ImA или непосредственно по величине $A(p)$ при координатном поиске вдоль осей σ и ω . При этом следует учесть, что корни многочлена находятся внутри окружности радиуса R , определяемого по формуле (3.16), и достаточно определить лишь по одному корню $p_i = \sigma_i + j\omega_i$, расположенному в верхней полуплоскости аргумента p (при $\omega > 0$), так как сопряженные корни $p_{i+1} = \sigma_i - j\omega_i$.

Возможны и другие методы вычисления корней методами нелинейного программирования, например при минимизации $A(p)$ по вычисляемым значениям ReA и ImA . Для этого удобно использовать то обстоятельство, что в корнях сходятся линии равных фазовых углов $\varphi = \arg A(p)$ от 0 до 360° , причем на линиях $\varphi_0 = 0 \pm k180^\circ$ (k — целое число) $ImA(p) = 0$, а на линиях $\varphi_0 = 90 \pm k180^\circ$ значение $ReA(p) = 0$.

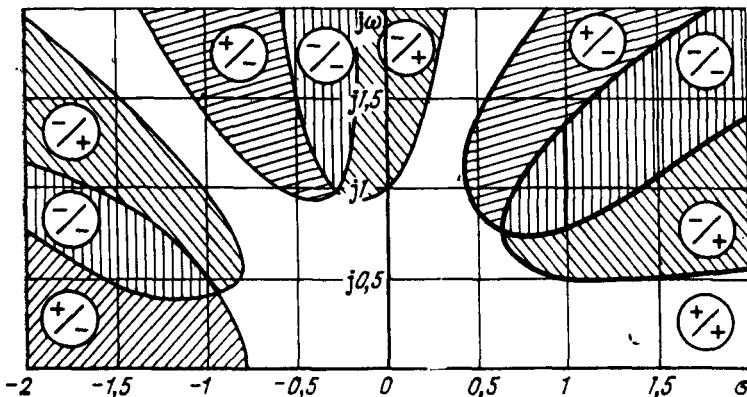


Рис. 28

Программа 201. Вычисление $\operatorname{Re}A(p)$ и $\operatorname{Im}A(p)$ многочлена $A(p)$ степени $n \leq 10$ комплексного аргумента $p = \sigma \pm j\omega$ с автоматическим приращением Δ вещественной или мнимой части

ИПВ	ИПД	ИПС	+	ПС	ИПА	ПП	46	ИП9	ПП
46	ИП8	ПП	46	ИП7	ПП	46	ИП6	ПП	46
ИП5	ПП	46	ИП4	ПП	46	ИП3	ПП	46	ИП2
ПП	46	ИП1	ПП	46	ИП0	ПП	46	С/П	ИПВ
ИПД	+	ПВ	ИПС	БП	05	↔	ИПВ	↔	×
Bx	→	+	↔	ИПС	↔	×	Bx	→	—
↑	→	→	ИПС	×	↔	ИПВ	×	+	↔
B/O									

Инструкция. ($a_0=P0$, $a_1=P1$, ..., $a_{10}=PA$; вместо отсутствующих коэффициентов ввести нули или для сокращения времени счета устраниТЬ соответственно фрагменты ИП N ПП А, изменив адрес А обращения к подпрограмме) $\sigma_0=PB$, $\omega_0=PC$, $\Delta=PD$; для вычислений при $\sigma_i=\sigma_{i-1}+\Delta$ выполнять $\Delta=RD$ B/O С/П RX=ReA(p), PY=ImA(p); для вычислений при $\omega_i=\omega_{i-1}+\Delta$ после изменений σ_i выполнять $\Delta=RD$ С/П RX=ReA(p), PY=ImA(p); для изменений ω_i после первого пуска программы выполнить БП 3 9 С/П.

При использовании этой программы для отделения корней следует вычислить R по формуле (3.16) и по полуокружности этого радиуса или по описываемому ему прямоугольнику с шагом $\Delta \leq R/2n$ вычислить значения $\operatorname{Re}A(p)$ и $\operatorname{Im}A(p)$, отмечая интервалы p , в которых контрольная линия пересекается с линиями равной фазы ϕ_0 или ϕ_{90} , о чем свидетельствует изменение знака $\operatorname{Im}A(p)$ при $\operatorname{Re}A(p) > 0$ или $\operatorname{Re}A(p)$ при $\operatorname{Im}A(p) > 0$. Эти линии равной фазы разбивают плоскость p на области с определенным знаком $\operatorname{Re}A(p)$ и $\operatorname{Im}A(p)$, показанные на рис. 28 для многочлена $A(p) = p^6 + p^5 + p^4 + p^3 + p^2 + p + 1$. При использовании программы 201 для отделения корней целесообразно выполнить: $\sigma=R$, $\omega=0$, $A=R/2n$ БП 39 С/П ... С/П ... С/П ..., контролируя отрезок $\sigma=R$, $0 \leq \omega \leq R$, за-

тем принять $\Delta = -\Delta$, выполняя В/О ... В/О ... В/О ... на отрезке $R \geq \sigma \geq -R$, $\omega = R$ и С/П ... С/П ... С/П ... на отрезке $\sigma = -R$, $R \geq \omega \geq 0$.

После определения интервалов, в которых изменяется знак (например, $\text{Im}A(p)$ при $\text{Re}A(p) > 0$), следует спуститься вдоль соответствующих линий равного уровня φ_0 до корня, уменьшая Δ по мере уменьшения абсолютных значений $\text{Re}A(p)$ и $\text{Im}A(p)$. Найденные таким образом корни могут быть определены с погрешностью, определяемой лишь операционными ошибками вычисления $\text{Re}A(p)$ и $\text{Im}A(p)$. Максимальную степень многочлена $A(p)$ можно увеличить на 2 при использовании ПМК с входным языком ЯМК52, соответственно изменив программу 201 [11].

Метод неполного координатного спуска применим и для оптимизации функций большего числа переменных, ограничиваемого лишь емкостью памяти ПМК. Примером может служить следующая программа.

Программа 202. Минимизация функции шести переменных методом неполного координатного спуска

```
ИП0 ИП1 + П1 ПП 54 x<0 00 С/П ИП0
ИП2 + П2 ПП 54 x<0 09 С/П ИП0 ИП3
+ П3 ПП 54 x<0 18 С/П ИП0 ИП4 +
П4 ПП 54 x<0 27 С/П ИП0 ИП5 +
П5 ПП 54 x<0 36 С/П ИП0 ИП6 +
П6 ПП
54 x<0 45 С/П ... ИПД ↔ ПД — В/О
```

Инструкция. Заменить в программе многоточие фрагментом вычисления целевой функции $\Phi(x)$ при $x_1 = P1$, $x_2 = P2$, ..., $x_6 = P6$ с использованием при необходимости регистров 7, 8, ..., С;

$x_1^0 = P1$, $x_2^0 = P2$, ..., $x_6^0 = P6$, $\Delta x = P0$, $1 \cdot 10^{99} = PД$; для оптимизации x_1 В/О С/П; для оптимизации переменных в порядке номеров для достижения одной границы нажимать С/П; для раздельной оптимизации x_2 нажимать БП 0 9 С/П, для x_3 — БП 1 8 С/П, для x_4 — БП 2 7 С/П, для x_5 — БП 3 6 С/П, для x_6 — БП 45 С/П; после каждого выполнения программы $PД = \Phi(X^{(i)})$, $P1 = x_1^{(i)}$, $P2 = x_2^{(i)}$, ..., $P6 = x_6^{(i)}$.

Пример. Минимизировать функцию шести переменных [17]

$$\Phi(X) = \exp \left(\sum_{i=1}^6 x_i \right) / \prod_{i=1}^6 x_i$$

с ограничениями $x_i > 0$ и оптимумом $X^* = [1 2 3 4 5 6]$. Заменим многоточие в программе 202 фрагментом вычисления заданной функции

$$\begin{array}{ccccccccc} \text{ИП1 ИП2} & + & \text{ИП3} & + & \text{ИП4} & + & \text{ИП5} & + & \text{ИП6} \\ + & e^x & \text{ИП1} & \div & \text{ИП2} & x^2 & \div & \text{ИП3} & \uparrow & x^2 \\ \times & \div & \text{ИП4} & x^2 & x^2 & \div & \text{ИП5} & \uparrow & x^2 \\ \times & \div & \text{ИП6} & x^2 & \uparrow & x^2 & \times & \div & x^2 \end{array}$$

При $x_1^0 = x_2^0 = \dots = x_6^0 = \Delta x = 0,1$ на первом витке спирального спуска (при запуске программы нажатием клавиш В/О С/П ... С/П ... С/П ... С/П ... С/П ...) получим (время первого выполнения программы около 190 с, последую-

щих — около 190 kc , где k — номер переменной) $\Phi = 3,3103895 \cdot 10^{-4}$, $x_1 = 1,1$, $x_2 = 2,1$, $x_3 = 3,1$, $x_4 = 4,1$, $x_5 = 5,1$, $x_6 = 6,1$. При выборе для следующих витков спирального спуска $\Delta x = -0,02; 0,005; -0,001$ после четвертого витка получим $\Phi(X^*) = 3,2716195 \cdot 10^{-4}$ при $X^* = [0,999 \ 1,999 \ 2,999 \ 3,999 \ 4,999 \ 5,999]$.

Если фрагмент вычисления целевой функции при использовании рассмотренных базовых программ не вмещается в свободной части программной памяти, то достаточно автоматизировать только вычисление целевой функции с изменением переменных перед каждым пуском программы в соответствии с предыдущими результатами, регистрируемыми в вычислительном блоке. В таких случаях также наиболее удобен координатный спуск.

Следует отметить, что решение задачи методами нелинейного программирования связано со значительными затратами времени. Поэтому такие методы целесообразно использовать лишь в том случае, когда решение задачи не может быть найдено другими способами с меньшими затратами времени.

4.5. Расчет временных характеристик нелинейных цепей

Анализ нелинейной цепи с инерционными компонентами в динамическом режиме сводится к решению нелинейного дифференциального (неоднородного при ненулевом значении воздействия) уравнения. Точность решения таких уравнений численными методами зависит от порядка выбранного метода и величины шага интегрирования $h = t_i - t_{i-1}$. При малом шаге для исследования процессов на заданном отрезке времени приходится выполнять больше вычислений, что приводит к увеличению затрат времени и возрастанию операционной составляющей погрешности результатов вычислений. При большом шаге возрастает методическая погрешность и вероятность неустойчивости вычислений, при которой вычисляемые величины изменяются периодически или скачкообразно вне связи с физическими условиями задачи. Во избежание неустойчивости вычислений и обеспечения сходимости вычислительного процесса (зависящей и от выбора начальных условий) шаг интегрирования следует выбирать таким, чтобы в течение этих интервалов времени $h = t_i - t_{i-1}$ процессы в анализируемой цепи и независимое воздействие отображались монотонными и достаточно гладкими функциями. Выбор порядка численных методов решения дифференциальных уравнений [4, 14, 15], реализуемых, в частности, с помощью базовых программ 150—152, определяется требуемой точностью решения, допустимыми затратами времени и сложностью дифференциального уравнения, ограничивающей емкостью памяти ПМК.

В качестве иллюстрации рассмотрим переходные процессы в последовательном соединении резистора с сопротивлением R , идеального источника напряжения $e = e(t)$ и полупроводникового диода. Представляя диод параллельным соединением идеальной модели с характеристикой $i = I_0(e^{\Lambda u} - 1)$, где $u = u(t)$ — напряжение на диоде, и нелинейной емкости $C = C(u) = \gamma i + \alpha \sqrt{1 + |u| \beta}$ с барьерной и диффузионной составляющими, можно описать анализируемую цепь уравнением $e - u - R(i + i_c) = 0$, где $i_c = dC(u)u/dt = (C + u dC/du)du/dt$. Следовательно, переходные процессы в рассматриваемой несложной цепи описываются относительно громоздким дифференциальным уравнением

$$\frac{du}{dt} = \frac{(e-u)/R-i}{\gamma I_0(1+\Lambda) \exp(\Lambda u) - 1 + \alpha \sqrt{1+|u|\beta} + \alpha\beta/2 \sqrt{1+|u|\beta}}.$$

Для приближенного решения этого уравнения целесообразно использовать метод Эйлера, реализованный программой 150. Так как правая часть составленного уравнения явно не зависит от времени, то при составлении рабочей программы для сокращения времени счета целесообразно вместо вычисления текущего времени использовать счетчик числа шагов (например, согласно КИП6).

Программа 203. Вычисление напряжения $u(t)$ и тока $i(t)$ инерционного диода

```

ИП9 — ИП2 ÷ ИП9 ИП1 × ex ПА 1
— ИП0 × П8 — ИП3 ИП4 × ИП9 x2
√ ИП4 × 1 + √ ПВ ÷ 2 ÷
ИП0 ИП1 × ИП5 × ИПА × + ИП9 ×
ИП8 ИП5 × + ИП3 ИПВ × + ÷ ИП7
× ИП9 + П9 КИП6 ИП6 ИП9 С/П БП 00

```

Инструкция. ($I_0 = P0$, $\Lambda = P1$, $R = P2$, $\alpha = P3$, $\beta = P4$, $\gamma = P5$) $h = P7$, $u_0 = P9$, $0 = P6$, $e_0 = PX$ В/О $PX = u_1$, $PY = 1$, $P8 = i_1$, $e_1 = PX$ С/П ... $e_n = PX$ С/П $PX = P9 = u_n$; $PY = P6 = n$, $P8 = i_n$ ($t \approx 17$ с).

Пример. Для $I_0 = 1,3 \cdot 10^{-3}$ А, $\Lambda = 6,5$ В⁻¹, $R = 100$ Ом, $\alpha = 5 \cdot 10^{-11}$ Ф, $\beta = 95$ В⁻¹, $\gamma = 10^{-9}$ Ф/А при $h = 5 \cdot 10^{-12}$ с, $u_0 = 0$, $e_0 = 1$ получим $u_t = 0,001; 0,0018783; 0,0026658; 0,0040431; 0,00465714$ В; ..., $i_t = 0; 8,47256 \cdot 10^{-6}; 1,596959 \cdot 10^{-5}; 2,272231 \cdot 10^{-5}; 2,890004 \cdot 10^{-5}$ А; ...

При использовании метода Эйлера для уменьшения погрешности приходится выбирать весьма малый шаг, что приводит к значительным затратам времени на решение задачи. Поэтому в общем случае целесообразно использовать методы более высокого порядка, например усовершенствованный метод Эйлера—Коши второго порядка, реализованный базовой программой 151. Для примера исследуем процесс опрокидывания триггера на тунNELьном диоде (рис. 29, а) при пренебрежении влиянием емкости диода, значительно меньшей внешней емкости C . Временные характеристики рассматриваемой цепи отображаются уравнением $i = (E-u)/R_1 - (u_3-u)/R_2 + C(du/dt) = 0$ или $du/dt = ((u_3-u)/R_2 +$

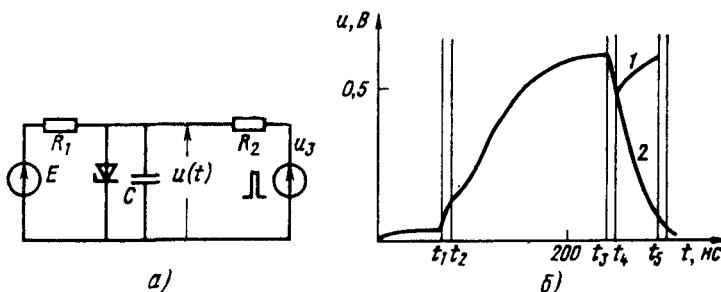


Рис. 29

$+ (E - u) / R_1 - i) / C$, где зависимость $i = i(u)$ аппроксимирована функцией (4.4).

Программа 204. Анализ режима запуска триггера на туннельном диоде

$$\begin{array}{ccccccccc}
 \text{П4} & \text{ПП} & 18 & \text{П6} & + & \text{П9} & \text{КИП5} & \text{ПП} & 18 & + \\
 \text{ИП6} & + & 2 & \div & \text{П9} & \text{С/П} & \text{БП} & 00 & \text{ИП4} & \text{ИП9} \\
 - & \text{ИП1} & \div & \text{ИП3} & \text{ИП9} & - & \text{ИП2} & \div & + & \text{ИП9} \\
 \text{ИПВ} & \times & e^x & \text{ИПА} & \times & \text{ИП9} & \times & \text{ИП9} & \text{ИПД} & \times \\
 e^x & 1 & - & \text{ИПС} & \times & + & \text{П8} & - & \text{ИП0} & \div \\
 \text{ИП7} & \times & \text{ИП9} & \text{В/О} & & & & & &
 \end{array}$$

Инструкция. ($C = P0$, $R_1 = P1$, $R_2 = P2$, $E = P3$, $A_1 = PA$, $-a_1 = PB$, $A_2 = PC$, $a_2 = PD$) $h = P7$, $0 = P5$, $u_0 = P9$, $e_0 = RX$ В/О С/П $RX = u_1$, $P8 = i_1$, $P5 = 1$, $e_1 = RX$ С/П ... $e_{n-1} = RX$ С/П $RX = P9 = u_n$, $P8 = i_n$, $P5 = n$ ($t \approx 30$ с).

Пример. Для $R_1 = R_2 = 1$ кОм, $C = 100$ пФ, $E = 1,8$ В, $A_1 = 0,05$ А, $a_1 = 10$ В $^{-1}$, $A_2 = 2,2 \cdot 10^{-6}$ А, $a_2 = 6,5$ В $^{-1}$ при $h = 5 \cdot 10^{-9}$ с и $u_0 = e_0 = 0$ получим оценку процесса установления после включения питания: $u_i = 0,039506661$; $0,05039451$; $0,0558729$; $0,058810295$; ...; $i_i = 0,0017999881$; $0,0016361924$; $0,0016385489$; $0,001651295$; ... (первое устойчивое состояние). При подаче положительного импульса напряжения $e = 2$ В длительностью 10 ис (два шага) триггер опрокидывается и с течением времени устанавливается второе устойчивое состояние при $u = 0,74816$ В, $i = 0,0003036$ А. Результаты вычислений отображены графиком, показанным на рис. 29, б. Там же показана реакция на импульс $e = -2$ В длительностью 10 ис (кривая 1), недостаточный для опрокидывания триггера, и реакция на импульс $e = -2$ В длительностью 40 ис (кривая 2), обеспечивающий переход триггера в первое устойчивое состояние.

Во многих случаях объем вычислений удается уменьшить, учитывая особенности анализируемой цепи. Например, при рассмотрении анализа триггера динамическая постоянная времени существенно зависит от уровня сигнала, и для уменьшения затрат времени целесообразно изменять шаг интегрирования в процессе вычислений, сохраняя, однако, его значение таким, при котором методическая погрешность остается достаточно малой, о чем можно судить по приращению u_i на каждой итерации.

Если инерционная цепь содержит только безынерционные и линейные элементы, то при кусочно-линейной аппроксимации их характеристик анализ реакции цепи на произвольное воздействие сводится к расчету процессов в линейной цепи, параметры которой изменяются при каждом изломе кусочно-линейных характеристик. Получив аналитическое выражение для каждого линейного участка и «сшивая» решения на их границах, можно составить удобные для решения задачи расчетные соотношения. Однако при практической реализации этого метода могут возникнуть затруднения в определении моментов времени, соответствующих переходу от одного линейного участка к другому.

Рассмотрим особенности этого метода на примере анализа двустороннего диодного ограничителя с емкостной нагрузкой (рис. 30, а) при аппроксимации характеристик диодов отрезками прямых с наклоном $R_d = \infty$ при $u_d < 0$ и $R_d = \text{const}$ при $u_d \geq 0$, преигнебрегая емкостью диодов.

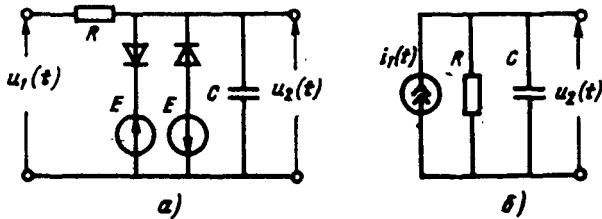


Рис. 30

При воздействии гармоническим напряжением $u_1(t) = U_1 \cos(\omega t + \varphi)$ с амплитудой $U_1 > E\sqrt{1+\omega^2\tau^2}$ (где $\tau = RC$) в анализируемой цепи возможны два режима:

1. При $|u_2(t)| \leq |E|$ оба диода смещены в обратном направлении и справедлива эквивалентная схема, показанная на рис. 30,б, где $i(t) = U_1 \cos \omega t / R$.

В этом случае

$$u_2(t) = (U_1 \sqrt{1 + \omega^2 \tau^2}) (\cos(\omega(t - t_j) + \varphi - \psi) - \cos(\varphi - \psi)) \exp(-(t - t_j)/\tau) + u_2(t_j) \exp(-(t - t_j)/\tau),$$

где $t \in [t_j, t_{j+1}]$; $\psi = \arg \text{tg} \omega t$, t_j — момент перехода цепи в рассматриваемое состояние.

2. При $|u_2(t)| > |E|$ один из вентилей открыт и цепь описывается эквивалентной схемой на рис. 30,б при $i(t) = i_R(t) = U_1 \cos \omega t / R_1 \pm E / R_D$, $R_1 = R R_D / (R + R_D)$

$$u_2(t) = (U_1 R_D / ((R + R_D) \sqrt{1 + \omega^2 \tau^2})) (\cos(\omega(t - t_j) + \varphi - \psi_1) - \cos(\varphi - \psi_1) \times \exp(-(t - t_j)/\tau)) \pm ER / (R + R_D) + (u_2(t_j) \pm ER(R + R_D)) \exp(-(t - t_j)/\tau),$$

где $\tau_1 = R_1 C$; $\psi_1 = \arctg \omega \tau_1$; t_j — момент перехода цепи в рассматриваемое состояние.

Обозначив $A_1 = U_1 / \sqrt{1 + \omega^2 \tau^2}$; $A_2 = U_1 R_D / (R + R_D) \sqrt{1 + \omega^2 \tau_1^2}$; $\theta_1 = \varphi - \psi$, $\theta_2 = \varphi - \psi_1$; $B_1 = 0$, $B_2 = ER / (R + R_D)$; $D_1 = u_2(t_j)$, $D_2 = (u_1(t_j) - B_2)$; $\beta_1 = 1 / \omega \tau_1$,

$\beta_2 = 1 / \omega \tau$; $x = \omega t$ можно обобщить расчетное выражение для обоих режимов:

$$u_2(x) = A_k (\cos(x - x_k + \theta_k) - \cos \theta_k \exp(-\beta_k(x - x_k))) + B_k + D_k \exp(-\beta_k \times x - x_k).$$

Программу вычислений по этой формуле несложно составить на входном языке ПМК любого типа. Алгоритм вычислений при допущении $u_2(0) = 0$ следующий:

1. Принять $x_k = 0$ ($k = 1$), $B_k = D_k = 0$ и, последовательно вычисляя значения $u_2(x)$, определить момент времени x_1 , при котором впервые выполняется равенство $|u_2(x_1)| = |E|$.

2. Принять $x_k = x_1$, $A_k = A_2$, $\theta_k = \theta_2$, $\beta_k = \beta_2$; $B_k = \pm ER / (R + R_D)$, $D_k = \pm E(1 - R / (pR + R_D))$, выбрав знаки, соответствующие знаку напряжения $u_2(x_1)$, и повторяя вычисления $u_2(x)$, закончить их при x_2 , соответствующем равенству $u_2(x_2) = u_2(x_1)$.

3. Принять $x_k = x_2$, $A_k = A_1$, $\theta_k = \theta_1$, $B_k = 0$, $D_k = \pm E$ (со знаком, совпадающим со знаком $u_2(x_2)$ и определить x_3 по условию $u_2(x_3) = -u_2(x_2)$, после чего перейти к шагу 2.

Степень автоматизации решения можно повысить при резерве памяти ПМК, но в рассматриваемой цепи уже после одного периода воздействующего напряжения устанавливается режим, представляющий практический интерес. Значительные больших затрат времени (как при решении нелинейных дифференциальных уравнений, так и при кусочно-линейной аппроксимации нелинейностей) требует анализ установления процессов в нелинейных цепях, содержащих высокодобротные колебательные контуры.

Нелинейные цепи с несколькими реактивными элементами в общем случае описываются системой дифференциальных уравнений $dx_i/dt = f_i(x_1, \dots, x_n; t)$, $i = 1, 2, \dots, n$. Простота программной реализации метода Эйлера обеспечивает возможность решения с помощью ПМК систем, содержащих до шести несложных уравнений. Основные ограничения в этом случае связаны с резервом памяти для хранения коэффициентов уравнений и фрагментов их вычисления.

Программа 205. Решение системы дифференциальных уравнений $x'_j = f_j(x_1, \dots, x_6, t)$; $j = 1, 2, \dots, 6$ методом Эйлера

```

... ИП7 × ИП1 + П8 ... ИП7 × ИП2
+ П9 ... ИП7 × ИП3 + ПА ... ИП7
× ИП4 + ПВ ... ИП7 × ИП5 + ПС
... ИП7 × ИП6 + П6 ИП7 ИП0 + П0
ИПС П5 ИПВ П4 ИПА П3 ИП9 П2 ИП8 П1
С/П БП 00

```

Инструкция. Заменить многоточия фрагментами вычисления функций f_1, f_2, \dots, f_6 при $x_j = Pj$, записывая коэффициенты уравнений в регистр Д и текст программы; при $n < 6$ следует соответственно сократить текст программы и использовать свободные регистры для записи коэффициентов; $h = P7$, $x_j^{(0)} = Pj$ В/О

С/П $Pj = x_j^{(1)}$ С/П RX = $x_j^{(2)}$... С/П RX = $x_j^{(n)}$.

В качестве примера рассмотрим переходный процесс в цепи, эквивалентная схема которой показана на рис. 31, при включении гармонического сигнала. Необходимость в таком анализе возникает при детектировании широкополосного сигнала, когда известные приближенные методы линеаризации приводят к значительным погрешностям.

Составим систему уравнений равновесия цепи

$$i_{\text{вх}}(t) = i_L + u_1/R + C (du_1/dt) + i_D(u_1 - u_2), \quad u_1 = L (di_L/dt);$$

$$i_D(u_1 - u_2) = u_2/R_H + C_H (du_2/dt),$$

и воспользовавшись экспоненциальной аппроксимацией вольт-амперной характеристики диода $i_D(u_1 - u_2) = I_0(\exp(\Lambda(u_1 - u_2)) - 1)$, приведем систему к нормальному виду

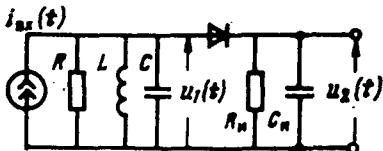


Рис. 31

$$du_1/d\tau = \rho (i_{\text{вх}}(t) - i_L - I_0 (\exp(\Lambda(u_1 - u_2)) - 1) - u_1/Q);$$

$$di_L/d\tau = u_1/\rho; du_2/d\tau = \alpha \rho I_0 (\exp(\Lambda(u_1 - u_2)) - 1) - u_2/(\omega_p R_0 C_0),$$

где $\rho = \sqrt{L/C}$; $Q = \omega_p RC$; $\omega_p = 1/\sqrt{LC}$; $\alpha = C/C_0$ и безразмерная независимая переменная $\tau = \omega_p t$.

При использовании метода Эйлера необходимо выбрать достаточно малый шаг, что приводит к существенному увеличению объема вычислений. Поэтому введем в рабочую программу фрагмент со счетчиком шагов, обеспечивающим вывод результатов вычислений после заданного числа шагов. В связи с этим один из параметров (например, Λ) будем вводить в текст программы и ограничимся случаем совпадения частоты воздействия с резонансной частотой контура ω_p .

Программа 206. Анализ переходных процессов в настроенном амплитудном детекторе

ИП6 ИП9 —	ИП2 ×	↑ 2	3	0	+
x<0 15 Сх	БП 17 →	e ^x	1	—	ИП1
×	↑ ИПД ×	ИПА ×	ИП9 ИПС ÷	—	
ИП7 ×	ИП9 +	П9 ↔	ИП3 +	ИП8 ИП5	
×	sin ИП4 ×	↔ --	ИПА ×	ИП6 ИПВ	
÷ —	ИП7 ×	ИП6 +	П6 Вх	ИПА ÷	
ИП7 ×	ИП3 +	П3 ИП7 ИП8 +	П8 ИП9		
L0 00 С/П БП 00					

Инструкция. Установить переключатель Р—ГРД—Г в положение Р; $h = P7$, $I_0 = P1$, $\Lambda = P2$, $I_{\text{вх}} = P4$, $\omega/\omega_p = P5$, $\rho = PA$, $Q = PB$, $\omega_p R_0 C_0 = PC$, $\alpha = PD$, $i_L^{(0)} = P3$, $u_1^{(0)} = P6$, $u_2^{(0)} = P9$, число шагов $n = P0$ (после каждого выполнения программы сохраняется $P0 = 1$) (B/O) С/П ($t \approx 20$ с) РХ = Р9 = $u_2^{(i)}$, РY = Р8 = $\tau_i = \tau_0 + ih$, Р6 = $u_1^{(i)}$, Р3 = $i_L^{(i)}$.

Пример. Для $I_0 = 10^{-3}$ А, $\Lambda = 39.1/B$, $I_{\text{вх}} = 0.2 \cdot 10^{-3}$ А, $\omega/\omega_p = 1$, $\rho = 1000$ Ом, $Q = 10$, $\omega_p R_0 C_0 = 100$, $\alpha = 0.1$; $h = \pi/50$, $\tau_0 = u_2^{(0)} = u_1^{(0)} = i_L^{(0)} = 0$ получим $u_2^{(i)} \approx 0; 0; 0; 6.28 \cdot 10^{-13}; 1.88 \cdot 10^{-12}; \dots$, $u_1^{(i)} \approx 0; 7.89 \cdot 10^{-4}; 2.75 \cdot 10^{-3}; 4.69 \cdot 10^{-3}; 7.78 \cdot 10^{-3}; \dots$, $i_L^{(i)} \approx 0; 0; 4.95 \cdot 10^{-8}; 1.97 \cdot 10^{-7}; 4.92 \times 10^{-7}; \dots$. Результаты вычислений приведены на рис. 32.

В рассмотренной задаче резкое изменение экспоненциального члена при увеличении входного напряжения заставляет выбирать очень малый шаг интегрирования для уменьшения методической погрешности, что приводит к значительным затратам времени и увеличению операционной составляющей погрешности результатов вычислений. Их точность можно повысить, выбрав метод интегрирования более высокого порядка, но этот выбор существенно ограничен малой емкостью памяти ПМК. Среди методов второго порядка достаточно экономичным относительно затрат ресурса памяти на базовую часть программы является модифицированный метод Эйлера [15] с вычислениями по формулам

$$x_k^{(i+1/2)} = x_k^{(i)} + hf_k(t_i, x_1^{(i)}, \dots, x_n^{(i)})/2,$$

$$x_k^{(i+1)} = x_k^{(i)} + hf_k(t_i + h/2, x_1^{(i+1/2)}, \dots, x_n^{(i+1/2)}),$$

$k=1, 2, \dots, n; i=0, 1, 2, \dots$

На микрокалькуляторе с входным языком ЯМК34 этим методом можно решать системы, содержащие до пяти уравнений простейшего вида, но при решении практических задач число уравнений и их сложность также ограничены ресурсом памяти.

Программа 207. Решение системы из четырех дифференциальных уравнений $x'_k = f_k(t; x_1, \dots, x_4)$ модифицированным методом Эйлера

ИП4 П8 ИП3 П7 ИП2 ПП 37 + П0 ИП9
2 × П9 ИП4 ИП8 П4 ↔ П8 ИП3 ИП7
П3 ↔ П7 ИП2 ИП6 П2 ↔ ПП 37 2
÷ П9 + П0 ИП5 П1 С/П П6 ... ИП9
× ИП4 + П4 ... ИП9 × ИП3 + П3
... ИП9 × ИП2 + П2 ... ИП9 × ИП1
+ П5 ИП0 ИП9 В/О

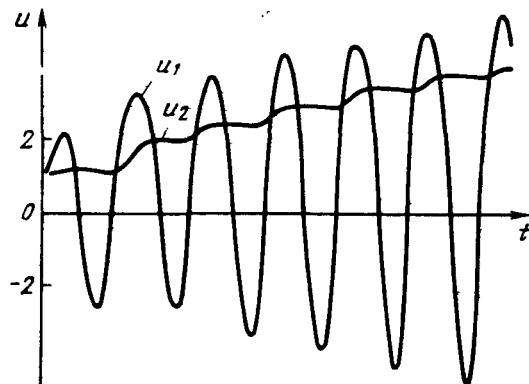


Рис. 32

Инструкция. Заменить многоточия фрагментами вычисления соответственно функций f_4, f_3, f_2, f_1 при $t = P0, x_1 = P5, x_2 = P6, x_3 = P7, x_4 = P8$ с использованием регистров памяти, кроме 0 ... 9; $h/2 = P9, t_0 = P0, x_1^{(0)} = P1 = P5, x_2^{(0)} = P2, x_3^{(0)} = P3, x_4^{(0)} = P4$ В/О С/П РХ = $P1 = x_1^{(1)}, P2 = x_2^{(1)}, P3 = x_3^{(1)}, P4 = x_4^{(1)}$, $P0 = t_0 + h$ В/О С/П РХ = ... В/О С/П РХ = $P1 = x_1^{(i)}, P2 = x_2^{(i)}, P3 = x_3^{(i)}, P4 = x_4^{(i)}$, $P0 = t_0 + ih$.

Пример. Для системы уравнений $x'_1 = x_2, x'_2 = x_3, x'_3 = x_4, x'_4 = 1 - 24x_1 - 50x_2 - 35x_3 - 10x_4$ при $t_0 = 0, x_1^{(0)} = 0, x_2^{(0)} = 2, x_3^{(0)} = -4, x_4^{(0)} = 2, h = 0,01$ получим ($t \approx 45$ с): $x_1^{(i)} = 0,0198; 0,039202033; 0,058208464; \dots; x_1(0,1) = 0,18040512; x_2^{(i)} = 1,9601; 1,9204207; 1,8809812; \dots; x_2(0,1) = 1,6129905, x_3^{(i)} = -3,97895; -3,9559266; -3,9310499; \dots; x_3(0,1) = -3,7140956; x_4^{(i)} = 2,2036; 2,3949359; 2,5745189; \dots; x_4(0,1) = 3,5416507$.

Программа 207 при решении системы с числом уравнений, меньшим четырех, соответственно сокращается, а ресурс памяти для записи уравнений увеличивается. При небольшом числе уравнений можно использовать методы интегрирования третьего или четвертого порядка, но в последнем случае удается реализовать решение систем, содержащих не более двух уравнений [!5].

Решение дифференциальных уравнений n -го порядка в нормальной форме

$$d^n x / dt^n = f(t; x, x', x'', \dots, x^{(n-1)})$$

подстановками $x_1 = x$, $x_2 = x'_1$, $x_3 = x'_2$, ..., $x_n = x'_{n-1}$ сводят к решению системы из n дифференциальных уравнений первого порядка $x'_1 = x_2$, $x'_2 = x_3$, ..., $x'_{n-1} = x_n$, $x'_n = f(t, x_1, \dots, x_n)$.

В этом случае для решения дифференциального уравнения n -го порядка можно использовать программы, подобные программе 207, причем требования к ресурсу памяти снижаются, так как достаточно обеспечить вычисление x'_n , а определение правых частей остальных уравнений сводится к вызову из памяти значений соответствующих переменных. Дополнительное увеличение ресурса памяти, остающегося после ввода базовой программы, обеспечивается использованием комбинированного метода второго порядка [15], реализованного следующей программой, результаты выполнения которой имеют несколько большую операционную погрешность, чем вычисленные по программе 207.

Программа 208. Решение дифференциального уравнения четвертого порядка $x^{IV} = f(t; x, x', x'', x''')$ комбинированным методом второго порядка

ИП4 П5	ПП	36	ПП	12	ПП	36	+	ПП
12	С/П	П4	ИП0	ИП9	+	П0	ИП5	ИП9
ИП3	+	П3	Вх	ИП9	×	ИП2	+	П2
ИП9	×	ИП1	+	П1	В/О	...	ИП9	×
								↑
								ИП5
								+
								В/О

Инструкция. Заменить многоточие фрагментом вычисления функции $f(t; x_1, x_2, x_3, x_4)$ эквивалентной системы уравнений первого порядка при $t=P0$, $x_1 = P1$, $x_2 = P2$, $x_3 = P3$, $x_4 = P4$ с использованием регистров, кроме 0, ..., 5, 9; $h/2 = P9$, $t_0 = P0$, $x(t_0) = x_1(t_0) = P1$, $x'(t_0) = x_2(t_0) = P2$, $x''(t_0) = x_3(t_0) = P3$, $x'''(t_0) = x_4(t_0) = P4$ В/О С/П RX = $x(t_0 + h)$ С/П RX = $x(t_0 + 2h)$... С/П RX = $P1 = x(t_0 + ih)$, $P2 = x'(t_0 + ih)$, $P3 = x''(t_0 + ih)$, $P4 = x'''(t_0 + ih)$, $P0 = t_i = t_0 + ih$.

Пример. Для уравнения $x^{IV} + 10x''' + 35x'' + 50x' + 24x = 1$, представив его системой уравнений, приведенной в примере к программе 207, при $x_1(0) = x(0) = 0$, $x_2(0) = x'(0) = 2$, $x_3(0) = x'' = -4$, $x_4(0) = x'''(0) = 2$, $h = 0,01$ получим ($t \approx 35$ с): $x(t_i) = 0,0199$; $0,039401$; ...; $x(0, 1) = 0,18133588$. Точное значение $x(0, 1) = 0,180489$ определяется аналитическим решением $x = 1 - e^{-t} + 2e^{-2t} - 3e^{-3t} + e^{-4t}$.

Если правая часть дифференциального уравнения явно не зависит от переменной t , то программы 207 и 208 можно несколько сократить, заменив, например, вычисление текущих значений t вычислением числа шагов (выполнений программы). По образцу программ 207 или 208 составляются рабочие программы для решения дифференциальных уравнений третьего или второго порядка. В последнем случае достаточно точное решение обеспечивает метод Рунге — Кutta четвертого порядка.

Программа 209. Решение уравнения $x'' = f(t, x, x')$ методом Рунге — Кутта четвертого порядка

ПП 42 ПП 38 П6 → ИП5 + П5 ПП
 38 П6 Вх ИП2 + П2 → → ИП1 +
 П1 → ИП5 + П5 ПП 42 ИП6 3 ÷
 П2 П4 ИП5 3 ÷ П1 П3 С/П ИП9 ИП0
 + П0 ... ИП9 × ИП2 ИП9 × ↑ ИП3
 + П1 → ↑ ИП5 + П5 → ↔ ↑
 ИП4 + П2 → ИП6 ↔ + П6 Вх +
 В/О

Инструкция. Заменить многоточие фрагментом вычисления функции $f(t; x, x')$ при $t_0=P0, x=P1, x'=P2$ с использованием регистров, кроме $0, \dots, 6, h/2=P9, t_0=P0, x(t_0)=P1=P3, x'(t_0)=P2=P4, 3x(t_0)=P5, 3x'(t_0)=P6$ В/О С/П RX=P3=x(t₀+h) С/П..С/П RX=P3=x(t_i), PY=P4=x'(t_i), P0=t_i.

Пример. Для уравнения $x'' = 1 - 3x' - 4x$ при $t_0 = 0, x(0) = 0, x'(0) = 3, h = 0,05$ получим ($t \approx 1$ мин): $x_i = 0,1369513; 0,25041171; 0,34386863; 0,4203151; \dots; x'_i = 2,4916049; 2,0584397; 1,6898102; 1,3765221; \dots$

Если нелинейное дифференциальное уравнение или систему таких уравнений не удается представить в нормальной форме, приходится использовать другие методы решения [4].

4.6. Анализ автоколебательных процессов

Автоколебания в виде периодических или скачкообразных изменений токов или напряжений возникают в радиотехнической цепи при нарушении условий ее устойчивости. Устойчивость цепей со слабыми сигналами, не изменяющими свойств цепи, предназначенный для работы в линейном режиме, оценивают методами, рассмотренными в гл. 3. Анализ устойчивости нелинейных цепей начинают с определения возможных состояний статического равновесия. Для этого решают нелинейное уравнение, получаемое из описывающего процессы в цепи дифференциального уравнения приравниванием нулю всех производных по времени. Последующий анализ связан с определением малосигнальных параметров цепи для каждого из возможных состояний статического равновесия. Эти параметры определяются по нелинейным статическим характеристикам $x(q)$ как производные по воздействию для заданного его значения [15] или $w = dx/dq \approx \Delta x/\Delta q = (x(q+\Delta q) - x(q))/\Delta q$.

Точность определения малосигнальных параметров w в основном определяется выбором величины Δq ; при больших его значениях возрастает методическая погрешность, при меньших — операционная погрешность, резко возрастающая, когда Δq становится соизмеримым с погрешностями округления операндов. В общем при $q \neq 0$ значение $\Delta q/q$ целесообразно выбирать в интервале $10^{-4} \leq \Delta q/q \leq 10^{-5}$.

Программа 210. Вычисление малосигнальных (дифференциальных) параметров $w = dx/dq$

П7 ↔ П8 ПП 17 П9 ИП7 ИП8 + П8
 ПП 17 ИП9 — ИП7 ÷ С/П ... В/О

Инструкция. Заменить многоточие фрагментом вычисления $x(q)$ при $q=P8$ и использованием регистров памяти, кроме 7, 8 и 9; $q=PY$, $\Delta q=PX$ В/О С/П $PX=w$.

Пример. Для статической характеристики полупроводникового диода $i=I_0(e^{\Lambda u}-1)$ с $I_0=1,5 \cdot 10^{-3}$ А, $\Lambda=6,5$ В⁻¹ при $u=0,3$ В и $\Delta u=0,001$; 0,0001; 0,000001 соответственно получим $g=\Delta i/\Delta u=0,687528$; 0,68545; 0,6847; 0,682 мСм; следовательно, можно принять $g=0,685$ мСм.

Вычисленные значения дифференциальных параметров позволяют построить линейное приближение характеристики в окрестности рабочей точки, соответствующей состоянию статического равновесия, и оценить устойчивость методами, используемыми для линейных цепей. Если цепь устойчива во всех состояниях статического равновесия, то автоколебания не возникают. Если цепь устойчива лишь в некоторых состояниях статического равновесия, то необходим анализ ее свойств вблизи каждого из таких состояний с учетом возможности возникновения как автоколебаний, так и скачкообразного перехода из неустойчивого в устойчивое состояние. Если же цепь неустойчива во всех состояниях статического равновесия, то неизбежно возникает автоколебательный процесс.

Анализ автоколебательных процессов связан с решением нелинейных дифференциальных уравнений, описывающих свойства рассматриваемой цепи. Практически используя программы решения таких уравнений, следует учитывать, что при анализе автоколебаний обычно пренебрегают слабыми внешними воздействиями (исключение составляет исследование синхронизации автоколебаний, анализ условий перехода из неустойчивого в устойчивое состояние при внешнем воздействии и изучение параметрических цепей) и описывают поведение цепи однородными нелинейными дифференциальными уравнениями с коэффициентами, явно не зависящими от времени. Это позволяет несколько упростить базовые программы решения дифференциальных уравнений.

Анализ релаксационных генераторов различных типов связан с рядом практических трудностей. Процессы в подобных генераторах обычно описывают дифференциальными уравнениями первого порядка $F(t; x, x')=0$, которые не всегда удается привести к нормальной форме $x'=f(t, x)$ в связи с неоднозначностью нелинейных зависимостей $t(u)$ или $u(t)$. Простейшим примером является параллельное соединение индуктивности и нелинейного безынерционного двухполюсника с неоднозначной характеристикой $u(i)$ или емкости и двухполюсника с неоднородными нелинейными дифференциальными уравнениями с коэффициентами, неоднозначное уравнение в нормальной форме, его правая часть при некоторых значениях переменной x стремится к бесконечности, что препятствует интегрированию уравнения с приемлемой точностью. Однако в таких случаях после скачкообразного релаксационного перехода переменная x в течение основной части периода имеет конечное значение, что допускает интегрирование обратного уравнения $dt/dx=\varphi(x)$ с использованием, например, формулы Симпсона, допускающей изменение шага и переменной в процессе вычислений.

Программа 211. Анализ процессов в релаксационных генераторах с вычислением обратной производной $dt/dx=\varphi(x)$

$$\begin{array}{l} P9 \text{ ПП } 23 \text{ ПП } 16 \text{ } 4 \times \text{ ПП } 16 \text{ ИП8} \\ + \text{ П8 ИП9 С/П БП } 01 \text{ ИП8 } + \text{ П8 ИП7} \\ \text{ИП9 } + \text{ П9 } \dots \text{ ИП7 } \times 3 \quad \div \text{ В/О} \end{array}$$

Инструкция. Заменить многоточие фрагментом вычисления $\Phi(x)$ при $t=P8$, $x=P9$ с использованием регистров, кроме 7, 8 и 9; $\Delta x/2=P7$, $t_0=P8$, $x_0=RX$ В/О С/П $PX=P9=x_1$, $PY=P8=t_1$; для вычисления t_i при $x_i=x_{i-1}+\Delta x$ выполнять С/П $PX=P9=x_i$, $PY=P8=t_i$; для вычисления t_i при заданном значении $x_i=x_{i-1}+\Delta x$ выполнить $x_{i-1}=RX$ (при необходимости изменяв $\Delta x/2$) В/О С/П $PX=P9=x_i$, $PY=P8=t_i$.

Для примера рассмотрим простейший релаксационный генератор, образованный соединением безынерционного нелинейного двухполюсника с характеристикой $u(i)=i(i^2\beta-a)$ и емкости C . Процессы в таком генераторе описывают дифференциальным уравнением $di/dt=i/C(a-3\beta i^2)$ с особой точкой $i_{ot}=\pm\sqrt{a/3\beta}$, в которой производная стремится к бесконечности. Однако вне особой точки интегрирование уравнения $dt/di=C(a-3\beta i^2)/i$ выполняется достаточно точно. Для удобства графического представления результатов и полного анализа процессов в рабочей программе, составленной на основе базовой программы 211, целесообразно предусмотреть вычисление напряжения на емкости $u=u(i)$.

Программа 212. Анализ процессов в параллельном соединении емкости C и безынерционного двухполюсника с характеристикой $u=i(i^2\beta-a)$

$$\begin{array}{ccccccccc}
 P9 & ПП & 30 & ПП & 23 & 4 & \times & ПП & 23 & ИП8 \\
 + & P8 & ИП9 & x^2 & ИПВ & \times & ИПА & — & ИП9 & \times \\
 С/П & БП & 01 & ИП8 & + & П8 & ИП7 & ИП9 & + & П9 \\
 ИПА & ИПВ & 3 & \times & ИП9 & x^2 & \times & — & ИПС & \times \\
 ИП9 & \div & ИП7 & \times & 3 & \div & ИП7 & \div & В/О
 \end{array}$$

Инструкция. ($a=PA$, $\beta=PB$, $C=PC$) $\Delta i/2=P7$, $0=P8$, $i_0=RX$ ($i_0 \neq 0$) В/О С/П $PX=u(t_1)$, $PY=P8=t_1$, $P9=i_0+\Delta i$ С/П...С/П $PX=u(t_i)$, $PY=t_i$, $P9=i_i$; если достигнута особая точка ($i=i_{ot}$), то принять другое значение $i_{pot}=RX$ В/О С/П ... (изменив при необходимости знак $\Delta i/2$).

Пусть $\alpha=3 \cdot 10^3$ В/А, $\beta=10^6$ В/А², $C=0,12 \cdot 10^{-6}$ Ф. Определены по статической характеристике $u(i)$ значения $u=2$ В, которым соответствуют (рис. 33) особые значения $i_{ot}=\pm 1 \cdot 10^{-3}$ А и $i_{pot}=\pm 2 \cdot 10^{-3}$ А, при $\Delta i/2=0,5 \cdot 10^{-4}$ А, $i_0=0,1 \cdot 10^{-3}$ А ($u_0=-0,299$ В) получим ($t \approx 25$ с) $u_i=-0,592$; $-0,873$; $1,116$; ...; -2 ; $t_i=2,446 \cdot 10^{-4}$; $3,816 \cdot 10^{-4}$; ...; $6,5123885 \cdot 10^{-4}$ ($i=1 \cdot 10^{-3}$); приняв $i=-2 \cdot 10^{-3}=RX$ находим $u_i=-1,159$; $-0,432$; ...; 2 ; $t_i=7,0297327 \cdot 10^{-4}$; $7,5010808 \cdot 10^{-4}$; ...; $9,4170585 \cdot 10^{-4}$ ($i=-1 \cdot 10^{-3}$); приняв $\Delta i/2=\Delta i/2=-5 \times 10^{-5}$ и $i_{pot}=2 \cdot 10^{-3}$, вычисляем $u_i=1,159$; $0,432$; ...; -2 ; $t_i=9,9344627 \times 10^{-4}$; $1,0405761 \cdot 10^{-3}$; ...; $1,232173 \cdot 10^{-3}$ ($i=1 \cdot 10^{-3}$)...

Во многих случаях при анализе релаксационных генераторов оправдана кусочно-линейная аппроксимация (особенно при ключевом режиме, характерном для мультивибраторов), позволяющая получить формулы, связывающие параметры типовых цепей с па-

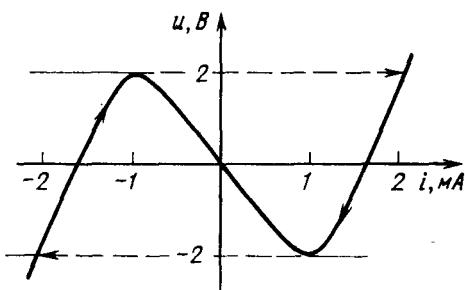


Рис. 33

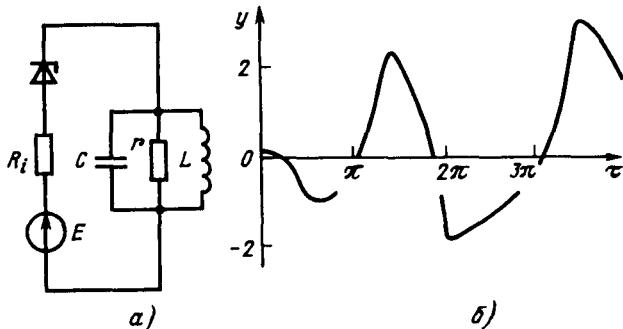


Рис. 34

параметрами генерируемых колебаний. Составление программ по таким формулам обычно не вызывает затруднений и поэтому здесь не рассматривается. Автоматизация вычислений в этих случаях целесообразна, например, при необходимости оптимизации параметров цепи для получения колебаний заданной формы, когда расчет приходится многократно повторять.

Автогенераторы, процессы в которых моделируются дифференциальными уравнениями второго порядка, часто генерируют автоколебания, близкие по форме к релаксационным. В этом случае для определения параметров генерируемых колебаний приходится решать дифференциальные уравнения второго порядка с нелинейной правой частью. Заменой $dx/dt = y$, $d^2x/dt^2 = dy/dt$ такие уравнения представляют системой из двух уравнений, для решения которой пригодны рассмотренные ранее базовые программы.

В качестве примера рассмотрим автогенератор на туннельном диоде (рис. 34, а), исходная рабочая точка которого выбрана на падающем участке вольт-амперной характеристики $i(u)$. Аппроксимируя эту характеристику многочленом третьей степени $i(u) = a_0 + a_1 u + a_2 u^2 + a_3 u^3$, коэффициенты которого определяются ранее рассмотренными методами аппроксимации (с учетом уравнения $u = E - u_d$, связывающего напряжение на выводах диода и контура), составим дифференциальное уравнение

$$i(u) + C (du/dt) + u/R + (1/L) \int u dt = 0.$$

После дифференцирования получим исходное уравнение

$$\frac{d^2 u}{dt^2} + \frac{1}{RC} \frac{du}{dt} + \frac{1}{C} \frac{di(u)}{du} \frac{du}{dt} + \omega_0^2 u = 0,$$

где $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$; $di(u)/du = a_1 + 2a_2 u + 3a_3 u^2$.

Для сокращения числа операндов обозначим $\tau = \omega_0 t$,

$$y = (|3a_3 R/(1+a_1 R)|)^{-1/2} u, \alpha = (1+a_1 R)/(\omega_0 RC),$$

$\beta = 2a_2 R/(|3a_3 R/(1+a_1 R)|)^{1/2}$, записав уравнение в виде

$$d^2 y/d\tau^2 - \alpha (1 \pm \beta y \pm y^2) dy/d\tau + y = 0,$$

где знаки членов в скобках совпадают со знаком подкоренного выражения для переменной y . Приняв $x=dy/d\tau$, представим это уравнение системой из двух дифференциальных уравнений первого порядка

$$dx/d\tau = -\alpha(1 \pm \beta y \pm y^2)x - y; \quad dy/d\tau = x,$$

содержащих всего два коэффициента. Для составления рабочей программы возьмем за основу базовую программу 207.

Программа 213. Анализ автоколебаний в LC-генераторе на туннельном диоде

$$\begin{array}{ccccccccc} \text{ПП 14} & \times & \text{П7} & \text{ПП 14} & \div & \text{П7} & \text{КИП6} & \text{ИП2} \\ \text{П5} & \text{ИП1} & \text{П4} & \text{С/П} & \text{ИП2} & \text{ИП7} & \times & \text{ИП4} \\ \text{ИП1} & \text{ИПВ} & + & \text{ИП1} & \times & 1 & + & \text{ИПА} \times & \text{ИП2} \\ \times & \text{ИП1} & - & \text{ИП7} & \times & \text{ИП5} & + & \text{П2} & \text{ИП3} & \text{П1} \\ \text{ИП7} & 2 & & & & & & & & \text{В/О} \end{array}$$

Инструкция. $h/2=\text{П7}$, $a=\text{РА}$, $\beta=\text{РВ}$, $y_0=\text{Р1}=\text{Р4}$, $x_0=\text{Р2}=\text{Р5}$ В/О С/П РХ= y С/П ... С/П РХ= $\text{Р1}=\text{Р4}=y_i$, $\text{Р6}=i$ (число шагов или число выполнений программы).

Пример. Для $R=0,25$ кОм, $L=50$ мкГн, $C=800$ пФ, $i(u)=30-10u+2u^2+0,8u^3$ (напряжение, В; ток, мА); $\omega_0=5 \cdot 10^6$ с, $-\alpha=-1,5$, $\beta=-1,054092$, $h/2=\pi/40$, $x_0=0$, $y_0=0,1$ ($y=1,265u$) получим $y_i=0,0987663$; 0,094464806; 0,086397439; Результаты вычислений отображены в виде графика на рис. 34,б

Распространенным методом исследования автогенераторов, свойства которых моделируют дифференциальными уравнениями второго порядка, является отображение автоколебаний на фазовой плоскости с координатами x и $y=dx/dt$. Анализ процессов в такой системе координат позволяет свести исходное нелинейное уравнение вида $d^2x/dt^2+f(x, dx/dt)=0$ к уравнению первого порядка $dy/dx=-f(x, y)/y$ при замене $dx/dt=y$, $d^2x/dt^2=(dy/dx)y$.

Для построения фазовых траекторий удобен δ -метод *, согласно которому на каждом $(i+1)$ -м шаге построения фазовых траекторий элементарный участок рассматривается как дуга окружности с центром в точке $x_{i+1}=-\delta_i=-(x_i-f(x_i, y_i))$. Задаваясь углом поворота $\Delta\phi$ вокруг этого центра, координаты изображающей точки на $(i+1)$ -м шаге $x_{i+1} \approx (x_i+\delta_i)\cos\Delta\phi+y_i\sin\Delta\phi-\delta_i$ и $y_{i+1} \approx y_i\cos\Delta\phi-(x_i+\delta_i)\sin\Delta\phi$ выражают через координаты, вычисленные на предыдущем шаге.

Программа 214. Построение фазовых портретов автогенераторов

$$\begin{array}{ccccccccc} \cos \text{П4} & \text{Вх} & \sin \text{П5} & \dots & \uparrow & \text{ИП7} & + & \text{П6} \\ \text{ИП4} & \times & \leftrightarrow & - & \text{ИП8} & \text{ИП5} & \times & + & \text{П7} & \text{ИП4} \\ \text{ИП8} & \times & \text{ИП6} & \text{ИП5} & \times & - & \text{П8} & \text{С/П} & \text{БП 05} \end{array}$$

Инструкция. Установить переключатель Р—ГРД—Г в нужное положение; заменить многоточие фрагментом вычисления $\delta(x, y)$ при $x=\text{П7}$, $y=\text{П8}$ с использованием регистров 0..3,9...Д; $x_0=\text{П7}$, $y_0=\text{П8}$, $\Delta\phi=\text{РХ}$ В/О С/П РХ= $\text{П8}=y_1$, РY= $\text{П7}=x_1$ С/П РХ= y_2 , РY= x_2 С/П ...

В качестве примера рассмотрим анализ колебаний в автогенераторе, моделируемом уравнением Ван-дер-Поля

$$d^2x/dt^2 + \epsilon(1-x^2)dx/dt + x = 0$$

или после замены $dx/dt=y$

* См. Каннигхэм М. Введение в теорию нелинейных систем: Пер. с англ. / Под ред. Е. Б. Пастернака. — М.: Наука, 1974. — 460 с.

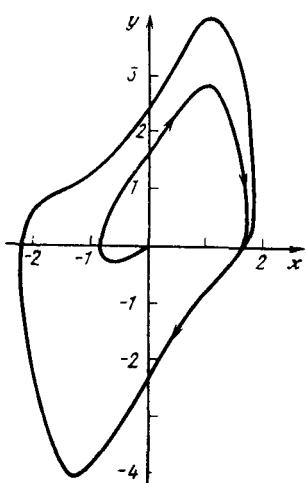


Рис. 35

екторин по формуле $t_{i+1} = t_i + 2(x_{i+1} - x_i)/(y_{i+1} + y_i)$ и организовать вывод значений x_i и t_i после каждого выполнения программы. Следует быть особенно внимательным при прохождении участков с $y_i \approx 0$, когда возможна большая операционная погрешность, особенно в случае случайного совпадения $y_{i+1} \approx -y_i$, избежать которого в подобной ситуации можно, изменяв $\Delta\varphi$.

Если есть основания полагать, что в установившемся режиме форма колебаний близка к гармонической, то рассмотренные методы анализа применять нецелесообразно в связи со значительными затратами времени. В этих случаях обычно используют квазилинейные методы расчета, основанные на замещении всех нелинейных элементов цепи линейными (относительно мгновенного значения гармонического колебательного процесса) моделями, параметры которых зависят от амплитуды воздействия. Для дальнейшего анализа применимы программы, рассмотренные в § 4.3.

Для ориентировочного расчета средних параметров квазилинейных цепей, определяемых отношениями амплитуды первой гармоники реакции к амплитуде воздействия (в автогенераторах им является воздействие, передаваемое на вход по цепи обратной передачи), целесообразно использовать следующую программу, обеспечивающую приемлемую точность при достаточно гладкой нелинейной характеристике.

Программа 215. Оценка средних параметров нелинейных элементов

```

П7 ↔ П6 Сх П8 ИП6 ИП7 — ПП 30
ПП 25 /—/ П8 ИП7 ПП 28 ПП 25 3
÷ ↑ ИП7 ÷ С/П ИП7 2 ÷ ИП9 +
П9 ... ИП8 + П8 В/О

```

Инструкция. Заменить многоточие фрагментом вычисления аппроксимирующей функции $x(q)$ при $q=P9$ и использовании регистров, кроме 6..9; по-

$$\frac{dy}{dx} = -(x + \delta(x, y))/y, \text{ где } \delta(x, y) = \\ = \varepsilon(1-x^2)y.$$

Заменив многоточие в базовой программе 214 фрагментом вычисления функции δ , получим рабочую программу, по которой при $\varepsilon = -2$, $x_0 = 0,001$, $y_0 = 0$, $\Delta\varphi = \pi/24$ последовательно вычисляем ($i \approx 10$ с) $x_i = 9,91444 \cdot 10^{-4}$; $9,63692 \cdot 10^{-4}$; $9,12206 \cdot 10^{-4}$; ...; $y_i = -1,30526 \times 10^{-4}$; $-2,9289 \cdot 10^{-4}$; ...; $4,92634 \cdot 10^{-4}$; ... Графическое представление результатов вычислений (рис. 35) показывает, что изображающая точка выходит на предельный цикл практически в течение одного периода, максимальное значение колебаний близко к 2, а их форма существенно отличается от гармонической.

Движение изображающей точки можно развернуть по оси времени, введя приближенное вычисление интервала Δt прохождения каждого элементарного участка фазовой тра-

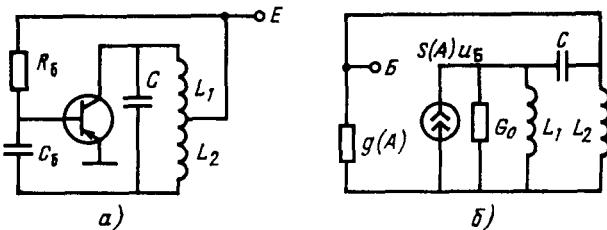


Рис. 36

стоянная составляющая воздействия $q_0 = PY$, амплитуда $q_m = PX$ В/О С/П $PX = F_{cp} = x_m/q_m$, $PY = x_{m1}$.

Рассмотрим вычисление средней крутизны $S_{cp} = I_{Km1}/U_{BEm}$ биполярного транзистора при использовании аппроксимации $i_K = I_0 \exp(\Lambda U_{B\beta}) / (1 + B \exp(\Lambda U_{B\beta}))$.

Заменив в программе 215 многоточие фрагментом ИП0 ИП1 ИП9 $\times e^x \times Bx$ ИПВ $\times 1 \div$, при $I_0 = 10^{-3}$ мА = Р0, $\Lambda = 30$ В $^{-1}$ = Р1, $B = 2 \cdot 10^{-4}$ мА = РВ для $U_{B\beta0} = 0$, $U_{BEm} = 0,05$ В получим $S_{cp} = 0,039322$ мА/В, для $U_{B\beta0} = U_{BEm} = -0,2$ В получим $S_{cp} = 13,20336$ мА/В.

Дальнейший расчет выполняют методами расчета линейных цепей, включая анализ устойчивости и определение зависимости корней определителя матрицы коэффициентов уравнения равновесия от амплитуды автоколебаний (если они возникают) для определения стационарной амплитуды. Проиллюстрируем применение квазилинейного метода на примере автогенератора (рис. 36,а), эквивалентная схема которого (рис. 36,б) составлена для средних значений крутизны $S(A)$ и входной проводимости $g(A)$, зависящих от амплитуды напряжения A на базе транзистора. Полагая для рабочих частот $g(A) \gg \omega C_B$ и учитывая проводимость резистора R_B в величине $g(A)$, получим квазилинейное уравнение автогенератора

$$\begin{bmatrix} g(A) + pC + 1/pL_2 & -pC \\ S(A) - pC & G_0 + pC + 1/pL_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix}$$

с определителем матрицы коэффициентов $\Delta(p) = p^3 L_2 C (g(A) + S(A) + G_0) + p^2 (L_1 L_2 C g(A) + C(L_1 + L_2)) + p (L_2 g(A) + L_1 G_0) + 1$. Согласно критерию Райусса – Гурвица находим, что возбуждение автоколебаний могут возникнуть при выполнении условия

$$S(A) > g(A) G_0 (L_2 g(A) + L_1 G_0) / C + L_2 g(A) / L_1 + L_1 G_0 / L_2.$$

Выполнение этого неравенства при $A=0$ (в этом случае средние параметры равны дифференциальным) свидетельствует о мягком самовозбуждении автогенератора, стационарная амплитуда соответствует превращению этого неравенства в равенство. Если же неравенство выполняется только при $A>0$, то возможно жесткое самовозбуждение, соответствующее выполнению одного из двух условий равенства, при котором выполняется условие $dRe p_k/dA < 0$ устойчивости амплитуды.

Частоту автоколебаний определяют при подстановке в $\Delta(p)$ значений $S(A_{ct})$ и $g(A_{ct})$, учитывая, что определитель имеет пару корней на оси $j\omega$ и поэтому должен делиться без остатка на $p^2 + \omega_{ct}^2$. Так, при $\Delta(p)/(p^2 + \omega_{ct}^2) = (a_3p^3 + \dots + a_2p^2 + a_1p + a_0)/(p^2 + \omega_{ct}^2)$ остаток от деления обращается в нуль при $p = j\omega_{ct}$.

Все расчеты при использовании квазилинейных методов выполнимы с помощью микрокалькулятора, но допустимость применения этих методов часто требует дополнительной проверки. Во многих случаях анализ установления автоколебаний упрощается при использовании методов цифрового моделирования (см. гл. 6), а также разностных схем [15].

Глава 5

Расчет усилителей

5.1. Особенности расчета

Отношение полезной мощности в нагрузке линейного проходного четырехполюсника к полезной мощности, поступающей на его вход от источника гармонического сигнала, называют коэффициентом передачи входной полезной мощности

$$K_P = \frac{\text{Re}(u_h i_h^*)}{\text{Re}(u_{bx} i_{bx}^*)} = \frac{\text{Re}y_h}{\text{Re}y_{bx}} |K_U|_c|^2 / \text{Re}y_{bx}, \quad (5.1)$$

где звездочкой отмечены комплексно-сопряженные величины; $K_U = u_h/u_{bx}$ — коэффициент передачи входного напряжения; $y_{bx} = i_{bx}/u_{bx}$ — входная проводимость.

Реальные источники сигнала характеризуются конечной внутренней проводимостью $y_c = 1/z_c$ (рис. 37, а, б) и коэффициентом передачи полезной мощности сигнала

$$K_{P_c} = \frac{\text{Re}(u_h i_h^*)}{\text{Re}(u_{bx} i_{bx}^*)} = \frac{\text{Re}y_h}{\text{Re}y_{bx}} |K_U|_c|^2 K_{P_{bx}} K_P, \quad (5.2)$$

где коэффициент передачи напряжения сигнала $K_U = u_h/e_c = K_{U_{bx}} K_U$, коэффициент передачи напряжения входной цепи $K_{U_{bx}} = u_{bx}/e_c = y_c/(y_c + y_{bx})$, коэффициент передачи полезной мощности входной цепи $K_{P_{bx}} = \text{Re}y_{bx}|K_{U_{bx}}|^2/\text{Re}y_{bx}$ с и эквивалентная проводимость на выводах идеального источника сигнала $y_{bx} c = u_{bx}/e_c = y_c y_{bx}/(y_c + y_{bx})$.

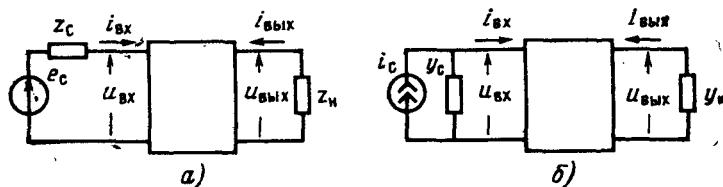


Рис. 37

Отражения сигнала от входа проходного четырехполюсника отсутствуют при комплексном согласовании на входе ($y_c = y_{bx}$), но коэффициент передачи полезной мощности сигнала достигает наибольшего (достижимого) значения $K_d = 0,5K_p$ при сопряженном согласовании на входе ($y_c = y_{bx}^*$). Это значение максимально при одновременном сопряженном согласовании на входе и выходе ($y_c = y_{bx}^*$, $y_{bx} = y_h^*$), где выходную проводимость $y_{bx} = i_{bx}/u_{bx}$ определяют при $e = 0$ и замене нагрузки идеальным источником напряжения u_{bx} .

Коэффициент передачи полезной мощности обычно выражают в десятичных единицах измерения отношения мощностей (дбизбела)

$$K_{P_c} [\text{дБ}] = K_{P_{bx}} [\text{дБ}] + 10 \lg (\text{Re } y_h \text{ Re } y_{bx}) + 20 \lg |K_U|. \quad (5.3)$$

Коэффициент передачи мощности цепи, образованной каскадно соединенными проходными четырехполюсниками (см. рис. 12,д)

$$K_{P_c} [\text{дБ}] = K_{P_{bx}} [\text{дБ}] + 10 \lg (\text{Re } y_h \text{ Re } y_{bx1}) + 20 \sum_{i=1}^n \lg |K_{Ui}|, \quad (5.4)$$

где y_{bx1} — входная проводимость первого и K_{Ui} — коэффициент передачи входного напряжения i -го проходного четырехполюсника. Частотная характеристика коэффициента передачи напряжения определяется амплитудно-частотной характеристикой (АЧХ)

$$|K_{U_c}(\omega)| = |K_{U_{bx}}(\omega)| \prod_{i=1}^n |K_{Ui}(\omega)| \quad (5.5)$$

и фазочастотной характеристикой (ФЧХ)

$$\Phi_{U_c}(\omega) = \Phi_{U_{bx}}(\omega) + \sum_{i=1}^n \Phi_{Ui}(\omega). \quad (5.6)$$

Влияние проходного четырехполюсника на передачу сигнала оценивают также отношением K_{P_0} полезной мощности $|u_h|^2 \text{Re } y_h$ в нагрузке проходного четырехполюсника к мощности $|u_{h0}|^2 \text{Re } y_h$, выделяемой в нагрузке при непосредственном присоединении к ней источника сигнала. Если $\text{Re } y_h = g_h$ и $\text{Re } y_c = g_c$ (мнимые части полных проводимостей могут быть отнесены к проходному четырехполюснику), то

$$|u_{h0}|^2 g_h = |e_c|^2 g_c^2 g_h / (g_c + g_h)^2 \text{ и } K_{P_0} = ((g_c + g_h)/g_c)^2 |K_{U_c}|^2, \text{ где } K_{P_0} = |K_{U_0}|^2 = |u_h/u_{h0}|^2.$$

При согласовании (с помощью трансформатора без потерь) проводимостей источника сигнала и нагрузки в последней выделяется максимальная мощность $|u_{h0}|^2 g_h = ((g_c + g_h)/g_c)^2 |K_{U_c}|^2$ и

$$K_{P_c0} = |K|^2 = 4 (g_h/g_c) |K_{U_c}|^2, \quad (5.7)$$

где $K = u_h/u_{h0c}$.

Следовательно, функции $K(p)$, $K_{U_0}(p)$ и $K_{U_c}(p)$ в операторной или частотной областях различаются лишь постоянным множителем, с точностью до которого они характеризуются одинаковой частотной характеристикой $K(j\omega)$.

В случае пассивного проходного четырехполюсника предельное значение $K_{P_{c0}} = 1$ достигается при отсутствии потерь в четырехполюснике. Если $K_{P_{c0}} < 1$ и влияние проходного четырехполюсника проявляется в уменьшении мощности в нагрузке, то передачу сигнала через такой четырехполюсник называют *затуханием*. Амплитудно-частотную характеристику затухания обычно оценивают в децибелах по формуле

$$A = A(\omega) [\text{дБ}] = 10 \lg (1 / |K(\omega)|^2) = -20 \lg |K(\omega)|. \quad (5.8)$$

Если $K_{P_{c0}} > 1$, то передачу сигнала называют *усилением*, а нагруженный проходной четырехполюсник — *усилителем*. Усилители обязательно содержат активные компоненты, преобразующие энергию источника питания в энергию сигнала. Для обеспечения заданного усиления мощности усилители обычно собирают из нескольких соединенных каскадно усилительных ступеней, образованных активными компонентами с цепями их питания и элементами связи.

Расчет усилителя с заданными характеристиками чаще всего сводят к ориентировочному выбору его структурной схемы, расчету характеристик по выбранным параметрам компонентов и при их несоответствии заданным, уточнению выбора компонентов и схемы их соединения. Пассивные компоненты обычно моделируют схемами замещения с учетом их рабочих и паразитных (если они оказывают заметное влияние в рабочем диапазоне частот) параметров. Основные трудности при расчете усилителей связаны с моделированием свойств активных компонентов, существенно зависящих от режима питания. При этом используют различные модели для постоянного тока, малых и больших (влияющих на свойства усилителя) сигналов. При расчете усилителей на постоянном токе и больших низкочастотных сигналах свойства активных компонентов описывают графическими или буквенными моделями, аппроксимирующими уравнения, связывающие токи и напряжения на входах компонента. Свойства двухполюсных компонентов, нелинейных при больших уровнях воздействий, описывают статическими характеристиками $i(u)$ или $u(i)$, выбирая для расчетов характеристику с однозначной функциональной зависимостью. Свойства активных трехполюсников при сильных воздействиях в общем случае описывают системой из двух нелинейных уравнений или соответственно двумя семействами статических характеристик, связывающих токи и напряжения на двух входах эквивалентного нелинейного проходного четырехполюсника. Примером могут служить уравнения (4.5) для биполярного транзистора.

Если значение одной из входных переменных пренебрежимо мало, то связь между остальными переменными описывают одним нелинейным уравнением или графически одним семейством характеристик. Статические характеристики $I_C = f(U_{ЗИ}, U_{СИ})$ полевых транзисторов с пренебрежимо малым током затвора в области малых напряжений ($U_{СИ} \ll U_{отс} - U_{ЗИ}$) моделируют уравнением

$$I_C = I_{\max} (3U_{СИ}/U_{отс} - 2((U_{СИ} + U_{ЗИ})/U_{отс})^{3/2} + 2(U_{ЗИ}/U_{отс})^{3/2}), \quad (5.9)$$

а в области больших напряжений ($U_{СИ} > U_{отс} - U_{ЗИ}$) — уравнением

$$I_C = I_{\max} (1 + (U_{ЗИ}/U_{отс}) 2 \sqrt{U_{ЗИ}/U_{отс}} - 3), \quad (5.10)$$

где $I_{\max} = I_C$ при $U_{ЗИ} = 0$, $U_{СИ} = U_{отс}$.

Статические характеристики МДП-транзисторов с учетом влияния напряжения U_n подложки для $U_{СИ} \ll U_{отс} - U_{ЗИ}$ моделируют выражением

$$I_C = S_y (2 (U_{ЗИ} \pm U_{отс} - \eta U_n) U_{СИ} - (1 - \eta) U_{СИ}^2), \quad (5.11)$$

а в области $U_{СИ} > U_{отс} - U_{ЗИ}$ — формулой

$$I_C = S_y (U_{ЗИ} \pm U_{отс} - \eta U_n),$$

где η — коэффициент влияния напряжения подложки U_n , $S_y = I_{\max}/U_{отс}^2$ — удельная крутизна, знак минус выбирают для транзисторов с индуцированным, а знак плюс — встроенным каналом.

При необходимости построения статических характеристик по взятым из справочников значениям параметров в соответствии с формулами (5.9) — (5.11) несложно составить программы, упрощающие вычисления тока стока при заданных значениях напряжений.

Для расчета усилителей при малых сигналах в качестве исходных обычно используют модели компонентов цепи в виде схем замещения с частотно-независимыми (например, R , L и C) или операторными малосигнальными (дифференциальными) параметрами, описываемыми в рабочем диапазоне частот графиками частотных характеристик или рациональными функциями комплексной частоты.

Компонент цепи при малых сигналах представим на каждом k -м независимом входе параллельным соединением проводимости y_{kk} и идеального источника тока $i_{ki} = y_{k1}u_1 + \dots + y_{kn}u_n$, управляемого напряжениями на остальных входах. Подобную модель двухвходового (в частности, трехполюсного) компонента несложно эквивалентно преобразовать в удобную для расчетов модель с одним зависимым источником (рис. 38, а, б).

Свойства дискретных активных компонентов с двумя входами при малых сигналах описывают в паспортных данных параметрами эквивалентного линейного проходного четырехполюсника, измеренными относительно одного из выводов компонентов, принимаемого в качестве общего узла (например, h - или y -параметрами биполярного транзистора для схемы с общей базой или общим

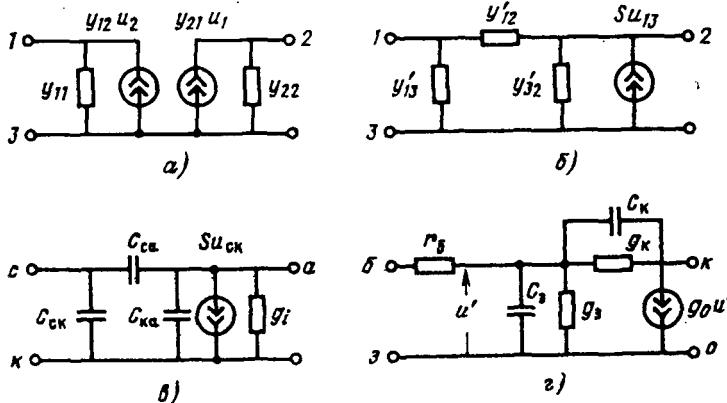


Рис. 38

эмиттером). Так как при расчетах часто приходится использовать характеристические параметры, тип которых отличается от типа параметров, приводимых в справочниках или паспортных данных активных компонентов, то возникает задача преобразования параметров. Для этого при неизменном выборе общего узла используют формулы табл. 9, вычисления по которым можно автоматизировать для вещественных параметров с помощью программы 92, а для комплексных — программ 15, 17 и 128. Если необходимо определить параметры эквивалентного четырехполюсника для другой схемы включения, то следует найти эквивалентные проводимости для исходной схемы включения, построить неопределенную матрицу проводимостей и вычеркнуть в ней строку и столбец, соответствующие требуемому выбору общего узла (если моделируемый компонент не соединен с общим узлом, то при расчете используют все 9 параметров неопределенной матрицы проводимостей). При необходимости по полученным проводимостям для требуемой схемы включения с помощью формул табл. 3.4 находят характеристические параметры другого типа.

Программа 216. Построение неопределенной матрицы проводимостей трехполюсника

$$\begin{array}{l} \text{П5 } /-\!/\leftrightarrow \text{ П4 } -\text{ П6 } \rightarrow \text{ П8 } /-\!/\leftrightarrow \\ \text{П7 } -\text{ П9 } /-\!/\text{ ИП6 } -\text{ П3 } \text{ ИП8 } /-\!/\text{ ИП5} \\ -\text{ П2 } \text{ ИП7 } /-\!/\text{ ИП4 } -\text{ П1 } \text{ С/П} \end{array}$$

Иструкция. $y_{11}=PT$, $y_{12}=PZ$, $y_{21}=PY$, $y_{22}=PX$ В/О С/П $PX=P1=y_{31}$, $PY=P2=y_{32}$, $P3=y_{33}$, $P6=y_{23}$, $P9=y_{13}$, $P7=y_{11}$, $P8=y_{12}$, $P4=y_{21}$, $P5=y_{22}$ ($t \approx 8$ с); если исходные параметры — комплексные числа, то повторить вычисления для вещественных и мнимых составляющих; если исходные параметры — многочлены от p , то повторить вычисления для слагаемых с одинаковыми степенями p .

Пример. Для определения эквивалентных проводимостей транзистора в схеме с общим эмиттером по h -параметрам транзистора в схеме с общей базой $h_{33}=h_{11B}=20$ Ом, $h_{32}=h_{12B}=5 \cdot 10^{-5}$, $h_{23}=h_{21B}=0,98$, $h_{22}=h_{22B}=3 \cdot 10^{-6}$ См находим согласно формулам табл. 9 для схемы с общей базой $y_{33}=y_{11B}=-5 \cdot 10^{-2}$ См, $y_{32}=y_{12B}=-2,5 \cdot 10^{-5}$ См, $y_{23}=y_{21B}=-4,9 \cdot 10^{-2}$ См, $y_{22}=y_{22B}=2,75 \cdot 10^{-5}$ См и с помощью программы 216 вычисляем остальные элементы неопределенной матрицы проводимостей транзистора

$$\begin{bmatrix} y_{33} & y_{32} & y_{36} \\ y_{23} & y_{22} & y_{26} \\ y_{63} & y_{62} & y_{66} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \cdot 10^{-2} & -2,5 \cdot 10^{-5} & -4,9975 \cdot 10^{-2} \\ -4,9 \cdot 10^{-2} & 2,75 \cdot 10^{-5} & 4,89725 \cdot 10^{-2} \\ -1 \cdot 10^{-3} & -2,5 \cdot 10^{-6} & 1,0025 \cdot 10^{-3} \end{bmatrix},$$

по которой находим искомые параметры $y_{66}=1002,5$ мкСм, $y_{62}=-2,5$ мкСм, $y_{26}=48972,5$ мкСм, $y_{36}=27,5$ мкСм.

При выборе из справочных данных и преобразовании характеристических параметров проходных четырехполюсников, эквивалентных трехполюсным активным компонентам, необходимо учитывать корреляцию между значениями этих параметров, так как в противном случае результаты использования параметров могут оказаться ошибочными. Пусть, например, y -параметры транзистора в схеме с общей базой из примера к программе 216 являются среднестатистическими с допуском 5 % (в действительности разброс этих параметров значительно

больше). Если в пределах этого допуска уменьшить все параметры лишь на 4 %, прияняв $y_{\text{Э}} = 4,8 \cdot 10^{-2}$ См, $y_{\text{К}} = -2,6 \cdot 10^{-5}$ См, $y_{\text{КЭ}} = 5,096 \cdot 10^{-2}$ См, $y_{\text{КК}} = -2,64 \cdot 10^{-5}$ См, то определитель матрицы проводимостей транзистора в схеме с общей базой $\Delta = y_{\text{КК}}y_{\text{ББ}} - y_{\text{КБ}}y_{\text{ЭК}}$ окажется отрицательным, что противоречит условию устойчивости биполярного транзистора в рабочей области и при использовании таких параметров приведет к ошибочным последующим результатам.

Причина подобных ошибок (возникающих и при неудачном округлении значений параметров) связана с зависимостью характеристических параметров эквивалентного проходного четырехполюсника от общих физических факторов, приводящей к корреляции значений параметров. Этих ошибок можно избежать, используя «физические» схемы замещения активных компонентов, элементы которых отображают определенные достаточно независимые физические явления. Примером могут служить простейшие схемы замещения электронных ламп с частотно-независимыми параметрами (см. рис. 38,а), аналогичные им схемы замещения МДП и полевых транзисторов, а также схема замещения биполярного транзистора (рис. 38,г). Эти схемы несложно преобразовать в схемы замещения эквивалентного проходного четырехполюсника, подобные показанным на рис. 38,а и б, но параметры последних окажутся зависимы от всех параметров исходных «физических» схем замещения и, следовательно, их значения будут коррелированными.

Отмеченная корреляция характеристических параметров многополюсников и соответствующих им элементов матриц коэффициентов уравнений равновесия цепи приводит, в частности, к необходимости выполнять вычисления с максимальной разрядностью при округлении до требуемого числа верных цифр лишь конечных результатов.

Рабочую область частот усилителя для упрощения расчета обычно разбивают на части с характерными особенностями. В области низких частот и большей части рабочего диапазона паразитными реактивными параметрами активных компонентов полностью преиебрегают, описывая их свойства вещественными числами, в области средних частот для широкополосных усилителей преиебрегают всеми реактивными параметрами цепи и лишь вблизи верхней границы рабочего диапазона частот учитывают влияние реактивностей. Вещественные составляющие параметров активных компонентов измеряют на достаточно низких частотах или приближенно определяют по наклону касательных к статическим характеристикам [10] (при их графическом отображении) в рабочей точке или дифференцированием соответствующих аналитических выражений. Так, для приближенной оценки малосигнальных проводимостей транзистора в схеме с общей базой целесообразно упростить уравнения (4.5), прияняв $I_B R_b \ll U_{\text{ЭБ}}$ и $U_{\text{КБ}} \gg U_{\text{ЭБ}}$. Тогда

$$\begin{aligned} y_{11B} &= y_{\text{ЭЭ}} = dI_{\text{Э}}/dU_{\text{ЭБ}} = I_{\text{ЭО}} B_1; \\ y_{12B} &= y_{\text{ЭК}} = dI_{\text{К}}/dU_{\text{ЭБ}} = -\alpha_N I_{\text{ЭО}} B_1; \\ y_{21B} &= y_{\text{КЭ}} = dI_{\text{Э}}/dU_{\text{КБ}} = -\alpha_I I_{\text{КО}} B_2; \\ y_{22B} &= y_{\text{КК}} = dI_{\text{К}}/dU_{\text{КБ}} = I_{\text{КО}} B_2, \end{aligned} \quad (5.12)$$

где $B_1 = \Lambda(\exp(\Lambda U_{\text{ЭБ}}))/(1 - \alpha_N \alpha_I)$, $B_2 = \Lambda(\exp(\Lambda U_{\text{КБ}}))/(1 - \alpha_N \alpha_I)$.

В связи с приближенной аппроксимацией статических характеристик уравнениями (4.5) и принятными упрощающими допущениями вычисленные по этим формулам малосигнальные параметры транзистора целесообразно использовать лишь для оценки зависимости эквивалентных проводимостей от выбора рабочей точки.

Программа 217. Приближенное вычисление низкочастотных проводимостей транзистора в схеме с общей базой

$$\begin{array}{l} \text{ИПД} \times e^x \leftrightarrow \text{ИПД} \times e^x \leftrightarrow \text{ИПВ ИПС} \\ \times 1 \leftrightarrow -\text{ИПД} \div \text{П9} \div \text{ИПА} \times \\ \text{П7} 0 \text{ ИПС} - \times \text{П8} \leftrightarrow \text{ИП9} \div \text{ИП0} \\ \times \uparrow \text{ИПВ} 0 \leftrightarrow - \times \text{С/П БП} 00 \end{array}$$

Инструкция. ($I_{\text{ЭО}} = P0$, $I_{\text{КО}} = P1$, $\alpha_N = PB$, $\alpha_I = PC$, $\Lambda = PD$) $U_{\text{ЭБ}} = PY$, $U_{\text{КБ}} = RX$ (B/O) С/П RX = $y_{21B} = y_{\text{кэ}}$, $PY = y_{11B} = y_{\text{ээ}}$, $P7 = y_{22B} = y_{\text{кк}}$, $P8 = y_{12B} = y_{\text{эк}}$ ($t \approx 15$ с).

Пример. Для $I_{\text{ЭО}} = I_{\text{КО}} = 1 \cdot 10^{-5}$ А, $\alpha_N = 0,995$, $\alpha_I = 0,75$, $\Lambda = 39$ В $^{-1}$ при $U_{\text{ЭБ}} = 0,1$ В, $U_{\text{КБ}} = -1$ В получим $y_{11B} = 7,5928 \cdot 10^{-2}$ См, $y_{12B} = -1,33117 \cdot 10^{-20}$ См, $y_{21B} = -7,55492 \cdot 10^{-2}$ См, $y_{22B} = 1,7749 \cdot 10^{-20}$ См.

Рабочую точку полевых транзисторов в усилителях обычно выбирают в пологой области выходных характеристик ($U_{\text{СИ}} > U_{\text{отс}} - U_{\text{ЗИ}}$). Дифференцируя (5.10) по напряжению $U_{\text{ЗИ}}$, получим

$$S = S_{\max} (1 - \sqrt{U_{\text{ЗИ}}/U_{\text{отс}}}),$$

где значение $S_{\max} = 3 I_{\max}/U_{\text{отс}}$ соответствует $U_{\text{ЗИ}} = 0$, $U_{\text{СИ}} = U_{\text{отс}}$.

На начальном крутом участке стоковых (выходных) характеристик, которые иногда используют для регулировки усиления, согласно выражению (5.9) получаем

$$S = S_{\max} (\sqrt{U_{\text{СИ}} + U_{\text{ЗИ}}} - \sqrt{U_{\text{ЗИ}}}) / \sqrt{U_{\text{отс}}}.$$

Программа 218. Вычисление крутизны S полевого транзистора в схеме с общим истоком

$$\begin{array}{l} \text{П6} \rightarrow \text{П7} \leftrightarrow \text{П8} - \leftrightarrow \text{П9} - x \geq 0 \\ 25 \text{ ИП9 ИП8} + \sqrt{\text{ИП8}} \sqrt{-} \text{ИП6} \times \\ \text{ИП7} \sqrt{\div} \text{БП} 33 1 \text{ ИП8 ИП7} \div \sqrt{} \\ - \text{ИП6} \times \text{С/П БП} 00 \end{array}$$

Инструкция. $U_{\text{СИ}} = PT$, $U_{\text{ЗИ}} = PZ$, $U_{\text{отс}} = PY$, $S_{\max} = RX$ (B/O) С/П RX = S ($t \approx 8$ с).

Пример. Для $S_{\max} = 0,15$ мСм, $U_{\text{отс}} = 3$ В, $U_{\text{СИ}} = 2$ В, $U_{\text{ЗИ}} = 1,5$ В ($U_{\text{СИ}} > U_{\text{отс}} - U_{\text{ЗИ}}$) получим $S \approx 0,0439$ мСм и при $U_{\text{ЗИ}} = 0,1$ В ($U_{\text{СИ}} < U_{\text{отс}} - U_{\text{ЗИ}}$) получим $S \approx 0,09811$ мСм.

Подобные программы применимы лишь для ориентировочной оценки зависимостей параметров активных компонентов от режима питания, а для расчета характеристик усилителя на частоте сигнала приходится использовать более точные значения малосигнальных параметров, измеренных или взятых из справочников для выбранного режима работы.

Расчет каскадного усилителя после выбора его структурной схемы в соответствии с заданием мощностью сигнала в нагрузке, коэффициентом усиления мощности и частотной характеристикой усиления начинают с окончной ступени (нагрузка которой известна), вычисляя для каждой ступени коэффициент передачи напряжения и входную проводимость (являющуюся проводимостью нагрузки для предыдущей ступени) в заданном диапазоне частот. После вычисления этих значений для всех ступеней в соответствии с формулами (5.5) и (5.6) определяют частотную характеристику усиления напряжения, по которой определяют (при известных проводимостях источника сигнала и входной проводимости усилителя, равной входной проводимости первой ступени) коэффициент усиления полезной мощности в заданном диапазоне частот. При несовпадении полученных результатов с требованиями технического задания уточняют выбор структурной схемы и компонентов цепи, повторяя расчет.

Мощность сигнала максимальна в нагрузке окончной ступени (называемой иногда мощным усилителем), потребляющей основную часть энергии источника питания. Поэтому окончную и при необходимости предокончную ступени с большим уровнем сигнала на средних частотах часто рассчитывают с помощью статических характеристик активных компонентов, обеспечивая допустимый уровень искажений при максимальном уровне входного сигнала и максимальный КПД $= P_{\text{в}}/P_0$, где $P_{\text{в}}$ — полезная мощность в нагрузке; P_0 — мощность потребления. Вычисления в этом случае несложны и в настоящей книге не рассматриваются.

5.2. Расчет цепей питания усилителя

В большинстве усилителей цепи питания отдельных ступеней разделены с помощью трансформаторов или конденсаторов и поэтому могут рассчитываться независимо. При проектировании усилителя задача расчета цепи питания сводится к выбору схемы и сопротивлений постоянному току для обеспечения требуемых характеристик усиления и их стабильности при максимальном в общем случае КПД. Расчет цепи питания активного компонента начинают с выбора рабочей точки по статическим характеристикам [10] или паспортным данным. Рабочая точка однозначно задается для трехполюсного компонента двумя постоянными токами или напряжениями, и для определения остальных токов и напряжений в цепи питания приходится использовать графические или аналитические модели статических характеристик.

Рассмотрим обобщенную схему цепи питания биполярного транзистора (рис. 39), размыкая или замыкая ветви которой, можно получить практически все схемы питания от одного источника. Представив уравнения (4.5) приближенными соотношениями

$$I_{\text{Э}} = I_0 (\exp(\Lambda U_{\text{ЭБ}}) - 1); \quad I_K = -\alpha_N I_{\text{Э}}, \quad (5.13)$$

где $I_0 = I_{\text{Э}0}/(1 - \alpha_N \alpha_I)$; $I_{\text{Э}} - I_K = I_B$, составим [14] уравнение

$$U_{\text{ЭБ}} = (1/\Lambda) \ln(AE + BU_{\text{ЭБ}} + 1),$$

связывающее напряжение $U_{\text{ЭБ}}$ с параметрами обобщен-

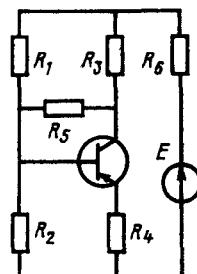


Рис. 39

ной схемы питания. В этом уравнении приняты обозначения

$$A = (af - b)/cI_0 (f - \alpha_N), \quad B = (1 - fh) (cI_0 (f - \alpha_N)),$$

где $a = 1 + G_1 R_3 = 1 + R_3/R_1$; $b = 1 + G_2 R_4 = 1 + R_4/R_2$; $c = aR_4 + bR_3 + abR_6$; $d = 1 + G_1 R_6 = 1 + R_6/R_1$; $f = bd + G_6 c + G_1 R_4 = bd + c/R_6 + R_4/R_1$; $h = G_3 R_3 + a(1 + G_2 R_6) = R_3/R_2 + a(1 + R_6/R_2)$.

После решения этого уравнения относительно $U_{\text{ЭБ}}$ и вычисления токов по формулам (5.13) можно найти

$$U_{\text{КБ}} = CE + DU_{\text{ЭБ}}, \quad \text{где } C = (a\alpha_N - b)/(f - \alpha_N); \quad D = (1 - \alpha_N h)/(f - \alpha_N).$$

Программа 219. Расчет статического режима биполярного транзистора для заданной схемы питания

$$\begin{array}{l} \text{П8 ИП8 ИП3} \times \text{ ИП2} + \text{ln ИП1} \div \text{ ИП8} \\ \leftrightarrow \text{ П8} - \text{x}^2 \text{ ИП7} - \text{x} < 0 \text{ 01 ИП8 ИП1} \\ \times \text{ e}^x \text{ 1} - \text{ ИП6} \times \text{ ПА} \uparrow \text{ ИП0} \times \\ \text{ПВ} - \text{ П9 ИП8 ИП5} \times \text{ ИП4} + \text{ ПД С/П} \end{array}$$

Инструкция. ($\alpha_N = P0$, $\Lambda = P1$, $AE + 1 = P2$, $B = P3$, $CE = P4$, $D = P5$, $I_0 = P6$, квадрат предельной абсолютной погрешности вычисления напряжения база – эмиттер $e^2 = P7$) $U_{\text{БЭ нач}} = RX$ В/О С/П $RX = RD = U_{\text{КБ}}$, $P8 = U_{\text{ЭБ}}$, $P9 = I_B$, $PA = I_E$, $PB = I_K$.

В связи с приближенностью уравнений (5.13) и исходных данных результаты вычислений по этой программе имеют невысокую точность, но для многих задач (например, для сравнительной оценки влияния параметров цепи питания на изменения постоянных токов и напряжений на выводах транзистора) она оказывается достаточной.

Пример. Для $R_1 = 100$ кОм, $R_2 = 20$ кОм, $R_3 = 1$ кОм, $R_4 = 1$ кОм, $R_5 = 50$ кОм, $R_6 = 0,5$ кОм, $\Lambda = 39 \text{ В}^{-1}$, $\alpha_{N\text{ст}} = 0,99$, $I_0 = 0,01$ мА, $E = -10$ В при $a = 1,01$, $b = 1,05$, $c = 2,59025$, $d = 1,005$, $f = 1,117055$; $h = 1,08525$, $|E|A + 1 = 238,6921$, $B = -64,50334$, $C|E| = -3,943174$, $D = -0,5855535$, $e = 0,001$, $U_{\text{БЭ нач}} = 0$ получим ($t \approx 20$ с) $U_{\text{ЭБ}} = 0,139$ В, $U_{\text{КБ}} = -4,025$ В, $I_E = 2,287$ мА, $I_K = 2,265$ мА, $I_B = 0,0022$ мА.

Результаты вычислений по этой программе можно также использовать для ориентировочного вычисления проводимостей транзистора по программе 217 в расчетной рабочей точке.

Мощность, потребляемая от источника питания,

$$P_0 = ((I_E R_4 + U_{\text{ЭБ}})/R_2 + I_E) E, \quad (5.14)$$

где все величины приняты положительными независимо от типа транзистора и полярности напряжений питания.

Стабильность режима питания в рассматриваемой обобщенной схеме повышается при увеличении глубины обратной связи по постоянному току. Эту стабильность можно оценить по чувствительности $S_K(B)$ тока коллектора к изменениям статического коэффициента усиления тока, равного отношению токов, устанавливающихся в зависимости от параметров цепи питания $B = I_K/I_B$, и отличающегося от параметра h_{12B} , измеряемого при фиксированном напряжении на коллекторе. Для этого по уравнению Кирхгофа, связывающего токи

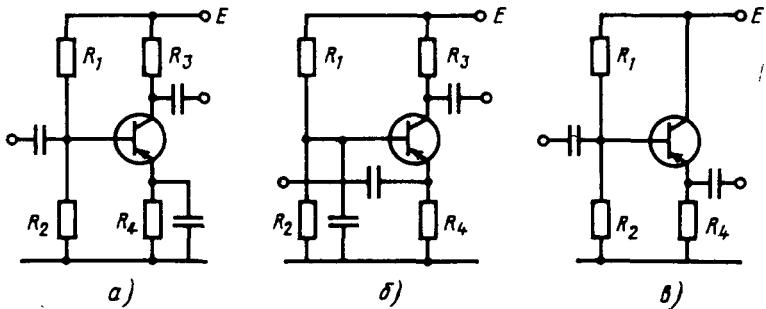


Рис. 40

и напряжения в статическом режиме (исключая напряжение $U_{\text{КБ}}$, мало влияющее на изменение тока коллектора в рабочей области статических характеристик), примем $I_K = BI_B(I_K)$, откуда получим

$$S_K(B) = BdI_K/I_K dB = 1/(1 + I_K/I_B(1 + 1/(R_3 G_5 + R_4 G_2(1 + R_3 G_5) + (R_4 + R_6 + R_4 R_6 G_2)(G_1 + G_5 + G_1 G_5 R_3)))) ,$$

где $G_1 = 1/R_1$; $G_2 = 1/R_2$; $G_5 = 1/R_5$.

По этой формуле можно определить чувствительность $S_K(B)$ для любой схемы питания биполярного транзистора, полученной из рассматриваемой обобщенной схемы питания, размыкая, например, сопротивления R_1 ($G_1 = 0$), R_2 ($G_2 = 0$), R_5 ($G_5 = 0$) и короткозамыкая некоторые остальные. При синтезе цепи питания, обеспечивающей требуемый режим, на все или некоторые сопротивления накладываются ограничения, связанные с их влиянием на усиление сигнала. В усилителях малых сигналов, предназначенных для работы в линейном режиме, чаще всего используют схему питания (рис. 40, а—б), обеспечивающую достаточно высокую стабильность рабочей точки вследствие отрицательной обратной связи последовательного типа через сопротивления R_4 и R_2 . В наиболее распространенной схеме включения транзистора с общим эмиттером (рис. 40, а) для устранения обратной связи на частоте сигнала сопротивление R_4 шунтируют конденсатором большой емкости, а в RC -усилителях цепи питания транзисторов изолируют разделительными конденсаторами на входе и выходе, причем входной конденсатор обычно относят к схеме предыдущей ступени усиления.

При расчете рассматриваемой схемы питания задаются сопротивлением R_3 , шунтирующим нагрузку ступени усиления, и сопротивлением R_2 , уменьшение которого повышает глубину обратной связи по постоянному току и стабильность режима, но уменьшает усиление ступени и увеличивает мощность потребления. Значения остальных сопротивлений при заданном режиме питания транзистора и напряжения источника E вычисляют по формулам $R_4 = (E - I_K R_3 - U_{\text{КЭ}})/(I_B + I_K)$; $R_1 = (E - U_{\text{БЭ}} - I_E R_4)/((I_E R_4 + U_{\text{БЭ}})/R_2 + I_B)$. При этом мощность потребления в рассматриваемой схеме питания определяется формулой (5.14), а чувствительность $S_K(B) = 1/(1 + I_K R_4(G_1 + G_2)/I_B(1 + (G_1 + G_2)R))$.

Выбрав исходными напряжения $U_{\text{БЭ}}$ и $U_{\text{КЭ}}$, сопротивления R_2 и R_3 резисторов и параметры I_0 , $\alpha_{\text{нест}} \approx h_{21B}$ и Λ модели Эберса — Молла для би-

полярных транзисторов, можно определить все остальные величины по приведенным формулам и уравнениям (5.13).

Программа 220. Расчет стандартной схемы питания биполярного транзистора

$$\begin{array}{ccccccccc}
 \text{П8} & \leftrightarrow & \text{П7} & \text{ИП6} & \times & e^x & 1 & - & \text{ИП0} \times \\
 \text{ПА} & \text{ИП5} & \times & \text{ПВ} & \text{ИП9} & \text{ИПВ} & \text{ИП3} & \times & - \text{ИП8} \\
 - & \text{ИПA} & \div & \text{П4} & \text{ИПA} & \times & \text{ИП7} & + & \text{ПС} \text{ ИП2} \\
 \div & \text{ИПA} & + & \text{ИП9} & \times & \text{ПД} & \text{ИП9} & \text{ИПС} & - \text{ИПС} \\
 \text{ИП2} & \div & \text{ИПA} & \text{ИПВ} & - & \text{ПС} & + & \div & \text{П1} \frac{1}{x} \\
 \text{ИП2} \frac{1}{x} & + & \text{ИП4} & \times & \uparrow & 1 & + & \leftrightarrow & \text{ИПA} \\
 \times & \text{ИПС} & \div & 1 & + & \div & \text{C/P} & &
 \end{array}$$

Инструкция. ($I_0 = P_0$, $R_2 = P_2$, $R_3 = P_3$, $\alpha_{N\text{ст}} = P_5$, $\Lambda = P_6$, $E = P_9$)
 $U_{B\Theta} = PY$, $U_{K\Theta} = PX$ В/О С/П $PX = S_k(B)$, $P1 = R_1$, $P4 = R_4$, $PA = I_\Theta$, $PB = I_K$, $PC = I_B$, $PD = P_0(t \approx 25 \text{ с})$.

Пример. Для $I_0 = 0,02 \text{ мА}$, $R_2 = 5 \text{ кОм}$, $R_3 = 7 \text{ кОм}$, $\alpha_{N\text{ст}} = 0,95$, $\Lambda = -39 \text{ В}^{-1}$, $U_{B\Theta} = 0,1 \text{ В}$, $U_{K\Theta} = 2 \text{ В}$, $E = 9 \text{ В}$ получим $S_k(B) \approx 0,00673$, $R_1 \approx 46,1 \text{ кОм}$, $R_4 \approx 581 \text{ Ом}$, $I_\Theta \approx 0,968 \text{ мА}$, $I_K \approx 0,919 \text{ мА}$, $I_B \approx 0,048 \text{ мА}$, $P_0 \approx 9,9 \text{ мВт}$

Рассмотренные формулы и реализующие их программы пригодны для расчета статического режима и для других схем включения транзистора на частоте сигнала, но в этом случае изменяются требования к значениям сопротивлений резистивных ветвей цепи питания. При включении транзистора на частоте сигнала по схеме с общей базой (рис. 40, б) в RC -усилителях сопротивление R_4 шунтирует вход усилителя, а увеличение сопротивлений R_1 и R_2 снижает потребляемую мощность, но уменьшает и стабильность статического режима в связи с уменьшением глубины обратной связи по постоянному току. При включении транзистора по схеме с общим коллектором (рис. 40, в) сопротивление в цепи коллектора короткозамкнуто и в приведенных выше формулах и программе 220 следует принять $R_3 = 0$. В этом случае при уменьшении сопротивления R_2 стабильность режима питания повышается, но снижается входное сопротивление. Иногда сопротивление R_2 исключают, что приводит к снижению стабильности режима питания вследствие разрыва цепи обратной связи (если она не замыкается через источник сигнала).

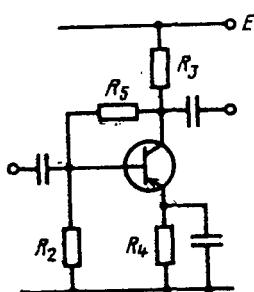


Рис. 41

Параллельная обратная связь снижает входное и выходное сопротивления усилителя при включении транзистора по схеме с общим эмиттером, но может оказаться приемлемой при включении транзистора на частоте сигнала по схеме с общей базой. Иногда используют комбинированную схему питания с параллельной и последовательной обратной связью (рис. 41), получающуюся из обобщенной схемы питания при $1/R_1 = 0$. В этом случае мощность потребления определяется формулой (5.14), а постоянные токи и напряжения связаны системой из уравнений (5.13) и уравнений

$$R_4 = ((E - U_{K\Theta}) R_2 - (U_{B\Theta} + I_3 R_2) R_3) / I_\Theta (R_2 + R_3);$$

$$R_5 = (U_{K\Theta} - U_{B\Theta}) / (I_B + (I_\Theta R_4 + U_{B\Theta}) / R_2);$$

$$S_K(B) = (R_6 + R_3 + R_4 + R_4 (R_3 + R_6) / R_2) / (R_3 + (R_4 + R_3 + R_4 (R_3 + R_6) / R_2) I_\Theta / I_B).$$

Программа 221. Расчет комбинированной схемы питания биполярного транзистора

ИП1	ИП7	\times	e^x	1	$-$	ИП0	\times	ПА	\uparrow
ИП6	\times	$-$	ПВ	ИП9	ИП8	$-$	ИП7	ИП2	\div
ИПА	$+$	ИП3	\times	$-$	ИП3	ИП2	\div	1	$+$
ИПА	\times	\div	П4	ИПА	\times	ИП7	$+$	ИП2	\div
\uparrow	ИПА	$+$	ИП9	\times	ПС	\rightarrow	ИПВ	$+$	ИП8
ИП7	$-$	\leftrightarrow	\div	П5	ИП3	$+$	ИП4	\times	ИП2
\div	ИП4	$+$	ИП3	$+$	ПД	ИП5	$+$	ИПД	ИПА
\times	ИПВ	\div	ИП5	$+$	\div	С/П			

Инструкция. ($I_0 = P_0$, $\Lambda = P_1$, $R_2 = P_2$, $R_3 = P_3$, $\alpha = P_6$, $U_{B\Theta} = P_7$, $|U_{K\Theta}| = P_8$, $|E| = P_9$) В/О С/П РХ = $S_K(B)$, Р4 = R_4 , Р5 = R_5 , РА = I_Θ , РВ = I_B , РС = P_0 ($t \approx 30$ с).

Пример. Для $I_0 = 0,02$ мА, $\Lambda = 39$ В $^{-1}$, $\alpha = 0,95$; $R_2 = 5$ кОм, $R_3 = 7$ кОм, $|U_{B\Theta}| = 0,1$ В, $|U_{K\Theta}| = 2$ В, $E = 9$ В получим $S_K(B) \approx 0,190398$, $R_4 \approx 0,036$ кОм, $R_5 \approx 25,2$ кОм, $I_\Theta \approx 0,968$ мА, $I_B \approx 0,0484$ мА, $P_0 \approx 8,96$ мВт.

Схемы питания полевых транзисторов проще. Наиболее распространенная схема питания от одного источника с последовательной отрицательной обратной связью по постоянному току (рис. 42) обеспечивает удовлетворительную стабильность статического режима при изменениях температуры. Одной из основных причин температурной нестабильности является падение напряжения теплового тока затвора I_3 на сопротивлении R_3 , приводящее к дрейфу тока стока. В усилителях рабочую точку полевых транзисторов обычно выбирают на пологих участках стоковой статической характеристики при $U_{CSI} > U_{otc} - U_{ZII}$. В рабочем режиме напряжения U_{ZII} имеются две термостабильные точки U_{ZIO} и U_{ZII} , обеспечивающие соответственно постоянство тока стока или крутизны характеристики прямой передачи при изменениях температуры в широком интервале. Температурный дрейф снижается при уменьшении сопротивления R_3 , но при этом уменьшается входное сопротивление в схеме включения транзистора на частоте

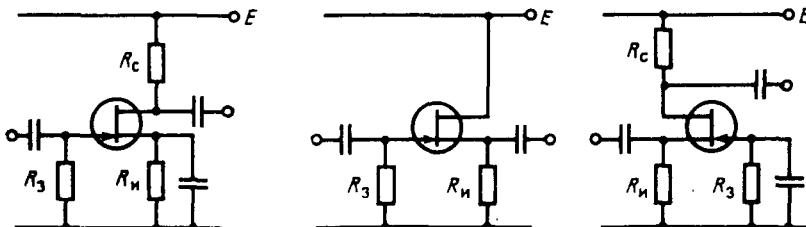


Рис. 42

сигнала с общим истоком или общим стоком. Поэтому выбирают R_3 в пределах от нескольких десятков килоом до нескольких мегаом.

При изменениях теплового тока затвора I_3 изменяется падение напряжения на величину $\Delta I_3 R_3$, что приводит к изменениям тока стока $\Delta I_C = S \Delta U_{3И}$. В рассматриваемой схеме эти изменения связаны соотношениями $\Delta U_{3И} = -\Delta I_3 R_3 - \Delta I_C R_{и} = \Delta I_3 R_3 - S \Delta U_{3И} R_{и}$, или $\Delta U_{3И} = \Delta I_3 R_3 / (1 + S R_{и})$. Следовательно, зависимость стабильности режима питания от сопротивлений R_3 и $R_{и}$ можно приблизенно оценить по чувствительности напряжения $U_{3И}$ к изменениям тока I_3 :

$$S_{3И}(I_3) = I_3 dU_{3И} / dI_3 = I_3 R_3 / (U_{3И} (1 + R_{и} S_{\max}) \times (1 + \sqrt{U_{3И} / U_{отс}})).$$

В рабочем режиме постоянные токи и напряжения полевого транзистора связаны уравнениями $U_{СИ} = E - I_C(R_c + R_{и})$, $U_{3И} = I_3 R_3 - I_C R_c$ и (5.10), а мощность потребления $P_0 = I_C E$.

Программа 222. Расчет типовой схемы питания полевого транзистора с $p-n$ -затвором

ИП9 ИП7 —	ИП8 —	x<0 63	ИП7 ИП9	÷					
П2	v	2	×	3	—	ИП2	×	1	+
ИП6	×	П0	ИП5	×	ПС	ИП7	ИП0	÷	ПА
ИП5	ИП7	ИП8	+	—	ИП0	÷	ПВ	ИП2	v
1	+	3	×	ИП6	×	ИП9	÷	ПД	ИПА
×	1	+	ИП7	×	1/x	ИП1	×	ИП4	×
C/П	БП	00	Cx	C/П					

Инструкция. ($I_3 = P1$, $R_3 = P4$, $E = P5$, $I_{\max} = P6$, $U_{3И} = P7$, $U_{СИ} = P8$, $U_{отс} = P9$) (В/О) С/П РХ = $S_{3И}(I_3)$, Р0 = I_C , РА = $R_{и}$, РВ = R_c , РС = P_0 , РД = S ; если рабочая точка выбрана ошибочно при $U_{СИ} < U_{отс} - U_{3И}$, то высвечивается 0.

Пример. Для $I_3 = 10^{-3}$ мА, $R_3 = 100$ кОм, $E = 9$ В, $I_{\max} = 1$ мА, $U_{3И} = 2$ В, $U_{СИ} = 4$ В, $U_{отс} = 5$ В получим $S_{3И}(I_3) \approx 6,75 \cdot 10^{-3}$, $I_C \approx 0,305$ мА, $R_{и} \approx 6,536$ кОм, $R_c \approx 9,8$ кОм, $P_0 \approx 2,75$ мВт, $S \approx 0,979$ мСм.

Расчет статических режимов усложняется при непосредственном соединении нескольких активных компонентов. Если режим питания каждого активного компонента может быть выбран независимо, то, задавшись двумя токами или напряжениями для рабочей точки каждого транзистора, по уравнениям (5.13) или более точным соотношениям, рассмотренным в гл. 4, следует определить остальные токи и напряжения на выводах транзистора. После этого достаточно составить и решить линейную относительно всех переменных систему уравнений, связывающую токи и напряжения на выводах транзисторов с сопротивлениями резистивных ветвей схемы питания. При этом необходимо учитывать возможность самовозбуждения на постоянном токе, которая может возникнуть в общей части цепи питания и при разделении ступеней усиления по постоянному току конденсаторами или трансформаторами.

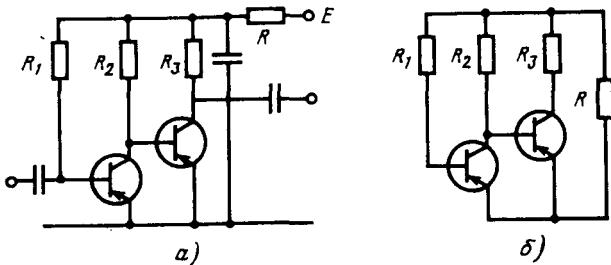


Рис. 43

В качестве примера рассмотрим схему, показанную на рис. 43, а, при $R_1 = 200$ кОм, $R_2 = 20$ кОм, $R_3 = 10$ кОм и однотипных транзисторах с малосигнальными проводимостями $y_{11} = y_{66} = 1$ мСм, $y_{12} = y_{65} = -2$ мкСм, $y_{21} = y_{56} = 40$ мСм, $y_{22} = y_{55} = 0,1$ мСм. По эквивалентной схеме на рис. 43, б для медленных изменений токов и напряжений составим матрицу проводимостей

$$\begin{bmatrix} y_1 + y_{66} & y_{65} & 0 & -y_1 \\ y_{56} & y_{55} + y_{66} + y_2 & y_{65} & -y_2 \\ 0 & y_{56} & y_{55} + y_3 & -y_3 \\ -y_1 & -y_2 & -y_3 & y_1 + y_2 + y_3 + G \end{bmatrix} = \\ = \begin{bmatrix} 1005 & -2 & 0 & -5 \\ 40000 & 1150 & -2 & -50 \\ 0 & 40000 & 200 & -100 \\ -5 & -50 & -100 & 160 + G \end{bmatrix},$$

где все величины выражены в микросиенсах, $y_1 = 1/R_1$, $y_2 = 1/R_2$, $y_3 = 1/R_3$, $G = 1/R$.

Из условия самовозбуждения на постоянном токе $\Delta = \Delta^0 + G\Delta_{44} = 0$ для определителя составленной матрицы находим критическое значение $G = -\Delta^0/\Delta_{44} = -1,702$ мСм. Следовательно, для устойчивости режима питания необходимо выбрать $R \leq 580$ Ом или изменить другие параметры анализируемой цепи.

5.3. Расчет усилителей на средних частотах

В основной части полосы пропускания (на средних частотах) широкополосных усилителей влияние паразитных инерционных параметров пренебрежимо мало и все параметры усилителя полагают вещественными. В некоторых случаях (например, на частоте резонанса) допустимо пренебрежение реактивными составляющими параметров и при расчете некоторых характеристик узкополосных усилителей.

При анализе цепи передачи сигнала методом узловых напряжений источник сигнала целесообразно представлять эквивалентным источником тока $i_c = e_c y_c$ с проводимостью y_c . В этом случае на средних частотах подобная цепь описывается вещественной матрицей

$$Y = \begin{bmatrix} y_c + y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} + y_n \end{bmatrix}, \quad (5.15)$$

где y_{11} , y_{12} , y_{21} и y_{22} — характеристические проводимости проходного четырехполюсника, эквивалентного ненагруженному усилителю.

Подобная модель применима как для усилителя в целом, так и для отдельных его ступеней — в последнем случае проводимостью y_c является выходная проводимость предыдущей ступени, а y_n — входной проводимостью следующей. При непосредственном присоединении идеального ($z_c = 0$) источника напряжения ко входу по матрице (5.15) получим

$$K_U = u_n / u_{bx} = \Delta_{12} / \Delta_{11} = -y_{21} / (y_n + y_{22}); \quad (5.16)$$

$$K_P = u_n^2 y_b / u_{bx}^2 y_{bx} = y_n \sim K_U^2 / y_{bx}; \quad (5.17)$$

$$K_I = i_n / i_{bx} = -u_n y_n / u_{bx} y_{bx} = -K_P / K_U; \quad (5.18)$$

$$y_{bx} = i_{bx} / u_{bx} = \Delta^c / \Delta_{11} = y_{11} + y_{12} K_U; \quad (5.19)$$

$$y_{vых} = i_{vых} / u_{vых} = \Delta^e / \Delta_{22} = y_{22} - y_{12} y_{21} / (y_c + y_{11}), \quad (5.20)$$

где Δ^c и Δ^e — значения Δ соответственно при $y_c = 0$ и $y_n = 0$.

При конечной проводимости источника сигнала

$$K_{U_c} = u_n / e_c = y_c u_c / i_c = g_c \Delta_{12} / \Delta = -y_c y_{21} / ((y_c + y_{11}) (y_n + y_{22}) - y_{12} y_{21});$$

$$K_{P_c} = K_{P_{bx}} K_P,$$

где при $i_c = e_c y_c$ коэффициент передачи мощности на выходе $K_{P_{bx}} = y_c / (y_c + y_{bx})$. В этом случае располагаемый коэффициент усиления мощности, соответствующийnominalной мощности источника сигнала $0,25e_c^2 y_c$ при согласовании на выходе,

$$K_d = 4y_n K_{U_c}^2 / y_c = y_n K_U^2 / y_c. \quad (5.21)$$

Программа 223. Расчет усилителя на средних частотах

$$\begin{array}{ccccccccc} \text{ИП7} & \text{ИП4} & \text{ИП5} & \text{ИП2} & + & \div & \text{ПА} & \text{ИП8} & \times & - \\ \text{ПС} & \text{ИП2} & \leftrightarrow & \div & \text{ИПА} & \times & \text{ПВ} & \text{ИПА} & \times & \lg \\ 1 & 0 & \times & \text{П0} & \text{ИПА} & /- & \text{ПА} & \text{ИП5} & \text{ИП4} & \text{ИП8} \\ \times & \text{ИП1} & \text{ИП7} & + & \div & - & \text{П3} & \text{ИП1} & \uparrow & \text{ИПС} \\ + & \div & \text{П9} & \text{ИПА} & \times & \text{ПД} & \text{ИП9} & \lg & 1 & 0 \\ \times & \text{ИП0} & + & \text{С/П} & & & & & & \end{array}$$

Инструкция. ($y_{11} = P7$, $y_{12} = P8$, $y_{21} = P4$, $y_{22} = P5$, $y_c = P1$, $y_n = P2$)
В/О С/П РХ = K_{P_c} (дБ), Р0 = K_P (дБ), РА = K_U , РВ = K_I , РС = y_{bx} , РД = K_{U_c} ,
Р3 = $y_{vых}$, Р9 = $K_{P_{bx}}$ ($t \approx 25$ с).

Пример. Для $y_{11} = 1$ мСм, $y_{12} = -1 \cdot 10^{-3}$ мСм, $y_{21} = -100$ мСм, $y_{22} = -0,1$ мСм, $y_c = 0,1$ мСм, $y_n = 0,2$ мСм получим $K_{P_c} = 36,387$ дБ, $K_P = 45,229$ дБ, $K_U = 333,33$, $K_I = -100$, $y_{bx} = 0,6666$ мСм, $y_{vых} = 0,00909$ мСм, $K_{U_{bx}} = 0,1304$, $K_{U_c} = 43,478$.

При выборе структурной схемы усилителя по заданному коэффициенту усиления мощности приходится оценивать максимальный достижимый (распола-

гаемый) коэффициент усиления мощности каждого каскада. Его максимальное значение на средних частотах

$$K_{P\max} = (y_{21}/(\sqrt{y_{11}y_{22}} + \sqrt{\Delta^0}))^2 \quad (5.22)$$

(где $\Delta^0 = y_{11}y_{22} - y_{12}y_{21}$) соответствует оптимальным проводимостям источника сигнала и нагрузки

$$y_{c\text{опт}} = \sqrt{\Delta^0} y_{11}/y_{22}; \quad y_{n\text{опт}} = \sqrt{\Delta^0} y_{22}/y_{11}, \quad (5.23)$$

обеспечивающим полное согласование усилителя.

При полном согласовании по условиям (5.23) коэффициент передачи входного напряжения $K_U \text{ опт} = -y_{21}/(y_{22} + y_{n\text{опт}})$ и коэффициент передачи напряжения сигнала $K_U^c \text{ опт} = 0,5 K_U \text{ опт}$.

Программа 224. Расчет согласованного усилителя на средних частотах

$$\begin{array}{l} \text{ИП5 ИП7} \times \text{П9 ИП8 ИП4} \times \text{—} \quad \nu \quad \text{П6} \\ \text{ИП9} \quad \nu \quad + \quad \text{ИП4} \leftrightarrow \quad \div \quad x^2 \quad \text{П0} \quad \text{ИП4} \quad /-/- \\ \text{ИП6 ИП7 ИП5} \quad \div \quad \nu \quad \times \quad \text{ПА} \quad \text{Вх} \quad x^2 \quad \div \\ \text{ПВ} \quad \text{ИП5} \quad + \quad \div \quad 2 \quad \div \quad \text{ПС} \quad \text{ИП0} \quad /-/- \quad \text{ИПС} \\ \div \quad \text{ПД} \quad \text{ИП0} \quad \lg \quad 1 \quad 0 \quad \times \quad \text{С/П} \end{array}$$

Инструкция. ($y_{11} = P_7$, $y_{12} = P_8$, $y_{21} = P_4$, $y_{22} = P_5$) В/О С/П РХ = $= K_{P\max}$ (дБ), $P_0 = K_{P\max}$, $P_A = y_{c\text{опт}}$, $P_B = y_{n\text{опт}}$, $P_C = K_{U\text{опт}}$, $P_D = K_I \text{ опт}$ ($t \approx 20$ с).

Пример. Для $y_{11} = 1$ мСм, $y_{12} = -10^{-3}$ мСм, $y_{21} = 40$ мСм, $y_{22} = 0,1$ мСм получим $K_{P\max} = 35,259$ дБ, $K_{P\max} = 3356,8$, $y_{c\text{опт}} = 1,1832$ мСм, $y_{n\text{опт}} = 0,11832$ мСм, $K_{U\text{опт}} = -91,608$, $K_I \text{ опт} = 36,643$.

С помощью приведенных программ при выборе структурной схемы усилителя удобно оценивать предельные характеристики RC-ступеней с различным включением активного компонента. Так, если исходные данные примера к программе 224 соответствуют включению транзистора по схеме с общим эмиттером, то при той же цепи питания, но при включении транзистора на частоте сигнала по схеме с общей базой получим $y_{11} = 41,099$ мСм, $y_{12} = -0,099$ мСм, $y_{21} = -40,1$ мСм, $y_{22} = 0,1$ мСм и по программе 224 найдем $K_{d\text{ max}} = 24,453$ дБ, $y_{c\text{ опт}} = 7,585$ мСм, $y_{n\text{ опт}} = 0,0185$ мСм. При включении того же транзистора по схеме с общим коллектором ($y_{11} = 1$ мСм, $y_{12} = -0,999$ мСм, $y_{21} = -41$ мСм, $y_{22} = 41,099$ мСм) получим $K_{P\max} = 15,625$ дБ, $y_{c\text{ опт}} = 0,05836$ мСм, $y_{n\text{ опт}} = 2,3987$ мСм.

По вычисленным оптимальным проводимостям источника сигнала и нагрузки можно определить требуемые для согласования коэффициенты трансформации $n_{bx} = \sqrt{y_c/y_{c\text{ опт}}}$ и $n_{vnx} = \sqrt{y_n/y_{n\text{ опт}}}$, но обычно потери мощности при рассогласовании компенсируют добавочными ступенями усиления.

При проектировании усилителей важно оценить влияние нестабильности параметров, связанной с изменением рабочих условий и технологическим разбросом. Влияние малых изменений параметров на функции цепи оценивают по приведенным в гл. 3 формулам, вычисляя чувствительности функций к относительным изменениям параметров. В матрице (5.15) параметры y_{12} и y_{21} проходного четырехполюсника, эквивалентного RC-ступени, обычно равны соответствующим

параметрам активного компонента, но параметры y_{11} и y_{22} ступени и активного компонента несколько отличаются вследствие влияния цепей питания.

Нестабильность усиления в основном определяется нестабильностью параметра y_{21} , влияние которого оценивают чувствительностями коэффициента передачи напряжения сигнала

$$S_{U_c}(y_{21}) = (y_{21}/K_{U_c})(dK_{U_c}/dy_{21}) = 1 + y_{12}y_{21}/\Delta = (y_c + y_{11})/(y_c + y_{bx}).$$

Так как параметр y_{21} отличается небольшим разбросом и зависимостью от рабочих условий, то часто оценивают его влияние и на другие функции цепи по чувствительностям

$S_{bx}(y_{21}) = 1/(1 - y_{11}(y_b + y_{22})/y_{12}y_{21}) = y_{12}K_U/y_{bx}$, $S_{вых}(y_{21}) = y_{21}K_0/y_{вых}$, где $K_0 = u_{bx}/u_b = -y_{12}/(y_c + y_{11})$ — коэффициент обратной передачи. Влияние нестабильности параметра y_{12} оценивают чувствительностям

$$S_{U_c}(y_{12}) = 1 - S_{U_c}(y_{21}), \quad S_{bx}(y_{12}) = S_{bx}(y_{21}), \quad S_{вых}(y_{12}) = S_{вых}(y_{21}).$$

При отсутствии обратной связи $y_{12} = 0$ и $S_{U_c}(y_{21}) = 1$.

Программа 225. Вычисление K_{U_c} , K_U , K_0 , y_{bx} , $y_{вых}$ и их чувствительностей к изменениям параметров y_{21} и y_{12} на средних частотах

$$\begin{array}{ccccccccc} \text{ИП8} & /-/ & \text{ИП7} & \text{ИП1} & + & \div & \text{ПВ} & \text{ИП4} & \times & \text{ИП5} \\ + & \text{ПД} & \text{ИП4} & /-/ & \text{ИП5} & \text{ИП2} & + & \div & \text{ПА} & \text{ИП8} \\ \times & \text{ИП7} & + & \text{ИС} & \text{ИП1} & \uparrow & \text{ИПС} & + & \div & \text{ИПА} \\ \times & \text{П0} & 1 & \text{ИПА} & \text{ИПВ} & \times & - & 1/x & \text{П3} & \text{ИП8} \\ \text{ИПА} & \times & \text{ИПС} & \div & \text{П6} & \text{ИП4} & \text{ИПВ} & \times & \text{ИПД} & \div \\ \text{П9} & 1 & \text{ИП3} & - & & & & & & \end{array}$$

С/П

Инструкция. ($y_{11} = P7$, $y_{12} = P8$, $y_{21} = P4$, $y_{22} = P5$, $y_c = P1$, $y_b = P2$) В/О С/П РХ = $S_{U_c}(y_{21})$, Р0 = K_{U_c} , РА = K_U , РВ = K_0 , РС = y_{bx} , РД = $y_{вых}$, Р3 = $S_{bx}(y_{21})$, Р6 = $S_{bx}(y_{21}) = S_{bx}(y_{12})$, Р9 = $S_{вых}(y_{21}) = S_{вых}(y_{12})$.

Пример. Для $y_{11} = 1$ мСм, $y_{12} = -10^{-3}$ мСм, $y_{21} = 50$ мСм, $y_{22} = 0,2$ мСм, $y_c = 0,05$ мСм, $y_b = 0,3$ мСм получим $K_{U_c} = -4,34782$, $K_U = -100$, $K_0 = -0,0009523809$, $y_{bx} = 1,1$ мСм, $y_{вых} = 0,247619$ мСм, $S_{U_c}(y_{21}) = 0,9130434$, $S_{U_c}(y_{12}) = 0,0869565$, $S_{bx}(y_{21}) = S_{bx}(y_{12}) = 0,090909$, $S_{вых}(y_{21}) = S_{вых}(y_{12}) = 0,1923076$.

Основной способ уменьшения влияния нестабильности параметров — введение отрицательной обратной связи на частоте сигнала. Усилитель с простейшей

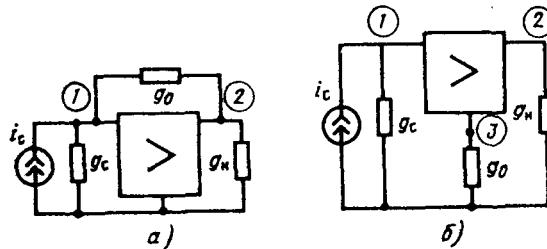


Рис. 44

цепью параллельной обратной связи через резистивный двухполюсник с проводимостью y_0 (рис. 44, а) описывается матрицей проводимостей

$$Y = \begin{bmatrix} y_c + y_{11} + y_0 & y_{12} - y_0 \\ y_{21} - y_0 & y_{22} + y_{02} + y_0 \end{bmatrix}, \quad (5.24)$$

причем в неинвертирующем напряжение усилителе в этом случае может возникнуть положительная обратная связь, усиливающая влияние нестабильности параметров.

Программа 226. Оценка влияния параллельной обратной связи

P0	ИП7	+	П3	ИП0	ИП5	+	П9	ИП8	ИП0
—	П6	ИП4	ИП0	—	П0	/—/	ИП9	ИП2	+
÷	ПА	ИП6	×	ИП3	+	ПС	ИП6	/—/	ИП7
ИП1	+	÷	ПВ	ИП0	×	ИП9	+	ПД	ИП0
ИПВ	×	ИПД	÷	П9	ИП6	ИПА	×	ИПС	÷
П6	ИП1	ИП3	+	ИП1	ИПС	+	÷	П3	ИП1
↑	ИПС	+	÷	ИПА	×	П0	1	ИП3	—
C/P	БП	00							

Инструкция. ($y_{11}=P7$, $y_{12}=P8$, $y_{21}=P4$, $y_{22}=P5$, $y_c=P1$, $y_h=P2$)
 $y_0=RX$ (B/O) C/P RX = $S_{Uc}(y_{12})$, P0 = K_{Uc} , PA = K_U , PB = K_0 , PC = y_{bx} , PD =
 $=y_{vых}$, P3 = $S_{Uc}(y_{21})$, P6 = $S_{bx}(y_{21}) = S_{bx}(y_{12})$, P9 = $S_{вых}(y_{21}) = S_{вых}(y_{12})$.

Пример. Для $y_{11} = 1$ мСм, $y_{12} = -10^{-3}$, $y_{21} = 50$ мСм, $y_{22} = 0,2$ мСм, $y_c = 0,05$ мСм, $y_h = 0,3$ мСм, $y_0 = 0,01$ мСм ($1/y_0 = r_0 = 100$ кОм) получим $K_{Uc} = -2,292208$, $K_U = -98,0196$, $K_0 = 0,01047619$, $y_{bx} = 2,088215$ мСм, $y_{vых} = 0,7337047$ мСм, $S_{Uc}(y_{12}) = 0,504259$, $S_{Uc}(y_{21}) = 0,4957404$; $S_{bx}(y_{21}) = 0,516334$, $S_{вых}(y_{21}) = 0,7137813$.

Усилитель с простейшей цепью последовательной обратной связи через резистивный двухполюсник с сопротивлением $r_0 = 1/y_0$ (рис. 44, б) описывается матрицей проводимостей

$$Y = \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} & -(y_{11} + y_{12}) \\ y_{21} & y_{22} + y_h & -(y_{21} + y_{22}) \\ -(y_{11} + y_{21}) & -(y_{12} + y_{22}) & y_0 + y_\Sigma \end{bmatrix}, \quad (5.25)$$

где $y_\Sigma = y_c + y_{11} + y_{12} + y_{21} + y_{22} + y_h$.

Рассматриваемый усилитель можно анализировать различными способами. Расчетные формулы, составленные непосредственно по матрице (5.25), оказываются громоздкими, а устранение обратной связи ($r_0 = 0$) связано с переходом к матрице порядка 2, что усложняет автоматизацию расчета. Поэтому целесообразно воспользоваться приведением трехполюсника к эквивалентному проходному четырехполюснику (см. гл. 3), который в рассматриваемом случае характеризуется проводимостями

$$y'_{11} = (y_{11} + r_0 |y|)/A; \quad y'_{12} = (y_{12} - r_0 |y|)/A;$$

$$y'_{21} = (y_{21} - r_0 |y|)/A; \quad y'_{22} = (y_{22} - r_0 |y|)/A,$$

где $|y| = y_{11} y_{12} - y_{21} y_{12}$; $A = 1 + r_0 (y_{11} + y_{12} + y_{21} + y_{22})$.

Программа 227. Вычисление эквивалентных проводимостей усилителя с последовательной обратной связью

```

П0 ИП7 ИП8 + ИП4 + ИП6 + × 1
+ П9 ИП7 ИП5 × ИП4 ИП8 × — ИП0
× П6 ИП5 ПП 44 П5 ИП8 ПП 43 /—/
П8 ИП4 ПП 43 /—/ П4 ИП7 ПП 44 П7
С/П БП 00 /—/ ИП6 + ИП9 ÷ ↑ В/О

```

Инструкция. $y_{11} = P7$, $y_{12} = P8$, $y_{21} = P4$; $y_{22} = P5$, $r_0 = RX$ (В/О) С/П $t \approx 20$ с) $RX = P7 = y'_{11}$, $P8 = y'_{12}$, $P4 = y'_{21}$, $P5 = y'_{22}$.

Пример. Для $y_{11} = 1$ мСм, $y_{12} = -1 \cdot 10^{-3}$ мСм, $y_{21} = 50$ мСм, $y_{22} = 0,1$ мСм при $r_0 = 0,1$ кОм получим $y'_{11} = 0,166123$ мСм, $y'_{12} = -2,6187 \cdot 10^{-3}$ мСм, $y'_{21} = 8,18098$ мСм, $y'_{22} = 0,0188219$ мСм.

После вычисления проводимостей y'_{ij} проходного четырехполюсника, эквивалентного усилителю с простейшей цепью последовательной обратной связи, характеристики последнего можно найти по ранее приведенным формулам и программам (например, программе 225) расчета безынерционной цепи.

При расчете каскадных усилителей возникает необходимость в расчете каждой ступени усиления и усилителя в целом. При отсутствии контура обратной связи, охватывающей все или несколько ступеней, целесообразно представить каждую ступень проходным четырехполюсником с малосигнальными характеристическими проводимостями и воспользоваться следующей программой, обеспечивающей последовательное (начиная с окончной ступени) вычисление характеристик каскадного соединения усилительных ступеней.

Программа 228. Анализ каскадного усилителя на средних частотах

```

ИП4 /—/ ИП5 ИП0 + ÷ ПА ИП8 × ИП7
+ ИП0 ↔ П0 ÷ ИПА x2 × lg 1
0 × ПВ ИПД + ПД ИПА ИПС × ПС
ИПВ С/П БП 00

```

Инструкция. Ввести параметры окончной ступени $y_{11n} = P7$, $y_{12n} = P8$, $y_{21n} = P4$, $y_{22n} = P5$ и нагрузки усилителя $y_n = P0$, $1 = PC$, $0 = PD$ В/О С/П $RX = PB = K_{Pn}$ (дБ), $P0 = y_{vxn}$, $PA = K_{Un}, \dots$, параметры очередного каскада $y_{11n-i} = P7$, $y_{12n-i} = P8$, $y_{21n-i} = P4$, $y_{22n-i} = P5$ С/П $RX = K_{Pn-i}$ (дБ), $P0 = y_{vxn-i}$, $PA = K_{Un-i}$, $PC = K_{Un-i}$, $PD = K_{Pn-i}$.

В качестве примера рассмотрим усилитель с каскадным выходом, схема которого показана на рис. 45, а, с одинаковыми параметрами транзисторов:

$Y_{11\Theta} = y_{66} = 0,9$ мСм, $Y_{12\Theta} = y_{6k} = -2$ мкСм,
 $Y_{21\Theta} = y_{kk} = 40$ мСм, $Y_{22\Theta} = y_{kk} = 0,8$ мСм.

На средних частотах анализируемый усилитель можно представить эквивалентной схемой (рис. 45, б) с проводимостью нагрузки $y_n = 0,05$ мСм и характеристическими проводимостями окончной ступени $y_{11} = y_{\Theta} = y_{66} + y_{6k} + y_{kk} = 41,698$ мСм, $y_{12} = -(y_{kk} + y_{6k}) = -0,798$ мСм, $y_{21} = -(y_{6k} + y_{kk}) =$

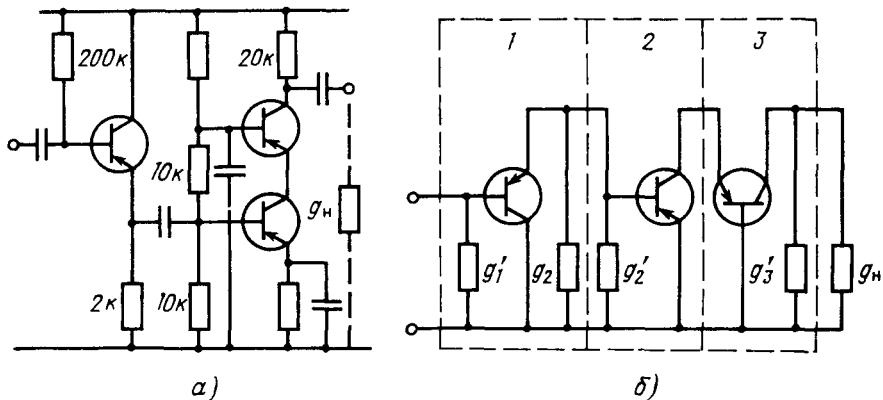


Рис. 45

$= -40,8 \text{ мСм}$, $y_{22} = y_{kk} + y'_3 = 0,85 \text{ мСм}$. Подобным образом (при необходимости используя программу 216) находим параметры предоконечной ступени $y_{11} = y_{66} + y'_2 = 1,1 \text{ мСм}$, $y_{12} = y_{6k} = -2 \cdot 10^{-3} \text{ мСм}$, $y_{21} = y_{k6} = 40 \text{ мСм}$, $y_{22} = y_{kk} = 0,8 \text{ мСм}$ и параметры первого каскада ступени $y_{11} = y'_1 + y'_{66} = 0,905 \text{ мСм}$. $y_{12} = y_{69} = -(y_{66} + y_{k6}) = -0,898 \text{ мСм}$, $y_{21} = y_{96} = -(y_{66} + y_{k6}) = -40,9 \text{ мСм}$. $y_{22} = y_2 + y_{99} = 42,198 \text{ мСм}$.

По программе 228 для окончной ступени получим $K_{P3} = 12,69 \text{ дБ}$, $y_{v_{h3}} = 5,522 \text{ мСм}$, $K_{U3} = 45,333333$, введя параметры предоконечной ступени, получим $K_{P2} = 22,97 \text{ дБ}$, $y_{v_{h2}} = 1,114 \text{ мСм}$, $K_{U2} = -6,327$ и после ввода параметров первой ступени $K_{P1} = 12,4 \text{ дБ}$, $y_{v_{h1}} = y_{v_h} = 0,057 \text{ мСм}$, $K_{U1} = 0,944$ и характеристики всего усилителя $K_P = 48,1 \text{ дБ}$ и $K_U = -270,8$.

Расчет каскадных усилителей усложняется при охвате двух или более ступеней петлями обратной связи. При параллельной обратной связи (см. рис. 44, а), охватывающей каскадный усилитель или несколько его ступеней, следует с помощью программ и формул, приведенных ранее, найти характеристические параметры проходного четырехполюсника, эквивалентного охваченной обратной связью части усилителя при $y_0 = 0$, и использовать программу 226, а когда найдены эквивалентные проводимости отдельных частей усилителя, программу 228. Характеристики отдельных ступеней каскада, охваченного обратной связью, можно оценить с помощью программы 228 после приведения отдельных ступеней с последовательной или параллельной обратной связью к эквивалентным проходным четырехполюсникам.

5.4. Расчет усилителей на границах полосы пропускания

Полосу пропускания широкополосных усилителей определяют верхней ω_v и нижней ω_n граничными частотами, на которых усиление мощности по отношению к усиленнию на средних частотах уменьшается на определенную величину (обычно 3 дБ). В области низких частот влиянием паразитных реактивных параметров пренебрегают, но приходится учитывать элементы цепи питания, предназна-

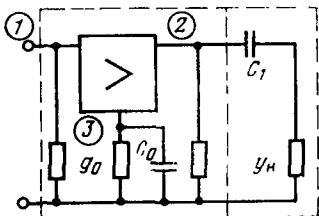


Рис. 46

ченные для разделения активных компонентов по постоянному току и шунтирования сопротивлений последовательной обратной связи по постоянному току. Если необходимо точно знать частотную характеристику RC-усилителя в области низких частот, то эквивалентную схему ступени усиления для этих частот целесообразно представить каскадным соединением двух проходных четырехполюсников (на рис. 46 обозначены штриховыми линиями).

Если проводимость нагрузки $y_H = g_H + j\omega b_H$ имеет только вещественную часть g_H , то для окончного проходного четырехполюсника

$$y_{Bx} = g_H K_U, \quad K_U = (\omega^2 C_1^2 + j\omega C_1 g_H) / (g_H^2 + \omega^2 C_1^2),$$

а характеристические проводимости первого проходного четырехполюсника описываются матрицей проводимостей

$$Y = \begin{bmatrix} g_1 + (g_{11} y_0 + |g|)/A & (g_{12} y_0 - |g|)/A \\ (g_{21} y_0 - |g|)/A & g_2 + g_H K_U + (g_{22} y_0 + |g|)/A \end{bmatrix},$$

где g_{ij} — вещественные проводимости активного трехполюсника при выборе узла 3 в качестве общего: $|g| = g_{11}g_{22} - g_{12}g_{21}$; $y_0 = g_0 + j\omega C_0$; $A = 1 + r_0(g_{11} + g_{12} + g_{21} + g_{22})$.

С помощью этой матрицы можно найти характеристические проводимости первого проходного четырехполюсника, а с учетом значений K_{U2} и y_{Bx2} — функции $K_U = K_{U1}K_{U2}$ и $y_{Bx} = y_{Bx1}$ анализируемой цепи. Задача усложняется при более сложной частотной зависимости проводимости $y_H(\omega) = g_H + j\omega b_H$, которой может быть входная проводимость следующей ступени. В этом случае приходится использовать пакет из трех следующих программ.

Программа 229. Вычисление K_{U2} и y_{Bx2} при связи с проводимостью $y_H(\omega) = g_H + j\omega b_H$ через емкость C_1

$$\begin{array}{l} \text{ИП9} \times \text{П7} \leftrightarrow \text{П6} + \text{П8} \quad x^2 \leftrightarrow \text{П4} \\ x^2 + \text{ИП7 ИП4} \times \leftrightarrow \div \text{П2 ИП7 ИП8} \\ \text{Вх} \div \times \text{П1 С/П ИП1 ИП6} \times \text{ИП2 ИП4} \\ \times + \text{ИП1 ИП4} \times \text{ИП2 ИП6} \times - \text{С П} \end{array}$$

Инструкция. ($C_1 = \text{П9}$) $g_H = \text{РZ}$, $b_H = \text{РY}$, $\omega = \text{РХ}$ В/О С/П ($t \approx 5$ с) $\text{РX} = \text{Р1} = \text{Re } K_{U2}$, $\text{РY} = \text{Р2} = \text{Im } K_{U2}$ С/П ($t \approx 5$ с) $\text{РX} = \text{Р}y_{Bx2}$, $\text{РY} = \text{Р}y_{Bx2}$.

Пример. Для $C_1 = 5 \cdot 10^{-6}$ Ф, $y_H(50 \text{ Гц}) = y_H(100\pi) = (10^{-3} + j10^{-3})$ См, $y_H(200\pi) = (10^{-3} + j2 \cdot 10^{-3})$ См получим $K_{U2}(100\pi) = 0,53071371 + j0,2064392$, $y_{Bx2}(100\pi) = (3,2427429 \cdot 10^{-4} + j7,3715314 \cdot 10^{-4})$ См; $K_{U2}(200\pi) = 0,58874486 + j1,1450632$, $y_{Bx2}(200\pi) = (3,5973221 \cdot 10^{-4} + j1,291996 \cdot 10^{-3})$ См.

Программа 230. Вычисление проводимостей y_{ij} проходного четырехполюсника, эквивалентного резистивному трехполюснику с последовательной обратной связью через $y_0 = g_0 + j\omega C_0$

ИП4	ИП5	+	П6	ИП7	ИП8	+	П2	ИП4	ИП7
+	П3	ИП5	ИП8	+	П9	+	ПС	С/П	×
ПД	x^2	\leftrightarrow	ИПС	+	ПС	x^2	+	ИПД	/—/
\leftrightarrow	\div	ПД	ИПС	Bx	\div	ПС	ИП7	ИП2	ИП3
ПП	78	П0	\leftrightarrow	П1	С/П	ИП8	ИП2	ИП9	ПП
78	ПА	\leftrightarrow	П2	С/П	ИП4	ИП6	ИП3	ПП	78
ПВ	\leftrightarrow	П3	С/П	ИПД	ИП6	ИП9	\times	П9	\times
П6	ИП5	ИП9	ИПС	\times	—	П9	С/П	\times	ПВ
ИПС	\times	—	ИПД	ИПВ	\times	B/O			

Инструкция. ($g_{11}=P7$, $g_{12}=P8$, $g_{21}=P4$, $g_{22}=P5$) B/O С/П ($t \approx 6$ с), $PX=$
 $=PC=g_{33}$, $PY=P2=-g_{13}$, $P6=-g_{23}$, $P3=-g_{31}$, $P9=-g_{32}$, $g_0=PZ$, $C_0=$
 $=PY$, $\omega=PX$ С/П ($t \approx 7$ с) $PX=P1=Rey_{11}$, $PY=P0=Imy_{11}$ С/П ($t \approx 7$ с)
 $PX=P2=Rey_{12}$, $PY=PA=Imy_{12}$ С/П ($t \approx 7$ с) $PX=P3=Rey_{21}$, $PY=PB=$
 $=Imy_{21}$ С/П ($t \approx 6$ с) $PX=P9=Rey_{22}$, $PY=P6=Imy_{22}$.

Пример. Для $g_{11}=1 \cdot 10^{-3}$ См, $g_{12}=-2 \cdot 10^{-6}$ См, $g_{21}=5 \cdot 10^{-2}$ См, $g_{22}=$
 $=1 \cdot 10^{-4}$ См, $g_0=1 \cdot 10^{-3}$ См, $C_0=1 \cdot 10^{-5}$ Ф на частоте $f=50$ Гц ($\omega=100\pi$)
получим $y_{11}=2,65732 \cdot 10^{-5}-j5,8699192 \cdot 10^{-5}$, $y_{12}=-3,8705064 \cdot 10^{-6}-$
 $-j1,1279453 \cdot 10^{-7}$, $y_{21}=1,133585 \cdot 10^{-3}-j2,9467229 \cdot 10^{-3}$, $y_{22}=6,09983 \cdot 10^{-6}-$
 $-j5,6623304 \cdot 10^{-6}$; на частоте $f=100$ Гц ($\omega=200\pi$) получим $y_{11}=3,70399 \times$
 $\times 10^{-5}-j1,1613606 \cdot 10^{-4}$, $y_{12}=-3,85039 \cdot 10^{-6}-j2,2316342 \cdot 10^{-6}$, $y_{21}=1,659019 \times$
 $\times 10^{-3}-j1,58300769 \cdot 10^{-3}$, $y_{22}=7,10949 \cdot 10^{-6}-j1,1202593 \cdot 10^{-5}$.

Программа 231. Вычисление K_{U1} , $y_{bx1}=y_{bx}$ и $K_U=K_{U1}K_{U2}$ для цепи, схема которой показана на рис. 46

ИП6	+	ПД	x^2	\leftrightarrow	ИП9	+	ПС	x^2	+
P7	ИПС	ИПВ	\times	ИПД	ИП3	\times	—	ИП7	\div
П5	ИПС	ИП3	\times	ИПД	ИПВ	\times	+	ИП7	\div
П4	С/П	ИП5	ИП2	\times	ИП4	ИПА	\times	+	ИП0
+	П8	ИП4	ИП2	\times	ИП5	ИПА	\times	—	ИП1
+	П7	С/П	ПД	ИП5	\times	\leftrightarrow	ПС	ИП4	\times
+	ИПС	ИП4	\times	ИПД	ИП5	\times	—	С/П	

Инструкция. $Rey_{11}=P1$, $Imy_{11}=P0$, $Rey_{12}=P2$, $Imy_{12}=PA$,
 $Rey_{21}=P3$, $Imy_{21}=PB$, $Rey_{22}=P9$, $Imy_{22}=P6$ (если программа 231 выполняется
после программы 230, то перечисленные исходные данные хранятся в указанных регистрах памяти) $Rey_{bx2}=PY$, $Imy_{bx2}=PX$ B/O С/П ($t \approx 10$ с) $PX=$
 $=P4=Re K_{U1}$, $PY=P5=Im K_{U1}$ С/П ($t \approx 10$ с) $PX=P7=Re y_{bx1}$, $PY=$
 $=P8=Im y_{bx1}$, $Re K_{U2}=PY$, $Im K_{U2}=PX$ С/П ($t \approx 10$ с) $PX=Re K_U$, $PY=$
 $=Im K_U$.

Пример. Для исходных данных, полученных в примерах к программам 229 и 230, на частоте $f=50$ Гц получим $K_{U1}=-2,7645497-j2,7982851$, $y_{bx}=$
 $=3,6960541 \cdot 10^{-5}-j4,7553787 \cdot 10^{-5}$; $K_U=-0,8895087-j2,0448603$ и на частоте $f=100$ Гц получим $K_{U1}=-3,8639495-j2,4020092$, $y_{bx}=5,1381587 \cdot 10^{-5}-$
 $-j1,0602509 \cdot 10^{-4}$; $K_U=-0,476772-j5,0264776$.

Следовательно, в связи с увеличением проводимости нагрузки при увеличении частоты вещественная составляющая K_U уменьшается.

Программы 229 и 230 могут использоваться самостоятельно для решения соответствующих задач. При вещественной непосредственной связи с вещественной проводимостью нагрузки вместо рассмотренного пакета из трех программ может быть использована лишь одна программа 230. В этом случае достаточно заменить проводимость g_{22} проводимостью $g_{22} + g_h$.

В области верхних частот усиление может уменьшаться вследствие преобладающего влияния не зависящей от частоты емкости, щунтирующей резистивную нагрузку. В этом случае усилитель моделируется матрицей проводимостей

$$Y = \begin{bmatrix} g_c + g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} + g_h + j\omega C_h \end{bmatrix}$$

и частотными характеристиками $K_U(j\omega) = (-g_{21}(g_h + g_{22}) - j\omega C g_{21}) / ((g_h + g_{22})^2 + \omega^2 C^2)$, $y_{bx}(\omega) = g_{11} + g_{12} K_U(j\omega)$, причем граничная частота по уровню 3 дБ определяется выражением $\omega_b = (g_h + g_{22})/C$.

В общем случае нагруженного проходного четырехполюсника с комплексными параметрами матрицы проводимостей

$$Y = \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11} + jb_{11} & g_{12} + jb_{12} \\ g_{21} + jb_{21} & g_{22} + g_h + j(b_{22} + b_h) \end{bmatrix}$$

коэффициент передачи входного напряжения и входную проводимость можно вычислить с помощью одной программы.

Программа 232. Анализ каскадного широкополосного усилителя в области высших частот

ИП2	ИП3	+	П3	x^2	ИПА	ИПВ	+	ПВ	x^2
+	↑	/—	ПД	ИП1	ИП3	×	ИП0	ИПВ	×
+	ИПД	÷	ПС	ИП1	ИПВ	×	ИП0	ИП3	×
—	ИПД	÷	ПД	ИП7	ИП8	ИПС	×	+	ИП5
ИПД	×	-	П3	ИП8	ИПД	×	ИП5	ИПС	×
+	ИП4	↔	ПВ	ИПС	ИП9	×	ИПД	ИП6	×
—	ИПД	ИП9	×	ИПС	ИП6	×	+	П6	↔
П9	C/P								

Инструкция. $0 = P6$, $1 = P9$, $g_h = P3$, $b_h = P8$; для очередной i -й ступени (начиная с окончной) вводить $g_{11\ n-i} = P7$, $b_{11\ n-i} = P4$, $g_{12\ n-i} = P8$, $b_{12\ n-i} = P5$, $g_{21\ n-i} = P1$, $b_{21\ n-i} = P0$, $g_{22\ n-i} = P2$, $b_{22\ n-i} = P4$ В/О С/П $PX = P9 = \text{Re}K_U$, $PY = P6 = \text{Im}K_U$, $PC = \text{Re}K_{U\ n-i}$, $PД = \text{Im}K_{U\ n-i}$, $P3 = \text{Re}y_{bx\ n-i}$, $PB = \text{Im}y_{bx\ n-i}$ ($t \approx 25$ с).

В качестве примера рассмотрим усилитель, схема которого показана на рис. 45, а, в предположении, что $y_{bb} = 0,05 + j 0,05$ мСм, $y_{bb} = 1,2 + j 0,2$ мСм, $y_{bk} = -4 \cdot 10^{-2} - j 2 \cdot 10^{-2}$ мСм, $y_{bd} = 40 + j 0,05$ мСм, $y_{kk} = 0,1 + j 0,1$ (параметры всех транзисторов одинаковы), а реактивными параметрами остальных элементов цепи можно пренебречь.

Определив непосредственно или с помощью программы 216 проводимости

оконечной ступени $y_{\text{вх}} = y_{66} + y_{6k} + y_{k6} - y_{kk} = 41,296 + j0,23$, $y_{\text{вк}} = -(y_{6k} + y_{k6}) = -0,096 + j0,08$, $y_{k\text{в}} = -(y_{k6} + y_{kk}) = -40,1 - j1,15$, $y_{22} = g_3 + y_{kk} = 0,15 + j0,1$ (все проводимости в миллиамперах), при заданной нагрузке по программе 232 получим $K_{U3} = 131,08 + j92,56$, $y_{\text{вх3}} = 21,30752 + j8,3064 \text{ мСм}$.

По проводимостям оконечной ступени $y_{11} = g_2 + y_{66} = 1,4 + j0,2 \text{ мСм}$, $y_{12} = y_{6k} = -0,004 + j0,02 \text{ мСм}$, $y_{21} = y_{k6} = 40 - j0,05 \text{ мСм}$; $y_{22} = y_{kk} = 0,1 + j0,1$ после выполнения программы 232 получим $K_U = K_{U3}K_{U2}K_{U1} = -227,2339 - j193,74784$, $K_{U2} = -1,8532187 - j0,1694684$, $y_{\text{вх2}} = 1,4108023 + j0,1636135 \text{ мСм}$.

Вычислив проводимости первой ступени $y_{11} = g_1 + y_{96} = 1,205 + j0,2 \text{ мСм}$, $y_{12} = y_{69} = -(y_{66} + y_{6k}) = -1,196 - j0,18 \text{ мСм}$, $y_{21} = y_{96} = -(y_{66} + y_{k6}) = -41,2 + j0,195$, $y_{22} = g_2 + y_{99} = 41,796 + j0,23 \text{ мСм}$, по программе 232 получим $K_U = K_{U1}K_{U2}K_{U3} = -214,0951 - j187,72489$, $K_{U1} = 0,06706961 + j0,01259607$, $y_{\text{вх}} = y_{\text{вх1}} = 0,9534333 + j0,013198945 \text{ мСм}$.

Анализ цепи в области верхних частот удобно выполнять, когда известны параметры схем замещения активных компонентов с частотно-независимыми параметрами. Параметры схемы замещения биполярного транзистора, показанной на рис. 38, г, практически не зависят от частоты в диапазоне, ограниченном сверху частотой $\omega_s = (1 + r_6 g_a) / r_6 C_a$. Приводимые в справочниках значения параметров подобных схем замещения обычно соответствуют определенному режиму питания. Поэтому при переходе к характеристическим проводимостям y_{ij} эквивалентного проходного четырехполюсника приходится учитывать зависимость этих параметров от частоты, режима питания и температуры.

От температуры в наибольшей степени зависит малосигнальная проводимость $g_a \approx \Delta I_a = \gamma I_k$ схемы замещения, показанной на рис. 38, г, а также параметры $C_a = \tau g_a$ и в меньшей степени g_k и C_k .

Распределенное сопротивление области базы r_b мало зависит от изменений температуры. Зная параметры g_a , C_k и g_k для заданного режима питания, по значениям постоянных токов I_a и I_k можно определить коэффициенты γ , τ и β , а затем оценить зависимость малосигнальных проводимостей транзистора от режима питания.

Частотные характеристики эквивалентного транзистору, описанному схемой замещения на рис. 38, г, проходного четырехполюсника удобно оценивать [10] по низкочастотным значениям $g_{6k}(0) = g_k / (1 + r_6(g_9 + g_k))$, $g_{9k}(0) = g_{6k}(0) \cdot 1 + r_k$, $r_k = 1/g_k$, $\nu = \omega/\omega_s$ и $a = r_6 g_9 / (1 + r_6 g_9)$.

Программа 233. Вычисление y -параметров биполярного транзистора в области высших частот по параметрам «физической» схемы замещения

п	×	2	×	ПА	ИП6	ИП0	×	↑	ИП1
$1/x$	+	\div	$\Pi 9$	\times	ИП2	\times	ΠB	x^2	$\Pi 8$
1	+	ΠC	ИП1	\times	ПД	ИПВ	1	ИП9	—
\times	ИПД	\div	ИП9	ИП8	+	ИПД	\div	С/П	ИП4
$/—/$	ИП9	\div	ИП2	\div	\uparrow	ИП5	+	ИПВ	\times
ИПС	\div	\leftrightarrow	ИП8	\times	ИП5	—	ИПС	\div	С/П
ИП3	ИП9	\times	\uparrow	ИПВ	\times	0	\leftrightarrow	—	ИПД
\div	\leftrightarrow	ИПД	\div	С/Б	ИП4	ИПВ	\times	ИП2	\div
ИПС	\div	\uparrow	ИПВ	\times	ИП5	ИП3	\times	1	С/П

Инструкция. ($\gamma = P_0$, $r_6 = P_1$, $\tau = P_2$, $\beta = P_3$, $C_k = P_4$, $g_{6k}(0) = P_5$, $I_k = P_6$) $f = \text{PX}$ В/О С/П ($t \approx 10$ с) $\text{PX} = \text{Re}y_{11}$, $\text{PY} = \text{Im}y_{11}$ С/П ($t \approx 7$ с) $\text{PX} = \text{Re}y_{12}$, $\text{PY} = \text{Im}y_{12}$ С/П ($t \approx 5$ с) $\text{PX} = \text{Re}y_{21}$, $\text{PY} = \text{Im}y_{21}$ С/П ($t \approx 5$ с) $\text{PX} = \text{Re}y_{22}$, $\text{PY} = \text{Im}y_{22}$

Пример. Для $r_6 = 50$ Ом, $\beta = 50$, $g_{6k}(0) = 10^{-6}$ См, $C_k = 5 \cdot 10^{-12}$ Ф, $C_9 = 10 \cdot 10^{-12}$ Ф, $g_9 = 5 \cdot 10^{-4}$ См, $I_k = 1 \cdot 10^{-3}$ А, определив $\gamma = g_9/I_k = 0,5$, $\tau = C_9/g_9 = 2 \cdot 10^{-8}$, при $I_k = 5 \cdot 10^{-3}$ А и $f = 10$ МГц получим: $y_{11} = 2,5621813 \times 10^{-3} + j2,4347787 \cdot 10^{-3}$; $y_{12} = -4,4006968 \cdot 10^{-5} - j3,0801472 \cdot 10^{-4}$; $y_{21} = 1,0898636 \cdot 10^{-1} - j1,5217367 \cdot 10^{-2}$; $y_{22} = 5,4780677 \cdot 10^{-5} + j3,4239077 \cdot 10^{-5}$ (для схемы включения транзистора с общим эмиттером).

Параметры транзистора для других схем включения несложно определить по полученным результатам с помощью неопределенной матрицы проводимостей транзистора, построенной с помощью программы 216 или непосредственно.

Несколько проще анализ усилителей в области верхних частот при использовании электронных ламп или полевых транзисторов, описываемых простыми «физическими» схемами замещения, параметры которых непосредственно связаны с характеристическими проводимостями эквивалентного проходного четырехполюсника. Зависимость параметров S и g_i полевых транзисторов несложно определить с помощью программ, подобных программе 218, а для электронных ламп — по программам, обеспечивающим вычисление производных в заданной точке статических характеристик электронной лампы при их аналитическом выражении согласно закону «трех вторых».

Следовательно, ступень широкополосного усиления на полевом транзисторе моделируется матрицей проводимостей

$$Y = \begin{bmatrix} g_{11} + j\omega C_{11} & g_{12} + j\omega C_{12} \\ g_{21} + j\omega C_{12} & g_{22} + g_h + j\omega (C_{22} + C_h) \end{bmatrix},$$

в которой от частоты обычно зависит лишь проводимость нагрузки $y_n = g_h + j\omega C_h$, которой для ступеней предварительного усиления является входная проводимость следующей ступени. По этой матрице несложно найти выражения для коэффициента передачи напряжения $K_U(j\omega)$ и входной проводимости $y_{\text{вх}}(\omega)$ анализируемой ступени, вычисления которых обеспечивает следующая программа.

Программа 234. Анализ усилителя на полевом транзисторе в области верхних частот

π	×	2	×	П9	x^2	ИП2	x^2	×	ИП1
x^2	+	ПД	ИП2	ИП0	×	ИП1	ИП5	×	+
ИП9	×	ИПД	÷	ПВ	ИП9	x^2	ИП5	×	ИП2
×	ИП0	ИП1	×	—	ИПД	÷	ПА	ИП4	×
ИП7	+	ИП9	ИП5	×	ИПВ	×	—	ПС	ИП8
ИПА	ИП5	×	+	ИП9	×	ИП4	ИПВ	×	+
ПД	ИПА	x^2	ИПВ	x^2	÷	ν	С/П	БП	00

Инструкция. ($g_{11} = P_7$, $C_{11} = P_8$, $g_{12} = P_4$, $C_{12} = P_5$, $g_h + g_{22} = P_1$, $C_h + C_{22} = P_2$, $g_{21} = P_0$) $f = \text{PX}$ (В/О) С/П $\text{PX} = |K_U(\omega)|$, $\text{PA} = \text{Re } K_U(\omega)$, $\text{PB} = \text{Im } K_U(\omega)$, $\text{PC} = \text{Re } y_{\text{вх}}(\omega)$, $\text{PD} = \text{Im } y_{\text{вх}}(\omega)$, $P9 = \omega$ (проводимости в миллеспирменах, емкости в нанофарадах, частота в мегагерцах); $t \approx 20$ с.

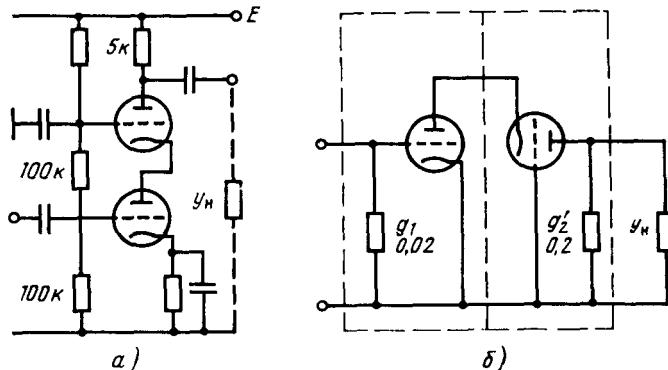


Рис. 47

В отличие от программы 233 эта программа удобна для построения частотных характеристик при частотно-независимых параметрах. Практически чаще всего приходится учитывать частотные зависимости y_H и иногда некоторых других параметров (например, y_{21}). При анализе усилителей на лампах или полевых транзисторах с различными схемами включения активных компонентов возникает необходимость в их определении (непосредственно или с помощью программы 216) по неопределенной матрице проводимостей электронной лампы

$$Y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -S & S + g_i & -g_i \\ S & -(s + g_i) & g_i \end{bmatrix} + j\omega \begin{bmatrix} C_{ck} + C_{ca} & -C_{ck} & -C_{ca} \\ -C_{ck} & C_{ak} + C_{ck} & -C_{ak} \\ -C_{ca} & -C_{ak} & C_{ak} \end{bmatrix}.$$

Для полевых или МДП-транзисторов индексы сетки, анода и катода для параметров матрицы достаточно заменить соответственно индексами затвора, стока и истока.

В качестве примера рассмотрим каскодный усилитель на электронных лампах (рис. 47, а) с одинаковыми параметрами $S=8$ мСм, $g_i=0,05$ мСм, $C_{ck}=10$ пФ, $C_{ca}=5$ пФ, $C_{ak}=8$ пФ при проводимости нагрузки усилителя $y_H(\omega)=0,1+j\omega 0,02$ мСм.

По эквивалентной схеме усилителя для верхних частот (рис. 47, б) и неопределенной матрице проводимостей лампы находим характеристические проводимости оконечной ступени $g_{11}=g_{kk}=S+g_i=8,05$ мСм, $C_{11}=C_{ak}+C_{ck}=0,018$ нФ, $g_{12}=g_{ka}=-g_i=-0,05$ мСм, $C_{12}=C_{ak}=0,008$ нФ, $g_{21}=g_{ak}=-(S+g_i)=-8,05$ мСм, $g_{22}+g_H=g_{aa}+g_2+g_H=g_i+g_2+g_H=0,35$ мСм, $C_{22}+C_H=C_{ac}+C_{ak}+C_H=0,033$ нФ. С помощью программы 234 на частотах $f=0, 0,5, 1$ МГц получим $|K_{U2}|=23, 22,053, 19,789$; $K_{U2}=23+j0, 21,164-j6,1972, 17,088-j9,9795$, $y_{vx2}=6,9+j0, 7,1475+j0,89833, 7,6972+j1,4710$, откуда $C_{vx2}=Imy_{vx2}/\omega=0, 0,28595, 0,234118$ нФ.

По параметрам первой ступени $g_{11}=g_1=0,02$ мСм, $C_{11}=C_{ca}+C_{ck}=0,015$ нФ, $g_{12}=0$, $C_{12}=C_{ca}=0,005$ нФ, $g_{22}+g_H=g_i+g'_2+Rey_{vx2}$, $C_{22}+C_H=C_{ac}+C_{ak}+C_{vx2}$ с помощью программы 234 находим на тех же часто-

так, что и для второй ступени, $|K_1| = 1,1188; 1,0728316; 0,98797; K_{\text{н}} = -1,1188; -1,0640 + j0,13721; -0,96888 + j0,19325; y_{\text{вх}} = 0,02; 0,017845 + j0,030410; 0,013929 + j0,0063809 \text{ мСм}$ и $|K| = |K_1 K_2| = 25,734; 23,695; 19,551$.

Относительно просто анализировать ступени с пренебрежимым влиянием внутренней обратной связи ($y_{12}=0$), характерным, например, для многих интегральных усилительных компонентов. Однако для них приходится также часто учитывать влияние частотных зависимостей параметра прямой передачи $y_{21}(\omega) = S_0/(1+j\omega/\omega_s) = S_0/(1+j\omega t)$, где $\omega_s = 2\pi f_s$ — круговая частота, соответствующая уменьшению модуля y_{21} в $\sqrt{2}$ раз. Если входная проводимость такой ступени образована суммой частотно-независимых резистивной и емкостной составляющих $y_{\text{вх}} = y_{11} = g_{11} + j\omega C_{11}$, то задача сводится к вычислению K_U .

Программа 235. Расчет K_U усилительной ступени с $y_{12}=0$, $y_{22}=g_{22}+j\omega C_{22}$ и $y_{21}=S_0/(1+j\omega t)$

π	\times	2	\times	x^2	ПД	ИП8	x^2	\times	1
\dagger	ИП1	ИП4	\dagger	П3	x^2	ИП5	ИП2	\dagger	П6
x^2	ИПД	\times	\dagger	\times	ИП7	\div	П9	ИП6	ИП8
\times	ИПД	\times	ИП3	$-$	ИП9	\div	П0	ИП3	ИП8
\times	ИП6	$+$	ИПД	\vee	\times	ИП9	\div	ПА	x^2
ИП0	x^2	$+$	\vee	C/П	БП	00			

Инструкция. ($S_0 = P7$, $\tau = 1/\omega_s = P8$, $g_{22} = P4$, $C_{22} = P5$, $g_{\text{н}} = P1$, $C_{\text{н}} = P2$) $f = PX$ (частота в мегагерцах, емкости в нанофарадах, проводимости в миллиамперах) (В/О) С/П РХ = $|K_U(\omega)|$, Р0 = $\text{Re}K_U(\omega)$, РА = $\text{Im}K_U(\omega)$, РД = $= \omega^2$ ($t \approx 20$ с).

Пример. Для $S_0 = 100$ мСм, $\tau = 0,2$, $g_{22} = 10$ мСм, $C_{22} = 20$ пФ = 0,02 нФ, $g_{\text{н}} = 1$ мСм, $C_{\text{н}} = 0,05$ нФ получим $|K_U(0)| = 9,0909$, $K_U(0) = -9,0909$, $|K_U(0,5)| = 7,696$, $K_U(0,5) = -6,433 + j4,224$.

5.5. Расчет резонансных усилителей

В низкочастотных узкополосных усилителях требуемую избирательность обычно обеспечивают с помощью активных фильтров, дополняя их оконечными широкополосными ступенями для получения требуемой мощности полезного сигнала в нагрузке. По аналогичной схеме с использованием пассивных LC -фильтров чаще всего собирают и высокочастотные избирательные усилители. Вместе с этим в радиотехнических устройствах находят применение узкополосные резонансные усилители, активные компоненты которых связаны между собой и с внешними цепями резонансными LC -контурями высокой добротности. Типовая схема резонансного усилителя с одним активным инвертирующим напряжение компонентом показана на рис. 48, а. Характерной особенностью подобной цепи является наличие резонансного фильтра на колебательном контуре и RC -фильтров для развязки цепей питания по высокой частоте. Выбор со-противлений R_0 и R_Φ определяется компромиссом между требуемой стабильностью режима питания и степенью развязки общих цепей питания на частоте сигнала. Характерно и частичное включение внешних нагрузок в контур для повышения его добротности. Обозначив составляющие проводимости нагрузки

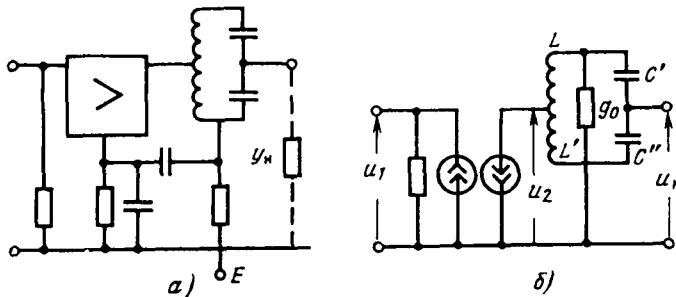


Рис. 48

$y_n = g_2 + j b_2$ и выходной проводимости активного компонента $y_{22} = g_1 + j b_1$, можно представить рассматриваемую ступень эквивалентной схемой (рис. 48, б) с емкостью контура $C_3 = C + (k_1^2 b_1 + k_2^2 b_2)/\omega_p$ и приведенной проводимостью $g_3 = g_0 + k_1^2 g_1 + k_2^2 g_2$, где ω_p — резонансная частота; g_0 — проводимость иенагруженного контура, определяемая потерями в конденсаторе и катушке индуктивности; $C = C' C''/(C' + C'')$; k_1 и k_2 — коэффициенты включения соответственно выходной цепи активного компонента и нагрузки. В общем случае при емкостной связи с контуром $k = C''/(C' + C'') = C'/C'$ при автотрансформаторной связи $k = (L + M)/L$ и при трансформаторной связи $k = M/L$, где M — коэффициент взаимоиндукции.

Следует отметить, что приведенные приближенные формулы не всегда обеспечивают определение вносимых в контур емкости и омической проводимости с достаточно малыми погрешностями. Это прежде всего относится к емкостной связи, при которой точность приведенных формул зависит от отношения C'/C . Так, при $k_1 \leq 0,2$ погрешностью расчета можно преибречь, если $C'/C < L$, но при $k_1 \leq 0,8$ требуется отношение $C'/C \leq 5$.

Коэффициенты передачи напряжения в рассматриваемой цепи связаны с параметрами эквивалентной схемы соотношениями

$$K' = u_2/u_1 = k_1^2 |y_{21}| / (g_0(1 + j\xi) + k_1^2 g_r + k_2^2 g_2);$$

$$K'' = u_n/u_2 = k_2/k_1; \quad K_U = u_n/u_{bx} = K' K'' = K,$$

где $\xi = 2\Delta f/Q/f_p$ — обобщенная расстройка, выраженная через относительную расстройку и добротность Q ненагруженного контура.

По отношению к коэффициенту передачи напряжения K на частоте резонанса $K_0 = k_1 k_2 |y_{21}| / g_0 \beta$ частотная характеристика ступени определяется формулой $K(j\omega) = K_0 / (1 + j\xi/\beta)$, где $\beta = \Delta f_p/f_p = 1 + (k_1^2 g_1 + k_2^2 g_2)/g_0$ — коэффициент, характеризующий расширение полосы пропускания контура (по уровню 3 дБ относительно усиления мощности) с учетом вносимой в контур проводимости.

На практике обычно $g_n > g_1$ и максимальный коэффициент усиления $K_{max} = |y_{21}| / (2\sqrt{(g_1 + g_0)g_n})$ соответствует выбору $k_1 = 1$, $k_2 = \sqrt{(g_0 + g_n)/g_2}$, $\beta = 2(1 + g_1/g_2)$. Если в этом случае полоса пропускания больше требуемой, то коэф-

Фициенты включения определяют из соотношений $k_1 = \sqrt{(\beta_{\text{трб}} - 1) g_0 / 2g_1}$ и $k_2 = k_1 \sqrt{g_1 / g_2}$, при соблюдении которых $K = |y_{21}| (\beta_{\text{трб}} - 1) / (\beta_{\text{трб}} \sqrt{g_1 g_2})$.

Программа 236. Расчет резонансного усилителя

```

x=0 09 ИП3 ИП2 ÷ 1 + 2 × П8
I — ИП2 × ПД 2 ÷ П9 ИП5 ÷
√ ПВ ИП9 ИП3 ÷ √ ПА 1 — x<0
43 ИПА ИПВ × ИП7 × ИП8 ÷ ИП2 ÷
С/П БП 54 ИПД ИП3 — ИП5 ÷ √ ПВ
1 ПА БП 33 ИП0 π × 2 × 1/x
↑ ИП1 ÷ ИПА x2 ИП4 × — ИПВ x2
ИП6 × — × П9 ИПВ ÷ ПС ИП9 1
ИПВ — ÷ ПД ИП9 БП 40

```

Инструкция. ($f_p = P_0$, $L = P_1$, $g_0 = P_2$, $g_1 = P_3$, $g_2 = P_4$, $b_1 = P_5$, $b_2 = P_6$, $|y_{21}| = P_7$) $\beta_{\text{трб}}$ или (при вычислении K_{\max}) $0 = P_8$ В/О С/П РХ = К, Р8 = β , РА = $= k_1$, РВ = k_2 ; если при выбранном требуемом значении $\beta_{\text{трб}}$ получены неудовлетворительные результаты, то подобрать $\beta_{\text{трб}}$, повторяя вычисления до получения оптимальных результатов, после чего выполнить С/П РХ = С, РС = С', РД = С'; если изменяют только один из параметров (например, L), то для пересчета емкостей достаточно снова нажать клавишу С/П.

В связи с относительно большим коэффициентом K_0 резонансного усилителя обратная связь через активный компонент может привести к искажению частотной характеристики и самовозбуждению усилителя. С учетом обратной связи $K_{U_c} = K_{Bx}K/(1 - Ky_{12}y_c)$, где $y_{c\pi} = y_{11} + y_c$. Если, как обычно, сигнал на вход активного компонента поступает от входного контура, то $y_{c\pi} = g_{c\pi}(1 + j(\xi - \xi_0)/\gamma)$, где $g_{c\pi}$ — эквивалентная проводимость входного контура, приведенная к входу активного компонента; $\xi_0 = 2(f_p - f_{p\pi})Q/f_{p\pi}$ — обобщенная расстройка входного контура с добротностью Q ; $\gamma = \Delta f_{c\pi}/\Delta f_0$ — коэффициент, равный отношению полос пропускания входного и выходного ненагруженного контуров. С учетом этих соотношений

$|K_{U_c}/K_0| = |(1 + j\xi_1)/((1 + A - \xi_1\xi_2) + j(\xi_1 + \xi_2 + B))|$, где $A = \text{Re}(-k_1^2 y_{12} y_{21} / g_0 \beta \times X g_{c\pi})$; $B = \text{Im}(-k_1^2 y_{12} y_{21} / g_0 \beta g_{c\pi})$; $\xi_1 = \xi/\beta$, $\xi_2 = (\xi - \xi_0)/\gamma$. Это отношение увеличивается при приближении к самовозбуждению (режим регенерации), стремясь к бесконечности при потере устойчивости.

Программа 237. Расчет АЧХ резонансного усилителя с обратной связью

```

ПД ИП3 ÷ ПА ИПД ИП0 — ИП2 ÷ ПВ
ИП1 x2 ИП9 /-- ИП3 ИП6 × × ÷ ПД
ИП7 ИП4 × ИП8 ИП5 × — × 1 +
ИПА ИПВ × — x2 ПС ИП8 ИП4 × ИП7
ИП5 × + ИПД × ИПА + ИПВ + x2
ИПС + ИПА x2 1 + ÷ 1/x √ С/П
БП 00

```

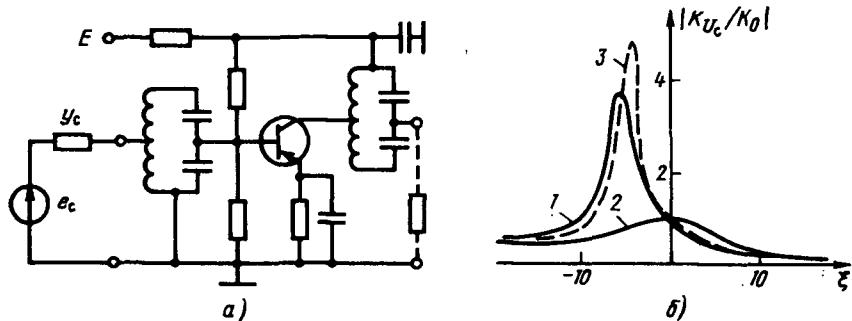


Рис. 49

Инструкция. ($\xi_0 = P_0$, $k_1 = P_1$, $\gamma = P_2$, $\beta = P_3$, $g_{21} = P_4$, $b_{21} = P_5$, $g_0 = P_6$, $g_{12} = P_7$, $b_{12} = P_8$, $g_{ce} = P_9$) $\xi = PX$ (В/О) С/П $PX = |K_{Uc}/K_0|$.

В качестве примера оценим влияние обратной связи через биполярный транзистор в схеме резонансного усилителя, показанной на рис. 49, а, при параметрах транзистора на частоте резонанса $f_p = 10$ МГц; $Y_{11\varnothing} = (2,6 + j2,4) \cdot 10^{-3}$ См, $Y_{12\varnothing} = -(5,3 + j30,7) \cdot 10^{-3}$ См, $Y_{21\varnothing} = (0,1 - j0,015)$ См, $Y_{22\varnothing} = (1 + j1,6) \times 10^{-3}$ См, параметрах входного контура $Q = 100$, $g_0 = 5 \cdot 10^{-5}$ См, $f_p = 10$ МГц, $k'_1 = 0,15$, $k'_2 = 0,2$, параметрах выходного контура $f_p = 10$ МГц, $Q = 100$, $g_0 = 5 \cdot 10^{-5}$ См, $k_1 = 0,25$, $k_2 = 0,1$ и проводимости нагрузки $y_H = g_H = 5 \cdot 10^{-3}$ См.

По исходным данным вычисляем для выходного контура $\beta = 1 + (k'_1 g_{KK} + k'_2 g_H)/g_0 \approx 3,25$, $K_0 = u_H/u_1 = k_1 k_2 |Y_{21\varnothing}|/g_0 \beta \approx 15,56$, $g_{ce} = (g_0 + k'_1^2 g_C + k'_2^2 \times g_{11})/k'_2 \approx 5,26 \cdot 10^{-3}$ См.

С помощью программы 237 или после вычисления величин A и B программы 236 строим зависимость $|K_{Uc}/K_0|$ от расстройки (кривая 1 на рис. 49, б) с максимальным значением $|K_{Uc \max}/K_0| \approx 4,05$. Для сравнения по результатам вычислений строим зависимость $|K_{Uc}/K_0|$ при $y_{12}=0$ (в этом случае для программы 236 следует принять $A=B=0$), отображенную кривой 2 на рис. 49, б. Полученные результаты свидетельствуют о режиме регенерации, близком к самовозбуждению, так как отношение $|K_0/K_{Uc}| = 1/4,05 \approx 0,25$, тогда как для заведомо устойчивой работы усилителя его принимают более 0,8. Кроме того, при расстройке входного контура на $\Delta f = -125$ кГц (что соответствует $f_{p1} = 9,875$ МГц и $\xi_0 = 2,5$) максимальное значение отношения $|K_{Uc}/K_0|$ возрастает до 4,73 (кривая 3 на рис. 49, б) и, следовательно, обратная величина уменьшается до значения 0,211, что свидетельствует о необходимости обеспечения устойчивости.

5.6. Расчет цепей с операционными усилителями

В радиотехнических цепях широко используются интегральные усилительные компоненты, характеризующиеся очень большими входным сопротивлением и коэффициентом усиления напряжения и очень малым выходным сопротивлением, приближающими такие компоненты к идеальным источникам напряжения, управляемым входным напряжением. Среди подобных компонентов наиболее уни-

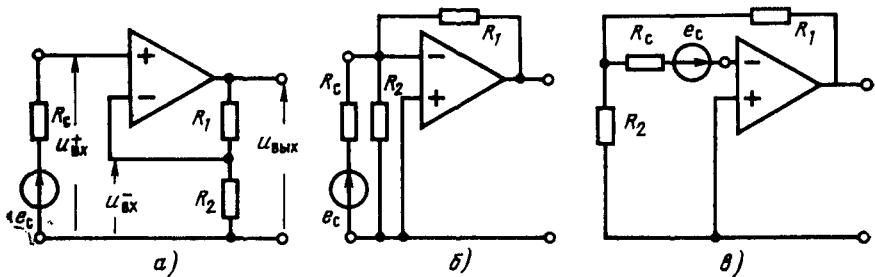


Рис. 50

версальны операционные усилители с двумя противофазными входами, одним выходом и дополнительными выводами (не показываемыми на эквивалентных схемах) для присоединения источников питания и внешних (навесных) элементов. Операционные усилители характеризуются глубокой внутренней отрицательной обратной связью, обеспечивающей высокую стабильность режима питания, а для обеспечения стабильного значения коэффициента усиления используют внешние цепи отрицательной обратной связи на частоте сигнала.

Основные схемы включения операционного усилителя характеризуются подачей напряжения обратной связи с выхода на инвертирующий вход через резистивный делитель и отличаются способом подключения источника сигнала. Так как выходное сопротивление усилителя $R_{\text{вых}}=0$, то через цепь обратной связи непосредственная передача энергии на выход практически отсутствуют и применимы соотношения классической теории обратной связи. Выходное напряжение $u_{\text{вых}}=\mu(u_{\text{вх}}^+-u_{\text{вх}}^-)$ операционного усилителя в основной неинвертирующей схеме включения (рис. 50, а) определяется напряжением обратной связи $u_{\text{вх}}^-=u_{\text{вых}}R_2 \times (R_1+R_2)^{-1}=\beta u_{\text{вых}}$ и, следовательно, $u_{\text{вых}}=\mu' u_{\text{вх}}$, где при $\mu \gg 1$ величина $\mu'=\mu/(1+\mu\beta)\approx 1/\beta$. При сопротивлении $R_{\text{вх}}^0$ между парафазными входами ток источника сигнала $i_c=(u_{\text{вх}}^+-u_{\text{вх}}^-)/R_{\text{вх}}^0=u_{\text{вх}}^+/R_{\text{вх}}^0(1+\mu\beta)$ и, следовательно, в этой схеме включения $R_{\text{вх}}=R_{\text{вх}}^0(1+\mu\beta)$.

В инвертирующей схеме включения с подключением источника сигнала параллельно сопротивлению R_2 (рис. 50, б) $u_{\text{вых}}=-\mu u_{\text{вх}}^-=-\mu e_c R_1 R_2 / (R_1 R_2 + R_c (R_1 + R_2) + \mu R_c R_2)$. Если, как обычно, $\mu \gg (R_1 R_2 + R_c (R_1 + R_2)) / R_c R_2$, то $u_{\text{вых}}=-e_c R_1 / R_2$. Входное сопротивление в этом случае практически (при $R_1 > R_2$) равно R_2 .

В инвертирующей схеме с последовательным включением источника сигнала (рис. 50, в) $R_{\text{вх}}=R_{\text{вх}}^0$ и $u_{\text{вых}}=-\mu(e_c + u_{\text{вых}} R_2 / (R_1 + R_2))$. При $\mu \gg 1$ напряжение $u_{\text{вых}}=-\mu e_c (1 + \beta \mu) = -\mu' e_c \approx -e_c / \beta$, где $\beta=R_2 / (R_1 + R_2)$.

Следовательно, во всех основных схемах включения операционный усилитель с цепью обратной связи эквивалентен практическому идеальному источнику напряжения, управляемого напряжением. При анализе цепей методом узловых напряжений независимые компоненты представляют источниками тока, управляемого напряжением, но в таком преобразовании нет необходимости, если разделить i -е уравнение, соответствующее i -му узлу (к которому присоединен выход

операционного усилителя), на проводимость $g = 1/R_{\text{вых}}$, значительно большую остальных эквивалентных проводимостей матрицы Y . Тогда в i -м уравнении от нуля будут отличаться лишь члены μg_i и $g_i u$, что существенно упрощает последующий анализ. С учетом $\mu \gg 1$ можно разделить оставшиеся члены уравнений на μg , получив ненулевым лишь член u , для управляющего напряжения. Использование матрицы Y с преобразованным подобным образом i -м уравнением допускает применение всех расчетных формул и программ для анализа цепи по обычно составляемой матрице проводимостей.

В области верхних частот приходится прежде всего учитывать влияние входной емкости между парафазными входами операционного усилителя и частотную зависимость $\mu(\omega) = \mu_0 / (1 + j\omega/\omega_\mu)$, где ω_μ — частота, на которой модуль μ уменьшается в $\sqrt{2}$ раз. При охвате операционного усилителя рассмотренной цепью обратной связи критическая частота $\omega_\mu' = \omega_\mu (1 + \beta\mu)$ при одновременном уменьшении во столько же раз модуля μ .

Г л а в а 6

Расчет фильтров

6.1. Основные этапы проектирования фильтров

В технических заданиях на проектирование фильтров основным обычно является требование к АЧХ передаточной функции, задаваемое граничными частотами f_{n1} и f_{n2} полосы пропускания, в которой затухание (5.8) не превышает заданного значения A_n , и граничными частотами f_{z1} и f_{z2} полосы задерживания, в которой затухание должно быть не меньше заданного значения A_z . При этом для полосового фильтра (ПФ) $f_{z1} < f_{n1}$, $f_{z2} > f_{n2}$ (рис. 51, а), для режекторного фильтра (РФ), $f_{z1} > f_{n1}$, $f_{z2} > f_{n2}$, для фильтра нижних частот (ФНЧ) $f_{n1} = 0$, $f_{n2} = f_n < f_z$, для фильтра верхних частот (ФВЧ) $f_{z1} = 0$, $f_{z2} = f_{n2} < f_n$. Расчет фильтра обычно сводят к расчету фильтра-прототипа (ФП) с последующим преобразованием схемы физически реализуемого фильтра-прототипа в схему заданного пассивного, активного или цифрового фильтра с заданными характеристиками (рис. 52).

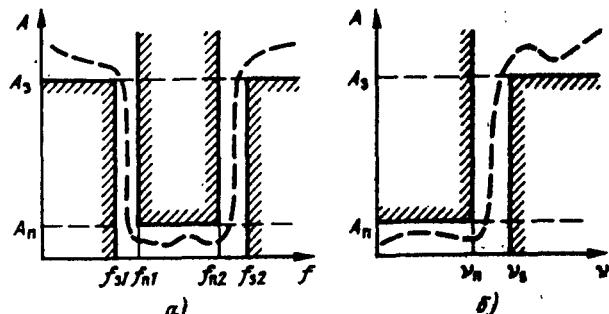


Рис. 51

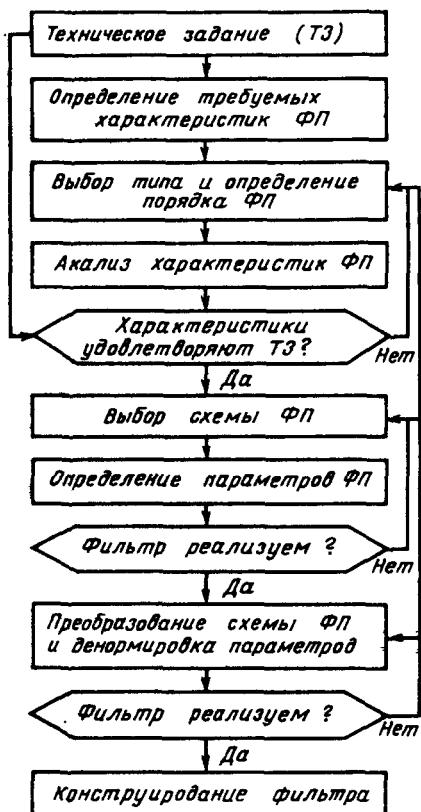


Рис. 52

$$\begin{array}{l} \text{П9 } x^2 \text{ ИП7 ИП8 } \times - \text{ ИП8 ИП7 } - \text{ ИП9} \\ \times \div x^2 \quad \nu \quad \uparrow 1/x \text{ С/П БП 00} \end{array}$$

Инструкция. ($f_{p1}=P7$, $f_{p2}=P8$) $f=RX$ (В/О) С/П $RX=\nu$ для РФ, $RY=\nu$ для ПФ ($t \approx 5$ с).

При использовании ПМК с входным языком ЯМК52 эту программу можно сократить на один шаг, заменив фрагмент x^2 оператором $|x|$.

Пример. При $f_{p1}=461$ кГц, $f_{p2}=469$ кГц, $f=450$ кГц получим $\nu=0,2626012$ для РФ и $\nu=3,808055$ для ПФ

$$K_A = \sqrt{f_{p1}f_{p2}} / (f_{p2} - f_{p1}) = f_0 / \Delta f; \quad K_L = R_h / 2\pi f_0; \quad K_C = 1 / 2\pi f_0 R_h.$$

Обратное преобразование частоты для ФНЧ и ФВЧ легко выполнить по приведенным ранее формулам нажатием клавиш. Для ПФ обратное преобразование частоты выражается формулой $f_{1,2} = ((\nu(f_{p2}-f_{p1})/2)^2 + f_{p1}f_{p2})^{1/2} \pm \nu(f_{p2}-f_{p1})/2$, а для РФ в этой формуле следует заменить ν на $1/\nu$.

Фильтром-прототипом называют ФНЧ с нормированной полосой пропускания при частоте отсечки $\nu_n=1$, нагруженный на единичное (в выбранной расчетной системе единица) сопротивление. Текущая частота в масштабе фильтра-прототипа связана соотношением $\nu=f/f_n$ для ФНЧ, $\nu=f_n/f$ для ФВЧ, $\nu=(f^2-f_{p1}f_{p2})/(f_{p2}-f_{p1})$ для ПФ и $\nu=f(f_{p2}-f_{p1})/(f^2-f_{p1}f_{p2})$ для РФ. По этим формулам и требованиям к затуханию фильтра определяют требования к АЧХ фильтра-прототипа (рис. 51, б). Например, если проектируемый фильтр должен обеспечивать затухание $A \geq A_3 = -60$ дБ в полосе $f_{p1} \leq 92$ кГц и $f_{p2} \geq 108,24$ кГц при иерархии затухания не более $A_n = 1$ дБ в полосе пропускания от $f_{p1}=96$ кГц до $f_{p2}=104$ кГц, то $\nu_3 = (92^2 - 96 \cdot 104) / 92(104 - 96) = 2,065217$, $\nu''_3 = 108,24^2 - 96 \cdot 104) / 108,24(104 - 96) = 2,0000061$. Следовательно, фильтр-прототип должен иметь затухание $A \geq 60$ дБ на частотах $\nu \geq \nu_3 = 2$ и не более 1 дБ в полосе частот $0 \leq \nu \leq 1$.

Программа 238. Прямое преобразование частоты для ПФ и РФ

Таблица 6.1. Преобразование фильтров-прототипов

Тип	Элемент ФП	Преобразованный элемент	Расчетная формула
ФНЧ			$L = K_L L'$, $C = K_C C'$
ФВЧ			$C = K_C / L'$, $L = K_L / C'$
ПФ	 	 	$H = K_A K_H B$, $Q = K_Q / K_A B$; $H_{1,2} = K_A K_H B (1 + (f_0/f_{1,2})^2)$, $Q_{1,2} = K_H K_Q \times (f_0/f_{1,2})^2 / H_{1,2}$; $f_{1,2} = \sqrt{(1+1/4K_AB) \pm \pm 1/K_A \sqrt{BD}}$
РФ	 	 	$H = K_A K_H / D$, $Q = K_Q B / K_A$; $H_{1,2} = K_A K_H (1 + (f_0/f_{1,2})^2 / D)$, $Q_{1,2} = K_Q K_H \times (f_0/f_{1,2})^2 / H_{1,2}$

Программа 239. Обратное преобразование частоты для ПФ и РФ

ИП8 ИП7 — $\times 2$ \div ИП9 $\uparrow x^2$ ИП7

ИП8 \times $+ v$ $+$ Вх ИП9 — С/П БП

00

Инструкция. ($f_{\text{п1}}=P7$, $f_{\text{п2}}=P8$) $v=PX$ для ПФ или $1/v=PX$ для РФ (В/О) $C/P \text{PX}=f_1$, $\text{PY}=f_2 (t \approx 6 \text{ с})$.

Пример. При $f_{\text{п1}}=140$, $f_{\text{п2}}=150$, $v=1,05$ для ПФ получим $f_1=139,7588$, $f_2=-150,2588$, а для РФ $f_1=140,2300$, $f_2=149,7538$.

После определения требований к фильтру-прототипу выбирают его тип и порядок, проверяя соответствие его характеристик заданным. Расчет фильтра-прототипа упрощается, если использовать справочники для расчета LC -фильтров или активных RC -фильтров, справочники целесообразно использовать и на следующем этапе синтеза фильтра с заданными свойствами (см. рис. 52). При отсутствии справочных данных пригодна описываемая далее методика.

Схему фильтра-прототипа, составленную по этой методике или данных справочников, преобразуют в схему проектируемого фильтра заменой каждой ветви прототипа соответствующей ветвью проектируемого фильтра и вычислением (дениормировкой) параметров ветвей. Структура ветвей фильтра-прототипа и соответствующих им ветвей проектируемого фильтра, а также расчетные формулы для фильтров различных типов приведены в табл. 6.1. Для определения параметров фильтров целесообразно использовать программируемый режим.

Программа 240. Дениормировка параметров фильтров

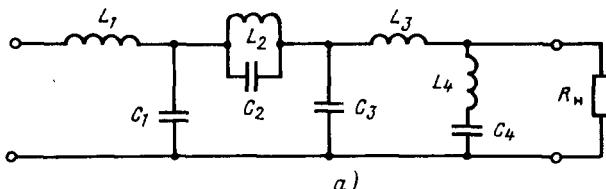
ИП8	\times	П4	1	П9	ИП8	C/P	\times	$x \neq 0$	31
ИП4	\times	x^2	v	4	\times	$1/x$	\uparrow	ИП9	+
v	\leftrightarrow	v	$+$	$1/x$	П9	Bx	ИП5	ПП	52
x^2	l	$+$	ИП4	ПП	45	x^2	ИП3	$/-$	П3
$1/x$	ПП	45	БП	24	\times	П3	ИП7	\leftrightarrow	$x < 0$
52	ИП6	\times	C/P	ИП9	B/O				

Инструкция. ($f_{\text{п0}}=\sqrt{f_{\text{п1}}f_{\text{п2}}}=P5$, $K_c=P6$, $K_L=P7$, $K_A=P8$); для дениормировки параметров ветвей с одиночными элементами $L'=PX$, или $-C'=PX$ В/О C/P Cx C/P $\text{PX}=L$, или $\text{PX}=-C$ (для ФНЧ) C/P $\text{PX}=-C$, или $\text{PX}=L$ (для ФВЧ); с параллельными контурами $-C'=PX$ В/О C/P $L'=PX$ C/P $\text{PX}=f_{01}$ C/P $\text{PX}=-C_1$ C/P $\text{PX}=L_1$ C/P $\text{PX}=f_{02}$ C/P $\text{PX}=-C_2$ C/P $\text{PX}=L_2 (f_{01} \text{ --- резонансные частоты контуров})$ и с последовательными контурами $L'=PX$ В/О C/P $-C'=PX$ C/P $\text{PX}=f_{01}$ C/P $\text{PX}=L_1$ C/P $\text{PX}=-C_1$ C/P $\text{PX}=f_{02}$ C/P $\text{PX}=L_2$, C/P $\text{PX}=-C_2$; при определении параметров РФ вводить обратные значения параметров фильтра-прототипа с противоположным знаком (для преобразования надо нажать клавиши $1/x$ $/-$).

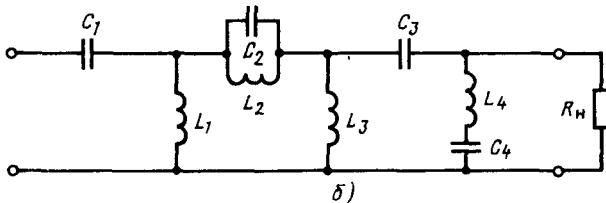
В качестве примера приведем результаты преобразования фильтра-прототипа (схема которого показана на рис. 53, а) с параметрами $L'_1=1,02$, $C'_1=0,98$; $L'_2=1,25$, $C'_2=0,25$; $L'_3=0,98$, $C'_3=1,1$; $L'_4=0,69$, $C'_4=1$.

При преобразовании этого фильтра-прототипа в ФНЧ с $f_{\text{п}}=10 \text{ кГц}$ и $R_{\text{в}}=2 \text{ кОм}$ ($K_L=31,83098 \text{ мГи}$, $K_c=7,957747 \text{ нФ}$) по формулам табл. 6.1 получим (рис. 53, б): $L_1=32,46760 \text{ мГи}$, $C_1=7,798592 \text{ нФ}$; $L_2=39,78873 \text{ мГи}$, $C_2=1,989436 \text{ нФ}$; $L_3=31,19436 \text{ мГи}$, $C_3=8,753521 \text{ нФ}$; $L_4=21,96338 \text{ мГи}$, $C_4=7,957747 \text{ нФ}$.

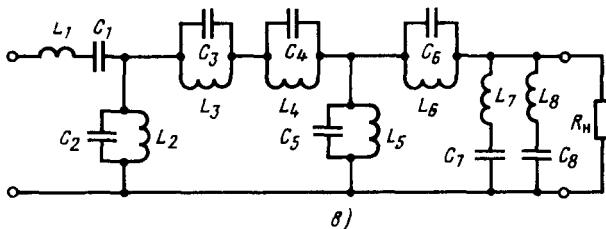
При преобразовании фильтра-прототипа в ФВЧ с теми же значениями $f_{\text{п}}$ и $R_{\text{в}}$ (рис. 53, б) по формулам табл. 6.1 получим: $C_1=7,801712 \text{ нФ}$, $L_1=$



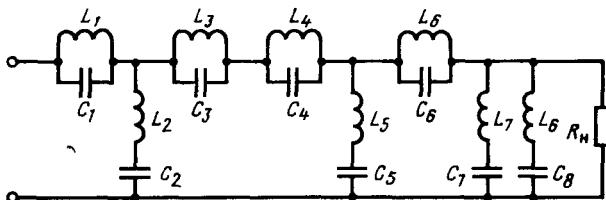
a)



б)



в)



г)

Рис. 53

$$=32,48059 \text{ мГн}; C_2=6,366197 \text{ нФ}, L_2=127,3239 \text{ мГи}; C_3=8,120149 \text{ нФ}; L_3=28,93726 \text{ мГи}; C_4=11,53296 \text{ нФ}, L_4=31,83098 \text{ мГн}.$$

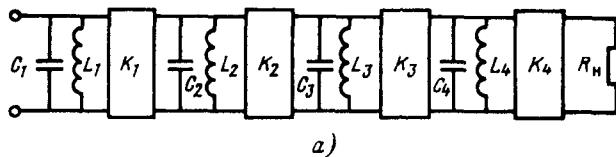
При преобразовании фильтра-прототипа в ПФ с $f_{p1}=461 \text{ кГц}$, $f_{p2}=469 \text{ кГц}$, $R_H=2 \text{ кОм}$ ($K_L=0,6845627$, $K_C=0,1711406$, $K_A=58,12284$, $f_{p0}=464,9827 \text{ кГц}$) по программе 240 получим (рис. 53, г): $L_1=40,58450 \text{ мГи}$, $C_1=0,002886729 \text{ нФ}$, $f_{o1}=f_{o2}=f_{o5}=f_{o6}=464,9827 \text{ кГц}$; $L_2=0,01201822 \text{ мГи}$, $C_2=9,748239 \text{ нФ}$; $f_{o3}=472,1931 \text{ кГц}$, $L_3=0,02319327 \text{ мГи}$, $C_3=4,898224 \text{ нФ}$; $f_{o4}=457,8824 \text{ кГц}$, $L_4=0,02391815 \text{ мГи}$, $C_4=5,051313 \text{ нФ}$; $L_5=0,01070714 \text{ мГи}$, $C_5=10,94190 \text{ нФ}$; $L_6=38,99295 \text{ мГи}$, $C_6=3,004555 \cdot 10^{-3} \text{ нФ}$; $f_{o7}=469,8230 \text{ кГц}$; $L_7=54,34567 \text{ мГи}$, $C_7=2,111574 \cdot 10^{-3} \text{ нФ}$; $f_{o8}=460,1923 \text{ кГц}$; $L_8=55,483 \text{ мГи}$, $C_8=2,155764 \times 10^{-3} \text{ нФ}$.

При преобразовании фильтра-прототипа в РФ (рис. 53, г) с теми же значениями f_{p1} , f_{p2} и R_H по программе 240 получим: $L_1=0,01201341 \text{ мГи}$, $C_1=$

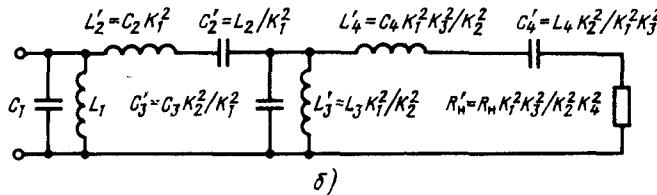
$=9,752140$ нФ; $f_{01}=f_{02}=f_{05}=f_{06}=464,9827$ кГц; $L_2=40,60074$ мГи, $C_2=0,002885575$ нФ; $f_{03}=467,2241$ кГц; $L_3=0,007325763$ мГи, $C_3=15,83932$ нФ; $f_{04}=462,7521$ кГц, $L_4=0,007396559$ мГи, $C_4=15,99239$ нФ; $L_5=0,0115423$ мГи, $C_5=10,15018$ нФ; $L_6=36,17157$ мГи, $C_6=0,00328911$ нФ; $f_{07}=468,3172$ кГц, $L_7=79,01288$ мГи, $C_7=0,001461712$ нФ; $f_{08}=461,6720$ кГц, $L_8=80,15016$ мГи. $C_8=0,001482752$ нФ.

Следует учитывать, что расчетные параметры узкополосных полосовых и резекторных фильтров иногда оказываются практически нереализуемыми. Так, в рассмотренном примере первый контур ПФ должен содержать индуктивность $L_1=40,5845$ мГи и емкость $C_1=2,8867729$ пФ, но при самом тщательном изготовлении катушки индуктивности с требуемой самоиндукцией ее собственная емкость окажется больше расчетной. В некоторых случаях (например, при проектировании пьезоэлектрических фильтров) и параметрам резонаторов предъявляются еще более жесткие требования, связанные с практическими возможностями реализации.

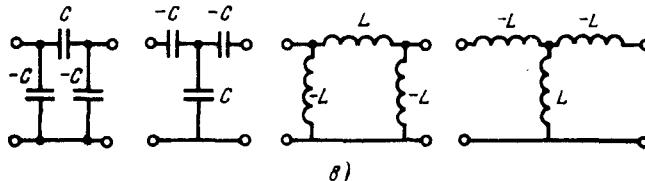
В подобных ситуациях фильтры реализуют, вводя инвертор сопротивлений, преобразующих иммитанс нагрузки согласно соотношению $Z_{\text{вх}}=K^2Y_n$ или $Y_{\text{вх}}=Y_n/K^2$, где постоянная K зависит от параметров инвертора. Часто приходится прибегать к каскадному соединению нескольких инверторов, влияние которых учитывают согласно следующим правилам: при четном числе инверторов (нумеруемых от входа фильтра) структуру и тип реактивных элементов не изменяют, а значения реактивных параметров уточняют в соответствии с формулами $L'=L_1^2K_3^2 \dots K_{2n-1}^2/(K_2^2K_4^2 \dots K_{2n}^2)$, $C'=CK_2^2K_4^2 \dots K_{2n}^2/(K_1^2K_3^2 \dots K_{2n-1}^2)$; при нечетном числе инверторов последовательные соединения элементов и ин-



a)



б)



в)

Рис. 54

дуктивности заменяют соответственно параллельными соединениями и емкостями и наоборот, а параметры элементов вычисляют по формулам

$$L' = CK_1^2 K_3^2 \dots K_{2n-1}^2 / (K_2^2 K_4^2 \dots K_{2n}^2), \quad C' = L K_2^2 K_4^2 \dots K_{2n}^2 / (K_1^2 K_3^2 \dots K_{2n-1}^2).$$

В качестве примера на рис. 54, а показана схема фильтра с включением четырех инверторов, а на рис. 54, б — эквивалентная ей схема с инверсией сопротивлений.

Эквивалентные схемы часто используемых инверторов показаны на рис. 54, в. При правильном выборе типа и места включения инвертора реализация отрицательных параметров сводится к соответствующему уменьшению параметров ветвей фильтра, последовательных или параллельных соответствующим ветвям инвертора. Однако зависимость коэффициентов K от частоты приводит к отличию характеристик фильтра с инверторами от характеристик исходной цепи. Это отличие тем меньше, чем узкополоснее фильтр, и при $\Delta f_0/f_0 < 0,05$ становится пренебрежимо малым. Использование фильтров с равным числом инверторов индуктивного и емкостного типов позволяет сохранить практически неизменными характеристики цепи и при больших расстройках. Фильтры, содержащие инверторы рассмотренного типа, называют квазиполиномиальными.

Программа 241. Преобразование параметров фильтра при $q \leq 12$ инверторах

$$\text{П0} \leftrightarrow \text{ПД Сx КИП0 } x \neq 0 \ 17 \ x^2 \quad \text{ИПД } x \geq 0$$

$$13 \leftrightarrow 1/x \times - \quad \text{БП 02 ИПД С/П БП}$$

$$00$$

Инструкция. ($K_1=P_1, K_2=P_2, \dots, K_n=P_n$) $L_i=PX$ или $-C_i=PY$, $n+1=PX$ (В/О) С/П $PX=L'_i$ или $PX=-C'_i$; для резистивного сопротивления нагрузки $R_h=PX$ (В/О) С/П $PX=R'_h$ или $PX=-G'_h$.

Пример. Для схемы, показанной на рис. 54, а при $L_1=1$ мГи, $C_1=1$ нФ; $L_2=1,25$ мГи, $C_2=0,8$ нФ; $L_3=2$ мГи, $C_3=0,5$ нФ; $L_4=4$ мГи, $C_4=0,25$ нФ; $R_h=1$ кОм; $K_1=5$ кОм, $K_2=8$ кОм, $K_3=10$ кОм, $K_4=4$ кОм получим эквивалентную схему (рис. 54, б) с преобразованными параметрами $C'_2=0,05$ нФ, $L'_2=25$ мГи; $C'_3=1,28$ нФ, $L'_3=0,78125$ мГи; $C'_4=0,1024$ нФ, $L'_4=9,765625$ мГи; $R'_h=2,441406$ кОм.

При переходе к квазиполиномиальному фильтру часто приходится определять параметры инверторов с наложением ограничений на параметры фильтра с инверторами. Например, при проектировании LC -фильтров часто стремятся выбором инверторов добиться равенства параметров однотипных элементов (например, катушек индуктивности) резонаторов фильтра для повышения его технологичности.

Программа 242. Вычисление $q \leq 12$ коэффициента преобразования K_i инверторов квазиполиномиальных фильтров с одинаковым параметром резонаторов

$$\text{П0} \leftrightarrow 1 \quad \text{ПД} \leftrightarrow \text{ИП0} \leftrightarrow \text{П0} \quad x \geq 0 \ 11$$

$$\leftrightarrow \div x^2 \quad V \quad V \quad \text{КПД С/П ИПД 1} \quad +$$

$$\text{БП 03}$$

Инструкция. Изменяемый параметр L_1 или $-C_1=PY$, сохраняемый параметр $-C_1$ или $L_1=PX$ В/О С/П $PX=P1=K_1$, $-C_2$ или $L_2=PX$ С/П $PX=P2=K_2$...

Пример. Для фильтра (рис. 54, а) с параметрами $L_1=1$ мГн, $C_1=1$ нФ; $L_2=1,25$ мГн, $C_2=0,8$ нФ; $L_3=2$ мГн, $C_3=0,5$ нФ; $L_4=4$ мГн, $C_4=0,25$ нФ; $R_h=1$ кОм при сохранении постоянным параметра $L_1=L_2=L_3=L_4$ находим: 1 = РY, -1 = РX B/O C/P RX = $K_1=1$ кОм, 1,25 = РX C/P RX = $K_2=1,1180339$, 2 = РX C/P RX = $K_3=1,264911$, 4 = РX C/P RX = $K_4=1,4142175$.

Эту программу несложно дополнить фрагментом для вычисления по заданной частоте резонатора его второго параметра, а также значений постоянных преобразования инверторов по значениям средних частот полосы пропускания ПФ или полосы задерживания РФ. Однако в этом случае необходимо учитывать, что пренебрежение потерями в реактивных элементах фильтра может привести к существенным отличиям расчетных характеристик от действительных.

Необходимо учитывать, что пренебрежение потерями в элементах RC -фильтров может привести к существенным отличиям реальных характеристик проектируемого фильтра от расчетных. Потери прежде всего приводят к увеличению затухания в фильтре на величину ΔA , которая при одинаковых нагрузках для ФВЧ при $f \rightarrow \infty$ и для ФНЧ при $f=0$ определяется формулой

$$A [\text{дБ}] = 20 \lg \left(1 + 0,5 \sum_{i=1}^k \alpha_i / Q_i \right),$$

где α_i — параметр i -го элемента фильтра-прототипа; Q_i — добротность этого элемента.

Дополнительное затухание ПФ определяют по формуле

$$\Delta A [\text{дБ}] = 20 \lg \left(1 + (f_{\text{оп}}/2\Delta f) \sum_{i=1}^k \alpha_i / Q_i \right),$$

где $f_{\text{оп}}$ — средняя частота полосы пропускания; Δf — ее ширина.

Вычисления по этим формулам несложно автоматизировать, но учет лишь дополнительного затухания оказывается недостаточным — потери также приводят к смещению полюсов передаточной функции фильтра и, как следствие, к искаражению его частотных характеристик. Это особенно опасно при проектировании узкополосных фильтров, но именно в этом случае влияние потерь может быть достаточно точно учтено при использовании метода предыскажений [1], справедливого в случае «однородных» потерь, соответствующем равенству добротностей всех элементов фильтра. Так как при этом условии все полюсы передаточной функции смешены влево от оси $j\omega$ на величину σ_m , то их предварительным смещением вправо на $\sigma_m=1/Q_m$ удается сохранить неизменными все характеристики фильтра (для ПФ на $\sigma_m=f_{\text{оп}}/\Delta f Q_m$). Для этого, подставив $p=p'-\sigma_m$ в передаточную функцию фильтра, находят функцию $K(p')$, по которой определяют параметры реактивных элементов фильтра.

При практическом использовании метода предыскажений следует проверить физическую реализуемость фильтра при заданных ограничениях на добротности его элементов. Эта проверка сводится к определению положения крайнего правого полюса передаточной функции, для чего по наименьшему из модулей $|\sigma_m|$ вещественных полюсов передаточной функции фильтра-прототипа следует оценить добротность элементов фильтра, минимально необходимую для его реализации. Например, если $f_{\text{оп}}=465$ кГц, $\Delta f=8$ кГц, то при $\sigma_m=0,1$ фильтр реализуем, когда $Q_m > 465/(8 \cdot 0,1) = 581,25$.

После проверки реализуемости фильтра с передаточной функцией $F(p) = A(p)/B(p)$ вычисляют коэффициенты многочлена $B(p+\sigma_m)$ при смещении аргумента исходного многочлена $B(p)$. Этую операцию можно выполнить с помощью программы, по которой многочлен $B(p)$ преобразуется в многочлен $B(z)$ с аргументом $z=p+\sigma_m$, нормированный относительно коэффициента при нулевой степени ($b_0=1$).

Программа 243. Преобразование многочлена $B(p)$ степени $n \leq 9$ ($n \leq 10$ для ЯМК52) при использовании метода предыскажений

Сх	ПД	Сх	ИПА	ПС	\rightarrow	КИПС	$+$	ИПВ	\times
КИПС	ИПД	1	$+ \quad \div$	ИПС	ИПД	$- \quad \times$		КПС	
\rightarrow	ИПС	1	$- \quad \div$	ПС	ИПД	$x=0 \quad 05$	\rightarrow		
КИПД	$+ \quad \div$	КПД	ИПД	1	$+ \quad \div$	ПД	ИПА	$x=0$	
02	ИПА	ПС	КИПС	ИП0	$\div \quad C/P$		ИПС	1	$- \quad -$
БП	42								

Инструкция. $b_0=P0$, $b_1=P1$, ..., $b_n=Pn$, $n=PA$, $\sigma_m=PB$ В/О С/П РХ= b'_n/b'_0 ($P0=b'_0$, $P1=b'_1$, ..., $Pn=b'_n$) С/П РХ= b'_{n-1}/b'_0 ... С/П РХ= b'_0/b'_0 ($t \approx (30n+20)$ с); при $\sigma_m > 0$ увеличивается затухание, при $\sigma_m < 0$ вносятся предыскажения (полюса смещаются вправо); для ЯМК52 заменить в программе обращения к регистрам А, В, С и Д соответственно обращениями к регистрам В, С, Д и Е.

Пример. Для $B(p) = 7p^7 + 6p^6 + 5p^5 + 4p^4 + 3p^3 + 2p^2 + p + 1$ при $\sigma_m = 1$ получим $B(z) = 0,24137931z^7 + 1,8965517z^6 + 6,4827686z^5 + 12,551724z^4 + 14,965517z^3 + 11,103448z^2 + 4,8275862z + 1$, $b'_0 = 29$ ($t \approx 4$ мин.).

По абсолютному значению коэффициента b_0 можно судить о дополнительном затухании, вносимом потерями в реактивных элементах. При представлении передаточной функции синтезируемого фильтра формулой (3.22) удобно использовать программы, по которым одновременно с преобразованием множителей вычисляется суммарное дополнительное затухание $\Sigma\Delta A$, вносимое преобразуемыми множителями функции.

Программа 244. Преобразование множителей передаточной функции фильтра при использовании метода предыскажений

П8	\leftrightarrow	П7 ИП9	$\times \quad + \quad \uparrow \quad Bx \quad + \quad \leftrightarrow$	
ИП9	\times	1	$+ \quad \div \quad \uparrow \quad \uparrow \quad Ig$	
2	0	\times	ИП4	$+ \quad \uparrow \quad \rightarrow \quad \div \quad ИП5 \leftrightarrow$
C/P	БП	00		

Инструкция. ($\sigma_m=P9$) $0=P4$, $\alpha_k=PY$, $\beta_k=PX$ (В/О) С/П РХ= α'_k , РY= β'_k , $P4=\Sigma\Delta A$ дБ ($t \approx 7$ с).

Пример. Для $4p^2 + 8p + 1$ при $\sigma_m = 0,1$ получим $2,173913p^2 + 4,782608p + 1$ и $\Delta A = 5,296359$ дБ.

Для вычисления произведения квадратичных множителей следует воспользоваться программой 100.

При проектировании фильтров с помощью ЭВМ наиболее серьезной является проблема точности результатов вычислений, так как положение корней степенных многочленов может существенно изменяться даже при незначительном округлении их коэффициентов. Поэтому все вычисления на микрокалькуляторах при расчете фильтров следует выполнять с максимальной точностью, оценивая по возможности погрешность полученных результатов.

6.2. Определение типа и передаточной функции фильтра-прототипа

Определение передаточной функции $K(p) = A(p)/B(p)$ фильтра-прототипа начинают с определения квадрата модуля частотной характеристики

$$|K(jv)|^2 = K(p) K(-p) \Big|_{p=jv}, \quad (6.1)$$

удовлетворяющей требованиям к проектируемому фильтру. Обычно передаточную функцию нормируют так, чтобы ее максимальное значение равнялось единице и частотная характеристика $|K(jv)| = |F(jv)|/F(jv)_{\max}$. Тогда

$$|K(jv)|^2 = 1/(1 + |T(jv)|^2), \quad (6.2)$$

где функцию $T(p)$, связанную с $|T(jv)|^2$ соотношением, аналогичным (6.1), называют характеристической [7]. Так как $T(p) = Q(p)/B(p)$ — дробно-рациональная функция комплексной частоты, то многочлены $A(p)$, $B(p)$ и $Q(p)$ связаны соотношением

$$B(p) B(-p) = A(p) A(-p) + Q(p) Q(-p) \quad (6.3)$$

и по любым из этих двух многочленов, используя при необходимости программу 103, можно определить третий.

При анализе избирательных свойств фильтра формулу (6.2) часто записывают в виде

$$|K(jv)|^2 = 1/(4 + e^2 \Phi(v^2)), \quad (6.4)$$

где коэффициент e характеризует постоянство затухания в полосе пропускания $0 \leq v \leq 1$, а дробно-рациональная функция $\Phi(v^2)$ меньше или равна единице в полосе пропускания и больше единицы при $v > 1$.

Рассмотрим основные формулы и программы, обеспечивающие выбор порядка и определение передаточных функций фильтров наиболее употребляемых типов.

1. Фильтры Баттервортса с максимально гладкой АЧХ характеризуются передаточной функцией с квадратом модуля частотной характеристики

$$|K(jv)|^2 = 1/(1 + e^2 v^{2n}), \quad (6.5)$$

где величина e связана с допустимой иерархичностью затухания в полосе пропускания A_n соотношением

$$e \leq \sqrt{10^{A_n/10} - 1}. \quad (6.6)$$

По заданному минимальному затуханию A_3 на частоте $v_3 > 1$ необходимый порядок фильтра находят по выражению

$$n = \text{Ev}(\ln(10^{A_3/10} - 1)(10^{A_n/10} - 1))/2 \ln v_3,$$

где $E_v(x)$ — целая часть с избытком или $E_v(x) = E(x) + 1$ для нецелых x и $E_v(x) = E(x)$ для целых.

Корни передаточной функции вычисляют по формуле

$$p_k = (1/e)^{1/n} (\sin(\pi(0.5 - k)n) + j \cos(\pi(0.5 - k)n))$$

при $k = 1, 2, \dots, 2n$. Отобрав n отрицательных вещественных корней, по формуле $K(p) = 1/(p - p_1)(p - p_2) \dots (p - p_n)$ определяют передаточную функцию фильтра Баттервортса. Для удобства последующих вычислений при автоматизации расчета такого фильтра целесообразно определять также квадратичные множители знаменателя передаточной функции $\alpha_k p^2 + \beta_k p + 1$, вычисляя α_k и β_k для комплексно-сопряженных пар полюсов и $\alpha_k = 0$ и β_k для вещественного полюса.

Характеристический многочлен для фильтра Баттервортса $Q(p) = e^{pn}$ имеет n -кратный корень в начале координат. Для вычисления АЧХ согласно формуле (6.1) можно использовать выражение $|K(jv)| = 1/\sqrt{1+e^{2v^2n}}$, а частотную характеристику затухания вычислять по формуле $A(v) = 10\lg(1+e^{2v^2n})$.

Программа 245. Расчет фильтра Баттервортса

P0	→	P1	→	P2	ПП	64	ИП1	ПП	64
÷	In	ИП0	In	÷	П4	1	—	x<0	22
1	П4	КИП4	ИП4	1/x	ИП7	X ^y	ПД	x ²	ПС
2	1/x	1	—	П5	л	×	ИП4	÷	П6
sin	ИПД	÷	ПА	/—	П3	1/x	ИП6	cos	ИПД
÷	ПВ	x≠0	60	ИП3	ИПС	×	2	×	ИПС
C/P	ИП5	БП	32	1	0	÷	10 ^x	1	—
√	П7	B/O	П8	ИП4	↔	X ^y	ИП7	×	x ²
1	+	lg	1	0	×	C/P	ИП8	ИП9	+
БП	73								

Инструкция. Установить переключатель Р—ГРД—Г в положение Р: $A_3 = PZ$, $A_n = PY$, $v = PX$ В/О С/П ($t \approx 30$ с) $PX = \alpha_1$, $PY = \beta_1$, $P4 = n$, $P7 = e$. $PA = \text{Re } p_{1,2}$, $PB = \text{Im } p_{1,2}$ С/П ($t \approx 12$ с) $PX = \alpha_2$, $PY = \beta_2$, $PA = \text{Re } p_{3,4}$, $PB = -\text{Im } p_{3,4} \dots$; для вычисления затухания ($n = P4$, $e = P7$) $\Delta v = P9$, $v_0 = RX$ БП 73 С/П ($t \approx 6$ с) $PX = A(v_0)$ С/П $PX = A(v_0 + \Delta v) \dots$ С/П $PX = A(v_0 + i\Delta v)$.

Пример. Для $A_3 = 20$ дБ, $A_n = 1$ дБ, $v = 2$ получим $n = 5$, $e = 0,50884712$; множители знаменателя передаточной функции $K(p) = 1/(0,76319394p^2 + 0,5399105p + 1)(0,76319394p^2 + 1,4135303p + 1)(0,87360972p + 1)$ и корни $p_{1,2} = -0,35372431 \pm j0,0886515$, $p_{3,4} = -0,92606231 \pm j0,67282362$, $p_5 = -1,1446759$; для $v_0 = \Delta v = 0,25$ получим $A(v) = 1,3028832 \cdot 10^{-6}$; $1,0981918 \cdot 10^{-3}$; $0,062867248$; $0,99999991$; $5,3293648$; ...

2. Фильтры Чебышева отличаются равноволновым приближением АЧХ в полосе пропускания и монотонно возрастающим затуханием за ее пределами. Квадрат модуля передаточной характеристики фильтра

$$|K(jv)|^2 = 1/(1 + e^2 T_n^2(v)), \quad (6.7)$$

где $T_n(v)$ — полином Чебышева n -го порядка, вычисление коэффициентов и корней которого можно автоматизировать.

Программа 246. Вычисление коэффициентов ортогональных многочленов Чебышева $T_n(x)$ при $n > 2$

ПД 2 П17 П5 — П1 ИП7 2 × П7
 1 П8 КИП1 ИП1 x=0 06 ИП7 С/П /—/ ИПД
 × 4 ÷ П6 ИП8 × 1 ВП 7 +
 Вх — С/П ИП6 ИП5 ÷ П7 1 П8 КИП5
 ИП5 П4 2 — П0 ИП4 ИПД — ИП8 ×
 П8 КИП4 КИП0 ИП0 x=0 44 ИП7 БП 21

Инструкция. $n = RX$ B/O C/P RX = a_n C/P RX = a_{n-2} C/P RX = a_{n-4}
 \dots C/P RX = 0 ($t \leq 3n$ с).

Пример. $T_{10}(x) = 512x^{10} - 1280x^8 + 1120x^6 - 400x^4 + 50x^2 - 1$.

Программа 247. Вычисление корней x_0 и ординат x_{\max} и x_{\min} экстремумов ± 1 многочленов Чебышева $T_n(x)$ при $n > 2$

П7 Сх П4..1 П8 ПП 14 0 ПП 14
 ИП8 /—/ БП 04 ИП4 π × ИП7 ÷ cos
 ↔ С/П ИП4 2 1/x + П4 B/O

Инструкция. Установить переключатель Р—ГРД—Г в положение Р;
 $n = RX$ B/O C/P RX = 1, PY = x_{\max} C/P RX = 0, PY = x_{01} C/P RX = -1, PY =
 $= x_{\min}$ C/P RX = 0, PY = x_{02} C/P RX = 1, PY = x_{\max} ... ($t \approx 6$ с).

Пример. Для $n = 10$ получим $x_{\max} := 1$; 0,80901703; 0,309017; -0,30901703;
 $-0,80901704$; -1; $x_{01} = 0,98768835$; 0,89100654; 0,70710681; 0,45399053; 0,15643457;
-0,15643457; -0,45399053; -0,70710676; -0,89100654; -0,98768833; $x_{\min} :=$
= 0,95105655; 0,58778526; 0; -0,58778522; -0,95105652.

Коэффициент ϵ в формуле (6.7) определяют согласно (6.6), а затухание на частоте v_a — по выражению

$$|K(v_a)|^2 = 1/(1 + \epsilon^2 \operatorname{ch}(n \operatorname{arsh} v_a)).$$

По заданным значениям v_a , A_a и A_n определяют порядок фильтра

$$n = \operatorname{Ev}(\operatorname{arc}(\sqrt{10^{A_a/10} - 1/\epsilon})/\operatorname{arsh} v_a), \quad (6.8)$$

а по величинам n и ϵ находят полюсы передаточной функции

$$p_k = \pm \sin(\pi(k-0,5)/n) \operatorname{sh}(\operatorname{arsh}(1/\epsilon)/n) + j \cos(\pi(k-0,5)/n) \operatorname{ch}(\operatorname{arsh}(1/\epsilon)/n).$$

При автоматизации расчета фильтра Чебышева целесообразно предусмотреть вычисление квадратичных множителей $\alpha_k p^2 + \beta_k p + 1$ знаменателя передаточной функции.

Программа 248. Расчет фильтра Чебышева

ИП2 ПП 89 ИП1 ПП 89 ÷ ↑ x^2 1
 — √ + ln ИП0 ↑ x^2 1 — √
 + ln ÷ П4 КИП4 ИП3 1/x ↑ x^2 1
 + √ + ln ИП4 ÷ e^x ↑ 1/x П9
 + 2 ÷ П5 ИП9 — П6 2 1/x 1
 — П7 π × ИП4 ÷ П8 sin × ПА
 ИПА /—/ ПД 1/x ИП8 cos ИП5 × ПВ $x \neq 0$
 83 x^2 ИПА x^2 + 1/x ПС ИПД 2 ×
 × ПД ИПС ПС С/П ИП6 ИП7 БП 49 1
 0 ÷ 10^x 1 — √ П3 В/O

Инструкция. Установить переключатель Р—ГРД—Г в положение Р; $v_0 = P0$, $A_{\pi} = P1$, $A_3 = P2$ В/О С/П RX = PC = a_1 , РД = β_1 , РА = Rep₁, РВ = = Imp₁, Р3 = ε, Р4 = n С/П RX = PC = a_2 , РY = РД = β_2 , РA = Rep₂, РB = Imp₂...

Пример. При $v_0 = 1,3$, $A_{\pi} = 1$ дБ, $A_3 = 20$ дБ получим $\epsilon = 0,5088468$, $n = 5$, $p_1 = -0,08945813 + j0,9901068$, $p_2 = -0,2342044 + j0,6119196$, $p_3 = -0,2894925$, $p_4 = = -0,2342044 - j0,6119196$, $p_5 = -0,08945813 - j0,9901069$ и коэффициенты знаменателя передаточной функции $K(p) = 1/(1,011823p^5 + 0,181017p + 1)(2,329386p^2 + + 1,091105p + 1)(3,454318p + 1)$.

Частотную характеристику затухания целесообразно вычислять по формуле

$$A(v) = \begin{cases} 10 \lg(1 + \epsilon^2 \cos^2(n \arccos v)) & \text{при } v \leq 1, \\ 10 \lg(1 + \epsilon^2 \operatorname{ch}^2(n \operatorname{arsh} v)) & \text{при } v > 1, \end{cases}$$

относительно просто реализуемой на входных языках микрокалькуляторов.

Программа 249. Вычисление затухания A(v) фильтра Чебышева

$$\begin{array}{lllllll} \text{П6} & x^2 & 1 & - & x \geq 0 & 20 & \sqrt{\quad} & \text{ИП6} & + & \ln \\ \text{ИП7} & \times & e^x & \uparrow & 1/x & + & 2 & \div & \text{БП} & 25 \\ \text{ИП6} & \cos^{-1} & \text{ИП7} & \times & \cos & \text{ИП8} & \times & x^2 & 1 & + \\ \lg & 1 & 0 & \times & \text{С/П} & \text{ИП6} & \text{ИП9} & + & \text{БП} & 00 \end{array}$$

Инструкция. ($n = P7$, $\epsilon = P8$, $\Delta v = P9$) $v_0 = RX$ В/О С/П RX = $A(v_0)$ С/П RX = $A(v_0 + \Delta v)$ С/П RX = $A(v_0 + 2\Delta v)$... $t \approx 8$ с при $v < 1$ и $t \approx 12$ с при $v > 1$.

Пример. Для $n = 5$, $\epsilon = 0,5088468$, $\Delta v = 0,25$, $v_0 = 0$ получим $A(v) = 0$; 0,91744239; 0,2723998; 0,8112494; 0,99999891; 18,28752, 29,913673, 38,438333; 45,306038; ...

3. Обращенный фильтр Чебышева обеспечивает равноволновую аппроксимацию характеристики затухания в полосе задерживания и монотонно возрастающее затухание в полосе пропускания. Для такого фильтра

$$A(v) = 10 \lg(1 + \epsilon^2 T_n^2(v_3/v)). \quad (6.9)$$

При расчете этого фильтра по заданному значению A_3 , определяющему минимальное затухание в полосе задерживания, находят коэффициент

$$\epsilon = 1/V \sqrt{10^{A_3/10} - 1}, \quad (6.10)$$

а по допустимому затуханию $A_{\pi} < 10 \lg(1 + 1/(\epsilon^2 T_n^2(v_3)))$ в полосе пропускания определяют требуемый порядок фильтра

$$n = \operatorname{Ev}(\operatorname{arsh}(1/e V \sqrt{10^{A_{\pi}/10} - 1}) / \operatorname{arsh} v_3).$$

После округления значения n до ближайшего большего целого второе из неравенства $A_{\pi \text{ ист}} < A_{\pi}$ и $A_{3 \text{ ист}} > A_3$ становится равенством. На практике чаще стремятся обратить в равенство первое отношение, что увеличивает затухание за пределами полосы пропускания. В этом случае при расчете фильтра следует использовать следующий алгоритм: 1) принять $n = 1$; 2) из условия $A_{\pi \text{ ист}} = A_{\pi}$ определить значение $\epsilon = \operatorname{ch}(n \operatorname{arsh} v_3) / (10^{A_{\pi}/10} - 1)$; 3) если $A_{3 \text{ ист}} = = \ln(1 + 1/\epsilon^2) < A_3$, то принять $n = n + 1$ и перейти к шагу 2, иначе закончить вычисления.

Программа 250. Вычисление ε и n обращенного фильтра Чебышева

```
Cx П6 ИП2 ↑ x2 1 — √ + ln
П8 ИП3 1 0 ÷ 10x 1 — П7 ИП6
1 + П6 ИП8 × ex ↑ 1/x + 2
÷ ИП7 √ × 1/x П5 x2 1/x 1 +
lg 1 0 × ↑ ИП4 — x ≥ 0 19 ↔
C/P
```

Инструкция. ($v_3 = P2$, $A_n = P3$, $A_a = P4$) В/О С/П РХ = $A_{a\text{ ист}}$, Р5 = ε , Р6 = n ; время счета зависит от n и A_a .

Пример. Для $v_3 = 1,2$, $A_n = 1$ дБ, $A_a = 20$ дБ получим $A_{a\text{ ист}} \approx 20,6$ дБ, $\varepsilon = 0,09385773$, $n = 6$ ($t \approx 80$ с).

Программа 251. Вычисление затухания $A(v)$ обращенного фильтра Чебышева

```
ИП9 ↔ ÷ П6 ↑ x2 1 — x ≥ 0 24
√ + ln ↑ ИП7 × ex ↑ 1/x +
2 ÷ БП 29 ИП6 cos-1 ИП7 × cos ИП8
× x2 1/x 1 + lg 1 0 × C/P
БП 00
```

Инструкция. Установить переключатель Р—ГРД—Г в положение Р; ($n = P7$, $\varepsilon = P8$, $v_3 = P9$) $v = RX$ (В/О) С/П РХ = $A(v)$.

Пример. Для $n = 10$, $\varepsilon = 0,05$, $v_3 = 1,2$ получим $A(1) \approx 0,0272$ дБ ($t \approx 18$ с).

Полюсы передаточной функции обычного r_k и обращенного r'_k фильтров Чебышева связаны соотношением $r'_k = v_3/r_k$ и для вычисления r_k можно воспользоваться программой 248 с последующим преобразованием r . Нули передаточной функции обращенного фильтра Чебышева, равные корням многочлена $T_n(v_3/v)$, можно вычислить по программе 247.

4. Фильтры Бесселя отличаются максимально плоской зависимостью группового времени запаздывания (ГВЗ) τ_{rp} от частоты. При $n \geq 3$ и $v \approx 1$ затухание такого фильтра удовлетворительно аппроксимируется выражением

$$A(v) \approx 10(\tau_{t_0})^2/(2n-1) \ln 10, \quad (6.11)$$

а начальное время задержки τ_0 связано с ГВЗ соотношением

$$\tau_{rp} \approx \tau_0 (1 - (2^n n!/(2n)!)^2 (\tau_{t_0})^2 + \dots), \quad (6.12)$$

где многоточием заменены следующие члены ряда.

При расчете фильтров Бесселя обычно задают допустимые значения A_n и $\Delta\tau_{rp}/\tau_0$, по которым вычисляют n , τ_0 и истинное значение $\Delta\tau_{rp}/\tau_0$.

Программа 252. Вычисление n , τ_0 , $\Delta\tau_{rp}/\tau_0$ фильтра Бесселя

```
П3 ↔ П2 Cx П4 1 П5 1 0 1п
ИП2 × 5 ÷ П6 ИП4 1 + П4 4
× 2 — П7 x2 ИП5 × П5 ИП7 ИП6
× П9 4 ÷ √ П8 ИП4 ИП9 Xy ИП5
÷ ИП3 — x < 0 15 ↔ ИП4 С/П
```

Инструкция. $A_n = PY$, $(\Delta\tau_{rp}/\tau_0)_{\text{доп}} = RX$ В/О С/П РХ = Р4 = n , РY = $= \Delta\tau_{rp}/\tau_0$, Р8 = τ_0 (Р2 = A_n , Р3 = $(\Delta\tau_{rp}/\tau_0)_{\text{доп}}$).

Таблица 6.2. Коэффициенты квадратичных множителей ($\alpha_i p^2 + \beta_i p + 1$) знаменателя нормированной передаточной функции фильтра Бесселя

Кофф- фици- ент	$i=1$	$i=2$	$i=3$	$i=4$	$i=5$	$i=6$
2	α_i β_i	0,333333333 1,000000000				
3	α_i β_i	0 0,43062884	0,15481236 0,56937112			
4	α_i β_i	0,10940762 0,63373504	0,087048867 0,36626497			
5	α_i β_i	0 0,27421763	0,070064906 0,46970902	0,055077755 0,25607336		
6	α_i β_i	0,053188291 0,45192595	0,047955137 0,35829281	0,18978123 0,037715887		
7	α_i β_i	0 0,20113493	0,038961376 0,37077909	0,034558375 0,28131479	0,027324805 0,14677119	
8	α_i β_i	0,031272257 0,34949162	0,020647498 0,117235831	0,025927388 0,22651666	0,029468327 0,30675590	
9	α_i β_i	0 0,15880530	0,024637054 0,30201914	0,022911268 0,25680882	0,020084958 0,18632574	0,016182596 0,096040998
10	α_i β_i	0,020547573 0,28446244	0,012912773 0,080289457	0,019769737 0,26156513	0,018235146 0,21763750	0,015967914 0,15604647
11	α_i β_i	0 0,13119331	0,014804933 0,18658176	0,012969004 0,13268973	0,016940188 0,25356852	0,016132397 0,22772145
						0,010565187 0,068245233

Пример. Для $A_n = 1$ дБ, $(\Delta\tau_{rp}/\tau_0)_{\text{доп}} = 0,01$ получим $n = 3$, $\tau_0 = 1,072982$, $\Delta\tau_{rp}/\tau_0 = 0,006782252$ ($t \approx 20$ с).

Если заданы абсолютное значение допустимого изменения ГВЗ фильтра-прототипа $\Delta\tau_{rp}$ и допустимое значение A_n , то вычисление параметров фильтра обеспечивает следующая программа.

Программа 253. Вычисление n , τ_0 и $\Delta\tau_{rp}$ фильтра Бесселя

```

П3 ↔ П2 Сх П4 1 П5 1 0 In
ИП2 × 5 ÷ П6 ИП4 1 + П4 4
× 2 — П7 x2 ИП5 × П5 ИП6 ИП7
× П9 4 ÷ √ П8 ИП4 ИП9 Xу ИП8
× ИП5 ÷ ↑ ИП3 — x<0 15 ↔ ИП4
С/П

```

Инструкция. $A_n = PY$, $\Delta \tau_{rp\text{ дои}} = RX$ В/О С/П $RX = P4 = n$, $PY = \Delta \tau_{rp}$.
 $P8 = \tau_0$.

Пример. Для $A_n = 3$ дБ и $\Delta \tau_{rp} \leq 0,05$ получим $n = 5$, $\tau_0 = 2,493387$, $\Delta \tau_{rp} = 0,02593102$ ($t \approx 20$ с).

Коэффициенты знаменателя передаточной функции фильтров Бесселя $K(p) = 1/(b_n p^n + \dots + b_1 p + 1)$ вычисляют по формуле

$$b_i = (2n - i)! / i! (2\tau_0)^i / (2n)! (n - i). \quad (6.13)$$

Программа 254. Вычисление коэффициентов знаменателя передаточной функции Бесселя

Cx П5 1 П9 С/П ИП7 ИП5 — ↑ ИП7

+ ÷ КИП5 ↔ ИП5 ÷ ИП8 × 2 ×

ИП9 × БП 03

Инструкция. ($n = P7$, $\tau_0 = P8$) В/О С/П $RX = b_0 = 1$ С/П $RX = b_1$ С/П $RX = b_2 \dots$ С/П $RX = b_n$ ($t \approx 10$ с).

Пример. Для $n = 5$, $\tau_0 = 2,493387$ получим $b_0 = 1$, $b_1 = 2,493387$, $b_2 = 2,763101$, $b_3 = 1,722370$, $b_4 = 0,613505$, $b_5 = 0,1019803$.

Для вычисления полюсов передаточной функции фильтров Бесселя приходится обращаться к методам решения алгебраических уравнений, но для фильтров с $n \leq 11$ проще воспользоваться данными табл. 6.2, полученными для фильтра Бесселя с нормированным значением $\tau_0 = 1$. Для заданного значения τ_0 достаточно денормировать коэффициенты квадратичных множителей $\alpha_l = -\tau_0^2 \alpha'_l$, $\beta_l = \tau_0 \beta'_l$ по значениям α'_l и β'_l , приведенным в табл. 12. Например, для фильтра 5-го порядка при $\tau_0 = 2,493387$ получим $\beta_1 = 0,27421763 \cdot 2,493387 \dots = 0,6837306$, $\alpha_2 = 0,070064906 \cdot 2,493387^2 = 0,4355920, \dots$, передаточную функцию $K(p) = 1/(0,6837061 p + 1) (0,435592 p^2 + 1,171766 p + 1) (0,3424172 p^2 \dots + 0,6384899 p + 1)$.

В пределах полосы пропускания затухание фильтра Бесселя при $n \geq 3$ хорошо аппроксимируется выражением

$$A(v) = 10(\nu \tau_0)^2 \ln l/(2n - 1), \quad (6.14)$$

но при $v > v_a$ затухание приходится вычислять общими методами анализа линейных цепей.

5. Фильтры Кауэра (эллиптические фильтры) характеризуются равноволновым приближением как в полосе пропускания, так и в полосе задерживания. Квадрат модуля передаточной функции такого фильтра

$$|K(jv)|^2 = \prod_{i=1}^k (v_i^2 - v^2)^2 / \left(\prod_{i=1}^k (v_i^2 - v^2)^2 + \epsilon^2 U_n^2(v) \right),$$

где k — число полюсов затухания (иuleй передаточной функции), а числитель дроби Чебышева определяют рекурсивным отношением

$$U_n(v) = 2U_{n-1}(v) - U_{n-2}(v) \quad (6.15)$$

по числителям $U_{n-1}(v)$ и $U_{n-2}(v)$ двух младших дробей Чебышева для выбранного числа k полюсов затухания (табл. 6.3).

Таблица 6.3. Определение числителей младших дробей Чебышева

	Числители двух младших дробей Чебышева	Коэффициенты младших дробей Чебышева
1	$U_2(v) = \gamma_1 v^2 - v_1^2$ $U_3(v) = (\gamma_1 + \delta_1)v^3 - (v_1^2 + \delta_1)v$	$\gamma_k = 2v_k^2 - 1$ $\delta_k = 2v_k \sqrt{v_k^2 - 1} \quad (v_k > 1)$
2	$U_4(v) = \alpha_0 v^4 - \alpha_2 v^2 + \alpha_4, \quad U_5(v) = (\alpha_0 + \alpha_1)v^5 - (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)v^3 + (\alpha_3 + \alpha_4)v$	$\alpha_0 = \gamma_1 \gamma_2 + \delta_1 \delta_2, \quad \alpha_1 = \gamma_1 \delta_2 + \gamma_2 \delta_1, \quad \alpha_2 = -v_1^2 \gamma_2 + v_2^2 \gamma_1 + \delta_1 \delta_2, \quad \alpha_3 = v_1^2 \delta_2 + v_2^2 \delta_1, \quad \alpha_4 = v_1^2 v_2^2$
3	$U_6(v) = \beta_0 v^6 - \beta_2 v^4 + \beta_4 v^2 - \beta_6, \quad U_7(v) = -(\beta_0 + \beta_1)v^7 - (\beta_1 + \beta_2 + \beta_3)v^5 + (\beta_3 + \beta_4 + \beta_5)v^3 - (\beta_5 + \beta_6)v$	$\beta_0 = \gamma_3 \alpha_0 + \delta_3 \alpha_1, \quad \beta_1 = \delta_3 \alpha_0 + \gamma_2 \alpha_1, \quad \beta_2 = -v_3^2 \alpha_0 + \delta_3 \alpha_1 + \gamma_1 \alpha_2 + \delta_3 \alpha_3, \quad \beta_3 = -v_3^2 \alpha_1 + \delta_3 \alpha_2 + \gamma_3 \alpha_3, \quad \beta_4 = v_3^2 \alpha_2 + \delta_3 \alpha_3 + \gamma_3 \alpha_4, \quad \beta_5 = v_3^2 \alpha_3 + \delta_3 \alpha_4, \quad \beta_6 = v_3^2 \alpha_4 \quad (\text{определение } \alpha_k, \gamma_k, \delta_k \text{ см. выше})$

Вычисление коэффициентов многочленов $U_n(v)$ по формуле (6.15) можно реализовать программой, выполняемой $n-k$ раз для определения коэффициентов числителя степени n по коэффициентам $U_k(v)$ и $U_{k-1}(v)$, учитывая, что многочлены содержат только четные или только нечетные степени аргумента v .

Программа 255. Вычисление коэффициентов числителя дроби Чебышева порядка $n \leq 13$

$$\begin{array}{cccccc}
 \text{ИП6 ПД} & 2 & \times & \text{ИПС} & - & \text{П6 ИП5 ПС} & 2 \\
 \times & \text{ИПВ} & - & \text{П5 ИП4 ПВ} & 2 & \times & \text{ИПА} \\
 \text{П4 ИП3 ПА} & 2 & \times & \text{ИП9} & - & \text{П3 ИП2 П9} \\
 2 & \times & \text{ИП8} & - & \text{П2 ИП1 П8} & 2 & \times & \text{ИП7} \\
 - & \text{П1 ИП0 П7} & 2 & \times & \text{П0 С/П БП} & 00
 \end{array}$$

Инструкция. Ввести начиная со старших членов коэффициенты $U_k(v)$ в регистры 0, 1, ..., 6, а коэффициенты $U_{k-1}(v)$ в регистры 7, 8, ..., С, Д, после m -го выполнения программы $P0=a_{k+m}$, $P1=a_{k+m-2}$, $P6=a_{k+m-12}$ ($t \approx 16$ с).

Пример. При двух полюсах затухания на нормированных частотах $v_1 = \sqrt{2}$ и $v_2 = \sqrt{5}$ для функции $U_n(v)$ из табл. 6.3 получим $\gamma_1 = 3, \delta_1 = 2\sqrt{2}; \gamma_2 = 9, \delta_2 = 4\sqrt{5}; a_0 = 27 + 8\sqrt{10} = 52,29822, a_1 = 12\sqrt{5} + 18\sqrt{2} = 52,28865, a_2 = 18 + 13 + 8\sqrt{10} = 58,29822, a_3 = 8\sqrt{5} + 10\sqrt{2} = 32,03067, a_4 = 10$, откуда $U_4(v) = 52,29822v^4 - 58,29822v^2 + 10, U_5(v) = 104,5868v^5 - 142,6175v^3 + 42,0306v$. После семи выполнений программы получим коэффициенты многочлена $U_{12}(v) = 13387.11v^{12} - 41682.79v^{10} + 49044.37v^8 - 26874.99v^6 + 6754.849v^4 - 634.5435v^2 + 10$.

Для фильтра с одним полюсом затухания вычисление коэффициентов числителя дроби Чебышева, включая и подготовительные операции, можно автоматизировать с помощью одной программы.

Программа 256. Вычисление коэффициентов числителя дроби Чебышева порядка $n \leq 12$ при одном полюсе затухания

Cx	1	3	П0	Cx	.КП0	ИП0	x=0	04	С/П
x^2	П0	2	\times	1	—	П7	1	—	ИП0
\times	2	\times	\checkmark	ИП0	/—/	П8	\leftrightarrow	—	П1
ИП7	Bx	+	П0	ИП6	ПД	2	\times	ИПС	—
П6	ИП5	ПС	2	\times	ИПВ	—	П5	ИП4	ПВ
2	\times	ИПА	—	П4	ИП3	ПА	2	\times	ИП9
—	П3	ИП2	П9	2	\times	ИП8	—	П2	ИП1
П8	2	\times	ИП7	—	П1	ИП0	П7	2	\times
П0	C/P	БП	34						

Инструкция. В/О С/П ($t \approx 18$ с) РХ=0, $v_1=RX$ С/П РХ=Р0=a₁, Р1=a₃ С/П РХ=Р0=a₀, Р1=a₂, Р2=a₄ С/П ... С/П РХ=Р0=a₀, Р1=a₂, Р2=a₄, Р3=a₆, Р4=a₈, Р5=a₁₀, Р6=a₁₂.

Пример. Для $v_1=1,2$ после шести вычисленных коэффициентов получим коэффициенты многочлена $U_8(v)=111,1033v^8-238,2067v^6+163,4552v^4-37,35187v^2+1,44$.

В выражение для квадрата модуля передаточной функции входит квадрат числиителя дроби Чебышева. Для возведения в квадрат $U_n(v)$ степени $n \leq 10$ следует использовать программу 102.

Расчет затухания фильтра Кауэра в полосе пропускания нецелесообразно, так как в этом случае характеристика затухания заведомо равновеликая с числом n максимумов. Равноволновое затухание в полосе задерживания обеспечивают выбором частот полюсов затухания, но равновеликая аппроксимация затухания в полосе задерживания не всегда оптимальна, а использование подобной методики связано с трудоемкими вычислениями. Поэтому часто задаются расположением полюсов затухания и по расчету АЧХ корректируют координаты полюсов до получения требуемых результатов.

Программа 257. Расчет затухания фильтра Кауэра произвольного порядка с числом $k \leq 7$ полюсов затухания во всем диапазоне частот

ИПА	ИПВ	П0	2	\times	—	\rightarrow	\rightarrow	x^2	ПД
1	—	$x \geq 0$	44	\checkmark	+	ln	\times	П9	ПП
68	x^2	1	—	\checkmark	+	$x < 0$	29	$1/x$	x^2
\checkmark	ln	ИП9	+	L0	18	e^x	\uparrow	$1/x$	+
2	\div	БП	56	\rightarrow	\cos^{-1}	\times	П9	ПП	68
\cos^{-1}	ИП9	+	L0	47	cos	ИПС	\times	x^2	1
+	lg	1	0	\times	C/P	БП	00	ИП0	1
+	П0	КИП0	x^2	\uparrow	ИПД	2	\times	\times	\leftrightarrow
—	ИПД	—	\leftrightarrow	ИПД	—	\div	↑	B/O	

Инструкция. Установить переключатель Р—ГРД—Г в положение Р; ($n=PA$, $k=PB$, $e=PC$, $v_1=P1$, $v_2=P2$, ..., $v_7=P7$) $v=RX$ В/О С/П РХ= $=A(v)$.

Пример. Для $n=9$, $k=4$, $e=0,2$, $v_1=1,05$, $v_2=1,15$, $v_3=1,3$, $v_4=1,5$, $v=2$ получим $A(v)=48,022841$ ($t \approx 75$ с).

Расчет фильтров Кауэра с полюсами затухания целесообразно выполнять в следующем порядке: 1) по результатам расчета затухания с помощью про-

граммы 257 определить частоты полюсов затухания, удовлетворяющие предъявляемым к фильтру требованиям; 2) с помощью программы 255 при выбранных значениях v ; вычислить коэффициенты числителя дроби Чебышева и определить квадрат модуля $K(p)$; 3) вычислить корни знаменателя передаточной функции, отнеся к ней корни с отрицательными вещественными частями.

6.3. Синтез LC-фильтров

В процессе синтеза LC -фильтров (в частности, фильтров-прототипов) по заданной передаточной функции необходимо определить параметры эквивалентного проходного четырехполюсника с реактивными элементами при заданных сопротивлениях R_h нагрузки и R_c источника сигнала. С этой целью по характеристической функции $T(p)$, определяемой соотношением (6.2), и нормированному коэффициенту передачи напряжения $K(p) = 0,5\sqrt{R_h/R_c} K_{U_c}(p)$ находят A -матрицу [7] искомого реактивного проходного четырехполюсника

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{R_c R_h}} \times \begin{bmatrix} ((1/K(p))_q + T(p)_q) R_c & ((1/K(p))_{nq} + T(p)_{nq}) R_c R_h \\ ((1/K(p))_{nq} - T(p)_{nq}) & ((1/K(p))_q - T(p)_q) R_h \end{bmatrix}, \quad (6.16)$$

где индексами « q » и « nq » обозначены четная и нечетная части соответствующих функций.

По A -параметрам найденного проходного четырехполюсника определяют проводимости

$$Y_{bx\text{ кз}} = A_{22}/A_{12}, \quad Y_{bx\text{ хх}} = A_{21}/A_{11}; \quad (6.17)$$

$$Y_{вых\text{ кз}} = A_{11}/A_{12}, \quad Y_{вых\text{ хх}} = A_{21}/A_{22},$$

соответствующие условиям холостого хода или короткого замыкания на другой стороне.

Функция $T(p)$ в равенстве (6.16) известна для фильтров Баттервортса и Чебышева, а при расчете фильтров других типов ее определяют согласно (6.3). Иногда приходится решать обратную задачу определения функции $K(p)$ по известной функции $T(p)$, сводящуюся к аналогичным вычислениям, которые можно автоматизировать с помощью программы 103.

В качестве примера определим параметры реактивного четырехполюсника, реализующего функцию $K(p) = (0,5p^2 + 1)/(p^3 + 2p^2 + 2p + 1)$ при $R_c = R_h = 1$. С помощью программы 103 находим $(p^3 + 2p^2 + 2p + 1)(-p^4 + 2p^2 - 2p + 1) = -p^6 + 1$, $(0,5p^2 + 1)(0,5p^2 + 1) = 0,25p^4 + p^2 + 1$. Из соотношения (6.3) следует $Q(p)Q(-p) = -p^6 + 1 - (0,25p^4 + p^2 + 1) = -p^6 - 0,25p^4 - p^2$. Определив корни этого многочлена $p_{1,2} = 0$, $p_{3,4,5,6} = \pm(\sqrt{7} \pm j3)/4$, находим, что один из возможных вариантов многочлена $Q(p) = p(p - (-\sqrt{7} + j3)/4)(p - (-\sqrt{7} - j3)/4) = p^3 + \sqrt{7}/2p^2 + 1$. В этом случае $T(p) = Q(p)/M(p) = (p^3 + \sqrt{7}/2p^2 + 1)/(0,5p^2 + 1)$ и согласно формуле (6.16)

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{((4+\sqrt{7})/2)p^2+1}{0,5p^2+1} & -\frac{2p^2+3p}{0,5p^2+1} \\ \frac{p}{0,5p^2+1} & \frac{((4-\sqrt{7})/2)p^2+1}{0,5p^2+1} \end{bmatrix}.$$

По (6.17) находим $Y_{\text{вх кз}} = ((4-\sqrt{7})/2)p^2+1)/(2p^2+3p)$, $Y_{\text{вх хх}} = p/((4+\sqrt{7})/2)p^2+1)$; $Y_{\text{вых кз}} = ((4+\sqrt{7})/2)p^2+1)/(2p^2+3p)$, $Y_{\text{вых хх}} = p/((4-\sqrt{7})/2)p^2+1)$. Так как при $R_c \approx 0$ и источник напряжения близок к идеальному, то в этом случае $Y_{22} = N_{\text{вч}}(p)/N_{\text{ч}}(p)$ или $Y_{22} = N_{\text{ч}}(p)/N_{\text{вч}}(p)$ [7], а проводимость Y_{11} не влияет на передаточную функцию $K(p)$, и для синтеза достаточно характеристического параметра Y_{22} . Иногда желательно определить значения остальных характеристических проводимостей синтезируемого реактивного четырехполюсника, для чего следует найти коэффициенты вспомогательного многочлена $Q(p)$, удовлетворяющего уравнению

$$N(p)Q(-p) + Q(p)N(-p) = 2M(p)M(-p), \quad (6.18)$$

где $M(p)$ и $N(p)$ – многочлены числителя и знаменателя реализуемой передаточной функции $K(p)$.

Минимальная степень многочлена $Q(p)$, равная минимальному числу элементов фильтра без потерь, из единицы меньше степени многочлена $N(p)$, а коэффициенты b_i многочлена $Q(p)$ связаны с коэффициентами a_i многочлена $N(p)$ и коэффициентами c_i многочлена $M(p)M(-p)$ системой уравнений

$$\begin{bmatrix} a_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_2 & -a_1 & a_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_4 & -a_3 & a_2 & -a_1 & a_0 & & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \pm a_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_3 \\ \dots \\ b_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_0 \\ c_2 \\ c_4 \\ \dots \\ c_{2n-2} \end{bmatrix},$$

имеющей единственное решение. После определения коэффициентов многочлена $Q(p)$ для синтезируемого фильтра с минимальным числом элементов и $R_n = 1$ получим

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1/K(p))_{\text{ч}} & (1/K(p))_{\text{вч}} \\ (Q(p)/M(p))_{\text{вч}} & (Q(p)/M(p))_{\text{ч}} \end{bmatrix},$$

после чего искомые параметры несложно определить по (6.17). Так, для рассматриваемого примера, составив матричное уравнение

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0,25 \end{bmatrix},$$

получим $K(p) = (p^2/2+3p/4+1)/(0,5p^2+1)$ и матрицу A -параметров синтезируемого четырехполюсника

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (2p^2+1)(0,5p^2+1) & 2p \\ 3p/(2p^2+4) & 1 \end{bmatrix}.$$

По (6.17) находим $Y_{\text{вх кз}} = 1/2p$, $Y_{\text{вх хх}} = 3p/(8p^2+4)$, $Y_{\text{вых кз}} = (2p^2+1)/(p^3+$

$+2p$), $Y_{\text{вых}} = 3p/(2p^2 + 4)$. Из возможных схемных реализаций реактивного четырехполюсника с требуемой входной функцией чаще всего используют лестничные цепи (см. рис. 13). Вычисление параметров таких цепей по коэффициентам a_i числителя и b_i знаменателя степени $m=n-1$ входной функции $Y_{\text{вх}}$ или $Z_{\text{вх}}=1/Y_{\text{вх}}$ можно автоматизировать.

Программа 258. Вычисление параметров лестничного LC -фильтра по заданной входной функции со степенью числителя $n=m+1 \leq 11$

$$\begin{array}{ccccccccc} \uparrow & 1 & + & \text{П0} & \text{КИП0} & \text{КИП0} & \div & \uparrow & \uparrow \\ \text{ПД} & \rightarrow & \text{С/П} & \rightarrow & \text{КИП0} & \leftrightarrow & \text{КИП0} & \times & \text{ИП0} \\ 2 & + & \text{П0} & \rightarrow & \text{КП0} & \text{ИП0} & 2 & - & \text{x} \neq 0 \quad 33 \\ \rightarrow & \text{L0} & 13 & \text{ИПД} & \text{БП} & 00 & & & \end{array}$$

Инструкция. $a_0=P1$, $b_1=P2$, $a_2=P3$, $b_3=P4$, ..., $a_8=P9$, $b_9=PA$, $a_{10}=PB$, $b_{11}=PC$, $n+1=PX$, В/О С/П PX=C₁ или L₁ С/П PX=-l₁ или C₂ ... С/П PX=C₃ или L₃... ($t \approx 25$ с).

В качестве примера определим параметры лестничной цепи, реализующей фильтр Баттерворта по известной функции входного сопротивления

$$Z_{\text{вх}}(p) = \frac{5,7587708p^8 + 31,163439p^8 + 41,986389p^4 + 16,581719p^2 + 1}{2p^8 + 16,581719p^7 + 41,986389p^5 + 31,163439p^3 + 5,758708p}.$$

Так как у заданной входной функции $n < m$, то будем реализовать обратную функцию $Y_{\text{вх}}(p) = 1/Z_{\text{вх}}(p)$. В этом случае первым элементом лестничной цепи будет поперечная емкость C_1 , вторым — продольная индуктивность L_2 и последним — поперечная емкость C_9 . Выполнив программу 258, получим значения параметров $C_1=0,34729633$ (0,347), $L_2=0,99999996$ (1,000), $C_3=1,5320892$ (1,532), $L_4=1,8793896$ (1,879), $C_5=2,000057$ (2,000), $L_6=1,8793896$ (1,879), $C_7=1,5320892$ (1,532), $L_8=1,0091596$ (1,000), $C_9=0,3410926$ (0,347), где в скобках даны значения параметров со всеми верными цифрами [16].

Сравнение вычисленных значений со значениями с тремя верными цифрами после запятой свидетельствует о накоплении операционной погрешности — относительная погрешность возрастает с номером параметра и для C_9 достигает 1,2% от значения с тремя верными цифрами после запятой. Для оценки точности полученных результатов восстановим по ним с помощью программы 108 входную функцию фильтра

$$Y_{\text{вх}}(p) = \frac{1,9946013p^8 + 16,542313p^7 + 41,90157p^5 + 31,115677p^3 + 5,7546243p}{5,758962p^8 + 31,164373p^6 + 41,987317p^4 + 16,58191p^2 + 1}.$$

При использовании параметров с тремя верными цифрами после запятой по программе 108 получим входную функцию

$$Y_{\text{вх}}(p) = \frac{1,9989901p^8 + 16,57396p^7 + 41,969461p^5 + 31,155893p^3 + 5,7586p}{5,7558022p^8 + 31,149317p^6 + 41,972919p^4 + 16,579009p^2 + 1}.$$

Воспользовавшись симметрией схемы фильтра, примем $L_6=L_4$, $C_7=C_3$, $L_8=L_2$, $C_9=C_1$, где C_1 , L_2 , C_3 и L_4 — вычисленные параметры. В этом случае получим

$$Y_{\text{вх}}(p) = \frac{2,0000666p^9 + 16,582235p^7 + 41,98752p^5 + 31,163949p^3 + 5,758828p}{5,7589626p^8 + 31,16437p^6 + 41,987317p^4 + 16,58191p^2 + 1}$$

Сравнивая коэффициенты вычисленных функций с коэффициентами исходной функции, находим, что наиболее точно параметры фильтра определены из условия симметрии схемной реализации фильтра.

Следует подчеркнуть, что обеспечение требуемой точности результатов при реализации фильтров высокого порядка является сложной задачей, а известные методы уменьшения погрешностей, применяемые при вычислениях на стационарных ЭВМ (из которых основным является вычисление с кратным увеличением разрядности операндов) практически неприменимы при расчетах с помощью микрокалькуляторов с фиксированной разрядностью операндов. Поэтому ограничимся следующими рекомендациями:

1. Все вычисления необходимо выполнять с максимальной разрядностью и плавающей запятой (точкой), не округляя исходных данных и промежуточных результатов вычислений.

2. При расчете симметричных фильтров (например, Баттерворта или Чебышева) целесообразно вычислять только первые $n/2$ или $(n+1)/2$ параметров, определяя остальные из условия симметрии схемы фильтра.

3. При расчете несимметричных фильтров целесообразно выполнять вычисления дважды для функций $Y_{\text{вх}}(p)$ и $Y_{\text{вых}}(p)$ или $Z_{\text{вх}}(p)$ и $Z_{\text{вых}}(p)$, сравнивая полученные результаты для ориентировочной оценки погрешностей.

Добавим, что точность вычислений по программе 108 значительно выше, чем по программе 258 с вычитанием близких чисел, в связи с чем программу 108 целесообразно использовать и для оценки влияния погрешностей вычисления коэффициентов фильтра на передаточную функцию.

При синтезе фильтров с передаточными функциями $K(p)$, имеющими нули (полюсы затухания), кроме операции разложения в цепную дробь входной функции приходится выделять полюсы затухания, реализуемые для входных функций звенями, показанными на рис. 55, а и б, согласно следующему алгоритму:

1. Вычислить индуктивность L_I для $Z(p)$ или C_I для $Y(p)$ по формуле $W_I = M(p)/pN(p)$ при $p = j\nu_I$, где $M(p)/N(p)$ — синтезируемая функция; ν_I — частота выделяемого полюса затухания.

2. Вычислить остаточную функцию $Z'(p) = Z(p) - pL_I = (N(p) - pL_IM(p))/M(p)$ или $Y'(p) = Y(p) - pC_I = (N(p) - pC_IM(p))/M(p)$.

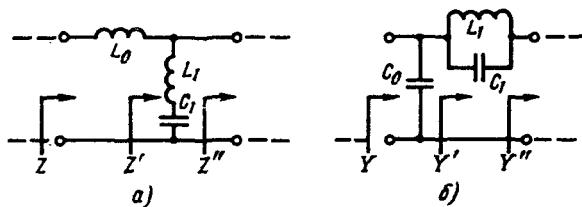


Рис. 55

3. Разложить числитель остаточной функции на множители $p^2 + v_j^2$ и $N'(p) = (N(p) - pW_f M(p))/(p^2 + v_j^2)$.

4. Вычислить L'_j или $C'_j = pN'(p)/M(p)$ при $p = jv_j$ и $C'_j = 1/(v_j^2 L'_j)$ или $L'_j = 1(v_j^2 C'_j)$.

5. Вычислить остаточную функцию $Z''(p) = (M(p) - pN'(p)/L'_j) N'(p)$ или $Y''(p) = (M(p) - pN'(p)/C'_j)/N'(p)$, подлежащую дальнейшей реализации.

Программа 259. Синтез лестничного фильтра порядка $n \leq 10$ с полюсами затухания

ИПВ	ИПА	\div	ПП	53	ИПД	$x=0$	19	ПП	59
КИП0	КИП0	\div	ПП	91	L0	11	ИПС	БП	35
38	ПП	59	ПП	38	1/x	ПС	ПП	81	ПП
59	ПП	81	ИПД	\div	С/П	БП	00	Cx	\uparrow
\uparrow	\rightarrow	\leftrightarrow	КИП0	$+$	ИПД	\times	ИП0	$x=0$	41
\rightarrow	\div	C/П	ПС	1	2	П0	ИПС	B/O	КИП0
КИП0	ИПС	\times	—	ПВ	ИПД	\times	КИП0	$x \neq 0$	54
КИП0	ИПС	\times	—	+	ПП	91	L0	65	БП
54	КИП0	КИП0	$x \neq 0$	54	ПП	91	\leftrightarrow	КП0	БП
81	ИП0	2	+	П0	\rightarrow	КП0	B/O		

Инструкция. $a_n = PB$, $b_{n-1} = PA$, $a_{n-2} = P9$, $b_{n-3} = P8$, ..., $-v_j^2 = RD$ (при выделении полюса затухания) B/O C/P RX = L_j или C_j C/P RX = L'_j или C'_j C/P RX = $-C_{j+1}$ или $-L_{j+1} \dots$ или $0 = RD$ (при реализации простого звена) (B/O) C/P RX = C_i или L_i C/P RX = L_{i+1} или $C_{i+1} \dots$

Вычисление параметров каждого режекторного звена лестничного фильтра уменьшает на два число коэффициентов остаточной схемной функции, но вследствие операционных погрешностей содержимое соответствующих регистров памяти может отличаться от нуля. Для устранения накопления погрешностей целесообразно после вычисления параметров первых элементов фильтра очищать соответствующие регистры памяти.

Для примера синтезируем лестничный фильтр порядка $n = 5$ с полюсом затухания на частоте $v_1 = 2,125$ по входной функции

$$Y_{\text{вх } xx}(p) = \frac{110,23086p^6 + 172,82389p^5 + 61,498228p^4}{71,898712p^4 + 85,417022p^3 + 13,530435}.$$

После ввода программы 259 и исходных данных (110,23086 = PB, 71,898712 = PA, 172,82389 = P9, 85,417022 = P8, 61,498228 = P7, 13,530435 = P6) выполняем, $-2,125^2 = RD$ B/O C/P RX = $C_1 = 1,3975668$ ($t \approx 60$ с) C/P RX = $C'_1 = 0,14276846$ ($t \approx 60$ с) C/P RX = $-L_2 = -1,5511358$ ($t \approx 55$ с) $0 = RD$ C/P RX = $C_3 = 2,6904334$ ($t \approx 55$ с) C/P RX = $L_4 = 2,643947$ ($t \approx 40$ с) C/P RX = $C_5 = 0,45735674$ ($t \approx 50$ с).

При различном месте включения режекторного звена получаются различные схемы реализации. Например, если вычисленным данным соответствует схема на рис. 56, а, то, изменив порядок реализации, с помощью программы 259

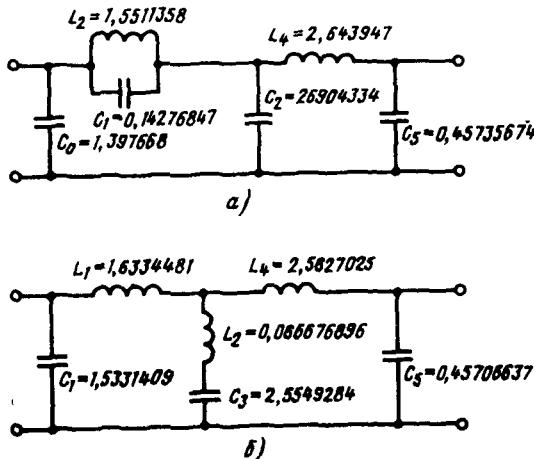


Рис. 56

получим: $0 = \text{РД В/О С/П RX} = C_1 = 1,5331409$, $-2,125^2 = \text{РД В/О С/П RX} = -L_1 = 1,6334481$ С/П RX = $L'_2 = 0,086676696$ С/П RX = $-C_3 = -2,5549284$; $0 = \text{Р7} = \text{РД С/П RX} = L_4 = 2,5627025$ С/П RX = $C_5 = 0,45706637$ (рис. 56, б).

Напомним, что после реализации фильтра-прототипа при синтезе LC-фильтров выполняют преобразование схемы и денормировку ее параметров в соответствии с формулами табл. 14.

6.4. Практический расчет LC-фильтров

Рассмотрим возможности описанного программного обеспечения на примере расчета полосового фильтра с $A_{\text{н}} \leq 1$ дБ, $A_{\text{з}} \geq 60$ дБ, $f_{\text{n}1} = 96$ кГц, $f_{\text{n}2} = 104$ кГц, $f_{\text{s}1} = 92$ кГц, $f_{\text{s}2} = 108,24$ кГц. В соответствии с алгоритмом расчета (см. рис. 52) с помощью программы 238 находим, что фильтр-прототип должен обеспечить затухание на нормированных частотах $v = 2,065217$ и $v = 2,000061$, из которых выбираем меньшую, приняв $v_3 = 2$.

Так как требования к временным характеристикам или ФЧХ не оговорены, попытаемся синтезировать фильтр Чебышева. С помощью программы 248 находим, что требуемую АЧХ обеспечит фильтр Чебышева порядка $n = 7$ с затуханием $A(v_3) = A(2) = 68,18371$ дБ. Это позволит улучшить АЧХ в полосе пропускания с уменьшением $A_{\text{п}}$ до 0,5 дБ при $A_{\text{з}} = 64,91622$ дБ и координатах полюсов $p_{1,2} = -0,057000306 + j1,006408$, $p_{3,4} = -0,159719 + j0,8070769$, $p_{5,6} = -2,308007 \pm j0,4478939$, $p_7 = -0,2561693$.

Предположим, что необходимо реализовать LC-фильтр с добротностью контуров $Q \leq 150$. При преобразовании фильтра-прототипа в ПФ ветви последнего представляют собой контуры примерно одинаковой добротности. Влияние потерь учитывается по методу предыскажений, но при $Q = 150$ смещение полюсов $\sigma_m = f_0 / \Delta f Q_{\text{max}} = 100 / (8 \cdot 150) = 0,08333$, что свидетельствует о нереализуе-

мости фильтра Чебышева по исходным данным, так как требуется минимальная добротность $Q = f_0/\Delta f (\text{Rep}_i)_{\min} \approx 220$.

Пытаясь реализовать фильтр Баттервортса, с помощью программы 245 получим (при $A_n=1$ дБ, $A_3=60$ дБ, $v_a=2$); $\epsilon=0,5088468$; $n=11$ при $p_{1,2}=-0,1513294 \pm j0,052520$, $p_{3,4}=0,441729 \pm j0,9672519$, $p_{5,6}=-0,69663422 \pm j0,8036217$, $p_{7,8}=-0,8945419 \pm j0,5748873$, $p_{9,10}=-1,020271 \pm j0,2995786$, $p_{11}=-1,063343$. Для реализации такого фильтра достаточна добротность контуров $Q \geq 100/(8 \cdot 0,1513294) \approx 82,6$, но порядок фильтра относительно большой, а запас по A_n и A_3 практически отсутствует.

При одинаковой неравномерности в полосе пропускания расстояние между минимой осью и ближайшим полюсом на плоскости p уменьшается при увеличении порядка фильтра, а снижение затухания на частоте можно скомпенсировать введением полюсов затухания (нулей передачи). Поэтому попытаемся синтезировать фильтр Кауэра порядка $n=5$ с одним полюсом затухания.

Задавшись $\epsilon=0,4$ (что соответствует $A_n \approx 0,645$ дБ), $n=5$ и подбирая частоту v_1 полюса затухания, с помощью программы 257 находим, что требуемая АЧХ обеспечивается при $v_1=2,125$. Для определения коэффициентов $K(p)$ используем программу 239. Вводя $v_3=2,125$ и трижды выполнив программу, находим коэффициенты дроби Чебышева $U_5(v)=64v^5-82v^3+21,515625v$. Затем с помощью программы 102 после умножения коэффициентов дроби на ϵ^2 получаем $|K(v)|^2=(4,51565-v^2)^2/(655,36v^{10}-167,36v^8+1516,48v^6-563,57v^4+65,03628v^2+20,790869)$ или после перехода к переменной p и нормирования функции по свободному члену $K(p)K(-p)=(1+0,22145329p^2)^3/(1+3,1894809p^2-27,638351p^4-74,370543p^6-82,358432p^8-32,139876p^{10})$.

Обозначив $x=1/p^2$, составим уравнение $x^5-3,1894809x^4-27,638351x^3-74,37054x^2-82,358432x-32,139876$ и с помощью программы 121 для выделения вещественного корня получим $x_1=7,9860304$, откуда $p_{1,2}=\pm\sqrt{1/x_1}=\pm 0,35386247$. Разделив исходное уравнение на множитель корня $x-x_1$ и разложив частное на квадратичные множители с помощью программы 124, отнесем к функции $K(p)$ корни, расположенные в левой полуплоскости, сформировав знаменатель функции $(1+0,18351866p+0,98273208p^2)(1+1,103614p+2,041364p^2)(1+2,8259565p)$. Ближайшая пара полюсов отстоит от минимой оси на расстоянии $\text{Rep}_{1,2}=-0,09337174$, откуда $Q_{\text{трб}}=100/(8 \cdot 0,09337174)=134$, и, следовательно, фильтр реализуем при $Q=150$. С помощью программы 101 окончательно находим $K(p)=(1+0,22145329p^2)/(5,6691911p^5+6,1297082p^4+10,577501p^3+6,8640103p^2+4,1130891p+1)$.

Сместив полюсы на расстояние $\sigma_m=-1/12$, с помощью программы 243 (можно вначале преобразовать множители по программе 244, а затем их перемножить) получим функцию, в которой смещены только полюсы (учет потерь в контурах, формирующих полюсы затухания, выполняют отдельно):

$$K(p)=(1+0,22145329p^2)/(5,6691911p^5+3,7675451p^4+8,927958p^3+4,4422321p^2+3,1766298p+0,6990609). \quad (6.19)$$

Частотная характеристика квадрата модуля этой функции (штрихпунктирная линия на рис. 57) значительно отличается от требуемой (непрерывная кривая на рис. 57) и не реализуема пассивной цепью. Сместив полюсы на расстояние $\sigma_m=1/12$, получим функцию (АЧХ которой показана на рис. 57 штри-

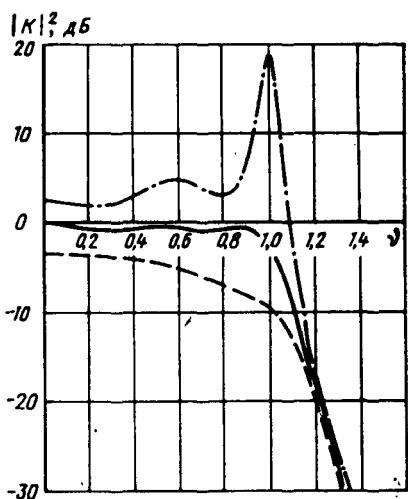


Рис. 57

с помощью программы 103 по знаменателю передаточной функции (6.19) находим $N(p)N(-p) = -3043,2339 p^{10} - 8241,0607 p^8 - 7788,4019 p^6 - 3003,5592 p^4 - 367,40639 p^2 + 46,272521$. Для числителя функции аналогично находим $M(p)M(-p) = 1 + 0,44290658 p^2 + 0,04904155 p^4$ и на основании (6.18) получаем $Q(p)Q(-p) = 3043,2339 p^{10} + 8241,0607 p^8 + 7788,4019 p^6 + 3003,6082 p^4 + 367,8493 p^2 - 45,272521$. Подставив $x = 1/p^2$ и решив полученное уравнение, запишем многочлен $Q(p) = 55,16535 p^5 + 35,237651 p^4 + 86,948109 p^3 + 42,1900747 p^2 + 30,58722 p + 6,728044$, все корни которого расположены в левой полуплоскости.

Выделив $(1 - K(p))_q = (36,661061 p^4 + 43,226275 p^2 + 6,80239909)/(1 + 0,22145329 p^2)$, $(1/K(p))_{nq} = (55,165511 p^3 + 86,875772 p + 30,911006)/(1 + 0,22145329 p^2)$, $(T(p))_q = (35,237651 p^4 + 42,190747 p^2 + 6,728044)/(1 + 0,22145329 p^2)$; $(T(p))_{nq} = (55,16535 p^5 + 85,948109 p^3 + 30,58722 p)/(1 + 0,22145329 p^2)$, найдем в соответствии с (6.16) и (6.18) функцию, две схемные реализации которой показаны на рис. 56.

Таблица 6.4. Результаты синтеза фильтра по функциям $Y_{\text{вых хх}}$ и $Y_{\text{вых хх}}$

Параметр	Значение параметра при синтезе по функциям		n
	$Y_{\text{вых хх}}$	$Y_{\text{вых хх}}$	
C_1	1,53314	312,6528	14,28
L_1	1,633447	0,008414342	13,97
L_2	0,08667724	0,0004993538	13,17
C_2	2,554918	443,4797	13,17
L_3	2,56261	0,01555009	12,84
C_3	0,4571568	75,32320	12,84

ховой линией) $K(p) = (1 + 0,22145329 p^2)/(5,6691911 p^5 + 8,4918709 p^4 + 13,0144 p^3 + 9,7965979 p^2 + 5,4930115 p + 1,3968637)$, соответствующую фильтру с добротностью $Q = 150$, синтезируемому без учета потерь.

Функция (6.19) имеет максимум квадрата модуля около 19 дБ на частоте $v \approx 1$, тогда как в реактивном фильтре $|K(v)|_{\max} = 1$. Поэтому следует с максимальной точностью найти максимум модуля функции (6.19), равный $|K(p)|_{\max} = 0,9730755$ при $v = 1,00393$.

Введя постоянный множитель, равный этому значению модуля, в знаменатель, получаем реализуемую функцию $K(p)/0,9730755$.

Для вычисления функции $T(p)$

В общем случае в схему лестничного фильтра (рис. 58, а) входит идеальный трансформатор (ИТ), коэффициенты которого определяют при синтезе цепи по выходной функции. Сформировав согласно (6.17) функцию $Y_{\text{вых}\text{xx}}$ и синтезировав ее с помощью программы 259, получим параметры фильтра с идеальным трансформатором, приведенные в табл. 6.4. Коэффициент трансфор-

мации $n = \sqrt{C_i''/C_i'} = \sqrt{L_i'/L_i''}$ определяют по значениям L_i' и L_i'' (или C_i' и C_i''), полученным соответственно при реализации функций $Y_{\text{вых}\text{xx}}$ и $Y_{\text{вых}\text{xx}}$. Сравнение значений n в обоих случаях позволяет оценить погрешности синтеза и выбрать среднее значение. Величину n определяют также из формулы $K(0) = n/(1+n^2)$, где $K(0) = K_U(0)/2$. В нашем случае $K_U(0) = 1/(9,730755 \cdot 0,6990609) = 0,1470071$, что соответствует значению $n = 13,53087$, отличающемуся лишь на 1,2% от усредненного по данным табл. 6.4 значения $n = 13,53$. Учитывая минимальную погрешность параметров первых звеньев, примем $n = 13,53$, $L_{1n} = 1,633$, $C_{1n} = 1,533$; $L_{2n} = 0,089$, $C_{2n} = 2,489$; $L_{3n} = 2,845$, $C_{3n} = 0,4115$.

Пусть сопротивление источника сигнала $R_c = 10$ кОм. Так как сопротивление нагрузки не задано, примем $R_h = n^2 R_c = 1,83$ МОм. Определив при $f_0 = 100$ кГц коэффициенты преобразования $K_1 = 10^3 R_c / 2\pi f_0 = 15,91549$, $K_c = 10^{-12} / (2\pi f_0 R_c) = 159,1549$, $K_A = 100/8 = 12,5$, с помощью программы 240 найдем параметры схемы фильтра (рис. 58, б): $C_1 = 3,049806$ нФ, $L_1 = 0,8305541$ мГн; $C_2 = 7,796935$ нФ, $L_2 = 324,875$ мГн; $L_3 = 32,64733$ мГн, $C_3 = 65,47299$ пФ ($f_{03} = 108,8591$ кГц); $L_4 = 38,68815$ мГн, $C_4 = 77,58762$ нФ ($f_{04} = 91,86178$ кГц); $C_5 = 4,475358$ пФ, $L_5 = 565,9947$ мГн; $C_6 = 818,6532$ пФ, $L_6 = 3,094142$ мГн.

Полученные параметры практически нереализуемы из-за относительной большой индуктивности катушек, соответствующей большой их собственной емкости, не учтенной при вычислении емкостей фильтра. Чтобы обеспечить реализуемость фильтра, преобразуем его в квазиполиномиальный, введя два инвертора емкостного типа (рис. 58, в), при расчете которых следует стремиться к обеспечению наименьшего разброса параметров катушек индуктивности. Обозначив параметры схемы на рис. 58, б, индексами «о», получим для схемы с инверторами $L_1 = L_{1o} = 830,5541$ мкГн, $L_2 = K_1^2 C_2 = 7,796935 K_1$ мкГн, $L_3 = K_1^2 C_3 = 65,47299 K_1^2$ мкГн, $L_4 = K_1^2 C_4 = 77,58762 K_1^2$ мкГн, $L_5 = K_1^2 C_5 = L_8 = K_1^2 L_6 / K_2^2 = 3,094142 K_1^2 / K_2^2$ мкГн. Приравняв $L_{\max} = L_4$ к L_1 и L_1 к $L_5 = L_{\min}$, получим $77,58762 K_1^2 / 830,5541 = 830,5541 / (4,475358 K_1^2)$, откуда с учетом используемых размерностей параметров $K = 6,676193 \cdot 10^8$; $C' = 1 / (2\pi f_0 K_1) = 10^{12} / (2\pi \cdot 10^8 \times 6,676193 \cdot 10^8) = 238,3917$ пФ.

Выбрав из ряда номинальных значений $C' = 240$ пФ и уточнив $K_1 = 6,63146$, находим параметры фильтра с инверторами (рис. 58, в): $L_1 = 830,55$ мкГн, $L_2 = 342,88$ мкГн, $L_3 = 2879,25$ мкГн, $L_4 = 3412$ мкГн, $L_5 = 196,8$ мкГн; $C_1 = 3049,8$ пФ, $C_2 = 7387,5$ пФ, $C_3 = 742,4$ пФ, $C_4 = 879,75$ пФ; $C_5 = 12870,5$ пФ. При определении коэффициента преобразования второго инвертора следует учесть возможность согласования с нагрузкой. Например, при $R_h = 150$ кОм из условия $R_h = K_1^2 R_{h0} / K_2^2$ находим $K_2 = \sqrt{1,83 \cdot 10^8 / 150 \cdot 10^3 K_1} = 23,31893$. Определив

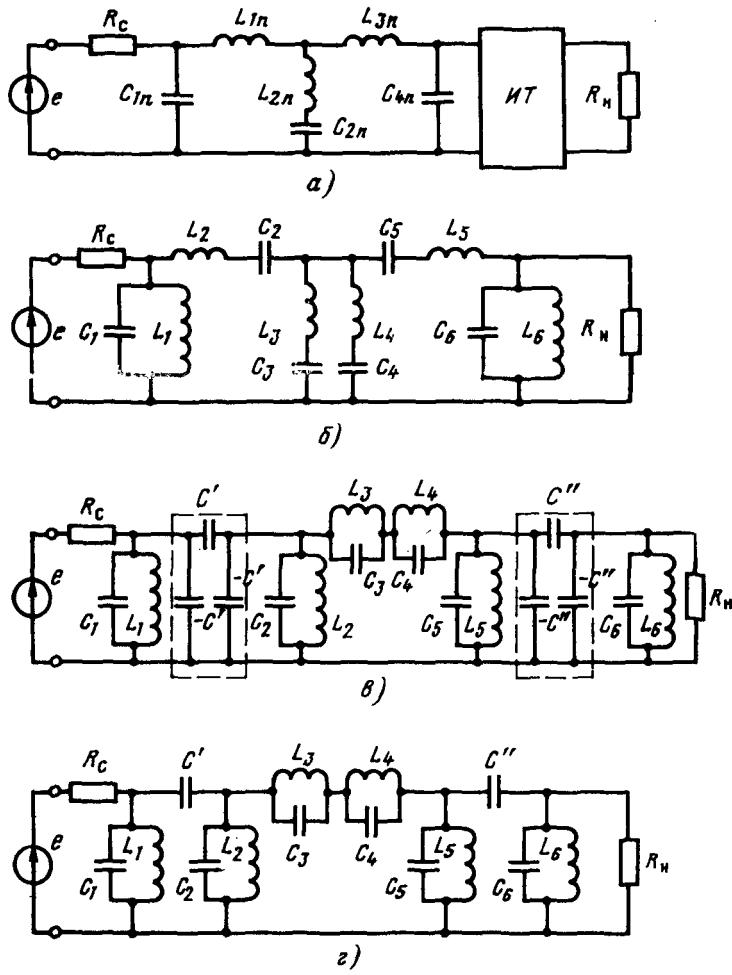


Рис. 58

$C'' = 68,25136 \approx 68 \text{ пФ}$ и уточнив $K_1 = 23,405$, определяем $L_6 = 248 \text{ мкГн}$ и $C_6 = C_6 K_2^2 / K_1^2 = 10,197 \text{ пФ}$.

Компенсируя отрицательные емкости инверторов соответствующим уменьшением емкости параллельных ветвей, получаем окончательно (рис. 58, 2): $C_1 = 2700 \text{ пФ}$, $C_2 = 7200 \text{ пФ}$, $C_3 = 750 \text{ пФ}$, $C_4 = 810 \text{ пФ}$, $C_5 = 12\,000 \text{ пФ}$, $C_6 = 10\,000 \text{ пФ}$ ($C' = 240 \text{ пФ}$; $C'' = 68 \text{ пФ}$). Для сохранения резонансных частот контуров примем $L_1 = 1/(4\pi f_0^2 (C' + C_1)) = 861,6 \text{ мкГн}$, $L_2 = 1/(4\pi^2 f_0^2 (C' + C_2)) = 340,5 \text{ мкГн}$, $L_5 = 1/(4\pi^2 f_0^2 (C'' + C_5)) = 209,9 \text{ мкГн}$, $L_6 = 1/(4\pi^2 f_0^2 (C'' + C_6)) =$

$=251,6$ мкГц. По резонансным частотам $f_{03}=108,8591$ кГц и $f_{04}=91,86178$ кГ вычисляем $L_3=1/(4\pi^2f_{03}^2C_3)=2850$ мкГн и $L_4=1/(4\pi^2f_{04}^2C_4)=3705,8$ мкГн.

Следует отметить, что разброс индуктивностей ($L_{\max}/L_{\min}=17,7$) у синтезированного фильтра достаточно велик, хотя и меньше, чем у полиномиального. Поэтому в том случае, когда фильтр предназначен для серийного изготовления, целесообразно рассмотреть и другие возможные реализации, выбрав оптимальную.

Опишем еще один метод, позволяющий удовлетворить заданные в рассматриваемом примере требования при $n=8$. Задавшись $v_a=2$, $A_a=30$ дБ, $A_n=0,5$ дБ, с помощью программы 248 найдем, что такие характеристики обеспечивают фильтр Чебышева порядка $n=2$. Определив по программе 248 вещественную часть $\text{Rep}_1=-0,1753532$ ближайшего к мнимой оси полюса, убеждаемся в реализуемости такого фильтра при добротности $Q \geq 71,3$. Каскадное соединение двух таких фильтров обеспечит выполнение исходных требований. При реализации этого варианта следует предусмотреть включение развязывающей ступени (например, усилителя без обратной связи или усилителя с практически нулевым выходным сопротивлением) между частями фильтра, так как практически невозможно реализовать пассивный фильтр с кратными полюсами. Однако, представив синтезируемую функцию $K(p)$ двумя множителями порядков $n=3$ и $n=5$, можно реализовать фильтр без развязки между его частями. Так, если для множителя порядка $n=5$ принять $A_n=0,26$ дБ и $A_d=-0,74$ дБ для множителя порядка $n=3$, то на частоте $v=2$ такой фильтр имеет $A_a=60,1$ дБ при добротности контуров $Q \geq 93,5$.

При поиске оптимального разбиения передаточной функции фильтра на множители меньших порядков приходится вычислять вещественную часть полюса, ближайшего к мнимой оси, и затухание на частоте v_a , для чего целесообразно использовать ПМК.

Программа 260. Вычисление $|\text{Rep}_1|_{\min}$ и $A(v_a)$ фильтра Чебышева

```

П8 → П7 ↔ 1 0 ÷ Вх XУ 1
П6 — П9 ИП8 ПП 39 x2 1 + ×
1 + lg 1 0 × ИП9 1/x √ ПП
39 π ИП7 ÷ 2 ÷ sin × С/П ↑
x2 ИП6 /—/ П6 + √ + ln ИП7 1/x
П7 ÷ ex ↑ 1/x - 2 ÷ В/О

```

Инструкция. Установить переключатель Р—ГРД—Г в положение Р; $A_n=PZ$, $n=PY$, $v_a=PX$ В/О С/П РХ = $|\text{Rep}_1|_{\min}$, РY = $A(v_a)$; $t \approx 30$ с.

Пример. Для $A_n=0,26$, $n=5$, $v_a=2$, получим $|\text{Rep}_1|_{\min}=0,13370382$, $A(v_a)=39,07725$ дБ.

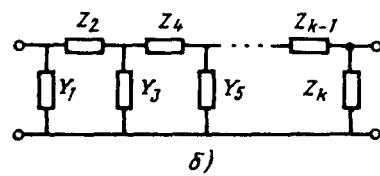
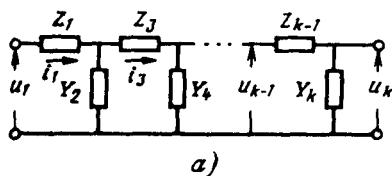


Рис. 59

Приемлемость результатов синтеза лестничных ФНЧ (рис. 59) и влияние разброса параметров удобно оценивать, определяя по вычисленным параметрам синтезированного фильтра приращение затухания $\Delta A = A(\omega) - A(0)$ или отношение модулей $|K(\omega)/K(0)|$.

Программа 261. Расчет АЧХ лестничных ФНЧ порядка $n \leq 8$

ИП9 ПА	ИП0	+	x^2	ПС Сх	ПВ	\rightarrow	8		
ПД	\rightarrow	ИПА	x^2	ИПВ	x^2	$+$	$1/x$	\uparrow	ИПС
\times	ПС	\rightarrow	\uparrow	ИПА	\times	ПА	\rightarrow	ИПВ	\times
\leftrightarrow	КИПД	\times	\leftrightarrow	$-$	ПВ	\rightarrow	ИПД 1	$-$	
$x=0$	10	ИПС	ИПА	ИП0	$+$	x^2	ИПВ	x^2	$+$
\div	\uparrow	lg	1	0	\times	\leftrightarrow	y'	C/P	

Инструкция. Для фильтра (рис. 59, а) с первой продольной индуктивной ветвью ($R_c = P_0$, $L_1 = P_1$, $C_2 = P_2$, $L_3 = P_3$, ..., $C_8 = P_8$, $R_n = P_9$; при $n < 8$ вместо отсутствующих параметров ввести нули); для фильтра с первой попечечной емкостью (рис. 59, б) ветвью ($G_c = P_0$, $C_1 = P_1$, $L_2 = P_2$, $C_3 = P_3$, ..., $L_8 = P_8$, $G_n = P_9$; при $n < 8$ вместо отсутствующих параметров ввести нули) $\omega = RX$ В/О С/П $RX = |K(\omega)/K(0)|$, $PY = A(\omega) - A(0)$ дБ, $PA = \operatorname{Re}Z_{bx}(\omega)$ или $\operatorname{Re}Y_{bx}(\omega)$, $PB = \operatorname{Im}Z_{bx}(\omega)$ или $\operatorname{Im}Y_{bx}(\omega)$ ($t \approx (20+10n)$ с).

Пример. Для $R_c = 0,5$, $L_1 = 0,51$, $C_2 = 2,9$, $L_3 = 0,98$, $C_4 = 3,3$, $L_5 = 0,98$, $C_6 = 2,5$, $R_n = 1$ ($L_7 = C_8 = 0$) получим: $|K(0,5)/K(0)| = 1,0260803$, $A(0,5) - A(0) = 0,22362747$ дБ, $Z_{bx}(0,5) = 0,29829931 + j0,01435751$ ($t \approx 80$ с).

6.5. Расчет активных RC-фильтров

Параметры пассивных LC -фильтров при уменьшении частоты увеличиваются, что приводит к увеличению габаритных размеров фильтров и приводит к невозможности их миниатюризации. Поэтому в области относительно низких частот широко применяются активные RC -фильтры в виде каскадного соединения звеньев, передаточные функции которых равны множителям заданной передаточной функции фильтра. Для развязки звеньев активных RC -фильтров обычно используют активные компоненты с очень малым выходным сопротивлением, при котором проводимость нагрузки (ею может быть и входная проводимость следующего звена) $Y_n \ll Y_{\text{вых}}$ и практически не влияет на передаточную функцию звена.

Полюсы передаточных функций пассивных цепей с элементами R и C расположены на вещественной оси плоскости p , и избирательность в таких цепях обеспечивают, формируя комплексно-сопряженные полюсы с помощью петли обратной связи, одностороннюю передачу энергии в которой обеспечивают с помощью активного невзаимного компонента. Такими компонентами в активных RC -фильтрах обычно являются операционные усилители, охваченные глубокой обратной связью для получения требуемого коэффициента передачи напряжения μ (см. рис. 50). При нестабильности параметров фильтра с элементами R и C существенно изменяются его частотные характеристики, в связи с чем одной из наиболее важных проблем проектирования активных RC -фильтров является обеспечение малой чувствительности передаточной функции к изменениям параметров. Эта чувствительность возрастает при увеличении порядка

звена фильтра, в связи с чем отдельными звенями обычно реализуют лишь множители передаточной функции первого и второго порядков $K_{\text{чз}1}(p) = -K_0/(\beta p + 1)$ и $K_{\text{чз}2}(p) = K_0/(\alpha p^2 + \beta p + 1)$ для звеньев нижних частот первого и второго порядков, $K_{\text{вч}1}(p) = pK_0/(\beta p + 1)$ и $K_{\text{вч}2}(p) = p^2 K_0/(\alpha p^2 + \beta p + 1)$ для звеньев верхних частот первого и второго порядков, $K_{\text{пз}}(p) = pK_0/(\alpha p^2 + \beta p + 1)$ для полосопропускающего звена и $K_{\text{рз}}(p) = (p^2 + \omega_0^2)/(\alpha p^2 + \beta p + 1)$ для режекторного звена.

Активные RC -фильтры обычно проектируют по заданной передаточной функции $K(p)$ в реальном масштабе частот. Поэтому после определения передаточной функции фильтра-прототипа преобразование и деформировку частоты удобно выполнять с помощью функции вида (3.22) для функции $K(s)$ прототипа, где s — нормированная комплексная частота. В этом случае преобразование каждого множителя функции $K(s)$ позволяет получить искомую функцию $K(p)$ также в форме (3.22), удобной для последующего синтеза.

Переход от фильтра-прототипа к фильтру нижних или верхних частот соответствует элементарным преобразованиям $p = \omega_n s$ или $p = \omega_n / s$, в связи с чем рассмотрим лишь преобразования, необходимые для расчета полосовых или режекторных фильтров. Для таких фильтров связь между частотами в комплексной области описывается выражением $s = (p^2 + \omega_{n1}\omega_{n2})/p(\omega_{n2} - \omega_{n1}) = (p^2 + \omega_0^2)/p\Delta\omega$, которое преобразует множитель $(\beta's + 1)$ в множитель $(\alpha p^2 + \beta p + 1)/pK_0$ с коэффициентами $\alpha = 1/\omega_0^2$, $\beta = K_0 = \Delta\omega/(\omega_0^2\beta')$. Множитель второй степени $(\alpha's^2 + \beta's + 1)$ с комплексно-сопряженными корнями соответствует преобразованию множителю $(a_4 p^4 + a_3 p^3 + a_2 p^2 + a_1 p + 1)/K_0 p^2$, где $a_4 = 1/\omega_0^4$; $a_3 = -\alpha' \Delta\omega/\omega_0^2$; $a_2 = (2\omega_0^2 + \beta' \Delta\omega^2)/\omega_0^4$; $a_1 = \alpha' \Delta\omega/\omega_0^4$, $K_0 = (\Delta\omega)^2/\omega_0^4$. В процессе преобразования частоты многочлены степени $n = 4$ целесообразно раскладывать на квадратичные множители. Преобразование стандартного трехчлена $(\alpha's^2 + \beta's + 1)$ в функцию $(\alpha_1 p^2 + \beta_1 p + 1)(\alpha_2 p^2 + \beta_2 p + 1)/K_0 p^2$ выполняют по формулам:

$$\alpha_{1,2} = (B + 1 \pm \beta'(B - \alpha'x + 1)) / \sqrt{2\alpha'(B - \alpha'x + 1 + \beta'^2)} / (\alpha'x\omega_0^2);$$

$$\beta_{1,2} = (\beta' \pm 2\sqrt{2\alpha'(B - \alpha'x + 1 + \beta'^2)}) / (\alpha'x\Delta\omega);$$

$$K_0 = (\Delta\omega)^2 / (\alpha'\omega_0^4),$$

где $B = \sqrt{(\alpha'x + 1)^2 - \beta'^2}x$; $x = (2\omega_0/\Delta\omega)^2$.

Программа 262. Преобразование стандартного трехчлена $\alpha's^2 + \beta's + 1$ в функцию $(\alpha_1 p^2 + \beta_1 p + 1)(\alpha_2 p^2 + \beta_2 p + 1)/K_0 p^2$

П2	\leftrightarrow	П3	\div	2	\times	x^2	П4	ИП7	\times
П5	1	$+$	x^2	ИП4	ИП8	x^2	\times	$-$	y
1	$+$	П6	ИП5	$-$	2	$-$	ИП7	\times	2
\times	ИП8	x^2	$+$	y	П0	ИП6	ИП5	$-$	ИП8
\times	ИП0	\div	П1	ИП6	$+$	ИП5	π	ИП2	\times
x^2	4	\times	\times	П9	\div	ИП0	ИП8	$+$	ИП5
π	\times	ИП3	\times	ПА	\div	ИП0	ИП8	\leftrightarrow	С/П ИП8 ИП0
$-$	ИПA	\div	ИП6	ИП1	$-$	ИП9	\div	С/П 4	
ИП9	\div	С/П							

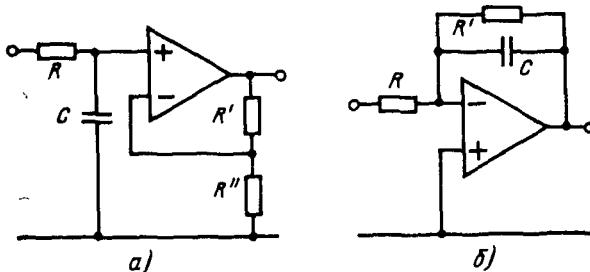


Рис. 60

Инструкция. ($\alpha' = P7$, $\beta' = P8$) $\Delta f = PY$, $f_0 = PX$ В/О С/П $PX = a_1$, $PY = \beta_1$ С/П $PX = a_2$, $PY = \beta_2$ С/П $PX = K_0$ ($t \approx 20$ с).

Пример. Для трехчлена $s^2/13 + 4s/13 + 1$ при $\Delta f = 1/\pi$ и $f_0 = 5/\pi$ получим коэффициенты функции $(0,018260356p^2 + 0,051691788p + 1)(0,0054763432p^2 + 0,028308217p + 1)/5,2 \cdot 10^{-3}p^2$.

Представив заданную функцию $K(p)$ множителями звеньев, приступают к синтезу каждого звена. При расчете звена по заданной функции и выбранным параметрам находят остальные параметры выбранной схемы, проверяя допустимость принятых упрощений сравнением с экспериментальными данными, и оценивают чувствительность передаточной функции звена к изменениям его параметров.

Ограничимся расчетом наиболее распространенных звеньев из высших порядков на операционных усилителях с выходным сопротивлением $R_{\text{вых}} = 0$, обеспечивающим развязку между звеньями, и пренебрежимо малым влиянием паразитных реактивных параметров в рабочем диапазоне частот фильтра. Так как выходное сопротивление реальных операционных усилителей конечно, то условие $R_{\text{вых}} = 0$ практически означает, что $R_{\text{вых}}$ пренебрежимо мало по сравнению с сопротивлением нагрузки. Для упрощения анализа звеньев RC-фильтров целесообразно использовать приведенную матрицу проводимостей Y' , рассмотренную в § 5.6.

1. Звено нижних частот первого порядка с неинвертирующим включением операционного усилителя (рис. 60, а) при $R \ll R_{\text{вх}}$ (с учетом реальных входного и выходного сопротивлений операционного усилителя иногда принимают $R = \sqrt{R_{\text{вх}}R_{\text{вых}}}$) характеризуется коэффициентами передаточной функции $K_0 = \mu' = 1 + R'/R''$ и $\beta = RC$ с чувствительностями $S_\beta(R) = S_\beta(C) = S_K(R') = -S_K(R'') = 1$. При больших значениях β для выполнения условия $R \ll R_{\text{вх}}$ приходится выбирать большие значения C . В этих случаях либо принимают $K_0 = \mu'R_{\text{вх}}/(R + R_{\text{вх}})$, $\beta = CRR_{\text{вх}}/(R + R_{\text{вх}})$, либо используют звено с инвертирующим включением операционного усилителя (рис. 60, б). В последнем случае приведенная матрица проводимостей

$$Y' = \begin{bmatrix} g & -g & 0 \\ -g & g + g' + pC & -pC - g' \\ 0 & \mu & 1 \end{bmatrix}$$

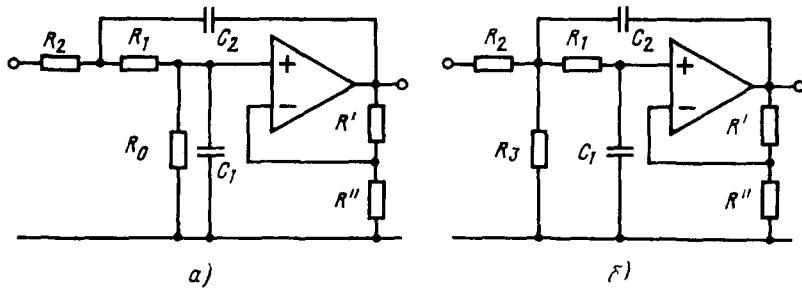


Рис. 61

$$K(p) = \Delta_{13}/\Delta_{11} = -g\mu/(pC(1+\mu) + g'(1+\mu)) \approx -g/(pC + g') = -R'/R(pCR' + 1).$$

Следовательно, при принятых допущениях и $\mu \gg 1$ коэффициенты передаточной функции $K_0 = -R'/R$, $\beta = R'C$, а их чувствительности $S_K = (R') = S_K(R) = S_\beta(R') = S_\beta(C) = 1$. Синтез параметров рассматриваемого звена сводится к выбору $R \ll R_{rx}$ и вычислению $R' = -K_0 R$; $C = \beta/R'$.

2. Звено низких частот второго порядка $n=2$ обычно собирают при неинвертирующем включении операционного усилителя. Для простейшей схемы подобного звена (рис. 61, a) значение $\mu' = 1 + R'/R''$, причем в качестве оптимального часто принимают значение $\mu' = 4/3$. Как следует из анализа этой схемы, ее параметры связаны с коэффициентами передаточной функции соотношениями

$$K_0 = \mu' k; \quad \alpha = C_1 R_1 C_2 R_2 k; \quad \beta = (C_1 (R_1 + R_2) + C_2 R_2 ((1 - \mu') + R_1/R_0)) k,$$

где $k = R_0/(R_0 + R_1 + R_2)$.

При автоматизации расчета чувствительность коэффициентов a передаточной функции к изменениям параметра w_i целесообразно находить с помощью численного дифференцирования по формуле

$$S_a(w_i) = (a(w_i(1 + \delta))/a(w_i) - 1)/\delta,$$

где можно принять $\delta = 0,001 = 0,1\%$.

Программа 263. Анализ звена низких частот второго порядка с вычислением чувствительностей

ПП	36	П8	↔	П7	ИП6	П9	С/П	ПД	К ИПД
1	,	0	0	1	×	КПД	ПП	36	ПВ
↔	ИП7	ПП	76	ПА	ИПВ	ИП8	ПП	76	ПВ
ИП6	ИП9	ПП	76	БП	07	ИП0	↑	ИП1	+
ИП2	+	÷	ПД	ИП5	×	П6	ИП1	ИП2	×
ИП3	ИП4	×	×	ИПД	×	1	ИП5	—	ИП1
ИП0	÷	+	ИП2	×	ИП4	×	ИП1	ИП2	+
ИП3	×	+	ИПД	×	В/О	÷	1	—	1
ВП	3	×	×	В/О					

Инструкция. ($R_0=P0$, $R_1=P1$, $R_2=P2$, $C_1=P3$, $C_2=P4$, $\mu'=P5$) В/О С/П ($t \approx 15$ с) $PX=P9=K_0$, $PY=P7=\alpha$, $P8=\beta$, $N_i=PX$ (N_i — номер регистра, в котором хранится параметр w_i) С/П ($t \approx 30$ с) $PX=S_K(w_i)$, $PY=PB=S_\beta(w_i)$, $PA=S_\alpha(w_i)$; для вычисления чувствительности коэффициентов к изменениям другого параметра следует восстановить в памяти значение w_i и повторить выполнение инструкции при другом номере регистра N_i .

Пример. Для $R_0=10$ кОм, $R_1=20$ кОм, $R_2=5,1$ кОм; $C_1=0,1$ мкФ, $C_2=-0,05$ мкФ; $\mu'=1,3$ получим $K_0=0,37037036$, $\alpha=1,4529914 \cdot 10^{-7}$, $\beta=8,3860397 \times 10^{-4}$; $S_K(R_2)=-0,1453$, $S_\beta(R_2)=0,1752$, $S_\alpha(R_2)=0,845$; $S_K(C_2)=0$ (K_0 не зависит от C_2), $S_\beta(C_2)=0,1472$, $S_\alpha(C_2)=1$.

Программу 263 можно использовать для параметрического синтеза путем подбора параметров схемы до получения требуемых значений коэффициентов передаточной функции. Этот процесс упрощается при выборе трех параметров и определении остальных трех параметров из уравнений, связывающих параметры с коэффициентами передаточной функции. Так, задаваясь значениями μ' , R_2 и $R_0 \ll R_{\text{вх}}$, можно вычислить

$$R_1 = \mu' R_0 / K_0 - R_0 - R_2 = R_0 (\mu' / K_0 - 1) - R_2;$$

$$C_1 = A \pm \sqrt{A^2 - B}, \quad C_2 = \alpha / C_1 R_1 R_2 k,$$

где $A = \beta / 2k (R_1 + R_2)$; $B = \alpha ((1 - \mu') + R_1 / R_0) / R_1 (R_1 + R_2)$;

$$k = R_0 / (R_0 + R_1 + R_2).$$

Одно из полученных решений (или даже оба при неудачном выборе первых трех параметров) может оказаться нереализуемым при отрицательных значениях или (при использовании микрокалькулятора) переполнении.

Программа 264. Синтез звена нижних частот второго порядка при выборе μ' , R_0 и R_2

П2	→	П0	↔	П5	ИП9	÷	1	—	×
ИП2	—	П1	ИП0	↑	ИП1	ИП2	+	ПД	+
÷	П6	ИП8	ИПД	÷	ИП6	÷	2	÷	ПА
x ²	1	ИП5	—	ИП1	÷	ИП0	1/x	+	ИП7
×	ИПД	÷	ИП6	÷	—	√	ПС	ИПА	+
П3	ИП6	×	ИП1	×	ИП2	×	ИП7	↔	÷
П4	ИП3	С/П	ИПС	/—/	БП	47			

Инструкция. ($\alpha=P7$, $\beta=P8$, $K_0=P9$) $\mu'=PZ$, $R_0=PY$, $R_2=PX$ В/О С/П ($t \approx 18$ с) $PX=P3=C_1$, $PY=P4=C_2$ (первое решение) С/П ($t \approx 6$ с) $PX=C_1$, $PY=C_2$ (второе решение), $P1=R_1$, $P6=k=R_0 (R_0+R_1+R_2)$.

Пример. Для $K_0=0,37037036$, $\alpha=1,4529914 \cdot 10^{-7}$, $\beta=8,3860397 \cdot 10^{-4}$ при $\mu'=1,3$, $R_0=10$ кОм, $R_2=5,1$ кОм получим $C_1=9,9999999 \cdot 10^{-8}=0,1$ мкФ, $C_2=5,0000001 \cdot 10^{-8}=0,05$ мкФ (первое решение); $C_1=1,7270916 \cdot 10^{-8}$, $C_2=2,8950903 \cdot 10^{-7}$ (второе решение); $R_1=20$ кОм. Следовательно, оба решения реализуемы.

Подобные программы синтеза можно составлять и при другом выборе трех из шести параметров анализируемой схемы. Аналогичные программы облегчают анализ различных схем звеньев нижних частот второго порядка, например, с дополнительным резистором (рис. 6.1, б), уменьшающим чувствительности передаточной функции к изменениям параметров.

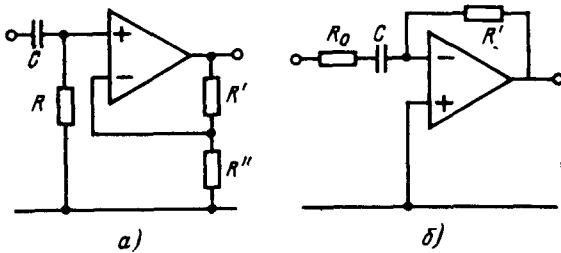


Рис. 62

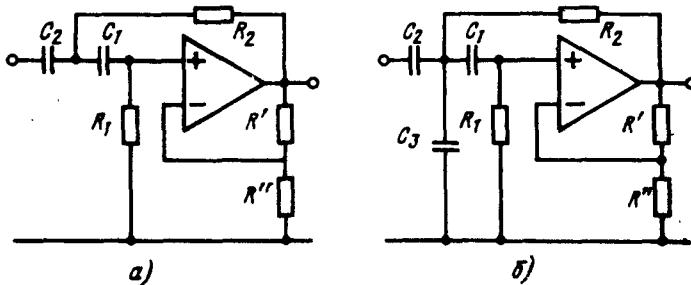


Рис. 63

3. Звено верхних частот первого порядка в простейшем случае реализуют схемой с неинвертирующим включением операционного усилителя (рис. 62, а), для которой $\mu' = 1 + R'/R''$, $K_0 = RC\mu'$, $\beta = RC$. Иногда используют инвертирующую схему (рис. 62, б), для которой $K_0 = R_1 C$, $\beta = RC$. Расчет этих звеньев несложно выполнить нажатием клавиш.

4. Звено верхних частот второго порядка обычно реализуют при неинвертирующем включении операционного усилителя. Для простейшей из этих схем (рис. 63, а) $\mu' = 1 + R'/R''$, $\beta = R_1 C_2 (1 - \mu') + R_2 (C_1 + C_2)$, $a = C_1 C_2 R_1 R_2$; $K_0 = -R_1 C_1 R_2 C_2 \mu'$ с единичными чувствительностями коэффициентов K_0 и a к изменениям параметров C_1 , C_2 , R_2 , R_1 и чувствительностями $S_\beta(R_1) = R_1 C_2 (1 - \mu') \beta$, $S_\beta(R_2) = R_2 (C_1 + C_2) / \beta$; $S_\beta(C_1) = C_1 R_2 / \beta$, $S_\beta(C_2) = (R_1 + R_2 (1 - \mu')) C_2 / \beta$. Следовательно, достаточно автоматизировать вычисление коэффициентов K_0 , a и β передаточной функции и чувствительностей $S(\omega_i)$.

Программа 265. Анализ звена верхних частот второго порядка с вычислением чувствительностей коэффициента β к изменениям параметров

ПП 28	P8	\leftrightarrow	P7	ИП6	P9	C/P	PД	КИПД
1 ,	0 0		1	\times	КПД	ПП 28	ИП8	
\div	1	- 1	ВП 3	\times	C/P	ИП1	ИП2	
\times	ИП3	\times	ИП4	\times	↑	ИП5	\times	П6 \leftrightarrow
1	ИП5	-	ИП1	\times	ИП4	\times	ИП3	ИП4 +
ИП2	\times	+	B/0					

Инструкция. ($R_1=P1$, $R_2=P2$, $C_1=P3$, $C_2=P4$, $\mu'=P5$) В/О С/П ($t \approx 10$ с) $PX=P9=K_0$, $PY=P7=a$, $P8=\beta$, $N_i=PX$ (N_i — номер регистра, в котором хранятся параметр w_i С/П ($t \approx 14$ с)) $PX=S_\beta(w_i)$; для вычисления чувствительности к изменениям других параметров восстановить в памяти исходное значение и повторить выполнение инструкции.

Пример. Для $R_1=R_2=10$ кОм, $C_1=C_2=0.5$ мкФ, $\mu'=1.3$ получим $K_0 = -3,25 \cdot 10^{-5}$; $a = 2,5 \cdot 10^{-5}$; $\beta = 8,5 \cdot 10^{-3}$; $S_\beta(R_1) = -0,1765$, $S_\beta(R_2) = 1,1764$; $S_\beta(C_1) = 0,5882$, $S_\beta(C_2) = 0,4117$.

При синтезе рассматриваемого можно задаться любыми двумя параметрами схемы, определив остальные три по известным значениям выбранных параметров и требуемых коэффициентов передаточной функции. Например, при выборе R_1 и R_2 остальные параметры определяют по формулам

$$\mu' = K_0/\alpha; \quad C_2 = A \pm \sqrt{A^2 - B}; \quad C_1 = \alpha/C_2 R_1 R_2,$$

где $A = \beta/(2(R_1(1-\mu') + R_2))$; $B = \alpha/(R_1(R_1(1-\mu') + R_2))$.

Программа 266. Синтез звена верхних частот второго порядка при выборе R_1 и R_2

$$\begin{array}{ccccccccc} P2 & \rightarrow & \Pi 1 & 1 & \text{ИП9} & \text{ИП7} & \div & \Pi 5 & - \times \\ \text{ИП2} & + & \Pi 6 & \text{ИП8} & 2 & \div & \text{ИП6} & \div & \text{ПА} \times^2 \\ \text{ИП7} & \text{ИП1} & \div & \text{ИП6} & \div & - & \nu & \text{ПС} & \text{ИПА} + \\ P4 & \text{ИП7} & \text{ИП4} & \div & \text{ИП1} & \div & \text{ИП2} & \div & \Pi 3 \quad \text{С/П} \\ \text{ИПС} & /-/- & \text{БП} & 27 & & & & & \end{array}$$

Инструкция. ($\alpha=P7$, $\beta=P8$, $K_0=P9$) $R_1=PY$, $R_2=PX$ В/О С/П ($t \approx 10$ с) $PX=P3=C_1$, $PY=P4=C_2$ (первое решение) С/П ($t \approx 5$ с) $PX=P3=C_1$, $PY=P4=C_2$ (второе решение); $P5=\mu'$.

Пример. Для $\alpha = 2,5 \cdot 10^{-5}$, $\beta = 8,5 \cdot 10^{-3}$, $K_0 = 3,25 \cdot 10^{-5}$ при $R_1=R_2=10$ кОм получим $C_1 = 3,5000001 \cdot 10^{-7}$, $C_2 = 7,1428569 \cdot 10^{-7}$ (первое решение); $C_1 = 4,9999999 \cdot 10^{-7}$, $C_2 = 5,0000001 \cdot 10^{-7}$ (второе решение); $\mu' = 1,3$.

Если более удобно задавать значения емкостей C_1 и C_2 , то остальные параметры определяют по формулам

$$\begin{aligned} \mu' &= K_0/\alpha; \quad R_2 = \beta/2(C_1 + C_2) + ((\beta/2(C_1 + C_2))^2 + \alpha(\mu' - 1) \cdot C_1(C_1 + C_2))^{1/2}, \\ R_1 &= \alpha R_2 C_1 C_2. \end{aligned}$$

Программа 267. Синтез звена верхних частот второго порядка при выборе C_1 и C_2

$$\begin{array}{ccccccccc} P4 & \rightarrow & \Pi 3 & : & \Pi 0 & \text{ИП8} & 2 & \div & \text{ИП0} \div \\ \text{ПА} & \times^2 & \text{ИП9} & \text{ИП7} & \div & \Pi 5 & 1 & - & \text{ИП7} \times \\ \text{ИП0} & \div & \text{ИП3} & \div & + & \downarrow & \text{ПС} & \text{ИПА} & + \text{П2} \\ \text{ИП7} & \text{ИП3} & \text{ИП4} & \times & \text{ИП2} & \times & \div & \Pi 1 & \text{С/П ИПС} \\ /-/- & \text{БП} & 26 & & & & & & \end{array}$$

Инструкция. ($\alpha=P7$, $\beta=P8$, $K_0=P9$) $C_1=PY$, $C_2=PX$ В/О С/П ($t \approx 10$ с) $PX=P1=R_1$, $PY=P2=R_2$ (первое решение) С/П ($t \approx 5$ с) $PX=P1=R_1$, $PY=P2=R_2$ (второе решение); $P5=\mu'$.

Пример. Для $\alpha = 2,5 \cdot 10^{-5}$, $\beta = 8,5 \cdot 10^{-3}$, $K_0 = 3,25 \cdot 10^{-5}$ при $C_1 = C_2 = 0,5$ мкФ получим $R_1 = 10\,000$ Ом, $R_2 = 10\,000$ Ом (первое решение); $R_1 = -66666,666$, $R_2 = -1500$ (второе решение нереализуемо); $\mu' = 1,3$.

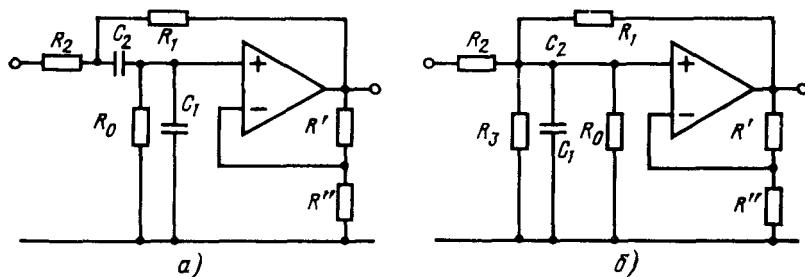


Рис. 64

Подобным образом составляют программы и для синтеза при выборе других сочетаний параметров, а также анализе и синтезе других схем звеньев верхних частот второго порядка, например показанной на рис. 63, б схеме с несколько меньшей чувствительностью передаточной функции к изменениям параметров.

5. Простейшая схема полосового звена (рис. 64, а), как следует из анализа с помощью приведенной матрицы проводимостей, характеризуется соотношениями

$$\mu' = 1 + R'/R''; \quad K_0 = R_1 C_2 k \mu'; \quad \alpha = C_1 C_2 R_1 R_2 k;$$

$$\beta = R_0 (C_1 + C_2) + C_2 R_2 k (1 - R_0 \mu' / R_1), \quad k = R_0 / (R_1 + R_2),$$

а для вычисления чувствительностей целесообразно использовать численное дифференцирование.

Программа 268. Анализ полосового звена с вычислением чувствительностей

ПП 35	П8	\leftrightarrow	П7	ИП6	П9	С/П	ПД	КИПД	
1	, 0	0	1	\times	КПД	ПП	35	ПВ	
\leftrightarrow	, ИП7	ПП	74	ПА	ИПВ	ИП8	ПП	74	ПВ
ИП6	ИП9	ПП	74	С/П	ИП0	ИП1	ИП2	+	\div
ПС	ИП1	\times	ИП4	\times	\uparrow	ИП5	\times	П6	\leftrightarrow
ИП2	\times	ИП3	\times	1	ИП5	ИП0	\times	ИП1	\div
—	ИПС	\times	ИП2	\times	ИП4	\times	ИП3	ИП4	+
ИП0	\times	+	B/O	\div	1	—	1	BП	3
\times	B/O								

Инструкция. ($R_0 = P0$, $R_1 = P1$, $R_2 = P2$, $C_1 = P3$, $C_2 = P4$, $\mu' = P5$) В/О С/П ($t \approx 15$ с) $PX = P9 = K_0$, $PY = P7 = \alpha$, $P8 = \beta$, $N_i = PX$ (N_i — номер регистра, в котором хранится параметр w_i) С/П ($t \approx 28$ с) $PX = S_K(w_i)$, $PY = PB = S_\beta(w_i)$, $PA = S_\alpha(w_i)$; для вычисления чувствительности по другому параметру следует восстановить в памяти исходное значение w_i и повторить выполнение инструкции.

Пример. Для $R_0 = 5,1$ кОм, $R_1 = 20$ кОм, $R_2 = 10$ кОм; $C_1 = 0,5$ мкФ, $C_2 = 0,1$ мкФ; $\mu' = 1,3$ получим $K_0 = 4,42 \cdot 10^{-4}$; $\alpha = 1,7 \cdot 10^{-6}$, $\beta = 3,173645 \cdot 10^{-3}$, $S_K(R_0) = 1$, $S_\beta(R_0) = 0,9822$, $S_\alpha(R_0) = 1$; $S_K(R_1) = 0,333$, $S_\beta(R_1) = -0,0061$,

$$S_{\alpha}(R_1) = 0,3331; \quad S_{\kappa}(R_2) = -0,3332, \quad S_B(R_2) = 0,0238, \quad S_{\alpha}(R_2) = 0,6664; \quad S_{\kappa}(C_1) = 0, \\ S_B(C_1) = 0,8034, \quad S_{\alpha}(C_1) = 1; \quad S_{\kappa}(C_2) = 1, \quad S_B(C_2) = 0,1964, \quad S_{\alpha}(C_2) = 1.$$

Так как передаточная функция рассматриваемого звена зависит от шести параметров (μ' , R_0 , R_1 , R_2 , C_1 , C_2), то при синтезе приходится задаваться тремя из них. При выборе значений R_0 , R_1 и R_2 , откуда $k=R_0/(R_1+R_2)$ также оказывается заданным, значения остальных параметров определяются по формулам:

$$C_2 = A \pm \sqrt{A^2 - B}, \quad C_1 = \alpha / (C_2 R_1 R_2 k); \quad \mu' = K_0 / (R_1 C_2 k),$$

где $A = ((R_0 R_2 K_0) / (R_1 + \beta)) / (R_0 + R_1 k)$; $B = R_0 \alpha / (R_1 R_2 k (R_0 + kR_2))$.

Следовательно, возможны два решения для параметров C_1 , C_2 и μ' , которые могут оказаться нереализуемыми при неудачном выборе задаваемых параметров.

Программа 269. Синтез полосового звена с выбором R_0 , R_1 и R_2

P2	\rightarrow	P1	\leftrightarrow	P0	ИП1	ИП2	+	\div	П6
ИП2	\times	ИП0	$+$	ПД	ИП2	ИП0	\times	ИП1	x^2
\div	ИП9	\times	ИП8	$+$	2	\div	ИПД	\div	ПА
x^2	ИП0	ИП7	\times	ИП1	ИП6	\times	ПВ	\div	ИП2
\div	ИПД	\div	$-$	$\sqrt{}$	ПС	ИПА	$+$	П4	ИП9
ИПВ	\div	ИП4	\div	П5	ИП7	ИП4	\div	ИП2	\div
ИПВ	\div	П3	ИП4	С/П	ИПС	$/-$	БП	45	

Иструкция. ($\alpha = P_7$, $\beta = P_8$, $K_0 = P_9$) $R_0 = PZ$, $R_1 = PY$, $R_2 = PX$ B/O C/P ($t \approx 20$ с) $PX = P4 = C_2$, $PY = P3 = C_1$, $P5 = \mu'$ (первое решение) C/P ($t \approx 8$ с) $PX = P4 = C_2$, $PY = P3 = C_1$, $P5 = \mu'$ (второе решение).

Пример. Для $K_0=4,42 \cdot 10^{-4}$, $a=1,7 \cdot 10^{-6}$, $\beta=3,173645 \cdot 10^{-3}$ при $R_0=5,1$ кОм, $R_1=20$ кОм, $R_2=10$ кОм получим $C_2=3,75 \cdot 10^{-7}$, $C_1=1,3333333 \cdot 10^{-7}$, $\mu'=0,34666666$ (первое решение нереализуемо, так как в рассматриваемой схеме $\mu' \geq 1$); $C_2=1 \cdot 10^{-7}$, $C_1=5 \cdot 10^{-7}$; $\mu'=1,3$ (второе решение реализуемо и точно совпадает с исходными данными примера к программе 268).

Рассмотренная методика применима при составлении программ анализа и синтеза полосовых звеньев с другими схемами, например показанной на рис. 64, б и отличающейся несколько меньшими чувствительностями передаточной функции к изменениям параметров.

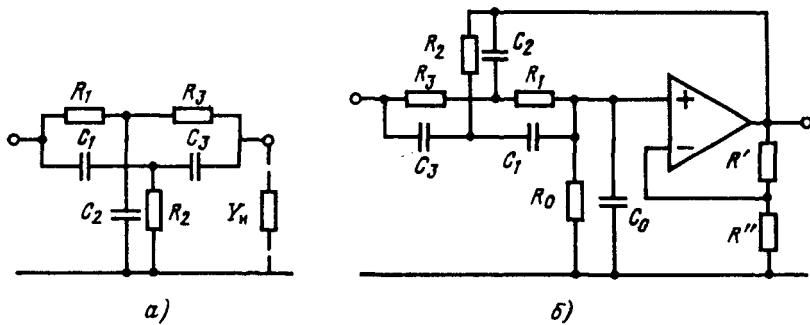


Рис. 65

6. Режекторные звенья обычно собирают на основе двойного Т-моста (рис. 65, а) с передаточной функцией

$$K(p) = \frac{(1+pR_2(C_1+C_3)+p^2C_1C_3R_2(R_1+R_3)+p^3C_1C_2C_3R_1R_2R_3)/(1+p(R_1C_2+R_2(C_1+C_3)+C_3(R_1+R_3))+p^2(C_1C_3R_2(R_1+R_3)+R_1C_2(R_3C_3+R_2(C_1+C_3)))+p^3R_1R_2R_3C_1C_2C_3+Y_h((R_1+R_3)+p(R_1R_3C_2+R_2(R_1+R_3)(C_1+C_3))+p^2R_1R_2R_3C_2(C_1+C_3)),$$

где проводимость нагрузки $Y_h = G_h + jB_h$ равна нулю при холостом ходе на выходе моста. Эта функция обращается в нуль на частоте ω_0 , когда одновременно выполняются условия $\omega_0^2 C_1 C_3 R_2 (R_1 + R_3) = 1$ и $C_1 + C_3 = \omega_0^2 C_1 C_2 C_3 R_1 R_3$. При синтезе фильтра на двойном Т-мосте обычно принимают $\tau = R_1 C_1 = R_3 C_3$ и задают значения C_1 , C_2 и C_3 . Тогда

$$R_1 = \sqrt{(C_1 + C_3)/C_2} / (\omega_0 C_1), \quad R_2 = \sqrt{C_2/(C_1 + C_3)^2} / \omega_0, \quad R_3 = \sqrt{(C_1 + C_3)/C_2} / (C_3 \omega_0).$$

Передаточная функция рассматриваемой цепи

$$K_{\text{pa}}(p) = K_0 (\gamma p^2 + 1) / (\alpha p^3 + \beta p + 1) = (p^2 + \omega_0^2) / (p^2 (1 + C_h/C_1 + C_h/C_3) + p \omega_0^2 (R_1 (C_1 + C_2 + C_h) + R_3 C_h + R_1 R_3 C_2 C_h) + \omega_0^2 (1 + (R_1 + R_3) C_h)), \quad \text{и по расчетным формулам } \gamma = 1/\omega_0^2, \quad K_0 = 1/(1 + (R_1 + R_3) G_h), \quad \alpha = (1 + C_h (1/C_1 + 1/C_3)) / (1 + (R_1 + R_3) C_h \omega_0^2), \quad \beta = (R_1 (C_1 + C_2 + C_3) + C_h (R_1 + R_3) + R_1 R_3 C_2 G_h) / (1 + (R_1 + R_3) G_h) \text{ можно найти составляющие проводимости нагрузки моста, обеспечивающие заданную передаточную функцию}$$

$$G_h = -C_3 (C_1 (\alpha - \beta/A) + C_2 + C_3) / (C_1 + C_3) (\alpha A - \beta + 1/A), \quad C_h = \alpha A G_h - C_1 C_3 (1 - \alpha \omega_0^2) / (C_1 + C_3),$$

где $A = \omega_0 ((C_1 + C_3)/C_2)^{1/2}$.

Программа 270. Синтез двойного Т-моста

$$\begin{array}{ccccccccc} x^2 & П0 & ИП1 & ИП3 & + & П6 & ИП2 & \div & ИП0 \times \\ \checkmark & П7 & ИП0 & \div & ПД & ИП3 & \div & П9 & ИП7 1/x \\ ИП6 & \div & ИПД & ИП1 & \div & С/П & ИПА & ИПВ & ИП7 \div \\ - & ИП0 & \times & ИП1 & \times & ИП2 & + & ИП3 & + ИП3 \\ \times & ИПВ & ИПА & ИП7 & \times & ПС & - & ИП7 & 1/x - \\ \div & ИП6 & \div & П8 & ИПС & \times & ИП0 & ИПА & \times 1 \\ - & ИП1 & \times & ИП3 & \times & ИП6 & \div & + & ИП8 С/П \end{array}$$

Инструкция. ($C_1 = P1$, $C_2 = P2$, $C_3 = P3$, $\alpha = PA$, $\beta = PB$) $\omega_0 = RX$ В/О С/П ($t \approx 18$ с) $RX = R_1$, $PY = R_2$, $P9 = R_3$ С/П ($t \approx 15$ с) $RX = C_h$, $PY = G_h$.

Пример. Для нормированных значений $C_1 = 5$, $C_2 = 100$, $C_3 = 20$, $\alpha = 4,6875$, $\beta = 18,80208$, $\omega_0 = 0,2$ получим $R_1 = 0,5$, $R_2 = 0,4$, $R_3 = 0,125$, $G_h = 8,0000036$, $C_h = 5,000017$.

Погрешности в подборе параметров Т-моста приводят к его разбалансу. Для максимального приближения к балансу чувствительности модуля передаточной функции на частоте ω_0 к изменениям параметров вычисляют по формулам

$$\begin{aligned} S_K(R_1) &= ((C_1 + C_3) C_2 + C_3^2)^{1/2} / M, \quad S_K(R_2) = (C_1 + C_3) / M, \quad S_K(R_3) = \\ &= ((C_1 + C_3) C_2 + C_1^2)^{1/2} / M; \end{aligned}$$

$$S_K(C_1) = ((C_1 + C_3)^2 + C_2 C_3^2 / (C_1 + C_3))^{1/2} / M, \quad S_K(C_2) = ((C_1 + C_3) C_2)^{1/2} / M,$$

$$S_K(C_3) = ((C_1 + C_3)^2 + C_2 C_1^2 / (C_1 + C_3))^{1/2} / M,$$

где $M = (C_1 + C_3)((C_1 + C_2 + C_3)^3 / C_1^2 C_2)^{1/2}$.

Программа 271. Вычисление чувствительностей модуля передаточной функции двойного Т-моста на частоте ω_0

$$\begin{array}{ccccccccc}
 \text{П3} & \rightarrow & \text{П2} & \leftrightarrow & \text{П1} & \text{ИП3} & + & \text{П7} & \text{ИП2} & + \\
 \uparrow & & x^2 & \times & \text{ИП1} & x^2 & \div & \text{ИП2} & \div & \sqrt{} & \text{ИП7} \\
 \times & & \text{П8} & \text{ИП7} & \text{ИП8} & \div & \text{ИП7} & \text{ИП2} & \times & \text{П4} & \text{ИП3} \\
 \text{ПП} & 57 & \text{С/П} & \text{ИП4} & \text{ИП1} & \text{ПП} & 57 & \text{ИП2} & \text{ИП7} & \div \\
 \text{П5} & \text{ИП3} & \text{ПП} & 54 & \text{С/П} & \text{ИП5} & \text{ИП1} & \text{ПП} & 54 & \text{ИП4} \\
 \sqrt{} & \text{ИП8} & \div & \text{С/П} & x^2 & \times & \text{ИП7} & x^2 & + & \sqrt{} \\
 \text{ИП8} & \div & & & & & & & & \text{В/О}
 \end{array}$$

Иструкция. $C_1=PZ$, $C_2=PY$, $C_3=PX$ В/О С/П ($t \approx 10$ с) $PX=S_K(R_1)$, $PY=S_K(R_2)$ С/П ($t \approx 8$ с) $PX=S_K(R_3)$, $PY=S_K(C_1)$ С/П ($t \approx 8$ с) $PX=S_K(C_2)$, $PY=S_K(C_3)$.

Пример. Для нормированных значений $C_1=1$, $C_2=10$, $C_3=1$ получим $S_K(R_1)=0,17430417$, $S_K(R_2)=0,076072679$, $S_K(R_3)=0,11410886$, $S_K(C_1)=0,17430417$, $S_K(C_2)=0,17010345$, $S_K(C_3)=0,11410886$.

Коэффициенты α и β передаточной функции $K_{pa}(p)$ режекторного звена лишь при определенных значениях можно реализовать пассивной цепью. В общем случае используют активные звенья. Для простейшего из них (рис. 65, б) с $\mu' \geq 1$ при $\alpha > \beta$ принимают $1/R_0=0$ и синтезируют звено по заданным значениям α , β , γ , C_1 , C_2 и C_3 согласно формулам

$$\begin{aligned}
 n &= C_1/C_2; \quad m = n(\alpha/\gamma - 1)/(n+1); \quad C_0 = mC_3; \\
 \mu' &= 1 + (m/n - \beta/\sqrt{\gamma(1+n)})/2 = K_0; \quad R_2 = n(\gamma/C_2 C_3(1+n))^{1/2}, \\
 R_3 &= R_2 C_2/C_1, \quad R_1 = R_3/n.
 \end{aligned}$$

В случае $\alpha < \beta$ принимают $C_0=0$ и ведут расчет по формулам:

$$\begin{aligned}
 n &= C_1/C_3; \quad m = R_1/R_0 = (\gamma/\alpha - 1)/(n+1); \\
 R_2 &= n(\gamma/C_2 C_3(1+n))^{1/2}, \quad R_3 = R_2 C_2/(nC_1), \quad R_1 = R_3/n, \\
 R_0 &= R_1/m; \quad K_0 = 1/(1 + (1+n)m); \quad \mu'' = \beta(m + 1/(1+n))/2\sqrt{\gamma} - m/2 + 1
 \end{aligned}$$

(так как для операционного усилителя в неинвертирующем включении $\mu' \geq 1$, принимают $\mu'=1$, а требуемого значения μ'' добиваются с помощью делителя напряжения на сопротивлении R_0).

Автоматизировав выбор решения в зависимости от соотношения α и γ , можно обеспечить синтез режекторного звена на операционном усилителе с помощью одной программы.

Программа 272. Синтез режекторного звена

ИП0 ИП1 ИП3 ÷ П6 1 + П8 ÷ ИП2
 ÷ ИП3 ÷ √ ИП6 × ПА ИП2 × ИП1
 ÷ ИП6 ÷ ПВ ИП6 ÷ П9 ИП0 ИП4 —
 ИП8 ÷ x>0 68 ИП4 ÷ П7 ИП8 1/x +
 ИП5 × ИП0 √ ÷ ИП7 — 2 ÷ 1
 + ПС ИП8 ИП7 × 1 + 1/x ПД ИП9
 ИП7 ÷ П8 Сx П7 С/П БП 00 ↑ /—/
 ИП0 ÷ ИП6 × П7 ИП6 ÷ ИП5 ИП0 √
 ÷ ИП8 ÷ — 2 ÷ 1 + ПС ПД
 ИП3 ИП7 × П7 Сx П8 БП 65

Инструкция. ($\gamma=P0$, $C_1=P1$, $C_2=P2$, $C_3=P3$, $\alpha=P4$, $\beta=P5$) В/О С/П ($t \approx 30$ с) $PX=0$, $P7=C_0$, $P8=R_0$, $P9=R_1$, $PA=R_2$, $PB=R_3$, $PC=\mu'$, $PD=K_0$.

Пример. Для $K_{pz}(p)=K_0(1+0,2p^2)/(1+0,1p+5p^2)$ при $C_1=0,2$, $C_2=0,5$, $C_3=0,4$ получим $C_0=3,2$; $K_0=\mu'=8,925464$; $R_1=4,082482$, $R_2=0,4082482$, $R_3=2,041241$; для $K_{pa}(p)=K_0(1+16p^2)/(1+2p+4p^2)$ при $C_1=1$, $C_2=2$, $C_3=3$ получим $R_2=0,4714045$, $R_3=2,828427$, $R_1=8,485281$, $R_0=3,771236$; $\mu''=0,625$; $K_0=0,25$.

Коэффициенты передаточной функции при $1/R_0=0$ и $K_0=\mu'$ и заданных значениях параметров схемы вычисляют по формулам

$$\gamma = C_1 C_3 (R_1 + R_3) R_2; \quad n = C_1/C_3 = R_3/R_1; \quad m = C_0/C_3;$$

$$\alpha = \gamma (1 + (1 + 1/n) m); \quad \beta = \sqrt{\gamma} (1 + n) (m/n - 2(\mu' - 1)).$$

В случае $C_0=0$ коэффициенты передаточной функции вычисляют по формулам

$$\gamma = C_1 C_3 (R_1 + R_3) R_2; \quad n = C_1/C_3 = R_3/R_1; \quad m = R_1/R_0; \quad \alpha = \gamma/(1+n)m;$$

$$\beta = \sqrt{\gamma} (m + 2(\mu' - 1)/(m + 1)/(1 + n)); \quad K_0 = 1/(1 + (1 + n)m).$$

Программа 273. Анализ режекторного звена

ПД	ИП4	ИП5	×	ИП1	ИП3	+	×	ИП2	×
П6	С/П	ИП1	ИПД	x≥0 51	÷	ПА	ИП4	ИП5	
÷	1	+	ПВ	×	1	+	ПС	÷	С/П
ИП6	√	ИПА	ИП0	1	—	2	×	+	×
ИПВ	1/x	ИПА	+	÷	С/П	ИПС	1/x	С/П	БП
00	↑	/—/	ИП5	÷	ПА	ИП5	ИП4	÷	ПВ
1	+	×	1	+	ИП6	×	С/П	ИПА	ИПВ
×	ИП0	1	—	2	×	—	ИПВ	1/x	1
+	×	ИП6	√	×	С/П	ИП0	С/П	БП	00

Инструкция. ($\mu'=P0$, $R_1=P1$, $R_2=P2$, $R_3=P3$, $C_1=P4$, $C_3=P5$) R_0 или $-C_0=PX$ (для схем с $C_0=0$ или $R_0=0$) В/О С/П $PX=\gamma$ С/П $PX=\alpha$ С/П $PX=\beta$ С/П $PX=K_0$ ($t \approx 25$ с).

Пример. Для $\mu'=8,925464$; $R_1=4,082482$, $R_2=0,4082182$, $R_3=2,041241$; $C_1=0,2$, $C_3=0,4$, $C_0=3,2$ получим $\gamma=0,19999991$, $\alpha=4,999977$, $\beta=0,10000051$, $K_0=-8,925464$; для $\mu''=0,625$; $R_1=8,485281$, $R_2=0,4714045$, $R_3=2,8285281$; $C_1=1$, $C_3=3$, $R_0=3,7712$ получим $\gamma=15,999999$, $\alpha=3,999998$, $\beta=1,999999$, $K_0=0,25$.

6.6. Расчет цифровых фильтров

Цифровым фильтром называют ЭВМ, реализующую заданный алгоритм избирательной обработки сигналов в реальном масштабе времени. Наиболее распространены цифровые фильтры, работающие во временной области и моделирующие решение разностного уравнения

$$x(i) = \sum_{k=0}^M a_k q(i-k) + \sum_{k=1}^N b_k x(i-k), \quad i=0, 1, 2, \dots, \quad (6.20)$$

где $x(i)$ и $q(i)$ — отсчеты реакции и воздействия соответственно, причем $x(i) = q(i) = 0$ при $i > M$. Это уравнение всегда можно привести к форме

$$x(i) = \sum_{k=0}^L c_k q(i-k), \quad i=0, 1, 2, \dots, \quad (6.21)$$

где $c_k = \sum_{n=0}^M a_n b_n^k$.

Фильтр с $L \rightarrow \infty$, называемый фильтром с бесконечной импульсной характеристикой (БИХ-фильтром), реализуем лишь в рекурсивной структуре (6.20). Фильтр с конечным пределом L (КИХ-фильтр) обычно реализуют согласно соотношению (6.21) в виде иерархического (часто трапециевидного) фильтра.

Расчет цифрового фильтра сводится к определению коэффициентов правой части формул (6.20) или (6.21) по заданным требованиям к фильтру. Если вместо последовательности $x(i)$ или $q(i)$ рассматривают их z -преобразования, то определению подлежит передаточная функция фильтра

$$K(z) = x(z)/q(z) = \sum_{k=0}^M a_k z^{-k} / \left(1 + \sum_{k=1}^N b_k z^{-k} \right).$$

Методы расчета зависят от типа фильтра и предъявляемых к нему требований. Метод инвариантного преобразования импульсной характеристики (стандартного z -преобразования) используют тогда, когда необходимо точное совпадение непрерывной импульсной характеристики фильтра с дискретизованной последовательностью ее отсчетов. Согласно этому методу лапласово изображение $G(p)$ заданной непрерывной функции $g(t)$ после объединения пар комплексно-сопряженных полюсов представляют выражением

$$G(p) = \sum_{k=1}^r \frac{A_k}{p+\alpha_k} + \sum_{k=1}^s \frac{B_k p + C}{p^2 + \beta_k p + \gamma_k}.$$

Каждый член правой части этого равенства преобразуют по формулам

$$A/(p+\alpha) \rightarrow AT/(1+\delta z^{-1});$$

$$(Bp+C)/(p^2 + \beta p + \gamma) \rightarrow (B+Dz^{-1})T/(1+\sigma z^{-1} + \eta z^{-2}),$$

где T — период дискретизации, а коэффициенты $\delta = -\exp(-\alpha T)$;

$$D = -\exp(-\beta T/2)(B \cos(\sqrt{\gamma-\beta^2/4}T) + (\beta B/2 - C)/\sqrt{\gamma-\beta^2/4} \sin(\sqrt{\gamma-\beta^2/4}T));$$

$$\sigma = -2 \exp(-\beta T/2) \cos(\sqrt{\gamma-\beta^2/4}T); \quad \eta = \exp(-\beta T).$$

Преобразование членов, соответствующих вещественным полюсам, несложно вы-

числить, нажимая клавиши, но для определения квадратичных членов целесообразно использовать программируемый режим.

Программа 274. Стандартное z -преобразование квадратичных членов передаточной функции

```

П3 → П2 → П1 ↔ П0 ИП2 ИП9 ×
2 ÷ ex П8 ИП3 ИП2 x2 4 ÷ —
√ П6 ИП9 × П7 sin ИП2 ИП0 × 2
÷ ИП1 — × ИП6 ÷ ИП0 ИП7 cos П7
× + ИП8 /—/ П8 ÷ C/P ИП8 x2 1/x
ИП7 ИП8 ÷ 2 × C/P

```

Инструкция. Установить переключатель Р—ГРД—Г в положение Р; ($T=P9$) $B=PT$, $C=PZ$, $\alpha=PY$, $\beta=PX$ В/О С/П ($t \approx 20$ с) $PX=D$ С/П $PX=\sigma$, $PY=\eta$.

Пример. Для $(6 p+20,6)/(p^2+0,2 p+4,01)$ и $T=1$ получим коэффициенты преобразованного члена $(6+10,48693 z^{-1})T/(1+0,7530901 z^{-1}+0,8187302 z^{-2})$.

После преобразования передаточной функции $G(p)$ в виде простой дроби результат соответствует произведению множителей. Для представления преобразованной функции отношением многочленов следует использовать программу 100 или 101 для умножения многочленов.

Если техническое задание на проектирование цифрового фильтра регламентируют только его АЧХ, то обычно используют биллинейное преобразование. В этом случае расчет фильтра начинают с определения характеристических частот v_i аналогового ФНЧ-прототипа по заданным частотам f_i цифрового фильтра, используя соотношение $v_i = \operatorname{tg}(\omega_i T/2)$. Затем по требуемым характеристикам выбирают класс фильтра-прототипа, определяют его порядок и передаточную функцию, для чего можно использовать программы и формулы, рассмотренные ранее. Последний этап расчета заключается в замене переменной p в функции $K(p)$ аналогового фильтра комплексной переменной z согласно соотношению $p = (2/T)(z-1)/(z+1)$ и приведении полученной передаточной функции $K(z)$ к форме, удобной для синтеза цифрового фильтра. Если передаточная функция $K(p)$ представлена выражением (3.22), то для биллинейного преобразования квадратичных множителей применима формула

$$(\alpha p^2 + \beta p + 1) \rightarrow (Az^2 + Bz + C)/(z + 1)^2,$$

где $A = (2/T)^2 \alpha + (2/T) \beta + 1$; $B = 2(1 + (2/T) \alpha)$; $C = (2/T)^2 - (2/T) \beta + 1$, а для множителей первого порядка ($\alpha = 0$) коэффициенты $A = 0$, $B = 1 + (2/T) \beta$, $C = 1 - (2/T) \beta$.

Программа 275. Биллинейное преобразование множителей первого и второго порядков передаточной функции $K(p)$

```

П7 → П8 ↔ П9 ИП8 4 × ИП9 x2
÷ П6 ИП7 2 × ИП9 ÷ 1 + П4
+ П3 ИП6 ИП4 — 2 + П5 ИП6 x ≠ 0
38 1 ↔ — 2 × П4 ИП3 С/П ИП4
С/П ИП5 С/П

```

Инструкция. $T=PZ$, $\alpha=PY$, $\beta=PX$ В/О С/П ($t \approx 20$ с) $PX=A$ С/П $PX=B$ С/П $PX=C$.

Пример. Для множителей $4p^2+3p+1$ и $3p+1$ при $T=0,5$ соответственно получим коэффициенты множителей $(77z^2-126z+53)/(z+1)^2$ и $(13z-11) \times (z+1)^{-1}$.

Умножение результатов билинейного преобразования позволяет привести исходную функцию к виду $K(z)=A(z)(z+1)^k/M(z)$. Представление такой функции отношением многочленов упрощается при автоматизации вычислений.

Программа 276. Умножение многочлена $A(z)$ степени n на множитель $(z+1)^k$ при $n+k \leq 14$

```

ИП0 ИП1 + П1 Вх ИП2 + П2 Вх ИП3
+ П3 Вх ИП4 + П4 Вх ИП5 + П5
Вх ИП6 + П6 Вх ИП7 + П7 Вх ИП8
+ П8 Вх ИП9 + П9 Вх ИПА + ПА
Вх ИПБ + ПВ Вх ИПС + ПС Вх ИПД
+ ПД Вх С/П БП 00

```

Инструкция. $a_n=P_0$, $a_{n-1}=P_1$, $a_{n-2}=P_2$, ..., $a_{n-13}=P_D$ (вместо отсутствующих коэффициентов ввести нули), пустить программу k раз нажатием клавиш С/П (первый раз В/О и С/П); $P_0=a'_{n+k}$, $P_1=a'_{n-1+k}$, $P_2=a'_{n-2+k}$ ($t \approx 15$ с) ...

Пример. Для $(25z^2-30z+9)(z+1)^3$ после трехкратного выполнения программы получим коэффициенты многочлена $25z^5+45z^4-6z^3-38z^2-3z+9$.

Максимальную степень $n+k$ можно увеличить на единицу при использовании ПМК с входным языком ЯМК52, дополнив программу фрагментом ИПЕ++ ПЕ Вх перед оператором С/П. Если $n+k < 14$, то для ускорения вычислений целесообразно исключить последние фрагменты программы с обращениями к неиспользуемым регистрам памяти.

Если функция $K(p)$ невысокого порядка представлена отношением многочленов, то ее числитель и знаменатель можно непосредственно преобразовать в многочлены комплексной переменной z .

Программа 277. Билинейное преобразование многочлена $A(p)$ степени $n \leq 8$

```

П0 1 П9 С/П ПА Сх КП9 ПС ПВ ИПС
КИПВ ПС ↔ — ИПД ÷ КПВ ИП9 ИПВ 1
+ ПВ — x<0 09 Сх ПС ИП9 ПВ ИПА
КИПС + КПС ИПА ИПВ × ИПС 1 + ПС
÷ ПА ИПВ 1 — x<0 28 ИП9 1 +
БП .02

```

Инструкция. ($T/2=P_D$) $a_n=PX$ В/О С/П PX=1, $a_{n-1}=PX$ С/П PX=2, $a_{n-2}=PX$ С/П PX=3 ... $a_0=PX$ С/П PX=-n+1. $P_0=a'_n$, $P_1=a'_{n-1}$, $P_2=a'_{n-2}$, ..., $P_n=a'_0$ ($t \approx (20 n)$ с).

Максимальную степень преобразуемого многочлена можно увеличить до $n=9$ при использовании ПМК с входным языком ЯМК52, заменив в программе обращения к регистрам 9, А, В, С и Д обращениями соответственно к регистрам А, В, С, Д и Е. Для проверки правильности ввода и выполнения программы достаточно использовать данные примера к программе 275.

Для преобразования многочленов $A(p)$ в отношение $(a'_n z^n + a'_{n-1} z^{n-1} + \dots + a'_0) / (1+z)^n$ при степени $n \leq 14$ применим следующий алгоритм:

1. Представить преобразуемый многочлен формулой $A(p) = A_1(p)p^k + A_2(p)$ так, чтобы степени многочленов $A_1(p)$ и $A_2(p)$ удовлетворяли ограничениям для программы 277.

2. Выполнить с помощью программы 277 преобразование к многочлену $A(z) = (A_1(z)(z-1)^k + A_2(z)(z+1)^{n-k}) / (z+1)^n$, где k — степень многочлена $A_1(z)$.

3. С помощью программы 276 вычислить коэффициенты произведения $A_2(z)(z+1)^{n-k}$ и, заменив в этой программе оператор $+$ оператором $-$, найти произведение $A_1(z)(z-1)^k$.

4. Сложить коэффициенты при одинаковых степенях z обоих слагаемых.

При расчете цифровых ПФ вместо отображения $p = (z-1)/(z+1)$ используют [5] преобразование

$$p = (z^2 - 2z\cos \omega_0 T + 1) / (z^2 - 1), \quad (6.22)$$

обеспечивающее непосредственный переход от аналогового фильтра-прототипа к цифровому полосовому фильтру. При таком преобразовании частоты f_i цифрового фильтра связаны с частотами v_i аналогового фильтра-прототипа соотношением

$$v_i = (\cos \omega_0 T - \cos \omega_i T, \sin \omega_i T). \quad (6.23)$$

Для преобразования граничных частот f_{n1} и f_{n2} цифрового фильтра в одну граничную частоту v_n прототипа значение ω_0 выбирают из соотношения

$$\cos \omega_0 T = \cos((f_{n2} + f_{n1})T/2) / \cos((f_{n2} - f_{n1})T/2).$$

Программа 278. Преобразование частот при расчете цифрового полосового фильтра

P4	→	П3	→	P2	↔	П1	ИП3	ИП2	+
ИП5	÷	л	×	cos	ИП3	ИП2	—	ИП5	÷
л	×	cos	÷	П0	1	ПД	КИПД	ИП5	÷
2	×	л	×	↑	cos	ИП0	↔	—	↔
sin	÷	КПД	ИПД	1	+	ПД	5	—	x=0
27	СП								

Инструкция. Установить переключатель Р—ГРД—Г в положение Р; $(1/T = P5)$, $f_{a1} = PT$, $f_{n1} = PZ$, $f_{n2} = PY$, $f_{a2} = RX$ В/О С/П РХ = 0, Р1 = v_{a1} , Р2 = v_{n1} , Р3 = v_{n2} , Р4 = v_{a2} , Р0 = $\cos \omega_0 T (t \approx 50 \text{ с})$.

Пример. Для $f_{a1} = 1,5 \text{ кГц}$, $f_{n1} = 1,8 \text{ кГц}$, $f_{n2} = 2 \text{ кГц}$, $f_{a2} = 2,5 \text{ кГц}$ при частоте дискретизации $1/T = 100 \text{ кГц}$ получим $v_{a1} = -0,02826$, $v_{n1} = -0,006283$, $v_{n2} = 0,006282$, $v_{a2} = 0,03332$; $\cos \omega_0 T = 0,9929$. Сравнивая модули результатов, выбираем $v_n = 0,02826$ и, нормируя это значение по частоте 0,006282 (граничная частота полосы пропускания фильтра-прототипа после нормирования $v_n = 1$), получаем $v_n = 4,4979$.

При задании функции $K(p)$ аналогового прототипа отношением квадратичных множителей преобразование (6.22) целесообразно выполнять так, чтобы $K(z)$ цифрового фильтра также представляла собой отношение квадратичных

множителей. Это облегчит последующий синтез цифрового фильтра, часто реализуемый каскадным соединением звеньев порядка $n=2$. Подобное преобразование описывается формулой

$$(p^2 + \beta p + \gamma) \rightarrow (1 + \beta + \gamma) (z^2 + A_1 z + B_1) (z^2 + A_2 z + B_2) / (z^2 - 1)^2,$$

где $A_{1,2} = -(2 + \beta) (\cos \omega_0 T \pm \sqrt{(M-P)/2} + \sqrt{(4\gamma - \beta^2)(M+P)/2}) / (1 + \beta + \gamma)$;

$$B_{1,2} = ((\cos \omega_0 T)^2 + 2(\cos \omega_0 T) \sqrt{(M-P)/2} + M) / (1 + \beta + \gamma);$$

$$M = ((\sin^2 \omega_0 T + \gamma)^2 + (\beta \sin \omega_0 T)^2)^{1/2}; \quad P = \sin^2 \omega_0 T + \gamma - \beta^2/2.$$

Программа 279. Преобразование квадратичных множителей функции $K(p)$ фильтра-прототипа в множители функции $K(z)$ цифрового фильтра

П1	→	П0	ИП1	1	ИПД	x^2	—	П2	+
П3	x^2	ИП2	ИП0	x^2	×	—	γ	П4	ИП3
ИП0	x^2	2	÷	—	П5	—	2	÷	П6
ИП5	+	ИП1	4	×	ИП0	x^2	—	×	γ
П7	ИП6	γ	П6	ИП0	ИП1	+	1	+	П8
ИП6	/—/	П6	ИПД	—	ИП0	2	+	×	ИП7
/—/	П7	+	ИП8	÷	С/П	ИПД	x^2	ИП4	+
ИП6	2	×	ИПД	×	—	ИП8	÷	С/П	БП
50									

Инструкция. ($\cos \omega_0 T = РД$) $\beta = РY$, $\gamma = РX$ В/О С/П ($t \approx 20$ с) $РX = A_1$ С/П $РX = B_1$ С/П $РX = A_2$ С/П $РX = B_2$.

Пример. Для $\beta = 2$, $\gamma = 100$, $\cos \omega_0 T = 0,6$ получим $z^2 + A_1 z + B_1 = z^2 - 1,9904841z + 0,99207233$, $z^2 + A_2 z + B_2 = z^2 + 1,9438822z + 0,96884563$.

Достаточно широко применяют КИХ-фильтры, основное достоинство которых заключается в простоте получения линейной фазовой характеристики. Такие фильтры обычно рассчитывают методом взвешивания, согласно которому требуемую частотную характеристику (являющуюся для цифрового фильтра периодической функцией частоты с аргументом $e^{j\omega T}$) аппроксимируют взвешиванием отсчетов импульсной характеристики

$$g'(i) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K'(e^{jv}) e^{jiv} dv,$$

где $v = \omega T$; $K'(e^{jv})$ — требуемая частотная характеристика.

Взвешивание заключается в умножении значений $g'(i)$ на весовую последовательность $w(i)$ конечной длительности, называемую окном, с результатом $g(i) = g'(i)w(i)$. Изменение функции $w(i)$ позволяет управлять сходимостью ряда Фурье

$$K(e^{jv}) = \sum_{i=-(m-1)/2}^{(m-1)/2} g(i) e^{jiv},$$

описывающей частотную характеристику КИХ-фильтра, причем число m отсчетов предполагается нечетным. При реализации КИХ-фильтров методом взвешивания часто используют обобщенное окно Хэмминга

$$W(i) = \begin{cases} \alpha + (1-\alpha) \cos(2\pi i/m) & \text{при } i < (m-1)/2, \\ 0 & \text{при } i > (m-1)/2, \end{cases}$$

где $0 \leq \alpha \leq 1$. В этом случае значения $g(i)$ удобно вычислять по значениям $g'(i)$ в программируемом режиме.

Программа 280. Взвешивание отсчетов импульсной характеристики КИХ-фильтра обобщенным окном Хэмминга

$$\begin{array}{ccccccccc} P9 & Cx & P4 & IP8 & 2 & \div & P5 & IP4 & IP5 - \\ x \geq 0 & 14 & Cx & P9 & IP4 & \pi & \times & IP5 & \div \cos \\ \uparrow & & IP7 & \times & - & & IP7 & + & IP9 \times C/P P9 \\ K & IP4 & BP & 07 & & & & & \end{array}$$

Иструкция. Установить переключатель Р—ГРД—Г в положение Р; ($\alpha=P7$, $m=P8$) $g'(0)=RX$ В/О С/П $RX=g(0)$, $g'(1)=RX$ С/П $RX=g(1)$, $g'(2)=RX$ С/П $RX=g(2)$...; при нумерации отсчетов для симметричной импульсной характеристики центральный отсчет $i=0$ ($t \approx 15$ с).

Пример. При $\alpha=0,54$, $m=7$ для $g'(i)=1; 0,9; 0,6; 0,2; -0,1; \dots$ получим $g(i)=1; 0,7441248; 0,2625842; 0,02511087; 0; \dots$

Если значения $g'(i)$ вычисляют по известной формуле, то фрагмент ее реализации целесообразно включить в программу взвешивания отсчетов. Например, при проектировании фильтра нижних частот с $g'(i)=\sin(i\omega_0 T)/(li)$ вместо программы 280 целесообразно использовать программу с вычислением $g'(i)$.

Программа 281. Расчет КИХ-фильтра нижних частот

$$\begin{array}{ccccccccc} P7 & \rightarrow & P8 & \leftrightarrow & P9 & Cx & P4 & 1 & P3 IP8 \\ 2 & \div & P5 & IP4 & IP5 - & x \geq 0 & 20 & Cx & P3 \\ IP4 & \pi & \times & IP5 & \div & \cos & \uparrow & IP7 & \times - \\ IP7 & + & \uparrow & IP3 & \times & C/P & K & IP4 & IP4 IP9 \times \\ \sin & IP4 & \pi & \times & \div & P3 & BP & 13 & \end{array}$$

Иструкция. Установить переключатель Р—ГРД—Г в положение Р; $\omega_0 T = PZ$, $m = PY$, $\alpha = RX$ В/О С/П $RX = g(0)$ С/П $RX = g(1)$ С/П $RX = g(2)$... ($t \approx 20$ с).

Пример. Для $\alpha=0,57$, $m=257$, $\omega_0 T = 2\pi 0,1245 = 0,7822565$ получим $g(i)=1, 0,22434202; 0,15907001; \dots$

Иногда используют метод частотной выборки [5], основанный на реализации равноотстоящих отсчетов требуемой частотной характеристики $K(i)$ функциями вида

$$S(\omega, i) = \exp(-j\pi i/m) \sin(m\omega T/2) / \sin(\omega T/2 - \pi i/m).$$

Рассчитанная этим методом частотная характеристика

$$K(\exp(j\omega T)) = \frac{\exp(-j\omega T(m-1)/2)}{m} \sum_{i=0}^{m-1} \frac{K(i) \exp(j\pi i/m) \sin(\omega T m/2)}{\sin(\omega T/2 - \pi i/m)}.$$

Для фильтра с симметричной импульсной характеристикой при нечетном m , когда частоту отсчитывают в точках $\omega=2\pi/T$ и справедливы соотношения $|K(i)| = K(m-i)$, $\varphi_K(i) = -\pi i(m-1)/m$ при $i=0, 1, \dots, (m-1)/2$ и $\varphi_K(i) = \pi(m-i) \times (m-1)/m$ при $i=(m+1)/2, \dots, m-1$, частотная характеристика

$$K(\exp(j\omega T)) = (\sin(\omega T m/2) / m \sin(\omega T/2)) K(0) + 2 \sin \omega T \sum_{i=0}^{m-1} |K(i)| (-1)^i \times$$

$$\times \sin(\pi i/m) / (\cos(2\pi i/m) - \cos \omega T).$$

Программа 282. Расчет АЧХ КИХ-фильтра с симметричной импульсной характеристикой при нечетном $m \leq 19$

$$\begin{array}{ccccccccc}
 \pi & \times & 2 & \times & \cos & \text{ПВ} & \text{ИПД} & 1 & + & 2 \\
 \div & \text{П0} & \text{Сх} & \text{ПС} & \text{КИП0} & \pi & \text{ИПД} & \div & \text{ИП0} & \text{x} \neq 0 \\
 35 & \times & \sin & \text{Вх} & 2 & \times & \cos & \text{ИПВ} & - & \div \\
 \times & \text{ИПС} & + & \text{БП} & 13 & \text{ИПС} & 2 & \times & \text{ИПВ} & \cos^{-1} \\
 \text{ПВ} & \sin & \times & \text{ИПА} & + & \text{ИПВ} & 2 & \div & \text{ПВ} & \text{ИПД} \\
 \times & \sin & \times & \text{ИПВ} & \sin & - & \text{ИПД} & \div & \text{С/П}
 \end{array}$$

Инструкция. Установить переключатель Р—ГРД—Г в положение Р; $|K(0)| = PA$, $|K(1)| = P1$, $|K(2)| = P2$, $|K(3)| = P3, \dots$; $m = PD$; $fT = RX$ В/О С/П $RX = K(\exp(j2\pi fT))$ ($t \approx (30+m)/2c$).

Пример. Для $m=13$, $K(0)=K(1)=K(2)=1$, $K(3)=0,5$, $K(4)=K(5)=K(6)=0$ при $fT=0,1$ и $0,4$ получим $K(0,1)=0,8824098$, $K(0,4)=-0,03857367$ ($t \approx 80$ с).

Если расчет АЧХ подтверждает выполнимость требований технического задания, то передаточную функцию определяют по формуле

$$K(z) = ((1-z)^{-m}/m) \sum_{i=0}^{m-1} K(i) / (1 - z^{-1} \exp(j2\pi i/m)).$$

В противном случае, изменения значения $K(i)$, пытаются оптимизировать АЧХ по требуемому критерию обычно методами линейного программирования [15].

Для вычисления частотной характеристики достаточно в функции $K(z)$ принять $z = \exp(j\omega T)$ и использовать модификацию программ 109—115.

Программа 283. Вычисление многочлена $A(z)$ произвольной степени аргумента $z = \exp(j\omega T)$

$$\begin{array}{ccccccccc}
 \text{П9} & \rightarrow & \text{П0} & \leftrightarrow & \cos & \text{П7} & \text{Вх} & \sin & \text{П8} & \text{Сх} \\
 \text{П6} & \text{КИП0} & \text{ИП0} & \text{С/П} & \text{ИП9} & \text{ИП7} & \times & \text{ИП6} & \text{ИП8} & \times \\
 - & + & \text{ИП9} & \text{ИП8} & \times & \text{ИП6} & \text{ИП7} & \times & + & \text{П6} \\
 \leftrightarrow & \text{П9} & \text{ИП0} & \text{x} = 0 & 11 & \rightarrow & \text{С/П}
 \end{array}$$

Инструкция. Установить переключатель Р—ГРД—Г в положение Р; $\omega T = PZ$, $n = PY$, $a_n = RX$ В/О С/П $RX = n-1$, $a_{n-1} = RX$ С/П $RX = n-2\dots$, $a_1 = RX$ С/П $RX = 0$, $a_0 = RX$ С/П $RX = P9 = \text{Re}A(Z)$, $PY = P6 = \text{Im}A(Z)$ ($t \approx 8$ с).

Пример. Для $z = \exp(j0,1)$ получим $A(z) = z^8 + 7z^7 + 6z^6 + 5z^5 + 4z^4 + 3z^3 + 2z^2 + z + 10 = 34,895929 + j13,953264$.

Для упрощения расчета АЧХ целесообразно использовать симметрию коэффициентов многочленов передаточной функции. Так, для «симметричного» КИХ-фильтра (без учета задержки) расчет сводится к суммированию членов косинусоидального ряда с вещественными коэффициентами. Для анализа БИХ-фильтра приходится прибегать к обратному z -преобразованию отклика

$$F(z) = \sum_{j=0}^n a_j z^j \Big/ \sum_{j=0}^m b_j z^j = \sum_{k=0}^{\infty} C_k z^{-k},$$

оригиналом которого является последовательность

$$f(i) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k \delta(i-k).$$

Программа 284. Анализ БИХ-фильтров порядка $m \leq 6$ во временной области

```

Сх ИП0 ИП7 - ↑ ↑ ИП8 × ИП1
+ П0 → ИП9 × ИП2 + П1 → ИПА
× ИП3 + П2 → ИПВ × ИП4 + П3
→ ИПС × ИП5 + П4 → ИПД × ИП6
+ П5 Сх П6 ↔ - С/П БП 00

```

Инструкция. $a_n=P_0, a_{n-1}=P_1, \dots, a_{n-6}=P_5, b_m=P_6, b_{m-1}=P_7, \dots, b_{m-6}=P_D$ (вместо отсутствующих коэффициентов ввести нули) В/О С/П РХ= C_0 С/П РХ= C_1 С/П РХ= $C_2 \dots (t \approx 18 \text{ с})$.

Пример. Для функции $K(z) = (z^3 + 3z^2 + 3z + 1) / (100z^3 - 200z^2 + 100z - 50)$ получим $C_k = 0,01; 0,05; 0,12; 0,205; 0,315; \dots$

Для моделирования цифровых фильтров, обычно выполняемого на ЭВМ высокой производительности, в простейших случаях можно с успехом использовать ПМК.

Программа 285. Моделирование трансверсального фильтра с $M \leq 7$

```

↔ → ↔ ИПД ИП7 × ИПС ПД → ИПВ
ПС → ИПА ПВ → ИП9 ПА → ИП8 П9
→ ↔ П8 ИП1 × +. ИП2 ИП9 × +
ИП3 ИПА × + ИП4 ИПВ × + ИП5 ИПС
× + ИП6 ИПД × + ↔ ИП0 × +
С/П БП 00

```

Инструкция. ($C_0=P_0, C_1=P_1, \dots, C_7=P_7$; вместо отсутствующих коэффициентов ввести нули) $0=P_8=\dots=P_D=P_T=P_Z=P_Y, q(0)=P_X$ В/О С/П РХ= $=x(0), q(1)=P_X$ С/П РХ= $=x(1) \dots$ (нулевые отсчеты вводить только нажатием клавиши Сх); $t \approx 15 \text{ с}$.

Пример. Для $C_0=0,152, C_1=0,184, C_2=0,167, C_3=0,135, C_4=0,103, C_5=0,075, C_6=0,053$ при $q(i)=1; 1; 1; \dots$ получим $x(i)=0,152; 0,336; 0,503; \dots$

Обычно коэффициенты КИХ-фильтров симметричны относительно центрального отсчета, соответствующего значению $i=(m-1)/2$ при нечетном m и $i=m/2$ при четном. Это позволяет примерно вдвое уменьшить требуемый ресурс числовой памяти и соответственно повысить предельный порядок M моделируемого фильтра. Например, при выполнении операции «скользящего» интегрирования.

записываемого в дискретной форме $x(iT) = \sum_{j=i-M}^i x(i-j)$, все $M+1$ коэффициентов ие- рекурсивного фильтра равны единице. Другим примером является нерекурсивный фильтр, выявляющий кодовую последовательность Баркера [14] из ее смеси с помехой. Для последовательности $1; 1; 1; 1; 1; -1; -1; 1; 1; -1; 1; -1; 1$ по порядку 13 коэффициенты такого согласованного фильтра $C_0=C_2=C_4=C_5=C_8=C_9=C_{10}=C_{11}=C_{12}=1; C_1=C_3=C_6=C_7=-1$.

Программа 286. Модель согласованного нерекурсивного фильтра

ПД	ИПВ	...	ИПА	ПВ	+	ИП19	ПА	+	ИП18
П9	+	ИП7	П8	+	ИП6	П7	-	ИП5	П6
-	ИП4	П5	+	ИП3	П4	+	ИП2	П3	-
ИП1	П2	+	ИП0	П1	-	ИПД	П0	\leftrightarrow	С/П
БП	00								

Инструкция. Очистить регистры 0, 1, ..., С; $q(0)=\text{РХ В/О С/П РХ} = x(0)$, $q(1)=\text{РХ С/П РХ}=x(1)$, $q(2)=\text{РХ С/П РХ}=x(2)$, ...

Пример. Для последовательности Баркера порядка 13 получим $x(i)=1; 0; 1; 0; 1; 0; 1; 0; 1; 0; 1; 0; 1; 0; 13$.

При моделировании рекурсивных фильтров, рассчитанных методом билинейного преобразования по аналоговому фильтру-прототипу с равным постоянному множителю K_0 числителем передаточной функции $K(p)=K_0/(b_n p^n + \dots + b_1 p + b_0)$, получают функцию $K(z)=x(z)/q(z)=(B_0+B_1 z^{-1}+\dots+B_n z^{-n})/(w_0+w_1 z^{-1}+\dots+w_n z^{-n})$, где B_i — коэффициенты биномиального разложения, а коэффициенты w_i знаменателя выражаются через коэффициенты K_0 и b_i передаточной функции аналогового фильтра. Так как для дискретной последовательности $x(i-k)=x(z)z^{-k}$ и $q(i-k)=q(z)z^{-k}$, то по функции $K(z)$ несложно составить разностное уравнение, связывающее реакцию цифрового фильтра в виде выходной последовательности $x(i)$ с воздействием в виде входной последовательности $q(i)$. Программа решения этого разностного уравнения моделирует работу цифрового фильтра.

Так, представив передаточную функцию $K(p)=1/(p\tau+1)$ звена нижних частот порядка $n=1$ функцией $K(z)=(1+z^{-1})/(w_0+w_1 z^{-1})$, где $w_0=1+\tau$, $w_1=1-\tau$, получим разностное уравнение с решением $x(i)=(q(i)+q(i-1)-w_1 x(i-1))/w_0$, легко реализуемым на входных языках ПМК.

Программа 287. Модель цифрового ФНЧ порядка $n=1$

ИП7	\leftrightarrow	П7	+	ИП1	ИП8	\times	-	ИП0	\div
П8	С/П	БП	00						

Инструкция. ($w_0=P0$, $w_1=P1$) $q(-1)=P7$, $x(-1)=P8$, $q(0)=\text{РХ В/О С/П РХ}=x(0)$, $q(1)=\text{РХ С/П РХ}=x(1)$, $q(2)=\text{РХ С/П РХ}=x(2)$, ... ($t \approx 4$ с).

Пример. Для $w_0=10$; $w_1=-8$; $q(-1)=x(-1)=0$ при $q(i)=1; 1; 1; 1; 1; \dots$ получим $x(i)=0.1; 0.28; 0.424; 0.5392; 0.63136; \dots$

Для моделирования цифрового ФВЧ порядка $n=1$ достаточно в программе 287 заменить оператор $+$ операторами $\leftrightarrow -$.

Подобным образом моделируют и работу цифровых фильтров высоких порядков. Например, передаточная функция $K(p)=1/(b_2 p^2 + b_1 p + b_0)$ аналогового ФНЧ порядка $n=2$ после билинейного преобразования отображается функцией $K(z)=x(z)/q(z)=(1+2z^{-1}+z^{-2})/(w_0+w_1 z^{-1}+w_2 z^{-2})$, где $w_0=1+b_0+b_1$, $w_1=2(b_0-1)$, $w_2=1+b_1-b_0$, и соответственно разностным уравнением с решением $x(i)=(q(i)+2q(i-1)+q(i-2)-w_1 x(i-1)-w_2 x(i-2))/w_0$.

Программа 288. Модель цифрового ФНЧ порядка $n=2$

ИП6	\leftrightarrow	ИП5	П6	2	\times	\leftrightarrow	П5	$++$	
ИП2	ИП8	\times	-	ИП1	ИП7	П8	\times	-	ИП0
\div	П7	С/П	БП	00					

Инструкция. ($w_0 = P0$, $w_1 = P1$, $w_2 = P2$) $q(-1) = P5$, $q(-2) = P6$, $x(-1) = P7$, $x(-2) = P8$, $q(0) = PX$ (B/O) C/P ($t \approx 7$ с) $PX = x(0)$, $q(1) = PX$ C/P $PX = x(1)$, $q(2) = PX$ C/P $PX = x(2)$...

Пример. Для $w_0 = 10$, $w_1 = -2$, $w_2 = -0,5$, $q(-1) = q(-2) = x(-1) = x(-2) = 0$ при $q(i) = 1; 1; 1; 1; \dots$ получим $x(i) = 0,1; 0,32; 0,469; 0,5098; 0,52541; \dots$

Заменив в программе 288 оператор $+$ по адресу 09 оператором $-$, получим модель цифрового рекурсивного фильтра с передаточной функцией $K(z) = (1-z)^{-2} / (w_0 + w_1 z^{-1} + w_2 z^{-2})$.

Подобным образом моделируют цифровой рекурсивный ФНЧ порядка $n=3$ с передаточной функцией $K(z) = (1+3z^{-1}+3z^{-2}+z^{-3}) / (w_0 + w_1 z^{-1} + w_2 z^{-2} + w_3 z^{-3})$.

Программа 289. Модель цифрового ФНЧ порядка $n=3$

$$\begin{array}{ccccccccc} \text{П4} & \text{ИП7} & + & \text{ИП6} & \text{П7} & 3 & \times & + & \text{ИП5} & \text{П6} \\ 3 & \times & + & \text{ИП4} & \text{П5} & \leftrightarrow & \text{ИПА} & \text{ИП3} & \times & - \\ \text{ИП9} & \text{ПА} & \text{ИП2} & \times & - & \text{ИП8} & \text{П9} & \text{ИП1} & \times & - \\ \text{ИП0} & \div & \text{П8} & \text{C/P} & \text{БП} & 00 & & & & \end{array}$$

Инструкция. ($w_0 = P0$, $w_1 = P1$, $w_2 = P2$, $w_3 = P3$) $q(-1) = P5$, $q(-2) = P6$, $q(-3) = P7$, $x(-1) = P8$, $x(-2) = P9$, $x(-3) = PA$, $q(0) = PX$ (B/O) C/P $PX = x(0)$, $q(1) = PX$ C/P $PX = x(1)$, $q(2) = PX$ C/P $PX = x(2)$... ($t \approx 10$ с).

Пример. Для $w_0 = 100$, $w_1 = -10$, $w_2 = 5$, $w_3 = -3$ при $q(-1) = q(-2) = q(-3) = x(-1) = x(-2) = x(-3) = 0$ и $q(i) = 1; 0,5; 0,2; 0,1; \dots$ получим $x(i) = 0,01; 0,036; 0,0501; 0,03551; \dots$

Цифровой ФНЧ с передаточной функцией $K(z) = (1+4z^{-1}+6z^{-2}+4z^{-3}+z^{-4}) / (w_0 + w_1 z^{-1} + w_2 z^{-2} + w_3 z^{-3} + w_4 z^{-4}) = (1+2z^{-1}+z^{-2})(1+2z^{-1}+z^{-2}) / (w_0' + w_1' z^{-1} + w_2' z^{-2}) (w_0'' + w_1'' z^{-1} + w_2'' z^{-2})$ реализуется каскадным соединением двух рекурсивных звеньев порядка $n=2$ или одним звеном порядка $n=4$.

Программа 290. Модель цифрового ФНЧ порядка $n=4$

$$\begin{array}{ccccccccc} \text{ИП8} & \text{ИП7} & \text{П8} & 4 & \times & + & \text{ИП6} & \text{П7} & 6 \times \\ + & \text{ИП5} & \text{П6} & 4 & \times & + & \leftrightarrow & \text{П5} & + \text{ИПС} \\ \text{ИП4} & \times & - & \text{ИПВ} & \text{ПС} & \text{ИП3} & \times & - & \text{ИПА} \text{ ПВ} \\ \text{ИП2} & \times & - & \text{ИП9} & \text{ПА} & \text{ИП1} & \times & - & \text{ИП0} \div \\ \text{П9} & \text{C/P} & \text{БП} & 00 & & & & & \end{array}$$

Инструкция. ($w_0 = P0$, $w_1 = P1$, $w_2 = P2$, $w_3 = P3$, $w_4 = P4$) $q(-4) = P5$, $q(-3) = P6$, $q(-2) = P7$, $q(-1) = P8$, $x(-1) = P9$, $x(-2) = PA$, $x(-3) = PB$, $x(-4) = PC$, $q(0) = PX$ B/O C/P $PX = x(0)$, $q(1) = PX$ C/P $PX = x(1)$, $q(2) = PX$ C/P $PX = x(2)$... ($t \approx 12$ с).

В качестве примера рассмотрим расчет и моделирование цифрового ФНЧ порядка $n=4$ с полосой пропускания 1 кГц при допустимой неравномерности затухания не более 0,5 дБ и частоте дискретизации 20 кГц.

При билинейном преобразовании частотные шкалы аналогового и цифрового фильтров связаны практически линейно лишь в интервале $\omega T < \pi/4$ и для коррекции частотных характеристик цифрового фильтра для характеристических

частот $\omega_{\text{ЦФ}}$ (частот полос пропускания или задерживания, резонансных частот и т. п.) приходится определять соответствующее значение этих частот аналоговых фильтров-прототипов по формуле $\omega_A = \tan(\omega_{\text{ЦФ}} T / 2)$, где T — период дискретизации, определяющий согласно теореме Котельникова верхний предел рабочего диапазона частот цифрового фильтра $f_b < T/2$.

В соответствии с приведенным соотношением выберем границу полосы пропускания аналогового прототипа $\Omega_B = \tan(2\pi 10^3 / 4 \cdot 10^4) = 0,1583846$ и по передаточной функции фильтра Чебышева $K(s) = 1/(0,94035s^2 + 0,32972s + 1) \times (2,86064s^2 + 2,37565s + 1)$ после денормировки частоты прототипа (подставив $p = s/0,1583846$) находим $K(p) = 1/(111,8734p^2 + 14,99977p + 1) (37,48566p^2 + 2,082403p + 1)$. Выполнив с помощью программы 275 замену $p = (z-1)/(+1)$ и определив произведение многочленов с помощью программы 276, получим $K(z) = (1-z^{-1})^4 / (5187,466 - 18326,73z^{-1} - 24806,7z^{-2} - 15214,4z^{-3} + 3862,999z^{-4})$. По вычисленным значениям коэффициентов ω_i с помощью программы 290 при $q(i) = 1; 1; 1; 1; 1; \dots$ находим переходную характеристику моделируемого фильтра $h(i) = 1,927723 \cdot 10^{-4}, 1,644904 \cdot 10^{-3}, 7,00991 \cdot 10^{-2}, \dots$

Подобный подход применим для моделирования цифровых фильтров других типов. Например, по передаточной функции $K(p) = ap/(p^2 + b_1p + b_0)$ ПФ порядка $n=2$ после билинейного преобразования получим передаточную функцию $K(z) = a(1-z^{-2})(\omega_0 + \omega_1 z^{-1} + \omega_2 z^{-2})$, где $\omega_0 = (1+b_0+b_1)/a$, $\omega_1 = 2(b_0-1)/a$, $\omega_2 = (1+b_0-b_1)/a$.

Программа 291. Модель цифрового ПФ порядка $n=2$

```
ИП7 ИП6 П7 → ↔ П6 ↔ — ИП9 ИП2
× — ИП8 П9 ИП1 ✕ — ИП0 ÷ П8
С/П БП 00
```

Инструкция. ($\omega_0 = P0$, $\omega_1 = P1$, $\omega_2 = P2$) $q(-1) = P6$, $q(-2) = P7$, $x(-1) = P8$, $x(-2) = P9$, $q(0) = RX$ В/О С/П RX = $x(0)$, $q(1) = PX$ С/П RX = $= x(1)$, $q(2) = PRX$ С/П RX = $x(2)$; $t \approx 6$ с.

Пример. Для $\omega_0 = 10$, $\omega_1 = -10$, $\omega_2 = 10$, $q(-1) = q(-2) = x(-1) = x(-2) = 0$, $q(i) = 1; 1; 1; 1; \dots$ получим $x(i) = 0,1; 0,2; 0,1; -0,1; -0,2; -0,1; \dots$

Модели цифровых фильтров удобно использовать для вычисления временных характеристик соответствующих аналоговых прототипов. В качестве примера рассмотрим вычисление напряжения реакции параллельного колебательного контура, образованного параллельным соединением емкости C , индуктивности L и омической проводимости $G = 1/R$, на воздействие током от источника сигнала с практически бесконечным внутренним сопротивлением при резонансной частоте $f_p = 10$ кГц, сопротивления $R = 1$ кОм и добротности $Q = 1/\sigma = 2\pi f_p R C = 10$. Приняв $T = 10$ мкс и $\omega_{\text{ЦФ}} = 2\pi f_p = 2\pi \cdot 10^4$, находим резонансную частоту аналогового прототипа $\omega_0 = \tan(\pi \cdot 10^{-4}) = 0,33492$. После билинейного преобразования входного сопротивления контура $Z(p) = \omega_0 \delta R p / (p^2 + \delta \omega_0 p + \omega_0^2)$ получим $Z(z) = (1-z^{-2}) / (\omega_0 - \omega_1 z^{-1} - \omega_2 z^{-2})$, где $\omega_0 = (1 + \omega_0^2 + \omega_0 \delta) / (\omega_0 \delta R) = 35,01923$; $\omega_1 = -2(\omega_0^2 - 1) / (\omega_0 \delta R) = -55,03846$; $\omega_2 = (1 - \omega_0^2 + \omega_0 \delta) / (\omega_0 \delta R) = 33,01923$. Используя полученные исходные данные, с помощью программы 291 можно найти временную характеристику напряжения на контуре при заданной форме входного тока.

По приведенным или подобным им программам можно также исследовать влияние округления коэффициентов цифрового фильтра (влияние разрядности) и решать другие практически важные задачи. Процесс моделирования реакции фильтра на заданную входную последовательность, описываемую аналитической или обобщенной функцией, облегчается при дополнении программы фрагментом, автоматически генерирующим требуемую модель воздействия (см. гл. 2). Вычисление последовательности $x(i)$ для цифрового фильтра, построенного по аналоговому прототипу, обеспечивает определение временных характеристик прототипа при дискретизации входного сигнала. Это обстоятельство удобно использовать для построения временных характеристик аналоговых линейных и особенно иелейных инерционных цепей, включая автогенераторы [14].

Для иллюстрации приведем модель автогенератора с прерывистыми колебаниями, эквивалентная схема которого показана на рис. 66, а, а нелинейные свойства активного компонента аппроксимированы зависимостью $i(u_1) = S_0 u_1 \sqrt{1 + u_1^2}$. При расчете коэффициентов передаточной функции цифрового резонатора, отображающего выходной колебательный контур анализируемой цепи, $\omega_0 = (1 + \omega_p^2 + \omega_p \delta) / (\omega_p \delta R S_0)$, $\omega_1 = 2(\omega_p^2 - 1) / (\omega_p \delta R S_0)$, $\omega_2 = (1 + \omega_p^2 - \omega_p \delta)$ необходимо учесть резонансную частоту $\omega_p = 1 / \sqrt{LC}$, затухание $\delta = 1/Q$ и крутизну S_0 . Изменение напряжения смещения $u_{\text{см}}$ на конденсаторе C_1 за интервал дискретизации T учитывается выражением $u_{\text{см}}(i) = u_{\text{см}}(i-1) + (u_{\text{см}}(i) - u_{\text{см}}(i-1)) (1 - \exp(-T/\tau)) \approx u_{\text{см}}(i-1) + (u_{\text{см}}(i) - u_{\text{см}}(i-1)) T/\tau$, где $\tau = \tau_{\text{зар}} = C_1 R_{\text{зар}}$ ($R_{\text{зар}}$ — сопротивление открытого диода), если $u_1(i) - u_2(i-1) \geq 0$ или $\tau = \tau_{\text{раз}} = C_1 R_1$ при $u_1(i) - u_2(i-1) < 0$. С учетом принятых допущений составляем цифровую модель анализируемой цепи.

Программа 292. Цифровая модель автогенератора

ИП3 ↔ ИП5 — ПА	$x < 0$	08	ИП4 × ИП5
+ П5 ИПА ↑ x^2	1	+	÷ ПД
ИП7 — ИП9 ИП2 × —		ИП8 ИП1 ×	
— ИП10 ÷ П8 ИП6 П7		ИПД Г6 ИП8 С/П	
БП 00			

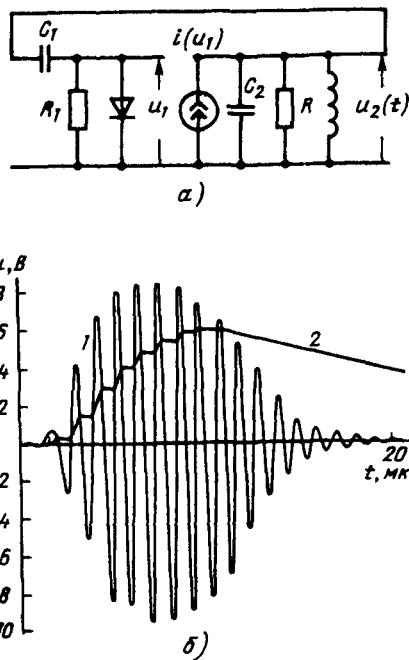


Рис. 66

Инструкция. ($w_0 = P0$, $w_1 = P1$, $w_2 = P2$, $T/\tau_{зар} = P3$, $T/\tau_{раз} = P4$)
 $u_{см}(0) = P5$, $i(-1) = P6$, $i(-2) = P7$, $u_2(-1) = P8$, $u_2(-2) = P9$, $u_1(0) = RX$ В/О
С/П $RX = P8 = u_2(0)$, $P5 = u_{см}(0)$ С/П $RX = u_2(1)$, $P5 = u_{см}(1)$ С/П $RX = u_2(2)$, $P5 = u_{см}(2)$... ($t \approx 15$ с).

Пример. При $Q = 5$, $f_0 = 10$ МГц, $R = 1$ кОм, $S_0 = 10$ мСм, $\tau_{зар} = 0,1$ мкс, $\tau_{раз} = 2,5$ мкс и $T = 10$ нс, предварительно вычислив $\omega_0 = \operatorname{tg}(\omega_{цф} T/2) = \operatorname{tg} 0,1\pi = 0,32492$; $\omega_0 = 1,8013$, $\omega_1 = -2,7528$, $\omega_2 = 1,6013$, приняв начальные условия $0 = P5 = P6 = P7 = P8 = P9$ и $u_1(0) = 0,01$, получим результаты (рис. 66, б), свидетельствующие о возникновении прерывистой генерации. Положительная обратная связь моделируется сохранением в регистре X значения $u_2(i)$, принимаемого при следующем выполнении программы в качестве напряжения $u_2(i+1)$.

Подобное цифровое моделирование линейных, параметрических и нелинейных аналоговых цепей соответствует решению по разностным схемам дифференциальных уравнений с постоянными, изменяющимися во времени или зависящими от уровня переменных q и x коэффициентами, отображающими свойства моделируемых цепей.

Глава 7

Расчет устройств с распределенными параметрами

7.1. Расчет эквивалентных параметров проводников

Распределенные параметры проводников, образующих или соединяющих компоненты высокочастотных цепей передачи сигнала, учитывают эквивалентными сосредоточенными параметрами (прежде всего, индуктивностью и емкостью), зависящими от материала и конфигурации проводников в заданных рабочих условиях. В большинстве случаев эквивалентные параметры вычисляют по простым формулам нажатием клавиш. Однако при расчете по сложным формулам и особенно при решении уравнений или аппроксимации функциональных зависимостей необходимо использовать программируемый режим работы микрокалькулятора.

Например, индуктивность (в микрогенри) прямого круглого провода длиной l и диаметром d (в миллиметрах) вычисляют по формуле

$$L = 2 \cdot 10^{-4} l (\ln(4l/d) - \theta), \quad (7.1)$$

где $\theta = 1 - 0,25\mu$ (для немагнитных материалов $\theta = 0,75$) на низких частотах и стремится к единице при повышении частоты, а μ — относительная магнитная проницаемость материала провода. Для коротких проводов длиной $l < 100d$ коэффициент θ в этой формуле дополняют слагаемым $d/2l$.

Для обеспечения требуемой индуктивности при заданий длине провода в соответствии с формулой (7.1) необходимо выбирать провод диаметра $d = 4l/\exp(5 \cdot 10^3 L/l + \theta)$, а при заданных значениях L и d требуется провод длиной $l = 5 \cdot 10^3 L / ((\ln(4l/d) - \theta))$. Величина l может быть вычислена методом простых итераций с прекращением вычислений, когда модуль разности двух очередных

значений правой части уравнения не превышает наперед заданного малого числа ε .

Программа 293. Вычисление l , L и d круглого провода

$$\begin{aligned} \text{ИП9 } &x:=0.08 \quad \text{ПП 42} \times \quad \text{П9 С/П ИП7 } x \neq 0 \\ 26 &\div 5 \quad \text{ВП 3} \times \quad \text{ИП5} \leftarrow e^x \quad \text{ИП7} \\ \leftrightarrow &\div 4 \times \quad \text{П8 С/П ИП8} \quad \text{П7 ПП 42} \\ \text{ИП9} &\leftrightarrow \div \quad \text{П7} \leftarrow x^2 \quad \text{ИП6} \leftarrow x < 0 \quad 28 \\ \text{ИП7} &\text{С/П ИП7} \uparrow \quad \text{ИП8} 4 \div \quad \div \quad \text{ИП6} \quad \text{ИП5} \\ - 5 &\quad \text{ВП 3} \div \quad \text{В/О} \end{aligned}$$

Инструкция. $l=P7$, $d=P8$, $L=P9$ (вместо неизвестной величины x ввести 0) $\theta=P5$, $\varepsilon^2=P6$ В/О С/П РХ= x (время счета зависит от неизвестной величины).

Пример. При $l=1000$ мм, $d=0,5$ мм, $\theta=0,75$ получим $L=1,647439$ мкГн ($t \approx 7$ с); при указанных значениях l и L получим $d=0,5$ ($t \approx 7$ с) и при указанных значениях d и L (при $\varepsilon=10^{-3}$) получим $l=1000$ ($t \approx 1$ мин 30 с).

Эта программа пригодна также для расчета параметров одновитковых петель, периметр которых значительно больше диаметра провода, при $\theta=2,451$ для круглого, $\theta=2,561$ для правильного восьмиугольного, $\theta=2,636$ для правильного шестиугольного, $\theta=2,712$ для правильного пятиугольного, $\theta=2,853$ для квадратного и $\theta=3,197$ для равностороннего треугольного витков на низких частотах.

Программируемый режим целесообразен и при расчетах по громоздким формулам. В качестве примера рассмотрим вычисление взаимной индуктивности (в микрогенри) двух параллельных проводов длиной $2l_1$ и $2l_2$, расположенных на расстоянии h (все размеры в миллиметрах) с центрами на перпендикуляре к проводам ($l_1 \leq l_2$) по формуле

$$M = 2 \cdot 10^{-4} (2l_1 \ln(A/h) + (l_1 + l_2) \ln(A/B) + C - D),$$

где $A = l_1 + l_2 + D$, $B = l_2 - l_1 + C$, $C = ((l_1 - l_2)^2 + h^2)^{1/2}$,
 $D = ((l_1 + l_2)^2 + h^2)^{1/2}$.

Программа 294. Вычисление взаимоиндуктивности M параллельных проводов

$$\begin{aligned} \text{П9} &\rightarrow \quad \text{П8} \leftrightarrow \quad \text{П7} 6 \text{ П0} \quad \text{ИП8 ИП7} / - / \\ \text{П7} &\div \uparrow x^2 \quad \text{ИП9} x^2 \div \quad \text{КП0} + \\ \text{КП0} \text{ L0} &07 \quad \text{ИП9} \div \quad \text{Ln} \quad \text{ИП7} \div \quad \text{ИП8 ИП7} \\ &\quad \text{ИП1 ИП4} \div \quad \text{Ln} \quad \times + + \quad \text{ИП5} + \\ \text{ИП2} &- 5 \quad \text{ВП 3} \div \quad \text{С/П БП 00} \end{aligned}$$

Инструкция. $l_1=PZ$, $l_2=PY$, $h=PX$ (В/О) С/П РХ= M ($t \approx 20$ с).

Пример. Для $l_1=100$ мм, $l_2=500$ мм, $h=10$ мм получим $M=0,200156$ мкГн.

При расчете параметров проводников для аппроксимации зависимостей их параметров от геометрических размеров и рабочих условий часто используют nomogramмы, графики или таблицы. Применение ПМК позволяет избежать обращения к справочникам, обеспечивая возможность автоматических вычислений по аппроксимирующим формулам. Если не удается найти простую аппроксимирующую формулу, обеспечивающую требуемую точность в заданном интервале

изменения параметров, то последний разбивают на части, используя аппроксимирующие формулы, обеспечивающие требуемую точность на каждом участке. Выбор требуемой расчетной формулы должен обеспечиваться автоматически в зависимости от значения соответствующего параметра.

В качестве примера аппроксимируем известную формулу для вычисления индуктивности однослойной цилиндрической катушки $L = Fn^2d$, где n — число витков; $F = \pi^2kd/l$, l и d — длина и диаметр катушки, а зависимость $k = k(d/l)$ задают в справочниках таблицами или графиками. При малых значениях $x = d/l$ коэффициент k аппроксимируют рядом $k = 2 + 4x/3\pi + x^2/8 + x^3/64 + \dots$. Однако при увеличении аргумента x сходимость этого ряда быстро ухудшается.

Разобьем интервал x на несколько частей и попытаемся с помощью табличных данных и микрокалькулятора подобрать простые аппроксимирующие выражения для каждого участка интервала. Так как при $x=0$ коэффициент $k=1$, то при малых значениях x целесообразно использовать аппроксимирующую формулу вида $k = 1/(1+ax)$. С помощью микрокалькулятора после нескольких проб находим приближение $k \approx 1/(1+0,45x)$, обеспечивающее вычисление k с погрешностью менее 1 % в интервале $0 \leq x \leq 4$. Подобным образом подберем приближение $k \approx 1/(1,33+0,36x)$ с погрешностью менее 1 % в интервале $4 \leq x \leq 10$. При необходимости аналогично можно подобрать аппроксимирующие выражения для вычислений с большей точностью и в большем интервале x .

Программа 295. Вычисление индуктивности однослойной катушки L с погрешностью менее 1 % при $d/l \leq 10$

$$\begin{array}{ccccccccc} \text{П7} & \rightarrow & \text{П8} & \leftrightarrow & \div & \text{П9} & 4 & - & x < 0 \\ 4 & 5 & \uparrow & 1 & 0 & 0 & \text{БП} & 24 & 3 & 6 \\ \uparrow & 1 & 3 & 3 & \text{ИП9} & \div & + & 1/x & \pi & 1 \\ 0 & \div & \text{ИП7} & \times & x^2 & \times & \text{ИП8} & \times & \text{С/П} \end{array}$$

Инструкция. l , мм = РZ, d , мм = РY, n = РХ В/О С/П РХ = L ($t \approx 8$ с).

Пример. Для $d = 100$ мм, $l = 100$ мм, $n = 100$ получим $L = 680,6623$ мкГн, для $d = 500$ мм, $l = 100$ мм, $n = 100$ получим $L = 7883,07$ мкГн.

В этой и других подобных программах требуемый вычислительный фрагмент выбирается с помощью условного оператора в зависимости от значения переменной. Во многих случаях приходится использовать условные операторы для выбора требуемого фрагмента с помощью цифрового кода. В качестве примера рассмотрим вычисление связанных величин, используемых при расчетах распределенных цепей, круговой частоты ω , частоты $f = \omega/2\pi$, периода колебания $T = 1/f$ и длины волны в свободном пространстве $\lambda = cT$, где $c = 3 \cdot 10^8$ м/с — скорость распространения электромагнитных волн в свободном пространстве. Выбрав для каждой из этих величин код в виде цифр 1, 2, 3 и 4 соответственно, предусмотрим использование условных операторов для определения требуемого вычислительного фрагмента программы.

Программа 296. Вычисление величин ω , f , T и λ по одной из них

$$\begin{array}{ccccccccc} \pi & 2 & \times & \text{П7} & \rightarrow & 1 & - & x = 0 & 22 \leftrightarrow \\ \text{П1} & \text{ИП7} & \div & \text{П2} & 1/x & \text{П3} & 3 & \text{ВП} & 8 \times \\ \text{П4} & \text{С/П} & 1 & - & x = 0 & 31 & \leftrightarrow & \text{ИП7} & \times \text{БП} \\ 10 & 1 & - & x = 0 & 39 & \leftrightarrow & 1/x & \text{БП} & 27 \leftrightarrow \\ 3 & \text{ВП} & 8 & \div & \text{БП} & 36 & & & \end{array}$$

Инструкция. ω , рад/с = РY, 1 = РX, или f , Гц = РY, 2 = РX, или T , с = РY, 3 = РX, или λ , м = РY, 4 = РX. В/О С/П РX = Р4 = λ , м; Р1 = ω , рад/с; Р2 = f , Гц; Р3 = T , с ($t \approx 10$ с).

Примеры. Для $\omega = 5 \cdot 10^6$ рад/с получим $\lambda = 376,9911$ м, $f = 795774,72$ Гц = $= 795,77472$ кГц, $T = 1,256637 \cdot 10^{-8}$ с = $1,256637$ мкс; для $f = 98$ ГГц = $98 \cdot 10^9$ Гц получим $\lambda = 3,0612243 \cdot 10^{-3} = 3,0612243$ мм, $\omega = 6,1575215 \cdot 10^{11}$ рад/с, $T = 1,0204081 \cdot 10^{-11}$ с = $10,204081$ пс; для $T = 1$ мкс = 10^{-6} с получим $\lambda = 300$ м, $\omega = 6283185,2$ рад/с, $f = 10^8$ Гц; для $\lambda = 3$ см = $0,03$ м получим $\omega = 6,2831852 \times 10^{10}$ рад/с, $f = 1 \cdot 10^{10}$ Гц = 10 ГГц, $T = 10^{-10}$ с = 100 пс.

Если требуется определить связь только между двумя величинами из связанных программой 296, достаточно составить более простую программу или выполнить вычисления нажатием клавиш.

7.2. Расчет параметров линий передачи сигнала

Рассмотрим расчет электрических параметров линий передачи по их геометрическим размерам при распространении поперечных или квазипоперечных электромагнитных волн. При отсутствии специальных оговорок в расчетных формулах физические величины будем выражать в следующих единицах измерения: волновое сопротивление Z_0 в омах, фазовую постоянную β в радианах на метр, постоянную затухания a в неперах на метр, частоту в мегагерцах и геометрические размеры в миллиметрах.

Коаксиальная линия передачи (рис. 67, а) с малыми потерями (выполненная из меди) имеет практическое вещественное волновое сопротивление

$$Z_0 = 60 \ln(D/d)/\sqrt{\epsilon}, \quad (7.2)$$

где ϵ — относительная диэлектрическая проницаемость заполнения коаксиальной линии, и постоянную распространения с составляющими

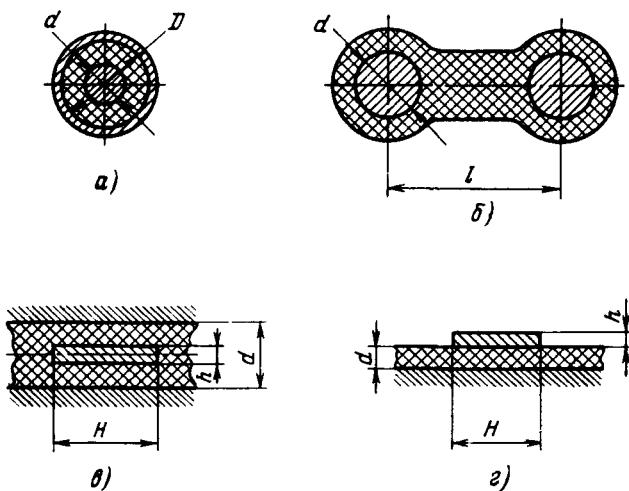


Рис. 67

$$\beta = \pi f V_e / 150; \quad (7.3)$$

$$\alpha = (1/D + 1/d) \sqrt{f} / 24Z_0 + (\beta \operatorname{tg} \delta) / 2. \quad (7.4)$$

Распространение в коаксиальной линии только поперечной волны, для которой справедливы формулы (7.2) — (7.4), обеспечивает выполнение условия

$$f < 6 \cdot 10^6 / (\pi (D + d) V_e). \quad (7.5)$$

Кроме того, при оценке затухания в рассматриваемой линии предполагается выполнение условия $\sigma \ll d$, где σ — глубина проникновения тока в проводники линии. Поэтому формула (7.4) обеспечивает достаточную для практических целей точность при условии $f \gg 1/d^2$ и малой погрешности величины $\operatorname{tg} \delta$, определяющей потери в диэлектрическом заполнении коаксиальной линии.

Программа 297. Вычисление параметров коаксиальной линии

$$\begin{aligned} & \text{П4 ИП8 ИП7} \div \text{Ип 6 0} \times \text{ИП9} V \\ & \div \text{П5 С/П ИП4 ИП9} V \times \pi \times 1 \\ & 5 0 \div \text{С/П ИП6} \times 2 \div \text{ИП7} 1/x \\ & \text{ИП8 1/x} + \text{ИП4} V \times 2 4 \div \text{ИП5} \\ & \div + \text{С/П П4 БП 13} \end{aligned}$$

Инструкция. ($d = \text{П7}$, $D = \text{П8}$, $\epsilon = \text{П9}$, $\operatorname{tg} \delta = \text{П6}$) $f_1 = \text{PX B/O C/П RX} = Z_0 \text{C/П RX} = \beta \text{C/П RX} = a$, $f_2 = \text{PX C/П RX} = \beta \text{C/П RX} = a$, $f_3 = \text{PX C/П, ...}$

Пример. Для $d = 0,72$ мм, $D = 4,8$ мм, $\epsilon = 2,3$, $\operatorname{tg} \delta = 4 \cdot 10^{-4}$ при $f = 1$ МГц получим $Z_0 = 75,05543$ Ом, $\beta = 0,03176307$ рад/м, $a = 8,930427 \cdot 10^{-4}$ Нп/м, а при $f = 100$ МГц получим $\beta = 3,176307$ рад/м, $a = 9,502163 \cdot 10^{-3}$ Нп/м.

Теоретическая погрешность вычисления Z_0 и β для поперечных волн определяется лишь округлением коэффициентов в формулах (7.2) и (7.3). Поэтому практически эти формулы полагают точными, оценивая погрешность результатов вычислений только по погрешностям исходных данных. Погрешность определения a существенно зависит от частоты, состояния поверхности проводников и ряда других факторов. Поэтому выражение (7.4) в большей мере пригодно для сравнения затухания в линиях с различными геометрическими размерами при прочих равных условиях, чем для точного вычисления параметра α .

Для определения геометрических размеров коаксиальной линии по заданным значениям Z_0 , a , ϵ и f можно воспользоваться формулами

$$d = (1 + A) \sqrt{f} (24Z_0 (\alpha - \beta \operatorname{tg} \delta) / 2); \quad D = d / A,$$

где $A = \exp(-\alpha Z_0 V_e / 60)$, а значение β определено формулой (7.3).

Программа 298. Расчет геометрических размеров коаксиальной линии

$$\begin{aligned} & \text{П4 ИП7 ИП8} V \times 6 0 \div \uparrow / - / \\ & e^x \text{ П5 1} + \text{ИП4} V \times 2 4 \div \\ & \text{ИП7} \div \text{ИП6 ИП4 ИП8} V \times \pi \times 3 \\ & 0 0 \div \text{ИП9} \times - \div \text{С/П ИП5} \div \\ & \text{С/П БП 00} \end{aligned}$$

Инструкция. ($Z_0 = \text{П7}$, $\epsilon = \text{П8}$, $\operatorname{tg} \delta = \text{П9}$, $a = \text{П6}$) $f_1 = \text{PX B/O C/П RX} = d \text{C/П RX} = D$, $f_2 = \text{PX C/П, ...}$

Пример. Для $Z_0 = 150$ Ом, $\epsilon = 2,3$, $\operatorname{tg} \delta = 4 \cdot 10^{-4}$, $a = 10^{-4}$ Нп/м при $f = 100$ МГц получим $d = -5,306665$, что свидетельствует о нереализуемости линии

в связи с потерями в диэлектрике; приняв $\alpha=0,01$ Нп/м, получим $d=0,3033136$ мм, $D=13,44286$ мм.

Двухпроводную линию используют практически только на относительно низких частотах. Волновое сопротивление такой линии в однородной диэлектрической среде без учета потерь

$$Z_0 = 4\pi^2 c \sqrt{\mu/\epsilon} \ln(l/d + \sqrt{(l/d)^2 - 1}), \quad (7.6)$$

где d — диаметр проводников; l — расстояние между ними; $c=3 \cdot 10^8$ м/с — скорость света.

Для расчета реальных конструкций двухпроводных линий (рис. 67,б) в формуле (7.6) значение ϵ заменяют эффективным значением, лежащим в пределах $1 \leq \epsilon_{\text{эфф}} \leq \epsilon$. Это значение обычно оценивают эмпирически, что приводит к значительным погрешностям. С учетом $\mu=1$, $d/l < 1$ формулу (7.6) упрощают, заменяя ее расчетным соотношением

$$Z_0 \approx 120 \ln(2l/d) / \sqrt{\epsilon_{\text{эфф}}}. \quad (7.7)$$

При инженерной оценке погонного сопротивления двухпроводной линии, работающей в диапазоне частот, на которых не выполняется условие $\sigma \leq d$, используют асимптотически верное приближение

$$R' \approx 2 \sqrt{\mu\rho f / 4\pi^2 d^2 + 4\rho^2 / \pi^2 d^4},$$

где ρ — удельное сопротивление материала проводников. В случае медных проводников

$$R' \approx (4d^2 f + 1)^{1/2} / (24d^2). \quad (7.8)$$

Зависимость волнового сопротивления от потерь возрастает с уменьшением частоты, и на относительно низких частотах возникает необходимость учитывать комплексный характер волнового сопротивления. В этом случае при пренебрежении потерями в диэлектрике

$$Z = Z_0 \sqrt{1 - j48R'/Z_0 f \sqrt{\epsilon}}; \quad \alpha = -j\beta = \pi f \sqrt{\epsilon} \sqrt{-1 + j48R'/Z_0 f \sqrt{\epsilon}} / 150,$$

где Z_0 вычислено по формуле (7.7), а R' — по формуле (7.8). Расчет по этим формулам включает извлечение корня из комплексного числа.

Программа 299. Расчет параметров двухпроводной линии на низких частотах

P6	ИП7	x^2	/	P4	4	\times	1	+	ИП8
ИП7	\div	2	\times	1n	3	0	\times	П5	ИП4
\times	x^2	\div	4	-	+	2	\vdash	П3	4
—	П2	γ	ИП5	2	\times	ИП9	γ	\div	П5
\times	\uparrow	$/-$	ИП5	ИП3	γ	\times	C/П	ИП3	γ
ИП6	ИП9	γ	\times	л	\times	3	0	0	\div
\times	Bx	ИП2	γ	\vdash	C/П				

Инструкция. ($d=P7$, $l=P8$, $\epsilon=P9$) $f=PX$ В/О С/П $RX=\text{Re}Z(f)$, $RY=\text{Im}Z(f)$ С/П $RX=a$, $RY=\beta$.

Пример. Для $d=2$ мм, $l=8$ мм, $\epsilon=4$; $f=0,001$ МГц получим $Z=159,13754-j98,782988$ Ом, $a=3,3164 \cdot 10^{-5}$ Нп/м, $\beta=5,3427304 \cdot 10^{-5}$ рад/м.

Для передачи электромагнитной энергии на небольшие расстояния обычно используют полосковые линии и при решении большинства практических задач

достаточно оценить их волновое сопротивление. Наиболее распространены симметрическая (рис. 67, а) и несимметричная (рис. 67, г) полосковые линии. Для симметричной линии с бесконечно тонким центральным проводником ($h=0$) известна точная формула [1]

$$Z_0 = 29,976\pi K(x)/\sqrt{\epsilon} K(x') \approx 94,17 K(x)/\sqrt{\epsilon} K(x'), \quad (7.9)$$

где K — полный эллиптический интеграл первого рода аргумента $x=\operatorname{sech}(\pi H/2d)$ или $x'=\sqrt{1-x^2}$. Отношение $K(x)/K(x')$ можно вычислить с погрешностью менее $8 \cdot 10^{-6}$ по формуле

$$\frac{K(x)}{K(x')} = \begin{cases} \ln(2(1+\sqrt{x})/(1-\sqrt{x}))/\pi & \text{при } 1/\sqrt{2} \leq x \leq 1, \\ \pi/\ln(2(1+\sqrt{x})/(1-\sqrt{x})) & \text{при } 0 \leq x \leq 1/\sqrt{2}. \end{cases}$$

Программа 300. Вычисление волнового сопротивления симметричной полосковой линии с бесконечно тонким центральным проводником

```

П7 → ÷ π × εx П8 2 1
+ x2 — П9 x<0 33 1 ИП8 1 +
ИП8 γ ÷ 2 ÷ γ + Bx 1 -
÷ БП 40 ИП8 ↑ x2 1 + γ +
2 × ln π ÷ П6 ИП9 x≥0 52 ИП6
1/x П6 ИП6 ИП7 γ ÷ 9 4 , 1
7 × С/П

```

Инструкция. $H=PZ$, $d=PY$, $\epsilon=PX$ В/О С/П РХ= Z_0 ($t \approx 25$ с).

Пример. Для $H=5$ мм, $d=0,5$ мм, $\epsilon=2,5$ получим $Z_0=5,70412$ Ом, для $H=1$ мм, $d=5$ мм, $\epsilon=2,5$ — $Z_0=96,7713$ Ом.

Во избежание чрезмерной операционной погрешности (или даже переполнения), возникающей при $H/d \gg 1$ в связи с вычитанием близких чисел, в программе 300 сначала вычисляется значение $a=\exp(\pi H/2d)$, которое сравнивается с числом $1+\sqrt{2}$. Если $a < 1+\sqrt{2}$, то

$$Z_0 = 94,17 \ln 2 ((\sqrt{(a^2+1)/2a+1})/(\sqrt{(a^2+1)/2}-1))/\pi \sqrt{\epsilon}, \text{ иначе } Z_0 = 94,17 \pi \times (\sqrt{\epsilon} \ln(2(a^2+\sqrt{a^4-1}))).$$

Погрешность Z_0 при вычислениях по приведенным формулам возрастает при увеличении толщины центрального проводника и уменьшении отношения H/d . Так, при $H/d=10$ и $h/d=0,01$ погрешность составляет около 1,2 %, а при $h/d=0,1$ возрастает до 13 %; при $H/d=0,2$ и $h/d=0,1$ превышает 100 %. Поэтому при $h/d>0,001$ лучшее приближение дает формула

$$Z_0 = 94,17 / (\sqrt{\epsilon} (H/d) + \ln F(x) / \pi).$$

где $F(x)=(x+1)^{x+1}/(x-1)^{x-1}$, а $x=1/(1-h/d)$. Погрешность расчета по этой формуле при $H/d \geq 0,35(1-h/d)$ и $h/d \leq 0,25$ не превышает 1 %.

Вычисления по этой формуле реализованы следующей программой, в которую включен блок проверки выполнения неравенств, при соблюдении которых погрешность не превышает 1 %. Если хотя бы одно из этих неравенств нарушается, то на индикаторе высвечивается 0. При необходимости вычисления можно

продолжить, нажав клавишу С/П, но в этом случае погрешность результата может оказаться значительной.

Программа 301. Вычисление волнового сопротивления симметричной полосковой линии

```

П7 Сx + П8 → — ÷ П5 ИП8 Вx
÷ П6 Вx 0 , 3 5 × ИП8 —
x<0 29 ИП5 3 × 4 -- x≥0 31 Сx
С/П ИП5 1 + ↑ ln × ИП5 1 —
↑ ln × — π ÷ ИП6 + ИП7 √
× 9 4 , 1 7 2 ↔ ÷ С/П

```

Инструкция. $d=PT$, $h=PZ$, $H=PY$, $\epsilon=PX$ В/О С/П ($t \approx 20$ с) $PX = Z_0 \pm 1\%$ или $PX=0$ С/П $PX \approx Z_0$.

Для оценки точности результатов вычислений по этой программе сравним их с приведенными в [1] точными значениями Z_0 при $d=1$, $\epsilon=1$ в случаях:

- 1) $H=8,86585$, $h=0,01$ получим $Z_0=10,00031$ с погрешностью $0,0032\%$;
- 2) $H=5,56278$, $h=0,35$ — высвечивается 0, при дополнительном пуске получим $Z_0=10,00027$ с погрешностью $0,003\%$;
- 3) $H=0,18936$, $h=0,01$ — при дополнительном пуске программы после высвечивания нуля получим $Z_0=144,265$ с погрешностью $3,8\%$;
- 4) $H=0,06705$, $h=0,35$ — при дополнительном пуске программы после высвечивания нуля получим $Z_0=97,895$ с погрешностью $2,1\%$.

В симметричной полосковой линии при $l > 2d$ волны высших порядков практически отсутствуют. В этом случае фазовая постоянная

$$\beta \approx \pi f \sqrt{\epsilon} / 150. \quad (7.10)$$

Для оценки затухания в симметричной полосковой линии с медным проводником

$$\alpha \approx k \sqrt{f} / H Z_0 + \beta \operatorname{tg} \delta / 2, \quad (7.11)$$

где k зависит от геометрических размеров линии и для грубых оценок можно принять $k=0,2$. Вычисления по этим формулам при необходимости несложно включить в программу 301.

Волновое сопротивление несимметричной полосковой линии (рис. 67, г) описывается формулой [1]

$$Z_0 = \begin{cases} \left(376,687 / (\pi \sqrt{2} \sqrt{\epsilon+1})\right) (\ln(8d/H_c) + (H_c/d)^2/32 - \\ - (\epsilon-1)/(2(\epsilon+1)) (\ln(\pi/2) + (\ln(4/\pi) + 1/\epsilon))) \text{ при } H < d, \\ \left(376,687/2 \sqrt{\epsilon}\right) ((H_c/2d) + 0,441 + (0,082(\epsilon-1)/\epsilon^2) + \\ + ((\epsilon+1)/2\pi\epsilon) (1,451 + \ln(H_c/2d + 0,94)))^{-1} \text{ при } H > d. \end{cases} \quad (7.12)$$

Для вычислений на микрокалькуляторе эти формулы целесообразно представить в преобразованном виде

$$Z_0 = \begin{cases} \left(A/\sqrt{1+\epsilon}\right) (4(H_c/8d)^2 - \ln(H_c/8d)^2 - ((\epsilon-1)/(\epsilon+1)) \ln(2(\pi/4)^{(1-1/\epsilon)})) \text{ при } H < d, \\ \left(B/\sqrt{\epsilon}\right) ((H_c/d) + C + D(\epsilon-1)/\epsilon^2) + \\ + ((\epsilon+1)/\pi\epsilon) \ln(KH_c/d + 4))^{-1} \text{ при } H > d, \end{cases}$$

где $H_c = H + h(1 + \ln(2x/h))/\pi$; $B = 376,687$; $A = B/(2\sqrt{2\pi})$; $C = 0,882$; $D = 0,164$; $x = d$ при $H > d/(2\pi) > 2h$ или $x = 2\pi H$ при $d/2\pi > H > 2h$ ($K = \exp(1,451/2)$).

Формулы (7.12) обеспечивают хорошее совпадение с экспериментальными данными [1] при $2 < \epsilon < 10$ и $0,1d < H < 5d$.

Программа 302. Вычисление волнового сопротивления несимметричной полосковой линии

$$\begin{aligned}
 & \text{ИП0 } \pi \times 2 \times \text{П4} \quad \text{ИП1} - \quad x \geq 0 \ 12 \\
 & \text{ИП1 } \text{П4} \quad \text{ИП4} \ 2 \times \text{ИП2} \div \ln 1 + \\
 & \text{ИП2} \times \pi \div \text{ИП0} + \text{ИП1} \div \text{П5} 1 \\
 & - x \geq 0 \ 62 \quad \text{ИП9} \ \text{ИП5} \ \text{ИПА} \times 4 + \ln \\
 & \pi \div \uparrow \quad \text{ИП3} \ \text{П8} \times + \quad \text{ИПС} + \quad \text{ИПС} \\
 & \text{ИП3} \div - \quad \text{ИП3} \div \text{ИПВ} + \quad \text{ИП5} + \div \\
 & \text{БП} \ 94 \ 4 \quad \text{ИП5} \ 8 \div x^2 \times \text{Вх} \ln \\
 & - \pi 4 \div \ln \uparrow \quad \text{ИП3} \div - 2 \\
 & \ln + \text{ИП3} 1 + \text{П8} 2 \div \text{ИП8} \div \\
 & \times - \text{ИПД} \times \text{ИП8} \nu \div \text{С/П}
 \end{aligned}$$

Инструкция. ($H = \text{Р0}$, $d = \text{Р1}$, $h = \text{Р2}$, $\epsilon = \text{Р3}$, $376,687 = \text{Р9}$, $2,134 = \text{РA}$, $0,882 = \text{РB}$, $0,164 = \text{РC}$, $42,4 = \text{РD}$) В/О С/П РХ = Z_0 .

Пример. Для $H = 1$, $d = 2$, $h = 0,1$, $\epsilon = 2,4$ (так как $H > d/2$, то $x = d = 2$) получим $Z_0 = 116,3575$ Ом ($t \approx 30$ с); для $H = 10$, $d = 0,5$, $h = 0,1$, $\epsilon = 2,4$ ($x = d = 0,5$) получим $Z_0 = 10,63207$ ($t \approx 30$ с).

Составляющие постоянной распространения α и β для несимметричной полосковой линии вычисляют по формулам (7.10) и (7.11).

7.3. Расчет режима работы линии передачи

Типовыми вычислительными задачами, связанными с расчетом режима работы линий передачи, являются: расчет распределения токов и напряжений вдоль линии передачи с заданной нагрузкой, модуля и фазового угла коэффициента отражения от заданной нагрузки, сопротивления нагрузки по заданным коэффициенту стоячей волны (КСВ) и положению минимума напряжения или тока в линии, входного сопротивления отрезка линии с известной нагрузкой.

Распределение $u(x)$ напряжения вдоль линии, нагруженной на сопротивление $Z_n = R_n + jX_n$, описывается выражением

$$u(x)/|u_n| = ((R_n \operatorname{ch}(\alpha x) + Z_0 \operatorname{sh}(\alpha x)) - X_n \operatorname{sh}(\alpha x) \sin(\beta x) + j(R_n \operatorname{sh}(\alpha x) + Z_0 \operatorname{ch}(\alpha x) + X_n \operatorname{ch}(\alpha x) \cos(\beta x))) / (R_n + jX_n).$$

Подобной формулой описывается и отношение токов $i(x)/|i_n|$ при замене комплексных и волнового сопротивлений проводимостями.

Программа 303. Расчет распределения амплитуды и фазы напряжения вдоль нагруженной линии передачи

П9 ИП3 × e^x ПА ↑ 1/x + П6 ИП1
 × ИПА ↑ 1/x — П7 ИП0 × + ИП9
 ИП4 × П9 cos × ИП2 ИП7 × ИП9 sin
 × — ПВ ИП1 × ИП1 ИП7 × ИП0 ИП6
 × + ИП9 sin × ИП2 ИП6 × ИП9 cos
 × + ПС ИП2 × + ПА ИПС ИП1 ×
 ИПВ ИП2 × — ПВ x^2 ↔ x^2 + √
 ПД ÷ \cos^{-1} П9 ИПС $x < 0$ 80 ИП9 /—/ П9
 ИП9 ИПД ИП1 x^2 ИП2 x^2 + ÷ 2 ÷
 ИП5 × ПД С/П

Инструкция. Установить переключатель Р—ГРД—Г в положение Р; ($Z_0 = P0$, $R_h = P1$, $X_h = P2$, $\alpha = P3$, $\beta = P4$, $|u_h| = P5$) $x = RX$ В/О С/П ($t \approx 35$ с) $PX = |u(x)/u_h|$, $PY = \varphi = \arg(u(x)/|u_h|)$.

Пример. Для $Z_0 = 150$ Ом, $R_h = 75$ Ом, $X_h = -750$ Ом, $\alpha = 0,01$ Нп/м, $\beta = -15$ рад/м, $|u_h| = 10$, $l = 2$ м получим $|u(x)/u_h| = 3,5216786$, $\varphi = -0,11016998$ рад.

Коэффициент отражения по напряжению

$$\Gamma = p = \frac{Z_h - Z_0}{Z_h + Z_0} = \frac{R_h^2 + X_h^2 - Z_0^2 + j2X_h Z_0}{(R_h + Z_0)^2 + X_h^2} \quad (7.13)$$

выражают через вещественную и мнимую составляющие или модуль и аргумент, определенный в интервале $[-180^\circ, 180^\circ]$ или $[-\pi, \pi]$.

Программа 304. Вычисление коэффициента отражения по напряжению

П9 x^2 П6 ↔ П8 x^2 + ↔ П7 x^2
 — ИП8 ИП7 + x^2 ИП6 + П4 ÷ ПА
 ↑ x^2 ИП9 ИП7 × 2 × ИП4 — ПВ
 x^2 + √ ПС ÷ \cos^{-1} ПД ИПВ $x < 0$ 43
 ИПД /—/ ПД ИПД ИПС С/П БП 00

Инструкция. $Z_0 = PZ$, $R_h = PY$, $X_h = RX$ (В/О) С/П ($t \approx 15$ с) $PX = |\Gamma|$, $PY = \varphi_\Gamma$ (в радианах или градусах в зависимости от положения переключателя Р—ГРД—Г), $PA = Re\Gamma$, $PB = Im\Gamma$.

Пример. Для $Z_0 = 150$ Ом, $Z_h = 100 - j200$ Ом получим $|\Gamma| = 0,64392091$, $\varphi_\Gamma = -65,376434^\circ$ или $\varphi_\Gamma = -1,141034$ рад, $Re\Gamma = 0,26829268$, $Im\Gamma = -0,58536585$.

При экспериментальных исследованиях часто необходимо определять сопротивление нагрузки $z_h = R_h + jX_h$ по известным значениям КСВ $K_{ст\,u}$ и расстояния l_0 первого минимума распределения напряжения в линии от нагрузки. Обычно для этого по диаграмме Вольперта — Смита графически (следовательно, со значительными погрешностями) находят искомые значения, связанные с исходными данными соотношениями

$$R_h = (1 - |\Gamma|^2) Z_0 / (1 + 2|\Gamma| \cos \psi + |\Gamma|^2); \\ X_h = -2|\Gamma| Z_0 \sin \psi / (1 + 2|\Gamma| \cos \psi + |\Gamma|^2), \quad (7.14)$$

где $\psi = 2\beta l_0$; $|\Gamma| = (K_{ст\,u} - 1) / (K_{ст\,u} + 1)$.

Программа 305. Вычисление сопротивления нагрузки Z_h линии

ПС → ПВ → ПА ↔ П0 Сх ИПВ ИПС
 × 2 × П7 sin — ИПА 1 — ИПА
 1 + ÷ x² П8 √ 2 × × Вх
 ИП7 cos × 1 + ИП8 + ИП0 ÷ П9
 ÷ 1 ИП8 — ИП9 ÷ С/П БП 00

Инструкция. Установить переключатель Р—ГРД—Г в положение Р; $Z_0 = PT$, $K_{ct} u = PZ$, $\beta = PY$, $l_0 = RX$ (В/О) С/П ($t \approx 15$ с) $PX = R_h$, $PY = X_h$.

Пример. Для $Z_0 = 75$ Ом, $K_{ct} u = 2$, $\beta = 0,6283185$ ($\lambda_\pi = 10$ м), $l_0 = 0,4$ м получим $Z_h = 39,324045 - j14,208377$ Ом.

Программа 305 полностью заменяет диаграмму Вольперта — Смита, обеспечивая высокую точность вычислений.

Входное сопротивление Z_{bx} линии без потерь с комплексной нагрузкой $Z_h = R_h + jX_h$ и волновым сопротивлением Z_0 вычисляют по формуле

$$Z_{bx} = \frac{R_h + (X_h \cos 2\beta l + Z_0 (1 - (X_h^2 + R_h^2)/Z_0^2)) \sin^2 \beta l / 2}{1 - X_h \sin 2\beta l / Z_0 - (1 - (R_h^2 + X_h^2)/Z_0^2) \sin^2 \beta l}, \quad (7.15)$$

реализуемой следующей программой.

Программа 306. Вычисление входного сопротивления линии без потерь

↑ ИП6 × П4 sin x² ИП8 x² ИП9 x²
 + ИП7 x² ÷ 1 — П5 × ИП4 2
 × П4 sin ИП9 × ИП7 ÷ — 1 +
 П3 ИП9 ИП4 cos × ИП7 ИП5 × ИП4 sin
 × 2 ÷ — ИП3 ÷ П2 x² ИП8 ИП3
 ÷ П1 x² + √ ПА ИП2 ↑ ИП1 ÷
 tg⁻¹ ПВ → ИП1 С/П

Инструкция. Установить переключатель Р—ГРД—Г в нужное положение ($Z_0 = P7$, $R_h = P8$, $X_h = P9$, $\beta = P6$) $l = RX$ В/О С/П ($t \approx 25$ с) $PX = P1 = R_h$, $PY = X_{bx}$, $PA = |Z_{bx}|$, $PB = \varphi_{bx}$.

Пример. Для $Z_0 = 75$ Ом, $R_h = 100$ Ом, $X_h = -50$ Ом, $\beta = 3$, $l = 0,5$ м получим $R_{bx} = 43,286544$ Ом, $X_{bx} = 18,626904$ Ом, $|Z_{bx}| = 47,12416$ Ом, $\varphi_{bx} = 0,40636494$ рад.

Входное сопротивление линии с потерями ($\alpha \neq 0$) вычисляют по формуле

$$Z_{bx} = \frac{((1 - |\Gamma|^2 e^{-4\alpha l}) - 2j|\Gamma|e^{-2\alpha l} \sin(2\beta l - \varphi_\Gamma)) Z_0}{(1 + |\Gamma|^2 e^{-4\alpha l}) - 2|\Gamma|e^{-2\alpha l} \cos(2\beta l - \varphi_\Gamma)}, \quad (7.16)$$

где $|\Gamma|$ и φ_Γ — модуль и аргумент коэффициента отражения. Часто удобно совместить в одной программе вычисление входного сопротивления и коэффициента отражения.

Программа 307. Вычисление входного сопротивления Z_{bx} и коэффициента отражения Γ

П6 ИП1 x^2 ИП10 x^2 — ИП2 x^2 + Вх
 ИП1 ИП0 + x^2 + ПА ÷ ИП0 ИП2 2
 \times \times ИПА \div ПВ $x^2 \leftrightarrow x^2 + \nu$
 П7 \div \cos^{-1} П8 ИПВ $x < 0$ 40 ИП8 /—/ П8
 ИП7 ИП3 ИП6 2 \times ПА \times $e^x -$ ПВ
 x^2 1 + ИП8 ИПА ИП4 \times — ПД cos
 ИПВ \times 2 \times — ИП0 \div П9 1 ИПВ \times
 x^2 — ИП9 \div ПС x^2 ИПД sin ИПВ \times
 2 \times ИП9 \div ПД $x^2 + \nu$ С'П

Инструкция. Установить переключатель Р—ГРД—Г в положение Р; ($Z_0 = P0$, $R_h = P1$, $X_h = P2$, $a = P3$, $\beta = P4$) $l = RX$ В/О С/П ($t \approx 35$ с) $RX = |Z_{bx}|$, $PC = R_{bx}$, $PD = X_{bx}$, $P7 = |\Gamma|$, $P8 = \varphi_g$ рад.

Пример. Для $Z_0 = 75$ Ом, $Z_h = 100 - j50$, $a = 0,02$, $\beta = 3$, $l = 0,5$ получим $|Z_{bx}| = 47,530467$, $Z_{bx} = 43,829294 + j18,41179$, $|\Gamma| = 0,30714754$, $\varphi_g = -0,8288489$ рад.

При замене в исходных данных к приведенным программам сопротивлений проводимостями будет получена входная проводимость и коэффициент отражения по току, отличающиеся сдвигом аргумента на 180° .

7.4. Расчет элементов устройств с распределенными параметрами

Проектирование устройств с распределенными параметрами часто связано с расчетом согласующих элементов: реактивностей, реализуемых отрезками линий (шлейфами), четвертьволновых трансформаторов и т. п. При согласовании заданной нагрузки с проводимостью $Y_h = C_h + jB_h = (R_h - jX_h)/(R_h^2 + X_h^2)$ и линии передачи с волновым сопротивлением Z_0 с помощью реактивного согласующего элемента прежде всего находят расстояние l_0 от нагрузки до точки включения согласующего элемента из условия $\operatorname{Re} Y_{bx}(l_0) = 1/Z_0 = G_0$, откуда следует

$$\operatorname{tg} \beta l_0 = \frac{B_h G_0 \pm (G_h G_0 ((G_h - G_0)^2 + B_h^2))^{1/2}}{G_h^2 + B_h^2 - G_h G_0}.$$

После этого определяют требуемую проводимость $B_x = \operatorname{Im} Y_{bx}(l_0)$ реактивного согласующего элемента, реализуемого с помощью шлейфа,

$$B_{\text{шл1,2}} = \frac{B_h G_0 (1 - \operatorname{tg}^2 \beta l_0) + \operatorname{tg} \beta l_0 (G_h^2 - G_h^2 - B_h^2)}{G_h (1 + \operatorname{tg}^2 \beta l_0)},$$

соответствующую двум значениям $\operatorname{tg} \beta l_0$ и расстояниям до точки включения

$$l_{0i} = \begin{cases} \operatorname{arctg} (\operatorname{tg} \beta l_{0i})/\beta & \text{при } \operatorname{tg} \beta l_{0i} > 0, \\ \operatorname{arctg} (\operatorname{tg} \beta l_{0i} + \pi)/\beta & \text{при } \operatorname{tg} \beta l_{0i} < 0. \end{cases}$$

Из двух значений l_{0i} выбирают меньшее и соответствующее значение входной проводимости шлейфа $B_{\text{шл}}$.

Программа 308. Расчет параметров согласующего шлейфа

П3 → П7 → П9 x^2 ↔ П8 x^2 +
 П4 ИП7 ИП8 × — П5 Вх ПД — ИП7
 x^2 + ИПД × √ П6 ИП9 ИП7 × +
 ИП5 ÷ П2 tg^{-1} $x < 0$ 38 π + ИП3 ÷
 . ПА ИП4 ИП7 x^2 — ИП2 × ИП7 ИП9 ×
 ИП2 x^2 1 — × + ИП2 x^2 1 +
 ÷ ИП8 ÷ ИПА С/П ИП6 /—/ БП 25

Инструкция. Установить переключатель Р—ГРД—Г в положение Р;
 $G_n = P_T$, $B_n = P_Z$, $G_0 = P_Y$, $\beta = P_X$ В/О С/П ($t \approx 20$ с) $P_X = l_{01}$, $P_Y = B_{шл1}$ С/П
 $(t \approx 18$ с) $P_X = l_{02}$, $P_Y = B_{шл2}$.

Пример. Для $G_n = 10$, $B_n = -80$, $G_0 = 100$, $\beta = 10$ получим $l_{01} = 0,24903276$,
 $B_{шл1} = 380,7886$, $l_{02} = 0,20067036$, $B_{шл2} = -380,7886$.

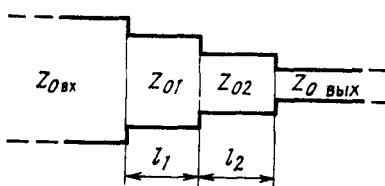


Рис. 68

Параметры согласующего шлейфа можно определить с помощью ранее приведенных программ в зависимости от конструкции и материалов шлейфа. Эти же программы можно с успехом использовать и при анализе частотных характеристик, например, ступенчатых переходов (трансформаторов).

Пусть необходимо найти входное сопротивление двуступенчатого перехода

(рис. 68), согласующего линии с волновыми сопротивлениями $Z_{0вх} = 75$ Ом и $Z_{0вых} = 50$ Ом и образованного двумя отрезками линий равной длины с волновыми сопротивлениями $Z_{01} = 67,36096$ Ом и $Z_{02} = 55$ Ом на частоте, для которой электрические длины отрезков $\beta l_1 = \beta l_2 = 1,5$. Полагая, что выходная линия идеально согласована с переходом, определим с помощью программы 306 при $Z_0 = 55$ Ом, $R_n = 75$ Ом, $X_n = 0$ входное сопротивление второго отрезка $Z_{вх2} = -60,4365 + j 0,8141124$. Принимая вычисленные значения в качестве составляющих сопротивления нагрузки первого отрезка перехода, получаем $R_{вх1} = 75,13333$ и $X_{вх1} = 0,1495476$, что свидетельствует о достаточно хорошем согласовании. При необходимости по этим данным несложно определить коэффициент отражения.

Для расчета переходов с большим числом ступеней, согласующих сосредоточенную нагрузку с сопротивлением $Z_n = R_n + jX_n$ или выходную линию с волновым сопротивлением $Z_{0вых}$ и входную (питающую) линию с волновым сопротивлением $Z_{0вх}$, целесообразно модифицировать программу 306, обеспечивая засыпку вычисляемых значений $R_{вх}$ и $X_{вх}$ очередного отрезка перехода на место составляющих R_n и X_n его нагрузки.

Программа 309. Расчет каскадных переходов

И7 ↔ П4 $\sin x^2$ ИП8 x^2 ИП9 x^2 +
 ИП7 x^2 ÷ 1 — П5 > ИП4 2 ×
 П4 \sin ИП9 × ИП7 ÷ — 1 + П3
 ИП9 ИП4 \cos × ИП7 ИП5 × ИП4 \sin ×
 2 ÷ — ИП3 ÷ П9 ИП8 ИП3 ÷ П8
 С/П БП 00

Инструкция. Установить переключатель Р—ГРД—Г в положение Р;
 $R_n = P_8$, $X_n = P_9$, $\beta l_n = P_Y$, $Z_{0n} = P_X$ В/О С/П ($t \approx 20$ с) $P_X = P_8 = R_{вхn}$, $P_Y =$

$$= P9 = X_{bxn}, \beta l_{n-1} = PY, Z_{0n-1} = PX \quad C/P \dots C/P \quad RX = P8 = R_{bx1}, PY = P9 = X_{bx1}.$$

В качестве примера рассмотрим расчет четырехступенчатого перехода с одинаковыми электрическими длинами βl отрезков при изменении их волновых сопротивлений по показательному закону: $Z_{0n} = R_h \sqrt{K}$, $Z_{0n-1} = Z_{0n} K$, ..., $Z_{0i} = Z_{0i+1} K$, где n — число ступеней; $K = (Z_{0bx}/R_h)^{1/n}$, Z_{0bx} — волновое сопротивление входной (питающей) линии.

Пусть $Z_{0bx} = 150$ Ом, $Z_{0bx} = 75$ Ом при электрической длине отрезков для выбранной частоты $\beta l = 0,45 \pi$. Для решения задачи с помощью программы 309 следует выполнить:

$$K = (150/75)^{1/4} = 1,1809207 = РД;$$

$$0,45\pi = РС; \quad 75 = Р8; \quad 0 = Р9 \quad ИПС$$

$$\text{ИПД } \gamma 7 5 \times \text{В/О С/П } (Z_{bx4} = -88,779449 + j2,3799775) \quad \text{ИПС ИПД ИП7} \times \text{С/П } (Z_{bx3} = 106,9286 + j0,28270902) \quad \text{ИПС ИПД ИП7} \times \text{С/П } (Z_{bx2} = 124,70713 + j2,7162122) \quad \text{ИПС ИПД ИП7} \times \text{С/П } (Z_{bx1} = 151,96909 + j1,4525635).$$

Отрезки линий передачи часто используют в качестве резонаторов, обычно перестраиваемых изменением реактивного параметра, чаще всего емкости, присоединенной к разомкнутому концу отрезка (рис. 69, а). Так как β зависит от частоты, то для вычисления резонансных частот подобного устройства придется решать трансцендентное уравнение вида $Ax \operatorname{tg} x + 1 = 0$, которое в рассматриваемом случае записывается как

$$-\omega C Z_0 \operatorname{tg} \beta l + 1 = 0, \quad (7.17)$$

где C — емкость, обеспечивающая настройку резонатора.

Программа 310. Вычисление резонансных частот отрезка линии, нагруженного емкостью C

ИП0	ИП1	×	3	ВП	4	/—/	×	ИП2	ИП3
✓	×	÷	П5	Bx	π	×	1	5	0
↔	÷	П6	Cx	П7	П8	π	2	÷	/—/
ПА	/—/	П9	ИП9	2	÷	П9	ИП8	+	П8
Bx	—	x=0	53	ИП8	ИП6	×	C/P	ИП7	π
+	БП	24	ИП8	↑	tg	×	ИП5	×	1
—	ИПА	↔	ПА	×	x<0	33	ИП9	БП	31

Инструкция. Установить переключатель Р—ГРД—Г в положение Р; (Z_0 , $\Omega_m = P0$, $C = P1$, $l = P2$; $\epsilon = P3$) В/О С/П $RX = f_{p1}$, МГц, С/П $RX = f_{p2}$, МГц С/П ... Время счета зависит от параметров резонатора.

Пример. Для $Z_0 = 75$ Ом, $C = 10$ пФ, $l = 1$ м, $\epsilon = 2,5$ получим $f_{p1} = 41,589898$ ($t \approx 4$ мин), $f_{p2} = 126,11046$ ($t \approx 4$ мин), $f_{p3} = 213,37112$ МГц.

Остальные основные характеристики резонатора можно найти, определив $\beta_i(f) = 2\pi f_{pi} \sqrt{\epsilon}/150$, $a_i(f) = a_1 \sqrt{f_{pi}} + a_2 f_{pi}$, где коэффициенты a_1 и a_2 зависят от материала и конструкции резонатора. Для отрезка коаксиальной линии с медными проводниками $a_1 = (1+d/D)(24dZ_0)$ и $a_2 = \pi \sqrt{\epsilon} \operatorname{tg} \delta / 300$, и добротность резонатора

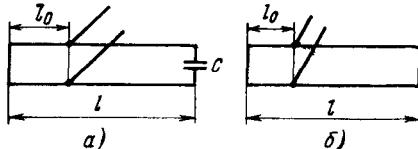


Рис. 69

$Q_i = \beta_i/2((1+\sin 2\beta_i l/\beta_i l) a_1 \sqrt{f_{pi}} + (1-\sin 2\beta_i l/\beta_i l) a_2 f_{pi})$, ширина полосы пропускания на уровне 3 дБ определяется выражением $\Delta f_i = f_{pi}/Q_i$, а входное сопротивление резонатора при выборе расстояния l_0 (рис. 69, а)

$$R_{bx} = Z_0 \sin^2 \beta_i l_0 / ((1+\sin 2\beta_i l/\beta_i l) a_1 \sqrt{f_{pi}} + (1-\sin 2\beta_i l/\beta_i l) a_2 f_{pi}).$$

Программа 311. Вычисление Q_i , Δf_i и $R_{bx i}$ резонатора

$$\begin{array}{ccccccccc} \text{П6} & \pi & \times & \text{ИП4} & \nu & \times & 7 & 5 & \div \quad \text{П7} \\ \text{ИП3} & \times & \uparrow & \sin & \leftrightarrow & \div & 1 & + & \text{П8} \quad 2 \\ - & \text{ИП2} & \times & \text{ИП6} & \times & \text{ИП8} & \text{ИП1} & \times & \text{ИП6} \quad \nu \\ \times & \leftrightarrow & - & \text{П9} & \text{ИП7} & \leftrightarrow & \div & 4 & \div \quad \text{П8} \\ \text{С/П} & \text{ИП6} & \text{ИП8} & \div & \text{С/П} & \text{ИП7} & \text{ИП0} & \times & 2 \quad \div \\ \sin & \text{x}^2 & \text{ИП5} & \times & \text{ИП9} & - & \text{С/П} & & \end{array}$$

Инструкция. Установить переключатель Р—ГРД—Г в положение Р; ($l_0 = P_0$, $a_1 = P_1$, $a_2 = P_2$, $l = P_3$, $\varepsilon = P_4$, $Z_0 = P_5$) $f_{pi} = RX$ В/О С/П ($t \approx 13$ с) $PX = Q_i$ С/П ($t \approx 3$ с) $PX = \Delta f_i$ С/П ($t \approx 5$ с) $PX = R_{bx i}$.

Пример. Для $l_0 = 0,2$ м, $a_1 = 0,0005$, $a_2 = 1,6 \cdot 10^{-6}$, $\varepsilon = 2,5$, $l = 1$ м, $Z_0 = 75$ Ом при $f_{pi} = 41,589898$ МГц получим $Q_i = 184,92595$, $\Delta f_i = 0,22490028$ МГц, $R_{bx i} = 1489,8884$ Ом; при $f_{pi} = 126,11046$ МГц $Q_2 = 326,98042$, $\Delta f_2 = 0,38568187$ МГц, $R_{bx 2} = 6456,5975$ Ом.

Если оба конца отрезка линии короткозамкнуты (рис. 69, б), то для такого резонатора $f_{pi} = 150i/(l\sqrt{\varepsilon})$, $Q_i = i\pi/((a_1\sqrt{f_{pi}} + a_2 f_{pi})2!)$, $\Delta f_i = f_{pi}/Q_i$, $R_{bx i} = Z_0 \sin^2 \beta_i l_0 / (a_1 l)$.

Программа 312. Вычисление параметров резонатора на короткозамкнутом отрезке коаксиальной линии

$$\begin{array}{ccccccccc} \text{Сx} & \text{П6} & 1 & 5 & 0 & \text{ИП3} & \nu & \div & \text{ПД} \quad \text{ИП5} \\ \div & \text{П7} & \text{КИП6} & \text{ИП6} & \text{ИП7} & \times & \text{ПА} & \text{ИП2} & \times \quad \text{ИПА} \\ \nu & \text{ИП1} & \times & + & \text{ПС} & 2 & \times & \text{ИП5} & \times \quad \pi \\ \text{ИП6} & \times & \leftrightarrow & \div & \text{П9} & \text{ИПА} & \text{ИП9} & \div & \text{П8} \quad \text{ИП7} \\ \text{ИПД} & \div & \text{ИП4} & \times & \pi & \times & \sin & \text{x}^2 & \text{ИП0} \times \\ \text{ИПС} & \div & \text{ИП5} & \div & \text{ИПА} & \text{С/П} & \text{БП} & 12 & \end{array}$$

Инструкция. ($Z_0 = P_0$, $a_1 = P_1$, $a_2 = P_2$, $\varepsilon = P_3$, $l_0 = P_4$, $l = P_5$) В/О С/П ($t \approx 25$ с) $PX = f_{pi}$, $PY = R_{bx 1}$, $P8 = \Delta f_1$, $P9 = Q_1$ С/П ($t \approx 18$ с) $PX = f_{pi}$, $PY = R_{bx 2}$, $P8 = \Delta f_2$, $P9 = Q_2$ С/П $PX = f_{pi}$, ...

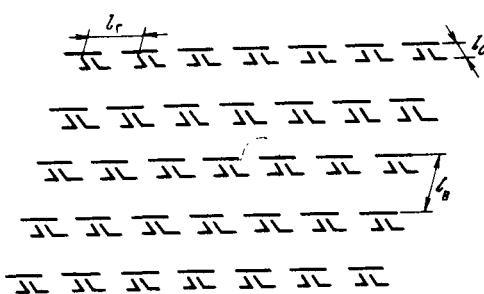


Рис. 70

Пример. Для $Z_0 = 75$ Ом, $a_1 = 0,0005$, $a_2 = 1,6 \cdot 10^{-6}$, $\varepsilon = 2,5$, $l_0 = 0,2$ м, $l = 1$ м получим $f_{pi} = 94,868331$ МГц, $R_{bx 1} = 5159,8678$ Ом, $Q_1 = 312,79497$, $\Delta f_1 = 0,30329238$ МГц, $f_{pi} = 189,73666$ МГц, $R_{bx 2} = 3603,462$ Ом, $Q_2 = 436,88903$, $\Delta f_2 = 0,43429028$ МГц.

С помощью ПМК можно успешно рассчитывать и характеристики относительно

сложных устройств, например, диаграммы направленности антенн. В качестве примера рассмотрим пятиэтажную antennную систему с равными расстояниями l_b между этажами, содержащими по семь равноотстоящих на расстояние l_r диполей с рефлекторами, отстоящими на расстояние l_0 (рис. 70).

Напряженность электрического поля в дальней зоне рассматриваемой antennной решетки (без учета влияния Земли)

$$\begin{aligned} E(r, \psi, \theta) = & \sum_{i=1}^5 \sum_{j=1}^7 (E_{dij}(r) + E_{pjj}(r) \exp(j\beta l_0 \cos \psi \cos \theta)) \times \\ & \times \cos \psi \exp(j\beta(l_{bi} \sin \psi + l_{ri} \sin \theta)), \end{aligned}$$

где E_{dij} и E_{pjj} — парциальные значения напряженности поля, создаваемые каждым диполем и рефлектором системы в точке пространства с полярными координатами r, ψ и θ .

Если принять равными амплитуды токов, питающих все элементы системы, при опережении токов, питающих рефлекторы, на 90° по отношению к токам, питающим соответствующие диполи, и учесть симметричность фазовых сдвигов относительно центрального элемента системы ($\varphi_{ij} = \varphi_{7-i, 5-j} = \varphi_{00} + \Delta\varphi_{bn} + \Delta\varphi_{rm}$, где $n=i-4$; $m=j-3$, причем $\Delta\varphi_{bn} = -\Delta\varphi_{b,-n}$, $\Delta\varphi_{rm} = -\Delta\varphi_{r,-m}$), то напряженность поля антенны

$$E(r, \psi, \theta) = E_0(r) \cos \psi \cos \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\beta l_0}{2} \cos \theta \cos \psi \right) \times \\ \times \left(1 + 2 \sum_{m=1}^2 \cos(\Delta\varphi_{bn} + n\beta l_0 \sin \theta) \right) \left(1 + 2 \sum_{n=1}^3 \cos(\Delta\varphi_{rm} + m\beta l_r \sin \psi) \right).$$

При питании антенны с фазовым сдвигом, изменяющимся по линейному закону, $\Delta\varphi_{bn} = n\Delta\varphi_b$, $\Delta\varphi_{rm} = m\Delta\varphi_r$ и при $l_0 = \pi/2\beta$ диаграмма направленности

$$\begin{aligned} R(\psi, \theta) = E(r, \psi, \theta) / E_0(r) = & \cos \psi \cos((1 - \cos \theta \cos \psi)\pi/4) (4 \cos^2(\Delta\varphi_b + \\ & + \beta l_b \sin \theta) + 2 \cos(\Delta\varphi_b + \beta l_b \sin \theta) - 1) (8 \cos^2(\Delta\varphi_r + \beta l_r \sin \psi) + \\ & + 4 \cos^2(\Delta\varphi_r + \beta l_r \sin \psi) - 4 \cos(\Delta\varphi_r + \beta l_r \sin \psi) - 1). \end{aligned}$$

Программа 313. Расчет диаграммы направленности antennной системы

$$\begin{array}{ccccccccc} \text{П2} & \cos & \leftrightarrow & \text{П1} & \cos & \times & 1 & \leftrightarrow & -\pi \\ \times & 4 & \div & \cos & \text{ИП2} & \cos & \times & \text{ИПВ} & \text{ИП1} \sin \\ \times & \text{ИПА} & + & \cos & \text{П7} & x^2 & 4 & \times & \text{ИП7} 2 \\ \times & + & 1 & - & \times & \text{ИПД} & \text{ИП2} \sin & \times & \text{ИПС} \\ + & \cos & \text{П8} & x^2 & \text{ИП8} & \times & 8 & \times & \text{ИП8} x^2 \\ \text{ИП8} & - & 4 & \times & + & 1 & - & \times & \text{С/П БП} \\ 00 & & & & & & & & \end{array}$$

Инструкция. Установить переключатель Р—ГРД—Г в положение Р; ($\Delta\varphi_b = \text{РА}$, $\beta l_b = \text{РВ}$, $\Delta\varphi_r = \text{РС}$, $\beta l_r = \text{РД}$) $\theta = \text{РY}$, $\psi = \text{РX}$ (В/О) С/П РХ = $R(\psi, \theta)$; $t \approx 20$ с.

Примеры. Для $\Delta\varphi_b = 0,2$, $\beta l_b = \pi/2$, $\Delta\varphi = 0,5$, $\beta l_r = 3\pi/2$ при $\theta = -0,12$, $\psi = -0,15$ получим $R(\psi, \theta) = 31,782216$, при $\theta = 0$, $\psi = 0,6$ получим $R(\psi, \theta) = -3,917536$ (отрицательное значение соответствует отличию на π фазы волны,

излучаемой по заданному направлению относительно фазы волны по направлению основного лепестка).

7.5. Расчет RC-цепей с распределенными параметрами

При анализе RC -цепей с распределенными параметрами в волновых уравнениях принимают $L' = G' = 0$. В этом случае постоянная распространения $\gamma = -a + j\beta = (1+j)\sqrt{\omega R'C'/2}$ и входное сопротивление однородной линии $Z_0 = \sqrt{R'/(j\omega C')} = (1-j)\sqrt{R'/2\omega C'}$ являются функциями погонных параметров R' и C' , а процесс передачи воздействия — диффузионным. Однако уравнения, описывающие распределение комплексных амплитуд тока и напряжения в LC -линиях через приведенные значения γ и Z_0 , можно использовать и при анализе режима работы рассматриваемых линий. Необходимость в таком анализе возникает прежде всего при проектировании трансверсальных фильтров на основе отрезков RC -линий.

Для расчета распределения комплексных амплитуд напряжения вдоль однородной RC -линии в стационарном режиме целесообразно использовать программы для вычислений по формуле

$$u(x)/u_n = (\cosh \alpha x + A \sinh \alpha x) \cos \alpha x + B \cosh \alpha x \sin \alpha x + j((\sinh \alpha x + A \cosh \alpha x) \times \sin \alpha x - B \sinh \alpha x \cos \alpha x).$$

В этой формуле учтено равенство фазовой постоянной и постоянной затухания, $A = (G_n + B_n)\sqrt{R'/2C'}$, $B = (G_n - B_n)\sqrt{R'/2C'}$, а координата x отсчитывается от конца линии, нагруженной на сосредоточенную проводимость $Y_n = G_n + jB_n$.

Программа 314. Расчет распределения амплитуд напряжения нагруженной линии с распределенными RC -параметрами

ПД	ИП4	ИП0	\times	ИП1	\times	π	\times	ν	П5
ИП0	ИП1	\div	2	\div	ν	\uparrow		ИП2	ИП3
\times	П6	\rightarrow	ИП2	ИП3	$-$	\times		П7	ИПД
\times	П8	e^x	\uparrow	\uparrow	$1/x$	$-$	2	\div	П9
$-$	ПД	ИП6	ИП9	\times	$+$	ИП8	\cos	\times	ИП7
ИПД	\times	ИП8	\sin	\times	$+$	ПА	ИП9	ИП6	ИПД
\times	$+$	ИП8	\sin	\times	ИП7	ИП9	\times	ИП8	\cos
\times	$-$	ПВ	\uparrow	x^2	ИПА	x^2	$+$	ν	ПД
\div	\cos^{-1}	ПС	ИПВ	$x < 0$	89	ИПС	$/-$	ПС	ИПС
ИПД	C/P	БП	29						

Инструкция. Установить переключатель Р—ГРД—Г в положение Р; ($R' = P0$, $C' = P1$, $G_n = P2$, $B_n = P3$, $f = P4$) $x = RX$ В/О С/П $RX = PД$ $|u(x)/u_n|$, $PY = PC = \varphi(x)$, $PA = \operatorname{Re}(u(x)/u_n)$, $PB = \operatorname{Im}(u(x)/u_n)$, $t \approx 35$ с.

Пример. Для $R' = 100$, $C' = 2$, $G_n = 1$, $B_n = 0$, $f = 2/\pi$ при $x = 0,005$ получим $|u(x)/u_n| = 2,0000246$, $\varphi(x) = 1,5641296$ рад, $\operatorname{Re}(u(x)/u_n) = 1,9999802$, $\operatorname{Im}(u(x)/u_n) = -0,01333331$.

Вычисление гиперболических функций произвольного комплексного аргумента [4] в приведенной программе сведено к вычислению функций

$$\operatorname{sh} \sqrt{jx} = \operatorname{sh} (1+j) \sqrt{x/2} = \operatorname{sh} z \cos z + j \operatorname{ch} z \sin z;$$

$$\operatorname{ch} \sqrt{jx} = \operatorname{ch}(1+j) \sqrt{x/2} = \operatorname{ch} z \cos z + j \operatorname{sh} z \sin z, \quad \text{где } z = \sqrt{x/2}.$$

Программа 315. Вычисление функций $\operatorname{sh}(1+j)z$ и $\operatorname{ch}(1+j)z$

$\uparrow e^x \uparrow \uparrow 1/x - 2 \div -Bx$
 $\rightarrow \leftrightarrow \sin \times \rightarrow \cos \times \leftrightarrow \rightarrow C/\Pi$

Инструкция. $z = PX$ В/О С/П ($t \approx 8$ с) $PX = \operatorname{Re}(\operatorname{sh}(1+j)z)$, $PY = -\operatorname{Im}(\operatorname{sh}(1+j)z)$; для вычисления $\operatorname{ch}(1+j)z$ поменять местами операторы \cos и \sin .

* **Пример.** $\operatorname{sh}(1+j)0,5 = 0,45730417 + j0,54061265$; $\operatorname{ch}(1+j)0,5 = 0,98958496 + j0,24982642$.

Эту программу удобно использовать в качестве фрагмента более сложных программ.

При возбуждении теоретически бесконечной RC -линии с распределенными параметрами от источника единичного напряжения переходная характеристика напряжения на расстоянии x от источника $h_U(x, t) = 1 - \Phi \sqrt{(xR'C'/2t)}$, где Φ — интеграл вероятности, а переходная характеристика тока (реакция тока на воздействие единичным скачком напряжения) $h_I(x, t) = \sqrt{C'/\pi R'} t \exp(-x^2 R' C' / 4t)$. Для численного интегрирования при вычислениях по этим формулам целесообразно использовать метод трапеций с шагом Δt интегрирования.

Программа 316. Вычисление переходных характеристик напряжения и тока в RC -линии с распределенными параметрами

$Cx \quad P4 \quad P5 \quad P6 \quad IPI0 \quad IPI1 \times \quad IPI2 \quad x^2 \quad \times$
 $IPI3 \quad IPI4 \quad + \quad P4 \quad \div \quad 2 \quad \div \quad e^x \quad 1/x \quad 2$
 $\div \quad \pi \quad \div \quad \nu \quad IPI5 \leftrightarrow \quad P5 \quad + \quad IPI3 \quad \times$
 $IPI6 \quad + \quad P6 \quad IPI1 \quad IPI0 \quad \div \quad IPI4 \quad \div \quad 2 \quad \times$
 $\nu \quad IPI5 \quad \times \quad IPI6 \quad C/\Pi \quad B\Pi \quad 04$

Инструкция. ($R' = P0$, $C' = P1$, $x = P2$, $\Delta t = P3$) В/О С/П $PX = h_U(x, \Delta t)$, $PY = h_I(x, \Delta t)$ С/П $PX = h_U(x, 2\Delta t)$, $PY = h_I(x, 2\Delta t)$ С/П ...

Пример. Для $R' = 100$ кОм/м, $C' = 2$ нФ/м, $x = 0,01$ м, $\Delta t = 0,05$ мкс получим $h_U(x, i\Delta t) = 0,018048895$, $0,055072071$ мкВ, ..., $h_I(x, i\Delta t) = 0,32286844$, $0,24000779$ мА,

Обычно распределенные RC -линии используют в гибридных устройствах, содержащих также активные и пассивные компоненты с сосредоточенными параметрами. В матрицу малосигнальных параметров системы уравнений равновесия, описывающей такие устройства, входят гиперболические функции аргумента $\sqrt{pR'C'}$, и поэтому функции гибридной цепи оказываются трансцендентными. При ее анализе следует прежде всего избавиться от иррациональности, используя замену $s = \sqrt{p}$, которая приводит к двузначности отображения плоскости переменной $p = s + j\omega$ в плоскость переменной $s = u + jv$, хотя обратное преобразование $p = s^2$ однозначно.

При синтезе гибридных устройств по координатам нулей и полюсов заданной передаточной или входной функции в одной из комплексных плоскостей приходится определять их координаты в другой плоскости, используя соотношения

$$s = u + jv = \pm (((\sqrt{\sigma^2 + \omega^2} + \sigma)/2)^{1/2} + j(\omega(\sqrt{\sigma^2 + \omega^2} - \sigma)/2)^{1/2}/|\omega|), \quad p = \sigma + j\omega = (u^2 - v^2) + j2uv.$$

Вычисления по первой формуле можно выполнить с помощью программы извлечения корня из комплексного числа, но ее целесообразно дополнить обратным преобразованием.

Программа 317. Прямое и обратное преобразование $s = \sqrt{p}$

ИП7 x^2 ИП8 x^2 + $x \neq 0$ 27 ν ИП7 +
 2 $\div \nu$ П4 Вх ИП7 $- \nu$ П5 ИП8
 $x < 0$ 39 ИП5 $/-$ П5 БП 39 ИП4 x^2 ИП5
 x^2 $- \Pi_7$ ИП4 ИП5 $\times 2 \times \Pi_8$ С/П

Инструкция. $\sigma = P7$, $\omega = P8$ или $u = P4$, $v = P5$, $0 = P7 = P8$ В/О С/П
 $PX = \sigma$, $P4 = u$, $P5 = v$ или $PX = P8 = \omega$, $P7 = \sigma$ ($t \approx 10$ с).

Пример. Для $p = -0,5 + j2$ получим $s = \pm(0,88361552 + j1,1317139)$, при обратном преобразовании $p = -0,49999999 + j1,9999999$.

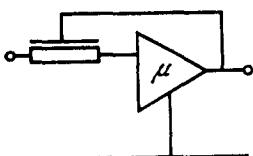


Рис. 71

В качестве примера синтеза гибридных цепей рассмотрим расчет звена активного фильтра (рис. 71), передаточная функция такого звена $K(p) = 1/(\mu + (1-\mu) \operatorname{ch} \sqrt{R'C'l})$ имеет в плоскости p дискретное множество полюсов. Первая из пар, называемая доминирующей, определяется выражением $p = (\ln(M + (M^2 - 1)^{1/2}/\tau))$, где $M = -\mu/(1-\mu)$; $\tau = R'C'l^2$.

Поскольку избирательность рассматриваемого звена в области низких частот определяется доминирующей парой полюсов, то остальные полюсы можно учитывать лишь при $\omega t \gg 1$ и при синтезе фильтра с каскадным соединением звеньев рассматривать данное звено как звено ФНЧ, реализующее заданную пару комплексно-сопряженных полюсов $p_{i,i+1}$. При расчете параметров такого звена следует с помощью программы 317 определить координаты доминирующей пары полюсов на плоскости s , после чего из уравнения для минимумы части знаменателя передаточной функции $\operatorname{sh}(u_i \sqrt{\tau}) \sin(v_i \sqrt{\tau}) = 0$ найти $\tau = (\pi/v_i)^2$, а из уравнения $\mu + (1-\mu) \operatorname{ch}(u_i \sqrt{\tau}) \cos(v_i \sqrt{\tau}) = \mu - (1-\mu) \operatorname{ch}((\pi u_i)/v_i) = 0$ определить $\mu = \operatorname{ch}((\pi u_i)/v_i)/(1 + \operatorname{ch}((\pi u_i)/v_i))$. Например, для реализации передаточной функции $K(p) = 1/(p^2 + 0,4p + 1,04)$ по значению $p_{1,2} = -0,2 + j$ следует найти $s_{1,2} = \pm(0,64023586 + j0,78096219)$, $\tau = 4,0227204^2 = 16,182279$ и $\mu = 0,868541$. АЧХ рассматриваемого звена описывается выражением $K(j\omega) = 1/(\mu + (1-\mu) \operatorname{ch}(\sqrt{\omega \tau}/2) \times \operatorname{cos}(\sqrt{\omega \tau}/2 + j(1-\mu) \operatorname{sh}(\sqrt{\omega \tau}/2) \operatorname{sin}(\sqrt{\omega \tau}/2))$, по которому определяется затухание $A(\omega)$, $\text{dB} = -20 \lg |K(\omega)|$.

Программа 318. Вычисление частотной характеристики звена ФНЧ с отрезком распределенной RC -линии

ИП1 $\times \nu$ П2 e^x \uparrow $1/x$ — 2 \div
 П3 x^2 1 + ν ИП2 \cos $\times 1$ ИП0
 $- \times$ ИП0 + П4 ИП3 ИП2 \sin $\times 1$
 ИП0 — \times П5 x^2 ИП4 x^2 + ν П6
 $\div \cos^{-1}$ П7 ИП5 $x < 0$ 49 ИП7 $/-$ П7 ИП7
 1 8 0 $\times \pi$ \div П8 ИП6 $\lg 2$
 0 \times ИП6 С/П БП 00

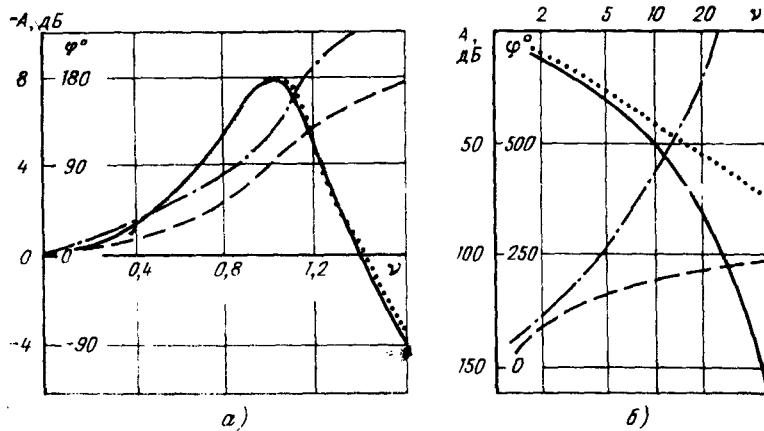


Рис. 72

Инструкция. Установить переключатель Р—ГРД—Г в положение Р; ($\mu = P_0$, $\pi\tau = P_1$) $f = PX$ (В/О) С/П $PX = P_6 = |K(f)|$, $PY = -A(f)$, дБ, $P7 = \varphi_K$, рад, $P8 = \varphi_K^0$ ($t \approx 20$ с). Для расчета АЧХ и ФЧХ звена в нормированном диапазоне частот достаточно принять $\tau/2 = P_1$ и $v = \omega t = PX$.

Примером применения этой программы может служить построение частотной характеристики рассчитанного звена и ее сравнение с характеристиками нормированного прототипа с передаточной функцией $K(p) = 1.04/(p^2 + 0.4p + 1.04)$. Прием $\tau/2 = 8.091139$, что позволяет непосредственно вычислять $K(jv)$ без дополнительного вычисления $v = \omega/\omega_d$.

Построим с помощью приведенных программ частотные характеристики анализируемого звена в полосе пропускания (рис. 72, а) и за ее пределами (рис. 72, б), обозначив характеристику затухания непрерывной и пунктириой, а ФЧХ — штриховой и штрихпунктирной линиями соответственно для рассматриваемого звена и его прототипа. В полосе пропускания АЧХ практически совпадает для обеих реализаций, а в полосе задерживания затухание звена с распределенными параметрами больше, чем у прототипа. Групповое время запаздывания (ГВЗ) у звена с распределенными параметрами больше, чем у прототипа, но ФЧХ более линейна, и, следовательно, изменение ГВЗ меньше у звена с распределенными параметрами.

В области верхних частот часто приходится учитывать влияние выходного компонента величиной $a = R_{\text{вых}}/R'l$, так как при $p \rightarrow \infty$ передаточная функция звена $K(p) = (1 + a\sqrt{\pi}t \operatorname{sh} \sqrt{\pi t}) / (\mu + (1 - \mu) \operatorname{ch} \sqrt{\pi t} + a\sqrt{\pi}t \operatorname{sh} \sqrt{\pi t}) \rightarrow 1$ независимо от значения a . Частотную характеристику звена с учетом выходного сопротивления (рис. 73) целесообразно представить расчетным выражением

$$K(j\omega) = ((1 + A) + jB) / ((\mu + (1 - \mu) \operatorname{sh} z \cos z + A) + j((1 - \mu) \operatorname{sh} z \sin z + B)),$$

где $A = az(\operatorname{sh} z \cos z - \operatorname{ch} z \sin z)$; $B = az(\operatorname{sh} z \cos z + \operatorname{ch} z \sin z)$; $z = \sqrt{\omega t/2}$.

Программа 319. Вычисление АЧХ и ФЧХ звена с распределенными RC -параметрами с учетом выходного сопротивления активного компонента

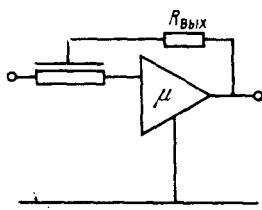


Рис. 73

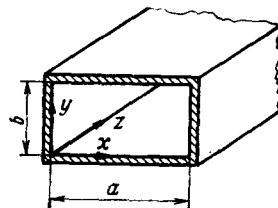


Рис. 74

ИП9	\times	v	П3	П6	e^x	\uparrow	$1/x$	П4	+
2	\div	П5	ИП4	—	П4	ПП	83	П1	ИП4
ПП	83	1	ПП	63	ПВ	ИПС	ПА	ИП3	\sin
ИП4	\times	1	ИП7	—	\times	ИП1	+	П1	ИП5
ИП3	\cos	\times	1	—	1	ИП7	—	\times	ИП0
ПП	63	ИПВ	—	ИПА	ИПС	\div	П6	\lg	2
0	\times	C/P	+	П0	\uparrow	x^2	ИП1	x^2	+
v	\div	\cos^{-1}	ПД	ИП1	$x < 0$	81	ИПД	/—/	
ПД	ИПД	B/O	ИП3	\cos	\times	ИП5	ИП6	/—/	П6
\sin	\times	—	ИП8	\times	ИП3	\times	B/O		

Инструкция. Установить переключатель Р—ГРД—Г в положение Р; ($\mu = P_7$, $a = P_8$, $\pi\tau = P_9$) $f = P_X$ В/О С/П ($t \approx 55$ с) $P_X = -A(\omega)$, дБ, $P_Y = \phi_K$, рад, $P_6 = |K(j\omega)|$.

Пример. Для $\mu = 0,868541$, $a = 0,0001$, $\pi\tau = 1,6182267 \cdot 10^{-2}$, $f = 1000$ Гц получим $A(\omega) = 10,095737$ дБ, $\phi_K = -2,030683$ рад; $|K(j\omega)| = 0,31276144$.

Программы, подобные приведенным, можно составить и для расчета звеньев других типов с распределенными RC -структурами, что существенно облегчит их проектирование в соответствии с методикой, рассмотренной в гл. 6.

7.6. Расчет характеристик полых волноводов

Строгий расчет волноводных устройств СВЧ связан со сложным математическим аппаратом теории поля и, как правило, требует обращения к ЭВМ высокой производительности. Однако для расчетов с относительно простыми формулами можно с успехом использовать ПМК.

Рассмотренные ранее соотношения характеризуют свойства линий передачи с поперечными волнами, длины которых равны длине волны $\lambda = c/f = 2\pi c/\omega$ в свободном пространстве. В полых металлических волноводах поперечные волны распространяются лишь при наличии центрального проводника, а распространяющиеся волны типа $E_{m,n}$ или $H_{m,n}$ характеризуются дисперсией, проявляющейся в различии фазовой v_Φ и групповой v_{gr} скоростей волны длиной λ_B , отличающейся от длины волны в свободном пространстве:

$$\lambda_B = c / \sqrt{\epsilon \mu f^2 - f_{kp}^2}; \quad v_\Phi = \lambda_B f \geq c; \quad v_{gr} = c^2 / \epsilon \mu v_\Phi \leq c,$$

где $c = 3 \cdot 10^8$ м/с; ϵ и μ — диэлектрическая и магнитная проницаемость заполнения волновода; f_{kp} — критическая частота, ограничивающая снизу частотный

диапазон распространяющихся волн и зависящая от конструкции волновода и типа волны.

Программа 320. Вычисление f_{kp} , $\lambda_{kp}=c/f_{kp}$, v_ϕ и v_{gr} дисперсионной линии передачи

$$\begin{array}{ccccccccc} \text{П7} & x^2 & \text{ИП8} & \times & \text{ИП9} & x^2 & - & \nu & 3 & 0 \\ \leftrightarrow & \div & \text{П4} & \text{С/П} & 3 & \text{ВП} & 8 & x^2 & \text{ИП8} & \div \\ & & \text{ИП4} & \text{ИП7} & \times & 1 & \text{ВП} & 7 & \times & \leftrightarrow & \text{Вх} & \text{С/П} \end{array}$$

Инструкция. ($\epsilon\mu=P8$, f_{kp} , $\Gamma\Gamma_{\text{ц}}=P9$) f , $\Gamma\Gamma_{\text{ц}}=\text{РХ В/О С/П}$ ($t \approx 5$ с) $\text{РХ}=\lambda_{\text{в}}$, см С/П ($t \approx 5$ с) $\text{РХ}=v_\phi$, м/с, $\text{РY}=v_{gr}$, м/с.

Пример. Для $\epsilon\mu=1$, $f_{kp}=16,356438$ ГГц и $f_i=20$; 30; 40 ГГц получим соответственно $\lambda_{bi}=2,6065587$; 1,1928953; 0,82185091 см; $v_\phi=5,2131174 \cdot 10^8$; $3,5786859 \cdot 10^8$; $3,2874036 \cdot 10^8$ м/с; $v_{gr}=1,7264142 \cdot 10^8$; $2,5148896 \cdot 10^8$; $2,7377228 \times 10^8$ м/с.

Для прямоугольного волновода с размерами a и b ($a>b$) сечения (рис. 74) диапазон частот распространяющихся волн типа E_{mn} и H_{mn} ограничен снизу критической частотой

$$f_{kp}=c/\lambda_{kp}=(c/2) \sqrt{(m/a)^2+(n/b)^2}.$$

Программа 321. Вычисление критических значений f_{kp} и λ_{kp} волн типов E_{mn} и H_{mn} в прямоугольном волноводе

$$\begin{array}{ccccccccc} \text{ИП8} & \div & x^2 & \leftrightarrow & \text{ИП7} & \div & x^2 & + & \nu & 2 \\ & \div & \uparrow 1/x & \text{П5} & \leftrightarrow & 3 & 0 & \times & \text{П4} & \text{С/П} \\ & & \text{БП} & 00 & & & & & & \end{array}$$

Инструкция. (a , см = P7, b , см = P8) $m = PY$, $n = PX$ (B/O) С/П ($t \approx 6$ с) $\text{РХ}=P4=f_{kp}$, ГГц, $\text{РY}=P5=\lambda_{kp}$, см.

Пример. Для $a=2,3$ см, $b=1$ см и волны E_{11} получим $f_{kp}=16,356438$ ГГц, $\lambda_{kp}=1,8341401$ см.

Распределение относительных напряженностей электрического $E'=E/D$ и магнитного $H'=H/(D\omega_0\epsilon_0)$ полей волн типа E_{mn} в сечении прямоугольного волновода с системой координат, показанной на рис. 74, определяется соотношениями

$$E'_x = (\beta\pi n/a) \cos(\pi m x/a) \sin(\pi n y/b),$$

$$E'_y = (\beta\pi n/b) \sin(\pi m x/a) \cos(\pi n y/b),$$

$$E'_z = \pi^2 ((m/a)^2 + (n/b)^2) \sin(\pi m x/a) \sin(\pi n y/b);$$

$$H'_x = -(\pi n/b) \sin(\pi m x/a) \cos(\pi n y/b),$$

$$H'_y = (\pi m/a) \cos(\pi m x/a) \sin(\pi n y/b),$$

$$H'_z = 0,$$

где β — постоянная распространения.

Программа 322. Вычисление относительных напряженностей E' и H' поля волны типа E_{mn} в сечении прямоугольного волновода

$$\begin{aligned} \pi & \text{ ИПВ } \div \text{ ИПД } \times \text{ П4 } \times \text{ П6 } \sin \leftrightarrow \\ \pi & \text{ ИПА } \div \text{ ИПС } \times \text{ П5 } \times \text{ П9 } \cos \times \\ \text{ИП5 } \times & \uparrow \text{ ИП0 } \times \text{ С/П } \text{ ИП6 } \cos \text{ ИП9 } \sin \\ \times & \text{ ИП4 } \times \uparrow /- \leftrightarrow \text{ ИП0 } \times \text{ С/П } \text{ ИПС} \\ \text{ИПА } \div & x^2 \text{ ИПД } \text{ ИПВ } \div x^2 + \pi x^2 \\ \times & \text{ ИП6 } \sin \times \text{ ИП9 } \sin \times \text{ С/П} \end{aligned}$$

Иструкция. Установить переключатель Р—ГРД—Г в положение Р; ($\beta=P_0$, a , см = РА, b , см = РВ, m = РС, n = РД) x = РY, y = РХ В/О С/П ($t \approx 10$ с) РХ = E'_x , РY = H'_y С/П ($t \approx 7$ с) РХ = E'_y , РY = H'_x С/П ($t \approx 10$ с) РХ = E'_z , РY = H'_z = 0.

Пример. Для волны E_{11} в волноводе с $\beta=2$, $a=2,3$ см, $b=1$ см при $x=0,8$ см, $y=0,4$ см получим $E'_x=1,1953019$, $H'_y=0,59765097$, $E'_y=1,7239279$, $H'_x=-0,86196394$, $E'_z=9,9096388$, $H'_z=0$.

Распределение относительных напряженностей $E'=E/D\omega$ и $H'=H\mu_0/D$ поля типа H_{mn} в сечении прямоугольного волновода в той же системе координат (рис. 74) описывается соотношениями

$$\begin{aligned} E'_x &= (\pi n/b) \cos(\pi mx/a) \sin(\pi ny/b), \\ E'_y &= -(\pi m/a) \sin(\pi mx/a) \cos(\pi ny/b), \\ E'_z &= 0; \\ H'_x &= (\beta \pi m/a) \sin(\pi mx/a) \cos(\pi ny/b), \\ H'_y &= (\beta \pi n/b) \cos(\pi mx/a) \sin(\pi ny/b), \\ H'_z &= -\pi^2 ((m/a)^2 + (n/b)^2) \cos(\pi mx/a) \cos(\pi ny/b). \end{aligned}$$

Программа 323. Вычисление относительных напряженностей E' и H' поля волны H_{mn} в сечении прямоугольного волновода

$$\begin{aligned} \pi & \text{ ИПВ } \div \text{ ИПД } \times \text{ П4 } \times \text{ П6 } \sin \leftrightarrow \\ \pi & \text{ ИПА } \div \text{ ИПС } \times \text{ П5 } \times \text{ П9 } \cos \times \\ \text{ИП4 } \times & \uparrow \text{ ИП0 } \times \leftrightarrow \text{ С/П } \text{ ИП6 } \cos \text{ ИП9} \\ \sin \times & \text{ ИП5 } \times \uparrow \text{ ИП0 } \times \leftrightarrow /- \text{ С/П} \\ \text{ИПС } \text{ ИПА } \div & x^2 \text{ ИПД } \text{ ИПВ } \div x^2 + \pi \\ x^2 \times & \text{ ИП6 } \cos /- \text{ ИП9 } \cos \times \times \text{ С/П} \end{aligned}$$

Иструкция. Установить переключатель Р—ГРД—Г в положение Р; ($\beta=P_0$, a , см = РА, b , см = РВ, m = РС, n = РД) x = РY, y = РХ В/О С/П ($t \approx 10$ с) РХ = E'_x , РY = H'_y С/П ($t \approx 8$ с) РХ = E'_y , РY = H'_x С/П ($t \approx 9$ с) РХ = H'_z .

Пример. Для волны H_{11} в волноводе с $\beta=2$, $a=2,3$ см, $b=1$ см при $x=0,8$ см, $y=0,4$ см получим $E'_x=1,3745973$, $H'_y=2,7491946$, $E'_y=-0,3747662$, $H'_x=0,74953384$, $E'_z=0$, $H'_z=-1,6683853$.

Распределение полей волн, распространяющихся в круглых волноводах, описывают с помощью функций Бесселя, что затрудняет эффективное использование ПМК, но некоторые соотношения аппроксимируют относительно простыми формулами. Так, для оценки критической длины волны и частоты $f_{kp} = c/\lambda_{kp} = \chi_{mn}/2\pi R$ волны типа E_{mn} в круглом волноводе радиуса R корни уравнения $J_m(\chi_{mn}) = 0$ аппроксимируют формулой

$$\chi_{mn} = a/8 - ((28m^2 - 31)4/3a^2 + 1)(4m^2 - 1)/a - 8.8 \cdot 10^{-5}m^4,$$

где $a = (m + 2n - 1/2)\pi/2$. Результаты вычислений по этой формуле содержат не более трех верных значащих цифр.

Программа 324. Вычисление χ_{mn} , f_{kp} и λ_{kp} для волны типа E_{mn} в круглом волноводе

$$\begin{aligned} & \text{П8 2 } \times \leftrightarrow \text{ П7 } + \quad 2 \quad 1/x - \pi \\ & \times 4 \quad \times \text{ П6 } 8 \quad \div \quad 2 \quad 8 \quad \text{ИП7 } x^2 \\ & \times 3 \quad 1 - 4 \quad \times \quad \text{ИП6 } x^2 \quad 3 \quad \times \\ & \div 1 \quad + \quad \text{ИП7 } x^2 \quad 4 \quad \times \quad 1 - \quad \text{ИП6} \\ & \div \times - \quad \text{ИП7 } x^2 \quad x^2 \quad 8 , \quad 8 \quad \text{ВП} \\ & 5 / - \quad \times - \quad \text{П4 } C/P \pi \quad 2 \quad \times \quad \text{ИП9} \\ & \times \text{ ИП4 } \div \text{ П1 } 3 \quad 0 \quad \text{ИП1 } \div \quad C/P \end{aligned}$$

Инструкция. (R , см = Р9) $m = RX$, $n = RX$ В/О С/П ($t \approx 15$ с) $PX = \chi_{mn}$ С/П ($t \approx 5$ с) $PX = f_{kp}$, ГГц, $PY = \lambda_{kp}$, см.

Пример. Для $R = 1$ см и волны E_{11} получим $\chi_{11} = 3.8317968$, $f_{kp} = 18.295483$ ГГц, $\lambda_{kp} = 1.639749$; для волны E_{62} получим $\chi_{62} = 13.501178$; $f_{kp} = 64.463378$ ГГц, $\lambda_{kp} = 0.46838051$ см.

Критическая частота f_{kp} волны типа H_{mn} в круглом волноводе определяется решением уравнения $J'_m(\chi_{mn}) = 0$, корни которого при $m > 0$ аппроксимируются формулой

$$\chi'_{mn} = b/8 - ((112m^4 + 328m^2 - 9)4/(3b^2) + 4m^2 + 3)b - m \sqrt[4]{m}/18n^4,$$

где $b = (m + 2n - 3/2)\pi/2$. Результаты вычислений по этой формуле содержат около трех верных значащих цифр.

Программа 325. Вычисление χ'_{mn} , f_{kp} и λ_{kp} для волн типа H ($m > 0$) в круглом волноводе

$$\begin{aligned} & \text{П8 2 } \times \leftrightarrow \text{ П7 } + \quad 1 , \quad 5 - \\ & 4 \quad \times \pi \quad \times \text{ П6 } 8 \quad \div \quad \text{ИП7 } x^2 \text{ П5} \\ & x^2 \quad 1 \quad 1 \quad 2 \quad \times \quad \text{ИП5 } 3 \quad 2 \quad 8 \quad \times \\ & + \quad 9 \quad - \quad 4 \quad \times \quad 3 \quad \div \quad \text{ИП6 } x^2 \div \\ & \text{ИП5 } 4 \quad \times \quad 3 \quad + \quad + \quad \text{ИП6 } \div - \quad \text{ИП7} \\ & \gamma \quad \gamma \quad \text{ИП7 } \times \quad \text{ИП8 } x^2 \quad x^2 \quad \div \quad 1 \quad 8 \\ & \div - \quad \text{П4 } C/P \pi \quad 2 \quad \times \quad \text{ИП9 } \times \quad \text{ИП4} \\ & \div \quad \text{П3 } 3 \quad 0 \quad \text{ИП3 } \div \quad C/P \end{aligned}$$

Инструкция. (R , см = Р9) $m = PY$, $n = PX$ В/О С/П ($t \approx 18$ с) $PX = \chi'_{mn}$ С/П ($t \approx 5$ с) $PX = f_{kp}$, ГГц, $PY = \lambda_{kp}$, см.

Пример. Для $R = 1$ см и волны H_{32} получим $\chi'_{32} = 13.564501$, $f_{kp} = 64.765723$ ГГц, $\lambda_{kp} = 0.46320798$ см.

Для оценки критических волн высших типов колебаний в коаксиальном волноводе с диаметрами D и d проводников можно воспользоваться приближенными формулами, реализованными следующей программой.

Программа 326. Оценка критических значений f_{kp} и λ_{kp} волн типов E_{mn} и H_{mn} в коаксиальном волноводе

```

П8 ↔ П7 x=0 07 i П7 ИП9 ИП6 —
2 × ИП8 ÷ П4 3 0 ИП4 ÷ С/П
ИП8 1 — x=0 33 ИП9 ИП6 + π ×
ИП7 БП 13 ИП9 ИП6 — 2 × БП 13

```

Инструкция. (D , см = Р9, d , см = Р6) $m = PY$, $n = RX$ В/О С/П ($t \approx 8$ с)
 $RX = f_{kp}(E_{mn})$, $PY = \lambda_{kp}(E_{mn})$ С/П ($t \approx 8$ с) $RX = f_{kp}(H_{mn})$, $PY = \lambda_{kp}(H_{mn})$.

Пример. Для $D = 2$ см, $d = 0.8$ см. получим: $f_{kp}(E_{01}) = 12.5$ ГГц; $\lambda_{kp}(E_{01}) = 2.4$ см; $f_{kp}(H_{01}) = 3,4104031$ ГГц; $\lambda_{kp}(H_{01}) = 8,7964592$ см; $f_{kp}(E_{21}) = 12.5$ ГГц; $\lambda_{kp}(E_{21}) = 2.4$ см; $f_{kp}(H_{21}) = 6,8204263$ ГГц; $\lambda_{kp}(H_{21}) = 4,3982296$ см.

Заключение

Первые программируемые микрокалькуляторы собирались на полупроводниковых интегральных схемах с невысокой степенью интеграции и дорогих, что существенно ограничивало производительность ПМК и заставляло их разработчиков добиваться в первую очередь минимума аппаратурных затрат для снижения стоимости ПМК и обеспечения их доступности широкому кругу пользователей. С этими ограничениями связан для ПМК первых поколений и выбор входных языков, подобных используемым в настоящей книге, которые можно условно назвать компактными.

Успехи микроэлектронной технологии в последние годы привели к значительному повышению степени интеграции полупроводниковых компонентов и существенному снижению их стоимости, что обеспечило возможность улучшения технических характеристик ПМК и выбора различных путей повышения производительности труда их пользователей.

В настоящее время во всем мире продолжается производство традиционных (с компактными входными языками) ПМК различной производительности и стоимости, что отвечает запросам различных групп пользователей. Однако перспективы развития ПМК этого класса ограничены в основном особенностями компактных входных языков, затрудняющих понимание алгоритмов решения прикладных задач, представленных программами на таких языках, и составление сложных программ.

Созданы микрокалькуляторы с многострочными матричными дисплеями для индикации алфавитно-цифровой информации, графиков и несложных изображений [22]. Операционные системы таких микрокалькуляторов содержат программы решения типовых математических задач, например символьного преобразования алгебраических выражений, численных дифференцирования, интегрирования и оптимизации, вычисления специальных функций, решения нелинейных уравнений и систем линейных уравнений, операций над векторами и матрицами задач математической статистики. Прикладные задачи на таких ПМК решают в диалоговом режиме с вводом исходных данных и математических моделей в виде уравнений или расчетных формул с последующим их преобразованием по командам, подаваемым нажатием клавиш. Несмотря на высокую производительность решения многих прикладных задач, такие микрокалькуляторы не могут заменить другие ЭВМ при решении задач, алгоритмы которых содержат большое число разветвлений или циклов.

Основная тенденция в развитии миниатюрных микроЭВМ связана с переходом от компактных к алгоритмическим входным языкам (в основном различным версиям языка Бейсик), обеспечивающим представление алгоритмов решения прикладных задач программами, текст которых достаточно близок к стандартизованному описанию алгоритма. В разработке таких микроЭВМ выделяются два основных подхода.

Один подход — миниатюризация профессиональных персональных ЭВМ достаточно высокой производительности, которые по массе и габаритным размерам соответствуют традиционным ПМК, но отличаются от них высокой производительностью и большим набором разнообразных внешних устройств — сменных модулей с пакетами прикладных программ, подготовленных профессиональными программистами, модулей — расширителей оперативной памяти, различных печатающих устройств, накопителей информации на магнитных карточках и даже гибких дисках, устройствами связи с другими ЭВМ и внешними устройствами. В качестве входного языка таких микроЭВМ обычно и используются расширенные версии Бейсика, но предусматривается и возможность использования других языков программирования высокого уровня, а также языков ассемблера.

ров. Однако эти миниатюрные микроЭВМ по стоимости превышают настольные персональные ЭВМ аналогичной производительности, что существенно ограничивает их широкое внедрение.

Наиболее перспективны для широкого круга пользователей ПМК с алгоритмическими входными языками (как правило, упрощенными версиями Бейсика), не имеющие внешних устройств или имеющие один разъем для подключения при необходимости бытового кассетного магнитофона в качестве накопителя информации или малогабаритного печатающего устройства. Такие ПМК имеют сравнительно небольшую стоимость производства, что обеспечивает их доступность широкому кругу пользователей. К этому классу относится и отечественный ПМК «Электроника МК-85» [20].

Следует добавить, что ПМК с алгоритмическими входными языками, как и наиболее совершенные традиционные ПМК, в зарубежной литературе называют карманными или ручными компьютерами. Следовательно, аббревиатуру ПМК можно отнести как к программируемым микрокалькуляторам, так и к миниатюрным переносимым микрокомпьютерам.

Таким образом, основная тенденция в развитии пользования ПМК—переход от компактных к алгоритмическим входным языкам, прежде всего к языку «для начинающих» Бейсик, широко используемому и для программирования персональных ЭВМ. В связи с этим возникает проблема создания математического обеспечения для решения прикладных задач и, в частности, перевода на Бейсик прикладных программ на компактных входных языках ПМК, накопленных в библиотеках пользователей или опубликованных. Эта задача частично решается публикацией справочников [19, 21], но в связи с разнообразием прикладных задач остается актуальной и проблема их перевода.

Перевод неразветвленных программ с компактных языков на алгоритмические обычно не вызывает затруднений, так как такие программы отображают расчетные формулы. Большие затруднения может вызвать перевод программ, содержащих разветвления и циклы, особенно в тех случаях, когда словари языков оригинала и перевода не совпадают в пределах текста переводимой программы. В подобных случаях целесообразно разбить исходную программу-оригинал на отдельные фрагменты, соответствующие неразветвленным частям программы, и фрагменты, к которым выполняются переходы, а также операторы переходов. После этого каждый такой фрагмент при необходимости отображают соответствующими операторами алгоритма с выбором удобных для последующего представления программой на алгоритмическом языке имен переменных. Составленный таким образом алгоритм представляют на алгоритмическом языке, при необходимости предварительно преобразуя этот алгоритм в соответствии с особенностями языка перевода.

Пусть, например, требуется составить программу вычисления ординат максимумов x_{\max} , корней x_0 и минимумов x_{\min} многочлена Чебышева степени n на входном языке Бейсик. Для этого можно воспользоваться переводом программы 247 в настоящей книге, представив ее записью по строкам:

```
(00) П7 Сx П4 1
(04) П8
(05) ПП 14
(07) 0
(08) ПП 14
(10) ИП8 / .. /
(12) БП 04
(14) ИП4 π × ИП7 — cos ↔
(21) С/П
(22) ИП4 2 1/x + П4 В/О
```

В скобках указаны адреса начальных шагов каждой строки.

Используя для простоты однозначные имена переменных и учитывая содержимое регистра Y операционного стека и переход от обратной записи расчетных

формул к естественной алгебраической, восстанавливаем алгоритм решения задачи, например, в виде

1. Пусть $N = n$, $A = 0$, $B = 1$.
2. Пусть $Y = B$.
3. Перейти к процедуре на шаг 8.
4. Принять $Y = 0$.
5. Перейти к процедуре на шаг 8.
6. Принять $B = -B$.
7. Перейти к шагу 2.
8. Пусть $X(Y) = \cos(A \pi - N)$.
9. Стоп.
10. Пусть $A = A + 1/2$.
11. Возврат из процедуры.

Этот алгоритм искложно непосредственно представить на языке Бейсик, например, программой

```
10 INPUT N
20 LET A=0; B=1
30 LET Y=B
40 GOSUB 90
50 LET Y=0
60 GOSUB 90
70 LET B=-B
80 GOTO 30
90 LET X=COS (A*PI-N)
100 PRINT 'X('Y') ='X
110 STOP
120 LET A=A+.5
130 RETURN : END
```

Следует добавить, что компактные входные языки в связи с сокращенными обозначениями операторов иногда ошибочно относят к языкам ассемблеров. Между тем уровень языка программирования определяется не символами алфавита, а сложностью операций, выполнением которых управляют отдельные операторы входного языка. Языки ассемблеров относятся к языкам программирования низшего уровня, и выполнение даже арифметической операции описывается на этих языках программами, содержащими десятки или даже сотни команд.

Компактные входные языки ПМК относятся к языкам высокого уровня в соответствии с уровнем сложности операций, управляемых операторами этих языков. Основные отличия компактных и алгоритмических языков программирования связаны с выполнением операторов присваивания вида «пусть $X = A$ ». При вводе такого оператора с клавиатуры операционная система ЭВМ транслирует (переводит) его последовательностью машинных команд, причем имена переменных, содержащиеся в операторе присваивания, отображаются адресами ячеек памяти, в которых хранятся значения соответствующих переменных. Это обеспечивает автоматический вызов из памяти значений переменных по их именам и засылку в память результатов выполнения операторов присваивания, но ресурс памяти в этом случае не всегда используется достаточно полно. В связи с этим для первых ПМК с ограниченной емкостью памяти и была выбрана компактная форма входных языков со специальными операторами обращения к памяти, обеспечивающими полное ее использование, и умолчанием имен переменных, хранящихся в операционном стеке. Например, оператор присваивания «пусть $X = Y \times X + Z$ » на компактном входном языке отображается сокращенной записью « $\times +$ ». Это обстоятельство, как и отсутствие ключевых слов (имен операторов), в основном и затрудняет понимание алгоритма, представленного программой на компактном входном языке, и является наиболее существенным отличием этих языков от алгоритмических.

Список литературы

1. Ганстон М. А. Справочник по волновым сопротивлениям фидерных линий СВЧ. — М.: Связь, 1976. — 150 с.
2. Дьяконов В. П. Расчет нелинейных и импульсных устройств на микрокалькуляторах. — М.: Радио и связь, 1984. — 176 с.
3. Дьяконов В. П. Справочник по расчетам на микрокалькуляторах. — М.: Наука, 1985. — 224 с.
4. Кори Г., Кори Т. Справочник по математике: Пер. с англ. / Под ред. И. Г. Арамановича. — 4-е изд. — М.: Наука, 1977. — 832 с.
5. Рабинер Л., Гоулд Б. Теория и применение цифровой обработки сигналов: Пер. с англ. / Под ред. Ю. Н. Александрова. — М.: Мир, 1977. — 848 с.
6. Славин Г. Программирование на программируемых микрокалькуляторах «Электроника Б3-34». — Тарту: Валтус, 1985. — 126 с.
7. Темеш Г., Митра С. Современная теория фильтров и их преобразования: Пер. с англ. / Под ред. И. Н. Теплюка. — М.: Мир, 1977. — 560 с.
8. Трохименко Я. К. Игры с микро-ЭВМ. — Киев: Техника, 1986. — 180 с.
9. Трохименко Я. К. Метод обобщенных чисел и анализ линейных цепей. — М.: Сов. радио, 1972. — 312 с.
10. Трохименко Я. К. Радиоприемные устройства на транзисторах. — 5-е изд. — Киев: Техника, 1972. — 352 с.
11. Трохименко Я. К. Программирование микрокалькуляторов «Электроника МК-61» и «Электроника МК-52». — Киев: Техника, 1987. — 209 с.
12. Трохименко Я. К., Каширский И. С. Обобщенная оптимизация электронных схем. — Киев: Техника, 1979. — 192 с.
13. Трохименко Я. К., Каширский И. С., Ловский В. К. Проектирование радиотехнических цепей на инженерных ЭЦВМ. — Киев: Техника, 1976. — 272 с.
14. Трохименко Я. К., Любич Ф. Д. Инженерные расчеты на микрокалькуляторах. — Киев: Техника, 1980. — 394 с.
15. Трохименко Я. К., Любич Ф. Д. Инженерные расчеты на программируемых микрокалькуляторах. — Киев: Техника, 1985. — 328 с.
16. Ханзел Г. Справочник по расчету фильтров: Пер. с англ. / Под ред. А. Е. Знаменского. — М.: Сов. радио, 1984. — 288 с.
17. Химмельблau Д. Прикладное нелинейное программирование: Пер. с англ. Под ред. М. Л. Быховского. — М.: Мир, 1976. — 620 с.
18. Цветков А. Н., Епанечников В. А. Прикладные программы для микро-ЭВМ «Электроника Б3-34», «Электроника МК-54» и «Электроника МК-56». — М.: Финансы и статистика, 1984. — 175 с.
19. Цимминг Ш. Е. Специальные функции и определенные интегралы. Алгоритмы и программы для микрокалькуляторов: Справочник. — М.: Радио и связь, 1988.
20. Бойко А., Чикоруди Р. Компьютер в кармане // Наука и жизнь. — 1987. — № 4. — С. 33—37.
21. Дьяконов В. П. Справочник по алгоритмам и программам на языке Бейсик для персональных ЭВМ. — М.: Наука, 1987. — 240 с.
22. Wicks W. C. On Evolutionary RPN Calculator for Technical Professionals // Hewlett-Packard J. — 1987. — № 8. — p. 3—14.

Оглавление

Предисловие	3
Г л а в а 1	
Особенности вычислений на программируемых микрокалькуляторах	
1.1. Входные языки	4
1.2. Представление алгоритмов программами	11
1.3. Погрешности результатов вычислений	15
1.4. Оптимизация программ	20
1.5. Операции над комплексными числами и векторами	26
1.6. Логические операции над бинарными переменными	31
Г л а в а 2	
Моделирование сигналов и обработка информации	
2.1. Представление сигналов	35
2.2. Дискретное преобразование Фурье	42
2.3. Спектральный анализ непрерывных сигналов	48
2.4. Цифровое моделирование входные сигналов	54
2.5. Элементы синтеза сигналов	60
2.6. Статистическая обработка информации и корреляционный анализ	66
Г л а в а 3	
Анализ линейных цепей	
3.1. Методика анализа	76
3.2. Анализ безынерционных цепей	87
3.3. Анализ цепей в операторной области	98
3.4. Решение алгебраических уравнений	105
3.5. Анализ линейных цепей в частотной области	112
3.6. Анализ цепей во временной области	125
3.7. Обратная связь и чувствительность	130
Г л а в а 4.	
Анализ нелинейных цепей	
4.1. Аппроксимация нелинейных характеристик	136
4.2. Расчет статических режимов нелинейных цепей	147
4.3. Анализ нелинейных цепей при гармонических воздействиях	156
4.4. Нелинейное программирование	165
4.5. Расчет временных характеристик нелинейных цепей	175
4.6. Анализ автоколебательных процессов	183
Г л а в а 5	
Расчет усилителей	
5.1. Особенности расчета	190
5.2. Расчет цепей питания усилителя	197
5.3. Расчет усилителей на средних частотах	203
5.4. Расчет усилителей на границах полосы пропускания	209
5.5. Расчет резонансных усилителей	216
5.6. Расчет цепей с операционными усилителями	219
	303

Г л а в а 6 Расчет фильтров

6.1. Основные этапы проектирования фильтров	221
6.2. Определение типа и передаточной функции фильтра-прототипа	230
6.3. Синтез LC-фильтров	239
6.4. Практический расчет LC-фильтров	244
6.5. Расчет активных RC-фильтров	250
6.6. Расчет цифровых фильтров	262

Г л а в а 7

Расчет устройств с распределенными параметрами

7.1. Расчет эквивалентных параметров проводников	274
7.2. Расчет параметров линий передачи сигнала	277
7.3. Расчет режима работы линии передачи	282
7.4. Расчет элементов устройств с распределенными параметрами	285
7.5. Расчет RC-цепей с распределенными параметрами	290
7.6. Расчет характеристик полых волноводов	294

Заключение	299
----------------------	-----

Список литературы	302
-----------------------------	-----

Справочное издание

ЛЮБИЧ ФЕЛИКС ДМИТРИЕВИЧ ТРОХИМЕНКО ЯРОСЛАВ КАРПОВИЧ РАДИОТЕХНИЧЕСКИЕ РАСЧЕТЫ НА ПРОГРАММИРУЕМЫХ МИКРОКАЛЬКУЛЯТОРАХ

Заведующая редакцией Г. И. Козырева
Редактор Т. М. Толмачева
Художественный редактор Н. С. Шеин
Переплет художника Н. А. Пашуро
Технический редактор И. Л. Ткаченко
Корректор Т. Л. Кускова

ИБ № 1673

Сдано в набор 02.07.87. Подписано в печать 10.02.88. Т-05075. Формат 60×88^{1/16}.
Бумага писчая № 1. Гарнитура литературная. Печать офсет. Усл. печ. л. 18,62.
Усл. кр.-отт. 18,62. Уч.-нзд. л. 21,87. Тираж 40 000 экз. Изд. № 22080. Заказ № 494.
Цена 1 р. 60 к.

Издательство «Радио и связь», 101000 Москва, Почтамт, а/я 693.

Московская типография № 4 «Союзполиграфпром» при Государственном комитете СССР
по делам издательств, полиграфии и книжной торговли.
Москва, И-41, Б. Переяславская, 46.