ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АГРОПРОМЫШЛЕННЫЙ КОМИТЕТ
КАЗАХСКОЙ ССР
УПРАВЛЕНИЕ НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКОГО ПРОГРЕССА

МЕТОДИКА ПО ОБРАБОТКЕ ДАННЫХ ПОЛЕВОГО ОПЫТА И ПОСТРОЕНИЮ ПРОГНОСТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ СРЕДСТВ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ ТЕХНИКИ

КАЙНАР
1987

ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АГРОПРОМЫШЛЕННЫЙ КОМИТЕТ
КАЗАХСКОЙ ССР
УПРАВЛЕНИЕ НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКОГО ПРОГРЕССА

А. О. Сагитов, С. В. Васильев, К. А. Перевертин

МЕТОДИКА ПО ОБРАБОТКЕ ДАННЫХ ПОЛЕВОГО ОПЫТА И ПОСТРОЕНИЮ ПРОГНОСТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ СРЕДСТВ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ ТЕХНИКИ

АЛМА-АТА
КАЙНАР
1987

В данной работе достаточно подробно дана методика проведения дисперсионного анализа и построения уравнения регрессии, которые являются одними из основных математических приемов обработки результатов полевых экспериментов. Элементом новизны является реализация этих трудоемких операций на средствах вычислительной техники (микрокалькуляторах БЗ-34). Изложены также некоторые аспекты математического моделирования в сельском хозяйстве на примере системы «зараженность почвы галловой нематодой — потери урожая».

АБАЙ ОРАЗОВИЧ САГИТОВ,
СЕРГЕЙ ВЛАДИМИРОВИЧ ВАСИЛЬЕВ,
КИРИЛЛ АЛЕКСАНДРОВИЧ ПЕРЕВЕРТИН,
кандидаты биологических наук

МЕТОДИКА ПО ОБРАБОТКЕ ДАННЫХ ПОЛЕВОГО ОПЫТА И ПОСТРОЕНИЮ ПРОГНОСТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ СРЕДСТВ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ ТЕХНИКИ

Редактор Т. П. Родионова
Технический редактор Т. И. Мозалевская
Корректор Р. С. Мамбеева

Н/К

Сдано в набор 16.01.1987 г. Подписано к печати 8.05.1987 г. УГ19188.
Формат 84×108¹/₃₂. Объем в усл. п. л. 2,1. Уч.-изд. л. 1,8.
Бумага типографская № 2. Гарнитура литературная.
Печать высокая. Тираж 1000 экз. Бесплатно.
Издательство «Кайнар» Госкомитета Казахской ССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли,
480124, г. Алма-Ата, пр. Абая, 143.

Картпредприятие Госагропрома КазССР, г. Алма-Ата, ул. Баишева, 23. Зак. 194.

ВВЕДЕНИЕ

Интенсификация сельскохозяйственного производства ставит перед наукой новые задачи, в том числе разработку системы управления производством, главная цель которой — получение из года в год высоких урожаев.

Цель данной работы — освещение некоторых вопросов построения математических моделей для прогнозов потерь урожая на примере таких распространенных сельскохозяйственных вредителей, как галловые нематоды. По данным наблюдений в ряде хозяйств республики, потери урожая на почвах, зараженных галловыми нематодами, могут достигать значительных размеров. Так, например, в совхозе ТПС «Алма-Атинский» Алма-Атинской области и «Весна» Павлодарской они составили 50—70%. Нередки случаи полной гибели овощных культур от галловой нематоды, особенно всходов и рассады.

Необходимость данной работы диктуется тем, что математические прогнозы потерь урожая на местах или не делаются вообще (подменяются экспертными оценками) или проводятся на уровне, не отвечающем современному развитию науки.

Решить проблему наилучшим образом, то есть максимально приблизить уровень принятия агрономического решения к уровню научных рекомендаций возможно при помощи ЭВМ. Не говоря уже о преимуществах в методическом плане, использование компьютера поможет провести необходимые математические расчеты для «привязки» рекомендаций к конкретным условиям данного хозяйства. Относительно нематодоза, запросив информацию о предпосевной зараженности поля (или полей) нематодами, а также о ценах на сельхозпродукцию, стоимости нематицидов и т. д., компьютер даст прогноз потерь урожая, «расскажет» о существующих средствах борьбы, оценит экономическую эффективность этих средств применительно к местным условиям, подскажет оптимальный вариант агрономического решения.

ЭВМ в каждом хозяйстве — дело будущего, но ответить на все вопросы агронома наука может и должна уже сегодня. Приводимая в работе методика обработки данных полевого опыта призвана дополнить имеющиеся руководства (Доспехов, 1982; Литлл, Хилз, 1981) и стимулировать обработку данных и накопление математического материала на местах (например, на станциях защиты растений) для последующей его интеграции в рамках программного обеспечения ЭВМ. Приведенные в приложениях программы для микрокалькуляторов позволят быстро провести такие трудоемкие операции, как дисперсионный анализ данных и построение регрессионного уравнения прогностической модели.

Очень распространенной ошибкой при построении моделей следует признать принятие однотипности реакции системы на разные уровни воздействия. Довольно часто в литературе приходится встречать высказывания примерно такого содержания: «В ФРГ против мелойдогиноза моркови применяли препараты телон и ДД (даны дозы). В результате урожаи поднялись на 31%, плотность популяции галловой нематоды снизилась на 72%». Данные цифры отражают линейную зависимость урожая от плотности нематод, хотя многочисленные эксперименты показывают сложный (нелинейный) характер функции. То есть приведенное высказывание отражает только один частный случай и не может быть использовано для прогнозирования. Адекватной моделью, описывающей данную систему, является полученная авторами функция вида

$$P(N) = 0; \qquad 0 \leqslant N \leqslant 10$$
$$P(N) = 27 \lg N - 27; \qquad 10 < N < 500$$
$$P(N) = 33{,}113\, N^{0{,}0516} \qquad 500 \leqslant N \leqslant 1676$$
$$P(N) = 33{,}88 \cdot 10^{0{,}0001 N} \qquad N > 1676$$

где P — потери урожая моркови (%),

N — предпосевная зараженность почвы нематодами экз/личинок на 100 $см^3$ почвы.

Именно метод кусочного представления прогностической функции — одна из главных идей данной работы.

Нематоды в отличие от других вредных организмов (насекомые, грибы, бактерии и др.) обладают невысоким потенциалом размножения. Для них не характерны периоды быстрого нарастания численности, которые могли бы способствовать быстрому и неожиданному ее увеличению (Феррис, 1981). Это дает возможность применения так называемых моделей «критической точки».

Они основаны на оценке плотности популяции нематод в одной временной точке, как правило, в допосевной период и предсказывают потери к моменту сбора урожая, в конце вегетации растения. Модели такого типа широко применяются за рубежом. Известны работы Сейнхорста (1972), Баркера и Олтофа (1976), Ферриса (1982) и других американских исследователей. Слабым местом моделей критической точки является возведение количества нематод в ранг основного и единственного фактора определяющего урожай (или потери урожая). Поэтому можно говорить об адекватности моделей и возможности их применения для прогнозирования в условиях относительной инвариантности или стабилизации других биотических и абиотических факторов, влияющих на урожай.

МАТЕМАТИКО-СТАТИСТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ДАННЫХ

I.1. Первый этап анализа — подготовка данных. Данные сводятся в таблицу, удобную для последующей аналитической работы с цифровым массивом (табл. 1).

Таблица 1. Урожай огурцов сорта Урожайный (кг с 10 $см^2$) при разной плотности личинок m. hapla в почве (экз/100 $см^3$)

Варианты τ_j		Урожай ($У_{ij}$) по повторностям n_i					Число повторностей n_j	Средний урожай по вариантам $\bar{У}_j$
j	плотность личинок, X_j	1	2	3	4	$T_i = \Sigma У_{ij}$		
1(к)	0	13,9	14,2	13,8	14,2	56,1	4	14,025
2	50	13,10	13,28	13,08	13,18	52,64	4	13,16
3	100	12,45	12,50	12,82	12,63	50,40	4	12,60
4	500	11,28	11,13	11,19	11,21	44,81	4	11,20
5	1000	10,22	10,72	10,41	10,68	42,03	4	10,50
6	2000	7,20	6,90	7,30	6,80	28,20	4	7,05
7	3000	4,10	4,26	4,32	4,13	16,81	4	4,20

В процессе составления такой таблицы проводится проверка исходных данных и устраняются ошибки, если они имеются.

Так как конечной целью математико-статистического анализа данных эксперимента является оценка потерь урожая в зависимости от инвазионной нагрузки, показатели урожаев, приведенные в таблице 1, необходимо выразить в относительных величинах, то есть в процентах от среднего урожая в контроле:

$$P_{ij} = \frac{\overline{У}_к - У_{ij}}{\overline{У}_к} \cdot 100\% \qquad (1)$$

где P_{ij} — потери урожая (или снижение качества продукции) в процентах в повторности n_i варианта m_j,

$\overline{У}_к$ — средний урожай в контроле,

$У_{ij}$ — урожай в повторности n_i варианта m_j

Так, в нашем случае, потери урожая в первой повторности (n_1) контрольного варианта (m_1)

$$P_{11} = \frac{14{,}025 - 13{,}90}{14{,}025} \cdot 100 = 0{,}9\,.$$

В четвертой повторности (n_4) контрольного варианта (m_1)

$$P_{41} = \frac{14{,}025 - 13{,}90}{14{,}025} \cdot 100 = -1{,}25\,.$$

В третьей повторности (n_3) пятого варианта (m_5)

$$P_{35} = \frac{14{,}025 - 10{,}41}{14{,}025} \cdot 100 = 25{,}8$$

и так далее.

Значения P_{ij} вычисляются с точностью до первого знака после запятой (0,1), а средние значения ($\overline{P}_{ij}$) — до второго знака после запятой (0,01).

Преобразованные значения урожаев, то есть потери урожая (P_{ij}) сводят в таблицу 2, удобную для проведения дисперсионного анализа данных эксперимента (форму таблицы см. также в программе дисперсионного анализа для МК — БЗ—34. Приложение III).

В предпоследнем столбце таблицы 2 записываются средние квадратичные отклонения значения P_{ij} для каждого варианта опыта (S_{pj}), а в последнем — дисперсии значений P_{ij} по вариантам (S^2_{pj}). В конце каждого из этих столбцов представлены их средние арифметические значения. Эти величины необходимы для проверки пригодности данных для корректного применения дисперсионного анализа. Если средние квадратические отклонения и дисперсии коррелированы со средними значениями потерь урожая, необходимо преобразование

исходных данных. В случае корреляции среднего квадратического отклонения со средним арифметическим подходящим преобразованием будет извлечение квадратного корня из исходных величин потерь:

$$P'_{ij} = \sqrt{P_{ij}} \qquad (2)$$

При корреляции дисперсии и средней необходимо логарифмическое преобразование

$$P'_{ij} = \log P_{ij} \qquad (3)$$

или

$P'_{ij} = \log(P_{ij} + 1)$, если имеются нулевые оценки в исходных данных;

здесь P'_{ij} — преобразованные значения,

P_{ij} — исходные значения.

Дисперсии и средние квадратические отклонения легко рассчитать по формулам:

$$S^2_{pj} = \frac{\Sigma P^2_{ij} - \frac{(\Sigma P_{ij})^2}{n_j}}{\Sigma n_j - 1}\,, \qquad (4)$$

$$S_{pj} = \sqrt{S^2_{pj}}\,. \qquad (5)$$

Таблица 2. Относительные потери (%) урожая огурцов сорта Урожайный в зависимости от плотности личинок в почве (экз/100 см³)

Варианты $j = 1 \ldots m$	Потери урожая по вариантам и повторностям ($i = 1 \ldots n$)				$T_j = \Sigma P_{ij}$	$n_i = \Sigma n_{ij}$	Средние потери $\overline{P}_j$	S_{pj}	S^2_{pj}
	1	2	3	4					
1 (к)	0,9	—1,25	1,60	—1,25	0	4	0	1,471	2,165
2	6,6	5,3	6,7	6,0	24,6	4	6,15	0,645	0,417
3	11,2	10,9	8,6	9,9	40,6	4	10,15	1,177	1,377
4	19,6	20,6	15,2	20,1	75,5	4	18,87	2,484	6,169
5	27,1	23,6	25,8	23,9	100,4	4	425,10	1,651	2,727
6	48,7	50,8	47,9	51,5	199,9	4	49,73	1,702	2,896
7	70,8	69,6	69,2	70,6	280,2	4	70,05	0,772	0,597
$H_i = \Sigma P_{ij}$	184,9	179,5	175,0	180,7	720,2	28	—	1,4	2,34
Σm_i	7	7	7	7	28	—	—	—	—
i	26,41	25,65	25,00	25,82	—	—	—	—	—

Технику вычисления этих характеристик покажем на примере варианта 2 таблицы 2.

Сведем исходные данные в рабочую таблицу 3.

Таблица 3. Рабочая таблица для расчета дисперсии и среднего квадратического отклонения

n_i	Pn_i	$(Pn_i)^2$
1	6,6	43,56
2	5,3	28,09
3	6,7	44,89
4	6,0	36,00
—	24,6	152,54

$(\Sigma P_{n1})^2 = 605$

$n_2 = 4$

$$S^2_{p_2} = \frac{152,54 - \frac{605,16}{4}}{3} = 0,417$$

$$Sp_2 = 0,645$$

Эти расчеты легко проводить на микрокалькуляторах с программами для статистических расчетов (МК-51; МК-53; МК-71) или на программируемых микрокалькуляторах (БЗ-34; МК-54; МК-56; МК-61). Программы для вычисления приведены в приложениях III, IV. Характер связи дисперсии и среднего квадратического отклонения (сигмы) со средней арифметической легко оценить графически (рис. 1).

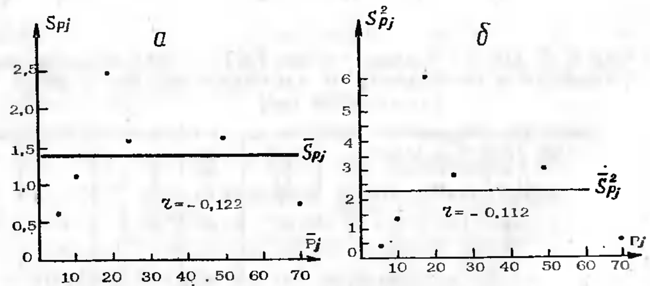


Рис. 1. Зависимость среднего квадратического отклонения (а) и дисперсии (б) потерь урожая огурцов от средних значений потерь ($\bar{P}_j$)

Необходимо визуально определить характер размещения полученных точек относительно линий средних значений ($\bar{S}_{pj}$ и $\bar{S}^2_{pj}$). Если точки расположены по полю графика хаотично (случайно), связь между исходными переменными отсутствует и данные могут быть использованы для дисперсионного анализа без преобразований. Если размещение точек на графике имеет закономерный характер (т. е. сравниваемые переменные коррелированы) приступают к преобразованию исходных данных относительных потерь урожая согласно формулам (2) или (3). После этого составляют новую таблицу, аналогичную таблице 2, но заполненную преобразованными значениями потерь урожая.

Корреляционный анализ данных таблицы 2 (техника его проведения дана в приложении IV) показал полное отсутствие корреляции P_j с S_{pj} и S^2_{pj}, что, впрочем, подтверждает вид графиков на рисунке 1.

Проверкой качества экспериментальных данных и составлением таблицы для дальнейшей их математической обработки подготовительный этап анализа заканчивается.

1.2. Второй этап—дисперсионный анализ результатов опыта и определение порогов сигнализации.

Величина урожая и в разных повторностях одного варианта опыта значительно варьирует даже и при отсутствии нематод. Происходит это потому, что на результаты опыта оказывают влияние не только изучаемые в эксперименте факторы (организованные факторы: в нашем случае это плотность личинок нематод), но и множество других, не учтенных факторов (индивидуальные особенности отдельных растений и нематод, различия в характере их взаимодействий, неоднородность почвенных условий и биотической среды и т. п.). Все это создает определенные трудности при интерпретации результатов опыта и разработке математических моделей прогнозирования урожая в зависимости от плотности нематод. Неучтенные факторы создают дополнительный фон варьирования урожая в эксперименте (шумовой фон), затрудняющий прямую оценку силы влияния исследуемого фактора (инвазионной нагрузки) на потери урожая. Предложенный Р. А. Фишером дисперсионный анализ данных полевых опытов позволяет преодолеть эту трудность.

Вариабельность потерь урожая в опыте по оценке влияния плотности личинок нематод может быть представлена в виде равенства

$$S^2_{общ} = S^2_{вар} + S^2_{повт} + S^2_{ош} \qquad (6)$$

где $S^2_{общ}$ —общая вариабельность потерь урожая во всех вариантах и повторностях, обуслов-

Таблица 4. Результаты дисперсионного анализа по оценке влияния плотности личинок M. hapla в почве на потери урожая огурцов сорта Урожайный

Виды варьирования	Степени свободы df	Суммы квадратов отклонений SS	Средний квадрат отклонений S^2	$F_{факт}$	$F_{табл.}$ 0,05	$F_{табл.}$ 0,01	$t_{табл.}$ 0,05	$t_{табл.}$ 0,01	НСР 0,05	НСР 0,01
Общее	27	15551,263	—	—	—	—	—	—	—	—
По вариантам	6	15502,223	2583,7038	1109	2,66	4,01	—	—	2,267	3,106
По повторностям	3	7,11	2,37	1,017	3,16	5,09	—	—	1,71	2,35
Ошибки	18	41,93	2,329	—	—	—	2,101	2,878	—	—

ленная учтенными и неучтенными факторами.

$S^2_{вар}$ — вариабельность потерь урожая, обусловленная различиями в степени инвазионной нагрузки по вариантам опыта.

$S^2_{повт}$ — вариабельность потерь урожая, обусловленная различиями в условиях опыта по повторностям.

$S^2_{ош}$ — вариабельность потерь урожая, вызванная неучтенными в опыте факторами (необъясненная вариация, дисперсия ошибки).

Дисперсионный анализ позволяет разложить общую вариабельность потерь урожая на отдельные составляющие и количественно оценить роль каждого фактора в формировании изменчивости этих потерь.

Работу проводят в следующем порядке.

1.2.1. Подготавливают таблицу результатов дисперсионного анализа (табл. 4), (см. также «Программу дисперсионного анализа», Приложение III), которую последовательно заполняют по мере решения задач последующих пунктов 2.2—2.14 на основе таблицы 2.

1.2.2. По данным таблицы приложения 1 находим табличные значения F—критерия для оценки дисперсии вариантов и повторностей при соответствующих степенях свобод (df).

$F_{табл.}$ для вариантов определяем при df числителя, равном $df_{вар}$. $S^2_{вар} > S^2_{ош}$, то есть в нашем примере, при 6, а df знаменателя для $df_{ош}=18$. Так как в таблице Приложения 1 df=6 и df=18 отсутствуют, определим значения $F_{0,05}$ и $F_{0,01}$, как средние арифметические из значений для df=5 и 7; 17 и 19.

$$F_{0,05}=\frac{2,81+2,62+2,74+2,55}{4}=\frac{10,72}{4}=2,68$$

(точное значение $F_{0,05}$ при $df_1=6$ и $df_2=18$ составляет 2,66).

$$F_{0,01}=\frac{4,34+3,93+4,17+3,77}{4}=4,05,$$

(точное значение равно 4,01).

Значения $F_{табл.}$ заносим в 6-й и 7-й столбцы таблицы 4.

1.2.3. По данным таблицы 2 определяем и записываем в таблицу 4 число степеней свободы $df_{общ}=\Sigma n_j=\Sigma m_i$; $df_{вар}=m-1$; $df_{повт}=n-1$; $df_{ош}=df_{общ}-df_{вар}-df_{повт}$. (m—число вариантов в опыте, n—число повторностей в опыте). В рассматриваемом опыте эти величины составят соответственно 27; 6; 3 и 18. Они записаны во втором столбце таблицы 4.

1.2.4. Вычисляем корректирующий фактор C по формуле:

$$C=\frac{(\Sigma T_j)^2}{\Sigma n_j},$$

$$C=\frac{(720,2)^2}{28}=\frac{518688,04}{28}=18524,57286.$$

1.2.5. Вычисляем общую сумму квадратов отклонений:

$$SS_{общ}=\Sigma P^2_{ij}-C \qquad (8)$$

$SS_{общ}=(0,9)^2+(-1,25)^2+\ldots+(69,2)^2+(70,6)^2-$
$-18524,57286=34075,835-18524,57286=15551,263$,
результат заносим в таблицу 4.

1.2.6. Вычисляем сумму квадратов отклонений по вариантам:

$$SS_{вар}=\frac{(\Sigma T_j)^2}{n}-C \quad (9)$$

для равномерных комплексов (то есть для таблицы, где число повторностей по вариантам опыта одинаково).

Для неравномерных комплексов (когда число повторностей по вариантам опыта различается):

$$SS_{вар}=\Sigma\left(\frac{T_j^2}{n_j}\right)-C \quad (10),$$

в нашем примере (табл. 2) комплекс равномерный (n=4), поэтому применима формула (9):

$$SS_{вар}=\frac{0^2+24{,}6^2+\ldots 198{,}9^2+280{,}2^2}{4}-C=$$

$$=\frac{136107{,}18}{4}-18524{,}57286=15502{,}223.$$

Заносим результат в таблицу 4.

1.2.7. Вычисляем сумму квадратов по повторностям:

$$SS_{повт}=\frac{(\Sigma H_i)^2}{m}-C \quad (11)$$

для равномерных комплексов, или

$$SS_{повт}=\Sigma\left(\frac{H_i^2}{m_i}\right)-C \quad (12)$$

для неравномерных комплексов.

$$SS_{повт}=\frac{(184{,}9^2+179{,}55^2+\ldots+180{,}75^2)}{7}-C=$$

$$=\frac{129721{,}775}{7}-18524{,}57286=7{,}11.$$

Вписываем эту величину в таблицу 4.

1.2.8. Вычисляем значение суммы квадратов отклонении для ошибки.

$$SS_{ош}=SS_{общ}-SS_{вар}-SS_{повт} \quad (13)$$

$$SS_{ош}=15551{,}263-15502{,}223-7{,}11=41{,}93.$$

1.2.9. Вычисляем средний квадрат отклонений по вариантам

$$S^2_{вар}=\frac{SS_{вар}}{df_{вар}}, \quad (14)$$

$$S^2_{вар}=\frac{15502{,}223}{6}=2583{,}7038.$$

Заносим полученное значение в таблицу 4.

1.2.10. Вычисляем средний квадрат отклонений по повторностям

$$S^2_{повт}=\frac{SS_{повт}}{df_{повт}}, \quad (15)$$

$$S^2_{повт}=\frac{7.11}{3}=2{,}37$$

1.2.11. Определяем средний квадрат отклонений для ошибки

$$S^2_{ош}=\frac{SS_{ош}}{df_{ош}} \quad (16)$$

$$S^2_{ош}=\frac{41{,}93}{18}=2{,}329$$

Вписываем результат в таблицу 4.

1.2.12. Вычисляем F — отношение фактическое по вариантам.

$$F_{вар}=\frac{S^2_{вар}}{S^2_{ош}}, \quad (17)$$

$$F_{вар}=\frac{2583{,}7038}{2{,}329}=1109$$

Вносим результат в таблицу 4.

1.2.13. Вычисляем F — отношение, фактическое для повторностей:

$$F_{повт}=\frac{S^2_{повт}}{df_{повт}}, \quad (18)$$

$$F_{повт}=\frac{2{,}37}{2{,}329}=1{,}017$$

Также заносим это значение в таблицу 4.

1.2.14. Определим $НСР_{0,05}$ и $НСР_{0,01}$ для вариантов и повторностей. Имеем для равномерных комплексов:

$$НСР_{0,05\ вар}=t_{0,05}\cdot\sqrt{\frac{2S^2_{ош}}{n}} \quad (19),$$

$$НСР_{0,01\ вар}=t_{0,01}\cdot\sqrt{\frac{2\cdot S^2_{ош}}{n}} \quad (20).$$

Для неравномерных комплексов:

$$НСР_{0,05\ вар}=t_{0,05}\cdot\sqrt{\frac{n_j\cdot S^2_{ош}+n_к\cdot S^2_{ош}}{n_j\cdot n_к}} \quad (21),$$

$$НСР_{0,01\ вар}=t_{0.01}\cdot\sqrt{\frac{nj\cdot S^2_{ош}+n_к\cdot S^2_{ош}}{n_j\cdot n_к}} \quad (22).$$

Здесь n_j и n_k — число повторностей в двух сравниваемых вариантах j и k. Значение t берется из таблицы Приложения II. Учитывая, что m — число вариантов в опытах, имеем для равномерных комплексов:

$$НСР_{0,05\ повт} = t_{0,05} \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot S^2_{ош}}{m}} \quad (23).$$

$$НСР_{0,01\ повт} = t_{0,01} \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot S^2_{ош}}{m}} \quad (24).$$

Для неравномерных комплексов:

$$НСР_{0,05\ повт} = t_{0,05} \cdot \sqrt{\frac{m_i S^2_{ош} + m_к \cdot S^2_{ош}}{m_i \cdot m_к}}, \quad (25),$$

$$НСР_{0,01\ повт} = t_{0,01} \cdot \sqrt{\frac{m_i S^2_{ош} + m_к \cdot S^2_{ош}}{m_i \cdot m_к}}, \quad (26)$$

m_i и $m_к$ — число вариантов в двух сравниваемых повторностях. Для нашего примера имеем:

$$НСР_{0,05\ вар} = 2{,}101 \sqrt{\frac{2 \cdot 2{,}329}{4}} = 2{,}267,$$

$$НСР_{0,01\ вар} = 2{,}878 \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot 2{,}329}{4}} = 3{,}106,$$

$$НСР_{0,05\ повт} = 2{,}101 \sqrt{\frac{2 \cdot 2{,}329}{7}} = 1{,}71,$$

$$НСР_{0,01\ повт} = 2{,}878 \sqrt{\frac{2 \cdot 2{,}3239}{7}} = 2{,}35.$$

Записываем эти результаты в таблицу 4.

На этом составление таблицы дисперсионного анализа опытных данных завершено. Теперь необходимо приступить к анализу результатов. Сравнивая значения $F_{факт.}$ с $F_{табл.}$ определяем значимость влияния вариантов опыта (инвазионных нагрузок и различий в условиях повторностей) в определении изменчивости значений потерь урожая.

$F_{факт.}$ по вариантам опыта многократно превосходит значение $F_{табл.\ 0,01}$. Это свидетельствует, что различия в инвазионных нагрузках (плотностях личинок нематод) существенно влияли на потери урожая огурцов (надежность этого вывода превышает 99%). Более содержательную оценку силы влияния инвазионных нагрузок на потери урожая можно получить, используя равенство

$$r^2 = \frac{F_{факт}}{F_{факт} + n - 2}, \quad (27)$$

где r^2 — коэффициент детерминации. Он показывает, насколько в долях (при умножении на 100 — в процентах) изменения потерь урожая в опыте определялись именно инвазионными нагрузками.

Для нашего примера имеем:

$$r^2_{вар} = \frac{1109}{1109+28-2} = 0{,}977.$$

То есть, изменения в потерях урожая в опыте на 97,7% определялись различиями в плотностях личинок нематод по вариантам, и лишь 2,3% вариабельности потерь зависело от не учтенных в опыте факторов. $F_{факт}$ по повторностям опыта намного меньше даже $F_{табл}$ 0,05, то есть условия в разных повторностях опыта были примерно одинаковыми (или во всяком случае алгебраическая сумма неучтенных факторов была почти инвариантна к рассматриваемой системе «Потери урожая как функция предпосевной зараженности почвы нематодами»).

Оценки коэффициента детерминации по повторностям показывают:

$$r^2_{повт} = \frac{1{,}017}{1{,}017+28-2} = 0{,}038.$$

То есть различия в условиях по повторностям определяют не более 4% от общей вариабельности потерь урожая в опытах.

Выявление существенности и силы влияния плотности личинок нематод на потери урожая важно, но это не основная задача дисперсионного анализа в рассматриваемом случае.

Полученные результаты позволяют довольно просто определить такую пороговую плотность вредителя, выше которой потери урожая культуры с вероятностью 95 и 99% (то есть в 95 и 99 случаях из 100) будут заведомо отличаться от нуля. Назовем такую плотность «статистическим порогом» или «порогом сигнализации». Последний термин предпочтительнее, поскольку «порог сигнализации» отражает такую фитосанитарную обстановку на посеве культуры, когда происходят реальные потери урожая и дальнейшее увеличение численности патогена поведет к прогрессивному их увеличению. Обозначим «порог сигнализации» для вероятности 95% как $СП_1$, а для вероятности 99%, как $СП_2$. Тогда:

$$СП_1 = \frac{(НСР_{0,05} - \overline{P}_j)\cdot(X_{j+1} - X_j)}{(\overline{P}_{j+1} - \overline{P}_j)} + X_j \quad (28),$$

$$СП_2 = \frac{(НСР_{0,01} - \overline{P}_j)\cdot(X_{j+1} - X_j)}{(\overline{P}_{j+1} - \overline{P}_j)} + X_j \quad (29),$$

где $НСР_{0,05}$ и $НСР_{0,01}$ — наименьшие существенные разности для вариантов опыта при уровнях значимости 0,05 и 0,01.

$\overline{P}_j$ — средние потери урожая в варианте опыта j, равные или меньшие НСР (j — номер варианта).

P_{j+1} — средние потери урожая в j+1 варианте опыта.

X_j — средняя плотность личинок нематод в варианте опыта j.

X_{j+1} — средняя плотность нематод в варианте опыта j+1.

Обратимся к рассматриваемому примеру. Из таблицы 4 находим, что $НСР_{0,05} = 2,267$; $НСР_{0,01} = 3,106$. По таблице 2 определяем, что ближайшие к НСР, но меньшее его значение потерь урожая ($\overline{P}_j$) равно нулю и принадлежит первому варианту; то есть

$$\overline{P}_j = \overline{P}_1 = 0,$$

следовательно $P_{j+1} = P_2 = 6,15$,

соответственно $X_j = X_1 = 0$ и $X_{j+1} = X_2 = 50$.

$$\text{Тогда } СП_1 = \frac{(2,267-0)\cdot(50-0)}{(6,15-0)} + 0 = \frac{2,267\cdot 50}{6,15} = 18,4,$$

$$СП_2 = \frac{(3,106-0)\cdot(50-0)}{(6,15-2)} + 0 = \frac{3,106\cdot 50}{6,15} = 25,3.$$

Таким образом, порог сигнализации m. hapla для огурцов сорта Урожайный с 95—99%-й надежностью лежит в пределах 18—25 личинок в 100 $см^3$ почвы. Средние величины потерь урожая при этом будут равны значениям НСР, максимальные потери — удвоенным значениям НСР.

ПОСТРОЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ ПОТЕРЬ УРОЖАЯ

Математическое моделирование в биологии имеет ряд особенностей, которые всегда следует учитывать при построении регрессионного уравнения. Исходным материалом для модели служит, как правило, дискретно заданная эмпирическая функция, определенная по результатам опытов. Нахождение закономерностей общего уравнения, удовлетворительно описывающего все (или большинство) эмпирические точки, выяснение возможностей применения найденной математической модели как прогностической — все эти этапы в основном иллюстрируют индуктивный подход к решению проблемы, то есть при рассмотрении нескольких частных случаев поведения системы (результаты опытов) делается попытка нахождения общего закона, которому подчиняется система.

Разумеется, применение чисто дедуктивного метода на данном этапе не представляется возможным, так как в настоящее время биология не располагает системой строгих математических законов, адекватно и детерминированно описывающих состояние таких сложных систем, как биоценоз, подобно тому как законы физики описывают практически все физические явления. Но это вовсе не повод, чтобы начисто отвергать дедуктивный подход в моделировании. Напротив, именно при моделировании его необходимо применять как можно шире. Огромный опыт биологии и агрономии как науки, существующие законы — пусть нестрогие, пусть в качественной форме — весь этот потенциал дедуктивного метода должен быть проанализирован применительно к решаемой проблеме, причем именно осмысление материала с биологических позиций должно предшествовать математическому моделированию.

Одной из главных идей дедуктивно-индуктивного подхода к построению регрессионной зависимости авторы видят в дифференцированном подходе к различным областям инвазионных нагрузок, то есть ставится под сомнение однотипность поведения функции при любых значениях аргумента. Действительно, опыты подтверждают, что зависимость функции потерь от предпосевной зараженности можно разделить на несколько зон, ранжированных по возрастанию нагрузки (рис. 2).

I зона толерантности (выносливости). Крайне малое количество нематод не оказывает влияния на урожай, а иногда может вызвать даже контринтуитивный эффект,

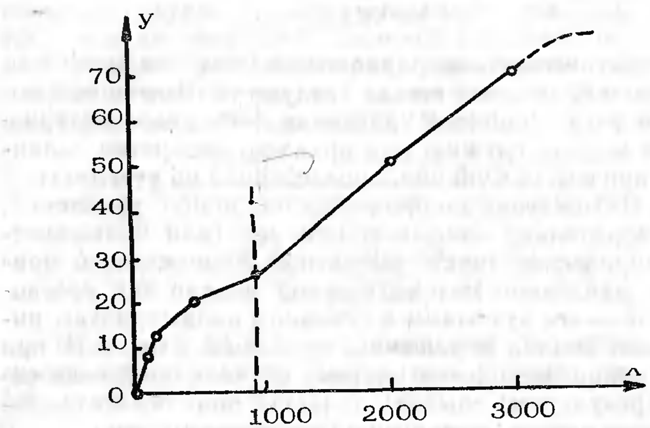


Рис. 2. Зависимость относительных потерь урожая огурцов (У) от предпосевной численности нематод/100 см³ почвы (X)

выражающийся в прибавке урожая. Порог толерантности, как правило, совпадает с определенным выше «порогом сигнализации».

II зона ускоренного возрастания потерь с последующим замедлением (возможна даже стабилизация потерь на определенном участке) — эта зона определяет степень физиологической защитной реакции инвазированного растения, обусловленную в основном законом Фехнера (реакция организма на логарифм величины внешнего воздействия).

III зона «слома» физиологического механизма защиты — характеризуется ускоренным возрастанием потерь до самых высоких значений и лишь в области последних наступает стабилизация на уровне, близком к 100%-ным потерям урожая. Стабилизацию можно объяснить включением защитных механизмов на биохимическом уровне.

Показанная неоднородность функциональной связи наталкивает на мысль о кусочной аппроксимации общего уравнения. Эту идею возможно реализовать несколькими способами. Один из них будет показан ниже.

Анализируя графическое представление рассматриваемой функции рисунка 2, будем считать зону толерантности I незначимой. Зону II возможно рассмотреть, как 2 участка:

ускоренного возрастания потерь — IIа;

замедление роста потерь — IIб.

Зона III выражена достаточно четко для значений аргумента больших 1000 экз/100 см³

Для подробного выяснения деталей поведения функции иногда полезно построить вспомогательные графики. Например, для интервалов аргумента от 0 до 1000 и от 1000 до 3000 личинок на 100 см³ (почвы (рис. 3, 4).

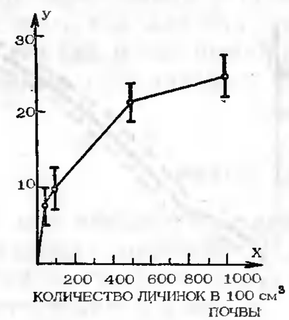


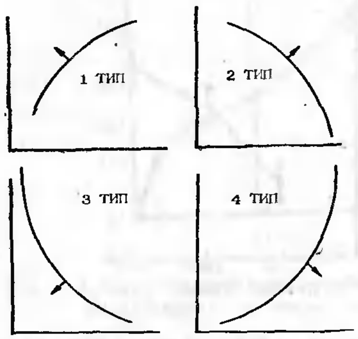
Рис. 3. Характер изменения потерь урожая огурцов сорта Урожайный 86 при диапазоне плотностей личинок M. hapla 0÷1000 экз/100 см³ почвы

Рис. 4. Характер изменения потерь урожая огурцов сорта Урожайный 86 при диапазоне плотностей личинок M. hapla 1000÷3000 экз/100 см³ почвы

Если кривая на рисунке 2 достаточно сложна для математического описания, то кривые на рисунках 3, 4 суть простые нелинейные монотонные зависимости и математическое описание их осуществить очень просто. Достаточно подобрать подходящие функции преобразования, приводящие эти зависимости к линейному виду. А потом методом наименьших квадратов построить регрессионную модель.

Хорошие результаты по линеаризации зависимости дает логарифмирование аргумента и функции — полное логарифмическое преобразование или полулогарифмическое преобразование, когда одна из переменных логарифмируется, другая остается в натуральных величинах. Большого внимания заслуживает полулогарифмическая зависимость вида $У' = f(\log X)$, так как имеет под собой серьезное биологическое обоснование. Именно такой вид представления переменных широко использовался авторами при создании системы моделей потерь урожая. Логарифмические преобразования достаточно распространены и детально описаны в многочисленных руководствах. Поэтому для иллюстрации другого подхода воспользуемся «правилом выпуклости» и «методом трех точек» (Мостеллер, Тьюки, 1982; Васильев и др., 1982).

Метод выпуклостей представляет 4 типа криволинейных монотонных зависимостей (рис. 5).



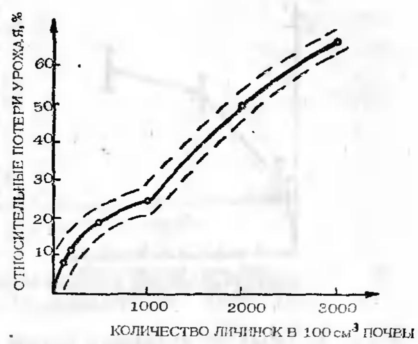


Рис. 5. 4 характерных типа криволинейных зависимостей

Рис. 6. Теоретические и фактические потери урожая огурцов сорта Урожайный 86 в зависимости от инвазионной нагрузки (Диапазон плотностей 0÷3000 экз.) — — — средние ожидаемые потери и их 99%-ные доверительные границы, оцененные по двум регрессивным моделям (рис. 4 и 5) о о о — фактические потери в вариантах опытов

Графики опытных данных (рис. 3, 4) сопоставляются с рисунком 5. Нетрудно идентифицировать их с одним из четырех типов кривых рис. 5.

На основании таблицы 5 выбираем тип преобразования x и (или) y, обеспечивающих приведение зависимости к линейному виду.

Таблица 5. Типы преобразований переменных x и y, линеаризующие криволинейные зависимости 1—4 типов

Тип кривой	Тип преобразования	
	для x	для y
1	II	I
2	I	I
3	II	II
4	I	II

Функции преобразования I типа: $x^1 = x^2$; x^3.

Функции преобразования II типа $x^1 = \sqrt{x}$; $\sqrt[3]{x}$;

$$\log x;\ \frac{(-100)}{\log x};\ \frac{-100}{\sqrt{x}};\ \frac{-100}{\sqrt[3]{x}};\ \frac{-100}{x^2};\ \frac{(\ 100)}{x^3};$$

где X^1 — преобразованное значение переменной x.

Для преобразования У функции аналогичны.

После того, как для графика фактических данных определен его тип и тип преобразований, переходим к оценке возможных оптимальных функций по «методу трех точек».

МЕТОД ТРЕХ ТОЧЕК

На оси абсцисс графика (рис. 2) выбираем одно из минимальных значений (удобно брать целое число) и находим по графику соответствующее значение функции y, идентифицируем эти координаты как x_1 и y_1, аналогично выбираем максимальное значение x_3; y_3.

В качестве x_2 выбираем такое значение аргумента, при котором на графике наиболее четко определен перелом в ходе кривой (например, ускоренное возрастание сменяется замедленным).

Заносим значения найденных трех точек у и х в рабочую таблицу 6.

Таблица 6. Исходные значения переменных

Номера точек	Значения переменных	
	y	x
1	y_1	x_1
2	y_2	x_2
3	y_3	x_3

Вычисляем значения параметров B_1, B_2, С по найденным значениям переменных:

$$b_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, \quad (30) \qquad b_2 = \frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2}, \quad (31)$$

$$C = \frac{b_1}{b_2}. \quad (32)$$

Если С находится в пределах значений $0{,}90 < C < 1{,}22$, то зависимость между y и x можно считать линейной, т. е. исходные данные не нуждаются в преобразованиях.

В противном случае подбираем функцию преобразования, руководствуясь следующим правилом: чем больше C отличается от 1, тем более мощную функцию преобразования следует выбирать, при этом желательно добиваться линейности только за счет преобразований аргумента *x*.

В соответствии с выбранной функцией преобразования заносим в рабочую таблицу 7 преобразованные значения переменных. Во избежание потери смысла функции при нулевых значениях аргумента, когда используются функции типа $y=\log x$ или $y=\frac{1}{x}$, необходимо все значения аргумента увеличить, например, на единицу: то есть преобразования примут вид $x^1=\log(x+1)$ или $x^1=\frac{1}{x+1}$.

Таблица 7. Преобразованные значения переменных

Номера точек	Значения переменных	
	y'	x'
1	y_1	x_1
2	y_2	x_2
3	y_3	x_3

Вновь вычисляем параметры b_1, b_2, C.
Если $0{,}9<C<1{,}1$, то линеаризация с помощью функции преобразования считается удовлетворительной.

Если после одного из типов преобразований b_1, b_2 и $C>1{,}11$, а после другого типа преобразований $b_2>b_1$ и $C<0{,}9$, такая ситуация означает, что первое преобразование было недостаточно мощным, а второе — слишком сильным, то есть необходимо взять некую промежуточную функцию преобразования.

В рамках данного метода существует прием варьирования контастности значений переменных (путем увеличения или уменьшения всех значений переменной на определенную величину), что позволяет согласовать значения зависимости с мощностью функции преобразования.

В соответствии с изложенным проведем линеаризацию зависимостей, представленных на рисунках 3 и 4. Обращаясь к рисунку 5, определяем, что обе кривые принадлежат к 1 типу.

Проверим возможность использования линейной регрессии без преобразования. Имеем согласно таблице 6 следующую рабочую таблицу.

Номера точек	y	x
1	0	0
2	10,15	100
3	25,1	1000

$$b_1=\frac{10{,}15-0}{100-0}=0{,}1015,$$

$$b_2=\frac{25{,}1-10{,}15}{1000-100}=0{,}0166,$$

$$C=6{,}11.$$

Полученное значение свидетельствует о необходимости преобразований.

Согласно таблице 5 для значений x необходимо преобразование II типа. Выберем в качестве функции преобразования $x^1=\sqrt{x}$. Тогда имеем:

Номера точек	y	$x'=\sqrt{x}$
1	0	1
2	10,15	10,05
3	25,1	31,64

$$b_1=\frac{10{,}15-0}{10{,}05-1}=1{,}122,$$

$$b_2=\frac{25{,}1-10{,}15}{31{,}64-10{,}05}=0{,}692.$$

$$C=1{,}62.$$

Поскольку $C>1{,}1$, выбранная функция преобразования недостаточна.

Возьмем в качестве следующего преобразования:

$$x^1=\sqrt[3]{x}.$$

Заполним рабочую таблицу

Номера точек	y	$x'=\sqrt[3]{x}$
1	0	1
2	10,15	4,657
3	25,1	10,0033

$$b_1=\frac{10{,}15-0}{4{,}657-1}=2{,}7755,$$

$$b_2=\frac{25{,}1-10{,}15}{10{,}0033-4{,}657}=2{,}7963,$$

$$C=0{,}9926.$$

Полученное значение *C* вполне удовлетворительно.

Следующим этапом работы является вычисление параметров уравнения линейной регрессии $\hat{y}=a+в\sqrt[3]{x}$ по методу трех точек. Коэффициенты *a* и *в* находим по формулам:

$$в=\frac{y_3-y_1}{x_3-x_1}, \tag{33}$$

$$a = \frac{(a_1+a_2+a_3)}{3}, \qquad (34)$$

где $a_1 = y_1 - вx_1$,
$a_2 = y_2 - вx_2$,
$a_3 = y_3 - вx_3$.

После вычислений имеем в $\approx 2{,}788$; $a = (-2{,}8)$.

Теперь можно записать уравнение регрессии для интервала от 0 до 1000 (нематод/100 см^3). Заменив символ y обозначением, принятым ранее $(\overline{P}_j)$, имеем:

$$\overline{P}_j = 2{,}788\ \sqrt[3]{x} - 2{,}8. \qquad (35)$$

Определение регрессионного уравнения для второго интервала производится аналогично. После вычислений имеем:

$$\overline{P}_j = 1{,}942\sqrt{x} - 36{,}6. \qquad (36)$$

Объединив оба уравнения (35) и (36) в систему, имеем следующий общий вид математической модели:

$$\overline{P}_j = 2{,}788\ \sqrt[3]{x} - 2{,}8;\ 0 \leqslant x < 1000;$$

$$\overline{P}_j = 1{,}942\sqrt{x} - 36{,}6,\ 1000 \leqslant x < 3000.$$

Более точную модель потерь урожая можно получить, используя корреляционный анализ. В Приложении IV дается программа расчета коэффициента корреляции и уравнения линейной регрессии для программируемых калькуляторов. Коэффициент корреляции для данной модели:

$$r = 0{,}986.$$

Соответственно коэффициент детерминации:

$r^2 = 0{,}972$, то есть свыше 97% изменчивости потерь урожая описываются данной моделью. Уточненная модель (после проведения корреляционного анализа) примет вид:

$$P = 2{,}814 \cdot \sqrt[3]{x} - 3{,}3 \pm 1{,}5,\ 0 \leqslant x < 1000;$$

$$P = 1{,}939 \cdot \sqrt{x} - 36{,}4 \pm 1{,}4,\ 1000 \leqslant x < 3000;$$

то есть почти не отличается от модели, полученной экспресс-методом.

Как уже говорилось, прогноз потерь урожая — не самоцель, а основание для принятия (или непринятия) соответствующих управленческих решений.

Для лучшей оценки ситуации по результатам прогноза предлагается ввести такой термин, как «экономический порог вредоносности». Экономическим порогом будем считать такое значение плотности нематод, при котором потери, обусловленные вредным организмом, равны затратам на проведение защитных мероприятий и транспортировку сохраненного урожая.

Общий вид формулы для вычисления экономического порога будет иметь вид:

$$P(N_э) = \frac{100 \cdot Z}{S \cdot V}, \qquad (38)$$

где $N_э$ — экономический порог вредоносности (экз/100 см^3);

$P(N_э)$ — формула математической модели потерь урожая от зараженности;

Z — затраты на защитные мероприятия по обработке 1 га, р.;

S — стоимость 1 ц, урожая, р.;

V — урожайность культуры, ц/га.

Для рассмотренного примера при плотностях от 0 до 1000 нематод формула (38) записывается в виде

$$N_э = \left(\frac{\frac{100 \cdot Z}{S \cdot V} + 3{,}3}{2{,}814}\right)^3.$$

Надо отметить, что приведенные модели в принципе являются однофакторными и предстоит еще большая работа по их интеграции в многофакторные модели. Однако, как уже отмечалось, на данном этапе и однофакторные математические модели могут давать адекватные прогнозы.

Приложение I

Таблица значений F (критерий Фишера) при вероятностях 0,05 (верхняя строка) и 0,01 (нижняя строка)

Знаменатель df_2	Число степеней свободы для большей дисперсии df_1, (числитель)											
	1	3	5	7	9	11	14	20	30	60	120	
1	161 4052	216 5403	230 5764	237 5928	241 6022	243 6082	245 6142	248 6208	250 6258	252 6313	253 6339	254 6366
3	10,13 34,12	9,28 29,46	9,01 28,24	8,88 27,67	8,81 27,34	8,76 27,13	8,71 26,92	8,66 26,69	8,62 26,50	8,57 26,32	8,55 26,22	8,53 26,13
5	6,61 16,26	5,41 12,06	5,05 10,97	4,88 10,45	4,78 10,15	4,70 9,96	4,64 9,77	4,56 9,55	4,50 9,38	4,43 9,20	4,40 9,11	4,37 9,02
7	5,59 12,25	4,35 8,45	3,97 7,46	3,79 7,00	3,68 6,71	3,60 6,54	3,51 6,35	3,44 6,15	3,38 5,98	3,30 5,82	3,27 5,74	3,23 5,65
9	5,12 10,56	3,86 6,99	3,48 6,06	3,29 5,62	3,18 5,35	3,10 5,18	3,02 5,00	2,93 4,80	2,86 4,64	2,79 4,48	2,75 4,40	2,71 4,31
11	4,84 9,85	3,59 6,22	3,20 5,32	3,01 4,88	2,90 4,63	2,82 4,46	2,74 4,29	2,65 4,10	2,57 3,94	2,49 3,78	2,45 3,69	2,40 3,60
13	4,67 9,07	3,41 5,74	3,02 4,86	2,84 4,44	2,72 4,19	2,63 4,02	2,55 3,85	2,46 3,67	2,38 3,51	2,30 3,34	2,25 3,25	2,21 3,17
15	4,54 8,68	3,29 5,42	2,90 4,56	2,70 4,14	2,59 3,89	2,51 3,73	2,43 3,56	2,33 3,36	2,25 3,20	2,16 3,05	2,11 2,96	2,10 2,87
17	4,45 8,40	3,20 5,18	2,81 4,34	2,62 3,93	2,50 3,68	2,41 3,52	2,33 3,35	2,23 3,16	2,15 3,00	2,06 2,83	2,01 2,75	1,96 2,65
19	4,38 8,18	3,13 5,01	2,74 4,17	2,55 3,77	2,43 3,52	2,34 3,36	2,26 3,19	2,15 3,00	2,07 2,84	1,98 2,67	1,93 2,58	1,88 2,49

Окончание приложения I

Знаменатель df_2	Число степеней свободы для большей дисперсии df_1 (числитель)											
	1	3	5	7	9	11	14	20	30	60	120	
21	4,32 8,02	3,07 4,87	2,68 4,04	2,49 3,65	2,37 3,40	2,28 3,24	2,20 3,07	2,09 2,88	2,00 2,72	1,92 2,55	1,87 2,46	1,81 2,36
23	4,28 7,88	3,03 4,76	2,64 3,94	2,45 3,54	2,32 3,30	2,24 3,14	2,14 2,97	2,04 2,78	1,96 2,62	1,86 2,45	1,81 2,35	1,76 2,26
25	4,24 7,77	2,99 4,68	2,60 3,86	2,41 3,46	2,28 3,21	2,20 3,05	2,11 2,89	2,00 2,70	1,92 2,54	1,82 2,36	1,77 2,27	1,71 2,17
27	4,21 7,68	2,96 4,60	2,57 3,79	2,37 3,39	2,25 3,14	2,16 2,98	2,08 2,83	1,97 2,63	1,88 2,45	1,78 2,29	1,73 2,20	1,67 2,10
29	4,18 7,60	2,93 4,54	2,54 3,73	2,35 3,33	2,22 3,08	2,14 2,92	2,05 2,77	1,94 2,57	1,85 2,41	1,75 2,23	1,70 2,14	1,64 2,03
30	4,17 7,56	2,92 4,51	2,53 3,70	2,33 3,30	2,21 3,07	2,13 2,90	2,04 2,74	1,93 2,55	1,84 2,34	1,74 2,21	1,68 2,11	1,62 2,01
40	4,08 7,31	2,84 4,31	2,45 3,51	2,25 3,12	2,12 2,89	2,04 2,73	1,95 2,56	1,84 2,37	1,74 2,20	1,64 2,02	1,58 1,98	1,51 1,80
60	4,00 7,08	2,76 4,13	2,37 3,34	2,17 2,95	2,04 2,72	1,95 2,56	1,86 2,39	1,75 2,20	1,65 2,03	1,53 1,84	1,48 1,73	1,39 1,60
80	3,96 6,96	2,72 4,04	2,33 3,26	2,13 2,87	2,00 2,64	1,91 2,48	1,82 2,31	1,70 2,12	1,60 1,94	1,48 1,75	1,41 1,63	1,32 1,49
120	3,92 6,85	2,68 3,95	2,29 3,17	2,09 2,79	1,96 2,56	1,87 2,40	1,77 2,23	1,66 2,03	1,55 1,86	1,43 1,66	1,35 1,53	1,25 1,38
∞	3,84 6,63	2,60 3,78	2,21 3,04	2,01 2,64	1,88 2,41	1,79 2,25	1,69 2,08	1,57 1,88	1,46 1,67	1,32 1,47	1,22 1,32	1,00 1,00

Таблица t — распределения Стьюдента

Степень свободы	Вероятность распределения такой или большей величины					
	0,400	0,200	0,103	0,050	0,010	0,01
1	1,376	3,078	6,314	12,706	63,657	—
2	1,061	1,886	2,920	4,303	9,925	31,598
3	0,978	1,638	2,353	3,182	5,841	12,941
4	0,941	1,533	2,132	2,776	4,604	8,610
5	0,920	1,476	0,015	2,571	4,032	6,859
6	0,906	1,440	1,943	2,447	3,707	5,959
7	0,895	1,415	1,895	2,365	3,499	5,405
8	0,889	1,397	1,860	2,306	3,355	5,041
9	0,883	1,383	1,833	2,262	2,250	4,781
10	0,879	1,372	1,812	2,228	3,169	4,587
11	0,876	1,363	1,796	2,201	3,106	4,437
12	0,873	1,356	1,782	2,179	3,055	4,318
13	0,870	1,350	1,771	2,160	3,012	4,221
14	0,868	1,345	1,761	2,145	2,977	4,140
15	0,866	1,341	1,753	2,131	2,947	4,073
16	0,865	1,337	1,746	2,120	2,921	4,015
17	0,863	1,333	1,740	2,110	2,898	3,965
18	0,862	1,330	1,734	2,101	2,878	3,922
19	0,861	1,328	1,729	2,093	2,861	3,883
20	0,860	1,325	1,725	2,086	2,845	3,850
21	0,859	1,323	1.721	2,080	2,831	3,819
22	0,858	1,321	1,717	2,074	2,819	3,792
23	0,858	1,319	1,714	2,069	2,807	3,767
24	0,857	1,318	1,711	2,064	2,797	3,745
25	0,856	1,316	1,708	2,060	2,787	3,725
26	0,856	1,315	1,706	2,056	2,779	3,707
27	0,855	1,314	1,703	2,052	2,771	3,690
28	0,855	1,313	1,701	2,048	2,763	3,674
29	0,854	1,311	1,699	2,045	2,756	3,659
30	0,854	1,310	1,697	2,042	2,750	3,646
35	0,852	1,306	1,690	2,030	2,724	3,591
40	0,851	1,303	1,684	2,021	2,704	3,551
45	0,850	1,301	1,680	2,014	2,690	3,520
50	0,849	1,299	1,676	2,008	2,678	3,496
55	0,849	1,297	1,673	2,004	2,669	3,476
60	0,848	1,296	1,671	2,000	2,660	3,460
70	0,847	1,294	1,667	1,994	2,648	3,435
80	0,847	1,293	1,665	1,989	2,638	3,416
90	0,846	1,291	1,662	1,986	2,631	3,402
100	0,846	1,290	1,661	1,982	2,625	3,390
120	0,845	1,289	1,658	1,980	2,617	3,373
∞	0,8416	1,2816	1,6418	1,9600	2,5758	2,2905

Программа однофакторного дисперсионного анализа по схемам полной рендомизации и рендомизированных (организованных) блоков (повторностей) для равномерных (с равным числом повторностей по вариантам) и неравномерных (с неравным числом) комплексов

I. Форма представления исходных данных

Варианты	Значения переменной У по вариантам j и повторностям i, где i=1...n				$T_j=\Sigma У_{ij}$	n_j
j=1...m	1	2	...	n		
1	$У_{11}$	$У_{12}$	...	$У_1$	T_1	n_1
2	$У_{21}$	$У_{22}$	...	$У_2$	T_2	n_2
:	...	...	...	...	...	...
m	$У_{m1}$	$У_{m2}$	...	$У_{mn}$	T_m	n_m
$H_l=\Sigma У_{lj}$	H_1	H_2	...	H_n	$\Sigma T_j=\Sigma H_l$	—
Σm_i	m_1	m_2	...	m_n	—	—

II. Символы и формулы вычислений:

$У_{ij}$ — значения оцениваемой переменной по вариантам (j) и повторностям (i), полученные в опытах;

T_j — сумма значений y_{ij} по вариантам;

H_i — сумма значений по повторностям;

n_i — число повторностей в блоке;

n — число повториостей в опыте;

m_i — число вариантов в повторности;

m — число вариантов в опыте;

N — общее число значений $У_{ij}$ в опыте, $N=\Sigma n_j$;

$df_{общ}$ — число степеней свободы для общего варьирования;

$df_{вар}$ — число степеней свободы для варьирования по вариантам;

$df_{повт}$ — число степеней свободы для варьирования по повторностям;

$SS_{повт}$ — сумма квадратов отклонений по повторностям;

$df_{ош}$ — число степеней свободы для случайного варьирования (ошибки);

$SS_{общ}$ — сумма квадратов отклонений общая;

$SS_{вар}$ — сумма квадратов отклонений по повторностям;

$SS_{ош}$ — сумма квадратов случайных отклонений;

$S^2_{вар}$ — средний квадрат (дисперсия) отклонений по вариантам;

$S^2_{повт}$ — средний квадрат (дисперсия) отклонений по повторностям;

$S^2_{ош}$ — средний квадрат (дисперсия) случайных отклонений;

$F_{факт.}$ — отношение дисперсий, оцененное по данным опыта;

$F_{табл.}$ — отношение дисперсий теоретическое (табличное) при $df_{вар}$ и $df_{повт}$ в числителе и $df_{ош}$ в знаменателе;

$t_{0,05}$; $t_{0,01}$ — теоретическое (табличное) значение t-критерия Стьюдента для вероятностей ошибочного вывода 5 и 1% при $df = df_{ош}$;

$НСР_{0,05}$; $НСР_{0,01}$ — наименьшая существенная разность между соседними значениями вариантов опыта или повторностей, расположенных в ранжированный ряд (в порядке возрастания их значений) для вероятностей ошибочного вывода 5 и 1%;

С — корректирующий фактор;

$$df_{общ} = (N-1);\ df_{вар} = (m-1);\ df_{повт} = (n-1);$$

$$df_{ош} = df_{общ} - df_{вар} - df_{повт}$$

$$C = \frac{(\Sigma T_j)^2}{N};\quad SS_{общ} = \Sigma\, y^2_{ij} - C;\quad SS_{вар} = \Sigma\left(\frac{T^2_j}{n_j}\right) - c;$$

$$SS_{повт} = \Sigma\left(\frac{H^2_i}{m_i}\right) - C;\ SS_{ош} = SS_{общ} - SS_{вар} - SS_{повт};$$

$$S^2_{вар} = \frac{SS_{вар}}{df_{вар}};\quad S^2_{повт} = \frac{SS_{повт}}{df_{повт}};\quad S^2_{ош} = \frac{SS_{ош}}{df_{ош}}$$

$$F_{вар} = \frac{S^2_{вар}}{S^2_{ош}};\quad F_{повт} = \frac{S^2_{повт}}{S^2_{ош}};$$

$$НСР_{вар} = t \cdot \sqrt{\frac{n_j \cdot S^2_{ош} + n_к \cdot S^2_{ош}}{n_j \cdot n_к}};$$

Где n_j и $n_к$ — число повторностей в двух сравниваемых вариантах j и к,

t — критерий Стьюдента при $df_{ош}$;

$$НСР_{повт} = t \cdot \sqrt{\frac{m_j \cdot S^2_{ош} + m_к \cdot S^2_{ош}}{m_j \cdot m_к}};$$

где m_j; $m_к$ — число вариантов в двух сравниваемых повторностях.

Оценки НСР вычисляют лишь в том случае, если установлено наличие существенных различий в опыте по F-критерию.

III. Форма для представления результатов дисперсионного анализа

Виды варьирования	Степени свободы df	Сумма квадратов SS	Средний квадрат S^2	$F_{факт}$	$F_{табл.}$		t		НСР	
					0,05	0,01	0,05	0,01	0,05	0,01
общее	$df_{общ}$	$SS_{общ}$	—	—	—	—	—	—	—	—
по вариантам	$df_{вар}$	$SS_{вар}$	$S^2_{вар}$	$F_{вар}$	$F_{0,05}$	$F_{0,01}$	—	—	$НСР_{0,05}$	$НСР_{0,01}$
по повторность	$df_{повт}$	$SS_{повт}$	$S^2_{повт}$	$F_{повт}$	$F_{0,05}$	$F_{0,01}$	—	—	$НСР_{0,05}$	$НСР_{0,01}$
ошибка	$df_{ош}$	$SS_{ош}$	$S^2_{ош}$	—	—	—	$t_{0,05}$	$t_{0,01}$	—	—

IV. Программа однофакторного дисперсионного анализа

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	Fx²	22	25	17	17	50	СП	50	75	ИП4	64
01	СП	50	26	ИПД	6Г	51	ИП2	62	76	×	12
02	ПО	40	27	—	11	52	ИПА	6—	77	СП	50
03	÷	13	28	П2	42	53	÷	13	78	П8	48
04	ПД	4Г	29	СП	50	54	П2	42	79	ИП4	64
05	СП	50	30	ПО	40	55	СП	50	80	×	12
06	Fx²	22	31	СП	50	56	ИП3	63	81	+	10
07	ИП4	64	32	Fx²	22	57	ИПВ	61	82	ИП8	68
08	+	10	33	СП	50	58	÷	13	83	÷	13
09	П4	44	34	÷	13	59	П3	43	84	ИП9	69
10	FLO	5Г	35	ИП3	63	60	СП	50	85	÷	13
11	05	05	36	+	10	61	ИП4	64	86	F√	21
12	ИПД	6Г	37	П3	43	62	ИПС	6	87	П8	48
13	—	11	38	FLO	5Г	63	÷	13	88	СП	50
14	П1	41	39	31	31	64	П4	44	89	ИП8	68
15	СП	50	40	ИПД	6Г	65	СП	50	90	×	12
16	ПО	40	41	—	11	66	ИП2	62	91	БП	51
17	СП	50	42	П3	43	67	ИП4	64	92	88	88
18	Fx²	22	43	СП	50	68	÷	13	93	Сx	ОГ
19	СП	50	44	ИП1	61	69	СП	50	94	П2	42
20	÷	13	45	ИП2	62	70	ИП3	63	95	П3	43
21	ИП2	62	46	—	11	71	ИП4	64	96	П4	44
22	+	10	47	ИП3	63	72	÷	13	97	СП	50
23	П2	42	48	—	11	73	СП	50			
24	FLO	5Г	49	П4	44	74	П9	49			

V. Инструкция к программе

Содержание	Набрать число	Выполнить команду	Результат
1. Перейти в режим программирования		В/О; F; ПРГ	00
2. Ввести программу		См. табл. IV	
3. Перейти в автоматический режим		F; АВТ	
4. Заполнить ячейки памяти	$(m-1)$	ПА	$df_{вар}$ в регистре ПА
	$(n-1)$	ПБ	$df_{повт}$ в регистре ПБ
	$df_{ош}$	ПС	$df_{ош}$ в регистре ПС
5. Занести ΣT_j	ΣT_j	В/О СП	$(\Sigma T_j)^2$
6. Вычислить значение C	N	СП	Значение C в регистре ПД
7. Вычисление $SS_{общ}$	$У_{11}$	СП	Значение N в регистре ПО
	$У_{12}$	СП	
	⋮	⋮	
8. Занести значение $SS_{общ}$ в таблицу результатов анализа	$У_{mn}$	СП	Значение $SS_{общ}$ на индикаторе и в регистре П1
9. Вычисление $SS_{вар}$	m	СП	Значение m в регистре ПО
	T_1	СП	
	n_1	СП	
	T_2	СП	
	n_2	СП	
	⋮	⋮	
10. Занести значение $SS_{вар}$ в таблицу результатов анализа	T_m	СП	Значение $SS_{вар}$ в регистре П2 и на индикаторе
	n_m	СП	

Продолжение

Содержание	Набрать число	Выполнить команду	Результат
11. Вычисление $SS_{повт}$	n	СП	Значение n в регистре ПО
	H_1	СП	
	m_1	СП	
	H_2	СП	
	m_2	СП	
	⋮	⋮	
	H_n	СП	
12. Занести значение $SS_{повт}$ в таблицу результатов анализа	m_n	СП	Значение $SS_{повт}$ в регистре П3 и на индикаторе
13. Вычислить $SS_{ош}$		СП	Значение $SS_{ош}$ в регистре ПИ и на индикаторе
14. Занести значение $SS_{ош}$ в таблицу результатов анализа			
15. Вычислить $S^2_{вар}$		СП	Значение $S^2_{вар}$ в регистре П2 и на индикаторе
16. Занести значение $S^2_{вар}$ в таблицу результатов			
17. Вычислить $S^2_{повт}$		СП	Значение $S^2_{повт}$ в регистре и на индикаторе
18. Занести значение $S^2_{повт}$ в таблицу результатов			
19. Вычислить $S^2_{ош}$		СП	Значение $S^2_{ош}$ в регистре П4 и на индикаторе

Продолжение

Содержание	Набрать число	Выполнить команду	Результат
20. Занести значение $S^2_{ош}$ в таблицу результатов			
21. Вычислить $F_{факт\ вар}$		СП	Значение $F_{факт\ вар}$ на индикаторе
22. Занести в таблицу значение $F_{факт\ вар}$			
23. Вычислить $F_{факт\ повт}$		СП	Значение $F_{факт\ повт}$ на индикаторе
24. Занести значение $F_{факт\ повт}$ в таблицу результатов анализа			
25. Вычислить $НСР_{0,05}$ для пары средних значений $\overline{У}_j$ и $\overline{У}_к$ по вариантам опыта			
	n_j	СП	
	$n_к$	СП	
26. Занести значение $НСР_{0,05\ вар}$ в таблицу результатов	$t_{0,05}$	СП	Значение $НСР_{0,05}$ для средних значений по вариантам на индикаторе
27. Вычислить $НСР_{0,01}$ для пары средних значений $\overline{У}_j$ и $У_к$ по вариантам опыта	$t_{0,01}$	СП	Значение $НСР_{0,01}$ для средних значений $\overline{У}_j$ по вариантам на индикаторе
28. Занести значение $НСР_{0,01}$ для вариантов в таблицу результатов анализа			
29.* Вычисление $НСР_{0,05}$ * для пары средних значений $У_j$ и $У_к$ по повторностям опыта		БП74	Значение $НСР_{0,05}$ для средних значений $\overline{У}_l$ по повторностям на индикаторе
	m_l	СП	
	$m_к$	СП	
	$t_{0,05}$	СП	

* НСР для средних значений по повторностям вычисляется лишь в том случае, если значение F-критерия для повторностей статистически значимо.

Продолжение

Содержание	Набрать число	Выполнить команду	Результат
30. Занести значение $НСР_{0,05}$ для пары средних значений $У_l$ и $У_к$ по повторностям опыта в таблицу результатов анализа			
31. Вычисление $НСР_{0,01}$ для пары средних значений $У_l$ и $У_к$ по повторностям опыта	$t_{0,01}$	СП	Значение $НСР_{0,01}$ для средних значений $У_l$ и $У_к$ по повторностям на индикаторе
32. Занести значение $НСР_{0,01}$ по повторностям в таблицу результатов			
33. При неравномерных комплексах, вычисляя НСР для вариантов с другими значениями n_j и $n_к$ выполнить команду БП74 и перейти к пункту 25. При вычислении НСР для повторностей при тех же условиях выполнить команду БП74 и перейти к пункту 29			
34. Очистка регистров памяти П2, П3, П4, (если все НСР вычислены)		СП	0

Для практического использования алгоритмы вычисления по программе, представленной в табл. V, удобнее записать в строчку. При этом введем следующие символы: значения, помещенные в квадратные скобки, означают, что их следует набирать на клавиатуре калькулятора, символы без скобок означают команды, которые надо выполнять, нажимая соответствующие клавиши калькулятора. Фигурные скобки указывают на то, что значения, заключенные в них, следует списать с индикатора в таблицу результатов анализа.

С учетом этих указаний, алгоритм вычисления при дисперсионном анализе данных по программе примет следующий вид (начиная с пункта 4 предыдущей таблицы V).

[m — 1] ПА [n — 1] ПВ [$df_{ош}$] ПС [ΣT_i] В/О С/П [N] С/П;
[$У_{11}$] С/П [$У_{12}$] С/П... [$У_{mn}$] С/П {$SS_{общ}$} [m] С/П; [T_1] С/П [n_1] С/П [T_2] С/П [n_2] С/П... [T_m] С/П [n_m]; С/П {$SS_{вар}$} [n] С/П [H_1] С/П [m_1] С/П [H_2] С/П [m_2];
С/П... [H_n] С/П [m_n] С/П {$SS_{повт}$} С/П {$SS_{ош}$} С/П; {$S^2_{вар}$} С/П {$S^2_{повт}$} С/П {$S^2_{ош}$} С/П {$F_{факт\ вар}$};
С/П {$F_{факт\ повт}$} * [n_j] С/П [$П_к$] С/П [$t_{0,05}$] С/П; {$НСР_{0,05\ вар}$} [$t_{0,01}$] С/П {$НСР_{0,01\ вар}$} БП74** [m_i]; С/П [$m_к$] С/П [$t_{0,05}$] С/П {$НСР_{0,01\ повт}$} [$t_{0,01}$] С/П; {$НСР_{0,01\ повт}$} *** БП 93 С/П (ноль на индикаторе).

---

* См. примечание к таблице V.

** При анализе неравномерных комплексов, после вычисления НСР для одного набора значений и для перехода к вычислению НСР по новым значениям n и m необходимо выполнить команду БП-74 и дальнейшие вычисления проводить по алгоритму, начиная с команды, помеченной**.

Контрольные примеры:

А. Равномерный комплекс.

Таблица исходных данных

Варианты	Повторности n_i 1	2	3	4	T_i	n_j
1	50	54	67	57	228	4
2	57	53	69	57	236	4
3	54	65	74	59	252	4
H_i	161	172	210	173	716	12
m_i	3	3	3	3	12	—

$N = \Sigma n = \Sigma m = 12$,

$n = 4$,

$m = 3$,

$df_{общ} = N - 1 = 12 - 1 = 11$,

$df_{вар} = m - 1 = 3 - 1 = 2$,

$df_{повт} = n - 1 = 4 - 1 = 3$,

$df_{ош} = df_{общ} - df_{вар} - df_{повт} = 11 - 2 - 3 = 6$.

Таблица результатов дисперсионного анализа

Виды варьирования	Степени свободы	Суммы квадратов SS	Средний квадрат S^2	$F_{факт}$	$F_{табл}$ 0,05	$F_{табл}$ 0,01	t 0,05	t 0,01	НСР 0,05	НСР 0,01
Общее	11	998,667	—	—	—	—	—	—	—	—
Варианты	2	74,667	37,3335	3,327	5,14	10,92	—	—	5,80	8,78
Повториости	3	456,667	152,22233	13,564	4,76	9,78	—	—	6,693	10,14
Ошибка	6	67,333	11,222166	—	—	—	2,447	3,707	—	—

Таблица результатов дисперснонного анализа

Виды варьирования	Степени свободы	Сумма квадратов	Средний квадрат	$F_{факт}$	$F_{табл}$ 0,05	$F_{табл}$ 0,01	t 0,05	t 0,01	НСР 0,05	НСР 0,01
Общее	9	297,6	—	—	—	—	—	—	—	—
Варианты	2	0,226	0,133	0,0055	6,94	18,00	—	—	$НСР_{33} = 11,9$ $НСР_{34} = 10,47$ $НСР_{22} = 13,71$ $НСР_{23} = 12,52$ $НСР_{33} = 11,19$	$НСР_{33} = 18,57$ $НСР_{34} = 17,37$ $НСР_{22} = 22,74$ $НСР_{23} = 20,76$ $НСР_{33} = 18,57$
Повториости	3	199,766	66,588666	2,73	6,59	16,69	—	—		
Ошибка	4	97,568	24,392	—	—	—	2,776	4,604	—	—

В данном примере, поскольку различия средних значений по вариантам опыта статистически незначимы ($F_{факт\ вар} < F_{табл}$), ($3{,}327 < 5{,}14$) вычисление НСР для вариантов не имеет смысла. Они вычислены нами для проверки программы по контрольному примеру.

Так как в этом примере статистически значимых эффектов ни для вариантов, ни для повторностей не выявлено (все $F_{факт} < F_{теоретич}$) вычислять НСР в принципе не следовало бы. Они приведены для иллюстрации контрольного примера.

Б. Неравномерный комплекс.

Таблица исходных данных

Варианты	Повторности				T_j	n_j
	1	2	3	4		
1	—	54	67	57	178	3
2	57	53	69	57	236	4
3	54	65	—	59	178	3
H_i	111	172	136	173	—	—
m_i	2	3	2	3	—	—

$N = \Sigma n = \Sigma m = 10$,

$n = 4$,

$m = 3$,

$df_{общ} = N - 1 = 10 - 1 = 9$,

$df_{вар} = m - 1 = 3 - 1 = 2$,

$df_{повт} = n - 1 = 4 - 1 = 3$,

$df_{ош} = df_{общ} - df_{вар} - df_{повт} = 9 - 2 - 3 = 4$.

Приложение IV

Программа вычисления коэффициента линейной корреляции (r_{yx}) и параметров «a_{yx}», «$в_{yx}$», «S_{yx}» линейной регрессии вида $У = а + вх \pm S$.

I. Форма представления исходных данных: ряды парных значений x и y; $x_1, x_2, x_3, \ldots x_i, \ldots x_N$; $y_1, y_2, y_3, \ldots y_i, \ldots y_N$.

II. Символы и формулы вычислений x_i — значение независимой переменной (аргумента)

y_i — значения зависимой переменной (функции),

N — число парных значений x_i и $У_i$,

r_{yx} — коэффициент линейной корреляции между переменными y и x,

a_{yx} (a) — свободный член уравнения линейной регрессии,

$в_{yx}$ (в) — коэффициент линейной регрессии,

S_{yx} — ошибка уравнения линейной регрессии.

$$r_{yx} = \frac{\Sigma X_i У_i - \frac{\Sigma X_i \Sigma У_i}{N}}{\sqrt{\left(\Sigma X_i^2 - \frac{(\Sigma X_i)^2}{N}\right)\left(\Sigma У_i^2 - \frac{(\Sigma У_i)^2}{N}\right)}};$$

$$b_{yx} = \frac{\Sigma X_i У_i - \Sigma X_i \Sigma У_i / N}{\Sigma X_i^2 - (\Sigma X_i^2)/N}; \qquad a_{yx} = \frac{\Sigma У_i - b_{yx}\Sigma X_i}{N};$$

$$S_{yx} = \sqrt{\frac{(1 - r_{yx}^2)\,[\Sigma У_i - (\Sigma У_i)^2 / N]}{N - 1}}$$

III. Програма расчета линейной корреляции и регрессии

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	ПД	4Г	20	ИП8	68	40	ИП3	63	60	СП	50	80	×	12
01	1	01	21	ИП0	60	41	ИП1	61	61	Fx^2	22	81	ИПС	6
02	—	11	22	+	10	42	Fx^2	22	62	/—/	0L	82	÷	13
03	ПС	4	23	П0	40	43	ИПД	6Г	63	1	01	83	F√	21
04	СП	50	24	ИП8	68	44	÷	13	64	+	10	84	СП	50
05	П9	49	25	ИП9	69	45	—	11	65	П6	46	85	Сх	0Г
06	Fx^2	22	26	×	12	46	П8	48	66	ИП9	69	86	П0	40
07	ИП3	63	27	ИП4	64	47	ИП2	62	67	ИП8	68	87	П1	41
08	+	10	28	+	10	48	ИП0	60	68	—	13	88	П2	42
09	П3	43	29	П4	44	49	Fx^2	22	69	СП	50	89	П3	43
10	ИП9	69	30	СП	50	50	ИПД	6Г	70	ИП1	61	90	П4	44
11	ИП1	61	31	БП	51	51	÷	13	71	×	12	91	СП	50
12	+	10	32	05	05	52	—	11	72	ИП0	60			
13	П1	41	33	ИП1	61	53	П7	47	73	xy	14			
14	СП	50	34	ИП0	60	54	ИП8	68	74	—	11			
15	П8	48	35	×	12	55	×	12	75	ИПД	6Г			
16	Fx^2	22	36	ИПД	6Г	56	F√	21	76	÷	13			
17	ИП2	62	37	÷	13	57	ИП9	69	77	СП	50			
18	+	10	38	—	11	58	xy	14	78	ИП6	66			
19	П2	42	39	П9	49	59	÷	13	79	ИП7	67			

IV. Инструкция к программе по расчету линейной корреляции и регрессии

Содержание	Набрать число	Выполнить команду	Результат
1. Перейти в режим программирования		В/О; F; ПРГ	00
2. Ввести программу		см. табл. III	

Продолжение

Содержание	Набрать число	Выполнить команду	Результат
3. Перейти в режим ручного счета		F; АВТ	
4. Занести число «N»	N	В/О с/п	(N — 1)
5. Занести значенне x_1	x_1	с/п	Σx_i
6. Занести значение y_1	y_1	с/п	$\Sigma x_i y_i)$
7. Занести значение x_2	x_2	с/п	Σx_i
8. Занести значение y_2	y_2	с/п	$\Sigma (x_i y_i)$
⋮	⋮	⋮	
9. Занести значение x_N	x_N	с/п	$\Sigma (x_N$
10. Занести значенне y_N	y_N	с/п	$\Sigma (x_N \; y_N$
11. Перейти к вычислению r_{yx}		БПЗЗ с/п	r_{yx}
12. Вычислить $в_{yx}$		с/п	b_{yx}
13. Вычислить a_{yx}		с/п	a_{yx}
14. Вычислить S_{yx}		с/п	S_{yx}
15. Очистить регистры памяти		с/п	0

Для практических вычислений удобнее пользоваться не инструкцией, а следующим алгоритмом, начиная с пункта 4 инструкции (усл. обозначения см. в Приложении III):

$$[N]\ В/О\ С/П\,[x_1]\ С/П\ [У_1]\ С/П\ldots;[x_N\,]\ С/П\ [У_N\,]\ С/П;$$

$$БП\ 33\ С/П\ \{r_{yx}\}\ ;\ С/П\{b_{yx}\}\ ;\ С/П\{a_{yx}\};$$

$$С/П\ \{S_{yx}\}\ ;\ С/П\ (0).$$

Контрольный пример

x: 2; 4; 5;

y: 3; 6; 7;

n = 3.

$r_{yx} = 0{,}99587064,$

$b_{yx} = 1{,}3571429,$

$a_{yx} = 0{,}357143,$

$S_{yx} = 0{,}1889157.$