СПРАВОЧНИК

Ш. Е. ЦИМРИНГ

СПЕЦИАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ И ОПРЕДЕЛЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

АЛГОРИТМЫ • ПРОГРАММЫ ДЛЯ МИКРОКАЛЬКУЛЯТОРОВ

МОСКВА „РАДИО И СВЯЗЬ"
1988

ББК 32.937
Ц61
УДК 681.321.0

Рецензент: докт. физ.-мат. наук В. И. ГАЙДУК

Редакция литературы по вычислительной технике

Цимринг Ш. Е.

Ц 61 Специальные функции и определенные интегралы. Алгоритмы. Программы для микрокалькуляторов: Справочник. — М.: Радио и связь, 1988. — 272 с.: ил.

ISBN 5-256-00106-X

Содержит алгоритмы вычисления значений специальных функций вещественного и комплексного аргумента и соответствующие программы для микрокалькуляторов «Электроника» Б3-34, МК-54, МК-56, МК-52, МК-61. Приведены алгоритмы и программы вычисления нулей специальных функций и нулей их производных, определенных интегралов, в том числе несобственных, и интегралов от функций комплексного переменного. В справочнике около 250 программ.

Для инженерно-технических работников, преподавателей высших и средних учебных заведений, студентов вузов.

Ц $\frac{2402020000-146}{046(01)-88}$ 100-88 ББК 32.937

Справочное издание

ЦИМРИНГ ШУЛИМ ЕФИМОВИЧ

СПЕЦИАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ И ОПРЕДЕЛЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ. АЛГОРИТМЫ. ПРОГРАММЫ ДЛЯ МИКРОКАЛЬКУЛЯТОРОВ

Справочник

Заведующая редакцией Г. И. Козырева. Редактор Т. М. Толмачева
Художественный редактор Н. С. Шеин. Переплет художника Н. А. Пашуро
Техническая редактор З. Н. Ратникова. Корректор Л. А. Буданцева

ИБ № 1557

Сдано в набор 10.12.87. Подписано в печать 02.08.88. Т-14662.
Формат 50×88 1/16. Бумага офсетная № 2. Гарнитура литературная Печать офсетная
Усл. печ. л. 16,66. Усл. кр.-отт. 16,66. Уч.-изд. л. 19,63. Тираж 30 000 экз. Изд. № 21851
Зак. № 871. Цена 1 р. 30 к.
Издательство «Радио и связь», 101000 Москва, Почтамт, а/я 693

Московская типография № 4 Союзполиграфпрома при Государственном комитете СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли.
Москва, И-41, Б. Переяславская, 46

ISBN 5-256-00106-X

Предисловие

К настоящему времени выпущено несколько справочных изданий, содержащих среди других разделов программы вычисления специальных функций на программируемых микрокалькуляторах (ПМК) (например, [1—4, 15]). Потребность в такого рода изданиях продиктована, с одной стороны, достоинствами ПМК как дешевых и портативных средств решения простых, но весьма часто возникающих задач, а с другой — широким применением специальных функций не только в теоретических исследованиях, но и в самых разных технических приложениях.

И все же нужно констатировать далеко не полную реализацию возможностей серийных ПМК. Прежде всего это относится к специальным функциям комплексного аргумента. Сравнительно скромное место, которое занимают таблицы этих функций в известных публикациях, объясняется, по-видимому, лишь большим объемом таблиц функций, у которых минимум два аргумента и два значения. Отметим также, что в указанных выше книгах рассматривается вычисление лишь значений функций. Между тем в той же, а иногда и в большей степени необходимо располагать значениями нулей, производных и пр., т. е. тем, что обычно составляет заметную часть содержания соответствующих справочных руководств.

Что касается определенных интегралов, то применительно к ПМК публиковались в основном программы, базирующиеся на формулах прямоугольников, трапеций и парабол. В ряде случаев эти формулы дают низкую скорость сходимости, что существенно для ПМК с их малым быстродействием. Наконец, интерес представляет вычисление несобственных интегралов и интегралов в плоскости комплексного переменного, через которые выражаются и многие специальные функции.

В предлагаемой книге акцент делается на функциях комплексного аргумента. Представлены программы для большинства используемых специальных функций. Если некоторая программа охватывает не всю область определения функции, то, как правило, даются программы, основанные на альтернативных алгоритмах, указывается погрешность получаемого результата по каждому из них. Точность результата в основном соответствует пяти или шести верным значащим цифрам. Во всех случаях приводятся более короткие программы функций вещественного аргумента.

Для функций Бесселя, Эйри и частично для ортогональных многочленов включены программы вычисления производных, нулей функций и нулей их производных, а также значения функций и производных в нулях.

В разделе, посвященном определенным интегралам, кроме стандартных программ даются программы, реализующие алгоритмы квадратур Гаусса и Чебышева, отличающихся высокой скоростью сходимости для достаточно гладких функций. Квадратуры Чебышева, кроме того, экономичны по числу команд и требуемых регистров памяти и потому особенно эффективны при реализации на ПМК. Приводятся программы определенных интегралов в комплексной области, программы несобственных интегралов, в том числе некоторых несобственных интегралов в комплексной области.

В приложении приведены программы интерполяции функций по Лагранжу, где вычисляются непосредственно значения интерполированной величины для числа равноотстоящих узлов интерполяции до 10 включительно. Интерполяция в совокупности с программами основных разделов книги или табличными данными может использоваться для вычисления значений специальных функций или связанных с ними величин (как это практикуется при составлении таблиц). В приложении 2 дана программа вычисления значений функций $w(z)$ комплексного аргумента, которая используется в ряде разделов теоретической физики.

В справочнике достаточно подробно описываются алгоритмы вычисления специальных функций и определенных интегралов, даются сравнительные оценки их эффективности при реализации на ЭВМ. Следует подчеркнуть, что ограниченные ресурсы ПМК по необходимости ведут к отбору предельно экономичных алгоритмов. Думается, что некоторые из них вместе с результатами их численной реализации могут оказаться полезными для работающих на других типах ЭВМ, и особенно для пользователей персональных ЭВМ. Вместе с тем отметим, что погрешности вычислений при непосредственной реализации рассматриваемых в этой книге алгоритмов на большинстве современных мини- и микроЭВМ оказываются на один-два порядка большими (в режимах с одинарной точностью), чем на ПМК.

Программы, приведенные в книге, ориентированы на ПМК «Электроника» Б3-34, МК-54, МК-56, МК-61, МК-52 и включают только те команды, которые могут быть реализованы на любом из названных микрокалькуляторов.

В начале каждого параграфа, посвященного определенному классу функций или интегралов, напоминаются их определения и описываются применяемые методы и алгоритмы, а затем даются сами программы и инструкции к ним. В более сложных случаях поясняются структуры программ, что также может быть использовано при трансляции программ на другие ЭВМ Применяются общепринятые определения и обозначения специальных функций [5—11], соответствующие, в частности, наиболее полным справочникам [9, 11]. В отдельных случаях разночтений автор придерживался классических справочных руководств Бэйтмена, Эрдейи [5] и Градштейна, Рыжика [6].

Введение

Описания программ состоят из собственно текста и инструкций. Предполагается, что читатель знаком с заводским руководством по эксплуатации ПМК (см., например, [13]) и владеет основными навыками работы на них. Тем не менее ниже приводятся сведения, необходимые для работы с программами.

Текст программы. Применяется компактная система записи программ, предложенная Трохименко и Любичем [1,3], кроме обозначений команд, требующих использования префиксной клавиши F. Здесь они приводятся в полном виде, т. е. в соответствии с заводским руководством. Программы записываются начиная с адреса 00 построчно по 10 команд в каждой полной строке. Фиксированное число команд в строке помогает быстро определить адрес нужной команды для внесения корректив в программу или организации переходов, циклов и операций с косвенной адресацией. Набор программы осуществляется в режиме программирования, переход к которому (на адрес 00) из рабочего режима (в этом режиме ПМК всегда оказывается после включения) производится нажатием клавиш В/О ПРГ. При наборе программы нужно следить за показаниями счетчика адресов команд (два последних разряда на индикаторе). *Адрес первой команды в каждой строке должен заканчиваться цифрой 0, а адрес последней команды в каждой полной строке — цифрой 9.* Соответственно *после набора последней команды такой строки на индикаторе в последних двух разрядах должно быть число, кратное 10.* Мы подробно останавливаемся на этом потому, что пропуск отдельных команд — наиболее распространенная ошибка при наборе программы.

Обозначения команд в тексте программы соответствуют обозначениям клавиш (на самих клавишах, сверху или снизу) на ПМК «Электроника Б3-34». В книге сделаны лишь два исключения: команда $\overset{\longleftarrow}{\underset{\longrightarrow}{XY}}$ (обмен содержимого регистров X и Y) для упрощения обозначается без стрелок прописными буквами XY, команда кольцевого перемещения чисел в стеке, как F, что соответствует надписи «,» на стековой клавише.

В руководствах по эксплуатации ПМК «Электроника» МК-54, МК-56, МК-61 и МК-52 некоторые тождественные по смыслу и числовым кодам с ПМК «Электроника Б3-34» команды обозначены по-другому — в соответствии с отличающимся обозначением клавиш:

Содержание команды	Б3-34	МК-54, МК-56, МК-61, МК-52
Вызов числа из регистра памяти Н	ИПН	П→x Н
Занесение числа в регистр памяти Н	ПН	x→П Н
Занесение числа в регистр РY	↑	В ↑
Операции вычисления обратных тригонометрических функций	F arcsin, F arccos, F arctg	F $\sin^{-1}$, F $\cos^{-1}$, F tg^{-1}
Обмен содержимым регистров X и Y	$\overset{\longleftarrow}{\underset{\longleftarrow}{XY}}$	↔

Примечание. Н=0, 1, 2, ..., 9, А, В, С, Д. В микрокалькуляторах «Электроника» МК-52 и МК-61 имеется еще и 15-й регистр памяти Е. В программах данной книги он не используется.

По окончании набора программы возвращение из режима программирования в рабочий режим производится нажатием клавиш F АВТ.

Инструкции к программам. Включают следующие сведения (кроме гл. 10):

1. Исходные данные — ввод параметров задачи в числовую память и регистры X, Y. Операция ввода величины a в числовой регистр Н (Н = X, Y, 0, 1, ..., 9, А, В, С, Д) будет далее обозначаться как a = РН. Однако символ РН будет иметь два значения: *наименование регистра* Н и *идентификатор числа*, хранящегося в регистре Н. В соответствии с традиционным для машинных языков оператором присваивания операцию ввода числа a в РН следовало бы тогда записать как РН = a. Применяемая обратная запись a = РН (ср. [1,3]) несколько удобнее для ПМК: сначала набирается число, затем оно направляется в нужный регистр памяти. Использование символа РН как идентификатора может распространяться и на арифметические выражения. Например, запись РА = x + Р9 означает, что сумма x и числа в регистре Р9 равна числу в РА.

Содержимое некоторых регистров памяти, куда занесены исходные данные, может сохраняться после выполнения программы. При повторении программы эти данные, если они остаются прежними, вводить не нужно; операторы ввода этих данных заключаются в круглые скобки. Некоторые данные следует вводить непосредственно перед пуском в предписанной последовательности; операторы ввода этих данных заключаются в квадратные скобки. После их ввода и до пуска содержимое регистров РХ, РY не должно изменяться.

Пример записи оператора ввода исходных данных: (a = Р0 = Р5, m = = РД), C = Р1, 3 = Р4, [7,15 = Р6, d = РХ]. Здесь число a вводится в Р0 и Р5, число m — в РД, оба числа могут вводиться только один раз перед первым выполнением программы. Числа C, 3 и 7,15 вводятся соответственно в Р1, Р4, Р6, а число d — в РХ, т. е. набирается на клавиатуре. Число 7,15, а затем число d вводятся непосредственно перед пуском.

2. Пуск. Если программа запускается с адреса 00 (наиболее частый случай), нажимаются клавиши В/0 С/П, а если с адреса КЛ (двузначное число) — то клавиши БП КЛ С/П. Обращаем внимание читателя: *перед пуском оговаривается положение переключателя Р — Г только в том случае, когда он должен быть установлен на Г.* В большинстве случаев *переключатель должен находиться в положении Р, и это только подразумевается.*

3. Результат — расположение результатов счета в регистрах X, Y и регистрах памяти, записывается также в виде операторов присваивания, но в обратной по отношению к операторам ввода форме. Например, запись РХ = a, РY = b, РС = c означает, что вычисленные значения величин a, b и c находятся соответственно в регистрах РХ, РY, РС.

4. Регистры — сводная информация о состоянии числовой памяти, необходимая при параллельном вводе других программ или включении фрагмента данной программы в более общую программу. Регистры памяти Р0, Р1, ..., Р9, РА, РВ, РС, РД классифицируют по трем категориям. *Рабочие регистры* — в них хранятся исходные данные, фигурирующие в операторах ввода в круглых скобках, и результаты вычислений. Заполнение этих регистров другой информацией нарушает работу программы или стирает полученные результаты. *Оперативные регистры* — занесение в эти регистры посторонней информации не сказывается на результатах, однако использовать их для расчетов, выходящих за рамки данной программы, нужно с осторожностью — программа стирает занесенную в них информацию. *Свободные регистры* полностью изолированы от данной программы и могут использоваться произвольно.

5. Погрешность — данные о погрешности (абсолютной или относительной) результатов вычислений. В инструкции этот пункт опускается, если алгоритм вычислений не вносит дополнительных погрешностей в результат по сравнению с относительными погрешностями основных операций и функций, указанными в заводском руководстве по эксплуатации, т. е. они не превышают $1 \cdot 10^{-6}$ для x^y и $4 \cdot 10^{-7}$ для остальных операций и функций. В книге за *абсолютную погрешность* комплексной величины $w = u + jv$ по отношению к точному или табличному значению $\bar{w} = \bar{u} + j\bar{v}$ принята $\Delta W \equiv |w - \bar{w}| = \sqrt{(u - \bar{u})^2 + (v - \bar{v})^2}$, за *относительную погрешность* $\delta W \equiv \Delta W/|W| = \sqrt{(u - \bar{u})^2 + (v - \bar{v})^2} / \sqrt{u^2 + v^2}$.

6. Время счета — приближенная формула, связывающая время счета с аргументом и другими параметрами задачи, или максимальное время счета, если оно не превышает 1 мин.

7. Пример (примеры) вычислений для каждой определяемой в программе функции. Приводится главным образом для оперативного контроля пользователем правильности набора программы и ввода исходных данных. Вместе с тем дается дополнительная информация о диапазоне значений рассчитываемых функций и погрешности результатов. Как правило, приводятся все значащие цифры результата. Обращаем внимание читателя на то, что для разных типов и даже экземпляров ПМК одного типа одна-две последние значащие цифры могут отличаться. Рядом с вычисленным по программе значением функции в скобках дается ее табличное значение со ссылкой на источник.

Очевидно, что описания программ должны быть автономными, т. е. в каждой программе по возможности должна быть представлена исчерпывающая информация о работе с ней. Поэтому каждая инструкция содержит все пункты 1—7 (кроме п.6), даже если рядом помещена однотипная программа.

Коды операций (команд). При аварийном останове (авосте) и (или) выдаче заведомо неприемлемых результатов причину следует, очевидно, искать в ошибочном вводе исходных данных или в неправильном наборе программ. Целесообразно сначала повторить ввод данных и запуск программы. Если ошибочный результат или авост повторяется, то для обнаружения неточностей в наборе программы проще всего проверить коды операций. Опытный пользователь ПМК обычно помнит коды, и проверка любой программы занимает около 2 мин.

Ниже для справок приводятся коды операций, которые представляют собой двузначные пятнадцатеричные числа. Цифрами являются N = 0,1, 2, ...,9,—, ∟, ⊏, Г, Е. Большинство команд связано с операциями, имеющими прямое отношение к регистрам памяти: ввод и вывод числа, условные и безусловные переходы с прямой и косвенной адресацией и т. д. В кодах этих команд первая цифра обозначает тип операции (она может быть и нулем), вторая — адрес регистра из всех регистров памяти. Например, команда П9 (занесение числа в Р9) имеет код 49, команда ИПВ (вызов числа из РВ) — код 6L. Вызов числа из произвольного регистра Н имеет код 6 N, где значениям Н = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, А, В, С, Д соответствуют N = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, —, ∟, ⊏, Г, Е. Коды команд этой группы приведены в таблице.

Код	Команда	Содержание команды
4N	ПН	Занесение числа в РН (в регистр Н)
6N	ИПН	Вызов числа из РН
7N	Кx≠0Н	Косвенный переход по условию $x \neq 0$ по модифицированному адресу в РН
8N	КБПН	Косвенный безусловный переход по адресу в РН
9N	Кx⩾0Н	Косвенный переход по условию $x \geqslant 0$ по адресу в РН
—N	КППН	Косвенное обращение к подпрограмме по адресу в РН
∟N	КПН	Косвенное занесение числа по адресу в РН
⊏N	Кx<0Н	Косвенный переход по условию $x < 0$ по адресу в РН
ГN	КИПН	Косвенный вызов числа по адресу в РН
ЕN	Кx=0Н	Косвенный переход по условию $x = 0$ по адресу в РН

Коды остальиых операций (с первой цифрой кода 0, 1, 2, 5):

0N, где N = 0,1, ..., 9 — набор цифры N на клавиатуре,

0N, где N = —, L, C, Г, E, — команды соответственио, /—/ ВП Сх ↑

1N, где N = 0, 1, 2, 3, 4 — команды операций + — × ÷ XY

1N, где N = 5,6, 7, 8, 9, — , L, C, Г, E, — команды вычисления функций соответственно F10^x, Fe^x, F lg, F ln, F arcsin, F arccos, F arctg, F sin, F cos, F tg,

2N, где N = 0, 1, 2, 3, 4 — команды соответственно F π, F$\sqrt{\ }$, Fx^2, F1/x, Fx^y;

5N, где N = 0,1, 2, 3 — команды соответственно С/П, БП, В/0, ПП;

5N, где N = 7, 9, [, E — команды условных переходов соответственно F$x \neq 0$, F$x \geqslant 0$, F$x < 0$, F$x = 0$;

5N, где N = Г, L, 8, — комаиды оргаиизации циклов соответствеино FL0, FL1, FL2, FL3.

Общее число реальных команд меньше полиого набора двузначиых пятнадцатеричных чисел (225).

Перечислим также коды тех операций ПМК «Электроника» МК-52» и «Электроника МК-61», которые отсутствуют у ПМК других типов (в скобках обозначены соответствующие команды):

2—; 30 (К $\overrightarrow{O'''}$; К $\overleftarrow{O'''}$) — перевод времени, выраженного в часах, минутах, секундах н долях секунд, в часы (десятичная дробь) и обратно;

26; 33 (К $\overrightarrow{O'}$; К $\overleftarrow{O'}$) — перевод угловых величин, выраженных в градусах, минутах и долях минут, в градусы (десятичная дробь) и обратно;

31 (К |x|) — определение модуля числа;
32 (К ЗН) — определение знака числа (значения функции sgn);
34 (К [x]) — выделенне целой части числа;
35 (К {x}) — выделение дробиой части числа;
36 (К max) — определеиие наибольшего из двух чисел;
37 (К $\wedge$) — логическое умножение;
38 (К $\vee$) — логическое сложение;
39 (К $\oplus$)— логическая операция ИЛИ;
3— (К ИНВ) — логическая операция ИНВЕРСИЯ;
4E; 6E — перевод числа из регистра РХ в РЕ и обратно.

Обращаем внимание читателя на то, что числа остающихся свободными регистров памяти, указанные в инструкциях к программам, должиы быть увеличены на едииицу, когда используются ПМК «Электроника МК-52» и «Электроника МК-61».

Глава 1

Арифметические действия над комплексными числами. Рациональные, алгебраические и элементарные трансцендентные функции

Рациональные, алгебраические и элементарные трансцендентные функции (РАЭТФ) помимо самостоятельного значения лежат в основе определения и вычислительных алгоритмов *высших трансцендентных функций* (ВТФ). Поэтому оптимальные схемы расчета последних существенно зависят от экономичности программ расчета РАЭТФ. Для ПМК прежде всего необходимы программы, обеспечивающие максимальную точность при минимуме числа шагов и требуемых регистров памяти. Важное, хотя и непринципиальное значение имеет время вычисления функции, которое определяется алгоритмом. Далеко не всегда удается реализовать кратчайшие программы, которые одновременно использовали бы минимальное число регистров памяти. Ниже в необходимых случаях приводятся программы того или иного вида.

Программы РАЭТФ чаще всего используются в качестве служебных (подпрограмм или других фрагментов программ), и не только при вычислении ВТФ, но и в других расчетах. Поэтому предпочтение отдается коротким программам, в каждой из которых вычисляется только одна функция. В большинстве случаев комплексная величина $z_p = x_p + jy_p$, являющаяся значением искомой функции, после окончания счета по программе оставляется в регистрах РХ и РY. Это удобно и для продолжения счета, когда программы применяются в качестве служебных. По тем же причинам программы РАЭТФ по возможности не занимают регистров Р0—Р6, которые могут понадобиться для организации циклов и операций с косвенной адресацией по модифицированным адресам.

1.1. Арифметические действия над комплексными числами

Суммирование комплексных чисел

$$z_3 = z_1 + z_2, \quad \text{где } z_{1,2,3} = x_{1,2,3} + jy_{1,2,3}.$$

Ниже приводятся две программы, отличающиеся расположением исходной велнчины z_2 и результата z_3 в регистрах стека РХ, РY.

Программа 1.1. Суммирование комплексных чисел.

ИПС + XY ИПД + С/П

Инструкция
1. Исходные данные: (x_1 = РС, y_1 = РД), [y_2 = РY, x_2 = РХ].
2. Пуск: В/О С/П.
3. Результат: РХ = y_3, РY = x_3.
4. Регистры: рабочие РС, РД; оперативные — ; свободные Р0 — РВ.
5. Время счета $t \approx 1$ с.

Программа 1.2. Суммирование комплексных чисел.

ИПД + XY ИПС + С/П

Инструкция
1. Исходные данные: (x_1 = РС, y_1 = РД), [x_2 = PY, y_2 = РХ].
2. Пуск: В/О С/П.
3. Результат: РХ = x_3, PY = y_3.
4. Регистры: рабочие РС, РД; оперативные — ; свободные Р0 — РВ.
5. Время счета $t \approx 1$ с.

Умножение и деление комплексных чисел выполняются по формулам

$$z_3 = z_1 z_2;\; x_3 = x_1 x_2 - y_1 y_2;\; y_3 = x_1 y_2 + x_2 y_1; \tag{1.1}$$

$$z_3 = \frac{z_1}{z_2};\; x_3 = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2};\quad y_3 = \frac{y_1 x_2 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}, \tag{1.2}$$

где $z_{1,2,3} = x_{1,2,3} + jy_{1,2,3}$.

Программы деления целесообразно использовать как комбинированные для выполнения с их помощью и операции умножения путем пуска с промежуточного адреса. В связи с этим запишем операцию деления как умножение на обратное число:

$$z_4 = z_3 z_1,\ \text{где}\ z_3 = 1/z_2;$$
$$x_3 = x_2/(x_2^2 + y_2^2);\quad y_3 = -y_2/(x_2^2 + y_2^2). \tag{1.3}$$

Программа 1.3. Умножение комплексных чисел (1.1).

ИПВ ИПС × ИПА ИПД × + ИПА ИПС ×
ИПВ ИПД × — С/П

15 шагов, 4 регистра памяти
Инструкция
1. Исходные данные: (x_1 = РА, y_1 = РВ, x_2 = РС, y_2 = РД).
2. Пуск: В/О С/П.
3. Результат: РХ = x_3, PY = y_3.
4. Регистры: рабочие РА — РД; оперативные —; свободные Р0 — Р9.
5. Время счета $t \approx 5$ с.

Пример. (3 + j4) (5 + j6) = — 9 + j38.

Программа 1.4. Умножение комплексных чисел (1.1).

ПС ИПВ × XY ПД ИПА × + ИПА ИПС
× ИПВ ИПД × — С/П

16 шагов, 4 регистра памяти. В отличие от программы 1.3 один из операндов так же, как и результат, располагается в РХ и PY, что упрощает выполнение последовательности действий.
Инструкция
1. Исходные данные: (x_1 = РА, y_1 = РВ), [y_2 = PY, x_2 = РХ].
2. Пуск: В/О С/П.
3. Результат: РХ = x_3, PY = y_3.
4. Регистры: рабочие РА, РВ; оперативные РС, РД; свободные Р0 — Р9.
5. Время счета $t \approx 5$с.

Пример. (5 + j7) (2 — j3) = 31 — j.

Программа 1.5. Умножение комплексных чисел (1.1).

XY FBx ИПВ × XY ПС ИПА × + XY
ИПА × ИПС ИПВ × — С/П

17 шагов, 3 регистра памяти. По сравнению с программой 1.3 число требуемых регистров памяти сокращено, но длина программы возросла.
Инструкция
1. Исходные данные: (x_1 = РА, y_1 = РВ), [y_2 = PY, x_2 = РХ].
2. Пуск: В/О С/П.
3. Результат: РХ = x_3, PY=y_3.
4. Регистры: рабочие РА, РВ; оперативные РС; свободные Р0 — Р9, РД.
5. Время счета $t \approx 5$с.

Пример. (8 + j9) (—6 + j12) = — 156 + j42.

Программа 1.6. Умножение комплексных чисел (1.1).
Вариант 1.

XY FBx ИПВ × XY ИПА XY × FBx F,
+ ИПА XY F, × XY ИПВ × — С/П

20 шагов, 2 регистра памяти. По сравнению с предыдущими программами число требуемых регистров памяти сокращено до двух, длина программы возросла.
Инструкция
1. Исходные данные: (x_1 = РА, y_1 = РВ), [y_2 = PY, x_2 = РХ].
2. Пуск: В/О С/П.
3. Результат: РХ = x_3, PY = y_3.
4. Регистры: рабочие РА, РВ; оперативные — ; свободные Р0 — Р9, РС, РД.
5. Время счета $t \approx 5$ с.

Вариант 2.

XY FBx ИПА × XY ИПВ XY × FBx F,
— ИПВ XY F, × XY ИПА × + С/П

Этот вариант программы отличается только обратным расположением в РХ, PY действительной и мнимой частей результата, все остальные пункты инструкции те же, что в варианте 1 программы. Результат: РХ = y_3, PY = x_3.

Пример. (15 — j12) (21 — j5) = 255 — j327.

Программа 1.7. Умножение и сложение комплексных чисел $z_4 = z_1 z_2 + z_3$.

ИПВ ИПС × ИПА ИПД × + + ИПА ИПС
× ИПВ ИПД × — ИП9 + С/П

18 шагов, 4 регистра памяти. Программа полезна при выполнении последовательности арифметических действий.
Инструкция
1. Исходные данные: (x_1 = РА, y_1 = РВ, x_2 = РС, y_2 = РД, x_3 = Р9), [y_3 = PY].
2. Пуск: В/О С/П.
3. Результат: РХ = x_4, PY = y_4.
4. Регистры: рабочие Р9 — РД; оперативные —; свободные Р0 — Р8.
5. Время счета $t \approx 5$ с.

Пример. (15 — j12) (21 — j5) + 187 — j210 = 442 — j537.

Программа 1.8. Обратная величина комплексного числа

/—/ ↑ Fx² ИПД Fx² + ÷ ИПД FBx ÷
С/П

11 шагов, 1 регистр памяти.
Инструкция
1. Исходные данные: (x = РД), [y = РХ].
2. Пуск: В/О С/П.

3. Результат: $PX = x_1$, $PY = y_1$.
4. Регистры: рабочие РД; оперативные—; свободные Р0 — РС.
5. Время счета $t \approx 3$ с.
Пример. $z_1 = 1/(3 + j4) = 0{,}12 - j0{,}16$.

Программа 1.9. Деление или умножение комплексных чисел с занесением в память делимого и обратной величины делителя (1.1), (1.2),

$$z_3 = \frac{z_1}{z_2} = \frac{1}{z_2} z_1, \quad z_3 = z_1 z_2.$$

/—/ ↑ Fx² ИПС Fx² + ÷ ИПС FBx ÷
ПС ИПВ × XY ПД ИПА × + ИПА ИПС
× ИПВ ИПД × — С/П

26 шагов, 4 регистра памяти.

Инструкция

1. Исходные данные: деление $z_3 = z_1/z_2$ (x_1 = PA, y_1 = PB), x_2 = PC, [y_2 = PX]; умножение $z_3 = z_1 z_2$ (x_1 = PA, y_1 = PB), [y_2 = PY, x_2 = PX].
2. Пуск: деление В/О С/П; умножение БП 10 С/П.
3. Результат: деление $PX = x_3$, $PY = y_3$, PC = Re $(1/z_2)$, РД = Im $(1/z_2)$; умножение $PX = x_3$, $PY = y_3$.
4. Регистры: рабочие РА — РС, РД; оперативные —; свободные Р0 — Р9.
5. Время счета: деление $t \approx 8$ с, умножение $t \approx 5$ с.

Примеры. $(3 + j4) / (7 + j9) = 0{,}43846154 + j0{,}0076923$; $1/(7 + j9) = 0{,}053846153 - j0{,}069230769$; $(5 + j7)(8 + j3) = 19 + j71$.

Программа 1.10. Деление или умножение комплексных чисел с занесением в память делимого (1.1), (1.2), $z_3 = z_1/z_2 = (1/z_2)\, z_1$; $z_3 = z_1 z_2$.

/—/ ↑ Fx² ИПС Fx² + ÷ ИПС FBx ÷
XY FBx ИПВ × XY ПС ИПА × + XY
ИПА × ИПС ИПВ × — С/П

27 шагов, 3 регистра памяти. Число требуемых регистров памяти по сравнению с программой 1.9 сокращено на один, но увеличилась длина программы.

Инструкция

1. Исходные данные: деление $z_3 = z_1/z_2$ (x_1 = PA, y_1 = PB), x_2 = PC, [y_2 = PX]; умножение $z_3 = z_1 z_2$ (x_1 = PA, y_1 = PB), [y_2 = PY, x_2 = PX].
2. Пуск: деление В/О С/П; умножение БП 10 С/П.
3. Результат: деление и умножение $PX = x_3$, $PY = y_3$.
4. Время счета: деление $t \approx 8$ с, умножение $t \approx 5$ с.

Примеры. $(8 + j9)/(3 + j) = 3{,}3 + j1{,}9$; $(17 + j2)(11 - j) = 189 + j5$.

Программа 1.11. Деление комплексных чисел с занесением в память делителя и квадрата его модуля (1.2).

ПС ИПА × XY ПД ИПВ × + ИПА ИПД
× ИПС ИПВ × — ИПА Fx² ИПВ Fx² +
ПД ÷ XY ИПД ÷ С/П

26 шагов, 4 регистра памяти.

Инструкция

1. Исходные данные: (x_2 = PA, y_2 = PB), [y_1 = PY, x_1 = PX].
2. Пуск: В/О С/П.
3. Результат: $PX = x_3$, $PY = y_3$, $РД = |z_2|^2 = x_2^2 + y_2^2$.
4. Регистры: рабочие РА, РВ, РД; оперативные РС; свободные Р0 — Р9.
5. Время счета $t \approx 8$ с.

Примеры. $(3 + j4)/(5 + j6) = 0{,}63934426 + j0{,}032786885$; $|5 + j6|^2 = 61$.

1.2. Многочлены вещественного и комплексного аргументов. Целая степень комплексного числа

Приводятся программы вычисления следующих функций:

$$z_1 = z^{\pm n}, \qquad n = 1, 2, \ldots; \tag{1.4}$$

$$S = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k, \quad n = 1, 2, \ldots, 11; \tag{1.5}$$

$$z_1 = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k, \quad n = 1, 2, \ldots, 9; \tag{1.6}$$

$$z_1 = \sum_{k=0}^{n} A_k z^k, \quad n = 1, 2, \ldots, 5; \tag{1.7}$$

$$S = x^m \sum_{k=0}^{n} a_k x^k, \quad n = 1, 2, \ldots, 10; \ m = \pm 1, \pm 2, \pm 3 \ldots; \tag{1.8}$$

$$z_1 = z^m \sum_{k=0}^{n} a_k z^k, \quad n = 1, 2, \ldots, 8; \ m = 1, 2, \ldots, \tag{1.9}$$

где $z = x + jy$; $z_1 = x_1 + jy_1$; $A_k = a_k^{(1)} + ja_k^{(2)}$; $a_k^{(1)}, a_k^{(2)}$ — вещественные числа.

Программы для многочленов (1.5), (1.6) с бо́льшими n можно найти в [1,3], однако они существенно длинее, чем приводимые ниже.

Для многочленов используется схема Горнера. Например, для (1.7)

$$z_1 = [\ldots[(A_n z + A_{n-1}) z + A_{n-2}] z + \ldots + A_1] z + A_0. \tag{1.10}$$

Эта схема, эквивалентная вычислению z_1 по рекуррентной формуле

$$B_k = A_k + B_{k+1} z, \quad k = n, n-1, \ldots, 0;$$
$$B_{n+1} = 0; \quad z_1 = B_0, \tag{1.11}$$

дает существенный выигрыш в числе операций по сравнению с прямым вычислением многочленов ($(2n + 1)$ умножений и n сложений для (1.5) — (1.9) и n сложений и n умножений для (1.10)). Ясно, что наибольшее значение это имеет для рядов с комплексным аргументом. При реализации на ПМК схема Горнера по сравнению с прямым суммированием рядов обеспечивает также более рациональное распределение памяти. Так, для комплексных многочленов экономится 4 регистра памяти, что соответственно увеличивает на 4 максимальную степень рассчитываемых многочленов (при работе в полностью автоматическом режиме). Погрешности округления коэффициентов многочленов и аргумента влияют на погрешность результата, полученного по схеме Горнера и формулам (1.5) — (1.9), примерно одинаково [10].

В программах вычисления многочленов (1.6), (1.9) коэффициент при старшем члене может быть комплексным $|a_n \to A_n = a_n^{(1)} + ja_n^{(2)}|$.

Программа 1.12. Целая положительная степень комплексного числа $z_1 = z^n$, $n = 2, 3, \ldots$.

ПС ИПВ × XY ПД ИПА × + ИПА ИПС
× ИПВ ИПД × — FL0 00 С/П

18 шагов, 5 регистров памяти.

Инструкция

1. Исходные данные: $(n-1)$ = P0, [y = PB, x = PA].
2. Пуск: В/О С/П.
3. Результат: PX = x_1, PY = y_1.
4. Регистры: рабочие PA, PB; оперативные P0, PC, PД; свободные P1 — P9.
5. Время счета $t \approx (5n)$ с.

Пример. $(3+j4)^4 = -527 - j336$, $t = 15$ с.

Программа 1.13. Целая положительная степень комплексного числа $z_1 = z^n$, $n = 2,3, \ldots$,

```
XY   FBx  ИПД  ×    XY   ИПС  XY   ×    FBx  F,
+    ИПС  XY   F,   ×    XY   ИПД  ×    —    FL0
00   С/П
```

22 шага, 3 регистра памяти. Число требуемых регистров памяти по сравнению с программой 1.12 сокращено до трех, но длина программы возросла на четыре шага.

Инструкция

1. Исходные данные: $(n-1)$ = P0, [y = PД, x = PC].
2. Пуск: В/О С/П.
3. Результат: PX = x_1, PY = y_1.
4. Регистры: рабочие PC, PД; оперативные P0; свободные P1 — PB.
5. Время счета $t \approx (5n)$ с.

Пример. $(3+j4)^3 = -117 + j44$, $t = 12$ с.

Программа 1.14. Целая положительная степень комплексного числа $z_1 = z^n$ (операция умножения комплексных чисел выделена в подпрограмму).

```
ПП   05   FL0  00   С/П  ПС   ИПВ  ×    XY   ПД
ИПА  ×    +    ИПА  ИПС  ×    ИПВ  ИПД  ×    —
В/О
```

21 шаг, 5 регистров памяти.

Инструкция

1. Исходные данные: возведение в степень $z_1 = z^n$ $(n-1)$ = P0, [y = PB, x = PA]; умножение $z_3 = z_1 z_2$ (x_1 = PA, y_1 = PB), [y_2 = PY, x_2 = PX].
2. Пуск: возведение в степень В/О С/П; умножение — вызов операции умножения командой ПП 05 из внешней программы, использующей данную программу как фрагмент.
3. Результат: возведение в степень PX = x_1, PY = y_1; умножение PX = x_3, PY = y_3.
4. Время счета: возведение в степень $t \approx (5n)$ с; умножение $t \approx 5$ с.

Пример. $(2-j)^5 = -38 - j41$.

Программа 1.15. Целая положительная степень комплексного числа $z_1 = z^n$ (операция умножения комплексных чисел выделена в подпрограмму).

```
ПП   05   FL0  00   С/П  XY   FBx  ИПД  ×    XY
ИПС  XY   ×    FBx  F,   +    ИПС  XY   F,   ×
XY   ИПД  ×    —    В/О
```

25 шагов, 3 регистра памяти. По сравнению с программой 1.14 число регистров памяти сокращено на два, но длина программы возросла.

Инструкция

1. Исходные данные: возведение в степень $z_1 = z^n$ $(n-1)$ = P0, [y = PД, x = PC]; умножение $z_3 = z_1 z_2$ (x_1 = PC, y_1 = PД), [y_2 = PY, x_2 = PX].

2. Пуск: возведение в степень В/О С/П; умножение — вызов операции умножения внешней программой по команде ПП 05.
3. Результат: возведение в степень PX = x_1, PY = y_1; умножение PX = x_3, PY = y_3.
4. Регистры: рабочие PC, PД; оперативные P0; свободные P1 — PB.
5. Время счета: возведение в степень $t \approx (5n)$ с; умножение $t \approx 5$ с.

Пример. $(2+j3)^2 = -5 + j12$.

Программа 1.16. Целая отрицательная степень комплексного числа $z_1 = z^{-n}$, $n = 1,2, \ldots$ (в память заносится также квадрат модуля аргумента $|z|^2$).

```
ПС   ИПА  ×    XY   ПД   ИПВ  ×    +    ИПА  ИПД
×    ИПС  ИПВ  ×    —    ИПА  Fx²  ИПВ  Fx²  +
ПД   ÷    XY   ИПД  ÷    FL0  00   С/П
```

28 шагов, 5 регистров памяти. За основу взята программа 1.11.

Инструкция

1. Исходные данные: (x = PA, y = PB), n = P0, [0 = PY, 1 = PX].
2. Пуск: В/О С/П.
3. Результат: PX = x_1, PY = y_1, PД = $|z|^2$.
4. Регистры: рабочие PA, PB; оперативные P0, PC, PД; свободные P1 — P9.
5. Время счета $t \approx (8n)$ с.

Пример. $(1+j3)^{-5} = 3{,}16 \cdot 10^{-3} + j1{,}2 \cdot 10^{-4}$; $|1+j3|^2 = 10$, $t = 40$ с.

Программа 1.17. Многочлены вещественного аргумента $S = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$, $n = 1, 2, \ldots, 11$.

```
↑    ↑    КИП0  ×    КИП0  +    FL1  03   С/П
```

9 шагов, $n + 3$ регистра памяти.

Инструкция

1. Исходные данные: (a_n = PД, a_{n-1} = PC, a_{n-2} = PB, ..., a_0 = PK), 14 = P0, n = P1, [x = PX]. Здесь $K = 13 - n$ (номера K = 10, 11, 12, 13 присваиваются соответственно регистрам PA, PB, PC, PД).
2. Пуск: В/О С/П.
3. Результат: PX = S.
4. Регистры: рабочие PK, ..., PД; оперативные P0, P1; свободные P2, P3, ..., PL, где $L = 12 - n$ (при $n \leqslant 10$). Если $n = 11$, то свободных регистров нет.
5. Время счета $t < 20$ с.

Пример. $S = \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{11!}\right)_{x=1,25} = 3{,}4903428$ (3,4903426).

Значение в скобках соответствует табличному значению $e^{1,25}$.

Программа 1.18. Многочлены $z_1 = a_0 + a_1 z + \ldots + a_{n-1} z^{n-1} + A_n z^n$ комплексного аргумента $z = x + jy$, $n = 1, 2, \ldots, 9$, $A_n = a_n^{(1)} + j a_n^{(2)}$; $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$; $a_n^{(1)}$, $a_n^{(2)}$ — вещественные коэффициенты.

```
XY   FBx  ИП1  ×    XY   П2   ИП0  ×    +    XY
ИП0  ×    ИП2  ИП1  ×    —    КИП4 +    FL3  00
С/П
```

21 шаг, $n + 5$ регистров памяти.

Инструкция

1. Исходные данные: (a_{n-1} = P5, a_{n-2} = P6, ..., a_0 = PK), (x = P0, y = P1), n = P3, 4 = P4, [$a_n^{(2)}$ = PY, $a_n^{(1)}$ = PX]. Здесь $K = n + 4$.

Номера $K = 10, 11, 12, 13$ присваиваются регистрам соответственно РА, РВ, РС, РД.

2. Пуск: В/О С/П.
3. Результат: $РX = x_1$, $РY = y_1$.
4. Регистры: рабочие Р0, Р1, Р5, Р6, ..., РK; оперативные Р2, Р3, Р4; свободные РL — РД, где $L = n + 5$. Если $n = 9$, то свободных регистров нет.
5. Время счета при $n = 9$ $t \approx 50$ с.

Пример. $z_1 = (1+z+z^2/2!+\ldots+z^9/9!)_{z=0,5+j0,9} = 1,0248617+$

$+j\,1,2914881$ $(1,0248618+j\,1,2914878)$.

Программа 1.19. Многочлены с комплексными коэффициентами $z_1 = A_0 + A_1z + \ldots + A_nz^n$, $z = x + jy$; $A_k = a_k^{(1)} + ja_k^{(2)}$; $n = 1, 2, \ldots, 5$.

```
XY    FBx   ИП1   ×     XY    П2    ИП0   ×     +     КИП4
+     XY    ИП0   ×     ИП2   ИП1   ×     —     КИП4  +
FL3   00    С/П
```

23 шага, $2n + 5$ регистров памяти. При $n = 1, 2, 3, 4$, и $n = 5$ ввод исходных данных и расположение результатов в регистрах памяти несколько различаются.

Инструкция

1. Исходные данные при $n = 1, 2, 3, 4$: $a_{n-1}^{(2)} = Р5$, $a_{n-1}^{(1)} = Р6$, $a_{n-2}^{(2)} = Р7$, $a_{n-2}^{(1)} = Р8$, ..., $a_0^{(2)} = РK$, $a_0^{(1)} = Р(K+1)$, $(x = Р0$, $y = Р1)$, $n = Р3$, $4 = Р4$, $[a_n^{(2)} = РY$, $a_n^{(1)} = РX]$. Здесь $K = 2n + 3$, номера $K = 10, 11, 12, 13$ присваиваются соответственно регистрам РА, РВ, РС, РД.
2. Пуск: В/О С/П.
3. Результат: $РX = x_1$, $РY = y_1$.
4. Регистры: рабочие Р0, Р1, Р5, ..., РК; оперативные Р2 — Р4; свободные РL — РД, $L = 2n + 5$. Если $n = 4$, то свободен только регистр РД.
5. Время счета при $n = 4$ $t \approx 40$ с.
6. Исходные данные при $n = 5$: $(a_4^{(2)} = Р5$, $a_4^{(1)} = Р6$, $a_3^{(2)} = Р7$, $a_3^{(1)} = Р8$, $a_2^{(2)} = Р9$, $a_2^{(1)} = РА$, $a_1^{(2)} = РВ$, $a_1^{(1)} = РД$, $a_0^{(2)} = РД)$, $(x = Р0$, $y = Р1)$, $5 = Р3$, $4 = Р4$, $[a_5^{(2)} = РY$, $a_5^{(1)} = РX]$.
7. Пуск: В/О С/П.

Для $a_0^{(1)}$ не хватает регистра памяти, и последней операцией программы оказывается сложение промежуточной суммы с x, а не с $a_0^{(1)}$.

8. Результат: $РX = x_1 + x - a_0^{(1)}$, $РY = y_1$. Искомое значение x_1: $x_1 = РX - x + a_0^{(1)}$. Значение x может быть взято из Р0.

Пример.

$$z_1 = [j+(1+j)\,z+(1+j)\,z^2/2!+\ldots+(1+j)\,z^5/5!]_{z=0,5+j0,9} =$$
$$= -1,2679353+j2,3142186).$$

Содержимое регистров РX и РY после окончания счета при $n = 5$: $РX = -0,7679353$, $РY = 2,3142186$.

Программа 1.20. Многочлены вещественного аргумента $S = x^m \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$, $n = 1, 2, \ldots, 10$; $m = \pm 1, \pm 2, \ldots$.

Приводится два варианта программы для положительных и отрицательных m, инструкция к обоим вариантам одна и та же.

При $m = 1, 2, \ldots$

```
↑     ↑     КИП0  ×     КИП0  +     FL1   03    ×     FL2
08    С/П
```

12 шагов, $n + 4$ регистра памяти.

При $m = -1, -2, \ldots$

```
↑     ↑     КИП0  ×     КИП0  +     FL1   03    XY    ÷
FBx   FL2   09    XY    С/П
```

15 шагов, $n + 4$ регистра памяти.

Инструкция

1. Исходные данные: $(a_n = РД$, $a_{n-1} = РС$, $a_{n-2} = РВ$, ..., $a_0 = РK)$, $14 = Р0$, $n = Р1$, $|m| = Р2$, $[x = РX]$. Здесь $K = 13 - n$ (номера $K = 10, 11, 12, 13$ присваиваются соответственно регистрам РА, РВ, РС, РД).
2. Пуск: В/О С/П.
3. Результат: $РX = S$.
4. Регистры: рабочие РK, ..., РД; оперативные Р0, Р1, Р2; свободные Р3, Р4, ..., РL, где $L = 12 - n$ при $n \leqslant 9$; при $n = 10$ свободных регистров нет.
5. Время счета $t < (15 + |m|)$ с.

Примеры.

$$S = [x^{25}(1+x+x^2/2!+\ldots+x^{10}/10!)]_{x=1,25} =$$
$$= 923,88578\ (1,25^{25}\,e^{1,25} = 923,88555),\ t = 35\ с;$$
$$S = [x^{-37}(1+x+x^2/2!+\ldots+x^{10}/10!]_{x=1,25} =$$
$$= 9,0614424\cdot 10^{-4}\ (1,25^{-37}\,e^{1,25} = 9,061453\cdot 10^{-4}),\ t = 50\ с.$$

Программа 1.21. Многочлены $z_1 = z^m(a_0 + a_1z + \ldots + a_{n-1}z^{n-1} + A_nz^n)$ комплексного аргумента $z = x + jy$, $A_n = a_n^{(1)} + ja_n^{(2)}$; $a_0, a_1, \ldots, a_n^{(1)}, a_n^{(2)}$ — вещественные коэффициенты, $n = 1, 2, \ldots, 8$; $m = 1, 2, \ldots$.

```
КИП3  F,    XY    FBx   ИП1   ×     XY    ПД    ИП0   ×
+     XY    ИП0   ×     ИПД   ИП1   ×     —     ИП3   Fx=0
25    FL2   01    F,    С/П   F,    КИП4  +     БП    00
```

30 шагов, $n + 6$ регистров памяти.

Инструкция

1. Исходные данные: $(a_{n-1} = Р5$, $a_{n-2} = Р6$, ..., $a_0 = РK$, $x = Р0$, $y = Р1)$, $m = Р2$, $n + 1 = Р3$, $4 = Р4$, $[a_n^{(2)} = РY$, $a_n^{(1)} = РX]$. Здесь $K = n + 4$ (номера $K = 10, 11, 12$ присваиваются соответственно регистрам РА, РВ, РС).
2. Пуск: В/О С/П.
3. Результат: $РX = x_1$, $РY = y_1$.
4. Регистры: рабочие Р0, Р1, Р5, ..., РK; оперативные Р2 — Р4, РД; свободные РL — РС $(L = n + 5)$. При $n = 8$ свободных регистров нет.
5. Время счета $t \approx 8\,(m + n)$ с.

Пример. $z^2(1 + z + z^2/2! + \ldots + z^2/8!)_{z=0,5+j} = -2,0554666 - j\,0,1497027$.

1.3. Многочлены по обратным степеням вещественного и комплексного аргументов

Приводятся программы следующих функций:

$$z_1 = b_0 + b_1/z; \qquad (1.12)$$

$$z_1 = B_0 + B_1/z; \qquad (1.13)$$

$$S = \sum_{k=0}^{n} b_k x^{-k}, \quad n = 1, 2, \ldots, 11; \qquad (1.14)$$

$$S = x^m \sum_{k=0}^{n} b_k x^{-k}, \quad n = 1, 2, \ldots, 10; \quad m = \pm 1, \pm 2, \ldots; \qquad (1.15)$$

$$z_1 = \sum_{k=0}^{n} b_k z^{-k}, \quad n = 1, 2, \ldots, 9; \qquad (1.16)$$

$$z_1 = \sum_{k=0}^{n} B_k z^{-k}, \quad n = 1, 2, \ldots, 5; \qquad (1.17)$$

$$z_1 = z^m \sum_{k=0}^{n} b_k z^{-k}, \quad n = 1, 2, \ldots, 8; \quad m = 1, 2, \ldots; \qquad (1.18)$$

$$z_1 = z^{-m} \sum_{k=0}^{n} b_k z^{-k}, \quad n = 1, 2, \ldots, 8; \quad m = 1, 2, \ldots . \qquad (1.19)$$

Здесь $z = x + jy$; $z_1 = x_1 + jy_1$; $B_k = b_k^{(1)} + jb_k^{(2)}$, b_k, $b_k^{(1)}$, $b_k^{(2)}$ — вещественные константы. При вычислениях используется схема Горнера (1.10), где следует заменить z на $1/z$. В программах вычисления многочленов (1.16). (1.18), (1.19) коэффициент при старшем члене может быть комплексным, т. е. $b_n \to B_n = b_n^{(1)} + jb_n^{(2)}$.

Многочлены типа (1.14) — (1.19) фигурируют в асимптотических разложениях ряда специальных функций.

Программа 1.22. Функция $z_1 = b_0 + b_1/z$ комплексного аргумента $z = x + jy$ (b_0 и b_1 — вещественные константы).

/—/ ↑ Fx² ИПВ Fx² + ИПС ÷ ÷ ИПВ
FBx ÷ ИПД + С/П

15 шагов, 3 регистра памяти.

Инструкция

1. Исходные данные: (x = РВ, b_1 = РС, b_0 = РД), [y = РХ].
2. Пуск: В/О С/П.
3. Регистры: рабочие РВ, РС, РД; оперативные —; свободные Р0 — РА.
4. Результат: РХ $= x_1$, РY $= y_1$.
5. Время счета $t \approx 5$ с.

Пример. $z_1 = 25/(4 + j3) + 7 = 11 - j3$.

Программа 1.23. Функция $z_1 = B_0 + B_1/z$ комплексного аргумента $z = x + jy$; $B_0 = b_0^{(1)} + jb_0^{(2)}$, $B_1 = b_1^{(1)} + jb_1^{(2)}$ сохраняются в памяти ПМК.

/—/ ↑ Fx² ИП9 Fx² + ÷ ИП9 FBx ÷
XY FBx ИПВ × XY П9 ИПА × + ИПД
+ XY ИПА × ИП9 ИПВ × — ИПС +
С/П

31 шаг, 5 регистров памяти.

Инструкция

1. Исходные данные: ($b_1^{(1)}$ = РА, $b_1^{(2)}$ = РВ, $b_0^{(1)}$ = РС, $b_0^{(2)}$ = РД), [x = Р9, y = РХ].
2. Пуск: В/О С/П.
3. Результат: РХ $= x_1$, РY $= y_1$.
4. Регистры: рабочие РА — РД; оперативные Р9; свободные Р0 — Р8.
5. Время счета $t \approx 5$ с.

Пример. $z_1 = (8 - j6)/(3 + j4) + (5 + j7) = 5 + j5$.

Программа 1.24. Функция $z_1 = B_0 + B_1/z$ комплексного аргумента $z = x + jy$ и квадрат модуля $|z|^2$; $B_0 = b_0^{(1)} + jb_0^{(2)}$, $B_1 = b_1^{(1)} + jb_1^{(2)}$.

XY FBx ИП8 × XY ПД ИП9 × + XY
ИП8 ИПД × XY ИП9 × — ИП8 Fx² ИП9
Fx² + ПД ÷ ИПВ + XY ИПД ÷ ИПА
+ С/П

32 шага, 5 регистров памяти. Комплексная константа B_1 и результат располагаются в регистрах РХ, РY. Это облегчает организацию цикла при вычислении многочленов по обратным степеням аргумента в схеме Горнера (см. программы 1.27—1.30).

Инструкция

1. Исходные данные: (x = Р8, y = Р9, $b_0^{(1)}$ = РА, $b_0^{(2)}$ = РВ), [$b_1^{(2)}$ = РY, $b_1^{(1)}$ = РХ].
2. Пуск: В/О С/П.
3. Результат: РХ $= x_1$, РY $= y_1$, РД $= |z|^2 = x^2 + y^2$.
4. Регистры: рабочие Р8 — РВ, РД: оперативные — ; свободные Р0 — Р7, РС.
5. Время счета $t \approx 10$ с.

Пример. $(8 - j6)/(3 + j4) + (5 + j9) = 5 + j7$, $|3 + j4|^2 = 25$.

Программа 1.25. Многочлены по обратным степеням вещественного аргумента $S = \sum_{k=0}^{n} b_k x^{-k}$, $n = 1, 2, \ldots, 11$.

F1/x ↑ ↑ КИП0 × КИП0 + FL1 04 С/П

10 шагов, $n + 3$ регистра памяти.

Инструкция

1. Исходные данные: (b_n = РД, b_{n-1} = РС, ..., b_0 = РK), 14 = Р0, n = Р1, [x = РХ]. Здесь $K = 13 - n$ (номера K = 10, 11, 12 присваиваются регистрам РА, РВ, РС соответственно).
2. Пуск: В/О С/П.
3. Результат: РХ $= S$.
4. Регистры: рабочие РK, ..., РД; оперативные Р0, Р1; свободные Р2, Р3, ..., РL, где $L = 12 - n$; если $n = 11$, то свободных регистров нет.
5. Время счета при $n = 11$ $t \approx 15$ с.

Пример. $S=(1+1/x+1/2!\,x^2+\ldots+1/11!\,x^{11})_{x=5}=1{,}2214028$ ($e^{1/5}=$ $=1{,}2214028$).

Программа 1.26. Многочлены по обратным степеням вещественного аргумента $S=x^m\sum_{k=0}^{n}b_kx^{-k}$, $n=1, 2, \ldots, 10$; $m=\pm1, \pm2, \ldots$.

Приводятся два варианта программы для положительных и отрицательных m, инструкция к обоим вариантам одна и та же.

$m=1, 2, \ldots$

```
F1/x  ↑   ↑    КИП0  ×  КИП0  +    FL1  04  XY
F1/x  ×   FBx  FL2      11    XY   С/П
```

17 шагов, $n+4$ регистра памяти.

$m=-1, -2, \ldots$

```
F1/x  ↑   ↑    КИП0  ×  КИП0  +  FL1  04  ×
FL2   09  С/П
```

13 шагов, $n+4$ регистра памяти.

Инструкция

1. Исходные данные: (b_n = РД, b_{n-1} = РС, …, b_0 = РK), 14 = Р0, n= = Р1, $|m|$ = Р2, [x = РХ], $K=13-n$; номера K = 10, 11, 12 присваиваются соответственно регистрам РА, РВ, РС.
2. Пуск: В/О С/П.
3. Результат: РХ = S.
4. Регистры: рабочие РK, …, РД; оперативные Р0, Р1, Р2; свободные Р3, Р4, …, РL, где $L=12-n$; если $n=10$, то свободных регистров нет.
5. Время счета $t\approx(2n+m)$ с.

Примеры.

$S=4^{64}[1+1/4+1/(2!\,4^2)+\ldots+1/(10!\,4^{10})]=4{,}3693124\cdot10^{38}$ ($4^{64}e^{0,25}=$ $=4{,}3693119\cdot10^{38}$);

$S=4^{-64}[1+1/4+1/(2!\,4^2)+\ldots+1/(10!\,4^{10})]=3{,}7734115\cdot10^{-39}$ ($4^{-64}e^{0,25}=$ $=3{,}7734115\cdot10^{-39}$).

Программа 1.27. Многочлены по степеням обратной величины комплексного аргумента $z=x+jy$; $z_1=b_0+b_1z^{-1}+\ldots+b_{n-1}z^{-(n-1)}+B_nz^{-n}$, $B_n=$ $=b_n^{(1)}+jb_n^{(2)}$, $n=1, 2, \ldots, 9$; $b_0, b_1, \ldots, b_{n-1}$; $b_n^{(1)}$, $b_n^{(2)}$ — вещественные константы.

```
XY    FBx   ИП0  ×   XY   П2    ИП1  ×     +    XY
ИП0   ИП2   ×    XY  ИП1  ×     —    ИП0   Fx²  ИП1
Fx²   +     П2   ÷   XY   ИП2   ÷    КИП4  +    FL3
00    С/П
```

32 шага, $n+5$ регистров памяти.

Инструкция

1. Исходные данные: (b_{n-1} = Р5, b_{n-2} = Р6, …, b_0 = РK, x = Р0, y = Р1), n = Р3, 4 = Р4, [$b_n^{(2)}$ = РY, $b_n^{(1)}$ = РХ]. Здесь $K=n+4$, номера K = 10, 11, 12, 13 присваиваются соответственно регистрам РА, РВ, РС, РД.
2. Пуск: В/О С/П.
3. Результат: РХ = x_1, РY = y_1.

4. Регистры: рабочие Р0, Р1, Р5, …, РK; оперативные Р2, Р3, Р4; свободные РL — РД, где $L=n+5$; если $n=9$, то свободных регистров нет.
5. Время счета $t\approx(9n)$ с.

Пример.

$z_1=(1+z^{-1}+z^{-2}/2!+\ldots+z^{-9}/9!)_{z=3+j4}=1{,}1130957-j0{,}17963078$,

t = 1 мин 20 с. Контрольная величина: $e^{1/z}=e^{1/(3+j4)}=$ $=1{,}1130957-j0{,}17963077$.

Программа 1.28. Многочлены комплексного аргумента $1/z$ с комплексными коэффициентами $z_1=B_0+B_1z^{-1}+\ldots+B_n\,z^{-n}$, $B_n=b_n^{(1)}+jb_n^{(2)}$, $n=$ $=1, 2, \ldots, 5$.

```
XY    FBx   ИП0  ×    XY    П2   ИП1  ×    +    XY
ИП0   ИП2   ×    XY   ИП1   ×    —    ИП0  Fx²  ИП1
Fx²   +     П2   ÷    КИП4  +    XY   ИП2  ÷    КИП4
+     FL3   00   С/П
```

34 шага, $2n+5$ регистров памяти. При n = 1, 2, 3, 4 и n = 5 ввод исходных даиных и расположение результатов в регистрах памяти несколько отлнчаются.

Инструкция

1. Исходные данные при n = 1, 2, 3, 4[1]: ($b_{n-1}^{(2)}$ = Р5, $b_{n-1}^{(1)}$ = Р6, $b_{n-2}^{(2)}$ = Р7, $b_{n-2}^{(1)}$ = Р8, …, $b_0^{(2)}$ = РK, $b_0^{(1)}$ = Р(K+1)), (x = Р0, y = Р1), n = Р3, 4 = Р4, [$b_n^{(2)}$=РY$_n^{(1)}$, b = РХ]; $K=2n+3$ (номера K = 10, 11, 12, 13 присваиваются соответственно регистрам РА, РВ, РС, РД).
2. Пуск: В/О С/П.
3. Результат: РХ = x_1, РY = y_1.
4. Регистры: рабочие Р0, Р1, Р5, …, РK; оперативные Р2 — Р4; свободные РL — РД, где $L=2n+5$; если $n=4$, то свободеи только регистр РД.
5. Время счета $t\approx(12n)$ с.
6. Исходные данные при n=5: ($b_4^{(2)}$ = Р5, $b_4^{(1)}$ = Р6, $b_3^{(2)}$ = Р7, $b_3^{(1)}$ = Р8, $b_2^{(2)}$ = Р9, $b_2^{(1)}$ = РА, $b_1^{(2)}$ = РВ, $b_1^{(1)}$ = РС, $b_0^{(2)}$ = РД), (x = Р0, y = Р1) 5 = Р3, 4 = Р4, [$b_5^{(2)}$ = РY, $b_5^{(1)}$ = РХ].
7. Пуск: В/О С/П.

Для $b_0^{(1)}$ ие хватает регистра памяти, и последней операцией программы оказывается сложение промежуточной суммы с x, а ие с $b_0^{(1)}$.

8. Результат: РХ = $x_1+x-b_0^{(1)}$, РY = y_1. Искомое значение x_1: $x_1=$ = РХ $-\,x+b_0^{(1)}$.

Значение x может быть взято из Р0.

Пример. При $n=5$

$z_1=[j+(1+j)\,z^{-1}/1!+(1+j)\,z^{-2}/2!+\ldots+(1+j)\,z^{-5}/5!]_{z=3+j4}=$ $=0{,}2927264+j0{,}9334647$.

Содержимое РХ и РY после окончания счета: РХ = 3,2927264, РY = 0.9334647 ($(1+j)e^{1/(3+j4)}-1=0{,}2927265+j\,0{,}9334649$).

Программа 1.29. Многочлены $z_1=z^m(b_0+b_1z^{-1}+\ldots+b_{n-1}z^{-(n-1)}+$ $+B_nz^{-n})$ комплексного аргумента $z^{-1}=(x+jy)^{-1}$, $B_n=b_n^{(1)}+jb_n^{(2)}$, $n=1, 2, \ldots, 8$; $m=1, 2, \ldots$; $b_0, b_1, \ldots, b_{n-1}$ — вещественные константы.

XY	FBx	ИП0	×	XY	ПД	ИП1	×	+	XY
ИП0	ИПД	×	XY	ИП1	×	—	ИП0	Fx²	ИП1
Fx²	+	ПД	÷	XY	ИПД	÷	КИП4	+	FL3
00	XY	FBx	ИП1	×	XY	ПД	ИП0	×	+
XY	ИП0	×	ИПД	ИП1	×	—	FL2	31	С/П

50 шагов, $n+6$ регистров памяти.

Инструкция

1. Исходные данные: (b_{n-1} = P5, b_{n-2} = P6, ..., b_0 = PK), (x = P0, y = P1), m = P2, n=P3, 4 = P4, [$b_n^{(2)}$ = PY, $b_n^{(1)}$ = PX]. Здесь $K=n+4$ (номера K = 10, 11, 12 присваиваются регистрам PA, PB, PC соответственно).
2. Пуск: В/О С/П.
3. Результат: PX = x_1, PY = y_1.
4. Регистры: рабочие P0, P1, P5, ..., PK; оперативные P2 — P4, PД; свободные PL — PC, где $L=n+5$; при n = 8 свободных регистров нет.
5. Время счета $t\approx 9(m+n)$ с

Пример. $z_1=[z^2(1+z^{-1}+z^{-2}/2!+\ldots+z^{-8}/8!)]_{z=3+j4}=$

$=-3,480531+j27,971713.$

Программа 1.30. Многочлены $z_1=z^{-m}(b_0+b_1z^{-1}+\ldots+b_{n-1}z^{-(n-1)}+$ $+B_nz^{-n})$ комплексного аргумента $z^{-1}=(x+jy)^{-1}$, $B_n=b_n^{(1)}+jb_n^{(2)}$, $n=1, 2, \ldots, 8$; $m=1, 2, 3, \ldots$; $b_0, b_1, \ldots, b_{n-1}$ — вещественные константы.

XY	FBx	ИП0	×	XY	ПД	ИП1	×	+	XY
ИП0	ИПД	×	XY	ИП1	×	—	ИП0	Fx²	ИП1
Fx²	+	ПД	÷	XY	ИПД	÷	FL3	32	FL2
00	С/П	КИП4	+	БП	00				

36 шагов, $n+6$ регистров памяти.

Инструкция

1. Исходные данные: (b_{n-1} = P5, b_{n-2} = P6, ..., b_0 = PK), (x = P0, y = P1), m = P2, $n+1$ = P3, 4 = P4, [$b_n^{(2)}$ = PY, $b_n^{(1)}$ = PX]. Здесь $K=n+4$ (номера K = 10, 11,12 присваиваются соответственно регистрам PA, PB, PC).
2. Пуск: В/О С/П.
3. Результат: x_1 = PX, y_1 = PY.
4. Регистры: рабочие P0, P1, P5, ..., PK; оперативные P2, P3, P4, PД; свободные PL — PC, где $L=n+5$; при n = 8 свободных регистров нет.
5. Время счета $t\approx 9(m+n)$ с.

Примеры.

$z_1=[z^{-4}(1+z^{-1}+z^{-2}/2!+\ldots+z^{-8}/8!)]_{z=3+j4}=-1,3471883\cdot10^{-3}+$

$+j1,1997838\cdot10^{-3}$;

$(z^{-4}e^{1/z})_{z=3+j4}=-1,3471884\cdot10^{-3}+j1,19971839\cdot10^{-3}$.

1.4. Показательная, логарифмическая и степенная функции комплексного аргумента

Показательная функция e^z определяется [12] и вычисляется по формуле

$$e^z=e^{x+jy}=e^x(\cos y+j\sin y). \tag{1.20}$$

Логарифм комплексного переменного Lnz — обратная к e^z бесконечнозначная функция. *Логарифмическая функция* ln$z$ — однозначная аналитическая функция, определяется [9] как одна из ветвей Lnz на плоскости z, разрезанной по отрицательной части действительной оси $|\arg z|<\pi$. Обычно выбирается ветвь Lnz, вещественная при вещественных положительных z. Таким образом,

$$\left.\begin{aligned}\operatorname{Re}\ln z&=\ln|z|=\ln\sqrt{x^2+y^2};\\ \operatorname{Im}\ln z&=\operatorname{sgn}(y)\arccos(x/|z|).\end{aligned}\right\} \tag{1.21}$$

Иногда целесообразно использовать укороченную программу вычисления ln$z$, в которой $0\leqslant\arg z<\pi$. В этом случае

$$\ln z=\ln|z|+j\arccos(x/|z|). \tag{1.22}$$

Тогда значения ln$z$ при $-\pi<\arg z<0$ можно получить, найдя из (1.22) ln$z$ и затем используя соотношение

$$\ln z=\overline{\ln\bar z}. \tag{1.23}$$

Здесь и далее черта сверху означает комплексное сопряжение.

Степенная функция z^w ($w=u+jv$) — также бесконечнозначная. Исключения составляют вещественные целые w, при которых z^w — рациональная функция, и $w=m/n$, где m/n — несократимая рациональная дробь. В последнем случае z^w — n-значная функция.

Если вновь определить z^w на плоскости z, разрезанной по отрицательной части действительной оси, и выбрать ветвь z^w, вещественную и положительную при вещественных положительных w, то z^w оказывается однозначной аналитической функцией, связанной с ln$z$ соотношением

$$z^w=e^{w\ln z}. \tag{1.24}$$

Степенная функция z^w при вещественных $w=u$ и ограничении $0\leqslant\arg z<\pi$ определяется согласно (1.24) и (1.22) формулой

$$z^u=|z|^u[\cos[u(\arccos(x/|z|)]+j\sin[u\arccos(x/|z|)]]. \tag{1.25}$$

Значения z^u при $-\pi<\arg z\leqslant 0$ найдутся из (1.25) для z^u и очевидной формулы (ср. с (1.23))

$$z^u=\overline{\bar z^u}. \tag{1.26}$$

Приведем также формулу для многозначной функции z^w на плоскости z, разрезанной по отрицательной части действительной оси:

$$z^w=e^{(u+jv)[\ln|z|+j[2(n-1)\pi\pm\arccos(x/|z|)]]}, \tag{1.27}$$

где n — номер ветви; знак перед arccos совпадает со знаком y.

Программа 1.31. Показательная функция e^z (1.20) комплексного аргумента $z=x+jy$.

ПД	Fsin	XY	Fe^x	×	FBx	ИПД	Fcos	×	С/П

10 шагов, 1 регистр памяти.

Инструкция
1. Исходные данные: [x = PY, y = PX].
2. Пуск: В/О С/П.
3. Результат: PX = Re e^z, PY = Im e^z.
4. Регистры: рабочие — ; оперативные РД; свободные Р0 — РС.
5. Погрешность относительная меньше $5\cdot10^{-7}$.
6. Время счета $t\approx 7$ с.

Пример.

$e^z = e^{(\ln 2 + j\pi/3)} = 1{,}0000001 + j1{,}7320509$. Точное значение $e^z = 1 + j\sqrt{3} = 1 + j1{,}73205081\ldots$.

Программа 1.32. Логарифмическая функция $\ln z$ комплексного аргумента $z = x + jy$, $0 \leqslant \arg z < \pi$ (1.22). Модуль аргумента $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

↑	Fx²	ИПС	Fx²	+	F√‾	ПД	÷	Farccos	ИПД
Fln	С/П								

12 шагов, 2 регистра памяти.
Инструкция
1. Исходные данные: (y = РС), [x = PX].
2. Пуск: В/О С/П.
3. Результат: PX = Re $\ln z$, PY = Im $\ln z$, РД = $|z|$.
4. Регистры: рабочие РС, РД; оперативные — ; свободные Р0 — РВ.
5. Погрешность относительная меньше $5\cdot10^{-7}$.
6. Время счета $t\approx 7$ с.

Пример. $\ln(3 + j4) = 1{,}6094379 + j\,0{,}9272951$; $|z| = 5$.

Программа 1.33. Логарифмическая функция $\ln z$ комплексного аргумента $z = x + jy$, $-\pi < \arg z < \pi$ (1.21). Модуль аргумента $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

↑	Fx²	ИПС	Fx²	+	F√‾	ПД	÷	Farccos	ИПС
Fx<0	15	F,	/—/	XY	XY	ИПД	Fln	С/П	

19 шагов, 2 регистра памяти.
Инструкция
1. Исходные данные: (y = РС), [x = PX].
2. Пуск: В/О С/П.
3. Результат: PX = Re $\ln z$, PY = Im $\ln z$, РД = $|z|$.
4. Регистры: рабочие РС, РД; оперативные —; свободные Р0 — РВ.
5. Погрешность относительная меньше $5\cdot10^{-7}$.
6. Время счета $t\approx 8$ с.

Пример. $\ln(3 - j4) = 1{,}6094379 - j0{,}9272951$.

Программа 1.34. Степенная функция z^w комплексного аргумента $z = x + jy$ и комплексного показателя $w = u + jv$, $0 \leqslant \arg z < \pi$ (1.24).

↑	Fx²	ИПС	Fx²	+	F√‾	ПД	÷	Farccos	ИПД
Fln	ПС	ИПА	×	XY	ПД	ИПВ	×	—	ИПА
ИПД	×	ИПВ	ИПС	×	+	ПД	F sin	XY	Feˣ
×	FBx	ИПД	F cos	×	С/П				

36 шагов, 4 регистра памяти. Программа представляет собой последовательность программ 1.32, 1.4, 1.31.

Инструкция
1. Исходные данные: (u = PA, v = PB), y = PC, [x = PX].
2. Пуск: В/О С/П.
3. Результат: PX = Re z^w, PY = Im z^w.
4. Регистры: рабочие PA, PB; оперативные РС, РД; свободные Р0 — Р9.
5. Погрешность относительная меньше $1\cdot10^{-6}$.
6. Время счета $t\approx 20$ с.

Пример. $(3 + j4)^{2 - j\pi/3} = 65{,}075961 + j\,11{,}116535$.

Программа 1.35. Степенная функция z^w комплексного аргумента $z = x + jy$ н комплексного показателя $w = u + jv$, $-\pi < \arg z < \pi$ (1.24).

↑	Fx²	ИПС	Fx²	+	F√‾	ПД	÷	Farccos	ИПС
Fx<0	15	F,	/—/	XY	XY	ИПД	F ln	ПС	ИПА
×	XY	ПД	ИПВ	×	—	ИПА	ИПД	×	ИПВ
ИПС	×	+	ПД	F sin	XY	Feˣ	×	F Bx	ИПД
F cos	×	С/П							

43 шага, 4 регистра памяти. Программа построена как последовательность программ 1.33, 1.4, 1.31.
Инструкция
1. Исходные данные: (u = PA, v = PB), y = PC, [x = PX].
2. Пуск: В/О С/П.
3. Результат: PX = Re z^w, PY = Im z^w.
4. Регистры: рабочие PA, PB; оперативные РС, РД; свободные Р0 — Р9.
5. Погрешность относительная меньше $1\cdot10^{-6}$.
6. Время счета $t\approx 20$ с.

Примеры.

$(3 + j4)^{2 - j\pi/3} = 65{,}075961 + j\,11{,}116535$; $(3 - j\,4)^{2 - j\pi/3} = -8{,}7256061 + j\,3{,}6726498$;

$e^{2 - j\pi/3} = 3{,}6945284 - j\,6{,}3991091$ $(3{,}6945278 - j\,6{,}3991099)$.

Программа 1.36. Степенная функция z^u комплексного аргумента $z = x + jy$ и вещественного показателя u, $0 \leqslant \arg z < \pi$ (1.25). При $-\pi < \arg z \leqslant 0$ $z^u = \overline{\bar{z}^u}$.

Fx²	ИПВ	Fx²	+	F√‾	ПД	Fxʸ	ИПВ	ИПД	÷
Farccos	ИПС	×	ПД	F sin	XY	×	F Bx	ИПД	F cos
×	С/П								

22 шага, 3 регистра памяти.
Инструкция
1. Исходные данные: (x = PB), [u = PC, y = PX].
2. Пуск: В/О С/П.
3. Результат: PX = Re z^u, PY = Im z^u.
4. Регистры: рабочие PB; оперативные РС, РД; свободные Р0 — РА.
5. Погрешность относительная меньше $1\cdot10^{-6}$.
6. Время счета $t\approx 15$ с.

Пример. $(-3 + j\,4)^{1/2} = 0{,}99999999 + j\,2$ $(1 + j2)$.

Программа 1.37. Степенная многозначная функция z^w комплексного аргумента $z = x + jy$ и комплексного показателя $w = u + j\,v$, $|\arg z| < \pi$ (1.27).

0	П6	ИП8	↑	Fx^2	ИП9	Fx^2	+	$F\sqrt{\ }$	ПС
÷	Farccos	ИП9	$Fx<0$	18	F,	/−/	XY	XY	$F\pi$
ИП6	×	2	×	+	ИПС	F ln	ПС	ИПА	×
XY	ПД	ИПВ	×	−	ИПА	ИПД	×	ИПВ	ИПС
×	+	ПС	F sin	XY	Fe^x	×	ПД	F Вx	ИПС
F cos	×	ПС	КИП6	ИП6	С/П	БП	02		

58 шагов, 7 регистров памяти. В программе путем последовательных пусков находятся ветви многозначной функции z^w.

Инструкция

1. Исходные данные: (x = Р8, y = Р9, u = РА, v = РВ).
2. Пуск: для первой ветви В/О С/П; для каждой последующей ветви С/П.
3. Результат: РХ $= n$ (номер ветви), РС $= \mathrm{Re}(z^w)_n$, РД $= \mathrm{Im}\,(z^w)_n$ (значения действительной и мнимой части z^w текущей n-й ветви).
4. Регистры: рабочие Р8 — РД; оперативные Р6; свободные Р0 — Р5, Р7.
5. Погрешность относительная меньше $5\cdot10^{-6}$.
6. Время счета каждой ветви $t \approx 20$ с.

Примеры.

$$(3+j\,4)_1^{1/3} = 1{,}6289372 + j\,0{,}52017441;$$

$$(3+j\,4)_2^{1/3} = -1{,}2649528 + j\,1{,}1506137;$$

$$(3+j\,4)_3^{1/3} = -0{,}36398476 - j\,1{,}670788.$$

1.5. Тригонометрические и гиперболические функции комплексного аргумента. Гиперболические функции вещественного аргумента

Ограничимся функциями $\sin z$, $\cos z$, $\mathrm{tg}\, z$, $\mathrm{sh}\, z$, $\mathrm{ch}\, z$, $\mathrm{th}\, z$. Они аналитичны во всей плоскости z, кроме изолированных полюсов у $\mathrm{tg}\, z$ и $\mathrm{th}\, z$. Расчетные формулы (см., например, [9]):

$$\sin z = \sin x\,\mathrm{ch}\, y + j\cos x\,\mathrm{sh}\, y; \qquad (1.28)$$

$$\cos z = \cos x\,\mathrm{ch}\, y - j\sin x\,\mathrm{sh}\, y; \qquad (1.29)$$

$$\mathrm{tg}\, z = (\sin 2x + j\,\mathrm{sh}\, 2y)/(\cos 2x + \mathrm{ch}\, 2y); \qquad (1.30)$$

$$\mathrm{sh}\, z = \mathrm{sh}\, x\cos y + j\,\mathrm{ch}\, x\sin y; \qquad (1.31)$$

$$\mathrm{ch}\, z = \mathrm{ch}\, x\cos y + j\,\mathrm{sh}\, x\sin y; \qquad (1.32)$$

$$\mathrm{th}\, z = (\mathrm{sh}\, 2x + j\sin 2y)/(\mathrm{ch}\, 2x + \cos 2y). \qquad (1.33)$$

При вычислении гиперболических функций можно объединить соответствующие программы с программами тригонометрических функций, модифицируя лишь ввод исходных данных и расположение действительной и мнимой частей результата в регистрах памяти. Видно, в частности, что (1.28) переходит в (1.31), а (1.30) — в (1.33) при замене x на y и y на x, а также действительных частей (1.28) и (1.30) на мнимые (1.31), (1.33), а мнимых — на действительные. Для перехода от (1.29) к (1.32) следует лишь поменять x на y, а y на x.

Программа 1.38. Синус $\sin z$ и гиперболический синус $\mathrm{sh}\, z$ комплексного аргумента $z = x + j\,y$ (1.28), (1.31).

Fe^x	↑	F1/x	ПД	+	2	÷	↑	ИПД	−
ИПС	F cos	×	XY	ИПС	F sin	×	С/П		

18 шагов, 2 регистра памяти. Вычисляется функция $\sin z$ или $\mathrm{sh}\, z$ в зависимости от способа ввода исходных данных.

Инструкция

1. Исходные данные: а) для $\sin z$ (x = РС), [y = РХ]; б) для $\mathrm{sh}\, z$ (y = РС), [x = РХ].
2. Пуск: В/О С/П.
3. Результат: а) РХ $= \mathrm{Re}\sin z$, РY $= \mathrm{Im}\sin z$; б) РХ $= \mathrm{Im}\,\mathrm{sh}\, z$, РY $= \mathrm{Re}\,\mathrm{sh}\, z$.
4. Регистры: рабочие РС; оперативные РД; свободные Р0 — РВ.
5. Погрешность относительная меньше $1\cdot10^{-6}$.
6. Время счета $t \approx 10$ с.

Примеры. $\sin(\pi/6 + j) = 0{,}77154033 + j\,1{,}0177541$; $\mathrm{sh}\,(1 + j\pi/6) = 1{,}0177541 + j0{,}77154033$.

Программа 1.39. Синус $\sin z$ и гиперболический синус $\mathrm{sh}\, z$ комплексного аргумента $z = x + j\,y$ (1.28), (1.31).

F cos	F Вx	F sin	ИПД	Fe^x	↑	F1/x	ПД	−	2
÷	ИПД	XY	ПД	+	×	XY	ИПД	×	С/П

20 шагов, 1 регистр памяти. По сравнению с предыдущей программой за счет удлинения сокращено число требуемых регистров памяти. Программа в зависимости от способа ввода исходных данных вычисляет $\sin z$ или $\mathrm{sh}\, z$.

Инструкция

1. Исходные данные: а) для $\sin z$ y = РД, [x=РХ]; б) для $\mathrm{sh}\, z$ x = РД, [y = РХ].
2. Пуск: В/О С/П.
3. Результат: а) РХ $= \mathrm{Im}\sin z$, РY $= \mathrm{Re}\sin z$; б) РХ $= \mathrm{Re}\,\mathrm{sh}\, z$, РY $= \mathrm{Im}\,\mathrm{sh}\, z$.
4. Регистры: рабочие — ; оперативные РД; свободные Р0 — РС.
5. Погрешность относительная меньше $1\cdot10^{-6}$.
6. Время счета $t \approx 12$ с.

Примеры. $\sin(\pi/6 + j) = 0{,}77154033 + j1{,}0177541$; $\mathrm{sh}\,(1 + j\pi/6) = 1{,}0177541 + j\,0{,}77154033$.

Программа 1.40. Косинус $\cos z$ и гиперболический косинус $\mathrm{ch}\, z$ комплексного аргумента $z = x + j\,y$ (1.29), (1.32).

F sin	F Вx	F cos	ИПД	Fe^x	F1/x	F Вx	ПД	−	2
÷	ИПД	XY	ПД	+	×	XY	ИПД	×	С/П

20 шагов, 1 регистр памяти. Вычисляется функция $\cos z$, или $\mathrm{ch}\, z$ в зависимости от способа ввода исходных данных.

Инструкция

1. Исходные данные: а) для $\cos z$ y = РД, [x = РХ]; б) для $\mathrm{ch} z$ x = РД, [$-y$ = РХ].
2. Пуск: В/О С/П.
3. Результат: а) РХ $= \mathrm{Im}\cos z$, РY $= \mathrm{Re}\cos z$; б) РХ $= \mathrm{Im}\,\mathrm{ch}\, z$, РY $= \mathrm{Re}\,\mathrm{ch}\, z$.
4. Регистры: рабочие — ; оперативные РД; свободные Р0 — РС.
5. Погрешность относительная меньше $1\cdot10^{-6}$.
6. Время счета $t \approx 10$ с.

Примеры. $\cos(2+j3) = -4{,}1896257 - j9{,}1092272$; $\mathrm{ch}(2+j3) = -3{,}7245453 + j\,0{,}51182233$.

Программа 1.41. Косинус $\cos z$ и гиперболический косинус $\mathrm{ch}\,z$ комплексного аргумента $z = x + jy$ (1.29), (1.32).

Fe^x	F1/x	FBx	ПД	+	2	÷	↑	ИПД	—
ИПС	F sin	×	XY	ИПС	F cos	×	С/П		

18 шагов, 2 регистра памяти. Длина программы по сравнению с программой 1.40 сокращена на два шага за счет увеличения числа требуемых регистров памяти. В зависимости от способа ввода исходных данных вычисляется $\cos z$ или $\mathrm{ch}\,z$.

Инструкция

1. Исходные данные: а) для $\cos z$ (x = РС), [y = РХ]; б) для $\mathrm{ch}\,z$ ($-y$ = РС), [x = РХ].
2. Пуск: В/О С/П.
3. Результат: а) РХ = $\mathrm{Re}\cos z$, РY = $\mathrm{Im}\cos z$; б) РХ = $\mathrm{Re}\,\mathrm{ch}\,z$, РY = $\mathrm{Im}\,\mathrm{ch}\,z$.
4. Регистры: рабочие РС; оперативные РД; свободные Р0 — РВ.
5. Погрешность относительная меньше $1\cdot10^{-6}$.
6. Время счета $t \approx 10$ с.

Примеры. $\cos(3 + j4) = -27{,}034944 - j\,3{,}8511514$; $\mathrm{ch}(3+j4) = -6{,}5806624 - j7{,}5815525$.

Программа 1.42. Синус $\sin z$, косинус $\cos z$, гиперболические синус $\mathrm{sh}\,z$ и косинус $\mathrm{ch}\,z$ комплексного аргумента $z = x + jy$ (1.28), (1.29), (1.31), (1.32).

Fe^x	↑	F1/x	ПД	+	2	÷	ПС	ИПД	—
ИПВ	F sin	XY	×	/—/	ПД	FBx	ИПВ	F cos	×
ИПВ	F sin	ИПС	×	FBx	ИПВ	F cos	×	ПС	F,
С/П									

31 шаг, 3 регистра памяти. В зависимости от способа ввода исходных данных программа вычисляет одну из пар функций $\sin z$, $\cos z$ или $\mathrm{sh}\,z$, $\mathrm{ch}\,z$.

Инструкция

1. Исходные данные: а) для $\sin z$, $\cos z$ (x = РВ), [y = РХ]; б) для $\mathrm{sh}\,z$, $\mathrm{ch}\,z$ (y = РВ), [x = РХ].
2. Пуск: В/О С/П.
3. Результат:
а) РХ = $\mathrm{Re}\sin z$, РY = $\mathrm{Im}\sin z$, РС = $\mathrm{Re}\cos z$, РД = $\mathrm{Im}\cos z$.
б) РХ = $\mathrm{Im}\,\mathrm{sh}\,z$, РY = $\mathrm{Re}\,\mathrm{sh}\,z$, РС = $\mathrm{Re}\,\mathrm{ch}\,z$, РД = $-\mathrm{Im}\,\mathrm{ch}\,z$.
4. Регистры: рабочие РВ; оперативные РС, РД; свободные Р0 — РА.
5. Погрешность относительная меньше $1\cdot10^{-6}$.
6. Время счета $t \approx 20$ с.

Примеры.
$\sin(5+j7) = -525{,}79447 + j\,155{,}53658$; $\cos(5+j7) = 155{,}53684 + j\,525{,}7936$;
$\mathrm{sh}(5+j7) = 55{,}941963 + j\,48{,}754951$; $\mathrm{ch}(5+j7) = 55{,}947042 + j\,48{,}750524$.

Программа 1.43. Синус $\sin z$, косинус $\cos z$, гиперболические синус $\mathrm{sh}\,z$ и косинус $\mathrm{ch}\,z$ комплексного аргумента $z = x + jy$ (1.28), (1.29), (1.31), (1.32).

Fe^x	↑	F1/x	ПД	—	2	÷	ПА	ИПД	+
ПД	ИПВ	F cos	×	ПС	FBx	ИПА	×	ИПД	ИПВ
F sin	×	FBx	ИПА	×	/—/	ПД	F,	С/П	

29 шагов, 4 регистра памяти. По сравнению с программой 1.42 программа сокращена на два шага, но число требуемых регистров памяти возросло на 1. В зависимости от способа ввода исходных данных программа вычисляет одну из пар функций: $\sin z$, $\cos z$ или $\mathrm{sh}\,z$, $\mathrm{ch}\,z$.

Инструкция

1. Исходные данные: а) для $\sin z$, $\cos z$ (x = РВ), [y = РХ]; б) для $\mathrm{sh}\,z$, $\mathrm{ch}\,z$ (y = РВ), [x = РХ].
2. Пуск: В/О С/П.
3. Результат: а) РХ = $\mathrm{Re}\sin z$, РY = $\mathrm{Im}\sin z$, РС = $\mathrm{Re}\cos z$, РД = $\mathrm{Im}\cos z$; б) РХ = $\mathrm{Im}\,\mathrm{sh}\,z$, РY = $\mathrm{Re}\,\mathrm{sh}\,z$, РС = $\mathrm{Re}\,\mathrm{ch}\,z$, РД = $-\mathrm{Im}\,\mathrm{ch}\,z$.
4. Регистры: рабочие РВ; оперативные РА, РС, РД; свободные Р0 — Р9.
5. Погрешность относительная $1\cdot10^{-6}$.
6. Время счета $t \approx 15$ с.

Примеры. $\sin(2+j3) = 9{,}1544984 - j4{,}168907$; $\cos(2+j3) = -4{,}1896257 - j9{,}1092272$;
$\mathrm{sh}(2+j3) = -3{,}5905644 + j\,0{,}53092084$; $\mathrm{ch}(2+j3) = -3{,}7245453 + j\,0{,}51182233$.

Программа 1.44. Тангенс $\mathrm{tg}\,z$ и гиперболический тангенс $\mathrm{th}\,z$ комплексного аргумента $z = x + jy$ (1.30), (1.33).

ИПД	2	×	Fe^x	↑	F1/x	ПД	—	2	÷
↑	ИПД	+	ИПС	2	×	ПС	F cos	+	÷
FBx	F1/x	ИПС	F sin	×	С/П				

26 шагов, 2 регистра памяти. В зависимости от способа ввода исходных данных программа вычисляет функцию $\mathrm{tg}\,z$ или $\mathrm{th}\,z$.

Инструкция

1. Исходные данные: а) для $\mathrm{tg}\,z$ x = РС, y = РД; б) для $\mathrm{th}\,z$ x = РД, y = РС.
2. Пуск: В/О С/П.
3. Результат: а) РХ = $\mathrm{Re}\,\mathrm{tg}\,z$, РY = $\mathrm{Im}\,\mathrm{tg}\,z$; б) РХ = $\mathrm{Im}\,\mathrm{th}\,z$, РY = $\mathrm{Re}\,\mathrm{th}\,z$.
4. Регистры: рабочие —; оперативные РС, РД; свободные Р0 — РВ.
5. Погрешность относительная меньше $1\cdot10^{-6}$.
6. Время счета $t \approx 20$ с.

Примеры. $\mathrm{tg}(2+j3) = -3{,}7640263\cdot10^{-3} + j\,1{,}0032386$; $\mathrm{th}(2+j3) = 0{,}96538587 - j9{,}8843723\cdot10^{-3}$.

Программа 1.45. Гиперболические функции $\mathrm{sh}\,x$, $\mathrm{ch}\,x$, $\mathrm{th}\,x$ вещественного аргумента.

Fe^x	↑	F1/x	ПД	—	2	÷	ПВ	↑	ИПД
+	ПС	÷	ПД	С/П					

15 шагов, 3 регистра памяти.

Инструкция

1. Исходные данные: x = РХ.
2. Пуск: В/О С/П
3. Результат: РВ = $\mathrm{sh}\,x$, РС = $\mathrm{ch}\,x$, РД = $\mathrm{th}\,x$.
4. Регистры: рабочие РВ, РС, РД; оперативные — ; свободные Р0 — РА.
5. Погрешность относительная меньше $5\cdot10^{-7}$.
6. Время счета $t \approx 10$ с.

Примеры. $\mathrm{sh}\,2 = 3{,}6268602$; $\mathrm{ch}\,2 = 3{,}7621955$; $\mathrm{th}\,2 = 0{,}96402757$.

1.6. Обратные тригонометрические и гиперболические функции комплексного аргумента. Обратные гиперболические функции вещественного аргумента

Тригонометрические и гиперболические функции выражаются, как известно, через показательную функцию, поэтому обратные функции определяются через логарифмы (см., например, [12]):

$$\arcsin z = \frac{\pi}{2} - \arccos z = \frac{\pi}{2} + \mathrm{j}\ln\left(z + \sqrt{z^2 - 1}\right); \tag{1.34}$$

$$\operatorname{arctg} z = -\frac{\mathrm{j}}{2}\ln\frac{1+\mathrm{j}z}{1-\mathrm{j}z}; \tag{1.35}$$

$$\operatorname{arsh} z = \ln\left(z + \sqrt{z^2+1}\right); \tag{1.36}$$

$$\operatorname{arch} z = \ln\left(z + \sqrt{z^2-1}\right); \tag{1.37}$$

$$\operatorname{arth} z = \frac{1}{2}\ln\frac{1+z}{1-z}. \tag{1.38}$$

Если здесь ln обозначает просто функцию, обратную показательной функции, то все приведенные выше функции, очевидно, бесконечнозначны. Можно, однако, произведя необходимые разрезы плоскости комплексного переменного z, выделить ветви функций, являющиеся однозначными аналитическими функциями. Согласно [9] $\arcsin z$, $\arccos z$ и $\operatorname{arth} z$ определяются в плоскости z, разрезанной по действительной оси от $-\infty$ до -1 и от $+1$ до $+\infty$, $\operatorname{arctg} z$ и $\operatorname{arsh} z$ — в плоскости z, разрезанной по мнимой оси от $-\mathrm{j}\,\infty$ до $-\mathrm{j}$ и от $+\mathrm{j}$ до $+\mathrm{j}\,\infty$, $\operatorname{arch} z$ — в плоскости z, разрезанной по действительной оси от $-\infty$ до $+1$. Нужные ветви выбираются так, чтобы при вещественных z в соответствующих интервалах x функции совпадали со стандартными функциями вещественного переменного $\arcsin x$, $\arccos x$, $\operatorname{arctg} x$, $\operatorname{arsh} x$, $\operatorname{arch} x$, $\operatorname{arth} z$.

При вычислении $\arcsin z$, $\arccos z$ по формуле (1.34) указанные условия дают, что функция $\sqrt{w} = \sqrt{z^2 - 1}$ должна вычисляться на плоскости w, разрезанной по положительной части действительной оси, а функция $\ln\zeta = \ln(z + \sqrt{z^2 - 1})$ — на плоскости ζ, разрезанной по отрицательной части действительной оси. Требуемые ветви определяются условиями

$$\arg w = \arg(z^2 - 1) = \begin{cases} \arccos(\operatorname{Re} w/|w|), & \operatorname{Im} w > 0, \\ 2\pi - \arccos(\operatorname{Re} w/|w|), & \operatorname{Im} w < 0; \end{cases} \tag{1.39}$$

$$\arg\zeta = \arg\left(z + \sqrt{z^2-1}\right) = \begin{cases} \arccos(\operatorname{Re}\zeta/|\zeta|), & \operatorname{Im}\zeta > 0, \\ -\arccos(\operatorname{Re}\zeta/|\zeta|), & \operatorname{Im}\zeta < 0. \end{cases} \tag{1.40}$$

Для функции $\operatorname{arctg} z$, определяемой (1.35), плоскость комплексного переменного $\varkappa = (1 + \mathrm{j}z)/(1 - \mathrm{j}z)$ должна быть разрезана по отрицательной части действительной оси, а $\arg\varkappa$ должен отвечать условию (1.40).

Обратные гиперболические функции проще всего находить из соотношений (например, [9])

$$\operatorname{arsh} z = -\mathrm{j}\arcsin(\mathrm{j}z); \tag{1.41}$$

$$\operatorname{arch} z = \mathrm{j}\arccos z; \tag{1.42}$$

$$\operatorname{arth} z = -\mathrm{j}\operatorname{arctg}(\mathrm{j}z). \tag{1.43}$$

Эти формулы позволяют использовать для вычислений обратных гиперболических функций те же программы, что и для соответствующих обратных тригонометрических функций, изменив лишь способ задания исходных данных и расположение действительных и мнимых частей искомых функций в регистрах памяти (программы 1.46 и 1.47).

Программа 1.46. Обратные тригонометрические и гиперболические функции $\arcsin z$, $\arccos z$, $\operatorname{arsh} z$, $\operatorname{arch} z$ комплексного аргумента $z = x + \mathrm{j}\,y$ (1.34), (1.39) — (1.42).

ИПС	Fx²	ИПД	Fx²	—	1	—	↑	Fx²	ИПД
ИПС	×	2	×	ПА	Fx²	+	F√	ПВ	÷
F arccos	ИПА	Fx<0	31	F,	/—/	Fπ	2	×	+
F Bx	F,	2	÷	ПА	F cos	ИПВ	F√	×	F Bx
ИПА	F sin	×	ИПД	+	ПВ	XY	ИПС	+	↑
Fx²	ИПВ	Fx²	+	F√	ПД	÷	F arccos	ИПВ	Fx<0
64	F,	/—/	XY	XY	ПС	ИПД	F ln	ПВ	/—/
ПД	XY	/—/	1	F arcsin	+	ПА	С/П		

В зависимости от способа ввода исходных данных программа вычисляет или функции arccos, arcsin, $\operatorname{arch} z$, или функцию $\operatorname{arsh} z$.

Структура программы

00 — 32: вычисление $\operatorname{Re} w$ и $\operatorname{Im} w$ $(w = z^2 - 1)$ с учетом того, что разрез плоскости w должен проходить по положительной части действительной оси и с учетом выбора ветви $\sqrt{w}$ (1.39),

33—48: вычисление $\zeta = z + \sqrt{z^2 - 1} = z + \sqrt{w} = z + \sqrt{|w|}\,[\cos(\arg w/2) + \mathrm{j}\sin(\arg w/2)]$,

49—78: вычисление $\ln(z + \sqrt{z^2 - 1})$, выбор ветви этой функции (1.40) и занесение результатов вычисления искомых функций в регистры памяти.

Инструкция

1. Исходные данные: а) для $\arcsin z$, $\arccos z$, $\operatorname{arch} z$ $x =$ РС, $y =$ РД; б) для $\operatorname{arsh} z$ $x =$ РД, $-y =$ РС.
2. Пуск: В/О С/П.
3. Результат: а) РА $= \operatorname{Re}\arcsin z$, РВ $= \operatorname{Im}\arcsin z$, РС $= \operatorname{Re}\arccos z$, РД $= \operatorname{Im}\arccos z$, РС $= \operatorname{Im}\operatorname{arch} z$, РД $= -\operatorname{Re}\operatorname{arch} z$; б) РА $= -\operatorname{Im}\operatorname{arsh} z$, РВ $= \operatorname{Re}\operatorname{arsh} z$.
4. Регистры: рабочие РА — РД; оперативные — ; свободные Р0 — Р9.
5. Погрешность относительная: а) для $\arcsin z$, $\arccos z$, $\operatorname{arch} z$ при $y > 0$ меньше $1\cdot10^{-6}$; при $y < 0$ в выражении $z + \sqrt{z^2 - 1}$ знаки слагаемых противоположны и при больших $|z|$ возникают значительные погрешности округления — приблизительно $|z|^2\cdot10^{-6}$; б) для $\operatorname{arsh} z$ при $x > 0$ меньше $1\cdot10^{-6}$; при $x < 0$ приблизительно $|z|^2\cdot10^{-6}$.
6. Время счета $t \approx 30$ с.

Примеры.

$\arcsin(9{,}1544984 - \mathrm{j}\,4{,}168907) = 1{,}1416143 - \mathrm{j}\,3{,}0000024$ (точное значение $\pi - 2 - \mathrm{j}3 \approx 1{,}1415926 - \mathrm{j}3$);

$\arccos(-4{,}1896257 - \mathrm{j}9{,}1092272) = 2{,}00014 + \mathrm{j}3{,}000008$ (точное значение $2 + \mathrm{j}3$).

Значения $\arcsin z$ на разрезе (т. е. при $z = x \pm \mathrm{j}\varepsilon$, где $|x| > 1$, $\varepsilon \ll 1$):

$\arcsin(2 \pm \mathrm{j}1\cdot10^{-8}) = 1{,}5707963 \pm \mathrm{j}1{,}3169579$ $(\pi/2 \pm \mathrm{j}1{,}316957)$;

$\operatorname{arch}(55{,}947042 + \mathrm{j}48{,}750524) = 5 + \mathrm{j}0{,}71681479$ (точное значение $5 + \mathrm{j}(7 - 2\pi) \approx 5 + \mathrm{j}0{,}7168148$);

$\operatorname{arsh}(55{,}941963 + \mathrm{j}48{,}754951) = 5 + \mathrm{j}0{,}7168148$ (точное значение $5 + \mathrm{j}\,0{,}7168148\ldots$).

Программа 1.47. Обратные тригонометрические и гиперболические функции arctg z и arth z комплексного аргумента $z = x + j\,y$ (1.35), (1.43).

ИПС	/—/	ПВ	1	ИПД	+	ПА	ИПС	1	ИПД
—	ПС	ИПА	×	XY	ПД	ИПВ	×	+	ИПА
ИПД	×	ИПС	ИПВ	×	—	ИПА	Fx^2	ИПВ	Fx^2
+	ПД	÷	ПС	XY	ИПД	÷	↑	Fx^2	ИПС
Fx^2	+	$F\sqrt{\ }$	ПД	÷	Farccos	ИПС	$Fx<0$	52	F,
/—/	XY	XY	2	÷	ПА	ИПД	F ln	/—/	2
÷	ПВ	С/П							

В зависимости от способа ввода исходных данных программа вычисляет функцию arctg z или arth z.

Структура программы

00 — 33: вычисление функции $\varkappa = (1 + jz)/(1 - jz)$ с помощью программы 1.11 (деление комплексных чисел).

34—63: вычисление функции $\ln\varkappa/2$ с выполнением стандартного требования к аргументу логарифма ($|\arg\,\varkappa| < \pi$). В этом случае автоматически удовлетворяются условия на разрезе для функции arctg z (см. выше). Далее вычисление arctg $z = -j\ln\varkappa/2$ путем переадресации действительной и мнимой частей функции $\ln\varkappa/2$ и смены знака Re ln $\varkappa$.

Инструкция

1. Исходные данные: а) для arctg z x = РС, y = РД; б) для arth z x = РД, — y = РС.
2. Пуск: В/О С/П.
3. Результат: а) РА = Re arctg z, РВ = Im arctg z; б) РВ = Re arth z, РА = — Im arth z.
4. Регистры: рабочие РА, РВ; оперативные РС, РД; свободные Р0 — Р9.
5. Погрешность относительная меньше $5\cdot10^{-6}$.
6. Время счета $t \approx 30$ с.

Примеры.
arctg $(-3{,}7640263\cdot10^{-3} + j\,1{,}0032386) = -1{,}1415905 + j\,3{,}0000018$ (точное значение $2 - \pi + j3 \approx 1{,}1415926 + j3$).

Значение arth z на разрезе (т. е. при $z = x \pm j\varepsilon$, где $|x| > 1$, $\varepsilon \ll 1$): arth $(5 \pm j1\cdot10^{-8}) = 0{,}20273255 \pm j1{,}5707963$ (точное значение: $(1/2)\ln(3/2) \pm j(\pi/2) \approx 0{,}20273255 \pm j1{,}5707963$).

Программа 1.48. Обратные гиперболические функции arsh x, arch x, arth x вещественного аргумента (1.36)—(1.38), $x \geqslant 1$ для arch x, $|x| < 1$ для arth x.

ПД	Fx^2	1	+	$F\sqrt{\ }$	ИПД	+	F ln	ПВ	ИПД
Fx^2	1	—	$Fx<0$	20	1	/—/	ПС	БП	25
$F\sqrt{\ }$	ИПД	+	F ln	ПС	ИПД	1	+	1	ИПД
—	÷	$F\sqrt{\ }$	F ln	ПД	С/П				

Инструкция

1. Исходные данные: x = РХ.
2. Пуск: В/О С/П.
3. Результат: РВ = arsh x, РС = arch x, если $x \geqslant 1$. Если $x < 1$, то РС = — 1, т. е. arch x не существует. РД = arth x, если $|x| < 1$. Если $|x| \geqslant 1$, то происходит авост и на индикаторе ЕГГОГ, что, однако, не влияет на значения arsh x и arch x в РВ и РС.
4. Регистры: рабочие РВ, РС, РД; оперативные —; свободные Р0 — РА.
5. Погрешность относительная меньше $1\cdot10^{-6}$.
6. Время счета $s \approx 15$ с.

Примеры. arsh 2 = 1,4436355; arch 2 = 1,3169579; arsh (— 0,7) = = —0,6526667; arth (—0,7) = — 0,8673006.

Указатель программ

Номер программы	Тип действия	Число шагов	Число регистров памяти	Примечание
1.1	Сложение	6	2	Программы отличаются расположением результата в РХ, РY
1.2				
1.3	Умножение	15	4	
1.4	Умножение	16	4	Один из операндов располагается в РХ, РY
1.5	Умножение	17	3	
1.6	Умножение	20	2	
1.7	Умножение и сложение	18	4	
1.8	Обратная величина числа	11	1	
1.9	Деление или умножение	26	4	В памяти сохраняются значения делимого и обратной величины делителя
1.10	Деление или умножение	27	3	В памяти сохраняется делимое
1.11	Деление	26	4	В памяти сохраняется делитель и квадрат его модуля
1.12	Целая положительная степень комплексного числа	18	5	
1.13	То же	22	3	
1.14	»	21	5	Операция умножения комплексных чисел выделена в подпрограмму
1.15	»	25	3	
1.16	Целая отрицательная степень комплексного числа	28	5	
1.17	Многочлены вещественного аргумента, $n \leqslant 11$	9	$n+3$	
1.18	Многочлены комплексного аргумента, $n \leqslant 9$	21	$n+5$	Коэффициент при старшем члене комплексный
1.19	Многочлены комплексного аргумента, $n \leqslant 5$	23	$2n+5$	Коэффициенты многочленов комплексные
1.20	Комбинированные многочлены вещественного аргумента, $n \leqslant 10$	12	$n+4$	
1.21	Комбинированные многочлены комплексного аргумента, $n \leqslant 8$, $m = 1, 2, \ldots$	30	$n+6$	Коэффициент при старшем члене z^{m+n} комплексный
1.22	Двучлены обратной величины комплексного аргумента z	15	3	
1.23	Двучлены аргумента $1/z$	31	5	Коэффициенты комплексные
1.24	Двучлены аргумента $1/z$	32	6	Вычисляется также $\|z\|^2$
1.25	Многочлены по обратным степеням вещественного аргумента, $n \leqslant 11$	10	$n+3$	

Номер программы	Тип действия	Число шагов	Число регистров памяти	Примечание
1.26	Комбинированные многочлены по обратным степеням вещественного аргумента, $n \leqslant 10$	17	$n+4$	Два варианта программы
1.27	Многочлены комплексного аргумента $(1/z)$, $n \leqslant 9$	32	$n+5$	Коэффициент при старшем члене комплексный
1.28	Многочлены комплексного аргумента $(1/z)$, $n \leqslant 5$	34	$2n+5$	Коэффициенты многочленов комплексные
1.29	Комбинированные многочлены комплексного аргумента $1/z$, $n \leqslant 8$, $m=1, 2, \ldots$	50	$n+6$	Коэффициент при старшем члене $(1/z)^{m+n}$ комплексный
1.30	Комбинированные многочлены комплексного аргумента $1/z$, $n \leqslant 8$, $m=-1, -2, \ldots$	36	$n+6$	Коэффициент при старшем члене $(1/z)^{m+n}$ комплексный

Номер программы	Функция	Область определения	Число шагов	Число регистров памяти	Примечания
1.31	e^z	∞	10	1	
1.32	$\ln z$	$0 \leqslant \arg z < \pi$	12	2	Вычисляется также модуль z
1.33	$\ln z$	$\|\arg z\| < \pi$	19	2	Вычисляется также модуль z
1.34	z^w $(w=u+jv)$	$0 \leqslant \arg z < \pi$	36	4	
1.35	z^w	$\|\arg z\| < \pi$	43	4	
1.36	z^u	$0 \leqslant \arg z < \pi$	22	3	Показатель u вещественный
1.37	z^w	$\|\arg z\| < \pi$	58	7	Многозначная функция; последовательно вычисляются все ветви

Номер программы	Функция	Число шагов	Число регистров памяти	Примечание
1.38	$\sin z$ или $\operatorname{sh} z$	18	2	
1.39	$\sin z$ или $\operatorname{sh} z$	20	1	
1.40	$\cos z$ или $\operatorname{ch} z$	20	1	
1.41	$\cos z$ или $\operatorname{ch} z$	18	2	
1.42	$\sin z$, $\cos z$ или $\operatorname{sh} z$, $\operatorname{ch} z$	31	3	
1.43	$\sin z$, $\cos z$ или $\operatorname{sh} z$, $\operatorname{ch} z$	29	4	

Номер программы	Функция	Число шагов	Число регистров памяти	Примечание
1.44	$\operatorname{tg} z$ или $\operatorname{th} z$	26	2	
1.45	$\operatorname{sh} x$, $\operatorname{ch} x$, $\operatorname{th} x$	15	3	Аргумент x вещественный
1.46	$\arcsin z$, $\arccos z$, $\operatorname{arch} z$ или $\operatorname{arsh} z$	78	4	
1.47	$\operatorname{arctg} z$ или $\operatorname{arth} z$	63	4	
1.48	$\operatorname{arsh} x$, $\operatorname{arch} x$, $\operatorname{arth} x$	36	3	Аргумент x вещественный; $x \geqslant 1$ для $\operatorname{arch} x$, $\|x\| < 1$ для $\operatorname{arth} x$

Глава 2

Гамма-функция вещественного и комплексного аргументов и родственные ей функции

2.1. Гамма-функция и логарифм гамма-функции. Факториал

Гамма-функция в области $\operatorname{Re} z > 0$ выражается через интеграл Эйлера

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-z}\, dt. \tag{2.1}$$

$\Gamma(z)$ как аналитическое продолжение (2.3) в область $\operatorname{Re} z < 0$ является однозначной аналитической функцией на всей комплексной плоскости, кроме точек $z = 0, -1, -2, \ldots$, где она имеет простые полюсы.

Для продолженной функции применимы *асимптотическое разложение — формула Стирлинга*

$$\Gamma(z) \approx \sqrt{2\pi z} \exp[(z-1)\ln z - z + 1/(12z)]\,(1 - 1/(360z^3) + \ldots),$$
$$|\arg z| < \pi, \tag{2.2}$$

и *рекуррентная формула*

$$\Gamma(z+1) = z\,\Gamma(z). \tag{2.3}$$

При $\operatorname{Re} z \geqslant 12$ достаточную точность (относительная погрешность $1 \cdot 10^{-6}$) дает асимптотическая формула

$$\Gamma(z) \approx \sqrt{2\pi z} \exp[(z-1)\ln z - z + 1/(12z)]. \tag{2.4}$$

Удобный алгоритм вычисления $\Gamma(z)$ в вещественной области ($z = x$) состоит в следующем. Увеличим аргумент $x \equiv A + M$ (A — целая часть числа, M — мантисса ($0 \leqslant M < 1$)) до $S = 12 + M$, а затем применим к S асимптотическое разложение (2.4). Используя затем последовательно рекуррентную формулу (2.3) в сторону уменьшения z, получаем

$$\Gamma(x) \approx \frac{\sqrt{2\pi S}\exp\left[S(\ln S - 1) + 1/(12S)\right]}{S(S-1)\ldots(1+x)\,x}, \tag{2.5}$$

где

$$S = 12 + M. \tag{2.6}$$

Относительная погрешность $\delta\Gamma(z)$ гамма-функции определяется согласно (2.5) в основном абсолютной погрешностью экспоненциального множителя $A \equiv S(\ln S - 1)$, т. е. величиной $|A|\delta A$. Следовательно, при прочих равных условиях погрешность $\delta\Gamma(z)$ возрастает с увеличением $|z|$. Ориентировочно при $z \gg 1$ $\delta\Gamma(z) \approx |z| \cdot 10^{-7}$. Вычисление $\Gamma(z)$ в комплексной области по формуле типа (2.5) связано с чрезмерным числом операций над комплексными числами. Удобнее выразить результат через $\ln\Gamma(z)$.

Логарифм гамма-функции является однозначной функцией, аналитической в плоскости z, разрезанной вдоль отрицательной части действительной оси. При этом выбирается такая ветвь $\mathrm{Ln}(z)$, чтобы $(\ln z)_{y=0} = \ln x$. Согласно (2.4) асимптотическое разложение $\ln\Gamma(z)$ имеет вид

$$\ln\Gamma(z) \approx \ln\sqrt{2\pi} + (z - 1/2)\ln z - z + 1/(12z), \tag{2.7}$$

а рекуррентная формула

$$\ln\Gamma(z) = \ln\Gamma(z+1) - \ln z. \tag{2.8}$$

Применим процедуру, аналогичную (2.5), (2.6), для вычисления $\ln\Gamma(z)$ в комплексной области. Представим аргумент z в виде

$$z = x + \mathrm{j}\,y = A + M + \mathrm{j}\,y, \tag{2.9}$$

где A и M — соответственно целая часть и мантисса $\mathrm{Re}\,z$. Увеличим целую часть до 12, введя комплексную величину

$$t = 12 + M + \mathrm{j}\,y. \tag{2.10}$$

Тогда

$$\ln\Gamma(z) \approx \ln\sqrt{2\pi} + (t - 1/2)\ln t - t - 1/(12t) -$$
$$-[\ln(t-1) + \ln(t-2) + \ldots + \ln(z+1) + \ln z] \tag{2.11}$$

и $\Gamma(z)$ можно найти по формуле

$$\Gamma(z) = e^{\ln\Gamma(z)}. \tag{2.12}$$

Факториал аргумента x равен по определению

$$x! = \Gamma(x+1). \tag{2.13}$$

Обычно используются только целые положительные $x = n$ или нуль:

$$n! = 1\cdot2\cdot3\ldots n,\ n \geqslant 1;\ 0! = 1. \tag{2.14}$$

Расчет $n!$ на ПМК непосредственно перемножением по формуле (2.14) возможен до $n = 69$. При бóльших n результат превышает 10^{100} и возникает переполнение. Простой способ увеличения максимума n — переход к $\lg n$, определяемому по (2.13) и асимптотической формуле (2.7):

$$\lg n! \approx \lg\sqrt{2\pi n} + n\lg n + (1/12n - n)/\ln 10 = A + M. \tag{2.15}$$

Целая часть A и мантисса M ($0 \leqslant M < 1$) легко отделяются после вычисления $\lg n!$. Тогда

$$n! = 10^M \cdot 10^A, \tag{2.16}$$

где A — порядок; 10^M — мантисса факториала $n!$ ($1 \leqslant 10^M < 10$). Переполнение при вычислении этих величин наступает лишь при $n\lg n \approx 10^{100}$, что соответствует $n \approx 1\cdot10^{98}$. Отметим, что при выделении из числа, равного $\lg n!$, мантиссы M количество значащих цифр, приходящихся на долю M, сокращается по мере увеличения n. При $A > 1\cdot10^7$ ($n > 1{,}6\cdot10^6$) на долю M не остается ни одной значащей цифры. В этом случае данным способом можно определить лишь порядок $n!$

Иногда находят применение произведения последовательных четных или нечетных чисел, которые обозначаются двойным факториалом

$$p!! = p(p-2)\ldots1, \tag{2.17}$$

так что $(2n)!! = 1\cdot2\cdot4\cdot6\ldots2n$, $(2n-1)!! = 1\cdot3\cdot5\ldots(2n-1)$.

Программа 2.1. Гамма-функция $\Gamma(x)$ вещественного аргумента (2.5), (2.6), $x \neq 0, -1, -2, \ldots,$; $x \leqslant 69$.

ИП4	ИП5	1	+	П5	×	П4	ИП5	1	2
—	Fx⩾0	00	F Bx	ИП5	×	F1/x	ИП5	F ln	1
—	ИП5	×	+	Fe^x	ИП4	÷	Fπ	2	×
ИП5	×	F√	×	С/П					

И н с т р у к ц и я

1. Исходные данные: x = Р4 = Р5.
2. Пуск: В/О С/П.
3. Результат: РХ = $\Gamma(x)$.
4. Регистры: рабочие —; оперативные Р4, Р5; свободные Р0 — Р3, Р6 — РД.
5. Погрешность относительная меньше $1\cdot10^{-6}$ при $x \approx 1$ и $x\cdot10^{-7}$ при $x \gg 1$.
6. Время счета $t \approx (1 - x/15)$ мин при $x \leqslant 12$ и $t \approx 20$ с при $x \geqslant 12$.

Пример. $\Gamma(1{,}395) = 0{,}88754726$ (0,88754726 [9]); $\Gamma(3{,}395)/7 = 0{,}42361678$ (0,42361694 [9]).

Программу можно использовать для расчета функции $\Gamma(x+1)/k$ (где k — произвольная вещественная константа), следует лишь изменить ввод исходных данных (п. 1 инструкции): k = Р4, x = Р5. После пуска В/О С/П в регистре РХ оказывается величина $\Gamma(x+1)/k$.

Программа 2.2. Логарифм гамма-функции $\ln\Gamma(z)$ комплексного аргумента $z = x + \mathrm{j}\,y$, $0 \leqslant \arg z < \pi$ (2.10), (2.11). При $-\pi \leqslant \arg z < 0$ следует находить $\ln\Gamma(z)$ по формуле $\ln\Gamma(z) = \overline{\ln\Gamma(\bar z)}$.

0	П2	П3	ПП	70	ПП	62	ИП1	1	+
П1	1	2	—	Fx⩾0	03	ПП	70	2	F1/x
ИП1	—	П7	ИП4	×	ИП5	ИП0	×	+	ИП5
ИП7	×	ИП4	ИП0	×	—	ПП	62	ИП1	ИП6
1	2	×	П6	÷	ИП1	—	ИП0	/—/	ИП6
÷	ИП0	—	ПП	62	Fπ	2	×	F√	Fln
+	С/П	ИП3	+	П3	XY	ИП2	+	П2	В/О
ИП1	↑	Fx^2	ИП0	Fx^2	+	П6	F√	П7	÷
Farccos	/—/	П5	ИП7	Fln	/—/	П4	XY	В/О	

Инструкция
1. Исходные данные: $x = P1$, $(y = P0)$.
2. Пуск: В/О С/П.
3. Результат: $PX = \mathrm{Re}\ \ln\Gamma(z)$, $PY = P3 = \mathrm{Im}\ \ln\Gamma(z)$.
4. Регистры: рабочие Р0, Р3; оперативные Р1, Р2, Р4 —Р7; свободные Р8—РД.
5. Погрешность относительная меньше $3\cdot 10^{-6}$.
6. Время счета $t \approx (4 - x/4)$ мин при $x \leqslant 12$ и $t \approx 1$ мин при $x \geqslant 12$.

Примеры.

$\ln\Gamma(1{,}9 + j4{,}7) = -4{,}2794835 + j4{,}5752812$ $(-4{,}27948395 + j4{,}57528305)$, $t = 3$ мин;

$\ln\Gamma(-3{,}5 + j0) = -1{,}3090055 - j12{,}56637$ $(-1{,}3090055 - j4\pi$, $4\pi = 12{,}56637)$, $t = 4$ мин;

$\ln\Gamma(1{,}4 + j10) = -12{,}715858 + j14{,}403257$ $(-12{,}7158587 + j14{,}4032576)$, $t = 3$ мин.

Значения в скобках взяты из таблиц $\ln\Gamma(z)$ [9].

Программа 2.3. Гамма-функция $\Gamma(z)$ комплексного аргумента $z = x + jy$, $0 \leqslant \arg z < \pi$ (2.10) — (2.12). При $-\pi < \arg z \leqslant 0$ $\Gamma(z)$ следует находить по формуле $\Gamma(z) = \overline{\Gamma(\bar{z})}$, $|z| \leqslant 69$.

0	П2	П3	ПП	79	ПП	71	ИП1	1	+
П1	1	2	—	Fx⩾0	03	ПП	79	2	F1/x
ИП1	—	П7	ИП4	×	ИП5	ИП0	×	+	ИП5
ИП7	×	ИП4	ИП0	×	—	ПП	71	ИП1	ИП6
1	2	×	П6	÷	ИП1	—	ИП0	/—/	ИП6
÷	ИП0	—	ПП	71	Fπ	2	×	F√	Fln
+	Fe^x	ИП3	Fsin	XY	×	FBx	ИП3	Fcos	×
С/П	ИП3	+	П3	XY	ИП2	+	П2	В/О	ИП1
↑	Fx^2	ИП0	Fx^2	+	П6	F√	П7	÷	Farccos
/—/	П5	ИП7	Fln	/—/	П4	XY	В/О		

Структура программы

00—17: вычисление суммы логарифмов (в квадратных скобках в формуле (2.11)) и занесение ее в Р2, Р3. Этот фрагмент связан также с подпрограммами вычисления $\ln z$ (адреса 79 — 97) и суммирования комплексных чисел (адреса 71—78).

18—60: вычисление остальных слагаемых в (2.11) и полной величины $\ln\Gamma(z)$.

61—70: вычисление $\Gamma(z)$ по формуле (2.12).

Инструкция
1. Исходные данные: $x = P1$, $(y = P0)$.
2. Пуск: В/О С/П.
3. Результат: $PX = \mathrm{Re}\ \Gamma(z)$, $PY = \mathrm{Im}\ \Gamma(z)$.
4. Регистры: рабочие Р0; оперативные Р1 — Р7; свободные Р8 — РД.
5. Погрешность относительная меньше $2\cdot 10^{-6}$ при $|z| \approx 1$ и $3|z|\cdot 10^{-7}$ при $|z| \gg 1$.
6. Время счета: $t \approx (4 - x/4)$ мин при $x \leqslant 12$ и $t \approx 1$ мин при $x \geqslant 12$.

Примеры.

$\Gamma(1{,}8 + j3{,}6) = -4{,}5257904\cdot 10^{-2} + j1{,}4387914\cdot 10^{-2}$ $(-4{,}5257948\cdot 10^{-2} + j1{,}4387887\cdot 10^{-2}$ [9]), $t = 3$ мин;

$\Gamma(-3{,}5 + j0) = 0{,}27008855 + j1{,}0803542\cdot 10^{-7}$ $(0{,}2700882 + j0$ [9]), $t = 4$ мин.

Программа 2.4. Факториал $n!$ (2.14).

Приведены два варианта программы, инструкция к обоим вариантам отличается только способом ввода исходных данных.

1. $0 < n \leqslant 69$

1	ИП0	×	FL0	01	С/П

2. $0 \leqslant n \leqslant 69$

ВП	П0	1	ИП0	×	FL0	03	С/П

Последний вариант программы предложен в [2] и основан на применении команды ВП, которая замещает 0 в регистре РХ на 1, не изменяя другие числа в РХ.

Инструкция
1. Исходные данные: вариант 1 $n = P0$, вариант 2 $n = PX$.
2. Пуск: В/О С/П.
3. Результат: $n! = PX$.
4. Регистры: рабочие —; оперативные Р0; свободные Р1 — РД.
5. Время счета $t \approx n$ с.

Пример. $7! = 5040$.

Программа 2.5. Факториал $n! = B\cdot 10^A$, $10 \leqslant n \leqslant 1\cdot 10^{98}$, (2.15), (2.16).

ПД	Flg	ИПД	×	ИПД	2	×	Fπ	×	F√
Flg	+	ИПД	1	2	×	F1/x	ИПД	—	1
0	Fln	÷	+	ПД	КИПД	F,	ИПД	—	9
9	XY	—	Fx⩾0	37	FBx	$F10^x$	ИПД	XY	С/П

Инструкция
1. Исходные данные: $n = PX$.
2. Пуск: В/О С/П.
3. Результат: при $10 \leqslant n \leqslant 1{,}5\cdot 10^6$ $B = PX$, $A = PY$; при $1{,}5\cdot 10^6 \leqslant n \leqslant 1\cdot 10^{98}$ $A = [PY]$. В последнем случае достоверен только порядок факториала, а содержимое РХ не имеет значения (квадратная скобка — округление до ближайшего целого).
4. Регистры: рабочие —; оперативные РД; свободные Р0 — РС.
5. Погрешность относительная мантиссы B меньше $1\cdot 10^{-6} + [\lg A]$ (квадратная скобка — округление $\lg A$ до целого в меньшую сторону).
6. Время счета $t \approx 15$ с.

Примеры. $10! = 3{,}6288076\cdot 10^6$ (3628800);
$1000! = 4{,}0243892\cdot 10^{2567}$ $(4{,}0238726\cdot 10^{2567}$ [9]); $(1\cdot 10^{90})! = 10^{10^{92}}$.

Программа 2.6. Двойной факториал $p!! = p(p-2)\ldots 1$, $p \leqslant 119$.

1	ИП0	×	FL0	05	FL0	01	С/П

Программа взята из [2].

Инструкция
1. Исходные данные: $p = P0$.
2. Пуск: В/О С/П.
3. Результат: $PX = p!!$
4. Регистры: рабочие — ; оперативные Р0; свободные Р1 — РД.
5. Время счета $t \approx (p)$ с.

Примеры. $15!! = 2027025$; $116!! = 6{,}7750296\cdot 10^{95}$.

2.2. Обратная величина гамма-функции. Отношение гамма-функций различных аргументов. Бета-функция

Обратная величина гамма-функции $1/\Gamma(z)$ является целой функцией, имеющей простые нули в точках $z = 0, -1, -2, \ldots$. Метод вычисления $1/\Gamma(z)$ такой же, как и $\Gamma(z)$, т. е. используются асимптотическое разложение и рекуррентная формула. Рабочая формула сразу получается из (2.5):

$$\frac{1}{\Gamma(z)} \approx \sqrt{\frac{1}{2\pi}}\,(t-1)(t-2)\ldots(1+z)\,z\exp\left[\left(\frac{1}{2}-t\right)\ln t + t - \frac{1}{12t}\right], \quad (2.18)$$

где t определяется (2.10) $(0 \leqslant \arg z < \pi)$. Отметим, что по сравнению с (2.5) формула (2.18) удобнее для расчетов функций комплексного аргумента, поскольку в (2.18) отсутствует операция деления комплексных чисел. Поэтому по (2.18) можно вычислять функцию $1/\Gamma(z)$ комплексного аргумента полностью в автоматическом режиме ПМК, не находя предварительно $\ln\Gamma(z)$, что сокращает время счета.

При расчетах обратной величины гамма-функции вещественного аргумента удобнее оперировать функцией

$$\frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma(x)} \approx \sqrt{S}\,(S-1)(S-2)\ldots(x+1)\,x\exp\left\{-\left[S(\ln S-1)+\frac{1}{12S}\right]\right\}, \quad (2.19)$$

где $S = 12 + M$ (2.6). Функция (2.19) по сравнению с (2.18) упрощает вычисление отношения гамма-функций и более сложных дробей, содержащих в числителе и знаменателе гамма-функции. Через эти дроби выражается бета-функция; они также существенны при вычислении гипергеометрических функций (см. гл. 6).

Отношение гамма-функций различных аргументов $\Gamma(z)/\Gamma(w)$ имеет простые полюсы в точках $z = 0, -1, -2, \ldots$ и простые нули в точках $w = 0, -1, -2, \ldots$. Вычислить это отношение можно, умножив $\Gamma(z)$ на $1/\Gamma(w)$. Для вещественных $z = x$, $w = u$ лучше, однако, использовать соотношение

$$\frac{\Gamma(x)}{\Gamma(u)} = \frac{1/\Gamma(u)}{1/\Gamma(x)} \quad (2.20)$$

ввиду относительной простоты формулы (2.19) для $1/\Gamma$ и отсутствия у этой функции особых точек.

Бета-функция может быть определена соотношением [6]

$$B(z, w) \equiv \Gamma(z)\,\Gamma(w)/\Gamma(z+w), \quad (2.21)$$

где $z = x + \mathrm{j}\,y$; $w = u + \mathrm{j}\,v$; $|\arg z| < \pi$, $|\arg w| < \pi$. При вещественных z и w $(z = x,\ w = u)$ можно использовать (2.19) и (2.20).

При комплексных аргументах эти соотношения получаются слишком громоздкими, что затрудняет реализацию программ на ПМК (работу в автоматическом режиме). Можно, однако, использовать упрощенную формулу для $\ln\Gamma(z)$, получаемую из (2.11) путем замены слагаемого $1/12z$ на $1/12x$. После простых преобразований с учетом (2.10), (2.11) и (2.21) получаем

$$\ln B(z, w) = \ln\sqrt{2\pi} + \Pi_1 + \Pi_2 - \Pi_3;$$

$$\Pi_i \approx (t_i - 1/2)\ln t_i - \mathrm{Re}\,t_i + 1/(12\,\mathrm{Re}\,\xi_i) - [\ln(t_i-1) + \ln(t_i-2) + \ldots + \ln(\xi_i+1) + \ln\xi_i]; \quad (2.22)$$

$$t_i = 20 + M_i + \mathrm{j}\,\mathrm{Im}\,\xi_i,\quad i = 1, 2, 3;\quad \xi_1 = z,\quad \xi_2 = w,\quad \xi_3 = z + w.$$

В формулах (2.22) M_i — мантиссы действительных частей ξ_i.

Применение (2.22) обеспечивает относительную погрешность для $\ln B(z, w)$ не более $2\cdot10^{-4}$, время счета 15 мин. Можно довести точность до $5\cdot10^{-6}$, заменив 20 в формулах для t_i на 60. Но при этом время счета возрастает примерно втрое.

Программа 2.7. Обратная величина гамма-функции вещественного аргумента (вычисляется функция $k\sqrt{2\pi}/\Gamma(x)$, где k — задаваемая вещественная константа) (2.19) $x \leqslant 69$.

ИП4	ИП5	×	П4	ИП5	1	+	П5	1	2
—	Fx⩾0	00	FBx	ИП5	×	F1/x	ИП5	Fln	1
—	ИП5	×	+	/—/	Fe^x	ИП5	F√	×	ИП4
×	П4	С/П							

Инструкция

1. Исходные данные: k = Р4, x = Р5.
2. Пуск: В/О С/П.
3. Результат: РХ = Р4 = $k\sqrt{2\pi}/\Gamma(x)$.
4. Регистры: рабочие Р4; оперативные Р5; свободные Р0 — Р3, Р6 — РД.
5. Погрешность относительная меньше $1\cdot10^{-6}$ при $x \approx 1$ и $x\cdot10^{-6}$ при $x \gg 1$.
6. Время счета: $t \approx (1 - x/15)$ мин при $x < 12$ и $t \approx 20$ с при $x \geqslant 12$.

Пример. $2\sqrt{2\pi}/\Gamma(3{,}5) = 1{,}5084935$ (1,5084944 [9]).

Программа 2.8. Обратная величина гамма-функции $1/\Gamma(z)$ комплексного аргумента $z = x + \mathrm{j}\,y$ (2.18), (2.10), $0 \leqslant \arg z < \pi$, $|z| \leqslant 69$. Функция $1/\Gamma(z)$ в области $-\pi < \arg z < 0$ находится из равенства $\Gamma(\bar{z}) = \overline{\Gamma(z)}$.

F√	F1/x	0	XY	FBx	F,	ПП	81	ИПС	1
+	ПС	ПА	1	2	—	Fx⩾0	05	F,	П7
XY	П8	ИПС	↑	Fx²	ИПД	Fx²	+	П6	F√
÷	Farccos	ПВ	ИП6	F√	Fln	ПА	ИПД	/—/	2
F1/x	ИПС	—	ПП	81	ИПС	+	П9	XY	ИПД
+	ИПД	ИП6	1	2	×	П6	÷	+	ИП9
ИПС	ИП6	÷	—	XY	П9	Fsin	XY	Fe^x	×
ПВ	FBx	ИП9	Fcos	×	ПА	ИП8	ИП7	ПП	81
С/П	XY	FBx	ИПВ	×	XY	П9	ИПА	×	+
XY	ИПА	×	ИП9	ИПВ	×	—	В/О		

Инструкция

1. Исходные данные: x = РА = РС, y = РВ = РД, [2π = РХ].
2. Пуск: В/О С/П.
3. Результат: РХ = Re $[1/\Gamma(z)]$, РY = Im $[1/\Gamma(z)]$.
4. Регистры: рабочие —; оперативные Р6 — РД; свободные Р0 — Р5.
5. Погрешность относительная меньше $2\cdot10^{-6}$ при $|z| \approx 1$ и $3\,|z|\cdot10^{-7}$ при $|z| > 7$.
6. Время счета: $t \approx (2{,}5 - x/8)$ мин при $x \leqslant 12$ и $t \approx 1$ мин при $x \geqslant 12$.

Примеры.

$1/\Gamma(2+\mathrm{j}8) = -693{,}2097 + \mathrm{j}4968{,}5299$ $(-693{,}2034 + \mathrm{j}4968{,}5256)$, $t = 2$ мин;

$1/\Gamma(-3{,}5+\mathrm{j}0) = 3{,}7024902 + \mathrm{j}0$ (3,7024942 [9]), $t = 3$ мин.

Программа 2.9. Отношение гамма-функций вещественных аргументов (вычисление $\Gamma(x)/k\,\Gamma(y)$, $x \neq 0, -1, -2, \ldots$; $|x|, |y| \leqslant 69$; k — задаваемая вещественная константа) (2.20), (2.19), программа 2.7.

ИП6	ПП	09	F1/x	П4	ИП7	ПП	09	С/П	П5
ИП4	ИП5	×	П4	ИП5	1	+	П5	1	2
—	Fx≥0	10	FBx	ИП5	×	F1/x	ИП5	Fln	1
—	ИП5	×	+	/—/	Fe^x	ИП5	F√	×	ИП4
×	В/О								

Инструкция

1. Исходные данные: k = Р4, (x = Р6, y = Р7).
2. Пуск: В/О С/П.
3. Результат: РХ = $\Gamma(x)/k\,\Gamma(y)$.
4. Регистры: рабочие Р6, Р7; оперативные Р4, Р5; свободные Р0—Р3, Р8—РД.
5. Погрешность относительная меньше: $1\cdot10^{-6}$ при $x,\ y\approx1$ и $(x+y)\cdot10^{-7}$ при $x,\ y\gg1$.
6. Время счета:

$$t\approx\begin{cases}[2-(x+y)/15]\ \text{мин} & \text{при } x\leqslant12,\quad y\leqslant12,\\ (1-x/15)\ \text{мин} & \text{при } x\leqslant12,\quad y\geqslant12,\\ (1-y/15)\ \text{мин} & \text{при } x\geqslant12,\quad y\leqslant12,\\ 0{,}5\ \text{мин} & \text{при } x\geqslant12,\quad y\geqslant12.\end{cases}$$

Пример. $\Gamma(1{,}1)/3\,\Gamma(-0{,}8)$ = — 0,055260776 (—0,055260762 [9]), t = 2 мин.

Программа 2.10. Бета-функция вещественных аргументов $B(x, y)$, $x, y\neq 0$, $-1, -2, \ldots$; $x, y, (x+y)\leqslant 69$ ((2.21), (2.20), (2.19)).

ИП7	П5	1	П6	ПП	26	П6	ИП8	П5	ПП
26	F1/x	П6	ИП7	ИП8	+	П5	ПП	26	Fπ
2	×	F√	×	П6	С/П	ИП6	ИП5	×	П6
ИП5	1	+	П5	1	2	—	Fx≥0	26	FBx
ИП5	×	F1/x	ИП5	Fln	1	—	ИП5	×	+
/—/	Fe^x	ИП5	F√	×	ИП6	×	В/О		

Инструкция

1. Исходные данные: (x = Р7, y = Р8).
2. Пуск: В/О С/П.
3. Результат: РХ = Р6 = $B(x, y)$.
4. Регистры: рабочие Р6 — Р8; оперативные Р5; свободные Р0 — Р4, Р9 — РД.
5. Погрешность относительная меньше $1\cdot10^{-6}$ при $x,\ y\approx1$ и $(x+y)\times10^{-7}$ при $x,\ y\gg1$.
6. Время счета:

$$t\approx\begin{cases}[3-(x+y)/10]\ \text{мин} & \text{при } x\leqslant12,\quad y\leqslant12,\\ (1{,}5-x/10)\ \text{мин} & \text{при } x\leqslant12,\quad y\geqslant12,\\ 0{,}5\ \text{мин} & \text{при } x\geqslant12,\quad y\geqslant12.\end{cases}$$

Примеры.

$B(5,6)=7{,}9365107\cdot10^{-4}$ ($7{,}9365079\cdot10^{-4}=1/1260$), $t=1{,}5$ мин;

$B(0{,}5;\ 0{,}5)=3{,}1415954$ ($3{,}1415926=\pi$), $t=3$ мин.

Программа 2.11. Логарифм бета-функции $\ln B(z, w)$ комплексных аргументов $z=x+j\,y$, $w=u+j\,v$, $0\leqslant\arg z<\pi$, $0\leqslant\arg w<\pi$; w, $z+w\neq0, -1, -2, \ldots$; $|z|, |w|, |z+w|\leqslant 64$.

П3	ПП	27	/—/	П2	XY	/—/	П3	ИПА	П8
ИПВ	П9	ПП	27	ИПС	П8	ИПД	П9	ПП	27
Fπ	2	×	F√	Fln	+	С/П	ПП	79	ПП
71	ИП8	1	+	П8	2	0	—	Fx≥0	27
ПП	79	2	F1/x	ИП8	—	П7	ИП4	×	ИП5
ИП9	×	+	1	2	ИП8	×	F1/x	+	ИП8
—	ИП5	ИП7	×	ИП4	ИП9	×	—	ПП	71
В/О	ИП3	+	П3	XY	ИП2	+	П2	В/О	ИП8
↑	Fx^2	ИП9	Fx^2	+	F√	П7	÷	Farccos	/—/
П5	ИП7	Fln	/—/	П4	XY	В/О			

Структура программы

27—70: подпрограмма вычисления $\ln\Gamma(z)$ по упрощенной формуле (2.22),
00—26: вычисление алгебраической суммы логарифмов (2.22),
71—78: подпрограмма суммы комплексных чисел,
79—96: подпрограмма функции $\ln z$.

Инструкция

1. Исходные данные: (x = РА, y = РВ, u = РС, v = РД), $x+u$ = Р8, $y+v$ = Р9, [0 = Р2].
2. Пуск: В/О С/П.
3. Результат: РХ = $\mathrm{Re}\ln B(z, w)$, РY = Р3 = $\mathrm{Im}\ln B(z, w)$.
4. Регистры: рабочие Р3, РА — РД; оперативные Р2, Р4, Р5, Р7, Р8, Р9; свободные Р0, Р1, Р6.
5. Погрешность относительная меньше $3\cdot10^{-4}$.
6. Время счета: $t\approx3[6-(x+u)/8]$ мин при $x\leqslant20$, $u\leqslant20$ и $t\approx3$ мин при $x\geqslant20$, $u\geqslant20$.

Пример.

$\ln B(1+j3{,}6;\ 1+j1{,}7)=-0{,}6944325-j3{,}981416$ $(-0{,}6943195-j3{,}9814594)$,

$t=14$ мин.

Число в скобках — результат вычисления $\ln B$ по таблице $\ln\Gamma(z)$ в [9].

2.3. Логарифмическая производная гамма-функции и полигамма-функции

Логарифмическая производная гамма-функции (*дигамма-функция*) равна по определению

$$\psi(z)=\frac{d\,[\ln\Gamma(z)]}{dz}. \tag{2.23}$$

Для $\psi(z)$ известны (см., например, [9]) следующие асимптотическое разложение и рекуррентная формула:

$$\psi(z)\approx\ln z-1/12z-1/12z^2+1/120z^4-1/252z^6+\ldots; \tag{2.24}$$

$$\psi(z)=\psi(z+1)-1/z. \tag{2.25}$$

Относительная погрешность при использовании (2.24) меньше $1\cdot10^{-6}$ для $|z|>4$.

Полигамма функции

$$\psi^{n}(z)=\frac{d^{n}\psi}{dz^{n}}. \qquad (2.26)$$

Случаю $n=1$ соответствует *тригамма-функция*, $n=2, 3, 4$ — соответственно *тетрагамма-*, *пентагамма-* и *гексагамма-функции*. Все функции $\psi^{(n)}$ являются однозначными аналитическими функциями на плоскости z, кроме точек $z=0$, $-1, -2, \ldots$, где они имеют полюсы порядка $n+1$. Дигамма-функция в указанных точках имеет полюсы первого порядка.

Для полигамма-функций известны следующие асимптотические разложения и рекуррентные формулы:

$$\psi^{(n)}(z)\sim(-1)^{n+1}\,\frac{(n-1)!}{z^{n}}\left[1+\frac{n}{2z}+\frac{n(n+1)}{12z^{2}}-\right.$$

$$\left.-\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{720z^{4}}+\ldots\right]; \qquad (2.27)$$

$$\psi^{(n)}(z)=\psi^{(n)}(z+1)-(-1)^{n}\,n!\,z^{-n-1}. \qquad (2.28)$$

Применение формулы (2.27) (без последнего слагаемого в квадратных скобках) приводит к относительной погрешности, меньшей $5\cdot10^{-6}$ при $|z|>6n$.

В приведенных далее программах используются следующие формулы, которые вытекают соответственно из (2.24), (2.25) и (2.27), (2.28):

$$\psi(z)\approx\ln t+\left[\left(\frac{1}{120t^{2}}-\frac{1}{12}\right)\frac{1}{t}-\frac{1}{2}\right]\frac{1}{t}-$$

$$-\left(\frac{1}{t-1}+\frac{1}{t-2}+\ldots+\frac{1}{z+1}+\frac{1}{z}\right); \qquad (2.29)$$

$$\psi^{(n)}(z)\approx(-1)^{n-1}\,\frac{(n-1)!}{t^{n}}\left[\left(\frac{n+1}{12t}+\frac{1}{2}\right)\frac{n}{t}+1\right]+$$

$$+(-1)^{n-1}\,n!\left[\frac{1}{(t-1)^{n+1}}+\frac{1}{(t-2)^{n+1}}+\ldots+\frac{1}{(z+1)^{n+1}}+\frac{1}{z^{n+1}}\right], \qquad (2.30)$$

где

$$t=N+M+jy, \qquad (2.31)$$

M — мантисса числа $x=\mathrm{Re}\,z$; N — минимальное целое число, при котором относительная погрешность, создаваемая асимптотическими разложениями, не превышает $5\cdot10^{-6}$. Для дигамма-функции $\psi(x)$ вещественного аргумента в формуле (2.24) с целью сокращения длины программы достаточно удерживать только три члена. При этом следует брать $N=14$. Для полигамма-функций вещественного аргумента при использовании формулы (2.30) минимальное $N=9n$.

У функций $\psi(z)$ комплексного аргумента используется полная формула (2.29) и принимается $N=4$. Для функций $\psi^{(n)}(z)$ (2.30) следует брать $N=9$ при $n=1$, $N=14$ при $n=2$ и $N=6n$ для $n\geqslant3$. При указанных условиях относительная погрешность $\psi(z)$ и $\psi^{(n)}(z)$ не превышает $5\cdot10^{-6}$ (см. программу 2.15).

Программа 2.12. Логарифмическая производная гамма-функции (дигамма-функция) вещественного аргумента $\psi(x)$, $x\neq0, -1, -2, \ldots$ (2.24) (без последнего слагаемого) и (2.25).

П0	0	↑	F,	ИП0	F1/x	—	ИП0	1	+
П0	1	4	—	Fx⩾0	03	F,	ИП0	Fln	FBx
2	×	F1/x	—	FBx	Fx²	3	÷	—	+
С/П									

Инструкция
1. Исходные данные: $[x=\mathrm{PX}]$.
2. Пуск: В/О С/П.
3. Результат: $\mathrm{PX}=\psi(x)$.
4. Регистры: рабочие — ; оперативные РД; свободные Р0 — РС.
5. Погрешность относительная меньше $1\cdot10^{-6}$.
6. Время счета: $t\approx(70-4x)$ с при $x\leqslant14$ и $t\approx10$ с при $x\geqslant14$.

Примеры.

$\varphi(1)=-0{,}5772159$ $(-0{,}57721566$ [9]), $t=50$ с;

$\psi(100)=4{,}6001618$ $(4{,}60016185$ [9]), $t=10$ с

Программа 2.13. Логарифмическая производная гамма-функции (дигамма-функция) $\psi(z)$ комплексного аргумента $z=x+jy$, $0\leqslant\arg z<\pi$, $z\neq0$, $-1, -2, \ldots$ (2.29). При $-\pi<\arg\bar z\leqslant0$ $\psi(z)=\overline{\psi(\bar z)}$.

0	П0	П1	1	ПС	0	ПД	ПП	61	ПП
88	ИПА	1	+	ПА	4	—	Fx⩾0	03	0
ПД	П5	П8	2	F1/x	П7	6	÷	П6	1
0	÷	/—/	ПС	4	П2	П4	ПП	61	КИП4
+	ПС	FL2	37	ПП	88	ИПА	ИП9	F√	П9
÷	Farccos	/—/	ПД	ИП9	Fln	/—/	ПС	ПП	88
С/П	ИПА	ИПС	×	ИПВ	ИПД	×	+	ИПА	ИПД
×	ИПВ	ИПС	×	—	ИПА	Fx²	ИПВ	Fx²	+
П9	÷	ПД	XY	ИП9	÷	ПС	В/О	ИП0	ИПС
—	П0	ИП1	ИПД	—	П1	В/О			

Структура программы

00 — 18: вычисление суммы $\left(\frac{1}{t-1}+\frac{1}{t-2}+\ldots+\frac{1}{z+1}+\frac{1}{z}\right)$,
19 — 60: вычисление остальных слагаемых (2.29) и получение $\psi(z)$,
61 — 87: подпрограмма деления комплексных чисел,
88 — 97: подпрограмма сложения комплексных чисел.

Инструкция
1. Исходные данные: $x=\mathrm{PA}$, $(y=\mathrm{PB})$.
2. Пуск: В/О С/П.
3. Результат: $\mathrm{PY}=\mathrm{P0}=\mathrm{Re}\,\psi(z)$, $\mathrm{PX}=\mathrm{P1}=\mathrm{Im}\,\psi(z)$.
4. Регистры: рабочие Р0, Р1, РВ; оперативные Р2, Р4 — Р9, РА, РС, РД; свободные Р3.
5. Погрешность относительная меньше $2\cdot10^{-6}$.
6. Время счета: $t\approx(2{,}5-x/4)$ мин при $x<4$ и $t\approx1{,}5$ мин при $x\geqslant4$.

Примеры

$\psi(1{,}1+j10)=2{,}3039689+j1{,}5108183$ $(2{,}30396+j1{,}51082$ [9]), $t=2$ мин;

$\psi(2+j9)=2{,}2104498+j1{,}4054846$ $(2{,}21045+j1{,}40548$ [9]), $t=1{,}5$ мин.

Программа 2.14. Полигамма-функции $\psi^{(n)}(x)$ вещественного аргумента $x \neq 0, -1, -2, \ldots, n = 1, 2, \ldots$ (2.30), (2.31) при $y = 0$.

ИПВ	9	×	П9	ИПВ	1	+	ПС	0	ПД
ПП	46	ИПА	÷	ИПД	+	ПД	ИПА	1	+
ПА	ИП9	—	Fx≥0	10	ПП	46	ИПА	2	×
F1/x	↑	Fx²	3	÷	ИПС	×	+	ИПВ	F1/x
+	×	ИПД	+	/—/	С/П	ИПВ	П1	1	ИП1
/—/	×	ИПА	÷	FL1	49	В/О			

Инструкция

1. Исходные данные: x = РА, (n = РВ).
2. Пуск: В/О С/П.
3. Результат: РХ = $\psi^{(n)}(x)$.
4. Регистры: рабочие РВ; оперативные Р1, Р9, РА, РС, РД; свободные Р0, Р2 — Р8.
5. Погрешность относительная меньше $1 \cdot 10^{-6}$.
6. Время счета: $t \approx (2n + 1 - x/4)$ мин при $x \leqslant 9$ и $t \approx (2n - 1)$ мин при $x > 9$.

Примеры.

$\psi^{(3)}(2) = 0{,}49393938$ (0,493939402 [9]), $t = 5$ мин;

$\psi^{(2)}(1) = -2{,}404114$ ($-2{,}4041138$ [9]), $t = 3$ мин;

$\psi^{(1)}(2) = 0{,}64493462$ (0,64493407) [9]), $t = 1$ мин.

Программа 2.15. Полигамма-функции $\psi^{(n)}(z)$ комплексного аргумента $z = x + \mathrm{j}\,y$, $z \neq 0, -1, -2, \ldots$, $n = 1, 2, \ldots$ (2.30), (2.31). N задается отдельно (пп. 1,5 инструкции).

1	ПС	0	ПД	ИП0	П1	ПП	59	FL1	06
ПП	59	ПП	89	ИПА	1	+	ПА	ИП3	—
Fx≥0	00	ИП0	1	П6	+	П1	2	П2	F1/x
/—/	П5	6	÷	ПС	0	ПД	ПП	59	КИП4
—	ПС	КИП1	FL2	37	ИП1	Fx≠0	52	ПП	59
FL1	48	1	П1	ПП	59	ПП	89	С/П	ИПА
ИПС	×	ИПВ	ИПД	×	+	ИПА	ИПД	×	ИПВ
ИПС	×	—	ИПА	Fx²	ИПВ	Fx²	+	ИП1	/—/
÷	П9	÷	ПД	XY	ИП9	÷	ПС	В/О	ИП7
+	П7	ИП8	ИПД	+	П8	В/О			

Структура программы

00—21 : расчет суммы $(-1)^{n-1}\, n! \left[\dfrac{1}{z^{n+1}} + \dfrac{1}{(z+1)^{n+1}} + \ldots + \dfrac{1}{(t-1)^{n+1}} \right]$,

22—58: расчет отрезка асимптотического разложения
$(-1)^{n-1} \dfrac{(n-1)!}{t^n} \left[\left(\dfrac{n+1}{12\,t} + \dfrac{1}{2} \right) \dfrac{n}{t} + 1 \right]$ и всей искомой функции $\psi^{(n)}$,

59—88: подпрограмма деления комплексных чисел,

89—97: подпрограмма сложения комплексных чисел.

Инструкция

1. Исходные данные: x = РА, (y = РВ, n = Р0, N = Р3), 0 = Р7 = Р8, 4 = Р4.
2. Пуск: В/О С/П.
3. Результат: Р7 = РY = Re $\psi^{(n)}(z)$, Р8 = РХ = Im $\psi^{(n)}(z)$.
4. Регистры: рабочие Р0, Р3, Р7, Р8, РВ; оперативные Р1, Р2, Р4, Р5, Р6, Р9, РА, РС, РД; свободные — .
5. Погрешность зависит от значения аргумента z (или t) асимптотического ряда (2.27), (2.30) и порядка n функции $\psi^{(n)}(z)$. В свою очередь, аргумент t (ср. (2.30) и (2.31)) определяется задаваемым значением N. Ниже приведены рекомендуемые значения N и соответствующие им максимальные относительные погрешности δ при различных n.

δ		$\leqslant 1 \cdot 10^{-4}$	$\leqslant 1 \cdot 10^{-5}$	$\leqslant 5 \cdot 10^{-6}$
N	$n=1$ $n=2$ $n\geqslant 3$	5 7 $3n$	8 11 $5n$	9 14 $6n$

6. Время счета $t \approx [n\,(N - 1 - x)/3 + 1]$ мин.

Примеры.

$\psi^{(1)}(1) = 1{,}6449347$ (1,64493407 [9]), $N = 9$, $t = 5$ мин;

$\psi^{(2)}(1) = -2{,}4041138$ ($-2{,}4041138$ [9]), $N = 14$, $t = 10$ мин;

$\psi^{(3)}(1) = 6{,}4939395$ (6,49393940 [9]), $N = 18$, $t = 16$ мин;

$\psi^{(3)}(16 + \mathrm{j}) = 5{,}2275627 \cdot 10^{-4} - \mathrm{j}1{,}0217238 \cdot 10^{-4}$, $N = 18$, $t = 3$ мин;

$\psi^{(2)}(16 + \mathrm{j}) = -4{,}1065766 \cdot 10^{-3} + \mathrm{j}5{,}3154321 \cdot 10^{-4}$, $N = 12$, $t = 1{,}5$ мин.

2.4. Неполные гамма-функции

Неполные гамма-функции $\Gamma(a, z)$ и $\gamma(a, z)$ характеризуются интегральными представлениями

$$\Gamma(a, z) = \int_z^\infty e^{-t}\, t^{a-1}\, dt, \quad \mathrm{Re}\, a > 0, \tag{2.32}$$

$$\gamma(a, z) = \int_0^z e^{-t}\, t^{a-1}\, dt, \quad \mathrm{Re}\, a > 0. \tag{2.33}$$

Из этих соотношений и определения гамма-функции следует, что

$$\Gamma(a, z) = \Gamma(a) - \gamma(a, z). \tag{2.34}$$

При нецелых a функции $\Gamma(a, z)$ и $\gamma(a, z)$ как функции z многозначны с точкой ветвления $z = 0$.

Наряду с $\gamma(a, z)$ (2.33) используется функция, которая является целой функцией от a и z:

$$\gamma^*(a, z) = \frac{z^{-a}}{\Gamma(a)}\, \gamma(a, z) = \frac{z^{-a}}{\Gamma(a)} \int_0^z e^{-t}\, t^{a-1}\, dt. \tag{2.35}$$

Через неполные гамма-функции могут быть выражены (см., например, [5]) интегральная показательная функция, интегральные синус и косинус, интеграл вероятностей и некоторые другие.

Разложения в ряды функций $\gamma(a, z)$ и $\gamma^*(a, z)$ [5]:

$$\gamma(a, z)=z^a e^{-z} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{a(a+1)\ldots(a+n)}=z^a \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-z)^n}{n!\,(a+n)}; \qquad (2.36)$$

$$\gamma^*(a, z)=e^{-z} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(a+n+1)}=\frac{1}{\Gamma(a)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-z)^n}{n!\,(a+n)}. \qquad (2.37)$$

В отличие от (2.33) формула (2.36) определяет $\gamma(a, z)$ и при $\mathrm{Re}\,a < 0$ (кроме $a = -1, -2, \ldots$). Запишем первую из формул (2.36) и вторую из (2.37) в форме, соответствующей схеме Горнера:

$$\gamma(a, z)=z^a e^{-z}\left\{\left[\ldots\left[\left[\left(\frac{z}{a+N}+1\right)\frac{z}{a+N-1}+1\right]\times\right.\right.\right.$$
$$\left.\left.\left.\times\frac{z}{a+N-2}+\ldots\right]\frac{z}{a+1}+1\right]\frac{1}{a}\right\}; \qquad (2.38)$$

$$\gamma^*(a, z)=\frac{1}{\Gamma(a)}\left\{\left[\ldots\left[\left[\left(\frac{1}{a+N}\right)\left(-\frac{z}{N}\right)+\frac{1}{a+N-1}\right]\left(-\frac{z}{N-1}\right)+\right.\right.\right.$$
$$\left.\left.\left.+\ldots+\frac{1}{a+1}\right]\left(-\frac{z}{1}\right)+\frac{1}{a}\right]\right\}. \qquad (2.39)$$

При использовании последних двух формул необходимо задавать заранее число N членов рядов. Для вещественных $z = x > 0$ следует применять (2.38) или первую из формул (2.36), а для $z = x < 0$ — формулу (2.39) или вторую из формул (2.37). В этих случаях ряды не знакопеременны, и существенная потеря точности из-за ошибок округления здесь происходит при значительно больших $|x|$, чем в указанных противоположных случаях (см. § 3.1). Ввиду того, что $\gamma(a, z)$ и $\gamma^*(a, z)$ связаны простым соотношением (2.35), формулы (2.38) и (2.39) в известной степени дополняют друг друга.

Как уже упоминалось, $\gamma^*(a, z)$ — целая функция от a и z. В частности, можно получить, что при $a = -n$, где $n = 0, 1, 2, \ldots$,

$$\gamma^*(-n, z)=z^n. \qquad (2.37\text{a})$$

Эту формулу необходимо учитывать отдельно при программировании (2.37) или (2.39), если желательно включить в область определения $\gamma^*(a, z)$ целые отрицательные a или нуль.

Асимптотическое разложение $\Gamma(a, z)$ имеет вид

$$\Gamma(a, z) \approx z^{a-1} e^{-z}\left(1+\frac{a-1}{z}+\frac{(a-1)(a-2)}{z^2}+\ldots\right),$$
$$|\arg z| \leqslant \frac{3\pi}{2}. \qquad (2.40)$$

Этот ряд также удобно вычислять по схеме Горнера:

$$\Gamma(a, z) \approx z^{a-1} e^{-z}\{[\ldots[[(A_N+1)A_{N-1}+1]A_{N-2}+1]A_{N-3}+$$
$$+\ldots+1]A_N+1\}, \qquad (2.41)$$

где $A_N = (a - n)/z$. Число членов ряда N, которое следует задавать, зависит от a и z. Можно рекомендовать (в предположении, что $|z| \geqslant 5$, $|z| > |a|$) следующую формулу для выбора N:

$$N=\begin{cases} |z|+\mathrm{Re}\,a, & |z|+\mathrm{Re}\,a \leqslant 18, \\ 18, & |z|+\mathrm{Re}\,a \geqslant 18. \end{cases} \qquad (2.42)$$

Асимптотический ряд (2.40) при целых положительных $a = n$ обрывается на $(n + 1)$-м члене, образуя конечную сумму, которая равна точному значению $\Gamma(a, z)$ [5]:

$$\Gamma(n, z)=z^{n-1} e^{-z}[1+(n-1)/z+(n-1)(n-2)/z^2+\ldots+(n-1)!/z^{n-1}]=$$
$$=(n-1)!\,e^{-z}[1+z+z^2/2!+\ldots+z^{n-1}/(n-1)!]. \qquad (2.43)$$

Разложение $\Gamma(a, z)$ в непрерывную дробь:

$$\Gamma(a, z)=\cfrac{e^{-z} z^a}{z+\cfrac{1-a}{1+\cfrac{1}{z+\cfrac{2-a}{1+\ldots}}}}. \qquad (2.44)$$

При вычислении дробей типа (2.44) используются в основном рекуррентные формулы для последовательных подходящих дробей, и процесс заканчивается на определенном числе итераций, когда достигается сходимость к определенному пределу. Указанная процедура применительно к ПМК и комплексным a и z, однако, слишком громоздка по числу программных шагов и особенно по числу требуемых регистров памяти (ср. рекуррентные формулы, например, в [9, с. 28]).

Более экономичный алгоритм состоит в следующем. Обозначим $(N + 1)$-й остаток непрерывной дроби (2.44) через

$$A_N \equiv z+\cfrac{N+1-a}{1+\cfrac{N+1}{z+\cfrac{N+2-a}{1+\cfrac{N+2}{z+\ldots}}}}. \qquad (2.45)$$

Естественно, что A_N также является бесконечной непрерывной дробью. N-й остаток дроби (2.44)

$$A_{N-1}=z+\cfrac{N-a}{1+\cfrac{N}{A_N}}. \qquad (2.46)$$

Это соотношение можно рассматривать как рекуррентную формулу. Последовательное применение (2.46) в сторону уменьшения N приводит к A_0, дающему искомую функцию:

$$\Gamma(a, z)=e^{-z} z^a/A_0. \qquad (2.47)$$

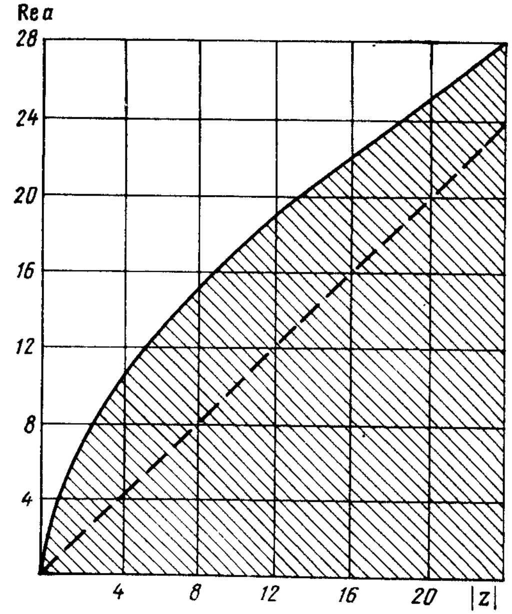

Рис. 2.1. Рабочие области двух алгоритмов (разложение в непрерывную дробь и разложение в ряд) и основанных на них программ вычисления неполных гамма-функций (соответственно (2.44)—(2.47) и (2.38), (2.34)

Если при некотором N значение A_N известно, то (2.46), (2.47) образуют простой алгоритм вычисления $\Gamma(a, z)$. Величину A_N можно оценить, предполагая, что при достаточно большом N различие между A_N и A_{N-1} незначительно. Приравнивая эти значения, получаем из (2.46) уравнение для A_N:

$$A_N^2 + A_N(a-z) - zN = 0 \tag{2.46а}$$

Решение этого уравнения

$$A_N = (z-a)/2 + \sqrt{(z-a)^2/4 + zN} \tag{2.46б}$$

при $N \gg |z|$, $N \gg |a|$ сводится к

$$A_N \approx \sqrt{zN}. \tag{2.46в}$$

Отметим, что при комплексных z использование в программе даже простейшего соотношения (2.46в) потребует много шагов. Однако устойчивость итерационного процесса (2.46) настолько значительна, что начиная с некоторого N значение A_0 практически не зависит от A_N при изменении A_N в широких пределах, давая с хорошим приближением $\Gamma(a, z)$ (формула (2.47)). Например, при $N = 20$ и положительных $\mathrm{Re}\, z > a$ относительная погрешность $\Gamma(a, z)$ не превышает $5\cdot10^{-6}$ в диапазоне A_N по крайней мере от $1 + j$ до $5 + j5$. Заметим, что A_N из (2.46в) при $|z| \approx 1$ по порядку величины равно $\sqrt{N}$.

При вещественных $z = x$ и a можно принять

$$N \approx 7\left[3 + \frac{1}{x(|a|+1)}\right], \quad A_N = 4. \tag{2.48}$$

Рассмотренные алгоритмы вычисления $\Gamma(a, z)$ и $\gamma(a, z)$ формально охватывают в совокупности практически полные плоскости комплексных переменных a и z. Однако область значений этих переменных, где результаты достаточно мало зависят от погрешностей округления, существенно уже. Например, при целых $a = n > 0$ непрерывная дробь (2.44), обрываясь на n-й ступени, переходит в замкнутую формулу для $\Gamma(n, z)$. Тем не менее прямой подсчет дроби «снизу» при $|z| < 1$ дает уже для $n = 5$ большие ошибки округления. Непосредственным источником ошибок является величина A_0 (см. (2.47)), которая в рассмотренном случае оказывается весьма малой, являясь в то же время разностью двух относительно больших чисел.

Отметим, что алгоритм, основанный на вычислении непрерывной дроби методом подходящих дробей, более устойчив, т. е. применим при больших n. Однако и здесь начиная с некоторого $n_{\max}$ устойчивость резко нарушается (например, $n_{\max} = 7$ при $x = 0{,}1$).

На рис. 2.1 заштрихована область значений $\mathrm{Re}\, a$ и $|z|$ при $x > 0$, где относительная погрешность $\Gamma(a, z)$ с использованием формул (2.44) — (2.47) не превышает $5\cdot10^{-6}$. Эту область можно расширить в сторону положительных x и $\mathrm{Re}\, a$ до значений $|z| \simeq \mathrm{Re}\, a \approx 70$, при которых $|\Gamma(a, z)| \approx 10^{100}$. Однако при $|z| < 1$ время счета по указанному алгоритму чрезмерно возрастает (ср. (2.48)), и целесообразнее применять метод рядов (2.38), (2.34). Вычисления $\Gamma(a, z)$ по этим формулам устойчивы к погрешностям округления в области над кривой рис. 2.1. Фактически относительная погрешность расчета $\Gamma(a, z)$ по формулам (2.38), (2.34) не превышает $5\cdot 10^{-6}$ в области над прямой $\mathrm{Re} a = |z|$ (штриховая линия на рис. 2.1) при учете достаточно малого числа членов ряда. Исключением являются лишь случаи очень малых или, наоборот, очень больших $|z|$ (см. программу 2.17). Таким образом, области практической применимости обоих методов расчета $\Gamma(a, z)$ перекрываются *. Отметим, что для функции $\gamma(a, z)$ метод рядов обеспечивает точность $1\cdot10^{-6}$ во всей той области $|\mathrm{Re} a| \geqslant |z|$, где не происходит переполнения разрядной сетки.

Асимптотическое разложение (2.41) имеет важное значение при $x < 0$ и особенно при $y = \mathrm{Im} z < 1$ для больших по модулю отрицательных x, где не только разложение в ряды, но и метод непрерывных дробей приводит к значительным погрешностям округления. Конкретные значения погрешностей, связанных с применением (2.41), приводятся в программе 2.23

Программа 2.16. Неполная гамма-функция $\Gamma(a, x)$ вещественных аргументов. Разложение в непрерывную дробь (2.46) — (2.48), a и x должны быть в заштрихованной области на рис. 2.1.

ИП3	Fx²	F√‾	1	+	ИП4	×	F1/x	3	+
7	×	П2	КИП2	ИП2	П5	ИП4	Fln	ИП3	×
ИП4	—	Feˣ	4	F1/x	ИП2	×	1	+	F1/x
ИП2	ИП3	—	×	ИП4	+	FL2	24	÷	П2
С/П									

Инструкция
1. Исходные данные: (a = Р3, x = Р4).
2. Пуск: В/О С/П.
3. Результат: РХ = Р2 = $\Gamma(a, x)$, Р5 = N (число итераций).
4. Регистры: рабочие Р2 — Р5; оперативные — ; свободные Р0, Р1, Р6,... РД.
5. Погрешность относительная меньше $5\cdot10^{-6}$.
6. Время счета $t \approx [2 + 1/2x\,(1 + |a|)]$ мин.

Примеры.

$\Gamma(0, 1) = 0{,}21938393$ $(0{,}219383934)$, $N = 27$, $t = 2$ мин;

$\Gamma(0; 0, 1) = 1{,}8229202$ $(1{,}8229239)$, $N = 90$, $t = 6{,}5$ мин;

$\Gamma(-2{,}5) = 3{,}5112045\cdot10^{-5}$ $(3{,}51121\cdot10^{-5})$, $N = 20$, $t = 2$ мин;

$\Gamma(25, 20) = 5{,}2317753\cdot10^{23}$ $(5{,}2317876\cdot10^{23})$, $N = 20$, $t = 1{,}5$ мин;

$\Gamma(64, 60) = 1{,}3490368\cdot10^{87}$ $(1{,}3490332.10^{87})$, $N = 20$, $t = 1{,}5$ мин.

Значения в скобках для первых трех примеров получены по таблицам интегральной показательной функции [9] и формуле $\Gamma(-n, x) = x^{-n} E_{n+1}(x)$, а для последних двух примеров — из программы 2.18, основанной на точной формуле (2.43). Как видно, при $x \leqslant 0{,}1$ время счета весьма велико. Здесь лучше использовать разложение в ряд (программа 2.17).

* Ниже расчет $\Gamma(a, z)$ по формулам (2.38), (2.34) реализован для вещественных a и z (программа 2.17). $\gamma(a, z)$ рассчитывается и при комплексных a, z (программа 2.21).

Программа 2.17. Неполные гамма-функции $\Gamma(a, x)$ и $\gamma(a, x)$ вещественных аргументов. Разложение в ряд (2.38) и (2.34), $0 < x \leqslant 69$, $x \leqslant a \leqslant 69$ (x и a лежат в области над штриховой линией на рис. 2.1). Число членов ряда выбирается равным $N \approx 9 + x$.

ИПС	9	+	П3	КИП3	ИПС	Fln	ИПД	×	ИПС
—	Fe^x	1	ИПС	×	ИПД	ИП3	+	÷	1
+	FL3	13	ИПД	÷	×	ПВ	ИПД	П9	ПА
ИП9	ИПА	1	+	ПА	×	П9	ИПА	1	2
—	Fx⩾0	30	FBx	ИПА	×	F1/x	ИПА	Fln	1
—	ИПА	×	+	Fe^x	ИП9	÷	Fπ	2	×
ИПА	×	F√‾	×	ИПВ	—	ПА	С/П		

Инструкция

1. Исходные данные: (x = РС, a = РД).
2. Пуск: В/О С/П.
3. Результат: РХ = РА = $\Gamma(a, x)$, РВ = $\gamma(a, x)$.
4. Регистры: рабочие РА — РД; оперативные Р3, Р9; свободные Р0 — Р8.
5. Погрешность относительная для $\gamma(a, x)$ меньше $1 \cdot 10^{-6}$, для $\Gamma(a, x)$:

x	$>1 \cdot 10^{-4}$	$>1 \cdot 10^{-3}$	$>1 \cdot 10^{-2}$	$>1 \cdot 10^{-1}$	>20 и $\leqslant 70$
δ	$\leqslant 1 \cdot 10^{-3}$	$\leqslant 2 \cdot 10^{-4}$	$\leqslant 3 \cdot 10^{-5}$	$\leqslant 5 \cdot 10^{-6}$	$\leqslant 2 \cdot 10^{-7}$

6. Время счета: $t \approx (1{,}5 - x/30)$ мин при $x \leqslant 12$ и $t \approx (1 + x/20)$ мин при $x > 12$.

Примеры.

$\Gamma(1 \cdot 10^{-2},\ 1 \cdot 10^{-2}) = 3{,}942839\ (3{,}9427351)$, $t \approx 1{,}5$ мин;

$\gamma(1 \cdot 10^{-2},\ 1 \cdot 10^{-2}) = 95{,}489821$.

Число в скобке получено разложением в непрерывную дробь (программа 2.16); время счета 50 мин.

$\Gamma(0{,}2;\ 0{,}2) = 1{,}0814452\ (1{,}0814452)$, $\gamma(0{,}2;\ 0{,}2) = 3{,}5093994$, $t \approx 1{,}5$ мин;

$\Gamma(10,\ 10) = 166173{,}96\ (166173{,}5)$, $\gamma(10,\ 10) = 196706{,}16$, $t \approx 1{,}2$ мин;

$\Gamma(69,\ 68) = 1{,}319838 \cdot 10^{96}\ (1{,}3198547 \cdot 10^{96})$; $\gamma(69,\ 68) = 1{,}1601796 \cdot 10^{96}$,

$t \approx 4$ мин.

Для последних двух примеров значения в скобках получены по программе 2.18, основанной на формуле (2.43).

Программа 2.18. Неполная гамма-функция $\Gamma(n, x)$ вещественных аргументов $n = 1, 2, \ldots, 69$ и x, $-8 \leqslant x \leqslant 69$ (2.43).

ИПД	/—/	Fe^x	ИП0	1	—	Fx≠0	27	ВП	П1
П0	F,	ИП1	×	FL1	12	1	ИПД	×	ИП0
÷	1	+	FL0	17	×	С/П	XY	С/П	

Инструкция

1. Исходные данные: (x = РД), n = Р0.
2. Пуск: В/О С/П.
3. Результат: РХ = $\Gamma(n, x)$.

4. Регистры: рабочие — ; оперативные Р0, Р1, РД; свободные Р2 — РС.
5. Погрешность относительная:

x	$\geqslant -8$	$\geqslant -6$	$\geqslant -4$	$\geqslant -3$	$\geqslant -2$ и $\leqslant 69$
δ	$\leqslant 2 \cdot 10^{-3}$	$\leqslant 5 \cdot 10^{-4}$	$\leqslant 2 \cdot 10^{-5}$	$\leqslant 3 \cdot 10^{-6}$	$\leqslant 1 \cdot 10^{-6}$

6. Время счета $t \approx (4n)$ с.

Примеры.

$\Gamma(5{,}1) = 23{,}912165$, $t \approx 20$ с;

$\Gamma(64,\ 60) = 1{,}349033 \cdot 10^{87}$, $t = 4$ мин;

$\Gamma(50,\ -6) = 6{,}0790076 \cdot 10^{62}\ (6{,}0828179 \cdot 10^{62})$, $t = 3$ мин.

Значение в скобках получено из соотношения $\Gamma(n, x) \approx (n-1)!$, справедливого при $n \gg 1$ и $n \gg |x|$.

Программа 2.19. Неполная гамма-функция $\Gamma(n, z)$ комплексного аргумента $z = x + \mathrm{j}\,y$, $n = 1, 2, \ldots, 69$, $|\arg z| < \pi$. Формула (2.43) с использованием схемы Горнера.

ИПВ	Fcos	ИПА	/—/	Fe^x	×	П8	FBx	ИПВ	/—/
Fsin	×	ИП0	1	—	Fx≠0	55	ВП	П0	П1
F,	1	ИП1	×	FL1	22	×	П9	FBx	ИП8
×	П8	1	↑	0	ИП0	÷	XY	ИП0	÷
ПП	57	1	+	XY	FL0	35	ПВ	XY	ПА
ИП9	ИП8	ПП	57	С/П	XY	С/П	ПС	ИПВ	×
XY	ПД	ИПА	×	+	ИПА	ИПС	×	ИПВ	ИПД
×	—	В/О							

Инструкция

1. Исходные данные: x = РА, y = РВ, n = Р0.
2. Пуск: В/О С/П.
3. Результат: РХ = $\mathrm{Re}\,\Gamma(n, z)$, РY = $\mathrm{Im}\,\Gamma(n, z)$.
4. Регистры: рабочие —; оперативные Р0, Р1, Р8 — РД; свободные Р2—Р7.
5. Погрешность возрастает с увеличением $|z|$ и $\arg z$. Относительная погрешность меньше $5 \cdot 10^{-6}$ при следующих значениях $\arg z$ и $|z|$: $|\arg z| \leqslant \pi$, $|z| \leqslant 3$; $|\arg z| \leqslant \pi/2$, $|z| \leqslant 7{,}5$; $|\arg z| \leqslant \pi/4$, $|z| \leqslant 15$.
6. Время счета $t \approx (10\,n)$ с.

Примеры.

$\Gamma(10;\ -1 + \mathrm{j}2{,}5) = 363156{,}92 + \mathrm{j}4887{,}44$, $t = 2$ мин;

$\Gamma(5;\ 0{,}1 + \mathrm{j}6) = 934{,}32659 - \mathrm{j}473{,}76262$, $t = 1$ мин;

$\Gamma(7;\ 15 - \mathrm{j}14) = -27{,}054031 - \mathrm{j}8{,}329689$, $t = 1{,}5$ мин;

$\Gamma(69;\ 18 - \mathrm{j}7) = 2{,}4800346 \cdot 10^{96} + \mathrm{j}7 \cdot 10^{89}\ (2{,}4800354 \cdot 10^{96})$, $t = 11$ мин.

Значение в скобках получено из соотношения $\Gamma(n, z) \approx (n-1)!$, справедливого при $n \gg 1$, $n \gg |z|$.

Программа 2.20. Неполная гамма-функция $\Gamma(a, z)$ комплексных аргументов $a = a_1 + ja_2$, $z = x + jy$, $0 \leqslant \arg z < \pi$. При $-\pi \leqslant \arg z < 0$ следует использовать формулу $\Gamma(a, z) = \overline{\Gamma(\bar{a}, \bar{z})}$. Разложение в непрерывную дробь (2.44)—(2.47). Значения $a_1 = \operatorname{Re} a$ и $|z|$ должны лежать в заштрихованной области на рис. 2.1, $|z| \leqslant 64$.

ИП6	ИП5	XY	FBx	Fx^2	XY	Fx^2	+	$F\sqrt{\ }$	П9
÷	Farccos	П1	ИП9	Fln	П0	ИП4	ИП3	ПП	82
ИП5	—	Fe^x	XY	ИП6	—	ПА	Fsin	XY	×
ПВ	FBx	ИПА	Fcos	×	ПА	4	П9	ИП2	П0
0	ПП	69	1	+	П9	XY	ИП2	ИП3	—
П0	ИП4	/—/	ПП	69	ИП5	+	П9	XY	ИП6
+	FL2	38	ИПА	П0	ИПВ	ПП	69	С/П	П1
F,	F,	/—/	↑	Fx^2	ИП9	Fx^2	+	÷	ИП9
FBx	÷	П9	ИП1	×	XY	ПД	ИП0	×	+
ИП0	ИП9	×	ИП1	ИПД	×	—	В/0		

Структура программы

00—35: вычисление $\Pi = e^{-z}z^a$ и размещение $\operatorname{Re}\Pi$ и $\operatorname{Im}\Pi$ соответственно в РА и РВ,

36—62: вычисление A_0 по рекуррентной формуле (2.46) с использованием подпрограммы деления и величины $A_N = 4 + j4$,

63—68: получение искомой функции по формуле (2.47),

69—97: подпрограмма деления комплексных чисел.

Инструкция

1. Исходные данные: (a_1 = Р3, a_2 = Р4, x = Р5, y = Р6), N = Р2. Число итераций N (ср. (2.46)) предварительно рассчитать по первой формуле (2.48), заменив в ней x на $|z|$ и округлив N до целого значения в большую сторону.
2. Пуск: В/О С/П.
3. Результат: РХ = $\operatorname{Re}\Gamma(a, z)$, PY = $\operatorname{Im}\Gamma(a, z)$.
4. Регистры: рабочие Р3 — Р6; оперативные Р0, Р1, Р2, Р9, РА, РВ, РД; свободные Р7, Р8, РС.
5. Погрешность относительно стабильна при $x > 0$ — меньше $5 \cdot 10^{-6}$, но при отрицательных x быстро возрастает по мере приближения $\arg z$ к π; при $x < 0$ относительная погрешность меньше $1 \cdot 10^{-5}$ при $y \geqslant 2$ и $5 \cdot 10^{-3}$ при $y \geqslant 1$. Рекомендуется при $x < 0$ увеличивать N, рассчитанное по п. 1 инструкции, на 10—15%.
6. Время счета $t \approx (N/2{,}5)$ мин.

Примеры.

$\Gamma(1 + j2,\ 8 + j14) = -2{,}2318928 \cdot 10^{-5} - j3{,}9531695 \cdot 10^{-5}$, $N = 22$, $t \approx 9$ мин;

$\Gamma(0,\ -4 + j) = -14{,}788309 + j9{,}119071$ $(-14{,}8067 + j9{,}13842)$,

$N = 24$, $t \approx 10$ мин;

$\Gamma(0,\ -4 + j2) = -3{,}5166396 + j14{,}363511$ $(-3{,}51658 + j14{,}3638)$,

$N = 24$, $t \approx 10$ мин;

$\Gamma(0,\ -10 + j) = -1568{,}4205 + j1911{,}1929$ $(-1568{,}28 + j1911{,}03)$,

$N = 24$, $t \approx 10$ мин;

$\Gamma(0, -10 + j5) = 489{,}7711 - j2091{,}7575$ $(489{,}772 - j2091{,}76)$,

$N = 24$, $t \approx 10$ мин.

Значения в скобках соответствуют табличным данным интегральной показательной функции [9], учитывая, что $\Gamma(0, z) = E_1(z)$ (см. гл. 3). Отметим, что при $|z| > 15$ существенный выигрыш во времени счета без ухудшения точности дает разложение в асимптотический ряд (2.40) — программа 2.23.

Программа 2.21. Неполная гамма-функция $\gamma(a, z)$ комплексных аргументов $a = a_1 + ja_2$, $z = x + jy$. Разложение в ряд (2.38), $|a|$, $|z| \leqslant 64$, $a \neq 0, -1, -2, \ldots$, $0 \leqslant \arg z < \pi$. При $-\pi < \arg z < 0$ следует использовать формулу $\gamma(a, z) = \overline{\gamma(\bar{a}, \bar{z})}$.

ИП5	↑	Fx^2	ИП6	Fx^2	+	$F\sqrt{\ }$	ПС	÷	Farccos
П1	ИПС	Fln	П0	ИП4	ИП3	ПП	79	XY	ИП5
—	Fe^x	XY	ИП6	—	П7	Fsin	XY	×	П8
FBx	ИП7	Fcos	×	П7	0	П1	1	П0	ИП6
ИП5	ПП	79	ИП3	ИП2	+	П9	ИП4	ПП	69
XY	1	+	П0	FL2	39	ИП3	П9	ИП4	ПП
69	ИП8	ИП7	ПП	79	П8	XY	П7	С/П	/—/
↑	Fx^2	ИП9	Fx^2	+	÷	ИП9	FBx	÷	П9
ИП1	×	XY	ПД	ИП0	×	+	ИП0	ИП9	×
ИП1	ИПД	×	—	П0	XY	П1	В/О		

Структура программы

00—35: вычисление $\Pi = e^{-z} z^a$, занесение $\operatorname{Re}\Pi$ и $\operatorname{Im}\Pi$ соответственно в Р7 и Р8,

36—55: построение цикла для вычисления выражения в фигурных скобках в (2.38), при этом используется подпрограмма деления-умножения комплексных чисел (адреса 69—97),

56—68: вычисление $\gamma(a, z)$ путем деления предыдущего результата на a и умножения на $e^{-z} z^a$.

Инструкция

1. Исходные данные: (a_1 = Р3, a_2 = Р4, x = Р5, y = Р6), N = Р2. Число членов ряда N выбирается по значениям аргументов a, z и задаваемой погрешности (п. 5 инструкции).
2. Пуск: В/О С/П.
3. Результат: РХ = Р7 = $\operatorname{Re}\gamma(a, z)$, PY = Р8 = $\operatorname{Im}\gamma(a, z)$.
4. Регистры: рабочие Р3 — Р8; оперативные Р0, Р1, Р2, Р9, РС, РД; свободные РА, РВ.
5. Погрешность зависит от числа учитываемых членов ряда и значений a и z. Ниже приведены некоторые достаточные критерии для задания N с указанной гарантированной относительной погрешностью:

$$|\operatorname{Re} a| > |z| \begin{cases} N = \operatorname{Re} a + 12, & \operatorname{Re} a > 0, \\ N = 3|\operatorname{Re} a| + 12, & \operatorname{Re} a < 0, \end{cases} \quad \delta < 1 \cdot 10^{-6};$$

$$\operatorname{Re} a > -1 \begin{cases} |z| \leqslant 10, \quad -5 \leqslant x \leqslant 10, \quad N = 27, \quad \delta < 5 \cdot 10^{-3}; \\ |z| \leqslant 8, \quad N = 25, \quad \delta < 5 \cdot 10^{-4}; \\ |z| \leqslant 5, \quad N = 20, \quad \delta = 5 \cdot 10^{-6}. \end{cases}$$

6. Время счета $t \approx (N/2{,}5)$ мин.

Примеры.

$\gamma(1{,}8 + j5;\ 3 + j2) = -8{,}1639713 \cdot 10^{-3} - j6{,}8666075 \cdot 10^{-3}$ $(-8{,}163974 \cdot 10^{-3} - j6{,}866607 \cdot 10^{-3})$, $N = 20$, $t = 8$ мин.

Значение в скобках получено по $\Gamma(a, z)$, вычисленной по программе 2.20 и формуле (2.34) с использованием табличных значений функции $\Gamma(a)$ комплексного аргумента [9].

$\gamma(1, -5) = -147,41379\ (-147,41316)$, $N = 20$, 8 мин; значение в скобках получено из соотношения (ср. (2.43)) $\gamma(1, x) = 1 - e^{-x}$.

Программа 2.22. Неполная гамма-функция $\gamma^*(a, x)$ вещественных аргументов. Разложение в ряд (2.37), (2.37а), $|a|, |x| \leqslant 60$. Число N членов ряда выбирается программой из условия обращения в машинный нуль разности двух последовательных частичных сумм.

0	П6	1	П3	ИПА	$Fx\neq0$	68	ПД	F1/x	ПС
КИП6	ИП3	ИПВ	/—/	×	ИП6	÷	П3	ИПА	ИП6
+	$Fx\neq0$	68	÷	ИПС	+	ПС	FBx	—	$Fx=0$
10	ИПС	ИПД	×	ПС	ИПД	1	+	ПД	1
2	—	$Fx\geqslant0$	31	FBx	ИПД	×	F1/x	ИПД	Fln
1	—	ИПД	×	+	/—/	Fe^x	ИПД	Fπ	÷
2	÷	$F\sqrt{\ }$	×	ИПС	×	ПС	С/П	ИПА	/—/
П3	1	ИПВ	×	FL3	72	ПС	С/П		

Структура программы

00—09: подготовка данных,
10—30: расчет суммы в формуле (2.37),
31—67: расчет функции $1/\Gamma(a)$ (программа 2.7) и затем вычисление $\gamma^*(a, x)$ при $a \neq 0, -1, -2, \ldots$,
68—77: вычисление $\gamma^*(a, x)$ при $a = 0, -1, -2, \ldots$ по формуле (2.37а).

Инструкция

1. Исходные данные: (a = РА, x = РВ).
2. Пуск: В/О С/П.
3. Результат: РХ = РС = $\gamma^*(a, x)$.
4. Регистры: рабочие РА, РВ, РС; оперативные Р3, Р6, РД; свободные Р0, Р1, Р2, Р4, Р5, Р7, Р8, Р9.
5. Погрешность относительная:

a	0, —1, —2, ...	>—1	>—1	>—10
x	—	<0	⩽8	⩽10
$\delta\leqslant$	$2\cdot10^{-7}$	$1\cdot10^{-6}$	$5\cdot10^{-6}$	$1\cdot10^{-5}$

6. Время счета:

$$t \approx \begin{cases} (1,5 - a/12 + |x|/3) \text{ мин при } a \leqslant 12, \\ (0,5 + |x|/3) \text{ мин при } a \geqslant 12, \\ |a|/8 \text{ мин при } a = -1, -2, \ldots \end{cases}$$

Примеры.

$\gamma^*(1; -9,5) = 1406,1811\ (1406,1816)$, $t = 4$ мин; значение в скобках получено по формуле $\gamma^*(1, x) = (1 - e^{-x})/x$;

$\gamma^*(-6,73; 10) = 5370313,9\ (5370317,7)$, $t = 4$ мин; значение в скобках получено по формулам (2.34), (2.35) и программам для $\Gamma(a, x)$ и $\Gamma(a)$ (программам 2.16 и 2.1);

$\gamma^*(8,12; -8) = 2,9692248\cdot10^{-2}\ (2,9692241\cdot10^{-2} + j\,1\cdot10^{-9})$, $t = 3,5$ мин; значение в скобках получено по формуле (2.35), связывающей $\gamma^*(a, z)$ и $\gamma(a, z)$, и по программе 2.21 для $\gamma(a, z)$;

$\gamma^*(-7, -5) = -78125$ (точное значение), $t = 1$ мин.

Программа 2.23. Неполная гамма-функция $\Gamma(a, z)$ комплексных аргументов $a = a_1 + j\,a_2$ и $z = x + j\,y$. Асимптотическое разложение (2.40) и формулы (2.41) и (2.42). $|\arg z| < 3\pi/2$, $|z| \geqslant 5$. При целых положительных $a = n$ см. программу 2.19.

ИП2	ИП1	1	—	П0	ИП5	↑	Fx^2	ИП6	Fx^2
+	П7	$F\sqrt{\ }$	П9	÷	Farccos	ИП9	Fln	ПП	81
ИП5	—	XY	ИП6	—	П9	Fsin	XY	Fe^x	×
ПС	FBx	ИП9	Fcos	×	ПД	ИП1	ИП3	—	П0
КИП3	ПП	72	ПА	1	+	П0	XY	ПВ	П2
ИПВ	ИП8	+	ПВ	ИПА	ИП7	+	ПА	ПП	81
1	+	П0	XY	П2	FL3	50	ИПС	ИПД	ПП
81	С/П	ИП6	/—/	ИП7	÷	П8	ИП5	ИП7	÷
П7	XY	FBx	ИП2	×	XY	П9	ИП0	×	+
XY	ИП0	×	ИП9	ИП2	×	—	В/О		

Программа при $|z| + \mathrm{Re}\,a > 12$ обеспечивает высокую точность (см. п.5 инструкции и примеры) и существенное сокращение времени счета по сравнению с программой 2.20.

Структура программы

00—35: вычисление $T \equiv z^{a-1}\,e^{-z}$ и занесение $\mathrm{Re}\,T$ и $\mathrm{Im}\,T$ в РД, РС соответственно,
36—42: расчет $A_n \equiv (a - n)/z$ по формуле (2.41),
43—66: последовательное вычисление по рекуррентной формуле $A_{n-k} = [a - (n-k)]/z = A_{n-k+1} + 1/z\ (k = 1, 2, \ldots)$ и построение схемы Горнера (выражение в фигурных скобках в (2.41)) с помощью оператора цикла,
67—71: получение $\Gamma(a, z)$ умножением предыдущего результата на T,
72—97: комбинированная подпрограмма деления и умножения комплексных чисел, а также получения обратной величины комплексного числа (программа 1.9).

Инструкция

1. Исходные данные: (a_1 = Р1, x = Р5, y = Р6), a_2 = Р2, N = Р3 (N выбирается по (2.42)).
2. Пуск: В/О С/П.
3. Результат: РХ = $\mathrm{Re}\,\Gamma(a, z)$, PY = $\mathrm{Im}\,\Gamma(a, z)$, РД = $\mathrm{Re}\,T$, РС = $\mathrm{Im}\,T$, где $T = z^{a-1}\,e^{-z}$.
4. Регистры: рабочие Р1, Р5, Р6, РС, РД; оперативные Р0, Р2, Р3, Р7—РВ; свободные Р4.
5. Погрешность возрастает при уменьшении $\mathrm{Re}\,a$ (в любом случае предполагается, что $|z| > |a|$), так как при этом приходится уменьшать число учитываемых членов N асимптотического ряда (ср. (2.42)). Если выбирать N по (2.42), то относительная погрешность ориентировочно меньше $(|z|)^{-N/3}$.
6. Время счета $t \approx (N/5)$ мин.

Примеры.

$\Gamma(1+j2;\ 8+j14) = -2{,}2318944\cdot10^{-8} - j3{,}9531671\cdot10^{-5}$, $N=17$,
$t=3{,}5$ мин;

$\Gamma(0,\ -10+j) = -1569{,}2567 + j1913{,}3189$ $(-1568{,}28 + j1911{,}03)$,
$N=10$, $t=2$ мин;

$\Gamma(0,\ -17+j) = -896417{,}77 + j1219576{,}9$ $(-896417 + j1219580)$,
$N=17$, $t=3{,}5$ мин.

Значения в скобках взяты из таблиц [9] для $E_1(z)$.

В заключение главы приведем две программы неполной гамма-функции $\Gamma(a,\ j\,x)$, где a и x — вещественные переменные. Указанные функции полезны для вычислений, в частности, обобщенных интегралов Френеля (гл. 4). Программы 2.24 и 2.25 основаны соответственно на разложениях в непрерывную дробь и в асимптотический ряд. Область применимости первой программы существенно шире по сравнению с программой 2.25. Однако последняя несколько короче и сокращает время счета.

Программа 2.24 использует итерационную процедуру (2.46), (2.47). Начальный остаток A_N непрерывной дроби уточняется по формуле (2.46в). Это позволяет сократить число N итераций, которое определяется в программе, в отличие от (2.48), по формуле $N = 15 + 7/x$. Множитель $z^a e^{-z}$ в (2.47) равен, очевидно, $x^a e^{j(\pi a/2 - x)}$.

Программа 2.25. основана на формулах (2.40), (2.41). Число N членов асимптотического ряда рассчитывается по формуле (2.42).

В данном случае в (2.41) $z^{a-1}e^{-z} = x^{a-1}\exp\{j[\pi(a-1)/2 - x]\}$.

Программа 2.24. Неполная гамма-функция $\Gamma(a,\ jx)$, $0 < x \leqslant 64$. Для отрицательных x следует использовать формулу $\Gamma(a, j\,x) = \overline{\Gamma(a - j\,x)}$. Значения a, x должны находиться в заштрихованной области на рис. 2.1 с заменой $|z| = x$.

7	ИП4	÷	1	5	+	П0	ИП3	ИП4	Fx^y
1	Farcsin	ИП3	×	ИП4	—	ПА	Fsin	XY	×
ПВ	FBx	ИПА	Fcos	×	ПА	ИП4	ИП0	×	$F\sqrt{\ }$
ПС	ИП0	ПП	67	1	+	ПС	XY	ИП0	ИП3
—	ПП	67	XY	ИП4	+	FL0	31	1	ПП
67	ПС	ИПВ	×	XY	ПД	ИПА	×	+	ИПС
ИПА	×	ИПВ	ИПД	×	—	С/П	ПД	F,	/—/
↑	Fx^2	ИПС	Fx^2	+	F1/x	ИПД	×	×	ИПС
FBx	×	ПС	В/О						

Инструкция

1. Исходные данные: (a = Р3, x = Р4).
2. Пуск: В/О С/П.
3. Результат: РХ = Re $\Gamma(a,\ jx)$, PY = Im $\Gamma(a,\ jx)$.
4. Регистры: рабочие Р3, Р4; оперативные Р0, РА — РД; свободные Р1, Р2, Р5 — Р9.
5. Погрешность относительная меньше $5\cdot10^{-6}$.
6. Время счета $t \approx (4{,}5 + 2/x)$ мин.

Примеры.

$\Gamma(0,\ j5) = 0{,}19002974 - j0{,}020865096$ $(0{,}19003 - j0{,}0208651)$, $t=5$ мин,
число в скобках — значение $E_1(j5)$ из [9];

$\Gamma(10,\ j15{,}7) = -2{,}6200707\cdot10^{10} - j4{,}3893042\cdot10^{10}$, $t=4{,}5$ мин.

Программа 2.25. Неполная гамма-функция $\Gamma(a,\ j\,x)$, $x \geqslant 5$, $|a| \leqslant x$. Для отрицательных $x \leqslant -5$ достаточно использовать формулу $\Gamma(a,\ j\,x) = \overline{\Gamma(a,\ -jx)}$.

ИП6	ИП7	+	П3	1	9	—	Fx⩾0	11	FBx
П3	КИП3	ИП7	1	—	ПС	1	Farcsin	×	ИП6
—	ПА	Fsin	ИПС	ИП6	Fln	×	Fe^x	×	ПД
FBx	ИПА	Fcos	×	ПС	0	ПА	ПВ	1	+
ПА	ИП3	ИП7	—	ИП6	÷	0	ПП	60	FL3
38	ИПА	1	+	ПА	ИПД	ИПС	ПП	60	С/П
П9	ИПА	×	XY	П8	ИПВ	×	—	ИПВ	ИП9
×	ИПА	ИП8	×	+	ПВ	XY	ПА	В/О	

Инструкция

1. Исходные данные: (a = Р7, x = Р6).
2. Пуск: В/О С/П.
3. Результат: РХ = РА = Re $\Gamma(a,\ j\,x)$, PY = РВ = Im $\Gamma(a,\ j\,x)$.
4. Регистры: рабочие Р6, Р7, РА, РВ; оперативные Р3, Р8, Р9, РС, РД; свободные Р1, Р2, Р4, Р5, РД.
5. Погрешность относительная меньше: $5\cdot10^{-2}$ при $x + \varepsilon a \geqslant 5$; $5\cdot10^{-4}$ при $x + \varepsilon a \geqslant 10$; $5\cdot10^{-6}$ при $x + \varepsilon a \geqslant 15$, где $x \geqslant |a|$, $\varepsilon = 0$ или 1 при $a \geqslant 0$ или $a \leqslant 0$ соответственно.
6. Время счета: $t \approx (x + a)/5$ мин при $x + a \leqslant 18$ и $t \approx 3{,}5$ мин при $x + a \geqslant 18$.

Примеры.

$\Gamma(0,\ j5) = 0{,}19242993 - j0{,}025221085$ $(0{,}19003 - j0{,}0208651)$;

$\Gamma(0,\ j10) = 0{,}045451268 + j0{,}087575222$ $(0{,}0454565 + j0{,}0875512)$;

$\Gamma(0,\ j15) = -0{,}046278698 + j0{,}047397887$ $(-0{,}0462787 + j0{,}0473982)$;

$\Gamma(10;\ 15{,}7) = -2{,}620067\cdot10^{10} - j4{,}3893005\cdot10^{10}$, $t \approx 3{,}5$ мин.

Значения в скобках получены из табличных данных [9] для $E_1(z) = \Gamma(0,\ z)$.

Указатель программ

Номер программы	Функция	Область определения	Число шагов	Число регистров памяти	Примечание
2.1	$\Gamma(x)$	$x \leqslant 69$	35	2	Возможен расчет функции $\Gamma(x+1)/k$
2.2	$\ln\Gamma(z)$	$0 \leqslant \arg z < \pi$	89	8	
2.3	$\Gamma(z)$	$0 \leqslant \arg z < \pi$, $\lvert z\rvert \leqslant 69$	98	8	

Номер программы	Функция	Область определения	Число шагов	Число регистров памяти	Примечание
2.4	$n!$	$0<n\leqslant 69$ или $0\leqslant n\leqslant 69$	5 или 8	1	Два варианта программы
2.5	$n!$	$10\leqslant n\leqslant 1\cdot 10^{98}$	40	1	
2.6	$p!!$	$0<p\leqslant 119$	8	1	
2.7	$k2\pi/\Gamma(x)$	$x\leqslant 69$	33	2	k — задаваемая вещественная константа
2.8	$1/\Gamma(z)$	$0\leqslant \arg z<\pi$, $\|z\|\leqslant 69$	98	8	
2.9	$\Gamma(x)/[k\Gamma(y)]$	$x,\ y\leqslant 69$	42	4	k — задаваемая вещественная константа
2.10	$B(x,\ y)$	$x,\ y,\ (x+y)\leqslant 69$	58	4	
2.11	$\ln B\ (z,\ w)$	$0\leqslant \arg z<\pi$, $0\leqslant \arg w<\pi$, $\|z\|,\ \|w\|,\ \|z+w\|\leqslant 64$	97	11	
2.12	$\psi\ (x)$	$x\neq 0,\ -1,\ -2,\ \ldots$	31	1	Аргумент x вещественный
2.13	$\psi\ (z)$	$0\leqslant \arg z<\pi$	97	13	
2.14	$\psi^{(n)}\ (x)$	$x\neq 0,\ -1,\ -2,\ \ldots$	57	6	Аргумент x вещественный
2.15	$\psi^{(n)}\ (z)$	$z\neq 0,\ -1,\ -2,\ \ldots$	97	14	
2.16	$\Gamma\ (a,\ x)$	$a,\ x$ — в заштрихованной области на рис. 2.1	41	5	$a,\ x$ — вещественные аргументы
2.17	$\Gamma\ (a,\ x)$ $\gamma\ (a,\ x)$	$0<x\leqslant 69$, $x\leqslant a\leqslant 69$	68	6	$a,\ x$ — в области над штриховой линией на рис. 2.1
2.18	$\Gamma\ (n,\ x)$	$-8\leqslant x\leqslant 69$, $n=1,2,\ \ldots,\ 69$	29	3	
2.19	$\Gamma\ (n,\ z)$	$\|\arg z\|<\pi$, $n=1,2,\ \ldots,\ 69$	73	8	
2.20	$\Gamma\ (a,\ z)$ $a=a_1+ja_2$	$0\leqslant \arg z<\pi$, $\|z\|\leqslant 64$	98	11	$a_1,\ \|z\|$ — в заштрихованной области на рис. 2.1
2.21	$\gamma\ (a,\ z)$ $a=a_1+ja_2$	$0\leqslant \arg z<\pi$, $\|a\|,\ \|z\|\leqslant 64$	98	12	$a\neq 0,\ -1,\ -2,\ \ldots$
2.22	$\gamma^*\ (a,\ x)$	$\|a\|,\ \|x\|\leqslant 60$	78	6	Аргументы $a,\ x$ вещественные
2.23	$\Gamma\ (a,\ z)$ $a=a_1+ja_2$	$\|\arg z\|<3\pi/2$, $\|z\|>\|a\|,\ \|z\|\geqslant 5$	98	13	Высокая точность при больших $\|z\|$
2.24	$\Gamma\ (a,\ jx)$	$0<x<64$, $a,\ x$ — в заштрихованной области на рис. 2.1	84	7	Аргументы $a,\ x$ вещественные
2.25	$\Gamma\ (a,\ jx)$	$x\geqslant 5,\ \|a\|<x$	79	9	Аргументы $a,\ x$ вещественные. Высокая точность при больших x

Глава 3

Интегральная показательная функция вещественного и комплексного аргументов и родственные ей функции

3.1. Интегральные показательные функции различного порядка. Интегральный логарифм

Интегральная показательная функция комплексного аргумента

$$E_1(z)=\int_z^\infty \frac{e^{-t}}{t}\,dt,\quad |\arg z|<\pi. \tag{3.1}$$

При вещественном $z=-x<0$ интеграл (3.1) существует в смысле главного значения. В этом случае интегральная показательная функция определяется как

$$\mathrm{Ei}\,(x)=-VP\int_{-x}^\infty \frac{e^{-t}}{t}\,dt,\quad x>0. \tag{3.2}$$

Обобщением $E_1\,(z)$ являются функции

$$E_n\,(z)=\int_1^\infty \frac{e^{-zt}}{t^n}\,dt,\quad \mathrm{Re}\,z>0,\quad n=0,\,1,\,2,\,\ldots. \tag{3.3}$$

Аналитическое продолжение (3.3) в область $\mathrm{Re}z<0$ приводит в общем к многозначным функциям с точками ветвления $z=0$ и $z=\infty$. В плоскости z, разрезанной по отрицательной части действительной оси, эти функции однозначны и регулярны.

Интегральный логарифм определяется как

$$\mathrm{li}\,(x)=VP\int_0^x \frac{dt}{\ln t}=\mathrm{Ei}\,(\ln x),\quad x>1. \tag{3.4}$$

Функция li (z) имеет точки ветвления 0, 1, ∞.

Удобный алгоритм вычисления Ei (x) основан на *разложении* этой функции *в степенной ряд*:

$$\mathrm{Ei}\,(x)=\gamma+\ln x+\sum_{n=1}^\infty \frac{x^n}{n!\,n},\quad x>0, \tag{3.5}$$

где постоянная Эйлера $\gamma=0{,}57721566\ \ldots$. Формулу (3.5) можно использовать и для расчетов на ЭВМ при $x\gg 1$, так как все члены ряда имеют одинаковый знак и погрешности округления по сравнению со знакочередующимися рядами здесь играют меньшую роль. Тем не менее и в этом случае ошибки округления при достаточно больших x могут быть существенными. Их основной источник связан с монотонным увеличением частичных сумм и одновременным убыванием (начиная с некоторого n) членов ряда. В результате при суммировании имеет место прогрессирующее округление членов ряда до все меньшего числа значащих цифр. В то же время по мере увеличения x число таких слагаемых, которые в сумме дают весомый вклад в общий результат, возрастает. Можно убедиться в том, что влияние ошибок округления на ряды типа (3.5) (подобные ряды будут встречаться и в других разделах книги) не носит случайного характера. Результат всегда оказывается меньше точной предельной суммы. Ориентировочно относительная погрешность округления $\delta \approx N' \cdot 5 \cdot 10^{-T}$, где N' — число учитываемых убывающих членов ряда; $5 \cdot 10^{-T}$ — наибольшее изменение мантиссы при округлении (для используемых в книге ПМК $5 \cdot 10^{-8}$). Примем для определенности $N' = N/5$, где N — полное число учитываемых членов ряда (обычно оно соответствует условию обращения в машинный нуль разности двух последовательных частичных сумм). Тогда для относительной погрешности округления получается простоя оценка

$$\delta \approx N \cdot 10^{-8}. \tag{3.6а}$$

Численные данные свидетельствуют о приемлемости (3.6а).

С увеличением x необходимо брать все большее число N членов ряда и время счета пропорционально возрастает. Ориентировочно при $x \gg 1$

$$N \approx 2x. \tag{3.6б}$$

Из (3.6а) и (3.6б)

$$\delta \approx 2x \cdot 10^{-8}. \tag{3.6в}$$

Функция $E_1(z)$ разлагается в следующий ряд [9]:

$$E_1(z) = -\gamma - \ln z - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n z^n}{n!\, n}, \quad |\arg z| < \pi. \tag{3.7}$$

Ряд (3.7) в отличие от (3.5) не является знакопостоянным, и формула (3.7) не может использоваться при $|z| \gg 1$ без существенной потери точности из-за погрешностей округления. Исключение составляет случай вещественных отрицательных z, когда все слагаемые в (3.7) положительны. Для комплексных z погрешности округления максимальны при $\arg z = 0$ и уменьшаются по мере приближения $\arg z$ к $\pm\pi$.

Далее ограничимся областью $\arg z \geqslant 0$. Учитывая, что согласно определению $E_1(z)$ плоскость z разрезана по отрицательной полуоси, значения $E_1(z)$ при $y < 0$ определяются из соотношения $E_1(z) = \overline{E_1(\bar{z})}$.

Вычисление рядов (3.5) и (3.7) для вещественного аргумента можно производить непосредственно, прерывая суммирование, когда частичные суммы ряда в определенном приближении перестают изменяться. Наиболее просто реализуется условие обращения в машинный нуль разности двух последовательных частичных сумм (условие «максимальной точности» [3]). При комплексном аргументе этот способ, однако, усложняет программу и увеличивает время счета. Менее громоздкая процедура состоит в задании числа N членов ряда, исходя из определенных оценок типа (3.6б). В этом случае преимущества имеет схема Горнера как по простоте реализации, так и по времени счета (см. § 1.2). Указанная схема дает заметный выигрыш и для вещественной функции (3.5) (ср. программы 3.1 и 3.2). Запишем разложения (3.5), (3.7) по схеме Горнера:

$$\mathrm{Ei}\,(x) \approx \gamma + \ln x + \left[\ldots\left[\left(\frac{x}{NN} + \frac{1}{N-1}\right)\frac{x}{N-1} + \frac{1}{N-2}\right]\frac{x}{N-2} + \ldots + 1\right] x; \tag{3.8а}$$

$$E_1(z) \approx -\gamma - \ln z - \left[\ldots\left[\left(\frac{(-z)}{NN} + \frac{1}{N-1}\right)\frac{(-z)}{N-1} + \frac{1}{N-2}\right] \times \right.$$
$$\left. \times \frac{(-z)}{N-2} + \ldots + 1\right](-z). \tag{3.8б}$$

Применение схемы Горнера и непосредственное суммирование рядов приводят практически к совпадающим погрешностям округления. Это утверждение не относится, однако, к знакочередующимся рядам. Для последних схема Горнера менее устойчива к погрешностям округления, когда аргумент z возрастает.

Оценки показывают, что при $\arg z > \pi/2$ $(x < 0,\ y > 0)$ удается обеспечить достаточную точность вычисления $E_1(z)$ вплоть до $|z| = 30$, выбирая число членов ряда

$$N \approx 30 + |z|. \tag{3.9}$$

При положительных x погрешности округления быстро возрастают с уменьшением y. В результате для $x > 0$ гарантированная точность вычисления $E_1(z)$ сохраняется только при $|z| \leqslant 5$.

Разложение в ряд функций $E_n(z)$ $(n = 2, 3, 4, \ldots)$ имеет намного более громоздкий вид (см., например, [9]). Проще использовать рекуррентную формулу

$$E_n(z) = \frac{1}{n-1}\left[e^{-z} - zE_{n-1}(z)\right], \quad n = 2, 3, 4, \ldots. \tag{3.10}$$

Для области $\arg z < \pi/2$, по-видимому, наиболее эффективный алгоритм основан на *разложении* $E_n(z)$ *в непрерывную дробь*:

$$E_n(z) = \cfrac{e^{-z}}{z + \cfrac{n}{1 + \cfrac{1}{z + \cfrac{n+1}{1 + \cfrac{2}{z + \ldots}}}}}. \tag{3.11}$$

Структура (3.11) аналогична разложению в непрерывную дробь неполной гамма-функции (2.44), что вытекает из формулы

$$E_n(z) = z^{n-1}\,\Gamma(1-n,\ z). \tag{3.12}$$

В соответствии с (2.45) — (2.47) запишем рекуррентную формулу и выражение для $E_n(z)$:

$$A_{N-1} = z + \frac{n+N-1}{1 + N/A_N}; \tag{3.13}$$

$$E_n(z) = e^{-z}/A_0. \tag{3.14}$$

Вычисляя из (3.13) остатки непрерывных дробей A_k по убывающей последовательности k, находим $A_{N-2}, A_{N-3}, \ldots, A_1, A_0$. Подставив A_0 в формулу (3.14), получим искомое значение $E_n(z)$ при любом n. Оценки показывают, что при $\mathrm{Re}\, z \geqslant 0$ относительная погрешность $E_n(z)$ не превышает $5 \cdot 10^{-6}$, когда число итераций

$$N \approx 6\,[3 + 1/(n\,|z|)]. \tag{3.15}$$

Необходимые для начала итерационного процесса A_N могут быть оценены по (2.46б) (при $a = 1 - n$) или по более простой формуле (2.46в). Практически, как отмечалось в § 2.4, значения A_N могут изменяться в широких пределах при $N \gtrsim 20$. В данном случае ориентировочно

$$A_N \approx z + (N + n)/2. \tag{3.16}$$

Для вещественных $z = x \geqslant 0{,}5$ вместо (3.15) и (3.16), учитывая некритичность результата вычислений к N и A_N, можно принять

$$N = A_N = 25. \tag{3.17}$$

Слабая зависимость результата от задания A_N имеет место не только при $\arg z < \pi/2$, но и при отрицательных x. И в этом случае погрешности невелики, кроме $y < 1$, т. е. окрестности границы области определения $E_n(z)$.

В целом программы, основанные на разложении функций $E_n(z)$ в ряды и в непрерывную дробь, дополняют друг друга: наивысшая точность при использовании ряда типа (3.7) достигается именно в тех областях, где плохо работает (3.11), и наоборот. Существенно, что области, где каждый из указанных алгоритмов дает удовлетворительную точность, перекрываются. Так, для вещественного аргумента программы 3.1—3.3 (метод рядов) дают высокую точность при $|z| \leqslant 3$, а программы 3.7 и 3.8 (непрерывные дроби) — при $|z| \geqslant 0{,}5$. Для комплексного аргумента в области $\operatorname{Re} z > 0$ программы 3.5, 3.6 (метод рядов) обеспечивают достаточную точность при $|z| \leqslant 2$, а программы 3.9, 3.10, основанные на разложении в непрерывную дробь, имеют малые погрешности при $\operatorname{Re} z \geqslant 0{,}5$. В области $x < 0$ ($\arg z > \pi/2$) программы 3.5, 3.6 (метод рядов) обеспечивают высокую точность при $y < 0{,}5|x|$ вплоть до $|z| = 30$. Программы 3.9, 3.10 (разложение в непрерывную дробь) захватывают область с $y > 1$ при весьма больших $|z|$.

Представляет также интерес расчет $E_n(z)$ *численным интегрированием* (3.3). Преобразуем (3.3), подставив $u = zt$:

$$E_n(z) = \int_1^\infty \frac{e^{-zt}}{t^n}\, dt = z^{n-1} \int_z^\infty \frac{e^{-u}}{u^n}\, du. \tag{3.18}$$

Целесообразно в (3.18) в качестве пути интегрирования выбрать прямую, начинающуюся в точке $u = z$ и идущую в ∞ параллельно действительной оси, т. е. $u = s + \mathrm{j}\,y$, где $0 \leqslant s < \infty$. Тогда

$$E_n(z) = z^{n-1}\, e^{-\mathrm{j}y} \int_x^\infty \frac{e^{-s}}{(s+\mathrm{j}y)^n}\, ds. \tag{3.19}$$

Интеграл (3.19) является регулярной функцией на плоскости z, разрезанной по отрицательной части действительной оси, т. е. при $|\arg z| < \pi$, и фактически является аналитическим продолжением (3.3) в указанную область.

В программе 3.11 интеграл (3.19) вычисляется на основе квадратуры Чебышева (см. § 10.2) при числе узлов на единичном интервале $n = 6$ (см. программу 10.13). Шаг интегрирования принят равным 2, что позволяет ограничить число N интервалов величиной 6—8. При этом изменение экспоненциального множителя в (3.19) e^{-s} достаточно для приближения к бесконечному пределу. Следует, однако, иметь в виду, что выбранная величина шага не позволяет получить высокую точность при малых y и $x < 0$, т. е. в окрестности разреза (соответствующие погрешности указаны в программе 3.11). В целом здесь ситуация аналогична методу разложения в непрерывную дробь, но время счета существенно больше. Поэтому программа представляет в основном методический интерес.

Программа 3.1. Интегральная показательная функция $\operatorname{Ei}(x)$ и интегральный логарифм $\operatorname{li}(x)$ вещественного аргумента. Разложение в ряд (3.5) формулы (3.4), (3.6в), $x > 0$ для $\operatorname{Ei}(x)$ и $x > 1$ для $\operatorname{li}(x)$. Суммирование ряда (3.5) прерывается в программе при обращении в нуль (машинный нуль) разности двух последовательных частичных сумм.

Fln	ПД	Fln	ИПС	+	ПВ	0	П6	1	ПА
КИП6	ИПА	ИПД	×	ИП6	÷	ПА	ИП6	÷	ИПВ
+	ПВ	FBx	—	Fx=0	10	ИПВ	С/П		

Инструкция
1. Исходные данные: ($\gamma = 5{,}7721566 \cdot 10^{-1} =$ РС), [x = РХ].
2. Пуск: для $\operatorname{Ei}(x)$ БП 01 С/П; для $\operatorname{li}(x)$ В/О С/П.
3. Результат: РХ = РВ = $\operatorname{Ei}(x)$, Р6 = N; РХ = РВ = $\operatorname{li}(x)$, Р6 = N.
4. Регистры: рабочие Р6, РВ, РС; оперативные РА, РД; свободные Р0 — Р5, Р7, Р8, Р9.
5. Погрешность относительная: $(10+2x)\cdot 10^{-8}$ для $\operatorname{Ei}(x)$ и $(100 + 2 \ln x) \times 10^{-8}$ для $\operatorname{li}(x)$.
6. Время счета при $x \gg 1$: $t \approx x/6$ мин для $\operatorname{Ei}(x)$ и $t \approx (\ln x)/6$ мин для $\operatorname{li}(x)$.

Примеры.

$\operatorname{Ei}(1) = 1{,}895118$ (1,895118 [9]), $N = 10$, $t \approx 1$ мин;

$\operatorname{Ei}(100) = 2{,}7155481 \cdot 10^{41}$ ($2{,}7155541 \cdot 10^{41}$ [9]), $N = 158$, $t \approx 16$ мин;

$\operatorname{li}(100) = 30{,}126141$, $N = 20$, $t \approx 2$ мин.

Здесь N — число учтенных программой членов ряда.

Программа 3.2. Интегральная показательная функция $\operatorname{Ei}(x)$ и интегральный логарифм $\operatorname{li}(x)$ вещественного аргумента. Разложение в ряд (3.5) по схеме Горнера (3.8а), формулы (3.4), (3.6а); $x > 0$ для $\operatorname{Ei}(x)$ и $x > 1$ для $\operatorname{li} x$. Число подлежащих учету членов ряда в программе рассчитывается по формуле $N \approx 8 + 2x$ или $N \approx 8 + 2 \ln x$.

Fln	ПД	2	×	9	+	П0	ИПС	ИПД	Fln
+	0	ИП0	F1/x	+	FBx	×	ИПД	×	FL0
12	+	С/П							

Инструкция
1. Исходные данные: ($\gamma = 5{,}7721566 \cdot 10^{-1}$ = РС), [x = РХ].
2. Пуск: для $\operatorname{Ei}(x)$ БП 01 С/П; для $\operatorname{li}(x)$ В/О С/П.
3. Результат: РХ = $\operatorname{Ei}(x)$ и РХ = $\operatorname{li}(x)$.
4. Регистры: рабочие РС, РД; оперативные Р0; свободные Р1 — РВ.
5. Погрешность относительная: $(10+2x)\cdot 10^{-8}$ для $\operatorname{Ei}(x)$ и $(100 + 2 \ln x) \times 10^{-8}$ для $\operatorname{li}(x)$.
6. Время счета $t = (0{,}4 + x/11)$ мин для $\operatorname{Ei}(x)$, $t \approx [0{,}4 + (\ln x)/11]$ мин для $\operatorname{li}(x)$.

Примеры.

$\operatorname{Ei}(1) = 1{,}8951179$ (1,8951178), $t \approx 30$ с;

$\operatorname{Ei}(100) = 2{,}715544 \cdot 10^{41}$ ($2{,}7155541 \cdot 10^{41}$), $t \approx 10$ мин;

$\operatorname{li}(100) = 30{,}126138$, $t \approx 50$ с.

Сравнение программ 3.1 и 3.2 демонстрирует преимущества схемы Горнера: программа 3.2 короче, требует меньше регистров памяти и время счета сокращается в 1,5—2 раза.

Программа 3.3. Интегральная показательная функция $E_1(x)$ вещественного аргумента. Разложение в ряд по схеме Горнера (3.8б), $x \leqslant 5$. Число N учитываемых членов ряда в программе рассчитывается по формуле $N \approx 4x + 9$.

ПД	4	×	9	+	П0	0	ИП0	F1/x	+
FBx	×	ИПД	/—/	×	FL0	07	/—/	ИПС	—
ИПД	Fln	—	С/П						

Инструкция

1. Исходные данные: ($\gamma = 5{,}7721566\cdot10^{-1}$ = PC), [x = PX].
2. Пуск: В/О С/П.
3. Результат: PX = $E_1(x)$.
4. Регистры: рабочие PC; оперативные P0, PД; свободные P1 — PB.
5. Погрешность относительная меньше:

$$1\cdot10^{-6} \text{ при } x\leqslant 2, \quad 1\cdot10^{-4} \text{ при } x\leqslant 4,$$
$$1\cdot10^{-5} \text{ при } x\leqslant 3, \quad 5\cdot10^{-4} \text{ при } x\leqslant 5.$$

6. Время счета $t \approx (0{,}5 + x/5)$ мин.

Примеры.

$E_1(1) = 0{,}21938394$ ($0{,}21938393$ [9]), $t = 40$ с;

$E_1(5) = 1{,}1484\cdot10^{-3}$ ($1{,}1482955\cdot10^{-3}$ [9]), $t = 1{,}5$ мин.

Программа 3.4. Интегральные показательные функции $E_n(x)$ вещественного аргумента. Суммирование ряда (3.7) по схеме Горнера (3.8б) для вычисления $E_1(x)$ и рекуррентная формула (3.10) для $E_n(x)$. Число N учитываемых членов ряда устанавливается программой по формуле $N \approx 4x + 9$.

ПД	4	×	9	÷	П0	КИП1	0	П5	ИП0
F1/x	+	FBx	×	ИПД	/—/	×	FL0	09	/—/
ИПС	—	ИПД	Fln	—	ПВ	П0	КИП5	ИПД	/—/
Fe^x	ИПД	ИП0	×	—	ИП5	÷	FL1	26	С/П

Инструкция

1. Исходные данные: n = P1 (n = 2, 3, 4, ...), ($\gamma = 5{,}7721566\cdot10^{-1}$ = PC), [x = PX].
2. Пуск: В/О С/П.
3. Результат: PX = $E_n(x)$, P0 = $E_{n-1}(x)$, PB = $E_1(x)$, P5 = $(n-1)$, PД = x. Для нахождения $E_{n+1}(x)$ при том же значении аргумента достаточно произвести дополнительный пуск БП 26 С/П, не изменяя содержимого регистров P1, P5, PД и сохраняя в PX значения $E_n(x)$. После останова (время счета 6 с) PX = $E_{n+1}(x)$, P0 = $E_n(x)$, P5 = n. Дополнительные пуски могут быть продолжены для получения E_{n+2}, E_{n+3}, ...
4. Регистры: рабочие P0, P1, P5, PC, PB; оперативные PД; свободные P2, P3, P4, P6 — PA.
5. Погрешность относительная меньше:

$$1\cdot10^{-6} \text{ при } x < 2, \quad 5\cdot10^{-4} \text{ при } x < 4,$$
$$1\cdot10^{-5} \text{ при } x < 3, \quad 5\cdot10^{-3} \text{ при } x < 5.$$

6. Время счета $t \approx (0{,}5 + x/5 + n/10)$ мин.

Примеры.

$E_1(2) = 0{,}04890053$ ($0{,}04890053$ [9]), $t = 1$ мин;

$E_{20}(2) = 6{,}4143063\cdot10^{-3}$ ($6{,}4143\cdot10^{-3}$ [9]), $t = 2{,}5$ мин;

$E_1(5) = 1{,}1484\cdot10^{-3}$ ($1{,}1492955\cdot10^{-3}$ [9]), $t = 1{,}5$ мин;

$E_{10}(5) = 4{,}6854275\cdot10^{-4}$ ($4{,}69105\cdot10^{-4}$ [9]), $t = 2{,}5$ мин;

$E_{20}(5) = 2{,}7827457\cdot10^{-3}$ ($2{,}78275\cdot10^{-3}$ [9]), $t = 3{,}5$ мин.

Программа 3.5. Интегральная показательная функция $E_1(z)$ комплексного аргумента $z = x + jy$ при $y \geqslant 0$. Суммирование ряда (3.7) по схеме Горнера (3.8б), $|z| \leqslant 30$ при $x \leqslant 0$ и $|z| \leqslant 5$ при $x > 0$. При $y < 0$ функцию $E_1(z)$ можно получить из равенства $E_1(z) = \overline{E_1(\bar z)}$. Число учитываемых членов ряда устанавливается в программе по формуле $N \approx |z| + 30$.

ИП5	Fx^2	ИП6	Fx^2	+	F$\sqrt{\ }$	П8	3	1	+
П0	0	↑	ПВ	XY	ИП0	F1/x	÷	ПА	ИП6
F Bx	/—/	×	F Bx	ИП5	×	ПС	ИПА	×	XY
ПД	ИПВ	×	—	ИПС	ИПВ	×	ИПД	ИПА	×
+	FL 0	13	/—/	ИП5	ИП8	÷	Farccos	—	ПВ
XY	/—/	ИП8	F ln	—	ИП7	—	ПА	С/П	

Инструкция

1. Исходные данные: (x = P5, y = P6, $\gamma = 5{,}7721566\cdot10^{-1}$ = P7).
2. Пуск: В/О С/П.
3. Результат: PX = PA = Re $E_1(z)$, PY = PB = Im $E_1(z)$, P8 = $|z|$.
4. Регистры: рабочие P5 — P8, PA, PB; оперативные P0, PC, PД; свободные P1 — P4, P9.
5. Погрешность относительная:

x	$\leqslant 0$, $\lvert y/x\rvert \leqslant 0{,}5$		>0			
$\lvert z\rvert$	≤30	≤25	≤2	≤3	≤4	≤5
δ	$\leqslant 5\cdot10^{-6}$	$\leqslant 3\cdot10^{-6}$	$\leqslant 1\cdot10^{-6}$	$\leqslant 1\cdot10^{-5}$	$\leqslant 1\cdot10^{-4}$	$\leqslant 1\cdot10^{-3}$

6. Время счета $t \approx (5 + |z|/6)$ мин.

Примеры.

$E_1(-19 + j\,0) = -9950903{,}7 - j\pi$ ($-9950905 - j\pi$), $t = 8$ мин;

$E_1(-19 + j\,10) = 8659662 - j\,571013{,}66$ ($8659668 - j\,571013$), $t \approx 9$ мин;

$E_1(1 + j\,4) = 3{,}373604\cdot10^{-2} + j\,7{,}35236\cdot10^{-2}$ ($3{,}37559\cdot10^{-2} + j\,7{,}35234 \times 10^{-2}$), $t = 5$ мин;

$E_1(4 + j\,3) = -2{,}90686\cdot10^{-3} + j\,1{,}29326\cdot10^{-3}$ ($-2{,}9066\cdot10^{-3} + j\,1{,}29353\cdot10^{-3}$), $t = 5{,}5$ мин.

В скобках указаны табличные данные из [9].

Программа 3.6. Интегральные показательные функции $E_n(z)$ комплексного аргумента $z = x + jy$ при $y \geqslant 0$. Суммирование ряда (3.7) по схеме Горнера (3.8б) для вычисления $E_1(z)$ и рекуррентная формула (3.10) для $E_n(z)$, n = 2, 3, ..., $|z| < 30$ при $x \leqslant 0$ и $|z| \leqslant 5$ при $x > 0$. При $y < 0$ функции $E_n(z)$ можно получить из равенства $E_n(z) = \overline{E_n(\bar z)}$. Число учитываемых членов ряда устанавливается в программе по формуле $N \approx |z| + 30$.

ИП5	Fx^2	ИП6	Fx^2	+	F $\sqrt{}$	П8	3	1	+
П0	0	П4	↑	ПВ	XY	ИП0	F1/x	+	ПА
ИП6	F Вх	/—/	×	F Вх	ИП5	×	ПП	80	FL0
14	/—/	ИП5	ИП8	÷	Farccos	—	ПВ	П1	XY
/—/	ИП8	F ln	—	ИП7	—	ПА	П0	КИП3	КИП4
ИП6	ИП5	ПП	80	ИП5	/—/	Fe^x	ПС	ИП6	F sin
×	+	/—/	ПВ	ИПС	ИП6	Fcos	×	ИП9	—
ИП4	÷	ПА	XY	ИП4	÷	ПВ	FL3	49	С/П
ПС	ИПА	×	XY	ПД	ИПВ	×	—	П9	ИПС
ИПВ	×	ИПД	ИПА	×	+	В/О			

Структура программы
00—47: расчет $E_1(z)$ и занесение $\mathrm{Re}\,E_1(z)$ и $\mathrm{Im}\,E_1(z)$ в регистры Р0, РА и Р1, РВ соответственно,
48—79: вычисление функций $E_n(z)$ прн заданном n по рекуррентной формуле (3.10),
80—96: подпрограмма умножения комплексных чисел.

Инструкция
1. Исходные данные: n = Р3 (n = 2, 3, 4, ...), (x = Р5, y = Р6, γ = $= 5{,}7721566 \cdot 10^{-1}$ = Р7).
2. Пуск: В/О С/П.
3. Результат: РХ = РВ = $\mathrm{Im}\,E_n(z)$, РY = РА = $\mathrm{Re}\,E_n(z)$, Р0 = $\mathrm{Re}E_1(z)$, Р1 = $\mathrm{Im}\,E_1(z)$, Р4 = $n - 1$, Р8 = $|z|$.
Для получения следующей по порядку функцни $E_{n+1}(z)$ прн том же значении аргумента можно произвести дополнительный пуск БП 49 С/П (не изменяя содержимого регистров Р3, Р4, Р5, Р6, РА, РВ). После останова (время счета 20 с) РХ = РВ = $\mathrm{Im}\,E_{n+1}(z)$, PE = РА = $\mathrm{Re}\,E_{n+1}(z)$, Р4 = n. Допустимы и дальнейшие дополнительные пуски с увеличением n на единицу прн каждом пуске. Возможен и прямой переход от $E_n(z)$ к $E_{n+p}(z)$. Для этого следует ввести p в Р2 и пуск БП 50 С/П. Время счета $(P/3)$ мин.
4. Регистры: рабочие Р0, Р1, Р3 — Р8, РА, РВ; оперативные: Р9, РС, РД; свободные Р2.
5. Погрешность относительная при $n \leqslant 10$:

x	$\leqslant 0$ $\lvert y/x \rvert \leqslant 0{,}5$		>0		
$\lvert z \rvert$	30	15	2	3	4
δ	$\leqslant 1 \cdot 10^{-5}$	$\leqslant 5 \cdot 10^{-6}$	$\leqslant 2 \cdot 10^{-6}$	$\leqslant 2 \cdot 10^{-5}$	$\leqslant 1 \cdot 10^{-3}$

6. Время счета $t \approx [5 + |z|/6 + (n - 1)/3]$ мин.
Примеры.

$E_1(4 + j\,0) = 3{,}77914 \cdot 10^{-3} + j\,0$ $(3{,}77935 \cdot 10^{-3} + j\,0)$, $t = 6$ мин;

$E_{10}(4 + j\,0) = 1{,}3756297 \cdot 10^{-3} + j\,0$ $(1{,}3754784 \cdot 10^{-3} + j\,0)$, $t = 9$ мин;

$E_1(-3 + j) = -7{,}8231344 + j\,2{,}9559271$ $(-7{,}82314 + j\,2{,}95593)$;

$E_2(-3 + j) = -9{,}661215 - j\,0{,}21048$, $t = 6{,}5$ мин.

В скобках указаны табличные значения $E_n(z)$ из [9].

Программа 3.7. Интегральные показательные функции $E_n(x)$ вещественного аргумента. Разложение в непрерывную дробь (3.11), (3.13) — (3.16), $x \geqslant 0{,}1$

ИПС	ИП5	x	F1/x	3	+	6	×	П2	ИП2
ИПС	+	2	÷	ИП5	+	F1/x	ИП2	×	1
+	F1/x	ИП2	1	—	ИПС	+	×	ИП5	+
FL2	16	ИП5	Fe^x	×	F1/x	ПД	С/П		

Инструкция
1. Исходные данные: (x = Р5, n = РС).
2. Пуск: В/О С/П.
3. Результат: РХ = РД = $E_n(x)$.
4. Регистры: рабочие Р5, РС, РД; оперативные Р2; свободные Р0, Р1, Р3, Р4, Р6 — РВ.
5. Погрешность относительная меньше: $5 \cdot 10^{-7}$ при $x \geqslant 1$; $1 \cdot 10^{-6}$ при $x \geqslant 0{,}5$; $5 \cdot 10^{-5}$ при $x \geqslant 0{,}1$.
6. Время счета $t \approx [1{,}5 + 1/2nx]$ мин.
Примеры.
$E_1(1) = 0{,}21938393$ (все цифры верные), $t = 2$ мин;
$E_{10}(50) = 3{,}2232959 \cdot 10^{-24}$ (все цифры верные), $t = 1{,}5$ мин;
$E_1(0{,}1) = 1{,}8228532$ (1,8229234 [9]), $t = 6$ мин;
$E_{10}(0{,}1) = 0{,}099298436$ (все цифры верные), $t = 2$ мин.

Программа 3.8. Интегральные показательные функции вещественного аргумента $E_n(x)$. Разложение в непрерывную дробь (3.11), (3.13), (3.14), (3.17), $x \geqslant 0{,}5$.

2	5	П2	F1/x	ИП2	×	1	+	F1/x	ИП2
1	—	ИПС	+	×	ИП5	+	FL2	03	ИП5
Fe^x	×	F1/x	ПД	С/П					

Использование фиксированных значений N и A_N (3.17) способствует существенному укорочению программы по сравнению с программой 3.7 ценой некоторого повышения предельного минимума $x_{\min}$, при котором сохраняется максимальная точность.

Инструкция
1. Исходные данные: (x = Р5, n = РС).
2. Пуск: В/О С/П.
3. Результат: РХ = РД = $E_n(x)$.
4. Регистры: рабочие Р5, РС, РД; оперативные Р2; свободные Р0, Р1, Р3, Р4, Р6 — РВ.
5. Погрешность относительная меньше: $5 \cdot 10^{-6}$ при $x \geqslant 0{,}5$, $5 \cdot 10^{-7}$ при $x \geqslant 1$.
6. Время счета $t = 2$ мин.
Примеры.

$E_1(0{,}5) = 0{,}55977081$ (0,5597736 [9]);

$E_{10}(0{,}5) = 0{,}063458299$ (0,0634583 [9]);

$E_1(2) = 0{,}048900513$ (0,048900511) [9]).

Программа 3.9. Интегральные показательные функции $E_n(z)$ комплексного аргумента $z = x + jy$. Разложение в непрерывную дробь (3.11), (3.13) — (3.15). $y \geqslant 0$. N-й остаток непрерывной дроби, задаваемый в программе, равен A_N = $= 2 + j\,2$.

ИП6	Fsin	ИП5	Fe^x	×	ПВ	FBx	ИП6	F cos	×
ПА	ИП3	ИП5	Fx^2	ИП6	Fx^2	+	F√	×	F1/x
3	+	6	×	П2	2	П7	П8	ИП2	ПП
77	1	+	П7	XY	П8	ИП3	ИП2	+	1
—	ПП	77	ИП5	+	П7	XY	ИП6	+	П8
FL2	28	ПД	ИПА	×	XY	ПС	ИПВ	×	+
ИПА	ИПС	×	ИПВ	ИПД	×	—	П7	XY	П8
1	ПП	77	П0	XY	П1	С/П	П4	ИП8	/—/
↑	Fx^2	ИП7	Fx^2	+	ИП4	÷	÷	ИП7	FBx
÷	В/О								

Инструкция

1. Исходные данные: ($x = P5$, $y = P6$, $n = P3$).
2. Пуск: В/О С/П.
3. Результат: $PX = P1 = \operatorname{Im} E_n(z)$, $PY = P0 = \operatorname{Re} E_n(z)$.
4. Регистры: рабочие Р0, Р1, Р3, Р5, Р6; оперативные Р2, Р4, Р7, Р8, РА — РД; свободные Р9.
5. Погрешность относительная меньше:

$$5\cdot10^{-6} \text{ при } x \geqslant 0{,}5; \qquad 1\cdot10^{-3} \text{ при } x \leqslant -5,\ y \geqslant 1;$$

$$5\cdot10^{-3} \text{ при } x \leqslant -1, y \geqslant 1; \ 1\cdot10^{-4} \text{ при } x \leqslant -10,\ y \geqslant 1.$$

6. Время счета $t \approx [5 + 2/(n|z|)]$ мин.

Примеры.

1) $E_{10}(4 + j\,0) = 1{,}3754761\cdot10^{-3} - j\,5{,}5299255\cdot10^{-15}$ $(1{,}3754784\cdot10^{-3} + j\,0)$, $t = 6$ мин;

2) $E_1(-15 + j\,10) = 189948{,}4 + j\,9248{,}1006$ $(189948 + j\,9248{,}04)$, $t \approx 6$ мин;

3) $E_2(4 + j\,3) = -2{,}6249783\cdot10^{-3} + j\,9{,}6120078\cdot10^{-4}$ $(-2{,}62498 \times 10^{-3} + j\,9{,}61204\cdot10^{-4})$, $t = 6$ мин;

4) $E_1(0{,}5 + j\,0{,}2) = 0{,}4927683 - j\,0{,}22342484$ $(0{,}492769 - j\,0{,}223425)$;

5) $E_1(-1 + j) = -1{,}7645017 - j\,0{,}75434969$ $(-1{,}76462 - j\,0{,}753822)$;

6) $E_1(-15 + j) = -140522{,}44 + j\,187515{,}42$ $(-140523 + j\,187515)$.

Пример 1 иллюстрирует устойчивость итерационного процесса (3.13): несмотря на то, что исходный остаток $A_N = 2 + j2$ имеет значительную мнимую часть, мнимая часть результата $E_{10}(4 + j0)$ оказывается, как и должно быть, пренебрежимо малой. Отметим, что при больших $|z|$ приемлемая точность получается даже в области $x < 0$ (пример 6).

Программа 3.10. Интегральные показательные функции $E_n(z)$ комплексного аргумента $z = x + jy$. Разложение в непрерывную дробь (3.11), (3.13), (3.14), $y \geqslant 0$.

ИП6	Fsin	ИП5	Fe^x	×	ПВ	FBx	ИП6	Fcos	×
ПА	2	П7	П8	ИП2	ПП	59	1	+	П7
XY	П8	ИП3	ИП2	+	1	—	ПП	59	ИП5
+	П7	XY	ИП6	+	П8	FL2	14	ПД	ИПА
×	XY	ПС	ИПВ	×	+	П8	ИПА	ИПС	×
ИПВ	ИПД	×	—	П7	1	ПП	59	С/П	П4
ИП8	/—/	↑	Fx^2	ИП7	Fx^2	+	ИП4	÷	÷
ИП7	FBx	÷	В/О						

Программа сокращена по сравнению с программой 3.9 за счет выделения числа итераций N в разряд исходных данных, определяемых таблицей в п. 5 инструкции. Это также позволяет в отдельных случаях сократить время счета путем ограничения точности в необходимых пределах (п. 5). Задаваемый программой остаток непрерывной дроби $A_N = 2 + j2$.

Инструкция

1. Исходные данные: ($x = P5$, $y = P6$, $n = P3$), $N = P2$.
2. Пуск: В/О С/П.
3. Результаты: $PX = \operatorname{Re} E_n(z)$, $PY = \operatorname{Im} E_n(z)$.
4. Регистры: рабочие Р3, Р5, Р6; оперативные Р2, Р7, Р8, РА — РД; свободные Р0, Р1, Р9.
5. Погрешность и время счета определяются задаваемым в качестве исходной величины числом итераций N. В таблице приведены соответствующие значения для функции $E_1(z)$. Погрешности $E_n(z)$ при $n \geqslant 2$ меньше и монотонно уменьшаются с ростом n.

N	t, мин	$x \geqslant 0$				$x<0,\ y \geqslant 1$		
		$\lvert z\rvert \geqslant 0{,}5$	$\lvert z\rvert \geqslant 1$	$\lvert z\rvert \geqslant 2$	$\lvert z\rvert \geqslant 5$	$\lvert z\rvert \geqslant 1$	$\lvert z\rvert \geqslant 5$	$\lvert z\rvert \geqslant 10$
5	2	$1\cdot10^{-2}$	$1\cdot10^{-3}$	$5\cdot10^{-4}$	$5\cdot10^{-5}$	0,3	$5\cdot10^{-2}$	$5\cdot10^{-4}$
10	3	$5\cdot10^{-4}$	$1\cdot10^{-4}$	$5\cdot10^{-5}$	$5\cdot10^{-6}$	0,2	$1\cdot10^{-2}$	$5\cdot10^{-5}$
20	6	$5\cdot10^{-5}$	$1\cdot10^{-5}$	$2\cdot10^{-6}$	$1\cdot10^{-6}$	0,1	$5\cdot10^{-3}$	$1\cdot10^{-5}$
25	7,5	$5\cdot10^{-6}$	$1\cdot10^{-6}$	$1\cdot10^{-6}$	$5\cdot10^{-7}$	$5\cdot10^{-2}$	$1\cdot10^{-3}$	$5\cdot10^{-6}$

Примеры.

$E_1(1 + j\,0{,}8) = 0{,}054668534 - j\,0{,}18243168$ $(0{,}054674 - j\,0{,}182512)$, $N = 5$, $t = 2$ мин;

$E_2(4 + j\,3) = -2{,}6249625.10^{-3} + j\,9{,}61182\cdot01^{-4}$, $N = 5$, $t = 2$ мин;

$E_2(4 + j\,3) = -2{,}6249783\cdot10^{-3} + j\,9{,}6120078\cdot10^{-4}$, $N = 10$, $t = 3$ мин.

Табличное значение [9]: $E_2(4 + j3) = -2{,}6249835\cdot10^{-3} + j9{,}612045\cdot10^{-4}$.

Программа 3.11. Интегральные показательные функции $E_n(z)$ комплексного аргумента $z = x + jy$. Расчет несобственного интеграла (3.19) по квадратурной формуле Чебышева (10.14) при $n = 6$.

0	ПС	ПД	КИП2	9	П0	КИП0	КИП0	/—/	ПВ
ИП2	+	ИП9	+	П5	Fe^x	3	×	0	XY
ПП	73	П3	XY	/—/	↑	Fx^2	ИП3	Fx^2	+
÷	ИП3	F Bx	÷	ИПС	+	ПС	XY	ИПД	+
ПД	ИПВ	Fx ⩾0	08	FL0	06	FL2	03	ИПА	Fsin
/—/	П6	ИПА	Fcos	П5	ИПД	ИПС	1	ПП	74
С/П	ИПА	П6	ИП9	П5	F,	F,	ИП8	1	—
ПП	74	С/П	ИП8	П3	F,	XY	FBx	ИП6	×
XY	ИП5	XY	×	FBx	F,	+	ИП5	XY	F,
×	XY	ИП6	×	—	FL3	76	В/О		

Структура программы

00—09: вызов из регистров памяти абсцисс y_k очередных узлов квадратурной формулы,

10—33: вычисление подынтегральной функции $f(s) = e^{-s}/(s + j\,y)^n$ в узлах с коэффициентом 1/3, входящим в квадратурную формулу (см. (9.14), (9.8))

34—48: суммирование слагаемых по всем узлам, что дает приближенное значение интеграла $S_n = \int\limits_0^\infty f(s)\,ds$,

49—60: умножение S_n на e^{-jy}, результат равен $E_n(z)$ при $n = 1$,

61—72: умножение предыдущего результата на z^{n-1} — получение $E_n(z)$ при $n \geqslant 2$,

73—97: подпрограмма n-кратного умножения на комплексное число, содержащееся в регистрах Р5, Р6.

Инструкция

1. Исходные данные: ($y_1 = 8{,}6624682 \cdot 10^{-1}$ = P1, $y_2 = 4{,}2251865 \cdot 10^{-1}$ = P4, $y_3 = 2{,}666354 \cdot 10^{-1}$ = P7, x = P9, n = P8), y = P6 = PA, $2N$ = P2.
2. Пуск 1: В/О С/П.
3. Результат: PX = Re $E_n(z)$, PY = Im $E_n(z)$ при $n = 1$. Для получения $E_n(z)$ при $n > 1$ необходимо произвести второй пуск, не меняя содержимого регистров PX, PY после останова.
4. Пуск 2: С/П.
5. Результат: PX = Re $E_n(z)$, PY = Im $E_n(z)$.
6. Регистры: рабочие P1, P4, P7 — P9; оперативные P0, P2, P3, P5, P6, PA — PД; свободные —.
7. Погрешность относительная меньше:

$x > 0$	$x < 0$
$2 \cdot 10^{-3}$ при $\lvert z\rvert \geqslant 0{,}5$,	$5 \cdot 10^{-4}$ при $y \geqslant 1$,
$1 \cdot 10^{-4}$ при $\lvert z\rvert \geqslant 1$,	$5 \cdot 10^{-5}$ при $y \geqslant 3$.
$5 \cdot 10^{-6}$ при $\lvert z\rvert \geqslant 3$,	

Эти данные относятся к $n = 1, 2$, и $2N = 12$. При увеличении n погрешность возрастает. Увеличение $2N$ практически не влияет на погрешность, так как при этом шаг не меняется (он равен 2), а расширяется интервал интегрирования.

8. Время счета $t \approx 2N\,[1 + (n - 1)/2]$ мин.

Примеры. При $2\ N = 12$

$E_4(2) = 0{,}025005643/(0{,}0250228\ [9])$, $t \approx 27$ мин;

$E_1(0{,}5 + j\,0{,}2) = 0{,}49277201 - j\,0{,}22267009(0{,}492769 - j\,0{,}223425\ [9])$, $t = 13$ мин;

$E_2(4 + j\,3) = -2{,}6249806 \cdot 10^{-3} + 9{,}611974 \cdot 10^{-4}\ (-2{,}62498 \cdot 10^{-3} + 9{,}61204 \cdot 10^{-4}\ [9])$, $t = 19$ мин;

$E_2(-3 + j) = -9{,}6940866 - j\,0{,}1934868\ (-9{,}66121 - j\,0{,}21048\ [9])$, $t = 19$ мин.

3.2. Интегральные синус и косинус. Интегральные гиперболические синус и косинус

Интегральный синус

$$\mathrm{Si}(z) = \int\limits_0^z \frac{\sin t}{t}\,dt. \tag{3.20}$$

Интегральный косинус

$$\mathrm{Ci}(z) = \gamma + \ln z + \int\limits_0^z \frac{\cos t - 1}{t}\,dt, \quad |\arg z| < \pi, \tag{3.21}$$

где постоянная Эйлера $\gamma = 0{,}57721566\ \ldots$.

Интегральный гиперболический синус

$$\mathrm{Shi}(z) = \int\limits_0^z \frac{\operatorname{sh} t}{t}\,dt. \tag{3.22}$$

Интегральный гиперболический косинус

$$\mathrm{Chi}(z) = \gamma + \ln z + \int\limits_0^z \frac{\operatorname{ch} t - 1}{t}\,dt, \quad |\arg z| < \pi. \tag{3.23}$$

Si(z) и Shi (z) являются целыми функциями. Функции Ci (z) и Chi (z) однозначны и регулярны на плоскости z, разрезанной по отрицательной части действительной оси. Указанные особенности связаны с входящим в (3.21) и (3.23) $\ln z$, для которого нужная ветвь выбирается обычным образом.

Разложения в ряды указанных функций:

$$\mathrm{Si}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n\, z^{2n+1}}{(2n+1)\,(2n+1)!}; \tag{3.24}$$

$$\mathrm{Ci}(z) = \gamma + \ln z + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n\, z^{2n}}{2n\,(2n)!}; \tag{3.25}$$

$$\mathrm{Shi}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)\,(2n+1)!}; \tag{3.26}$$

$$\mathrm{Chi}(z) = \gamma + \ln z + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{2n}}{2n\,(2n)!}. \tag{3.27}$$

Ряды (3.26) и (3.27) при вещественных z знакопостоянны, и формулы можно использовать для вычисления Shi (x) и Chi (x) при достаточно больших x (§ 3.1). Разложения (3.24), (3.25) при вещественных z, а также все ряды для комплексного аргумента указанным свойством не обладают, и влияние погрешностей округления существенно ограничивает область их применения. В этих случаях предпочтительно *прямое численное интегрирование* (3.20) — (3.23). Преобразуем интегралы (3.20), (3.24) подстановкой $t=zu$ к следующей сумме вещественных интегралов:

$$\mathrm{Si}\,(z)=\int_0^1 \frac{\mathrm{Re}\,\sin\,(zu)}{u}\,du+\mathrm{j}\int_0^1 \frac{\mathrm{Im}\,\sin\,(zu)}{u}\,du; \qquad (3.20\text{a})$$

$$\mathrm{Ci}\,(z)=\gamma+\ln z+\int_0^1 \frac{\mathrm{Re}\,\cos\,(zu)-1}{u}\,du+\mathrm{j}\int_0^1 \frac{\mathrm{Im}\,\cos\,(zu)}{u}\,du. \qquad (3.21\text{a})$$

Расчет Si (z) и Ci (z) по указанным формулам реализован в программах 3.18, 3.19, базирующихся на квадратурных формулах Чебышева при $n=6$. За основу бралась программа 10.13. Для нахождения Shi (z) и Chi (z) достаточно использовать формулы (3.31), связывающие эти функции с Si (z) и Ci (z). Указанная связь учтена в программах 3.18, 3.19.

С целью уменьшения погрешностей округления при малых $|z|$ целесообразно преобразовать разности $(\cos t-1)$ и $(\mathrm{ch}\, t-1)$ в (3.21) и (3.23), переписав эти формулы в виде

$$\mathrm{Ci}\,(z)=\gamma+\ln z-\int_0^z \frac{\sin^2 (t/2)}{t/2}\,dt; \qquad (3.28)$$

$$\mathrm{Chi}\,(z)=\gamma+\ln z+\int_0^z \frac{\mathrm{sh}^2 (t/2)}{t/2}\,dt. \qquad (3.29)$$

Численное интегрирование (3.28) при вещественных z реализовано в программе 3.15.

Для вычисления функций Si (x) и Ci (x) вещественного аргумента можно также использовать их связь с *интегральной показательной функцией* [5]:

$$\mathrm{Ci}\,(x)=-\mathrm{Re}\,E_1\,(\mathrm{j}\,x);\;\; \mathrm{Si}\,(x)=\mathrm{Im}\,E_1\,(\mathrm{j}\,x)+\pi/2. \qquad (3.30)$$

Соответствующий алгоритм оказывается достаточно эффективным, особенно для больших x, если применять разложение $E_1\,(\mathrm{j}x)$ в непрерывную дробь (ср. программы 3.9 и 3.10 для $E_n(z)$). В данном случае $n=1$, а аргумент чисто мнимый, что упрощает расчет (программа 3.20).

Нахождение сходных интегральных тригонометрических и гиперболических функций комплексного аргумента удобно объединить в общие программы, используя связь Si (z) с Shi (z) и Ci (z) с Chi (z). Легко получить из определений (3.20) и (3.22):

$$\mathrm{Shi}\,(z)=-\mathrm{j}\,\mathrm{Si}\,(\mathrm{j}\,z)=\mathrm{Im}\,\mathrm{Si}\,(-y+\mathrm{j}\,x)-\mathrm{j}\,\mathrm{Re}\,\mathrm{Si}\,(-y+\mathrm{j}\,x); \qquad (3.31\text{a})$$

$$\mathrm{Chi}\,(z)=\mathrm{Ci}\,(\mathrm{j}\,z)+\ln z-\ln \mathrm{j}\,z=\mathrm{Ci}\,(\mathrm{j}\,z)-\mathrm{j}\,\pi/2=\mathrm{Re}\,\mathrm{Ci}\,(-y+\mathrm{j}\,x)+\mathrm{j}\,[\mathrm{Im}\,\mathrm{Ci}\,(-y+\mathrm{j}\,x)-\pi/2]. \qquad (3.31\text{б})$$

Отметим, что при вычислении Ci (z) по формуле (3.19) используется программа 1.32, в которой введено ограничение $y=\mathrm{Im}z>0$. Поэтому для Ci $(z)=$ Ci $(-y+\mathrm{j}x)$ следует в (3.31б) полагать $x>0$. В результате эта формула применима для вычисления Chi (z), лишь когда $x>0$. Функцию Chi (z) при $x<0$ легко получить из соотношения [9]

$$\mathrm{Chi}\,(-z)=\mathrm{Chi}\,(z)-\mathrm{j}\pi. \qquad (3.32)$$

Сопоставление вычисленных значений Si (z), Ci (z), Shi (z), Chi (z) с табличными данными можно произвести на основе таблиц для $E_1\,(z)$ с помощью формул

$$\mathrm{Si}\,(z)=\pi/2+\mathrm{j}\,[E_1\,(-\mathrm{j}\,z)-E_1\,(\mathrm{j}\,z)]/2; \qquad (3.33)$$

$$\mathrm{Ci}\,(z)=-[E_1\,(\mathrm{j}\,z)+E_1\,(-\mathrm{j}\,z)]/2; \qquad (3.34)$$

$$\mathrm{Shi}\,(z)=[E_1\,(z)-E_1\,(-z)]/2-\mathrm{j}\,\pi/2; \qquad (3.35)$$

$$\mathrm{Chi}\,(z)=-[E_1\,(z)+E_1\,(-z)]/2-\mathrm{j}\,\pi/2. \qquad (3.36)$$

Формулы (3.33), (3.34) применимы при $|\arg z|<\pi/2$ [9], (3.35) и (3.36) — при $-\pi<\arg z\leqslant 0$.

Программа 3.12. Интегральный синус Si (x) вещественного аргумента. Разложение в ряд (3.24) по схеме Горнера, $0\leqslant x\leqslant 20$ (Повышение точности для $x>6$ — см. программу 3.20.)

ПС	Fx²	/—/	ПД	5	0	П0	0	F Bx	×
ИПД	×	ИП0	÷	FL0	16	ИП0	F1/x	+	FL0
08	ИПС	×	С/П						

Инструкция
1. Исходные данные: $[x=\mathrm{PX}]$.
2. Пуск: В/О С/П.
3. Результат: РХ = Si (x), РС = x.
4. Регистры: рабочие РС: оперативные Р0, РД; свободные Р1— РВ.
5. Погрешность относительная:

$x\leqslant$	6	10	13,5	15	20
$\delta\leqslant$	$1\cdot 10^{-6}$	$1\cdot 10^{-5}$	$1\cdot 10^{-4}$	$1\cdot 10^{-3}$	$5\cdot 10^{-2}$

6. Время счета $t\approx 1{,}5$ мин.

Примеры. Si (10) = 1,658337 (1,6583476 [9]); Si (6) = 1,424688 (1,4246876 [9]); Si (20) = 1,608094 (1,5482417 [9]).

Программа 3.13. Интегральный косинус Ci (x) вещественного аргумента. Разложение в ряд (3.25) по схеме Горнера, $0<x\leqslant 10$. Повышение точности для $x>5$ — см. программу 3.20.

ПС	Fx²	/—/	ПД	3	3	П0	0	F Bx	×
ИПД	×	ИП0	÷	FL0	16	ИП0	F1/x	+	FL0
08	ИПВ	—	ИПС	F ln	+	С/П			

Инструкция
1. Исходные данные: $(1-\gamma=4{,}2278434\cdot 10^{-1}=\mathrm{PB})$, $x=\mathrm{PX}$.
2. Пуск: В/О С/П.
3. Результат: РХ = Ci (x), РС = x.
4. Регистры: рабочие РВ, РС; оперативные Р0, РД; свободные Р1 — РА.
5. Погрешность абсолютная меньше: $5\cdot 10^{-7}$ при $x\leqslant 5$; $1\cdot 10^{-6}$ при $x\leqslant 6$; $1\cdot 10^{-5}$ при $x\leqslant 10$.
6. Время счета $t\approx 1$ мин.

Примеры. Ci (5) = —0,1900295 (—0,19002975), Ci (10) = = —0,0454442 (—0,0454564).

Программа 3.14. Интегральный синус Si (x) вещественного аргумента. Интегрирование (3.20) методом Чебышева при $n = 6$ (программа 10.13), $x > 0$. Число интервалов в составной квадратурной формуле задается в программе по формуле $N = [3 + x/3]$, где квадратные скобки означают округление до целого числа.

ИПС	3	÷	3	+	П2	КИП2	ИПС	ИП2	2
×	П2	÷	ПВ	0	ПД	КИП2	6	П0	КИП0
/—/	ПА	ИП2	+	ИПВ	×	F sin	F Bx	÷	ИПД
+	ПД	ИПА	Fx≥0	20	FL0	19	FL2	16	ИПД
ИПВ	×	3	÷	С/П					

Инструкция

1. Исходные данные: ($y_1 = 8{,}6624682 \cdot 10^{-1}$ = Р1, $y_2 = 4{,}2251865 \cdot 10^{-1}$ = Р3, $y_3 = 2{,}666354 \cdot 10^{-1}$ = Р5, x = РС).
2. Пуск: В/О С/П.
3. Результат: РХ = Si (x).
4. Регистры: рабочие Р1, Р3, Р5, РС; оперативные Р0, Р2, РА, РВ, РД; свободные Р4, Р6—Р9.
5. Погрешность относительная меньше $1 \cdot 10^{-6}$.
6. Время счета $t \approx (1 + x/4)$ мин.

Примеры.

Si (2,9) = 1,8421901 (1,84219019 [9]), $t = 1{,}5$ мин;

Si (40) = 1,5869852 (1,5869851 [9]), $t = 10$ мин.

Программа 3.15. Интегральный косинус вещественного аргумента Ci (x). Интегрирование (3.28) методом Чебышева при $n = 6$ (программа 10.13), $x > 0$. Число частных интервалов N в составной формуле Чебышева (10.14) задается программой по формуле $N = [3 + x/3)$, где квадратные скобки означают округленне до ближайшего целого числа.

ИПС	3	÷	3	+	П2	КИП2	ИПС	ИП2	2
×	П2	÷	ПВ	0	ПД	КИП2	6	П0	КИП0
/—/	ПА	ИП2	+	ИПВ	×	2	÷	F1/x	F Bx
F sin	Fx²	×	ИПД	+	ПД	ИПА	Fx≥0	20	FL0
19	FL2	16	ИПС	F ln	ИП9	+	ИПД	ИПВ	×
3	÷	—	С/П						

Инструкция

1. Исходные данные: ($y_1 = 8{,}6624682 \cdot 10^{-1}$ = Р1, $y_2 = 4{,}2251865 \cdot 10^{-1}$ = Р3, $y_3 = 2{,}666354 \cdot 10^{-1}$ = Р5, $\gamma = 5{,}7721566 \cdot 10^{-1}$ = Р9, x = РС).
2. Пуск: В/О С/П.
3. Результат: РХ = Ci (x).
4. Регистры: рабочие Р1, Р3, Р5, Р9, РС; оперативные Р0, Р2, РВ, РА, РД; свободные Р4, Р6—Р8.
5. Погрешность абсолютная меньше $2 \cdot 10^{-7}$.
6. Время счета $t \approx [1{,}5 + x/4]$ мин.

Примеры.

Ci (0,1) = —1,7278684 (—1,7278684 [9]), $t = 1{,}5$ мин,

Ci (10) = —0,0454565 (—0,045456433 [9]), $t = 4$ мин;

Ci (40) = 0,0190199 (0,0190199998 [9]), $t = 12$ мин.

Программа 3.16. Интегральный гиперболический синус Shi (x) вещественного аргумента. Разложение в ряд (3.26) с использованием схемы Горнера. $0 \leqslant x \leqslant 230$.

ПС	Fx²	ПД	ИПС	4	+	П0	0	FBx	×
ИПД	×	ИП0	2	×	÷	FBx	1	—	F1/x
+	FL0	08	ИПС	×	С/П				

Инструкция

1. Исходные данные: [x = РХ].
2. Пуск: В/О С/П.
3. Результат: РХ = Shi (x), РС = x.
4. Регистры: рабочие РС; оперативные Р0, РД; свободные Р1— РВ.
5. Погрешность относительная $5 \cdot 10^{-7} < \delta < 2x \cdot 10^{-8}$.
6. Время счета $t \approx (0{,}5 + x/12)$ мин.

Примеры.

Shi (1) = 1,0572509, $t = 30$ с; Shi (10) = 1246,1139, $t = 1{,}5$ мин;

Shi (100) = $1{,}3577728 \cdot 10^{41}$, $t = 7$ мин.

Программа 3.17. Интегральный гиперболический косинус Chi (x) вещественного аргумента. Разложение в ряд (3.27) с использованием схемы Горнера, $0 \leqslant x \leqslant 230$.

ПС	Fx²	ПД	ИПС	5	+	П0	0	ИП0	2
×	П1	F1/x	+	FBx	×	ИПД	×	КИП1	F,
ИП1	÷	FL0	08	ИПС	Fln	+	ИПВ	+	С/П

Инструкция

1. Исходные данные: ($\gamma = 5{,}7721566 \cdot 10^{-1}$ = РВ), [x = РХ].
2. Пуск: В/О С/П.
3. Результат: РХ = Chi (x), РС = x.
4. Регистры: рабочие РВ, РС; оперативные Р0, РД; свободные Р1 — РА.
5. Погрешность относительная $5 \cdot 10^{-7} < \delta < 2x \cdot 10^{-8}$.
6. Время счета $t \approx (0{,}5 + x/12)$ мин.

Примеры.

Chi (1) = 0,83786694, t=30 с; Chi (10) = 1246,1144, $t = 1$ мин; Chi (200) = = $1{,}8156107 \cdot 10^{84}$, $t = 16$ мин.

Программа 3.18. Интегральный синус Si (z) и интегральный гиперболический синус Shi (z) комплексного аргумента $z = x \times jy$. Интегрирование (3.20а) с помощью квадратур Чебышева при $n = 6$. Значения Si(z) и Shi (z) вычисляются при раздельных пусках программы и различном вводе исходных данных (см. пп. 1, 3 инструкции). Число шагов интегрирования выбирается программой по формуле $2N = 2\,[|z|/5 + 3]$, где квадратные скобки означают округление до целого.

ИП6	Fx²	ИП7	Fx²	+	F√	5	÷	3	+
П2	КИП2	ИП2	2	×	П2	F1/x	П8	0	ПС
ПД	КИП2	6	П0	КИП0	/—/	ПА	ИП2	+	ИП8
×	ПВ	ИП6	×	П4	ИПВ	ИП7	×	ПВ	Fe^x
↑	F1/x	ПВ	+	2	÷	↑	ИПВ	—	ИП4
Fcos	×	XY	ИП4	Fsin	×	ИПА	ИП2	+	3
×	ПВ	÷	ИПС	+	ПС	XY	ИПВ	÷	ИПД
+	ПД	ИПА	Fx≥0	25	FL0	24	FL2	21	С/П

Инструкция

1. Исходные данные: ($y_1 = 8{,}6624682 \cdot 10^{-1}$ = P1, $y_2 = 4{,}2251865 \cdot 10^{-1}$ = P3, $y_3 = 2{,}666354 \cdot 10^{-1}$ = P5); ввод аргумента $z = x + jy$ различен для функций Si (z) и Shi (z) соответственно (x = P6, y = P7) и ($-y$ = P6, x = P7).
2. Пуск: В/О С/П.
3. Результат: PC = Re Si (z), РД = Im Si (z) или РД = ReShi (z), PC = — Im Shi (z).
4. Регистры: рабочие P1, P3, P5, P6, P7, PC, РД; оперативные P0, P2, P4, P8, PA, PB; свободные P9.
5. Погрешность относительная меньше $1 \cdot 10^{-5}$.
6. Время счета $t \approx (4 + 0{,}4/\ |z|)$ мин.

Примеры.

Si (3 — j4) = 6,747994+j3,4986618 (6,74799+j3,49866), $t \approx 7$ мин.

Значения в скобках найдены из табличных данных для E_1 (4 + j3) и E_1 (—4 + j3) [9] и далее по формуле (3.33).

Si (20+j0) = 1,5482416 (1,5482417), $t = 12$ мин.
Shi (20+j0) = 12807779 (12807823),

Значения в скобках получены по программам 3.14, 3.16 для функций вещественного аргумента с погрешностью, не превышающей соответственно $1 \cdot 10^{-6}$ и $5 \cdot 10^{-7}$.

Программа 3.19. Интегральный косинус Ci (z) и интегральный гиперболический косинус Chi (z) комплексного аргумента $z = x + jy$ (3.31б), $y > 0$ для Ci (z) и $x > 0$ для Chi (z). Интегрирование (3.21а) по формулам Чебышева при $n = 6$. Число шагов интегрирования выбирается программой по формуле $2N = 2[|z|/5 + 3]$, где квадратные скобки означают округление до целого.

ИП6	↑	Fx²	ИП7	Fx²	+	F√	ПА	÷	Farccos
ПД	ИПА	Fln	ИП9	+	ПС	ИПА	5	÷	3
+	П2	КИП2	ИП2	2	×	П2	F1/x	П8	КИП2
6	П0	КИП0	/—/	ПА	ИП2	+	ИП8	×	ПВ
ИП6	×	П4	ИПВ	ИП7	×	ПВ	Fe^x	F1/x	FBx
ПВ	+	2	÷	↑	ИПВ	—	ИП4	Fsin	×
XY	ИП4	Fcos	×	1	—	ИПА	ИП2	+	3
×	ПВ	÷	ИПС	+	ПС	XY	ИПВ	÷	ИПД
+	ПД	ИПА	Fx≥0	33	FL0	32	FL2	29	С/П

Значения Ci (z) и Chi (z) вычисляются при раздельных пусках программы и различном вводе исходных данных (пп. 1, 3 инструкции).

Инструкция

1. Исходные данные: ($y_1 = 8{,}6624682 \cdot 10^{-1}$ = P1, $y_2 = 4{,}2251865 \cdot 10^{-1}$ = P3, $y_3 = 2{,}666354 \cdot 10^{-1}$ = P5, $\gamma = 5{,}7721566 \cdot 10^{-1}$ = P9); ввод аргумента $z = x + jy$ различен для функций Ci (z) и Chi (z): (x = P6, y = P7) и ($-y$ = P6, x = P7) соответственно.
2. Пуск: В/О С/П.
3. Результат: для Ci (z) PC = Re Si (z), РД = Im Ci (z); для Chi (z) PC = Re Chi (z), РД = Im Chi (z) + $\pi/2$, т. е. Im Chi (z) = РД — $\pi/2$.
4. Регистры: рабочие P1, P3, P5 —P7, P9, PC РД; оперативные P0, P2, P4, P8, PA, PB; свободные — .
5. Погрешность относительная меньше:

$$1 \cdot 10^{-5} \text{ при } |z| \leqslant 5, \quad 1 \cdot 10^{-4} \text{ при } |z| \leqslant 20,$$
$$5 \cdot 10^{-5} \text{ при } |z| \leqslant 10, \quad 5 \cdot 10^{-4} \text{ при } |z| \leqslant 40.$$

6. Время счета $t \approx (4 + 0{,}4\ |z|)$ мин.

Примеры.

Ci (1+j3) = 3,9096723—j1,4839555, $t \approx 4{,}5$;

Ci (0,8+j) = 0,88863224+j0,48487663 (0,888632+j0,484876), $t = 4{,}5$ мин;

Chi (4—j3) = —3,4957553—j6,7467006 (—3,49575—j6,74666), $t = 6{,}5$ мин.

Значения в скобках получены по формулам (3.34) и (3.36) и табличным данным для E_1 (1 + j 08), E_1 (—1 + j 08), E_1 (4 + j3) и E_2 (—4 + j3) из [9].

Ci (40+j0) = 0,01902625 (0,0190199998 [9]), $t = 20$ мин;

Chi (40 + j0) = 3,0198058·10¹⁵ (3,0198565·10¹⁵), $t = 20$ мин. Значение в скобках получено по программе 3.17 с погрешностью, меньшей $1 \cdot 10^{-6}$.

Программа 3.20. Интегральный синус Si(x) и косинус Ci(x) вещественного аргумента. Представление функций через E_1 (jx) и разложение E_1 (jx) в непрерывную дробь — формулы (3.30), (3.11), (3.13), (3.14), $x \geqslant 0{,}5$; для малых x см. программы 3.12, 3.13. В программе задаются $N = 15$ и $A_N = 2 + j\,2$.

1	5	П0	2	П7	ПП	49	1	+	П7
XY	ПП	49	П7	XY	ИП6	+	FL0	05	П0
ИП6	Fcos	П7	×	XY	ПА	ИП6	Fsin	П9	×
+	П8	ИП7	ИПА	×	ИП9	ИП0	×	—	П7
1	ПП	51	/—/	XY	1	Farcsin	+	С/П	П8
ИП0	ПА	ИП8	/—/	↑	Fx²	ИП7	Fx²	+	ИПА
÷	÷	ИП7	FBx	÷	В/О				

Инструкция

1. Исходные данные : (x = P6).
2. Пуск: В/О С/П.
3. Результат: PX = Si (x). PY = Ci (x).
4. Регистры: рабочие P6; оперативные P0, P7 — PA; свободные P1 — P5, PB — РД.
5. Погрешность относительная для Si (x) и абсолютная для Ci (x):

	$x \geqslant$	0,5	1	3
$\delta <$	Si (x)	$5 \cdot 10^{-4}$	$3 \cdot 10^{-5}$	$1 \cdot 10^{-6}$
$\Delta <$	Ci (x)	$1 \cdot 10^{-5}$	$2 \cdot 10^{-7}$	$5 \cdot 10^{-8}$

6. Время счета $t \approx 4$ мин.

Примеры.

$\mathrm{Si}(0,5)=0,4929696$ (0,4931074), $\mathrm{Ci}(0,5)=-0,1777936$ (−0,17778408);

$\mathrm{Si}(3)=1,8486525$ (1,84865252), $\mathrm{Ci}(3)=0,11962975$ (0,119629786);

$\mathrm{Si}(100)=1,5622254$ (1,5622254), $\mathrm{Ci}(100)=-5,1488101\cdot10^{-3}$ $(-5,1488106\cdot10^{-3})$.

Указатель программ

Номер програм-мы	Функция	Область определения	Число шагов	Число регистров памяти	Примечание
3.1	$\mathrm{Ei}(x)$ $\mathrm{li}(x)$	$x>0$ $x>1$	29	5	Непосредственное суммирование степенного ряда; аргумент x вещественный
3.2	$\mathrm{Ei}(x)$ $\mathrm{li}(x)$	$x>0$ $x>1$	24	3	Суммирование степенного ряда по схеме Горнера
3.3	$E_1(x)$	$x\leqslant5$	24	3	То же
3.4	$E_n(x)$	$x\leqslant5$, $n=2,3,4,\ldots$	40	6	
3.5	$E_1(z)$	$\lvert z\rvert\leqslant30$ при $x\leqslant0$, $\lvert z\rvert\leqslant5$ при $x>0$	59	9	
3.6	$E_n(z)$	$\lvert z\rvert\leqslant30$ при $n\leqslant0$, $\lvert z\rvert\leqslant5$ при $x>0$, $n=2,3,4,\ldots$	97	13	Суммирование степенного ряда и рекуррентная формула
3.7	$E_n(x)$	$x\geqslant0,1$	38	4	Разложение в непрерывную дробь; аргумент x вещественный. Число N итераций вычисляется в программе
3.8	$E_n(x)$	$x\geqslant0,5$	25	4	Разложение в непрерывную дробь; число итераций фиксировано
3.9	$E_n(z)$	$y\geqslant0$	92	13	Разложение в непрерывную дробь, число N итераций вычисляется в программе
3.10	$E_n(z)$	$y\geqslant0$	74	11	Разложение в непрерывную дробь: число итераций задается таблицей
3.11	$E_n(z)$	$\lvert z\rvert\geqslant0,5$ при $x>0$, $y\geqslant1$ при $x<0$	98	14	Вычисление несобственного интеграла
3.12	$\mathrm{Si}(x)$	$0\leqslant x\leqslant20$	24	3	Аргумент x вещественный
3.13	$\mathrm{Ci}(x)$	$0<x\leqslant10$	27	4	То же

Окончание

Номер программы	Функция	Область определения	Число шагов	Число регистров памяти	Примечание
3.14	$\mathrm{Si}(x)$	$x>0$	45	9	Аргумент x вещественный. Интегрирование методом Чебышева
3.15	$\mathrm{Ci}(x)$	$x>0$	54	10	То же
3.16	$\mathrm{Shi}(x)$	$0\leqslant x\leqslant230$	26	3	Аргумент x вещественный. Суммирование степенного ряда
3.17	$\mathrm{Chi}(x)$	$0\leqslant x\leqslant230$	30	4	
3.18	$\mathrm{Si}(z)$ или $\mathrm{Shi}(z)$	∞	80	13	Интегрирование методом Чебышева
3.19	$\mathrm{Ci}(z)$ или $\mathrm{Chi}(z)$	$y>0$ для $\mathrm{Ci}(z)$, $x>0$ для $\mathrm{Chi}(z)$	90	14	То же
3.20	$\mathrm{Si}(x)$, $\mathrm{Ci}(x)$	$x\geqslant0,5$	66	6	Разложение в непрерывную дробь

Глава 4

Интеграл вероятности вещественного и комплексного аргументов и родственные ему функции

4.1. Интеграл вероятности и его производная. Дополнительный интеграл вероятности. Кратные интегралы вероятности. Интеграл Досона

Интеграл вероятности определяется [6—9] как

$$\operatorname{erf} z=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^z e^{-t^2}\,dt. \qquad (4.1)$$

Дополнительный интеграл вероятности

$$\operatorname{erfc} z=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_z^\infty e^{-t^2}\,dt=1-\operatorname{erf} z. \qquad (4.2)$$

В теории вероятностей под интегралом вероятности обычно [7,8] понимают функцию вещественного аргумента

$$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^x e^{-t^2/2}\,dt. \qquad (4.3)$$

В этом случае erf x из (4.1) называют *функцией ошибок* [8]. Функция $\Phi(x)$ имеет смысл вероятности события $\{X \leqslant x\}$, где X — случайная величина, нормально распределенная с единичной дисперсией σ и нулевым математическим ожиданием m. При произвольных m и σ

$$\Phi_{m,\sigma}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} \exp\left[-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}\right] dt. \qquad (4.4а)$$

Соответствующая *плотность вероятности*

$$p_{m,\sigma}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right]. \qquad (4.4б)$$

Легко видеть, что

$$\Phi_{m,\sigma}(x) = \frac{1}{2}\left[\operatorname{erf}\left(\frac{x-m}{\sigma\sqrt{2}}\right)+1\right]. \qquad (4.5)$$

Кратные интегралы вероятности

$$i^n \operatorname{erfc} z = \int_z^{\infty} i^{n-1} \operatorname{erfc} t\, dt, \quad n=0, 1, 2, \ldots. \qquad (4.6)$$

Здесь принимается

$$i^0 \operatorname{erfc} z = \operatorname{erfc} z, \quad i^{-1} \operatorname{erfc} z = 2e^{-z^2}/\sqrt{\pi}. \qquad (4.7)$$

Для $i^n\operatorname{erfc} z$ справедливы рекуррентные формулы

$$i^n \operatorname{erfc} z = -\frac{z}{n}\, i^{n-1} \operatorname{erfc} z + \frac{1}{2n}\, i^{n-2} \operatorname{erfc} z, \quad n=1, 2, 3, \ldots. \qquad (4.8)$$

Интеграл Досона [5, 9]

$$F(x) = e^{-x^2}\int_0^x e^{t^2}\, dt = e^{-x^2} \operatorname{Erfi} x. \qquad (4.9)$$

$F(x)$ и erf x связаны соотношением

$$F(x) = (-i\sqrt{\pi}/2)\, e^{-x^2} \operatorname{erf}(jx). \qquad (4.10)$$

Функции комплексного переменного erf z, erfc z являются целыми. Для них известны следующие представления в виде *рядов и асимптотическое разложение*:

$$\operatorname{erf} z = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{n!\,(2n+1)}; \qquad (4.11)$$

$$\operatorname{erf} z = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\, e^{-z^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n z^{2n+1}}{(2n+1)!!}; \qquad (4.12)$$

$$\operatorname{erfc} z \approx \frac{e^{-z^2}}{z\sqrt{\pi}}\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n-1)!!}{(2z^2)^n}\right], \quad |\arg z| < \frac{3\pi}{4}. \qquad (4.13)$$

Экономичные алгоритмы вычисления рядов основываются на схеме Горнера, особенно выгодной при комплексном аргументе функций. Перепишем (4.11)—(4.13), используя схему Горнера:

$$\operatorname{erf} z \approx \frac{2z}{\sqrt{\pi}}\left[\left[\ldots\left[\left(\frac{-z^2}{N(2N+1)}+\frac{1}{2N-1}\right)\frac{(-z^2)}{N-1}+\frac{1}{2N-3}\right]\frac{(-z^2)}{N-2}+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\ldots+\frac{1}{3}\right]\frac{(-z^2)}{1}+1\right]; \qquad (4.14)$$

$$\operatorname{erf} z \approx \frac{2z}{\sqrt{\pi}}\, e^{-z^2}\left[\left[\ldots\left[\left(\frac{2z^2}{2N+1}+1\right)\frac{2z^2}{2N-1}+1\right]\frac{2z^2}{2N-3}+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\ldots+1\right]\frac{2z^2}{3}+1\right]; \qquad (4.15)$$

$$\operatorname{erfc} z \approx \frac{e^{-z^2}}{z\sqrt{\pi}}\left[\left[\ldots\left[\left(\frac{2N-1}{-2z^2}+1\right)\times\right.\right.\right.$$
$$\left.\left.\left.\times\frac{(2N-3)}{(-2z^2)}+1\right]\frac{(2N-5)}{(-2z^2)}+\ldots+1\right]\frac{1}{(-2z^2)}+1\right]. \qquad (4.16)$$

В вещественной области ($z = x$) целесообразно применять из разложений в ряд erf z формулу (4.12) или соответственно (4.15). Этот ряд в отличие от (4.11) не является знакочередующимся при любом знаке x. Аналогичным свойством обладает разложение в ряд интеграла Досона (4.9) [5]

$$F(x) = e^{-x^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{n!\,(2n+1)}, \qquad (4.17)$$

для которого схема Горнера имеет вид

$$F(x) = xe^{-x^2}\left[\left[\ldots\left[\left(\frac{x^2}{N(2N+1)}+\frac{1}{2N-1}\right)\times\right.\right.\right.$$
$$\left.\left.\left.\times\frac{x^2}{N-1}+\frac{1}{2N-3}\right]\frac{x^2}{N-2}+\ldots+\frac{1}{3}\right]\frac{x^2}{1}+1\right]. \qquad (4.18а)$$

Напомним, что при использовании схемы Горнера для суммирования бесконечных рядов требуется задавать заранее (в отличие от прямого суммирования) число учитываемых членов ряда N. Естественно, что предпочтение следует отдавать минимальному N, которое в каждом конкретном случае по-разному зависит от допустимой погрешности результата и аргумента z. Сравнение (4.17) и (3.5) (интегральная показательная функция) позволяет использовать оценку погрешности округления (3.6б) и числа членов ряда (3.6б). Применительно к (4.17), (4.18) получаем следующие ориентировочные значения:

$$\delta \approx 2x^2\cdot 10^{-8}, \quad x \gg 1; \qquad (4.18б)$$
$$N \approx 12+2x^2. \qquad (4.18в)$$

Эффективный алгоритм вычисления erfc z и erf z основан на *разложении* erfc z *в непрерывную дробь* (см., например, [9]):

$$\operatorname{erfc} z = \cfrac{e^{-z^2}/\sqrt{\pi}}{z+\cfrac{1/2}{z+\cfrac{1}{z+\cfrac{3/2}{z+\ldots}}}}, \quad \operatorname{Re} z > 0. \qquad (4.19)$$

Используем для расчетов по (4.19) процедуру, описанную в гл. 2,3 (ср. формулы (2.25)—(2.47) и (3.13,) (3.14)). Обозначим через A_N N-й остаток непрерывной дроби (4.19):

$$A_N(z) = +\cfrac{N/2}{z+\cfrac{(N+1)/2}{z+\cfrac{(N+2)/2}{z+\ldots}}}. \qquad (4.20)$$

Из (4.20) следует рекуррентная формула

$$A_N = z + N/2A_{N+1}. \qquad (4.21)$$

Применяя (4.20) последовательно в направлении уменьшения N, получаем A_1 и искомую функцию

$$\operatorname{erfc} z = e^{-z^2}/(A_1\sqrt{\pi}). \qquad (4.22)$$

Результат этой итерационной процедуры, как и в предыдущих случаях, слабо зависит от A_N при достаточно больших N. Для вещественного аргумента ориентировочно можно принять

$$N \approx 6 + (5/x)^2; \quad A_N \approx 5 \qquad (4.23а)$$

(в этом случае прн $x > 0{,}25$ относительная погрешность erfc x не превышает $1\cdot 10^{-6}$). Для комплексных z

$$N \approx 20 + 25/|z|^2. \qquad (4.23б)$$

Желательно также уточнить A_N. Применяя способ оценки A_N, использованный при выводе (2.46б), получаем из (4.21), при $N \gg z^2/2$

$$A_N \approx z/2 + \sqrt{N/2}. \qquad (4.23в)$$

Эта формула достаточно проста и легко может быть включена в программу. Вычисления показывают, что ее учет существенно ускоряет сходимость итерационного процесса, особенно при малых Re z, т. е. у границы области, где применимо разложение в непрерывную дробь (4.19).

Разложение (4.13) неприменимо вследствие ограннчения $|\arg z| < 3\pi/4$ в окрестности отрицательной полуоси и тем более при вещественных отрицательных $z = x$. Это относится и к (4.19) (Re $z > 0$). Здесь полезны следующие соотношения симметрии:

$$\operatorname{erf}(-z) = -\operatorname{erf} z; \qquad (4.24)$$

$$\operatorname{erf}\bar{z} = \overline{\operatorname{erf} z}; \qquad (4.25)$$

$$\operatorname{erfc}(-z) = 2 - \operatorname{erfc} z; \qquad (4.26)$$

$$\operatorname{erfc}\bar{z} = \overline{\operatorname{erfc} z}. \qquad (4.27)$$

Методы разложения в ряд и в непрерывную дробь при вещественных $z = x$ дополняют друг друга. Первый из указанных методов практически неприменим для расчета erfc x при $x > 3$ из-за погрешностей округления, а также увеличения требуемого числа членов ряда и времени счета. Метод разложения в непрерывную дробь непригоден для малых x (примерно начиная с $x = 0{,}3$) также из-за погрешностей округления и увеличения времени счета (ср. (4.22)). В связи с этим представляет интерес комбинированная программа, в которой до определенного значения $x = x_1$ счет производится по формуле (4.15), а при $x > x_1$ — по формулам разложения в непрерывную дробь (4.21), (4.22). Величина x_1, а также числа N членов ряда в (4.15) и итераций в (4.21) выбираются такие, чтобы обеспечить одинаковую точность и время счета. Баланс достигается при времени счета и относительной погрешности, меньших 1 мин и $5\cdot 10^{-7}$ во всей области $x > 0$ (граничное значение $x_1 \approx 1{,}4$, число членов ряда 11 и число итераций 14).

Аналогичная методика используется в программе вычисления функции $\Phi_{m,\sigma}(x)$ из (4.4а), хотя здесь для включения области $x < \sigma$ требуется увеличить число членов ряда и соответственно время счета (см. программу 4.4).

Ситуация существенно усложняется при комплексных z. В частности, разложение erf z (4.11) при $|z| > 2$ неприемлемо в окрестности вещественной оси, а (4.12) — в окрестности мнимой оси (практически, когда $|\arg z|$ переходит через $\pi/4$). В этих случаях ряды в «возрастающей» степени становятся знакочередующимися и влияние погрешностей округления сильно возрастает. Разложение в непрерывную дробь (4.19) не требует чрезмерного времени счета начиная примерно с $|z| = 1{,}8$, но при Re $z > 0{,}5$, так как в окрестности мнимой оси (т. е. у границы области применимости (4.19)) погрешности округления возрастают. Лишь при с $|z| = 4$ разложение (4.19) применимо для любых Re$z > 0$ с точностью не хуже $2\cdot 10^{-6}$ (относительная погрешность). Асимптотическое разложение (4.13) дает хорошие результаты начиная с $|z|=4$. Отметим, что здесь погрешности округления минимальны на мнимой оси, где члены ряда имеют одинаковый знак. Программа, основанная на асимптотическом разложении, требует минимальное время счета (около 2 мин).

Таким образом, *чтобы охватить всю плоскость, нужны практически все четыре формулы (4.11)—(4.13),(4.19)*. На рис. 4.1 показано разбиение первого квадранта на области, в каждой из которых указаны программы, дающие наилучшие (по точности и времени счета) или равноценные результаты. Здесь I — программа 4.7, основанная на формулах (4.12), (4.15); II — программа 4.8, использующая ряд (4.11) (схему Горнера (4.14)); III — программа 4.9 (разложение в непрерывную дробь (4.19)); IV — программа 4.10 (асимптотическое разложение (4.13) и схема Горнера (4.16)). Штриховая линия — граница области, где пригодна программа III; точки — граница для программы I, крестики — для программы II; непрерывная линия — граница области для программы IV.

Отметим, что указанные программы применимы без изменений в области $y < 0$ ($-\pi \leqslant \arg z \leqslant 0$). Разбиение этой области на участки, где должны использоваться разные программы I—IV, симметрично со схемой на рис. 4.1 относительно оси $x = 0$. Значения функций при $|\arg z| > \pi/2$ легко находятся по формулам симметрии (4.24) — (4.27).

Программа 4.1. Интеграл вероятности erf x, производная интеграла вероятности $(\operatorname{erf} x)' = 2\exp(-x^2)/\sqrt{\pi}$ вещественного аргумента. Разложение в ряд (4.12), (4.15). Для erf x $|x| \leqslant 3{,}5$ (при $|x| > 3{,}5$ $|\operatorname{erf} x| = 1$ с погрешностью, меньшей $5\cdot 10^{-7}$).

7	0	П0	ИПС	Fx²	2	×	ПД	/—/	Fe^x
1	Farctg	÷	F√	ПВ	ИПС	×	1	ИП0	1
+	÷	ИПД	×	1	+	FL0	28	FL0	18
×	С/П								

Инструкция

1. Исходные данные: (x = РС).
2. Пуск: В/О С/П.
3. Результат: РХ = erf x, РВ = (erf x)′.
4. Регистры: рабочие РВ, РС; оперативные Р0, РД; свободные Р1 — РА.
5. Погрешность относительная erf x и (erf x)′ меньше $5\cdot 10^{-7}$.
6. Время счета $t \approx 2$ мин.

Примеры.

$\mathrm{erf}\,1{,}5 = 0{,}9661051$ $(0{,}966105146$ [9]$)$, $(\mathrm{erf}\,1{,}5)' = 0{,}11893029$ $(0{,}118930289$ [9]$)$;

$\mathrm{erf}\,(-3) = -0{,}99997774$ $(-0{,}9999779$ [9]$)$, $[\mathrm{erf}\,(-3)]' = 1{,}3925306\cdot10^{-4}$ $(1{,}3925305\cdot10^{-4}$ [9]$)$.

Программа 4.2. Дополнительный интеграл вероятности $\mathrm{erfc}\,x$, интеграл вероятности $\mathrm{erf}\,x$ вещественного аргумента. Разложение в непрерывную дробь (4.19) — (4.23) при $x > 0$; при $x < 0$ формулы симметрии (4.24), (4.26).

5	ИПС	÷	Fx²	6	+	П0	5	F1/x	ИП0
×	2	÷	ИПС	+	FL0	08	ИПС	Fx²	Fe^x
×	Fπ	F√	×	F1/x	ПД	/—/	1	+	С/П

Инструкция
1. Исходные данные: (x = РС).
2. Пуск: В/О С/П.
3. Результат: РХ = $\mathrm{erf}\,x$, РД = $\mathrm{erfc}\,x$.

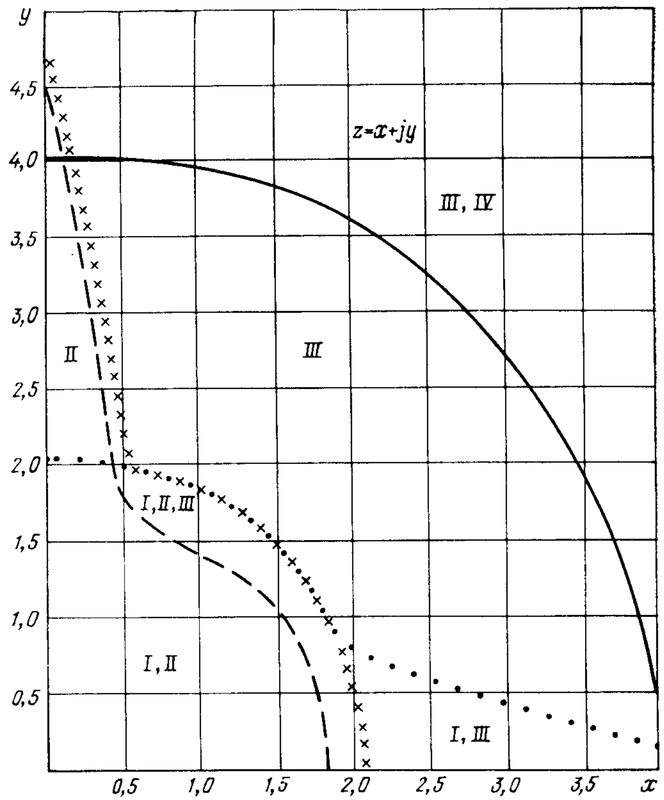

Рис. 4.1. Рабочие области четырех формул (4.11), (4.12), (4.13), (4.19) и основанных на них программ вычисления интегралов вероятности

4. Регистры: рабочие РС, РД; оперативные Р0; свободные Р1 — РВ.
5. Погрешность относительная меньше $5\cdot10^{-7}$ при $x > 0{,}3$.
6. Время счета $t \approx (0{,}3 + 1/x^2)$ мин. Согласно этой формуле, которая связана с числом N итераций, задаваемых в программе по формуле (4.23), время счета меньше 1 мин для всех $x > 1{,}2$. При $x < 1$ время счета быстро возрастает и уже при $x = 0{,}3$ превышает 10 мин. Очевидно, что для малых x предпочтительна программа 4.1, основанная на разложении $\mathrm{erf}x$ в ряд. Представляет интерес комбинированная программа 4.3, в которой при малых x используется разложение в ряд, а при больших разложение в непрерывную дробь. Отметим, что для $\mathrm{erf}\,x$ существенна только область $|x| < 4$, вне которой $\mathrm{erf}\,x$ в пределах точности ПМК не отличается от ± 1.

Примеры.

$\mathrm{erfc}\,10 = 2{,}0884864\cdot10^{-45}$ $(2{,}0884863\cdot10^{-45}$ [9]$)$, $t = 20$ с, $\mathrm{erf}\,10 = 1$;

$\mathrm{erfc}\,2 = 4{,}6777349\cdot10^{-3}$ $(4{,}6777358\cdot10^{-3}$ [9]$)$, $t = 30$ с,

$\mathrm{erf}\,2 = 0{,}9953223$ $(0{,}99532227$ [9]$)$;

$\mathrm{erfc}\,0{,}5 = 0{,}47950035$, $t = 4$ мин, $\mathrm{erf}\,0{,}5 = 0{,}5204997$ $(0{,}520499878$ [9]$)$.

Программа 4.3. Интеграл вероятности $\mathrm{erf}\,x$, дополнительный интеграл вероятности $\mathrm{erfc}\,x$, производная интеграла вероятности $(\mathrm{erf}\,x)' = 2\exp(-x^2)/\sqrt{\pi}$ вещественного аргумента $x \geqslant 0$. Разложение в ряд при $x < \ln 4$ (4.12), (4.15) и разложение в непрерывную дробь при $x \geqslant \ln 4$ (4.19) — (4.22), при $x < 0$ используются (4.24), (4.26).

ПС	Fx²	2	×	ПД	/—/	Fe^x	1	Farctg	÷
F√	ПВ	ИПС	4	Fln	—	Fx≥0	41	1	4
П0	5	F1/x	ИП0	×	2	÷	ИПС	+	FL0
22	F1/x	2	÷	ИПВ	×	ПА	/—/	1	+
С/П	2	2	П0	ИПВ	ИПС	×	1	ИП0	1
+	÷	ИПД	×	1	+	FL0	58	FL0	48
×	1	XY	—	ПА	FBx	С/П			

Инструкция
1. Исходные данные: x = РХ.
2. Пуск: В/О С/П.
3. Результат: РХ = $\mathrm{erf}\,x$, РА = $\mathrm{erfc}\,x$, РВ = $(\mathrm{erf}\,x)'$.
4. Регистры: рабочие РА, РВ; оперативные Р0, РС, РД; свободные Р1 — Р9.
5. Погрешность относительная при любых $x \geqslant 0$ меньше $5\cdot10^{-7}$.
6. Время счета $t \approx 50$ с.

Примеры.

$\mathrm{erf}\,0{,}25 = 0{,}27632637$ $(0{,}27632639$ [9]$)$, $\mathrm{erfc}\,0{,}25 = 0{,}7236736$, $(\mathrm{erf}\,0{,}25)' = 1{,}0600141$ $(1{,}06001413$ [9]$)$;

$\mathrm{erf}\,1{,}8 = 0{,}9890905$ $(0{,}989090502$ [9]$)$, $\mathrm{erfc}\,1{,}8 = 0{,}010909497$, $(\mathrm{erf}\,1{,}8)' = 0{,}044191724$ $(0{,}0441917233$ [9]$)$;

$\mathrm{erf}\,10 = 1$, $\mathrm{erfc}\,10 = 2{,}0884864\cdot10^{-45}$ $(2{,}0884863\cdot10^{-45}$ [9]$)$, $(\mathrm{erf}\,10)' = 4{,}1976539\cdot10^{-44}$ $(4{,}1976562\cdot10^{-44}$ [9]$)$.

Программа 4.4. Интеграл вероятности $\Phi_{m,\sigma}(x)$ и плотность вероятности $p_{m,\sigma}(x)$ как функции вещественного аргумента x, математического ожидания m и дисперсии σ (4.4). Разложение в ряд и в непрерывную дробь, $-9\cdot10^{99} \leqslant x \leqslant 9\cdot10^{99}$.

ИП8	ИПА	—	ИП9	÷	ПС	Fx²	ПД	/—/	Feˣ
Fπ	÷	2	÷	F√	ИП9	÷	ПВ	ИПС	7
Fln	+	Fx⩾0	57	ИПС	5	—	Fx<0	55	7
0	П0	ИПВ	ИПС	×	ИП9	×	1	ИП0	1
+	÷	ИПД	×	1	+	FL0	48	FL0	38
×	2	F1/x	+	С/П	1	С/П	1	4	П0
ИПД	2	÷	F√	ПС	5	F1/x	ИП0	×	2
÷	ИПС	+	FL0	66	F1/x	ИПВ	×	2	F√
÷	ИП9	×	С/П						

Структура программы
00—17: вычисление $p_{m,\sigma}(x)$,
18—54: вычисление $\Phi_{m,\sigma}(x)$ в области $-\ln 7 \leqslant (x-m)/\sigma < 5$ из разложения в ряд ((4.5), (4.15) при $N=70$),
57—83: вычисление Φ_m, $\sigma(x)$ в области $(x-m)/\sigma < -\ln 7$ из разложения в непрерывную дробь ((4.21), (4.22) при $N = 14$ и $A_N = 5$). При этом используется соотношение $2\Phi_{m,\sigma}(x) = \mathrm{erfc}\,[(m-x)/(\sigma\sqrt{2})]$, которое согласно (4.5), (4.24), (4.2) имеет место при $(x-m) < 0$.

В программе полагается $\Phi_{m,\sigma}(x) = 1$ при $(x-m)/\sigma \geqslant 5$ (адреса команд 24—28, 55, 56).

Инструкция

1. Исходные данные: (x = Р8, σ = Р9, m = РА).
2. Пуск: В/О С/П.
3. Результат: РХ = $\Phi_{m,\sigma}(x)$, РВ = $p_{m,\sigma}(x)$.
4. Регистры: рабочие Р8 — РВ; оперативные Р0, РС, РД; свободные Р1 — Р7.
5. Погрешность относительная меньше $5\cdot10^{-7}$.
6. Время счета: $t \approx 1$ мин при $(x-m)/\sigma < -\ln 7 \approx -2$, $t \approx 2$ мин при $(x-m)/\sigma > -\ln 7$, $t \approx 15$ с при $(x-m)/\sigma > 5$.

Примеры.

$\Phi_{6,2}(1{,}0502526) = 6{,}6641644\cdot10^{-3}$ $(6{,}6641645\cdot10^{-3})$, $t = 1$ мин,

$p_{6,2}(1{,}0502526) = 9{,}32939\cdot10^{-3}$ $(9{,}3293901\cdot10^{-3})$,

$\Phi_{6,2}(8{,}8284271) = 0{,}92135034$ $(0{,}9213504)$, $t = 2$ мин,

$p_{6,2}(8{,}8284271) = 7{,}3381335\cdot10^{-2}$ $(7{,}3381332\cdot10^{-2})$.

Числа в скобках найдены из табличных значений erf x в [9].

Программа 4.5. Кратные интегралы вероятности $i^n\,\mathrm{erfc}\,x$ вещественного аргумента, интеграл вероятности erf x, дополнительный интеграл вероятности erfc x, производная интеграла вероятности $(\mathrm{erf}\,x)' = 2\exp(-x^2)/\sqrt{\pi}$, $n = 1, 2, \ldots, x \geqslant 0$.

ИПС	Fx²	2	×	ПД	/—/	Feˣ	1	Farctg	÷
F√	ПВ	ИПС	1	—	Fx⩾0	42	3	0	П0
5	F1/x	ИП0	×	2	÷	ИПС	+	FL0	21
F1/x	2	÷	ИПВ	×	ПА	/—/	1	+	П9
БП	67	2	2	П0	ИПВ	ИПС	×	1	ИП0
1	+	÷	ИПД	×	1	+	FL0	59	FL0
49	×	П9	1	XY	—	ПА	0	П6	ИП7
П0	ИПА	ПД	ИПВ	П8	КИП6	ИП8	2	÷	ИПД
П8	ИПС	×	—	ИП6	÷	ПД	FL0	75	С/П
БП	75								

Структура программы
00—11: вычисление $(\mathrm{erf}\,x)'$,
17—39: вычисление erfc x и erf x в области $x \geqslant 1$ разложением в непрерывную дробь ((4.21), (4.22) при $N = 30$, $A_N = 5$),
42—66: вычисление erf x и erfc x в области $x < 1$ разложением в ряд ((4.15) (4.2) при $N = 22$),
67—89: вычисление $i^n\,\mathrm{erfc}\,x$ по рекуррентной формуле (4.8).

Инструкция

1. Исходные данные: (x = РС, n = Р7).
2. Пуск: основной В/О С/П; дополнительные пуски С/П, применяются при необходимости получения следующих по порядку интегралов $i^{n+1}\,\mathrm{erfc}\,x$, $i^{n+2}\,\mathrm{erfc}\,x, \ldots$ при том же значении аргумента. В паузе перед дополнительными пусками нельзя нажимать клавишу ПП и любую из клавиш ШГ, а также менять содержимое регистров Р0, Р6, Р8, РС, РД.
3. Результат: после основного пуска РХ = РД = $i^n\,\mathrm{erfc}\,x$, Р8 = $i^{n-1} \times \mathrm{erfc}\,x$, Р9 = erf x, РА = erfc x, РВ = $(\mathrm{erf}\,x)'$, Р6 = n (порядок кратности интеграла $i^n\,\mathrm{erfc}\,x$, значение которого находится в РД); после k-го дополнительного пуска РХ = РД = $i^{n+k}\,\mathrm{erfc}\,x$, Р8 = $i^{n+k-1}\,\mathrm{erfc}\,x$, Р6 = $n+k$. Содержимое регистров Р9, РА, РВ не изменяется при дополнительных пусках.
4. Регистры: рабочие Р0, Р6 — РД; оперативные — ; свободные Р1 — Р5.
5. Погрешность $i^n\,\mathrm{erfc}\,x$ определяется исключительно ошибками округления при использовании рекуррентной формулы (4.8), которая неустойчива при изменении n в сторону увеличения. Неустойчивость усиливается с увеличением x в области $x > 1$. Таким образом, погрешность существенно нарастает при увеличении x и n. Сопоставление результатов вычислений с табличными данными (см., например, [9]) показывает, что рассматриваемый алгоритм все же применим в области $x \leqslant 5$, $n \leqslant 11$. Для оценки относительной погрешности $i^n\,\mathrm{erfc}\,x$ при $nx \gg 1$ можно использовать следующую формулу: $\delta \approx 1\cdot10^{-k}$, где $k \approx [11 + 30/nx]$, квадратная скобка означает округление до ближайшего целого.
6. Время счета для основного пуска при любых n и x из указанной в предыдущем пункте области (см. примеры) 1—3 мин; при дополнительном пуске 6 с.

Примеры.

erf $0{,}9 = 0{,}79690822$ $(0{,}796908212)$,

erfc $0{,}9 = 0{,}2030918$ $(0{,}2030918)$ $(\mathrm{erf}\,0{,}9)' = 0{,}5019686$ $(0{,}50196857)$;

$i^5\,\mathrm{erfc}\,0{,}9 = 2{,}9874208\cdot10^{-4}$ $(2{,}9874214\cdot10^{-4})$, $t = 1{,}5$ мин;

$i^{11}\,\mathrm{erfc}\,0{,}9 = 1{,}4571469\cdot10^{-8}$ $(1{,}4571607\cdot10^{-8})$, $t = 2$ мин;

erf $2{,}5 = 0{,}9995931$ $(0{,}9995931)$, erfc $2{,}5 = 4{,}0695198\cdot10^{-4}$ $(4{,}0695203\cdot10^{-4})$,

$(\mathrm{erf}\,2{,}5)' = 2{,}1782841\cdot10^{-3}$ $(2{,}1782842\cdot10^{-3})$;

$i^4\,\mathrm{erfc}\,2{,}5 = 2{,}9771545\cdot10^{-7}$ $(2{,}98765625\cdot10^{-7})$, $t = 2$ мин;

$i^{10}\,\mathrm{erfc}\,2{,}5 = 2{,}711015\cdot10^{-12}$ $(2{,}045874\cdot10^{-12})$ $t = 2{,}5$ мин;

$(\mathrm{erf}\,5{,}0)' = 1{,}5670865\cdot10^{-11}$ $(1{,}5670866\cdot10^{-11})$,

$\mathrm{erfc}\,5{,}0 = 1{,}5374596\cdot10^{-12}$ $(1{,}5374596\cdot10^{-12})$;

$i^2\,\mathrm{erfc}\,5{,}0 = 1{,}402865\cdot10^{-14}$ $(1{,}4029225\cdot10^{-14})$;

$i^4\,\mathrm{erfc}\,5{,}0 = 1{,}1858125\cdot10^{-16}$ $(1{,}198725\cdot10^{-16})$, $t = 2$ мин.

Числа в скобках относятся к табличным данным из [9].

Программа 4.6. Интеграл Досона $F(x)$ (4.9). Разложение в ряд (4.17) по схеме Горнера (4.18а) и формула (4.18в).

ПС	Fx²	ПД	2	×	1	2	÷	П0	ИПС
ИПД	Feˣ	÷	0	ИПД	×	ИП0	÷	ИП0	2
×	1	—	F1/x	+	FL0	14	×	С/П	

Инструкция
1. Исходные данные: $[x = \mathrm{PX}$
2. Пуск: В/О С/П.
3. Результат: $\mathrm{PX} = F(x)$, $\mathrm{PC} = x$.
4. Регистры: рабочие PC; оперативные Р0, РД; свободные Р1 — РВ.
5. Погрешность относительная (ср. (4.18б)) $\delta \approx 2x^2\cdot10^{-8}$, $x \gg 1$.
6. Время счета $t \approx (0{,}7+x^2/7)$ мин.

Примеры.
$F(1) = 0{,}53807948$ (0,5380795 [9]), $t = 50$ с;
$F(2{,}5) = 0{,}22308372$ (0,22308372 [9]), $t = 5$ мин;
$F(10) = 0{,}050253732$ (0,0502538471 [9]), $t = 15$ мин.

Программа 4.7. Интеграл вероятности erf$z$, производная интеграла вероятности $(\mathrm{erf}\,z)'$ комплексного аргумента $z = x + jy$. Разложение в ряд (4.12) по схеме Горнера (4.15), $|z| \leqslant 3$ для erf z.

ИП7	ПВ	ИП6	ПА	ПП	73	ПА	/—/	1	Farctg
F√‾	Fln	—	Feˣ	XY	ПВ	/—/	Fsin	XY	×
П9	FBx	ИПВ	Fcos	×	П8	1	2	ИП6	Fx²
ИП7	Fx²	+	2	×	+	П0	0	Fπ	ИП0
2	×	1	+	2	÷	ПД	÷	XY	ИПД
÷	XY	ПП	73	1	+	FL0	39	ПА	XY
ПВ	ИП7	ИП6	ПП	73	ПА	XY	ПВ	ИП9	ИП8
ПП	73	С/П	ПС	ИПВ	×	XY	ПД	ИПА	×
+	ИПС	ИПА	×	ИПД	ИПВ	×	—	В/О	

Структура программы

00 — 25: вычисление $(\mathrm{erf}\,z)' = (2/\sqrt{\pi})e^{-z^2}$,

26 — 60: вычисление суммы $\frac{1}{z}\sum_n$ в (4.12) по схеме Горнера (выражение в квадратных скобках (4.15)) и занесение результата в РА, РВ,

61 — 72: окончательный расчет erf z умножением суммы на z и на $(\mathrm{erf}\;z)'$,

73 — 88: подпрограмма перемножения комплексных чисел.

Инструкция
1. Исходные данные: (x = Р6, y = Р7).
2. Пуск: В/О С/П. Для получения только $(\mathrm{erf}\;z)'$ можно остановить счет примерно через 30 с после пуска.

3. Результат: $\mathrm{PX} = \mathrm{Re\,erf}\;z$, $\mathrm{PY} = \mathrm{Im\,erf}\;z$, $\mathrm{P8} = \mathrm{Re}\;(\mathrm{erf}\;z)'$, $\mathrm{P9} = \mathrm{Im}\;(\mathrm{erf}\,z)'$.
4. Регистры: рабочие Р6 — Р9; оперативные Р0, РА — РД; свободные Р1 — Р5.
5. Погрешность относительная erf z меньше:

$1\cdot10^{-3}$ при $|z| \leqslant 3$, $|\arg z| \leqslant \pi$;

$4\cdot10^{-4}$ при $|z| \leqslant 3$, $|\arg z| \leqslant \pi/4$;

$2\cdot10^{-6}$ при $|z| \leqslant 2$, $|\arg z| \leqslant \pi$.

Относительная погрешность $(\mathrm{erf}\,z)'$ при произвольных z не превышает $5\cdot10^{-7}$.

6. Время счета $t = (3 + |z|^2/3)$ мин.

Примеры.

$\mathrm{erf}\,(0{,}1 + j0{,}8) = 0{,}21237732 + j1{,}1216728$ $(0{,}212377 + j1{,}12167)$;

$[\mathrm{erf}\,(0{,}1 + j0{,}8)]' = 2{,}0915958 - j0{,}33754058$;

$\mathrm{erf}\,(2{,}1 - j2{,}1) = 1{,}1874921 + j2{,}37166\cdot10^{-2}$ $(1{,}18709 + j2{,}36668\cdot10^{-2})$, $t = 4$ мин;

$[\mathrm{erf}\,(2{,}1 - j\,2{,}1)]' = -0{,}92823684 + j0{,}64157307$.

Числа в скобках взяты из таблиц интеграла вероятности комплексного аргумента в [9].

Программа 4.8. Интеграл вероятности erf z, производная интеграла вероятности $(\mathrm{erf}\,z)'$ комплексного аргумента $z = x + jy$. Разложение в ряд (4.11) по схеме Горнера (4.14), $|z| \leqslant 3$.

ИП7	ПВ	ИП6	ПА	ПП	69	/—/	ПА	1	Farctg
F√‾	П5	Fln	—	Feˣ	XY	/—/	ПВ	Fsin	XY
×	П9	FBx	ИПВ	Fcos	×	П8	1	2	ИП6
Fx²	ИП7	Fx²	+	2	×	+	П0	0	Fπ
ИП0	÷	XY	ИП0	÷	XY	ПП	69	ИП0	2
×	1	—	F1/x	+	FL0	40	ПА	XY	ПВ
ИП7	ИП5	÷	ИП6	ИП5	÷	ПП	69	С/П	ПС
ИПВ	×	XY	ПД	ИПА	×	+	ИПС	ИПА	×
ИПД	ИПВ	×	—	В/О					

Структура программы

00—25: вычисление $(\mathrm{erf}\,z)' = 2e^{-z^2}/\sqrt{\pi}$,

26—59: вычисление суммы $\frac{1}{z}\sum_n$ в (4.11) и занесение ее в РА, РВ (вещественную и мнимую части соответственно),

60—68: окончательный расчет erf z умножением $\sum_n$ на $2z/\sqrt{\pi}$,

69—84: подпрограмма перемножения комплексных чисел.

Инструкция
1. Исходные данные: (x = Р6, y = Р7).
2. Пуск: В/О С/П; для получения только $(\mathrm{erf}\,z)'$ можно остановить счет примерно через 30 с после пуска.
3. Результат: $\mathrm{PX} = \mathrm{Re\;erf}\;z$, $\mathrm{PY} = \mathrm{Im\;erf}\;z$, $\mathrm{P8} = \mathrm{Re}\,(\mathrm{erf}\,z)'$, $\mathrm{P9} = \mathrm{Im}(\mathrm{erf}\,z)'$.
4. Регистры: рабочие Р6 — Р9; оперативные Р0, Р5, РА — РД; свободные Р1 — Р4.

5. Погрешность относительная erf z меньше:

$2\cdot 10^{-6}$ при $\operatorname{Re} z = 0$;

$3\cdot 10^{-3}$ при $|z| \leqslant 3,\ \pi/4 \leqslant |\arg z| \leqslant 3\pi/4$;

$2\cdot 10^{-5}$ при $|z| \leqslant 3,\ 0{,}4\pi \leqslant |\arg z| \leqslant 0{,}6\pi$;

$2\cdot 10^{-6}$ при $|z| \leqslant 2,\ |\arg z| \leqslant \pi$.

Относительная погрешность $(\operatorname{erf} z)'$ меньше $5\cdot 10^{-7}$ при произвольных z.

6. Время счета $t \approx (8 + |z|^2/3)$ мин.

Примеры.

$\operatorname{erf}(j\,5) = 0 + j\,8{,}2982722\cdot 10^9$ $(0 + j\,8{,}29825\cdot 10^9$ [8], $t = 8$ мин;

$\operatorname{erf}(2{,}1 - j\,2{,}1) = 1{,}1892435 + j\,2{,}581386\cdot 10^{-2}$ $(1{,}18709 +$
$+ j\,2{,}3668\cdot 10^{-2}$ [9]), $t = 5{,}5$ мин;

$[\operatorname{erf}(2{,}1 - j\,2{,}1)]' = -0{,}92823684 + j\,0{,}64157307$;

$\operatorname{erf}(1 + j\,2{,}8) = -161{,}54765 + j\,88{,}61866$ $(-161{,}550 + j\,88{,}6185)$ [8]).

Программа 4.9. Дополнительный интеграл вероятности erfc z, производная интеграла вероятности $(\operatorname{erf} z)'$ комплексного аргумента $z = x + jy$. Разложение в непрерывную дробь (4.19), (4.21), (4.22), (4.23в) при $\operatorname{Re} z \geqslant 0$, при $\operatorname{Re} z < 0$ формула симметрии (4.26).

ИП7	ПВ	ИП6	ПА	ПП	53	Fe^x	1	Farctg	$F\sqrt{\ }$
$\times$	XY	ПД	/—/	Fsin	XY	$\div$	ПВ	F Bx	ИПД
F cos	XY	$\div$	ПА	2	7	П0	2	$\div$	$F\sqrt{\ }$
ИП6	2	$\div$	$+$	ПД	ИП7	2	$\div$	ПП	69
ИП6	$+$	ПД	XY	ИП7	$+$	FL0	38	ПП	69
ПП	53	С/П	ПС	ИПВ	$\times$	XY	ПД	ИПА	$\times$
$+$	ИПА	ИПС	$\times$	ИПВ	ИПД	$\times$	—	В/О	/—/
$\uparrow$	Fx^2	ИПД	Fx^2	$+$	ИП0	2	$\div$	$\div$	$\div$
ИПД	FBx	$\div$	В/О						

Структура программы

00—23: вычисление $(\operatorname{erf} z)' = 2e^{-z^2}/\sqrt{\pi}$,

24—37: задание $N = 27$ и A_N по формуле (4.23 в),

38—52: итерационная процедура (4.21) и вычисление erfc z по формуле (4.22),

53—68: подпрограмма перемножения комплексных чисел,

69—83: подпрограмма вычисления обратной величины комплексного аргумента $a_1 + ja_2$, деленного на произвольное число $K/2$, где K — в Р0, a_1 — в РД, a_2 — в РХ.

Инструкция

1. Исходные данные: (x = Р6, y = Р7).
2. Пуск: В/О С/П.
3. Результат: РХ = Re erfc z, РY = Im erfc z, РА = Re $(\operatorname{erf} z)'$, РВ = Im $(\operatorname{erf} z)'$,
4. Регистры: рабочие Р6, Р7, РА, РВ; оперативные Р0, РС, РД; свободные Р1 — Р5, Р8, Р9.
5. Погрешность относительная функции erfc z при $|z| \geqslant 1{,}8$, $\operatorname{Re} z \geqslant 0{,}5$ меньше $2\cdot 10^{-6}$, а $(\operatorname{erf} z)'$ меньше $5\cdot 10^{-7}$ при произвольных z. Указанная погрешность erfc z сохраняется и при $\operatorname{Re} z < 0{,}5$, если $|\operatorname{Im} z| > 4$.

6. Время счета $t \approx 4{,}5$ мин. При получении только $(\operatorname{erf} z)'$ можно остановить счет примерно через 30 с после пуска.

Примеры.

$\operatorname{erfc}[2 - j\,1{,}5) = 3{,}6382421\cdot 10^{-2} + j\,1{,}1003376\cdot 10^{-2}$ $(3{,}63824\cdot 10^{-2} +$
$+ j\,1{,}10033\cdot 10^{-2}$ [9]);

$[\operatorname{erf}(2 - j\,1{,}5)]' = 0{,}1882730 - j\,0{,}054788587$;

$\operatorname{erfc}(0{,}5 + j\,3{,}9) = 271294{,}47 + j\,379173{,}28$ $(271294 + j\,379172$ [9]);

$\operatorname{erf}(3 + j\,0{,}2) = 7{,}004280\cdot 10^{-6} - j\,2{,}185811\cdot 10^{-5}$ (все цифры верные).

Программа 4.10. Дополнительный интеграл вероятности erfc z, производная интеграла вероятности $(\operatorname{erf} z)'$ комплексного аргумента $z = x + j\,y$. Асимптотическое разложение (4.13), (4.16), $|z| \geqslant 3$.

ИП7	ПВ	ИП6	ПА	ПП	77	Fe^x	$F\pi$	$F\sqrt{\ }$	$\times$
ИП5	/—/	Fsin	XY	$\div$	П9	FBx	ИП5	F cos	XY
$\div$	П8	С/П	ИП7	/—/	$\uparrow$	Fx^2	ИП6	Fx^2	$+$
$\div$	ПВ	ИП6	F Bx	$\div$	ПА	ИП9	ИП8	ПП	77
П8	XY	П9	ИПВ	ИПА	ПП	77	ПА	XY	ПВ
9	П0	0	П5	2	F1/x	ИП0	—	$\times$	FBx
ИП5	$\times$	XY	ПП	77	1	$+$	FL0	54	ПА
XY	ПВ	ИП9	ИП8	ПП	77	С/П	ПС	ИПВ	$\times$
XY	ПД	ИПА	$\times$	$+$	П5	ИПА	ИПС	$\times$	ИПВ
ИПД	$\times$	—	В/О						

Структура программы

00—22: вычисление $(\operatorname{erf} z)'/2 = e^{-z^2}/\sqrt{\pi}$,

23—35: расчет $1/z$,

36—49: вычисление фактора $e^{-z^2}/z\sqrt{\pi}$ и $1/z^2$,

50—76: расчет асимптотического ряда (выражение в квадратных скобках (4.16)) и результата erfc z,

77—93: подпрограмма перемножения комплексных чисел.

Инструкция

1. Исходные данные: (x = Р6, y = Р7).
2. Пуск: а) для $(\operatorname{erf} z)'/2$ В/О С/П; б) для erfc z С/П. Пуск б производится после останова на предыдущем пуске без изменения содержимого регистров Р6 — Р9.
3. Результат и время счета: а) РХ = Р8 = $\operatorname{Re}(\operatorname{erf} z')/2$, РY = Р9 = $= \operatorname{Im}(\operatorname{erf} z)'/2$, $t = 20$ с; б) РХ = Re erfc z, РY = Im erfc z, $t = 2$ мин.
4. Регистры: рабочие Р6 — Р8; оперативные Р0, Р5, РА — РД; свободные Р1 — Р4.
5. Погрешность относительная: $(\operatorname{erf} z)'$ меньше $5\cdot 10^{-7}$, erfc$z$ меньше $2\cdot 10^{-6}$ при $|z| \geqslant 4$ и $5\cdot 10^{-4}$ при $|z| \geqslant 3$. Погрешность максимальна при $\operatorname{Re} z = 0$. Напомним, что относительная погрешность функции комплексного аргумента определяется (см. введение) как отношение модуля отклонения к модулю функции. Относительные отклонения от точных значений действительной или мнимой составляющей могут быть при этом значительными, в частности в асимптотическом приближении $\operatorname{Re}\operatorname{erfc}(j\,x) = 0$, тогда как точное значение $\operatorname{Re}\operatorname{erfc}(j\,x) = 1$.

Примеры.

$[\operatorname{erf}(0,5+j\,4)]' = -2552138,1 + j\,2954920$;

$\operatorname{erfc}(0,5+j\,4) = 663334,54 + j\,748716,18$ $(663332 + j\,748715)$;

$\operatorname{erfc}(3+j\,0,2) = 7,0027905\cdot 10^{-6} - j\,2,1859474\cdot 10^{-5}$ $(7,00428\cdot 10^{-6} -$

$- j\,2,18581\cdot 10^{-5})$,

Время счета $t \approx 2$ мин.

4.2. Интегралы Френеля. Обобщенные интегралы Френеля

Интегралы Френеля [5,7]

$$C(z) = \int_0^z \frac{\cos t}{\sqrt{t}}\,dt;\quad S(z) = \int_0^z \frac{\sin t}{\sqrt{t}}\,dt. \tag{4.28}$$

В ряде источников (например, [8,9]) даются несколько отличающиеся определения:

$$C_1(z) = \int_0^z \cos\left(\frac{\pi}{2}t^2\right)dt;\ S_1(z) = \int_0^z \sin\left(\frac{\pi}{2}t^2\right)dt. \tag{4.29}$$

В тех случаях, когда за основу берется (4.29), интегралы Френеля также обозначаются через $C(z)$, $S(z)$. Далее, однако, во избежание путаницы за интегралами (4.29) сохраняются обозначения $C_1(z)$, $S_1(z)$. Они связаны с (4.28) соотношениями

$$C_1(z) = C\left(\frac{\pi}{2}z^2\right);\ S_1(z) = C\left(\frac{\pi}{2}z^2\right). \tag{4.30}$$

Обобщениями (4.28) являются интегралы [5] вида

$$C(z,\ a) = \int_z^\infty t^{a-1}\cos t dt;\ S(z,\ a) = \int_z^\infty t^{a-1}\sin t dt. \tag{4.31}$$

$C(z)$ и $S(z)$ выражаются через обобщенные интегралы Френеля при $a = 1/2$:

$$C(z) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}C\left(z,\ \frac{1}{2}\right);\ S(z) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}S\left(z,\ \frac{1}{2}\right). \tag{4.32}$$

Функции $C_1(z)$, $S_1(z)$ — целые, тогда как $C(z)$, $S(z)$ — двулистны с точкой ветвления $z = 0$. Обычно выбирается ветвь, принимающая вещественные значения на положительной части действительной оси.

Разложения $C(z)$ и $S(z)$ в степенной ряд в окрестности нуля имеют вид

$$C(z) = \sqrt{\frac{2z}{\pi}}\sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k\ z^{2k}}{(2k)!\ (4k+1)}; \tag{4.33}$$

$$S(z) = \sqrt{\frac{2z}{\pi}}\sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k\ z^{2k+1}}{(2k+1)!\ (4k+3)}. \tag{4.34}$$

Ряды для $C_1(z)$ и $S_1(z)$ на действительной и мнимой осях являются знакочередующимися (см. (4.30)). Поэтому погрешности округления для них максимальны при $z = x$, $j\,y$ и уменьшаются по мере приближения $|\arg z|$ к $\pi/4$, где ряды знакопостоянны.

Асимптотические разложения функций [9]:

$$C_1(z) = \frac{1}{2} + f(z)\sin\left(\frac{\pi z^2}{2}\right) - g(z)\cos\left(\frac{\pi z^2}{2}\right); \tag{4.35}$$

$$S_1(z) = \frac{1}{2} - f(z)\cos\left(\frac{\pi z^2}{2}\right) - g(z)\sin\left(\frac{\pi z^2}{2}\right), \tag{4.36}$$

где

$$f(z) \approx \frac{1}{\pi z}\left[1 + \sum_{m=1}^\infty \frac{(-1)^m 1\cdot 3\ldots(4m-1)}{(\pi z^2)^{2m}}\right]; \tag{4.37}$$

$$g(z) \approx \frac{1}{\pi z}\left[\sum_{m=0}^\infty \frac{(-1)^m 1\cdot 3\ldots(4m+1)}{(\pi z^2)^{2m+1}}\right],\ z\to\infty,\ |\arg z| < \frac{\pi}{2}. \tag{4.38}$$

Функции $f(z)$ и $g(z)$ с точностью до слагаемых второго порядка малости по $1/\pi z^2$ включительно равны:

$$f(z) \approx \frac{1}{\pi z}\left[1 - \frac{3}{(\pi z^2)^2}\right];\ g(z) \approx \frac{1}{\pi z}\,\frac{1}{\pi z^2}. \tag{4.39}$$

Эти функции в том же приближении можно заменить на

$$f(z) \approx \frac{1}{\pi z}\cos\left(\frac{\sqrt{6}}{2t}\right);\ g(z) \approx \frac{1}{\pi z\sqrt{6}}\sin\left(\frac{\sqrt{6}}{2t}\right), \tag{4.40}$$

где

$$t = \pi z^2/2. \tag{4.41}$$

Отметим, что учет в (4.40) членов третьего порядка по $1/\pi z^2$ делает эти приближения лучшими, чем (4.39). Подстановка (4.40) в (4.35), (4.36) приводит к следующим соотношениям:

$$\begin{aligned} C_1(z) &\approx \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi z}\sin t\cos\left(\frac{\sqrt{6}}{2t}\right) - \frac{1}{\sqrt{6}}\cos t\sin\left(\frac{\sqrt{6}}{2t}\right); \\ S_1(z) &\approx \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi z}\cos t\cos\left(\frac{\sqrt{2t}}{2t}\right) + \frac{1}{\sqrt{6}}\sin t\sin\left(\frac{\sqrt{6}}{2t}\right) \end{aligned} \tag{4.42}$$

или

$$C_1(z) \approx \frac{1}{2} + \frac{1}{2\pi z}\left[\left(1 - \frac{1}{\sqrt{6}}\right)\sin\left(t + \frac{\sqrt{6}}{2t}\right) + \right.$$

$$\left. + \left(1 + \frac{1}{\sqrt{6}}\right)\sin\left(t - \frac{\sqrt{6}}{2t}\right)\right];$$

$$S_1(z) \approx \frac{1}{2} - \frac{1}{2\pi z}\left[\left(1-\frac{1}{\sqrt{6}}\right)\cos\left(t+\frac{\sqrt{6}}{2t}\right)+\right. \tag{4.43}$$

$$\left. + \left(1+\frac{1}{\sqrt{6}}\right)\cos\left(t-\frac{\sqrt{6}}{2t}\right)\right].$$

Формулы (4.42) проще для программирования при вещественных $z = x$, (4.43) — при комплексных.

Погрешности округления разложений (4.37), (4.38) минимальны на вещественной оси, где ряды знакочередующиеся. Это обычно благоприятно для асимптотических разложений, где учитывается небольшое число убывающих по модулю слагаемых. При увеличении $|\arg z|$ погрешности возрастают. На мнимой оси значения $C_1(z)$ и $S_1(z)$, даваемые асимптотическими разложениями, вообще недостоверны при любых $|z|$. В этом легко убедиться из соотношений симметрии [9]

$$C_1(-z) = -C_1(z),\quad S_1(-z) = -S_1(z);$$

$$C_1(\mathrm{j}\,z) = \mathrm{j}\,C_1(z),\quad S_1(\mathrm{j}\,z) = -\mathrm{j}\,S_1(z);$$

$$C_1(\bar{z}) = \overline{C_1(z)},\quad S_1(\bar{z}) = \overline{S_1(z)}. \tag{4.44}$$

Согласно равенствам во второй строке (4.44) при $z \to \infty$ $C_1 = -S_1 = \mathrm{j}\lim\limits_{x\to\infty} C_1(x) = \mathrm{j}0{,}5$, тогда как из (4.35)—(4.38) следует, что $C_1(\mathrm{j}\,\infty) = S_1(\mathrm{j}\,\infty) = 0{,}5$. Целесообразно применять (4.42) или (4.43) только до $|\arg z| = \pi/4$. При $|\arg z| > \pi/4$ функции $C_1(z)$ и $S_1(z)$ легко привести к значениям $|\arg z| < \pi/4$, пользуясь (4.44). В этом случае относительные погрешности (4.42), (4.43) при $|z| < 4$ (см. программу (4.16)) превышают $1\cdot10^{-4}$. Разложения в ряды (4.33), (4.34) с учетом формул (4.30) приводят к погрешностям $C_1(z)$ и $S_1(z)$, меньшим $1\cdot10^{-4}$ только при $|z| \leqslant 2{,}7$ (программа 4.15). Таким образом, в промежуточной области $2{,}5 < |z| < 4$ применение указанных альтернативных методов не гарантирует точности $1\cdot10^{-4}$.

Высокую точность при соответствующем числе шагов обеспечивает *прямое численное интегрирование* (4.29) *в комплексной области*. Используя подстановку $t = uz$, преобразуем (4.29) к виду

$$S_1(z) = z\int\limits_0^1 \sin\left(\frac{\pi}{2}u^2 z^2\right)du. \tag{4.29a}$$

Примем за линию интегрирования в исходном интеграле прямую, соединяющую точки $t = 0$ и $t = z$. Тогда переменная u является вещественной, и (4.29а) легко рассчитывается по квадратурным формулам для вещественных интегралов. Отличие состоит лишь в необходимости отдельно суммировать действительные и мнимые части подынтегральных функций в узлах квадратур. Соответствующий алгоритм реализован для $S_1(z)$ и $C_1(z)$ в программе 4.17 на базе формул Чебышева ($n = 6$) (ср. с программой 10.13). Недостатком программы является большое время счета (см. примеры).

Отметим, что (4.29а) при замене $u^2z^2 \to u^2z^2 + 1$ переходит в формулу для $C_1(z)$.

Для вещественных $z = x$ эффективен алгоритм, использующий связь $C(x)$, $S(x)$ с обобщенными интегралами Френеля (4.32), а последних — с неполной гамма-функцией:

$$\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\pi a/2}\,\Gamma(a,\,x) = C(x,\,a) - \mathrm{j}\,S(x,\,a). \tag{4.45}$$

Две программы вычисления $\Gamma(a,\,\mathrm{j}\,x)$ приведены в гл. 2 (программы 2.24, 2.25). Более универсальной является программа 2.24, основанная на *разложении* $\Gamma(a,\,z)$ *в непрерывную дробь*. Согласно (2.47).

$$\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\pi a/2}\,\Gamma(a,\,\mathrm{j}x) = x^a(\cos x - \mathrm{j}\sin x)/A_0, \tag{4.46}$$

где A_0 определяется итерационной процедурой (2.46). Функция в (4.46) проще для вычислений, чем $\Gamma(a,\,\mathrm{j}\,x)$.

Ниже приведена программа для обобщенных интегралов Френеля (программа 4.13). Дается также отдельная программа для $C(x)$, $S(x)$, (в ней возможны дальнейшие упрощения). В этой программе перекрывается вся область $x \geqslant 0{,}3$, недостатком программы являются большая длина и все же значительное время счета (не меньше 4,5 мин). Наиболее быстродействующими являются программы 4.12 и 4.16, основанные на асимптотических формулах (4.42), (4.43).

Программа 4.11. Интегралы Френеля вещественных аргументов $C(x)$, $S(x)$, $C_1(u)$, $S_1(u)$. Разложения в ряды (4.33), (4.34) по схеме Горнера и формулы (4.30), $0 \leqslant x \leqslant 14$, $0 \leqslant u \leqslant 3$.

Fx^2	1	Farcsin	×	ПС	Fx^2	ПД	4	0	П0
F1/x	ИПД	×	ИП0	ИПВ	+	÷	1	F Bx	—
÷	F Bx	2	×	1	+	F1/x	—	FL0	30
FL0	11	ИПС	1	Farcsin	÷	F $\sqrt{\ }$	×	ИПС	ИПВ
×	F,	F Bx	ВП	×	С/П				

Инструкция

1. Исходные данные для получения функций: $C(x)$ (0 = РВ), [x = РХ]; $C_1(u)$ (0 = РВ), [u = РХ]; $S(x)$ (1 = РВ), [x = РХ]; $S_1(u)$ (1 = РВ), [u=РХ].
2. Пуск: для $C(x)$, $S(x)$ БП 04 С/П; для $C_1(u)$, $S_1(u)$ В/О С/П.
3. Результат: РХ = $C(x)$, или РХ = $S(x)$, или РХ = $C_1(u)$, или РХ = $S_1(u)$.
4. Регистры: рабочие РВ; оперативные Р0 РС, РД; свободные Р1 — РА.
5. Погрешность относительная меньше:

$1\cdot10^{-6}$ при $x \leqslant 5$ ($u \leqslant 1{,}8$), $1\cdot10^{-4}$ при $x \leqslant 11$ ($u \leqslant 2{,}7$),

$1\cdot10^{-5}$ при $x \leqslant 9$ ($u \leqslant 2{,}5$), $1\cdot10^{-3}$ при $x \leqslant 14$ ($u \leqslant 3{,}0$).

6. Время счета $t \approx 2$ мин.

Примеры.

$C(12) = 0{,}43457829$ (0,4346 [7]), $S(12) = 0{,}40581753$ (0,4058 [7]);
$C_1(2) = 0{,}4882534$ (0,4882534 [9]), $S_1(2) = 0{,}34341503$ (0,3434157[9]).

Программа 4.12. Интегралы Френеля вещественных аргументов $C(x)$, $S(x)$, $C_1(u)$, $S_1(u)$. Асимптотические формулы (4.42) и формулы (4.30), $x \geqslant 8$, $u \geqslant 2{,}2$.

Fx^2	1	Farcsin	×	П9	F1/x	6	F $\sqrt{\ }$	×	2
÷	ПВ	Fcos	ПД	ИП9	Fsin	ПА	×	ИП9	Fcos
ПС	ИПВ	Fsin	ПВ	×	6	F $\sqrt{\ }$	÷	—	ИП9
2	×	Fπ	×	F $\sqrt{\ }$	П9	÷	2	F1/x	+
ИПС	ИПД	×	ИПА	ИПВ	×	6	F $\sqrt{\ }$	÷	+
/—/	ИП9	÷	2	F1/x	+	С/П			

Инструкция
1. Исходные данные: [x = РХ] или [u = РХ].
2. Пуск: для $C(x)$, $S(x)$ БП 04 С/П; для $C_1(u)$, $S_1(u)$ В/О С/П.
3. Результат: РХ = $S(x)$, РY = $C(x)$ или РХ = $S_1(u)$, РY = $C_1(u)$.
4. Регистры: рабочие —; оперативные Р9—РД; свободные Р0 — Р8.
5. Погрешность относительная меньше:
$1\cdot10^{-6}$ при $x \geqslant 50$ ($u \geqslant 5{,}7$), $1\cdot10^{-4}$ при $x \geqslant 15$ ($u \geqslant 3{,}1$),
$1\cdot10^{-5}$ при $x \geqslant 27$ ($u \geqslant 4{,}2$), $1\cdot10^{-3}$ при $x \geqslant 18$ ($u \geqslant 2{,}2$).
6. Время счета $t \approx 30$ с.

Примеры.

$S(15)$ = 0,57576177 (0,5758 [7]), $C(15)$ = 0,56936621 (0,5693 [7]);

$S_1(5)$ = 0,49918953 (0,4991914 [9]), $C_1(5)$ = 0,56363102 (0,5636312[9]).

Программа 4.13. Обобщенные интегралы Френеля вещественных аргументов $C(x, a)$, $S(x, a)$. Разложение $e^{-j\pi a/2}\,\Gamma(a, jx)$ в непрерывную дробь (4.31), (4.45), (4.46), (2.46в), $x \geqslant 0{,}3$.

7	ИП8	÷	1	5	+	П0	ИП9	ИП8	Fx^y
ИП8	F cos	XY	×	ПА	F Bx	ИП8	F sin	/—/	×
ПВ	ИП8	ИП0	×	F $\sqrt{\ }$	ПС	ИП0	ПП	63	1
+	ПС	XY	ИП0	ИП9	—	ПП	63	XY	ИП8
+	FL0	26	1	ПП	63	ПС	ИПВ	×	XY
ПД	ИПА	×	+	/—/	ИПС	ИПА	×	ИПВ	ИПД
×	—	С/П	ПД	F,	/—/	↑	Fx^2	ИПС	Fx^2
+	F1/x	ИПД	×	×	ИПС	FBx	×	ПС	В/О

Инструкция
1. Исходные данные: (x = Р8, a = Р9).
2. Пуск: В/О С/П.
3. Результат: РХ = $C(x, a)$, РY = $S(x, a)$.
4. Регистры: рабочие Р8, Р9; оперативные Р0, РА — РД; свободные Р1—Р7.
5. Погрешность относительная меньше: $2\cdot10^{-5}$ при $x \geqslant 0{,}3$, $2\cdot10^{-6}$ при $x \geqslant 1{,}0$.
6. Время счета $t \approx (4{,}5 + 2/x)$ мин.

Примеры. $C(5{,}1)$ = 0,95892426, $S(5{,}1)$ = 0,28366226.

Программа 4.14. Интегралы Френеля вещественного аргумента $C(x)$, $S(x)$, (4.32), (4.45), (4.46), (2.46в), $x \geqslant 0{,}3$.

7	ИП9	÷	1	5	+	П0	ИП9	Fcos	ИП9
F $\sqrt{\ }$	×	ПА	FBx	ИП9	Fsin	/—/	×	ПВ	ИП9
ИП0	×	F $\sqrt{\ }$	ПС	ИП0	ПП	66	1	+	ПС
XY	ИП0	2	F1/x	—	ПП	66	XY	ИП9	+
FL0	24	1	ПП	66	ПС	ИПВ	×	XY	ПД
ИПА	×	+	ИПВ	ИПД	×	ИПА	ИПС	×	—
ПП	83	XY	ПП	83	С/П	ПД	F,	/—/	↑
Fx^2	ИПС	Fx^2	+	F1/x	ИПД	×	×	ИПС	FBx
×	ПС	В/О	Fπ	2	×	F $\sqrt{\ }$	÷	2	F1/x
+	В/О								

Структура программы
00—23: расчет фактора $x^{1/2}\,e^{jx}$, а также констант $N = 15 + 7/x$ и $A_N = \sqrt{xN}$, необходимых для начала итерационной процедуры (формулы (4.46), (2.46), (2.46в)),
24—41: вычисление A_0 по итерационной формуле (2.46) при условиях $a = 1/2$ и $z = jx$,
42—65: окончательный расчет $C(x)$, $S(x)$ по формулам (4.45), (4.46), (4.32),
66—82: подпрограмма обратной величины комплексного числа, умноженной на вещественную константу, находящуюся в РХ,
83—92: подпрограмма вычисления $C(x)$ и $S(x)$ по формуле (4.32).

Инструкция
1. Исходные данные: (x = Р9).
2. Пуск: В/О С/П.
3. Результат: РХ = $S(x)$, РY = $C(x)$.
4. Регистры: рабочие Р9; оперативные Р0, РА — РД; свободные: Р1 — Р8.
5. Погрешность абсолютная меньше: $2\cdot10^{-5}$ при $x \geqslant 0{,}3$; $5\cdot10^{-6}$ при $x \geqslant 0{,}5$; $5\cdot10^{-7}$ при $x \geqslant 1$.
6. Время счета $t \approx (4{,}5 + 2/x)$ мин.

Примеры.
$S(2\pi)$ = 0,34341569 (0,3434157 [9]), $C(2\pi)$ = 0,48825341 (0,4882534) [9]);
S (0,3041062) = 0,04429553 (0,0443088 [9]), C (0,3041062) = 0,4359414 (0,4359482 [9]).

Программа 4.15. Интегралы Френеля $C_1(z)$, $S_1(z)$ комплексного аргумента $z = x + jy$. Разложение в ряд (4.33), (4.34) по схеме Горнера и формулы (4.30), $|z| \leqslant 3$.

ИП9	ПВ	1	Farcsin	×	F Bx	ИП8	ПА	×	ПП
73	ПВ	П7	XY	ПА	П6	ПП	73	ПВ	XY
ПА	5	0	П0	0	Fπ	ПП	73	1	ИП0
ИП5	+	—	F Bx	×	÷	ИП4	F Bx	÷	ИП0
ИП5	+	2	×	3	—	F1/x	+	FL0	50
FL0	26	ПА	XY	ПВ	ИП9	ИП8	ПП	73	ПВ
XY	ПА	ИП5	Fx≠0	71	ИП7	ИП6	ПП	73	XY
С/П	F,	С/П	ПС	ИПА	×	XY	ПД	ИПВ	×
—	П4	ИПС	ИПВ	×	ИПД	ИПА	×	+	В/О

Инструкция

1. Исходные данные: (x = Р8, y = Р9, k = Р5). Задается k = 0 или k = 1 при вычислении соответственно $C_1(z)$ или $S_1(z)$
2. Пуск: В/О С/П.
3. Результат: РХ = Re$C_1(z)$ (Re$S_1(z)$), РY = Im$C_1(z)$ (Im$S_1(z)$).
4. Регистры: рабочие Р5, Р8, Р9; оперативные Р0, Р4, Р6, Р7, РА — РД; свободные Р1, Р2, Р3.
5. Погрешность относительная меньше:

$$1\cdot10^{-6} \text{ при } |z| \leqslant 1{,}8, \quad 1\cdot10^{-4} \text{ при } |z| \leqslant 2{,}7,$$
$$1\cdot10^{-5} \text{ при } |z| \leqslant 2{,}5, \quad 1\cdot10^{-3} \text{ при } |z| \leqslant 3{,}0.$$

6. Время счета $t \approx 6$ мин.

Примеры.

$S_1(2+j) = -15{,}587742 - j36{,}725462$ $(-15{,}587659 - j36{,}725485)$;

$C_1(2+j) = -36{,}225683 + j16{,}087866$ $(-36{,}225709 + j16{,}087785)$;

$S_1(2{,}5+j\,2{,}5) = -11017302 + j11017302$ $(-11017290 + j11017282)$,

$C_1(2{,}5+j\,2{,}5) = 11017310 + j11017310$ $(11017282 + j11017290)$.

В скобках приведены значения функций, вычисленные прямым интегрированием (4.29) по программе 4.17, обеспечивающей в данном случае не менее шести верных значащих цифр. Обращает на себя внимание сравнительно высокая точность разложений в ряд при таком большом аргументе, как $2{,}5 + j2{,}5$ ($|z| > 3{,}5$). Это объясняется малым влиянием ошибок округления при $\arg z = \pi/4$, где ряды (4.33), (4.34) (при учете (4.30)) знакопостоянны.

Программа 4.16. Интегралы Френеля $C_1(z)$ и $S_1(z)$ комплексного аргумента $z = x + j\,y$. Асимптотические формулы (4.43), $|z| \geqslant 2$, $|\arg z| \leqslant \pi 4$. При $|\arg z| > \pi/4$ используются соотношения симметрии (4.44), например $C_1(x + jy) = jC_1(y - j\,x) = -j\,C_1(-y + jx)$.

1	Farcsin	×	П9	FBx	ИПА	×	П8	ПП	68
П7	ПП	85	ИП6	+	ПС	XY	ИП7	+	Fe^x
↑	F1/x	ПД	+	2	÷	↑	ИПД	—	ИПС
Fcos	×	ПД	XY	ИПС	F sin	×	2	ИП5	—
×	F Bx	ИПД	×	С/П	ИП5	/—/	П5	ИП7	БП
11	ИПВ	+	ПВ	XY	ИПА	+	ПА	8	П5
ИП8	П6	ИП9	ПП	85	ПП	68	С/П	ПС	ИПА
×	XY	ПД	ИПВ	×	—	П6	ИПС	ИПВ	×
ИПД	ИПА	×	+	В/О	/—/	↑	Fx^2	ИП6	Fx^2
+	ИП5	×	÷	ИП6	F Bx	÷	В/О		

Данный вариант программы относится к $C_1(z)$. Для перехода к $S_1(z)$ заменяются четыре команды по следующей схеме:

Адрес	Программа $C_1(z)$	Программа $S_1(z)$	Адрес	Программа $C_1(z)$	Программа $S_1(z)$
20	↑	F1/x	30	Fcos	Fsin
21	F1/x	FBx	35	Fsin	Fcos

Инструкция к обоим вариантам программы общая, кроме п. 3 (результат).

Инструкция

1. Исходные данные: $2/\sqrt{6} = 8{,}1649559 \cdot 10^{-1} =$ Р5, $x =$ РА, [Y = РВ].
2. Пуск: программа реализуется тремя последовательными пусками: 1) В/О С/П; 2) ПВ XY ПА С/П; 3) БП 51 С/П. В паузе между пусками не должно изменяться содержимое регистров РХ, PY, Р5 — РД.
3. Результат: для $C_1(z)$ РХ $= \mathrm{Im}C_1(z)$, PY $= \mathrm{Re}C_1(z) - 0{,}5$, т. е. $\mathrm{Re}C_1(z) =$ PY $+ 0{,}5$; для $S_1(z)$ РХ $= -\mathrm{Im}S_1(z)$, PY $= 0{,}5 - \mathrm{Re}S_1(z)$.
4. Регистры: рабочие —; оперативные Р5 — РД; свободные Р0 — Р4.

5. Погрешность относительная:

$\lvert z\rvert \geqslant$	1,5	2,8	4	5,5	7
$\delta \leqslant$	$1 \cdot 10^{-1}$	$1 \cdot 10^{-3}$	$1 \cdot 10^{-4}$	$1 \cdot 10^{-5}$	$1 \cdot 10^{-6}$

6. Время счета суммарное для всех трех пусков $t \approx 1{,}5$ мин.

Примеры.

$C_1(5+j\,5) = 2{,}0608052 \cdot 10^{32} + j\,2{,}0608052 \cdot 10^{32}$ $(2{,}06080 \cdot 10^{32} + j\,2{,}06080 \cdot 10^{32})$;

$S_1(5+j\,5) = -2{,}0608052 \cdot 10^{32} + j\,2{,}0608052 \cdot 10^{32}$ $(-2{,}06080 \cdot 10^{32} + j\,2{,}06080 \cdot 10^{32})$.

В скобках приведены значения функций, полученные интегрированием (4.29) по программе 4.17. Выбранное число шагов интегрирования гарантирует шесть верных значащих цифр.

Программа 4.17. Интегралы Френеля $S_1(z)$, $C_1(z)$ комплексного аргумента $z = x + jy$. Интегрирование (4.29а) по составной формуле Чебышева ($n = 6$, программа 10.13) при заданном числе N частных интервалов.

ИП7	ИП6	ПП	82	ПА	XY	ПВ	0	ПС	ПД
ИП2	П8	КИП2	6	П0	КИП0	/—/	П9	ИП2	+
ИП8	÷	Fx^2	П4	ИПА	×	0	+	1	Farcsin
×	FBx	ИП4	×	ИПВ	×	П4	XY	F cos	FBx
Fsin	ИП4	Fe^x	↑	F1/x	П4	—	2	÷	ИП4
XY	П4	+	×	XY	ИП4	×	ИПД	+	ПД
XY	ИПС	+	ПС	ИП9	$Fx \geqslant 0$	16	FL0	15	FL2
12	ИПД	ИП8	3	×	÷	ИПС	FBx	÷	ПП
82	С/П	П4	ИП7	×	XY	П8	ИП6	×	+
ИП6	ИП4	×	ИП7	ИП8	×	—	В/О		

Данный вариант программы предназначен для вычисления $S_1(z)$. Для перехода к $C_1(z)$ заменить команду 0 (адрес 26) на 1.

Структура программы

00—06: расчет z^2 и занесение в регистры РА, РВ значений $\mathrm{Re}\,z^2$, $\mathrm{Im}\,z^2$,

07—57: вызов из памяти абсцисс очередных узлов квадратурной формулы $\pm y_k$ и вычисление соответствующих действительных и мнимых частей подынтегральной функции $\sin(\pi z^2 u^2/2)$ или $\cos(\pi z^2 u^2/2)$,

58—81: суммирование найденных значений функций по всем узлам и всем N интервалам и вычисление $S_1(z)$ (или соответственно $C_1(z)$) умножением сумм на $(^1/_3)(z/2N)$ (здесь $1/2N$ играет роль шага),

82—97: подпрограмма умножения комплексных чисел.

Инструкция

1. Исходные данные: ($y_1 = 8{,}6624682 \cdot 10^{-1} =$ Р1, $y_2 = 4{,}2251865 \cdot 10^{-1} =$ Р3, $y_3 = 2{,}666354 \cdot 10^{-1} =$ Р5, $x =$ Р6, $y =$ Р7), $2N =$ Р2. Задаваемое число $2N$ предварительно рассчитывается по формуле $2N = 2\,[2 + |z|^2]$, где квадратные скобки означают округление до ближайшего большего целого.
2. Пуск: В/О С/П.
3. Результат: РХ $= \mathrm{Re}S_1(z)$, PY $= \mathrm{Im}\,S_1(z)$ (или РХ $= \mathrm{Re}\,C_1(z)$, PY $= \mathrm{Im}\,S_1(z)$ при другом варианте программы).

4. Регистры: рабочие P1, P3, P5 — P7; оперативные P0, P2, P4, P8 — РД; свободных нет.

5. Погрешность относительная меньше $5\cdot 10^{-6}$.

6. Время счета $t \approx 2N$ мин.

Примеры.

$S_1(1+j) = -2{,}0618878 + j\,2{,}0618878$, $C_1(1+j) = 2{,}5557932 + j\,2{,}5557932$, $2N = 8$, $t = 7{,}5$ мин;

$C_1(2) = 0{,}48825344 + j\,0(0{,}4882534$ [9]$)$, $2N = 12$, $t = 11{,}5$ мин;

$S_1(2+j3) = -5815903{,}7 - j\,3788097{,}7$, $2N = 30$, $t = 30$ мин.

Указатель программ

Номер программы	Функция	Область определения	Число шагов	Число регистров памяти	Примечание
4.1	$\mathrm{erf}\,x$, $(\mathrm{erf}\,x)'$	$\lvert x\rvert \leqslant 3{,}5$ для $\mathrm{erf}\,x$	32	4	Аргумент x вещественный; $\mathrm{erf}\,x \approx 1$ при $\lvert x\rvert > 3{,}5$
4.2	$\mathrm{erfc}\,x$, $\mathrm{erf}\,x$	$x > 0$	30	3	Разложение в непрерывную дробь. Время счета при $x < 0{,}3$ велико
4.3	$\mathrm{erf}\,x$, $\mathrm{erfc}\,x$, $(\mathrm{erf}\,x)'$	$x \geqslant 0$	67	5	Во всем диапазоне x (вещественный аргумент) время счета меньше 50 с
4.4	$\Phi_{m,\sigma}(x)$, $p_{m,\sigma}(x)$	$-9\cdot 10^{99} \leqslant x \leqslant 9\cdot 10^{99}$	84	7	Аргумент x вещественный
4.5	$i^n\,\mathrm{erfc}\,x$, $\mathrm{erfc}\,x$, $\mathrm{erf}\,x$, $(\mathrm{erf}\,x)'$	$x \geqslant 0$, $n = 1, 2, \ldots$	92	9	То же
4.6	$F(x)$		29	3	»
4.7	$\mathrm{erf}\,z$, $(\mathrm{erf}\,z)'$	$\lvert z\rvert \leqslant 3$ для $\mathrm{erf}\,z$, $\lvert \arg z\rvert \leqslant \pi$	89	9	Суммирование степенного ряда (4.12)
4.8	$\mathrm{erf}\,z$, $(\mathrm{erf}\,z)'$	$\lvert \arg z\rvert \leqslant \pi$	85	10	Суммирование степенного ряда (4.11)
4.9	$\mathrm{erfc}\,z$, $(\mathrm{erf}\,z)'$	$x \geqslant 0$	84	7	Разложение в непрерывную дробь
4.10	$\mathrm{erfc}\,z$ $(\mathrm{erf}\,z)'$	$\lvert z\rvert \geqslant 3$	94	10	Асимптотическое разложение. Оптимальное использование программ 4.7—4.10 по точности и времени счета — см. рис. 4.1
4.11	$C(x)$, $S(x)$ или $C_1(u)$, $S_1(u)$	$0 \leqslant x \leqslant 14$, $0 \leqslant u \leqslant 3$	46	4	x, u — вещественные аргументы
4.12	$C(x)$, $S(x)$ или $C_1(u)$, $S_1(u)$	$x \geqslant 8$ $u \geqslant 2{,}2$	57	5	Асимптотические разложения
4.13	$C(x, a)$, $S(x, a)$	$x \geqslant 0{,}3$	80	7	Разложение в непрерывную дробь; x, a — вещественные аргументы

Окончание

Номер программы	Функция	Область определения	Число шагов	Число регистров памяти	Примечание
4.14	$C(x)$, $S(x)$	$x \geqslant 0{,}3$	92	6	То же
4.15	$C_1(z)$ или $S_1(z)$	$\lvert z\rvert \leqslant 3$	90	11	Суммирование степенных рядов
4.16	$C_1(z)$ или $S_1(z)$	$\lvert z\rvert \geqslant 2$, $\lvert \arg z\rvert \leqslant \pi/4$	98	9	Асимптотические формулы
4.17	$C_1(z)$ или $S_1(z)$	∞	98	14	Прямое вычисление интеграла. Дает наибольшую точность во всей области определения

Глава 5

Функции Бесселя вещественного и комплексного аргументов и родственные им функции

5.1. Определения и основные расчетные соотношения

Функции Бесселя первого рода $J_\nu(z)$ *и второго рода (функции Неймана)* $Y_\nu(z)$ удовлетворяют дифференциальному уравнению

$$\frac{d^2 Z_\nu}{dz^2} + \frac{1}{z}\frac{dZ_\nu}{dz} + \left(1 - \frac{\nu^2}{z^2}\right) Z_\nu = 0. \tag{5.1}$$

Решениями этого уравнения являются также *функции Ханкеля*

$$H_\nu^{(1)}(z) = J_\nu(z) + jY_\nu(z); \quad H_\nu^{(2)}(z) = J_\nu(z) - jY_\nu(z). \tag{5.2}$$

Каждая из указанных функций аналитична во всей комплексной плоскости z, разрезанной вдоль отрицательной части действительной оси. Функции $J_\nu(z)$ и $Y_\nu(z)$, а также $H_\nu^{(1)}(z)$ и $H_\nu^{(2)}(z)$ являются линейно независимыми парами решений (5.1). Параметр ν далее полагается вещественным.

Модифицированная функция Бесселя первого рода $I_\nu(z)$ и функция $K_\nu(z)$ — *функция Макдональда* или *модифицированная функция Бесселя третьего рода* [5] — удовлетворяют дифференциальному уравнению

$$\frac{d^2 Z_\nu}{dz^2} + \frac{1}{z}\frac{dZ_\nu}{dz} - \left(1 + \frac{\nu^2}{z^2}\right) Z_\nu = 0, \tag{5.3}$$

и также линейно независимы.

Для указанных пар функций определители Вронского равны

$$W[J_\nu(z),\ Y_\nu(z)] = J_{\nu+1}(z)\,Y_\nu(z) - J_\nu(z)\,Y_{\nu+1}(z) = 2/\pi z; \tag{5.4}$$

$$W[I_\nu(z),\ K_\nu(z)] = I_\nu(z)\,K_{\nu+1}(z) + I_{\nu+1}(z)\,K_\nu(z) = 1/z. \tag{5.5}$$

Характерной особенностью $J_\nu(z)$ и $I_\nu(z)$ является ограниченность при z, стремящемся к нулю по любому направлению в комплексной плоскости z. В окрестности $z = 0$ функции *разлагаются* в следующие *степенные ряды*:

$$J_\nu(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^\nu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-z^2/4)^k}{k!\,\Gamma(\nu+k+1)}, \quad |\arg z| < \pi; \tag{5.6}$$

$$I_\nu(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^\nu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z^2/4)^k}{k!\,\Gamma(\nu+k+1)}, \quad |\arg z| < \pi. \tag{5.7}$$

Аналогичные *разложения для функций Неймана и Макдональда* для целых $\nu = n$:

$$Y_n(z) = \frac{2}{\pi} J_n(z) \ln\left(\frac{z}{2}\right) - \frac{(2/z)^n}{\pi} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-k-1)!\,(z^2/4)^k}{k!} - $$

$$ - \frac{(z/2)^n}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} [\psi(k+1) + \psi(k+n+1)] \frac{(-z^2/4)^k}{k!\,(n+k)!}; \tag{5.8}$$

$$K_n(z) = (-1)^{n+1} I_n(z) \ln\left(\frac{z}{2}\right) + \frac{(2/z)^n}{2} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-k-1)!}{k!} \left(-\frac{z^2}{4}\right)^k + $$

$$ + (-1)^n \frac{(z/2)^n}{2} \sum_{k=1}^{\infty} [\psi(k+1) + \psi(n+k+1)] \frac{(z^2/4)^k}{k!\,(n+k)!}. \tag{5.9}$$

Здесь $\psi(k)$ — логарифмическая производная гамма-функции (см. гл. 2). При целых значениях аргумента

$$\psi(k+1) = -\gamma + \sum_{m=1}^{k} \frac{1}{m}, \quad k > 1; \quad \psi(1) = -\gamma, \tag{5.10}$$

где $\gamma = 0{,}57721566\ldots$ — постоянная Эйлера.

Если параметр ν не является целым, то $Y_\nu(z)$ и $K_\nu(z)$ могут быть выражены через $J_\nu(z)$ и $I_\nu(z)$:

$$Y_\nu(z) = \frac{J_\nu(z)\cos(\nu\pi) - J_{-\nu}(z)}{\sin(\nu\pi)}; \tag{5.11}$$

$$K_\nu(z) = \frac{\pi}{2} \frac{I_{-\nu}(z) - I_\nu(z)}{\sin(\nu\pi)}. \tag{5.12}$$

Ввиду того, что при целых $\nu = n$ функция $J_{-n}(z) = J_n(z)\cos(n\pi)$, а $I_{-n}(z) = I_n(z)$, формулы (5.11) и (5.12) определяют Y_n и K_n лишь как результат предельного перехода $\nu \to n$, а потому в этом случае малоэффективны при вычислениях с ограниченной точностью ПМК. Формулу (5.12) нельзя также применять

для вещественных $z = x \gg |\nu|$. Здесь при вычислении разности $I_{-\nu}(x) - I_\nu(x)$ существенно возрастают ошибки округления, так как $I_{-\nu}$ и I_ν быстро увеличиваются и сближаются при больших x.

Асимптотические разложения Ханкеля функций Бесселя и модифицированных функций Бесселя при больших значениях аргумента ($z \to \infty$, ν фиксировано):

$$J_\nu(z) = \sqrt{2\pi/z}\,[P(\nu,\ z)\cos\chi - Q(\nu,\ z)\sin\chi], \quad |\arg z| < \pi; \tag{5.13}$$

$$Y_\nu(z) = \sqrt{2\pi/z}\,[P(\nu,\ z)\sin\chi + Q(\nu,\ z)\cos\chi], \quad |\arg z| < \pi, \tag{5.14}$$

где

$$P(\nu,\ z) \approx 1 - \frac{(\nu^2 - 1/4)(\nu^2 - 9/4)}{2!\,(2z)^2} + $$

$$ + \frac{(\nu^2-1/4)(\nu^2-9/4)(\nu^2-25/4)(\nu^2-49/4)}{4!\,(2z)^4} - \ldots;$$

$$Q(\nu,\ z) \approx \frac{\nu^2-1/4}{2z} - \frac{(\nu^2-1/4)(\nu^2-9/4)(\nu^2-25/4)}{3!\,(2z)^3} + \ldots;$$

$$\chi = z - \left(\nu + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2}; \tag{5.15}$$

$$I_\nu(z) \approx \frac{e^z}{\sqrt{2\pi z}} \left[1 - \frac{\nu^2-1/4}{2z} + \frac{(\nu^2-1/4)(\nu^2-9/4)}{2!\,(2z)^2} - \ldots\right]; \tag{5.16}$$

$$K_\nu(z) \approx \sqrt{\frac{\pi}{2z}}\, e^{-z} \left[1 + \frac{\nu^2-1/4}{2z} + \frac{(\nu^2-1/4)(\nu^2-9/4)}{2!\,(2z)^2} + \ldots\right],$$

$$|\arg z| < \frac{3\pi}{2}. \tag{5.17}$$

Асимптотические разложения при больших значениях порядка ν ($z = x > 0$, $\nu \gg 1$, $x/\nu < 1$) — *разложения Дебая* — полезны для вычисления $J_\nu(x)$ и $I_\nu(x)$ в сочетании с рекуррентными соотношениями, применяемыми в обратном направлении (см. ниже). Далее приведены разложения Дебая до слагаемых ν^{-2} включительно. Запись последних членов в скобках у всех разложений является результатом аппроксимации, приемлемой при $|x/\nu| < 0{,}5$:

$$J_\nu(x) \approx \frac{e^{\nu(\text{th}\,\alpha - \alpha)}}{\sqrt{2\pi\nu\,\text{th}\,\alpha}} \left[1 + \frac{3\,\text{cth}\,\alpha - 5\,\text{cth}^3\alpha}{24\nu} + \frac{e^{8|z|-5}}{2\nu^2}\right]; \tag{5.18}$$

$$Y_\nu(x) \approx \frac{e^{\nu(\alpha - \text{th}\,\alpha)}}{\sqrt{\pi\nu\,\text{th}\,\alpha/2}} \left[1 - \frac{3\,\text{cth}\,\alpha - 5\,\text{cth}^3\alpha}{24\nu} + \frac{e^{8|z|-5}}{2\nu^2}\right]; \tag{5.19}$$

$$I_\nu(x) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi\nu}} \frac{e^{\nu\eta}}{(1+z^2)^{1/4}} \left[1 + \frac{3t - 5t^3}{24\nu} + \frac{2 - 25|z|}{(20\nu)^2}\right]; \tag{5.20}$$

$$K_\nu(x) \approx \sqrt{\frac{\pi}{2\nu}} \frac{e^{-\nu\eta}}{(1+z^2)^{1/4}} \left[1 - \frac{3t - 5t^3}{24\nu} + \frac{2 - 25|z|}{(20\nu)^2}\right], \tag{5.21}$$

где $\text{ch}\,\alpha = \dfrac{\nu}{x}$; $z = \dfrac{x}{\nu}$; $t = \dfrac{1}{\sqrt{1+z^2}}$; $\eta = \sqrt{1+z^2} + \ln\dfrac{z}{1+\sqrt{1+z^2}}$.

Рекуррентные формулы ($z = x + j\,y$):

$$R_{\nu-1}(z) + R_{\nu+1}(z) = (2\nu/z)\,R_\nu(z); \tag{5.22}$$

$$R'_\nu(z) = -R_{\nu+1}(z) + (\nu/z)\,R_\nu(z). \tag{5.23}$$

Здесь $R_\nu(z)$ означают $J_\nu(z)$, $Y_\nu(z)$, $H^{(1)}_\nu(z)$, $H^{(2)}_\nu(z)$ или любую их линейную комбинацию, коэффициенты которой не зависят от ν и z.

Для модифицированных функций Бесселя

$$T_{\nu-1}(z) - T_{\nu+1}(z) = (2\nu/z)\,T_\nu(z); \tag{5.24}$$

$$T'_\nu(z) = T_{\nu+1}(z) + (\nu/z)\,T_\nu(z). \tag{5.25}$$

Здесь $T_\nu(z)$ означают $I_\nu(z)$, $e^{j\pi\nu} K_\nu(z)$ или любую их линейную комбинацию. Для целых $\nu = n$

$$K_{n+1}(z) - K_{n-1}(z) = (2n/z)\,K_n(z);$$
$$K'_n(z) = (n/z)\,K_n(z) - K_{n+1}(z). \tag{5.26}$$

Остановимся подробнее на применении указанных рекуррентных формул. Согласно (5.18)—(5.21) $J_\nu(z)$ и $I_\nu(z)$ как функции ν в области $\nu > x$ быстро уменьшаются с увеличением ν (примерно как $\nu^{-\nu}$), тогда как $Y_\nu(z)$ и $K_\nu(z)$ возрастают и также приблизительно по этому же закону. Применим рекуррентные формулы (5.22) к функциям $F_\nu(z)$ и $F_{\nu-1}(z)$, являющимся линейными комбинациями вида $F_\nu(z) = C_1 J_\nu(z) + C_2 Y_\nu(z)$. Очевидно, что N-кратное повторение рекуррентного преобразования (5.22) приведет к такой результирующей функции $F_{\nu+N}(z)$, которая определяется коэффициентом C_2 и практически не зависит от C_1. Это же справедливо для функций $\Phi_\nu = D_1 I_\nu(z) + D_2 K_\nu(z)$: при достаточно больших $N\Phi_{\nu+N} \sim D_2$. Если рекуррентные формулы применяются в обратном направлении, т. е. в сторону уменьшения ν, ситуация естественно меняется на противоположную.

Указанные соображения прежде всего делают очевидным вывод о вычислительной неустойчивости разностных схем, связанных с многократным применением рекуррентных формул в прямом направлении к убывающим функциям порядка ν $J_\nu(z)$ и $I_\nu(z)$ или в обратном направлении к $Y_\nu(z)$ и $K_\nu(z)$. Действительно, приближенные значения, например, исходной пары функций $J_{\nu-1}(z)$, $J_\nu(z)$ можно рассматривать как суперпозицию точных значений этих функций и некоторой «примеси» $Y_{\nu-1}(z)$ и $Y_\nu(z)$, которая, возрастая после выполнения достаточного числа итераций, очевидно, и определит результирующее значение функции. Наоборот, рекуррентные формулы для $Y_\nu(z)$ или $K_\nu(z)$ образуют в прямом направлении устойчивую разностную схему. Применение рекуррентных формул в обратном направлении является устойчивым для $J_\nu(z)$ и $I_\nu(z)$ и неустойчивым для $Y_\nu(z)$ и $K_\nu(z)$. Отметим, что неустойчивые рекуррентные схемы все же можно применять в области $\nu < x$, где не происходит указанного монотонного изменения функций.

«Однонаправленность» рекуррентных формул может быть эффективно использована для вычислений. Соответствующий алгоритм был разработан Миллером [14] (см. также [9,10]), который применил (5.22) в обратном направлении для расчета $J_n(x)$. Допустим, что для начала процесса при $N \gg n$, где n — порядок искомой функции $J_n(z)$, выбраны функции $F_{N+1}(z)$ и $F_N(z)$. Следуя [14], примем $F_{N+1} = 0$, $F_N = 1$. Используя многократно рекуррентную формулу (5.22), получаем последовательность функций $F_{N-1}(z)$, $F_{N-2}(z)$, ..., $F_n(z)$.

Если N выбрано достаточно большим, то начиная с некоторого $m > n$ $F_m(z)$, $F_{m-1}(z)$, ..., $F_n(z)$ пропорциональны $J_m(z)$, $J_{m-1}(z)$, ..., $J_n(z)$, т.е.

$$F_k(z) = P(z)\,J_k(z), \quad k = m,\ m-1\ \ldots,\ n, \tag{5.27}$$

где $P(z)$ не зависит от k. Множитель $P(z)$, в общем комплексный, может быть получен сравнением одной из функций с табличным значением $J_m(z)$. Некоторые методы нормировки, в которых не требуется прибегать к таблицам функций, указаны в [9, 10].

Ниже описывается более простой способ, использующий асимптотические разложения $Y_M(z)$ или $K_M(z)$ относительно $M \gg 1$. Рассмотрим два набора значений $F_{N+\nu+1}$, $F_{N+\nu}$, каждый из которых можно независимо применять для начала разностной схемы:

$$F^{(1)}_{N+\nu} = 1, \quad F^{(1)}_{N+\nu+1} = 0;$$
$$F^{(2)}_{N+\nu} = 0, \quad F^{(2)}_{N+\nu+1} = 1. \tag{5.28}$$

Для каждой из этих пар получаем согласно (5.27) после достаточного числа итераций по рекуррентной формуле (5.22) в обратном направлении функции

$$F^{(1)}_{k+\nu} = P^{(1)}(z)\,J_{k+\nu}(z); \quad F^{(2)}_{k+\nu}(z) = P^{(2)}(z)\,J_{k+\nu}(z),$$
$$k = m,\ m-1,\ \ldots,\ 0,\quad m \ll N. \tag{5.29}$$

Выполним те же итерации, приняв в качестве начальных значений $F^{(3)}_{N+\nu} = A$, $F^{(3)}_{N+\nu+1} = B$. Ввиду линейности рекуррентных формул при учете (5.28) и (5.29) после достаточного числа шагов должны сформироваться функции

$$F^{(3)}_{k+\nu} = [A P^{(1)}(z) + B P^{(2)}(z)]\,J_{k+\nu}(z), \quad k = m,\ m-1, \ldots,\ 0. \tag{5.30}$$

Установим теперь $A = J_{N+\nu}(z)$, $B = J_{N+\nu+1}(z)$. Тогда на любом шаге в обратном направлении вследствие устойчивости (5.22) это рекуррентное соотношение будет приводить к $F_{n+\nu}$, совпадающим с правильными значениями $J_{n+\nu}(z)$, $n < N$. Следовательно, из (5.30) получим

$$J_{N+\nu}(z)\,P^{(1)}(z) + Z_{N+\nu+1}\,P^{(2)}(z) = 1. \tag{5.31}$$

Сравним (5.31) с вронскианом (5.4). Ввиду того, что оба эти соотношения должны выполняться тождественно,

$$P^{(1)}(z) = -Y_{N+\nu+1}(z)\,\pi z/2; \quad P^{(2)}(z) = Y_{N+\nu}(z)\,\pi z/2. \tag{5.32}$$

Таким образом, для получения $J_\nu(z)$ путем многократного применения (5.22) в обратном направлении достаточно задать

$$F_{N+\nu}(z) = -2/\pi z Y_{N+\nu+1}(z), \quad F_{N+\nu+1} = 0. \tag{5.33}$$

или

$$F_{N+\nu} = 0, \quad F_{N+\nu+1}(z) = 2/\pi z Y_{N+\nu}(z).$$

Аналогично для вычисления $I_\nu(z)$ по рекуррентным формулам (5.24) в обратном направлении можно задать (ср. с. (5.5))

$$F_{N+\nu}(z) = -1/z\,K_{N+\nu+1}(z), \quad F_{N+\nu+1} = 0$$

или (5.34)

$$F_{N+\nu}(z) = 0, \quad F_{N+\nu+1}(z) = 1/z K_{N+\nu}(z).$$

Функции $Y_{N+\nu}(z)$ или $K_{N+\nu}(z)$ находятся из асимптотических разложений Дебая. Ввиду того, что расчеты по рекуррентным формулам типа (5.22), (5.24) производятся с большой скоростью, а разрядность чисел в ПМК достаточно велика, можно брать большие N и использовать с высокой точностью простейшие приближения типа (5.18)—(5.21). Этот способ реализован в программе 5.11.

Отметим, что при выводе (5.33) не использовался конкретный вид рекуррентных формул. Важно лишь, чтобы эти соотношения были линейными и трехчленными и им удовлетворяли линейно независимые функции с противоположным монотонным изменением в зависимости от ν (при больших ν).

Сферические и *модифицированные сферические функции Бесселя* по определению пропорциональны функциям Бесселя порядка $(n+1/2)$:

$$\begin{aligned} j_n(z) &= \sqrt{\pi/2z}\, J_{n+1/2}(z), \quad y_n(z)=\sqrt{\pi/2z}\, Y_{n+1/2}(z), \\ i_n(z) &= \sqrt{\pi/2z}\, I_{n+1/2}(z), \quad k_n(z)=\sqrt{\pi/2z}\, K_{n+1/2}(z) \end{aligned} \tag{5.35}$$

и удовлетворяют дифференциальному уравнению

$$z^2\frac{d^2W}{dz^2}+2z\frac{dW}{dz}\pm[z^2\mp n(n+1)]W=0, \quad n=0,\ \pm1,\ \pm2,\ldots, \tag{5.36}$$

где верхние знаки относятся к $j_n(z)$, $y_n(z)$, а нижние — к $i_n(z)$, $k_n(z)$. Заметим, что асимптотические разложения Ханкеля (5.13)—(5.17) при $\nu=n+1/2$ обрываются на n-м слагаемом и переходят в конечные суммы. Эти суммы оказываются точными представлениями функций $J_{n+1/2}$, $Y_{n+1/2}$, $K_{n+1/2}$. Указанные функции и соответствующие им сферические функции образуют единственную разновидность функций Бесселя, выражающихся в виде конечных сумм элементарных функций.

Функции Кельвина определяются для действительных $z=x$ следующими формулами:

$$\begin{aligned} \mathrm{ber}_\nu(x)+\mathrm{j}\,\mathrm{ber}_\nu(x) &= J_\nu(x\mathrm{e}^{\mathrm{j}3\pi/4}) = W_1; \\ \mathrm{ker}_\nu(x)+\mathrm{j}\,\mathrm{ker}_\nu(x) &= \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\nu\pi/2}K_\nu(x\mathrm{e}^{\mathrm{j}\pi/4}) = W_2 \end{aligned} \tag{5.37}$$

(при $\nu=0$ индекс 0 у функций Кельвина не пишется) и удовлетворяют дифференциальному уравнению

$$x^2\frac{d^2W}{dx^2}+\frac{x\,dW}{dx}-(\mathrm{j}x^2+\nu^2)W=0. \tag{5.38}$$

Функции Эйри удовлетворяют дифференциальному уравнению

$$\frac{d^2W}{dz^2}-zW=0. \tag{5.39}$$

Обычно в качестве линейно независимых решений используются функции Ai (z) и Bi (z), которые в окрестности $z=0$ разлагаются в следующие степенные ряды:

$$\mathrm{Ai}(z)=C_1f(z)-C_2\,g(z); \quad \mathrm{Bi}(z)=\sqrt{3}[C_1f(z)+C_2g(z)], \tag{5.40}$$

где

$$\begin{aligned} f(z) &= 1+\frac{1}{3!}z^3+\frac{1\cdot4}{6!}z^6+\frac{1\cdot4\cdot7}{9!}z^9+\ldots; \\ g(z) &= z+\frac{2}{4!}z^4+\frac{2\cdot5}{7!}z^7+\frac{2\cdot5\cdot8}{10!}z^{10}+\ldots; \end{aligned} \tag{5.40а}$$

$C_1=3^{-2/3}\,\Gamma(2/3)=3{,}5502805\cdot10^{-1}$; $C_2=3^{-1/3}\,\Gamma(1/3)=2{,}5881940\cdot10^{-1}$.

5.2. Функции Бесселя, Неймана, Ханкеля, модифицированные функции Бесселя, функции Макдональда и Кельвина целого порядка

Здесь приведены лишь те алгоритмы и программы, которые применимы к функциям целого порядка $\nu=n$. Случаи, относящиеся одновременно к целым и дробным ν или только к дробным ν, включены в § 5.3. К ним принадлежат, в частности, расчеты функций по асимптотическим формулам Ханкеля и Дебая.

Разложение (5.6) *функции* $J_\nu(z)$ *в бесконечный ряд* для целых $\nu=n$ удобно записать в виде

$$J_n(z)=\left(\frac{z}{2}\right)^n\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-z^2/4)^k}{k!\,(n+1)(n+2)\ldots(n+k)}, \tag{5.41}$$

Представим (5.41) в виде, соответствующем схеме Горнера:

$$J_n(z)\approx\left(\frac{z}{2}\right)^n n!\left\{\left[\ldots\left(\frac{(-z^2/4)}{N(n+N)}+1\right)\frac{(-z^2/4)}{(N-1)(n+N-1)}+\ldots\right]\frac{(-z^2/4)}{1\cdot(n+1)}+1\right\}. \tag{5.42}$$

Ряд для $I_n(z)$ и схема Горнера будут отличаться лишь знаком при множителях $z^2/4$ (ср. формулы (5.6), (5.7)).

Преобразуем ряды (5.8), (5.9) для функций $Y_n(z)$ и $K_n(z)$ к удобному для вычислений виду. С этой целью заменим $J_n(z)$ и $I_n(z)$, входящие в (5.6), (5.7), на соответствующие ряды типа (5.41). В результате получим

$$\pi Y_n(z)=S_1+\left(\frac{z}{2}\right)^n\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-z^2/4)^k}{k!\,(n+1)(n+2)\ldots(n+k)}M_k; \tag{5.43}$$

$$-2K_n(z)=S_2-\left(-\frac{z}{2}\right)^{-n}\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(z^2/4)^k}{k!\,(n+1)(n+2)\ldots(n+k)}M_k, \tag{5.44}$$

где

$$S_{1,2}=-\left(\frac{z}{2}\right)^{-n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(n-k-1)!\,(\pm z^2/4)}{k!}$$

(знаки (+) и (—) соответствуют S_1 и S_2); при $n=0{,}1$ $S_1=S_2$ и равны соответственно 0 и $-2/z$;

$$M_k=\ln z+2\gamma-\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{m}-\sum_{m=1}^{k}\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{m+n}\right), \quad k=1,\ 2,\ldots;$$

$$M_0=\ln z+2\gamma-\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{m}, \quad \gamma=0{,}57721566.$$

Вычисление $Y_n(z)$ и $K_n(z)$ может быть реализовано на ПМК при любом n непосредственно по формулам (5.43), (5.44). Однако программы получаются более короткими, а погрешности — меньшими, если сначала вычислить Y_0, Y_1 (соответственно K_0, K_1), а затем применить рекуррентные формулы в прямом направлении, которые, как отмечалось выше, устойчивы для указанных функций.

Запишем для этих случаев разложения (5.43), (5.44) по схеме Горнера ($n=0,1$):

$$\pi Y_n(z)\approx-\frac{2n}{z}+\left(\frac{z}{2}\right)^n\left\{\left[\cdots\left(\frac{(-z^2/4)}{N(N+n)}+\Pi_{N-1}-\frac{n}{N}\right)\times\right.\right.$$

$$\left.\left.\times\frac{(-z^2/4)}{(N-1)(N-1+n)}+\cdots\right]\frac{(-z^2/4)}{1(1+n)}+\Pi_0-\frac{n}{1}\right\}; \qquad (5.45)$$

$$2K_n(z)\approx\frac{2n}{z}-\left(\frac{z}{2}\right)^n\left\{\left[\cdots\left(\frac{(z^2/4)}{N(N+n)}+\Pi_{N-1}-\frac{n}{N}\right)\times\right.\right.$$

$$\left.\left.\times\frac{(z^2/4)}{(N-1)(N-1+n)}+\cdots\right]\frac{(z^2/4)}{1(1+n)}+\Pi_0-\frac{n}{1}\right\}, \qquad (5.46)$$

где

$$\Pi_N=\ln\left(\frac{z^2}{4}\right)+2\gamma-\sum_{m=1}^{N}\frac{2}{m};\quad \Pi_0=\ln\left(\frac{z^2}{4}\right)+2\gamma,\quad N=1,2,\ldots .$$

Целесообразно при вычислениях использовать очевидную рекуррентную формулу $\Pi_{k-1}=\Pi_k+2/k$ $(k=1,2,\ldots)$.

Заметим, что хотя бесконечный ряд для $K_n(x)$, входящий в (5.46), не выглядит как знакочередующийся, однако из-за изменения знака Π_k при некотором k он равен разности двух больших величин. С увеличением $\mathrm{Re}\,z=x$ данные величины заведомо сближаются, так как $|K_n|(z)|$ при $x\gg 1$ экспоненциально малы (ср. асимптотическое разложение (5.17)). Это приводит к значительным погрешностям округления уже при $x>6$. Указанный недостаток компенсируется при вычислении $K_n(x)$ по асимптотическим фрмулам (5.17) (программа 5.7). Расчет ведется в два этапа. Сначала по (5.17) находятся $K_0(x)$ и $K_1(x)$, в этом случае имеет место наилучшая сходимость (5.17). Затем используется рекуррентная формула (5.24) для нахождения $K_n(x)$, образующая устойчивую разностную схему в прямом направлении.

Программа 5.1. Функции Бесселя $J_n(x)$ и модифицированные функции Бесселя $I_n(x)$ вещественного аргумента $x>0$, $n=0,1,2,\ldots$. Разложение в ряд по схеме Горнера (5.42).

П1	2	÷	ПС	Fx^2	/—/	ПД	9	ИП1	+
П0	ИПВ	ВП	П1	ИПВ	ИПС	Fx^y	1	ИПД	×
ИП0	÷	ИП0	ИПВ	+	÷	1	+	FL0	18
×	ИП1	÷	FL1	31	С/П				

Данный вариант программы относится к $J_n(x)$. Для перехода к $I_n(x)$ следует заменить команду /—/ (адрес 05) на КНОП. Число учитываемых членов ряда в программе $N=x+9$.

Инструкция

1. Исходные данные: (n = РВ), [x = РХ].
2. Пуск: В/О С/П.
3. Результат: РХ = $J_n(x)$ (или $I_n(x)$.
4. Регистры: рабочие РВ; оперативные Р0, Р1, РС, РД; свободные Р2—РА.
5. Погрешность:

а) для $J_n(x)$ следует различать область $x\geqslant n$, где функции осциллируют около нуля с амплитудой $\sim 0{,}1$, и область монотонного изменения $x\leqslant n$, где функции меняются на много порядков. В первом случае следует оперировать абсолютной погрешностью Δ, а во втором — относительной δ. Максимальные погрешности равны:

$x\geqslant n$	Δ	$x\leqslant n$	δ	$x\geqslant n$	Δ	$x\leqslant n$	δ
$x\leqslant 12$	$\leqslant 2\cdot10^{-4}$	$x\leqslant 25$	$\leqslant 2\cdot10^{-3}$	$x\leqslant 6$	$\leqslant 1\cdot10^{-6}$	$x\leqslant 15$	$\leqslant 1\cdot10^{-5}$
$x\leqslant 9$	$\leqslant 1\cdot10^{-5}$	$x\leqslant 20$	$\leqslant 1\cdot10^{-4}$	$x\leqslant 4$	$\leqslant 1\cdot10^{-7}$	$x\leqslant 8$	$\leqslant 1\cdot10^{-6}$

б) для $I_n(x)$ относительная погрешность меньше $2\cdot10^{-6}$ (при $x\leqslant 100$).
6. Время счета $t\approx(0{,}6+x/15+n/30)$ мин.

Примеры.

$J_0(7)=0{,}3000779$ $(0{,}30007927)$ [9], $t\approx 1$ мин;

$J_0(10)=-0{,}2459225$ $(-0{,}2459358$ [9]), $t\approx 1$ мин;

$J_{20}(10)=1{,}1513342\cdot10^{-5}$ $(1{,}1513369\cdot10^{-5}$ [9]), $t\approx 2$ мин;

$I_0(100)=1{,}0737501\cdot10^{42}$ $(1{,}07375171\cdot10^{42}$ [9]), $t\approx 7$ мин.

Здесь преимущество может иметь программа, использующая асимптотический ряд (см. § 5.3).

Программа 5.2. Функции Неймана $Y_0(x)$, $Y_1(x)$ вещественного аргумента $0<x\leqslant 12$. Разложение в ряд по схеме Горнера (5.45).

П8	2	÷	ПС	Fx^2	/—/	ПД	1	1	ИП8
+	П8	П0	ИПВ	ИПС	Fln	+	ИП0	F1/x	—
FL0	17	П9	ИП8	·	1	ИПД	×	ИП0	÷
ИП0	ИПА	+	÷	ИП9	ИП0	F1/x	+	П9	FBx
2	÷	ИПА	×	—	+	FL0	26	1	Farcsin
÷	П9	ИПС	×	ИПС	F1/x	Fπ	÷	—	С/П

Инструкция

1. Исходные данные: ($\gamma=5{,}7721566\cdot10^{-1}$ = РВ, n = РА), [x = РХ] При вычислении $Y_0(x)$ и $Y_1(x)$ следует задавать соответственно $n=0$ и $n=1$.
2. Пуск В/О С/П.
3. Результат: РХ = $Y_1(x)$ (при $n=1$), Р9 = $Y_0(x)$ (при $n=0$).
4. Регистры: рабочие Р9, РА, РВ; оперативные Р0, Р8, РС, РД; свободные Р1 — Р7.
5. Погрешность: при $x\leqslant 0{,}8$ (относительная) меньше $5\cdot10^{-7}$, при $x>0{,}8$ (абсолютная) $2\cdot10^{-5}$ при $x\leqslant 12$, $2\cdot10^{-6}$ при $x\leqslant 10$, $2\cdot10^{-7}$ при $x\leqslant 7$.
6. Время счета $t\approx(1{,}5+x/7)$ мин.

Примеры.

$Y_0(12)=-0{,}22525097$ $(-0{,}2252373126$ [9]), $t\approx 3$ мин;

$Y_0(5)=-0{,}30851766$ $(-0{,}308517625$ [9]), $t\approx 2{,}5$ мин,

$Y_1(5)=0{,}14786312$ $(0{,}14786314$ [9]), $t\approx 2{,}5$ мин.

Программа 5.3. Функции Бесселя второго рода $Y_n(x)$ и производные $Y'_n(x)$ вещественного аргумента $0<x\leqslant 12$, $n=0,1,2,\ldots$ Разложение в ряды по схеме Горнера $Y_0(x)$ и $Y_1(x)$ (5.45) и рекуррентные формулы (5.22), (5,23).

ПВ	2	÷	ПС	Fx^2	ПД	6	ИПВ	2	×
+	П0	П7	ИП8	ИПД	Fln	÷	2	ИП0	÷
—	FL0	17	ПА	1	ПП	69	ИПС	×	ИПС
F1/x	—	ПВ	0	ПП	69	ПА	ИП1	Fx≠0	65
КИП6	ИПА	/—/	ИП6	ИПС	÷	ИПВ	ПА	×	ПД
+	ПВ	FL1	40	ИПВ	Fπ	÷	П7	ИПА	Fπ
÷	П9	ИПД	2	÷	ИПВ	—	ПД	С/П	П6
ИПА	П9	ИП7	П0	1	ИПД	/—/	×	ИП0	÷
ИП0	ИП6	+	÷	ИП9	2	ИП0	÷	+	П9
ИП6	ИП0	÷	—	+	FL0	75	В/О		

Инструкция

1. Исходные данные: (2γ = 1,1544313 = Р8), n = Р1, [x = РХ].
2. Пуск: В/О С/П.
3. Результат: при $n \neq 0$ РХ = РД = $\pi Y'_n(x)$, Р9 = $Y_n(x)$, Р7 = $Y_{n+1}(x)$; при $n = 0$ РХ = РД = $\pi Y'_0(x)$, РА = $\pi Y_0(x)$, РВ = $\pi Y_1(x)$.
4. Регистры: рабочие Р6, Р8 — РД; оперативные Р0, Р1; свободные Р2—Р5.
5. Погрешность: в области $x > n$ функции осциллируют около нуля с амплитудой $\sim 0,1$ (за исключением $Y_0(x)$ при малых x) и следует оперировать абсолютной погрешностью Δ. При $x < n$ функции меняются монотонно на много порядков и необходимо использовать относительную погрешность δ. Максимальные погрешности равны:

x	$\Delta_{(x>n)}$	$\delta_{(x<n)}$	x	$\Delta_{(x>n)}$	$\delta_{(x<n)}$
$\leqslant 12$	$\leqslant 2\cdot10^{-5}$	$\leqslant 2\cdot10^{-4}$	$\leqslant 7$	$\leqslant 2\cdot10^{-7}$	$\leqslant 2\cdot10^{-6}$
$\leqslant 10$	$\leqslant 2\cdot10^{-6}$	$\leqslant 2\cdot10^{-5}$	$\leqslant 5$	$\leqslant 1\cdot10^{-7}$	$\leqslant 1\cdot10^{-6}$

Для функции $Y_0(x)$ при $x \leqslant 0,5$ относительная погрешность меньше $1\cdot10^{-6}$

6. Время счета $t \approx (1,5 + 0,6\,x + n/12)$ мин.

Примеры.

$Y_0(8) = 0,2235216$ (0,22352149 [9]), $Y_1(8) = -0.15806059$ ($-0,15806046$ [9]), $t \approx 6,5$ мин;

$Y_{20}(5) = -5,9339667\cdot10^8$ ($-5,9339653\cdot10^8$ [9]), $Y_{21}(5) = -4,6676099\cdot10^9$, $Y'_{20}(5) = 2,2940234\cdot10^9$, $t = 6$ мин.

При необходимости рассчитать дополнительно функцию $Y_{n+k}(x)$ с увеличенным на k (k = 1, 2, ...) порядком и прежним значением аргумента x следует, не изменяя содержимого регистров Р6, Р7, РА — РД, ввести в регистр Р1 число k. Пуск: БП 40 С/П. Результат: РХ = РД = $\pi Y'_{n+k}(x)$, Р9 = $Y_{n+k}(x)$, Р7 = $Y_{n+k+1}(x)$. Время счета при дополнительных пусках $k/12$ мин.

Программа 5.4. Функции Бесселя $J_n(x)$ и Неймана $Y_n(x)$ вещественного аргумента (действительная и мнимая части функций Ханкеля $H_n^{(1)}(x)$ и $H_n^{(2)}(x)$), $0 < x \leqslant 12$, n = 0, 1, 2, ... Разложения в ряд по схеме Горнера для J_n, Y_0 и Y_1 и рекуррентные формулы (5.22).

4	÷	ПС	Fx^2	ПД	6	ИП4	+	П0	П4
ИП8	ИПД	Fln	+	2	ИП0	÷	—	FL0	14
ПВ	0	П7	ПП	65	ПА	П3	1	ПП	65
ИПС	×	ИПС	F1/x	—	ПВ	ИПА	/—/	ИП6	ИПС
÷	ИПВ	ПА	×	+	ПВ	КИП6	FL1	36	1
П7	ИП5	ПП	65	ИП5	Fx≠0	64	F,	ИПС	×
ИП2	÷	FL2	58	С/П	П6	ИПВ	П9	ИП4	П0
1	ИПД	/—/	×	ИП0	÷	ИП0	ИП6	+	÷
ИП7	Fx=0	94	+	ИП9	2	ИП0	÷	+	П9
ИП6	ИП0	÷	—	+	FL0	71	В/О		

Структура программы

00—19: вычисление параметров рядов (5.42), (5.45) N, $x^2/4$, Π_N,
20—35: вычисление $Y_0(x)$, $Y_1(x)$ по формулам (5.45),
36—48: вычисление $Y_n(x)$, $Y_{n+1}(x)$ по рекуррентной формуле (5.22),
49—64: вычисление $J_n(x)$ по формуле (5.42),
65—97: подпрограмма расчета текущего члена ряда для рядов (5.42), (5.45).

Инструкция

1. Исходные данные: (2γ = 1,1544313 = Р8), n = Р5 = Р1 = Р2, [$2x$ = Р4]. Если $n = 0$, то вводить 1 = Р1, а не 0 = Р1.
2. Пуск: В/О С/П.
3. Результат: для $n \neq 0$ РХ = $J_n(x)$, РА = $\pi Y_n(x)$, РВ = $\pi Y_{n+1}(x)$; для $n = 0$ РY = $J_0(x)$, Р3 = $\pi Y_0(x)$.
4. Регистры: рабочие Р3, Р8, РА, РВ; оперативные все остальные, свободных нет.
5. Погрешность $Y_n(x)$ совпадает с погрешностью в программе 5.3, $J_n(x)$ — с погрешностью в программе 5.1.
6. Время счета $t \approx (2,5 + 0,8x + 0,1\,n)$ мин.

Примеры.

$J_0(10) = -0,2459225$ ($-0,24593976$ [9]), $Y_0(10) = 0,055673163$ (0,055671167 [9]), $t = 11$ мин;

$Y_{20}(1) = -4.1139707\cdot10^{22}$ ($-4,1139703\cdot10^{22}$ [9]), $Y_{21}(1) = -1,6445048\cdot10^{24}$, $J_{20}(1) = 3,873502\cdot10^{-25}$ ($3,823503\cdot10^{-25}$), $t = 5,5$ мин.

Программа 5.5. Функции Бесселя $J_n(z)$ и модифицированные функции Бесселя $I_n(z)$ первого рода комплексного аргумента $z = x + jy$, функции Кельвина $\mathrm{ber}_n(t)$, $\mathrm{bei}_n(t)$, $|z| \leqslant 12$, $t \leqslant 12$, n = 0, 1, 2, ... Разложение в ряд (5.42) и формула (5.37).

Fx^2	ИПД	Fx^2	+	F√	9	+	П1	ИПС	2
÷	ПА	ПС	ИПД	2	÷	ПВ	ПД	ПП	59
ПА	XY	ПВ	0	Fπ	ИП1	ИП0	+	ИП1	/—/
×	П9	÷	XY	ИП9	÷	ПП	59	1	+
FL1	25	ПА	XY	ПВ	ИП0	Fx≠0	58	ИПС	ИП0
÷	ИПД	ИП0	÷	ПП	59	FL0	42	С/П	П8
ИПА	×	XY	П7	ИПВ	×	+	ИПА	ИП7	×
ИПВ	ИП8	×	—	В/О					

Данный вариант программы относится к $J_n(z)$. Для перехода к $I_n(z)$ заменить команду /—/ (адрес 29) на КНОП.

Инструкция

1. Исходные данные: $n = P0$, $x = PC$, $[\pm y = PД]$.
2. Пуск: В/О С/П.
3. Результат: для $n \neq 0$ $PX = \mathrm{Re}\, \Pi_n(z)$, $PY = \mathrm{Im}\, \Pi_n(z)$; для $n = 0$ $PA = \mathrm{Re}\, \Pi_0(z)$, $PB = \mathrm{Im}\, \Pi_0(z)$.

Здесь под $\Pi_n(z)$ подразумевается в зависимости от варианта программы $J_n(z)$ или $I_n(z)$.

4. Регистры: рабочие — ; оперативные Р0, Р1, Р7 — РД; свободные Р2 — Р6.
5. Погрешность относительная меньше:

$$4\cdot10^{-3} \text{ при } |z| \leqslant 12, \quad 1\cdot10^{-5} \text{ при } |z| \leqslant 6,$$
$$1\cdot10^{-4} \text{ при } |z| \leqslant 9, \quad 1\cdot10^{-6} \text{ при } |z| \leqslant 4.$$

Эти критерии, однако, несправедливы в окрестности нулей функций, которые расположены у $J_n(z)$ на действительной оси при $|x| > n$, а у $I_n(z)$ на мнимой оси при $|y| > n$. Поэтому для $J_n(z)$, если $|y| < 0{,}1$ и $|x| > n$, или соответственно для $I_n(z)$, если $|x| < 0{,}1$ и $|y| > n$, абсолютная погрешность меньше:

$$5\cdot10^{-4} \text{ при } |z| \leqslant 12, \quad 1\cdot10^{-6} \text{ при } |z| \leqslant 6,$$
$$1\cdot10^{-5} \text{ при } |z| \leqslant 9, \quad 1\cdot10^{-7} \text{ при } |z| \leqslant 4.$$

6. Время счета $t = (1{,}5 + |z|/6 + n/4)$ мин.

При вычислении функций Кельвина следует для приведенного варианта программы вводить $x = -t\sqrt{2}/2$, $y = t\sqrt{2}/2$. Остальные пункты такие же, как в тексте инструкции. Результат: для $n \neq 0$ $PX = \mathrm{ber}_n(t)$, $PY = \mathrm{bei}_n(t)$; для $n = 0$ $PA = \mathrm{ber}(t)$, $PB = \mathrm{bei}(t)$.

Примеры.

$\mathrm{ber}_1(5) = 0{,}3597761$ (0,35977666 [9]), $\mathrm{bei}_1(5) = -5{,}7979071$ ($-5{,}7979079$ [9]), $t = 2{,}5$ мин;

$J_0(2{,}4048256 + j0{,}01) = -1{,}08\cdot10^{-5} - j5{,}1915312\cdot10^{-3}$.

Здесь $x_0 = 2{,}4048256$ — приближенное значение нуля $J_0(x)$. Учитывая, что при малых y в окрестности нуля $J_0(x_0 + jy) \approx jJ_0'(x_0)$, получаем $J_0'(x_0) \approx -0{,}51915312$, табличное значение $J_0'(x_0) = -0{,}51914749$. Таким образом, вводя малую мнимую добавку к известному нулю функции, можно вычислить значение $J_n'(x)$ в нуле (см. также § 5.4).

Программа 5.6. Модифицированные функции Бесселя третьего рода $K_n(x)$ (функции Макдональда) вещественного аргумента, производные $K_n'(x)$, $0 < x \leqslant 6$, $n = 0, 1, 2, \ldots$. Разложение $K_0(x)$, $K_1(x)$ в ряд (5.46) и рекуррентные формулы (5.26).

ПВ	2	÷	ПС	Fx²	ПД	6	ИПВ	2	×
+	П0	П7	ИП8	ИПД	Fln	+	2	ИП0	÷
—	FL0	17	ПА	1	ПП	69	ИПС	×	ИПС
F1/x	+	ПВ	0	ПП	69	/—/	ПА	ИП1	Fx≠0
65	КИП6	ИПА	ИП6	ИПС	÷	ИПВ	ПА	×	ПД
+	ПВ	FL1	41	ИПВ	2	÷	П7	ИПА	2
÷	П9	ИПД	2	÷	ИПВ	—	ПД	С/П	П6
ИПА	П9	ИП7	П0	1	ИПД	×	ИП0	÷	ИП0
ИП6	+	÷	ИП9	2	ИП0	÷	+	П9	ИП6
ИП0	÷	—	+	FL0	75	В/О			

Инструкция

1. Исходные данные: ($2\gamma = 1{,}1544313 = P8$), $n = P1$, $[x = PX]$.
2. Пуск: В/О С/П.
3. Результат: для $n = 0$ $PX = PД = 2K_0'(x)$, $PA = 2K_0(x)$, $PB = 2K_1(x)$; для $n > 0$ $PX = PД = 2K_n'(x)$, $P9 = K_n(x)$, $P7 = K_{n+1}(x)$.

При необходимости рассчитать дополнительно функцию $K_{n+m}(x)$ для того же аргумента ($m = 1, 2, \ldots$) следует, не изменяя содержимого регистров Р6, РА — РД, ввести в регистр Р1 число m, а затем пуск: БП 41 С/П. Результат: $PX = PД = 2K_{n+m}'(x)$, $P9 = K_{n+m}(x)$, $P7 = K_{n+m+1}(x)$. Время счета при дополнительном пуске ($m/12$) мин.

4. Регистры: рабочие Р7 — РД: оперативные Р0, Р1, Р6; свободные Р2 — Р5.
5. Погрешность относительная меньше:

$$2\cdot10^{-3} \text{ при } x \leqslant 6, \quad 1\cdot10^{-5} \text{ при } x \leqslant 3{,}5$$
$$1\cdot10^{-4} \text{ при } x \leqslant 5, \quad 1\cdot10^{-6} \text{ при } x \leqslant 2{,}5.$$

6. Время счета $t \approx (1{,}5 + 0{,}6x + n/12)$ мин.

Примеры.

$K_0(4) = 0{,}0111591$ (0,011159671 [9]), $K_1(4) = 0{,}0124841$ (0,012483499 [9]), $t = 4$ мин;

$K_{20}(5) = 4{,}8271027\cdot10^8$ ($4{,}8270005\cdot10^8$ [9]),
$K_{20}'(5) = -1{,}9932376\cdot10^9$,
$K_{21}(5) = 3{,}9240787\cdot10^9$,
$t = 6$ мин.

Программа 5.7. Модифицированные функции Бесселя $K_n(x)$ вещественного аргумента и производные $K_n'(x)$, $|x| \geqslant 3$, $n = 0, 1, 2, \ldots$. Асимптотическое разложение (5.17) для $K_0(x)$, $K_1(x)$ и рекуррентные формулы (5.26).

Fπ	ИПС	2	÷	П9	4	×	ПД	÷	F√
ИПС	Feˣ	÷	П8	0	ПП	47	ПА	1	ПП
47	ПВ	ИП1	Fx≠0	43	0	П6	КИП6	ИПА	ИП6
ИП9	÷	ИПВ	ПА	×	ПД	+	ПВ	FL1	27
ИПД	2	÷	ИПВ	—	ПД	С/П	ПВ	9	П0
1	ИПВ	ИП0	2	F1/x	—	Fx²	—	×	ИП0
÷	ИПД	÷	1	+	FL0	51	ИП8	×	В/О

Инструкция

1. Исходные данные: ($x = PC$), $n = P1$.
2. Пуск: В/О С/П.
3. Результат: $PX = PД = K_n'(x)$, $PA = K_n(x)$, $PB = K_{n+1}(x)$.
4. Регистры: рабочие РА — РД; оперативные Р0, Р1, Р6, Р8, Р9; свободные Р2 — Р5, Р7.
5. Погрешность относительная меньше:

$$1\cdot10^{-3} \text{ при } x \geqslant 3, \quad 1\cdot10^{-5} \text{ при } x \geqslant 4{,}8,$$
$$1\cdot10^{-4} \text{ при } x \geqslant 3{,}8, \quad 1\cdot10^{-6} \text{ при } x \geqslant 6.$$

6. Время счета $t \approx (2 + n/12)$ мин.

Примеры.

$K_0(5) = 0{,}0036910763$ (0,0036910983 [9]), $K_1(5) = 0{,}0040446375$ (0,0040446134 [9]), $t = 2$ мин;

$K_{17}(10) = 3{,}0868696$ (3,08686999 [9]), $K'_{17}(10) = -6{,}129307$ ($-6{,}129308$ [9]), $K_{18}(10) = 11{,}376986$ (11,3769872 [9]), $t = 3{,}5$ мин.

5.3. Функции Бесселя, Неймана, Ханкеля, модифицированные функции Бесселя, функции Макдональда дробного порядка. Сферические функции Бесселя

Схему Горнера разложения $J_\nu(x)$ *в бесконечный ряд* (5.6) запишем, вынеся за знак суммы фактор $1/\Gamma(\nu + N + 1)$, где N — число учитываемых членов ряда:

$$J_\nu(z) \approx \left(\frac{z}{2}\right)^\nu \frac{1}{\Gamma(\nu+N+1)} \left\{\left[\left[\ldots\left(\frac{-z^2/4}{N} + \nu + N\right)\frac{(-z^2/4)}{N-1} + (\nu+N)(\nu+N-1)\right]\frac{(-z^2/4)}{N-2} + \ldots\right]\frac{-(z^2/4)}{1} + (\nu+N)(\nu+N-1)\ldots(\nu+1)\right\}. \quad (5.47)$$

Такая запись удобна тем, что при достаточно больших N значения $\Gamma(\nu + N + 1)$ можно найти сразу по асимптотической формуле (2.4).

Ряд для $I_\nu(z)$ получается из (5.47) изменением знака у множителей $z^2/4$. Оба разложения пригодны также и для $\nu < 0$. Это позволяет, в частности, использовать соотношения (5.11) и (5.12) при дробных ν для вычисления $Y_\nu(z)$ и соответственно $K_\nu(z)$. При этом следует иметь в виду ограничения, упомянутые в связи с формулой (5.12).

Асимптотические разложения Ханкеля функций $J_\nu(z)$, $Y_\nu(z)$, $I_\nu(z)$, $K_\nu(z)$ (формулы (5.13) — (5.17)) также целесообразно реализовать по схеме Горнера. В данном случае эта схема не имеет существенных особенностей и соответствующие ряды не выписываются. Отметим, что наилучшей сходимостью обладает разложение для $K_\nu(x)$, применимое начиная с $x = 2$.

Асимптотические разложения Дебая (5.19), (5.21), в сочетании с рекуррентными формулами (5.22) (см. также (5.33), (5.34)) позволяют находить $J_\nu(x)$ и $I_\nu(x)$ в наиболее широкой области вещественного аргумента при равномерной погрешности практически во всей области. Для получения хорошего приближения $Y_{N+\nu}(x)$ и $K_{N+\nu}(x)$, входящих в (5.33), (5.34), требуются достаточно большие N. При очень малых x ($\sim 10^{-3}$) значения этих функций могут оказаться настолько большими ($\sim (2/x)^N N!$), что выйдут за разрядную сетку ЭВМ. На рис. 5.1. представлены максимальные в указанном смысле значения $N + \nu$ как функции x (максимальный порядок чисел принимался равным 10^{99}). График можно использовать для задания N в программе 5.11. Допустимая область значений x и ν может быть расширена программными средствами. Однако необходимые коррективы программы связаны с добавлением чрезмерно большого числа команд.

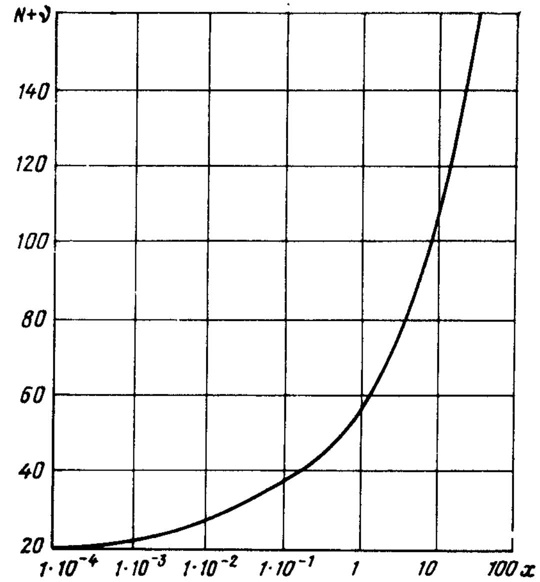

Рис. 5.1. Предельные значения числа итераций N при вычислении функций Бесселя $J_\nu(z)$, $I_\nu(z)$ по асимптотическим формулам Дебая, рекуррентным формулам (5.33) и формулам (5.34)

Программа 5.8. Функции Бесселя $J_\nu(x)$ и модифицированные функции Бесселя $I_\nu(x)$ вещественного аргумента. Разложение в ряд (5.47), $x > 0$.

2	÷	ПС	Fx²	/—/	ПД	ИПВ	ИПС	Fxʸ	ИП0
ИПВ	+	1	П9	+	ПА	Fln	1	—	ИПА
×	ИПА	1	2	×	F1/x	+	Feˣ	÷	Fπ
2	×	ИПА	÷	F√	÷	1	ИПД	×	ИП0
÷	ИП0	ИПВ	+	ИП9	×	П9	+	FL0	37
×	С/П								

Данный вариант программы относится к $J_\nu(x)$. Для перехода к $I_\nu(x)$ следует заменить команду /—/ (адрес 04) на КНОП.

Инструкция

1. Исходные данные: (ν = РВ), N = Р0, [x = РС]. Число N учитываемых членов ряда задается исходя из формул $N = x + 12$ при $\nu \geqslant 0$ и $N = r + 12$ при $\nu < 0$, где r — наибольшее из чисел: x или $2|\nu|$.
2. Пуск: В/О С/П.
3. Результат: РХ = $J_\nu(x)$ (или $I_\nu(x)$).
4. Регистры: рабочие РВ; оперативные Р0, Р9, РА, РС, РД; свободные Р1—Р8.
5. Погрешность несколько больше, чем в программе 5.1, за счет неточностей, связанных с асимптотическим приближением для гамма-функции. Максимальные погрешности $\delta = 5\cdot10^{-6}$ для $I_n(x)$. Максимальные погрешности для $J_n(x)$:

$\lvert\nu\rvert\leqslant x$	Δ	$x\leqslant\lvert\nu\rvert\leqslant 50$	δ	$\lvert\nu\rvert\leqslant x$	Δ	$x\leqslant\lvert\nu\rvert\leqslant 50$	δ
$x\leqslant 12$	$\leqslant 2\cdot 10^{-4}$	$x\leqslant 25$	$\leqslant 2\cdot 10^{-3}$	$x\leqslant 6$	$\leqslant 5\cdot 10^{-6}$	$x\leqslant 15$	$\leqslant 1\cdot 10^{-5}$
$x\leqslant 9$	$\leqslant 1\cdot 10^{-5}$	$x\leqslant 20$	$\leqslant 1\cdot 10^{-4}$	$x\leqslant 4$	$\leqslant 5\cdot 10^{-7}$	$x\leqslant 8$	$\leqslant 5\cdot 10^{-6}$

6. Время счета $t \approx N/12$ мин.

Примеры.

$J_{7,5}(10) = 0,28608956$ $(0,28608884)$, $J_{-7,5}(10) = 0,10724901$ $(0,1072491)$,

$t = 2$ мин;

$I_{5,5}(5) = 1,3294269$ $(1,3294238)$, $t = 1,5$ мин.

Числа в скобках взяты из таблиц [9] сферических функций и модифицированных сферических функций Бесселя (см. (5.35)).

Программа 5.9. Функции Бесселя $J_\nu(x)$, $Y_\nu(x)$ дробного порядка и вещественного аргумента (действительная и мнимая части функций Ханкеля $H^{(1)}_\nu(x)$, $H^{(2)}_\nu(x)$), $x > 0$. Разложение в ряд (5.47) и формула (5.11).

2	÷	ПС	Fx²	/—/	ПД	ПП	26	П7	ИПВ
/—/	ПВ	ПП	26	ИП7	ИПВ	Fπ	×	ПА	Fcos
×	—	ИПА	Fsin	÷	С/П	ИПВ	ИПС	Fx^y	ИП8
П0	ИПВ	+	1	П9	+	ПА	Fln	1	—
ИПА	×	ИПА	1	2	×	F1/x	+	Fe^x	÷
Fπ	2	×	ИПА	÷	F√	÷	1	ИПД	×
ИП0	÷	ИП0	ИПВ	+	ИП9	×	П9	+	FL0
58	×	В/О							

Инструкция

1. Исходные данные: $(N = \text{Р8})$, $\nu = \text{РВ}$, $[x = \text{Р7}]$. Число N учитываемых членов ряда предварительно находится по формуле $N = r + 15$, где r — наибольшее из чисел x или $2\,\lvert\nu\rvert$.
2. Пуск: В/О С/П.
3. Результат: $\text{РХ} = Y_\nu(x) = J_m H^{(1)}_\nu(x) = -J_m H^{(2)}_\nu(x)$; $\text{Р7} = J_\nu(x) = \operatorname{Re} H^{(1)}_\nu(x) = \operatorname{Re} H^{(2)}_\nu(x)$.
4. Регистры: рабочие Р7, Р8; оперативные Р0, Р9 — РД; свободные Р1 — Р6.
5. Погрешность в основном такая же, как и в программе 5.8, за исключением тех случаев, когда ν близки к целым ($\lvert\nu - n\rvert < 0,05$); здесь погрешности $Y_\nu(x)$ могут оказаться существенно бо́льшими из-за ошибок округления.
6. Время счета $t \approx N/6$ мин.

Примеры.

$J_{5,5}(5) = 0,19056374$ $(0,19056436$ [9]$)$, $Y_{5,5}(5) = -0,5717502$ $(-0,5717494$ [9]$)$,

$t = 3,5$ мин;

$J_{1/3}(3,4641016) = -0,22891859$ $(-0,22891758)$, $t = 3$ мин.

Для последнего примера значение в скобках получено из таблиц функций Эйри в [9], связанных с $J_{1/3}(x)$.

Программа 5.10. Функции Бесселя $J_\nu(x)$, $Y_\nu(x)$ целого и дробного порядков вещественного аргумента (действительная и мнимая части функций Ханкеля $H^{(1)}_\nu(x)$, $H^{(2)}_\nu(x)$), $x \geqslant 3$, $\nu \leqslant x$; сферические функции Бесселя $j_n(x)$, $y_n(x)$. Асимптотические разложения (5.13)—(5.15).

Fx²	П7	4	F1/x	—	ИПС	2	×	÷	П1
FBx	Fx²	ПД	ИПС	ИП6	2	F1/x	+	1	П0
Farcsin	×	—	Fcos	П4	FBx	Fsin	П5	0	ПП
59	ИПС	1	Farcsin	×	F√	П6	÷	ПА	1
ПП	59	ИП6	÷	ПВ	ИП4	×	ИПА	ИП5	×
+	ИПА	ИП4	×	ИПВ	ИП5	×	—	С/П	ПВ
ИП9	П2	ИП2	2	×	ИПВ	+	П8	2	F1/x
—	Fx²	ИП7	—	×	FBx	ИП8	2	×	—
2	+	×	ИП8	÷	1	ИП8	—	÷	ИПД
÷	1	+	FL2	62	КИПВ	×	В/О		

Инструкция

1. Исходные данные: $(x = \text{РС}, N = \text{Р9})$, $[\nu = \text{Р6}]$. Число N учитываемых членов ряда предварительно находится по формуле $N = \nu + 2$.
2. Пуск: В/О С/П.
3. Результат: $\text{РХ} = J_\nu(x) = \operatorname{Re} H^{(1)}_\nu(x) = \operatorname{Re} H^{(2)}_\nu(x)$; $\text{РY} = Y_\nu(x) = \operatorname{Im} H^{(1)}_\nu(x) = -\operatorname{Im} H^{(2)}_\nu(x)$.
4. Регистры: рабочие Р9, РС; оперативные Р0 — Р2, Р4 — РВ, РД; свободные Р3.
5. Погрешность относительная:

$x \geqslant$	3	4,5	6	8	10
$\delta \leqslant$	$1\cdot 10^{-2}$	$1\cdot 10^{-3}$	$1\cdot 10^{-4}$	$1\cdot 10^{-5}$	$1\cdot 10^{-6}$

Погрешности указаны для функций Ханкеля и определяются по общему правилу для комплексных функций (см. введение):

$$\delta = \sqrt{(\Delta \operatorname{Re} H_n)^2 + (\Delta \operatorname{Im} H_n)^2} / \lvert H_n \rvert.$$

6. Время счета $t \approx (1,5 + \nu/3)$ мин.

Вычисление сферических функций $j_n(x)$, $y_n(x)$ производится путем ввода в качестве исходных данных аргумента x и порядка $\nu = n + 1/2$. Получающиеся функции Бесселя связаны с $j_n(x)$ и $y_n(x)$ соотношениями (5.35). Как уже упоминалось в § 5.1, асимптотические разложения, используемые в данной программе, переходят при $\nu = n + 1/2$ в конечные суммы с n слагаемыми. Формулы становятся применимыми при любых сколь угодно малых x. Однако для функций $j_n(x)$ при $x \ll 1$ возрастают ошибки округления, так как эти функции малы ($\sim x^n/2^n n!$), а слагаемые, входящие в (5.13), велики. Для функций $y_n(x)$ при любых x относительная погрешность меньше $1\cdot 10^{-6}$.

Примеры.

$J_3(5) = 0,36485051$ $(0,36483123$ [9]$)$,

$Y_3(5) = 0,14620964$ $(0,14626716$ [9]$)$, $t = 2,5$ мин;

$j_2(0,1) = 0,0006499857$ $(0,0006661906$ [9]$)$,

$y_2(0,1) = -3005,0127$ $(-3005,0125$ [9]$)$, $t = 2$ мин.

Программа 5.11. Функции Бесселя $J_\nu(x)$ и $Y_\nu(x)$ вещественного аргумента. Асимптотическое разложение Дебая (5.19), рекуррентные формулы (5.22) с исходными данными (5.33) и формула (5.11).

ИПА	П8	3	ИП9	П0	ИПД	+	П7	Fx^2	↑
ИПС	Fx^2	—	ПВ	÷	5	×	—	1	2
÷	ИПВ	$F\sqrt{\ }$	ПВ	÷	2	—	8	ИПС	×
ИП7	÷	5	—	Fe^x	ИП7	Fx^2	÷	—	F1/x
ИПВ	ИПВ	ИП7	+	ИПС	÷	Fln	ИП7	×	—
Fe^x	×	ИПС	÷	ИПВ	8	×	$F\pi$	÷	$F\sqrt{\ }$
×	ПВ	0	ПА	ИПВ	/—/	ИПА	ПВ	ИП7	×
2	×	ИПС	÷	+	ПА	ИП7	1	—	П7
FL0	64	ИПА	ИПД	Fx<0	96	$F\pi$	×	П7	Fcos
ИП8	×	—	ИП7	Fsin	÷	С/П			

Инструкция. Для вычисления $Y_\nu(x)$ требуется проведение двух последовательных пусков и возможно по данной программе лишь при дробных ν.

1. Исходные данные для пуска 1 (расчет $J_\nu(x)$), (x = РС, ν = РД, N = Р9). Число N итераций в рекуррентной формуле предварительно рассчитывается по формуле $N = A$ при $A \geqslant 10$ и $N = 10$ при $A \leqslant 10$, где $A = [20 + 2x - \nu]$ ([ ] — округление до целого). Значения N могут быть взяты также из рис. 5.1. Однако при больших x эти предельные значения слишком велики и их использование сильно увеличит время счета.
2. Пуск 1: В/О С/П.
3. Результат: РY = РА = $J_\nu(x)$, РВ = $J_{\nu+1}(x)$.
4. Исходные данные для пуска 2 (вычисление $Y_\nu(x)$: $-\nu$ = РД, $N = [20+2x+\nu]$ = Р9 [.] (округление до целого числа). В паузе между пусками 1 и 2 не должно изменяться содержимое регистров Р8, РА, РС.
5. Пуск 2:В/О С/П.
6. Результат: РХ = $Y_\nu(x)$, Р8 = $J_\nu(x)$, РА = $J_{-\nu}(x)$, РВ = $J_{1-\nu}(x)$.
7. Регистры: рабочие Р8 — РД; оперативные Р0, Р7; свободные Р1—Р6.
8. Погрешность: при $x \geqslant |\nu|$ (абсолютная) меньше $5\cdot 10^{-7}$; при $x < |\nu|$ (относительная) $5\cdot 10^{-6}$ и $1\cdot 10^{-5}$ для $J_\nu(x)$ и $Y_\nu(x)$ соответственно.
9. Время счета при каждом пуске $(0{,}5 + N/10)$ мин.

Внимание: при $\nu \gg 1$, $x \ll \nu$ возможен авост, связанный с переполнением разрядной сетки, что происходит, когда $J_\nu(x)$ близки по абсолютной величине к границе разрядной сетки. Так, при $x = 0{,}0001$ и $\nu = 10$ происходит авост: $J_{10}(0{,}001) \approx 2{,}7\cdot 10^{-50}$.

Примеры.

$$\left.\begin{array}{l} J_{15,5}(10) = 0{,}0026834563\ (0{,}0026834591\ [9]), \\ J_{16,5}(10) = 8{,}9799218\cdot 10^{-4}\ (8{,}9799312\cdot 10^{-4}\ [9]), \end{array}\right\}\ \begin{array}{l} N = 24; \\ t = 3 \text{ мин;} \end{array}$$

$Y_{15,5}(10) = -10{,}072511\ (-10{,}072526\ [9])$, $N = 55$, $t = 5$ мин;

$J_{100}(100) = 9{,}636734\cdot 10^{-2}\ (9{,}63666739\cdot 10^{-2})$, $t = 12$ мин.

Программа 5.12. Функции Бесселя $J_\nu(z)$, $I_\nu(z)$, $Y_\nu(z)$, $K_\nu(z)$ комплексного аргумента $z = x + jy$, $|z| \leqslant 12$. Разложение в ряд по схеме Горнера (5.47) и формулы (5.11), (5.12).

ИПВ	ПП	82	/—/	ПА	XY	/—/	ПВ	ИП1	ИПС
Fx^2	ИПД	Fx^2	+	$F\sqrt{\ }$	П9	Fx^y	ИП0	ИП1	+
1	П7	+	П8	Fln	1	—	ИП8	×	ИП8
1	2	×	F1/x	+	Fe^x	÷	ИП8	$F\sqrt{\ }$	×
ИПС	ИП9	÷	Farccos	ИП1	×	П9	Fcos	XY	×
ПС	FBx	ИП9	Fsin	×	ПД	0	$F\pi$	ИП0	÷
XY	ИП0	÷	ПП	82	ИП0	ИП1	+	ИП7	×
П7	+	FL0	58	ПА	XY	ПВ	ИПС	ИПД	ПП
82	С/П	П9	ИПА	×	XY	П8	ИПВ	×	+
ИПА	ИП8	×	ИПВ	ИП9	×	—	В/О		

Данный вариант программы относится к $J_\nu(z)$. Для перехода к $I_\nu(z)$ следует исключить команды /—/ с адресами 03 и 06, заменив их на КНОП. Вычисление $J_\nu(z)$ и $I_\nu(z)$ производится полностью в автоматическом режиме после набора исходных данных (пп. 1—6) инструкции. Для расчета $Y_{-\nu}(z)$ и $K_\nu(z)$ требуется произвести по одному дополнительному пуску и некоторое число ручных операций (пп. 4б — 9в инструкции).

Инструкция

А. Расчет $J_\nu(z)$ или $I_\nu(z)$ (в зависимости от использованного варианта программы).

1. Исходные данные: (ν = Р1), N = Р0, $y/2$ = РВ = РД, [$x/2$ = РА = = РС]. Число N учитываемых членов ряда предварительно находится по формуле $N = r + 15$, где r — наибольшее из чисел: $|z|$ или $2|\nu|$.
2. Пуск: В/О С/П.
3. Результат: $\text{РХ} = \sqrt{2\pi}\,\mathrm{Re}\,J_\nu(z)$, $\text{РY} = \sqrt{2\pi}\,\mathrm{Im}\,J_\nu(z)$ или

   $\text{РХ} = \sqrt{2\pi}\,\mathrm{Re}\,I_\nu(z)$, $\text{РY} = \sqrt{2\pi}\,\mathrm{Im}\,I_\nu(z)$.
4. Регистры: рабочие Р1; оперативные Р0, Р7 — РД; свободные Р2 — Р6.
5. Погрешность относительная меньше:

$$\begin{array}{ll} 4\cdot 10^{-3} \text{ при } |z| \leqslant 12, & 1\cdot 10^{-5} \text{ при } |z| \leqslant 6, \\ 1\cdot 10^{-4} \text{ при } |z| \leqslant 9, & 1\cdot 10^{-6} \text{ при } |z| \leqslant 4. \end{array}$$

Эти оценки, однако, несправедливы в окрестности нулей функций, которые расположены на действительной оси для $J_\nu(z)$ и на мнимой оси для $I_\nu(z)$ соответственно при $x > \nu$ и $y > \nu$. Поэтому для $J_\nu(z)$, если $|y| \geqslant 0{,}05$ и $x > \nu$, или для $I_\nu(z)$, если $|x| \leqslant 0{,}05$ и $y > \nu$, абсолютная погрешность меньше:

$$\begin{array}{ll} 5\cdot 10^{-4} \text{ при } |z| \leqslant 12, & 1\cdot 10^{-6} \text{ при } |z| \leqslant 6, \\ 1\cdot 10^{-5} \text{ при } |z| \leqslant 9, & 1\cdot 10^{-7} \text{ при } |z| \leqslant 4. \end{array}$$

6. Время счета $t \approx (0{,}5 + N/5)$ мин.

Б. Расчет $Y_\nu(z)$. После останова при пуске 1 (пп. 1—3) производится дополнительный пуск с соответствующим вводом исходных данных и последующими ручными операциями. В паузе между пусками не должно изменяться содержимое регистров РХ, РY. Используется первый вариант программы (для $J_\nu(z)$).

4б. Ручной ввод содержимого регистров РХ, РY в Р2, Р4: П2 XY П4. Исходные данные для пуска 2: ($-\nu$ = Р1), N = Р0, $y/2$ = РВ = РД, [$x/2$ = РА = = РС]. N выбирается так же, как в п. 1.

5б. Пуск 2: В/О С/П.

6б. Результат: PX = Re $\sqrt{2\pi}\ J_{-\nu}(z)$, PY = Im $\sqrt{2\pi}\ J_{-\nu}(z)$.

Далее рассчитывается $Y_\nu(z)$ с помощью следующих ручных операций (формула (5.11)).

7б. Подготовительные операции:

П3 XY П5 ИП1 Fπ × П6 6 П0 Fπ 2 × F√ П7.

8б. Не меняя содержимого всех регистров, дважды подряд выполнить следующую серию команд:

КИП0 КИП0 ИП6 Fcos × — ИП6 Fsin ÷ ИП7 ÷

9б. Результат: PX = Re $Y_\nu(z)$, PY = Im $Y_\nu(z)$.

В. Расчет $K_\nu(z)$. Также выполняется дополнительный пуск после пп. 1—3, но со вторым вариантом программы (на первом пуске вычисляется $I_\nu(z)$). При этом реализуются пп. 4б — 7б.

8в. Не меняя содержимого регистров после п. 7б, дважды подряд выполнить следующую серию команд:

КИП0 КИП0 — ИП6 /—/ Fsin ÷ 1 Farcsin × ИП7 ÷

9в. Результат: PX = Re$K_\nu(z)$, PY = Im $K_\nu(z)$.

10б,в. Погрешности $Y_\nu(z)$ и $K_\nu(z)$ примерно такие же, как $J_\nu(z)$ и $I_\nu(z)$, исключая близкие к целым значения ν ($|\nu - m| \leqslant 0{,}05$), где существенно возрастают ошибки округления. Для $K_\nu(z)$ это происходит также при всех вещественных $x > 5$, погрешности в этом случае см. в программе 5.13.

Примеры.

$J_{1/2}(-3+j4) = -9{,}237498 - j3{,}0813277$ $(-9{,}2374853 - j3{,}0813247)$,

$t = 9$ мин;

$Y_{1/2}(-3+j4) = 3{,}0850518 - j9{,}2428897$ $(3{,}0850431 - j9{,}2428604)$;

$I_{-1/2}(-3+j4) = 1{,}3695636 + j3{,}3100949$ $(1{,}3695598 + j3{,}3100842)$;

$K_{1/2}(-3+j4) = 4{,}329654 + j10{,}392089$ $(4{,}3296454 + j10{,}392067)$.

Значения в скобках получены из следующих соотношений [9]:

$$J_{1/2}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{\sin z}{\sqrt{z}};\quad Y_{1/2} = -\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{\cos z}{\sqrt{z}};$$

$$I_{-1/2}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{\operatorname{ch} z}{z};\quad K_{1/2} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\frac{e^{-z}}{z}.$$

Программа 5.13. Модифицированные функции Бесселя дробного порядка и вещественного аргумента, $x > 0$ для $I_\nu(x)$ и $0 < x \leqslant 5$ для $K_\nu(x)$. Разложение в ряд (5.47) и формула (5.12).

2	÷	ПС	Fx²	ПД	ПП	25	П7	ИПВ	/—/
ПВ	ПП	25	ИП7	—	ИПВ	/—/	Fπ	×	Fsin
÷	1	Farcsin	×	С/П	ИПВ	ИПС	Fx^y	ИП8	П0
ИПВ	+	1	П9	+	ПА	Fln	1	—	ИПА
×	ИПА	1	2	×	F1/x	+	Fe^x	÷	Fπ
2	×	ИПА	÷	F√	÷	1	ИПД	×	ИП0
÷	ИП0	ИПВ	+	ИП9	×	П9	+	FL0	57
×	В/О								

Инструкция

1. Исходные данные: (N = Р8), ν = РВ, [x = РС]. Число N учитываемых членов ряда находится так же, как в программе 5.9.
2. Пуск: В/О С/П.
3. Результат: PX = $K_\nu(x)$, Р7 = $I_\nu(x)$.
4. Регистры: рабочие Р7, Р8; оперативные Р0, Р9 — РД; свободные Р1—Р6.
5. Погрешность: для $I_\nu(x)$ в основном определяется асимптотическим представлением Г-функции, в области $0 < x \leqslant 40$ относительная погрешность не превышает $5 \cdot 10^{-6}$, для $K_\nu(x)$ погрешность существенно больше и связана с использованием формулы (5.12). Входящие в нее I_ν и $I_{-\nu}$ при увеличении x экспоненциально возрастают и заведомо сближаются, так как $K_\nu(x)$ экспоненциально малы. В результате влияние погрешностей округления сказывается уже при $x > 1$. Относительные погрешности $K_\nu(x)$:

$x \leqslant$	5	4	3	2	1
$\delta \leqslant$	$2 \cdot 10^{-2}$	$1 \cdot 10^{-3}$	$1 \cdot 10^{-4}$	$1 \cdot 10^{-5}$	$5 \cdot 10^{-6}$

6. Время счета $t \approx (N/6)$ мин.

Примеры.

$I_{1/2}(4) = 10{,}887134$ $(10{,}887102$ [9]),

$K_{1/2}(4) = 1{,}1473096 \cdot 10^{-2}$ $(1{,}1477617 \cdot 10^{-2}$ [9]), $t \approx 3$ мин;

$I_{10,5}(40) = 3{,}7193046 \cdot 10^{15}$ $(3{,}7193049 \cdot 10^{15}$ [9]), $t \approx 8$ мин.

Программа 5.14. Модифицированные функции Бесселя $K_\nu(x)$ целого или дробного порядка и вещественного аргумента $x \geqslant 2$. Модифицированные сферические функции Бесселя $k_n(x)$, $x > 0$. Асимптотическое разложение (5.17) по схеме Горнера и формула (5.35).

ИПВ	Fx²	ПА	ИПВ	4	+	П0	ИПС	2	×
ПД	1	ИПА	ИП0	2	F1/x	—	Fx²	—	×
ИП0	÷	ИПД	÷	1	+	FL0	12	ИПС	Fe^x
÷	Fπ	ИПД	÷	×	↑	FBx	F√	÷	С/П

Инструкция

1. Исходные данные: (ν = РВ, x = РС). Для $k_n(x)$ $\nu = n + 1/2$.
2. Пуск: В/О С/П.
3. Результат: PX = $K_\nu(x)$, PY = $k_n(x)$.
4. Регистры: рабочие РВ, РС; оперативные Р0, РА, РД; свободные Р1 — Р9.
5. Погрешность относительная $K_\nu(x)$:

$x \geqslant$	2	3	4	7	11
δ	$1 \cdot 10^{-2}$	$1 \cdot 10^{-3}$	$1 \cdot 10^{-4}$	$1 \cdot 10^{-5}$	$1 \cdot 10^{-6}$

Для модифицированных сферических функций $k_n(x)$, как отмечалось в § 5.1, асимптотический ряд переходит в замкнутую точную формулу. Практически при всех $x > 0$ относительная погрешность меньше $1 \cdot 10^{-6}$.

6. Время счета $t \approx (0{,}5 + \nu/12)$ мин.

Примеры.

$k_{10}(0,1)=1,0281753\cdot10^{20}$ ($1,0281754\cdot10^{20}$ [9]), $t\approx1,5$ мин;

$K_{20}(4)=4,705281\cdot10^{10}$ ($4,705007\cdot10^{10}$ [9]), $t\approx2,5$ мин.

5.4. Функции Эйри. Нули функций Эйри и их производных. Значения функций Эйри и их производных в нулях производных и функций

Степенные ряды (5.40а), которые определяют функции Эйри Ai (z) и Bi (z) (5.40), удобно суммировать по следующей схеме Горнера:

$$\Phi(z)\approx\left[\ldots\left[\left(\frac{z^3}{3N(3N+A)}+1\right)\frac{z^3}{(3N-3)(3N-3+A)}+1\right]\times\right.$$

$$\left.\times\frac{z^3}{(3N-6)(3N-6+A)}+\ldots+1\right]\frac{z^3}{3(3+A)}+1, \qquad (5.48)$$

где $\Phi(z)=f(z)$ при $A=-1$, $\Phi(z)=g(z)/z$ при $A=1$. Ряды (5.48) при $z=x<0$ являются знакочередующимися и, как показывают оценки, пригодны для вычислений начиная с $x=-7$. В случае положительных x, хотя ряды знакопостоянны и их суммирование возможно при любых x, вследствие экспоненциальной малости функции Ai (z) для больших x члены $C_1(z)$ и $C_2(z)$ компенсируют друг друга (ср. (5.40)). В результате существенное снижение точности, связанное с погрешностями округления, наступает уже при $x=3$. Функция Bi (z) является, наоборот, суммой указанных величин, и точность не снижается (все это справедливо при операциях с 8 значащими цифрами).

Расширение расчетной области Ai (z) на значения Re $z=x>3$ возможно путем использования асимптотического разложения (5.17) для функции Макдональда, связанной с Ai (z) соотношением

$$\mathrm{Ai}(z)=(1/\pi)\sqrt{z/3}\,K_{1/3}(2z^{3/2}/3). \qquad (5.49)$$

Совместное применение рядов и асимптотического разложения позволяет находить с достаточной точностью обе функции Ai (z) и Bi (z) в области $z>-7$.

Все нули функции Ai (z) и ее производной Ai$'(z)$ расположены на отрицательной части действительной оси. Функции Bi (z) и Bi$'(z)$ имеют также комплексные нули в секторе $\pi/3<|\arg z|<\pi/2$.

Обозначим s-е отрицательные нули функций Ai (z), Ai$'(z)$, Bi (z), Bi$'(z)$ через a_s, a_s', b_s, b_s', а комплексные нули Bi (z), Bi$'(z)$ через β_s, β_s' (s — номер нуля в порядке возрастания его абсолютной величины).

Удобный алгоритм вычисления нулей функций Эйри связан (см. [9]) с использованием *асимптотических разложений* по параметрам

$$t_1=3\pi(4s-1)/8, \quad t_2=3\pi(4s-3)/8. \qquad (5.50)$$

Последние оказываются большими уже начиная с $s=2$, что обеспечивает быструю сходимость разложений. Отметим, что расчет нулей a_s лежит в основе эффективного алгоритма нахождения нулей функций Бесселя (§ 5.5).

Приведем далее *асимптотические разложения* [9] *нулей* до членов t_1^{-4}, t_2^{-4} включительно, записанные в удобном для вычислений виде:

$$a_s\approx t_1^{2/3}\left[\frac{1}{9,6t_1^2}\left(\frac{4}{3t_1^2}-1\right)-1\right], \qquad (5.51)$$

$$b_s\approx t_2^{2/3}\left[\frac{1}{9,6t_2^2}\left(\frac{4}{3t_2^2}-1\right)-1\right]; \qquad (5.52)$$

$$b_s'\approx t_1^{2/3}\left[\frac{7}{48t_1^2}\left(1-\frac{5}{6t_1^2}\right)-1\right], \qquad (5.53)$$

$$a_s'\approx t_2^{2/3}\left[\frac{7}{48t_2^2}\left(1-\frac{5}{6t_2^2}\right)-1\right]. \qquad (5.54)$$

Значения функций Эйри в нулях производных (Ai (a_s'), Bi (b_s')) и производных функций Эйри в нулях функций (Ai$'(a_s)$, Bi$'(b_s)$) определяются аналогичными асимптотическими разложениями по тем же параметрам:

$$\mathrm{Ai}(a_s')\approx(-1)^s\frac{1}{\sqrt{\pi t_2^{1/3}}}\left[\frac{7}{96t_2^2}\left(1-\frac{\sqrt{14}}{t_2^2}\right)-1\right], \qquad (5.55)$$

$$\mathrm{Bi}(b_s')\approx(-1)^{s+1}\frac{1}{\sqrt{\pi t_1^{1/3}}}\left[\frac{7}{96t_1^2}\left(1-\frac{\sqrt{14}}{t_1^2}\right)-1\right]; \qquad (5.56)$$

$$\mathrm{Ai}'(a_s)\approx(-1)^s\sqrt{\frac{t_1^{1/3}}{\pi}}\left[\frac{5}{48t_1^2}\left(\frac{\pi}{t_1^2}-1\right)-1\right], \qquad (5.57)$$

$$\mathrm{Bi}'(b_s)\approx(-1)^s\sqrt{\frac{t_2^{1/3}}{\pi}}\left[\frac{5}{48t_2^2}\left(\frac{\pi}{t_2^2}-1\right)-1\right]. \qquad (5.58)$$

Комплексные нули функции Bi (z) и производных Bi$'(z)$ представляются асимптотическими разложениями по комплексным параметрам

$$z_1=t_1+\mathrm{j}\frac{\ln 8}{4}; \quad z_2=t_2+\mathrm{j}\frac{\ln 8}{4}. \qquad (5.59)$$

Запишем эти разложения с точностью до z_1^{-4} и z_2^{-4}:

$$\beta_s\approx(z_1^2\,e^{\mathrm{j}\pi})^{1/3}\left[\frac{-5}{48z_1^2}\left(\frac{1}{0,75z_1^2}-1\right)+1\right]; \qquad (5.60)$$

$$\beta_s'\approx(z_2^2\,e^{\mathrm{j}\pi})^{1/3}\left[\frac{7}{48z_2^2}\left(\frac{1}{1,2z_2^2}-1\right)+1\right]. \qquad (5.61)$$

Значения функций Bi (β_s') и производных в соответствующих комплексных нулях определяются с той же точностью выражениями

$$-\mathrm{Bi}(\beta_s')\approx(-1)^s\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\frac{4}{|y_2|}\right)^{1/6}e^{\mathrm{j}(\pi-\arg y_2)/6}\times$$

$$\times\left[\frac{7}{6y_2^2}\left(\frac{60}{y_2^2}-1\right)+1\right]; \qquad (5.62)$$

$$\mathrm{Bi}'(\beta_s)\approx(-1)^s\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\frac{|y_1|}{4}\right)^{1/6}e^{\mathrm{j}(\arg y_1-\pi)/6}\times$$

$$\times\left[\frac{-5}{3y_1^2}\left(\frac{51}{y_1^2}-1\right)+1\right], \qquad (5.63)$$

где $y_1=(3\pi/2)(4s-1)+\mathrm{j}\ln 8$; $y_2=(3\pi/2)(4s-3)+\mathrm{j}\ln 8$;
$\arg y=\arccos(\mathrm{Re}\,y/|y|)$.

Программа 5.15. Функции Эйри вещественного аргумента, $-7 \leqslant x \leqslant 4$ для Ai (x) и $x \geqslant -7$ для Bi (x). Разложение в ряд (5.40), (5.40а) и (5.48).

ПВ	↑	Fx^2	×	ПА	1	/—/	ПП	29	ИПС
×	П8	1	ПП	29	ИПВ	×	ИПД	×	П9
ИП8	+	3	F$\sqrt{\ }$	×	ИП8	ИП9	—	С/П	П9
ИПВ	Fx^2	F$\sqrt{\ }$	2	+	3	×	П0	1	ИП0
3	×	÷	FBx	ИП9	+	÷	ИПА	×	1
+	FL0	39	В/О						

Инструкция

1. Исходные данные: ($C_1 = 3{,}5502805 \cdot 10^{-1}$ = РС, $C_2 = 2{,}588194 \cdot 10^{-1}$ = = РД), [x = РХ].
2. Пуск: В/О С/П.
3. Результат: РХ = Ai (x), PY = Bi (x).
4. Регистры: рабочие РС, РД; оперативные Р0, Р8 — РВ; свободные Р1 — Р7.
5. Погрешность: при $x < 0$ функции Ai (x) и Bi (x) осциллируют между ± 1, и здесь целесообразно использовать абсолютные погрешности; при $x > 0$ функция Ai (x) монотонно уменьшается, а Bi (x) монотонно возрастает и используются относительные погрешности. Максимальные погрешности приближенно равны:

$x<0$	Δ	$x>0$	δ (для Ai (x))	$x<0$	Δ	$x>0$	δ (для Ai (x))
$\geqslant -7$ $\geqslant -4$	$\leqslant 2 \cdot 10^{-4}$ $\leqslant 1 \cdot 10^{-6}$	$\leqslant 4$ $\leqslant 3{,}5$	$\leqslant 1 \cdot 10^{-3}$ $\leqslant 1 \cdot 10^{-4}$	$\geqslant -3$	$\leqslant 2 \cdot 10^{-7}$	$\leqslant 2{,}7$ $\leqslant 2$	$\leqslant 1 \cdot 10^{-5}$ $\leqslant 1 \cdot 10^{-6}$

Относительная погрешность Bi (x) при $x > 0$ меньше $1 \cdot 10^{-6}$.

6. Время счета $t \approx (1 + 0{,}4|x|)$ мин.

Примеры.

Ai $(-7) = 0{,}18410391$ (0,1842808 [9]), Bi $(-7) = 0{,}29390184$ (0,29376207 [9]);

Ai (3,831547) = 0,001341 (0,00134139 [9]), Bi(3,831547) = 60,797489 (60,79749 [9]).

Программа 5.16. Функция Эйри Ai (x) вещественного аргумента $x \geqslant 2$. Асимптотическое разложение (5.17) функции Макдональда $K_{1/3}(x)$ и формула (5.49).

ПС	↑	F$\sqrt{\ }$	4	×	ПВ	×	3	÷	ПД
7	П0	1	↑	9	F1/x	ИП0	2	F1/x	—
Fx^2	—	×	ИП0	÷	ИПД	÷	1	+	FL0
14	ИПД	Fe^x	F$\sqrt{\ }$	÷	ИПВ	Fπ	×	F$\sqrt{\ }$	÷
С/П									

Инструкция

1. Исходные данные [x = РХ].
2. Пуск: В/О С/П.
3. Результат: РХ=Ai (x).
4. Регистры: рабочие РС; оперативные Р0, РВ, РД; свободные Р1 — РА.

5. Погрешность относительная меньше:

$5 \cdot 10^{-3}$ при $x \geqslant 2$, $1 \cdot 10^{-5}$ при $x \geqslant 3{,}5$,

$1 \cdot 10^{-4}$ при $x \geqslant 3$, $1 \cdot 10^{-6}$ при $x \geqslant 4$.

6. Время счета $t \approx 40$ с.

Пример. Ai (4,641589) = $2{,}4221671 \cdot 10^{-4}$ ($2{,}42217 \cdot 10^{-4}$ [9]).

Программмa 5.17. Функции Эйри Ai (z) и Bi (z) комплексного аргумента $z = x + \mathrm{j}\,y$. Разложение в ряд (5.40), (5.40а), (5.48), $|z| \leqslant 7$. Кроме того, для функции Ai(z) Re $z = x \leqslant 4$.

ПП	81	XY	ПП	81	П2	XY	П1	ИПД	ИП4
×	П4	ИПД	ИП3	×	П3	1	ПП	54	П8
XY	П9	ИПС	П3	0	П4	1	/—/	ПП	54
ПА	ИП8	+	3	F$\sqrt{\ }$	×	П5	XY	ПВ	ИП9
+	3	F$\sqrt{\ }$	×	П6	ИПА	ИП8	—	П8	ИПВ
ИП9	—	П9	С/П	ПА	ИП7	П0	ИП4	ИП3	ПП
81	ИП0	3	×	П5	ИПА	+	ИП5	×	П5
÷	ИП4	+	XY	ИП5	÷	ИП3	+	FL0	59
В/О	П5	ИП1	×	XY	П6	ИП2	×	—	ИП1
ИП6	×	ИП2	ИП5	×	+	В/О			

Инструкция

1. Исходные данные: ($C_1 = 3{,}5502805 \cdot 10^{-1}$ = РС, $C_2 = 2{,}588194 \cdot 10^{-1}$ = = РД, N = Р7) [y = Р2, Р4, x = Р1, Р3]. Число N учитываемых членов ряда предварительно рассчитывается по формуле $N = 3\,(|z| + 2)$.
2. Пуск: В/О С/П.
3. Результат: РХ = Р9 = Im Ai (z), PY = Р8 = ReAi (z), Р5 = = ReBi (z), Р6 = ImBi (z).
4. Регистры: рабочие Р5 — Р9, РС, РД; оперативные Р0 — Р4, РА, РВ; свободиых регистров нет.
5. Погрешность:

а) x = Re $z < 0$. При $y > 0{,}05$ относительная погрешность меньше:

$2 \cdot 10^{-3}$ при $|z| \leqslant 7$, $1 \cdot 10^{-5}$ при $|z| \leqslant 4$,

$1 \cdot 10^{-4}$ при $|z| \leqslant 5$, $2 \cdot 10^{-6}$ при $|z| \leqslant 3$.

При $y < 0{,}05$ следует оперировать абсолютной погрешностью, которую можно считать близкой к погрешности функций Ai (x) и Bi (x) в программе 5.15 при $x < 0$.

б) x = Re$z > 0$. Для функции Ai (z), которая здесь экспоненциально мала при больших x, относительная погрешность меньше:

$2 \cdot 10^{-3}$ при $x \leqslant 4$, $|z| \leqslant 7$, $1 \cdot 10^{-5}$ при $x \leqslant 2{,}7$, $|z| \leqslant 4$,

$1 \cdot 10^{-4}$ при $x \leqslant 3{,}5$ $|z| \leqslant 5$, $2 \cdot 10^{-6}$ при $x \leqslant 2$, $|z| \leqslant 3$.

Для функции Bi (z) погрешность такая же, как в п. 5а, кроме окрестностей комплексных нулей, которые расположены в секторе $\pi/3 < |\arg z| < \pi/2$. Поэтому, когда $|\mathrm{Bi}\,(z)| < 1$, следует оперировать абсолютной погрешностью, которая в этом случае меньше:

$2 \cdot 10^{-4}$ при $|z| \leqslant 7$, $1 \cdot 10^{-6}$ при $|z| \leqslant 4$,

$1 \cdot 10^{-5}$ при $|z| \leqslant 5$, $2 \cdot 10^{-7}$ при $|z| \leqslant 3$.

6. Время счета $t \approx (2{,}5 + 1{,}5\,|z|)$ мин.

Примеры.

Ai $(e^{j2\pi/3}) = 0,55665287 - j0,24327259$ $(0,55665286 - j0,24327256)$;

Bi $(e^{j2\pi/3}) = 0,47760592 + j0,42136044$.

Значение в скобках получено из равенства [9] Ai $(te^{j2\pi/3}) = 0,5\,e^{j\pi/3}$ [Ai (t)— — j Bi (t)].

Программа 5.18. Нули a_s и b_s функций Эйри Ai (x) и Bi (x). Асимптотические формулы (5.51), (5.52), $s \geqslant 2$.

Fπ	3	×	8	÷	ПВ	ИПС	4	×	1
—	×	ПА	FBx	2	—	ИПВ	×	ПП	25
ПВ	ИПА	ПП	25	С/П	Fx²	ПД	3	F1/x	ИПД
Fx^y	4	ИПД	÷	3	÷	1	—	9	,
6	÷	ИПД	÷	1	—	×	В/О		

И н с т р у к ц и я

1. Исходные данные: (s = РС).
2. Пуск: В/О С/П.
3. Результат: РХ $= a_s$, РВ $= b_s$.
4. Регистры: рабочие РВ, РС; оперативные РА, РД; свободные Р0 — Р9.
5. Погрешность относительная меньше: $2\cdot10^{-5}$ для $s=2$, $5\cdot10^{-7}$ для $s \geqslant 3$. Для $s = 1$ табличные данные: $a_1 = -2,33810741$, $b_1 = -1,173713$.
6. Время счета $t \approx 0,5$ мин.

Примеры. $a_9 = -11,936013$ $(-11,936016$ [9]); $b_9 = -11,476951$ $(-11,476954$ [9]).

Программа 5.19. Нули a_s', b_s' производных функций Эйри $Ai'(x)$ и $Bi'(x)$. Асимптотические формулы (5.53), (5.54), $s \geqslant 2$.

Fπ	3	×	8	÷	ПВ	ИПС	4	×	1
—	×	ПА	FBx	2	—	ИПВ	×	ПП	25
ПВ	ИПА	ПП	25	С/П	Fx²	ПД	3	F1/x	ИПД
Fx^y	7	ИПД	÷	4	8	÷	↑	ИПД	÷
9	÷	5	×	—	1	—	×	В/О	

И н с т р у к ц и я

1. Исходные данные: (s = РС).
2. Пуск: В/О С/П.
3. Результат: РХ $= b_s'$, РВ $= a_s'$.
4. Регистры: рабочие РВ, РС; оперативные РА, РД; свободные Р0 — Р9.
5. Погрешность относительная меньше $2\cdot10^{-5}$ при $s=2$ и $5\cdot10^{-7}$ при $s \geqslant 3$. Табличные значения для $s = 1$; $a_1' = -1,018793$, $b_1' = -2,294440$.
6. Время счета $t \approx 0,5$ мин.

Примеры. $a_7' = -9,5354474$ $(-9,5354491$ [9]),

$b_7' = -10,037694$ $(-10,037696$ [9]).

Программа 5.20. Значения функций Эйри в нулях производных Ai (a_s'), Bi (b_s'). Асимптотические формулы (5.55), (5.56), $s \geqslant 2$.

Fπ	3	×	8	÷	ПВ	ИПС	4	×	1
—	×	ПА	FBx	2	—	ИПВ	×	ПП	26
ПВ	ИПА	ПП	26	/—/	С/П	Fx²	ПД	6	F1/x
ИПД	Fx^y	Fπ	×	F√	F1/x	Fπ	ИПС	×	Fcos
×	7	ИПД	÷	9	6	÷	↑	ИПД	÷
1	4	F√	×	—	1	—	×	В/О	

И н с т р у к ц и я

1. Исходные данные: (s = РС).
2. Пуск: В/О С/П.
3. Результат: РХ = Bi (b_s'), РВ = Ai (a_s').
4. Регистры: рабочие РВ, РС; оперативные РА, РД; свободные Р0 — Р9.
5. Погрешность относительная меньше: $5\cdot10^{-5}$ при $s=2$, $2\cdot10^{-6}$ при $s = 3$, $5\cdot10^{-7}$ при $s \geqslant 4$. Для $s = 1$ приводим табличные значения функций: Ai $(a_1') = 0,53565666$, Bi $(b_1') = -0,45494438$.
6. Время счета $t \approx 0,5$ мин.

Примеры. Ai $(a_9') = 0,30651732$ (0,30652729 [9]);

Bi $(b_9') = -0,30352769$ $(-0,30352766$ [9]).

Программа 5.21. Значения производных функций Эйри $Ai'(a_s)$, $Bi'(b_s)$ в нулях функций. Асимптотические формулы (5.57), (5.58), $s \geqslant 2$.

Fπ	3	×	8	÷	ПВ	ИПС	4	×	1
—	×	ПА	FBx	2	—	ИПВ	×	ПП	25
ПВ	ИПА	ПП	25	С/П	Fx²	ПД	6	F1/x	ИПД
Fx^y	Fπ	÷	F√	Fπ	ИПС	×	Fcos	×	Fπ
ИПД	÷	1	—	9	,	6	÷	ИПД	÷
1	—	×	В/О						

И н с т р у к ц и я

1. Исходные данные: (s = РС).
2. Пуск: В/О С/П.
3. Результат: РХ $= Ai'(a_s)$, РВ $= Bi'(b_s)$.
4. Регистры: рабочие РВ, РС; оперативные РА, РД; свободные Р0 — Р9.
5. Погрешность относительная меньше: $6\cdot10^{-5}$ при $s = 2$; $2\cdot10^{-6}$ при $s = 3$, $5\cdot10^{-7}$ при $s \geqslant 4$. Табличные данные при $s = 1$: $Ai'(a_1) = 0,70121082$, $Bi'(b_1) = 0,60195789$.
6. Время счета $t \approx 0,5$ мин.

Примеры. $Ai'(a_9) = 1,0487204$ (1,04872065 [9]);

$Bi'(b_9) = 1,0384941$ (1,0384943 [9]).

Программа 5.22. Комплексные нули β_s, β_s' функции Эйри Bi (z) и ее производной $Bi'(z)$. Асимптотические формулы (5.59)—(5.61), $s \geqslant 2$.

8	Fln	4	÷	ПВ	ИПС	Fπ	×	3	×
8	÷	ПА	ПП	82	ПВ	XY	ПА	6	F1/x
ИПА	Fx^2	ИПВ	Fx^2	+	П7	Fx^y	ИПА	ИП7	F√
÷	Farccos	Fπ	+	3	÷	П5	Fsin	XY	×
П6	FBx	ИП5	Fcos	×	П5	ИПА	ИП7	÷	ПА
ИПВ	/—/	ИП7	÷	ПВ	ИП8	÷	ИПА	ИП8	÷
1	—	ПП	82	ИП9	4	8	÷	П7	×
ПВ	XY	ИП7	×	1	+	ПА	ИП6	ИП5	ПП
82	С/П	ПС	ИПА	×	XY	ПД	ИПВ	×	—
ИПА	ИПД	×	ИПВ	ИПС	×	+	В/О		

Инструкция

1. Исходные данные: для β_s (0,75 = Р8, —5 = Р9), $(4s-1)$ = РС; для β'_s (1,25 = Р8, 7 = Р9), $(4s-3)$ = РС.
2. Пуск: В/О С/П.
3. Результат: $PX = \mathrm{Im}\,\beta_s$, $PY = \mathrm{Re}\,\beta_s$ или $PX = \mathrm{Im}\,\beta'_s$, $PY = \mathrm{Re}\,\beta'_s$.
4. Регистры: рабочие Р8, Р9, РС; оперативные Р5, Р6, Р7, РА, РВ, РД; свободные Р0 — Р4.
5. Погрешность относительная меньше: $1\cdot10^{-4}$ для $s=2$; $5\cdot10^{-6}$ для $s=3$; $5\cdot10^{-7}$ для $s\geqslant4$. Табличные значения для $s=1$: $\beta_1 = 0{,}97831 + j2{,}14121$, $\beta'_1 = 0{,}21457 + j\ 1{,}10027$.
6. Время счета $t\approx1$ мин.

Примеры.

$\beta_2 = 1{,}8967678 + j3{,}6272843$ $(1{,}896 + j3{,}627$ [9]);

$\beta'_2 = 1{,}4581977 + j2{,}912268$ $(1{,}458 + j2{,}912$ [9]).

Программа 5.23. **Функции Эйри Bi (β'_s) в комплексных нулях производных, производные функций Эйри Bi′ (β_s) в комплексных нулях функций. Асимптотические формулы (5.62), (5.63), $s\geqslant2$.**

8	Fln	ПВ	ИП9	ИП6	1	Farcsin	×	ПА	Fx^2
ИПВ	Fx^2	+	F√	ПД	4	÷	Fx^y	Fπ	ИП5
×	Fcos	×	1	Farcsin	F√	÷	ИПА	ИПД	÷
Farccos	Fπ	—	ИП9	×	П3	Fsin	XY	×	П4
FBx	ИП3	Fcos	×	П3	ИПВ	/—/	ИПД	Fx^2	÷
ПВ	ИПА	FBx	÷	ПА	ПП	82	ПВ	ИП7	×
XY	ПА	ИП7	×	1	—	ПП	82	ИП8	×
ПВ	XY	ИП8	×	1	+	ПА	ИП4	ИП3	ПП
82	С/П	ПС	ИПА	×	XY	ПД	ИПВ	×	—
ИПД	ИПА	×	ИПС	ИПВ	×	+	В/О		

Инструкция

1. Исходные данные: для Bi (β'_s) (s = Р5, $3(4s-3)$ = Р6, 60 = Р7, 7/6 = Р8, —1/6 = Р9); для Bi′(β_s) (s = Р5, $3(4s-1)$ = Р6, 51 = Р7, —5/3 = Р8, 1/6 = Р9).
2. Пуск: В/О С/П.

3. Результат: $PX = -\mathrm{Im\,Bi}\,(\beta'_s)$, $PY = -\mathrm{Re\,Bi}\,(\beta'_s)$ или $PX = \mathrm{Im\,Bi}'\,(\beta_s)$, $PY = \mathrm{Re\,Bi}'\,(\beta_s)$.
4. Регистры: рабочие Р5 — Р9; оперативные Р3, Р4, РА — РД; свободные Р0 — Р2.
5. Погрешность относительная меньше $1\cdot10^{-4}$ при $s=2$; $2\cdot10^{-6}$ при $s=3$; $5\cdot10^{-7}$ при $s\geqslant4$.
Табличные значения для $s=1$: Bi $(\beta'_1) = 0{,}670 + j\,0{,}337$, Bi′ $(\beta_1) = -0{,}871 + j0{,}4766$.
6. Время счета $t\approx1$ мин.

Примеры.

Bi $(\beta'_2) = -0{,}51710285 - j0{,}28871421$ $(-0{,}517 - j0{,}289$ [9]);

Bi′ $(\beta_2) = 0{,}98971692 - j0{,}55787637$ $(0{,}990 - j0{,}558$ [9]).

5.5. Нули функций Бесселя и их производных. Функции Бесселя в нулях производных и производные функций Бесселя в нулях функций. Нули комбинаций из произведений функций Бесселя первого и второго рода и их производных

Функции Бесселя $J_\nu(z)$, $J'_\nu(z)$, $Y_\nu(z)$, $Y'_\nu(z)$ имеют бесконечное множество нулей. Все нули $J_\nu(z)$, $J'_\nu(z)$ для $\nu\geqslant0$ лежат на действительной оси при $|x|\geqslant\nu$. Вещественные нули $Y_\nu(z)$ и $Y'_\nu(z)$ также располагаются при $|x|\geqslant\nu$. Но последние функции имеют при $\nu\geqslant0$ и бесконечное множество комплексных нулей. Далее s-е положительные нули перечисленных функций будут обозначаться соответственно как $j_{\nu s}$, $j'_{\nu s}$, $y_{\nu s}$, $y'_{\nu s}$. Исключение составляет лишь $J'_0(z)$, для которой первым нулем считается точка $z=0$, а следующие нули удовлетворяют условию

$$j'_{0,s} = j_{1,s-1} \quad s=2,\ 3,\ \ldots\ . \tag{5.64}$$

Нумерация всех нулей ведется в порядке возрастания их значений (для положительных нулей). В этом случае нули указанных выше функций перемежаются согласно следующим неравенствам:

$$\begin{gathered} \nu\leqslant j'_{\nu,1} < y_{\nu,1} < y'_{\nu,1} < j_{\nu,1} < j'_{\nu,2} < y_{\nu,2} < y'_{\nu,2} < j_{\nu,2} < j'_{\nu,3} < \cdots; \\ j_{\nu,1} < j_{\nu+1,1} < j_{\nu,2} < j_{\nu+1,2} < j_{\nu,3} < \cdots; \\ y_{\nu,1} < y_{\nu+1,1} < y_{\nu,2} < y_{\nu+1,2} < y_{\nu,3} < \cdots\ . \end{gathered} \tag{5.65}$$

Свойства нулей модифицированных функций Бесселя $I_\nu(z)$ и их производных $I'_\nu(z)$ вытекают из свойств нулей $J_\nu(z)$, $J'_\nu(z)$ с учетом соотношений

$$I_\nu(z) = e^{-j\nu\pi/2} J_\nu(ze^{j\pi/2}); \quad -\pi < \arg z \leqslant \pi/2. \tag{5.66}$$

Вычисление нулей и связанных с ними величин основывается на асимптотических разложениях (например, [9]). Обычно эти разложения сходятся достаточно быстро. Для нулей начиная с $s=2$ и $\nu\geqslant1$ эффективны *равномерные асимптотические разложения*, базирующиеся на асимптотических разложениях нулей функций Эйри и связанных с ними величин по степеням ν^{-1}. Ниже приводятся разложения до членов ν^{-2} включительно, что обеспечивает четыре-пять верных значащих цифр результата (см. программы (5.24—5.27). Указанные соотношения после приведения к форме, приемлемой для вычислений на ПМК, приобретают следующий вид:

$$j_{\nu,s} \approx \nu z_1 + \left\{\frac{1}{65\nu}\exp\left[\zeta_1\left(\frac{\zeta_1}{403,4} - 0,2276\right)\right]\right\}, \qquad (5.67)$$

$$J'_\nu(j_{\nu,s}) \approx \frac{(-1)^s}{z_1}\left(\frac{\sqrt{z_1^2-1}\,2\zeta_1^{3/2}}{\pi t_1}\right)^{1/2}\left\{1-\frac{0,00206}{\nu^2\zeta_1^{3/2}}\right\}; \qquad (5.68)$$

$$j'_{\nu,s} \approx \nu z_2 - \left\{\frac{1}{\nu\zeta_2}\left[\frac{1}{(12\nu\zeta_2)^2} + \left[\left(\frac{\zeta_2-\sqrt{6}}{4}\right)^2+\sqrt{39}\right]^{-1}\right]\right\}, \qquad (5.69)$$

$$J_\nu(j'_{\nu,s}) \approx (-1)^{s-1}(1+T)\left(\frac{\sqrt{T}}{2\pi\nu\sqrt{z_2^2-1}}\right)^{1/2}\left\{1+\frac{1}{8\pi^2\nu^2(z_2^2-1)}\right\}, \qquad (5.70)$$

где

$$T = 1-\frac{7}{48t_2^2}\left\{1-\frac{2}{t_2^2}\right\};\quad t_1=3\pi(4s-1)/8;\quad t_2=3\pi(4s-3)/8; \qquad (5.71)$$

$$\zeta_1=\nu^{-2/3}(-a_s),\quad \zeta_2=\nu^{-2/3}(-a'_s); \qquad (5.72)$$

a_s и a'_s — нули функций Эйри Ai (z), Ai$'(z)$ (формулы (5.51), (5.52). Величины z_k и ζ_k связаны соотношением [9]

$$2\zeta_k^{3/2}/3=\sqrt{z_k^2-1}-\arccos(1/z_k),\quad k=1,2. \qquad (5.73)$$

Если в уравнениях (5.68), (5.71), (5.72) заменить t_1, t_2, a_s, a'_s на t_2, t_1, b_s, b'_s соответственно (b_s и b'_s — действительные нули функций Эйри Bi (z) и Bi$'(z)$ — формулы (5.52), (5.54)), то в левых частях уравнений (5.67) — (5.70) вместо $j_{\nu,s}$, $J'_\nu(j_{\nu,s})$, $j'_{\nu,s}$, $J_\nu(j'_{\nu,s})$ окажутся соответственно $y_{\nu,s}$, $-Y'_\nu(y_{\nu,s})$, $y'_{\nu,s}$, $Y_\nu(y'_{\nu,s})$.

Значения функции $z(\zeta)$, являющейся решением трансцендентного уравнения (5.73), легко рассчитываются методом итераций. Пусть $z^{(k)}$ — значение z на k-й итерации. Тогда

$$z^{(k+1)}=z^{(k)}+\Delta^{(k)}, \qquad (5.74)$$

где невязка $\Delta^{(k)}$ определяется из (5.73): $\Delta^{(k)} = 2[\zeta^{(k)}]^{2/3}/3+\arccos(1/z^{(k)}) - \sqrt{(z^{(k)})^2-1}$. Процесс останавливается, когда $|\Delta^{(n)}| < 1\cdot10^{-6}$.

Отметим, что фигурные скобки в формулах (5.67) — (5.71) являются результатом аппроксимации более громоздких выражений в строгих асимптотических разложениях из [9].

Соотношения (5.67), (5.68) приводят к значительным погрешностям при $s=1$. В этом случае преимущество имеют следующие асимптотические формулы [9], справедливые при $\nu \gg 1$:

$$\rho_k \approx \nu + 10^{-5}\nu^{1/3}\{[[(A_1^{(k)}x+A_2^{(k)})x+A_3^{(k)}]x+A_4^{(k)}]x+A_5^{(k)}\}, \qquad (5.75)$$

где $x=\nu^{-2/3}$; $\rho_1\equiv j_{\nu,1}$; $\rho_2\equiv y_{\nu,1}$; $\rho_3\equiv j'_{\nu,1}$; $\rho_4\equiv y'_{\nu,1}$. Значения коэффициентов $A_m^{(k)}$ ($m=1,2,\dots,5$; $k=1,2,3,4$) приведены в программе 5.28.

Аналогично строятся разложения для $J'_\nu(j_{\nu,1})$, $Y'_\nu(y_{\nu,1})$, $J_\nu(j'_{\nu,1})$, $Y_\nu(y'_{\nu,1})$:

$$R'_k \approx 10^5 x/\{[[(B_1^{(k)}x+B_2^{(k)})x+B_3^{(k)}]x+B_4^{(k)}]x+B_5^{(k)}\}; \qquad (5.76)$$

$$R_k\approx 10^{-5}\nu^{-1/3}\{[(C_1^{(k)}x+C_2^{(k)})x+C_3^{(k)}]x+C_4^{(k)}\},\quad k=1,2. \qquad (5.77)$$

Здесь $R'_1\equiv J'_\nu(j_{\nu,1})$; $R'_2\equiv Y'_\nu(y_{\nu,1})$; $R_1\equiv J_\nu(j'_{\nu,1})$; $R_2\equiv Y_\nu(y'_{\nu,1})$; $x=\nu^{-2/3}$.

Значения $B_m^{(k)}$ и $C_m^{(k)}$ приведены в программах 5.29, 5.30.

Наконец, при $s\geqslant 2$ и $0\leqslant\nu<s$ хорошие результаты дают *асимптотические разложения Макмагона* (см., например, [9]). Далее они записаны до членов порядка s^{-5}:

$$j_{\nu,s},\ y_{\nu,s}\approx\beta-\frac{\mu-1}{8\beta}\left\{\left[\frac{32[(83\mu-982)\mu+3779]}{15(8\beta)^2}+\frac{4(7\mu-31)}{3}\right]\frac{1}{(8\beta)^2}+1\right\}; \qquad (5.78)$$

$$j'_{\nu,s}\ y'_{\nu,s}\approx\beta-\left\{\left[\frac{32[(83\mu+2075)\mu-3039]\mu+3537]}{15(8\beta)^2}+\frac{4[(7\mu+82)\mu-9]}{3}\right]\frac{1}{(8\beta)^2}+\mu+3\right\}\frac{1}{8\beta}, \qquad (5.79)$$

где $8\beta=(8s+4\nu-2)\pi$ для $j_{\nu,s}$ и $y'_{\nu,s}$, $8\beta=(8s+4\nu-6)\pi$ для $y_{\nu,s}$ и $j'_{\nu,s}$; $\mu=4\nu^2$.

Асимптотические разложения больших положительных нулей функций, являющихся комбинацией из произведений функций Бесселя первого и второго рода (все эти нули действительные и простые) $J_\nu(x)Y_\nu(\lambda x) - J_\nu(\lambda x)Y_\nu(x)$ $(\lambda>1)$, имеют следующий вид [9]:

$$x_{\nu,s,\lambda}\approx\beta+\frac{p}{\beta}+\frac{q-p^2}{\beta^3}+\frac{r-4pq+2p^3}{\beta^5}+\dots, \qquad (5.80)$$

где

$$\beta=\frac{s\pi}{\lambda-1};\quad p=\frac{(\nu^2-1/4)}{2\lambda};\quad q=\frac{(\nu^2-1/4)(6,25-\nu^2)(1/\lambda^3-1)}{24(\lambda-1)};$$
$$r=\frac{(\nu^2-1/4)[(\nu^2-28)\nu^2+67](1/\lambda^5-1)}{80(\lambda-1)}. \qquad (5.81)$$

Указанные нули $x_{\nu,s,\lambda}$ при $\nu=m=0,1,2,\dots$ пропорциональны волновым числам E-волн в коаксиальных волноводах [16]. Критические волновые числа H-волн пропорциональны нулям $x'_{\nu,s,\lambda}$ функций $J'_\lambda(x)Y'_\nu(\lambda x)-I'_\nu(\lambda x)Y'_\nu(x)$ $(\lambda>1)$. Асимптотические разложения нулей $x'_{\nu,s,\lambda}$ также определяются формулой (5.80), но в этом случае [9]

$$\beta=\frac{(s-1)\pi}{\lambda-1};\quad p=\frac{\nu^2+3/4}{2\lambda};\quad q\approx\frac{[4-(12+\nu^2)\nu^2](1/\lambda^3-1)}{24(\lambda-1)};$$
$$r\approx\frac{\{[128-\nu^2(46+\nu^2)]-30\}(1/\lambda^5-1)}{80(\lambda-1)}. \qquad (5.82)$$

Обращаем внимание читателя на то, что приведенные здесь асимптотические формулы определяют приближенные значения нулей $x'_{\nu,s,\lambda}$ начиная с $s=2$. Некоторые значения нулей $x'_{\nu,1,\lambda}$ при $\nu \geqslant 1$ приведены в таблице к программе 5.34. При $\nu = 0$ первым нулем считается $x'_{0,1,\lambda} = 0$. Последующие нули вычисляются по формулам (5.80), (5.82) при $s = 2, 3, \ldots$.

Программа 5.24. Действительные нули $j_{\nu,s}$, $y_{\nu,s}$ функций Бесселя $J_\nu(z)$, $Y_\nu(z)$, $s \geqslant 2$, $\nu \geqslant 0{,}1$. Асимптотическая формула (5.67).

ПС	4	×	1	—	Fπ	×	3	×	8
÷	Fx²	ПА	3	ПВ	F1/x	ИПА	ИПД	Fx²	÷
Fx^y	9	,	6	F1/x	ИПА	÷	↑	ИПА	÷
4	×	3	÷	—	1	+	×	П8	П9
↑	F√	×	1	,	5	÷	П7	1	2
/—/	F10^x	ИПВ	ИП9	+	П9	F1/x	Farccos	ИП9	Fx²
1	—	F√	—	ИП7	+	ПВ	Fx²	—	Fx⩾0
48	ИП9	ИПД	×	ИП8	6	Fe^x	÷	3	Flg
Fx²	—	ИП8	×	Fe^x	6	5	÷	ИПД	÷
+	П7	С/П							

Данный вариант программы относится к $j_{\nu,s}$. Для перехода к $y_{\nu,s}$ заменить цифру 1 (адрес 03) на 3.

Структура программы

00—09: вычисление t_1 (или t_2),

10—39: вычисление нулей функций Эйри a_s (или b_s) по формулам (5.51) или (5.52) и факторов $\zeta = \nu^{-2/3}a_s$ (или $\zeta = \nu^{-2/3}b_s$ в зависимости от выбранного варианта программы),

40—70: решение уравнения (5.73) методом итераций (5.74),

71—92: вычисление $j_{\nu,s}$ (или $y_{\nu,s}$) по формуле (5.67).

Инструкция

1. Исходные данные: (ν = РД), [s = РХ].
2. Пуск: В/О С/П.
3. Результат: РХ = Р7 = $j_{\nu,s}$ (или РХ = Р7 = $y_{\nu,s}$).
4. Регистры: рабочие РД; оперативные Р7 — РС; свободные Р0 — Р6.
5. Погрешность относительная меньше $1\cdot10^{-3}$ при $\nu \geqslant 0{,}1$, $5\cdot10^{-5}$ при $\nu \geqslant 1$, $1\cdot10^{-5}$ при $\nu \geqslant 2$.
6. Время счета $t \approx 1{,}5$ мин при $\nu/s \leqslant 10$; с увеличением ν/s время счета медленно возрастает.

Примеры.

$j_{1,2} = 7{,}0158415$ (7,01559 [9]), $y_{1,2} = 5{,}4298308$ (5,42968 [9]), $t = 1$ мин; $j_{8,5} = 26{,}266798$ (26,26681[9]), $y_{8,5} = 24{,}612552$ (24,612558 [9]), $t = 1{,}5$ мин; $j_{0,1;\,2} = 5{,}6713694$ (5,6757 [7]), $t = 1{,}5$ мин.

Программа 5.25. Производные функции Бесселя $J'_\nu(j_{\nu,s})$, $Y'_\nu(y_{\nu,s})$ в нулях функций $J_\nu(z)$, $Y_\nu(z)$, $s \geqslant 2$, $\nu \geqslant 0{,}1$. Асимптотическая формула (5.68).

4	×	1	—	Fπ	×	3	×	8	÷
Fx²	ПА	3	ПВ	F1/x	ИПА	ИПД	Fx²	÷	Fx^y
5	ИПА	÷	4	8	÷	↑	ИПА	÷	ИП5
×	—	1	+	×	П8	П9	↑	F√	×
2	×	3	÷	П7	1	2	/—/	F10^x	ИПВ
ИП9	+	П9	F1/x	Farccos	ИП9	Fx²	1	—	F√
П6	—	ИП7	+	ПВ	Fx²	—	Fx⩾0	45	ИП6
ИПА	F√	÷	ИП7	×	3	×	Fπ	÷	F√
ИП9	÷	ИПС	Fπ	×	Fcos	×	↑	ИПД	2
7	×	Fx²	÷	ИП7	÷	—	С/П		

Данный вариант программы относится к $J'_\nu(j_{\nu,s})$. Для перехода к $Y'_\nu(y_{\nu,s})$ заменить цифру 1 (адрес 02) на 3.

Инструкция

1. Исходные данные: (4/3 = Р5, ν = РД), [s = РС].
2. Пуск: В/О С/П.
3. Результат: РХ = $J'_\nu(j_{\nu,s})$ (или РХ = $-Y'_\nu(y_{\nu,s})$). Данная программа позволяет также получить ориентировочные значения (три-четыре верные значащие цифры) нулей $j_{\nu,s}$ (или $y_{\nu,s}$). Для этого следует перемножить содержимые регистров Р9 и РД: $j_{\nu,s}$; $y_{\nu,s}$ = Р9 × РД.
4. Регистры: рабочие Р5, Р9, РС, РД; оперативные Р6 — Р8, РА, РВ; свободные Р0 — Р4.
5. Погрешность относительная меньше: $1\cdot10^{-3}$ при $\nu \geqslant 0{,}1$, $1\cdot10^{-4}$ при $\nu \geqslant 1$, $5\cdot10^{-5}$ при $\nu \geqslant 2$.
6. Время счета $t \approx 1{,}5$ мин при $\nu/s \leqslant 10$; с увеличением ν/s медленно возрастает.

Примеры.

$J'_1(j_{1,2}) = 0{,}30008481$ (0,30012), $j_{1,2} = 7{,}0095185$ (7,01559), [9];
$Y_1(y_{1,2}) = -0{,}34031253$ (−0,34032), $y_{1,2} = 5{,}422328$ (5,42968), [9]);
$J'_2(j_{3,4}) = 0{,}1964326$ (0,19644), $j_{3,4} = 16{,}221009$ (16,22347), [9];
$Y'_3(y_{2,4}) = -0{,}20649697$ (−0,20650), $y_{3,4} = 14{,}620444$ (14,62308), [9];
$J_{0,1}(j_{0,1;\,2}) = 0{,}33470323$, $j_{0,1;\,2} = 5{,}6663717$ (5,6757), [7].

Программа 5.26. Действительные нули $j'_{\nu,s}$, $y'_{\nu,s}$ производных функций Бесселя $J'_\nu(z)$, $Y'_\nu(z)$, $s \geqslant 2$, $\nu \geqslant 0{,}1$. Асимптотическая формула (5.69).

ПС	4	×	3	—	Fπ	×	3	×	8
÷	Fx²	ПА	3	ПВ	F1/x	ИПА	ИПД	Fx²	÷
Fx^y	8	Fcos	ИПА	÷	↑	ИПА	÷	5	×
6	÷	—	1	+	×	П8	П9	ИПД	×
П6	1	,	5	ИП9	Fx^y	XY	÷	П7	1
2	/—/	F10^x	ИПВ	ИП9	+	П9	F1/x	Farccos	ИП9
Fx²	1	—	F√	—	ИП7	+	ПВ	Fx²	—
Fx⩾0	49	ИП9	ИПД	×	ИП8	6	F√	—	4
÷	Fx²	3	9	F√	+	F1/x	ИП6	1	2
×	Fx²	F1/x	+	ИП6	÷	—	С/П		

Данный вариант программы относится к $j'_{\nu,s}$. Для перехода к $y'_{\nu,s}$ заменить цифру 3 (адрес 03) на цифру 1.

Инструкция

1. Исходные данные: (ν = РД), [s = РХ].
2. Пуск: В/О С/П.
3. Результат: РХ = $j'_{\nu,s}$ (или РХ = $y'_{\nu,s}$).
4. Регистры: рабочие РД; оперативные Р6 — РС; свободные Р0 — Р5.
5. Погрешность относительная меньше:

$$5\cdot10^{-3} \text{ при } \nu\geqslant 0,1, \qquad 5\cdot10^{-5} \text{ при } \nu\geqslant 3,$$
$$1\cdot10^{-4} \text{ при } \nu\geqslant 2, \qquad 1\cdot10^{-5} \text{ при } \nu\geqslant 4.$$

6. Время счета $t\approx$ 1,5 мин при $\nu/s\leqslant 10$; с увеличением ν/s медленно возрастает.

Примеры.

$j'_{1,2}=5,3313203$ (5,33144 [9]), $y'_{2,2}=8,3509609$ (8,35072 [9]);

$j'_{3,20}=65,113693$ (65,11315 [9]), $y'_{3,20}=66,686284$ (66,68571 [9]);

$j'_{0,1;2}=4,0158148$ (3,99105), $y'_{0,1;2}=5,612705$ (5,58771).

В последних двух примерах значения в скобках получены по программе 5.32, в них все цифры — верные.

Программа 5.27. Функции Бесселя $J_\nu(j'_{\nu,s})$, $Y_\nu(y'_{\nu,s})$ в нулях производных $J'_\nu(z)$, $Y'_\nu(z)$, $s\geqslant 2$, $\nu\geqslant 0,1$. Асимптотическая формула (5.70).

4	×	3	—	Fπ	×	3	×	8	÷
Fx²	ПА	3	ПВ	F1/x	ИПА	ИПД	Fx²	÷	Fx^y
8	Fcos	ИПА	÷	↑	ИПА	÷	2	×	—
1	+	П5	×	П8	П9	↑	F√	×	2
×	3	÷	П7	1	2	/—/	F10^x	ИПВ	ИП9
+	П9	F1/x	Farccos	ИП9	Fx²	1	—	F√	П6
—	ИП7	+	ПВ	Fx²	—	Fx⩾0	44	ИП5	F√
2	Fπ	×	ИПД	×	ИП6	×	ПВ	÷	F√
ИП5	1	+	×	ИПС	Fπ	×	Fcos	×	/—/
↑	ИПВ	Fx²	2	×	÷	+	С/П		

Данный вариант программы относится к $J_\nu(j'_{\nu,s})$. Для перехода к $Y_\nu(y'_{\nu,s})$ заменить цифру 3 (адрес 02) на цифру 1.

Инструкция

1. Исходные данные: (ν = РД), [s = РС].
2. Пуск: В/О С/П.
3. Результат: РХ = $J_\nu(j'_{\nu,s})$ (или РХ = $Y_\nu(y'_{\nu,s})$). Программа позволяет также получить ориентировочные значения (две — четыре верные значащие цифры) нулей производных $j'_{\nu,s}$ (или $y'_{\nu,s}$). Для этого следует перемножить содержимое регистров Р9 и РД: $j'_{\nu,s}$; $y'_{\nu,s}$ = Р9×РД.
4. Регистры: рабочие Р9, РС, РД; оперативные Р5 — Р8, РА, РВ; свободные Р0 — Р4.
5. Погрешность относительная меньше: $5\cdot10^{-3}$ при $\nu\geqslant 0,1$, $1\cdot10^{-4}$ при $\nu\geqslant 1$, $5\cdot10^{-5}$ при $\nu\geqslant 2$.
6. Время счета $t\approx$ 1,5 мин при $\nu/s\leqslant 10$, с увеличением ν/s медленно возрастает.

Примеры.

$J_1(j'_{1,2})=-0,34611291$ $(-0,34613)$, $j'_{1,2}=5,381349$ (5,33144), [9];

$Y_1(y'_{1,2})=-0,3031878$ $(-0,30317)$, $y'_{1,2}=6,9797082$ (6,9415), [9];

$J_5(j'_{5,3})=0,22038802$ (0,22039), $j'_{5,3}=14,006805$ (13,98719), [9];

$Y_5(y'_{5,3})=0,2068647$ (0,20687), $y'_{5,3}=15,678001$ (15,6608), [9];

$J_{0,1}(j'_{0,1;4})=-0,24784307$, $j'_{0,1;4}=10,357349$ (10,33062);

$Y_{0,1}(y'_{0,1;4})=-0,2309539$, $y'_{0,1;4}=11,929449$ (11,90623).

Для последних двух примеров значения в скобках получены по программе 5.31, в них все цифры — верные.

Программа 5.28. Первые нули $j_{\nu,1}$, $y_{\nu,1}$, $j'_{\nu,1}$, $y'_{\nu,1}$ функций Бесселя $J_\nu(z)$, $Y_\nu(z)$ и их производных, $\nu\geqslant 1$. Асимптотическая формула (5.75).

3	F1/x	ИПД	Fx^y	Fx²	ПС	FBx	5	П0	F10^x
÷	0	П6	ИПС	÷	КИП6	+	FL0	13	×
ИПД	+	С/П							

Инструкция

1. Исходные данные: (A_1 = Р1, A_2 = Р2, A_3 = Р3, A_4 = Р4, A_5 = Р5, ν = РД). Значения констант A_k следующие:

	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
$j_{\nu,1}$	4300	—9080	—397	103315	185576
$y_{\nu,1}$	—100	—600	1198	26035	93158
$j'_{\nu,1}$	0	940	—5097	7249	80862
$y'_{\nu,1}$	0	—4500	—5808	94000	182110

2. Пуск: В/О С/П.
3. Результат: РХ = $j_{\nu,1}$, $y_{\nu,1}$, $j'_{\nu,1}$, $y'_{\nu,1}$.
4. Регистры: рабочие Р1—Р5, РД; оперативные Р0, Р6, РС; свободные Р7 — РВ.
5. Погрешность неодинакова для нулей разных функций. Максимальные относительные погрешности следующие:

	$\nu\geqslant$	1	2	3	5
$\delta\leqslant$	$j_{\nu,1}$	$1\cdot10^{-3}$	$1\cdot10^{-4}$	$1\cdot10^{-5}$	$2\cdot10^{-6}$
	$y_{\nu,1}$	$1\cdot10^{-4}$	$5\cdot10^{-6}$	$5\cdot10^{-6}$	$2\cdot10^{-6}$
	$j'_{\nu,1}$	$1\cdot10^{-3}$	$1\cdot10^{-4}$	$4\cdot10^{-5}$	$1\cdot10^{-5}$
	$y'_{\nu,1}$	$1\cdot10^{-2}$	$1\cdot10^{-3}$	$5\cdot10^{-4}$	$5\cdot10^{-5}$

6. Время счета $t\approx$ 20 с.

Примеры.

$j_{5,1}=8{,}7714959$ (8,77148), $j_{5/2;1}=5{,}7636489$ (5,763459), [9];

$y_{5,1}=6{,}7471952$ (6,74718), $y_{5/2;1}=3{,}9595472$ (3,959528), [9];

$j'_{5,1}=6{,}4155621$ (6,41562), $j'_{5/2;1}=3{,}6325305$ (3,632797), [9];

$y'_{5,1}=8{,}6490584$ (8,64956), $y'_{7/2;1}=6{,}8619101$ (6,863232), [9].

Программа 5.29. Производные функций Бесселя $J'_\nu\,(j_{\nu,1})$, $Y'_\nu\,(y_{\nu,1})$ в первых нулях функций, $\nu \geqslant 1$. Асимптотическая формула (5.76).

3	F1/x	ИПД	Fx^y	Fx^2	ПС	5	П0	$F10^x$	ИПС
÷	0	П6	ИПС	÷	КИП6	+	FL0	13	÷
С/П									

Инструкция

1. Исходные данные: (B_1 = Р1, B_2 = Р2, B_3 = Р3, B_4 = Р4, B_5 = Р5), (ν = РД). Значения констант B_k:

Функция	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
$J'_\nu\,(j_{\nu,1})$	−1707	17456	−38895	−133375	−89839
$Y'_\nu\,(y_{\nu,1})$	−314	−1936	11418	77993	104652

2. Пуск: В/0 С/П.
3. Результат: РХ $= J'_\nu\,(j_{\nu,1})$, $Y'_\nu\,(y_{\nu,1})$.
4. Регистры: рабочие Р1 — Р5, РД; оперативные Р0, Р6, РС; свободные Р7 — РВ.
5. Погрешность неодинакова для $J'_\nu\,(j_{\nu,1})$ и $Y'_\nu\,(y_{\nu,1})$. Максимальные относительные погрешности для каждой функции:

$\nu \geqslant$		1	3	5
$\delta \leqslant$	$J'_\nu\,(j_{\nu,1})$	$8\cdot10^{-3}$	$5\cdot10^{-4}$	$1\cdot10^{-4}$
	$Y'_\nu\,(y_{\nu,1})$	$1\cdot10^{-3}$	$5\cdot10^{-5}$	$1\cdot10^{-5}$

6. Время счета $t \approx 15$ с.

Примеры.

$J'_8\,(j_{8,1})=-0{,}19944536$ (−0,19944 [9]),

$J'_{5/2}\,(j_{5/2;1})=-0{,}31735578$ (−0,3171058 [9]);

$Y'_8\,(y_{8,1})=0{,}20026852$ (0,20027 [9]), $Y'_{5/2}\,(y_{5/2;1})=0{,}36187116$ (0,3618468 [9]).

Программа 5.30. Функции Бесселя $J_\nu\,(j'_{\nu,1})$, $Y_\nu\,(y'_{\nu,1})$ в первых нулях производных, $\nu \geqslant 1$. Асимптотическая формула (5.77).

4	П0	3	F1/x	/−/	ИПД	Fx^y	ПС	5	$F10^x$
÷	0	П5	ИПС	Fx^2	×	КИП5	+	FL0	13
×	С/П								

Инструкция

1. Исходные данные: (C_1 = Р1, C_2 = Р2, C_3 = Р3, C_4 = Р4), (ν = РД). Значения констант следующие:

Функция	C_1	C_2	C_3	C_4
$J_\nu\,(j'_{\nu,1})$	−459	1969	−10914	67489
$Y_\nu\,(y'_{\nu,1})$	1250	5203	−20877	57319

2. Пуск: В/О С/П.
3. Результат: РХ $= J_\nu\,(j'_{\nu,1})$, $Y_\nu\,(y'_{\nu,1})$.
4. Регистры: рабочие Р1 — Р4, РД; оперативные Р0, Р5, РС; свободные Р6 — РВ.
5. Погрешность неодинакова для $J_\nu\,(j'_{\nu,1})$ и $Y_\nu\,(y'_{\nu,1})$. Максимальные относительные погрешности для каждой функции:

$\nu \geqslant$		1	2	3	5
δ	$J_\nu\,(j'_{\nu,1})$	$2\cdot10^{-3}$	$2\cdot10^{-4}$	$5\cdot10^{-5}$	$2\cdot10^{-6}$
	$Y_\nu\,(y_{\nu,1})$	$3\cdot10^{-2}$	$5\cdot10^{-3}$	$2\cdot10^{-3}$	$4\cdot10^{-4}$

6. Время счета $t \approx 15$ с.

Примеры.

$J_2\,(j'_{2,1})=0{,}48638175$ (0,48650), $J_{7/2}\,(j'_{7/2;1})=0{,}41551611$ (0,41533), [9];

$Y_2\,(y'_{2,1})=0{,}36942495$ (0,36766), $Y_{7/2}\,(y'_{7/2;1})=0{,}32499451$ (0,324651), [9].

Программа 5.31. Нули функций Бесселя $j_{\nu,s}$, $y_{\nu,s}$ малого порядка, $0 \leqslant \nu < s$. Асимптотическое разложение Макмагона (5.78).

ПС	8	×	ИПД	4	×	+	2	−	Fπ
×	ПВ	8	÷	ИПД	2	×	Fx^2	ПА	8
3	×	9	8	2	−	ИПА	×	3	7
7	9	+	3	2	×	1	5	÷	ИПВ
Fx^2	÷	ИПА	7	×	3	1	−	4	×
3	÷	+	ИПВ	Fx^2	÷	1	+	ИПА	1
−	×	ИПВ	÷	−	С/П				

Программа относится к $j_{\nu,s}$. Для перехода к $y_{\nu,s}$ заменить цифру 2 (адрес 07) на цифру 6.

Инструкция

1. Исходные данные: (ν = РД), [s = РХ].
2. Пуск: В/О С/П.
3. Результат: РХ $j_{\nu,s}$ (РХ $y_{\nu,s}$).
4. Регистры: рабочие РД; оперативные РА, РВ, РС; свободные Р0 — Р9.
5. Погрешность относительная:

Функция		$\nu \leqslant s = 1$	$\nu \leqslant s$ 2	$\nu \leqslant s = 3$	$s \geqslant 3$, $\nu \leqslant s-1$
δ	$j_{\nu,s}$	$\leqslant 2\cdot10^{-5}$	$\leqslant 2\cdot10^{-6}$	$\leqslant 2\cdot10^{-6}$	$\leqslant 1\cdot10^{-6}$
	$y_{\nu,s}$	$\leqslant 1\cdot10^{-3}$	$\leqslant 6\cdot10^{-6}$	$\leqslant 5\cdot10^{-6}$	$\leqslant 2\cdot10^{-6}$

При $s \leqslant \nu \leqslant s+2$ и любых s погрешность не превышает $5\cdot10^{-3}$ для $y_{\nu,s}$ и $5\cdot10^{-4}$ для $j_{\nu,s}$.

6. Время счета $t \approx 20$ с.

Примеры.

$y_{5,20}$=68,147987 (68,14799 [9]), $j_{5,20}$=69,72289 (69,72289 [9]);

$y_{1/2;3}$=7,8539815 (7,853982 [9]), $j_{0,33;1}$=2,8980009 (2,8978 [7]).

Программа 5.32. Нули $j'_{\nu,s}$, ($y'_{\nu,s}$) производных функций Бесселя $J'_\nu(z)$ ($Y'_\nu(z)$) малого порядка, $0 \leqslant \nu < s$ (5.79).

ПС	8	×	ИПД	4	×	+	6	—	Fπ
×	ПВ	8	÷	ИПД	2	×	Fx²	ПА	8
3	×	2	0	7	5	+	ИПА	×	3
0	3	9	—	ИПА	×	3	5	3	7
+	3	2	×	1	5	÷	ИПВ	Fx²	÷
ИПА	7	×	8	2	+	ИПА	×	9	—
4	×	3	÷	+	ИПВ	Fx²	÷	3	+
ИПА	+	ИПВ	÷	—	С/П				

Программа относится к $j'_{\nu,s}$.

Для перехода к $y'_{\nu,s}$ заменить цифру 6 (адрес 07) на цифру 2.

Инструкция

1. Исходные данные: (ν = РД), [s = РХ].
2. Пуск: В/О С/П.
3. Результат: РХ = $j'_{\nu,s}$ или РХ = $y'_{\nu,s}$ в зависимости от использованного варианта программы.
4. Регистры: рабочие РД; оперативные РА, РВ, РС; свободные Р0 — Р9.

5. Максимальная относительная погрешность для $j'_{\nu,s}$ и $y'_{\nu,s}$ следующая:

s		1	2	2	3	$\geqslant 5$	$\geqslant 5$
$\nu \leqslant$		1	1	2	2	s	$s-1$
$\delta \leqslant$	$j'_{\nu,s}$	$2\cdot10^{-2}$	$2\cdot10^{-5}$	$1\cdot10^{-4}$	$5\cdot10^{-6}$	$8\cdot10^{-6}$	$3\cdot10^{-6}$
	$y'_{\nu,s}$	$7\cdot10^{-4}$	$2\cdot10^{-6}$	$2\cdot10^{-5}$	$8\cdot10^{-7}$	$5\cdot10^{-6}$	$2\cdot10^{-6}$

Напомним, что при $\nu = 0$ первым нулем является $z = 0$. Второй и последующие нули получаются при $s = 2, 3, \ldots$.

6. Время счета $t \approx 0{,}5$ мин.

Примеры.

$j'_{8,18}$=66,269614 (66,26961), $j'_{9/2;6}$=23,105332 (23,105297), [9];

$y'_{8,18}$=67,851849 (67,85185), $y'_{9/2;6}$=24,705964 (24,705942), [9].

Программа 5.33. Нули $x_{\nu,s,\lambda}$ функции $J_\nu(x)\,Y_\nu(\lambda x) - J_\nu(\lambda, x)\,Y_\nu(x)$, $\lambda > 1$. Асимптотическое разложение (5.80), (5.81) по параметру $\beta = s\pi/(\lambda-1)$.

ИП1	Fπ	×	ИП2	1	—	П6	÷	П7	Fx²
П8	ИП0	Fx²	П3	4	F1/x	—	2	÷	П4
ИП2	÷	ПС	3	/—/	ИП2	Fx^y	1	—	6
,	2	5	ИП3	—	×	ИП4	×	ИП6	÷
1	2	÷	П5	ИПС	Fx²	—	ПВ	5	/—/
ИП2	Fx^y	1	—	2	8	ИП3	—	ИП3	×
6	7	—	×	ИП4	×	ИП6	÷	4	0
÷	ПА	ИПВ	ИП5	+	ИПС	×	2	×	—
ИП8	÷	ИПВ	+	ИП8	÷	ИПС	+	ИП7	÷
ИП7	+	С/П							

Инструкция

1. Исходные данные: (ν = Р0, s = Р1, λ = Р2).
2. Пуск: В/О С/П.
3. Результат: РХ = $x_{\nu,s,\lambda}$.
4. Регистры: рабочие Р0, Р1, Р2; оперативные Р3 — Р8, РА, РВ, РС; свободные Р9, РД.
5. Погрешность относительная меньше: $1\cdot10^{-4}$ при $s/\lambda \geqslant 1$ ($\nu \leqslant 5$ или $2\nu < s/(\lambda-1) > 10$) и $1\cdot10^{-5}$ при $s/\lambda \geqslant 2$ ($\nu \leqslant 3$ или $3\nu < s/(\lambda-1) > 9$).
6. Время счета $t \approx 0{,}5$ мин.

Примеры. $x_{5/2;6,2}$=18,928798 (18,9288 [7]); $x_{0,3,4}$=3,132036 (3,132 [16]).

Программа 5.34. Нули $x'_{\nu,s,\lambda}$, функции $J'_\nu(x)\,Y'_\nu(\lambda x) - J'_\nu(\lambda x)\,Y'_\nu(x)$, $s \geqslant 2$, $\lambda > 1$. Асимптотическое разложение (5.80), (5.82) по параметру $\beta = (s-1)\pi/(\lambda-1)$.

ИП1	Fπ	×	ИП2	1	—	П6	÷	П7	Fx²
П8	ИП0	Fx²	П3	0	,	7	5	+	2
÷	ИП2	÷	ПС	3	/—/	ИП2	Fx^y	1	—
4	ИП3	1	2	+	ИП3	×	—	2	4
÷	ИП6	÷	×	П5	ИПС	Fx²	—	ПВ	5
/—/	ИП2	Fx^y	1	—	1	2	8	ИП3	4
6	+	ИП3	×	—	ИП3	×	3	0	—
×	8	0	÷	ИП6	÷	ПА	ИПВ	ИП5	+
ИПС	×	2	×	—	ИП8	÷	ИПВ	+	ИП8
÷	ИПС	+	ИП7	÷	ИП7	+	С/П		

Инструкция

1. Исходные данные: (ν = Р0, $s-1$ = Р1, λ = Р2).
2. Пуск: В/О С/П.
3. Результат: РХ $= x'_{\nu,s,\lambda}$. Напоминаем, что данная программа позволяет рассчитывать нули $x'_{\nu,s,\lambda}$ при $s \geqslant 2$. Приводим для справок некоторые первые нули $x'_{\nu,1,\lambda}$:

λ	1,2	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0
$x'_{1,1,\lambda}$	0,910	0,805	0,677	0,585	0,514	0,457	0,411
$x'_{2,1,\lambda}$	1,821	1,608	1,341	1,137	0,977	0,852	0,752
$x'_{3,2,\lambda}$	2,731	2,407	1,979	1,643	1,388	1,196	1,048

4. Регистры: рабочие Р0, Р1, Р2; оперативные Р3 — Р8, РА, РВ, РС; свободные Р9, РД.
5. Погрешность относительная меньше: $2\cdot 10^{-4}$ при $(s-1)/\lambda \geqslant 1$ ($\nu \leqslant 5$ или $2\nu < (s-1)/(\lambda-1) > 10$) и $2\cdot 10^{-5}$ при $(s-1)/\lambda \geqslant 2$ ($\nu \leqslant 3$ или $3\nu < (s-1)/(\lambda-1) > 9$).
6. Время счета $t \approx 40$ с.

Примеры. $x'_{0,2,2} = 3{,}1970261$ (3,197 [16]); $x'_{3,5,2} = 12{,}760756$ (12,761 [16]).

Указатель программ

Номер программ	Функция	Область определения	Число шагов	Число регистров памяти	Примечание
5.1	$J_n(x)$, $I_n(x)$, $n=0, 1, 2, \ldots$	$0 < x \leqslant 25$ ($J_n(x)$) $x > 0$ ($I_n(x)$)	36	5	Суммирование степенного ряда
5.2	$Y_0(x)$, $Y_1(x)$	$0<x\leqslant 12$	60	7	То же

Продолжение

Номер программы	Функция	Область определения	Число шагов	Число регистров памяти	Примечание
5.3	$Y_n(x)$, $Y'_n(x)$, $n=0, 1, 2, \ldots$	$0<x\leqslant 12$	98	10	Суммирование степенного ряда и рекуррентные формулы
5.4	$J_n(x)$, $Y_n(x)$ $(H_n^{(1)}(x), H_n^{(2)}(x))$, $n=0, 1, 2, \ldots$	$0<x\leqslant 12$	98	14	То же
5.5	$J_n(z)$, $I_n(z)$ $\mathrm{ber}_n(t)$, $\mathrm{bei}_n(t)$, $n=0, 1, 2, \ldots$	$\lvert z\rvert \leqslant 12$, $0\leqslant t\leqslant 12$	75	9	Суммирование степенных рядов, аргумент t вещественный
5.6	$K_n(x)$, $K'_n(x)$, $n=0, 1, 2, \ldots$	$0<x\leqslant 6$	97	10	Суммирование степенного ряда и рекуррентные формулы
5.7	$K_n(x)$, $K'_n(x)$, $n=0, 1, 2, \ldots$	$x\geqslant 3$	70	9	Асимптотическое разложение и рекуррентные формулы
5.8	$J_\nu(x)$ или $I_\nu(x)$	$x>0$	52	6	Суммирование степенных рядов
5.9	$J_\nu(x)$, $Y_\nu(x)$	$x>0$	73	8	То же
5.10	$J_\nu(x)$, $Y_\nu(x)$ $(j_n(x), y_n(x))$	$x\geqslant 3$, $\nu\leqslant x$	98	13	Асимптотические разложения Ханкеля
5.11	$J_\nu(x)$, $Y_\nu(x)$	$x>0$	97	8	Асимптотическое разложение Дебая и рекуррентная формула
5.12	$J_\nu(z)$, $I_\nu(z)$ $(Y_\nu(z), K_\nu(z))$	$\lvert z\rvert\leqslant 12$	98	9	Суммирование степенных рядов
5.13	$I_\nu(x)$ $K_\nu(x)$	$x>0$ $0<x\leqslant 5$	72	8	Суммирование степенного ряда
5.14	$K_\nu(x)$ $k_n(x)$	$x\geqslant 2$ $x>0$	40	5	Асимптотическое разложение Ханкеля
5.15	Ai (x) Bi (x)	$-7\leqslant x\leqslant 4$ $x\geqslant -7$	54	7	Суммирование степенного ряда
5.16	Ai (x)	$x\geqslant 2$	41	4	Асимптотическое разложение
5.17	Ai (z), Bi (z)	$\lvert z\rvert\geqslant 7$, $x\leqslant 4$ для Ai (z)	97	14	Суммирование степенного ряда
5.18	a_s, b_s	$s=2, 3, \ldots$	48	4	Асимптотическое разложение
5.19	a'_s, b'_s	$s=2, 3, \ldots$	49	4	То же
5.20	Ai (a'_s), Bi (b'_s)	$s=2, 3, \ldots$	59	4	»
5.21	Ai$'(a_s)$, Bi$'(b_s)$	$s=2, 3, \ldots$	54	4	»

Номер программы	Функция	Область определения	Число шагов	Число регистров памяти	Примечание
5.22	$\beta_s,\ \beta'_s$	$s=2,\ 3,\ \ldots$	98	9	Асимптотическое разложение
5.23	$\mathrm{Bi}(\beta'_s),\ \mathrm{Bi}'(\beta_s)$	$s=2,\ 3,\ \ldots$	98	11	То же
5.24	$j_{\nu,\,s},\ y_{\nu,\,s}$	$\nu\geqslant0{,}1;\ s=2,\ 3$	93	7	Асимптотическая формула
5.25	$J'_\nu(j_{\nu,\,s}),\ Y'_\nu(y_{\nu,\,s})$	$\nu\geqslant0{,}1;\ s=2,3,\ \ldots$	98	8	»
5.26	$j'_{\nu,\,s},\ y'_{\nu,\,s}$	$\nu\geqslant0{,}1;\ s=2,3,\ \ldots$	98	8	»
5.27	$J_\nu(j'_{\nu,\,s}),\ Y_\nu(y'_{\nu,\,s})$	$\nu\geqslant0{,}1;\ s=2,\ 3,\ \ldots$	98	9	»
5.28	$j_{\nu,\,1},\ y_{\nu,\,1}$ $(j'_{\nu,\,1},\ y'_{\nu,\,1})$	$\nu\geqslant1$	23	9	»
5.29	$J'_\nu(j_{\nu,\,1}),\ Y'_\nu(y_{\nu,\,1})$	$\nu\geqslant1$	21	9	»
5.30	$J_\nu(j'_{\nu,\,1}),$ $Y_\nu(y'_{\nu,\,1})$	$\nu\geqslant1$	22	8	»
5.31	$j_{\nu,\,s},\ y_{\nu,\,s}$	$0\leqslant\nu\leqslant s$	66	4	Асимптотическое разложение Мак-Магона
5.32	$j'_{\nu,\,s},\ y'_{\nu,\,s}$	$0\leqslant\nu<s$	76	4	То же
5.33	$x_{\nu,\,s,\,\lambda}$	$\lambda>1,\ s\geqslant\lambda$	93	12	Асимптотическое разложение
5.34	$x'_{\nu,\,s,\,\lambda}$	$\lambda>1,\ (s-1)\geqslant\lambda$	98	12	То же

Глава 6

Гипергеометрические и вырожденные гипергеометрические функции вещественного и комплексного аргументов

6.1. Гипергеометрический ряд и его аналитические продолжения. Функции Лежандра (сферические функции) как частный случай гипергеометрических функций

Гипергеометрические функции являются решениями дифференциального уравнения (гипергеометрического уравнения или уравнения Гаусса)

$$z\,(1-z)\,\frac{d^2u}{dz^2}+[c-(a+b+1)\,z]\,\frac{du}{dz}-abu=0, \tag{6.1}$$

где a, b, c — произвольные комплексные числа.

Фундаментальное решение (6.1), регулярное в окрестности точки $z=0$, имеет вид степенного ряда

$$F\,(a,\ b;\ c;\ z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a)_n\,(b)_n}{(c)_n\,n!}\,z^n. \tag{6.2}$$

Символы типа $(z)_n$ — *символы Похгаммера* [5] — означают

$$(r)_n=r\,(r+1)\ldots(r+n-1),\quad n=1,2,3,\ldots,\quad r_0=1. \tag{6.3}$$

Функция $F\,(a,\ b;\ c;\ z)$ называется *гипергеометрическим рядом*. Ряд абсолютно сходится внутри круга $|z|=1$. На границе круга сходимости ряд абсолютно сходится только при $\mathrm{Re}\ (c-a-b)>0$. Гипергеометрический ряд сводится к многочлену степени n относительно z, если $a=-n$ или $b=-n$ ($n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$). Ряд (6.2) теряет смысл, когда параметр $c=m$ ($m=0,\ -1,\ -2,\ \ldots$), а a или b не равны отрицательному целому $n<m$. Функция $F\,(a,\ b;\ c;\ z)/\Gamma\,(c)$ является целой аналитической функцией параметров a, $в$, c в любой конечной области комплексного пространства этих параметров.

Гипергеометрический ряд при вычислениях удобно записывать по схеме Горнера

$$F\,(a,\ b;c;z)\approx\left\{\left[\frac{(a+N-1)\,(b+N-1)}{(c+N-1)\,N}\,z+1\right]\times\right.$$

$$\left.\times\,\frac{(a+N-2)\,(b+N-2)}{(c+N-2)\,(N-1)}\,z+\ldots\right\}\frac{ab}{c}\,z+1. \tag{6.4}$$

Линейно независимое по отношению к $F\,(a,\ b;\ c;\ z)$ решение гипергеометрического уравнения (6.1) (при условии, что $(c-a-b)$ не является целым числом) имеет вид

$$F_2\,(z)=(1-z)^{c-a-b}\,F\,(c-a,\ c-b;\ c,\ z),\quad |z|<1. \tag{6.5}$$

Производные

$$\frac{d}{dz}\,F\,(a,\ b;\ c;\ z)=\frac{ab}{c}\,F\,(a+1,\ b+1;\ c+1;\ z). \tag{6.6}$$

Гипергеометрическая функция может быть определена на всей плоскости z, разрезанной соответствующим образом по действительной оси (см., например, [5,17]). Известен ряд аналитических продолжений гипергеометрического ряда, позволяющих представить гипергеометрическую функцию вне круга $|z|=1$ также в виде степенного ряда. Ниже приводятся два таких продолжения, применимых к функциям вещественного аргумента (они также обозначаются как $F\,(a,\ b;\ c;\ z)$):

$$F\,(a,\ b;c;z)=A_1\,z^{-a}\,F\,(a,\ a+1-c;\ a+b+1-c;\ 1-z^{-1})+$$

$$+A_2\,z^{a-c}\,(1-z)^{c-a-b}\,F\,(c-a,\ 1-a;\ c+1-a-b;\ 1-z^{-1}),$$

$$\mathrm{Re}\,z=x>1/2; \tag{6.7}$$

$$F\,(a,\ b;c;\ z)=B_1\,(-z)^{-a}\,F\,(a,\ 1-c+a;\ 1-b+a;\ z^{-1})+$$

$$+B_2\,(-z)^{-b}\,F\,(b,\ 1-c+b;\ 1-a+b;\ z^{-1}),\quad |z|>1, \tag{6.8}$$

где

$$A_1=\frac{\Gamma\,(c)\,\Gamma\,(c-a-b)}{\Gamma\,(c-a)\,\Gamma\,(c-b)},\quad A_2=\frac{\Gamma\,(c)\,\Gamma\,(a+b-c)}{\Gamma\,(a)\,\Gamma\,(b)}; \tag{6.9}$$

$$B_1=\frac{\Gamma\,(c)\,\Gamma\,(b-a)}{\Gamma\,(b)\,\Gamma\,(c-a)},\quad B_2=\frac{\Gamma\,(c)\,\Gamma\,(a-b)}{\Gamma\,(a)\,\Gamma\,(c-b)}. \tag{6.10}$$

Разложение (6.7) в случае вещественных функций применимо на интервале $0{,}5 < x \leqslant 1$. В отличие от (6.2) оно эффективно вблизи $x = 1$, где гипергеометрический ряд (6.2) в общем сходится весьма медленно. Разложение (6.8) в вещественной области пригодно для всех $x < -1$.

Многие специальные функции выражаются через гипергеометрическую функцию. Отметим среди них *функции Лежандра*, которые в гл. 8 рассматриваются лишь при частных значениях параметров. Функциями Лежандра называются решения дифференциального уравнения

$$(1-z^2)\frac{d^2w}{dz^2} - 2z\frac{dw}{dz} + \left[\nu(\nu+1) - \frac{\mu^2}{1-z^2}\right]w = 0, \tag{6.11}$$

однозначные и регулярные на плоскости комплексного переменного z, разрезанной вдоль действительной оси от 1 до ∞; ν и μ — произвольные комплексные константы. Фундаментальные линейно независимые решения уравнения (6.11) обозначаются как $P_\nu^\mu(z)$, $Q_\nu^\mu(z)$. При $\mu \neq 0$ эти функции называются *присоединенными функциями Лежандра* (*сферическими функциями*) соответственно первого и второго рода.

Приведем два соотношения, связывающие функции Лежандра вещественного аргумента с гипергеометрической функцией (см. [5]) при $-1 < x < 1$, $\mu \neq 0$;

$$P_\nu^\mu(z) = \frac{1}{\Gamma(1-\mu)}\left|\frac{1+x}{1-x}\right|^{\mu/2} F\left(-\nu, \nu+1;\ 1-\mu;\ \frac{1-x}{2}\right), \quad -1 < x < 3; \tag{6.12}$$

$$Q_\nu^\mu(x) = \frac{\pi}{2}\operatorname{ctg}(\pi\mu)\, P_\nu^\mu(x) - \frac{\pi}{2\sin(\pi\mu)}\,\frac{\Gamma(\nu+\mu+1)}{\Gamma(\nu-\mu+1)}\, P_\nu^{-\mu}(x). \tag{6.13}$$

Известен ряд других соотношений такого типа для функций комплексного аргумента [5, 9]. Эти соотношения в совокупности охватывают всю область определения функций Лежандра, однако их трудно реализовать на ПМК.

Отметим, что отрезок $-1 < x < 1$ лежит на линии разреза плоскости z. Функции $P_\nu^\mu(x)$ на этом участке и функции $Q_\nu^\mu(x)$ оказываются модифицированными в том смысле, что не являются аналитическими продолжениями $P_\nu^\mu(z)$ и $Q_\nu^\mu(z)$ [5]. Тем не менее эти функции удовлетворяют уравнению (6.11) и широко используются в математической физике.

Программа 6.1. Гипергеометрический ряд $F(a, b; c; x)$ вещественного аргумента, $|x| < 1$, $c \neq 0, -1, -2, \ldots$. Суммирование (6.4) по схеме Горнера.

1	2	ИП9	Fx²	Flg	/—/	÷	П0	1	ИПА
ИП0	1	—	ПД	+	×	ИПВ	ИПД	+	×
ИПС	ИПД	+	÷	ИП0	÷	ИП9	×	1	+
FL0	09	С/П							

Число членов ряда задается в программе по формуле $N = 12/(-\lg x^2)$.

Инструкция

1. Исходные данные: (x = Р9, a = РА, b = РВ, c = РС).
2. Пуск: В/О С/П.
3. Результат: РХ = $F(a, b; c; x)$.
4. Регистры: рабочие Р9 — РС; оперативные Р0, РД; свободные Р1 — Р8.
5. Погрешность относительная меньше $2\cdot10^{-6}$ при положительных x, a, b, c и при условии $2(a + b - c) < N$. Если хотя бы одна из указанных переменных отрицательна, то ряд становится знакопеременным и оценка погрешности усложняется.

а) Отрицательна одна из переменных x, a, b, c. Рассчитывается максимальный по модулю член ряда (6.2) — программа 6.2. Пусть модуль указанного члена равен M. Если $M < |F(a, b; c; x)|$, то указанная выше оценка сохраняется. В противном случае за максимальную абсолютную погрешность следует принять $2\cdot10^{-6}\ M$.

б) Отрицательны две или больше переменных x, a, b, c. Вычисляются суммы S_r первых N_r членов ряда, где $r = |a|, |b|, |c|$ (учитываются только отрицательные параметры). Для нахождения S_r следует, кроме исходных данных п. 1 настоящей инструкции, ввести $N_r = 1 + |z|$ в регистр Р0 и затем пуск: БП 08 С/П. Здесь $|z|$ — модуль каждой из отрицательных констант a, b или c. За абсолютную погрешность принимается $2\cdot10^{-6}\ R$, где R — наибольшая из следующих величин: $|F(a, b; c; x)|$, M, $|S_r|$.

6. Время счета $t \approx 4/(-3\lg x^2)$ мин.

Примеры.

$F(1/2, 1;\ 3/2;\ 0{,}9025) = 1{,}9281902\ (1{,}9281903)$, $t \approx 16$ мин;

$F(1/2, 1;\ 3/2;\ 0{,}64) = 1{,}3732653\ (1{,}3732653)$, $t \approx 3{,}5$ мин.

В скобках — значения функции $\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\ln\dfrac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}$, которая при указанных параметрах a, b, c совпадает с гипергеометрической функцией [5].

Программа 6.2. Наибольший по модулю M член гипергеометрического ряда $F(a, b; c; x)$, $c \neq 0, -1, -2, \ldots$, из заданного числа N первых членов ряда.

1	ПД	0	П6	П8	ИП8	ИПД	ИПА	ИП6	+
×	ИПВ	ИП6	+	×	ИПС	ИП6	+	÷	КИП6
F,	ИП6	÷	ИП9	×	ПД	Fx²	F√	—	Fx<0
33	FBx	П8	FL0	05	С/П				

Инструкция

1. Исходные данные: (x = Р9, a = РА, b = РВ, c = РС), N = Р0. Для перебора всех существенных членов ряда в качестве N следует ввести $N = 9(1 + x) + |a| + |b| + |c|$.
2. Пуск: В/О С/П.
3. Результат: Р8 = M.
4. Регистры: рабочие Р8 — РС; оперативные Р0, Р6, РД; свободные Р1 — Р5, Р7.
5. Время счета $t \approx (N/7)$ мин.

Пример. Для $F(0{,}5,\ 1;\ -3{,}5,\ 0{,}64)$, $N = 22$ $M = 7{,}1499558$, $t = 3$ мин.

Программа 6.3. Производная гипергеометрического ряда (6.6). Функция $F_2(x)$, являющаяся линейно независимым к $F(a, b; c; x)$ решением гипергеометрического уравнения (6.5), $|x| < 1$, $c \neq 0, -1, -2, \ldots$. Для $F_2(x)$ число $(c - a - b)$ не должно быть целым.

1	2	ИП9	Fx²	Flg	/—/	÷	П0	ПД	ИПА
1	+	П6	ИПВ	1	+	П7	ИПС	1	+
П8	ПП	51	ИПА	×	ИПВ	×	ИПС	÷	П5
ИПД	П0	ИПС	П8	ИПА	—	П6	ИПС	ИПВ	—
П7	ИПА	—	1	ИП9	—	Fx^y	ПП	51	×
С/П	1	ИП0	1	—	П1	ИП6	+	×	ИП7
ИП1	+	×	ИП8	ИП1	+	÷	ИП0	÷	ИП9
×	1	+	FL0	52	В/О				

Инструкция

1. Исходные данные: ($x = P9$, $a = PA$, $b = PB$, $c = PC$).
2. Пуск: В/О С/П.
3. Результат: $PX = F_2(x)$, $P5 = d[F(a, b; c; x)]/dx$.
4. Регистры: рабочие Р5, Р9 — РС; оперативные Р0, Р1, Р6 — Р8, РД; свободные Р2, Р3, Р4.
5. Погрешность такая же, как и в программе 6.1.
6. Время счета $t \approx 3/(-\lg x^2)$ мин.

Примеры.

$$\frac{d}{dx}[F(1/2, 1; 3/2; 0,9025)] = 4,6139646\ (4,6139722),$$

$$F_2(0,9025) = 1,9281902, \quad t = 34 \text{ мин};$$

$$\frac{d}{dx}[F(1/2, 1; 3/2; 0,64)] = 1,0972739\ (1,0972753),$$

$$F_2(0,64) = 1,3732653, \quad t = 8,5 \text{ мин}.$$

Числа в скобках — значения производной функции $\dfrac{1}{2\sqrt{x}} \ln \dfrac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}$ (см. пример к программе 6.1). В данных примерах $F_2(x)$ не является линейно независимой функций, так как здесь $c - a - b = 0$.

Программа 6.4. Гипергеометрический ряд $F(a, b; c; z)$ комплексного аргумента $z = x + jy$, $|z| < 1$, $c \neq 0, -1, -2, \ldots$. Суммирование (6.4) по схеме Горнера.

8	ИП9	Fx^2	ИП8	Fx^2	+	Flg	/—/	÷	П0
0	П7	1	ИП0	1	—	ПД	ИПА	+	ИПД
ИПВ	+	×	ИПД	ИПС	+	÷	ИП0	÷	×
П6	FBx	ИП7	×	ПД	ИП9	×	ИП6	ИП8	×
+	П7	ИП6	ИП9	×	ИПД	ИП8	×	—	1
+	FL0	13	С/П						

Число учитываемых членов ряда задается в программе по формуле $N = 8/(-\lg|z|^2)$.

Инструкция

1. Исходные данные: ($x = P9$, $y = P8$, $a = PA$, $b = PB$, $c = PC$).
2. Ввод В/О С/П.
3. Результат: $PX = \operatorname{Re} F(a, b; c; x)$, $PY = P7 = \operatorname{Im} F(a, b; c; x)$.
4. Регистры: рабочие Р8 — РС; оперативные Р0, Р6, Р7; свободные Р1 — Р5.
5. Погрешность относительная меньше $1 \cdot 10^{-5}$ при положительных a, b, c, при условии $2(a + b - c) < N$, а также $0 \leqslant |\arg z| \leqslant \pi/4$. Если константы отрицательны или $|\arg z| > \pi/4$, то оценка погрешности требует дополнительных вычислений.

а) Отрицательна одна из констант a, b, c или $|\arg z| > \pi/4$. Рассчитывается по программе 6.2 максимальный по модулю член ряда. В этой программе в качестве x используется $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Пусть модуль указанного члена равен M. Если $M < |F(a, b; c; z)|$, то указанная выше оценка сохраняется. В противном случае за максимальную абсолютную погрешность следует принять $1 \cdot 10^{-5} M$.

б) Отрицательны две или больше переменных или одна из них, но при этом не выполняется условие $0 \leqslant |\arg z| \leqslant \pi/4$. В этом случае используется та же методика, как и в программе 6.1 (см. п. 5 инструкции к программе).

6. Время счета $t \approx 1,7/(-\lg|z|^2)$ мин.

Пример.

$F(1/2, 1; 3/2; 0,39 + j\,0,8) = 0,9695109 + j\,0,30732848$ $(0,96951055 + j0,30732883)$, $t \approx 16,5$ мин.

Число в скобках является значением функции $\dfrac{1}{2\sqrt{z}} \ln \dfrac{1+\sqrt{z}}{1-\sqrt{z}}$, которая совпадает с гипергеометрическим рядом при данных значениях параметров a, b, c [5] (здесь $\sqrt{z} = 0,8 + j0,5$).

Программа 6.5. Гипергеометрическая функция $F(a, b; c, x)$ как аналитическое продолжение гипергеометрического ряда (6.7), $0,5 < x \leqslant 1$; $c \neq 0, -1, -2, \ldots$; $(a + b - c) \neq 0, \pm1, \pm2, \ldots$.

1	П4	ИП7	F1/x	—	П8	ИПА	ИП7	Fx^y	ИП4
×	П4	ИПД	ПП	64	1	ПП	62	F1/x	П4
1	ИПВ	ПП	63	1	ИПА	+	ПП	62	ИП2
+	П2	0	П6	ИП4	ИПА	ИП6	+	ИПВ	ИП6
+	×	ИПС	ИП6	+	÷	КИП6	F,	ИП6	÷
×	ИП8	×	П4	ИП2	+	П2	FBx	—	Fx=0
34	С/П	ИПС	—	П5	ИП4	ИП5	×	П4	ИП5
1	+	П5	1	2	—	Fx⩾0	65	FBx	ИП5
×	F1/x	ИП5	Fln	1	—	ИП5	×	+	/—/
Fe^x	ИП5	$F\sqrt{\ }$	×	ИП4	×	П4	В/О		

Программа рассчитана на два последовательных пуска, на которых вычисляются и суммируются слагаемые, входящие в (6.7). Перед вторым пуском рассчитывается отдельно и засылается в регистр Р4 фактор $(1 - x)^{a+b-c}$.

Структура программы (при пуске 1)

00—11: расчет $(1 - x^{-1})$ и x^a,
12—31: расчет фактора A_1, образованного из гамма-функций (формула (6.9)),
32—61: вычисление гипергеометрического ряда $F(a, a + 1 - c; a + b + 1 - c; 1 - x^{-1}$ и полной величины первого слагаемого в (6.7). Расчет F ведется непосредственным суммированием ряда типа (6.2) до обращения в машинный нуль разности двух последовательных частичных сумм ряда,
62—97: подпрограмма обратной величины гамма-функции (см. программу 2.7).

Инструкция

1. Исходные данные для пуска 1 ($x = P7$, $a = PA$, $(1 + a - c) = PB$), $((1 + a + b - c) = PC$, $c = PД)$, $0 = P2$.
2. Пуск 1: В/О С/П.
3. Исходные данные для пуска 2: $((c - a) = PA$, $(1 - a) = PB$, $(1 - a - b + c) = PC)$. Содержимое регистров Р2, Р7, РД сохраняется.
4. Выполнить команды нажатием клавиш

1 ИПС — 1 ИП7 — Fx^y П4

(вычисление $(1 - x)^{a+b-c}$).

5. Пуск 2: БП 06 С/П.
6. Результат: $P2 = F(a, b; c; x)$. После каждого пуска в регистре Р6 — число учтенных при суммировании членов гипергеометрического ряда.
7. Регистры: рабочие Р2, Р6, Р7, РА — РД; оперативные Р4, Р5, Р8; свободные Р0, Р1, Р3, Р9.

8. Погрешность относительная меньше $5\cdot10^{-6}$ при $|a|$, $|b|$, $|c| \sim 1$. В противном случае следует оценить максимальный по модулю член гипергеометрического ряда при значениях параметров, указанных в качестве исходных данных для пусков 1 и 2, а также — S_r. Расчет ведется с помощью программ 6.2, 6.1. Более подробно — см. п. 5. инструкции к программе 6.1.

9. Время счета (суммарное для обоих пусков) $t \approx 8 + 6/[-\lg(1-x^{-1})^2]$ мин.

Пример. Рассчитать $F(a, -a;\ 1/2;\ \sin^2 y) = \cos 2ay$ [5] при $a = 0{,}1$, $y = 1{,}47$. Тогда $x = \sin^2 y = 0{,}98987446$. Это значение настолько близко к 1, что фундаментальный ряд (6.2) для данной функции будет сходиться чрезвычайно медленно, и его использование практически невозможно. В то же время величина $1 - x^{-1} = 1{,}0229100\cdot10^{-2}$ мала, и гипергеометрические ряды, входящие в (6.7), сходятся быстро. Результат расчета:

$F(1/10, -1/10;\ 1/2;\ \sin^2 1{,}47) = 0{,}95709256$ (0,95709242). Число в скобках — значение $\cos(0{,}2\cdot1{,}47)$. Полное время счета $t \approx 10$ мин. После пуска 1 результат: Р2 = 0,95086344.

Программа 6.6. Гипергеометрическая функция $F(a, b;\ c;\ x)$ как аналитическое продолжение гипергеометрического ряда (6.8), $x < -1$; $c \neq 0, -1, -2, \ldots$; $(a - b) \neq 0, \pm1, \pm2, \ldots$.

0	П2	ИП7	F1/x	П8	ИПА	ИП7	/—/	Fx^y	П4
ИПД	ПП	62	1	ПП	60	F1/x	П4	1	ИПВ
ПП	61	1	ИПА	+	ПП	60	ИП2	+	П2
0	П6	ИП4	ИПА	ИП6	+	ИПВ	ИП6	+	×
ИПС	ИП6	+	÷	КИП6	F,	ИП6	÷	×	ИП8
×	П4	ИП2	+	П2	FBx	—	Fx=0	32	С/П
ИПС	—	П5	ИП4	ИП5	×	П4	ИП5	1	+
П5	1	2	—	Fx≥0	63	FBx	ИП5	×	F1/x
ИП5	Fln	1	—	ИП5	×	+	/—/	Fe^x	ИП5
F√	×	ИП4	×	П4	В/О				

Программа рассчитана на два последовательных пуска, на которых вычисляется каждое из слагаемых в (6.8).

Инструкция

1. Исходные данные для пуска 1: (x = Р7, a = РА, $(1 + a - c)$ = РВ, $(1 + a - b)$ = РС, c = РД).
2. Пуск 1: В/О С/П.
3. Исходные данные для пуска 2: (b = РА, $(1 + b - c)$ = РВ, $(1 + b - a)$ = РС). Содержимое регистров Р2, Р7, РД сохраняется.
4. Пуск 2: БП 05 С/П.
5. Результат: После пуска 1 в Р2 — первое слагаемое из (6.8). Окончательный результат после пуска 2 Р2 = $F(a, b;\ c;\ x)$. После каждого пуска в Р6 — числа учитываемых членов при суммировании гипергеометрических рядов, входящих в слагаемые (6.8).
6. Погрешность относительная меньше $5\cdot10^{-6}$ при $|a|$, $|b|$, $|c| \sim 1$. В других случаях оценка погрешности производится так же, как в программе 6.5 (ср. также программу 6.1).
7. Время счета (суммарное для обоих пусков) $t \approx [8 + 3{,}6/\lg x^2]$ мин.
8. Регистры: рабочие Р2, Р6, Р7, РА — РД; оперативные Р4, Р5, Р8; свободные Р0, Р1, Р3, Р9.

Пример. Вычислить $(\mathrm{arctg}\,y)/y = F(1/2, 1;\ 3/2;\ -y^2)$ [5] при $y = 2$: $F(1/2, 1;\ 3/2;\ -4) = 0{,}55357472$ (0,5535743), $t \approx 10$ мин.

В скобках значение $(\mathrm{arctg}\,y)/y$ при $y = 2$. После пуска 1 результат: Р2 = 0,78539851.

Программа 6.7. Присоединенные функции Лежандра первого рода $P_\nu^\mu(x)$ вещественного аргумента (6.12), $-1 < x < 3$.

1	ИП8	—	ПС	П7	1	ИПА	+	ПВ	ИП8
1	↑	ИП5	—	2	÷	П9	—	ИП9	÷
Fx^2	Fx^y	F√	Fπ	÷	2	÷	F√	ПД	0
П6	ИПД	ИП7	×	ПД	ИП7	1	+	П7	1
2	—	Fx≥0	31	FBx	ИП7	×	F1/x	ИП7	Fln
1	—	ИП7	×	+	/—/	Fe^x	ИП7	F√	×
ИПД	×	ПД	П7	ИПД	ИП6	ИПА	—	×	ИПВ
ИП6	+	×	ИПС	ИП6	+	÷	КИП6	F,	ИП6
÷	ИП9	×	ПД	ИП7	+	П7	FBx	—	Fx=0
64	С/П								

Инструкция

1. Исходные данные: (x = Р5, μ = Р8, ν = РА).
2. Пуск: В/О С/П.
3. Результат: Р7 = $P_\nu^\mu(x)$.
4. Регистры: рабочие Р5, Р7, Р8, РА; оперативные Р6, Р9, РВ — РД; свободные Р0 — Р4.
5. Погрешность относительная меньше $2\cdot10^{-6}$ при положительных ν и $\mu < 1$. В остальных случаях см. инструкцию к программе 6.1 (с заменой $(-\nu) \to a$, $(\nu + 1) \to b$, $(1 - \mu) \to c$, $(1 - x)/2 \to x$)
6. Время счета $t \approx \left\{1 + 2\Big/\left[-\lg\dfrac{(1-x)^2}{4}\right]\right\}$ мин.

Примеры.

$P_{1,7}^{-1,7}(2{,}5) = 0{,}81572567$ (0,81572586), $t \approx 5{,}5$ мин. Число в скобках — значение функции $2^{-\nu}(x^2-1)^{\nu/2}/\Gamma(\nu+1)$ при $\nu = 1{,}7$, $x = 2{,}5$, которая совпадает с данной функцией Лежандра [9];

$P_{1,7}^{-0,5}(\cos 0{,}7) = 0{,}45164249$ (0,45164278), $t \approx 2{,}5$ мин. В скобках значение совпадающей с $P_\nu^{-1/2}$ функции

$$\sin\left[\left(\nu + \frac{1}{2}\right)\theta\right]\Big/\left[\left(\nu + \frac{1}{2}\right)\sqrt{\frac{\pi\sin\theta}{2}}\right] \text{ при } \nu = 1{,}7,\ \theta = 0{,}7.$$

Программа 6.8. Присоединенные функции Лежандра второго рода $Q_\nu^\mu(x)$ вещественного аргумента на разрезе (6.13), (6.12), $-1 < x < 1$.

ИПВ	ИП8	—	ПП	64	F1/x	ПД	ИПВ	ИП8	+
ПП	64	0	П6	ИП8	1	ИП9	—	ИП9	÷
Fx^y	Fπ	÷	2	÷	F√	ИПД	×	ПД	1
ИП8	—	ПС	ПП	64	П7	ИПД	ИП6	ИПА	—
×	ИПВ	ИП6	+	×	ИПС	ИП6	+	÷	КИП6
F,	ИП6	÷	ИП9	×	ПД	ИП7	+	П7	FBx
—	Fx=0	36	С/П	П7	ИПД	ИП7	×	ПД	ИП7
1	+	П7	1	2	—	Fx≥0	65	FBx	ИП7
×	F1/x	ИП7	Fln	1	—	ИП7	×	+	/—/
Fe^x	ИП7	F√	×	ИПД	×	ПД	В/О		

Программа рассчитана на два последовательных пуска, на которых вычисляются слагаемые, входящие в (6.13). Эти слагаемые выражаются через $P_\nu^{\pm\mu}(x)$, определяемые (6.12). Перед вторым пуском результат предыдущего счета засылается в регистр Р5.

Структура программы (при пуске 1)

00—35: вычисление фактора $A = -\dfrac{\pi\Gamma(\nu+\mu+1)}{2\sin(\pi\mu)\,\Gamma(-\nu+\mu+1)}$,

36—63: вычисление гипергеометрического ряда $F(-\nu,\ \nu+1;\ 1+\mu;\ (1-x)/2)$ и функции $AP_\nu^{-\mu}(x)$,

64—97: подпрограмма расчета гамма-функции.

Инструкция

1. Исходные данные для пуска 1: $(-\mu = Р8,\ (1-x)/2 = Р9,\ \nu = РА,\ (1+\nu) = РВ),\ -2\sin(\pi\mu)/\pi = РД$.
2. Пуск 1: В/О С/П.
3. Результат: $Р7 = AP_\nu^{-\mu}(x)$. Этот результат заносится в регистр Р5: ИП7 П5.
4. Исходные данные для пуска 2: $(\mu = Р8)$, $\pi\,\mathrm{ctg}\,(\pi\mu)/2 = РД$.
5. Пуск 2: БП 12 С/П.
6. Результат получается суммированием содержимого регистров Р7 и Р5: $Р7 + Р5 = Q_\nu^\mu(x)$.
7. Регистры: рабочие Р5, Р8 — РВ; оперативные Р6, Р7, РС, РД; свободные Р0 — Р4.
8. Погрешность относительная меньше $5\cdot10^{-6}$ при $\nu,\ \mu \approx 1$. В противном случае оценить максимальный по модулю член гипергеометрического ряда $F(-\nu,\ \nu+1;\ 1+\mu;\ (1-x)/2)$ или $F(-\nu,\ \nu+1;\ 1-\mu;\ (1-x)/2)$, а также величины S_r (подробнее см. программы 6.1, 6.2).
9. Время счета $t \approx \left[4 + 4/\lg\dfrac{(1-x)^2}{4}\right]$ мин.

Примеры.

$Q_{1,7}^{-0,3}(\cos 0{,}7) = 0{,}37655606 - 0{,}57596301 = -0{,}11940695$, $t \approx 9$ мин,

слагаемые в примере — результаты после пусков 1 и 2;

$Q_{1,7}^{-0,3}(0{,}8) = -1{,}5985994\ (-1{,}5986005)$, $t \approx 4$ мин.

В скобках — значение совпадающей с $Q_\nu^{0,5}(x)$ функции $(-\pi/2)\sin[(\nu+1/2)\theta/\sqrt{\pi\sin\theta/2}$ при $\theta = \arccos x$. В этом примере второй пуск не требуется, так как $\mathrm{ctg}\,\pi\mu = 0$ (ср. (6.13)).

6.2. Вырожденные гипергеометрические функции (функция Куммера и функция второго типа). Функция параболического цилиндра как частный случай вырожденных гипергеометрических функций

Дифференциальное уравнение *вырожденных гипергеометрических функций*

$$z\frac{d^2w}{dz^2}+(b-z)\frac{dw}{dz}-aw=0. \qquad (6.14)$$

Одно из частных решений этого уравнения — *функция Куммера* — выражается в виде следующего степенного ряда:

$$\Phi(a,\ b;\ z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a)_n}{(b)_n\,n!}z^n. \qquad (6.15)$$

Символы $(a)_n$ и т. д. были определены в (6.3); $\Phi(a,\ в;\ z)$ — целая функция от z и a, как функция параметра b имеет полюсы в точках $b = 0,\ -1,\ -2,\ \dots$. Функция $\Phi(a,\ b;\ z)/\Gamma(b)$ — целая от всех трех переменных $a,\ b,\ z$. При $a = -m$, где m — целое положительное число, $\Phi(a,\ b;\ z)$ вырождается в многочлен степени m. Иногда функцию Куммера обозначают как $M(a,\ b,\ z)$ [9].

При суммировании рядов типа (6.15), а особенно для комплексных z и a существенный выигрыш дает схема Горнера. Применительно к (6.15) указанная схема имеет вид

$$\Phi(a,\ b;\ z)=\left[\dots\left(\frac{a+N-1}{(b+N-1)n}z+1\right)\frac{a+N-2}{(b+N-2)(n-1)}z+\dots\right]\frac{a}{b}z+1. \qquad (6.16)$$

Здесь некоторую трудность представляет выбор числа N учитываемых членов ряда. Для $b > -2$ и $|z|,\ |a| < 50$ достаточное число членов ряда определяется эмпирической формулой

$$N \approx 15+1{,}5\,(|z|^2+|a|^2)^{1/2}. \qquad (6.17)$$

Эта формула при некоторых $z,\ a,\ b$ приводит к завышенным значениям N. Поэтому для вещественных $a,\ b,\ z = x$ целесообразно непосредственно суммировать (6.15) до совпадения с определенной точностью двух последовательных частичных сумм ряда (обычно до обращения в машинный нуль их разности).

Погрешности вычисления $\Phi(a,\ b;\ z)$ существенно зависят от знака $a,\ b$ и величины $\arg z$. При отрицательных значениях $a,\ b$ и $\arg z \neq 0$ ряды знакопеременны и точность снижается. В данном случае может оказаться полезным преобразование Куммера

$$\Phi(a,\ b;\ z)=e^z\,\Phi(b-a,\ b;\ -z). \qquad (6.18)$$

Второе решение уравнения (6.14), линейно независимое с функцией Куммера, связано с последней соотношением [7]

$$\Psi(a,\ b;\ z)=\frac{\Gamma(1-b)}{\Gamma(a-b+1)}\Phi(a,\ b;\ z)+\frac{\Gamma(b-1)}{\Gamma(a)}z^{1-b}\,\Phi(a-b+1,\ 2-b;\ z). \qquad (6.19)$$

Формула (6.19) пригодна в принципе и для целых b. Хотя в этом случае оба слагаемых обращаются в бесконечность, но бесконечности вычитаются и предельный переход приводит к конечной функции, содержащей логарифмический член $\ln z$ [5].

В отличие от Φ функция Ψ многозначна. Обычно рассматривается главная ветвь $\Psi(a,\ b;\ z)$ в плоскости, разрезанной по отрицательной части действительной оси, т. е. при $|\arg z| < \pi$. Для вещественных $z = x$ эта ветвь определена при $x > 0$:

$$\Psi(a,\ b;\ x)=\frac{\Gamma(1-b)}{\Gamma(a-b+1)}\Phi(a,\ b;\ x)+\frac{\Gamma(b-1)}{\Gamma(a)}x^{1-b}\,\Phi(a-b+1,\ 2-b;\ x). \qquad (6.20)$$

При произвольных $в$ и условиях $\mathrm{Re}\,z > 0$, $\mathrm{Re}\,a > 0$ справедливо интегральное представление

$$\Psi(a,\ b;\ z)=\frac{1}{\Gamma(a)}\int_0^\infty e^{-zt}\,t^{a-1}\,(1+t)^{b-a+1}\,dt. \qquad (6.21)$$

При больших $|z|$ функция $\Psi(a, b; z)$ определяется *асимптотическим рядом*

$$\Psi(a, b; z) \approx z^{-a} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (1+a-b)_n}{n!} (-z)^{-n}. \qquad (6.22)$$

Согласно оценкам следует выбирать число членов ряда

$$N = \begin{cases} u = |z| + b - a & \text{при } u < 15, \\ 15 & \text{при } u \geqslant 15. \end{cases} \qquad (6.23)$$

Вычисление Ψ удобно производить по схеме Горнера:

$$\Psi(a, b; z) \approx z^{-a} \left[\left[\cdots \left(\frac{r_N}{N(-z)} + 1 \right) \frac{r_{N-1}}{(N-1)(-z)} + \cdots \right] \frac{r_1}{(-z)} + 1 \right], \qquad (6.24)$$

где $r_k = (a + k - 1)(1 + a - b + k - 1)$.

Асимптотическое разложение $\Phi(a, b; z)$ имеет вид

$$\Phi(a, b; z) \approx e^z z^{a-b} \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(a)} \sum_{n=0}^{N} \frac{(b-a)_n (1-a)_n}{n!} z^{-n},$$

$$b \neq 0, -1, -2, \ldots . \qquad (6.25)$$

Формулу (6.25) можно использовать при $\mathrm{Re}\, z > 0$ и дополнительном условии (для вещественных $z = x$)

$$x + (2a - b) \ln x \gg 1. \qquad (6.26)$$

Асимптотическое разложение $\Phi(a, b; x)$ при произвольных a, b более громоздко (см., например, [9]), и его трудно реализовать на ПМК.

Вырожденные гипергеометрические функции при частных значениях параметров порождают ряд специальных функций [5,9]. Остановимся на функциях параболического цилиндра, которые в гл. 8 рассматриваются лишь при целых значениях параметра. Эти функции удовлетворяют дифференциальному уравнению

$$\frac{d^2 y}{dz^2} + \left(\nu + \frac{1}{2} - \frac{z^2}{4}\right) y = 0. \qquad (6.27)$$

Функции параболического цилиндра являются целыми функциями z и выражаются в виде линейной комбинации функций Куммера [9]. Запишем эти соотношения для двух линейно независимых решений уравнения (6.27) и вещественных значений аргумента:

$$U(a, x) = \frac{e^{-x^2/4}}{2^{a/2+1/4}} \left[\cos\vartheta\, \Phi\left(\frac{a}{2} + \frac{1}{4}, \frac{1}{2}; \frac{x^2}{2}\right) \frac{\Gamma\left(\frac{1}{4} - \frac{a}{2}\right)}{\sqrt{\pi}} - x\sqrt{2} \sin\vartheta\, \Phi\left(\frac{a}{2} + \frac{3}{4}, \frac{3}{2}; \frac{x^2}{2}\right) \frac{\Gamma\left(\frac{3}{4} - \frac{a}{2}\right)}{\sqrt{\pi}} \right]; \qquad (6.28)$$

$$V(a, x) = 2^{a/2+1/4} e^{-x^2/4} \left[\frac{\sin\vartheta\, \Phi\left(\frac{a}{2} + \frac{1}{4}, \frac{1}{2}; \frac{x^2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{4} - \frac{a}{2}\right)} + \frac{x\sqrt{2} \cos\vartheta\, \Phi\left(\frac{a}{2} + \frac{3}{4}, \frac{3}{2}; \frac{x^2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{4} - \frac{a}{2}\right)} \right], \quad \vartheta = \pi\left(\frac{a}{2} + \frac{1}{4}\right). \qquad (6.29)$$

Здесь вместо $D_\nu(x)$ использованы обозначения из [9], согласно которым $a = -\nu - {}^1/_2$ и первое из решений $U(a, x) \equiv D_{-a-1/2}(x)$. Для $U(a, x)$ и $V(a, x)$ дифференциальное уравнение (6.27) принимает вид

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - \left(a + \frac{x^2}{4}\right) y = 0. \qquad (6.30)$$

Функция $U(a, x)$ при больших x экспоненциально мала, исключая случаи больших по модулю отрицательных a (6.31). В формуле (6.28) оба слагаемых в квадратных скобках возрастают с увеличением x и асимптотически сравниваются по модулю (это легко видеть из асимптотического разложения (6.25)), имея противоположные знаки. В результате их сумма стремится к нулю, что при вычислениях приводит к значительным погрешностям округления уже при $x > 2$. Для $a = 1$ формула (6.28) применима лишь при $x \leqslant 3$. Для $a < 0$ предельные x несколько больше, но даже при $a = -3$ $x < 5$. В связи с этим целесообразно при больших x использовать следующее асимптотическое разложение [5]:

$$U(a, x) \equiv D_{-a-1/2}(x) \approx x^{-a-\frac{1}{2}} e^{-\frac{x^2}{4}} \sum_{n=0}^{N} \frac{\left(\frac{a}{2} + \frac{1}{4}\right)_n \left(\frac{a}{2} + \frac{3}{4}\right)_n}{n! \left(-\frac{x^2}{2}\right)^n}. \qquad (6.31)$$

Формула применима при $x \geqslant 4$ (см. подробнее программу 6.17). Отметим, что для $a = -n - 1/2$ ($n = 0, 1, 2, \ldots$) асимптотический ряд обрывается на члене $N \approx n/2$, переходя в точное представление $U(-n - 1/2, x) \equiv D_n(x)$ в элементарных функциях. В этом случае формула (6.31) применима при любых сколь угодно малых $x > 0$.

Программа 6.9. Функция Куммера $\Phi(a, b; x)$ вещественного аргумента, $b \neq 0, -1, -2, \ldots$. Суммирование ряда (6.15).

0	П4	1	П9	ПС	ИПА	ИП4	+	ИПВ	ИП4
+	÷	ИП9	×	ИП5	×	КИП4	F,	ИП4	÷
П9	ИПС	+	ПС	FBx	—	Fx=0	05	С/П	

Инструкция

1. Исходные данные: (x = Р5, a = РА, b = РВ).
2. Пуск: В/О С/П.
3. Результат: РС = $\Phi(a, b; x)$.
4. Регистры: рабочие Р5, РА — РС; оперативные Р4, Р9; свободные Р0—Р3, Р6 — Р8, РД.
5. Погрешность относительная меньше $5 \cdot 10^{-7}$ при положительных x, a, b и возрастает при отрицательных значениях любой из переменных. Тем не менее относительная погрешность не превышает $1 \cdot 10^{-3}$ при x и a, бо́льших — 30.

Погрешность также существенно возрастает при отрицательных b. Общнм способом оценки абсолютной погрешности является определение максимального по модулю M члена ряда. Это легко определить путем пошагового выполнения программы. На каждом цнкле значенне очередного члена ряда засылается программой в регистр Р9 (цнкл охватывает команды с адресами 05—27, засылка числа в Р9 — команда с адресом 20). Еслн M определен, то абсолютная погрешность не больше $1\cdot10^{-7}\,M$.

6. Время счета не превышет $t \approx (1{,}7 + (1/6)\sqrt{x^2 + a^2})$ мнн.

Примеры.

$\Phi(1{,}1;\ 5) = 148{,}41317$ $(148{,}41316\,[9])$, $t = 2{,}5$ мин;

$\Phi(1{,}1;\ 10) = 22026{,}463$ $(22026{,}466\,[9])$, $t = 3{,}5$ мин;

$\Phi(-52{,}5,\ 0{,}1;\ 1) = -16{,}399262$ $(-16{,}34\,[9])$, $t = 3{,}5$ мин;

$\Phi(-0{,}9,\ 0{,}8;\ 9) = -44{,}939401$ $(-44{,}939410\,[9])$, $t = 3{,}5$ мин.

Программа 6.10. Функцня Куммера $\Phi(a,\ b;\ z)$ комплексного аргумента $z = x + jy$, $b \neq 0,\ -1,\ -2,\ \ldots$. Суммирование ряда по схеме Горнера (6.16).

ИПА	Fx^2	ИП8	Fx^2	+	ИП9	Fx^2	+	$F\sqrt{\ }$	1
Farcsin	×	1	5	+	П0	0	ПС	Fπ	ИП0
1	—	ПД	ИПА	+	ИПД	ИПВ	+	÷	ИП0
÷	×	П7	FBx	ИПС	×	ПД	ИП8	×	ИП7
ИП9	×	+	ПС	ИП7	ИП8	×	ИП9	ИПД	×
—	1	+	FL0	19	С/П				

Инструкция

1. Исходные данные: (x = Р8, y = Р9, a = РА, b = РВ).
2. Пуск: В/О С/П.
3. Результат: РХ = Re $\Phi(a,\ b;\ z)$, РY = РС = Im $\Phi(a,\ b;\ z)$.
4. Регнстры: рабочие Р8 — РС; оперативные Р0, Р7, РД; свободные Р1 — Р6.
5. Погрешность относительная меньше: $5\cdot10^{-6}$ при $b > 0$, $|a|$, $|z| < 10$ и $1\cdot10^{-4}$ при $b > -2$, $|a|$, $|z| < 10$.
6. Время счета не более $(3 + 0{,}4\sqrt{|z|^2 + a^2})$ мин.

Пример.

$\Phi(1,\ 2;\ 2 - j\,\pi/3) = 2{,}3721963 - j\,1{,}957461$, $t \approx 3{,}5$ мин.

Точное значение [9]: $\dfrac{\sin(j + \pi/6)}{j + \pi/6}\, e^{1 - j\pi/6} = 2{,}372190 - j\,1{,}9574762.$

Программа 6.11. Функция Куммера $\Phi(a,\ b;\ z)$ комплексного аргумента $z = x + j\ y$ и комплексного параметра $a = a_1 + ja_2$, $b \neq 0,\ -1,\ -2,\ \ldots$. Суммирование ряда по схеме Горнера (6.16).

1	Farcsin	ИПА	Fx^2	ИП9	Fx^2	×	ИП6	Fx^2	+
ИП5	Fx^2	+	$F\sqrt{\ }$	×	1	5	+	П0	1
ПС	0	ПД	ИП0	1	—	П1	ИПВ	+	ИП0
×	F1/x	ИП9	XY	×	FBx	ИПА	ИП1	+	×
ПП	57	ПС	XY	ПД	ИП6	ИП5	ПП	57	1
+	ПС	XY	ПД	FL0	23	С/П	П4	ИПД	×
XY	П3	ИПС	×	+	ИПС	ИП4	×	ИПД	ИП3
×	—	В/О							

Инструкция

1. Исходные данные: (x = Р5, y = Р6, a_1 = РА, a_2 = Р9, b = РВ).
2. Пуск: В/О С/П.
3. Результат: РХ = РД = ImΦ $(a,\ b;\ z)$, РС = РY = Re $\Phi(a,\ b;\ z)$.
4. Регистры: рабочие Р5, Р6, Р9 — РД; оперативные Р0, Р1, Р3, Р4; свободные Р2, Р7, Р8.
5. Погрешность относительная меньше: $5\cdot10^{-6}$ при $b > 0$ и $|a|$, $|z| \leqslant 10$ и $1\cdot10^{-4}$ при $b > -2$ и $|a|$, $|z| \geqslant 10$.
6. Время счета $t \approx (5 + 0{,}5\sqrt{|z|^2 + |a|^2})$ мин.

Пример. $\Phi(2 + j,\ 3;\ 4 - j) = 26{,}696048 + j\,5{,}428623$, $t = 7{,}5$ мин.

Программа 6.12. Функция Куммера $\Phi(a,\ b;\ x)$ вещественного аргумента. Асимптотнческое разложение (6.25), $b \neq 0,\ -1,\ -2,\ \ldots$; $a \neq 0$, $x > 0$ н условие (6.26).

1	ИПА	—	П7	ИПА	ИПВ	ИПА	—	П6	—
ИП5	+	П0	КИП0	ИП6	ИП5	Fx^y	ИП5	Fe^x	÷
П4	ИПВ	ПП	61	F1/x	П4	ИПА	ПП	61	П4
ИП0	1	4	—	Fx⩾0	38	FBx	П0	1	ИП7
ИП0	1	—	+	FBx	ИП6	+	×	ИП0	÷
ИП5	÷	×	1	+	FL0	39	ИП4	×	П9
С/П	П8	ИП4	ИП8	×	П4	ИП8	1	+	П8
1	2	—	Fx⩾0	62	FBx	ИП8	×	F1/x	ИП8
Fln	1	—	ИП8	×	+	/—/	Fe^x	ИП8	$F\sqrt{\ }$
×	ИП4	×	В/О						

Структура программы

00—12: подготовка данных,

13—20: расчет $x^{b-a}\ e^{-x}$,

21—29: расчет $e^x x^{a-b}\ \Gamma(b)/\Gamma(a)$,

30—60: окончательный расчет $\Phi(a,\ b;\ x)$ по формуле (6.25),

61—93: подпрограмма вычнсления гамма-функцни.

Инструкция

1. Исходные данные: x = Р5, a = РА, b = РВ.
2. Пуск: В/О С/П.
3. Результат: РХ = Р9 = $\Phi(a,\ b;\ x)$.
4. Регистры: рабочие Р5, Р9 — РВ; оперативные Р0, Р4, Р6—Р8; свободные Р1 — Р3, РС, РД.
5. Погрешность возрастает с уменьшением x, a н увеличением b. Относительная погрешность меньше:

$x \geqslant$	10	15	10	10
$a \geqslant$ $\delta \leqslant$	$\lvert b\rvert/2$ $5\cdot10^{-5}$	$\lvert b\rvert/2$ $1\cdot10^{-6}$	$-0{,}5\ (b \leqslant 1)$ $3\cdot10^{-3}$	$0{,}2\ (b \leqslant 1)$ $6\cdot10^{-4}$

6. Время счета (максимальное) $t \approx 3{,}5$ мин.

Примеры.

$\Phi(1,\ 0{,}9;\ 10) = 29632{,}752$ $(29632{,}738\ [9])$;

$\Phi(-0{,}3,\ 0{,}9;\ 10) = -419{,}79554$ $(-419{,}00643\ [9])$;

$\Phi(1,\ 2;\ 10) = 2202{,}6468$ $(2202{,}5466)$.

В последнем примере в скобках — значение функции $e^5 \mathrm{sh}\, 5/5$, которая совпадает в Φ (1, 2; 10) [5].

Программа 6.13. Вторая вырожденная гипергеометрическая функция $\Psi(a,\ b;\ x)$ вещественного аргумента, $x > 0$, $b \neq 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ (6.20), (6.15).

П6	ИП1	ИПА	+	П7	0	П4	П3	КИП0	/—/
ИП5	Fx^y	П9	ПС	ИПА	ИП4	+	ИПВ	ИП4	+
÷	ИП9	×	ИП5	×	КИП4	F,	ИП4	÷	П9
ИПС	+	ПС	FВх	—	Fx=0	14	ИПС	F1/x	П4
ИП1	ПП	65	F1/x	П4	ИП7	ПП	65	П2	ИП6
+	П6	1	ИП1	/—/	П1	—	ПВ	ИП7	ПА
ИПД	П7	FL0	05	С/П	П8	ИП4	ИП8	×	П4
ИП8	1	+	П8	1	2	—	Fx⩾0	66	FВх
ИП8	×	F1/x	ИП8	Fln	1	—	ИП8	×	+
/—/	Fe^x	ИП8	$F\sqrt{}$	×	ИП4	×	В/О		

Инструкция

1. Исходные данные: (x = Р5, a = РА = РД, b = РВ, $1 - b$ = Р1), 4 = Р0. Обращаем вниманне на то, что содержимое регистров РА, РВ, Р1 прн преждевременном прекращении счета может измениться. Поэтому в случае досрочного останова следует заново ввести указаниые исходные данные.

2. Пуск: Сх В/О С/П.

3. Результат: Р6 $= \Psi(a,\ b;\ x)$, Р2 $= \Sigma^{(2)}$ ($\Sigma^{(2)}$ — второе слагаемое в (6.19)).

4. Регнстры: рабочие Р1, Р2, Р5, Р6, РА, РВ, РД; оперативные Р0, Р3, Р4, Р7 — Р9, РС; свободных нет.

5. Погрешность возрастает с увелнчением x прн $x > 1$ за счет ошибок округления при суммировании первого и второго слагаемых в формуле (6.20). Последние имеют противоположные знаки и возрастают с увелнчением x, тогда как искомая функция меняется значительно слабее или даже убывает. Согласно (6.22) асимптотнческое поведение $\Psi(a,\ b;\ x)$ характеризуется экспоненциальным убыванием с ростом x при $a > 0$, поэтому погрешности при прочих равных условиях существеино больше при положительных a. Оценку абсолютной погрешности для конкретных значений параметров a, b и аргумента x легко получнть по формуле $\Delta\Psi \approx 1 \cdot 10^{-6} |\Sigma^{(2)}|$, где $\Sigma^{(2)}$ — второе слагаемое в (6.20), заносимое в регистр Р2 в процессе счета (см. п. 3 инструкции).

6. Время счета $t \approx (7 + 0{,}6\sqrt{|x|^2 + |a|^2})$ мин.

Примеры.

$\Psi(0{,}1,\ 0{,}2;\ 1) = 0{,}9475167$ (0,94752) [9]), $t = 7{,}5$ мин;

$\Psi(-1{,}25,\ 0{,}5;\ 12{,}5) = 21{,}738$ (21,7366), $t = 13$ мин.

Число в скобках в последнем примере — значение функции $2^a e^{x/2} D_{-2a}(\sqrt{2}x)$, равной искомой функции [9]. Значение функции параболнческого цилиндра $D_{2,5}(5) = U(-3{,}5) = 9{,}9802 \cdot 10^{-2}$ взято из таблиц в [9].

Программа 6.14. Вторая вырожденная гипергеометрическая фуикция $\Psi(a,\ b;\ x)$ вещественного аргумента. Асимптотическое разложение (6.24) и формула (6.23).

ИПА	ИПВ	—	1	+	П6	ИПА	ИП5	Fx^y	ПС
ИП5	ИПВ	+	ИПА	2	×	—	П0	КИП0	ИП0
1	4	—	Fx⩾0	27	FВх	П0	1	ИПА	ИП0
1	—	+	FВх	ИП6	+	×	ИП0	÷	ИП5
/—/	÷	×	1	+	FL0	28	ИПС	÷	ПД
С/П									

Инструкция

1. Исходные данные: (x = Р5, a = РА, b = РВ).
2. Пуск: В/О С/П.
3. Результат: РХ = РД $= \Psi(a,\ b,\ x)$.
4. Регистры: рабочие Р5, РА, РВ, РД; оперативные Р0, Р6, РС; свободные Р1 — Р4, Р7 — Р9.
5. Погрешность относительная меньше: $5 \cdot 10^{-2}$ при $x \geqslant 5$; $5 \cdot 10^{-4}$ прн $x \geqslant 10$; $5 \cdot 10^{-6}$ при $x \geqslant 14$.
6. Время счета (максимальное) $t \approx 1{,}5$ мнн.

Примеры.

$\Psi(1,\ 0{,}1;\ 100) = 0{,}009815305$ (0,0098153 [9]);

$\Psi(1{,}1;\ 10) = 0{,}09158192$ (0,09156333);

$\Psi(1{,}1;\ 5) = 0{,}1664$ (0,170422).

В последннх двух примерах в скобках указаны табличные значения [9] $e^x E_1(x) = \Psi(1,\ 1;\ x)$, где $E_1(x)$ — нитегральная показательная функция.

Программа 6.15. Вторая вырожденная гипергеометрическая функция $\Psi(a,\ b;\ z)$ комплексного аргумента $z = x + jy$. Асимптотическое разложение (6.24) и формула (6.23), $|\arg z| < \pi/2$.

ИПА	ИПВ	—	1	+	П9	1	ПС	0	ПД
ИП5	Fx^2	ИП6	Fx^2	+	П4	$F\sqrt{}$	ИП9	—	П0
КИП0	ИП0	1	4	—	Fx⩾0	29	FВх	П0	ИП6
/—/	ИПА	ИП0	1	—	+	FВх	ИП9	+	×
ИП0	/—/	÷	ИП4	÷	×	FВх	ИП5	×	ПП
82	1	+	ПС	XY	ПД	FL0	29	ИП5	ИП4
$F\sqrt{}$	П3	÷	Farccos	ИПА	/—/	×	П1	FВх	ИП3
Fx^y	↑	ИП1	F sin	×	XY	ИП1	F cos	×	ПП
82	С/П	П1	ИПД	×	XY	П2	ИПС	×	+
ИПС	ИП1	×	ИПД	ИП2	×	—	В/О		

Инструкцня

1. Исходиые данные: (x = Р5, y = Р6, a = РА, b = РВ).
2. Пуск: В/О С/П.
3. Результат: РХ = Re$\Psi(a,\ b;\ z)$, РY = Im $\Psi(a,\ b,\ z)$.
4. Регистры: рабочие Р5, Р6, РА, РВ; оперативные Р0 — Р4, Р9, РС, РД; свободные Р7, Р8.
5. Погрешность относительная меньше: $1 \cdot 10^{-1}$ при $|z| \geqslant 5$; $5 \cdot 10^{-3}$ при $|z| \geqslant 10$; $2 \cdot 10^{-5}$ при $|z| \geqslant 14$.
6. Время счета (максимальное) $t \approx 3{,}5$ мин.

Примеры.

$\Psi(1,1;\ j5)=0{,}0304-j\,0{,}184$ $(0{,}033896-j\,0{,}188143)$, $t\approx 1{,}5$ мин;

$\Psi(1,1;\ j10)=9{,}4696\cdot 10^{-3}-j9{,}820832\cdot 10^{-2}$ $(9{,}488568\cdot 10^{-3}-j9{,}8191061\times\times 10^{-2})$, $t\approx 2{,}5$ мин;

$\Psi(1,1;\ j5\pi)=3{,}9612548\cdot 10^{-3}-j6{,}316858\cdot 10^{-2}$ $(3{,}9612\cdot 10^{-3}-\!-j6{,}31685\cdot 10^{-2})$, $t\approx 3$ мин.

В приведенных примерах в скобках указаны значения функции $e^{jx}\,[-\mathrm{Ci}\,(x)+ + j(\mathrm{Si}\,(x)\ -\ \pi/2)]$, равной $\Psi\,(1,\ 1;\ j\,x)$. Значения интегральных синуса и косинуса взяты из таблиц [9].

Программа 6.16. Функция параболического цилиндра $U(a,\,x)\equiv D_{-a-1/2}\,(x)$ вещественного аргумента, $a\neq 2n+1/2,\ \ 2n+3/2$, где $n=0,\ 1,\ 2,\ \dots$; для $D_\nu\,(x)$ это означает, что $\nu\neq-1,\ -2,\ \dots$ (6.28).

ПА	2	Fx^y	П8	ИПВ	F√‾	ПП	29	ПД	ИПА
ИПВ	+	ПА	ИПВ	3	×	ПВ	ИП7	ПП	29
ИПД	+	ИП9	Fe^x	F√‾	÷	ИП8	÷	С/П	П4
ИПВ	ИПА	—	П5	0	П6	ИП4	ИП5	×	П4
ИП5	1	+	П5	1	2	—	Fx⩾0	36	FBx
ИП5	×	F1/x	ИП5	Fln	1	—	ИП5	×	+
Fe^x	ИП5	F√‾	÷	ИП4	÷	ИПА	Fπ	×	F cos
×	П4	ПС	ИПА	ИП6	+	ИПВ	ИП6	+	÷
ИП4	×	ИП9	×	КИП6	F,	ИП6	÷	П4	ИПС
+	ПС	FBx	—	Fx=0	73	ИПС	В/О		

Инструкция

1. Исходные данные: $(1/2x=\text{Р}7,\ x^2/2=\text{Р}9)$, $0{,}5=\text{РВ}$, $[a/2+0{,}25= =\text{РХ}]$.
2. Пуск: В/О С/П.
3. Результат: $\text{РХ}\ =U\,(a,\ x)=D_{-a-1/2}\,(x)$, $\text{РД}=A_1$, $\text{РС}=A_2$, где A_1 и A_2 — слагаемые в квадратных скобках (6.28).
4. Регистры: рабочие Р7, Р9, РС, РД; оперативные Р4 — Р6, Р8, РА, РВ; свободиые Р0 — Р3.
5. Погрешность относительная меньше:

x \ a	$\leqslant -2$	$\leqslant 0$	$\leqslant 2$	$\leqslant 5$	x \ a	$\leqslant -2$	$\leqslant 0$	$\leqslant 2$	$\leqslant 5$
$\leqslant 1$	$1\cdot 10^{-6}$	$2\cdot 10^{-6}$	$3\cdot 10^{-6}$	$5\cdot 10^{-5}$	$\leqslant 3$	$3\cdot 10^{-6}$	$1\cdot 10^{-4}$	$2\cdot 10^{-2}$	1
$\leqslant 2$	$1\cdot 10^{-6}$	$7\cdot 10^{-6}$	$5\cdot 10^{-4}$	$7\cdot 10^{-3}$	$\leqslant 4$	$5\cdot 10^{-6}$	$1\cdot 10^{-1}$	$2\cdot 10^{-1}$	1

Относительиая погрешность по результатам счета ориеитировочно (при $a>\ -10$ оценивается по формуле $\delta\approx|A_2/(A_1+A_2)|\cdot 10^{-6}$, где A_1, A_2 берутся из регистров РД, РС после окончания счета (см. п. 3 настоящей инструкции).

6. Время счета $t\approx\left(3+1{,}8\sqrt{x^2+\left|\dfrac{a}{2}\right|}\right)$ мин.

Примеры. $U\,(-0{,}8;\ 2)=0{,}46263946$ $(0{,}46264$ [9]); $U\,(1{,}4)=1{,}7751588\cdot 10^{-3}$ $(2{,}0704\cdot 10^{-3}$ [9]); $U\,(-5{,}5)=1{,}8799838$ $(1{,}8800$ [9]).

Программа 6.17. Функция параболического цилиндра $U\,(a,\ x)\equiv D_{-a-1/2}\,(x)$ вещественного аргумента, $4\leqslant x\leqslant 21$; $-1{,}3x\leqslant a\leqslant x$. Разложение в асимптотический ряд (6.31).

П8	Fx²	2	÷	/—/	П9	ИПА	2	F1/x	+
ПД	2	÷	ПС	2	F1/x	+	ПВ	0	П6
ИПД	/—/	ИП8	Fx^y	ИП9	Fe^x	F√‾	×	П8	П7
ИП8	ИП6	ИПС	+	×	ИП6	ИПВ	+	×	КИП6
F,	ИП6	÷	ИП9	÷	ИП7	XY	+	П7	F Bx
ИП8	XY	П8	÷	Fx²	1	—	Fx⩾0	65	ИП6
1	5	—	Fx⩾0	30	С/П				

Суммирование асимптотического ряда прекращается, когда $N=14$ или начинается нарастание по модулю членов ряда.

Инструкция

1. Исходные данные: $(a=\text{РА})$, $[x=\text{РХ}]$.
2. Пуск: В/О С/П.
3. Результат: $\text{Р}7=U\,(a,\ x)=D_{-a-1/2}\,(x)$. Как указывалось выше, при $a=-n-1/2$ $(n=0,\ 1,\ 2,\ \dots)$ ряд (6.31) обрывается, переходя в замкнутое выражение для $U\,(-n-1/2,\ x)=D_n\,(x)$, справедливое и для малых x. В этом случае следует в программу за командой П8 (адрес 52) вставить команды F1/x, БП 30, остальные команды не нужны. Останов для этого варианта программы может происходить как результат некорректной операции.
4. Регистры: рабочие Р7, Р8, РА; оперативные Р6, Р9, РВ — РД: свободные Р0 — Р5.
5. Погрешность относительная меньше:

x \ a	$\leqslant x$	$\leqslant x-2$	$\leqslant x-4$	x \ a	$\leqslant x$	$\leqslant x-2$	$\leqslant x-4$
$\geqslant 4$	0,5	$2\cdot 10^{-2}$	$1\cdot 10^{-4}$	$\geqslant 8$	$2\cdot 10^{-4}$	$5\cdot 10^{-6}$	$1\cdot 10^{-6}$
$\geqslant 6$	$3\cdot 10^{-2}$	$5\cdot 10^{-4}$	$5\cdot 10^{-6}$	$\geqslant 10$	$5\cdot 10^{-6}$	$1\cdot 10^{-6}$	$1\cdot 10^{-6}$

Относительная погрешность по результатам счета удовлетворительно оценивается по формуле $\delta=|\text{Р}8/U|\cdot 10^{-6}$, где U — вычисленное значение функции; Р8 — значение минимального члена ряда, который берется из регистра Р8 по окончании счета.

Для варианта программы, соответствующего $a=-n-1/2$ (см. п. 3 инструкции), относительная погрешность меньше $1\cdot 10^{-6}$, если $0<x\leqslant 21$.

6. Время счета (максимальное) $t\approx 3$ мин.

Примеры.

$U\,(-5,\ 3)=3{,}202125$ $(3{,}2021$ [9]);

$U\,(1{,}5)=1{,}6137839\cdot 10^{-4}$ $(1{,}6138\cdot 10^{-4}$ [9]);

$U\,(-4{,}5;\ 0{,}1)=D_4\,(0{,}1)=2{,}9327586)$ 2,9328 [9]), $t\approx 1$ мин.

Программа 6.18. Вторая функция параболического цилиндра $V(a, x)$ вещественного аргумента $x > -4$ (6.29).

2	Fx^y	П8	ИПВ	$F\sqrt{\ }$	ПП	28	ПД	ИПА	ИПВ
+	ПА	ИПВ	3	×	ПВ	ИП7	ПП	28	ИПД
+	ИП9	Fe^x	$F\sqrt{\ }$	÷	ИП8	×	С/П	П4	1
ИПА	—	П5	0	П6	ИП4	ИП5	×	П4	ИП5
1	+	П5	1	2	—	$Fx \geqslant 0$	35	FBx	ИП5
×	F1/x	ИП5	Fln	1	—	ИП5	×	·	/—/
Fe^x	ИП5	$F\sqrt{\ }$	×	ИП4	×	ИПА	Fπ	\	Fsin
×	П4	ПС	ИПА	ИП6	+	ИПВ	ИП6	+	÷
ИП4	×	ИП9	×	КИП6	F,	ИП6	÷	П4	ИПС
+	ПС	FBx	—	$Fx = 0$	73	ИПС	В/О		

Инструкция

1. Исходные данные: (x = Р7, $x^2/2$ = Р9), 0,5 = РВ, [$a/2 + 0{,}25$ РА].
2. Пуск: В/О С/П.
3. Результат: РХ = $\sqrt{\pi}\, V(a, x)$.
4. Регистры: рабочие Р7, Р9; оперативные Р4 — Р6, Р8, РА — РД; свободные Р0 — Р3, Р7.
5. Погрешность относительная меньше $1 \cdot 10^{-6}$ при $x > 0$, $a > -10$. При $-4 \leqslant x \leqslant 0$ погрешность определяется так же, как в программе 6.16 при положительных x с теми же значениями $|x|$ и a. Для $a < -10$ погрешность такая же, как у функции Куммера при больших отрицательных a (см. программу 6.9, где в качестве параметра a следует считать $a/2$ из данной программы, а в качестве x принимать $x^2/2$).
6. Время счета $t \approx (3 + 1{,}8\sqrt{x^2 + |a/2|})$ мин.

Примеры.

$V(1{,}4) = 86{,}395431$ (86,395 [9]), $t \approx 10$ мин;

$V(-5{,}5) = 0{,}18370447$ (0,18370 [9]), $t \approx 12$ мин.

Указатель программ

Номер программ	Функция	Область определения	Число шагов	Число регистров памяти	Примечание
6.1	$F(a, b; c; x)$	$\|x\|<1$; $c \neq 0, -1, -2, \ldots$	33	6	Суммирование степенного ряда
6.2	Наибольший по модулю член гипергеометрического ряда из отрезка первых N членов ряда	$c \neq 0, -1, -2, \ldots$	36	8	Аргумент x вещественный
6.3	$\frac{d}{dx}[F(a, b; c; x)]$, $F_2(x)$	$\|x\|<1$; $c \neq 0, -1, -2, \ldots$, для $F_2(x)$ число $(c-a-b)$ не целое	76	11	То же

Номер программ	Функция	Область определения	Число шагов	Число регистров памяти	Примечание
6.4	$F(a, b; c; z)$	$\|z\|<1$; $c \neq 0, -1, -2, \ldots$	54	9	Суммирование степенного ряда
6.5	$F(a, b; c; x)$	$0{,}5 < x \leqslant 1$; $c \neq 0, -1, -2, \ldots$; $(a+b-c) \neq 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$	98	10	Аналитическое продолжение гипергеометрического ряда
6.6	$F(a; b; c; x)$	$x<-1$; $c \neq 0, -1, -2, \ldots$; $(a-b) \neq 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$	96	10	То же
6.7	$P_\nu^\mu(x)$	$-1<x<3$	92	9	
6.8	$Q_\nu^\mu(x)$	$-1<x<1$	98	9	
6.9	$\Phi(a, b; x)$	$b \neq 0, -1, -2, \ldots$	29	6	Суммирование степенного ряда; аргумент x вещественный
6.10	$\Phi(a, b; z)$	$b \neq 0, -1, -2, \ldots$	56	8	Суммирование степенного ряда; a, b вещественные
6.11	$\Phi(a, b; z)$ $a = a_1 + ja_2$	$b \neq 0, -1, -2, \ldots$	73	11	Суммирование степенного ряда; b вещественный
6.12	$\Phi(a, b; x)$	$x>0$; $a \neq 0$; $b \neq 0, -1, -2, \ldots$	94	9	Асимптотическое разложение; a, b, x вещественные
6.13	$\Psi(a, b; x)$	$x>0$; $b \neq 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$	98	14	a, b, x вещественные
6.14	$\Psi(a, b; x)$	$x \geqslant 5$	51	7	Асимптотическое разложение; a, b вещественные
6.15	$\Psi(a, b; z)$	$\|\arg z\| < \pi/2$, $\|z\| \geqslant 5$	98	12	То же
6.16	$U(a, x)$	$a \neq 2n + 1/2$, $2n + 3/2$, $n = 0, 1, 2, \ldots$; $x \leqslant 4$	98	11	
6.17	$U(a, x)$	$x \geqslant 4$, $-1{,}3x \leqslant a \leqslant x$	66	8	Разложение в асимптотический ряд. Ряд переходит в замкнутое выражение при $a = -n - 1/2$
6.18	$V(a, x)$	$x > -4$	98	10	

Глава 7

Эллиптические интегралы. Эллиптические функции вещественного и комплексного аргументов. Тета-функции

7.1. Эллиптические интегралы. Параметр Якоби. Дзета-функция Якоби

Эллиптическим в общем случае называется интеграл

$$\int R(x,\ y)\,dx,$$

где $R(x,\ y)$ — рациональная функция от x и y, а y^2 — многочлен третьей или четвертой степени от x. Известны преобразования (см., например, [5]), позволяющие выразить любой эллиптический интеграл через интеграл от рациональной функции x и следующие три канонических интеграла.

Эллиптический интеграл первого рода

$$F(\varphi,\ k)=\int_0^{\varphi}\frac{dt}{\sqrt{1-k^2\sin^2 t}}. \tag{7.1}$$

Эллиптический интеграл второго рода

$$E(\varphi,\ k)=\int_0^{\varphi}\sqrt{1-k^2\sin^2 t}\,dt. \tag{7.2}$$

Эллиптический интеграл третьего рода

$$\Pi(n,\ \varphi,\ k)=\int_0^{\varphi}\frac{dt}{(1-n^2\sin^2 t)\sqrt{1-k^2\sin^2 t}}. \tag{7.3}$$

Здесь φ — амплитуда; k — модуль; n — параметр эллиптического интеграла (третьего рода).

Интегралы, у которых амплитуда $\varphi=\pi/2$, называются *полными*. Для интегралов первого и второго рода применяются соответственно обозначения

$$\mathbf{K}(k)\equiv F(\pi/2,\ k); \tag{7.4}$$

$$\mathbf{E}(k)\equiv E(\pi/2,\ k). \tag{7.5}$$

Если модуль вещественный, то без ограничения общности можно считать, что $k\leqslant 1$ [9]. Используется также *дополнительный модуль*, равный по определению

$$k_1=\sqrt{1-k^2}. \tag{7.6}$$

В таблицах эллиптических интегралов принято амплитуду выражать в градусах. Кроме того, часто величины F, E, $\mathbf{K}$, $\mathbf{E}$ рассматриваются как функции модулярного угла α — угла, заменяющего модуль и выраженного в градусах:

$$\alpha=(180°/\pi)\arcsin k. \tag{7.7}$$

Таким образом,

$$k=\sin\alpha;\qquad k_1=\cos\alpha. \tag{7.8}$$

Для эллиптических функций важное значение имеет *полный эллиптический интеграл первого рода как функция дополнительного модуля* $\mathbf{K}(k_1)$. Эта функция обозначается как $\mathbf{K}'(k)$:

$$\mathbf{K}'(k)\equiv\mathbf{K}(k_1). \tag{7.9}$$

В теории тета-функций важное значение имеет *параметр Якоби*

$$q\equiv\exp[-\pi\mathbf{K}'(k)/\mathbf{K}(k)]. \tag{7.10}$$

При вычислении $\mathbf{K}(k)$ одним из наиболее эффективных является итерационный *метод арифметико-геометрического среднего* (АГС) [9]. Начиная с пары чисел $a_0=1$, $b_0=k_1=\cos\alpha$, находятся следующие среднее арифметическое и среднее геометрическое, которые образуют две сближающиеся последовательности:

$$a_1=\frac{a_0+b_0}{2},\quad b_1=\sqrt{a_0b_0},$$
$$a_2=\frac{a_1+b_1}{2},\quad b_2=\sqrt{a_1b_1}, \tag{7.11}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$a_N=\frac{a_{N-1}+b_{N-1}}{2},\quad b_N=\sqrt{a_{N-1}b_{N-1}}.$$

Процесс заканчивается при таком N, для которого $a_N=b_N$ с заданной точностью. Искомое значение $\mathbf{K}(k)$ определяется по формуле

$$\mathbf{K}(k)=\pi/2a_N. \tag{7.12а}$$

Требуемые значения N растут по мере приближения k к единице, а k_1 к нулю. Сходимость итерационного процесса (7.11), однако, настолько быстрая, что даже при $k_1=1\cdot10^{-7}$ практически точное (для ПМК) значение искомого интеграла получается уже при $N=6$. Отметим, что при $k_1\leqslant1\cdot10^{-4}$ максимальную для ПМК точность обеспечивает формула

$$\mathbf{K}(k)=\ln(4/k_1). \tag{7.12б}$$

В этом случае погрешность определяется операцией $\ln x$ на ПМК.

Вычисление *полного эллиптического интеграла второго рода* производится по той же схеме АГС (7.11) с использованием разностей

$$c_n=(a_n-b_n)/2,\quad n=1,\ 2,\ \ldots,\ N, \tag{7.13}$$

получаемых на каждой итерации. Тогда

$$\mathbf{E}(k)=\left(1-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{N}2^n c_n^2\right)\mathbf{K}(k), \tag{7.14}$$

где $c_0=k$. Для дополнительного модуля $k_1\leqslant1\cdot10^{-4}$ значение $\mathbf{E}(k)\approx1$ с погрешностью, меньшей $1\cdot10^{-8}$.

Расчет *полных эллиптических интегралов третьего рода* выполняется по более сложной схеме АГС *. Алгоритм распространяется на обобщенные полные интегралы третьего рода вида

$$N(n,\ a,\ k)\equiv\int_0^{\pi/2}\frac{(1+a\sin^2 t)\,dt}{(1-n\sin^2 t)\sqrt{1-k^2\sin^2 t}}. \tag{7.15}$$

* Bartky W. Numerical Calculation of Generalized Elliptic Integrals // Rev. Mod. Phys. — 1938. — Vol. 10, N 14. — P. 264.

Модуль k также может быть заменен модулярным углом. Стандартная форма полного эллиптического интеграла третьего рода $\Pi(n, \pi/2, k)$ соответствует $a = 0$. Из (7.15) как частные случаи получаются полные эллиптические интегралы $\mathbf{K}(k)$ $(a = -n)$ и $\mathbf{E}(k)$ $(a = -k^2;\ n = 0)$.

Итерационная схема АГС строится по пяти параметрам:

$m_0 = 1,\quad p_0 = k_1,\quad s_0 = 1,\quad z_0 = (1+a)/(1-n),\quad t_0 = (1-n)/p_0;$

$$m_1 = \frac{m_0 + p_0}{2},\quad p_1 = \sqrt{m_0 p_0},\quad s_1 = \frac{s_0 + z_0}{2},\quad \underset{z_1}{r_1} = \frac{s_0 + z_0 t_0}{1 + t_0},\quad t_1 = \frac{p_1 (1 + t_0)^2}{4 m_1 t_0}; \tag{7.16}$$

. . . .

$$m_N = \frac{m_{N-1} + p_{N-1}}{2},\quad p_N = \sqrt{m_{N-1} p_{N-1}},\quad s_N = \frac{s_{N-1} + z_{N-1}}{2},$$

$$z_n = \frac{s_{N-1} + t_{N-1} z_{N-1}}{1 + t_{N-1}},\quad t_N = \frac{p_N (1 + t_{N-1})^2}{4 m_N t_{N-1}}.$$

Процесс заканчивается, когда $s_N = z_N$ или $t_N = 1$ с заданной точностью (удобно исходить из равенства разности $1 - t_N$ машинному нулю — см. программу 7.6.). Значение искомого интеграла

$$N(n, a, k) = (\pi/2)(s_N/m_N). \tag{7.17}$$

Вычислить *неполный эллиптический интеграл* $F(\varphi, \alpha)$ можно с помощью *понижающего преобразования Ландена* [9], при котором производится последовательный переход к эллиптическим интегралам с прогрессивно уменьшающимся модулем или модулярным углом. Модулярный угол, амплитуда и интеграл преобразуются следующим образом:

$$\sin\alpha_1 = \frac{2}{1 + \cos\alpha_0} - 1 = \mathrm{tg}^2\frac{\alpha_0}{2},\quad \varphi_1 = \varphi_0 + \mathrm{Arctg}(\cos\alpha\,\mathrm{tg}\,\varphi_0),$$

$$F(\varphi_1, \alpha_1) = 2F(\varphi_0, \alpha_0)/(1 + \sin\alpha_1), \tag{7.18}$$

где $\alpha_0 = \alpha$, $\varphi_0 = \varphi$. Выбирается ветвь Arctg, для которой $\mathrm{Arctg}(\cos\alpha\ \mathrm{tg}\varphi_0) > \varphi_0 - \pi/2$. N-кратное повторение указанного преобразования должно привести к эллиптическому интегралу $F(\varphi_N, \alpha_N)$ с настолько малым α_N, что $F(\varphi_N, \alpha_N) \approx \varphi_N$ (ср. (7.1)). Возвращение обратным преобразованием к старому значению φ приводит к формуле

$$F(\varphi, \alpha) = \frac{\varphi_N}{2^N}\prod_{s=1}^{N}(1 + \sin\alpha_s). \tag{7.19}$$

Понижающее преобразование Ландена является также основой для вычисления одновременно неполных эллиптических интегралов первого и второго рода $F(\varphi, \alpha)$, $E(\varphi, \alpha)$ и дзета-функции Якоби $Z(\varphi, \alpha)$. Последняя по определению равна логарифмической производной тета-функции Якоби $\vartheta_4(u, k)$ (§ 7.2). *Дзета-функцию Якоби* можно определить также равенством [9]

$$Z(\varphi, \alpha) = E(\varphi, \alpha) - [\mathbf{E}(\alpha)/\mathbf{K}(\alpha)]\,F(\varphi, \alpha). \tag{7.20}$$

Здесь (как и везде ниже) под $\mathbf{E}(\alpha)$, $\mathbf{K}(\alpha)$, $Z(\varphi, \alpha)$ подразумеваются $\mathbf{E}[k(\alpha)]$, $\mathbf{K}[k(\alpha)]$, $Z[\varphi, k(\alpha)]$, где $k(\alpha) = \sin\alpha$. В данном алгоритме понижающее преобразование Ландена используется совместно с итерационной схемой АГС

((7.11), (7.13), (7.14)). Амплитуда эллиптического интеграла преобразуется по формуле, аналогичной (7.18):

$$\alpha_0 \equiv \alpha,\quad \varphi_0 \equiv \varphi,\quad \varphi_{n+1} = \varphi_n + \mathrm{Arctg}\left(\frac{b_n}{a_n}\ \mathrm{tg}\,\varphi_n\right),\quad n = 0, 1, 2, \ldots, N. \tag{7.21}$$

Модулярный угол преобразуется так же, как и в (7.18). Аналогично выбираются и ветви Arctg. Значения a_n, b_n в (7.21) вычисляются по схеме АГС (7.11), которая выполняется параллельно с (7.21).

Итерационный процесс должен заканчиваться при достаточно малом модулярном угле α_N и соответственно модуле k_N, чтобы

$$F(\varphi_N, k_N) = \int_0^{\varphi_N}\frac{dt}{\sqrt{1 - k_N^2\sin^2 t}} \approx \varphi_N. \tag{7.22}$$

Возвращение к старому значению $\varphi_0 = \varphi$ приводит к формулам

$$F(\varphi, \alpha) = \varphi_N/(2^N a_N); \tag{7.23}$$

$$E(\varphi, \alpha) = \frac{\mathbf{E}(\alpha)}{\mathbf{K}(\alpha)}\,\mathbf{E}(\varphi, \alpha) + \sum_{n=1}^{N} c_n \sin\varphi_n. \tag{7.24}$$

Сравнение (7.24) с (7.20) показывает, что сумма в последней формуле равна дзета-функции Якоби

$$Z(\varphi, \alpha) = \sum_{n=1}^{N} c_n \sin\alpha. \tag{7.25}$$

Вычисление неполных эллиптических интегралов третьего рода $\Pi(n, \varphi, k)$ (7.3) производится численным интегрированием. Далее приводится программа 7.8, которая базируется на составной формуле Гаусса — Чебышева, одной из наиболее удобных для программирования (см. § 10.2 и программу 10.14). Такой же метод применяется и для вычисления неполных эллиптических интегралов первого и второго рода. Хотя время счета здесь больше, чем для метода, основанного на понижающем преобразовании Ландена, программы оказываются короче (ср. программы 7.5 и 7.7).

Программа 7.1. Полный эллиптический интеграл первого рода $\mathbf{K}(k)$. Метод АГС (7.11), (7.12). Переключатель Р — Г в положении Г.

Farcsin	F cos	ПВ	1	ПА	6	П0	ИПА	ИПВ	+
2	÷	ИПА	ИПВ	×	F√	ПВ	XY	ПА	FL0
07	Fπ	2	÷	ИПА	÷	С/П			

Использование программы при задании в качестве исходных данных модуля, модулярного угла или дополнительного модуля отличается лишь способом пуска.

Инструкция

1. Исходные данные и пуск при различных заданиях аргумента:
а) модуль $[k = \text{РХ}]$ В/О С/П;
б) модулярный угол в градусах $[\alpha = \text{РХ}]$ БП 01 С/П;
в) дополнительный модуль $[k_1 = \text{РХ}]$ БП 02 С/П.
2. Результат: $\text{РХ} = \mathbf{K}(k)$. Здесь при задании α и k_1 аргумент интеграла равен соответственно $k = \sin\alpha$, $k = \sqrt{1 - k_1^2}$.
3. Регистры: рабочие — ; оперативные Р0, РА, РВ; свободные Р1 — Р9, РС, РД.

4. Погрешность относительная меньше $1\cdot10^{7}$ при $1 \geqslant k_1 > 1\cdot10^{-7}$, что соответствует $0 \leqslant k \leqslant 1 - 5\cdot10^{-15}$ или $0 \leqslant \alpha \leqslant (90 - 1\cdot10^{-5})°$. При $k_1 < 5\cdot10^{-3}$ следует задавать именно k_1, если эта величина может быть вычислена с достаточной точностью; при других способах задания аргумента неизбежна потеря точности. Для $k_1 \leqslant 1\cdot10^{-4}$ можно использовать формулу $\mathbf{K}(k) = \ln(4/k_1)$, которая в этом случае гарантирует точность $5\cdot10^{-7}$. Можно также использовать программу 7.3.

5. Время счета $t \approx 30$ с.

Примеры. $\mathbf{K}(\sqrt{0{,}99}) = 3{,}6956373$ (3,69563736 [9]); $\mathbf{K}(15°) = 1{,}5981419$ (1,59814200 [9]); $\mathbf{K}(k)_{k_1 = 3\cdot10^{-6}} = 14{,}103194$ (14,103193).

Число в скобках в последнем примере получено по формуле (7.12б).

Программа 7.2. Параметр Якоби $q(k)$, полный эллиптический интеграл первого рода $\mathbf{K}(k)$. Метод АГС (формулы (7.10) — (7.12а)). Переключатель Р — Г в положении Г.

Farcsin	Fsin	ПС	FBx	Fcos	ПВ	ПП	20	П9	ИПС
ПВ	ПП	20	ИП9	÷	Fπ	×	/—/	Fe^x	С/П
1	ПА	6	П0	ИПА	ИПВ	+	2	÷	ИПА
ИПВ	×	F√	ПВ	XY	ПА	FL0	24	Fπ	ИПА
÷	2	÷	В/О						

Использование программы при задании в качестве исходных данных модуля, модулярного угла или дополнительного модуля отличается лишь способом пуска.

Инструкция

1. Исходные данные и пуск при различных заданиях аргумента:
а) модуль [k = РХ] В/О С/П,
б) модулярный угол в градусах [α = РХ] БП 01 С/П,
в) дополнительный модуль (при $k_1 < 1\cdot10^{-3}$) k_1 = РВ, 1 = РС БП 06 С/П.

2. Результат: РХ = $q(k)$, Р9 = $\mathbf{K}(k)$. При задании α и k_1 аргумент равен $k = \sin\alpha$ и $k = \sqrt{1 - k_1^2}$ соответственно.

3. Погрешность относительная меньше $1\cdot10^{-6}$ при $0 \leqslant k_1 \leqslant 1\cdot10^{-7}$.

4. Регистры: рабочие Р9, РС; оперативные Р0, РА, РВ; свободные Р1 — Р8, РД.

5. Время счета $t \approx 1$ мин.

Примеры.

$q(\sqrt{0{,}95}) = 0{,}17931605$ (0,179316007 [9]), $\mathbf{K}(\sqrt{0{,}95}) = 2{,}9083372$ (2,908337248 [9]);

$q(1°) = 1{,}9039554\cdot10^{-5}$ ($1{,}9039555\cdot10^{-5}$ [9]), $\mathbf{K}(1°) = 1{,}5709159$ (1,57091596 [9]);

$q(k)_{k_1 = 1\cdot10^{-7}} = 0{,}75433554$, $\mathbf{K}(k) = 17{,}504389$.

Программа 7.3. Полные эллиптические интегралы $\mathbf{E}(k)$, $\mathbf{K}(k)$. Метод АГС (формулы (7.6) — (7.8) (7.11), (7.12а), (7.13), (7.14)), $1\cdot10^{-99} \leqslant k_1 \leqslant 1$. Переключатель Р — Г в положении Г.

Farcsin	F cos	ПВ	Fx^2	1	ПА	ПД	—	/—/	П9
ИПА	ИПВ	×	F√	ИПА	ИПВ	+	2	÷	ПА
ИПВ	—	ПС	XY	ПВ	ИПС	Fx^2	ИПД	2	×
ПД	×	ИП9	+	П9	FBx	—	Fx = 0	10	Fπ
2	÷	ИПА	÷	ПД	1	ИП9	2	÷	—
×	С/П								

Использование программы при задании в качестве исходных данных модуля, модулярного угла или дополнительного модуля отличается лишь способом пуска.

Инструкция

1. Исходные данные и пуск при различных заданиях аргумента:
а) модуль [k = РХ] В/О С/П,
б) модулярный угол в градусах [α = РХ] БП 01 С/П,
в) дополнительный модуль [k_1 = РХ] БП 02 С/П.

2. Результат: РХ = $\mathbf{E}(k)$, РД = $\mathbf{K}(k)$. При задании α и k_1 аргумент равен соответственно $k = \sin\alpha$ и $k = \sqrt{1 - k_1^2}$.

3. Регистры: рабочие РД; оперативные Р9 — РС; свободные Р0 — Р8.

4. Погрешность относительная меньше $5\cdot10^{-7}$ для $\mathbf{K}(k)$ и меньше $5\cdot10^{-6}$ для $\mathbf{E}(k)$ при $1\cdot10^{-99} \leqslant k_1 \leqslant 1$, что соответствует $0 \leqslant k \leqslant (1 - 5\cdot10^{-199})$ или $0 \leqslant \alpha \leqslant (90 - 5\cdot10^{-98})°$. При $k_1 < 5\cdot10^{-3}$ следует задавать именно k_1, если k_1 можно вычислить с достаточной точностью; в противном случае неизбежна потеря точности. Для $k_1 \leqslant 1\cdot10^{-4}$ можно полагать $\mathbf{E}(k) = 1$ с погрешностью $\delta < 1\cdot10^{-8}$.

5. Время счета (максимальное) $t \approx 1{,}5$ мин.

Примеры.

$\mathbf{E}(0{,}9) = 1{,}1716971$ (1,17169705 [9]), $\mathbf{K}(0{,}9) = 2{,}2805491$ (2,28054914 [9]), $t \approx 50$ с;

$\mathbf{E}(k) = 1{,}0401145$ (1,040114396 [9]), $\mathbf{K}(k) = 3{,}1533853$ (3,15338525 [9]), $\alpha = 80°$, $t \approx 50$ с;

$\mathbf{E}(k) = 1{,}0000018$ (1,0), $\mathbf{K}(k) = 56{,}648339$ (56,648337), $k_1 = 1\cdot10^{-24}$, $t \approx 1{,}5$ мин.

В последнем примере значение $\mathbf{K}(k)$ в скобках получено по формуле (7.12б).

Программа 7.4. Неполный эллиптический интеграл первого рода $F(\varphi, k)$. Понижающее преобразование Ландена (7.18), (7.19). Переключатель Р — Г в положении Г.

Farcsin	F cos	ПВ	Fπ	1	8	0	П8	÷	ПД
ИПД	ИПВ	1	+	F1/x	×	ПД	F Bx	2	×
ПС	ИПВ	ИПА	F tg	×	Farctg	П9	9	0	÷
ИПА	—	Fx < 0	39	ИП9	ИП8	+	БП	26	ИП9
ИПА	·	ПА	2	ИПС	—	ИПС	×	F√	ПВ
1	—	Fx = 0	10	ИПД	ИПА	×	С/П		

Предусматривается задание в качестве исходных данных модуля, модулярного угла или дополнительного модуля. Использование программы в каждом из этих случаев отличается лишь способом пуска.

Инструкция

1. Исходные данные и пуск при различных заданиях аргумента:
а) модуль φ = РА, [k = РХ] В/О С/П,
б) модулярный угол в градусах φ = РА, [α = РХ]. БП 01 С/П,
в) дополнительный модуль φ = РА, [k_1 = РХ] БП 02 С/П.

Амплитуда φ задается в градусах. При вычислении по этой программе полного эллиптического интеграла $\mathbf{K}(k) = F(\pi/2, k)$ следует задавать $\varphi = 89{,}999999°$, но не $\varphi = 90°$.

2. Результат: РХ = $F(\varphi, k)$.

3. Регистры: рабочие — ; оперативные Р8 — РД; свободные Р0 — Р7.

4. Погрешность относительная меньше $1\cdot10^{-6}$ при $5\cdot10^{-4} < k_1 < 1$, что соответствует $0 \leqslant k \leqslant (1 - 1\cdot10^{-7})$ или $0 \leqslant \alpha \leqslant (90 - 0{,}02)°$.

5. Время счета (максимальное) $t \approx 3$ мин (в окрестности φ, $\alpha = 90°$). Среднее время счета 2 мин (см. примеыр).

Примеры.

$F(85°,\ 0{,}5) = 1{,}5850261$ (1,58502624 [9]), $t \approx 1$ мин;

$F(85°,\ 88°) = 3{,}0944889$ (3,09448898 [9]), $t \approx 2$ мин;

$F(89{,}999999°,\ k) = 8{,}9871841$ (8,9871968), $k_1 = 5 \cdot 10^{-4}$, $t \approx 3$ мин.

Число в скобках — значение **K** (k), полученное по формуле (7.12б).

Программа 7.5. Дзета-функция Якоби $Z(\varphi,\ k)$, неполные эллиптические интегралы первого и второго рода $F(\varphi,\ k)$, $E(\varphi,\ k)$, полные эллиптические интегралы первого и второго рода **K** (k), **E** (k). Понижающее преобразование Ланденa и схема АГС.

Farcsin	F cos	ПВ	Farccos	F sin	Fx^2	ПД	0	П9	1
ПА	П8	Farcsin	П5	ИПВ	ИПА	÷	ИП7	Ftg	×
Farctg	П6	ИП7	—	ИП5	+	Fx<0	33	ИП6	Fπ
+	БП	21	ИП6	ИП7	+	П7	ИПА	ИПВ	×
F $\sqrt{\ }$	ИПА	ИПВ	+	2	÷	ПА	ИПВ	—	ПС
XY	ПВ	ИП7	Fsin	ИПС	×	ИП9	+	П9	ИПС
Fx^2	ИП8	2	×	П8	×	ИПД	+	ПД	FBx
—	Fx=0	14	ИП5	ИПА	÷	ПВ	1	ИПД	2
÷	—	ПС	×	ПД	ИП7	ИП8	÷	ИПА	÷
ПА	ИПС	×	ИП9	+	С/П				

Использование программы при задании в качестве исходиых данных модуля, модулярного угла или дополнительного модуля отличается лишь способом пуска.

Структура программы

00—13: подготовка начальиых значений параметров для понижающего преобразования Ландеиа и схемы АГС,

14—37: понижающее преобразование Ландена ((7.18), (7.21)),

37—72: схема АГС (7.11), (7.13), вычисление дзета-функции Якоби (7.25).

33—97: окончательное вычисление искомых функций по формулам (7.12а), (7.14). (7.19), (7.24).

Инструкция

1. Исходные данные и пуск при различных заданиях аргумента:

а) модуль φ = Р7, [k = РХ] В/О С/П.

б) модулярный угол в радианах φ = Р7, [α = РХ] БП 01 СП,

в) дополнительный модуль φ = Р7, [k_1 = РХ], БП 02 С/П. Амплитуда φ задается в радианах.

2. Результат: РХ = $E(\varphi,\ k)$, Р9 = $Z(\varphi,\ k)$, РА = $F(\varphi,\ k)$, РВ = **K** (k), РД = **E** (k). Здесь при задании α или k_1 аргумент k соответственно равен $\sin\alpha$ или $\sqrt{1-k_1^2}$.

3. Регистры: рабочие Р9, РА, РВ, РД; оперативные Р5—Р8, РС; свободные Р0 — Р4.

4. Погрешность относительиая меньше $1 \cdot 10^{-6}$ при $0 \leqslant \varphi < \pi/2$, $1 \cdot 10^{-6} \leqslant k_1 \leqslant 1$. Последнему условию соответствуют при задании k и α неравенства $0 \leqslant k \leqslant (1 - 5 \cdot 10^{-13})$, $0 \leqslant \alpha \leqslant (\pi/2 - 1 \cdot 10^{-6})$.

5. Время счета возрастает по мере приближения φ и k_1 к предельным значениям $\pi/2$ и $1 \cdot 10^{-6}$. При $\varphi = 0{,}99999999\ \pi/2 = 1{,}5707962$ и $k_1 = 1 \cdot 10^{-6}$ время счета $t \approx 4$ мин, в среднем при умеренных значеииях φ и α время счета $t \approx 2$ мин (см. примеры).

Примеры.

1) $\varphi = \pi/4$, $k = 0{,}5$, $t \approx 2$ мин;

$E(\varphi,\ k) = 0{,}76719601$ (0,76719599); $Z(\varphi,\ k) = 0{,}06698737$ (0,0669873);

$F(\varphi,\ k) = 0{,}80436609$ (0,80436610);

K $(k) = 1{,}6857503$ (1,68575036);

E $(k) = 1{,}4674623$ (1,46746221).

2) $\varphi = 1{,}4835298$ (85°), $\alpha = 1{,}5358897$ (88°), $t \approx 2{,}5$ мин;

$E(\varphi,\ k) = 0{,}99748398$ (0,99748392); $Z(\varphi,\ k) = 0{,}34332616$ (0,3433262);

$F(\varphi,\ k) = 3{,}0944884$ (3,09448898);

K $(k) = 4{,}7427168$ (4,74271727); **E** $(k) = 1{,}0025842$ (1,00258409).

3) $\varphi = 1{,}5620696$ (89,5°), $k_1 = 1 \cdot 10^{-5}$, $t \approx 3$ мин;

$E(\varphi,\ k) = 0{,}99996211$; $F(\varphi,\ k) = 5{,}434511$; $Z(\varphi,\ k) = 0{,}57865654$;

K $(k) = 12{,}89922$; **E** $(k) = 1{,}0000004$.

В скобках указаны табличные данные из [9].

Программа 7.6. Полный обобщенный интеграл третьего рода $N(n,\ a,\ k)$ (7.15). Схема АГС (7.16), (7.17). Переключатель Р — Г в положеиии Г.

Farcsin	F cos	П7	1	П9	П8	ИПА	+	1	ИПВ
	÷	ПС	F Bx	ИП7	÷	ПД	ИПС	ИПД	×
ИП9	+	ИПД	1	+	÷	ИП9	ИПС	+	2
	П9	XY	ПС	ИП7	ИП8	+	2	÷	ИП7
ИП8	×	F $\sqrt{\ }$	П7	XY	П8	÷	ИПД	1	+
Fx^2	×	4	÷	ИПД	÷	ПД	1	—	Fx=0
17	Fπ	2	÷	ИП9	×	ИП8	÷	С/П	

Использование программы при задании в качестве одного из аргументов модуля, модулярного угла или дополнительного модуля отличается лишь способом пуска.

Инструкция

1. Исходные данные (кроме аргумента, связанного с модулем k): (a = РА, n = РВ).

2. Задание модульного аргумента и пуск:

а) модуль [k = РХ] В/О С/П,

б) модулярный угол в градусах [α = РХ] БП 01 С/П,

в) дополнительный модуль [k_1 = РХ], БП 02 С/П.

3. Результат: РХ = $N(n,\ a,\ k)$. При задании α и k_1 аргумент интеграла равен соответственно $k = \sin\alpha$ и $k = \sqrt{1-k_1^2}$.

4. Регистры: рабочие РА, РВ; оперативиые Р7 — Р9, РС, РД; свободные Р0 — Р6.

5. Погрешность относительная меньше $1 \cdot 10^{-6}$ при $0 \leqslant n \leqslant 0{,}9999999$, $1 \cdot 10^{-45} \leqslant k_1 \leqslant 1$. Последнему условию соответствуют допустимые интервалы для k и α: $0 \leqslant k \leqslant (1 - 5 \cdot 10^{-91})$, $0 \leqslant \alpha \leqslant (90 - 1 \cdot 10^{-43})°$. Для $k_1 \leqslant 5 \cdot 10^{-3}$ следует задавать именно k_1, если эта величина может быть вычислена с достаточной точностью; при других способах задания модульного аргумента в этом случае неизбежна потеря точности.

6. Время счета (максимальное) $t \approx 2{,}5$ мин.

Примеры.

N (0,—0,81; 0,9) = **E** (0,9) = 1,1716978 (1,17169705 [9]), $t \approx 1$ мин;

N (—0,5; 0,5; k) = **K** (k) = 105,00263 (105,00262 [9]), $k_1 = 1 \cdot 10^{-45}$, $t \approx 2{,}5$ мин;

N (0,7; 0; 75°) = П (0,7; k) = 6,1103062 (6,11030 [9]), $\alpha = 75°$, $t \approx 1{,}5$ мин;

N (0,9999998; 1,2; k) = 1,0625668·10^9, $k_1 = 1 \cdot 10^{-45}$, $t \approx 2{,}5$ мин.

Программа 7.7. Неполные эллиптические интегралы F (φ, k), E (φ, k). Интегрирование (7.1), (7.2) по составной формуле Гаусса — Чебышева (§ 10.2, программа 10.14 при $a = 0$). Переключатель Р—Г в положении Г.

Fsin	ПД	ИПС	ПП	50	F1/x	П6	КИП6	ИПС	ИП6
2	+	6	×	П0	÷	ПВ	0	П6	КИП0
3	F $\sqrt{\ }$	F1/x	/—/	ПА	ИП0	+	ИПВ	×	ПП
50	F1/x	ИП6	+	П6	ИПА	Fx≥0	23	FL0	19
ИП6	ИПВ	×	Fπ	×	1	8	0	÷	С/П
Fsin	ИПД	×	Fx²	/—/	1	+	F $\sqrt{\ }$	В/О	

Данный вариант программы предназначен для F (φ, k). Переход к E (φ,k) производится заменой команды F1/x (адрес 31) на↑. В программе число шагов задается приближенно равным $N \approx 6 + 3/\sqrt{1-k^2 \sin^2\varphi}$. Предусматривается задание в качестве аргумента модуля или модулярного угла.

Инструкция

1. Исходные данные и пуск:

а) (φ = РС), [α = РХ] В/О С/П,

б) (φ = РС), [k = РХ] БП 01 С/П.

Амплитуда φ и модулярный угол α задаются в градусах.

2. Результат: РХ = F (φ, k) (или РХ = E (φ, k) в зависимости от используемого варианта программы). Напомним, что $k = \sin\alpha$.

3. Регистры: рабочие РС; оперативные Р0, Р6, РА, РВ, РД; свободные Р1 — Р5, Р7 — Р9.

4. Погрешность относительная E (φ, k) меньше $1 \cdot 10^{-6}$, а F (φ, k) меньше: $1 \cdot 10^{-6}$ при $\varphi \leqslant 75°$ и $\alpha \leqslant 75°$ ($k \leqslant 0{,}97$), $5 \cdot 10^{-6}$ при $\varphi \leqslant 80°$ и $\alpha \leqslant 86°$ ($k \leqslant 0{,}997$). $1 \cdot 10^{-5}$ в остальных случаях. Максимальная погрешность частично корректируется изменением числа N шагов. В рамках данной программы заменяется число $n_0 = 6$ (адрес 12) на четные числа $n = 2, 4, 8$. При этом пропорционально n изменяется время счета. Максимальная погрешность $\delta_n \approx (n_0/n)^4 \, \delta_{n0}$.

5. Время счета $t \approx (2 + 1/\sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi})$ мин.

Примеры.

F (75°, k) = 1,8871335 (1,88713308 [9]), $\alpha = 76°$, $t \approx 5$ мин;

F (85°, 1) = 3,1312689 (3,1313013 [9]), $t \approx 14$ мин;

E (75°, k) = 0,99517588 (0,99517606 [9]), $\alpha = 76°$, $t \approx 5$ мин;

E (85°, 1) = 0,99619472 (0,99619470 [9]), $t \approx 14$ мин.

Программа 7.8. Эллиптический интеграл третьего рода П (n, φ, k). Интегрирование (7.3) по составной формуле Гаусса — Чебышева (§ 10.2, програма 10.14 при $a = 0$). Переключатель Р — Г в положении Г.

Fsin	ПД	ИПС	ПП	50	+	П6	КИП6	ИПС	ИП6
3	+	2	×	П0	÷	ПВ	0	П6	КИП0
3	F $\sqrt{\ }$	F1/x	/—/	ПА	ИП0	+	ИПВ	×	ПП
50	×	ИП6	+	П6	ИПА	Fx≥0	23	FL0	19
ИП6	ИПВ	×	Fπ	×	1	8	0	÷	С/П
Fsin	П8	Fx²	/—/	ИП9	×	1	+	F1/x	1
ИП8	ИПД	×	Fx²	—	F $\sqrt{\ }$	F1/x	В/О		

Число шагов (частных интервалов) задается в программе по формуле $N \approx$ $\approx [3 + 1/(1 - n \sin^2\varphi) + 1/\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}]$, где квадратные скобки означают округление до целого в бо́льшую сторону. Предусматривается возможность задания в качестве аргумента модуля или модулярного угла.

Инструкция

1. Исходные данные и пуск:

а) (n = Р9, φ = РС), [α = РХ], В/О С/П;

б) (n = Р9, φ = РС), [k = РХ] БП 01 С/П.

Модулярный угол α и амплитуда φ задаются в градусах.

2. Результат: РХ = П (n, φ, k) ($k = \sin\alpha$).

3. Регистры: рабочие Р9, РС; оперативные Р0, Р6, Р8, РА — РД; свободные Р2 — Р5, Р7.

4. Погрешность относительная меньше:

$$\left.\begin{array}{l} 1 \cdot 10^{-6} \text{ при } n \leqslant 0{,}9,\ \varphi \leqslant 90°,\ \alpha \leqslant 75°, \\ 3 \cdot 10^{-5} \text{ при } n \leqslant 1,\quad \varphi \leqslant 75°,\ \alpha \leqslant 75°, \end{array}\right\} k \leqslant 0{,}96;$$

$$6 \cdot 10^{-5} \text{ при } n \leqslant 1,\ \varphi \leqslant 75°,\ \alpha \leqslant 90°,\ k \leqslant 1.$$

Погрешность можно уменьшить, заменив в программе число $n_0 = 2$ (адрес 12) четными числами $n = 4, 6, 8$. При этом относительная погрешность уменьшается примерно в $(n/n_0)^4$ раз, а время счета возрастает $\sim (n/n_0)$.

5. Время счета $t \approx 1 + 1/[2\,(1 - n \sin^2\varphi)] + 1/\left(2\sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi}\right)$ мин.

Примеры.

П (0,4, 90°, k) = 2,9076153 (2,90761 [9]), $\alpha = 60°$, $t \approx 3$ мин;

П (0,9, 90°, k) = 12,464093 (12,46407 [9]), $\alpha = 75°$, $t \approx 7{,}5$ мин;

П (1, 75°, 1) = 8,2230527 (8,22356 [9]), $t \approx 9{,}5$ мин.

7.2. Эллиптические функции Якоби. Тета-функции

Эллиптические функции Якоби могут быть определены через обратную функцию эллиптического интеграла первого рода. Пусть в интеграле

$$u\,(\varphi,\ k) = \int_0^{\varphi} \frac{dt}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} \tag{7.26}$$

u и φ являются комплексными переменными. Рассмотрим обратную к u функцию

$$\varphi = am\,(u,\ k), \tag{7.27}$$

называемую *амплитудой*. Тогда эллиптическими функциями Якоби являются

$$\mathrm{sn}\,(u,\ k) = \sin\varphi = \sin am\,(u,\ k); \tag{7.28}$$

$$\mathrm{cn}\,(u,\ k) = \cos\varphi = \cos am\,(u,\ k); \tag{7.29}$$

$$\mathrm{dn}\,(u,\ k) = \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi} = \sqrt{1-k^2\sin^2[am\,(u,\ k)]}\ . \tag{7.30}$$

Они называются соответственно *эллиптическим синусом*, *эллиптическим косинусом* и *дельта-амплитудой* [6].

Функции (7.28)—(7.30) — мероморфные, двояко-периодические во всей плоскости комплексного переменного. Отношение их периодов не является действительным числом. В элементарном (основном) параллелограмме, построенном на наименьших периодах как на векторах, эллиптические функции Якоби имеют по два изолированных полюса и нуля. Отметим, что совокупность указанных свойств функций Якоби может служить их определением, математически эквивалентным соотношениям (7.26) — (7.30) [5].

Всего существует 12 функций Якоби. Указанные выше функции sn, cn, dn называются определяющей тройкой, остальные девять находятся через отношения пар функций из определяющей тройки или их обратные величины [9]. Обозначения всех функций строятся на базе четырех букв s, c, d, n путем их попарного сочетания (sc, cs, cd и т. д.).

Ниже приводятся основные периоды для определяющей тройки, а также положения нулей и полюсов (m, n — любые целые числа, включая нули):

Функция	Основные периоды	Нули	Полюсы
$\mathrm{sn}\,(u,\ k)$	$4\mathbf{K},\ \mathrm{j}\,2\mathbf{K}'$	$2m\mathbf{K}+\mathrm{j}\,2n\,\mathbf{K}'$	$2m\mathbf{K}+\mathrm{j}\,(2n+1)\,\mathbf{K}'$
$\mathrm{cn}\,(u,\ k)$	$4\mathbf{K},\ 2\mathbf{K}+\mathrm{j}\,2\mathbf{K}'$	$(2m+1)\,\mathbf{K}+\mathrm{j}\,2n\,\mathbf{K}'$	$2m\mathbf{K}+\mathrm{j}\,(2n+1)\,\mathbf{K}'$
$\mathrm{dn}\,(u,\ k)$	$2\mathbf{K},\ \mathrm{j}\,4\mathbf{K}'$	$(2m+1)\,\mathbf{K}+\mathrm{j}\,(2n+1)\,\mathbf{K}'$	$2m\mathbf{K}+\mathrm{j}\,(2n+1)\,\mathbf{K}'$

Здесь $\mathbf{K}\,(k)$ и $\mathbf{K}'\,(k)$ — полные эллиптические интегралы (7.4), (7.9). При вычислении функций можно ограничиться диапазоном $0 \leqslant \mathrm{Re}\,u < \mathbf{K}$ и $0 \leqslant \mathrm{Im}\,u \leqslant \mathbf{K}'$, если использовать их периодичность, а также формулы приведения, аналогичные формулам приведения тригонометрических функций.

Формулы приведения по аргументу $\mathrm{sn}\,(u,\ k)$, $\mathrm{cn}(u,\ k)$, $\mathrm{dn}\,(u,\ k)$ (далее параметр k опускается в обозначениях функций):

$$\mathrm{sn}\,(-u) = -\mathrm{sn}\,(u),\ \ \mathrm{sn}\,(u\pm\mathbf{K}) = \pm\frac{\mathrm{cn}\,(u)}{\mathrm{dn}\,(u)},\ \ \mathrm{sn}\,(u\pm 2\mathbf{K}) = -\mathrm{sn}\,(u),$$
$$\mathrm{sn}\,(u+\mathrm{j}\,\mathbf{K}') = \frac{1}{k\ \mathrm{sn}\,(u)},\ \ \mathrm{sn}\,(u+\mathbf{K}+\mathrm{j}\,\mathbf{K}') = \frac{\mathrm{dn}\,(u)}{k\ \mathrm{cn}\,(u)}\ ; \tag{7.31}$$

$$\mathrm{cn}\,(-u) = \mathrm{cn}\,(u),\ \ \mathrm{cn}\,(u\pm\mathbf{K}) = \pm\frac{k_1\,\mathrm{sn}\,(u)}{\mathrm{dn}\,(u)},\ \ \mathrm{cn}\,(u\pm 2\mathbf{K}) = -\mathrm{cn}\,(u),$$
$$\mathrm{cn}\,(u+\mathrm{j}\,\mathbf{K}') = -\frac{\mathrm{j}}{k}\,\frac{\mathrm{dn}\,(u)}{\mathrm{sn}\,(n)},\ \ \mathrm{cn}\,(u+\mathbf{K}+\mathrm{j}\,\mathbf{K}') = -\mathrm{j}\,\frac{k_1}{k\ \mathrm{cn}\,(u)}\ ; \tag{7.32}$$

$$\mathrm{dn}\,(-u) = \mathrm{dn}\,(u),\ \ \mathrm{dn}\,(u\pm\mathbf{K}) = \frac{k_1}{\mathrm{dn}\,(u)},\ \ \mathrm{dn}\,(u+\mathrm{j}\,2\mathbf{K}') = -\mathrm{dn}\,(u),$$
$$\mathrm{dn}\,(u+\mathrm{j}\,\mathbf{K}') = -\mathrm{j}\,\frac{\mathrm{cn}\,(u)}{\mathrm{sn}\,(u)},\ \ \mathrm{dn}\,(u+\mathbf{K}+\mathrm{j}\,\mathbf{K}') = \mathrm{j}\,\frac{k_1\,\mathrm{sn}\,(u)}{\mathrm{cn}\,(u)}\,. \tag{7.33}$$

Формулы приведения по параметру позволяют рассчитывать эллиптические функции при $k^2 < 0$ и $k^2 > 1$:

$k^2 < 0$. Пусть $k^2 = -p^2$, $u^* \equiv u\sqrt{1+p^2}$, $p^* \equiv p/\sqrt{1+p^2}$

$$\mathrm{sn}\,(u,\ k) = \frac{1}{\sqrt{1+p^2}}\,\frac{\mathrm{sn}\,(u^*,\ p^*)}{\mathrm{dn}\,(u^*,\ p^*)}\ ;$$
$$\mathrm{cn}\,(u,\ k) = \frac{\mathrm{cn}\,(u^*,\ p^*)}{\mathrm{dn}\,(u^*,\ p^*)}\ ;\quad \mathrm{dn}\,(u,\ k) = \frac{1}{\mathrm{dn}\,(u^*,\ p^*)}\,. \tag{7.34}$$

$k > 1$

$$\mathrm{sn}\,(u,\ k) = \frac{1}{k}\,\mathrm{sn}\left(uk,\ \frac{1}{k}\right);\quad \mathrm{cn}\,(u,\ k) = \mathrm{dn}\left(uk,\ \frac{1}{k}\right);$$
$$\mathrm{dn}\,(u,\ k) = \mathrm{cn}\left(uk,\ \frac{1}{k}\right). \tag{7.35}$$

Вычисление эллиптических функций Якоби может производиться многими методами (см., например, [9]). Ниже рассматриваются метод АГС и понижающее преобразование Ландена, примененные ранее для расчета эллиптических интегралов.

Метод АГС.

1. Исходная тройка чисел и итерационная схема совпадают с (7.11), (7.13):

$$a_0 = 1,\ \ b_0 = k_1 = \sqrt{1-k^2} = \cos\alpha,\ \ c_0 = k = \sin\alpha;$$
$$a_m = \frac{a_{m-1}+b_{m-1}}{2},\ \ b_m = \sqrt{a_{m-1}\,b_{m-1}},\ \ c_m = \frac{a_{m-1}-b_{m-1}}{2}\ , \tag{7.36}$$
$$m = 1,\ 2,\ \ldots,\ N.$$

Процесс заканчивается на таком N, при котором $c_N \approx 0$ с заданной точностью.

2. Находим амплитуду

$$\varphi_N = 2^N\,a_N\,u, \tag{7.37}$$

где u — аргумент (вещественный) искомой эллиптической функции.

3. Строим обратную рекуррентную схему:

$$\varphi_{m-1} = \frac{1}{2}\left[\varphi_m + \arcsin\left(\frac{c_m}{a_m}\sin\varphi_m\right)\right],\ \ m = N,\ N-1,\ \ldots,\ 1. \tag{7.38}$$

4. Искомые функции вычисляются по формулам

$$\mathrm{sn}\,(u,\ k) = \sin\varphi_0; \tag{7.39}$$
$$\mathrm{cn}\,(u,\ k) = \cos\varphi_0; \tag{7.40}$$
$$\mathrm{dn}\,(u,\ k) = (\cos\varphi_0)/\cos\,(\varphi_1-\varphi_0). \tag{7.41}$$

Как видно, для проведения преобразований по формулам (7.38) значения c_m/a_m, которые определяются из (7.36), должны на этапе АГС заноситься в память ПМК. Фактически при использовании ПМК это ограничивает максимальное число итераций значением $N = 8$. Однако, ввиду очень быстрой сходимости схемы АГС допустимый диапазон k достаточно велик:

$$1\cdot 10^{-35} \leqslant k_1 \leqslant 1, \text{ т. е. } 0 \leqslant k \leqslant 1-5\cdot 10^{-71}. \qquad (7.42)$$

При оценке погрешностей можно ограничить интервал изменения аргумента неравенством

$$0 \leqslant u \leqslant \mathbf{K}(k). \qquad (7.43)$$

За пределами этой области величины sn, cn, dn могут быть легко пересчитаны по формулам приведения (7.31)—(7.33) и из условий периодичности (см. выше). На рис. 7.1 показана зависимость $\mathbf{K}(k)$ от дополнительного модуля k_1 (нижняя граница заштрихованной области). Ориентировочные значения $\mathbf{K}(k)$ совпадают с предельными значениями аргумента, после которых целесообразно для повышения точности использовать формулы приведения.

Понижающее преобразование Ландена для функции sn (u, k) описано в [9]. Однако непосредственное использование приведенных в [9] формул дает значительные погрешности округления при $k \to 1$, т. е. при дополнительном модуле $k_1 \ll 1$. Ниже дается улучшенное соотношение, которое позволяет повысить точность (7.48).

1. Преобразование дополнительного модуля (увеличение)

$$k_1^{(m+1)} = 2\sqrt{k_1^{(m)}}/(1+k_1^{(m)}), \quad k_1^{(1)} = k_1. \qquad (7.44)$$

2. Преобразование аргумента

$$u_{m+1} = u_m(1+k_1^{(m)})/2, \quad m=1,\ 2,\ \ldots,\ N;\ u_1 = u. \qquad (7.45)$$

Соответственно преобразуются и sn $(u_m, k^{(m)})$ [9].

N-кратное выполнение указанных преобразований приводит к значению $k_1^{(N+1)} \to 1$, а $k^{(N+1)} = \sqrt{1-k_1^{(N+1)2}} \ll 1$. В этом случае соответствующая функция sn с достаточной точностью равна

$$\mathrm{sn}\left(u_{N+1},\ k^{(N+1)}\right) \approx \sin u_{N+1}. \qquad (7.46)$$

Располагая значениями $k_1^{(N)},\ k_1^{(N-1)},\ \ldots,\ k_1^{(1)}$, можно выполнить обратное преобразование эллиптической функции к старому значению аргумента и модуля с помощью рекуррентной формулы

$$\mathrm{sn}\left(u_m,\ k^{(m)}\right) = \frac{\mathrm{sn}\left(u_{m+1},\ k^{(m+1)}\right)}{\dfrac{1+k_1^{(m)}}{2} + \dfrac{1-k_1^{(m)}}{2}\,\mathrm{sn}^2\left(u_{m+1},\ k^{(m+1)}\right)}, \qquad (7.47)$$

где $m = N,\ N-1, \ldots 1$; sn $(u_1,\ k^{(1)}) =$ sn $(u,\ k)$.

Значение функции dn (u, k), относительно свободное от погрешностей округления, определяется по формуле

$$\mathrm{dn}\,(u,\ k) = \mathrm{sn}\,(u,\ k)\ \mathrm{sn}\,(u_2\ k^{(2)})\,(k_1 - 1) + 1, \qquad (7.48)$$

где sn $(u_2,\ k^{(2)})$ находится при реализации (7.47) на предпоследней итерации.

Вычислив dn, получим cn по известной формуле [9]

$$\mathrm{cn}\,(u,\ k) = \sqrt{(\mathrm{dn}^2\,(u,\ k) - k_1^2)/(1-k_1^2)}. \qquad (7.49)$$

Последняя формула не учитывает изменение знака cn при переходе через $u = \mathbf{K}(k)$. Для корректировки знака можно использовать рис. 7.1, где заштрихованная область между $u = \mathbf{K}(k)$ и $u = 3\,\mathbf{K}(k)$ соответствует cn < 0.

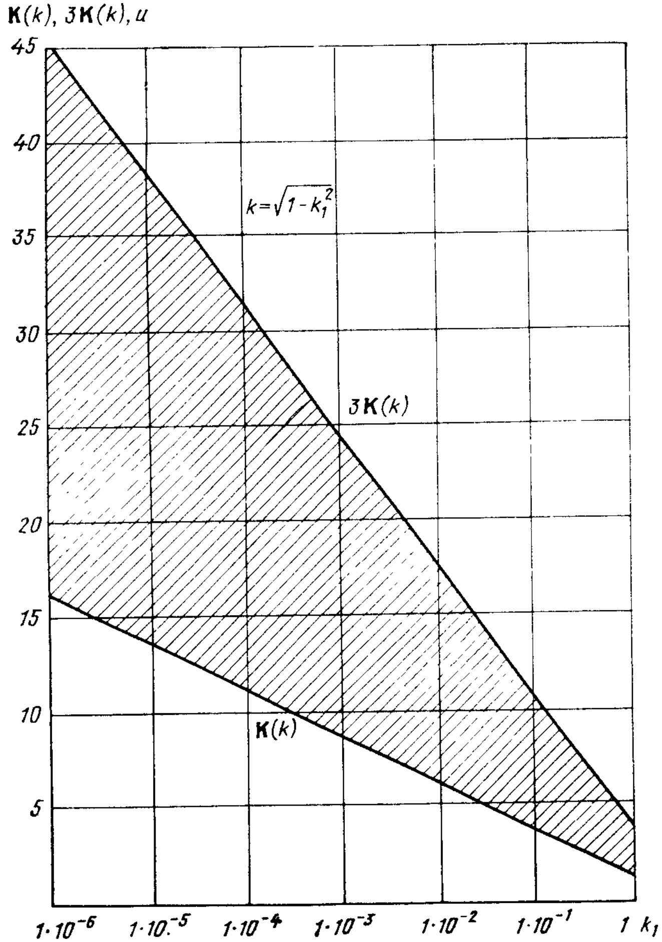

Рис. 7.1. Зависимость полного эллиптического интеграла первого рода и утроенного его значения от дополнительного модуля. Эллиптическая функция Якоби cn$(u,\ k)$ отрицательна при значениях аргумента u, лежащих в заштрихованной области

Отметим, что в целом понижающее преобразование Ландена при прочих равных условиях обеспечивает лучшую точность, чем метод АГС, хотя нуждается в корректировке знака cn $(u,\ k)$ и имеет программу большей длины (ср. программы 7.9, 7.10).

Расчет *эллиптических функций Якоби комплексного аргумента* может производиться по формулам [9]

$$\mathrm{sn}\,(u,\ k) = (sd_1 + \mathrm{j}\ cds_1c_1)/(c_1^2 + (kss_1)^2);$$

$$\mathrm{cn}\,(u,\ k) = (cc_1 - \mathrm{j}\ sds_1d_1)/(c_1^2 + (kss_1)^2);$$

$$\mathrm{dn}\,(u,\ k) = (dc_1\ d_1 - \mathrm{j}\ k^2\ scs_1)/(c_1^2 + (kss_1)^2). \qquad (7.50)$$

Здесь $u = x + jy$; $s \equiv \mathrm{sn}(x, k)$; $c \equiv \mathrm{cn}(x, k)$; $d \equiv \mathrm{dn}(x, k)$;
$s_1 \equiv \mathrm{sn}(y, k_1)$; $c_1 \equiv \mathrm{cn}(y, k_1)$; $d_1 \equiv \mathrm{dn}(y, k_1)$.

Ввиду того, что расчет сводится к вычислению эллиптических функций вещественного аргумента, оценить погрешность нетрудно. Отметим, что совместное использование довольно громоздких формул (7.50) и алгоритма АГС (или Ландена) требует значительного числа программных шагов. Поэтому соответствующие программы включают три последовательных пуска с промежуточным набором исходных данных и выполнением некоторого (небольшого) числа «ручных» команд.

Тета-функции определяются следующими степенными рядами по параметру Якоби $q(k)$ (7.10) [9]:

$$\vartheta_s(u, k) = \left(\frac{2\pi q^{1/2}}{kk_1 \mathbf{K}(k)}\right)^{1/2} \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m q^{m(m+1)} \sin(2m+1)\nu; \tag{7.51}$$

$$\vartheta_c(u, k) = \left(\frac{2\pi q^{1/2}}{k \mathbf{K}(k)}\right)^{1/2} \sum_{m=0}^{\infty} q^{m(m+1)} \cos(2m+1)\nu; \tag{7.52}$$

$$\vartheta_d(u, k) = \left(\frac{\pi}{2\mathbf{K}(k)}\right)^{1/2} \left(1 + \sum_{m=1}^{\infty} q^{m^2} \cos 2m\nu\right); \tag{7.53}$$

$$\vartheta_n(u, k) = \left(\frac{\pi}{2k_1 \mathbf{K}(k)}\right)^{1/2} \left(1 + \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m q^{m^2} \cos 2m\nu\right), \tag{7.54}$$

где $\nu = \pi u/2\mathbf{K}(k)$. Ввиду того, что параметр Якоби $q \ll 1$ (для не слишком малых k_1), ряды (7.51) — (7.54) сходятся чрезвычайно быстро. Функции, определенные этими формулами, называются *тета-функциями Невилля* [9]. Их важной особенностью является то, что отношение любых двух функций равно одной из эллиптических функций Якоби. Обозначение соответствующей эллиптической функции Якоби складывается из индекса функции в числителе (первая буква) и индекса функции в знаменателе (вторая буква):

$$\mathrm{sn}(u, k) = \frac{\vartheta_s(u, k)}{\vartheta_n(u, k)};\quad ns(u, k) = \frac{\vartheta_n(u, k)}{\vartheta_s(u, k)};\quad cd(u, k) = \frac{\vartheta_c(u, k)}{\vartheta_d(u, k)} \tag{7.55}$$

и т. д. В итоге получаются все 12 эллиптических функций Якоби. Ряды (7.51)—(7.54) применимы при любых комплексных u [5].

Суммирование рядов в (7.51) — (7.54) удобно производить по схеме Горнера. Ниже приведены эти схемы для (7.51) и (7.54). Остальные два ряда записываются аналогично (в программах они непосредственно получаются из (7.56), (7.57) путем изменения параметров), где $p = q^2$:

$$\sum_{m=0}^{n} (-1)^m q^{m(m+2)} \sin(2m+1)\nu \approx [\ldots[[(-p^n) + \sin(2n-1)\nu](-p^{n-1}) + \sin(2n-3)\nu](-p^{n-2})] + \ldots](-p) + \sin\nu; \tag{7.56}$$

$$\sum_{m=1}^{n} (-1)^m q^{m^2} \cos 2m\nu \approx [\ldots[\cos 2\pi\nu(-q^{2n-1}) + \cos 2(n-1)\nu](-q^{2n-3}) + \ldots](-q^3) + (\cos 2\nu)(-q). \tag{7.57}$$

Отметим, что входящие в формулы функции $\mathbf{K}(k)$ и $q(k)$ вычисляются в программах методом АГС. Это позволяет несколько упростить формулы, заменив

$$\nu = \pi u/2\mathbf{K}(k) = a_N u;\quad q = e^{-\pi \mathbf{K}/\mathbf{K}'} = e^{-\pi a_N/a'_N}. \tag{7.58}$$

Здесь a_N и a'_N (a'_N — константа, соответствующая дополнительному модулю как аргументу) находятся непосредственно методом АГС (см. (7.11), (7.9), (7.10))

С помощью ϑ_s, ϑ_c, ϑ_d, ϑ_n легко получить *тета-функции Якоби* ϑ_1—ϑ_4[5] (и наоборот):

$$\vartheta_1(u, k) = \left(\frac{2kk_1 \mathbf{K}(k)}{\pi}\right)^{1/2} \vartheta_s(u, k);\quad \vartheta_2(u, k) = \left(\frac{2k \mathbf{K}(k)}{\pi}\right)^{1/2} \vartheta_c(u, k);$$

$$\vartheta_3(u, k) = \left(\frac{2\mathbf{K}(k)}{\pi}\right)^{1/2} \vartheta_d(u, k);\quad \vartheta_4(u, k) = \left(\frac{2k_1 \mathbf{K}(k)}{\pi}\right)^{1/2} \vartheta_n(u, k). \tag{7.59}$$

Программа 7.9. Эллиптические функции Якоби sn (u, k), cn (u, k), dn (u, k) вещественного аргумента. Метод АГС, (7.36) — (7.39).

Farcsin	F cos	П4	П6	1	4	П0	7	П5	1
П3	ИП3	ИП4	—	2	÷	↑	ИП4	+	÷
КП0	F Bx	ИП4	ИП3	×	F $\sqrt{\ }$	П4	XY	П3	8
ИП0	—	Fx = 0	11	6	П0	6	4	ИП3	×
ИП2	×	П3	F sin	КИП5	×	Farcsin	ИП3	+	2
÷	FL0	42	F sin	ПВ	F Bx	F cos	ПС	Fx^2	XY
ИП6	×	Fx^2	+	F $\sqrt{\ }$	ПД	С/П			

Использование программы отличается способом пуска при задании в качестве исходного параметра модуля, модулярного угла или дополнительного модуля.

Инструкция

1. Исходные данные и пуск:
   а) модуль (u = Р2), [k = РХ], В/О С/П,
   б) модулярный угол в радианах (u = Р2), [α = РХ] БП 01 С/П,
   в) дополнительный модуль (u = Р2), [k_1 = РХ] БП 02 С/П.
2. Результат: РХ = РД = dn (u, k), РС = cn (u, k), РВ = sn (u, k).
3. Регистры: рабочие Р2, РВ — РД; оперативные Р0, Р3 — Р6, Р8 — РА; свободные Р1, Р7.
4. Погрешность относительная меньше: $1 \cdot 10^{-5}$ при $1 \cdot 10^{-3} \leqslant k_1 \leqslant 1$ $(0 \leqslant k \leqslant (1 - 5 \cdot 10^{-7}))$ и $1 \cdot 10^{-6}$ при $1 \cdot 10^{-2} \leqslant k_1 \leqslant 1$ $(0 \leqslant k \leqslant (1 - 5 \cdot 10^{-5}))$. Данные оценки относятся к интервалу $0 \leqslant u \leqslant \mathbf{K}(k)$.
5. Время счета $t \approx 1{,}5$ мин.

Примеры. $k_1 = 5 \cdot 10^{-3}$ $(k = 0{,}99998749)$, $u = 3{,}342324 = \mathbf{K}(k)/2$

sn $(u, k) = 0{,}99750942$ $(0{,}99750933$ [9]);

cn $(u, k) = 0{,}070534585$ $(0{,}070534561$ [9]);

dn $(u, k) = 0{,}070710701$ $(0{,}070710678$ [9]).

Программа 7.10. Эллиптические функции Якоби sn (u, k), cn (u, k), dn (u, k) вещественного аргумента. Понижающее преобразование Ландена (7.44)—(7.49).

Farcsin	Fcos	ПД	6	П1	1	4	П0	ИПД	КП0
П3	1	+	2	÷	ИП2	XY	×	П2	FBx
ИП3	$F\sqrt{\ }$	XY	÷	FL1	09	6	П1	7	П4
ИП2	Fsin	П2	КИП4	1	+	2	÷	↑	↑
1	—	ИП2	Fx^2	×	—	÷	FL1	32	ПВ
ИП2	×	ИПД	1	—	×	1	+	ПА	Fx^2
ИПД	Fx^2	—	FBx	/—/	1	+	÷	$F\sqrt{\ }$	ПС
С/П									

Использование программы при задании в качестве исходного параметра модуля, модулярного угла или дополнительного модуля отличается лишь способом пуска.

Инструкция

1. Исходные данные и пуск:
   а) модуль u = Р2, [k = РХ] В/О С/П,
   б) модулярный угол в радианах u = Р2, [α = РХ] БП 01 С/П,
   в) дополнительный модуль u = Р2, [k_1 = РХ] БП 02 С/П.
2. Результат: РХ = РС = cn (u, k), РВ = sn (u, k), РА = dn (u, k).
3. Регистры: рабочие РА — РС; оперативные Р0 — Р4, Р8, Р9, РД; свободные Р5, Р6, Р7.
4. Погрешность относительная меньше: $1\cdot10^{-5}$ при $5\cdot10^{-4} \leqslant k_1 \leqslant 1$ $(0 \leqslant k \leqslant 1 - 1\cdot10^{-7})$ и $1\cdot10^{-6}$ при $1\cdot10^{-3} \leqslant k_1 \leqslant 1$ $(0 \leqslant k \leqslant 1 - 5\cdot10^{-7})$. Данные оценки относятся к интервалу $0 \leqslant u \leqslant \mathbf{K}(k)$.
5. Время счета $t \approx 1{,}5$ мин.

Примеры.

cn (0,2; 0,9) = 0,9802785 (0,980278 [9]); dn (0,2; 0,9) = 0,984056 (0,98406 [9]);

sn $(0{,}61802, \sqrt{0{,}5})$ = 0,56457576 (0,56458 [9]).

Программа 7.11. Эллиптические функции Якоби sn (u, k), cn (u, k), dn (u, k) комплексного аргумента $u = x + \mathrm{j}\,y$. Метод АГС (7.36) — (7.39) и (7.50).

ИП8	ИП2	—	2	÷	↑	ИП2	+	÷	КП0
FBx	ИП2	ИП8	×	$F\sqrt{\ }$	П2	XY	П8	9	ИП0
—	Fx=0	00	5	П0	3	2	ИП8	×	ИП3
×	П8	Fsin	КИП4	×	Farcsin	ИП8	+	2	÷
FL0	31	КП5	С/П	2	П0	5	П4	КИП4	Fsin
КП5	FBx	Fcos	КП5	Fx^2	XY	КИП3	×	Fx^2	+
$F\sqrt{\ }$	КП5	FL0	48	ИПС	Fx^2	ИП1	ИПВ	×	ИП8
×	Fx^2	+	÷	ПД	FBx	ИП9	XY	÷	П9
ИПС	×	П5	ИПВ	ИПА	×	×	П4	FBx	/—/
ИП8	ИПД	×	П3	×	П6	ИПА	С/П		

При выполнении программы предусматриваются три последовательных пуска, ввод дополнительных данных в паузах между пусками, а также ручной набор 15 команд после третьего пуска.

Инструкция

1. Исходные данные для пуска 1: (x = Р3), k_1 = Р2, 14 = Р0, 8 = Р4, 5 = Р5, 1 = Р8.

2. Пуск 1:В/О С/П (получение амплитуды φ_0 (x, k), входящей в формулы (7.39), и занесение ее в Р6), $t \approx 1$ мин.
3. Исходные данные для пуска 2: (y = Р3), k = Р2, 14 = Р0, 8 = Р4, 1 = Р8.
4. Пуск 2: В/О С/П (получение амплитуды φ_0 (y, k_1), входящей в формулы (7.39), и занесение ее в Р7) ($t \approx 1$ мин).
5. Исходные данные для пуска 3: k = Р1, k_1 = Р2, 3 = Р3.
6. Пуск 3: С/П ($t \approx 30$ с).
7. После останова нужно, не меняя содержимого регистра РХ, выполнить вручную следующие 15 операций:

ИПС × ИПД × П7 ИП1 Fx^2 ИП8 × ИП9 × ИПВ × /—/ П8

8. В паузе между пусками 1, 2 и 2, 3 не следует менять содержимого регистров Р5, Р6, Р7.
9. Результат: Р3 = Re sn(u, k), Р4 = Im sn(u, k), Р5 = Re cn(u, k), Р6 = Im cn (u, k), Р7 = Re dn(u, k), Р8 = Im dn(u, k).
10. Регистры: рабочие Р3 — Р8; оперативные Р0 — Р2, Р9 — РД; свободных регистров нет.
11. Погрешность относительная ориентировочно такая же, как при вычислении эллиптических функций вещественного аргумента по программе 7.9.
12. Время автоматического счета (полное) $t \approx 2{,}5$ мин.

Примеры. При $k = 0{,}9$, $u = 1{,}1402745 + \mathrm{j}\,0{,}82730835$

sn (u, k) = 1,0274022 + j0,23570227 (1,0274023+j 0,23570225);

cn (u, k) = 0,49209861 — j 0,49209858 (0,49209861 — j 0,49209861);

dn (u, k) = 0,55941478—j 0,35063506 (0,55941482 — j 0,35063505). Числа в скобках — результат вычисления функций по формулам из [9] для функций, аргумент которых равен $[\mathbf{K}(k) + \mathrm{j}\,\mathbf{K}'(k)]/2$. (В данном случае он выбран именно таким: $\mathbf{K}(k)$ = 2,280549, $\mathbf{K}'(k)$ = 1,6546167.)

Программа 7.12. Эллиптические функции Якоби sn (u, k), cn (u, k), dn (u, k) комплексного аргумента $u = x + \mathrm{j}\,y$. Понижающее преобразование Ландена (7.44) — (7.49) и (7.50).

КП0	1	+	2	÷	ИП2	XY	×	П2	FBx
КИП↑	$F\sqrt{\ }$	XY	÷	FL1	00	6	П1	ИП2	Fsin
П2	КИП4	1	+	2	÷	↑	↑	1	—
ИП2	Fx^2	×	—	÷	FL1	20	КП3	ИП2	×
ИПД	1	—	×	1	+	КП3	Fx^2	ИПД	Fx^2
—	FBx	/—/	1	+	÷	$F\sqrt{\ }$	КП3	С/П	↑
Fx^2	ИПД	ИП7	×	ИПА	×	Fx^2	+	÷	П8
FBx	ИП7	XY	÷	П7	ИП9	×	П0	/—/	ИП6
ИПА	×	×	П3	FBx	ИП5	ИП8	×	П2	×
П1	ИПД	Fx^2	ИП5	×	ИП7	×	С/П		

При выполнении программы предусматриваются три последовательных пуска, ввод дополнительных данных в паузе между первым и вторым пусками, а также ручное выполнение 10 команд после третьего пуска. Используемая в программе команда КИП↑ выполняется только на ПМК «Электроника Б3-34», «Электроника МК-54» и их аналогах, для других ПМК необходима соответствующая корректировка программы.

Инструкция

1. Исходные данные для пуска 1: x = Р2, 14 = Р0, 6 = Р1, 8 = Р3, 7 = Р4, [k_1 = РХ].

2. Пуск 1 : В/О С/П (1 мин).

3. Исходные данные для пуска 2: y = Р2, 14 = Р0, 6 = Р1, 11 = Р3, 7 = Р4, [k = РХ].

4. Пуск 2: В/О С/П ($t \approx 1$ мин). После останова не менять содержимое регистра РХ.

5. Пуск 3: С/П ($t \approx 30$ с).

6. После останова, не меняя содержимое регистра РХ, выполнить вручную следующие 10 операций:

ИПА × /—/ ПС ИП6 ИП8 × ИП9 × ПВ

В паузе между пусками нельзя также менять содержимое регистров Р5 — РА.

7. Результат: Р0 = Re sn (u, k), Р1 = Im sn (u, k), Р2 = Re cn (u, k), Р3 = Im cn (u, k), РВ = Re dn (u, k), РС = Im dn (u, k).

8. Регистры: рабочие Р0 — Р3, РВ, РС; оперативные Р4 — РА, РД; свободных регистров нет.

9. Время автоматического счета (полное) $t \approx 2{,}5$ мин.

Примеры. Рассмотрим пример предыдущей программы: вычислить функции для аргумента $u = 1{,}1402745 + j0{,}82730835$, при модуле $k = 0{,}9$ (дополнительный модуль $k_1 = \sqrt{0{,}19}$).

sn (u,k) = 1,0274023+j0,23570228 (1,0274023+ j 0,23570225);

cn (u,k) = 0,49209862 — j 0,49209865 (0,49209861 — j0,49209861);

dn (u,k) = 0,55941482 — j 0,35063507 (0,55941482 — j 0,35063505).

Данная программа по сравнению с программой 7.11 обеспечивает более высокую точность при $k_1 \ll 1$. Однако функции cn (x, k) и cn (y, k), через которые выражаются искомые функции, здесь вычисляются только по модулю (ср. формулу (7.49)). Поэтому программу можно использовать, лишь когда cn (x, k) и cn (y, k) положительны, т. е. при $x \leqslant$ **K** (k) (ниже заштрихованной области на рис. 7.1) и при $y \leqslant$ **K**′ (k) (ниже заштрихованной области на рис. 7.1, если на нем независимой переменной является (в том же масштабе) k).

Программа 7.13. Тета-функции Невилля ϑ_s (u, k), ϑ_c (u, k) вещественного аргумента. Разложения в ряды (7.51), (7.52) и схема Горнера (7.56). Переключатель Р — Г в положении Г.

Farcsin	Fcos	ПВ	Farccos	Fsin	ПС	П8	ИП6	Fx≠0	14
ИПВ	ИП8	×	П8	ПП	79	П9	ИПД	×	1
8	0	×	Fπ	÷	П7	ИПС	ПВ	ПП	79
ИП9	÷	F1/x	Fπ	×	Fe^x	ПА	Fx²	ПВ	Fx²
Fx²	Fx²	ИП6	2	×	Fcos	×	ПС	7	П0
ИПС	ИПВ	÷	ПС	÷	ИП0	2	×	1	—
ИП7	×	ИП6	—	Fcos	+	FL0	50	4	ИП9
×	ИПА	F√	÷	ИП8	÷	F√	×	С/П	1
ПА	6	П0	ИПА	ИПВ	+	2	÷	ИПА	ИПВ
	F√	ПВ	XY	ПА	FL0	83	В/О		

Использование программы при задании модуля, модулярного угла или дополнительного модуля отличается способом пуска.

Структура программы

00—13: расчет исходных параметров,

14—36: вычисление обратной величины параметра Якоби q и параметра v, входящего в ряды ((7.51) — (7.54), (7.58)),

37—67: суммирование ряда по формуле (7.51),

68—78: окончательное вычисление ϑ_s или ϑ_c,

79—97: подпрограмма вычисления полного эллиптического интеграла первого рода с использованием схемы АГС (7.11).

Инструкция

1. Исходные данные (кроме модульного параметра):

а) функция ϑ_s (u, k) (u = РД), 90 = Р6,

б) функция ϑ_c (u, k) (u = РД), 0 = Р6.

2. Ввод модульного параметра и пуск :

а) модуль [k = РХ] В/О С/П,

б) модулярный угол в градусах [α = РХ] БП 01 С/П,

в) дополнительный модуль [k_1 = РХ] БП 02 С/П.

3. Результат: РХ = ϑ_s (u, k) (или РХ = ϑ_c (u, k) в зависимости от числа, введенного в регистр Р6), РА = 1/ q (k).

4. Регистры: рабочие РА, РД; оперативные Р0, Р6 — Р9, РВ, РС; свободные Р1 — Р5.

5. Погрешность относительная меньше $5 \cdot 10^{-7}$ при $0 \leqslant k \leqslant (1 - 1 \cdot 10^{-12})$

6. Время счета для каждой из функций ϑ_s (u, k), ϑ_c (u, k) $t \approx 2{,}5$ мин.

Примеры.

ϑ_s (0,5360162; 0,3) = 0,51187555; ϑ_c (0,5360162; 0,3) = 0,86599541.

Отношение вычисленных функций равно эллиптической функции Якоби *cs* (0,5360162; 0,3) = ϑ_c/ϑ_s = 1,6918085 (1,6918083 [9]).

Программа 7.14. Тета-функции Невилля ϑ_n (u,k). $\vartheta_d(u,k)$ вещественного аргумента. Разложения в ряды (7.53), (7.54) и схема Горнера (7.57). Переключатель Р—Г в положении Г.

Farcsin	Fcos	ПВ	Farccos	Fsin	ПС	ИПВ	П8	ИП6	Fx⩾0
13	1	П8	ПП	73	П9	ИПД	×	1	8
0	×	Fπ	÷	П7	ИПС	ПВ	ПП	73	ИП9
÷	F1/x	Fπ	×	/—/	Fe^x	ПА	Fx²	ПВ	Fx²
Fx²	Fx²	ИПА	÷	ИП6	×	ПС	7	П0	ИП0
2	×	ИП7	×	Fcos	+	ИПС	ИПВ	÷	ПС
×	FL0	49	2	×	1	+	ИП9	ИП8	÷
F√	×	С/П	1	ПА	6	П0	ИПА	ИПВ	+
2	÷	ИПА	ИПВ	×	F√	ПВ	XY	ПА	FL0
77	В/О								

Использование программы при задании в качестве исходных данных модуля, модулярного угла и дополнительного модуля отличается лишь способом ввода

Инструкция

1. Исходные данные (кроме модульного параметра):

а) функция ϑ_n (u, k) (u = РД), —1 = Р6;

б) функция ϑ_d (u, k) (u = РД), 1 = Р6.

2. Ввод модульного параметра и пуск:

а) модуль [k = РХ] В/О С/П,

б) модулярный угол в градусах [α = РХ] БП 101 С/П,

в) дополнительный модуль [k_1 = РХ] БП 02 С/П.

3. Результат: РХ = ϑ_n (u, k) (или РХ = ϑ_d (u, k) в зависимости от числа, введенного в регистр Р6), РА = $q(k)$.

4. Регистры: рабочие РА, РД; оперативные Р0, Р6 — Р9, РВ, РС; свободные Р1 — Р5.

5. Погрешность относительная меньше $5 \cdot 10^{-7}$ при $0 \leqslant k \leqslant (1 - 1 \cdot 10^{-12})$.

6. Время счета для каждой из функций $t \approx 2$ мин.

Примеры.

ϑ_n (0,20, 0,9) = 1,0096639; ϑ_d(0,20, 0,9) = 0,99356568, q = 0,10235243

Отношение вычисленных функций равно эллиптической функции Якоби: ϑ_d/ϑ_n = dn (0,20; 0,9) = 0,98405586 (0,98406 [9]).

Указатель программ

Номер программы	Функция	Область определения	Число шагов	Число регистров памяти	Примечание
7.1	$\mathbf{K}\ (k)$	$0 \leqslant k \leqslant (1 - 1 \cdot 10^{-15})$	27	3	Метод АГС
7.2	$\mathbf{K}\ (k),\ q\ (k)$	$0 \leqslant k \leqslant (1 - 1 \cdot 10^{-18})$	44	5	То же
7.3	$\mathbf{K}\ (k),\ \mathbf{E}\ (k)$	$0 \leqslant k \leqslant (1 - 1 \cdot 10^{-199})$	52	5	»
7.4	$F\ (\varphi,\ k)$	$0 \leqslant k \leqslant (1 - 1 \cdot 10^{-8})$	58	6	Понижающее преобразование Ландена
7.5	$F\ (\varphi,\ k)\ E\ (\varphi,\ k),\ Z\ (\varphi,\ k),\ \mathbf{K}\ (k),\ \mathbf{E}\ (k)$	$0 \leqslant k \leqslant (1 - 1 \cdot 10^{-13})$	96	9	Понижающее преобразование Ландена, схема АГС
7.6	$N\ (n,\ a,\ k)$	$0 \leqslant k \leqslant (1 - 1 \cdot 10^{-13})$	69	7	Метод АГС
7.7	$F\ (\varphi,\ k)$ или $E\ (\varphi,\ k)$	$0 \leqslant k \leqslant 1$	59	6	Прямое вычисление интегралов
7.8	$\Pi\ (n,\ \varphi,\ k)$	$0 \leqslant k \leqslant 1$	68	9	То же
7.9	$\mathrm{sn}\ (u,\ k),\ \mathrm{cn}\ (u,\ k),\ \mathrm{dn}\ (u,\ k)$	$0 \leqslant u \leqslant \mathbf{K}\ (k),\ 0 \leqslant k \leqslant (1 - 1 \cdot 10^{-7})$	67	12	Метод АГС
7.10	$\mathrm{sn}\ (u,\ k),\ \mathrm{cn}\ (u,\ k),\ \mathrm{dn}\ (u,\ k)$	$0 \leqslant u \leqslant \mathbf{K}\ (k),\ 0 \leqslant k \leqslant (1 - 1 \cdot 10^{-8})$	71	11	Понижающее преобразование Ландена. Требуется знака cn $(u,\ k)$. Погрешность меньше, чем для программы 7.9. Метод АГС
7.11	$\mathrm{sn}\ (u,\ k), \mathrm{cn}\ (u,\ k),\ \mathrm{dn}\ (u,\ k),\ u = x + \mathrm{j}\, y$	$0 \leqslant x \leqslant \mathbf{K}\ (k),\ 0 \leqslant y \leqslant \mathbf{K}'\ (k),\ 0 \leqslant k \leqslant (1 - 1 \cdot 10^{-7})$	98	14	
7.12	$\mathrm{sn}\ (u,\ k),\ \mathrm{cn}\ (u,\ k),\ \mathrm{dn}\ (u,\ k),\ u = x + \mathrm{j} y$	$0 \leqslant x \leqslant \mathbf{K}\ (k),\ 0 \leqslant y \leqslant \mathbf{K}'\ (k),\ 0 \leqslant k \leqslant (1 - 1 \cdot 10^{-8})$	98	14	Понижающее преобразование Ландена. Требуется три последовательных пуска, корректировка знаков промежуточных величии. Погрешиость меньше, чем для программы 7.11

Номер программы	Функция	Область определенич	Число шагов	Число регистров памяти	Примечание
7.13	$\vartheta_s\ (u,\ k)$ или $\vartheta_c\ (u,\ k)$	$0 \leqslant k \leqslant (1 - 1 \cdot 10^{-12})$	98	9	Разложение в ряды по параметру Якоби, схема АГС
7.14	$\vartheta_n\ (u,\ k)$ илн $\vartheta_d\ (u,\ k)$	$0 \leqslant k \leqslant (1 - 1 \cdot 10^{-12})$	92	9	То же

Глава 8

Ортогональные многочлены вещественного и комплексного аргументов

Далее приведены алгоритмы и программы вычисления значений ряда ортогональных многочленов и некоторых других связанных с ними величин. Каждый из многочленов удовлетворяет соответствующему дифференциальному уравнению второго порядка (линейному однородному) и некоторым дополнительным условиям, позволяющим выделнть нужную функцию из семейства решений. Эти условия носят характер разложенні в степенные ряды, асимптотических разложений и пр. Ниже за основую взяты определения первых двух многочленов (степенн 0 и 1). Вместе с трехчленными рекуррентными формулами онн образуют простой алгоритм для вычислений значений многочленов и их производных.

8.1. Многочлены Чебышева первого и второго рода и их производные. Нули многочленов

Дифференциальное уравнение для $T_n\ (x)$, совпадающее с уравнением для $\sqrt{1 - x^2}\, U_{n-1}\ (x)$, имеет вид

$$(1 - x^2)\,\frac{d^2 T_n}{dx^2} - x\,\frac{dT_n}{dx} + n^2 T_n = 0. \tag{8.1}$$

$T_n\ (x)$ и $U_n\ (x)$ — *многочлены Чебышева* соответственно *первого* и *второго рода*; n — степень многочлена.

Рекуррентные формулы

$$Z_{n+1}\ (x) = 2xZ_n\ (x) - Z_{n-1}\ (x), \tag{8.2}$$

где $Z_n\ (x) = T_n\ (x),\ U_n\ (x)$. Кроме того, T_n связаны с U_n:

$$\begin{aligned} T_n\ (x) &= U_n\ (x) - xU_{n-1}\ (x); \\ U_n\ (x) &= [T_n\ (x) - xT_{n+1}\ (x)]/(1 - x^2). \end{aligned} \tag{8.3}$$

Производные многочленов удовлетворяют следующим рекуррентным формулам:

$$T'_n(x) = \frac{n}{1-x^2}\,[T_{n-1}(x) - xT_n(x)] = nU_{n-1};$$
$$U'_n(x) = \frac{1}{1-x^2}\,[(n+1)\,U_{n-1}(x) - nxU_n(x)]. \tag{8.4}$$

Нулевые и первые многочлены:

$$T_0 = 1, \quad T_1 = x;$$
$$U_0 = 1, \quad U_1 = 2x. \tag{8.5}$$

Для вычисления $T_n(x)$ и $U_n(x)$ применимы также тригонометрические формулы

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x);$$
$$U_n(x) = \sin[(n+1)\arccos x]/\sin\arccos x. \tag{8.6}$$

$T_n(x)$ ортогональны на интервале (—1, 1) с весом $(1 - x^2)^{-1/2}$:

$$\int_{-1}^{1} (1-x^2)^{-1/2}\, T_n(x)\, T_m(x)\, dx = \frac{\pi}{2}\,\varepsilon\delta_{m,n}, \tag{8.7}$$

где $\varepsilon = 2$ при $m = n = 0$, $\varepsilon = 1$ при всех других m, n. Условие ортогональности для $U_n(x)$:

$$\int_{-1}^{1} (1-x^2)^{1/2}\, U_n(x)\, U_m(x)\, dx = \frac{\pi}{2}\,\delta_{mn}. \tag{8.8}$$

Нули многочленов Чебышева (как и других ортогональных многочленов) действительные и простые. Все n нулей каждого многочлена T_n и U_n расположены на интервале ортогональности. Нули $\tau_m^{(n)}$ и $u_m^{(n)}$ соответственно многочленов $T_n(x)$ и $U_n(x)$:

$$\tau_m^{(n)} = \cos\frac{2m-1}{2n}\pi; \quad u_m^{(n)} = \cos\frac{m}{n+1}\pi, \quad m = 1, 2, \ldots, n. \tag{8.9}$$

Программа 8.1. Многочлены $T_n(x)$, $U_n(x)$ вещественного аргумента. Тригонометрические формулы (8.6).

Farccos	ПС	ИПД	1	+	×	Fsin	ИПС	Fsin	÷
ПВ	С/П	ИПД	ИПС	×	Fcos	С/П			

Программа предусматривает два последовательных пуска.
Инструкция
1. Исходные данные: (n = РД), [x = РХ].
2. Пуск 1: В/О С/П.
3. Результат: РХ = РВ = $U_n(x)$.
4. Пуск 2: С/П.
5. Результат: РХ = $T_n(x)$, РВ = $U_n(x)$.
6. Регистры: рабочие РВ, РД; оперативные РС; свободные Р0 — РА.
7. Погрешность абсолютная меньше $1 \cdot 10^{-6}$.
8. Время счета $t \approx 15$ с.

Примеры. $U_{12}(0{,}8) = 1{,}4533249$ (1,45332536 [9]);

$T_{12}(0{,}8) = 0{,}13158518$ (0,13158561 [9]).

Программа 8.2. Многочлены Чебышева T_{n-1}, T_n, T_{n+1}, U_n. Рекуррентные формулы (8.2), (8.3) и формулы (8.5).

П7	2	×	П8	1	П9	ИП7	ПВ	ИП9	ПА
/—/	ИПВ	П9	ИП8	×	÷	FL0	07	ПС	С/П
ИПВ	ИПС	ИП7	×	—	1	ИП7	Fx²	—	÷
ПД	С/П								

Программа предусматривает два последовательных пуска.
Инструкция
1. Исходные данные: n = Р0, [x = РХ].
2. Пуск 1 (вычисление T_h): В/О С/П.
3. Результат: РА = $T_{n-1}(x)$, РВ = $T_n(x)$, РС = $T_{n+1}(x)$.
4. Пуск 2 (вычисление U_n): С/П.
5. Результат: РХ = РД = $U_n(x)$, РА = $T_{n-1}(x)$, РВ = $T_n(x)$, РС = $T_{n+1}(x)$.
6. Регистры: рабочие РА — РД; оперативные Р0, Р7 — Р9; свободные Р1 — Р6.
7. Погрешность абсолютная меньше $5 \cdot 10^{-8}$.
8. Время счета $t \approx (4n)$ с.

Примеры.

$T_{10}(0{,}6) = -0{,}98849658$ (—0,988496589 [9]),

$T_{11}(0{,}6) = -0{,}71409250$ (—0,71409248 [9]),

$T_{12}(0{,}6) = 0{,}13158558$ (0,13158561 [9]);

$U_{11}(0{,}6) = -1{,}23913100$ (—1,23913101 [9]).

Программа 8.3. Производные многочленов Чебышева $T'_n(x)$, $U'_n(x)$, значения многочленов Чебышева $T_{n-1}(x)$, $T_n(x)$, $T_{n+1}(x)$, $U_{n-1}(x)$, $U_n(x)$. Рекуррентные формулы (8.2) — (8.4) и формулы (8.5).

П4	2	×	П8	1	П9	ИП4	ПВ	ИП9	ПА
/—/	ИПВ	П9	ИП8	×	+	FL0	07	ПС	ИПВ
ИПС	ИП4	×	—	1	ИП4	Fx²	—	П6	÷
П9	ИПА	ИПВ	ИП4	×	—	ИП6	÷	П8	ИП5
×	ПД	ИП8	ИП5	1	+	×	ИП9	ИП4	×
ИП5	×	—	ИП6	÷	П7	С/П			

Инструкция
1. Исходные данные: n = Р0 = Р5, [x = РХ].
2. Пуск: В/О С/П.
3. Результат: Р8 = $U_{n-1}(x)$, Р9 = $U_n(x)$, РА = $T_{n-1}(x)$,

   РВ = $T_n(x)$, РС = $T_{n+1}(x)$, РД = $T'_n(x)$, Р7 = $U'_n(x)$, Р5 = n.
4. Регистры: рабочие Р7 — РД; оперативные Р0, Р4 — Р6; свободные Р1 — Р3.
5. Погрешность абсолютная меньше $5 \cdot 10^{-8}$.
6. Время счета $t \approx (5n)$ с.

Примеры.

$T_7(0{,}5) = 0{,}5$, $T_8(0{,}5) = -0{,}5$, $T_9(0{,}5) = -1$;

$U_7(0{,}5) = 1$, $U_8(0{,}5) = 0$;

$T'_8(0{,}5) = 8$, $U'_8(0{,}5) = 12$.

Все результаты точные.

Программа 8.4. Нули $\tau_m^{(n)}$, $u_m^{(n)}$ многочленов $T_n(x)$, $U_n(x)$ соответственно (8.9).

ПС	0	П6	КИП6	ИП6	2	×	1	—	Fπ
×	2	÷	ИПС	÷	Fcos	ПВ	ИП6	Fπ	×
ИПС	1	+	÷	Fcos	ПА	ИП6	С/П	ИПВ	/—/
Fx⩾0	03	/—/	Fln						

Последовательно вычнсляются нули от $m = 1$ (наибольший положительный нуль) до $m = (n + \varepsilon)/2$, где $\varepsilon = 0$; 1 соответственно для четных н нечетных n. Остальные нули отличаются только знаком от указанных выше: $\tau_m^{(n)} = -\tau_{n-m+1}^{(m)}$, $u_m^{(n)} = -u_{n-m+1}^{(n)}$.

Программа предусматрнвает серию последовательных пусков.

Инструкцня

1. Исходные данные: $[n = PX]$.
2. Пуск 1 (вычнсление 1-го нуля): В/О С/П.
9. Результат: $PX = P6 = 1$ (номер вычисленного нуля), $PB = \tau_1^{(n)}$, $PA = u_1^{(n)}$.
4. Пуск 2 (вычнсление 2-го иуля): С/П.
5. Результат: $PX = P6 = 2$ (номер вычнсленного нуля), $PB = \tau_2^{(n)}$, $PA = u_2^{(n)}$. Далее пускн повторяются. После исчерпання всех неотрицательных нулей, т. е. при выполнении $((n + \varepsilon)/2 + 1)$-го пуска, на индикаторе появляется символ ЕГГОГ.
6. Регистры: рабочие Р6, РА — РС; оперативные — ; свободные Р0 —Р5, Р7 — Р9, РД.
7. Погрешность абсолютная меньше $1 \cdot 10^{-7}$.
8. Время счета одного нуля $t \approx 15$ с.

Пример. Нули T_5 и U_5:

$\tau_1^{(5)} = 0{,}95105655$, $\tau_2^{(5)} = 0{,}58778526$, $\tau_3^{(5)} = 0$;

$u_1^{(5)} = 0{,}86602544$, $u_2^{(5)} = 0{,}50000005$, $u_3^{(5)} = 0$.

Остальные нули получаются изменением знака вычисленных:

$\tau_4^{(5)} = -0{,}58778526$, $\tau_5^{(5)} = -0{,}95105655$;

$u_4^{(5)} = -0{,}50000005$, $u_5^{(5)} = -0{,}86602544$.

8.2. Суммирование рядов по многочленам Чебышева. Разложение степенной функции по многочленам Чебышева. Экономизация степенных рядов

Важным свойством $T_n(x)$, используемым, в частности, в теории аппроксимации, является минимальность отклонения многочленов $T_n(x)/2^{n-1}$ от нуля на интервале $(-1, 1)$ по сравнению с любым другим многочленом степени n, имеющим равный 1 коэффнциент при старшем члене (x^n). Ввиду того, что $|T_n(x)| \leqslant 1$, это отклонение не превышает $1/2^{n-1}$. Указанное свойство позволяет строить *наилучшие приближения* в смысле минимума отклонения приближенного значения функцни $\overline{f(x)}$ от истннного $f(x)$ на заданном интервале путем их аппроксимации рядами по многочленам Чебышева:

$$\overline{f(x)} = \sum_{k=0}^{N} a_k T_k(x) \tag{8.10}$$

Если функция $f(x)$ четная, или нечетная, то суммы (8.10) содержат только многочлены Чебышева четиого или нечетного порядка:

$$\overline{f(x)} = \sum_{k=0}^{N} b_k T_{2k}(x); \tag{8.11}$$

$$\overline{f(x)} = \sum_{k=0}^{N} c_k T_{2k+1}(x). \tag{8.12}$$

В ряде случаев удобны *«смещенные» многочлены Чебышева*

$$T_n^*(x) = T_n(2x - 1), \tag{8.13}$$

которые ортогональны на интервале $0 \leqslant x \leqslant 1$ (ср. (8.7)):

$$\int_0^1 \frac{T_n^*(x)\, T_m^*(x)}{[x(1-x)]^{1/2}}\, dx = \frac{\pi}{2}\, \varepsilon\, \delta_{nm}. \tag{8.14}$$

Они обладают аналогичными с $T_n(x)$ аппроксимирующими свойствами на интервале (0,1), и соответствующее разложение имеет внд

$$\overline{f(x)} = \sum_{k=0}^{N} a_k^* T_k^*(x). \tag{8.15}$$

Табулирование (8.10) — (8.12), (8.15) можно производить путем вычисления T_k или T_k^* по соответствующим формулам и подстановки этих значений в ряды. Второй способ состоит в подстановке в ряды явных выражений для многочленов Чебышева

$$T_n(x) = \sum_{m=0}^{n} g_m x^m. \tag{8.16}$$

Получающиеся после этого степенные ряды можно суммировать, например, по схеме Горнера. Однако наиболее экономичным является, по-видимому, использование *рекуррентных соотношений Кленшо* (см., например, [10]), которые аналогичны схеме Горнера (ср. (1.11) и непосредственно дают значения $f(x)$, минуя вычислеиие T_n. Применение подобных соотношенлй приводит к такнм же [10] и даже меньшим [19] погрешностям округления, чем схема Горнера для степенных рядов, получаемых из (8.10) — (8.12) путем подстановки в них (8.16).

Ниже приведены соотношения Кленшо для соответствующих сумм. Эти трехчлеиные рекуррентные формулы определяют последовательность величин B_{N+2}, B_{N+1}, B_N, ..., B_1, B_0. Схемы используются в обратном порядке начиная с $B_{N+2} = B_{N+1} = 0$. Члены B_1, B_0 дают искомые значения функций.

Общее разложение по многочленам Чебышева (8.10):

$$\begin{aligned} &B_n = 2xB_{n+1} - B_{n+2} + a_n, \quad n = N, N-1, \ldots, 1, 0; \\ &\overline{f(x)} = B_0 - xB_1. \end{aligned} \tag{8.17}$$

Разложение по четным многочленам (8.11):

$$\begin{aligned} &B_n = 2(2x^2 - 1)\, B_{n+1} - B_{n+2} + b_n, \quad n = N, N-1, \ldots, 1, 0; \\ &\overline{f(x)} = B_0 - (2x^2 - 1)\, B_1. \end{aligned} \tag{8.18}$$

Разложение по нечетным многочленам (8.12):

$$\begin{aligned} &B_n = 2(2x^2 - 1)\, B_{n+1} - B_{n+2} + c_n, \quad n = N, N-1, \ldots, 1, 0; \\ &\overline{f(x)} = x(B_0 - b_1). \end{aligned} \tag{8.19}$$

Разложение по смещенным многочленам Чебышева (8.13):

$$B_n = 2(2x-1)\,B_{n+1} - B_{n+2} + a_n^*,\quad n=N,\ N-1,\ \ldots,\ 1,0;$$
$$f(x) = B_0 - (2x-1)\,B_1. \tag{8.20}$$

Указанные алгоритмы реализованы далее в программах 8.5—8.8 при учете N вплоть до $N_{\max} = 11$, обеспечивая высокую скорость и точность (погрешность не превышает нескольких единиц последней значащей цифры результата). Это позволяет использовать значительное число известных разложений по многочленам Чебышева, которые найдены для ряда специальных функций и их интегралов (см., например, [10]. Аналогичные алгоритмы получены для вычисления производных функций, определяемых соотношениями типа (8.10) [10]. Однако в этом случае погрешности аппроксимации существенно выше.

Многочлены Чебышева позволяют эффективно экономизировать степенные ряды, т. е. аппроксимировать их с гарантированной точностью укороченными отрезками рядов на требуемом интервале (см., например, [20]). Пусть функция $f(x)$ определена отрезком степенного ряда

$$f(x) = \sum_{p=0}^{n} a_p x^p. \tag{8.21}$$

Разложим степени x^p по многочленам Чебышева:

$$x^p = \sum_{k=0}^{p} d_k^{(p)} T_k(x) \tag{8.22}$$

и подставим (8.22) в (8.21):

$$f(x) = \sum_{p=0}^{n} \sum_{k=0}^{p} a_p\, d_k^{(p)} T_k(x) = \sum_{p=0}^{n} r_p^{(n)} T_p(x). \tag{8.23}$$

Если $r_p^{(n)}$ убывают с ростом p, то, учитывая неравенство

$$|T_p(x)| \leqslant 1. \tag{8.24}$$

можно отбросить в (8.23) некоторое число членов с $N+1 \leqslant p \leqslant n$. Усеченный ряд

$$\overline{f(x)} = \sum_{p=0}^{N} r_p^{(n)} T_p(x),\quad N<n, \tag{8.25}$$

дает приближенное значение $f(x)$ на интервале $[-1,1]$ с известной верхней границей погрешности. Действительно, из (8.24) следует

$$|\overline{f(x)} - f(x)| \leqslant \sum_{p=N+1}^{n} |r_p^{(n)}|. \tag{8.26}$$

Если подставить в (8.25) явные выражения T_p через x, то получится *экономизированный степенной ряд* порядка $N<n$, дающий значения $f(x)$ с погрешностью, меньшей, чем (8.26). На практике, однако, не всегда целесообразно выполнять последнюю процедуру, достаточно непосредственно суммировать усеченные ряды по многочленам Чебышева, пользуясь формулами (8.17) (или (8.18) — (8.20), если применять разложения по T_{2n}, T_{2n+1}, T_n^* соответственно).

Далее приводится программа 8.10 нахождения коэффициентов $r_p^{(n)}$ экономизированного ряда (8.25) при любом числе членов исходного степенного ряда

(8.21). Программа основана на разложении степенной функции по многочленам Чебышева (программа 8.9). Перепишем (8.22) явно для четных и нечетных p:

$$x^{2m+\varepsilon} = \sum_{k=0}^{m} d_k^{(p)} T_{2k+\varepsilon}(x), \tag{8.27}$$

где $p = 2m + \varepsilon$, $\varepsilon = 0,1$. Коэффициенты $d_k^{(p)}$ определяются формулами [10]

$$d_k^{(p)} = \frac{g_{\varepsilon,k}(2m+\varepsilon)!}{2^{2m+\varepsilon}(m-k)!\,(m+k+\varepsilon)!}. \tag{8.28}$$

Здесь $g_{\varepsilon,k} = \begin{cases} 1, & \varepsilon = k = 0, \\ 2 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$

Погрешность экономизации можно оценить, вычислив $r_p^{(n)}$ для $N+1 \leqslant p \leqslant n$. При $n = 12$ (степень исходного ряда) погрешность приближения равна

$$\sum_{k=N+1}^{7} |r_p^{(n)}| + \frac{1}{100}\left[|a_8| + \frac{1}{2}|a_9| + 2|a_{10}| + |a_{11}| + 4|a_{12}|\right]. \tag{8.29}$$

Здесь N — степень экономизированного ряда (в программе $N_{\max} = 7$), коэффициенты $r_p^{(n)}$, входящие в $\sum\limits_{N+1}^{7}$, непосредственно вычисляются в программе.

Программа 8.5. Суммирование рядов по многочленам Чебышева $S_N = \sum\limits_{k=0}^{N} a_k T_k(x)$, $N \leqslant 11$. Рекуррентная формула (8.17).

```
ПС  0    ↑    FBx   F,  XY   FBx  ИПС  ×   2
×   —    /—/  КИПД  +   ИПД  1    —    ПД  Fx<0
04  F,   XY   ИПС   ×   —    С/П
```

Инструкция

1. Исходные данные: $a_0 = P0, a_1 = P1, \ldots, a_N = PN$, $N = $ РД, $[x = PX]$. Здесь $P10 \equiv PA$, $P11 \equiv PB$.
2. Пуск: В/О С/П.
3. Результат: $PX = S_N$.
4. Регистры: рабочие $P0 - PN$; оперативные PC, РД; свободные $P(N+1) - PB$ (при $N<11$); при $N=11$ свободных регистров нет.
5. Погрешность абсолютная меньше $1\cdot10^{-7} M$, где $M = \max|a_k|$.
6. Время счета $t \approx (N/10)$ мин.

Пример. Вычисление модифицированной функции Бесселя $K_1(x)$ при больших значениях аргумента. Согласно [10] при $x \geqslant 5$

$$e^x K_1(x) \approx \sqrt{\frac{\pi}{2x}} \sum_{k=0}^{N} a_k T_k\left(\frac{10}{x} - 1\right).$$

Коэффициенты a_k убывают настолько быстро, что достаточно для точности $1\cdot10^{-8}$ ограничиться $N = 5$:

$a_0 = 1{,}0359509$, $a_1 = 3{,}5465291\cdot10^{-2}$, $a_2 = -4{,}6847503\cdot10^{-4}$, $a_3 = 1{,}6185064\cdot10^{-5}$, $a_4 = -8{,}4517\cdot10^{-7}$, $a_5 = 5.71\cdot10^{-8}$ (в [10] приведены a_k до $k=20$ включительно);

$e^8 K_1(8) = 0{,}46314909$ $(0{,}46314909$ [9]$)$, $t \approx 30$ с;

$e^{20} K_1(20) = 0{,}28542547$ $(0{,}28542550$ [9]$)$, $t \approx 30$ с.

Программа 8.6. Суммирование рядов по четным многочленам Чебышева $S_{2N}=\sum_{k=0}^{N} b_k\, T_{2k}(x)$, $N\leqslant 11$. Рекуррентная формула (8.18)

Fx^2	2	×	1	—	ПС	0	↑	FBx	F,
XY	FBx	ИПС	×	2	×	—	/—/	КИПД	+
ИПД	1	—	ПД	Fx<0	09	F,	XY	ИПС	×
—	С/П								

Инструкция

1. Исходные данные: $b_0 = \text{P0}$, $b_1 = \text{P1}, \ldots, b_N = \text{P}N$, $N = \text{РД}$, $[x = \text{PX}]$. Здесь $\text{P10} \equiv \text{PA}$, $\text{P11} \equiv \text{PB}$.
2. Пуск: В/О С/П.
3. Результат: $\text{PX} = S_{2N}$.
4. Регистры: рабочие P0 — PN; оперативные PC, РД; свободные P $(N+1)$ — PB (при $N<11$); при $N = 11$ свободных регистров нет.
5. Погрешность абсолютная меньше $1\cdot10^{-7} M$, где $M=\max|b_k|$.
6. Время счета $t\approx(N/10)$ мин.

Пример. Вычисление функции Бесселя $J_0(x)$ при $-8\leqslant x\leqslant 8$. Согласно [10] $J_0(x)\approx\sum_{k=0}^{N} b_k T_{2k}(x/8)$. Значения b_k до $k=17$ приведены в [10]. Ограничимся $N=10$:

$b_0=1{,}5772797\cdot10^{-1}$, $b_1=-8{,}723442\cdot10^{-3}$, $b_2=2{,}6517861\cdot10^{-1}$,
$b_3=-3{,}7009499\cdot10^{-1}$, $b_4=1{,}580671\cdot10^{-1}$, $b_5=-3{,}489377\cdot10^{-2}$,
$b_6=4{,}81918\cdot10^{-3}$, $b_7=-4{,}60626\cdot10^{-4}$, $b_8=3{,}246\cdot10^{-5}$,
$b_9=-1{,}762\cdot10^{-6}$, $b_{10}=7{,}6\cdot10^{-8}$;

$J_0(4)=-0{,}3971498$ $(-0{,}39714981$ [9]),
$J_0(8)=0{,}17165081$ $(0{,}17165081$ [9]), $t=1$ мин.

Программа 8.7. Суммирование рядов по нечетным многочленам Чебышева $S_{2N+1}=\sum_{k=0}^{N} c_k T_{2k+1}(x)$, $N\leqslant 11$. Рекуррентная формула (8.19).

ПС	0	↑	FBx	F,	ИПС	Fx^2	2	×	1
—	2	×	XY	×	FBx	F,	—	/—/	КИПД
+	XY	F,	ИПД	1	—	ПД	Fx<0	04	F,
XY	—	ИПС	×	С/П					

Инструкция

1. Исходные данные: $c_0 = \text{P0}$, $c_1 = \text{P1}, \ldots, c_N = \text{P}N$, $N = \text{РД}$ $[x = \text{PX}]$. $(\text{P10} \equiv \text{PA}, \text{P11} \equiv \text{PB})$.
2. Пуск: В/О С/П.
3. Результат: $\text{PX} = S_{2N+1}$.
4. Регистры: рабочие P0 — PN; оперативные PC, РД; свободные P $(N+1)$ — PB; при $N = 11$ свободных регистров нет.
5. Погрешность абсолютная меньше $1\cdot10^{-7} M$, где $M=\max|c_k|$.
6. Время счета $t\approx(N-8)$ мин.

Пример. Вычисление функции Бесселя $J_1(x)$ при $-8\leqslant x\leqslant 8$. Согласно [10] $J_1(x)\approx\sum_{k=0}^{N} c_k\, T_{2k+1}(x/8)$. Значения c_k до $k=17$ с 20 десятичными знаками приведены в [10]. Ниже выписаны значения c_k до $k=10$ с 8 десятичными знаками:

$c_0=5{,}245819\cdot10^{-2}$, $c_1=4{,}809647\cdot10^{-2}$, $c_2=3{,}1327508\cdot10^{-1}$,
$c_3=-2{,}4186741\cdot10^{-1}$, $c_4=7{,}42668\cdot10^{-2}$, $c_5=-1{,}2967627\cdot10^{-2}$,
$c_6=1{,}48991\cdot10^{-3}$, $c_7=-1{,}2228\cdot10^{-4}$, $c_8=7{,}563\cdot10^{-6}$, $c_9=-3{,}66\cdot10^{-7}$,
$c_{10}=1{,}43\cdot10^{-8}$,

$J_1(3)=0{,}33905895$ $(0{,}33905896$ [9]),
$J_1(7)=-0{,}004682834$ $(-0{,}004682824$ [9]), $t\approx1{,}5$ мин.

Программа 8.8. Суммирование рядов по смещенным многочленам Чебышева $S_N^*=\sum_{k=0}^{N} a_k^* T_k^*(x)$, $N\leqslant 11$. Рекуррентная формула (8.20).

↑	2	×	1	—	ПС	0	↑	FBx	F,
XY	FBx	ИПС	×	2	×	—	/—/	КИПД	+
ИПД	1	—	ПД	Fx<0	09	F,	XY	ИПС	×
—	С/П								

Инструкция

1. Исходные данные: $a_0^* = \text{P0}$, $a_1^* = \text{P1}, \ldots, a_N^* = \text{P}N$, $N = \text{РД}$, $[x = \text{PX}]$. Здесь $\text{P10} \equiv \text{PA}$, $\text{P11} \equiv \text{PB}$.
2. Пуск: В/О С/П.
3. Результат: $\text{PX} = S_N^*$.
4. Регистры: рабочие P0 — PN; оперативные PC, РД; свободные P $(N+1)$— PB; при $N = 11$ свободных регистров нет.
5. Погрешность абсолютная меньше $1\cdot10^{-7} M$, где $M=\max|a_k|$.
6. Время счета $t\approx(N/10)$ мин.

Пример. Вычисление модифицированной функции Бесселя $I_0(x)$ при больших значениях аргумента. При $x\geqslant 8$ [10]

$$e^{-x} I_0(x)\approx(2\pi x)^{-1/2}\sum_{k=0}^{N} a_k^*\, T_k^*(8/x).$$

Значения a_k^* до $k=33$ с 20 десятичными знаками приведены в [10]. При вычислениях с 8 значащими цифрами достаточно принять $N=5$:

$a_0^*=1{,}0082792$, $a_1^*=8{,}445123\cdot10^{-3}$, $a_2^*=1{,}727\cdot10^{-4}$, $a_3^*=7{,}248\cdot10^{-6}$,
$a_4^*=5{,}14\cdot10^{-7}$, $a_5^*=5{,}7\cdot10^{-8}$;

$e^{-8{,}5} I_0(8{,}5)=0{,}13900184$ $(0{,}139001843$ [9]),
$e^{-19{,}8} I_0(19{,}8)=0{,}090238628$ $(0{,}090238617$ [9]).

Программа 8.9. Разложение степенной функции в ряд по многочленам Чебышева $x^p=\sum_{k=0}^{m} d_k^{(p)}\, T_{2k+\varepsilon}(x)$, $p\equiv 2m+\varepsilon\leqslant 83$, $\varepsilon=0{,}1$ (8.28).

П0	2	÷	ПД	КИПД	ИП0	ИПД	2	×	—
ПА	ПС	1	ИП0	×	2	÷	FL0	13	ПВ
БП	32	ИПС	2	×	ИПА	—	С/П	ИПС	1
+	ПС	ИПС	Fx≠0	36	ИПВ	ИПВ	+	ИПС	ИПД
+	П0	XY	ИП0	÷	FL0	43	ИПД	ИПС	—
ИПА	+	П0	Fx≠0	62	F,	ИП0	÷	FL0	56
БП	22	ИПС	ИПД	+	XY	Fln			

7 Зак. 871

Вычисление всех $m+1$ коэффициентов ряда $d_k^{(p)}$ реализуется в результате $m+1$ последовательных пусков. После каждого пуска (за исключением последнего — см. инструкцию) в регистре РХ оказывается порядок соответствующего многочлена Чебышева (т. е. числа 0, 2, 4, ... для четных p и 1, 3, 5, ... — для нечетных p), а в регистре РY — значение $d_k^{(p)}$.

Инструкция

1. Исходные данные: [p = РХ].
2. Пуск 1: В/О С/П.
3. Результат после пуска 1: РХ $= \varepsilon$, РY $= d_0^{(p)}$ ($\varepsilon = 0{,}1$ при соответственно четных и нечетных p).
4. Пуск 2: С/П
5. Результат после пуска 2: РХ $= \varepsilon + 2$, РY $= d_1^{(p)}$.

. . . .

6. Результат после пуска k: РХ $= \varepsilon + 2(k-1)$, РY $= d_{k-1}^{(p)}$.
7. Последний ($m+1$)-й пуск: С/П.
8. Результат после последнего пуска: РХ = ЕГГОГ, РY $= p$, РZ $= d_m^{(p)}$.
9. Регистры: рабочие —; оперативные Р0, РА — РД; свободные Р1 — Р9.
10. Погрешность — единицы в последней значащей цифре.
11. Время счета при первом пуске $t \approx (4p)$с, при последующих пусках по $\sim 2p$ с. Полное время счета $t \approx p^2$ с.

Примеры. Разложение $x^9 = d_0^{(9)} T_1(x) + d_1^{(9)} T_3(x) + d_2^{(9)} T_5(x) + d_3^{(9)} T_7(x) + d_4^{(9)} T_9(x)$

Номер пуска	1	2	3	4	5
$d_k^{(9)}$	$d_0^{(9)}=0{,}4921875$	$d_1^{(9)}=0{,}328125$	$d_2^{(9)}=$ $=0{,}140625$	$d_3^{(9)}=$ $=0{,}03515625$	$d_4^{(9)}=$ $=0{,}00390625$

Разложение $x^8 = d_0^{(8)} T_0(x) + d_1^{(8)} T_2(x) + d_2^{(8)} T_4(x) + d_3^{(8)} T_6(x) + d_4^{(8)} T_8(x)$

Номер пуска	1	2	3	4	5
$d_0^{(8)}$	$d_0^{(8)}=0{,}2734375$	$d_1^{(8)}=0{,}4375$	$d_2^{(8)}=0{,}21875$	$d_3^{(8)}=0{,}0625$	$d_4^{(8)}=0{,}0078125$

Все результаты в обоих примерах — точные.

Программа 8.10. Экономизация степенного ряда $f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ отрезком ряда $\overline{f(x)} = \sum_{p=0}^{N} r_p^{(n)} T_p(x)$, $N < n$, $N \leqslant 7$.

1	4	П0	П1	0	КП1	FL0	04	1	ПА
С/П	ИПД	ИПА	/—/	П9	—	ПД	F,	1	ИПА
—	ПА	ПС	ИПД	2	×	+	П0	1	ИП0
×	2	÷	FL0	29	ПВ	F,	F,	БП	48
ПП	84	ИПС	1	+	ПС	F,	F,	ИПС	Fx≠0
53	F,	ИПВ	ИПВ	+	ИПС	ИПД	+	П0	F,
ИП0	÷	FL0	60	ИПД	ИПС	—	ИПА	+	П0
Fx≠0	79	F,	ИП0	÷	FL0	73	БП	40	F,
ПП	84	БП	10	×	ИП9	2	+	П9	9
—	Fx<0	10	F,	КИП9	+	КП9	В/О		

В программе вычисляются коэффициенты $r_0^{(n)}, r_1^{(n)}, \ldots, r_N^{(n)}$ при произвольных n. Если получающийся в результате экономизации ряд должен содержать число членов ряда, меньшее 8, то остальные $7 - N$ ($N < 7$) используются для оценки погрешности экономизации (при $n \leqslant 12$ — формула (8.29)). Реализация программы предполагает n последовательных пусков, где n — степень старшего члена исходного ряда. На первом пуске производится очистка регистров Р2—РД, на втором вычисляются коэффициенты $r_p^{(2)}$ ($p = 0,1,2$) для ряда $a_0 + a_1 x + a_2 x^2$. На следующем пуске — коэффициенты $r_p^{(3)}$ ($p = 0, 1, 2, 3$) для ряда $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$, и так далее до исчерпания всего ряда. Время счета на первом пуска ~ 20 с, на каждом последующем возрастает примерно на 15 с.

Инструкция

1. Пуск 1: В/О С/П.
2. Исходные данные для пуска 2 : a_0 = Р1, a_1 = Р2, [a_2 = РХ].
3. Пуск 2: С/П.
4. Исходные данные для пуска 3: [a_3 = РХ].
5. Пуск 3: С/П.

. . . .

6. Исходные данные для последнего (n-го) пуска: [a_n = РХ].
7. Последний пуск: С/П.
8. Результат: Р1 $= r_0^{(n)}$, Р2 $= r_1^{(n)}$, Р3 $= r_2^{(n)}$, ..., Р8 $= r_7^{(n)}$ (если $N = 7$).
9. Регистры: рабочие Р1 — Р8; оперативные Р0, Р9 — РД: свободные —.
10. Погрешность относительная меньше $1 \cdot 10^{-6}$.
11. Время счета (полное) $t \approx (0{,}1\ n^2)$ мин.

Пример. Экономизировать многочлен

$$f(x) = 1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + \ldots + \frac{x^{11}}{12},$$

приняв в качестве результирующего $\overline{f(x)} = \sum_{p=0}^{6} r_p^{(11)} T_p(x)$. Вычислить максимальную погрешность экономизации.

Ниже показано содержимое регистров Р1, Р2, Р3, Р4, Р8 после 1-го, 2-го, 3-го и 11-го пусков.

Номер пуска	P1	P2	P3	P4	P8
1	—99999999	0	0	0	0
2	1,1666667	0,5	0,16666667	0	0
3	1,1666667	0,6875	0,16666667	0,0625	0
11	1,3390637	0,94684245	0,41952899	0,21526693	0,00994466

Числа в последней строке — часть искомых коэффициентов: $r_0^{(11)}$, $r_1^{(11)}$, $r_2^{(11)}$, $r_3^{(11)}$, $r_7^{(11)}$. Поскольку требуется найти ряд, содержащий многочлены Чебышева до шестого порядка включительно, то коэффициент $z_7^{(11)}$ используется для оценки погрешности. Согласно (8.29)

$$|\overline{f(x)}-f(x)| \leqslant |z_7^{(11)}|+0{,}01\,(1/9+1/20+2/11+1/12)=$$
$$=0{,}00994466+0{,}0042626262 \approx 0{,}0142.$$

Таким образом, ряд $f(x)=\sum\limits_{p=0}^{6} r_p^{(11)}\,T_p(x)$ аппроксимирует исходную сумму с погрешностью 0,01 на промежутке $-1 \leqslant x \leqslant 1$.

8.3. Многочлены Лежандра и функции Лежандра целого порядка. Производные и нули многочленов Лежандра. Коэффициенты квадратурной формулы Гаусса

Присоединенные функции Лежандра первого и второго рода (см. определения в (6.11) — (6.13)) при $\mu=0$ называются *функциями Лежандра*. При целых $\nu=n$ функции Лежандра первого рода являются многочленами степени n и называются *многочленами Лежандра* $P_n(z)$. Функции Лежандра второго рода целого порядка $Q_n(z)$ имеют логарифмические точки ветвления при $z=\pm 1$ и регулярны на бесконечности. В итоге $Q_n(z)$ однозначны и регулярны на плоскости z, разрезанной на интервале $(-1,1)$ вдоль действительной оси.

Для $P_n(z)$ и $Q_n(z)$ имеет место рекуррентная формула $(n \geqslant 1)$

$$(n+1)\,W_{n+1}=(2n+1)\,zW_n-nW_{n-1}, \tag{8.30}$$

где $W_n=P_n(z),\quad Q_n(z)$.

Первые функции $P_n(z)$ и $Q_n(z)$ имеют вид

$$P_0(z)=1,\quad P_1(z)=z;$$
$$Q_0(z)=\frac{1}{2}\ln\frac{z+1}{z-1},\quad Q_1(z)=\frac{z}{2}\ln\frac{z+1}{z-1}-1. \tag{8.31}$$

При вычислении $Q_n(z)$ удобно положить $0 \leqslant \arg z < \pi$, тогда знак $\operatorname{Im}\left(\frac{z+1}{z-1}\right)$ определен (отрицателен) и алгоритм упрощается. При $-\pi < \arg z < \pi$ функции $Q_n(z)$ комплексно-сопряженные от $Q_n(z)$ при $0 \leqslant \arg z < \pi$.

На верхнем и нижнем берегах разреза мнимая часть $Q_n(z)$ имеет противоположные знаки, при этом

$$\operatorname{Im} Q_n(x \pm j0)=\mp(\pi/2)\,P_n(x). \tag{8.32}$$

В связи с этим вводится *вещественная функция на разрезе* [5]

$$\overline{Q_n(x)}=\frac{1}{2}\,[Q_n(x+j0)+Q_n(x-j0)]=\operatorname{Re} Q_n(z)\,|_{\operatorname{Im} z=0}. \tag{8.33}$$

Обычно $\overline{Q_n(x)}$ обозначается как $Q_n(x)$. Отличие этой функции от $Q_n(z)$ учитывается только в записи аргумента. Отметим, что для $Q_n(x)$ справедливы рекуррентная формула (8.30) и дифференциальное уравнение (6.11) при $\mu=0$ и $\nu=n$. Первые две функции $Q_n(x)$:

$$Q_0(x)=\frac{1}{4}\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2;\quad Q_1(x)=\frac{1}{4}\,x\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2. \tag{8.34}$$

Формулы (8.34) справедливы на действительной оси и вне разреза. Однако использование рекуррентных формул (8.30) для вычисления функций $Q_n(x)$ вне разреза при возрастающих n малоэффективно, так как $Q_n(x)$ быстро убывает с увеличением n и имеет место потеря точности за счет погрешностей округления (ср. § 5.1). В этих случаях, т. е. при $|x|>1$, лучшие результаты дает вычисление $Q_n(x)$ через *гипергеометрический ряд* [5]:

$$Q_n(x)=\frac{n!}{(2n+1)!!\,x^{n+1}}\,F\left(\frac{n+2}{2},\ \frac{n+1}{2};\ n+\frac{3}{2};\ \frac{1}{x^2}\right). \tag{8.35}$$

Производные многочленов и функций Лежандра вычисляются по одной и той же рекуррентной формуле

$$\frac{dW_n}{dx}=\frac{n}{1-x^2}\,(W_{n-1}-xW_n). \tag{8.36}$$

Нули $p_m^{(n)}$ $(m=1,2,\ldots)$ *многочленов Лежандра* $P_n(z)$ расположены на интервале ортогональности $(-1,1)$. Приближенно $p_m^{(n)}$ определяется по асимптотической (по отношению к n) формуле

$$p_{m1}^{(n)}=\cos\,[(2m-0{,}5)\,\pi]/(2n+1). \tag{8.37}$$

Для уточнения $p_m^{(n)}$ эффективна итерационная процедура, использующая значения производных при $x=p_{m1}^{(n)}$. Второе приближение для $p_m^{(n)}$

$$p_{m2}^{(n)}=p_{m1}^{(n)}-P_n\left(p_{m1}^{(n)}\right)\Bigg/\frac{dP_n\left(p_{m1}^{(n)}\right)}{dx}, \tag{8.38}$$

где dP_n/dx определяется по (8.36). Далее процедура повторяется. Расчеты показывают, что три итерации обеспечивают точность $\sim 1\cdot 10^{-8}$ при любых m и n.

Квадратурная формула Гаусса [9,21]

$$\int\limits_{-1}^{1} f(x)\,d_n \approx \sum_{m=1}^{n} w_m^{(n)}\,f(x_m), \tag{8.39}$$

где *узлы* и *весовые коэффициенты*:

$$x_m=p_m^{(n)};\quad w_m^{(n)}=2\Bigg/\left[(1-x_m^2)\left(\frac{dP_n(x_m)}{dx}\right)^2\right]. \tag{8.40}$$

В приводимой далее программе 8.15 значения производных $dP_n(x_m)/dx$ находятся по рекуррентной формуле (8.30), применяемой в прямом направлении, значениям первых двух многочленов и рекуррентной формуле (8.36). Нули определяются по формуле (8.37) и итерационной схеме (8.38).

Программа 8.11. Многочлены Лежандра $P_n(x)$ вещественного аргумента. Производные многочленов Лежандра (8.30), (8.31), (8.36).

П0	ПС	1	ПА	П6	ИП7	ИП6	КИП6	F,	ИП6
÷	ПД	ИПА	П9	×	/—/	XY	ПА	ИПД	1
+	×	ИП7	×	+	FL0	06	ПВ	ИП9	ИП7
ИПА	×	—	ИПС	×	1	ИП7	Fx²	—	÷
П8	С/П								

Инструкция

1. Исходные данные: (x = Р7), [n = РХ].
2. Пуск: В/О С/П.
3. Результат: $РХ = Р8 = P'_n(x)$, $Р9 = P_{n-1}(x)$, $РА = P_n(x)$, $РВ = P_{n+1}(x)$.
4. Регистры: рабочие Р7 — РВ; оперативные Р0, Р6, РС, РД; свободные Р1 — Р5.
5. Погрешность абсолютная меньше $5 \cdot 10^{-7}$ при $|x| \leqslant 1{,}05$; относительная меньше $5 \cdot 10^{-6}$ при $|x| \geqslant 1{,}05$;
6. Время счета $t \approx (n/8)$ мин.

Примеры.

$P_8(0{,}6) = 0{,}2123392$, $P_9(0{,}6) = -0{,}004610305$ ($-0{,}0460304$ [9]);

$P_{10}(0{,}6) = -0{,}24366276$ ($-0{,}2436627$ [9]),

$P'_9(0{,}6) = 3{,}3750145$ (3,3750144 [9]).

Программа 8.12. Функции Лежандра второго рода $Q_n(x)$ целого порядка вещественного аргумента, производные функций Лежандра (8.30), (8.34), (8.36), $|x| \neq 1$.

П0	ПС	1	П6	ИП7	+	FBx	1	—	÷
Fx²	F√	F√	Fln	ПА	ИП7	×	1	—	ИП6
КИП6	F,	ИП6	÷	ПД	ИПА	П9	×	/—/	XY
ПА	ИПД	1	+	×	ИП7	×	+	FL0	19
ПВ	ИП9	ИП7	ИПА	×	—	ИПС	×	1	ИП7
Fx²	—	÷	П8	С/П					

Инструкция

1. Исходные данные: (x = Р7), [n = РХ].
2. Пуск: В/О С/П.
3. Результат: $РХ = Р8 = Q'_n(x)$, $Р9 = Q_{n-1}(x)$, $РА = Q_n(x)$, $РВ = Q_{n+1}(x)$.
4. Регистры: рабочие Р7 — РВ; оперативные Р0, Р6, РС, РД; свободные Р1 — Р5.
5. Погрешность абсолютная меньше $5 \cdot 10^{-7}$ при $|x| < 1{,}1$, относительная меньше $5 \cdot 10^{-5}$ при $1{,}1 \leqslant |x| \leqslant 2$, $n \leqslant 4$ и $5 \cdot 10^{-4}$ при $1{,}1 \leqslant |x| \leqslant 4$, $n \leqslant 3$;

   Если при $|x| < 1$ $|Q'_n(x)| < 0{,}1$, то вместо указанной выше оценки следует оперировать абсолютной погрешностью, которая в этом случае меньше $5 \cdot 10^{-7}$.
6. Время счета $t \approx (n/7)$ мин.

Примеры.

$$\left.\begin{array}{l} Q_8(0{,}6) = -0{,}34516396; \\ Q_9(0{,}6) = -0{,}44832985\ (-0{,}44832986\ [9]), \\ Q'_9(0{,}6) = -1{,}0710850\ (-1{,}0710851\ [9]); \\ Q_{10}(0{,}6) = -0{,}20044847\ (-0{,}20044847\ [9]); \end{array}\right\} \quad t \approx 1 \text{ мин } 10 \text{ с}$$

$$\left.\begin{array}{l} Q_2(2) = 0{,}02118383\ (0{,}0211838\ [9]), \\ Q_3(2) = 4{,}871235 \cdot 10^{-3}\ (4{,}87112 \cdot 10^{-3}\ [9]), \\ Q'_3(2) = -0{,}01144136\ (-0{,}0114416\ [9]), \\ Q_4(2) = 1{,}161449 \cdot 10^{-3}, \end{array}\right\} \quad t \approx 30 \text{ с}.$$

Программа 8.13. Многочлены Лежандра $P_n(z)$ комплексного аргумента $z = x + \mathrm{j}\,y$ (8.30), (8.31).

П0	1	П6	П8	0	П9	ИПВ	ИПА	ИП6	КИП6
F,	ИП6	÷	П5	ИП8	П1	×	П3	F,	П8
F,	ИП5	ИП9	П2	×	П4	F,	П9	ИП5	1
+	×	FBx	ИП8	×	ПС	ИПВ	×	XY	ПД
ИПА	×	+	ИПА	ИПС	×	ИПВ	ИПД	×	—
ИП3	—	XY	ИП4	—	XY	FL0	08	ПС	XY
ПД	С/П								

Инструкция

1. Исходные данные: (x = РА, y = РВ), [n = РХ].
2. Пуск: В/О С/П.
3. Результат: $РХ = РД = \mathrm{Im}\, P_{n+1}(z)$, $РY = РС = \mathrm{Re}\, P_{n+1}(z)$,

   $Р1 = \mathrm{Re}\, P_{n-1}(z)$, $Р2 = \mathrm{Im}\, P_{n-1}(z)$, $Р8 = \mathrm{Re}\, P_n(z)$, $Р9 = \mathrm{Im}\, P_n(z)$.
4. Регистры: рабочие Р1, Р2, Р8 — РД; оперативные Р0, Р3 — Р6; свободные Р7.
5. Погрешность: относительная меньше $1 \cdot 10^{-6}$ при $|P_n(z)| \geqslant 0{,}1$, абсолютная меньше $1 \cdot 10^{-7}$ при $|P_n(z)| \leqslant 0{,}1$.
6. Время счета $t \approx (n/4)$ мин.

Примеры.

$P_2(2+\mathrm{j}) = 4 + \mathrm{j}6$ $(4+\mathrm{j}6)$, $P_3(2+\mathrm{j}) = 2{,}0000007 + \mathrm{j}26$ $(2+\mathrm{j}26)$;

$P_4(2+\mathrm{j}) = -41{,}499998 + \mathrm{j}90{,}000001$ $(-41{,}5+\mathrm{j}90)$,

$P_9(2+\mathrm{j}) = -17694{,}246 - \mathrm{j}102649{,}61$;

$P_{10}(2+\mathrm{j}) = 142126{,}48 - \mathrm{j}405902{,}67$, $P_{11}(2+\mathrm{j}) = 1333655{,}5 - \mathrm{j}1185160$.

Программа 8.14. Функции Лежандра второго рода $Q_n(z)$ целого порядка комплексного аргумента $z = x + \mathrm{j}\,y$ (8.30), (8.31), $|\arg z| < \pi$.

ИП7	1	П6	+	ПА	2	—	ПС	ИП8	ПП
71	ИП7	ПА	F,	↑	Fx²	ИП9	Fx²	+	F√
П1	÷	Farccos	/—/	2	÷	П2	ИП1	F√	Fln
П1	ПП	81	1	—	ИП6	КИП6	F,	ИП6	÷
П5	ИП1	×	П3	F,	П1	F,	ИП2	ИП5	×
П4	F,	П2	ИП5	1	+	×	FBx	ИП1	×
ПП	81	ИП3	—	XY	ИП4	—	XY	FL0	35
С/П	/—/	↑	Fx²	ИПС	Fx²	+	÷	ИПС	FBx
÷	ПС	ИП8	×	XY	ПД	ИПА	×	+	П9
ИПА	ИПС	×	ИП8	ИПД	×	—	В/О		

Структура программы

00 — 10: вычисление дроби $(z+1)/(z-1)$,

11 — 34: вычисление $Q_0(z)$ и $Q_1(z)$ по формулам (8.31) и заиесеиие их действительных и мнимых частей соответственно в регистры Р1, Р2 и РХ, Р9,

35 — 70: расчет $Q_2, Q_3, \ldots, Q_n$ по рекуррентной формуле (8.30); при этом текущие $kQ_{k-1}/(k+1)$ (нх действительная и мнимая части) содержатся в регистрах Р3, Р4, действительные и мнимые части Q_k — в Р1, Р2 и Q_{k+1} — в РХ, РY,

71 — 97: подпрограмма деления-умножения комплексных чисел (ср. программу 1.9).

Инструкция

1. Исходные данные: $(x = \text{Р7},\ y = \text{Р8})$, $(n-1) = \text{Р0}$.
2. Пуск: В/О С/П.
3. Результат: $\text{РХ} = \operatorname{Re} Q_n(z)$, $\text{РY} = \operatorname{Im} Q_n(z)$, $\text{Р1} = \operatorname{Re} Q_{n-1}(z)$, $\text{Р2} = \operatorname{Im} Q_{n-1}(z)$.
4. Регистры: рабочие Р1, Р2, Р7, Р8; оперативные Р0, Р3 — Р6, Р9, РА, РС, РД; свободные РВ.
5. Погрешность относительная меньше $5\cdot10^{-6}$ при $|z|<1$ и $5\cdot10^{-4}$ при $|z|\leqslant 4$, $n\leqslant 3$.
6. Время счета $t\approx(n/3)$ мин.

Примеры.

$Q_3(0{,}8+j1\cdot10^{-9}) = -0{,}84544435 - j0{,}12566361$ $(-0{,}84544435 - j0{,}1256637)$;

$Q_9(0{,}8+j1\cdot10^{-9}) = 0{,}43299312 - j0{,}29508234$ $(0{,}43299312 - j0{,}29508237)$.

Здесь $y = \operatorname{Im} z \ll 1$ и фактически вычисляются значения функций на разрезе. Поэтому действительная часть искомых фуикций равна $Q_n(x)$, а мнимая $(-\pi/2)P_n(x)$ ((8.33), (8.32)).

$Q_4(0{,}9+j2) = 3{,}90338\cdot10^{-4} + j1{,}443853\cdot10^{-4}$;

$Q_5(0{,}9+j2) = 5{,}360848\cdot10^{-5} - j5{,}3735\cdot10^{-5}$.

Программа 8.15. Нули $p_m^{(n)}$ многочленов Лежандра $P_n(x)$, значения $P_{n-1}(x)$, $P_{n+1}(x)$ и производных $P_n'(x)$ в нулях $p_m^{(n)}$, весовые коэффициеиты $w_m^{(n)}$ квадратурной формулы Гаусса (8.37), (8.38), (8.30), (8.31), (8.36), (8.39), (8.40).

ПС	0	П5	БП	07	ИП5	С/П	3	П1	КИП5
ИП5	4	F1/x	—	ИПС	2	F1/x	+	÷	Fπ
×	Fcos	П7	1	ПА	П6	ИПС	П0	ИП7	ИП6
КИП6	F,	ИП6	÷	ПД	ИПА	П9	×	/—/	XY
ПА	ИПД	1	+	×	ИП7	×	+	FL0	29
ПВ	ИП9	ИП7	ИПА	×	—	ИПС	×	1	ИП7
Fx²	—	П4	÷	П8	ИП7	ИПА	ИП8	÷	—
FL1	22	П7	2	ИП4	÷	ИП8	Fx²	÷	П6
XY	Fx<0	05	Fln						

Нули $p_m^{(n)}$ многочленов $P_n(x)$ являются абсциссами узлов квадратурной формулы Гаусса (8.39). Нумерация ведется от наибольшего, $p_1^{(n)}$. Последний, а также $w_1^{(n)}$, $P_{n-1}(p_1^{(n)})$, $P_{n+1}(p_1^{(n)})$, $P_n(p_1^{(n)})$ определяются на первом пуске. На следующем пуске находятся $w_2^{(n)}$, $p_2^{(n}$, $P_{n-1}(p_2^{(n)})$, $P_{n+1}(p_2^{(n)})$, $P_n'(p_2^{(n)})$ и т. д. Общее число пусков равно $n/2$ при четном n и $(n+1)/2$ — при нечетном. Остальные нули находятся по формуле $p_m^{(n)} = -P_{n-m+1}^{(n)}$. Весовые множители в симметричных узлах относительно $x=0$ одинаковы: $w_m^{(n)} = w_{n-m+1}^{(n)}$. Также симметричны значения многочленов и производных с учетом нх четности: $P_k(x) = (-1)^k\ P_k(-x)$, $\Delta P_k'(x) = (-1)^{k+1}\ P_k'(-x)$.

Структура программы

00—22: ввод начальных параметров и вычисление нулей $p_{m1}^{(n)}$ в первом приближении по формуле (8.37),

24—64: вычисление значений многочленов $P_{k-1}(x)$, $P_k(x)$, $P_{k+1}(x)$ и производных $P_k'(x)$ (ср. программу 8.11),

23—72: итерационное уточнение значений нулей $p_m^{(n)}$ ((8.38) — три итерации) с одновременным вычислением $P_{n-1}(p_m^{(n)})$, $P_{n+1}(p_m^{(n)})$, $P_n'(p_m^{(n)})$) при уточненных значениях $p_m^{(n)} = p_{m3}^{(n)}$.

73—83: вычисление весовых коэффициентов $w_m^{(n)}$ по формуле (8.40).

Инструкция

1. Исходные данные: $[n = \text{РХ}]$.
2. Пуск 1: В/О С/П.

Результат 1: $\text{РХ} = N_1 = 1$, $\text{Р6} = w_1^{(n)}$, $\text{Р7} = p_1^{(n)}$, $\text{Р8} = P_n'(p_1^{(n)})$,

$\text{Р9} = P_{n-1}(p_1^{(n)})$, $\text{РВ} = P_{n+1}(p_1^{(n)})$ (N_1 — порядковый номер нуля).

3. Пуск 2: С/П.

Результат 2: $\text{РХ} = N_2 = 2$, $\text{Р6} = w_2^{(n)}$, $\text{Р7} = p_2^{(n)}$, $\text{Р8} = P_n'(p_2^{(n)})$,

$\text{Р9} = P_{n-1}(p_2^{(n)})$, $\text{РВ} = P_{n+1}(p_2^{(n)})$.

4. Пуск 3: С/П.

. . . .

5. Последний пуск: С/П

6. Результат: РХ = ЕГГОГ, $P6 = w^{(n)}_{n/2+1}$ при четном n или $P6 = w^{(n)}_{(n+3)/2}$ при нечетном n, $P7 = x^n = P^{(n)}_{n/2+1}$ при четном n или $P7 = x^{(n)} = P_{(n+3)/2}$ при нечетном n, $P8 = P_n'(x^{(n)})$, $P9 = P_{n-1}(x^{(n)})$, $PB = P_{n+1}(x^{(n)})$.

7. Регистры: рабочие Р0, Р5 — Р9, РВ, РС; оперативные Р1, Р4, РА, РД; свободные Р2, Р3.

8. Погрешность относительная меньше $1\cdot 10^{-6}$.

9. Время счета после каждого пуска $t \approx (1 + 0{,}3n)$ мин.

Примеры. Для $n = 5$

$w_1^{(5)} = 0{,}23692686$ $(0{,}23692689)$; $p_1^{(5)} = 0{,}90617985$ $(0{,}90617985)$;

$P_4(p_1^{(5)}) = 0{,}24573548$; $P_6(p_1^{(5)}) = -0{,}20477955$; $P_5'(p_1^{(5)}) = 6{,}8703335$,

$t \approx 2{,}5$ мин (после пуска 1);

$w_2^{(5)} = 0{,}47862863$ $(0{,}47862867)$; $p_2^5 = 0{,}53846931$ $(0{,}53846931)$;

$P_4(p_2^{(5)}) = -0{,}34450089$; $P_6(p_2^{(5)}) = 0{,}28708408$; $P_5'(p_2^{(5)}) = -2{,}4258891$,

$t \approx 2{,}5$ мин (после пуска 2);

$w_3^{(5)} = 0{,}56888888$ $(0{,}56888889)$; $p_3^{(5)} = 0$ (0);

$P_4(0) = 0{,}375$; $P_6(0) = -0{,}3125$; $P_5'(0) = 1{,}875$, $t \approx 2{,}5$ мин (после пуска 3).

8.4. Многочлены Эрмита. Функции параболического цилиндра целого порядка. Обобщенные многочлены Лагерра

Многочлены Эрмита удовлетворяют дифференциальному уравнению

$$\frac{d^2 H_n}{dz^2} - 2z\frac{dH_n}{dz} + 2nH_n = 0. \tag{8.41}$$

Рекуррентная формула

$$H_n(z) = 2zH_{n-1}(z) - 2(n-1)H_{n-2}(z). \tag{8.42}$$

Первые два многочлена

$$H_0(z) = 1, \quad H_1(z) = 2z. \tag{8.43}$$

Отметим, что второе слагаемое в (8.42) при $n = 1$ обращается в нуль и при этом указанная формула дает правильное значение $H_1(z)$. Таким образом, для «запуска» (8.42) достаточно задать $H_0(z) = 1$ и произвольное значение $H_{-1}(z)$.

Производная многочленов Эрмита

$$dH_n(z)/dz = 2nH_{n-1}(z). \tag{8.44}$$

Функция параболического цилиндра $D_n(z) = U(-n - {}^1/_2, z)$ была определена в § 6.2 ((6.28), (6.31)). Она удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{d^2 D_n}{dz^2} + \left(n + \frac{1}{2} - \frac{z^2}{4}\right) D_n = 0 \tag{8.45}$$

и при целых n связана с многочленом Эрмита следующим соотношением:

$$D_n(z) = 2^{-n/2} e^{-z^2/4} H_n(z/\sqrt{2}). \tag{8.46}$$

Производные функций параболического цилиндра:

$$D_n'(z) = \sqrt{2}\, 2^{-n/2} e^{-z^2/4} [nH_{n-1}(z/\sqrt{2}) - (z/\sqrt{8}) H_n(z/\sqrt{2})]. \tag{8.47}$$

Обобщенные многочлены Лагерра $L_n^{(\alpha)}(z)$ удовлетворяют дифференциальному уравнению

$$z\frac{d^2 L_n^{(\alpha)}}{dz^2} + (\alpha + 1 - z)\frac{dL_n^{(\alpha)}}{dz} + nL_n^{(\alpha)} = 0. \tag{8.48}$$

Рекуррентная формула $(n \geqslant 2)$

$$nL_n^{(\alpha)}(z) = (2n + \alpha - 1 - z) L_{n-1}^{(\alpha)}(z) - (n + \alpha - 1) L_{n-2}^{(\alpha)}(z) = 0. \tag{8.49}$$

Первые два многочлена

$$L_0^{(\alpha)}(z) = 1, \quad L_1^{(\alpha)}(z) = \alpha + 1 - z. \tag{8.50}$$

Как видно, формулу (8.49) можно использовать и при $n = 1$, если принять

$$L_{-1}^{(\alpha)}(z) = 0. \tag{8.51}$$

Производные обобщенных многочленов Лагерра

$$z\frac{dL_n^{(\alpha)}}{dz} = nL_n^{(\alpha)} - (n + \alpha) L_{n-1}^{(\alpha)}. \tag{8.52}$$

Обобщенные многочлены нулевого порядка обозначаются как $L_n(z)$:

$$L_n(z) \equiv L_n^{(0)}(z)$$

и называются *многочленами Лагерра*.

Программа 8.16. Многочлены Эрмита $H_{n-1}(x)$, $H_n(x)$ вещественного аргумента, производные $H_n'(x)$ (8.42) — (8.44).

П0	П8	1	ПА	ИП0	ИП8	—	ИП9	×	ИП7
ИПА	П9	×	+	2	×	ПА	FL0	04	ИП8
2	×	ИП9	×	С/П					

Инструкция

1. Исходные данные: $(x = P7)$, $[n = PX]$.
2. Пуск: В/О С/П.
3. Результаты: $PX = H_n'(x)$, $P9 = H_{n-1}(x)$, $PA = H_n(x)$.
4. Регистры: рабочие Р7, Р9, РА; оперативные Р0, Р8; свободные Р1 — Р6, РВ — РД.
5. Погрешность относительная меньше $5\cdot 10^{-7}$.
6. Время счета $t \approx (n/10)$ мин.

Примеры. $H_4(3) = 876$ (876); $H_5(3) = 3816$ (3816); $H_5'(3) = 8760$ (8760).

Программа 8.17. Многочлены Эрмита $H_n(z)$, $H_{n-1}(z)$ комплексного аргумента $z = x + jy$, производные $H_n'(z)$ (8.42) — (8.44).

П0	П8	1	ПА	0	ПВ	ИПС	ИП0	ИП8	—
×	П9	ИПД	FBx	×	ИПА	ПС	ИП6	×	ИПВ
	ИП7		+	+	2	×	ИПА	ИП7	×
ИПВ	ИП6	×	—	ИП9	+	2	×	ПА	XY
ПВ	FL0	06	ИПД	ИП8	2	×	×	ИПС	FBx
×	С/П								

Инструкция
1. Исходные данные: (x = Р7, y = Р6), [n = РX].
2. Пуск: В/О С/П.
3. Результат: РX = $\mathrm{Re}\, H_n'(z)$, РY = $\mathrm{Im}\, H_n'(z)$, РA = $\mathrm{Re}\, H_n(z)$, РВ = $\mathrm{Im}\, H_n(z)$, РС = $\mathrm{Re}\, H_{n-1}(z)$, РД = $\mathrm{Im}\, H_{n-1}(z)$.
4. Регистры: рабочие Р6, Р7, РА — РД; оперативные Р0, Р8, Р9; свободные Р1 — Р5.
5. Погрешность относительная меньше $5\cdot 10^{-7}$.
6. Время счета $t \approx (n/5)$ мин.

Примеры.

$H_4(2+\mathrm{j}) = -244+\mathrm{j}192$ $(-244+\mathrm{j}192)$;

$H_5(2+\mathrm{j}) = -1296-\mathrm{j}328$ $(-1296-\mathrm{j}328)$,

$H_5'(2+\mathrm{j}) = -2440+\mathrm{j}1920$ $(-2440+\mathrm{j}1920)$.

Программа 8.18. Функции параболического цилиндра $D_n(x)$ целого порядка вещественного аргумента и их производные $D_n'(x)$ (8.46), (8.47), (8.42), (8.43).

П0	ПВ	2	Fln	×	ИПС	2	F√	÷	ПД
Fx²	+	Feˣ	F√	F1/x	ПА	ИП0	ИПВ	—	ИП9
×	ИПД	ИПА	П9	×	+	2	×	ПА	FL0
16	ИПВ	ИП9	×	ИПД	ИПА	×	2	÷	—
2	F√	×	С/П						

Инструкция
1. Исходные данные: (x = РС), [n = РX].
2. Пуск: В/О С/П.
3. Результат: РX = $D_n'(x)$, РА = $D_n(x)$.
4. Регистры: рабочие РА, РС; оперативные Р0, Р9, РВ, РД; свободные Р1 — Р8.
5. Погрешность относительная меньше $1\cdot 10^{-6}$.
6. Время счета $t \approx (n/10)$ мин.

Примеры.

$D_4(5) = 0{,}92275666$ $(0{,}92275712)$, $D_4'(5) = -1{,}4574921$ $(-1{,}4574917)$;

$D_9(5) = 326{,}43972$, $D_9'(5) = 469{,}23523$.

Программа 8.19. Функции параболического цилиндра $D_n(z)$ целого порядка комплексного аргумента $z = x + \mathrm{j}\, y$ (8.46), (8.42), (8.43).

П0	П1	2	Fln	×	ИПД	2	F√	÷	ПВ
ИПС	FBx	÷	ПА	Fx²	XY	Fx²	—	+	Feˣ
F√	F1/x	ИПА	ИПВ	×	/—/	П9	Fsin	XY	×
FBx	ИП9	Fcos	×	П6	ИПВ	×	XY	П7	ИПА
×	+	ИП0	ИП1	—	П5	ИП9	×	+	2
×	ИП6	ИПА	×	ИП7	П9	ИПВ	×	—	ИП5
ИП8	×	+	2	×	ИП6	П8	F,	FL0	34
С/П									

Инструкция
1. Исходные данные: (x = РС, y = РД), [n = РX].
2. Пуск: В/О С/П.

3. Результат: РX = $\mathrm{Re}\, D_n(z)$, РY = $\mathrm{Im}\, D_n(z)$.
4. Регистры: рабочие РС, РД; оперативные Р0, Р1, Р5 — РВ; свободные Р2 — Р4.
5. Погрешность относительная меньше $1\cdot 10^{-6}$.
6. Время счета $t \approx (n/4)$ мин.

Примеры.

$D_5(2+\mathrm{j}5) = 446906+\mathrm{j}1006915{,}8$ $(446905{,}59+\mathrm{j}1006915{,}5)$;

$D_4(2+\mathrm{j}) = -5{,}6148562+\mathrm{j}8{,}7446222$ $(-5{,}6148565+\mathrm{j}8{,}74462111)$.

Программа 8.20. Обобщенные многочлены Лагерра $L_n^{(\alpha)}(x)$, $L_{n-1}^{(\alpha)}(x)$ вещественного аргумента, производные $L_n^{(\alpha)\prime}(x)$ (8.49) — (8.52).

П0	0	П5	П9	1	ПА	КИП5	1	ИП6	—
ИП5	—	П8	ИП9	×	ИП5	ИП8	—	ИП7	—
ИПА	П9	×	+	ИП5		ПА	FL0	06	ИП8
1	—	ИП9	×	ИП5	ИПА	×	+	ИП7	÷
С/П									

Инструкция
1. Исходные данные: (α = Р6, x = Р7), [n = РX].
2. Пуск: В/О С/П.
3. Результат: РX = $L_n^{(\alpha)\prime}(x)$, Р9 = $L_{n-1}^{(\alpha)}(x)$, РА = $L_n^{(\alpha)}(x)$.
4. Регистры: рабочие Р6, Р7, Р9, РА; оперативные Р0, Р5, Р8; свободные Р1 — Р4, РВ — РД.
5. Погрешность относительная меньше $1\cdot 10^{-6}$.
6. Время счета $t \approx (n/8)$ мин.

Примеры.

$L_4(11) = L_4^{(0)}(11) = 42{,}708332$ $(42{,}7083333)$;

$L_5(11) = L_5^{(0)}(11) = 40{,}783334$ $(40{,}7833333)$;

$L_5'(11) = L_5^{(0)\prime}(11) = -0{,}87499909$ $(-0{,}875)$;

$L_{12}(10) = L_{12}^{(0)}(10) = -9{,}9037466$ $(-9{,}90374646\ [9])$;

$L_{10}^{(15)}(0) = 3268760$ (3268760).

В последнем примере число в скобках получено по формуле $L_n^{(m)}(0) = (m+n)!/(m!n!)$. Отметим, что при нулевом аргументе программа не вычисляет производную $L_n^{(\alpha)\prime}(0)$ и дает АВОСТ. Однако значения $L_n^{(\alpha)}(0)$ и $L_{n-1}^{(\alpha)}(0)$ вычисляются без сбоев и заносятся в соответствующие регистры памяти.

Программа 8.21. Обобщенные многочлены Лагерра $L_n^{(\alpha)}(z)$, $L_{n-1}^{(\alpha)}(z)$ комплексного аргумента $z = x + \mathrm{j}\, y$ (8.49) — (8.51).

П0	0	П5	П8	ПС	ПД	1	П7	КИП5	ИП5
1	ИП6	—	ИП5	—	П4	—	ИП9	—	ПА
ИП7	ИПА	×	ИП8	ИПВ	×	+	ИП	ИП4	×
+	ИП5	÷	ИПА	ИП8	×	ИПВ	ИП7	ПС	×
—	ИПД	ИП4	×	+	ИП5	÷	ИП8	ПД	F,
П8	XY	П7	FL0	8	С/П				

Инструкция

1. Исходные данные: (x = Р9, y = РВ, α = Р6), [n = РХ].
2. Пуск: В/О С/П.
3. Результат: РХ $= \operatorname{Re} L_n^{(\alpha)}(z)$, РY = Р8 $= \operatorname{Im} L_n^{(\alpha)}(z)$, РС $= \operatorname{Re} L_{n-1}^{(\alpha)}(z)$, РД $= \operatorname{Im} L_{n-1}^{(\alpha)}(z)$.
4. Регистры: рабочие Р6 — Р9, РВ — РД; оперативные Р0, Р4, Р5, РА; свободные Р1 — Р3.
5. Погрешность относительная меньше $5\cdot10^{-7}$.
6. Время счета $t \approx (n/4)$ мин.

Примеры.

$L_3^{(0)}(2{,}7+j0{,}9) = 0{,}433+j1{,}431$ $(0{,}433+j1{,}431)$;

$L_4^{(0)}(2{,}7+j0{,}9) = 1{,}65745+j0{,}9684$ $(1{,}65745+j0{,}9684)$.

Числа в скобках получены по прямому представлению $L_n^{(0)}(z)$ в виде суммы $L_n^{(0)}(z) = 1 - nz + \frac{n(n-1)}{(2!)^2}z^2 - \frac{n(n-1)(n-2)}{(3)^2}z^3 + \ldots + (-1)\frac{n z^n}{(n!)^2}$.

$L_2^{(2)}(2{,}7+j0{,}9) = -1{,}56-j1{,}17$; $L_3^{(2)}(2{,}7+j0{,}9) = -2{,}987-j0{,}009$.

Результаты — точные.

Указатель программ

Номер программы	Функция	Область определения	Число шагов	Число регистров памяти	Примечание
8.1	$T_n(x)$, $U_n(x)$	$0 \leqslant \lvert x\rvert \leqslant 1$	17	3	Тригонометрические формулы
8.2	$T_{n-1}(x)$, $T_n(x)$, $T_{n+1}(x)$, $U_n(x)$	$0 \leqslant \lvert x\rvert \leqslant 1$	32	8	Рекуррентные формулы. Точность выше, чем для программы 8.1
8.3	$T_n'(x)$, $U_n'(x)$, $T_{n-1}(x)$, $T_n(x)$, $T_{n+1}(x)$, $U_{n-1}(x)$, $U_n(x)$	$0 \leqslant x \leqslant 1$	57	11 11	Рекуррентные формулы
8.4	$\tau_m^{(n)}$, $u_m^{(n)}$	$-1 \leqslant \tau_m^{(n)},\ u_m^{(n)} \leqslant 1$	34	4	
8.5	$S_N = \sum_{k=0}^{N} a_k T_k(x)$	$N \leqslant 11$	27	$N+3$	Рекуррентные формулы
8.6	$S_{2N} = \sum_{k=0}^{N} b_k T_{2k}(x)$	$N \leqslant 11$	32	$N+3$	То же
8.7	$S_{2N+1} = \sum_{k=0}^{N} c_k T_{2k+1}(x)$	$N \leqslant 11$	35	$N+3$	Рекуррентные формулы
8.8	$S_N^* = \sum_{k=0}^{N} a_k^* T_k^*(x)$	$N \leqslant 11$	32	$N+3$	То же
8.9	$d_k^{(p)}$	$p \leqslant 83$	67	5	Коэффициенты разложения x^p в ряд по многочленам Чебышева
8.10	$r_p^{(n)}$, $p = 1, 2, \ldots, N$	$N < n$, $N \leqslant 7$	98	14	Коэффициенты экономизированного ряда для $f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$
8.11	$P_n(x)$, $P_n'(x)$	∞	42	9	Аргумент x вещественный
8.12	$Q_n(x)$, $Q_n'(x)$	$\lvert x\rvert \neq 1$, $\lvert x\rvert \leqslant 4$	55	9	То же
8.13	$P_n(z)$, $P_{n\pm1}(z)$	∞	62	13	z — комплексный аргумент
8.14	$Q_n(z)$, $Q_{n-1}(z)$	$\lvert z\rvert \neq 1$, $\lvert z\rvert \leqslant 4$	98	13	То же
8.15	$p_m^{(n)}$, $w_m^{(n)}$, $P_{n-1}(p_m^{(n)})$, $P_{n+1}(p_m^{(n)})$, $P_n'(p_m^{(n)})$		84	12	p_m, w_m — узлы и веса квадратурной формулы Гаусса
8.16	$H_{n-1}(x)$, $H_n(x)$, $H_n'(x)$	∞	25	5	Аргумент x вещественный
8.17	$H_{n-1}(z)$, $H_n(z)$, $H_n'(z)$	∞	52	9	
8.18	$D_n(x)$, $D_n'(x)$	∞	44	6	Аргумент x вещественный
8.19	$D_n(z)$	∞	71	10	
8.20	$L_{n-1}^{(\alpha)}(x)$, $L_n^{(\alpha)}(x)$, $L_n^{(\alpha)\prime}(x)$	∞	41	7	Аргумент x вещественный
8.21	$L_{n-1}^{(\alpha)}(z)$, $L_n^{(\alpha)}(z)$	∞	56	11	То же

Глава 9

Функции Матье

9.1. Определения, расчетные соотношения

Уравнение Матье:

$$\frac{d^2 y}{dz^2} + (a - 2q\cos 2z)\, y = 0. \tag{9.1}$$

По теореме Флоке общее решение (9.1) при $j\mu \neq 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ имеет вид

$$y = Ae^{\mu z} P(z) + Be^{-\mu z} P(-z), \tag{9.2}$$

где $P(z)$ — функция периодическая по z с периодом π. *Характеристический показатель* μ в зависимости от параметров a, q может быть чисто мнимым, вещественным или комплексным. При мнимых μ решения (9.2) ограничены (устойчивы) для действительных z. При других μ возникают неограниченно нарастающие функции. Области на плоскости (a, q), соответствующие устойчивым и неустойчивым решениям (диаграмма Матье — см., например, Мак-Лахлан Н.В. Теория и применение функций Матье. — М.: ИЛ, 1953), отделяются друг от друга кривыми, на которых

$$j\mu = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots . \tag{9.3}$$

На этих кривых одно из линейно независимых решений уравнения (9.1) имеет период π или 2π. Термин «функции Матье» обычно относится к указанным периодическим решениям.

Условие (9.3) выполняется при определенных значениях $a = a_r(q)$ — *собственных значениях уравнения Матье*. Функции Матье в результате зависят только от z и q как независимых переменных и принадлежат к одному из следующих классов:

$$\begin{aligned} &\mathrm{ce}_{2n}(z, q) \text{ — четные функции по } z \text{ с периодом } \pi;\\ &\mathrm{ce}_{2n+1}(z, q) \text{ — четные с периодом } 2\pi;\\ &\mathrm{se}_{2n+2}(z, q) \text{ — нечетные с периодом } \pi;\\ &\mathrm{se}_{2n+1}(z, q) \text{ — нечетные с периодом } 2\pi,\\ &n = 0, 1, 2, \ldots . \end{aligned} \tag{9.4}$$

Собственные значения $a_r(q)$ этих функций обозначаются соответственно как $a_{2n}(q)$, $a_{2n+1}(q)$, $b_{2n+2}(q)$, $b_{2n+1}(q)$.

Запишем, следуя (9.4), *разложения функций Матье в ряды Фурье*:

$$\begin{aligned} &\mathrm{ce}_{2n}(z, q) = \sum_{m=0}^{\infty} A_{2m}\cos 2mz;\\ &\mathrm{ce}_{2n+1}(z, q) = \sum_{m=0}^{\infty} A_{2m+1}\cos(2m+1)z;\\ &\mathrm{se}_{2n+2}(z, q) = \sum_{m=0}^{\infty} B_{2m+2}\sin(2m+2)z;\\ &\mathrm{se}_{2n+1}(z, q) = \sum_{m=0}^{\infty} B_{2m+1}\sin(2m+1)z,\\ &n = 0, 1, 2, \ldots . \end{aligned} \tag{9.5}$$

Определение функций Матье включает в себя также *условие нормировки* [5] ($y(z)$ — любая из функций (9.5)) $\int_0^{2\pi} |y|^2\, dz = \pi$). Это условие приводит к нормировочным формулам для коэффициентов:

$$\begin{aligned} &2|A_0|^2 + \sum_{m=1}^{\infty} |A_{2m}|^2 = 1; \quad \sum_{m=0}^{\infty} |A_{2m+1}|^2 = 1;\\ &\sum_{m=0}^{\infty} |B_{2m+2}|^2 = 1; \quad \sum_{m=0}^{\infty} |B_{2m+1}|^2 = 1. \end{aligned} \tag{9.6}$$

Из (9.5) и (9.1) следуют *рекуррентные формулы для отношений амплитуд гармоник* (см., например, [9]):

$$G_m^{(a,b)} = \frac{1}{(a_r - m^2)/q - G_{m+2}^{(a,b)}}; \tag{9.7}$$

$$G_{m+2}^{(a,b)} = (a_r - m^2)/q - 1/G_m^{(a,b)}, \tag{9.8}$$

где $G_m^{(a)} = A_m/A_{m-2}$; $G_m^{(b)} = B_m/B_{m-2}$ при $m \geqslant 3$, а при $m = 2, 3$

$$\begin{aligned} &G_2^{(a)} = a_{2n}/q; \quad G_4^{(a)} = (a_{2n} - 4)/q - 2/G_2^{(a)}; \quad G_3^{(a)} = (a_{2n+1} - 1)/q - 1;\\ &G_4^{(b)} = (b_{2n+2} - 4)/q; \quad G_3^{(b)} = \left(b_{2n+1}^{(b)} - 1\right)/q + 1. \end{aligned} \tag{9.9}$$

Собственные значения $a_r(q)$ удовлетворяют следующим уравнениям, содержащим сходящиеся непрерывные дроби:

$$\frac{a_{2n}}{q} = \cfrac{1}{V_2(a_{2n}) - \cfrac{1}{V_4(a_{2n}) - \cfrac{1}{V_6(a_{2n}) - \ldots}}}; \tag{9.10}$$

$$\frac{a_{2n+1} - 1}{q} = \cfrac{1}{V_3(a_{2n+1}) - \cfrac{1}{V_5(a_{2n+1}) - \ldots}} + 1; \tag{9.11}$$

$$\frac{b_{2n+2} - 4}{q} = \cfrac{1}{V_4(b_{2n+2}) - \cfrac{1}{V_6(b_{2n+2}) - \ldots}}; \tag{9.12}$$

$$\frac{b_{2n+1} - 1}{q} = \cfrac{1}{V_3(b_{2n+1}) - \cfrac{1}{V_5(b_{2n+1}) - \ldots}} - 1, \tag{9.13}$$

где $V_m(x) = (x - m^2)/q$, $n = 0, 1, 2, \ldots$.

Каждое из уравнений имеет бесконечное множество корней, соответствующих различным n. Запишем уравнения в виде

$$x = F_i(x), \quad i = 1, 2, 3, 4, \tag{9.14}$$

где F_i — правые части уравнений соответственно (9.10)—(9.13). Табулирование $F_i(x)$ можно производить, используя рекуррентные соотношения для остатков непрерывных дробей (ср. § 2.4). Рассмотрим, например, m-й остаток дроби в уравнении (9.10)

$$P_m(x) = \cfrac{1}{V_{2(m+1)}(x) - \cfrac{1}{V_{2(m+2)}(x) - \dots}}. \tag{9.15}$$

Видно, что имеет место следующая рекуррентная формула:

$$P_m(x) = \frac{1}{V_{2(m+1)}(x) - P_{m+1}(x)}, \quad m = 0, 1, 2, \dots . \tag{9.16}$$

Применяя (9.16) в направлении убывания m, получаем

$$F_1(a_{2n}) = P_0(a_{2n}). \tag{9.17}$$

Эта величина практически не зависит от начального элемента P_N, если $m = N$ достаточно велико, и представляет собой предел сходящейся непрерывной дроби. Вычислительная практика показывает, что здесь достаточно $N = 5$—10.

Для дробей в правых частях уравнений (9.11) — (9.13) получаем

$$F_2(a_{2n+1}) = 1 + Q_1(a_{2n+1});$$
$$F_3(b_{2n+2}) = P_1(b_{2n+2});$$
$$F_4(b_{2n+1}) = -1 + Q_1(b_{2n+1}), \tag{9.18}$$

где

$$Q_m(x) = \cfrac{1}{V_{2m+1}(x) - \cfrac{1}{V_{2m+3}(x) - \dots}}. \tag{9.19}$$

Численное решение непосредственно уравнений (9.10) — (9.13) встречает определенные трудности, особенно при $|q| \lesssim r+1$ (r — порядок функции Матье). В этом случае величины $V_r(a_r)$, входящие в соответствующий «этаж» непрерывных дробей, малы, что приводит к значительным погрешностям округления и связанной с этим неустойчивости итерационной процедуры решения уравнений. Модифицированные уравнения и детали расчетной схемы рассматриваются в § 9.2.

В области $|q| \ll r+1$ целесообразно применять *разложения собственных значений в степенные ряды*. При больших r и достаточно малых $|q|$ [9]

$$a_r \approx b_r \approx r^2 + \frac{q^2}{2(r^2-1)} + \frac{(5r^2+7)q^4}{3r(r^2-1)^2(r^2-4)} + \dots . \tag{9.20}$$

Эта формула пригодна практически начиная с $r = 6$. Для меньших r известны [5,9] следующие степенные ряды:

$$a_0(q) \approx -q^2/2 + 7q^4/128 - 29q^6/2304 + \dots ;$$
$$a_1(q) = b_1(-q) \approx 1 + q - q^2/8 - q^3/64 - q^4/1536 + \dots ;$$
$$b_2(q) \approx 4 - q^2/12 + 5q^4/13824 - \dots ;$$
$$a_2(q) \approx 4 + 5q^2/12 - 763q^4/13824 + \dots ;$$
$$a_3(q) = b_3(-q) \approx 9 + q^2/16 + q^3/64 + 13q^4/20480 - \dots ;$$

$$b_4(q) \approx 16 + q^2/30 - 317q^4/864000 + \dots ;$$
$$a_4(q) \approx 16 + q^2/30 + 433q^4/864000 - \dots ;$$
$$a_5(q) = b_5(-q) \approx 25 + q^2/48 + 11q^4/774144 + q^5/147456 + \dots . \tag{9.21}$$

Программы 9.4 — 9.6, реализующие приведенные разложения, работают намного быстрее, чем программы 9.1—9.3, основанные на решении уравнений (9.10)—(9.13), хотя и значительно уступают последним в универсальности. Получаемые из программы 9.4 значения a_r, b_r при больших r могут использоваться в качестве исходных при более точных расчетах по программам 9.1—9.3. Отметим, что пользователь при необходимости может составить значительно более короткие программы для отдельных величин из a_0, a_1, ..., b_5, применяя для этой цели соответствующие фрагменты программ 9.5, 9.6.

9.2. Вычисление собственных значений функций Матье

Как уже упоминалось, погрешности округления при получении элементов дробей, содержащих $V_r = (a_r - r^2)/q$, приводят к неустойчивости итерационной схемы. Целесообразно преобразовать уравнения (9.10)—(9.13) так, чтобы указанный элемент был вынесен из непрерывной дроби. После простых преобразований получаем

$$a_{2n} = (2n)^2 + q\left[\cfrac{1}{V_{2(n-1)} - \cfrac{1}{V_{2(n-2)} - \dots - \cfrac{1}{V_0 - a_{2n}/2q}}} + \cfrac{1}{V_{2(n+1)} - \cfrac{1}{V_{2(n+2)} - \dots}}\right]; \tag{9.22}$$

$$a_{2n+1},\ b_{2n+1} = (2n+1)^2 + q\left[\cfrac{1}{V_{2n-1} - \cfrac{1}{V_{2n-3} - \dots - \cfrac{1}{V_1 - \varepsilon}}} + \cfrac{1}{V_{2n+1} - \cfrac{1}{V_{2n+3} - \dots}}\right]; \tag{9.23}$$

$$b_{2n+2} = (2n+2)^2 + q\left[\cfrac{1}{V_{2(n-1)} - \cfrac{1}{V_{2(n-2)} - \dots - \cfrac{1}{V_4}}} + \cfrac{1}{V_{2(n+1)} - \cfrac{1}{V_{2(n+2)} - \dots}}\right]. \tag{9.24}$$

Здесь $\varepsilon = \pm 1$ для a_{2n+1} и b_{2n+1} соответственно, $n = 1, 2, \ldots$. Собственные значения a_0, a_1, b_1, b_2 определяются уравнениями (9.10)—(9.13).

Уравнения (9.22) — (9.24) также относятся к типу (9.14), хотя в правые части $F_i(x)$ теперь помимо бесконечных непрерывных дробей входят в качестве слагаемого и конечные дроби. Ясно, что для табулирования последних также применимы рекуррентные формулы типа (9.16), с тем отличием, что порядок этих дробей и значения их последнего элемента теперь фиксированы.

Численное решение уравнений (9.14) реализуется далее *методом итераций*. Простейший способ состоит в последовательной подстановке получающихся из уравнений значений x снова в правые части уравнений. На k-й итерации

$$x_{k+1} = F_i(x_k), \quad i = 1,\ 2,\ 3,\ 4. \tag{9.25}$$

Эта схема недостаточно устойчива при неизбежных отклонениях начальных значений x_0 от точного корня $\bar{x}$, даже если «в малом» итерационная процедура устойчива. Повышение устойчивости и одновременно скорости сходимости требует уменьшения приращений аргумента на соседних итерациях. В программах 9.1—9.3 применяется следующая схема:

$$x^{(k)} = F_i(x_k); \quad x_{k+1} = x_k + \left(x^{(k)} - x_k\right)/d. \tag{9.26}$$

В начале процедуры параметр d принимается равным 10—300, в зависимости от скорости изменения $F_i(x)$, т. е. от производной $dF_i(x)/dx$, которая существенно отличается для разных a_r. На каждой последующей итерации d уменьшается вдвое, если знак невязки $x^{(k)} - x_k$ совпадает со знаком невязки на предыдущей итерации. В противном случае d умножается на число 4. Указанная схема позволяет осуществить близкое к наискорейшему апериодическому стремление невязки к нулю. Отметим, что (9.26) сводится к (9.25) при $d = 1$. Данная схема все же требует значительных затрат машинного времени (10—30 мин на одно значение a_r при заданной погрешности $1 \cdot 10^{-6}$), что главным образом связано с громоздкостью F_i. Скорость счета существенно зависит от удачного выбора x_0, который должен быть возможно ближе к x. Напомним, что x_0 можно оценивать с помощью степенных рядов (при этом допустима погрешность до 10 %). Для этой же цели на рис. 9.1 приведены кривые $a_r(q)$ для первых шести функций Матье.

Программа 9.1. Собственные значения $a_{2n}(q)$ четных функций Матье периода π. Решение уравнений (9.22) методом итераций ((9.15) — (9.17), (9.26)).

6	/—/	F10^x	ПА	0	П5	6	Fe^x	П6	ИПД
Fx^2	П8	ИПС	ИПВ	÷	2	÷	П9	ИПД	Fx≠0
29	2	П7	÷	П0	ПП	74	БП	32	ИП9
ПП	90	0	П9	7	П0	2	/—/	П7	ПП
74	ИПС	—	ИП5	XY	П5	×	Fx<0	54	ИП6
4	×	БП	57	ИП6	2	÷	П6	ИП5	XY
÷	↑	ИПС	+	ПС	÷	Fx^2	F√	ИПА	—
Fx<0	09	ИПС	С/П	ИПС	ИПД	ИП0	ИП7	×	—
Fx^2	—	ИПВ	÷	ИП9	—	F1/x	П9	FL0	74
ИПВ	×	ИП8	+	П8	В/О				

Инструкция

1. Исходные данные: ($2n$ = РД, q = РВ) x_0 = РС.
2. Пуск: В/О С/П.
3. Результат: РХ = РС = $a_{2n}(q)$.
4. Регистры: рабочие РВ, РС, РД; оперативные Р0, Р5 — РА; свободные Р1 — Р4.

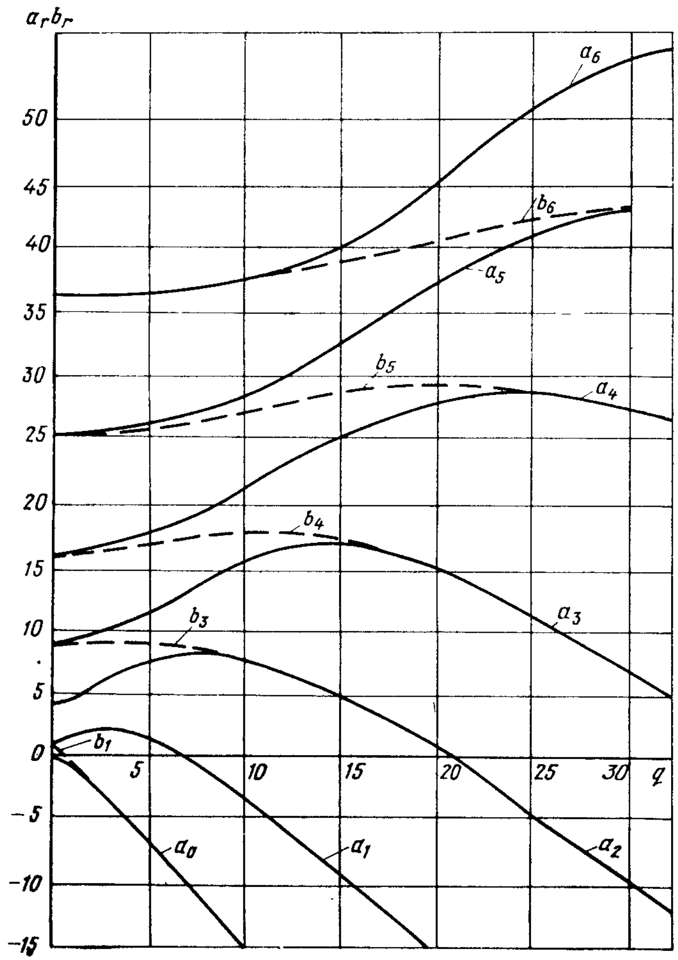

Рис. 9.1. Собственные значения функций Матье a_r, b_r, $r = 0, 1, 2, \ldots, 6$

5. Погрешность относительная меньше $2 \cdot 10^{-6}$, кроме окрестности нуля $a_{2n}(q)$, где $|a_{2n}(q)| \ll (2n+1)^2$. В этом случае абсолютная погрешность меньше $(2n+1)^2 \cdot 10^{-6}$.
6. Время счета 10—30 мин, в зависимости от скорости сходимости итераций.

Примеры

$a_2(25) = -3{,}5221657$ $(-3{,}52216473$ [9]), $x_0 = -3$, $t \approx 14$ мин;

$a_{10}(25) = 103{,}23017$ (103,230205 [9]), $x_0 = 100$, $t \approx 25$ мин.

Программа 9.2. Собственные значения $a_{2n+1}(q)$, $b_{2n+1}(q)$ четных и нечетных функций Матье периода 2π. Решение уравнений (9.23) методом итераций ((9.26), (9.18), (9.19)).

6	/—/	$F10^x$	ПА	0	П5	3	Fe^x	П6	ИПД
Fx^2	П8	ИПД	2	—	$Fx \geqslant 0$	28	1	+	П0
ИП4	П9	1	П7	ПП	74	БП	30	ИП4	ПП
92	0	П9	1	/—/	П7	1	4	П0	ПП
74	ИПС	—	ИП5	XY	П5	×	$Fx<0$	54	ИП6
4	×	БП	57	ИП6	2	÷	П6	ИП5	XY
÷	↑	ИПС	+	ПС	÷	Fx^2	$F\sqrt{\ }$	ИПА	—
$Fx<0$	09	ИПС	С/П	ИПС	ИПД	ИП0	ИП7	×	—
Fx^2	—	ИПВ	÷	ИП9	—	$F1/x$	П9	КИП0	FL0
74	F,	ИПВ	×	ИП8	+	П8	В/О		

Инструкция

1. Исходные данные: (q = РВ, $(2n+1)$ = РД, ε = Р4), x_0 = РС; $\varepsilon = \pm 1$ для a_{2n+1} и b_{2+1} соответственно. Выбор x_0 см. рис. 9.1 или (9.20).
2. Пуск: В/О С/П.
3. Результат: РХ = РС = a_{2n+1} (b_{2n+1}).
4. Регистры: рабочие Р4, РВ, РС, РД; оперативные Р0, Р5 — РА; свободные Р1 — Р3.
5. Погрешность относительная меньше $2 \cdot 10^{-6}$, кроме окрестности нулей a_{2n+1}, b_{2n+1}, где $|a_r| \ll r^2$. В этих случаях абсолютная погрешность меньше $(2n+1)^2 \cdot 10^{-6}$.
6. Время счета 10—30 мин, в зависимости от скорости сходимости итераций.

Примеры.

$a_1(20) = -14{,}491292$ $(-14{,}4913014$ [24]), $x_0 = -15$, $t \approx 10$ мин;

$b_3(1) = 9{,}047744$ $(9{,}0477394$ [24]), $x_0 = 9{,}5$, $t \approx 16$ мин;

$a_{15}(25) = 226{,}40081$ $(226{,}40072$ [9]), $x_0 = 225$, $t \approx 19$ мин.

Программа 9.3. Собственные значения $b_{2n+2}(q)$ нечетных функций Матье периода π. Решение уравнениий (9.24) методом итераций ((9.26), (9.18), (9.15)).

6	/—/	$F10^x$	ПА	0	П5	2	Fe^x	П6	ИПД
Fx^2	П8	ИПД	2	П7	÷	П0	КИП0	ИПД	2
—	$Fx \neq 0$	25	ПП	65	7	П0	2	/—/	П7
ПП	65	ИПС	—	ИП5	XY	П5	×	$Fx<0$	45
ИП6	4	×	БП	48	ИП6	2	÷	П6	ИП5
XY	÷	↑	ИПС	+	ПС	÷	Fx^2	$F\sqrt{\ }$	ИПА
—	$Fx<0$	09	ИПС	С/П	0	П9	ИПС	ИПД	ИП0
ИП7	×	—	Fx^2	—	ИПВ	÷	ИП9	—	$F1/x$
П9	FL0	67	ИПВ	×	ИП8	+	П8	В/О	

Инструкция

1. Исходные данные: (q = РВ, $(2n+2)$ = РД), x_0 = РС.
2. Пуск: В/О С/П.
3. Результат: РХ = РС = b_{2n+2}.
4. Регистры: рабочие РВ, РС, РД; оперативные Р0, Р5 — РА; свободные Р1 — Р4.

5. Погрешность относительная меньше $2 \cdot 10^{-6}$, кроме окрестности нулей b_{2n+2}, где $|b_{2n+2}| \ll (2n+2)^2$. В этом случае абсолютная погрешность меньше $(2n+2)^2 \cdot 10^{-6}$.
6. Время счета $t \approx 10$—30 мин, в зависимости от скорости сходимости итераций.

Примеры.

$b_2(25) = -21{,}314838$ $(-21{,}3148606$ [9]), $x_0 = -20$, $t \approx 11$ мин;

$b_{10}(10) = 100{,}50686$ $(100{,}50677$ [9]), $x_0 = 100$, $t \approx 12$ мин.

Программа 9.4. Собственные значения $a_r \approx b_r$ функций Матье при больших значениях порядка ($r \geqslant 6$). Разложение в ряд (9.20).

Fx^2	↑	↑	ИПД	Fx^2	1	—	ПС	5	×
1	2	+	×	1	6	÷	ИПС	Fx^2	÷
ИПС	3	—	÷	1	+	×	2	÷	ИПС
÷	ИПС	+	1	+	С/П				

Инструкция

1. Исходные данные: (r = РД), [q = РХ].
2. Пуск: В/О С/П.
3. Результат: РХ $\approx b_r \approx a_r$.
4. Регистры: рабочие РД; оперативные РС; свободные Р0 — РВ.
5. Погрешность относительная:

$q<$	$0{,}1\ r^2$	$0{,}3\ r^2$	$0{,}4\ r^2$
$\delta \leqslant$	$1 \cdot 10^{-7}$	$1 \cdot 10^{-5}$	$1 \cdot 10^{-3}$

6. Время счета $t \approx 15$ с.

Пример. $a_{15}(25) \approx b_{15}(25) = 226{,}40065$ $(226{,}40072$ [9]).

Программа 9.5. Собственные значения $a_0(q)$, $a_2(q)$, $b_2(q)$, $a_4(q)$, $a_6(q)$, $b_6(q)$ при малых $|q|$. Разложения в ряды (9.21).

Fx^2	↑	↑	↑	2	9	×	1	8	÷
7	—	×	6	4	÷	1	+	2	÷
/—/	×	П0	F,	↑	1	,	5	1	÷
/—/	5	+	1	2	÷	×	4	+	П1
F,	↑	5	×	1	1	5	2	÷	/—/
1	+	1	2	÷	×	/—/	4	+	П2
F,	↑	6	6	,	5	1	3	÷	1
+	3	0	÷	×	1	6	+	П4	F,
↑	3	3	5	4	÷	1	+	7	0
÷	×	3	6	+	П6	С/П			

Инструкция

1. Исходные данные: [q = РХ].
2. Пуск: В/О С/П.

3 Результат: $P0=a_0$, $P1=a_2$, $P2=b_2$, $P4=a_4$, $PX=P6=a_6\approx b_6$.

4. Регистры: рабочне P0, P1, P2, P4, P6; оперативные — ; свободные P3, P5, P7 — РД.

5. Погрешность относительная меньше:

a_0	$1\cdot 10^{-4}$ при $\lvert q\rvert\leqslant 0{,}5$	$1\cdot 10^{-2}$ при $\lvert q\rvert\leqslant 1$
a_2	$5\cdot 10^{-5}$ при $\lvert q\rvert\leqslant 0{,}5$	$5\cdot 10^{-3}$ при $\lvert q\rvert\leqslant 1$
b_2	$1\cdot 10^{-6}$ при $\lvert q\rvert\leqslant 1$	$1\cdot 10^{-5}$ при $\lvert q\rvert\leqslant 2$
a_4	$1\cdot 10^{-7}$ при $\lvert q\rvert\leqslant 1$, $1\cdot 10^{-2}$ при $\lvert q\rvert\leqslant 4$	$1\cdot 10^{-5}$ при $\lvert q\rvert\leqslant 2$
a_6, b_6	$1\cdot 10^{-7}$ при $\lvert q\rvert\leqslant 2$, $5\cdot 10^{-4}$ при $\lvert q\rvert\leqslant 8$	$1\cdot 10^{-5}$ при $\lvert q\rvert\leqslant 4$

6. Время счета $t\approx 30$ с.

Примеры.

$a_0(1)=-0{,}4578993$ $(-0{,}4551386$ [24]),

$a_2(1)=4{,}361479$ (4,37113010 [24]), $b_2(1)=3{,}9170284$ (3,9170248 [24]);

$a_4(1)=16{,}033835$ (16,033832 [24]), $a_6(1)=b_6(1)=36{,}01429$ (36,01429 [24]).

Программа 9.6. Собственные значения $a_1(q)$, $b_1(q)$, $a_3(q)$, $b_3(q)$, $b_4(q)$, $a_5(q)$, $b_5(q)$. Разложение в ряд (9.21).

/—/	↑	↑	↑	2	4	÷	1	+	8
÷	×	/—/	1	—	8	÷	×	1	+
×	1	+	П1	F,	↑	1	3	×	3
2	0	÷	1	+	4	÷	×	1	+
×	×	1	6	÷	9	+	П3	F,	↑
×	9	0	,	8	5	2	÷	/—/	1
+	×	×	3	0	÷	1	6	+	П4
F,	↑	1	1	×	×	1	6	1	2
8	÷	1	+	×	×	4	8	÷	2
5	+	П5	С/П						

Инструкция

1. Исходные даниые: $[q = PX]$.

2. Пуск: для b_1, b_3, b_4, a_5, b_5 В/О С/П; для a_1, a_3 БП 01 С/П.

3. Результат: $P1=a_1$, b_1, $P3=a_3$, b_3, $P4=b_4$, $PX=P5=a_5\approx b_5$.

4. Регистры: рабочие P1, P3, P4, P5; оперативные — ; свободные P0, P2, P4, P6 — РД.

5. Погрешиость относительиая меньше:

a_1, b_1	$5\cdot 10^{-5}$ при $\lvert q\rvert\leqslant 0{,}5$	$5\cdot 10^{-4}$ при $\lvert q\rvert\leqslant 1$
a_3, b_3	$5\cdot 10^{-5}$ при $\lvert q\rvert\leqslant 1$	$1\cdot 10^{-3}$ при $\lvert q\rvert\leqslant 2$
b_4	$3\cdot 10^{-7}$ при $\lvert q\rvert\leqslant 1$, $1\cdot 10^{-3}$ при $\lvert q\rvert\leqslant 4$	$1\cdot 10^{-5}$ при $\lvert q\rvert\leqslant 2$
a_5, b_5	$3\cdot 10^{-7}$ при $\lvert q\rvert\leqslant 1$, $1\cdot 10^{-3}$ при $\lvert q\rvert\leqslant 5$	$1\cdot 10^{-5}$ при $\lvert q\rvert\leqslant 2$

6. Время счета $t\approx 30$ с.

Примеры.

$a_1(1)=1{,}858724$ (1,8591081 [24]), $b_1(1)=-0{,}110026$ $(-0{,}1102488$ [24]);

$a_3(1)=9{,}0787598$ (9,0783688 [24]), $b_3(1)=9{,}0475098$ (9,0477393 [24]);

$b_4(5)=16{,}604023$ (16,6482199 [24]);

$a_5(5)=25{,}529714$ (25,549972 [9]), $b_5(5)=25{,}529714$ (25,5108 [9]).

9.3. Разложение функций Матье в тригонометрические ряды

В предлагаемых далее программах вычисляются *амплитуды первых 18—20 гармоник рядов Фурье* (9.5) по рекуррентным формулам (9.7), (9.8). Сначала находятся ненормированные величины при единичной амплитуде первого члена соответствующего ряда (одна из величин A_0, A_1, B_1, B_2. Нормировка производится делением всех вычисленных амплитуд на норму N, где N^2 — соответствующая сумма в левых частях равенств (9.6). Точность этой процедуры достаточна, когда квадраты амплитуд неучитываемых гармоник пренебрежимо малы.

Разностная схема, связанная с применением рекуррентных формул, устойчива до тех пор, пока получаемые из них последовательные амплитуды возрастают по модулю при изменении m в соответствующую сторону (для (9.7) должно уменьшаться, а для (9.8) — увеличиваться *). Очевидно, что устойчивость (9.8) должна иметь место при работе с функциями Матье больших порядков $n\approx 10$, у которых максимальны достаточно высокие гармоники, а устойчивость (9.7)— для функций низших порядков $n\approx 1$. Неустойчивость при превышении некоторого порогового числа шагов приводит к возрастанию модулей амплитуд тех гармоник, которые должны были бы стремиться к нулю. Это может привести к значительным погрешностям вычисленных значений не только «неправильно» растущих амплитуд, но через норму N всех остальных амплитуд, хотя отношения последних не зависят от неустойчивости. Отметим, что этот вычислнтельный эффект сразу заметен по расчетным данным, что позволяет, повторив расчет с меньшим числом гармоник, получить скорректированные значения устойчивых амплитуд. Эффективный способ исключения неустойчивости, не связанный с сокращением числа учитываемых членов ряда Фурье, состоит в применении альтернативных рекуррентных формул (если неустойчивость возникает при расчете по формуле (9.7), то применяется (9.8), и наоборот).

Ниже приводятся программы гармонического анализа обоих типов. Расчеты по формуле (9.7) должны начинаться со стороны больших $m=N\gg n$. В этом случае можно положить $G_{N+2}=0$. Указанное приближение ввиду устойчивости рекуррентной схемы (очевидно, что при достаточно больших N амплитуды гармоник будут нарастать с уменьшением m) практически не сказывается на результатах вычислений, приводя лишь к малой погрешности амплитуды N-й — самой высокой из учитываемых гармоник (ср. пример к программе 9.8). Действительно, поскольку амплитуды при больших m убывают с ростом m, то $G_{N+2}<<1$, тогда как второе слагаемое в знаменателе (9.7) $\mid(a_r-N^2)\mid/q\sim N^2/q\gg 1$.

Программа 9.7. Коэффициенты A_{2m} ряда Фурье функций $ce_{2n}(z, q)$ (9.8), (9.9), (9.6).

* Фактически (9.7) и (9.8) — это одна рекуррентная формула, которая применяется в прямом или обратном направлениях.

7	П0	1	2	П2	ИП4	ИП3	÷	ПД	2
÷	/—/	F1/x	ИП4	4	—	ИП3	÷	+	ПС
П1	ИП4	9	ИП0	—	2	×	Fx²	—	ИП3
÷	ИП1	F1/x	—	КП2	FL0	20	8	П0	1
4	П1	2	КИП1	КИП1	×	ИП1	1	+	П1
F,	КП1	Fx²	+	ИП1	1	+	П1	F,	FL0
43	ИПД	Fx²	+	F√‾	П2	9	П0	1	4
П1	КИП1	ИП2	÷	ИП1	1	+	П1	F,	КП1
FL0	71	ИП2	F1/x	С/П					

Инструкция

1. Исходные данные: (q = Р3, a_{2n} = Р4).

2. Пуск: В/О С/П.

3. Результат: РХ = A_0, РД = A_2, РС = A_4, ..., Р5 = A_{18}.

4. Регистры: рабочие Р3 — РД; оперативные Р0, Р1, Р2; свободных нет.

5. Погрешность относительная меньше $1 \cdot 10^{-6}$ при подстановке точного значения a_{2n} и в области устойчивости рекуррентной формулы (9.8) ($m \leqslant N$, где A_N — максимальная по модулю амплитуда). При сильном развитии неустойчивости (наличие при $m > N$ растущих по модулю с увеличением m амплитуд) следует перейти к программе 9.8 или исключить гармоники с нарастающими после максимума амплитудами (см. пример). Пусть число таких гармоник равно k. Тогда числа 7 и 9 в программе (адреса 00 и 22) заменяются соответственно $7 - k$ и $9 - k$. Одновременно при вводе исходных данных заносятся нули в k регистров памяти: Р5, Р6, ..., Р $(4 + k)$.

6. Время счета $t \approx 2$ мин.

Пример. Коэффициенты A_{2m} для функции ce_0 (z, 25). Собственное значение a_0 (25) = — 40,256780. Ниже в левом столбце помещены вычисленные значения коэффициентов при максимальном числе учитываемых гармоник, в среднем — результат после исключения гармоник A_{16}, A_{18}, которые нарастают вследствие неустойчивости, в правом столбце — табличные значения из [9]:

A_0	0,42973778	0,42974103	0,429741038
A_2	—0,69199438	—0,69199961	—0,69199961
A_4	0,36554215	0,36554491	0,36554489
A_6	—0,13057461	—0,1305756	—0,130575523
A_8	$3,2745855 \cdot 10^{-2}$	$3,2746102 \cdot 10^{-2}$	$3,2745863 \cdot 10^{-2}$
A_{10}	$-5,9844819 \cdot 10^{-3}$	$-5,9845272 \cdot 10^{-3}$	$-5,983606 \cdot 10^{-3}$
A_{12}	$8,2871128 \cdot 10^{-4}$	$8,2871755 \cdot 10^{-4}$	$8,23792 \cdot 10^{-4}$
A_{14}	$-1,2334522 \cdot 10^{-4}$	$-1,2334615 \cdot 10^{-4}$	$-8,7961 \cdot 10^{-5}$
A_{16}	$3,3693451 \cdot 10^{-4}$	—	$7,466 \cdot 10^{-6}$
A_{18}	$-3,86942 \cdot 10^{-3}$	—	$-5,14 \cdot 10^{-7}$

Программа 9.8. Коэффициенты A_{2m} функций ce_{2n} (z, q) (9.7), (9.6).

8	П0	4	П4	ИП2	ИП3	÷	ПД	0	П1
ИП2	ИП0	1	+	2	×	Fx²	—	ИП3	÷
ИП1	—	F1/x	КП4	FL0	09	8	П0	1	4
П1	2	КИП1	КИП1	×	ИП1	1	+	П1	F,
КП1	Fx²	+	ИП1	1	+	П1	F,	FL0	32
ИПД	Fx²	+	F√‾	П4	9	П0	1	4	П1
КИП1	ИП4	÷	ИП1	1	+	П1	F,	КП1	FL0
60	ИП4	F1/x	С/П						

Инструкция

1. Исходные данные: (q = Р3, a_{2n} = Р2).
2. Пуск: В/О С/П.
3. Результат: РХ = A_0, РД = A_2, РС = A_4, ..., Р5 = A_{18}.
4. Регистры: рабочие Р2, Р3, Р5 — РД; оперативные Р0, Р1, Р4; свободных нет.
5. Погрешность относительная меньше $1 \cdot 10^{-6}$ при использовании точного значения a_{2n} и в области устойчивости рекуррентной формулы (9.7) ($m > N$, где A_N — максимальная по модулю амплитуда). При сильном развитии неустойчивости (появление при $m < N$ растущих по модулю с уменьшением m коэффициентов A_m) перейти к программе 9.7.
6. Время счета $t \approx 2$ мин.

Пример. Коэффициенты A_{2m} для ce_0 (z, 25) — пример из предыдущей программы.

$A_0 = 0,42974105$; $A_2 = -0,69199964$; $A_4 = 0,3655449$; $A_6 = -0,13057552$; $A_8 = 3,2745663 \cdot 10^{-2}$; $A_{10} = -5,9836061 \cdot 10^{-3}$; $A_{12} = 8,23792 \cdot 10^{-4}$; $A_{14} = -8,7961225 \cdot 10^{-5}$; $A_{16} = 7,46595588 \cdot 10^{-6}$; $A_{18} = -5,1241042 \cdot 10^{-7}$.

Как видно, здесь амплитуды гармоник возрастают с уменьшением m, кроме A_0, что и обеспечивает высокую точность при использовании рекуррентной формулы (9.7) (ср. табличные данные в примере к программе 9.7). Исключение составляет лишь A_{18}, которая является начальной для данной схемы, и при ее вычислении допускается систематическая погрешность (см. выше).

Программа 9.9. Коэффициенты A_{2m+1} (B_{2m+1}) функций ce_{2n+1} (z, q) и se_{2n+1} (z, q) (9.8), (9.9), (9.6).

8	П0	1	3	П2	ИП4	1	—	ИП3	÷
1	—	ПД	П1	ИП4	9	ИП0	—	2	×
1	+	Fx²	—	ИП3	÷	ИП1	F1/x	—	КП2
FL0	13	8	П0	1	4	П1	1	КИП1	КИП1
×	ИП1	1	+	П1	F,	КП1	Fx²	+	ИП1
1	+	П1	F,	FL0	38	ИПД	Fx²	+	F√‾
П2	9	П0	1	4	П1	КИП1	ИП2	÷	ИП1
1	+	П1	F,	КП1	FL0	66	ИП2	F1/x	С/П

Данная программа предназначена для вычисления A_{2m+1}. Переход к B_{2m+1} осуществляется заменой команды — (адрес 11) на +.

Инструкция

1. Исходные данные: для A_{2m+1} (q = Р3, a_{2n+1} = Р4), для B_{2m+1} (q = Р3, b_{2n+1} = Р4).

2. Пуск: В/О С/П.

3. Результат: РХ = A_1 (B_1), РД = A_3 (B_3), РС = A_5 (B_5), ..., Р5 = A_{19} (B_{19}).

4. Регистры: рабочие Р3 — РД; оперативные Р0 — Р2; свободных нет.

5. Погрешность относительная меньше $1 \cdot 10^{-6}$ при использовании точных значений a_{2n+1} (b_{2n+1}) и в области устойчивости рекуррентной формулы (9.8) ($m < N$, где A_N (или B_N) — максимальные по модулю амплитуды). При сильном развитии неустойчивости (наличие растущих по модулю с увеличением m амплитуд при $m > N$) перейти к программе 9.10 или исключить гармоники с нарастающими после максимума амплитудами. Выполняется это так же, как и в программе 9.7 (п. 5 инструкции), уменьшаются числа по адресам 00 и 15.

6. Время счета $t \approx 2$ мин.

Пример. Коэффициенты B_{2m+1} для функции se_{15} (z, 5). Собственное значение b_{15} (5) = 225,05581.

$B_1 = 5,3432261 \cdot 10^{-11}$ (0); $B_7 = 4,2274757 \cdot 10^{-6}$ ($4,227 \cdot 10^{-6}$);

$B_{11} = 4,2813929 \cdot 10^{-3}$ ($4,281392 \cdot 10^{-3}$); $B_{13} = 8,8952014 \cdot 10^{-2}$ ($8,8952014 \cdot 10^{-2}$);

$B_{15} = 0,99297408$ (0,99297409); $B_{17} = -7,7868437 \cdot 10^{-2}$ ($-7,7867942 \cdot 10^{-2}$);

$B_{19} = 2,8728002 \cdot 10^{-3}$ ($2,866409 \cdot 10^{-3}$).

В скобках — значения B_{2m+1} из [9]. Как видно, неустойчивость рекуррентной схемы возникает после $2m+1 = 15$.

Программа 9.10. Коэффициенты A_{2m+1} (B_{2m+1}) функций ce_{2n+1} (z, q) и se_{2n+1} (z, q) (9.7), (9.6).

8	П0	4	П4	ИП2	1	—	ИП3	÷	1
—	ПД	0	П1	ИП2	ИП0	1	+	2	×
1	+	Fx²	—	ИП3	÷	ИП1	—	F1/x	КП4
FL0	13	8	П0	1	4	П1	1	КИП1	КИП1
×	ИП1	1	+	П1	F,	КП1	Fx²	+	ИП1
1	+	П1	F,	FL0	38	ИПД	Fx²	+	F√
П4	9	П0	1	4	П1	КИП1	ИП4	÷	ИП1
1	+	П1	F,	КП1	FL0	66	ИП4	F1/x	С/П

Данная программа предназначена для A_{2m+1}. Переход к B_{2m+1} осуществляется заменой команды — (адрес 10) на команду + .

Инструкция

1. Исходные данные: для A_{2m+1} (q = Р3, a_{2n+1} = Р2); для B_{2m+1} (q = Р3, b_{2n+1} = Р2).

2. Пуск: В/О С/П.

3. Результат: РХ = A_1 (B_1), РД = A_3 (B_3), РС = A_5 (B_5), ..., Р5 = A_{19} (B_{19})

4. Регистры: рабочие Р2, Р3, Р5 — РД; оперативные Р0, Р1, Р4; свободных нет.

5. Погрешность относительная меньше $1 \cdot 10^{-6}$ при использовании точных значений a_{2n+1} (q) и b_{2n+1} (q) и в области устойчивости рекуррентной формулы (9.7) ($m > N$, где A_N (или B_N) — максимальные по модулю амплитуды). При наличии растущих по модулю с уменьшением m амплитуд для $m < N$ перейти к программе 9.9.

6. Время счета $t \approx 2$ мин.

Пример. Вычисление коэффициентов A_{2m+1} функции ce_1 (z, 25), a_1 (25) = = − 21,314900:

$A_1 = 0,39125227$ (0,391252265); $A_3 = -0,74048248$ (−0,740482467);

$A_{17} = 1,0052574 \cdot 10^{-5}$ ($1,0053 \cdot 10^{-5}$); $A_{19} = -6,5734912 \cdot 10^{-7}$ ($-6,60 \cdot 10^{-7}$)

В скобках указаны табличные данные из [9].

В этом примере A_{2m+1} возрастают с уменьшением m практически при всех m, так как функция невысокого порядка и максимальной является 3-я гармоника. Поэтому при использовании рекуррентной формулы (9.7) неустойчивость не наблюдается, и совпадение вычисленных и табличных данных хорошее.

Программа 9.11. Коэффициенты B_{2m+2} функций se_{2n+1} (z, q) (9.8), (9.9), (9.6).

8	П0	1	3	П2	ИП4	4	—	ИП3	÷
ПД	П1	ИП4	1	0	ИП0	—	2	×	Fx²
—	ИП3	÷	ИП1	F1/x	—	КП2	FL0	11	8
П0	1	4	П1	1	КИП1	КИП1	×	ИП1	1
+	П1	F,	КП1	Fx²	+	ИП1	1	+	П1
F,	FL0	35	ИПД	Fx²	+	F√	П2	9	П0
1	4	П1	КИП1	ИП2	÷	ИП1	1	+	П1
F,	КП1	FL0	63	ИП2	F1/x	С/П			

Инструкция

1. Исходные данные: (q = Р3, b_{2n+2} = Р4).
2. Пуск: В/О С/П.
3. Результат: РХ = B_2, РД = B_4, РС = B_6, ..., Р5 = B_{20}.
4. Регистры: рабочие Р3 — РД; оперативные Р0 — Р2; свободных регистров нет.
5. Погрешность относительная меньше $1 \cdot 10^{-6}$ при использовании точных значений b_{2n+2} и при работе в области устойчивости рекуррентной формулы (9.8) ($m < n$, где B_N — максимальная по модулю амплитуда). Возрастание в области $m > N$ по модулю амплитуд с увеличением m требует перейти к программе 9.12 или исключить возрастающие амплитуды (ср. пример к программе 9.7). Пусть число таких B_{2m+2} равно k. Тогда числа 8 и 10 в программе (адреса соответственно 00 и 13,14) заменяются соответственно 8 — k и 10 — k, а также заносятся нули в те k регистров памяти, в которых содержатся исключаемые B_{2m+2}.
6. Время счета $t \approx 2$ мин.

Пример. Коэффициенты B_{2m+2} функции se_{10} (z, 25), b_{10} (25) = 103,22568.

$B_2 = 1,8003595 \cdot 10^{-2}$ ($1,8003596 \cdot 10^{-2}$); $B_4 = 7,1456759 \cdot 10^{-2}$ ($7,1456752 \cdot 10^{-2}$)

$B_{10} = 0,63250872$ (0,63250875); $B_{18} = 2,5236471 \cdot 10^{-3}$ ($2,522676 \cdot 10^{-3}$);

$B_{20} = -2,2210567 \cdot 10^{-4}$ ($-2,13694 \cdot 10^{-4}$).

В скобках табличные данные из [9].

Программа 9.12. Коэффициенты B_{2m+2} функций $\mathrm{se}_{2n+2}(z, q)$ (9.7), (9.6).

8	П0	4	П4	ИП2	4	—	ИП3	÷	ПД
0	П1	ИП2	ИП0	2	+	2	×	Fx^2	—
ИП3	÷	ИП1	—	F1/x	КП4	FL0	11	8	П0
1	4	П1	1	КИП1	КИП1	×	ИП1	1	+
П1	F,	КП1	Fx^2	+	ИП1	1	+	П1	F,
FL0	34	ИПД	Fx^2	+	$F\sqrt{\ }$	П4	9	П0	1
4	П1	КИП1	ИП4	÷	ИП1	1	+	П1	F,
КП1	FL0	62	ИП4	F1/x	С/П				

Инструкция

1. Исходные данные: ($q =$ Р3, $b_{2n+2} =$ Р2).
2. Пуск: В/О С/П.
3. Результат: РХ $= B_2$, РД $= B_4$, РС $= B_6$, ..., Р5 $= B_{20}$.
4. Регистры: рабочие Р2, Р3, Р5 — РД; оперативые Р0, Р1, Р4; свободных нет.
5. Погрешность относительная меньше $1 \cdot 10^{-6}$ при использовании точного значения b_{2n+2} и при работе в области устойчивости рекуррентной формулы (9.7) ($m > N$, где B_N — максимальная по модулю амплитуда). При сильном развитии неустойчивости (появление при $m < N$ растущих по модулю с уменьшением m коэффициентов B_{2m+2}) перейти к программе 9.7.
6. Время счета $t \approx 2$ мин.

Пример. Коэффициенты B_{2m+2} функции $\mathrm{se}_2(z, 5)$, $b_2(5) = 2{,}0994605$. Ниже приводятся значения части вычисленных коэффициентов.

$B_2 = 0{,}93342948$ $(0{,}93342944)$; $B_4 = -0{,}35480392$ $(-0{,}3548039)$;

$B_{10} = 2{,}1979641 \cdot 10^{-4}$ $(2{,}19797 \cdot 10^{-4})$; $B_{16} = -3{,}9396029 \cdot 10^{-9}$ $(-4 \cdot 10^{-9})$;

$B_{20} = -7{,}6909674 \cdot 10^{-13}$.

В скобках — табличные данные из [9].

Указатель программ

Номер программы	Собственные значения функций Матье	Метод	Число шагов	Число регистров памяти	Примечание
9.1	$a_{2n}(q)$	Итерации	96	10	Четные функции периода π
9.2	$a_{2n+1}(q)$, $b_{2n+1}(q)$	»	98	11	Четные и нечетные функции периода 2π
9.3	$b_{2n+2}(q)$	»	89	10	Нечетные функции периода π
9.4	$a_r(q) \approx b_r(q)$	Разложение в ряд	36	2	Большие значения порядка $r \geqslant 6$
9.5	$a_0(q)$, $a_2(q)$, $b_2(q)$ $a_4(q)$, $a_6(q)$, $b_6(q)$	То же	97	5	Малые q

Номера программы	Собственные значения функций Матье	Метод	Число шагов	Число регистров памяти	Примечание
9.6	$a_1(q)$, $b_1(q)$, $a_3(q)$, $b_3(q)$, $b_4(q)$, $a_5(q)$, $b_5(q)$	Разложение в ряд	94	4	Малые q
9.7	A_{2m}	Рекуррентная формула (9.8)	85	14	Четные функции периода π
9.8	A_{2m}	Рекуррентная формула (9.7)	74	14	То же
9.9	A_{2m+1}, B_{2m+1}	Рекуррентная формула (9.8)	80	14	Четные и нечетные функции периода 2π
9.10	A_{2m+1}, B_{2m+1}	Рекуррентная формула (9.7)	80	14	То же
9.11	B_{2m+2}	Рекуррентная формула (9.8)	77	14	Нечетные функции периода π
9.12	B_{2m+2}	Рекуррентная формула (9.7)	76	14	То же

Глава 10

Вычисление определенных интегралов

10.1. Вводные замечания

Использование того или иного алгоритма вычисления интегралов

$$F = \int_a^b f(x)\,dx \tag{10.1}$$

диктуется стремлением достичь наивысшую скорость счета при заданной точности, что равносильно обеспечению максимальной точности с заданным числом интервалов, на которые делится промежуток интегрирования. Эта проблема, как известно, не имеет однозначного решения, и здесь многое зависит от поведения подынтегральной функции. В частности, для $f(x)$, имеющих разрывную первую производную, даже простейший метод трапеций может оказаться более производительным, чем метод Гаусса [22]. Немаловажное значение имеет также способ оценки точности в рамках данного алгоритма и уточнения результата.

При выборе алгоритма и построении программы нужно принимать во внимание и следующее:

число программных операторов и свободных регистров памяти, которое можно использовать в подпрограмме $f(x)$;

удобство работы с программой (простота ввода исходных данных и вывода результатов).

Для ПМК наибольшее значение имеет первое, с которым вообще связана возможность постановки соответствующей задачи интегрирования при достаточно сложной подынтегральной функции. В таких случаях использование менее быстрых, но более простых алгоритмов может быть выходом из положения.

Число шагов (команд), которое отводится на программирование (N), можно увеличить, исключив из программы расчет $f(a)$ или $f(b)$ или даже обеих этих величин, которые входят в качестве слагаемых в квадратурные формулы трапеций и парабол. Они могут быть вычислены отдельно и введены в программу в качестве исходных данных. Подобный прием целесообразен, когда граничные значения $f(x)$ вычисляются достаточно просто. Иногда на одном или обоих концах $x=a$, $x=b$ функция $f(x)$ имеет устранимые особенности и соответствующие значения $f(a)$, $f(b)$ находятся предельным переходом. Тогда отдельный ввод $f(a)$ и $f(b)$ практически необходим. В последнем случае преимущество имеют формулы открытого типа, для которых не требуется вычисление $f(a)$, $f(b)$. К ним принадлежат, в частности, формула прямоугольников (имеется в виду вариант, использующий срединные ординаты элементарных прямоугольников), формулы Гаусса и Чебышева. При вычислении несобственных интегралов от неограниченных функций с алгебраической особенностью и интегралов в смысле главного значения предпочтительны квадратурные формулы замкнутого типа (§ 10.3).

Если функция $f(x)$ сложна, то желательно сначала составить для нее подпрограмму и после этого подобрать подходящий вариант основной программы. В комментариях предполагается, что основная программа набрана и остается ввести подпрограмму $f(x)$ и исходные данные. В инструкциях в п. 1 «Подпрограмма $f(x)$» помещается следующая информация:

адреса первой и последней команд подпрограммы (при максимальной длине $f(x)$), максимальное число команд в подпрограмме n_{max};

регистры памяти, отводимые на подпрограмму; отдельно указываются свободные регистры, которые можно занимать без ограничений, и оперативные регистры (если они имеются), которые хотя и используются в основной программе но могут заполняться в подпрограмме на одном шаге интегрирования для хранения промежуточных результатов;

аргумент и результат подпрограммы: регистры, в которые к началу подпрограммы занесена независимая переменная (в общем комплексная) и регистры для вычисленного значения подынтегральной функции.

В отличие от предыдущих глав значения погрешностей оцениваются с меньшей определенностью. Информация, даваемая остаточными членами квадратурных формул, должна использоваться с осторожностью, учитывая, что они применимы лишь к гладким функциям, имеющим достаточное число непрерывных производных. Распространенным способом оценки погрешностей и уточнения результатов является последовательное кратное увеличение (обычно удвоение) числа шагов интегрирования до тех пор, пока разность между вычисленными значениями интеграла на двух соседних итерациях не станет по порядку величины близкой к заданной погрешности (обычно используется относительная погрешность ε). В § 10.1, 10.2 приведены программы, в которые включен этот процесс. Следует, однако, иметь в виду, что при чрезмерном уменьшении задаваемой погрешности такой способ может и не привести к желаемому результату; с уменьшением шага интегрирования растут погрешности округления [23]. Кроме того, и время счета может оказаться слишком большим.

В помещенном ниже указателе в графе «Порядок погрешности» фигурируют степени p в факторе h^p, входящем в остаточные члены квадратурных формул (для метода Чебышева p ориентировочно равно $n+1$, где n — число узлов). В графе «Коррекция точности» указываются задаваемые в программе величины (N или ε), изменение которых позволяет уточнить результат. В графах «Число шагов» (длина подпрограммы) и «Число регистров памяти» даются соответственно числа шагов и свободных регистров памяти, которые могут использоваться в подпрограмме подынтегральной функции.

10.2. Интегрирование по формулам трапеций, прямоугольников и парабол (формула Симпсона) при заданном числе шагов или заданной точности

Формула трапеций:

$$F=\int_a^b f(x)\,dx=\frac{h}{2}\{f(a)+2f(a+h)+2f(a+2h)+\ldots$$
$$\ldots+2f[a+(N-1)h]+f(b)\}-\frac{(b-a)h^2}{12}f''(\xi),\quad a\leqslant\xi\leqslant b, \tag{10.2}$$

где шаг интегрирования $h=(b-a)/N$, N — число шагов.

Формула прямоугольников для центрированной схемы:

$$F=\int_a^b f(x)\,dx=h\left\{f\left(a+\frac{h}{2}\right)+f\left(a+\frac{3h}{2}\right)+\ldots\right.$$
$$\left.\ldots+f\left[a+\frac{(2N-1)h}{2}\right]\right\}+\frac{(b-a)h^2}{24}f''(\xi),\quad a<\xi<b, \tag{10.3}$$

где $h=(b-a)/N$.

Приведенный выше вариант формулы прямоугольников несколько превосходит по точности формулу трапеций и в отличие от последней принадлежит к открытому типу, т. е. не требует вычисления $f(x)$ в концевых точках.

Формула парабол (Симпсона):

$$F=\int_a^b f(x)\,dx=\frac{h}{3}\{f(a)+4f(a+h)+2f(a+2h)+4f(a+3h)+\ldots$$
$$\ldots+4f[a+(2N-1)h]+f(b)\}-\frac{(b-a)h^4}{180}f^{(4)}(\xi),\quad a\leqslant\xi\leqslant b, \tag{10.4}$$

где $h=(b-a)/2N$. Формула (10.4) имеет четвертый порядок точности относительно h, тогда как (10.2) и (10.3) — только второй. Отметим, что во всех указанных случаях подынтегральная функция при одинаковом шаге h должна вычисляться практически одно и то же число раз ($\sim(b-a)/h$). Поэтому формула Симпсона при достижении одинаковой точности дает, как правило, существенный выигрыш по времени счета по сравнению с (10.2), (10.3). Ситуация может быть иной лишь для негладких функций или для функций, имеющих большую величину четвертой производной (см. примеры к программе 10.5).

Далее для всех трех формул приводятся программы, использующие заданное число шагов интегрирования. Даются также программы численного интегрирования с заданной относительной погрешностью. Программы основаны на последовательном удвоении или утроении (для метода прямоугольников) числа шагов и сравнении относительного изменения вычисленных значений интегралов на соседних итерациях с заданной погрешностью. Отметим, что в используемом варианте формулы прямоугольников дробление шагов приводит к новым узлам интегрирования, не совпадающим со старыми, и каждый раз расчет должен производиться по полному числу новых узлов.

В формулах Симпсона и трапеций при удвоении числа шагов половина узлов оказывается на прежнем месте, и, следовательно, для них уже вычислены значения функций на предыдущей итерации. Это позволяет, сохраняя в памяти соот-

8 Зак. 871

ветствующие суммы, существенно сократить объем вычислений при незначительном увеличении длины программы (см. программы 10.2, 10.8).

Программа 10.1. Вычисление интеграла $F = \int_a^b f(x)\,dx$ по формуле трапеций (10.2) при заданном числе шагов N.

ПА	—	ИП0	÷	ПД	ПП	28	4	÷	ПС
ПП	21	FL0	10	2	÷	ИПС	+	ИПД	×
С/П	ИПС	+	ПС	ИПА	ИПД	+	ПА	ИПА	..
...	...	...	...	...	В/О				

Инструкция

1. Подпрограмма $f(x)$:
   адрес первой команды 29, последней — 97 (при максимальном числе команд $n_{max} = 69$), в конце подпрограммы В/О.
   регистры свободные: Р1 — Р9, РВ;
   аргумент x — в регистрах РА, РХ, результат: $РХ = f(x)$.

Необходимые данные для подпрограммы $f(x)$ предполагаются введенными перед п. 2.

2. Исходные данные: $N = $ Р0, [b = РY, a = РХ].
3. Пуск: В/О С/П.
4. Результат: РХ = F.

Примеры.

$$F = \int_0^2 10x^9\,dx = \begin{cases} 1477{,}2266, & N = 4, \quad t = 0{,}5 \text{ мин}, \\ 1031{,}4931, & N = 32, \quad t = 3{,}5 \text{ мин}. \end{cases}$$

Точное значение $F = 1024$.

$$\int_0^{10} e^x\,dx = \begin{cases} 24821{,}355, & N = 8, \quad t = 40 \text{ с}, \\ 22204{,}417, & N = 32, \quad t = 3 \text{ мин}. \end{cases}$$

Точное значение $F = 22\,026{,}467$.

$$\int_0^{3\pi} \sin x\,dx = \begin{cases} 1{,}7631473, & N = 8, \quad t = 45 \text{ с}, \\ 1{,}9855217, & N = 32, \quad t = 3 \text{ мин}. \end{cases}$$

Точное значение $F = 2$.

$$\int_0^9 \sqrt{x}\,dx = \begin{cases} 17{,}368642, & N = 4, \quad t = 30 \text{ с}, \\ 17{,}970091, & N = 32, \quad t = 2{,}5 \text{ мин}. \end{cases}$$

Точное значение $F = 18$.

$$\int_0^{11} \frac{dx}{1+x^2} = \begin{cases} 1{,}5127989, & N = 8, \quad t = 45 \text{ с}, \\ 1{,}480122, & N = 32, \quad t = 2{,}5 \text{ мин}. \end{cases}$$

Точное значение $F = 1{,}4801364\ \dots$.

Подпрограмма подынтегральной функции для последнего примера:

Fx² 1 + F1/x В/О.

Программа 10.2. Вычисление интеграла $F = \int_a^b f(x)\,dx$ по формуле трапеций (10.2) при заданной относительной погрешности ε.

—	П3	П4	0	ПД	ИПА	ПП	38	ИПД	2
÷	ПД	ИП3	П4	2	÷	П3	ИПА	+	ПП
38	ИПД	ИП3	×	ИПС	XY	ПС	—	ИПС	÷
Fx²	F√	ИП9	—	Fx<0	12	ИПС	С/П	П5	ИП5
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
...	...	...	БП	86	...	ИПД	+	ПД	ИПВ
ИП5	ИП4	+	П5	—	Fx<0	39	В/О		

Если значения $f(a)$ и $f(b)$ должны быть вычислены вне программы (например, при устранимой особенности $f(x)$ в точках $x = a, b$), то следует исключить команды ПД, ПП, 38 (адреса соответственно 04, 06, 07), заменив каждую на XY. Величина $[f(a) + f(b)]$ должна вводиться в качестве исходной в регистр РД.

Инструкция

1. Подпрограмма $f(x)$:
   адрес первой команды 40, последней — 85 (при $n_{max} = 46$); если адрес последней команды меньше 84, то в конце подпрограммы поставить команду БП 86; окончание основной программы, следующее за подпрограммой, начинается с адреса 86;
   регистры свободные: Р0 — Р2, Р6 — Р8;
   аргумент x — в регистрах РХ, Р5, результат: $РХ = f(x)$.

Необходимые данные для подпрограммы следует ввести перед п.2.

2. Исходные данные: (5ε = Р9), [b = РВ, a = РА = РС].
3. Пуск: В/О С/П.
4. Результат: РХ = РС = F.

Примеры.

$$\int_0^9 \sqrt{x}\,dx = 17{,}989312\ (18), \quad \varepsilon = 4\cdot10^{-4}, \quad t = 6 \text{ мин};$$

$$\int_0^{3\pi} \sin x\,dx = 1{,}9990968\ (2), \quad \varepsilon = 4\cdot10^{-4}, \quad t = 13 \text{ мин};$$

$$\int_0^{10} e^x\,dx = 22036{,}67\ (22026{,}467), \quad \varepsilon = 4\cdot10^{-4}, \quad t = 13 \text{ мин};$$

$$\int_0^{11} \frac{dx}{1+x^2} = 1{,}4801329\ (1{,}4801364), \quad \varepsilon = 4\cdot10^{-6}, \quad t = 6{,}5 \text{ мин};$$

$$\int_0^2 10x^9\,dx = 1024{,}4687\ (1024), \quad \varepsilon = 4\cdot10^{-4}, \quad t = 15 \text{ мин}.$$

Подпрограмма подынтегральной функции для последнего примера:

↑ Fx² Fx² Fx² × 1 0 × БП 86

Программа 10.3. Вычисление интеграла $F = \int_a^b f(x)\,dx$ по формуле прямоугольников (10.3) при заданном числе шагов N.

—	ИП0	÷	ПД	2	÷	+	ПС	0	ПВ
ИПС	ИПД	—	ПС	ПП	24	ИПВ	+	ПВ	FL0
10	ИПД	×	С/П	...	...	...	...	В/О	

Инструкция

1. Подпрограмма $f(x)$:
   адрес первой команды 24, последней — 97 (при $n_{max} = 74$), в конце подпрограммы В/О;
   регистры свободные: Р1 — РА;
   аргумент x — в регистрах РХ, РС, результат: РХ = $f(x)$.

Необходимые данные для подпрограммы следует ввести перед п. 2.

2. Исходные данные: N = Р0, [b = РХ, ↑, ↑, a = РХ].
3. Пуск: В/О С/П.
4. Результат: РХ = F.

Примеры.

$$\int_0^2 10x^9\,dx = 1020{,}256\ (1024), \quad t \approx 3 \text{ мин};$$

$$\int_0^{10} e^x\,dx = 21936{,}098\ (22026{,}467), \quad t \approx 2{,}5 \text{ мин};$$

$$\int_0^9 \sqrt{x}\,dx = 18{,}008593\ (18), \quad t \approx 2 \text{ мин};$$

$$\int_0^{11} \frac{dx}{1+x^2} = 1{,}4801437\ (1{,}4801364), \quad t \approx 2{,}5 \text{ мин};$$

$$\int_0^{3\pi} \sin x\,dx = 2{,}0072471\ (2), \quad t \approx 2{,}5 \text{ мин}.$$

В последнем примере подпрограмма $f(x)$: Fsin В/О. Во всех примерах N = 32.

Программа 10.4. Вычисление интеграла $F = \int_a^b f(x)\,dx$ по формуле прямоугольников (10.3) при заданной относительной погрешности ε.

—	П4	1	П8	ИП4	ИП8	3	×	П8	П0
÷	ПД	2	÷	ИПВ	+	ПС	0	П3	ИПС
ИПД	—	ПС	ПП	46	ИП3	+	П3	FL0	19
ИПД	×	ИПА	XY	ПА	—	ИПА	÷	Fx²	F√
ИП9	—	Fx<0	04	ИПА	С/П	...	...	..	...
...	...	...	...	...	...	В/О			

Инструкция

1. Подпрограмма $f(x)$:
   адрес первой команды 46, последней — 97 (при $n_{max} = 52$); в конце подпрограммы В/О;
   регистры свободные : Р0 — Р2, Р5 — Р7;
   аргумент x — в регистрах РХ, РС, результат: РХ = $f(x)$.

Необходимые данные для подпрограммы следует ввести перед п.2.

2. Исходные данные: (15ε = Р9), [b = РВ, a = РА].
3. Пуск: В/О С/П.
4. Результат: РХ = РА = F.

Примеры.

$$\int_0^{3\pi} \sin x\,dx = 2{,}001129\ (2), \quad \varepsilon = 4\cdot10^{-4}, \quad t \approx 10 \text{ мин};$$

$$\int_0^9 \sqrt{x}\,dx = 18{,}002172\ (18), \quad \varepsilon = 1\cdot10^{-4}, \quad t \approx 8 \text{ мин};$$

$$\int_0^2 10x^9\,dx = 1023{,}4132\ (1024), \quad \varepsilon = 5\cdot10^{-4}, \quad t \approx 12 \text{ мин};$$

$$\int_0^{11} \frac{dx}{1+x^2} = 1{,}4801358\ (1{,}4801364), \quad \varepsilon = 4\cdot10^{-4}, \quad t \approx 9 \text{ мин};$$

$$\int_0^{10} e^x\,dx = 22011{,}478\ (22026{,}467), \quad \varepsilon = 5\cdot10^{-4}, \quad t \approx 10 \text{ мин}.$$

Для последнего примера подпрограмма $f(x)$: Fe^x В/О.

Сравнение приведенных примеров для всех четырех программ (10.1—10.4) свидетельствует о некоторых преимуществах использованного варианта формулы прямоугольников перед формулой трапеций: программы короче и время счета несколько меньше при той же точности, особенно для случая заданного числа шагов (программа 10.3).

Программа 10.5. Вычисление интеграла $F = \int_a^b f(x)\,dx$ по формуле Симпсона (10.4) прн заданном числе шагов $2N$.

	ИП3	÷	ПС	0	ПД	ПП	32	1	КИП3
ПП	26	4	ПП	27	2	FL3	09	F,	ИПД
÷	ИПС	×	3	÷	С/П	F,	×	ИПД	+
ПД	ИПС	ИПА	+	ПА	...	...	В/О		

Инструкция

1. Подпрограмма $f(x)$:
   адрес первой команды 35, последней — 97 (при $n_{max} = 63$), в конце подпрограммы В/О;
   регистры свободные: Р0 — Р2, Р4 — Р9, РВ;
   аргументы x — в регистрах РХ, РА, результат: РХ = $f(x)$.
2. Исходные данные: $2N$ = Р3, [b = РХ, ↑, a=РА]. Необходимые данные для подпрограммы следует ввести перед п. 2.
3. Пуск: В/О С/П.
4. Результат: РХ = F.

Примеры.

1. $\int_0^{3\pi} \sin x\,dx = 2{,}0013949\ (2)$, $2N = 16$, $t = 1{,}5$ мин;
2. $\int_0^2 10x^9 dx = 1024{,}4313\ (1024)$, $2N = 16$, $t = 2$ мин;
3. $\int_0^{10} e^x\,dx = 22043{,}302\ (22026{,}467)$, $2N = 16$, $t = 1{,}5$ мин;

4. $\int\limits_0^9 \sqrt{x}\, dx = 17{,}987892$ (18), $2N = 32$, $t = 2{,}5$ мин;

5. $\int\limits_0^{11} \frac{dx}{1+x^2} = \begin{cases} 1{,}4800238, & 2N = 32,\ t = 3 \text{ мин}, \\ 1{,}4801365, & 2N = 64,\ t = 6 \text{ мин}. \end{cases}$

Точное значение 1,4801364... .

Сравнение первых трех примеров с аналогичными прнмерами в программах 10.1, 10.3 показывает, что интегрирование достаточно гладких функций по формуле Симпсоиа дает существеиный выигрыш в точности и скорости счета по сравнению с формулами трапеций и прямоугольников. Для функции $\sqrt{x}$, которая имеет разрывиую производную в нуле, формулы трапеций и прямоугольников точнее. Функция $1/(1+x^2)$ имеет относительио большую производную $f^{(4)}(x)$ при $0 \leqslant x < 2$, т. е. в области, которая виосит наибольший вклад в величину интеграла, и поэтому остаточный член в формуле Симпсона здесь велик. Лишь при малых h (в данном случае при $2N = 64$) формула Симпсона дает сравнимую точность (ср. пример в программе 10.4).

Программа 10.6. Вычисление $F = \int\limits_a^b f(x)\, dx$ по формуле Симпсона (10.4) при заданном числе шагов $2N$. Значения $f(x)$ в точках $x = a$ или $x = b$ рассчитываются отдельно и используются как исходные данные.

—	ИП3	÷	ПС	0	ПП	23	4	КИП3	ПП
22	2	FL3	05	F,	ИПД	+	ИПС	×	3
÷	С/П	F,	×	ИПД	+	ПД	ИПА	ИПС	+
ПА	...	...	...	...	...	...	...	В/О	

Данный вариант программы рассчитан на отдельный ввод $f(a)$. Для варианта, соответствующего вводу $f(b)$, следует команду + (адрес 29) заменить на — .

И н с т р у к ц и я

1. Подпрограмма $f(x)$:
адрес первой команды 31, последней — 97 (при $n_{max} = 67$), в конце подпрограммы В/О;
регистры свободные: Р0 — Р2, Р4 — Р9, РВ;
аргумент x — в регистрах РХ, РА, результат: $\text{РХ} = f(x)$.
2. Исходные данные: а) $f(a) = \text{РД}$, $2N = \text{Р3}$, $[b = \text{РХ}, \uparrow,\ a = \text{РА}]$; $f(b) = \text{РД}$, $2N = P3$, $[b = \text{РА},\ a = \text{РХ}]$.
3. Пуск: В/О С/П.
4. Результат: $\text{РХ} = F$.

Примеры.

$$\mathrm{Si}(2) = \int\limits_0^2 \frac{\sin x}{x}\, dx = 1{,}605414 \ (1{,}605413\ [9]),\ 2N = 12;\ t \approx 1{,}5 \text{ мин};$$

$$\mathrm{Si}(5) = \int\limits_0^5 \frac{\sin(5-x)}{5-x}\, dx = 1{,}5499279 \ (1{,}5499312\ [9]) \text{ при } 2N = 20,\ t \approx 2{,}5 \text{ мин}.$$

Для второго примера использовался второй вариант программы. Подпрограмма $f(x)$ для этого примера:

/—/ 5 + Fsin FBx ÷ В/О.

Программа 10.7. Вычисление интеграла $F = \int\limits_a^b f(x)\, dx$ по формуле Симпсона (10.4) при заданном числе шагов $2N$ (укороченный вариант).

—	ИП3	÷	ПС	2	ПА	КИП3	ИПВ	ИПС	—
ПВ	ПП	24	6	ИПА	—	ПА	×	ИПД	+
ПД	FL3	07	С/П	...	...	...	...	...	...
...	...	...	...	...	В/О				

Данный вариант программы предусматривает вычисление только суммы в фигурных скобках в (10.4). По окончании счета ее надо умножить на $h/3$ для получения F (п.4 инструкции). Кроме того, сумма $[f(a) + f(b)]$ рассчитывается отдельно и вводится в память ПМК как исходная величина.

И н с т р у к ц и я

1. Подпрограмма $f(x)$:
адрес первой команды 24, $n_{max} = 74$, в конце подпрограммы В/О;
регистры свободные: Р0 — Р2, Р4 — Р9;
аргумент x — в регистрах РХ, РВ, результат: $\text{РХ} = f(x)$.
2. Исходные данные: $f(a) + f(b) = \text{РД}$, $2N = \text{Р3}$, $[b = \text{РВ},\ a = \text{РХ}]$.
3. Пуск: В/О С/П.
4. Результат: $\text{РХ} = \text{РД} = S = 3F/h$. Искомое значение $F = (h/3)S$ получается с помощью четырех операций, непосредственно следующих за остановом: ИПС × 3 ÷ .

Пример.

$$\int\limits_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}\, dx = 0{,}27220564 \ (0{,}2721983),\ 2N = 8,\ t = 1 \text{ мин}.$$

Подпрограмма $f(x)$ для данного примера:

1 + Fln ИПВ Fx² 1 + ÷ В/О

Программа 10.8. Вычисление интеграла $f = \int\limits_a^b f(x)\, dx$ по формуле Симпсона (10.4) при заданной отиосительной погрешности ε.

-	П3	П4	ПП	48	ИПД	П9	0	ПД	ИПА
ИП4	П3	2	÷	П4	—	П2	ПП	44	ИПД
2	×	↑	ИП9	+	П9	+	ИП4	×	3
÷	ИП5	XY	П5	—	ИП5	÷	Fx²	F√	ИПС
	Fx<0	07	С/П	ИП2	ИП3	+	П2	ИП2	...
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
...	...	...	...	БП	87	...	ИПД	+	ПД
ИПВ	ИП2	—	ИП3	—	Fx<0	44	В/О		

Если значения $f(x)$ при $x = a$ или $x = b$ должны быть вычислены вне программы (например, при наличии устраиимых особенностей $f(x)$ в указаиных точках), то следует заменить каждую из команд ПП 48 (адреса 03, 04) на XY и изменить ввод даниых (п. 2 инструкции).

Инструкция
1. Подпрограмма $f(x)$:
адрес первой команды 49, последней — 86 (при $n_{max} = 38$); если адрес последней команды меньше 85, то в конце подпрограммы поставить команду БП 87; окончание основной программы, следующее за подпрограммой, начинается с адреса 87;
регистры свободные: Р0, Р1, Р6 — Р8 — 5 регистров;
аргумент x — в регистрах РХ, Р2, результат: РХ $= f(x)$.
Необходимые данные для подпрограммы следует вводить перед п. 2.
2. Исходные данные: (20ε = РС), 0 = РД, [b = Р5 = РВ, a = Р2 = = РА). Если значения $f(x)$ при $x = a$, b должны быть вычислены вне программы (см. выше), то в регистр РД вместо 0 вводится $[f(a) + f(b)]$.
3. Пуск: В/О С/П.
4. Результат: Р5 $= F$.

Примеры.

$$\int_0^{11} \frac{dx}{1+x^2} = 1{,}48011364\ (1{,}4801364),\ t = 8 \text{ мин};$$

$$\int_1^3 10x^9\, dx = 59048{,}31\ (59048),\ t \approx 5 \text{ мин};$$

$$\int_0^{3\pi} \sin x dx = 2{,}0000053\ (2),\ t \approx 9 \text{ мин}.$$

Подпрограмма $f(x)$ для последнего примера: Fsin БП 87. Во всех примерах $\varepsilon = 5 \cdot 10^{-6}$.

10.3. Квадратуры Гаусса и Чебышеаа. Вычисление интегралов по составным формулам Гаусса и Чебышева с заданным числом интервалов или заданной точностью. Квадратуры с переменным шагом

Квадратурные формулы Гаусса и Чебышева для n узлов на промежутке интегрирования:

$$F = \int_a^b f(x)\, dx = \frac{b-a}{2} \sum_{k=1}^{n} w_k f(x_k) + R_n. \tag{10.5}$$

Абсциссы узлов интегрирования

$$x_k + y_k (b-a)/2 + (b+a)/2, \tag{10.6}$$

где y_k — константы, являющиеся абсциссами узлов на нптервале (—1,1), для формул Гаусса равиы k-му нулю многочлена Лежандра $P_n(x)$. В формулах Чебышева y_k выражены более сложно [9], они вещественны только для n =2— —7, 9. Зиачения y_k для обеих квадратурных формул см., например, в [9]. Для квадратур Гаусса y_k и w_k рассчитываются также в программе 8.15.

Весовые коэффициенты в формулах Гаусса (числовые значения см. также в [9]):

$$w_k = 2/(1-y_k^2)\left[P_n'(y_k)\right]^2, \tag{10.7}$$

где P_n' — производные многочленов Лежандра. В формулах Чебышева весовые коэффициенты одинаковы и равны

$$w_k = 2/n. \tag{10.8}$$

Остаточный член квадратурной формулы Гаусса [21]:

$$R_n = \frac{(b-a)^{2n+1}\,(n!)^4}{(2n+1)\,[(2n!)]^3} f^{(2n)}(\xi) \approx \frac{b-a}{2{,}5\sqrt{n}} \left(\frac{b-a}{3n}\right)^{2n} f^{(2n)}(\xi),\ a < \xi < b. \tag{10.9}$$

Для формул Чебышева остаточный член R_n в общем не имеет столь простого выражения, как в (10.9) [9]. Для $n = 3$ [8]

$$R_3 = \frac{1}{360}\left(\frac{b-a}{2}\right)^5 f^{(4)}(\xi). \tag{10.10}$$

При $n = 2$ квадратурные формулы Гаусса и Чебышева совпадают:

$$w_1 = w_2 = 1,\ y_1 = -y_2 = \sqrt{3}/3 = 5{,}7735027 \cdot 10^{-1}. \tag{10.11}$$

Если производная $f^{(2n)}(\xi)$ подынтегральной функцни не слишком быстро увелнчивается с ростом n, то остаточный член (10.9) весьма мал, и формулы Гаусса обеспечивают высокую точность даже при умеренных значеннях n. Квадратуры Гаусса для $f(x)$ как многочленов степенн $2n - 1$ дают нулевую погрешность без учета ошибок округления. Точность формул Чебышева в этом смысле ниже. Однако у них есть преимущество, связанное с равенством весовых коэффициентов (10.8). Это упрощает вычисления (и программы) и способствует сокращению времени счета. Для ПМК существенно, что при одинаковых n формулы Чебышева по сравненню с формулами Гаусса содержат вдвое меньше констант, а потому прн программной реализацин требуют соответственно меньше регистров памяти.

Для обеих квадратур узлы располагаются симметрично относнтельно точкн $y = 0$ $(x = (a+b)/2$. При нечетных n точка $x = (a+b)/2$ также входнт в число узлов. В результате чнсло различных по модулю констант y_k равно $n/2$ для четных n и $(n+1)/2$ — для нечетных. Это в определенной степени делает предпочтительным использованне формул с четными n.

Весовые коэффициенты w_k для формул Гаусса одинаковы в симметричных узлах. Учитывая указанную симметрию w_k н y_k, представим (10.5) в виде

$$F = \frac{b-a}{2}\left[\sum_{k=1}^{n/2} w_k f(x_k^+) + \sum_{k=1}^{n/2} w_k f(x_k^-)\right],\ n = 2,\ 4,\ 6\ldots; \tag{10.12}$$

$$F = \frac{b-a}{2}\left[\sum_{k=2}^{(n+1)/2} w_k f(x_k^+) + \sum_{k=1}^{(n+1)/2} w_k f(x_k^-) + w_1 f(x_0)\right],\ n = 3,\ 5,\ 7\ldots. \tag{10.13}$$

Здесь $x_k^+ = (b-a)\,y_k/2 + (b+a)/2$; $x_k^- = (b-a)\,(-y_k)/2 + (b+a)/2$; $x_0 = (b+a)/2$.

Максимум n для квадратур Гаусса практически равен 10 при программированни на ПМК с 14 регистрами памяти прямого доступа (Электроника Б3-34, МК-54 и др.). Формулы Чебышева такого ограничения не нмеют, но, как упоминалось выше, для $n \geqslant 10$ абсциссы узлов y_k комплексные.

Оценка точности и уточнение результатов для указанных формул сложнее, чем для формул § 10.1. Например, вычисление R_n по (10.9) связано с нахожденнем производных подынтегральной функцин высокого порядка. Для формул

Чебышева подобные расчеты еще сложнее. Уточнение результатов и оценка погрешности путем перехода к бо́льшим n громоздка и практически неосуществнма в ПМК, так как требует смены всех y_k и w_k, всегда разных при различных n.

По-виднмому, наиболее простым является использование *составных формул* путем разбиения ннтервала интегрирования на некоторое число N отрезков с последующим применением к интегралам по каждому частному интервалу формул (10.5) или (10.12), (10.13). Пусть a_i н b_i — соответственно начало и конец каждого частного интервала ($i = 1, 2, ..., N$), прнчем $a_1 = a$, $b_N = b$. Тогда

$$F = \int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=1}^{N} \int_{a_i}^{b_i} f(x)\,dx = \frac{l}{2} \sum_{i=1}^{N} \sum_{k=1}^{n} w_k f\left[a + \frac{l}{2}(y_k + 2i - 1)\right] + R_n^{(N)}, \tag{10.14}$$

где $l = (b - a)/N$. Использование формул (10.14) при одинаковых n и разлнчных N не связано с изменением w_k и y_k и существенно упрощает уточнение результатов и оценку погрешности. Формулы (10.14) легко записать в виде (10.12), (10.13) для четных и нечетных n.

Ввиду того, что все узлы в формулах Гаусса и Чебышева являются внутренними, какого-либо дальнейшего упрощения (10.14), которое достигается, например, в формулах Симпсона путем объединения весовых коэффициентов в совпадающих узлах, здесь не происходит.

Остаточный член

$$R_n^{(N)} = NR_n = \frac{(b-a)\cdot 4^n (n!)^4 h^{2n}}{(2n+1)[(2n)!]^3} f^{(2n)}(\xi) \approx \frac{b-a}{2{,}5\sqrt{n}\ 9^n} h^{2n} f^{(2n)}(\xi),$$

$$a < \xi < b, \tag{10.15}$$

где $h = (b - a)/(Nn)$ — средний шаг на интервале (a, b); Nn — полное число узлов. Например, для $n = 2$ (формула Гаусса — Чебышева)

$$R_2^{(N)} = \frac{b-a}{270} h^4 f^{(4)}(\xi), \quad a < \xi < b, \quad h = (b-a)/(2N). \tag{10.16}$$

Сравненне (10.16) с (10.4) показывает, что погрешность рассматриваемой формулы имеет такой же порядок по h, как формула Симпсона, но противоположна по знаку н в 1,5 раза меньше. Кроме того, формула Гаусса — Чебышева в отличие от формулы Симпсона относится к открытому типу.

Формулу (10.14) легко трансформировать на случай переменных шагов. Рассмотрим простейший двухшаговый вариант, связанный с разбиением исходного интеграла на два:

$$\int_0^b f(x)\,dx = \int_a^{b_1} f(x)\,dx + \int_{b_1}^b f(x)\,dx. \tag{10.17}$$

Предполагается, что ориентировочно известна граница b_1 отрезка $[a, b_1]$, на котором существенио изменяется функция $f(x)$ и при этом $|b_1 - a|/|b - a| \ll 1$. Применяя к каждому ннтегралу (10.17) формулу (10.14) с одинаковым числом $2N$ разбиений на частные интервалы, получаем квадратурную формулу с требуемым изменением шага на разиых участках. Алгорнтм реализован в программах 10.16, 10.17 с использованием формул Чебышева и Гаусса — Чебышева (10.11)

Другой вариант двухшаговых формул основан на следующем разбиении отрезка $[a, b]$:

$$b - a = N_1 l_1 + N_2 l_2, \tag{10.18}$$

где $N_1 = N_2 + 1 \equiv N$; $l_2 = Nl_1$; $l_1 = (b-a)/N^2$; $l_2 = (b-a)/N$.

В этом случае квадратурная формула с учетом (10.14) имеет вид

$$F = \int_a^b f(x)\,(dx) = \frac{l_1}{2} \sum_{i=1}^{N} \sum_{k=1}^{n} w_k f\left[a + \frac{l_1}{2}(y_k + 2i - 1)\right] +$$

$$+ \frac{l_2}{2} \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{k=1}^{n} w_k f\left[a_2 + \frac{l_2}{2}(y_k + 2i - 1)\right], \quad a_2 = a + l_2. \tag{10.19}$$

Алгорнтм реализован в программе 10.18 с нспользованием формулы Чебышева при $n = 6$.

Примененне формул тнпа (10.17) или (10.19) целесообразно, еслн на одном из концов отрезка $[a, b]$ функция $f(x)$ имеет разрывные производные, или интегрируемый разрыв, нли быстро меняется на части интервала, примыкающей к его граннцам. Формула (10.17) полезна также в тех случаях, когда функция $f(x)$ в точке $x = b_1$ испытывает скачок нли имеет разрывную производную. Отметим, что при указанных способах погрешностн округления, которые возннкают при суммировании большого числа малых слагаемых, уменьшаются.

Программа 10.9. Вычисление ннтеграла $F = \int_a^b f(x)\,dx$ методом Гаусса при $n = 10$ (10.12), (10.7), (10.9).

—	2	÷	ПС	—	ПД	0	ПВ	1	0
П0	КИП↑	/—/	КП↑	ИПС	×	ИПД	+	ПП	34
КИП0	×	ИПВ	+	ПВ	FL0	11	ИП2	Fx$\geqslant$0	08
F,	ИПС	×	С/П	...	...	...	...	В/О	

Данная программа может быть реализована только на ПМК «Электроника Б3-34», «Электроника МК-54» и их аналогах. В других типах ПМК необходима равноценная замена команд КИП↑ н КП↑.

Инструкция

1. Подпрограмма $f(x)$:
адрес первой команды 34, последней — 97 (при $n_{max} = 64$), в конце подпрограммы. В/О;
регистров свободных нет, при составленин подпрограммы можно использовать только регнстры операционного стека;
аргумент x — в регистре РХ, результат: РХ $= f(x)$.
2. Исходные данные:
а) ввод констант w_k и y_k:

$w_1 = 2{,}9552422 \cdot 10^{-1} =$ P1, $y_1 = 1{,}4887434 \cdot 10^{-1} =$ P2,

$w_2 = 2{,}6926672 \cdot 10^{-1} =$ P3, $y_2 = 4{,}3339539 \cdot 10^{-1} =$ P4,

$w_3 = 2{,}1908636 \cdot 10^{-1} =$ P5, $y_3 = 6{,}7940957 \cdot 10^{-1} =$ P6,

$w_4 = 1{,}4945135 \cdot 10^{-1} =$ P7, $y_4 = 8{,}6506337 \cdot 10^{-1} =$ P8,

$w_5 = 6{,}6671344 \cdot 10^{-2} =$ P9, $y_5 = 9{,}7390653 \cdot 10^{-1} =$ PA;

б) пределы интегрирования: [b = РХ, ↑, ↑, a = РХ]. При переходе к другим пределам или изменении подпрограммы функции константы w_k, y_k сохраняются в памяти ПМК. Следует, однако, иметь в виду, что при авосте или преждевременном прекращении счета могут измениться знаки отдельных y_k. В указанных случаях их следует проверять.

3. Пуск: В/О С/П.
4. Результат: РХ = F.

Примеры.

$$\int_0^{25} e^x\,dx = 7{,}200472\cdot10^{10}\quad(7{,}2004909\cdot10^{10}),\quad t=70\ \text{с};$$

$$\int_0^{15} 27\,x^{26}\,dx = 5{,}6815077\cdot10^{31}\quad(5{,}6815126\cdot10^{31}),\quad t\approx 1{,}5\ \text{мин};$$

$$\int_0^{5} \sin x\,dx = 1{,}9999956\quad(2),\quad t\approx 1{,}5\ \text{мин};$$

$$\int_0^{9} \sqrt{x}\,dx = 18{,}002413\quad(18),\quad t\approx 1\ \text{мин};$$

$$\int_0^{11} \frac{dx}{1+x^2} = 1{,}4797262\quad(1{,}4801364),\quad t\approx 1{,}5\ \text{мин}.$$

Приведенные примеры показывают, что программа обеспечивает высокую точность для достаточно гладких функций, у которых производные первого и следующих порядков (до 20) относительно невелики, т. е. не намного превышают по модулю саму функцию. Последние два интеграла служат контрпримерами. В предпоследнем уже первая производная терпит разрыв, а в последнем примере производные высоких порядков велики по модулю в области $0\leqslant x\leqslant 2$. В таких случаях результат можно уточнить, разбив интервал $(a,\ b)$ на участки с различным поведением функции и выделив соответствующий интеграл. Применительно к предыдущим примерам представим интегралы в виде

$$\int_0^{9}\sqrt{x}\,dx = \int_0^{0,5}\sqrt{x}\,dx + \int_{0,5}^{9}\sqrt{x}\,dx = 0{,}23573386 + 17{,}764300 = 18{,}000034;$$

$$\int_0^{11}\frac{dx}{1+x^2} = \int_0^{2}\frac{dx}{1+x^2} + \int_2^{11}\frac{dx}{1+x^2} = 1{,}1071487 + 3{,}7298772\cdot10^{-1} =$$

$$= 1{,}4801364.$$

Каждый интеграл рассчитывался по данной программе. Как видно, в первом примере точность повысилась примерно на два порядка, во втором — практически точный результат. Время счета возрастает вдвое по сравнению с предыдущими примерами и в каждом случае составляет 2—3 мин. Существенным недостатком программы является невозможность выделения регистров памяти на подпрограмму функции $f(x)$.

Программа 10.10. Вычисление интеграла $F=\int_a^b f(x)\,dx$ методом Гаусса при $n = 8,\ 6,\ 4$ (10.12), (10.7), (10.9).

—	2	÷	ПС	—	ПД	0	П6	1	2
П0	КИП0	/—/	П9	ИПС	×	ИПД	+	ПП	39
КИП0	×	ИП6	+	П6	ИП0	1	+	П0	ИП9
Fx⩾0	12	КИП0	FL0	11	ИП6	ИПС	×	С/П	...
...	...	...	...	...	...	...	В/О		

Данный вариант программы рассчитан на $n = 8$. Для перехода к $n = 6{,}4$ следует заменить команду 1 (адрес 08) соответственно на 9 или 6, а команду 2 (адрес 09) на КНОП.

Инструкция

1. Подпрограмма $f(x)$:
   адрес первой команды 39, $n_{\max} = 59$, в конце подпрограммы В/О, регистры свободные: Р3 при $n=8$. Р3, РА, РВ при $n=6$, Р3, Р7, Р8, РА, РВ при $n=4$;
   аргумент x — в регистре РХ, результат: $PX = f(x)$.
2. Исходные данные:

а) Ввод констант w_k и y_k:

$n=8$

$w_1 = 3{,}6268378\cdot10^{-1} = P1,\quad y_1 = 1{,}8343464\cdot10^{-1} = P2,$

$w_2 = 3{,}1370665\cdot10^{-1} = P4,\quad y_2 = 5{,}2553241\cdot10^{-1} = P5,$

$w_3 = 2{,}2238103\cdot10^{-1} = P7,\quad y_3 = 7{,}9666648\cdot10^{-1} = P8,$

$w_4 = 1{,}0122854\cdot10^{-1} = PA,\quad y_4 = 9{,}6028986\cdot10^{-1} = PB;$

$n=6$

$w_1 = 4{,}6791393\cdot10^{-1} = P1,\quad y_1 = 2{,}3861919\cdot10^{-1} = P2,$

$w_2 = 3{,}6076157\cdot10^{-1} = P4,\quad y_2 = 6{,}6120939\cdot10^{-1} = P5,$

$w_3 = 1{,}7132449\cdot10^{-1} = P7,\quad y_3 = 9{,}3246951\cdot10^{-1} = P8;$

$n=4$

$w_1 = 6{,}5214515\cdot10^{-1} = P1,\quad y_1 = 3{,}3998104\cdot10^{-1} = P2,$

$w_2 = 3{,}4785485\cdot10^{-1} = P4,\quad y_2 = 8{,}6113631\cdot10^{-1} = P5.$

б) Пределы интегрирования: $[b = PX,\ \uparrow,\ \uparrow,\ a = PX]$. При повторении вычислений или изменении подпрограммы значения констант w_k, y_k сохраняются в памяти ПМК.

3. Пуск: В/О С/П.
4. Результат: $PX = F$.

Примеры.

$$\int_0^{15} e^x\,dx = 3269010{,}5\ (3269017{,}4),\quad n=8,\quad t\approx 1\ \text{мин};$$

$$\int_0^{12} 15x^{14}\,dx = 1{,}5406527\cdot10^{16}\ (1{,}540702\cdot10^{16}),\quad n=6,\quad t\approx 1\ \text{мин};$$

$$\int_0^{1}\frac{dx}{1+x^2} = 0{,}78540295\ (0{,}7853981),\quad n=4,\quad t\approx 30\ \text{с}.$$

Подпрограмма $f(x)$ для последнего примера:

Fx² 1 + F1/x В/0

Программа 10.11. Вычисление интеграла $F=\int_a^b f(x)\,dx$ методом Гаусса для $n = 6$ или 4 по составной формуле (10.14) при заданном числе N частных интервалов.

ПД	—	ИП3	÷	ПС	0	П6	КИП3	9	П0
КИП0	/—/	П9	ИП3	+	ИПС	×	ИПД	+	ПП
42	КИП0	×	ИП6	+	П6	ИП0	1	+	П0
ИП9	Fx⩾0	11	КИП0	FL0	10	FL3	07	ИП6	ИПС
×	С/П	...	...	...	...	..	...	В/О	

Данный варнант программы относится к $n = 6$. Для перехода к $n = 4$ следует заменить команду 9 (адрес 08) на 6.

Инструкция

1. Подпрограмма $f(x)$:
   адрес первой команды 42, $n_{max} = 56$, в конце подпрограммы В/О;
   регистры свободные: РА, РВ при $n = 6$, Р7, Р8, РА, РВ при $n = 4$;
   аргумент x — в регнстре РХ, результат: РХ $= f(x)$.
2. Исходные данные:

а) Ввод констант w_k и y_k. Численные значения w_k, y_k при соответствующих n и порядок ввода такие же, как в программе 10.10: $w_1 =$ Р1, $y_1 =$ Р2; $w_2 =$ = Р4, $y_2 =$ Р5; $w_3 =$ Р7, $y_3 =$ Р8. Естественно, что для $n = 4$ вводятся только w_1, y_1, w_2, y_2. Все константы сохраняются в памяти ПМК при повторенин вычислений или изменении подпрограммы.

б) Остальные данные: $2N =$ Р3, [$b =$ РХ, ↑, $a =$ РХ]. Число частных интервалов равно N; общее число узлов, в которых вычисляются значения $f(x)$, равно Nn.

3. Пуск: В/О С/П.
4. Результат: РХ $= F$.

Примеры.

$$\int_0^{7\pi} \sin x dx = \begin{cases} 2{,}0052909\ (2), & N=2,\ n=6,\ t \approx 2 \text{ мин},\\ 1{,}9999975\ (2), & N=4,\ n=6,\ t \approx 3{,}5 \text{ мин}; \end{cases}$$

$$\int_0^{9} \sqrt{x}\, dx = \begin{cases} 18{,}011083\ (18) & N=2,\ n=4,\ t \approx 1 \text{ мин};\\ 18{,}001385\ (18) & N=8,\ n=4,\ t \approx 4 \text{ мин}. \end{cases}$$

Подпрограмма $f(x)$ для последнего примера: F$\sqrt{\ }$ В/О.

Сравнение этих примеров с приведенными к программе 10.5 (метод Симпсона) свндетельствует о преимуществах метода Гаусса даже применительно к негладким функциям типа $\sqrt{x}$. Недостатком программы (особенно при $n = 6$) является малое число регистров памяти, отводимое на подпрограмму $f(x)$.

Программа 10.12. Вычисление интеграла $F = \int_a^b f(x)\,dx$ методом Чебышева для $n = 6$ или 4 по составной формуле (10.14) и формуле (10.8) при заданном числе N частных интервалов.

ПА	—	ИП2	÷	П8	0	ПД	КИП2	6	П0
КИП0	/—/	П9	ИП2	+	ИП8	×	ИПА	+	ПП
37	ИПД	+	ПД	ИП9	Fx⩾0	11	FL0	10	FL2
07	F,	ИП8	×	3	÷	С/П	...	...	...
...	...	...	...	...	...	В/О			

Данный вариант программы относится к $n = 6$. Для перехода к $n = 4$ следует заменить команду 6 (адрес 08) на 4 и команду 3 (адрес 34) на 2.

Инструкция

1. Подпрограмма $f(x)$:
   адрес первой команды 37, $n_{max} = 61$, в конце подпрограммы поставить В/О;
   регистры свободные: Р4, Р6, Р7, Р8, РС при $n = 6$ и Р4 — Р7, РВ, РС при $n = 4$;
   аргумент x — в регистре РХ, результат: РХ $= f(x)$.
2. Исходные данные:

а) Ввод констант y_k:

при $n = 6$ $y_1 = 8{,}6624682 \cdot 10^{-1} =$ Р1, $y_2 = 4{,}2251865 \cdot 10^{-1} =$ Р3,

$y_3 = 2{,}666354 \cdot 10^{-1} =$ Р5;

прн $n = 4$ $y_1 = 7{,}9465447 \cdot 10^{-1} =$ Р1, $y_2 = 1{,}8759247 \cdot 10^{-1} =$ Р3.

Прн повторных вычислениях или изменении подпрограммы эти константы сохраняются в памяти ПМК.

б) Остальные данные: $2N =$ Р2, [$b =$ РХ, ↑, $a =$ РХ]. Число частных интервалов равно N; общее число узлов, в которых вычисляются значения $f(x)$, равно N/n.

3. Пуск: В/О С/П.
4. Результат: РХ $= F$.

Примеры.

$$1.\ \int_0^2 10x^9\,dx = \begin{cases} 1023{,}9964\ (1024), & N=2,\ n=6,\ t \approx 1{,}5 \text{ мин},\\ 1023{,}9863\ (1024), & N=4,\ n=4,\ t \approx 2 \text{ мин}; \end{cases}$$

$$2.\ \int_0^{11} \frac{dx}{1+x^2} = \begin{cases} 1{,}4801326\ (1{,}4801364), & N=8,\ n=6,\ t \approx 5 \text{ мин};\\ 1{,}480131\ \ (1{,}4801364), & N=16,\ n=4,\ t \approx 7 \text{ мин}. \end{cases}$$

Подпрограмма $f(x)$ в последнем примере: Fx² 1 + F1/x В/О.

Сравиение с программой 10.5 (формула Симпсона) показывает, что программы, основанные на методе Чебышева, при одинаковой длине и достаточном числе регистров памяти на подпрограмму существенио повышают точность. Заметное укорочение программы достнгается при нулевом нижнем примере (см. следующую программу).

Программа 10.13. Вычисление ннтеграла $F = \int_0^b f(x)\,dx$ методом Чебышева ($n = 6$, 4) по составной формуле (10.14) и формуле (10.8) при заданном числе N частных интервалов.

П2	÷	П8	0	ПД	КИП2	6	П0	КИП0	/—/
П9	ИП2	+	П	×	ПП	33	ИПД	+	ПД
ИП9	Fx⩾0	09	FL0	08	FL2	05	F,	ИП8	×
3	÷	С/П	...	...	...	...	...	В/О	

Данный вариант программы относится к $n = 6$. Переход к $n = 4$ осуществляется заменой двух команд 6 (адрес 06) на 4 и 3 (адрес 30) на 2.

Инструкция

1. Подпрограмма $f(x)$:
   адрес первой команды 33, $n_{max} = 65$, последией командой должна быть В/О;
   регистры свободные: Р4, Р6, Р7, РА, РВ, РС при $n = 6$; Р4 — Р7, РА — РС при $n = 4$;
   аргумент x — в регистре РХ, результат: РХ $= f(x)$.

2. Исходные данные:
а) ввод констант y_k: численные значения y_k при соответствующих n и порядок ввода такие же, как в программе 10.12;
б) остальные данные: [b = PX, ↑, $2N$ = PX].
Примеры. См. программу 10.12.

Программа 10.14. Вычисление интеграла $F = \int_a^b f(x)\,dx$ методом Гаусса—Чебышева по составной формуле (10.14) и формуле (10.11) при заданном числе N частных интервалов.

ПА	—	ИП0	÷	ПВ	0	ПД	КИП0	3	F $\sqrt{}$
F1/x	/—/	ПС	ИП0	+	ИПВ	×	ИПА	+	ПП
33	ИПД	+	ПД	ИПС	Fx⩾0	11	FL0	07	XY
ИПВ	×	С/П	...	...	...	...	...	В/О	

Инструкция
1. Подпрограмма $f(x)$:
адрес первой команды 33, n_{max} = 65, в конце подпрограммы поставить В/О,
регистры свободные: Р1 — Р9;
аргумент x — в регистре РХ, результат: РХ = $f(x)$.
2. Исходные данные: $2N$ = Р0, [b = РХ, ↑, a = РХ].
3. Пуск: В/О С/П.
4. Результат: РХ = F.
Примеры.

$\int_0^9 \sqrt{x}\,dx = 18{,}003075\ (18)$ $N = 16$, $t \approx 3$ мин;

$\int_0^{11} \frac{dx}{1+x^2} = 1{,}4801366\ (1{,}4801364)$, $N = 27$, $t \approx 6$ мин;

$\int_0^2 10x^9\,dx = 1023{,}9818\ (1024)$, $N = 16$, $t \approx 4$ мин.

Подпрограмма $f(x)$ для последнего примера:
↑ Fx² Fx² Fx² × 1 0 × В/О.

Программа 10.15. Вычисление интеграла $F = \int_a^b f(x)\,dx$ методом Гаусса — Чебышева при заданной точности ε по составной формуле (10.14) и формуле (10.11).

ПА	—	П9	4	П1	ИП9	ИП1	2	×	П0
П1	÷	П8	0	ПД	КИП0	3	F $\sqrt{}$	F1/x	/—/
ПС	ИП0	+	ИП8	×	ИПА	+	ПП	54	ИПД
+	ПД	ИПС	Fx⩾0	19	FL0	15	XY	ИП8	×
ИПВ	XY	ПВ	—	ИПВ	÷	Fx²	F $\sqrt{}$	ИП2	—
Fx<0	05	ИПВ	С/П	...	...	...	...	В/О	

В программе производится перерасчет интеграла путем последовательного удвоения числа шагов до тех пор, пока модуль относительного изменения вычисленного значения интеграла на двух соседних итерациях не станет меньше заданной величины — здесь 20 ε. Реальная погрешность может отличаться от задаваемой на порядок, в большую или в меньшую сторону.

Инструкция
1. Подпрограмма $f(x)$:
Адрес первой команды 54, n_{max} = 44, в конце подпрограммы поставить В/О,
регистры свободные: Р3 — Р7 — 5 регистров;
аргумент x — в регистре РХ, результат: РХ = $f(x)$.
2. Исходные данные: (20ε = Р2), [b = РВ, a = РХ].
3. Пуск: В/О С/П.
4. Результат: РВ = РХ = F.
Примеры.

$\int_0^{11} \frac{dx}{1+x^2} = 1{,}4802176\ (1{,}4801364)$, $\varepsilon = 5\cdot10^{-4}$, $t \approx 6{,}5$ мин;

$\int_1^3 10x^9\,dx = 59047{,}791\ (59048)$, $\varepsilon = 5\cdot10^{-6}$, $t \approx 8$ мин;

$\int_0^9 \sqrt{x}\,dx = 18{,}003075\ (18)$, $\varepsilon = 2\cdot10^{-5}$, $t \approx 6$ мин;

$\int_0^{3\pi} \sin x\,dx = 1{,}9999437\ (2)$, $\varepsilon = 5\cdot10^{-5}$, $t \approx 8$ мин.

Подпрограмма $f(x)$ для последнего примера: Fsin В/О.

Программа 10.16. Вычисление интеграла $F = \int_a^b f(x)\,dx$ методом Чебышева (n = 6) по составной формуле (10.14) (двухшаговый вариант (10.17)) при заданном числе N частных интервалов на отрезках [a, b_1] и [b_1, b].

0	ПС	2	П3	F,	F,	—	ИП6	П2	÷
П8	0	ПД	КИП2	9	П0	КИП0	КИП0	/—/	П9
ИП2	+	ИП8	×	ИПА	+	ПП	57	ИПД	+
ПД	ИП9	Fx⩾0	18	FL0	16	FL2	13	F,	ИП8
×	3	÷	ИПС	+	ПС	ИПВ	ИП8	ИП6	×
ИПА	+	ПА	FL3	06	ИПС	С/П	...	...	...
...	...	...	...	...	...	...	В/О		

Промежуточный предел b_1 может быть точкой разрыва первого рода или разрыва производной, b_1 может также выбираться как ориентировочная граница промежутка [a, b_1], где функция $f(x)$ изменяется относительно быстро. В последнем случае предполагается, что $(b_1 - a)/(b - b_1) \ll 1$.

Инструкция
1. Подпрограмма $f(x)$:
адрес первой команды 57, n_{max} = 41, в конце подпрограммы поставить В/О;
регистры свободные: Р5;
аргумент x — в регистре РХ, результат: РХ = $f(x)$.
2. Исходные данные: ($8{,}6624682\cdot10^{-1}$ = Р1, $4{,}2251865\cdot10^{-1}$ = Р4, $2{,}666354\cdot10^{-1}$ = Р7), (b = РВ, $2N$ = Р6), [b_1 = РХ, ↑, a = РА]. Напомним, что в соответствии с введением круглые скобки здесь означают, что абсциссы уз-

лов в Р1, Р4, Р7, а также величины b и $2N$ сохраняются в памяти при повторении вычислений.

3. Пуск: В/О С/П.
4. Результат: РС = РХ = F.

Примеры.

$$\int_0^9 \sqrt{x}\,dx = \int_0^{0,5} \sqrt{x}\,dx + \int_{0,5}^9 \sqrt{x}\,dx = 18{,}000068 \ (18), \quad 2N=8, \quad t \approx 5 \text{ мин};$$

$$\int_0^{11} \frac{dx}{1+x^2} = \int_0^2 \frac{dx}{1+x^2} + \int_2^{11} \frac{dx}{1+x^2} = 1{,}4801096 \ (1{,}4801364), \quad 2N=4,$$

$t \approx 3$ мин;

$$\int_0^9 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \int_0^{0,2} \frac{dx}{\sqrt{x}} + \int_{0,2}^0 \frac{dx}{\sqrt{x}} = 5{,}9532107 \ (6), \quad 2N=8, \quad t \approx 6 \text{ мин}.$$

Подпрограмма $f(x)$ для последнего примера: F$\sqrt{\ }$ F1/x В/О ...

Программа 10.17. Вычисление интеграла $F = \int_a^b f(x)\,dx$ методом Гаусса — Чебышева по составной формуле (10.14) (двухшаговый вариант (10.17)) при заданном числе N частных интервалов на отрезках $[a_1, b_1]$, $[b_1, b]$.

0	ПС	2	П1	F,	F,	—	ИП6	П0	÷
П8	0	ПД	КИП0	3	F$\sqrt{\ }$	F1/x	/—/	П9	ИП0
+	ИП8	×	ИПА	+	ПП	52	ИПД	+	ПД
ИП9	Fx⩾0	17	FL0	13	XY	ИП8	×	ИПС	+
ПС	ИПВ	ИП8	ИП6	×	ИПА	+	ПА	FL1	06
ИПС	С/П	...	...	...	...	...	...	В/О	

Промежуточный предел b_1 может быть точкой скачка функции или разрыва первой производной или ориентировочно выбираться как граница интервала быстрого изменения функции. В последнем случае предполагается, что $|b_1 - a| / |b - b_1| \ll 1$.

Инструкция

1. Подпрограмма $f(x)$:
   адрес первой команды 52, $n_{max} = 46$, в конце подпрограммы поставить В/О,
   регистры свободные: Р2 — Р5, Р7;
   аргумент x — в регистре РХ, результат: РХ = $f(x)$.
2. Исходные данные: (b = РВ, $2N$ = Р6), [b_1 = РХ, ↑, a = РА].
3. Пуск: В/О С/П.
4. Результат: РС = РХ = F.

Примеры.

$$\int_0^9 \sqrt{x}\,dx = \int_0^1 + \int_0^9 = 18{,}000394 \ (18), \quad t \approx 4 \text{ мин};$$

$$\int_0^{11} \frac{dx}{1+x^2} = \int_0^2 + \int_2^{11} = 1{,}4800574 \ (1{,}4801364), \quad t \approx 4 \text{ мин}.$$

Подпрограмма $f(x)$ для последнего примера: Fx² 1 + F1/x В/О.

В обоих примерах $2N = 16$.

Программа 10.18. Вычисление интеграла $F = \int_a^b f(x)\,dx$ методом Чебышева ($n = 6$) по составной формуле (10.14) (двухшаговый вариант (10.18), (10.19)) при заданном числе N частных интервалов.

ПА	—	ИП8	П2	Fx²	÷	2	П3	×	ПВ
0	ПС	0	ПД	КИП2	9	ПО	КИП0	КИП0	/—/
П9	ИП2	+	ИПВ	×	ИПА	+	ПП	63	ИПД
+	ПД	ИП9	Fx⩾0	19	FL0	17	FL2	14	F,
ИПВ	×	3	÷	ИПС	+	ПС	ИПА	ИП8	П2
ИПВ	×	+	ПА	FBx	2	÷	ПВ	КИП2	КИП2
FL3	12	С/П	...	...	...	...	...	...	...
...	...	...	...	...	...	...	...	В/О	

В программе интервал (a, b) делится на два отрезка в отношении $1/N$ с примерно одинаковым числом шагов N на каждом отрезке. Отрезок меньшей длины примыкает к точке $x = a$. Общее число узлов, в которых вычисляется значение функции, $12N - 6$.

Инструкция

1. Подпрограмма $f(x)$:
   адрес первой команды 63, $n_{max} = 35$, в конце подпрограммы поставить В/О,
   регистры свободные: Р5, Р6;
   аргумент x — в регистре РХ, результат: РХ = $f(x)$.
2. Исходные данные: ($8{,}6624682 \cdot 10^{-1}$ = Р1, $4{,}2251865 \cdot 10^{-1}$ = Р4, $2{,}666354 \cdot 10^{-1}$ = Р7), ($2N$ = Р8), [b = РХ, ↑, a = РХ].
3. Пуск: В/О С/П.
4. Результат: РС = F.

Примеры.

$$\int_0^{11} \frac{dx}{1+x^2} = 1{,}4801363 \ (1{,}4801364), \quad 2N=8, \quad t \approx 5 \text{ мин};$$

$$\int_0^9 \sqrt{x}\,dx = 18{,}000058 \ (18), \quad 2N=16, \quad t \approx 10 \text{ мин};$$

$$\int_0^9 \frac{dx}{\sqrt{x}} = 5{,}9642763 \ (6), \quad 2N=32, \quad t \approx 20 \text{ мин}.$$

Подпрограмма $f(x)$ для последнего примера:

F$\sqrt{\ }$ F1/x В/О

10.4. Несобственные интегралы от неограниченных функций с алгебраической особенностью. Главное значение интеграла по Коши

Рассмотрим несобственные интегралы вида

$$F=\int_a^b \frac{\varphi(x)\,dx}{(x-a)^m(b-x)^n}, \qquad (10.20)$$

где для сходимости интегралов должно быть $m, n<1$. Функция $\varphi(x)$ полагается непрерывной на отрезке $[a, b]$, за исключением устранимых разрывов в отдельных внутренних точках, которые не должны совпадать с узлами квадратурных формул. Непосредственное численное интегрирование (10.20) возможно с использованием квадратурных формул открытого типа, например формул Гаусса и Чебышева и центрированной схемы прямоугольников (10.3). Однако наличие особенностей при $x=a$, b приводит к чрезвычайно медленной сходимости вычислений. Иллюстрацией могут служить последние примеры к программам 10.16 и 10.18, базирующимся на двухшаговом варианте квадратурных формул. Как видно, даже дробление шага в окрестности $x=0$ не обеспечивает высокой точности, несмотря на большие времена счета.

Подстановка

$$x=a+L\cos^2\vartheta,\quad L=b-a, \qquad (10.21)$$

приводит интеграл (10.20) к виду

$$F=2L^{1-m-n}\int_0^{\pi/2}\varphi(a+L\cos^2\vartheta)(\cos\vartheta)^{1-2m}(\sin\vartheta)^{1-2n}\,d\vartheta. \qquad (10.22)$$

Подынтегральная функция в (10.22) не имеет особенностей при $m, n<0,5$, и применение приводимых выше квадратурных формул при этом условии связано с существенно меньшими погрешностями. Соответствующая программа 10.19 основана на методе Чебышева при $n=6$. Для вычисления F по этой программе необходимо лишь ввести подпрограмму для функции $\varphi(x)$. Входящий в (10.22) фактор $(\cos\vartheta)^{1-2m}(\sin\vartheta)^{1-2n}$ имеет разрывные производные в точках $\vartheta=0$, $\pi/2$. Это обусловливает все же недостаточную скорость сходимости квадратурных формул (ср. пример к программе 10.19). Наибольшие трудности возникают при $m, n>0{,}5$, когда подынтегральная функция разрывна.

Для усиления сходимости выделим части интеграла (10.22), распространенные на малые окрестности особых точек $\vartheta=0$, $\pi/2$. Соответствующие интегралы могут быть найдены аналитически, если заменить значения $\varphi(x)$ на $\varphi(a)$, $\varphi(b)$ и линеаризовать близкие к нулю в окрестности $\vartheta=0, \pi/2$, $\sin\vartheta$ и $\cos\vartheta$. При использовании квадратуры Симпсона целесообразно выбрать интервалы в окрестности $\vartheta=0$, $\pi/2$ длиной $2h$, где $h=\pi/4N$ — шаг для интеграла (10.22). В результате скорректированная формула Симпсона принимает вид

$$F=2L^{1-m-n}\left\{\varphi(b)\int_0^{2h}\vartheta^{1-2n}\,d\vartheta-\frac{h}{3}\varphi(b)\,[4h^{1-2n}+(2h)^{1-2n}]+\right.$$
$$\left.+\frac{h}{3}S+\varphi(a)\int_0^{2h}\vartheta^{1-2m}\,d\vartheta-\frac{h}{3}\varphi(a)\,[4h^{1-2m}+(2h)^{1-2m}]\right\}. \qquad (10.23)$$

$(h/3)\,S$ означает правую часть в формуле (10.4), за вычетом $(h/3)\,[f(a)+f(b)]$ и остаточного члена. После интегрирования и приведения подобных членов получаем

$$F\approx(h/3)\,L^{1-m-n}(A_m+2S+A_n), \qquad (10.24)$$

где

$$A_m=h^{1-2m}\left(\frac{2+m}{1-m}4^{1-m}-8\right)\varphi(a);$$
$$A_n=h^{1-2n}\left(\frac{2+n}{1-n}4^{1-n}-8\right)\varphi(b). \qquad (10.25)$$

Отметим, что

$$A_m,\ A_n=0\quad \text{при } m,\ n=0,$$
$$A_m=2\varphi(a),\ A_n=2\varphi(b)\quad \text{при } m,\ n=1/2. \qquad (10.26)$$

Формула (10.24) аналогична формуле Симпсона. Здесь слагаемые A_m, A_n играют роль $\varphi(a)$, $\varphi(b)$ в (10.4). Расчеты по программе 10.20, в которой реализована формула (10.24), подтверждают эффективность рассматриваемого алгоритма.

Программы 10.21—10.23 относятся к более простым случаям, соответствующим (10.26). Для них возрастают числа программных шагов и регистров памяти, которые могут быть выделены на подпрограмму $\varphi(x)$, а также сокращается число исходных данных. Наиболее простым оказывается расчет при $m=n=1/2$. В этом случае интеграл (10.22) сводится к

$$F=2\int_0^{\pi/2}\varphi(a+L\cos^2\vartheta)\,d\vartheta. \qquad (10.27)$$

Подынтегральная функция здесь регулярна, и для вычислений пригоден любой из алгоритмов § 10.1, 10.2. В программе 10.22 использована формула Гаусса — Чебышева (10.14), (10.11), что позволяет сократить программу. Кроме того, эта формула открытого типа и допускает использование функций $\varphi(x)$ с устранимыми разрывами на границах промежутка $[a, b]$.

Вычисление *главного значения интеграла в смысле Коши*

$$F=VP\int_a^b f(x)\,dx=\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\int_a^{c-\varepsilon}f(x)\,dx+\int_{c+\varepsilon}^b f(x)\,dx\right] \qquad (10.28)$$

($x=c$ — особая точка $f(x)$) рассматривается далее применительно к функциям

$$f(x)=\varphi(x)/(x-c). \qquad (10.29)$$

$\varphi(x)$ — непрерывная функция, за исключением возможно устранимых разрывов в отдельных точках $[a, b]$. Интегралы (10.28) с функцией (10.29) часто встречаются в приложениях математической физики.

Будем для определенности полагать $(c-a)/(b-c)<1$ (т. е. считать особую точку $x=c$ расположенной ближе к $x=a$, чем к $x=b$). Представим (10.28) в виде

$$F=\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\int_a^{c-\varepsilon}f(x)\,dx+\int_{c+\varepsilon}^{2c-a}f(x)\,dx\right]+\int_{2c-a}^b f(x)\,dx. \qquad (10.30)$$

Первый и второй интегралы F_1, F_2 в последней формуле распространены на промежутки одинаковой длины, и шаги интегрирования в квадратурных формулах для F_1 и F_2 также одинаковы. Применим формулу Симпсона (10.4) без остаточного члена (в принципе можно использовать любую квадратурную формулу замкнутого типа):

$$F_1+F_2 \approx \frac{h}{3} \lim_{\varepsilon\to 0} [f(a)+S_1+f(c-\varepsilon)+f(c+\varepsilon)+S_2+f(2c-a)], \qquad (10.31)$$

где S_1 и S_2 — суммы в формуле (10.4), за вычетом значений функций на концах соответствующих промежутков. При учете (10.29)

$$\lim_{\varepsilon\to 0} [f(c-\varepsilon)+f(c+\varepsilon)] = 2\varphi'(c). \qquad (10.32)$$

Таким образом,

$$F = \frac{2h}{3}\varphi'(c) + \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^{2c-a} f(x)\,dx + \int_{2c-a}^b f(x)\,dx. \qquad (10.33)$$

В первых двух интегралах при использовании формулы Симпсона должны быть пропущены слагаемые, содержащие значения функции $f(x)$ в точке $x = c$. В приводимой далее программе 10.23 функция $\varphi'(c)$ должна вычисляться отдельно, и ее значение принимается в качестве исходной величины.

Программа 10.19. Вычисление несобственного интеграла общего вида $F = \int_a^b \frac{\varphi(x)\,dx}{(x-a)^m\,(b-x)^n}$ методом Чебышева ($n = 6$) по формуле (10.22) и составной формуле (10.14) при заданном числе N частных интервалов, $m, n < 1$.

1	Farcsin	ИП2	÷	П8	0	ПД	КИП2	6	П0
КИП0	/—/	П9	ИП2	÷	ИП8	×	ПС	Fcos	Fx^2
ИПВ	×	ИПА	÷	...	...	...	...	...	...
...	...	...	БП	57	...	...	ИП6	ИПС	Fcos
Fx^y	XY	F,	√	ИП7	ИПС	Fsin	Fx^y	XY	F,
×	ИПД	+	ПД	ИП9	Fx⩾0	11	FL0	10	FL2
07	F,	ИП8	×	3	÷	2	×	ИП6	ИП7
÷	ИПВ	Fx^y	F√‾	XY	F,	×	С/П		

Инструкция

1. Подпрограмма $\varphi(x)$:
   адрес первой команды 24, последней — 56 (при $n_{max} = 33$); если адрес последней команды меньше 55, то в конце подпрограммы поставить БП 57;
   окончание основной программы начинается с адреса 57;
   регистры свободные: Р4;
   аргумент x — в регистре РХ, результат: РХ $= \varphi(x)$.
2. Исходные данные: ($8{,}6624682 \cdot 10^{-1}$ = Р1, $4{,}2251865 \cdot 10^{-1}$ = Р3, $2{,}666354 \cdot 10^{-1}$ = Р5), ($1 - 2m$ = Р6, $1 - 2n$ = Р7, a = РА, $L = b - a$ = РВ), $2N$ = Р2.
3. Пуск: В/О С/П.
4. Результат: РХ = F.

Примеры.

$$F = \int_0^1 \frac{dx}{x^{1/4}(1-x)^{1/5}(x+2)^{(3/4+4/5)}} = \begin{cases} 0{,}4064602, & 2N = 2, \quad t \approx 2{,}5 \text{ мин}, \\ 0{,}40511328, & 2N = 4, \quad t \approx 5 \text{ мин}, \\ 0{,}4044937, & 2N = 16, \quad t \approx 20 \text{ мин}. \end{cases}$$

Точное значение [6]:

$$F = \frac{\Gamma(3/4)\,\Gamma(4/5)}{3^{3/4}\cdot 2^{4/5}\,\Gamma(3/4+4/5)} = 0{,}4044084\ldots .$$

Подпрограмма $\varphi(x)$ для этого примера:

2 + 1 , 5 5 /—/ XY Fx^y БП 57

$$F = \int_0^3 \frac{1+x^2}{x^{0,8}}\,dx = \begin{cases} 10{,}125498, & 2N = 2, \quad t \approx 2{,}5 \text{ мин}, \\ 10{,}634942, & 2N = 8, \quad t \approx 8{,}5 \text{ мин}, \\ 10{,}928591, & 2N = 32, \quad t \approx 33 \text{ мин}. \end{cases}$$

Точное значение $F = 5\cdot 3^{0,2}\,(1 + 9/11) = 11{,}324826$.

Как видно, нарушение во втором примере условия $m < 1/2$ приводит к весьма медленной сходимости вычислений по данной программе.

Программа 10.20. Вычисление несобственного интеграла общего вида $F = \int_a^b \frac{\varphi(x)\,dx}{(x-a)^m\,(b-x)^n}$ по формуле Симпсона с выделением особенностей на границах интервала (формулы (10.24), (10.25), (10.4)), $m, n < 1$.

ПП	45	ИПВ	ПП	45	КИП3	ИП3	ИПС	×	П9
ПП	72	1	2	ИП2	—	П2	×	ИП5	ИП9
Fcos	Fx^y	XY	F,	×	ИП4	ИП9	Fsin	ПП	64
FL3	06	ИП4	ИП5	+	ИПВ	Fx^y	F√	ИПС	×
ИПД	×	3	÷	С/П	ПП	76	КИП2	П8	1
+	2	Fx^y	XY	÷	5	ИП8	—	×	8
—	×	ИП8	ИПС	Fx^y	XY	F,	×	ИПД	+
ПД	В/О	Fcos	Fx^2	ИПВ	×	ИПА	+	...	...
...	...	...	В/О						

Инструкция

1. Подпрограмма $\varphi(x)$:
   Адрес первой команды 78, последней — 97 (при $n_{max} = 20$), в конце подпрограммы В/О. Если нижний предел интеграла $a = 0$, то команды ИПА + (адреса 76, 77) не нужны. Подпрограмма тогда набирается начиная с адреса 76, и ее максимальная длина 22 шага. В этом случае не следует вводить $a = 0$ (п. 2 инструкции) в регистр РА, и этот регистр свободен.
   Регистры свободные: Р0, Р1, Р6, Р7.
   Аргумент x — в регистре РХ, результат: РХ $= \varphi(x)$.
2. Исходные данные: (a = РА, $L = b - a$ = РВ, $1 - 2m$ = Р5, $1 - 2n$ = Р4), 6 = Р2, $2N$ = Р3, ($h = \pi/4N$ = РС), [0 = РД].
3. Пуск: В/О С/П.
4. Результат: РХ = F.

Примеры.

$$F = \int_0^1 \frac{dx}{x^{1/4}(1-x)^{1/5}(x+2)^{(3/4+4/5)}} \begin{cases} = 0{,}40502843, & 2N = 4, \quad t \approx 2 \text{ мин}, \\ = 0{,}40443763, & 2N = 8, \quad t \approx 4 \text{ мин}. \end{cases}$$

Точное значение $F = 0{,}4044084$ ... (см. пример к программе 10.19).

$$\int_0^3 \frac{1+x^2}{x^{0,8}}\,dx = \begin{cases} 11{,}352517, & 2N=4, \quad t \approx 1{,}5 \text{ мин}, \\ 11{,}327226, & 2N=8, \quad t \approx 3 \text{ мин}, \\ 11{,}325684, & 2N=16, \quad t \approx 6 \text{ мин}. \end{cases}$$

Точное значение 11,324826 (см. программу 10.19).
Подпрограмма $\varphi(x)$ для последнего примера: Fx² 1 + В/О.

Сравнение с примерами к предыдущей программе подтверждает существенное усиление сходимости при выделении особенностей подынтегральной функции на границах промежутка $[a, b]$.

Программа 10.21. Вычисление интегралов $F_1 = \int_a^b \frac{\varphi(x)\,dx}{(x-a)^m \sqrt{b-x}}$, $F_2 = \int_a^b \frac{\varphi(x)\,dx}{\sqrt{x-a}\,(b-x)^m}$ по формуле Симпсона с выделением особенностей на границах интервала $[a, b]$ (10.24) — (10.26), (10.4), $m < 1$.

ИПВ	ПП	71	ПД	0	ПП	41	2	П7	КИП0
ИП0	ИПС	×	П9	ПП	67	6	ИП7	—	П7
×	ИП8	ИП9	Fcos	ПП	59	FL0	10	ИП8	ИПВ
Fx^y	F√	ИПС	×	ИПД	×	2	×	3	÷
С/П	ПП	71	ИП8	2	Fx^y	XY	1	+	÷
5	ИП8	—	×	4	—	×	ИП8	ИПС	Fx^y
XY	F,	×	ИПД	+	ПД	В/О	Fcos	Fx²	ИПВ
×	ИПА	+	...	...	...	...	...	...	...
...	...	...	...	...	...	В/О			

Данный вариант программы ориентирован на вычисление F_1. Для перехода к F_2 следует внести следующие изменения в программу: заменить ИПВ (адрес 00) на 0; 0 на ИПВ (адрес 04); Fcos на Fsin (адрес 23).

Инструкция

1. Подпрограмма $\varphi(x)$:
Адрес первой команды 73, последней — 97 (при $n_{max} = 25$), в конце подпрограммы должна быть В/О. Если нижний предел интеграла $a = 0$, то можно исключить команды ИПА + (адреса 71, 72). Тогда подпрограмма набирается с адреса 71, и ее длина 27 шагов. В этом случае не следует вводить $a = 0$ в регистр РА (п. 2 инструкции), и регистр РА свободен.
Регистры свободные: Р1 — Р6.
Аргумент x — в регистре РХ, результат: $РХ = \varphi(x)$.
2. Исходные данные: (a = РА, $L = b - a$ = РВ, $1 - 2m$ = Р8), $2N$ = Р0, ($h = \pi/4N$ = РС).
3. Пуск: В/О С/П.
4. Результат: РХ $= F_1$ (или РХ $= F_2$ при втором варианте программы).

Примеры.

$$F_1 = \int_0^1 \frac{dx}{x^{1/4}\sqrt{1-x}\,(1+3x)^{5/4}} = \begin{cases} 0{,}84780473, & 2N=8, \quad t \approx 3 \text{ мин}, \\ 0{,}84724553, & 2N=16, \quad t \approx 6 \text{ мин}. \end{cases}$$

Точное значение $F_1 = \sqrt{\frac{\pi}{8}}\,\frac{\Gamma(3/4)}{\Gamma(5/4)} = 0{,}8472131\ldots$ [6]. Подпрограмма $\varphi(x)$:

3 × 1 + 1 , 2 5 /—/ XY Fx^y В/О

$$F_2 = \int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{x}\,(2-x)^{0,23}} = \begin{cases} 2{,}8409685, & 2N=6, \quad t \approx 1{,}5 \text{ мин}, \\ 2{,}8410004, & 2N=16, \quad t \approx 4 \text{ мин}. \end{cases}$$

Точное значение $F_2 = 2^{0,27}\,\frac{\Gamma(0{,}77)\,\Gamma(0{,}5)}{\Gamma(1{,}27)} = 2{,}8410196$. В данном случае погрешность обусловлена, по-видимому, также неточностью операции возведения в степень Fx^y на ПМК, которая многократно выполняется в программе.

Программа 10.22. Вычисление интеграла $F = \int_a^b \frac{\varphi(x)\,dx}{\sqrt{(x-a)\,(b-x)}}$ преобразованием (10.27) и по составной формуле Гаусса — Чебышева (10.14), (10.11) при заданном числе частных интервалов N.

ИПВ	ИПА	—	П8	1	Farcsin	ИП0	÷	ПС	0
ПД	КИП0	3	F√	F1/x	/—/	П9	ИП0	+	ИПС
×	Fcos	Fx²	ИП8	×	ИПА	+	ПП	43	ИПД
+	ПД	ИП9	Fx≥0	15	FL0	11	XY	ИПС	×
2	×	С/П	...	...	...	...	...	...	...
...	...	...	...	...	...	В/О			

Инструкция

1. Подпрограмма $\varphi(x)$:
адрес первой команды 43, $n_{max} = 55$, в конце подпрограммы поставить В/О;
регистры свободные: Р1 — Р7;
аргумент x — в регистре РХ, результат: $РХ = \varphi(x)$.
2. Исходные данные: (a = РА, b = РВ), $2N$ = Р0.
3. Пуск: В/О С/П.
4. Результат: РХ $= F$.

Пример.

$$F = \int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{x\,(3-x)\,(5-x)\,(1+x)}} = 1{,}152958, \quad 2N = 12, \quad t \approx 2 \text{ мин}.$$

Подпрограмма $\varphi(x)$:

1 XY + 5 FBx — × F√ F1/x В/О

F выражается через полный эллиптический интеграл первого рода, и в данном случае точное значение $F = K(0{,}9)/\sqrt{5} = 1{,}1529578\ldots$ [6].

Программа 10.23. Вычисление интегралов $F_1 = \int_a^b \frac{\varphi(x)\,dx}{(x-a)^m}$, $F_2 = \int_a^b \frac{\varphi(x)\,dx}{(b-x)^m}$ по формуле Симпсона с выделением особенностей на границах промежутка $[a,b]$ ((10.24)—(10.26), (10.4)) при заданном числе шагов $2N$, $m < 1$.

0	ПП	41	4	П7	КИП0	ИП0	ИПС	×	П9
ПП	67	1	2	ИП7	—	П7	×	ИП9	Fsin
×	ИП8	ИП9	Fcos	ПП	59	FL0	06	ИП8	1
+	ИПВ	Fx^y	$F\sqrt{\ }$	ИПС	×	ИПД	×	3	÷
С/П	ПП	71	ИП8	1	+	2	Fx^y	XY	÷
5	ИП8	—	×	8	—	×	ИП8	ИПС	Fx^y
XY	F,	×	ИПД	+	ПД	В/О	Fcos	Fx^2	ИПВ
×	ИПА	+	...	...	...	...	...	..	...
...	...	...	...	...	...	В/О			

Данная программа ориентирована на вычисление F_1. Для перехода к F_2 следует внести следующие замены команд: 0 (адрес 00) на ИПВ; F sin (адрес 19) на Fcos; Fcos (адрес 23) на Fsin.

Инструкция

1. Подпрограмма $\varphi(x)$:

Адрес первой команды 73, последней — 97 (при $n_{max} = 25$), в конце подпрограммы поставить В/О. Если нижний предел интеграла $a = 0$, то можно исключить команды ИПА + (адреса 71, 72). Тогда подпрограмма набирается с адреса 71 и имеет длину 27 шагов. В этом случае не следует вводить $a = 0$ в регистр РА (п. 2 инструкции), и регистр РА свободен.

Регистры свободные: Р1 — Р6.

Аргумент x — в регистре РХ, результат: $РХ = \varphi(x)$.

2. Исходные данные: (a = РА, $L = b - a$ = РВ, $1-2m$ = Р8), 0 = РД, $2N$ = Р0, ($h = \pi/4N$ = РС).
3. Пуск: В/О С/П.
4. Результат: $РХ = F_1, F_2$.

Примеры. При $2N = 8$

$$F_1 = \int_0^2 \frac{dx}{x^{0,6}} = 3{,}2988553\ (3{,}2987697), \quad t = 2{,}5 \text{ мин};$$

$$F_2 = \int_0^2 \frac{1+2x}{\sqrt{2-x}}\,dx = 10{,}370335, \quad t = 2{,}5 \text{ мин}.$$

Точное значение $F_2 = 22\sqrt{2}/3 = 10{,}370899\ \ldots$.
Подпрограмма $\varphi(x)$ для последнего примера:

2 × 1 + В/О

Программа 10.24. Вычисление главного значения интеграла по Коши $F = VP \int_a^b \frac{\varphi(x)\,dx}{x-c}$ по модифицированной формуле Симпсона (10.33) при заданном числе шагов $2N$.

ИПС	ПА	—	ИП1	÷	П8	ПП	37	ИП8	/—/
П8	ИПС	ПА	ПП	37	ИП8	×	П9	ИПА	ПП
62	ПД	ИПВ	ИПА	—	ИП1	÷	П8	ПП	37
ИП8	×	ИП9	+	3	÷	С/П	ИП1	П0	0
ПП	55	4	КИП0	ПП	54	2	FL0	40	F,
ИПД	+	ПД	В/О	F,	×	ИПД	+	ПД	ИПА
ИП8	+	ПА	...	...	...	...	...	...	...
...	...	...	ИПА	ИПС	—	÷	В/О		

Структура программы

00—17: вычисление первых двух интегралов с (10.33) с пропуском слагаемых, содержащих значения подынтегральной функции в особой точке $x = c$,
18—36: расчет третьего интеграла и полной величины F,
37—62: подпрограмма численного интегрирования по формуле Симпсона (типа программы 10.6, где не учитываются слагаемые, содержащие одно из граничных значений функции, в данном случае — значение при $x = c$),
63 и далее: подпрограмма функции $\varphi(x)$ (составляется пользователем),
93—97: деление $\varphi(x)$ на $(x - c)$.

Инструкция

1. Подпрограмма $\varphi(x)$:

адрес первой команды 63, $n_{max} = 30$, в конце подпрограммы добавляется последовательность пяти команд: ИПА ИПС — ÷ В/О
регистры свободные: Р2 — Р7;
аргумент x в регистрах РХ, РА, результат: $РХ = \varphi(x)$.

2. Исходные данные: (b = РВ, c = РС, $2N$ = Р1), $2\varphi'(c)$ = РД, [a = РХ]. Эти данные вводятся при $(c-a)/(b-c) \leqslant 1$; особая точка $x = c$ не ближе к $x = b$, чем к $x = a$. В другом случае $(c-a)/(b-c) > 1$ следует при вводе исходных данных поменять a и b местами в регистрах памяти.
3. Пуск: В/О С/П.
4. Результат $РХ = F$ при $(c-a)/(b-c) \leqslant 1$ и $РХ = -F$ при $(c-a)/(b-c) \geqslant 1$, когда a и b при вводе исходных данных переставляются в регистрах РВ и РХ (ср. п. 2).

Пример. Вычисление $\mathrm{Ei}(x) = VP \int_{-x}^{\infty} \frac{-e^{-t}}{t}\,dt$. Примем верхний предел равным 11. При этом значении t подынтегральная функция пренебрежимо мала.

$$\mathrm{Ei}(1) \approx VP \int_{-1}^{11} \frac{-e^{-t}}{t}\,dt = \begin{cases} 1{,}7784162, & 2N = 4, \quad t \approx 2 \text{ мин}, \\ 1{,}872382, & 2N = 8, \quad t \approx 4 \text{ мин}, \\ 1{,}8943909, & 2N = 24, \quad t \approx 10 \text{ мин}. \end{cases}$$

Точное значение $\mathrm{Ei}(1) = 1{,}89511781\ \ldots$.

Медленная сходимость интеграла с увеличением числа шагов объясняется наличием быстро меняющейся функции e^{-t}.

10.5. Несобственные интегралы с бесконечными пределами

Квадратурная формула Лагерра:

$$F_1 = \int_0^\infty e^{-x}\varphi(x)\,dx = \sum_{k=1}^{n} w_k\,\varphi(x_k) + R_n, \tag{10.34}$$

где x_k — k-й нуль многочлена Лагерра $L_n(x)$;

$$w_k = \frac{x_k}{(n+1)^2\,[L_{n+1}(x_k)]^2}; \qquad R_n = \frac{(n!)^2}{(2n)!}\,\varphi^{(2n)}(\xi), \quad 0<\xi<\infty.$$

Квадратурная формула Эрмита:

$$F_2 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\varphi(x)\,dx = \sum_{k=1}^{n} w_k\,\varphi(x_k) + R_n, \tag{10.35}$$

где x_k — k-й нуль многочлена Эрмита $H_n(x)$;

$$w_k = \frac{2^{n-1}\,n!\,\sqrt{\pi}}{n^2\,[H_{n-1}(x_k)]^2}; \qquad R_n = \frac{n!\,\sqrt{\pi}}{2^n\,(2n)!}\,\varphi^{(2n)}(\xi), \qquad -\infty<\xi<\infty.$$

Значения x_k, w_k приведены в [9] до $n = 15$, 20 для F_1 и F_2 соответственно. Коэффициенты x_k и w_k у F_2 симметричны относительно нуля подобно квадратурным формулам Гаусса. Это позволяет использовать при вычислении F_2 формулы вдвое большего порядка, чем для F_1, при одинаковом числе коэффициентов, вводимых в память ЭВМ.

При произвольном нижнем пределе

$$F_1 = \int\limits_{a}^{\infty} e^{-x}\varphi(x)\,dx = e^{-a}\int\limits_{0}^{\infty} e^{-y}\varphi(y+a)\,dy. \tag{10.36}$$

Условия быстрой сходимости здесь примерно такие же, как для квадратур Гаусса и Чебышева (см. § 10.2): функции $\varphi(x)$ должны быть гладкими с небольшими по модулю производными высокого порядка. Кроме того, $\varphi(x)$ не должны иметь много осцилляций в той области значений x, которая дает существенный вклад в интеграл. При нарушении этих условий эффективность квадратур (10.34), (10.35) невелика, что связано с трудностями оценки погрешностей и уточнения результатов в рамках данного метода. Фактически здесь существует единственная возможность перехода к бо́льшим n. Такой способ, однако, неудобен, а для ПМК практически нереализуем из-за недостаточных ресурсов памяти.

Алгоритмы реализованы в программах 10.25, 10.26.

Рассмотрим несобственные интегралы вида

$$\int\limits_{a}^{\infty} f(x)\,dx \tag{10.37}$$

от функций $f(x)$, для которых можно указать *ориентировочный масштаб* $\Delta x = L$ их *существенного изменения*. Асимптотически $f(x) \sim e^{-x/L}$. Представим (10.37) как предел последовательности:

$$F = \lim_{N\to\infty} F_N, \tag{10.38}$$

где

$$F_N = S_1 + S_2 + \ldots + S_N; \tag{10.39}$$

$$S_N = \int\limits_{a+(N-1)L}^{a+NL} f(x)\,dx. \tag{10.40}$$

Применим для интегралов (10.40) подходящую квадратурную формулу, а суммирование в (10.39) будем проводить до тех N, при которых разность $|F_{N+1} - F_N|$ не станет меньше некоторого заданного числа или машинным нулем. Такой алгоритм обладает достаточной гибкостью в смысле выбора квадратурной

формулы и позволяет легко уточнять результаты (и оценивать погрешность), уменьшая задаваемый масштаб L. Далее приведены программы 10.27 и 10.28, в которых использованы соответственно квадратурные формулы Гаусса — Чебышева и Чебышева при $n = 6$. Для интегралов S_k отпадает необходимость применять составные формулы. Достаточно выбирать L так, чтобы нужная точность обеспечивалась на одном интервале. Фактически составной формулой является вся сумма (10.39). Судя по приводимым примерам, формула Чебышева по сравнению с формулой Гаусса — Чебышева дает выигрыш в точности при том же времени счета. Однако программа 10.27 может оказаться предпочтительной для сложных $f(x)$, так как имеет меньшую длину, оставляет больше регистров памяти на программирование $f(x)$ и ускоряет счет.

Модификацией данного алгоритма является вариант с переменным масштабом L. В этом случае интегралы в (10.39) будут иметь вид

$$S_N = \int\limits_{a_N}^{a_N+L_N} f(x)\,dx, \tag{10.41}$$

где

$$a_{k+1} = a_k + L_k; \qquad L_{k+1} = tL_k, \qquad k = 1, 2, \ldots;$$
$$a_1 = a; \qquad L_1 = L, \tag{10.42}$$

t — коэффициент растяжения (или, возможно, сжатия) интервалов. Целесообразность прогрессивного увеличения шага для функций $f(x)$, которые уменьшаются с ростом x достаточно медленно (не быстрее, чем e^{-ax}), очевидна: при увеличении N вклад интегралов S_N в общую сумму (10.39) снижается и для них допустима бо́льшая относительная погрешность. Если, однако, $f(x)$ изменяется быстрее (например, $f(x) \sim e^{-x^n}$, где $n \gg 1$), то следует использовать $t < 1$.

Суммарная длина интегрирования на N интервалах при заданных L и t

$$\mathscr{L} = L\,(t^N - 1)/(t-1), \tag{10.43}$$

существенно превышает NL даже при сравнительно близких к 1 коэффициентах растяжения t (так, при $t = 1{,}2$ и $N = 8$ $\mathscr{L} \approx 16{,}5\,L$). Благодаря этому ускоряется сходимость и уменьшаются погрешности округления по сравнению с вариантом, использующим $L_N = L$.

Алгоритм реализован в программах 10.29, 10.30, основанных соответственно на квадратурах Гаусса — Чебышева и Чебышева ($n = 6$) при вычислении S_N. В программе 10.29 задаваемыми величинами являются L и t. Суммирование (10.39) ведется до совпадения с машинной точностью S_{N+1} и S_N. Такой способ прерывания, однако, не всегда оправдан и может приводить к завышению времени счета, если не нужна максимальная точность. В программе 10.30 просто задается число N слагаемых в сумме (10.39). Выбор этого числа при заданных L и t можно производить с помощью формулы (10.43), исходя из такой длины $\mathscr{L}$, при которой модуль подынтегральной функции становится достаточно малым. Можно, наоборот, задавать N, основываясь на приемлемом времени счета, а по $\mathscr{L}$ и L определять t и т. д.

Программа 10.25. Вычисление интеграла $F_1 = \int\limits_a^{\infty} e^{-x}\,\varphi(x)\,dx$ по формуле Лагерра (10.34) при $n = 4$.

8	П0	0	ПД	ИП0	1	+	П0	КИП0	ИПА
+	ПП	24	КИП0	×	ИПД	+	ПД	FL0	04
ИПА	Fe^x	÷	С/П	...	...	...	...	...	...
...	...	...	...	...	...	...	В/О		

Инструкция

1. Подпрограмма $\varphi(x)$:
адрес первой команды 24, последней — 97 (при $n_{max}=74$), в конце подпрограммы В/О;
регистры свободные: Р9, РВ, РС;
аргумент x — в регистре РХ, результат: $РХ = \varphi(x)$.
2. Исходные данные: ($w_1 = 6{,}031541\cdot10^{-1} = Р1$, $x_1 = 3{,}2254769\cdot10^{-1} = Р2$, $w_2 = 3{,}5741869\cdot10^{-1} = Р3$, $x_2 = 1{,}7457611 = Р4$, $w_3 = 3{,}8887909\cdot10^{-2} = Р5$, $x_3 = 4{,}5366203 = Р6$, $w_4 = 5{,}3929471\cdot10^{-4} = Р7$, $x_4 = 9{,}3950709 = Р8$, $a = РА$).
3. Пуск: В/О С/П.
4. Результат: $РХ = F_1$.

Примеры.

$$F_1 = \int_0^\infty e^{-x}x^7\,dx = 5040 \quad (F_1 = 7! = 5040{,}0001), \quad t \approx 30\ с;$$

$$\int_0^\infty e^{-x}\sin\left(\frac{x}{3}+2\right)dx = 0{,}69352428 \quad (0{,}69352365), \quad t \approx 30\ с;$$

$$\int_0^\infty e^{-x}\sin(3x+2)\,dx = 0{,}39926999 \quad (-0{,}03391431), \quad t \approx 30\ с.$$

Подпрограмма $\varphi(x)$ для последнего примера: 3 × 2 + Fsin В/О
Величины в скобках получены по точной формуле [6]

$$\int_0^\infty e^{-x}\sin(ax+b)\,dx = \frac{1}{1+a^2}(a\cos b+\sin b).$$

Этот пример иллюстрирует рост погрешности квадратурной формулы при сильно осциллирующих функциях $\varphi(x)$.

Программа 10.26. Вычисление интеграла $F_2 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\varphi(x)\,dx$ по формуле Эрмита (10.35) при $n = 6$ или 8.

8	П0	0	ПД	ИП0	ПВ	0	ПС	КИПВ	/—/
ПВ	ПП	28	ИПС	+	ПС	ИПВ	Fx⩾0	09	КИП0
ИПС	×	ИПД	+	ПД	FL0	04	С/П	...	...
...	...	...	...	...	...	В/О			

Данный вариант программы относится к $n = 8$. Для перехода к $n = 6$ следует заменить команду 8 (адрес 00) на 6 и скорректировать исходные данные (п. 2 инструкции).

Инструкция

1. Подпрограмма $\varphi(x)$:
адрес первой команды 28, последней — 97 (при $n_{max} = 70$), в конце подпрограммы поставить В/О;
регистры свободные: Р9, РА при $n = 8$, Р7 — РА при $n = 6$,
аргумент x — в регистрах РХ, РВ, результат: $РХ = \varphi(x)$.

2. Исходные данные: — ввод констант w_k, x_k

$n = 8$

$w_1 = 6{,}6114701\cdot10^{-1} = Р1$, $x_1 = 3{,}8118699\cdot10^{-1} = Р2$,
$w_2 = 2{,}0780233\cdot10^{-1} = Р3$, $x_2 = 1{,}1571937 = Р4$,
$w_3 = 1{,}7077983\cdot10^{-2} = Р5$, $x_3 = 1{,}9816568 = Р6$,
$w_4 = 1{,}9960407\cdot10^{-4} = Р7$, $x_4 = 2{,}9306374 = Р8$;

$n = 6$

$w_1 = 7{,}246296\cdot10^{-1} = Р1$, $x_1 = 4{,}3607741\cdot10^{-1} = Р2$,
$w_2 = 1{,}57067320\cdot10^{-1} = Р3$, $x_2 = 1{,}3358491 = Р4$,
$w_3 = 4{,}5300099\cdot10^{-3} = Р5$, $x_3 = 2{,}350605 = Р6$.

Введенные константы сохраняются в памяти ПМК при повторении вычислений и изменении подпрограммы функции $\varphi(x)$.
3. Пуск: В/О С/П.
4. Результат: $РХ = РД = F_2$.

Примеры.

$$\int_{-\infty}^{\infty} xe^{3x-x^2}\,dx = \begin{cases} 25{,}214665 & при\ n=8, \quad t \approx 1\ мин, \\ 24{,}920545 & при\ n=6, \quad t \approx 45\ с. \end{cases}$$

Точное значение интеграла [6]: $1{,}5\sqrt{\pi}\,e^{2{,}25} = 25{,}22485\ldots$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-x^2}x^2}{1+x^2}\,dx = \begin{cases} 0{,}43326648 & при\ n=8, \quad t \approx 1\ мин, \\ 0{,}44055209 & при\ n=6, \quad t \approx 45\ с. \end{cases}$$

Точное значение интеграла [6]: $\sqrt{\pi} - \pi e(1 - \operatorname{erf} 1) = 0{,}4291605\ldots$

Большие погрешности в примерах связаны с тем, что высшие производные подынтегральных функций, определяющие остаточный член в (10.35), имеют значительную величину в той области, которая дает наибольший вклад в интеграл.

Подпрограмма $\varphi(x)$ в последнем примере: Fx² ↑ ↑ 1 + ÷ В/О.

Программа 10.27. Вычисление интеграла $F = \int_a^\infty f(x)\,dx$ по формулам (10.38) — (10.40) и квадратурной формуле Гаусса—Чебышева (10.5), (10.6), (10.11) для S_N при заданном масштабе $\Delta x = L$ изменения функции $f(x)$.

П9	2	÷	ПВ	0	ПД	П4	КИП4	3	F√
F1/x	/—/	ПС	ИП4	+	ИПВ	×	ИПА	+	ПП
39	ИПД	+	ПД	ИПС	Fx⩾0	11	КИП4	ИПД	ИП9
XY	П9	—	Fx=0	07	ИПВ	ИП9	×	С/П	...
...	...	...	...	...	...	...	В/О		

Инструкция

1. Подпрограмма $f(x)$:
адрес первой команды 39, $n_{max} = 59$, в конце подпрограммы поставить В/О;
регистры свободные: Р0 — Р3, Р5 — Р8;
аргумент x — в регистре РХ, результат: $РХ = f(x)$.
2. Исходные данные: ($a = РА$), [$L = РХ$].
3. Пуск: В/О С/П.
4. Результат: $РХ = F$.

Примеры.

$F_1 = \int\limits_0^\infty e^{-x}\,dx$. Здесь, очевидно, масштаб существенного изменения функции $L \sim 1$. Точное значение $F = 1$.

$$F_1 = \begin{cases} 0{,}99672136, & L=2, \quad t \approx 3 \text{ мин},\\ 0{,}99977575, & L=1, \quad t \approx 5 \text{ мин},\\ 0{,}99998572, & L=0{,}5, \quad i \approx 10 \text{ мин}; \end{cases}$$

$$F_2 = \int\limits_0^\infty e^{-x} \sin(3x+2)\,dx = \begin{cases} -0{,}024429673, & L=1, \quad t \approx 9 \text{ мин},\\ -0{,}033430435, & L=0{,}5, \quad t \approx 16 \text{ мин}. \end{cases}$$

Точное значение интеграла (см. пример к программе 10.25):

$F_2 = -\,0{,}033911431\ldots$

$$F_3 = \int\limits_0^\infty x e^{3x-x^2}\,dx = \begin{cases} 25{,}301575, & L=1, \quad t \approx 2{,}5 \text{ мин},\\ 25{,}29767, & L=0{,}5, \quad t \approx 5 \text{ мин}. \end{cases}$$

Точное значение интеграла [6]: $F_3 = 0{,}5 + 0{,}75\sqrt{\pi}\,e^{2{,}25}(1 + \operatorname{erf} 1{,}5) = 25{,}29736\ldots$

Подпрограмма функции $f(x)$ для последнего примера:

↑ ↑ ↑ 3 — × /—/ Fe^x × В/О

Программа 10.28. Вычисление интеграла $F = \int\limits_a^\infty f(x)\,dx$ по формулам (10.38)—(10.40) и квадратурной формуле Чебышева ((10.5), (10.6), (10.8) ($n = 6$) для S_N при заданном масштабе L изменения функции $f(x)$.

П9	2	÷	ПВ	0	ПД	6	П0	КИП0	/—/
ПС	1	+	ИПВ	×	ИПА	+	ПП	46	ИПД
+	ПД	ИПС	Fx⩾0	09	FL0	08	ИПА	ИПВ	2
×	+	ПА	ИПД	ИП9	XY	П9	—	Fx=0	06
ИПВ	ИП9	×	3	÷	С/П	...	...	...	...
...	...	...	...	...	...	...	В/О		

И н с т р у к ц и я

1. Подпрограмма $f(x)$:
   адрес первой команды 46, $n_{max} = 52$ в конце подпрограммы поставить В/О;
   регистры свободные: Р2, Р4, Р6 — Р8;
   аргумент x — в регистре РХ, результат подпрограммы: РХ $= f(x)$.
2. Исходные данные: ($y_1 = 8{,}6624682 \cdot 10^{-1}$ = Р1, $y_2 = 4{,}2251865 \cdot 10^{-1}$ = Р3, $y_3 = 2{,}666354 \cdot 10^{-1}$ = Р5), a = РА, [L = РХ].
3. Пуск: В/О С/П.
4. Результат РХ = F.

Примеры

$$F_1 = \int\limits_0^\infty e^{-x}\,dx = \begin{cases} 0{,}99998026, & L=4, \quad t \approx 4{,}5 \text{ мин},\\ 0{,}9999977, & L=3, \quad t \approx 6 \text{ мин}. \end{cases}$$

Точное значение $F_1 = 1$.

$$F_2 = \int\limits_0^\infty e^{-x} \sin(3x+2)\,dx = \begin{cases} -0{,}034685906, & L=2, \quad t \approx 12 \text{ мин},\\ -0{,}033913886, & L=1, \quad t \approx 22 \text{ мин}. \end{cases}$$

Точное значение $F_2 = -\,0{,}3391431$ (пример к программе 10.25).

$$F_3 = \int\limits_0^\infty x e^{3x-x^2}\,ax = \begin{cases} 25{,}301686, & L=2, \quad t \approx 4 \text{ мин},\\ 25{,}297363, & L=1, \quad t \approx 7 \text{ мин}. \end{cases}$$

Точное значение $F_3 = 25{,}29736\ldots$ (пример к программе 10.27).

Программа 10.29. Вычисление интеграла $F = \int\limits_a^\infty f(x)\,dx$ по формулам (10.38), (10.39) с переменным масштабом L_N (10.41), (10.42)) при заданных L и t. S_N рассчитываются по квадратурной формуле Гаусса — Чебышева (10.5), (10.6). (10.8).

П9	2	÷	ПВ	0	П9	ИПА	П7	0	ПД
3	F√	F1/x	/—/	ПС	1	+	ИПВ	×	ИП7
+	ПП	51	ИПД	+	ПД	ИПС	Fx⩾0	13	ИП7
ИПВ	2	×	+	П7	ИП8	ИПВ	×	ПВ	FBx
ИПД	×	ИП9	+	П9	FBx	—	Fx=0	08	ИП9
С/П	...	...	...	...	...	...	В/О		

И н с т р у к ц и я

1. Подпрограмма $f(x)$:
   адрес первой команды 51, $n_{max} = 47$, в конце подпрограммы поставить В/О;
   регистры свободные: Р0 — Р3, Р5, Р6;
   аргумент x — в регистре РХ, результат: РХ $= f(x)$
2. Исходные данные: (a = РА, t = Р8), [L = РХ].
3. Пуск: В/О С/П.
4. Результат РХ = Р9 = F.

Примеры.

$$F_1 = \int\limits_0^\infty e^{-x}\,dx = 0{,}99998347, \quad L=0{,}2, \quad t=1{,}2 \text{ (6 мин)}.$$

Точное значение $F_1 = 1$.

$$F_2 = \int\limits_0^\infty x e^{3x-x^2}\,dx = \begin{cases} 25{,}29458, & L=0{,}5, \quad t=1{,}3 \text{ (3 мин)},\\ 25{,}2977433, & L=0{,}2, \quad t=1{,}3 \text{ (5 мин)}. \end{cases}$$

Точное значение $F_2 = 25{,}29736\ldots$ (см. программу 10.27).

$$F_3 = \int\limits_0^\infty e^{-x} \sin(3x+2)\,dx = \begin{cases} -0{,}033484911, & L=0{,}5, \quad t = 1{,}1 \text{ (8,5 мин)},\\ -0{,}033904572, & L=0{,}2, \quad t = 1{,}1 \text{ (12 мин)}. \end{cases}$$

Точное значение $F_3 = -\,0{,}0339143\ldots$ (см. программу 10.25). Подпрограмма $f(x)$ для интеграла F_3:

/—/ Fe^x 2 FBx 3 × — Fsin × В/О

Программа 10.30. Вычисление интеграла $\int\limits_a^\infty f(x)\,dx$ по формулам (10.38), (10.39) с переменным масштабом L_N (10.41), (10.42) при заданных L, t и числе интервалов N в формуле (10.39). S_N рассчитываются по квадратурной формуле Чебышева (10.5), (10.6), (10.8) при $n = 6$.

ПД	2	÷	ПВ	0	ПД	6	П0	КИП0	/—/
ПС	1	+	ИПВ	×	ИПА	+	ПП	45	ИПВ
×	ИПД	+	ПД	ИПС	Fx≥0	09	FL0	08	ИПА
ИПВ	2	×	+	ПА	ИП9	ИПВ	×	ПВ	FL2
06	ИПД	3	÷	С/П	...	...	...	...	...
...	...	...	...	...	...	В/О			

Инструкция
1. Подпрограмма $f(x)$:
адрес первой команды 45, $n_{max} = 53$, в конце подпрограммы поставить В/О;
регистры свободные: Р4, Р6 — Р8;
аргумент x — в регистре РХ, результат: $PX = f(x)$.
2. Исходные данные: ($y_1 = 8{,}6624682 \cdot 10^{-1} = P1$, $y_2 = 4{,}2251865 \cdot 10^{-1} = P3$,

$y_3 = 2{,}666354 \cdot 10^{-1} = P5$, $t = P9$), $a = PA$, $N = P2$, $[L = PX]$.

3. Пуск: В/О С/П.

4. Результат: $PX = F$, $PA = \mathscr{L}$ ($\mathscr{L} = L_1 + L_2 + \ldots + L_N$ — суммарная длина интегрирования в (10.39)).

Примеры

$$F_1 = \int\limits_0^\infty e^{-x}\sin(3x+2)\,dx = \begin{cases} -0{,}034048246, & L = 0{,}6,\ t = 1{,}2,\ N = 7 \text{ (8 мин)}, \\ -0{,}03391464, & L = 0{,}6,\ t = 1{,}2,\ N = 10 \text{ (11,5 мин)}. \end{cases}$$

Точное значение $F_1 = -0{,}0339143\ldots$ (см. программу 10.25).

$$F_2 = \int\limits_0^\infty x e^{3x - x^2}\,dx = \begin{cases} 25{,}30059, & L = 1{,}7,\ t = 1{,}1,\ N = 3 \text{ (3 мин)}, \\ 25{,}29733, & L = 0{,}7,\ t = 1{,}2,\ N = 5 \text{ (3,5 мин)}. \end{cases}$$

Точное значение $F_2 = 25{,}29736\ldots$ (см. программу 10.27).

$$F_3 = \int\limits_1^\infty \frac{dx}{x^2} = \begin{cases} 0{,}9992484, & L = 0{,}7,\ t = 5,\ N = 7 \text{ (5 мин)}, \\ 0{,}99999393, & L = 0{,}5,\ t = 2{,}2,\ N = 18 \text{ (12,5 мин)}. \end{cases}$$

Точное значение $F_3 = 1$. Подпрограмма $f(x)$ для последнего примера:

Fx² F1/x В/О

Судя по приведенным примерам, данная программа по сравнению с программами 10.27—10.29 обеспечивает максимальную скорость сходимости при подходящем выборе L, t, N.

10.6. Интегралы от функций комплексного переменного

Приводятся программы вычисления следующих интегралов.
Интеграл по прямой, соединяющей точки $a = a_1 + ja_2$ и $b = b_1 + jb_2$.

$$F_1 = \int\limits_a^b f(z)\,dz. \tag{10.44}$$

Интеграл по дуге окружности единичного радиуса:

$$F_2 = \int\limits_c f(z)\,dz. \tag{10.45}$$

Несобственный интеграл:

$$F_3 = \int\limits_a^\infty f(z)\,dz, \tag{10.46}$$

где $a = a_1 + j\,a_2$; $(\operatorname{Re} z)_{z\to\infty} > 0$.

Выразим (10.44)—(10.46) через вещественные интегралы. В случае (10.44

$$z = a_1 + t + j(a_2 + kt), \tag{10.47}$$

где t — вещественная переменная на отрезке $[0, b_1 - a_1]$;

$$k = (b_2 - a_2)/(b_1 - a_1). \tag{10.48}$$

Тогда

$$F_1 = (1 + jk)\int\limits_0^{b_1 - a_1} f[a_1 + t + j(a_2 + kt)]\,dt. \tag{10.49}$$

Интеграл F_1 находится как линейная функция двух вещественных интегралов

$$\int\limits_0^{b_1 - a_1} \operatorname{Re} f(z)\,dt \quad \text{и} \quad \int\limits_0^{b_1 - a_1} \operatorname{Im} f(z)\,dt.$$

В программе 10.31 используется формула Гаусса — Чебышева, применимая при наличии устранимых разрывов $f(z)$ в точках $z = a$, b. Отдельно реализуется случай $a = 0$, для которого сокращается длина программы и увеличивается число регистров памяти на программирование $f(z)$.

Аналогичен расчет интеграла (10.45). Будем в качестве вещественной переменной использовать полярный угол φ. На единичной окружности $z = e^{j\varphi}$ и интеграл (10.45) принимает вид

$$F_2 = \int\limits_0^{\varphi_b} j\,e^{j\varphi} f(e^{j\varphi})\,d\varphi = \int\limits_0^{\varphi_b} (-\sin\varphi + j\cos\varphi)\, f(\cos\varphi + j\sin\varphi)\,d\varphi \tag{10.50}$$

(для простоты отсчет φ ведется от нуля).

В несобственном интеграле (10.46) в качестве линии интегрирования выбирается полупрямая, идущая из точки a в ∞ параллельно оси абсцисс. В результате

$$F_3 = \int\limits_0^\infty f(a_1 + t + j\,a_2)\,dt. \tag{10.51}$$

Процедура вычисления всех таких интегралов (10.49) — (10.51) одинакова: в каждом узле (10.11) квадратурной формулы Гаусса — Чебышева вычисляются действительные и мнимые части подынтегральных функций, которые затем суммируются отдельно, определяя приближенные значения действительных и мнимых частей искомых интегралов. Число узлов N является задаваемым параметром. При вычислении интеграла (10.51) должна также задаваться граница $\mathscr{L}$ переменной t как верхний предел интеграла, которая оценивается из условия достаточной малости $|f(a_1 + \mathscr{L} + j\, a_2)|$.

Несколько отличный способ преобразования комплексных интегралов в вещественные применен при вычислении интегральных показательных функций $E_n(z)$ (§ 3.1, программа 3.11), интегральных тригонометрических и гиперболических функций комплексного аргумента (§ 3.2, программы 3.18, 3.19) и интегралов Френеля (§ 4.2, программа 4.17). Сравнительная простота подынтегральных функций позволила в этих случаях применить квадратурные формулы Чебышева, ускоряющие сходимость.

Приведенный здесь алгоритм имеет преимущества для более сложных функций $f(z)$, когда наибольшее значение имеет число свободных регистров памяти и команд, которые можно использовать для программирования $f(z)$.

Программа 10.31. Вычисление интеграла $F_1 = \int\limits_a^b f(z)\, dz$, $z = x + j\, y$, $a = a_1 + j\, a_2$, $b = b_1 + j\, b_2$, по формулам (10.48), (10.49) и квадратурной формуле Гаусса — Чебышева (10.14), (10.11), $b_1 - a_1 \neq 0$.

÷	П8	КИП0	3	F√	F1/x	/—/	П5	ИП0	+
ИП8	×	ИПА	XY	+	П6	FBx	ИПВ	×	ИП9
+	П7	...	...	...	...	...	...	...	...
...	...	БП	57	...	...	...	ИПС	+	ПС
П1	XY	ИПД	+	ПД	П2	ИП5	Fx ⩾ 0	06	FL0
02	ИПВ	ИП8	×	FBx	ПП	78	С/П	XY	FBx
ИП2	×	XY	ИП1	XY	×	FBx	F,	+	ИП1
XY	F,	×	XY	ИП2	×	—	В/О		

Инструкция

1. Подпрограмма $f(z)$:
адрес первой команды 22, последней — 56 (при $n_{max} = 35$), если адрес последней команды подпрограммы меньше 55, то в конце ее поставить БП 57; окончание основной программы начинается с адреса 57;
регистры: свободные Р3, Р4; оперативные Р1, Р2, содержимое Р1, Р2 сохраняется только на одном шаге интегрирования;
аргумент $z = x + j\, y$ к началу подпрограммы: y = РХ, Р7, x = РY, Р6, результат: $\mathrm{Re}\, f(z)$ = РХ, $\mathrm{Im}\, f(z)$ = РY.

При программировании $f(z)$ можно использовать подпрограмму перемножения комплексных чисел $w_1 + j\, w_2 = (u_1 + j\, u_2)(v_1 + j\, v_2)$. Подпрограмма вызывается командой ПП 78. Перед вызовом v_1 и v_2 заносятся соответственно в регистры Р1, Р2, а u_1, u_2 — в РХ, РY. Результат умножения: w_1 — в РХ, w_2 — в РY.

2. Исходные данные: (a_1 = РА, a_2 = Р9, k = РВ), 0 = РС = РД, [$b_1 - a_1$ = Р1, $2N$ = Р0]. Здесь k определено (10.48).
3. Пуск: В/О С/П.
4. Результат: РХ = $\mathrm{Re}\, F_1$, РY = $\mathrm{Im}\, F_1$.

Пример.

$$F_1 = \int\limits_{2+j}^{3+j5} z^2\, dz = \begin{cases} -66{,}66667 - j\, 0{,}333332, & 2N = 2, \quad t = 45\ \text{с}; \\ -66{,}666665 - j\, 0{,}333333, & 2N = 8, \quad t = 2{,}5\ \text{мин}. \end{cases}$$

Точный результат $F_1 = -(200 + j)/3$.

Быстрая сходимость вычислений объясняется в данном случае тем, что квадратура Гаусса — Чебышева точная для многочленов до третьего порядка включительно (ср. (10.9) при $n = 2$). Подпрограмма $f(z)$:

П2 XY П1 ПП 78 БП 57

Программа 10.32. Вычисление интеграла $F_0 = \int\limits_0^b f(z)\, dz$, $z = x + j\, y$, $b = b_1 + j\, b_2$ ((10.48), (10.49) при $a_1 = a_2 = 0$ и квадратурная формула Гаусса — Чебышева (10.14), (10.11)), $b_1 \neq 0$.

÷	П8	КИП0	3	F√	F1/x	/—/	П5	ИП0	+
ИП8	×	П3	ИПВ	×	П4	...	...	...	...
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
...	...	БП	57	...	...	...	ИПС	+	ПС
П9	XY	ИПД	+	ПД	ПА	ИП5	Fx ⩾ 0	06	FL0
02	ИПВ	ИП8	×	FBx	ПП	78	С/П	XY	FBx
ИПА	×	XY	ИП9	XY	×	FBx	F,	+	ИП9
XY	F,	×	XY	ИПА	×	—	В/О		

Инструкция

1. Подпрограмма $f(z)$:
адрес первой команды 16, последней — 56 (при $n_{max} = 41$), если адрес последней команды меньше 55, то в конце подпрограммы поставить БП 57; окончание основной программы начинается с адреса 57 (команда ИПС);
регистры: свободные Р1, Р2, Р6, Р7; оперативные Р9, РА; содержимое Р9, РА сохраняется только на одном шаге интегрирования;
аргумент $z = x + j\, y$ к началу подпрограммы: y = РХ, Р4, x = Р3, результат: $\mathrm{Re}\, f(z)$ = РХ, $\mathrm{Im}\, f(z)$ = РY.

При программировании $f(z)$ можно использовать подпрограмму перемножения комплексных чисел: $w_1 + j\, w_2 = (u_1 + j\, u_2)(v_1 + j\, v_2)$. Подпрограмма вызывается командой ПП 78. Перед вызовом v_1 и v_2 заносятся соответственно в регистры Р9, РА, а u_1 и u_2 — соответственно в РХ, РY. Результат умножения: w_1 — в РХ, w_2 — в РY.

2. Исходные данные: ($k = b_2/b_1$ = РВ), 0 = РС = РД, [b_1 = Р9, $2N$ = Р0].
3. Пуск: В/О С/П.
4. Результат: РХ = $\mathrm{Re}F_0$, РY = $\mathrm{Im}F_0$.

Пример.

$$F_0 = \int\limits_0^{3+j5} \cos^2 z\, dz = \begin{cases} -770{,}516 + j\, 2646{,}8301, & 2N = 16, \quad t = 7\ \text{мин}, \\ -767{,}9873 + j\, 2646{,}1953, & 2N = 32, \quad t = 13\ \text{мин}, \\ -767{,}827 + j\, 2646{,}1473, & 2N = 64, \quad t = 26\ \text{мин}. \end{cases}$$

Точное значение $F_0 = 0{,}5\,(z + 0{,}5 \sin 2z)_{z = 3+j5} = -767{,}817\ldots + j\, 2646{,}1447$.

Подпрограмма $f(z) = \cos^2 z$:

Fe^x	F1/x	FBx	П9	+	2	÷	↑	ИП9	—
ИП3	Fsin	×	ПА	XY	ИП3	Fcos	×	П9	ПП
78	БП	57							

Здесь за основу взята программа 1.41 для cos и используется подпрограмма перемножения (ПП 78).

Программа 10.33. Вычисление интеграла $F_2 = \int f(z)\,dz$ по дуге окружности единичного радиуса $z = x + c\,j\,y = e^{j\varphi}$, где φ изменяется от 0 до φ_b, по формуле (10.50) и квадратурной формуле Гаусса — Чебышева (10.14), (10.11).

÷	П8	КИП0	3	F$\sqrt{\ }$	F1/x	/—/	ПВ	ИП0	+
ИП8	×	F sin	П4	FBx	F cos	П3	...	...	...
...	...	...	...	...	...	БП	53	...	...
...	...	...	П9	XY	ПА	ИП3	ИП8	×	ИП4
ИП8	×	/—/	ПП	78	ИПС	+	ПС	XY	ИПД
+	ПД	ИПВ	Fx$\geqslant$0	06	FL0	02	С/П	XY	FBx
ИПА	×	XY	ИП9	XY	×	FBx	F,	+	ИП9
XY	F,	×	XY	ИПА	×	—	В/О		

Инструкцня

1. Подпрограмма $f(z)$:

адрес первой команды 17, последней 52 (прн $n_{max} = 36$), если адрес последней команды подпрограммы меньше 51, то в конце ее поставить БП 53, окончание основной программы начинается с адреса 53 (команда П9);
регистры: свободные Р1, Р2, Р5—Р7, оперативные Р9, РА, содержимое Р9, РА сохраняется только на одном шаге интегрирования;
аргумент $z = x + j\,y$ к началу подпрограммы: x = РХ, Р3, y = РY, Р4, результат: Re $f(z)$ = РХ, Im $f(z)$ = РY.

При программировании $f(z)$ можно использовать подпрограмму перемножения комплексных чисел $w_1 + w_2 = (u_1 + u_2)(v_1 + j\,v_2)$. Подпрограмма вызывается командой ПП 78. Перед вызовом v_1 и v_2 заносятся соответственно в регистры Р9, РА, а u_1 и u_2 — в РХ, РY. Результат умножения: w_1 — в РХ, w_2 — в РY.

2. Исходные данные: 0 = РС = РД, [φ_b = Р9, $2N$ = Р0].
3. Пуск: В/О С/П.
4. Результат: РС = ReF_2, РД = Im F_2.

Пример.

$$F_2 = \oint \frac{dz}{z-1/2} = \begin{cases} -1{,}7\cdot10^{-7} + j\,6{,}2890054, & 2N = 16, \quad t = 6{,}5 \text{ мин}, \\ 4\cdot10^{-8} + j\,6{,}2832072, & 2N = 32, \quad t = 13{,}5 \text{ мин}, \\ 3{,}02\cdot10^{-7} + j\,6{,}2831856, & 2N = 64, \quad t = 27 \text{ мин}. \end{cases}$$

Точный результат равен по теореме о вычетах $F_2 = j\,2\pi = 0 + j\,6{,}2831852$. Подпрограмма $f(z)$:

2	F1/x	—	П1	XY	/—/	↑	Fx²	ИП1	Fx²
+	÷	ИП1	FBx	÷	БП	53		

Программа 10.34. Вычисление интеграла $F_3 = \int\limits_a^{\infty} f(z)\,dz$, $z = x + j\,y$, $a = a_1 + j\,a_2$. Интегрирование ведется по полупрямой $y = a_2$ от $x = a_1$ до $+\infty$. Формула (10.51) и квадратурная формула Гаусса — Чебышева (10.14), (10.11) при заданных числе N шагов интегрирования и верхнем пределе $\mathscr{L}$ в интеграле (10.51).

÷	ПВ	0	ПС	ПД	КИП0	3	F$\sqrt{\ }$	F1/x	/—/
П9	ИП0	+	ИПВ	×	ИПА	+	П3	ПП	39
ИПС	+	ПС	XY	ИПД	+	ПД	ИП9	Fx$\geqslant$0	09
FL0	05	F,	ИПВ	×	XY	ИПВ	×	С/П	...
...	...	...	...	...	...	В/О			

Инструкция

1. Подпрограмма $f(z)$:
адрес первой команды 39, n_{max} = 59, в конце подпрограммы поставить В/О;
регистры свободные: Р1, Р2, Р5 — Р8;
аргумент $z = x + j\,y$ к началу подпрограммы: x = РХ, Р3, y = РY;
результат: Re $f(z)$ = РХ, Im $f(z)$ = РY.
2. Исходные данные: (a_1 = РА, a_2 = Р4), [$\mathscr{L}$ = Р9, $2N$ = Р0].
3. Пуск: В/О С/П.
4. Результат: РХ = Re F_3, РY = Im F_3.

Пример.

$$F_3 = \int\limits_{2+j}^{\infty} e^{-z}\,dz = \begin{cases} 0{,}067546365 - j\,0{,}10519723, & \mathscr{L} = 20, \quad 2N = 8, \quad t = 2 \text{ мин}, \\ 0{,}073082612 - j\,0{,}11381943, & \mathscr{L} = 20, \quad 2N = 32, \quad t = 8 \text{ мин}. \end{cases}$$

Точный результат: $F_3 = e^{-(2+j)} = 0{,}073121969 - j\,0{,}11388073$. Подпрограмма $f(z) = e^{-z}$:

Fe^x	F1/x	ИП4	/—/	F sin	XY	×	FBx	ИП4	Fcos
×	В/О								

Указатель программ

Номер программы	Метод	Порядок погрешности	Максимальное число шагов в подпрограмме	Число свободных регистров памяти	Коррекция точности	Примечание
10.1	Трапеций	2	69	10	N	
10.2	Трапецнй	2	46	6	ε	Дробление шага сохраняет предыдущие узлы
10.3	Прямоугольников	2	74	10	N	
10.4	Прямоугольников	2	52	6	ε	
10.5	Симпсона	4	63	10	N	
10.6	Симпсона	4	67	10	N	Отдельный расчет $f(a)$ или $f(b)$
10.7	Симпсона	4	76	9	N	Отдельный расчет $f(a)+f(b)$ и домножение результата иа $h/3$
10.8	Симпсона	4	38	5	ε	Дроблеиие шага сохраняет предыдушие узлы
10.9	Гаусса	19	64	—	—	
10.10	Гаусса	15, 11, 7	63	1, 3, 5	—	
10.11	Гаусса	11, 7	58	2, 4	N	
10.12	Чебышева	7, 5	63	5, 6	N	

Номер программы	Метод	Порядок погрешности	Максимальное число шагов в подпрограмме	Число свободных регистров памяти	Коррекция точности	Примечание
10.13	Чебышева	7, 5	67	7, 6	N	Нулевой нижний предел
10.14	Гаусса—Чебышева	4	68	9	N	
10.15	Гаусса—Чебышева	4	47	5	ε	
10.16	Чебышева	7	44	1	N	Двухшаговый вариант с выбором промежуточной точки
10.17	Гаусса—Чебышева	4	49	5	N	То же
10.18	Чебышева	7	36	2	N	Двухшаговый вариант

Номер программы	Интеграл	Метод	Максимальное число шагов в подпрограмме	Число свободных регистров памяти	Коррекция точности
10.19	$F(m, n) = \int_a^b \frac{\varphi(x)\,dx}{(x-a)^m (b-x)^n}$	Прямое интегрирование по составной формуле Чебышева	33	1	Изменение числа частных интервалов
10.20	$F(m, n)$	Формула Симпсона с выделением особенностей на концах промежутка	20	4	Измененне числа шагов интегрировання
10.21	$F(m, 1/2)$ или $F(1/2, n)$	То же	25	6	То же
10.22	$F(1/2, 1/2)$	Преобразование интеграла и составная формула Гаусса — Чебышева	57	7	Измененне числа частных интервалов
10.23	$F(m, 0)$ или $F(0, n)$	Формула Симпсона с выделением особенностей на концах промежутка	25	6	Изменение числа шагов интегрироваиия
10.24	$F_{гл} = VP \int_a^b \frac{\varphi(x)\,dx}{x-c}$	Модифицированная формула Симпсона	30	6	То же

Номер программы	Интеграл	Метод	Максимальное число шагов в подпрограмме	Число свободных регистров памяти	Коррекция точности
10.25	$F_1 = \int_a^{\infty} e^{-x} \varphi(x)\,dx$	Формула Лагерра	74	3	—
10.26	$F_2 \equiv \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \times \varphi(x)\,dx$	Формула Эрмита	70	2 при $n=8$, 4 при $n=6$	Переход от $n=6$ к $n=8$
10.27	$F_a = \int_a^{\infty} f_x(dx)$	Последовательность частных интервалов и квадратура Гаусса — Чебышева	59	8	Изменение длины L частных интервалов
10.28	F_a	Последовательность частных интервалов и квадратура Чебышева	52	5	То же
10.29	F_a	Последовательность частных интервалов переменной длины и квадратура Гаусса — Чебышева	47	6	Изменение начальной длины частных интервалов и масштаба растяжения
10.30	F_a	Задание числа частных интервалов переменной длины и квадратура Чебышева	53	4	Изменение числа интервалов, их начальной длины и масштаба растяжения
10.31	$F_1 = \int_a^b f(z)\,dz$	Сведение интеграла к вещественному и квадратура Гаусса — Чебышева	35	4	Изменение числа частных интервалов
10.32	$F_0 = (F_1)_{a=0}$	То же	41	6	То же
10.33	$F_2 = \int_c f(z)\,dz$	—»—	36	7	»
10.34	$F_3 = \int_a^{\infty} f(z)\,dz$	Интегрирование по полупрямой, идущей параллельно оси x от начальной точки в ∞, и квадратура Гаусса—Чебышева	59	6	Измененне числа частных интервалов

Приложение 1

Интерполяция функций по Лагранжу

Приводятся две программы вычисления функций $F(x)$ по *интерполяционным формулам Лагранжа для равноотстоящих узлов*:

$$h^{n-1}F(x)=\frac{(x-x_2)(x-x_3)\dots(x-x_n)}{(-1)(-2)\dots[-(n-1)]}F_1+\frac{(x-x_1)(x-x_3)\dots(x-x_n)}{1\cdot(-1)(-2)\dots[-(n-2)]}F_2+$$
$$+\frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_4)\dots(x-x_n)}{1\cdot 2\cdot(-1)(-2)\dots[-(n-3)]}F_3+\dots+\frac{(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_{n-1})}{1\cdot 2\dots(n-1)}F_n. \qquad (\text{П}1.1)$$

Здесь $F_k=F(x_k)$ — задаваемые значения функций в узлах интерполяции $x=x_k$; $h=x_{k+1}-x_k$, $k=1,2,\dots,n-1$.

В программе П1.1 число узлов фиксировано и равно 10. Программа П1.2 рассчитаиа на работу с числом узлов $2\leqslant n\leqslant 9$. Перед началом вычислений в память ПМК вводятся значения F_k $(k=1,2,\dots,n)$, а также абсцисса первого узла x_1 и шаг h. При повторении вычнслений с разными x вводятся вновь только x, а также x_1 и h. Значения F_k сохраняются в соответствующих регистрах памяти. По окончанни счета выдаются интерполированные значения $F(x)$.

Время счета примерно пропорционально n^2. Для $n=10$ время счета одного значения $F(x)$ около 9 мин.

Программа П1.1. Вычисление функции $F(x)$ по ннтерполяционной формуле Лагранжа (П1.1) прн числе узлов $n=10$.

↑	1	4	П3	F,	БП	08	С/П	КП3	БП
07	ИП0	—	ИП1	÷	П2	1	0	П0	0
П1	1	0	П3	1	ИП2	1	0	—	ИП3
+	ИП3	ИП0	—	Fx≠0	41	F1/x	×	×	БП
43	F,	F,	FL3	25	4	ИП0	+	П3	F,
КИП3	×	ИП1	+	П1	FL0	21	С/П		

Инструкция

1. Ввод значений функций в узлах $F_k=F(x_k)$ $(k=1,2,\dots,10)$:

F_1 В/О С/П, F_2 С/П, F_3 С/П, ..., F_9 С/П, F_{10} С/П.

Введенные значения F_k располагаются в следующнх регистрах памяти: $F_1=$ РД, $F_2=$ РС, $F_3=$ РВ, ..., $F_9=$ Р5, $F_{10}=$ Р4 — и не изменяются при повторенин вычислений с разными x.

2. Ввод оперативных данных (повторяется прн каждом x): $x_1=$ Р0, $h=$ Р1, $[x=$ РХ$]$.
3. Пуск: БП 11 С/П.
4. Результат: РХ $=F(x)$.
5. Регистры: рабочие Р4 — РД; оперативные Р0 — Р3; свободных нет.

Пример. Вычисленне $F(x)=\sin x$ по известным значениям $\sin x$ в точках $x_k=(k-1)\,30°$, $k=1,2,\dots,10$:

$$F_1=\sin 0=0,\quad F_2=\sin 30°=0{,}5,\quad F_3=\sin 60°=\sqrt{3}/2,\quad\dots,\quad F_9=\sin 240°=$$
$$=-\sqrt{3}/2,\quad F_{10}=\sin 270°=-1.$$

Результаты интерполяции:

$\sin 45°=0{,}7071084$ (0,707106781 [9]); $\sin 112°=0{,}92718409$ (0,92718389);

$\sin 135°=0{,}70710656$ (0,707106781 [9]); $\sin 220°=-0{,}64278633$ ($-0{,}64278765$),

Для второго и последнего примеров значения в скобках получены по стандартной команде Fsin. Как видно, в средней частн ннтервала интерполяции (0—270°) погрешность $\delta\approx 1\cdot 10^{-7}$, а на краях $\delta\approx 1\cdot 10^{-6}$.

Программа П1.2. Вычисление функции $F(x)$ по интерполяционной формуле Лагранжа (П1.1) при заданном числе узлов $2\leqslant n\leqslant 9$.

↑	1	4	П3	F,	БП	08	С/П	КП3	БП
07	ИП0	—	ИП1	÷	П2	0	П1	ИПД	П0
ИПД	П3	1	ИП2	ИПД	—	ИП3	+	ИП3	ИП0
—	Fx≠0	38	F1/x	×	×	БП	40	F,	F,
FL3	23	1	3	ИП0	+	ИПД	—	П3	F,
КИП3	×	ИП1	+	П1	FL0	20	С/П		

Инструкцня

1. Ввод порядка интерполяции n и значенй функций в узлах $F_k=F(x_k)$ $(k=1,2,\dots,n)$; n В/О С/П, F_1 С/П, F_2 С/П, ..., F_n С/П. Введенные значения располагаются в следующих регистрах памяти: $n=$ РД, $F_1=$ РС, $F_2=$ РВ, ..., $F_n=$ Р $(13-n)$ (номера 10, 11, 12, 13 прнсванваются регистрам РА — РД соответственно). Значения n, F_k сохраняются в регистрах памяти при повторении вычнсленй с разнымн x.
2. Ввод оперативных данных (повторяется при каждом x): $x_1=$ Р0, $h=$ Р1, $[x=$ РХ$]$.
3. Пуск: БП 11 С/П.
4. Результат: РХ $=F(x)$.
5. Регистры: рабочне РД, РС, ..., Р $(13-n)$; оперативные Р0 — Р3; свободные Р4 — Р $(12-n)$. При $n=9$ свободных регистров нет.
6. Время счета $t\approx(0{,}3+n^2/12)$ мин.

Примеры. Расчет $\sin 15°$ при разных n. Выбираем узлы ннтерполяцни: $x_1=0$, $x_2=30°$, $x_3=60°$, ... $(x_1=0,\ h=30°)$. При $n=2$ вводнм значения $F_1=0$ н $F_2=0{,}5$; при $n=4$ добавляем к ним $F_3=\sqrt{3}/2$, $F_4=1$; прн $n=6$ вводятся шесть значенй F_k: $F_1=0$, $F_2=0{,}5$, $F_3=\sqrt{3}/2$, $F_4=1$, $F_5=\sqrt{3}/2$, $F_6=0{,}5$ и т. д.

Результаты интерполяцин $\sin 15°$:

0,25, $n=2$, $t=30$ с; 0,26061706, $n=4$, $t=1$ мин 40 с;

0,25845124, $n=6$, $t=3{,}5$ мин; 0,25888729, $n=8$, $t=5$ мин 40 с;

0,25882894, $n=9$, $t=7$ мин.

Точное значение $\sin 15°=0{,}25881903\dots$

Приложение 2

Интеграл вероятностей $w(z)=e^{-z^2}\left(1+\frac{2j}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^z e^{t^2}dt\right)$

Прнводятся программы вычисления значенй функций $w(z)$, охватывающих в совокупности первый квадрант плоскости комплексного переменного $z=x+jy$. Значения $w(z)$ в полной плоскости z находятся с помощью формул приведения (4.27), (4.27) функцни erfc z, связанной с $w(z)$ соотношением

$$w(z)=e^{-z^2}\ \mathrm{erfc}\ (-jz)=e^{u^2}\ \mathrm{erfc}\ u,\quad u=y-jx. \qquad (\Pi 2.1)$$

Из (П2.1), а также из соотношений гл. 4 для erfc z и erf z вытекают следующие формулы для $w(z)$:

разложение в ряд (4.11) по схеме Горнера (4.14) и (4.2)

$$w(z)=\sqrt{\frac{4}{\pi}}\,e^{u^2}\left\{\sqrt{\frac{\pi}{4}}-u\left[\left[\ldots\left[\left(\frac{-u^2}{N(2N+1)}+\frac{1}{2N-1}\right)\frac{-u^2}{N-1}+\right.\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.\left.+\frac{1}{2N-3}\right]\frac{-u^2}{N-2}+\ldots+\frac{1}{3}\right]\frac{-u^2}{1}+1\right]\right\},\quad u=y-jx,\quad N=12+|z|^2; \qquad (\Pi 2.2)$$

разложение в непрерывную дробь (4.19), (4.20)

$$w(z)=1/[\sqrt{\pi}\,A_1(u)],\quad u=y-jx, \qquad (\Pi 2.3)$$

где $A_1(u)$ определяется по рекуррентной формуле (4.21) и формуле (4.23в) при $N=27$;

разложение в асимптотический ряд

$$w(z)=\frac{j}{z\sqrt{\pi}}\left[\left[\ldots\left[\left(\frac{2N-1}{2z^2}+1\right)\frac{2N-3}{2z^2}+1\right]\frac{2N-5}{2z^2}+\ldots\right.\right.$$

$$\left.\left.\ldots+1\right]\frac{1}{2z^2}+1\right],\quad N=9. \qquad (\Pi 2.4)$$

Практически для получения $w(z)$ в первом квадранте с относительной погрешностью, не превышающей $1\cdot10^{-6}$, достаточно (П2.2) и (П2.3). Однако асимптотическое разложение обеспечивает по сравнению с (П2.2), (П2.3) минимальное время счета без снижения точности (при $|z|\geqslant 4$). Формула (П2.2) в целом применима при малых $|z|$ (см. инструкцию к программе П2.1), но в окрестности действительной оси ($\mathrm{Im}\,z\leqslant 1$) эта формула обеспечивает точность порядка 10^{-6} вплоть до $|z|=4{,}5$ и дальше. Это весьма существенно, так как разложение в непрерывную дробь (П2.3), применимое в общем как при больших, так и при малых $|z|$, теряет точность в окрестности действительной оси при $|z|<4$.

Программа П2.1. Интеграл вероятности $w(z)$. Разложение в ряд по схеме Горнера (П2.2).

П6	ПА	XY	/—/	П7	ПВ	XY	ПП	80	/—/
ПА	/—/	Fe^x	1	Farctg	F√	П5	÷	XY	/—/
ПВ	/—/	Fsin	XY	×	П9	FBx	ИПВ	Fcos	×
П8	1	2	ИП6	Fx^2	ИП7	Fx^2	+	2	×
+	П0	0	Fπ	ИП0	÷	XY	ИП0	÷	XY
ПП	80	ИП0	2	×	1	—	F1/x	+	FL0
44	ПА	XY	ПВ	ИП7	ИП6	ПП	80	/—/	ИП5
+	ПА	XY	/—/	ПВ	ИП9	ИП8	ПП	80	С/П
ПС	ИПВ	×	XY	ПД	ИПА	×	+	ИПС	ИПА
×	ИПД	ИПВ	×	—	В/О				

Инструкция

1. Исходные данные: [x = РХ, ↑, y = РХ].
2. Пуск: В/О С/П.
3. Результат: РХ = Re $w(z)$, PY = Im $w(z)$.
4. Регистры: рабочие — ; оперативные Р0, Р5 — РД; свободные Р1—Р4.

5. Погрешность относительная меньше $2\cdot10^{-6}$ при $|z|\leqslant 1{,}4$ или при $|z|\leqslant 4{,}5$, Im $z\geqslant 1$.
6. Время счета $t\approx(2{,}5+0{,}4\,|z|^2)$ мин.

Примеры.

$w(4+j)=0{,}03628121+j\,0{,}13583874$ $(0{,}036281+j\,0{,}135839)$, $t=9$ мин;
$w(1+j)=0{,}3047443+j\,0{,}20821892$ $(0{,}304744+j\,0{,}208219)$, $t=3{,}5$ мин.

Программа П2.2. Интеграл вероятности $w(z)$. Разложение в непрерывную дробь (П2.3), (4.19) — (4.21), (4.23в).

ПС	XY	/—/	ПВ	2	7	П0	2	÷	F√		
ИПС	2	÷	+	ПД	ИПВ	2	÷	ПП	37		
ИПС	+	ПД	XY	ИПВ	+	FL0	18	1	Farctg		
F√	F1/x	П0	F,	ПП	37	С/П	/—/	↑	Fx^2		
ИПД	Fx^2	+	ИП0	2	÷	÷	÷	ИПД	FBx	÷	В/О

Инструкция

1. Исходные данные: [x = РХ, ↑, y = РХ].
2. Пуск: В/О С/П.
3. Результат: РХ = Re $w(z)$, PY = Im $w(z)$.
4. Регистры: рабочие —; оперативные Р0, РВ — РД; свободные Р1—РА.
5. Погрешность относительная меньше $1\cdot10^{-6}$ при Im $z\geqslant 0{,}9$, Re $z>0$ и при Im $z\geqslant 0$, $|z|\geqslant 3{,}5$.
6. Время счета: $t\approx 4{,}5$ мин.

Примеры.

$w(3{,}5+j\,0{,}1)=5{,}3400187\cdot10^{-3}+j\;0{,}168\,64518$ $(0{,}005340+j\;0{,}168645)$;
$w(1{,}2+j)=0{,}26618923+j\,0{,}22416770$ $(0{,}226189+j\,0{,}224168)$.

Числа в скобках — табличные данные из [25].

Программа П2.3. Интеграл вероятности $w(z)$. Разложение в асимптотический ряд (П2.3).

/—/	П7	XY	↑	Fx^2	ИП7	Fx^2	+	÷	ПА
ИП7	FBx	÷	ПВ	Fπ	F√	F1/x	×	/—/	П8
ИПА	FBx	×	П9	ИПВ	ИПА	ПП	58	ПА	XY
ПВ	9	П0	0	П7	ИП0	2	F1/x	—	×
FBx	ИП7	×	XY	ПП	58	1	+	FL0	35
ПА	XY	ПВ	ИП9	ИП8	ПП	58	С/П	ПС	ИПВ
×	XY	ПД	ИПА	×	+	П7	ИПА	ИПС	×
ИПВ	ИПД	×	—	В/О					

Инструкция

1. Исходные данные: [x = РХ, ↑, y = РХ].
2. Пуск: В/О С/П.
3. Результат: РХ = Re $w(z)$, PY = Im $w(z)$.
4. Регистры: рабочие —; оперативные Р0, Р7 — РД; свободные Р1 - Р6
5. Погрешность: относительная меньше $1\cdot10^{-6}$ при $|z|\geqslant 4{,}5$.
6. Время счета $t\approx 2$ мин.

Примеры.

$w(3+j4)=0{,}090933903+j\,0{,}065592327$ $(0{,}090934+j\;0{,}065592)$,
$w(0+j4)=0{,}33874315+j0$ $(0{,}338744+j\,0)$;
$w(0+j\,4{,}5)=0{,}12248482+j\,0$ $(0{,}122485+j0)$.

Числа в скобках — табличные данные из [25].

Список литературы

1. **Трохименко Я. К., Любич Ф. Д.** Радиотехнические расчеты на микрокалькуляторах.— М.: Радио и связь, 1983. —256 с.
2. **Цветков А. Н., Епанечников В. А.** Прикладные программы для мнкроЭВМ «Электроника Б3-34», «Электроника МК-56», «Электроннка МК-54» — М.: Финансы и статистика, 1984. — 175 с.
3. **Трохименко Я.К., Любич Ф. Д.** Инженерные расчеты на программнруемых микрокалькуляторах. — Киев: Техника, 1985. — 324 с.
4. **Цимриниг Ш. Е.** Специальные функцнн. Программы для микрокалькулятора «Электроника Б3-21» — М.: Радно н связь, 1983. — 120 с.
5. **Бейтмен Г.** и **Эрдейи А.** Высшие трансцендентные функцин. — В 3-х т. — М.: Наука, 1968.
6. **Градштейн И. С., Рыжик И. М.** Таблицы интегралов, сумм, рядов и пронзведений. — 4-е нзд. — М.: Физматгиз, 1963. — 1100 с.
7. **Янке Е., Эмде Ф., Лёш Ф.** Специальные функцнн.—2-е изд./Пер. с нем. под ред. Л. И. Седова. — М.: Наука, 1977. — 344 с.
8. **Корн Г., Корн Т.** Справочник по математнке для научных работников и инженеров: Пер. с англ./Под ред. И. Г. Арамановича. — М.: Наука, 1973.
9. **Справочник** по специальным функциям/Под ред. М. Абрамовица и И. Стнган; Пер. с англ. под ред. В. А. Диткина и Л. Н. Кармазиной. — М.: Наука, 1979.— 832 с.
10. **Люк Ю.** Специальные математические функцин и их аппроксимацин: Пер. с англ./Под ред. К. И. Бабенко. — М.: Мир, 1980. — 608 с.
11. **Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И.** Интегралы и ряды. Специальные функции. — М.: Наука, 1983. — 752 с.
12. **Лаврентьев М. А., Шабат Б. В.** Методы теории функций комплексного переменного. — 4-е изд. — М.: Наука, 1973. — 736 с.
13. **Микрокалькулятор** «Электроника Б3-34»: Руководство по эксплуатации. — Светловодск, 1980. — 156 с.
14. **Таблицы** функций Бесселя целого положительного индекса/ВЦ АН СССР.— М., 1960. — (Большие математнческие таблицы. Вып. 12).
15. **Дьяконов В. П.** Справочник по расчетам на микрокалькуляторах. — М.: Наука, 1985. — 224 с.
16. **Справочник** по волноводам: Пер. с англ./Под ред. Я.Н. Фельда. — М.: Сов. радио, 1952. — 431 с.
17. **Кратцер А., Франц В.** Трансцендентные функции. — М.: ИЛ, 1964. — 466 с.
18. **Форсайт Дж., Малкольм М., Коулер К.** Машинные методы математнческих вычислений: Пер. с англ. — М.: Мир, 1980. — 210 с.
19. **Бахвалов Н. С.** Численные методы. Т. 1. — М.: Наука, 1975. — 625 с.
20. **Хемминг В. Р.** Чнсленные методы.— 2-е изд. Пер. с англ./ Под ред. Р. С. Гутера. — М.: Наука, 1972. — 400 с.
21. **Калиткин Н. Н.** Численные методы. — М.: Наука, 1978. — 512 с.
22. **Копченова Н. В., Марон И. А.** Вычислительная математика в примерах и задачах. — М.: Наука, 1972. — 369 с.
23. **Мак-Кракен Д., Дорн У.** Численные методы и программирование на Фортране.— 2-е изд.: Пер. с англ./Под ред. Б. М. Наймарка. — М.: Мир, 1977.
24. **Таблицы** для вычисления функций Матье; собственные значения, коэффициенты и множители связи. — М.: ВЦ АН СССР. — 1967. — (Большие математические таблицы. Вып. 42).
25. **Раддеева В. Н., Терентьев Н. М.** Таблицы значений интеграла вероятностей от комплексного аргумента. — М.: ГИТТЛ, 1954. — 268 с.

Оглавление