Astronomical Formulae for Calculators

Second Edition
Enlarged & Revised

JEAN MEEUS
Vereniging voor Sterrenkunde Belgium

Foreword by
Roger W. Sinnott
of Sky and Telescope Magazine

Published by
Willmann-Bell, Inc.
P.O. Box 3125
Richmond, Virginia 23235 (804)
United States of America 320—7016

Ж. Меёс

Астрономические формулы для калькуляторов

Перевод с английского
канд.физ.-мат. наук А. С. Расторгуева
под редакцией
д-ра физ.-мат. наук, проф. В. Г. Курта

Москва «Мир» 1988

ББК 22.6
М42
УДК 52

Меёс Ж.

М42 Астрономические формулы для калькуляторов: Пер. с англ. — М.: Мир, 1988.—168 с., ил.

ISBN5-03-000936-1

В книге, написанной известным бельгийским специалистом, собраны формулы для расчетов, наиболее часто встречающихся в практике астрономов, включая перевод времени, преобразование систем координат, учет прецессии и нутации, определение элементов орбит, вычисление эфемерид и т. д. Формулы приведены в концентрированном виде, удобном для вычислений на программируемых калькуляторах, и позволяют достичь высокой точности.

Предназначена для астрономов — как любителей, так и профессионалов, включая студентов и аспирантов соответствующих специальностей, и будет полезна всем, кого интересуют вопросы практической астрономии.

М $\frac{1705020000-018}{041(01)-88}$ 83—87, ч. 1 ББК 22.6

Редакция литературы по физике и астрономии

ISBN5-03-000936-1 (русск.)
ISBN0-943396-01-8 (англ.)

Предисловие редактора перевода

Для современной астрономии характерно повсеместное внедрение карманных калькуляторов и настольных (персональных) компьютеров в практику астрономических вычислений. Раритетом стала логарифмическая линейка, верой и правдой служившая свыше 200 лет, запылились ручные и электрические арифмометры. Это закономерно и не удивительно. Удивительно другое — настольные (персональные) компьютеры все больше теснят большие ЭВМ. Конечно, суперкомпьютеры также быстро развиваются и не сдают своих позиций, находя применение при сложных и громоздких вычислениях или при обработке громадных банков данных. Однако для практических астрономических расчетов (астрометрия и небесная механика) очень часто вполне достаточны персональные или даже карманные компьютеры. Быстрота их прогресса поразительна. Современный персональный компьютер обладает оперативной памятью 64—512 кбайт, кассетным магнитофоном, винчестерским диском емкостью до 20 мбайт, гибким (floppy) диском емкостью до 1200 кбайт. Внешние устройства таких комплексов также разнообразны: цветной и(или) монохромный телевизионный дисплей, принтер и принтер-плоттер. Быстродействие таких ЭВМ также достаточно велико. Читатель может оценить быстродействие своей ЭВМ с помощью такой, например, программы:

```
10 : CLEAR : DEGREE
20 : FOR X = 1 TO 100
30 : Y = EXP (LN(ATN(TAN (45))))
40 : N EXT X
50 : PRINT Y
60 : END.
```

Если время, затрачиваемое на эту программу, будет меньше 10 с, то ваша ЭВМ получает «пятерку», меньше 30 с — «четверку», меньше 100 с — «тройку» и т. д. Современные персональные компьютеры имеют этот параметр на уровне 2—7 с.

Вполне естественно, книги, рассчитанные на читателя, применяющего такие ЭВМ, пользуются повышенным спросом. Поэтому не случайно издательство «Мир» предприняло перевод книги Жана Меёса «Астрономические формулы для калькуляторов», предлагаемой вниманию читателя. В отличие от выпущенной ранее этим издательством книги П. Даффет-Смита «Практическая астрономия с калькулятором», предназначенной в основном для астрономов-любителей, она будет полезна не только школьникам и студентам, но и специалистам по космической технике и всем профессиональным астрономам-практикам. В этой небольшой книге содержится очень полезный справочный материал, взятый в основном из оригинальных справочников Ньюкома, Брауна и др. При необходимости многие формулы и константы читатель может сам найти в фундаментальном «Справочном руководстве по небесной механике и астродинамике» под ред. Г. Н. Дубошина (М.: Наука, 1976), в книге В. К. Абалакина «Основы эфемеридной астрономии» (М.: Наука, 1979), либо в постоянной части «Астрономического календаря».

Конечно, не все разделы книги Ж. Меёса равноценны. Статистические методы (разд. 2 и 40) представлены лишь вкратце. Были бы очень полезны простые формулы для экстраполяции и интерполяции экспериментальных данных с помощью полинома достаточно высокой степени (например, 5—7), решения систем линейных алгебраических уравнений с 5—10 неизвестными, алгебраических уравнений до четвертой степени, поиски нулей функций и др. Впрочем, такие программы содержатся в описаниях почти всех персональных компьютеров. У нас выпускаются различные не программируемые и программируемые вычислительные устройства, доступные всем профессионалам и любителям. Хотя пока по некоторым характеристикам они не вполне удовлетворяют требованиям специалистов, эта отрасль техники бурно прогрессирует как в количественном, так и в качественном отношении. Формулы, приведенные в книге Ж. Меёса, легко поддаются программированию для таких калькуляторов. Для профессиональных астрономов можно рекомендовать более сложные персональные компьютеры: «Искра-226», ДВК, «АГАТ», «Электроника-БК-0010» и др. Основательно проработав книгу Ж. Меёса, читатель навсегда полюбит труд программиста. Он перестанет пользоваться на каждом шагу «Ежегодником», таблицами и другими печатными данными, а сможет самостоятельно очень быстро получать все необходимые значения с любым шагом и с достаточной точностью. Нужно только помнить о вреде лишней точности и всегда заранее определять число сохраняемых членов ряда. Не следует выводить на дисплей и на принтер лишние знаки, особенно если при вычислениях в них могли накопиться ошибки. Многие формулы читатель сам будет улучшать или модернизировать применительно к своей собственной ЭВМ. В качестве примера можно привести более простой способ вычисления юлианской даты JD (разд. 3), пригодный для дат позже 1582 г.:

$$JD = 367Y - INT(7(Y + INT((M + 9)/12))/4) + \\ + INT(275\ M/9) + D + 1721013{,}5,$$

где Y, M и D — год, месяц и день (с долями). Углы, изменяющиеся в пределах от $-90°$ до $+90°$, рекомендуется вычислять по их синусу, а углы, изменяющиеся от 0° до 360°,— по их косинусу с условием:

$$\mathrm{IF\ SIN\,A} \leqslant 0\ \ \mathrm{LET\,A} = 360 - \mathrm{A}.$$

К первому случаю относятся δ, b, β, h, z, ко второму — α, l, λ, A и т. д. Подобные рекомендации, содержащиеся во многих разделах книги, делают ее очень полезной в практическом отношении.

Почти все вычисления проверены на персональном компьютере SHARP PC-1112, причем формулы были запрограммированы на языке «BASIC». Часть более простых формул была опробована на отечественном карманном калькуляторе Б3-21 на языке RPN (обратная польская нотация), в котором отсутствует знак «=».

В заключение выразим уверенность, что эта книга станет настольным справочником для всех астрономов — как профессионалов, так и любителей.

В. Г. Курт
Май 1986 г.

Предисловие

Астрономию и вычислительную технику связывает длительное и плодотворное содружество. Рассказывают, что как-то, более 150 лет назад, молодого Чарльза Бэббиджа из Кембриджского университета (Англия) рассердили многочисленные ошибки в некоторых астрономических таблицах. «Хотелось бы, чтобы таблицы рассчитывали не люди, а паровые машины»,— проворчал он, на что его друг Джон Гершель заметил: «Это вполне возможно!».

Вероятно, этот-то случай и определил многолетний интерес Бэббиджа к конструированию и созданию различных вычислительных устройств — предков современных компьютеров. Вскоре после появления первого «электронного мозга» в начале 1950-х годов в число предназначенных для него задач были включены расчеты таблиц и эфемерид для астрономических альманахов.

Следующим крупным шагом стало создание в 1970-х годах карманных калькуляторов и настольных компьютеров. Почти повсеместно отпала нужда в логарифмических и тригонометрических таблицах. Появилась возможность в домашних условиях или даже на морском судне выполнять расчеты по навигации, практической астрономии или небесной механике, не прибегая к помощи таблиц или мощных вычислительных машин. Нашествие калькуляторов было совершенно неожиданным для астрономов, и оказалось, что простые руководства, посвященные искусству астрономических вычислений, еще не написаны.

Данная книга, предлагаемая вниманию читателя, в полной мере восполняет этот пробел. Она станет хорошим дополнением к обычным учебным пособиям и потребуется как астроному-любителю, так и студенту. Как известно, современная тенденция учебного процесса состоит в том, что он дает весьма общее понятие даже о самых важных предметах. Так, рассказывая о нутации, преподаватель может описать это явление как «дрожание» земной оси и попытается объяснить его причины. При этом будет очень полезно заглянуть в разд. 15 данной книги и найти там «живые» формулы, описывающие явление нутации, которые можно встретить далеко не в каждом учебнике.

Еще на рубеже нашего столетия было проанализировано движение Луны и больших планет. Результаты исследований были опубликованы главным образом в трудах обсерваторий. Эти тома пылятся на полках библиотек и доступны лишь немногим. Возьмем одну из таких книг, например важнейшую работу Брауна о движении Луны, опубликованную в 1919 г. Для точного вычисления положения Луны на некоторый момент времени нужно провести вычисления более 1650 тригонометрических членов ряда. В современных работах по небесной механике эти конкретные формулы упоминаются довольно бегло, основное внимание уделяется теории, и в результате они мало пригодны для непосредственных расчетов. Однако куда проще оценить основные члены формулы на карманном калькуляторе, чем разобраться в теории.

Из классических теорий движения Луны и планет Жан Меёс выбрал главные компоненты возмущений, пренебрегая множеством более слабых эффектов, и в сокращенном виде включил в эту книгу. Он включил сюда и вековые члены, которые в настоящий момент малы, но при экстраполяции на большой срок в прошлое или будущее могут стать значительными. Следовательно, приведенные в книге формулы (в отличие от тех, что встречаются в других изданиях) можно смело использовать в серьезных исследованиях историко-астрономического характера.

Любого, кто хочет провести за расчетами на карманном калькуляторе несколько занимательных вечеров, ждут интереснейшие открытия, еще несколько лет назад казавшиеся уделом лишь профессионалов. Например, 28 декабря 1612 г. рядом со спутниками Юпитера Галилей заметил слабую звездочку, а в 1980 г. было обнаружено, что эта «звезда» на самом деле планета Нептун. Подобное открытие вполне по плечу читателю предлагаемой книги. Все необходимые формулы в ней имеются — положения Юпитера и Нептуна можно рассчитать методами, изложенными в разд.22—25, а конфигурацию спутников Юпитера, которую зарисовал великий итальянский астроном декабрьским вечером 1612 г., легко можно воспроизвести, используя формулы разд. 36.

В эту книгу включены и оригинальные методы, разработанные самим автором, например формулы вычисления моментов равноденствия и солнцестояния (разд. 20). Его многочисленные книги и статьи, посвященные астрономическим расчетам всевозможных явлений, нашли признание астрономов-профессионалов. В 1981 г. Международный Астрономический Союз назвал именем Меёса астероид 2213. Первое издание книги «Астрономические формулы для калькуляторов» разошлось в считанные месяцы. Можно быть уверенным, что новое издание, существенно пересмотренное и расширенное, станет у астрономов настольной книгой.

Роджер У. Синнот,
журнал «Sky and Telescope».

Предисловие ко второму изданию

Во втором издании исправлено несколько опечаток и ошибок. Главное отличие нового издания состоит в том, что в него включен дополнительный материал, например метод предвычисления пасхи по юлианскому календарю; добавлены главные периодические члены в описание движения Урана и Нептуна, а также формула для прямого вычисления уравнения центра по эксцентриситету орбиты и средней аномалии.

В новом издании переработан раздел, посвященный положению спутников Юпитера, и добавлен новый раздел — вычисление долготы центрального меридиана Юпитера и планетоцентрической широты центра его диска.

Со времени первого издания этой книги (ноябрь 1978 г.) появилось много новых микрокомпьютеров по доступным ценам, и многие любители астрономии обзавелись этими мощными вычислительными устройствами. По сравнению с карманным калькулятором микрокомпьютер позволяет выполнять значительно точнее вычисления с использованием более сложных и длинных программ. Например, положение Солнца можно рассчитать с предельной точностью, а момент затмения — с точностью не хуже 1 с, и так далее.

Тем не менее данная книга все же ориентирована преимущественно на владельцев карманных калькуляторов. Методы и формулы детальных расчетов, которые можно реализовать на программируемых микрокомпьютерах, остаются за рамками книги: их изложение потребовало бы значительно большего объема.

Жан Меёс
Апрель 1982 г.

Предисловие к первому (бельгийскому) изданию

Благодаря быстрому росту числа карманных калькуляторов и еще более быстрому падению их стоимости они стали доступны каждому. Практически у любого астронома-любителя есть такая вычислительная машина, а у многих имеются и программируемые колькуляторы, причем число их обладателей также быстро растет. Именно для этой категории читателей в первую очередь и предназначена данная книга.

Выполнение астрономических расчетов требует хорошего знакомства с основными астрономическими понятиями и законами и владения методами элементарной математики. Разумеется, вычислитель должен уметь обращаться с калькулятором и знать все его возможности. Однако всего этого еще недостаточно. Чтобы создавать хорошие программы, нужна немалая практика. Практика — основа всех наук, и это в равной мере относится к искусству программирования. Только на основе опыта можно освоить бесчисленные тонкости и приемы, которые так полезны и часто необходимы для составления оптимальной программы.

Книга «Астрономические формулы для калькуляторов» предназначается всем любителям астрономии, которым приходится выполнять какие-либо расчеты. Прежде чем кратко охарактеризовать цели и содержание книги, я остановлюсь на том, чего в ней нет.

Прежде всего это не справочник по астрономии. Элементарные астрономические понятия считаются известными читателю. Так, в книге не даются определения прямого восхождения и склонения, эклиптики, прецессии, звездной величины и т. д, но все эти понятия широко используются в тексте. Определения будут приводиться лишь в виде исключения. Книга не может также служить справочником по математике или руководством по программированию карманных калькуляторов. Как уже говорилось выше, предполагается, что читатель умеет обращаться со своей вычислительной машиной.

Эта книга предназначена для того, чтобы помочь каждому любителю астрономии сориентироваться в математической стороне дела и дать ему большую информацию практического характера, ряд советов и примеров. В книге около 40 задач, связанных с календарем, небесными явлениями и небесной механикой, а также ряд математических методов, используемых в астрономии, таких, как интерполирование и вычисление линейной регрессии. В каждом случае дается постановка задачи, ее смысл и значение. Формулы приведены в таком виде, что читатель может использовать их для составления собственной программы. Поставленные задачи и формулы иллюстрируются многочисленными примерами.

В книгу не включены примеры программ. Причина этого ясна. Как правило, программы пригодны лишь для одного типа вычислительных машин. Так, программу для HP-67 нельзя использовать для калькулятора TI-59 и даже для HP-65. Следовательно, каждый вычислитель должен научиться создавать собственные программы. Есть и другая причина, заключающаяся в том, что содержание программы зависит от определенной цели расчетов, а ее невозможно предусмотреть заранее.

Для решения некоторых астрономических задач и составления программы в ряде случаев придется заглянуть не в один, а в несколько разделов книги. Например, чтобы найти высоту Солнца в заданном месте в данный момент времени, вначале нужно определить юлианскую дату (разд. 3), затем вычислить долготу Солнца (разд. 18), его прямое восхождение (разд. 8), звездное время (разд. 7) и, наконец, рассчитать искомую высоту Солнца (разд. 8).

Ясно, что книга не охватывает всех задач математической астрономии. Так, в ней ничего не говорится об определении орбит, о покрытии звезд Луной, о вычислении долгот центральных меридианов Марса и Юпитера на данный момент времени, в ней нет разделов, посвященных метеорной астрономии, затменным двойным звездам и другим задачам. Однако даже беглый взгляд на содержание книги показывает, что в этой четвертой по счету монографии по астрономии и астрофизике, издаваемой «Уранией» и Обществом изучения переменных звезд, содержится впечатляющий материал, необходимый каждому любителю астрономии.

Г. Бодифе

Некоторые обозначения и сокращения

e	Эксцентриситет (орбиты)
h	Высота над горизонтом
r	Радиус-вектор или расстояние тела от Солнца, а.е.
v	Истинная аномалия
A	Азимут
H	Часовой угол
M	Средняя аномалия
R	Расстояние от Земли до Солнца, а.е.
α	Прямое восхождение
δ	Склонение
ε	Наклон эклиптики к экватору
θ	Звездное время
θ_0	Гринвичское звездное время
π	Параллакс
ϕ	Географическая широта
ϕ	Геоцентрическая широта
Δ	Расстояние от Земли, а.е.
ΔT	Разность ET—UT
$\Delta\varepsilon$	Нутация в наклоне
$\Delta\psi$	Нутация в долготе
$\odot$	Геоцентрическая долгота Солнца
ET	Эфемеридное время
UT	Всемирное время
JD	Юлианский день
INT	Целая часть числа

Следует различать способы записи часов в виде десятичной дроби и в составном виде — с минутами и секундами. Например, $1^h,30$ — это не 1 ч 30 мин, а 1,3 ч, т. е. 1 ч 18 мин. (Незначительные отклонения от принятых в советской научной литературе обозначений связаны с особенностями технологии набора.— *Ред.*)

Автор выражает признательность Г. Бодифе за его ценные советы и участие.

1

Советы и замечания

В этой книге не объясняется, как работать на компьютере или составлять для него программы. Читателю следует тщательно изучить руководство по эксплуатации и инструкцию для своего компьютера. Однако даже после этого научиться составлять хорошие программы за один день не удастся. Программирование — это искусство, которое можно освоить только шаг за шагом. Лишь опыт позволяет писать достаточно эффективные и короткие программы.

В первом разделе книги мы дадим несколько практических советов и предостережений, которые могут быть полезны всем читателям.

Точность

Точность вычислений определяется их целью. Если требуется лишь узнать, будет ли затмение Луны видно в какой-либо стране, достаточно рассчитать положения северной и южной границ полосы видимости с точностью 100 км; однако если планируется организовать экспедицию для наблюдения затмения, границы следует вычислять с точностью не хуже 1 км.

Если мы вычисляем положение планеты, чтобы узнать время ее захода или восхода, то достаточна точность 0,°01. Но если ее положение нужно знать, чтобы вычислить момент покрытия планетой звезды, то из-за малого диаметра диска расчеты следует проводить с точностью выше 1″.

Более высокая точность вычислений иногда достигается не получением большего числа десятичных знаков в приближенных результатах, а использованием иного метода. Например, чтобы рассчитать положение Марса с точностью 0°,1, будет достаточно воспользоваться формулами для невозмущенного движения по эллипсу (кеплеровское движение) и учесть вековые члены. Но если требуется точность не хуже 10″, то следует учесть возмущения от других планет, что заметно удлинит программу.

Поэтому каждый вычислитель должен знать необходимую точность и сам решать, какими членами в формулах можно пренебречь, чтобы программа была короткой и эффективной. Пусть, к примеру, средняя геометрическая долгота Солнца на среднюю эпоху наблюдения дается формулой

$$L = 279°41'48''{,}04 + 129\,602\,768''{,}13\,T + 1''{,}089\,T^2,$$

где T — время в юлианских столетиях, состоящих из 36 525 эфемеридных суток, которое отсчитывается от эпохи 1900, январь 0,5 эфемеридного времени. В этой формуле последний член (вековое ускорение Солнца) меньше 1″ при $|T| < 0{,}96$, т. е. в интервале от 1804 до 1996 г. Если такая точность нас устраивает, членом T^2 на этом интервале времени можно пренебречь. Однако для года — 100 получаем $T = -20$ и последний член равен 436″, т. е. превышает 0,1°.

Округление

В необходимых случаях нужно округлять результаты. Не оставляйте лишних десятичных знаков! Здесь требуются достаточно глубокие познания и определенное «чутье». Так, совершенно бессмысленно давать долю освещенного диска Луны с точностью порядка 0,000 000 001.

Если расчеты проводятся не по программе, а последовательно, округление надо производить лишь после завершения полного цикла вычислений.

Пример. Округлить результат сложения 1,4 + 1,4 до ближайшего целого числа. Если сначала округлить исходные числа, получится 1 + 1 = = 2. На самом же деле сумма 1,4 + 1,4 = 2,8 округляется до 3.

Округление производится до ближайшего значения. Например, 15,88 округляется до 16 или 15,9, а не до 15. Исключение составляют календарные даты и годы. Так, март 15,88 означает момент времени, приходящийся на 15, а не на 16 марта. Аналогично, запись 1977, 69 означает, что некоторое событие произошло в 1977, а не в 1978 г.

Тригонометрические функции больших углов

В астрономических вычислениях часто приходится иметь дело с большими углами. Как найдено в примере 18.а, 12,0 ноября 1978 г. средняя долгота Солнца составляла 28 670°, 77554. Для быстро движущихся объектов — Луны или галилеевых спутников Юпитера — можно получить еще большие значения углов.

В зависимости от типа калькулятора может оказаться необходимым или желательным привести угол к интервалу 0—360°. Некоторые калькуляторы дают неверные значения тригонометрических функций больших углов. Например, калькулятор HP-55 даст для sin 360 000 030° значение 0,499 481 3556, TI-52 — значение 0,499 998 1862, Casio fx 2200 выдаст ошибку, а HP-67 даст верный результат 0,500 000 0000.

Формы представления углов

Калькуляторы не могут вычислять тригонометрические функции углов, заданных в градусах, минутах и секундах. Перед тригонометрическим вычислением углы следует записать ***в виде десятичных дробей в градусах***. Так, прежде чем найти cos 23°26′49″, выразим угол в градусах, получив 23°, 44694444, и только после этого нажмем кнопку «COS».

Перед интерполированием также следует записать углы в десятичном виде: так, интерполяционную формулу нельзя непосредственно применить к углам

5°03′45″
5°34′22″
6°17′09″

Прямое восхождение

Прямое восхождение обычно выражают в часах, минутах и секундах (времени). Если требуется вычислить тригонометрическую функцию прямого восхождения, его нужно предварительно перевести в градусы. Не забывайте, что 1 час соответствует 15°.

Пример 1.a. Найти $\mathrm{tg}\,\alpha$, где $\alpha = 9^h14^m55^s,8$.

Сначала представим α в часах в виде десятичной дроби: $9^h14^m55^s,8 =$ $= 9,248\ 833\ 333$ ч. Затем, умножив на 15, получим $\alpha = 138°,73250$; следовательно, $\mathrm{tg}\,\alpha = -0,877\ 517$.

Правильное значение угла

Если известен sin, cos или tg угла, сам угол можно найти нажатием соответствующей кнопки: arcsin, arccos или arctg или, как иногда записывают, $\sin^{-1}$, $\cos^{-1}$, tg^{-1}. Эти последние обозначения в действительности неверны, так как $x^{-1} = 1/x$. Но тем не менее часто обратную функцию (неправильно) обозначают $\cos^{-1}x$, а не $1/\cos x$.

Для большинства карманных калькуляторов arcsin и arctg — углы в интервале от −90° до +90°, а arccos — угол от 0° до 180°.

Иногда вычисленный так угол может лежать не в том квадранте. Каждый случай следует рассматривать отдельно. Например, формулы (8.4) и (25.15) дают синус склонения. Вычисленный через arcsin угол всегда лежит в нужном интервале, так как склонение меняется в пределах от $-90°$ до $+90°$.

То же самое относится к угловому расстоянию между двумя объектами, косинус которого определяется из формулы (9.1). Действительно, угловое расстояние принимает значения от 0° до 180°, как и arccos.

Если же дан тангенс угла [например, как в формулах (8.1), (8.3) и (18.3)], его правильное значение можно определить непосредственно с помощью такого приема: к числителю и знаменателю дроби, стоящей в правой части формулы, нужно применить преобразование прямоугольных координат в полярные, как описывается в разд. 8 и некоторых других местах книги.

Степени времени

Некоторые величины вычисляются по формулам, содержащим степени времени (T, T^2, T^3, ...). Важно отметить, что эти выражения в виде полиномов справедливы лишь для не слишком больших значений T. Например, формула из разд. 18

$$e = 0{,}016\,751\,04 - 0{,}000\,0418\,T - 0{,}000\,000\,126\,T^2$$

для эксцентриситета орбиты Земли верна для моментов времени, удаленных в прошлое или будущее на несколько столетий от эпохи 1900,0, но никоим образом не на миллионы лет! Так, для $T = 1000$ по ней получается значение $e = -0{,}151 < 0$, которое не имеет смысла.

То же самое относится и к формуле (18.4), которая дает совершенно неправильный результат $\varepsilon = 0°$ для $T = -383$ и $\varepsilon = 90°$ для $T = +527$.

Нужно строго различать периодические члены, которые остаются на протяжении столетий малыми, и вековые (члены с T^2, T^3 и так далее), быстро растущие со временем.

Так, в формуле (32.1) последний член является периодическим и заключен в пределах от $+0{,}00033$ до $-0{,}00033$. С другой стороны, член $+0{,}0001178\,T^2$, который очень мал при небольших T, становится все более значительным при увеличении $|T|$. Для $T = \pm 10$ он равен $+0{,}01178$, что много по сравнению с приведенным выше периодическим членом. Поэтому при больших T не имеет смысла удерживать в вычислениях малые периодические члены, если пренебрегают вековыми членами.

Как сократить программу

Максимальное сокращение программы — часто не самоцель, а необходимость, продиктованная ограниченным объемом памяти калькулятора.

Существует довольно много приемов сокращения даже самых несложных программ. Например, пусть требуется вычислить значения полинома

$$Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E,$$

где A, B, C, D и E — постоянные, а x — переменная. Можно запрограммировать калькулятор на последовательное вычисление всех членов полинома и их дальнейшее сложение; тогда для каждого x калькулятор выдаст его значение. Однако вместо того, чтобы вычислять все степени x, лучше переписать полином в виде

$$[((Ax+B)x + C)x + D]x + E.$$

Здесь степени уже не вычисляются, а проводятся лишь умножение и сложение. Программа станет значительно короче. Для калькулятора HP-67 обе программы можно записать так, заняв регистры памяти с 1 по 5 под постоянные A — E:

Первый вариант	Второй вариант
STO A	STO A
4	RCL 1
y^x	×
RCL 1	RCL 2
×	+
RCL A	RCL A
3	×
y^x	RCL 3
RCL 2	+
×	RCL A
+	×
RCL A	RCL 4
x^2	+
RCL 3	RCL A
×	×
+	RCL 5
RCL A	+
RCL 4	
×	
+	
RCL 5	
+	

Используя простейший прием, мы сократили программу на 5 шагов, т. е. на 23%.

2

Интерполирование

В астрономических альманахах и других публикациях встречаются таблицы некоторых величин y, вычисленных *для равноотстоящих* значений аргумента x. Например, y может быть прямым восхождением Солнца в 0^h эфемеридного времени на каждый день года.

Интерполирование — это процесс вычисления функции для промежуточных значений моментов времени или других величин, указанных в таблице.

В этом разделе мы рассмотрим два случая: интерполирование по трем и по пяти табличным значениям. Для каждого из них мы покажем, как можно найти точку экстремума и нулевого значения функции. Случай двух табличных значений здесь не рассматривается, поскольку он соответствует линейной интерполяции, не представляющей совершенно никакой трудности.

Три табличных значения

Пусть значениям x_1, x_2, x_3 аргумента x соответствуют три табличных значения y_1, y_2, y_3 функции y. Образуем таблицу разностей:

$$\begin{array}{cccc} x_1 & y_1 & & \\ & & a & \\ x_2 & y_2 & & c \\ & & b & \\ x_3 & y_3 & & \end{array} \qquad (2.1)$$

где $a = y_2 - y_1$ и $b = y_3 - y_2$ носят название *первых разностей. Вторая разность* c равна $b - a$, т. е.

$$c = y_1 + y_3 - 2y_2 .$$

Обычно разности последующих порядков постепенно уменьшаются. Интерполирование по трем табличным значениям допускается в том случае, когда в рассматриваемой части таблицы вторые разности практически постоянны, т. е. третьи разности почти нулевые. Рассмотрим, например, расстояние между Марсом и Землей с 4 по 8 августа 1969 г., заданное на 0^h эфемеридного времени. Расстояние дано в астрономических единицах, а разности — в единицах шестого десятичного знака:

Август	4	0,659441			
			+5090		
	5	0,664531		+30	
			+5120		−1
	6	0,669651		+29	
			+5149		0
	7	0,674800		+29	
			+5178		
	8	0,679978			

Поскольку третьи разности практически равны нулю, можно интерполировать по трем табличным значениям.

Центральное значение y_2 следует выбирать как можно ближе к требуемому.

Так, если нам нужно найти по таблицам значение функции на $22^h\ 14^m$ 6 августа, в качестве y_2 следует взять значение расстояния на 7 августа. В таком случае мы используем табличные значения расстояния на 6, 7 и 8 августа, и таблица примет вид:

$$\begin{array}{lll} \text{Август } 6 & y_1 = 0{,}669651 \\ \phantom{\text{Август }} 7 & y_2 = 0{,}674800 \\ \phantom{\text{Август }} 8 & y_3 = 0{,}679978 \end{array} \qquad (2.2)$$

где разности равны

$$a = +0{,}005149 \qquad c = +0{,}000029$$
$$b = +0{,}005178$$

Пусть n — интервал интерполирования. Если требуется определить значение функции y для аргумента x, то $n = x - x_2$ в единицах табличного интервала. Число n положительно, если $x > x_2$, т. е. если нужно вычислить функцию на момент «позднее» x_2; в противном случае $n < 0$.

Если y_2 выбрано правильно, то n заключается в пределах от $-0{,}5$ до $+0{,}5$, хотя приводимые формулы верны и для значений n между -1 и $+1$. Интерполяционная формула имеет вид

$$y = y_2 + \frac{n}{2}(a + b + nc). \qquad (2.3)$$

Пример 2.а. По данным таблицы (2.2) вычислить расстояние между Марсом и Землей на 7 августа 1969 г. на $4^h\ 21^m$ эфемеридного времени.

Поскольку $4^h 21^m = 4{,}35$ ч, а табличный интервал равен 1 сут. или 24 ч, $n = 4{,}35/24 = 0{,}18125$.

Затем по формуле (2.3) вычислим искомое значение $y = 0{,}675736$.

Если затабулированная функция имеет *экстремум* (т. е. достигает максимального или минимального значения), момент экстремума можно отыскать следующим образом. Запишем, как и прежде, таблицу разностей (2.1) для соответствующей части таблицы эфемерид. Тогда экстремальное значение функции будет равно

$$y_m = y_2 - \frac{(a + b)^2}{8c},$$

а соответствующее значение аргумента, выраженное в единицах табличного интервала и отсчитываемое от центрального значения x_2, равно

$$n_m = -\frac{a + b}{2c}.$$

Пример 2.6. Найти момент прохождения Марса через перигелий его орбиты в январе 1966 г. и соответствующую величину радиуса-вектора Марса.

Из «Астрономических эфемерид» возьмем следующие значения расстояния Марса от Солнца:

Год 1966 Январь	11,0	1,381 701
	15,0	1,381 502
	19,0	1,381 535

Разности равны

$$a = -0{,}000199 \qquad c = +0{,}000232$$
$$b = +0{,}000033$$

откуда найдем

$$y_m = 1{,}381\,487 \qquad \text{и} \qquad n_m = +0{,}35776.$$

Следовательно, минимальное расстояние Марса от Солнца составляло 1,381487 а.е. Умножив 4 сут (табличный интервал) на +0,35776, найдем момент прохождения через перигелий, 1,43104 сут, или 1 сут 10 ч, после центрального момента, что соответствует 16 января 1966 г., 10 ч.

С помощью таблицы разностей можно также найти значение аргумента x, при котором функция y обращается в нуль. Соответствующий интервал интерполяции определяется из выражения

$$n_o = \frac{-2y_2}{a + b + cn_o} \quad . \qquad (2.4)$$

Это уравнение для n_0 можно решить, полагая в первом приближении $n_0 = 0$ в правой части (2.4). Полученное приближенное значение n_0 снова нужно подставить в правую часть выражения (2.4), чтобы получить более точное решение. Этот процесс *итераций* (от латинского *iterare* — повторять) следует продолжить до тех пор, пока значение n_0 не перестанет изменяться в пределах точности калькулятора.

Пример 2.в. В «Астрономических эфемеридах» даны следующие значения склонения Меркурия:

Год 1973 Февраль	26,0	−0° 28′ 13″,4
	27,0	+0 06 46,3
	28,0	+0 38 23,2

Рассчитать момент прохождения планеты через небесный экватор.

Вначале переведем табличные значения в секунды дуги, а затем образуем разности:

$$\begin{array}{lll}
y_1 = -1693,4 & & \\
 & a = +2099,7 & \\
y_2 = +\ 406,3 & & c = -202,8 \\
 & b = +1896,9 & \\
y_3 = +2303,2 & &
\end{array}$$

Формула (2.4) примет вид

$$n_o = \frac{-812,6}{+3996,6 - 202,8\,n_o}$$

Подставив в правую часть $n_0 = 0$, находим $n_0 = -0{,}20332$. Повторяя подстановку, последовательно получим значения $-0{,}20125$ и $-0{,}20127$. Таким образом, $n_0 = -0{,}20127$ и, следовательно, с учетом того, что табличный интервал равен 1 сут, Меркурий пересечет небесный экватор в момент 27,0—0,20127 = 26,79873, что соответствует дате 26 февраля 1973 г., $19^h\,10^m$ эфемеридного времени.

Пять табличных значений

Если третьими разностями пренебречь нельзя, нужно использовать большее число табличных значений. Взяв пять последовательных табличных значений от y_1 до y_5, образуем, как и выше, таблицу разностей:

$$\begin{array}{ccccc}
 & y_1 & & & & \\
 & & A & & & \\
 & y_2 & & E & & \\
 & & B & & H & \\
n\downarrow & y_3 & & F & & K \\
 & & C & & J & \\
 & y_4 & & G & & \\
 & & D & & & \\
 & y_5 & & & &
\end{array}$$

где $A = y_2 - y_1$, $H = F - E$, и так далее. Если n — интервал интерполирования, измеряемый в единицах табличного интервала и отсчитываемый от центрального значения y_3 по направлению к y_4, то интерполяционная формула запишется в виде:

$$y = y_3 + \frac{n}{2}(B + C) + \frac{n^2}{2}F + \frac{n(n^2 - 1)}{12}(H + J) + \frac{n^2(n^2 - 1)}{24}K,$$

что можно переписать как

$$y = y_3 + n\left(\frac{B + C}{2} - \frac{H + J}{12}\right) + n^2\left(\frac{F}{2} - \frac{K}{24}\right) + n^3\left(\frac{H + J}{12}\right) + n^4\left(\frac{K}{24}\right). \tag{2.5}$$

Пример 2.г. В «Астрономических эфемеридах» приведены следующие значения горизонтального параллакса Луны:

Год 1979 Декабрь	9,0	54′45″,5099
	9,5	54 34,4060
	10,0	54 25,6303
	10,5	54 19,3253
	11,0	54 15,5940

Выраженные в секундах дуги разности равны

$$\begin{array}{llll}
A = -11{,}1039 & & & \\
 & E = +2{,}3282 & & \\
B = -\ 8{,}7757 & & H = +0{,}1425 & \\
 & F = +2{,}4707 & & K = -0{,}0395 \\
C = -\ 6{,}3050 & & J = +0{,}1030 & \\
 & G = +2{,}5737 & & \\
D = -\ 3{,}7313 & & &
\end{array}$$

Видно, что третьими разностями пренебрегать нельзя, если точность около 0,1″ недостаточна.

Вычислим параллакс Луны на 10 декабря, 3^h20^m эфемеридного времени. Так как табличный интервал равен 12 ч, находим $n = +0{,}2777778$. Затем по формуле (2.5) получаем

$$y = 54'25{,}''6303 - 2{,}''0043 = 54'23{,}''6260.$$

Значение интервала интерполирования, соответствующее экстремуму функции, является решением уравнения

$$n_m = \frac{6B + 6C - H - J + 3n_m^2\,(H + J) + 2n_m^3 K}{K - 12F}\,. \qquad (2.6)$$

Как и выше, его можно решить методом итерации, полагая в первом приближении в правой части $n_m = 0$. После того как n_m найдено, по формуле (2.5) можно вычислить экстремальное значение функции.

Наконец, интервал интерполирования n_0, при котором функция обращается в нуль, можно найти из уравнения

$$n_o = \frac{-24y_3 + n_o^2(K - 12F) - 2n_o^3(H + J) - n_o^4 K}{2\,(6B + 6C - H - J)}\,, \qquad (2.7)$$

где, как и ранее, n_0 получается в результате последовательных итераций, начиная с $n_0 = 0$.

Заметим, что члены $(6B + 6C - H - J)$, $(K - 12F)$ и $(H + J)$ встречаются в обеих формулах (2.6) и (2.7). Следовательно, их для удобства можно вычислять в подпрограмме, используемой в обоих случаях.

Упражнение. Исходя из следующей таблицы, по формуле (2.7) определить момент, когда гелиоцентрическая широта Меркурия равна нулю:

Год 1979 Май	25,0 ЕТ	−1°16′00,″5
	26,0	−0 33 01,3
	27,0	+0 11 12,0
	28,0	+0 56 03,3
	29,0	+1 40 52,2

Ответ: Меркурий проходит через восходящий узел орбиты при $n_0 =$ $= -0{,}251360$, т. е. 26 мая 1979 г. в 17^h58^m эфемеридного времени.

Важные замечания

1. Нельзя интерполировать непосредственно по значениям, приведенным в таблицах; вначале их следует перевести в единые удобные для использования единицы. Так, выраженные в градусах, минутах и секун-

дах углы необходимо представить в десятичном виде либо в градусах, либо в секундах.

Например, 12°44′03,7″ следует записать в виде 12°,73436 или 45843″,7.

2. Интерполирование по времени и прямому восхождению. Отметим, что время и прямое восхождение испытывают скачок до нуля при переходе через 24 ч. Это обстоятельство следует учитывать при выполнении интерполирования по табличным значениям. Пусть, например, нужно вычислить прямое восхождение Меркурия на дату 1979, апрель 16,2743 эфемеридного времени по трем табличным значениям. В «Астрономических эфемеридах» находим:

Год 1979 Апрель	15,0	α =	$23^h56^m09^s,20$
	16,0		23 58 46,63
	17,0		0 01 36,80

Для выполнения расчетов необходимо не только выразить прямое восхождение в часах, записав его в виде десятичной дроби, но и представить последнее значение как $24^h01^m36^s,80$, в противном случае калькулятор «подумает», что за время с 16,0 по 17,0 апреля прямое восхождение уменьшилось с 23^h58^m до 0^h01^m.

С подобным положением мы сталкиваемся и в ряде других задач. Например, выпишем таблицу долгот центрального меридиана Солнца для нескольких моментов времени:

Год 1979 Декабрь	25,0	37°,39
	26,0	24,22
	27,0	11,05
	28,0	357,88

Ясно, что за сутки долгота меняется на −13°,17. Поэтому интерполирование непосредственно между значениями 11°,05 и 357°,88 недопустимо. Следует записать либо первое из этих значений в виде 371°,05, либо второе как −2°,12.

3

Юлианский день и календарная дата

В этом разделе мы дадим способ перевода даты по григорианскому календарю в соответствующую юлианскую дату (JD), и наоборот.

Общие замечания

Юлианская дата отсчитывается от среднего гринвичского полудня, т. е. от 12^h всемирного времени (UT) (или от 12^h эфемеридного времени, и в этом случае ее называют юлианской эфемеридной датой). Например, 1977, апрель 26,4 = JD 2443 259,9.

В описываемом ниже методе учтена григорианская реформа календаря. Так, за 4 октября 1582 г. сразу следует 15 октября. Годы до н.э. считаются так, как принято в астрономии: перед годом +1 был нулевой год, а перед ним год под номером −1.

Обозначим через INT(x) целую часть x, т. е. целое число, стоящее перед десятичной запятой. Например,

```
INT (7/4) = 1          INT(5,9999) = 5
INT (8/4) = 2          INT(-4,98) = -4
INT (5,02) = 5
```

Вычисление юлианской даты

Дату можно ввести в калькулятор в виде последовательности чисел, например, сначала год, затем номер месяца и, наконец, число месяца в виде десятичной дроби. Таким образом, например, дату 1976, август 22,09 можно представить в виде последовательности чисел 1976, 8, 22,09.

Однако лучше вводить дату в виде одного числа, а именно *YYYY, MM DDdd*, где *YYYY* — год, *MM* — номер месяца, *DDdd* — число месяца (целое с десятичными знаками). Номер месяца — всегда двузначное число, отделенное от года десятичной запятой (точкой). Так, дата 1976, август 22,09 запишется в виде 1976,082209. Программа начинается с выделения *YYYY*, *MM* и *DD,dd* и записи их в соответствующие регистры памяти. Дата 1976, август 22,09 вводится в калькулятор как одно число 1976,082209, после чего в один регистр записывается *YYYY* = 1976, в другой *MM* = 08 и в третий *DD,dd* = 22,09. При дальнейшем изложении будем считать, что разделение уже выполнено.

Если *MM* больше 2, возьмем

$$y = YYYY \quad \text{и} \quad m = MM \;;$$

если *MM* равно 1 или 2, возьмем

$$y = YYYY - 1 \quad \text{и} \quad m = MM + 12.$$

Если число $YYYY, MMDDdd$ больше либо равно 1582,1015 (дата по григорианскому календарю), найдем

$$A = \mathrm{INT}\left(\frac{y}{100}\right), \qquad B = 2 - A + \mathrm{INT}\left(\frac{A}{4}\right).$$

Если $YYYY, MM\,DDdd$ меньше 1582,1015, вычислять A и B не нужно. Искомая юлианская дата равна

$$\mathrm{JD} = \mathrm{INT}\,(365{,}25\,y) + \mathrm{INT}\,(30{,}6001\,(m+1)) + DD{,}dd + 1\,720\,994{,}5 \tag{3.1}$$

и, *если* исходная дата дается по григорианскому календарю, к этому результату следует прибавить B.

Пример 3.а. Найти юлианскую дату, соответствующую моменту 1957, октябрь 4,81 (время запуска первого искусственного спутника Земли).

Поскольку $MM = 10$ больше 2, получаем $y = 1957$ и $m = 10$. Так как 1957,100481 > 1582,1015, т. е. дата взята по григорианскому календарю, вычислим

$$A = \mathrm{INT}\left(\frac{1957}{100}\right) = \mathrm{INT}\,(19{,}57) = 19,$$

$$B = 2 - 19 + \mathrm{INT}\left(\frac{19}{4}\right) = 2 - 19 + 4 = -13,$$

$$\mathrm{JD} = \mathrm{INT}\,(365{,}25 \times 1957) + \mathrm{INT}\,(30{,}6001 \times 11) + 4.81 + 1\,720\,994{,}5 - 13,$$

$$\mathrm{JD} = 2436\,116{,}31.$$

Пример 3.б. Вычислить юлианскую дату, приходящуюся на 12^h 27 января 333 г.

Поскольку $MM = 1$. получим

$$y = 333 - 1 = 332 \qquad \text{и} \qquad m = 1 + 12 = 13.$$

Число $YYYY, MM\,DDdd = 333{,}01275$ меньше 1582,1015, значит, дата взята по юлианскому календарю, и вычислять A и B не нужно.

$$\mathrm{JD} = \mathrm{INT}\,(365{,}25 \times 332) + \mathrm{INT}\,(30{,}6001 \times 14) + 27{,}5 + 1\,720\,994{,}5,$$

$$\mathrm{JD} = 1842\,713{,}0.$$

Замечание. Ваша программа не годится для отрицательных значений года. Одна из причин состоит в том, что при подстановке знака минус перед *YYYY, MMDDdd* калькулятор воспримет *MM* и *DD,dd* как отрицательные числа. Например, если мы зададим дату -584, май 28,63 в виде числа $-584{,}052863$, калькулятор верно определит год $YYYY = -584$, но запомнит $MM = -5$ и $DD,dd = -28{,}63$ вместо правильных значений $+5$ и $+28{,}63$.

Эту программу можно будет использовать и для отрицательных номеров года, если внести в нее следующие изменения.

1. После того как в программе из числа *YYYY, MMDDdd* выделим номер года *YYYY* с нужным знаком, перед отсылкой в память чисел *MM* и *DD,dd* следует взять абсолютную величину 0, *MMDDdd*.

2. Если $y < 0$, в формуле (3.1) следует заменить член INT $(365{,}25y)$ на INT $(365{,}25y - 0{,}75)$.

В качестве упражнения попробуйте найти по исправленной программе юлианскую дату на момент -584, май 28,63. В результате должно получиться JD = 1507900,13. А теперь проверьте, работает ли эта программа для положительных номеров года!

Вычисление календарной даты по юлианской

Предлагаемый метод применим как для положительных, так и для отрицательных номеров года, но только для положительных номеров юлианского дня JD.

Прибавьте к JD 0,5, и пусть Z будет целой, а F — дробной частью (стоящей после десятичной запятой) результата.

Если $Z < 2299161$, положим $A = Z$.

Если Z больше либо равно 2299161, вычислим

$$\alpha = \mathrm{INT}\left(\frac{Z - 1867\,216{,}25}{36524{,}25}\right),$$

$$A = Z + 1 + \alpha - \mathrm{INT}\left(\frac{\alpha}{4}\right).$$

Затем найдем

$$B = A + 1524,$$

$$C = \mathrm{INT}\left(\frac{B - 122{,}1}{365{,}25}\right),$$

$$D = \mathrm{INT}\,(365{,}25\,C),$$

$$E = \mathrm{INT}\left(\frac{B - D}{30{,}6001}\right).$$

Число месяца (с десятичными знаками) равно

$$B - D - \mathrm{INT}\,(30{,}6001\,E) + F.$$

Номер месяца равен $m = E - 1$ при $E < 13{,}5$,
$m = E - 13$ при $E > 13{,}5$.

Номер года равен $C - 4716$, если $m > 2{,}5$,
$C - 4715$, если $m < 2{,}5$.

Пример 3.в. Вычислить календарную дату, соответствующую JD 2436116,31.

$2436116{,}31 + 0{,}5 = 2436116{,}81$, поэтому $Z = 2436116$ и $F = 0{,}81$. Поскольку $Z > 2299161$, получим

$$\alpha = \mathrm{INT}\left(\frac{2436\,116 - 1867\,216{,}25}{36524{,}25}\right) = 15,$$

$$A = 2436\,116 + 1 + 15 - \mathrm{INT}\left(\frac{15}{4}\right) = 2436\,129$$

После чего находим

$$B = 2437\,653, \quad C = 6673, \quad D = 2437\,313,$$
$$E = 11,$$

число месяца равно 4,81,
номер месяца равен $m = E - 1 = 10$, так как $E < 13{,}5$,
номер года равен $C - 4716 = 1957$, так как $m > 2{,}5$.
Итак, искомая дата 1957, октябрь 4,81.

Упражнения. Рассчитать календарные даты, приходящиеся на JD = = 1842713,0 и JD = 1507900,13.

Ответ: 333, январь 27,5 и −584, май 28,63.

Интервал времени, выраженный в сутках

Число суток между двумя календарными датами равно разности соответствующих юлианских дат.

Пример 3.г. Периодическая комета Галлея проходила через перигелий орбиты 16 ноября 1835 г. и 20 апреля 1910 г. Чему равен интервал времени между двумя прохождениями?

16,0 ноября 1835 г. соответствует JD 2391598,5,
20,0 апреля 1910 г. соответствует JD 2418781,5.
Разность равна 27 183 сут.

Упражнение. Найти дату, отстоящую ровно на 10 000 сут от 30 июня 1954 г.

Ответ: 15 ноября 1981 г.

День недели

День недели, приходящийся на заданную дату, можно определить следующим образом. Рассчитайте JD на 0^h этой даты, прибавьте 1,5 и поделите итог на 7. Остаток от деления и дает день недели: если он равен нулю, то воскресенье, 1 — понедельник, 2 — вторник, 3 — среда, 4 — четверг, 5 — пятница, 6 — суббота.

Пример 3.д. Какой день недели приходился на 30 июня 1954 г.?

30,0 июня 1954 г. соответствует JD 2434923,5. 2434923,5 + 1,5 = = 2434925.

Остаток от деления на 7 равен 3. Это была среда.

Порядковый номер дня в году

Порядковый номер дня в году N вычисляется следующим образом. Для обычного года

$$N = \mathrm{INT}\left(\frac{275\,M}{9}\right) - 2\ \mathrm{INT}\left(\frac{M+9}{12}\right) + D - 30.$$

Для високосного года

$$N = \mathrm{INT}\left(\frac{275\,M}{9}\right) - \mathrm{INT}\left(\frac{M+9}{12}\right) + D - 30,$$

где M — номер месяца, D — число месяца. N принимает целые значения от 1 (1 января) до 365 (или 366 в високосном году) (31 декабря).

Пример 3.е. 14 ноября 1978 г.

Год обычный, $M = 11$, $D = 14$. Находим $N = 318$.

Пример 3.ж. 22 апреля 1980 г.

Год високосный, $M = 4$, $D = 22$. Находим $N = 113$.

Рассмотрим обратную задачу: порядковый номер дня в году известен, нужно определить соответствующую дату, а именно номер месяца M и число месяца D. Это можно сделать так: пусть для нормального года $A = 1889$, для високосного года $A = 1523$.
Тогда находим

$$B = \mathrm{INT}\left(\frac{N + A - 122{,}1}{365{,}25}\right),$$

$$C = N + A - \mathrm{INT}(365{,}25B),$$

$$E = \mathrm{INT}(C/30{,}6001),$$

$$M = E - 1 \text{ при } E < 13{,}5, \qquad M = E - 13 \text{ при } E > 13{,}5,$$

$$D = C - \mathrm{INT}(30{,}6001\,E).$$

Пример 3.з. Обычный год, $N = 222$.

Последовательно определяем $A = 1889$, $B = 5$, $C = 285$, $E = 9$, $M = 9 - 1 = 8$, $D = 10$. Следовательно, искомая дата — это 10 августа.

Важные замечания о вычислении целой части INT

Микрокомпьютеры и некоторые карманные калькуляторы имеют оператор «INT» («целая часть»). Важно отметить, что они дают разные результаты для отрицательных величин.

У микрокомпьютеров процедура INT определяется так: INT(x) есть наибольшее целое число, которое меньше или равно x. В таком случае, например, INT $(-7{,}83) = -8$, поскольку -7 больше $-7{,}83$.

Оператор INT карманных калькуляторов дает в отличие от упомянутой процедуры целую часть (записанного) числа, т. е. стоящую перед десятичной запятой. Так, для них INT $(-7{,}83) = -7$.

У микрокомпьютера HP-85 предусмотрена не только процедура INT, но и оператор IP («целая часть»), идентичный оператору карманных калькуляторов. Поэтому для HP-85 получим:

$$\mathrm{INT}\,(-7{,}83) = -8 \text{ и } \mathrm{IP}\,(-7{,}83) = -7.$$

Итак, пользуясь клавишами INT, будьте внимательны: результат действия зависит от типа калькулятора! В изложенном выше тексте речь идет об операторах INT, идентичных тем, что имеются у карманных калькуляторов.

4

Предвычисление пасхи

Описанный ниже метод был изложен Спенсером Джонсом в его книге «*General Astronomy*» (с. 73—74 издания 1922 г.). Его снова опубликовали в «*Journal of the British Astronomical Association*» (том 88, с. 91, декабрь 1977 г.), где сказано, что метод был предложен в 1876 г. и опубликован в «*Ecclesiastical Calendar*» Бэтчера.

В отличие от формулы Гаусса предлагаемый способ не имеет исключений и применим ко всем датам григорианского календаря, т. е. начиная с 1583 г. Процедура вычисления даты пасхи такова.

Делим	на	Частное от деления	Остаток
Год x	19	–	a
Год x	100	b	c
b	4	d	e
$b + 8$	25	f	–
$b - f + 1$	3	g	–
$19a + b - d - g + 15$	30	–	h
c	4	i	k
$32 + 2e + 2i - h - k$	7	–	l
$a + 11h + 22l$	451	m	–
$h + l - 7m + 114$	31	n	p

Тогда n — номер месяца (3 — март, 4 — апрель и т. д.), $p + 1$ — число месяца, на которое падает пасхальное воскресенье.

Попробуйте выдать результат вычисления одним из следующих способов:

DD,M (число, месяц), например, 26,3 есть 26 марта;

M,DD (месяц, число), например, 3,26 есть 26 марта;

YYYY,MMDD (год, месяц, число), например, 1978,0326 есть 26 марта 1978 г.

Месяц и число можно выдавать последовательно, в виде целых чисел, однако предложенные способы выдачи обладают тем преимуществом, что дату можно прочесть одним взглядом, сразу.

3-0168

Программировать вычисление остатков от деления следует с осторожностью. Предположим, нам нужно найти остаток от деления 34 на 30. На HP-67 находим 34/30 = 1,133 333 333, и дробная часть равна 0,133 333 333. Умножив ее на 30, получим 3,999 999 999. Результат вычисления отличается от точного, т. е. 4, что может привести к неверному определению даты пасхи в конце расчетов.

При работе с микрокомпьютером HP-67 можно рекомендовать следующий прием:

```
DSP 0
f RND
```

На других калькуляторах могут потребоваться другие приемы.

При достаточно большом допустимом объеме программы в ее начало можно добавить какие-либо тесты. Например, можно составить программу так, чтобы при введении нецелого номера года индицировалась ошибка.

Испытайте программу на следующих примерах:

1978 → марта 26	1954 → апреля 18
1979 → апреля 15	2000 → апреля 23
1980 → апреля 6	1983,6 → Ошибка

Самая ранняя пасха приходится на 22 марта (как в 1818 и 2285 г.); самая поздняя — на 25 апреля (как в 1886, 1943 и 2038 г.).

Юлианская дата пасхи

Дату пасхи по юлианскому календарю можно рассчитать так.

Делим	на	Частное от деления	Остаток
Год x	4	–	a
Год x	7	–	b
Год x	19	–	c
$19c + 15$	30	–	d
$2a + 4b - d + 34$	7	–	e
$d + e + 114$	31	f	g

Тогда f — номер месяца (3 — март, 4 — апрель), $g + 1$ — число месяца, на которое падает пасхальное воскресенье.

Дата *юлианской* пасхи повторяется через 532 г. Например, она приходится на 12 апреля в 179, 711, 1243 г.

5

Эфемеридное время и всемирное время

Эфемеридное время ET — равномерно текущее время, основанное на движении планет. Всемирное время UT, необходимое в повседневной жизни, связано с вращением Земли вокруг оси.

Поскольку вращение Земли замедляется — причем неправильным и непредсказуемым образом — всемирное время UT течет неравномерно. Астрономам же нужна равномерная шкала времени, поэтому при вычислении точных эфемерид они опираются на ET.

Точную величину разности ΔT = ET − UT можно вывести только из наблюдений. Значения ΔT приводятся в табл. 5.A.

Таблица 5.A

Величина ΔT в минутах времени

Год	ΔT	Год	ΔT	Год	ΔT
1710	−0,2	1870	0,0	1940	+0,4
1730	−0,1	1880	−0,1	1950	+0,5
1750	0,0	1895	−0,1	1965	+0,6
1770	+0,1	1903	0,0	1971	+0,7
1800	+0,1	1912	+0,2	1977	+0,8
1840	0,0	1927	+0,4	1987	+1,0?

Для моментов времени за пределами данного интервала *приблизительное* значение ΔT в минутах можно вычислить по формуле

$$\Delta T = +0{,}41 + 1{,}2053\,T + 0{,}4992\,T^2, \tag{5.1}$$

где T отсчитывается в столетиях от 1900 г. Следовательно,

$$\mathrm{UT} = \mathrm{ET} - \Delta T \qquad \text{или} \qquad \mathrm{ET} = \mathrm{UT} + \Delta T.$$

Пример 5.a. Предположим, что на 6^h всемирного времени на 6 февраля −555 г. требуется вычислить положение Меркурия.

Имеем $T = -24{,}55$, следовательно, $\Delta T = +272$ мин. Тогда ET = $= 6^h + 272$ мин $= 10^h 32^m$. Расчеты следует производить на момент $10^h 32^m$ 6 февраля −555 г. эфемеридного времени.

Пример 5.6. Согласно «Астрономическим эфемеридам», максимальная фаза лунного затмения, состоявшегося 4 апреля 1977 г., наблюдалась в $4^h\,19^m,0$ ЕТ.

По табл. 5.А найдем $\Delta T = +0,^m8$ в 1977 г. Соответствующее всемирное время UT равно $4^h\,18,^m2$.

6

Геоцентрические прямоугольные координаты наблюдателя

На рис. 1 показано меридиональное сечение Земли. C — ее центр, N — северный полюс, S — южный полюс, EF — экватор, HK — плоскость горизонта наблюдателя O, OP — перпендикуляр к HK. Направление OM, параллельное SN, составляет с OH угол ϕ, который представляет собой *географическую широту* наблюдателя O. Угол OPF также равен ϕ.

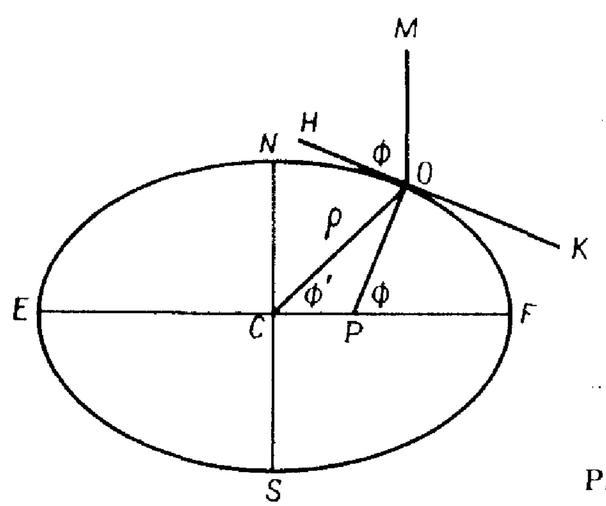

Рис. 1

Радиус-вектор OC, соединяющий наблюдателя с центром Земли, составляет с CF угол ϕ', определяющий *геоцентрическую широту* места наблюдения O. На полюсах и на экваторе $\phi = \phi'$, во всех остальных точках $|\phi'| < |\phi|$.

Пусть f — сжатие Земли, а b/a = NC/CF — отношение полярного радиуса к экваториальному. Исходя из принятого Международным астрономическим союзом значения $f = 1/298{,}257$, получаем $b/a = 1 - f =$

$= 0{,}99664719$. На уровне моря выполняется соотношение

$$\operatorname{tg}\phi' = \frac{b^2}{a^2}\operatorname{tg}\phi .$$

Если H — выраженная в *метрах* высота наблюдателя над уровнем моря, то используемые в расчетах суточного параллакса и затмений величины $\rho\sin\phi'$ и $\rho\cos\phi'$ можно вычислить по формулам:

$$\operatorname{tg} u = \frac{b}{a}\operatorname{tg}\phi ,$$

$$\begin{cases} \rho\sin\phi' = \dfrac{b}{a}\sin u + \dfrac{H}{6\,378\,140}\sin\phi , \\[2ex] \rho\cos\phi' = \cos u + \dfrac{H}{6\,378\,140}\cos\phi . \end{cases}$$

Произведение $\rho\sin\phi'$ положительно в Северном полушарии и отрицательно в Южном, тогда как $\rho\cos\phi'$ всегда положительно. Величина ρ равна расстоянию наблюдателя от центра Земли (отрезок ОС на рис. 1).

Упражнение. Найти $\rho\sin\phi'$ и $\rho\cos\phi'$ для Уккльской обсерватории, для которой $\phi = +50°47'55''$ и $H = 105$ м.

(*Ответ*: $\rho\sin\phi' = +0{,}771306$ и $\rho\cos\phi' = +0{,}633333$.)

7

Гринвичское звездное время

Гринвичское звездное время на 0^hUT на заданную дату вычисляется следующим образом.

Вначале найдем JD, соответствующую 0^hUT этой даты (см. разд. 3). Полученное число оканчивается на 0,5. Затем определяем T по формуле

$$T = \frac{\mathrm{JD} - 2415\,020{,}0}{36525} . \qquad (7.1)$$

Гринвичское звездное время на 0^hUT, выраженное в десятичной форме в часах, находим по формуле

$$\theta_0 = 6{,}646\,0656 + 2400{,}051\,262\,T + 0{,}000\,025\,81\,T^2. \qquad (7.2)$$

Результат следует привести к интервалу 0^h — 24^h и при необходимости выразить в часах, минутах и секундах.

Чтобы привести θ_0 к интервалу 0^h — 24^h, проще всего поделить все члены формулы (7.2) на 24; тогда

$$\theta_0 = 0{,}276\,919\,398 + 100{,}002\,1359\,T + 0{,}000\,001\,075\,T^2. \qquad (7.3)$$

Звездное время θ_0 получается по этой формуле в сутках (оборотах Земли). Умножив *дробную часть* результата на 24, получим звездное время в часах.

Важно отметить, что формулы (7.2) и (7.3) верны лишь для тех значений T, которые соответствуют 0^h UT заданной даты.

Пример 7.а. Найти гринвичское звездное время на момент 0^h UT 13 ноября 1978 г.

Находим JD = 2443825,5; $T = +0{,}7886516085$ и затем по формуле (7.3)

$$\begin{aligned} \theta_0 &= 79{,}143\,765\,40 \text{ оборотов} \\ &= 0{,}143\,765\,40 \text{ оборотов} \\ &= 3{,}450\,3696 \text{ ч} \\ &= 3^h\,27^m\,01^s{,}331. \end{aligned}$$

В «Астрономических эфемеридах» приведено такое же значение.

Для определения *гринвичского* звездного времени на любой момент UT заданной даты выразим его в десятичной форме в часах, умножим на 1,002737908 и прибавим к нему гринвичское звездное время, рассчитанное на 0^h UT.

Пример 7.б. Найти гринвичское звездное время на $4^h 34^m 00^s$ UT 13 ноября 1978 г.

В предыдущем примере мы нашли гринвичское звездное время на 0^h, оно равно 3,4503696 ч. Далее запишем

$$4^h\,34^m\,00^s = 4^h{,}5666667,$$

$$4^h{,}5666667 \times 1{,}002737908 = 4^h{,}5791698.$$

Следовательно, искомое звездное время равно

$$\theta_0 = 3^h{,}4503696 + 4^h{,}5791698 = 8^h{,}0295394 = 8^h\,01^m\,46^s{,}342.$$

Формулы (7.2) и (7.3) дают *среднее* звездное время. Для того чтобы получить *истинное звездное время*, нужно прибавить поправку $\Delta\psi \cos\varepsilon$, где $\Delta\psi$ — нутация в долготе (см. разд. 15), а ε — наклон эклиптики к экватору. Эту поправку за нутацию называют *нутацией в прямом восхождении* (или *уравнением равноденствий*, как принято в «Астрономических эфемеридах»). Величину наклона эклиптики к экватору ε следует брать с точностью 10″; если $\Delta\psi$ выражена в секундах дуги, поправка в секундах времени равна

$$\frac{\Delta\psi \cos \varepsilon}{15}.$$

Пример 7.в. Найти истинное звездное время в Гринвиче на $4^h 34^m 00^s$ UT 13 ноября 1978 г.

Из примера 7.б. возьмем среднее гринвичское звездное время на этот момент; оно равно $8^h 01^m 46^s{,}342$; $\Delta\psi = -3{,}378''$ (см. пример 15.а.). Взяв $\varepsilon = 23°26'30''$, вычислим поправку к звездному времени, она равна

$$\frac{-3{,}378 \times \cos 23°26'30''}{15} = -0{,}207 \text{ с}$$

и искомое истинное звездное время равно

$$8^h 01^m 46^s{,}342 - 0^s{,}207 = 8^h 01^m 46^s{,}135.$$

8

Преобразование координат

Мы будем использовать следующие обозначения:

α — прямое восхождение. Оно обычно выражается в часах, минутах и секундах, и, прежде чем подставить его в формулы, нужно представить прямое восхождение в градусах в десятичном виде. И наоборот, если α вычислено по какой-либо формуле с помощью калькулятора, оно выражено в градусах; поделив на 15, выразим его в часах, а затем, если нужно, в минутах и секундах.

δ — склонение; оно положительно (отрицательно), если объект расположен к северу (югу) от небесного экватора.

α_{1950} — прямое восхождение отнесенное к стандартному равноденствию 1950,0 г.

δ_{1950} — склонение, отнесенное к стандартному равноденствию 1950,0.

λ — эклиптическая (или небесная) долгота, отсчитываемая от точки весеннего равноденствия вдоль эклиптики.

β — эклиптическая (или небесная) широта, положительная (отрицательная) для объектов, расположенных к северу (югу) от эклиптики.

l — галактическая долгота.

b — галактическая широта.

h — высота. Она положительна, если объект над горизонтом, отрицательна, если под горизонтом.

A — азимут, отсчитываемый к западу от направления на юг. Следует отметить, что некоторые авторы отсчитывают азимут от направления на север. Мы предпочитаем отсчитывать его от направления на юг, так как отсюда ведется отсчет часового угла. Поэтому небесное тело, находящееся точно в южном меридиане, имеет $A = H = 0°$.

ε — наклон эклиптики; это угол между эклиптикой и небесным экватором. Средний наклон эклиптики вычисляется по формуле (18.4). Однако, если требуется знать *видимые* прямое восхождение и склонение (искаженные аберрацией и нутацией), следует использовать истинный наклон $\varepsilon + \Delta\varepsilon$ (см. разд. 15). Если α и δ относятся к стандартному равноденствию 1950,0, нужно взять наклон ε на ту же эпоху, т. е. $\varepsilon_{1950} = 23°,4457889$. Для стандартного равноденствия 2000,0 имеем $\varepsilon_{2000} = 23°26'21'',448 = 23°,4392911$.

ϕ — широта места наблюдения. Она положительна в Северном полушарии, отрицательна в Южном.

H — местный часовой угол, измеряемый к западу от южного меридиана.

Если θ — местное звездное время, θ_0 — гринвичское звездное время, L — долгота места наблюдения, положительная к западу от Гринвича и отрицательная к востоку, то местный часовой угол можно вычислить по формуле

$$H = \theta - \alpha \qquad \text{или} \qquad H = \theta_o - L - \alpha .$$

Если используется искаженное нутацией значение α, необходимо взять звездное время, также исправленное за нутацию (см. разд. 7).

Перейти от экваториальных координат к эклиптическим можно по формулам:

$$\operatorname{tg}\lambda = \frac{\sin\alpha\cos\varepsilon + \operatorname{tg}\delta\sin\varepsilon}{\cos\alpha}, \quad (8.1)$$

$$\sin\beta = \sin\delta\cos\varepsilon - \cos\delta\sin\varepsilon\sin\alpha. \quad (8.2)$$

Эклиптические координаты преобразуются в экваториальные так:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\lambda\cos\varepsilon - \operatorname{tg}\beta\sin\varepsilon}{\cos\lambda}, \quad (8.3)$$

$$\sin\delta = \sin\beta\cos\varepsilon + \cos\beta\sin\varepsilon\sin\lambda. \quad (8.4)$$

Местные горизонтальные координаты вычисляются по формулам:

$$\operatorname{tg}A = \frac{\sin H}{\cos H\sin\phi - \operatorname{tg}\delta\cos\phi}, \quad (8.5)$$

$$\sin h = \sin\phi\sin\delta + \cos\phi\cos\delta\cos H. \quad (8.6)$$

Переход от экваториальных координат, отнесенных к стандартному равноденствию 1950,0 г., к галактическим осуществляется по формулам:

$$\operatorname{tg}x = \frac{\sin(192{,}^\circ25 - \alpha)}{\cos(192{,}^\circ25 - \alpha)\sin 27{,}^\circ4 - \operatorname{tg}\delta\cos 27{,}^\circ4}, \quad (8.7)$$

$$l = 303^\circ - x,$$

$$\sin b = \sin\delta\sin 27{,}^\circ4 + \cos\delta\cos 27{,}^\circ4\cos(192{,}^\circ25 - \alpha). \quad (8.8)$$

Обратный переход от галактических координат к экваториальным (рассчитанным на равноденствие 1950,0 г.) определяется формулами:

$$\operatorname{tg}y = \frac{\sin(l - 123^\circ)}{\cos(l - 123^\circ)\sin 27{,}^\circ4 - \operatorname{tg}b\cos 27{,}^\circ4}, \quad (8.9)$$

$$\alpha = y + 12{,}^\circ25,$$

$$\sin\delta = \sin b\sin 27{,}^\circ4 + \cos b\cos 27{,}^\circ4\cos(l - 123^\circ). \quad (8.10)$$

Отметим сходство формул (8.1), (8.3) и (8.5), (8.7), (8.9). Их можно вычислять по общей подпрограмме. То же самое относится к формулам (8.2), (8.4), (8.6), (8.8) и (8.10).

Формулы (8.1), (8.3) и т. д. дают $\operatorname{tg}\lambda$, $\operatorname{tg}\alpha$ и т. д., следовательно, λ, α и т. д. вычисляются через арктангенс. Однако *квадрант*, в котором располагается угол, остается неизвестным. Лучше *не вычислять* тангенс угла; предлагается к числителю и знаменателю дроби применить процедуру перехода от прямоугольных координат в полярные; это даст углы λ, α и т. д. сразу в нужном квадранте.

Пример 8.а. Рассчитать эклиптические координаты Поллукса, если его экваториальные координаты равны

$$\alpha_{1950} = 7^h42^m15^s\!,525, \qquad \delta_{1950} = +28°08'55'',11.$$

Подставляя значения $\alpha = 115°,564688$, $\delta = +28°,148642$ и $\varepsilon = 23°,4457889$ в формулы (8.1) и (8.2), получим

$$tg\lambda = \frac{+1,040\,5017}{-0,431\,5299},\ \text{следовательно},\ \lambda = 112^\circ\!,525\,38\ ;$$

$$\beta = +6^\circ\!,68\,058\ .$$

Так как α и δ относятся к равноденствию 1950,0, λ и β также рассчитаны на это равноденствие.

Упражнение. Используя полученные в последнем примере значения λ и β, снова определите α и δ по формулам (8.3) и (8.4).

Пример 8.б. Найти азимут и высоту Сатурна на $4^h 34^m 00^s$ UT 13 ноября 1978 г. в районе Уккльской обсерватории. Долгота места наблюдения равна $-0^h 17^m 25^s,94$, широта $+50°47'55'',0$. Видимые экваториальные координаты планеты, полученные интерполированием по таблицам из «Астрономических эфемерид», равны

$$\alpha = 10^h 57^m 35,681^s \text{ и } \delta = +8°25'58,10''.$$

Поскольку даны *видимые* прямое восхождение и склонение, следует использовать *истинное звездное время*. Для данного момента оно рассчитано в примере 7.в. и равно $\theta_0 = 8^h 01^m 46^s,135$. Следовательно, получаем

$$\begin{aligned} H &= \theta_0 - L - \alpha \\ &= 8^h01^m46^s\!,135 + 0^h17^m25^s\!,94 - 10^h57^m35^s\!,681 \\ &= -2^h38^m23^s\!,606 = -2^h\!,639\,8906 = -39^\circ\!,598\,358. \end{aligned}$$

Тогда по формулам (8.5) и (8.6) вычисляем

$$\text{tg}A = \frac{-0,637\,4019}{+0,503\,4048},\ \text{следовательно},\ A = -51^\circ\!,6992,$$

$$h = +36^\circ\!,5405\ .$$

Упражнение. Найти галактические координаты Новой 1978 г. в созвездии Змеи, если известны ее экваториальные координаты

$$\alpha_{1950} = 17^h48^m59^s{,}74, \qquad \delta_{1950} = -14°43'08''{,}2 .$$

(*Ответ:* $l = 12°{,}9593$, $b = +6°{,}0463$.)

Восход и заход объекта

Часовой угол в момент восхода или захода можно получить из формулы (8.6), подставляя в нее $h = 0$. Тогда получим

$$\cos H = -\ \mathrm{tg}\,\phi \quad \mathrm{tg}\,\delta .$$

Однако вычисленный по этой формуле часовой угол определяет геометрический восход или заход центра диска объекта.

Благодаря атмосферной рефракции в момент кажущегося восхода или захода объект на самом деле находится под горизонтом. Величину рефракции на горизонте принимают равной 0°34′. Для Солнца обычно вычисляют момент восхода или захода верхней точки диска; следовательно, сюда нужно добавить величину наблюдаемого полудиаметра Солнца 0°16′. Таким образом, часовой угол в момент восхода или захода следует вычислять по формулам

$$\cos H_0 = \frac{-0{,}00\,989 - \sin\phi\,\sin\delta}{\cos\phi\,\cos\delta} \qquad \text{для звезд и планет,}$$

$$\cos H_0 = \frac{-0{,}01\,454 - \sin\phi\,\sin\delta}{\cos\phi\,\cos\delta} \qquad \text{для Солнца.}$$

Для вычисления моментов восхода или захода Луны следует еще учесть горизонтальный параллакс.

Если мы нашли $\cos H_0$, угол H_0 может принимать два значения:

$$-180° < H_0 < 0° \qquad \text{для восхода ,}$$

$$0° < H_0 < +180° \qquad \text{для захода .}$$

При нажатии кнопки «arccos» (иногда обозначаемой как «$\cos^{-1}$») карманные калькуляторы дают угол, заключенный в пределах от 0° до 180°. Если при этом вычисляется момент восхода, нужно сменить знак угла H_0. Это можно сделать с помощью поставленной в начале программы метки, к которой в процессе вычислений отсылается программа.

Азимут звезды в момент геометрического восхода или захода выводится из формулы

$$\cos A_\circ = -\frac{\sin \delta}{\cos \phi},$$

где угол A_0 в момент восхода заключен в пределах от 180° до 360°, а в момент захода — от 0° до 180° (можно также считать, что азимут на восходе — это угол между 0° и −180°).

Эклиптика и горизонт

Если ε — наклон эклиптики к экватору, ϕ — широта места наблюдения, θ — местное звездное время, то долготы двух точек пересечения эклиптики и горизонта можно найти по формуле

$$\operatorname{tg}\lambda = \frac{-\cos\theta}{\sin\varepsilon \ \operatorname{tg}\phi + \cos\varepsilon \sin\theta}. \qquad (8.11)$$

Угол I наклона эклиптики к горизонту дается формулой

$$\cos I = \cos\varepsilon \sin\phi - \sin\varepsilon \cos\phi \sin\theta. \qquad (8.12)$$

Пример 8.в. Для $\varepsilon = 23°,44$, $\phi = +51°$, $\theta = 5^h00^m = 75°$ по формуле (8.11) находим $\operatorname{tg}\lambda = -0{,}1879$, следовательно, $\lambda = 169°21'$ и $\lambda = 349°21'$. Формула (8.12) дает $I = 62°$.

Упражнения. Как меняется угол I на протяжении звездных суток? Что произойдет с формулой (8.11) при $\phi = 90° - \varepsilon$ и $\theta = 18^h$? Объясните.

9

Угловое расстояние между объектами

Угловое расстояние между двумя небесными телами с известными прямыми восхождениями и склонениями вычисляется по формуле

$$\cos d = \sin\delta_1 \sin\delta_2 + \cos\delta_1 \cos\delta_2 \cos(\alpha_1 - \alpha_2), \qquad (9.1)$$

где α_1 и δ_1 — координаты первого тела, а α_2 и δ_2 — второго.

Ту же самую формулу следует использовать, если заданы эклиптические координаты λ и β двух тел; для этого надо заменить α_1, α_2, δ_1, δ_2 на λ_1, λ_2, β_1, β_2 соответственно.

При значении d, очень близком к 0° или 180°, пользоваться формулой (9.1) нельзя, так как в этом случае $|\cos d|$ почти равен единице и очень медленно меняется с d, поэтому найти точное значение d по ней не удается. Например,

$$\cos 0°01'00'' = 0{,}999\,999\,958,$$
$$\cos 0°00'30'' = 0{,}999\,999\,989,$$
$$\cos 0°00'15'' = 0{,}999\,999\,997,$$
$$\cos 0°00'00'' = 1{,}000\,000\,000.$$

Если угловое расстояние очень мало (скажем, меньше 0°10′ или 0°05′), его лучше вычислять по формуле

$$d = \sqrt{(\Delta\alpha \,.\, \cos\delta)^2 + (\Delta\delta)^2}\,, \tag{9.2}$$

где $\Delta\alpha$ — разность прямых восхождений, $\Delta\delta$ — разность склонений объектов, δ — склонение любого из двух тел. Заметим, что $\Delta\alpha$ и $\Delta\delta$ нужно выразить в одних и тех же угловых единицах.

Если $\Delta\alpha$ дано в часах в виде десятичной дроби, а $\Delta\delta$ в десятичном виде в градусах, то угловое расстояние в секундах дуги равно

$$d = 3600\,\sqrt{(15\,\Delta\alpha \,.\, \cos\delta)^2 + (\Delta\delta)^2}\,. \tag{9.3}$$

Если же $\Delta\alpha$ выражено в секундах времени, а $\Delta\delta$ — в секундах дуги, то угловое расстояние в секундах дуги равно:

$$d = \sqrt{(15\,\Delta\alpha \,.\, \cos\delta)^2 + (\Delta\delta)^2}. \tag{9.4}$$

Формулы (9.2), (9.3), (9.4) можно использовать лишь при малых значениях углового расстояния d.

Пример 9.a. Рассчитать угловое расстояние между Арктуром (α Волопаса) и Спикой (α Девы).

Координаты этих звезд на 1950 г. равны:

$$\alpha\ \text{Boo}: \quad \alpha_1 = 14^h13^m22{,}^s8 = 213{,}°3450, \qquad \delta_1 = +19°26'31'',$$
$$\alpha\ \text{Vir}: \quad \alpha_2 = 13^h22^m33{,}^s3 = 200{,}°6388, \qquad \delta_2 = -10°54'03''.$$

По формуле (9.1) получаем $\cos d = +0{,}840342$, следовательно, $d = 32{,}8237° = 32°49'$.

Упражнение. Найти угловое расстояние между Альдебараном и Антаресом. (*Ответ*: 169°58′ .)

Одно или сразу оба рассматриваемых небесных тела могут быть движущимися (например, планета и звезда или две планеты). В этом случае программу нужно составлять так, чтобы вначале путем интерполирования вычислялись δ_1, δ_2 и $(\alpha_1 - \alpha_2)$, а затем по одной из формул, (9.1) или (9.2), определялось d. Рекомендуется такой прием: по интерполированным величинам находим $\cos d$ по формуле (9.1). Затем, если $\cos d < 0{,}999\,995$, определяем само угловое расстояние d; если $\cos d > 0{,}999\,995$, пользуемся для этой цели формулой (9.2).

Упражнение. Используя следующие координаты, вычислить момент, когда угловое расстояние между Меркурием и Сатурном минимально и найти это расстояние.

Год 1978 0^h ET	Меркурий α_1	Меркурий δ_1	Сатурн α_2	Сатурн δ_2
Сентябрь 12	$10^h23^m17^s{,}65$	+11°31′46″,3	$10^h33^m01^s{,}23$	+10°42′53″,5
13	10 29 44,27	+11 02 05,9	10 33 29,64	+10 40 13,2
14	10 36 19,63	+10 29 51,7	10 33 57,97	+10 37 33,4
15	10 43 01,75	+ 9 55 16,7	10 34 26,22	+10 34 53,9
16	10 49 48,85	+ 9 18 34,7	10 34 54,39	+10 32 14,9

(*Ответ:* Наименьшее угловое расстояние между планетами 13 сентября 1978 г. в $15^h06^m{,}5$ ET = 15^h06^m UT составляло 0°03′44″ .)

Если одно из небесных тел — звезда, можно использовать тот же метод. Координаты звезды в этом случае постоянны. Важно отметить, что α и δ звезды и движущегося объекта должны относиться к *одному и тому же равноденствию.*

Если движущееся тело является большой планетой и ее видимые прямое восхождение и склонение приведены на данную эпоху (как, например, в «Астрономических эфемеридах»), то в вычислениях нужно пользоваться видимыми координатами звезды. Для этого следует ее каталожные координаты, отнесенные к стандартному равноденствию (например, 1950,0) исправить за собственное движение звезды, прецессию, нутацию и аберрацию.

Если α и δ движущегося объекта отнесены к стандартному равноденствию, то координаты звезды также нужно вычислить на эту же эпоху, введя единственную поправку за ее собственное движение.

10

Соединение двух планет

Если две планеты проходят поблизости друг от друга, можно по трем или пяти эфемеридам составить программу вычисления момента соединения планет по прямому восхождению и разности их склонений. Метод состоит в том, что вначале вычисляются разности прямых восхождений $\Delta\alpha$, а затем путем обратной интерполяции по формулам (2.4) или (2.7) находится момент времени, когда разность $\Delta\alpha$ обращается в нуль. После того как он найден, прямым интерполированием по формулам (2.3) или (2.5) на момент соединения вычисляется разность склонений.

Пример 10.а. Рассчитать условия соединения Меркурия и Венеры в ноябре 1979 г.

Из «Астрономических эфемерид» выписываем следующие значения координат планет на 0^h ET:

Год 1979	Меркурий		Венера	
	α	δ	α	δ
	$h\ m\ s$	$^\circ\ '\ ''$	$h\ m\ s$	$^\circ\ '\ ''$
Ноябрь 7	16 11 38,61	−23 49 45,9	16 04 01,76	−21 07 49,3
8	16 12 55,61	−23 46 54,0	16 09 14,55	−21 24 26,5
9	16 13 40,37	−23 41 19,5	16 14 28,50	−21 40 27,5
10	16 13 50,08	−23 32 50,8	16 19 43,58	−21 55 51,7
11	16 13 22,16	−23 21 16,3	16 24 59,76	−22 10 38,4

Сначала найдем разности прямых восхождений (в часах) и склонений (в градусах) и запишем их в десятичном виде:

Ноябрь 7	$\Delta\alpha$ = +0,126 903	$\Delta\delta$ = −2,699 06
8	+0,061 406	−2,374 31
9	−0,013 369	−2,014 44
10	−0,098 194	−1,616 42
11	−0,193 778	−1,177 19

Применив к разностям $\Delta\alpha$ формулу (2.7), найдем величину интервала интерполирования $n = -0{,}16960$, соответствующего нулевому значению $\Delta\alpha$. Следовательно, соединение планет произошло в момент 1979, ноябрь 8,83040 или 8 ноября в $19^h 55^m,8$ ET ($19^h 55^m$ UT).

Подставив найденное значение n в формулу (2.5) для разностей $\Delta\delta$, получим $\Delta\delta = -2°,07808 = -2°05'$. Таким образом, в момент соединения Меркурий был на 2°05′ южнее Венеры.

Если в качестве второго тела рассматривается звезда, ее координаты следует считать на заданном интервале времени постоянными, т. е.

$$\alpha_1' = \alpha_2' = \alpha_3' = \alpha_4' = \alpha_5' \quad \text{и} \quad \delta_1' = \delta_2' = \delta_3' = \delta_4' = \delta_5'.$$

Программу рекомендуется составить так, чтобы в этом случае координаты звезды нужно было вводить только один раз. Помогут сделать это различные метки или подпрограммы.

Важное замечание, сделанное в конце разд. 9, не следует забывать и здесь: *координаты звезды и движущегося тела должны быть приведены к одному равноденствию.*

В качестве примера рассчитаем соединение по прямому восхождению малой планеты № 29 Амфитриды со звездой λ Льва в январе 1980 г. Приведем в таблице прямое восхождение и склонение малой планеты, рассчитанные на равноденствие 1950,0 (по данным Дэвида У. Данхема).

0^h ET	α_{1950}	δ_{1950}
Год 1980, январь 7	$9^h34^m25^s,279$	$+22°06'40'',93$
12	9 31 10,656	+22 22 25,44
17	9 27 15,396	+22 39 04,68
22	9 22 45,672	+22 55 48,95
27	9 17 49,742	+23 11 46,00

Координаты звезды на равноденствие 1950,0 равны $\alpha = 9^h28^m52^s,248$ и $\delta = +23°11'22'',21$, а годичное собственное движение составляет $-0^s,0018$ в прямом восхождении и $-0'',042$ в склонении. Следовательно, координаты звезды в эпоху 1980,04, отнесенные к равноденствию 1950,0, равны

$$\alpha = 9^h28^m52^s,194\ ,$$

$$\delta = +23°11'20'',95\ .$$

Теперь можно рассчитать соединение.

(*Ответ:* Амфитрида прошла на 0°39′ южнее λ Льва 15 января 1980 г. в 1^h.)

11

Тела на прямой линии

Пусть (α_1, δ_1), (α_2, δ_2), (α_3, δ_3) — экваториальные координаты трех небесных тел. Эти три тела находятся на «прямой линии» — т. е. лежат на одном большом круге небесной сферы — если выполняется условие

$$\operatorname{tg}\delta_1 \sin(\alpha_2 - \alpha_3) + \operatorname{tg}\delta_2 \sin(\alpha_3 - \alpha_1) + \\ + \operatorname{tg}\delta_3 \sin(\alpha_1 - \alpha_2) = 0. \quad (11.1)$$

Эта формула сохраняет силу и для эклиптических координат, но α нужно заменить на долготу λ, а склонение δ на широту β.

Не забывайте, что прямые восхождения обычно выражают в часах, минутах и секундах. Вначале их следует выразить в часах в десятичном виде, а затем, умножив на 15, перевести в градусы.

Если одно или два тела — это звезды, то следует вспомнить важное замечание, сделанное в конце разд. 9: *координаты звезд должны относиться к тому же равноденствию, что и координаты планеты.*

Пример 11.а. Определить момент времени, когда в 1979 г. Марс, Поллукс и Кастор находились на прямой линии.

По эфемеридам Марса и звездному атласу несложно установить, что планета была на одной линии со звездами около 21 сентября 1979 г. Видимые координаты звезд на эту дату составляли:

Кастор (α Близнецов) : $\alpha_1 = 7^h33^m17\overset{s}{,}0 = 113\overset{\circ}{,}3208$,
$\delta_1 = +31°55'54'' = +31\overset{\circ}{,}9317$,

Поллукс (β Близнецов) : $\alpha_2 = 7^h44^m03\overset{s}{,}3 = 116\overset{\circ}{,}0138$,
$\delta_2 = +28°04'28'' = +28\overset{\circ}{,}0744$.

Эти значения приводятся на с. 360 и 361 «Астрономического ежегодника СССР» за 1979 г., но их можно рассчитать описанным в разд. 16 методом. В рамках нашей задачи на протяжении нескольких дней α_1, α_2, δ_1, δ_2 можно считать постоянными.

Видимые координаты Марса (α_3, δ_3) меняются. Выпишем их из «Астрономических эфемерид»:

ET	α_3	δ_3
Год 1979, сентябрь 19,0	$7^h54^m33\overset{s}{,}8 = 118\overset{\circ}{,}6408$	$+21°43'19'' = +21\overset{\circ}{,}7219$
20,0	7 57 08,6 = 119,2858	+21 37 12 = +21,6200

Год 1979, сентябрь 21,0	7 59 42,7 = 119,9279	+21 30 57 = +21,5158
22,0	8 02 16,2 = 120,5675	+21 24 36 = +21,4100
23,0	8 04 49,0 = 121,2042	+21 18 08 = +21,3022

По этим данным можно вычислить левую часть равенства (11.1):

Сентябрь	19,0	+0,002 1713
	20,0	+0,001 2369
	21,0	+0,000 3067
	22,0	−0,000 6204
	23,0	−0,001 5434

Использовав формулу (2.7), найдем, что эта величина равна нулю в момент 1979, сентябрь 21,3304, т. е. 21 сентября 1979 г. в 8^h ET(UT).

12

Наименьший круг небесной сферы, содержащий три небесных тела

Пусть A, B и C — три тела, расположенных на небесной сфере не слишком далеко друг от друга, скажем, не далее 6°. Нужно вычислить наименьший угловой диаметр малого круга, содержащего все три тела. Могут представиться два случая:

I. Диаметр наименьшего круга опирается на наибольшую сторону треугольника ABC (рис. 2).

II. Наименьший круг проходит через три точки A, B и C (рис. 3).

Диаметр Δ наименьшего круга можно определить следующим образом. Вычислим (в градусах) длины трех сторон треугольника ABC по формуле (9.1). Формула (9.2) может понадобиться для этой цели в очень редких случаях.

Пусть a — длина *наибольшей* стороны, b и c — длины двух других сторон.

Если $a > \sqrt{b^2 + c^2}$, то $\Delta = a$;

если $a < \sqrt{b^2 + c^2}$, то

$$\Delta = \frac{2abc}{\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(b+c-a)(a+c-b)}}. \quad (12.1)$$

Пример 12.а. Вычислить диаметр наименьшего круга, содержащего Меркурий, Юпитер и Сатурн 11 сентября 1981 г. в 0^h эфемеридного времени. Положения планет на это время таковы:

Меркурий	$\alpha = 12^h41^m08^s\!,63$	$\delta = -5°37'54'',2$
Юпитер	12 52 05,21	−4 22 26,2
Сатурн	12 39 28,11	−1 50 03,7

По формуле (9.1) найдем взаимные угловые расстояния:

Меркурий — Юпитер	3°,00152
Меркурий — Сатурн	3,82028
Юпитер — Сатурн	4,04599 = a

Так как $4{,}04599 < \sqrt{(3{,}00152)^2 + (3{,}82028)^2} = 4{,}85836$, Δ находится по формуле (12.1). В результате получаем

$$\Delta = 4°{,}26364 = 4°16'.$$

Это пример второго случая.

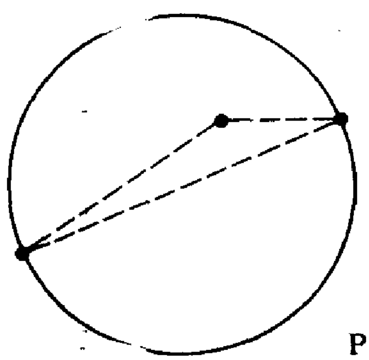

Рис. 2.

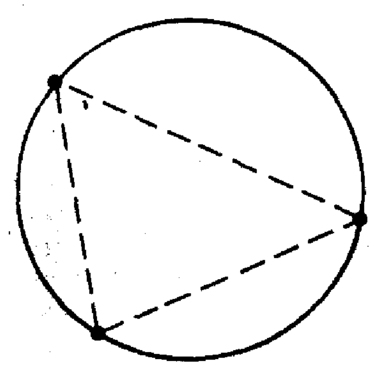

Рис. 3.

Упражнение. Выполнить аналогичные расчеты для Венеры, Юпитера и Сатурна на 0^h ЕТ 29 августа 1981 г., зная следующие положения планет:

Венера	$\alpha = 12^h46^m00^s\!,82$	$\delta = -4°38'59'',7$
Юпитер	12 42 31,51	−3 20 36,0
Сатурн	12 34 03,49	−1 14 18,2

Покажите, что конфигурация планет относится к первому случаю и что $\Delta = 4°32'$.

Можно составить программу, которая вначале путем интерполирования вычисляет прямые восхождения и склонения планет, а затем определяет Δ. В нее необходимо включить тест сравнения a с $\sqrt{b^2 + c^2}$. Пользуясь такой программой, можно методом испытаний вычислить минимальное значение Δ для трех планет. В самом деле, Δ со временем меняется, а описанный в этом разделе метод дает величину Δ только на определенный момент времени.

По такой программе автор книги рассчитал всевозможные «тройки» планет на период с 1960 по 2005 г. Их список приведен во французском журнале «*L'Astronomie*» (том 91, с. 487—493, декабрь 1977 .).

Если одно из небесных тел звезда, снова обратимся к важному замечанию, сделанному в конце разд. 9: *координаты звезды и планет должны относиться к одному и тому же равноденствию.*

13

Позиционный угол светлого лимба Луны

Под позиционным углом светлого лимба (или экватора интенсивности. — *Ред.*) Луны понимают позиционный угол линии симметрии светлого лимба χ, отсчитываемый к востоку от северной точки диска Луны (см. рис. 4).

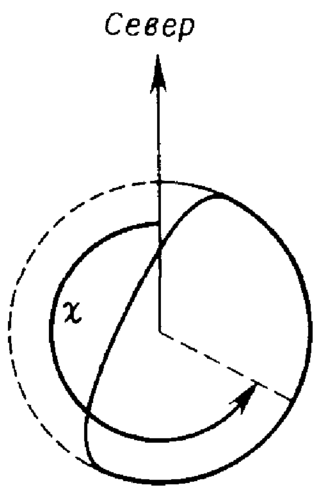

Рис. 4.

Пусть α и δ — прямое восхождение и склонение Солнца, α' и δ' — прямое восхождение и склонение Луны. Не забудьте, что все эти величины необходимо выразить в градусах и представить в виде десятичной дроби.

Тогда позиционный угол светлого лимба Луны можно рассчитать по формуле

$$\operatorname{tg}\chi = \frac{\cos\delta \sin(\alpha - \alpha')}{\cos\delta' \sin\delta - \sin\delta' \cos\delta \cos(\alpha - \alpha')} .$$

Угол χ примерно равен 270° вблизи первой четверти и составляет около 90° после полнолуния. Преобразовав числитель и знаменатель предыдущего выражения по формулам перехода от прямоугольных координат к полярным, можно вычислить угол χ сразу в нужном квадранте.

Пример 13.а. Найти позиционный угол светлого лимба Луны в 21^h ET 2 февраля 1979 г.

Экваториальные координаты Луны на этот момент приведены на с. 78 «Астрономических эфемерид» за 1979 г.:

$$\alpha' = 1^h54^m18^s{,}175 = 1^h{,}90505 = 28^\circ{,}5757 ,$$
$$\delta' = +8^\circ01'47''{,}59 = +8^\circ{,}0299 .$$

Координаты Солнца определим интерполированием табличных значений на с. 21 того же издания:

$$\alpha = 21^h{,}05953 = 315^\circ{,}8930 ,$$
$$\delta = -16^\circ{,}7915 .$$

После этого вычислим

$$\operatorname{tg}\chi = \frac{-0{,}91397}{-0{,}32586} ,$$

откуда $\chi = -109^\circ{,}62 = 250^\circ{,}38$.

Зная позиционный угол светлого лимба Луны, несложно определить, какую часть диска Луны освещает Солнце. Это просто дуга от $\chi - 90^\circ$ до $\chi + 90^\circ$.

В примере 13.а. мы нашли $\chi = 250^\circ$. Следовательно, Солнце освещает часть диска Луны, заключенную в пределах позиционного угла от 160° до 340°.

Ясно, что при $\chi = 283^\circ$, например, освещена дуга, протянувшаяся от 193° через 283° до 360° и далее до 13°.

14

Прецессия

В этом разделе мы рассмотрим, как привести прямое восхождение и склонение звезды, рассчитанные на определенные эпоху и равноденствие, к другим эпохе и равноденствию. Здесь рассматривается влияние одной только прецессии на *средние* места звезд. Способ определения видимого места звезды излагается в разд. 16.

Если не требуется высокая точность и разность эпох невелика, для годичной прецессии по прямому восхождению и склонению можно использовать следующие формулы:

$$\Delta\alpha = m + n \sin\alpha \ \mathrm{tg}\delta, \qquad \Delta\delta = n \cos\alpha, \tag{14.1}$$

где m и n — величины, медленно меняющиеся со временем. Их можно рассчитать по формулам

$$m = 3\overset{s}{,}07234 + 0\overset{s}{,}00186\,T,$$
$$n = 20\overset{''}{,}0468 - 0\overset{''}{,}0085\,T.$$

В этих выражениях T — время в столетиях, отсчитываемое от эпохи 1900,0. Приведем здесь значения m и n для нескольких эпох:

Эпоха	m	n	n
1700,0	$3\overset{s}{,}069$	$1\overset{s}{,}338$	$20\overset{''}{,}06$
1800,0	3,070	1,337	20,06
1900,0	3,072	1,336	20,05
2000,0	3,074	1,336	20,04
2100,0	3,076	1,335	20,03
2200,0	3,078	1,335	20,02

При вычислении $\Delta\alpha$ необходимо взять n в секундах времени. Не забывайте, что 1^s соответствует $15''$.

К значениям $\Delta\alpha$ и $\Delta\delta$, полученным из формул (14.1), нужно прибавить изменение координат за счет собственного движения.

Пример 14.а. Координаты Регула на равноденствие и эпоху 1950,0 равны

$$\alpha_0 = 10^h05^m42\overset{s}{,}7, \qquad \delta_0 = +12°12'45'',$$

а годичное собственное движение составляет

$$\mu_\alpha = -0^s{,}0171 \quad \text{по прямому восхождению},$$
$$\mu_\delta = +0''{,}004 \quad \text{по склонению}.$$

Найти координаты Регула на равноденствие и эпоху 1978,0.

Здесь мы имеем

$$\alpha = 151^\circ{,}428, \qquad \delta = +12^\circ{,}213,$$
$$m = 3^s{,}073, \qquad n = 1^s{,}336 = 20''{,}04.$$

Формула (14.1) дает

$$\Delta\alpha = +3^s{,}211, \qquad \Delta\delta = -17''{,}60;$$

чтобы получить годичные изменения координат, мы должны прибавить к этим значениям величину годичного собственного движения; тогда годичные изменения координат станут равными $+3^s{,}194$ по прямому восхождению и $-17''{,}60$ по склонению.

За 28 лет (с 1950 по 1978 г.) изменения составят:

$$\text{по } \alpha: \quad +3^s{,}194 \times 28 = +89^s{,}4 = +1^m29^s{,}4,$$
$$\text{по } \delta: \quad -17''{,}60 \times 28 = -493'' = -8'13''.$$

Искомое прямое восхождение

$$\alpha = \alpha_\circ + 1^m29^s{,}4 = 10^h07^m12^s{,}1;$$

искомое склонение

$$\delta = \delta_\circ - 8'13'' = +12^\circ04'32''.$$

В «Астрономических эфемеридах» за 1978 г. (с. 336) даны $\alpha = 10^h07^m12^s{,}1$, $\delta = +12^\circ04'31''$.

Строгий метод

Ньюком дал следующие числовые выражения для величин ζ, z и θ, используемых для точной редукции координат с одного равноденствия на другое:

Начальная эпоха: $t_0 = 1900{,}0 + \tau_0$,

Конечная эпоха: $t = 1900{,}0 + \tau_0 + \tau$;

$$\left.\begin{aligned} \zeta &= (2304''{,}250 + 1''{,}396\,\tau_\circ)\,\tau + 0''{,}302\,\tau^2 + 0''{,}018\,\tau^3 \\ z &= \zeta + 0''{,}791\,\tau^2 + 0''{,}001\,\tau^3 \\ \theta &= (2004''{,}682 - 0''{,}853\,\tau_\circ)\,\tau - 0''{,}426\,\tau^2 - 0''{,}042\,\tau^3 \end{aligned}\right\} \qquad (14.2)$$

где τ_0 и τ измеряются в тропических столетиях (содержащих 36524,2199 эфемеридных суток); фундаментальная эпоха 1900,0 соответствует JD 2415020,313. Продолжительность тропического года немного меняется (приблизительно на $-0{,}53$ в столетие). Для нашей цели этим очень малым изменением можно пренебречь.

Другими словами, если $(JD)_0$ и (JD) есть юлианские даты, соответствующие начальной и конечной эпохам, то можно записать

$$\tau_\circ = \frac{(JD)_\circ - 2415\,020{,}313}{36524{,}2199}, \qquad \tau = \frac{(JD) - (JD)_\circ}{36524{,}2199}.$$

Для $t_0 = 1950{,}0 =$ JD 2433 282,423 имеем $\tau_0 = 0{,}5$ и выражения (14.2) примут вид:

$$\left.\begin{aligned} \zeta &= 2304''{,}948\,\tau + 0''{,}302\,\tau^2 + 0''{,}018\,\tau^3 \\ z &= 2304''{,}948\,\tau + 1''{,}093\,\tau^2 + 0''{,}019\,\tau^3 \\ \theta &= 2004''{,}255\,\tau - 0''{,}426\,\tau^2 - 0''{,}042\,\tau^3 \end{aligned}\right\} \qquad (14.3)$$

Приведем строгие формулы перевода экваториальных координат α_0, δ_0 с эпохи t_0 в координаты α, δ на эпоху t:

$$\begin{aligned} A &= \cos\delta_\circ \sin(\alpha_\circ + \zeta), \\ B &= \cos\theta \cos\delta_\circ \cos(\alpha_\circ + \zeta) - \sin\theta \sin\delta_\circ, \\ C &= \sin\theta \cos\delta_\circ \cos(\alpha_\circ + \zeta) + \cos\theta \sin\delta_\circ, \end{aligned}$$

$$\operatorname{tg}(\alpha - z) = \frac{A}{B}, \qquad \sin\delta = C.$$

Применим к величинам A и B преобразование прямоугольных координат в полярные. Эта операция даст нам угол $(\alpha - z)$ непосредственно в нужном квадранте. Если звезда близка к полюсу, вместо $\sin\delta$ для определения δ следует использовать
$$\cos\delta = \frac{(\alpha - z)}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Перед редукцией α_0 и δ_0 к и δ вычислите изменения вследствие собственного движения.

Пример 14.6. Средние координаты звезды θ Персея на эпоху и равноденствие 1950,0 равны

$$\alpha_0 = 2^h40^m46{,}^s276\,, \qquad \delta_0 = +49°01'06{,}''45\,,$$

а компоненты годичного собственного движения, отнесенные к тому же равноденствию, равны

$+0{,}^s0342$ по прямому восхождению,
$-0{,}''083$ по склонению.

Привести эти координаты к эпохе и среднему равноденствию 1978, ноябрь 13,19 всемирного времени.

Начальная эпоха 1950,0 соответствует JD 2433 282,423, а конечная JD 2443 825,69. Следовательно, $\tau = 0{,}288665$ тропических столетий (или 28,8665 лет).

Вначале найдем изменение координат, вызванное собственным движением звезды:

$+0{,}^s0342 \times 28{,}8665 = +0{,}^s987$ по прямому восхождению,
$-0{,}''083 \times 28{,}8665 = -2{,}''40$ по склонению.

Следовательно, координаты звезды, взятые на эпоху 1978, ноябрь 13,19, но отнесенные к равноденствию 1950,0, равны

$$\alpha_0 = 2^h40^m46{,}^s276 + 0{,}^s987 = 2^h40^m47{,}^s263 = +40{,}°196\,929,$$
$$\delta_0 = +49°01'06{,}''45 - 2{,}''40 = +49°01'04{,}''05 = +49{,}°017\,792.$$

Поскольку начальное равноденствие соответствует 1950,0, можно пользоваться формулами (14.3). Подставляя в них $\tau = +0{,}288\,665$, получим:

$$\zeta = +665{,}''383 = +0{,}°184\,829,$$
$$z = +665{,}''449 = +0{,}°184\,847,$$
$$\theta = +578{,}''522 = +0{,}°160\,701,$$

$$A = +0{,}424\,893\,97\,,$$
$$B = +0{,}497\,451\,58\,,$$
$$C = +0{,}756\,311\,48\,,$$

$$\alpha - z = +40{,}°502\,010\,,$$
$$\alpha = +40{,}°686\,857 = 2^h42^m44{,}^s846\,,$$
$$\delta = +49{,}°140\,096 = +49°08'24{,}''35\,.$$

Упражнение. Для той же звезды, что и в предыдущем примере 14.6., рассчитайте координаты на эпоху и среднее равноденствие 1981,0.

Ответ: для этого случая $\tau = +0,31$ и

$$\alpha = 2^h42^m53^s,626, \qquad \delta = +49°08'56'',58.$$

Упражнение. Экваториальные координаты Полярной звезды (α Малой Медведицы), отнесенные к эпохе и среднему равноденствию 1950,0 таковы:

$$\alpha = 1^h48^m48^s,786, \qquad \delta = +89°01'43'',74 ;$$

годичное собственное движение для той же эпохи равно

$+0^s,1811$ по прямому восхождению,
$-0'',004$ по склонению.

Найдите координаты звезды, отнесенные к эпохе и среднему равноденствию 1800,0; 1980,0 и 2100,0.

Ответ :

1800,0	$\alpha = 0^h52^m25^s,31$	$\delta = +88°14'24'',52$
1980,0	2 11 47,60	+89 10 24,41
2100,0	5 53 33,88	+89 32 21,81

Следует отметить, что формулы (14.2) справедливы лишь на ограниченном интервале времени. Если мы попытаемся использовать их, например, для редукции к эпохе 32 600, окажется, что склонение Полярной звезды равно $-87°$, что совершенно неверно!

15

Нутация

Нутацию в долготе $\Delta\psi$ и нутацию в наклоне эклиптики $\Delta\varepsilon$ следует знать для вычисления видимого места звезды и истинного звездного времени. $\Delta\psi$ и $\Delta\varepsilon$ на данный момент времени можно вычислить следующим образом.

Найдем время T в юлианских столетиях, прошедшее с 0,5 января 1900 г. по формуле

$$T = \frac{\mathrm{JD} - 2415\,020,0}{36525}, \tag{15.1}$$

где JD — юлианская дата (см. разд. 3). Затем по приведенным ниже формулам, в которых различные постоянные даются в десятичном виде в градусах, вычислим значения углов L, L', M, M', Ω. Если T невелико или не требуется высокая точность, членами с T^2 можно пренебречь. Средняя долгота Солнца

$$L = 279{,}6967 + 36000{,}7689\,T + 0{,}000\,303\,T^2.$$

Средняя долгота Луны

$$L' = 270{,}4342 + 481\,267{,}8831\,T - 0{,}001\,133\,T^2.$$

Средняя аномалия Солнца

$$M = 358{,}4758 + 35999{,}0498\,T - 0{,}000\,150\,T^2.$$

Средняя аномалия Луны

$$M' = 296{,}1046 + 477\,198{,}8491\,T + 0{,}009\,192\,T^2.$$

Долгота восходящего узла Луны

$$\Omega = 259{,}1833 - 1934{,}1420\,T + 0{,}002\,078\,T^2.$$

Пренебрегая малыми величинами, получим следующие выражения, в которых коэффициенты даны в секундах дуги:

$$\begin{aligned}
\Delta\psi = &- (17{,}2327 + 0{,}01737\,T)\sin\Omega\\
&- (1{,}2729 + 0{,}00013\,T)\sin 2L\\
&+ 0{,}2088\sin 2\Omega\\
&- 0{,}2037\sin 2L'\\
&+ (0{,}1261 - 0.00031\,T)\sin M\\
&+ 0{,}0675\sin M'\\
&- (0{,}0497 - 0.00012\,T)\sin(2L + M)\\
&- 0{,}0342\sin(2L' - \Omega)\\
&- 0{,}0261\sin(2L' + M')\\
&+ 0{,}0214\sin(2L - M)\\
&- 0{,}0149\sin(2L - 2L' + M')\\
&+ 0{,}0124\sin(2L - \Omega)\\
&+ 0{,}0114\sin(2L' - M'),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Delta\varepsilon = &+ (9{,}2100 + 0{,}00091\,T)\cos\Omega\\
&+ (0{,}5522 - 0{,}00029\,T)\cos 2L\\
&- 0{,}0904\cos 2\Omega\\
&+ 0{,}0884\cos 2L'\\
&+ 0{,}0216\cos(2L + M)\\
&+ 0{,}0183\cos(2L' - \Omega)\\
&+ 0{,}0113\cos(2L' + M')\\
&- 0{,}0093\cos(2L - M)\\
&- 0{,}0066\cos(2L - \Omega).
\end{aligned}$$

Если высокая точность не требуется, можно отбросить малые члены и члены с T. В приведенных выражениях для $\Delta\psi$ и $\Delta\varepsilon$ первый член имеет период 6798 сут (18,61 года), а второй 182,62 сут.

Пример 15.а. Найти $\Delta\psi$ и $\Delta\varepsilon$ на момент эфемеридного времени 4^h35^m 13 ноября 1978 г. (или на 4^h34^m UT).

Последовательно вычисляем:

$$\begin{aligned} JD &= 2443\,825{,}69 \\ T &= +0{,}788\,656\,810 \\ L &= 28\,671{,}^\circ9485 = 231{,}^\circ9485 \\ L' &= 379\,825{,}^\circ6269 = 25{,}^\circ6269 \\ M &= 28\,749{,}^\circ3715 = 309{,}^\circ3715 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} M' &= 376\,642{,}^\circ2324 = 82{,}^\circ2324 \\ \Omega &= -1266{,}^\circ1897 = +173{,}^\circ8103 \\ \\ \Delta\psi &= -3{,}''378 \\ \Delta\varepsilon &= -9{,}''321. \end{aligned}$$

В «Астрономических эфемеридах» приведены точные значения $\Delta\psi = -3'',383$ и $\Delta\varepsilon = -9'',321$.

16

Видимые места звезд

Средним местом звезды на какой-либо момент времени называется ее видимое положение на небесной сфере, рассчитанное на среднее равноденствие даты, с точки зрения наблюдателя, расположенного на месте Солнца.

Видимое место звезды — это ее действительное положение на небесной сфере, отнесенное к мгновенному экватору, эклиптике и точке равноденствия на любой момент времени с точки зрения наблюдателя, помещенного в центр движущейся Земли. Следует отметить, что:

— *средняя точка равноденствия* есть пересечение среднего экватора с эклиптикой в данную эпоху;

— *истинная точка равноденствия* есть пересечение истинного экватора (т. е. с учетом влияния нутации) с эклиптикой в данную эпоху;

— понятия «средней» эклиптики не существует, так как эклиптика участвует в регулярном движении.

Задача пересчета положения звезды от среднего места, заданного на определенный момент времени (например, на стандартные равноденствие и эпоху), к видимому месту на другой момент времени сводится к вычислению следующих поправок:

А) За *собственное движение звезды* между эпохами. Можно предположить, что собственное движение смещает каждую звезду по дуге большого круга небесной сферы с неизменной угловой скоростью. Не только само собственное движение, но и его компоненты по прямому восхождению и склонению, вычисленные на фиксированное равноденствие, можно на протяжении нескольких столетий считать постоянными, кроме тех случаев, когда собственное движение составляет заметную долю полярного расстояния звезды. Следовательно, начинать расчеты нужно с вычисления поправки за собственное движение, считая фиксированными оси системы отсчета (см. пример 14.б.).

Б) За влияние *прецессии*. Как это делается, объясняется в разд. 14.

В) За влияние *нутации* (см. ниже).

Г) За *годичную аберрацию* (см. ниже).

Д) За *годичный параллакс*. Эта поправка никогда не превышает 0″,8 и в большинстве случаев ею можно пренебречь.*

Изменения прямого восхождения и склонения из-за *нутации* составляют

$$\Delta\alpha_1 = (\cos\varepsilon + \sin\varepsilon \sin\alpha \quad \mathrm{tg}\delta\ )\Delta\psi - (\cos\alpha \quad \mathrm{tg}\delta\ )\Delta\varepsilon,$$
$$\Delta\delta_1 = (\sin\varepsilon \cos\alpha)\Delta\psi + (\sin\alpha)\Delta\varepsilon.$$

Величины $\Delta\psi$ и $\Delta\varepsilon$ можно вычислить методом, описанным в разд. 15, или выписать из «Астрономических эфемерид»; наклон эклиптики рассчитывается по формуле (18.4).

Если $\odot$ представляет собой истинную долготу Солнца, которую можно вычислить так, как указано в разд. 18, изменения прямого восхождения и склонения из-за годичной аберрации равны

$$\Delta\alpha_2 = -20'',49\ \frac{\cos\alpha\cos\odot\cos\varepsilon + \sin\alpha\sin\odot}{\cos\delta},$$
$$\Delta\delta_2 = -20'',49\ \big[\cos\odot\cos\varepsilon\ (\ \mathrm{tg}\varepsilon \quad \cos\delta - \sin\alpha\sin\delta) + \cos\alpha\sin\delta\sin\odot\big],$$

где, как и ранее, α и δ — прямое восхождение и склонение звезды.

---

* Поправка за годичный параллакс зависит от расстояния до звезды; значение 0″,8 соответствует ближайшей звезде — Проксиме Центавра или кратной системе α Центавра. Эту поправку имеет смысл вычислять в необходимых случаях только для ближайших звезд, расположенных не далее 10 пс от Солнца.— *Прим. ред.*

Полные поправки к α и δ равны соответственно $\Delta\alpha_1 + \Delta\alpha_2$ и $\Delta\delta_1 + \Delta\delta_2$. Вычисленные по приведенным выше формулам поправки выражены в секундах дуги. Для перевода в секунды времени поправку к α поделите на 15.

Пример 16.а. Рассчитать видимое место звезды θ Персея на 13,19 ноября 1978 г. всемирного времени.

Среднее положение этой звезды на требуемый момент времени с учетом собственного движения было найдено в примере 14.б., т. е.

$$\alpha = 2^h42^m44^s\!,846 = 40^\circ\!,687, \qquad \delta = +49^\circ08'24''\!,35 = +49^\circ\!,140.$$

Значения нутации в долготе и наклоне эклиптики были определены на тот же момент времени в примере 15.а.:

$$\Delta\psi = -3'',378 \text{ и } \Delta\varepsilon = -9'',321.$$

Истинную долготу Солнца можно вычислить по формулам из разд. 18; она равна $\odot = 230°,45$, а $\varepsilon = 23°,44$ (для обеих величин в данном случае достаточна точность порядка 0,01°).

Подставив значения α, δ, ε, $\odot$, $\Delta\psi$ и $\Delta\varepsilon$ в приведенные выше формулы, получим

$$\Delta\alpha_1 = +4''\!,059, \qquad \Delta\delta_1 = -7''\!,096,$$
$$\Delta\alpha_2 = +29''\!,619, \qquad \Delta\delta_2 = +6''\!,554,$$

и полные поправки к прямому восхождению и склонению составляют

$$\Delta\alpha = +4''\!,059 + 29''\!,619 = +33''\!,678 = +2^s\!,245,$$
$$\Delta\delta = -7''\!,096 + 6''\!,554 = -0''\!,54.$$

Следовательно, видимые координаты звезды равны

$$\alpha = 2^h42^m44^s\!,846 + 2^s\!,245 = 2^h42^m47^s\!,09,$$
$$\delta = +49^\circ08'24''\!,35 - 0''\!,54 = +49^\circ08'23''\!,8.$$

Путем интерполирования данных, приведенных на с. 321 «Астрономического ежегодника СССР» за 1978 г., можно получить

$$\alpha = 2^h42^m47^s\!,100 \quad \text{и} \quad \delta = +49^\circ08'23''\!,86.$$

17

Приведение эклиптических элементов орбиты с одного равноденствия на другое

Для решения некоторых задач может понадобиться редукция элементов орбиты планеты, астероида или кометы с одного равноденствия на другое. Конечно, большая полуось a и эксцентриситет орбиты e при этом не изменятся и, следовательно, нужно рассматривать изменения только трех других элементов орбиты: i — наклона орбиты, ω — аргумента перигелия, Ω — долготы восходящего узла. Пусть i_0, ω_0 и Ω_0 — значения этих элементов в начальную эпоху τ_0, а i, ω и Ω — их (неизвестные) значения в эпоху τ. Выразим τ_0 и τ в тропических *тысячелетиях*, отсчитывая их от 1900,0 и положим

$$t = \tau - \tau_\circ.$$

Затем вычислим следующие величины:

$$\eta = (471''\!.07 - 6''\!.75\,\tau_\circ + 0''\!.57\,\tau_\circ^2)t + (-3''\!.37 + 0''\!.57\,\tau_\circ)t^2 + 0''\!.05\,t^3,$$

$$\theta_\circ = 173^\circ\!.950833 + 32869''\tau_\circ + 56''\tau_\circ^2 - (8694'' + 55''\tau_\circ)t + 3''t^2,$$

$$\theta = \theta_\circ + (50256''\!.41 + 222''\!.29\,\tau_\circ + 0''\!.26\,\tau_\circ^2)t + (111''\!.15 + 0''\!.26\,\tau_\circ)t^2 + 0''\!.1\,t^3.$$

На рис. 5 E_0 и γ_0 обозначают эклиптику и точку весеннего равноденствия в эпоху τ_0, а E и γ — эклиптику и точку весеннего равноденствия в эпоху τ. Угол между двумя положениями эклиптики равен η. Перигелий орбиты обозначен буквой π.

Затем вычислим i и $\Omega - \theta$ и отсюда Ω по формулам

$$\cos i = \cos i_\circ \cos\eta + \sin i_\circ \sin\eta \cos(\Omega_\circ - \theta_\circ), \qquad (17{,}1)$$

$$\sin i \sin(\Omega - \theta) = \sin i_\circ \sin(\Omega_\circ - \theta_\circ), \qquad (17{,}2)$$
$$\sin i \cos(\Omega - \theta) = -\sin\eta \cos i_\circ + \cos\eta \sin i_\circ \cos(\Omega_\circ - \theta_\circ).$$

Не следует использовать формулу (17.1) при малых наклонах орбиты.

После этого определим $\omega = \omega_0 + \Delta\omega$, где $\Delta\omega$ вычисляется из формул

$$\begin{aligned} \sin i \sin\Delta\omega &= -\sin\eta \sin(\Omega_\circ - \theta_\circ), \\ \sin i \cos\Delta\omega &= \sin i_\circ \cos\eta - \cos i_\circ \sin\eta \cos(\Omega_\circ - \theta_\circ). \end{aligned} \qquad (17{,}3)$$

Если $i_0 = 0$, величина Ω_0 имеет неопределенное значение; в таком случае $i = \eta$, $\Omega = \theta + 180°$.

Пример 17.а. В «*Общем каталоге орбит комет с −466 по 1952 г.*» Ф. Бальде и Г. Деобалди привели следующие орбитальные элементы

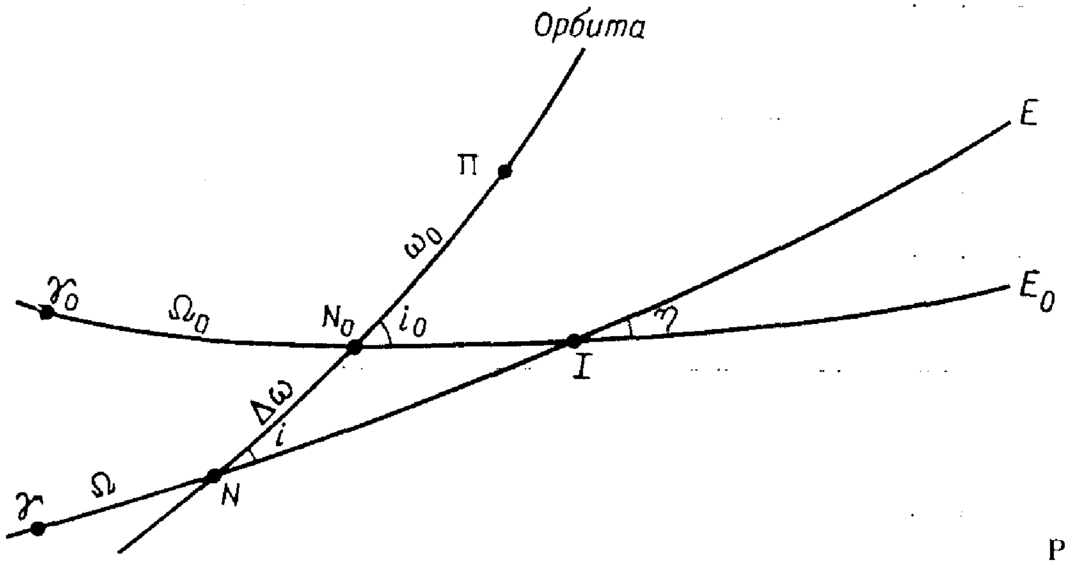

Рис. 5.

кометы Клинкенберга 1744 г., рассчитанные на среднее равноденствие 1744,0:

$$i_0 = 47{,}^\circ1220,$$
$$\omega_0 = 151{,}4486,$$
$$\Omega_0 = 45{,}7481.$$

Привести эти элементы к стандартному равноденствию 1950,0.

Находим последовательно:

$$\tau_0 = \frac{1744 - 1900}{1000} = -0{,}156, \qquad \tau = \frac{1950 - 1900}{1000} = +0{,}050,$$

$$t = +0{,}206,$$

$$\eta = +97{,}''114 = +0{,}^\circ026\,9761,$$

$$\theta_0 = 173{,}^\circ950\,833 - 6915{,}''270 = 172{,}^\circ029\,925,$$

$$\theta = 172{,}^\circ029\,925 + 10350{,}''394 = 174{,}^\circ905\,035.$$

Выпишем формулы (17.2):

$$\sin i \sin(\Omega - \theta) = -0{,}5907\,2524,$$
$$\sin i \cos(\Omega - \theta) = -0{,}4339\,6271.$$

Используя преобразование прямоугольных координат в полярные, находим

$$\sin i = +0,7329\,9382, \qquad \text{т. е.} \quad i = 47{,}^\circ1380,$$
$$\Omega - \theta = -126{,}^\circ3020, \qquad \text{т. е.} \quad \Omega = 48{,}^\circ6030.$$

По формуле (17,3) найдем:

$$\sin i \sin \Delta\omega = +0,0003\,7954,$$
$$\sin i \cos \Delta\omega = +0,7329\,9372,$$

откуда $\Delta\omega = +0^\circ,0297$ и $\omega = 151^\circ,4783$. В «*Каталоге кометных орбит*» Марсдена (1975 г.) приводятся следующие значения элементов орбит:

$$i = 47{,}^\circ1378, \quad \omega = 151{,}^\circ4783, \quad \Omega = 48{,}^\circ6030.$$

18

Координаты Солнца

Пусть JD — юлианская эфемеридная дата, которую можно вычислить изложенным в разд. 3 способом. Тогда интервал времени T, отсчитываемый от эпохи 1900, январь 0,5 и измеряемый в юлианских столетиях, содержащих 36525 эфемеридных суток, дается формулой

$$T = \frac{\text{JD} - 2415\,020,0}{36525}. \tag{18,1}$$

Следует вычислять T с достаточным количеством десятичных знаков. Так, например, пяти знаков после запятой недостаточно (несмотря на то, что долготу Солнца не требуется знать с точностью выше 1°); вспомним, что T выражается в столетиях, так что ошибке в T, равной 0,00001, соответствует ошибка в 0,37 сут.

Средняя геометрическая долгота Солнца, отсчитываемая от средней точки равноденствия на дату, получается из формулы

$$L = 279{,}^\circ69668 + 36000{,}^\circ76892\,T + 0{,}^\circ000\,3025\,T^2.$$

Средняя аномалия Солнца равна

$$M = 358{,}^\circ47583 + 35999{,}^\circ04975\,T - 0{,}^\circ000\,150\,T^2 - 0{,}^\circ000\,0033\,T^3.$$

Эксцентриситет орбиты Земли вычисляется по формуле

$$e = 0,016\,751\,04 - 0,000\,0418\,T - 0,000\,000\,126\,T^2.$$

5 01653

Для вычисления истинной долготы Солнца и истинной аномалии можно использовать два разных метода.

Первый метод. Зная M и e, с помощью одного из способов, изложенных в разд. 22, решим уравнение Кеплера и найдем эксцентрическую аномалию E. Затем по формуле (25.1) определим истинную аномалию v. Тогда истинная долгота Солнца $\odot$ будет равна

$$\odot = L + v - M.$$

Второй метод. Вычислим для Солнца уравнение центра C:

$$\begin{aligned} C = &+ (1{,}^\circ 919\,460 - 0{,}^\circ 004\,789\,T - 0{,}^\circ 000\,014\,T^2)\ \sin M \\ &+ (0{,}^\circ 020\,094 - 0{,}^\circ 000\,100\,T)\ \sin 2M \\ &+ 0{,}^\circ 000\,293\ \sin 3M. \end{aligned}$$

Истинная долгота Солнца будет равна

$$\odot = L + C,$$

а истинная аномалия

$$v = M + C.$$

Величину радиус-вектора Солнца в астрономических единицах можно найти с помощью одного из выражений

$$R = 1{,}000\,0002\ (1 - e\cos E),$$
$$R = \frac{1{,}000\,0002\ (1 - e^2)}{1 + e\cos v}. \tag{18.2}$$

Числитель второй формулы медленно меняется со временем. Он равен

0,999 7182	на	1800 год
0,999 7196		1900
0,999 7210		2000
0,999 7224		2100

Вычисленная этим способом долгота Солнца $\odot$ — истинная *геометрическая* долгота, отнесенная к *среднему* равноденствию даты. Ее нужно знать, например, при расчетах геоцентрических положений планет.

Если требуется видимая долгота Солнца, отнесенная к *истинному* равноденствию даты, нужно исправить $\odot$ за нутацию и аберрацию. В случае если высокая точность не нужна, сделать это можно по следующим формулам:

$$\Omega = 259{,}^\circ 18 - 1934{,}^\circ 142\,T,$$

$$\odot_{\text{вид}} = \odot - 0{,}^\circ 00569 - 0{,}^\circ 00479\ \sin\Omega.$$

Иногда (например, при наблюдении метеоров) требуется знать долготу Солнца, отнесенную к стандартному равноденствию 1950,0. Для момента наблюдений в пределах XX столетия с достаточной точностью можно воспользоваться формулой

$$\odot_{1950} = \odot - 0{,}^\circ 01396\ (\text{год} - 1950).$$

Широта Солнца не превосходит 1,2″ и ею можно пренебречь, когда высокой точности не требуется. Тогда прямое восхождение и склонение Солнца вычисляются по формулам

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\cos\varepsilon \sin\odot}{\cos\odot}, \tag{18.3}$$

$$\sin\delta = \sin\varepsilon \sin\odot,$$

где наклон эклиптики ε находится из формулы

$$\begin{aligned}\varepsilon = 23{,}^\circ 452\,294 &- 0{,}^\circ 013\,0125\,T \\ &- 0{,}^\circ 000\,001\,64\,T^2 \\ &+ 0{,}^\circ 000\,000\,503\,T^3.\end{aligned} \tag{18.4}$$

Для вычисления *видимого* положения Солнца к наклону эклиптики следует добавить поправку

$$+\ 0{,}^\circ 00\,256\ \cos\Omega. \tag{18.5}$$

Формулу (18.3) можно записать в виде

$$\operatorname{tg}\alpha = \cos\varepsilon\ \operatorname{tg}\odot,$$

откуда следует, что α и $\odot$ находятся в одном квадранте. Однако при использовании программируемых карманных калькуляторов лучше оставить ее в виде (18.3) и выполнить преобразование прямоугольных координат в полярные.

Значение α получается в градусах. Чтобы выразить прямое восхождение в часах, поделите результат на 15.

Более высокая точность

Путем следующих вычислений можно обеспечить более высокую точность. Найдем углы A, B, C, D, E, H (все коэффициенты в приведенных выражениях даются в градусах в виде десятичной дроби):

$$\begin{aligned}A &= 153.23 + 22518.7541\,T,\\ B &= 216.57 + 45037.5082\,T,\\ C &= 312.69 + 32964.3577\,T,\end{aligned}$$

$$D = 350{,}74 + 445\,267{,}1142\,T - 0{,}00144\,T^2,$$
$$E = 231{,}19 + 20.20\,T,$$
$$H = 353{,}40 + 65928{,}7155\,T.$$

Затем прибавим следующие поправки к долготе Солнца:

$$+\ 0^\circ{,}00134\ \cos A$$
$$+\ 0^\circ{,}00154\ \cos B$$
$$+\ 0^\circ{,}00200\ \cos C$$
$$+\ 0^\circ{,}00179\ \sin D$$
$$+\ 0^\circ{,}00178\ \sin E$$

и к величине радиус-вектора:

$$+\ 0{,}000\,005\,43\ \sin A$$
$$+\ 0{,}000\,015\,75\ \sin B$$
$$+\ 0{,}000\,016\,27\ \sin C$$
$$+\ 0{,}000\,030\,76\ \cos D$$
$$+\ 0{,}000\,009\,27\ \sin H.$$

Члены с A и B представляют возмущающее действие Венеры, члены с C — Юпитера, члены с D — Луны, а член с E связан с долгопериодическим неравенством.

Пример 18.а. Рассчитать положение Солнца на 0^h ЕТ 12 ноября 1978 г. (JD 2443 824,5).

Последовательно вычисляем:

$$T = +0{,}788\,624\,230,$$
$$L = 28670^\circ{,}77554 = 230^\circ{,}77554,$$
$$M = 28748^\circ{,}19863 = 308^\circ{,}19863,$$
$$e = 0{,}016\,718\,00.$$

Решая для этих значений уравнение Кеплера (см. разд. 22), найдем $E = 307^\circ{,}43807$. Затем по формуле (25.1) получаем $v = 306^\circ{,}67358$.

Значит, истинная долгота Солнца равна

$$\odot = L + v - M = 229^\circ{,}25049 = 229^\circ 15' 02''.$$

Используя второй метод, найдем уравнение центра

$$C = 1^\circ{,}915\,6746\ \sin M + 0^\circ{,}020\,0151\ \sin 2M + 0^\circ{,}000\,293\ \sin 3M$$

$$= -1^\circ{,}52505,$$

следовательно,

$$\odot = L + C = 229^\circ{,}25049,$$

что совпадает с полученным выше результатом. Любая из формул (18.2) дает $R = 0{,}98984$.

Согласно «Астрономическим эфемеридам», точные значения равны

$$\odot = 229^\circ 15' 05''{,}85 \quad \text{и} \quad R = 0{,}989\,8375\,.$$

Для того чтобы вычислить видимую долготу Солнца, найдем $\Omega = = 1266^\circ{,}13 = +173^\circ{,}87$, следовательно,

$$\odot_{\text{вид}} = 229^\circ{,}25049 - 0^\circ{,}00569 - 0^\circ{,}00479 \sin 173^\circ{,}87$$
$$= 229^\circ{,}24429 = 229^\circ 14' 39''.$$

В «Астрономических эфемеридах» находим точное значение 229°14′41 86.

По формулам (18.4) и (18.5) находим $\varepsilon = 23^\circ{,}43949$, откуда получим с учетом того, что $\odot_{\text{вид}} = 229^\circ{,}24429$,

$$\alpha = -133^\circ{,}20853 = +226^\circ{,}79147 = 15^h{,}119431 = 15^h 07^m 10^s{,}0,$$
$$\delta = -17^\circ{,}53682 = -17^\circ 32' 13''.$$

В «Астрономических эфемеридах» приводятся значения координат $\alpha = 15^h 07^m 10^s{,}11$ и $\delta = -17^\circ 32' 13{,}3''$.

19

Прямоугольные координаты Солнца

Прямоугольные геоцентрические экваториальные координаты X, Y, Z Солнца требуются для расчетов эфемерид малых планет или комет (см. разд. 25 и 26). Начало координат помещается в центр Земли. Ось X направлена в точку весеннего равноденствия (долгота 0°), ось Y также лежит в экваториальной плоскости и направлена в точку с долготой 90°, а ось Z направлена в северный полюс неба.

Значения X, Y, Z приводятся в «Астрономических эфемеридах» на 0^h ET каждого дня и даются в астрономических единицах. Если под рукой нет «Астрономических эфемерид» или требуются координаты на момент времени в прошлом или будущем, прямоугольные геоцентрические экваториальные координаты Солнца можно вычислить по формулам

$$\begin{aligned} X &= R \cos \odot, \\ Y &= R \sin \odot \cos \varepsilon, \\ Z &= R \sin \odot \sin \varepsilon, \end{aligned} \tag{19.1}$$

где R — выраженный в а.е. радиус-вектор Солнца, $\odot$ — истинная долгота Солнца, отнесенная к средней точке равноденствия заданной даты, ε — наклон эклиптики. Величины R и $\odot$ можно вычислить методами, представленными в разд. 18, а ε — по формуле (18.4). В выражениях (19.1) не учитывается широта Солнца, которая всегда очень мала.

Однако найденные таким способом координаты Солнца получены в системе координат, относящейся к среднему экватору и среднему равноденствию даты. Чаще всего бывает необходимо узнать эти координаты для другого положения экватора и точки равноденствия, например, для стандартного равноденствия 1950,0. Вычислить их можно следующим образом.

Пусть X_0, Y_0, Z_0 взяты в начальную эпоху, а X, Y, Z — в конечную. Тогда они связаны соотношениями

$$\begin{aligned} X &= X_x X_0 + Y_x Y_0 + Z_x Z_0, \\ Y &= X_y X_0 + Y_y Y_0 + Z_y Z_0, \\ Z &= X_z X_0 + Y_z Y_0 + Z_z Z_0, \end{aligned} \tag{19.2}$$

где коэффициенты равны

$$\begin{aligned} X_x &= \cos \zeta \cos z \cos \theta - \sin \zeta \sin z, \\ X_y &= \sin \zeta \cos z + \cos \zeta \sin z \cos \theta, \\ X_z &= \cos \zeta \sin \theta, \\ Y_x &= -\cos \zeta \sin z - \sin \zeta \cos z \cos \theta, \\ Y_y &= \cos \zeta \cos z - \sin \zeta \sin z \cos \theta, \\ Y_z &= -\sin \zeta \sin \theta, \\ Z_x &= -\cos z \sin \theta, \end{aligned}$$

$$Z_y = -\sin z \sin \theta,$$

$$Z_z = \cos \theta.$$

Углы ζ, z и θ находятся по формулам (14.2). Интересно заметить, что выполняются приближенные равенства

$$Y_x = -X_y, \qquad Z_x = -X_z, \qquad Z_y = Y_z.$$

Пример 19.а. Найти координаты Солнца X, Y, Z, приведенные к равноденствию 1950,0 на момент 0^h ЕТ 12 ноября 1978 г. (JD 2443 824,5).

В примере 18.а мы нашли следующие значения долготы и радиус-вектора Солнца на этот момент:

$$\odot = 229^\circ\!,25049, \qquad R = 0,98984.$$

По формулам (18.1) и (17.4) получим

$$T = +0,788\,624\,230, \qquad \varepsilon = 23^\circ\!,442\,031.$$

Тогда формулы (19.1) дадут

$$X = -0,646\,121,$$
$$Y = -0,687\,981,$$
$$Z = -0,298\,316.$$

Эти координаты соответствуют средней точке равноденствия и среднему экватору данной даты. По формулам (19.2) их нужно привести к эпохе 1950,0. Но вначале вычислим ζ, z, θ по формулам разд. 14. Найдем

$$\tau_0 = \frac{2443\,824,5 - 2415\,020,313}{36524,2199} = +0,788\,632\,504,$$

$$\tau = \frac{2433\,282,423 - 2443\,824,5}{36524,2199} = -0,288\,632\,503,$$

$$\zeta = -665''\!,374 = -0^\circ\!,184\,826,$$

$$z = -665''\!,309 = -0^\circ\!,184\,808,$$

$$\theta = -578''\!,457 = -0^\circ\!,160\,682.$$

Затем вычисляем

$$X_x = +0,999\,9753, \qquad Y_x = +0,006\,4513, \qquad Z_x = +0,002\,8044,$$

$$X_y = -0,006\,4513, \qquad Y_y = +0,999\,9792, \qquad Z_y = -0,000\,0090,$$

$$X_z = -0,002\,8044, \qquad Y_z = -0,000\,0090, \qquad Z_z = +0,999\,9961,$$

и, наконец, по формулам (19.2) получаем

$$X_{1950} = -0{,}651\,38,$$
$$Y_{1950} = -0{,}683\,80,$$
$$Z_{1950} = -0{,}296\,50.$$

Точные значения, приведенные в «Астрономических эфемеридах», равны

$$-0{,}651\,3639,$$
$$-0{,}683\,8057,$$
$$-0{,}296\,5014.$$

20

Равноденствия и солнцестояния

В моменты равноденствий и солнцестояний видимая долгота Солнца кратна 90°. Их можно рассчитать следующим образом.

Вначале найдем приблизительную дату (JD) по формуле

$$\text{JD} = (\text{год} + k/4) \times 365{,}2422 + 1721\,141{,}3, \qquad (20.1)$$

где «год» — целое число, причем $k = 0$ для весеннего равноденствия, $k = 1$ для летнего солнцестояния, $k = 2$ для осеннего равноденствия, $k = 3$ для зимнего солнцестояния.

Описанным в разд. 18 методом найдем видимую долготу Солнца $\odot_{\text{вид}}$ на юлианскую дату, определяемую формулой (20.1). Затем вычислим поправку к юлианской дате JD, равную (в сутках)

$$+\,58 \sin\,(k \cdot 90° - \odot_{\text{вид}}). \qquad (20.2)$$

Повторим, если нужно, вычисления с новым значением JD до тех пор, пока поправка не станет достаточно малой (скажем, меньше 0,001 сут.).

Окончательное значение JD нужно перевести в обычную календарную дату так, как это делается в разд. 3. Результат выражен в эфемеридном времени.

Пример 20.a. Найти момент осеннего равноденствия в 1979 г.

Подставим год = + 1979 и k = 2 в формулу (20.1) и найдем приблизительное значение юлианской даты JD = 2444 138,24.

Вычислим, как это описано в разд. 18, на этот момент времени $\odot_{\text{вид}}$ = 28 978°,144 = 178°,144 и поправку по формуле (20.2), которая равна

$$+58 \sin(180° - 178{,}^\circ144) = +1{,}88 \text{ сут.}$$

С учетом поправки юлианская дата равна

$$\text{JD} = 2444\ 138{,}24 + 1{,}88 = 2444\ 140{,}12.$$

Зная новое значение, найдем $\odot_{\text{вид}}$ = 179°,983 и новую поправку, равную +0,017 сут. Исправленное значение юлианской даты будет равно JD = = 2444 140,137.

Снова используем последнее значение и получим $\odot_{\text{вид}}$ = 180°,000, откуда ясно, что истинное значение действительно равно JD = = 2444 140,137. Оно соответствует дате 23 сентября 1979 г. $15^h 17^m 17^s$ ET, что можно округлить до $15^h 16^m$ UT.

(В 1979 г. разность ET — UT составляла приблизительно 50 с.) В «Астрономических эфемеридах» дается точное время $15^h 17^m$ UT.

Вместо формулы (20.1) можно использовать более точное приближение:

Весеннее равноденствие:

$$\text{JD} = 1721\ 139{,}2855 + 365{,}242\,1376\, Y + 0{,}067\,9190\, y^2 - 0{,}002\,7879\, y^3,$$

Летнее солнцестояние:

$$\text{JD} = 1721\ 233{,}2486 + 365{,}241\,7284\, Y - 0{,}053\,0180\, y^2 + 0{,}009\,3320\, y^3,$$

Осеннее равноденствие:

$$\text{JD} = 1721\ 325{,}6978 + 365{,}242\,5055\, Y - 0{,}126\,6890\, y^2 + 0{,}001\,9401\, y^3,$$

Зимнее солнцестояние:

$$\text{JD} = 1721\ 414{,}3920 + 365{,}242\,8898\, Y - 0{,}010\,9650\, y^2 - 0{,}008\,4885\, y^3.$$

Здесь Y — год, а $y = Y/1000$. Важно отметить, что Y должно быть *целым числом*. В противном случае получится бессмысленный результат! Ошибки значений JD, полученных этим методом, обычно не превышают 15 мин.

21

Уравнение времени

Уравнение времени E представляет собой разность прямых восхождений видимого (истинного) Солнца и воображаемого среднего Солнца. Если в вашем распоряжении есть «Астрономические эфемериды», уравнение времени на 0^h UT можно вычислить так:

$$\begin{aligned} E = 12^h &+ \text{истинное звездное время на } 0^h \text{ UT} \\ &- \text{видимое прямое восхождение Солнца на } 0^h \text{ ET} \\ &- 0{,}002738\,\Delta T, \end{aligned}$$

где ΔT = ET − UT.

Пример 21.а. Рассчитать уравнение времени на 0^h всемирного времени 21 января 1978 г.

Из «Астрономических эфемерид» возьмем следующие величины:

истинное звездное время на 0^h UT = $8^h00^m01^s{,}193$, видимое прямое восхождение Солнца на 0^h ET = $20^h11^m10^s{,}78$, $\Delta T = +48^s{,}6$.

Следовательно,

$$\begin{aligned} E &= 20^h00^m01^s{,}193 - 20^h11^m10^s{,}78 - (0{,}002738 \times 48^s{,}6) \\ &= -11^m09^s{,}72. \end{aligned}$$

Уравнение времени на любой момент можно также вычислить по предлагаемой У. Смартом формуле (см. «*Text-Book on Spherical Astronomy*», 1956 г., с. 149):

$$E = y \sin 2L - 2e \sin M + 4ey \sin M \cos 2L - \frac{1}{2}y^2 \sin 4L - \frac{5}{4}e^2 \sin 2M, \qquad (21.1)$$

где $y = (\operatorname{tg} \varepsilon/2)^2$, ε — наклон эклиптики, L — средняя долгота Солнца, e — эксцентриситет земной орбиты, M — средняя аномалия Солнца. Величины ε, L, e и M можно вычислить по формулам разд. 18.

Формула (21.1) дает значение E в радианах. Его нужно перевести в градусы, а затем, умножив на 15, выразить в часах.

Пример 21.б. Вычислить уравнение времени на 0^h ET 21 января 1978 г. (JD = 2443 529,5).

Последовательно найдем

$$
\begin{aligned}
T &= +0{,}780\,547\,5702, \\
L &= 28380{,}^\circ00957 = 300{,}^\circ00957, \\
M &= 28457{,}^\circ44655 = 17{,}^\circ44655, \\
e &= 0{,}016\,718\,34, \\
\varepsilon &= 23{,}^\circ442\,136, \\
y &= 0{,}043\,045\,274.
\end{aligned}
$$

Формула (21.1) дает в этом случае

$$
\begin{aligned}
E &= -0{,}048\,743\,490 \text{ радиан} \\
&= -2{,}^\circ792\,7963 \\
&= -11^m\,10^s{,}3.
\end{aligned}
$$

22

Уравнение Кеплера

Уравнение Кеплера имеет вид

$$E = M + e \sin E, \tag{22.1}$$

где e — эксцентриситет орбиты планеты, M — средняя аномалия планеты в заданный момент, E — эксцентрическая аномалия. Обычно требуется решить уравнение относительно E для заданных значений e и M (как в разд. 18, 25, 39). Эксцентрическая аномалия E является вспомогательной величиной, необходимой для вычисления истинной аномалии v.

Уравнение (22.1) представляет собой трансцендентное уравнение относительно E; его нельзя решить аналитически. Мы опишем два итерационных метода (итерация = повторение) определения E и в конце раздела дадим приближенную формулу.

Первый метод

Нужно отметить, что в формуле (22.1) углы должны быть выражены в радианах. Следовательно, на калькуляторе вычисления нужно производить в радианной мере (*radian mode*). Чтобы этого избежать, можно умножить e на $180/\pi$, т. е. перевести e в угловую меру. Пусть e_0 — «модифицированный» таким образом эксцентриситет. Тогда запишем уравнение Кеплера в виде

$$E = M + e_o \sin E, \tag{22.2}$$

где все величины уже выражены в градусах.

Для решения уравнения (22.2) подставим в его правую часть приближенное значение E. Тогда формула даст более точное приближение E. Повторяем процедуру до тех пор, пока не будет достигнута требуемая точность; на программируемом калькуляторе этот процесс может выполняться автоматически. В качестве первого приближения возьмем $E = M$. Последовательные приближения будут следующими:

$$\begin{aligned} E_0 &= M, \\ E_1 &= M + e \sin E_0, \\ E_2 &= M + e \sin E_1, \\ E_3 &= M + e \sin E_2, \\ &\text{и т. д.} \end{aligned}$$

Здесь E_1, E_2, E_3, ... — последовательные приближения к точному значению эксцентрической аномалии E.

Пример 22.a. Решить уравнение Кеплера для $e = 0{,}100$ и $M = 5°$ с точностью 0,000 001°.

Найдем $e_0 = 0{,}100 \times 180/\pi = 5°{,}729\,57795$ и перепишем уравнение Кеплера в виде

$$E = 5 + 5{,}729\,577\,95 \sin E,$$

где все величины уже даны в градусах. Начнем расчеты с $E = M = 5$; последовательные значения E будут такими:

5,000 000
5,499 366
5,549 093
5,554 042
5,554 535
5,554 584
5,554 589
5,554 589

Следовательно, искомое значение $E = 5°{,}554\,589$.

Второй метод

Первый метод очень прост, и при малых e никаких сложностей не возникает. Однако с увеличением e число требующихся итераций возрастает. Например, при $e = 0{,}990$ и $M = 2°$ последовательные 25 итераций дадут следующие результаты:

2,000 000	15,168 909	24,924 579	29,813 009
3,979 598	16,842 404	25,904 408	30,200 940
5,936 635	18,434 883	26,780 556	30,533 515
7,866 758	19,937 269	27,557 863	30,817 592
9,763 644	21,341 978	28,242 483	.
11,619 294	22,643 349	28,841 471	:
13,424 417	23,837 929	29,362 399	:

Даже после 50-й итерации результат (32°,345 452) все еще отличается от точного (32°,361 007) более чем на 0°,01.

При e больше 0,4 или 0,5 итерации сходятся настолько медленно, что лучше перейти к другой итерационной формуле:

$$E_1 = E_0 + \frac{M + e_0 \sin E_0 - E_0}{1 - e \cos E_0}, \qquad (22.3)$$

где E_0 — полученное на предыдущем шаге значение E. Все величины в этой формуле выражены в градусах. Отметим, что в числителе дроби стоит «модифицированный» эксцентриситет e_0, а в знаменателе — обычный эксцентриситет e.

Как и ранее, по мере необходимости процесс итераций повторяется.

Пример 22.б. Задание то же, что и в предыдущем примере 22.а, но следует воспользоваться формулой (22.3).

Перепишем ее в виде

$$E_1 = E_0 + \frac{5 + 5{,}729\,577\,95 \sin E_0 - E_0}{1 - 0{,}100 \cos E_0}.$$

Начав расчеты с $E_0 = M = 5°$, получим следующие значения E:

E_0	*Поправка*	E_1
5,000 000 000	+0,554 616 193	5,554 616 193
5,554 616 193	−0,000 026 939	5,554 589 254
5,554 589 254	−0,000 000 001	5,554 589 253

В этом случае уже после третьей итерации достигнута точность 0°,000 000 001.

В качестве упражнения воспользуемся вторым методом для вычисления эксцентрической аномалии при $e = 0{,}99$, $M = 2°$. Величина E будет вычислена с точностью $0°{,}000\,0001$ уже после 9—10 итераций.

При использовании этих итерационных методов в программе нужно предусмотреть тест, проверяющий точность вычислений, поскольку по достижении нужной точности (скажем, $0°{,}000\,001$) расчеты должны закончиться. Заметим, что тесты для разных методов неодинаковы.

Формула (22.2) первого метода дает сразу новое приближенное значение E. После того как оно найдено, его следует сравнить с предыдущим значением, которое для этой цели следует сохранить в памяти компьютера. Поэтому применение первого метода требует двух регистров памяти: одного для нового значения E, а второго — для предыдущего.

Формула (22.3) второго метода также дает новое значение эксцентрической аномалии E, однако стоящая в правой части выражения дробь есть не что иное, как поправка к предыдущему значению E_0. На многих калькуляторах есть возможность непосредственного сложения поправки с предыдущим значением E_0, содержащимся в регистре памяти (например, с помощью инструкции STO + 0 на HP-67), после чего проверяется абсолютная величина поправки. Для этого нужен всего один регистр памяти для эксцентрической аномалии.

Третий метод

Приближенное значение E для малых эксцентриситетов можно найти по формуле

$$\operatorname{tg} E = \frac{\sin M}{\cos M - e}. \tag{22.4}$$

Подставив в нее условия из примера 22.а, найдем

$$\operatorname{tg} E = \frac{+0{,}087\,1557}{+0.896\,1947},$$

откуда $E = 5°{,}554\,599$ вместо точного значения $5°{,}554\,589$, т. е. ошибка составляет всего лишь $0''{,}035$. (Однако при той же величине эксцентриситета и $M = 82°$ ошибка достигает $35''$.)

Максимальная ошибка, связанная с применением формулы (22.4), равна

$0°{,}0327$ для $e = 0{,}15$
$0{,}0783$ для $e = 0{,}20$
$0{,}1552$ для $e = 0{,}25$

1,42 для $e = 0,50$
24,7 для $e = 0,99$

Эксцентриситет орбиты Земли равен $e = 0{,}01674$ и для нее ошибка не превышает $0'',2$, поэтому можно уверенно пользоваться формулой (22.4) (кроме тех случаев, когда нужна очень высокая точность).

23

Элементы орбит планет

Элементы орбит больших планет можно представить полиномами вида

$$a_0 + a_1T + a_2T^2 + a_3T^3,$$

где время T в юлианских столетиях (состоящих из 36 525 эфемеридных суток) отсчитывается от эпохи 1900, январь 0,5 эфемеридного времени, что соответствует JD 2415 020,0. Другими словами,

$$T = \frac{\text{JD} - 2415\,020{,}0}{36525}. \tag{23.1}$$

До начала 1900 г. значение T отрицательно, позднее — положительно. Рассмотрим орбитальные элементы: L — средняя долгота планеты; a — большая полуось орбиты (эта величина для каждой планеты не меняется); e — эксцентриситет орбиты; i — наклон орбиты к плоскости эклиптики; ω — аргумент перигелия; Ω — долгота восходящего узла. Долгота перигелия равна $\pi = \omega + \Omega$, а средняя аномалия $M = L - \pi = L - \omega - \Omega$. (О средней аномалии см. также разд. 25.)

Расстояния в перигелии q и в афелии Q равны соответственно

$$q = a(1 - e) \text{ и } Q = a(1 + e).$$

Отсюда имеем $q + Q = 2a$.

Углы L и π отсчитываются в двух разных плоскостях, а именно: первый — от точки весеннего равноденствия вдоль эклиптики до восходящего узла планеты, а второй — от восходящего узла вдоль орбиты.

В табл. 23.А приводятся коэффициенты a_i для элементов орбит планет от Меркурия до Нептуна. Их величины для Меркурия и Венеры вычислены Ньюкомом; для Марса — Россом; Гелло рассчитал элементы орбит Юпитера, Сатурна, Урана и Нептуна; члены, соответствующие короткопериодическим и долгопериодическим возмущениям, в них отсутствуют, т. е. их изменение является чисто вековым.

В табл. 23.А отсутствуют элементы орбиты Земли. Так как для нее $i = 0$, углы ω и Ω не имеют определенного значения. Средняя аномалия и эксцентриситет орбиты у Земли такие же, как у Солнца (см. разд. 18), а средняя долгота и долгота перигелия Земли больше соответствующих величин для Солнца на 180°. Наконец, для Земли $a = 1{,}000\ 0002$.

В табл. 23.А все углы даны в градусах в виде десятичной дроби.

Пример 23.а. Рассчитать элементы орбиты Меркурия на 24,0 июня 1978 г. эфемеридного времени.

Имеем (см. разд. 3)

Дата 1978, июнь 24,0 = JD 2443 683,5, и по формуле (23.1)

$$T = +0{,}784\ 763\ 8604.$$

Таблица 23.А.

Элементы орбит на среднее равноденствие даты

	a_0	a_1	a_2	a_3
	Меркурий			
L	178,179078	+149474,07078	+0,000 3011	
a	0,387 0986			
e	0,205 614 21	+0,000 020 46	−0,000 000 030	
i	7,002 881	+0,001 8608	−0,000 0183	
ω	28,753 753	+0,370 2806	+0,000 1208	
Ω	47,145 944	+1,185 2083	+0,000 1739	
	Венера			
L	342,767 053	+58 519,211 91	+0,000 3097	
a	0,723 3316			
e	0,006 820 69	−0,000 047 74	+0,000 000 091	
i	3,393 631	+0,001 0058	−0,000 0010	
ω	54,384 186	+0,508 1861	−0,001 3864	
Ω	75,779 647	+0,899 8500	+0,000 4100	
	Марс			
L	293,737 334	+19 141,695 51	+0,000 3107	
a	1,523 6883			
e	0,093 312 90	+0,000 092 064	−0,000 000 077	
i	1,850 333	−0,000 6750	+0,000 0126	
ω	285,431 761	+1,069 7667	+0,000 1313	+0,000 004 14
Ω	48,786 442	+0,770 9917	−0,000 0014	−0,000 005 33

Таблица 23.А (Продолжение)

	a_0	a_1	a_2	a_3
	Юпитер			
L	238,049 257	+ 3036,301 986	+ 0,000 3347	− 0,000 001 65
a	5,202 561			
e	0,048 334 75	+ 0,000 164 180	− 0,000 000 4676	− 0,000 000 0017
i	1,308 736	− 0,005 6961	+ 0,000 0039	
ω	273,277 558	+ 0,599 4317	+ 0,000 704 05	+ 0,000 005 08
Ω	99,443 414	+ 1,010 53 00	+ 0,000 352 22	− 0,000 008 51
	Сатурн			
L	266,564 377	+ 1223,509 884	+ 0,000 3245	− 0,000 0058
a	9,554 747			
e	0,055 892 32	− 0,000 345 50	− 0,000 000 728	+ 0,000 000 000 74
i	2,492 519	− 0,003 9189	− 0,000 015 49	+ 0,000 000 04
ω	338,307 800	+ 1,085 2207	+ 0,000 978 54	+ 0,000 009 92
Ω	112,790 414	+ 0,873 1951	− 0,000 152 18	− 0,000 005 31
	Уран			
L	244,197 470	+ 429,863 546	+ 0,000 3160	− 0,000 000 60
a	19,218 14			
e	0,046 3444	− 0,000 026 58	+ 0,000 000 077	
i	0,772 464	+ 0,000 6253	+ 0,000 0395	
ω	98,071 581	+ 0,985 7650	− 0,001 0745	− 0,000 000 61
Ω	73,477 111	+ 0,498 6678	+ 0,001 3117	
	Нептун			
L	84,457 994	+ 219,885 914	+ 0,000 3205	− 0,000 000 60
a	30,109 57			
e	0,008 997 04	+ 0,000 006 330	− 0,000 000 002	
i	1,779 242	− 0,009 5436	− 0,000 0091	
ω	276,045 975	+ 0,325 6394	+ 0,000 140 95	+ 0,000 004 113
Ω	130,681 389	+ 1,098 9350	+ 0,000 249 87	− 0,000 004 718

Последовательно используя данные из табл. 23.А, получим

$$L = 178{,}^\circ179\,078 + (149\,474{,}^\circ070\,78 \times 0{,}784\,763\,8604) + (0{,}000\,3011)\,(0{,}784\,763\,8604)^2$$
$$= 117\,480{,}^\circ0281 = 120{,}^\circ0281,$$

$a = 0{,}387\,0986,$ $\omega = 29{,}^\circ044\,410,$

$e = 0{,}205\,630\,25,$ $\Omega = 48{,}^\circ076\,160,$

$i = 7{,}^\circ004\,330,$ $M = 42{,}^\circ9075.$

Вычисленные по данным табл. 23.А элементы орбиты относятся к среднему равноденствию даты, т. е. рассчитаны на положение среднего экватора и мгновенной эклиптики в данный момент времени. Следовательно, их нужно использовать, если требуется определить координаты планеты на среднее равноденствие даты.

Таблица 23.Б

Элементы орбит на равноденствие 1950,0

	a_0	a_1	a_2	a_3
	Меркурий			
i	7,006 790	−0,005 9671	+0,000 000 70	−0,000 000 036
ω	28,796 761	+0,284 3099	+0,000 074 64	+0,000 000 043
Ω	47,801 352	−0,125 5041	−0,000 088 63	−0,000 000 068
	Венера			
i	3,394 552	−0,000 8226	−0,000 032 51	+0,000 000 018
ω	54,493 527	+0,289 3249	−0,001 144 35	−0,000 000 792
Ω	76,368 593	−0,277 7139	−0,000 140 39	+0,000 000 767
	Земля			
i	−0,006 540	+0,013 0855	−0,000 009 33	+0,000 000 014
ω	287,390 758	+0,564 7073	+0,000 136 10	+0,000 003 333
Ω	174,528 170	−0,241 5735	+0,000 007 94	−0,000 000 028
	Марс			
i	1,854 113	−0,008 1839	−0,000 023 05	−0,000 000 045
ω	285,597 172	+0,738 5934	+0,000 466 47	+0,000 006 962
Ω	49,319 212	−0,294 0497	−0,000 644 35	−0,000 008 182
	Юпитер			
i	1,307 028	−0,002 2192	+0,000 029 52	+0,000 000 125
ω	273,553 214	+0,047 5910	−0,000 210 41	+0,000 009 039
Ω	99,865 881	+0,166 1852	+0,000 958 57	−0,000 012 500
	Сатурн			
i	2,489 374	+0,002 4190	−0,000 050 22	+0,000 000 002
ω	338,439 665	+0,821 8494	+0,000 706 12	+0,000 006 174
Ω	113,356 715	−0,259 7237	−0,000 188 62	−0,000 001 587
	Уран			
i	0,773 723	−0,001 7599	−0,000 000 22	+0,000 000 121
ω	98,546 561	+0,032 5540	−0,000 501 25	+0,000 013 998
Ω	73,700 227	+0,055 7505	+0,000 429 88	−0,000 014 630

Таблица 23.Б (Продолжение)

	a_0	a_1	a_2	a_3
	Нептун			
i	1,774 485	− 0,000 0150	− 0,000 002 27	+ 0,000 000 018
ω	276,190 852	+ 0,036 7891	+ 0,000 038 42	+ 0,000 002 218
Ω	131,234 637	− 0,008 3952	+ 0,000 044 35	− 0,000 002 849

Таблица 23.В

Элементы орбит на равноденствие 2000,0

	a_0	a_1	a_2	a_3
	Меркурий			
i	7,010 678	− 0,005 9556	+ 0,000 000 69	− 0,000 000 035
ω	28,839 814	+ 0,284 2765	+ 0,000 074 45	+ 0,000 000 043
Ω	48,456 876	− 0,125 4715	− 0,000 088 44	− 0,000 000 068
	Венера			
i	3,395 459	− 0,000 7913	− 0,000 032 50	+ 0,000 000 018
ω	54,602 827	+ 0,289 2764	− 0,001 144 64	− 0,000 000 794
Ω	76,957 740	− 0,277 6656	− 0,000 140 10	+ 0,000 000 769
	Земля			
i	− 0,013 0762	+ 0,013 0855	− 0,000 009 27	+ 0,000 000 014
ω	287,511 505	+ 0,564 7920	+ 0,000 136 10	+ 0,000 003 333
Ω	175,105 679	− 0,241 6582	+ 0,000 007 94	− 0,000 000 028
	Марс			
i	1,857 866	− 0,008 1565	− 0,000 023 04	− 0,000 000 044
ω	285,762 379	+ 0,738 7251	+ 0,000 465 56	+ 0,000 006 939
Ω	49,852 347	− 0,294 1821	− 0,000 643 44	− 0,000 008 159
	Юпитер			
i	1,305 288	− 0,002 2374	+ 0,000 029 52	+ 0,000 000 127
ω	273,829 584	+ 0,047 8404	− 0,000 218 57	+ 0,000 008 999
Ω	100,287 838	+ 0,165 9357	+ 0,000 966 72	− 0,000 012 460
	Сатурн			
i	2,486 204	+ 0,002 4449	− 0,000 050 17	+ 0,000 000 002
ω	338,571 353	+ 0,822 0515	+ 0,000 707 47	+ 0,000 006 177
Ω	113,923 406	− 0,259 9254	− 0,000 189 97	− 0,000 001 589

Таблица 23.В (Продолжение)

	a_0	a_1	a_2	a_3
	Уран			
i	0,774 950	−0,001 7660	−0,000 000 27	+0,000 000 123
ω	99,021 587	+0,033 7219	−0,000 498 12	+0,000 013 904
Ω	73,923 501	+0,054 5828	+0,000 426 74	−0,000 014 536
	Нептун			
i	1,769 715	−0,000 0144	−0,000 002 27	+0,000 000 018
ω	276,335 328	+0,036 8127	+0,000 038 49	+0,000 002 226
Ω	131,788 486	−0,008 4187	+0,000 044 28	−0,000 002 858

Однако в ряде случаев могут понадобиться элементы i, ω и Ω, отнесенные к стандартному равноденствию (например, если требуется найти минимальное расстояние между кометой и большой планетой, когда элементы орбиты кометы приведены к стандартному равноденствию).

Пересчитать элементы i, ω и Ω с одного равноденствия на другое можно по формулам разд. 17. Однако для больших планет можно прямо по таблицам 23.Б и 23.В рассчитать элементы орбит на стандартные эпохи 1950,0 или 2000,0. Им соответствуют юлианские даты

1950,0 = 1950, январь 0,923 = JD 2433 282,423,
2000,0 = 2000, январь 1,5 = JD 2451 545,0.

Следует отметить, что, хотя эпоха 1950,0 соответствует началу 1950 бесселева года и отстоит от эпохи 1900,0 = 0,813 января 1900 г. на 50 *тропических* лет, новую стандартную эпоху 2000,0 отделяет от эпохи JD 2415 020,0 = 1900, январь 0,5 ровно 36 525 сут.

Если для Земли в результате вычислений получится отрицательный наклон орбиты, ω и Ω нужно одновременно увеличить или уменьшить на 180°.

Мы видим, что наклон орбиты Меркурия к мгновенной эклиптике возрастает, тогда как наклон относительно неподвижной плоскости эклиптики, фиксированной в эпоху 1950,0 или 2000,0 уменьшается. Для Сатурна наблюдается обратная тенденция.

Наклон орбиты Венеры к мгновенной эклиптике в промежутке между $T = -20$ и $T = +20$ непрерывно возрастает, тогда как наклон относительно

сительно фиксированной на эпоху 1950,0 эклиптики достигает максимума приблизительно в +650 г.

Наклон орбиты Урана к мгновенной эклиптике достигает минимума вблизи года +1100, но отнесенный к равноденствиям 1950,0 и 2000,0 наклон в течение всего рассматриваемого здесь промежутка времени непрерывно уменьшается.

В интервале от $T = -20$ до $T = +20$ наклон орбиты Нептуна к мгновенной эклиптике постоянно уменьшается, а по отношению к фиксированной на 1950,0 эклиптике достигает слабо выраженного максимального значения вблизи года +1550.

Долготы узлов всех планет, отнесенные к равноденствию даты, возрастают. Однако по отношению к стандартным равноденствиям 1950,0 и 2000,0 долготы узлов всех орбит, за исключением Юпитера и Урана, убывают.

24

Планеты: главные возмущения

В этом разделе мы рассмотрим наиболее значительные возмущения в движении планет Меркурий, Венера, Марс, Юпитер, Сатурн, Уран и Нептун. Если необходимо получить более высокую точность, чем позволяют данные, приведенные в разд. 23, нужно учесть периодические члены. Особенно велики возмущения в движении планет-гигантов; в долготе они могут превышать 0,3° для Юпитера и 1,0° для Сатурна. Важнейшие возмущения в движении Земли (Солнца) даны в разд. 18.

В выписанных ниже выражениях T дается в юлианских столетиях и отсчитывается от 0,5 января 1900 г. по эфемеридному времени (см. формулу (23.1)).

M — средняя аномалия Солнца; формула для ее вычисления дана в начале разд. 18.

Средние аномалии Меркурия, Венеры, Марса, Юпитера и Сатурна обозначены соответственно через M_1, M_2, M_4, M_5 и M_6, и формулы для них можно найти в разд. 25.

Меркурий

Возмущения в долготе

$$+0{,}^{\circ}00204 \times \cos(5M_2 - 2M_1 + 12{,}^{\circ}220)$$

$+0{,}00\,103 \quad \cos(2M_2 - M_1 - 160{,}^\circ692)$
$+0{,}00\,091 \quad \cos(2M_5 - M_1 - 37{,}^\circ003)$
$+0{,}00\,078 \quad \cos(5M_2 - 3M_1 + 10{,}^\circ137).$

Возмущения в радиус-векторе

$+0{,}000\,007\,525 \times \cos(2M_5 - M_1 + 53{,}^\circ013)$
$+0{,}000\,006\,802 \quad \cos(5M_2 - 3M_1 - 259{,}^\circ918)$
$+0{,}000\,005\,457 \quad \cos(2M_2 - 2M_1 - 71{,}^\circ188)$
$+0{,}000\,003\,569 \quad \cos(5M_2 - M_1 - 77{,}^\circ75).$

Венера

Долгопериодический член в *средней* долготе и *средней* аномалии:

$$+\,0{,}^\circ00077\ \sin(237{,}^\circ24 + 150{,}^\circ27\,T).$$

Возмущения в долготе

$+0{,}^\circ00\,313 \times \cos(2M - 2M_2 - 148{,}^\circ225)$
$+0{,}00\,198 \quad \cos(3M - 3M_2 + 2{,}^\circ565)$
$+0{,}00\,136 \quad \cos(M - M_2 - 119{,}^\circ107)$
$+0{,}00\,096 \quad \cos(3M - 2M_2 - 135{,}^\circ912)$
$+0{,}00\,082 \quad \cos(M_5 - M_2 - 208{,}^\circ087).$

Возмущения в радиус-векторе

$+0{,}000\,022\,501 \times \cos(2M - 2M_2 - 58{,}^\circ208)$
$+0{,}000\,019\,045 \quad \cos(3M - 3M_2 + 92{,}^\circ577)$
$+0{,}000\,006\,887 \quad \cos(M_5 - M_2 - 118{,}^\circ090)$
$+0{,}000\,005\,172 \quad \cos(M - M_2 - 29{,}^\circ110)$
$+0{,}000\,003\,620 \quad \cos(5M - 4M_2 - 104{,}^\circ208)$
$+0{,}000\,003\,283 \quad \cos(4M - 4M_2 + 63{,}^\circ513)$
$+0{,}000\,003\,074 \quad \cos(2M_5 - 2M_2 - 55{,}^\circ167).$

Долгопериодический член (с коэффициентом 0°,000 77) нужно прибавить к средней долготе и средней аномалии еще *до решения* уравнения Кеплера. Все остальные периодические возмущения следует прибавить к долготе и радиус-вектору, которые получены *в результате решения* уравнения Кеплера.

Марс

Долгопериодические члены в *средней* долготе и *средней* аномалии:

$-0{,}^\circ01\,133\ \sin(3M_5 - 8M_4 + 4M)$
$-0{,}^\circ00\,933\ \cos(3M_5 - 8M_4 + 4M).$

Возмущения в долготе

$$
\begin{aligned}
&+0{,}^\circ 00\,705 \times \cos(M_5 - M_4 - 48{,}^\circ 958)\\
&+0{,}00\,607 \quad \cos(2M_5 - M_4 - 188{,}^\circ 350)\\
&+0{,}00\,445 \quad \cos(2M_5 - 2M_4 - 191{,}^\circ 897)\\
&+0{,}00\,388 \quad \cos(M - 2M_4 + 20{,}^\circ 495)\\
&+0{,}00\,238 \quad \cos(M - M_4 + 35{,}^\circ 097)\\
&+0{,}00\,204 \quad \cos(2M - 3M_4 + 158{,}^\circ 638)\\
&+0{,}00\,177 \quad \cos(3M_4 - M_2 - 57{,}^\circ 602)\\
&+0{,}00\,136 \quad \cos(2M - 4M_4 + 154{,}^\circ 093)\\
&+0{,}00\,104 \quad \cos(M_5 + 17{,}^\circ 618).
\end{aligned}
$$

Возмущения в радиус-векторе

$$
\begin{aligned}
&+0{,}000\,053\,227 \times \cos(M_5 - M_4 + 41{,}^\circ 1306)\\
&+0{,}000\,050\,989 \quad \cos(2M_5 - 2M_4 - 101{,}^\circ 9847)\\
&+0{,}000\,038\,278 \quad \cos(2M_5 - M_4 - 98{,}^\circ 3292)\\
&+0{,}000\,015\,996 \quad \cos(M - M_4 - 55{,}^\circ 555)\\
&+0{,}000\,014\,764 \quad \cos(2M - 3M_4 + 68{,}^\circ 622)\\
&+0{,}000\,008\,966 \quad \cos(M_5 - 2M_4 + 43{,}^\circ 615)\\
&+0{,}000\,007\,914 \quad \cos(3M_5 - 2M_4 - 139{,}^\circ 737)\\
&+0{,}000\,007\,004 \quad \cos(2M_5 - 3M_4 - 102{,}^\circ 888)\\
&+0{,}000\,006\,620 \quad \cos(M - 2M_4 + 113{,}^\circ 202)\\
&+0{,}000\,004\,930 \quad \cos(3M_5 - 3M_4 - 76{,}^\circ 243)\\
&+0{,}000\,004\,693 \quad \cos(3M - 5M_4 + 190{,}^\circ 603)\\
&+0{,}000\,004\,571 \quad \cos(2M - 4M_4 + 244{,}^\circ 702)\\
&+0{,}000\,004\,409 \quad \cos(3M_5 - M_4 - 115{,}^\circ 828).
\end{aligned}
$$

Долгопериодическое возмущение следует прибавить к средней долготе и средней аномалии *до решения* уравнения Кеплера. Остальные периодические возмущения добавляются к долготе и радиус-вектору, полученным *после решения* уравнения Кеплера.

Юпитер

$$
\begin{aligned}
\upsilon &= \frac{T}{5} + 0{,}1,\\
P &= 237{,}^\circ 47555 + 3034{,}^\circ 9061\,T,\\
Q &= 265{,}^\circ 91650 + 1222{,}^\circ 1139\,T,\\
S &= 243{,}^\circ 51721 + 428{,}^\circ 4677\,T,\\
V &= 5Q - 2P,\\
W &= 2P - 6Q + 3S,\\
\zeta &= Q - P.
\end{aligned}
$$

Возмущения в средней долготе (А)

$+(0^\circ\!\!,331\,364 - 0^\circ\!\!,010\,281\,\upsilon - 0^\circ\!\!,004\,692\,\upsilon^2)\ \sin V$
$+(0^\circ\!\!,003\,228 - 0^\circ\!\!,064\,436\,\upsilon + 0^\circ\!\!,002\,075\,\upsilon^2)\ \cos V$
$-(0^\circ\!\!,003\,083 + 0^\circ\!\!,000\,275\,\upsilon - 0^\circ\!\!,000\,489\,\upsilon^2)\ \sin 2V$
$+0^\circ\!\!,002\,472\ \sin W$
$+0^\circ\!\!,013\,619\ \sin \zeta$
$+0^\circ\!\!,018\,472\ \sin 2\zeta$
$+0^\circ\!\!,006\,717\ \sin 3\zeta$
$+0^\circ\!\!,002\,775\ \sin 4\zeta$
$+(0^\circ\!\!,007\,275 - 0^\circ\!\!,001\,253\,\upsilon)\ \sin \zeta\ \sin Q$
$+0^\circ\!\!,006\,417\ \sin 2\zeta\ \sin Q$
$+0^\circ\!\!,002\,439\ \sin 3\zeta\ \sin Q$
$-(0^\circ\!\!,033\,839 + 0^\circ\!\!,001\,125\,\upsilon)\ \cos \zeta\ \sin Q$
$-0^\circ\!\!,003\,767\ \cos 2\zeta\ \sin Q$
$-(0^\circ\!\!,035\,681 + 0^\circ\!\!,001\,208\,\upsilon)\ \sin \zeta\ \cos Q$
$-0^\circ\!\!,004\,261\ \sin 2\zeta\ \cos Q$
$+0^\circ\!\!,002\,178\ \cos Q$
$+(-0^\circ\!\!,006\,333 + 0^\circ\!\!,001\,161\,\upsilon)\ \cos \zeta\ \cos Q$
$-0^\circ\!\!,006\,675\ \cos 2\zeta\ \cos Q$
$-0^\circ\!\!,002\,664\ \cos 3\zeta\ \cos Q$
$-0^\circ\!\!,002\,572\ \sin \zeta\ \sin 2Q$
$-0^\circ\!\!,003\,567\ \sin 2\zeta\ \sin 2Q$
$+0^\circ\!\!,002\,094\ \cos \zeta\ \cos 2Q$
$+0^\circ\!\!,003\,342\ \cos 2\zeta\ \cos 2Q.$

Возмущения в эксцентриситете

(Коэффициенты даны в единицах седьмого знака после запятой.)

$+(3606 + 130\,\upsilon - 43\,\upsilon^2)\ \sin V$
$+(1289 - 580\,\upsilon)\ \cos V$

$-6764\ \sin \zeta\ \sin Q$
$-1110\ \sin 2\zeta\ \sin Q$
$-224\ \sin 3\zeta\ \sin Q$
$-204\ \sin Q$
$+(1284 + 116\,\upsilon)\ \cos \zeta\ \sin Q$
$+188\ \cos 2\zeta\ \sin Q$
$+(1460 + 130\,\upsilon)\ \sin \zeta\ \cos Q$
$+224\ \sin 2\zeta\ \cos Q$
$-817\ \cos Q$
$+6074\ \cos \zeta\ \cos Q$
$+992\ \cos 2\zeta\ \cos Q$
$+508\ \cos 3\zeta\ \cos Q$
$+230\ \cos 4\zeta\ \cos Q$
$+108\ \cos 5\zeta\ \cos Q$
$-(956 + 73\,\upsilon)\ \sin \zeta\ \sin 2Q$

$$+448 \sin 2\zeta \sin 2Q$$
$$+137 \sin 3\zeta \sin 2Q$$
$$+(-997 + 108\upsilon) \cos \zeta \sin 2Q$$
$$+480 \cos 2\zeta \sin 2Q$$
$$+148 \cos 3\zeta \sin 2Q$$
$$+(-956 + 99\upsilon) \sin \zeta \cos 2Q$$
$$+490 \sin 2\zeta \cos 2Q$$
$$+158 \sin 3\zeta \cos 2Q$$
$$+179 \cos 2Q$$
$$+(1024 + 75\upsilon) \cos \zeta \cos 2Q$$
$$-437 \cos 2\zeta \cos 2Q$$
$$-132 \cos 3\zeta \cos 2Q.$$

Возмущения в перигелии (B)

$$+(0{,}^\circ007\,192 - 0{,}^\circ003\,147\,\upsilon) \sin V$$
$$+(-0{,}^\circ020\,428 - 0{,}^\circ000\,675\,\upsilon + 0{,}^\circ000\,197\,\upsilon^2) \cos V$$
$$+(0{,}^\circ007\,269 + 0{,}^\circ000\,672\,\upsilon) \sin \zeta \sin Q$$
$$-0{,}^\circ004\,344 \sin Q$$
$$+0{,}^\circ034\,036 \cos \zeta \sin Q$$
$$+0{,}^\circ005\,614 \cos 2\zeta \sin Q$$
$$+0{,}^\circ002\,964 \cos 3\zeta \sin Q$$
$$+0{,}^\circ037\,761 \sin \zeta \cos Q$$
$$+0{,}^\circ006\,158 \sin 2\zeta \cos Q$$
$$-0{,}^\circ006\,603 \cos \zeta \cos Q$$
$$-0{,}^\circ005\,356 \sin \zeta \sin 2Q$$
$$+0{,}^\circ002\,722 \sin 2\zeta \sin 2Q$$
$$+0{,}^\circ004\,483 \cos \zeta \sin 2Q$$
$$-0{,}^\circ002\,642 \cos 2\zeta \sin 2Q$$
$$+0{,}^\circ004\,403 \sin \zeta \cos 2Q$$
$$-0{,}^\circ002\,536 \sin 2\zeta \cos 2Q$$
$$+0{,}^\circ005\,547 \cos \zeta \cos 2Q$$
$$-0{,}^\circ002\,689 \cos 2\zeta \cos 2Q.$$

Если A равно сумме возмущений в долготе, B равно сумме возмущений в перигелии, а e — эксцентриситет орбиты, *не исправленный* за возмущения, то поправка к средней аномалии равна

$$A - \frac{B}{e}.$$

Возмущения в большой полуоси

(Коэффициенты даны в единицах шестого знака после запятой.)

$$-263 \cos V$$
$$+205 \cos \zeta$$

$$\begin{aligned}
&+693 \cos 2\zeta\\
&+312 \cos 3\zeta\\
&+147 \cos 4\zeta\\
&+299 \sin \zeta \sin Q\\
&+181 \cos 2\zeta \sin Q\\
&+204 \sin 2\zeta \cos Q\\
&+111 \sin 3\zeta \cos Q\\
&-337 \cos \zeta \cos Q\\
&-111 \cos 2\zeta \cos Q.
\end{aligned}$$

Важное замечание. Возмущения в средней долготе, средней аномалии, эксцентриситете и большой полуоси следует прибавить к средним значениям элементов еще *до решения* уравнения Кеплера.

Сатурн

Вычислите υ, V, W, ζ и т. д., как и для Юпитера, а кроме них еще $\psi = S - Q$.

Возмущения в средней долготе (A)

$$\begin{aligned}
&+(-0{,}^\circ 814\,181 + 0{,}^\circ 018\,150\,\upsilon + 0{,}^\circ 016\,714\,\upsilon^2) \sin V\\
&+(-0{,}^\circ 010\,497 + 0{,}^\circ 160\,906\,\upsilon - 0{,}^\circ 004\,100\,\upsilon^2) \cos V\\
&+0{,}^\circ 007\,581 \sin 2V\\
&-0{,}^\circ 007\,986 \sin W\\
&-0{,}^\circ 148\,811 \sin \zeta\\
&-0{,}^\circ 040\,786 \sin 2\zeta\\
&-0{,}^\circ 015\,208 \sin 3\zeta\\
&-0{,}^\circ 006\,339 \sin 4\zeta\\
&-0{,}^\circ 006\,244 \sin Q\\
&+(0{,}^\circ 008\,931 + 0{,}^\circ 002\,728\,\upsilon) \sin \zeta \sin Q\\
&-0{,}^\circ 016\,500 \sin 2\zeta \sin Q\\
&-0{,}^\circ 005\,775 \sin 3\zeta \sin Q\\
&+(0{,}^\circ 081\,344 + 0{,}^\circ 003\,206\,\upsilon) \cos \zeta \sin Q\\
&+0{,}^\circ 015\,019 \cos 2\zeta \sin Q\\
&+(0{,}^\circ 085\,581 + 0{,}^\circ 002\,494\,\upsilon) \sin \zeta \cos Q\\
&+(0{,}^\circ 025\,328 - 0{,}^\circ 003\,117\,\upsilon) \cos \zeta \cos Q\\
&+0{,}^\circ 014\,394 \cos 2\zeta \cos Q\\
&+0{,}^\circ 006\,319 \cos 3\zeta \cos Q\\
&+0{,}^\circ 006\,369 \sin \zeta \sin 2Q\\
&+0{,}^\circ 009\,156 \sin 2\zeta \sin 2Q\\
&+0{,}^\circ 007\,525 \sin 3\psi \sin 2Q\\
&-0{,}^\circ 005\,236 \cos \zeta \cos 2Q\\
&-0{,}^\circ 007\,736 \cos 2\zeta \cos 2Q\\
&-0{,}^\circ 007\,528 \cos 3\psi \cos 2Q.
\end{aligned}$$

Возмущения в эксцентриситете

(Коэффициенты даны в единицах седьмого знака после запятой.)

$$+(-7927 + 2548\upsilon + 91\upsilon^2)\sin V$$
$$+(13381 + 1226\upsilon - 253\upsilon^2)\cos V$$
$$+(248 - 121\upsilon)\sin 2V$$
$$-(305 + 91\upsilon)\cos 2V$$
$$+412\sin 2\zeta$$
$$+12415\sin Q$$
$$+(390 - 617\upsilon)\sin\zeta\sin Q$$
$$+(165 - 204\upsilon)\sin 2\zeta\sin Q$$
$$+26599\cos\zeta\sin Q$$
$$-4687\cos 2\zeta\sin Q$$
$$-1870\cos 3\zeta\sin Q$$
$$-821\cos 4\zeta\sin Q$$
$$-377\cos 5\zeta\sin Q$$
$$+497\cos 2\psi\sin Q$$
$$+(163 - 611\upsilon)\cos Q$$
$$-12696\sin\zeta\cos Q$$
$$-4200\sin 2\zeta\cos Q$$
$$-1503\sin 3\zeta\cos Q$$
$$-619\sin 4\zeta\cos Q$$
$$-268\sin 5\zeta\cos Q$$
$$-(282 + 1306\upsilon)\cos\zeta\cos Q$$
$$+(-86 + 230\upsilon)\cos 2\zeta\cos Q$$
$$+461\sin 2\psi\cos Q$$
$$-350\sin 2Q$$
$$+(2211 - 286\upsilon)\sin\zeta\sin 2Q$$
$$-2208\sin 2\zeta\sin 2Q$$
$$-568\sin 3\zeta\sin 2Q$$
$$-346\sin 4\zeta\sin 2Q$$
$$-(2780 + 222\upsilon)\cos\zeta\sin 2Q$$
$$+(2022 + 263\upsilon)\cos 2\zeta\sin 2Q$$
$$+248\cos 3\zeta\sin 2Q$$
$$+242\sin 3\psi\sin 2Q$$
$$+467\cos 3\psi\sin 2Q$$
$$-490\cos 2Q$$
$$-(2842 + 279\upsilon)\sin\zeta\cos 2Q$$
$$+(128 + 226\upsilon)\sin 2\zeta\cos 2Q$$
$$+224\sin 3\zeta\cos 2Q$$
$$+(-1594 + 282\upsilon)\cdot\cos\zeta\cos 2Q$$
$$+(2162 - 207\upsilon)\cos 2\zeta\cos 2Q$$
$$+561\cos 3\zeta\cos 2Q$$
$$+343\cos 4\zeta\cos 2Q$$
$$+469\sin 3\psi\cos 2Q$$
$$-242\cos 3\psi\cos 2Q$$
$$-205\sin\zeta\sin 3Q$$

$$
\begin{aligned}
&+262 \sin 3\zeta \sin 3Q \\
&+208 \cos \zeta \cos 3Q \\
&-271 \cos 3\zeta \cos 3Q \\
&-382 \cos 3\zeta \sin 4Q \\
&-376 \sin 3\zeta \cos 4Q.
\end{aligned}
$$

Возмущения в перигелии (B)

$$
\begin{aligned}
&+(0\rlap{.}^{\circ}077\,108 + 0\rlap{.}^{\circ}007\,186\,\upsilon - 0\rlap{.}^{\circ}001\,533\,\upsilon^2) \sin V \\
&+(0\rlap{.}^{\circ}045\,803 - 0\rlap{.}^{\circ}014\,766\,\upsilon - 0\rlap{.}^{\circ}000\,536\,\upsilon^2) \cos V \\
&-0\rlap{.}^{\circ}007\,075 \sin \zeta \\
&-0\rlap{.}^{\circ}075\,825 \sin \zeta \sin Q \\
&-0\rlap{.}^{\circ}024\,839 \sin 2\zeta \sin Q \\
&-0\rlap{.}^{\circ}008\,631 \sin 3\zeta \sin Q \\
&-0\rlap{.}^{\circ}072\,586 \cos Q \\
&-0\rlap{.}^{\circ}150\,383 \cos \zeta \cos Q \\
&+0\rlap{.}^{\circ}026\,897 \cos 2\zeta \cos Q \\
&+0\rlap{.}^{\circ}010\,053 \cos 3\zeta \cos Q \\
&-(0\rlap{.}^{\circ}013\,597 + 0\rlap{.}^{\circ}001\,719\,\upsilon) \sin \zeta \sin 2Q \\
&+(-0\rlap{.}^{\circ}007\,742 + 0\rlap{.}^{\circ}001\,517\,\upsilon) \cos \zeta \sin 2Q \\
&+(0\rlap{.}^{\circ}013\,586 - 0\rlap{.}^{\circ}001\,375\,\upsilon) \cos 2\zeta \sin 2Q \\
&+(-0\rlap{.}^{\circ}013\,667 + 0\rlap{.}^{\circ}001\,239\,\upsilon) \sin \zeta \cos 2Q \\
&+0\rlap{.}^{\circ}011\,981 \sin 2\zeta \cos 2Q \\
&+(0\rlap{.}^{\circ}014\,861 + 0\rlap{.}^{\circ}001\,136\,\upsilon) \cos \zeta \cos 2Q \\
&-(0\rlap{.}^{\circ}013\,064 + 0\rlap{.}^{\circ}001\,628\,\upsilon) \cos 2\zeta \cos 2Q.
\end{aligned}
$$

Как и для Юпитера, поправка к средней долготе равна A, а к средней аномалии

$$A - \frac{B}{e}.$$

Возмущения в большой полуоси

(Коэффициенты даны в единицах шестого знака после запятой.)

$$
\begin{aligned}
&+572\,\upsilon \sin V \\
&+2933 \cos V \\
&+33629 \cos \zeta \\
&-3081 \cos 2\zeta \\
&-1423 \cos 3\zeta \\
&-671 \cos 4\zeta \\
&-320 \cos 5\zeta \\
&+1098 \sin Q \\
&-2812 \sin \zeta \sin Q \\
&+688 \sin 2\zeta \sin Q \\
&-393 \sin 3\zeta \sin Q \\
&-228 \sin 4\zeta \sin Q \\
&+2138 \cos \zeta \sin Q
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
&-999 \cos 2\zeta \sin Q \\
&-642 \cos 3\zeta \sin Q \\
&-325 \cos 4\zeta \sin Q \\
&-890 \cos Q \\
&+2206 \sin \zeta \cos Q \\
&-1590 \sin 2\zeta \cos Q \\
&-647 \sin 3\zeta \cos Q \\
&-344 \sin 4\zeta \cos Q \\
&+2885 \cos \zeta \cos Q \\
&+(2172 + 102\,\upsilon) \cos 2\zeta \cos Q \\
&+296 \cos 3\zeta \cos Q \\
&-267 \sin 2\zeta \sin 2Q \\
&-778 \cos \zeta \sin 2Q
\end{aligned}
$$

$$
\begin{array}{ll}
+495 \cos 2\zeta \sin 2Q & +211 \cos 3\zeta \cos 2Q \\
+250 \cos 3\zeta \sin 2Q & -427 \sin \zeta \sin 3Q \\
-856 \sin \zeta \cos 2Q & +398 \sin 3\zeta \sin 3Q \\
+441 \sin 2\zeta \cos 2Q & +344 \cos \zeta \cos 3Q \\
+296 \cos 2\zeta \cos 2Q & -427 \cos 3\zeta \cos 3Q.
\end{array}
$$

Затем после окончания всех расчетов (решения уравнения Кеплера и т. д.) добавьте к *гелиоцентрической широте* следующие поправки за возмущения:

$$
\begin{array}{l}
+0^\circ\!,000\,747 \cos \zeta \sin Q \\
+0^\circ\!,001\,069 \cos \zeta \cos Q \\
+0^\circ\!,002\,108 \sin 2\zeta \sin 2Q \\
+0^\circ\!,001\,261 \cos 2\zeta \sin 2Q \\
+0^\circ\!,001\,236 \sin 2\zeta \cos 2Q \\
-0^\circ\!,002\,075 \cos 2\zeta \cos 2Q.
\end{array}
$$

Уран

По формуле (23.1) вычислите T и найдите υ, P, Q, S, W по формулам, приведенным на стр. 87. Затем вычислите

$$
\begin{aligned}
G &= 83^\circ\!,76922 + 218^\circ\!,4901\, T, \\
H &= 2G - S.
\end{aligned}
$$

Угол H медленно меняется со временем и увеличивается на 360° за 4229 лет.

Средние элементы орбиты Урана можно рассчитать с помощью коэффициентов из табл. 23.А, а среднюю аномалию планеты можно вычислить по формуле

$$M_7 = 72^\circ\!,64878 + 428^\circ\!,37911\, T + 0^\circ\!,000\,079\, T^2.$$

Затем находим

$$\zeta = S - P, \qquad \eta = S - Q, \qquad \theta = G - S,$$

$$
\begin{aligned}
A = {} & (0^\circ\!,864\,319 - 0^\circ\!,001\,583\,\upsilon) \sin H \\
& + (0{,}082\,222 - 0{,}006\,833\,\upsilon) \cos H \\
& + 0{,}036\,017 \sin 2H \\
& - 0{,}003\,019 \cos 2H \\
& + 0{,}008\,122 \sin W,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
B = {} & 0^\circ\!,120\,303 \sin H \\
& + (0{,}019\,472 - 0{,}000\,947\,\upsilon) \cos H \\
& + 0{,}006\,197 \sin 2H.
\end{aligned}
$$

Как для Юпитера и Сатурна, поправка к средней долготе Урана равна A, а поправка к средней аномалии M_7 равна

$$A - \frac{B}{e},$$

где e — *неисправленный* эксцентриситет.

Поправки к эксцентриситету орбиты, выраженные в единицах седьмого знака после запятой, равны

$$\begin{aligned}&+ (-3349 + 163\,\upsilon)\ \sin H\\ &+ 20981\ \cos H\\ &+ \ 1311\ \cos 2H.\end{aligned}$$

Возмущение в большой полуоси есть

$$-\ 0{,}003\,825\ \cos H.$$

Зная исправленные таким способом средние элементы, по классическим формулам (см. разд. 22 и 25) вычислите истинные долготу, широту и радиус-вектор Урана. После этого прибавьте к полученным величинам следующие поправки:

Поправки к истинной долготе

$$\begin{aligned}&+ (0^\circ{,}010\,122 - 0^\circ{,}000\,988\,\upsilon)\ \sin(S + \eta)\\ &+ (-0{,}038\,581 + 0{,}002\,031\,\upsilon - 0{,}001\,910\,\upsilon^2)\ \cos(S + \eta)\\ &+ (0{,}034\,964 - 0{,}001\,038\,\upsilon + 0{,}000\,868\,\upsilon^2)\ \cos(2S + \eta)\\ &+ 0{,}005\,594\ \sin(S + 3\theta)\\ &- 0{,}014\,808\ \sin\zeta\\ &- 0{,}005\,794\ \sin\eta\\ &+ 0{,}002\,347\ \cos\eta\\ &+ 0{,}009\,872\ \sin\theta\\ &+ 0{,}008\,803\ \sin 2\theta\\ &- 0{,}004\,308\ \sin 3\theta.\end{aligned}$$

Поправки к гелиоцентрической широте

$$\begin{aligned}&+ (0^\circ{,}000\,458\ \sin\eta - 0^\circ{,}000\,642\ \cos\eta - 0^\circ{,}000\,517\ \cos 4\theta)\ \sin S\\ &- (0{,}000\,347\ \sin\eta + 0{,}000\,853\ \cos\eta + 0{,}000\,517\ \sin 4\eta)\ \cos S\\ &+ 0{,}000\,403\ (\cos 2\theta\ \sin 2S + \sin 2\theta\ \cos 2S).\end{aligned}$$

Поправки к радиус-вектору (в единицах шестого десятичного знака после запятой)

$$\begin{aligned}&-\ 25948 &&+ (5795\ \cos S - 1165\ \sin S + 1388\ \cos 2S)\ \sin\eta\\ &+\ 4985\ \cos\zeta &&+ (1351\ \cos S + 5702\ \sin S + 1388\ \sin 2S)\ \cos\eta\\ &-\ 1230\ \cos S &&+ 904\ \cos 2\theta\\ &+\ 3354\ \cos\eta &&+ 894\ (\cos\theta - \cos 3\theta).\end{aligned}$$

Нептун

Вычислите T по формуле (23.1), затем величины v, P, Q, S по формулам на стр. 87, а затем найдите, как и для Урана, величины G и H (см. стр. 93).

По приведенным в табл. 23.А коэффициентам найдите средние элементы орбиты Нептуна и вычислите его среднюю аномалию по формуле

$$M_8 = 37°,73063 + 218°,46134\,T - 0°,000\,070\,T^2.$$

Затем найдите

$$\zeta = G - P, \qquad \eta = G - Q, \qquad \theta = G - S,$$

$$\begin{aligned} A = &\ (-0°,589\,833 + 0°,001\,089\,v) \sin H \\ &+ (-0,056\,094 + 0,004\,658\,v) \cos H \\ &- 0,024\,286 \sin 2H, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B = &+ 0°,024\,039 \sin H \\ &- 0,025\,303 \cos H \\ &+ 0,006\,206 \sin 2H \\ &- 0,005\,992 \cos 2H. \end{aligned}$$

Как и ранее, поправка к средней долготе равна A, а поправка к средней аномалии M_8 равна

$$A - \frac{B}{e},$$

где e — *неисправленный* эксцентриситет.

Поправки к эксцентриситету орбиты (в единицах седьмого десятичного знака после запятой) равны

$$\begin{aligned} &+ 4389 \sin H \qquad &+ 1129 \sin 2H \\ &+ 4262 \cos H \qquad &+ 1089 \cos 2H. \end{aligned}$$

Поправки к величине большой полуоси (в единицах шестого десятичного знака после запятой) равны

$$- 817 \sin H + 8189 \cos H + 781 \cos 2H.$$

По исправленным средним элементам, используя классические формулы (см. разд. 22 и 25), найдите истинные долготу, широту и радиус-вектор. Затем снова исправьте эти величины, вычислив следующие поправки:

Поправки к истинной долготе

$$\begin{aligned} &- 0°,009\,556 \sin \zeta \\ &- 0,005\,178 \sin \eta \end{aligned}$$

$$+\ 0{,}002\,572 \sin 2\theta$$
$$-\ 0{,}002\,972 \cos 2\theta \sin G$$
$$-\ 0{,}002\,833 \sin 2\theta \cos G.$$

Поправки к гелиоцентрической широте

$$+\ 0^\circ{,}000\,336 \cos 2\theta \sin G$$
$$+\ 0\ {,}000\,364 \sin 2\theta \cos G.$$

Поправки к радиус-вектору в единицах шестого десятичного знака после запятой

$$-\ 40596$$
$$+\ \ 4992 \cos \zeta$$
$$+\ \ 2744 \cos \eta$$
$$+\ \ 2044 \cos \theta$$
$$+\ \ 1051 \cos 2\theta.$$

Замечания

1. Периодические возмущения планет-гигантов взяты из работ Гелло, опубликованных в *Annales de l'Observatoire de Paris, Mémoires*. *Юпитер:* том XXXI, 1913 г.; *Сатурн*: том XXIV, 1904 г.; *Уран и Нептун:* том XXVIII, 1910 г.

2. В данной книге не учитываются многочисленные малые периодические члены в движении Юпитера и Сатурна. Для Урана и Нептуна даны лишь наиболее существенные периодические члены; можно думать, что для этих двух планет возможная ошибка в вычисленной гелиоцентрической широте имеет порядок 0°,01.

3. Для Плутона и малых планет нельзя дать средние элементы и периодические члены, так как общая теория движения этих небесных тел пока не создана. Их эфемериды рассчитываются методом численного интегрирования так называемых оскулирующих элементов, верных лишь на очень малом промежутке времени.

25

Движение по эллипсу

В этом разделе мы опишем два метода расчета геоцентрических эфемерид для случая эллиптических орбит. В первом методе, который следует применять к большим планетам, геоцентрические эклиптические долгота и широта планеты рассчитываются по ее гелиоцентрическим эклиптическим координатам и по геоцентрической долготе и радиус-вектору Солнца. Второй метод, более пригодный для малых планет и периодических комет, состоит в непосредственном вычислении прямого восхождения и склонения небесного тела на стандартное равноденствие; здесь используются геоцентрические прямоугольные координаты Солнца.

Первый метод

В расчетах мы будем использовать орбитальные элементы планеты, отнесенные к *среднему равноденствию даты*. По табл. 23.А найдем на данный момент времени среднюю долготу планеты L, большую полуось a, эксцентриситет орбиты e, наклон i и долготу восходящего узла Ω.

По одной из следующих формул найдем среднюю аномалию планеты M:

Меркурий	$M_1 = 102°\!.27\,938 + 149\,472°\!.51\,529\,T + 0°\!.000\,007\,T^2$
Венера	$M_2 = 212°\!.603\,22 + 58\,517°\!.80\,387\,T + 0°\!.001\,286\,T^2$
Марс	$M_4 = 319°\!.51\,913 + 19\,139°\!.85\,475\,T + 0°\!.000\,181\,T^2$
Юпитер	$M_5 = 225°\!.32\,833 + 3034°\!.69\,202\,T - 0°\!.000\,722\,T^2$
Сатурн	$M_6 = 175°\!.46\,622 + 1221°\!.55\,147\,T - 0°\!.000\,502\,T^2$,

где T — время в юлианских столетиях, отсчитываемое от эпохи 1900, январь 0,5 эфемеридного времени; см. формулу (23.1). Из-за больших возмущений в движении Урана и Нептуна эти планеты здесь не рассматриваются.

Зная величины e и M, вычислим эксцентрическую аномалию E (разд. 22), а затем истинную аномалию v по формуле

$$\operatorname{tg}\frac{v}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\,\operatorname{tg}\frac{E}{2}. \qquad (25.1)$$

Если нужно, учтем главные возмущения (см. разд. 24).

Радиус-вектор планеты можно рассчитать по одной из следующих формул:

$$r = a\,(1 - e\cos E),$$
$$r = \frac{a\,(1-e^2)}{1+e\cos v}. \qquad (25.2)$$

Аргумент широты планеты равен

$$u = L + v - M - \Omega. \tag{25.3}$$

Эклиптическую долготу l можно найти по разности $(l - \Omega)$, которая дается выражением

$$\operatorname{tg}(l - \Omega) = \cos i \ \operatorname{tg} u. \tag{25.4}$$

Если $i < 90°$ (как для больших планет), углы u и $(l - \Omega)$ должны располагаться в одном квадранте. Чтобы избежать проверки при работе с программируемым калькулятором, формулу (25.4) лучше переписать в виде

$$\operatorname{tg}(l - \Omega) = \frac{\cos i \sin u}{\cos u}, \tag{25.5}$$

а затем к числителю и знаменателю дроби, стоящей в правой части выражения (25.5), применить преобразование прямоугольных координат в полярные. Эта операция даст $(l - \Omega)$ непосредственно в нужном квадранте.

Эклиптическая широта планеты b вычисляется по формуле

$$\sin b = \sin u \sin i, \tag{25.6}$$

где $-90° < b < +90°$.

Итак, мы определили гелиоцентрические эклиптические координаты планеты l, b, r на заданный момент времени. Ее геоцентрические координаты находятся следующим образом.

Описанным в разд. 18 способом вычислим на заданный момент геометрическую долготу Солнца $\odot$, отнесенную к среднему равноденствию даты, а также его радиус-вектор R. Геоцентрическую долготу планеты λ можно найти по разности $(\lambda - \odot)$, которая получается из выражения

$$\operatorname{tg}(\lambda - \odot) = \frac{r \cos b \sin (l - \odot)}{r \cos b \cos (l - \odot) + R} = \frac{N}{D}. \tag{25.7}$$

Как и ранее, угол $(\lambda - \odot)$ будет сразу в нужном квадранте, если к числителю N и знаменателю D применить преобразование прямоугольных координат в полярные.

Расстояние от Земли до планеты Δ в астрономических единицах равно

$$\left.\begin{aligned} &\Delta^2 = N^2 + D^2 + (r \sin b)^2 \\ \text{или} \\ &\Delta^2 = R^2 + r^2 + 2rR \cos b \cos (l - \odot) \end{aligned}\right\} \qquad (25.8)$$

И наконец, геоцентрическая широта планеты β равна

$$\sin \beta = \frac{r}{\Delta} \sin b. \qquad (25.9)$$

Полученные геоцентрические координаты планеты представляют собой геометрические координаты, отнесенные к среднему равноденствию даты. Если требуется высокая точность, необходимо учесть также конечное время распространения света: в момент времени t планета видна в том направлении, где она была в момент $t - \tau$; здесь τ — время распространения света от планеты до Земли.

Это время равно (в сутках)

$$\tau = 0{,}005\,7756\ \Delta. \qquad (25.10)$$

Элонгацию планеты, т. е. ее угловое расстояние от Солнца, можно вычислить по формуле

$$\cos \psi = \cos \beta \cos (\lambda - \odot). \qquad (25.11)$$

С помощью формул (8.3) и (8.4) по долготе и широте планеты можно найти ее прямое восхождение и склонение. Экваториальные координаты также будут относиться к *среднему* равноденствию даты.Исправив их за нутацию и аберрацию (см. разд. 16), получим *видимые* прямое восхождение и склонение.

Пример 25.а. Вычислить гелиоцентрическое и геоцентрическое положения Меркурия на 12,0 ноября 1978 г. по эфемеридному времени.

Последовательно получаем:

$JD = 2443\,824{,}5,$ $\qquad E = 248{,}^\circ 932\,38,$

$T = +0{,}788\,624\,230,$ $\qquad v = 238{,}^\circ 250\,67,$

$L = 337{,}^\circ 053\,200,$ $\qquad r = 0{,}415\,71,$

$a = 0{,}387\,0986,$ $\qquad u = 267{,}^\circ 296\,53,$

$e = 0{,}205\,630\,33,$ $\qquad l - \Omega = 267{,}^\circ 276\,24,$

$i = 7{,}^\circ 004\,337,$ $\qquad l = 315{,}^\circ 35697 = 315^\circ 21' 25'',$

$\Omega = 48{,}^\circ 080\,736,$ $\qquad b = -6{,}^\circ 99650 = -6^\circ 59' 47''.$

$M_1 = 259{,}^\circ 926\,60,$

В примере 18.а мы нашли для того же момента времени

$$\odot = 229{,}^\circ25049, \qquad R = 0{,}98984.$$

Следовательно,

$$l - \odot = 86{,}^\circ10648,$$

$$\operatorname{tg}(\lambda - \odot) = \frac{+0{,}411\,6621}{+1{,}017\,8575},$$

$$\lambda - \odot = 22{,}^\circ02037,$$

$$\lambda = 251{,}^\circ27086,$$

$$\Delta = 1{,}09912,$$

$$\beta = -2{,}^\circ64058,$$

$$\psi = 22{,}^\circ17.$$

По формуле (18.4) получим $\varepsilon = 23^\circ{,}442\,032$. Следовательно, формулы (8.3) и (8.4) дадут

$$\alpha = 249{,}^\circ31740 = 16^h37^m16{,}^s2,$$

$$\delta = -24{,}^\circ74770 = -24^\circ44'52''.$$

Сравним результаты наших расчетов с данными из «Астрономических эфемерид» (А.Е.).

Величина		*Наши расчеты*	*А.Е.*
Гелиоцентрическая долгота	l	315°21′25″	315°21′17″
Гелиоцентрическая широта	b	−6°59′47″	−6°59′47″
Радиус-вектор	r	0,415 71	0,415 72
Прямое восхождение	α	$16^h37^m16{,}^s2$	$16^h37^m14{,}^s4$
Склонение	δ	−24°44′52″	−24°44′39″
Расстояние до Земли	Δ	1,099 12	1,099 14

Ошибка в долготе l объясняется тем, что мы пренебрегли возмущениями в движении Меркурия и Земли. Ошибки в α и δ отчасти объясняются той же причиной, а частично — тем, что мы не учли время распространения света, нутацию и аберрацию.

Второй метод

Мы используем орбитальные элементы, отнесенные к стандартному равноденствию, скажем, 1950,0, и рассчитанные на то же равноденствие геоцентрические прямоугольные экваториальные координаты Солнца

X, Y, Z. Эти прямоугольные координаты можно взять из «Астрономических эфемерид» или вычислить методом, описанным в разд. 19.

Мы не будем вычислять гелиоцентрическую долготу и широту малой планеты или кометы. Вместо этого рассчитаем гелиоцентрические прямоугольные экваториальные координаты тела x, y, z, после чего по простым формулам получим прямое восхождение, склонение и другие величины.

Пусть даны следующие орбитальные элементы:

a — большая полуось (а.е.),
e — эксцентриситет,
i — наклон,
ω — аргумент перигелия,
Ω — долгота восходящего узла,
n — среднее движение (°/сут).

Элементы i, ω и Ω даны на стандартное равноденствие.

Если величины a и n неизвестны, их можно вычислить по формулам

$$a = \frac{q}{1 - e}, \qquad n = \frac{0{,}985\,609}{a\sqrt{a}}, \qquad (25.12)$$

где q есть перигелийное расстояние в астрономических единицах.

Строго говоря, все эти элементы характеризуют орбиту в данный момент времени, называемый *эпохой*. Под действием планетных возмущений они медленно меняются со временем. Если высокая точность не требуется, элементы можно считать постоянными на протяжении нескольких месяцев, например в период видимости кометы.

Кроме перечисленных выше элементов, дается средняя аномалия M_0 в эпоху или момент T прохождения через перигелий. Зная их, можно рассчитать среднюю аномалию на любой момент времени. Средняя аномалия возрастает на n градусов в сутки и обращается в нуль в момент T.

Если орбитальные элементы малой планеты или кометы известны, ее геоцентрическое положение на заданную дату можно вычислить следующим образом. Вначале найдем величины a, b, c и углы A, B, C, постоянные для рассматриваемой орбиты.

Пусть ε — наклон эклиптики. Если орбитальные элементы отнесены к стандартному равноденствию 1950,0, следует взять

$$\varepsilon_{1950} = 23{,}^\circ 445\,7889.$$

Затем найдем

$$
\begin{array}{l|l}
F = \cos\Omega & P = -\sin\Omega\cos i \\
G = \sin\Omega\cos\varepsilon & Q = \cos\Omega\cos i\cos\varepsilon - \sin i\sin\varepsilon \\
H = \sin\Omega\sin\varepsilon & R = \cos\Omega\cos i\sin\varepsilon + \sin i\cos\varepsilon
\end{array}
$$

Для проверки правильности вычислений можно использовать равенства

$$F^2 + G^2 + H^2 = 1, \qquad P^2 + Q^2 + R^2 = 1,$$

но в программе предусматривать эту проверку не нужно. Далее вычислим a, b, c, A, B, C по формулам

$$
\left.
\begin{array}{ll}
\operatorname{tg} A = \dfrac{F}{P}, & a = \sqrt{F^2 + P^2}, \\
\operatorname{tg} B = \dfrac{G}{Q}, & b = \sqrt{G^2 + Q^2}, \\
\operatorname{tg} C = \dfrac{H}{R}, & c = \sqrt{H^2 + R^2}.
\end{array}
\right\} \tag{25.13}
$$

Нужно взять положительные значения a, b и c, а углы A, B и C должны удовлетворять следующим условиям: знак $\sin A$ совпадает со знаком $\cos\Omega$; знаки $\sin B$ и $\sin C$ совпадают со знаком $\sin\Omega$.

Однако более предпочтительным кажется применить к величинам F и P, G и Q, H и R преобразование прямоугольных координат в полярные. При этом не только обеспечивается правильность значений углов A, B и C, но и автоматически вычисляются a, b и c. Таким образом экономится память калькулятора.

Для каждого требуемого положения вычислите среднюю аномалию тела M, затем эксцентрическую аномалию E (см. разд. 22), истинную аномалию v по формуле (25.1) и радиус-вектор r по формуле (25.2). Тогда гелиоцентрические прямоугольные экваториальные координаты тела будут равны

$$
\left.
\begin{array}{l}
x = r a \sin(A + \omega + v), \\
y = r b \sin(B + \omega + v), \\
z = r c \sin(C + \omega + v).
\end{array}
\right\} \tag{25.14}
$$

Удобство этих формул становится очевидным, если нужно вычислить прямоугольные координаты для нескольких положений тела. Вспомогательные величины a, b, c, A, B, C являются функциями только

Ω, i и ε, следовательно, в процессе вычисления эфемерид они постоянны. Для каждого нового положения нужно найти только v и r. Однако заметим, что Ω, i и ω сохраняют постоянные значения лишь при движении по невозмущенной орбите.

Вычислите на тот же момент времени прямоугольные координаты Солнца X, Y, Z (см. раздел 19) или же выпишите их из «Астрономических эфемерид».

Геоцентрическое прямое восхождение α и склонение δ малой планеты или кометы вычисляются по формулам

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tg}\alpha &= \frac{Y+y}{X+x}, \\ \Delta^2 &= (X+x)^2 + (Y+y)^2 + (Z+z)^2, \\ \sin\delta &= \frac{Z+z}{\Delta}. \end{aligned}\right\} \qquad (25.15)$$

где Δ есть расстояние от Земли и, следовательно, положительно. Если угол α вычислен верно (т. е. находится в правильном квадранте), то $\sin\alpha$ имеет тот же знак, что и $(Y+y)$. Однако снова отметим, что без всякой последующей проверки угол получается в нужном квадранте, если к числителю и знаменателю дроби применить преобразование прямоугольных координат в полярные.

Если α получится отрицательным, прибавьте 360°. Затем, разделив результат на 15, выразите α в часах.

Элонгацию относительно Солнца и фазовый угол β (угол Солнце — тело — Земля) найдем по формулам:

$$\cos\psi = \frac{(X+x)X + (Y+y)Y + (Z+z)Z}{R\Delta} = \frac{R^2 + \Delta^2 - r^2}{2R\Delta},$$

$$\cos\beta = \frac{(X+x)x + (Y+y)y + (Z+z)z}{r\Delta} = \frac{r^2 + \Delta^2 - R^2}{2r\Delta},$$

где $R = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$; углы ψ и β заключаются в пределах от 0° до 180°.

Звездную величину можно вычислить так. В случае *кометы интегральная* звездная величина равна

$$m = g + 5 \lg \Delta + \kappa \lg r, \qquad (25.16)$$

где g — абсолютная звездная величина, а постоянная κ меняется от кометы к комете. Обычно κ — это число от 5 до 15.

Для *малой планеты* имеем

$$m = g + 5 \ \mathrm{tg} \ r\Delta + k\beta,$$

где β — фазовый угол в градусах, k — фазовый коэффициент. Обычно для малых планет принимают $k = 0{,}023$, хотя для некоторых объектов найдены бо́льшие значения, например для Цереры $k = 0{,}049$.

Пример 25.6. Найти геоцентрические координаты малой планеты № 433 Эрос на 11,0 февраля 1975 г. по эфемеридному времени, если его орбитальные элементы равны (см. Циркуляр МАС (IAUC) № 2722):

Эпоха = 1975, янв. 28,0 ET,
T = 1975, янв. 24,70450 ET,
a = 1,457 9641 а.е,
e = 0,222 7021,
i = 10°,82772, ⎫
ω = 178°,44991, ⎬ для равноденствия и эклиптики 1950,0
Ω = 303°,83085, ⎭
n = 0,559 865 65 градусов в сутки,
g = 12,4 (фотографическая звездная величина).

Вначале вычислим вспомогательные постоянные для орбиты:

$F = +0{,}556\,742\,97$, $\quad P = +0{,}815\,895\,71$,
$G = -0{,}762\,100\,94$, $\quad Q = +0{,}426\,938\,36$,
$H = -0{,}330\,513\,88$, $\quad R = +0{,}389\,920\,29$,

откуда по формулам (25.13) находим

$A = +34°{,}30847$, $\quad a = 0{,}987\,749\,23$,
$B = -60°{,}74191$, $\quad b = 0{,}873\,541\,19$,
$C = -40°{,}28610$, $\quad c = 0{,}511\,152\,87$.

Для заданной даты (11,0 февраля 1975 г.) время, протекшее с момента прохождения перигелия, составляет $+17{,}295\,50$ сут. Следовательно, средняя аномалия равна

$$M = 17{,}29550 \times 0°{,}559\,865\,65 = +9°{,}683\,156.$$

Далее находим

$E = 12°{,}429\,591$, $\quad x = -0{,}841\,5580$,
$v = 15°{,}554\,375$, $\quad y = +0{,}725\,7529$,
$r = 1{,}140\,8828$, $\quad z = +0{,}258\,2179$.

Прямоугольные геоцентрические экваториальные координаты Солнца на эту дату, отнесенные к стандартному равноденствию 1950,0, выпишем из «Астрономических эфемерид»:

$$X = +0{,}770\,0006, \qquad Y = -0{,}566\,4014, \qquad Z = -0{,}245\,6064.$$

Далее получим

$$\begin{aligned}
X + x &= -0{,}071\,5574,\\
Y + y &= +0{,}159\,3515,\\
Z + z &= +0{,}012\,6115,\\
R &= 0{,}986\,9316,\\
\Delta &= 0{,}175\,1354,\\
\alpha_{1950} &= 114{,}^\circ 182\,647 = 7^h36^m44^s,\\
\delta_{1950} &= +4^\circ 07{,}'8,\\
\psi &= 149{,}^\circ 19,\\
\beta &= 26{,}^\circ 30.
\end{aligned}$$

Звездная величина равна 9,5.

В качестве упражнения вычислите эфемериды малой планеты № 234 Барбара, исходя из следующих орбитальных элементов:

$$\begin{aligned}
\text{Эпоха} &= 1979,\ \text{нояб.}\ 23{,}0\ \text{ET},\\
M_0 &= 34{,}^\circ 88670,\\
a &= 2{,}384\,8264,\\
e &= 0{,}245\,6180,\\
i &= 15{,}^\circ 38354,\\
\omega &= 191{,}^\circ 11341,\\
\Omega &= 144{,}^\circ 17952,\\
n &= 0{,}^\circ 267\,620\,22.
\end{aligned}$$

(i, ω, Ω — для равноденствия и эклиптики 1950,0)

Сравните результаты ваших расчетов со следующими эфемеридами, опубликованными в «Эфемеридах малых планет на 1979 г.» (Ленинград, 1978 г.):

0^h ET		α_{1950}	δ_{1950}
1979 г. Сентябрь	4	$1^h24{,}^m8$	$-9^\circ 19'$
	14	1 24,6	−12 14
	24	1 21,0	−15 04
Октябрь	4	1 15,2	−17 30
	14	1 08,4	−19 15
	24	1 02,2	−20 11
Ноябрь	3	0 57,9	−20 17
	13	0 56,2	−19 39

Уравнение центра

Если эксцентриситет орбиты невелик, вместо того, чтобы решать уравнение Кеплера (разд. 22) и далее воспользоваться формулой (25.1), можно найти уравнение центра C или $(v - M)$ непосредственно по e и M из следующего выражения:

$$C = \left(2e - \frac{e^3}{4} + \frac{5}{96}e^5\right)\sin M + \left(\frac{5}{4}e^2 - \frac{11}{24}e^4\right)\sin 2M +$$
$$+ \left(\frac{13}{12}e^3 - \frac{43}{64}e^5\right)\sin 3M + \frac{103}{96}e^4 \sin 4M + \frac{1097}{960}e^5 \sin 5M.$$

Результат вычислений выражается в радианах и для перевода в градусы его следует умножить на $180/\pi$ или на 57,295 779 51. Формула получена путем разложения в ряд и сохранения членов порядка не выше e^5. Следовательно, она пригодна лишь для малых значений эксцентриситета. Если эксцентриситет очень мал, можно пренебречь членами с e^4 и e^5.

Максимальная ошибка достигает:

	Разложение с учетом членов до e^5	Разложение без членов с e^4 и e^5
Для e = 0,03	0″,0003	0″,24
0,05	0,007	1,8
0,10	0,45	30
0,15	5	152
0,20	29	483
0,25	111	1183
0,30	331	2456

Пример 25.в. Как и в условии примера 25.а, взять e = 0,205 630 33 и M = 259°,926 60.

Приведенная выше формула дает

$$C = -0{,}378\,459\,88 \text{ радиан} = -21°{,}684\,15, \text{ откуда}$$

$$v = M + C = 238°{,}242\,45.$$

Найденное в этом примере верное значение равно 238°,250 67. Следовательно, ошибка в этом случае равна 0°,008 22, или около 30″.

26

Движение по параболе

В этом разделе мы дадим формулы расчета положений кометы, движущейся вокруг Солнца по параболической траектории. Предполагается, что элементы орбиты остаются постоянными (т. е. возмущения от планет не учитываются) и относятся к стандартному равноденствию (например, 1950,0).

Имеем следующие элементы орбиты:

T — момент прохождения через перигелий,

q — перигелийное расстояние, а.е.,

i — наклон,

ω — аргумент перигелия,

Ω — долгота восходящего узла.

Вначале, как и для эллиптической орбиты, вычислим вспомогательные величины (постоянные a, b, c, A, B, C) по формулам (25.13). Затем для каждого рассматриваемого положения кометы сделаем следующее.

Пусть $t - T$ есть время (сут), протекшее с момента прохождения через перигелий. Найдем

$$W = \frac{0{,}036\,491\,1624}{q\,\sqrt{q}}\,(t - T). \tag{26.1}$$

Затем вычислим истинную аномалию v и радиус-вектор r кометы по формулам

$$\operatorname{tg}\frac{v}{2} = s, \qquad r = q\,(1 + s^2), \tag{26.2}$$

где s — корень уравнения

$$s^3 + 3s - W = 0. \tag{26.3}$$

Проще всего решать его методом итераций, начиная с любого значения s. Хорошим первым приближением является $s = 0$. Новое значение s вычисляется по формуле

$$\frac{2s^3 + W}{3\,(s^2 + 1)}. \tag{26.4}$$

Вычисления продолжаются, пока не будет найдено верное значение s. Отметим, что при пользовании формулой (26.4) требуется вычислять куб s; при отрицательном s на некоторых калькуляторах эта операция невозможна; в таком случае вместо s^3 следует вычислять $s^2 \times s$.

Помимо метода итераций уравнение (26.3) можно решить и непосредственно (см. *J. Bauschinger, «Tafeln zur Theoretischen Astronomie»*. с. 9, Лейпциг, 1934):

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{2}{W} = 54{,}807\,791\ \frac{q\sqrt{q}}{t-T},$$
$$\operatorname{tg}\gamma = \sqrt[3]{\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}}, \qquad (26.5)$$
$$s = \frac{2}{\operatorname{tg} 2\gamma}.$$

Может случиться, что при определении $\operatorname{tg}\gamma$ придется извлекать кубический корень из отрицательного числа. Большинство вычислительных машин не имеет такой возможности. Обойти эту трудность можно с помощью различных приемов. Приведем два примера вычисления по программе на калькуляторе HP-67 кубического корня из любого числа.

Первый способ	*Второй способ*
f $x<0$	h ABS
h SF 2	h LST x
h ABS	:
3	h LST x
h $1/x$	h ABS
h y^x	3
h F? 2	h $1/x$
CHS	h y^x
	×

Однако автор предпочитает использовать итерационную формулу, не вызывающую никаких проблем.

После того как s найдено, по формуле (26.2) вычисляем v и r, а затем, как и для эллиптической орбиты, проводим расчеты по формулам (25.14) и (25.15).

Отметим, что знаки s и $(t - T)$ совпадают: они отрицательны до перигелия, положительны после перигелия.

При движении по параболе $e = 1$, a и период обращения бесконечны; среднее суточное движение равно нулю и, следовательно, средней и эксцентрической аномалии не существует (в действительности они равны нулю).

Пример 26.a. Вычислить геоцентрические координаты кометы Колера (1977 m) на 29,0 сентября 1977 г. по эфемеридному времени, основываясь на следующих элементах параболической орбиты (IAUC № 3137):

$$T = 1977,\text{нояб. } 10,5659\ \text{ET}$$
$$q = 0,990\,662$$
$$\left.\begin{aligned} i &= 48^\circ\!,7196 \\ \omega &= 163,4799 \\ \Omega &= 181,8175 \end{aligned}\right\} 1950,0$$

Звездная величина равна $6,0 + 5\lg\Delta + 10\lg r$.

Сначала найдем вспомогательные постоянные:

$$F = -0,999\,496\,92, \qquad P = +0,020\,924\,49,$$
$$G = -0,029\,097\,47, \qquad Q = -0,903\,973\,29,$$
$$H = -0,012\,619\,22, \qquad R = +0,427\,076\,64,$$

а затем по формулам (25.13) определим

$$A = -\ 88^\circ\!,800\,69, \qquad a = 0,999\,715\,92,$$
$$B = -178^\circ\!,156\,38, \qquad b = 0,904\,441\,47,$$
$$C = -\ 1^\circ\!,692\,48, \qquad c = 0,427\,263\,04.$$

Для заданной даты (29,0 сентября 1977 г.) время, протекшее с момента прохождения через перигелий, равно

$$t - T = -42,5659.$$

Следовательно, по формуле (26.1) получаем

$$W = -1,575\,2927.$$

Взяв в первом приближении $s = 0$, получим в результате последовательных итераций по формуле (26.4):

$$\begin{array}{r} 0,000\,0000 \\ -0,525\,0976 \\ -0,487\,2672 \\ -0,486\,6745 \\ -0,486\,6743 \end{array}$$

Отсюда $s = -0,486\,6743$ и, следовательно,

$$v = -51^\circ\!,90199, \qquad r = 1,225\,3022.$$

Если вместо метода итераций решать уравнение для s по формулам (26.5), получаем последовательно:

$$\operatorname{tg}\beta = -1,269\,6053,$$

$$\beta = -51^\circ\!,774\,3927,$$

$$\operatorname{tg}\gamma = \sqrt[3]{-0,485\,2978} = -0,785\,8436,$$

$$\gamma = -38{,}^\circ161\,8063,$$
$$b = -0{,}486\,6743, \quad \text{как и ранее}.$$

После этого по формулам (25.14) найдем

$$x = +0{,}474\,2398,$$
$$y = -1{,}016\,9032,$$
$$z = +0{,}492\,3109.$$

Из «Астрономических эфемерид» возьмем геоцентрические прямоугольные экваториальные координаты Солнца на заданную дату, отнесенные к стандартному равноденствию 1950,0:

$$X = -0{,}997\,3057,$$
$$Y = -0{,}085\,7667,$$
$$Z = -0{,}037\,1837.$$

Отсюда найдем

$$X + x = -0{,}523\,0659,$$
$$Y + y = -1{,}102\,6699, \qquad R = 1{,}001\,6772,$$
$$Z + z = +0{,}455\,1272, \qquad \Delta = 1{,}302\,5435,$$

$$\alpha_{1950} = -115{,}^\circ377\,936 = 16^h18^m29^s,$$
$$\delta_{1950} = +20^\circ27{,}'1,$$

$$\psi = 62{,}^\circ66.$$

Звездная величина равна 7,5.

27

Планеты в перигелии и афелии

Юлианскую дату прохождения планеты через перигелий или афелий можно найти по следующим формулам:

Меркурий	$JD = 2414\,995{,}007 + 87{,}969\,349\,97\,k$
Венера	$JD = 2415\,112{,}001 + 224{,}700\,8454\,k - 0{,}000\,000\,0304\,k^2$

Земля	JD = 2415 021,546 + 365,259 6413 k + 0,000 000 0152 k^2
Марс	JD = 2415 097,251 + 686,995 8091 k − 0,000 000 1221 k^2
Юпитер	JD = 2416 640,884 + 4332,894 375 k + 0,000 1222 k^2
Сатурн	JD = 2409 773,47 + 10 764,180 10 k + 0,001 3033 k^2

где k — целое число для перигелия и в точности полуцелое (равное целому плюс 0,5) для афелия.

Подстановка в формулы других значений k приведет к бессмысленному результату!

Положительные k соответствуют датам после начала 1900 г., а отрицательные — до начала 1900 г.

Например, $k = +14$ и $k = -222$ дают прохождения через перигелий, а $k = +27{,}5$ и $k = -119{,}5$ — через афелий.

Приближенное значение k можно найти следующим образом (в приводимых формулах «год» следует брать с десятичными знаками):

Меркурий	$k \simeq$ 4,15201 (год − 1900)
Венера	$k \simeq$ 1,62549 (год − 1900)
Земля	$k \simeq$ 0,99997 (год − 1900)
Марс	$k \simeq$ 0,53166 (год − 1900)
Юпитер	$k \simeq$ 0,08430 (год − 1900)
Сатурн	$k \simeq$ 0,03393 (год − 1900)

Пример 27.а. Найти ближайший к 15 октября 1978 г. (1978,79) момент прохождения Венеры через перигелий.

Приближенное значение k равно

$$k \simeq 1{,}62549\ (1978{,}79 - 1900) = 128{,}07$$

и, поскольку k должно быть целым (перигелий!), возьмем $k = 128$. Подставив это значение в формулу для Венеры, найдем

$$\text{JD} = 2443\,873{,}709\,,$$

что соответствует дате 1978, декабрь 31,209 или 5^h ET 31 декабря 1978 г.

Пример 27.б. Найти время прохождения Марса через афелий в 1978 г.

Подставив «год» = 1978, получим $k \approx 41{,}47$. Так как k должно быть полуцелым (афелий!), возьмем $k = 41{,}5$. По формуле для Марса определим JD = 2443 607,577, что соответствует дате 1978, апрель 9,077 или 2^h ET 9 апреля.

Важно отметить, что приведенные для Земли формулы на самом деле относятся к *барицентру* системы Земля — Луна. Из-за влияния Луны моменты, когда расстояния между центрами Земли и Солнца и барицентром и центром Солнца минимальны или максимальны, могут различаться более чем на сутки. Например, подстановка $k = 78$ в формулу для Земли дает JD = 2443 511,80, т. е. дату 1978, январь 3,30, тогда как правильное значение для Земли равно 23^h 1 января 1978 г.

Из-за взаимных возмущений в движении планет ошибка получаемых моментов для Юпитера может достичь полумесяца. Для Сатурна она может превысить месяц.

Так, подставив $k = 6{,}5$ в формулу для Юпитера, получим, что он прошел через афелий 19 июля 1981 г., тогда как на самом деле это случилось 28 июля. Подстановка $k = 2$ в формулу для Сатурна приводит к дате 30 июля 1944 г., а на самом деле Сатурн прошел через перигелий 8 сентября 1944 г.

Для Урана и Нептуна ошибка еще больше. По этой причине формулы для них не приводятся. Уран прошел через перигелий 19 мая 1966 г. и будет в афелии 27 февраля 2009 г.

28

Прохождение через узлы

Если заданы элементы орбиты планеты или кометы, можно довольно просто вычислить моменты времени t прохождения тела через узлы орбиты.

Имеем

в восходящем узле: $v = -\omega$ или $360° - \omega$,

в нисходящем узле: $v = 180° - \omega$,

где, как и ранее, v — истинная аномалия, ω — аргумент перигелия. Затем выполним следующие вычисления.

Случай эллиптической орбиты

$$\operatorname{tg} \frac{E}{2} = \sqrt{\frac{1 - e}{1 + e}} \operatorname{tg} \frac{v}{2},$$

$$M = E - e_0 \sin E, \tag{28.1}$$

$$t = T + \frac{M}{n} \text{ сут}, \tag{28.2}$$

где e — эксцентриситет орбиты, а e_0 — значение эксцентриситета, выраженное в градусах, т. е.

$$e_0 = e \times 57^\circ{,}295\,779\,51.$$

В формулах (28.1), (28.2) E выражается в градусах, среднее движение n — в градусах в сутки, средняя аномалия M — в градусах; T — момент прохождения перигелия.

Величину радиус-вектора можно вычислить по формуле

$$r = a\,(1 - e \cos E),$$

где a — большая полуось в астрономических единицах.

Если a и n не заданы, их можно вычислить по формулам

$$a = \frac{q}{1 - e}, \qquad n = \frac{0{,}985\,609}{a\sqrt{a}},$$

в которых q — перигелийное расстояние в астрономических единицах.

Случай параболической орбиты

$$s = \operatorname{tg} \frac{v}{2},$$

$$t = T + 27{,}403\,896\,(s^3 + 3s)\,q\sqrt{q} \text{ сут},$$

где перигелийное расстояние q выражено в астрономических единицах. Соответствующая величина радиус-вектора равна

$$r = q\,(1 + s^2).$$

Замечание. Следует иметь в виду, что узлы, о которых идет речь, определяются положением эклиптики в ту же эпоху, на которую даны орбитальные элементы. Например, если элементы орбиты вычислены на равноденствие 1950,0, приведенные выше формулы определяют прохождение через узлы, лежащие на эклиптике 1950,0, а *не на мгновенной эклиптике*. Однако обычно этими различиями пренебрегают; исключение составляют орбиты с очень малым наклоном.

8-01653

Пример 28.а. Используем те же элементы орбиты малой планеты Эрос, что и в условии примера 25,б.:

$$
\begin{aligned}
T &= 1975, \text{ январь } 24{,}70450 \text{ ET},\\
\omega &= 178^\circ{,}44991,\\
e &= 0{,}222\,7021,\\
n &= 0^\circ{,}559\,865\,65 \text{ в сутки},\\
a &= 1{,}457\,9641 \text{ а.е.}
\end{aligned}
$$

Для прохождения через нисходящий узел:

$$
\begin{aligned}
v &= 180^\circ - \omega = 1^\circ{,}55009,\\
\operatorname{tg}\frac{E}{2} &= 0{,}797\,3214 \times 0{,}013\,5279 = 0{,}010\,7861,\\
E &= 1^\circ{,}235\,9474,\\
M &= 1^\circ{,}235\,9474 - (0{,}222\,7021 \times 57^\circ{,}295\,779\,51)\cdot\sin 1^\circ{,}2359474\\
&= 0^\circ{,}960\,7206,\\
t &= T + \frac{0{,}960\,7206}{0{,}559\,865\,65} = T + 1{,}71598 \text{ сут}\\
&= 1975, \text{ январь } 26{,}4205,\\
r &= 1{,}13335 \text{ а,е.}
\end{aligned}
$$

Аналогично для восходящего узла получаем:

$$
\begin{aligned}
v &= -\omega = -178^\circ{,}44991,\\
E &= -178^\circ{,}05595,\\
M &= -177^\circ{,}62308,\\
t &= T - 317{,}26019 \text{ сут} = 1974, \text{ март } 13{,}4443,\\
r &= 1{,}78247 \text{ а.е.}
\end{aligned}
$$

Пример 28.б. Комета Колера (1977 m). Возьмем элементы орбиты из условий примера 26.а:

$$
\begin{aligned}
T &= 1977, \text{ ноябрь } 10{,}5659 \text{ ET},\\
q &= 0{,}990\,662 \text{ а,е.}\\
\omega &= 163^\circ{,}4799.
\end{aligned}
$$

Для восходящего узла

$$
\begin{aligned}
v &= -\omega = -163^\circ{,}4799,\\
s &= -6{,}888\,371,\\
t &= T - 9390{,}2 \text{ сут}\\
&= 1952, \text{ февраль } 25,\\
r &= 47{,}997 \text{ а.е.}
\end{aligned}
$$

Для нисходящего узла

$$
\begin{aligned}
v &= 180^\circ - \omega = 16^\circ{,}5201,\\
s &= +0{,}145\,1722,\\
t &= T + 11{,}8507 \text{ сут}\\
&= 1977, \text{ ноябрь } 22{,}4166 \text{ ET},\\
r &= 1{,}0115 \text{ а.е.}
\end{aligned}
$$

Пример 28.в. Вычислить ближайший к эпохе 1979,0 момент прохождения Венеры через восходящий узел орбиты.

Найдем элементы орбиты по данным табл. 23,А:

$$a = 0{,}723\,3316, \text{ следовательно } n = 1{,}602\,133,$$
$$e = 0{,}006\,820\,69 - 0.000\,047\,74\,T + 0{,}000\,000\,091\,T^2,$$
$$\omega = 54^\circ\!\!.384\,186 + 0^\circ\!\!.508\,1861\,T - 0{,}001\,3864\,T^2.$$

Элементы e и ω изменяются со временем. Нам требуются их значения на эпоху 1979,0, т. е. для $T = 0{,}79$. Следовательно,

$$e = 0{,}006\,783\,03, \qquad \omega = 54^\circ\!\!.784\,788,$$

Последовательно получим

$$v = -\omega = -54^\circ\!\!.784\,788, \qquad M = -54^\circ\!\!.151\,620,$$
$$E = -54^\circ\!\!.467\,890, \qquad t = T - 33{,}7997 \text{ сут.}$$

Решая пример 27.а, мы нашли момент прохождения Венеры через перигелий: 1978, декабрь 31,209. Следовательно, t = 1978, ноябрь 27,409 или 10^h ET 27 ноября 1978 г.

29

Поправка за параллакс

Рассчитаем по известным геоцентрическим координатам тела (Луны, Солнца, планеты, кометы) топоцентрические координаты. *Геоцентрические* координаты относятся к центру Земли, а *топоцентрические* (от греческого слова *топос* — место; сравните с *топологией)* — к определенному месту на поверхности Земли.

Другими словами, требуется найти поправки $\Delta\alpha$ и $\Delta\delta$ (параллактическое смещение по прямому восхождению и склонению) к известным геоцентрическим координатам α и δ, с помощью которых вычисляются топоцентрическое прямое восхождение $\alpha' = \alpha + \Delta\alpha$ и топоцентрическое склонение $\delta' = \delta + \Delta\delta$.

Пусть ρ — геоцентрический радиус и ϕ' — геоцентрическая широта места наблюдения. Описанным в разд. 6 методом можно вычислить величины $\rho\sin\phi'$ и $\rho\cos\phi'$.

Пусть π — экваториальный горизонтальный параллакс тела. Если речь идет о Солнце, кометах и планетах, часто удобнее использовать вместо параллакса расстояние до Земли Δ (а.е.). Тогда

$$\sin\pi = \frac{\sin 8\overset{''}{.}794}{\Delta}$$

или, с достаточной точностью,

$$\pi = \frac{8\overset{''}{.}794}{\Delta}. \qquad (29.1)$$

Если H — геоцентрический часовой угол, то можно записать точные формулы:

$$\operatorname{tg}\Delta\alpha = \frac{-\rho\cos\phi'\sin\pi\sin H}{\cos\delta - \rho\cos\phi'\sin\pi\cos H}, \qquad (29.2)$$

а для склонения вместо $\Delta\delta$ можно сразу найти δ':

$$\operatorname{tg}\delta' = \frac{(\sin\delta - \rho\sin\phi'\sin\pi)\cos\Delta\alpha}{\cos\delta - \rho\cos\phi'\sin\pi\cos H}. \qquad (29.3)$$

За исключением Луны для всех объектов можно пользоваться следующими приближенными формулами вместо (29.2) и (29.3):

$$\Delta\alpha = \frac{-\pi\rho\cos\phi'\sin H}{\cos\delta}, \qquad (29.4)$$

$$\Delta\delta = -\pi(\rho\sin\phi'\cos\delta - \rho\cos\phi'\cos H\sin\delta). \qquad (29.5)$$

Если величина π выражена в секундах дуги, $\Delta\alpha$ и $\Delta\delta$ также получаются в секундах дуги. Чтобы выразить $\Delta\alpha$ в секундах времени, нужно разделить результат на 15.

Пример 29.а. Рассчитать топоцентрические координаты Марса дляУккльской обсерватории на $2^h34^m00^s$ UT 12 августа 1971 г. Для этой обсерватории

$$\sin\phi' = +0{,}771\,306,$$
$$\cos\phi' = +0{,}633\,333,$$

а долгота $L = -0^h17^m26^s$.

Геоцентрические экваториальные координаты Марса на этот момент, полученные интерполированием по таблицам из «Астрономических эфемерид», равны

$$\alpha = 21^h24^m46\overset{s}{.}85, \qquad \delta = -22°24'09\overset{''}{.}9.$$

Планета находилась на расстоянии 0,3757 а.е., следовательно, по формуле (29,1) можно найти ее экваториальный горизонтальный параллакс $\pi = 23'',41$.

Нам еще нужен геоцентрический часовой угол. Он равен $H = \theta_0 - L - \alpha$, где θ_0 — гринвичское звездное время, которое можно вычислить так, как указано в разд. 7; для заданного момента получаем

$$\theta_0 = 23^h53^m36^s.$$

Следовательно,

$$H = 23^h53^m36^s + 0^h17^m26^s - 21^h24^m47^s$$
$$= +2^h46^m15^s = +41{,}^\circ562.$$

По формуле (29,2) определим

$$\operatorname{tg} \Delta\alpha = \frac{-0{,}000\,047\,687}{+0{,}924\,474},$$

т. е.

$$\Delta\alpha = -0{,}^\circ002\,9555 = -0{,}^s71,$$
$$\alpha' = \alpha + \Delta\alpha = 21^h24^m46{,}^s14.$$

Формула (29,3) дает

$$\operatorname{tg} \delta' = \frac{-0{,}381\,202\,29}{+0{,}924\,473\,96},$$
$$\operatorname{tg} \delta' = -22^\circ24'30{,}''8.$$

Если вместо формул (29.2) и (29.3) воспользоваться приближенными формулами (29.4) и (29.5), получим

$\Delta\alpha = -10{,}''64 = -0{,}^s71$, как и ранее ;

$\Delta\delta = -20{,}''9$, т. е. $\delta' = \delta - 20{,}''9 = -22^\circ24'30{,}''8$, как и прежде.

В качестве упражнения предлагается рассчитать для той же Уккльской обсерватории поправки для Луны, взяв произвольные координаты, например

$$\alpha = 1^h00^m00{,}^s00 = 15{,}^\circ000\,000,$$
$$\delta = +5{,}^\circ000\,000,$$
$$H = +4^h00^m00{,}^s00 = +60{,}^\circ000\,000,$$
$$\pi = 0^\circ59'00''.$$

Сравните между собой результаты, полученные по точным и приближенным формулам.

Можно рассмотреть и обратную задачу: из наблюдаемых топоцентрических координат α' и δ' вывести геоцентрические α и δ. Для планет и комет поправки $\Delta\alpha$ и $\Delta\delta$ настолько малы, что формулы (29,4) и (29,5) можно использовать и для редукции топоцентрических координат в геоцентрические.

Параллактическое смещение в эклиптических координатах

Можно рассчитать топоцентрические эклиптические координаты небесного тела по геоцентрическим. Приведем следующие формулы, выведенные Литтроу («*Theoretische und Practische Astronomie*», т. 1, с. 91, Вена, 1821).

Пусть λ — геоцентрическая эклиптическая долгота небесного тела (Луны, планеты, кометы);
β — его геоцентрическая эклиптическая широта;
s — его геоцентрический полудиаметр;
λ', β', s' — топоцентрические значения тех же величин;
ϕ — широта наблюдателя;
ε — наклон эклиптики;
θ — местное звездное время.

Тогда

$$\phi' = \phi - 0^\circ\!.193 \sin 2\phi,$$

$$N = \cos\lambda\cos\beta - \sin\pi\cos\phi'\cos\theta,$$

$$\operatorname{tg}\lambda' = \frac{\sin\lambda\cos\beta - \sin\pi\,(\sin\phi'\sin\varepsilon + \cos\phi'\cos\varepsilon\sin\theta)}{N},$$

$$\operatorname{tg}\beta' = \frac{\cos\lambda'\,\big(\sin\beta - \sin\pi\,(\sin\phi'\cos\varepsilon - \cos\phi'\sin\varepsilon\sin\theta)\big)}{N},$$

$$\sin s' = \frac{\cos\lambda'\cos\beta'\sin s}{N}.$$

В качестве упражнения найдите λ', β', s' по следующим данным:

$\lambda = 181^\circ46'22''\!.5$, $\quad\varepsilon = 23^\circ28'00''\!.8$,
$\beta = +2^\circ17'26''\!.2$, $\quad\theta = 209^\circ46'07''\!.9$,
$\pi = 0^\circ59'27''\!.7$, $\quad\phi = +50^\circ05'07''\!.8$.
$s = 0^\circ16'15''\!.5$,

Ответ:

$\lambda' = 181^\circ48'05''\!.2$,
$\beta' = +1^\circ29'01''\!.3$,
$s' = 0^\circ16'25''\!.5$.

30

Положение Луны

При вычислении точного положения Луны необходимо учитывать *сотни* периодических членов в долготе, широте и параллаксе Луны. Мы ограничимся главными членами и точностью 10″ в долготе Луны, 3″ в широте и 0″,2 в параллаксе.

Описанным ниже методом можно рассчитать геоцентрическую долготу λ и геоцентрическую широту β центра диска Луны на среднее равноденствие даты. При необходимости λ и β по формулам (8.3) и (8.4) можно перевести в α и δ. Можно определить и горизонтальный экваториальный параллакс Луны π.

Если параллакс π известен, расстояние между центрами Земли и Луны находится по формуле

$$D = \frac{1}{\sin \pi} \quad \text{(в единицах экваториального радиуса Земли)}$$

или

$$D = \frac{6378{,}14}{\sin \pi} \quad \text{(в километрах).}$$

Для заданного момента эфемеридного времени найдем JD (см. разд. 3) и затем по формуле (15.1) получим T. Вспомним, что T выражено в столетиях, и поэтому его следует вычислить с достаточным числом десятичных знаков (по крайней мере с девятью, так как за 0,000 000 001 столетия Луна смещается на 1″,7).

Затем, воспользовавшись приведенными ниже формулами, в которых коэффициенты выражены в градусах в десятичном виде, определим углы L', M, M', D, F, Ω:

Средняя долгота Луны:

$$L' = 270{,}434\,164 + 481\,267{,}8831\,T - 0{,}001\,133\,T^2 + 0{,}000\,0019\,T^3.$$

Средняя аномалия Солнца:

$$M = 358{,}475\,833 + 35\,999{,}0498\,T - 0{,}000\,150\,T^2 - 0{,}000\,0033\,T^3.$$

Средняя аномалия Луны:

$$M' = 296{,}104\,608 + 477\,198{,}8491\,T + 0{,}009\,192\,T^2 + 0{,}000\,0144\,T^3.$$

Средняя элонгация Луны:

$$D = 350{,}737\,486 + 445\,267{,}1142\,T - 0{,}001\,436\,T^2 + 0{,}000\,0019\,T^3.$$

Среднее расстояние Луны от восходящего узла:

$$F = 11{,}250\,889 + 483\,202{,}0251\,T - 0{,}003\,211\,T^2 - 0{,}000\,0003\,T^3.$$

Долгота восходящего узла орбиты Луны:

$$\Omega = 259{,}183\,275 - 1934{,}1420\,T + 0{,}002\,078\,T^2 + 0{,}000\,0022\,T^3.$$

К средним величинам этих углов необходимо добавить некоторые периодические поправки, так называемые аддитивные члены:

Добавить к	*Член*
L'	$+0^\circ{,}000\,233\ \sin(51^\circ{,}2 + 20^\circ{,}2\,T)$
M	$-0^\circ{,}001\,778\ \sin(51^\circ{,}2 + 20^\circ{,}2\,T)$
M'	$+0^\circ{,}000\,817\ \sin(51^\circ{,}2 + 20^\circ{,}2\,T)$
D	$+0^\circ{,}002\,011\ \sin(51^\circ{,}2 + 20^\circ{,}2\,T)$
$L',\ M',\ D,\ F$	$+0^\circ{,}003\,964\ \sin(346^\circ{,}560 + 132^\circ{,}870\,T - 0^\circ{,}009\,1731\,T^2)$
L'	$+0^\circ{,}001\,964\ \sin\Omega$
M'	$+0^\circ{,}002\,541\ \sin\Omega$
D	$+0^\circ{,}001\,964\ \sin\Omega$
F	$-0^\circ{,}024\,691\ \sin\Omega$
F	$-0^\circ{,}004\,328\ \sin(\Omega + 275^\circ{,}05 - 2^\circ{,}30\,T).$

Период первых четырех членов равен 1782 годам. Пятый член с амплитудой 0°,003 964 называют «большим неравенством Венеры», его период 271 год.

После вычисления L', M, M', D, F, исправленных за аддитивные члены, можно по приведенным ниже формулам рассчитать λ, β и π. Амплитуды членов этих формул даны в градусах и представлены в виде десятичной дроби. Члены со значками (e) или (e^2) следует умножить соответственно на e или e^2, где

$$e = 1 - 0{,}002\,495\,T - 0{,}000\,007\,52\,T^2.$$

$$
\begin{array}{lll}
 & \lambda = L' & + 6{,}288\,750\ \sin M' \\
 & & + 1{,}274\,018\ \sin(2D - M') \\
 & & + 0{,}658\,309\ \sin 2D \\
 & & + 0{,}213\,616\ \sin 2M' \\
(e) & & - 0{,}185\,596\ \sin M \\
 & & - 0{,}114\,336\ \sin 2F, \\
 & & + 0{,}058\,793\ \sin(2D - 2M') \\
(e) & & + 0{,}057\,212\ \sin(2D - M - M') \\
 & & + 0{,}053\,320\ \sin(2D + M') \\
(e) & & + 0{,}045\,874\ \sin(2D - M)
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ll}
(e) & +\ 0{,}041\,024\ \sin\ (M' - M) \\
 & -\ 0{,}034\,718\ \sin\ D \\
(e) & -\ 0{,}030\,465\ \sin\ (M + M') \\
 & +\ 0{,}015\,326\ \sin\ (2D - 2F) \\
 & -\ 0{,}012\,528\ \sin\ (2F + M') \\
 & -\ 0{,}010\,980\ \sin\ (2F - M') \\
 & +\ 0{,}010\,674\ \sin\ (4D - M') \\
 & +\ 0{,}010\,034\ \sin\ 3M' \\
 & +\ 0{,}008\,548\ \sin\ (4D - 2M') \\
(e) & -\ 0{,}007\,910\ \sin\ (M - M' + 2D) \\
(e) & -\ 0{,}006\,783\ \sin\ (2D + M) \\
 & +\ 0{,}005\,162\ \sin\ (M' - D) \\
(e) & +\ 0{,}005\,000\ \sin\ (M + D) \\
(e) & +\ 0{,}004\,049\ \sin\ (M' - M + 2D) \\
 & +\ 0{,}003\,996\ \sin\ (2M' + 2D) \\
 & +\ 0{,}003\,862\ \sin\ 4D \\
 & +\ 0{,}003\,665\ \sin\ (2D - 3M') \\
(e) & +\ 0{,}002\,695\ \sin\ (2M' - M) \\
 & +\ 0{,}002\,602\ \sin\ (M' - 2F - 2D) \\
(e) & +\ 0{,}002\,396\ \sin\ (2D - M - 2M') \\
 & -\ 0{,}002\,349\ \sin\ (M' + D) \\
(e^2) & +\ 0{,}002\,249\ \sin\ (2D - 2M) \\
(e) & -\ 0{,}002\,125\ \sin\ (2M' + M) \\
(e^2) & -\ 0{,}002\,079\ \sin\ 2M \\
(e^2) & +\ 0{,}002\,059\ \sin\ (2D - M' - 2M) \\
 & -\ 0{,}001\,773\ \sin\ (M' + 2D - 2F) \\
 & -\ 0{,}001\,595\ \sin\ (2F + 2D) \\
(e) & +\ 0{,}001\,220\ \sin\ (4D - M - M') \\
 & -\ 0{,}001\,110\ \sin\ (2M' + 2F) \\
 & +\ 0{,}000\,892\ \sin\ (M' - 3D) \\
(e) & -\ 0{,}000\,811\ \sin\ (M + M' + 2D) \\
(e) & +\ 0{,}000\,761\ \sin\ (4D - M - 2M') \\
(e^2) & +\ 0{,}000\,717\ \sin\ (M' - 2M) \\
(e^2) & +\ 0{,}000\,704\ \sin\ (M' - 2M - 2D) \\
(e) & +\ 0{,}000\,693\ \sin\ (M - 2M' + 2D) \\
(e) & +\ 0{,}000\,598\ \sin\ (2D - M - 2F) \\
 & +\ 0{,}000\,550\ \sin\ (M' + 4D) \\
 & +\ 0{,}000\,538\ \sin\ 4M' \\
(e) & +\ 0{,}000\,521\ \sin\ (4D - M) \\
 & +\ 0{,}000\,486\ \sin\ (2M' - D)
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
B = &+ 5{,}128\,189\ \sin\ F \\
&+ 0{,}280\,606\ \sin\ (M' + F) \\
&+ 0{,}277\,693\ \sin\ (M' - F) \\
&+ 0{,}173\,238\ \sin\ (2D - F) \\
&+ 0{,}055\,413\ \sin\ (2D + F - M') \\
&+ 0{,}046\,272\ \sin\ (2D - F - M')
\end{aligned}
$$

$$
\begin{array}{ll}
 & + 0{,}032\,573 \sin (2D + F) \\
 & + 0{,}017\,198 \sin (2M' + F), \\
 & + 0{,}009\,267 \sin (2D + M' - F) \\
 & + 0{,}008\,823 \sin (2M' - F) \\
(e) & + 0{,}008\,247 \sin (2D - M - F) \\
 & + 0{,}004\,323 \sin (2D - F - 2M') \\
 & + 0{,}004\,200 \sin (2D + F + M') \\
(e) & + 0{,}003\,372 \sin (F - M - 2D) \\
(e) & + 0{,}002\,472 \sin (2D + F - M - M') \\
(e) & + 0{,}002\,222 \sin (2D + F - M) \\
(e) & + 0{,}002\,072 \sin (2D - F - M - M') \\
(e) & + 0{,}001\,877 \sin (F - M + M') \\
 & + 0{,}001\,828 \sin (4D - F - M') \\
(e) & - 0{,}001\,803 \sin (F + M) \\
 & - 0{,}001\,750 \sin 3F \\
(e) & + 0{,}001\,570 \sin (M' - M - F) \\
 & - 0{,}001\,487 \sin (F + D) \\
(e) & - 0{,}001\,481 \sin (F + M + M') \\
(e) & + 0{,}001\,417 \sin (F - M - M') \\
(e) & + 0{,}001\,350 \sin (F - M) \\
 & + 0{,}001\,330 \sin (F - D) \\
 & + 0{,}001\,106 \sin (F + 3M') \\
 & + 0{,}001\,020 \sin (4D - F) \\
 & + 0{,}000\,833 \sin (F + 4D - M') \\
 & + 0{,}000\,781 \sin (M' - 3F) \\
 & + 0{,}000\,670 \sin (F + 4D - 2M') \\
 & + 0{,}000\,606 \sin (2D - 3F) \\
 & + 0{,}000\,597 \sin (2D + 2M' - F) \\
(e) & + 0{,}000\,492 \sin (2D + M' - M - F) \\
 & + 0{,}000\,450 \sin (2M' - F - 2D) \\
 & + 0{,}000\,439 \sin (3M' - F) \\
 & + 0{,}000\,423 \sin (F + 2D + 2M') \\
 & + 0{,}000\,422 \sin (2D - F - 3M') \\
(e) & - 0{,}000\,367 \sin (M + F + 2D - M') \\
(e) & - 0{,}000\,353 \sin (M + F + 2D) \\
 & + 0{,}000\,331 \sin (F + 4D) \\
(e) & + 0{,}000\,317 \sin (2D + F - M + M') \\
(e^2) & + 0{,}000\,306 \sin (2D - 2M - F) \\
 & - 0{,}000\,283 \sin (M' + 3F)
\end{array}
$$

$$\omega_1 = 0{,}000\,4664 \cos \Omega,$$

$$\omega_2 = 0{,}000\,0754 \cos (\Omega + 275{,}^\circ 05 - 2{,}^\circ 30\, T),$$

$$\beta = B \times (1 - \omega_1 - \omega_2),$$

$$
\begin{aligned}
\pi = {} & 0{,}950\,724 \\
& + 0{,}051\,818 \cos M'
\end{aligned}
$$

$$
\begin{array}{ll}
 & + 0{,}009\,531 \cos (2D - M') \\
 & + 0{,}007\,843 \cos 2D \\
 & + 0{,}002\,824 \cos 2M', \\
 & + 0{,}000\,857 \cos (2D + M') \\
(e) & + 0{,}000\,533 \cos (2D - M), \\
(e) & + 0{,}000\,401 \cos (2D - M - M') \\
(e) & + 0{,}000\,320 \cos (M' - M) \\
 & - 0{,}000\,271 \cos D \\
(e) & - 0{,}000\,264 \cos (M + M') \\
 & - 0{,}000\,198 \cos (2F - M') \\
 & + 0{,}000\,173 \cos 3M' \\
 & + 0{,}000\,167 \cos (4D - M') \\
(e) & - 0{,}000\,111 \cos M, \\
 & + 0{,}000\,103 \cos (4D - 2M') \\
 & - 0{,}000\,084 \cos (2M' - 2D) \\
(e) & - 0{,}000\,083 \cos (2D + M) \\
 & + 0{,}000\,079 \cos (2D + 2M') \\
 & + 0{,}000\,072 \cos 4D \\
(e) & + 0{,}000\,064 \cos (2D - M + M') \\
(e) & - 0{,}000\,063 \cos (2D + M - M') \\
(e) & + 0{,}000\,041 \cos (M + D) \\
(e) & + 0{,}000\,035 \cos (2M' - M) \\
 & - 0{,}000\,033 \cos (3M' - 2D) \\
 & - 0{,}000\,030 \cos (M' + D) \\
 & - 0{,}000\,029 \cos (2F - 2D) \\
(e) & - 0{,}000\,029 \cos (2M' + M) \\
(e^2) & + 0{,}000\,026 \cos (2D - 2M) \\
 & - 0{,}000\,023 \cos (2F - 2D + M') \\
(e) & + 0{,}000\,019 \cos (4D - M - M').
\end{array}
$$

Пример 30.a. Рассчитать геоцентрические долготу, широту и экваториальный горизонтальный параллакс Луны на дату 1979, декабрь 7,0 ET.

Последовательно найдем:

$$JD = 2444\,214{,}5,$$
$$T = +0{,}799\,301\,8480,$$

$$L' = 108^\circ{,}7418, \quad M = 332^\circ{,}5828, \quad M' = 122^\circ{,}0324,$$
$$D = 213{,}5638, \quad F = 315{,}5204, \quad \Omega = 153{,}2213.$$

С учетом аддитивных членов:

$$L' = 108^\circ{,}7469, \quad M = 332^\circ{,}5812, \quad M' = 122^\circ{,}0383,$$
$$D = 213{,}5705, \quad F = 315{,}5093,$$

$$e = 0{,}998\,001.$$

Долгота Луны равна сумме следующих членов:

108°,7469	+0,020 806	−0,005 160	+0,001 266	+0,000 660
+5,330 934	+0,019 198	−0,000 535	+0,001 693	+0,000 285
−1,042 303	−0,030 305	−0,002 409	−0,000 002	−0,000 037
+0,606 608	+0,006 204	−0,003 006	+0,001 755	−0,000 534
−0,192 122	−0,006 834	+0,002 765	+0,000 593	+0,000 423
+0,085 294	−0,005 658	+0,003 206	+0,000 777	+0,000 163
+0,114 318	+0,002 264	−0,002 689	−0,000 467	+0,000 247
−0,003 143	+0,001 069	+0,001 534	−0,000 324	
−0,026 346	−0,008 043	−0,001 213	−0,000 253	
−0,008 506	+0,007 823	+0,000 970	−0,000 753	
+0,045 637	−0,004 326	+0,001 900	+0,000 039	

Следовательно, $\lambda = 113{,}^\circ 6604 = 113°39'37''$.

Таким же образом находим:

$$B = -3{,}^\circ 163\,037,$$
$$\omega_1 = -0{,}000\,4164,$$
$$\omega_2 = +0{,}000\,0301,$$
$$\beta = -3{,}^\circ 163\,037 \times 1{,}000\,3863 = -3{,}^\circ 164\,259 = -3°09'51'',$$
$$\pi = +0{,}^\circ 930\,249 = 55'48{,}''9$$

В «Астрономических эфемеридах» даются следующие значения:

$$\lambda = 113°39'28{,}''27,$$
$$\beta = -3°09'49{,}''22,$$
$$\pi = 55'48{,}''985.$$

Пониженная точность. Ясно, что если высокой точности не требуется, расчеты можно значительно упростить:

— если T невелико, можно опустить члены с T^2 и T^3 в выражениях для L', M, M', D и F;

— вычислять Ω не нужно;

— можно пренебречь аддитивными членами в L', M, M', D и F;

— в выражениях для λ, β и π следует использовать ограниченное число периодических членов;

— следует положить $\beta = B$.

Как упражнение, вычислите в упрощенном варианте координаты Луны на 7 декабря 1979 г., 0^h эфемеридного времени. Сравните полученные вами результаты с данными из примера 30.а.

Угловая скорость Луны

При решении некоторых задач может потребоваться точная угловая скорость Луны. Конечно, ее можно определить по двум или более положениям Луны. Однако, если достаточна точность порядка 0,005° в сутки, угловую скорость можно найти непосредственно по следующей формуле.

Для заданной эфемеридной даты найдем юлианскую дату (см. разд. 3) и T по формуле (15.1). Затем найдем углы M, M', D и F по формулам, приведенным на с. 119—120. Геоцентрическая угловая скорость движения Луны по эклиптической долготе, выраженная в градусах в сутки, равна:

$$
\begin{aligned}
& 13{,}176\,397 \\
& + 1{,}434\,006 \cos M' \\
& + 0{,}280\,135 \cos 2D \\
& + 0{,}251\,632 \cos (2D - M') \\
& + 0{,}097\,420 \cos 2M' \\
& - 0{,}052\,799 \cos 2F \\
& + 0{,}034\,848 \cos (2D + M') \\
& + 0{,}018\,732 \cos (2D - M) \\
& + 0{,}010\,316 \cos (2D - M - M') \\
& + 0{,}008\,649 \cos (M - M') \\
& - 0{,}008\,642 \cos (2F + M') \\
& - 0{,}007\,471 \cos (M + M') \\
& - 0{,}007\,387 \cos D \\
& + 0{,}006\,864 \cos 3M' \\
& + 0{,}006\,650 \cos (4D - M') \\
& + 0{,}003\,523 \cos (2D + 2M') \\
& + 0{,}003\,377 \cos (4D - 2M') \\
& + 0{,}003\,287 \cos 4D \\
& - 0{,}003\,193 \cos M \\
& - 0{,}003\,003 \cos (2D + M) \\
& + 0{,}002\,577 \cos (M' - M + 2D) \\
& - 0{,}002\,567 \cos (2F - M') \\
& - 0{,}001\,794 \cos (2D - 2M') \\
& - 0{,}001\,716 \cos (M' - 2F - 2D) \\
& - 0{,}001\,698 \cos (2D + M - M') \\
& - 0{,}001\,415 \cos (2D + 2F) \\
& + 0{,}001\,183 \cos (2M' - M) \\
& + 0{,}001\,150 \cos (D + M) \\
& - 0{,}001\,035 \cos (D + M') \\
& - 0{,}001\,019 \cos (2F + 2M') \\
& - 0{,}001\,006 \cos (M + 2M').
\end{aligned}
$$

Чтобы найти угловую скорость Луны относительно движущегося Солнца, замените коэффициент 13,176 397 на 12,190 749, а коэффициент при $\cos M$ на $-0{,}036\,211$.

31

Освещенная доля видимого диска Луны

Освещенная доля видимого диска Луны k с точки зрения наблюдателя, помещенного в центре Земли, вычисляется по формуле

$$k = \frac{1 + \cos i}{2}, \tag{31.1}$$

где i — фазовый угол, т. е. видимое с Луны угловое расстояние между Солнцем и Землей.

Фазовый угол i можно найти так. Вычислим долготу Солнца $\odot$ (см. разд. 18), долготу λ и широту β Луны (см. разд. 30). Рассчитывая положение Луны, можно ограничиться лишь несколькими периодическими членами. Так, для широты достаточно вычислить

$$\begin{aligned}\beta = &+5{,}^{\circ}1282 \sin F \\ &+0{,}^{\circ}2806 \sin (F + M') \\ &+0{,}^{\circ}2777 \sin (M' - F) \\ &+0{,}^{\circ}1732 \sin (2D - F).\end{aligned}$$

Затем найдем d по формуле

$$\cos d = \cos (\lambda - \odot) \cos \beta, \tag{31.2}$$

где d — угол в пределах от 0° до 180°. После этого с достаточной точностью можно принять

$$i = 180^{\circ} - d - 0{,}^{\circ}1468 \frac{1 - 0{,}0549 \sin M'}{1 - 0{,}0167 \sin M} \sin d, \tag{31.3}$$

где M и M', как и прежде,— средние аномалии Солнца и Луны соответственно.

Пример 31.а. Вычислить освещенную долю видимого диска Луны на 25 декабря 1979 г., 0^h эфемеридного времени.

Не вычисляя координат Солнца и Луны, выпишем из «Астрономических эфемерид»:

$$\begin{aligned}\odot &= 272°35'23'', \\ \lambda &= 346°39'01'', \\ \beta &= -1°22'54'',\end{aligned}$$

следовательно, по формуле (31.2) получим $d = 174°,065$. Далее вычисляем

$$\mathrm{JD} = 2444\,232{,}5; \qquad T = +0{,}799\,794\,6612.$$

Пользуясь приведенными в разд. 30 выражениями, находим

$$M = 350^\circ\!\!,32, \qquad M' = 357^\circ\!\!,20.$$

Теперь по формулам (31.3) и (31.1) получаем

$$i = 180° - 74^\circ\!\!,065 - \left(0^\circ\!\!,1468 \times \frac{1{,}0027}{1{,}0028} \times \sin 74^\circ\!\!,065\right),$$

$$i = 180° - 74^\circ\!\!,065 - 0^\circ\!\!,141 = 105^\circ\!\!,794,$$

$k = 0{,}3639$, округленно 0.36.

Пренебрегая широтой Луны, получим менее точную, но все же неплохую оценку угла i:

$$\begin{aligned} i = 180° - D &- 6^\circ\!\!,289 \sin M' \\ &+ 2^\circ\!\!,100 \sin M \\ &- 1^\circ\!\!,274 \sin (2D - M') \\ &- 0^\circ\!\!,658 \sin 2D \\ &- 0^\circ\!\!,214 \sin 2M' \\ &- 0^\circ\!\!,112 \sin D \end{aligned} \qquad (31.4)$$

Пример 31.6. Вычислить освещенную долю видимого диска Луны на 1979, декабрь 25,0 по формуле (31.4).

Имеем $\mathrm{JD} = 2444\,232{,}5, \qquad T = +0{,}799\,794\,6612.$

Воспользовавшись выражениями из разд. 30, получаем:

$$M = 350^\circ\!\!,324, \qquad M' = 357^\circ\!\!,202, \qquad D = 72^\circ\!\!,997.$$

Затем по формуле (31.4) найдем $i = 105°,843$. Применим формулу (31.1) и найдем $k = 0{,}3635$, округленно 0,36, как и ранее.

В качестве упражнения вычислите освещенную долю видимого диска Луны на 0^h эфемеридного времени на следующие даты и сравните полученные вами результаты с данными «Астрономических эфемерид» (A.E.):

	A.E.
1978 г. 24 октября	0,50
1978 г. 13 декабря	0,98

1979 г. 1 апреля	0,18
1979 г. 9 декабря	0,73

На 9 декабря 1979 г. «Астрономический ежегодник» дает $k = 0{,}74$ вместо 0,73. Кто же прав?

32

Фазы Луны

Моменты *средних фаз* Луны, уже с учетом солнечной аберрации, даются выражением:

$$\begin{aligned} \mathrm{JD} = 2415\,020{,}759\,33 &+ 29{,}530\,588\,68\,k \\ &+ 0{,}000\,1178\,T^2 \\ &- 0{,}000\,000\,155\,T^3 \\ &+ 0{,}000\,33\,\sin(166{,}^\circ56 + 132{,}^\circ87\,T - 0{,}^\circ009\,173\,T^2). \end{aligned} \tag{32.1}$$

Они выражены в эфемеридном времени (т. е. в юлианских эфемеридных днях). Целое значение k соответствует новолунию, целое + 0,25 — первой четверти, целое + 0,50 — полнолунию, целое + 0,75 — третьей четверти. Другие значения k приводят к бессмысленному результату!

Отрицательные значения k дают моменты времени до 1900 г., положительные — после 1900 г. Так, например,

+ 479,00 и − 2793,00 соответствуют новолунию,
+ 479,25 и − 2792,75 соответствуют первой четверти,
+ 479,50 и − 2792,50 соответствуют полнолунию,
+ 479,75 и − 2792,25 соответствуют третьей четверти.

Приближенно величину k можно рассчитать по формуле

$$k \approx (\text{год} - 1900) \times 12{,}3685, \tag{32.2}$$

где «год» следует брать в виде десятичной дроби; например, 1977,25 соответствует концу марта 1977 г.

Наконец, в формуле (32.1) время T выражено в юлианских столетиях и отсчитывается от эпохи 1900,январь 0,5. После вычисления k время T можно с достаточной точностью определить по формуле

$$T = \frac{k}{1236{,}85}\,. \tag{32.2}$$

Затем найдем следующие углы, выраженные в градусах в виде десятичной дроби (перед тем, как перейти к дальнейшим вычислениям, их следует привести к интервалу 0°—360°):

Средняя аномалия Солнца на момент JD:

$$\begin{aligned} M = 359{,}2242 &+ 29{,}105\,356\,08\,k \\ &- 0{,}000\,0333\,T^2 \\ &- 0{,}000\,003\,47\,T^3. \end{aligned}$$

Средняя аномалия Луны:

$$\begin{aligned} M' = 306{,}0253 &+ 385{,}816\,918\,06\,k \\ &+ 0{,}010\,7306\,T^2 \\ &+ 0{,}000\,012\,36\,T^3. \end{aligned}$$

Аргумент широты Луны:

$$\begin{aligned} F = 21{,}2964 &+ 390{,}670\,506\,46\,k \\ &- 0{,}001\,6528\,T^2 \\ &- 0{,}000\,002\,39\,T^3. \end{aligned}$$

Чтобы найти момент *истинной* фазы, к моменту средней фазы, вычисленной по формуле (32.1), нужно прибавить следующие поправки (их коэффициенты выражены в долях суток; малые величины опущены).

К моменту новолуния и полнолуния:

$$\begin{aligned} &+(0{,}1734 - 0{,}000\,393\,T)\sin M \\ &+0{,}0021\sin 2M \\ &-0{,}4068\sin M' \\ &+0{,}0161\sin 2M' \\ &-0{,}0004\sin 3M' \\ &+0{,}0104\sin 2F \\ &-0{,}0051\sin(M + M') \\ &-0{,}0074\sin(M - M') \\ &+0{,}0004\sin(2F + M) \\ &-0{,}0004\sin(2F - M) \\ &-0{,}0006\sin(2F + M') \\ &+0{,}0010\sin(2F - M') \\ &+0{,}0005\sin(M + 2M'). \end{aligned} \tag{32.4}$$

К моменту первой и третьей четверти:

$$\begin{aligned} &+(0{,}1721 - 0{,}0004\,T)\sin M \\ &+0{,}0021\sin 2M \\ &-0{,}6280\sin M \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+0{,}0089 \sin 2M' \\
&-0{,}0004 \sin 3M' \\
&+0{,}0079 \sin 2F \\
&-0{,}0119 \sin (M + M') \\
&-0{,}0047 \sin (M - M') \\
&+0{,}0003 \sin (2F + M) \\
&-0{,}0004 \sin (2F - M) \\
&-0{,}0006 \sin (2F + M') \\
&+0{,}0021 \sin (2F - M') \\
&+0{,}0003 \sin (M + 2M') \\
&+0{,}0004 \sin (M - 2M') \\
&-0{,}0003 \sin (2M + M')
\end{aligned}
\tag{32.5}
$$

и дополнительно

для первой четверти:

$$+0{,}0028 - 0{,}0004 \cos M + 0{,}0003 \cos M ,$$

для третьей четверти:

$$-0{,}0028 + 0{,}0004 \cos M - 0{,}0003 \cos M .$$

Пример 32.а. Вычислить момент новолуния в феврале 1977 г.

Середина февраля 1977 г. соответствует дате 1977,13; по формуле (32.2) находим

$$k \approx (1977{,}13 - 1900) \times 12{,}3685 = 953{,}982,$$

откуда $k = 954$, поскольку k для новолуния должно быть целым числом. Затем по формуле (32.3) получаем $T = +0{,}77131$, и формула (32.1) дает

$$\mathrm{JD} = 2443\,192{,}9407.$$

Пользуясь значениями $k = 954$ и $T = +0{,}771\,31$, найдем

$$
\begin{aligned}
M &= 28125°{,}7339 = 45°{,}7339, \\
M &= 368\,375°{,}3715 = 95°{,}3715, \\
F &= 372720°{,}9585 = 120°{,}9585.
\end{aligned}
$$

Поправки, вычисленные по формуле (32.4) с избыточной точностью, равны

+0,123 956	+0,005 639
+0,002 099	−0,000 381

$$\begin{array}{ll} -0{,}405\,014 & +0{,}000\,111 \\ -0{,}003\,001 & +0{,}000\,232 \\ +0{,}000\,384 & +0{,}000\,551 \\ -0{,}009\,176 & -0{,}000\,417 \\ -0{,}003\,202 & \end{array}$$

Их сумма составляет $-0{,}2882$ сут. Поэтому момент истинного новолуния равен

$$\text{JD} = 2443\,192{,}9407 - 0{,}2882 = 2443\,192{,}6525,$$

что соответствует дате 1977, февраль 18,1525 = 18 февраля 1977 г., $3^h 39^m{,}6$ эфемеридного времени. Выведенное по данным «Астрономических эфемерид» точное значение равно $3^h 37^m{,}6$ эфемеридного времени.

Пример 32.6. Рассчитать момент третьей четверти Луны на ноябрь 1952 г.

Так как «год» = 1952,88, по формуле (32.2) найдем $k \approx 654{,}05$ и возьмем $k = 653{,}75$; затем получим

$$T = +0{,}528\,56,\ \text{JD} = 2434\,326{,}3814,$$

$$M = 306{,}^\circ 8507,$$
$$M' = 173{,}^\circ 8385,$$
$$F = 182{,}^\circ 1395\ .$$

Согласно формуле (32.5), полная поправка равна $-0{,}2261$ сут, следовательно,

$$\text{JD} = 2434\,326{,}3814 - 0{,}2261 = 2434\,326{,}1553.$$

что соответствует дате 1952, ноябрь 9,6553, т. е. 9 ноября 1952 г., $15^h 43^m{,}6$ эфемеридного времени или $15^h 43^m$ всемирного времени, поскольку в 1952 г. разность (ET − UT) была равна $+0{,}5^m$ (см. разд. 5).

Точное значение равно $15^h 43^m$ всемирного времени.

Используя описанный метод, автор книги рассчитал все фазы Луны на 1971—1975 г. Ни для одной из них ошибка не превышала 2^m, а для 75% данных ошибка была даже меньше 1^m.

Если достаточно знать момент фазы с точностью около получаса, можно опустить последний член формулы (32.1) и все члены с амплитудой менее 0,0030 в формулах (32.4) и (32.5).

33

Затмения

Не проводя слишком громоздких вычислений, можно с хорошей точностью получить основные характеристики солнечных и лунных затмений. Если говорить о солнечных затмениях, ситуация осложняется тем, что наблюдатели, расположенные в разных точках Земли, видят разные фазы затмения. В случае же лунного затмения все наблюдатели в один и тот же момент времени видят одну фазу.

По этой причине мы не будем касаться в книге местных обстоятельств солнечных затмений. Итересующийся наблюдатель может рассчитать их по бесселевым элементам, ежегодно публикуемым в «Астрономических эфемеридах»; там он найдет необходимые формулы. Численные примеры и другие формулы можно найти в *Дополнении* к «Астрономическим эфемеридам».

Вначале по формулам (32.1) и (32.3) предыдущего раздела вычислим моменты *среднего* полнолуния и новолуния. Напомним, что k должно быть целым для новолуния (солнечное затмение) и полуцелым для полнолуния (лунное затмение). Воспользуемся выражениями, приведенными после формулы (32.3), и для заданного момента определим углы M, M' и F.

Начальную информацию о затмении дает угол F. Если F отличается от ближайшего кратного 180° угла менее чем на 13°,9, то затмение с определенностью состоится: если разность превышает 21°,0, затмения не будет. При промежуточных значениях разности нужен дополнительный анализ, так как определенного ответа о затмении дать нельзя. При использовании программируемого калькулятора можно рекомендовать следующее правило: затмение не состоится. если

$$|\sin F| > 0{,}36.$$

Отметим, что после одной лунации угол F возрастает на 30°,6705.

При F около 0° или 360° затмение происходит вблизи восходящего узла орбиты Луны, а при F около 180° — вблизи нисходящего узла.

Чтобы получить *момент максимума затмения* (в случае солнечного затмения — для Земли как целого), ко времени среднего соединения, вычисленному по формуле (32.1), следует добавить такие поправки (амплитуды выражены в долях суток, малые члены опущены):

$$+(0{,}1734 - 0{,}000\,393\,T)\sin M$$
$$+0{,}0021\sin 2M$$

$$
\begin{aligned}
&-0{,}4068 \sin M' \\
&+0{,}0161 \sin 2M' \\
&-0{,}0051 \sin (M + M') \\
&-0{,}0074 \sin (M - M') \\
&-0{,}0104 \sin 2F.
\end{aligned}
\tag{33.1}
$$

Заметим, что коэффициент при $\sin 2F$ здесь отрицателен, тогда как в формуле (32.4) он положителен; причина в том, что в данном случае вычисляется момент максимума затмения, а не соединения в долготе.

Затем найдем

$$
\begin{aligned}
S = {} & 5{,}195\,95 \\
& -0{,}0048 \cos M \\
& +0{,}0020 \cos 2M \\
& -0{,}3283 \cos M' \\
& -0{,}0060 \cos (M + M') \\
& +0{,}0041 \cos (M - M'), \\
C = {} & +0{,}2070 \sin M \\
& +0{,}0024 \sin 2M \\
& -0{,}0390 \sin M' \\
& +0{,}0115 \sin 2M' \\
& -0{,}0073 \sin (M + M') \\
& -0{,}0067 \sin (M - M') \\
& +0{,}0117 \sin 2F, \\
\gamma = {} & S \sin F + C \cos F, \\
u = {} & 0{,}0059 \\
& +0{,}0046 \cos M \\
& -0{,}0182 \cos M' \\
& +0{,}0004 \cos 2M' \\
& -0{,}0005 \cos (M + M').
\end{aligned}
$$

Солнечные затмения

Если рассматривается солнечное затмение, γ представляет собой минимальное расстояние от оси лунной тени до центра Земли, выраженное в единицах экваториального радиуса Земли; γ положительно или отрицательно в зависимости от того, севернее или южнее центра проходит ось тени. Когда γ заключается в пределах от $+0{,}9972$ до $-0{,}9972$, затмение Солнца является центральным: на поверхности Земли ось конуса лунной тени «прочерчивает» линию.

Величина u определяет радиус сечения *теневого* конуса фундаментальной плоскостью (проходящей через центр Земли перпендикулярно оси теневого конуса). Радиус сечения выражается в единицах экваториального радиуса Земли. Радиус сечения *полутеневого* конуса фундаментальной плоскостью равен $(u + 0{,}5460)$.

Если значение $|\gamma|$ заключено в пределах от 0,9972 до $(1{,}5432 + u)$, затмение будет нецентральным. В большинстве случаев оно будет частным. Однако при $|\gamma|$ между 0,9972 и 1,0260 теневой конус коснется земной поверхности (в околополярной области), а ось конуса *не пересечет* ее. Такие нецентральные полные или кольцевые затмения происходят при

$$0{,}9972 < |\gamma| < 0{,}9972 + |u|.$$

В интервале между 1950 и 2100 г. случится семь таких затмений:

1950 г. 18 марта	— кольцевое, нецентральное
1957 г. 30 апреля	— кольцевое, нецентральное
1957 г. 23 октября	— полное, нецентральное
1967 г. 2 ноября	— полное, нецентральное
2014 г. 29 апреля	— кольцевое, нецентральное
2043 г. 9 апреля	— полное, нецентральное
2043 г. 3 октября	— кольцевое, нецентральное.

При $|\gamma| > 1{,}5432 + u$ затмение с Земли не наблюдается.

Если затмение *центральное*, его тип можно определить согласно следующим правилам:

если $u < 0$, затмение полное;

если $u > +0{,}0047$, затмение кольцевое;

если $0 < u < +0{,}0047$, затмение либо кольцевое, либо полное и кольцевое.

В последнем случае неопределенность снимается следующим образом. Найдем

$$\omega = 0{,}00464 \cos W, \text{ где } \sin W = \gamma.$$

Тогда, если $u < \omega$, затмение кольцевое и полное, в противном случае затмение кольцевое.

Если затмение *частное*, его максимальная фаза будет наблюдаться в ближайшей к оси теневого конуса точке земной поверхности. Фаза в этой точке равна

$$\frac{1{,}5432 + u - |\gamma|}{0{,}5460 + 2u}. \tag{33.2}$$

Лунные затмения

В случае лунного затмения γ представляет собой наименьшее расстояние между центром Луны и осью земной тени в единицах экваториального радиуса Земли. Величина γ положительна или отрицательна в зависимости от того, к северу или югу от оси проходит центр Луны.

Радиусы на расстоянии Луны равны:

$$\text{полутени: } \rho = 1{,}2847 + u\,,$$
$$\text{тени: } \sigma = 0{,}7404 - u\,.$$

а фазу затмения можно определить так:

для затмения полутенью: $$\frac{1{,}5572 + u - |\gamma|}{0{,}5450}\,, \tag{33.3}$$

для затмения тенью: $$\frac{1{,}0129 + u - |\gamma|}{0{,}5450}\,. \tag{33.4}$$

Отрицательная величина фазы означает отсутствие затмения.

Полупериод частной и полной фаз для затмения *тенью* вычисляется следующим образом. Найдем

$$P = 1{,}0129 - u,$$
$$T = 0{,}4679 - u,$$
$$n = 0{,}5458 + 0{,}0400 \cos M'\,.$$

Тогда полупериод *в минутах* равен:

для частной фазы: $\dfrac{60}{n}\sqrt{P^2 - \gamma^2}$,

для полной фазы: $\dfrac{60}{n}\sqrt{T^2 - \gamma^2}$.

Пример 33.а. Обстоятельства солнечного затмения 2 октября 1978 г.

Так как 2 октября — 275-й день года, эта дата соответствует 1978,75. По формуле (32.2) находим

$$k \approx 974{,}02, \qquad \text{т. е.} \qquad k = 974.$$

С помощью формул (32.3) и (32.1) получаем

$$\mathrm{JD} = 2443\,783{,}5524.$$

Далее вычисляем

$$M = 267{,}^\circ 8410, \qquad M' = 251{,}^\circ 7102, \qquad F = 14{,}^\circ 3687.$$

Так как $13°{,}9 < F < 21°0$, сразу сказать, было затмение или нет, нельзя. Найдем

$$S = 5{,}3067, \qquad C = -0{,}1616, \qquad \gamma = +1{,}1604, \qquad u = +0{,}0116.$$

Поскольку $0{,}9972 < |\gamma| < 1{,}5432 + u$, затмение было частным. По формуле (33.2) находим его максимальную фазу:

$$\frac{1{,}5432 + 0{,}0116 - 1{,}1604}{0{,}5460 + 0{,}0232} = 0{,}693.$$

Угол F близок к 0°, следовательно, затмение состоялось при прохождении Луны через восходящий узел орбиты. В то же время $\gamma > 0$; отсюда следует, что затмение наблюдалось в северном полушарии.

Для вычисления момента максимальной фазы прибавим к JD поправки, найденные по формуле (33.1). Получим сумму

$$\begin{aligned} \mathrm{JD} = 2443\,783{,}&5524 \\ -\,0{,}&1730 \\ +\,0{,}&0002 \\ +\,0{,}&3862 \\ +\,0{,}&0096 \\ -\,0{,}&0018 \\ -\,0{,}&0021 \\ -\,0{,}&0050, \end{aligned}$$

равную JD = 2443 783,767, т. е. дату 2 октября 1978 г., $6^h 24^m$ эфемеридного времени.

Правильное значение, приведенное в «Астрономических эфемеридах», равно $6^h 28^m{,}7$ а максимальная фаза равна 0,691.

Пример 33.6. Обстоятельства солнечного затмения 16 февраля 1980 г.

Как и ранее, находим

$$\begin{aligned} k &= 991, \\ \mathrm{JD} &= 2444\,285{,}572, \\ M &= 42{,}^\circ 6321, \\ M' &= 330{,}^\circ 5979, \\ F &= 175{,}^\circ 7671. \end{aligned}$$

С учетом поправки JD = 2444 285,871 = 16 февраля 1980 г., $8^h 54^m$ ET.

$$S = +4{,}9020, \qquad C = +0{,}1421, \qquad \gamma = +0{,}2201, \qquad u = -0{,}0069.$$

Так как $|\gamma| < 0,9972$, затмение было центральным. Поскольку u отрицательно, затмение полное. Малая величина $|\gamma|$ означает, что затмение наблюдалось в экваториальной области Земли. Луна находилась вблизи нисходящего узла, так как угол F близок к 180°.

Пример 33.в. Обстоятельства лунного затмения, состоявшегося в июне 1973 г.

Определим последовательно:

$$
\begin{aligned}
k &= 908{,}5,\\
\mathrm{JD} &= 2441\,849{,}299,\\
M &= 161{,}^\circ4402,\\
M' &= 180{,}^\circ7011,\\
F &= 345{,}^\circ4506.
\end{aligned}
$$

С учетом поправки JD = 2441 849,367 = 15 июня 1973 г., 20^h48^m ET.

$S = +5{,}5285$, $C = +0{,}0640$, $\gamma = -1{,}3269$, $u = +0{,}0197$.

Луна находилась вблизи восходящего узла ($F \sim 360°$), ее центр прошел южнее оси земной тени ($\gamma < 0$).

Как следует из формулы (33.4), фаза затмения тенью равна −0,612. Так как фаза отрицательна, состоялось затмение полутенью. По формуле (33.3) получаем его фазу: 0,459.

«*Connaissance des Temps*» дают величину максимальной фазы 0,469 и момент максимальной фазы $20^h 50^m{,}7$ ET.

Пример 33.г. Определить время первого лунного затмения после 1 июля 1978 г.

Для момента 1978,5 по формуле (32.2) получаем $k \approx 970{,}93$. Поэтому попытаемся провести вычисления с $k = 971{,}5$. Получим $F = 117°{,}6924$, что отличается от ближайшего кратного 180° более чем на 21°. Следовательно, в это время затмения не было.

Следующее полнолуние соответствует $k = 972{,}5$ и вычисления дают $F = 148°{,}3629$; затмения также не было. Однако очевидно, что в следующее полнолуние $F \approx 179°$ и затмение состоялось. Найдем, как и раньше:

$$
\begin{aligned}
k &= 973{,}5,\\
\mathrm{JD} &= 2443\,768{,}787,\\
M &= 253{,}^\circ2883,\\
M' &= 58{,}^\circ8017,\\
F &= 179{,}^\circ0334.
\end{aligned}
$$

С учетом поправок JD = 2443 768,295 = 16 сентября 1978 г., 19^h05^m ET (или 19^h04^m UT).

$$S = +5{,}0176, \qquad C = -0{,}2134, \qquad \gamma = +0{,}2980, \qquad u = -0{,}0054.$$

По формуле (33.4) получаем фазу 1,332. Следовательно, это было полное затмение тенью. Далее находим

$$P = 1{,}0183, \qquad T = 0{,}4733, \qquad n = 0{,}5665.$$

Полупериод частной фазы равен

$$\frac{60}{0{,}5665}\sqrt{(1{,}0183)^2 - (0{,}2980)^2} = 103 \text{ мин.}$$

Полупериод полной фазы составлял

$$\frac{60}{0{,}5665}\sqrt{(0{,}4733)^2 - (0{,}2980)^2} = 39 \text{ мин.}$$

По всемирному времени

начало частной фазы:	$19^h04^m - 103^m = 17^h21^m$,
начало полной фазы:	$19^h04^m - 39^m = 18^h25^m$,
момент максимальной фазы:	19^h04^m,
конец полной фазы:	$19^h04^m + 39^m = 19^h43^m$,
конец частной фазы:	$19^h04^m + 103^m = 20^h47^m$.

Упражнения

Найдите первое в 1979 г. затмение Солнца; покажите, что оно было полным и наблюдалось в северном полушарии.

Каким — кольцевым или полным — было солнечное затмение в апреле 1977 г.?

Покажите, что в июле 1947 г. солнечных затмений не было.

Покажите, что в 2000 г. произойдет четыре солнечных затмения и все они будут частными.

Покажите, что в январе 1971 г. не было лунных затмений.

Покажите, что в 1982 г. произошло три полных затмения Луны.

Когда произошло первое лунное затмение 1234 г.? (*Ответ:* частное лунное затмение можно было наблюдать 17 марта 1234 г.)

34

Освещенная доля видимого диска планеты

Как и для Луны (см. разд. 31), освещенная доля видимого диска k планеты с точки зрения земного наблюдателя равна

$$k = \frac{1 + \cos i}{2},$$

где i — фазовый угол. Для планеты этот угол можно найти по формуле

$$\cos i = \frac{r^2 + \Delta^2 - R^2}{2r\Delta},$$

где r — расстояние от Солнца до планеты, Δ — расстояние от планеты до Земли, R — расстояние от Земли до Солнца, причем все расстояния выражены в а.е. Комбинируя эти две формулы, получим

$$k = \frac{(r + \Delta)^2 - R^2}{4r\Delta}, \qquad (34.1)$$

Если положение планеты вычисляется первым из методов, описанных в разд. 25, выражение для k можно записать в виде:

$$k = \frac{r + \Delta + R \cos b \cos (l - \odot)}{2\Delta},$$

Пример 34.а. Найти освещенную долю видимого диска Меркурия, Венеры и Марса на 0^h эфемеридного времени 17 апреля 1979 г.

Выпишем r, Δ и R из «Астрономических эфемерид» и воспользуемся формулой (34.1).

	Меркурий	Венера	Марс
r	0,466 674	0,728 149	1,387 513
Δ	0,785 473	1,300 500	2,300 530
R	1,003 712	1,003 712	1,003 712
k	0,382	0,821	0,986

Значение k для Меркурия и Венеры может меняться в пределах от 0 до 1. Для Марса k всегда больше 0,838. Угол i для Юпитера всегда больше 12°, следовательно, k меняется от 0,989 до 1.

Приближенное значение k для *Венеры* можно найти следующим образом. По формуле (18.1) найдем T. Затем вычислим

$$\begin{aligned}
V &= 63^\circ\!,07 + 22518^\circ\!,443\, T, \\
M &= 178^\circ\!,48 + 35999^\circ\!,050\, T, \\
M' &= 212^\circ\!,60 + 58517^\circ\!,804\, T, \\
W &= V + 1^\circ\!,92 \sin M + 0^\circ\!,78 \sin M', \\
\Delta^2 &= 1{,}523\,209 + 1{,}446\,664 \cos W, \qquad (\Delta > 0) \\
k &= \frac{(0{,}723\,332 + \Delta)^2 - 1}{2{,}893\,329\,\Delta}.
\end{aligned} \tag{34.2}$$

Пример 34.б. Определить освещенную долю видимого диска Венеры на 1979, апрель 17,0 по эфемеридному времени приближенным методом.

Последовательно найдем:

$$\begin{aligned}
\mathrm{JD} &= 2443\,980{,}5, & W &= V - 1^\circ\!,88 + 0^\circ\!,12 = 276^\circ\!,08, \\
T &= +0{,}792\,895\,277, & \Delta^2 &= 1{,}676\,435, \\
V &= 17917^\circ\!,84 = 277^\circ\!,84, & \Delta &= 1{,}294\,772, \\
M &= 28721^\circ\!,96 = 281^\circ\!,96, & & \\
M' &= 46611^\circ\!,09 = 171^\circ\!,09, & k &= 0{,}820.
\end{aligned}$$

В предыдущем примере мы нашли точное значение, равное 0,821.

Элонгацию ψ планеты можно вычислить по формуле (25.11). Но если известны расстояния R, r и Δ, можно воспользоваться выражением

$$\cos\psi = \frac{R^2 + \Delta^2 - r^2}{2R\Delta}. \tag{34.3}$$

Для Венеры можно записать приближенную формулу вычисления элонгации, в которую входит расстояния Δ, вычисляемое по формуле (34.2):

$$\cos\psi = \frac{\Delta^2 + 0{,}4768}{2\Delta}. \tag{34.4}$$

Подставив в формулу (34.3) величины из примера 34.а, получим $\cos\psi = 0{,}830\,649$, т. е. $\psi = 33°50'$.

Подставив в формулу (34.4) данные для Δ из примера 34.б, найдем $\cos\psi = 0{,}8315$, т. е. $\psi = 33°45'$.

35

Центральный меридиан Юпитера

У Юпитера различают три вращающихся подсистемы. К первой относится облачный покров экваториальной области планеты, ко второй — расположенные севернее и южнее экватора зоны. Третью подсистему связывают с радиоэмиссией. В этом разделе мы коснемся только первой и второй подсистем, которые и представляют интерес для наблюдателей в оптическом диапазоне.

Долготу центрального меридиана Юпитера на 0^h всемирного времени для каждого дня года можно найти в ряде астрономических альманахов. Однако ее можно и рассчитать изложенным ниже методом для любого момента. Точность результата составляет приблизительно $0°,1$, и для большинства задач этой точности вполне достаточно. При вычислениях учитываются эксцентриситеты орбит Юпитера и Земли, фаза планеты и световой промежуток (время распространения света от Юпитера к Земле). Периодическими членами в движении Земли и Юпитера, за исключением долгопериодического члена у Юпитера, мы пренебрегаем. Используются значения эксцентриситетов орбит на 1980 г.

Для данного момента *эфемеридного* времени вычислим JD (см. разд. 3). Затем вычислим следующие величины:

число суток, прошедших с момента 12^h эфемеридного времени 31 декабря 1899 г.,

$$d = \mathrm{JD} - 2415\,020,$$

аргумент долгопериодического члена Юпитера

$$V = 134{,}63 + 0{,}001\,115\,87\,d,$$

средние аномалии Земли и Юпитера

$$M = 358{,}476 + 0{,}985\,6003\,d$$
$$N = 225{,}328 + 0{,}083\,0853\,d + 0{,}33\ \sin V,$$

разность средних гелиоцентрических долгот Земли и Юпитера

$$J = 221{,}647 + 0{,}902\,5179\,d - 0{,}33\ \sin V.$$

При необходимости эти углы следует привести к интервалу 0° — 360°. Вычислим уравнения центров Земли и Юпитера:

$$A = 1{,}916 \sin M + 0{,}020 \sin 2M,$$
$$B = 5{,}552 \sin N + 0{,}167 \sin 2N.$$

Далее определим угол

$$K = J + A - B,$$

радиус-вектор Земли

$$R = 1{,}00014 - 0{,}01672 \cos M - 0{,}00014 \cos 2M,$$

радиус-вектор Юпитера

$$r = 5{,}20867 - 0{,}25192 \cos N - 0{,}00610 \cos 2N,$$

расстояние от Земли до Юпитера

$$\Delta = \sqrt{r^2 + R^2 - 2\,rR\cos K}\,.$$

Расстояния R, r и Δ получаются в астрономических единицах, и для Δ следует взять положительное значение корня. Фазовый угол Юпитера (т. е. угол Земля — Юпитер — Солнце) выражается формулой

$$\sin\psi = \frac{R}{\Delta}\sin K.$$

Этот угол всегда заключен в пределах от $-12°$ до $+12°$. Так как R и Δ положительны, знак ψ совпадает со знаком $\sin K$.

Долгота центрального меридиана Юпитера равна:

в системе долгот I

$$\lambda_1 = 268°{,}28 + 877°{,}816\,9088 \left(d - \frac{\Delta}{173}\right) + \psi - B,$$

в системе долгот II

$$\lambda_2 = 290°{,}28 + 870°{,}186\,9088 \left(d - \frac{\Delta}{173}\right) + \psi - B,$$

где $-\Delta/173$ представляет собой выраженную в сутках поправку за световой промежуток. Множитель $1/173$ означает, что световой промежуток для 1 а.е. равен $1/173$ сут. Величины λ_1 и λ_2 следует привести к интервалу 0°—360°. Следует отметить, что вычисленные долготы относятся к «истинному» (геометрическому) диску Юпитера. Чтобы определить долготу «центрального меридиана» освещенного диска, нужно добавить к λ_1 и λ_2 поправку за небольшой эффект фазы, равную

$$\pm\, 57°{,}3 \sin^2\frac{\psi}{2}\,,$$

причем знак поправки должен быть *противоположен* знаку $\sin K$.

Если нужно знать долгóты на момент всемирного времени UT, вначале переведите JD в эфемеридное время ET, прибавив поправку ΔT (см. разд. 5). Однако можно поступить по-другому: вычислить λ_1 и λ_2 на момент ET, численно равный нужному моменту всемирного времени UT, а затем внести поправки:

$$\text{для} \quad \lambda_1 : \quad C_1 = +0°,01016 \ \Delta T,$$

$$\text{для} \quad \lambda_2 : \quad C_2 = +0°,01007 \ \Delta T,$$

где ΔT — выраженная в *секундах времени* разность (ET − UT). Таким способом мы можем рассчитать λ_1 и λ_2 на 0^h UT какой-либо даты, сначала вычислив их на 0^h ET той же даты, а затем прибавив поправки C_1 и C_2 (см. пример 35.а).

Пример 35.а. Найти λ_1 и λ_2 на 0^h UT 30 июня 1980 г.

Эта дата соответствует JD = 2444 420,5. Находим последовательно:

d = 29 400,5 ,	A = +0°,143,	$\sin\psi$ = +0,15817,
V = 167°,44,	B = +2°,780,	ψ = +9°,101,
M = 29335°,618 = 175°,618,	K = 113°,416,	$d-\Delta/173$ = 29400,46591,
N = 2668°,149 = 148°,149,	R = 1,01667,	ΔT = +51 с,
J = 26756°,053 = 116°,053,	r = 5,41995,	C_1 = +0°,52,
	Δ = 5,89823,	C_2 = +0°,51.

Отсюда получим для геометрического диска Юпитера:

$$\text{на } 0^h \text{ ET}: \quad \lambda_1 = 25\,808\,500°,70 = 100°,70, \quad \lambda_2 = 25\,584\,197°,15 = 77°,15;$$

$$\text{на } 0^h \text{ UT}: \quad \lambda_1 = 100°,70 + 0°,52 = 101°,22, \quad \lambda_2 = 77°,15 + 0°,51 = 77°,66.$$

В «Астрономических эфемеридах» приводятся значения λ_1 = 101°,30, λ_2 = 77°,74.

И наконец, поправка за фазу Юпитера равна −0,36°, как и в «Астрономических эфемеридах».

Пусть D_e есть планетоцентрическое угловое расстояние Земли от экватора Юпитера или, что одно и то же, планетоцентрическое склонение Земли или планетоцентрическая широта центра диска планеты с точки зрения земного наблюдателя. Аналогично обозначим через D_s планетоцентрическое склонение Солнца. Так как экваториальная плоскость

Юпитера наклонена к плоскости его орбиты под углом 3°,07, предельные значения D_s равны +3°,07 и −3°,07. Предельные величины угла D_e равны +3°,4 и −3°,4.

Для заданного момента времени углы D_s и D_e можно найти следующим образом. (Поскольку они меняются со временем очень медленно, различием ET и UT можно пренебречь.)

Вычислим изложенным выше способом значения $d, V, M, N, J, A, B, K, R, r, \Delta$ и ψ. Затем по формуле

$$\lambda = 238°,05 + 0°,083\,091\,d + 0°,33 \sin V + B$$

найдем гелиоцентрическую долготу Юпитера, отнесенную к равноденствию 1900,0.

Углы D_s и D_e, выраженные в градусах в виде десятичной дроби, равны

$$D_s = 3.07 \sin (\lambda + 44°,5),$$
$$D_e = D_s - 2,15 \sin \psi \cos (\lambda + 24°) - 1,31 \frac{r - \Delta}{\Delta} \sin (\lambda - 99°,4).$$

Ошибки найденных по этим формулам значений D_s и D_e, как правило, не превышают соответственно 0°,01 и 0°,03.

Пример 35.6. Возьмем ту же дату, для которой мы нашли в предыдущем примере следующие значения:

$$\begin{aligned} d &= 29400,5, \\ V &= 167°,44, \\ B &= +2°,780, \\ r &= 5,41995, \\ \Delta &= 5,89823, \\ \sin \psi &= +0,15817. \end{aligned}$$

С помощью приведенных выше формул получаем:

$$\begin{aligned} \lambda &= 2683°,82 = 163°,82, \\ D_s &= -1°,46, \\ D_e &= -1°,46 + 0°,34 + 0°,10 = -1°,02, \end{aligned}$$

В «Астрономических эфемеридах» приведены те же значения углов D_s и D_e.

36

Положения спутников Юпитера

Предлагаемым методом можно рассчитать на любой момент времени положения четырех галилеевых спутников Юпитера относительно планеты, как их увидит земной наблюдатель. Результаты будут неплохими, но не настолько надежными, чтобы их можно было использовать в точных расчетах.

Вначале для заданного момента (ET) найдем юлианскую дату (как указано в разд. 3). Затем так, как это сделано в разд. 35, вычислим d, V, M, N, J, A, B, K, R, r, Δ и ψ, а также планетоцентрическое склонение Земли D_e.

Для каждого из четырех спутников мы определим угол u, отсчитываемый от нижнего соединения с Юпитером, причем $u = 0°$ соответствует нижнему соединению, $u = 90°$ — западной элонгации, $u = 180°$ — верхнему соединению, $u = 270°$ — восточной элонгации:

$$u_1 = 84°,5506 + 203°,405\,8630 \left(d - \frac{\Delta}{173}\right) + \psi - B,$$

$$u_2 = 41°,5015 + 101°,291\,6323 \left(d - \frac{\Delta}{173}\right) + \psi - B,$$

$$u_3 = 109°,9770 + 50°,234\,5169 \left(d - \frac{\Delta}{173}\right) + \psi - B,$$

$$u_4 = 176°,3586 + 21°,487\,9802 \left(d - \frac{\Delta}{173}\right) + \psi - B.$$

Если нужно, приведем углы к интервалу 0°—360°. Прибавив поправки, получим более точные значения углов. Для этого найдем углы G и H по формулам

$$G = 187°,3 + 50°,310\,674 \left(d - \frac{\Delta}{173}\right),$$

$$H = 311°,1 + 21°,569\,229 \left(d - \frac{\Delta}{173}\right).$$

Тогда поправки будут равны:

для u_1 : $+0,472 \sin 2(u_1 - u_2)$,

для u_2 : $+1,073 \sin 2(u_2 - u_3)$,

для u_3 : $+0,174 \sin G$,

для u_4 : $+0,845 \sin H$.

Первая поправка учитывает периодическое возмущение спутника I спутником II. Вторая поправка — возмущающее действие III спутника на II. Две последних поправки учитывают эксцентричность орбит III и IV спутников (орбиты I и II спутников почти в точности круговые).

Отметим, что мы принимаем во внимание только наиболее важные периодические члены в движении спутников. Существует множество других (однако малых) периодических членов. Так, например, на I спутник действует и III, на III спутник действует II и IV, и т. д.

Расстояния спутников от центра Юпитера в единицах его экваториального радиуса равны:

$$r_1 = 5{,}9061 - 0{,}0244 \cos 2(u_1 - u_2),$$
$$r_2 = 9{,}3972 - 0{,}0889 \cos 2(u_2 - u_3),$$
$$r_3 = 14{,}9894 - 0{,}0227 \cos G,$$
$$r_4 = 26{,}3649 - 0{,}1944 \cos H.$$

Сюда нужно подставить *неисправленные* значения u_1 и т. д. Периодические члены также связаны со взаимными возмущениями спутников или с их эксцентриситетами орбит.

Видимые прямоугольные координаты спутников X, Y, взятые относительно центра диска планеты и выраженные в единицах его экваториального радиуса, вычисляются по формулам вида

$$X_1 = r_1 \sin u_1 \quad \text{и} \quad Y_1 = -r_1 \cos u_1 \sin D_e$$

Такие же выражения можно написать для трех остальных спутников Юпитера. Координата X положительна к западу от Юпитера, отрицательна к востоку, и ось совпадает с экватором планеты; Y положительна к северу и отрицательна к югу.

Пример 36.а. Найти конфигурацию спутников Юпитера на 0^h эфемеридного времени 30 июня 1980 г.

Решая примеры 35.а и 35.б, мы нашли

$$d = 29400{,}5, \qquad \Delta = 5{,}89823,$$
$$B = +2°{,}780, \qquad D_e = -1°{,}02,$$
$$\psi = +9°{,}101, \qquad d - \Delta/173 = 29400{,}46591,$$

По формулам, приведенным в этом разделе, найдем

$$u_1 = 5980\,318°{,}013 = 358°{,}013, \qquad u_3 = 1477\,034°{,}500 = 314°{,}500,$$
$$u_2 = 2978\,069°{,}005 = 149°{,}005, \qquad u_4 = 631\,939°{,}309 = 139°{,}309,$$

$$G = 1479\,344°,6 = 104°,6, \qquad 2(u_1 - u_2) = 418°,02 = 58°,02,$$
$$H = 634\,456°,5 = 136°,5, \qquad 2(u_2 - u_3) = -330°,99 = 29°,01.$$

Поправки

$$\text{для } u_1 : +0°,400,$$
$$\text{для } u_2 : +0°,520,$$
$$\text{для } u_3 : +0°,168,$$
$$\text{для } u_4 : +0°,582.$$

Исправленные значения равны

$$u_1 = 358°,413,$$
$$u_2 = 149°,525,$$
$$u_3 = 314°,668,$$
$$u_4 = 139°,891.$$

(Случайно все четыре поправки оказались положительными.)

$$r_1 = 5,9061 - 0,0129 = 5,8932, \qquad X_1 = -0,163, \qquad Y_1 = +0,105,$$
$$r_2 = 9,3972 - 0,0777 = 9,3195, \qquad X_2 = +4,726, \qquad Y_2 = -0,143,$$
$$r_3 = 14,9894 + 0,0057 = 14,9951, \qquad X_3 = -10,664, \qquad Y_3 = +0,188,$$
$$r_4 = 26,3649 + 0,1410 = 26,5059, \qquad X_4 = +17,076, \qquad Y_4 = -0,361.$$

Зная X, Y, мы можем нарисовать конфигурацию спутников в любой заданный момент времени. На приведенном рис. 6 юг вверху, запад слева, как в перевернутом поле зрения телескопа в северном полушарии.

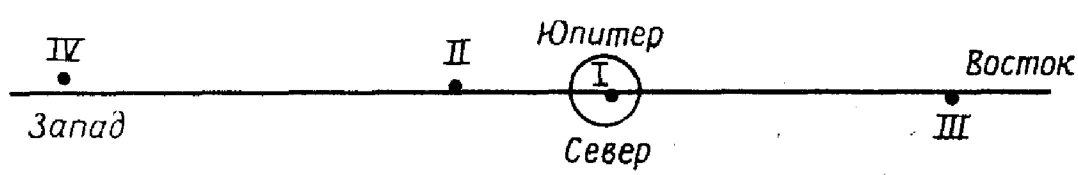

Рис. 6.

Видно, что спутник I проходит по диску Юпитера, так как его расстояние от центра меньше единицы и $u = 358°,413$ близко к 360°, что указывает на нижнее соединение.

Взаимные соединения. Два спутника находятся в соединении, если их X-координаты равны. При этом расстояние между ними равно разности Y-координат.

Укажем, что точность получаемых описанным методом величин Y меньше точности X-координат. Действительно, излагая упрощенный метод, мы предположили, что спутники движутся точно в экваториальной плоскости Юпитера. На самом же деле их широты относительно экваториальной плоскости Юпитера могут достигать соответственно

$0°02'$, $0°31'$, $0°19'$ и $0°44'$. Поэтому упрощенный метод не позволяет надежно рассчитывать затмения спутников друг другом. Если соединение очень тесное, нельзя даже сказать, какой из спутников проходит севернее другого.

Пример 36.6. Вычислить момент соединения спутников II и III, приходящийся на утро 28 января 1978 г.

С интервалом 0,04 сут рассчитаем несколько значений координат X, Y. Они равны (1979 г., 28 января, время эфемеридное):

1979, ET	X_2	X_3	Y_2	Y_3	$X_2 - X_3$
Янв. 28,24	+4,279	+4,050	+0,080	+0,140	+0,229
28,28	+3,671	+3,539	+0,083	+0,141	+0,132
28,32	+3,044	+3,024	+0,086	+0,143	+0,020
28,36	+2,401	+2,505	+0,087	+0,144	−0,104
28,40	+1,746	+1,982	+0,089	+0,144	−0,236

Путем интерполирования найдем, что $X_2 = X_3$ в $7^h50^m,4$ ET (или $7^h49^m,6$ UT), так как в 1979 г. разность (ET − UT) была равна $+50^s$. Конечно, результат нужно округлить до минуты, т. е. до 7^h50^m UT.

На стр. 60 *Справочника Британской астрономической ассоциации* за 1979 г. можно прочесть, что в 7^h56^m UT должно состояться затмение спутника III спутником II. Это на 6 минут позже того момента, что нашли мы. Не следует удивляться такому различию, поскольку вблизи соединения спутники движутся почти с одинаковой видимой скоростью, как можно видеть по изменению величин X_2 и X_3. Разность $(Y_2 - Y_3)$ также мала, что указывает на тесное соединение спутников II и III.

Соединения с Юпитером. Спутник находится в нижнем соединении с Юпитером, когда его X-координата, изменяясь от отрицательных значений к положительным, обращается в нуль. При этом угол u равен 0° или 360°.

Аналогично в момент верхнего соединения $u = 180°$ или $X = 0$ при переходе от положительных значений к отрицательным.

Упражнение. 16 апреля 1978 г. спутники I и III почти одновременно находились в соединении с Юпитером. Подтвердите это вычислением по вашей программе и сравните ваш результат с данными из «Астрономических эфемерид»:

17^h27^m UT — спутник III в верхнем соединении,

17^h30^m UT — спутник I в нижнем соединении.

37

Полудиаметры Солнца, Луны и планет

Солнце и планеты

Если в Вашем распоряжении нет астрономических альманахов (ежегодников), полудиаметры Солнца и планет можно рассчитать по следующей формуле:

$$s = s_0/\Delta,$$

где s_0 — полудиаметр, видимый с единичного расстояния (1 а.е.); Δ — расстояние от объекта до Земли в астрономических единицах.

Следует брать такие значения s_0:

Солнце	959″,63	Сатурн:	
Меркурий	3,34	экваториальный	83″,33
Венера	8,41	полярный	74,57
Марс	4,68	Уран	34,28
Юпитер:		Нептун	36,56
экваториальный	98,47		
полярный	91,91		

Луна

Если под руками нет ежегодника, полудиаметр Луны в секундах дуги можно вычислить по формуле

$$s' = \frac{56\,204{,}92}{D} = \frac{358\,482\,800}{D'} = 0{,}272\,476\ \pi',$$

где D — геоцентрическое расстояние до Луны в единицах экваториального радиуса Земли; D' — геоцентрическое расстояние до Луны в километрах; π' — горизонтальный экваториальный параллакс Луны в секундах дуги.

Так вычисляется геоцентрический полудиаметр, каким он показался бы воображаемому наблюдателю, помещенному в центр Земли. Наблюдаемый полудиаметр будет несколько больше геоцентрического. Его можно найти, умножив геоцентрический полудиаметр на

$$1 + \frac{\sin h}{D},$$

где h — высота Луны над горизонтом наблюдателя; D — геоцентрическое расстояние до Луны, выраженное в единицах экваториального радиуса Земли. Точность этой формулы достаточна для решения многих задач.

Поправка к геоцентрическому полудиаметру равна нулю, когда Луна на горизонте, и максимальна (от 14″ до 18″), если Луна находится в зените.

38

Звездные величины

Сложение звездных величин

Если две звезды имеют звездные величины m_1 и m_2, то их суммарная звездная величина равна

$$m = m_2 - 2{,}5 \lg (10^x + 1),$$

где логарифм берется по основанию 10 и

$$x = 0{,}4\,(m_2 - m_1).$$

Пример 38.а. Звездные величины компонент Кастора (α Близнецов) равны 1,96 и 2,89. Найти суммарную звездную величину.

Получаем

$$x = 0{,}4\,(2{,}89 - 1{,}96) = 0{,}372,$$

$$m = 2{,}89 - 2{,}5 \lg (10^{0{,}372} + 1) = 1{,}58.$$

Отношение интенсивностей

Если звездные величины двух звезд равны m_1 и m_2, отношение их световых потоков равно

$$I_1/I_2 = 10^x,$$

где

$$x = 0{,}4(m_2 - m_1).$$

Зная отношение I_1/I_2, можно найти разность звездных величин $\Delta m = m_2 - m_1$ по формуле

$$\Delta m = 2{,}5 \lg \frac{I_1}{I_2}.$$

Пример 38.б. Во сколько раз Вега ($m = 0{,}14$) ярче Полярной звезды ($m = 2{,}12$)?

$$x = 0{,}4\ (2{,}12 - 0{,}14) = 0{,}792,$$

$$10^x = 6{,}19.$$

Итак, Вега в 6,19 раза ярче Полярной звезды.

Пример 38.в. Одна звезда ярче другой в 500 раз. Соответствующая разность их звездных величин равна

$$\Delta m = 2{,}5\ \lg 500 = 6{,}75.$$

Расстояние и абсолютная звездная величина

Если π — параллакс звезды в секундах дуги, то расстояние до нее равно

$$\frac{1}{\pi}\ \text{пс} \qquad \text{или} \qquad \frac{3{,}2616}{\pi}\ \text{св. лет}.$$

Абсолютную звездную величину звезды с параллаксом π (в секундах дуги) и видимой звездной величиной m можно рассчитать по формуле

$$M = m + 5 + 5\ \lg\ \pi,$$

где логарифм берется по основанию 10.

Если d — расстояние до звезды в парсеках, то

$$M = m + 5 - 5\ \lg\ d.$$

39

Двойные звезды

Рассмотрим орбитальные элементы двойной звезды:

P — период обращения в средних солнечных годах;

T — время прохождения периастра, обычно дается в годах в виде десятичной дроби (например, 1945,62);

e — эксцентриситет истинной орбиты;

a — большая полуось в секундах дуги;

i — наклон плоскости истинной орбиты к картинной плоскости, перпендикулярной лучу зрения. Для прямого движения по видимой орбите $0° < i < 90°$, для обратного движения $90° < i < 180°$. Если $i = 90°$, видимая орбита вырождается в прямую линию, проходящую через главный компонент двойной системы;

Ω — позиционный угол восходящего узла;

ω — долгота периастра; это угол в плоскости истинной орбиты, отсчитываемый от восходящего узла по направлению к периастру всегда по движению.

Если эти орбитальные элементы известны, видимый позиционный угол θ и угловое расстояние ρ на заданный момент времени t можно вычислить следующим образом. Пусть среднее годичное движение звезды-спутника, выраженное в градусах в виде десятичной дроби, равно

$$n = \frac{360°}{P}.$$

Тогда среднюю аномалию спутника в момент времени t можно найти по формуле

$$M = n(t - T).$$

Одним из методов, изложенных в разд. 22, решим уравнение Кеплера

$$E = M + e \sin E$$

и затем вычислим радиус-вектор r и истинную аномалию v по формулам

$$r = a(1 - e\cos E),$$

$$\operatorname{tg}\frac{v}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\operatorname{tg}\frac{E}{2}.$$

Определим $(\theta - \Omega)$ из выражения

$$\operatorname{tg}(\theta - \Omega) = \frac{\sin(v + \omega)\cos i}{\cos(v + \omega)}. \qquad (39.1)$$

Конечно, его можно было бы записать в виде

$$\operatorname{tg}(\theta - \Omega) = \operatorname{tg}(v + \omega)\cos i,$$

но тогда нельзя определить правильный квадрант угла $(\theta - \Omega)$. Как и в других случаях, лучше использовать выражение (39.1) и применить к числителю и знаменателю стоящей в правой части дроби преобразование прямоугольных координат в полярные. Эта операция даст угол $(\theta - \Omega)$ сразу в нужном квадранте.

По разности $(\theta - \Omega)$ найдем θ и, если нужно, приведем к интервалу от 0° до 360°.

Угловое расстояние между компонентами равно

$$\rho = r\,\frac{\cos(v + \omega)}{\cos(\theta - \Omega)}.$$

Пример 39.а. По данным Е. Зильбернагеля (1929), орбитальные элементы η Северной Короны равны:

$$\begin{aligned} P &= 41{,}623 \text{ года}, & i &= 59°{,}025,\\ T &= 1934{,}008, & \Omega &= 23°{,}717,\\ e &= 0{,}2763, & \omega &= 219°{,}907.\\ a &= 0''{,}907, \end{aligned}$$

Найти θ и ρ на эпоху 1980,0.

Получаем последовательно:

$$\begin{aligned} n &= 8{,}649\,06,\\ t - T &= 1980{,}0 - 1934{,}008 = 45{,}992,\\ M &= 397°{,}788 = 37°{,}788,\\ E &= 49°{,}897,\\ r &= 0''{,}745\,57,\\ v &= 63°{,}416,\\ \operatorname{tg}(\theta - \Omega) &= \frac{-0{,}500\,813}{+0{,}230\,440},\\ (\theta - \Omega) &= -65°{,}291,\\ \theta &= -41°{,}574 = 318°{,}4,\\ \rho &= 0''{,}411. \end{aligned}$$

Можно составить программу вычисления полной эфемериды двойной звезды на много лет вперед. Автор книги использует на калькуляторе HP-67 программу из 150 шагов. Она содержит подпрограмму решения уравнения Кеплера, которую можно использовать и как самостоятельную программу. После ввода орбитальных элементов задается начальная эпоха эфемерид и интервал между эфемеридами в годах. Тогда без нажатия клавиш калькулятор последовательно, через паузы, высвечивает: год, позиционный угол в градусах, угловое расстояние в секундах дуги; затем следующий год и т. д.

Попытайтесь составить аналогичную программу для вашего калькулятора. В качестве упражнения рассчитайте эфемериды γ Девы по следующим элементам (К. Стренд. 1937):

$$P = 171{,}37 \text{ года}, \qquad i = 146{,}^\circ 05,$$
$$T = 1836{,}433, \qquad \Omega = 31{,}^\circ 78,$$
$$e = 0{,}8808, \qquad \omega = 252{,}^\circ 88.$$
$$a = 3{,}''746.$$

Ответ: Приводим с четырехлетним интервалом эфемериды, начиная с 1980 г. Так как $90^\circ < i < 180^\circ$, позиционный угол убывает.

Год	θ	ρ
1980,0	296,°86	3,″90
1984,0	293,55	3,58
1988,0	289,55	3,23
1992,0	284,49	2,83
1996,0	277,62	2,37
2000,0	267,10	1,84
2004,0	246,26	1,18
2008,0	125,94	0,38
2012,0	24,65	1,35

Эксцентриситет видимой орбиты

Видимая орбита двойной звезды представляет собой эллипс с эксцентриситетом e', как правило, отличающимся от эксцентриситета истинной орбиты. Может оказаться интересным узнать e', хотя с точки зрения астрофизики он не имеет особенной ценности.

Автор опубликовал статью в «Ежегоднике» Британской астрономической ассоциации (том 89, стр. 485—488, 1979), где привел следующие формулы:

$$A = (1 - e^2 \cos^2\omega) \cos^2 i,$$

$$B = e^2 \sin\omega \cos\omega \cos i,$$

$$C = 1 - e^2 \sin^2\omega,$$

$$D = (A - C)^2 + 4B^2,$$

$$e'^2 = \frac{2\sqrt{D}}{A + C + \sqrt{D}}.$$

Следует отметить, что e' не зависит от орбитальных элементов a и Ω и может быть как больше, так и меньше истинного эксцентриситета e.

Пример 39.б. Найти эксцентриситет видимой орбиты η Северной Короны. Орбитальные элементы даны в условии примера 39.а.

Находим

$$A = 0{,}25298,$$
$$B = 0{,}01934,$$
$$C = 0{,}96858,$$
$$D = 0{,}51358,$$
$$e' = 0{,}860.$$

Следовательно, видимая орбита двойной является значительно более вытянутой, чем истинная.

40

Линейная регрессия; корреляция

Во многих задачах результат большого числа наблюдений выражается множеством точек на графике с координатами x и y. Пусть нужно провести через эти точки кривую, «наилучшим» образом представляющую данные.

Через множество точек можно провести разные кривые: прямую линию, экспоненту, логарифмическую кривую, полиномиальную и т. д. Здесь мы рассмотрим лишь прямую линию, т. е. будем искать связь в виде *линейной регрессии*.

Нужно вычислить коэффициенты линейного уравнения

$$y = ax + b \tag{40.1}$$

по методу наименьших квадратов. Наклон прямой a и точка b пересечения прямой с осью y определяются по формулам

$$a = \frac{n\,\Sigma xy - \Sigma x\,\Sigma y}{n\,\Sigma x^2 - (\Sigma x)^2},$$
$$b = \frac{\Sigma y\,\Sigma x^2 - \Sigma x\,\Sigma xy}{n\,\Sigma x^2 - (\Sigma x)^2}, \tag{40.2}$$

где n — число точек. Знак Σ означает суммирование. Так, Σx равна сумме всех значений x, Σy — сумме всех значений y, Σx^2 — сумме квадратов всех значений x, Σxy — сумме произведений $x \cdot y$ всех пар значений (x, y) и т. д. Надо отметить, что Σxy — это не то же самое, что $\Sigma x \cdot \Sigma y$ (т. е. сумма произведений не равна произведению сумм), и что Σx^2 не равна $(\Sigma x)^2$ (сумма квадратов не равна квадрату суммы.)

В качестве астрономического применения этих формул рассмотрим связь блеска кометы с расстоянием от Солнца. Видимую звездную величину кометы обычно представляют формулой вида

$$m = g + 5 \lg \Delta + \kappa \lg r,$$

о чем уже говорилось в разд. 25. Здесь Δ и r — расстояния от кометы до Земли и Солнца соответственно (в астрономических единицах). Абсолютную звездную величину кометы g и коэффициент κ требуется определить из наблюдений. Это можно сделать, если в течение достаточно большого времени измерять видимую звездную величину m. Значения Δ и r для каждого m можно рассчитать по орбитальным элементам или взять из эфемерид.

Неизвестными величинами являются g и κ. Формулу для m можно переписать в виде

$$m - 5 \lg \Delta = \kappa \lg r + g.$$

что очень похоже на (40.1), где вместо x стоит $\lg r$, а вместо y стоит $(m - 5 \lg \Delta)$. Здесь y можно назвать гелиоцентрической звездной величиной, поскольку она не зависит от переменного расстояния кометы от Земли.

Пример 40.а. В табл. 40.А приведены визуальные оценки звездной величины m периодической кометы Вилда 2 (1978 b), полученные Дж. Бортлем. Соответствующие им значения r и Δ вычислены по орбитальным элементам (см. Циркуляр МАС № 3177).

По y и x вычислим суммы Σx, Σy, Σx^2, Σxy. У HP-67 и ряда других

Таблица 40.А.

1978 г.,	UT	m	r	Δ	$y=m-5\lg\Delta$	$x=\lg r$
Февраль	4,01	11,4	1,987	1,249	10,92	0,2982
	5,00	11,5	1,981	1,252	11,01	0,2969
	9,02	11,5	1,958	1,266	10,99	0,2918
	10,02	11,3	1,952	1,270	10,78	0,2905
	25,03	11,5	1,865	1,335	10,87	0,2707
Март	7,07	11,5	1,809	1,382	10,80	0,2574
	14,03	11,5	1,772	1,415	10,75	0,2485
	30,05	11,0	1,693	1,487	10,14	0,2287
Апрель	3,05	11,1	1,674	1,504	10,21	0,2238
	10,06	10,9	1,643	1,532	9,97	0,2156
	26,07	10,7	1,582	1,592	9,69	0,1992
Май	1,08	10,6	1,566	1,610	9,57	0,1948
	3,07	10,7	1,560	1,617	9,66	0,1931
	8,07	10,7	1,545	1,634	9,63	0,1889
	26,09	10,8	1,507	1,696	9,65	0,1781
	28,09	10,6	1,504	1,703	9,44	0,1772
	29,09	10,6	1,503	1,707	9,44	0,1770
Июнь	2,10	10,5	1,498	1,721	9,32	0,1755
	6,09	10,4	1,495	1,736	9,20	0,1746

калькуляторов существует клавиша ($\Sigma+$), при нажатии на которую в разных регистрах памяти накапливаются суммы Σx, Σy и т. д. На эту клавишу нужно нажимать после каждого ввода пары чисел (x, y). По табличным данным получим:

$$n = 19, \qquad \Sigma x = 4{,}2805, \qquad \Sigma x^2 = 1{,}0031,$$
$$\Sigma y = 192{,}0400, \qquad \Sigma xy = 43{,}7943,$$

следовательно, по формуле (40.2),

$$a = 13{,}67, \qquad b = 7{,}03.$$

Итак, наилучшее приближение наблюдений дается уравнением прямой линии

$$y = 13{,}67\,x + 7{,}03$$

$$\text{или } m - 5\lg\Delta = 13{,}67\lg r + 7{,}03.$$

Для периодической кометы Вилда 2 (1978 b)

$$m = 7{,}03 + 5\lg\Delta + 13{,}67\lg r.$$

Коэффициент корреляции

Коэффициент корреляции является мерой статистической связи двух переменных. Для линейной зависимости коэффициент корреляции равен

$$r = \frac{n\,\Sigma xy - \Sigma x\,\Sigma y}{\sqrt{n\,\Sigma x^2 - (\Sigma x)^2}\ \sqrt{n\,\Sigma y^2 - (\Sigma y)^2}}\ . \qquad (40.4)$$

Он изменяется в пределах от -1 до $+1$. Если коэффициент корреляции равен $+1$ или -1, то две переменных полностью коррелируют; это означает, что между ними есть точная функциональная связь, причем все точки, представляющие пары (x, y), ложатся на прямую линию, которая и выражает функциональную зависимость. Если $r = +1$, y растет с ростом x (рис. 7); если $r = -1$, y уменьшается с ростом x (рис. 8).

При $r = 0$ между x и y нет связи (рис. 9). Однако на практике, даже если связь отсутствует, может оказаться, что коэффициент корреляции не обратится точно в нуль. Это объясняется случайными причинами, которые не сказались бы на результате только тогда, когда число точек было бы бесконечным.

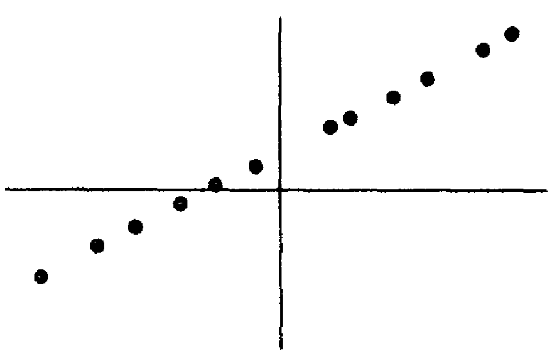

Рис. 7. Точная функциональная связь; положительная корреляция.

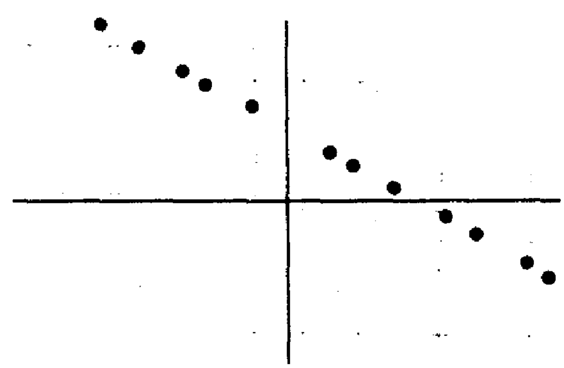

Рис. 8. Точная функциональная связь; отрицательная корреляция.

Если $0 < |r| < 1$, строгой взаимосвязи между x и y нет, а есть некое статистическое соотношение между ними (рис. 10). И снова нужно отметить, что даже при наличии реальной функциональной связи двух переменных вычисления не дадут значения r, в точности равного $+1$ или -1, из-за ошибок измерения всех величин.

Пример 40.6. На стр. 10 бельгийского журнала «Heelal» за сентябрь 1978 г. приведена следующая таблица (40.Б). Для каждого из двадцати

Таблица 40.Б.

Эпоха максимума	y	x	Эпоха максимума	y	x
1761, июнь	90,4	73	1870, июль	144,8	39
1769, октябрь	125,3	38	1884, январь	78,1	61
1778, май	161,8	35	1893, август	89,5	42
1787, ноябрь	143,4	42	1905, октябрь	63,9	49
1804, декабрь	52,5	78	1917, август	112,1	50
1816, март	50,8	68	1928, июнь	82,0	62
1829, июнь	71,5	74	1937, май	119,8	44
1837, февраль	152,8	42	1947, июль	161,2	39
1847, ноябрь	131,3	52	1957, ноябрь	208,4	43
1860, июль	98,5	54	1969, февраль	111,6	54

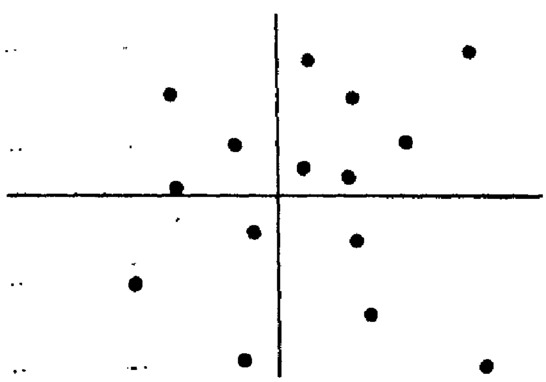

Рис. 9. Корреляция отсутствует.

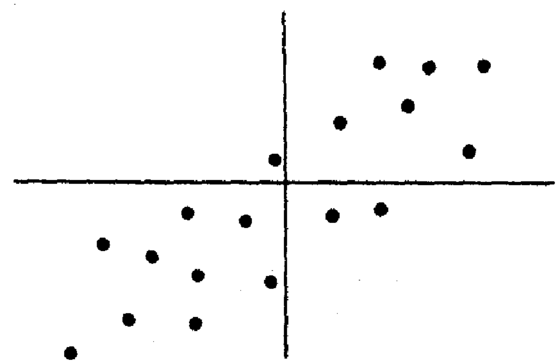

Рис. 10. Есть некоторая корреляция.

моментов максимума числа солнечных пятен с 1761 г. по 1969 г. y характеризует высоту максимума (наибольшее среднемесячное сглаженное число пятен), а x — интервал времени (в месяцах) между максимумом и предыдущим минимумом.

В этом случае находим

$$\Sigma x = 1039, \quad \Sigma x^2 = 57303, \quad \Sigma xy = 108\,987{,}0,$$
$$\Sigma y = 2249{,}7, \quad \Sigma y^2 = 286\,027{,}09, \quad n = 20$$

и по формулам (40.2) и (40.1) получаем

$$y = 235{,}61 - 2{,}37\,x.$$

Это уравнение прямой линии, наилучшим образом соответствующей точкам (x, y) на рис. 11.

По формуле (40.3) находим $r = -0{,}753$. Следовательно, между x и y существует очевидная связь. Корреляция между ними отрицательна:

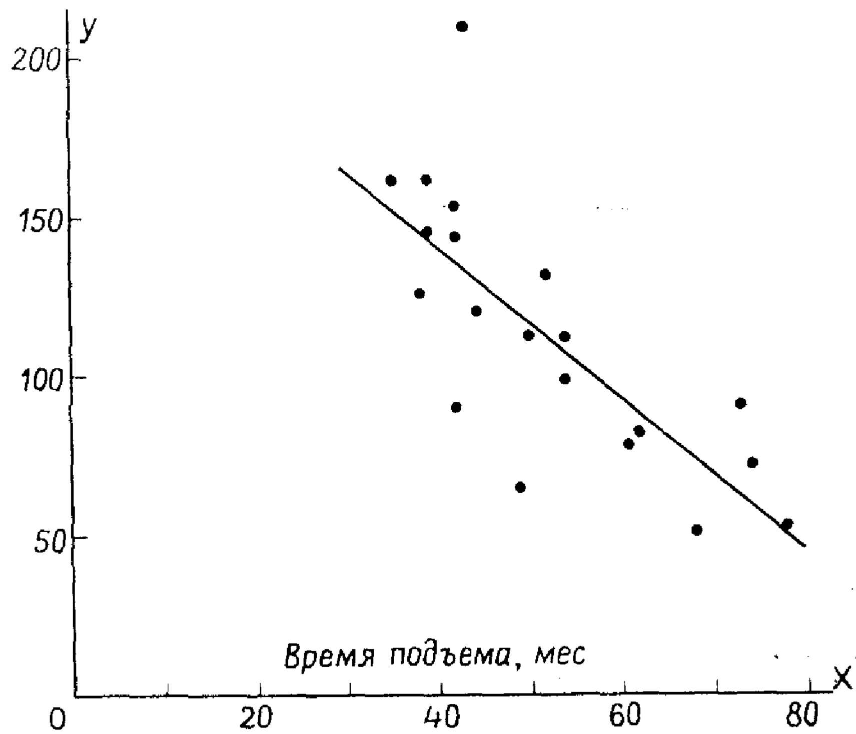

Рис. 11.

Таблица 40.В

№	Название	x	y	№	Название	x	y
51	Nemausa	8,7	7	76	Freia	9,0	5
52	Europa	7,6	6	77	Frigga	9,6	6
53	Kalypso	9,8	7	78	Diana	9,1	5
54	Alexandra	8,8	9	79	Eurynome	9,3	8
55	Pandora	9,1	7	80	Sappho	9,3	6
56	Melete	9,6	6	81	Terpsichore	9,7	11
57	Mnemosyne	8,4	9	82	Alkmene	9,4	7
58	Concordia	9,9	9	83	Beatrix	9,8	7
59	Elpis	8,7	5	84	Klio	10,3	4
60	Echo	10,0	4	85	Io	8,9	2
61	Danaë	8,8	5	86	Semele	9,8	6
62	Erato	9,8	5	87	Sylvia	8,3	6
63	Ausonia	8,2	7	88	Thisbe	8,2	6
64	Angelina	8,8	8	89	Julia	8,2	5
65	Cybele	7,9	6	90	Antiope	9,3	7
66	Maja	10,6	4	91	Aegina	9,7	6
67	Asia	9,9	4	92	Undina	8,0	6
68	Leto	8,3	4	93	Minerva	8,8	7
69	Hesperia	8,3	8	94	Aurora	8,8	6
70	Panopaea	9,2	8	95	Arethusa	8,9	8
71	Niobe	8,5	5	96	Aegle	9,1	5
72	Feronia	10,3	7	97	Klotho	8,7	6
73	Klytia	10,3	6	98	Ianthe	10,4	6
74	Galatea	10,1	7	99	Dike	11,5	4
75	Eurydike	10,0	8	100	Hekate	9,1	6

Таблица 40.Г

Год	y	x	Год	y	x
1901	700	2,7	1942	841	30,6
1902	762	5,0	1943	738	16,3
1903	854	24,4	1944	766	9,6
1904	663	42,0	1945	745	33,2
1905	912	63,5	1946	861	92,2
1906	821	53,8	1947	640	151,6
1907	622	62,0	1948	792	136,3
1908	678	48,5	1949	521	134,7
1909	842	43,9	1950	951	83,9
1910	990	18,6	1951	878	69,4
1911	741	5,7	1951	926	31,5
1912	941	3,6	1953	557	13,9
1913	801	1,4	1954	741	4,4
1914	877	9,6	1955	616	38,0
1915	910	47,4	1956	795	141,7
1916	1054	57,1	1957	801	190,2
1917	851	103,9	1958	834	184,8
1918	848	80,6	1959	560	159,0
1919	980	63,6	1960	962	112,3
1920	760	37,6	1961	903	53,9
1921	417	26,1	1962	862	37,5
1922	938	14,2	1963	713	27,9
1923	917	5,8	1964	785	10,2
1924	849	16,7	1965	1073	15,1
1925	1075	44,3	1966	1054	47,0
1926	896	63,9	1967	707	93,8
1927	837	69,0	1968	776	105,6
1928	882	77,8	1969	776	105,5
1929	688	64,9	1970	727	104,5
1930	953	35,7	1971	691	66,6
1931	858	21,2	1972	710	68,9
1932	858	11,1	1973	690	38,0
1933	738	5,7	1974	1039	34,5
1934	707	8,7	1975	734	15,5
1935	916	36,1	1976	541	12,6
1936	763	79,7	1977	855	27,5
1937	900	114,4	1978	767	92,5
1938	711	109,6	1979	839	155,4
1939	928	88,8	1980	913	154,6
1940	837	67,8	1981	1016	140,5
1941	744	47,5			

чем больше продолжительность фазы роста активности (от минимума до максимума), тем этот максимум в среднем слабее.

Пример 40.в. В качестве примера двух переменных, между которыми *не может быть* никакой корреляции, рассмотрим абсолютную фотографическую звездную величину x малой планеты и число букв y в ее наименовании. Абсолютные величины малых планет выпишем из «Эфемерид малых планет» (Ленинград, 1979 г.); рассмотрим достаточно представительную выборку планет с номерами от 51 до 100 (табл. 40.В).

Имеем для этого случая:

$$\Sigma x = 460{,}8, \qquad \Sigma x^2 = 4278{,}50, \qquad \Sigma xy = 2869{,}1,$$
$$\Sigma y = 312, \qquad \Sigma y^2 = 2078, \qquad n = 50.$$

По формуле (40.3) получим коэффициент корреляции $r = -0{,}097$. Коэффициент корреляции мал, но отличен от нуля; причины этого уже обсуждались.

Отметим, что значимый результат, как и в других случаях, где применяется статистический анализ, можно получить только для достаточно большой выборки.

Близкий к $+1$ или -1 коэффициент корреляции не будет иметь физического смысла, если он вычислен по малому числу данных. Если бы мы взяли 8 малых планет с номерами от 71 до 78, то в предыдущем примере получили бы коэффициент корреляции $r = +0{,}785$, а для планет с номерами 78—82 — еще большее значение, $r = +0{,}932$.

На этом примере мы продемонстрировали, что для бедной выборки коэффициент корреляции случайно может оказаться достаточно большим.

В качестве упражнения по данным табл. 40.Г покажите, что корреляция между количеством осадков в районе Уккльской обсерватории и солнечной активностью (числом пятен) отсутствует; в таблице приведены следующие величины: y — суммарное годовое количество осадков в мм; x — среднегодовое количество солнечных пятен.

(*Ответ.* Коэффициент корреляции равен $r = -0{,}025$; между x и y нет заметной корреляции.)

ЛИТЕРАТУРА

Солнце, Луна

1. *Herget P.* Solar Coordinates 1800—2000. Astronomical Papers, Vol. XIV, Washington, 1953.
2. *Goldstine H. H.* New and Full Moons, 1001 B.C. to A.D. 1651. Mem. American Philisophical. Soc., Vol. 94. Philadelphia, PA, 1973.
3. *Meeus J.* Tables of the Moon and Sun, Kessel-lo, Belgium, Kesselberg Sterrenwacht, 1962.
   Таблицы для вычисления точных геоцентрических координат Луны и Солнца от 1900 г. до н.э. и до 3000 г. н.э. Формулы для расчета затмений и покрытий.

Затмения

4. *Meeus J., Mucke H.* Canon of Lunar Eclipses, −2002 to +2526. Astronomisches Buro, Wien, 1979.
5. *Mucke H., Meeus J.* Canon of Solar Eclipses. Astronomisches Buro, Wien (в печати).

Планеты

6. *Tuckerman B.* Planetary, Lunar, and Solar Positions, 601 B.C. to A.D. 1. Mem. American Phil. Soc., Vol. 59. Philadelphia, PA, 1962.
7. *Tuckerman B.* Planetary, Lunar, and Solar Positions, A.D. 2 to A.D. 1649. Mem. American Phil. Soc., Vol. 59. Philadelphia, PA, 1964.
8. *Hunger H., Dvorak R.* Ephemeriden von Sonne, Mond und hellen Planeten von −1000 bis −601. Osterreichische Akademie der Wissenschaften, Philosophisch-Historische Klasse, Denkschriften, Band 155, Wien 1981.
   В этих трех книгах приводятся небесные долготы и широты (с точностью 0°,01) Солнца и пяти планет, доступных невооруженному глазу.
9. *Stahlman W. D., Gingerich O.* Solar and Planetary Longitudes for Years −2500 to +2000. University of Wisconsin Press, Madison, 1963.
   Даются небесные долготы (округленные до ближайшего целого градуса) Солнца и пяти доступных невооруженному глазу планет с интервалом 10 дней.
10. *Duncombe R. L., Tufekcioglu Z., Larson G.* Rectangular Coordinates of Mercury 1800—2000. U.S. Naval Obs., Circular No. 106, 1965.
11. *Herget P.* Coordinates of Venus 1800—2000. Astronomical Papers, Vol. XV, Part III. Washington, 1955.
12. *Duncombe R. L.* Provisional Ephemerides of Mars 1800—1950. U.S. Naval Obs., Circular No. 95, 1964.
13. *Duncombe R. L., Clemence G. M.* Provisional Ephemeris of Mars 1950—2000. U.S. Naval Obs., Circular No. 90, 1960.
14. *Eckert W. J., Brouwer D., Clemence G. M.* Coordinates of the Five Outer Planets 1653—2060. Astronomical Papers, Vol. XII, Washington, 1951.
    С интервалом 40 дней даны прямоугольные гелиоцентрические экваториальные координаты планет от Юпитера до Плутона.
15. *Kaplan G. H., Seidelmann P. K., Smith E.* Astrometric Ephemeris of Pluto 1970—1990. U.S. Naval Obs., Circular No, 139, 1972.

Малые планеты, кометы

16. *Pilcher F., Tedesco E. F.* Tables of Minor Planets. Willmann-Bell, Inc. Richmond, Virginia.
17. Эфемериды малых планет. Ежегодно издаются Институтом теоретической астрономии АН СССР, Ленинград.
Содержатся элементы орбит и эфемериды всех обозначенных малых планет.
18. *Duncombe R. L.* Heliocentric Coordinates of Ceres, Pallas, Juno, Vesta, 1928—2000. Astronomical Papers, Vol. XX, Part II. Washington, 1969.
19. *Marsden B. G.* Catalogue of Cometary Orbits. Fourth edition, 1982. Minor Planet Center, 60 Garden Street, Cambridge, MA.

Звезды

20. Smithsonian Astrophysical Observatory: Star Catalog. Smithsonian Institution, Washington, 1966.
4 тома каталога содержат координаты и собственные движения 258997 звезд, отнесенные к эпохе и равноденствию 1950,0.
21. *Hirshfeld A., Sinnott R. W.* Sky Catalogue 2000,0. Vol. 1: Stars to Magnitude 8,0. Sky Publishing Corporation; Cambridge, Mass., 1982.
22. *Hooffleit D.* Bright Star Catalogue. Yale University Observatory. Fourth revised edition. New Haven, CT, 1982.
23. *Robertson J.* Catalog of 3539 Zodiacal Stars. Astronomical Papers, Vol. X, Part II, Washington, 1940.
24. *Wepner W.* 291 Doppelstern-Ephemeriden fur die Jahre 1975—2000. Treugesell Verlag, Dusseldorf, 1976.

Серия ежегодных публикаций

25. *Victor R., Pon J.* Sky Calendar. Abrams Planetarium, Michigan State University, East Lansing, MI 48824.
Для каждого месяца на отдельной странице приведен вид горизонта в сумерках или на рассвете на каждый день. Показано положение Луны, ярких звезд и планет. Выпускается 4 раза в год.
26. Royal Astronomical Society of Canada. Observers Handbook 19--. Toronto, Ontario, Canada.
Этот ежегодник предназначен для серьезных наблюдателей, желающих всегда иметь под рукой готовые данные. Хотя основное внимание уделяется различным явлениям, которые можно наблюдать в течение года, в нем можно найти и множество других сведений.
27. British Astronomical Association. Handbook 19--. London, England.
Издание аналогично предыдущему, но более доступно для европейских читателей.
28. *Ottewell G.* Astronomical Calendar 19--. Departement of Physics, Furman University, Greenville, SC.
Издание большого формата, прекрасно иллюстрированное рисунками и схемами. Предназначено как начинающим, так и искушенным наблюдателям.
29. Nautical Almanac Office. U.S. Naval Observatory. The Astronomical Almanac 19--. Government Printing Office, Washington, D.C., and Her Majestys Stationery Office, London.
Совместное издание с Королевской Гринвичской обсерваторией.

30. Astronomisches Rechen-Institut. Apparent Places of Fundamental Stars. Heidelberg, West Germany, 19--.

Учебные пособия

31. *Smart W. M.* Textbook on Spherical Astronomy. Cambridge University Press, Sixth edition, 1977, revised by Green R. M.; London, England.
32. *Woolard E. W., Clemence G. M.* Spherical Astronomy. Academic Press, 1966, New York.

Календари и хронология

33. *Ginzel F.* Handbuch der mathematischen und technischen Chronologie. Leipzig, Hinrich, 1906—1914.
 Переиздание: Zwichau, Ullmann, 1958.
34. The Calendar. In: Nautical Almanac Office, Royal Greenwich Observatory. Explanatory supplement to the Astrononical Ephemeris and the American Ephemeris and Nautical Almanac 1966. Her Majestys Stationery Office, London.

Содержание

Научное издание

Жан Меёс

АСТРОНОМИЧЕСКИЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ КАЛЬКУЛЯТОРОВ

Заведующий редакцией проф. А. Н. Матвеев
Зам. зав. редакцией С. М. Жебровский
Научный редактор М. Ф. Путов
Мл. редактор И. А. Гревцова
Художник Ю. А. Давыдов
Художественный редактор К. В. Радченко
Технические редакторы Л. А. Тихомирова, А. В. Лыткина
Корректоры Т. Б. Куликова, М. В. Пшеницына

ИБ № 5515

Подписано к печати 26.10.87.
Формат 60 х 84 1/16.
Бумага офсетная № 1
Гарнитура таймс.
Печать офсетная.
Объем 5,25 бум.л. Усл.печ.л 9,77 Усл.кр.-отт. 10,12 Уч.-изд.л. 7,65
Изд. № 8/5130. Тираж 10 тыс. экз. Зак. [illegible] Цена 65 коп.
Набрано в Межиздательском фотонаборном центре издательства «Мир»
129820, ГСП Москва, 1-й Рижский пер., 2.

Ордена Трудового Красного Знамени
Московская типография № 7 «Искра революции»
Союзполиграфпрома Государственного Комитета СССР
по делам издательств, полиграфии и книжной торговли.
Москва 103001, Трехпрудный пер., 9.