В МИРЕ НАУКИ И ТЕХНИКИ (80)

В. ГИЛЬДЕ, З. АЛЬТРИХТЕР

С МИКРОКАЛЬКУЛЯТОРОМ В РУКАХ

ОБ ЭФФЕКТИВНОСТИ И УНИВЕРСАЛЬНОСТИ МИКРОКАЛЬКУЛЯТОРОВ – НЕЗАМЕНИМЫХ ПОМОЩНИКОВ ВСЕХ, КОМУ ПРИХОДИТСЯ ЗАНИМАТЬСЯ ВЫЧИСЛЕНИЯМИ

ИЗДАТЕЛЬСТВО МИР МОСКВА

ИЗДАТЕЛЬСТВО · МИР ·

W. GILDE, S. ALTRIGHTER

MEHR SPAß MIT DEM TASCHENRECHNER

VEB FACHBUCHVERLAG
LEIPZIG 1978

В. ГИЛЬДЕ, З. АЛЬТРИХТЕР

С МИКРОКАЛЬКУЛЯТОРОМ В РУКАХ

Перевод с немецкого
Ю. А. ДАНИЛОВА

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР»

МОСКВА 1980

518
47

Гильде В., Альтрихтер З.

Г 47 С микрокалькулятором в руках. Пер. с нем. Ю. А. Данилова/— М.: Мир, 1980, 222 с. с ил. (В мире науки и техники)

На задачах, заимствованных из различных областей науки, техники и жизни, авторы показывают широкие возможности современных микрокалькуляторов.

Книга рассчитана на самые широкие круги читателей.

Г $\frac{20204—477}{041(01)—80}$ —80 БЗ 1702070000 518

Редакция научно-популярной и научно-фантастической литературы

От переводчика

Микрокалькулятор все более уверенно завоевывает себе место не только на рабочем столе ученого или инженера, но и на парте школьника. Избавив нас от тягот вычислений, «карманные» ЭВМ обрели заслуженную репутацию незаменимых помощников каждого, кому приходится заниматься расчетами. Более того, став распространенным вычислительным прибором, существенно изменившим традиционные представления о возможностях счета, микрокалькулятор привел к определенному сдвигу во взглядах на цели расчета, сместив акцент с преодоления технических трудностей на интерпретацию полученных результатов, с установления численных оценок величин на более глубокое понимание изучаемого явления.

Не следует думать, однако, будто решение задач на микрокалькуляторах сводится к бездумному нажиманию клавиш. Как и любое другое вычислительное устройство, будь то абак или русские счеты, логарифмическая линейка или современная ЭВМ, микрокалькулятор требует особых методов и приемов счета, учитывающих его специфику. Разумеется, в обширном арсенале современной вычислительной математики накоплено немало алгоритмов, пригодных после соответствующей модификации к реализации на микрокалькуляторах, и хотя отсутствие руководства вынуждает каждого «пользователя» решать проблему выбора наиболее эффективного алгоритма своими силами, тем не менее эффективные и даже оптимальные алгоритмы счета на микрокалькуляторах существуют. В искусных руках микрокалькулятор может творить чудеса!

В предлагаемой вниманию читателя книге микрокалькулятор предстает как гибкий и универсальный инструмент познания окружающего мира, способный удовлетворить не только любознательного человека, но и исследователя. Развертывая пред изумленным читателем длинную вереницу задач самого различного содержания, авторы убедительно демонстрируют богатейшие возможности микрокалькуляторов и попутно исподволь приобщают тех, кто не искушен в различного рода вычислительных хитростях, к высокому искусству рационального счета.

О чем бы ни рассказывали авторы, они умело сочетают достоверность сообщаемой ими информации с доступностью изложения, неизменно яркого, эмоционально приподнятого и не чуждого юмора. Выступая в роли пропагандистов нового средства вычислений, они избирают своим педагогическим приемом не менторские наставления, а наглядный показ. Их искренняя увлеченность не может не вызвать отклика у читателя.

Со временем, надо думать, будет создана целая библиотечка руководств самого различного уровня и назначения для тех, кто при расчетах пользуется микрокалькуляторами. Можно с уверенностью сказать, что и тогда книга В. Гильде и З. Альтрихтера не утратит своего значения и найдет путь не только к уму, но и к сердцу не одного поколения читателей.

Ю. Данилов

Предисловие

Для очень многих в числах заключено нечто необычайно привлекательное. Числа и различные соотношения между ними с увлечением изучают не только наши талантливые современники. Занимались этим и наши предки: достаточно вспомнить хотя бы Пифагора и всех тех математиков, которые с неиссякаемым терпением вычисляли знаки числа π или открывали магические квадраты. Таких примеров можно привести множество.

Нельзя не упомянуть здесь и тех, кто демонстрирует свою феноменальную память или способность молниеносно производить в уме сложнейшие вычисления, независимо от того, выступают ли они в узком семейном кругу или на эстраде.

И все же на пути всякого любителя чисел прежде стоял труднопреодолимый барьер: сами вычисления. До тех пор, пока вычисления приходилось производить в уме или с карандашом в руках, многие старательно избегали их.

Решительный перелом внесло появление микрокалькуляторов: вычисления из утомительной работы превратились в занятие, доставляющее даже удовольствие.

Обычно к микрокалькулятору прилагается краткое наставление. Иногда вместе с более сложными микрокалькуляторами покупатель получает даже библиотечку программ. Для нас в конечном счете играют роль не конструктивные особенности, а функциональные возможности различных микрокалькуляторов. Как правило, всякий микрокалькулятор позволяет решать самые разнообразные математические задачи.

Его предназначение — сократить трудоемкие операции и тем самым высвободить время для решения других проблем.

В нашей книге мы стремились на многочисленных примерах показать, что с микрокалькулятором в руках можно справиться практически с любой задачей. При этом не важно, идет ли речь о микрокалькуляторе, владеющем «только» четырьмя арифметическими действиями, или о микрокалькуляторе, программируемом, как большие ЭВМ.

В нашей книге вы не найдете обычных рассуждений, доведенных до уровня строгости, принятого в современной математической литературе. Мы решили отказаться от них, считая, что при работе с числами нет необходимости каждый раз обращаться к теории множеств или к другим разделам математики, поскольку электронная схема нашего микрокалькулятора «понимает» лишь 1 и 0.

В заключение мы хотим поблагодарить двух специалистов — проф. Ф. Коха из Кётена и физика Н. Денкмана из Лейпцига. Оба они страстные приверженцы использования микрокалькуляторов и, не считаясь со временем, слово за словом, число за числом тщательно проверили рукопись нашей книги.

Авторы

Просьба к читателю:

ПРОЧТИТЕ НЕПРЕМЕННО!

1. Несмотря на все усилия авторов и издательства в книге такого рода всегда могут встретиться ошибки в вычислениях, логические ошибки, описки и опечатки. Если, повторяя за нами вычисления, вы получите результат, отличный от приведенного в книге, проверьте себя еще раз. Если ваш микрокалькулятор повторно воспроизведет результат, не совпадающий с приведенным, просим сообщить нам об этом.

2. По замыслу авторов эта книга призвана помочь тем, кто имеет под рукой микрокалькулятор, заполнить свой досуг. Каждый, кто захочет, сможет извлечь из нее что-то полезное для себя (хотя это отнюдь не обязательно). Читать нашу книгу можно с любого раздела и даже от конца. Одного мы только не советуем: систематически «прорабатывать» ее.

3. Материал в книге расположен не в порядке возрастания трудности и не по принадлежности к тому или иному разделу математики. В наши намерения отнюдь не входило учить читателя математике (для этого существует множество превосходных книг), мы хотели лишь приобщить его к радости вычислений.

4. Каждый раздел, на наш взгляд, должен содержать все сведения, необходимые для его понимания,

поэтому некоторые «указания» в тексте повторяются (они выделены линейками).

5. При написании книги авторы пользовались микрокалькуляторами различных конструкций. Эти микрокалькуляторы (а также те, которые нам доводилось видеть) отличались друг от друга клавиатурой и характером выполняемых операций. Учитывая это, мы не вводили в книге единых обозначений и не стремились к унификации вычислений, а в каждом разделе использовали те символы и алгоритмы, которые казались нам наиболее подходящими.

Наиболее употребительные обозначения на клавиатуре микрокалькуляторов

C (от англ. clear) — очистить. При нажатии на клавишу C происходит очистка соответствующих регистров микрокалькулятора.

CD (от англ. clear display) — очистить индикатор.

CE (от англ. clear entry) — погасить введенное число.

CHS (от англ. change sign) — изменить знак.

CI (от англ. clear indicator) — очистить регистр индикатора.

Cl n (от англ. clear n) — очистить регистр номер n.

CM (от англ. clear memory) — очистить регистр памяти (в микрокалькуляторах с одним регистром памяти).

EE, EEX, EXP (от англ. enter exponent) — ввести экспоненту.

ENTER (от англ. enter — ввести) — сигнал окончания ввода в микрокалькуляторах с бесскобочными обозначениями.

F (от англ. function — функция) — перевод в режим совмещенной функции (при использовании клавиш с двумя функциональными назначениями).

FIX n (от англ. fix — устанавливать) — фиксация положения десятичной запятой.

G — перевод в режим второй совмещенной функции (при использовании клавиш с тремя функциональными назначениями).

K — автоматика констант.

M (от англ. memory — память) — регистр памяти (в отечественных микрокалькуляторах П).

M+ — к содержимому регистра памяти прибавляется число на индикаторе (в отечественных микрокалькуляторах П+).

M− — из содержимого регистра памяти вычитается число на индикаторе (в отечественных микрокалькуляторах П−).

M× — содержимое регистра памяти умножается на число на индикаторе (в отечественных микрокалькуляторах П×).

M÷ — содержимое регистра памяти делится на число на индикаторе (в отечественных микрокалькуляторах П÷).

M+x^2 — к содержимому регистра памяти прибавляется квадрат числа на индикаторе (в отечественных микрокалькуляторах П + x^2).

MR (от англ. memory recall) — вызов регистра памяти.

M ↔ X — обмен между числом на индикаторе и числом в регистре памяти (в отечественных микрокалькуляторах П ↔ X).

rad ↔ α° (также рад ↔ град) — переключатель рад/град.

RCl n (от англ. recall n) — вызов n-го регистра памяти (в микрокалькуляторах с несколькими регистрами памяти).

RM (от англ. recall memory) — вызов регистра памяти.

R↓ (от англ. roll down) — циклический сдвиг при бесскобочной записи.

STO n (от англ. storage n) — клавиша n-го регистра памяти.

$\sqrt[x]{Y}$ — корень степени x из числа Y.

X ↔ Y — обмен между числом в регистре X и числом в регистре Y.

Y^x — число Y в степени X.

↑ — клавиша окончания ввода чисел (в микрокалькуляторах с бесскобочной записью).

+/— — изменить знак.

2nd (от англ. second — вторая) — перевод в режим второй совмещенной функции (в микрокалькуляторе с клавишами, имеющими два или три функциональных назначения).

3rd (от англ. third — третья) — перевод в режим третьей совмещенной функции (в микрокалькуляторе с клавишами, имеющими три функциональных назначения).

СЕРДЦЕ И МОТОР

Каждый водитель автомашины согласится с тем, что мотор, который без капитального ремонта позволяет машине пройти 120 000 км, явно обладает высокими достоинствами. После столь дальнего пробега (а длина его так велика, что ее хватило бы на три кругосветных путешествия) — самое время сменить машину!

Допустим, что автомашина находится в руках осторожного водителя, который ездит по городу, соблюдая все правила уличного движения и ограничения скорости. В этом случае средняя скорость движения должна быть около 60 км/ч. Следовательно, срок службы двигателя в этом случае составляет

$$120\,000 : 60 = 2000 \text{ ч.}$$

Это меньше, чем рабочее время одного человека в течение года.

У водителя, совершающего междугородные рейсы по шоссейным дорогам, где скорость движения выше, чем в черте города, время службы двигателя еще меньше.

Будем придерживаться нашего примера, в частности того, что срок службы двигателя составляет 2000 ч. Придя в себя от удивления, что ресурс двигателя столь мал, продолжим вычисления. Выясним, сколько оборотов совершает коленчатый вал.

В инструкциях по эксплуатации автомашин говорится, что оптимальное число его оборотов составляет около 4000 в минуту. (Разумеется, заглянув в технический паспорт, вы можете уточнить эту цифру для своей машины). Следовательно, за срок службы двигателя его вал успевает совершить

$$2000 \cdot 60 \cdot 4000 = 480\,000\,000 \text{ оборотов.}$$

Это уже внушительное число!

А теперь сравним двигатель внутреннего сгорания с «человеческим мотором» — с нашим сердцем.

С момента рождения и до преклонных лет наше сердце совершает в среднем 80 ударов в минуту. У детей оно бьется чаще, у пристарелых — реже. Но у всех людей независимо от их возраста сердце бьется

$$24 \cdot 365 = 8760 \text{ часов в году.}$$

Это втрое больше срока службы двигателя автомашины до капитального ремонта. За один год сердце успевает совершить

$$8760 \cdot 80 \cdot 60 = 42\,048\,000 \text{ ударов,}$$

а за 65 лет число ударов возрастет до

$$42\,048\,000 \cdot 65 = 2\,733\,120\,000.$$

Результат поистине поразительный: хотя сердце работает медленнее, чем коленчатый вал двигателя, тем не менее за 11 лет оно успевает совершить почти столько же сокращений, сколько оборотов совершает коленчатый вал за весь срок службы. А всего за 65 лет человеческой жизни сердце выполняет в

$$2\,733\,120\,000 : 480\,000\,000 \approx 6 \text{ раз}$$

больше рабочих циклов. «Срок службы» сердца превосходит срок службы двигателя в

$$65 \text{ лет} : 2000 \text{ ч} = 65 \cdot 365 \cdot 24 : 2000 = 284{,}7 \text{ раза.}$$

Поскольку человек ежедневно потребляет около 3000 ккал, то сердце 65-летнего человека расходует всего

$$3000 \text{ ккал} \cdot 365 \cdot 65 = 71\,175\,000 \text{ ккал.}$$

При среднем расходе горючего в 8 л на 100 км и при теплотворной способности его 8000 ккал/л, потребляемая двигателем за весь срок службы энергия составляет

$$120\,000 \text{ км} \cdot \frac{8 \text{ л}}{100 \text{ км}} \cdot 8000 \frac{\text{ккал}}{\text{л}} = 76\,800\,000 \text{ ккал.}$$

Это — величина примерно того же порядка, как и у сердца. Хотя «срок службы» сердца примерно в 300 раз больше срока службы автомобильного двигателя, мощность сердца составляет около $^1/_{300}$ его мощности.

БЫСТРЕЕ СВЕТА?

Большинству читателей известна история о том, как состязались в беге еж (равно как и его почтенная супруга) и заяц. Вопреки всем ожиданиям победителем оказался еж. «Должно быть, это правдивая история, иначе ее не стали бы рассказывать», — гласил отчет о необычайном состязании. История, которую мы хотим поведать, должно быть, не менее правдива, иначе ее не было бы в нашей книге.

В 2050 году некий ученый вывел новую разновидность бактерий. Первоначальная длина одной бактерии составляла 0,01 мм. Каждые 20 мин бактерия удваивала свою длину: через 20 мин ее длина достигала 0,02 мм, через 40 мин — 0,04 мм, через час — 0,08 мм. Ученый, преисполненный гордости за свой успех, передал о нем радиограмму своим коллегам, работавшим на космической станции, которая находилась на расстоянии в 21 световой час от Земли.

Какова была длина новой бактерии, когда радиосигнал достиг станции? Для простоты предположим, что начало сигнала совпадает с появлением нового существа.

Прежде всего прикинем, сколько километров отделяет космическую станцию от Земли. Радиосигнал распространяется в пространстве со скоростью

$$300\,000 \text{ км/с} = 3 \cdot 10^5 \text{ км/с} = 3 \cdot 10^8 \text{ м/с} = 3 \cdot 10^{11} \text{ мм/с}.$$

В 21 ч содержится

$$21 \cdot 60 \cdot 60 = 75\,600 \text{ с}.$$

Следовательно, расстояние до космической станции составляет

$$7{,}56 \cdot 10^4 \cdot 3 \cdot 10^{11} = 2{,}27 \cdot 10^{16} \text{ мм},$$

то есть $2{,}27\cdot 10^{10}$ км. Таким образом, за 21 ч радиосигнал успевает проникнуть достаточно далеко в глубь Вселенной.

Что же произойдет за это время с нашей бактерией? Каждый час она трижды удваивает свою длину. За первые 20 мин, пока бактерия успевает вырасти до $^1/_{100}$ мм, электромагнитная волна проходит 360 000 000 км. К тому моменту, когда радиосигнал будет принят на космической станции, бактерия удвоит свою длину $21\cdot 3 = 63$ раза.

Соответствующий член геометрической прогрессии, описывающий рост бактерии, запишем в виде

$$L_{\text{бак}} = L_0 \cdot 2^{63}$$

(см. раздел «Простые и сложные проценты»),

$$L_{\text{бак}} = 0{,}01 \cdot 2^{63}\ \text{мм} = 0{,}01 \cdot 9{,}22 \cdot 10^{18}\ \text{мм} =$$
$$= 9{,}22 \cdot 10^{16}\ \text{мм} = 9{,}22 \cdot 10^{10}\ \text{км}.$$

Итак, наша крохотная бактерия выросла до гигантских размеров. Кто не верит в правильность последнего равенства, может без труда вычислить геометрическую прогрессию

$$0{,}01;\ 2\cdot 0{,}01;\ 2\cdot(2\cdot 0{,}01);\ 2\cdot[2\cdot(2\cdot 0{,}01)];\ \ldots$$

до 64 члена.

При помощи микрокалькулятора, не имеющего клавиши $\boxed{y^x}$, можно без труда возвести 2 в 63 степень, если заметить, что $2^{63} = 2^{64} : 2$ и записать 2^{64} в виде $2^{(2^6)}$; после введения числа 2 нужно 6 раз подряд нажать на клавишу, означающую операцию возведения в квадрат, и полученный результат разделить на 2.

Одно обстоятельство поражает воображение: через 21 ч после возникновения бактерии ее длина (по крайней мере на бумаге) в 4 раза превосходит расстояние, проходимое радиосигналом за то же время. Еще поразительнее то, что столь необычайного эффекта бактерии удается достигнуть несмотря на «медленный» рост.

Если бы в 2050 году действительно был выведен штамм бактерий, обладающих способностью неограниченно расти в длину, если бы концы тела такой бактерии могли двигаться со скоростью, превосходящей предел в 300 000 км/с, устанавливаемый теорией относительности, если бы сама бактерия при этом не превращалась бы в энергию, если бы ... (можно с уверенностью сказать, что здесь найдется еще немало других «если бы»), то «растущие концы» нового существа достигли бы космической станции раньше, чем известие о его создании.

Наш микрокалькулятор просчитал для нас сюжет научно-фантастического рассказа. Что касается чисел, то все здесь обстоит благополучно и вычисления не выводят нас за рамки принятых нами первоначальных допущений. Мы же просто-напросто объявили физические законы «вне закона», отчего и полученный нами результат оказался лишенным смысла.

Однако отнюдь не следует думать, будто из лишенного смысла результата нельзя извлечь никакой пользы. Если предположить, что увеличение длины бактерий, числа луж нефти, количества отходов и мусора или выхлопных газов происходит по геометрической прогрессии, то получится следующая вполне разумная оценка. Пруд, едва заметно (на 0,01, то есть на 1% площади) покрытый водорослями, которые, усваивая питательные вещества из сточных вод, ежедневно удваивают свою длину, через n дней полностью зарастет. В этом случае можем записать уравнение

$$S = 0{,}01 \cdot S \cdot 2^n.$$

Поскольку нас интересует показатель степени n, то правую и левую части уравнения необходимо прологарифмировать, и мы получим

$$\lg S = \lg 0{,}01 + \lg S + n \lg 2,$$

откуда

$$n = -\frac{\lg 0{,}01}{\lg 2} = \frac{2}{\lg 2} = \frac{2}{0{,}301} = 6{,}64 \approx 7.$$

А через сколько дней пруд оказался бы заросшим наполовину?

Составив уравнение

$$0{,}5S = 0{,}01S \cdot 2^n$$

находим, что $n = 5{,}67 \approx 6$.

Следовательно, через 6 дней после начала зарастания пруд еще можно спасти. Днем позже изменить его судьбу к лучшему уже невозможно. Так стремительно происходит зарастание!

РАСЧЕТЫ ДЛЯ АВТОМОБИЛЕЙ

Скорость автомашины мы определяем по спидометру. Никаких дополнительных расчетов нам для этого не требуется. Другое дело, если мы захотим узнать среднюю скорость. Если мы преодолеваем 194 км от Галле до Берлина за 2 ч 30 мин, то средняя скорость на этом участке составляет

$$\frac{194\ \text{км}}{2{,}5\ \text{ч}} = 77{,}6\ \text{км/ч}.$$

Но вот на обратном пути из Берлина в Галле мы попадаем в часы пик, и на преодоление того же расстояния нам требуется 2 ч 45 мин. На этот раз средняя скорость составляет

$$\frac{194\ \text{км}}{2{,}75\ \text{ч}} \approx 70{,}55\ \text{км/ч}.$$

Средняя же скорость на протяжении всего пути Галле — Берлин — Галле равна не

$$\frac{1}{2}(77{,}60 + 70{,}55) = 74{,}07\ \text{км/ч},$$

а

$$\frac{2 \cdot 194\ \text{км}}{(2{,}5 + 2{,}75)\ \text{ч}} \approx 73{,}9\ \text{км/ч},$$

то есть отношению пройденного автомашиной пути ко времени, за которое машина его преодолела. Если во время поездки у нас лопнет приводной ремень вентилятора, то с чисто математической точки зрения представляет интерес вычислить, какой длины должен быть его заменитель. (Разумеется, в действительности мы предусмотрительно захватили с собой запасной ремень.)

На рис. 1 показано все, что необходимо для расчета. Пусть R и r — радиусы, a — расстояние между осями шкивов. Какая часть ремня прилегает к шкиву вплотную, зависит от величины последнего. Радиус R, проведенный в точку, где приводной ремень отстает

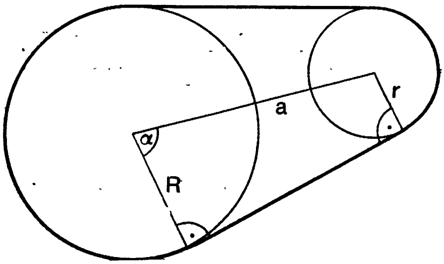


Рис. 1. Данные, позволяющие вычислить длину приводного ремня.

от шкива, образует с отрезком a, соединяющим оси шкивов, угол α. Мы не будем выводить соотношение и лишь приведем его. Длина ремня составляет

$$L = 2\left[\sqrt{a^2 - (R - r)^2} - \alpha (R - r) + \pi R\right].$$

Без микрокалькулятора перед таким выражением чувствуешь себя беспомощным. Оно станет еще более сложным, если мы вздумаем определить величину угла α (выражение для α мы также приводим без вывода):

$$\alpha = \arccos \frac{R - r}{a} \text{ (в радианах).}$$

Подставляя выражение для α в формулу для L, получаем

$$L = 2\left[\sqrt{a^2 - (R - r)^2} - \arccos \frac{R - r}{a} \cdot (R - r) + \pi R\right].$$

Остается лишь подставить размеры, которые имеют R, r и a в двигателе вашей автомашины.

Тем читателям, кто не обзавелся собственной автомашиной, поможет следующий пример. Выберем размеры шкивов и расстояние между их осями так, чтобы

$$R = 2r,$$
$$a = 2R = 4r.$$

Тогда выражение для L упрощается:

$$L = \left[\sqrt{(4r)^2 - (2r-r)^2} - \arccos\frac{2r-r}{4r}\cdot(2r-r) + \right.$$
$$\left. + \pi\cdot 2r\right] = 2\left[\sqrt{16r^2 - r^2} - \arccos\frac{1}{4}\cdot r + 2\pi r\right] =$$
$$= 2\left(\sqrt{15r^2} - \arccos 0{,}25\cdot r + 6{,}28r\right).$$

Те, у кого в микрокалькуляторе имеется клавиша $\boxed{\text{рад}}$ или $\boxed{\text{rad}}$, должны ею воспользоваться, так как угол α необходимо задать в радианах:

$$\arccos 0{,}25 = 1{,}32 \text{ рад.}$$

Если микрокалькулятор работает только с градусами, то необходимо ввести переводный множитель

$$1° = \frac{\pi}{180} = 0{,}017453 \text{ рад.}$$

Тогда

$$\arccos 0{,}25 = 75{,}52°,$$
$$75{,}52\cdot 0{,}017453 = 1{,}32 \text{ рад},$$
$$L = 2(3{,}87r - 1{,}32r + 6{,}28r) = 17{,}66r = 8{,}83R.$$

Мы сначала упростили выражение для L, а затем произвели вычисления. Разумеется, все расчеты можно было бы проделать, используя непосредственно исходное выражение для L.

Предоставляем читателю самостоятельно вычислить длину приводного ремня для его собственной автомашины.

ПО СТОПАМ ЮНОГО ГАУССА

Рассказывают, что в детстве с Гауссом приключилась следующая история.

Однажды в классе, где учился Гаусс, учителю захотелось немного передохнуть, и он предложил ребятам найти сумму всех целых чисел от 1 до 100. Весь класс принялся лихорадочно считать. Гаусс же, поразмыслив несколько минут, тут же написал ответ. Надежды учителя на то, что ему удастся спокойно посидеть, не оправдались. Как Гауссу удалось так быстро решит задачу?

Ему сравнительно быстро удалось заметить следующее. Если суммировать целые числа, идущие подряд от 1 до n, то первое и последнее, второе от начала и второе от конца и т. д. числа образуют одинаковые суммы, равные $n+1$, а всего таких пар $n/2$. Гауссу это стало ясно из «укороченного» примера с четырьмя последовательными целыми числами:

$$\underbrace{1+\underbrace{2+3}_{5}+4}_{5}=10=\frac{4}{2}\cdot(4+1).$$

Поскольку подмеченная закономерность должна выполняться и при $n=100$, то он сразу же получил ответ задачи, заданной учителем:

$$\frac{100}{2}\cdot(100+1)=5050.$$

Изменим теперь несколько постановку задачи и спросим: чему равна сумма всех нечетных чисел от 1 до 23? Быстро суммируя, находим: $1+3+\ldots+23=$ $=144$. Одновременно подсчитываем слагаемые. Их оказывается 12.

А теперь спросим себя, чему равна сумма четных чисел от 2 до 24. Сложение 12 четных чисел дает 156. Заметим, что

$$\frac{12}{2}\cdot(1+23)=144,$$

$$\frac{12}{2}\cdot(2+24)=156.$$

Отсюда мы выводим общую зависимость: сумму s первых n членов арифметической прогрессии

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n,$$

то есть отрезок ряда, состоящий из n слагемых с постоянной разностью между любыми двумя соседними членами, можно вычислить по формуле

$$s = \frac{n}{2}(a_1 + a_2),$$

где n — число членов, a_1 — первый член и a_n — последний член.

А чему равна сумма всех четных чисел от **16** до 50? Прежде чем ответить на этот вопрос, нужно немного подумать. Отрезок ряда содержит

$$\frac{50}{2} - \frac{14}{2} = 25 - 7 = 18$$

членов, поэтому

$$s = \frac{18}{2}(16 + 50) = 594.$$

Итак, мы убедились, что формула для суммы s арифметической прогрессии остается в силе и в том случае, если число членов нечетно.

В заключение рассмотрим еще один вариант задачи Гаусса. Чему равна сумма всех целых чисел от 19 до 200? Число членов этой арифметической прогрессии равно 200 — 18 = 182. Зная это, находим ее сумму:

$$s = \frac{182}{2} \cdot (19 + 200) = 19\,929.$$

Решая подобные задачи, необходимо внимательно следить за тем, что, собственно, требуется найти: сумму всех чисел или же сумму всех четных (нечетных) чисел.

ГРАМПЛАСТИНКА В ЧИСЛАХ

Если под рукой есть микрокалькулятор, то «расчет» грампластинки — одно удовольствие. Бороздки на грампластинке образуют спираль (от значительных поперечных колебаний мы отвлекаемся).

Расчет спирали без микрокалькулятора — задача трудоемкая, требующая немалого времени.

На нашей грампластинке оттиснута *архимедова* спираль, то есть расстояние между двумя соседними бороздками всюду одинаково (повторяем, что мы не учитываем значительных поперечных колебаний, превращающих спираль в зигзагообразную линию). На один миллиметр радиуса грампластинки приходится около 9 бороздок. Следовательно, расстояние между точками, лежащими на дне соседних бороздок, составляет около $k = 1/9 = 0{,}11$ мм.

Предположим, что внешняя бороздка (ближайшая к краю) проходит на расстоянии 140 мм, а внутренняя (ближайшая к центру) — на расстоянии 70 мм от центра грампластинки. Разумеется, от пластинки к пластинке эти числа могут несколько изменяться.

Следует заметить, что, например, витки раковин улиток и сжатых спиральных пружин имеют форму логарифмической спирали. Расстояние между соседними витками такой спирали возрастает по мере удаления от исходной точки. Для грампластинок логарифмическая спираль была бы неудобна. Но вернемся к нашей грампластинке. О ней нам пока известно, что

$$r_{\max} = 140 \text{ мм}, \quad r_{\min} = 70 \text{ мм}, \quad k = 0{,}11 \text{ мм}.$$

Этих данных еще недостаточно для того, чтобы мы могли рассчитать спираль. Необходимо еще знать масштаб a, поскольку расстояние между двумя соседними витками спирали составляет

$$k = 2\pi \cdot a,$$

откуда

$$a = \frac{k}{2\pi} = 0{,}02 \text{ мм}.$$

На рис. 2 мы выбрали $a = 2$ мм, поскольку в противном случае витки спирали были бы едва различимы.

Прикинем быстро (в этом — преимущество микрокалькулятора) все данные для спирали с $a = 2$ мм. В полярных координатах уравнение архимедовой спирали имеет вид

$$r = a\varphi.$$

Угол φ измеряется в радианах. Если у нашего микрокалькулятора нет клавиши $\boxed{\text{рад}}$, то необходимо вычислить переводные множители:

$$1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ рад},$$

$$1 \text{ рад} = 57^\circ 17' 45'' = 57{,}2957795 \ldots {}^\circ.$$

Вычислим r при 90°. Сначала необходимо перевести угол 90° в радианы:

$$90^\circ = \frac{\pi}{180} \cdot 90 = \frac{\pi}{2} \text{ рад}.$$

Следовательно,

$$r = a \cdot \varphi = \frac{2 \cdot \pi}{2} = 3{,}14 \text{ мм}.$$

Сверим полученный результат с рис. 2. Угол 90° следует отсчитать от положительного направления

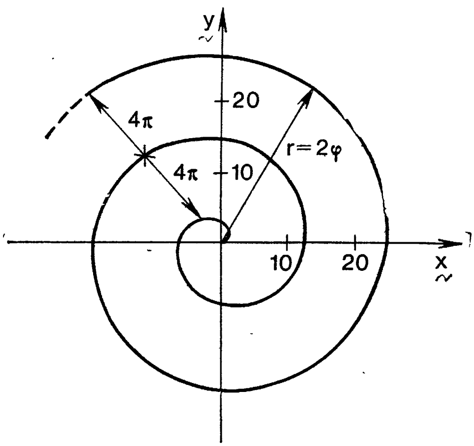


Рис. 2. Архимедова спираль: $r = a\varphi$ (в полярных координатах) при $a = 2$ мм.

оси x против часовой стрелки (так принято отсчитывать углы у математиков). Действительно, точка пересечения спирали с положительным направлением оси y отстоит от начала координат на 3,14 мм. Если под рукой имеется микрокалькулятор, позволяющий переходить от полярных координат к прямоугольным, то каждую точку спирали можно задать в обеих системах координат. Следующие формулы позволяют сделать то же самое при помощи любого микрокалькулятора, если у него имеются клавиши для вычисления тригонометрических функций:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad x = r \cdot \cos\varphi,$$

$$\varphi = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}, \quad y = r \cdot \sin\varphi.$$

Убедившись в том, что архимедову спираль можно весьма просто задать в полярных координатах, вернемся к нашей грампластинке. Нам бы хотелось знать длину бороздки. Длина s спирали от центра до точки φ составляет

$$s = \frac{a}{2}\left(\varphi\sqrt{1+\varphi^2} + \operatorname{Arsh}\varphi\right),$$

где $\operatorname{sh}\varphi = (e^{\varphi} - e^{-\varphi})/2$ — гиперболический синус, а $\operatorname{Arsh}\varphi = \ln\left[\varphi + \sqrt{1+\varphi^2}\right]$ — обратная ему функция (ареасинус). Следовательно,

$$s = \frac{a}{2}\left\{\varphi\sqrt{1+\varphi^2} + \ln\left[\varphi + \sqrt{1+\varphi^2}\right]\right\}.$$

Угол 360°, если его выразить в радианах, равен

$$360 \cdot \frac{\pi}{180} = 2\pi.$$

Это позволяет преобразовать выражение для s к более приятному виду:

$$s = \frac{a}{2}\left\{(2\pi\sqrt{1+4\pi^2}) + \ln\left[2\pi + \sqrt{1+4\pi^2}\right]\right\}.$$

Вычислив s, мы получили бы очень маленькое значение: 0,425 мм. Такова длина первого витка вокруг центра грампластинки. Но вблизи ее центра никаких витков нет. Спираль начинается лишь на расстоянии 70 мм от центра. Следовательно, после каждого оборота мы должны увеличивать угол φ на 2π.

Прикинем: на 1 мм умещается 9 витков,

на 70 мм — 630 витков,

но они не оттиснуты на грампластинке,

на 140 мм умещается 1260 витков,

Чтобы найти суммарную длину витков, мы должны вычислить

$$s = s_{1260} - s_{630}.$$

Для спирали, не нанесенной на грампластинку, получаем

$$s_{630} = \frac{a}{2}\{630 \cdot 2\pi \sqrt{1 + 630^2 \cdot 4\pi^2} +$$

$$+ \ln[630 \cdot 2\pi + \sqrt{1 + 630^2 \cdot 4\pi^2}]\} =$$

$$= \frac{0{,}02}{2} \cdot 15668993{,}43 \approx 156689{,}93 \text{ мм},$$

а для спирали, которая заполнила бы всю грампластинку, —

$$s_{1260} = \frac{a}{2}\{1260 \cdot 2\pi \sqrt{1 + 1260^2 \cdot 4\pi^2} +$$

$$+ \ln[1260 \cdot 2\pi + \sqrt{1 + 1260^2 \cdot 4\pi^2}]\} = 626759{,}46 \text{ мм}.$$

Следовательно, суммарная длина всех бороздок составляет

$$s = (626759{,}46 - 156689{,}93) = 470069{,}53 \text{ мм},$$

то есть около 470 м.

Чтобы убедить читателя в том, что при определенных обстоятельствах более простая приближенная формула приводит к вполне удовлетворительному результату, произведем следующий расчет.

При больших φ (а углы $\varphi = 630 \cdot 2\pi$ или $\varphi = 1260 \times \times 2\pi$ с достаточным основанием можно считать большими) для длины спирали справедлива упрощенная формула

$$s = \frac{a}{2} \cdot \varphi^2.$$

Пользуясь ею, получаем

$$s_{630} = \frac{0{,}02}{2} \cdot (630 \cdot 2\pi)^2 = 156689{,}8 \text{ мм}$$

и

$$s_{1260} = \frac{0{,}02}{2} \cdot (1260 \cdot 2\pi)^2 = 626759{,}4 \text{ мм},$$

а суммарная длина всех бороздок оказывается равной

$$626759{,}4 - 156689{,}8 = 470069{,}6 \text{ мм},$$

то есть с точностью до миллиметра совпадает с ранее вычисленной длиной.

Смеем надеяться, что небольшое расхождение в длине бороздок, не превосходящее десятых или даже сотых долей миллиметра, не помешает нам с удовольствием прослушать грампластинку.

КАКОЙ ВЫСОТЫ ДЖОМОЛУНГМА?

Еще в те времена, когда Джомолунгма не была покорена, ее положение и высоту удалось определить с достаточной точностью. Измерения были произведены под руководством некоего господина Эвереста.

Разумеется, читателю в общих чертах известно, как работают геодезисты. Они измеряют длину какого-то базисного отрезка и углы, образуемые отрезком и направлениями на острие шпиля или конек крыши самого высокого здания в округе. Обычные приборы позволяют точнее измерять углы, чем отрезки (в отличие от радарной техники, но в нашем случае мы будем пользоваться только оптическими приборами).

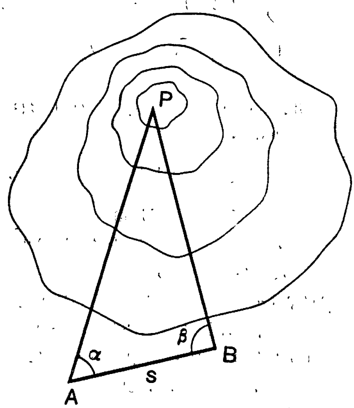


Рис. 3. Определение положения точки P (s — базис). Вид сверху.

Итак, рабочая группа господина Эвереста построила где-то у подножия Гималаев базисный отрезок. Из концов базиса геометры взяли направление на вершину горы и измерили углы. Зная углы α и β (рис. 3), они уже могли определить положение горы (хотя необходимые для этого вычисления далеко выходят за рамки известных со школьной скамьи методов решения треугольников).

Измерение углов в вертикальной плоскости несколько непривычно (рис. 4). Высота горы над уровнем базисного отрезка

$$h = s \cdot \frac{\sin\alpha \sin\beta}{\sin(\beta - \alpha)}.$$

Предположим, что длина s базиса равна 1000 м (если бы герр Эверест был англичанином, то длину базиса измеряли бы в милях). Для простоты условимся считать, что базис выбран на уровне моря. Какие углы были получены в результате измерений?

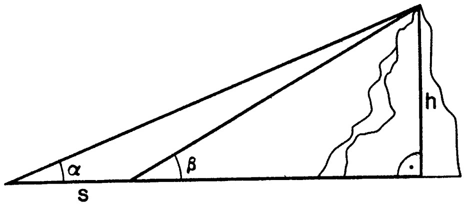


Рис. 4. Определение высоты h горы по результатам визирования ее вершины из концов базисного отрезка.

Вот тут-то наш микрокалькулятор снова оказывается поистине незаменимым: поскольку результаты измерений неизвестны, величины углов α и β нам придется установить методом проб и ошибок. Мы знаем лишь конечный результат: высота горы составляет около 8800 м.

Приступая к оценке углов, не следует упускать из виду следующие соображения:

1. Углы должны быть малыми, так как Джомолунгма целиком лежит в Гималаях, а мы находимся у ее подножия.

2. Разность $\beta - \alpha$ углов также должна быть малой.

Предоставляем читателю перепробовать все мыслимые комбинации величин, а сами остановим свой выбор на следующих значениях углов:

$$h = 1000\ \text{м} \cdot \frac{\sin 6^\circ \cdot \sin 5{,}93^\circ}{\sin 0{,}07^\circ} = 8839{,}26\ \text{м}.$$

Может быть, читателю удалось подобрать другие углы?

Как далеко отстоит базис от Джомолунгмы? Поскольку высота $h = 8840$ м и угол $\alpha = 6^\circ$ известны, то найти расстояние от базиса до горы не составляет труда:

$$E = \frac{h}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{8\,840\ \text{м}}{\operatorname{tg} 6^\circ} = 84\,107\ \text{м} = 84{,}1\ \text{км}.$$

Это вполне разумное значение.

Разумеется, далеко не все измерения носят столь волнующий характер, как измерения Джомолунгмы. Однако и на полях, и на городских улицах довольно часто можно видеть людей с теодолитами и мерными рейками в руках.

Гляда в трубу теодолита на мерную рейку, геодезист видит между двумя параллельными штрихами отрезок рейки длиной L. Одновременно он измеряет угол α между визирной линией и горизонталью, если местность имеет уклон или подъем. Зная L и α, геодезист вычисляет расстояние по горизонтали

$$a = 100 \cdot L \cdot \cos^2 \alpha$$

и разность высот

$$h = 50 \cdot L \cdot \sin^2 \alpha.$$

В множители 100 и 50 включены постоянные прибора.

На плоскости $\alpha = 0^\circ$ и $\cos 0^\circ = 1$, поэтому величина $100L$ совпадает с расстоянием по горизонтали. Наоборот, $\sin 0^\circ = 0$, поэтому $h = 0$.

Для высокоточных измерений (C — постоянная прибора)

$$a = L \cdot C \cdot \cos^2 \alpha - \frac{L}{4C} \cdot \sin^2 \alpha.$$

Вычислять значения выражения, стоящего в правой части, без микрокалькулятора — задача почти непосильная.

В ПОМОЩЬ ЛЮБИТЕЛЯМ СКАТА

Популярность игры в скат объясняется двумя причинами. Во-первых, лишь при определенном везении игроку удается получать «хорошие» карты на протяжении сколько-нибудь продолжительного времени, во-вторых, правила игры позволяют при известной сноровке выгодно использовать различные комбинации карт. Например, даже имея на руках «совсем плохие» карты, игрок может выиграть нулевой открытый розыгрыш.

Страстные любители игры в скат утверждают, что ни одна партия не похожа на другую. Так ли это? Чтобы ответить на вопрос, обратимся к комбинаторике. Предположим, что в игре участвуют только три карты: валет (В), дама (Д) и король (К). При сдаче их трем игрокам карты могут распределиться следующим образом:

ВДК, ВКД, ДКВ, ДВК, КДВ, КВД.

Каждый из трех элементов может дважды стоять на первом месте, а два других оказываются при этом на втором и третьем местах. Следовательно, общее число перестановок из трех элементов равно $3 \cdot 2 = 6$. Из четырех карт можно было бы составить

$$4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$$

перестановки. Произведение $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$ у математиков принято обозначать $n!$ (читается «эн факториал»). Таким образом,

$$4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24.$$

Прежде чем приступить к вычислению 32!, необходимо учесть следующую особенность игры в скат. В нее играют втроем, и каждый из трех игроков получает по 10 карт, а в качестве «четвертого игрока» участвует так называемый ренонс, или скат, из двух карт. Число возможных комбинаций в скате составляет поэтому

$$Z = \frac{32!}{10!\,10!\,10!\,2!}.$$

Но

$$32! = 2{,}63 \cdot 10^{35},$$

$$10! = 3\,628\,800,$$

$$2!\,(10!)^3 = 9{,}56 \cdot 10^{19},$$

поэтому

$$Z = 2{,}75 \cdot 10^{15}.$$

Разумеется, завзятому любителю игры в скат интересно узнать, удастся ли ему сыграть по разу все Z партий. Предположим, что вместе с тасованием карт партия продолжается 5 мин. За час можно сыграть 12 партий. Игрок-фанатик, играя по 16 ч в сутки, успеет сыграть за день 192 партии, что составляет 70080 партий в год. Чтобы сыграть все мыслимые партии, такому игроку потребовалось бы

$$2{,}75 \cdot 10^{15} : 70\,080 = 3{,}92 \cdot 10^{10} \text{ лет.}$$

Теоретически не исключено, что в один прекрасный день человечеству взбредет в голову забросить все дела и приняться за игру в скат. Если считать, что численность населения земного шара составляет 5 млрд. человек, то за год будет сыграно

$$70\,080 \cdot 5\,000\,000\,000 : 3 = 1{,}168 \cdot 10^{14} \text{ партий,}$$

поскольку, как известно, в скат всегда играют втроем. Чтобы сыграть все варианты партий, человечеству потребуется

$$2{,}75 \cdot 10^{15} : 1{,}168 \cdot 10^{14} = 23{,}54 \text{ года.}$$

Итак, все мыслимые варианты партий в скат можно было бы переиграть примерно за 23,5 года совместными усилиями населения всего земного шара. (Должно быть, инопланетяне сочли бы такой период повального увлечения скатом подходящим для более близкого знакомства с нами.)

СРЕДНЕЕ И РАЗБРОС

В классе учатся 30 мальчиков и девочек. Если их средний рост составляет 1,60 м, а средний вес достигает 62,5 кг, то это отнюдь не означает, что в классе найдется хотя бы один ученик (или ученица), чей рост и вес в точности совпадали бы со средними показателями. Между тем кое-кто из создателей мод для юношества, составляя план выпуска одежды или обуви, находится в плену именно этого пагубного заблуждения и производит значительную часть продукции, руководствуясь средним.

При всей своей важности во многих отношениях среднее отражает истинное положение дел лишь в определенных пределах: не менее существенно знать, сколь велик разброс относительно среднего. Так мы знакомимся с обоими важнейшими понятиями математической статистики: средним арифметическим M (математики называют эту величину математическим ожиданием, а техники — просто средним) и стандартным отклонением s, характеризующим разброс величин относительно M.

Среднее арифметическое вычисляют по формуле

$$M = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n},$$

где $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — измеренные значения, n — число измерений. Широкое распространение, которое получила эта формула, объясняется отчасти ее простотой. Вычислить стандартное отклонение s не так просто: для этого необходимо воспользоваться формулой

$$s = \sqrt{\frac{\Sigma (x_i - M)^2}{n - 1}},$$

то есть составить разности между измеренными значениями и их средним арифметическим, возвести их в квадрат, просуммировать квадраты и, разделив на $n - 1$, извлечь из полученного результата квадратный корень. Если n очень велико, то сложение приходится производить многократно. В подобных случаях удобнее поступать иначе.

Начнем с примера. Рост каждого из 30 школьников впишем в таблицу:

1,43	1,48	1,62	1,65	1,69
1,44	1,50	1,63	1,67	1,69
1,46	1,52	1,64	1,67	1,70
1,46	1,53	1,64	1,68	1,70
1,47	1,55	1,64	1,68	1,70
1,47	1,55	1,65	1,68	1,71

Чтобы сократить вычисление среднего арифметического M и стандартного отклонения s, прежде всего произведем разбиение на классы. В один класс включим школьников, рост которых заключен между 1,40 и 1,44 м, в другой — тех, чей рост колеблется от 1,45 до 1,49 м и т. д. (При разбиении на классы удобнее всего воспользоваться линованной бумагой). Средние арифметические x_m по классам составляют соответственно 1,42, 1,47, 1,52 м и т. д.

Затем каждому классу мы присвоим номер. Для этого предположим, что среднее арифметическое по всей выборке (средний рост 30 школьников) равно некоторому числу, и класс, которому принадлежит это число, назовем нулевым (ошибка в выборе среднего арифметического по всей выборке никак не сказывается на окончательном результате!). Все остальные классы нумеруются «по росту» целыми числами, положительными, если класс «выше» нулевого, и отрицательными, если класс «ниже» нулевого. Как выглядит разбиение на классы в нашем примере, показано в следующей таблице.

Класс	Среднее по классу x_m	Абсолютная частота h_m	Номер класса m	mh_m	$m^2 h_m$
1,40—1,44	1,42	2	−3	−6	18
1,45—1,49	1,47	5	−2	−10	20
1,50—1,54	1,52	3	−1	−3	3
1,55—1,59	1,57	2	0	0	0
1,60—1,64	1,62	5	+1	+5	5
1,65—1,69	1,67	9	+2	+18	36
1,70—1,74	1,72	4	+3	+12	36
Суммы		$n=30$		$A=+16$	$B=118$

Принятое нами значение среднего арифметического по всей выборке $\bar{x}$ $(=1,57$ м) и ширина класса d $(=0,05$ м) связаны с истинным значением среднего арифметического M соотношением

$$M=\bar{x}+\frac{d\cdot A}{n}=1,57+\frac{0,05\cdot 16}{30}=1,60 \text{ м}$$

и

$$s=d\cdot\sqrt{\frac{1}{n-1}\cdot\left(B-\frac{A^2}{n}\right)}=$$

$$=0,05\sqrt{\frac{1}{29}\left(118-\frac{16^2}{30}\right)}=0,097\approx 0,1 \text{ м.}$$

Более точные значения среднего арифметического и стандартного отклонения: $M=1{,}5967$ и $s=0{,}0958$. В странах английского языка мерой разброса значений принято считать не стандартное отклонение s, а так называемую дисперсию s^2.

Под средним мы почти всегда имеем в виду среднее арифметическое. Однако в некоторых случаях бывают удобнее другие средние.

Например, если полученные в результате проведенных измерений значения колеблются относительно среднего несимметрично, то есть если их распределение смещено, разумно ввести медиану — то́ из наблюденных значений, которое делит все распределение на две равные по величине части (каждая половина содержит 50% исследуемых объектов). В примере со школьниками «сечение» проходило бы между пятнадцатым и шестнадцатым учеником, если весь класс выстроить по росту. Как показывает составленная нами таблица, медиана в этом случае равна 1,64 м.

Из других средних нельзя не упомянуть о среднем геометрическом и среднем гармоническом. Среднее геометрическое вычисляется по формуле

$$M_G=\sqrt[n]{x_1\cdot x_2\cdot\ldots\cdot x_n},$$

где $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — (положительные) значения измеряемой величины, а n — число измерений. Это среднее используется главным образом в тех случаях, когда необходимо получить представление о средних данных, характеризующих процесс роста, для описания которого используются относительные показатели, например доли в процентах.

Пусть за последние три года прирост чего-то составил соответственно 5%, 8% и 8% (каждый раз по сравнению с предыдущим годом). По нашей формуле средний прирост этого таинственного «чего-то» за три года составляет

$$\sqrt[3]{5\cdot 8\cdot 8}=\sqrt[3]{320}=6{,}84\%.$$

Наконец, существует среднее гармоническое

$$M_H=\frac{n}{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\ldots+\frac{1}{x_n}}.$$

Оно служит для вычисления средних значений скоростей, плотностей и других величин, определяемых отношениями.

Рассмотрим, например, следующую задачу. Предположим, что мы едем по шоссе со скоростью 60 км/час и на пути нам встречается подъем. Преодолевая его, мы движемся со скоростью 30 км/час. С какой скоростью нам следует ехать на спуске, чтобы средняя скорость движения осталась неизменной? Те, кто считают, будто нам следует на спуске развить скорость 90 км/час, заблуждаются. Если же в приведенную выше формулу подставить $M_H = 60$, $n = 2$, $x_1 = 30$, то получится, что скорость x_2 должна быть бесконечно большой, а движение с такой скоростью возбраняется правилами дорожного движения.

Наша формула для среднего гармонического полностью исключает случай, когда средняя скорость вдвое больше одной из усредняемых скоростей.

Если бы мы поднимались в гору со скоростью 30 км/час, а спускались под гору со скоростью 90 км/час, то

$$M_H = \frac{2}{\frac{1}{30} + \frac{1}{90}} = 45 \text{ км/ч}.$$

Вот какой оказалась бы в действительности наша средняя скорость на участке шоссе с подъемом и спуском.

ЧИСЛА ФИБОНАЧЧИ

Итальянский математик Леонардо Фибоначчи (1180—1250) обнаружил замечательную числовую последовательность: ее первый член равен единице, затем идет еще одна единица, а каждый следующий член равен сумме двух предыдущих. Вот как выглядят несколько первых чисел:

$$1;\ 1;\ 2(=1+1);\ 3(=2+1);\ 5(=3+2);\ 8(=5+3);\ 13(=8+5) \text{ и т. д.}$$

Насколько просто сформулировать закон образования последовательности Фибоначчи на словах, настолько сложно выглядит формула для общего члена последовательности. Действительно, n-е число Фибоначчи F_n можно представить в виде

$$F_n = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}.$$

Если мы захотим вычислять по этой формуле члены последовательности с большими номерами, то без микрокалькулятора нам просто не обойтись.

Результат вычислений необходимо округлять до целого числа. Невязка возникает из-за ошибок округления микрокалькулятора, происходящих главным образом при извлечении корня.

В разделе «Золотое сечение» мы покажем, что корни квадратного уравнения для отношения длин двух отрезков, известного под названием «золотое сечение», совпадают с числами $q = \frac{1 \pm \sqrt{s}}{2}$.

Возможно, у читателя возникла смутная догадка о том, что числа Фибоначчи каким-то образом связаны с «математической эстетикой». Ваша догадка верна, дорогой читатель! Математики уже давно обнаружили, что отношение двух последовательных чисел Фибоначчи дает довольно хорошее приближение к величине золотого сечения. Это приближение тем лучше, чем больше номера двух последовательных чисел Фибоначчи.

В этом вы можете убедиться и сами:

$$8:5=1{,}6;$$

$$13:8=1{,}625;$$

$$21:13=1{,}61;$$

$$34:21=1{,}62 \text{ и т. д.}$$

Биологам также приходится иметь дело с числами Фибоначчи. Например, ботаники установили, что угол между двумя соседними листами, расположенными вокруг стебля, постоянен для каждого вида растений. Чаще всего встречаются «углы дивергенции», составляющие следующие доли от 360°:

$$\frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{2}{5},\ \frac{3}{8},\ \frac{5}{13},\ \frac{8}{21}\ \text{и т. д.}$$

Числители и знаменатели этих дробей представляют собой не что иное, как числа Фибоначчи.

Аналогичные закономерности обнаружены также в строении пчелиных сот и паутины.

ИЗ ЛЮБВИ К π

Древние вавилоняне (жившие за несколько тысяч лет до н. э.) довольствовались тем, что заменяли важную геометрическую величину π (отношение длины окружности к ее диаметру) ее приближенным значением, равным 3. Такое приближение отвечало потребностям строительного искусства и землемерия того времени.

В одном древнеегипетском папирусе для числа π приводится гораздо более точное приближение 3,1605. Около 1600 г. голландский математик Лудольф ван Цейлен вычислил 35 знаков числа π после запятой. В прошлом веке англичанин Уильям Шенкс затратил изрядную часть своей жизни на вычисление π с более чем семьюстами знаками.

Вполне понятно, что в последующие десятилетия не нашлось желающих проверить правильность вычислений Шенкса. В то же время возникло и стало все более крепнуть подозрение, что в выкладки Шенкса где-то вкралась ошибка. Дело в том, что теоретически все цифры от 0 до 9 должны встречаться в десятичном разложении числа π с одинаковой частотой. В разложении же, полученном Шенксом, цифра 7 встречалась реже, чем следовало из статистических соображений.

Лишь с появлением современных ЭВМ появилась возможность вновь вернуть число π к жизни ценой сравнительно скромных затрат. В 1961 г. ЭВМ понадобилось менее четырех с половиной часов, чтобы вычислить более 100 000 знаков числа π. В основу программы была положена формула Гаусса

$$\pi = 48 \operatorname{arctg} \frac{1}{18} + 32 \operatorname{arctg} \frac{1}{57} - 20 \operatorname{arctg} \frac{1}{239},$$

а значения арктангенса вычислялись при помощи разложения в степенной ряд

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots .$$

Оказалось, что Шенкс действительно допустил ошибку в 528-м знаке. Принятый им метод вычислений был таков, что и все последующие знаки оказались ошибочными.

Выяснилось также, что теория находится в полном согласии с практикой: все цифры в вычисленном отрезке десятичного разложения числа π встречались приблизительно с одной и той же частотой, то есть каждая цифра появлялась около 10 000 раз.

Естественно напрашивается вопрос, сколько знаков числа π необходимо знать для практических расчетов. Если у вашего микрокалькулятора нет клавиши $\boxed{\pi}$, то придется загрузить вашу память. Дробь $^{355}/_{113}$ дает приближение числа π с ошибкой меньше, чем $3 \cdot 10^{-7}$. Если связный текст вы запоминаете лучше, чем «голые» числа, то рекомендуем вам запомнить двустишие, которое сохранилось в нашей памяти еще со школьной скамьи:

Кто и шутя и скоро пожелает
Пи узнать, число уж знает.

Вероятно, вы уже заметили, что поэтические достоинства этих строк не слишком велики. Тем не менее при всем своем несовершенстве школьный стишок дает 10 знаков числа π после запятой. Число букв в словах совпадает с цифрами десятичного разложения числа π:

3,1415926525.

Если вы сочтете достаточными девять знаков после запятой, то это будет означать, что разность между приближенным и истинным значением π меньше пяти десятимиллиардных, то есть $\Delta\pi < 5 \cdot 10^{-10}$.

Проверим, как сказывается при вычислении такая ошибка в начальных данных на окончательном ответе. Возьмем окружность радиусом 1 км. (Для технических сооружений больших размеров прецезионные измерения не имеют смысла.) Длина нашей окружности равна $U = 2\pi R = \pi \cdot 2 \cdot 10^3$ м, а максимальная ошибка при вычислении ее достигает величины

$$\Delta U = 2 \cdot 10^3 \Delta\pi = 2 \cdot 10^3 \cdot 5 \cdot 10^{-10} =$$
$$= 10^{-6} \text{ м} = 1 \text{ микрон}.$$

Следовательно, зная π с ошибкой $\Delta\pi < 5 \cdot 10^{-10}$, мы найдем длину окружности диаметром ровно 2 км с точностью до $^1/_{1000}$ мм. Кому захочется проводить повторные измерения?

ЕМКОСТЬ ЕМКОСТИ

В 1616 г. астроном и математик Иоганн Кеплер опубликовал довольно объемистый трактат о стереометрии винных бочек. И хотя есть подозрение, что в канун тридцатилетней войны основной интерес представлял рациональный выбор конструкции пороховой бочки, название кеплеровского труда «Новая стереометрия винных бочек» однозначно указывает на бочки с вином. Желая идти в ногу со временем, мы займемся определением вместимости пивных бочек.

Формула

$$V \approx \frac{H}{6}(S_0 + 4S_1 + S_2),$$

где H — высота, S_0 — площадь нижнего днища, S_1 — площадь срединного поперечного сечения, S_2 — площадь верхнего днища (измеренные изнутри) позволяет вычислить объем бочкообразного тела с достаточно высокой точностью. Если принять, как это обычно бывает, что площади верхнего и нижнего днища равны, то есть что

$$S_0 = S_2 = \frac{\pi D_0^2}{4},$$

и что все поперечные сечения имеют форму круга, то после некоторых преобразований нашу приближенную формулу можно записать в виде

$$V = \frac{\pi \cdot H}{12} \cdot D_0^2 \left[1 + 2\left(\frac{D_1}{D_0}\right)^2\right].$$

Предположим, что расстояние между днищами (измеренное изнутри бочки) равно 60 см, внутренний диаметр срединного сечения равен 50 см, а внутренние диаметры верхнего и нижнего днища составляют 40 см.

Объем нашей бочки равен

$$V = \frac{\pi \cdot 0{,}6}{12} \cdot 0{,}16 \cdot [1 + 21{,}25^2] = 0{,}1037\ \text{м}^3 \approx 104\ \text{л}.$$

Не будем спорить о том, будет ли ее емкость в действительности на несколько литров больше или меньше, поскольку формула, которой мы воспользовались, дает лишь первое приближение.

Она представляет собой частный случай предложенного Кеплером правила для вычисления емкости бочек:

$$\int\limits_{x_0}^{x_0+2h} f(x)\,dx \approx \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2).$$

В левой части этого приближенного равенства уже ничто не напоминает о емкости бочек: h означает величину шага (в рассматриваемом нами случае $h = H/2$). Для тех, кому не доводилось изучать в школе «высшую математику», скажем, что определенный интеграл

$$\int\limits_{x_0}^{x_0+2h} f(x)\,dx$$

(читается: интеграл от x_0 до $x_0 + 2h$) означает площадь криволинейной трапеции, ограниченной сверху кривой $y = f(x)$, снизу — отрезком оси x, заключенным между x_0 и $x_0 + 2h$, слева — ординатой $f(x_0)$ и справа — ординатой $f(x_0 + 2h)$ (рис. 5). Правая часть приближенного равенства показывает, что кривая $y = f(x)$ заменена дугой параболы, проходящей через точки $(x_0,\ y_0 = f(x_0))$, $(x_0 + h,\ y_1 = f(x_0 + h))$ и $(x_0 + 2h,\ y_2 = f(x_0 + 2h))$. Через три точки всегда можно провести параболу, причем только одну.

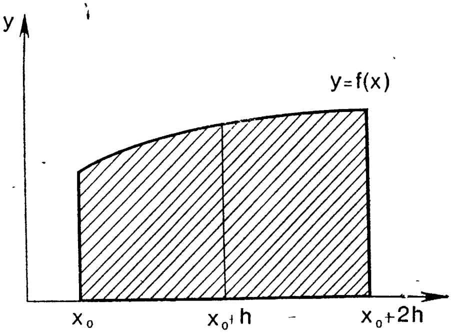


Рис. 5. Криволинейная трапеция. Ее площадь можно вычислить по формуле, предложенной Кеплером для вычисления емкости винных бочек.

Предположим, что мы хотим найти площадь под кривой $f(x) = \sqrt{x^2 + 3}$ на отрезке оси x от $x = 0$ до $x = 4$, то есть вычислить интеграл

$$\int_0^4 \sqrt{x^3 + 3}\, dx.$$

По формуле Кеплера

$$S \approx \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2),$$

где $2h = 4$, то есть $h = 2$; $y_0 = \sqrt{0 + 3} = \sqrt{3}$; $y_1 = \sqrt{4 + 3} = \sqrt{7}$; $y_2 = \sqrt{16 + 3} = \sqrt{19}$. Следовательно, площадь интересующей нас криволинейной трапеции равна в единицах площади

$$S \approx \frac{2}{3}\left(\sqrt{3} + 4\sqrt{7} + \sqrt{19}\right) = 11{,}116.$$

Для сравнения приведем точное значение интеграла (или площади):

$$S = 11{,}0788.$$

Ошибка составляет лишь 0,3%.

В свою очередь формулу Кеплера можно рассматривать как частный случай общего метода приближенного вычисления определенных интегралов, разработанного английским математиком Томасом Симпсоном (1710—1761).

Основная идея метода Симпсона состоит в разбиении произвольной криволинейной трапеции, площадь которой требуется вычислить, на сколь угодно большое число параболических трапеций, и в применении к каждой из них формулы Кеплера. Чем меньше шаг интегрирования, тем больше число параболических сегментов, заменяющих заданную функцию. Это позволяет усовершенствовать формулу для приближенного вычисления определенных интегралов следующим образом:

$$\int\limits_{x_0}^{x_0+n\cdot 2h} f(x)\,dx \approx \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + \\ + 2y_4 + \ldots + 4y_{2n-1} + y_{2n}).$$

Симметрия выражения, стоящего в скобках, не требует более подробных пояснений.

Воспользуемся новой формулой для вычисления интеграла

$$\int\limits_0^4 \sqrt{x^2+3}\,dx.$$

Интервал, по которому производится интегрирование, мы разобьем на 4 подынтервала. Следовательно, нам понадобится знать 5 значений подынтегральной функции. Это соответствует $n = 2$ и $h = 1$, а формула Симпсона преобразуется к виду

$$S \approx \frac{1}{3}\cdot(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + y_4).$$

При $y_0 = \sqrt{0+3} = \sqrt{3}$, $y_1 = \sqrt{1+3} = 2$, $y_2 = \sqrt{4+3} = \sqrt{7}$, $y_3 = \sqrt{9+3} = \sqrt{12}$ и $y_4 =$

$= \sqrt{16+3} = \sqrt{19}$ получаем:

$$S \approx \frac{1}{3}(\sqrt{3} + 8 + 2\sqrt{7} + 4\sqrt{12} + \sqrt{19}) =$$
$$= 11{,}079\ldots \approx 11{,}08.$$

Ошибка (разность между точным и приближенным значением интеграла) становится пренебрежимо малой.

А теперь, когда вы уже в состоянии, пользуясь своим микрокалькулятором, численно проинтегрировать любую функцию с заранее заданной точностью, обратимся снова к задаче о вычислении емкости бочек.

До сих пор речь шла об интегрировании кривых, или функций, заданных аналитически. По известному аналитическому выражению подынтегральной функции можно вычислить ее значения в точках x_0, $x_0 + h$, $x_0 + 2h$ и т. д. Однако на практике во многих случаях значения подынтегральной функции приходится не вычислять, а находить из измерений, производимых «на натуре». Именно так обстоит дело и с определением емкости бочек: аналитическое выражение, задающее их форму, как правило, неизвестно.

Вы, должно быть, обратили внимание на то, что приведенная в начале этого раздела формула приближенного интегрирования

$$\int_{x_0}^{x_0+2h} f(x)\,dx \approx \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2)$$

переходит в правило Кеплера для вычисления объема винных бочек, если шаг интегрирования h заменить величиной $H/2$, а значения подынтегральной функции f_0, f_1 и f_2 — площадями S_0, S_1 и S_2 внутренних сечений бочки на уровне нижнего днища, посредине и на уровне верхнего днища. Ясно, что, произведя аналогичные подстановки в формуле Симпсона, мы получим более точную формулу для вычисления объема. Для тех, кому это интересно, заметим, что объем корпуса судов в конструкторских бюро вычисляют по формуле Симпсона. Если довольствоваться разбиением бочки по высоте на 4 равные части, то $h = H/4$ и

$$V \approx \frac{H}{12}(S_0 + 4S_1 + 2S_2 + 4S_3 + S_4),$$

где S_0 — площадь внутренней части нижнего днища, S_4 — площадь внутренней части верхнего днища, S_2 — площадь сечения, проведенного посредине между днищами, а S_1 и S_3 — площади сечений, проведенных на расстоянии $(^1/_4)H$ и $(^3/_4)H$ от нижнего днища. Учитывая, что пивные бочки симметричны, получаем

$$S_0 = S_4 = \frac{\pi D_0^2}{4}, \ S_1 = S_3 = \frac{\pi D_1^2}{4}.$$

Это позволяет после несложных преобразований несколько упростить формулу для вычисления объема и привести ее к виду

$$V = \frac{\pi H}{24}(D_0^2 + 4D_1^2 + D_2^2).$$

Предположим, что, измерив D_1, мы получили 46 см:
внутренний диаметр = наружный диаметр — 2·толщина стенок.
Тогда

$$V \approx \frac{\pi \cdot 0.6}{24} \cdot (0{,}4^2 + 4 \cdot 0{,}46^2 + 0{,}5^2) = 0{,}0986 \text{м}^3 = 98{,}6 \text{л}.$$

Это лучшее приближение как с точки зрения математика, так и с точки зрения любителей пива. За ваше здоровье!

РЕШАЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Показав в предыдущем разделе, как (не зная так называемой высшей математики) вычислять площади криволинейных трапеций, мы можем теперь научить вас численно решать простые дифференциальные уравнения.

Нужно сказать, что такие уравнения играют важную роль во всех областях науки и техники. Помимо независимой переменной x и функции $y = f(x)$, они содержат производные от y по x (в простейшем случае — первую производную y'), Один из типов дифференциальных уравнений первого порядка выглядит так:

$$y' = f(x, y).$$

Решить это уравнение означает найти функцию $y = g(x)$, которая ему удовлетворяет. Строго говоря, существует бесконечно много таких функций, но все они отличаются друг от друга лишь на постоянную. Задав начальное значение y_0 при некотором значении x_0, мы получим уже вполне определенное решение.

Метод численного решения дифференциальных уравнений Рунге — Кутта принадлежит к числу испытанных методов вычислительной математики. Он позволяет, исходя из заданного начального значения y_0 при $x = x_0$, шаг за шагом, увеличивая каждый раз x на одну и ту же величину h, получать новые значения y. Возникающие пары чисел

$$x_0 + h, y\ (x_0 + h);\ x_0 + 2h,\ y(x_0 + 2h) \text{ и т. д.}$$

можно рассматривать как координаты точек на плоскости xy и, соединив их, графически построить решение дифференциального уравнения.

Мы не будем выводить здесь формулы, используемые в методе Рунге — Кутта (это увело бы нас далеко за рамки нашей книги и было бы утомительно для читателя-нематематика), а просто выпишем их:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}[f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, \delta_{i+1})],$$

$$\delta_{i+1} = y_i + h \cdot f(x_i, y_i),$$

$$x_i = x_0 + i\,h, \text{ где } i = 0, 1, 2, \ldots .$$

Задать необходимо начальные значения x_0, y_0 и шаг h (и, разумеется, то дифференциальное уравнение, которое требуется решить).

Для беспокойства нет ни малейших оснований: из следующего примера вам станет ясно, какие вычислительные операции скрываются за формулами метода Рунге — Кутта.

Предположим, что мы хотим при помощи микрокалькулятора найти численное решение «линейного однородного обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка»

$$y' = \sqrt{x} \cdot y$$

методом Рунге — Кутта. Пусть заданы начальные значения $x_0 = 1$ и $y_0 = 1$. Решение требуется найти на отрезке от $x = 1$ до $x = 2$ с шагом $h = 0{,}2$.

Для нашего уравнения $f(x_i, y_i) = \sqrt{x_i}\, y_i$, а индекс i имеет начальное значение $i = 0$ и после каждого цикла вычислений возрастает на единицу.
Тогда

$$x_1 = 1 + 0{,}2 = 1{,}2;$$

$$x_2 = 1 + 0{,}4 = 1{,}4;$$

$$x_3 = 1 + 0{,}6 = 1{,}6$$

и т. д. При $i = 0$ получаем

$$\delta_1 = y_0 + h\sqrt{x_0}\, y_0 = 1 + 0{,}2\sqrt{1} \cdot 1 = 1{,}2;$$

$$y_1 = y_0 + \frac{h}{2}\left[\sqrt{x_0}\, y_0 + \sqrt{x_1}\, \delta_1\right] =$$

$$= 1 + \frac{0{,}2}{2}\left[\sqrt{1} \cdot 1 + \sqrt{1{,}2} \cdot 1{,}2\right] = 1{,}231;$$

при $i = 1$

$$\delta_2 = y_1 + h\sqrt{x_1} \cdot y_1 = 1{,}231 + 0{,}2\sqrt{1{,}2} \cdot 1{,}231 = 1{,}501;$$

$$y_2 = y_1 + \frac{h}{2}\left[\sqrt{x_1} \cdot y_1 + \sqrt{x_2} \cdot \delta_2\right] =$$

$$= 1{,}231 + \frac{0{,}2}{2}\left[\sqrt{1{,}2} \cdot 1{,}231 + \sqrt{1{,}4} \cdot 1{,}501\right] = 1{,}543.$$

Соответствующие значения y оказываются равными:

$$y_3 = 1{,}967;$$

$$y_4 = 2{,}547;$$

$$y_5 = 3{,}346.$$

В следующей таблице приведены приближенные значения $y_{\text{прибл}}$, вычисленные по методу Рунге — Кутта, и точные значения $y_{\text{точн}}$, вычисленные по формуле, задающей точное решение дифференциального уравнения

$$y = e^{\frac{2}{3}\left(x^{\frac{3}{2}} - 1\right)}.$$

В последней строке указана величина невязки $p = (y_{\text{точн}} - y_{\text{прибл}}) / y_{\text{точн}}$.

x	1	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0
$y_{\text{прибл}}$	1	1,231	1,543	1,967	2,547	3,346
$y_{\text{точн}}$	1	1,233	1,546	1,979	2,568	3,384
p	0%	0,2%	0,4%	0,6%	0,8%	1,1%

Отчетливо видно, что по мере удаления от начальных значений невязка возрастает. Это одна из основных особенностей метода Рунге — Кутта.

При меньшем шаге h точность вычислений увеличилась бы, но возрос бы и объем вычислений.

ИГРА В НИМ

Возможно, вам случалось играть в ним с друзьями и даже проигрывать, если вы не знаете оптимальной стратегии. Мы хотим открыть вам секрет этой игры и убедить вас в том, что, не особенно утруждая себя, при помощи простого алгоритма и вашего микрокалькулятора вы сможете завоевать право на получение низшего спортивного разряда по ниму.

Напомним правила игры. На стол кладут заранее обусловленное число (N) спичек. Двое партнеров по очереди берут со стола не менее одной и не более P (число P также заранее задано) спичек. Проигравшим считается тот, кто берет со стола последнюю спичку. (Число N должно быть гораздо больше числа P.)

Чтобы разработать выигрышную стратегию, попытаемся проанализировать игру с конца. Выберем вполне реальные числа $N = 20$, $P = 4$. Итак, на столе лежат 20 спичек, и каждый играющий, дождавшись своей очереди, может взять со стола от одной до четырех спичек. Чтобы ваш партнер проиграл, перед его ходом на столе должна оставаться одна спичка (если на столе останутся, например, три спички, то ваш партнер возьмет две, и когда настанет ваш ход, вам не останется ничего другого, кроме как взять со стола последнюю спичку, и вы проиграете). Сколько спичек должно лежать на столе перед тем, как ваш партнер сделает предпоследний ход? Ясно, что 6. Действительно, сколько бы спичек ни взял ваш партнер на предпоследнем ходу — 1, 2, 3 или 4 — вы на следующем ходу возьмете соответственно 4, 3, 2 или 1 спичку и оставите на столе лишь 1 спичку.

Рассуждая аналогично, вы установите, что перед тем, как ваш партнер сделает свой «предпредпоследний» ход, на столе должно остаться 11 спичек (в этом случае ваш выигрыш обеспечен).

Названные нами числа образуют арифметическую прогрессию 1, 6, 11, 16 (следующий член прогрессии превзошел бы число 20). В общем случае арифметическую прогрессию

$$1,\ P+2,\ 2P+3,\ 3P+4,\ \ldots$$

надлежит продолжать до тех пор, пока не возникнет угроза, что следующий член превзойдет число N. Дождавшись своего хода, вы должны взять со стола столько спичек, чтобы число оставшихся на столе спичек совпадало с одним из членов этой прогрессии. Это правило выполняется независимо от номера хода. В частности, оно справедливо и для самого первого хода.

Следовательно, если вы хотите гарантировать себе выигрыш, то право первого хода должно принадлежать вам. В противном случае ваш партнер применит оптимальную стратегию (если он ее знает) и, «перехватив» у вас заветную прогрессию, обеспечит себе выигрыш.

Но вам не следует терять волю к победе. Не исключено, что ваш партнер лишь случайно сделает удачно свой первый или второй ход. Стоит вам в процессе игры хотя бы раз оставить на столе число спичек, совпадающее с одним из членов арифметической прогрессии, как вы непременно выиграете.

Существует один-единственный случай, когда Вы делаете первый ход и тем не менее не можете гарантировать свой выигрыш (если ваш партнер также придерживается оптимальной стратегии), а именно когда число $N-1$ без остатка делится на $P+1$. Убедиться в этом можно при помощи приводимого ниже оптимального алгоритма. Вполне возможно, что вам удастся заранее исключить неблагоприятное соотношение между числами N и P.

Наметим ход вычислений, необходимых при разработке выигрышной стратегии. Перед вами на столе лежат N спичек. Вы можете взять не менее одной, но не более $P-1$ из них. (Проследите за тем, чтобы число $N-1$ не делилось без остатка на $P+1$.)

1. Вычислите отношение $\frac{N-1}{P+1}$. Вы получите некоторое целое число K и остаток (все знаки после запятой).
2. Умножьте $P+1$ на K.
3. Вычтите полученное произведение из $N-1$ и вы узнаете, сколько спичек вам нужно взять со стола.
4. При каждом следующем ходе повторите весь алгоритм (при меньшем значении N) от п. 1 до п. 3.

Посетителям крупных вычислительных центров охотно предлагают сыграть в ним с находящейся там большой ЭВМ. Обычно право первого хода предоставляют гостю. Можете радоваться: следуя изложенной нами стратегии, вы сумеете одолеть ЭВМ. Ведь она работает по той же программе, что и вы.

Желаем удачи!

ЗОЛОТОЕ СЕЧЕНИЕ

Еще древние греки были убеждены в том, что красота связана с восприятием определенных численных пропорций. Например, на протяжении более 2000 лет считается, что отрезок, разделенный на части, отношение которых совпадает с так называемым «золотым сечением», обладает особой эстетической привлекательностью (рис. 6). Золотое сечение возникает в том случае, если длина всего отрезка $a+b$ относится к длине большей части b так же, как b относится к длине меньшей части a, то есть если

$$\frac{a+b}{b}=\frac{b}{a}.$$

Аналогичные утверждения высказывались и относительно плоских фигур. Прямоугольник кажется нам

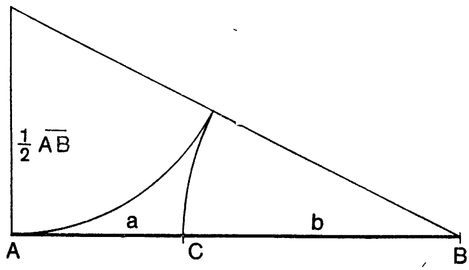


Рис. 6. Золотое сечение, или деление отрезка в крайнем и среднем отношении. Точка C делит отрезок AB на части, отношение которых совпадает с золотым сечением.

особенно привлекательным, если отношение его сторон совпадает с золотым сечением

$$q=\frac{b}{a}.$$

Мы хотим показать вам, как при помощи микрокалькулятора вы можете оценить эстетические достоинства выполненного вами эскиза.

На первый взгляд кажется не совсем понятным, как из приведенного выше соотношения можно получить вполне определенное значение b/a. В этом, как часто бывает в жизни, лучше всего убедиться на собственном опыте.

Сначала нам понадобятся не микрокалькулятор, а кое-какие сведения из школьного курса математики. Умножив левую и правую части равенства

$$\frac{a+b}{b}=\frac{b}{a}$$

на общий знаменатель, получим

$$a^2+ba=b^2.$$

Перенесем все члены в левую часть и разделим на b^2. У нас получится квадратное уравнение

$$q^2 - q - 1 = 0$$

относительно $q = b/a$. Оба корня квадратного уравнения, записанного в так называемом приведенном виде $x^2 + mx + n = 0$, представимы в виде

$$x_{1,2} = \frac{m}{2}\left[-1 \pm \sqrt{1 - \frac{4n}{m^2}}\right].$$

В нашем случае $m = -1$, $n = -1$, поэтому

$$q = -\frac{1}{2}[1 \pm \sqrt{5}] = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Корень со знаком минус в числителе мы, как это часто бывает в математике, отбрасываем, поскольку отрицательное значение q не имеет смысла. Остается $q = (1 + \sqrt{5})/2$. Приведем 10 знаков этого числа: $q = 1{,}618033989$. Следовательно, отношение двух сторон «золотого» прямоугольника (совпадающее с величиной, соответствующей золотому сечению) составляет $q \approx 1{,}6$.

Для тех, кто не желает или не считает возможным признать столь грубое приближение к золотому сечению, математики нашли еще два представления числа q. Они обладают определенным преимуществом по сравнению с «прозаическим» десятичным числом 1,6, а именно выглядят столь изящно, что тот, кто увидит их хотя бы один раз, забудет не скоро.

Одно из них задает q в виде бесконечной непрерывной дроби [1; 1, 1, ...] (см. раздел «Непрерывные дроби»). Такая запись означает дробь

$$q = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{+ 1 \ldots}}}}$$

Чтобы вычислить при помощи микрокалькулятора достаточно точное приближение золотого сечения q, непрерывную дробь целесообразно свертывать снизу вверх. Проще всего вместо многоточия подставить единицу, сложить ее с единицей, стоящей слева, нажать клавишу вычисления обратной величины, к полученному результату прибавить единицу, снова нажать на клавишу вычисления обратной величины и т. д.

После 16 таких «трехтактных» циклов (каждый цикл состоит из нажатия клавиш «обратная величина», «плюс» и «единица», вы получите значение q с 6 знаками после запятой: $q = 1{,}618034$.

Если вместо единицы вы выберете какое-нибудь другое начальное значение, то это почти не скажется на числе циклов и никак не повлияет на конечный результат.

Математикам удалось найти еще одно представление золотого сечения, по изяществу не уступающее представлению в виде непрерывной дроби. Мы имеем в виду представление числа q в виде «бесконечного корня»

$$q = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \ldots}}}}$$

Разумеется, пользоваться этим представлением для вычисления q мы рекомендуем лишь в том случае, если ваш микрокалькулятор имеет специальную клавишу для извлечения квадратного корня.

Протекает вычисление так же, как и в предыдущем случае. Вы выбираете начальное значение (лучше всего снова выбрать единицу) и считаете «от конца к началу». Каждый цикл состоит из трех тактов: нажатия кнопок «квадратный корень», «плюс» и «единица». Выполнив 13 таких циклов, вы получите число q с 6 знаками.

В том, что понятие «математической красоты» и поныне не утратило своей актуальности, вы сможете убедиться, если вам доведется побывать в Лейпциге на международной ярмарке или с какой-нибудь другой оказией. Остановитесь перед «Старой ратушей» и взгляните на башенку, украшающую фасад здания. Архитектор расположил ее так, что она делит контур крыши на части, образующие золотое сечение.

Может быть, наиболее распространенный формат писчей бумаги также выбран из эстетических соображений и отношение сторон бумажного листа составляет 1,6? Нет, это не так. Измерив стандартный лист писчей бумаги, мы убедимся, что отношение его сторон равно 1,4. Вероятно, кому-нибудь из читателей известно, что более точное значение этого отношения равно $\sqrt{2} \approx 1{,}41$.

Взяв прямоугольник с отношением сторон $\sqrt{2} : 1$, мы при последовательном делении его пополам неизменно будем получать прямоугольники с тем же отношением сторон, то есть подобные геометрические фигуры. Отказаться от этого условия при создании серии форматов невозможно. Впрочем, мы не склонны верить на слово и хотим убедиться сами. В качестве исходного формата выберем прямоугольник со сторонами 5 и 1 (в произвольных единицах длины). Отношение сторон такого прямоугольника равно 1,4 $(\approx \sqrt{2})$. При делении пополам мы разобьем длинную сторону исходного прямоугольника на 2 равные части, а его короткую сторону сохраним неизменной (она станет длинной стороной следующего по величине прямоугольника). Длины и отношения сторон прямоугольников, возникающих при уменьшении формата, будут следующие:

b	a	b/a
1,4	1	1,4
1	0,7	1,4
0,7	0,5	1,4
0,5	0,35	1,4
....	....	....

Иначе обстояло бы дело, если бы выбрали за исходный формат прямоугольник с отношением сторон 1,6 : 1, то есть совпадающим с золотым сечением:

b	a	$b \cdot a$
1,6	1	1,6
1	0,8	1,25
0.8	0,5	1,6
....	....	....

Нетрудно видеть, что при последовательном уменьшении формата возникают два различных семейства подобных прямоугольников. Именно поэтому мы и отдаем предпочтение формату с отношением сторон, равным $\sqrt{2} \approx 1{,}4$. Отклонения от наиболее «эстетически привлекательного» отношения 1,6 в этом случае вполне терпимы (рис. 7).

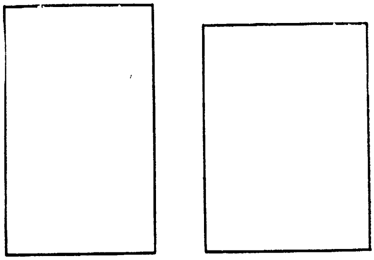


Рис. 7. Сравнение двух форматов. Стороны правого прямоугольника относятся между собой, как $\sqrt{2}:1$. Отношение сторон левого прямоугольника совпадает с золотым сечением. Площади обоих прямоугольников равны. Какой прямоугольник кажется вам более изящным?

Наконец, мы можем вычислить и абсолютные размеры листов, образующих традиционную серию форматов, исходя из размеров самого большого формата. Эксперты по стандартизации установили, что формат А0 должен иметь площадь ровно один квадратный метр. Так как $b : a = \sqrt{2}$, а $b_0 \cdot a_0 = 1$ м^2, то

$$a_0 = \frac{1}{\sqrt[4]{2}} = 0{,}841 \text{ м} = 841 \text{ мм},$$

$$b_0 = \sqrt[4]{2} = 1{,}189 \text{ м} = 1189 \text{ мм}.$$

Следуя испытанной схеме деления пополам, получаем следующую таблицу (b означает длинную, a — короткую сторону прямоугольника):

Формат	b м	a м	b/a
A0	1,189	0,841	1,41
A1	0,841	0,594	1,41
A2	0,594	0,420	1,41
A3	0,420	0,297	1,41
A4	0,297	0,210	1,41
A5	0,210	0,149	1,41
...	...	...	...

Измерьте формат вашей писчей бумаги и сравните полученные вами размеры с табличными. Если вы обнаружите значительные расхождения, можете направить рекламацию на писчебумажный комбинат.

ХИТРЫЙ КУЗНЕЦ

Задача, которую мы хотим предложить вам, имеет весьма почтенный возраст и встречается у всех народов, занимавшихся суммированием геометрической прогрессии. Ее немецкий вариант гласит следующее.

Некий кузнец подковал лошадь. Каждую из четырех подков он прибил 6 гвоздями, а всего на ковку у него ушло 24 гвоздя. Когда работа была закончена, кузнец спросил у владельца лошади: «Как ты предпочитаешь расплатиться со мной? Заплатить за 24 гвоздя 50,00 марок или заплатить за первый гвоздь 1 пфенниг, за второй гвоздь 2 пфеннига, за третий — 4 пфеннига и т. д.?» Владелец лошади решил, что расплатиться пфеннигами будет дешевле. Сколько ему пришлось бы заплатить кузнецу?

Гвоздь	Цена	Итого
1	0,01	0,01
2	0,02	0,03
3	0,04	0,07
4	0,08	0,15
5	0,16	0,31

Вычислить цену гвоздя с любым номером несложно: нужно лишь умножить цену предыдущего гвоздя на 2. Вместо умножения можно воспользоваться операцией возведения в степень, но при этом начинать нужно с числа 2 (так как $1^2 = 1$). Дойдя до двадцать четвертого гвоздя, мы должны будем возвести 2 в двадцать третью степень.

Большинство читателей уже заметило, что в нашей задаче по существу речь идет о суммировании геометрической прогрессии. Как известно, ее последний член a_n (цену двадцать четвертого гвоздя) можно вычислить по формуле

$$a_n = a_1 q^{n-1},$$

где a_1 — начальное значение (в нашем случае 0,01 марки), q — знаменатель прогрессии (равный 2). Подставляя численные значения a_1 и q, находим

$$a_n = 1 \cdot 2^{24-1} = 2^{23} = 8\,388\,608 \text{ пфеннигов.}$$

При вычислении столь большой величины на микрокалькуляторе вы можете столкнуться с кое-какими трудностями. В большинстве микрокалькуляторов число 8 388 608 будет представлено в виде степени числа 10. В других микрокалькуляторах это число будет представлено в обычном виде, но в силу особенностей заложенных в них программ с десятичной запятой. Если цена за двадцать четвертый гвоздь слишком велика для вашего микрокалькулятора, то можете подковать лошадь лишь на 3 подковы.

Нам, естественно, хочется знать, сколько всего должен заплатить владелец лошади кузнецу. Эту сумму S_n можно вычислить по формуле

$$S_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1},$$

где a_1 — цена первого гвоздя, а q — знаменатель геометрической прогрессии (равный 2). Подставляя численные значения a_1 и q, находим:

$$S_{24} = 1 \cdot \frac{2^{24} - 1}{2 - 1} = 2^{24} - 1$$

(обращаем внимание читателя на различие между a_n и S_n: $a_n = 2^{24-1}$, а $S_n = 2^{24} - 1$), или

$$S_{24} = 16\,777\,216 - 1 = 16\,777\,215.$$

Итак, владелец лошади должен выплатить кузнецу 167 772,15 марки. Продолжив столбцы цифр, приведенные в начале раздела, вы увидите, что эта сумма лишь на 1 меньше удвоенной цены последнего гвоздя.

Спросим себя, на сколько гвоздей удастся подковать лошадь при таких расценках, прежде чем будет исчерпана сумма в 50 марок? Напомним, что эта сумма была другой ценой, назначенной кузнецом. Воспользуемся формулой суммы членов геометрической прогрессии:

$$S_n = 5000 = 2^k - 1.$$

Слагаемое 1 можно отбросить, поскольку оно лишь несущественно изменяет результат. Чтобы найти k, обе части получившегося уравнения необходимо прологарифмировать, однако гораздо приятнее «угадать» ответ — найти его методом проб и ошибок. Известно, что

$$2^{10} = 1024 \approx 1000.$$

Это — стандартное значение, от которого мы будем «танцевать» дальше. Следовательно,

$$2^{11} \approx 2000,$$

$$2^{12} \approx 4000$$

(точная сумма составляет 4096 пфеннигов, или 40,96 марок).

Логарифмируя уравнение

$$5001 = 2^k,$$

получаем:

$$k = \frac{\lg 5001}{\lg 2} = 12{,}288\ldots .$$

Следовательно, за 50 марок лошадь можно подковать на 12 гвоздей, то есть каждую подкову прикрепить 3 гвоздями.

Некоторые читатели знают другой вариант той же истории — с зернами пшеницы или риса. Изобретатель шахмат потребовал от индийского раджи вознаграждение в размере одного зерна за первое поле шахматной доски, двух зерен за второе поле и так далее (за каждое следующее поле раджа должен был уплатить вдвое больше зерен, чем за предыдущее). Как известно, на шахматной доске всего 64 поля, поэтому число зерен a_{64}, составляющих плату за шестьдесят четвертое поле, и полное число зерен S_{64} — числа поистине гигантские: чтобы выплатить вознаграждение изобретателю шахмат, понадобилось бы

$$S_{64} = 1 \cdot \frac{2^{64} - 1}{2 - 1} = 2^{64} - 1 \approx 1{,}84 \cdot 10^{19}$$

зерен. Лишь за шестьдесят четвертое поле ему причиталось бы

$$a_{64} = 2^{64-1} = 2^{63} \approx 9{,}22 \cdot 10^{18}$$

зерен. Урожая пшеницы, собранного во всем мире, не хватило бы, чтобы набрать столько зерен. Если массу одного зерна пшеницы принять равной 0,05 г, то масса $1{,}84 \cdot 10^{19}$ зерен составит $1{,}84 \cdot 10^{19} \cdot 0{,}05 = 920\,000\,000\,000$ т (в то время, как урожай пшеницы во всем мире за один год составляет лишь около 250 000 000 т).

Различие в скорости роста арифметической прогрессии

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$

и геометрической прогрессии

$$S_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

играет определенную роль и в мировоззрении. Около 1800 г. английский ученый Мальтус опубликовал работу, в которой утверждал, что продуктивность земледелия возрастает в арифметической прогрессии, в то время как численность народонаселения увеличивается в геометрической прогрессии. Отсюда Мальтус делал вывод: либо неизбежно наступит голод, либо человечество должно ограничить рождаемость. С опровержением выдвинутого Мальтусом тезиса выступил Карл Маркс. По мнению Маркса, люди смогут достаточно быстро увеличить производство основных продуктов питания, если сумеют надлежащим образом перестроить политические и экономические отношения.

Этот пример отчетливо показывает, что математика с ее формулами считает вслепую. Решающее значение имеют исходные посылки и допущения, в соответствии с которыми мы выбираем начальные значения, составляем уравнения и интерпретируем конечный результат. Сколь важно наше отношение к происходящему, показывают две фразы:

«У меня осталось *всего* 50 марок»;

«У меня осталось *еще* 50 марок».

С точки зрения математики они эквивалентны. Но сколь различен их смысл!

ВНИМАНИЮ МЕТАЛЛУРГОВ

Чтобы читать этот раздел, не обязательно быть металлургом — достаточно лишь проделать вместе с нами все вычисления.

Рассмотрим две марки стали:

Ст. 20: Fe; 0,2% C, 0,3% Si, 0,5% Mn, 0,3% P, 0,03% S.

Высокоуглеродистая сталь: Fe; 1,0% C, 0,3% Si, 0,5% Mn, 0,3% P, 0,03% S.

По своему химическому составу эти стали отличаются друг от друга лишь содержанием углерода: в Ст. 20 его 0,2%, в высокоуглеродистой стали — 1,0%. Всего каких-нибудь 0,8%, а свойства этих сталей весьма различны. Ст. 20 хорошо сваривается, не поддается закалке и обладает высокой жесткостью. Высокоуглеродистая сталь плохо сваривается, при закалке в воду становится хрупкой как стекло и обладает весьма ограниченной жесткостью.

Химический состав обеих марок стали совпадает на 99,2%. Каким образом ничтожная добавка в 0,8% углерода может приводить к столь разительному расхождению в свойствах?

Состав веществ принято указывать в весовых процентах. Однако природа не располагает весами, а потому прибегает к «подсчету» атомов, вмещаемых в определенном объеме вещества. Попробуем при помощи нашего микрокалькулятора воспроизвести «расчеты», которыми занимается природа.

Один моль вещества содержит $6{,}02 \cdot 10^{23}$ атомов (см. раздел «В мире молекул»). Для простоты будем рассматривать только атомы железа и углерода. Атомы марганца, кремния и других элементов в обеих марках стали содержатся в одинаковых количествах (причем их суммарное содержание не превышает одного весового процента), и ими вполне допустимо пренебречь.

Масса одного моля железа составляет 56 г, а масса одного моля углерода — 12 г. От 56 г (в своих расчетах мы будем исходить именно из этой величины и не станем учитывать содержание легирующих элементов) 0,8 весового процента, составляющих различие в содержании углерода в Ст. 20 и высокоуглеродистой стали, соответствуют

$$\frac{56 \cdot 0{,}8}{100} = 0{,}45 \text{ г.}$$

Если один моль (12 г) углерода содержит $6{,}02 \times 10^{23}$ атомов, то 0,45 г углерода содержат

$$\frac{6{,}02 \cdot 10^{23} \cdot 0{,}45}{12} = 2{,}25 \cdot 10^{22} \text{ атомов.}$$

Следовательно, 0,8 весового процента примеси углерода к 56 г железа соответствуют $2{,}25 \cdot 10^{22}$ атомов.

Сплав железо $+$ 0,8% углерода содержит

$$2{,}25 \cdot 10^{22} + 6{,}02 \cdot 10^{23} \approx 6{,}25 \cdot 10^{23} \text{ атомов.}$$

Внимание!
Сумма $10^{22} + 10^{23}$ не равна 10^{45}!!!
$2{,}25 \cdot 10^{22} = 0{,}225 \cdot 10^{23}$.

На долю атомов углерода (а их, как мы подсчитали, $2{,}25 \cdot 10^{22}$) от общего числа атомов в сплаве приходится

$$\frac{0{,}225}{6{,}25} \approx 3{,}6\%.$$

Следовательно, если от веса перейти к числу атомов, то процентное различие между двумя марками стали по углероду составит 3,6%. Оно несравненно более ощутимо, чем различие в 0,8 весового процента. Этим и объясняется столь заметное различие в свойствах этих сталей.

СЕКРЕТЫ ЭСТРАДНЫХ ВЫЧИСЛИТЕЛЕЙ

Во времена наших дедушек на эстраде нередко выступали артисты-вычислители, молниеносно решавшие в уме сложнейшие арифметические задачи. Зритель должен был задумать какое-нибудь число, произвести над ним с карандашом и бумагой в руке определенные арифметические действия и назвать вслух результат, после чего эстрадный вычислитель немедленно «отгадывал» задуманное число.

В простейшем варианте это выглядело следующим образом.

Артист	Зритель
Задумайте число	8
Умножьте его на 2	$8 \cdot 2 = 16$
К полученному числу прибавьте 4	$16 + 4 = 20$

То, что получилось, умножьте на 5	$20 \cdot 5 = 100$
К результату прибавьте 12	$100 + 12 = 112$
Назовите сумму	112
Вы задумали число 8	

Бурные аплодисменты!

Просматривая «стенограмму» выступления эстрадного вычислителя, нетрудно вывести уравнение для задуманного числа x:

$$(x \cdot 2 + 4) \cdot 5 + 12 = 112,$$
$$x \cdot 10 + 20 + 12 = 112,$$
$$x \cdot 10 + 32 = 112,$$
$$x = \frac{112 - 32}{10} = 8.$$

Решить его «в уме», не прикасаясь к карандашу и бумаге, под силу не только артисту.

Наш микрокалькулятор позволяет нам без труда придумать множество трюков, связанных с отгадыванием задуманных чисел. Разрабатывая трюк, мы можем сосредоточить свое внимание на обращении знаков и не следить особенно за тем, как считает «артист» или зритель. Желательно, чтобы вычисления, производимые зрителем, были достаточно сложными, но в конце концов сильно упрощались и чтобы в них входили не слишком большие числа. Это позволит артисту легче «угадывать» задуманное зрителем число. Не следует упускать из виду, что зритель может воспользоваться микрокалькулятором, перед возможностями которого заведомо «пасует» любой артист-вычислитель. Итак, приступаем к созданию нашего эстрадно-вычислительного номера.

Артист	Зритель
Задумайте любое целое число не больше 10	2
Умножьте его на π	6,28...
Результат разделите на 4	1,57...
Полученное частное умножьте на 1,27	1,9949...
К произведению прибавьте 4	5,9949...
Сумму умножьте на 3	17,9847...
Прибавьте 6	23,9847...

Микрокалькулятор позволил нам использовать новый трюк — приближенное равенство

$$\frac{\pi \cdot 1{,}27}{4} \approx 1.$$

Его можно применять неоднократно.

Артист-вычислитель знает, что в конечном результате десятичные знаки, стоящие после запятой, — сплошное надувательство и в действительности вместо 23,9847... стоит целое число 24.

Последующие вычисления мы строим с таким расчетом, чтобы вычесть из полученного результата число 18 и разность разделить на 3:

$$x = \frac{y - 18}{3}.$$

Еще большее впечатление на зрителей производит состязание эстрадного вычислителя с микрокалькулятором по извлечению кубических корней из очень больших чисел, в особенности если артист заявит, что лишь сложные и, стало быть, дорогие микрокалькуляторы снабжены специальной клавишей для извлечения кубических корней.

И здесь ход вычислений построен с расчетом на эффектный результат.

Артист	Зритель
Задумайте целое число от 10 до 99	27
Возведите его в куб	$27 \cdot 27 \cdot 27$
Назовите результат	19 683
Кубический корень из 19 683 равен 27	

Запомните или выпишите на листке бумаги следующие числа:

$$10^3 = 1\,000,\quad 20^3 = 8\,000,\quad 30^3 = 27\,000,\quad 40^3 = 64\,000,\quad 50^3 = 125\,000,$$

$$60^3 = 216\,000,\quad 70^3 = 343\,000,\quad 80^3 = 512\,000,\quad 90^3 = 729\,000,\quad 100^3 = 1\,000\,000.$$

В нашем примере куб задуманного числа оказался равным 19 683. Следовательно, кубический корень из 19 683 заключен между 20 ($20^3 = 8000$) и 30 ($30^3 = 27\,000$).

Запомним еще некоторые числа:

$$1^3 = 1, \quad 2^3 = 8, \quad 3^3 = 27, \quad 4^3 = 64, \quad 5^3 = 125,$$
$$6^3 = 216, \quad 7^3 = 343, \quad 8^3 = 512, \quad 9^3 = 729.$$

Строго говоря, нам вовсе не нужно запоминать специально эти числа, поскольку они уже встречаются среди кубов десятков. Нас интересуют лишь последние цифры (они выделены полужирным шрифтом). Каждая из них однозначно связана с числом, возводимым в куб. Поэтому нам достаточно беглого взгляда на число 19 683, чтобы по его последней цифре (3) определить последнюю цифру (7) кубического корня из него. Итак, $\sqrt[3]{19\,683} = 27$.

Небольшой трюк с использованием микрокалькулятора может понадобиться нам, даже если нас не прельщают лавры эстрадного вычислителя.

Как мы уже упоминали, в большинстве микрокалькуляторов не предусмотрено специальных клавиш для извлечения корней третьей и более высоких степеней. Если возникает необходимость извлечь корень высокой степени, то в сложных (и поэтому дорогих) микрокалькуляторах для этого, как правило, используется клавиша $\boxed{1/x}$, а затем нажатием клавиши $\boxed{y^x}$ производится возведение в степень, так как $\sqrt[x]{A} = A^{1/x}$.

При работе с микрокалькуляторами всех прочих конструкций для извлечения корня высокой степени приходится обращаться к соответствующей приближенной формуле (см. раздел «Извлечение корней») или действовать методом проб и ошибок. Даже если о числе $\sqrt[3]{427\,621}$ известно лишь, что оно заключено между 70 ($70^3 = 34\,300$) и 80 ($80^3 = 512\,000$), то и это позволяет существенно сократить поиски точного значения корня. Испробуем сначала числа

$$75 \cdot 75 \cdot 75 = 421\,875; \qquad 75{,}5^3 = 430\,368{,}88;$$
$$76^3 = 432\,976; \qquad 75{,}25^3 = 426\,107{,}83.$$

Если вы действуете методом проб и ошибок, то «вилку», в которой заключен точный результат, удобно сужать делением пополам. Вы как бы совершаете прыжки, соразмеряя каждый раз их дальность. Если результат заключен между нулем и единицей, то последовательность чисел 1,0; 0,5; 0,25; 0,13 быстрее и надежнее всего ведет к цели.

Но продолжим наши поиски:

$75{,}38^3 = 428\,320{,}04$;	$75{,}34^3 = 427\,638{,}55$;
$75{,}31^3 = 427\,127{,}90$;	$75{,}335^3 = 427\,553{,}41$;
$75{,}35^3 = 427\,808{,}86$;	$75{,}338^3 = 427\,604{,}49$;
$75{,}33^3 = 427\,468{,}29$;	$75{,}339^3 = 427\,621{,}52$.

Действуя методом проб и ошибок, следует стремиться при первой же возможности сократить вычисления. Обычно сделать это не удается. Кубический корень лишен наглядного смысла, и наш мозг не опирается на интуицию, когда мы ищем $\sqrt[3]{x}$. Способность молниеносно вычислять кубические корни — неоспоримое преимущество нашего микрокалькулятора. Будем же последовательно использовать эту способность!

Имея под рукой десятиразрядный микрокалькулятор, нетрудно вычислить, что

$$\sqrt[3]{427621} = 75{,}33896941,$$

$$75{,}33896941^3 = 427621{,}0003.$$

БОРЬБА ЗА ПОСЛЕДНИЙ ЗНАК

Великому немецкому математику Гауссу принадлежит высказывание: «Недостатки математического образования с наибольшей отчетливостью проявляются в чрезмерной точности численных расчетов». В этих словах — обвинение целым поколениям учителей математики (если учителя математики вообще когда-нибудь ошибаются). Наш микрокалькулятор работает с 8 или даже с большим числом разрядов. Поскольку он абсолютно необразован математически, то ему безразлично, имеет ли смысл производить вычисления со столь большим числом знаков. Он просто-напросто производит их и показывает результат на индикаторе. У более сложных микрокалькуляторов имеются переключатели, позволяющие математически образованному человеку устанавливать нужное число знаков после запятой (только эти знаки и будут загораться на индикаторе). Такие микрокалькуляторы автоматически округляют последний знак в сторону увеличения или уменьшения.

Более простые микрокалькуляторы показывают на своих индикаторах все вычисленные ими цифры. Разумеется, если в восьмом знаке после запятой вместо цифры 6 стоит цифра 7, то ошибка едва ощутима. Интересно, что микрокалькулятор с его хваленой точностью сам устанавливает предел своей точности в каком-то знаке.

Сравним простой восьмиразрядный микрокалькулятор с десятиразрядным. Без особой надобности десятиразрядный микрокалькулятор не использует всех своих возможностей и обычно производит вычисления с двумя знаками после запятой. Установим переключатель числа разрядов сначала в такое положение, чтобы десятиразрядный микрокалькулятор выдавал результат с 8 знаками после запятой, а затем переключим его на «полную мощь» и произведем все действия с 10 знаками после запятой. Вот что у нас получится.

Операция	Восьмиразрядный микрокалькулятор	Десятиразрядный микрокалькулятор; число знаков после запятой в результате		
		2	6	8
125	125	125,00	125,000000	125,00000000
$\sqrt{125}$	11,180339	11,8	11,180340	11,18033989
$(\sqrt{125})^2$	**124,99998**	125,00	125,000000	125,00000010
$\sqrt{(\sqrt{125})^2}$	11,180338	11,18	11,180340	11,18033989
$(\sqrt{(\sqrt{125})^2})^2$	**124,99995**	125,00	125,000000	125,00000010

Если из числа 124,99995 извлечь квадратный корень на десятиразрядном микрокалькуляторе, то мы снова получим число 11,180338.

С чувством тихой радости мы замечаем, что и у десятиразрядного микрокалькулятора бывают трудности, например, при возведении в квадрат числа $\sqrt{125}$. Мы то хорошо знаем, что должно получиться

$$\sqrt{125} \cdot \sqrt{125} = 125,$$

но микрокалькулятор об этом «не догадывается». Он может лишь «бесхитростно» вычислить квадрат числа $\sqrt{125}$. А «бездумные» вычисления лишь в очень редких случаях приводят к желаемым результатам. Ошибка вычислений возрастает еще больше, если мы вздумаем производить одну за другой несколько операций над бесконечными десятичными дробями.

$1 : 3 = 0{,}33\ldots$		
$\sqrt{0{,}33\ldots}$	$= 0{,}5773502$	Микрокалькулятор «забывает» последнюю цифру 6 и не производит округления.
$(\sqrt{0{,}33\ldots})^2$	$= 0{,}3333332$	
$:8$	$= 0{,}0416666$	На последнюю цифру 5 микрокалькулятор «не обращает внимания»
$\cdot 8$	$= 0{,}3333328$	
$\cdot 3$	$= 0{,}9999984$	

По этому результату видно, насколько можно полагаться на «точность» микрокалькулятора при извлечении корней и выполнении других многоступенчатых операций.

Проверьте, округляет ли ваш микрокалькулятор последний знак. Не проводите вычислений с лишними знаками.

В МИРЕ МОЛЕКУЛ

Из того, что атомы и молекулы очень малы, следует, что число их очень велико. Поэтому при расчетах, связанных с числом атомов, обычно возникают очень большие и очень малые числа. «Работать» с такими числами особенно удобно, если под рукой есть микрокалькулятор.

Из курса физики или химии вам, должно быть, известны величины $6{,}02 \cdot 10^{26}$ или $6{,}02 \cdot 10^{23}$. Они получили название числа Авогадро. Это число молекул в одном киломоле или в одном моле вещества. Относительно того, какому из двух значений следует отдать предпочтение, мнения специалистов расходятся.

Основная идея сводится к следующему. Независимо от химического состава 1 киломоль вещества (атомная или молекулярная масса, выраженная в килограммах) содержит $6{,}02 \cdot 10^{26}$ молекул. Число Авогадро определяется либо как

$$N = \frac{6{,}02 \cdot 10^{23}}{\text{моль}},$$

либо как

$$N = \frac{6{,}02 \cdot 10^{26}}{\text{кмоль}}.$$

Атомная масса железа равна 56 г. Следовательно, 56 г железа содержат $6{,}02 \cdot 10^{23}$ атомов. Отсюда мы можем вычислить массу одного атома (не путать с атомной массой, измеряемой в кислородных или новых, углеродных, единицах!):

$$56 : 6{,}02 \cdot 10^{23} = 9{,}3 \cdot 10^{-23} \text{ г}.$$

Плотность железа составляет 7,9 г/см^3, то есть масса железного кубика объемом в 1 см^3 равна 7,9 г. Отсюда нетрудно найти объем 56 г железа:

$$\frac{56}{7{,}9} = 7{,}1 \text{ см}^3.$$

(Все расчеты мы проводим здесь с приближенными величинами.) В этих 7,1 см^3 содержатся $6{,}02 \cdot 10^{23}$ атомов. Мы будем считать, что атомы имеют форму крохотных кубов или плотно упакованных шариков, тогда на долю каждого атома придется объем в

$$\frac{7{,}1}{6 \cdot 10^{23}} \approx 1 \cdot 10^{-23} \text{ см}^3,$$

а радиус атома окажется равным

$$\sqrt[3]{\frac{3 \cdot 10^{-23}}{4\pi}} \approx 1 \cdot 10^{-8} \text{ см.}$$

Радиус атома, измеренный учеными другим способом, по порядку величины совпадает с вычисленным нами.

Зная, что атом занимает объем около 10^{-23} см^3, трудно удержаться от соблазна вычислить, из скольких атомов состоит наша Земля. Не исключено, что при таком подсчете мы ошибемся на несколько атомов в ту или в другую сторону. Итак, если предположить, что радиус Земли приближенно равен

$$r = 6380 \text{ км} = 638\,000\,000 \text{ см} = 6{,}38 \cdot 10^8 \text{ см,}$$

то ее объем составляет

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 = 10{,}87 \cdot 10^{26} \text{ см}^3 \approx 11 \cdot 10^{11} \text{ км}^3.$$

Средняя плотность Земли равна 5,5 г/см^3 (масса кубического сантиметра Земли составляет около 5,5 г). Следовательно, масса всей Земли по нашей оценке достигает

$$10{,}87 \cdot 10^{26} \cdot 5{,}5 \approx 6 \cdot 10^{27} \text{ г}$$

(наши вычисления, основанные на довольно грубых предположениях, приводят к великолепному согласию с «официальным» значением массы Земли, равным $5{,}973 \cdot 10^{27}$ г).

Подсчитаем теперь, из скольких атомов состоит наша Земля. Мы уже производили подсчеты с постоянной Авогадро

$$N = 6{,}02 \cdot 10^{23} \text{ моль}^{-1}.$$

Значения атомных масс различных элементов колеблются от 1 для водорода до 238 для урана. В своих расчетах мы будем исходить из средней атомной массы, равной 100, то есть будем предполагать, что 100 г земного вещества содержат $6{,}02 \cdot 10^{23}$ атомов. Тогда в $6 \cdot 10^{27}$ г массы Земли мы насчитаем

$$6{,}02 \cdot 10^{23} \cdot \frac{10^{27} \cdot 6}{100} = 3{,}6 \cdot 10^{49} \text{ атомов.}$$

Кто не верит, может пересчитать их по одному. Если за каждую секунду он будет пересчитывать по 10 атомов, то за год он успеет пересчитать

$$60 \cdot 60 \cdot 24 \cdot 365 \cdot 10 = 315\,360\,000 = 3{,}15 \cdot 10^{8} \text{ атомов.}$$

В большинстве микрокалькуляторов среднего класса большие числа можно представить в виде степеней числа 10. Именно так принято записывать величины в научной литературе.

Зная, сколько атомов успеет пересчитать недоверчивый читатель за год, можно оценить время, которое уйдет у него на всю проверку:

$$3{,}6 \cdot 10^{49} : 3{,}15 \cdot 10^{8} \approx 11{,}4 \cdot 10^{40} \text{ лет.}$$

За столь безнадежное предприятие не стоит и приниматься. Может быть, сроки проверки удастся существенно сократить, если в ней примет участие все население земного шара, насчитывающее в настоящее время около 5 млрд. человек? Прикинем:

$$11{,}4 \cdot 10^{40} : 5 \cdot 10^{9} \approx 20 \cdot 10^{30} \text{ лет.}$$

Итак, недоверчивому читателю не остается ничего другого, как поверить в правильность полученного нами результата и отказаться от его проверки.

КАК ВОЗНИКАЕТ ОШИБКА ОКРУГЛЕНИЯ?

Всякий, кому доводилось пользоваться логарифмической линейкой, или кто не расстался с ней и поныне, знает, что она позволяет получать результат с точностью до 1%, но обычно это никого не беспокоит.

Как всегда бывает при «рождении» нового устройства, с появлением микрокалькуляторов на них стали возлагать большие надежды. Утверждалось, что микрокалькулятор «гораздо точнее» всех прежних вычислительных устройств, во всяком случае гораздо точнее, чем логарифмическая линейка, и по точности превосходит даже таблицы логарифмов.

Теперь, когда страсти поутихли, мы можем весьма легко и просто доказать, что микрокалькулятор допускает «ошибки округления». Например, производя вычисления на особо точном микрокалькуляторе с десятью знаками после запятой, мы обнаружим, что

$$\ln 98\,765\,432 = 18{,}40825822,$$

но в то же время

$$e^{18,40825822} = 98\,765\,431,\ \mathbf{70}.$$

Попытаемся разобраться, как возникает ошибка округления. Наш микрокалькулятор разлагает функцию $y = e^x$ в степенной ряд

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots$$

и вычисляет частичную сумму ряда до тех пор, пока ошибка от замены бесконечного ряда многочленом не станет меньше заданной величины. Таким образом, «ошибка» в последнем знаке запрограммирована конструктором микрокалькулятора.

Поясним сказанное на примере с вычислением $y = e^2$:

$$e^2 = 1 + \frac{2}{1} + \frac{2^2}{1\cdot 2} + \frac{2^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \ldots .$$

Вы можете решать эту задачу вместе с нами, даже если у вашего микрокалькулятора нет клавиши $\boxed{e^x}$. Достаточно знать, что

$$e^2 = 7{,}389056098.$$

Выпишем значения отдельных членов и частичных сумм ряда:

		Σ
1	$= 1$	1
$\frac{2}{1}$	$= 2$	3
$\frac{2^2}{1\cdot 2}$	$= 2$	5
$\frac{2^3}{1\cdot 2\cdot 3}$	$= 1{,}33\ldots$	6,33 ...
$\frac{2^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}$	$= 0{,}6667$	6,999967
$\frac{2^5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}$	$= 0{,}266667$	7,266634
$\frac{2^6}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}$	$= 0{,}088889$	7,355523
$\frac{2^7}{7!}$	$= 0{,}025397$	7,380920
$\frac{2^8}{8!}$	$= 0{,}006349$	7,387269
$\frac{2^9}{9!}$	$= 0{,}001411$	7,388680
$\frac{2^{10}}{10!}$	$= 0{,}000282$	7,388962
$\frac{2^{11}}{11!}$	$= 0{,}000051$	7,389013

При желании можно было бы продолжить. Для наших же целей вычисленного отрезка ряда вполне достаточно для того, чтобы показать, из каких элементарных шагов складывается работа микрокалькулятора, и понять, что конструктор непременно должен задать какую-то точность, иначе электроника вынуждена была бы функционировать нескончаемо. В принципе вычисление требуемого значения экспоненты продолжалось бы до переполнения регистра из-за слишком больших факториалов в знаменателях. Но схема микрокалькулятора сконструирована так, что процесс вычисления автоматически обрывается, когда значение, принимаемое отдельным членом ряда, никак не сказывается на общем результате. Вычислим, например, член

$$\frac{2^{20}}{20!}=\frac{1\,048\,576}{2{,}2429020\cdot 10^{18}}=4{,}3099804\cdot 10^{-13}.$$

Ясно, что такая точность лишена всякого смысла.

Вычисленное нами значение экспоненты позволяет подвергнуть микрокалькулятор еще одной проверке. Результаты ее выглядят особенно эффектно, если у микрокалькулятора имеется переключатель, позволяющий варьировать число знаков после запятой.

Воспользуемся тем, что $\ln x$ — функция, обратная экспоненте e^x!

Вычисляем значение натурального логарифма:

$\ln 7{,}3890 =$	2,00	2 знака
	2,0000	4 знака
	1,99999	5 знаков
	1,999992	6 знаков

В зависимости от качества вашего микрокалькулятора вы производите округление лишь в восьмом или в десятом знаке после запятой. Тем самым обеспечивается точность, достижимая в практике вычислений до появления микрокалькуляторов лишь в исключительных случаях.

НЕБОЛЬШОЕ ОТСТУПЛЕНИЕ О МИКРОКАЛЬКУЛЯТОРАХ

Существует великое множество самых разнообразных по устройству и назначению микрокалькуляторов, и работы по созданию новых, усовершенствованных, моделей ведутся во все возрастающих масштабах. Чтобы перечислить отличительные особенности микрокалькуляторов хотя бы основных типов, понадобилась бы не одна книга.

Вряд ли нужно объяснять, чем вызвано массовое производство микрокалькуляторов и почему их становится все больше и больше. Успехи тех, кто разрабатывает и создает микрокалькуляторы, и ныне и в будущем неразрывно связаны с развитием полупроводниковой техники, что ни день радующей нас новыми открытиями. Элементы электронных схем становятся все более миниатюрными и надежными в работе.

Если говорить о современном состоянии и направлениях развития микрокалькуляторов в ближайшие годы, то несмотря на все многообразие конструкций их условно можно подразделить на следующие основные типы.

1. Простые микрокалькуляторы, «владеющие» четырьмя арифметическими действиями и, быть может, снабженные дополнительными клавишами $\boxed{\pi}$, $\boxed{\sqrt{x}}$ или даже регистром памяти $\boxed{\mathrm{M}}$. Вероятно, и в последующие годы микрокалькуляторы этого типа останутся наиболее распространенным типом «карманного вычислительного прибора».

2. Следующую ступень по качеству занимают микрокалькуляторы, позволяющие простым нажатием клавиши (например, $\boxed{\sin x}$, $\boxed{x^2}$ или $\boxed{\lg x}$) вычислять значение функции. Микрокалькуляторы с полудюжиной таких клавиш сто́ят лишь немного дороже простых микрокалькуляторов. Достоинства и недостатки микрокалькулятора выясняются при вычислении значений таких выражений, как, например,

$$y=(7+8)\cdot\frac{2-3}{3+2}.$$

Разработать простейший микрокалькулятор, способный производить «всего» четыре арифметических действия, несложно. Первые трудности возникнут, когда нам понадобится «объяснить» микрокалькулятору, в каком порядке выполняются операции, научить неукоснительно соблюдать правило «умножение и деление предшествуют сложению и вычитанию».

Хотя во многих рекламных проспектах обычно утверждается, будто микрокалькулятор, о котором идет речь, позволяет вычислять значения сложных арифметических выражений «так же, как вы читаете их», при ознакомлении с инструкцией по эксплуатации микрокалькулятора выясняется, что при решении таких задач все же не обойтись без соблюдения определенных правил. Реализуются они по-разному, в зависимости от класса микрокалькулятора. Можно использовать регистр памяти и хранить в нем промежуточные результаты. В микрокалькуляторах более совершенной конструкции предусмотрены клавиши с открывающей и закрывающей скобками. Нажимая на эти клавиши, мы сообщаем микрокалькулятору, что первый результат, сумму $(7+8)$, нужно хранить в памяти до тех пор, пока не будет вычислена разность $(2—3)$.

Соблюсти старшинство операций можно и в том случае, если воспользоваться польской (бесскобочной) записью производимых действий, но об этом позже.

3. Наиболее усовершенствованные модели микрокалькуляторов позволяют программировать вычисления. Как и большие ЭВМ, они «понимают» команды (от 50 до 500) и обладают способностью (хотя и весьма ограниченной) делать логические выводы, например, при выполнении условий $x > 0$ или $x \neq 0$ заменять одну команду другой. Кроме того, микрокалькуляторы этого класса обладают несколькими регистрами памяти. По ходу вычислений эти регистры можно заполнять и обращаться к их содержимому. Таков, например, свободно программируемый советский микрокалькулятор «Электроника БЗ-21».

Носителем программы служат либо магнитные карточки, либо элементы электронной схемы микрокалькулятора (по-видимому, именно «встроенному» программированию суждено большое будущее). Существуют микрокалькуляторы, способные «запоминать» одни команды (и, следовательно, допускающие программирование) и «забывать» о других командах.

Внутренняя логика таких микрокалькуляторов основана либо на введении части задачи в регистры памяти или обращении к содержимому регистров памяти при помощи клавишей с открывающей и закрывающей скобками, либо на польской (бесскобочной) записи. В последнем случае сначала вводят числа, а затем команду, указывающую, что с ними делать.

Польская запись подразумевает использование так называемых «стеков» (магазинов) — участков памяти, хранящих заданные числа и действующих по принципу «последним прибыл, первым выбыл».

В польской записи вычисление произведения $5 \cdot (7+8)$ выглядит следующим образом:

Ввод	Показание индикатора	Содержимое стеков	
5	5	–	z
		–	y
		5	x
Enter ↑	5,00	–	z
		5,00	y
		5,00	x
7	7	–	z
		5,00	y
		7	x
Enter ↑	7,00	5,00	z
		7,00	y
		7,00	x
8	8	5,00	z
		7,00	y
		8	x
+	15,00	–	z
		5,00	y
		15,00	x
×	75,00	–	z
		–	y
		75,00	x

Обратите внимание на содержимое стеков, и вы увидите, как появляются и исчезают заданные числа.

Преимущества польской записи: во-первых, упрощаются «многоступенчатые» вычисления (стоит лишь привыкнуть к бесскобочной записи); во-вторых, при программировании вычисления разбиваются на меньшее число шагов (а это очень важно!); в-третьих, над стеками можно производить различные манипуляции, что имеет не последнее значение при проведении научных расчетов.

Прежде чем покупать микрокалькулятор, необходимо поразмыслить над тем, какие расчеты вам придется производить. Более сложный микрокалькулятор дороже, но отнюдь не «лучше», если вам не нужна его «логика».

МАГИЧЕСКИЕ КВАДРАТЫ

Около 450 лет назад Альбрехт Дюрер создал свою гравюру «Меланхолия». Среди прочих символов на ней изображен магический квадрат. Напомним, что магическим квадратом называются особым образом расположенные числа, суммы которых по горизонталям, вертикалям и диагоналям равны. Разумеется, можно придумать и другие магические квадраты. Например, встречаются магические квадраты, составленные из букв. Если читать их по любой горизонтали, вертикали или диагонали, то каждый раз получается одно и то же слово. Мы рассмотрим лишь числовые магические квадраты — те самые, над которыми меланхолически размышляет женская фигура на гравюре Дюрера. При построении магических квадратов можно придерживаться различных стратегий, но в каждом случае решение задачи сопряжено с необходимостью выполнить множество операций сложения. Мы находимся в несравненно более выгодном положении, чем Альбрехт Дюрер, поскольку все выкладки нам поможет проделать наш микрокалькулятор.

Построение магического квадрата проще всего начать с идущих подряд целых чисел, расположив их в виде квадрата. У Дюрера изображен магический квадрат с $4 \cdot 4 = 16$ клетками, в которые вписаны все целые числа от 1 до 16. Сумма чисел по горизонтали, вертикали и диагонали равна 34. Подсчитаем теперь соответствующие суммы и разность между ними и числом 34 («постоянной» магического квадрата):

	34			34		
	1	2	3	4	10	24
	5	6	7	8	26	8
	9	10	11	12	42	−8
	13	14	15	16	58	−24
Сумма	28	32	36	40		
Постоянная квадрата	6	2	−2	−6		

Прежде всего заметим, что суммы чисел, стоящих по диагоналям, уже равны 34. Эти числа мы не будем заменять другими.

В распределении значений вычисленных нами разностей нетрудно заметить определенную закономерность: каждой разности со знаком «плюс» соответствует равная по абсолютной величине разность со знаком «минус».

Начнем с наибольших по абсолютной величине разностей в верхнем и нижнем ряду. Нетрудно видеть, что

$$
\begin{array}{r}
14+15=29 \\
2+\ \ 3=\ \ 5 \\
\hline
\text{разность}=24
\end{array}
$$

Но 24 — абсолютная величина разностей. Переставив числа 14 и 2, 3 и 15, получим:

1	14	15	4	34
5	6	7	8	
9	10	11	12	
13	2	3	16	34
	32	36		
	2	−2		

Переставив в столбцах числа 14 и 15, 3 и 2, мы тем самым уничтожим разности, равные по абсолютной величине 2. Вторую и третью строки нашего квадрата преобразуем по той же схеме:

$$\begin{array}{r} 9+12=21 \\ 5+\ \ 8=13 \\ \hline 8 \end{array}$$

и переставим числа 8 и 12, 5 и 9. Остается «довести до кондиции» лишь первый и последний столбцы:

$$\begin{array}{r} 12+8=20 \\ 5+9=14 \\ \hline 6 \end{array}$$

Произведем соответствующую перестановку и для контроля вычислим все суммы по строкам:

1	15	14	4
12	6	7	9
8	10	11	5
13	3	2	16

Сравнение с магическим квадратом Дюрера показывает, что числа на гравюре расположены иначе, чем у нас. Проще всего получить из построенного нами магического квадрата новый магический квадрат при помощи отражения:

1	15	14	4		4	14	15	1
			6		6			

Зеркало

«Зеркало» можно расположить и по горизонтали:

— · — · — · — · — Зеркало

13	3	2	16
8	10	11	5
12	6	7	9
1	15	14	4

и т. д.

или повернуть наш магический квадрат на 180° вокруг диагонали D:

1	15	14	4
12	6	7	9
13	3	2	16
8	10	11	5

D

Разумеется, порядок производимых над логическим квадратом преобразований можно обратить и сначала выполнить поворот на 180° вокруг диагонали, а затем отражение. Магический квадрат Дюрера имеет еще одну особенность: он составлен с таким расчетом, что числа 15 и 14, стоящие в середине нижней строки, образуют дату создания гравюры: 1514 г.

МЕСТО ДЛЯ КОШКИ

Следующая задача заведомо известна некоторым нашим читателям, тем не менее большинству людей лишь с трудом удается численно подтвердить правильность полученного ими ответа. Наш микрокалькулятор позволяет легко справиться со всеми необходимыми вычислениями.

Апельсин диаметром 10 см туго-натуго обвязан шнурком. Ясно, что в «обхвате» такой апельсин имеет

$$U = 2\pi r_1 = 2\pi \cdot 5 = 31{,}4 \text{ см}.$$

Разрежем шнурок и ввяжем между его концами отрезок шнура длиной ровно 1 м. Удлиненный шнур расположим вокруг апельсина так, чтобы зазор a между шнуром и апельсином всюду был одинаковым. Сколь велик зазор a? Подсчитываем:

$$U = 131{,}4 \text{ см} = 2\pi \cdot r_2,$$
$$20{,}9 \text{ см} = r_2,$$
$$(20{,}9 - 5) \text{ см} = r_2 - r_1 = a \approx 15{,}9 \text{ см}.$$

Зазора в 15,9 см между шнуром и апельсином вполне достаточно, чтобы в него могла пролезть кошка.

А теперь мы подходим к наиболее удивительному во всей задаче (для тех, кто еще сохранил способность удивляться; для остальных то, о чем пойдет сейчас речь, очевидно). Обвяжем Землю (для простоты условимся считать ее шаром) по экватору канатом. Чтобы он всюду плотно прилегал к поверхности и «концы сошлись с концами», длина каната должна быть 40 000 км. Разрежем канат и удлиним его на 1 м. Затем мысленно охватим им Землю так, чтобы зазор между канатом и поверхностью Земли всюду был одинаковым.

Прежде чем приступать к вычислениям, прикинем, на сколько процентов удлинился канат:

$$1 : 40\,000\,000 = 0{,}0000025\,\%.$$

При длине экватора в 40 000 км радиус Земли составляет

$$\frac{U}{2\pi} = r_1 = 6366{,}19772 \text{ км}$$

(вычисления необходимо производить с точностью до сантиметра). При длине экватора в 40 000,001 км радиус Земли составляет

$$\frac{U}{2\pi} = r_2 = 6366{,}19788 \text{ км},$$

а величина зазора достигает

$$r_2 - r_1 = a = 88 - 72 = 16 \text{ см}.$$

И в этом случае кошка сумеет пролезть между канатом и земной поверхностью.

При решении этой задачи на простом микрокалькуляторе могут возникнуть трудности с последним знаком. В этом случае размеры земного шара можно «уменьшить» на несколько порядков. Для наших целей вполне достаточно выбрать шар с обхватом по экватору $U = 4000$ км.

Хотя проведенные нами вычисления не оставляют никаких сомнений в их правильности, результат все же кажется удивительным.

Аналогичные соображения находят широкое применение и в повседневной жизни, например, в швейной промышленности. Все знают, что размеры одежды колеблются в пределах одного номера. В магазинах готового платья нередко можно услышать, как покупатели говорят: «Этот костюм мне слишком широк» (или, наоборот, узок). Дело в том, что при массовом пошиве брюк или вязании джемперов промышленность исходит, например, из объема талии, а в процессе производства заданные размеры претерпевают незначительные отклонения. В результате покупатель, придя в магазин и выбрав одежду строго по размеру, обнаруживает, что либо брюки сползают, либо пуговицы невозможно застегнуть. Изменение объема талии на 1 см соответствует изменению «припуска на свободу» на 1,6 мм независимо от величины самого объема. Ясно, что для худых людей (с малым объемом талии) изменение припуска на свободу в 1,6 мм приводит к более ощутимым последствиям, чем для полных.

ЗАБАВЫ С ЦИФРАМИ

Владельцам фортепиано или гитары известно, как приятно прикоснуться к инструменту не для того, чтобы исполнить Баха или Гершвина, а чтобы просто пробежаться по клавишам или струнам. Заодно можно проверить, настроен ли инструмент и не утратили ли беглость и точность пальцы исполнителя.

Так же можно поступить и с микрокалькулятором. Попробуем «пробежаться» по цифрам 1, 2, 3 и т. д., например, так:

$$
\begin{aligned}
&12 \cdot 9 = 108,\\
&123 \cdot 9 = 1107,\\
&1234 \cdot 9 = 11106,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&123456789 \cdot 9 = 1111111101.
\end{aligned}
$$

Большинство микрокалькуляторов не позволяет производить вычисления с девятью или с десятью знаками. Но чтобы уловить закономерность в результатах, получаемых при умножении, вполне достаточно взять семи- или восьмиразрядный микрокалькулятор. Проследить за возникновением последовательности произведений нам помогут следующие вычисления:

$$
\begin{array}{r}
9 \cdot 12\\
\hline
9\\
18\\
\hline
108
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
9 \cdot 123\\
\hline
9\\
18\\
27\\
\hline
1107
\end{array}
$$

Если нуль мешает, то можно придумать какую-нибудь «хитрость», чтобы избавиться от него, например, попытаться отбросить предпоследнюю цифру в первом сомножителе. (Прелесть микрокалькулятора в том и состоит, что мы получаем неограниченную возможность экспериментировать с числами.) Проверяем, насколько удачна наша идея:

$$
\begin{aligned}
&13 \cdot 9 = 117,\\
&124 \cdot 9 = 1116,\\
&1235 \cdot 9 = 11\,115,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&12\,34\,5679 \cdot 9 = 111\,111\,111.
\end{aligned}
$$

И в этом случае не все типы микрокалькуляторов позволяют дойти до конца последовательности.

Может быть, стоит теперь попробовать все цифры от 1 до 9 без 8?
Сказано, сделано:

$$12\,345\,679 \cdot 9 = 111\,111\,111,$$
$$\cdot 8 = 98\,765\,432 \text{ (все цифры, кроме 1).}$$

Большинство микрокалькуляторов работают с восемью разрядами, и умножение восьмизначного числа 12 345 678 на однозначные для них — операция вполне осуществимая:

$$12\,345\,679 \cdot 7 = 86\,419\,753 \text{ (все цифры, кроме 2),}$$
$$\cdot 6 = 74\,074\,074,$$
$$\cdot 5 = 61\,728\,395 \text{ (все цифры, кроме 4),}$$
$$\cdot 4 = 49\,382\,716 \text{ (все цифры, кроме 5),}$$
$$\cdot 3 = 37\,037\,037,$$
$$\cdot 2 = 24\,691\,358 \text{ (все цифры, кроме 7).}$$

Заметим, что «недостающие» цифры всегда дополняют второй сомножитель до 9.

Можно найти и другие наборы цифр, позволяющие получать аналогичные результаты:

$$7\,654\,321 \cdot 9 = 68\,888\,889,$$
$$\cdot 8 = 61\,234\,568,$$
$$\cdot 6 = 45\,925\,926,$$
$$\cdot 3 = 22\,962\,963.$$

При умножении на 7, 5, 4 и 2 получаются ничем не примечательные произведения.

Если у вашего микрокалькулятора имеется регистр памяти, то можно ввести в него большое число и обращаться к содержимому регистра по мере надобности. Если у вашего микрокалькулятора нет регистра памяти, то рекомендуем проделать вычисления в следующей последовательности:

Исходное число

$\boxed{\times}$

$\boxed{9}$

$\boxed{=}$

Результат

$\boxed{\div}$

$\boxed{9}$

$\boxed{=}$

Исходное число

$\boxed{\times}$

$\boxed{8}$ и т. д.

Выясним теперь, что происходит с числом, все цифры которого одинаковы:

$$
\begin{aligned}
33\,333 \cdot 9 &= 299\,997,\\
\cdot 8 &= 266\,664,\\
\cdot 7 &= 233\,331\\
\hline
\cdot 6 &= 199\,998,\\
\cdot 5 &= 166\,665,\\
\cdot 4 &= 133\,332,\\
\cdot 3 &= 099\,999,\\
\cdot 2 &= 066\,666,\\
\cdot 1 &= 033\,333.
\end{aligned}
$$

Первые цифры произведений равны 2, 1 или 0, последние —

7 8 9
4 5 6
1 2 3

Повозившись с цифрами, можно найти немало других чисел, при умножении или делении которых возникают интересные результаты.

Любителям занимательной математики хорошо известно число 142 857 (эта последовательность цифр образует период десятичного разложения дроби $^1/_7 = 0,(142857)\ldots$):

$$\begin{aligned} 142\,857 \cdot 2 &= 285714, \\ \cdot 3 &= 428571, \\ \cdot 4 &= 571428, \\ \cdot 5 &= 714285, \\ \cdot 6 &= 857142, \\ \cdot 7 &= 999999. \end{aligned}$$

Вплоть до множителя 6 произведение состоит из тех же цифр, что и первый сомножитель, причем взятых в том же порядке. Когда второй множитель пробегает значения от 8 до 13, в произведении появляется новая первая цифра, а последняя цифра меньше последней цифры первого сомножителя на эту новую цифру. Если обе цифры сложить, то мы получим исходный набор цифр:

$$\begin{aligned} 142\,857 \cdot 8 &= 1\,142\,856 \\ \cdots & \cdots \\ \cdot 14 &= 1\,999\,998. \end{aligned}$$

Кто хочет, может самостоятельно проверить, по какому правилу образуются произведения, когда второй множитель пробегает значения от 15 и далее.

ЗНАМЕНИТЫЙ СЕМНАДЦАТИУГОЛЬНИК

На памятнике математику Гауссу высечен семнадцатиугольник. Эта фигура напоминает потомкам о первом научном открытии Гаусса. В 1796 г. девятнадцатилетний студент Геттингенского университета Гаусс сумел доказать, что правильный семнадцатиугольник можно построить при помощи циркуля и линейки (рис. 8).

Вопрос о том, какие правильные многоугольники можно и какие нельзя построить при помощи циркуля и линейки, на протяжении долгого времени оставался нерешенной математической проблемой. Гаусс нашел общие условия разрешимости этой проблемы и опробовал их на правильном семнадцатиугольнике.

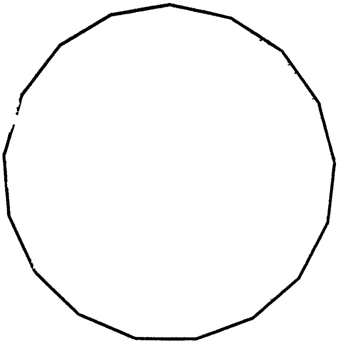


Рис. 8. Правильный семнадцатиугольник.

Из таблицы, приведенной на стр. 88, видно, как с увеличением числа сторон n правильного многоугольника начинает все более отчетливо «вырисовываться» число π. Для любителей громоздких выкладок Гаусс оставил выражение для $\cos\varphi$, где φ — центральный угол, опирающийся на сторону правильного семнадцатиугольника:

$$\cos\frac{360^\circ}{17}=\cos 21^\circ 10' 35''=$$

$$=-\frac{1}{16}+\frac{1}{16}\cdot\sqrt{17}+\frac{1}{16}\cdot\sqrt{34-2\sqrt{17}}+$$

$$+\frac{1}{8}\sqrt{17+3\sqrt{17}-\sqrt{34-2\sqrt{17}}-2\sqrt{34+2\sqrt{17}}}.$$

Большинство микрокалькуляторов при вычислении углов подразделяют их на десятые, сотые и т. д., поэтому минуты и секунды перед вводом в регистры микрокалькулятора необходимо перевести в десятичные доли градуса.

Поскольку $1^\circ=60'$, то

$$1'\approx 0{,}017^\circ,$$

$$10'\approx 0{,}17^\circ,$$

$$1''\approx\frac{1^\circ}{3600}\approx 0{,}00028^\circ,$$

$$35''\approx 0{,}0097^\circ\approx 0{,}01^\circ.$$

Следовательно,

$$21°10'35'' \approx 21,18°.$$

Проверка:

$$\frac{360°}{17} \approx 21,18°.$$

При вычислении косинуса центрального угла правильного семнадцатиугольника по формуле Гаусса каждый должен выработать собственную стратегию, сообразуясь с возможностями своего микрокалькулятора.

Элементы правильных вы

Число сторон n	Центральный угол	Сторона
3	120°	$r\sqrt{3}$
4	90°	$r\sqrt{2}$
5	72°	$\frac{r}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$
6	60°	r
8	45°	$r\sqrt{2-\sqrt{2}}$
10	36°	$\frac{r}{2}(\sqrt{5}-1)$
12	30°	$r\sqrt{2-\sqrt{3}}$
15	24°	$\frac{r}{2}\sqrt{7-\sqrt{5}-\sqrt{30-6\sqrt{5}}}$
16	22° 30′	$r\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}$
17	$21°\,10'\,35\frac{5}{17}''$	$\approx 0{,}36749904r$
20	18°	$r\sqrt{2-\sqrt{\frac{1}{2}(5+\sqrt{5})}}$
24	15°	$r\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}$
		Формула удвоения числа сторон: $s_{2n}=\sqrt{2r^2-r\sqrt{4r^2-s_n^2}}$

В простейшем варианте все квадратные корни следует вычислить отдельно и записать их значения.

Если у микрокалькулятора имеется специальная клавиша $\boxed{\text{M}}$ для введения числа в регистр памяти, то значения корней можно запоминать и затем обращаться к содержимому соответствующего регистра.

Как правило, вычисление «многоэтажных» корней лучше всего начинать с «внутреннего» корня.

пуклых многоугольников

Периметр	Площадь
$2r \cdot 2{,}59807621\ldots$	$\frac{3}{4} r^2 \sqrt{3} \approx 1{,}2990r^2$
$2r \cdot 2{,}82842712\ldots$	$2r^2$
$2r \cdot 2{,}93892626\ldots$	$\frac{5}{8} r^2 \sqrt{10 + 2\sqrt{5}} \approx 2{,}3776r^2$
$2r \cdot 3$	$\frac{3}{2} r^2 \sqrt{3} \approx 2{,}5981r^2$
$2r \cdot 3{,}06146746\ldots$	$2r^2 \sqrt{2} \approx 2{,}8284r^2$
$2r \cdot 3{,}09016923\ldots$	$\frac{5}{4} r^2 \sqrt{10 - 2\sqrt{5}} \approx 2{,}9389r^2$
$2r \cdot 3{,}10582854\ldots$	$3r^2$
$2r \cdot 3{,}11867536\ldots$	$\frac{15}{8} r^2 \sqrt{7 + \sqrt{5} - \sqrt{30 + 6\sqrt{5}}} \approx$ $\approx 3{,}0505r^2$
$2r \cdot 3{,}12144515\ldots$	$4r^2 \sqrt{2 - \sqrt{2}} \approx 3{,}0615r^2$
$2r \cdot 3{,}12374180\ldots$	$\approx 3{,}0706r^2$
$2r \cdot 3{,}12868930\ldots$	$\frac{5}{2} r^2 \sqrt{6 - 2\sqrt{5}} \approx 3{,}0902r^2$
$2r \cdot 3{,}13262862\ldots$	$6r^2 \sqrt{2 - \sqrt{3}} \approx 3{,}1058r^2$

Если вы работаете с клавишей обращения знаков $\boxed{\text{CHS}}$ $\left(\text{или } \boxed{+/-}\right)$, то корень $\sqrt{34-2\sqrt{17}}$ удобно вычислять следующим образом:

$$\boxed{17}\ \boxed{\sqrt{x}}\ \boxed{\times}\ \boxed{2}\ \boxed{+/-}\ \boxed{+}\ \boxed{34}\ \boxed{=}\ \boxed{\sqrt{x}}\ .$$

Не исключено, что вам придется несколько раз повторить вычисления, прежде чем удастся прийти к результату Гаусса:

$$\cos 21{,}18° = 0{,}93245.$$

АСТРОНОМИЧЕСКИЕ ВЕЛИЧИНЫ

Астрономы обычно измеряют космические расстояния в световых годах. Один световой год — это расстояние, которое проходит за год световой сигнал, распространяющийся со скоростью 300 000 км/с. В году

$$60 \cdot 60 \cdot 24 \cdot 365 = 31\,536\,000 \text{ с.}$$

Умножив эту величину на 300 000, получим расстояние, проходимое световым сигналом за год, в км: $9{,}46 \times \times 10^{12}$ км. До ближайшей звезды — Проксимы Центавра — несколько дальше: $38 \cdot 10^{12}$ км. От Полярной звезды нас отделяют $380 \cdot 10^{12}$ км. Чтобы преодолеть это расстояние, световому сигналу требуется около 40 лет.

До самых удаленных уголков Вселенной световой сигнал доходит за 10^{10} лет (ошибка в несколько лет в этом случае несущественна), что соответствует расстоянию в $9{,}46 \cdot 10^{22} \approx 10^{23}$ км.

Производя расчеты с невообразимо большими (поистине «астрономическими») числами особенно отчетливо ощущаешь, что за чудо наш микрокалькулятор. Большинство конструкций позволяет манипулировать с числами до $9{,}999999 \cdot 10^{99}$. Следовательно, мы можем без труда превзойти размеры Вселенной: ведь расстояние до ее границ, выраженное в миллиметрах, составляет «всего» около 10^{29}.

Английский физик Эддингтон ввел огромное число $N = 2{,}30 \cdot 10^{79}$, встречающееся в астрофизических расчетах. Он предположил, что именно столько протонов существует во Вселенной.

Из других расчетов известны постоянные 136 и 137 (мы не будем выяснять здесь их физический смысл).

Немецкий физик Эртель заметил, что

$$N = \frac{2^{136} \cdot 2^{137}}{2^{10}} = 1{,}48 \cdot 10^{79}.$$

Это значение совпадает с числом Эддингтона. Если у вашего микрокалькулятора нет клавиши $\boxed{y^x}$, то при вычислениях вы можете воспользоваться клавишей $\boxed{\lg}$.

Попробуем узнать, сколь велика масса протонов (атомных «остовов») во Вселенной. Физики измерили массу одного протона: она равна $1{,}65 \cdot 10^{-24}$ г. Следовательно, масса всех протонов во Вселенной составляет

$$1{,}48 \cdot 10^{79} \cdot 1{,}65 \cdot 10^{-24} = 2{,}44 \cdot 10^{55} \text{ г}.$$

Поскольку 1 т = 1000 кг = 1 000 000 г = 10^6 г, то

$$2{,}44 \cdot 10^{55} \text{ г} = 2{,}44 \cdot 10^{49} \text{ т}.$$

Эйнштейн оценивал массу Вселенной в $1{,}3 \cdot 10^{55}$ г. Если вы повторили все расчеты вслед за нами, то можете с гордостью сказать, что вам удалось получить почти такой же результат, как и Эйнштейну.

Но это еще не все. Эйнштейн считал, что мгновенный радиус Вселенной составляет $2{,}5 \cdot 10^{28}$ см $= 2{,}5 \times 10^{23}$ км. «Мгновенный» означает, что радиус Вселенной со временем изменяется. Так как световой сигнал проходит за год $9{,}46 \cdot 10^{12}$ км, то радиус Вселенной составляет $2{,}6 \cdot 10^{10}$ световых лет.

По сравнению с приведенными выше чудовищными числами величина 10^{23} выглядит весьма скромно.

СКОЛЬКО КАПЕЛЬ В МОРЕ?

Некоторые мотивы в народных сказках затрагивают такие понятия, как вечность и бесконечность. Вечность представлена в немецких сказках следующим поэтическим образом. Далеко в пустынях Аравии стоит высокая гора. Раз в сто лет прилетает крохотная птичка и чистит свой клюв об алмазную гору. Время, за которое птичка сотрет клювом всю гору до основания, — не более чем мгновенье перед лицом вечности. Для подсчета числа мгновений, образующих вечность, наш микрокалькулятор, очевидно, не пригоден. Но существует и множество других аналогичных вопросов, например, сколько капель в море? Всякий, кто хоть раз ходил в плавание по необозримым просторам океана и представляет себе его глубины, достигающие нескольких тысяч метров, усомнится в том, что на этот вопрос можно ответить. Тем не менее наш микрокалькулятор позволяет сосчитать капли в море!

Прежде всего загляните в домашнюю аптечку. Может быть, вам удастся разыскать пузырек с капельницей. На донышке пузырька или на этикетке указан его объем. Это позволит вам сосчитать, сколько капель вмещает один кубический сантиметр.

Оказывается, один кубический сантиметр (один миллилитр) можно наполнить 30 каплями. Следовательно, объем одной капли равен $1/30 = 0{,}033$ см^3. Объем мирового океана вы узнаете из справочника или у осведомленных жителей Атлантиды. Он составляет около

$$1{,}3 \cdot 10^{12}\ \text{км}^3 = 1{,}3 \cdot 10^{21}\ \text{м}^3 = 1{,}3 \cdot 10^{27}\ \text{см}^3.$$

Число капель в тридцать раз больше, то есть равно

$$1{,}3 \cdot 10^{27} \cdot 30 = 3{,}9 \cdot 10^{28}.$$

Для сравнения: 1 см^3 газообразного водорода содержит $2{,}69 \cdot 10^{19}$ молекул, а 1 м^3 водорода — $2{,}69 \times 10^{25}$ молекул. При таком сравнении число капель в море не кажется особенно большим.

Возникает вопрос, насколько точен результат наших вычислений: действительно ли мировой океан заполнен $3{,}9 \cdot 10^{28}$ каплями? Специалисты считают, что эта величина может отличаться от истинного значения емкости мирового океана «в каплях» не более чем в 2 раза.

Если при выплате зарплаты в 800 марок бухгалтер ошибется в 2 раза, то мы получим либо 400 марок (и это вызовет у нас протест), либо 1600 марок (к нашему неописуемому удивлению). В бухгалтерии ошибка при начислении зарплаты в n раз совершенно недопустима при любом $n \neq 1$.

Иначе обстоит дело с очень большими числами: если «порядок» (показатель наибольшей степени числа 10, не превосходящей данной величины) остается неизменным, то причин для беспокойства нет.

Проверим:

$$2 \cdot 3{,}9 \cdot 10^{28} = 7{,}8 \cdot 10^{28}.$$

Неопределенность в множителе не затрагивает порядок величины.

ВЫСОТА НАД УРОВНЕМ МОРЯ

Вы путешествуете в горах и останавливаетесь на ночлег в кемпинге. У лагерного костра разговор заходит о том, на какой высоте над уровнем моря вы находитесь.

Если у вас с собой есть барометр и микрокалькулятор, то определить высоту над уровнем моря совсем нетрудно.

Зная, что атмосферное давление на уровне моря составляет 1013 мбар, а на высоте кемпинга, скажем, 700 мбар, высоту H над уровнем моря можно найти по формуле

$$H = 7620 \text{ м} \cdot \ln\left(\frac{1013}{\text{атм. давление на высоте } H}\right) =$$

$$= 7620 \text{ м} \cdot \ln\left(\frac{1013}{700}\right) = 7620 \cdot 0{,}37 = 2816 \text{ м}.$$

Следовательно, вы, должно быть, находитесь недалеко от какой-то вершины на Кавказе.

Если в вашем микрокалькуляторе нет клавиши $\boxed{\ln}$, то можно воспользоваться клавишей $\boxed{\lg}$:

$$\ln x = 2{,}3 \cdot \lg x.$$

Подставив десятичный логарифм в формулу для определения высоты над уровнем моря, получим:

$$H = 7620 \text{ м} \cdot 2{,}3 \cdot \lg\left(\frac{1013}{700}\right) = 2813 \text{ м}.$$

Из-за расхождения в 3 м с высотой, вычисленной по той же формуле, но с натуральным логарифмом, особенно расстраиваться не следует.

Может быть, вас интересует, как низко опускается атмосферное давление на вершине Джомолунгмы?

Ее высота равна 8804 м. Воспользуемся барометрической формулой

$$p = p_0 e^{-\frac{H}{7620}}$$

(p — атмосферное давление на высоте H, p_0 — атмосферное давление на уровне моря, H — высота в метрах). Подставляя $H = 8804$ м, находим

$$p = 1013 \text{ мбар} \cdot e^{-\frac{8804}{7620}} = 319 \text{ мбар}.$$

ИЗМЕРЕНИЕ УГЛОВ

По традиции в большинстве математических задач мы измеряем углы в градусах, минутах и секундах, поэтому и большинство микрокалькуляторов запрограммированы в градусах и их десятых долях:

$$1° = 60', \quad 1' = 60'', \quad 1' = \frac{1°}{60} = 0{,}017°,$$

$$1'' = \frac{1°}{3600} \approx 0{,}00028°.$$

В старинных морских рассказах пираты «принимали три румба влево»:

$$32 \text{ румба} = 360°,$$

$$1 \text{ румб} = \frac{360°}{32} = 11° 15' = 11{,}25°.$$

Углы принято измерять и в радианах: величиной угла φ при этом называется отношение дуги s, высекаемой сторонами угла из окружности радиуса r, описанной вокруг вершины угла, к радиусу r. Хотя величина угла как отношение длин двух дуг — число безразмерное, ее принято выражать в радианах. Полный угол содержит

$$\varphi = \frac{2\pi r}{r} = 2\pi \approx 6{,}2831853 \ldots \text{ рад.}$$

Так как, с другой стороны, полный угол равен 360°, то

$$360° = 2\pi \text{ рад},$$

$$1 \text{ рад} = \frac{360°}{2\pi} \approx 57{,}2957795° \approx 57° 17' 44{,}8''$$

и

$$1° = \frac{2\pi}{360} = 0{,}0174532925 \text{ рад.}$$

У одних микрокалькуляторов имеется клавиша для перевода градусов в радианы и наоборот, у других — переключатель $\boxed{\text{град} \leftrightarrow \text{рад}}$, по положению которого можно судить, означают ли вводимые числа и получаемые результаты градусы или радианы. Работая с такими микрокалькуляторами, можно либо пользоваться приведенными выше соотношениями, либо производить вычисления так, как показано в следующем примере.

Переключатель установлен на градусы: $\sin 17° = 0{,}29237\ldots$.

Переключатель установлен на радианы: $\arcsin 0{,}29237\ldots = 0{,}2967\ldots$.

Следовательно, $17° = 0{,}2967\ldots$ рад.

Обратный перевод.

Переключатель установлен на радианы: $\sin 0{,}2967 = 0{,}29237\ldots$.

Переключатель установлен на градусы:
$\arcsin 0{,}29237\ldots = 17°$.
Следовательно, 0,2967 рад $= 17°$.

Этот метод приводит к правильным результатам лишь для острых углов φ ($0° < \varphi < 90°$ или 0 рад $< \varphi < \pi/2 \approx 1{,}570796\ldots$ рад).

Но «единицы» измерения углов отнюдь не исчерпываются радианной мерой. Полный угол делят также на новые градусы (^{g}), новые минуты (^{c}) и новые секунды (^{cc}):

$$\text{Полный угол} = 400^g;\ 1^g = 100^c;\ 1^c = 100^{cc};$$

$$1° = \frac{400^g}{360} = 1,(1)^g;\ 1^g = 0{,}9°;$$

$$1' = 0{,}0(185)^g;$$

$$1'' = 0{,}00030864^g.$$

В заключение упомянем еще об одном способе измерения углов, применяемом в военном деле. Появление его вызвано необходимостью оценивать расстояния. Если полный угол разделить на 6000 частей («делений»), то предмет шириной около 1 м виден с расстояния в 1 км под углом в 1 деление. Действительно,

$$U = 2\pi r = 6{,}28 \cdot 1 \text{ км}.$$

Округлив 6,28 км до 6 км и разделив на 6000, получим, что 1 деление соответствует ширине предмета в 1 м. На катушке обычного маршевого компаса нанесены лишь 60 делений (при большем числе рисок деления слились бы).

$$1° = 16{,}67 \text{ деления}.$$

Если хотите, можете для собственного удовольствия решить следующую задачу. Измерив угол между направлениями на два предмета по маршевому компасу, солдат обнаружил, что тот равен 1000 делений. Чему равен синус измеренного угла? Значение синуса солдат сообщил моряку, который вычислил величину арксинуса в радианах и перевел в добрые старые румбы. Докладывая величину угла капитану, моряк выразил ее в новых градусах.

Столь сложным может быть мир, если различные специалисты не могут условиться о единых единицах измерения.

Вы хотите знать, велик ли угол? Сообщаем ответ задачи: 66^g67^c (за правильность не ручаемся!).

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ «ХИТРОСТЬ»

Тригонометрические функции встречаются в технике на каждом шагу. Мы хотим показать вам, как можно вычислять значения тригонометрических функций при помощи микрокалькулятора, позволяющего выполнять только четыре арифметических действия, извлекать квадратные корни, находить обратные величины и возводить в квадрат.

Математическое обоснование предлагаемого вашему вниманию метода вычисления сводится к следующему.

Все так называемые трансцендентные функции, к числу которых принадлежат и тригонометрические функции, представимы в виде бесконечных степенных рядов

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n + \ldots .$$

Чтобы ряд сходился, то есть его сумма, несмотря на бесконечно большое число членов, стремилась к конечному пределу, члены ряда, начиная с некоторого места, должны убывать. Для функции $f(x) = \cos x$ математики нашли следующее разложение в степенной ряд:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots .$$

(Напомним, что $p!$ означает факториал числа p, то есть произведение $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ \ldots : (p-1) \cdot p$.) Этот ряд сходится при любых значениях x, но тем лучше (быстрее), чем меньше значение переменной x. Ускоренная сходимость означает также, что для достижения заданной точности необходимо учитывать меньшее число членов. Математическая «хитрость» состоит в следующем. Сначала при помощи нескольких операций (например, деления пополам) мы уменьшаем значения переменной x настолько, чтобы для достижения заданной точности достаточно было взять два или три члена ряда.

После того, как приближенная формула успешно использована, мы за то же самое число шагов (операций удвоения) должны вернуться к исходному значению переменной. Условимся называть первую последовательность шагов сжатием, а вторую — растяжением. По различным причинам математического характера функция $y = \cos x$ особенно удобна в качестве основы для вычисления значений всех тригонометрических и обратных тригонометрических функций. Поскольку косинус — четная функция, то есть $\cos(-x) = \cos x$, то, не ограничивая общности, мы можем всегда рассматривать лишь положительные углы, причем в радианной мере.

Для перевода углов из градусов в радианы можно воспользоваться формулой

$$x = \frac{2\pi \cdot \alpha}{360} = 0{,}0174532\ldots \cdot \alpha.$$

Сжатие состоит в n-кратном делении пополам заданного угла x_0 (в радианах). Исходный угол подвергается сжатию до тех пор, пока не будет выполняться неравенство $x_n \leqslant 0{,}3$. После того, как это будет достигнуто, первые три члена

$$y_n \approx 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$$

разложения косинуса в степенной ряд дадут нам приближенное значение $y_n = \cos x_n$ с ошибкой, меньше, чем 10^{-6}. Для вычисления на микрокалькуляторе первые три члена ряда удобно преобразовать к виду

$$y_n = \frac{\left(\frac{x_n^2}{2} - 3\right)^2 - 3}{6}.$$

При возвращении к исходному значению x_0 (растяжении), угол необходимо подвергнуть n-кратному удвоению. Поскольку $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$, за n шагов, осуществляемых по формуле

$$y_{i-1} = 2y_i^2 - 1,$$

мы достигнем значения y_0.

Схема вычисления значений косинуса выглядит следующим образом.

Сжатие	Растяжение
x_0 (в радианах)	$y_0 = \cos x_0$
$\downarrow$	$\uparrow$
n-кратное деление пополам	$y_{i-1} = 2y_i^2 - 1$ (n раз)
$\downarrow$	$\uparrow$

$$x_n\ (\leqslant 0{,}3) \rightarrow \frac{\left(\frac{x_n^2}{2} - 3\right)^2 - 3}{6} = y_n$$

Значения трех других наиболее употребительных тригонометрических функций можно выразить через значения косинуса по следующим формулам ($y_0 = \cos x_0$):

$$\sin x_0 = \sqrt{1 - y_0^2}\ ;$$

$$\operatorname{tg} x_0 = \sqrt{\frac{1}{y_0^2} - 1}\ ;$$

$$\operatorname{ctg} x_0 = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{y_0^2} - 1}}.$$

(Эти соотношения выполняются лишь для острого угла x_0.) Таким образом, если значение косинуса известно, то для вычисления значений синуса, тангенса и котангенса нам понадобится нажать на клавиши микрокалькулятора лишь еще 5 раз.

Вычислим, например, $y_0 = \cos 67°$:

$$x_0 = 1{,}1693706;$$

$$x_1 = 0{,}5846853;$$

$$x_2 = 0{,}2923426\ (< 0{,}3);$$

$$y_2 = 0{,}9575722 = \frac{\left(\frac{x_2^2}{2} - 3\right)^2 - 3}{6}\ ;$$

$$y_1 = 0{,}8338891;$$

$$y_0 = 0{,}3907421.$$

На клавиши микрокалькулятора всего требуется нажать 34 раза.

Более точное значение: $\cos 67° = 0{,}390731128$. Следовательно, погрешность вычислений составляет $\Delta f \approx \approx 1 \cdot 10^{-5}$. Так как при переходе к обратным тригонометрическим функциям («аркфункциям») независимая и зависимая переменные меняются местами, то и последовательность выполнения операций также изменяется на противоположную. Из тригонометрии известно, что

$$\cos\frac{x}{2} = \sqrt{\frac{\cos x + 1}{2}},$$

поэтому при «сжатии» вычисления на каждом шаге производятся по формуле

$$x_{i+1} = \sqrt{\frac{x_i + 1}{2}}$$

и обрываются, как только будет выполнено условие $x \geqslant 0{,}9$. В качестве приближенной формулы используется все тот же отрезок степенного ряда для косинуса

$$y_n = \frac{\left(\frac{x_n^2}{2} - 3\right)^2 - 3}{6},$$

но соотношение между y_n и x_n необходимо предварительно разрешить относительно x_n и изменить обозначения, переставив x_n и y_n. Таким образом, значения арккосинуса мы вычисляем по следующей схеме.

Сжатие	Растяжение
$x_0\ (\lvert x_0 \rvert \leqslant 1)$	$y_0 = \arccos x_0$
$\downarrow$	$\uparrow$
$x_{i+1} = \sqrt{\frac{x_i + 1}{2}}$	$y_{i-1} = 2y_i$ (n раз)
$\downarrow$	$\uparrow$

$$x_n\ (\geqslant 0{,}9) \rightarrow \sqrt{6 \cdot \left(1 - \sqrt{\frac{1 + 2 \cdot x_n}{3}}\right)} = y_n$$

Зная арккосинус, нетрудно вычислить другие арк-функции по формулам:

$$\arcsin x_0 = 1{,}5707963 - \arccos x_0,$$

$$\operatorname{arctg} x_0 = \arccos \frac{1}{\sqrt{1+x_0^2}},$$

$$\operatorname{arcctg} x_0 = \arccos \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{x_0^2}+1}}.$$

Например, если требуется вычислить $y = \arcsin 0{,}5$, то вычисления производятся следующим образом:

$x_0 = 0{,}5;$

$x_1 = 0{,}8660254;$

$x_2 = 0{,}9659258\ (> 0{,}9);$

$y_2 = 0{,}2618011 = \sqrt{6\cdot\left(1-\sqrt{\frac{1+2x_2}{3}}\right)};$

$y_1 = 0{,}5236022;$

$y_0 = 1{,}0472045 = \arccos 0{,}5;$

$y = \arcsin 0{,}5 = 1{,}5707963 - y_0 = 0{,}5235919.$

Всего на клавиши микрокалькулятора нам понадобилось нажать 41 раз. Более точное значение арксинуса:

$$\arcsin 0{,}5 = 0{,}5235988.$$

Погрешность вычислений составляет $\Delta f = 10^{-5}$.

Если вы хотите вычислять значения тригонометрических и обратных тригонометрических функций с меньшей точностью и начальные значения не превосходят определенных пределов, то удобно воспользоваться упрощенными приближенными формулами, выведенными из двух первых членов разложения косинуса в степенной ряд. Ошибка при этом остается меньше 10^{-3}. Ниже мы приводим упрощенные формулы, указываем пределы, в которых заключены допустимые значения независимой переменной, а также значения соответствующих функций, вычисленные с

8 знаками после запятой.

$$\sin x \approx x\left(1-\frac{x^2}{6}\right) \text{ при } |x| \leqslant 0{,}63$$

(угол не превосходит 36°).

Пример: $\sin 0{,}42 = \sin 24° \approx 0{,}408$ (более точное значение: 0,40776045).

$$\cos x \approx 1-\frac{x^2}{2} \text{ при } |x| \leqslant 0{,}39$$

(угол не превосходит 22°).

Пример: $\cos 0{,}349 = \cos 20° \approx 0{,}939$ (более точное значение: 0,93971514).

$$\operatorname{tg} x \approx x\left(1+\frac{x^2}{3}\right) \text{ при } |x| \leqslant 0{,}38$$

(угол не превосходит 22°).

Пример: $\operatorname{tg} 0{,}349 = \operatorname{tg} 20° \approx 0{,}363$ (более точное значение: 0,36389566).

$$\arcsin x \approx x\left(1+\frac{x^2}{6}\right) \text{ при } |x| \leqslant 0{,}42$$

($\arcsin x$ не превосходит 24°).

Пример: $\arcsin 0{,}3 \approx 0{,}3045$ (более точное значение: 0,30469265).

$$\arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x = 1{,}5708 - \arcsin x.$$

Пример: $\arccos 0{,}3 \approx 1{,}5708 - 0{,}3045 = 1{,}266$ (более точное значение: 1,26610367).

$$\operatorname{arctg} x \approx x\left(1-\frac{x^2}{3}\right) \text{ при } |x| \leqslant 0{,}35$$

($\operatorname{arctg} x$ не превосходит 20°).

Пример: $\operatorname{arctg} 0{,}3 \approx 0{,}291$ (более точное значени 0,2915679).

$$\operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x = 1{,}5708 - \operatorname{arctg} x.$$

Пример: $\operatorname{arcctg} 0{,}3 \approx 1{,}5708 - 0{,}291 = 1{,}28$ (более точное значение: 1,27933953).

При вычислении значений арккотангенса можно воспользоваться также соотношением

$$\operatorname{arcctg} x = \operatorname{arctg}\frac{1}{x}.$$

НЕ БОЙТЕСЬ ЛОГАРИФМОВ

У многих людей (в том числе и тех, кто получил техническое или естественнонаучное образование) при слове «логарифм» возникает неприятное чувство. Может быть, это объясняется несколько чуждым звучанием слова логарифм, означающим в действительности не что иное, как «показатель степени».

Найти $\log_b a$ (читается: логарифм (числа) a по основанию b) означает решить уравнение

$$b^x = a,$$

то есть ответить на вопрос: какая степень числа b совпадает с числом a.

Трудно понять антипатию ко всему, что связано с логарифмами: ведь именно теория логарифмов в гораздо большей степени, чем какой-либо другой раздел математики, возникла из потребностей практики. Широкое распространение, которое получила логарифмическая линейка, подтверждает сказанное. С приобретением микрокалькулятора у вас появилось счетное устройство, намного превосходящее по своим возможностям логарифмическую линейку (даже если в сети нет тока и батарейки разряжены).

Прежде чем перейти к изложению практических приемов работы с логарифмами, мы хотим познакомить вас с некоторыми классами функций, имеющих непосредственное отношение к вычислениям с логарифмами. Это позволит вам лучше понять существо приближенных методов, используемых при вычислении соответствующих значений функций.

Прежде всего, мы хотим представить вам показательные функции $y = b^x$. Если основание b выбрать равным «числу Эйлера» e, то получится экспонента

$$y = \mathrm{e}^x,$$

играющая особо важную роль. Ее разложение в степенной ряд имеет вид

$$\mathrm{e}^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots$$

и сходится при всех x (обращаем ваше внимание на то, что $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n$).

При $x = 1$ этот бесконечный ряд позволяет вычислить значение e:

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \ldots = 2{,}7182818\ldots.$$

Представление числа e в виде непрерывной дроби см. в разделе «Непрерывные дроби».

Чтобы вычислить значения функции $y = e^x$, воспользуемся первыми тремя членами ряда. Преобразуем их к виду, удобному для вычисления на микрокалькуляторе:

$$y \approx \frac{(x+1)^2 + 1}{2}.$$

При $|x| \leqslant 0{,}01$ ошибка меньше, чем 10^{-4}. Воспользуемся снова известным математическим приемом «сжатие — растяжение» (см. предыдущий раздел). Сжатие состоит в последовательном делении значений независимой переменной пополам. Поскольку $e^{x/2} = \sqrt{e^x}$, то сжатие соответствует n-кратному извлечению квадратного корня. Схема вычислений выглядит следующим образом.

Сжатие	Растяжение
$x_0\ (>0)$	$y_0 = e^{x_0}$
$\downarrow$	$\uparrow$
n-кратное деление пополам	n-кратное возведение в квадрат
$\downarrow$	$\uparrow$

$$x_n\ (\leqslant 0{,}01) \to \frac{(x_n + 1)^2 + 1}{2} = y_n$$

Если вводимое значение x_0 отрицательно ($x_0 < 0$), то все вычисления необходимо проделать с его абсолютной величиной, а затем нажать клавишу $\boxed{1/x}$ (так как $e^{-x} = 1/e^x$).

Функцией, обратной экспоненте $y = e^x$, является $y = \ln x$ (читается: натуральный логарифм, или просто «эль эн»). Это — не что иное, как логарифм по основанию e. При вычислении натуральных логарифмов приближенную формулу для $y = e^x$ следует обратить:

разрешить соотношение $y=[(x+1)^2+1]/2$ относительно x и поменять местами x и y. Проделав эти преобразования, получим:

$$y=\sqrt{2x-1}-1.$$

Таким образом, схема вычисления натуральных логарифмов сводится к следующему.

Сжатие	Растяжение
$x_0\,(\geqslant 1)$	$y_0=\ln x_0$
$\downarrow$	$\uparrow$
n-кратное извлечение квадратного корня	n-кратное удвоение
$\downarrow$	$\uparrow$

$x_n\,(\leqslant 1{,}005)\to\sqrt{2x_n-1}-1=y_n$

При $x_0<1$ все вычисления надлежит проделать с $1/x_0$, а результат взять со знаком минус (так как $\ln(1/x_0)=-\ln x_0$).

Если вам потребуется вычислить десятичный логарифм $\lg x$, то воспользуйтесь формулой $\lg x=0{,}4343\cdot\ln x$.

Если в практических задачах вам довольно часто понадобится находить значения функции $y=a^b$ ($a>0$, b — любое вещественное число), а у вашего микрокалькулятора нет клавиши $\boxed{y^x}$, то желаемый результат можно получить окольным путем:

пользуясь тождеством $a^b=e^{b\cdot\ln a}$, вычислите сначала $\ln a$ по второй из схем этого раздела, умножьте $\ln a$ на b и вычислите $e^{b\ln a}$ по первой схеме.

Пример. Вычисление $y=\ln 0{,}85$:

$$x_0=\frac{1}{0{,}85}=1{,}1764706;$$

$$x_1=1{,}0846523;$$

$$x_2=1{,}0414664;$$

$$x_3=1{,}0205226;$$

$$x_4 = 0{,}0102092;$$
$$x_5 = 1{,}0050916;$$
$$x_6 = 1{,}0025426\,(< 1{,}005);$$
$$y_6 = 0{,}0025394 = \sqrt{2x_6 - 1} - 1;$$
$$y_5 = 0{,}0050788;$$
$$y_4 = 0{,}0101576;$$
$$y_3 = 0{,}0203152;$$
$$y_2 = 0{,}0406304;$$
$$y_1 = 0{,}0812608;$$
$$y_0 = 0{,}1625216;$$
$$y = -0{,}1625216.$$

Чтобы получить конечный результат, на клавиши микрокалькулятора необходимо нажать 31 раз. Более точное значение логарифма: $\ln 0{,}85 = -0{,}1625189$, то есть ошибка $\Delta f < 10^{-5}$.

Если у вашего микрокалькулятора нет клавиши для извлечения квадратного корня, а значения переменной x заключены в определенных пределах, то значения экспоненты и логарифмы можно вычислять по следующим приближенным формулам (с погрешностью не более 10^{-3}).

$$e^x \approx \frac{(x+1)^2+1}{2} \quad \text{при } |x| \leqslant 0{,}18.$$

Пример: $e^{0,15} \approx 1{,}16125$ (более точное значение: 1,161834242).

$$\ln(1+x) \approx \frac{1-(x-1)^2}{2} \quad \text{при } |x| \leqslant 0{,}14.$$

Пример: $\ln 0{,}9 = \ln(1-0{,}1) \approx -0{,}105$ (более точное значение: $-0{,}105360516$).

$$\lg(1+x) \approx 0{,}21715\,[1-(x-1)^2] \quad \text{при } |x| \leqslant 0{,}21.$$

Пример: $\lg 0{,}9 = \lg(1-0{,}1) \approx -0{,}0456$ (более точное значение: $-0{,}04575749071$).

Теперь мы хотим показать вам, что логарифмы — изобретение весьма полезное. «Всемирно известны» логарифмы трех родов, то есть три разновидности общего представления логарифмов $y = \log_b x$.

1. Натуральные логарифмы. Основание натуральных логарифмов равно числу Эйлера e, обозначение: $y = \ln x$. Они играют важную роль в естественнонаучных приложениях.

2. Десятичные логарифмы. Их основание равно 10, обозначение: $y = \lg x$. Эти логарифмы специально приспособлены к нашей десятичной системе. Их значения приведены в бесчисленном множестве таблиц. Когда говорят о логарифмах, не уточняя, при каком основании они взяты, обычно имеют в виду десятичные логарифмы.

3. Двоичные логарифмы. Это логарифмы при основании 2, обозначение: $y = \mathrm{lb}\, x$ (читается: двоичный логарифм). Двоичные логарифмы получили широкое распространение с развитием электронной вычислительной техники, поскольку современные ЭВМ производят «внутренние операции» в двоичной системе (с основанием 2).

Модули перехода от одной системы логарифмов к другой приведены ниже:

	ln	lg	lb
ln	1	$\ln 10 = 2{,}302585$	$\ln 2 = 0{,}693147$
lg	$\frac{1}{\ln 10} = 0{,}434294$	1	$\lg 2 = 0{,}30103$
lb	$\frac{1}{\ln 2} = 1{,}442695$	$\frac{1}{\lg 2} = 3{,}321928$	1

Чтобы вам удобнее было практически работать с логарифмами, составим сводку важнейших формул:

$$\log(a \cdot b) = \log a + \log b,$$

$$\log\left(\frac{a}{b}\right) = \log a - \log b,$$

$$\log(a^n) = n \log a, \text{ где } a > 0,\ b > 0, n \text{ — любое вещественное число},$$

$$\log(\sqrt[n]{a}) = \frac{1}{n} \log a.$$

Как нетрудно заметить, при логарифмических вычислениях порядок операций понижается на одну ступень: умножение двух чисел a и b заменяется сложением их логарифмов и т. д. Именно этим и объясняется то широкое распространение, которое получили логарифмы. Впрочем, требования, предъявляемые к точности вычислений, достаточно высоки. Недаром хорошие таблицы логарифмов составлены с шестью знаками после запятой.

Разумеется, и логарифмические таблицы, и логарифмическая линейка бессильны помочь нам, если требуется произвести сложение или вычитание двух чисел (не существует операций, стоящих на одну степень «ниже» сложения и умножения) или выполнить так называемые «цепные вычисления», состоящие из комбинаций четырех арифметических действий. Вот тут-то и предстает в своем истинном величии ваш микрокалькулятор! В качестве примера приведем приближенную формулу для подсчета вероятности того, что среди n человек не найдутся такие, у кого бы дни рождения совпадали (из раздела «Дни рождения и лотереи»). Мы предполагаем, что у вашего микрокалькулятора нет клавиши $\boxed{y^x}$. Общая формула для подсчета вероятности имеет вид

$$W_n = \frac{\sqrt{2\pi\cdot 365}\cdot 365^{365}\cdot e^{-365}}{\sqrt{2\pi\cdot(365-n)}\cdot(365-n)^{365-n}\cdot e^{-(365-n)}\cdot 365^n}.$$

Полагая $n = 40$ и сокращая на $\sqrt{2\pi}$, получаем:

$$W_{40} \approx \frac{\sqrt{365}\cdot 365^{365}\cdot e^{-365}}{\sqrt{325}\cdot 325^{325}\cdot e^{-325}\cdot 365^{40}}.$$

Степени с одинаковым основанием можно включить в один множитель и учесть, что $\sqrt{x} = x^{1/2}$.

При умножении (делении) степеней с одинаковым основанием их показатели суммируются (вычитаются).

После всех преобразований находим:

$$W_{40} \approx \left(\frac{365}{325}\right)^{325,5} \cdot \frac{1}{e^{40}} = \frac{1,123077^{325,5}}{e^{40}}.$$

Схема вычислений с использованием логарифмов выглядит следующим образом:

$$\lg W_{40} = \lg \frac{1,123077^{325,5}}{e^{40}} =$$
$$= 325,5 \cdot \lg 1,123077 - 40 \cdot \lg e =$$
$$= -0,963484.$$

Но коль скоро $\lg W_{40} = -0,963484$, то

$$W_{40} = 10^{-0,963484} = 0,1087717.$$

Из равенства $\lg a = c$ следует, что $a = 10^c$ при любом c.

Так окольным путем, при помощи логарифмов, вы пришли к тому результату, как и на стр. 164.

ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

Существует еще один класс функций, тесно связанных с экспонентами, но имеющих самостоятельное значение. Мы имеем в виду гиперболические и обратные гиперболические функции. Для вычисления их значений в микрокалькуляторах особенно изощренных конструкций предусмотрены специальные клавиши.

Обозначения $y = \operatorname{sh} x$ (читается: синус гиперболический), $\operatorname{ch} x$, $\operatorname{th} x$ и $\operatorname{cth} x$ указывают на определенное сходство между гиперболическими и тригонометрическими функциями. Например,

$$\frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \operatorname{th} x \text{ и } \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x} = \operatorname{cth} x.$$

Гиперболические функции задаются соотношениями

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2},$$

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2},$$

$$\operatorname{th} x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}},$$

$$\operatorname{cth} x = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}.$$

При больших значениях x член e^{-x} очень мал, поэтому значения гиперболических функций можно вычислять по приближенным формулам

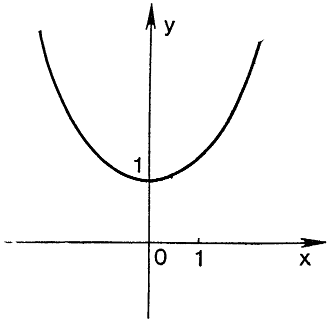
$$\operatorname{sh} x \approx \operatorname{ch} x = \frac{e^x}{2},$$

$$\operatorname{th} x \approx \operatorname{cth} x \approx 1$$

(при $x = 10$ погрешность при замене точных формул приближенными составляет $\Delta f \approx e^{-10}$).

Гиперболический косинус известен в технике под названием цепной линии — такую форму принимает цепь или тяжелая гибкая нить, подвешенная за концы (рис. 9). При этом безразлично, идет ли речь о жемчужном ожерелье, свисающем с шеи женщины, или о трансатлантическом кабеле, провисшем над расселиной в дне океана.

Существует еще одна важная гиперболическая функция $\operatorname{th} x$. Она известна, как «функция роста». При больших по абсолютной величине положительных и отрицательных значениях x гиперболический тангенс стремится снизу и сверху к двум асимптотам (последнее означает, что зазор между гиперболическим тангенсом и этими прямыми становится сколь угодно узким), параллельным оси x и проходящим через точки $y = +1$ и $y = -1$ оси y (рис. 10). Гиперболический тангенс возникает в различного рода расчетах, связанных с прогнозированием процессов с насыщением. Такие процессы встречаются довольно часто. Прирост численности ученых в стране или сбыт телевизоров, кухонных шкафов и стиральных машин достаточно хорошо описываются гиперболическим тангенсом. Отличительные особенности такого процесса заключаются в том, что сначала развитие его происходит совсем медленно (техническая новизна, высокая цена, несовершенство конструкции), затем темп стремительно возрастает (предмет широкого потребления, массовое производство, совершенная конструкция) и, наконец,



Рис, 9. Цепная линия.

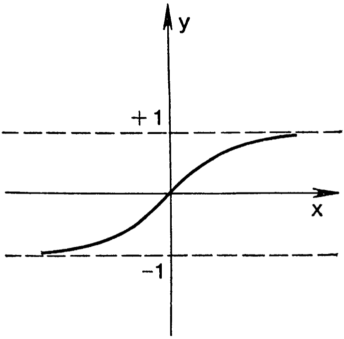


Рис. 10. Гиперболический тангенс. Асимптоты показаны пунктиром.

наступает насыщение (обычно одной семье не требуется более одного телевизора или автомашины).

Для прогнозирования удобно пользоваться гиперболическим тангенсом, записанным в виде

$$y=\frac{S}{2}\left(1+\operatorname{th}\frac{x-C}{k}\right),$$

где x — время, S — постоянная насыщения, C — время «полунасыщения» и k — еще один параметр.

Состояние исследуемого объекта в момент времени x характеризуется величиной y. Если произведено достаточно много измерений (x_i, y_i), то можно определить постоянные S, C и k (см. раздел «Линейная регрессия»), и специалист, занимающийся составлением прогноза, получает возможность, исходя из положения дел, в один момент времени предсказать ожидаемые значения величины y в будущем.

При вычислении значений гиперболических функций воспользуемся испытанным методом, пригодным для микрокалькуляторов (см. раздел «Математическая «хитрость»).

Для получения приближенной формулы оборвем степенной ряд на третьем члене

$$\operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots .$$

После несложных преобразований получаем

$$y = \operatorname{ch} x \approx \frac{\left(\frac{x^2}{2} + 3\right)^2 - 3}{6}.$$

Схема вычислений выглядит следующим образом:

$$\begin{array}{ll}
\text{Сжатие} & \text{Растяжение} \\
x_0 & y_0 = \operatorname{ch} x_0 \\
\downarrow & \uparrow \\
n\text{-кратное деление пополам} & y_{i-1} = 2y_i^2 - 1 \\
\downarrow & \uparrow
\end{array}$$

$$x_n\ (\leqslant 0{,}3) \to \frac{\left(\frac{x_n^2}{2} + 3\right)^2 - 3}{6} = y_n$$

Относительная ошибка меньше 10^{-4}. По известному значению $y = \operatorname{ch} x$ значения других гиперболических функций нетрудно вычислить по формулам

$$\operatorname{sh} x = \sqrt{y^2 - 1},$$

$$\operatorname{th} x = \sqrt{1 - \frac{1}{y^2}},$$

$$\operatorname{cth} x = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{y^2}}}.$$

В качестве примера вычислим $y = \operatorname{th} 2{,}7$:

$$x_0 = 2{,}7;$$

$$x_1 = 1{,}35;$$

$$x_2 = 0{,}675:$$

$$x_3 = 0{,}3375;$$

$x_4 = 0,16875\,(< 0,3);$

$$y_4 = 1,0142721 = \operatorname{ch} x_4 = \frac{\left(\frac{x_4^2}{2} + 3\right)^2 - 3}{6};$$

$y_3 = 1,0574956;$

$y_2 = 1,2365940;$

$y_1 = 2,0583296;$

$y_0 = 7,4734416 = \operatorname{ch} x_0;$

$$\sqrt{1 - \frac{1}{y_0^2}} = y = 0,991007 = \operatorname{th} x_0.$$

Более точное значение: 0,9910075; погрешность $\Delta f < 10^{-6}$. Чтобы вычислить значение гиперболического тангенса, вам понадобится нажать на клавиши микрокалькулятора 48 раз.

Функции, обратные гиперболическим, называются ареафункциями. Разрешив приближенную формулу для гиперболического косинуса относительно x и поменяв местами x и y, получим приближенную формулу для вычисления значений $y = \operatorname{Arch} x$ (читается: ареакосинус):

$$y = \operatorname{Arch} x \approx \sqrt{6 \cdot \left(\sqrt{\frac{1 + 2x}{3}} - 1\right)}.$$

Схема вычислений выглядит следующим образом:

$$\begin{array}{lcl}
\text{Сжатие} & & \text{Растяжение} \\
x_0\ (\geqslant 1) & & y_0 = \operatorname{Arch} x_0 \\
\downarrow & & \uparrow \\
x_{i+1} = \sqrt{\dfrac{x_i + 1}{2}} & & n\text{-кратное удвоение} \\
\downarrow & & \uparrow \\
\multicolumn{3}{l}{x_n\ (\leqslant 1,04) \to \sqrt{6 \cdot \left(\sqrt{\dfrac{1 + 2x_n}{3}} - 1\right)} = y_n}
\end{array}$$

Две наиболее часто встречающиеся ареафункции (при $x \geqslant 1$) связаны с базисной функцией $\operatorname{Arch} x$ следующими соотношениями:

$$\operatorname{Arsh} x = \operatorname{Arch} \sqrt{x^2+1},$$

$$\operatorname{Arcth} x = \operatorname{Arch} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}.$$

Следовательно, чтобы получить значения этих функций, вам придется нажать клавиши микрокалькулятора не более 7 раз, прежде чем начнется собственно процесс вычисления. Поскольку функция $y = \operatorname{Arth} x$ определена лишь при $|x| < 1$,

---

$|x|$ читается «абсолютная величина», или «модуль» x; $|x| < 1$ означает неравенство $-1 < x < +1$;

то мы воспользуемся другим разложением в степенной ряд, приводящим к приближенной формуле

$$\operatorname{Arcth} x \approx \frac{x}{180} \cdot [(6x^2+5)^2 + 155]$$

с погрешностью $< 10^{-3}$ при $|x| < 0{,}5$.

В качестве примера вычислим следующее значение ареакосинуса:

$$y = \operatorname{Arch} 1{,}7;$$

$$x_0 = 1{,}7;$$

$$x_1 = 1{,}161895;$$

$$x_2 = 1{,}0396862 \ (< 1{,}04);$$

$$y_2 = 0{,}2808101 = \operatorname{Arch} x_2 = \sqrt{6\left(\sqrt{\frac{1+2x_2}{3}} - 1\right)};$$

$$y_1 = 0{,}5616203;$$

$$y_0 = 1{,}1232405.$$

Более точное значение (с 6 знаками после запятой): $\operatorname{Arch} 1{,}7 = 1{,}123231$; погрешность $\Delta f \approx 10^{-6}$. Чтобы вычислить $\operatorname{Arch} 1{,}7$ в этом примере, на клавиши микрокалькулятора нам понадобилось нажать 29 раз.

Если довольствоваться менее точными значениями, то можно воспользоваться следующими приближенными формулами (если независимая переменная заключена в указанных для каждой формулы пределах, то погрешность $\Delta f < 10^{-3}$).

$$\operatorname{sh} x \approx x\left(1 + \frac{x^2}{6}\right) \text{ при } |x| \leqslant 0{,}63.$$

Пример: $\operatorname{sh} 0{,}3 \approx 0{,}3045$ (более точное значение: 0,30452029).

$$\operatorname{ch} x \approx 1 + \frac{x^2}{2} \text{ при } |x| \leqslant 0{,}39.$$

Пример: $\operatorname{ch} 0{,}3 \approx 1{,}045$ (более точное значение: 1,04533851).

$$\operatorname{th} x \approx x\left(1 - \frac{x^2}{3}\right) \text{ при } |x| \leqslant 0{,}42.$$

Пример: $\operatorname{th} 0{,}3 \approx 0{,}291$ (более точное значение: 0,29131261).

Проверка: $\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}$.

$$\operatorname{Arsh} x \approx x\left(1 - \frac{x^2}{6}\right) \text{ при } |x| \leqslant 0{,}42.$$

Пример: $\operatorname{Arsh} 0{,}3 \approx 0{,}2955$ (более точное значение: 0,29567305).

Следует заметить, что если у микрокалькулятора имеется клавиша $\boxed{\ln}$, то значения ареафункций можно вычислять по формулам

$$\operatorname{Arsh} x = \ln\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right),$$
$$\operatorname{Arch} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right),$$
$$\operatorname{Arth} x = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + x}{1 - x},$$
$$\operatorname{Arcth} x = \frac{1}{2} \ln \frac{x + 1}{x - 1}.$$

КАК РАЗУМНО ПОЛЬЗОВАТЬСЯ МИКРОКАЛЬКУЛЯТОРАМИ ОСНОВНЫХ ТИПОВ

Прилагаемая к каждому микрокалькулятору инструкция содержит далеко не исчерпывающее описание его особенностей. Мы надеемся, что наши дополнительные пояснения и рекомендации окажутся не лишними. Речь пойдет в основном о микрокалькуляторах, использующих традиционную (не бесскобочную) запись производимых операций.

1. Если вы по ошибке ввели неправильное число, то, нажав вслед за этим на клавишу $\boxed{\text{CE}}$, погасите ошибку (последнее из введенных чисел), после чего введите правильное число. В микрокалькуляторах более простых конструкций, не имеющих клавиши $\boxed{\text{CE}}$, ошибку можно исправить, если после введения неправильного числа выполнить обратную операцию. Такой способ исправления ошибок особенно удобен, если речь идет об исправлении сбоя на позднем этапе сложного расчета, поскольку погашение результата при помощи клавиши $\boxed{\text{C}}$ привело бы к необходимости повторить все выкладки с самого начала. В некоторых микрокалькуляторах нажатие клавиши $\boxed{\text{C}}$ приводит к погашению последнего введенного числа, и лишь двукратное нажатие клавиши $\boxed{\text{C}}$ вызывает сброс всего результата.

2. Во многих калькуляторах, чтобы обеспечить вызов как можно большего числа функций, клавиши работают в режиме совмещения. Вводя аргумент и нажимая клавишу, на которой стоит символ нужной вам функции, вы вычисляете значение этой функции. Если же вам понадобится вычислить значение функ-

ции, символ которой указан на корпусе микрокалькулятора *над* клавишей, то нужно сначала ввести аргумент, затем нажать клавишу $\boxed{\mathrm{F}}$ и лишь после этого нажать клавишу, *над* которой стоит символ интересующей вас функции. Какие функции относятся к «клавишным» и какие к «надклавишным», зависит от конструкции микрокалькулятора. Предположим, что на корпусе микрокалькулятора над клавишей $\boxed{x^2}$ нанесен символ $\sqrt{x}$ (то есть клавиша с «надстройкой» помечена так: $\boxed{\begin{smallmatrix}\sqrt{x}\\ x^2\end{smallmatrix}}$). Нажимая клавиши $\boxed{7}$ $\boxed{x^2}$, мы получаем квадрат числа 7, а нажимая клавиши $\boxed{7}$ $\boxed{\mathrm{F}}$ $\boxed{\sqrt{x}}$, находим квадратный корень из числа 7. Если при вводе аргумента вы ошибочно нажали клавишу $\boxed{\mathrm{F}}$, то ошибку можно исправить, нажав клавишу $\boxed{\mathrm{CF}}$.

3. Чтобы ввести какие-нибудь числа в регистр памяти микрокалькулятора с клавишей памяти $\boxed{\mathrm{M}}$, можно набрать эти числа на клавиатуре, а затем нажать на клавиши $\boxed{=}$ $\boxed{\mathrm{M}}$ или $\boxed{\mathrm{STO}}$ $\boxed{\mathrm{M}}$. Если в регистр памяти требуется поместить новое число, то в различных микрокалькуляторах это делается по-разному. В одних микрокалькуляторах, прежде чем вводить новое число в регистр памяти, нужно нажать клавишу $\boxed{\mathrm{CM}}$, в других ввод нового числа осуществляется непосредственно, то есть сначала автоматически стирается содержимое регистра памяти, а затем в него вписывается новое число. Запись нуля означает очистку регистра памяти. Следует упомянуть и о том, что существуют микрокалькуляторы с регистрами чи-

сел $\boxed{\text{M}+}$, $\boxed{\text{M}-}$, $\boxed{\text{M}\times}$ $\boxed{\text{M}\div}$, позволяющие производить операции, указанные после буквы М, над содержимым регистра и вновь введенным числом и хранить полученный результат. Если вы хотите записать в такой регистр число, то *перед* введением числа необходимо нажать клавишу $\boxed{\text{CM}}$, чтобы стереть содержимое регистра, в противном случае в него будет записано не само число, а результат операции, произведенной над числом и содержимым регистра.

Обращение к содержимому регистра памяти у различных микрокалькуляторов происходит по-разному. У одних достаточно нажать клавишу $\boxed{\text{M}}$, у других требуется нажать клавиши $\boxed{\text{RCL}}$ $\boxed{\text{M}}$.

У многих микрокалькуляторов имеется клавиша $\boxed{\text{X} \leftrightarrow \text{M}}$. При нажатии на нее происходит обмен содержимым между регистрами памяти и индикатора. Следовательно, если вы обратились к содержимому регистра памяти, нажав на эту клавишу, то при последующих обращениях содержимое регистра памяти, вообще говоря, окажется иным.

В микрокалькуляторах с несколькими регистрами памяти перед тем, как записать число, необходимо нажать клавиши $\boxed{\text{STO}}$ $\boxed{n}$, а для обращения к содержимому регистра памяти — клавиши $\boxed{\text{RCL}}$ $\boxed{n}$ (n — номер регистра). При работе с такими микрокалькуляторами в ходе вычислений важно точно знать, какое число хранится в каждом из регистров.

4. У всех микрокалькуляторов (даже самых простых) имеются два регистра X и Y для хранения операндов при выполнении так называемых двуместных операций (сложения, вычитания, умножения, деления, возведения в степень с произвольным показателем). При решении «задачи на деление» 5 : 2 =, осуществ-

ляемом при нажатии клавиш в последовательности $\boxed{5}\ \boxed{\div}\ \boxed{2}\ \boxed{=}$, микрокалькулятор хранит первый операнд (делимое 5) в одном регистре, а второй операнд (делитель 2) — в другом регистре. Регистр X представляет собой не что иное, как регистр индикатора. Нажав на клавишу $\boxed{+}$, $\boxed{-}$, $\boxed{=}$, $\boxed{\div}$ или $\boxed{y^x}$, вы дуплицируете содержимое регистра X в регистре Y. При введении второго операнда прежнее содержимое регистра X стирается, после чего в него записывается второй операнд. При нажатии на клавишу $\boxed{=}$ микрокалькулятор производит выбранную вами операцию и записывает результат не только в регистр X (индикатор), но и в регистр Y, что позволяет использовать промежуточный результат для дальнейших вычислений. Если объем вычислений достаточно велик, то это приводит к значительной экономии времени. Все новые микрокалькуляторы работают в «режиме экономии», то есть выполняют двуместные операции не только при нажатии клавиши $\boxed{=}$, но и при нажатии любой из клавиш $\boxed{+}$, $\boxed{-}$, $\boxed{\times}$, $\boxed{\div}$ или $\boxed{y^x}$. При решении рассмотренной нами арифметической задачи содержимое регистров изменяется следующим образом:

Ввод	Регистр X	Регистр Y
$\boxed{5}$	5	0
$\boxed{\div}$	5	5
$\boxed{2}$	2	5
$\boxed{=}$	2,5	2,5

5. При выполнении сложных вычислений операнды двуместных операций довольно часто приходится задавать в обратном порядке. Чтобы и в этих случаях результат получался правильным, у многих микрокалькуляторов имеется клавиша $\boxed{X \leftrightarrow Y}$, позволяющая производить обмен содержимым между регистрами X и Y. Например, если требуется вычислить $3:(1+4)=$ и у микрокалькулятора нет ни клавиши с открывающей скобкой $\boxed{(}$, ни клавиши с закрывающей скобкой $\boxed{)}$, то правильный результат вы получите, нажав клавиши в следующем порядке: $\boxed{1}$ $\boxed{+}$ $\boxed{4}$ $\boxed{\div}$ $\boxed{3}$ $\boxed{X \leftrightarrow Y}$ $\boxed{=}$. Содержимое регистров X и Y в процессе вычислений изменяется следующим образом:

Ввод	Регистр	Регистр
$\boxed{1}$	1	0
$\boxed{+}$	1	1
$\boxed{4}$	4	1
$\boxed{\div}$	5	5
$\boxed{3}$	3	5
$\boxed{X \leftrightarrow Y}$	5	3
$\boxed{=}$	0,6	0,6

В этом примере предполагается, что микрокалькулятор работает в «режиме экономии».

На микрокалькуляторе более старой конструкции ту же задачу можно решить, нажав клавиши в порядке $\boxed{1}$ $\boxed{+}$ $\boxed{4}$ $\boxed{=}$ $\boxed{\div}$ $\boxed{3}$ $\boxed{X \leftrightarrow Y}$ $\boxed{=}$.

6. Существуют микрокалькуляторы с запрограммированной иерархией двуместных операций. Это означает, что одни операции при выполнении имеют приоритет перед другими, операции третьей ступени (возведение в степень) выполняются перед операциями второй ступени (умножением и делением), а те в свою очередь выполняются перед операциями первой ступени (сложением и вычитанием). У таких микрокалькуляторов имеется более двух регистров чисел. Чтобы вычислить выражение $7-5\cdot 2^3=$ на микрокалькуляторе с запрограммированной иерархией операций, клавиши требуется нажать в следующем порядке: $\boxed{7}\ \boxed{-}\ \boxed{5}\ \boxed{\times}\ \boxed{2}\ \boxed{y^x}\ \boxed{3}\ \boxed{=}$. Хотя такие микрокалькуляторы работают в «режиме экономии», по команде $\boxed{\times}$ выполняется не вычитание $7-5$, а по команде $\boxed{y^x}$ — не умножение $5\cdot 2$, а соответствующие операции более высокой ступени, обладающие приоритетом. Следовательно, если вслед за любой операцией идет операция более высокой ступени, то «режим экономии» отменяется. Иерархия операций особенно удобна при вычислении так называемых скалярных произведений $a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3+\ldots$, часто встречающихся в прикладных задачах. Наоборот, при вычислении произведения сумм и решении некоторых других задач иерархия становится несколько обременительной, поскольку вынуждает соблюдать «лишние» условия. Например, чтобы вычислить произведение сумм $(2+3)\cdot(4+5)=$, клавиши требуется нажать в следующем порядке: $\boxed{2}\ \boxed{+}\ \boxed{3}\ \boxed{=}\ \boxed{\text{М}}\ \boxed{4}\ \boxed{+}\ \boxed{5}\ \boxed{=}\ \boxed{\text{М}}\ \boxed{\times}$. Нажав клавиши в последовательности $\boxed{2}\ \boxed{+}\ \boxed{3}\ \boxed{\times}\ \boxed{4}\ \boxed{+}\ \boxed{5}\ \boxed{=}$, мы вычислим сумму $2+3\times 4+5=$.

7. Микрокалькуляторы с клавишами $\boxed{(}$ и $\boxed{)}$ позволяют, вводя скобки, производить любые измене-

ния в порядке выполнения операций. Поскольку микрокалькуляторы с открытой и закрытой скобками работают в «режиме экономии», то скобки необходимо расставлять не только тогда, когда они встречаются в формулах, но и в других случаях, например при вычислении скалярных произведений. Так, чтобы вычислить сумму произведений $2 \cdot 3 + 4 \cdot 5 =$, клавиши следует нажать в следующем порядке: $\boxed{2}\,\boxed{\times}\,\boxed{3}\,\boxed{+}\,\boxed{(}\,\boxed{4}\,\boxed{\times}\,\boxed{5}\,\boxed{)}\,\boxed{=}$. При постановке закрывающей скобки $\boxed{)}$ индикатор покажет промежуточный результат $4 \cdot 5 = 20$. Если промежуточный результат вас не интересует, то после ввода числа 5 можно сразу нажать клавишу $\boxed{=}$. Но, если скалярное произведение состоит более чем из двух слагаемых, то отбрасывать можно лишь последнюю из закрывающих скобок. Работая с микрокалькуляторами этого типа, важно знать, сколько пар скобок они позволяют расставить так, чтобы одни скобки находились внутри других. Большинство микрокалькуляторов позволяют вставить скобки внутрь скобок не более двух раз, но нередко даже одну пару скобок невозможно «погрузить» внутрь другой, не говоря уже о двукратном повторении такой операции. У некоторых микрокалькуляторов имеются клавиши $\boxed{((}$ и $\boxed{))}$ или $\boxed{[(}$ и $\boxed{)]}$. Такие микрокалькуляторы позволяют расположить внутри одной пары скобок по крайней мере еще одну пару скобок. Сколько раз удается повторить такое вложение, можно установить «экспериментальным» путем. У некоторых микрокалькуляторов имеется индикатор ошибок (особый знак на поле индикатора, мигающий индикатор или какой-нибудь другой условный сигнал), который приводится в действие не только при выполнении «запрещенных» операций (делении на нуль, извлечении квадратного корня из отрицательного подкоренного выражения и т. д.), но и в том случае, когда число пар скобок, вставленных друг в друга, превышает допустимый предел.

Чтобы вычислить на микрокалькуляторе с простыми скобками сложное выражение с «глубоко эшелонированной» системой скобок, нужно начинать «изнутри». Эта же рекомендация остается в силе и для микрокалькулятора с двойными скобками при вычислении очень сложных выражений. Иногда удобно даже записывать промежуточные результаты.

Цель рациональной организации вычислений (в особенности при многократном повторении однотипных вычислений с различными числами) состоит в том, чтобы свести до минимума число нажатий на клавиши и избежать записи промежуточных результатов. Для достижения этой цели хорошую службу нередко может сослужить клавиша $\boxed{X \leftrightarrow Y}$. Микрокалькуляторы с простыми скобками имеют три регистра чисел X, Y и Z, микрокалькуляторы с двойными скобками обладают четырьмя регистрами X, Y, Z и T. При помощи микрокалькулятора, не имеющего клавишей со скобками, выражение $2:(3-\sqrt{4+5}\cdot 6)$ можно вычислить, нажав клавиши в следующем порядке: $\boxed{4}\ \boxed{+}\ \boxed{5}\ \boxed{=}\ \boxed{\sqrt{x}}\ \boxed{\times}\ \boxed{+/-}\ \boxed{6}\ \boxed{+}\ \boxed{3}\ \boxed{\div}\ \boxed{2}\ \boxed{=}\ \boxed{1/x}$ (результат: 0,13 ...). Если же вы захотите вычислить то же выражение, вводя числа в том порядке, в каком они встречаются в его записи, то вам понадобится микрокалькулятор с двойными скобками и клавиши придется нажимать в такой последовательности $\boxed{2}\ \boxed{\div}\ \boxed{(}\ \boxed{3}\ \boxed{-}\ \boxed{(}\ \boxed{4}\ \boxed{+}\ \boxed{5}\ \boxed{\times}\ \boxed{\sqrt{x}}\ \boxed{X \leftrightarrow Y}\ \boxed{6}\ \boxed{)}\ \boxed{)}\ \boxed{=}$. Если промежуточный результат вас не интересует, то обе последние закрывающие скобки можно отбросить. Весьма полезно проследить за тем, как изменяется содержимое регистров.

Ввод	Регистры X	Y	Z	T	
2	2	0	0	0	
÷	2	2	0	0	
(	0	0	2	0	
3	3	0	2	0	
−	3	3	2	0	
(	0	0	3	2	
4	4	0	3	2	
+	4	4	3	2	
5	5	4	3	2	(*)
×	9	9	3	2	
$\sqrt{x}$	3	9	3	2	(**)
X↔Y	9	3	3	2	
6	6	3	3	2	
)	18	3	2	0	
)	−15	2	0	0	
=	−0,1(3)	−0,1(3)	0	0	

Одной звездочкой (*) отмечено то место программы, где следующая команда выбрана с таким расчетом, чтобы микрокалькулятор вычислил сумму $4+5$. Мы могли бы добиться того же результата, введя закрытую скобку $\boxed{)}$, но тогда микрокалькулятор после команд $\boxed{\sqrt{x}}$ $\boxed{\times}$ произвел бы вычитание

$3-\sqrt{4+5}$, что нежелательно, так как квадратный корень предварительно необходимо еще умножить на 6.

В том месте программы, которое отмечено двумя звездочками (**), мы предприняли обмен содержимым между регистрами X и Y, поскольку надобность в числе 9 отпала и, стерев его, мы на следующем шаге вычислений можем поместить в регистр X число 6. «Переписывать» можно только содержимое регистра X! К проделанному нами трюку («преждевременной» команде на выполнение операции, позволяющей использовать «режим экономии», и последующему обмену содержимым регистров) можно прибегать в тех случаях, когда все регистры заняты, над числами, хранящимися в регистрах X и Y требуется произвести некоторую операцию и в вычислениях должен принять участие пятый операнд.

8. Чтобы вычислить значения всех функций одной переменной ($1/x$, $\sqrt{x}$, x^2, e^x, $\ln x$, 10^x, $\lg x$, $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{sh} x$, $\operatorname{ch} x$, $\operatorname{th} x$, $\arcsin x$, $\arccos x$, $\operatorname{arctg} x$, $\operatorname{Arsh} x$, $\operatorname{Arch} x$, $\operatorname{Arth} x$, $x!$ и т. д.), всегда необходимо *сначала задать аргумент*, а затем нажать клавишу, на которой стоит условное обозначение функции, или (если клавиши работают в режиме совмещения) клавишу $\boxed{\mathrm{F}}$ и клавишу, над которой стоит символ функции. Разумеется, непосредственное обращение к перечисленным выше функциям возможно лишь в том случае, если у микрокалькулятора имеются соответствующие клавиши. При вычислении тригонометрических (обратных тригонометрических) функций следует обратить особое внимание на единицы, в которых измеряется аргумент (значение функции): в градусах или радианах. У некоторых микрокалькуляторов имеется переключатель $\boxed{\text{град} \leftrightarrow \text{рад}}$ (или $\boxed{\mathrm{deg} \leftrightarrow \mathrm{rad}}$), по положению которого можно судить, измеряются ли углы в градусах или в радианах. Микрокалькуляторы более простых конструкций работают только с углами, заданными в градусах, причем иногда для правильного функционирования микрокалькулятора углы

должны быть заключены в определенных пределах, например, от 0° до 90°. Как обстоит дело с вашим микрокалькулятором, вы сможете без труда установить, «предложив» ему вычислить, например, $\sin 600°$ или $\cos \pi$ (в ответ он должен выдать —0,866 ... и —1). Величину $\operatorname{ctg} \alpha$ можно найти из соотношения $\operatorname{ctg} \alpha = 1/\operatorname{tg} \alpha$, нажав клавиши $\boxed{\alpha}$ $\boxed{\operatorname{tg}}$ $\boxed{1/x}$. При необходимости вычислить $\operatorname{arcctg} \alpha$ следует воспользоваться соотношением $\operatorname{arcctg} \alpha = \operatorname{arctg}(1/\alpha)$ и нажать клавиши $\boxed{\alpha}$ $\boxed{1/x}$ $\boxed{\text{arc}}$ $\boxed{\operatorname{tg}}$. У некоторых микрокалькуляторов для вычисления обратных тригонометрических и обратных гиперболических функций имеется специальная клавиша $\boxed{\text{INV}}$. Ее следует нажимать перед клавишей, ведающей «прямой» функцией (более подробно о гиперболических и обратных гиперболических функциях см. в разделе «Гиперболические функции»).

9. Если вы по ошибке нажали вместо одной из клавиш $\boxed{+}$, $\boxed{-}$, $\boxed{\times}$, $\boxed{\div}$ какую-то другую из этих же четырех клавиш, то в «комфортабельных» микрокалькуляторах для исправления допущенной ошибки достаточно нажать нужную («правильную») клавишу. В более простых микрокалькуляторах столь простой путь недоступен. Необходимо различать два случая.

1) По ошибке нажата одна из клавиш $\boxed{\times}$, $\boxed{\div}$. Для исправления оплошности следует нажать сначала клавиши $\boxed{1}$ $\boxed{=}$, а затем клавишу, соответствующую правильной операции.

2) По ошибке нажата одна из клавиш $\boxed{+}$, $\boxed{-}$. Для исправления ошибки следует нажать сначала клавиши $\boxed{0}$ $\boxed{=}$, а затем клавишу, соответствующую правильной операции.

10. Некоторые микрокалькуляторы при выполнении двуместных операций после нажатия клавиши $\boxed{=}$ все еще хранят в памяти первый или второй операнд и производимую операцию. При повторном нажатии клавиши $\boxed{=}$ операция, хранящаяся в памяти микрокалькулятора, выполняется над не стертым операндом и результатом предыдущей операции. Пример:

Сохраняется первый операнд		Сохраняется второй операнд	
Ввод	Индикатор	Ввод	Индикатор
$\boxed{5}$	5	$\boxed{5}$	5
$\boxed{\times}$	5	$\boxed{\div}$	5
$\boxed{2}$	2	$\boxed{2}$	2
$\boxed{=}$	10	$\boxed{=}$	2,5
$\boxed{=}$	50	$\boxed{=}$	1,25
$\boxed{=}$	250	$\boxed{=}$	0,625
	и т.д.		и т.д.

Имея такой микрокалькулятор, важно знать, который из двух операндов остается в памяти после выполнения двуместной операции. У некоторых микрокалькуляторов имеется клавиша $\boxed{\text{K}}$, позволяющая включать или выключать «автоматику констант».

11. Для вычисления $\sqrt[x]{y}$ достаточно вспомнить, что $\sqrt[x]{y} = y^{1/x}$. Следовательно, комбинируя клавиши $\boxed{1/x}$ и $\boxed{y^x}$, вы можете извлекать корни любой степени из произвольного положительного числа y.

12. Вычисляя значения большей или меньшей части перечня функций, приведенного в п. 8, микрокаль-

куляторы используют определенные приближенные формулы и выдают ответ с точностью, зависящей от конструкции микрокалькулятора. Одни микрокалькуляторы округляют последний знак по определенному правилу (так называемое «округление $^4/_5$»), другие просто обрывают результат на последнем знаке. Таким образом, вычисляя значения какой-нибудь функции на простом микрокалькуляторе, нельзя быть уверенным в правильности последного знака, причем вероятность ошибки особенно велика, если в конструкции микрокалькулятора не предусмотрено автоматическое округление результата. Если вы производите сложный расчет с большим числом действий, то даже малая ошибка может постепенно «раскачаться» и стать довольно значительной (см. раздел «Распространение ошибок»). И микрокалькулятор может ошибаться!

Ошибки такого рода в принципе неизбежны, поскольку все вычисления проводятся лишь с конечным числом знаков независимо от того, считаем ли мы «столбиком» на листе бумаги или прибегаем к услугам микрокалькулятора. Чтобы воспрепятствовать «раскачиванию» ошибки, некоторые микрокалькуляторы производят вычисления с большим числом знаков, чем выдает их индикатор.

ВЕЛИКА ЛИ НАДЕЖНОСТЬ?

На производстве и в быту нас окружает множество технических устройств различной степени сложности: автомашин, телевизоров, электроизмерительных приборов и т. п. Выход из строя одного из них обычно приводит к довольно неприятным последствиям, а иногда даже создает угрозу для жизни людей.

Попытаемся оценить «надежность» технического устройства. Для этого нам понадобятся микрокалькулятор, два несложных определения и два столь же простых правила, позволяющих вычислять необходимые величины. Под надежностью принято понимать вероятность того, что техническое устройство в течение определенного, заранее заданного интервала времени будет работать бесперебойно.

Обычно любое техническое устройство состоит из большого числа узлов и деталей. Каждый узел в свою очередь обладает определенной надежностью (отнесенной к тому промежутку времени, в течение которого должно исправно функционировать все устройство), измеряемой экспериментально на большом числе однотипных узлов. Все узлы устройства «включены последовательно»: если за данный промежуток времени не срабатывает хотя бы один узел, то отказывает вся система в целом (рис. 11).

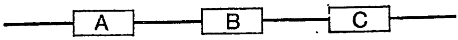


Рис. 11. Последовательное соединение узлов A, B и C.

При оценке надежности сложных систем решающее значение имеет следующий вопрос: каким образом надежность всего устройства зависит от надежности отдельных узлов? Если надежность обозначить z $(0 \leqslant z \leqslant 1)$, то вероятность несрабатывания служит логическим дополнением надежности, то есть

$$p = 1 - z.$$

Наряду с обычным последовательным соединением иногда встречается параллельное соединение узлов. При таком соединении узлы или детали взаимозаменяемы, то есть система функционирует, если действует хотя бы один из двух узлов (рис. 12).

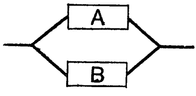


Рис. 12. Параллельное соединение узлов A и B (узлы взаимозаменяемы).

Следующие два правила позволяют численно оценивать надежность любой комбинации параллельных и последовательных соединений.

1. При последовательном соединении надежность системы равна произведению надежностей узлов.

2. При параллельном соединении вероятность несрабатывания системы равна произведению вероятностей несрабатывания узлов.

Рассмотрим сначала первый случай. Предположим, что ваш телевизор состоит из 100 последовательно соединенных деталей, из которых 80 обладают 100%-ной надежностью (до истечения гарантийного срока), надежность 15 других деталей достигает 95%, а надежность 5 остальных деталей составляет лишь 90%. Какова надежность вашего телевизора? Ее нетрудно вычислить по правилу 1:

$$z_{\text{тел}} = 1^{80} \cdot 0{,}95^{15} \cdot 0{,}9^{5} \approx 0{,}274 = 27\,\%.$$

Выясним теперь, какой должна быть надежность деталей, чтобы надежность всего устройства составляла 90%. Прежде всего необходимо установить, какие детали «играют на понижение». Нетрудно убедиться, что 15 сравнительно хороших деталей с надежностью 95% вносят в надежность системы вклад, равный всего лишь

$$0{,}95^{15} \approx 0{,}46,$$

в то время как на долю 5 плохих деталей с надежностью 90% приходится

$$0{,}9^{5} \approx 0{,}59$$

от надежности системы. Мы видим, что надежность сложного устройства зависит не только от распределения его деталей и узлов по качеству, но и от количества плохих деталей. Из приведенного нами примера следует поразительный вывод: при определенных обстоятельствах выгоднее иметь одну-две плохие детали, чем много деталей среднего качества. Вместо 5 деталей с надежностью 0,9 можно взять 3 детали с надежностью 100% и 2 детали с надежностью 77%:

$$1^{3} \cdot 0{,}77^{2} \approx 0{,}59 = 0{,}9^{5}.$$

Располагая кое-каким запасом деталей определенного качества с надежностью $z < 1$, мы можем собрать из них систему или устройство, обладающее надежностью, сколь угодно близкой к единице: для этого параллельно каждой детали необходимо подключить одну или несколько деталей-«дублеров». В действенности такого приема нетрудно убедиться на следующих примерах.

При параллельном соединении деталей или узлов возможны два предельных случая: соединение в две параллельные ветви (рис. 13) и параллельное подключение узла-«дублера» к каждому узлу в отдельности (рис. 14). Каким образом осуществляется замена основного узла «дублером» (поворотом переключателя S вручную, при помощи механического устройства или электронного прибора), зависит от того, насколько быстро требуется произвести замену:

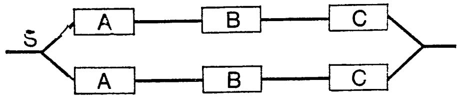


Рис. 13. Параллельное соединение трех углов A, B и C в две ветви. (S — переключатель).

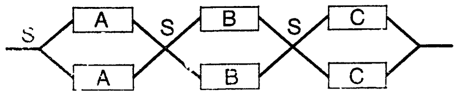


Рис. 14. Параллельное соединение трех узлов A, B и C с параллельным подключением к каждому из них однотипного запасного угла.

шофер, снимающий вышедший из строя скат автомашины, чтобы заменить его новым, при самой жесткой спешке располагает несравненно большим запасом времени, чем устройство, производящее замену неисправной детали в автомате слепой посадки реактивного самолета.

Сравним оба способа параллельного соединения узлов и деталей на нашем примере (рис. 13 и 14). Предположим, что узлы A, B и C функционируют с надежностью

$$z_A = 0{,}90; \; z_B = 0{,}95 \text{ и } z_C = 0{,}97.$$

И здесь, и далее мы исходим из весьма естественного допущения о том, что детали-дублеры по своим характеристикам ничем не отличаются от заменяемых деталей и, в частности, обладают той же надежностью (это позволяет нам избежать излишних усложнений в расчетах).

При параллельном соединении в две ветви получаем (для ветви I):

$$z_{\mathrm{I}} = z_A \cdot z_B \cdot z_C = 0{,}90 \cdot 0{,}95 \cdot 0{,}97 = 0{,}829.$$

По предположению обе ветви тождественны, поэтому $z_{\mathrm{II}} = 0{,}829$. Это означает, что вероятность несрабатывания для каждой из ветвей составляет

$$p_{\mathrm{I}} = (1 - z_{\mathrm{I}}) = 0{,}171 = p_{\mathrm{II}},$$

а вероятность несрабатывания всей системы достигает величины

$$p_{\text{сист}} = p_{\mathrm{I}} \cdot p_{\mathrm{II}} = p_{\mathrm{I}}^2 = 0{,}171^2 = 0{,}029.$$

Следовательно, надежность системы равна

$$z_{\text{сист}} = 1 - p_{\text{сист}} = 0{,}971.$$

Общая формула для вычисления надежности при соединении двух комплектов из трех деталей в две параллельные ветви имеет вид

$$z_{\text{сист}} = 1 - (1 - z_A z_B z_C)^2.$$

Итак, при параллельном соединении в две ветви надежность системы достигает 97,1%, что на

$$\frac{97{,}1 - 82{,}9}{82{,}9} = 17\%$$

выше, чем при последовательном соединении узлов A, B и C без дублеров.

Если достигнутый уровень надежности нас не удовлетворяет и мы хотим достичь надежности не ниже 99%, то две уже имеющиеся ветви необходимо соединить параллельно с третьей ветвью (из узлов A, B и C, включенных последовательно). При работе всего устройства переключатель S должен находиться в одном из трех возможных состояний. Вероятность несрабатывания системы при «тройной страховке» составляет

$$p_{\text{сист}} = p_{\mathrm{I}}^3 = 0{,}171^3 = 0{,}005,$$

а надежность —

$$z_{\text{сист}} = 1 - p_{\text{сист}} = 0{,}995 = 99{,}5\%.$$

Итак, параллельное соединение трех ветвей позволяет достичь требуемого уровня надежности.

При «поштучном» дублировании каждой из трех деталей A, B и C получаем:

$$p_{\mathrm{I}} = p_A \cdot p_A = p_A^2 = (1 - z_A)^2,$$
$$p_{\mathrm{II}} = p_B \cdot p_B = p_B^2 = (1 - z_B)^2,$$
$$p_{\mathrm{III}} = p_C^2 = (1 - z_C)^2,$$

откуда

$$z_{\mathrm{I}} = 1 - p_{\mathrm{I}} = 1 - (1 - z_A)^2,$$
$$z_{\mathrm{II}} = 1 - p_{\mathrm{II}} = 1 - (1 - z_B)^2,$$
$$z_{\mathrm{III}} = 1 - p_{\mathrm{III}} = 1 - (1 - z_C)^2$$

и, наконец,

$$z_{\text{сист}} = z_{\mathrm{I}} \cdot z_{\mathrm{II}} \cdot z_{\mathrm{III}} =$$
$$= (1 - (1 - z_A)^2)(1 - (1 - z_B)^2)(1 - (1 - z_C)^2).$$

Подставляя наши значения ($z_A = 0{,}9$; $z_B = 0{,}95$; $z_C = 0{,}97$), находим:

$$z_{\text{сист}} = (1 - 0{,}1^2)(1 - 0{,}05^2)(1 - 0{,}03^2) =$$
$$= (0{,}99 \cdot 0{,}9975 \cdot 0{,}9991 = 0{,}9866 \approx 98{,}7\%.$$

По сравнению с последовательным соединением узлов или деталей A, B и C без дублеров мы получаем выигрыш в надежности, составляющий около

$$\frac{98{,}7 - 82{,}9}{82{,}9} \approx 19\%.$$

Чтобы достичь требуемого уровня надежности (99%), необходимо присоединить всего лишь одного дополнительного дублера к самому низкокачественному узлу A:

$$z_{\text{сист}} = (1 - 0{,}1^3)(1 - 0{,}05^2)(1 - 0{,}03^2) =$$
$$= 0{,}999 \cdot 0{,}9975 \cdot 0{,}9991 = 0{,}9956 \approx 99{,}6\%.$$

«Индивидуальное» дублирование отдельных узлов и деталей позволяет достичь более высокой надежности, чем при соединении их в параллельные ветви. Почему же в таком случае нам раз и навсегда не отказаться от соединения в параллельные ветви и не использовать только оптимальный вариант повышения надежности? Дело в том, что индивидуальное дублирование узлов и деталей сопряжено с необходимостью введения дополнительных переключателей S. В наших примерах мы считали, что каждый переключатель обладает 100%-ной надежностью ($z_S = 1$). Если же надежность переключателей ниже 100%, то при вычислении надежности всей системы необходимо вводить (в соответствии с нашими двумя правилами) специальные члены z_S.

Теперь вы уже в состоянии оценить, сколь катастрофические последствия в информационной цепи влечет за собой рассеянность вашего коллеги, обладающего «надежностью» около 50%. Во избежание «несрабатывания» подключите в параллель ему дублера: сообщите важную информацию для верности еще одному коллеге!

ПОЧЕМУ ТЫКВЫ НЕ РАСТУТ НА ДЕРЕВЬЯХ?

Рассказывают, будто некогда жил один человек, который считал, что все на свете устроено не так, как надо. «Взять хотя бы дуб, — говаривал этот человек.— Нелепо, что на могучем дубе растут крохотные желуди, а огромная тыква созревает на растении, стелющемся по земле.» Однажды строгий критик природы улегся спать под сенью старого дуба и был разбужен желудем, свалившимся ему на голову. «Сколь мудра природа! — воскликнул он. — Что стало бы со мной, если бы желуди были размером с тыкву?»

В самом деле, не задумывались ли вы над тем, почему желуди не бывают размером с тыкву? Заметим, что семена или плоды на высоких деревьях меньше (дубы, буки) или легче (пихта), чем на низкорослых (груши, сливы) или на тыквенных (тыква, дыня).

Предположим, что плод имеет форму шара. Для простоты условимся считать, что плотность его составляет 2 г/см^3, а радиус равен 1 см. Вычислим объем плода:

$$V = \frac{4\pi}{3} \cdot 1^3 = 4{,}19 \text{ см}^3.$$

Поскольку плотность равна 2 г/см^3, то масса плода достигает 8,38 г. Плод висит на черешке, который должен быть достаточно прочным, чтобы выдерживать вес плода. Предположим, что предел прочности черешка (работающего только на растяжение) равен 10 г/см^2. Это соответствует минимальному сечению $S = 0{,}838$ см^2 и радиусу

$$r = \sqrt{\frac{0{,}838}{\pi}} = 0{,}52 \text{ см}.$$

Предположим, что плод на дереве начинает увеличиваться в размерах. Вместе с плодом начинает расти и черешок.

Плод		Черешок	
r см	V см^3	r см	S см^2
1	4,19	0,52	0,838
2	33,51	1.46	6,70
3	113,10	2,68	22,62
10	4188,79	16,33	837,76

Если у вашего микрокалькулятора имеется регистр памяти, то коэффициент $4\pi/3$ можно вычислить лишь один раз.

При сравнении размеров плода и черешка следует иметь в виду, что при вычислениях мы используем радиус r, а в природе наблюдаем диаметр $2r$. В нашем примере плод диаметром 20 см висел бы на черешке диаметром 32,66 см.

Ясно, что ничего подобного в природе не встречается. Можно перебрать все мыслимые комбинации диаметра плода, плотности и предела прочности черешка (природа перепробовала их в процессе развития), и всякий раз допустимые размеры плода будут оказываться ограниченными некоторым пределом.

Поэтому плодам, размеры которых превосходят допустимый предел, лучше всего предоставить расти прямо на земле.

ЛИНЕЙНАЯ РЕГРЕССИЯ

Измерив значения двух переменных, мы получили набор точек и нанесли их на плоскость в прямоугольной системе координат. Нам бы хотелось провести через экспериментальные точки прямую (наши точки не лежат на прямой) и записать ее уравнение

$$y = ax + b.$$

Прямую мы попытаемся провести так, чтобы измеренные нами точки по обе стороны от нее распределились по возможности одинаково. К сожалению, положение прямой на плоскости не удается жестко зафиксировать: ее можно сдвигать и поворачивать в определенных пределах, и ни одно из положений не будет ни в чем уступать другому. Наш микрокалькулятор позволяет нам подобрать коэффициенты a и b (и, следовательно, построить прямую) с наименьшим среднеквадратичным отклонением от экспериментальных точек.

Построение прямой регрессии разбивается на следующие этапы.

1. Составить перечень всех точек.
2. Вычислить величины Σx, Σy, Σx^2, Σy^2, $\Sigma(x \cdot y)$.

В следующей таблице представлены результаты измерений и вычислений для 5 точек (5 пар x и y):

x	y	x^2	y^2	$x \cdot y$	n
5,0	13,7	25,0	187,7	68,5	1
7,2	18,8	51,8	353,4	135,4	2
11,3	26,4	127,7	697,0	298,3	3
23,8	53,1	566,4	2 819,6	1 263,8	4
45,4	98,2	2 061,2	9 643,2	4 458,3	5
$\Sigma x =$ $= 92{,}7$	$\Sigma y =$ $= 210{,}2$	$\Sigma x^2 =$ $= 2\,832{,}1$	$\Sigma y^2 =$ $= 13\,700{,}9$	$\Sigma x \cdot y =$ $= 6\,224{,}3$	$n = 5$

Существуют очень хорошие микрокалькуляторы, в которых после введения x и y и нажатия соответствующих функциональных клавиш значения всех сумм автоматически вычисляются и записываются в памяти. Обычно каждую сумму приходится вычислять отдельно, что, впрочем, не составляет особого труда, даже если у вас под рукой имеется лишь простейший микрокалькулятор. При составлении таблицы вы можете «выжать» из микрокалькулятора все, на что он способен. Например, если у вашего микрокалькулятора имеется клавиша $\boxed{\Sigma}$, то суммирование по x^2 можно производить непрерывно — по мере готовности слагаемых. Вы можете также, набрав x, возводить введенное значение в квадрат, затем, использовав x^2 в качестве слагаемого в сумме Σx^2, нажатием клавиши $\boxed{\sqrt{x}}$ восстановить значение x и умножить его на соответствующее значение y.

3. Подготовив все необходимое, приступаем к вычислению коэффициентов a и b:

$$a = \frac{\Sigma (x \cdot y) - \dfrac{\Sigma x \cdot \Sigma y}{n}}{\Sigma x^2 - \dfrac{(\Sigma x)^2}{n}} =$$

$$= \frac{6224{,}3 - \dfrac{92{,}7 \cdot 210{,}2}{5}}{2832{,}1 - \dfrac{(92{,}7)^2}{5}} = 2{,}09 \approx 2{,}1$$

(обращаем ваше внимание на различие между Σx^2 и $(\Sigma x)^2$),

$$b = \frac{\Sigma y}{n} - a\frac{\Sigma x}{n} = \frac{210{,}2}{5} - 2{,}1 \cdot \frac{92{,}7}{5} = 3{,}106 \approx 3{,}1.$$

4. Проделав все выкладки, получаем уравнение прямой регрессии:

$$y = 2{,}1x + 3{,}1.$$

5. Проверим, лежат ли экспериментальные точки на построенной нами прямой. Для этого подставим в полученное уравнение измеренные значения x. Соответствующие значения y совпадают с измеренными значениями не точно, а лишь приближенно.

Если мы хотим знать, сколь велика допущенная погрешность, то необходимо оценить согласие между вычисленными и измеренными значениями y, характеризуемое величиной

$$r^2 = \frac{\left[\Sigma(x \cdot y) - \frac{\Sigma x \cdot \Sigma y}{n}\right]^2}{\left[\Sigma x^2 - \frac{(\Sigma x)^2}{n}\right]\left[\Sigma y^2 - \frac{(\Sigma y)^2}{n}\right]}.$$

Тот, кто возьмет на себя труд вычислить значение этого громоздкого выражения, обнаружит, что $r^2 = 0{,}9999885 \approx 1$. Близость r^2 к единице означает, что наша линейная регрессия хорошо согласуется с экспериментальными точками. Убедившись в этом, мы можем построить прямую регрессии на той же плоскости, на которой нанесены результаты измерений.

ПОДГОНКА ЭКСПОНЕНТЫ

Вычислим коэффициенты регрессии для уравнения

$$y = b\mathrm{e}^{ax}\ (b > 0).$$

Логарифмируя (беря от правой и левой части натуральный логарифм ln), получаем уравнение прямой

$$\ln y = ax + \ln b.$$

Для дальнейших вычислений нам понадобятся клавиши $\boxed{\ln}$ и $\boxed{\mathrm{e}^x}$.

При вычислении коэффициента a в общую формулу, приведенную в разделе «Линейная регрессия», необходимо подставлять не y, а $\ln y$:

$$a = \frac{\Sigma(x \cdot \ln y) - \frac{\Sigma x \cdot \Sigma \ln y}{n}}{\Sigma x^2 - \frac{(\Sigma x)^2}{n}}.$$

Выражение для коэффициента b при подгонке экспоненты выглядит несколько иначе, чем для других линий регрессии:

$$b = \mathrm{e}^{\left[\frac{\Sigma \ln y}{n} \cdot \frac{a \cdot \Sigma x}{n}\right]}.$$

Значения функции e^x приведены во многих таблицах.

Пример:

x	1,30	0,60	0,03	1,42	0,93
y	147,28	11,05	1,34	229,60	37,60

Трудно представить себе, что эти пять пар значений соответствуют какой-нибудь «разумной» функции. И все же мы предположим, что такая функция существует, поскольку измеренные значения удовлетворяют соотношениям, присущим экспонентам.

Составляем таблицу:

x	x^2	y	$\ln y$	$x \cdot \ln y$
1,30	1,69	147,28	4,99234	6,49004
0,60	0,36	11,05	2,40243	1,44146
0,03	0,00	1,34	0,29267	0,00878
1,42	2,02	229,60	5,43634	1,71960
0,93	0,86	37,60	3,62700	3,37311
Σ 4,28	4,93		16,75078	19,03299

Ясно, что стоит разработать программу, позволяющую составлять такие таблицы за возможно меньшее число шагов. Разумеется, если микрокалькулятор запрограммирован для вычисления статистических функций, то надобность в составлении таблиц отпадает. Итак, за работу:

$$a = \frac{\Sigma(x \cdot \ln y) - \dfrac{\Sigma x \cdot \Sigma \ln y}{n}}{\Sigma x^2 - \dfrac{(\Sigma x)^2}{n}} =$$

$$= \frac{19{,}03299 - \dfrac{4{,}28 \cdot 16{,}75078}{5}}{4{,}93 - \dfrac{4{,}28^2}{5}} = 3{,}71;$$

$$b = \mathrm{e}^{\left[\frac{\Sigma \ln y}{n} - \frac{a \cdot \Sigma x}{n}\right]} = \mathrm{e}^{0{,}17440} = 1{,}19.$$

В итоге мы получаем экспоненту

$$y = 1{,}19\ e^{3{,}71\ x}.$$

Проверка: при $x = 0{,}60$

$$y = 1{,}19 \cdot e^{3{,}71 \cdot 0{,}60} = 11{,}02.$$

Измеренное значение y составляет 11,05.

КАК ПОСТРОИТЬ СЧЕТНУЮ ЛИНЕЙКУ

После того, как мы освоили линейную регрессию, настала пора приступить к подгонке более сложных кривых к результатам наблюдений. Предположим, что экспериментальные точки на графике отчетливо укладываются не на прямую, а на какую-то кривую. На какую именно?

Вид кривой нередко определяют чисто графическим способом: результаты измерений наносят на полулогарифмическую или логарифмическую бумагу, после чего точки «выстраиваются» вдоль прямой.

Уравнение прямой на полулогарифмической бумаге имеет вид

$$y = a \lg x + b.$$

Предполагается, что $x > 0$ и что у микрокалькулятора имеется клавиша $\boxed{\lg}$ или $\boxed{\ln}$.

Располагая таким уравнением, мы без труда находим коэффициенты регрессии a и b: чтобы определить a и b, необходимо действовать так же, как в разделе «Линейная регрессия», но вычисления производить не с x, Σx, Σx^2, $\Sigma (x \cdot y)$, а с $\lg x$, $\Sigma \lg x$, $\Sigma (\lg x)^2$, $\Sigma (\lg x \cdot y)$

и т. д. Выражения для a и b при этом получаются следующими:

$$a = \frac{\Sigma(\lg x \cdot y) - \frac{\Sigma \lg x \cdot \Sigma y}{n}}{\Sigma(\lg x)^2 - \frac{(\Sigma \lg x)^2}{n}},$$

$$b = \frac{\Sigma y}{n} - \frac{a \Sigma \lg x}{n}.$$

Соответствующим образом преобразуется и выражение для величины r^2, характеризующей согласие между прямой регрессии и экспериментальными данными.

Типичным примером использования логарифмической шкалы служит счетная (логарифмическая) линейка. Нас интересует, на сколько миллиметров отстоят от начала шкалы деления, соответствующие числам 2, 3, 4 и т. д. Измерим расстояния для трех чисел:

x	Число	1	2	10
y	Расстояния от начала шкалы в мм	0	75,3	250

Поскольку мы уверены в точности произведенных нами измерений, попытаемся определить по трем полученным значениям уравнение

$$y = a \lg x + b.$$

Для этого составим таблицу:

x	$\lg x$	$(\lg x)^2$	y	$\lg x \cdot y$
1	0	0	0	0
2	0,30103	0,09062	75,3	22,668
10	1,000	1	250	250
Σ	1,30103	1,09062	325,3	272,668 $n = 3$

Если у микрокалькулятора имеется клавиша $\boxed{\Sigma}$ и несколько регистров, то необходимость в выписывании таблицы отпадает.

Теперь мы уже располагаем всем необходимым для определения коэффициентов регрессии:

$$a = \frac{\Sigma(\lg x \cdot y) - \frac{\Sigma \lg x \cdot \Sigma y}{n}}{\Sigma(\lg x)^2 - \frac{(\Sigma \lg x)^2}{n}} =$$

$$= \frac{272{,}668 - \frac{1{,}30103 \cdot 325{,}3}{3}}{1{,}09062 - \frac{(1{,}30103)^2}{3}} = 249{,}99;$$

$$b = \frac{\Sigma y}{n} - \frac{a \cdot \Sigma \lg x}{n} =$$

$$= \frac{325{,}3}{3} - \frac{249{,}99 \cdot 1{,}30103}{3} = 0{,}02.$$

Итак, полученное нами уравнение для расчета шкалы логарифмической линейки имеет вид

$$y = 249{,}99 \lg x + 0{,}02.$$

Но довольствоваться достигнутым еще рано: необходимо подумать над тем, какая точность нам необходима. Производя измерения, мы ограничивались одним знаком после запятой (во втором измерении отметка 2 удалена от начала шкалы на 75,3 мм), поэтому полученное уравнение можно упростить и записать его в виде

$$y = 250 \lg x + 0.$$

Именно этим уравнением пользуются при построении шкалы 25-сантиметровой логарифмической линейки. Оценкой согласия r^2 в данном случае можно пренебречь. Логарифмическая шкала выглядит следующим образом:

x	Расстояние от начала шкалы до деления в мм	x	Расстояние от начала шкалы до деления в мм
1	0	6	194,5
2	75,3	7	211,3
3	119,3	8	225,8
4	150,5	9	238,6
5	174,7	10	250,0

Аналогичные соображения позволяют рассчитать шкалу счетной линейки любой длины.

ПОДГОНКА СТЕПЕННОЙ ФУНКЦИИ

Успех настолько окрылил нас, что мы готовы бесстрашно приступить к подгонке степенной функции

$$y = bx^a.$$

Прологарифмировав обе части равенства, получим:

$$\lg y = a \lg x + \lg b$$

($x > 0$, $y > 0$). Итак, теперь нам предстоит работать с $\Sigma \lg y$ и $\Sigma \lg x$. Если у вашего микрокалькулятора имеется клавиша $\boxed{\lg}$ (или $\boxed{\ln}$), то вычисление соответствующих сумм не составляет особого труда. Не следует лишь упускать из виду, что в формулах для коэффициентов регрессии (см. раздел «Линейная регрессия») все x и y надлежит заменить соответственно на $\lg x$ и $\lg y$, после чего они примут вид

$$a = \frac{\Sigma(\lg x \cdot \lg y) - \dfrac{\Sigma \lg x \cdot \Sigma \lg y}{n}}{\Sigma(\lg x)^2 - \dfrac{(\Sigma \lg x)^2}{n}},$$

$$\lg b = \frac{\Sigma \lg y}{n} - \frac{a \Sigma \lg x}{n}.$$

Прямая в логарифмических шкалах позволяет не только вычислять коэффициенты регрессии, но и составлять прогнозы и планы.

Известно, что со временем затраты на производство убывают. Сначала, когда производство новых видов изделий только развертывается, еще не отлажена технология, в конструкции изделий нередко обнаруживаются изъяны, не хватает некоторых материалов и т. п., поэтому и затраты на производство первых партий изделий высоки. Со временем замеченные недостатки устраняются. Изготавливаются новые при-

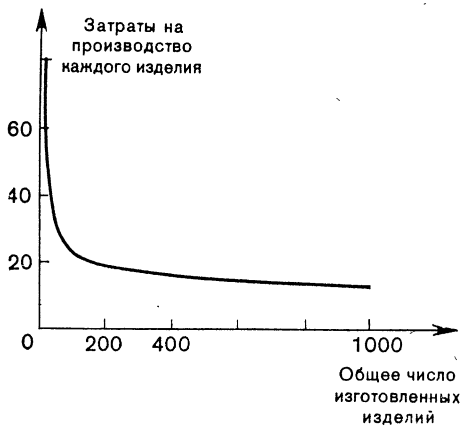


Рис. 15. Степенное убывание затрат на производство.

способления, вносятся рационализаторские предложения, накапливается опыт. Все это приводит к понижению затрат на производство. Ход изменения затрат (в стоимостном или во временном выражении) описывается степенной функцией (рис. 15).

Если известен лишь начальный отрезок кривой, то никто не может с уверенностью сказать, как кривая поведет себя дальше. Известную часть кривой удобно изобразить на плоскости с логарифмическими шкалами по осям координат. Продолжив нашу кривую («распрямившуюся» на логарифмической бумаге), мы сможем предсказать дальнейшее понижение затрат на производство (рис. 16).

Составление прогноза — задача, привлекательная для всякого, кто обладает микрокалькулятором. В качестве примера рассмотрим данные, относящиеся к периоду с 1958 по 1961 г. Это позволит нам проверить наши выводы и составить прогноз на будущее.

Некоторый научно-исследовательский институт в 1958 г. приобрел светокопировальную установку. В следующей таблице приведены данные о годовой произ-

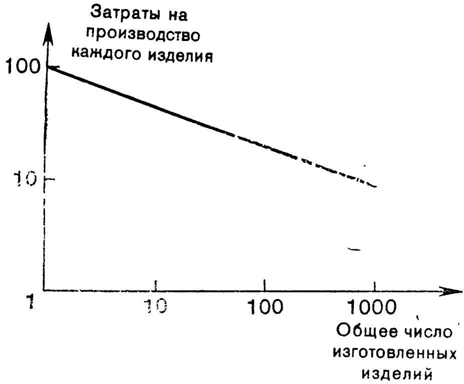


Рис. 16. Спрямление степенной функции в логарифмических координатах.

водительности установки и затратах времени на изготовление 10 000 светокопий:

Год	Число светокопий	Время, необходимое для изготовления 10 000 светокопий, в ч
1958	20365	982
1959	22922	872
1960	55022	364
1961	48655	411

Эти данные позволяют нам вычислить коэффициенты регрессии в предположении, что речь идет о степенной функции вида $y = bx^a$.

Отличительная особенность этой кривой состоит в том, что величина x (количество светокопий) задается кумулятивно, то есть если в течение 1958 г. (года пуска копировальной установки) было изготовлено 20 365 светокопий, а в следующем году — 22 928 светокопий, то значение x в 1958 г. принимается равным 20 365, а в 1959 г. — сумме $20365 + 22928 = 43293$ и т. д.

Составляем таблицу:

Год	x	$\lg x$	$(\lg x)^2$	y	$\lg y$	$\lg x \cdot \lg y$
1958	20365	4,30888	18,56645	982	2,99211	12,89264
1959	43293	4,63642	21,49639	872	2,94052	13,63349
1960	98315	4,99262	24,92635	364	2,56110	12,78660
1961	146970	5,16723	26,70049	411	2,61384	13,50631
Σ		19,10515	91,69008		11,10757	52,81904

Обращаем особое внимание на различие между $(\Sigma \lg x)^2$ и $\Sigma (\lg x)^2$, а также между $\Sigma \lg x \cdot \Sigma \lg y$ и $\Sigma (\lg x \cdot \lg y)$.

Коэффициент регрессии a вычисляем по формуле ($n = 4$)

$$a = \frac{\Sigma (\lg x \cdot \lg y) - \dfrac{\Sigma \lg x \cdot \Sigma \lg y}{n}}{\Sigma (\lg x)^2 - \dfrac{(\Sigma \lg x)^2}{n}}.$$

Подставляя значения сумм, получаем:

$$a = \frac{52,81904 - \dfrac{19,10515 \cdot 11,10757}{4}}{91,69008 - \dfrac{(19,10515)^2}{4}} =$$

$$= -0,53356.$$

Мы работаем с 5 знаками после запятой, поскольку при меньшей точности различие между логарифмами становится неощутимо малым.

Второй коэффициент регрессии мы вычисляем по формуле

$$\lg b = \frac{\sum \lg y}{n} - \frac{a \sum \lg x}{n} =$$

$$= \frac{11,10757}{4} - \frac{(-0,53356) \cdot 19,10515}{4} = 5,32533,$$

откуда

$$b = 211509,56.$$

Таким образом, мы получаем уравнение прямой

$$\lg y = -0,53356 \lg x + 5,32533,$$

и наша степенная функция имеет вид

$$y = 211509,6\, x^{-0,53356}.$$

Проверим правильность выведенного соотношения на данных за 1961 г. (всего к этому времени было изготовлено 146 970 светокопий):

$$y = 211509,6 \cdot 146970^{-0,53356} =$$
$$= 370 \text{ ч.}$$

Если учесть, что годовая производительность копировальной установки подвержена значительным колебаниям (в 1960 г. было изготовлено больше светокопий, чем в 1961 г.), то от выведенного нами соотношения не приходится ждать слишком многого.

Точность коэффициентов с каждым годом можно повышать, если постоянно расширять таблицу, включая в нее все новые и новые значения Σx, Σy и т. д. При этом число светокопий, изготовленных в течение очередного года, следует всякий раз приплюсовывать к числу светокопий, изготовленных за все предшествующие годы, начиная с пуска светокопировальной установки. По имеющимся у нас данным с выпуском светокопий в 1962—1964 гг. дело обстояло так:

Год	Годовая производительность светокопировальной установки	x
1962	54070	201040
1963	75370	276410
1964	80133	356543

Выведенная нами формула

$$y = 211509,6\, x^{-0,53356}$$

позволяет оценить затраты времени на изготовление 10 000 светокопий следующим образом:

Год	Затраты времени в ч
1962	313 (350)
1963	264 (220)
1964	230 (210)

В скобках указаны измеренные значения.

Если угодно, то тремя новыми значениями можно воспользоваться для уточнения коэффициентов.

В ПОИСКАХ ПОДХОДЯЩЕЙ ФУНКЦИИ

В книге Д'Арси Томсона «О росте и форме» приведена следующая задача.

Интенсивность обмена веществ у различных млекопитающих можно оценить следующим образом:

Животное	Масса кг	Обмен веществ	
		ккал/кг	кДж/кг
Морская свинка	0,7	223	933,7
Собака	2	58	243,8
Человек	70	33	138,2
Лошадь	600	22	92,1
Слон	4000	13	54,4
Кит	150000	1,7	7,1

Требуется найти (приближенно) зависимость между массой животного и интенсивностью обмена веществ в его организме.

Попытаемся подогнать под табличные данные различные функции, действуя так же, как мы подбирали функции в предыдущих разделах. Мы не будем повторять здесь подробно весь ход вычислений и приведем для сравнения лишь результаты.

1. Линейная регрессия.

$$y = ax + b,$$
$$a = -4{,}705 \cdot 10^{-4},$$
$$b = 70{,}58.$$

Величина r^2, характеризующая согласие, достигает лишь 0,12.

2. Логарифмическая регрессия.

$$y = a + b \ln x,$$
$$a = 128{,}27,$$
$$b = -13{,}43,$$
$$r^2 = 0{,}57.$$

Разумеется, вместо натуральных логарифмов ln можно работать с десятичными логарифмами lg. На величине r^2 переход от одной системы логарифмов к другой никак не сказывается.

3. Подгонка экспоненты.

$$y = a\,\mathrm{e}^{bx},$$
$$a = 42{,}55,$$
$$b = -2{,}17 \cdot 10^{-5},$$
$$r^2 = 0{,}66.$$

Мы видим, что величина r^2 медленно возрастает до сколько-нибудь разумных значений.

4. Подгонка степенной функции

$$y = ax^b,$$
$$a = 140{,}17,$$
$$b = -0{,}34,$$
$$r^2 = 0{,}93.$$

Высокое согласие ($r^2 = 0{,}93$) позволяет ожидать идеальной подгонки. Выпишем для сравнения вычисленные и измеренные значения интенсивности обмена веществ в ккал/кг и кДж/кг:

Животное	Измеренные значения		Вычисленные значения ($y = 140{,}17 \cdot x^{-0{,}34}$)	
	ккал/кг	кДж/кг	ккал/кг	кДж/кг
Морская свинка	223	934	158	662
Собака	58	243	111	465
Человек	33	138	33,5	140
Лошадь	22	92	16	67
Слон	13	54,5	8,5	35,5
Кит	1,7	7,1	2,5	10,5

Несмотря на хорошее согласие вычисленные значения значительно отличаются от измеренных: измеренные значения как бы разбросаны вокруг кривой, проходящей через вычисленные значения.

ГАУССОВА КРИВАЯ

Представьте себе, что к вам обратился с просьбой решить задачу контролер ОТК одного из заводов. Он знает вас как неглупого человека и к тому же владельца микрокалькулятора. Речь идет о следующей производственной задаче.

Токарный станок обтачивает валы до заданного диаметра. Изучение выпущенной продукции позволило накопить обширный статистический материал и прийти к выводу, что среднее значение диаметра вала составляет $M = 100$ мм при стандартном отклонении $s = 0{,}1$ мм. Заказчик требует, чтобы отклонения как в одну, так и в другую сторону не превосходили 0,15 мм. Какой процент брака следует ожидать?

Чтобы ответить на вопрос контролера ОТК, вам прежде всего необходимо знать следующее: признак x, совершающий малые случайные колебания около наиболее часто принимаемого значения, как правило, нормально распределен. Это означает, что если построить график зависимости частоты от значений x, то получится вполне определенная кривая, известная под названием колоколообразной гауссовой кривой. Распределение частот однозначно определяется средним арифметическим M и стандартным отклонением s (см. раздел «Среднее и разброс»). Независимую переменную x целесообразно подвергнуть преобразованию и перейти к переменной

$$z = \frac{x - M}{s}.$$

График исходного распределения в переменных z, собственно, и называется нормированной гауссовой

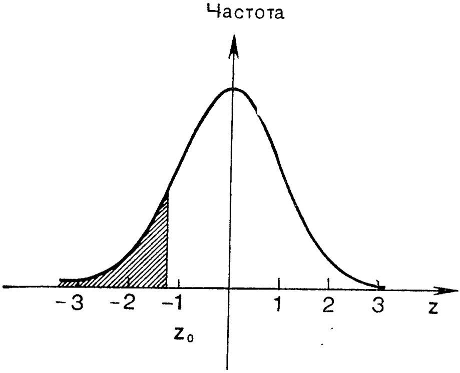


Рис. 17. Гауссова кривая. Площадь под кривой (от $-\infty$ до x_0) задает вероятность.

кривой (рис. 17). Аналитическое выражение ее имеет вид

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}.$$

Площадь под гауссовой кривой не менее важна, чем сама кривая: площадь под кривой от $z = -\infty$ до $z = z_0$ служит мерой вероятности попасть в подмножество допустимых значений, удовлетворяющих неравенству $z \leqslant z_0$.

Нельзя не упомянуть еще об одной интересной особенности гауссовой кривой: хотя она «лишь» бесконечно близко подходит к оси x (или z), площадь под гауссовой кривой конечна и равна 1.

Математикам удалось найти формулу, выражающую площадь под гауссовой кривой от $-\infty$ до z, как функцию z. Имея под рукой микрокалькулятор, вы по этой формуле сможете вычислить при заданном z вероятность $P(z)$ того, что интересующий вас признак принимает значение, не превосходящее z. Формула, о которой идет речь, имеет следующий вид:

$$P(z)=\frac{1}{2}+\frac{z}{\sqrt{2\pi}}\left(1-\frac{z^2}{2\cdot 3}+\frac{z^4}{2!\,2^2\cdot 5}-\frac{z^6}{3!\,2^3\cdot 7}+\ldots\right).$$

Выписанных членов вполне достаточно для того, чтобы вы могли подметить общий закон, по которому должны быть выписаны остальные члены.

Напомним, что $n!$ (читается: «эн факториал») означает произведение $1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot (n-1)\cdot n$, где n — любое натуральное число.

Но вернемся к нашей задаче. Прежде всего мы хотим вычислить z для верхней допустимой границы ($x=100{,}15$ мм). Производя преобразование по формуле $z=(x-M)/s$ (среднее арифметическое $M=100$ мм, стандартное отклонение $s=0{,}1$ мм), получаем

$$z=\frac{100{,}15-100}{0{,}1}=1{,}5,$$

поэтому

$$P(1{,}5)=\frac{1}{2}+\frac{1{,}5}{\sqrt{2\pi}}\left(1-\frac{1{,}5^2}{6}+\frac{1{,}5^4}{40}-\frac{1{,}5^6}{336}+\frac{1{,}5^8}{24\cdot 144}-\right.$$
$$\left.-\frac{1{,}5^{10}}{120\cdot 32\cdot 11}\right)=0{,}5+0{,}5984\,(1-0{,}375+0{,}1266-$$
$$-0{,}034+0{,}0074-0{,}0014)\approx 0{,}933=93{,}3\%.$$

Следовательно, с вероятностью 93,3% диаметр вала, обточенного на токарном станке, окажется *не выше* допустимого предела. Это означает, что около 7% изготовленных валов имеет диаметр, превосходящий установленный заказчиком верхний предел. Из соображений симметрии следует, что примерно такую же долю от всей продукции составляют валы, диаметр которых меньше нижнего допустимого предела в 99,85 мм. Таким образом, контролеру ОТК вы можете предсказать, что брак будет составлять около 14%.

Чтобы обеспечить два знака после запятой, в разложении вероятности $P(z)$ в степенной ряд необходимо удержать 6 членов. Чем больше интересующее нас значение z, тем длиннее отрезок степенного ряда требуется для достижения заданной точности, то есть тем более громоздкой становится формула для вычисления $P(z)$. Это обстоятельство не давало покоя математикам до тех пор, пока они не нашли для $P(z)$ следующее приближение, годное для больших z (при $z=2$ погрешность составляет около 2% от точного значения):

$$P(z) \approx 1 - \frac{e^{-\frac{z^2}{2}}}{z\sqrt{2\pi}}.$$

Подставляя $z = 1{,}5$, получаем:

$$P(1{,}5) \approx 1 - \frac{e^{-\frac{1{,}5^2}{2}}}{1{,}5\sqrt{2\pi}} = 0{,}9137 \approx 91{,}4\%,$$

что соответствует $2 \cdot 8{,}6 = 17{,}2\%$ брака. При столь малых значениях z отклонения от истинного значения достигают уже около 20%, но в качестве первого приближения названной вами оценки было бы предостаточно.

Приемлема ли для заказчика такая доля брака или необходимо создать новый токарный станок (позволяющий обтачивать валы с меньшим разбросом s вокруг среднего значения M), не в силах решить ни вы сами, ни обратившийся к вам контролер ОТК. Но вы подготовили рациональное обоснование для принятия решения, произведя ясный и убедительный расчет.

КАК ИЗВЛЕКАТЬ КОРНИ

В извлечении квадратных корней нашими духовными праотцами были древние вавилоняне. Они пользовались приближенной формулой

$$\sqrt{a^2+b} \approx a + \frac{b}{2a}.$$

Последуем их примеру: разложим подкоренное выражение (то, что стоит под корнем) на полный квадрат и остаток и вычислим приближенное значение квадратного корня при помощи приближенной формулы, стоящей в правой части равенства. Вот как это будет выглядеть:

$$\sqrt{40} = \sqrt{6^2 + 4} \approx 6 + \frac{4}{2 \cdot 6} \approx 6{,}33$$

(более точное значение: 6,324553).

Более точные приближения мы получим, если воспользуемся методом, разработанным великим естествоиспытателем Исааком Ньютоном, но восходящим еще к Герону Александрийскому (около 100 г. н. э.). Пусть a_1 — первое приближение к значению квадратного корня $\sqrt{x}$. Следующее, улучшенное приближение a_2 мы найдем по формуле

$$a_2 = \frac{1}{2}\left(a_1 + \frac{x}{a_1}\right),$$

а если потребуется более высокая точность, то третье, четвертое и т. д. приближения вычислим по аналогичной формуле

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{x}{a_n}\right) \text{ при } n = 2, 3, 4, \ldots .$$

Последовательные приближения «шаг за шагом» к точному значению, осуществляемые по однотипным формулам, называются итерациями. Воспользуемся методом Ньютона для вычисления $\sqrt{40}$. В качестве первого приближения (так как $\sqrt{36} = 6$, а $\sqrt{49} = 7$) выберем $a_1 = 6{,}5$. Вычисляя, получаем последовательные приближения

$$a_2 = \frac{1}{2}\left(6{,}5 + \frac{40}{6{,}5}\right) \approx 6{,}327,$$

$$a_3 = \frac{1}{2}\left(6{,}327 + \frac{40}{6{,}327}\right) \approx 6{,}32456,$$

$$a_4 = \frac{1}{2}\left(6{,}32456 + \frac{40}{6{,}32456}\right) \approx 6{,}324553.$$

Сравнив их с приведенным выше точным значением, мы убеждаемся в том, что три итерации позволяют получить пять верных знаков после запятой.

В ходе вычислений вы можете сэкономить операции, если очередное приближение будете сохранять в регистре: ведь именно оно послужит начальным значением при вычислении следующего приближения.

Если у вашего микрокалькулятора имеется клавиша для вычисления квадратного корня, то необходимость в методе вычисления квадратных корней, разумеется, отпадает, хотя при желании вы можете самостоятельно оценить достижения вавилонских математиков.

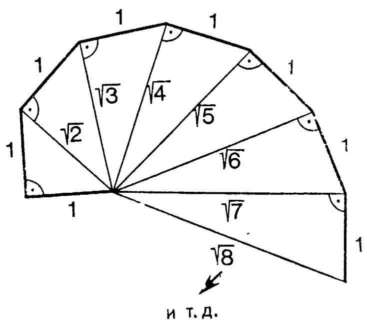


Рис. 18. Графический способ извлечения квадратного корня из натуральных чисел.

В связи с извлечением корней нам бы хотелось продемонстрировать один нехитрый трюк. Если вам понадобилось вычислить выражение вида $\sqrt{a^2+b^2}$ и в памяти микрокалькулятора нет места для хранения промежуточных результатов a^2 и b^2, то, выполнив несложное преобразование

$$\sqrt{a^2+b^2}=a\sqrt{1+\left(\frac{b}{a}\right)^2}=\sqrt{\left(\frac{a}{b}\right)^2+1}\cdot b\,,$$

вы сможете проделать все выкладки, не прибегая к записи промежуточных результатов.

Теорема Пифагора позволяет извлекать квадратные корни из целых чисел «чисто геометрически» (рис. 18).

Извлечение квадратного корня представляет собой не более, чем частный случай извлечения корней n-й степени из числа. Аналогично этому приведенная выше итерационная формула Ньютона является не чем иным, как частным случаем общей формулы

$$\sqrt[n]{x} \approx \frac{n-1}{n}\left[a + \frac{x}{(n-1)\,a^{n-1}}\right].$$

Поскольку мы живем в трехмерном мире, для нас особо важное значение имеет извлечение кубических корней. При $n=3$ общая формула переходит в формулу

$$\sqrt[3]{x} \approx \frac{2}{3}\left[a + \frac{x}{2a^2}\right].$$

В качестве примера вычислим по этой формуле значение $\sqrt[3]{10}$, приняв в качестве начального приближения $a_0=2$ (как известно, $2^3=8$, а это число лишь немногим меньше стоящего под корнем):

$$a_1 = \frac{2}{3}\left(2 + \frac{5}{4}\right) = 2{,}17;$$

$$a_2 = \frac{2}{3}\left(2{,}17 + \frac{5}{2{,}17^2}\right) = 2{,}154546;$$

$$a_3 = \frac{2}{3}\left(2{,}1545 + \frac{5}{2{,}1545^2}\right) = 2{,}1544346;$$

$$a_4 = \frac{2}{3}\left(2{,}154435 + \frac{5}{2{,}154435^2}\right) = 2{,}154436.$$

Верен седьмой знак после запятой!

Вычислить корень четвертой степени совсем нетрудно: нужно лишь вычислить квадратный корень из квадратного корня, то есть $\sqrt[4]{x} = \sqrt{\sqrt{x}}$. Для вычисления корней пятой степени нам понадобится общая итерационная формула Ньютона (при $n=5$), а чтобы найти корень шестой степени, достаточно извлечь квадратный корень из кубического корня или кубический корень из квадратного корня, то есть $\sqrt[6]{x} = \sqrt[3]{\sqrt{x}} = \sqrt{\sqrt[3]{x}}$. В общем случае справедливо соотношение $\sqrt[m+n]{x} = \sqrt[m]{\sqrt[n]{x}} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{x}}$.

Общая итерационная формула Ньютона (при произвольном n) позволяет на каждом шаге получать два новых верных знака после запятой. Поэтому на каждом шаге вам придется учитывать на два знака больше, чем на предыдущем.

Если у вашего микрокалькулятора имеется клавиша $\boxed{x^y}$, то традиционный метод извлечения корней становится излишним, поскольку вы всегда можете воспользоваться соотношением $\sqrt[n]{x}=x^{1/n}$. Необходимо лишь ввести степень корня, нажать клавишу вычисления обратной величины, ввести число x, стоящее под корнем (микрокалькулятор запрограммирован так, что при вводе x вычисленное ранее число $1/n$ передается в регистр памяти), и нажать клавишу $\boxed{x^y}$.

Если при извлечении корней переменная x изменяется в определенных пределах и вас удовлетворяет погрешность меньше 0,1 %, то можно воспользоваться следующими приближенными формулами.

$$1.\ \sqrt{1+x}\approx\frac{3-\left(\frac{x}{2}-1\right)^2}{2}\quad\text{при } |x|\leqslant 0{,}25.$$

Пример: $\sqrt{1{,}1}=\sqrt{1+0{,}1}\approx 1{,}049$ (более точное значение: 1,04880885).

Напомним, что $|x|$ (читается «абсолютная величина», или «модуль», x) совпадает с x при $x\geqslant 0$ и с $-x$ при $x<0$. Неравенство $|x|\leqslant 0{,}25$ «расшифровывается», как $-0{,}25\leqslant x\leqslant 0{,}25$.

$$2.\ \sqrt[3]{1+x}\approx\frac{5-\left(\frac{2x-3}{3}\right)^2}{4}\quad\text{при } |x|\leqslant 0{,}25.$$

Пример: $\sqrt[3]{0{,}8}=\sqrt[3]{1-0{,}2}\approx 0{,}9289$ (более точное значение: 0,92831777), $x=-0{,}2$.

Если ваш микрокалькулятор устроен так, что при вычислении разности $A - B$ необходимо сначала найти значение вычитаемого B (в большинстве случаев формулы вычисляются «изнутри наружу»), то, определив B, нажмите клавишу $\boxed{+/-}$ и суммируйте полученное число с A.

ВДВОЕ ТВЕРЖЕ

О том, что одно вещество тверже другого, нам приходится слышать довольно часто, и обычно всем ясно, о чем идет речь. Но если попытаться дать более точное определение твердости, то выяснится, что единой единицы измерения твердости не существует: что такое один метр, знает каждый, а вот единичной твердостью мы не располагаем.

Возможно, вы захотите возразить нам и напомните о шкале твердости Мооса, в которой тальк имеет твердость 1, а алмаз — твердость 10. Вы совершенно правы. Но тальк обладает единичной твердостью лишь в шкале Мооса, а нас интересует универсальная единица измерения твердости.

Единой шкалы твердости не существует: твердость измеряют по Бринеллю, Роквеллу или Моосу.

Шкала Мооса устроена совершенно произвольно: выбраны 10 минералов, твердость которых по Моосу считается равной 1, 2, ..., 10. Минерал с бо́льшим номером оставляет царапину на любом минерале с меньшим номером.

Бринелль, Роквелл и Виккерс предложили измерять твердость иначе. Все они имели дело с металлами, и измеряли их твердость, вдавливая в поверхность металла стандартным усилием стальные шарики определенного диаметра (Бринелль), алмазную пирамиду (Виккерс) или алмазный конус с закругленной вершиной (Роквелл) и измеряя отпечаток.

Нас будет интересовать твердость по Бринеллю.

Попытаемся выяснить, как отличаются по своим свойствам две марки стали, одна из которых вдвое тверже другой.

Твердость по Бринеллю $H_Б$ определяется следующим образом:

$$H_Б = \frac{\text{нагрузка}}{\text{площадь отпечатка шарика}} =$$

$$= \frac{F}{\frac{1}{2}\pi D\left(D - \sqrt{D^2 - d^2}\right)} = \frac{2F}{\pi D\left(D - \sqrt{D^2 - d^2}\right)},$$

где D — диаметр шарика, d — диаметр отпечатка. Величина стандартного усилия для стали определяется соотношением $F = 30 \cdot D^2 \frac{\text{кгс}}{\text{мм}^2}$, если диаметр D задан в мм. Выберем шарик диаметром 5 мм. Нагрузка F составляет

$$F = 30 \cdot 5^2 = 750 \text{ кгс}.$$

Из выражения для $H_Б$ видно, что пресловутый здравый смысл не позволяет нам высказать какие-либо утверждения относительно различий в свойствах двух марок сталей. Разумеется, у вдвое более твердой стали величина $H_Б$ вдвое больше. Но твердость по Бринеллю $H_Б$ мы вычисляем, а измерить нам удается лишь диаметр отпечатка d. Лишь d позволяет судить о свойствах той или иной марки стали.

Чтобы разобраться с твердостью до конца, произведем на нашем микрокалькуляторе два расчета: сначала вычислим диаметр отпечатков шарика для обеих марок стали при

$$H_{Б_2} = 2H_{Б_1},$$

а затем твердость каждой из марок по Бринеллю при

$$d_2 = 0{,}5\, d_1$$

(если марка 2 тверже марки 1, то диаметр отпечатка d_2 должен быть меньше диаметра отпечатка d_1).

Предположим, что более мягкая сталь имеет твердость по Бринеллю, равную 120 кгс/мм². В первом случае ($H_{Б_2} = 2H_{Б_1}$) твердость по Бринеллю марки 2 равна 240 кгс/мм². Чтобы вычислить диаметр отпечатка d, преобразуем выражение для $H_Б$ следующим образом:

$$H_Б=\frac{2F}{\pi D\cdot\left(D-\sqrt{D^2-d^2}\right)},$$

$$D-\sqrt{D^2-d^2}=\frac{2F}{\pi D H_Б},$$

$$-\sqrt{D^2-d^2}=\frac{2F}{\pi D H_Б}-D,$$

$$\sqrt{D^2-d^2}=-\frac{2F}{\pi D H_Б}+D,$$

$$D^2-d^2=\left(D-\frac{2F}{\pi D H_Б}\right)^2,$$

$$d^2=D^2-\left(D-\frac{2F}{\pi D H_Б}\right)^2,$$

$$d=\sqrt{D^2-\left(D-\frac{2F}{\pi D H_Б}\right)^2}.$$

При $H_{Б_1}=120$ кгс/мм² получаем $d_1=2{,}71$ мм. При удвоенном значении $H_{Б_2}=240$ кгс/мм² диаметр отпечатка оказывается равным $d_2=1{,}95$ мм. С увеличением твердости по Бринеллю диаметр отпечатка, как и следует ожидать, уменьшается.

Вычислим теперь твердость по Бринеллю для случая, когда диаметр отпечатка d шарика в стали одной марки вдвое меньше, чем в стали другой марки. Будем исходить из диаметра отпечатка $d=2{,}71$ мм. Твердость по Бринеллю в этом случае нам известна: $H_Б=$ $=120$ кгс/мм². При $d=2{,}71/2$ мм получаем

$$H_{Б_2}=\frac{2F}{\pi D\left(D-\sqrt{D^2-d^2}\right)}=$$

$$=\frac{2\cdot 750}{\pi\cdot 5\cdot\left[5-\sqrt{5^2-\left(\frac{2{,}71}{2}\right)^2}\right.}=510\ \text{кгс/мм}^2$$

Вычислить значение последней дроби можно различными способами. Лишь немногие микрокалькуляторы позволяют производить вычисление дробей «с листа», то есть находить сначала числитель, а затем знаменатель: для этого требуется располагать несколькими регистрами памяти и стеками.

Обычно вычисления удобно начинать с d^2. Если у вашего микрокалькулятора имеется клавиша $\boxed{+/-}$, то вы можете воспользоваться ею, чтобы произвести все выкладки в обратном порядке (вычислить сначала знаменатель и лишь затем числитель). Обратите внимание на то, что $D^2 - d^2 = -d^2 + D^2$.

Итак, при уменьшении диаметра отпечатка d вдвое твердость по Бринеллю $H_Б$ возрастает более чем вчетверо: со 120 кгс/мм² до 510 кгс/мм², и мы на собственном опыте убеждаемся, насколько трудно составить интуитивное представление о твердости. Лишь быстродействие микрокалькулятора позволяет во всех случаях получать численные значения интересующих нас характеристик материалов.

ДНИ РОЖДЕНИЯ И ЛОТЕРЕИ

В нашей книге «Seltsames um den gesunden Menschenverstand» («Когда здравый смысл заблуждается») мы предлагаем читателю такую задачу: «В классе учатся 40 мальчиков и девочек. Какова вероятность того, что по крайней мере у двоих из 40 учеников дни рождения совпадают?»

Многие сочтут правильным следующий ход рассуждений. В году 365 дней. Если исключить влияние на рождаемость празднеств и погодных условий, а также двадцать девятое февраля, то в среднем через каждые 9 дней кто-нибудь из 40 школьников будет отмечать день рождения. Поэтому вероятность совпадения двух дней рождения ничтожно мала. Сколь ни разумным кажется такое «решение», оно в корне неверно. Ошибка заключается в необоснованном смешении средних и вероятностей. В своей книге мы приводим формулу

$$W_n = \frac{365 \cdot 364 \cdot \ldots \cdot (365 - n + 1)}{365^n},$$

где W_n — вероятность того, что в произвольной по составу группе из n человек *ни у одной пары* дни рождения не совпадают. Совпадение двух дней рождения из данных n служит событием, дополнительным к первому, поэтому $W'_n = 1 - W_n$. Не так давно мы бы могли написать: «Еще никому не удавалось вычислить W'_n при $n = 40$». Теперь высказать такое утверждение было бы непростительным легкомыслием.

Если у вашего микрокалькулятора имеется клавиша $\boxed{y^x}$, то именно она и поможет вам произвести необходимые вычисления. Попробуйте найти вероятности W_n для начала по крайней мере до $n = 25$. Предположим, что ваш микрокалькулятор представляет большие числа в виде степеней десятки от 10^{-99} до 10^{+99} (именно в этих пределах работает большинство микрокалькуляторов). Тогда, из формулы для W_n при $n = 25$ вы получите:

$$W_{25} \approx 4{,}92 \cdot 10^{63} : 1{,}14 \cdot 10^{64} = 0{,}43,$$

откуда $W'_{25} = 1 - W_{25} = 0{,}57$. Это означает, что у двоих из 25 учеников нашего класса дни рождения совпадают с вероятностью 57%.

Чтобы найти числитель дроби, задающей W_{25}, вам понадобилось ввести 25 трехзначных чисел, не забывая каждый раз нажимать клавишу умножения. Это — не малая физическая работа. Нужно ли удивляться тому, что математики неоднократно предпринимали попытки получить тот же результат с меньшей затратой сил.

Прежде всего познакомим читателя с соотношением

$$p(p-1)(p-2)\ldots(p-n+1) = \frac{p!}{(p-n)!}$$

(в правильности его вы можете убедиться на числовых примерах). Здесь $p!$ (читается «p факториал») означает произведение всех натуральных чисел от 1 до p, то есть $p! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot p$. При $p = 365$ и n, равном числу людей в группе, наша формула для W_n переходит в формулу

$$W_n = \frac{365!}{(365-n)!\,365^n}.$$

Но даже если у вас под рукой микрокалькулятор сверхновой конструкции, у которого среди прочих имеется специальная клавиша $\boxed{!}$ для вычисления факториалов, не торопитесь радоваться: число 365! столь велико, что «не умещается» в самом «емком» микрокалькуляторе. Чтобы записать его, нам понадобилось бы около 800 знаков. К счастью, шотландскому математику Джеймсу Стирлингу (1692—1770) удалось найти удобную формулу, позволяющую приближенно представить факториал любого числа в таком виде, в котором его нетрудно вычислить, например, при помощи логарифмов (см. раздел «Не бойтесь логарифмов»). Формула Стирлинга имеет следующий вид:

$$x! \approx \sqrt{2\pi x} \cdot x^x \cdot e^{-x}.$$

Даваемое ею приближение тем лучше, чем больше x. Например, при $x=5$ по формуле Стирлинга находим $5! \approx 118$, в то время как точное значение факториала равно 120. Следовательно, при $x=5$ формула Стирлинга дает погрешность 2%. При $x=10$ ее погрешность составляет лишь 1%.

Формула Стирлинга позволяет нам преобразовать нашу формулу

$$W_n = \frac{365!}{(365-n)!\,365^n}$$

в приближенную формулу

$$W_n \approx \frac{\sqrt{2\pi \cdot 365} \cdot 365^{365} \cdot e^{-365}}{\sqrt{2\pi(365-n)}\,(365-n)^{(365-n)} \cdot e^{-(365-n)} \cdot 365^n}.$$

Впрочем, и приближенная формула мало пригодна для вычисления вероятности W_n, поскольку и в числителе, и в знаменателе по-прежнему стоят огромные числа. Однако от них можно без особого труда избавиться, если проделать несложные преобразования (которые мы не будем приводить здесь). После упрощений получим:

$$W_n \approx \left(1 - \frac{n}{365}\right)^{n-365,5} \cdot e^{-n}.$$

Эта формула особенно удобна для вычисления вероятности W_n на микрокалькуляторах, имеющих клавиши $\boxed{y^x}$ и $\boxed{e^x}$.

Помните: $e^{-x} = 1/e^x$.

Если у вас есть желание и около минуты свободного времени, то вы вполне можете вычислить W_n при $n = 40$ и тем самым найти решение задачи, поставленной в начале этого раздела. Для сравнения мы приведем ответ: $W_{40} = 0{,}109$, а $W'_{40} = 1 - 0{,}109 = 0{,}891$. Следовательно, вероятность того, что среди 40 случайно собравшихся людей найдется по крайней мере одна пара родившихся в один и тот же день, равна 89,1%.

С этим результатом вы спокойно отправляетесь на поиски партнера, достаточно азартного, чтобы держать пари, не утруждая себя размышлениями о математической подоплеке спора. В качестве группы из 40 человек вы можете выбрать, например, 40 знаменитостей, чьи биографические данные (а следовательно, и дни рождения) приведены в одном из томов какой-нибудь энциклопедии. Насчитав 40 человек, можете смело «закрыть список». За исход пари не стоит опасаться: вероятность 89% соответствует шансам на выигрыш 9 : 1. Вы можете даже поразить воображение ваших близких, если только вам удастся найти среди них достаточное число партнеров.

Обратимся теперь к лотереям. Вас, конечно, интересует, какова вероятность выигрыша, например, в лотерее «6 из 49» (участники такой лотереи должны правильно угадать как можно больше из 6 номеров от 1 до 49, которые после розыгрыша тиража публикуются в официальной таблице).

Математики подсчитали, что вероятность угадать 6 чисел из 49 составляет

$$W_6 = \frac{(49-6)!\,6!}{49!}.$$

Если у вашего микрокалькулятора имеется клавиша для вычисления факториалов $\boxed{!}$, то для получения результата достаточно трижды нажать на нее (и выполнить одно умножение и одно деление). Микрокалькулятор может вычислять факториалы натуральных чисел от 1 до 69, так как число 69! почти достигает верхней границы 10^{+99} чисел, представимых в микрокалькуляторе. Если у микрокалькулятора имеется клавиша $\boxed{!}$, то числитель и знаменатель дроби, выражающий W_6, можно предварительно сократить на 43!, после чего у нас останется

$$W_6 = \frac{6!}{44 \cdot 45 \cdot 46 \cdot 47 \cdot 48 \cdot 49}.$$

Напоминаем: $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$.

Для удобства приведем правильный результат: $W_6 = 7{,}15 \cdot 10^{-8}$. Величина, обратная W_6, равна 13 983 817. Столько карточек вам пришлось бы заполнить, чтобы гарантировать получение главного выигрыша.

Если ваши притязания более умеренны и вы могли бы довольствоваться, угадав лишь 5 номеров из 6, то вероятность W_5 можно вычислить по формуле

$$W_5 = \frac{(49-6)!}{[49-6-(6-5)]!\,(6-5)!} \cdot \frac{6!}{(6-5)!\,5!} \cdot \frac{(49-6)!\,6!}{49!}.$$

Выглядит она устрашающе, хотя в действительности «безобидна». Мы выписали ее полностью без всяких сокращений лишь для того, чтобы вам было легче удовлетворить свою любознательность и вычислить вероятность угадывания четырех номеров в лотерее «6 из 49». Для этого вам достаточно в формуле для W_5 все пятерки заменить четверками.

Если вы участвуете в розыгрыше лотереи другого типа и хотите вычислить, сколь велика вероятность угадать a номеров в лотерее «b из c», то можно воспользоваться общей формулой

$$W_a = \frac{(c-b)!}{[c-b-(b-a)]!\,(b-a)!} \cdot \frac{b!}{(b-a)!\,a!} \cdot \frac{(c-b)!\,b!}{c!}.$$

Вернемся еще раз к вероятности W_5 угадать 5 номеров в лотерее «6 из 49». Подсчитав разности в скобках и отбросив множитель $1! = 1$, получим после некоторых упрощений

$$W_5 = \frac{43!\,6!\,43!\,6!}{42!\,5!\,49!} = \frac{43 \cdot 6 \cdot 720}{44 \cdot 45 \cdot 46 \cdot 47 \cdot 48 \cdot 49} = 18{,}4 \cdot 10^{-6}.$$

Итак, теперь вы либо знаете, либо можете вычислить вероятность выигрыша в любой лотерее. Разумеется, мы не можем сказать заранее, удастся ли вам окупить расходы.

РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ

Когда мы учились в школе, значительныя часть курса математики отводилась решению уравнений. Условия задач нередко были подобраны так, чтобы ответ выражался в целых числах. На практике в большинстве случаев наблюдается обратная ситуация: «ответы» далеко не всегда бывают «круглыми», а некоторые алгебраические уравнения не удается решить средствами элементарной математики, и для отыскания их корней приходится прибегать к приближенным методам.

Поговорим сначала об алгебраических уравнениях, корни которых можно выписать в явном виде.

Формулу, выражающую корни квадратного уравнения $x^2 + ax + b = 0$ через его коэффициенты, мы привели в разделе «Золотое сечение». Следом (по степени старшего члена) за квадратными идут кубические уравнения, которые приводятся к виду

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0.$$

(Если коэффициент при x^3 отличен от единицы, то все уравнения необходимо разделить на него.) Коэффициенты a, b и c могут принимать любые вещественные значения (и в частности, обращаться в нуль).

В дальнейшем нас будут интересовать вещественные корни уравнений, то есть точки, в которых график функции $y = f(x)$ в координатах xy пересекает ось x.

Необходимо различать следующие случаи:

1) кубическое уравнение имеет лишь один вещественный корень;

2) кубическое уравнение имеет три вещественных корня.

Любая другая возможность исключена. Построив по точкам кубическую параболу, вы всегда можете выяснить, сколько вещественных корней имеет интересующее вас кубическое уравнение. Если вы чертите неохотно и предпочитаете производить вычисления, то число вещественных корней вам поможет определить следующий признак:

при $(q/2)^2+(p/3)^3 \geqslant 0$ кубическое уравнение имеет лишь один вещественный корень (случай 1), при $(q/2)^2+(p/3)^3<0$ число вещественных корней равно трем (случай 2).

Вспомогательные величины p и q связаны с коэффициентами приведенного кубического уравнения соотношениями

$$p=b-\frac{a^2}{3}, \quad q=\frac{2}{27}a^3-\frac{ab}{3}+c.$$

Вещественные корни выражаются через p и q следующим образом.

Случай 1:

$$x_1=\sqrt[3]{\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}-\frac{q}{2}}-$$
$$-\sqrt[3]{\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}+\frac{q}{2}}-\frac{a}{3}.$$

Случай 2 ($p<0$):

$$x_1=2\cdot\sqrt[3]{\sqrt{-\frac{p}{27}}}\cdot\cos\frac{\varphi}{3}-\frac{a}{3},$$

$$x_2=2\sqrt[3]{\sqrt{-\frac{p}{27}}}\cdot\cos\left(\frac{\varphi}{3}+120^\circ\right)-\frac{a}{3},$$

$$x_3=\sqrt[3]{\sqrt{-\frac{p}{27}}}\cdot\cos\left(\frac{\varphi}{3}+240^\circ\right)-\frac{a}{3},$$

где $\varphi=\arccos\left(-q_2/\sqrt{-\frac{p^3}{27}}\right)$. Различие во «внешнем виде» корней в случаях 1 и 2 объясняется тем, что кубические уравнения решены различными методами.

Предлагая вам решить приведенное уравнение четвертой степени

$$x_4 + a'x^3 + b'x^2 + c'x + d' = 0,$$

мы по существу знакомим вас с методом, предложенным около 1570 г. итальянским математиком Бомбелли.

Прежде всего необходимо составить так называемую кубическую резольвенту

$$z^3 + k_1z^2 + k_2z + k_3 = 0,$$

где

$$k_1 = b',$$

$$k_2 = a'c' - 4d',$$

$$k_3 = (c')^2 + d'\,[(a')^2 - 4b'].$$

Используя приведенные выше формулы, решим это кубическое уравнение и обозначим через z_1 его наименьший вещественный корень. Зная его, составим квадратное уравнение

$$r^2 + z_1r + d' = 0.$$

Оно имеет два вещественных корня:

$$r_1 = -\frac{z_1}{2} + \sqrt{\left(\frac{z_1}{2}\right)^2 - d'},$$

$$r_2 = -\frac{z_1}{2} - \sqrt{\left(\frac{z_1}{2}\right)^2 - d'}.$$

Вычислив корни r_1 и r_2, найдем значения вспомогательных величин

$$s_1 = \frac{a'r_1 - c'}{2\sqrt{\left(\frac{z_1}{2}\right)^2 - d'}},$$

$$s_2 = \frac{a'r_2 - c'}{-2\sqrt{\left(\frac{z_1}{2}\right)^2 - d'}}.$$

Если до сих пор вы нигде не ошиблись, то должно выполняться соотношение $s_1 \cdot s_2 = b' + z_1$.

Теперь мы располагаем всем необходимым, чтобы найти четыре корня исходного уравнения четвертой степени:

$$x_1 = -\frac{s_1}{2} + \sqrt{\left(\frac{s_1}{2}\right)^2 - r_1},$$

$$x_2 = -\frac{s_1}{2} - \sqrt{\left(\frac{s_1}{2}\right)^2 - r_1},$$

$$x_3 = -\frac{s_2}{2} + \sqrt{\left(\frac{s_2}{2}\right)^2 - r_2},$$

$$x_4 = -\frac{s_2}{2} - \sqrt{\left(\frac{s_2}{2}\right)^2 - r_2}.$$

Если при извлечении корня на индикаторе вашего микрокалькулятора появляется сигнал, свидетельствующий об ошибке, то число, стоящее под корнем, отрицательно. Это означает, что соответствующий корень уравнения не веществен и поэтому не представляет для нас интереса.

В следующем примере мы показываем, как решать уравнение четвертой степени, и попутно используем метод решения кубических уравнений.

Рассмотрим уравнение

$$x^4 - 2x^3 + 2x^2 + 6x - 15 = 0.$$

Коэффициенты его кубической резольвенты равны, соответственно,

$$k_1 = 2,\ k_2 = 48,\ k_3 = 96.$$

Следовательно, кубическая резольвента имеет вид

$$z^3 + 2z^2 + 48z + 96 = 0.$$

Вычислим теперь вспомогательные величины p и q:

$$p = 48 - \frac{4}{3} = 46{,}67;$$

$$q = \frac{2}{27} : 8 - \frac{2 \cdot 48}{3} + 96 = 64{,}59.$$

Вычисляя $(q/2)^2 + (p/3)^3$, получаем число $4807{,}1111 > 0$. Следовательно, мы имеем дело со случаем 1, то есть кубическая резольвента имеет лишь один вещественный корень. Он равен

$$z_1 = -2.$$

Вычислить его можно по формуле, приведенной выше для случая 1, а в его правильности нетрудно убедиться прямой подстановкой.

При $z_1 = -2$ мы получаем квадратное уравнение

$$r^2 - 2r - 15 = 0$$

с корнями

$$r_1 = 5 \text{ и } r_2 = -3.$$

Находим вспомогательные величины s_1 и s_2:

$$s_1 = -2, \ s_2 = 0$$

и производим проверку (должно выполняться соотношение $s_1 \cdot s_2 = b + z_1$):

$$-2 \cdot 0 = 2 - 2.$$

Поскольку «все сошлось», то пока все вычислено верно.

Выпишем, наконец, все четыре корня нашего уравнения четвертой степени:

$$x_1 = -\frac{s_1}{2} + \sqrt{\left(\frac{s_1}{2}\right)^2 - r_1} = 1 + \sqrt{-4} \text{ (не вещественный!)};$$

$$x_2 = -\frac{s_1}{2} - \sqrt{\left(\frac{s_1}{2}\right)^2 - r_1} = 1 - \sqrt{-4} \text{ (не вещественный!)};$$

$$x_3 = -\frac{s_2}{2} + \sqrt{\left(\frac{s_2}{2}\right)^2 - r_2} = \sqrt{3} \approx 1{,}7320508;$$

$$x_4 = -\frac{s_2}{2} - \sqrt{\left(\frac{s_2}{2}\right)^2 - r_2} = -\sqrt{3} \approx -1{,}7320508.$$

Итак, мы убедились, что корни уравнений второй, третьей и четвертой степеней можно в явном виде выразить через коэффициенты уравнения при помощи конечного числа арифметических операций и извлечений корней. Если же уравнение содержит неизвестную x в более высокой степени, то такой формулы в общем случае не существует. То же относится и к трансцендентным уравнениям, содержащим члены с $\sin x$, $\ln x$ и т. п. (Особые случаи, когда алгебраические уравнения высокой степени или даже трансцендентные уравнения оказываются разрешимыми, мы рассматривать не будем.) Для решения таких уравнений необходимо воспользоваться приближенными методами.

Один из приближенных методов основан на использовании весьма простых операций и известен под названием «правило ложного положения». Его с успехом применяли еще наши бабушки и дедушки. Этот метод позволяет указать «вилку», в пределах которой находится нуль уравнения.

Начнем с того, что с помощью каких-либо соображений, предварительных прикидок или построенного от руки графика определим, хотя бы грубо, границы, между которыми заключен подлежащий уточнению нуль уравнения. Пусть $\bar{x}$ — точное, не известное нам значение нуля уравнения, x_0 и x_1 — значения x, лежащие по разные стороны от $\bar{x}$. Соответствующие значения переменной y (их мы обозначим y_0 и y_1), вычисляемые по левой части нашего уравнения, имеют противоположные знаки. Основная идея правила ложного положения состоит в том, чтобы провести через точки $P_0(x_0, y_0)$ и $P_1(x_1, y_1)$ прямую и точку ее пересечения с осью x принять за первое приближение к точному значению нуля уравнения $\bar{x}$. Кривая $f(x)$ при этом заменяется хордой (рис. 19). Наше построение можно описать на языке формул:

$$\bar{x} \approx x_2 = x_1 - y_1 \frac{x_1 - x_0}{y_1 - y_0}.$$

Вычислим значение функции $f(x_2) = y_2$. Оно имеет противоположный знак по сравнению либо с y_1, либо y_2. В рассматриваемом нами примере противоположные знаки имеют y_2 и y_1.

Через точки $P_1(x_1, y_1)$ и $P_2(x_2, y_2)$ мы снова проведем хорду и точку x_3 ее пересечения с осью x примем за следующее приближение к $\bar{x}$:

$$\bar{x} \approx x_3 = x_2 - y_2 \frac{x_1 - x_2}{y_1 - y_2}.$$

Рассмотрим пример. Предположим, что требуется найти нуль уравнения

$$f(x) = x^2 - \ln x - 2 = 0.$$

Методом проб и ошибок находим:

$$f(1) = -1 < 0,$$
$$f(2) = 1{,}307 > 0.$$

Следовательно, нуль уравнения, который мы хотим найти, заключен между $x_0 = 1$ и $x_1 = 2$ (при этом $y_0 =$

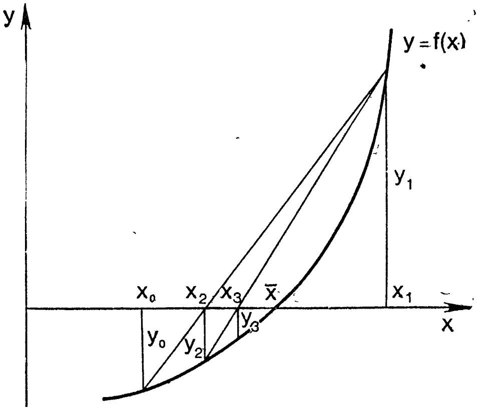


Рис. 19. Метод хорд. Секущие позволяют зажать корень $\bar{x}$ в сколь угодно узкую вилку.

$= -1$, а $y_1 = +1{,}307$). Проведя хорду через точки P_0 и P_1, получаем:

$$x_2 = x_1 - y_1 \frac{x_1 - x_0}{y_1 - y_0} = 2 - 1{,}307 \cdot \frac{1}{2{,}307} = 1{,}433$$

и

$$y_2 = (1{,}433)^2 - \ln 1{,}433 - 2 = -0{,}305.$$

Так как при $x_i < \bar{x}$ всегда будут получаться лишь отрицательные значения функции y_i, то конец хорды, совпадающий с точкой $P_1(x_1, y_1)$, остается неподвижным, в то время как координаты другого конца изменяются шаг за шагом:

$$x_3 = x_1 - y_1 \frac{x_1 - x_2}{y_1 - y_2} = 2 - 1{,}307 \cdot \frac{2 - 1{,}433}{1{,}307 + 0{,}305} = 1{,}541;$$

$$y_3 = -0{,}058;$$

$$x_4 = 1{,}560; \; y_4 = -0{,}010;$$

$$x_5 = 1{,}564; \; y_5 = -0{,}002.$$

На этом мы можем остановиться, так как x_5 дает приближенное значение нуля $\bar{x}$ с тремя верными знаками после запятой.

МОРСКИЕ И ВОЗДУШНЫЕ ПУТИ

Суда дальнего плавания и самолеты трансконтинентальных линий следуют из пункта отправления в пункт назначения по кратчайшим маршрутам.

На поверхности земного шара кратчайшее расстояние между любыми двумя точками совпадает с длиной дуги большого круга, соединяющей эти две точки. Напомним, что большим называется круг, центр которого совпадает с центром шара, в нашем случае — с центром Земли (рис. 20).

Экватор ограничивает большой круг, меридианы, идущие от полюса к полюсу, также являются дугами больших кругов, а вот линии равной широты не принадлежат к числу дуг больших кругов. Остальные дуги больших кругов, соединяющие пары точек на поверхности Земли, в северном полушарии обращены выпуклостью на север. Следуя из Москвы в Нью-Йорк кратчайшим маршрутом, мы по дороге приблизимся к Северному полюсу. Этим и объясняется интерес авиационных штурманов к полярным маршрутам.

Сколь велико расстояние от Берлина ($\varphi = 52°25'$ северной широты, $\lambda = 13°30'$ восточной долготы) до Гаваны ($\varphi = 23°15'$ северной широты, $\lambda = 82°30'$ западной долготы) по дуге большого круга? (Географические координаты аэродромов в Берлине и в Гаване мы указываем приближенно, чтобы упростить последующие расчеты.) Географические координаты Берлина как пункта отправления мы пометим индексом о, географические координаты Гаваны как пункта назначения — буквой н.

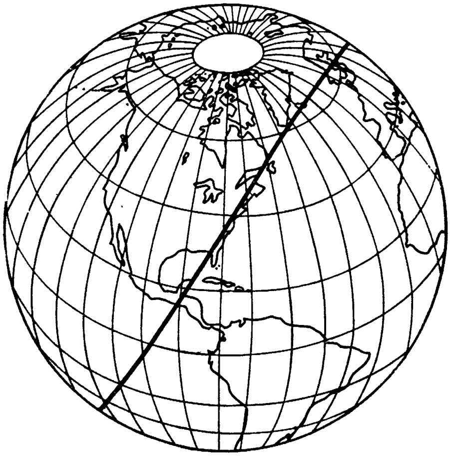


Рис. 20. Кратчайший путь (ортодромия). На поверхности земного шара кратчайший путь между любыми двумя точками проходит по дуге большого круга.

Длина L дуги большого круга, соединяющей две точки на поверхности земного шара, определяется выражением

$$L = 60\frac{\text{см}}{1^\circ}\cdot \arccos[\sin\varphi_o\cdot\sin\varphi_н + \\ + \cos\varphi_o\cdot\cos\varphi_н\cdot\cos(\lambda_н - \lambda_o)],$$

где арккосинус измеряется в градусах.

До появления микрокалькуляторов это соотношение наводило ужас на навигаторов: чтобы вычислить L, им приходилось по 6 раз заглядывать в таблицы тригонометрических функций и интерполировать табличные значения синусов, косинусов и арккосинуса. Ясно, что процедура была не только утомительной, но и приводила к большим погрешностям.

Прежде чем поручить нашему микрокалькулятору работу высококвалифицированного штурмана, служащего на флоте или в авиации, необходимо сделать следующие замечания.

1. Восточные долготы и южные широты условимся считать отрицательными (Берлин расположен к востоку от нулевого гринвичского меридиана).

2. Лишь немногие микрокалькуляторы способны производить вычисления с угловыми минутами и секундами. Поэтому прежде чем приступать к определению длины маршрута L по дуге большого круга, переведите минуты в десятые доли градуса (для удобства пересчета мы привели не точные, а приближенные географические координаты Берлина и Гаваны).

3. Обратные тригонометрические функции на клавиатуре некоторых микрокалькуляторов обозначены $\boxed{\cos^{-1}}$, $\boxed{\sin^{-1}}$ и т. д. Однако у большинства микрокалькуляторов для вычисления, например, арккосинуса необходимо нажать кнопки $\boxed{\text{arc}}$ и $\boxed{\cos}$.

4. Расстояние L измеряется в морских милях (1,852 км).

А теперь приступим к работе. Прежде всего запишем географические координаты в десятых и сотых долях градуса и определим их знаки:

$$\varphi_0 = 52°25' \quad \text{северной} = +52{,}42°;$$
$$\lambda_0 = 13°30' \quad \text{восточной} = -13{,}50°;$$
$$\varphi_н = 23°15' \quad \text{северной} = +23{,}25°;$$
$$\lambda_н = 82°30' \quad \text{западной} = +82{,}50°.$$

Если у вас имеется микрокалькулятор, способный производить действия с угловыми минутами M (и секундами S), введите их в виде дроби 0, MMSS и нажмите клавишу $\boxed{\text{HMS}}$.

Все остальные микрокалькуляторы вычисляют величину $\frac{100}{60}$ 0, MM.

Подставляя φ и λ в правую часть выражения, определяющего длину дуги L большого круга, получаем:

$$L = 60 \text{ см} \cdot \arccos\{\sin 52{,}42° \cdot \sin 23{,}25° +$$
$$+ \cos 52{,}42° \cdot \cos 23{,}25° \cdot \cos [82{,}50° - (-13{,}5°)]\}.$$

Микрокалькулятор обладает большим преимуществом перед таблицами: при вычислении тригонометрических функций углов, превосходящих 90°, микрокалькулятор дает не только абсолютную величину, но и знак интересующего нас значения функции.

Сумма, стоящая в фигурных скобках, равна 0,25426. Следовательно,

$$L = 60 \cdot \arccos(0{,}25426)/1^\circ \text{ миль} =$$
$$= 60 \cdot 75{,}27 \text{ миль} = 4516 \text{ миль}$$
$$(\arccos 0{,}25426 \text{ — в градусах!}).$$

Если угодно, то морские мили можно перевести в более привычные километры:

$$L = 4516 \cdot 1{,}852 \text{ км} = 8364 \text{ км}.$$

В действительности путь из Берлина в Гавану несколько длиннее, поскольку самолет или судно не все время движутся по дуге большого круга (следуя по кратчайшему маршруту, штурман должен был бы непрестанно вводить поправки в курсовой угол — см. рис. 20). Особенно велики отклонения от дуги большого круга у воздушных трасс, поскольку самолеты летают лишь по строго определенным маршрутам и должны следовать от одного контрольного пункта к другому.

Желающие могут для сравнения решить рассмотренную нами простую навигационную задачу при помощи таблиц логарифмов.

ПРОСТЫЕ И СЛОЖНЫЕ ПРОЦЕНТЫ

Владельцы микрокалькуляторов — люди, как правило, экономные. Свои сбережения они периодически вносят на свой лицевой счет в сберегательной кассе, а в конце года радуются набежавшим процентам и подводят итог.

У большинства микрокалькуляторов имеется клавиша $\boxed{\%}$. Однако годовой процент, выплачиваемый сберегательной кассой, проще учитывать в виде десятичной дроби. Например, $5\% = 0{,}05$.

Когда печаталась эта книга, сберкассы ГДР выплачивали вкладчикам $p = 3^1/_4\% = 0{,}0325$ годовых. Доход, получаемый вкладчиком за n лет, определяется соотношением:

доход Z = вклад K · размер годового процента p · число лет n.

Если на нашем счету в сберегательной кассе в течение года пролежала сумма в 1000 марок, то после начисления годовых наш доход окажется равным

$$Z = K \cdot p \cdot 1 = 1000 \cdot 0{,}0325 \cdot 1 = 32{,}50 \text{ марки.}$$

Если мы внесли вклад лишь 1 августа, то проценты за 5 месяцев ($n = {}^5/_{12}$) составят

$$Z = 1000 \cdot 0{,}0325 \frac{5}{12} = 13{,}54 \text{ марки.}$$

Те, кто любит особую точность, при подсчете n могут учитывать даже дни. В сберегательных кассах продолжительность года при расчетах принимается равной 360 дням. За последние 14 дней года мы получим доход

$$Z = 1000 \cdot 0{,}0325 \cdot \frac{14}{360} = 1{,}26 \text{ марки.}$$

Предусмотрительные родители при рождении ребенка открывают в сберегательной кассе счет на его имя. К тому времени, когда ребенку исполнится 18 лет, первоначальный вклад K_0 успевает изрядно округлиться. По истечении каждого года доход от начисления годовых не изымается, а присоединяется к вкладу и годовые за следующий год начисляются с возросшего вклада. При p процентах годовых первоначальный вклад K_0 за n лет возрастает до

$$K = K_0 (1 + p)^n.$$

Предположим, что при рождении ребенка родители положили на его имя в сберегательную кассу 1000 марок из расчета 3,25% годовых. По истечении 18 лет на счету окажется сумма

$$K = 1000 \cdot (1{,}0325)^{18} \text{ марок.}$$

Те, у кого микрокалькулятор имеет клавишу $\boxed{y^x}$, без труда установят, что

$$K = 1778{,}37 \text{ марки.}$$

Если микрокалькулятор автоматически запоминает второй множитель, то для вычисления K необходимо нажать следующие клавиши:

$$\boxed{1}\ \boxed{0}\ \boxed{0}\ \boxed{0}\ \boxed{\times}\ \boxed{1}\ \boxed{,}\ \boxed{0}\ \boxed{0}\ \boxed{2}\ \boxed{5}\ \underbrace{\boxed{=}\ \ldots\ \boxed{=}}_{18 \text{ раз}}$$

Вычислять сложные проценты на микрокалькуляторах всех других конструкций несколько сложнее. В качестве первого приближения можно установить, какой доход принес бы вклад, если бы сберегательная касса не причисляла годовые к первоначальному вкладу:

$$Z = K \cdot p \cdot n = 1000 \cdot 0{,}0325 \cdot 18 = 585{,}00 \text{ марок.}$$

Разница в 200 марок по сравнению со сложными процентами несколько великовата. Этим приближением можно пользоваться лишь при малых n, например, когда вклад не изымается в течение 5 лет.

Не слишком удачная замена сложных процентов простыми наводит на мысль о более хитроумной замене, позволяющей точнее оценить величину дохода за 18 лет: вычислим доход за 6 лет (число 6 выбрано из соображений удобства, так как 18 делится на 6), присоединим его к исходному вкладу, затем вычислим простые проценты с возросшего вклада за следующие 6 лет и снова присоединим их к вкладу, после чего повторим этот процесс еще раз. Наши расчеты выглядят следующим образом:

$$\begin{aligned}
Z = 1000 \cdot 0{,}0325 \cdot 6 &= 195 \\
&+1000 \\
\hline
&= 1195 \\
1195 \cdot 0{,}0325 \cdot 6 &= 233{,}03 \\
&+1195{,}00 \\
\hline
&= 1428{,}03 \\
1428 \cdot 0{,}0325 \cdot 6 &= 278{,}46 \\
&+1428{,}03 \\
\hline
Z &= 1706{,}49 \text{ марки}
\end{aligned}$$

На этот раз нам недостает лишь 72 марки. Тот, кто хочет знать свой лицевой счет с большей точностью, должен выбирать меньшие значения n (в случае необходимости понижать n до 1).

Уравнения с показательной функцией после логарифмирования переходят в линейные уравнения.

Поскольку клавиша $\boxed{\lg}$ имеется у многих микрокалькуляторов, прологарифмируем выражение для сложных процентов:

$$\begin{aligned}
\lg K &= \lg K_0 + n \lg (1 + p), \\
\lg K &= \lg 1000 + 18 \cdot \lg 1{,}0325, \\
\lg K &= 3 + 18 \cdot 0{,}013890, \\
\lg K &= 3{,}250021, \\
K &= 1778{,}37 \text{ марки.}
\end{aligned}$$

Может быть, вы захотите узнать, через сколько лет вклад удвоится? Пусть K_0 — начальный вклад, $K = 2K_0$ — величина вклада по истечении n лет и $p =$

$= 3^1/_4\%$ — размер годовых. Мы получаем уравнение

$$\lg(2K_0) = \lg K_0 + n \lg(1+p),$$

откуда

$$n = \frac{\lg(2K_0) - \lg K_0}{\lg(1+p)} = \frac{\lg 2}{\lg(1+p)} \approx$$

$$\approx \frac{0{,}3010}{0{,}4343} \text{ при } p < 7\%.$$

Если предположить, как мы сделали раньше, что первоначальный вклад составляет 1000 марок, то

$$n = \frac{\lg 2000 - \lg 1000}{\lg(1 + 0{,}0325)} = 21{,}67 = 21 \text{ год } 8 \text{ месяцев.}$$

А сколько бы нам пришлось ждать, пока вклад удвоится если бы сберегательная касса выплачивала по 6,5% годовых? Ответить на этот вопрос нетрудно:

$$n = \frac{\lg 2000 - \lg 1000}{\lg 1{,}065} = 11{,}01 \text{ лет.}$$

УПЛАТА ДОЛГОВ

Человек занял денег или взял ссуду, чтобы купить какую-то ценную вещь. Что именно считать ценной вещью, разумеется, зависит от точки зрения. Обычно все сходятся на том, что дом является ценной вещью, поскольку, купив себе жилище в рассрочку, вы избавляетесь от необходимости вносить квартирную плату. В кредит покупают также стиральные машины и множество других полезных вещей.

Наш микрокалькулятор позволяет нам выяснить, посильно ли бремя долгов, то есть соответствуют ли долги нашим доходам.

Сумма долга (независимо от того, называется ли она ссудой, кредитом или выплатой в рассрочку) складывается из суммы, взятой нами заимообразно, и процентов на эту сумму. Следовательно, взяв в долг деньги, мы расплачиваемся за это процентами и, кроме того, теряем проценты, которые выплатила бы нам сберегательная касса, если бы мы сначала скопили необходимую сумму и лишь затем израсходовали ее на покупку нужной нам вещи.

Предположим, что вы задумали построить дом. Для этого вы взяли ссуду на 30 000 марок, подлежащую погашению в установленный срок вместе с ссудным процентом (3% годовых). Обычно при выдаче ссуды указывается, в какие сроки заемщик должен производить платежи. Ежегодно вам придется вносить определенный взнос, размеры которого складываются из платежа в возмещение первоначально взятой ссуды и набежавших процентов.

Предположим, что размер годового взноса составляет 1000 марок. Тогда за первые три года, как показывают вычисления, произойдет следующее:

Год	Задолженность в марках	Годовой взнос в марках	Проценты в марках	Погашение ссуды в марках	Остаточная задолженность в марках
1-й	30 000	1000	900,00	100,00	29 900,00
2-й	29 900	1000	897,00	103,00	29 797,00
3-й	29 797	1000	893,91	106,09	29 690,91

Достаточно беглого взгляда на эту таблицу, чтобы стала ясна проблема, с которой сталкивался каждый, кому когда-либо приходилось брать ссуду: проценты почти полностью пожирают годовой взнос, и на погашение ссуды остаются лишь жалкие крохи. Три процента годовых кажутся малой ценой за предоставляемую ссуду лишь тем, кому не приходится их выплачивать.

Погашение ссуды определяется следующей труднообозримой формулой (число лет n, в течение которых производится погашение ссуды, входит в показатель степени):

$$S_n = T_1 \cdot \frac{(1+p)^n - 1}{(1+p) - 1},$$

где S_n — сумма, погашенная за n лет, p — ссудный процент и T_1 — сумма, пошедшая на погашение ссуды за первый год выплаты.

Пользуясь составленной нами таблицей, проверим правильность формулы для S_n при $n=3$:

$$S_3 = 100 \cdot \frac{1{,}03^3 - 1}{1{,}03 - 1} = 309{,}09 \text{ марки.}$$

Ссуда полностью погашена, если $S_n = S$:

$$S_n = S = T_1 \cdot \frac{(1+p)^n - 1}{(1+p) - 1}.$$

Нас интересует, через сколько лет это произойдет. Чтобы найти n, нам необходимо прологарифмировать соотношение для S_n, разрешенное относительно $(1+p)^n$, оставить n в одной части получившегося уравнения, а все известные величины перенести в другую часть уравнения.

Если неизвестен показатель, а степень и основание известны, то уравнение необходимо прологарифмировать:

$$y = x^n,$$
$$\lg y = n \lg x,$$
$$n = \frac{\lg y}{\lg x}.$$

В нашем случае, чтобы найти n, необходимо проделать следующие операции:

$$S = T_1 \frac{(1+p)^n - 1}{(1+p) - 1}, \qquad \Big|\, : T_1$$

$$\frac{S}{T_1} = \frac{(1+p)^n - 1}{(1+p) - 1}, \qquad \Big|\, \cdot p$$

$$\frac{S \cdot p}{T_1} = (1+p)^n - 1, \qquad \Big|\, +1$$

$$\frac{S \cdot p}{T_1} + 1 = (1+p)^n, \qquad \Big|\, \lg$$

$$\lg\left[\frac{S \cdot p}{T_1} + 1\right] = n \lg(1+p), \qquad \Big|\, : \lg(1+p)$$

$$\frac{\lg\left[\frac{S \cdot p}{T_1} + 1\right]}{\lg(1+p)} = n.$$

Эти преобразования столь изящны, что у нас рука не поднимается написать: «Как нетрудно видеть, при логарифмировании получается ...» и т. д.

Теперь мы уже располагаем всем необходимым, чтобы узнать, сколько лет вам потребуется на погашение ссуды в 30 000 марок, если ежегодно вы будете выплачивать по 1000 марок:

$$n = \frac{\lg\left[\frac{Sp}{T_1} + 1\right]}{\lg(1+p)} = \frac{\lg\left[\frac{30\,000 \cdot 0{,}03}{100} + 1\right]}{\lg 1{,}03} = 77{,}9 \approx 78 \text{ лет.}$$

Интересно отметить, что величина суммы T_1, идущей на погашение ссуды при выплате первого взноса, оказывает решающее влияние на накопление погашений S_n. Косвенно на темпах погашения сказывается и размер ссудного процента, поскольку набежавшие проценты изымаются из годового взноса.

Итак, прежде чем брать ссуду на строительство дома или покупать в кредит стиральную машину, воспользуйтесь вашим микрокалькулятором и произведите необходимые расчеты.

Какую сумму выплатит владелец дома за 77,9 года? Ответить на этот вопрос несложно:

$$\text{годовой взнос (марки/год)} \cdot \text{число лет} = \text{выплаченная сумма (марки)},$$

$$1000 \cdot 77{,}9 = 77900.$$

Результат поистине поразительный!

Чем меньше годовой (или месячный взнос), тем больше сумма, выплачиваемая за время погашения ссуды.

Исследуем теперь противоположную стратегию. Предположим, что вы ежегодно вносите на свой счет в сберегательной кассе по 1000 марок до тех пор, пока ваши сбережения не достигнут суммы 30 000 марок. Сберегательная касса выплачивает вкладчикам по 3% годовых. Ситуация станет особенно ясной, если составить соответствующую таблицу.

Год	Сумма, с которой начисляются проценты, в марках	Проценты в марках	Возросший вклад в марках
1-й	1000	30,00	1030
2-й	2030	60,90	2090,90
3-й	3090,90	92,73	3183,63
4-й	4183,63	125,51	4309,14
5-й	5309,14	159,27	5468,41
6-й	6468,41	194,05	6662,46
7-й	7662,46	229,87	7892,33
8-й	8892,33	266,77	9159,10
9-й	10159,10	304,77	10463,87
10-й	11463,87	343,92	11807,79
11-й	12807,79	384,23	13192,02
12-й	14192,02	425,76	14617,78
13-й	15617,78	468,53	16086,31
14-й	17086,31	512,59	17598,90
15-й	18598,90	557,97	19156,87
16-й	20156,87	604,71	20761,58
17-й	21761,58	652,85	22414,43
18-й	23414,43	702,43	24116,86
19-й	25116,86	753,51	25870,37
20-й	26870,37	806,11	27676,48
21-й	28676,48	860,29	29536,77
22-й	30536,77		

Интересная задача — выполнить вычисления с наименьшим числом вводов новых данных. Например, составляя такую таблицу, можно действовать так: $1000 \cdot 0{,}03 =$ (проценты) $+ 1000 =$ (возросший вклад) $+$ $+ 1000 =$ (сумма, с которой начисляются проценты по истечении 2 лет) $\cdot 0{,}03 =$ и т. д. Если у вашего микрокалькулятора имеется клавиша $\boxed{\text{M}}$, то число вводов сокращается еще больше.

Итак, через 8 лет проценты увеличивают ваш вклад на 1000 марок, а через 11 лет ваш вклад снова увеличивается за счет начисления процентов на 1000 марок.

Таким образом, через 21 год с небольшим вам удастся скопить 30 000 марок, и при этом вы выплатите лишь 21 000 марок. Впрочем, если вы хотите построить дом, то 21 год — срок немалый.

Приведенные примеры убедительно показывают, что оптимальную стратегию взносов следует тщательно продумать, точно учитывая величину процента годовых и размеры взносов.

Для составления таблиц, аналогичных приведенной выше, особенно удобны микрокалькуляторы с польской (бесскобочной) записью операций.

Правильность итоговой суммы можно контролировать, рассматривая сбережения как своего рода пенсию, вносимую на ваш лицевой счет и выплачиваемую аккордно по истечении срока (22 лет). Формула для определения размеров «выплаты» имеет вид:

$$S_n = 1000 \cdot \frac{1{,}03^{22} - 1}{1{,}03 - 1} = 30536{,}80 \text{ марки.}$$

По виду она ничем не отличается от формулы, определяющей темпы погашения задолженности.

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ КУРЬЕЗЫ

Математики и любители математических развлечений накопили множество наблюдений над цифрами, числами и операциями с необычными свойствами. Можно лишь удивляться тому, сколько остроумия, терпения и упорства понадобилось открывателям математических диковин, чтобы довести до конца вычисления. Приводимые ниже примеры позволяют обладателям микрокалькуляторов проявить свое остроумие, переложив все тяготы вычислений на электронику.

В ряде арифметических примеров каждая из цифр (кроме нуля) встречается ровно один раз:

$$1738 \cdot 4 = 6952,$$
$$186 \cdot 39 = 7254,$$
$$198 \cdot 27 = 5346,$$
$$483 \cdot 12 = 5796.$$

Число таких примеров можно умножить, комбинируя подбор с более тонкими соображениями.

В январских номерах научно-популярных журналов под рубрикой «Математические развлечения» нередко можно встретить задачи на составление тождества из цифр, образующих «номер» нового года, которые в правой и в левой части должны входить в «правильной» последовательности. Например,

$$\sqrt{1\cdot 9\cdot 7\cdot 7}=1+\sqrt{9!}+7+7,$$
$$-19+77=(1\cdot 9)+(7\cdot 7),$$
$$1977=(19-77)\cdot(19-77)-$$
$$-(197\cdot 7)+(1-9+7-7),$$
$$1:(9\cdot 7+7)=1!\cdot 9!:(7!\cdot 7!).$$

Однажды было опубликовано такое тождество:

$$\sqrt{1936}=-1+9+36.$$

Микрокалькулятор позволяет не только с немыслимой ранее быстротой перебрать все варианты, но и придумывать «нечестные» решения, как, например,

$$1977=1+9^{3,25974758}+7^3+7^3.$$

«Жульнический подвох» таят два последних слагаемых 7^3. Вместо них мы могли бы взять любую степень семерки: нужно лишь вычесть произвольно выбранную степень семерки (предварительно удвоив ее) из 1976, а разность представить в виде соответствующей степени числа 9. Действительно, если записать равенство $1977=1+9^a+b$, то при любом b справедливо отношение

$$a=\frac{\lg(1976-b)}{\lg 9}.$$

Напомним, что для отыскания неизвестного показателя степени равенство, разрешенное относительно степени, необходимо прологарифмировать.

Наше решение выглядит более правдоподобным, если его представить в виде

$$1977 = 1 + 9^{2,954286} + 7^{3,335832} + 7^{3,335832}.$$

Вывод этого равенства потребовал от нас не особого хитроумия, а лишь несложных вычислений. Мы разделили сумму $1977 + 1$ на 3 равные части и представили их в виде соответствующих степеней девятки и семерки. Наш «метод» служит хорошим примером того, как весьма простым числам можно придать «наукообразный» вид, способный вызвать у непосвященного благоговейный трепет. Следующие равенства носят более «серьезный» характер:

$$95 : 5 = 9 + 5 + 5,$$
$$42 : 3 = 4 \cdot 3 + 2,$$
$$(2 + 7) \cdot 2 \cdot 16 = 272 + 16,$$
$$5^{6-2} = 625,$$
$$2^{10} - 2 = 1022,$$
$$\sqrt{121} = 12 - 1,$$
$$\sqrt[3]{1331} = 1 + 3 + 3 + 1 + 3.$$

Много таких задач собрано в книге «Математическая смекалка» советского математика Б. А. Кордемского.

Существуют числа, сумма и произведение которых состоят из одних и тех же цифр, записанных в различном порядке:

$$9 + 9 = 18, \qquad 81 = 9 \cdot 9;$$
$$47 + 2 = 49, \qquad 94 = 47 \cdot 2;$$
$$497 + 2 = 499, \qquad 994 = 497 \cdot 2.$$

Список таких пар при желании можно продолжить.

Небезынтересно найти пары чисел, допускающие перестановки цифр, например:

$$12 \cdot 42 = 21 \cdot 24,$$
$$24 \cdot 84 = 42 \cdot 48.$$

Попытайтесь подыскать пары таким множителям, как 12, 13, 23, 24, 26.

Кисти русского художника Н. П. Богданова-Бельского принадлежит картина «Устный счет». На ней изображены ученики церковно-приходской школы, которые пытаются решить задачу, написанную учителем на доске:

$$\frac{10^2 + 11^2 + 12^2 + 13^2 + 14^2}{365} =$$

Разумеется, для нашего микрокалькулятора решение этой задачи — совершеннейший пустяк. Вычислив частичную сумму $10^2 + 11^2 + 12^2$, остановитесь на миг. Может быть, вы сразу назовете ответ? Во всяком случае, вы, несомненно, обратите внимание на то, что

$$10^2 + 11^2 + 12^2 = 13^2 + 14^2.$$

Математики сумели найти все такие группы последовательных чисел:

$$3^2 + 4^2 = 5^2,$$
$$10^2 + 11^2 + 12^2 = 13^2 + 14^2,$$
$$21^2 + 22^2 + 23^2 + 24^2 = 25^2 + 26^2 + 27^2$$

и т. д. Пользуясь микрокалькулятором, вы быстро найдете равенство, начинающееся с 36^2. Решение задачи еще более упрощается, если заметить, что разности оснований первых слагаемых образуют арифметическую прогрессию 7, 11, 15, 19, 23, ... (с разностью 4).

Задача об отыскании симметричных сумм весьма подходит для решения на микрокалькуляторе. Речь идет о следующей задаче. Выберем какое-нибудь многозначное число и прибавим к нему его «зеркальный двойник» — число, которое состоит из тех же цифр, записанных от конца к началу, затем к сумме прибавим ее зеркальный двойник и т. д. до тех пор, пока очередная сумма не окажется симметричным числом. Например, если мы выбрали число 87, то поиск симметричной суммы будет выглядеть следующим образом:

$$\begin{array}{r} 87 \\ +78 \\ \hline 165 \\ +561 \\ \hline 726 \\ +627 \\ \hline 1353 \\ +3531 \\ \hline 4884 \end{array}$$

Лишь в исключительных случаях число, лежащее в доступном для микрокалькулятора диапазоне, не приводит к симметричной сумме.

Приведенные в этом разделе нехитрые примеры убедительно показывают, что удачные идеи мы должны выдвигать сами, хотя микрокалькулятор избавляет нас от необходимости производить чисто механические вычисления.

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ОШИБОК

В большинстве технических расчетов удовлетворительным считается уровень точности, при котором максимальная ошибка составляет от 0,1 до 5%. Например, при переходе от старых единиц к Международной системе единиц (СИ) перевод килограмма силы в ньютоны можно осуществить введением множителя 10 вместо более точного множителя 9,81: ошибка, совершаемая при такой замене, достигает

$$\frac{10-9{,}81}{9{,}81}=2\%,$$

то есть лежит в допустимых пределах.

Однако при решении некоторых проблем современной науки и техники, возникающих, например, в космических исследованиях или в экспериментальной атомной физике, обычный уровень точности оказывается недостаточным.

При запуске первых искусственных спутников Луны с промежуточной околоземной орбиты вторую космическую скорость (около 11200 м/с) необходимо было выдерживать с точностью до нескольких см/с, иначе спутник Луны стал бы спутником Солнца. Такая точность соответствует допустимой ошибке в 0,0002% (2 м/с/$11{,}2\cdot 10^5$ м/с$\approx 2\cdot 10^{-6}$). Монтаж крупных ускорителей с диаметром кольцевого магнита 1,5 км требуется производить с еще большей точностью.

Прецизионный характер современной техники предъявляет жесткие требования к технике измерений. Наш микрокалькулятор производит вычисления с завидной точностью (не говоря уже о быстроте), однако нам нередко приходится выполнять расчеты по формулам, выражающим ту или иную зависимость между результатами измерений. Известно, что результат любого измерения в силу самой своей природы содержит ошибку. Как правило, ширину «коридора ошибки» (верхний и нижний пределы, между которыми заключена ошибка) удается оценить. Если измерительный прибор обладает разрешающей способностью 0,001 мм, то он не пригоден для измерения длин, составляющих 0,0001 мм.

Величина ошибки измерения полностью зависит от измерительного прибора и измеряемого объекта. Например, для прибора, позволяющего измерять длину с точностью до 0,001 мм, вполне разумно указать величину допустимого отклонения, равную по модулю $\Delta x \approx 0{,}5\cdot 10^{-3}$ мм. Измерив значение x с абсолютной ошибкой Δx, мы получаем относительную ошибку $\Delta x/x$ (величину относительной ошибки принято выражать в процентах). На шкалах электроизмерительных приборов обычно указана допускаемая ими относительная ошибка. Она зависит от ширины коридора ошибок в рабочем диапазоне прибора.

Если у вас возникают какие-либо сомнения в правильности паспортных данных прибора, то, повторив измерение достаточно много раз, вы можете принять отклонение равным полуразности наибольшего и наименьшего значений, то есть положить $\Delta x = (x_{max} - x_{min})/2$, а в качестве значения x выбрать среднее арифметическое результатов отдельных измерений.

Определив понятие отклонения (которое мы в дальнейшем для краткости будем называть просто ошибкой), можно сформулировать интересующую нас математическую задачу, имеющую важное практическое значение: как сказываются на точности конечных результатов расчета, производимого по формулам, неизбежные ошибки в начальных данных?

Начнем с простого примера. Предположим, что вы хотите приобрести бревно и вас интересует его масса. В вашем распоряжении имеется мерная линейка, микрокалькулятор и формула $M = (\pi d^2/4) \cdot l \cdot \rho$. Вы измеряете длину бревна ($l = 1{,}85$ м) и оцениваете допускаемую при этом ошибку в ± 1 см (торцы бревна не строго перпендикулярны его оси). Затем вы предпринимаете попытку измерить диаметр бревна и получаете $d = 0{,}46$ м. Из-за того, что торцы не плоские и считывать деления мерной линейки вам приходится под углом, вы снова допускаете ошибку, составляющую по вашим оценкам ± 1 см. Наконец, вам необходимо знать плотность дерева ρ. Вы знаете, что дерево плавает в воде, поэтому $\rho \leqslant 1$ г/см^3. Предположим, что по вашей оценке плотность можно принять равной

$$\rho = (0{,}9 \pm 0{,}1) \text{ кг/дм}^3.$$

Число π вы полагаете равным 3,14 (совершая при этом пренебрежимо малую ошибку $\approx 0{,}05\%$). Вводя полученные величины в микрокалькулятор, получаете:

$$M = \frac{3{,}14}{4} 1{,}85 \cdot 4{,}6^2 \cdot 0{,}9 \text{ кг}.$$

При вычислении физических величин на микрокалькуляторе всегда выражайте однотипные величины в одних и тех же единицах.

На индикаторе микрокалькулятора загорится число 276,56649. Означает ли это, что массу бревна вам удалось оценить с точностью до сотых долей грамма? Нет, иллюзию «сверхточности» рождает большое число знаков после запятой. Желая оградить себя от довольно неприятного ощущения пальбы из пушек по воробьям, вы, естественно, хотели бы знать, до какого знака верен полученный результат, то есть сколько знаков после запятой разумно удерживать. Математики отвечают на ваш вопрос следующим правилом (1):

при умножении (или делении) величин, содержащих ошибку, относительная ошибка произведения (частного) равна сумме относительных ошибок сомножителей (делимого и делителя).

Применительно к нашему примеру это означает следующее. Выпишем все величины вместе с абсолютными и относительными ошибками (последние указаны в скобках):

$$l = 18{,}5 \pm 0{,}1 \text{ см } (0{,}5\%),$$

$$\rho = 0{,}9 \pm 0{,}1 \text{ кг/дм}^3 \ (11{,}1\%),$$

$$d = 4{,}6 \pm 0{,}1 \text{ дм } (2{,}2\%).$$

Поскольку $d^2 = d \cdot d$, то, согласно правилу (1), относительная ошибка, допущенная при вычислении квадрата диаметра d^2, равна удвоенной относительной ошибке, с которой измерен диаметр d. Следовательно, масса бревна (в силу того же правила (1)) вычислена вами с относительной ошибкой

$$\frac{\Delta M}{M} = 0{,}5\% + 11{,}1\% + 2 \cdot 2{,}2\% = 16\%,$$

что соответствует абсолютной ошибке

$$\Delta M = 0{,}16 \cdot M \approx 0{,}16 \cdot 227 \approx 44 \text{ кг}.$$

Следовательно, все знаки после запятой в вычисленном вами результате неверны:

$$M = (277 \pm 44) \text{ кг}.$$

Если вы хотите перевезти это бревно на собственной автомашине, то «на всякий случай» вам необходимо считать максимальную нагрузку равной 320 кг (массы).

Наиболее важные случаи распространения ошибок перечислены в следующей таблице. Показатель степени n может принимать произвольные значения. Если n — правильная дробь (следовательно, если из основания степени извлекается корень), то ошибка уменьшается.

Вычислительная операция	$f(x_1, x_2)$	Абсолютная ошибка Δf	Относительная ошибка $\frac{\Delta f}{f}$
Сложение	$x_1 + x_2$	$\Delta x_1 + \Delta x_2$	$\frac{\Delta x_1 + \Delta x_2}{\lvert x_1 + x_2 \rvert}$
Вычитание	$x_1 - x_2$	$\Delta x_1 + \Delta x_2$	$\frac{\Delta x_1 + \Delta x_2}{\lvert x_1 - x_2 \rvert}$
Умножение	$x_1 \cdot x_2$	$\Delta x_1 \cdot \lvert x_2 \rvert + \cdot \Delta x_2 \lvert x_1 \rvert$	$\frac{\Delta x_1}{\lvert x_1 \rvert} + \frac{\Delta x_2}{\lvert x_2 \rvert}$
Деление	$x_1 : x_2$	$\frac{\Delta x_1 \lvert x_2 \rvert + \Delta x_2 \lvert x_1 \rvert}{x_2^2}$	$\frac{\Delta x_1}{\lvert x_1 \rvert} + \frac{\Delta x_2}{\lvert x_2 \rvert}$
Возведение в степень	x^n	$\Delta x \cdot \lvert n \rvert \cdot \lvert x^{n-1} \rvert$	$\lvert n \rvert \cdot \frac{\Delta x}{\lvert x \rvert}$

Из этой таблицы нетрудно усмотреть правило (2):

при сложении (или вычитании) величин, содержащих ошибку, абсолютная ошибка их суммы (разности) равна сумме абсолютных ошибок слагаемых (уменьшаемого и вычитаемого).

При вычислении более сложных выражений надлежит комбинировать оба правила.

Предположим, что вы хотите вычислить площадь A_0 поверхности цилиндрической коробки, состоящей из верхней и нижней крышек (суммарной площадью A_1) и боковой поверхности (площадью A^2):

$$A_0 = 2\frac{\pi D^2}{4}.$$

Измерив диаметр D коробки, вы обнаружили, что $D = 5$ см ± 2 мм (относительная ошибка 4%), а при измерении высоты H получили $H = 10$ см ± 1 мм (относительная ошибка 1%).

Относительные ошибки первого и второго слагаемых вычисляем по правилу (1):

$$\frac{\Delta A_1}{A_1}=2\cdot\frac{\Delta D}{D}=8\%,$$

$$\frac{\Delta A_2}{A_2}=\frac{\Delta D}{D}+\frac{\Delta H}{H}=4\%+1\%=5\%.$$

Им соответствуют следующие абсолютные ошибки:

$$\Delta A_1=A_1\cdot 8\%=$$
$$=\frac{\pi D^2}{2}\cdot 0{,}08=\frac{\pi\cdot 25}{2}\cdot 0{,}08\approx 3\ \text{см}^2,$$
$$\Delta A_2=A_2\cdot 5\%=\pi DH\cdot 0{,}05=$$
$$=\pi\cdot 5\cdot 10\cdot 0{,}05\approx 8\ \text{см}^2.$$

Абсолютную ошибку полной поверхности находим по правилу (2):

$$\Delta A_0=\Delta A_1+\Delta A_2=11\ \text{см}^2,$$

что в свою очередь соответствует относительной ошибке

$$\frac{\Delta A_0}{A_0}=\frac{\Delta A_1+\Delta A_2}{A_1+A_2}=\frac{11}{39+157}=5{,}6\%.$$

СЛУЧАЙНЫЕ ЧИСЛА

Вам, без сомнения, знакомо утомительное ожидание в очередях у бензозаправочной колонки, на почте или у кассы в магазине. Предположим, что вам необходимо заправиться горючим, купить почтовые марки или приобрести пачку стирального порошка. Прежде всего вы прикидываете, у многих ли людей намерения совпадают с вашими: вам не хотелось бы тратить время на ожидание в очереди, вы предпочитаете, чтобы вас обслуживали без промедления. К своей радости, вы замечаете, что у бензозаправочной колонки (на почте или в магазине) особого оживления не наблюдается, и у вас в запасе имеется достаточно времени. Выйдя из своей автомашины, вы не спеша обходите вокруг нее и радуетесь, что она у вас есть. Потом задерживаетесь у газетного киоска, где приобретаете иллюстрированный журнал. С полок в торговом зале вы берете не только стиральный порошок, но и горчицу, и хлеб, и колбасу.

И тут вас ждет неприятная неожиданность: буквально за несколько минут у бензозаправочной колонки, перед окошком, где продают почтовые марки на почте, или у кассы в магазине образовалась длинная очередь. Вам не остается ничего другого, как, подавив раздражение, пристроиться в ее хвосте.

С проблемой очередей мы сталкиваемся в складском хозяйстве, уличном движении и даже в игре «Не сердись!» (известной также под названием «пахиси»).

Обычно очереди удается описать при помощи математических моделей. Важную роль при этом играет случай. Моделирование с использованием случайных величин получило название «метод Монте-Карло».

Если отвлечься от второстепенных деталей, то построение всех моделей основано на одном и том же принципе: факторы, определяющие временной ход описываемых моделью параметров, умножаются на «случайные числа». Проблема заключается в том, чтобы генерировать случайные числа, то есть такие числа, относительно которых достоверно известно лишь то, что их появление заведомо недостоверно. Мы можем попытаться «придумать» случайные числа. Однако все люди отдают предпочтение некоторым цифрам, например, 3, 5 и 7. Если же мы постараемся умышленно избегать этих цифр, то достигнем результата, противоположного ожидаемому: числа, не содержащие тех или иных цифр, также несут на себе отпечаток «избранности». Изменились лишь «симпатии»: вместо 5 мы выберем 4, вместо 3 — цифру 2. Потерпев неудачу, поручим генерировать случайные числа нашему микрокалькулятору.

В качестве исходного возьмем число π. Все цифры в нем распределены случайно. (На этом основан один из способов контроля правильности вычислений при получении большого числа знаков в десятичном разложении числа π: все цифры должны встречаться примерно с одинаковой частотой.)

К числу π прибавим число, меньшее единицы. Желательно, чтобы оно имело столько знаков, сколько «вмещает» наш микрокалькулятор. Разумеется, при выборе числа мы должны соблюдать полную беспристрастность и не избегать ни «предпочтительных», ни «антипредпочтительных» цифр. Полученную сумму ($\pi + 0, \ldots$) возведем в пятую степень. Перечисленные до сих пор действия сводятся к нажатию следующих клавиш:

$\boxed{\pi}$		
$\boxed{+}$		
$\boxed{0,785693}$		(число выбрано в качестве примера)
$\boxed{=}$		
3,927285654		(индикатор нашего микрокалькулятора содержит 10 разрядов)
$\boxed{=}$	x^2	(такое «непрерывное» умножение можно выполнять на большинстве, но не на всех микрокалькуляторах)
$\boxed{=}$	x^3	
$\boxed{=}$	x^4	
$\boxed{=}$	$x^5 = 934{,}2485956.$	

Поскольку нас интересуют лишь знаки после запятой, отбросим целую часть:

$\boxed{-}$

$\boxed{934}$

$\boxed{=}$

0,2485956

В нашем примере это было бы первое случайное число. Обычно при вычислениях по методу Монте-Карло требуется много случайных чисел. Чтобы найти следующее случайное число, выполним операцию

$$(\pi + 0{,}2485956)^5$$

(и получим 447,836074), после чего вычтем из результата целую часть.

Если у вашего микрокалькулятора имеется клавиша $\boxed{y^x}$, то при возведении в степень вы, разумеется, можете воспользоваться ею, но у многих микрокалькуляторов такой клавиши нет. Помните, что, нажимая вслед за клавишей $\boxed{\times}$ клавишу $\boxed{=}$ столько раз, сколько число x требуется умножить на себя, вы сэкономите много труда.

Не у всех микрокалькуляторов имеется 10 разрядов. Обычно микрокалькуляторы работают с 8 разрядами. При некоторых обстоятельствах 8 разрядов может оказаться недостаточно для того, чтобы генерировать случайные числа. Напомним, что наименьшее число, которое можно прибавить к π, равно 0, а наибольшее 0,999... . Как нетрудно проверить,

$$\pi^5 = 306{,}01968,$$

$$(\pi + 0{,}9999999)^2 = 1218{,}5317.$$

Чтобы «не расходовать» знаки на ненужную нам целую часть, из суммы $(\pi + 0, \ldots)$ желательно заранее вычесть число 2. Исправленное значение суммы будет заключено между

$$\pi + 0{,}00 \ldots - 2 = 1{,}1415926(5)$$

и

$$\pi + 0{,}9999999 - 2 = 1{,}1415925(5).$$

При возведении в пятую степень

$$(2{,}141 \ldots)^5 = 45{,}048905$$

мы всегда получим по крайней мере 6 знаков после запятой. Именно они и понадобятся нам во многих случаях.

При вычислениях по методу Монте-Карло часто применяются так называемые нормально распределенные случайные числа. Они могут быть как положительными, так и отрицательными, и имеют распределение вероятности, описываемое гауссовой кривой. Математики придумали несколько методов, позволяющих генерировать такие числа. Один из них состоит в следующем.

Выберем два равнораспределенных случайных числа x_1 и x_2 (каждое из которых меньше единицы) и вычислим

$$y_1 = \sqrt{-2\lg x_1} \cdot \cos(2\pi \cdot x_2)$$

и

$$y_2 = \sqrt{-2\lg x_2} \cdot \sin(2\pi \cdot x_2).$$

Величины y_1 и y_2 удовлетворяют всем условиям, которым могут удовлетворять нормально распределенные случайные числа.

Выберем в качестве примера полученные выше случайные числа $x_1 = 0{,}2485956$ и $x_2 = 0{,}836074$. Нормально распределенные случайные числа в этом случае оказываются следующими:

$$y_1 = \sqrt{(-2) \cdot \lg 0{,}2485956} \cdot 0{,}514838 = 0{,}566091$$

и

$$y_2 = \sqrt{(-2) \cdot \lg 0{,}2485956} \cdot (-0{,}857287) = -0{,}942631.$$

При вычислениях не забывайте о том, что x_2 входит в формулы для y_1 и y_2, как угол в радианах.

При другом методе генерирования нормально распределенных случайных чисел в качестве исходных выбирают 12 равнораспределенных случайных чисел $x_1, \ldots, x_{12}$, а нормально распределенное случайное число y находят по формуле:

$$y = x_1 + x_2 + \ldots + x_{12} - 6.$$

Даже приведенных примеров достаточно для того, чтобы понять: построить датчик нормально распределенных случайных чисел несравненно сложнее, чем генерировать равнораспределенные случайные числа, поскольку равнораспределенные числа служат как бы сырьем для получения нормально распределенных. Кроме того, при расчетах по методу Монте-Карло или оптимизации какой-нибудь технической системы возникает необходимость в весьма длинных сериях случайных чисел. Именно поэтому при вычислениях, связанных с использованием случайных чисел, большие ЭВМ обладают явными преимуществами по сравнению со своими «младшими братьями» — микрокалькуляторами.

СИСТЕМА ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ С ДВУМЯ НЕИЗВЕСТНЫМИ

В результате каких-то вычислений мы получили систему двух линейных уравнений с двумя неизвестными

$$ax + by = e,$$
$$cx + dy = f.$$

Обычно в таких случаях систему уравнений пытаются преобразовать так, чтобы при помощи тех или иных арифметических операций исключить одно из неизвестных.

Имея под рукой микрокалькулятор, нам проще решить эту систему уравнений по правилу Крамера:

$$x = \frac{ed - bf}{ad - bc},$$

$$y = \frac{af - ec}{ad - bc}.$$

Правые части обоих равенств мы найдем, вычислив соответствующие определители. При $ad - bc = 0$ решение либо вообще не существует, либо не однозначно.

Рассмотрим пример:

$$10x-6y=24,$$
$$4x+2y=15.$$

Без микрокалькулятора мы решили бы эту систему так:

$$\begin{array}{ll} 4x+2y=15 & \quad\quad\quad |\cdot 3 \\ 12x+6y=45 & \\ +\,10x-6y=24 & \\ \hline 22x \quad\quad =69 & \\ x \quad\quad =69:22=3{,}14 & \end{array}$$

Подставив найденное значение x в любое из исходных уравнений, получили бы $y=1{,}22$.

При помощи микрокалькулятора мы находим решение по правилу Крамера:

$$x=\frac{ad-bf}{ad-bc}=\frac{24\cdot 2-(-6)\cdot 15}{10\cdot 2-(-6)\cdot 4}=3{,}14$$

(не забывайте о знаках коэффициентов!),

$$y=\frac{af-ec}{ad-bc}=\frac{10\cdot 15-24\cdot 4}{10\cdot 2-(-6)\cdot 4}=1{,}23.$$

Поскольку значение $x=3{,}14$ мы вычислили лишь с двумя знаками после запятой, значения y, полученные традиционным способом исключения одной неизвестной и по правилу Крамера, расходятся во втором знаке после запятой (1,22 и 1,23).

СЛУЧАЙ И ЧАСТОТА

Если мы вздумаем бросать хорошо сделанную игральную кость, то при достаточно большом числе бросаний каждая из ее шести граней выпадет одинаковое число раз. Вероятность выпадения 1 очка (так же, как и вероятность выпадения 2 или 6 очков) равна $^1/_6$, то есть отношению числа благоприятных исходов (выпавших единиц) к общему числу возможных исходов (6 граней!).

В учебниках теории вероятностей утверждается, что чем больше бросков мы произведем, тем ближе к $^1/_6$ будет частота выпадения каждой из граней игральной кости. Если у кого-нибудь есть желание, он может произвести 100 и 1000 бросаний. Мы же лучше составим программу, которая позволит нам проверить правильность этого утверждения.

Проще всего взять цифры от 0 до 9. В предыдущем разделе мы показали, как можно генерировать случайные числа. Остается лишь подсчитать, сколько всего «выпадет» цифр и как часто будет встречаться какая-нибудь одна цифра (например, единица).

Вычисления существенно упрощаются, если микрокалькулятор позволяет, производя очередное суммирование, записывать текущее значение суммы в одном из регистров и использовать его в качестве слагаемого при выполнении следующего суммирования.

В наиболее усовершенствованных моделях микрокалькуляторов такое «нескончаемое» сложение можно производить нажатием клавиш $\boxed{\Sigma +}$ $\boxed{\text{STO} +}$ или $\boxed{\text{M} +}$.

Ход рассуждений лучше всего пояснить на примере. Вычислим величины lg 0,1; lg 1,1; . . . ; lg 9,1 и подсчитаем, сколько раз встречается в их записи какая-нибудь цифра (например, та же единица). Число единиц в записи каждого логарифма будем суммировать и хранить в одном регистре.

Если микрокалькулятор не позволяет производить суммирование непосредственно в регистре, то, вызвав его содержимое, необходимо прибавить к нему число единиц в записи очередного логарифма, а результат вновь записать в регистр.

«Стенограмма» наших вычислений выглядит следующим образом:

0,1

$\boxed{\lg}$

$-1{,}000\,000$ (в этом примере мы работаем с шестизначными логарифмами)

1,1

$\boxed{\lg}$

0,041339 (единица встречается 1 раз, и в регистр требуется заслать число 1)

1

$\boxed{\mathrm{M}}$ (заслали!)

2,1

$\boxed{\lg}$

0,322219 (единица встречается 1 раз)

1

$\boxed{+}$

$\boxed{\mathrm{M}}$

$\boxed{=}$

2

$\boxed{\mathrm{M}}$ (две единицы записаны в регистр)

и т.д.

Дойдя до $\lg 9{,}1$, мы успеем проверить все знаки, стоящие после запятой в записи 10 шестизначных логарифмов, то есть всего просмотрим 60 цифр. Сумма, накопившаяся в регистре, показывает, сколь часто встречается среди этих 60 цифр единица (или любая другая цифра). Наступает пора вычислить частоту. Она совпадает с идеальной:

$$\frac{6}{60} = 0{,}1.$$

Но еще при подсчете единиц мы замечаем, что отсутствие единиц в десятичной записи чисел $\lg 9{,}1$ или $\lg 6{,}1$ — не более чем «игра случая». Если бы мы оборвали подсчет единиц, дойдя лишь до $\lg 6{,}1$, то получили бы частоту, которая на 10% отклонялась бы от идеальной.

Возможно, кому-нибудь из читателей захочется набрать более богатую статистику, начав с $\ln 0{,}5$, $0{,}5$ или с $(\lg 0{,}5)^2$.

ИНТЕРПОЛЯЦИЯ

Еще сравнительно недавно, чтобы вычислить значения тригонометрических функций, логарифмов или извлечь корень, школьнику приходилось изрядно повозиться с таблицами. Нужно было знать, как «войти в таблицу» и как «выйти из нее», а если нужное значение аргумента не совпадало с табличным, то не оставалось ничего другого, как интерполировать. Для этого существовали соответствующие формулы, в ко-

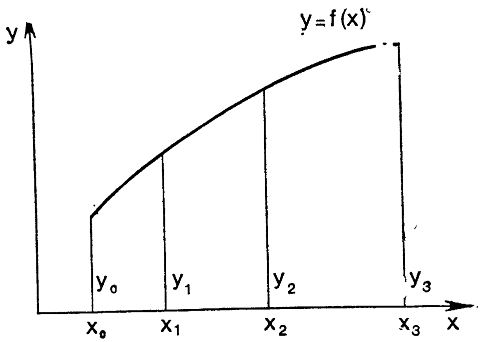


Рис. 21. Интерполяция. Разбиение отрезка на n частей приводит к интерполяции по $n+1$ точкам.

торые входили такие величины, как «наш шаг» и «табличный шаг». На успех мог рассчитывать лишь тот, кто полностью освоил эту технику.

Быстрое развитие микрокалькуляторов оттеснило на задний план математические таблицы, но интерполяционные методы по-прежнему сохранили свое значение. Речь идет о следующем. Значения функции от y_0 до y_n известны в $n+1$ точках $x_0, x_1, \ldots, x_n$. Требуется аппроксимировать ее многочленом (то есть суммой конечного числа степеней x от n-й до нулевой), значения которого в указанных $n+1$ опорных точках совпадают с заданными значениями функции, а между точками x_i дают как можно лучшее приближение функции (рис. 21).

В школе нас познакомили с линейной интерполяцией, то есть научили проводить прямую между точками (x_0, y_0) и (x_1, y_1) и промежуточные значения аппроксимируемой функции заменять значениями линейной функции (рис. 22).

Для практических целей в большинстве случаев (если функция, заданная своим аналитическим выражением или численно, ведет себя «не слишком плохо») вполне достаточно кубической интерполяции

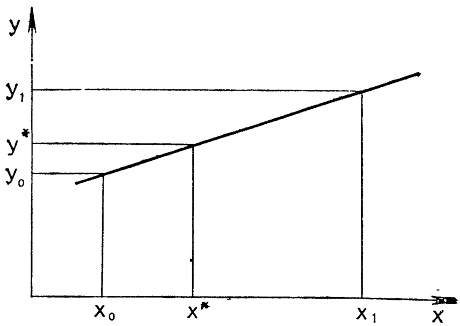


Рис. 22. Линейная интерполяция между точками (x_0, y_0) и (x_1, y_1).

(многочленом 3-й степени) по четырем опорным точкам. Ход вычислений становится особенно прозрачным, если интерполяцию производить по равноотстоящим точкам (с шагом h между опорными значениями x).

Одну из наиболее надежных интерполяционных формул предложил Исаак Ньютон (1643—1727). С точностью до членов третьего порядка она имеет вид

$$y(x) = c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)(x - x_1) + \\ + c_3(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)$$

с $x_1 = x_0 + h$, $x_2 = x_0 + 2h$ и следующими коэффициентами:

$$c_0 = y_0, \qquad c_2 = \frac{\Delta^2 y_0}{2h^2},$$

$$c_1 = \frac{\Delta y_0}{h}, \qquad c_3 = \frac{\Delta^3 y_0}{6h^3}.$$

Символ Δ^n (Δ читается: дельта) — принятое во всем мире обозначение разностей n-го порядка. Вычисляются разности по схеме:

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
x_0	y_0			
		Δy_0		
x_1	y_1		$\Delta^2 y_0$	
		Δy_1		$\Delta^3 y_0$
x_2	y_2		$\Delta^2 y_1$	
		Δy_2		
x_3	y_3			

Каждое значение в столбце (начиная со второго) получается как разность двух значений, стоящих в предыдущем столбце на «полстроки» выше и ниже.

Поясним вычисление ньютоновского интерполяционного многочлена на примере. Предположим, что заданы значения независимой переменной

$$x_0 = 15, \ x_1 = 30, \ x_2 = 45, \ x_3 = 60$$

и соответствующие значения аппроксимируемой функции

$$y_0 = 0{,}2588, \ y_1 = 0{,}5, \ y_2 = 0{,}7071, \ y_3 = 0{,}8660.$$

Шаг интерполяции h равен 15.

Разности получаем по следующей схеме:

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
15	0,258819			
		0,241181		
30	0,500000		—0,034074	
		0,207107		—0,014115
45	0,707107		—0,048189	
		0,158918		
60	0,866025			

По найденным значениям разностей вычисляем коэффициент интерполяционого многочлена:

$$c_0 = 0{,}258819,$$

$$c_1 = \frac{0{,}241181}{15} = -0{,}0160787,$$

$$c_2 = \frac{-0{,}0341}{2 \cdot 15^2} = -0{,}0000757,$$

$$c_3 = \frac{-0{,}0141}{6 \cdot 15^2} = -0{,}0000006.$$

Следовательно, интерполяционный многочлен можно представить в виде

$$y = 0{,}258819 + 0{,}0160787\,(x - 15) - \\ - 0{,}0000757\,(x - 15)(x - 30) - \\ - 0{,}0000006\,(x - 15)(x - 30)(x - 45).$$

Внимательный и достаточно искушенный в математике читатель, должно быть, заметил, что в нашем примере мы аппроксимировали кубическим многочленом отрезок синусоиды от 15° до 60°. Разумеется, после того, как интерполяционный многочлен записан в каноническом виде, можно раскрыть все скобки, привести подобные члены и упорядочить их по степеням x. Процедура эта довольно громоздка, и если интерполяционный многочлен необходим для вычисления промежуточных значений функции, то удобнее использовать его канонический вид.

Поскольку при последующей интерполяции очень маленькие числа приходится умножать на очень большие, необходимо удерживать сравнительно много знаков после запятой. Вычислим, например, промежуточное значение функции при $x = 20$:

$$y = 0{,}258819 + 0{,}0160787 \cdot 5 - \\ - 0{,}0000757 \cdot 5 \cdot (-10) - \\ - 0{,}0000006 \cdot 5 \cdot (-10) \cdot (-25) = \\ = 0{,}258819 + 0{,}0803935 + 0{,}003785 - 0{,}00075 = \\ = 0{,}3422475.$$

Более точное значение: $\sin 20° = 0{,}342020143$. Погрешность Δf составляет около $2 \cdot 10^{-4}$, относительная ошибка: $\Delta f/f \approx 0{,}0006 = 0{,}06\%$.

Если бы мы, как в школьные времена, произвели линейную интерполяцию, то промежуточное значение y^* в точке x^* удовлетворяло бы соотношению

$$\frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{y^* - y_0}{x^* - x_0},$$

откуда

$$y^* = (x^* - x_0)\left(\frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}\right) + y_0.$$

При x^* мы получили бы

$$y^* = (20 - 15) \cdot \frac{0{,}5 - 0{,}258819}{30 - 15} + 0{,}258819 = 0{,}3392126.$$

Отклонение Δf от истинного значения составило бы $3 \cdot 10^{-3}$, что соответствовало бы относительной ошибке $3 \cdot 10^{-3}/0{,}34 \approx 1\%$. Для «домашнего потребления» такая точность вполне пригодна.

Вычислять при помощи интерполирующего многочлена значения аппроксимируемой функции вне области, в которой выбраны опорные точки, допустимо далеко не всегда, поскольку отклонения от истинных значений в некоторых случаях могут быть весьма большими.

МИКРОКАЛЬКУЛЯТОР И НАВИГАЦИЯ

Этот раздел мы предназначаем судоводителям, бороздящим морские просторы на больших и в особенности на малых судах: в нем излагается новый метод определения места, ставший возможным лишь с появлением микрокалькулятора.

Тем из наших читателей, чьи интересы далеки от проблем навигации, мы также настоятельно рекомендуем ознакомиться с предлагаемым методом определения места. Это позволит им получить представление о совершенно новых возможностях, связанных с использованием микрокалькулятора.

В полдень Солнце как бы застывает на несколько минут на небосводе, то есть не поднимается к зениту и не опускается к горизонту. Именно эта полуденная «остановка» нашего дневного светила не позволяет морякам устанавливать с точностью до секунды тот момент, когда Солнце достигает наибольшей высоты над горизонтом, то есть момент наступления полдня (12^h) по местному времени.

Определить, когда наступает полдень, позволяет следующий метод, использующий симметрию видимого движения Солнца и состоящий в следующем. За некоторое время до наступления полдня измеряют («берут») высоту Солнца и ждут, когда Солнце, опускаясь к горизонту, не достигнет той же высоты вторично. Время каждой обсервации фиксируют с высокой точностью. В силу симметрии момент, когда Солнце достигает наибольшей высоты, приходится на середину промежутка времени, отделяющего второе измерение высоты от первого. Зная, когда наступает полдень, мы можем определить географическую долготу места.

Недостаток этого метода заключается в том, что за промежуток времени (продолжительностью от 30 до 60 мин), отделяющий первое измерение высоты Солнца от второго, судно успевает переместиться на довольно значительное расстояние, что приводит к ощутимой ошибке в определении места. Чтобы уменьшить ее, поступим иначе: в момент наступления полдня (устанавливаемый по широте) измерим высоту Солнца, затем через 10—15 мин снова «возьмем» высоту Солнца и одновременно по хронометру засечем точное время измерения, после чего по полученным данным определим местный часовой угол (МЧУ). Для вычисления МЧУ воспользуемся следующей формулой:

$$\cos \text{МЧУ} = \frac{\sin h - \sin \delta \cdot \sin \varphi}{\cos \delta \cdot \cos \varphi}.$$

Чтобы найти МЧУ, достаточно обратиться к соответствующим таблицам, однако, как показывает опыт, большинство мореплавателей испытывают чувство страха перед громоздкими вычислениями. Если же в их распоряжении имеется микрокалькулятор, позволяющий находить значения тригонометрических функций простым нажатием клавиши, то решение навигационной задачи становится делом считанных секунд.

Пусть, например, 12 июня 1976 г. наше судно находится где-то в окрестности точки с географическими координатами $\varphi = 55°30'$ северной широты и $\lambda = 20°$ восточной долготы. Требуется определить точное местонахождение судна.

1. Поскольку Солнце достигает наибольшей высоты в 11^h40^m по среднеевропейскому времени, то, взяв высоту Солнца точно в полдень, наш мореплава-

тель узнает величину h, а введя поправку $(-13')$, получит величину $\mathrm{h}_b = 57°41'$.

2. Затем он вычислит северную широту

$$\varphi = 90° + \delta - h_b = 55°29'.$$

Величину склонения $\delta = 23°10'$ северной широты (на 11^h40^m по среднеевропейскому, или, что то же, на 10^h40^m по гринвичскому времени) он возьмет из астрономического ежегодника. Для последующих вычислений важно, чтобы склонение δ было определено для Солнца в момент прохождения через меридиан.

3. Минут через 20 — ровно в $12^h00^m01^s$ по среднеевропейскому времени — наш моряк вторично возьмет высоту Солнца и после введения поправки получит $h_b = 57°28'$.

4. По $h_b = 57°28'$, $\delta = 23°10'$ северной широты и $\varphi = 55°29'$ северной широты он при помощи микрокалькулятора вычислит местный часовой угол

$$\text{МЧУ} = \arccos \frac{\sin h - \sin \delta \cdot \sin \varphi}{\cos \delta \cdot \cos \varphi} = 5°\,03'\,27''.$$

На этот раз необходимо производить вычисления с максимальной точностью, на которую способен микрокалькулятор.

5. По МЧУ мореплаватель устанавливает разницу во времени прохождения Солнца через гринвичский меридиан и меридиан места:

$$\begin{array}{cr} 5° & 20^m \\ 3' & 12^s \\ 27'' & 2^s \\ \hline & 20^m\ 14^s \end{array}$$

Поскольку вторично высота Солнца была взята в $12^h00^m01^s$ по среднеевропейскому времени, то через гринвичский меридиан Солнце прошло в

$$\begin{array}{r} 12^h\,00^m\,01^s \\ - \\ 00^h\,20^m\,14^s \\ \hline 11^h\,39^m\,47^s \end{array}$$

по среднеевропейскому времени, или в $10^h39^m47^s$ по гринвичскому времени.

6. Заглянув в астрономический ежегодник, мы узнаем, что в $12^h00^m00^s$ по гринвичскому времени местный часовой угол Гринвича составляет 03′. Это означает, что в действительности полдень наступает в Гринвиче на 12^s раньше, то есть в $11^h49^m48^s$ по гринвичскому времени.

7. Вычислим теперь разницу во времени между прохождением Солнца через гринвичский меридиан и меридиан места:

$$\begin{array}{r} -\;11^h59^m48^s \\ 10^h39^m47^s \\ \hline 01^h20^m01^s \end{array}$$

8. Теперь уже не составляет труда вычислить долготу места:

$$\begin{array}{lr} 1^h & 15^\circ \\ 20^m & 5^\circ \\ 1^s & 00'\,15'' \\ \hline & 20^\circ\,00'\,15'' \end{array}$$

$\lambda = 20^\circ 00' 15''$ восточной долготы.

Преимущество нового метода. Чтобы определить место по новому методу, необходимо произвести лишь два измерения с интервалом около 20 мин. Разумеется, при желании число измерений можно увеличить: вряд ли кого-нибудь смутит, что на клавиши придется нажать большее число раз. Высоту Солнца не обязательно брать после полудня: измерения высоты можно производить и до прохождения Солнца через меридиан.

Поскольку разница во времени прохождения Солнца через гринвичский меридиан и меридиан места невелика, то и ошибка в определении долготы новым методом меньше, чем ошибка, даваемая традиционным методом.

Недостаток метода. Погрешность в определении долготы носит «односторонний характер», поскольку дополнительные измерения высоты производятся лишь до момента кульминации, либо после него. Это приводит к необходимости критически оценивать величину долготы, прежде чем наносить место судна на карту.

КОЭФФИЦИЕНТЫ ПЕРЕВОДА

В практических расчетах часто приходится сталкиваться с переходом из одной системы единиц в другую. Например, вы хотите знать, какую мощность развивает двигатель автомашины в киловаттах, а в рекламном проспекте мощность выражена в лошадиных силах. Пересчитать л. с. в кВт, имея под рукой микрокалькулятор, совсем нетрудно, если помнить коэффициент перевода.

Потребность в пересчете различных величин стала еще настоятельней с введением Международной системы единиц (СИ). В основу ее положены следующие семь единиц:

Физическая величина	Единица	Обозначение
Длина	метр	м
Масса	килограмм	кг
Время	секунда	с
Сила тока	ампер	А
Температура	кельвин	К
Количество вещества	моль	моль
Сила света	кандела	кд

Перечислим наиболее важные коэффициенты перевода:

Сила:

$$1\ \text{Н} = 1\ \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}^2} = 1\ \frac{\text{Дж}}{\text{м}}$$

$$1\ \text{кгс} = 9{,}80665\ \text{Н}$$

Работа и энергия:

$$1\ \text{Нм} = 1\ \text{Вт}\cdot\text{с} = 1\ \text{Дж}$$

$$3{,}6\cdot 10^6\ \text{Дж} = 1\ \text{кВт}\cdot\text{ч}$$

$$278\cdot 10^{-9}\text{кВт}\cdot\text{ч} = 1\ \text{Вт}\cdot\text{с}$$

Мощность:

$$1\ \text{Вт} = 1\ \text{Дж/с}$$

$$1\ \text{л. с} = 735{,}499\ \text{Вт}$$

Давление:

$$1\ \text{Н/м}^2 = 1\ \text{Па} = 10^{-5}\ \text{бар}$$

В будущем мы будем мыслить не «в калориях», а «в джоулях». Может быть, некоторым из нас покажется успокоительной мысль (впрочем, все иллюзии вскоре рассеются) о том, что в день вместо 2000 ккал можно съедать 8380 кДж.

Иногда приходится пересчитывать величины, выраженные в устаревших единицах, например, в фунтах на квадратный дюйм или в лошадиных силах. В таких случаях полезно иметь в виду следующие соотношения:

1 л. с.	$= 735{,}5$ Вт
1 английский фунт	$= 453{,}59$ г
1 унция	$= 28{,}35$ г
1 дюйм	$= 2{,}54$ см
1 квадратный дюйм	$= 6{,}45$ см^2
n°С в К	$= n + 273{,}15$
n градусов по Фаренгейту в К	$= (n + 459{,}67) : 1{,}8$
n градусов по Фаренгейту в °С	$= (n - 32)\cdot 5{,}9$

УПРАВЛЕНИЕ МЕТАЛЛООБРАБАТЫВАЮЩИМИ СТАНКАМИ

В последнее время в технике возникло новое направление — управление металлообрабатывающими станками при помощи модулей микрокалькуляторов (микропроцессоров). До сих пор управление станками осуществлялось главным образом при помощи носителей информации (перфолент или магнитных лент) с записью команд, которые подавались для выполнения определенных рабочих операций. Современные микрокалькуляторы обладают «памятью», которая позволяет использовать металлообрабатывающие станки более эффективно.

В простейшем случае «память» нашего микрокалькулятора реализуется в виде регистра. Заданное число хранится в нем до тех пор, пока оно не понадобится нам и мы не обратимся к регистру.

Микрокалькуляторы с запоминающими устройствами на полупроводниковых элементах типа МОП (металл — оксид — проводник) продолжают хранить наши команды, даже если их выключить: аккумулятор питает микропроцессоры после выключения совсем слабым током, позволяющим удерживать заданные команды в «памяти». Даже полное выключение микрокалькулятора на непродолжительное время не может стереть данные, введенные в «память» микрокалькулятора.

Невольно напрашивается мысль использовать микрокалькуляторы, построенные на этом принципе для хранения не только чисел, но и таких наиболее употребительных команд, как «:», «+» или «если верно, что $x > 0$». Вычисления на таких микрокалькуляторах легко поддаются программированию. Именно их и используют для управления металлообрабатывающими станками. Импульсы тока вместо того, чтобы зажигать цифры 3 или 8 на индикаторе, вынуждают станок переместить рабочий орган на 3 или 8 позиций в определенном направлении.

Поясним сказанное на примере. Предположим, что станок предназначен для вырезания из заготовки кругов произвольных размеров. Его «микрокалькулятор» запрограммирован так, что заставляет кромку резца двигаться по окружности.

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

Величину радиуса r рабочий задает каждый раз перед вырезанием очередного круга.

В бесскобочной записи программа для микрокалькулятора выглядит следующим образом:

1. STO 0
2. STO 1
3. RCL 0
4. x^2
5. RCL 1 $= x$; иногда STOP и вывод результата на индикатор
6. x^2
7. —
8. $\sqrt{x} = y$: иногда STOP и вывод результата на индикатор
9. x
11. STO 1
12. GTO 03

Рабочий лишь вводит значение r в x-регистр и нажимает кнопку «Старт».

Даже простейший микрокалькулятор позволяет моделировать управление металлообрабатывающим станком. Вот как это делается. Подставив в уравнение окружности $x = r$, мы получим $y = 0$. Запишем в регистр величину шага, на который всякий раз будет возрастать или уменьшаться значение x. Пусть шаг равен, например, 0,1. Вычисления производятся в следующем порядке.

Клавиша	Показание индикатора
$\boxed{5}$	5
$\boxed{x^2}$	25
$\boxed{-}$	25
$\boxed{5}$	5
$\boxed{x^2}$	25
$\boxed{=}$	0

Затем начинаются вычисления со значением x, уменьшенным на 0,1:

Клавиша	Показание индикатора
$\boxed{25}$	25 Величина $r^2 = 25$ остается постоянной
$\boxed{-}$	25
$\boxed{(}$	0
$\boxed{5}$	5
$\boxed{-}$	5
$\boxed{0,1}$	0,1
$\boxed{=}$	4,9
$\boxed{x^2}$	24,01
$\boxed{)}$	24,01
$\boxed{=}$	0,99
$\boxed{\sqrt{x}}$	0,99

и т. д.

Сравнение моделируемого управления с работой программированного микрокалькулятора обнаруживает лишь одно различие (если не считать различий в записи): изменение значений x с шагом $\pm 0,1$ в программе происходит автоматически и числа не приходится вводить каждый раз с клавиатуры.

Новый тип автоматического управления металлообрабатывающими станками обладает одной весьма важной особенностью: программирование происходит не в конструкторском бюро и не в институте, разрабатывающем математическое обеспечение вычислительных машин, а непосредственно в цехе. Затраты на «программное управление при помощи микрокалькуляторов» ничтожны по сравнению с затратами на традиционное программное управление.

НЕПРЕРЫВНЫЕ ДРОБИ

Разделив одно целое число на другое так, как нас учили в школе, мы получим десятичную дробь (быть может, с ненулевой целой частью). В общем случае рациональное число — отношение двух целых чисел — выражается бесконечной периодической (то есть состоящей из повторяющихся наборов цифр — периодов) дробью. Длины периодов и номера знаков после запятой, с которых начинается периодическая часть, у различных дробей, вообще говоря, не совпадают. Период дроби принято указывать в скобках, например:

$$\frac{23}{18} = 1{,}2(7)\ \ldots.$$

Но бесконечные периодические дроби отнюдь не исчерпывают все возможные представления рациональных («разумных») чисел при помощи бесконечного набора целых чисел. Рациональные числа можно разложить, например, в непрерывную дробь.

Теоретические основы такого разложения были заложены в трудах знаменитого математика Леонарда Эйлера (1707—1783).

Конечная непрерывная, или цепная, дробь n-го порядка имеет вид

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \ldots \atop \ldots + \cfrac{1}{a_n}}}}.$$

Ее принято обозначать символом

$$[a_0;\ a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n].$$

Разлагая рациональное число $^{23}/_{18}$ в непрерывную дробь, мы получим следующие промежуточные результаты:

$$\frac{23}{18} = 1 + \frac{5}{18},$$

$$\frac{5}{18} = \frac{1}{18/5} = \frac{1}{3 + 3/5},$$

$$\frac{3}{5} = \frac{1}{5/3} = \frac{1}{1 + 2/3},$$

$$\frac{2}{3} = \frac{1}{3/2} = \frac{1}{1 + 1/2}.$$

Следовательно, рациональное число $^{23}/_{18}$ представимо в виде конечной непрерывной дроби

$$\frac{23}{18}=1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2}}}},$$

или сокращенно в виде символа

$$\frac{23}{18}=[1;\ 3,\ 1,\ 1,\ 2].$$

Если вы захотите проверить правильность полученного разложения при помощи микрокалькулятора, то вам понадобится клавиша для вычисления обратных величин.

Стоит хотя бы немного «пошевелить» числитель или знаменатель заданной дроби, как разложение изменяется до неузнаваемости. Сравните разложение в непрерывную дробь числа $^{23}/_{18}$ с разложением

$$\frac{24}{19}=1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4}}}=[1;\ 3,\ 1,\ 4].$$

Заметим, что рациональное число $^{24}/_{19}$ представимо в виде бесконечной периодической десятичной дроби

$$\frac{24}{19}=1\,(263157894736842105)\ldots.$$

Даже микрокалькулятор с большим числом разрядов не способен «вместить» столь длинный период на своем индикаторе.

Набрав рациональное число 24 : 19 и сравнив число на индикаторе вашего микрокалькулятора с приведенным выше десятичным разложением того же числа, вы сможете выяснить, округляет ли ваш микрокалькулятор (с 6-, 8- или 10-разрядным индикатором) последнюю цифру.

Мы уже упоминали о том, что любое рациональное число представимо в виде конечной непрерывной дроби. А как обстоит дело с иррациональными («неразумными») числами? Математики установили, что любое иррациональное число представимо в виде бесконечной непрерывной дроби. В бесконечном наборе фигурирующих в разложении целых чисел можно обнаружить и периодичность, и другие закономерности. В этом нас убеждают следующие примеры.

Начнем с иррационального числа $\sqrt{2}$. Существует вполне определенный алгоритм, позволяющий разлагать корни в непрерывные дроби. Изложение этого метода несколько громоздко, и мы избавим и вас, и себя от него, приведя лишь окончательный результат:

$$\sqrt{2}=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\ldots}}}=[1;\ 2,\ 2,\ 2,\ \ldots].$$

Не следует думать, будто разложение $\sqrt{3}$, в непрерывную дробь отличается от разложения $\sqrt{2}$ лишь тем, что «двойки» заменены «тройками».

Если вы захотите воспользоваться непрерывной дробью для вычисления $\sqrt{2}$, то начинать лучше всего «снизу», причем вводить следует число $1/2$. Затем вы должны поочередно нажимать клавиши $\boxed{+}$, $\boxed{2}$ и $\boxed{1/x}$. Сколь глубоко расположен «этаж», с которого удобно начинать вычисления, зависит от точности. Каждый из трех шагов доставляет примерно один знак после запятой. Закончив вычисление, прибавьте к полученному результату единицу.

Менее привлекательно выглядит разложение в непрерывную дробь числа $\sqrt{31}$, однако оно обладает периодичностью (период отмечен чертой сверху):

$$\sqrt{31}=[5;\ 1,\ \overline{1,\ 1,\ 3,\ 5,\ 3,\ 1,\ 1,\ 10},\ \ldots].$$

Встречающееся во многих математических соотношениях число Эйлера е (основание натуральных логарифмов) допускает разложение в непрерывную дробь, обладающее высокой правильностью, но отличающееся от канонического разложения (числители дробей отличны от единицы) и поэтому не представимое в виде символа:

$$e = 2 + \cfrac{2}{2 + \cfrac{3}{3 + \cfrac{4}{4 + \cfrac{5}{5 + \dots}}}}.$$

Должно быть, вы уже догадались, что особенно интересное разложение в непрерывную дробь допускает еще более знаменитое число π. Это разложение было найдено лордом-канцлером и хранителем печати Браункером (1620—1684), страстным любителем математики:

$$\frac{\pi}{4} = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{9}{2 + \cfrac{25}{2 + \cfrac{49}{2 + \cfrac{81}{2 + \dots}}}}}}.$$

Помимо двоек оно содержит только квадраты нечетных чисел.

Если эта непрерывная дробь покажется вам не слишком удобной для вычисления приближенных значений числа π, то можно воспользоваться представлением π в виде бесконечного произведения:

$$\frac{\pi}{4} = \frac{8}{9} \cdot \frac{24}{25} \cdot \frac{48}{49} \cdot \frac{80}{81} \dots,$$

где в знаменателях стоят квадраты нечетных чисел, начиная с 3, а числитель каждого множителя на единицу меньше знаменателя.

Творческая фантазия в математике не знает границ.

Литература

Asche W. Schwung für den Minirechner. — Bild der Wissenschaft Bd. 13 (1976), Nr. 5, S. 136 bis 142.

Фильчаков П. Ф. Численные и графические методы прикладной математики. Справочник. — Киев: Наукова думка, 1970.

Kleine Enzyklopädie/Mathematik. — Leipzig: VEB Bibliographisches Institut, 1967.

Кордемский Б. А. Математическая смекалка. — М.: Наука, 1965.

Kreul H. Was kann mein elektronischer Taschenrechner? — Leipzig: VEB Fachbuchverlag, 1978.

Содержание

В. Гильде, З. Альтрихтер

С МИКРОКАЛЬКУЛЯТОРОМ
В РУКАХ

Ст. научный редактор А. Г. Белевцева
Мл. научный редактор Л. И. Леонова
Художник В. Стуликов
Художественный редактор Л. Е. Безрученков
Технические редакторы М. П. Грибова, Е. С. Потапенкова
Корректор Т. И. Стифеева

ИБ № 2579

Сдано в набор 05.02.80. Подписано к печати 21.07.80. Формат $84\times108^{1}/_{32}$. Бумага типографская № 2. Гарнитура латинская. Печать высокая. Объем 3,50 бум. л. Усл. печ. л. 11,76. Уч.-изд. л. 9,07. Тираж 75.000 экз. Зак. 588. Цена 50 коп.

Издательство «Мир»
129820, Москва, И-110, ГСП
1-й Рижский пер., 2

Ленинградская типография № 2 головное предприятие ордена Трудового Красного Знамени Ленинградского объединения «Техническая книга» им. Евгении Соколовой Союзполиграфпрома при Государственном комитете СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. 198052, г. Ленинград, Л-52, Измайловский проспект, 29.

50 коп.

Эта книга — не руководство по методам вычислений, не сборник алгоритмов и не учебник программирования для микрокалькуляторов. Ее содержание составляет набор решаемых при помощи микрокалькуляторов задач на самые различные темы. Каждая задача — своеобразная законченная миниатюра со своей завязкой, сюжетом, кульминацией и развязкой, а вся серия задач дает достаточно полное представление о широте вычислительных возможностей современных микрокалькуляторов. Разнообразный выбор задач, ясность и четкость рекомендаций относительно алгоритмов вычислений, предпочтительных в той или иной ситуации, богатство фактического материала делают книгу не только интересной, но и полезной для приобретения первоначальных навыков в обращении с микрокалькуляторами и стимулируют более углубленное изучение приемов и методов счета с их использованием.