

А.Е.ШЕЛЕСТ

# Микро- калькуляторы в физике



А. Е. ШЕЛЕСТ

# МИКРО- КАЛЬКУЛЯТОРЫ В ФИЗИКЕ

СПРАВОЧНОЕ ПОСОБИЕ



МОСКВА «НАУКА»  
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ  
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ  
1988

ББК 22.18

Ш 42

УДК 519.85 (03)

Шелест А. Е. Микрокалькуляторы в физике. — М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1988. — 272 с. — ISBN 5-02-013793-6.

Содержит справочный материал по программированию на программируемых микрокалькуляторах применительно к решению исследовательских задач. Приводятся численные методы обработки результатов экспериментов, удобные при программировании на микроЭВМ. Книга содержит сведения о том, как реализовать имеющиеся возможности микрокалькуляторов с максимальной отдачей для пользователя. Даются интересные практические советы и рекомендации. Имеется обширная библиотека программ для решения исследовательских задач.

Для инженеров, преподавателей, студентов вузов, учащихся техникумов.  
Табл. 30. Ил. 62. Библиогр. 29 назв.

Рецензент  
доктор технических наук В. П. Дьяконов

Ш 1702070000—190  
053 (02)-88 62-88

ISBN 5-02-013793-6

© Издательство «Наука»,  
Главная редакция  
физико-математической  
литературы, 1988

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Решая численными методами уравнения при конкретных значениях параметров, когда результат невозможno получить в аналитическом виде, тем самым моделируя поведение реального физического объекта, часто представляется возможным не только описывать, но и предсказывать новые явления. Уже не раз в науке бывало так, что при правильно выбранном алгоритме «странный» пик функции, полученный на ЭВМ, оказывался не ошибкой вычислений, а неизвестным ранее физическим эффектом. Именно этим и вызван большой интерес специалистов-физиков к численным методам с применением ЭВМ.

А между тем множество физических задач, с которыми приходится сталкиваться повседневно, приводят к решению уравнений невысокой степени сложности, которые решать на обычном микрокалькуляторе долго и утомительно, а привлечение огромных мощностей ЭВМ является нерациональным, поскольку отнимает дорогостоящее машинное время для решения тех задач, которые действительно в нем очень нуждаются. Экономия драгоценное время больших ЭВМ, освобождая человека от тяжкого бремени сравнительно небольших по объему ручных вычислений, будучи малыми по размеру и удобными в обращении, программируемые микрокалькуляторы позволяют выполнять вычисления по заданной программе прямо за рабочим столом исследователя. По легкости доступа к информации, простоте отладки, надежности в работе в самых неприхотливых условиях они значительно превосходят даже персональные компьютеры.

Данная книга содержит сведения о том, как реализовать все имеющиеся возможности программируемых микрокалькуляторов «Электроника Б3-34», «Электроника МК-54», «Электроника МК-61», «Электроника МК-52» с максимальной отдачей для пользователя. Приведено большое количество рабочих программ, проверенных и удобных в эксплуатации. Ведь конечная цель программирования — максимально облегчить труд исследователя при проведении вычислений, а не сократить любой ценой количество операторов программы.

Описание работы каждой программы сопровождается комментариями, с помощью которых читатель, разобравшись в структуре программы, смог бы при необходимости изменить ее в нужном направлении, поскольку приведенные программы достаточно читабельны.

Многие пользователи относятся к программам, как к некоторому «черному ящику», совершенно не заглядывая во внутрь. Дело в том, что большинство численных методов счета стандартно и такое отношение к ним себя оправдывает. Но так бывает не всегда. К примеру, интегрируя степенную функцию методом Симпсона с некоторой погрешностью, пользователь забывает, что он мог бы методом Гаусса гораздо

быстрее получить точное значение интеграла. В связи с этим представилось необходимым более детально остановиться на качественных сторонах численных методов, чтобы читатель использовал наиболее подходящие для него программы. Приводятся данные об субтабулировании разреженных таблиц для быстрого получения высокой точности вычисляемых значений функций; о некоторых численных методах, недостаточно освещенных ранее, но очень удобных при работе на программируемых микрокалькуляторах. Материал книги не ограничен проблемами составления и описания программ, а предполагает решение более общей задачи: как использовать микрокалькуляторы квалифицированным образом. Насколько это удалось — судить читателю.

Хотя книга предназначена для научных работников, преподавателей и студентов физико-математических специальностей, она может оказаться полезной всем тем, кто имеет дело с точными математическими расчетами.

Автор выражает искреннюю благодарность доценту Брацыхину Владимиру Михайловичу, профессору Дьяконову Владимиру Павловичу, редактору Калининой Нине Евгеньевне за ценные предложения, пожелания, критические замечания, во многом способствовавшие улучшению содержания книги. Автор очень благодарен также всем тем, кто проявил чуткость и внимание по отношению к нему и его рукописи.

# Глава 1

## ОСНОВЫ РАБОТЫ С МИКРОКАЛЬКУЛЯТОРОМ

### 1. Общие сведения о микрокалькуляторах

Отечественная промышленность выпускает достаточно много различных видов микрокалькуляторов. По назначению их можно разделить на три категории: простейшие, инженерные и программируемые. Первые из них выполняют четыре арифметических действия «—», «+», «×», «:» и применяются в основном для бухгалтерских расчетов. Инженерные микрокалькуляторы отыскивают значения тригонометрических, логарифмических, показательных и ряда вспомогательных функций, имеют, как правило, одну — три ячейки памяти для хранения чисел. Программируемые микрокалькуляторы, сохраняя все достоинства упомянутых, способны выполнять вычисления по наперед заданному алгоритму без непосредственного участия человека в промежуточных вычислениях и располагают большим количеством ячеек памяти, чем инженерные.

Большинство микрокалькуляторов имеют по 8 значащих цифр. Лишь у «Электроники С3-15» их 10. Наличие большого количества разрядов характерно для настольных микрокалькуляторов. Простейшие микрокалькуляторы с 9-разрядными индикаторами имеют диапазон представления чисел от 0.000 000 1 ( $10^{-7}$ ) до 99 999 999 ( $10^8 - 1$ ). Программируемые микрокалькуляторы и большинство инженерных моделей дают возможность представить число в форме с плавающей десятичной точкой в пределах от  $10^{-39}$  до  $9.999\ 999\ 9 \cdot 10^{39}$ . Только такие микрокалькуляторы пригодны для физико-математических расчетов. В данной книге речь пойдет о программируемых отечественных микрокалькуляторах. Их основные технические характеристики приведены в табл. 1, а лицевая панель представлена на рис. 1—5. По функциональным возможностям, в частности длине командной памяти (памяти для записи команд программы), их можно разделить на три группы. К первой группе относятся карманный микрокалькулятор «Электроника Б3-21» и настольный «Электроника МК-46». Вторую группу составляют карманные микрокалькуляторы Б3-34, МК-54 и настольный МК-56. К третьей группе принадлежат микрокалькуляторы МК-61, МК-52. Хотя книга содержит программы, предназначенные для программируемых микрокалькуляторов третьей группы,

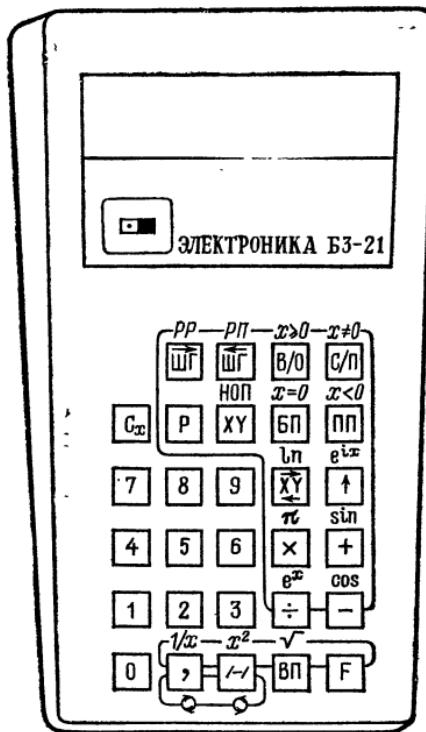


Рис. 1.

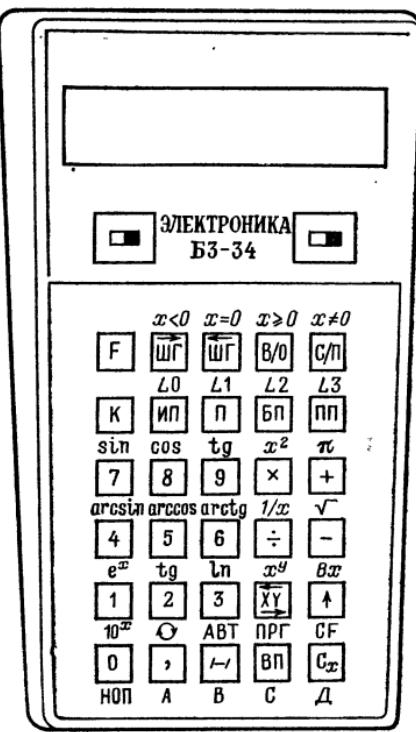


Рис. 2



Рис. 3



Рис. 4

Таблица 1

| Основные технические характеристики программируемых микрокалькуляторов «Электроника» | Б3-21 | Б3-34 | МК-54 | МК-61 | МК-52 |
|--|-------|-------|-------|-------|-------|
| Вычисление функций $x^2$ , $\sqrt{x}$ , $1/x$  | +     | +     | +     | +     | +     |
| $e^x$  | +     |       |       |       |       |
| $ex$ , $\ln x$   | +     | +     | +     | +     | +     |
| $\lg x$ , $10^x$ , $x^y$   |       | +     | +     | +     | +     |
| $\sin x$ , $\cos x$  | +     | +     | +     | +     | +     |
| $\tg x$ , $\arcsin x$ , $\arccos x$ , $\arctg x$                                     |       | +     | +     | +     | +     |
| Представление тригонометрических функций в радианах                                  | +     | +     | +     | +     | +     |
| Представление тригонометрических функций в градусах                                  |       | +     | +     | +     | +     |
| Перевод градусов, минут, секунд в доли градуса и наоборот                            |       |       |       | +     | +     |
| Определение знака числа  |       |       |       | +     | +     |
| Выделение целой и дробной части  |       |       |       | +     | +     |
| Выбор максимального из чисел   |       |       |       | +     | +     |
| Операции булевой алгебры   |       |       |       | +     | +     |
| Генератор случайных чисел  |       |       |       | +     | +     |
| Количество рабочих регистров   | 2     | 5     | 5     | 5     | 5     |
| Количество стековых регистров  | 6     | 4     | 4     | 4     | 4     |
| Количество адресуемых регистров  | 7     | 14    | 14    | 15    | 15    |
| Длина командной памяти (количество шагов программы)                                  | 60    | 98    | 98    | 105   | 105   |
| Встроенные циклы   |       | +     | +     | +     | +     |
| Косвенная адресация  |       | +     | +     | +     | +     |
| Полупостоянное запоминающее устройство (ППЗУ на 1024 ячейки)                         |       |       |       |       | +     |
| Быстродействие, опер/с   | 7     | 3.5   | 3.5   | 4.1   | 4.1   |

Таблица 2

| Клавиши одинакового назначения микрокалькуляторов «Электроника»                               |                |
|---|----------------|
| МК-61   | Б3-34          |
| F $\sin^{-1} x$   | F $\arcsin x$  |
| F $\cos^{-1} x$   | F $\arccos x$  |
| F $\tg^{-1} x$  | F $\arctg x$   |
| B↑  | ↑ >            |
| ↔   | X ↔ Y >        |
| $x \rightarrow \Pi$   | Π              |
| $\Pi \rightarrow x$   | ИП             |
| $x \rightarrow \Pi a$ , $x \Rightarrow \Pi b$ , $x \rightarrow \Pi c$ , $x \rightarrow \Pi d$ | ПА, ПВ, ПС, ПД |

большинство программ пригодно и для микрокалькуляторов второй группы, если общая длина программы не превышает 98 шагов, использовано не более 14 ячеек адресуемой памяти (памяти для записи числовых данных), а также если в программе отсутствуют операторы функций, которых не имеют микрокалькуляторы второй группы.

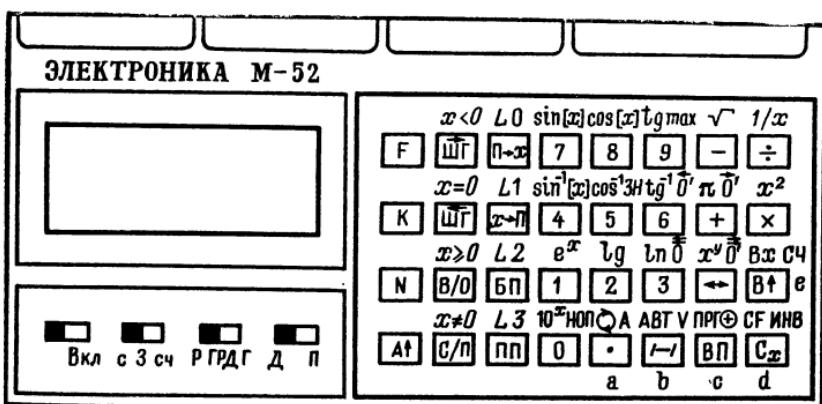


Рис. 5

Программы, выполнимые только на микрокалькуляторах МК-61 и МК-52, помечены звездочкой (\*). Некоторые клавиши Б3-34 несколько отличаются от клавиш остальных программируемых микрокалькуляторов, хотя и выполняют одинаковые функции. Они приведены в табл. 2. Программы в книге соответствуют наиболее распространенной клавиатуре МК-54, МК-56, МК-61, МК-52. Для упрощения чтения и написания программ в книге использованы обозначение П вместо  $x \rightarrow P$  и прописные буквы А, В, С, Д, Е вместо строчных а, б, с, д, е.

## 2. Простейшие вычисления на микрокалькуляторах

Чтобы успешно решать задачи на программируемом микрокалькуляторе, необходимо изучить «понятный» ему математический язык. Для выполнения арифметической операции в микрокалькуляторе отведено 2 регистра (ячейки) памяти. Называют их условно X и Y. На индикаторе высвечивается содержимое регистра X. До выполнения операции в эти регистры заносятся числа, после чего нажимают клавишу операции.

Пусть требуется сложить числа 3 и 5. После набора число 5 попадает в регистр X. Для перевода его в регистр Y нажимаем клавишу В↑ (далее для краткости будем обозначать ↑). Теперь число 5 находится в регистре Y, а его копия остается в X и высвечивается

на индикаторе. Набираем число 3, которое при этом поступает в регистр X. Предыдущее число в регистре X стирается. Осталось нажать клавишу операции (+). На индикаторе прочтем ответ: 8. Ответ находится в регистре X.

Вычитание выполняется по правилу: Y — X. Чтобы вычесть 384 из 640, заносим число 640 в регистр Y, а 384 — в X. Нажимаем клавишу вычитания (—) (не путайте с /—/). Порядок нажатия клавиш следующий:

$$640 \uparrow 384 -$$

На индикаторе появится ответ: 256.

Микрокалькулятор выполняет арифметические действия алгебраически, поэтому можно вычесть, к примеру, из положительного числа отрицательное. Для занесения в регистр отрицательного числа набираем его модуль, а затем нажимаем клавишу /—/. Поэтому выражение

$$622 - (-79) = \dots$$

набираем в следующем виде, читая слева направо:

$$622 \uparrow 79 / - / -$$

В результате вычисления получим ответ: 701.

Для занесения в регистр очень больших или очень малых чисел используется клавиша ВП — ввод порядка. Для занесения в регистр X числа  $-1.6 \cdot 10^{-19}$  на клавиатуре необходимо набрать

$$1.6 / - / \text{ ВП } 19 / - /$$

Обратите внимание, что минус перед всем числом вводится после того, как набрана мантисса, а минус в степени вводится в самую последнюю очередь. Такая форма представления числа очень удобна для работы с физическими константами. Легко ввести постоянную Планка  $h = -6.626276 \cdot 10^{-34}$  (Дж·с):

$$6.626176 \text{ ВП } 34 / - /$$

или комптоновскую длину волны для электрона  $\lambda = 2.4263089 \cdot 10^{-12}$  (м):

$$2.4263089 \text{ ВП } 12 / - /$$

Деление на микрокалькуляторе осуществляется по правилу

$$Y : X,$$

т. е. содержимое регистра Y делится на содержимое регистра X и результат операции поступает в индикаторный регистр X.

Вычислим постоянную Больцмана, разделив молярную газовую постоянную на число Авогадро:  $k = R/N_A$ , где  $R = 8.31441 \text{ Дж} \cdot \text{моль}^{-1} \cdot \text{К}^{-1}$ ,  $N_A = 6.022045 \cdot 10^{23} \text{ моль}^{-1}$

$$8.31441 \uparrow 6.022045 \text{ ВП } 23 \div$$

На индикаторе получаем  $1.380662 - 23$ , т. е.  $k = 1.380662 \cdot 10^{-23} (\text{Дж} \cdot \text{К}^{-1})$ .

Одноместными условимся называть математические операции, в результате которых происходит изменение содержимого регистра X

без изменения Y. Это функции  $x^2$ ,  $1/x$ ,  $\sqrt{x}$ ,  $\sin x$ ,  $\cos x$ ,  $\operatorname{tg} x$ ,  $\arcsin x$ ,  $\arccos x$ ,  $\operatorname{arc\operatorname{tg}} x$ ,  $\ln x$ ,  $\lg x$ ,  $e^x$ ,  $10^x$ ,  $|x|$ ,  $[x]$ ,  $\{x\}$ . При вычислении функций  $x^y$  и  $\max(x, y)$  участвуют два операционных регистра, и операция эта двухместная, но в результате операций изменений в регистре Y не происходит, как и при одноместной. Одноместной операцией является вызов константы π и генерация случайных чисел.

При вычислении функций  $x^2$ ,  $1/x$ ,  $\sqrt{x}$ ,  $\sin x$ ,  $\cos x$ ,  $\operatorname{tg} x$ ,  $\arcsin x$ ,  $\arccos x$ ,  $\operatorname{arc\operatorname{tg}} x$ ,  $\ln x$ ,  $\lg x$ ,  $e^x$ ,  $10^x$ ,  $x^y$  в первую очередь на индикаторе набирают значение аргумента функции, затем клавишу F и клавишу, указывающую непосредственно вид функции. При вычислении целой и дробной части числа, при вычислении знака и модуля числа, при выборе максимального из двух чисел, а также при генерации случайных чисел сначала набирается клавиша K, а затем клавиша, указывающая вид функции.

### Примеры.

|                 |      |              |                  |
|-----------------|------|--------------|------------------|
| $\sqrt{81} = ?$ | 81   | F $\sqrt{-}$ | ответ: 9         |
| $\sin \pi = ?$  | Fπ   | F sin        | ответ: 0         |
| $e^1 = ?$       | 1    | F $e^x$      | ответ: 2.7182818 |
| $[25.2] = ?$    | 25.2 | K [x]        | ответ: 25        |
| $\{38.4\} = ?$  | 38.4 | K {x}        | ответ: 0.4       |
| $ -47.5  = ?$   | 47.5 | / - / K  x   | ответ: 47.5      |

Для выбора максимального из чисел 2.8 и 4.2 набираем

$$4.2 \uparrow 2.8 \text{ K max } \text{ответ: 4.2.}$$

Рассмотрим выражение  $\sin(\pi/2)$ . В данном случае действия выполняются справа налево, т. е. сначала вычислим  $\pi/2$ , а затем возьмем от этой величины функцию синуса

$$\text{F}\pi \uparrow 2 \div \text{F sin } \text{ответ: 1.}$$

Читатель, наверное, заметил, что по всем правилам записи надо было бы писать

$$\text{F}\pi \uparrow 2 \div \text{F sin}$$

Однако хотя оператор  $\uparrow$  в предшествующей записи и пропущен, но ответ получен правильный. Дело в том, что если мы набираем на индикаторе число в цифровом виде, то, кроме записи этого числа в регистр X, происходит автоматическая запись в регистр Y того числа, которое до этого было в регистре X, т. е. число π было занесено в регистр автоматически. Поэтому выражение  $2 \exp \left\{ 3 \cos \frac{\pi}{6} \right\}$  вычисляется следующим образом:

$$\text{F}\pi \uparrow 2 \div \text{F cos } 3 \times \text{F}e^x 2 \times$$

ответ: 40.167.

Микрокалькулятор Б3-34 вычисляет тригонометрические функции в радианах (рад) и градусах ( $^{\circ}$ ), а МК-54, МК-61, МК-52 могут находить функции от аргументов, выраженных в градах (сокращенно грд). Как известно, град является процентной мерой угла:  $90^{\circ}$  соответствует 100 град.

Попутно заметим, что микрокалькулятор находит значения функций при помощи встроенных микропрограмм. Функции  $x^2$ ,  $\sqrt{x}$ ,  $1/x$  вычисляются при помощи итерационных процедур:  $\sin x$ ,  $\cos x$ ,  $\operatorname{tg} x$ ,  $\arcsin x$ ,  $\arccos x$ ,  $\operatorname{atg} x$ ,  $\ln x$ ,  $\lg x$ ,  $e^x$ ,  $10^x$ ,  $x^y$  — при помощи быстро сходящихся рядов; вычисление целой и дробной части числа, а также его модуля и знака выполняется с помощью логических и арифметических операторов; работа генератора случайных чисел основана на выполнении рекуррентного процесса.

Микрокалькуляторы МК-61 и МК-52 могут также выполнять логические операции с числами: сложение, умножение, сложение по модулю 2 (исключающее ИЛИ), инверсию. Числа в микрокалькуляторах представлены в двоично-десятичном коде. Результаты выполнения логических операций высвечиваются на индикаторе цифрами и знаками, как показано в табл. 3. Признаком выполнения логических операций является индикация цифры 8 в крайнем слева разряде индикатора. При вводе чисел в регистры X и Y необходимо набирать в левом разряде незначащую цифру, отличную от нуля.

Таблица 3

| Информация в регистрах |                            | Информация на индикаторе | Информация в регистрах |                            | Информация на индикаторе |
|------------------------|----------------------------|--------------------------|------------------------|----------------------------|--------------------------|
| десятичная система     | двоично-десятичная система |                          | десятичная система     | двоично-десятичная система |                          |
| 0                      | 0000                       | 0                        | 8                      | 1000                       | 8                        |
| 1                      | 0001                       | 1                        | 9                      | 1001                       | 9                        |
| 2                      | 0010                       | 2                        | 10                     | 1010                       | —                        |
| 3                      | 0011                       | 3                        | 11                     | 1011                       | Л                        |
| 4                      | 0100                       | 4                        | 12                     | 1100                       | Л                        |
| 5                      | 0101                       | 5                        | 13                     | 1101                       | Г                        |
| 6                      | 0110                       | 6                        | 14                     | 1110                       | Е                        |
| 7                      | 0111                       | 7                        | 15                     | 1111                       | пустой индикатор         |

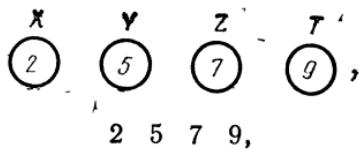
### 3. Порядок вычислений со стеком

В программируемых микрокалькуляторах Б3-34, МК-54, МК-61, МК-52 четыре операционных регистра X, Y, Z, T являются стековыми. Перемещение числовой информации в стеке при выполнении различных операций происходит следующим образом.

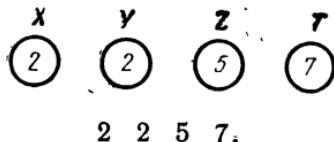
Оператор  $\uparrow$  выполняет сдвиг числовой информации по правилу



На схеме нет регистра  $X_1$ , так как по команде  $\uparrow$  никаких изменений в нем не происходит. При этом число, находившееся до того в регистре  $X$ , поступает в регистр  $Y$ , а его копия остается в  $X$ ; число, находившееся в регистре  $Y$ , поступает в  $Z$ ; число, находившееся до действия оператора  $\uparrow$  в регистре  $T$ , «выбрасывается». Если до действия оператора  $\uparrow$  в регистрах были



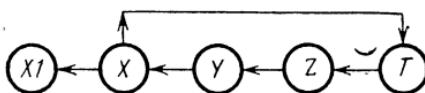
то после его действия в регистры  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$ ,  $T$  попадут числа



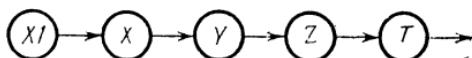
Действие оператора  $\leftrightarrow$  (или  $X \leftrightarrow Y$  у Б3-34) состоит во взаимной перестановке содержимого регистров  $X$  и  $Y$ . В этой процедуре участвует также и регистр предыдущего результата согласно схеме:



Оператор  $F \searrow$  осуществляет передвижение информации по замкнутому кольцу



Оператор предыдущего результата  $F Bx$  «подключает» к операционному регистру  $X$  число, бывшее в регистре  $X_1$ . При этом происходит сдвиг информации в стеке



При вычислении значений функции, т. е. при одноместных операциях, в регистрах  $Y$ ,  $Z$ ,  $T$  ничего не меняется. Аргумент функции поступает в  $X_1$ , а значение функции в  $X$ .

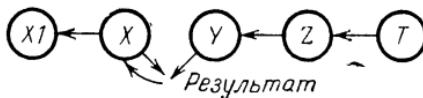
Никакого смещения в стеке не вызывает операция очистки  $Cx$  регистра  $X$  и операция перемены знака  $/-/-$ .

Таблица 4

| Выполняемое действие | Содержимое регистров |   |   |   |   | Выполняемое действие | Содержимое регистров |    |   |   |   |
|----------------------|----------------------|---|---|---|---|----------------------|----------------------|----|---|---|---|
|                      | X <sub>1</sub>       | X | Y | Z | T |                      | X <sub>1</sub>       | X  | Y | Z | T |
| 1                    | 0                    | 1 | 0 | 0 | 0 | FBx                  | 1                    | 1  | 4 | 3 | 2 |
| ↑                    | 0                    | 1 | 1 | 0 | 0 | ↔                    | 1                    | 4  | 1 | 3 | 2 |
| 2                    | 0                    | 2 | 1 | 0 | 0 | ↔                    | 4                    | 1  | 4 | 3 | 2 |
| ↑                    | 0                    | 2 | 2 | 1 | 0 | FBx                  | 4                    | 4  | 1 | 4 | 3 |
| 3                    | 0                    | 3 | 2 | 1 | 0 | F↑                   | 4                    | 1  | 4 | 3 | 4 |
| ↑                    | 0                    | 3 | 3 | 2 | 1 | F↑                   | 1                    | 4  | 3 | 4 | 1 |
| 4                    | 0                    | 4 | 3 | 2 | 1 | ↔                    | 4                    | 3  | 4 | 4 | 1 |
| F↑                   | 4                    | 3 | 2 | 1 | 4 | FB↑                  | 3                    | 4  | 4 | 1 | 3 |
| F↑                   | 3                    | 2 | 1 | 4 | 3 | Fx <sup>2</sup>      | 4                    | 16 | 4 | 1 | 3 |
| F↑                   | 2                    | 1 | 4 | 3 |   | Cx                   | 4                    | 0  | 4 | 1 | 3 |
| F↑                   | 1                    | 4 | 3 | 2 | 1 |                      |                      |    |   |   |   |

Передвижение информации в стеке при различных операциях наглядно демонстрирует табл. 4.

Во время выполнения двухместных математических операций происходит обработка арифметическим устройством содержимого регистров X и Y и ответ поступает в X. Сдвиг информации происходит по правилу



Число в регистре T при этом не меняется, а его копия поступает в регистр Z. В табл. 5 показано смещение информации в стеке, в зависимости от выполнения действий  $8:4=2$  и  $2:2=1$  и других вспомогательных операций.

Таблица 5

| Выполняемое действие | Содержимое регистров |   |   |   |   | Выполняемое действие | Содержимое регистров |    |   |   |   |
|----------------------|----------------------|---|---|---|---|----------------------|----------------------|----|---|---|---|
|                      | X <sub>1</sub>       | X | Y | Z | T |                      | X <sub>1</sub>       | X  | Y | Z | T |
| 1                    | 0                    | 1 | 0 | 0 | 0 | ÷                    | 2                    | 1  | 1 | 1 | 1 |
| ↑                    | 0                    | 1 | 1 | 0 | 0 | FBx                  | 2                    | 2  | 1 | 1 | 1 |
| 2                    | 0                    | 2 | 1 | 0 | 0 | 2÷                   | 2                    | 1  | 1 | 1 | 1 |
| ↑                    | 0                    | 2 | 2 | 1 | 0 | +                    | 1                    | 2  | 1 | 1 | 1 |
| 4                    | 0                    | 4 | 2 | 1 | 0 | +                    | 2                    | 3  | 1 | 1 | 1 |
| ↑                    | 0                    | 4 | 4 | 2 | 1 | ×                    | 3                    | 3  | 1 | 1 | 1 |
| 8                    | 0                    | 8 | 4 | 2 | 1 | -                    | 3                    | -2 | 1 | 1 | 1 |
| ↔                    | 8                    | 4 | 8 | 2 | 1 | /-/                  | 3                    | 2  | 1 | 1 | 1 |
| ÷                    | 4                    | 2 | 2 | 1 | 1 | Fx <sup>2</sup>      | 2                    | 4  | 1 | 1 | 1 |

## 4. Адресуемая память

Микрокалькуляторы МК-61, МК-52 имеют 15 регистров адресуемой памяти. Если в индуцируемом регистре X мы набрали, например, число  $9.1096 \cdot 10^{-31}$ , то, чтобы это число поступило в пятый регистр на хранение, достаточно нажать клавиши  $x \rightarrow \Pi$  и 5. Для краткости в дальнейшем мы будем писать просто П5. В самом общем случае, чтобы занести число в какой-либо адресуемый регистр, необходимо, набрав это число на клавиатуре, нажать клавишу  $x \rightarrow \Pi$  и клавишу, соответствующую индексу адресуемого регистра. Индекс может выражаться цифрой или одной из букв латинского алфавита  $a, b, c, d, e$ .

Для вызова числа, хранящегося в адресуемом регистре, необходимо нажать клавишу  $\Pi \rightarrow x$  и клавишу, соответствующую индексу вызываемого регистра. Копия числа при этом поступает в индуцируемый регистр X, а само число сохраняется после вызова в своей ячейке памяти. Набрав  $\Pi \rightarrow x$  и 5 (сокращенно Пх5), получим на индикаторе число

$$9.1096 \cdot 10^{-31}.$$

Адресуемая память программируемых микрокалькуляторов МК-54 Б3-34 насчитывает 14 регистров: регистра Е у них нет, но в остальном она полностью идентична памяти МК-52 и МК-61.

## 5. Вычисления с использованием стековых и адресуемых регистров

Пользуясь микрокалькулятором, можно выполнять сложные вычисления, не записывая на бумаге промежуточные результаты, а занося их в адресуемую или стековую память. Наличие четырех стековых регистров дает возможность вычислять определители второго порядка, складывать два комплексных числа и выполнять ряд других подобных задач, используя при этом только стек.

**Задача 1.** Вычислить определитель:

$$\begin{vmatrix} 2 & 18 \\ 29 & 51 \end{vmatrix}$$

Необходимые для этого действия и соответствующая им информация в регистрах стека описаны в табл. 6.

Обратите внимание, что оператор переменны знака  $/-$  не только никоим образом не смешает информацию в стеке, но и совершенно не влияет на содержимое регистра предыдущего результата. Подобным свойством, как уже говорилось, обладает лишь оператор  $Cx$ .

**Задача 2.** Сложить два комплексных числа

$$(2.73 + 4.756i) + (5.24 + 10.244i) = \dots$$

Таблица 6

| Действие            | $X_1$ | X    | Y   | Z   | T   |
|---------------------|-------|------|-----|-----|-----|
| 2                   | 0     | 2    | 0   | 0   | 0   |
| $\uparrow$          | 0     | 2    | 2   | 0   | 0   |
| 18                  | 0     | 18   | 2   | 0   | 0   |
| $\uparrow$          | 0     | 18   | 18  | 2   | 0   |
| 29                  | 0     | 29   | 18  | 2   | 0   |
| $\uparrow$          | 0     | 29   | 29  | 18  | 2   |
| 51                  | 0     | 51   | 29  | 18  | 2   |
| $F \curvearrowleft$ | 51    | 29   | 18  | 2   | 51  |
| X                   | 29    | 522  | 2   | 51  | 51  |
| $\uparrow$          | 29    | 522  | 522 | 2   | 51  |
| $F \curvearrowleft$ | 22    | 522  | 2   | 51  | 522 |
| $F \curvearrowleft$ | -2    | 2    | 51  | 522 | 522 |
| X                   | 2     | 102  | 522 | 522 | 522 |
| -                   | 102   | 420  | 522 | 522 | 522 |
| / - /               | 102   | -420 | 522 | 522 | 522 |

Решение задачи представлено в табл. 7, где дана и подробная информация о содержимом стека. Ответ имеет вид

$$X + iY,$$

где числа X и Y находятся в одноименных стековых регистрах. Следует помнить и в дальнейшем, что при выводе переменных X, Y, Z,

Таблица 7

| Действие                              | $X_1$  | X      | Y      | Z      | T      |
|---------------------------------------|--------|--------|--------|--------|--------|
| 2.73                                  | 0      | 2.73   | 0      | 0      | 0      |
| $\uparrow$                            | 0      | 2.73   | 2.73   | 0      | 0      |
| 4.756                                 | 0      | 4.756  | 2.73   | 0      | 0      |
| $\uparrow$                            | 0      | 4.756  | 4.756  | 2.73   | 0      |
| 5.24                                  | 0      | 5.24   | 4.756  | 2.73   | 0      |
| $\uparrow$                            | 0      | 5.24   | 5.24   | 4.756  | 2.73   |
| 10.244                                | 0      | 10.244 | 5.24   | 4.756  | 2.73   |
| $F \curvearrowleft$                   | 10.244 | 5.24   | 4.756  | 2.73   | 10.244 |
| $\leftrightarrow$                     | 5.24   | 4.756  | 5.24   | 2.73   | 10.244 |
| $F \curvearrowleft$                   | 4.756  | 5.24   | 2.73   | 10.244 | 4.756  |
| +                                     | 5.24   | 7.97   | 10.244 | 4.756  | 4.756  |
| $\uparrow$                            | 5.24   | 7.97   | 7.97   | 10.244 | 4.756  |
| $F \curvearrowleft F \curvearrowleft$ | 7.97   | 10.244 | 4.756  | 7.97   | 7.97   |
| +                                     | 10.244 | 15     | 7.97   | 7.97   | 7.97   |
| $\leftrightarrow$                     | 15     | 7.97   | 15     | 7.97   | 7.97   |

Таблица 8

| Действие | X <sub>1</sub>              | X                           | Y          | Z          | T          |
|----------|-----------------------------|-----------------------------|------------|------------|------------|
| 2.3      | —                           | 2.3                         | —          | —          | —          |
| ↑        | —                           | 2.3                         | 2.3        | —          | —          |
| 4        | —                           | 4                           | 2.3        | —          | —          |
| ↑        | —                           | 4                           | 4          | —          | —          |
| 2.3      | —                           | 2.3                         | 2.3        | 2.3        | —          |
| ↑        | —                           | 2.3                         | 2.3        | 4          | 2.3        |
| 4        | —                           | 4                           | 2.3        | 4          | 2.3        |
| F sin    | —7.5680255.10 <sup>-1</sup> | —7.5680255.10 <sup>-1</sup> | 2.3        | 4          | 2.3        |
| X        | —1.7406459                  | —1.7406459                  | 4          | 2.3        | 2.3        |
| ↑        | —1.7406459                  | —1.7406459                  | —1.7406459 | 4          | 2.3        |
| F ↗ F ↘  | —1.7406459                  | 4                           | 2.3        | —1.7406459 | —1.7406459 |
| F cos    | 4                           | —6.5364363.10 <sup>-1</sup> | 2.3        | —1.7406459 | —1.7406459 |
| X        | —6.5364363.10 <sup>-1</sup> | —1.5033803                  | —1.7406459 | —1.7406459 | —1.7406459 |

Таких предпочтительнее размещать в одноименных операционных регистрах памяти. Это исключит всякую путаницу.

**Задача 3.** Перейти от показательной формы комплексного числа к алгебраической, используя формулу Эйлера:

$$2.34e^{4i} = \dots$$

Решение представлено в табл. 8. Ввод исходных данных сделан дважды. Прочерки в таблице означают, что на их месте в операционных регистрах до наших вычислений могли находиться любые числа, которые в дальнейшем счете не участвуют. Форма вывода ответа остается той же:

$$X + iY.$$

**Задача 4.** Перейти от алгебраической к показательной форме записи комплексного числа

$$2.0 + 0.1i = \dots$$

Решение представлено в табл. 9.

Ответ выводится в форме

$$Xe^{iY}.$$

Поэтому

$$2.0 + 0.1i = 2.0024984 \exp\{0.049958397i\}.$$

**Задача 5.** На рис. 6 изображен блок сопротивлений:  $R_1 = 5 \text{ кОм}$ ,  $R_2 = 4 \text{ кОм}$ ,  $R_3 = 12 \text{ кОм}$ ,  $R_4 = 6 \text{ кОм}$ . Требуется определить общее сопротивление цепи между клеммами A и B.

**Решение.** Из радиотехники известно, что

$$R = R_1 + \frac{1}{1/R_2 + 1/R_3 + 1/R_4}.$$

Преобразовывать эту формулу не следует, так как с помощью фрагмента

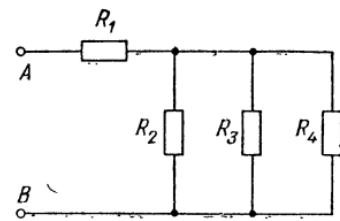


Рис. 6

$$4 \text{ F } 1/x \text{ } 1 \text{ } 2 \text{ F } 1/x + 6 \text{ F } 1/x +$$

мы получаем значение выражения  $1/R_2 + 1/R_3 + 1/R_4$ . Остается только взять обратную величину и прибавить к ней  $R_1$ :

$$4 \text{ F } 1/x \text{ } 1 \text{ } 2 \text{ F } 1/x + 6 \text{ F } 1/x + \text{ F } 1/x \text{ } 5 +$$

В результате получаем  $R = 7 \text{ кОм}$ .

Выход содержащегося какого-либо адресуемого регистра на индикатор вызывает такое же смещение информации в стеке, как любое набираемое число, т. е. выполняется предварительно операция  $\uparrow$ . Так, чтобы в стековых регистрах оказались числа их адресуемых регистров в приведенном ниже порядке:

|      |      |      |       |
|------|------|------|-------|
| X    | Y    | Z    | T     |
| П x3 | П x2 | П x1 | П x0, |

Таблица

| Действие           | X <sub>1</sub>             |                            | X                          |                    | Y'                         |                            | Z                          |                            | T                          |                            |
|--------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|--------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
|                    | -                          | 2                          | 2                          | -                  | 2                          | 2                          | 0.1                        | 2                          | 2                          | 2                          |
| 2                  | -                          | 2                          | 2                          | -                  | 2                          | 2                          | 0.1                        | 2                          | 2                          | 2                          |
| ↑                  | -                          | 2                          | 2                          | -                  | 2                          | 2                          | 0.1                        | 2                          | 2                          | 2                          |
| 0.1                | -                          | 0.1                        | 0.1                        | -                  | 0.1                        | 0.1                        | 0.1                        | 0.1                        | 0.1                        | 0.1                        |
| ↑                  | -                          | 0.1                        | 0.1                        | -                  | 0.1                        | 0.1                        | 0.1                        | 0.1                        | 0.1                        | 0.1                        |
| 2                  | -                          | 2                          | 2                          | -                  | 2                          | 2                          | 0.1                        | 2                          | 2                          | 2                          |
| ↑                  | -                          | 2                          | 2                          | -                  | 2                          | 2                          | 0.1                        | 2                          | 2                          | 2                          |
| 0.1                | -                          | 0.1                        | 0.1                        | -                  | 0.1                        | 0.1                        | 0.1                        | 0.1                        | 0.1                        | 0.1                        |
| ↔                  | 0.1                        | 2                          | 2                          | 0.1                | 2                          | 2                          | 0.1                        | 2                          | 2                          | 2                          |
| ÷                  | 2                          | 5.10 <sup>-2</sup>         | 0.1                        | 2                  | 2                          | 2                          | 0.1                        | 2                          | 2                          | 2                          |
| F tg <sup>-1</sup> | 5.10 <sup>-2</sup>         | 4.9958397.10 <sup>-2</sup> | 0.1                        | 2                  | 2                          | 2                          | 0.1                        | 2                          | 2                          | 2                          |
| ↑                  | 4.9958397.10 <sup>-2</sup> | 4.9958397.10 <sup>-2</sup> | 4.9958397.10 <sup>-2</sup> | 0.1                | 4.9958397.10 <sup>-2</sup> |
| F ↗ F ↘            | 4.9958397.10 <sup>-2</sup> | 1.10 <sup>-2</sup>         | 2                          | 2                  | 4.9958397.10 <sup>-2</sup> |
| Fx <sup>2</sup>    | 1.10 <sup>-2</sup>         | 1.10 <sup>-2</sup>         | 2                          | 2                  | 4.9958397.10 <sup>-2</sup> |
| ↔                  | 1.10 <sup>-2</sup>         | 2                          | 2                          | 1.10 <sup>-2</sup> | 4.9958397.10 <sup>-2</sup> |
| Fx <sup>2</sup>    | 2                          | 4                          | 4                          | 4                  | 4.9958397.10 <sup>-2</sup> |
| +                  | 4                          | 4.01                       | 4.01                       | 4                  | 4.9958397.10 <sup>-2</sup> |

Таблица 10

| Действие     | X <sub>1</sub> | X    | Y    | Z    | T  |
|--------------|----------------|------|------|------|----|
| 23           | —              | 23   | —    | —    | —  |
| П0           | —              | 23   | —    | —    | —  |
| 5 П1, П2, П3 | —              | 5    | 23   | —    | —  |
| 10 П4, П5    | —              | 10   | 5    | 23   | —  |
| Пх 0         | —              | 23   | 10   | 5    | 23 |
| Пх 5         | —              | 10   | 23   | 10   | 5  |
| Пх 1         | —              | 5    | 10   | 23   | 10 |
| ×            | 5              | 50   | 23   | 10   | 10 |
| ×            | 50             | 1150 | 10   | 10   | 10 |
| Пх 7         | 1150           | 0    | 1150 | 10   | 10 |
| +            | 0              | 1150 | 10   | 10   | 10 |
| Пх 4         | 0              | 10   | 1150 | 10   | 10 |
| ↑            | 0              | 10   | 10   | 1150 | 10 |
| F            | 10             | 10   | 1150 | 10   | 10 |

на клавиатуре микрокалькулятора достаточно набрать всего лишь четыре оператора:

Пх0    Пх1    Пх2    Пх3.

Таблица 10 иллюстрирует вышесказанное. Обратите внимание, что оператор ввода числа в память  $x \rightarrow \Pi$  (сокращенно П) не смещает информацию в стеке.

В заключение рассмотрим еще одно правило сокращения количества действий. Если на индикатор вызвано число из какого-либо адресуемого регистра, то чтобы умножить его на число вида  $10^K$ , достаточно набрать на клавиатуре

ВП    K    ↑,

где  $K$  — некоторое конкретное число.

Так, фрагмент

П3    ВП    9    ↑

умножит содержимое регистра 3 на  $10^9$  и ответ выдаст на индикаторе, в чем вы можете непосредственно убедиться.

Программируемые микрокалькуляторы имеют арифметическое устройство, которое может оперировать с числами вплоть до  $10^{299}$ . Но индикатор не позволяет высвечивать такие числа. Хотя адресуемая и стековая память способна хранить их и обращаться с ними.

Пусть нужно выполнить вычисление

$$(2 \cdot 10^{254} + 6 \cdot 10^{253}) : (2 \cdot 10^{198})$$

Косвенным образом набираем эти числа и вводим их в адресуемые регистры П0, П1, П2:

|   |    |    |   |   |   |   |    |   |   |   |    |   |   |    |
|---|----|----|---|---|---|---|----|---|---|---|----|---|---|----|
| 1 | ВП | 50 | ↑ | ↑ | ↑ | × | ×  | × | × | 2 | ВП | 4 | × | П0 |
| 1 | ВП | 50 | ↑ | ↑ | ↑ | × | ×  | × | × | 6 | ВП | 3 | × | П1 |
| 1 | ВП | 99 | ↑ | × | 2 | × | П2 |   |   |   |    |   |   |    |

Выполняем вычисления

Пх0 Пх1 + Пх2 ÷

На индикаторе появится правильный ответ:  $1.3 \cdot 10^{56}$ . При подобного рода вычислениях необходимо лишь следить за тем, чтобы промежуточные результаты не превышали  $10^{300}$ .

## 6. Процесс программирования

Последовательность вводимых операций и команд, необходимых для решения задачи, представляет собой программу. Вводится она в командную память либо путем набора с клавиатурой, либо путем считывания с ППЗУ. Стирается программа при вводе новой программы и при выключении микрокалькулятора. Решение многих задач без программирования очень сложно или даже в принципе невозможно. Привлечение микроЭВМ позволяет решать их численно, невзирая на сложность формул, так как трудоемкость вычислений в данном случае для пользователя несущественна.

Рассмотрим составление таблицы значений функции  $r(\phi)$

$$r(\phi) = \frac{8}{2 - \sin \phi},$$

если угол  $\phi$  изменяется с дискретным шагом  $\Delta\phi = 22.5^\circ$  от  $\phi = 0^\circ$  до  $\phi = 360^\circ$ .

Решение. Текущее значение аргумента функции  $\phi$ ; будем хранить в регистре П3, а значение шага  $\Delta\phi$  занесем в регистр П2. Начальное значение угла  $\phi = 0$ . Поэтому вводим

0 = П3 22.5 = П2.

Переключатель угловой меры необходимо установить в положение «градус».

Исходные данные введены. Находим значения  $r$  при разных  $\phi$ :

|                    |         |     |              |   |     |   |
|--------------------|---------|-----|--------------|---|-----|---|
| $r(0^\circ)$ :     |         | Пх3 | F sin 2 ↔    | — | 8 ↔ | ÷ |
| $r(22.5^\circ)$ :  | Пх3 Пх2 | +   | П3 F sin 2 ↔ | — | 8 ↔ | ÷ |
| $r(45^\circ)$ :    | Пх3 Пх2 | +   | П3 F sin 2 ↔ | — | 8 ↔ | ÷ |
| $r(67.5^\circ)$ :  | Пх3 Пх2 | +   | П3 F sin 2 ↔ | — | 8 ↔ | ÷ |
| $r(90^\circ)$ :    | Пх3 Пх2 | +   | П3 F sin 2 ↔ | — | 8 ↔ | ÷ |
| $r(112.5^\circ)$ : | Пх3 Пх2 | +   | П3 F sin 2 ↔ | — | 8 ↔ | ÷ |
| $r(135^\circ)$ :   | Пх3 Пх2 | +   | П3 F sin 2 ↔ | — | 8 ↔ | ÷ |
| $r(157.5^\circ)$ : | Пх3 Пх2 | +   | П3 F sin 2 ↔ | — | 8 ↔ | ÷ |
| $r(180^\circ)$ :   | Пх3 Пх2 | +   | П3 F sin 2 ↔ | — | 8 ↔ | ÷ |

Однако, положив до начала вычисления

22.5 /—/ П3 22.5 П2,

т. е. выбрав за начальную точку не 0, а —22.5, мы тем самым сделали повторяемый фрагмент универсальным:

Пх3 Пх2 + П3 F sin 2 ↔ — 8 ↔ ÷

Вот тут-то и приходит на помощь программа.

Программируемые микрокалькуляторы имеют специальную память, куда записываются коды соответствующих команд. В режиме автоматического счета под диктовку этих кодов выполняются вычисления.

Перевод микрокалькулятора в режим набора программы осуществляется клавишами F и ПРГ (функция программирования), в режиме автоматического счета — F и АВТ (автоматический счет). Каждой команде или шагу программы присваивается адрес, на единицу меньший порядкового номера команды. Программная память микрокалькуляторов МК-61, МК-52 состоит из 105 ячеек. Первая команда имеет адрес 00, а последняя — 4 (104). Программная память у микрокалькуляторов Б3-34 и МК-54 составляет 98 ячеек. Первая команда имеет адрес 00, а последняя 97.

В режиме набора программы на индикаторе отображаются коды команд и текущее состояние счетчика. В правом углу высвечивается адрес следующей команды, а в левом углу слева направо коды текущей, предыдущей и предшествующей предыдущей команд.

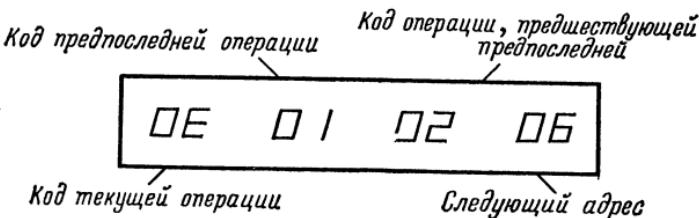


Рис. 7

Несложно расшифровать показание индикатора в режиме программирования, изображенное на рис. 7.

Здесь 06 — порядковый номер текущего оператора программы (или адрес следующего оператора), 0E — код текущей операции ↑, 01 — код предпоследней операции, 02 — код операции, предшествующей предпоследней. Тогда фрагмент программы на языке клавиш выглядит так:

.. 2 1 ↑ ..

Двухзначный код, отображаемый на индикаторе в режиме набора программы, дается каждому выполняемому и невыполняемому оператору программы в виде комбинации цифр, английских букв и квадратных скобок. По кодам, записанным в программную память, можно узнать содержание программы при помощи табл. 11.

Таблица 11

|   | 0     | 1     | 2               | 3     | 4               | 5               | 6     | 7     | 8                   | 9                   | -                  | L     | C     | G     | E     |  |
|---|-------|-------|-----------------|-------|-----------------|-----------------|-------|-------|---------------------|---------------------|--------------------|-------|-------|-------|-------|--|
| 0 | 0     | 1     | 2               | 3     | 4               | 5               | 6     | 7     | 8                   | 9                   | /-                 | BII   | Cx    | B↑    | FBx   |  |
| 1 | +     | X     | ÷               | ↔     | F10x            | Fe <sup>x</sup> | F lg  | F ln  | F sin <sup>-1</sup> | F cos <sup>-1</sup> | F tg <sup>-1</sup> | F sin | Cx    | B↑    | FBx   |  |
| 2 | Fπ    | FV-   | Fx <sup>2</sup> | F1/x  | Fx <sup>y</sup> | F~              | K+    | K-    | KX                  | K÷                  | K↔                 | K B↑  | PII   | PII   | PII   |  |
| 3 | K3    | K4    | K5              | K6    | K7              | K8              | K9    | K/-   | KVII                | KCx                 | K B↑               | K B↑  | PII   | PIE   | PIE   |  |
| 4 | Π0    | Π1    | Π2              | Π3    | Π4              | Π5              | Π6    | Π7    | Π8                  | Π9                  | ΠA                 | ΠB    | ΠC    | ΠD    | ΠE    |  |
| 5 | C/Π   | BΠ    | B/0             | ΠΠ    | KНОП            | K1              | K2    | Fx≠0  | FL2                 | Fx>0                | FL3                | FL1   | Fx<0  | FL0   | Fx=0  |  |
| 6 | Πx0   | Πx1   | Πx2             | Πx3   | Πx4             | Πx5             | Πx6   | Πx7   | Πx8                 | Πx9                 | ΠxA                | ΠxB   | ΠxC   | ΠxD   | ΠxE   |  |
| 7 | Kx≠0  | Kx≠01 | Kx≠02           | Kx≠03 | Kx≠04           | Kx≠05           | Kx≠06 | Kx≠07 | Kx≠08               | Kx≠09               | Kx≠0A              | Kx≠0B | Kx≠0C | Kx≠0D | Kx≠0E |  |
| 8 | KБΠ0  | KБΠ1  | KБΠ2            | KБΠ3  | KБΠ4            | KБΠ5            | KБΠ6  | KБΠ7  | KБΠ8                | KБΠ9                | KБΠA               | KБΠB  | KБΠC  | KБΠD  | KБΠE  |  |
| 9 | Kx≥00 | Kx≥01 | Kx≥02           | Kx≥03 | Kx≥04           | Kx≥05           | Kx≥06 | Kx≥07 | Kx≥05               | Kx≥09               | Kx≥0A              | Kx≥0B | Kx≥0C | Kx≥0D | Kx≥0E |  |
| - | KΠΠ0  | KΠΠ1  | KΠΠ2            | KΠΠ3  | KΠΠ4            | KΠΠ5            | KΠΠ6  | KΠΠ7  | KΠΠ8                | KΠΠ9                | KΠΠA               | KΠΠB  | KΠΠC  | KΠΠD  | KΠΠE  |  |
| L | KΠ0   | KΠ1   | KΠ2             | KΠ3   | KΠ4             | KΠ5             | KΠ6   | KΠ7   | KΠ8                 | KΠ9                 | KΠA                | KΠB   | KΠC   | KΠD   | KΠE   |  |
| I | Kx<00 | Kx<01 | Kx<02           | Kx<03 | Kx<04           | Kx<05           | Kx<06 | Kx<07 | Kx<08               | Kx<09               | Kx<0A              | Kx<0B | Kx<0C | Kx<0D | Kx<0E |  |
| Г | KΠx0  | KΠx1  | KΠx2            | KΠx3  | KΠx4            | KΠx5            | KΠx6  | KΠx7  | KΠx8                | KΠx9                | KΠxA               | KΠxB  | KΠxC  | KΠxD  | KΠxE  |  |
| E | Kx=00 | Kx=01 | Kx=02           | Kx=03 | Kx=04           | Kx=05           | Kx=06 | Kx=07 | Kx=08               | Kx=09               | Kx=0A              | Kx=0B | Kx=0C | Kx=0D | Kx=0E |  |

Программу можно записывать произвольно как с начального, так и с любого другого адреса, но тогда и автоматический счет нужно осуществлять с того же адреса. Наиболее удобно набирать и запускать программу с начального адреса. Чтобы поставить счетчик в это начальное положение, нужно в режиме АВТ нажать клавишу В/0 (возврат). Чтобы поставить счетчик в иное положение, т. е. начать программу с произвольного адреса в режиме АВТ, нажимают клавишу БП, а затем клавиши нужного адреса.

Вернемся к построению таблицы значений функции  $r=r(\phi)$ . Программу будем вводить с нулевого адреса. Для этого клавишей В/0 устанавливаем счетчик в начальное положение, а клавишами F ПРГ переводим микрокалькулятор в режим программирования. На индикаторе на месте кодов команд должно быть пусто, а счетчик должен показывать 00. Если все у вас именно так, то осталось набрать программу:

Пх3 Пх2  $\neg$  П3 F sin 2  $\leftrightarrow$  - 8  $\leftrightarrow$   $\div$  С/П

Последний оператор С/П (стоп—пуск) служит для прекращения выполнения операций и остановки работы микроЭВМ по окончании вычислений и для очередного запуска программы. После того как программа набрана, возвращаемся в режим работы клавишами F АВТ. Счетчик в режиме набора программы показывал 12-й адрес. На этом же адресе он находится и при переходе в режим работы. А у нас программа начинается с начального адреса. Поэтому необходимо нажать клавишу В/0—возврата счетчика в начальное положение. Набираем первоначальное значение переменной:

22.5 П2 /—/ П3

Осталось нажать клавишу С/П—запуска автоматического счета. Время вычисления очередного значения  $r_i$  составляет несколько секунд. Последовательно нажимая В/0 и С/П, получаем значения  $r_i$  при разных углах  $\phi_i$ .

Текст программы можно писать как в строку, так и в столбец. Программа, написанная в столбец, лучше просматривается, более удобна для набора и меньше риска пропустить какой-то оператор или набрать лишний. Однако запись программы в такой форме очень громоздка. Наиболее удобно записывать по 10 операторов в строке. Коды операций и адреса при этом не пишут. В этом нет необходимости, так как порядковые номера последних операторов в строках 10, 20, 30, ..., 90, —0, поэтому, если вы пропустили оператор или набрали лишний, это легко обнаружится при наборе последнего оператора строки.

Вы, наверное, уже обратили внимание, что вместо  $\sin x$  мы пишем  $F \sin x$ , а вместо  $\cos x$  пишем  $F \cos x$ . Префиксные клавиши пишутся для напоминания. Практика показывает, что в программах, написанных с префиксными клавишами, вероятность допустить ошибку гораздо меньше.

## 7. Безусловные и условные переходы

При вычислении  $r_i(\phi)$  всякий раз приходилось нажимать клавишу В/0 для возврата к начальному адресу и клавишу С/П для очередного запуска программы. Операцию В/0 можно реализовать и в ходе автоматического выполнения счета с помощью оператора *безусловного перехода* БП 00. В программе этот оператор занимает два шага: первый шаг указывает на безусловный переход по адресу, записанному на втором шаге. Программа вычисления  $r(\phi)$  после усовершенствования имеет вид

$$\begin{array}{rcl} \text{Пх3} & \text{Пх2} & + \quad \text{Пз} \quad \text{Fsin} \quad 2 \leftrightarrow - \quad 8 \leftrightarrow \\ & \div \quad \text{С/П} & \text{БП} \quad \underline{00} \end{array}$$

Клавишу В/0 надо будет нажать лишь первый раз, а потом все время нажимать только клавишу С/П. После очередного вычисления счет оканчивается на операторе с порядковым номером 12. При следующем запуске программы автоматически делается переход по адресу 00 и программа выполняется сначала.

В программе на месте оператора безусловного перехода БП 00 применять В/0 нельзя, так как в отсутствие подпрограммы оператор В/0 аналогичен БП 01, т. е. осуществляется переход по адресу 01. Другое дело, если счет окончен и вручную набирается В/0, в этом случае счетчик «зануляется» и в нем устанавливается адрес 00.

Логический оператор условного перехода совмещает в себе два оператора: оператор безусловного перехода и пустой оператор. Принцип работы оператора условного перехода следующий: если логическое условие не выполняется, он работает как оператор безусловного перехода, передавая управление по адресу, указанному за оператором; если же логическое условие выполняется, то он «ничего не делает»; происходит переход к следующему за ним оператору. Наличие в микрокалькуляторе операторов условного перехода позволяет автоматически осуществлять отбор чисел по заданным условиям.

**Пример 1.** Найти наименьший целый положительный корень уравнения  $x^3 + 8x^2 - 12x - 144 = 0$ .

**Решение.** Составим программу, по которой микрокалькулятор будет перебирать по одному все целые положительные числа, начиная с 1, пока не найдет такое значение  $x$ , при котором многочлен обращается в нуль. Величину многочлена будем вычислять по схеме Горнера:

$$x^3 + 8x^2 - 12x - 144 = ((x + 8)x - 12)x - 144.$$

Программа имеет вид 0 = П0

$$\begin{array}{rcl} \text{Пх0} & 1 & + \quad \text{П0} \quad \text{Пх0} \quad 8 & + \quad \text{Пх0} \quad \times \quad 1 \\ & 2 & - \quad \text{Пх0} \quad \times \quad 1 \quad 4 & 4 \quad - \quad \text{Fx=0} \quad \underline{00} \\ & \text{Пх0} & \text{С/П} \end{array}$$

В результате счета получим  $x = 4$ .

Адрес перехода подчеркнут для удобства чтения и исключения путаницы при записи программ.

**Пример 2.** Найти предел итерации

$$x_{n+1} = 1.3x_n(1 - x_n)$$

с погрешностью  $|x_{n+1} - x_n| < 10^{-8}$ .

**Решение.** Условие  $|x_{n+1} - x_n| < 10^{-8}$  запишем в виде

$$10^8 |x_{n+1} - x_n| - 1 < 0.$$

Тогда программа \* имеет вид

|    |     |        |     |     |     |     |    |   |   |
|----|-----|--------|-----|-----|-----|-----|----|---|---|
| P1 | Пx1 | П0     | 1   | ↔   | —   | Пx0 | ×  | 1 | . |
| 3  | ×   | П1     | Пx0 | —   | K x | 1   | ВП | 8 | × |
| 1  | —   | Fx < 0 | 01  | Пx1 | C/P |     |    |   |   |

Перед счетом на индикаторе набираем 0.1 и переводим микрокалькулятор в режим автоматического счета. После счета, который длится около 4 мин, получаем  $x_n = 0.23076917$ .

**Пример 3.** Найти целочисленные корни уравнения  $37x + 53y = 201$ , если  $x$  — положительно.

Решение \* состоит в том, что мы будем перебирать положительные значения  $x$  до тех пор, пока не получим такого  $y$ , дробная часть которого равна нулю:  $x = \text{ПA}$ ,  $y = \text{ПB}$ .

|     |    |      |        |     |     |     |     |   |     |
|-----|----|------|--------|-----|-----|-----|-----|---|-----|
| ПxA | 1  | +    | ПA     | Пx2 | Пx0 | ПxA | ×   | — | Пx1 |
| ÷   | ПB | K{x} | Fx = 0 | 00  | ПxA | ПxB | C/P |   |     |

Перед счетом вводим  $37 = \text{П0}$ ,  $53 = \text{П1}$ ,  $201 = \text{П2}$ ,  $0 = \text{ПA}$ . В ходе вычислений величина  $y$  поступает в регистр  $Y$ , а величина  $x$  — в регистр  $X$ .

В результате счета получаем  $x = 4$ ,  $y = 1$ .

## 8. Циклы и косвенные операции

В случае повторения какого-нибудь фрагмента программы заданное число раз используют операторы циклов FL0, FL1, FL2, FL3, после которых указывают адрес перехода на начальный оператор повторяемого фрагмента. Задаваемое число повторений цикла вводится заранее в регистры 0, 1, 2, 3. Оператор цикла работает в качестве счетчика-анализатора, выполняя работу обычного арифметического оператора, вычитающего 1 из содержимого регистра цикла, и работу условного оператора, проверяющего равенство нулю результата вычитания. Если содержимое регистра оператора цикла после уменьшения на 1 не равно нулю, то происходит переход по адресу, стоящему за оператором цикла; если же равно нулю, то осуществляется переход к следующему оператору программы.

Согласно блок-схеме рис. 8 первой операцией программы является вычисление  $n(n-1)(n-2) \dots$ . Оператор цикла выполняет два зада-

ния сразу: вычисляет число, на единицу меньшее, чем  $\text{П}x0$ , и анализирует его на равенство нулю. В случае  $\text{П}x0=0$  на индикатор вызывается содержимое регистра  $\text{П}x5$  с дальнейшей остановкой программы. Ясно, что в  $\text{П}x5$  в этот момент будет находиться число  $n!$  Программа имеет вид

П0 1 П5  $\text{П}x0 \text{ П}x5 \times \text{П5}$  FL0 03  $\text{П}x5$   
С/П БП 00

Перед первым пуском программы следует установить счетчик клавиш  $\text{B}/0$  в начальное состояние. Затем наберите какое-нибудь число  $k$  на индикаторе. Программа вычислит его значение  $k!$  Так,

$$5! = 120 \quad 10! = 3628800 \\ 30! = 2.6525284 \cdot 10^{32} \quad 50! = 3.0414086 \cdot 10^{64}.$$

Наличие в микрокалькуляторе четырех операторов организации циклов значительно облегчает составление программ для вычисления всевозможных сумм и произведений.

Рассмотрим еще пример на вычисление суммы

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}.$$

Цикл организуем в L3. Блок-схема программы приведена на рис. 9. Сумма вычисляется справа налево, т. е. к  $k$ -му члену суммы прибавляется  $(k-1)$ -й и так до первого. Оператор цикла снова выполняет

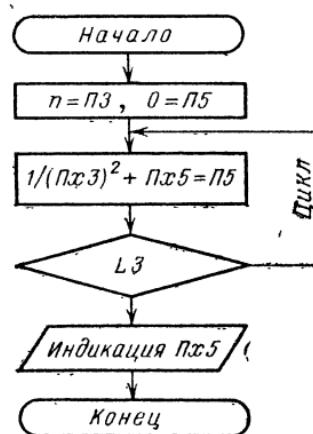
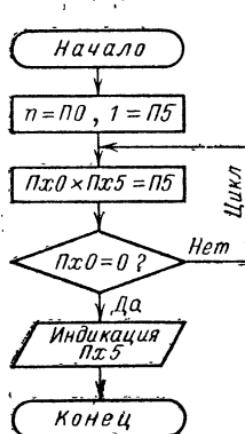


Рис. 8

Рис. 9

две функции: вычисляет число, на единицу меньшее того, что в  $\text{П}x3$ , и анализирует его на нуль. На индикаторе микрокалькулятора появится значение суммы, хранящейся в регистре  $\text{П}x5$ , когда  $\text{П}x3$  станет равным нулю. В этом случае произойдет и остановка автоматический

вычислений по программе. Текст программы следующий:

П3 Cx П5 Пх3 Fx<sup>2</sup> F1/x Пх5 + П5 FL3  
03 Пх5 С/П БП 00

После ввода в индикаторный регистр X числа 30 и запуска программы, получим

$$\sum_{k=1}^{30} \frac{1}{k^2} = 1.6121501.$$

Время вычисления — около 1 мин.

Оператор цикла имеет одну особенность, о которой не следует забывать. В конце работы цикла в регистре, посредством которого он был осуществлен, находится не 0, а 1. В данном случае, набрав на клавиатуре Пх3, вы получите на индикаторе 1. Это можно объяснить лишь так: число в регистре Пх3 при обращении к оператору цикла сначала модифицируется в микрокалькуляторе «устно» и проверяется условие равенства нулю; если модифицированное число не 0, то оно записывается в регистр П3; если же модифицированное число равно 0, то после перехода к следующему оператору после цикла нуль в П3 не заносится, отчего там остается его прежнее значение: 1.

В микрокалькуляторе допускается использование внутренних циклов, расположенных один внутри другого. Необходимость в них, к примеру, возникает при вычислении двойных рядов типа

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij}.$$

В этом случае внутренний цикл должен целиком лежать во внешнем. В программе перед началом каждого внутреннего цикла следует вводить значение максимального индекса в соответствующую ячейку памяти. В циклах индексы изменяются с единичным шагом и последним индексом, как уже говорилось, будет единица. Рассмотрим для примера вычисление тройной суммы

$$S = \sum_{i=1}^7 \sum_{j=1}^8 \sum_{k=1}^9 ij^2 \sin k.$$

Блок-схема данной программы приведена на рис. 10. Сначала меняется значение последнего индекса суммы —  $k$ , затем меняется индекс  $j$ , а индекс  $i$  меняется в последнюю очередь.

Значение суммы будем хранить в регистре П9. Начальное значение суммы  $S=0$ . Цикл по  $i$  — L0, по  $j$  — L1, по  $k$  — L2. Тогда программа имеет вид

7 П0 8 П1 9 П2 Пх0 Пх1 Fx<sup>2</sup> ×  
Пх2 F sin × Пх9 + П9 FL2 06 FL1 04  
FL0 02 Пх9 С/П

Ответ:  $S = 4475.331$ , время счета — около 35 мин. Максимальные значения индексов могут вызываться в ходе программы из других адресуемых регистров.

Двойные, а особенно тройные циклы могут считаться очень долго — несколько часов. Все зависит от вида вычислений, происходящих в самом внутреннем цикле. Поэтому количество операторов внутри цикла должно быть наименьшим.

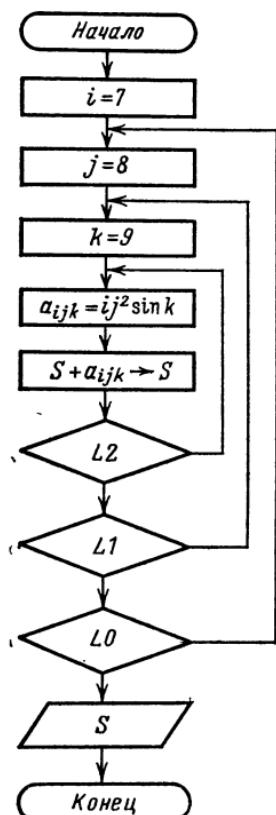


Рис. 10

Использование *косвенных* условных и безусловных переходов делает программу более гибкой. Если в регистре П7 находится число 28, то оператор К БП 7 полностью аналогичен по действию БП 28, но занимает один шаг в программе. Во время косвенного обращения содержимое регистров Пх0, Пх1, Пх2, Пх3 модифицируется, уменьшаясь на единицу, содержимое Пх4, Пх5, Пх6, наоборот, увеличивается на единицу, а у остальных регистров не изменяется. Во время косвенных безусловных переходов передача управления осуществляется по видоизмененному модифицированному адресу. Поэтому после ввода в регистры чисел

$$7 = \text{П}0, \quad 70 = \text{П}6, \quad 55 = \text{П}8,$$

действие оператора К БП 0 аналогично БП 06, К БП 6 — БП 71, К БП 8 — БП 55.

В случае косвенного условного перехода при выполнении логического условия программа продолжается в естественном порядке после логического оператора. Если же условие не выполняется, то, как и в

случае безусловных переходов, модифицируется адрес в регистре, а затем управление передается по этому видоизмененному адресу. Поэтому если в регистры введены числа 52 = ПВ, 54 = П4, то действие  $Kx = 0$  В аналогично  $Fx = 0$  52, а  $Kx = 0$  4 —  $Fx = 0$  55.

В случае косвенного перехода адрес может изменяться, что в какой-то мере расширяет эвристические возможности микроЭВМ. Ниже приведены 9 функций:

$$\begin{aligned} f_1(x) &= x^2, \\ f_2(x) &= 2x^2, \\ f_3(x) &= x^3 + x^2, \\ f_4(x) &= 2x^3 + x^2, \\ f_5(x) &= x^4 + x^3 + x^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}f_6(x) &= 2x^4 + x^3 + x^2, \\f_7(x) &= x^5 + x^4 + x^3 + x^2, \\f_8(x) &= 2x^5 + x^4 + x^3 + x^2, \\f_9(x) &= x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2.\end{aligned}$$

Необходимо, чтобы при каждом следующем шаге вычислений микрокалькулятор находил при данном  $x$  значение первой, второй и так вплоть до девятой функции включительно. Задача составления программы одновременно для всех функций на первый взгляд кажется невыполнимой, поскольку микрокалькулятор имеет всего 105 ячеек памяти. Но трудность эта кажущаяся. Для вычисления функций используются фрагменты

$$x = \text{П5}$$

|     |            |            |            |          |          |          |          |          |          |          |     |
|-----|------------|------------|------------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|-----|
| Пх5 | $\uparrow$ | $\uparrow$ | $\uparrow$ | $\times$ | C/П      |          |          |          |          |          |     |
| Пх5 | $\uparrow$ | $\uparrow$ | $\uparrow$ | $+$      | $\times$ | C/П      |          |          |          |          |     |
| Пх5 | $\uparrow$ | $\uparrow$ | $\uparrow$ | $\times$ | $+$      | $\times$ | C/П      |          |          |          |     |
| Пх5 | $\uparrow$ | $\uparrow$ | $\uparrow$ | $+$      | $\times$ | $+$      | $\times$ | C/П      |          |          |     |
| Пх5 | $\uparrow$ | $\uparrow$ | $\uparrow$ | $\times$ | $+$      | $\times$ | $+$      | $\times$ | C/П      |          |     |
| Пх5 | $\uparrow$ | $\uparrow$ | $\uparrow$ | $+$      | $\times$ | $+$      | $\times$ | $+$      | $\times$ | C/П      |     |
| Пх5 | $\uparrow$ | $\uparrow$ | $\uparrow$ | $\times$ | $+$      | $\times$ | $+$      | $\times$ | $+$      | $\times$ | C/П |
| Пх5 | $\uparrow$ | $\uparrow$ | $\uparrow$ | $\times$ | $+$      | $\times$ | $+$      | $\times$ | $+$      | $\times$ | C/П |

Как видим, в любом случае программа начинается с Пх5↑↑↑↑, а дальше чередуются действия умножения и сложения и заканчивается все оператором останова. Любая следующая программа содержит в себе все предыдущие. Поэтому по последней программе можно найти все функции  $f_1(x) - f_9(x)$ . Ведь для вычисления  $f_1(x)$  выполнение программы необходимо начать с последнего знака умножения, для  $f_2(x)$  с предпоследнего оператора, т. е. оператора «+», для  $f_3(x)$  — еще на один оператор раньше начать счет и т. д. Обычный безусловный переход осуществляется по фиксированному адресу. А в случае косвенного есть возможность использования видоизменяющегося, т. е. уменьшающегося на единицу адреса. В качестве регистра, посредством которого будет осуществляться безусловный переход, выберем Пх2. Программа имеет очень компактный вид:

|           |          |     |          |     |            |            |            |      |          |
|-----------|----------|-----|----------|-----|------------|------------|------------|------|----------|
| П5        | 1        | 8   | П2       | Пх5 | $\uparrow$ | $\uparrow$ | $\uparrow$ | КБП2 | $\times$ |
| $+$       | $\times$ | $+$ | $\times$ | $+$ | $\times$   | $+$        | $\times$   | C/П  | БП       |
| <u>04</u> |          |     |          |     |            |            |            |      |          |

Перед началом счета счетчик устанавливается с помощью оператора В/О в начальное положение. На клавиатуре набирается число  $x$  и дальше следует нажимать только клавишу пуска программы. На индикаторе будут последовательно высвечиваться значения функций  $f_1(x), f_2(x), \dots, f_9(x)$ .

На этом возможности косвенных операций далеко не исчерпываются. С помощью оператора косвенной записи КП4 можно протабулировать

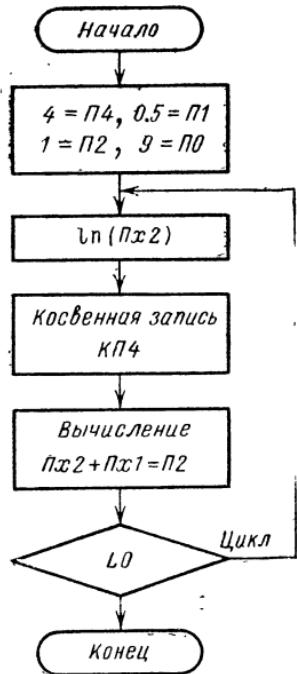


Рис. 11

выполняются по программе

|     |     |     |      |     |    |     |   |    |      |
|-----|-----|-----|------|-----|----|-----|---|----|------|
| 4   | П4  | 2   | F1/x | П1  | 9  | П0  | 1 | П2 | F ln |
| КП4 | Px2 | Px1 | +    | FL0 | 08 | C/P |   |    |      |

Счет длится около 30 с.

Оператором косвенного вызова можно выводить на индикатор число, хранящееся в очередном регистре памяти. Для последователь-

функцию  $\ln x$  так, чтобы очередные значения функции в ходе выполнения программы автоматически последовательно заносились в регистры адресуемой памяти. При этом в регистре 4 происходит модификация содержимого и запись числа, находящегося в регистре X в адресуемую память с модифицированным индексом из Пx4. Регистры A, B, C, D, E имеют соответственно индексы 10, 11, 12, 13, 14. Последовательные значения функции будут записаны в регистры П5, П6, ..., ПД, ПЕ.

Пусть  $x$  принимает значения 1, 1.5, 2, 2.5, 3, 3.5, 4, 4.5, 5. Нас интересуют девять значений функции  $\ln x_i$ . После ввода в регистр П1 числа 0.5 мы при каждом следующем цикле вычислений будем прибавлять его к значению  $x$  согласно блок-схеме (рис. 11). В программе используется также оператор цикла L0, останавливающий вычисления, когда  $Px0=1$ . Информация по окончании вычислительного процесса должна распределяться согласно табл. 12. Вычисления

Таблица 12

| $x$ | $\ln x$                        | Регистр | $x$ | $\ln x$     | Регистр |
|-----|--------------------------------|---------|-----|-------------|---------|
| 1.0 | 0.0                            | Px5     | 3.5 | 1.252 763   | PxA     |
| 1.5 | 4.054 651 · 10 <sup>-1</sup>   | Px6     | 4.0 | 1.386 294 4 | PxB     |
| 2.0 | 6.931 471 7 · 10 <sup>-1</sup> | Px7     | 4.5 | 1.504 077 4 | PxC     |
| 2.5 | 9.162 907 · 10 <sup>-1</sup>   | Px8     | 5.0 | 1.609 437 9 | PxD     |
| 3.0 | 1.098 612 2                    | Px9     |     |             |         |

ногого вывода чисел, начиная с пятого регистра, если запись в командную память осуществляется с начального адреса, служит программа

4 П4 КPx4 С/П 1 3 — Fx=0 02 F1/x

Оператор К Пх4 сначала вызовет на индикатор содержимое пятого регистра; затем шестого и так до тринадцатого, т. е. до регистра Д. Программа устроена так, что если после этого вы еще раз запустите программу оператором С/П, то на индикаторе вследствие некорректной операции деления на 0 появится слово ЕГГОГ. Оно будет означать, что ваше действие ошибочное, так как все числа уже выведены.

Обратите внимание на следующий важный момент: сам оператор цикла никоим образом не влияет на содержимое операционных регистров X, Y, Z, T. Это свойство использовано в программе табулирования функции  $\ln(x)$ . Число  $x$  в регистре X после действия оператора FL0 08 сохраняется. Косвенный ввод-вывод числа из адресуемого регистра смещает информацию в стеке точно также, как при обычном вводе-выводе.

Много применений можно найти косвенным операциям, делающим программу более гибкой и компактной. Некоторые из них бывают очень полезны при отладке и редактировании программ.

## 9. Подпрограммы

Обычно даже в сравнительно простой программе один и тот же фрагмент может повторяться несколько раз. Тогда есть смысл выделить его отдельно в подпрограмму-процедуру и в нужный момент делать к нему обращение. Оператор обращения к подпрограмме занимает два шага программы. Второй шаг указывает адрес начала подпрограммы. Вынесенный фрагмент должен заканчиваться оператором В/0 (возврат), который обеспечивает переход к оператору, стоящему вслед за оператором обращения к подпрограмме в основной программе. Подпрограммы позволяют значительно сократить общую длину программы на программируемом микрокалькуляторе.

Бывает и так, что в подпрограмму приходится выносить функцию, значения которой при разных значениях аргумента используются в основной программе, к примеру, при численном интегрировании методом трапеции или Симпсона. В этом случае подпрограмма позволяет, не меняя текст программы, вводить различные функции, записывая их после основной программы. При необходимости одну подпрограмму — функцию можно стереть, а на ее место записать новую. Тем более,

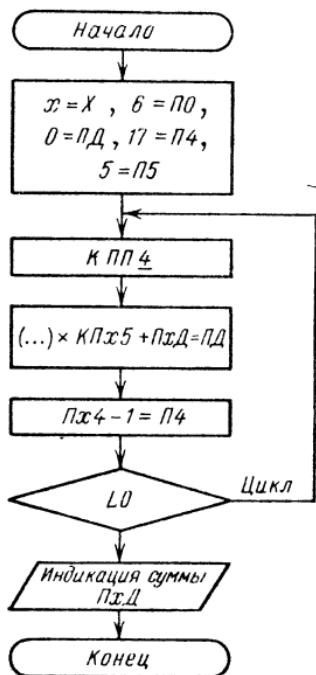


Рис. 12

что адрес, с которого она начинается, легко определить: ведь он указан в основной программе после соответствующего оператора ПП. Глубина проникновения подпрограмм друг в друга не должна превышать пяти, так как при большем количестве не может осуществляться возврат к предшествующей подпрограмме, так как адрес выхода не запоминается. «Глубокие» подпрограммы удобно использовать при решении задач, где необходимо делать всевозможные переборы и перестановки.

Допускается косвенное обращение к подпрограмме. Занесем в регистр А число 10. Действие оператора ПП А будет аналогично ПП 10. Косвенное обращение осуществляется по модифицированному адресу.

Пусть необходимо вычислить значение функции

$$y = 1029(x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x) + 530(x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x) + \\ + 740(x^4 + x^3 + x^2 + x) + 403(x^3 + x^2 + x) + 111(x^2 + x) + 2x.$$

Данная функция обладает определенным видом симметрии. Поэтому вычисление этой функции можно записать в компактном виде Коэффициенты перед скобками введем последовательно в адресуемые регистры:

$$1029 = \text{П6}, \quad 530 = \text{П7}, \quad 740 = \text{П8}, \quad 403 = \text{П9}, \quad 111 = \text{ПА}, \quad 2 = \text{ПВ}.$$

Их содержимое мы будем вызывать с помощью пятого регистра. В регистр 4 перед программой введем число 23, с помощью которого будут выполняться вычисления в подпрограмме, начиная с нужного адреса. Число действий в скобках сокращается, поэтому адрес подпрограммы при каждом обращении увеличивается на 2 единицы, причем одна единица добавляется при непосредственном обращении к подпрограмме, а другая посредством оператора К Пх4.

Накопление суммы происходит в регистре D. Цикл L0 осуществляет выход программы на оператор останова после прибавления последнего члена суммы. Блок-схема программы приведена на рис. 12. Достаточно сложной функции соответствует очень простая программа:

|   |      |    |      |      |           |     |     |     |    |
|---|------|----|------|------|-----------|-----|-----|-----|----|
| ↑ | ↑    | ↑  | КПП4 | КПх5 | ×         | ПxD | +   | ПД  | Cx |
| + | КПх4 | Cx | +    | FL0  | <u>03</u> | ПxD | C/P | ×   | +  |
| × | +    | ×  | +    | ×    | +         | ×   | +   | B/0 |    |

Величина  $x$  перед счетом вводится в регистр X. В течение счета всей программы она хранится в регистре T. При  $x=1$  в результате счета, который длится около 30 с, получаем ответ: 13 217.

Если бы мы не использовали косвенного обращения, то пришлось бы делать алгебраические выкладки для упрощения функции  $Y(x)$ , чтобы она вместилась в командную память микрокалькулятора.

Далеко не в каждой программе возможно использование косвенного обращения, как правило, оно возможно в случае выявления какой-либо симметрии в вычислениях.

Заметим, что в подпрограмме может стоять любой оператор, в том числе и оператор С/П. Но если программа остановилась на нем и

нужно установить счетчик в нулевое положение, то клавишу В/0 следует нажать дважды: один раз для выхода из подпрограммы, второй раз для перехода на начальный адрес программы.

## 10. Отладка и редактирование программы

Проверку правильности выполнения действий на программируемом микрокалькуляторе проще всего осуществить в потактовом режиме счета, нажимая клавишу ПП. При каждом ее нажатии выполняется один шаг программы. Тем самым оказывается возможным проверить правильность выполнения программы в действии, сравнив ваши задуманное и реальные математические вычисления. Ведь все стандартные операции в потактовом режиме выполняются точно так же, как и по программе в автоматическом режиме. При этом при нажатии С/П программа выполняется начиная с шага, на котором была остановлена программа или закончена ее проверка или ввод.

Безусловный переход, например БП 44, в потактовом режиме выполняется на два счета. При первом нажатии клавиши на индикаторе ничего не меняется, а при втором — высвечивается результат действия оператора, на который совершен переход, т. е. действие оператора с адресом 45. Хотя в программной памяти операторы перехода вроде К БП А занимают один шаг, при потактовом прохождении программы выполняются они по-прежнему на два счета.

Иногда в результате счета на индикаторе появляется слово ЕГГОГ, и программа останавливается. Оно указывает на ошибку, вызванную некорректной операцией. Это может быть в случаях, когда результат математических действий оказывается больше, чем  $9.9999999 \cdot 10^{99}$ , функция взята от аргумента, выходящего за пределы области допустимых значений аргумента данной функции и др. Чтобы узнать, что не «понравилось» микрокалькулятору, нужно воспользоваться оператором F Bx и, перейдя в режим программирования, вы увидите код некорректной операции. Он находится на месте кода предыдущей операции. Попутно заметим, что оператор Fe<sup>x</sup> при  $x < -231$  и оператор F 10<sup>x</sup> при  $x < -100$ , вместо нуля дают ошибку и аварийный останов. Вызвано это тем, что вычисление  $e^{-x}$  осуществляется по правилу  $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$ , а во время вычисления  $e^x$ , когда  $x > 231$ , возникает аварийный останов. То же касается и вычисления 10<sup>x</sup> при  $x > 100$ .

Если в конце программы вместо оператора С/П допущена какая-нибудь некорректная операция, например Cx F 1/x, ответ задачи от этого не изменится.

Если на индикаторе стоит ЕГГОГ, а вы нажали С/П, запустив программу на дальнейший счет, то первый оператор в программе не будет выполнен, а выполнение программы продолжится со следующего оператора. Естественно возникает вопрос, как в таком случае будут выпол-

няться двухшаговые операторы, например, если следующий оператор БП 15. Оказывается, что будет выполнен оператор F 10<sup>x</sup>, имеющий согласно табл. 11 код 15, а дальше программа будет выполняться, начиная с оператора, стоящего после БП 15. Это свойство распространяется на подпрограммы и условные переходы.

Если после появления слова ЕГГОГ вы его стерли оператором Сх, то дальнейший счет пойдет по обычным правилам.

Некоторые микрокалькуляторы МК-54 и БЗ-34 «не понимают» простой арифметической операции — (число — 10<sup>-1</sup>), т. е. после выполнения операции

1 0 П2 Пх2 1 ВП 1 /—/ — /—/

вместо правильного — 9.9 на индикаторе высвечивается 10. Дело в том, что для этих микрокалькуляторов операция /—/—/—/ некорректна. Действие этой операции равносильно пустому оператору и стиранию числа, находившегося в регистре Х до занесения в него числа 1 ВП 1. Чтобы избежать подобной трудности, вычисление следует производить по другой схеме: (10<sup>-1</sup> — число), т. е.

1 0 П2 Пх2 1 ВП 1 /—/ ↔ —

Теперь ответ будет правильным: — 9.9. Трудность такого типа возникает лишь в ходе вычислений по программе. Если же вы выполняете действия вручную или проверяете программу путем потактового прохождения, то микрокалькулятор выполняет все действия правильно.

Операция Сх ВП дает в результате единицу. Это можно использовать в программах.

Но вернемся к вопросу об отладке программ. Для одношагового передвижения по записи программы в режиме программирования предусмотрены клавиши  $\overrightarrow{ШГ}$  — шаг вперед и  $\overleftarrow{ШГ}$  — шаг назад. Если интересующий нас фрагмент находится далеко, то для передвижения на большее количество шагов нужно в режиме работы оператором БП... перейти на нужный адрес, после чего вернуться в режим программирования.

Если нужно исключить оператор, ошибочно занесенный в программную память, не затрагивая последующую часть программы, вместо него вводят оператор F НОП — нет операции. Наряду с НОП можно применять также отсутствие оператора с кодом 00. В этом возникает необходимость, если вы в процессе отладки хотите на месте пустых операторов записать те или иные действия.

Если счет длится значительно больше положенного времени, то это может быть вызвано зацикливанием программы. Причин для зацикливания может быть очень много. Например, когда в программе отсутствует оператор С/П или условный или безусловный переход не обеспечивает выход на такую ветку программы, которая заканчивалась

бы оператором останова. Может случиться и так, что в программе с циклом L0 в регистр П0 попадает дробное или отрицательное число. В этом случае программа также зациклится. Если в регистр попадет отрицательное число, то индекс в цикле никогда не станет равным нулю, так как, вычитая из отрицательного числа единицу, мы никогда не получим 1. Вычитая из дробного числа 1, мы также никогда 1 не получим. Однако если число в регистре больше 1, но меньше 2, то, хотя при обращении к оператору цикла оно не станет равным 0, счет выйдет из зоны действия цикла. Число в регистре при этом не изменится. Если же число в регистре больше 2, то от него будет взята целая часть и вычтена единица, а результат поступит в соответствующий регистр, посредством которого организован цикл. Если в регистр поступило отрицательное число, то при обращении к оператору цикла оно на самом деле не уменьшается на единицу, а преобразуется по тем же правилам, что и в результате операции К Пх ... Таким образом, для нормальной работы цикла необходимо, чтобы переменный индекс принимал целочисленные значения, лежащие в интервале

$$0 \leqslant x \leqslant 99\,999\,999.$$

Если в регистре П0 находится 0, а вы набрали К Пх0, Пх0, то на индикаторе появится число — 99 999 999. Далее после КПх0, Пх0 будет — 99 999 998. Одним словом, после косвенной операции индексы убывают по абсолютной величине, но сами по себе растут и приближаются к нулю. Эти числа-индексы ведут себя, как обычные десятичные числа, и с ними можно выполнять любые математические операции. Но не всякое число удается получить в регистре П0 в результате косвенных операций. Как бы вы ни старались, но после команды К Пх0 в регистре П0 никогда не окажется число — 15. Дело в том, что если вы занесли в регистр П0 некоторое отрицательное число —  $x$ , то после оператора К Пх0 в регистре П0 оно преобразуется по правилу

$$\begin{array}{llll} -99\,999\,999 & + & (10 - x) & \text{если } 1 \leqslant x \leqslant 9 \\ -99\,999\,999 & + & (100 - x) & \text{если } 10 \leqslant x \leqslant 99 \\ -99\,999\,999 & + & (1000 - x) & \text{если } 100 \leqslant x \leqslant 999 \\ -99\,999\,999 & + & (10000 - x) & \text{если } 1000 \leqslant x \leqslant 9999 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -99\,999\,999 & + & (10^8 - x) & \text{если } 10^7 \leqslant x \leqslant 99\,999\,999 \end{array}$$

Поэтому после операций — 15 П0 КПх0 Пх0 на индикаторе будет число — 99 999 914. Выше верхнего предела возможных значений индекса нет смысла заходить, поскольку вычисления с получаемыми числами не подчиняются обычным законам математики. В этом легко убедиться. Наберите 99 999 999 — П4. После КПх4 Пх4 на индикаторе появится число 200 000 000, хотя  $99\,999\,999 + 1 = 100\,000\,000$ .

Если в каком-либо регистре находится число, большее 1, то при косвенном обращении посредством этого регистра происходит изменение

ние его содержимого: от него остается целая часть. Поэтому при помощи фрагмента

$$\uparrow \text{ I } + \text{ П0 КП}x0 \text{ П}x0$$

можно выделять целую часть положительных чисел на микрокалькуляторах МК-54 и Б3-34, у которых нет встроенной функции выделения целой части.

Обратите внимание, что команды КП $x\uparrow$  и КП $\uparrow$  у микрокалькуляторов МК-54, Б3-34 делают косвенную операцию посредством регистра 0, при этом модификации его содержимого не происходит в отличие от КП $x0$  и КП0.

Микрокалькуляторы МК-61 и МК-52 по командам КП $x\uparrow$  и КП $\uparrow$  делают косвенную операцию посредством регистра Е. Эти операторы полностью аналогичны операторам КП $xE$  и соответственно КПЕ.

Если содержимое регистров П0-П6 меньше единицы, но больше 0, то при выполнении команд КП0—КП6 и КП $x0$ —КП $x6$  в этих регистрах происходят небольшие изменения их содержимого. В частности, при

$$10^{-2} \leq x \leq 9.999998 \cdot 10^{-2}$$

приведенные выше команды уменьшают содержимое этих регистров на  $10^{-9}$ . А в случае команд КП4—КП6 и КП $x4$ —КП $x6$  происходит увеличение содержимого на  $10^{-9}$ .

Во время отладки долго считаемой программы при отсутствии в ней тригонометрических функций можно делать выборочную остановку счета при помощи группы операторов:

$$\dots \text{ П0 } 4 \text{ F sin F}x < 0 \dots \overbrace{\text{ П}x0 \text{ С/П}}^{\downarrow} \dots$$

Для этого, установив переключатель градусной меры в положение «градус», а группу отладочных операторов записав в место программы, подлежащее контролю, запускают счет программы. Пока переключатель угловой меры стоит в положении «градус», счет по программе идет в естественном порядке. Но стоит только во время счета переключить микрокалькулятор в положение «радиан», как изменится порядок выполнения программы и счет остановится на операторе С/П, входящем в группу отладочных операторов. При этом на индикаторе будет число, полученное перед отладочным фрагментом. Для последующего запуска программы необходимо установить переключатель в положение «градус» и нажать клавишу С/П.

## 11. Способы записи программы

У программируемых микрокалькуляторов МК-54, МК-61, МК-52, Б3-34 операторы нумеруются в десятичной системе счисления, что очень удобно. Если в строке записывать по 10 операторов, а строки

Рис. 14

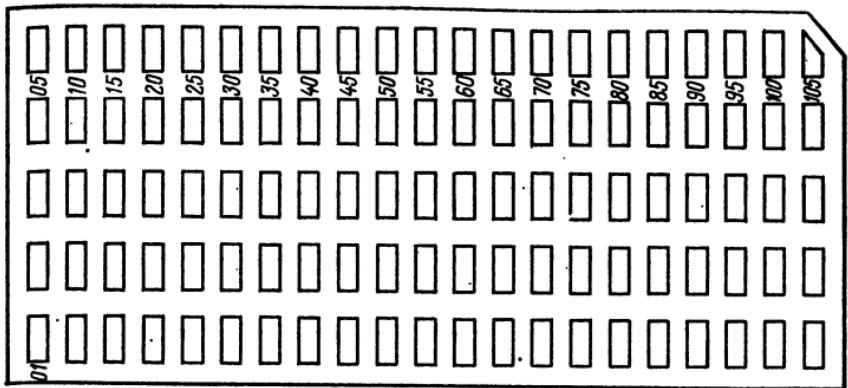
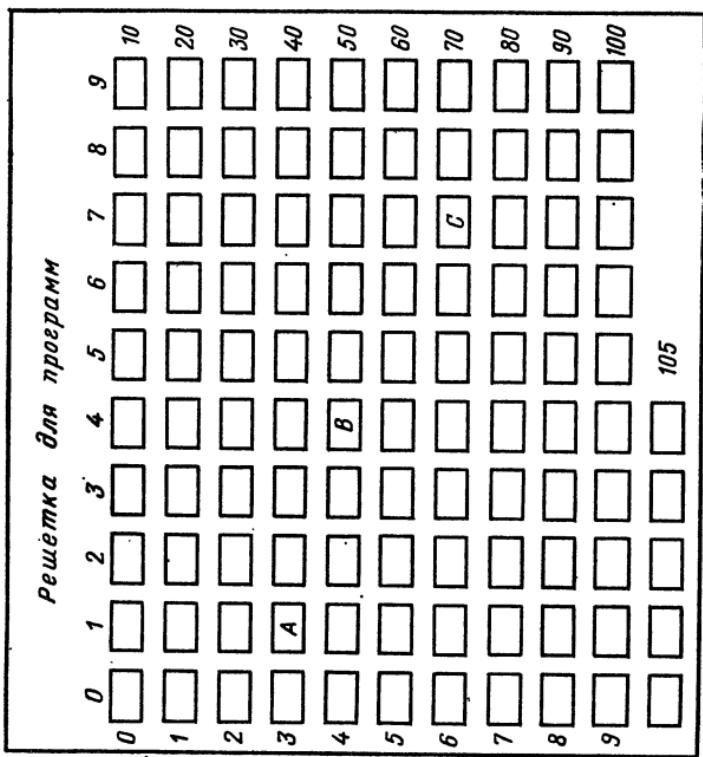


Рис. 13



располагать одну под другой, то для любого оператора программы легко найти его адрес: первая цифра адреса — номер строки, считая сверху вниз, вторая — номер столбца, считая слева направо. Самая верхняя строка нулевая, затем первая, вторая и так вплоть до десятой. Самый левый столбец нулевой, затем первый, второй и так вплоть до девятого.

Для такой записи используют решетку (рис. 13). Вверху указывают номера столбцов, а слева — номера строк. Легко определить, что оператор А имеет адрес 31, В — 44, С — 67. Такая форма записи наиболее распространенная.

Если у нас скопилось много программ и вы хотите создать библиотеку, которой было бы удобно пользоваться, то можете использовать решетку для записи программ на отработанных перфокартах, как показано на рис. 14. Программа пишется в прорези на чистой стороне отработанной перфокарты. На узкой стороне, где скошен уголок, записывается название программы. С обратной стороны пишут, какие данные необходимо занести в ячейки памяти; приводятся тестовые данные и примерное время счета. Перфокарты с программами собираются в колоду и образуют пакет прикладных программ. Каждая программа имеет свой номер. Самая верхняя карта должна содержать оглавление программ пакета.

## 12. Оптимизация программ

При составлении программ необходимо соблюдать принцип минимума возможных операций или действий. Это достигается удачным выбором алгебраической схемы вычислений, использованием всех возможностей стека и адресуемых регистров. Так, для вычисления

$$x^2(1+x^2+x)$$

используют такой фрагмент:

$$\text{ПxA 1} + \text{ПxA Fx}^2 + \text{FBx X},$$

где  $x = \text{ПA}$ .

Если в программе нужен счетчик, следует воспользоваться операторами КПх4, КПх5, КПх6.

Часто забывают о том, что при выполнении арифметических действий в регистре Т можно хранить какое-либо число или многократно его использовать.

Используя особенности работы циклов и косвенных обращений, можно создавать очень короткие и универсальные программы. Так, для вычисления  $n!$  удобна программа

$$\text{П0 FL0 04 C/P Пx0 X Fx=0 01 C/P},$$

которая в случае 0!, используя особенности цикла, дает 1.

Если для решения задачи не хватает адресуемых регистров, то нередко полезным оказывается пронормировать коэффициенты. Так, для

решения системы линейных уравнений

$$a_{11}x + a_{12}y = b_1,$$

$$a_{21}x + a_{22}y = b_2$$

можно оба уравнения разделить на коэффициенты при  $x$ :

$$x + \frac{a_{12}}{a_{11}}y = \frac{b_1}{a_{11}},$$

$$x + \frac{a_{22}}{a_{21}}y = \frac{b_2}{a_{21}}.$$

Вместо шести коэффициентов стало четыре и две единицы. А для единиц адресуемые регистры не нужны. Тем самым освободилось два адресуемых регистра. Однако нормировку не нужно использовать, если в ней нет острой необходимости, так как ее применение сказывается на точности результатов.

Если в программе какая-либо величина вычисляется одинаково несколько раз, ее нужно определить только один раз и занести в какую-либо ячейку памяти, а затем использовать уже готовый результат. Так, для вычисления

$$x = x_0 - \Phi_x' \frac{\Phi_0}{\Phi_x'^2 + \Phi_y'^2},$$

$$y = y_0 - \Phi_y' \frac{\Phi_0}{\Phi_x'^2 + \Phi_y'^2}$$

сначала вычисляется

$$a = \frac{\Phi_0}{\Phi_x'^2 + \Phi_y'^2},$$

а затем через  $a$  определяются все остальные величины:

$$x = x_0 - a\Phi_x',$$

$$y = y_0 - a\Phi_y'.$$

Для сокращения времени счета важное значение имеет выбор алгоритма вычисления. Определение числа сочетаний из  $n$  по  $m$  элементов можно выполнить двояко:

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}, \quad C_n^m = \frac{\prod_{k=0}^{m-1} (n-k)}{m!}.$$

Вычисление по второй формуле потребует меньшего количества фактических действий на микроЭВМ, поэтому тот же результат будет получен быстрее.

Если при составлении программы несколько операторов не вмещаются в адресуемую память микроЭВМ, то попробуйте изменить алго-

ритм вычисления или применить тот или иной указанный выше прием сокращения записи. Практика показывает, что если число «лишних» операторов меньше 5, то, как правило, их можно исключить. Помните заповедь программиста: «В любой программе можно выбросить как минимум один оператор, и при этом содержание программы не изменится».

### 13. Несколько слов о требованиях к тестам

*Тестом* называется совокупность исходных данных или группа операторов в вынесенной подпрограмме, с помощью которой в процессе счета проверяется правильность основной программы. Чтобы проверка была эффективной, тест должен удовлетворять следующим требованиям:

- 1) быть чувствительным, реагируя на любую самую мелкую ошибку в основной программе;
- 2) быть достаточно коротким;
- 3) должно быть указано время счета, чтобы в случае «зацикливания» программы это можно было легко обнаружить.

Рассмотрим эти требования на примерах. Ниже приведена программа для вычисления определителя второго порядка:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad a_{11} = \Pi_2, \quad a_{12} = \Pi_3, \\ a_{21} = \Pi_4, \quad a_{22} = \Pi_5.$$

$$\text{П}x2 \text{ П}x5 \times \text{ П}x3 \text{ П}x4 \times - \text{ С}/\Pi.$$

Взяв за основу тестовые данные  $a_{11}=1$ ,  $a_{12}=3$ ,  $a_{21}=0$ ,  $a_{22}=5$ , в ответе получим  $\Delta=5$ . Допустим, что программа набрана неправильно:

$$\text{П}x2 \text{ П}x5 \times \text{ П}3 \text{ П}x4 \times - \text{ С}/\Pi$$

или

$$\text{П}x2 \text{ П}x5 \times 3 \text{ П}x4 \times - \text{ С}/\Pi$$

Оказывается, что любая из этих неправильных программ в ответе тоже даст 5. Тем самым тест оказался нечувствительным к ошибке. Изменим данные:  $a_{11}=1$ ,  $a_{12}=3$ ,  $a_{21}=-4$ ,  $a_{22}=5$ . В результате счета по правильно набранной программе получим 17. Если теперь в программе будет допущена ошибка, то ответ получите неверный. Тест чувствительный.

Второе требование говорит об экономии операторов и о времени вычисления по тестовым данным. Если вы хотите интегрировать функцию численно методом Симпсона, то вам прежде всего необходимо проверить работу «шапки» программы, а подпрограмма-функция может быть любая. В качестве простейшей можно выбрать функцию  $f(x)=x$  или  $f(x)=x^2$ . Такие функции очень быстро набираются и быстро вычисляются в ходе счета программы. Нецелесообразно использовать в тестовых подпрограммах-функциях  $\ln x$ ,  $\lg x$ ,  $\sin x$ ,  $\cos x$ ,  $\tg x$ ,  $e^x$ ,  $10^x$  и тем более  $x^y$ , так как уж слишком долго придется ждать подтверждения правильности набранной программы.

Третье требование к тестам не нуждается в особых пояснениях. Единственное, что можно о нем сказать, что если время счета меньше 10 с, то его можно не указывать.

Если в основной программе встречаются числовые коэффициенты, как в численном интегрировании методом Симпсона, то подпрограмма-функция не должна оканчиваться числовым коэффициентом, например, 1, 2, 3, 10 и т. д. Иначе может случиться так, что после числа 1 в подпрограмме при выходе из нее будет стоять коэффициент 2, а микро-ЭВМ воспримет это как набор числа 12 вместо 1  $\uparrow$  2.

# Глава 2

## ОЦЕНКА ОШИБОК ВЫЧИСЛЕНИЙ

### 1. О погрешности вычислений

Результаты математических действий на микрокалькуляторе точны лишь в случае выполнения арифметических действий с целыми числами, причем их мантиссы состоят не более чем из восьми цифр. Поэтому подавляющее большинство вычислений является приближенным и неизбежно дает в результате ответ с некоторой погрешностью. С увеличением количества операций погрешность округления накапливается, что существенно уменьшает точность окончательного результата. Если промежуточные результаты попадут в область машинного нуля или бесконечности [(меньше  $10^{-89}$  или больше  $10^{89}$ ), то решение вообще может оказаться ошибочным. Обычно это происходит из-за неудачного выбора метода вычислений. Так, в примере

$$\frac{1}{1 - \sqrt{1 - (0.0001)^2}}$$

восьмиразрядный микрокалькулятор после вычисления разности под знаком радикала удержит всего восемь цифр:

$$1 - (0.001)^2 = 1 \quad \text{вместо} \quad 0.99999999,$$
$$\sqrt{1} = 1, \quad 1 - \sqrt{1} = 0, \quad \frac{1}{0} = \infty.$$

В результате вычислений на индикаторе появится переполнение, хотя приведенное выражение имеет вполне определенное числовое значение. Воспользовавшись разложением в ряд Тейлора при  $x \ll 1$

$$\frac{1}{1 - \sqrt{1 - x^2}} \approx \frac{2}{x^2},$$

при  $x = 0.0001$  получим

$$\frac{1}{1 - \sqrt{1 - (0.0001)^2}} \approx \frac{2}{(0.0001)^2} = 2 \cdot 10^6.$$

Погрешность полученного результата по сравнению с точным составляет  $10^{-7}\%$ , т. е. результат следует считать точным.

Встроенные функции микрокалькулятора вычисляют при помощи рядов или итерационных схем, а максимальная относительная погрешность

ность дана в инструкции к микрокалькулятору. При выполнении математических действий микрокалькулятор удерживает и девятую цифру мантиссы числа, а при выводе на индикатор результат округляет. У первых программируемых микрокалькуляторов округление сводилось к простому отбрасыванию этой цифры и лишь в 50 % случаев давало правильный результат. Более поздние программируемые микрокалькуляторы дают правильное округление в 90 % случаев. Так, можно получить, что

$$88\ 865\ 943 + 0.45 = 88\ 865\ 944.$$

А все дело в том, что микрокалькулятор анализирует последнюю справа цифру числа независимо от того, в каком разряде она стоит.

Точность получаемого в ответе числа зависит от количества и точности значащих цифр в исходных данных. Например, нам нужно сложить 451 и 3.34, причем оба числа измерены с погрешностью 1 %. Если формально выполнить сложение, то получим  $3.34 + 451 = 454.34$ . Но такой ответ означает, что мы получили наш результат с погрешностью не 1 %, а 0.01 %, чего, конечно, быть не может. При правильном учете погрешности результата мы получим 454.

Обычно приходится вычислять значение величины, зависящей от множества переменных  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , причем погрешности соответствующих величин известны:  $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n$ . Тогда, разлагая функцию в кратный ряд Тейлора и ограничившись первым порядком величин, получим

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) \approx f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) + \sum_{k=1}^n \frac{\partial f_0}{\partial x_k} \Delta x_k,$$

где  $x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0$  — точные значения параметров, а  $f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$  — точное значение функции. Тогда для общей абсолютной погрешности получим

$$\Delta = f(x_1, x_2, \dots, x_n) - f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) \approx \sum_{k=1}^n \frac{\partial f_0}{\partial x_k} \cdot \Delta x_k. \quad (2.1)$$

*Пределальная относительная погрешность* вычисляется по формуле

$$\delta_{np} = \frac{\Delta_{np}}{|f|} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial f_0}{\partial x_k} \frac{\Delta_k}{|f|} = \sum_{k=1}^n M_{fk} \Delta x_k, \quad (2.2)$$

где

$$M_{fk} = \frac{1}{|f|} \frac{\partial f_0}{\partial x_k}. \quad (2.3)$$

Так как

$$\delta_{np} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial f_0}{\partial x_k} \frac{\Delta_k}{|f|} = \sum_{k=1}^n \frac{x_k}{|f|} \frac{\partial f_0}{\partial x_k} \cdot \delta_k,$$

то, обозначив

$$S_{fk} = \frac{x_k}{|f|} \frac{\partial f_0}{\partial x_k}, \quad (2.4)$$

получим

$$\delta_{np} = \sum_{k=1}^n S_{fk} \delta_k. \quad (2.5)$$

Величины  $S_{fk}$  называют чувствительностями первого порядка к изменению величин  $x_k$  и выражают часто в процентах.

**Задача 1.** Дано ребро куба  $l = 1.5$  м, измеренное с погрешностью  $\Delta l = 1.5 \cdot 10^{-2}$  м. Определить объем куба  $V$  и относительную и абсолютную погрешности.

Решение.

$$V = l^3; \quad M_V = \frac{1}{l^3} \left( \frac{\partial V}{\partial x} \right)_{x=l} = \frac{1}{l^3} \cdot 3l^2 = 2,$$
$$\delta_{np} = M_V \cdot \Delta l = 2 \cdot 0.015 = 0.03.$$

Предельная относительная погрешность составляет 3 %

$$V = l^3 = 3.375.$$

Предельная абсолютная погрешность

$$\Delta_{np} = V \cdot \delta_{kp} = 3.375 \cdot 0.03 \approx 0.1.$$

Поэтому  $V = 3.4 \pm 0.1$  (м<sup>3</sup>).

**Задача 2.** Ток, протекающий по цепи и равный 1 А, измерен амперметром с погрешностью 5 %. Сопротивление внешней цепи, измеренное омметром с погрешностью 10 %, равно 250 Ом. Определить напряжение на внешней цепи, а также абсолютную и относительную погрешности результата.

Решение.

$$J = \frac{U}{R}; \quad U = J \cdot R = 250 \cdot 1 = 250 \text{ (В).}$$

Находим величины чувствительностей к изменениям параметров:

$$S_f(J) = \frac{J}{|JR|} \frac{\partial (JR)}{\partial J} = 1, \quad S_f(R) = \frac{R}{|JR|} \frac{\partial (JR)}{\partial R} = 1;$$

$$\delta_J = 0.05; \quad \delta_R = 0.1; \quad \delta_{np} = S_f(J) \cdot \delta_J + S_f(R) \cdot \delta_R = 0.15 = 15 \%,$$

$$\Delta_{np} = (JR) \cdot \delta_{np} = 250 \cdot 0.15 = 37.5,$$

$$U = 250 \pm 37.5 \text{ (В).}$$

Вероятность наихудшего сочетания параметров  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , приводящая к максимальным значениям погрешности, вычисляемым по приведенным выше формулам, при большом числе параметров  $n$  становится пренебрежимо малой. В таких случаях оценка погрешности результата по предельным значениям погрешностей исходных данных

оказывается завышенной. Более близкой к истинному значению погрешности является величина, полученная по формуле среднеквадратичного суммирования

$$\delta = \sqrt{\sum_{k=1}^n [S_{f_k} \cdot \delta_k]^2}. \quad (2.6)$$

Тогда для задачи о напряжении во внешней цепи относительная погрешность

$$\delta = \sqrt{(1 \cdot 0.05)^2 + (1 \cdot 0.1)^2} \approx 0.1118 \approx 11.2 \%,$$

откуда  $\Delta = (JR) \cdot \delta = 250 \cdot 0.112 \approx 28$ , а напряжение в цепи

$$U = 250 \pm 28 \text{ (В).}$$

Значения исходных данных какого-либо физического процесса могут быть определены с разной точностью в зависимости от постановки опыта. Поэтому нередко возникает и обратная задача об определении допустимых погрешностей исходных данных при заданной предельной погрешности результата вычислений. Для решения этой задачи обычно используют допущение о равенстве абсолютных погрешностей

$$\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3 = \dots = \Delta_n.$$

Тогда для наперед заданной предельной абсолютной погрешности результата допустимыми значениями абсолютных погрешностей исходных данных будут величины

$$\Delta_k \leq \frac{\Delta_{\text{пр}}}{\sum_{i=1}^n \left| \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \right) \right|}, \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (2.7)$$

Если функция, значение которой мы вычисляем, состоит из величин разных размерностей, то мы будем искать абсолютные погрешности каждой из них, считая предельные относительные погрешности равными.

**Задача 3.** Определить погрешность, с которой нужно измерить длину ребра куба  $l \sim 1.5$  м, чтобы объем его определить с погрешностью  $\Delta_V = 0.01$  м<sup>3</sup>.

**Решение.** Воспользовавшись формулой (2.7), получим

$$f = V = l^3; \quad \sum_{i=1}^1 \frac{\partial f}{\partial x_i} = 3l^2;$$

$$\Delta \leq \frac{\Delta_{\text{пр}}}{3l^2} = \frac{0.01}{3 \cdot 2.25} = 0.00148,$$

$$\Delta \leq 1.48 \text{ мм или } \Delta < 1.5 \text{ мм.}$$

## 2. Оценка погрешности эксперимента при помощи нормального распределения

Существенный вклад в погрешность окончательного результата вносит случайная ошибка, связанная с различного рода непредсказуемыми факторами. Случайную ошибку (погрешность) приходится учитывать в тонких физических экспериментах, к примеру, при определении фундаментальных физических констант. Случайный фактор обычно хорошо описывается нормальным распределением, поэтому им пользуются при оценке погрешности результатов измерения, когда искомую величину измеряют очень точными приборами.

Если:

- 1) число измерений относительно велико (более пяти);
  - 2) случайные отклонения одинаковой величины, но разного знака при большом количестве измерений равновероятны (условие симметрии кривой);
  - 3) большие по абсолютной величине погрешности встречаются реже, чем малые, т. е. с увеличением величины погрешности по абсолютной величине вероятность их появления уменьшается (условие убывания на бесконечность),
- то измеряемая в эксперименте величина описывается по нормальному закону. Плотность распределения вероятности ( $x$ ) имеет вид

$$f(x) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \exp \left\{ -\frac{(x - \bar{x})^2}{2\sigma^2} \right\}, \quad (2.8)$$

где  $\bar{x}$  — математическое ожидание случайной величины  $x$ ,  $\sigma^2$  — ее дисперсия.

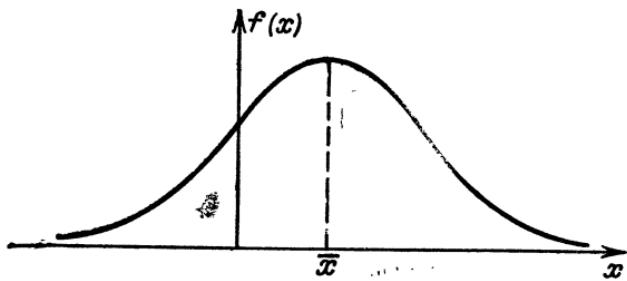


Рис. 15

Плотность распределения вероятности еще называют *нормальной функцией* или *гауссианой*. Для нее выполняется условие нормировки

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1. \quad (2.9)$$

Вид нормальной функции  $f(x)$  представлен на рис. 15. Она достигает максимума при  $x = \bar{x}$ , симметрична относительно ординаты, проходящей через эту точку, имеет две точки перегиба при  $x = \bar{x} \pm \sigma$  и асимптотически приближается к оси абсцисс. Из условия нормировки следует, что площадь, ограниченная нормальной функцией и осью абсцисс,

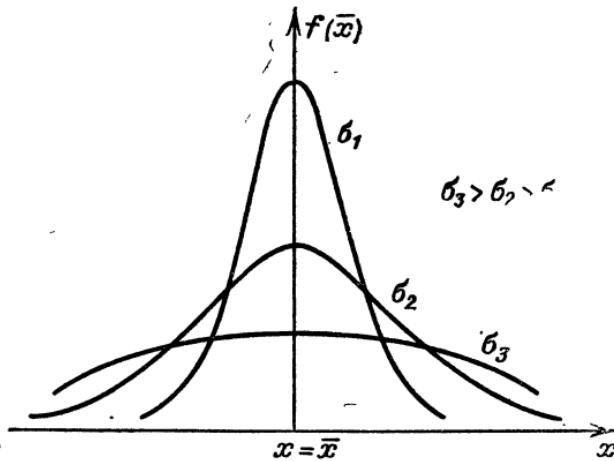


Рис. 16

равна 1. Поэтому при уменьшении параметра  $\sigma$  ордината  $f(\bar{x})$  увеличивается и кривая становится менее плавной, что видно из рис. 16.

Интегральная функция распределения случайной величины имеет вид

$$F(x) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x \exp \left\{ -\frac{(y - \bar{x})^2}{2\sigma^2} \right\} dy. \quad (2.10)$$

Интеграл не может быть выражен через элементарные функции.

Воспользовавшись интегральной функцией Лапласа

$$\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^z \exp \left\{ -\frac{(y - \bar{x})^2}{2\sigma^2} \right\} dy, \quad (2.11)$$

выражение легко можно привести к виду

$$F(x) = \frac{1}{2} \left[ 1 + \Phi \left( \frac{x - \bar{x}}{\sigma} \right) \right]. \quad (2.12)$$

Интегральная функция Лапласа нечетная:

$$\Phi(-k) = -\Phi(k). \quad (2.13)$$

Вероятность, что получаемая в измерениях величина  $x$  попадет в интервал  $(a, b)$ , на основании формул (2.10) — (2.12) равна

$$P(a, b) = \frac{1}{2} \left[ \Phi \left( \frac{b - \bar{x}}{\sigma} \right) - \Phi \left( \frac{a - \bar{x}}{\sigma} \right) \right]. \quad (2.14)$$

При вычислении  $P(a, b)$  можно обойтись без громоздких таблиц, если воспользоваться программой 1. Для определения значений функции Лапласа используется следующая аппроксимация:

$$\Phi(x) = 1 - (1 - C_1x + C_2x^2 + C_3x^3 + C_4x^4 + C_5x^5 + C_6x^6)^{-16},$$

где  $C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6$  — некоторые постоянные коэффициенты, причем  $x \geq 0$ . Если  $x < 0$ , то использовано свойство нечетности функции Лапласа.

**Программа 1. Вычисление  $P(a, b)$  при нормальном законе распределения.** Перед первым вычислением необходимо ввести числовые коэффициенты:

$$C_1 = 4.986735 \cdot 10^{-2} = \text{П1}; \quad C_2 = 2.114101 \cdot 10^{-2} = \text{П2};$$

$$C_3 = 3.277626 \cdot 10^{-3} = \text{П3}; \quad C_4 = 3.8004 \cdot 10^{-5} = \text{П4};$$

$$C_5 = 4.8891 \cdot 10^{-5} = \text{П5}; \quad C_6 = 5.383 \cdot 10^{-6} = \text{П6}.$$

Вводим исходные данные:  $a = \text{ПА}$ ;  $b = \text{ПВ}$ ;  $\sigma = \text{ПС}$ ;  $\bar{x} = \text{ПД}$ . В программе не участвуют регистры 0 и Е. Циклическое построение программы позволяет не набирать команду В/0 при вычислении очередного значения  $\Phi(x)$ . Погрешность  $\Delta \leq 7 \cdot 10^{-7}$ .

Если возникает необходимость найти значение функции Лапласа  $\Phi(k)$ , то в программе 1 следует задать  $\sigma = 1$ ,  $\bar{x} = 0$ ,  $a = -k$ ,  $b = k$ .

| $\text{PxB}$ | $\text{PxД}$ | $-$          | $\text{PxC}$    | $\div$                                   | $\text{ПП}$     | <u>23</u>                                 | $\text{П9}$   | $\text{PxA}$ | $\text{PxД}$      |
|--------------|--------------|--------------|-----------------|--|-----------------|---|---------------|--------------|-------------------|
| $-$          | $\text{PxC}$ | $\div$       | $\text{ПП}$     | <u>23</u>                                | $\text{Px9}$    | <u><math>\overline{\text{Px7}}</math></u> | $-$           | 2            | $\div$            |
| $\text{C/P}$ | $\text{БП}$  | 00           | $\text{П7}$     | <u><math>\overline{\text{П8}}</math></u> | $\text{Fx} < 0$ | <u>29</u>                                 | $/-$          | $\text{П7}$  | $\text{Px6}$      |
| $\times$     | $\text{Px5}$ | $+$          | $\text{Px7}$    | $\times$                                 | $\text{Px4}$    | $+$                                       | $\text{Px7}$  | $\times$     | $\text{Px3}$      |
| $+$          | $\text{Px7}$ | $\times$     | $\text{Px2}$    | $+$                                      | $\text{Px7}$    | $\times$                                  | $\text{Px1}$  | $+$          | $\text{Px7}$      |
| $\times$     | 1            | $+$          | $\text{F1/x}$   | $\text{Fx}^2$                            | $\text{Fx}^2$   | $\text{Fx}^2$                             | $\text{Fx}^2$ | 1            | $\leftrightarrow$ |
| $-$          | $\text{П7}$  | $\text{Px8}$ | $\text{Fx} < 0$ | <u>68</u>                                | $\text{Px7}$    | $/-$                                      | $\text{П7}$   | $\text{Px7}$ | $\text{B/0}$      |

Тест:  $a = 6$ ,  $b = 18$ ,  $\sigma = 3$ ,  $\bar{x} = 12$ .

Результат счета:  $P(a, b) = 0.9544995$ ,  $t_{\text{сч}} = 34$  с.

**Задача 1.** Определить вероятность события, что нормально распределенная случайная величина  $x$  принимает значения, лежащие в интервале (5, 10), если ее математическое ожидание  $\bar{x} = 8$ , а стандартное отклонение  $\sigma = 3$ .

**Решение.** По программе 1 получаем

$$P(5, 10) = 0.5888524.$$

**Задача 2.** Плотность вероятности случайной величины выражается соотношением

$$f(x) = h \exp \left\{ -\frac{(x-5)^2}{2\sigma^2} \right\}.$$

Найти коэффициент  $h$  и определить вероятность того, что при изменении величины  $x$  отклонится от своего значения не более чем на две единицы.

**Решение.** По виду функции делаем вывод, что мы имеем дело с нормальным распределением. Сравнивая

$$f(x) = h \exp \left\{ -\frac{(x-5)^2}{8} \right\}$$

и

$$f(x) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \exp \left\{ -\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma^2} \right\},$$

находим постоянные

$$\bar{x} = 5, \quad \sigma = 2, \quad h = \frac{1}{2 \sqrt{2\pi}}.$$

Отклонение на две единицы означает, что  $k\sigma = 2$ , откуда  $k = 1$ .

$$P(5-2, 5+2) = P(\bar{x}-\sigma, \bar{x}+\sigma) = \Phi(1).$$

Тогда, задавая в программе 1  $\sigma = 1$ ,  $\bar{x} = 0$ ,  $a = -1$ ,  $b = 1$ , получим

$$P(3, 7) = \Phi(1) = 0.6826896$$

или  $P(3, 7) \approx 68\%$ .

Вернемся к оценке погрешности экспериментальных данных. После  $n$  измерений мы получим серию чисел  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . Среднеквадратическое значение выборки, стандартное отклонение и дисперсию случайных величин, получаемых в ходе эксперимента, можно найти по формулам:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i, \quad (2.15)$$

$$D(\Delta x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 - (\bar{x})^2, \quad (2.16)$$

$$\sigma = \sqrt{D(\Delta x)}. \quad (2.17)$$

Параметр  $\sigma$  называют еще *среднеквадратической* или *средней погрешностью измерения*. Вероятность того, что случайная погрешность по абсолютной величине не превышает средней, равна

$$P(-\sigma \leq x \leq \sigma) = \Phi(1) \approx 68\%.$$

Формулы для обработки результатов измерения легко запрограммировать. Программа 2 позволяет находить  $\bar{x}$  и  $\sigma$  при любом количестве измерений. Она полуавтоматическая: данные  $x_i$  вводятся в ходе выполнения программы во время промежуточных остановок.

**Программа 2. Вычисление среднего  $\bar{x}$  и стандартного отклонения  $\sigma$ .** Перед работой счетчик клавиш В/0 устанавливается в начальное положение. Набирается количество данных  $n$  и нажимается клавиша

виша запуска. Затем набирается число  $x_1$  и С/П. Потом  $x_2$  и С/П... После введения  $x_n$ , микрокалькулятор приступает к вычислению среднего  $\bar{x}$  и стандартного отклонения  $\sigma$ . Величина  $\bar{x}$  поступает в регистр X, а величина  $\sigma$  в Y.

Адресуемые регистры содержат следующую информацию: L0 — цикл,  $n = \Pi_1$ ,  $x_i = \Pi_2$ ,  $\sum x_i = \Pi_3$ ,  $\sum x_i^2 = \Pi_4$ ,  $\bar{x} = \Pi_5$ ,  $\sigma = \Pi_6$ .

|     |     |                 |     |           |     |     |                 |     |     |
|-----|-----|-----------------|-----|-----------|-----|-----|-----------------|-----|-----|
| P0  | P1  | Cx              | P3  | P4        | Px1 | C/P | P2              | Px3 | +   |
| P3  | Px2 | Fx <sup>2</sup> | Px4 | +         | P4  | Px2 | FL0             | 06  | Px3 |
| Px1 | ÷   | P5              | Px4 | Px1       | ÷   | Px5 | Fx <sup>2</sup> | —   | Fv- |
| P6  | Px5 | C/P             | BП  | <u>00</u> |     |     |                 |     |     |

Тест:

| $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_6$ | $x_7$ | $x_8$ | $x_9$ | $x_{10}$ |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|----------|
| 2.5   | 7.5   | 3     | 7     | 4     | 5     | 6     | 5     | 4.5   | 5.5      |

В результате счета получаем  $\bar{x} = 5$ ,  $\sigma = 1.516575 \approx 1.5$ . Время ввода текущего значения  $x_i$  составляет в среднем 5 с, а время окончательного счета — 8 с.

Программу 2 обычно используют в случае, когда число измерений  $n \geq 30$ . При этом значения  $x_i$  густо заполняют интервал  $(\bar{x} - \sigma; \bar{x} + \sigma)$ . При меньшем числе измерений между значениями  $x_i$  остаются большие пробелы, о которых из полученных данных мы ничего не можем узнать. Поэтому решность приходится оценивать не по всем возможным значениям  $x_i$ , а по случайным образом выбранным  $n$  значениям. Проведем вероятностную оценку этой выборки. Выборка используется два раза (для нахождения  $\bar{x}$  и  $D(\Delta x)$ ) и поэтому независимых величин будет не  $n$ , а  $n-1$ . Дисперсия выборки теперь будет равна

$$D(\Delta x) = S_n^2 = \frac{n}{n-1} \left\{ \frac{1}{n} \sum x_i^2 - (\bar{x})^2 \right\}. \quad (2.18)$$

Тогда среднеквадратическая погрешность отдельного измерения

$$S_n = \sqrt{\frac{n}{n-1} \left\{ \frac{1}{n} \sum x_i^2 - (\bar{x})^2 \right\}}. \quad (2.19)$$

Ясно, что при больших  $n$   $\sigma \sim S_n$ . Поэтому в случае небольшого числа измерений искомая величина с вероятностью  $P = 67\%$  будет находиться в интервале  $(\bar{x} - S_n; \bar{x} + S_n)$ .

Программа 3. Вычисление  $\bar{x}$  и среднеквадратической погрешности  $S_n$ . Перед первым пуском набрать B/0. Затем ввести количество измерений  $n$  и С/П. Потом  $x_1$  С/П  $x_2$  С/П ...  $x_n$  С/П. В результате

счета в регистр  $X$  поступает величина  $\bar{x}$ , а в регистр  $Y$  — погрешность  $S_n$ . Информация в адресуемых регистрах следующая:

L0 — цикл,  $n = \Pi 1$ ,  $x_i = \Pi 2$ ,  $\sum x_i = \Pi 3$ ,  $\sum x_i^2 = \Pi 4$ ,  $\bar{x} = \Pi 5$ ,  $S = \Pi 6$ .

|     |      |                 |     |     |     |     |                 |     |     |
|-----|------|-----------------|-----|-----|-----|-----|-----------------|-----|-----|
| P0  | P1   | Cx              | P3  | P4  | Px0 | C/P | P2              | Px3 | +   |
| P3  | Px2  | Fx <sup>2</sup> | Px4 | +   | P4  | Px2 | FL0             | 06  | Px3 |
| Px1 | ÷    | P5              | Px4 | Px1 | ÷   | Px5 | Fx <sup>2</sup> | —   | Px1 |
| ×   | KPx1 | ↔               | Px1 | ÷   | FV  | —   | P6              | Px5 | C/P |
| 00  |      |                 |     |     |     |     |                 |     | BП  |

Тест:

| $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_6$ |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 3     | 5     | 4     | 5     | 3     | 4     |

Ответ:  $\bar{x} = 4$ ,  $S_n = 0.89442674 \approx 0.9$ .

Время ввода текущего значения около 4 с, время счета 9 с.

### 3. Является ли распределение нормальным?

Обычно при большом количестве измерений ( $n > 40$ ) проверяют насколько хорошо экспериментальные данные описываются законом нормального распределения. Для этого весь интервал найденных значений  $x_{\max} - x_{\min}$  делят на  $m$  интервалов шириной  $\Delta x_j$  ( $j = 1, 2, 3, \dots, m$ ). Затем подсчитывают частоты  $n_j$ , равные количеству результатов, лежащих в  $j$ -х интервалах. Средняя плотность распределения в интервале  $\Delta x_j$  будет

$$P_j = \frac{n_j}{n \Delta x_j}. \quad (2.20)$$

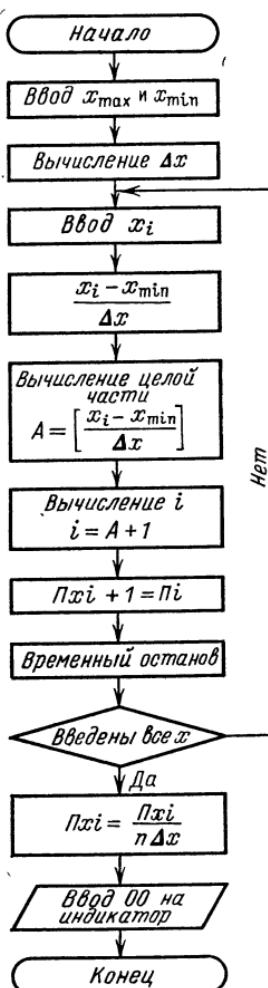
Ось абсцисс графика начинается с  $x_{\min}$  и кончается  $x_{\max}$ . Этот интервал разбивается на  $\Delta x_j$  и на каждом участке строится прямоугольник, основанием которого служит величина  $\Delta x_j$ , а высотой —  $P_j$ . Построенный график — гистограмма статистического распределения. В зависимости от числа измерений  $n$  число интервалов  $m$  обычно выбирают так, как показано в табл. 13. Интервалы  $\Delta x_j$  обычно выбирают одинаковой длины. При построении графика масштаб выбирают так, чтобы отношение  $P_j$  к  $\Delta x_j$  было порядка 5—8. Если интервалы  $\Delta x_j$  одинаковы, то средняя плотность будет пропорциональна вели-

Таблица 13

| $n$        | $m$   |
|------------|-------|
| 40—100     | 7—9   |
| 100—500    | 8—12  |
| 500—1000   | 10—16 |
| 1000—10000 | 12—22 |

чине  $n_j$  — частоте попадания величины в  $j$ -й интервал. Тогда по формуле (2.20) получим величину  $P_j$ .

Определить значения  $n_j$  и  $P_j$  можно с помощью программы 4.



В ней интервал  $(x_{\min}; x_{\max})$  разделен на  $m=10$  частей. При вводе числа  $x_i$  микрокалькулятор определяет к какому интервалу следует отнести данную величину и, используя косвенную адресацию, прибавляет к соответствующей частоте единицу. Блок-схема программы представлена на рис. 17. В программе использован алгоритм выделения целой части, основанный на особенностях работы операторов косвенной адресации.

**Программа 4. Вычисление средней плотности для построения гистограммы распределения.** Положение угловой меры перед счетом следует поставить на «Г» (градус). Перед началом счета набрать В/0. Затем ввести  $x_{\max}$  С/П и  $x_{\min}$  С/П. Затем в любом порядке вводятся значения  $x_i$ . Ввод каждого из них длится примерно 6 с. После введения последнего значения  $x_n$  необходимо набрать БП 36 С/П.

Время вычисления окончательного результата 22 с. В результате вычислений на индикаторе появится 00. Это сигнал, что вычислены все 10 значений  $P_j$ . Они расположены в памяти микрокалькулятора следующим образом:  $P_1=\Pi_1$ ,  $P_2=\Pi_2$ ,  $P_3=\Pi_3$ ,  $P_4=\Pi_4$ ,  $P_5=\Pi_5$ ,  $P_6=\Pi_6$ ,  $P_7=\Pi_7$ ,  $P_8=\Pi_8$ ,  $P_9=\Pi_9$ ,  $P_{10}=\Pi_{10}$ . В остальных регистрах  $\Delta x=\Pi_0$ ,  $n=\Pi_B$ ,  $x_{\min}=\Pi_C$ ,  $j+1=\Pi_D$ .

Для контроля после каждого ввода  $x_i$  на индикаторе появляется индекс  $i$  — порядковый номер введенного числа.

|           |        |                      |           |                   |                 |           |            |           |           |
|-----------|--------|----------------------|-----------|-------------------|-----------------|-----------|------------|-----------|-----------|
| $\Pi_0$   | С/П    | $\Pi_C$              | $\Pi x_0$ | $\leftrightarrow$ | —               | 1         | 0          | $\div$    | $\Pi_0$   |
| 2         | ПВ     | 1                    | $\Pi_1$   | ПА                | $\Pi x_B$       | С/П       | $\uparrow$ | $\Pi x_C$ | —         |
| $\Pi x_0$ | $\div$ | 1                    | $\Pi_2$   | ПД                | К $\Pi x_D$     | 1         | $+$        | КПД       | $\Pi x_B$ |
| 1         | +      | ПВ                   | $\Pi_3$   | БП                | 17              | $\Pi x_1$ | ПП         | 79        | П1        |
| $\Pi x_2$ | ПП     | 79                   | $\Pi_4$   | П $\Pi x_3$       | $\overline{17}$ | 79        | П3         | $\Pi x_4$ | ПП        |
| 79        | П4     | $\overline{\Pi x_5}$ | $\Pi_5$   | ПП                | 79              | $\Pi x_6$ | ПП         | 79        | П6        |

|            |     |           |     |           |    |           |                    |     |     |
|------------|-----|-----------|-----|-----------|----|-----------|--------------------|-----|-----|
| <u>Px7</u> | PП  | <u>79</u> | P7  | Px8       | PП | <u>79</u> | P8                 | Px9 | PП  |
| <u>79</u>  | P9  | PxA       | PП  | <u>79</u> | PA | Cx        | Fsin <sup>-1</sup> | C/P | Px0 |
| ÷          | PxB | ÷         | B/0 |           |    |           |                    |     |     |

Для ответа на вопрос, является ли распределение некоторой случайной величины  $x$  нормальным, воспользуемся программой 4.

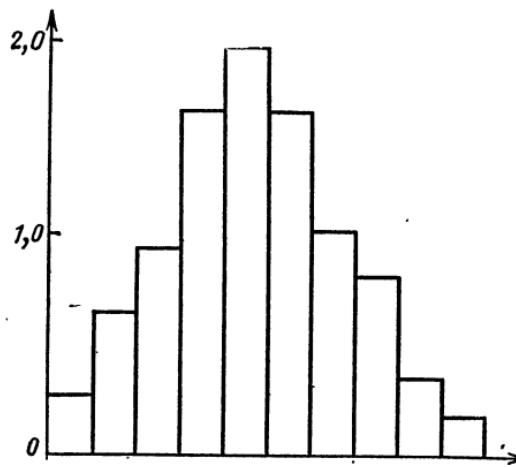


Рис. 18

Для случайной величины  $x$ , приведенной на стр. 62, вводим  $x_{\max} = 1.6$  и  $x_{\min} = 0.522$ , а затем все остальные  $x_i$ . После ввода  $x_{100}$  на индикаторе появится его индекс — 100. Нажав БП 36 С/П, получим следующие значения плотностей:

$$\begin{aligned}
 P_1 &= 0.27829313 \approx 0.28, & P_2 &= 0.64935064 \approx 0.65, \\
 P_3 &= 0.92764378 \approx 0.93, & P_4 &= 1,5769944 \approx 1,58, \\
 P_5 &= 1.8552875 \approx 1.86, & P_6 &= 1.5769944 \approx 1.58, \\
 P_7 &= 1.0204081 \approx 1.02, & P_8 &= 0.8348794 \approx 0.83, \\
 P_9 &= 0.37105751 \approx 0.37, & P_{10} &= 0.18552875 \approx 0.19, \\
 \Delta x &= 0.1078 \approx 0.108.
 \end{aligned}$$

Построенная на рис. 18 гистограмма распределения величины  $x$  показывает, что это распределение подчиняется нормальному закону.

#### 4. Распределение Стьюдента (Госсета)

Распределение Гаусса хорошо описывает отклонение измеряемой величины в эксперименте от истинной при большом количестве повторных измерений. На практике нередко обходятся двумя-тремя измерениями. Результаты образуют очень малую выборку. Нормальное распределение при анализе ошибок здесь уже не пригодно. В этом случае распределение Стьюдента гораздо лучше описывает получаемые

результаты. На основе значений  $x_i$ , полученных при измерении, определяют случайную величину

$$t_{\alpha n} = \frac{\bar{x} - x}{S_n} = \frac{\Delta x}{S_n} \sqrt{n}, \quad (2.21)$$

где  $\alpha$  — доверительная вероятность,  $n$  — число измерений,  $S_n$  — среднеквадратическая погрешность. Тогда при нормальном распределении  $x_i$  плотность распределения вероятности выражается формулой Стьюдента

$$f(t_{\alpha n}) = \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\sqrt{\pi} \sqrt{n-1} \Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \left(1 + \frac{t^2}{n-1}\right)^{-\frac{n}{2}}, \quad (2.22)$$

где  $\Gamma(x)$  — гамма-функция:

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt. \quad (2.23)$$

Функция  $f(t_{\alpha n})$  — четная. На рис. 19 изображено распределение Стьюдента для  $n=2$ ,  $n=10$ ,  $n=\infty$ . Видно, что при  $n \rightarrow \infty$  распределение становится нормальным с единичной дисперсией. Вероятность,

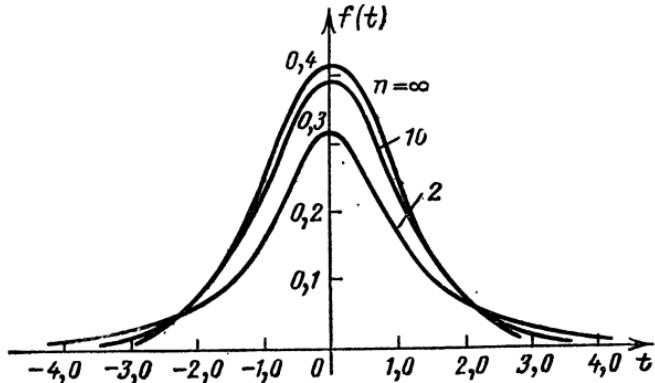


Рис. 19

что измеряемая величина  $x$  попадает в заданный интервал, определяется интегралом

$$P = \int_{t_{1\alpha n}}^{t_{2\alpha n}} f(t) dt. \quad (2.24)$$

Если указана вероятность того, что истинное значение измеряемой величины  $x$  попадет в доверительный интервал, то по количеству измерений  $n$  можно определить коэффициент Стьюдента  $t_{\alpha n}$ . Исходя из этого определяется погрешность

$$\Delta x = t_{\alpha n} \frac{S_n}{\sqrt{n}}. \quad (2.25)$$

Результат измерений записывается в виде

$$\bar{x} - \Delta x \leq x \leq \bar{x} + \Delta x$$

с указанием доверительной вероятности  $\alpha$  и числа измерений  $n$ .

Для нахождения коэффициентов Стьюдента обычно используют громоздкие таблицы. В случае  $\alpha = 0.95$  и  $\alpha = 0.99$  можно использовать программу 5.

**Программа 5.\* Вычисление  $t_{\alpha n}$ , если доверительная вероятность  $\alpha = 0.95$  или  $\alpha = 0.99$ .** Используется следующая аппроксимация:

$$t_n = C_0 + C_1(n-1)^{-1} + C_2(n-1)^{-2} + C_3,$$

поэтому в адресуемые регистры перед работой заносятся следующие данные:

в случае  $\alpha = 0.95$

$$C_0 = 1.96 = \text{П0},$$

$$C_1 = 2.4 = \text{П1},$$

$$C_2 = 5.901610 = \text{П2},$$

$$C_3 = 2.372 = \text{П3},$$

в случае  $\alpha = 0.99$

$$C_0 = 2.576 = \text{П0},$$

$$C_1 = 5.0 = \text{П1},$$

$$C_2 = 29.12178 = \text{П2},$$

$$C_3 = 2.591843 = \text{П3}.$$

Величину  $n$  ввести в регистр X. Регистры П5, П6 — буферные. В ходе счета величина  $n$  вводится в регистр П4.

| P4  | 1   | —   | П5              | Пx1 | ↔ | ÷   | Пx0 | +  | П6 |
|-----|-----|-----|-----------------|-----|---|-----|-----|----|----|
| Пx3 | /—/ | Пx5 | Fx <sup>y</sup> | Пx2 | × | Пx6 | +   | 1  | ВП |
| 4   | П5  | ×   | K[x]            | Пx5 | ÷ | C/P | БП  | 00 |    |

Счет по программе длится 10 с.

Тест: при  $\alpha = 0.95$ ,  $n = 5$ ,  $t_5 = 2.78$ , при  $\alpha = 0.99$ ,  $n = 15$ ,  $t_{15} = 2.964$ .

Погрешность вычисления коэффициентов Стьюдента при  $\alpha = 0.95$  меньше 0,1 %, а при  $\alpha = 0.99$  не превышает 0,2 %.

Обычно при обработке данных приходится определять  $\bar{x}$ ,  $S_n$ ,  $\Delta x$  и интервал, в котором находится истинное значение величины  $x$ . В этом случае возникает необходимость в совмещении программ 3 и 5 в одну. Эту функцию выполняет программа 6.

**Программа 6\*. Нахождение  $\bar{x}$  и  $(x - \Delta x, x + \Delta x)$  при заданной надежности  $\alpha = 0.95$  или  $\alpha = 0.99$ .** Постоянные коэффициенты вводятся в регистры  $C_0 = \text{ПА}$ ,  $C_1 = \text{ПВ}$ ,  $C_2 = \text{ПС}$ ,  $C_3 = \text{ПД}$ . После команды В/0 следует ввести количество измерений  $n$  и С/П. Затем  $x_1$  С/П  $x_2$  С/П...  $x_n$  С/П. В результате счета величина  $x - \Delta x$  поступает в регистр X,  $a - x + \Delta x$  в Y. Кроме того,  $\Delta x = \text{П0}$ ,  $\bar{x} = \text{П5}$ ,  $S_n = \text{П6}$ ,  $t_{\alpha n} = \text{П7}$ ,  $x - \Delta x = \text{П8}$ ,  $x + \Delta x = \text{П9}$ ,  $n = \text{П1}$ ,  $x_i = \text{П2}$ ,  $\sum x_i = \text{П3}$ ,  $\sum x_i^2 = \text{П4}$ . В начале программы L0 — цикл.

Тест:  $n = 2$ ,  $x_1 = 5$ ,  $x_2 = 6$ ,  $\alpha = 0.95$ . Ввод каждой величины  $x_i$  длится около 5 с, окончательные вычисления продолжаются 10 с. В результате счета получаем

$$\bar{x} = 5.5, \quad 3.691999 \cdot 10^{-1} \leq x \leq 10.6308.$$

|     |       |        |     |        |           |     |        |           |     |
|-----|-------|--------|-----|--------|-----------|-----|--------|-----------|-----|
| P0  | P1    | Cx     | P3  | P4     | Px0       | C/P | P2     | Px3       | +   |
| P3  | Px2   | $Fx^2$ | Px4 | +      | P4        | Px2 | FL0    | <u>06</u> | Px3 |
| Px1 | ÷     | P5     | Px4 | Px1    | ÷         | Px5 | $Fx^2$ | —         | Px1 |
| ×   | KPx1  | ↔      | Px1 | ÷      | F v —     | P6  | Px1    | 1         | +   |
| P1  | P7    | 1      | —   | P8     | PxB       | ↔   | ÷      | PxA       | +   |
| P9  | PxD   | /—/    | Px8 | $Fx^y$ | PxC       | ×   | Px9    | +         | 1   |
| BП  | 4     | P8     | ×   | K[x]   | Px8       | ÷   | P7     | Px6       | ×   |
| Px1 | F v — | ÷      | P0  | Px5    | +         | P9  | Px5    | Px0       | —   |
| P8  | Px9   | ↔      | C/P | BП     | <u>00</u> |     |        |           |     |

Рассмотрим следующий пример. При определении величины заряда электрона  $e_0 \cdot 10^{-10}$  (в единицах CGSE) Милликен получил  $n=58$  результатов измерений  $x_i$  величины  $e_0$ , которые приведены в табл. 14. Требуется оценить истинное значение величины  $e_0$  с надежностью  $\alpha=0.99$ , предполагая, что измерения независимы и произведены без систематической ошибки, а случайные ошибки распределены по нормальному закону.

Таблица 14

|       |       |       |       |       |       |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 4.781 | 4.764 | 4.777 | 4.809 | 4.761 | 4.769 |
| 4.795 | 4.776 | 4.765 | 4.790 | 4.792 | 4.806 |
| 4.769 | 4.771 | 4.785 | 4.779 | 4.758 | 4.779 |
| 4.792 | 4.789 | 4.805 | 4.788 | 4.764 | 4.785 |
| 4.779 | 4.772 | 4.768 | 4.772 | 4.810 | 4.790 |
| 4.775 | 4.789 | 4.801 | 4.791 | 4.799 | 4.777 |
| 4.772 | 4.764 | 4.785 | 4.788 | 4.799 | 4.749 |
| 4.791 | 4.774 | 4.783 | 4.783 | 4.797 | 4.781 |
| 4.782 | 4.778 | 4.808 | 4.740 | 4.790 |       |
| 4.767 | 4.791 | 4.771 | 4.775 | 4.747 |       |

Обработав данные табл. 14 по программе 6, получаем

$$\bar{x} = 4.78081, \quad 4.7755644 \leq x \leq 4.7860556.$$

Округляя границы интервала, получаем  $4.776 < e_0 < 4.786$ .

## 5. Корреляционные связи и их оценка

Физические величины, получаемые в результате эксперимента, могут находиться в случайной зависимости друг от друга. Степень зависимости может быть различной. Когда каждому значению величины  $x$  соответствует вполне определенное значение другой величины  $y$ , то говорят о функциональной зависимости величин  $x$  и  $y$ :  $y=f(x)$ . Например, в случае равноускоренного движения такими величинами являются путь и время

$$S = \frac{at^2}{2} + v_0 t.$$

Однако часто бывает и так, что определенному значению величины  $x$  соответствует несколько значений величины  $y$ , которые образуют некоторое распределение. В этом случае устанавливается связь между величиной  $x$  и средним значением величины  $y$ . Такие связи между

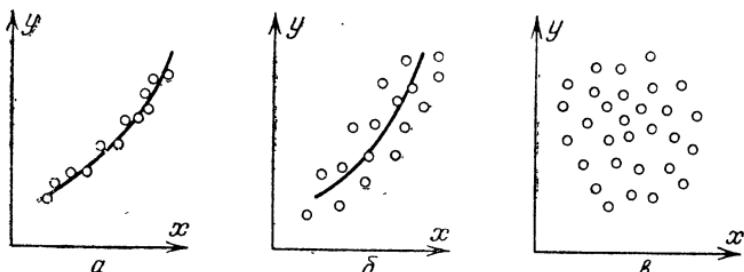


Рис.

величинами называют *корреляционными*. На рис. 20 показаны три возможных варианта корреляционных связей. Рис. 20, *а* соответствует наиболее выраженной корреляционной связи между величинами  $x$  и  $y$ , на рис. 20, *б* эта связь значительно слабее, а на рис. 20, *в* отсутствует совсем.

Для характеристики степени и направления корреляционных связей вводят понятие коэффициента корреляции  $r$ . Коэффициент корреляции — величина безразмерная и может принимать значения  $0 \leq r \leq 1$ . В случае  $r = 1$  величины  $x$  и  $y$  связаны зависимостью  $y = kx + b$  (рис. 20, *а*). Положительное значение коэффициента  $r$  (рис. 20) или отрицательное (рис. 21) характеризуют направление корреляционной зависимости.

Теоретический коэффициент корреляции определяют по формуле

$$r = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n y_i^2}}. \quad (2.26)$$

Эмпирический коэффициент корреляции вычисляют по формуле

$$r = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n y_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2 - \frac{1}{n} \left( \sum_{i=1}^n x_i \right)^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n y_i^2 - \frac{1}{n} \left( \sum_{i=1}^n y_i \right)^2}}. \quad (2.27)$$

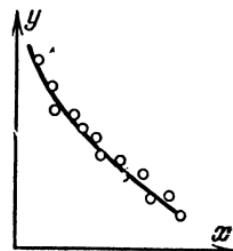


Рис. 21

**Программа 7. Вычисление теоретического коэффициента корреляции двух величин  $r(x, y)$ .** После В/0 набираем  $n$  С/П  $x_1$  С/П  $y_1$  С/П ...  $x_n$  С/П  $y_n$  С/П. В результате счета получаем на индикаторе значение величины  $r(x, y)$ . При этом L0 — цикл,  $x_i = \text{П}2$ ,  $y_i = \text{П}3$ ,  $\sum x_i y_i = \text{П}4$ ,  $\sum x_i^2 = \text{П}5$ ,  $\sum y_i^2 = \text{П}6$ .

Тест:

|       |   |   |   |
|-------|---|---|---|
| $x_i$ | 1 | 2 | 3 |
| $y_i$ | 2 | 4 | 5 |

Ввод каждой пары чисел длится  $\sim 9$  с, счет — 5 с. В результате счета тестовых данных получаем  $r = 0.99602387$

|                 |                 |     |    |     |     |     |     |     |     |
|-----------------|-----------------|-----|----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| П0              | Cx              | П4  | П5 | П6  | Пx0 | С/П | П2  | С/П | П3  |
| Fx <sup>2</sup> | Пx6             | +   | П6 | Пx2 | Пx3 | ×   | Пx4 | +   | П4  |
| Пx2             | Fx <sup>2</sup> | Пx5 | +  | П5  | Пx3 | FL0 | 06  | Пx4 | Пx5 |
| Пx6             | ×               | Fv- | ÷  | C/П | БП  |     | 00  |     |     |

**Программа 8. Вычисление эмпирического коэффициента корреляции  $r(x, y)$ .** После команды В/0 набираем  $n$  С/П  $x_1$  С/П  $y_1$  С/П ... ...  $x_n$  С/П  $y_n$  С/П. Вычисленное значение коэффициента корреляции поступает на индикатор. При этом L0 — цикл,  $n = \text{П}1$ ,  $x_i = \text{П}2$ ,  $y_i = \text{П}3$ ,  $\sum x_i = \text{П}4$ ,  $\sum y_i = \text{П}5$ ,  $\sum x_i y_i = \text{П}6$ ,  $\sum x_i^2 = \text{П}7$ ,  $\sum y_i^2 = \text{П}8$ , П9 — буфер.

|     |                 |                 |     |     |     |     |                 |     |     |
|-----|-----------------|-----------------|-----|-----|-----|-----|-----------------|-----|-----|
| П0  | П1              | Cx              | П4  | П5  | П6  | П7  | П8              | Пx0 | С/П |
| П2  | C/П             | П3              | Пx5 | +   | П5  | Пx2 | Пx4             | +   | П4  |
| Пx2 | Пx3             | ×               | Пx6 | +   | П6  | Пx2 | Fx <sup>2</sup> | Пx7 | +   |
| П7  | Пx3             | Fx <sup>2</sup> | Пx8 | +   | П8  | Пx3 | FL0             | 09  | Пx7 |
| Пx4 | Fx <sup>2</sup> | Пx1             | ÷   | —   | Пx8 | Пx5 | Fx <sup>2</sup> | Пx1 | ÷   |
| —   | ×               | Fv-             | П9  | Пx6 | Пx4 | Пx5 | ×               | Пx1 | ÷   |
| —   | Пx9             | ÷               | C/П | БП  |     | 00  |                 |     |     |

Тест:

|       |   |   |   |
|-------|---|---|---|
| $x_i$ | 1 | 2 | 3 |
| $y_i$ | 2 | 4 | 5 |

В результате счета получаем  $r = 0.98198049$ . Время ввода пары чисел около 12 с, время счета — 14 с. Как видно из результатов счета теста, значение теоретического коэффициента корреляции немного больше, чем эмпирического. Корреляция возможна не только между двумя, но и между большим количеством величин. Так, коэффициент поверхностного натяжения смеси жидкостей может зависеть как от концентрации компонент жидкости, так и от их температуры. Уравнение

ние линейной корреляционной связи между тремя величинами  $x$ ,  $y$ ,  $z$  имеет вид

$$Z = Ax + By + C.$$

Оно определяет так называемую плоскость регрессии в координатах  $x$ ,  $y$ ,  $z$ . Для оценки степени корреляционной связи при множественной корреляции используют сведенный коэффициент множественной корреляции

$$R = \sqrt{\frac{r_{xz}^2 - r_{yz}^2 - 2r_{xy}r_{xz}r_{yz}}{1 - r_{xy}^2}}, \quad (2.28)$$

где коэффициенты корреляции  $r_{ij}$  находят по формуле

$$r_{ij} = \frac{\sum_k r_{ik}r_{jk} - \frac{1}{n} \sum_k r_{ik} \sum_k r_{jk}}{\sqrt{\sum_k r_{ik}^2 - \frac{1}{n} \left( \sum_k r_{ik} \right)^2} \sqrt{\sum_k r_{jk}^2 - \frac{1}{n} \left( \sum_k r_{jk} \right)^2}}; \\ r_x = x, \quad r_y = y, \quad r_z = z, \quad (2.29)$$

где индексы  $i$ ,  $j$  могут принимать одно из трех значений  $x$ ,  $y$ ,  $z$ . Эти коэффициенты можно вычислить по программе 8, а затем вручную по формуле (2.28) найти сведенный коэффициент множественной корреляции.

В случае множественной корреляции можно попарно оценивать корреляционную связь между величинами, исключив влияние какой-либо одной из них. При этом используются частные коэффициенты корреляции. Для коэффициента  $r_{xz/y}$  формула имеет вид

$$r_{xz/y} = \frac{r_{xz} - r_{xy}r_{yz}}{\sqrt{1 - r_{xy}^2} \sqrt{1 - r_{yz}^2}}. \quad (2.30)$$

В общем же случае

$$r_{ij/k} = \frac{r_{ij} - r_{ik}r_{kj}}{\sqrt{1 - r_{ik}^2} \sqrt{1 - r_{kj}^2}}, \quad (2.31)$$

где индексы  $i$ ,  $j$ ,  $k$  могут принимать одно из трех значений  $x$ ,  $y$ ,  $z$ .

**Программа 9.** Оценка частного коэффициента корреляции  $r_{ij/k}$  в случае множественной регрессии, когда влияние третьей величины исключается. После того как программа набрана и счетчик установлен в начальное положение, вводятся величины  $r_{ij}$  С/П  $r_{ik}$  С/П  $r_{kj}$  С/П. При этом память распределяется следующим образом:

|     |                      |                      |                      |    |     |                 |     |   |   |
|-----|----------------------|----------------------|----------------------|----|-----|-----------------|-----|---|---|
|     | $r_{ij} = \text{П2}$ | $r_{ik} = \text{П3}$ | $r_{kj} = \text{П4}$ |    |     |                 |     |   |   |
| П2  | С/П                  | П3                   | С/П                  | П4 | Пх3 | Х               | Пх2 | ↔ | — |
| Пх3 | Fx <sup>2</sup>      | 1                    | ↔                    | —  | Пх4 | Fx <sup>2</sup> | 1   | ↔ | — |
| ×   | F ν —                | ÷                    | С/П                  | БП | 00  |                 |     |   |   |

Тест:  $r_{xy} = 9.98753 \cdot 10^{-1}$ ,  $r_{xz} = 6.9753 \cdot 10^{-1}$ ,  $r_{yz} = 7.473 \cdot 10^{-1}$ ,  $r_{xy/z} = 1.002829$ .

Вычисление занимает  $\sim 5$  с.

## 6. Сглаживание исследовательских данных эксперимента

В результате погрешностей, допущенных в ходе эксперимента при измерении величин, вид полученных кривых несколько отличается от теоретических. Поскольку погрешности при хорошей постановке опыта носят случайный характер, то на кривую зависимости двух величин накладываются осцилляции, усложняющие анализ функции. Чтобы свести к минимуму отклонения, вызванные случайной погрешностью, применяют сглаживание исследовательских данных, заменяя таблицу, составленную на основе эксперимента, новой таблицей приближенных данных, график которых более близок к реальной кривой. Сглаживание осуществляют при помощи многочленов, которые приближают группы данных по методу наименьших квадратов. Наилучшее сглаживание достигается для значений функции, лежащих в середине таблицы. Поэтому берут нечетное количество исходных данных. Понятно, что числовые значения в начале и в конце таблицы сглаживаются с меньшей точностью.

Для первых пяти значений  $y_1, y_2, y_3, y_4, y_5$  сглаживаем значение  $y_3$ , затем берем следующую группу значений  $y_2, y_3, y_4, y_5, y_6$  и сглаживаем значение функции  $y_4$  и т. д. Затем по отдельной формуле сглаживаем два начальных и два конечных значения функции в таблице.

Для удобства среднему значению из группы табличных данных присвоим индекс 0, а симметрично расположенным значениям функции индексы  $\pm 1; \pm 2$ . Сглаженные значения функции  $y$  будем обозначать  $\tilde{y}$ .

Формулы линейного сглаживания для групп из трех значений функции имеют вид

$$\begin{aligned}\tilde{y}_{-1} &= \frac{1}{6} (5y_{-1} + 2y_0 - y_1), \\ \tilde{y}_0 &= \frac{1}{3} (y_{-1} + y_0 + y_1), \\ \tilde{y}_1 &= \frac{1}{6} (-y_{-1} + 2y_0 + 5y_1).\end{aligned}\quad (2.32)$$

Формулы линейного сглаживания для групп из пяти знач.

$$\begin{aligned}\tilde{y}_{-2} &= \frac{1}{5} (3y_{-2} + 2y_{-1} + y_0 - y_2), \\ \tilde{y}_{-1} &= \frac{1}{10} (4y_{-2} + 3y_{-1} + 2y_0 + y_1), \\ \tilde{y}_0 &= \frac{1}{5} (y_{-2} + y_{-1} + y_0 + y_1 + y_2), \\ \tilde{y}_1 &= \frac{1}{10} (y_{-1} + 2y_0 + 3y_1 + 4y_2), \\ \tilde{y}_2 &= \frac{1}{5} (-y_{-2} + y_0 + 2y_1 + 3y_2).\end{aligned}\quad (2.33)$$

Существуют формулы сглаживания и по большому количеству точек, но распространения они не получили.

**Программа 10. Линейное сглаживание по трем точкам.** Порядок выполнения вычислений по программе следующий. Переключатель угловой меры устанавливаем в положение Г. Вводим количество точек таблицы  $n$  С/П. Затем  $y_1$  С/П  $y_2$  С/П  $y_3$  С/П и в результате счета появится  $\tilde{y}_1$ . Вводим  $y_4$  С/П. На индикаторе поступит величина  $\tilde{y}_2 \dots$  Последним вводим значение  $y_n$  С/П. На индикаторе появится величина  $\tilde{y}_{n-1}$ , а после последней команды С/П —  $\tilde{y}_n$ . Время одного сглаживания — не более 5 с.

Высвечивание 00 на индикаторе служит для контроля правильности ввода. Оно указывает, что количество введенных значений функции недостаточно для сглаживания.

|     |      |      |     |                     |     |     |     |                     |     |
|-----|------|------|-----|---------------------|-----|-----|-----|---------------------|-----|
| P0  | С/П  | P2   | Cx  | F sin <sup>-1</sup> | С/П | P3  | Cx  | F sin <sup>-1</sup> | С/П |
| P4  | КPx0 | КPx0 | Px2 | 5                   | ×   | Px3 | 2   | ×                   | +   |
| Px4 | —    | 6    | ÷   | C/П                 | P5  | Px4 | Px3 | +                   | Px2 |
| +   | 3    | ÷    | P6  | Px2                 | P1  | Px3 | P2  | Px4                 | P3  |
| Px5 | P4   | Px6  | FL0 | 24                  | C/П | Px3 | 5   | ×                   | Px2 |
| 2   | ×    | +    | Px1 | —                   | 6   | ÷   | C/П | БП                  | 00  |

Тест:  $y_1 = 3$ ,  $y_2 = 6$ ,  $y_3 = 9$ ,  $\tilde{y}_1 = 3$ ,  $\tilde{y}_2 = 6$ ,  $\tilde{y}_3 = 9$ ,  $n = 3$ .

**Программа 11\*. Линейное сглаживание по пяти точкам.** Вводим количество точек таблицы  $n$  С/П. Затем  $y_1$  С/П  $y_2$  С/П  $y_3$  С/П  $y_4$  С/П  $y_5$  С/П. На индикаторе получаем  $\tilde{y}_1$ .

После ввода  $y_6$  С/П на индикаторе получим  $\tilde{y}_2, \dots$ , а после  $y_n$  С/П —  $\tilde{y}_{n-2}$ . Далее нажимаем С/П и получаем  $\tilde{y}_{n-1}$ , а после следующего нажатия С/П —  $\tilde{y}_n$ .

Память распределена следующим образом: L0 — цикл,  $y_i = \Pi_2$ ,  $y_{i+1} = \Pi_1$ ,  $y_{i+2} = \Pi_8$ ,  $y_{i+3} = \Pi_3$ ,  $y_{i+4} = \Pi_4$ ,  $\Pi_5$ ,  $\Pi_6$  — буферные.

Тест:

$$y_1 = 3, \quad y_2 = 5, \quad y_3 = 7, \quad y_4 = 9, \quad y_5 = 11.$$

$$\tilde{y}_1 = 3, \quad \tilde{y}_2 = 5, \quad \tilde{y}_3 = 7, \quad \tilde{y}_4 = 9, \quad \tilde{y}_5 = 11.$$

Время сглаживания не превышает 5 с.

|     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |
|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| ↑   | 4   | —   | P0  | С/П | P2  | С/П | P1  | С/П | P8  |
| C/П | P3  | C/П | P4  | /—/ | Px2 | 3   | ×   | +   | Px1 |
| 2   | ×   | +   | Px8 | +   | 5   | ÷   | C/П | Px2 | 4   |
| ×   | Px1 | 3   | ×   | +   | Px8 | 2   | ×   | +   | Px3 |
| +   | 1   | 0   | ÷   | C/П | Px4 | Px3 | +   | Px2 | +   |
| Px1 | +   | Px8 | +   | 5   | ÷   | C/П | P5  | Px2 | P6  |
| Px1 | P2  | Px8 | P1  | Px3 | P8  | Px4 | P3  | Px5 | P4  |
| FL0 | 40  | Px2 | Px1 | 2   | ×   | +   | Px8 | 3   | ×   |

$$\begin{array}{r}
 + \quad \text{Px3} \quad 4 \quad \times \quad + \quad 1 \quad 0 \quad \div \quad \text{C/P} \quad \text{Px1} \\
 \text{Px6} \quad - \quad \text{Px8} \quad 2 \quad \times \quad + \quad \text{Px3} \quad 3 \quad \times \quad + \\
 5 \quad \div \quad \text{C/P} \quad \text{БП} \quad \underline{00}
 \end{array}$$

Линейное сглаживание как бы спрямляет нашу кривую. Осцилляции при этом пропадают. Об этом свидетельствует тот факт, что после проведения сглаживания разности  $y_{i+1} - y_i$  положительны в отличие от разностей до сглаживания. Если все же окажется, что осцилляции функции после сглаживания не исчезли, можно осуществить повторное сглаживание. Обычно хорошие результаты дает повторное сглаживание по пяти точкам.

| $x$ | $y$ | $\tilde{y}(n=3)$ | $\tilde{y}(n=5)$ | $x$ | $y$ | $\tilde{y}(n=3)$ | $\tilde{y}(n=5)$ |
|-----|-----|------------------|------------------|-----|-----|------------------|------------------|
| 1   | 215 | 212              | 202              | 13  | 324 | 319              | 325              |
| 2   | 206 | 212              | 212              | 14  | 335 | 344              | 342              |
| 3   | 214 | 210              | 222              | 15  | 374 | 363              | 360              |
| 4   | 211 | 229              | 229              | 16  | 380 | 381              | 378              |
| 5   | 262 | 242              | 234              | 17  | 388 | 394              | 396              |
| 6   | 252 | 248              | 241              | 18  | 415 | 409              | 406              |
| 7   | 230 | 244              | 252              | 19  | 425 | 420              | 421              |
| 8   | 250 | 249              | 256              | 20  | 420 | 434              | 439              |
| 9   | 266 | 266              | 264              | 21  | 457 | 451              | 452              |
| 10  | 281 | 280              | 277              | 22  | 476 | 472              | 469              |
| 11  | 293 | 290              | 292              | 23  | 483 | 485              | 487              |
| 12  | 297 | 305              | 306              |     |     |                  |                  |

Сглаживание по трем и пяти точкам можно представить в табличной форме (результат округлен до целой части).

Здесь приведена таблица случайной величины  $x$ , используемая в программе на стр. 53:

|       |       |       |     |     |     |     |     |
|-------|-------|-------|-----|-----|-----|-----|-----|
| 0.662 | 0.864 | 0.753 | 1.1 | 1.3 | 1.3 | 1.1 | 0.9 |
| 0.522 | 0.951 | 0.675 | 1.0 | 1.2 | 1.3 | 1.0 | 0.9 |
| 0.753 | 1.354 | 0.6   | 0.9 | 1.1 | 1.2 | 0.9 | 1.0 |
| 0.875 | 1.276 | 0.7   | 0.8 | 1.0 | 1.1 | 1.0 | 1.1 |
| 0.916 | 1.107 | 0.8   | 0.7 | 0.9 | 1.0 | 1.1 | 1.1 |
| 1.005 | 1.405 | 0.9   | 0.6 | 0.8 | 0.9 | 1.1 | 1.0 |
| 1.109 | 1.047 | 1.0   | 0.7 | 0.7 | 0.8 | 1.0 | 1.6 |
| 1.263 | 1.304 | 1.1   | 0.8 | 1.0 | 0.9 | 0.8 | 1.0 |
| 1.354 | 1.205 | 1.2   | 0.9 | 0.8 | 0.9 | 0.9 | 1.0 |
| 1.485 | 1.111 | 1.3   | 1.0 | 0.9 | 1.0 | 1.0 |     |
| 1.576 | 1.056 | 1.4   | 1.1 | 1.0 | 1.1 | 1.1 |     |
| 0.64  | 0.973 | 1.3   | 1.2 | 1.1 | 1.2 | 1.1 |     |
| 0.765 | 0.868 | 1.2   | 1.3 | 1.2 | 1.2 | 1.0 |     |

## Глава 3

# АППРОКСИМАЦИЯ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ДАННЫХ ФУНКЦИОНАЛЬНЫМИ ЗАВИСИМОСТЯМИ

## 1. Метод наименьших квадратов и простейшие виды аппроксимации

Анализ кривых, полученных по экспериментальным данным, имеет очень важное значение. История физики знает немало примеров, когда расхождение между экспериментальными и теоретическими результатами давало толчок для новых открытий. Это и наблюдения астронома Тихо Браге, на основании которых Кеплер сформулировал три закона движения небесных тел; и две полученные экспериментально функции излучения абсолютно черного тела в низкочастотной и высокочастотной области, на основании которых в дальнейшем была получена единая функция излучения абсолютно черного тела, названная по имени ее автора Планка.

Определение вида функциональной зависимости имеет свои особенности. Соединив экспериментальные точки отрезками прямых на графике, мы получим ломаную линию, не имеющую ничего общего с отыскиваемой функциональной зависимостью. Форма ее не восстановится при повторном измерении, так как каждый результат измерения сопровождается ошибками. Расстояние линии от точки в каждую сторону по горизонтали и вертикали указывает значения погрешности соответственно по оси абсцисс и ординат. Если потребовать, чтобы среднеквадратическое отклонение полученной функции от экспериментальных точек было минимальным, можно получить уравнения для параметров функции. В этом и заключается метод наименьших квадратов.

Итак, в результате эксперимента мы получили несколько значений функции  $y_i$ , в заданных точках  $x_i$ . Будем аппроксимировать ее некоторой аналитической функцией  $\varphi(x)$ , в которую входит некоторое число  $n$  констант  $a_k$ . Необходимым условием наилучшего среднеквадратического приближения будет минимизация суммы среднеквадратических отклонений

$$S = \sum_{i=1}^N [y_i - \varphi(x_i)]^2, \quad (3.1)$$

где  $N$  — количество всех экспериментальных точек. Выберем линейную аппроксимацию

$$\varphi(x) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k \varphi_k(x). \quad (3.2)$$

Для нахождения минимума  $S$  приравняем к нулю производные этой суммы по  $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N \varphi_0(x_i) \sum_{k=0}^{n-1} a_k \varphi_k(x_i) &= \sum_{i=1}^N y_i \varphi_0(x_i), \\ \sum_{i=1}^N \varphi_1(x_i) \sum_{k=0}^{n-1} a_k \varphi_k(x_i) &= \sum_{i=1}^N y_i \varphi_1(x_i), \\ \sum_{i=1}^N \varphi_2(x_i) \sum_{k=0}^{n-1} a_k \varphi_k(x_i) &= \sum_{i=1}^N y_i \varphi_2(x_i), \\ &\dots \\ \sum_{i=1}^N \varphi_{n-1}(x_i) \sum_{k=0}^{n-1} a_k \varphi_k(x_i) &= \sum_{i=1}^N y_i \varphi_{n-1}(x_i). \end{aligned}$$

Из системы уравнений (3.3) находят коэффициенты  $a_k$ . Если определитель этой системы отличен от нуля, то  $a_k$  определяются единственным образом.

Если число коэффициентов  $n$  взять равным числу узлов  $N$ , а в качестве аппроксимирующих взять степенные функции

$$\varphi(x) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k, \quad (3.3)$$

то полученная методом наименьших квадратов функция совпадает с интерполяционной и кривая будет точно проходить через экспериментальные точки. Вследствие существования отличной от нуля погрешности эксперимента делать это неразумно, да к тому же и кривая при  $n < N$  будет более плавная, чем в случае интерполяции. В то же время при чрезмерно малом числе  $n$  кривая может выйти за пределы погрешности эксперимента. В каждом конкретном случае существует оптимальное число  $n$ , зависящее от  $y, N$  и вида выбранной функции  $\varphi_k(x)$ . Задавшись некоторым числом  $n$  и определив соответствующие коэффициенты  $a_k$ , вычисляют среднеквадратическое отклонение полученной теоретической кривой от экспериментальной

$$\delta_n = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N [y_i - \varphi(x_i)]^2} \quad (3.4)$$

и сравнивают его с известной погрешностью эксперимента  $\varepsilon$ .

Возможны три случая:

1)  $\delta_n \gg \epsilon$  — аппроксимация слишком грубая, число коэффициентов  $a_k$  недостаточно для описания функции  $y(x)$ , необходимо увеличить  $n$ ;

2)  $\delta_n \ll \epsilon$  — аппроксимация физически недостоверна, истинная функция «сплющена», старшие ее коэффициенты лишние и, следовательно, надо уменьшить  $n$ ;

3)  $\delta_n \approx \epsilon$  — число  $n$  оптимально.

Начинают расчет, как правило, с  $n=1$ , когда  $\delta_1 \ll \epsilon$  и, увеличивая число  $n$ , доходят до  $\delta_n \approx \epsilon$ . Если  $n_{\text{опт}} \ll N$ , то вид аппроксимирующей функции выбран удачно. Если же  $n_{\text{опт}} \approx N$ , то следует поискать более подходящий вид функции  $\varphi(x)$ . В практике широкое применение нашли полиномиальная и тригонометрическая аппроксимация методом наименьших квадратов. В первом случае

$$\varphi(x) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k. \quad (3.5)$$

Подставив (3.5) в (3.3), получим

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N \sum_{k=0}^{n-1} a_k x_i^k &= \sum_{i=1}^N y_i, \\ \sum_{i=1}^N \sum_{k=0}^{n-1} a_k x_i^{k+1} &= \sum_{i=1}^N x_i y_i, \\ \sum_{i=1}^N \sum_{k=0}^{n-1} a_k x_i^{k+2} &= \sum_{i=1}^N x_i^2 y_i, \\ \dots &\dots \\ \sum_{i=1}^N \sum_{k=0}^{n-1} a_k x_i^{k+n-1} &= \sum_{i=1}^N x_i^{n-1} y_i. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Определитель Грама этой системы заведомо отличен от нуля, поэтому существует единственное решение для неизвестных  $a_k$ . Обычно ограничиваются небольшими степенями, а при более высоких порядках в качестве аппроксимирующих функций  $\varphi_k(x)$  используют ортогональные многочлены.

В случае линейной аппроксимации экспериментальной кривой для вычисления коэффициентов  $a_0$  и  $a_1$  можно воспользоваться программой 12.

**Программа 12.** Вычисление  $a_0$  и  $a_1$  при аппроксимации кривой методом наименьших квадратов. Сначала вводится количество точек  $N$  С/П. Затем  $x_1$  С/П  $y_1$  С/П  $x_2$  С/П  $y_2$  С/П... $x_n$  С/П  $y_n$  С/П. В результате счета значение  $a_0$  поступает на индикатор и в регистр ПА, а  $a_1$  — в регистр Y и ПВ.

Память: L0 — цикл, N = П1,  $x_i$  = П2,  $y_i$  = П3,  $\sum x_i$  = П4,  $\sum x_i^2$  = П5,  $\sum y_i$  = П6,  $\sum x_i y_i$  = П7, П8 — буфер. Перед счетом содержимое этих регистров необходимо очистить.

|                 |                 |     |    |     |     |     |     |     |     |
|-----------------|-----------------|-----|----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| П0              | П1              | С/П | П2 | С/П | П3  | Пх6 | +   | П6  | Пх2 |
| Пх3             | ×               | Пх7 | +  | П7  | Пх2 | Пх4 | +   | П4  | Пх2 |
| Fx <sup>2</sup> | Пх5             | +   | П5 | Пх3 | FL0 | 02  | Пх1 | Пх5 | ×   |
| Пх4             | Fx <sup>2</sup> | —   | П8 | Пх6 | Пх5 | ×   | Пх4 | Пх7 | ×   |
| —               | Пх8             | ÷   | ПА | Пх1 | Пх7 | ×   | Пх6 | Пх4 | ×   |
| —               | Пх8             | ÷   | ПВ | ПхA | C/П |     |     |     |     |

Тест:

| $x_i$ | 1 | 2   | 3   |
|-------|---|-----|-----|
| $y_i$ | 2 | 3.1 | 4.1 |

Результаты счета:  $a_0 = 1.05$ ,  $a_1 = 9.666666 \cdot 10^{-1}$ .

Время ввода около 10 с, счета — 16 с.

Если после вычисления среднеквадратического отклонения по формуле (3.1) полученная зависимость недостаточно хорошо описывает поведение экспериментальной величины, то в аппроксимирующей функции следует оставить в разложении еще одну степень:

$$\varphi(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2.$$

**Программа 13. Вычисление  $a_0$ ,  $a_1$ ,  $a_2$  при аппроксимации кривой методом наименьших квадратов.** В программе последовательно вводятся  $N$  С/П  $x_1$  С/П  $y_1$  С/П  $x_2$  С/П  $y_2$  С/П ...  $x_n$  С/П  $y_n$  С/П. После окончания автоматического счета нужно проделать процедуру, стоящую после основной программы, так как объем программной памяти не позволил занести ее в программу.

Память: L0 — цикл, N = П1,  $\sum x_i$  = П5,  $\sum x_i^2$  = П6,  $\sum x_i^3$  = П7,  $\sum x_i^4$  = П8,  $\sum y_i$  = П9,  $\sum x_i y_i$  = ПА,  $\sum x_i^2 y_i$  = ПВ,  $x_i$  = ПС,  $y_i$  = ПД, П2 и П3 — буферные.

|     |     |     |     |                 |     |                 |     |     |     |
|-----|-----|-----|-----|-----------------|-----|-----------------|-----|-----|-----|
| П0  | П1  | С/П | ПС  | С/П             | ПД  | Пх9             | +   | П9  | ПхС |
| Пх5 | +   | П5  | ПхС | Fx <sup>2</sup> | П2  | Пх6             | +   | П6  | Пх2 |
| ПхС | ×   | Пх7 | +   | П7              | Пх2 | Fx <sup>2</sup> | Пх8 | +   | П8  |
| ПхС | ПхД | ×   | ПхА | +               | ПА  | Пх2             | ПхД | ×   | ПхВ |
| +   | ПВ  | ПхД | С/П | FL0             | 03  | Пх5             | ПС  | Пх6 | ПД  |
| П2  | Пх7 | П3  | Пх1 | ПхД             | ×   | ПхС             | Пх5 | ×   | —   |
| ПД  | Пх1 | Пх7 | ×   | ПхС             | Пх6 | ×               | —   | П7  | Пх1 |
| ПхА | ×   | ПхС | Пх9 | ×               | —   | ПА              | Пх1 | Пх3 | ×   |
| Пх2 | Пх5 | ×   | —   | П3              | Пх1 | Пх8             | ×   | Пх2 | Пх6 |
| ×   | —   | П8  | С/П |                 |     |                 |     |     |     |

После выполнения программы и процедуры

$$\begin{array}{r} \text{Пх1 ПхВ} \times \text{Пх2 Пх9} \times - \text{ПхД} \times \text{Пх3} \\ \text{ПxA} \times - \text{ПxD} \text{ Пx8} \times \text{Пx7} \text{ Пx3} \times - \\ \div \text{ПВ} \end{array}$$

получаем на индикаторе значение  $a_2$ . Затем, после выполнения процедуры

$$\text{ПxA ПхВ Пx7} x - \text{ПхД} \div \text{ПA},$$

получаем на индикаторе  $a_1$ , а после выполнения

$$\begin{array}{r} \text{Пx9 ПхВ Пx6} \times - \text{ПxA} \text{ Пx5} \times - \text{Пx1} \\ \div \text{П9} \end{array}$$

получаем  $a_0$ . При этом коэффициенты находятся в регистрах  $\text{Пx9} = a_0$ ,  $\text{ПxA} = a_1$ ,  $\text{ПxB} = a_2$ .

Тестовые данные:

|       |   |    |    |    |    |
|-------|---|----|----|----|----|
| $x_i$ | 1 | 2  | 3  | 4  | 5  |
| $y_i$ | 5 | 12 | 23 | 38 | 57 |

Время ввода каждой пары около 15 с. В результате получаем  $a_2 = 2$ ,  $a_1 = 1$ ,  $a_0 = 2$ . Поэтому аппроксимирующая функция имеет вид

$$\varphi(x) = 2 + x + 2x^2.$$

## 2. Полиномиальная аппроксимация высокого порядка

Аппроксимирующая функция (3.5) теоретически может быть выражена многочленом любой степени  $n$ . Однако в практических расчетах при решении системы линейных уравнений (3.6) возникают ошибки округления вследствие близости к нулю определителя Грама. Недостатком аппроксимации (3.5) является то, что если данная степень недостаточно описывает экспериментальные данные, необходимо взять в разложении (3.5) большее количество членов. При этом приходится вычислять не только новый коэффициент, но и заново пересчитывать все остальные коэффициенты при степенях  $x$ . Чебышев в свое время предложил иной способ нахождения аппроксимирующего многочлена, который получался в виде суммы степеней, причем добавление новых слагаемых не изменяло при этом вычисленных ранее коэффициентов.

Из формулы (3.4) видно, как с увеличением членов в многочлене убывает среднеквадратическое отклонение  $\delta_n$ . Только методом Чебышева на программируемом микрокалькуляторе можно получать степенной многочлен любой достаточно высокой степени  $n$ . Идея его следующая.

Представим аппроксимирующий многочлен в виде

$$\varphi(x) = \sum_{i=0}^m a_i \varphi_i(x), \quad (3.7)$$

где  $\varphi_0(x) = 1$ ,  $\varphi_1(x) = x + \alpha_0^{(1)}$ , а в общем случае

$$\varphi_l(x) = x^l + \alpha_{l-1}^{(l)} x^{l-1} + \alpha_{l-2}^{(l)} x^{l-2}. \quad (3.8)$$

Старший коэффициент при  $x^l$  равен единице. Нужно найти минимум функции

$$u = \sum_{i=1}^n \left\{ y_i - \sum_{k=0}^m a_k \varphi_k(x_i) \right\}, \quad (3.9)$$

Приравнивая нулю частные производные  $\frac{\partial u}{\partial a_0}$ ,  $\frac{\partial u}{\partial a_1}$ , ...,  $\frac{\partial u}{\partial a_m}$ , получаем систему уравнений

$$\begin{aligned} a_0 \sum_{i=1}^n [\varphi_0(x_i)]^2 + a_1 \sum_{i=1}^n \varphi_0(x_i) \varphi_1(x_i) + a_2 \sum_{i=1}^n \varphi_0(x_i) \varphi_2(x_i) + \dots \\ \dots + a_m \sum_{i=1}^n \varphi_0(x_i) \varphi_m(x_i) = \sum_{i=1}^n y_i \varphi_0(x_i), \\ a_0 \sum_{i=1}^n \varphi_0(x_i) \varphi_1(x_i) + a_1 \sum_{i=1}^n [\varphi_1(x_i)]^2 + a_2 \sum_{i=1}^n \varphi_1(x_i) \varphi_2(x_i) + \dots \\ \dots + a_m \sum_{i=1}^n \varphi_1(x_i) \varphi_m(x_i) = \sum_{i=1}^n y_i \varphi_1(x_i), \\ \dots \\ a_0 \sum_{i=1}^n \varphi_0(x_i) \varphi_m(x_i) + a_1 \sum_{i=1}^n \varphi_1(x_i) \varphi_m(x_i) + \dots \\ \dots + a_m \sum_{i=1}^n [\varphi_m(x_i)]^2 = \sum_{i=1}^n y_i \varphi_m(x_i). \end{aligned} \quad (3.10)$$

Решая эту систему линейных уравнений, получим значения коэффициентов  $a_i$  в (3.7), зная которые легко вычислить коэффициенты  $a_k$  (3.5). Подберем  $\alpha_l^{(k)}$  в (3.8) так, чтобы

$$\sum_{i=1}^n \varphi_l(x_i) \varphi_k(x_i) = 0, \quad l \neq k; \quad (3.11)$$

$$\sum_{i=1}^n [\varphi_l(x_i)]^2 \neq 0, \quad l = 0, 1, 2, \dots, m. \quad (3.12)$$

Многочлены, одновременно удовлетворяющие условиям (3.11) и (3.12), называются *ортогональными многочленами Чебышева*. Формула для

коэффициентов в этом случае значительно упрощается:

$$a_l = \frac{\sum_{i=1}^n y_i \varphi_l(x_i)}{\sum_{i=1}^n [\varphi_l(x_i)]^2}, \quad \text{где } l = 0, 1, 2, \dots, m. \quad (3.13)$$

Осталось найти явное выражение для ортогональных многочленов Чебышева. Как уже говорилось,  $\varphi_0(x) = 1$ . Тогда с учетом (3.11) и (3.12)  $\sum_{i=1}^n \varphi_1(x_i) = 0$ , но так как в (3.8)  $\varphi_1(x) = x + \alpha_0^{(1)}$ , то  $\sum_{i=1}^n \{x_i + \alpha_0^{(1)}\} = 0$ , откуда

$$\alpha_0^{(1)} = -\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad \text{и} \quad \varphi_1(x) = x - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i. \quad (3.14)$$

Положив в (3.11) и (3.12)  $l = 0, k = 2$  и затем  $l = 1, k = 2$ , получаем два уравнения для  $\varphi_2(x)$ :

$$\sum_{i=1}^n \varphi_2(x_i) = 0, \quad \sum_{i=1}^n \varphi_1(x_i) \varphi_2(x_i) = 0. \quad (3.15)$$

Запишем многочлен  $\varphi_2(x)$  в виде

$$\varphi_2(x) = (x + \beta_2) \varphi_1(x) + \gamma_2 \varphi_0(x). \quad (3.16)$$

Подставив (3.16) в (3.15), получаем

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n x_i \varphi_1(x_i) + \beta_2 \sum_{i=1}^n \varphi_1(x_i) + n \gamma_2 &= 0, \\ \sum_{i=1}^n x_i [\varphi_1(x_i)]^2 + \beta_2 \sum_{i=1}^n [\varphi_1(x_i)]^2 + \gamma_2 \sum_{i=1}^n \varphi_1(x_i) &= 0. \end{aligned} \quad (3.17)$$

В результате получаем

$$\beta_2 = \frac{\sum_{i=1}^n x_i [\varphi_1(x_i)]^2}{\sum_{i=1}^n [\varphi_1(x_i)]^2}, \quad \gamma_2 = -\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \varphi_1(x_i), \quad (3.18)$$

где

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n x_i \varphi_1(x_i) &= \sum_{i=1}^n x_i^2 + \alpha_0^{(1)} \sum_{i=1}^n x_i, \\ \sum_{i=1}^n [\varphi_1(x_i)]^2 &= \sum_{i=1}^n x_i^2 + \alpha_0^{(1)} \sum_{i=1}^n x_i, \\ \sum_{i=1}^n x_i [\varphi_1(x_i)]^2 &= \sum_{i=1}^n x_i^3 + \alpha_0^{(1)} \sum_{i=1}^n x_i^2 + \alpha_0^{(1)} \sum_{i=1}^n x_i \varphi_1(x_i). \end{aligned} \quad (3.19)$$

Тем самым мы получили многочлены  $\varphi_0(x)$ ,  $\varphi_1(x)$  и  $\varphi_2(x)$ . Существует также и общая рекуррентная формула, с помощью которой можно построить любой последующий многочлен, если известны два предыдущих:

$$\varphi_{r+1}(x) = (x + \beta_{r+1}) \varphi_r(x) + \gamma_{r+1} \varphi_{r-1}(x),$$

$$\beta_{r+1} = -\frac{\sum_{i=1}^n x_i [\varphi_r(x_i)]^2}{\sum_{i=1}^n [\varphi_r(x_i)]^2},$$

$$\gamma_{r+1} = -\frac{\sum_{i=1}^n x_i \varphi_{r-1}(x_i) \varphi_2(x_i)}{\sum_{i=1}^n [\varphi_{r-1}(x_i)]^2}.$$

Вычислив  $\beta_{r+1}$  и  $\gamma_{r+1}$ , легко найти и  $\varphi_{r+1}(x)$ , если известны  $\varphi_{r-1}(x)$  и  $\varphi_r(x)$ . А коэффициенты  $a_i$  вычисляются по формуле (3.13). Эти формулы заложены в комплекс программ 14—19, позволяющих вычислить аппроксимирующий полином

$$f(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 + b_4 x^4.$$

Программа 14 вычисляет функции  $\varphi_1(x)$  и  $\varphi_2(x)$ , а также  $a_0$  и  $a_1$ . Если ограничиться разложением

$$f(x) = a_0 \varphi_0(x) + a_1 \varphi_1(x) + a_2 \varphi_2(x),$$

то по программе 15 вычисляется  $a_2$ . Если же этого недостаточно, то, после вычисления  $\varphi_3(x)$  по программе 16, определяется  $a_3$ . Так продолжается до программы 17, определяющей  $\varphi_4(x)$ . Полученные результаты обрабатываются по программе 18, которая по формуле (3.13) вычисляет окончательный полином.

**Программа 14. Вычисление  $\varphi_1(x)$ ,  $\varphi_2(x)$ ,  $a_0$ ,  $a_1$ .** Введем  $N$  С/П  $x_1$  С/П  $y_1$  С/П  $x_2$  С/П ...  $x_n$  С/П  $y_n$  С/П. В результате счета получаем  $\text{П}x\text{A}=a_0$  в регистре X,  $\text{П}x\text{D}=a_1$  в регистре Y.

Память: счетчик количества точек  $i=\text{П}4$ ,  $x_i=\text{П}1$ ,  $y_i=\text{П}2$ ,  $\sum x_i=\text{П}3$ ,  $\sum y_i=\text{П}5$ ,  $\sum x_i y_i=\text{П}6$ ,  $\sum x_i^2=\text{П}7$ ,  $\sum x_i^3=\text{П}8$ ,  $\sum [\varphi_1(x)]^2=\text{П}9$ .

Перед началом вычислений эти регистры необходимо очистить. Но после счета информация, находящаяся в регистрах П9, П0, ПВ, ПС должна быть сохранена, так как используется в программе 15. Аппроксимирующие полиномы, получаемые в результате вычислений, можно представить в виде

$$\varphi_1(x) = x + \text{П}x0, \quad \varphi_2(x) = x^2 + \text{П}x\text{B} \cdot x + \text{П}x\text{C}.$$

Эта запись означает, что свободный член в полиноме  $\varphi_1(x)$  находится в регистре ПО, а для полинома  $\varphi_2(x)$  — в регистре ПС. Коэффициент

при первой степени  $x$  в полиноме  $\varphi_2(x)$  находится после счета в регистре ПВ. Этой удобной для пользователя формой записи степенных многочленов будем пользоваться и в дальнейшем.

|     |     |                 |     |     |     |                 |                 |      |                 |
|-----|-----|-----------------|-----|-----|-----|-----------------|-----------------|------|-----------------|
| П1  | С/П | П2              | Пх5 | +   | П5  | Пх1             | Пх3             | +    | П3              |
| Пх1 | Пх2 | ×               | Пх6 | +   | П6  | Пх1             | Фх <sup>2</sup> | Пх7  | +               |
| П7  | Пх1 | Фх <sup>2</sup> | Пх1 | ×   | Пх8 | +               | П8              | КПх4 | Пх4             |
| С/П | БП  | 00              | Пх5 | Пх4 | ÷   | ПА              | Пх6             | Пх3  | Пх5             |
| ×   | Пх4 | ÷               | —   | Пх7 | Пх3 | Фх <sup>2</sup> | Пх4             | ÷    | —               |
| П9  | ÷   | ПД              | Пх3 | Пх7 | ×   | 2               | ×               | Пх3  | Фх <sup>2</sup> |
| Пх3 | ×   | Пх4             | ÷   | —   | Пх4 | ÷               | Пх8             | —    | Пх9             |
| ÷   | ПВ  | Пх9             | Пх4 | ÷   | /—/ | ПС              | Пх3             | Пх4  | ÷               |
| /—/ | П0  | ПхВ             | ×   | +   | ПС  | Пх0             | ПхВ             | +    | ПВ              |
| ПхД | ПхА | С/П             |     |     |     |                 |                 |      |                 |

**Программа 15. Вычисление  $\varphi_3(x)$  и  $a_2$ .** Введите  $x_1$  С/П  $y_1$  С/П  $x_2$  С/П ...  $y_n$  С/П БП 50 С/П. В результате счета вы получите

$$\varphi_3(x) = x^3 + Пх5 \cdot x^2 + Пх6 \cdot x + Пх7, \quad a_2 = ПхA.$$

Эти данные, а также сумма  $\sum [\varphi_2(x_i)]^2$  используются в следующей программе 16.

Память:  $x_i = П1$ ,  $y_i = П6$ ,  $i = П4$ ,  $\sum x_i [\varphi_2]^2 = П1$ ,  $\sum [\varphi_2]^2 = П2$ ,  $\sum x_i \varphi_1 \varphi_2 = П3$ ,  $\sum y_i \varphi_2 = П7$ ,  $\sum (\varphi_1)^2 = П9$ .

Тест программы:

|     |     |     |     |                 |      |     |     |     |                 |
|-----|-----|-----|-----|-----------------|------|-----|-----|-----|-----------------|
| ↔   | Cx  | П1  | П2  | П3              | П4   | П7  | ↔   | П5  | С/П             |
| П6  | Пх5 | ПхВ | +   | Пх5             | ×    | ПхС | +   | П6  | ×               |
| Пх7 | +   | П7  | Пх5 | Пх0             | +    | Пх6 | ×   | Пх5 | ×               |
| Пх3 | +   | П3  | Пх6 | Фх <sup>2</sup> | Пх2  | +   | П2  | Пх6 | Фх <sup>2</sup> |
| Пх5 | ×   | Пх1 | +   | П1              | КПх4 | Пх4 | С/П | БП  | 08              |
| Пх7 | Пх2 | ÷   | ПА  | Пх1             | Пх2  | ÷   | /—/ | П8  | Пх3             |
| Пх9 | ÷   | /—/ | ПД  | Пх8             | ПхВ  | ×   | +   | ПхС | +               |
| П6  | ПхВ | Пх8 | +   | П5              | Пх8  | ПхС | ×   | ПхД | Пх0             |
| ×   | +   | П7  | С/П |                 |      |     |     |     |                 |

**Программа 16. Вычисление  $\varphi_4(x)$  и  $a_3$ .** Перед программой следует очистить только регистры

Cx П1 П3 П4 П8 П9.

Вводим исходные данные  $x_1$  С/П  $y_1$  С/П ...  $y_n$  С/П БП 49 С/П. Результаты поступают в регистры:

$$\varphi_4(x) = x^4 + Пх0x^3 + Пх2 \cdot x^2 + Пх3x + Пх9, \quad a_3 = ПхA.$$

Эти числа используются в программе 17.

Память:  $x_i = П0$ ,  $\sum x_i [\varphi_3]^2 = ПВ$ ,  $\sum x_i \varphi_2 \varphi_3 = П3$ ,  $\sum y_i \varphi_3 = П9$ ,  $\sum [\varphi_3]^2 = П1$ ,  $\gamma_4 = ПД$ , П8 — буфер.

### Тест программы:

|     |     |     |     |      |     |     |     |     |                 |
|-----|-----|-----|-----|------|-----|-----|-----|-----|-----------------|
| П0  | С/П | Пх0 | Пх5 | +    | Пх0 | ×   | Пх6 | +   | Пх0             |
| ×   | Пх7 | +   | ПА  | ×    | Пх9 | +   | П9  | ПхА | Fx <sup>2</sup> |
| ПД  | Пх1 | +   | П1  | ПхД  | Пх0 | ×   | Пх8 | +   | П8              |
| Пх0 | ПхВ | +   | Пх0 | ×    | ПхС | +   | Пх0 | ×   | ПхА             |
| ×   | Пх3 | +   | П3  | КПх4 | Пх4 | С/П | БП  | 00  | Пх8             |
| Пх1 | ÷   | /—/ | П8  | Пх3  | Пх2 | ÷   | /—/ | ПД  | Пх9             |
| Пх1 | ÷   | ПА  | Пх5 | Пх8  | +   | П0  | Пх6 | Пх8 | Пх5             |
| ×   | +   | ПхД | +   | П2   | Пх7 | Пх8 | Пх6 | ×   | +               |
| ПхД | ПхВ | ×   | +   | П3   | Пх8 | Пх7 | ×   | ПхД | ПхС             |
| ×   | +   | П9  | С/П |      |     |     |     |     |                 |

**Программа 17. Вычислить  $a_4$ .** Введите  $N$  С/П  $x_1$  С/П  $y_1$  С/П  $x_2 \dots y_n$  СП. На индикаторе высветится значение  $a_4$ . Оно находится в регистре ПА.

Память:  $x_i = \text{П5}$ ,  $\sum y_i \varphi_4 = \text{П6}$ ,  $\sum [\varphi_3(x_i)]^2 = \text{П7}$ ,  $N = \text{П1}$ ,  $i = \text{П4}$ .

|     |     |     |     |                 |     |     |    |      |     |
|-----|-----|-----|-----|-----------------|-----|-----|----|------|-----|
| П1  | С/П | ↔   | Cx  | П6              | П7  | П4  | ↔  | БП   | 11  |
| С/П | П5  | С/П | Пх5 | Пх0             | +   | Пх5 | ×  | Пх2  | +   |
| Пх5 | ×   | Пх3 | +   | Пх5             | ×   | Пх9 | +  | П8   | ×   |
| Пх6 | +   | П6  | Пх8 | Fx <sup>2</sup> | Пх7 | +   | П7 | КПх4 | Пх4 |
| FL1 | 10  | Пх6 | Пх7 | +               | ПА  | СП  |    |      |     |

Следующая программа вычисляет коэффициенты  $c_k$  в сумме:

$$f(x) = \sum_{k=0}^4 c_k x^k.$$

**Программа 18. Вычисление коэффициентов суммы**  $\sum_{k=0}^4 c_k x^k$ .

Перед счетом программы все регистры необходимо очистить. Вводятся коэффициенты  $a_l$  и  $b_k$  из полинома

$$\varphi(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 + b_4 x^4,$$

$a_l$  С/П  $b_0$  С/П  $b_1$  С/П  $b_2$  С/П  $b_3$  С/П  $b_4$  С/П,

затем вводится новая группа  $a_l$  и  $\varphi_l$ . Так продолжается до тех пор, пока не будут введены все значения  $a_0, \varphi_0, a_1, \varphi_1, \dots, a_4, \varphi_4$ . Если вводятся коэффициенты полинома менее четвертого порядка, то вместо недостающих коэффициентов  $b_k$  следует вводить нули. Полученная степенная функция имеет вид

$$f(x) = x^4 \cdot \text{Пх4} + x^3 \cdot \text{Пх3} + x^2 \cdot \text{Пх2} + x \cdot \text{Пх1} + \text{Пх0}.$$

Тест программы:

|    |                     |     |     |     |     |     |     |     |     |
|----|---------------------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| ПА | С/П                 | П5  | С/П | П6  | С/П | П7  | С/П | П8  | С/П |
| П9 | ПхА                 | ×   | Пх4 | +   | П4  | Пх8 | ПхА | ×   | Пх3 |
| +  | П3                  | Пх7 | ПхА | ×   | Пх2 | +   | П2  | Пх6 | ПхА |
| ×  | Пх1                 | +   | П1  | Пх5 | ПхА | ×   | Пх0 | +   | П0  |
| Cx | F sin <sup>-1</sup> | С/П | Б/П | 00  |     |     |     |     |     |

Допустим, что мы имеем следующие данные:

|     |   |    |    |     |     |
|-----|---|----|----|-----|-----|
| $x$ | 0 | 1  | 2  | 3   | 4   |
| $y$ | 6 | 20 | 88 | 300 | 794 |

По программам 14—17 находим последовательно вид функций  $\varphi_0$ ,  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$ ,  $\varphi_3$ ,  $\varphi_4$  и значения коэффициентов  $a_0$ ,  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $a_3$ ,  $a_4$ .

$$\begin{aligned} a_0 &= 241.6, & \varphi_0(x) &= 1, \\ a_1 &= 185.6, & \varphi_1(x) &= x - 2, \\ a_2 &= 78.857142, & \varphi_2(x) &= x^2 - 4x + 2, \\ a_3 &= 19, & \varphi_3(x) &= x^3 - 6x^2 + 8.6x - 1.2, \\ a_4 &= 2.0009791, & & \end{aligned}$$

$$\varphi_4(x) = x^4 - 8x^3 + 19.571429x^2 - 14.285714x + 0.3428572.$$

Рядом с функциями выписаны соответствующие коэффициенты. Обработав эти данные по программе 18, получаем

$$f(x) = 2.0009791x^4 + 2.992167x^3 + 4.01916x^2 + 4.986015x + 6.0003301.$$

Среднеквадратическое отклонение функции  $f(x)$  от экспериментальных точек должно быть одного порядка с погрешностью табличных данных. Проверить это можно с помощью специальной программы.

**Программа 19. Вычисление среднеквадратического отклонения теоретической кривой от экспериментальных точек.** Вводите  $N$  С/П  $x_1$  С/П  $y_1$  С/П  $x_2$  С/П  $y_2$  С/П ...  $x_n$  С/П  $y_n$  С/П. Здесь  $N$  — число пар точек таблицы. На индикаторе после счета появится число  $\delta_n$ .

Память: L0 — цикл,  $x_i = \Pi_1$ ,  $y_i = \Pi_2$ ,  $\sum \Delta_i^2 = \Pi_3$ ,  $i = \Pi_4$ .  
 П0 С/П ↔ Сх П3 П4 П5 ↔ БП 11  
 С/П П1 С/П П2 ПП 34 Пх2 — Пх2 ÷  
 Fx<sup>2</sup> Пх3 + П3 КПх4 Пх4 FL0 10 Пх3 Пх4  
 ÷ FV - П5 С/П ... ... ... ... ... B/0

В программе вместо точек следует ввести подпрограмму-функцию  $f(x)$ , где  $x = \Pi_1$ .

### 3. Приближение экспериментальных кривых двухпараметрическими зависимостями

На практике нередко экспериментальная кривая описывается какой-нибудь очень простой двухпараметрической зависимостью, к примеру

$$y = ax^b, \quad (3.20)$$

где  $a$  и  $b$  — постоянные. Два постоянных параметра  $a$  и  $b$  определяются методом наименьших квадратов. Для этого используют линеаризующие

преобразования и рассматривают не среднеквадратическое отклонение аналитической функции от экспериментальных точек, а среднеквадратическое отклонение некой новой величины, минимум которой также соответствует удачному подбору параметров. Эта новая величина представляет собой квадрат некоторой величины, в которую постоянные параметры  $a$  и  $b$  входят линейно.

Рассмотрим функцию

$$y = \frac{ax}{b+x}. \quad (3.21)$$

Поделив числитель и знаменатель на  $x$ , получим

$$y = \frac{a}{\frac{b}{x} + 1}, \quad (3.22)$$

откуда следует, что

$$\frac{a}{y} - \frac{b}{x} - 1 = 0. \quad (3.23)$$

Поскольку аналитическая функция не дает точное описание экспериментальной зависимости, правая часть (3.23) не будет равна нулю. Тогда, просуммировав квадраты величин, входящих в (3.23), получим некоторое среднеквадратическое отклонение

$$\delta_n^2 = \sum_{i=1}^n \left( \frac{a}{y_i} - \frac{b}{x_i} - 1 \right)^2. \quad (3.24)$$

Чтобы эта величина имела минимум, необходимо, чтобы производные этой величины по  $a$  и  $b$  были равны нулю. Откуда

$$\begin{aligned} a \sum_{i=1}^n \frac{1}{y_i^2} - b \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i y_i} &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{y_i}, \\ a \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i y_i} - b \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i^2} &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i}. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Решение системы линейных уравнений (3.25) относительно параметров  $a$  и  $b$  дает значение постоянных параметров  $a$  и  $b$  двухпараметрической функции.

В табл. 15 приведены наиболее употребительные двухпараметрические зависимости с указанием линейного уравнения, решая которое легко вычислить постоянные параметры. Справа в таблице указаны области допустимых значений табличных данных, при которых можно найти параметры  $a$  и  $b$ .

Систему уравнений для вычисления параметров можно получить далеко не единственным образом. Так, для функции (3.21) величину  $\delta_n^2$

| Вид зависимости       | Система уравнений для определения $a$ и $b$  |
|-----------------------|--|
| $y = a + b/x$         | $\left\{ \begin{array}{l} aN + b \sum (1/x_i) = \sum y_i \\ a \sum (1/x_i) + b \sum (1/x_i)^2 = \sum (y_i/x_i), \quad x_i \neq 0 \end{array} \right.$ <p>или</p> $\left\{ \begin{array}{l} a \sum x_i + b N = \sum x_i y_i \\ a \sum x_i^2 + b \sum x_i = \sum x_i^2 y_i \end{array} \right.$                    |
| $y = 1/(a + bx)$      | $\left\{ \begin{array}{l} aN + b \sum x_i = \sum (1/y_i) \\ a \sum x_i + b \sum x_i^2 = \sum (x_i/y_i), \quad y_i \neq 0 \end{array} \right.$ <p>или</p> $\left\{ \begin{array}{l} a \sum y_i^2 + b \sum x_i y_i^2 = \sum y_i \\ a \sum x_i y_i^2 + b \sum x_i^2 y_i^2 = \sum x_i y_i \end{array} \right.$       |
| $y = x/(a + bx)$      | $\left\{ \begin{array}{l} aN + b \sum x_i = \sum x_i/y_i \\ a \sum x_i + b \sum x_i^2 = \sum x_i^2/y_i, \quad y_i \neq 0 \end{array} \right.$ <p>или</p> $\left\{ \begin{array}{l} a \sum y_i^2 + b \sum x_i y_i^2 = \sum x_i y_i \\ a \sum x_i y_i^2 + b \sum x_i^2 y_i^2 = \sum x_i^2 y_i \end{array} \right.$ |
| $y = ab^x$            | $\left\{ \begin{array}{l} N \ln a + (\ln b) \sum x_i = \sum \ln y_i \\ (\ln a) \sum x_i + (\ln b) \sum x_i^2 = \sum x_i \ln y_i, \quad y_i \neq 0 \end{array} \right.$   |
| $y = ae^{bx}$         | $\left\{ \begin{array}{l} N \ln a + b \sum x_i = \sum \ln y_i \\ (\ln a) \sum x_i + b \sum (x_i)^2 = \sum x_i \ln y_i, \quad y_i \neq 0 \end{array} \right.$   |
| $y = 1/(a + be^{-x})$ | $\left\{ \begin{array}{l} Na + b \sum \exp(-x_i) = \sum 1/y_i \\ a \sum \exp(-x_i) + b \sum \exp(-2x_i) = \sum \exp(-x_i)/y_i, \quad y_i \neq 0 \end{array} \right.$   |
| $y = ax^b$            | $\left\{ \begin{array}{l} N \ln a + b \sum \ln x_i = \sum \ln y_i \\ (\ln a) \sum \ln x_i + b \sum (\ln x_i)^2 = \sum (\ln x_i) (\ln y_i), \quad x_i \neq 0, \quad y_i \neq 0 \end{array} \right.$   |
| $y = a + b \ln x$     | $\left\{ \begin{array}{l} Na + b \sum \ln x_i = \sum y_i \\ a \sum \ln x_i + b \sum (\ln x_i)^2 = \sum (\ln x_i) y_i, \quad x_i \neq 0 \end{array} \right.$  |
| $y = a/(b+x)$         | $\left\{ \begin{array}{l} a \sum (1/y_i)^2 - b \sum (1/y_i) = \sum (x_i/y_i) \\ a \sum (1/b_i) - b N = \sum x_i, \quad y_i \neq 0 \end{array} \right.$ <p>или</p> $\left\{ \begin{array}{l} aN - b \sum y_i = \sum x_i y_i \\ a \sum y_i - b \sum y_i^2 = \sum x_i y_i^2 \end{array} \right.$                    |

| Вид зависимости     | Системы уравнений для определения $a$ и $b$   |
|---------------------|---|
| $y = ax/(b+x)$      | $\begin{cases} a \sum (1/y_i)^2 - b \sum (1/x_i y_i) = \sum (1/y_i) \\ a \sum (1/x_i y_i) - b \sum (1/x_i)^2 = \sum (1/x_i) \end{cases}$ или $\begin{cases} a \sum x_i^2 - b \sum x_i y_i = \sum x_i^2 y_i \\ a \sum x_i y_i - b \sum y_i^2 = \sum x_i y_i^2 \end{cases}$ |
| $y = a \exp\{b/x\}$ | $N \ln a + b \sum (1/x_i) = \sum \ln y_i$ $\ln a \sum (1/x_i) + b \sum (1/x_i)^2 = \sum (\ln y_i / x_i)$  |
| $y = a + bx^n$      | $Na + b \sum x_i^n = \sum y_i$ $a \sum x_i^n + b \sum x_i^{2n} = \sum (x_i^n y_i)$  |
| $y = ax^2/(b+x)$    | $a \sum x_i^4 - b \sum x_i^2 y_i = \sum x_i^3 y_i$ $a \sum x_i^2 y_i - b \sum y_i^2 = \sum x_i y_i^2$   |

можно представить выражением

$$\delta_n^2 = \sum_{i=1}^n (ax_i - by_i - x_i y_i)^2. \quad (3.26)$$

В данном случае мы получим иную систему линейных уравнений:

$$\begin{aligned} a \sum_{i=1}^n x_i^2 - b \sum_{i=1}^n x_i y_i &= \sum_{i=1}^n x_i^2 y_i, \\ a \sum_{i=1}^n x_i y_i - b \sum_{i=1}^n y_i^2 &= \sum_{i=1}^n x_i y_i^2. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Вследствие погрешности вычислений одна из систем (3.25) или (3.27) дает более точное решение, а другая — более грубое. Непосредственной подстановкой данных легко определяется, в каком случае значения параметров более точные. Поэтому для некоторых функций в табл. 18 приводятся две системы уравнений для вычисления параметров. Все эти вычисления реализованы в программах 20—40.

В этих программах сначала вводится число  $N$  — количество пар значений функции, а затем все значения  $x_i$  и  $y_i$  до  $x_n$  и  $y_n$ , т. е.

$N \text{ C/P } x_1 \text{ C/P } y_1 \text{ C/P } x_2 \text{ C/P } \dots y_n \text{ C/P }$

После ввода последнего значения  $y_n$  микроЭВМ автоматически приступает к вычислению параметров  $a$  и  $b$ . При этом значение  $a$  поступает в регистр ПА и X, т. е. на индикатор, а число  $b$  — в регистр ПВ и Y.

**Программа 20. Вычисление параметров  $a$  и  $b$ , если  $y = a + b/x$ .**  
 Память: L0 — цикл,  $x_i = \Pi 1$ ,  $y_i = \Pi 2$ ,  $N = \Pi 4$ ,  $\sum (1/x_i) = \Pi 3$ ,  $\sum y_i = \Pi 5$ ,  
 $\sum \left(\frac{1}{x_i}\right)^2 = \Pi 6$ ,  $\sum \frac{y_i}{x_i} = \Pi 7$ .

|                 |     |     |      |     |                 |     |     |     |     |
|-----------------|-----|-----|------|-----|-----------------|-----|-----|-----|-----|
| П0              | С/П | ↔   | Cx   | П3  | П4              | П5  | П6  | П7  | ↔   |
| БП              | 13  | С/П | F1/x | П1  | С/П             | П2  | Пх5 | +   | П5  |
| Пх1             | Пх3 | +   | П3   | Пх1 | Fx <sup>2</sup> | Пх6 | +   | П6  | Пх1 |
| Пх2             | ×   | Пх7 | +    | П7  | KPx4            | Пх4 | FL0 | 12  | Пх5 |
| Пх6             | ×   | Пх3 | Пх7  | ×   | —               | Пх4 | Пх6 | ×   | Пх3 |
| Fx <sup>2</sup> | —   | П8  | ÷    | ПА  | Пх4             | Пх7 | ×   | Пх5 | Пх3 |
| ×               | —   | Пх8 | ÷    | ПВ  | ПxA             | C/П |     |     |     |

Тест:

| x | 0.5 | 1 | 2 |
|---|-----|---|---|
| y | 7   | 5 | 4 |

Результаты счета:  $a = 3$ ,  $b = 2$ ,  $t_{\text{вв}} \sim 14$  с,  $t_{\text{сч}} = 16$  с.

**Программа 21. Вычисление параметров  $a$  и  $b$ , если  $y = a + b/x$ .**  
 Память: L0 — цикл,  $x_i = \Pi 1$ ,  $y_i = \Pi 2$ ,  $N = \Pi 6$ ,  $\sum xy = \Pi 7$ ,  $\sum x_i^2 = \Pi 4$ ,  
 $\sum x_i^2 y_i = \Pi 5$ ,  $\Delta = \Pi 8$ .

|                 |                 |     |     |     |     |                 |     |     |     |
|-----------------|-----------------|-----|-----|-----|-----|-----------------|-----|-----|-----|
| П0              | П6              | С/П | ↔   | Cx  | П3  | П4              | П5  | П7  | ↔   |
| БП              | 13              | С/П | П1  | С/П | П2  | Пх1             | ×   | Пх7 | +   |
| П7              | Пх1             | Пх3 | +   | П3  | Пх1 | Fx <sup>2</sup> | Пх4 | +   | П4  |
| Пх1             | Fx <sup>2</sup> | Пх2 | ×   | Пх5 | +   | П5              | FL0 | 12  | Пх3 |
| Fx <sup>2</sup> | Пх4             | Пх6 | ×   | —   | П8  | Пх3             | Пх7 | ×   | Пх6 |
| Пх5             | ×               | —   | Пх8 | ÷   | ПА  | Пх3             | Пх5 | ×   | Пх7 |
| Пх4             | ×               | —   | Пх8 | ÷   | ПВ  | ПxA             | C/П |     |     |

Время ввода  $\sim 13$  с, время счета 17 с.

Тест тот же, что и в программе 20.

**Программа 22. Вычисление параметров  $a$  и  $b$ , если  $y = 1/(a+bx)$ .**

Память: L0 — цикл,  $x_i = \Pi 1$ ,  $\frac{1}{y_i} = \Pi 2$ ,  $\sum x_i = \Pi 3$ ,  $x_i^2 = \Pi 5$ ,  $\sum x_i^2 = \Pi 6$ ,  
 $\sum \frac{y_i}{x_i} = \Pi 7$ ,  $\Delta = \Pi 8$  ( $\Delta$  — главный определитель полученной системы  
 линейных уравнений):  $y_i \neq 0$ !

|                 |     |     |     |     |                 |     |     |     |     |
|-----------------|-----|-----|-----|-----|-----------------|-----|-----|-----|-----|
| П0              | С/П | ↔   | Cx  | П3  | П4              | П5  | П6  | П7  | ↔   |
| БП              | 13  | СП  | П1  | С/П | F1/x            | П2  | Пх5 | +   | П5  |
| Пх1             | Пх3 | +   | П3  | Пх1 | Fx <sup>2</sup> | Пх6 | +   | П6  | Пх1 |
| Пх2             | ×   | Пх7 | +   | П7  | KPx4            | Пх4 | FL0 | 12  | Пх5 |
| Пх6             | ×   | Пх3 | Пх7 | ×   | —               | Пх4 | Пх6 | ×   | Пх3 |
| Fx <sup>2</sup> | —   | П8  | ÷   | ПА  | Пх4             | Пх7 | ×   | Пх5 | Пх3 |
| ×               | —   | Пх8 | ÷   | ПВ  | ПxA             | C/П |     |     |     |

Тест:  $N = 3$ 

|     |     |     |      |
|-----|-----|-----|------|
| $x$ | 0   | 1   | 4    |
| $y$ | 0.5 | 0.4 | 0.25 |

$a = 2, b = 0.5$

Время ввода  $\sim 13$  с, время счета 17 с.Программа 23. Вычисление  $a$  и  $b$ , если  $y = 1/(a + bx)$ . Память:

$$L0 - \text{цикл}, \sum y^2 = \Pi_4, \sum xy^2 = \Pi_3, \sum y = \Pi_5, \sum x^2y^2 = \Pi_6, \sum xy = \Pi_7, \Delta = \Pi_8, \Pi_9 - \text{буфер}.$$

Время ввода — 13 с, время счета — 17 с.

Тест тот же что и в программе 22.

|     |     |     |                 |     |     |                 |                 |                 |     |
|-----|-----|-----|-----------------|-----|-----|-----------------|-----------------|-----------------|-----|
| П0  | C/П | ↔   | Cx              | П3  | П4  | П5              | П6              | П7              | ↔   |
| БП  | 13  | C/П | П1              | C/П | П2  | Fx <sup>2</sup> | П9              | Px <sup>4</sup> | +   |
| П4  | Px9 | Px1 | ×               | Px3 | +   | П3              | Px2             | Px5             | +   |
| П5  | Px9 | Px1 | Fx <sup>2</sup> | ×   | Px6 | +               | П6              | Px1             | Px2 |
| ×   | Px7 | +   | P7              | FL0 | 12  | Px3             | Fx <sup>2</sup> | Px4             | Px6 |
| ×   | —   | P8  | Px3             | Px7 | ×   | Px6             | Px5             | ×               | —   |
| Пx8 | ÷   | ПА  | Px3             | Px5 | ×   | Px7             | Px4             | ×               | —   |
| Px8 | ÷   | ПВ  | PxA             | C/П |     |                 |                 |                 |     |

Программа 24. Вычисление  $a$  и  $b$ , если  $y = x/(a + bx)$ . Память:

$$L0 - \text{цикл}, x_i = \Pi_1, y_i = \Pi_2, N = \Pi_4, \sum x = \Pi_3, \sum x^2 = \Pi_6, \sum \frac{x_i}{y_i} = \Pi_5, \sum \frac{x_i}{y_i} = \Pi_7, \Delta = \Pi_8.$$

|                 |     |     |                 |     |     |     |    |      |     |
|-----------------|-----|-----|-----------------|-----|-----|-----|----|------|-----|
| П0              | C/П | ↔   | Cx              | П3  | П4  | П5  | П6 | П7   | ↔   |
| БП              | 13  | C/П | П1              | C/П | П2  | Px1 | ↔  | ÷    | Px5 |
| +               | П5  | Px1 | Fx <sup>2</sup> | Px2 | ÷   | Px7 | +  | П7   | Px1 |
| Fx <sup>2</sup> | Px6 | +   | P6              | Px1 | Px3 | +   | П3 | KPx4 | Px4 |
| FL0             | 12  | Px5 | Px6             | ×   | Px3 | Px7 | ×  | —    | Px4 |
| Px6             | ×   | Px3 | Fx <sup>2</sup> | —   | P8  | ÷   | ПА | Px4  | Px7 |
| ×               | Px5 | Px3 | ×               | —   | Px8 | ÷   | ПВ | PxA  | C/П |

Тест:  $N = 3$ 

|     |      |     |      |
|-----|------|-----|------|
| $x$ | 1    | 4   | 24   |
| $y$ | 0.25 | 0.4 | 0.48 |

Результаты счета:  $a = 2, b = 2, t_{\text{сч}} = 17$  с.Программа 25. Вычисление  $a$  и  $b$ , если  $y = x/(a + bx)$ . Память:

$$\sum y^2 = \Pi_4, \sum xy^2 = \Pi_3, \sum xy = \Pi_5, \sum x^2y^2 = \Pi_6, \sum x^2y = \Pi_7, \Delta = \Pi_8, \Pi_9 - \text{буфер}.$$

|    |     |     |    |     |    |                 |     |     |   |
|----|-----|-----|----|-----|----|-----------------|-----|-----|---|
| П0 | C/П | ↔   | Cx | П3  | П4 | П5              | П6  | П7  | ↔ |
| БП | 13  | C/П | П1 | C/П | П2 | Fx <sup>2</sup> | П9  | Px4 | + |
| П4 | Px9 | Px1 | ×  | Px3 | +  | П3              | Px1 | Px2 | × |

|     |     |     |    |     |                 |     |     |                 |     |
|-----|-----|-----|----|-----|-----------------|-----|-----|-----------------|-----|
| П9  | Пх5 | +   | П5 | Пх9 | Fx <sup>2</sup> | Пх6 | +   | П6              | Пх9 |
| Пх1 | ×   | Пх7 | +  | П7  | FL0             | 12  | Пх3 | Fx <sup>2</sup> | Пх4 |
| Пх6 | ×   | -   | П8 | Пх3 | Пх7             | ×   | Пх6 | Пх5             | ×   |
| -   | Пх8 | ÷   | ПА | Пх3 | Пх5             | ×   | Пх7 | Пх4             | ×   |
| -   | Пх8 | ÷   | ПВ | ПхА | C/P             |     |     |                 |     |

Тест тот же, что и в программе 24, дает  $a=1.9999955$ ,  $b=2$ , время ввода  $\sim 13$  с, время счета  $\sim 17$  с.

**Программа 26. Вычисление  $a$  и  $b$ , если  $y=ab^x$ .** L0—цикл,  $x_i=\Pi_1$ ,  $\ln y_i=\Pi_2$ ,  $N=\Pi_4$ ,  $\sum x_i=\Pi_3$ ,  $\ln x_i^2=\Pi_6$ ,  $\sum \ln y_i=\Pi_5$ ,  $\sum x_i \ln y_i=\Pi_7$ ,  $\Delta=\Pi_8$ .

|                 |     |     |     |                 |                 |     |                 |     |     |
|-----------------|-----|-----|-----|-----------------|-----------------|-----|-----------------|-----|-----|
| П0              | C/P | ↔   | Cx  | П3              | П4              | П5  | П6              | П7  | ↔   |
| БП              | 13  | C/P | П1  | C/P             | F ln            | П2  | Пх1             | ×   | Пх7 |
| +               | П7  | Пх1 | Пх3 | +               | П3              | Пх1 | Fx <sup>2</sup> | Пх6 | +   |
| П6              | Пх2 | Пх5 | +   | П5              | KPx4            | Пх4 | FL0             | 12  | Пх5 |
| Пх6             | ×   | Пх3 | Пх7 | ×               | -               | Пх4 | Пх6             | ×   | Пх3 |
| Fx <sup>2</sup> | -   | П8  | ÷   | Fe <sup>x</sup> | ПА              | Пх4 | Пх7             | ×   | Пх5 |
| Пх3             | ×   | -   | Пх8 | ÷               | Fe <sup>x</sup> | ПВ  | ПхA             | C/P |     |

Тест:  $N=3$

|   |   |    |    |
|---|---|----|----|
| x | 1 | 2  | 3  |
| y | 6 | 12 | 24 |

$a=3.0000028$ ,  $b=2$ , время ввода  $\sim 14$  с, время счета  $\sim 20$  с.

**Программа 27. Вычисление  $a$  и  $b$ , если  $y=ae^{bx}$ .** Память: L0—цикл,  $x_i=\Pi_1$ ,  $\ln y_i=\Pi_2$ ,  $N=\Pi_4$ ,  $\sum x_i=\Pi_3$ ,  $\sum x^2=\Pi_6$ ,  $\sum \ln y_i=\Pi_5$ ,  $\sum x_i \ln y_i=\Pi_7$ ,  $\Delta=\Pi_8$ ,  $y_i \neq 0$ .

|                 |     |     |     |                 |      |     |                 |     |     |
|-----------------|-----|-----|-----|-----------------|------|-----|-----------------|-----|-----|
| П0              | C/P | ↔   | Cx  | П3              | П4   | П5  | П6              | П7  | ↔   |
| БП              | 13  | C/P | П1  | C/P             | Fln  | П2  | Пх1             | ×   | Пх7 |
| +               | П7  | Пх1 | Пх3 | +               | П3   | Пх1 | Fx <sup>2</sup> | Пх6 | +   |
| П6              | Пх2 | Пх5 | +   | П5              | KPx4 | Пх4 | FL0             | 12  | Пх5 |
| Пх6             | ×   | Пх3 | Пх7 | ×               | -    | Пх4 | Пх6             | ×   | Пх3 |
| Fx <sup>2</sup> | -   | П8  | ÷   | Fe <sup>x</sup> | ПА   | Пх4 | Пх7             | ×   | Пх5 |
| Пх3             | ×   | -   | Пх8 | ÷               | ПВ   | ПхA | C/P             |     |     |

Тест:  $N=3$

|   |     |    |     |
|---|-----|----|-----|
| x | 0   | 1  | 2   |
| y | 0.5 | 10 | 202 |

$a=0.49917162$ ,  $y=3.0007071$ , время ввода  $\sim 16$  с, время счета  $\sim 19$  с.

**Программа 28. Вычисление  $a$  и  $b$ , если  $y = 1/(a + be^{-x})$ .** Память: L0 — цикл,  $e^{-x_i} = \Pi 1$ ,  $\frac{1}{y_i} = \Pi 2$ ,  $N = \Pi 4$ ,  $\sum e^{-2x_i} = \Pi 6$ ,  $\sum \frac{1}{y_i} = \Pi 5$ ,  $\sum \frac{e^{-x_i}}{y_i} = \Pi 7$ ,  $\Delta = \Pi 8$ ,  $y_i \neq 0!$

|     |     |                 |                 |     |     |     |      |     |                 |
|-----|-----|-----------------|-----------------|-----|-----|-----|------|-----|-----------------|
| П0  | C/P | ↔               | Cx              | П3  | П4  | П5  | П6   | П7  | ↔               |
| БП  | 13  | C/P             | Fe <sup>x</sup> | —   | П1  | C/P | F1/x | П2  | Пx1             |
| ×   | Пx7 | +               | П7              | Пx1 | Пx3 | +   | П3   | Пx1 | Fx <sup>2</sup> |
| Пx6 | +   | П6              | Пx2             | Пx5 | +   | П5  | KПx4 | Пx4 | FL0             |
| 12  | Пx5 | Пx6             | ×               | Пx3 | Пx7 | ×   | —    | Пx4 | Пx6             |
| ×   | Пx3 | Fx <sup>2</sup> | —               | П8  | ÷   | ПА  | Пx4  | Пx7 | ×               |
| Пx5 | Пx3 | ×               | —               | Пx8 | ÷   | ПВ  | ПxA  | C/P |                 |

Тест:  $N = 3$

|   |      |     |      |
|---|------|-----|------|
| x | 0    | 1   | 2    |
| y | 0.25 | 0.3 | 0.32 |

$a = 3.9212811$ ,  $b = 0.011753588$ , время ввода  $\sim 15$  с., время счета  $\sim 17$  с.

**Программа 29. Вычисление  $a$  и  $b$ , если  $y = ax^b$ .** Память: L0 — цикл,  $\ln x_i = \Pi 1$ ,  $\ln y_i = \Pi 2$ ,  $N = \Pi 4$ ,  $\sum \ln x_i = \Pi 3$ ,  $\sum (\ln x_i)^2 = \Pi 6$ ,  $\sum \ln y_i = \Pi 5$ ,  $\sum \ln y_i - \ln x_i = \Pi 7$ ,  $\Delta = \Pi 8$ .  $x_i \neq 0!$   $y_i \neq 0!$

|     |                 |     |      |     |                 |      |     |                 |     |
|-----|-----------------|-----|------|-----|-----------------|------|-----|-----------------|-----|
| П0  | C/P             | ↔   | Cx   | П3  | П4              | П5   | П6  | П7              | ↔   |
| БП  | 13              | C/P | F ln | П1  | C/P             | F ln | П2  | Пx1             | ×   |
| Пx7 | +               | П7  | Пx1  | Пx3 | +               | П3   | Пx1 | Fx <sup>2</sup> | Пx6 |
| +   | П6              | Пx2 | Пx5  | +   | П5              | KПx4 | Пx4 | FL0             | 12  |
| Пx5 | Пx6             | ×   | Пx3  | Пx7 | ×               | —    | Пx4 | Пx6             | ×   |
| Пx3 | Fx <sup>2</sup> | —   | П8   | ÷   | Fe <sup>x</sup> | ПА   | Пx4 | Пx7             | ×   |
| Пx5 | Пx3             | ×   | —    | Пx8 | ÷               | ПВ   | ПxA | C/P             |     |

Тест:  $N = 3$

|   |   |    |    |
|---|---|----|----|
| x | 1 | 2  | 3  |
| y | 3 | 12 | 27 |

$a = 2.9999979$ ,  $b = 2.000006$ , время ввода  $\sim 15$  с., время счета  $\sim 20$  с.

**Программа 30. Вычисление  $a$  и  $b$ , если  $y = a + b \ln x$ .** Память: L0 — цикл,  $N = \Pi 4$ ,  $\sum \ln x_i = \Pi 7$ ,  $\sum (\ln x_i)^2 = \Pi 1$ ,  $\sum y_i = \Pi 2$ ,  $\sum y_i \ln x_i = \Pi 3$ ,  $x_i = \Pi 5$ ,  $y_i = \Pi 6$ .

|    |     |     |     |     |     |     |      |     |                 |
|----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|------|-----|-----------------|
| П0 | C/P | ↔   | Cx  | П1  | П2  | П3  | П4   | П7  | ↔               |
| БП | 13  | C/P | П5  | C/P | П6  | Пx5 | F ln | П5  | Пx7             |
| +  | П7  | Пx5 | Пx6 | ×   | Пx3 | +   | П3   | Пx5 | Fx <sup>2</sup> |

|                  |          |          |          |          |                   |          |           |          |                   |
|------------------|----------|----------|----------|----------|-------------------|----------|-----------|----------|-------------------|
| $\Pi x1$         | $+$      | $\Pi 1$  | $\Pi x2$ | $\Pi x6$ | $+$               | $\Pi 2$  | $K\Pi x4$ | $\Pi x4$ | $FL0$             |
| $\underline{12}$ | $\Pi x2$ | $\Pi x7$ | $\times$ | $\Pi x4$ | $\Pi x3$          | $\times$ | $-$       | $\Pi x7$ | $Fx^2$            |
| $\Pi x1$         | $\Pi x4$ | $\times$ | $-$      | $\div$   | $\Pi B$           | $\Pi x7$ | $\times$  | $\Pi x2$ | $\leftrightarrow$ |
| $-$              | $\Pi x4$ | $\div$   | $\Pi A$  | $\Pi xB$ | $\leftrightarrow$ | $C/P$    |           |          |                   |

Тест:  $N = 3$

|     |   |     |     |
|-----|---|-----|-----|
| $x$ | 1 | 2   | 3   |
| $y$ | 1 | 1.7 | 2.1 |

$$a = 1.0014379, b = 1.0021917, t_{\text{вв}} \sim 13 \text{ с}, t_{\text{сч}} \sim 18 \text{ с}.$$

**Программа 31. Вычисление  $a$  и  $b$ , если  $y = a/(b + x)$ .** Память:  $L0$  — цикл,  $x_i = \Pi 1, \frac{1}{y_i} = \Pi 2, \sum x_i = \Pi 3, \sum (1/y_i)^2 = \Pi 6, \sum (1/y_i) = \Pi 5, N = \Pi 4, \sum (x_i/y_i) = \Pi 7, \Delta = \Pi 8. y_i \neq 0!$

|          |                  |                   |          |          |           |          |          |                  |                   |
|----------|------------------|-------------------|----------|----------|-----------|----------|----------|------------------|-------------------|
| $\Pi 0$  | $C/P$            | $\leftrightarrow$ | $Cx$     | $\Pi 3$  | $\Pi 4$   | $\Pi 5$  | $\Pi 6$  | $\Pi 7$          | $\leftrightarrow$ |
| $B\Pi$   | $\underline{13}$ | $C/P$             | $\Pi 1$  | $C/P$    | $F1/x$    | $\Pi 2$  | $\Pi x5$ | $+$              | $\Pi 5$           |
| $\Pi x2$ | $Fx^2$           | $\Pi x6$          | $+$      | $\Pi 6$  | $\Pi x1$  | $\Pi x3$ | $+$      | $\Pi 3$          | $\Pi x1$          |
| $\Pi x2$ | $\times$         | $\Pi x7$          | $+$      | $\Pi 7$  | $K\Pi x4$ | $\Pi x4$ | $FL0$    | $\underline{12}$ | $\Pi x3$          |
| $\Pi x5$ | $\times$         | $\Pi x7$          | $\Pi x4$ | $\times$ | $-$       | $\Pi x5$ | $Fx^2$   | $\Pi x6$         | $\Pi x4$          |
| $\times$ | $-$              | $\Pi 8$           | $\div$   | $\Pi A$  | $\Pi x6$  | $\Pi x3$ | $\times$ | $\Pi x7$         | $\Pi x5$          |
| $\times$ | $-$              | $\Pi x8$          | $\div$   | $\Pi B$  | $\Pi xA$  | $C/P$    |          |                  |                   |

Тест:  $N = 3$

|     |   |     |   |
|-----|---|-----|---|
| $x$ | 0 | 1   | 2 |
| $y$ | 5 | 2.5 | 2 |

$$a = 6.4285714, b = 1.3571428.$$

**Программа 32. Вычисление  $a$  и  $b$ , если  $y = a/(b + x)$ .** Память:  $L0$  — цикл,  $N = \Pi 4, \sum y = \Pi 3, \sum xy = \Pi 5, \sum y^2 = \Pi 6, \sum xy^2 = \Pi 7, \Delta = \Pi 8.$

|          |                  |          |                   |          |          |          |          |                  |                   |
|----------|------------------|----------|-------------------|----------|----------|----------|----------|------------------|-------------------|
| $\Pi 0$  | $\Pi 4$          | $C/P$    | $\leftrightarrow$ | $Cx$     | $\Pi 3$  | $\Pi 5$  | $\Pi 6$  | $\Pi 7$          | $\leftrightarrow$ |
| $B\Pi$   | $\underline{13}$ | $C/P$    | $\Pi 1$           | $C/P$    | $\Pi 2$  | $Fx^2$   | $\Pi x6$ | $+$              | $\Pi 6$           |
| $\Pi x2$ | $\Pi x3$         | $+$      | $\Pi 3$           | $\Pi x2$ | $\Pi x1$ | $\times$ | $\Pi x5$ | $+$              | $\Pi 5$           |
| $\Pi x2$ | $Fx^2$           | $\Pi x1$ | $\times$          | $\Pi x7$ | $+$      | $\Pi 7$  | $FL0$    | $\underline{12}$ | $\Pi x3$          |
| $Fx^2$   | $\Pi x4$         | $\Pi x6$ | $\times$          | $-$      | $\Pi 8$  | $\Pi x3$ | $\Pi x7$ | $\times$         | $\Pi x5$          |
| $\Pi x6$ | $\times$         | $-$      | $\Pi x8$          | $\div$   | $\Pi A$  | $\Pi x4$ | $\Pi x7$ | $\times$         | $\Pi x5$          |
| $\Pi x3$ | $\times$         | $-$      | $\Pi x8$          | $\div$   | $\Pi B$  | $\Pi xA$ | $C/P$    |                  |                   |

Тест тот же, что и в программе 31, дает  $a = 6.048387, b = 1.2258064, t_{\text{вв}} \sim 12 \text{ с}, t_{\text{сч}} \sim 18 \text{ с}.$

**Программа 33. Вычисление  $a$  и  $b$ , если  $y = ax/(b+x)$ .** Память  
 L0—цикл,  $\frac{1}{x_i} = \Pi_1$ ,  $\frac{1}{y_i} = \Pi_2$ ,  $\sum \frac{1}{x_i} = \Pi_3$ ,  $\sum \frac{1}{x_i^2} = \Pi_5$ ,  $N = \Pi_4$ ,  
 $\sum \frac{1}{y_i} = \Pi_6$ ,  $\sum \frac{1}{x_i y_i} = \Pi_7$ ,  $\sum \frac{1}{y_i^2} = \Pi_8$ ,  $\Delta = \Pi_9$ .  $x_i \neq 0!$   $y_i \neq 0!$

|     |     |                 |                 |     |                 |      |      |     |     |
|-----|-----|-----------------|-----------------|-----|-----------------|------|------|-----|-----|
| P0  | C/П | ↔               | Cx              | П3  | П4              | П5   | П6   | П7  | П8  |
| ↔   | БП  | 14              | C/П             | П1  | C/П             | F1/x | П2   | Пх6 | +   |
| П6  | Пх2 | Fx <sup>2</sup> | Пх8             | +   | П8              | Пх1  | F1/x | П1  | Пх3 |
| +   | П3  | Пх1             | Fx <sup>2</sup> | Пх5 | +               | П5   | Пх1  | Пх2 | ×   |
| Пх7 | +   | П7              | КПх4            | Пх4 | FL0             | 13   | Пх7  | Пх3 | ×   |
| Пх6 | Пх5 | ×               | —               | Пх7 | Fx <sup>2</sup> | Пх8  | Пх5  | ×   | —   |
| П9  | ÷   | ПА              | Пх8             | Пх3 | ×               | Пх7  | Пх6  | ×   | —   |
| Пх9 | ÷   | ПВ              | ПхA             | C/П |                 |      |      |     |     |

Тест:  $N = 3$

|     |    |     |      |
|-----|----|-----|------|
| $x$ | 1  | 10  | 111  |
| $y$ | 10 | 100 | 1000 |

$a = 9911$ ,  $b = 990.1$ ,  $t_{\text{вв}} \sim 15$  с,  $t_{\text{сч}} \sim 19$  с.

**Программа 34. Вычисление  $a$  и  $b$ , если  $y = ax/(b+x)$ .** Память:  
 L0—цикл,  $\sum x^4 = \Pi_4$ ,  $\sum x^2 y = \Pi_3$ ,  $\sum x^3 y = \Pi_5$ ,  $\sum y^2 = \Pi_6$ ,  $\sum xy^2 = \Pi_7$ ,  $\Delta = \Pi_8$ , П9—буфер.

|     |     |     |    |     |     |                 |     |                 |     |
|-----|-----|-----|----|-----|-----|-----------------|-----|-----------------|-----|
| P0  | C/П | ↔   | Cx | П3  | П4  | П5              | П6  | П7              | ↔   |
| БП  | 13  | C/П | П1 | C/П | П2  | Fx <sup>2</sup> | П9  | Пх6             | +   |
| П6  | Пх9 | Пх1 | ×  | Пх7 | +   | П7              | Пх1 | Fx <sup>2</sup> | П9  |
| Пх2 | ×   | Пх5 | +  | П5  | Пх9 | Пх4             | +   | П4              | Пх2 |
| Пх1 | ×   | Пх3 | +  | П3  | FL0 | 12              | Пх3 | Fx <sup>2</sup> | Пх4 |
| Пх6 | ×   | —   | П8 | Пх3 | Пх7 | ×               | Пх5 | Пх6             | ×   |
| —   | Пх8 | ÷   | ПА | Пх4 | Пх7 | ×               | Пх5 | Пх3             | ×   |
| —   | Пх8 | ÷   | ПВ | ПхA | C/П |                 |     |                 |     |

Тест тот же, что и в программе 33, дает  $a = 9190.671$ ,  $b = 909.1653$ ,  $t_{\text{вв}} \sim 15$  с,  $t_{\text{сч}} \sim 20$  с.

**Программа 35. Вычисление  $a$  и  $b$ , если  $y = ax^2/(b+x)$ .** Память:  
 L0—цикл,  $\sum x^4 = \Pi_4$ ,  $\sum x^2 y = \Pi_3$ ,  $\sum x^3 y = \Pi_5$ ,  $\sum y^2 = \Pi_6$ ,  $\sum xy^2 = \Pi_7$ ,  $\Delta = \Pi_8$ .

|     |                 |     |     |                 |     |     |                 |     |     |
|-----|-----------------|-----|-----|-----------------|-----|-----|-----------------|-----|-----|
| P0  | C/П             | ↔   | Cx  | П3              | П4  | П5  | П6              | П7  | ↔   |
| БП  | 13              | C/П | П1  | C/П             | П2  | Пх1 | Fx <sup>2</sup> | П9  | ×   |
| Пх3 | +               | П3  | Пх9 | Fx <sup>2</sup> | Пх4 | +   | П4              | Пх9 | Пх1 |
| Пх2 | ×               | ×   | Пх5 | +               | П5  | Пх2 | Fx <sup>2</sup> | П9  | Пх6 |
| +   | П6              | Пх9 | Пх1 | ×               | Пх7 | +   | П7              | FL0 | 12  |
| Пх3 | Fx <sup>2</sup> | Пх4 | Пх6 | ×               | —   | П8  | Пх3             | Пх7 | ×   |

$\Pi x5 \quad \Pi x6 \quad \times \quad - \quad \Pi x8 \quad \div \quad \text{ПА} \quad \Pi x4 \quad \Pi x7 \quad \times$   
 $\Pi x5 \quad \Pi x3 \quad \times \quad - \quad \Pi x8 \quad \div \quad \text{ПВ} \quad \Pi xA \quad \Pi x7 \quad \text{С/П}$

Тест:  $N = 3$

|     |   |   |   |
|-----|---|---|---|
| $x$ | 1 | 2 | 3 |
| $y$ | 4 | 6 | 7 |

$$a = 1.8280766, b = -0.67965367.$$

Программа 36. Вычисление  $a$  и  $b$ , если  $y = ae^{bx}$ . Память:

$L0$  — цикл,  $\frac{1}{x_i} = \Pi 1$ ,  $\ln y_i = \Pi 2$ ,  $\sum \frac{1}{x_i} = \Pi 3$ ,  $\sum \ln y_i = \Pi 5$ ,  $N = \Pi 4$ ,

$\sum \frac{\ln y_i}{x_i} = \Pi 7$ ,  $\Delta = \Pi 8$ ,  $\sum \frac{1}{x_i^2} = \Pi 6$ .

|           |           |                   |          |          |          |          |           |          |                   |
|-----------|-----------|-------------------|----------|----------|----------|----------|-----------|----------|-------------------|
| $\Pi 0$   | $C/P$     | $\leftrightarrow$ | $Cx$     | $\Pi 3$  | $\Pi 4$  | $\Pi 5$  | $\Pi 6$   | $\Pi 7$  | $\leftrightarrow$ |
| БП        | <u>13</u> | $C/P$             | $\Pi 1$  | $C/P$    | $F \ln$  | $\Pi 2$  | $\Pi x5$  | $+$      | $\Pi 5$           |
| $\Pi x1$  | $F1/x$    | $\Pi 1$           | $\Pi x3$ | $+$      | $\Pi 3$  | $\Pi x1$ | $Fx^2$    | $\Pi x6$ | $+$               |
| $\Pi 6$   | $\Pi x1$  | $\Pi x2$          | $\times$ | $\Pi x7$ | $+$      | $\Pi 7$  | $K\Pi x4$ | $\Pi x4$ | $FL0$             |
| <u>12</u> | $\Pi x5$  | $\Pi x6$          | $\times$ | $\Pi x3$ | $\Pi x7$ | $\times$ | $-$       | $\Pi x4$ | $\Pi x6$          |
| $\times$  | $\Pi x3$  | $Fx^2$            | $-$      | $\Pi 8$  | $\div$   | $Fe^x$   | $\Pi A$   | $\Pi x4$ | $\Pi x7$          |
| $\times$  | $\Pi x5$  | $\Pi x3$          | $\times$ | $-$      | $\Pi x8$ | $\div$   | $\Pi B$   | $\Pi xA$ | $C/P$             |

Тест:  $N = 3$

|     |                |     |    |
|-----|----------------|-----|----|
| $x$ | 1              | 2   | 3  |
| $y$ | $4 \cdot 10^4$ | 300 | 56 |

$$a = 2.1417519, b = 9.8404868, \text{ время ввода } \sim 16 \text{ с, время счета } \sim 20 \text{ с.}$$

Программа 37. Вычисление  $a$  и  $b$ , если  $y = a + bx^n$ . Память:

$L0$  — цикл,  $x_i^n = \Pi 9$ ,  $y_i = \Pi 2$ ,  $N = \Pi 4$ ,  $\sum x_i^n = \Pi 3$ ,  $\sum y_i = \Pi 5$ ,  
 $\sum x_i^{2n} = \Pi 6$ ,  $\sum y_i x_i^n = \Pi 7$ ,  $\Delta = \Pi 8$ ,  $n = \Pi D$ . Цикл  $L1$  служит для  
вычисления  $x_i^n = x_i \cdot x_i \dots x_i$ . Перед программой в регистр  $\Pi D$  следует  
ввести числовое значение  $n$ .

Тест:  $N = 3, n = 2$

|     |   |   |    |
|-----|---|---|----|
| $x$ | 1 | 2 | 3  |
| $y$ | 3 | 6 | 11 |

$$a = 2, b = 1, \text{ время ввода } \sim 16 \text{ с, время счета } \sim 21 \text{ с.}$$

|         |           |                   |          |            |            |            |          |         |                   |
|---------|-----------|-------------------|----------|------------|------------|------------|----------|---------|-------------------|
| $\Pi 0$ | $C/P$     | $\leftrightarrow$ | $Cx$     | $\Pi 3$    | $\Pi 4$    | $\Pi 5$    | $\Pi 6$  | $\Pi 7$ | $\leftrightarrow$ |
| БП      | <u>13</u> | $C/P$             | $\Pi 9$  | $C/P$      | $\Pi 2$    | $\Pi x5$   | $+$      | $\Pi 5$ | $\Pi xD$          |
| 1       | <u>—</u>  | $\Pi 1$           | $\Pi x9$ | $\uparrow$ | $\uparrow$ | $\uparrow$ | $\times$ | $FL1$   | <u>27</u>         |

|                 |     |     |     |     |                 |     |     |     |     |
|-----------------|-----|-----|-----|-----|-----------------|-----|-----|-----|-----|
| П9              | Пx3 | +   | П3  | Пx9 | Fx <sup>2</sup> | Пx6 | +   | П6  | Пx9 |
| Пx2             | ×   | Пx7 | +   | П7  | KПx4            | Пx4 | FL0 | 12  | Пx5 |
| Пx6             | ×   | Пx3 | Пx7 | ×   | —               | Пx4 | Пx6 | ×   | Пx3 |
| Fx <sup>2</sup> | —   | П8  | ÷   | ПA  | Пx4             | Пx7 | ×   | Пx5 | Пx3 |
| ×               | —   | Пx8 | ÷   | ПB  | ПxA             | C/P |     |     |     |

**Программа 38.** Вычисление  $a$  и  $b$ , если  $y = a + bx^k$ , где  $k$  — любое число. Память: L0 — цикл,  $x_i^k = \Pi_1$ ,  $y_i = \Pi_2$ ,  $\sum x_i^k = \Pi_3$ ,  $N = \Pi_4$ ,  $\sum y_i = \Pi_5$ ,  $\sum x_i^{2k} = \Pi_6$ ,  $\sum y_i x_i^k = \Pi_7$ ,  $\Delta = \Pi_8$ ,  $k = \Pi_9$ . Перед выполнением программы вручную следует занести значение  $k$  в  $\Pi_9$ .

|     |                 |                 |     |     |     |     |                 |     |     |
|-----|-----------------|-----------------|-----|-----|-----|-----|-----------------|-----|-----|
| П0  | C/P             | ↔               | Cx  | П3  | П4  | П5  | П6              | П7  | ↔   |
| БП  | 13              | C/P             | П1  | C/P | П2  | Пx5 | +               | П5  | Пx9 |
| Пx1 | Fx <sup>y</sup> | П1              | Пx3 | +   | П3  | Пx1 | Fx <sup>2</sup> | Пx6 | +   |
| П6  | Пx1             | Пx2             | ×   | Пx7 | +   | П7  | KПx4            | Пx4 | FL0 |
| 12  | Пx5             | Пx6             | ×   | Пx3 | Пx7 | ×   | —               | Пx4 | Пx6 |
| ×   | Пx3             | Fx <sup>2</sup> | —   | П8  | ÷   | ПA  | Пx4             | Пx7 | ×   |
| Пx5 | Пx3             | ×               | —   | Пx8 | ÷   | ПB  | ПxA             | C/P |     |

Тест:  $N = 3$ ,  $k = 2 = \Pi_9$

|   |   |   |    |
|---|---|---|----|
| x | 1 | 2 | 3  |
| y | 3 | 6 | 11 |

$$a = 2.0000008, b = 1.0000002.$$

Число  $n$  в программах 37 и 38 задается заранее в зависимости от того, круто или плавно растет или убывает функция. Оно может принимать значения  $n=3, n=4$ , или  $n=0.5, n=0.75$ . Соответственно аппроксимирующие функции будут

$$\begin{aligned}y &= a + bx^3, & y &= a + bx^4, \\y &= a + b\sqrt[n]{x}, & y &= a + b\sqrt[4]{x^3}.\end{aligned}$$

Число  $n$  может быть и отрицательным: программа 38 работает и в этом случае.

#### 4. Аппроксимация тригонометрическими функциями

Если табличная функция  $f(x)$  задана на числовом отрезке  $[c, d]$  с постоянным шагом по  $x$ , то ее нередко бывает удобно аппроксимировать тригонометрическим многочленом порядка  $m$ , причем  $m < n$ , где  $n$  — число отрезков разбиения функции. Величина  $(d - c)$  — основной период полученного тригонометрического многочлена, тогда величина полупериода

$$l = \frac{d - c}{2}. \quad (3.28)$$

Если пределы аргумента функции симметричны относительно точки  $x=0$ , т. е.

$$c+d=0, \quad (3.29)$$

то табличную функцию можно представить в виде усеченного ряда Фурье

$$\Phi(x) = a_0 + \sum_{p=1}^m a_p \cos \frac{p\pi}{l} x + \sum_{p=1}^m b_p \sin \frac{p\pi}{l} x, \quad (3.30)$$

где постоянные коэффициенты ряда  $a_0, a_p, b_p$  в случае дискретно заданной функции вычисляются по формулам

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^n f_i, \\ a_p &= \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^n f_i \cos \frac{2\pi p i}{n+1}, \\ b_p &= \frac{2}{n+1} \sum_{i=0}^n f_i \sin \frac{2\pi p i}{n+1}. \end{aligned} \quad (3.31)$$

Эти формулы легко запрограммировать.

**Программа 39. Вычисление коэффициентов ряда Фурье для заданной таблично функции.** Вычисляются  $a_0, a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3, a_4, b_4$ . Результаты заносятся в регистры  $a_0 = \text{П6} = X, a_1 = \text{П1} = Y, b_1 = \text{Z} = \text{П2}, a_2 = \text{П7}, b_2 = \text{П8}, a_3 = \text{П9}, b_3 = \text{ПА}, a_4 = \text{ПВ}, b_4 = \text{ПС}$ . Перед началом счета необходимо очистить все регистры. Ввести  $N$  С/П  $y_1$  С/П  $y_2 \dots y_n$  С/П. Здесь  $N$  — число точек функции.

Память: L0 — цикл,  $\sum f_i \cos \frac{2\pi i x}{n+1} = \text{П1}, \sum f_i \sin \frac{2\pi i x}{n+1} = \text{П2}$ ,

$\text{N+1} = \text{П3}, i = \text{П4}, y_i = \text{П5}, \frac{1}{n+1} \sum y_i = \text{П6}, \sum y_i \cos \frac{(p+1) 2\pi i}{n+1} = \text{П7}, \sum y_i \sin \frac{(p+1) 2\pi i}{n+1} = \text{П8}$ . Считает программу довольно долго:

$t_{\text{BB}} = 46 \text{ с}, t_{\text{сч}} \approx 48 \text{ с}$ .

Тест: для  $N = 5$   $y_1 = -1, y_2 = -1, y_3 = 0, y_4 = 1, y_5 = 1$  получаем  $\text{П6} = a_0 = 0, \text{П1} = a_1 = -2.30761 \cdot 10^{-3}$ .

$\text{Пx2} = b_1 = 5.2574611 \cdot 10^{-2}, \text{Пx7} = a_2 = -9.21512 \cdot 10^{-3}$ ,

$\text{Пx8} = b_2 = 1.0477004 \cdot 10^{-1}, \text{Пx9} = a_3 = -2.067588 \cdot 10^{-2}$ ,

$\text{ПxA} = b_3 = 6.532393 \cdot 10^{-1}, \text{ПxB} = a_4 = -3.661282 \cdot 10^{-2}$ ,

$\text{ПxC} = b_4 = 2.0652212 \cdot 10^{-1}$ .

|       |     |       |     |    |       |     |       |     |    |
|-------|-----|-------|-----|----|-------|-----|-------|-----|----|
| П0    | П3  | С/П   | Пx3 | ÷  | ↑     | Пx6 | +     | П6  | ↔  |
| 2     | ×   | П5    | ПП  | 83 | F cos | Пx5 | ×     | Пx1 | +  |
| П1    | ПxD | F sin | Пx5 | ×  | Пx2   | +   | П2    | ПП  | 83 |
| F cos | Пx5 | ×     | Пx7 | +  | П7    | ПxD | F sin | Пx5 | ×  |
| Пx8   | +   | П8    | ПП  | 83 | F cos | Пx5 | ×     | Пx9 | +  |

|       |     |       |     |    |      |     |       |     |     |
|-------|-----|-------|-----|----|------|-----|-------|-----|-----|
| П9    | ПxD | F sin | Пx5 | ×  | ПxA  | +   | ПА    | ПП  | 83  |
| F cos | Пx5 | ×     | ПxB | +  | ПВ   | ПxD | F sin | Пx5 | ×   |
| ПxC   | +   | ПС    | Cx  | ПD | КПx4 | Пx4 | FL0   | 02  | Пx2 |
| Пx1   | Пx6 | C/P   | Fπ  | 2  | ×    | Пx3 | ÷     | Пx4 | ×   |
| ПxD   | +   | ПD    | B/0 |    |      |     |       |     |     |

Аппроксимация тригонометрическим многочленом менее точная, чем степенная или двухпараметрическая. К ней прибегают в тех случаях, когда аппроксимирующая функция должна быть строго периодическая.

Если заранее известно, что функция представляет собой синусоиду, приподнятую над осью  $X$  и сдвинутую вдоль нее, то сама функция может быть представлена в виде

$$\varphi(x) = a_0 + a_1 \cos \frac{\pi}{l} x + b_1 \sin \frac{\pi}{l} x. \quad (3.32)$$

Если функция, будучи периодической и заданной в виде таблицы, не является синусоидой, но близка к ней, то есть смысл аппроксимировать ее по формуле (3.32). Сжав масштаб по оси  $x$  в  $l/\pi$  раз, получим

$$\varphi(z) = a_0 + a_1 \cos z + b_1 \sin z. \quad (3.33)$$

При этом соответственно уменьшится шаг по  $x$ . Ясно, что сжатие графика по оси  $x$  никоим образом не повлияет на табличные значения функции  $y_i$ , так же как и обратное растяжение графика в  $l/\pi$  раз не повлечет за собой изменение  $y_i$ , а значит, и коэффициентов  $a_0$ ,  $a_1$ ,  $b_1$ . Поэтому коэффициенты  $a_0$ ,  $a_1$ ,  $b_1$  определенные на промежутке  $-\pi \leq z \leq \pi$ , будут верны и для (3.32). Из формулы (3.33) с помощью метода наименьших квадратов, получаем систему уравнений

$$\begin{aligned} a_0 N + a_1 \sum_{i=1}^N \cos z_i + b_1 \sum_{i=1}^N \sin z_i &= \sum_{i=1}^N y_i, \\ a_0 \sum_{i=1}^N \cos z_i + a_1 \sum_{i=1}^N \cos^2 z_i + b_1 \sum_{i=1}^N \sin z_i \cos z_i &= \sum_{i=1}^N y_i \cos z_i, \\ a_0 \sum_{i=1}^N \sin z_i + a_1 \sum_{i=1}^N \cos z_i \sin z_i + b_1 \sum_{i=1}^N \sin^2 z_i &= \sum_{i=1}^N y_i \sin z_i, \end{aligned} \quad (3.34)$$

где

$$z_i = \frac{\pi(2i - N)}{N}. \quad (3.35)$$

Поскольку  $-\pi \leq z \leq \pi$  и шаг по  $z_i$  равномерный, а также учитывая, что функция  $\sin z_i$  нечетная, получаем

$$\sum_{i=1}^N \sin z_i = 0, \quad \sum_{i=1}^N \sin z_i \cos z_i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sin 2z_i = 0. \quad (3.36)$$

Поэтому система (3.34) значительно упрощается:

$$\begin{aligned} a_0 N + a_1 \sum_{i=1}^N \cos z_i &= \sum_{i=1}^N y_i, \\ a_0 \sum_{i=1}^N \cos z_i + a_1 \sum_{i=1}^N \cos^2 z_i &= \sum_{i=1}^N y_i \cos z_i, \\ b_1 \sum_{i=1}^N \sin^2 z_i &= \sum_{i=1}^N y_i \sin z_i. \end{aligned} \quad (3.37)$$

**Программа 40.** Вычисление коэффициентов  $a_0$ ,  $a_1$ ,  $b_1$  при аппроксимации функции выражением  $\varphi(x) = a_0 + a_1 \cos(\pi x/l) + b_1 \sin(\pi x/l)$ . Ввести  $N$  С/П  $y_1$  С/П  $y_2$  С/П ...  $y_n$  С/П. Здесь  $N$  — число значений функции  $y_i$ . Ответ заносится в регистры:  $a_0 = X = \text{ПД}$ ,  $a_1 = Z = \text{ПА}$ ,  $b_1 = Y = \text{ПВ}$ .

Память: L0 — цикл,  $\cos z_i = \Pi 1$ ,  $y_i = \Pi 2$ ,  $\sin z_i = \Pi 3$ ,  $i = \Pi 4$ ,  $\sum \cos^2 z_i = \Pi 5$ ,  $\sum \cos z_i = \Pi 6$ ,  $\sum y_i \cos z_i = \Pi 7$ ,  $\sum \sin^2 z_i = \Pi 8$ ,  $\sum y_i \sin z_i = \Pi 9$ ,  $\sum y_i = \Pi C$ ,  $N - 1 = \text{ПД} — \text{буфер}$ . В конце программы  $a_0 = \text{ПД}$  и  $\Delta = \Pi 3$  (для первых двух уравнений).

|     |                 |         |       |     |     |     |                 |                 |     |
|-----|-----------------|---------|-------|-----|-----|-----|-----------------|-----------------|-----|
| П0  | 1               | —       | ПД    | С/П | ↔   | Cx  | П4              | П5              | П6  |
| П7  | П8              | П9      | ПС    | ↔   | БП  | 18  | С/П             | П2              | ПхС |
| +   | ПС              | F $\pi$ | 2     | Px4 | ×   | PxД | —               | ×               | PxД |
| ÷   | F cos           | FBx     | F sin | П3  | ↔   | П1  | Px6             | +               | П6  |
| Px1 | Fx <sup>2</sup> | Px5     | +     | П5  | Px1 | Px2 | ×               | Px7             | +   |
| П7  | Px3             | Px2     | ×     | Px9 | +   | П9  | Px3             | Fx <sup>2</sup> | Px8 |
| +   | П8              | KPx4    | Px4   | FL0 | 17  | Px4 | Px7             | ×               | Px6 |
| PxC | ×               | —       | Px4   | Px5 | ×   | Px6 | Fx <sup>2</sup> | —               | П3  |
| ÷   | ПА              | PxС     | Px5   | ×   | Px7 | Px6 | ×               | —               | Px3 |
| ÷   | ПД              | Px9     | Px8   | ÷   | ПВ  | ↔   | С/П             |                 |     |

Тест:  $N = 5$ ,  $y_1 = -2$ ,  $y_2 = -1$ ,  $y_3 = 8$ ,  $y_4 = 7$ ,  $y_5 = -2$ ;  $a_0 = 3$ ,  $a_1 = 5$ ,  $b_1 = 4$ ,  $t_{\text{вв}} \approx 20$  с,  $t_{\text{сч}} \approx 28$  с.

Если точки  $c$  и  $d$  расположены на оси абсцисс не симметрично относительно точки  $x = 0$ , то после вычислений по программе 39 или 40 следует сдвинуть функцию вправо или влево, заменив в формулах (3.30), (3.32) аргумент  $x$  на  $x - \frac{c+d}{2}$ , тогда вместо (3.32) получим

$$\varphi(x) = a_0 + a_1 \cos \left\{ \frac{\pi}{l} \left( x - \frac{c+d}{2} \right) \right\} + b_1 \sin \left\{ \frac{\pi}{l} \left( x - \frac{c+d}{2} \right) \right\}. \quad (3.38)$$

Программы 20—40 имеют одну особенность: очистка нужных регистров памяти осуществляется автоматически в ходе работы программы. Можно воспользоваться одной программой, а затем, не выключая микрокалькулятора, ввести другую программу и, поставив счетчик на нулевой адрес, сразу приступить к автоматическому счету.

В результате описанных выше операций находятся наиболее близкие к подлинным функциональные зависимости, хотя иногда удается выбрать и точную функцию. Бывает иногда и так, что закон изменения величины известен вам заранее, тогда вычисление параметров позволяет определить константы соответствующего физического процесса. Так, если вы получили, что концентрация молекул в силовом потенциальном поле выражается зависимостью

$$y = ae^{b/T},$$

где  $T$  — температура газа, то, сопоставив ее с формулой

$$N = N_0 e^{-\frac{u}{kT}},$$

легко получить, что

$$N_0 = a, \quad u = -bk,$$

где  $N_0$  — концентрация молекул в отсутствие поля,  $k$  — постоянная Больцмана,  $u$  — потенциальная энергия силового поля.

В табл. 15 приведены наиболее типичные функциональные зависимости. На практике в каждом конкретном случае могут быть применены другие простые формулы. Изложенные выше идеи и программы помогут вам сконструировать программу для вычисления параметров функции в вашем случае. Заметим, что формула, выражающая коэффициент Стьюдента и используемая в программе 5, была получена методом наименьших квадратов на основании данных таблицы.

## 5. Интерполяция по Лагранжу и Гауссу

В случаях, когда необходимо провести плавную кривую, пересекающую заданные точки, прибегают к интерполяции функции. Наибольшее распространение получила интерполяция степенным многочленом. В физических исследованиях интерполяцию применяют в случаях, когда погрешность величины функции в узловых точках равна нулю либо меньше ее на несколько порядков, а также, если заранее известно, что функция представляет собой степенной многочлен, а количество узловых точек таково, что ее однозначно определяет. К примеру, через две точки можно провести единственную прямую, через три — параболу... Большое распространение интерполяции в отличие от других видов аппроксимации вызвано тем, что по известным значениям функции  $y_0, y_1, \dots, y_n$  в узловых точках  $x_0, x_1, \dots, x_n$  она позволяет в явном виде выразить значения функции в промежутках между узловыми точками. При этом функция  $y$  заменяется многочленом  $P_n(x)$ , который в узлах  $x_i$  принимает значения

$$P_n(x_i) = y_i. \quad (3.39)$$

В случае произвольного расположения узлов интерполяции такой многочлен имеет вид

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^n \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n \frac{(x-x_k)}{(x_i-x_k)} y_i. \quad (3.40)$$

Его называют многочленом Лагранжа. Обычно в практических вычислениях используют иную формулу:

$$P_n(x) = y_0 + \sum_{i=0}^{n-1} B_i \prod_{k=0}^i (x-x_k), \quad (3.41)$$

где коэффициенты  $B_0, B_1, B_2, \dots, B_{n-1}$  находят по формулам

$$\begin{aligned} q_1 &= \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = B_0; & q_2 &= \frac{y_2 - y_0}{x_2 - x_0}; & \frac{q_2 - q_1}{x_2 - x_1} &= r_2 = B_1; \\ q_3 &= \frac{y_3 - y_0}{x_3 - x_0}; & \frac{q_2 - q_1}{x_3 - x_1} &= r_3; & \frac{r_3 - r_2}{x_3 - x_2} &= S_3 = B_2; \\ q_4 &= \frac{y_4 - y_0}{x_4 - x_0}; & \frac{q_4 - q_1}{x_4 - x_1} &= r_4; & \frac{r_4 - r_2}{x_4 - x_2} &= S_4; & B_3 &= \frac{S_4 - S_3}{x_4 - x_3}. \end{aligned} \quad (3.42)$$

**Программа 41.** Линейная интерполяция. Ввести  $x_0$  С/П  $y_0$  С/П  $x_1$  С/П  $y_1$  С/П  $x$  С/П ...  $x$  С/П.

Память:  $x_0 = \text{П}0, y_0 = \text{П}1, x_1 = \text{П}2, y_1 = \text{П}3, x = \text{П}4, B_0 = \text{П}5$ .

$$\begin{array}{ccccccccc} \text{П}0 & \text{С/П} & \text{П}1 & \text{С/П} & \text{П}2 & \text{С/П} & \text{П}3 & \text{С/П} & \text{П}4 & \text{П}x3 \\ \text{П}x1 & - & \text{П}x2 & \text{П}x0 & - & \div & \text{П}5 & \text{П}x4 & \text{П}x0 & - \\ \text{П}x5 & \times & \text{П}x1 & + & \text{С/П} & \text{П}4 & \text{БП} & \underline{17} & & \end{array}$$

Тест:  $x_0 = 1, y_0 = 1, x_1 = 3, y_1 = 3, y(2) = 2, t_{\text{сч}} \approx 5$  с.

**Программа 42.** Квадратическая интерполяция при произвольных узлах. Ввести  $x_0$  С/П  $y_0$  С/П  $x_1$  С/П  $y_1$  С/П  $x_2$  С/П  $y_2$  С/П  $x$  С/П. Память:  $x_0 = \text{П}0, y_0 = \text{П}1, x_1 = \text{П}2, y_1 = \text{П}3, x_2 = \text{П}4, y_2 = \text{П}5, x = \text{П}6, B_0 = \text{П}7, B_1 = \text{П}8$ .

$$\begin{array}{ccccccccc} \text{П}0 & \text{С/П} & \text{П}1 & \text{С/П} & \text{П}2 & \text{С/П} & \text{П}3 & \text{С/П} & \text{П}4 & \text{С/П} \\ \text{П}5 & \text{С/П} & \text{П}6 & \text{П}x3 & \text{П}x1 & - & \text{П}x2 & \text{П}x0 & - & \div \\ \text{П}7 & \text{П}x5 & \text{П}x1 & - & \text{П}x4 & \text{П}x0 & - & \div & \text{П}x7 & - \\ \text{П}x4 & \text{П}x2 & - & \div & \text{П}8 & \text{П}x6 & \text{П}x2 & - & \text{П}x8 & \times \\ \text{П}x7 & + & \text{П}x6 & \text{П}x0 & - & \times & \text{П}x1 & + & \text{С/П} & \text{П}6 \\ \text{БП} & \underline{35} & & & & & & & & \end{array}$$

Тест:  $x_0 = 0, x_1 = 1, x_2 = 2, y_0 = 1, y_1 = 2, y_2 = 3. y(1.5) = 2.5, t_{\text{сч}} \approx 13$  с.

**Программа 43.** Кубическая интерполяция при четырех произвольных узлах. Ввести  $x_0$  С/П  $y_0$  С/П  $x_1$  С/П  $y_1$  С/П  $x_2$  С/П  $y_2$  С/П  $x_3$  С/П  $y_3$  С/П ...  $x$  С/П.

$$\begin{array}{ccccccccc} \text{П}0 & \text{С/П} & \text{П}1 & \text{С/П} & \text{П}2 & \text{С/П} & \text{П}3 & \text{С/П} & \text{П}4 & \text{С/П} \\ \text{П}5 & \text{С/П} & \text{П}6 & \text{С/П} & \text{П}7 & \text{С/П} & \text{П}8 & \text{П}x3 & \text{П}x1 & - \\ \text{П}x2 & \text{П}x0 & - & \div & \text{П}A & \text{П}x5 & \text{П}x1 & - & \text{П}x4 & \text{П}x0 \end{array}$$

|     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |
|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| —   | ÷   | П5  | Пх7 | Пх1 | —   | Пх6 | Пх0 | —   | ÷   | ПВ  | Пх7 |
| П7  | Пх5 | ПхA | —   | Пх4 | Пх2 | —   | ПхB | —   | Пх6 | Пх4 |     |
| ПхA | —   | Пх6 | Пх2 | —   | ÷   | ПхC | ×   | ПхB | +   |     |     |
| —   | ÷   | ПС  | Пх8 | Пх4 | —   | Пх8 | Пх0 | —   | ×   |     |     |
| Пх8 | Пх2 | —   | ×   | ПхA | +   | Пх8 | Пх0 | —   | ×   |     |     |
| Пх1 | +   | С/П | П8  | БП  | 63  |     |     |     |     |     |     |

Тест:  $x_0=0$ ,  $y_0=1$ ,  $x_i=1$ ,  $y_1=2$ ,  $x_2=2$ ,  $y_2=3$ ,  $x_3=3$ ,  $y_3=4$ ,  
 $y(2.5)=3.5$ ,  $t_{\text{сч}} \approx 22$  с.

**Программа 44\*. Интерполяция при пяти произвольных узлах.**  
Перед программой ввести исходные данные:  $x_0=\text{П0}$ ,  $y_0=\text{П1}$ ,  $x_1=\text{П2}$ ,  
 $y_1=\text{П3}$ ,  $x_2=\text{П4}$ ,  $y_2=\text{П5}$ ,  $x_3=\text{П6}$ ,  $y_3=\text{П7}$ ,  $x_4=\text{П8}$ ,  $y_4=\text{П9}$ . Вычис-  
ляется  $B_0=\text{ПА}$ ,  $B_1=\text{ПВ}$ ,  $B_2=\text{ПС}$ ,  $B_3=\text{ПД}$ . Значение аргумента  $x$   
поступает в регистр ПЕ.

Тест:  $x_0=0$ ,  $y_0=1$ ,  $x_i=1$ ,  $y_1=2$ ,  $x_2=2$ ,  $y_2=3$ ,  $x_3=3$ ,  $y_3=4$ ,  
 $x_4=4$ ,  $y_4=5$ . Получаем  $y(2.5)=3.5$ ,  $t_{\text{сч}}=34$  с.

|     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |  |
|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|--|
| ПЕ  |     | Пх3 | Пх1 | —   | Пх2 | Пх0 | —   | ÷   | ПА  | Пх5 |  |
| Пх1 | —   | Пх4 | Пх0 | —   | ÷   | П5  | Пх7 | Пх1 | —   |     |  |
| Пх6 | Пх0 | —   | ÷   | П7  | Пх5 | ПхA | —   | Пх4 | Пх2 |     |  |
| —   | ÷   | ПВ  | Пх7 | ПхA | —   | Пх6 | Пх2 | —   | ÷   |     |  |
| ПхВ | —   | Пх6 | Пх4 | —   | ÷   | ПС  | Пх9 | Пх1 | —   |     |  |
| Пх8 | Пх0 | —   | ÷   | ПхA | —   | Пх8 | Пх2 | —   | ÷   |     |  |
| ПхВ | —   | Пх8 | Пх4 | —   | ÷   | ПхС | —   | Пх8 | Пх6 |     |  |
| —   | ÷   | ПД  | ПхE | Пх6 | —   | ПхД | ×   | Пх8 | ПхС | +   |  |
| ПхE | Пх4 | —   | ×   | ПхВ | +   | ПхE | Пх2 | —   | ×   |     |  |
| ПхA | +   | ПхE | Пх0 | —   | ×   | Пх1 | +   | С/П | ПЕ  |     |  |
| БП  | 73  |     |     |     |     |     |     |     |     |     |  |

Если узлы интерполяции расположены равномерно вдоль оси  $0X$ ,  
т. е.

$$x_{i+1} - x_i = h = \text{const}, \quad (3.43)$$

то значение интерполяционного многочлена в точке  $x$  можно получить  
гораздо проще и быстрее по формуле Ньютона:

$$y(x) = y_0 + \frac{u}{1!} \Delta(x_0, x_1) + \frac{u(u-1)}{2!} \Delta(x_0, x_1, x_2) + \dots + \frac{u(u-1) \dots (u-(r-1))}{r!} \Delta(x_0, x_1, x_2, \dots, x_r), \quad (3.44)$$

где

$$u = \frac{x - x_0}{h}, \quad (3.45)$$

$$\Delta(x_0, x_1) = y_1 - y_0,$$

$$\Delta(x_0, x_1, x_2) = \Delta(x_1, x_2) - \Delta(x_0, x_1),$$

$$\Delta(x_0, x_1, x_2, x_3) = \Delta(x_1, x_2, x_3) - \Delta(x_0, x_1, x_2), \quad \dots, \quad (3.46)$$

$$\Delta(x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) = \Delta(x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-1}) - \\ - \Delta(x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-2}),$$

$$\Delta(x_0, x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) = 0.$$

Можно непосредственно убедиться, что вычисления по формулам Ньютона дадут то же значение, что и по формулам Лагранжа. Метод Ньютона хорош прежде всего тем, что позволяет оценить целесообразность интерполяционной формулы, судя по значению разделенных разностей. Если разность  $\Delta(x_0, x_1, \dots, x_r)$  с ростом  $r$  убывает, то находящиеся справа члены в формуле (3.44) будут меньшего порядка, чем левые, что означает убывание коэффициентов с ростом степени  $u$ . Интерполяционные формулы (3.40), (3.41), (3.44) представляют собой разложение в ряд в точке  $x$  заданной таблично функции  $y$ . Чтобы интерполяционный многочлен в данной окрестности  $x$  повторял вид подлинной аналитической функции  $y(x)$ , необходимо, чтобы коэффициенты при степенях  $x$  в разложениях (3.40), (3.41), (3.44) были равны или близки к коэффициентам в разложении подлинной аналитической функции в ряд Тейлора. Интерполяционный многочлен является усеченным рядом, так как он ограничен степенью  $n$ , поэтому для сходимости соответствующего аналога усеченного ряда Тейлора необходимо убывание абсолютной величины коэффициента при  $x$  с ростом степени  $x$ . В противном случае ряд Тейлора не будет сходиться, а значит, интерполяция приведет к заведомо ложным результатам.

Приводимые ниже программы позволяют по значениям функции в узлах находить значение многочлена, если шаг по  $x$  постоянен и равен  $h$ .

**Программа 45. Параболическая интерполяция по трем узлам методом Ньютона.** Ввести  $h$  С/П  $x_0$  С/П  $y_0$  С/П  $y_1$  С/П  $y_2$  С/П  $x$  С/П.

Память:  $h = \Pi 0$ ,  $x_0 = \Pi 1$ ,  $y_0 = \Pi 2$ ,  $y_1 = \Pi 3$ ,  $y_2 = \Pi 4$ ,  $x = \Pi 5$ ,  $\Delta(x_0, x_1) = \Pi 6$ ,  $\Delta(x_0, x_1, x_2) = \Pi 7$ ,  $u = \Pi 8$ .

Тест:  $h = 1$ ,  $x_0 = 0$ ,  $y_0 = 1$ ,  $y_1 = 2$ ,  $y_2 = 3$ .  $y(1.5) = 2.5$ ,  $t_{\text{сч}} \approx 10$  с.

$$\begin{array}{cccccccccc}
 \text{П0} & \text{С/П} & \text{П1} & \text{С/П} & \text{П2} & \text{С/П} & \text{П3} & \text{С/П} & \text{П4} & \text{С/П} \\
 \text{П5} & \text{П}x3 & \text{П}x2 & — & \text{П6} & \text{П}x4 & \text{П}x2 & + & \text{П}x3 & 2 \\
 \times & — & \text{П7} & \text{П}x5 & \text{П}x1 & — & \text{П}x0 & \div & \text{П8} & 1 \\
 — & 2 & \div & \text{П}x7 & \times & \text{П}x6 & + & \text{П}x8 & \times & \text{П}x2 \\
 + & \text{С/П} & \text{П5} & \text{БП} & \underline{23}
 \end{array}$$

**Программа 46. Кубическая интерполяция по четырем узлам.** Ввести  $x_0$  С/П  $h$  С/П  $y_0$  С/П  $y_1$  С/П  $y_2$  С/П  $y_3$  С/П. После этого следует вводить лишь значения  $x$  С/П.

Память:  $x_0 = \Pi 0$ ,  $h = \Pi 1$ ,  $y_0 = \Pi 2$ ,  $\Delta(x_0, x_1) = \Pi 3$ ,  $\Delta(x_0, x_1, x_2) = \Pi 4$ ,  $\Delta(x_0, x_1, x_2, x_3) = \Pi 5$ ,  $u = \Pi 6$ .

$$\begin{array}{cccccccccc}
 \text{П0} & \text{С/П} & \text{П1} & \text{С/П} & \text{П2} & \text{С/П} & \text{П4} & \text{П}x2 & — & \text{П3} \\
 \text{С/П} & \text{П5} & \text{П}x4 & — & \text{П6} & \text{С/П} & \text{П}x5 & — & \text{П5} & \text{П}x6 \\
 \text{П}x3 & — & \text{П4} & \text{П}x5 & \text{П}x6 & — & \text{П}x4 & — & 6 & \leftarrow \\
 \text{П5} & \text{П}x4 & 2 & \div & \text{П4} & \text{С/П} & \text{П6} & \text{П}x0 & — & \text{П}x1 \\
 \div & \text{П6} & 2 & — & \text{П}x5 & \times & \text{П}x4 & + & \text{П}x6 & 1
 \end{array}$$

$$\underline{-} \quad \times \quad \text{Пx3} \quad + \quad \text{Пx6} \quad \times \quad \text{Пx2} \quad + \quad \text{С/П} \quad \text{БП}$$

36

Тест:  $x_0 = 1, h = 1, y_0 = 2, y_1 = 3, y_2 = 5, y_3 = 7, P(4) = 7.0000001$ .

Время счета  $t_{\text{сч}} = 30$  с.

**Программа 47. Интерполяция по пяти узлам.** Ввести  $x_0$  С/П  $h$  С/П  $y_0$  С/П  $y_1$  С/П  $y_2$  С/П  $y_3$  С/П  $y_4$  С/П. Дальше следует вводить лишь значения  $x$  С/П.

Память:  $x_0 = \text{П}0, h = \text{П}1, y_0 = \text{П}2, \Delta(x_0, x_1) = \text{П}3, \Delta(x_0, x_1, x_2) = \text{П}4, \Delta(x_0, x_1, x_2, x_3) = \text{П}5, \Delta(x_0, x_1, x_2, x_3, x_4) = \text{П}6, u = \text{П}7$ .

$$\begin{array}{cccccccccc}
 \text{П}0 & \text{С/П} & \text{П}1 & \text{С/П} & \text{П}2 & \text{С/П} & \text{П}5 & \text{П}x2 & - & \text{П}3 \\
 \text{С/П} & \text{П}6 & \text{П}x5 & - & \text{П}5 & \text{С/П} & \text{П}7 & \text{П}x6 & - & \text{П}6 \\
 \text{С/П} & \text{П}x7 & - & \text{П}7 & \text{П}x5 & \text{П}x3 & - & \text{П}4 & \text{П}x6 & \text{П}5 \\
 - & \text{П}5 & \text{П}x7 & \text{П}x6 & - & \text{П}6 & \text{П}x5 & \text{П}x4 & - & \text{П}6 \\
 \text{П}x5 & - & \leftrightarrow & \text{П}5 & - & 2 & 4 & \div & \text{П}6 & \text{П}x5 \\
 6 & \div & \text{П}5 & \text{П}x4 & 2 & \div & \text{П}4 & \text{С/П} & \text{П}x0 & - \\
 \text{П}x1 & \div & \text{П}7 & 3 & - & \text{П}x6 & \times & \text{П}x5 & + & \text{П}x7 \\
 2 & - & \times & \text{П}x4 & + & \text{П}x7 & 1 & - & \times & \text{П}x3 \\
 + & \text{П}x7 & \times & \text{П}x2 & + & \text{С/П} & \text{БП} & \underline{58} & &
 \end{array}$$

Тест:  $x_0 = 0, h = 1, y_0 = 1, y_1 = 2, y_2 = 3, y_3 = 5, y_4 = 6, P(3) = 4.999999$ . Общее время счета составляет в среднем 50 с.

В программах 45—47 все разности после счета сохраняются в адресуемых регистрах, что позволяет сделать выводы о качестве аппроксимации функции интерполяционным многочленом.

При интерполяции в качестве теста можно использовать любую табличную функцию: ведь если программа набрана правильно, то в узловых значениях аргумента должны получаться узловые значения функции с учетом погрешности вычислений микрокалькулятора.

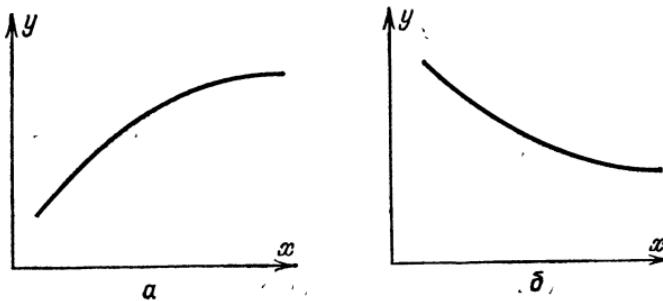


Рис. 22

Хорошо интерполируются функции, у которых производные высших порядков убывают по абсолютной величине, что означает замедление возрастания (убывания) функции с увеличением  $x$  как показано на рис. 22, а, б. Для аппроксимации функций на рис. 23, а, б интер-

поляцию лучше не использовать, так как интерполяционная кривая будет существенно отличаться от подлинной. Обратите внимание, что функции на рис. 22 и 23— взаимообратные. Напрашивается вывод,

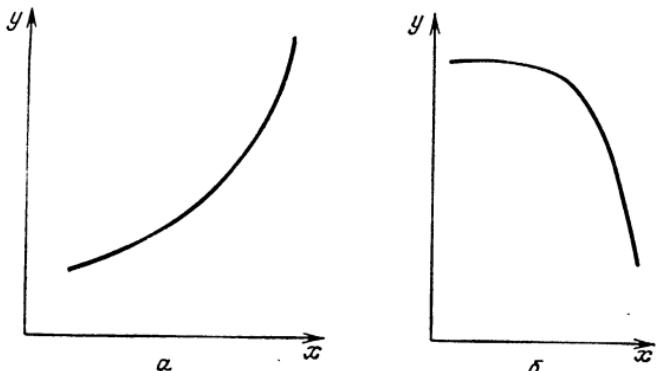


Рис. 23

что если данная функция интерполируется плохо, то обратная ей интерполируется хорошо. Этот важный вывод часто используют на практике, поскольку интерполировать обратную функцию не сложнее, чем прямую.

## 6. Многомерная интерполяция

Двухмерная интерполяция в общем случае позволяет найти вид степенного многочлена  $P_{km}(x, y)$  степени  $k$  по  $x$  и  $m$  по  $y$ , принимающего в узловых точках заданные табличные значения, позволяющего вычислить значение функции  $z(x, y)$  в произвольной точке  $O(x, y)$ . Геометрически это означает, что при двухмерной интерполяции через узловые точки с координатами  $x_i, y_j, z_{ij}$  проводится некоторая поверхность  $z = P_{km}(x, y)$ , узнав явный вид которой для любой точки, лежащей на этой поверхности по координатам  $x, y$  возможно нахождение компоненты  $Z$ . В случае  $n$ -мерной интерполяции через узловые точки проводится некоторая гиперповерхность, представляющая собой степенной многочлен  $n$  переменных. Критерием хорошей аппроксимации в случае многомерной интерполяции является убывание абсолютных величин производных по всем переменным с ростом их порядка, как и в одномерном случае.

В одномерном случае, если точка  $x$  лежит между узлами, то нахождение  $P_n(x)$  называется *интерполяцией*, если  $x$  располагается вне узлов, вычисление  $P_n(x)$  называется *экстраполяцией*. Понятно, что в двухмерном случае об интерполяции говорят если точка  $(x, y)$  лежит внутри некоторой площадки, ограниченной узлами, как на рис. 24. В противном случае мы имеем экстраполяцию.

При двухмерной интерполяции можно построить регулярную сетку и задать в узлах сетки значения функции

$$z_{ij} = z(x_i, y_j).$$

Пусть  $0 \leq i \leq k$ ,  $0 \leq j \leq m$ , тогда вся площадка распадается на  $km$  прямоугольников, в один из которых попадает точка  $(x_i, y_j)$ . Сначала проводится интерполяция при разных  $x_i$ , но фиксированных  $y_j$ , после

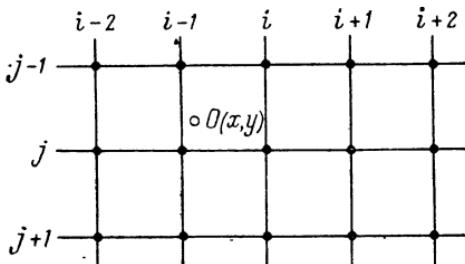


Рис. 24

чего переходят к  $y_{j+1}$  и процедуру повторяют. В результате получают двухмерную формулу Лагранжа

$$P_{km}(x, y) = \sum_{i=0}^k \sum_{j=0}^m z_{ij} \prod_{\substack{p=0 \\ p \neq i}}^k \prod_{\substack{q=0 \\ q \neq j}}^m \frac{(x - x_i)(y - y_j)}{(x_p - x_i)(y_q - y_j)}. \quad (3.47)$$

В случае трехмерной интерполяции формула (3.47) имеет вид

$$P_{kml}(x, y, z) = \sum_{i=0}^k \sum_{j=0}^m \sum_{n=0}^l T_{ijn} \prod_{\substack{p=0 \\ p \neq i}}^k \prod_{\substack{q=0 \\ q \neq j}}^m \prod_{\substack{r=0 \\ r \neq n}}^l \frac{(x - x_i)(y - y_j)(z - z_n)}{(x_p - x_i)(y_q - y_j)(z_r - z_n)}. \quad (3.48)$$

Степень получаемого многочлена в (3.47) равна  $km$ , а в (3.48) степень очень велика  $kml$ . В этом состоит недостаток последовательной интерполяции Лагранжа. Положительной стороной интерполяции Лагранжа

является то, что она позволяет брать по каждой переменной свое число узлов. Многочлен минимальной степени получается при треугольной интерполяции. Для этого следует взять треугольную конфигурацию узлов интерполяции, как показано на рис. 25, или повернутую на угол, кратный  $90^\circ$ . Число узлов при этом будет равно

$$N = \frac{(n+1)(n+2)}{2}, \quad (3.49)$$

Рис. 25

т. е. примерно вдвое меньше, чем в случае прямоугольников. Поэтому и степень полученного многочлена при  $k=m$  для треугольной конфигурации узлов будет меньше. Полученный многочлен удобно записать по формуле Ньютона, введя разделенные разности для функции двух

п еременных:

$$\begin{aligned}\Delta(x_0, x_1, y_0) &= \frac{1}{x_1 - x_0} [z(x_1, y_0) - z(x_0, y_0)], \\ \Delta(x_0, y_0, y_1) &= \frac{1}{y_1 - y_0} [z(x_0, y_1) - z(x_0, y_0)], \\ \Delta(x_0, y_0, y_1, y_2) &= \frac{1}{y_2 - y_0} [\Delta(x_0, y_0, y_2) - \Delta(x_0, y_0, y_1)], \\ \Delta(x_0, x_1, y_0, y_1) &= \frac{1}{y_1 - y_0} [\Delta(x_0, x_1, y_1) - \Delta(x_0, x_1, y_0)], \\ \Delta(x_0, x_1, x_2, y_0) &= \frac{1}{x_2 - x_0} [\Delta(x_0, x_2, y_0) - \Delta(x_0, x_1, y_0)], \\ \dots &\dots \\ \Delta(x_0, y_0) &= z(x_0, y_0),\end{aligned}\tag{3.50}$$

$$\begin{aligned}P_n(x, y) &= \\ &= \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^{n-i} \Delta(x_0, \dots, x_i; y_0, \dots, y_j) \prod_{p=0}^{i-1} (x - x_p) \prod_{q=0}^{j-1} (y - y_q).\end{aligned}\tag{3.51}$$

Интерполяционные многочлены первой и второй степени будут иметь вид

$$z(x, y) = z(x_0, y_0) + (y - y_0) \Delta(x_0, y_0, y_1) + (x - x_0) \Delta(x_0, x_1, y_0), \tag{3.52}$$

$$\begin{aligned}z(x, y) &= z(x_0, y_0) + (x - x_0) \Delta(x_0, x_1, y_0) + (y - y_0) \Delta(x_0, y_0, y_1) + \\ &+ (x - x_0)(x - x_1) \Delta(x_0, x_1, x_2, y_0) + (y - y_0)(y - y_1) \Delta(x_0, y_0, y_1, y_2) + \\ &+ (x - x_0)(y - y_0) \Delta(x_0, x_1, y_0, y_1).\end{aligned}\tag{3.53}$$

Легко обобщить (3.51) и на трехмерный случай

$$\begin{aligned}T_n(x, y, z) &= \\ &= \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^{n-i} \sum_{k=0}^{n-i-j} \Delta(x_0, \dots, x_i; y_0, \dots, y_j; z_0, \dots, z_k) \times \\ &\times \prod_{p=0}^{i-1} (x - x_p) \prod_{q=0}^{j-1} (y - y_q) \prod_{l=0}^{k-1} (z - z_l).\end{aligned}\tag{3.54}$$

При  $n=1$  получим

$$\begin{aligned}T(x, y, z) &= T(x_0, y_0, z_0) + (x - x_0) \Delta(x_0, x_1, y_0, z_0) + \\ &+ (y - y_0) \Delta(x_0, y_0, y_1, z_0) + (z - z_0) \Delta(x_0, y_0, z_0, z_1).\end{aligned}\tag{3.55}$$

Сетки узлов, соответствующие формулам (3.52) и (3.53), представлены на рис. 26 и 27. Трехмерная сетка, соответствующая (3.55),

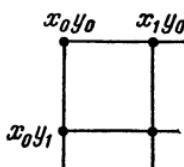


Рис. 26

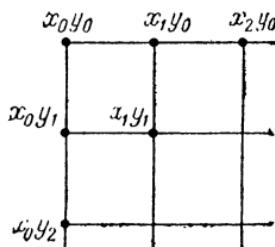


Рис. 27

изображена на рис. 28. При двухмерной интерполяции чаще всего используется многочлен не выше второй степени, а в трехмерном

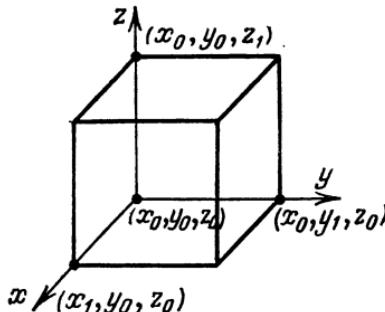


Рис. 28

случае ограничиваются первой степенью, что и определило специфику приводимых ниже программ.

**Программа 48. Двухмерная интерполяция первого порядка.** Ввести  $x_0$  С/П  $y_0$  С/П  $z(x_0, y_0)$  С/П  $x_1$  С/П  $y_1$  С/П  $z(x_1, y_0)$  С/П  $z(x_0, y_1)$  С/П. Дальше вводим  $x$  С/П  $y$  С/П и вычисляем  $z(x, y)$ .

Память:  $z(x_0, y_0) = \Pi_0$ ,  $z(x_1, y_0) = \Pi_1$ ,  $z(x_0, y_1) = \Pi_2$ ,  $x_0 = \Pi_3$ ,  $y_0 = \Pi_4$ ,  $x_1 = \Pi_5$ ,  $y_1 = \Pi_6$ ,  $x_1 - x_0 = \Pi_7$ ,  $y_1 - y_0 = \Pi_8$ ,  $\Delta(x_0, x_1, y_0) = \Pi_A$ ,  $\Delta(x_0, y_0, y_1) = \Pi_B$ ,  $x = \Pi_C$ ,  $y = \Pi_D$ .

$$\begin{array}{ccccccccc}
 \Pi_3 & \text{С/П} & \Pi_4 & \text{С/П} & \Pi_0 & \text{С/П} & \Pi_5 & \text{С/П} & \Pi_6 & \text{С/П} \\
 \Pi_1 & \text{С/П} & \Pi_2 & \text{П}x_0 & — & \text{П}x_6 & \text{П}x_4 & — & \div & \text{П}B \\
 \Pi x_1 & \text{П}x_0 & — & \text{П}x_5 & \text{П}x_3 & — & \div & \Pi A & \text{С/П} & \text{П}C \\
 \text{С/П} & \Pi D & \text{П}x_4 & — & \text{П}x_B & \times & \text{П}xC & \text{П}x_3 & — & \text{П}xA \\
 \times & + & \text{П}x_0 & + & \text{С/П} & \text{Б}P & \underline{29} & & &
 \end{array}$$

Тест:  $x_0 = 1$ ,  $y_0 = 2$ ,  $z(x_0, y_0) = 10$ ,  $x_1 = 2$ ,  $y_1 = 4$ ,  $z(x_1, y_0) = 5$ ,  $z(x_0, y_1) = 0$ . Общее  $t_{\text{сч}} = 10$  с, получаем  $z(1, 2) = 10$ .

**Программа 49. Двухмерная интерполяция второго порядка.** Перед выполнением программы в адресуемые регистры следует занести исходные данные:  $z(x_0, y_0) = \Pi_0$ ,  $x_0 = \Pi_1$ ,  $y_0 = \Pi_2$ ,  $x_1 = \Pi_3$ ,  $x_2 = \Pi_4$ ,  $y_1 = = \Pi_5$ ,  $y_2 = \Pi_6$ ,  $z(x_0, y_1) = \Pi_7$ ,  $z(x_1, y_0) = \Pi_8$ ,  $z(x_1, y_1) = \Pi_9$ ,  $z(x_2, y_0) = = \Pi_A$ ,  $z(x_0, y_2) = \Pi_B$ . Далее следует, поставив счетчик в нулевое положение, запустить программу. Вычисленные значения разделенных разностей поступают в регистры  $\Delta(x_0, x_1, y_0) = \Pi_D$ ,  $\Delta(x_0, y_0, y_1) = = \Pi_C$ ,  $\Delta(x_0, x_1, y_1) = \Pi_9$ ,  $\Delta(x_0, x_1, x_2, y_0) = \Pi_A$ ,  $\Delta(x_0, y_0, y_1, y_2) = = \Pi_B$ . Затем вводятся  $x$  С/П  $y$  С/П и вычисляется  $z(x, y)$ . И так для каждой пары  $x, y$ . Значения  $x$  и  $y$  при вычислении  $z(x, y)$  заносятся соответственно в регистры  $\Pi_4$  и  $\Pi_6$ .

$$\begin{array}{ccccccccc}
 \Pi x_8 & \text{П}x_0 & — & \text{П}x_3 & \text{П}x_1 & — & \div & \Pi D & \text{П}x_7 & \text{П}x_0 \\
 — & \text{П}x_5 & \text{П}x_2 & — & \div & \Pi C & \text{П}x_9 & \text{П}x_8 & — & \text{П}x_5
 \end{array}$$

|     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |
|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| Пх2 | —   | ÷   | ПхС | —   | Пх3 | Пх1 | —   | ÷   | П9  |
| ПxA | Пх8 | ÷   | Пх4 | Пх3 | —   | ÷   | ПхД | —   | Пх4 |
| Пх1 | —   | ÷   | ПА  | ПxB | Пх7 | —   | Пх6 | Пх5 | —   |
| ÷   | ПxC | —   | Пх6 | Пх2 | —   | ÷   | ПВ  | С/П | П4  |
| С/П | П6  | Пх5 | —   | ПxB | ×   | ПхС | +   | Пх4 | Пх1 |
| —   | Пх9 | ×   | +   | Пх6 | Пх2 | —   | ×   | Пх4 | Пх3 |
| —   | ПxA | ×   | ПхД | +   | Пх4 | Пх1 | —   | ×   | +   |
| Пх0 | +   | С/П | БП  | 59  |     |     |     |     |     |

Тест:  $z(x_0, y_0) = 7 = \Pi 0$ ,  $x_0 = y_0 = 0 = \Pi 1 = \Pi 2$ ,  $x_1 = y_1 = \Pi 3 = \Pi 5 = 1$ ,  $x_2 = y_2 = 2 = \Pi 4 = \Pi 6$ ,  $z(x_0, y_1) = z(0, 1) = 9 = \Pi 7$ ,  $z(x_1, y_0) = z(1, 0) = 10 = \Pi 8$ ,  $z(x_1, y_1) = z(1, 1) = 8 = \Pi 9$ ,  $z(x_2, y_0) = z(2, 0) = 14 = \Pi A$ ,  $z(x_0, y_0) = 1 = \Pi B$ . На вычисление разделенных разностей уходит 20 с, а на вычисление значения интерполяционного многочлена 12 с. Результаты счета:  $z(0, 0) = 7$ ,  $z(1, 0) = 10$ ,  $z(0, 1) = 9$ ,  $z(1, 1) = 8$ ,  $z(2, 0) = 14$ ,  $z(0, 2) = 1$ ,  $z(0.5, 0.5) = 9.625$ .

**Программа 50.** Трехмерная интерполяция первого порядка. Ввести:  $x_0$  С/П  $x_1$  С/П  $y_0$  С/П  $y_1$  С/П  $z_0$  С/П  $z_1$  С/П  $T(x_0, y_0, z_0)$  С/П  $T(x_1, y_0, z_0)$  С/П  $T(x_0, y_1, z_0)$  С/П  $T(x_0, y_0, z_1)$  С/П. Микрокалькулятор в течение 10 с вычисляет разделенные разности. Далее вы вводите  $z$  в регистр Z,  $y$  в Y,  $x$  в X и запускаете программу. На индикаторе получаете  $T(x, y, z)$ . И так для любой тройки чисел.

|     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |
|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| П0  | С/П | П1  | С/П | П2  | С/П | П3  | С/П | П4  | С/П |
| П5  | С/П | П6  | С/П | П7  | С/П | П8  | С/П | П9  | Пх6 |
| —   | Пх5 | Пх4 | —   | ÷   | ПС  | Пх8 | Пх6 | —   | Пх3 |
| Пх2 | —   | ÷   | ПВ  | Пх7 | Пх6 | —   | Пх1 | Пх0 | —   |
| ÷   | ПА  | С/П | Пх0 | —   | ПxA | ×   | ↔   | Пх2 | —   |
| ПxB | ×   | +   | ↔   | Пх4 | —   | ПхС | ×   | +   | Пх6 |
| +   | С/П | БП  | 43  |     |     |     |     |     |     |

Тест:  $x_0 = 1$ ,  $x_1 = 2$ ,  $y_0 = 3$ ,  $y_1 = 5$ ,  $z_0 = 2$ ,  $z_1 = 3$ ,  $T(x_0, y_0, z_0) = 1$ ,  $T(x_1, y_0, z_0) = 4$ ,  $T(x_0, y_1, z_0) = 10$ ,  $T(x_0, y_0, z_1) = 20$ ,  $T(1, 3, 2) = 1$ ,  $T(2, 3, 2) = 4$ .

Время вычисления многочлена составляет в среднем 8 с.

Память распределена в данной программе следующим образом:  $x_0 = \Pi 0$ ,  $x_1 = \Pi 1$ ,  $y_0 = \Pi 2$ ,  $y_1 = \Pi 3$ ,  $z_0 = \Pi 4$ ,  $T(x_0, y_0, z_0) = \Pi 6$ ,  $z_1 = \Pi 5$ ,  $T(x_1, y_0, z_0) = \Pi 7$ ,  $T(x_0, y_1, z_0) = \Pi 8$ ,  $T(x_0, y_0, z_1) = \Pi 9$ ,  $\Delta_x = \Pi A$ ,  $\Delta_y = \Pi B$ ,  $\Delta_z = \Pi C$ .

Двухмерную и трехмерную интерполяцию нередко используют при решении уравнений в частных производных. Численное решение уравнения дает значение функции в узлах сетки. Тогда для нахождения значений функции в промежуточных точках между узлами используют интерполяцию.

## 7. Примеры применения интерполяции

**Задача 1.** Найти значение функции  $\sin 45^\circ$ , если известно, что  $\sin 0 = 0$ ,  $\sin 30^\circ = 0.5$ ,  $\sin 60^\circ = 0.8660254$ ,  $\sin 90^\circ = 1$ .

С помощью интерполяции по программе 46 получаем  $\sin 45^\circ = -0.70588299 \approx 0.706$ , а точное значение  $0.707\dots$ . Относительная погрешность не превышает 0.2%. При этом  $\Delta(x_0, x_1) = 0.5$ ,  $\Delta(x_0, x_1, x_2) = -0.0669873$ ,  $\Delta(x_0, x_1, x_2) = -0.0163463033$ . Видно, что разности высоких порядков по абсолютной величине меньше разностей более низкого порядка. Поэтому и значение функции вычислено с большой точностью.

**Задача 2.** Найти корни уравнения

$$(1+x)e^{x/2} - 2.5 = 0.$$

Рассмотрим для этого функцию

$$y(x) = (1+x)e^{x/2} - 2.5.$$

Функция эта сильно возрастает и интерполировать ее нельзя. Зато можно интерполировать обратную функцию  $x(y)$ . Воспользуемся для этой цели программой 42. Предварительно вычислим значения функции  $y(x)$  в трех точках, чтобы значение  $y=0$  лежало внутри интервала интерполяции  $x_0=0$ ,  $y_0=y(0)=-1.5$ ,  $x_1=0.5$ ,  $y_1=y(x_1)=-5.739619 \cdot 10^{-1}$ ,  $x_2=1$ ,  $y_2=y(x_2)=7.974426 \cdot 10^{-1}$ . Введем по программе  $y_0$ ,  $y_1$ ,  $y_2$ , а затем  $x_0$ ,  $x_1$ ,  $x_2$ . Затем вводим  $y=0$ . Программа вычисляет  $x(0)$ . В результате счета получаем

$$x = 7.441932 \cdot 10^{-1} \approx 0.744.$$

Для получения большей точности то же количество узлов интерполяции выберем поближе к точке  $x=0.744$  и повторим процесс  $x_0=0.7$ ,  $y_0=-8.75853 \cdot 10^{-2}$ ,  $x_1=0.75$ ,  $y_1=4.62349 \cdot 10^{-2}$ ,  $x_2=0.8$ ,  $y_2=1.852844 \cdot 10^{-1}$ . Положив  $y=0$ , получим  $x=7.3293352 \cdot 10^{-1} \approx 0.733$ . Решением уравнения будет  $x=0.733$ . Решение того же уравнения при помощи итерационных процедур было бы гораздо более трудоемким.

О качестве обратной интерполяции можно судить по уменьшению разностей  $\Delta(y_0, y_1)$ ,  $\Delta(y_0, y_1, y_2)$  и т. д.

## 8. Критерий значимости и метод $\chi^2$

На рис. 29 представлена экспериментальная зависимость между величинами  $x$  и  $y$ . Если какая-то величина изменяется во времени, то повторить еще раз тот же опыт не представляется возможным. Через экспериментальные точки можно провести прямую, но тогда одна из точек не будет лежать на этой прямой. Если же провести

кривую через все точки, то она может оказаться физически недостоверной, так как выпавшая точка может быть и случайной. Возникает вопрос, какой аналитической кривой отдать предпочтение. Одним из наиболее удобных критериев значимости, отвечающих на данный вопрос, является так называемый «критерий  $\chi^2$ », определяемый по формуле

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^N \left( \frac{y_i^{\text{эксп}} - y_i^{\text{теор}}}{\sigma_i} \right)^2. \quad (3.56)$$

Отклонение экспериментальных точек от ожидаемых значений выражается, таким образом, в долях стандартной ошибки данного измерения. Найденное значение  $\chi^2$  сопоставляется с теоретическим, представленным в табл. 16. Здесь  $P$ , выраженная в процентах, — вероятность отклонения экспериментальных значений  $\chi^2$  от указанных в таблице,  $n$  — число степеней свободы системы. Она определяется как разность между числом измерений и числом постоянных параметров, описывающих теоретическую кривую, определяемых из экспериментальных данных.

Допустим, что сделано 12 измерений. Теоретическую кривую представим в двухпараметрическом виде. Тогда число степеней свободы

$$n = 12 - 2 = 10.$$

Допустим, что в результате вычислений по формуле (3.56) было получено  $\chi^2 = 3.5$ . По табл. 16 находим, что такое значение  $\chi^2$  при  $n = 10$  должно наблюдаться больше чем в 95% и меньше чем в 98% случаев. Отклонение «выпадающих» точек от ожидаемых в этом случае является несущественным и им можно попросту пренебречь. Иное дело, если в результате счета для тех же двенадцати измерений получится  $\chi^2 = 18$ . Согласно таблице такие отклонения следует ожидать только менее чем в 5% случаев, поэтому существование случайных «выпадающих» точек следует поставить под сомнение. В случае, представленном на рис. 29, через экспериментальные точки нельзя провести прямую, поскольку с выпавшей точкой приходится считаться.

Вычисление величины  $\chi^2$  по экспериментальным данным проводится по программам 51, 52.

**Программа 51. Вычисление величины  $\chi^2$ .** Вводим  $N$  С/П  $x_1$  С/П  $y_1$  С/П  $x_2$  С/П ...  $y_n$  С/П. На индикаторе в регистре  $X$  получаем значение  $\chi^2$ . Стоящие в конце программы точки означают, что на их место следует поместить подпрограмму, вычисляющую в заданных точках значения аппроксимирующей кривой. Для параметров теоретической кривой отведены ячейки памяти П8, П9, ПА, ПВ, ПС,

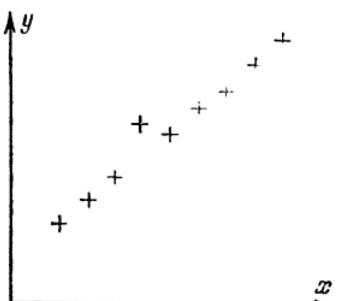


Рис. 29

Таблица 16

| Распределение $\chi^2$ |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |  |
|------------------------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|--|
| $n \setminus l$        | 99   | 98   | 95   | 90   | 80   | 70   | 50   | 30   | 20   | 10   | 5    | 2    |  |
| 4                      | 0.3  | 0.4  | 0.7  | 1.1  | 1.6  | 2.2  | 3.4  | 4.9  | 6.0  | 7.8  | 9.5  | 11.7 |  |
| 5                      | 0.6  | 0.8  | 1.1  | 1.6  | 2.3  | 3.0  | 4.4  | 6.8  | 7.3  | 9.2  | 11.1 | 13.4 |  |
| 6                      | 0.9  | 1.1  | 1.6  | 2.2  | 3.1  | 3.8  | 5.3  | 7.2  | 8.6  | 10.2 | 12.6 | 15.0 |  |
| 7                      | 1.2  | 1.6  | 2.2  | 2.8  | 3.8  | 4.7  | 6.3  | 8.4  | 9.8  | 12.0 | 14.1 | 16.6 |  |
| 8                      | 1.6  | 2.0  | 2.7  | 3.5  | 4.6  | 5.5  | 7.3  | 9.5  | 11.0 | 13.4 | 15.5 | 18.2 |  |
| 9                      | 2.1  | 2.5  | 3.3  | 4.2  | 5.4  | 6.4  | 8.3  | 10.7 | 12.2 | 14.7 | 16.9 | 19.7 |  |
| 10                     | 2.6  | 3.1  | 3.9  | 4.9  | 6.2  | 7.3  | 9.3  | 11.8 | 13.4 | 16.0 | 18.3 | 21.2 |  |
| 11                     | 3.1  | 3.6  | 4.6  | 5.6  | 7.0  | 8.1  | 10.3 | 12.9 | 14.6 | 17.3 | 19.7 | 22.6 |  |
| 12                     | 3.6  | 4.2  | 5.2  | 6.3  | 7.8  | 9.0  | 11.3 | 14.0 | 15.8 | 18.5 | 21.0 | 24.1 |  |
| 13                     | 4.1  | 4.8  | 5.9  | 7.0  | 8.6  | 9.9  | 12.3 | 15.1 | 17.0 | 19.8 | 22.4 | 25.5 |  |
| 14                     | 4.7  | 5.4  | 6.6  | 7.8  | 9.5  | 10.8 | 13.3 | 16.2 | 18.1 | 21.1 | 23.7 | 26.9 |  |
| 15                     | 5.2  | 6.0  | 7.3  | 8.5  | 10.3 | 11.7 | 14.3 | 17.3 | 19.3 | 22.3 | 25.0 | 28.3 |  |
| 16                     | 5.8  | 6.6  | 8.0  | 9.3  | 11.1 | 12.6 | 15.3 | 18.4 | 20.5 | 23.5 | 26.3 | 29.6 |  |
| 17                     | 6.4  | 7.3  | 8.7  | 10.1 | 12.0 | 13.5 | 16.3 | 19.5 | 21.6 | 24.8 | 27.6 | 31.0 |  |
| 18                     | 7.0  | 7.9  | 9.4  | 10.9 | 12.9 | 14.4 | 17.3 | 20.6 | 22.8 | 26.0 | 28.9 | 32.3 |  |
| 19                     | 7.6  | 8.6  | 10.1 | 11.6 | 13.7 | 15.4 | 18.3 | 21.7 | 23.9 | 27.2 | 30.1 | 33.7 |  |
| 20                     | 8.3  | 9.2  | 10.8 | 12.4 | 14.6 | 16.3 | 18.3 | 22.8 | 25.0 | 28.4 | 31.4 | 35.0 |  |
| 21                     | 8.9  | 9.9  | 11.6 | 13.2 | 15.4 | 17.2 | 20.3 | 23.9 | 26.2 | 29.6 | 32.7 | 36.3 |  |
| 22                     | 9.5  | 10.6 | 12.3 | 14.0 | 16.3 | 18.1 | 21.3 | 24.9 | 27.3 | 30.8 | 33.9 | 37.7 |  |
| 23                     | 10.2 | 11.3 | 13.1 | 14.8 | 17.2 | 19.0 | 22.3 | 26.0 | 28.4 | 32.0 | 35.2 | 39.0 |  |
| 24                     | 10.9 | 12.0 | 13.8 | 15.7 | 18.1 | 19.9 | 23.3 | 27.1 | 29.6 | 33.2 | 36.4 | 40.3 |  |
| 25                     | 11.5 | 12.7 | 14.6 | 16.5 | 18.9 | 20.9 | 24.8 | 28.2 | 30.7 | 34.4 | 37.7 | 41.6 |  |
| 26                     | 12.5 | 13.4 | 15.4 | 17.3 | 19.8 | 21.8 | 25.3 | 29.2 | 31.8 | 35.6 | 38.9 | 42.9 |  |
| 27                     | 12.9 | 14.1 | 16.1 | 18.1 | 20.7 | 22.7 | 26.3 | 30.3 | 32.9 | 36.7 | 40.1 | 44.1 |  |
| 28                     | 13.6 | 14.8 | 16.9 | 18.9 | 21.6 | 23.6 | 27.3 | 31.4 | 34.0 | 37.9 | 41.3 | 45.4 |  |
| 29                     | 14.3 | 15.6 | 17.7 | 19.8 | 22.5 | 24.6 | 28.3 | 32.5 | 35.1 | 39.1 | 42.6 | 46.7 |  |
| 30                     | 15.0 | 16.3 | 18.5 | 20.6 | 23.4 | 25.5 | 29.3 | 33.5 | 36.2 | 40.3 | 43.8 | 48.0 |  |

ПД. Заканчивается подпрограмма оператором В/0. Значения параметров вводятся до начала работы программы.

Память:  $x_i = \Pi_1$ ,  $y_i = \Pi_2$ ,  $\sum y = \Pi_3$ ,  $\sum y^2 = \Pi_5$ ,  $N = \Pi_4$ ,  $\Sigma (y_{\text{эксп}} - y_{\text{теор}}) = \Pi_6$ ,  $\sigma^2 = \Pi_7$ , L0 — цикл.

|     |         |     |     |     |     |     |         |     |         |
|-----|---------|-----|-----|-----|-----|-----|---------|-----|---------|
| П0  | C/П     | ↔   | Cx  | П3  | П4  | П5  | П6      | ↔   | БП      |
| 12  | C/П     | П1  | C/П | П2  | Пх3 | +   | П3      | Пх2 | F $x^2$ |
| Пх5 | +       | П5  | ПП  | 48  | Пх2 | -   | F $x^2$ | Пх6 | +       |
| П6  | KПх4    | Пх4 | FL0 | 11  | Пх5 | Пх4 | ÷       | Пх3 | Пх4     |
| ÷   | F $x^2$ | -   | П7  | Пх6 | ↔   | ÷   | C/П     | ... | ...     |
| ... | ...     | ... | ... | ... | ... | ... | ...     | ... | B/0     |

Тест: функция  $y = ax + b$ ,  $a = 2 = \Pi_A$ ,  $b = 3 = \Pi_B$ .

Подпрограмма имеет вид

Пx1 ПxA × ПxB + B/0

Тестовые числовые данные:

$$N = 6$$

|     |   |   |   |   |    |    |
|-----|---|---|---|---|----|----|
| $x$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4  | 5  |
| $y$ | 3 | 5 | 5 | 9 | 11 | 13 |

Результаты счета:  $\chi^2 = 0.31034482 \approx 0.31$ . При четырех степенях свободы  $n = 6 - 2 = 4$  вероятность составляет  $P(\chi^2) = 99\%$ ,  $t_{\text{вв}} \approx 12 \text{ с}$ ,  $t_{\text{сч}} \approx 12 \text{ с}$ .

**Программа 52. Вычисление величины  $\chi^2$ , если шаг по  $x$  равномерный.** Эта программа не требует каждый раз ввода  $x_i$ , его значение вычисляется автоматически при каждом шаге программы. Шаг по  $x$  — число  $h$ . В конце программы вводится подпрограмма-функция.

Вводим  $N$  С/П  $x_1$  С/П  $h$  С/П  $y_1$  С/П  $y_2$  С/П ...  $y_n$  С/П. Числовое значение величины, полученное в результате счета, поступает на индикатор.

Память: L0 — цикл,  $x_i = \Pi 1$ ,  $y_i = \Pi 2$ ,  $\sum y_i = \Pi 3$ ,  $i = \Pi 4$ ,  $\sum y_i^2 = \Pi 5$ ,  $\sum (y_{i\text{эксп}} - y_{i\text{теор}})^2 = \Pi 6$ ,  $\sigma^2 = \Pi 7$ ,  $h = \Pi 8$ .

|     |     |                   |     |     |                 |     |                 |                   |                   |
|-----|-----|-------------------|-----|-----|-----------------|-----|-----------------|-------------------|-------------------|
| П0  | С/П | $\leftrightarrow$ | Cx  | П3  | П4              | П5  | П6              | $\leftrightarrow$ | П1                |
| С/П | П8  | С/П               | П2  | Пх3 | +               | П3  | Пх2             | Fx <sup>2</sup>   | Пх5               |
| +   | П5  | Пх1               | ПП  | 52  | Пх2             | —   | Fx <sup>2</sup> | Пх6               | +                 |
| П6  | Пх1 | Пх8               | +   | П1  | КПх4            | Пх4 | FL0             | 12                | Пх5               |
| Пх4 | ÷   | Пх3               | Пх4 | ÷   | Fx <sup>2</sup> | —   | П7              | Пх6               | $\leftrightarrow$ |
| ÷   | С/П | ...               | ... | ... | ...             | ... | ...             | ...               | B/0               |

В качестве теста используют данные:

$$N = 6$$

|     |   |   |   |   |    |    |
|-----|---|---|---|---|----|----|
| $x$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4  | 5  |
| $y$ | 3 | 5 | 4 | 9 | 11 | 13 |

$$t_{\text{вв}} = 10 \text{ с}, \quad t_{\text{сч}} = 10 \text{ с}.$$

Аппроксимирующая функция  $y = ax + b$ , а подпрограмма ее вычисления:

$$\text{Пх1 ПxA} \times \text{ПxB} + \text{B/0}$$

где  $a = 2 = \text{ПA}$ ,  $b = 3 = \text{ПB}$ . В результате счета получаем  $\chi^2 = 0.64670661 \approx 0.65$ . По табл. 19 величине  $\chi^2$  при  $n = 4$  соответствует вероятность  $P \approx 96\%$ . Именно такова вероятность того, что предсказанная теоретическая функция — это прямая.

## Глава 4

### ПОСТРОЕНИЕ ГРАФИКОВ

#### 1. Общие принципы построения графиков

Графики используют для наглядного представления функциональной зависимости между двумя величинами. Если функция достаточно гладкая и у нее нет особых точек, где она не определена, то микроЭВМ позволяет быстро получить большое количество точек функции, по которым можно судить о ее виде.

Рассмотрим построение графиков функций вида

$$y = f(x). \quad (4.1)$$

Обозначим через  $h$  расстояние по оси  $x$  между соседними точками  $x_i$  и  $x_{i+1}$ , в которых мы будем определять значение функции (4.1)

$$h = x_{i+1} - x_i. \quad (4.2)$$

Принцип построения графиков функций состоит в последовательном увеличении аргумента  $x$  на  $h$  и вычислении значений функции в этих точках. Шаг  $h$  обычно выбирают равным 100, 10, 1, 0.1, 0.01 или 2.5, 0.25, 1.125, т. е. как результат деления единицы на 2, 4, 5, 10. Если функция в какой-либо окрестности  $x$  скачкообразно меняется, то для получения более детальной информации о ней необходимо уменьшить шаг  $h$  в целое число раз и в соответствующей окрестности  $x$  уточнить график.

Обычно при построении графика результаты вычислений заносят в таблицу значений функции, по которой строят график. Однако если известен масштаб графика, т. е. известно максимальное и минимальное значение функции, то его можно строить непосредственно по значениям, полученным на микрокалькуляторе без промежуточной записи в таблицу. Соответствующая программа после нажатия оператора запуска С/П [автоматически] вычисляет последовательные значения функции  $y_i = y(x_i)$  от  $y(x_{\min})$  до  $y(x_{\max})$ . Такая программа содержит в конце подпрограмму вычисления функции  $y = f(x)$ .

**Программа 53. Вычисление точек функции.** Установив счетчик в начальное положение, ввести значения  $h$  С/П  $x_0$  С/П. Получите  $y_0$ . После следующих нажатий клавиши запуска на индикаторе будут вы- свечиваться  $y_1, y_2, y_3, \dots, y_n$ . Точками отмечено место программы,

соответствующее подпрограмме-функции:

$$f(x) = f(\Pi 2).$$

Память:  $x = \Pi 2$ ,  $h = \Pi 3$ .

$\begin{array}{ccccccccc} \Pi 3 & C/P & \Pi 2 & P/P & \underline{\underline{11}} & C/P & \Pi x^2 & \Pi x^3 & + & B/P \\ 02 & \dots & B/0 \end{array}$

Тест:  $h = 1$ ,  $x_0 = 0$ ,  $f(x) = x$ .

Результат вычислений: 0, 1, 2, 3, 4, ...

Нередко для удобства построения графиков прибегают к округлению значений функции.

**Программа 54. Вычисление точек функции с округлением до 0, 1. Ввести программу, затем подпрограмму, исходные данные:  $h$  С/П  $x_0$  С/П. В дальнейшем лишь нажимать клавишу пуска С/П.**

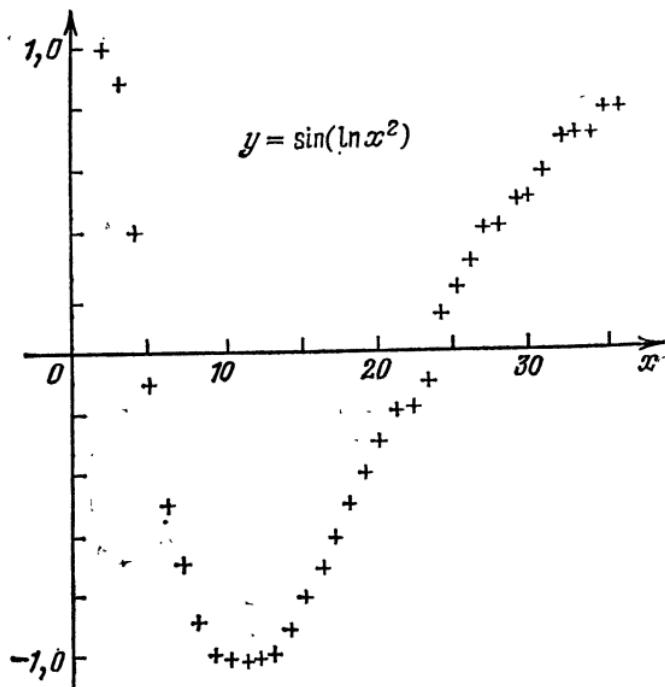


Рис. 3в

Память:  $x = \Pi 2$ ,  $h = \Pi 3$  — без округления. Ответ поступает в индикаторный регистр X.

$\begin{array}{ccccccccc} \Pi 1 & C/P & \Pi 2 & P/P & \underline{\underline{39}} & \Pi 3 & 1 & B/P & 6 & + \\ 1 & B/P & 6 & — & \uparrow & \Pi x^3 & — & 5 & B/P & 2 \\ /-/ & \leftrightarrow & — & Fx < 0 & \underline{\underline{32}} & \leftrightarrow & 1 & B/P & 1 & /- \\ — & \leftrightarrow & \leftrightarrow & C/P & \underline{\underline{\Pi x^2}} & \Pi x^1 & + & B/P & \underline{02} & ... \\ \dots & B/0 \end{array}$

Тест:  $f(x) = x^2$ . Подпрограмма Пx2 Fx<sup>2</sup> В/0  $h=0.5$ ,  $x_0=0$ . Получаем  $y_i$ : 0, 0.3, 1.

Если в программе 54 необходимо округлять до 0,01, то следует операторы 1 ВП 6 и 5 ВП 2 /-/ заменить соответственно на 1 ВП 5 и 5 ВП 3 /-/ , а 1 ВП 1 /-/ на 1 П 2 /-/ .

В качестве примера на рис. 30 построен график функции  $y = -\sin(\ln x^2)$ , причем он выполнен в разных масштабах по осям  $x$  и  $y$ , иначе он оказался бы «прижатым» к оси и не было бы видно характера поведения функции.

## 2. Максимум и минимум графика

Наиболее часто приходится сталкиваться с построением графиков функций, которые откладывают не от нуля, а от минимального или близкого к нему значения функции. Для выбора оптимального масштаба по оси  $y$  необходимо знать максимальное значение  $y_{\max}$ .

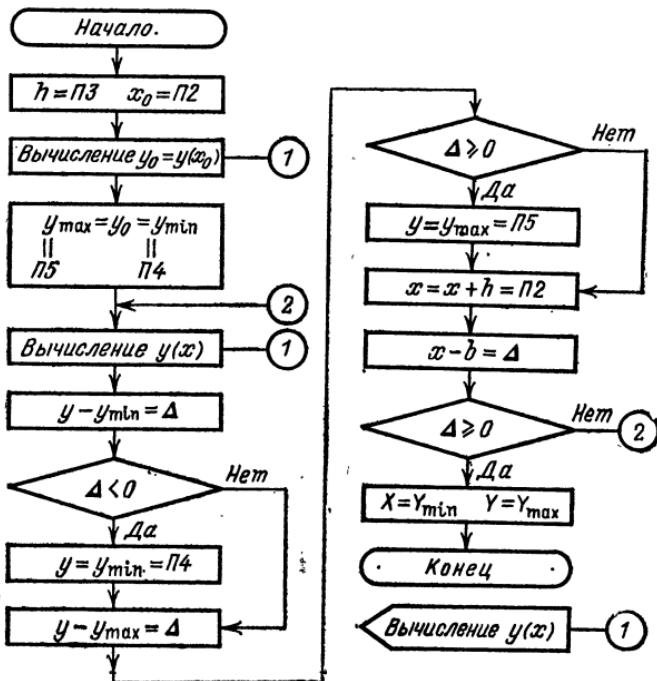


Рис. 31

Блок-схема программы отыскания минимальных и максимальных точек функции представлена на рис. 31.

**Программа 55. Отыскание точек минимума и максимума для построения функции.** Ввести  $h$  С/П  $a$  С/П  $b$  С/П. В результате счета получим  $x(y_{\max}) = T$ ,  $x(y_{\min}) = Z$ ,  $y_{\min} = X$ ,  $y_{\max} = Y$ .

Память: L0—цикл,  $h=\Pi 1$ ,  $x=\Pi 2$ ,  $y_{\min}=\Pi 3$ ,  $x(y_{\min})=\Pi 4$ ,  
 $y_{\max}=\Pi 5$ ,  $x(y_{\max})=\Pi 6$ ,  $b=\Pi \text{B}$ .

|            |             |         |             |           |                   |             |          |           |                   |
|------------|-------------|---------|-------------|-----------|-------------------|-------------|----------|-----------|-------------------|
| $\Pi 1$    | $\text{СП}$ | $\Pi 2$ | $\Pi 4$     | $\Pi 6$   | $\text{С/П}$      | $\text{ПВ}$ | $\Pi x2$ | $-$       | $\Pi x1$          |
| $\div$     | 1           | +       | $\Pi 0$     | $\Pi \Pi$ | 50                | $\Pi 3$     | $\Pi 5$  | $\Pi \Pi$ | 50                |
| $\uparrow$ | $\Pi x3$    | $-$     | $Fx < 0$    | 29        | $\leftrightarrow$ | $\Pi 3$     | $\Pi x2$ | $\Pi 4$   | $\leftrightarrow$ |
| $\uparrow$ | $\Pi x5$    | $-$     | $Fx \geq 0$ | 39        | $\leftrightarrow$ | $\Pi 5$     | $\Pi x2$ | $\Pi 6$   | $\Pi x2$          |
| $\Pi x1$   | +           | $\Pi 2$ | FLO         | 18        | $\Pi x6$          | $\Pi x4$    | $\Pi x5$ | $\Pi x3$  | C/P               |
| ...        | ...         | ...     | ...         | ...       | ...               | ...         | ...      | ...       | B/0               |

Тест:  $h=1$ ,  $a=1$ ,  $b=6$ .

Для функции  $y=x^2-6x+14$  подпрограмма имеет вид

$$\Pi x2 \quad Fx^2 \quad \Pi x2 \quad 6 \quad \times \quad - \quad 1 \quad 4 \quad + \quad B/0$$

В результате счета, который длится  $\sim 1$  мин, получаем

$$y_{\min}=5, \quad x(y_{\min})=3,$$

$$y_{\max}=14, \quad x(y_{\max})=3.$$

Время счета по программе 55 зависит от количества точек графика. При  $n=100$  точках счет длится около 20 мин. А если функция в подпрограмме имеет очень сложный вид, время счета будет еще больше.

### 3. Графики кусочно-непрерывных функций и функций со знаком модуля

Наличие у программируемых микрокалькуляторов логических операторов дает возможность составления программ для построения функций, определяемых по различным формулам в зависимости от области, в которую попадает аргумент  $x$ . Принадлежность  $x$  определенной области определяется последовательно слева направо с возрастанием величины  $x$ .

**Пример 1.** Построить на отрезке  $[-5, 5]$  функцию

$$y(x) = \begin{cases} \frac{x}{8} + \frac{1}{8}, & x < -1; \\ 0, & -1 \leq x < 0; \\ x^2, & 0 \leq x < 1; \\ e^{x-1}, & 1 \leq x < 2; \\ e + \ln(x-1), & x \geq 2. \end{cases}$$

Положим  $h=0.25$ ,  $x_0=-5$ ,  $a=-5$ ,  $b=5$ . Подпрограмма-функция имеет довольно сложный вид. Обратите внимание, что разветвление в программе достигается как логическими операторами  $Fx < 0$  —, так и множеством выходов из подпрограммы B/0.

|          |     |          |          |          |                        |          |          |   |   |
|----------|-----|----------|----------|----------|------------------------|----------|----------|---|---|
| $\Pi x2$ | 1   | /—/      | —        | $Fx < 0$ | 62                     | $\Pi x2$ | 1        | + | 8 |
| $\div$   | B/0 | $\Pi x2$ | $Fx < 0$ | 67       | $\overline{\text{Cx}}$ | B/0      | $\Pi x2$ | 1 | — |

$$\begin{array}{llllllll}
 Fx < 0 & \frac{75}{1} & \Pi x^2 & Fx^2 & B/0 & \Pi x^2 & 2 & - & Fx < 0 & \frac{85}{1} \\
 \Pi x^2 & \frac{1}{-} & - & Fe^x & B/0 & \Pi x^2 & 1 & - & Fln & \frac{1}{-} \\
 Fe^x & + & B/0 & & & & & & &
 \end{array}$$

Введя эту подпрограмму в программу 55, находим, что,  $y_{\min} = -0.5$ ,  $y_{\max} = 4.1045762$ . А для вычисления точек функции и построения графика по программе 54 воспользуемся подпрограммой

$$\begin{array}{llllllll}
 \Pi x^2 & 1 & /-/- & - & Fx < 0 & \frac{51}{56} & \Pi x^2 & 1 & + & 8 \\
 \div & B/0 & \Pi x^2 & Fx < 0 & \frac{56}{B/0} & Cx & B/0 & \Pi x^2 & 1 & - \\
 Fx < 0 & \frac{64}{1} & \Pi x^2 & Fx^2 & \frac{B/0}{B/0} & \Pi x^2 & 2 & - & Fx < 0 & 74 \\
 \Pi x^2 & \frac{1}{-} & - & Fe^x & B/0 & \Pi x^2 & 1 & - & Fln & 1 \\
 Fe^x & + & B/0 & & & & & & &
 \end{array}$$

График функции представлен на рис. 32.

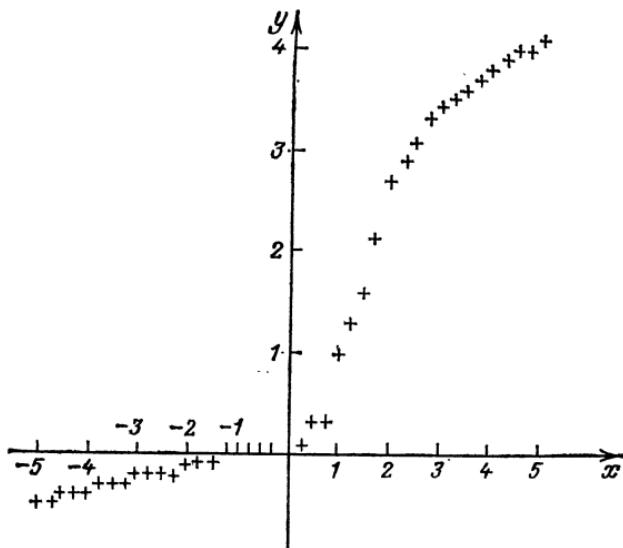


Рис. 32

Программируемые микрокалькуляторы МК-61, МК-52 имеют встроенную функцию для вычисления абсолютной величины числа. Для определения абсолютной величины на микрокалькуляторах Б3-34, МК-54 можно использовать несложный фрагмент программы:

$$Fx < 0 \quad \boxed{/ - /} \quad \dots$$

Функции со знаком абсолютной величины обычно имеют изломы вблизи нуля функции. Количество изломов определяется сложностью функции, стоящей под знаком модуля. Необходимо так выбирать  $x_0$  и  $h$ , чтобы одно из значений  $x_i$  попало в излом. Если в вычислениях несколько

знаков модуля и если одна функция со знаком модуля находится внутри другой, то набираются они последовательно.

**Пример 2\***. Построить на отрезке  $[-4, 4]$  функцию

$$y = |x - 1| + |x + 1|.$$

Положим  $h = 0.25$ ,  $a = -4$ ,  $b = 4$ .

По программе 54 с подпрограммой

$$\text{П}x2 \ 1 - \text{К}|x| \ \text{П}x2 \ 1 + \text{К}|x| + \text{В}/0$$

строим искомый график. Он приведен на рис. 33.

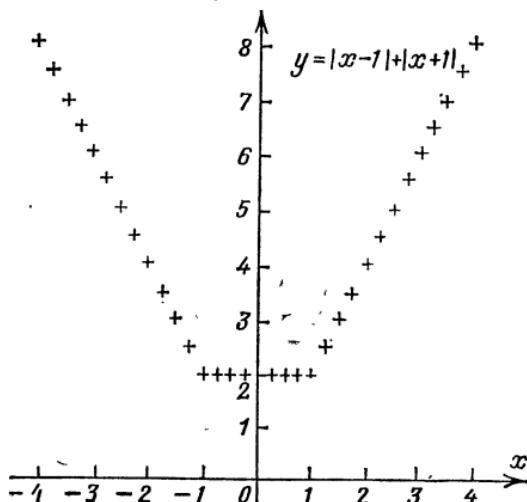


Рис. 33

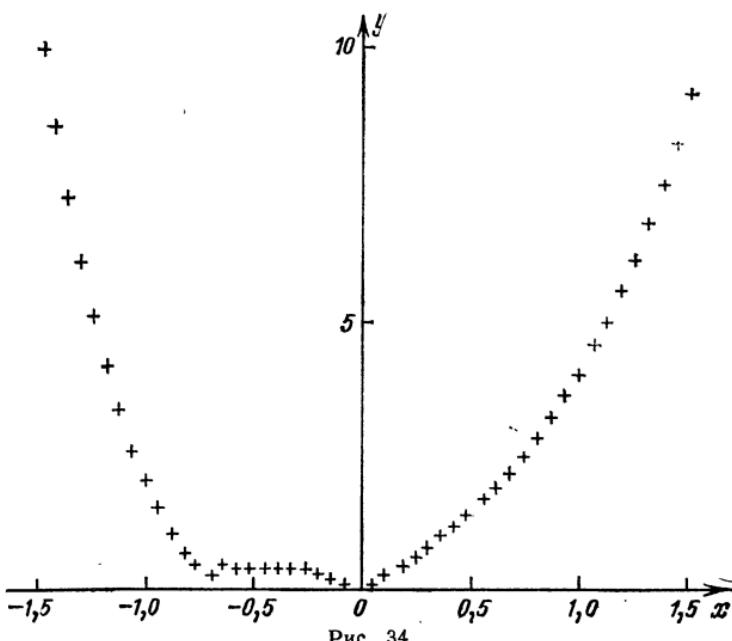


Рис. 34

**Пример 3\*.** Построить на отрезке  $[-1.5, 1.5]$  функцию

$$y = |x^4| - |x^3 + 2x^2 + 2x|.$$

Положим  $h = 0.0625$ ,  $a = -1.5$ ,  $b = 1.5$ . Воспользовавшись программой 55 с подпрограммой-функцией

$$\begin{array}{ccccccccc} \text{П} & x^2 & /-/- & 2 & + & \text{П} & x^2 & \times & 2 & + & \text{П} & x^2 & \times \\ \text{K} & |x| & \text{П} & x^2 & \text{F} & x^2 & \text{F} & x^2 & + & \text{K} & |x| & \text{B} & /0 \end{array}$$

в результате счета получаем  $y_{\min} = 0$ ,  $y_{\max} = 9.9375$ . Тогда по программе 54 с подпрограммой

$$\begin{array}{ccccccccc} \text{П} & x^2 & /-/- & 2 & + & \text{П} & x^2 & \times & 2 & + & \text{П} & x^2 & \times \\ \text{K} & |x| & \text{П} & x^2 & \text{F} & x^2 & \text{F} & x^2 & + & \text{K} & |x| & \text{B} & /0 \end{array}$$

вычисляем точки функции. Они приведены на рис. 34.

#### 4. Графики функций, заданных в параметрическом виде

Не всякую функцию можно представить в виде  $y = f(x)$ . Примером может служить так называемый «Декартов лист»:

$$x^3 + y^3 - 3axy = 0. \quad (4.3)$$

Такие функции можно задать параметрически. В нашем примере

$$x = \frac{3at}{t^3 + 1}, \quad y = \frac{3at^2}{t^3 + 1}. \quad (4.4)$$

Задавая различные значения параметра  $t$ , легко найти  $x$  и  $y$ . Строить такие функции ненамного сложнее, чем обычные. Однако погрешность графика возникает здесь не только по оси  $y$ , но и по оси  $x$ . Поэтому, чтобы графики функций, заданных параметрически, выглядели правдоподобно, их нужно выполнять на миллиметровке в как можно большем масштабе.

Если параметр  $t$  входит в тригонометрическую функцию, то его лучше выражать не в радианах, а в градусах или градах, если это, конечно, возможно, так как операции с целыми числами выполняются точнее, чем с дробными.

**Программа 56. Вычисление точек функции, заданной параметрически (с округлением до 0.1).** После основной программы вводятся подпрограммы-функции  $y(t)$  и  $x(t)$ . Неотмеченный в программе адрес обращения к подпрограмме  $x(t)$  легко вычисляется по формуле  $N = K + 49$ , где  $N$  — искомый адрес,  $K$  — число операторов подпрограммы, включая  $B/0$ .

Далее следует, установив счетчик в нулевое положение клавишей  $B/0$ , ввести исходные данные  $h$  С/П  $t_0$  С/П. Микрокалькулятор вычислит первую пару  $x$ ,  $y$ . Их округленные значения находятся в регистрах X и Y, а неокругленные — в П3, П4. Для определения  $x_i$ ,  $y_i$  далее следует нажимать лишь клавишу пуска С/П.

Память: ПО — буфер, служащий для округления, шаг по  $t$  — величина  $h = \Pi_1$ ,  $t_i = \Pi_2$ ,  $x_i = \Pi_3$ ,  $y_i = \Pi_4$ .

|              |          |                  |          |                  |           |                   |                  |           |                  |
|--------------|----------|------------------|----------|------------------|-----------|-------------------|------------------|-----------|------------------|
| $\Pi_1$      | $C/P$    | $\Pi_2$          | $\Pi\Pi$ | $\frac{49}{\Pi}$ | $\Pi_4$   | $\Pi\Pi$          | $\frac{20}{\Pi}$ | $\Pi\Pi$  | $\dots$          |
| $\Pi_3$      | $\Pi\Pi$ | $\frac{20}{\Pi}$ | $C/P$    | $\frac{\Pi}{x}2$ | $\Pi x_1$ | $+$               | $\frac{\Pi}{2}$  | $\Pi\Pi$  | $\frac{02}{\Pi}$ |
| $\Pi_0$      | 1        | $B\Pi$           | 6        | +                | 1         | $B\Pi$            | 6                | —         | $\uparrow$       |
| $\Pi x_0$    | —        | 5                | $B\Pi$   | 2                | $/-$      | $\leftrightarrow$ | —                | $F_x < 0$ | 47               |
| $F \searrow$ | 1        | $B\Pi$           |          | $/-$             | —         | $\uparrow$        | $F \searrow$     | $B/0$     | ...              |
| ...          | ...      | ...              | ...      | $B/0$            | ...       | ...               | ...              | ...       | $B/0$            |

Тест:  $x(t) = \cos t$   $\Pi\Pi: \Pi x_2 F \cos B/0$

$y(t) = \sin t$   $\Pi\Pi: \Pi x_2 F \sin B/0$

$$N = 49 + 3 = 52, h = 90^\circ, t_0 = 0^\circ.$$

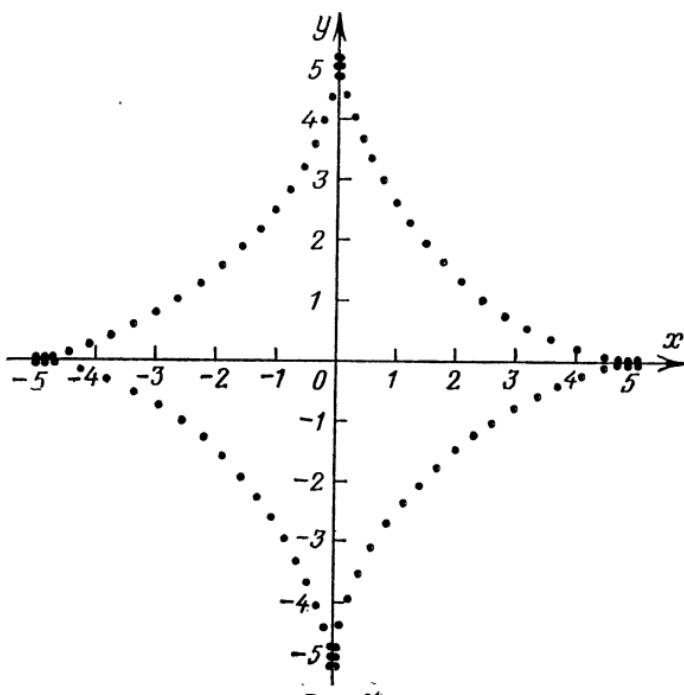


Рис. 35

Так как в данной программе регистр Т используется для долгосрочного хранения числа  $y_i$ , то подпрограмма должна быть такова, чтобы в ней регистр Т не использовался:

|     |   |   |    |    |   |
|-----|---|---|----|----|---|
| $x$ | 1 | 0 | -1 | 0  | 1 |
| $y$ | 0 | 1 | 0  | -1 | 0 |

**Пример.** Построить астроиду

$$x = 5 \cos^3 \frac{t}{4}, \quad y = 5 \sin^3 \frac{t}{4}.$$

Решение. Понятно, что  $x_{\min} = -5$ ,  $y_{\min} = -5$ ,  $x_{\max} = 5$ ,  $y_{\max} = 5$ .

Параметр  $t$  принимает значения  $0^\circ \leq \frac{t}{4} \leq 360^\circ$  или  $0^\circ \leq t \leq 1440^\circ$ .

Положим  $h = 20^\circ$ ,  $t_0 = 0^\circ$ . Воспользуемся программой 56 с подпрограммами

|     |     |     |       |       |   |   |   |   |   |
|-----|-----|-----|-------|-------|---|---|---|---|---|
| Px2 | 4   | ÷   | P5    | F sin | ↑ | ↑ | × | × | 5 |
| ×   | B/0 | Px5 | F cos | ↑     | ↑ | × | × | 5 | × |
| B/0 |     |     |       |       |   |   |   |   |   |

Подпрограмма  $y(t)$  состоит из 12 операторов, поэтому  $N = K + 49 = 12 + 49 = 61$ . Функция имеет вид, представленный на рис. 35.

Если функция задана в полярной системе координат, то ее можно построить в декартовой системе. Если

$$r = r(\varphi), \quad (4.5)$$

то

$$x = r(\varphi) \cos \varphi, \quad y = r(\varphi) \sin \varphi. \quad (4.6)$$

Как видим, значения  $x$  и  $y$  зависят только от величины  $\varphi$ . Поэтому исходную функцию в полярной системе координат можно представить в декартовой в параметрическом виде:

$$x(t) = r(t) \cos t, \quad y(t) = r(t) \sin t. \quad (4.7)$$

## 5. Некоторые упрощенные способы построения графиков

Построение графиков по округленным значениям функции более удобно, однако сам процесс округления из-за наличия в нем логического оператора занимает сравнительно много времени. А если еще функция содержит в себе вычисление  $\sin x$ ,  $\cos x$ ,  $\ln x$ ,  $e^x$  или  $x^y$ , то ожидание очередного значения функции увеличивается еще больше. Поэтому вместо точного округления можно использовать приближенное. Так для округления до 0.1 можно использовать фрагмент

... 1 ВП 5 + 1 ВП 5 - ...

Оперировать с такими округленными числами гораздо удобнее, чем с получаемыми в оригинал. К примеру, если значение функции при данном значении  $x$  равно 1.384547, то после описанной выше операции на индикаторе появится число 1.38, т. е. 1.4. Такую операцию с числами условимся называть *псевдоокруглением*.

В гл. 1 уже говорилось, что микрокалькулятор иногда неправильно округляет. Возникает вопрос, можно ли сделать такую программу, которая попросту отбрасывала бы все цифры справа в числе после разряда сотых. Оказывается, если число больше 0, то такую операцию можно сделать при помощи программы

... 1 ВП 2 × K|x| 1 ВП 2 ÷

Для микрокалькуляторов МК-54, ВЗ-34 аналогичный по действию фрагмент программы будет иметь вид

1 ВП 2 × 1 + П0 КPx0 Px0 1  
ВП 2 ÷ ...

Для ускорения процесса построения несложных графиков можно воспользоваться косвенной записью и встроенными циклами, позволяющими за один такт работы программы вычислить сразу 10 или 9 точек функции соответственно на микрокалькуляторах МК-61, МК-52 и БЗ-34, МК-54. К такой программе приходится прибегать, когда каждое значение функции вычисляется достаточно долго. Лучше подождать один раз, чем делать это многократно.

**Программа 57. Построение функции с вычислением за один такт девяти значений.** Набрать подпрограмму-функцию  $y(x)$ . Ввести  $h$  С/П  $x_0$  С/П. В дальнейшем нажимать лишь С/П для получения очередных значений  $y_i$ . Определив 9 значений функции, микроЭВМ автоматически переходит к вычислению следующей партии 9 значений функции.

Память:  $h = \text{П1}$ ,  $x_i = \text{П2}$ , L3—цикл, косвенные операции  $\leftarrow = \text{П4}$ ,  $y_i = \text{П5}$ ,  $y_{i+1} = \text{П6}$ ,  $y_{i+2} = \text{П7}$ ,  $y_{i+3} = \text{П8}$ ,  $y_{i+4} = \text{П9}$ ,  $y_{i+5} = \text{ПА}$ ,  $y_{i+6} = \text{ПВ}$ ,  $y_{i+7} = \text{ПС}$ ,  $y_{i+8} = \text{ПД}$ .

П1 С/П П2 9 П3 4 П4 ПП 26 КП4

Пx1 Пx2 + П2 FL3 07 9 П3 4 П4

КPx4 С/П FL3 20 БП 03

Тест: ПП: Пx2 В/0

$h = 1$ ,  $x_0 = 1$ ,  $t_{\text{ср}} \approx 28$  с.

|       |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
|-------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y_i$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|-------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|

**Программа 58\*. Построение функции с вычислением за один такт десяти значений.** Набрать подпрограмму-функцию  $y(x)$ . Ввести  $h$  С/П  $x_0$  С/П. В дальнейшем нажимать лишь С/П для получения очередных значений  $y_i$ . После первых 10 значений функции, микрокалькулятор автоматически переходит к вычислению следующих 10 значений функции.

Память:  $h = \text{П1}$ ,  $x_i = \text{П2}$ , L3—цикл, П4—косвенные операции,  $y_i = \text{П5}$ ,  $y_{i+1} = \text{П6}$ ,  $y_{i+2} = \text{П7}$ ,  $y_{i+3} = \text{П8}$ ,  $y_{i+4} = \text{П9}$ ,  $y_{i+5} = \text{ПА}$ ,  $y_{i+6} = \text{ПВ}$ ,  $y_{i+7} = \text{ПС}$ ,  $y_{i+8} = \text{ПД}$ ,  $y_{i+9} = \text{ПЕ}$ .

П1 С/П П2 1 0 П3 4 П4 ПП 26

КП4 Пx1 Пx2 + П2 FL3 08 1 0 П3

4 П4 КPx4 С/П FL3 22 БП 03

Тест:  $h = 1$ ,  $x_0 = 1$ ,  $t_{\text{ср}} \approx 31$  с.

|       |   |   |   |   |   |   |   |   |   |    |
|-------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|----|
| $y_i$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|-------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|----|

При построении функций иногда возникает вопрос о том, как не допустить увеличения погрешности вычисления аргумента функции, вызванного тем, что шаг невозможно представить целым числом. В этом случае, если величину  $x_i$  вычислять по традиционной формуле

$$x_i = x_{i-1} + h,$$

то ошибка с каждым шагом будет нарастать. Так, сложив 33 раза величины  $\pi/33$  вместо 3.1415926 вы получите 3.1415932. Избежать подобной ошибки можно, хотя и не во всех точках. Для этого в формуле

$$x_i = x_0 + ih \quad (4.8)$$

величину  $h$  представим в виде

$$h = \frac{\pi}{n}, \quad (4.9)$$

где  $n$  — целое число. Тогда текущий аргумент вычисляется по формуле

$$x_i = x_0 + \pi \left( \frac{i}{n} \right). \quad (4.10)$$

В этом случае аргумент будет найден точно не только в точках при  $x_0 = 0$  и  $x_n = \pi$ , но и в остальных точках погрешность будет сведена к минимуму.

## 6. Графики с функциональными шкалами

Наверное, многие из читателей увлекаются радиотехникой и знают, что амплитудную характеристику акустической системы изображают на графиках с логарифмической шкалой, когда по оси  $x$  откладывают логарифмы величины  $x$ . В общем случае к логарифмическим шкалам прибегают, когда необходимо хорошо выделить детали графика в начале шкалы.

Принцип построения функциональной шкалы следующий. Пусть  $h$  — одно деление шкалы или шаг. Тогда

$$f(x_i) = f(x_{i-1}) + h, \quad (4.11)$$

где  $f(x)$  — та или иная функция шкалы. Для логарифмической шкалы функция (4.11) имеет вид

$$\log_a x_i = \log_a x_{i-1} + h, \quad (4.12)$$

для показательной

$$a^{x_i} = a^{x_{i-1}} + h, \quad (4.13)$$

для синусоидальной

$$\sin x_i = \sin x_{i-1} + h, \quad (4.14)$$

для арктангенциальной

$$\operatorname{arctg} x_i = \operatorname{arctg} x_{i-1} + h. \quad (4.15)$$

Трудности составления подобных шкал состоят в том, что аргумент  $x_i$  нужно выразить через  $x_{i-1}$  явным образом. В случае логарифмической и показательной шкал сделать это несложно:

$$x_i = a^h x_{i-1}, \quad (4.16)$$

$$x_i = \log_2 (a^{x_{i-1}} + h). \quad (4.17)$$

Формулу (4.16) преобразуем к виду

$$x_i = c x_{i-1}, \quad (4.18)$$

где  $a^h = c$  — постоянная.

Пусть минимальное и максимальное значения величины  $x$  соответственно равны  $x_0$  и  $x_r$  (начальное и граничное)  $n$  — количество точек графика. Тогда

$$x_r = c^n x_0, \quad (4.19)$$

откуда определяется константа

$$c = \sqrt[n]{x_r/x_0}. \quad (4.20)$$

Тогда, если шкала логарифмическая с основанием  $a = 10$ , легко найти значение одного деления шкалы

$$h = \lg c = \frac{1}{n} \lg x_r - \frac{1}{n} \lg x_0, \quad (4.21)$$

которое используется для построения графика функции.

**Программа 59. Отыскание экстремальных точек при построении графика в логарифмической шкале.** После ввода основной программы ввести подпрограмму (ПП) вычисления  $y(x)$ . Возвратив счетчик программы в исходное состояние, ввести  $x_0$  С/П  $x_r$  С/П. МикроЭВМ вычислит  $y_{\min}$  и  $y_{\max}$ , а также  $x(y_{\min})$  и  $x(y_{\max})$  и занесет их в регистры  $y_{\min} = X = \Pi 4$ ,  $y_{\max} = Y = \Pi 5$ ,  $x(y_{\min}) = \Pi 8$ ,  $x(y_{\max}) = \Pi 9$ .

Память:  $x_i = \Pi 2$ ,  $c = \Pi 3$ ,  $x_r = \Pi 6$ ,  $y_{\min} = \Pi 4$ ,  $y_{\max} = \Pi 5$ ,  $y_i = \Pi 7$ ,  $x(y_{\min}) = \Pi 8$ ,  $x(y_{\max}) = \Pi 9$ .

|                 |        |        |     |     |     |     |     |      |     |
|-----------------|--------|--------|-----|-----|-----|-----|-----|------|-----|
| P2              | C/П    | P6     | Px2 | ÷   | P3  | Px6 | C/П | F1/x | Px3 |
| Fx <sup>y</sup> | П3     | ПП     | 47  | П4  | П5  | ПП  | 47  | П7   | Px4 |
| —               | Fx < 0 | 27     | Px7 | П4  | Px2 | P8  | Px7 | Px5  | —   |
| Fx ≥ 0          | 36     | Px7    | П5  | Px2 | P9  | Px2 | Px3 | ×    | P2  |
| Px6             | —      | Fx ≥ 0 | 16  | Px5 | Px4 | C/П | Px2 | ...  | B/0 |

Тест:  $y = \ln x$  ПП: Px2 F ln B/0

Результат счета:  $x_0 = 1$ ,  $x_r = 10$ ,  $n = 10$ ,  $y_{\min} = 0$ ,  $y_{\max} = 2.3025848$ .

**Программа 60. Построение графика в логарифмической шкале с псевдоокруглением до 0.01.** После того, как подпрограмма вычисления  $y(x)$  набрана, ввести  $x_0$  С/П  $x_r$  С/П  $n$  С/П. На индикаторе получите  $y_0$ . Для получения очередных значений  $y(x)$  следует нажимать лишь клавишу С/П.

Память:  $x_i = \text{П2}$ ,  $c = \text{П3}$ .

$$\begin{array}{ccccccccc} \text{П2} & \text{C/P} & \text{П6} & \text{Px2} & \div & \text{П3} & \text{Px6} & \text{C/P} & \text{F1/x} \\ \text{Fx}^y & \text{П3} & \text{ПП} & 28 & 1 & \text{ВП} & 5 & \text{П1} & + \\ - & \text{C/P} & \text{Px2} & \overline{\text{Px3}} & \times & \text{П2} & \text{БП} & \underline{12} & \dots \\ & & & & & & & & \text{B/0} \end{array}$$

Тест:  $y = \ln x$ ,  $x_0 = 1$ ,  $x = 10$ ,  $n = 10$ .

ПП:  $\text{Px2 F ln B/0}$

|       |   |      |      |      |      |     |
|-------|---|------|------|------|------|-----|
| $y_i$ | 0 | 0.23 | 0.46 | 0.69 | 0.92 | ... |
|-------|---|------|------|------|------|-----|

Вид графика представлен на рис. 36. Видно, что функция натурального логарифма в логарифмической шкале представляет собой прямую линию.

Рассмотрим построение функций в показательной шкале. Из (4.17) следует, что

$$a^{x_i} = a^{x_{i-1}} + h = a^{x_0} + ih \quad \text{или} \quad a^{x_r} = a^{x_0} + nh. \quad (4.22)$$

Из последней формулы легко вычислить шаг  $h$ :

$$h = (1/n) (a^{x_r} - a^{x_0}). \quad (4.23)$$

Здесь  $n$  — число точек функции, не считая точки  $x_0$ . Необходимо лишь задать величину  $a$ . Наибольшее распространение получили случаи,

когда  $a = e = 2.718281828459045235360 \dots$  и  $a = 10$ .

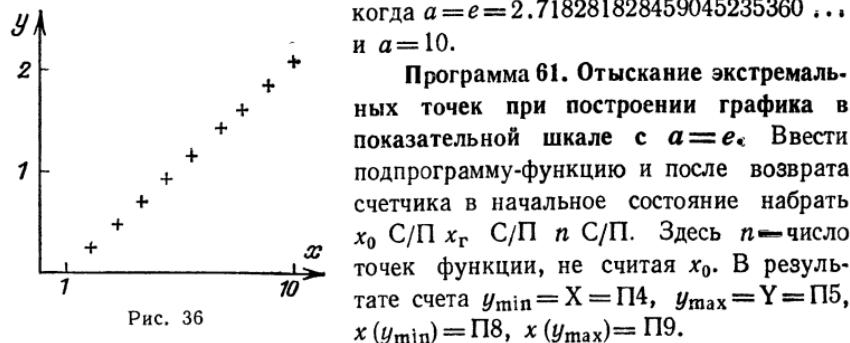


Рис. 36

Память:  $x_i = \text{П2}$ ,  $h = \text{П3}$ ,  $x_r = \text{П6}$ ,  $y_{\min} = \text{П4}$ ,  $y_{\max} = \text{П5}$ ,  $x(y_{\min}) = \text{П8}$ ,  $x(y_{\max}) = \text{П9}$ .

**Программа 61. Отыскание экстремальных точек при построении графика в показательной шкале с  $a = e$ .** Ввести подпрограмму-функцию и после возврата счетчика в начальное состояние набрать  $x_0$  C/P  $x_r$  C/P  $n$  C/P. Здесь  $n$  — число точек функции, не считая  $x_0$ . В результате счета  $y_{\min} = X = \text{П4}$ ,  $y_{\max} = Y = \text{П5}$ ,  $x(y_{\min}) = \text{П8}$ ,  $x(y_{\max}) = \text{П9}$ .

$$\begin{array}{ccccccccc} \text{П2} & \text{C/P} & \text{П6} & \text{Fe}^x & \text{Px2} & \text{Fe}^x & - & \text{П3} & \text{Px6} & \text{C/P} \\ \text{Px3} & \leftrightarrow & \div & \text{П3} & \text{ПП} & \underline{51} & \text{П4} & \text{П5} & \text{ПП} & \underline{51} \\ \text{П17} & \text{Px4} & - & \text{Fx} < 0 & 29 & \overline{\text{Px7}} & \text{П4} & \text{Px2} & \text{П8} & \overline{\text{Px7}} \\ \text{Px5} & - & \text{Fx} \geq 0 & 38 & \overline{\text{Px7}} & \text{П5} & \text{Px2} & \text{П9} & \text{Px2} & \text{Fe}^x \\ \text{Px3} & + & \text{Fln} & \overline{\text{П2}} & \text{Px6} & - & \text{Fx} \geq 0 & \underline{18} & \text{Px5} & \text{Px4} \\ \text{C/P} & \text{Px2} & \dots & \text{B/0} \end{array}$$

Тест:  $f(x) = x$ ,  $x_0 = 1$ ,  $x_r = 10$ ,  $n = 10$ .

ПП:  $\text{Px2 B/0}$

Результат:  $y_{\min} = 1$ ,  $y_{\max} = 9,8946531$ .

**Программа 62.** Построение функции в показательной шкале с основанием степени  $e$  и с псевдоокруглением до 0.01. После введения подпрограммы-функции  $y(x)$  ввести  $x_0$  С/П  $x_r$  С/П  $n$  С/П, где  $n$  — число точек функции без  $x_0$ . Для вычисления очередного значения  $y_i$  следует нажимать лишь клавишу С/П.

Память:  $x_i = \Pi 2$ ,  $h = \Pi 3$ .

$$\begin{array}{ccccccccc}
 \text{П2} & \text{С/П} & \text{П6} & \text{Fe}^x & \text{Px2} & \text{Fe}^x & - & \text{П3} & \text{Px6} & \text{С/П} \\
 \text{Px3} & \leftrightarrow & \div & \text{П3} & \text{ПП} & \underline{32} & 1 & \text{ВП} & 5 & \text{П1} \\
 + & \text{Px1} & - & \text{С/П} & \text{Px2} & \text{Fe}^x & \text{Px3} & + & \text{F ln} & \text{П2} \\
 \text{БП} & \underline{14} & \text{Px2} & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \text{B/0}
 \end{array}$$

Тест:  $f(x) = x$ ,  $x_0 = 1$ ,  $x_r = 10$ ,  $n = 10$ .

ПП: Px2 B/0.

В результате счета получаем

|       |   |     |      |     |      |      |     |
|-------|---|-----|------|-----|------|------|-----|
| $y_i$ | 1 | 7.7 | 8.39 | 8.8 | 9.08 | 9.31 | ... |
|-------|---|-----|------|-----|------|------|-----|

На рис. 37 представлен график  $y = x$  в показательной шкале с основанием степени  $a = e$ . Видим, что обычная прямая в показательной шкале стала похожа на функцию логарифма на равномерной шкале. По программам 59, 60 можно непосредственно убедиться, что функция  $y = x$  в логарифмической шкале похожа на показательную в обычной шкале, так как показательная и логарифмическая функции — обратные.

**Программа 63.** Отыскание экстремальных точек функции в показательной шкале с основанием степени  $a = 10$ . После того как набрана подпрограмма-функция, ввести  $x_0$  С/П  $x_r$  С/П  $N$  С/П. В данном случае число  $N$  — это количество точек, в которых мы находим значения  $f(x_i)$ , включая точку  $x_0$ . Легко понять, что  $N = n + 1$ .

Память:  $N = \Pi 0$ ,  $h = \Pi 1$ ,  $x_i = \Pi 2$ ,  $y_{\min} = \Pi 3$ ,  $y_{\max} = \Pi 5$ ,  $x(y_{\min}) = \Pi 4$ ,  $x(y_{\max}) = \Pi 6$ . В результате счета  $y_{\min} = X$ ,  $y_{\max} = Y$ ,  $x(y_{\min}) = Z$ ,  $x(y_{\max}) = T$ .

$$\begin{array}{cccccccccc}
 \text{П2} & \text{П4} & \text{С/П} & \text{ПВ} & \text{С/П} & \text{П0} & \text{PxV} & \text{F}10^x & \text{Px2} & \text{F}10^x \\
 - & \text{Px0} & 1 & - & \div & \text{П1} & \text{ПП} & \underline{54} & \text{П3} & \text{П5} \\
 \text{ПП} & \underline{54} & \uparrow & \text{Px3} & - & \text{Fx} < 0 & \underline{31} & \leftrightarrow & \text{П3} & \text{Px2} \\
 \text{П4} & \leftrightarrow & \uparrow & \text{Px5} & - & \text{Fx} \geq 0 & \underline{41} & \leftrightarrow & \text{П5} & \text{Px2} \\
 \text{П6} & \text{Px2} & \text{F}10^x & \text{Px1} & + & \text{F lg} & \underline{\text{П2}} & \text{FL0} & \underline{20} & \text{Px6} \\
 \text{Px4} & \text{Px5} & \text{Px3} & \text{С/П} & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \text{B/0}
 \end{array}$$

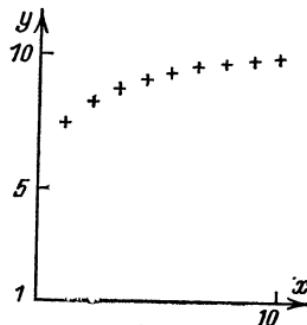


Рис. 37

$N$  — число точек функции, включая  $x_0$ .

Тест:  $f(x) = x$ ,  $x_0 = 1$ ,  $x_r = 10$ ,  $N = 3$ .

ПП: Пх2 В/0.  $y_{\min} = 1$ ,  $y_{\max} = 9.999995$ ,  $t_{\text{сч}} = 37$  с.

**Программа 64.** Построение функции в показательной шкале с основанием степени  $a = 10$ . Набрать подпрограмму-функцию  $y(x)$ . Ввести  $x_0$  С/П  $x_r$  С/П  $N$  С/П. Затем лишь нажимать клавишу С/П.

Память:  $n = N = -1 = \Pi 0$ ,  $h = \Pi 1$ ,  $x_i = \Pi 2$ .

|     |     |     |     |    |     |                  |     |                  |                  |
|-----|-----|-----|-----|----|-----|------------------|-----|------------------|------------------|
| П2  | С/П | П1  | С/П | П0 | Пх1 | F10 <sup>x</sup> | Пх2 | F10 <sup>x</sup> | —                |
| Пх0 | 1   | —   | ÷   | П1 | ПП  | 26               | С/П | Пх2              | F10 <sup>x</sup> |
| Пх1 | +   | Flg | П2  | БП | 15  | ...              | ... | ...              | В/0              |

Тест:  $f(x) = x$ ,  $x_0 = 1$ ,  $x_r = 10$ ,  $N = 3$ .

ПП: Пх2 В/0

|       |   |           |           |
|-------|---|-----------|-----------|
| $y_i$ | 1 | 9.6989696 | 9.9999995 |
|-------|---|-----------|-----------|

**Программа 65.** Отыскание экстремальных точек функции в показательной шкале с произвольным основанием  $a$ .

Память: L0 — цикл,  $h = \Pi 1$ ,  $x_i = \Pi 2$ ,  $x_r = \Pi B$ ,  $y_{\min} = \Pi 3$ ,  $x(y_{\min}) = \Pi 4$ ,  $y_{\max} = \Pi 5$ ,  $x(y_{\max}) = \Pi 6$ ,  $a = \Pi A$ . Ответ поступает в регистры:  $y_{\min} = X$ ,  $y_{\max} = Y$ ,  $x(y_{\min}) = Z$ ,  $x(y_{\max}) = T$ .

|     |                 |                 |        |      |                 |     |                |     |     |
|-----|-----------------|-----------------|--------|------|-----------------|-----|----------------|-----|-----|
| ПА  | Flg             | ПС              | С/П    | П2   | П4              | С/П | ПВ             | С/П | П0  |
| ПxB | ПxA             | Fx <sup>y</sup> | Пх2    | ПxA  | Fx <sup>y</sup> | ↔   | F <sup>↓</sup> | —   | Пх0 |
| 1   | —               | ÷               | П1     | ПП   | 65              | П3  | П5             | ПП  | 65  |
| ↑   | Пх3             | —               | Fx < 0 | 39   | ↔               | П3  | Пх2            | П4  | ↔   |
| ↑   | Пх5             | —               | Fx ≥ 0 | 49   | ↔               | П5  | Пх2            | П6  | Пх2 |
| ПxA | Fx <sup>y</sup> | Пх1             | +      | F lg | ПxC             | ÷   | П2             | FL0 | 28  |
| Пх6 | Пx4             | Пх5             | Пх3    | С/П  | ...             | ... | B/0            |     |     |

Тест:  $f(x) = x$ ,  $a = 10$ ,  $x_0 = 1$ ,  $x_r = 10$ ,  $N = 3$ .

ПП: Пх2 В/0.  $y_{\min} = 1$ ,  $y_{\max} = 9.999995$ ,  $t_{\text{сч}} \approx 41$  с.

**Программа 66.** Построение графика в показательной шкале с произвольным основанием  $a$ . После набора подпрограммы-функции ввести  $a$  С/П  $x_0$  С/П  $x_r$  С/П  $N$  С/П. Затем только С/П.

Память:  $N = \Pi 0$ ,  $h = \Pi 1$ ,  $x_u = \Pi 2$ .

|     |                 |     |     |                 |     |                |     |                 |     |
|-----|-----------------|-----|-----|-----------------|-----|----------------|-----|-----------------|-----|
| ПА  | Flg             | ПС  | С/П | П2              | С/П | П1             | С/П | П/0             | Пх1 |
| ПxA | Fx <sup>y</sup> | Пх2 | ПxA | Fx <sup>y</sup> | ↔   | F <sup>↓</sup> | —   | Пх0             | 1   |
| —   | ÷               | П1  | ПП  | 37              | С/П | Пх2            | ПxA | Fx <sup>y</sup> | Пх1 |
| +   | Flg             | ПxC | ÷   | П2              | БП  | 23             | ... | ...             | В/0 |

Тест:  $f(x) = x$ ,  $x_0 = 1$ ,  $x_u = 10$ ,  $N = 3$ .

Результат счета:  $y_1 = 1$ ,  $y_2 = 9.6989696$ ,  $y_3 = 9.999995$ ,  $t_{\text{сч}} \approx 9$  с.

Логарифмическая шкала интересна тем, что она деформирует обычную равномерную шкалу по определенному закону: чем дальше некоторая точка  $x$  находится от  $x_0 = 1$ , тем более «сжимается» в этом месте шкала и наоборот. Поэтому если функция вблизи точки  $x_0 = 1$  очень часто осциллирует, а затем период осцилляций увеличивается, то в логарифмической шкале такая функция будет гладкой. Так,

$$y = \sin(\lg x)$$

в логарифмической шкале выглядит, как обычная функция  $\sin x$ . Показательные шкалы применяют в случаях, обратных логарифмическим, когда нужно «растянуть» шкалу при больших  $x$  и «сжать» при малых.

Шкала по оси  $y$  также может быть функциональной. В этом случае по оси  $y$  нужно откладывать результат действия функций шкалы на величину  $y_i$ .

Логарифмическими и показательными шкалами не исчерпываются разновидности функциональных шкал. Интересными особенностями обладает так называемая *арктангенциальная шкала*. Она позволяет любую функцию с аргументом  $x$ , изменяющимся в интервале  $-\infty < x < \infty$  разместить на конечном отрезке, длина которого равна

$$2 \cdot \frac{\pi}{2} = \pi.$$

Из (4.15) вытекают формулы

$$h = \frac{\arctg x_r - \arctg x_0}{n}, \quad (4.24)$$

$$x_i = \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x_{i-1} + h). \quad (4.25)$$

**Программа 67. Отыскание экстремальных точек при построении функции в шкале  $\operatorname{arctg} x$ .** После набора подпрограммы-функции  $y(x)$  ввести  $x_0$  С/П  $x_r$  С/П  $N$  С/П. Здесь  $N$  — число точек функции, включая  $x_0$ . Результаты счета поступают в регистры:  $y_{\min} = X$ ,  $y_{\max} = Y$ ,  $x(y_{\min}) = Z$ ,  $x(y_{\max}) = T$ .

Память: L0 — цикл;  $h = \Pi 1$ ,  $x_i = \Pi 2$ ,  $y_{\min} = \Pi 3$ ,  $x(y_{\min}) = \Pi 4$ ,  $y_{\max} = \Pi 5$ ,  $x(y_{\max}) = \Pi 6$ ,  $x_r = \Pi 8$ .

|                    |     |     |                    |     |     |        |     |                    |     |
|--------------------|-----|-----|--------------------|-----|-----|--------|-----|--------------------|-----|
| P2                 | P4  | P6  | C/P                | PB  | C/P | P0     | PxB | F tg <sup>-1</sup> | Px2 |
| F tg <sup>-1</sup> | —   | Px0 | 1                  | —   | ÷   | P1     | PП  | 55                 | P3  |
| P5                 | PП  | 55  | ↑                  | Px3 | —   | Fx < 0 | 32  | ↔                  | P3  |
| Px2                | P4  | ↔   | ↑                  | Px5 | —   | Fx ≥ 0 | 42  | ↔                  | P5  |
| Px2                | P6  | Px2 | F tg <sup>-1</sup> | Px1 | +   | F tg   | P2  | FL0                | 21  |
| Px6                | Px4 | Px5 | Px3                | C/P | ... | ...    | ... | B/0                | .   |

Тест:  $f(x) = x$ ,  $x_0 = -50$ ,  $x_r = 50$ ,  $N = 4$ .

ПП: Пх2 В/0.

В результате счета получаем

$$y_{\min} = -1.7590254, \quad y_{\max} = 1.7590254, \quad t_{\text{сч}} \approx 44 \text{ с.}$$

**Программа 68. Построение функции в шкале  $\arctg x$ .** После набранной подпрограммы ввести  $x_0$  С/П  $x_r$  С/П  $N$  С/П. Для получения очередных значений  $y_i$  нажимать лишь С/П.

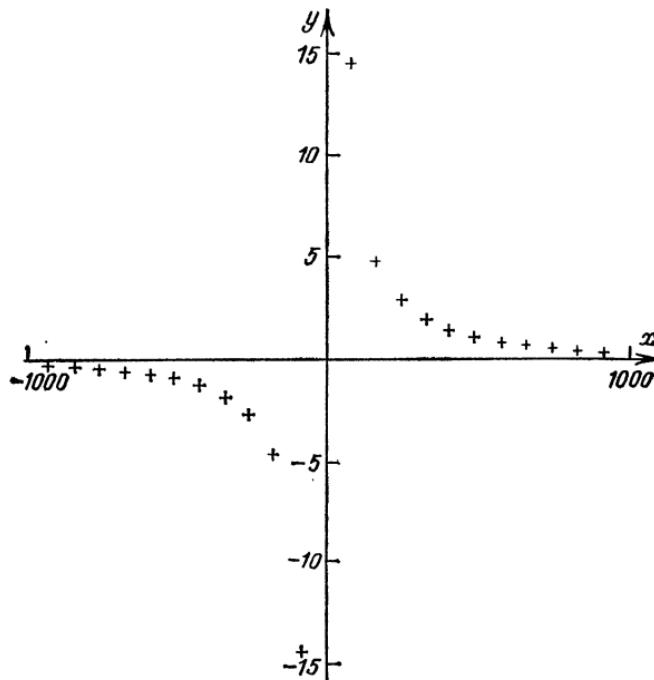


Рис. 38

|     |     |      |     |    |     |                    |     |                    |         |
|-----|-----|------|-----|----|-----|--------------------|-----|--------------------|---------|
| П2  | С/П | ПВ   | С/П | П0 | ПxB | F tg <sup>-1</sup> | Пх2 | F tg <sup>-1</sup> | —       |
| Пх0 | 1   | —    | ÷   | П1 | ПП  | 26                 | С/П | Пх2                | F arctg |
| Пх1 | +   | F tg | П2  | БП | 15  | ...                | ... | ...                | В/0     |

Тест:  $f(x) = x$ ,  $x_0 = -50$ ,  $x_r = 50$ ,  $N = 4$ .

ПП: Пх2 В/0

|       |              |            |     |
|-------|--------------|------------|-----|
| $y_i$ | $-2.10^{-8}$ | -1.7590254 | ... |
|-------|--------------|------------|-----|

Для иллюстрации работы программы 67, 68 построим в арктангенциальной шкале функцию

$$f(x) = \frac{1}{x}.$$

Поскольку  $x_0$  и  $x_r$  — вполне конечные числа, то их значения выбе-

| Рис. | Функция                     | Подпрограмма |                 |                 |                 |   |      |     |      |     |
|------|-----------------------------|--------------|-----------------|-----------------|-----------------|---|------|-----|------|-----|
| а    | $y = 4 + \frac{2}{x}$       | Пх2          | 2               | ↔               | ÷               | 4 | +    | В/0 |      |     |
| б    | $y = \frac{1}{1+2x}$        | Пх2          | 2               | ×               | 1               | + | F1/x | В/0 |      |     |
| в    | $y = \frac{x}{3+2x}$        | Пх2          | 2               | ×               | 3               | + | Пх2  | ↔   | ÷    | В/0 |
| г    | $y = 0.5x$                  | Пх2          | 2               | Fx <sup>y</sup> | 2               | ÷ | В/0  |     |      |     |
| д    | $y = 0.5e^{2x}$             | Пх2          | 2               | ×               | Fx <sup>y</sup> | 2 | ÷    | В/0 |      |     |
| е    | $y = \frac{1}{1+0.5e^{-x}}$ | Пх2          | /-              | Fe <sup>x</sup> | 2               | ÷ | 1    | +   | F1/x | В/0 |
| ж    | $y = 0.25x^3$               | Пх2          | ↑               | ↑               | ×               | × | 4    | ÷   | В/0  |     |
| з    | $y = 1 + 2 \ln x$           | Пх2          | F ln            | 2               | ×               | 1 | +    | В/0 |      |     |
| и    | $y = \frac{10}{2+x}$        | Пх2          | 2               | +               | 1               | 0 | ↔    | ÷   | В/0  |     |
| к    | $y = \frac{10x}{4+x}$       | Пх2          | 4               | +               | Пх2             | 1 | 0    | ×   | ↔    | ÷   |
| л    | $y = e^{\frac{1}{x}}$       | Пх2          | F1/x            | Fe <sup>x</sup> | В/0             |   |      |     |      |     |
| м    | $y = 1+x^4$                 | Пх2          | Fx <sup>2</sup> | Fx <sup>2</sup> | 1               | + | В/0  |     |      |     |

рем достаточно большими:  $x_0 = -1000$ ,  $x_r = 1000$ , число точек  $N = 24$ . В результате счета получаем

$$y_{\min} = -14.62872, \quad y_{\max} = 14.628957.$$

График функции представлен на рис. 38. В арктангенциальной шкале она стала более окружной и гладкой.

В табл. 17 приведены наиболее распространенные функции с указанием соответствующих подпрограмм-функций, с помощью которых они были построены, а на рис. 39, *a—m*, дано их графическое изображение.

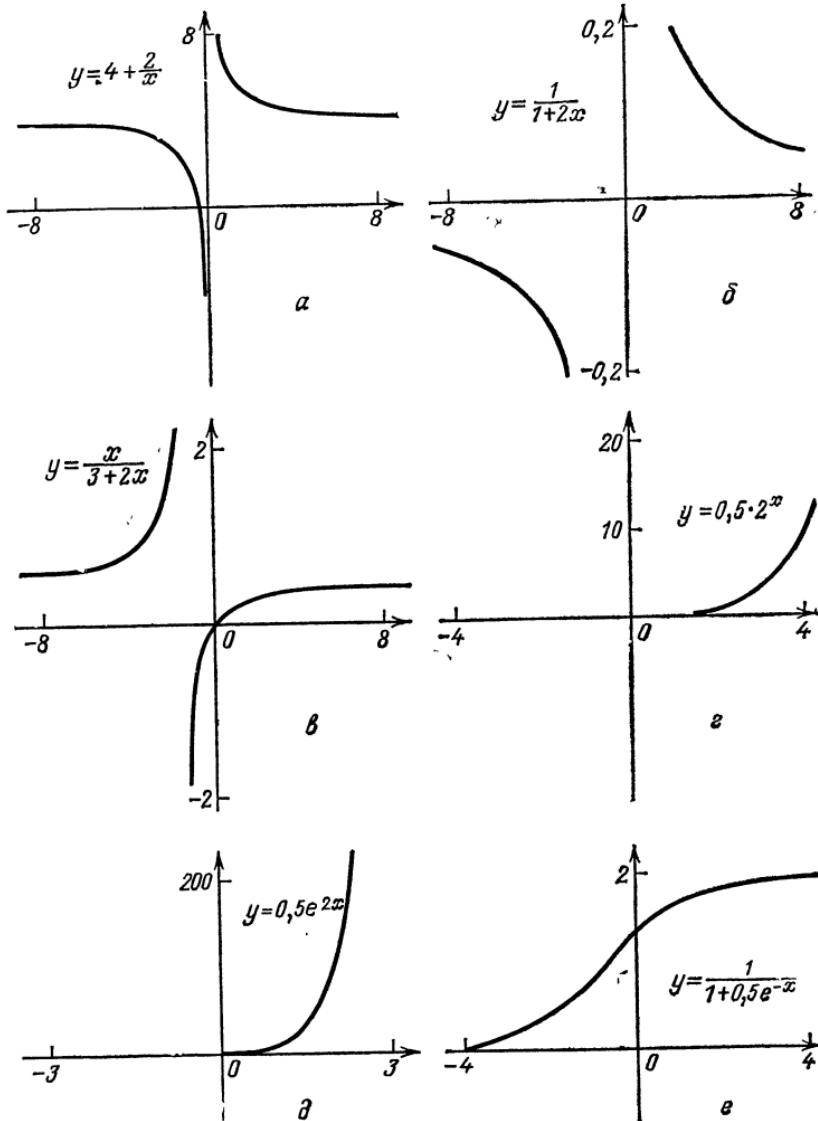


Рис. 39 (а = е)

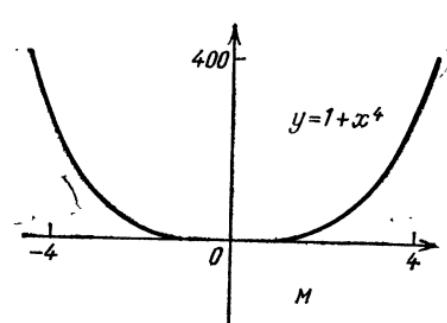
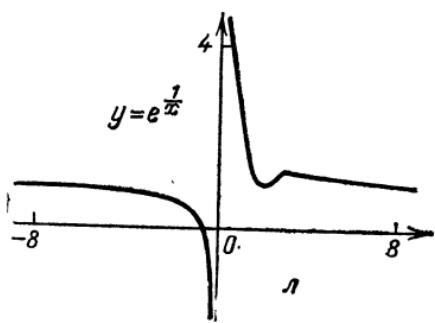
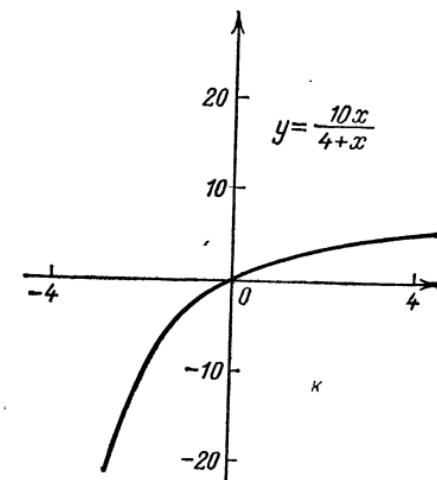
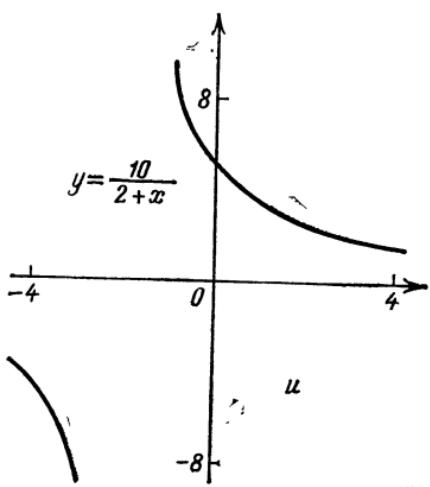
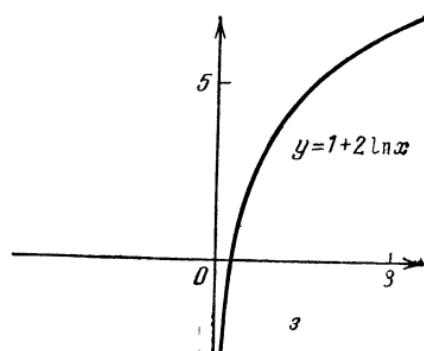
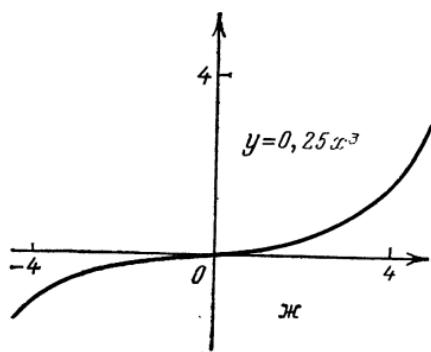


Рис. 39 (ж = к)

## 7<sub>3</sub> Построение линий пересечения поверхностей

При выполнении различного рода построений программируемый микрокалькулятор значительно облегчает процесс вычерчивания линии пересечения цилиндров, конусов, шаров и других геометрических фигур, описываемых аналитическими формулами. В основе построения линий сопряжения лежит идея построения графиков функций. Рассмотрим вопрос о линии пересечения двух цилиндрических поверхностей радиусами  $r$  и  $R$ . Расположим систему координат как на рис. 39, направив ось  $x$  вдоль оси цилиндра меньшего радиуса, а ось  $y$  вдоль оси цилиндра большего. Тогда линия сопряжения удовлетворяет системе уравнений

$$\begin{aligned}y^2 + z^2 &= r^2, \\x^2 + z^2 &= R^2.\end{aligned}\quad (4.26)$$

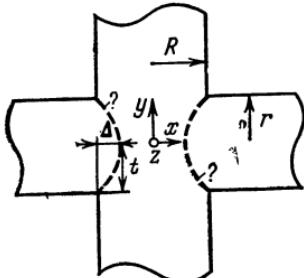


Рис. 40

Перейдем к новым переменным

$$\begin{aligned}\Delta &= R - x, \\t &= r + y.\end{aligned}\quad (4.27)$$

Тогда, решая совместно (4.26) и (4.27), получим

$$\Delta = R - \sqrt{R^2 + t^2 - 2tr}. \quad (4.28)$$

А это есть не что иное, как функция величины отклонения линии сопряжения от края цилиндра, зависящая от параметра  $t$ . Построив график  $\Delta = f(t)$  при изменении  $t$  от  $t=0$  до  $t=2r$ , получим линии пересечения цилиндров, обозначенные на рис. 40 штриховыми линиями.

## Г л а в а 5

# ОПЕРАЦИИ ЧИСЛЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ И ИНТЕГРИРОВАНИЯ

## 1. Численное дифференцирование

Вопрос о численном дифференцировании возникает в тех случаях, когда дана таблица значений функции, а ее представление в аналитическом виде неизвестно. Дифференцировать можно только достаточно гладкую функцию, т. е. незначительно изменяющуюся между табличными узлами. В этом случае исходную функцию  $y(x)$  аппроксимируют какой-нибудь легко вычисляемой функцией  $P(x)$ , производная которой находится значительно проще. Чем более плавный вид имеет кривая, проходящая через табличные точки, тем более близкие к реальным результаты дает численное дифференцирование. Наилучшие результаты численное дифференцирование дает в случае аппроксимации функции двухпараметрическими формулами. Однако в каждом конкретном случае определение формулы даже для большой ЭВМ представляет собой определенные сложности. Поэтому в качестве аппроксимирующей функции обычно используют интерполяционный многочлен

$$\theta(x) = y_0 + B_0(x - x_0) + B_1(x - x_0)(x - x_1) + \dots \quad (5.1)$$

Тогда

$$\theta'(x) = B_0 + B_1[(x - x_0) + (x - x_1)] + \dots, \quad (5.2)$$

$$\theta''(x) = 2B_1 + 2[(x - x_0) + (x - x_1) + (x - x_2)]B_2 + \dots \quad (5.3)$$

Оставив в разложении несколько первых членов, получаем формулы численного дифференцирования первого порядка точности:

$$y'(x) \approx \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}, \quad (5.4)$$

$$y''(x) \approx \frac{2}{x_2 - x_0} \left( \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} - \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} \right), \quad (5.5)$$

$$y^{(k)}(x) \approx k! \sum_{p=0}^k y_p \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq p}}^k \frac{1}{x_p - x_i}. \quad (5.6)$$

Оставляя в разложении (5.1) большое количество членов, можно более точно вычислить значение производной.

Чаще всего приходится дифференцировать таблично заданные функции с постоянным шагом  $h$  по  $x$ . Тогда формулы (5.4) и (5.5)

примут вид

$$y'(x) \approx \frac{y_1 - y_0}{h}, \quad (5.7)$$

$$y''(x) \approx \frac{y_2 - 2y_1 + y_0}{h^2}. \quad (5.8)$$

Обычно вместо (5.7) используют формулу второго порядка точности до 0 ( $h^2$ ):

$$y'(x) \approx \frac{y_2 - y_0}{2h}. \quad (5.9)$$

Формула (5.6) для производных более высокого порядка в случае постоянного шага запишется так

$$y'''(x) \approx \frac{y_3 - 3y_2 + 3y_1 - y_0}{h^3}, \quad (5.10)$$

$$y^{IV}(x) \approx \frac{y_4 - 4y_3 + 6y_2 - 4y_1 + y_0}{h^4}, \quad (5.11)$$

$$y^V(x) \approx \frac{y_5 - 5y_4 + 10y_3 - 10y_2 + 5y_1 - y_0}{h^5}. \quad (5.12)$$

В формулах (5.10) — (5.12) можно взять и большее количество членов и получить формулы более высокого порядка точности, но в связи с громоздкостью к ним не прибегают.

Если отыскивается производная по значениям функции, начиная с узла  $x_i$  и кончая  $x_k$ , то значение производной по формулам (5.7) — (5.12) вычисляется в точке

$$x = \frac{x_i + x_k}{2}, \quad (5.13)$$

В связи с этим заметим, что, хотя по формуле (5.4) значение производной функции можно найти для любой точки  $x$ , при замене табличной функции интерполяционным многочленом производная в точке  $x$ , получаемая по формуле (5.12) наиболее близка к истинной в отличие от остальных точек.

Нередко используют более простой способ получения высокого порядка точности численного дифференцирования методом Рунге — Ромберга. Он пригоден, если исходная функция четырежды дифференцируема и непрерывна. Идея метода состоит в использовании для уточнения формул низкого порядка точности путем применения дополнительных сеток с другим шагом табуляции. Необходимые для этого данные могут быть получены либо путем проведения нескольких изменений одной и той же зависимости, либо искусственно путем увеличения шага табуляции в кратное число  $r$  раз, с использованием уже имеющихся данных. Поскольку число  $r$  невелико по сравнению с единицей, то погрешность дифференцирования

$$\theta((rh)^{p+1}) \approx \theta(h^{p+1}). \quad (5.14)$$

Имея два расчета на разных сетках (5.14), получаем первую формулу Рунге для уточнения значений производных на первой сетке

$$R = \frac{\theta'(x, h) - \theta'(x, rh)}{r^p - 1}, \quad (5.15)$$

если известно значение производной на второй сетке. Вторая формула Рунге дает нам уточнение значения для производной

$$y'(x) = \theta'(x, h) + \frac{\theta'(x, h) - \theta'(x, rh)}{r^p - 1}. \quad (5.16)$$

В случае  $n$  сеток получим так называемые *формулы Ромберга*. При этом погрешность будет иметь порядок  $\theta(h^{p+n-1})$ .

Программы численного дифференцирования 69—72 вычисляют производные функций при неравномерном шаге по  $x$ , а программы 74—79 при постоянном шаге  $h$ . Они служат для численного дифференцирования таблиц, а программа 73 находит производную только в одной точке.

**Программа 69. Вычисление  $y'(x)$  с точностью до  $\theta(h)$ .** Ввести  $x_0$  С/П  $y_0$  С/П  $x_1$  С/П  $y_1$  С/П. Получите  $y' \left( \frac{x_0+x_1}{2} \right)$ . После  $x_2$  С/П  $y_1$  С/П на индикаторе появится значение  $y' \left( \frac{x_1+x_2}{2} \right)$ .

Память:  $x_{n-1} = \Pi 2$ ,  $y_{n-1} = \Pi 3$ ,  $x_n = \Pi 4$ ,  $y_n = \Pi 5$ .

|           |     |    |     |     |     |     |     |     |     |
|-----------|-----|----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| П2        | С/П | П3 | С/П | П4  | С/П | П5  | Пх3 | —   | Пх4 |
| Пх2       | —   | ÷  | П6  | Пх5 | П3  | Пх4 | П2  | Пх6 | БП  |
| <u>03</u> |     |    |     |     |     |     |     |     |     |

Тест:  $x_0 = 1$ ,  $y_0 = 1$ ,  $x_1 = 2$ ,  $y_1 = 4$ ,  $y' = 3$ .

**Программа 70. Вычисление  $y'(x)$  с точностью до  $\theta(h^2)$ .** Ввести  $x_0$  С/П  $y_0$  С/П  $x_1$  С/П  $y_1$  СП  $x_2$  С/П  $y_2$  СП. Получите  $y' \left( \frac{x_0+x_2}{2} \right)$ . После  $x_3$  С/П  $y_3$  С/П получите  $y' \left( \frac{x_1+x_3}{2} \right)$ .

Память:  $x_{n-2} = \Pi 2$ ,  $y_{n-2} = \Pi 3$ ,  $x_{n-1} = \Pi 4$ ,  $y_{n-1} = \Pi 5$ ,  $x_n = \Pi 6$ ,  $y_n = \Pi 7$ ,  $y' = \Pi 8$ .

|     |     |     |     |     |     |     |     |           |     |
|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----------|-----|
| П2  | С/П | П3  | С/П | П4  | С/П | П5  | С/П | П6        | С/П |
| П7  | Пх3 | —   | Пх6 | Пх2 | —   | ÷   | П8  | Пх4       | П2  |
| Пх6 | П4  | Пх5 | П3  | Пх7 | П5  | Пх8 | БП  | <u>07</u> |     |

Тест:  $x_0 = 1$ ,  $y_0 = 1$ ,  $x_1 = 2$ ,  $y_1 = 4$ ,  $x_2 = 3$ ,  $y_2 = 9$ ,  $y' = 4$ .

**Программа 71. Вычисление  $y''(x)$  с точностью до  $\theta(h^3)$ .** Ввести  $x_0$  С/П  $y_0$  С/П  $x_1$  С/П  $y_1$  С/П  $x_2$  СП  $y_2$  С/П. Высветится  $y''(x'_1)$ , а после  $x_3$  С/П  $y_3$  С/П —  $y''(x'_2)$ .

Память:  $x_{n-2} = \Pi 2$ ,  $y_{n-2} = \Pi 3$ ,  $x_{n-1} = \Pi 4$ ,  $y_{n-1} = \Pi 5$ ,  $x_n = \Pi 6$ ,  $y_n = \Pi 7$ ,  $y'' = \Pi 8$ .

|    |     |    |     |     |     |    |     |     |     |
|----|-----|----|-----|-----|-----|----|-----|-----|-----|
| П2 | С/П | П3 | С/П | П4  | С/П | П5 | С/П | П6  | С/П |
| П7 | Пх5 | —  | Пх6 | Пх4 | —   | ÷  | Пх5 | Пх3 | —   |

$$\begin{array}{ccccccccc} \text{П}x4 & \text{П}x2 & - & \div & - & 2 & \times & \text{П}x6 & \text{П}x2 \\ \div & \text{П}8 & \text{П}x4 & \text{П}2 & \text{П}x6 & \text{П}4 & \times & \text{П}x5 & \text{П}3 \\ \text{П}x8 & \text{БП} & \underline{07} & & & & & \text{П}x7 & \text{П}5 \end{array}$$

Тест:  $x_0 = 1$ ,  $y_0 = 8$ ,  $x_1 = 2$ ,  $y_1 = 10$ ,  $x_2 = 4$ ,  $y_2 = 12$ . Тогда  $y'' = -6.666666 \cdot 10^{-1}$ .

**Программа 72. Вычисление  $y''$  с точностью до  $\theta(h^3)$ .** После ввода  $x_0$  С/П  $y_0$  С/П  $x_1$  С/П  $y_1$  С/П  $x_2$  С/П  $y_2$  С/П  $x_3$  С/П  $y_3$  С/П получите  $y''(x'_1)$ . После ввода  $x_4$  С/П  $y_4$  С/П —  $y''(x'_2)$ . Память:  $x_0 = \text{П}0$ ,  $y_0 = \text{П}1$ ,  $x_1 = \text{П}2$ ,  $y_1 = \text{П}3$ ,  $x_2 = \text{П}4$ ,  $y_2 = \text{П}5$ ,  $x_3 = \text{П}6$ ,  $y_3 = \text{П}7$ ,  $y'' = \text{П}8$ , П9 — буфер.

$$\begin{array}{ccccccccc} \text{П}0 & \text{С/П} & \text{П}1 & \text{С/П} & \text{П}2 & \text{С/П} & \text{П}3 & \text{С/П} & \text{П}4 & \text{С/П} \\ \text{П}5 & \text{С/П} & \text{П}6 & \text{С/П} & \text{П}7 & \text{П}x1 & \text{П}x3 & — & \text{П}x & 0 \\ — & \div & \text{П}x3 & \text{П}x5 & — & \text{П}x2 & \text{П}x4 & — & \div & — \\ \text{П}x0 & \text{П}x4 & — & \div & \text{П}9 & \text{П}x3 & \text{П}x5 & — & \text{П}x2 & \text{П}x4 \\ — & \div & \text{П}x5 & \text{П}x7 & — & \text{П}x4 & \text{П}x6 & — & \div & — \\ \text{П}x2 & \text{П}x6 & — & \div & \text{П}x9 & \leftrightarrow & — & \text{П}x0 & \text{П}x6 & — \\ \div & 6 & \times & \text{П}8 & \text{П}x2 & \text{П}0 & \text{П}x4 & \text{П}2 & \text{П}x6 & \text{П}4 \\ \text{П}x3 & \text{П}1 & \text{П}x5 & \text{П}3 & \text{П}x7 & \text{П}5 & \text{П}x8 & \text{БП} & \underline{11} & \end{array}$$

Тест:  $x_0 = 1$ ,  $y_0 = 1$ ,  $x_1 = 2$ ,  $y_1 = 3$ ,  $x_2 = 3$ ,  $y_2 = 2$ ,  $x_3 = 4$ ,  $y_3 = 4$ . Получим  $y''' = 6$ .

**Программа 73. Вычисление  $y'(x)$  по формулам Рунге с точностью до  $\theta(h^3)$ .** Вводите  $h$  С/П  $r$  С/П  $y(x_i - rh)$  С/П  $y(x_i + rh)$  С/П  $y(x_i - h)$  С/П  $y(x_i + h)$  С/П. Получите  $y'(x_i)$ . Далее вводите только  $y(x_{i+1} - rh)$  С/П  $y(x_{i+1} + rh)$  С/П  $y(x_{i+1} - h)$  С/П  $y(x_{i+1} + h)$  С/П. Получите  $y'(x_{i+1})$ .

Память:  $h = \text{П}1$ ,  $r = \text{П}2$ ,  $y(x - rh) = \text{П}3$ ,  $y(x + rh) = \text{П}4$ ,  $y(x - h) = \text{П}5$ ,  $y(x + h) = \text{П}6$ ,  $\frac{y(x + h) - y(x - h)}{2h} = \text{П}7$ ,  $\frac{y(x + rh) - y(x - rh)}{2hr} = \text{П}8$ ,  $y' = \text{П}9$ .

$$\begin{array}{ccccccccc} \text{П}1 & \text{С/П} & \text{П}2 & \text{С/П} & \text{П}3 & \text{С/П} & \text{П}4 & \text{С/П} & \text{П}5 & \text{С/П} \\ \text{П}6 & \text{П}x5 & — & 2 & \div & \text{П}x1 & \div & \text{П}7 & \text{П}x4 & \text{П}x3 \\ — & 2 & \div & \text{П}x1 & \div & \text{П}x2 & \div & \text{П}8 & \text{П}x7 & \leftrightarrow \\ — & \text{П}x2 & Fx^2 & 1 & — & \div & \text{П}x7 & + & \text{П}9 & \text{БП} \\ 03 & & & & & & & & & \end{array}$$

Тест:  $y(2) = 0.69315$ ,  $y(2.5) = 0.91629$ ,  $y(3.5) = 1.25276$ ,  $y(4) = 1.38629$ . Для первой сетки мы воспользуемся значениями  $y(2.5)$  и  $y(3.5)$ , а в качестве второй используем  $y(2)$  и  $y(4)$ . Тогда  $y(x - rh) = 0.69315$ ,  $y(x - h) = 0.91629$ ,  $y(x + h) = 1.25276$ ,  $y(x + rh) = 1.38629$ ,  $h = 0.5$ ,  $r = 2$ , где в качестве второй используется сетка с шагом вдвое большим. В результате счета по программе получаем  $y'(3) = 3.3310333 \cdot 10^{-1}$ . Для тестовых данных использовалась функция  $y = \ln x$ . Легко найти, что относительная погрешность меньше 0.07 %.

**Программа 74.** Численное дифференцирование таблицы с точностью до  $\theta(h)$ . Вводить  $h$  С/П  $y_0$  С/П  $y_1$  С/П  $y_2$  С/П  $y_3$  С/П ...  $y_n$  С/П. При этом на индикаторе мы будем получать значения  $y'\left(x_0 + \frac{h}{2}\right)$ ,  $y'\left(x_0 + \frac{3h}{2}\right)$ ,  $y'\left(x_0 + \frac{5h}{2}\right)...$

Память:  $h = \Pi 2$ ,  $y_{i-1} = \Pi 3$ ,  $y_i = \Pi 4$ .

$$\begin{array}{ccccccccc} \Pi 2 & \text{С/П} & \Pi 3 & \text{С/П} & \Pi 4 & \text{Px3} & - & \text{Px2} & \div & \text{С/П} \\ \text{Px4} & \Pi 3 & \leftrightarrow & \text{БП} & \underline{04} & & & & & \end{array}$$

Тест:  $h = 1$ ,  $y_0 = 1$ ,  $y_1 = 2$ ,  $y_2 = 5$ ,  $y'\left(x_0 + \frac{h}{2}\right) = 2$ ,  $y'\left(x_0 + \frac{3h}{2}\right) = 3$ .

**Программа 75.** Вычисление табличных значений  $y'$  с точностью до  $\theta(h^2)$ . Ввести  $h$  С/П  $y_0$  С/П. Далее после  $y_1$  С/П  $y_2$  С/П ...  $y_n$  С/П будут определены значения  $y'(x_0+h)$ ,  $y'(x_0+2h)$ ,  $y'(x_0+(n-1)h)$ .

Память:  $\Pi 1$  — буфер,  $2h = \Pi 2$ ,  $y_{i-1} = \Pi 3$ ,  $y_i = \Pi 4$ ,  $y_{i+1} = \Pi 5$ .

Тест:  $h = 1$ ,  $y_0 = 1$ ,  $y_1 = 2$ ,  $y_2 = 3$ ,  $y_3 = 4$ ,  $y'(x_1) = 1$ ,  $y'(x_2) = 1$ .

$$\begin{array}{ccccccccc} \Pi 1 & 2 & \times & \Pi 2 & \text{Px1} & \text{С/П} & \Pi 3 & \text{С/П} & \Pi 4 & \text{С/П} \\ \text{Px5} & \text{Px3} & - & \text{Px2} & \div & \text{С/П} & \text{Px4} & \Pi 3 & \leftrightarrow & \text{Px5} \\ \Pi 4 & \leftrightarrow & \text{БП} & \underline{10} & & & & & & \end{array}$$

**Программа 76.** Вычисление табличных значений  $y''$  с точностью до  $\theta(h^2)$ . Ввести  $h$  С/П  $y_0$  С/П  $y_1$  С/П. После  $y_2$  С/П  $y_3$  С/П ...  $y_n$  С/П на индикаторе будут высвечиваться значения  $y''(x_1)$ ,  $y''(x_2)$ ,  $y''(x_n)$ .

Память:  $\Pi 1$  — буфер,  $h^2 = \Pi 2$ ,  $y_{i-1} = \Pi 3$ ,  $y_i = \Pi 4$ ,  $y_{i+1} = \Pi 5$ .

$$\begin{array}{ccccccccc} \text{Fx}^2 & \Pi 2 & \text{С/П} & \Pi 3 & \text{С/П} & \Pi 4 & \text{С/П} & \Pi 5 & \text{Px4} & 2 \\ \times & /-/- & \text{Px3} & + & \text{Px5} & + & \text{Px2} & \div & \text{С/П} & \text{Px4} \\ \Pi 3 & \leftrightarrow & \text{Px5} & \Pi 4 & \leftrightarrow & \text{БП} & \underline{07} & & & \end{array}$$

Тест:  $h = 1$ ,  $y_0 = 0$ ,  $y_1 = 1$ ,  $y_2 = 4$ ,  $y_3 = 9$ ,  $y''(1) = 2$ ,  $y''(2) = 2$ .

**Программа 77.** Вычисление таблицы значений  $y'''$  с точностью до  $\theta(h^3)$ . Ввести  $h$  С/П  $y_0$  С/П  $y_1$  С/П  $y_2$  С/П. После  $y_3$  С/П  $y_4$  С/П ...  $y_n$  С/П на индикаторе будут высвечиваться значения  $y'''(x_1 + \frac{h}{2})$ ,  $y'''(x_2 + \frac{h}{2})$  ...

Память:  $\Pi 1$ ,  $\Pi 8$  — буферные,  $h^3 = \Pi 2$ ,  $y_i = \Pi 3$ ,  $y_{i+1} = \Pi 4$ ,  $y_{i+2} = \Pi 5$ ,  $y_{i+3} = \Pi 6$ .

$$\begin{array}{ccccccccc} \Pi 1 & \uparrow & \uparrow & \times & \times & \Pi 2 & \text{Px1} & \text{С/П} & \Pi 3 & \text{С/П} \\ \Pi 4 & \text{С/П} & \Pi 5 & \text{С/П} & \Pi 6 & \text{Px4} & \Pi 5 & - & 3 & \times \\ \text{Px6} & + & \text{Px3} & - & \text{Px2} & \div & \text{С/П} & \Pi 8 & \text{Px4} & \Pi 3 \\ \Pi 5 & \Pi 4 & \text{Px6} & \Pi 5 & \text{Px8} & \text{БП} & \underline{14} & & & \end{array}$$

Тест:  $h = 2$ ,  $y_0 = 8$ ,  $y_1 = 16$ ,  $y_2 = 32$ ,  $y_3 = 64$ ,  $y_4 = 128$ ... Получаем  $y'''(x_1 + 1) = 1$ ,  $y'''(x_2 + 1) = 2$ .

**Программа 78.** Вычисление табличных значений  $y^{IV}$  с точностью до  $\theta(h^4)$ . Ввести  $h$  С/П  $y_0$  С/П  $y_1$  С/П  $y_2$  С/П  $y_3$  С/П ...

После ввода  $y_4$  С/П  $y_5$  С/П ...  $y_n$  С/П вычисляются  $y^{IV}(x_2)$ ,  $y^{IV}(x_3)$ , ...,  $y^{IV}(x_{n-2})$ .

Память: П1, П8 — буферные,  $h^4 = \Pi 2$ ,  $y_0 = \Pi 3$ ,  $y_1 = \Pi 4$ ,  $y_2 = \Pi 5$ ,  $y_3 = \Pi 6$ ,  $y_4 = \Pi 7$ .

|     |        |        |     |           |     |     |     |     |     |
|-----|--------|--------|-----|-----------|-----|-----|-----|-----|-----|
| П1  | $Fx^2$ | $Fx^2$ | П2  | Пх1       | С/П | П3  | С/П | П4  | С/П |
| П5  | С/П    | П6     | С/П | П7        | Пх5 | 3   | ×   | 2   | ÷   |
| Пх4 | —      | Пх6    | —   | 4         | ×   | Пх3 | +   | Пх7 | +   |
| Пх2 | ÷      | С/П    | П8  | Пх4       | П3  | Пх5 | П4  | Пх6 | П5  |
| Пх7 | П6     | Пх8    | БП  | <u>14</u> |     |     |     |     |     |

Тест:  $h = 0.5$ ,  $y_0 = 1$ ,  $y_1 = 2$ ,  $y_2 = 4$ ,  $y_3 = 8$ ,  $y_4 = 32$ ,  $y_5 = 64$ .

В результате счета получаем  $y^{IV}(x_2) = 16$ ,  $y^{IV}(x_3) = 272$ ,  $y^{IV}(x_4) = -480$ .

Программа 79. Вычисление  $y^V$  с точностью до  $\theta(h^5)$ . Ввести  $h$  С/П  $y_0$  С/П  $y_1$  С/П  $y_2$  С/П  $y_3$  С/П  $y_4$  С/П ... После  $y_5$  С/П  $y_6$  С/П вычисляются  $y^V\left(x_2 + \frac{h}{2}\right)$ ,  $y^V\left(x_3 + \frac{h}{2}\right)$ , ...

Память: П1, П9 — буферные,  $h^5 = \Pi 2$ ,  $y_0 = \Pi 3$ ,  $y_1 = \Pi 4$ ,  $y_2 = \Pi 5$ ,  $y_3 = \Pi 6$ ,  $y_4 = \Pi 7$ ,  $y_5 = \Pi 8$ .

Тест:  $h = 0.5$ ,  $y_0 = 1$ ,  $y_1 = 4$ ,  $y_2 = 10$ ,  $y_3 = 18$ ,  $y_4 = 19$ ,  $y_5 = 20$ ,  $y_6 = 26$ . А в результате счета получаем  $y^V\left(x_2 + \frac{h}{2}\right) = 768$ ,

$$y^V\left(x_3 + \frac{h}{2}\right) = -576.$$

|           |     |        |        |     |     |     |     |     |     |
|-----------|-----|--------|--------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| П1        | ↑   | $Fx^2$ | $Fx^2$ | ×   | П2  | Пх1 | С/П | П3  | С/П |
| П4        | С/П | П5     | С/П    | П6  | С/П | П7  | С/П | П8  | Пх6 |
| Пх5       | —   | 2      | ×      | Пх4 | +   | Пх7 | —   | 5   | ×   |
| Пх8       | +   | Пх3    | —      | Пх2 | ÷   | С/П | П9  | Пх4 | П3  |
| Пх5       | П4  | Пх6    | П5     | Пх7 | П6  | Пх8 | П7  | Пх9 | БП  |
| <u>18</u> |     |        |        |     |     |     |     |     |     |

Если нужно вычислить производную функции более высокого порядка, то можно продифференцировать ее численно несколько раз последовательно. Если эти вычисления должны быть проведены с большой точностью, то производную функции нужно вычислить на разных сетках; в качестве дополнительной сетки используется удвоенный шаг, а затем уточняется ее значение по второй формуле Рунге (5.16), как и в случае производной первого порядка.

## 2. Численное интегрирование таблиц функций

Решение многих физических задач приводит к вычислению интегралов. В каждом конкретном физическом эксперименте значение интеграла определяется числом, получить которое путем алгебраических выкладок нередко оказывается значительно сложнее, чем численным

интегрированием. В случае когда подынтегральная функция представлена в виде таблицы, численный способ определения интеграла является единственным.

Рассмотрим численное интегрирование функции, заданной в виде таблицы. Как и при дифференцировании, функцию  $y(x)$  заменяют некоторой аппроксимирующей функцией  $\varphi(x)$ , от которой интеграл легко берется. Взяв в качестве  $\varphi(x)$  интерполяционный многочлен в случае равноотстоящих узлов, получим формулы Ньютона—Котеса для интегрирования функции на отрезке  $[a, b]$ :

$$\int_{x_0}^{x_0+nh} f(x) dx = \sum_{k=1}^n a_k f(x_k), \quad (5.17)$$

$$x_k = x_0 + kh, \quad k = 1, 2, 3, \dots, n, \quad (5.18)$$

$$a_k = \frac{(-1)^{n-k} h}{k! (n-k)!} \int_0^n \frac{\lambda (\lambda-1) (\lambda-2) \dots (\lambda-n)}{(\lambda-k)} d\lambda, \quad (5.19)$$

$$x_0 = a, \quad (5.20)$$

где  $h = \frac{b-a}{n}$  — шаг аргумента  $x$ .

Обычно используются формулы не выше седьмого порядка. Дело в том, что при  $n \geq 8$  некоторые коэффициенты  $a_k$  будут отрицательными, что приводит к росту ошибок округления. Поэтому в случае большого количества значений функции весь интервал интегрирования разбивается на множество подинтервалов, на каждом из которых проводится интегрирование по формуле трапеций или Симпсона, а полученные результаты складываются. Взяв в качестве подынтервала отрезок  $[x_{i-1}, x_i]$ , получаем общую формулу трапеций:

$$\int_{x_0}^{x_0+nh} f(x) dx = \frac{h}{2} (f_0 + 2f_1 + 2f_2 + \dots + 2f_{n-1} + f_n), \quad (5.21)$$

а в случае подынтервала из трех точек получаем общую формулу Симпсона:

$$\int_{x_0}^{x_0+nh} f(x) dx = \frac{h}{3} (f_0 + 4f_1 + 2f_2 + 4f_3 + \dots + 4f_{n-1} + f_n). \quad (5.22)$$

Погрешность результатов, получаемых по этим формулам, можно оценить как сумму модулей погрешностей на каждом подынтервале. Наибольшее распространение на практике получила формула Симпсона, так как большинство функций при интегрировании этим методом дают самую малую погрешность. Если же функция быстро осциллирует и имеет множество изломов, то хорошие результаты дает общая формула трапеций. Если же количество точек не более семи и функция до-

стально гладкая, то формулы Ньютона—Котеса дают наилучший результат.

Приводимые ниже программы 80—87 предназначены для численного интегрирования функций, заданных таблично. Программы 80—84 вычисляют интегралы по формулам (5.17) — (5.20) для  $n \geq 7$  точек, а в программах 86 и 85 реализованы формулы (5.21) и (5.22).

**Программа 80. Численное интегрирование методом Симпсона по трем точкам.** Ввести пределы интегрирования и значения функции:

$$a \text{ C/P } b \text{ C/P } y_0 \text{ C/P } y_1 \text{ C/P } y_2 \text{ C/P}.$$

Память:  $a = \Pi A$ ,  $b = \Pi B$ ,  $y_0 = \Pi 0$ ,  $y_1 = \Pi 1$ ,  $y_2 = \Pi 2$ .

$$\begin{array}{ccccccccc} \text{ПА} & \text{C/P} & \text{ПВ} & \text{C/P} & \text{П0} & \text{C/P} & \text{П1} & \text{C/P} & \text{П2} & \text{Пx1} \\ 4 & \times & + & \text{Пx0} & + & \text{ПxB} & \text{ПxA} & - & \times & 3 \\ \div & \text{C/P} & \text{БП} & \underline{00} & & & & & & \end{array}$$

Тест:  $a = 1$ ,  $b = 7$ ,  $y_0 = 1$ ,  $y_1 = 2$ ,  $y_2 = 3$ .

Результат:  $I = \int f(x) dx = 12$ .

**Программа 81. Численное интегрирование по четырем значениям функции.** Ввести  $a \text{ C/P } b \text{ C/P } y_0 \text{ C/P } y_1 \text{ C/P } y_2 \text{ C/P } y_3 \text{ C/P}$ .

Память:  $a = \Pi A$ ,  $b = \Pi B$ ,  $y_0 = \Pi 0$ ,  $y_1 = \Pi 1$ ,  $y_2 = \Pi 2$ ,  $y_3 = \Pi 3$ ,  $I = \Pi 8$ .

$$\begin{array}{ccccccccc} \text{ПА} & \text{C/P} & \text{ПВ} & \text{C/P} & \text{П0} & \text{C/P} & \text{П1} & \text{C/P} & \text{П2} & \text{C/P} \\ \text{П3} & \text{Пx1} & \text{Пx2} & + & 3 & \times & + & \text{Пx0} & + & \text{ПxB} \\ \text{ПxA} & - & \times & 8 & \div & \text{П8} & \text{C/P} & \text{БП} & \underline{00} & \end{array}$$

Тест:  $a = 32$ ,  $b = 64$ ,  $y_0 = 1$ ,  $y_1 = 2$ ,  $y_2 = 3$ ,  $y_3 = 4$ .

Результат:  $I = 60$ .

**Программа 82. Численное интегрирование по пяти значениям функции.** Ввести  $a \text{ C/P } b \text{ C/P } y_0 \text{ C/P } y_1 \text{ C/P } y_2 \text{ C/P } y_3 \text{ C/P } y_4 \text{ C/P}$ .

Память:  $y_0 = \Pi 4$ ,  $y_1 = \Pi 5$ ,  $y_2 = \Pi 6$ ,  $y_3 = \Pi 7$ ,  $y_4 = \Pi 8$ ,  $I = \Pi 9$ ,  $a = \Pi 2$ ,  $b = \Pi 3$ .

$$\begin{array}{ccccccccc} \text{П2} & \text{C/P} & \text{П3} & \text{C/P} & \text{П4} & \text{C/P} & \text{П5} & \text{C/P} & \text{П6} & \text{C/P} \\ \text{П7} & \text{C/P} & \text{П8} & \text{Пx4} & + & 7 & \times & \text{Пx5} & \text{Пx7} & + \\ 3 & 2 & \times & + & \text{Пx6} & 1 & 2 & \times & + & \text{Пx3} \\ \text{Пx2} & - & \times & 9 & 0 & \div & \text{С/P} & \text{БП} & \underline{00} & \end{array}$$

Тест:  $a = 90$ ,  $b = 180$ ,  $y_0 = 1$ ,  $y_1 = 2$ ,  $y_2 = 4$ ,  $y_3 = 8$ ,  $y_4 = 12$ .

Результат:  $I = 459$ .

**Программа 83. Численное интегрирование по шести значениям функции.** Ввести  $a \text{ C/P } b \text{ C/P } y_0 \text{ C/P } y_1 \text{ C/P } y_2 \text{ C/P } y_3 \text{ C/P } y_4 \text{ C/P } y_5 \text{ C/P}$ .

Память:  $a = \Pi 2$ ,  $b = \Pi 3$ ,  $y_0 = \Pi 4$ ,  $y_1 = \Pi 5$ ,  $y_2 = \Pi 6$ ,  $y_3 = \Pi 7$ ,  $y_4 = \Pi 8$ ,  $y_5 = \Pi 9$ .

Тест:  $a = 1$ ,  $b = 289$ ,  $y_0 = 1$ ,  $y_1 = 2$ ,  $y_2 = 3$ ,  $y_3 = 4$ ,  $y_4 = 5$ ,  $y_5 = 6$ ,  $I = 1008$ .

$$\begin{array}{cccccccccc}
 \text{П2} & \text{С/П} & \text{П3} & \text{С/П} & \text{П4} & \text{С/П} & \text{П5} & \text{С/П} & \text{П6} & \text{С/П} \\
 \text{П7} & \text{С/П} & \text{П8} & \text{С/П} & \text{П9} & \text{Пх4} & + & 1 & 9 & \times \\
 \text{Пх5} & \text{Пх8} & + & 7 & 5 & \times & + & \text{Пх6} & \text{Пх7} & + \\
 5 & 0 & \times & + & \text{Пх3} & \text{Пх2} & - & \times & 2 & 8 \\
 8 & \div & \text{С/П} & \text{БП} & \underline{00} & & & & & 
 \end{array}$$

**Программа 84.** Численное интегрирование по семи значениям функции. Ввести  $a$  С/П  $b$  С/П  $y_0$  С/П  $y_1$  С/П  $y_2$  С/П  $y_3$  С/П  $y_4$  С/П  $y_5$  С/П  $y_6$  С/П.

Память:  $a = \Pi 52$ ,  $b = \Pi 3$ ,  $y_0 = \Pi 4$ ,  $y_1 = \Pi 5$ ,  $y_2 = \Pi 6$ ,  $y_3 = \Pi 7$ ,  $y_4 = \Pi 8$ ,  $y_5 = \Pi 9$ ,  $y_6 = \Pi A$ .

$$\begin{array}{cccccccccc}
 \text{П2} & \text{С/П} & \text{П3} & \text{С/П} & \text{П4} & \text{С/П} & \text{П5} & \text{С/П} & \text{П6} & \text{С/П} \\
 \text{П7} & \text{С/П} & \text{П8} & \text{С/П} & \text{П9} & \text{С/П} & \text{ПА} & \text{Пх8} & + & \text{Пх6} \\
 + & \text{Пх4} & + & \text{Пх5} & \text{Пх9} & + & 5 & \times & + & \text{Пх7} \\
 6 & \times & + & \text{Пх3} & \text{Пх2} & - & \times & 2 & 0 & \div \\
 \text{С/П} & \text{БП} & \underline{00} & & & & & & & 
 \end{array}$$

Тест:  $a = 1$ ,  $b = 61$ ,  $y_0 = 1$ ,  $y_1 = 2$ ,  $y_2 = 3$ ,  $y_3 = 4$ ,  $y_4 = 5$ ,  $y_5 = 6$ ,  $y_6 = 7$ .

Результат:  $I = 240$ .

**Программа 85.** Численное интегрирование методом трапеции при большом количестве точек функции. Ввести  $a$  С/П  $b$  С/П  $n$  С/П  $y_0$  С/П  $y_1$  С/П ...  $y_n$  С/П.

Память:  $a = \Pi 1$ ,  $b = \Pi 2$ ,  $n - 1 = \Pi 0$ ,  $h = \Pi 4$ ,  $y_i = \Pi 5$ ,  $\sum y_i = \Pi 6$ ,  $I = \Pi 7$ .

$$\begin{array}{cccccccccc}
 \text{П1} & \text{С/П} & \text{П2} & \text{С/П} & \text{П0} & \text{С/П} & \text{П5} & \text{Пх2} & \text{Пх1} & - \\
 \text{Пх0} & \div & \text{П4} & \text{КПх0} & \text{Пх5} & 2 & \div & \text{П6} & \text{Пх5} & \text{С/П} \\
 \text{Пх5} & \text{Пх6} & + & \text{П6} & \text{FL0} & \underline{18} & \text{Пх5} & \text{С/П} & \text{П5} & 2 \\
 \div & \text{Пх6} & + & \text{Пх4} & \times & \underline{\text{П7}} & \text{С/П} & \text{БП} & \underline{00} & 
 \end{array}$$

Тест:  $n = 3$ ,  $y_0 = 0$ ,  $y_1 = 1$ ,  $y_2 = 2$ ,  $y_3 = 3$ ,  $a = 0$ ,  $b = 3$ .

Результат:  $I = 45$ .

**Программа 86.** Численное интегрирование методом Симпсона при большом количестве точек функции. Ввести  $a$  С/П  $b$  С/П  $n$  С/П  $y_0$  С/П  $y_1$  С/П ...  $y_n$  С/П.

Память:  $n = \Pi 0$ ,  $a = \Pi 2$ ,  $b = \Pi 3$ ,  $h/3 = \Pi 4$ ,  $y_i = \Pi 5$ ,  $\sum a_i y_i = \Pi 6$ ,  $I = \Pi 7$ .

$$\begin{array}{cccccccccc}
 \text{П2} & \text{С/П} & \text{П3} & \text{С/П} & \text{П0} & \text{С/П} & \text{П5} & \text{Пх3} & \text{Пх2} & - \\
 \text{Пх0} & \div & 3 & \div & \text{П4} & \text{Пх0} & 2 & \div & \text{П1} & \text{КПх1} \\
 \text{Пх5} & \text{П6} & \text{С/П} & \text{ПП} & \underline{45} & \text{С/П} & \text{П5} & 2 & \text{ПП} & \underline{47} \\
 \text{FL1} & \underline{22} & \text{С/П} & \text{ПП} & \underline{45} & \text{С/П} & \text{П5} & \text{Пх6} & + & \text{Пх4}
 \end{array}$$

|          |           |         |        |           |         |     |          |           |     |
|----------|-----------|---------|--------|-----------|---------|-----|----------|-----------|-----|
| $\times$ | $\Pi 7$   | $C/\Pi$ | $B\Pi$ | <u>00</u> | $\Pi 5$ | $4$ | $\times$ | $\Pi x 6$ | $+$ |
| $\Pi 6$  | $\Pi x 5$ |         | $B/0$  |           |         |     |          |           |     |

Тест:  $y_0=1$ ,  $y_1=2$ ,  $y_2=3$ ,  $y_3=4$ ,  $y_4=5$ ,  $a=0$ ,  $b=12$ ,  $n=4$ .  
Результат:  $I=36$ .

### 3. Интегрирование функций, заданных в аналитическом виде

В случае аналитически заданной функции в отличие от табличного способа число опорных узлов выбирается в зависимости от точности аппроксимации. Погрешность можно оценить, увеличив число узлов функции в  $r$  раз. Тогда, сравнив полученный результат с прежним, по первой формуле Рунге находим

$$R_{nr} = J(h) - J\left(\frac{h}{r}\right), \quad (5.23)$$

а вторая формула Рунге дает уточненное значение интеграла:

$$J = J\left(\frac{h}{r}\right) + \frac{J\left(\frac{h}{r}\right) - J(h)}{r^p - 1}. \quad (5.24)$$

Здесь  $p$  — порядок формулы интегрирования. Для общей формулы Симпсона (5.22), получившей наибольшее распространение, при  $r=2$  и  $p=3$

$$J = J\left(\frac{h}{2}\right) + \frac{J\left(\frac{h}{2}\right) - J(h)}{7}. \quad (5.25)$$

Обычно первую формулу Рунге (5.23) используют лишь для оценки погрешности при выборе наиболее оптимального количества узлов функции при разбиении интервала интегрирования. Поскольку число узлов выбирают достаточно большим, то величина  $R_{nr}$  мала и соизмерима с погрешностью счета, поэтому величину интеграла находят численным интегрированием на более мелком разбиении интервала. Вторую формулу Рунге нередко используют в случае таблично заданной функции для уточнения значения интеграла.

Интегрируют аналитически заданные функции методом трапеций или Симпсона. Первый способ обычно используют для скачкообразных функций, а второй — для плавных. Если подынтегральная функция представляет собой алгебраический многочлен, то используют формулы Гаусса и Чебышева.

**Программа 87. Численное интегрирование аналитической функции методом трапеций.** Ввести  $a$  С/П  $b$  С/П  $n$  С/П. До начала счета с адреса 41 вводится подпрограмма-функция  $f(x)$ . Значение аргумента  $x$  находится в регистре П6.

$$\begin{array}{ccccccccc}
 \text{Память: } & a = \Pi 2, & b = \Pi 3, & \sum = \Pi 5, & h = \Pi 3, & n = \Pi 1, & \Pi 4 - \text{буфер.} \\
 \Pi 2 & C/P & \Pi 3 & C/P & \Pi 1 & \Pi x2 & \Pi \Pi & 39 & \Pi 4 & \Pi x3 \\
 & \Pi \Pi & 39 & \Pi x4 & + & 2 & \div & \Pi 5 & \Pi x3 & \Pi x2 \\
 & \Pi x1 & \div & \Pi 3 & K \Pi x1 & \Pi x1 & \Pi x3 & \times & \Pi x2 & + & \Pi \Pi \\
 & 39 & \Pi x5 & + & \Pi 5 & FL1 & 24 & \Pi x3 & \times & C/P & \Pi 6 \\
 & \dots & \dots & \dots & \dots & & \underline{B/0} & & & & 
 \end{array}$$

Тест:  $n = 2, a = 1, b = 3, f(x) = x, I = 4, t_{\text{ср}} = 12$  с.

**Программа 88. Численное интегрирование аналитической функции методом Симпсона.** Ввести  $a$  С/П  $b$  С/П  $n$  С/П. Перед счетом после основной программы набрать подпрограмму-функцию  $f(x)$ . Аргумент функции в регистре П3. В командной памяти для подпрограммы отведено 60 ячеек.

Память:  $h = \Pi 2, x = \Pi 3$ , счетчик П1.

$$\begin{array}{ccccccccc}
 \Pi 2 & C/P & \Pi 3 & C/P & \Pi 1 & \Pi \Pi & 44 & \Pi 8 & \Pi x3 & \Pi x2 \\
 \Pi 3 & - & \Pi x1 & \div & \Pi 2 & \Pi \Pi & 44 & 1 & \Pi \Pi & 32 \\
 4 & \Pi \Pi & 32 & 2 & B/P & 18 & \Pi x8 & 3 & \div & \Pi x2 \\
 \times & C/P & \times & \Pi x8 & + & \Pi 8 & K \Pi x1 & \Pi x1 & Fx \neq 0 & 26 \\
 \Pi x3 & \Pi x2 & + & \Pi 3 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \underline{B/0}
 \end{array}$$

Тест:  $a = 1 = \Pi 2, b = 5 = \Pi 3, n = 8 = \Pi 1, I = 0.90756595$  для функции

$$f(x) = \frac{x^3}{x^4 + 16}, \quad I = \int_1^5 \frac{x^3 dx}{x^4 + 16}.$$

Подпрограмма имеет вид

$$\begin{array}{ccccccccc}
 \Pi x4 & Fx^2 & Fx^2 & 1 & 6 & + & \Pi x3 & \uparrow & Fx^2 \times \\
 \leftrightarrow & \div & & & & & & & B/0
 \end{array}$$

При  $n = 64$  за  $t_{\text{ср}} \approx 10$  мин получаем  $I = 0.90745406$ . А точное значение  $I = \frac{1}{4} \ln 5 = 0.9074540$  (таблица семизначных логарифмов).

#### 4. Численное интегрирование аналитических функций методами Гаусса и Чебышева

Если подынтегральная функция выражена алгебраическим многочленом и достаточно плавная, т. е. хорошо аппроксимируется многочленом сравнительно невысокой степени, то значительно лучшие результаты при численном интегрировании дают формулы Гаусса—Кристоффеля, часто называемые формулами *наивысшей точности*. Так, для многочлена  $k$ -й степени формула будет точна уже при  $\frac{k+1}{2}$  выбранных

узлах. Примером такой функции является

$$f(x) = 5 + 7x + 4x^2 + 31x^4 + 17x^5 + (34 + 180x^2 + 151x^3)^3.$$

Для ее вычисления аналитическим путем требуется раскрыть скобку, а сделать это не так-то просто. А при вычислении численным методом, взяв специально выбранные  $n=4$  узла по формулам наивысшей точности легко найти точное значение интеграла. Пусть пределами интегрирования функции будут соответственно числа  $a$  и  $b$ . После замены переменной интегрирования  $x$  на  $t$  по формуле

$$x = \frac{b-a}{2} t + \frac{a+b}{2} \quad (5.26)$$

новые пределы интегрирования станут единичными:

$$\int_a^b f(x) dx = \left( \frac{b-a}{2} \right) \int_{-1}^1 f(x(t)) dt, \quad (5.27)$$

а последний интеграл аппроксимируется суммой

$$\int_{-1}^1 f(t) dt = \sum_{k=1}^n a_k \cdot f(t_k), \quad (5.28)$$

где  $f(t_k)$  — значение искомой аналитической функции в узлах  $t_k$ ,  $a_k$  — весовые коэффициенты, определяемые по формуле

$$a_k = \frac{2}{(1-t_k^2) [p_n'(t_k)]^2}, \quad (5.29)$$

где  $n$  — число точек функции, взятых на отрезке  $[-1, 1]$ , абсциссы  $t_k$  — корни полинома Лежандра степени  $n$ , а  $p_n'(t_k)$  — производная полинома Лежандра в узле  $t_k$ .

Весовые коэффициенты  $a_k$  и узлы  $t_k$  наиболее распространенных квадратурных формул Гаусса приведены в табл. 18.

Для программ численного интегрирования методом Гаусса требуется много ячеек памяти. Ниже приведены программы 89, 90, 91 для  $n = 3, 5, 6$ . Весовые коэффициенты и узлы квадратурных формул вводятся перед программой. После выполнения цикла вычислений по программе, значения весовых коэффициентов и узлов остаются в соответствующих регистрах и вводить каждый раз их не нужно. Меняются лишь подпрограмма-функция и пределы интегрирования. Перед каждым запуском программы необходимо оператором B/O возвратить счетчик в начальное положение, так как оператор безусловного перехода в конце программы отсутствует для экономии командной памяти. Приводимые ниже программы точны для многочленов 5, 9, 11 степени.

**Программа 89.** Численное интегрирование методом Гаусса при  $n = 3$ . Подпрограмма-функция  $f(x)$  набирается с 44-го адреса. Аргу-

Таблица 18

| $n$ | $t_k$  | $a_k$   |
|-----|--|---|
| 2   | $\pm 0.577\ 350\ 269\ 2$   | 1.0   |
| 3   | $\pm 0.774\ 596\ 669\ 2 = \pm \sqrt{3/5}$<br>0.0                                 | 0.555 555 555 6 = 5/9<br>0.888 888 888 9 = 8/9        |
| 4   | $\pm 0.861\ 136\ 311\ 6$<br>$\pm 0.339\ 981\ 043\ 6$                             | 0.347 854 845 1<br>0.652 145 154 9                    |
| 5   | $\pm 0.906\ 179\ 845\ 9$<br>$\pm 0.538\ 469\ 310\ 1$<br>0.0                      | 0.236 926 885 1<br>0.478 628 670 5<br>0.568 888 888 9 |
| 6   | $\pm 0.932\ 469\ 514\ 2$<br>$\pm 0.661\ 209\ 386\ 5$<br>$\pm 0.238\ 619\ 186\ 1$ | 0.171 324 491 4<br>0.360 761 573 0<br>0.467 913 934 6 |

мент функции в регистре П5. Вводятся необходимые числовые данные:  
 $a = \text{ПА}$ ,  $x = \text{ПВ}$ ,  $7.7459667 \cdot 10^{-1} = \text{П4}$ . По программе вычисляются  
 $\frac{b-a}{2} = \text{П7}$ ,  $\frac{b+a}{2} = \text{П8}$ ,  $\sum y_i = \text{П6}$ .

|     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |
|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| ПxB | ПxA | +   | 2   | ÷   | П8  | ПxB | ПxA | -   | 2   |
| ÷   | П7  | Пx4 | ×   | Пx8 | +   | ПП  | 44  | П6  | Пx7 |
| Пx4 | ×   | /-/ | Пx8 | +   | ПП  | 44  | Пx6 | +   | 5   |
| ×   | П6  | Пx8 | ПП  | 44  | 8   | ×   | Пx6 | +   | 9   |
| ÷   | Пx7 | ×   | C/P | П5  | ... | ... | ... | ... | B/0 |

Тест:  $a = 1$ ,  $b = 2$ ,  $f(x) = \ln x$ .

Результат:  $I = 3.8630042 \cdot 10^{-1}$ . Время вычисления 18.5 с.

**Программа 90. Численное интегрирование методом Гаусса при  $n = 5$ .** Подпрограмма-функция вводится с адреса 56. Длина максимально возможной подпрограммы — 42 шага. Аргумент функции  $x = \text{П0}$ . Перед программой необходимо ввести:  $5.3846931 \cdot 10^{-1} = \text{П1}$ ,  $9.0617984 \cdot 10^{-1} = \text{П2}$ ,  $5.6888889 \cdot 10^{-1} = \text{П3}$ ,  $4.7862867 \cdot 10^{-1} = \text{П4}$ ,  $2.3692689 \cdot 10^{-1} = \text{П5}$ ,  $a = \text{ПА}$ ,  $b = \text{ПВ}$ . Регистры П6 и ПА — буферные:  $\sum y_i = \text{П6} = \text{ПА}$ . В ходе выполнения программы вычисляются и заносятся в регистры величины  $\frac{b-a}{2} = \text{ПС}$ ,  $\frac{b+a}{2} = \text{ПД}$ . Регистр ПВ можно использовать

в подпрограмме-функции в качестве буферного, так как после вычисления вспомогательных величин в начале основной программы далее в ходе программы он больше участия не принимает. Регистры П7—П9, ПЕ — свободны. Время выполнения программы зависит от функции  $f(x)$ .

|     |     |     |    |     |     |     |     |     |     |
|-----|-----|-----|----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| ПxB | ПxA | —   | 2  | ÷   | ПС  | ПxB | ПxA | +   | 2   |
| ÷   | ПД  | ПП  | 54 | Пx3 | ×   | ПА  | Пx1 | ПП  | 50  |
| П6  | Пx1 | /—/ | ПП | 50  | Пx6 | +   | Пx4 | ×   | ПxA |
| +   | ПА  | Пx2 | ПП | 50  | П6  | Пx2 | /—/ | ПП  | 50  |
| Пx6 | +   | Пx5 | ×  | ПxA | +   | ПxC | ×   | ПА  | С/П |
| ПxC | ×   | ПxD | +  | П0  | ... | ... | ... | ... | B/0 |

Тест:  $f(x) = \ln x$ ,  $a = 1$ ,  $b = 2$ .

Результат:  $I = 3.8629436 \cdot 10^{-1}$ ,  $t_{\text{сч}} = 29$ .

**Программа 91. Численное интегрирование методом Гаусса при  $n = 6$ .** Подпрограмма-функция с аргументом  $x = \text{П}0$  вводится с адреса 63. Максимально возможная длина программы — 42 шага. Перед программой вводятся:

$$\begin{aligned} 1.7132449 \cdot 10^{-1} &= \text{П1}, & 3.6076157 \cdot 10^{-1} &= \text{П2}, \\ 4.6791393 \cdot 10^{-1} &= \text{П3}, & 9.3246951 \cdot 10^{-1} &= \text{П4}, \\ 6.6120938 \cdot 10^{-1} &= \text{П5}, & 2.3861918 \cdot 10^{-1} &= \text{П6}, \\ a &= \text{ПА}, & b &= \text{ПВ}. \end{aligned}$$

Регистры ПА и ПВ используются лишь в самом начале программы для вычисления  $\frac{a+b}{2}$  и  $\frac{b-a}{2}$ , заносимых в дальнейшем в регистры ПД и ПС. Поэтому ПА и ПВ можно использовать в качестве буферных в подпрограмме-функции. Регистры П7 и П8 — буферные и используются для вычисления сумм  $\sum y_i$  и  $\sum a_k y_k$ . Свободны лишь регистры П9 и ПЕ.

|     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |
|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| ПxB | ПxA | +   | 2   | ÷   | ПС  | ПxB | ПxA | —   | 2   |
| ÷   | ПД  | Пx4 | ПП  | 58  | П7  | Пx4 | /—/ | ПП  | 57  |
| Пx7 | +   | Пx1 | ×   | П8  | Пx5 | ПП  | 57  | П7  | Пx5 |
| /—/ | ПП  | 57  | Пx7 | +   | Пx2 | ×   | Пx8 | +   | П8  |
| Пx6 | ПП  | 57  | П7  | Пx6 | /—/ | ПП  | 57  | Пx7 | +   |
| Пx3 | ×   | Пx8 | +   | ПxD | ×   | С/П | ПxD | ×   | ПxC |
| +   | П0  | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | B/0 |

Тест:  $f(x) = \ln x$ ,  $a = 1$ ,  $b = 2$ .

Результат счета:  $I = 3.8629436 \cdot 10^{-1}$ ,  $t_{\text{сч}} \approx 36.6$  с. Квадратурные формулы Чебышева используются гораздо реже. Все весовые коэффициенты в них равны  $2/n$ . Если выбрано  $n$  узлов функции, то формула точна для многочленов  $n$ -й степени. В отличие от формул Гаусса в формулах Чебышева число  $n$  может принимать лишь значения 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9. Более высокого порядка формул нет. Вот почему эти формулы не получили большого распространения при работе на больших ЭВМ. Однако при работе на микрокалькуляторе для невысокого порядка многочленов составить программу по формулам Чебышева гораздо легче, чем для равных по точности формул Гаусса. В табл. 19

Таблица 19

| $n$ | $t_k$  | $n$ | $t_k$   |
|-----|--|-----|---|
| 2   | $\pm 0.577\ 350\ 269\ 2$   |     |   |
| 3   | 0.0<br>$\pm 0.707\ 106\ 781\ 2$  | 7   | 0.0<br>$\pm 0.323\ 911\ 810\ 5$<br>$\pm 0.529\ 656\ 775\ 3$<br>$\pm 0.883\ 861\ 700\ 8$                             |
| 4   | $\pm 0.187\ 592\ 474\ 1$<br>$\pm 0.794\ 654\ 472\ 3$                             |     |   |
| 5   | 0.0<br>$\pm 0.374\ 541\ 409\ 6$<br>$\pm 0.832\ 497\ 487\ 0$                      | 9   | 0.0<br>$\pm 0.167\ 906\ 184\ 2$<br>$\pm 0.528\ 761\ 783\ 1$<br>$\pm 0.601\ 018\ 655\ 4$<br>$\pm 0.911\ 589\ 307\ 7$ |
| 6   | $\pm 0.266\ 635\ 401\ 5$<br>$\pm 0.422\ 518\ 653\ 8$<br>$\pm 0.866\ 246\ 818\ 1$ |     |   |

приведены значения абсцисс для квадратурных формул Чебышева. Из нее видно, что для формул седьмого порядка точности для постоянных коэффициентов необходимо использовать лишь 3 ячейки памяти в отличие от 4 в случае формул Гаусса. В общем случае формула интегрирования методом Чебышева имеет вид

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{b-a}{n} [f(t_1) + f(t_2) + \dots + f(t_n)]. \quad (5.30)$$

Она реализована в программах 92—93.

**Программа 92. Численное интегрирование методом Чебышева при  $n=7$ .** Перед началом счета в адресуемые регистры необходимо занести исходные данные  $a=\text{ПА}$ ,  $b=\text{ПВ}$ ,  $3.2391181 \cdot 10^{-1}=\text{П4}$ ,  $5.2965678 \cdot 10^{-1}=\text{П5}$ ,  $8.838617 \cdot 10^{-1}=\text{П6}$ . Аргумент  $x$  подпрограммы-функции в регистре П7. В ходе счета  $\frac{b-a}{2}=\text{ПС}$ ,  $\frac{b+a}{2}=\text{ПД}$ ,

$$\sum y_i = \text{ПВ}.$$

|     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |
|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| ПхВ | ПxA | —   | 2   | ÷   | ПС  | ПxA | ПxB | +   | 2   |
| ÷   | ПД  | Cx  | П8  | Пx4 | ПП  | 42  | Пx4 | /—/ | ПП  |
| 42  | Пx5 | ПП  | 42  | Пx5 | /—/ | ПП  | 42  | Пx6 | ПП  |
| 42  | Пx6 | /—/ | ПП  | 42  | ПxB | ПxA | —   | 7   | ÷   |
| ×   | C/P | ПxC | ×   | ПxD | +   | П7  | ... | ... | ... |
| ... | ... | ... | ... | ... | ... | Пx8 | +   | П8  | B/0 |

Тест:  $f(x)=\ln x$ ,  $a=1$ ,  $b=2$ ,  $I=3.2837083 \cdot 10^{-1}$ ,  $t_{\text{сч}}=35.5$  с.

**Программа 93. Численное интегрирование методом Чебышева с  $n = 9$ .** Подпрограмма-функция вводится с 47-го адреса и может иметь наибольшую длину 55 шагов. Перед началом счета в адресуемые регистры необходимо ввести следующие числа:  $a = \text{ПА}$ ,  $b = \text{ПВ}$ ,  $1.6790618 \cdot 10^{-1} = \text{П2}$ ,  $5.2876178 \cdot 10^{-1} = \text{П3}$ ,  $6.0101866 \cdot 10^{-1} = \text{П4}$ ,  $9.1158931 \cdot 10^{-1} = \text{П5}$ . Аргумент подпрограммы-функции  $x = \text{П7}$ . Величины  $\frac{a+b}{2}$  и  $\frac{b-a}{2}$  после вычислений поступают в регистры ПД и ПС. Регистр П6 — буферный:  $\sum y_i = \text{П6}$ . Регистры П0 и П1 используются для организации цикла.

|      |     |     |     |     |     |     |     |      |     |
|------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|------|-----|
| ПxB  | ПxA | —   | 2   | ÷   | ПС  | ПxB | ПxA | +    | 2   |
| ÷    | ПД  | Cx  | П6  | ПП  | 41  | 6   | П0  | 4    | П1  |
| KPx0 | ПП  | 41  | Px0 | 1   | +   | П0  | F~  | KPx0 | /—/ |
| ПП   | 41  | FL0 | 20  | 2   | ×   | PxC | ×   | 9    | ÷   |
| C/P  | PxC | ×   | PxD | +   | П7  | ... | ... | ...  | ... |
| ...  | ... | ... | ... | ... | ... | Px6 | +   | П6   | B/0 |

Тест:  $f(x) = \ln x$ ,  $a = 1$ ,  $b = 2$ . Для этой подпрограммы-функции  $t_{\text{чq}} = 60$  с,  $J = 3.8629435 \cdot 10^{-1}$ .

## 5. Вычисление несобственных интегралов

Для вычисления интегралов с бесконечными пределами приведенные выше программы не подходят. Для этого существует несколько специальных приемов вычисления. Так, некоторые несобственные интегралы вида

$$\int_a^{\infty} f(x) dx, \quad a > 0, \quad (5.31)$$

путем замены

$$x = \frac{a}{1-t} \quad (5.32)$$

сводятся к обычным:

$$J = -a \int_0^1 f\left(\frac{a}{1-t}\right) dt. \quad (5.33)$$

Это возможно, если функция  $f\left(\frac{a}{1-t}\right)$  определена в точках  $t=0$  и  $t=1$ . Примером может служить интеграл

$$J = \int_1^{\infty} \frac{2}{1+x^2} dx.$$

После замены (5.32) получаем

$$J = -4 \int_0^1 \frac{dt}{(1-t)^2 + 1},$$

что легко вычисляется путем численного интегрирования. Если подынтегральная функция (5.33) не ограничена, то замена (5.32) ничего не дает. Тогда делается искусственное преобразование верхнего предела, идея которого состоит в выборе такого большого числа  $b$ , чтобы

$$\int_b^\infty f(x) dx \quad (5.34)$$

был меньше какой-то наперед заданной величины погрешности  $\varepsilon$ . Тогда, пренебрегая его значением, получим обычный интеграл

$$\int_a^b f(x) dx, \quad (5.35)$$

вычисляемый по какой-либо из программ 85—93. Если же в интеграле (5.34) нет возможности выбрать величину  $b$  так, чтобы он был меньше  $\varepsilon$ , то интеграл расходится, т. е. не существует. В некоторых случаях для несобственных интегралов можно воспользоваться формулами Гаусса—Кристоффеля по аналогии с (5.28), (5.29). Так, если подынтегральная функция представляет собой произведение убывающей экспоненты на какую-либо функцию  $y(x)$ , то получаем формулу Лагерра

$$\int_0^\infty e^{-x} y(x) dx = \sum_{k=1}^n a_k y(x_k), \quad (5.36)$$

где

$$a_k = \frac{(n!)^2}{x_k [L_n'(x_k)]^2}, \quad (5.37)$$

$L_n(x)$  — полином Лагерра,  $x_k$  — его корни.

Квадратурная формула Эрмита пригодна для бесконечного отрезка интегрирования с весовой функцией  $e^{-x^2}$ .

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} y(x) dx = \sum_{k=1}^n a_k y(x_k), \quad (5.38)$$

$$a_k = \frac{2^{n+1} n! \sqrt{\pi}}{[H_n'(x_k)]^2}, \quad (5.39)$$

где  $x_k$  — корни полинома Эрмита  $H_n(x)$ . Погрешность аппроксимации определяется величиной  $n$ : чем больше  $n$ , тем точнее вычисляется

Таблица 20

| $n$             | $x_k$   | $a_k$  |
|-----------------|---|--|
| Формула Эрмита  |   |  |
| 2               | 0.707106781186548   | 8.862269254528·10 <sup>-1</sup>  |
| 3               | 0.0<br>1.224744871391589  | 1.181635900604<br>2.954089751509·10 <sup>-1</sup>  |
| 4               | 0.524647623275290<br>1.650680123885785  | 8.049140900055·10 <sup>-1</sup><br>8.131283544725·10 <sup>-2</sup>   |
| 5               | 0.0<br>0.958572464613819<br>2.020182870456086   | 9.453087204829·10 <sup>-1</sup><br>3.936193231522·10 <sup>-1</sup><br>1.1995324205905·10 <sup>-2</sup>   |
| 6               | 0.436077411927617<br>1.335849074013607<br>2.350604973674492                             | 7.246295962244·10 <sup>-1</sup><br>1.570673203229·10 <sup>-1</sup><br>4.530009905509·10 <sup>-3</sup>  |
| Формула Лагерра |   |  |
| 2               | 0.585786437626<br>3.414213562373  | 8.53553390593·10 <sup>-1</sup><br>1.46446609407·10 <sup>-1</sup>   |
| 3               | 0.415774556783<br>2.294280360279<br>6.289945082937                                      | 7.11093009929·10 <sup>-1</sup><br>2.78517733569·10 <sup>-1</sup><br>1.03892565016·10 <sup>-2</sup>   |
| 4               | 0.322547689619<br>1.745761101158<br>4.536620296921<br>9.395070912301                    | 6.03154104342·10 <sup>-1</sup><br>3.57418692438·10 <sup>-1</sup><br>3.88879085150·10 <sup>-2</sup><br>5.39294705561·10 <sup>-4</sup>                                   |
| 5               | 0.263560319718<br>1.413403059107<br>3.596425771041<br>7.085810005859<br>12.640800844276 | 5.21755610583·10 <sup>-1</sup><br>3.98666811083·10 <sup>-1</sup><br>7.59424496817·10 <sup>-2</sup><br>3.61175867992·10 <sup>-3</sup><br>2.33699723858·10 <sup>-6</sup> |

интеграл. Узлы и весовые коэффициенты квадратурных формул Эрмита и Лагерра приведены в табл. 20.

**Программа 94. Численное интегрирование по формуле Лагерра при  $n = 5$ .** Длина возможной подпрограммы-функции — 66 шагов и начинается она с адреса 41. Аргументом функции является  $x = \text{ПА}$ . В адресуемую память необходимо занести следующие числа:

$$\begin{array}{ll}
 2.6356032 \cdot 10^{-1} = \Pi_0, & 5.2175561 \cdot 10^{-1} = \Pi_5, \\
 1.4134031 = \Pi_1, & 3.9866681 \cdot 10^{-1} = \Pi_6, \\
 3.5964258 = \Pi_2, & 7.5942450 \cdot 10^{-2} = \Pi_7, \\
 7.0858100 = \Pi_3, & 3.6117587 \cdot 10^{-3} = \Pi_8, \\
 12.640801 = \Pi_4, & 2.3369972 \cdot 10^{-5} = \Pi_9.
 \end{array}$$

Регистр ПВ — буфер:  $\sum y_i = \text{ПВ}$ . Регистры ПС — ПЕ свободны.

|            |     |            |            |            |            |            |            |     |            |
|------------|-----|------------|------------|------------|------------|------------|------------|-----|------------|
| Cx         | ПВ  | <u>Px0</u> | ПП         | 39         | Px5        | ПП         | 34         | Px1 | ПП         |
| 39         | Пx6 | ПП         | 34         | <u>Px2</u> | ПП         | 39         | <u>Px7</u> | ПП  | 34         |
| <u>Px3</u> | ПП  | 39         | <u>Px8</u> | ПП         | 34         | <u>Px4</u> | ПП         | 39  | <u>Px9</u> |
| ПП         | 34  | <u>PxB</u> | C/P        | X          | <u>PxB</u> | +          | ПВ         | B/0 | ПА         |
| ...        | ... | ...        |            |            | B/0        |            |            |     |            |

Тест:  $\int_0^{\infty} e^{-x} \sin 2x \, dx = 2.8593833 \cdot 10^{-1}$ , микрокалькулятор должен

быть в положении «градус»,  $t_{\text{сч}} = 31$  с.

**Программа 95. Численное интегрирование по формуле Эрмита при  $n=5$ .** На подпрограмму-функцию отведено 66 шагов. Аргумент функции  $x = \text{ПА}$ . Регистры ПВ, ПС — буферные. Перед счетом в регистры П0 — П4 заносятся числа:

$$\begin{array}{lll}
 9.5857246 \cdot 10^{-1} = \Pi_0, & 9.4530872 \cdot 10^{-1} = \Pi_2, & 2.0201829 = \Pi_1, \\
 3.9361932 \cdot 10^{-1} = \Pi_3, & 1.9953242 \cdot 10^{-2} = \Pi_4.
 \end{array}$$

Характерной особенностью программы является двухуровневая подпрограмма.

|     |     |           |            |     |            |            |     |     |            |
|-----|-----|-----------|------------|-----|------------|------------|-----|-----|------------|
| Cx  | ПВ  | ПП        | 37         | Px2 | ПП         | 32         | Px0 | ПП  | 21         |
| Px3 | ПП  | 32        | <u>Px1</u> | ПП  | 21         | <u>Px4</u> | ПП  | 32  | <u>PxB</u> |
| C/P | ПА  | <u>PП</u> | 37         | ПС  | <u>PxA</u> | /—/        | ПП  | 37  | <u>PxC</u> |
| +   | B/0 | X         | <u>PxB</u> | +   | ПВ         | B/0        | ПА  | ... | B/0        |

Тест:  $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} \, dx = 1.7724539$ ,  $y(x) = 1$ ,  $t = 21.5$  с.

Рассмотренные выше несобственные интегралы имели бесконечные пределы. Встречаются несобственные интегралы и другого рода, когда подынтегральная функция в одной из точек на отрезке интегрирования не определена, например,

$$\int_{0.5}^{1.0} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Тогда полагают, что

$$\int_{0.5}^{1.0} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\epsilon \rightarrow 1.0} \int_{0.5}^{\epsilon} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Если такой предел существует, то интеграл сходится и его можно вычислить численно с какой угодно точностью, заменив точку разрыва в пределе какой-нибудь близкой к ней точкой. Положив  $\epsilon = 2 \cdot 10^{-7}$ , можно вычислить интеграл

$$I = \int_{0.5}^{1-\epsilon} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

Если особая точка функции находится внутри интервала интегрирования, то, заменив интеграл на всем отрезке суммой интегралов на каждом отрезке в отдельности и воспользовавшись описанными выше правилами, можно вычислить интеграл.

Некоторые интегралы с особым видом весовой функции можно вычислять по формулам, аналогичным (5.28) — (5.31). Широко известна квадратурная формула Гаусса — Чебышева

$$J = \int_{-1}^1 \frac{y(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{\pi}{n} \sum_{k=1}^n y(x_k), \quad (5.40)$$

где

$$x_k = \cos \frac{2k-1}{2n} \pi, \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (5.41)$$

Интеграл (5.40) на микрокалькуляторе может быть вычислен с произвольной степенью точности, так как узлы автоматически определяются в ходе программы.

**Программа 96. Вычисление несобственного интеграла Гаусса — Чебышева.** Подпрограмма-функция  $y(x)$  вводится с адреса 32, ее аргумент  $x = \text{ПА}$ . Сумма организована с помощью цикла в L0. Регистр ПВ — буферный и служит для вычисления  $\sum y_i$ . Число  $n$  — порядок формулы. Его необходимо перед счетом ввести в регистр П2 и П0;  $n = \text{П2} = \text{П0}$ . Максимально возможная длина подпрограммы — 71 шаг. Переключатель угловой меры должен стоять в положении «радиан».

|     |     |     |     |       |     |    |     |     |     |
|-----|-----|-----|-----|-------|-----|----|-----|-----|-----|
| Cx  | ПВ  | Пx0 | 2   | ×     | 1   | —  | Пx2 | ÷   | 2   |
| ÷   | ↑   | Fπ  | ×   | F cos | ПА  | ПП | 30  | ПxB | +   |
| ПВ  | FL0 | 02  | ПxB | ↑     | Fπ  | ×  | Пx2 | ÷   | C/P |
| ПxA | ... | ... | ... | ...   | B/0 |    |     |     |     |

Тест:  $n = 10$ ,  $y(x) = x^3$ ,  $\int_{-1}^1 \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}} dx = -2.5132741 \cdot 10^{-8}$ ,  $t_{\text{сч}} = 1.5$  мин.

## 6. Кратные интегралы

Решение множества различных задач физики, механики, прикладной математики и техники неизбежно приводит к вычислению двукратных и трехкратных интегралов. Так, центр тяжести плоской криволинейной фигуры, ограниченной какой-либо функцией на плоскости, находится из соотношений

$$\begin{aligned} S &= \iint_G dx dy, \\ \bar{x} &= \frac{1}{S} \iint_G x dx dy, \\ \bar{y} &= \frac{1}{S} \iint_G y dx dy. \end{aligned} \quad (5.42)$$

Если фигура объемная и ограничена какой-либо поверхностью, то

$$\begin{aligned} V &= \iiint_G dx dy dz, \\ \bar{x} &= \frac{1}{V} \iiint_G x dx dy dz, \\ \bar{y} &= \frac{1}{V} \iiint_G y dx dy dz, \\ \bar{z} &= \frac{1}{V} \iiint_G z dx dy dz. \end{aligned} \quad (5.43)$$

Здесь  $G$  — область интегрирования, охватывающая нашу фигуру. Для двухкратного численного интегрирования всю область разобьем на прямоугольные области с помощью сетки, как показано на рис. 41. Считая функцию в каждом прямоугольнике постоянной и заменяя ее величину значением в центральной точке, для области  $G_{ij}$  будем иметь

$$\iint_{G_{ij}} f(x, y) dx dy = f_{ij} S_{ij}, \quad (5.44)$$

где

$$S_{ij} = \Delta x_i \cdot \Delta y_j, \quad (5.45)$$

$$f_{ij} = f(x_i, y_j). \quad (5.46)$$

Тогда

$$\iint_G f(x, y) dx dy = \sum_{i,j} f_{ij} S_{ij}. \quad (5.47)$$

Величина граничных прямоугольников учитывается на половину или не учитывается вообще, так как если шаг сетки достаточно мал, то вклад граничных прямоугольников резко сокращается. Точность этого метода имеет порядок  $f''$  по  $x$  и  $y$ . Тем самым (5.47) — формула

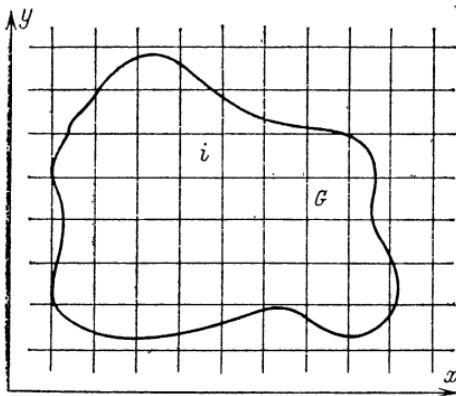


Рис. 41

прямоугольников, обобщенная на двухмерный случай. В результате аналогичных рассуждений и выкладок можно получить и формулы более высокого порядка. Однако если область интегрирования  $G$  представляет собой некоторый  $n$ -мерный прямоугольный параллелепипед, то последовательное интегрирование приводит к кубатурным формулам, которые получаются путем произведения одномерных формул. Если одномерная формула интегрирования имеет вид

$$\int f dx = \sum_i c_i f_i, \quad (5.48)$$

то

$$\iint f dx dy = \sum_{i,j} c_{ij} f_{ij} = c_{11} f_{11} + c_{12} f_{12} + \dots + c_{nn} f_{nn}, \quad (5.49)$$

$$\iiint f dx dy dz = \sum_{i,j,k} c_{ijk} f_{ijk}, \quad (5.50)$$

$$f_i = f(x_i), \quad (5.51)$$

$$f_{ij} = f(x_i, y_j), \quad (5.52)$$

$$f_{ijk} = f(x_i, y_j, z_k), \quad (5.53)$$

а коэффициенты находятся путем простого произведения

$$c_{ij} = c_i c_j, \quad (5.54)$$

$$c_{ijk} = c_i c_j c_k. \quad (5.55)$$

Так, в случае перехода к двухмерной формуле Симпсона получаем

$$\int f dx = \frac{\Delta x}{3} (f_0 + 4f_1 + f_2), \quad (5.56)$$

$$c_1 = \frac{\Delta x}{3}, \quad c_2 = \frac{4\Delta x}{3}, \quad c_3 = \frac{\Delta x}{3},$$

$$c_{ij} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1^2 & c_1 c_2 & c_1 c_3 \\ c_2 c_1 & c_2^2 & c_{23} \\ c_{31} & c_3 c_2 & c_{33}^2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\Delta x \Delta y}{9} & \frac{4\Delta x \Delta y}{9} & \frac{\Delta x \Delta y}{9} \\ \frac{4\Delta x \Delta y}{9} & \frac{16\Delta x \Delta y}{9} & \frac{4\Delta x \Delta y}{9} \\ \frac{\Delta x \Delta y}{9} & \frac{4\Delta x \Delta y}{9} & \frac{\Delta x \Delta y}{9} \end{pmatrix} = \frac{\Delta x \Delta y}{9} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 4 & 16 & 4 \\ 1 & 4 & 4 \end{pmatrix},$$

$$\int_a^b \int_c^d f(x, y) dx dy =$$

$$= \frac{\Delta x \Delta y}{9} \{f_{11} + f_{13} + f_{31} + f_{33} + 4(f_{12} + f_{21} + f_{23} + f_{32} + 4f_{22})\}. \quad (5.57)$$

Легко обобщить эту процедуру и на более общий  $n$ -кратный случай. По этим правилам можно реализовать самые различные схемы интегрирования. Например, двухмерная схема Гаусса имеет вид

$$J = \int_a^b \int_c^d f(x, y) dx dy = \frac{(b-a)(d-c)}{4} \sum_{i,j} c_{ij} f_{ij},$$

где

$$f_{ij} = f\left(\frac{b-a}{2} \lambda_i + \frac{b+a}{2}; \frac{d-c}{2} \lambda_j + \frac{d+c}{2}\right),$$

а весовые коэффициенты  $c_{ij}$  находятся путем произведения соответствующих одномерных весовых коэффициентов  $c_i$  и  $c_j$ . Понятно, что в данном случае изображенная на рис. 41 сетка будет неравномерной по  $x$  и  $y$ .

Программы 97—100 предназначены для численного интегрирования аналитических функций, а программа 101 для интегрирования табличных данных.

**Программа 97. Вычисление двукратного интеграла методом Гаусса при  $n=2$ .** На подпрограмму-функцию отведено 28 шагов. Ее аргументами являются  $x=\Pi2$ ,  $y=\Pi3$ . Перед началом счета необходимо ввести следующие числа:

$$-\sqrt{3/5} = \Pi4, \quad \sqrt{3/5} = \Pi5, \quad (5/9)^2 = \Pi6, \quad (8/9)^2 = \Pi7, \quad 40/81 = \Pi8,$$

а также пределы интегрирования

$$\frac{b-a}{2} = \text{ПА}, \quad \frac{b+a}{2} = \text{ПВ}, \quad \frac{d-c}{2} = \text{ПС}, \quad \frac{d+c}{2} = \text{ПД}.$$

Регистры П0, П1, П9 — буферные:  $\lambda_i = \text{П0}$ ,  $\lambda_j = \text{П1}$ ,  $\sum \dots = \text{П9}$ .

|     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |
|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| Cx  | П9  | Пх4 | П0  | П1  | ПП  | 47  | Cx  | П1  | ПП  |
| 53  | Пх5 | П1  | ПП  | 47  | Cx  | П0  | ПП  | 53  | Cx  |
| П1  | ПП  | 64  | Пх7 | ПП  | 59  | Пх4 | П1  | ПП  | 53  |
| Пх5 | П0  | ПП  | 47  | Cx  | П1  | ПП  | 53  | ИП5 | П1  |
| ПП  | 47  | ПхА | ×   | ПхС | ×   | С/П | ПП  | 64  | Пх6 |
| ПП  | 59  | B/0 | ПП  | 64  | Пх8 | ПП  | 59  | B/0 | ×   |
| Пх9 | +   | П9  | B/0 | Пх0 | ПхА | ×   | ПхВ | +   | П2  |
| Пх1 | ПхС | ×   | ПхД | +   | П3  | ... | ... | ... | B/0 |

Тест:  $I = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 e^{-(x^2+y^2)} dx dy = 2,2460406$ ,  $t_{\text{сч}} = 1 \text{ мин } 24 \text{ с.}$

Этой же программой можно воспользоваться для вычисления двухкратных интегралов по формуле Эрмита. Для этого необходимо положить

$$\frac{b-a}{2} = \frac{d-c}{2} = 1 = \text{ПА} = \text{ПС}, \quad \frac{b+a}{2} = \frac{d+c}{2} = 0 = \text{ПВ} = \text{ПД},$$

так как  $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} f(x, y) dx dy = \sum_{i, k} a_{ik} f_{ik}$ . Далее следует изменить абсциссы корней

$$-1,2247449 = \text{П4}, \quad 1,2247449 = \text{П5},$$

а весомые коэффициенты

$$a_{11} = a_1^2 = 8,7266465 \cdot 10^{-2} = \text{П6},$$

$$a_{22} = a_2^2 = 1,3962634 = \text{П7},$$

$$a_{12} = a_1 \cdot a_2 = 3,4906585 \cdot 10^{-1} = \text{П8}.$$

Подпрограмма-функция зависит от тех же значений аргументов. Для интеграла

$$I_s = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)} f(x, y) dx dy,$$

где  $f(x, y) = 1$ , в результате счета при  $n = 3$  получаем  $I_s = 3,1415925$ , что совпадает с реальным значением интеграла  $I_s = \pi$ . Время счета 1 мин 24 с. Как видим, программа оказалась универсальной: с ее помощью можно интегрировать два принципиально разных вида интегралов.

Хотя двукратную формулу Симпсона вывести и легко, но программа получается довольно громоздкой.

#### Программа 98\*. Двукратное интегрирование методом Симпсона.

На подпрограмму-функцию отведено 14 шагов. Аргументами функции являются  $x = \text{П5}$ ,  $y = \text{П6}$ . Перед счетом следует ввести число отрезков разбиения  $n = \text{П0}$ , пределы интегрирования  $a = \text{ПА}$ ,  $b = \text{ПВ}$ ,  $c = \text{ПС}$ ,  $d = \text{ПД}$ . В программе использованы циклы L0, L1.

Память:  $n + 1 = \text{П2}$ ,  $h_x = \text{П3}$ ,  $h_y = \text{П4}$ ,  $\sum y_i = \text{П9}$ , ПС, ПД — буферные. Регистры П7, П8, ПЕ могут быть использованы как буферные при вычислении значений функции. Заметим, что для вычислений методом Симпсона число  $n$  должно быть четным и  $n \geq 4$ .

|     |     |     |     |     |     |     |       |      |     |
|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-------|------|-----|
| ПxB | ПxA | —   | Пx0 | ÷   | П3  | Cx  | П9    | ПxD  | ПxC |
| —   | Пx0 | ÷   | П4  | Пx0 | 1   | +   | П0    | П1   | П2  |
| ПxA | П5  | ПxC | П6  | ПП  | 92  | ПС  | Пx0   | ПП   | 65  |
| ПД  | Пx1 | ПП  | 65  | ПxD | ×   | ПxC | ×     | Пx9  | +   |
| П9  | Пx5 | Пx3 | +   | П5  | FL0 | 24  | ПxA   | П5   | Пx6 |
| Пx4 | +   | П6  | Пx2 | П0  | FL1 | 24  | Пx9   | Пx3  | Пx4 |
| ×   | ×   | 9   | ÷   | C/П | Пx2 | 1   | —     | 2    | ÷   |
| П7  | 1   | +   | —   | K x | П8  | Пx7 | —     | Fx=0 | 82  |
| 1   | B/0 | Пx8 | 1   | 8   | 0   | ×   | F cos | /—/  | 3   |
| +   | B/0 | ... | ... | ... | ... | ... | B/0   |      |     |

Тест: при  $n = 4$ ,  $f(x, y) = 1$ ,  $a = 0 = c$ ,  $b = d = 12$ ,  $I = 144$ ,  $t_{\text{сч}} = 9$  мин 20 с.

Сложную функцию, программа вычисления которой не укладывается в 13 шагов, можно проинтегрировать методом прямоугольников по программе 99.

**Программа 99. Вычисление двукратного интеграла методом прямоугольников.** Перед счетом ввести число отрезков разбиения  $n = \text{П0}$ , пределы интегрирования  $a = \text{ПА}$ ,  $b = \text{ПВ}$ ,  $c = \text{ПС}$ ,  $d = \text{ПД}$ . Аргументами подпрограммы-функции являются  $x = \text{П5}$ ,  $y = \text{П6}$ . Величины шага по аргументам находятся в регистрах  $h_x = \text{П3}$ ,  $h_y = \text{П4}$ . Регистры П7, П8, ПС, ПД, ПЕ — буферные, причем последние три из них могут использоваться при вычислении значения функции.

|     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |
|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| ПxB | ПxA | —   | Пx0 | ÷   | П3  | Cx  | П9  | ПxD | ПxC |
| —   | Пx0 | ÷   | П4  | Пx0 | 1   | +   | П0  | П1  | П2  |
| ПxA | П5  | ПxC | П6  | ПП  | 51  | Пx9 | +   | П9  | Пхб |
| Пx3 | +   | П5  | FL0 | 24  | ПxA | П5  | Пx6 | Пx4 | +   |
| П6  | Пx2 | П0  | FL1 | 24  | Пx9 | Пx3 | Пx4 | ×   | ×   |
| C/П | ... | ... | ... | ... | B/0 |     |     |     |     |

Тест:  $n = 4$ ,  $f(x, y) = 1$ ,  $a = 0$ ,  $b = 4$ ,  $c = 0$ ,  $d = 4$ . В результате счета получаем  $I = 25$ ,  $t_{\text{сч}} = 2$  мин 3 с.

**Программа 100.** Вычисление трехкратного интеграла методом прямоугольников. Ввести число отрезков разбиения  $n$  С/П и пределы интегрирования по каждой переменной  $b_x \uparrow a_x$  С/П  $b_y \uparrow a_y$  С/П  $b_z \uparrow a_z$  С/П.

Память: L0, L1, L2—циклы, П3—буфер,  $a_x=\text{ПА}$ ,  $a_y=\text{ПВ}$ ,  $a_z=\text{ПВ}$ ,  $h_x=\text{П4}$ ,  $h_y=\text{П5}$ ,  $h_z=\text{П6}$ ,  $\sum y_i=\text{ПД}$ . Аргументами подпрограммы-функции являются  $x=\text{П7}$ ,  $y=\text{П8}$ ,  $z=\text{П9}$ . Регистр ПЕ—свободен.

|     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |
|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| П/0 | Cx  | ПД  | Px0 | С/П | ПА  | —   | Px0 | ÷   | П4  |
| С/П | ПВ  | —   | Px0 | ÷   | П5  | С/П | П0  | —   | Пх0 |
| ÷   | П6  | Px0 | 1   | +   | П0  | П1  | П2  | П3  | ПхА |
| П7  | PxB | П8  | PxC | П9  | ПП  | 74  | ПхД | +   | ПД  |
| Px4 | Px7 | +   | P7  | FL0 | 35  | PxA | P7  | Px5 | Пх8 |
| +   | P8  | Px3 | P0  | FL1 | 35  | PxB | P8  | Px6 | Пх9 |
| +   | P9  | Px3 | P1  | FL2 | 35  | PxD | Px6 | ×   | Пх5 |
| ×   | Px4 | ×   | C/П | ... | ... | ... | ... | ... | B/0 |

Тест:  $n=1$ ,  $f=1$ ,  $a_x=a_y=a_z=0$ ,  $b_x=b_y=b_z=1$ .

Результат счета:  $I=8$ ,  $t_{\text{сч}}=0$  мин 59 с.

**Программа 101\*.** Вычисление двукратного интеграла методом Симпсона по табличным данным. Ввести  $n$  С/П  $a$  С/П  $b$  С/П  $c$  С/П  $d$  С/П  $f_{00}$  С/П  $f_{01}$  С/П ...  $f_{nn}$  С/П.

Переключатель угловой меры должен находиться в положении «градус».

Память:  $n+1=\text{П0}$ ,  $a=\text{ПА}$ ,  $b=\text{ПВ}$ ,  $c=\text{ПС}$ ,  $d=\text{ПД}$ ,  $h_x=\text{П3}$ ,  $h_y=\text{П4}$ ,  $y_i=\text{П5}$ ,  $\sum y_i=\text{П9}$ , регистры П7 и П8—буферные.

Тест:

|                |                |                |                |                |
|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|
| $n = 4$ ,      | $a = 0$ ,      | $b = 12$ ,     | $c = 0$ ,      | $d = 12$ ,     |
| $f_{00} = 1$ , | $f_{01} = 1$ , | $f_{02} = 1$ , | $f_{03} = 1$ , | $f_{04} = 1$ , |
| $f_{10} = 1$ , | $f_{11} = 1$ , | $f_{12} = 1$ , | $f_{13} = 1$ , | $f_{14} = 1$ , |
| $f_{20} = 1$ , | $f_{21} = 1$ , | $f_{22} = 1$ , | $f_{23} = 1$ , | $f_{24} = 1$ , |
| $f_{30} = 1$ , | $f_{31} = 1$ , | $f_{32} = 1$ , | $f_{33} = 1$ , | $f_{34} = 1$ , |
| $f_{40} = 1$ , | $f_{41} = 1$ , | $f_{42} = 1$ , | $f_{43} = 1$ , | $f_{44} = 1$ , |

Результат счета:  $I = 144$ .

|       |     |     |       |     |     |     |     |     |     |
|-------|-----|-----|-------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| P0    | C/П | ПА  | C/П   | ПВ  | C/П | ПС  | C/П | ПД  | П5  |
| PxB   | PxA | —   | Px0   | ÷   | P3  | Cx  | P9  | PxD | PxC |
| —     | Px0 | —   | P4    | Px0 | 1   | +   | P0  | P1  | P2  |
| Px5   | C/П | P5  | Px0   | ПП  | 61  | ПД  | Px1 | ПП  | 61  |
| PxD   | ×   | Px5 | ×     | Px9 | +   | P9  | FL0 | 30  | Пx2 |
| P0    | FL1 | 30  | Px9   | Px3 | Px4 | ×   | ×   | 9   | ÷   |
| C/П   | Px2 | 1   | —     | 2   | ÷   | P7  | 1   | +   | —   |
| K   x | Px7 | —   | Fx=0  | 78  | 1   | B/0 | Px8 | 1   |     |
| 8     | 0   | ×   | F cos | /—/ | 3   | +   | B/0 |     |     |

Данная программа позволяет численно интегрировать квадратные таблицы функций, содержащие более 25 точек функции. Если таблица гораздо меньше или количество строк и столбцов таблицы не одинаково, то можно воспользоваться формулой прямоугольников, определив сумму всех значений функции и умножив ее на величину шага по  $x$  и  $y$ .

## 7. Метод Монте-Карло

Метод Монте-Карло позволяет вычислять интегралы высокой кратности с самыми сложными областями интегрирования: эллипсоидальными, грушевидными и прочими. Преимущество этого метода состоит также в том, что его точность не зависит от плавности подынтегральной функции и с увеличением числа  $N$  растет значительно быстрее, чем при том же числе точек в методе Симпсона. Идея метода Монте-Карло состоит в произвольном заполнении искомого  $m$ -мерного объема случайными точками, усредненное значение функции в которых дает хорошее приближение  $m$ -кратного интеграла, если область интегрирования представляет собой единичный  $m$ -мерный куб, т. е. куб, ребро которого равно единице измерения. Сделать его единичным позволяет всегда преобразование переменных

$$x_i = a_i + (b_i - a_i) y_i, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad (5.58)$$

где

$$a_i \leq x_i \leq b_i, \quad i = 1, 2, \dots, m. \quad (5.59)$$

Тогда

$$0 \leq y_i \leq 1, \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (5.60)$$

и

$$\begin{aligned} J &= \iint \cdots \int_G f(x_1, x_2, \dots, x_m) dx_1 dx_2 \dots dx_m = \\ &= (b_1 - a_1) (b_2 - a_2) \dots (b_m - a_m) \iint \cdots \int_{\sigma} f(y_1, y_2, \dots, y_m) d\sigma, \end{aligned} \quad (5.61)$$

где  $d\sigma = dy_1 dy_2 \dots dy_m$  — элементарный объем в переменных  $y_i$ .

Рассмотрим случай области интегрирования  $G$ , расположенной внутри  $m$ -мерного параллелепипеда. Выберем  $m$  равномерно распределенных на отрезке  $[0, 1]$  последовательностей случайных чисел

$$\begin{array}{cccccc} y_1^1 & y_2^1 & y_3^1 & \dots & y_N^1 \\ y_1^2 & y_2^2 & y_3^2 & \dots & y_N^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ y_1^m & y_2^m & y_3^m & \dots & y_N^m \end{array} \quad (5.62)$$

Точки  $M_i (y_1^i, y_2^i, \dots, y_N^i)$  можно рассматривать как случайные. Выбрав достаточно большое количество точек  $M_1, M_2, \dots, M_N$ , проведем, какие из них лежат и какие не лежат в области  $\sigma$ . Пусть

точки  $M_1, M_2, \dots, M_n$  лежат в  $\sigma$ , а  $M_{n+1}, M_{n+2}, \dots, M_N$  не лежат в ней, как показано на рис. 42. При достаточно большом количестве точек

$$J = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^n f(M_i). \quad (5.63)$$

При программировании на ЭВМ последнюю сумму обычно заменяют на

$$J = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(M_i), \quad (5.64)$$

где

$$f(M_i) = \begin{cases} f(M_i), & M_i \text{ лежит в } \sigma \\ 0, & M_i \text{ не лежит в } \sigma. \end{cases} \quad (5.65)$$

Точность метода определяется количеством и качеством случайных чисел (5.62). Обычно их моделируют в результате того или иного рекуррентного процесса в ЭВМ и называют псевдослучайными, так

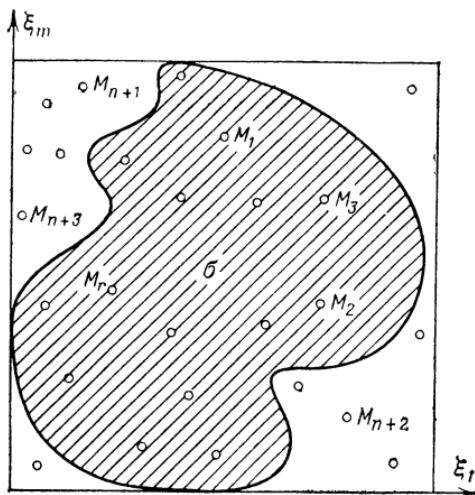


Рис. 42

как следуют они в определенной последовательности и могут быть заранее предсказаны. Однако на точность метода Монте-Карло это не влияет. Наиболее опасным недостатком при генерации псевдослучайных чисел является малый период повторения, когда после небольшого количества случайных чисел генерируется последовательность тех же чисел. При использовании их в методе Монте-Карло может наступить такой момент, когда в  $m$ -мерном конфигурационном пространстве несколько точек сольются в одну, а некоторая часть конфигурационного пространства окажется незаполненной. Поэтому будет утеряна часть информации о функции, а значит, существенно постра-

дает точность метода. Встроенный генератор вырабатывает несколько десятков тысяч случайных чисел. Генерировать случайные числа на микрокалькуляторах МК-54, Б3-34 можно путем выделения дробной части числа

$$a_{n+1} = \{11a_n + \pi\}. \quad (5.66)$$

Период  $T$  зависит от  $a_0$ . Выбрав  $a_0 = 10^{-2}$ , получим  $T = 9000$ , т. е. алгоритм (5.66) будет давать 9000 различных чисел.

Число точек, которое необходимо взять при вычислении интеграла, можно приближенно оценить при известной относительной погрешности  $\varepsilon$  по формуле

$$N \geq \frac{1}{2\varepsilon^2}. \quad (5.67)$$

Отсюда вытекает, что для  $\varepsilon = 0.1$  необходимо вычислить значения функции в  $N = 50$  точках. Если  $T$  — период генератора случайных чисел,  $k$  — кратность интеграла, то количество взятых точек не должно превышать  $N \leq \frac{T}{k}$ . Так, для алгоритма (5.66) при вычислении девятикратного интеграла количество точек функции не должно быть больше 1000.

С увеличением количества точек время вычисления функции возрастает и в случае  $N \cdot k \sim 9000$  при сложной формуле вычисления функции может доходить до двух суток. Поэтому при большом количестве точек лучше обратиться к вычислению на большой ЭВМ.

**Программа 102\*. Вычисление кратных интегралов методом Монте-Карло.** Ввести количество точек функции  $N$  С/П. Предварительно в основной программе в месте, указанном точками набрать программу вычисления функции. При этом если точка не попадает в область интегрирования  $\sigma$ , то  $f(M_i) = 0$ . Программа позволяет вычислять интегралы кратности 2, 3, 4, ..., 12.

Память: L0 — цикл,  $N = \text{ПД}$ ,  $\sum y_i = \text{ПЕ}$ . Аргументами функции являются  $x_1 = \text{П1}$ ,  $x_2 = \text{П2}$ ,  $x_3 = \text{П3}$ ,  $x_4 = \text{П4}$ ,  $x_5 = \text{П5}$ ,  $x_6 = \text{П6}$ ,  $x_7 = \text{П7}$ ,  $x_8 = \text{П8}$ ,  $x_9 = \text{П9}$ ,  $x_{10} = \text{ПА}$ ,  $x_{11} = \text{ПВ}$ ,  $x_{12} = \text{ПС}$ .

|     |    |     |     |     |     |     |     |     |     |
|-----|----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| ПД  | П0 | Cx  | ПЕ  | КСч | П1  | КСч | П2  | КСч | П3  |
| КСч | П4 | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... |
| ПxE | +  | ПЕ  | FL0 | 04  | ПxE | ПxD | ÷   | ПД  | С/П |

В качестве примера вычислим объем пятимерного шара:

$$V = \iiint \int dx_1 dx_2 dx_3 dx_4 dx_5,$$

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 \leq 1,$$

$$\begin{aligned} a_1 &= -1, & b_1 &= 1, & a_2 &= -1, & b_2 &= 1, & a_3 &= -1, \\ b_3 &= 1, & a_4 &= -1, & b_4 &= 1, & a_5 &= -1, & b_5 &= 1. \end{aligned}$$

Переходим к новым переменным, чтобы все точки лежали внутри единичного куба:

$$x_i = a_i + (b_i - a_i) y_i = -1 + 2y_i.$$

Тогда  $dx_1 dx_2 dx_3 dx_4 dx_5 = 32 dy_1 dy_2 dy_3 dy_4 dy_5$ . Задав  $\varepsilon = 0.1$ , берем  $N = 50$  точек.

Программа целиком выглядит следующим образом:

$$\begin{array}{cccccccccc}
 \text{ПД} & \text{П0} & \text{Cx} & \text{ПЕ} & \text{КС4} & \text{П1} & \text{КС4} & \text{П2} & \text{КС4} & \text{П3} \\
 \text{КС4} & \text{П4} & \text{КС4} & \text{П5} & 2 & \times & 1 & - & \text{Fx}^2 & \text{Пx4} \\
 2 & \times & 1 & - & \text{Fx}^2 & + & \text{Px3} & 2 & \times & 1 \\
 - & \text{Fx}^2 & + & \text{Px2} & 2 & \times & 1 & - & \text{Fx}^2 & + \\
 \text{Px1} & 2 & \times & 1 & - & \text{Fx}^2 & + & 1 & \leftrightarrow & - \\
 \text{Fx} \geq 0 & 55 & 1 & \text{БП} & 56 & \text{Cx} & \text{PxE} & + & \text{ПЕ} & \text{FL0} \\
 04 & \overline{\text{Px}} & \text{PxD} & \div & 3 & 2 & \times & \text{ПД} & \text{C/P}
 \end{array}$$

Счет длится 22 мин. Значение интеграла, определяющее объем пятимерного шара, равно  $V = 5.12$ . Заметим, что метод Монте-Карло предпочтителен при вычислении двукратных и трехкратных интегралов, если область интегрирования имеет очень сложный вид.

## 8. Некоторые практические задачи

### 1. Вычислить интегралы Френеля

$$S(1) = \int_0^1 \sin\left(\frac{\pi}{2} t^2\right) dt, \quad C(1) = \int_0^1 \cos\left(\frac{\pi}{2} t^2\right) dt.$$

Воспользовавшись программой 88, получим  $S(1) = 0.4382591$ , а  $C(1) = 0.7798935$ . Интегрирование методом Симпсона проводилось при  $n = 40$  точках разбиения.

2. Построить график светимости электрической лампочки. Светимость — отношение энергии, заключенной в видимом спектре частот,

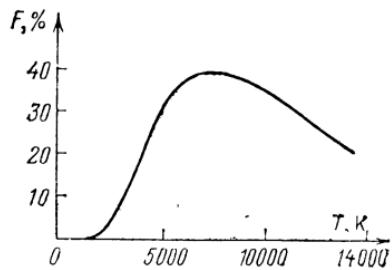


Рис. 43

к общей энергии излучения, выраженное в процентах, находят путем интегрирования:

$$F = 64.77 \int_{4 \cdot 10^{-5}}^{7 \cdot 10^{-5}} x^{-5} \times \left( e^{\frac{1.432}{Tx}} - 1 \right)^{-1} T^{-4} dx.$$

Так как подынтегральная функция достаточно плавная, а для построения графика необходимо не более трех значащих цифр, то для вычисления определенного интеграла можно воспользоваться методом Гаусса

Таблица 21

| $T, 1000 \text{ K}$ | $F, \%$          | $\sim F, \%$ | $T, 1000 \text{ K}$ | $F, \%$    | $\sim F, \%$ |
|---------------------|------------------|--------------|---------------------|------------|--------------|
| 1.0                 | 0.000 199 893 99 | 0.0002       | 8.0                 | 38.228 553 | 38           |
| 2.0                 | 0.805 807 45     | 0.81         | 8.5                 | 37.085 392 | 37           |
| 2.5                 | 3.426 142 3      | 3.4          | 9.0                 | 35.682 424 | 36           |
| 3.0                 | 8.255 326 8      | 8.3          | 9.5                 | 34.180 171 | 34           |
| 3.5                 | 14.512 663       | 15           | 10.0                | 32.576 398 | 33           |
| 4.0                 | 21.062 491       | 21           | 10.5                | 30.944 979 | 31           |
| 4.5                 | 27.000 967       | 27           | 11.0                | 29.322 331 | 29           |
| 5.0                 | 31.824 664       | 32           | 11.5                | 27.734 079 | 28           |
| 5.5                 | 35.368 732       | 35           | 12.0                | 26.197 642 | 26           |
| 6.0                 | 37.684 399       | 38           | 12.5                | 24.724 278 | 25           |
| 6.5                 | 38.932 461       | 39           | 13.0                | 23.320 687 | 23           |
| 7.0                 | 39.311 908       | 39           | 13.5                | 21.990 247 | 22           |
| 7.5                 | 39.019 17        | 39           | 14.0                | 20.733 933 | 21           |

с точностью до девятой степени, т. е. программой 90. Для этого положим  $1.432 = \text{П7}$ ,  $64.77 = \text{П9}$ . Перед каждым пуском программы необходимо вводить  $4 \cdot 10^{-5} = \text{ПА}$ ,  $7 \cdot 10^{-5} = \text{ПВ}$ ,  $T = \text{ПВ}$ . Температура  $T$  принимает значения 1000, 2000, 3000, ..., 13 000, 14 000. Подпрограмма функция вычисления подынтегрального выражения:

$$\begin{array}{ccccccccc} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \text{П0} & \text{Пx8} & \times & \text{Пx7} & \leftrightarrow & \div \\ \text{Fe}^x & 1 & - & \text{Пx0} & \text{Fx}^2 & \text{Fx}^2 & \times & \text{Пx0} & \times & \text{Пx8} \\ \text{Fx}^2 & \text{Fx}^2 & \times & \text{Пx9} & \leftrightarrow & \div & & \text{B/0} & & \end{array}$$

В результате вычислений получаем табл. 21 величины светимости электрической лампочки в зависимости от температуры накала вольфрамовой нити. А на рис. 43 приведен ее график. Из него видно, что самая высокая светимость будет при  $T = 6000 \text{ K}$ .

3. В табл. 22 приведены показания спидометра автомобиля через каждые 15 с. Требуется определить путь, пройденный автомобилем за 15 мин.

Понятно, что шаг таблицы по времени  $h = 15 \text{ с} = \frac{1}{240} \text{ ч}$ . Поэтому

$$S(t) = \int_0^{0.25} v(t) dt.$$

Воспользуемся программой 86 для численного интегрирования таблицы. У нас  $n = 60$ ,  $a = 0$ ,  $b = 0.25$ . Необходимо ввести по программе лишь значения  $v(t_i)$ . Окончательно получаем

$$S(t) = 15,12449 \approx 15,1 \text{ км.}$$

Таблица 22

| $t_1$ , мин | $v_1$ , км/ч | $t_2$ , мин | $v_2$ , км/ч | $t_3$ , мин | $v_3$ , км/ч | $t_4$ , мин | $v_4$ , км/ч |
|-------------|--------------|-------------|--------------|-------------|--------------|-------------|--------------|
| 0.0         | 20           | 4.0         | 50           | 80          | 40           | 12.0        | 95           |
| 0.25        | 30           | 4.25        | 55           | 8.25        | 50           | 12.25       | 95           |
| 0.5         | 40           | 4.5         | 55           | 8.5         | 55           | 12.5        | 100          |
| 0.75        | 60           | 4.75        | 45           | 8.75        | 60           | 12.75       | 100          |
| 1.0         | 55           | 5.0         | 50           | 9.0         | 65           | 13.0        | 110          |
| 1.25        | 50           | 5.25        | 55           | 9.25        | 70           | 13.25       | 95           |
| 1.5         | 60           | 5.5         | 60           | 9.5         | 80           | 13.5        | 90           |
| 1.75        | 55           | 5.75        | 60           | 9.75        | 80           | 13.75       | 70           |
| 2.0         | 45           | 6.0         | 60           | 10.0        | 85           | 14.0        | 90           |
| 2.25        | 30           | 6.25        | 65           | 10.25       | 70           | 14.25       | 100          |
| 2.5         | 20           | 6.5         | 70           | 10.5        | 80           | 14.5        | 105          |
| 2.75        | 5            | 6.75        | 40           | 10.75       | 85           | 14.75       | 120          |
| 3.0         | 8            | 7.0         | 20           | 12.0        | 90           | 15.0        | 100          |
| 3.25        | 0            | 7.25        | 0            | 12.25       | 90           |             |              |
| 3.5         | 20           | 7.5         | 0            | 12.5        | 85           |             |              |
| 3.75        | 40           | 7.75        | 30           | 12.75       | 90           |             |              |

4. Ионизованная электронная плазма с плотностью заряда  $\rho = 10^4 e^{-r^2}$  Кл/м<sup>3</sup> распределена в пространстве. Определить полный заряд плазмы.

Очевидно, элемент объема сферы равен

$$dV = 4\pi r^2 dr.$$

Тогда

$$Q = 4\pi \cdot 10^4 \int_0^\infty r^2 e^{-r^2} dr.$$

Обозначим

$$I = \int_0^\infty r^2 e^{-r^2} dr = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^\infty r^2 e^{-r^2} dr.$$

Последний интеграл легко вычислить по программе 95, где в качестве подпрограммы-функции использован фрагмент

$$\text{ПxA Fx}^2 \text{ 2 } \div \text{ B/O}$$

Получаем  $I = 4.4311345 \cdot 10^{-1}$ . Тогда значение полного заряда плазмы равно  $Q = 55683.277 \approx 5.6 \cdot 10^4$  Кл.

## Глава 6

# РЕШЕНИЕ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

### 1. Сущность разностного метода решения уравнений

При описании физических явлений не всегда удается найти закон, устанавливающий в явном виде зависимость между величинами, хотя и известно, как взаимосвязаны производные этих величин по времени и координатам. Известно много аналитических методов решения дифференциальных уравнений, когда решение записывается в виде интеграла от некоторой функции. Но при решении практических задач интегралы часто не выражаются в элементарных функциях. В этих случаях прибегают к численным методам получения решения. Если начальное условие дифференциального уравнения задано, то решение единствено и получают его в виде таблицы значений искомой функции, воспользовавшись каким-либо методом численного интегрирования дифференциального уравнения. В результате вычислений на ЭВМ мы получаем значения функции лишь на дискретном множестве значений  $x$ . Для анализа получаемого решения воспользуемся разложением Фурье по модам. Каждой моде, как известно, соответствуют две встречные волны. Если функция удовлетворяет условиям Дирихле, то ее в пределах области  $X$  можно разложить в бесконечный ряд Фурье:

$$y(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} g_k e^{i 2 \pi k x}, \quad (6.1)$$

где

$$g_k = \frac{1}{X} \int y(x) e^{-i 2 \pi k x} dx. \quad (6.2)$$

Коэффициенты  $g_k$  определяют амплитуду мод с длиной волны  $X/k$ . Рассмотрим случай равномерной дискретной сетки, когда ее элементы  $\Delta x_j$  имеют постоянную длину  $h$  и число всех точек функции равно  $N$ . В этом случае значение функции в узле  $j$  можно записать в виде ряда Фурье, содержащего конечное число членов

$$y_i = \sum_{k=1}^N g_k e^{i 2 \pi k x_j} = \sum_{k=1}^N g_k e^{i \frac{2 \pi k j}{N}}, \quad (6.3)$$

где амплитуда моды дается формулой

$$g_k = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N y_j e^{-i \frac{2\pi k j}{N}}. \quad (6.4)$$

Если число точек увеличить до бесконечности, то формулы (6.3), (6.4) преобразуются в (6.1), (6.2), где  $X = Nh$ ,  $x_j = jh$ . В случае дискретной аппроксимации число мод конечно, это вызвано тем, что мы пренебрегаем фурье-модами функции, длина которых меньше  $h$ . Для достаточно гладких функций такое предположение естественно. А при анализе конечно-разностных схем мы будем определять интервал аппроксимации по отношению к отдельной фурье-моде. Это позволит оценить степень искажения, вносимую дискретной аппроксимацией в различных областях длин волн.

Рассмотрим разностную аппроксимацию производных. Аппроксимация второго порядка имеет вид

$$\frac{\Delta y(x_j)}{\Delta x} = \frac{y_{j+1} - y_{j-1}}{2h}, \quad (6.5)$$

где

$$y_i = y(x_j). \quad (6.6)$$

Проведем сравнение между точной и разностной производной для одной из мод Фурье:

$$u_k = g_k e^{ikx}; \quad (6.7)$$

$$\frac{du_k}{dx} = ik g_k e^{ikx} = iku_x, \quad (6.8)$$

$$\frac{\Delta u_k}{\Delta x} = \frac{g_k e^{ikx_{j+1}} - g_k e^{ikx_{j-1}}}{2h}, \quad (6.9)$$

Так как

$$x_{j+1} = x_j + \Delta, \quad (6.10)$$

$$x_{j-1} = x_j - \Delta, \quad (6.11)$$

то

$$\frac{\Delta u_k}{\Delta x} = \frac{iu_k \sin kh}{h}. \quad (6.12)$$

Для малых значений  $kh$  величина  $\sin kh \sim kh$ , поэтому формулу (6.12) можно представить формулой (6.8). Аппроксимация второй производной на разностной сетке имеет вид

$$\frac{\Delta^2 y_j}{\Delta x^2} = \frac{y_{j+1} - 2y_j + y_{j-1}}{h^2}. \quad (6.13)$$

Тогда в результате аналогичных преобразований получим

$$\frac{d^2 u_k}{dx^2} = -k^2 u_k, \quad (6.14)$$

$$\frac{\Delta^2 u_k}{\Delta x^2} = \frac{2u_k}{h^2} (\cos kh - 1). \quad (6.15)$$

В случае малой величины  $kh$

$$\cos kh \sim 1 - \frac{k^2 h^2}{2}, \quad \frac{\Delta^2 u_k}{\Delta x^2} \sim -k^2 u_k.$$

Таким образом, конечно-разностное отношение является хорошей аппроксимацией первой и второй производной, если мало волновое число  $k$  и соответственно велика длина волны  $2\pi/k$ . Чем длиннее волна, тем аппроксимация лучше.

При решении физических задач предпочтение обычно отдаётся простейшим разностным схемам. Все дело в том, что они неявным образом содержат в себе те или иные законы сохранения, что очень важно для численного моделирования физических процессов. Их часто называют *консервативными методами*. Кроме того, они позволяют за конечное число шагов достаточно быстро получить решение, что очень немаловажно при расчетах на программируемых микроСБИУСах.

## 2. Устойчивость разностного метода

Получаемое в результате вычислений на микроСБИУСе численное решение дифференциального уравнения неизбежно сопровождается погрешностью. Причиной ее является замена дифференциальных уравнений их разностными аналогами и округление чисел на СБИУСе. Возрастание численной ошибки во времени от шага к шагу может привести к большой неточности решения уравнения. В этом случае говорят, что данная разностная схема численно неустойчива.

Рассмотрим интегрирование дифференциального уравнения

$$\frac{du}{dt} = Lu, \quad (6.16)$$

с начальными условиями

$$u(t_0) = x_0, \quad u'(t_0) = v_0, \quad (6.17)$$

где  $L$  — в общем случае некоторый линейный оператор, погрешность на  $n$ -м шаге обозначим как  $\varepsilon^n$ , а на  $(n+1)$ -м шаге —  $\varepsilon^{n+1}$ . Тогда

$$\varepsilon^{n+1} = g\varepsilon^n. \quad (6.18)$$

Чтобы численный метод был устойчив, необходимо

$$|\varepsilon^{n+1}| \leq |\varepsilon^n| \quad (6.19)$$

или

$$|g| \leq 1. \quad (6.20)$$

В случае векторной величины  $u$  получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений. Ошибка  $\varepsilon^n$  будет иметь ту же размерность, что и вектор  $u$ , а ее компоненты на следующем временном слое будут выражаться через  $\varepsilon^n$  посредством матрицы перехода  $G$  как результат матричного умножения

$$\varepsilon^{n+1} = G\varepsilon^n. \quad (6.21)$$

Пусть  $T$  — разностный оператор, связывающий вектор состояния  $u$  на двух временных слоях  $t_n$  и  $t_{n+1}$ . Тогда

$$u^{n+1} + \varepsilon^{n+1} = T(u^n + \varepsilon^n). \quad (6.22)$$

Если вектор ошибки имеет малую амплитуду, то, воспользовавшись разложением в ряд Тейлора по малой ошибке и ограничившись первыми двумя членами разложения, получим

$$T(u^n + \varepsilon^n) = Tu^n + \left\{ \frac{\partial}{\partial u}(Tu) \right\}_n \varepsilon^n. \quad (6.23)$$

Вычитая из (6.23) точное решение

$$u^{n+1} = Tu^n, \quad (6.24)$$

получим линейное уравнение, связывающее компоненты векторов ошибок на двух временных слоях

$$\varepsilon^{n+1} = \left\{ \frac{\partial}{\partial u}(Tu) \right\}_n \varepsilon^n. \quad (6.25)$$

Тогда компоненты матрицы перехода

$$G_{ij} = \frac{\partial u_i^{n+1}}{\partial u_j^n}. \quad (6.26)$$

Условие устойчивости численного метода в случае системы дифференциальных уравнений сводится к требованию, чтобы модуль каждого собственного значения матрицы перехода был меньше или равен единице. В общем случае собственные значения матрицы перехода могут быть и комплексные, тогда мы будем анализировать его модуль по комплексной плоскости

$$|g_i| = \sqrt{g_i g_i^*}, \quad (6.27)$$

где  $g_i^*$  — величина, комплексно сопряженная  $g_i$ .

### 3. Разностные схемы для обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка

Рассмотрим разностные схемы и критерии устойчивости для дифференциального уравнения

$$\frac{du}{dt} = f(u, t). \quad (6.28)$$

Метод Эйлера первого порядка имеет вид

$$u^{n+1} = u^n + f(u^n, t_n) \tau. \quad (6.29)$$

Найдем условие его устойчивости:

$$u^{n+1} + \varepsilon^{n+1} = u^n + \varepsilon^n + f((u^n + \varepsilon^n, t_n) \tau), \quad (6.30)$$

Предполагая, что  $\varepsilon^n$  мало, разложим функцию

$$f(u) = f(u^n + \varepsilon^n)$$

в ряд Тейлора в окрестности  $u^n$ :

$$f(u^n + \varepsilon^n, t_n) = f(u^n, t_n) + \frac{\partial f}{\partial u} \Big|_n \varepsilon^n + \theta(\varepsilon^n). \quad (6.31)$$

Так как основное уравнение имеет вид

$$u^{n+1} = u^n + f(u^n, t_n) \tau,$$

то, вычитая из (6.30) уравнение (6.29) и с учетом (6.31), имеем

$$\varepsilon^{n+1} = \varepsilon^n + \frac{\partial f}{\partial u} \Big|_n \varepsilon^n \cdot \tau + \theta(\varepsilon^n), \quad (6.32)$$

из которого следует простое выражение для множителя перехода

$$g = 1 + \frac{\partial f}{\partial u} \Big|_n \cdot \tau. \quad (6.33)$$

Для устойчивости метода необходимо выполнение условия

$$-1 \leq 1 + \frac{\partial f}{\partial u} \Big|_n \cdot \tau \leq 1, \quad (6.34)$$

что вытекает из (6.20). Решением (6.34) является система неравенств:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial u} \Big|_n \cdot \tau &\leq 0, \\ \frac{\partial f}{\partial u} \Big|_n \cdot \tau &\geq -2. \end{aligned} \quad (6.35)$$

Так как нас интересуют процессы в будущем, а не в прошедшем времени, то  $\tau > 0$  и система неравенств принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial u} \Big|_n &\leq 0, \\ \tau &\leq -\frac{2}{\frac{\partial f}{\partial u} \Big|_n}. \end{aligned} \quad (6.36)$$

Зная вид функции  $f(u, t)$ , легко вычислить временной шаг, при котором численная схема будет устойчива.

Наиболее распространенные разностные схемы для решения дифференциальных уравнений  $du/dt = f(u, t)$ ,  $\alpha = (\partial f / \partial u)_n \tau$  приведены в табл. 23. Многие из них неявным образом содержат в себе те или иные физические законы сохранения. Так, разностная схема (6.29) содержит в себе закон постоянства энтропии: уравнение симметрично относительно замены знака времени на обратный.

Особое место среди разностных методов, приведенных в табл. 23, занимает неявный метод. Он является самым лучшим в том смысле, что устойчив при любых значениях  $\tau$ . Но трудность состоит в том,

Таблица 23

| Название метода         | Схема  | Множитель перехода  |
|-------------------------|--|---|
| Метод Эйлера            | $u^{n+1} = u^n + f(u^n) \tau$<br>Устойчив при $\tau < -\frac{2}{(\frac{\partial f}{\partial u})_n}$ , $\varepsilon = o(\tau)$  | $g = 1 + \alpha$  |
| Двухшаговый метод       | $u^{n+1/2} = u^n + f(u^n) \frac{\tau}{2}$<br>$u^{n+1} = u^n + f(u^{n+1/2}) \tau$<br>или<br>$u^{n+1/2} = u^n + f(u^n) \tau$<br>$u^{n+1} = u^n + \frac{\tau}{2} (f(u^n) + f(u^{n+1/2}))$<br>Устойчив при $\tau < -\frac{2}{(\frac{\partial f}{\partial u})_n}$ , $\varepsilon = o(\tau^2)$ | $g = 1 + \alpha + \frac{\alpha^2}{2}$   |
| Неявный метод           | $u^{n+1} = u^n + \frac{\tau}{2} (f(u^n) + f(u^{n+1})),$<br>$\varepsilon = o(\tau^2)$<br>Метод безусловно устойчив  | $g = \frac{1+\alpha}{1-\alpha}$   |
| Метод Адамса — Башфорта | $u^{n+1} = u^n + \frac{\tau}{2} (3f(u^n) - f(u^{n-1})),$<br>$\varepsilon = o(\tau^2),$<br>Устойчив при $\tau < -\frac{1}{(\frac{\partial f}{\partial u})_n}$   | $g = \frac{1}{2} + \frac{3}{4} \alpha \pm \sqrt{\frac{9}{4} \alpha^2 + \alpha + 1}$ |

что не для всякой функции  $f(u, t)$  он реализуется. Поэтому нельзя составить для него общую программу. Так, для дифференциального уравнения  $\frac{du}{dt} = -\frac{u}{\alpha}$  разностную схему записать легко. Ведь

$$u^{n+1} = u^n + \frac{1}{2} \left( -\frac{u^n}{\alpha} - \frac{u^{n+1}}{\alpha} \right) \tau,$$

откуда

$$u^{n+1} = \frac{2\alpha - \tau}{2\alpha + \tau} u^n.$$

А вот для дифференциального уравнения  $\frac{du}{dt} = -\sin u$  неявной схемой воспользоваться нельзя.

Самым сложным для программирования является метод Адамса — Башфорта. Он является сглаживающим функцию методом, так как

используется значение функции на  $(n+1)$ -м временном слое. Но шаг у него вдвое меньше обычного. Для своей реализации он требует много ячеек памяти.

Простая схема Эйлера очень удобна для реализации на ЭВМ, но имеет первый порядок точности по  $\tau$ . Две разновидности двухшагового метода есть не что иное, как модифицированные схемы Эйлера. Обычно предпочтение отдается первой схеме, поскольку она проще в реализации. Значение  $u^{n+1/2}$  является вспомогательным в промежуточных вычислениях и оно не выводится в результате счета.

Все качественные выводы теории разностных схем легко распространяются и на системы дифференциальных уравнений. Так, для решения системы

$$\begin{aligned} u' &= f_1(u, v, t), \\ v' &= f_2(u, v, t) \end{aligned} \quad (6.37)$$

разностная схема Эйлера дает

$$\begin{aligned} u^{n+1} &= u^n + f_1(u^n, v^n, t_n) \tau, \\ v^{n+1} &= v^n + f_2(u^n, v^n, t_n) \tau. \end{aligned} \quad (6.38)$$

Матрица перехода  $G$  имеет вид

$$G = I + A, \quad (6.39)$$

где  $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  — единичная матрица,

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u_n} \tau & \frac{\partial f_1}{\partial v_n} \tau \\ \frac{\partial f_2}{\partial u_n} \tau & \frac{\partial f_2}{\partial v_n} \tau \end{pmatrix}.$$

Поэтому

$$G = \begin{pmatrix} 1 + \frac{\partial f_1}{\partial u_n} \tau & \frac{\partial f_1}{\partial v_n} \tau \\ \frac{\partial f_2}{\partial u_n} \tau & 1 + \frac{\partial f_2}{\partial v_n} \tau \end{pmatrix}. \quad (6.40)$$

Для того чтобы схема была устойчива, необходимо, чтобы собственные значения матрицы  $G$  не выходили за пределы интервала  $[-1, 1]$ . Обозначив

$$A = 1 + \frac{\partial f_1}{\partial u_n} \tau, \quad B = 1 + \frac{\partial f_2}{\partial v_n} \tau,$$

получим условие устойчивости метода

$$|A + B \pm \sqrt{A^2 + B^2 - 2AB + 4\tau^2(A-1)(B-1)}| \leq 1. \quad (6.41)$$

Если значения  $f$ ,  $\frac{\partial f}{\partial u_n}$ ,  $\frac{\partial f}{\partial v_n}$  выражены численно, то для вычисления собственных значений матрицы  $G$  следует воспользоваться методами и программами, изложенными в гл. 7. То же распространяется и на случай больших систем линейных уравнений.

#### 4. Реализация разностных схем для обыкновенных дифференциальных уравнений

Рассмотрим программы для решения одного дифференциального уравнения (6.28). Обычно схему Эйлера используют, когда функция имеет достаточно сложный вид и затрачивается много времени на вычисление, а количество точек достаточно большое ( $n \sim 200$ ).

**Программа 103.** Схема Эйлера первого порядка. В месте программы, указанном точками, набрать подпрограмму вычисления  $f(u, t)$ , где аргументами функции являются  $t = \text{П2}$ ,  $u = \text{П4}$ . Ввести начальный момент времени  $t_0$  С/П шаг по времени  $\tau$  С/П и начальное значение величины  $u^0$  С/П. Получите  $u^1$ . После каждого очередного запуска программы на индикаторе будет появляться значение  $u^i$ .

Память:  $t_n = \text{П2}$ ,  $\tau = \text{П3}$ ,  $u^n = \text{П4}$ .

$$\begin{array}{ccccccccc} \text{П2} & \text{С/П} & \text{П3} & \text{С/П} & \text{П4} & \text{ПП} & \frac{19}{\text{П2}} & \text{Пх3} & \times & \text{Пх4} \\ + & \text{П4} & \text{С/П} & \text{Пх2} & \text{Пх3} & + & \frac{1}{\text{П2}} & \text{БП} & \underline{05} & \dots \\ \dots & \text{В/0} \end{array}$$

Тест:  $t_0 = 0$ ;  $\tau = 0.25$ ,  $u^0 = 1$ ,  $f(u, t) = u^2 + t^2$ .

Результат счета:  $u^1 = 1.25$ ,  $u^2 = 1.65625$ ,  $u^3 = 2.404541 \dots$

Простая схема Эйлера дает хорошие результаты в том случае, когда производные по  $u$  и  $t$ , начиная со второй, не очень велики. В противном случае гораздо лучшие результаты дает двухшаговый метод и схема Адамса — Башфорта.

**Программа 104.** Двухшаговая схема (а) решения дифференциального уравнения первого порядка. На месте точек в программе набрать подпрограмму вычисления функции  $f(u, t)$ , где  $u = \text{П4}$ ,  $t = \text{П2}$ . Ввести по программе  $t_0$  С/П  $\tau$  С/П  $u^0$  С/П. Получите  $u^1$ . После запуска программы на индикаторе будем получать очередные значения  $u^i$ .

Память:  $t_n = \text{П2}$ ,  $\tau = \text{П3}$ ,  $u^n = \text{П4}$ , П5 — буфер.

$$\begin{array}{ccccccccc} \text{П2} & \text{С/П} & \text{П3} & \text{С/П} & \text{П4} & \text{ПП} & \frac{37}{\text{П2}} & \text{Пх3} & \times & 2 \\ \div & \text{Пх4} & \text{П5} & + & \text{П4} & \text{Пх3} & \frac{2}{\text{П2}} & \div & \text{Пх2} & + \\ \text{П2} & \text{ПП} & \underline{\frac{37}{\text{П2}}} & \text{Пх3} & \times & \text{Пх5} & + & \text{П4} & \text{С/П} & \text{Пх3} \\ 2 & \div & \text{Пх2} & + & \text{П2} & \text{БП} & \underline{05} & \dots & \dots & \text{В/0} \end{array}$$

Тест:  $t_0 = 0$ ,  $\tau = 0.25$ ,  $u^0 = 1$ ,  $f(u, t) = u^2 + t^2$ .

Результат счета:  $u^1 = 1.3203125$ ,  $u^2 = 1.9530195$ ,  $u^3 = 3.5648739$ , ...,  $t_{\text{сч}} = 10$  с.

**Программа 105.** Двухшаговая схема (б) решения дифференциального уравнения первого порядка. На месте точек набрать подпрограмму вычисления функции  $f(u, t)$ , где  $u = \text{П4}$ ,  $t = \text{П2}$ . Ввести по программе  $t_0$  С/П  $\tau$  С/П  $u^0$  С/П. Получите  $u^1$ . После запуска программы на индикаторе будем получать очередные значения  $u^i$ .

Память:  $t_n = \text{П2}$ ,  $\tau = \text{П3}$ ,  $u^n = \text{П4}$ , П5 — буфер.

| П2  | С/П | П3  | С/П | П4  | Пх3 | П5 | ПП  | 38  | Пх4 |
|-----|-----|-----|-----|-----|-----|----|-----|-----|-----|
| ×   | 2   | ÷   | Пх3 | +   | П3  | ПП | 31  | ПП  | 38  |
| Пх4 | ×   | Пх5 | +   | П3  | ПП  | 31 | Пх3 | С/П | БП  |
| 05  | Пх4 | 2   | ÷   | Пх2 | +   | П2 | В/0 | ... | В/0 |

Тест:  $t_0 = 0$ ,  $\tau = 1$ ,  $u^0 = 1$ .

Результат счета:  $u^1 = 2,25$ ,  $u^2 = 5,5$ ,  $u^3 = 12,75\dots$ ,  $t = 14$  с.

Метод Адамса — Башфорта дает более гладкую аппроксимацию, но для счета этим методом необходимо знать значение функции на двух временных слоях.

**Программа 106.** Метод Адамса — Башфорта решения дифференциального уравнения. На место точек следует поставить подпрограмму вычисления функции  $f(u, t)$ , где  $t = \text{П2}$ ,  $u = \text{П4}$ . Перед счетом ввести  $t_0$  С/П  $\tau$  С/П  $u^0$  С/П  $u^1$  С/П. Получите  $u^2$ , а после дальнейших запусков — очередные значения  $u^i$ .

Память:  $t_n = \text{П2}$ ,  $\tau = \text{П3}$ ,  $u^n = \text{П4}$ ,  $u^{n-1} = \text{П5}$ , П6 — буфер.

|     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |
|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| П2  | С/П | П3  | С/П | П5  | С/П | П4  | ПП  | 42  | 3   |
| ×   | П6  | Пх4 | Пх5 | П4  | ↔   | П5  | Пх2 | Пх3 | —   |
| П2  | ПП  | 42  | Пх6 | ↔   | —   | 2   | ÷   | Пх3 | ×   |
| Пх5 | +   | П4  | С/П | Пх3 | 2   | ×   | Пх2 | +   | П2  |
| БП  | 07  | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | В/0 |

Тест:  $f(u, t) = u^2 + t^2$ ,  $t_0 = 0$ ,  $\tau = 1$ ,  $u^0 = 0.75$ ,  $u^1 = 1,71875$ ,  $u^2 = 7,1499025\dots$ ,  $t_{\text{сч}} = 11$  с.

**Программа 107.** Метод Эйлера решения системы двух дифференциальных уравнений. При наборе программы с 23-го адреса следует ввести подпрограмму для вычисления значения функции  $f_1(u, v, t)$ , а за ней  $f_2(u, v, t)$ . Аргументами функций являются  $u = \text{П4}$ ,  $v = \text{П5}$ ,  $t = \text{П2}$ . Адрес второй подпрограммы функции равен  $23 + N$ , где  $N$  — количество операторов первой подпрограммы-функции.

Память:  $t_n = \text{П2}$ ,  $u^n = \text{П4}$ ,  $v^n = \text{П5}$ , П6 — буфер,  $\tau = \text{П3}$ .

|    |     |     |     |     |     |     |     |     |     |
|----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| ПП | 23  | Пх3 | ×   | Пх4 | +   | П6  | ПП  | ... | Пх3 |
| ×  | Пх5 | +   | П5  | Пх6 | П4  | С/П | Пх2 | Пх3 | +   |
| П2 | БП  | 00  | ... | ... | В/0 | ... | ... | ... | В/0 |

Тест:  $f_1(u, v, t) = -u$ ,  $f_2(u, v, t) = -v$ ,  $\tau = 0.5$ ,  $u^0 = v^0 = 1$ ,  $u^1 = 0.5$ ,  $v^1 = 0.5$ ,  $u^2 = 0.25$ ,  $v^2 = 0.25\dots$ ,  $t_{\text{сч}} = 6.5$  с.

**Программа 108.** Двухшаговая схема решения системы двух дифференциальных уравнений. Перед счетом ввести  $t_0 = \text{П0}$ ,  $\tau = \text{П1}$ ,  $u^0 = \text{П2}$ ,  $v^0 = \text{П3}$ . В ходе счета  $t_n = \text{П0}$ ,  $u^n = \text{П2}$ ,  $v^n = \text{П3}$ . Регистры П4, П5 — буферные. Подпрограмма-функция  $f_1(u, v, t)$  вводится с адреса 55, а после нее располагается подпрограмма-функция  $f_2(u, v, t)$ , где  $u = \text{П2}$ ,  $v = \text{П3}$ ,  $t = \text{П0}$ . Адрес второй подпрограммы в основной программе не проставлен. Он равен  $55 + N$ , где  $N$  — количество операторов подпрограммы-функции.

|          |            |                   |          |           |        |        |     |     |        |
|----------|------------|-------------------|----------|-----------|--------|--------|-----|-----|--------|
| ПП       | <u>55</u>  | Пх1               | $\times$ | 2         | $\div$ | Пх2    | $+$ | П4  | ПП     |
| ...      | <u>Пх1</u> | $\times$          | 2        | $\div$    | Пх3    | П5     | $+$ | П3  | Пх2    |
| Пх4      | П2         | $\leftrightarrow$ | П4       | Пх1       | 2      | $\div$ | Пх0 | $+$ | П0     |
| ПП       | <u>55</u>  | Пх1               | $\times$ | Пх4       | $+$    | П4     | ПП  | ... | Пх1    |
| $\times$ | Пх5        | $+$               | П3       | Пх4       | П2     | C/П    | Пх1 | 2   | $\div$ |
| Пх0      | $+$        | П0                | БП       | <u>00</u> | ...    | ...    | B/0 | ... | B/0    |

Тест:  $f_1 = -u$ ,  $f_2 = -v$ ,  $t_0 = 0$ ,  $u^0 = 1$ ,  $v^0 = 1$ ,  $\tau = 0.5$ ,  $u^1 = 0.625$ ,  $v^1 = 0.625$ ,  $u^2 = 0.390625$ ,  $v^2 = 0.390625$ ,  $u^3 = 0.24414062$ ,  $v^3 = 0.24414062$ ...,  $t_{\text{сч}} = 17$  с.

**Программа 109.** Решение системы двух дифференциальных уравнений методом Адамса — Башфорта. Перед началом вводятся значения  $t = \text{П0}$ ,  $\tau = \text{П1}$ ,  $u^0 = \text{П2}$ ,  $v^0 = \text{П3}$ ,  $u^{-1} = \text{П4}$ ,  $v^{-1} = \text{П5}$ . В ходе счета программы [ $t_n = \text{П0}$ ,  $u^n = \text{П2}$ ,  $v^n = \text{П3}$ ,  $u^{n-1} = \text{П4}$ ,  $v^{n-1} = \text{П5}$ , а регистры П7 и П6 — буферные. Первая подпрограмма-функция  $f_1(u, v, t)$  вводится с адреса 59, а вторая — после нее. Адрес второй подпрограммы равен  $59 + N$ , где  $N$  — число операторов подпрограммы-функции  $f_1(u, v, t)$ . Аргументами функций являются  $u = \text{П2}$ ,  $v = \text{П3}$ ,  $t = \text{П0}$ .

|        |            |                   |          |          |           |           |                   |           |                   |
|--------|------------|-------------------|----------|----------|-----------|-----------|-------------------|-----------|-------------------|
| ПП     | <u>59</u>  | 3                 | $\times$ | П6       | ПП        | ...       | 3                 | $\times$  | П7                |
| Пх0    | <u>Пх1</u> | —                 | П0       | Пх2      | Пх4       | <u>П2</u> | $\leftrightarrow$ | П4        | Пх3               |
| Пх5    | П3         | $\leftrightarrow$ | П5       | ПП       | <u>59</u> | Пх6       | $\leftrightarrow$ | —         | 2                 |
| $\div$ | Пх1        | $\times$          | Пх4      | $+$      | <u>П6</u> | ПП        | ...               | Пх7       | $\leftrightarrow$ |
| —      | 2          | $\div$            | Пх1      | $\times$ | Пх5       | $+$       | П3                | Пх6       | П2                |
| C/П    | Пх1        | 2                 | $\times$ | Пх0      | $+$       | П0        | БП                | <u>00</u> | ...               |
| ...    | ...        | ...               | B/0      | ...      | ...       | B/0       | ...               | ...       | ...               |

Тест:  $f_1 = -u$ ,  $f_2 = -v$ ,  $t_0 = 0$ ,  $u^{-1} = v^{-1} = 1.5$ ,  $\tau = 0.5$ ,  $u^0 = v^0 = 1$ . Тогда  $u^1 = v^1 = 0.625$ ,  $u^2 = v^2 = 0.40625$ ...,  $t_{\text{сч}} = 18$  с.

Все разностные методы численного интегрирования дифференциальных уравнений аналогично распространяются и на системы трех, четырех, пяти и шести неизвестных функций. Соответственно столько же будет различных функций в правых частях этих уравнений, которые выделяются в отдельные подпрограммы. Для указания их адреса в основной программе необходимо знать длину всех предшествующих подпрограмм-функций. Вычислить его несложно, если известна длина каждой подпрограммы-функции. Если длина первой подпрограммы —  $N_1$ , второй —  $N_2$ , третьей —  $N_3$ , а адрес первой подпрограммы  $A$ , то адрес обращения к четвертой подпрограмме будет равен

$$A_4 = A + N_1 + N_2 + N_3. \quad (6.42)$$

Понятно, что подпрограммы должны быть расположены в правильной последовательности: первая, вторая, затем третья и т. д. Для сокращения записи оператора адреса полное выражение для правой части (6.42) обозначим через  $\underline{A}^3$ . Используя такое обозначение в программе 108,

мы должны были бы написать адрес второй подпрограммы как 55<sup>1</sup>. Такая запись чисто символическая. Она означает, что этот адрес равен  $A_2 = 55 + N_1$ .

А в программе 109 по нашим обозначениям адрес обращения ко второй подпрограмме-функции запишется в наших символах как 59<sup>1</sup>, а равен он

$$A_2 = 59 + N_1,$$

где  $N_1$  — длина первой подпрограммы-функции. Одним словом, цифра вверху означает, что к исходному адресу  $A$  надо прибавить все те  $N_i$ , у которых значения  $i$  меньше или равны этому числу. Такая символическая запись использована в приведенных ниже программах.

#### Программа 110. Решение системы трех уравнений по схеме Эйлера.

Подпрограммы-функции вводятся последовательно, начиная с 32-го адреса. Аргументами их являются  $x = \text{П2}$ ,  $y = \text{П3}$ ,  $z = \text{П4}$ ,  $t = \text{П0}$ . Перед началом счета вводятся начальные значения аргументов:  $t_0 = \text{П0}$ ,  $\tau = \text{П1}$ ,  $x^0 = \text{П2}$ ,  $y^0 = \text{П3}$ ,  $z^0 = \text{П4}$ . В ходе программы регистры ПА, ПВ используются в качестве буферных. Значения  $x^n$ ,  $y^n$ ,  $z^n$  поступают в ходе счета в адресуемые и одноименные стековые регистры  $x^n = \text{П2} = X$ ,  $y^n = \text{П3} = Y$ ,  $z^n = \text{П4} = Z$ .

|          |                         |                         |                         |                         |                         |                         |                         |                         |                         |
|----------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|
| ПП       | <u>32</u>               | $\overline{\text{Пx1}}$ | $\times$                | $\overline{\text{Пx2}}$ | $+$                     | ПА                      | ПП                      | <u>32<sup>1</sup></u>   | $\overline{\text{Пx1}}$ |
| $\times$ | $\overline{\text{Пx3}}$ | $+$                     | ПВ                      | ПП                      | <u>32<sup>2</sup></u>   | $\overline{\text{Пx1}}$ | $\times$                | $\overline{\text{Пx4}}$ | $-$                     |
| П4       | $\overline{\text{ПxB}}$ | $\overline{\text{П3}}$  | $\overline{\text{ПxA}}$ | $\overline{\text{П2}}$  | $\overline{\text{С/П}}$ | $\overline{\text{Пx0}}$ | $\overline{\text{Пx1}}$ | $+$                     | $\overline{\text{П0}}$  |
| БП       | <u>00</u>               | $\dots$                 | $\dots$                 | $\overline{\text{B/0}}$ | $\dots$                 | $\overline{\text{B/0}}$ | $\dots$                 | $\dots$                 | $\overline{\text{B/0}}$ |

Тест:  $f_1 = -x$ ,  $f_2 = -y$ ,  $f_3 = -z$ ,  $x^0 = y^0 = z^0 = 1$ ,  $\tau = 0.5$ ,  $t_0 = 0$ . Время счета каждого шага 10 с. В результате счета получаем  $x^1 = 1$ ,  $y^1 = 1$ ,  $z^1 = 1$ ,  $x^2 = 0.5$ ,  $y^2 = 0.5$ ,  $z^2 = 0.5$ .

Программа 111. Численное решение системы трех уравнений по двухшаговой разностной схеме. Программа дает лучшую точность, чем схема Эйлера, но время счета чуть не втрое больше. Подпрограммы-функции  $f_1$ ,  $f_2$ ,  $f_3$  вводятся с адреса 79 последовательно и аргументами их являются  $x = \text{П2}$ ,  $y = \text{П3}$ ,  $z = \text{П4}$ ,  $t = \text{П0}$ . Перед началом счета вводятся исходные данные:  $t = \text{П0}$ ,  $x^0 = \text{П2}$ ,  $y^0 = \text{П3}$ ,  $z^0 = \text{П4}$ ,  $\tau = \text{П5}$ . В ходе счета значения  $x^n$ ,  $y^n$ ,  $z^n$  поступают в одноименные стековые регистры  $x^n = X = \text{П2}$ ,  $y^n = Y = \text{П3}$ ,  $z^n = Z = \text{П4}$ . Регистры ПА и ПВ — буферные.

Тест:  $f_1 = -x$ ,  $f_2 = -y$ ,  $f_3 = -z$ ,  $x^0 = y^0 = z^0 = 1$ ,  $\tau = 0.5$ ,  $t_0 = 0$ .

Результат счета:  $x^1 = 0.625$ ,  $y^1 = 0.625$ ,  $z^1 = 0.625$ ,  $x^2 = 0.390625$ ,  $y^2 = 0.390625$ ,  $z^2 = 0.390625$  ... Для каждого такта  $t_{\text{сч}} = 30$  с.

|                         |                         |                   |                        |                         |                         |    |                   |                         |                         |
|-------------------------|-------------------------|-------------------|------------------------|-------------------------|-------------------------|----|-------------------|-------------------------|-------------------------|
| ПП                      | <u>79</u>               | ПП                | <u>74</u>              | $\overline{\text{Пx2}}$ | $+$                     | ПА | ПП                | <u>79<sup>1</sup></u>   | $\overline{\text{ПП}}$  |
| <u>74</u>               | $\overline{\text{Пx3}}$ | $+$               | ПВ                     | ПП                      | <u>79<sup>2</sup></u>   | ПП | <u>74</u>         | $\overline{\text{Пx4}}$ | $+$                     |
| $\overline{\text{Пx4}}$ | ПС                      | $\leftrightarrow$ | $\overline{\text{П4}}$ | $\overline{\text{ПxB}}$ | $\overline{\text{Пx3}}$ | ПВ | $\leftrightarrow$ | $\overline{\text{П3}}$  | $\overline{\text{Пx2}}$ |

|              |                           |                   |              |              |                           |             |                         |                           |              |
|--------------|---------------------------|-------------------|--------------|--------------|---------------------------|-------------|-------------------------|---------------------------|--------------|
| $\text{ПxA}$ | $\text{П2}$               | $\leftrightarrow$ | $\text{ПА}$  | $\text{ПП}$  | $\frac{67}{\text{Пx1}}$   | $\text{ПП}$ | $\frac{79}{\text{ПxB}}$ | $\text{Пx1}$              | $\times$     |
| $\text{ПxA}$ | $+$                       |                   | $\text{ПА}$  | $\text{ПП}$  | $\frac{79^1}{\text{Пx1}}$ | $\times$    | $\text{ПxB}$            | $+$                       | $\text{ПВ}$  |
| $\text{ПП}$  | $\frac{79^2}{\text{Пx1}}$ |                   | $\text{Пx1}$ | $\times$     | $\text{ПxC}$              | $+$         | $\text{ПС}$             | $\frac{79^3}{\text{Пx1}}$ | $\text{ПxB}$ |
| $\text{ПxA}$ | $\frac{79^2}{\text{П2}}$  |                   | $\text{С/П}$ | $\text{ПП}$  | $\frac{67}{\text{БП}}$    | $\text{БП}$ | $\frac{00}{\text{Пx1}}$ | $2$                       | $\div$       |
| $\text{Пx0}$ | $+$                       |                   | $\text{П0}$  | $\text{B/0}$ | $\frac{\text{Пx1}}{2}$    | $\div$      |                         | $\text{B/0}$              | $\dots$      |
| $\dots$      | $\text{B/0}$              | $\dots$           | $\text{B/0}$ | $\dots$      | $\text{B/0}$              |             |                         |                           |              |

**Программа 112.** Решение системы четырех уравнений по схеме Эйлера. Подпрограммы-функции  $f_1, f_2, f_3, f_4$  вводятся последовательно с адреса 42. Их аргументами являются  $x = \text{П2}, y = \text{П3}, z = \text{П4}, T = \text{П5}, t = \text{П0}$ , шаг по времени  $\tau = \text{П1}$ . После каждого такта счета значения искомых функций поступают в адресуемые и стековые регистры  $x^n = \text{П2} = \text{ПA} = \text{X}, y^n = \text{П3} = \text{ПB} = \text{Y}, z^n = \text{П4} = \text{ПC} = \text{Z}, T^n = \text{П5} = \text{ПД} = \text{T}$ .

|             |                         |                           |              |              |                           |              |                           |              |
|-------------|-------------------------|---------------------------|--------------|--------------|---------------------------|--------------|---------------------------|--------------|
| $\text{ПП}$ | $\frac{42}{\text{Пx1}}$ | $\times$                  | $\text{Пx2}$ | $+$          | $\text{ПA}$               | $\text{ПП}$  | $\frac{42^1}{\text{Пx4}}$ | $\text{Пx1}$ |
| $\times$    | $\text{Пx3}$            | $+$                       | $\text{ПB}$  | $\text{ПП}$  | $\frac{42^2}{\text{Пx1}}$ | $\times$     | $\text{Пx4}$              | $+$          |
| $\text{ПC}$ | $\text{ПП}$             | $\frac{42^3}{\text{Пx1}}$ | $\times$     | $\text{Пx5}$ | $+$                       | $\text{ПД}$  | $\text{П5}$               | $\text{ПxC}$ |
| $\text{П4}$ | $\text{ПxB}$            | $\frac{42^3}{\text{П3}}$  | $\text{ПxA}$ | $\text{П2}$  | $\text{С/П}$              | $\text{Пx0}$ | $\text{Пx1}$              | $+$          |
| $\text{БП}$ | $\underline{00}$        | $\dots$                   | $\text{B/0}$ | $\dots$      | $\text{B/0}$              | $\dots$      | $\text{B/0}$              | $\dots$      |

Тест:  $f_1 = -x, f_2 = -y, f_3 = -z, f_4 = -T, \tau = 0.5, t_0 = 0, x^0 = y^0 = z^0 = T^0 = 1$ .

Результат счета:  $x^1 = 0.5, y^1 = 0.5, z^1 = 0.5, T^1 = 0.5, x^2 = 0.25, y^2 = 0.25, z^2 = 0.25, T^2 = 0.25, \dots t_{\text{сч}} = 13$  с.

**Программа 113.** Численное решение системы пяти уравнений по схеме Эйлера. Подпрограммы-функции  $f_1, f_2, f_3, f_4, f_5$  заносятся в командную память с адреса 49. Аргументами их являются  $x = \text{П2}, y = \text{П3}, z = \text{П4}, T = \text{П5}, v = \text{П6}, t = \text{П0}, \tau = \text{П1}$ . Перед началом счета в эти регистры необходимо ввести начальные значения неизвестных функций. В результате счета значения функций поступают в те же регистры  $x^n = \text{П2}, y^n = \text{П3}, z^n = \text{П4}, T^n = \text{П5}, v^n = \text{П6}, t_n = \text{П0}$ . Регистры ПА, ПВ, ПС и ПД — буферные.

|              |                         |                           |              |              |                           |             |                           |                           |
|--------------|-------------------------|---------------------------|--------------|--------------|---------------------------|-------------|---------------------------|---------------------------|
| $\text{ПП}$  | $\frac{50}{\text{Пx1}}$ | $\times$                  | $\text{Пx2}$ | $+$          | $\text{ПA}$               | $\text{ПП}$ | $\frac{50^1}{\text{Пx4}}$ | $\text{Пx1}$              |
| $\times$     | $\text{Пx3}$            | $+$                       | $\text{ПB}$  | $\text{ПП}$  | $\frac{50^2}{\text{Пx1}}$ | $\times$    | $\text{Пx4}$              | $+$                       |
| $\text{ПC}$  | $\text{ПП}$             | $\frac{50^3}{\text{Пx1}}$ | $\times$     | $\text{Пx5}$ | $+$                       | $\text{ПД}$ | $\text{ПП}$               | $\frac{50^4}{\text{ПxB}}$ |
| $\text{Пx1}$ | $\times$                | $\text{Пx6}$              | $+$          | $\text{П6}$  | $\text{ПxD}$              | $\text{П5}$ | $\text{ПxC}$              | $\frac{50^5}{\text{ПxB}}$ |
| $\text{П3}$  | $\text{ПxA}$            | $\frac{50^5}{\text{П2}}$  | $\text{С/П}$ | $\text{Пx0}$ | $\text{Пx1}$              | $+$         | $\text{П0}$               | $\text{БП}$               |
| $\dots$      | $\text{B/0}$            | $\dots$                   | $\text{B/0}$ | $\dots$      | $\text{B/0}$              | $\dots$     | $\text{B/0}$              | $\dots$                   |

Тест:  $f_1 = -x, f_2 = -y, f_3 = -z, f_4 = -T, f_5 = -v, x^0 = y^0 = z^0 = v^0 = T^0 = 1, \tau = 0.5, t^0 = 0$ .

Результат счета:

$$x^1 = 0.5, \quad y^1 = 0.5, \quad z^1 = 0.5, \quad T^1 = 0.5, \quad v^1 = 0.5,$$

$$\begin{aligned}x^2 &= 0.25, & y^2 &= 0.25, & z^2 &= 0.25, & T^2 &= 0.25, & v^2 &= 0.25, \\x^3 &= 0.125, & y^3 &= 0.125, & z^3 &= 0.125, & T^3 &= 0.125, \\v^3 &= 0.125, & t_{\text{сч}} &= 12 \text{ с.}\end{aligned}$$

**Программа 114.** Численное решение системы шести уравнений по схеме Эйлера. Подпрограммы-функций  $f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6$  заносятся в командную память с адреса 59 и аргументами их являются  $x = \Pi 2$ ,  $y = \Pi 3$ ,  $z = \Pi 4$ ,  $T = \Pi 5$ ,  $v = \Pi 6$ ,  $u = \Pi 7$ ,  $t = \Pi 0$ ,  $\tau = \Pi 1$ . В те же регистры поступают и результаты счета. Перед началом счета необходимо ввести начальные данные:  $x^0 = \Pi 2$ ,  $y^0 = \Pi 3$ ,  $z^0 = \Pi 4$ ,  $T^0 = \Pi 5$ ,  $v^0 = \Pi 6$ ,  $u^0 = \Pi 7$ ,  $t_0 = \Pi 0$ , шаг по времени равен  $\tau = \Pi 1$ . Регистры  $\Pi 9$ ,  $\Pi A$ ,  $\Pi B$ ,  $\Pi C$ ,  $\Pi D$  — буферные.

|          |                     |                     |                     |          |                     |                     |                     |                     |                     |
|----------|---------------------|---------------------|---------------------|----------|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|
| ПП       | 59                  | $\overline{\Pi x1}$ | $\times$            | $\Pi x2$ | $+$                 | ПА                  | ПП                  | 59 <sup>1</sup>     | $\overline{\Pi x1}$ |
| $\times$ | $\overline{\Pi x3}$ | $+$                 | ПВ                  | ПП       | 59 <sup>2</sup>     | $\overline{\Pi x1}$ | $\times$            | $\overline{\Pi x4}$ | $+$                 |
| ПС       | ПП                  | 59 <sup>3</sup>     | $\overline{\Pi x1}$ | $\times$ | $\overline{\Pi x5}$ | $+$                 | ПД                  | ПП                  | 59 <sup>4</sup>     |
| $\Pi x1$ | $\times$            | $\overline{\Pi x6}$ | $+$                 | П9       | ПП                  | 59 <sup>5</sup>     | $\overline{\Pi x1}$ | $\times$            | $\overline{\Pi x7}$ |
| $+$      | П7                  | $\Pi x9$            | П6                  | $\Pi xD$ | П5                  | $\overline{\Pi xC}$ | П4                  | $\Pi xB$            | П3                  |
| $\Pi xA$ | П2                  | C/П                 | $\Pi x0$            | $\Pi x1$ | $+$                 | П0                  | БП                  | 00                  | ...                 |
| B/0      | ...                 | B/0                 | ...                 | B/0      | ...                 | B/0                 | ...                 | B/0                 | ...                 |
| B/0      |                     |                     |                     |          |                     |                     |                     |                     |                     |

Тест:  $f_1 = -x$ ,  $f_2 = -y$ ,  $f_3 = -z$ ,  $f_4 = -T$ ,  $f_5 = -v$ ,  $f_6 = -u$ ,  $\tau = 0.5$ ,  $t_0 = 0$ ,  $x^0 = y^0 = z^0 = T^0 = v^0 = u^0 = 1$ .

Результат счета:

$$\begin{aligned}x^1 &= y^1 = z^1 = T^1 = v^1 = u^1 = 0.5, \\x^2 &= y^2 = z^2 = T^2 = v^2 = u^2 = 0.25, \quad t_{\text{сч}} = 21 \text{ с.}\end{aligned}$$

Встречаются случаи, когда разностные методы не дают приемлемых результатов. Это наблюдается в задачах с быстропеременными и быстрорастущими решениями. В этих случаях делают специальные математические преобразования, после которых допускается использование численных методов. Рассмотрим случай со знакопеременным решением, быстро изменяющимся с увеличением аргумента. Возьмем разность

$$w(x) = y(x) - v(x), \quad (6.43)$$

где  $v(x)$  — некоторая специально подобранная нами функция. Тогда

$$w'(x) = f(x, v(x) + w(x)) - g(x, v(x)). \quad (6.44)$$

Понятно, что если  $v(x)$  является функцией, достаточно близкой к решению  $y(x)$ , то новая функция  $w(x)$  невелика и должна хорошо интегрироваться.

В случае знакопостоянных быстрорастущих решений следует воспользоваться отношением

$$w(x) = \frac{y(x)}{v(x)}. \quad (6.45)$$

' Отношение это удовлетворяет уравнению

$$w'(x) = \frac{1}{v(x)} \{f(x, wv) - wg(x, v(x))\}. \quad (6.46)$$

Так, в задаче химического распада одного вещества

$$y'(t) = -\alpha(t, y)y, \quad y(0) = y_0 > 0, \quad \alpha(t, y) > 0. \quad (6.47)$$

Воспользовавшись приближением

$$v(t) = y_0 e^{-\alpha(t-t_0)}, \quad (6.48)$$

для  $w(t)$  получаем дифференциальное уравнение

$$w'(t) = -\{\alpha_0 - \alpha(t, wv(t))\}w, \quad (6.49)$$

которое в случае слабо меняющейся функции  $\alpha(t, y)$  легко интегрируется численно.

Вопрос о получении требуемой точности решения дифференциального уравнения является более сложным, чем в случае численного интегрирования и дифференцирования функций, поскольку априорную оценку погрешности получить тяжело. Поэтому основной является апостериорная оценка точности, для получения которой проводят расчет на двух или более сгущающихся сетках и применяют правило Рунге или Рунге — Ромберга.

Разностными методами можно решать и уравнения более высоких степеней, заменив уравнение высокого порядка несколькими уравнениями первого порядка. Например, в случае движения электрона в электрическом поле уравнение движения

$$m\ddot{x} = eE(x) \quad (6.50)$$

можно представить в виде системы двух уравнений

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= v, \\ m \frac{dv}{dt} &= eE(x). \end{aligned} \quad (6.51)$$

Теперь система уравнений содержит две неизвестные функции  $x(t)$  и  $v(t)$ . Их можно найти численным интегрированием системы по одной из программ. Физические задачи описываются обычно дифференциальными уравнениями не выше второго порядка, поэтому на программируемом микрокалькуляторе можно решать систему трех уравнений второго порядка.

## 5. Метод Рунге — Кутта решения дифференциального уравнения

При решении ряда задач квантовой механики часто используется метод Рунге — Кутта. Он является неконсервативным с точки зрения физических законов сохранения, но имеет высокий порядок точности.

Для своей реализации метод требует гораздо более трудоемких вычислений, отчего время счета намного больше, чем по простейшим разностным схемам. Трудно оценить шаг, при котором он устойчив. Однако он сходится при большем шаге, чем в схеме Эйлера. Сущность метода состоит в последовательном вычислении коэффициентов, посредством которых находится значение функции на следующем шаге. Схема вычислений Рунге—Кутта с точностью до четвертого порядка имеет вид

$$\begin{aligned}y_{k+1} &= y_k + \frac{1}{6} (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4), \\k_1 &= f(x_k, y_k) h, \\k_2 &= f\left(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{k_1}{2}\right) h, \\k_3 &= f\left(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{k_2}{2} h\right), \\k_4 &= f(x_k + h, y_k + k_3) h.\end{aligned}\tag{6.52}$$

А система двух дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned}y' &= f(x, y, z), \\z' &= \varphi(x, y, z)\end{aligned}\tag{6.53}$$

интегрируется по схеме

$$\begin{aligned}y_{k+1} &= y_k + \frac{1}{6} (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4), \\z_{k+1} &= z_k + \frac{1}{6} (m_1 + 2m_2 + 2m_3 + m_4),\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}k_1 &= f(x_k, y_k, z_k) h, \\m_1 &= \varphi(x_k, y_k, z_k) h, \\k_2 &= f\left(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{k_1}{2}, z_k + \frac{m_1}{2}\right) h, \\m_2 &= \varphi\left(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{k_1}{2}, z_k + \frac{m_1}{2}\right) h, \\k_3 &= f\left(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{k_2}{2}, z_k + \frac{m_2}{2}\right) h, \\m_3 &= \varphi\left(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{k_2}{2}, z_k + \frac{m_2}{2}\right) h, \\k_4 &= f(x_k + h, y_k + k_3, z_k + m_3) h, \\m_4 &= \varphi(x_k + h, y_k + k_3, z_k + m_3) h.\end{aligned}\tag{6.54}$$

**Программа 115. Метод Рунге—Кутта четвертого порядка для дифференциального уравнения первого порядка.** Подпрограмма-функция  $f(x, y)$  записывается с адреса 38, где  $x = \text{П6}$ ,  $y = \text{П8}$ . Перед счетом в регистры необходимо ввести числа:  $\frac{h}{2} = \text{П5}$ ,  $y_0 = \text{П8} = \text{П7}$ ,  $x_0 = \text{П6}$ .

В ходе вычислений величины  $k_i$  поступают в регистры  $k_1 = \text{П1}$

$k_2 = \Pi 2$ ,  $k_3 = \Pi 3$ ,  $k_4 = \Pi 4$ . Запустив счет программы с начального адреса, необходимо нажимать лишь клавишу С/П, и после каждого запуска на индикаторе будут высвечиваться значения  $y_k$ .

|          |                    |        |          |                     |          |     |          |          |          |
|----------|--------------------|--------|----------|---------------------|----------|-----|----------|----------|----------|
| ПП       | 38                 | П1     | ПП       | 30                  | П2       | ПП  | 35       | П3       | 2        |
| $\times$ | $\overline{\Pi P}$ | 30     | $\Pi x2$ | $\overline{\Pi x3}$ | $+$      | 2   | $\times$ | $+$      | $\Pi x1$ |
| $+$      | 3                  | $\div$ | $\Pi x7$ | $+$                 | П7       | П8  | С/П      | БП       | 00       |
| $\Pi x6$ | $\Pi x5$           | $+$    | П6       | $\leftrightarrow$   | $\Pi x7$ | $+$ | П8       | ...      | ...      |
| ...      | ...                | ...    | ...      | ...                 | ...      | ... | $\Pi x5$ | $\times$ | B/0      |

Тест:  $f(x, y) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ ,  $x_0 = 1$ ,  $y_0 = 1$ ,  $h = 0.2$ ,  $y(1.2) = 1.3526386$ ,  
 $y(1, 4) = 1.6404785$ ,  $y(1.6) = 1.8873986$ ,  $y(1.8) = 2.1053593, \dots, t_{\text{сч}} = 24$  с.

**Программа 116. Решение системы двух дифференциальных уравнений методом Рунге — Кутта четвертого порядка.** На месте первых многоточий ставится подпрограмма-функция  $f(x, y, z)$ , а на месте вторых  $\varphi(x, y, z)$ . Непроставленный адрес подпрограммы в основной программе равен  $N = 64 + K$ , где  $K$  — количество операторов, поставленных вами на место многоточий в подпрограмме  $f(x, y, z)$ . Аргументы функций  $x = \Pi 8$ ,  $y = \Pi 1$ ,  $z = \Pi 2$ . Регистры П9, ПА, ПВ, ПС, ПД свободы и могут быть использованы по вашему усмотрению. Перед счетом ввести  $y_0 = \Pi 1 = \Pi 3$ ,  $z_0 = \Pi 2 = \Pi 4$ ,  $3y_0 = \Pi 5$ ,  $3z_0 = \Pi 6$ .

|                   |                  |                   |                    |                    |                  |                   |          |                   |                   |
|-------------------|------------------|-------------------|--------------------|--------------------|------------------|-------------------|----------|-------------------|-------------------|
| ПП                | 52               | ПП                | 64 <sup>1</sup>    | ПП                 | 48               | FBx               | $+$      | П6                | ПП                |
| $\overline{64^1}$ | $\overline{FBx}$ | $+$               | $\overline{\Pi 5}$ | ПП                 | $\overline{52}$  | $\overline{FBx}$  | $+$      | П6                | $\overline{FBx}$  |
| $\Pi x0$          | $+$              | П0                | ПП                 | $\overline{64^1}$  | $\overline{FBx}$ | $+$               | П5       | $\overline{FBx}$  | $\Pi x1$          |
| $+$               | П1               | ПП                | 48                 | $\overline{\Pi 6}$ | 3                | $\div$            | П0       | ПП                | $\overline{64^1}$ |
| П5                | 3                | $\div$            | П1                 | П3                 | $\Pi x2$         | П4                | С/П      | $\Pi x7$          | $\Pi x8$          |
| $+$               | П8               | ...               | ...                | $\Pi x7$           | $\times$         | $\uparrow$        | $\Pi x4$ | $+$               | П0                |
| F $\searrow$      | $\Pi x6$         | $\leftrightarrow$ | $+$                | П6                 | B/0              | ...               | $\Pi x7$ | $\times$          | $\uparrow$        |
| $\Pi x0$          | П2               | F $\searrow$      | $\Pi x3$           | $+$                | П1               | $\leftrightarrow$ | $\Pi x5$ | $\leftrightarrow$ | $+$               |
| П5                | B/0              |                   |                    |                    |                  |                   |          |                   |                   |

После B/0 С/П получим  $X = \Pi 2 = z(x_0 + h)$ ,  $Y = \Pi 1 = y(x_0 + h)$ ,  
после B/0 С/П —  $X = \Pi 2 = z(x_0 + 2h)$ ,  $Y = \Pi 1 = y(x_0 + 2h) \dots$

Тест:  $f = \cos x$ ,  $\varphi = \sin x$ ,  $h = \pi/6$ ,  $y_0 = z_0 = 1$ ,  $x_0 = 0$ .

Результат счета:  $Z(x_0 + h) = 1.5000131$ ,  $y(x_0 + h) = 1.1339781$ ,  
 $Z(x_0 + 2h) = 1.8660481$ ,  $y(x_0 + 2h) = 1.5000131, \dots, t_{\text{сч}} = 1$  мин 1 с. Метод Рунге — Кутта распространяется также и на уравнения более высокого порядка. Но для уравнения

$$y'' = f(x, y, y') \quad (6.55)$$

мы используем не традиционную схему, приводимую в справочниках, так как она занимает около 98 шагов программы, не оставляя места на подпрограмму. Будем использовать несколько преобразованную

схему

$$\begin{aligned}
 y_{k+1} &= y_k + 2 \cdot \frac{h}{2} \left( y'_k + \frac{1}{3} (k_1 + k_2 + k_3) \right), \\
 y'_{k+1} &= y'_k + \frac{1}{3} (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4); \\
 k_1 &= f(x_k, y_k, y'_k) \frac{h}{2}, \\
 k_2 &= f\left(x_k + \frac{h}{2}, y_k + y'_k \frac{h}{2}, y'_k + k_1\right) \frac{h}{2}, \\
 k_3 &= f\left(x_k + \frac{h}{2}, y_k + y'_k \frac{h}{2} + k_1 \frac{h}{2}, y'_k + k_2\right) \frac{h}{2}, \\
 k_4 &= f\left(x_k + 2 \cdot \frac{h}{2}, y_k + \frac{h}{2} (y'_k + 2k_2), y'_k + 2k_3\right) \frac{h}{2}.
 \end{aligned} \tag{6.56}$$

Это позволит высвободить 33 ячейки программной памяти, которые будут использоваться для подпрограммы-функции.

**Программа 117. Метод Рунге — Кутта четвертого порядка для решения дифференциального уравнения второго порядка.** С адреса 69 записывается подпрограмма-функция  $f(x, y, y')$ , где  $x = \text{ПА}$ ,  $y = \text{ПВ}$ ,  $y' = \text{ПС}$ . На подпрограмму отведено 33 ячейки программной памяти. Перед программой необходимо занести в регистры следующие числа:  $x_0 = \text{ПА}$ ,  $y_0 = \text{П6} = \text{ПВ}$ ,  $y'_0 = \text{П7} = \text{ПС}$ ,  $h/2 = \text{П8}$ . В ходе выполнения программы вычисляются величины  $k_1 = \text{П1}$ ,  $k_2 = \text{П2}$ ,  $k_3 = \text{П3}$ ,  $k_4 = \text{П4}$ . Регистры П0, П5, П9, ПД, — свободны и могут быть использованы в качестве буферных.

|     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |
|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| ПП  | 69  | П1  | Пх7 | ПП  | 55  | П2  | Пх1 | ПП  | 59  |
| П3  | 2   | ×   | Пх2 | 2   | ×   | Пх1 | —   | Пх7 | +   |
| ПП  | 55  | П4  | Пх3 | Пх2 | +   | 2   | ×   | +   | Пх1 |
| +   | 3   | ÷   | Пх7 | +   | П7  | Пх2 | Пх3 | Пх4 | +   |
| +   | 3   | ÷   | —   | Пх8 | ×   | 2   | ×   | Пх6 | +   |
| П6  | ПВ  | С/П | БП  | 00  | ПхA | Пх8 | +   | ПА  | F ↴ |
| Пх8 | ×   | ПxB | +   | ПВ  | F ↴ | Пх7 | +   | ПС  | ... |
| ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | Пх8 | ×   | B/0 |

Тест:  $y'' = -y$ ,  $h = 0.5$ ,  $x_0 = 0$ ,  $y_0 = 1$ ,  $y'_0 = 0$ .

Подпрограмма ... ПxB /—/ B/0. Один такт счета длится 34 с.  
Результаты счета:

$$\begin{aligned}
 y(0.5) &= 8.776042 \cdot 10^{-1}, & y(1.0) &= 5.4027644 \cdot 10^{-1}, \\
 y(1.5) &= 6.970614 \cdot 10^{-2}, & y(2.0) &= -4.1956246 \cdot 10^{-1}, \\
 y(2.5) &= -8.0801062, & y(3.0) &= -1.0003398, \\
 y(3.5) &= -9.488495 \cdot 10^{-1}, & y(4.0) &= -6.6526416 \cdot 10^{-1}, \\
 y(4.5) &= -2.1807706 \cdot 10^{-1}, & y(5.0) &= 2.8398988 \cdot 10^{-1}, \\
 y(5.5) &= 7.1841762 \cdot 10^{-1}, & y(6.0) &= 9.7878658 \cdot 10^{-1}, \\
 y(6.5) &= 1.0008442, & y(7.0) &= 7.783581 \cdot 10^{-1},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}y(7.5) &= 3.64844 \cdot 10^{-1}, & y(8.0) &= -1.393032 \cdot 10^{-1}, \\y(8.5) &= 6.1118212 \cdot 10^{-1}, & y(9.0) &= -9.3534444 \cdot 10^{-1}, \\y(9.5) &= -1.0320386.\end{aligned}$$

Точное решение  $y = \cos x$ . Оно незначительно отличается от приведенных данных, в чем вы можете непосредственно убедиться.

Схемы Рунге—Кутта по сравнению с другими методами имеют множество достоинств. Они имеют хорошую точность и являются явными, то есть,  $y_{k+1}$  вычисляется по ранее найденному  $y_k$  за определенное количество действий по формулам. Все схемы, а значит, и программы допускают расчет переменным шагом, поэтому если функция начинает быстро изменяться, то, уменьшив шаг, мы не повредим работу численной схемы.

Погрешности различных схем Рунге—Кутта, связанные с максимумами модулей соответствующих производных, определяются довольно сложными формулами, отчего они на практике никогда не используются. Если правая часть уравнения (6.55) непрерывна и ограничена вместе со своими четвертыми производными, то обычно схема четвертого порядка дает самые хорошие результаты.

## 6. Примеры решения физических задач

**Задача 1.** Найти численное решение уравнения колебания маятника

$$\ddot{u} + \sin u = 0$$

от момента времени  $t_0 = 0$  до  $t = 10$  при начальных условиях

$$u(t_0) = 0, \quad u'(t_0) = 2 \sin \frac{\pi}{4}.$$

Воспользуемся программой 117 с подпрограммой-функцией

... ПxB F sin /-/ ...

В качестве начальных данных возьмем  $0 = \text{ПА}$ ,  $2 \sin \frac{\pi}{4} = \text{П7} = \text{ПС}$ ,  $0 = \text{ПВ} = \text{П6}$ , шаг выберем равным  $\tau = 0.5$ , поэтому  $0.25 = \text{П8}$ . В результате счета получаем табл. 24, а на рис. 44 представлен график этой функции. Рисунок отчетливо показывает, что при малых амплитудах уравнение имеет решение, которое почти не отличается от линейного гармонического осциллятора.

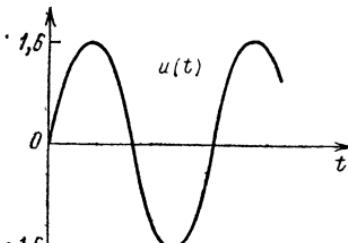


Рис. 44

**Задача 2.** Материальная точка под действием внешних сил совершает меха-

| $t, \text{ с}$ | $u(t)$       | $t, \text{ с}$ | $u(t)$       |
|----------------|--------------|----------------|--------------|
| 0.0            | 0.0          | 5.5            | -1.589 633   |
| 0.5            | 0.679 103 2  | 6.0            | -1.506 029   |
| 1.0            | 1.210 547 3  | 6.5            | -1.174 339 6 |
| 1.5            | 1.513 864 8  | 7.0            | -0.617 698 9 |
| 2.0            | 1.578 744    | 7.5            | 0.077 401    |
| 2.5            | 1.373 899 1  | 8.0            | 0.756 534 3  |
| 3.0            | 0.937 051 8  | 8.5            | 1.273 686 1  |
| 3.5            | 0.305 760 8  | 9.0            | 1.557 024 8  |
| 4.0            | -0.398 018 7 | 9.5            | 1.591 158    |
| 4.5            | -1.012 61    | 10.0           | 1.375 571 4  |
| 5.0            | -1.423 381 3 | 10.5           | 0.918 166 3  |

ническое движение, описываемое системой дифференциальных уравнений:

$$\frac{dx}{dt} = -x - y \cos t + 1,$$

$$\frac{dy}{dt} = -x \cos t - y + 2$$

с начальными условиями  $t_0 = 0, x_0 = 0, y_0 = 1$ . Выяснить характер движения точки за  $t = 10$  с.

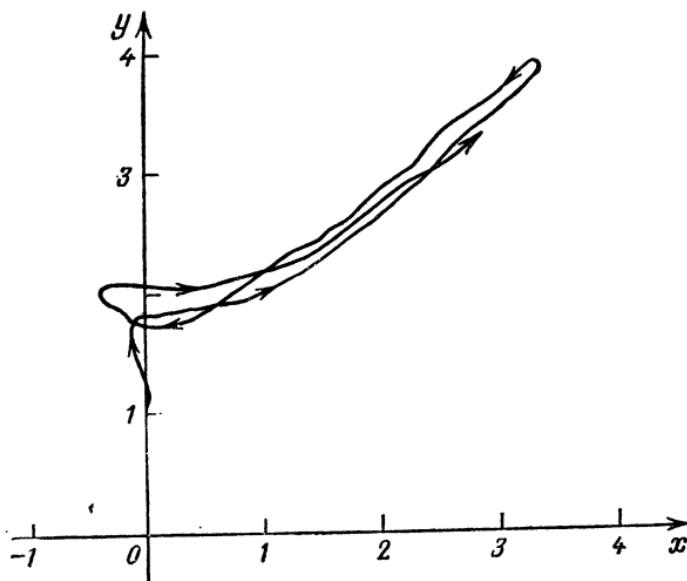


Рис. 45

Для решения системы дифференциальных уравнений воспользуемся программой 107 (схемой Эйлера). Матрица перехода

$$G = \begin{pmatrix} 1-\tau & -\tau \cos t \\ -\tau \cos t & 1-\tau \end{pmatrix},$$

а ее собственные значения

$$\lambda = \tau - 1 \pm \tau \cos t.$$

Тогда условие устойчивости  $|\lambda| < 1$  дает  $\tau < 1$ . Положим  $\tau = 0.2$ . Полученная по результатам счета траектория движения представлена на рис. 45. Из него видно, что движение носит петлеобразный характер.

## Глава 7

# РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

## 1. Устойчивость численных схем для решения уравнений в частных производных

К уравнениям в частных производных приводят решения задач механики и электродинамики сплошных сред. В таких задачах обычно остаются постоянными масса, энергия, импульс, магнитный поток и другие величины. Поэтому численные схемы должны быть консервативными. Мы рассмотрим лишь простейшие разностные схемы, когда функция состояния  $u$  зависит от двух переменных  $x$  и  $t$ , так как решение многомерных задач на микрокалькуляторах сопровождается серьезными трудностями, вызванными их небольшой памятью.

Условие устойчивости в зависимости от временного шага  $\tau$  и пространственного  $\Delta$  рассмотрим на примере численной схемы Лакса для интегрирования электромагнитных уравнений Максвелла для плоскополяризованных волн в вакууме:

$$\frac{\partial B}{\partial t} + c \frac{\partial E}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial E}{\partial t} + c \frac{\partial B}{\partial x} = 0. \quad (7.1)$$

Векторы  $u$  и  $F$  имеют компоненты  $u = u(E, B)$ ,  $F = F(cB, cE)$ .

Компоненты на новом временном слое по схеме Лакса

$$\begin{aligned} E_j^{n+1} &= \frac{1}{2} (E_{j+1}^n - E_{j-1}^n) - \frac{c\tau}{2\Delta} (B_{j+1}^n - B_{j-1}^n), \\ B_j^{n+1} &= \frac{1}{2} (B_{j+1}^n - B_{j-1}^n) - \frac{c\tau}{2\Delta} (E_{j+1}^n - E_{j-1}^n). \end{aligned} \quad (7.2)$$

Подставив векторную фурье-моду

$$u^n = \{E^n e^{ikx}, B^n e^{ikx}\}, \quad (7.3)$$

получим матрицу перехода

$$G = \begin{pmatrix} \cos k\Delta & -\frac{ic\tau}{\Delta} \sin k\Delta \\ -\frac{ic\tau}{\Delta} \sin k\Delta & \cos k\Delta \end{pmatrix}. \quad (7.4)$$

Собственные значения этой матрицы

$$g_{1,2} = \cos k\Delta \pm \frac{ic\tau}{\Delta} \sin k\Delta. \quad (7.5)$$

Матрица имеет два собственных значения, что соответствует двум связанным уравнениям. Они относятся к двум волнам, распространяющимся в положительном и отрицательном направлениях вдоль оси  $x$ . Модули собственных чисел одинаковы и равны

$$|g|^2 = 1 - \sin^2 k\Delta \left( 1 - \frac{c^2 \tau^2}{\Delta^2} \right). \quad (7.6)$$

Чтобы этот модуль был меньше единицы, необходимо

$$\tau \leq \frac{\Delta}{c}. \quad (7.7)$$

Здесь  $c$  — наибольшая возможная скорость распространения волн в пространстве. В самом общем случае условие устойчивости метода имеет вид

$$\tau \leq \frac{\Delta}{v}, \quad (7.8)$$

где  $v$  — наибольшая характерная физическая скорость процесса. Это условие устойчивости Куранта — Леви — Фридрихса. Этот результат вполне естествен. Ведь информация об  $n+1$  точке получается из соседней  $n$ -й точки и ее окружающих. Величина  $\tau$  — это время распространения информации вдоль длины  $\Delta$ . Отношение  $\frac{\Delta}{\tau}$  — это характерная скорость распространения информации на сетке. Очевидно, скорость движения информации должна быть больше характерной скорости физического процесса на пространственной сетке.

Используя фурье-моды, можно оценить также и частотные характеристики разностной схемы. И, надо сказать, дифференциальные уравнения не содержат дисперсии волн, т. е. волны различной длины имеют одинаковые фазовые и групповые скорости, чего нельзя сказать о разностных схемах. В результате этого наблюдается выраженная дисперсия и диффузия волн. Лишь для малых волновых чисел  $k$  эффект дисперсии и диффузии оказывается достаточно малым. Значительно ослабляется дисперсия волн при увеличении порядка точности разностной аппроксимации.

## 2. Явные консервативные методы для гиперболических уравнений

Рассмотрим разностные схемы для численного решения уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} = 0. \quad (7.9)$$

Характерной физической скоростью процесса будем называть отношение

$$v = \frac{F}{u}, \quad (7.10)$$

Таблица 25

| Название метода                     | Схема  | Множитель перехода  |
|-------------------------------------|--|---|
| Метод Лакса                         | $u_j^{n+1} = \frac{1}{2} (u_{j+1}^n + u_j^n) -$ $-(F_{j+1}^n - F_j^n) \frac{\tau}{2\Delta},$ $\epsilon = o(\tau).$ <p style="text-align: center;">Устойчив при <math>\tau \leq \frac{\Delta}{ v }.</math></p>  | $g = \cos k\Delta +$ $+ i\alpha \sin k\Delta$                             |
| Метод Лелевье                       | $u_j^{n+1} = u_j^n - \{(vu)_j^n - (vu)_{j+1}^n\} \frac{\tau}{\Delta},$ <p style="text-align: center;">если <math>v_j^n \leq 0;</math></p> $u_j^{n+1} = u_j^n - \{(vu)_j^n - (vu)_{j-1}^n\} \frac{\tau}{\Delta},$ <p style="text-align: center;">если <math>v_j^n \geq 0, \epsilon = o(\tau).</math></p> <p style="text-align: center;">Применим только к переносу и устойчив при</p> $\tau \leq \frac{\Delta}{v}.$   | $g = 1 -  \alpha  +$ $+  \alpha  \cos k\Delta +$ $+ i\alpha \sin k\Delta$ |
| Двухшаговый метод Лакса – Вендроффа | $u_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} (u_{j+1}^n + u_j^n) - (F_{j+1}^n - F_j^n) \frac{\tau}{\Delta},$ $u_j^{n+1} = u_j^n - \left( F_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - F_{j-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \right) \frac{\tau}{\Delta},$ $\epsilon = o(\tau^2).$ <p style="text-align: center;">Устойчив при <math>\tau \leq \frac{\Delta}{ v }.</math></p>  | $g = 1 - i\alpha \sin k\Delta +$ $+ \alpha^2 (\cos k\Delta - 1)$          |
| Одношаговый метод Лакса – Вендроффа | $u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{\tau}{2\Delta} (F_{j+1}^n - F_{j-1}^n) +$ $+ \frac{\tau^2}{2\Delta^2} \left\{ C_{j+\frac{1}{2}}^n (F_{j+1}^n - F_j^n) - \right.$ $\left. - C_{j-\frac{1}{2}}^n (F_j^n - F_{j-1}^n) \right\},$ $\epsilon = o(\tau^2),$ <p style="text-align: center;">где матрица <math>C</math> – якобиан</p> $C_{\mu\nu} = \frac{\partial F_\mu}{\partial u_\nu}, \quad C_{j+\frac{1}{2}}^n =$ $= C \left\{ \frac{1}{2} (u_{j+1}^n + u_j^n) \right\}.$ | $g = 1 - i\alpha \sin k\Delta +$ $+ \alpha^2 (\cos k\Delta - 1)$          |

| Название метода                     | Схема  | Множитель перехода  |
|-------------------------------------|--|---|
|                                     | Устойчив при $\tau \leq \frac{\Delta}{ v }$<br>$C_j^n - \frac{1}{2} = C \left\{ \frac{1}{2} (u_j^n + u_{j-1}^n) \right\}.$   |   |
| Метод с перешагиванием              | $u_j^{n+1} = u_j^{n-1} - \frac{\tau}{\Delta} (F_{j+1}^n - F_{j-1}^n).$<br>Устойчив при $\tau \leq \frac{\Delta}{ v }, \quad \epsilon = o(\tau^2).$   | $g = i\alpha \sin k\Delta \pm \sqrt{1 - \alpha^2 \sin^2 k\Delta}$ |
| Метод квазивторого порядка точности | $u_j^{n+1} = u_j^n - \left( \frac{3}{2} + \epsilon \right) \frac{\tau}{2\Delta} (F_{j+1}^n - F_{j-1}^n) + \left( \frac{1}{2} + \epsilon \right) \frac{\tau}{2\Delta} (F_{j+1}^{n-1} - F_{j-1}^{n-1}),$<br>$\epsilon = o(\tau^2).$<br>Устойчив при $\tau \leq \frac{\Delta}{2 v }, \quad \text{если}$<br>$\epsilon > \frac{1}{4} \frac{\tau^2 v^2}{\Delta^2} + \frac{1}{2} \frac{\tau^4 v^4}{\Delta^4}.$<br>Сначала следует выбрать $\alpha \ll 1$ , затем $\Delta$ и $\tau$ . Затем выбирается достаточно малое число $\epsilon$ , чтобы выполнялось условие устойчивости, после чего приступают к численной реализации. | В явном виде не выражается  |

а если оно переменное, то будем брать его максимальное значение. Разностные схемы для численного решения векторного уравнения (7.9) представлены в табл. 25.

Метод Лакса прост в употреблении, но дает первый порядок точности по  $\tau$ . Метод Лелевье используется исключительно для уравнений переноса. Методы Лакса—Вендроффа дают второй порядок точности по  $\tau$  и позволяют избежать той численной диффузии, что имеет место в простом методе Лакса первого порядка. Двухшаговая схема Лакса—Вендроффа имеет четвертый порядок точности по волновому числу  $k$ . Длинноволновые гармоники подвержены возмущению лишь в минимальной степени. В то же время эффект диффузии оказывается полезным для коротких волн, сглаживая разрывы и скачки решения на сетке. Поэтому метод этот получил широкое распространение.

Метод с перешагиванием требует задания условий на двух временных слоях. Поэтому значение функции на втором слое обычно предварительно вычисляют каким-либо другим методом.

Метод квазивторого порядка точности является расширенным видом формулы Адамса—Бошфорта.

Метод с перешагиванием и Адамса—Бошфорта, кроме задания двух граничных условий при  $j=1$  и  $j=j_{\max}$ , требует задания начальных значений функции на двух временных слоях.

Метод Лелевье требует задания всего лишь одного граничного условия и одного начального, так как знак величины  $v$  известен. Остальные методы требуют задания двух граничных условий при  $j=1$ ,  $j=j_{\max}$  и начального при  $n=0$ . Решение уравнений в частных производных требует большого количества ячеек памяти ЭВМ, хотя в каждом такте вычислений их участвует всего 5—6. Поэтому

мы будем каждый раз вводить недостающие данные вручную в определенном порядке. С аналогичной ситуацией мы сталкивались, когда рассматривали численное интегрирование и дифференцирование таблиц. Однако порядок ввода известных значений  $u(x, t)$  здесь будет немного усложнен. Табличные данные будут вводиться по строкам. Число строк таблицы соответствует времени  $t$  с индексом  $n$ . Столбцы таблицы будем нумеровать индексом  $j$  слева направо, как показано на рис. 46. Увеличение индекса  $j$  соответствует увеличению величины  $x$ . На рисунке заштрихована строка таблицы с индексом  $n=0$ . Это означает, что в момент времени  $t=0$  должны быть заданы начальные значения функции  $u(x, 0)$  и в заштрихованных клетках таблицы должны стоять какие-то числа. Заштрихованный столбик с  $j=1$  означает задание первого граничного условия. На месте заштрихованных клеток должны стоять какие-то числа. Подобные таблицы могут содержать от  $25$  до  $20 \times 20 = 400$  чисел. Порядок заполнения следующий. Вводятся начальные данные и граничные условия. Затем, используя одну из разностных схем, заполняют строку слева направо значениями  $u(t+\tau, x_j)$  при  $t=t_1=t_0+\tau$ , что соответствует индексу  $n=1$ , индекс  $j$  при этом принимает значения от  $j=2$  до  $j=j_{\max}=-1$ , так как  $u_{j_{\max}}$  должно быть заранее известно, как второе граничное значение. Заполнив строку с  $n=1$ , приступают к заполнению строки с  $n=2$ . И так продолжается до тех пор, пока не будет заполнена последняя строка с  $n=n_{\max}$ .

В процессе вычисления элементов каждой строки обычно используется от двух до пяти значений  $u$  со строки с индексом  $n$  или сразу с двух строк с  $n$  и  $n-1$ . Эти значения неизвестной функции  $u$  при-

|       | $j=1$ | $j=2$ | $j=3$ | $j=4$ | $j=5$ | $j=6$ | $j=7$ | $j=8$ |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $n=0$ |       |       |       |       |       |       |       |       |
| $n=1$ |       | ...   | ...   | ...   | ...   | ...   |       |       |
| $n=2$ |       | ...   | ...   | ...   | ...   |       |       |       |
| $n=3$ |       | ...   | ...   | ...   | ...   |       |       |       |
| $n=4$ |       | ...   | ...   | ...   | ...   |       |       |       |
| $n=5$ |       | ...   | ...   |       |       |       |       |       |
| $n=6$ |       |       | ...   | ...   |       |       |       |       |

Рис. 46

ходится вводить вручную в память программируемого микрокалькулятора. Программы устроены так, что после ввода нескольких первых или пары с двух временных слоев значений функции  $u$  на индикатор поступает вычисленное значение  $u$  на временном слое с индексом  $n+1$  и очередным значением  $j$ . После ввода следующего одного или пары значений функции  $u$  микроЭВМ использует также и предшествующие введенные данные, а часть их «выбрасывает» из памяти и вычисляет  $u_{j+1}^{n+1}$ . Так продолжается, пока вычислительный процесс не дойдет до  $j=j_{\max}$ . Затем вводятся несколько первых значений из следующего ряда таблицы и процедура повторяется. Именно так устроены приведенные ниже программы. Функция  $F$  зависит в общем случае от трех переменных  $u, x, t$ . Они являются аргументами подпрограмм-функций  $F(u, x, t)$ . Программы 118, 119 рассматривают случай скалярной неизвестной функции  $u$ , а программа 120 служит для численного интегрирования двухмерных уравнений Максвелла для плоскополяризованной волны в вакууме.

**Программа 118. Разностная схема Лакса первого порядка.** Программа позволяет находить значения функции  $u$ , если известны все значения функции на первом слое при  $t=0$ , а также на границе слева и справа при  $x=x_0$  до  $x=x_{\max}$ . В каждом временном слое необходимо получить  $j=j_{\max}$  значений  $u$ , величина  $j_{\max}$  — количество столбцов таблицы, что на рис. 46.

Перед началом счета необходимо ввести  $j_{\max}-2=\Pi 0=\Pi 0$ ,  $x_0=\Pi 5$ ,  $t_0=\Pi 7$ ,  $\Delta=\Pi 8$ ,  $\tau=\Pi 9$ ,  $\frac{\tau}{2\Delta}=\Pi A$ , в L0 организован цикл.

Значения функции, вводимые в ходе программы, поступают в регистры  $u_{j-1}^n=\Pi 2$ ,  $u_j^n=\Pi 3$ ,  $u_{j+1}^n=\Pi 4$ . Подпрограмма-функция вводится с адреса 58. Ее аргументами являются  $x=\Pi 5$ ,  $u=\Pi 6$ ,  $t=\Pi 7$ , ПВ — буфер.

После очистки счетчика вводите значения функции на предыдущем слое:  $u_1^0$  С/П  $u_2^0$  С/П  $u_3^0$  С/П ...  $u_{j_{\max}}^0$  С/П. Начиная с ввода  $u_3^0$ , на индикаторе вы будете получать  $u_1^1$ ,  $u_3^1$ ,  $u_4^1$ , ...,  $u_{j_{\max}-1}^1$ . Продолжая и дальше вводить  $u_1^1$ ,  $u_2^1$ ,  $u_3^1$ ,  $u_4^1$ , ...,  $u_{j_{\max}}^1$ , после ввода  $u_3^1$  вы будете получать  $u_2^2$ ,  $u_3^2$ , ...,  $u_{j_{\max}-1}^2$ . Переход на новую строку микроЭВМ осуществляется автоматически. Пользователю остается лишь набирать в порядке очереди все значения функции на предшествующем слое, читая таблицу слева направо.

|     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |  |
|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|--|
| P2  | C/P | P3  | C/P | P4  | Px2 | PП  | 58  | PВ  | Px5 |  |
| Px8 | Px8 | +   | +   | P5  | Px4 | PП  | 58  | PxB | ↔   |  |
| —   | PxA | ×   | Px2 | Px4 | +   | 2   | ÷   | +   | C/P |  |
| Px3 | P2  | Px4 | P3  | +   | ↔   | P4  | Px5 | Px8 | —   |  |
| P5  | FL0 | 05  | Px1 | P0  | Px8 | ×   | Px5 | ↔   | —   |  |
| P5  | Px7 | Px9 | +   | P7  | Px4 | БП  | 00  | P6  | ... |  |
| ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | B/O |  |

Тест:  $j_{\max} = 4$ ,  $t_0 = 0$ ,  $x_0 = 1$ ,  $\Delta = \frac{\pi}{8}$ ,  $\tau = \frac{\pi}{4}$ ,  $F = -u$ ,  $u(x_0) = 1$ ,  
 $u(x_0 + 3\Delta) = 1$ ,  $u_1^0 = 1$ .

Результат счета:  $u_1^0 = 1$ ,  $u_2^0 = 1$ ,  $u_3^0 = 1$ ,  $u_4^0 = 1$ ,  $u_1^1 = 1$ ,  $u_2^1 = 1.1040367$ ,  
 $u_3^1 = 1.2273244$ ,  $u_4^1 = 1$ ,  $u_1^2 = 1$ ,  $u_2^2 = 1.217699$ ,  $u_3^2 = 1.2793427$ ,  
 $u_4^2 = 1$ , ...,  $t = 10$  с.

**Программа 119. Разностная схема Лелевье для решения уравнения переноса.** Программа предназначена для случая  $v > 0$ . Величина  $u$  задана в момент  $t_0$  и есть граничное условие  $u(x_0)$ . В программе вычисляется величина  $u$  для точек, находящихся правее  $u(x_0)$ . Программа пригодна и при  $v \leq 0$ , но только в этом случае следует знак  $\Delta$  положить отрицательным, а увеличение индекса  $j$  в таблице на рис. 46 будет соответствовать уменьшению величины  $x$ .

Память: L0 — цикл,  $j_{\max} - 1 = \text{П0} = \text{П1}$ ,  $x_0 = \text{П5}$ ,  $t_0 = \text{П7}$ ,  $\Delta = \text{П8}$ ,  
 $\tau = \text{П9}$ ,  $\frac{\tau}{\Delta} = \text{П4}$ .

После основной программы с адреса 44 набирается подпрограмма-функция  $u(x, u, t)$ , аргументами которой являются  $x = \text{П5}$ ,  $u = \text{П6}$ ,  $t = \text{П7}$ . Значения функции  $u$  заносятся в ходе выполнения программы в регистры  $u_{j-1}^n = \text{П2}$ ,  $u_j^n = \text{П3}$ ,  $u_{j+1}^n = \text{П4}$ . После В/0 набираем  $u_1^0$  С/П  $u_2^0$  С/П  $u_3^0$  С/П  $u_4^0$  ...  $u_{j_{\max}}^0$  С/П. После ввода  $u_2^0$  на индикаторе вы получите  $u_2^1$ ,  $u_3^1$ , ...,  $u_{j_{\max}}^1$ . Затем набираете  $u_1^1$  С/П  $u_2^1$  СП  $u_3^1$  С/П ...  $u_{j_{\max}}^1$  С/П. После ввода  $u_2^1$  С/П вы будете получать  $u_2^2$ ,  $u_3^2$ ,  $u_4^2$ , ...,  $u_{j_{\max}}^2$ . Используемый в программе регистр ПА — буферный.

|     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |
|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| P2  | C/P | П3  | Пx2 | ПП  | 43  | ПА  | Пx5 | Пx8 | +   |
| П5  | Пx3 | ПП  | 43  | ПxA | —   | Пx4 | ×   | Пx2 | ↔   |
| —   | C/P | Пx3 | П2  | ↔   | П3  | FL0 | 03  | Пx1 | П0  |
| Пx8 | ×   | Пx5 | ↔   | —   | П5  | Пx7 | Пx9 | +   | П7  |
| Пx3 | БП  | 00  | П6  | ... | ... | ... | Пx6 | ×   | В/0 |

Тест:  $v = -u$ ,  $u(x_0) = 1$ ,  $j_{\max} = 4$ ,  $x_0 = 1$ ,  $t_0 = 0$ ,  $\Delta = 5$ ,  $\tau = 1$ .

Результат счета:  $u_1^0 = 1$ ,  $u_2^0 = 2$ ,  $u_3^0 = 3$ ,  $u_4^0 = 4$ ,  $u_1^1 = 1$ ,  $u_2^1 = 1.6$ ,  
 $u_3^1 = 3$ ,  $u_4^1 = 4.4$ ,  $u_1^2 = 1$ ,  $u_2^2 = 1.312$ ,  $u_3^2 = 2.888$ ,  $u_4^2 = 5.072$ ,  $t_{\text{сч}} = 10$  с.

Программы 118 и 119 рассчитаны на случай, когда функция  $F(x, u, t)$  зависит от трех величин  $x$ ,  $u$  и  $t$ . Если она зависит от одной величины, то проще составить частную программу, так как если  $v$  не зависит явно от  $x$  и  $t$ , то нет необходимости вычислять очередные значения  $x_j$  и  $t_n$ , а значит, в общей программе будет много ненужных процедур, уменьшающих быстродействие программы. Для читателя, разобравшегося в структуре общих программ подобного типа, составить частную программу не составит большого труда.

Наконец рассмотрим численную схему интегрирования часто встречающихся уравнений Максвелла для плоскополяризованных волн в вакууме.

**Программа 120. Схема Лакса для численного решения двухмерных уравнений Максвелла для плоскополяризованной волны в вакууме.**  
 Вводим  $E_1^0$  С/П  $B_1^0$  С/П  $E_2^0$  С/П  $B_2^0$  С/П  $E_3^0$  С/П  $B_3^0$  С/П. Получим  $E_1^1$ , а после С/П —  $B_2^1$ . Набираем  $E_4^0$  С/П  $B_4^0$  С/П и получаем  $E_2^1$ ,  $E_2^1$ ,  $B_2^1$ , ... Для перехода на новый временной слой набираем В/0  $E_1^1$  С/П  $B_1^1$  С/П  $E_2^1$  С/П  $B_2^1$  С/П  $E_3^1$  С/П  $B_3^1$  С/П ... Получаем  $E_2^2$ ,  $B_2^2$ . Результат вычислений поступает также в регистры  $E_j^{n+1} = \Pi 7$ ,  $B_j^{n+1} = \Pi 8$ . Поскольку величина  $n$  двухмерная, то каждая строка в таблице (рис. 46) распадается на две строки.

Перед счетом необходимо ввести значение величины  $\frac{c\tau}{2\Delta} = \Pi 6$ .

Память:  $E_{j-1}^n = \Pi 0$ ,  $E_j^n = \Pi 1$ ,  $E_{j+1}^n = \Pi 2$ ,  $B_{j-1}^n = \Pi 3$ ,  $B_j^n = \Pi 4$ ,  $B_{j+1}^n = \Pi 5$ ,  $\frac{c\tau}{2\Delta} = \Pi 6$ ,  $E_j^{n+1} = \Pi 7$ ,  $B_j^{n+1} = \Pi 8$ , ПА и ПВ — буфер.

|    |     |     |     |    |     |     |     |     |     |
|----|-----|-----|-----|----|-----|-----|-----|-----|-----|
| P6 | С/П | П0  | С/П | П3 | С/П | П1  | С/П | П4  | С/П |
| P2 | С/П | П5  | Пх3 | —  | Пх6 | Х   | Пх2 | Пх0 | —   |
| 2  | ÷   | ↔   | —   | П7 | С/П | Пх2 | Пх0 | —   | Пх6 |
| ×  | Пх5 | Пх3 | —   | 2  | ÷   | ↔   | —   | П8  | С/П |
| ПА | С/П | ПВ  | Пх1 | П0 | Пх2 | П1  | ПхA | П2  | Пх4 |
| P3 | Пх5 | П4  | ПхВ | БП | 12  |     |     |     |     |

Тест:  $\frac{c\tau}{\Delta} = 0.1$ .

$$\begin{aligned} E_i^0 & -1, -0.5, 0, 0.5, 1, 0.5; \\ B_i^0 & 1, 0.5, 0, -0.5, -1, 0.5; \\ E_i^1 & -1, 0.55, 0.55, 0.55, 0, -0.55; \\ B_i^1 & 1, 0.55, 0.55, 0.55, 0, -0.55. \end{aligned}$$

### 3. Методы решения параболических уравнений

Дифференциальное уравнение, описывающее распространение тепла в однородном стержне, является примером параболического уравнения. Его называют еще уравнением теплопроводности. Оно имеет вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} + k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0. \quad (7.11)$$

Если стержень однородный, то коэффициент  $k$  — постоянный, в противном случае  $k$  — функция  $x$ . В табл. 26 приведены разностные схемы для численного решения параболического уравнения, допускающие реализацию на программируемом микрокалькуляторе. Из таблицы

Таблица 26

| Название метода               | Схема   | Множитель перехода  |
|-------------------------------|---|---|
| Явный метод первого порядка   | $u_j^{n+1} = u_j^n + \beta (u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n),$ $\epsilon = o(\tau).$ <p>Устойчив при <math>\tau \leq \Delta^2/2k</math> или при <math>\beta \leq 1/2</math>.</p>   | $g = 1 - 4\beta \sin^2 \frac{k\Delta}{2}$   |
| Метод с перешагиванием        | $u_j^{n+1} = u_j^{n-1} + 2\beta (u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n),$ $\epsilon = o(\tau^2).$ <p>Всегда устойчив.</p>  | $g = 4\beta \sin^2 \frac{k\Delta}{2} \pm$ $\pm \sqrt{16\beta^2 \sin^2 \frac{k\Delta}{2} + 1}$ |
| Явный метод Дюфора — Франкеля | $u_j^{n+\frac{1}{2}} = \left( \frac{1+\alpha}{1-\alpha} \right) u_j^{n-1} +$ $+ \frac{\alpha}{1+\alpha} (u_{j+1}^n + u_{j-1}^n),$ $u_j^{n+1} = u_j^{n-1} + \alpha \left\{ u_{j+1}^n - \right. \\ \left. - \left( u_j^{n+\frac{1}{2}} + u_j^{n+1} \right) + u_{j-1}^n \right\},$ $\alpha = \frac{2k\tau}{\Delta^2}, \quad \epsilon = o(\tau^2).$ <p>Всегда устойчив.</p> | $g = \frac{1}{1+2\beta} (2\beta \cos k\Delta \pm$ $\pm \sqrt{1 - 4\beta^2 \sin^2 k\Delta})$   |

видно, что метод Дюфора — Франкеля самый точный, но не оптимальный по времени. Хотя методы с перешагиванием и Дюфора — Франкеля и являются безусловно устойчивыми, но это не значит, что надо выбирать очень большие шаги по времени: при больших шагах заметными становятся случайные ошибки арифметических вычислений, и решение получается неверным. Поэтому величины  $\tau$  и  $\Delta^2$  надо выбирать так, чтобы  $\frac{k\tau}{\Delta^2} \sim 1 - 10$ .

Все разностные схемы для решения параболических уравнений требуют одного начального и двух граничных условий.

Программы 121—123 предназначены для случая, когда величина  $k$  — постоянная. Если значение  $k$  переменно и задано в виде таблицы, то можно вводить вручную на каждом шаге соответствующее значение  $k$ . Если же величина  $k$  является аналитической функцией  $x$ , то следует воспользоваться программами 124—126.

**Программа 121. Метод первого порядка для уравнения переноса.** Перед программой вводим значение  $\beta = \frac{k\tau}{\Delta^2} = \Pi_5$ ,  $j_{\max} - 2 = \Pi_0 = \Pi_1$ .

Вводим  $u_1^0$  С/П  $u_2^0$  С/П  $u_3^0$  С/П. На индикаторе получим вычисленное значение  $u_2^1$ . После  $u_4^0$  С/П получим  $u_3^1, \dots$ , а после  $u_{j\max}^0$  С/П —  $u_{j\max-1}^1$ . Затем набираем три новых значения функции со следующей строки  $u_1^1$  С/П  $u_2^1$  С/П  $u_3^1$  С/П и получаем  $u_2^2 \dots$

Память:  $u_{j-1}^n = \Pi_2$ ,  $u_j^n = \Pi_3$ ,  $u_{j+1}^n = \Pi_4$ , ПА — буфер. В программе используется цикл L0 для перехода на новую строку.

|     |     |     |     |           |     |     |    |     |     |
|-----|-----|-----|-----|-----------|-----|-----|----|-----|-----|
| P2  | С/П | П3  | С/П | П4        | Пх3 | /—/ | 2  | ×   | Пх2 |
| +   | Пх4 | +   | Пх5 | ×         | Пх3 | +   | ПА | Пх3 | П2  |
| Пх4 | П3  | ПxA | FL0 | <u>03</u> | C/П | Пх1 | ПО | ↔   | БП  |

00

Тест:  $\beta = 0.2$ ,  $j_{\max} - 2 = 3 = \Pi_0 = \Pi_1$ .

|           |    |        |        |        |     |
|-----------|----|--------|--------|--------|-----|
| $u_1^0$ : | 1, | 1.2,   | 3.4,   | 7.8,   | 10; |
| $u_2^0$ : | 1, | 1.6,   | 3.84,  | 7.36,  | 10; |
| $u_3^0$ : | 1, | 1.928, | 4.096, | 7.184, | 10. |

$t_{\text{сч}} = 6 \text{ с.}$

**Программа 122. Метод с перешагиванием для уравнения теплопроводности.** Перед счетом программы вручную вводится значение  $2\beta = \frac{2k\tau}{\Delta^2} = \Pi_7$ . Значения функции  $u$  вводятся в автоматическом режиме. Они распределяются в памяти следующим образом  $u_1^{n-1} = \Pi_2$ ,  $u_2^{n-1} = \Pi_3$ ,  $u_3^{n-1} = \Pi_4$ ,  $u_4^n = \Pi_5$ ,  $u_{j+1}^n = \Pi_6$ , ПА — буфер. В ходе программы вводятся значения  $u_1^{-1}$  С/П  $u_1^0$  С/П  $u_2^{-1}$  С/П  $u_2^0$  С/П  $u_3^{-1}$  С/П  $u_3^0$  С/П. Получаете  $u_2^1$ , после  $u_4^{-1}$  С/П  $u_4^0$  С/П —  $u_3^1$ , а после  $u_m^{-1}$  С/П  $u_m^0$  С/П —  $u_{m-1}^1$ . Затем набираете три пары значений со следующих строк  $u_1^0$  С/П  $u_1^1$  С/П  $u_2^0$  С/П  $u_2^1$  С/П  $u_3^0$  С/П  $u_3^1$  С/П и получаете  $u_2^2 \dots$

|     |           |     |     |     |     |     |           |     |     |
|-----|-----------|-----|-----|-----|-----|-----|-----------|-----|-----|
| С/П | П4        | С/П | П2  | С/П | П5  | С/П | П3        | С/П | П6  |
| Пх5 | /—/       | 2   | ×   | Пх4 | +   | Пх6 | +         | Пх7 | ×   |
| Пх2 | +         | ПА  | Пх3 | П2  | Пх5 | П4  | Пх6       | П5  | ПxA |
| FL0 | <u>06</u> | C/П | Пх1 | П0  | ↔   | БП  | <u>00</u> |     |     |

Тест:  $2\beta = 0.2 = \Pi_7$ ,  $j_{\max} - 2 = 3 = \Pi_0 = \Pi_1$ .

|              |    |        |        |        |     |
|--------------|----|--------|--------|--------|-----|
| $u_1^{-1}$ : | 1, | 1.2,   | 3.4,   | 7.8,   | 10; |
| $u_2^0$ :    | 1, | 1.6,   | 3.84,  | 7.36,  | 10; |
| $u_3^0$ :    | 1, | 1.528, | 3.856, | 7.624, | 10. |

$t_{\text{сч}} = 6 \text{ с.}$

**Программа 123. Явный метод Дифора — Франкеля.** Перед счетом предварительно вводятся значения  $j_{\max} - 2 = \Pi_0 = \Pi_1$ ,  $2\tau/\Delta^2 = \Pi_7$ . Значения функции  $u_j^n$  вводятся по программе. Они распределяются в памяти так:  $u_{j-1}^n = \Pi_2$ ,  $u_j^n = \Pi_3$ ,  $u_{j+1}^n = \Pi_4$ ,  $u_j^{n-1} = \Pi_A$ ,  $u_{j+1}^{n-1} = \Pi_B$ . В программе используется цикл L0 для перехода на новую строку.

✓ Вводим  $u_1^{-1}$  С/П  $u_1^0$  С/П  $u_2^{-1}$  С/П  $u_2^0$  С/П  $u_3^{-1}$  С/П  $u_3^0$  С/П. На индикаторе высвечивается значение  $u_2^1$ . Вводим пару  $u_4^{-1}$  С/П  $u_4^0$  С/П. На индикатор поступает значение  $u_3^1$ . Дойдя до конца строки, набираете пару значений со следующего временного слоя. После ввода трех пар получаете первое значение функции на следующем слое. И так до конца строки.

| С/П       | П2  | С/П | ПА  | С/П | П3        | С/П | ПВ  | С/П | П4  |
|-----------|-----|-----|-----|-----|-----------|-----|-----|-----|-----|
| Пх2       | +   | Пх7 | ×   | Пх7 | 1         | +   | ÷   | 1   | Пх7 |
| —         | 1   | Пх7 | +   | ÷   | Пх2       | ×   | +   | Пх2 | +   |
| Пх4       | ↔   | —   | Пх2 | +   | Пх7       | ×   | Пх2 | +   | С/П |
| ПхВ       | ПА  | ↔   | ПВ  | Пх3 | П2        | Пх4 | П3  | ПхВ | FL0 |
| <u>08</u> | Пх1 | П0  | ↔   | БП  | <u>01</u> |     |     |     |     |

Тест:  $2\tau/\Delta^2 = 1$ ,  $\tau/\Delta = 4$ .

$$\begin{aligned} u_j^{-1}: & \quad 1, \quad 4, \quad 3, \quad 7; \\ u_j^0: & \quad 1, \quad 2, \quad 4, \quad 7; \\ u_j^1: & \quad 1, \quad 2.5, \quad 4.5, \quad 7. \\ t_{\text{сч}}: & \quad 9 \text{ с.} \end{aligned}$$

**Программа 124. Решение параболического уравнения явным методом, если  $K = f(x)$ .** Перед счетом вводятся значения:  $j_{\max} - 2 = \Pi_0 = \Pi_1$ ,  $x_0 = \Pi_5$ ,  $\Delta = \Pi_6$ ,  $\tau/\Delta = \Pi_7$ , П9 — буфер. С адреса 57 записывается подпрограмма-функция  $K(x)$ , где  $x = \Pi_8$ .

Вводим  $u_1^0$  С/П  $u_2^0$  С/П  $u_3^0$  С/П. На индикаторе появляется  $u_2^1$ . Вводим  $u_4^0$  С/П. Появляется  $u_3^1$  ... Процедура продолжается до тех пор, пока не введутся все значения с одного слоя. После ввода трех данных с новой строки вы будете получать значения  $u$  на следующем временном слое.

| П2  | С/П       | П3  | С/П       | П4        | Пх1 | Пх0       | —   | Пх6 | ×   |
|-----|-----------|-----|-----------|-----------|-----|-----------|-----|-----|-----|
| Пх5 | +         | ПП  | <u>57</u> | Пх2       | ×   | П9        | Пх8 | Пх6 | +   |
| ПП  | <u>57</u> | 2   | ×         | Пх3       | ×   | Пх9       | ↔   | —   | П9  |
| Пх8 | Пх6       | +   | ПП        | <u>57</u> | Пх4 | ×         | Пх9 | +   | Пх7 |
| ×   | Пх3       | +   | С/П       | Пх3       | П2  | Пх4       | П3  | +   | ↔   |
| FL0 | <u>04</u> | Пх1 | П0        | ↔         | БП  | <u>00</u> | П8  | ... | B/0 |

Тест:  $K(x) = e^{-\frac{x}{8}}$ ,  $x_0 = 0$ ,  $\Delta = 1$ ,  $\frac{\tau}{\Delta} = 0.1$ ,  $j_{\max} = 4$ ,

$$\begin{aligned} u_j^0: & \quad 1, \quad 2, \quad 5, \quad 7; \\ u_j^1: & \quad 1, \quad 2.6820083, \quad 4.3940054, \quad 7; \\ u_j^2: & \quad 1, \quad 2.5261719, \quad 4.560895, \quad 7. \\ t_{\text{сч}}: & \quad 22 \text{ с.} \end{aligned}$$

**Программа 125.** Метод с перешагиванием для параболического уравнения, если  $K=f(x)$ . Перед счетом вводятся значения  $j_{\max}=2=\Pi_0=\Pi_1$ ,  $x_0=\Pi_5$ ,  $\Delta=\Pi_6$ ,  $2\tau/\Delta=\Pi_7$ . Оставшаяся память заполнена так:  $u_{j-1}^n=\Pi_2$ ,  $u_j^n=\Pi_3$ ,  $u_{j+1}^n=\Pi_4$ ,  $u_j^{n-1}=\text{ПА}$ ,  $u_{j+1}^{n-1}=\text{ПВ}$ ,  $\Pi_9$  — буфер. Значения функции  $u$  вводятся попарно с двух временных слоев:  $u_1^{-1}$  С/П  $u_1^0$  С/П  $u_2^{-1}$  С/П  $u_2^0$  С/П  $u_3^{-1}$  С/П  $u_3^0$  С/П. На индикаторе появляется  $u_2^1$ . После  $u_4^{-1}$  С/П  $u_4^0$  С/П —  $u_3^1$  ... Переход микрокалькулятора на новую строку выполняется автоматически, как и в подобных программах. Подпрограмма-функция  $K(x)$ , где  $x=\Pi_8$  записывается с адреса 65.

|     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |
|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| С/П | П2  | С/П | ПА  | С/П | П3  | С/П | ПВ  | С/П | П4  |
| Пх1 | Пх0 | —   | Пх6 | ×   | Пх5 | +   | ПП  | 65  | Пх2 |
| ×   | П9  | Пх8 | Пх6 | +   | ПП  | 65  | 2   | ×   | Пх3 |
| ×   | Пх9 | ↔   | —   | П9  | Пх8 | Пх6 | +   | ПП  | 65  |
| Пх4 | ×   | Пх9 | +   | Пх7 | ×   | ПхA | +   | С/П | ПхВ |
| ПА  | ↔   | ПВ  | Пх3 | П2  | Пх4 | П3  | ПхВ | FL0 | 08  |
| Пх1 | П0  | ↔   | БП  | 01  | П8  | ... | ... | ... | В/0 |

Тест:  $K(x)=e^{-\frac{x}{8}}$ ,  $x_0=0$ ,  $\Delta=1$ ,  $\tau/\Delta=0,1$ ,  $j_{\max}=4$ .

$$\begin{aligned} u_j^{-1}: & \quad 1, \quad 2, \quad 5, \quad 7; \\ u_j^0: & \quad 1, \quad 3, \quad 6, \quad 7; \\ u_j^1: & \quad 1, \quad 2.0377824, \quad 4.8112906, \quad 7. \\ t_{\text{сч}}: & =22 \text{ с.} \end{aligned}$$

В самом общем случае коэффициент теплопроводности  $K$  может зависеть также и от величины  $u$ , т. е.  $K=K(x, u)$ .

**Программа 126.** Решение параболического уравнения методом первого порядка, если  $K=K(x, u)$ . До начала счета вводятся значения:  $j_{\max}-2=\Pi_0=\Pi_1$ ,  $x_0=\Pi_5$ ,  $\Delta=\Pi_6$ ,  $\tau/\Delta=\Pi_7$ ,  $\Pi_9$  — буфер. Значения  $u$  поступают в адресуемые регистры следующим образом:  $u_{j-1}^n=\Pi_2$ ,  $u_j^n=\Pi_3$ ,  $u_{j+1}^n=\Pi_4$ . Подпрограмма-функция  $K(x, u)$  зависит от двух величин  $u=\text{ПА}$  и  $x=\Pi_8$ . Она вводится с адреса 64.

После В/0 вводятся  $u_1^0$  С/П  $u_2^0$  С/П  $u_3^0$  С/П. Получаете  $u_2^1$ . Вводите  $u_4^0$  С/П. Получаете  $u_3^1$ . Переход на новую строку в программе осуществляется автоматически.

|     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |
|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| П2  | С/П | П3  | С/П | П4  | Пх2 | ПА  | Пх1 | Пх0 | —   |
| Пх6 | ×   | Пх5 | +   | ПП  | 63  | Пх2 | ×   | П9  | Пх3 |
| ПА  | Пх8 | Пх6 | +   | ПП  | 63  | 2   | ×   | Пх3 | ×   |
| Пх9 | ↔   | —   | П9  | Пх4 | ПА  | Пх8 | Пх6 | +   | ПП  |
| 63  | Пх4 | ×   | Пх9 | +   | Пх7 | ×   | Пх3 | +   | С/П |

|     |    |     |    |     |     |     |           |     |     |
|-----|----|-----|----|-----|-----|-----|-----------|-----|-----|
| Пх3 | П2 | Пх4 | П3 | +   | ↔   | FL0 | <u>04</u> | Пх1 | П0  |
| ↔   | БП | 00  | П8 | ... | ... | ... | ...       | ... | В/0 |

Тест:  $K = e^{-\frac{x+u}{8}}$ ,  $x_0 = 0$ ,  $\Delta = 1$ ,  $\tau/\Delta = 0.1$ ,  $i_{\max} = 4$ .  
 Результаты счета:

$$u_j^0: \begin{array}{cccc} 1, & 2, & 5, & 7; \\ u_j^1: \begin{array}{ccc} 1, & 2.021765, & 4.9211492, \end{array} & 7; \\ t_{\text{сч}} = 21 \text{ с.} \end{array}$$

Частным случаем параболических уравнений при  $\frac{du}{dt} = 0$  являются эллиптические уравнения. К ним приводит ряд физических задач: определение давления газа в неоднородном силовом поле, нахождение распределения потенциалов и электрических напряжений на проводящей плоскости при задании потенциала на границе, задача о стационарных потоках тепла, определение прогиба нагруженной мембранны. Для их решения в настоящее время разработано достаточно много аналитических методов. Численный метод требует решения системы линейных уравнений с большим числом неизвестных. Суть метода состоит в следующем. Всю замкнутую область покрывают прямоугольной сеткой. Рассмотрим для простоты двухмерный случай. Обозначим  $\lambda = \frac{h_y}{h_x}$ , где  $h_x$  и  $h_y$  — сторона ячейки одного прямоугольника по  $x$  и  $y$ .

Тогда, заменив дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

его разностным аналогом для узла  $i, j$ , получим уравнение

$$\lambda^2 u_{i+1,j} + \lambda^2 u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1} - 2(1 + \lambda^2) u_{i,j} = 0.$$

Подобным уравнением описывается любой внутренний узел, а в граничных узлах значение  $u$  заменяется значением функции на границе. Тогда мы получим систему линейных уравнений, из которой найдем все  $u_{i,j}$ . Сложность системы уравнений определяется формой границы и граничным условием. В общем случае решение такой задачи под силу только большой ЭВМ.

#### 4. Графическое представление результатов счета при решении уравнений в частных производных

При решении уравнений в частных производных мы получаем решения, зависящие как минимум от двух величин:  $u = u(x, t)$ . Возникает вопрос об интерпретации и наглядном изображении полученных результатов графически. Функцию  $u(x, t)$  можно представить в виде

некоторой трехмерной поверхности, где координатами ее будут

$$X=x, \quad Y=t, \quad Z=u. \quad (7.12)$$

Трехмерная поверхность образует некоторый рельеф, который как-то нужно изобразить на плоском листе бумаги. Так, в географии его показывают на физических картах разной окраской. В практике работы с большими ЭВМ исходную область покрывают цифрами от 0 до 9, где 0 соответствует наименее высокой, а 9 — наивысшей точке рельефа. Если минимальная точка имеет высоту  $u_{\min}$ , то ее цифру  $N$  в каждом случае можно найти при помощи алгоритма:

$$h = \frac{u_{\max} - u_{\min}}{10},$$

$$N = \begin{cases} \left[ \frac{u - u_{\min}}{h} \right], & \text{если } u < u_{\max}, \\ 9, & \text{если } u = u_{\max}, \end{cases} \quad (7.13)$$

где операцией [...] обозначено взятие целой части от выражения в скобках. Абсолютная разрешающая способность такого графического представления поверхности равна  $h$ , так как по рисунку рельефа невозможно различить высоты, отличающиеся на величину  $h$ . Отношение  $\frac{h}{u_{\max} - u_{\min}}$  называют *относительной разрешающей способностью изображения*. Относительная разрешающая способность изображения рельефа функции по алгоритму (7.13) равна 0.1. Относительная разрешающая способность географических карт обычно того же порядка и лежит в пределах от 1/6 до 1/13.

**Программа 127\*. Вычисление цифр рельефа поверхности.** Ввести  $u_{\min}$  С/П  $u_{\max}$  С/П  $u_1$  С/П  $u_2$  С/П ...  $u_n$  С. П. После ввода каждого значения  $u_i$  на индикаторе получаем соответствующую цифру  $N_i$ .

Память:  $u_{\min} = \text{П2}$ ,  $u_{\max} = \text{П3}$ ,  $h = \text{П4}$ .

До начала счета необходимо вручную выбрать минимальное и максимальное значение функции.

|        |           |    |     |           |      |    |           |    |     |
|--------|-----------|----|-----|-----------|------|----|-----------|----|-----|
| П2     | С/П       | П3 | Пх2 | —         | 1    | 0  | ÷         | П4 | Пх3 |
| С/П    | Пх2       | —  | Пх4 | ÷         | К[х] | П5 | 1         | 0  | —   |
| Fx = 0 | <u>25</u> | 9  | БП  | <u>10</u> | Пх5  | БП | <u>10</u> |    |     |

Тест:  $u_{\min} = 1.723$ ,  $u_{\max} = 3.007$ ,  $u = 2.2573$ ,  $N = 4$ .

В табл. 27 приведены результаты счета по одной из разностных схем решения уравнения в частных производных. Преобразовав таблицу по программе 127, получим рис. 47, на котором хорошо видно, где расположена характерная выпуклость рельефа. В программе было использовано, что  $u_{\max} = 3.007$ , а  $u_{\min} = 1.723$ .

Для таблиц с количеством элементов  $20 \times 20$  и более гораздо нагляднее рисунки изолиний — линий примерно равной высоты. Разре-

| $u(x, t)$ |       |       |       |       |       |       |       |       |       |  |
|-----------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|--|
| 1.753     | 1.8   | 1.9   | 2.15  | 2.18  | 2.19  | 2.14  | 1.91  | 1.815 | 1.723 |  |
| 1.811     | 1.914 | 2.152 | 2.187 | 2.194 | 2.183 | 2.21  | 1.131 | 1.916 | 1.821 |  |
| 1.898     | 2.155 | 2.183 | 2.193 | 2.253 | 2.259 | 2.179 | 2.205 | 2.137 | 1.897 |  |
| 2.164     | 2.182 | 2.19  | 2.256 | 2.430 | 2.455 | 2.255 | 2.185 | 2.2   | 2.141 |  |
| 2.184     | 2.192 | 2.256 | 2.435 | 2.791 | 2.701 | 2.468 | 2.254 | 2.182 | 1.99  |  |
| 2.191     | 2.258 | 2.436 | 2.781 | 3.001 | 3.007 | 2.790 | 2.423 | 2.256 | 2.184 |  |
| 2.184     | 2.194 | 2.257 | 2.471 | 2.774 | 2.776 | 2.41  | 2.256 | 2.184 | 2.184 |  |
| 2.155     | 2.184 | 2.192 | 2.250 | 2.448 | 2.480 | 2.258 | 2.182 | 2.184 | 2.155 |  |
| 1.899     | 2.154 | 2.183 | 2.192 | 2.250 | 2.258 | 2.184 | 2.184 | 2.155 | 1.933 |  |
| 1.811     | 1.899 | 2.156 | 2.184 | 2.194 | 2.183 | 2.184 | 2.154 | 1.911 | 1.812 |  |

шающая способность таких рисунков вдвое выше, так как нечетным высотам соответствуют цифры, а четным — пустоты. В физических задачах изолинии позволяют очень наглядно представить области равного давления — изобары, температуры — изотермы либо области равного потенциала. Математический алгоритм изолиний следующий:

$$h = \frac{u_{\max} - u_{\min}}{19}, \quad K = \frac{1}{2} \left[ \frac{u - u_{\min}}{h} \right],$$

$$N = \begin{cases} K, & \text{если } K \text{ целое,} \\ \text{отсутствие символа,} & \text{если } K \text{ дробное,} \end{cases} \quad (7.14)$$

а [...] обозначена операция взятия целой части от выражения в скобках.

**Программа 128\*. Вычисление цифр изолиний рельефа поверхности.** Наберите 2 F cos<sup>-1</sup> ВП ↑ П6. Вводите  $u_{\min}$  С/П  $u_{\max}$  С/П  $u_1$  С/П. Получите  $N_1$ . Затем  $u_2$  С/П. Получите  $N_2$  ...

Память:  $u_{\min} = \Pi 2$ ,  $u_{\max} = \Pi 3$ ,  $h = \Pi 4$ ,  $\Pi 5$  — буфер,  $E = \Pi 6$ . Пустым клеткам рисунка соответствует буква  $E$ .

$$\begin{array}{ccccccccc} \Pi 2 & \text{С/П} & \Pi 3 & \text{Px2} & - & 1 & 9 & \div & \Pi 4 & \Pi x3 \\ \text{С/П} & \text{Px2} & - & \text{Px4} & \div & \text{K}[x] & 2 & \div & \Pi 5 & \text{K}\{x\} \\ Fx=0 & \underline{25} & \text{Px5} & \text{БП} & \underline{10} & \text{Px6} & \text{БП} & \underline{10} & & \end{array}$$

Тест:  $u_{\min} = 1.723$ ,  $u_{\max} = 3.007$ , при  $u = 1.9$ ,  $N = 1$ , при  $u = 3.007$ ,  $N = E$ .

Результаты счета представлены на рис. 48.

Рассмотрим следующий практический пример. Пусть необходимо представить графически при помощи изолиний рельеф функции  $z = x^2 + 2y^2 + (x-1)y$  при  $-2 \leq x \leq 2$ ,  $-2 \leq y \leq 2$ .

Рис. 47

Решение начнем с того, что найдем минимум и максимум функции в данной области. Значения функции в экстремальных и характерных граничных точках равны

$$z\left(-\frac{1}{7}, \frac{2}{7}\right) = -1.428571 \cdot 10^{-2},$$

$$\begin{aligned} z(-2, 0.75) &= 2.875, \\ z(1, -2) &= 9, \\ z(-2, 2) &= 6, \\ z(2, -0.25) &= 3.875, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z(-1.2) &= 5, \\ z(-2, -2) &= 18, \\ z(2, -2) &= 10, \\ z(2, 2) &= 14. \end{aligned}$$

Видим, что  $z_{\min} = -1.428571 \cdot 10^{-2}$ ,  $z_{\max} = 18$ . Вычислять значение

$\begin{array}{l} 133331 \\ 3333 31 \\ 1333 3 31 \\ 333 55 3 3 \\ 33 5 7 3 \\ 3 5 9 5 3 \\ 33 5 33 \\ 333 5 333 \\ 1333 333 \\ 13333331 \end{array}$

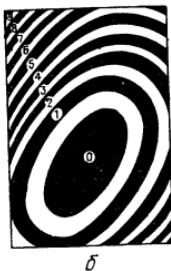


Рис. 48

функции будем при помощи специальной программы, которая будет выдавать значения функции в строке, а после окончания строки автоматически будет переходить на новую. Это организовано с помощью циклов L0, L1. Величины  $x = P2$ ,  $y = P3$ . Программа рассчитана на случай  $60 \times 60$  элементов. Для работы необходимо два микрокалькулятора. Нажимая С/П на первом

из них, вы получаете значение функции, которое вводите в микрокалькулятор с программой 128 и получаете соответствующую цифру.

Программа вычисления функции имеет вид

|     |     |   |     |     |                 |     |     |     |                 |
|-----|-----|---|-----|-----|-----------------|-----|-----|-----|-----------------|
| Cx  | 6   | 1 | P1  | 6   | 1               | P0  | 2   | Px0 | 1               |
| -   | 1   | 5 | ÷   | -   | P2              | Px1 | 1   | -   | 1               |
| 5   | ÷   | 2 | -   | P3  | Fx <sup>2</sup> | 2   | ×   | Px2 | Fx <sup>2</sup> |
| +   | Px2 | 1 | -   | Px3 | ×               | +   | C/P | FL0 | 07              |
| FL1 | 04  | 1 | /-/ | FV  | -               |     |     |     |                 |

Цифровой анализ позволил для функции  $z$  получить изолинии, представленные на рис. 48б.

## 5. Задачи определения собственных значений дифференциальных уравнений

Задачи отыскания частного решения дифференциального уравнения, когда функция задана более, чем в одной точке, называются *краевыми*. Примером может служить дифференциальное уравнение

$$\frac{du}{dt} = f(x, u, t) \quad (7.15)$$

при дополнительных условиях

$$u(t_0) = u_0, \quad u(t_1) = u_1. \quad (7.16)$$

Решение дифференциального уравнения (7.15)  $u(x, u, t, \lambda)$  будет зависеть от некоторого параметра  $\lambda$ , который определяется из уравнения (7.16). Так, в случае уравнения гармонического осциллятора

$$\frac{d^2u}{dt^2} = \omega^2 u \quad (7.17)$$

решение имеет вид

$$u = A \cos \omega t + B \sin \omega t. \quad (7.18)$$

Если при этом выполняется дополнительное условие

$$\begin{cases} u(0) = 0, \\ u(4\pi) = 0, \end{cases} \quad (7.19)$$

то

$$\begin{cases} A = 0, \\ \omega = \frac{k}{4}, \end{cases} \quad (7.20)$$

где  $k$  — любое целое число;

$$u = B \sin \frac{kt}{4}. \quad (7.21)$$

Параметр  $\omega$  называют *собственным значением* дифференциального уравнения (7.17), а решения (7.21) будут *собственными функциями* дифференциального уравнения (7.17). Именно поэтому частоты гармонического осциллятора называют *собственными*.

Нахождение собственных частот колебаний струны и упругого стержня, нахождение спектра атома при решении уравнения Шредингера, а также определение соответствующих функций, описывающих процессы, приводят нас к решению задач по определению собственных значений уравнения. Собственные значения дифференциального уравнения определяют при помощи фазового, разностного и вариационного методов. Фазовый метод применяют при равных нулю краевых условиях; он состоит в замене одной переменной  $u$  двумя: радиальной  $r$  и угловой  $\phi$ . Начальные условия приписываются тогда фазе  $\phi$ . Разностный метод состоит в решении системы линейных уравнений, где переменными являются значения функций в узлах. Система получается путем замены дифференциального уравнения разностными аналогами в промежуточных узлах. Эти два метода очень трудоемкие и реализация их возможна лишь на больших ЭВМ. Для программируемых микрокалькуляторов приемлемым является лишь вариационный метод, называемый также методом стрельбы. В случае дифференциального уравнения

$$\frac{du}{dt} = f(x, u, t) \quad (7.22)$$

с двумя краевыми условиями

$$u(t_0) = \alpha_0, \quad u(t_1) = \alpha_1, \quad (7.23)$$

задавшись каким-то численным значением  $\lambda^1$  и первым краевым условием, через определенное количество шагов получим значение функции  $u^1$  для дифференциального уравнения при  $t=t_1$ . Затем зададимся значением параметра  $\lambda^2$  и в точке  $t=t_1$  получим  $u^2$ . Судя по тому, насколько  $u^1$  и  $u^2$  отличаются от  $\alpha_i$ , мы можем оценить насколько  $\lambda^1$  и  $\lambda^2$  отличаются от  $\lambda$ . В первом приближении методом интерполяции получаем

$$\lambda = \frac{\lambda^2 - \lambda^1}{u^2 - u^1} (\alpha_i - u_i) + \lambda^1. \quad (7.24)$$

Понятно, что наша задача состоит в подборе такого  $\lambda^i$ , чтобы

$$u^i = \alpha_i. \quad (7.25)$$

В этом случае полученная численно функция  $u$  будет собственной для (7.22), а параметр  $\lambda^i = \lambda$  будет собственным значением того же дифференциального уравнения.

Вариационный метод требует выполнения очень большого количества операций. Используют его обычно, если требуется определить одно значение  $\lambda$ , причем когда задача численного интегрирования дифференциального уравнения при заданных начальных значениях функции хорошо обусловлена при используемых значениях параметра  $\lambda$ . Разновидностью этого метода является классическая задача на собственные значения уравнения второго порядка

$$\frac{d^2u}{dt^2} + p(t) \frac{du}{dt} + (\lambda + q(t)) u(t) = 0 \quad (7.26)$$

при нулевых краевых условиях

$$u(t_0) = 0, \quad u(t_1) = 0. \quad (7.27)$$

Уравнение второго порядка содержит одно собственное значение и вроде бы должно было бы быть три дополнительных условия, а их только два. Дело в том, что в силу линейности и однородности решения дифференциального уравнения (7.22) можно определить лишь с точностью до множителя. Это и есть неявное задание третьего условия. Если  $p(t_0)$  и  $q(t_0)$  — конечные величины, то третье условие можно задать в форме

$$\left( \frac{du}{dt} \right)_{t=t_0} = 1. \quad (7.28)$$

Тогда, имея два начальных условия в точке  $t=t_0$ , можно, решая дифференциальные уравнения при различных значениях  $\lambda^i$ , выбрать из них такое, при котором

$$u^i(t_1) = 0. \quad (7.29)$$

На программируемом микрокалькуляторе можно организовать полностью автоматический поиск собственного значения дифференциаль-

ного уравнения вариационным методом, хотя это и сложно. При этом автоматический поиск может пойти по нерациональному или даже ложному пути, что часто трудно заметить. Лучше вести поиск полуавтоматически. Для этого задаются начальные условия и начальное значение параметра  $\lambda$  вручную, а затем запускается циклическая программа, которая вычисляет все очередные значения  $u^i$  до  $u^i(t_1)$ . Дойдя до  $t=t_1$ , счет останавливается и на индикаторе высвечивается величина  $u^i(t_1)$ . Сравнивая ее при различных значениях  $\lambda^i$  с точным значением  $u(t_1)=\alpha_1$ , можно судить о мере совпадения точного значения  $\lambda$  с приближенным  $\lambda^i$ . Вычислив при нескольких  $\lambda^i$  величину  $u^i(t_1)$ , можно получить достаточно близкое приближение  $\lambda^i$  к точному.

Составить программу, которая бы при заданном шаге  $\tau$  и начальных условиях вычисляла бы через много шагов значение функции  $u^i(t_1)$  несложно. Для этого надо вместо оператора С/П в программе, реализующей ту или иную схему, поставить условный оператор, обрывающий процесс счета, когда значение  $t_f$  станет равно или больше  $t_1$ .

Для уравнения (7.22) при дополнительных условиях (7.23) воспользуемся двухшаговой схемой второго порядка точности. Слегка видоизменив программу 104, получим программу для поиска собственных значений дифференциального уравнения первого порядка.

**Программа 129.** Определение собственного значения дифференциального уравнения первого порядка вариационным методом. На месте точек набрать подпрограмму вычисления функции  $f(u, t, \lambda)$ , где  $u=\Pi 4$ ,  $t=\Pi 2$ ,  $\lambda=\Pi 7$ . По программе ввести  $t_0$  С/П  $\tau$  С/П  $t_1+\tau$  С/П  $\lambda$  С/П  $u^0$  С/П. В результате счета получим значение  $u(t_1)$ .

Память:  $t_n=\Pi 2$ ,  $\tau=\Pi 3$ ,  $u^n=\Pi 4$ ,  $\Pi 5$  — буфер,  $t_1+\tau=\Pi 6$ ,  $\lambda=\Pi 7$ .

|                  |     |     |     |    |     |     |     |     |     |
|------------------|-----|-----|-----|----|-----|-----|-----|-----|-----|
| P2               | C/П | P3  | C/П | P6 | C/П | P7  | C/П | P4  | ПП  |
| 46               | Пх3 | X   | 2   | ÷  | Пх4 | П5  | +   | П4  | Пх3 |
| 2                | ÷   | Пх2 | +   | П2 | ПП  | 46  | Пх3 | Х   | Пх5 |
| +                | П4  | Пх3 | 2   | ÷  | Пх2 | +   | П2  | Пх6 | —   |
| $Fx \geqslant 0$ | 09  | Пх4 | С/П | БП | 00  | ... | ... | ... | В/0 |

Тест:  $t_0=0$ ,  $f=u^2+t^2$ ,  $\tau=0,25$ ,  $t_1+\tau=0,25$ ,  $\lambda=0$ ,  $u^0=1$ ,  $u^1=1,3203125$ .

Время счета  $t_{\text{сч}}=14$  с.

Если в ходе вычислительного процесса микроЭВМ делает 100 шагов, то время вычисления  $\sim 20$  мин.

**Программа 130.** Вычисление собственных значений дифференциального уравнения второго порядка. В основу положим программу 117 решения дифференциального уравнения второго порядка методом Рунге — Кутта. Перед началом счета в регистры необходимо занести следующие данные:  $t_0=\Pi A$ ,  $0=\Pi 6=\Pi B$ ,  $u'(t_0)=1=\Pi 7=\Pi C$ ,  $\tau/2=\Pi 8$ ,  $\lambda^i=\Pi 0$ ,  $t_1=t_{\max}=\Pi D$ . Свободны лишь регистры П5, П9 ПЕ, а остальные — буферные.

С адреса 73 в командную память вводится подпрограмма-функция  $f(t, u, u', \lambda)$ , где  $t = \text{ПА}$ ,  $u = \text{ПВ}$ ,  $u' = \text{ПС}$ ,  $\lambda = \text{ПО}$ . Длина подпрограммы-функции составляет 29 ячеек командной памяти. Время счета по этой программе очень велико. Если поделить промежуток  $[t_0, t_1]$  на 100 интервалов, то счет по такой программе будет длиться более 1 ч 7 мин. Время счета зависит от вида подпрограммы-функции  $f(t, u, u', \lambda)$ . Если в ней будет десяток операторов типа  $\ln x$ ,  $e^x$ ,  $x^y$ , то время определения одного значения  $\lambda$  удвоится и станет более 2 ч 14 мин. Так что по возможности в подпрограмме-функции следует использовать наиболее простые функции, заменяя их арифметическими действиями.

|              |           |              |              |              |             |           |              |              |              |              |
|--------------|-----------|--------------|--------------|--------------|-------------|-----------|--------------|--------------|--------------|--------------|
| ПП           | <u>73</u> | П1           | $\text{Px}7$ | ПП           | <u>59</u>   |           | П2           | $\text{Px}1$ | ПП           | <u>63</u>    |
| П3           | 2         | $\times$     | $\text{Px}2$ | 2            | $\times$    |           | $\text{Px}1$ | —            | $\text{Px}7$ | +            |
| ПП           | <u>59</u> | П4           | $\text{Px}3$ | $\text{Px}2$ | +           |           | 2            | $\times$     | +            | $\text{Px}1$ |
| +            | 3         | $\div$       | $\text{Px}7$ | +            | П7          |           | $\text{Px}2$ | $\text{Px}3$ | $\text{Px}4$ | +            |
| +            | 3         | $\div$       | —            | $\text{Px}8$ | $\times$    |           | 2            | $\times$     | $\text{Px}6$ | +            |
| П6           | ПВ        | $\text{Px}A$ | $\text{Px}D$ | —            | $Fx \geq 0$ | <u>00</u> | $\text{Px}B$ | C/П          | $\text{Px}A$ |              |
| $\text{Px}8$ | +         | ПА           | $F \searrow$ | $\text{Px}8$ | $\times$    |           | $\text{Px}B$ | +            | ПВ           | $F \searrow$ |
| $\text{Px}7$ | +         | ПС           | ...          | ...          | ...         |           | ...          | $\text{Px}8$ | $\times$     | B/0          |

Возможности вариационного метода неграничны. Если задача Коши в начальной точке плохо обусловлена, т. е. малая вариация  $\lambda$  может изменить решение  $u(t)$ , вариационный метод не годится. А именно подобные задачи имеют частое физическое приложение. К примеру, квантово-механическая задача об уровнях энергии частицы, движущейся в заданном одномерном сферически симметричном поле. Задача Коши в этом случае оказывается плохо обусловленной, так как общее решение уравнения обращается в бесконечность при  $r=0$  и  $r=\infty$ . В этом случае используют фазовый метод, реализация которого возможна лишь на больших ЭВМ.

## ОПЕРАЦИИ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ

## 1. Вычисление определителей и решение систем линейных уравнений

Множество физических задач приводят к решению систем линейных уравнений вида

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2, \\ \dots &\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n &= b_n, \end{aligned} \quad (8.1)$$

которую записывают в матричном виде

$$AX = B, \quad (8.2)$$

где  $X$  — матрица-столбец неизвестных, а  $A$  и  $B$  — матрицы постоянных числовых коэффициентов. Если определитель, составленный из элементов матрицы,

$$\Delta = \det A \neq 0, \quad (8.3)$$

то система (8.1) совместна и имеет единственное решение. Обозначим  $D$  такую матрицу, которая получится, если вместо элементов  $a_{ij}$  при фиксированном индексе  $j$  вписать элементы матрицы  $B$ . Тогда решение  $x_j$  получается делением определителей

$$x_j = \frac{\det D}{\det A} = \frac{\Delta_j}{\Delta}, \quad (8.4)$$

где  $\Delta_j = \det D$ . Тем самым задача решения системы линейных уравнений методом Крамера сводится к задаче вычисления соответствующих определителей. Задачу вычисления определителей высокого порядка можно упростить, если использовать алгебраические дополнения. Алгебраическим дополнением  $D_{ik}$  матрицы  $A$  является определитель порядка  $(n-1)$ , получающийся из матрицы  $A$  вычеркиванием  $i$ -й строки и  $k$ -го столбца и умноженной на  $(-1)^{i+k}$ . Так, для матрицы  $A$  (3, 3)

$$D_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = -(a_{21}a_{33} - a_{31}a_{23}).$$

Любой определитель  $n$ -го порядка можно разложить по элементам  $i$ -й строки и алгебраическим дополнениям  $(n-1)$  порядка:

$$\det A = \sum_{k=1}^n a_{ik} D_{ik}. \quad (8.5)$$

Алгебраические дополнения, являющиеся определителями  $(n-1)$  порядка, можно разложить еще раз по определителям  $(n-2)$  порядка, причем разлагать определители можно и по элементам  $j$ -го столбца:

$$\det A = \sum_{k=1}^n a_{kj} D_{kj}. \quad (8.6)$$

Разложение по столбцу или по строке выбирают в зависимости от того, где больше нулей, так как тогда разложение будет содержать меньше слагаемых.

Метод Гаусса при решении системы (8.1) состоит в последовательном исключении неизвестных. Для его выполнения необходимо меньше операций и меньший объем памяти, но точность его ниже, чем метода Крамера, так как в последнем неизвестные вычисляются независимо друг от друга и погрешность вычисления одних не влияет на погрешность вычисления других.

**Программа 131.** Вычисление определителя второго порядка. Ввести  $a_{11}$  С/П  $a_{12}$  С/П  $a_{21}$  С/П  $a_{22}$  С/П.

Память:  $a_{11}=\Pi_2$ ,  $a_{12}=\Pi_3$ ,  $a_{21}=\Pi_4$ ,  $a_{22}=\Pi_5$ . Ответ поступает в регистр Х.

$$\begin{array}{ccccccccc} \Pi_2 & \text{С/П} & \Pi_3 & \text{С/П} & \Pi_4 & \text{С/П} & \Pi_5 & \Pi x2 & \times & \Pi x3 \\ \Pi x4 & \times & - & \text{С/П} & \underline{\underline{00}} & & & & & \end{array}$$

Тест:  $a_{11}=1$ ,  $a_{12}=2$ ,  $a_{21}=3$ ,  $a_{22}=4$ ,  $\Delta=-2$ .

**Программа 132.** Вычисление определителя третьего порядка. Введите  $a_{11}$  С/П  $a_{12}$  С/П  $a_{13}$  С/П  $a_{21}$  С/П ...  $a_{33}$  С/П. В результате счета ответ появится на индикаторе.

Память:  $a_{11}=\Pi_0$ ,  $a_{12}=\Pi_1$ ,  $a_{13}=\Pi_2$ ,  $a_{21}=\Pi_3$ ,  $a_{22}=\Pi_4$ ,  $a_{23}=\Pi_5$ ,  $a_{31}=\Pi_6$ ,  $a_{32}=\Pi_7$ ,  $a_{33}=\Pi_8$ ,  $\Pi 9$  — буфер. Ответ хранится в регистре  $\Pi 9$ .

$$\begin{array}{ccccccccc} \Pi 0 & \text{С/П} & \Pi 1 & \text{С/П} & \Pi 2 & \text{С/П} & \Pi 3 & \text{С/П} & \Pi 4 & \text{С/П} \\ \Pi 5 & \text{С/П} & \Pi 6 & \text{С/П} & \Pi 7 & \text{С/П} & \Pi 8 & \Pi x4 & \times & \Pi x5 \\ \Pi x7 & \times & - & \Pi x0 & \times & \Pi 9 & \Pi x5 & \Pi x6 & \times & \Pi x3 \\ \Pi x8 & \times & - & \Pi x1 & \times & \Pi x9 & + & \Pi 9 & \Pi x3 & \Pi x7 \\ \times & \Pi x4 & \Pi x6 & \times & - & \Pi x2 & \times & \Pi x9 & + & \Pi 9 \\ \text{С/П} & \text{БП} & \underline{\underline{00}} & & & & & & & \end{array}$$

Тест:

$$\left| \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 41 \\ 20 & 4 & 32 \\ 7 & -1 & 54 \end{array} \right| = -3432.$$

**Программа 133. Вычисление определителя четвертого порядка.**

Если  $a_{11} \neq 0$ , то поставив счетчик в начальное положение, ввести  $a_{11}$  С/П  $a_{12}$  С/П  $a_{13}$  С/П  $a_{14}$  С/П  $a_{21}$  С/П  $a_{22}$  С/П ...  $\dots a_{44}$  С/П. Результат поступает на индикатор.

Память:  $a_{i1} = \text{ПА}$ ,  $a_{i2} = \text{ПВ}$ ,  $a_{i3} = \text{ПС}$ ,  $a_{i4} = \text{ПД}$ , П0—П9—буферные.

Тест:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 9 & 8 & 7 & 6 \end{vmatrix} = -20.$$

|     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |
|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| ПА  | С/П | ПВ  | С/П | ПС  | С/П | ПД  | ПП  | 72  | П1  |
| ПхС | ПП  | 77  | П2  | ПхД | ПП  | 77  | П3  | ПП  | 72  |
| П4  | ПхС | ПП  | 77  | П5  | ПхД | ПП  | 77  | П6  | ПП  |
| 72  | П7  | ПхС | ПП  | 77  | П8  | ПхД | ПП  | 77  | П9  |
| Пх5 | ×   | Пх6 | Пх8 | ×   | —   | Пх1 | ×   | Пх9 | Пх4 |
| ×   | Пх6 | Пх7 | ×   | —   | Пх2 | ×   | —   | Пх4 | Пх8 |
| ×   | Пх5 | Пх7 | ×   | —   | Пх3 | ×   | +   | ПхА | ×   |
| /—/ | ПД  | С/П | ПхА | ÷   | П0  | ПxB | Пx0 | ×   | СП  |
| —   |     | B/0 |     |     |     |     |     |     |     |

Время счета  $\sim 20$  с. Если  $a_{11}=0$ , то следует первую и вторую строку поменять местами, а также поменять местами еще две произвольные строки, так как четное количество перестановок строк оставляет неизменной значение определителя.

**Программа 134. Вычисление определителя пятого порядка.** После установки счетчика в начальное положение, вводите  $a_{11}$  С/П  $a_{12}$  С/П  $a_{13}$  С/П  $a_{14}$  С/П  $a_{15}$  С/П  $a_{21}$  С/П  $a_{22}$  С/П ...  $a_{55}$  С/П.

Тест:

$$\begin{vmatrix} 1 & 6 & 7 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 9 & 4 & 6 \\ 3 & 5 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 7 \end{vmatrix} = -162.$$

Время счета — около 2 мин.

|     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |
|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| П0  | 4   | П1  | П4  | С/П | Пх0 | ÷   | КП4 | ПД  | Пх9 |
| ПА  | Cx  | КП4 | FL1 | 04  | П9  | ПВ  | ПП  | 64  | ПП  |
| 73  | Пх2 | ÷   | ПС  | ↔   | Пх2 | ÷   | П9  | Пх2 | +   |
| П6  | ПП  | 60  | ПП  | 73  | Пх1 | ÷   | ПВ  | ↔   | Пх1 |
| ÷   | П8  | ПП  | 60  | ПП  | 73  | ↔   | ÷   | П1  | ПП  |
| 60  | Пх1 | П5  | ПП  | 73  | ↔   | Пх5 | ×   | —   | F ↘ |
| FBx | Пх0 | ×   | П0  | С/П | П3  | 4   | П4  | С/П | ПП  |

|            |    |           |     |    |           |     |      |          |     |
|------------|----|-----------|-----|----|-----------|-----|------|----------|-----|
| 86         | П2 | B/0       | C/П | ПП | 83        | П1  | ПП   | 79       | C/П |
| <u>Пх1</u> | ПП | <u>87</u> | Пх2 | ПП | <u>87</u> | Пх3 | КПх4 | <u>×</u> | —   |
| B/0        |    |           |     |    |           |     |      |          |     |

Для нормальной работы программ 133, 134 необходимо, чтобы главные миноры матрицы не были равны 0, иначе микрокалькулятор прекратит счет на некорректной операции. Чтобы избежать этого, нужно соответствующим образом переставить строки или столбцы матрицы  $A$ . Вычисление определителя по этим программам выполнялось путем сведения его к треугольному виду (посредством вычитания строк) с дальнейшим вычислением произведения диагональных элементов.

**Программа 135. Решение системы двух уравнений.** Ввести  $a_{11}$  C/П  $a_{12}$  C/П  $b_1$  C/П  $a_{21}$  C/П  $a_{22}$  C/П  $b_2$  C/П.

Память:  $a_{11} = \text{П2}$ ,  $a_{12} = \text{П3}$ ,  $b_1 = \text{П4}$ ,  $a_{21} = \text{П5}$ ,  $a_{22} = \text{П6}$ ,  $b_2 = \text{П7}$ ,  $\Delta = \text{П8}$ ,  $x = \text{П0}$ ,  $y = \text{П1}$ .

Тест:

$$\begin{aligned} 2x + 3y &= 8, & x &= 1, \\ 3x + 4y &= 11; & y &= 2. \end{aligned}$$

Время счета  $t_{\text{сч}} = 9,5$  с.

|     |     |           |     |     |     |     |     |    |     |
|-----|-----|-----------|-----|-----|-----|-----|-----|----|-----|
| П2  | C/П | П3        | C/П | П6  | C/П | П4  | C/П | П5 | C/П |
| П7  | Пх2 | Пх5       | ×   | Пх3 | Пх4 | ×   | —   | П8 | Пх6 |
| Пх5 | ×   | Пх3       | Пх7 | ×   | —   | Пх8 | ÷   | П0 | Пх2 |
| Пх7 | ×   | Пх6       | Пх4 | ×   | —   | Пх8 | ÷   | П1 | Пх0 |
| C/П | БП  | <u>00</u> |     |     |     |     |     |    |     |

**Программа 136. Решение системы трех уравнений методом Крамера.** Перед счетом программы следует ввести исходные числовые коэффициенты:  $a_{11} = \text{П0}$ ,  $a_{12} = \text{П1}$ ,  $a_{13} = \text{П2}$ ,  $a_{21} = \text{П3}$ ,  $a_{22} = \text{П4}$ ,  $a_{23} = \text{П5}$ ,  $a_{31} = \text{П6}$ ,  $a_{32} = \text{П7}$ ,  $a_{33} = \text{П8}$ ,  $b_1 = \text{ПА}$ ,  $b_2 = \text{ПВ}$ ,  $b_3 = \text{ПС}$ . Регистр ПД — буферный, а в регистр П9 в процессе вычислений поступает значение главного определителя системы  $\Delta$ .

После первого запуска программы на индикаторе высвечивается значение  $x$ , после следующего —  $y$ , потом —  $z$ . Время вычисления  $x = 30$  с,  $y = 21$  с,  $z = 19$  с. Разница во времени вызвана тем, что первоначально вычисляется не только  $\Delta_x$ , но и  $\Delta$ , а затем уже используется числовое значение  $\Delta$  при вычислении  $y$  и  $z$ .

|           |           |     |     |     |     |     |    |     |           |
|-----------|-----------|-----|-----|-----|-----|-----|----|-----|-----------|
| ПП        | <u>64</u> | П9  | Пх0 | ПxA | П0  | ↔   | ПA | Пх3 | ПxB       |
| П3        | ↔         | ПВ  | Пх6 | ПxC | П6  | ↔   | ПC | ПП  | <u>64</u> |
| Пх9       | ÷         | C/П | Пx1 | ПxA | П1  | ↔   | ПA | Пх4 | ПxB       |
| П4        | ↔         | ПВ  | Пx7 | ПxC | П7  | ↔   | ПC | ПП  | <u>64</u> |
| /—/       | Пx9       | ÷   | C/П | Пx2 | ПxA | П2  | ↔  | ПA  | Пх5       |
| ПxB       | П5        | ↔   | ПВ  | Пx8 | ПxC | П8  | ↔  | ПC  | ПП        |
| <u>64</u> | Пx9       | ÷   | C/П | Пx0 | Пx4 | Пx8 | ×  | Пх5 | Пx7       |

|          |     |          |     |          |     |     |          |     |          |
|----------|-----|----------|-----|----------|-----|-----|----------|-----|----------|
| $\times$ | $-$ | $\times$ | ПД  | Пх1      | Пх5 | Пх6 | $\times$ | Пх3 | Пх8      |
| $\times$ | $-$ | $\times$ | ПхД | $+$      | ПД  | Пх2 | Пх3      | Пх7 | $\times$ |
| Пх4      | Пх6 | $\times$ | $-$ | $\times$ | ПхД | $+$ | B/0      |     |          |

Тест:

$$\begin{aligned}x + 2y + 3z &= 41, & x &= 3, \\20x + 4y - 7z &= 32, & y &= 7, \\7x - y + 5z &= 54; & z &= 8.\end{aligned}$$

Программа своеобразна тем, что при вычислении неизвестных использовалось свойство определителя, заключающееся в том, что от перестановки двух соседних столбцов знак определителя меняется на противоположный.

**Программа 137. Решение системы четырех уравнений методом Гаусса.** После установки счетчика в начальное положение ввести 4 = П0, а далее  $a_{11}$  С/П  $a_{12}$  С/П  $a_{13}$  С/П  $a_{14}$  С/П  $b_1$  С/П  $a_{21}$  С/П  $a_{22}$  С/П ...  $b_4$  С/П. Микрокалькулятор приступает к вычислению неизвестных и после остановки счета высвечивает  $x_1 = X = \text{ПД}$ . После запуска счета клавиш С/П на индикаторе высветится  $x_2 = X = \text{ПС}$ . Аналогично  $x_3 = \text{ПВ}$ ,  $x_4 = \text{ПА}$ .

|      |     |              |        |        |                   |            |      |            |      |
|------|-----|--------------|--------|--------|-------------------|------------|------|------------|------|
| P4   | 1   | 4            | П2     | Пх0    | П1                | C/П        | Пх4  | $\div$     | KП2  |
| FL1  | 06  | 1            | 4      | П3     | Пх0               | П1         | FL1  | 23         | KПx3 |
| C/П  | БП  | 19           | Cx     | KП2    | FL1               | 24         | KП2  | <u>Пх0</u> | Пх2  |
| +    | П1  | П2           | Пх3    | —      | Fx $\neq$ 0       | 42         | C/П  | ПП         | 84   |
| БП   | 28  | KПx0         | Пх0    | П3     | C/П               | KПx2       | —    | П4         | C/П  |
| KПx2 | —   | Пх4          | $\div$ | KП1    | FL3               | 49         | Пх1  | Пх0        | +    |
| П3   | 1   | 4            | П1     | П2     | KПx1              | <u>/—</u>  | ПП   | 84         | Пх3  |
| +    | П3  | Пх1          | —      | Fx = 0 | 65                | Пх0        | П1   | KПx3       | KП2  |
| FL1  | 78  | БП           | 12     | Пх0    | $\leftrightarrow$ | $\uparrow$ | KПx3 | $\times$   | KПx1 |
| +    | KП2 | F $\searrow$ | FL0    | 86     | F $\searrow$      | П0         | B/0  |            |      |

Тест:

$$\begin{aligned}x + y + z + t &= 10, & x &= 1, \\x + 2y - 2z + 3t &= 11, & y &= 2, \\2x + z &= 5, & z &= 3, \\3x + y + 2z + 2t &= 19, & t &= 4.\end{aligned}$$

**Программа 138. Решение системы пяти уравнений методом Гаусса.** После установки счетчика в начальное положение ввести 13 = П0, 5 = ПД, а далее вводятся вручную вычисляемые отношения коэффициентов  $\frac{a_{12}}{a_{11}} = \text{ПС}$ ,  $\frac{a_{13}}{a_{11}} = \text{ПВ}$ ,  $\frac{a_{14}}{a_{11}} = \text{ПА}$ ,  $\frac{a_{15}}{a_{11}} = \text{П9}$ ,  $\frac{b_1}{a_{11}} = \text{П8}$ , 0 = П3 = П4 = П5 = П6 = П7, а также  $a_{21}$  С/П  $a_{22}$  С/П  $a_{23}$  С/П  $a_{24}$  С/П ...  $b_5$  С/П. Результаты поступают в регистры:  $x_1 = \text{П/C}$ ,  $x_2 = \text{ПВ}$ ,  $x_3 = \text{ПА}$ ,  $x_4 = \text{П9}$ ,  $x_5 = \text{П8}$ .

|                      |                      |                      |                      |                      |                      |                   |              |                      |                      |
|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|-------------------|--------------|----------------------|----------------------|
| $\Pi_{x,D}$          | $\leftrightarrow$    | $\uparrow$           | $F \curvearrowright$ | $\uparrow$           | $K\Pi_{x,0}$         | $\times$          | $K\Pi_{x,D}$ | $+$                  | $\Pi_P$              |
| 89                   | $F_x < 0$            | <u>03</u>            | $F \curvearrowright$ | $\leftrightarrow$    | $\Pi_D$              | $C/P$             | $\Pi_{x,D}$  | $\Pi_{x,0}$          | $-$                  |
| <u>3</u>             | $+$                  | $F_x \geq 0$         | <u>03</u>            | $F \curvearrowright$ | $K\Pi_{x,D}$         | $-$               | $\Pi_{x,D}$  | $\Pi_0$              | $F \curvearrowright$ |
| $C/P$                | $K\Pi_{x,0}$         | $-$                  | $\leftrightarrow$    | $\div$               | $F_{Bx}$             | $\leftrightarrow$ | $\Pi_P$      | <u>89</u>            | $F_x = 0$            |
| <u>29</u>            | $F \curvearrowright$ | $\leftrightarrow$    | $\Pi_D$              | <u>1</u>             | <u>3</u>             | $\Pi_0$           | $\Pi_1$      | $F \curvearrowright$ | $K\Pi_{x,1}$         |
| $/-/-$               | $\uparrow$           | $F \curvearrowright$ | $\uparrow$           | $K\Pi_{x,D}$         | $\times$             | $K\Pi_{x,1}$      | $+$          | $K\Pi_0$             | $\Pi_P$              |
| <u>90</u>            | $F_x = 0$            | <u>52</u>            | $F \curvearrowright$ | $\leftrightarrow$    | $\Pi_D$              | $\Pi_{x,1}$       | $\Pi_{x,0}$  | <u>6</u>             | $-$                  |
| $-$                  | $-$                  | $F_x = 0$            | <u>48</u>            | $\Pi_1$              | $F \curvearrowright$ | $K\Pi_{x,D}$      | $K\Pi_0$     | $Cx$                 | $\Pi_P$              |
| <u>89</u>            | $F_x < 0$            | <u>75</u>            | $\mp$                | <u>1</u>             | <u>3</u>             | $\Pi_0$           | $B_P$        | <u>14</u>            | $K\Pi_D$             |
| $F \curvearrowright$ | $\Pi_{x,D}$          | <u>1</u>             | $-$                  | $\Pi_D$              | <u>1</u>             | $-$               | $B/0$        |                      |                      |

Тест:

$$\begin{aligned}
 2x_1 + 10x_2 + 16x_3 - 6x_4 + 8x_5 &= 20, & x_1 &= 6.8205123, \\
 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 8x_5 &= 20, & x_2 &= 10.517949, \\
 6x_1 - 4x_2 + x_3 + 3x_4 + 5x_5 &= 10, & x_3 &= -3.1282053, \\
 8x_1 - 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 + x_5 &= 0, & x_4 &= 6.6307692, \\
 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_4 + 5x_5 &= 30, & x_5 &= 1.1230768.
 \end{aligned}$$

## 2. Операции линейной алгебры

Операции с матрицами используются во многих областях точных наук. Программируемые микрокалькуляторы позволяют значительно автоматизировать основные операции с матрицами невысокого порядка.

Произведением двух матриц  $A$  и  $B$  называют такую матрицу  $C$ , элементы которой вычисляются по правилу

$$C_{ik} = \sum_j a_{ij} b_{jk}. \quad (8.7)$$

**Программа 139. Вычисление произведения матриц  $A$  (2, 2)  $B$  (2, 2).**  
 Ввести  $a_{11}$  С/П  $a_{12}$  С/П  $a_{21}$  С/П  $a_{22}$  С/П  $b_{11}$  С/П  $b_{12}$  С/П  
 $b_{21}$  С/П  $b_{22}$  С/П. На индикаторе получите  $c_{11}$ , после С/П —  $c_{12}$ ,  
 $C/П — c_{21}$ , С/П —  $c_{22}$ .

Память:  $a_{11} = \Pi_0$ ,  $a_{12} = \Pi_1$ ,  $a_{21} = \Pi_2$ ,  $a_{22} = \Pi_3$ ,  $b_{11} = \Pi_4$ ,  $b_{12} = \Pi_5$ ,  
 $b_{21} = \Pi_6$ ,  $b_{22} = \Pi_7$ ,  $c_{11} = \Pi_8$ ,  $c_{12} = \Pi_9$ ,  $c_{21} = \Pi_A$ ,  $c_{22} = \Pi_B$ .

|          |         |             |             |             |             |             |             |             |             |
|----------|---------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|
| $\Pi_0$  | $C/P$   | $\Pi_1$     | $C/P$       | $\Pi_2$     | $C/P$       | $\Pi_3$     | $C/P$       | $\Pi_4$     | $C/P$       |
| $\Pi_5$  | $C/P$   | $\Pi_6$     | $C/P$       | $\Pi_7$     | $\Pi_{x,0}$ | $\Pi_{x,4}$ | $\times$    | $\Pi_{x,1}$ | $\Pi_{x,6}$ |
| $\times$ | $+$     | $\Pi_8$     | $C/P$       | $\Pi_{x,0}$ | $\Pi_{x,5}$ | $\times$    | $\Pi_{x,1}$ | $\Pi_{x,7}$ | $\times$    |
| $+$      | $\Pi_9$ | $C/P$       | $\Pi_{x,2}$ | $\Pi_{x,4}$ | $\times$    | $\Pi_{x,3}$ | $\Pi_{x,6}$ | $\times$    | $+$         |
| $\Pi_A$  | $C/P$   | $\Pi_{x,2}$ | $\Pi_{x,5}$ | $\times$    | $\Pi_{x,3}$ | $\Pi_{x,7}$ | $\times$    | $+$         | $\Pi_B$     |
| $C/P$    | $B_P$   | <u>00</u>   |             |             |             |             |             |             |             |

Тест:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; \quad t_{\text{сч}} = 3 \text{ с.}$$

Составить программу, полностью автоматически вычисляющую произведение матриц  $A$  (3, 3),  $B$  (3, 3), невозможно, так как для этого необходимо более 18 ячеек памяти. Поэтому мы будем умножать первую матрицу на каждый столбец второй матрицы в отдельности. При этом будем получать каждый раз матрицу-столбец из трех элементов. Тем самым мы свели задачу к умножению матриц  $A$  (3, 3),  $B$  (3, 1).

#### Программа 140. Вычисление произведения матриц $A$ (3, 3) $B$ (3, 1).

Перед счетом вводятся следующие данные:  $a_{11} = \Pi 0$ ,  $a_{12} = \Pi 1$ ,  $a_{13} = \Pi 2$ ,  $a_{21} = \Pi 3$ ,  $a_{22} = \Pi 4$ ,  $a_{23} = \Pi 5$ ,  $a_{31} = \Pi 6$ ,  $a_{32} = \Pi 7$ ,  $a_{33} = \Pi 8$ ,  $b_1 = \Pi 9$ ,  $b_2 = \Pi C$ ,  $b_3 = \Pi D$ . Ответ поступает в регистры:  $c_1 = \Pi A = X$ ,  $c_2 = \Pi B = Y$ ,  $c_3 = Z$ .

$$\begin{array}{l} \text{П}x0 \quad \text{П}x9 \times \quad \text{П}x1 \quad \text{П}xC \times + \quad \text{П}x2 \quad \text{П}xD \times \\ + \quad \Pi A \quad \text{П}x3 \quad \text{П}x9 \times \quad \text{П}x4 \quad \text{П}xC \times + \quad \text{П}x5 \\ \text{П}xD \times + \quad \Pi B \quad \text{П}x6 \quad \text{П}x9 \times \quad \text{П}x7 \quad \text{П}xC \times \\ + \quad \text{П}x8 \quad \text{П}xD \times + \quad \text{П}xB \quad \text{П}xA \quad \text{C/P} \quad \text{БП} \quad \underline{00} \end{array}$$

Тест:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t_{\text{сч}} = 12 \text{ с.}$$

Если нужно перемножить матрицы еще более высокого порядка, то осуществить это проще всего почленно, умножая каждый раз строку матрицы  $A$  на столбец матрицы  $B$  до тех пор, пока не будут перемножены все строки и столбцы.

#### Программа 141. Вычисление $C(1, 1) = A(1, 7) B(7, 1)$ . Вводятся значения $a_1 \text{ C/P } a_2 \text{ C/P } a_3 \text{ C/P } \dots a_6 \text{ C/P } a_7 \text{ C/P } b_1 \text{ C/P } \dots b_7 \text{ C/P}$ . После этого микро-ЭВМ приступает к счету и дает на индикаторе результат.

Память:  $a_1 = \Pi 0$ ,  $a_2 = \Pi 1$ ,  $a_3 = \Pi 2$ ,  $a_4 = \Pi 3$ ,  $a_5 = \Pi 4$ ,  $a_6 = \Pi 5$ ,  $a_7 = \Pi 6$ ,  $b_1 = \Pi 7$ ,  $b_2 = \Pi 8$ ,  $b_3 = \Pi 9$ ,  $b_4 = \Pi A$ ,  $b_5 = \Pi B$ ,  $b_6 = \Pi C$ ,  $b_7 = \Pi D$ .

$$\begin{array}{ccccccccc} \Pi 0 & \text{C/P} & \Pi 1 & \text{C/P} & \Pi 2 & \text{C/P} & \Pi 3 & \text{C/P} & \Pi 4 & \text{C/P} \\ \Pi 5 & \text{C/P} & \Pi 6 & \text{C/P} & \Pi 7 & \text{C/P} & \Pi 8 & \text{C/P} & \Pi 9 & \text{C/P} \\ \Pi A & \text{C/P} & \Pi B & \text{C/P} & \Pi C & \text{C/P} & \Pi D & \text{П}x0 & \Pi x7 \times \\ \text{П}x1 & \Pi x8 \times & + & \text{П}x2 & \Pi x9 \times & + & \text{П}x3 & \Pi xA & \\ & \times & + & \text{П}x4 & \Pi xB \times & + & \text{П}x5 & \Pi xC \times & + \\ \Pi x6 & \Pi xD \times & + & \text{C/P} & \Pi B \quad \underline{00} & & & & \end{array}$$

Тест:

$$(1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1; \quad t_{\text{сч}} = 9.5 \text{ с.}$$

### 3. Вычисление обратной матрицы

Обратной называют матрицу  $A^{-1}$ , которая, будучи умножена на матрицу  $A$ , даст в результате единичную:

$$A^{-1}A = I, \quad (8.8)$$

где

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}. \quad (8.9)$$

**Программа 142.** Вычисление обратной матрицы  $A^{-1}$  (2, 2). По программе вводим элементы матрицы  $a_{11}$  С/П  $a_{12}$  С/П  $a_{21}$  С/П  $a_{22}$  С/П. На индикаторе после нажатия С/П будем последовательно получать  $b_{11}$ ,  $b_{12}$ ,  $b_{21}$ ,  $b_{22}$ .

Память:  $a_{11} = \Pi 0$ ,  $a_{12} = \Pi 1$ ,  $a_{21} = \Pi 2$ ,  $a_{22} = \Pi 3$ ,  $b_{11} = \Pi 4$ ,  $b_{12} = \Pi 5$ ,  $b_{21} = \Pi 6$ ,  $b_{22} = \Pi 7$ ,  $\Delta = \Pi 8$ .

|     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |
|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| П0  | С/П | П1  | С/П | П2  | С/П | П3  | Пх0 | ×   | Пх1 |
| Пх2 | ×   | —   | П8  | Пх3 | ↔   | ÷   | П4  | С/П | Пх1 |
| Пх8 | ÷   | /—/ | П5  | С/П | Пх2 | /—/ | Пх8 | ÷   | П6  |
| С/П | Пх0 | Пх8 | ÷   | П/7 | С/П | БП  | 00  |     |     |

Тест:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1,5 & -0,5 \end{pmatrix}; \quad t_{\text{св}} = 3 \text{ с.}$$

**Программа 143.** Вычисление обратной матрицы  $A^{-1}$  (3, 3). Перед счетом вводим исходные данные:  $a_{11} = \Pi 9$ ,  $a_{12} = \Pi 2$ ,  $a_{13} = \Pi 3$ ,  $a_{21} = \Pi 4$ ,  $a_{22} = \Pi 5$ ,  $a_{23} = \Pi 6$ ,  $a_{31} = \Pi 7$ ,  $a_{32} = \Pi 8$ ,  $a_{33} = \Pi 9$ . В результате счета микроЭВМ выводит на индикатор элемент  $c_{11}$ , после С/П —  $c_{12}$ . И так последовательно  $c_{13}$ ,  $c_{21}$ ,  $c_{22}$ ,  $c_{23}$ ,  $c_{31}$ ,  $c_{32}$ ,  $c_{33}$ . Регистры ПА, ПВ, ПС, ПД буферные.

|     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |
|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| Пх5 | Пх9 | ×   | Пх6 | Пх8 | ×   | —   | ПА  | Пх3 | Пх8 |
| ×   | Пх2 | Пх9 | ×   | —   | ПВ  | Пх2 | Пх6 | ×   | Пх3 |
| Пх5 | ×   | —   | ПС  | Пх7 | ×   | Пх4 | ПхВ | ×   | +   |
| Пх1 | ПxA | ×   | +   | ПД  | ПxA | ПхД | ÷   | С/П | ПхВ |
| ПхД | +   | С/П | ПxC | ПхД | ÷   | С/П | Пх3 | Пх2 | Пх1 |
| П3  | F ↘ | П1  | F ↘ | П2  | Пх6 | Пх5 | Пx4 | П6  | F ↘ |
| П4  | F ↘ | П5  | Пх9 | Пх8 | Пх7 | П9  | F ↘ | П7  | F ↘ |
| П8  | БП  | 00  |     |     |     |     |     |     |     |

Тест:

$$\begin{pmatrix} 0,5 & 1 & 2 \\ 4 & 10 & 16 \\ 32 & 64 & 100 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix},$$

где  $c_{11}=8.5714285 \cdot 10^{-1}$ ,  $c_{12}=-1$ ,  $c_{13}=1.4285714 \cdot 10^{-1}$ ,  $c_{21}=-4$ ,  $c_{22}=5 \cdot 10^{-1}$ ,  $c_{23}=0$ ,  $c_{31}=2.2857142$ ,  $c_{32}=0$ ,  $c_{33}=-3.5714285 \cdot 10^{-2}$ .

Время вычисления очередной строки — 12 с.

Вычисление обратной матрицы аналогично вычислению обратной величины числа в одномерном случае. И так же как можно вычислять функцию от числа, точно так же можно вычислять функцию от матрицы. А вычисление обратной матрицы — лишь частный случай. Подробно это изложено в [6]. Можно вычислять квадратный корень из матрицы, возводить ее в произвольную степень, находить логарифм или даже интегрировать. Программируемый микрокалькулятор позволяет находить произвольную функцию от матрицы  $A(2, 2)$ . В результате счета получается некоторая матрица  $B(2, 2)$ .

**Программа 144. Вычисление произвольной функции от матрицы  $A(2, 2)$ .** В программу с адреса 84 следует ввести подпрограмму-функцию, причем аргумент функции в момент обращения к подпрограмме находится в регистре X. Далее после установки счетчика на начальный адрес ввести  $a_{11}$  С/П  $a_{12}$  С/П  $a_{21}$  С/П  $a_{22}$  С/П. В результате счета на индикаторе последовательно высвечиваются элементы матрицы  $b_{11}$ ,  $b_{12}$ ,  $b_{21}$ ,  $b_{22}$ . В процессе ввода элементы матрицы  $A$  поступают в регистры  $a_{11}=\text{ПА}$ ,  $a_{12}=\text{ПВ}$ ,  $a_{21}=\text{ПС}$ ,  $a_{22}=\text{ПД}$ . После счета  $B=f(A)$ ,  $b_{11}=\text{ПА}$ ,  $b_{12}=\text{ПВ}$ ,  $b_{21}=\text{ПС}$ ,  $b_{22}=\text{ПД}$ . Кроме того,  $\lambda_1=\text{П6}$ ,  $\lambda_2=\text{П7}$ ,  $f(\lambda_1)=\text{П8}$ ,  $f(\lambda_2)=\text{П9}$ . В программе не задействованы регистры П0—П3, ПЕ.

|     |     |                 |     |     |     |     |     |     |     |
|-----|-----|-----------------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| ПА  | С/П | ПВ              | С/П | ПС  | С/П | ПД  | ПхА | +   | 2   |
| ÷   | П4  | Fx <sup>2</sup> | ПxB | ПxC | ×   | ПxA | ПxD | ×   | —   |
| +   | FV  | —               | П5  | Пx4 | +   | П7  | ПП  | 84  | П9  |
| Пх5 | —   | П6              | ПП  | 84  | П8  | Пх7 | ×   | Пх6 | Пх9 |
| ×   | —   | Пх7             | Пх6 | —   | ÷   | П4  | Пх9 | Пх8 | —   |
| Пх7 | Пх6 | —               | ÷   | П5  | ПxA | ×   | Пx4 | +   | ПА  |
| ПxB | Пx5 | ×               | ПВ  | ПxC | Пх5 | ×   | ПС  | Пx5 | ПxD |
| ×   | Пx4 | +               | ПД  | ПxA | С/П | ПxB | С/П | ПxC | С/П |
| ПxD | С/П | БП              | 00  |     |     |     |     |     |     |

Тест:

$$\begin{pmatrix} 6 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}^{25}$$

Функцию возведения в степень организуем при помощи фрагмента

|     |     |     |     |     |   |    |   |   |   |
|-----|-----|-----|-----|-----|---|----|---|---|---|
| ... | ... | ... | ... | 2   | 4 | П0 | ↔ | ↑ | ↑ |
| ↑   | ×   | FL0 | 91  | B/0 |   |    |   |   |   |

Результат счета:

$$B=f(A)=A^{25}=\begin{pmatrix} 4.4703445 \cdot 10^{17} & -1.490112 \cdot 10^{17} \\ 4.470336 \cdot 10^{17} & -1.4901035 \cdot 10^{17} \end{pmatrix}.$$

Время вычисления 1 мин 4 с.

## 4. Блочные преобразования

Смысл блочных преобразований состоит в разбиении некой матрицы  $C$  большой размерности на подматрицы-блоки  $A_{ij}$ . Например,

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 7 & 8 & 9 & 6 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 9 & 8 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix},$$

$$A_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}, \quad A_{12} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 9 & 6 \end{pmatrix}, \quad A_{21} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 0 & 9 \end{pmatrix},$$

$$A_{22} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 8 & 7 \end{pmatrix}.$$

Блочные преобразования можно применять в том случае, если матрица  $C$  — неособенная, т. е. ее определитель не равен 0. Вычислим посредством блочных преобразований  $C^{-1}$ . Для этого вычислим обратную матрицу некоторой четырехэлементной матрицы  $C$ , где

$$C^* = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}. \quad (8.10)$$

Согласно общим правилам нахождения обратной матрицы

$$B^* = (C^*)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{a_{22}}{d} - \frac{a_{12}}{d} \\ -\frac{a_{21}}{d} & \frac{a_{11}}{d} \end{pmatrix}, \quad (8.11)$$

где  $d = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$ . Откуда следует, что

$$\begin{aligned} b_{11}^* &= \frac{a_{22}}{d} = \frac{a_{22}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} = (a_{11} - a_{12}a_{22}^{-1}a_{21})^{-1}, \\ b_{12}^* &= \frac{a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} = -b_{11}^*a_{12}a_{22}^{-1}, \\ b_{21}^* &= -\frac{a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} = -a_{22}^{-1}a_{21}b_{11}^*, \\ b_{22}^* &= (a_{22} - a_{21}a_{11}^{-1}a_{12})^{-1}. \end{aligned} \quad (8.12)$$

Чисто формально заменив элементы  $a_{ij}$ ,  $b_{ij}^*$  на подматрицы-блоки  $A_{ij}$  и  $B_{ij}$ , получим матрицу  $C^{-1}$ , состоящую из матрицы  $B_{ij}$

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}. \quad (8.13)$$

В этих преобразованиях есть определенные тонкости, о которых не следует забывать. Если перестановка двух обычных чисел в произведении коммутативна, то в матричном произведении порядок сомножителей влияет на конечный результат. Поэтому в блочных преобразованиях следует руководствоваться двумя основными положениями:

1) порядок сомножителей в матричном произведении будет правильным лишь в том случае, если соседние индексы матриц-блоков совпадают;

2) крайние индексы левой и правой частей равенств для подматриц-блоков должны совпадать.

Так, произведения

$$A_{11} = B_{13}C_{37}D_{74}E_{41} + F_{11},$$

$$A_{78} = F_{74}D_{44}C_{45}^{-1}E_{58}$$

являются примером верной записи. А в случаях

$$A_{34} = C_{43}E_{33}^{-1}D_{33},$$

$$A_{74} = C_{54}D_{75}E_{48}F_{84},$$

$$A_{13} = C_{13}E_{37}D_{71} + E_{31}$$

запись выполнена неверно. Приведенные выше правила однозначно определяют любые преобразования типа (8.12).

В качестве примера вычислим матрицу  $C$ . Для этого воспользуемся программой 142 для вычисления  $A_{11}^{-1}$ ,  $A_{22}^{-1}$ :

$$A_{11}^{-1} = \begin{pmatrix} -1.333333 & 3.333333 \cdot 10^{-1} \\ 1.166666 & -1.666666 \cdot 10^{-1} \end{pmatrix},$$

$$A_{22}^{-1} = \begin{pmatrix} 1.166666 & -1.666666 \cdot 10^{-1} \\ -1.333333 & 3.333333 \cdot 10^{-1} \end{pmatrix}.$$

По программе 139 находим матричные произведения

$$A_{12}A_{22}^{-1}A_{21} = \begin{pmatrix} -12.666666 & 9.99993 \cdot 10^{-1} \\ 9.999984 & 11.99999 \end{pmatrix},$$

$$A_{21}A_{11}^{-1}A_{12} = \begin{pmatrix} 1.999998 & -4.166669 \\ 17.99998 & 43.49997 \end{pmatrix}.$$

Вручную находим сумму матриц

$$A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21} = \begin{pmatrix} 13.666666 & 1.000007 \\ -2.999984 & -3.999991 \end{pmatrix},$$

$$A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12} = \begin{pmatrix} 1.4 \cdot 10^{-6} & 5.166669 \\ -9.999988 & -36.49997 \end{pmatrix}.$$

Снова обращаем матрицы

$$B_{22} = (A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12})^{-1} = \begin{pmatrix} -7.064522 \cdot 10^{-1} & -1.000002 \cdot 10^{-1} \\ 1.935484 \cdot 10^{-1} & 2.709681 \cdot 10^{-8} \end{pmatrix},$$

$$B_{11} = (A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21})^{-1} = \begin{pmatrix} 7.741941 \cdot 10^{-2} & 1.935503 \cdot 10^{-2} \\ -5.806437 \cdot 10^{-2} & -2.645167 \cdot 10^{-1} \end{pmatrix}.$$

Выполняем умножение

$$B_{12} = -B_{11}A_{12}A_{22}^{-1} = \begin{pmatrix} 1.96774 \cdot 10^{-1} & -1.000001 \cdot 10^{-1} \\ 4.774205 \cdot 10^{-4} & 2.000002 \cdot 10^{-1} \end{pmatrix},$$

$$B_{21} = -A_{22}^{-1}A_{21}B_{11} = \begin{pmatrix} -2.451617 \cdot 10^{-1} & 4.387095 \cdot 10^{-1} \\ 3.548390 \cdot 10^{-1} & -1.612897 \cdot 10^{-1} \end{pmatrix}.$$

В результате получаем

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 7.741941 \cdot 10^{-2} & 1.935503 \cdot 10^{-2} \\ -5.806437 \cdot 10^{-2} & -2.645167 \cdot 10^{-1} \\ -2.451617 \cdot 10^{-1} & 4.387095 \cdot 10^{-1} \\ 3.548390 \cdot 10^{-1} & -1.612897 \cdot 10^{-1} \\ & 1.967740 \cdot 10^{-1} & -1.000001 \cdot 10^{-1} \\ & 4.774205 \cdot 10^{-1} & 2.000002 \cdot 10^{-1} \\ & -7.064522 \cdot 10^{-1} & -1.000002 \cdot 10^{-1} \\ & 1.935484 \cdot 10^{-1} & 2.709681 \cdot 10^{-8} \end{pmatrix}.$$

Для проверки правильности вычисленной матрицы  $C^{-1}$  умножим ее на  $C$  по программе 141. Должно получиться  $C^{-1}C = 1$ . А на самом деле получается

$$\begin{pmatrix} 1 & 1.6 \cdot 10^{-6} & 4 \cdot 10^{-7} & -1.645159 \cdot 10^{-7} \\ 1 \cdot 10^{-7} & 9.999999 \cdot 10^{-1} & 2.6 \cdot 10^{-6} & -7.374191 \cdot 10^{-7} \\ 1.3 \cdot 10^{-7} & 5.8 \cdot 10^{-7} & 1.000001 & -1.374191 \cdot 10^{-7} \\ 0 & 2.2 \cdot 10^{-6} & 5.7 \cdot 10^{-6} & 1 \end{pmatrix}.$$

Округлив элементы полученной матрицы до  $10^{-5}$ , получаем

$$C^{-1}C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 1.$$

Таким разбиением матрицы на блоки можно находить компоненты обратных матриц вплоть до шестого порядка.

Мы использовали симметричное разбиение на блоки. Все подматрицы имели размерность  $2 \times 2$ . Однако можно делать и несимметричное разбиение, когда, например, полученные подматрицы имеют размерность  $A_{11}(1, 1)$ ,  $A_{12}(1, 3)$ ,  $A_{21}(3, 1)$ ,  $A_{22}(3, 3)$ . Ведь матричные операции умножения сохранили бы силу при правильно выполненной расстановке индекса в (8.12), причем  $A_{11}^{-1} = \frac{1}{a_{11}}$ .

Блочные преобразования допускаются практически во всех операциях линейной алгебры, где выполняются операции сложения, вычитания, умножения и деления (умножения на обратную матрицу).

Если при решении системы линейных уравнений требуется вычислить несколько первых значений неизвестных, то методом блочных преобразований можно свести всю систему к малой системе линейных уравнений лишь для этих неизвестных. Для этого всю систему  $n$  линейных уравнений с  $n$  неизвестными

$$AX = B \quad (8.14)$$

разобьем на две подсистемы:

$$\begin{aligned} A_{11}X_1 + A_{12}X_2 &= B_1, \\ A_{21}X_1 + A_{22}X_2 &= B_2, \end{aligned} \quad (8.15)$$

где  $X_1$  — подматрица-столбец неизвестных, которые мы хотим найти,  $X_2$  — подматрица-столбец переменных, которые нам не нужны, а подматрицы  $B_1$ ,  $B_2$  — два вектора-столбца, которые в сумме дают вектор-столбец  $B$ . Исключая из второго уравнения (8.15) неизвестную переменную  $X_2$  и подставляя ее в первое уравнение, получаем

$$X_1 = (A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21})^{-1}(B_1 - A_{12}A_{22}^{-1}B_2). \quad (8.16)$$

Если положить в качестве  $A_{11}$  первый элемент матрицы  $A$ , то остальные матрицы будут иметь размерность  $A_{12}(1, n-1)$ ,  $A_{21}(n-1, 1)$ ,  $X_1(1)$ ,  $A_{22}(n-1, n-1)$ ,  $B_1(1)$ ,  $X_2(n-1)$ ,  $B_2(n-1)$ . Тогда, выполнив матричные операции по формуле (8.16), получим  $X_1$ . Так, на программируемом микрокалькуляторе можно находить корни системы линейных уравнений вплоть до десятого порядка.

Если система уравнений состоит более чем из десяти уравнений, то матрицу  $A$  можно разбить на 9 блоков и оперировать с подматрицами так, как с элементами системы уравнений с тремя неизвестными, используя формализм, который мы применили в (8.12), (8.15), (8.16).

## 5. Некоторые операции аналитической геометрии

Приведенные ниже программы позволяют облегчить и автоматизировать некоторые типичные расчеты из аналитической геометрии.

**Программа 145. Вычисление векторного произведения.** Умножаются два вектора  $[a \times b] = c$ . После установки счетчика в начальное положение вводятся компоненты векторов. Компоненты получаемого в результате произведения вектора поступают в регистры  $c_1 = \text{ПА}$ ,  $c_2 = \text{ПВ}$ ,  $c_3 = \text{ПС}$ . В памяти хранятся числа:  $a_1 = \text{П0}$ ,  $a_2 = \text{П1}$ ,  $a_3 = \text{П2}$ ,  $b_1 = \text{П3}$ ,  $b_2 = \text{П4}$ ,  $b_3 = \text{П5}$ .

Ввести  $a_1 \text{ С/П } a_2 \text{ С/П } a_3 \text{ С/П } b_1 \text{ С/П } b_2 \text{ С/П } b_3 \text{ С/П}$ . На индикаторе получим  $c_1$ , затем после  $\text{С/П} - \text{С2}$  и  $\text{С3}$ .

|     |           |     |     |     |     |     |     |     |     |
|-----|-----------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| П0  | С/П       | П1  | С/П | П2  | С/П | П3  | С/П | П4  | С/П |
| П5  | Пх1       | ×   | Пх2 | Пх4 | ×   | —   | ПА  | Пх0 | Пх4 |
| ×   | Пх1       | Пх3 | ×   | —   | ПС  | Пх2 | Пх3 | ×   | Пх0 |
| Пх5 | ×         | —   | ПВ  | ПхА | С/П | ПхВ | С/П | ПхС | С/П |
| БП  | <u>00</u> |     |     |     |     |     |     |     |     |

Тест:  $a = i + 2j - 3k$ ,  $b = 2i + k + j$ ,  $c = 5i - 7j - 3k$ .

Время счета 7,5 с.

**Программа 146. Поворот радиус-вектора вокруг оси  $z$ .** Осуществляется поворот системы координат  $x_1, y_1 \rightarrow x_2, y_2$  на угол  $\phi$ .

Ввести  $x_1$  С/П  $y_1$  С/П  $\varphi$  С/П. Получите величину  $x_2$ , а после С/П —  $y_2$ .

Память:  $x_1 = \Pi 1$ ,  $y_1 = \Pi 2$ ,  $\varphi = \Pi 3$ ,  $x_2 = \Pi 4$ ,  $y_2 = \Pi 5$ ,  $\sin \varphi = \Pi 6$ ,  $\cos \varphi = \Pi 7$ .

Тест:  $x_1 = 3$ ,  $y_1 = 4$ ,  $\varphi = 90^\circ$ ,  $x_2 = -4$ ,  $y_2 = 3$ .

$$\begin{array}{ccccccccc} \text{П1} & \text{С/П} & \text{П2} & \text{С/П} & \text{П3} & \text{F sin} & \text{П6} & \text{Px3} & \text{F cos} & \text{П7} \\ \text{Px1} & \times & \text{Px6} & \text{Px2} & \times & - & \text{П4} & \text{C/П} & \text{Px6} & \text{Px1} \\ \times & \text{Px7} & \text{Px2} & \times & + & \text{П5} & \text{C/П} & \text{БП} & \underline{00} \end{array}$$

Поворот системы в трехмерном пространстве описывается тремя углами Эйлера  $\varphi$ ,  $\theta$ ,  $\psi$ . По ним находится и матрица поворота.

**Программа 147. Вычисление матрицы Эйлерового поворота.** Преобразование системы координат осуществляется с матричного произведения

$$X = AX', \quad (8.17)$$

где  $A$  — матрица поворота, которая вычисляется по программе, если заданы углы поворота  $\varphi$ ,  $\theta$ ,  $\psi$ .

Установив счетчик в начальное положение, следует ввести  $\varphi$  С/П  $\theta$  С/П  $\psi$  С/П. Программа последовательно выводит  $a_{11}$ ,  $a_{12}$ ,  $a_{13}$ ,  $a_{21}$ , ...,  $a_{33}$ . После вывода каждого очередного коэффициента необходимо лишь нажимать клавишу С/П.

Память:  $\varphi = \Pi 1$ ,  $\theta = \Pi 2$ ,  $\psi = \Pi 3$ , ПД — буфер,  $a_{11} = \Pi 0$ ,  $a_{12} = \Pi 1$ ,  $a_{13} = \Pi 2$ ,  $a_{21} = \Pi 3$ ,  $a_{22} = \Pi 4$ ,  $a_{23} = \Pi 5$ ,  $a_{31} = \Pi 6$ ,  $a_{32} = \Pi 7$ ,  $a_{33} = \Pi 8$ .

Тест:  $\varphi = \pi$ ,  $\theta = \frac{\pi}{2}$ ,  $\psi = \frac{3\pi}{2}$ .

Результаты счета:  $a_{11} = 0$ ,  $a_{12} = 1$ ,  $a_{13} = 0$ ,  $a_{21} = 0$ ,  $a_{22} = 0$ ,  $a_{23} = -1$ ,  $a_{31} = -1$ ,  $a_{32} = 0$ ,  $a_{33} = 0$ .

$$\begin{array}{cccccccccc} \text{ПА} & \text{С/П} & \text{ПВ} & \text{С/П} & \text{ПС} & \text{PxВ} & \text{F cos} & \text{ПД} & \text{PxВ} & \text{F sin} \\ \text{ПВ} & \text{PxA} & \text{F cos} & \text{П9} & \text{PxA} & \text{F sin} & \text{П8} & \text{PxС} & \text{F sin} & \text{ПА} \\ \text{PxС} & \text{F cos} & \text{ПС} & \text{Px9} & \times & \text{PxA} & \text{PxД} & \times & \text{Px8} & \times \\ - & \text{П0} & \text{PxA} & \text{Px9} & \times & \text{PxС} & \text{PxД} & \times & \text{Px8} & \times \\ + & \text{П1} & \text{PxВ} & \text{Px8} & \times & \text{П2} & \text{PxС} & /-/ & \text{Px8} & \times \\ \text{PxA} & \text{PxД} & \times & \text{Px9} & \times & - & \text{П3} & \text{PxA} & \text{Px8} & \times \\ /-/ & \text{PxС} & \text{PxД} & \times & \text{Px9} & \times & + & \text{П4} & \text{PxВ} & \text{Px9} \\ \times | & \text{П5} & \text{PxA} & \text{PxВ} & \times & \text{П6} & \text{PxС} & \text{PxВ} & \times & /-/ \\ \text{П7} & \text{PxД} & \text{П8} & \text{Cx} & \text{ПД} & \text{БП} & \underline{91} & \text{PxД} & 1 & + \\ \text{ПД} & \text{КPxД} & \text{С/П} & \text{БП} & \underline{87} & & & & & \end{array}$$

**Программа 148. Вычисление угла между векторами  $a$  и  $b$ .** Вводим последовательно компоненты векторов:  $a_1$  С/П  $a_2$  С/П  $a_3$  С/П  $b_1$  С/П  $b_2$  С/П  $b_3$  С/П. Величина угла в соответствующих угловых единицах поступает на индикатор.

Память:  $a_1 = \Pi 1$ ,  $a_2 = \Pi 2$ ,  $a_3 = \Pi 3$ ,  $b_1 = \Pi 4$ ,  $b_2 = \Pi 5$ ,  $b_3 = \Pi 6$ .

|        |               |        |           |           |     |           |           |           |        |
|--------|---------------|--------|-----------|-----------|-----|-----------|-----------|-----------|--------|
| П1     | C/Π           | П2     | C/Π       | П3        | C/Π | П4        | C/Π       | П5        | C/Π    |
| П6     | $\Pi x^3$     | ×      | $\Pi x^2$ | $\Pi x^5$ | ×   | +         | $\Pi x^1$ | $\Pi x^4$ | ×      |
| +      | $\Pi x^1$     | $Fx^2$ | $\Pi x^2$ | $Fx^2$    | +   | $\Pi x^3$ | $Fx^2$    | +         | $Fv^-$ |
| $\div$ | $\Pi x^4$     | $Fx^2$ | $\Pi x^5$ | $Fx^2$    | +   | $\Pi x^6$ | $Fx^2$    | +         | $Fv^-$ |
| $\div$ | $F \cos^{-1}$ | C/Π    |           |           |     |           |           |           |        |

Тест:  $a = i + 2j + 3k$ ,  $b = 2i + j - k$ . В результате счета получаем  
 $\varphi = 83,736047^\circ$ ,  $t_{\text{сч}} \sim 9$  с.

## Глава 9

# РЕШЕНИЕ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

### 1. Определение границ корней алгебраических многочленов

Алгебраический многочлен  $n$ -й степени имеет  $n$  корней, лежащих в каких-то пределах. Если все корни действительные, то функция  $y = P_n(x)$  пересекает ось  $x$  ровно  $n$  раз. Обозначим верхнюю границу корней через  $a$ , а нижнюю —  $b$ , как на рис. 49. Если известны границы

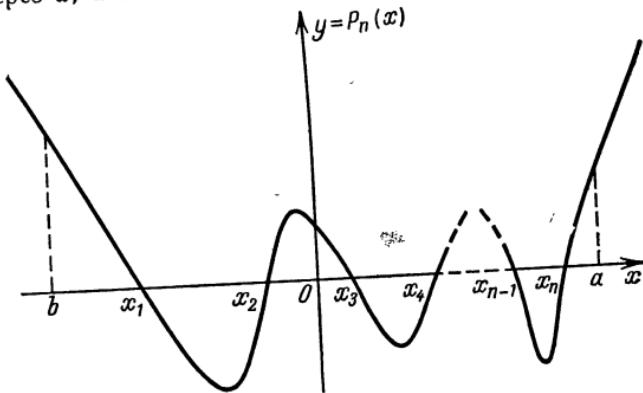


Рис. 49

корней, то обычно несложно найти и сами корни. Для этого, двигаясь слева направо вдоль оси  $x$  с малым шагом  $h$  и сравнивая между собой значения функции в соседних точках, можно найти тот интервал, где величины  $P_n(x)$  в соседних точках имеют противоположные знаки. Уменьшив шаг, мы можем уточнить значение корня до нужного количества цифр в числе. Наибольшая трудность возникает при определении границ, близко прилегающих к корням алгебраического многочлена. В общем случае многочлен имеет вид

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0. \quad (9.1)$$

Если переменная  $x$  принимает значение корня, то

$$P_n(x) = 0. \quad (9.2)$$

Грубой верхней границей корней является число

$$B = 1 + \frac{\max |a_i|}{a_n}. \quad (9.3)$$

Поэтому для многочлена

$$P_5(x) = x^5 + 2x^4 - 5x^3 + 8x^2 - 7x - 3 \quad (9.4)$$

верхней границей корней будет число  $B = 1 + \frac{8}{1} = 9$ . Конечно, оценка эта очень завышена. Обозначим величиной  $A$  наибольшую из абсолютных величин отрицательных коэффициентов в (9.1). Тогда верхней границей положительных корней многочлена является число

$$C = 1 + \sqrt[n-i]{\frac{A}{a_n}}, \quad (9.5)$$

где  $n$  — максимальная степень многочлена,  $i$  — индекс первого отрицательного коэффициента  $a$  в (9.1), читая ее слева направо. Поэтому, для многочлена (9.4) получим  $a_n = 1$ ,  $n = 5$ ,  $i = 3$ ,  $A = 7$ , тогда  $C = 1 + \sqrt[2]{7} \approx 3.6458$ .

Пожалуй, самым точным методом вычисления верхней границы корней многочлена является метод Ньютона, однако он довольно громоздкий. Идея его проста: рассмотрим многочлен (9.1), где

$$a_n > 0. \quad (9.6)$$

Тогда при больших положительных значениях  $x$  многочлен будет положителен, что вытекает из (9.1) и (9.6). Это означает, что, начиная с некоторой точки  $x = C$ , функция  $P_n(x)$  монотонно возрастает с ростом  $x$ . А это возможно лишь в том случае, если за точкой  $x = C$  кривая уже не пересекает ось  $x$ . Чтобы функция монотонно и неограниченно возрастила, необходимо, чтобы все производные функции были неотрицательны, начиная с некоторого значения  $x = C$ . Таким образом, нам необходимо найти некоторое значение  $x = C$ , при котором алгебраический многочлен  $n$ -й степени вместе со своими  $n$  производными принимал либо положительные значения, либо равнялся нулю. Грубо оценить верхнюю границу можно по формулам (9.3) и (9.5). Задавшись некоторым малым шагом  $h$  и двигаясь по числовой оси в сторону

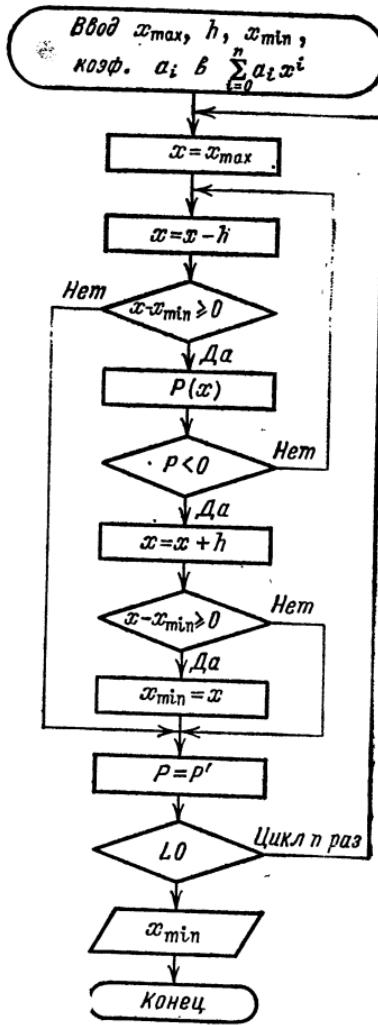


Рис. 50

уменьшения  $x$ , вычисляя значение алгебраического многочлена и его производных, путем перебора всевозможных точек, очевидно, можно выбрать такое значение  $x = C$ , где многочлен и его производные будут неотрицательными. Это и будет верхняя граница положительных корней алгебраического многочлена. Автоматический поиск на ЭВМ верхней границы корней, оцениваемой методом Ньютона, осуществляется согласно блок-схемы рис. 50. Запись  $P = P'$  означает, что ЭВМ вычисляет коэффициенты алгебраического многочлена, который получается дифференцированием многочлена  $P_n(x)$ . Цикл ограничивает количество операций дифференцирования: ведь многочлен  $n$ -й степени имеет ровно  $n$  производных, а остальные все равны 0. Производная  $n$ -го порядка равна  $n!a_n$ . Эта величина наверняка положительна и в вычислительном процессе она совсем не должна участвовать. Поэтому цикл будет повторен не  $(n+1)$ , а  $n$  раз, так как необходимо вычислить многочлен и его  $(n-1)$  производных. Все операции, изображенные на рис. 58, программируемый микрокалькулятор выполняет полностью автоматически.

Приведенные ниже программы 149—154 предназначены для вычисления верхней границы положительных корней алгебраических многочленов с третьей по восьмую степень. В качестве нижней границы обычно полагают  $x_{\min} = 0$ , а в качестве верхней — какое-либо грубое значение, найденное по формуле (9.3) или (9.5) (вторая формула предпочтительнее).

В программах 149—154 перед счетом необходимо ввести в адресуемую память числа  $x_{\min} = 0 = \text{ПС}$ ,  $x_{\max} = \text{ПД}$ ,  $h = \text{ПВ}$ . Во всех программах величина  $x$  находится в регистре ПА. Шаг  $h$  обычно выбирают так, чтобы отношение

$$\frac{x_{\max}}{h} \sim 10 - 60.$$

В каждой программе вводятся также коэффициенты  $a_i$  алгебраического многочлена. Время выполнения каждой из этих программ можно грубо оценить по формуле

$$t_{\text{сч}} = 0,007n(2n+3) \left( \frac{x_{\max}}{h} \right), \quad (9.7)$$

где  $n$  — порядок алгебраического многочлена, а время счета выражено в мин. Для многочленов высоких порядков время счета велико. Для  $n = 8$  и  $\frac{x_{\max}}{h} = 60$  счет длится около 1 ч 11 мин. Поэтому в таких случаях не торопитесь выключать микрокалькулятор, подозревая, что программа зациклилась. Время, определенное по формуле (9.7), может оказаться немного меньше или больше, чем на самом деле, так как формула довольно грубая, но порядок величины будет тот же.

**Программа 149.** Вычисление верхней границы корней многочлена третьей степени методом Ньютона.  $3 = \Pi_0$ ,  $a_0 = \Pi_1$ ,  $a_1 = \Pi_2$ ,  $a_2 = \Pi_3$ ,  $a_3 = \Pi_4$ .

|          |             |          |          |                    |     |          |     |             |                     |
|----------|-------------|----------|----------|--------------------|-----|----------|-----|-------------|---------------------|
| ПхД      | ПА          | ПxA      | ПxB      | —                  | ПА  | ПxC      | —   | $Fx \geq 0$ | 35                  |
| ПxA      | $\Pi x^4$   | $\times$ | Пx3      | $+$                | ПxA | $\times$ | Пx2 | $+$         | $\overline{\Pi xA}$ |
| $\times$ | Пx1         | $+$      | $Fx < 0$ | 02                 | ПxA | ПxB      | $+$ | ПА          | ПxC                 |
| —        | $Fx \geq 0$ | 35       | ПxA      | $\overline{\Pi C}$ | Пx2 | П1       | Пx3 | 2           | $\times$            |
| П2       | $\Pi x^4$   | 3        | $\times$ | П3                 | Cx  | П4       | FL0 | 00          | ПxC                 |
| C/P      |             |          |          |                    |     |          |     |             |                     |

**Программа 150.** Вычисление верхней границы корней многочлена четвертой степени методом Ньютона.  $4 = \Pi_0$ ,  $a_0 = \Pi_1$ ,  $a_1 = \Pi_2$ ,  $a_2 = \Pi_3$ ,  $a_3 = \Pi_4$ ,  $a_4 = \Pi_5$ .

|          |           |          |          |          |             |          |          |                    |                     |
|----------|-----------|----------|----------|----------|-------------|----------|----------|--------------------|---------------------|
| ПхД      | ПА        | ПxA      | ПxB      | —        | ПА          | ПxC      | —        | $Fx \geq 0$        | 39                  |
| ПxA      | $\Pi x^5$ | $\times$ | Пx4      | $+$      | ПxA         | $\times$ | Пx3      | $+$                | $\overline{\Pi xA}$ |
| $\times$ | Пx2       | $+$      | ПxA      | $\times$ | Пx1         | $+$      | $Fx < 0$ | 02                 | ПxA                 |
| ПxB      | $+$       | ПА       | ПxC      | —        | $Fx \geq 0$ | 39       | ПxA      | $\overline{\Pi C}$ | Пx2                 |
| П1       | Пx3       | 2        | $\times$ | П2       | Пx4         | 3        | $\times$ | П3                 | Пx5                 |
| 4        | $\times$  | П4       | Cx       | П5       | FL0         | 00       | ПxC      | C/P                |                     |

**Программа 151.** Вычисление верхней границы корней многочлена пятой степени.  $5 = \Pi_0$ ,  $a_0 = \Pi_1$ ,  $a_1 = \Pi_2$ ,  $a_2 = \Pi_3$ ,  $a_3 = \Pi_4$ ,  $a_4 = \Pi_5$ ,  $a_5 = \Pi_6$ .

|          |           |                    |     |          |          |          |          |             |                     |
|----------|-----------|--------------------|-----|----------|----------|----------|----------|-------------|---------------------|
| ПхД      | ПА        | ПxA                | ПxB | —        | ПА       | ПxC      | —        | $Fx \geq 0$ | 43                  |
| ПxA      | $\Pi x^6$ | $\times$           | Пx5 | $+$      | ПxA      | $\times$ | Пx4      | $+$         | $\overline{\Pi xA}$ |
| $\times$ | Пx3       | $+$                | ПxA | $\times$ | Пx2      | $+$      | ПxA      | $\times$    | Пx1                 |
| $+$      | $Fx < 0$  | 02                 | ПxA | ПxB      | $+$      | ПА       | ПxC      | —           | $Fx \geq 0$         |
| 43       | ПxA       | $\overline{\Pi C}$ | Пx2 | П1       | Пx3      | 2        | $\times$ | П2          | Пx4                 |
| 3        | $\times$  | П3                 | Пx5 | 4        | $\times$ | П4       | Пx6      | 5           | $\times$            |
| П5       | Cx        | П6                 | FL0 | 00       | ПxC      | C/P      |          |             |                     |

**Программа 152.** Вычисление верхней границы многочлена шестой степени методом Ньютона.  $6 = \Pi_0$ ,  $a_0 = \Pi_1$ ,  $a_1 = \Pi_2$ ,  $a_2 = \Pi_3$ ,  $a_3 = \Pi_4$ ,  $a_4 = \Pi_5$ ,  $a_5 = \Pi_6$ ,  $a_6 = \Pi_7$ .

|          |           |          |             |          |          |                    |          |             |                     |
|----------|-----------|----------|-------------|----------|----------|--------------------|----------|-------------|---------------------|
| ПхД      | ПА        | ПxA      | ПxB         | —        | ПА       | ПxC                | —        | $Fx \geq 0$ | 47                  |
| ПxA      | $\Pi x^7$ | $\times$ | Пx6         | $+$      | ПxA      | $\times$           | Пx5      | $+$         | $\overline{\Pi xA}$ |
| $\times$ | Пx4       | $+$      | ПxA         | $\times$ | Пx3      | $+$                | ПxA      | $\times$    | Пx2                 |
| $+$      | ПxA       | $\times$ | Пx1         | $+$      | $Fx < 0$ | 02                 | ПxA      | ПxB         | $+$                 |
| ПА       | ПxC       | —        | $Fx \geq 0$ | 47       | ПxA      | $\overline{\Pi C}$ | Пx2      | П1          | Пx3                 |
| 2        | $\times$  | П2       | Пx4         | 3        | $\times$ | П3                 | Пx5      | 4           | $\times$            |
| П4       | Пx6       | 5        | $\times$    | П5       | Пx7      | 6                  | $\times$ | П6          | Cx                  |
| П7       | FL0       | 00       | ПxC         | C/P      |          |                    |          |             |                     |

**Программа 153. Вычисление верхней границы корней многочлена седьмой степени методом Ньютона.**  $7 = \Pi_0$ ,  $a_0 = \Pi_1$ ,  $a_1 = \Pi_2$ ,  $a_2 = \Pi_3$ ,  $a_3 = \Pi_4$ ,  $a_4 = \Pi_5$ ,  $a_5 = \Pi_6$ ,  $a_6 = \Pi_7$ ,  $a_7 = \Pi_8$ .

|     |     |     |     |    |     |     |             |             |          |
|-----|-----|-----|-----|----|-----|-----|-------------|-------------|----------|
| ПхД | ПА  | ПхА | ПхВ | —  | ПА  | ПхС | —           | $Fx \geq 0$ | 51       |
| ПхА | Пх8 | ×   | Пх7 | +  | ПхА | ×   | Пх6         | +           | ПхА      |
| ×   | Пх5 | +   | ПхА | ×  | Пх4 | +   | ПхА         | ×           | Пх3      |
| +   | ПхА | ×   | Пх2 | +  | ПхА | ×   | Пх1         | +           | $Fx < 0$ |
| 02  | ПхА | ПхВ | +   | ПА | ПхС | —   | $Fx \geq 0$ | 51          | ПхА      |
| ПС  | Пх2 | П1  | Пх3 | 2  | ×   | П2  | Пх4         | 3           | ×        |
| П3  | Пх5 | 4   | ×   | П4 | Пх6 | 5   | ×           | П5          | Пх7      |
| 6   | ×   | П6  | Пх8 | 7  | ×   | П7  | Cx          | П8          | FL0      |
| 00  | ПхС | C/P |     |    |     |     |             |             |          |

**Программа 154. Вычисление верхней границы корней многочлена восьмой степени методом Ньютона.**  $8 = \Pi_0$ ,  $a_0 = \Pi_1$ ,  $a_1 = \Pi_2$ ,  $a_2 = \Pi_3$ ,  $a_3 = \Pi_4$ ,  $a_4 = \Pi_5$ ,  $a_5 = \Pi_6$ ,  $a_6 = \Pi_7$ ,  $a_7 = \Pi_8$ ,  $a_8 = \Pi_9$ .

|     |             |     |          |    |     |     |     |             |     |
|-----|-------------|-----|----------|----|-----|-----|-----|-------------|-----|
| ПхД | ПА          | ПхА | ПхВ      | —  | ПА  | ПхС | —   | $Fx \geq 0$ | 55  |
| ПхА | Пх9         | ×   | Пх8      | +  | ПхА | ×   | Пх7 | +           | ПхА |
| ×   | Пх6         | +   | ПхА      | ×  | Пх5 | +   | ПхА | ×           | Пх4 |
| +   | ПхА         | +   | Пх3      | +  | ПхА | ×   | Пх2 | +           | ПхА |
| ×   | Пх1         | +   | $Fx < 0$ | 02 | ПхА | ПхВ | +   | ПА          | ПхС |
| —   | $Fx \geq 0$ | 55  | ПхА      | ПС | Пх2 | П1  | Пх3 | 2           | ×   |
| П2  | Пх4         | 3   | ×        | П3 | Пх5 | 4   | ×   | П4          | Пх6 |
| 5   | ×           | П5  | Пх7      | 6  | ×   | П6  | Пх8 | 7           | ×   |
| П7  | Пх9         | 8   | ×        | П8 | Cx  | П9  | FL0 | 00          | ПхС |
| C/P |             |     |          |    |     |     |     |             |     |

Вычислим, например, верхнюю границу корней многочлена (9.4). Для этого воспользуемся программой 151. Положим  $x_{\max} = 3,7$ ,  $x_{\min} = 0$ ,  $h = 0.1$ . Счет длится около 15 мин. В результате получаем уточненную границу для положительных корней этого многочлена  $C = 1.4$ . Легко найти и нижнюю границу положительных корней многочлена. Для этого надо вместо величины  $x$  в уравнение (9.1) подставить величину  $\frac{1}{z}$ .

Домножив обе части этого уравнения на  $z^n$ , получим некоторый многочлен  $M_n(z)$ . Найти верхнюю границу корней этого многочлена можно каким-либо из описанных выше способов. Обозначим эту границу  $A$ . Тогда для алгебраического многочлена  $P_n(x)$  в (9.1) нижней границей положительных корней является число  $1/A$ . Заменив в (9.1) величину  $x$  на  $-t$ , получим некоторый многочлен

$$H_n(t) = P_n(-t). \quad (9.8)$$

Найдем нижнюю границу  $B$  в верхнюю  $D$  для положительных корней алгебраического многочлена  $H_n(t)$ . Тогда числа  $D$  и  $B$  будут соответ-

ственno нижней и верхней границей отрицательных корней многочлена  $P_n(x)$ .

Вопрос о числе действительных, комплексных положительных и отрицательных корней довольно сложен. Если все корни многочлена действительные, то согласно теореме Декарта число  $k_1$  положительных корней многочлена  $P_n(x)$  равно числу перемен знаков  $S_1$  в системе его коэффициентов, а число  $k_2$  отрицательных корней равно числу  $S_2$  перемен знаков в системе коэффициентов многочлена  $H_n(t) = P_n(-t)$ . Так, для многочлена (9.4) выпишем отдельно знак перед каждым членом:

$$+ + - + - -$$

В данном случае три переменныe знака, а значит, и три действительных положительных корня

$$H_5(t) = P_5(-t) = -t^5 + 2t^4 + 5t^3 + 8t^2 + 7t - 3. \quad (9.9)$$

Знаки этого многочлена

$$- + + + + -$$

Видим, что в данной ситуации две переменныe знака ( $S_2 = 2$ ), а значит, и два отрицательных корня уравнения.

Количество мнимых корней уравнения позволяет определить правило знаков Ньютона: число мнимых корней уравнения  $n$ -й степени равно или по крайней мере не меньше числа перемен знаков в ряду

$$\begin{aligned} a_0^2, \quad \frac{1}{n} \left( \frac{n-1}{2} \right) a_1^2 - a_0 a_2, \\ \frac{2}{n-1} \left( \frac{n-2}{3} \right) a_2^2 - a_1 a_3, \quad \dots, \quad \frac{n-1}{2} \frac{1}{n} a_{n-1}^2 - a_{n-2} a_n, \quad a_n^2. \end{aligned} \quad (9.10)$$

До сих пор мы рассматривали нахождение границы корней алгебраических уравнений. При нахождении корней трансцендентных уравнений их границы как правило определяются из области допустимых значений аргументов функции, входящей в уравнение. Например,  $\sqrt{\sin x} + x^2 - 0,5 = 0$ . Поскольку под радикалом должно стоять положительное число, то сразу определяется и граница корней для данного уравнения

$$0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}.$$

Более сложные примеры требуют некоторой находчивости, хотя основной принцип остается тот же.

## 2. Нахождение корней нелинейных уравнений

Любое трансцендентное уравнение

$$f(x) = g(x) \quad (9.11)$$

можно привести к виду

$$F(x) = 0.$$

(9.12)

Для нахождения корней такого уравнения используют методы хорд, дихотомии, касательных Ньютона. Для нахождения корней алгебраического многочлена кроме вышеупомянутых используют еще метод Лобачевского.

При определении корней методом касательных Ньютона необходимо вычисление каждый раз значения производной функции. Если первоначальная пробная точка находится на большом удалении от корня, то вычислительный процесс может и не сходится к решению. Правда, если метод Ньютона сходится к решению, то делает он это быстрее других методов.

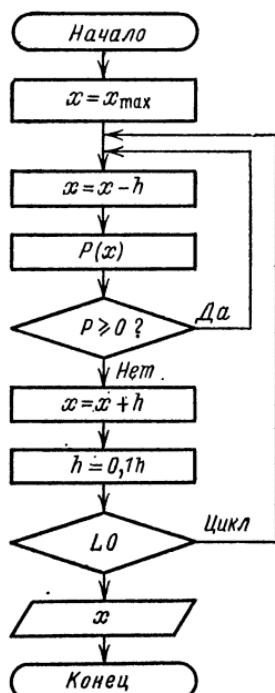


Рис. 51

Метод Лобачевского позволяет приближенно находить значение  $x_i^k$  каждого корня, после чего требуется извлечение  $\sqrt[k]{\dots}$  из полученной степени, что попутно сопровождается большой численной погрешностью. Да и процесс квадрирования нельзя осуществить много раз, ведь числовой диапазон вычислительного устройства ограничен. Методы эти хотя и экономичны с точки зрения количества операций, но не дают точного значения корня.

На программируемых микрокалькуляторах самые хорошие результаты дают методы дихотомии и декахотомии. Их блок-схема представлена на рис. 51. Эти методы позволяют найти корень алгебраического уравнения с относительной погрешностью  $\delta = 10^{-8}$ .

На блок-схеме величина  $x_{\max}$  — верхняя граница корней данного уравнения. Блок-схема рассчитана для случая, когда

$$P(\infty) > 0.$$

Если это условие не выполняется, то вместо  $P(x)$  следует использовать обратную ей величину —  $-P(x)$ . Идея этих методов состоит в постепенном сужении интервала аргумента функции, где последняя меняет знак на противоположный. Шаг  $h$  выбирают так, чтобы на последнем этапе вычисления он был равен единице, умноженной на 10 в такой степени, что число это влияло лишь на последнюю значащую цифру корня. К примеру, если определяется значение корня с погрешностью 0.1, то шаг на последнем этапе вычисления должен быть равен 0.1.

Рассмотрим выбор шага в декахотомии. Начальное значение полагают равным 10 в такой степени, которая является порядком, на единицу меньшим верхней границы корня. Цикл повторяют 8 раз, если нужно получить корень с 8 значащими цифрами. Цикл, таким образом, характеризует точность вычисления. Например, если верхняя граница  $a=5$ , а корень необходимо получить с тремя значащими цифрами, то  $h=1$ , а цикл следует повторить 3 раза. Очевидно, что на последнем этапе вычисления  $h=0.001$ . Если вы получили корень с тремя значащими цифрами, а хотите получить с шестью, то количество повторений цикла следует увеличить на 3 единицы и запустить программу дальше. Ведь шаг в ходе предшествующих вычислений уже уменьшен до нужной величины. Удобство программы 156 и состоит в том, что для увеличения уже имеющейся некоторой точности нужно лишь задать снова число повторений цикла и запустить программу с начального адреса.

Метод дихотомии принципиально ничем не отличается от декахотомии, но выбирать шаг  $h$  здесь сложнее, если нужно получить ту же точность. Ведь значение шага должно делиться без остатка на 2 столько раз, сколько повторений в цикле, причем в результате последнего деления должна быть получена абсолютная погрешность. Например, если верхняя граница корней  $x=0.9$ , а нужно получить в корне 2 значащие цифры, то надо положить  $h=0.16$ , а цикл повторить 5 раз. Если верхняя граница корней лежит где-то в первом порядке, т. е.  $1 < x < 10$ , то для выбора шага, а также количества повторений цикла можно использовать табл. 28. В самом же общем случае на сколько порядков больше верхняя граница корней, на столько порядков должен быть больше и шаг. Так, если  $x=170$ , а необходимо получить 5 значащих цифр в корне, то, используя данные таблицы, находим, что  $h=163.84$ , а число повторений цикла  $i=15$ . В дихотомии, таким

Таблица 28

| Количество зна-<br>чащих цифр | Выбор шага и количества повторений цикла в зависимости<br>от количества значащих цифр в ди- и декахотомии |              |             |              |
|-------------------------------|---|--------------|-------------|--------------|
|                               | Дихотомия   |              | Декахотомия |              |
|                               | Шаг   | Число циклов | Шаг         | Число циклов |
| 2                             | 1.6   | 5            | 1           | 2            |
| 3                             | 1.28  | 8            | 1           | 3            |
| 4                             | 1.024   | 11           | 1           | 4            |
| 5                             | 1.6384  | 15           | 1           | 5            |
| 6                             | 1.31072   | 18           | 1           | 6            |
| 7                             | 1.048576  | 21           | 1           | 7            |
| 8                             | 1.6777216   | 25           | 1           | 8            |

образом, необходимо в самом начале задавать шаг и число повторений цикла, а потом уже нет возможности его менять.

**Программа 155. Метод дихотомии отыскания корней нелинейных уравнений.** Ввести шаг  $h = \text{ПС}$ , верхнюю границу корней  $a = \text{ПД}$ , число повторений цикла  $i = \text{П0}$ . С адреса 24 вводится подпрограмма-функция  $F(x) = 0$ , аргументом которой является регистр ПД. Эта функция может быть алгебраическим многочленом или трансцендентной функцией, причем при значении аргумента, равного верхней границе корней, подпрограмма-функция должна быть положительна. Ответ поступает в регистр ПД и X, а значение функции при данном значении корня — в регистр Y.

|           |       |    |    |     |     |        |     |     |     |
|-----------|-------|----|----|-----|-----|--------|-----|-----|-----|
| ПxD       | PxC   | —  | ПД | ПП  | 24  | Fx < 0 | 00  | ПxD | PxC |
| +      ПД | ↔ PxC | 2  | ÷  | ПС  |     | ↔ FL0  | 00  |     |     |
| ПxD       | C/P   | БП | 00 | ... | ... | ...    | ... | ... | B/0 |

Тест:  $P(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$ ,  $a = 3.5$ ,  $h = 1.048576 \cdot 10^{-1}$ .

Результат счета:  $L = 21$ ,  $x = 3$ ,  $t_{\text{сч}} = 3$  мин 44 с.

**Программа 156. Метод декахотомии отыскания корней нелинейного уравнения.** Ввести шаг  $h = \text{ПС}$ , верхнюю границу корней  $a = \text{ПД}$ , количество повторений цикла  $i = \text{П0}$ . С адреса 25 вводится подпрограмма-функция  $F(x) = 0$  с аргументом  $x = \text{ПД}$ . Функция при значении аргумента, равного верхней границе корней, должна быть положительна. В результате счета значение корня поступает в регистр ПД = X, а значение функции в этой точке — в регистр Y.

|           |       |     |    |    |     |        |     |     |     |
|-----------|-------|-----|----|----|-----|--------|-----|-----|-----|
| ПxD       | PxC   | —   | ПД | ПП | 25  | Fx < 0 | 00  | ПxD | PxC |
| +      ПД | ↔ PxC | 1   | 0  | ÷  | ПС  | ↔ FL0  |     |     |     |
| 00        | ПxD   | C/P | БП | 00 | ... | ...    | ... | ... | B/0 |

Тест:  $P(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$ ,  $a = 3.5$ ,  $h = 0.1$ ,  $i = 7$ .

Результат:  $x = 3$ ,  $t_{\text{сч}} = 1$  мин 30 с.

В обеих программах в случае отыскания корней трансцендентного уравнения шаг должен быть выбран так, чтобы величина  $x$  не выходила за пределы допустимых значений функции. Заметим, что корни трансцендентного уравнения обычно удается получить с точностью до четырех — пяти значащих цифр и не более, а иногда и того меньше в отличие от алгебраических многочленов. Зависит это от точности вычисления функции  $F(x)$ .

Нелинейные уравнения, имеющие всего лишь один корень на числовом отрезке, обычно не вызывают особых затруднений. Если же у нелинейного уравнения много корней и все они находятся на достаточно большом расстоянии, т. е. расстояние это значительно превышает минимальный в вычислительном процессе шаг  $h$ , то такие корни микрокалькулятор вычисляет по очереди, как правило, также без особых трудностей. Если же корни находятся очень близко друг от

друга, то даже в декахотомии при начальном шаге  $h$ , как показано на рис. 52, мы можем в исходе вычислительного процесса «перескочить» через все корни. В таких случаях обычно строят график функции и, определив по нему более точно границы корней, задавшись очень малым шагом  $h$ , вычисляют корни. Хотя и очень редко, но все же бывают в вычислительной практике случаи, что даже при  $h = h_{\min}$  мы не можем найти точно области, где функция меняет свой знак, как показано на рис. 53. Такие корни восьмизначный микрокалькулятор в принципе не может «выловить». Их можно найти только на большой ЭВМ, выполняя математические операции с удвоенной точностью.

Кратные корни, как показано на рис. 54, найти по приведенным выше программам не удастся, так как функция в окрестности искомой точки не изменяет свой знак. Но найти такие корни можно. Для этого надо построить график функции и, определив более точно границы двух корней в одной точке, воспользоваться программой для отыскания максимума функции в случае рис. 54. Ведь корни четной кратности обычно лежат на максимуме (минимуме) функции. Если же

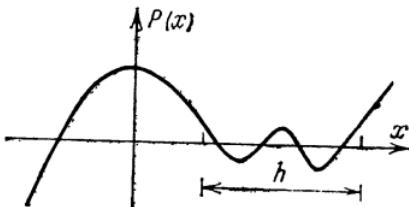


Рис. 52

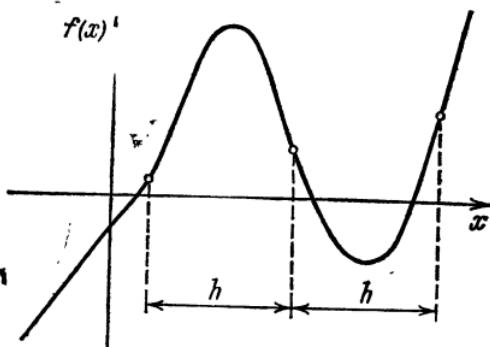


Рис. 53

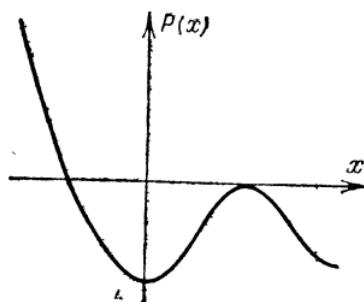


Рис. 54

кратность корней нечетная, то корень находится, как обычно, по программам 155, 156. Здесь снова возникает вопрос о количестве положительных корней алгебраического многочлена в случае, если имеются кратные корни. Наиболее общая теорема Декарта утверждает, что число положительных корней многочлена  $P_n(x)$ , засчитываемый каждый столько раз, какова его кратность, равно числу перемен знаков в системе коэффициентов этого многочлена (равные нулю коэффициенты не учитываются) или меньше его на четное число. Так в случае многочлена (9.4) хотя и имеются 3 переменныи знака, положительный корень только один, оставшиеся два — комплексные. Кроме того, многочлен имеет два отрицательных корня.

Некоторые математики сначала вычисляют один корень многочлена, затем понижают порядок многочлена на единицу и ищут следующий корень. Делать это крайне нежелательно, так как при понижении порядка многочлена новые коэффициенты вычисляются приближенно. Поэтому корни у нового многочлена не будут точно равны корням предшествующего. Вот почему нужно все действительные корни находить у первоначального многочлена. Это не распространяется на случай комплексных корней, если найдены все действительные корни: ведь у нас просто нет другого выхода при работе на микрокалькуляторе. А для нахождения точного значения мнимых корней требуются очень большие затраты труда и времени, что под силу только большим ЭВМ.

Многочлены в подпрограмме-функции следует использовать в первоизданном, а неискаженном виде. Так, многочлены

$$P_4(x) = 17x^4 + 70x^3 + 700x^2 - 34, \quad (9.13)$$

$$M_4(x) = x^4 + \frac{70}{17}x^3 + \frac{700}{17}x^2 - 2, \quad (9.14)$$

хотя теоретически и имеют одинаковые корни, но поскольку микроЭВМ оперирует с числами в десятичном представлении, то практически найденные корни будут разными. Разница эта будет более существенной для многочленов высокого порядка. Может случиться даже так, что будут различаться даже количество действительных и мнимых корней. Так что нормирование коэффициентов многочлена может существенно продеформировать график функции.

Может возникнуть вопрос, где лучше применять дихотомию, а где декахотомию. Если верхняя граница корней определена грубо и корни расположены на больших расстояниях друг от друга, то лучше использовать дихотомию, так как скорость сходимости дихотомии все-таки выше. Но дихотомия инерционна. Движение вычислительного процесса к корню при дихотомии испытывает «рыскание» возле точки остановки. При декахотомии вычислительный процесс более плавно вписывается в окрестность корня. Иными словами, демпфирование вычислительного процесса возле корня происходит быстрее. Поэтому в случае близко расположенных корней многочлена декахотомия, являющаяся менее инерционной, не «проезжает» мимо них, а останавливается на каждой такой «остановке». Тем самым декахотомия более чутко реагирует на всякого рода непредвиденные ситуации в поведении функции. Но, конечно, если вы ищете единственный корень трансцендентного уравнения, то дихотомия «подбегает» к нему быстрее, отчего она в этом случае и лучше.

В заключение читателю предлагается еще одна программа на декахотомию. Характерной ее особенностью является то, что в начальной точке функция может быть не положительна. Она может иметь любой знак, но не должна лишь равняться нулю. Произведение зна-

чения функции в начальной точке на значения функции в остальных точках, где будет «шагать» декахотомия, не должно быть меньше  $10^{-99}$ . В противном случае метод не срабатывает и счет зацикливается. Учебные задачи, предлагаемые студентам в вузах, обычно удовлетворяют этим требованиям. То же можно сказать и о многих практических задачах. А в остальных отношениях программа 157 является более универсальной, чем 156.

**Программа 157. Модифицированный метод декахотомии отыскания корней нелинейного уравнения.** Ввести  $x_0$  С/П  $h$  С/П  $n$  С/П. Здесь  $n$  — количество цифр мантиссы значения корня, которые вы хотите получить.

$$\begin{array}{ccccccccc}
 \text{П1} & \text{С/П} & \text{П2} & \text{С/П} & \text{П0} & \text{Px2} & \text{ПП} & \underline{\text{34}} & \text{П3} & \text{Px1} \\
 \text{Px2} & + & \text{П1} & \text{ПП} & \underline{\text{34}} & \text{Px3} & \times & \underline{\text{Fx}} < 0 & \underline{\text{09}} & \text{Px1} \\
 \text{Px2} & - & \text{П1} & \text{Px2} & \underline{1} & 0 & \div & \text{П2} & \text{FL0} & \underline{\text{09}} \\
 \text{Px1} & \text{С/П} & \text{БП} & \underline{\text{09}} & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \text{B/0}
 \end{array}$$

Тест:  $x^3 - 2x - 5 = 0$ ,  $x_0 = 0$ ,  $h = 1$ ,  $n = 8$ ,  $x = 2,0945515$ ,  $t = 3$  мин 42 с.

### 3. Задачи на собственные значения

Если мы имеем некоторую матрицу  $A$ , то ее действие на вектор  $X$   $m$ -го пространства можно заменить умножением этого вектора на скалярную величину  $\lambda$ , называемую *собственным значением* матрицы  $A$  для собственного вектора  $X$ . Полученное уравнение

$$AX = \lambda X \quad (9.15)$$

приводит к равенству нулю определителя

$$\det(A - \lambda I) = a_m \lambda^m + a_{m-1} \lambda^{m-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0 = 0. \quad (9.16)$$

Хотя характеристический многочлен можно расписать в случае любой матрицы  $A$ , но процедура эта уже при размерности матрицы  $4 \times 4$  очень трудоемкая. Задача значительно облегчается, когда матрица  $A$  имеет много нулевых элементов. Если матрица имеет треугольный вид, когда элементы выше или ниже главной диагонали равны нулю, то определитель равен произведению диагональных элементов. Легко находятся собственные числа матрицы размерности  $2 \times 2$ .

**Программа 158. Нахождение собственных чисел матрицы  $A$  (2, 2).** Ввести  $a_{11}$  С/П  $a_{12}$  С/П  $a_{21}$  С/П  $a_{22}$  С/П. Получите  $\lambda_1$ , а после С/П —  $\lambda_2$ .

Память:  $a_{11} = \text{П2}$ ,  $a_{12} = \text{П3}$ ,  $a_{21} = \text{П4}$ ,  $a_{22} = \text{П5}$ ,  $\text{П6}$ ,  $\text{П7}$  — буферные,  $\lambda_1 = \text{П0}$ ,  $\lambda_2 = \text{П1}$ .

$$\begin{array}{ccccccccc}
 \text{П2} & \text{С/П} & \text{П3} & \text{С/П} & \text{П4} & \text{С/П} & \text{П5} & \text{Px2} & + & 2 \\
 \div & \text{П6} & \text{Fx}^2 & \text{Px5} & \text{Px2} & \times & - & \text{Px3} & \text{Px4} & \times
 \end{array}$$

|     |     |   |     |     |   |           |     |     |   |    |
|-----|-----|---|-----|-----|---|-----------|-----|-----|---|----|
| +   | FV  | — | П7  | Px6 | + | П1        | Px6 | Px7 | — | П0 |
| C/P | Px1 |   | C/P | BП  |   | <u>00</u> |     |     |   |    |

Тест:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}, \quad \lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 6, \quad t_{\text{сч}} \sim 6 \text{ с.}$$

В случае матриц более высокого порядка сначала необходимо получить характеристический многочлен, а затем по программам 155—157 найти его корни. Программируемый микрокалькулятор значительно облегчает нахождение характеристического многочлена матрицы размерности  $3 \times 3$ .

**Программа 159. Вычисление коэффициентов характеристического многочлена матрицы A (3, 3).** Перед счетом вводятся исходные данные:  $a_{11} = \text{П0}$ ,  $a_{12} = \text{П1}$ ,  $a_{13} = \text{П2}$ ,  $a_{21} = \text{П3}$ ,  $a_{22} = \text{П4}$ ,  $a_{23} = \text{П5}$ ,  $a_{31} = \text{П6}$ ,  $a_{32} = \text{П7}$ ,  $a_{33} = \text{П8}$ .

Характеристический многочлен имеет вид

$$P(\lambda) = a\lambda^3 + b\lambda^2 + c\lambda + d.$$

В результате счета коэффициенты поступают в адресуемые и операционные регистры:  $a = X = \text{ПА}$ ,  $b = Y = \text{ПВ}$ ,  $c = Z = \text{ПС}$ ,  $d = T = \text{ПД}$ .

|     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |
|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| Cx  | 1   | /-/ | ПА  | Px0 | Px4 | Px8 | +   | +   | ПВ  |
| Px0 | Px4 | X   | /-/ | Px0 | Px8 | X   | -   | Px4 | Px8 |
| X   | -   | Px5 | Px7 | X   | +   | Px1 | Px3 | X   | +   |
| Px2 | Px6 | X   | +   | PС  | Px0 | Px4 | Px8 | X   | X   |
| Px0 | Px5 | Px7 | X   | X   | -   | Px1 | Px5 | Px6 | X   |
| X   | +   | Px1 | Px3 | Px8 | X   | X   | -   | Px2 | Px7 |
| Px3 | X   | X   | +   | Px2 | Px6 | Px4 | X   | X   | -   |
| ПД  | PxC | PxB | PxA | C/P |     |     |     |     |     |

Тест:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 7 & 8 & 5 \\ 9 & 1 & 6 \end{pmatrix}, \quad a = -1, \quad b = 15, \quad c = 0, \quad d = -208.$$

$$P(\lambda) = -\lambda^3 + 15\lambda^2 - 208, \quad t_{\text{сч}} = 24 \text{ с.}$$

#### 4. Отыскание минимума и максимума функции

Многие физические задачи приводят к нахождению максимума или минимума функции на определенном интервале изменения аргумента. В некоторых случаях, приравняв нулю первую производную этой функции и решив уравнение относительно неизвестного аргумента, можно найти экстремальную точку. В общем же случае полученное таким образом уравнение нелинейное и выразить явно неизвестный аргумент не представляется возможным. Бывает и так, что у искомой функции производные терпят разрыв, но максимум и минимум существует, как показано на рис. 55. Поэтому, чтобы найти максимальную

точку функции на интервале  $(a, b)$ , нужно использовать специальную программу, перебирающую значения функции с определенным шагом  $h$  по  $x$  и выбирающую максимальную точку среди взятых  $N$  значений функции. Структура программы, отыскивающей максимум функции одной переменной, имеет нечто общее с программой отыскания корней нелинейных уравнений, но имеет и отличия. Блок-схема программы отыскания максимума приведена на рис. 56. Цикл L0 по-прежнему задает точность вычисления величины  $x$ , а вот цикл L1 не позволяет выйти вычислительной процедуре за пределы интервала  $(a, b)$ . Для вычисления максимального индекса в цикле L1 необходимо длину интервала разделить на первоначальную длину шага

$$N_1 = \frac{b-a}{h}. \quad (9.17)$$

Уточнение полученного значения максимума осуществляется методом декахотомии, как и при решении нелинейных уравнений. Дихотомию здесь нежелательно использовать, так как она медленно реагирует на скачки функции благодаря своей инерции, а у декахотомии это отрицательное качество выражено во много раз слабее.

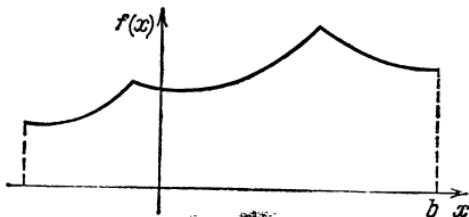


Рис. 55

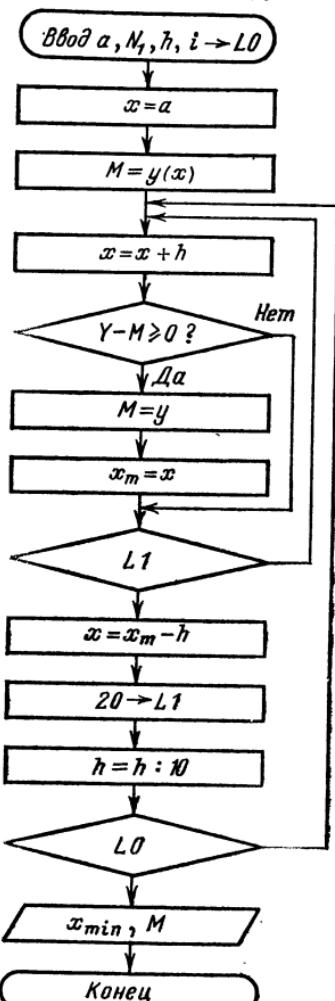


Рис. 56

Согласно блок-схеме сначала вычисляется грубое значение  $x_m$  аргумента функции, а затем на интервале  $(x_m - h, x_m + h)$  находится его более точное значение. Уточнение делается не более 8 раз. Время счета по этому алгоритму определяется сложностью функции и максимальными индексами в циклах L0 и L1. Время счета в секундах для программы 160 можно приблизенно оценить по формуле

$$t_{\text{сч}} \approx \left\{ \frac{b-a}{h} + 20(\varepsilon - 1) \right\} (t_f + 2.6), \quad (9.18)$$

Где  $\varepsilon$  — желаемое количество значащих цифр аргумента функции в точке максимума,  $a$  и  $b$  — границы интервала,  $h$  — первоначальный шаг,  $t_f$  — время однократного вычисления значения функции.

**Программа 160. Отыскание максимума функции методом декахотомии.** Ввести интервалы для  $x: a = \text{ПА}, b = \text{ПВ}$ , шаг  $h = \text{ПС}$ ,  $\varepsilon = \text{П0}$ , где  $\varepsilon$  — желаемое количество значащих цифр. Значение шага выбирают в виде  $1 \cdot 10^n$ , порядок  $h$  и  $a$  совпадают. Регистр  $\text{П7}$  — буфер. Ответ поступает в регистры  $x (y_{\max}) = \text{П5}$ ,  $y_{\max} = Y = \text{П6}$ . На подпрограмму-функцию  $f(x)$  отведено 56 шагов, аргумент функции  $x = \text{ПД}$ .

|              |                  |             |              |              |              |              |             |               |              |
|--------------|------------------|-------------|--------------|--------------|--------------|--------------|-------------|---------------|--------------|
| $\text{PxB}$ | $\text{PxA}$     | $-$         | $\text{PxC}$ | $\div$       | $1$          | $+$          | $\text{П1}$ | $\text{КПx1}$ | $\text{PxA}$ |
| $\text{ПП}$  | <u>48</u>        | $\text{П6}$ | $\text{PxD}$ | $\text{PxC}$ | $+$          | $\text{ПП}$  | <u>48</u>   | $\text{П7}$   | $\text{Px6}$ |
| $-$          | $Fx \geqslant 0$ | <u>27</u>   | $\text{Px7}$ | $\text{П6}$  | $\text{PxD}$ | $\text{П5}$  | <u>FL1</u>  | <u>13</u>     | $\text{Px5}$ |
| $\text{PxC}$ | $-$              | $\text{ПД}$ | <u>2</u>     | <u>0</u>     | $\text{П1}$  | $\text{PxC}$ | <u>1</u>    | <u>0</u>      | $\div$       |
| $\text{ПС}$  | $\text{FL0}$     | <u>13</u>   | $\text{Px6}$ | $\text{Px5}$ | $\text{C/P}$ | $\text{БП}$  | <u>00</u>   | $\text{ПД}$   | $\dots$      |
| $\dots$      | $\dots$          | $\dots$     | $\dots$      | $\dots$      | $\dots$      | $\dots$      | $\dots$     | $\dots$       | $\text{B/0}$ |

Тест:  $f(x) = \sin \frac{x}{2}$ ,  $a = 0$ ,  $b = 4$ ,  $h = 1$ ,  $\varepsilon = \text{П0}$ .  $y_{\max} = 1$ ,  $x (y_{\max}) = 3,14$ ,  $t_{\text{сч}} = 4 \text{ мин } 45 \text{ с.}$

По этой программе можно вычислять как максимум, так и минимум функции. Для этого следует оператор  $Fx \geqslant 0$  в программе заменить на  $Fx < 0$ . Можно также изменить знак функции  $f(x)$  на противоположный и искать максимум полученной функции.

Необходимо отметить, что количество  $\varepsilon$  значащих цифр определяется не только желанием вычислителя, но и видом взятой функции. Так, в случае тригонометрических функций вследствие погрешности их вычисления невозможно найти значения аргумента функции с более чем пятью значащими цифрами, да и пятая цифра будет сомнительной. Решение с восемью значащими цифрами можно получить лишь в случае функции, составленной из арифметических действий. Отыскание аргумента сводится к отысканию обратной функции  $x(y)$ , поэтому погрешность вычисленного аргумента  $x$  оказывается примерно на 1—2 порядка больше, чем для прямой функции.

В практике встречаются нередко и более сложные задачи, когда требуется найти максимум функции двух и более переменных. На программируемом микрокалькуляторе можно находить максимум лишь для двух переменных, если искать его методом декахотомии. Время счета этим методом в случае двух переменных может составлять несколько часов.

Блок-схема отыскания максимума двух переменных представлена на рис. 57. Максимум отыскивается в прямоугольной области, где  $x$  находится на интервале  $(a, b)$ , а  $y$  — на  $(c, d)$ . Так как функция двух переменных представляет собой некоторую поверхность в трехмерном пространстве, то максимуму соответствует вершина холма, отчего так

и названа программа. Изменив в ней оператор  $Fx \geq 0$  на  $Fx < 0$ , программа станет искать минимум двумерной поверхности — дно оврага.

**Программа 161. Нахождение вершины холма (максимума функции) методом декахотомии.** После основной программы с адреса 80 следует ввести подпрограмму-функцию  $f(x, y)$ , где  $x = \text{ПД}$ ,  $y = \text{ПС}$ . На нее

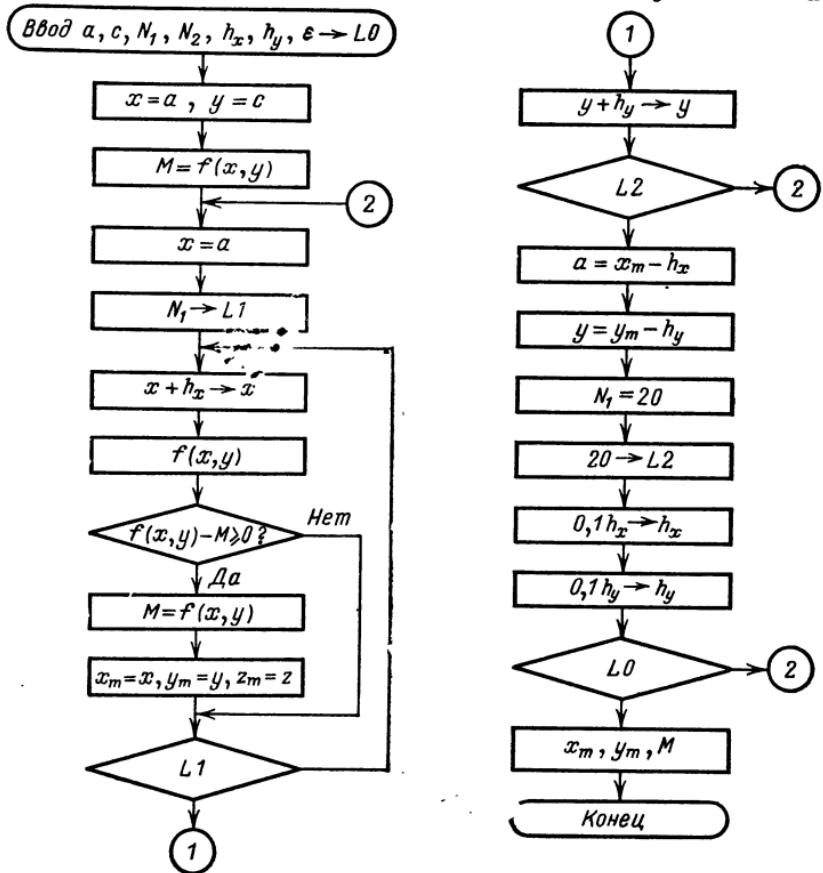


Рис. 57

отводится в программе 25 шагов, включая операторы ПД и В/0. В адресуемую память следует ввести числа  $a = \text{ПА}$ ,  $b = \text{ПВ}$ ,  $c = \text{ПС}$ ,  $d = \text{ПД}$ , которые служат интервалом для величины  $x$  и  $y$ , первоначальный шаг по двум переменным  $h_x = \text{П3}$ ,  $h_y = \text{П4}$ , а также количество значащих цифр  $\epsilon = \text{П0}$ .

Время счета в секундах в данной программе можно грубо оценить по формуле

$$t_{\text{сч}} \approx \left\{ \frac{(b-a)(d-c)}{h_x h_y} + 400(\epsilon - 1) \right\} (t_f + 0.89), \quad (9.19)$$

где  $t_f$  — время однократного вычисления подпрограммы-функции. Циклы  $L0$ ,  $L1$ ,  $L2$ . Ответ поступает в регистры  $M = \max f(x, y) = \text{П9}$ ,

причем соответствующие аргументы  $x (f_{\max}) = \Pi 6$ ,  $y (f_{\max}) = \Pi 7$ ,  $\Pi 8$  — буфер. В программе не задействованы регистры  $\Pi 5$  и  $\Pi E$ .

|          |           |           |          |          |           |             |           |           |           |
|----------|-----------|-----------|----------|----------|-----------|-------------|-----------|-----------|-----------|
| $\Pi xB$ | $\Pi xA$  | $-$       | $\Pi x3$ | $+$      | $1$       | $+$         | $\Pi 1$   | $K\Pi x1$ | $\Pi x1$  |
| $\Pi B$  | $\Pi xD$  | $\Pi xC$  | $-$      | $\Pi x4$ | $\div$    | $1$         | $+$       | $\Pi 2$   | $K\Pi x2$ |
| $\Pi xA$ | $\Pi \Pi$ | <u>79</u> | $\Pi 9$  | $\Pi xA$ | $\Pi D$   | $\Pi xB$    | $\Pi 1$   | $\Pi xD$  | $\Pi x3$  |
| $+$      | $\Pi \Pi$ | <u>79</u> | $\Pi 8$  | $\Pi x9$ | $-$       | $Fx \geq 0$ | <u>44</u> | $\Pi x8$  | $\Pi 9$   |
| $\Pi xD$ | $\Pi 6$   | $\Pi xC$  | $\Pi 7$  | $FL1$    | <u>28</u> | $\Pi xC$    | $\Pi x4$  | $+$       | $\Pi C$   |
| $FL2$    | <u>24</u> | $\Pi xD$  | $\Pi x3$ | $-$      | $\Pi A$   | $\Pi xC$    | $\Pi x4$  | $-$       | $\Pi C$   |
| 2        | 0         | $\Pi B$   | $\Pi 2$  | $\Pi x3$ | 1         | 0           | $+$       | $\Pi 3$   | $\Pi x4$  |
| 1        | 0         | $+$       | $\Pi 4$  | $FL0$    | <u>24</u> | $\Pi x7$    | $\Pi x6$  | $C/\Pi$   | $\Pi D$   |
| ...      | ...       | ...       | ...      | ...      | ...       | ...         | ...       | ...       | B/0       |

В качестве примера рассмотрим функцию  $f(x, y) = x^2 + 3xy + 7y^3 - 4$ . Она вычисляется по правилу  $f(x, y) = x(x + 3y) + 7y^3 - 4$ . Положим  $a = -1$ ,  $b = 1$ ,  $c = -1$ ,  $d = 1$ ,  $h_x = 0.1$ ,  $h_y = 0.1$ . Подпрограмма-функция имеет вид

|          |          |          |     |          |          |          |        |          |          |         |
|----------|----------|----------|-----|----------|----------|----------|--------|----------|----------|---------|
| $\Pi xC$ | $3$      | $\times$ | $+$ | $\Pi xD$ | $\times$ | $\Pi xC$ | $Fx^3$ | $\Pi xC$ | $\times$ | $\Pi D$ |
| 7        | $\times$ | $+$      | 4   | $-$      |          | B/0      |        |          |          |         |

Время счета составляет около 2 ч. Получаем  $x_m = 1.1$ ,  $y_m = 1.19$ ,  $M = 12.933113$ , т. е.  $f_{\max}$  будет достигнут при  $x = 1$ ,  $y = 1$ .

Здесь, как и в программе 160, шаг выбирают равным единице какого-либо порядка. Порядок  $h_x$  и  $h_y$  в общем случае неодинаковый и выбирается равным единице соответствующего порядка в зависимости от граничных чисел интервала величин  $x$  и  $y$ . Если  $a = 15$ , а  $b = 100$ , то  $h_x = 10$ . Если при этом  $d = 200$ , а  $c = 100$ , то  $h_y = 100$ . Соответственно и в ответе числа  $x$  и  $y$  могут иметь разный порядок величин.

Предложенная программа находит минимум функции очень медленно. Если функция имеет очень четко выраженный один минимум (или максимум), то найти его можно достаточно быстро методом градиентного спуска. Представив  $x$  и  $y$  как две координаты на плоскости, а значение функции как третью координату, мы получим некоторую трехмерную поверхность, изображенную на рис. 58. Замкнутые линии — это линии равных высот, характеризующие рельеф данной поверхности. Начав движение из какой-либо произвольной точки 0 и перемещаясь по линии наибольшей крутизны, т. е. перпендикулярно изолиниям, мы в конце концов придем в точку минимума, причем кратчайшим путем, что видно из рисунка. Смещааться мы будем каждый раз вдоль некоторого вектора  $r - r_0$ . Направление наибольшей крутизны склона будет вдоль градиента функции. Величину вектора смещения получаем путем обобщения метода касательных Ньютона:

$$-\Phi(x_0, y_0) = (r - r_0) \operatorname{grad} \Phi. \quad (9.20)$$

Ввиду того, что мы движемся вдоль градиента  $\Phi(x, y)$ , в точке 0 угол между  $r - r_0$  и  $\text{grad } \Phi$  будет равен 0. Поэтому векторное произведение

$$[r - r_0, \text{grad } \Phi] = 0. \quad (9.21)$$

Сделав соответствующие преобразования, из (9.20), (9.21) получим

$$x = x_0 - \Phi'_x \frac{\Phi_0}{\Phi'^2_x + \Phi'^2_y}, \quad y = y_0 - \Phi'_y \frac{\Phi_0}{\Phi'^2_x + \Phi'^2_y}. \quad (9.22)$$

Формулы позволяют находить более точные значения минимума функции

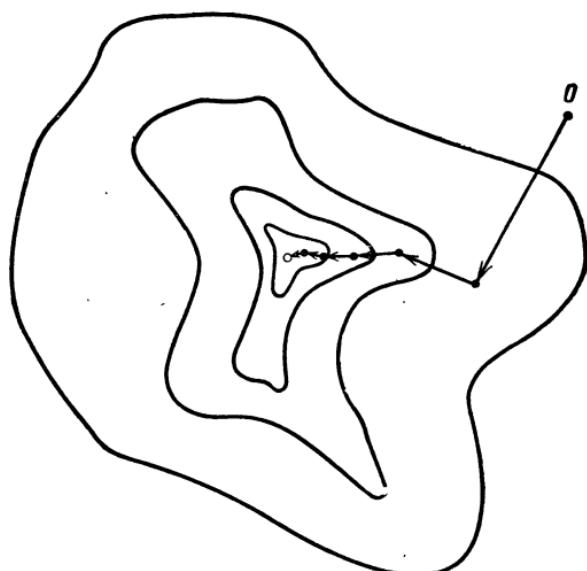


Рис. 58

двух переменных, если известны грубые приближения. Осуществляя итерационный процесс по схеме

$$x_{n+1} = x_n - \Phi'_x \frac{\Phi_0}{\Phi'^2_x + \Phi'^2_y}, \quad y_{n+1} = y_n - \Phi'_y \frac{\Phi_0}{\Phi'^2_x + \Phi'^2_y}, \quad (9.23)$$

можно достаточно быстро ( $t_{\text{сч}} \sim 15$  мин) получить с точностью в 5–6 знаков минимум функции. В случае трех переменных по аналогии с (9.23) получим

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n - \Phi'_x \frac{\Phi(x_n, y_n, z_n)}{\Phi'^2_x + \Phi'^2_y + \Phi'^2_z} \\ y_{n+1} &= y_n - \Phi'_y \frac{\Phi(x_n, y_n, z_n)}{\Phi'^2_x + \Phi'^2_y + \Phi'^2_z}, \\ z_{n+1} &= z_n - \Phi'_z \frac{\Phi(x_n, y_n, z_n)}{\Phi'^2_x + \Phi'^2_y + \Phi'^2_z}. \end{aligned} \quad (9.24)$$

Если функция  $\Phi(x, y, z)$  не очень сложная, то обычно удается составить программу для соответствующих итераций.

Часто для вычисления производных функции используют соответствующий разностный аналог, что позволяет значительно сократить программу.

**Программа 162. Отыскание минимума функции двух переменных методом градиентного спуска.** Подпрограмма-функция вводится с адреса 70. Аргументами ее являются  $x = \text{П}4$ ,  $y = \text{П}5$ . Перед счетом еще нужно ввести координаты исходной точки  $x_0 = \text{П}2$ ,  $y_0 = \text{П}3$ , погрешность  $\Delta = \text{П}1$ , шаг  $h = \text{П}9$ . Величину  $h$  выбирают примерно от 0.001 до 1 в зависимости от размера области, где ищут минимум.

|                 |                 |     |                 |     |     |                 |     |     |     |
|-----------------|-----------------|-----|-----------------|-----|-----|-----------------|-----|-----|-----|
| Пх2             | П4              | Пх3 | П5              | ПП  | 70  | П8              | Пх4 | Пх9 | +   |
| П4              | ПП              | 70  | Пх8             | —   | Пх9 | +               | П6  | Пх2 | П4  |
| Пх3             | Пх9             | +   | П5              | ПП  | 70  | Пх8             | —   | Пх9 | ÷   |
| П7              | Fx <sup>2</sup> | Пх6 | Fx <sup>2</sup> | +   | Пх8 | ↔               | ÷   | ПА  | Пх6 |
| ×               | Пх2             | ↔   | —               | П2  | ПхA | Пх7             | ×   | Пх3 | ↔   |
| —               | П3              | Пх5 | Пх9             | —   | —   | Fx <sup>2</sup> | Пх4 | Пх2 | —   |
| Fx <sup>2</sup> | +               | FV  | —               | Пх1 | —   | Fx < 0 00       | Пх3 | Пх2 | C/П |
| ...             | ...             | B/0 |                 |     |     |                 |     |     |     |

## 5. Операции с комплексными числами

В радиотехнике приходится сталкиваться с вычислением параметров электрической схемы в случае переменных токов. Задача значительно облегчается при использовании в расчетах комплексных чисел. Применяются они и во многих физических и математических расчетах. Для автоматизации вычислений и предназначены приведенные выше программы.

**Программа 163. Комплексные арифметические действия.** Перед счетом вводят два исходных комплексных числа  $Z_1 = a + ib$ ,  $Z_2 = c + id$ . Ввод данных осуществляется по программе. Для этого после установки счетчика в нулевое положение следует набрать  $a$  C/П  $b$  C/П  $c$  C/П  $d$  C/П. Дальнейшие действия зависят от выполняемой над комплексными числами операции:

|           |           |
|-----------|-----------|
| деление   | C/П       |
| умножение | БП 36 C/П |
| сложение  | БП 54 C/П |
| вычитание | БП 63 C/П |

Результат действий выводится в виде

$$X + iY = \text{П}x1 + i\text{П}x2.$$

|     |                 |    |     |     |     |    |     |     |                 |
|-----|-----------------|----|-----|-----|-----|----|-----|-----|-----------------|
| ПА  | C/П             | ПВ | C/П | ПС  | C/П | ПД | C/П | ПхС | Fx <sup>2</sup> |
| ПхД | Fx <sup>2</sup> | +  | П3  | ПхA | ПхC | ×  | ПхB | ПхД | ×               |
| +   | Пх3             | ÷  | П1  | ПхB | ПхC | ×  | ПхA | ПхД | ×               |

|     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |
|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| -   | Пх3 | +   | П2  | Пх1 | С/П | ПхА | ПхС | ×   | ПхВ |
| ПхД | X   | -   | П1  | ПхВ | ПхС | X   | ПхА | ПхД | X   |
| +   | П2  | Пх1 | С/П | ПхВ | ПхД | +   | П2  | ПхА | ПхС |
| +   | П1  | С/П | ПхВ | ПхД | -   | П2  | ПхА | ПхС | -   |
| П1  | C/P |     |     |     |     |     |     |     |     |

**Программа 164.** Комплексный корень  $k$ -й степени из комплексного числа. Набрать  $2 \cos^{-1}$  ВП  $\uparrow$  П6. Перед счетом вводится число  $z = a + ib$  по правилу  $a = \text{ПА}$ ,  $b = \text{ПВ}$ , и степень корня  $k = \text{ПС}$ . Пуск программы осуществляется с начального адреса. Первым на индикаторе высветится  $k$ -й корень. Затем после С/П — ( $k - 1$ )-й ... и так до первого. Если вы еще раз нажмете С/П, то на индикаторе появится сообщение Е, указывающее на окончание вывода корней. Переключатель угловой меры должен стоять в положении «радиан». Ответ поступает на индикатор в виде

$$X + iY = \text{Пх1} + i\text{Пх2}.$$

Регистры содержат еще дополнительную операцию:  $\sqrt[2k]{a^2 + b^2} = \text{ПД}$ ,  $\varphi = \text{П9}, \frac{2\pi}{k} = \text{П8}$ .

|     |                 |     |                 |     |        |                    |     |        |        |
|-----|-----------------|-----|-----------------|-----|--------|--------------------|-----|--------|--------|
| ПхА | Fx <sup>2</sup> | ПхВ | Fx <sup>2</sup> | +   | ПхС    | П0                 | 2   | ×      | F1/x   |
| ↔   | Fx <sup>y</sup> | ПД  | ПхД             | ПхА | Fx = 0 | 33                 | ПхВ | Fx ≥ 0 | 26     |
| Fп  | 2               | +   | П9              | БП  | 45     | Fп                 | 2   | +      | /—/    |
| П9  | БП              | 45  | ПхВ             | ПхА | +      | F tg <sup>-1</sup> | П9  | ПхА    | Fx < 0 |
| 45  | Fп              | Пх9 | +               | П9  | Fп     | 2                  | ×   | П8     | Пх8    |
| Пх0 | X               | Пх9 | +               | ПхС | +      | F sin              | FBx | F cos  | ПхД    |
| X   | П1              | ↔   | ПхД             | X   | П2     | ↔                  | C/P | FL0    | 49     |
| Пх6 | C/P             |     |                 |     |        |                    |     |        |        |

**Программа 165.** Вычисление функций  $\sin z$ ,  $\cos z$ ,  $\operatorname{sh} z$ ,  $\operatorname{ch} z$ ,  $e^z$ ,  $\ln z$ ,  $z_1^{z_2}$ , где  $z$  — комплексное число. Аргумент функции  $z = a + ib$  ввести в операционные регистры  $a = \text{Х}$ ,  $b = \text{Y}$  и далее нажать В/0 С/П. Затем ваши действия зависят от функции:

|                         |    |    |     |
|-------------------------|----|----|-----|
| $\sin z$ :              | БП | 80 | C/P |
| $\cos z$ :              | ↔  | БП | 76  |
| $\operatorname{sh} z$ : | БП | 71 | C/P |
| $\operatorname{ch} z$ : | БП | 75 | C/P |
| $e^z$ :                 | БП | 14 | C/P |
| $\ln z$ :               | ↔  | БП | 59  |
| $z_1^{z_2}$ :           | БП | 28 | C/P |

и набрать еще  $a_2 \uparrow b_2$  С/П. Ответ выводится на индикатор в форме  $X = iY$ .

|           |               |                   |                   |                   |              |                   |                   |                   |                   |
|-----------|---------------|-------------------|-------------------|-------------------|--------------|-------------------|-------------------|-------------------|-------------------|
| B/0       | П3            | $\leftrightarrow$ | П2                | C/П               | ПП           | <u>30</u>         | Пx3               | +                 | $\leftrightarrow$ |
| Пx2       | ×             | ПП                | <u>16</u>         | $\leftrightarrow$ | F $e^x$      | $\leftrightarrow$ | F cos             | FB $x$            | F sin             |
| П0        | F $\searrow$  | $\leftrightarrow$ | X                 |                   | FB $x$       | X                 | B/0               | ПП                | <u>59</u>         |
| П0        | F $x^2$       | $\leftrightarrow$ | П1                | F $x^2$           | +            | F $\sqrt{-1}$     | ↑                 | Пx0               | $\leftrightarrow$ |
| $\div$    | F sin $^{-1}$ | Пx1               | F $x < 0$         | 57                | F $\searrow$ | 1                 | /—/ F cos $^{-1}$ | $\leftrightarrow$ |                   |
| F $x < 0$ | <u>55</u>     | +                 | /—/               | 0                 | —            | ↑                 | F $\searrow$      | B/0               | ПП                |
| 30        | <u>2</u>      | $\div$            | F tg              | F tg $^{-1}$      | 2            | X                 | $\leftrightarrow$ | F ln              | $\leftrightarrow$ |
| B/0       | ПП            | <u>79</u>         | $\leftrightarrow$ | B/0               | /—/ 1        |                   | F sin $^{-1}$     | +                 | $\leftrightarrow$ |
| F $e^x$   | ↑             | <u>F1/x</u>       | П0                | +                 | 2            | $\div$            | П1                | $\leftrightarrow$ | П2                |
| F sin     | X             | Пx1               | Пx0               | —                 | Пx2          | F cos             | X                 | БП                | <u>00</u>         |

Рассмотрим для примера вычисление полного сопротивления схемы при частоте  $v = 1000 \text{ Гц}$ , рис. 59. Используя комплексные формулы

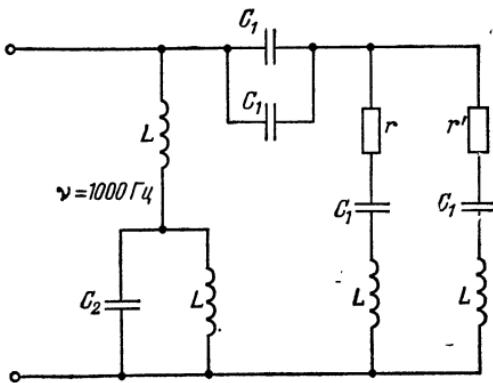


Рис. 59

для последовательного и параллельного соединения сопротивлений, получаем формулу для вычисления полного комплексного сопротивления схемы, где  $L = 0.1 \text{ мГн}$ ,  $C_1 = 100 \text{ мкФ}$ ,  $r = 100 \Omega$ ,  $r' = 150 \Omega$ :

$$\begin{aligned}
 \dot{R} &= \left\{ \left[ i\omega L + \left( \frac{1}{i\omega C_2} + i\omega L \right)^{-1} \right]^{-1} + \right. \\
 &+ \left[ \frac{2}{i\omega C_1} + \left( \left( r + \frac{1}{i\omega C_1} + i\omega L \right)^{-1} + \left( r' + \frac{1}{i\omega C_1} + i\omega L \right)^{-1} \right)^{-1} \right]^{-1} \left. \right\}^{-1} = \\
 &= \left\{ \left[ 0.2\pi i + \left( \frac{1}{6 \cdot 10^{-6}\pi i} + 0.2\pi i \right)^{-1} \right]^{-1} + \right. \\
 &+ \left[ \frac{2}{0.2\pi i} + \left( \left( 10 + \frac{1}{0.2\pi i} + 0.2\pi i \right)^{-1} + \right. \right. \\
 &\left. \left. \left. \left( 15 + \frac{1}{0.2\pi i} + 0.2\pi i \right)^{-1} \right)^{-1} \right]^{-1} \right\}^{-1} = \\
 &= 5.224309 \cdot 10^{-2} + 6.549361 \cdot 10^{-1} i.
 \end{aligned}$$

При этом использовалась программа 163. Тогда полное сопротивление электрической цепи на данной частоте

$$R = |\dot{R}| = \sqrt{(5.224309 \cdot 10^{-2})^2 + (6.5493610^{-1})^2} = \\ = 4.316706 \cdot 10^{-1} \text{ Ом} \approx 0.43 \text{ Ом},$$

причем активное сопротивление цепи  $R_{\text{акт}} = 0.052 \text{ Ом}$ .

## 6. Кватернионы в задачах ориентации твердого тела

Необходимость расширения трехмерной алгебры привела в свое время Гамильтона к введению алгебры для четырехмерных чисел — кватернионов, обладающих весьма специфическими свойствами. Они позволяют достаточно просто описывать произвольные повороты твердого протяженного тела.

Кватернион представляет собой совокупность скалярной  $\lambda_0$  и векторной  $\lambda e$  частей преобразования пространства вида

$$\Lambda = \lambda_0 + \lambda e = \lambda_0 + \lambda_1 i_1 + \lambda_2 i_2 + \lambda_3 i_3, \quad (9.25)$$

где  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  — координаты вектора  $\lambda e$ ;  $i_1, i_2, i_3$  — орты осей координат. Кватернион можно представить как вращение в четырехмерном пространстве, причем следует иметь в виду, что одновременно  $i_1, i_2, i_3$  представляют собой гиперкомплексные числа. Произведение гиперкомплексных единичных векторов дает

$$i_1 \times i_2 = i_3, \quad i_2 \times i_3 = i_1, \quad i_3 \times i_1 = i_2, \quad (9.26)$$

а их квадрат равен  $-1$ :

$$i_1 \times i_1 = -1, \quad i_2 \times i_2 = -1, \quad i_3 \times i_3 = -1. \quad (9.27)$$

Произведение двух кватернионов  $\Lambda$  и  $M$  есть некоторый кватернион  $\Gamma$ , вычисляемый по правилу

$$\begin{aligned} \Gamma &= \Lambda \times M, \\ \gamma_0 &= \lambda_0 \mu_0 + \lambda_1 \mu_1 - \lambda_2 \mu_2 - \lambda_3 \mu_3, \\ \gamma_1 &= \lambda_0 \mu_1 + \lambda_1 \mu_0 + \lambda_2 \mu_3 - \lambda_3 \mu_2, \\ \gamma_2 &= \lambda_0 \mu_2 + \lambda_2 \mu_0 + \lambda_3 \mu_1 - \lambda_1 \mu_3, \\ \gamma_3 &= \lambda_0 \mu_3 + \lambda_3 \mu_0 + \lambda_1 \mu_2 - \lambda_2 \mu_1. \end{aligned} \quad (9.28)$$

Можно представить кватернион в тригонометрическом виде

$$\Lambda = \cos \varphi + e \sin \varphi, \quad (9.29)$$

где  $\varphi$  — половина угла действительного поворота пространства. Произведение двух кватернионов

$$\begin{aligned} \Lambda_1 &= \cos \varphi_1 + e_1 \sin \varphi_1, \\ \Lambda_2 &= \cos \varphi_2 + e_2 \sin \varphi_2 \end{aligned}$$

равноценно кватерниону, характеризующему поворот пространства вначале вокруг орта  $e_1$  на угол  $2\varphi_1$ , а затем вокруг орта  $e_2$  на угол  $2\varphi_2$ .

Пусть радиус-вектор  $\mathbf{r}$  поворачивается вокруг неподвижной точки  $O$ . Задача нахождения вектора  $\mathbf{r}'$  после поворота вектора  $\mathbf{r}$  вокруг оси  $e$  на угол  $2\varphi$  равносцenna воздействию на вектор  $\mathbf{r}$  кватерниона  $\Lambda$ :

$$\begin{aligned}\mathbf{r}' &= \Lambda \times \mathbf{r} \times \bar{\Lambda} = (\cos \varphi + e \sin \varphi) \times \mathbf{r} \times (\cos \varphi - e \sin \varphi) = \\ &= (\lambda_0 + \lambda_1 i_1 + \lambda_2 i_2 + \lambda_3 i_3) \times (x i_1 + y i_2 + z i_3) (\lambda_0 - \lambda_1 i_1 - \lambda_2 i_2 - \lambda_3 i_3),\end{aligned}(9.30)$$

где  $\bar{\Lambda}$  обозначен кватернион, сопряженный  $\Lambda$ . Скалярная часть кватернионов  $r$ ,  $r'$  равна нулю, а векторная является компонентами радиус-векторов  $r$  и  $r'$ .

В самом общем случае произвольного количества кватернионов в результате произведения мы получим кватернион, описывающий

один общий поворот, как это было и в случае двух кватернионов. Формула (9.30) описывает перемещение некоторой точки на сфере радиусом  $r$  по кратчайшей дуге  $2\varphi$ , являющейся на сфере геодезической. Для описания вращения твердого тела необходимо задать перемещение по крайней мере двух радиус-векторов различных точек, жестко связанных с твердым телом, хотя при этом тело поворачивается под действием одного и того же кватерниона.

Известно, что плоскость вращающегося бumerанга поворачивается во время полета, что можно представить в виде двух последовательных поворотов вокруг осей, как показано на рис. 60. Здесь  $\Phi$  — угловая скорость вращения бumerанга в отсутствие внешних сил,

$v$  — направление скорости перемещения центра масс бumerанга,  $\Omega$  — угол поворота плоскости вращающегося бumerанга и вызванный моментом аэродинамических сил вследствие асимметрии двух плеч бumerанга, а угол  $\Omega$  поворачивает плоскость бumerанга в результате возникающих гироколлических сил, что приводит к отклонению направления перемещения центра масс бumerанга от прямолинейного.

В результате поворота на углы  $\Phi$  и  $\Omega$  меняется и направление  $v$  скорости перемещения центра масс бumerанга. Поворот на два угла можно заменить действием одного кватерниона  $\Lambda$ , равного произведению кватернионов для соответствующих углов

$$\Lambda(t) = \Phi(t) \times \Omega(t). \quad (9.31)$$

Тогда

$$v(t) = \Lambda(t) \times v_0 \times \Lambda(t). \quad (9.32)$$

Формула (9.32) описывает случай, когда значение скорости не убывает со временем по модулю, но направление вектора меняется, из-за чего он и описывает петлеобразную траекторию. Радиус-вектор центра масс

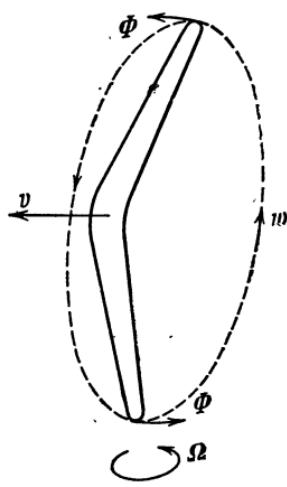


Рис. 60

бумеранга можно получить путем численного интегрирования дифференциального уравнения

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{v}(t) \quad (9.33)$$

каким-либо методом, например по схеме Эйлера:

$$\mathbf{r}_{i+1} = \mathbf{r}_i + t \mathbf{v}_i. \quad (9.34)$$

В качестве начальных данных можно взять

$$\mathbf{v}_1 = 20\mathbf{i}_2,$$

$$\Omega(t) = \cos \pi \left( t + \frac{1}{2} \right) + \mathbf{i}_3 \sin \pi \left( t + \frac{1}{2} \right),$$

$$\Phi(t) = \cos \pi \left( \frac{1}{2} - t \right) + \mathbf{i}_2 \sin \pi \left( \frac{1}{2} - t \right).$$

Но кватернионы используются не только в механике для описания вращательных движений, но и в теоретической физике и прикладной математике. Приведенная ниже программа позволяет вычислять компоненты кватерниона, являющегося произведением двух кватернионов. По этой программе можно также вычислять компоненты радиус-вектора после воздействия на него кватерниона.

**Программа 166. Вычисление произведения кватернионов и радиус-вектора точки после поворота.** Перед началом счета в регистре ПД следует занести число 68, если вычисляется произведение кватернионов, или 71, если вычисляется радиус-вектор точки после поворота.

Для вычисления произведения кватернионов  $\Lambda \times M$  следует ввести их компоненты  $\lambda_0 = \text{П}0$ ,  $\lambda_1 = \text{П}1$ ,  $\lambda_2 = \text{П}2$ ,  $\lambda_3 = \text{П}3$ ,  $\mu_0 = \text{П}4$ ,  $\mu_1 = \text{П}5$ ,  $\mu_2 = \text{П}6$ ,  $\mu_3 = \text{П}7$ , а компоненты результирующего кватерниона поступают в регистры  $\gamma_0 = \text{П}8$ ,  $\gamma_1 = \text{П}9$ ,  $\gamma_2 = \text{П}A$ ,  $\gamma_3 = \text{П}B$ . Вычисление длится около 18 с.

Для вычисления радиус-вектора точки после воздействия кватерниона следует ввести  $\lambda_0 = \text{П}0$ ,  $\lambda_1 = \text{П}1$ ,  $\lambda_2 = \text{П}2$ ,  $\lambda_3 = \text{П}3$ ,  $0 = \text{П}4$ ,  $x = \text{П}5$ ,  $y = \text{П}6$ ,  $z = \text{П}7$ . А компоненты результирующего вектора поступают в регистры:  $x' = \text{П}9$ ,  $y' = \text{П}A$ ,  $z' = \text{П}B$ . Вычисление радиус-вектора по программе длится около 40 с.

В любом случае после счета в регистре ПД находится число 68. Особенностью данной программы является использование косвенного безусловного перехода, который в зависимости от содержимого регистра ПД менял строение программы.

Тест:  $r' = \Lambda \times r \times \tilde{\Lambda}$ ,  $\Lambda = \{0, 0, 0, 1\}$ ,  $r = \{0, 1, 0, 0\}$ ,  $r' = \{0, -1, 0, 0\}$ , т. е.  $r = \mathbf{i}_1$ ,  $r' = -\mathbf{i}_1$ .

|     |          |          |     |          |          |     |          |          |          |
|-----|----------|----------|-----|----------|----------|-----|----------|----------|----------|
| Пх0 | Пх4      | $\times$ | Пх1 | Пх5      | $\times$ | $+$ | Пх2      | Пх6      | $\times$ |
| -   | Пх3      | $\times$ | -   | П8       | $\times$ | Пх0 | Пх5      | $\times$ | Пх1      |
| Пх4 | $\times$ | $+$      | Пх2 | Пх7      | $\times$ | $+$ | Пх3      | Пх6      | $\times$ |
| -   | П9       | $\times$ | Пх6 | $\times$ | Пх2      | Пх4 | $\times$ | +        | Пх3      |

|     |     |     |     |           |     |     |     |     |     |
|-----|-----|-----|-----|-----------|-----|-----|-----|-----|-----|
| Пх5 | ×   | +   | Пх1 | Пх7       | ×   | -   | ПА  | Пх0 | Пх7 |
| ×   | Пх3 | Пх4 | ×   | +         | Пх1 | Пх6 | ×   | +   | Пх2 |
| Пх5 | ×   | -   | ПВ  | КБПД      | ПхА | Пх9 | Пх8 | С/П | БП  |
| 00  | 6   | 8   | ПД  | Пх0       | П4  | Пх1 | /—/ | П5  | Пх2 |
| /—/ | П6  | Пх3 | /—/ | П7        | Пх8 | П0  | Пх9 | П1  | ПхА |
| П2  | ПxB | П3  | БП  | <u>00</u> |     |     |     |     |     |

Есть самые разнообразные примеры использования кватернионов. Например, можно очень просто решить задачу о том, чему равен центральный угол на земной поверхности между городами Москва и Сумы.

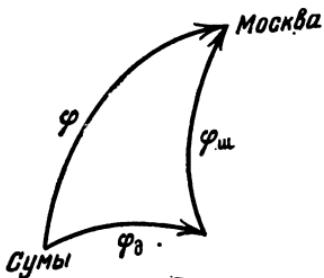


Рис. 61

Иначе говоря, требуется найти в угловой мере величину дуги геодезической, соединяющей эти города. На рис. 61 таким углом будет  $\varphi$ , а  $\varphi_{\text{ш}}$  — это угловая разница в широтах между этими городами, а  $\varphi_{\text{д}}$  — угловая разница в долготе. По карте находим  $\varphi_{\text{д}} = 2,75576^\circ$ ,  $\varphi_{\text{ш}} = 4,82883^\circ$ . Для этих углов оси вращения перпендикулярны друг другу. Пусть для первого угла

ось вращения равна  $i_1$ , а для второго —  $i_2$ . Тогда соответствующие кватернионы поворота для точки на сфере можно записать так:

$$\Lambda_{\text{д}} = \left\{ \cos \frac{\varphi_{\text{д}}}{2}, \sin \frac{\varphi_{\text{д}}}{2}, 0, 0 \right\},$$

$$\Lambda_{\text{ш}} = \left\{ \cos \frac{\varphi_{\text{ш}}}{2}, 0, \sin \frac{\varphi_{\text{ш}}}{2}, 0 \right\},$$

$$\Lambda_{\text{д}} = \{9.9971084 \cdot 10^{-1}, 2.4046223 \cdot 10^{-2}, 0, 0\},$$

$$\Lambda_{\text{ш}} = \{9.9911229 \cdot 10^{-1}, 0, 4.2127021 \cdot 10^{-2}, 0\}.$$

В результате произведения кватернионов  $\Lambda_{\text{д}}$  и  $\Lambda_{\text{ш}}$  получим

$$\Gamma = \{9.9882339 \cdot 10^{-1}, 2.4024877 \cdot 10^{-2}, 4.211484 \cdot 10^{-2}, 1.012957 \cdot 10^{-3}\},$$

который можно записать в виде  $\Gamma = \{\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3\}$ , где  $\gamma_0 = \cos \frac{\varphi}{2}$ ,

$$\sqrt{\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2} = \sin \frac{\varphi}{2}, \text{ откуда получаем, что } \varphi = 5.5593396^\circ = 5^\circ 33' 34''.$$

Формулы (9.29), (9.30) справедливы лишь для единичных кватернионов, для которых квадрат суммы модулей компонент кватерниона в точности равен единице. Квадратный корень из суммы квадратов компонент называют *нормой кватерниона*. В случае большого количества повторяемых операций умножения норма произведения может отличаться от единицы. Такие кватернионы приходится дополнительно нормировать, иначе формула поворота вектора (9.30) дает неверный результат.

**Программа 167. Вычисление нормы и получение единичного кватерниона.** Ввести компоненты кватерниона  $\lambda_0$  С/П  $\lambda_1$  С/П  $\lambda_2$  С/П  $\lambda_3$  С/П. В результате счета на индикатор и в регистр П6 поступает значение нормы, а значения нормированных компонент  $\lambda'_0 = \text{П}2$ ,  $\lambda'_1 = \text{П}3$ ,  $\lambda'_2 = \text{П}4$ ,  $\lambda'_3 = \text{П}5$ .

|     |        |        |        |     |        |     |        |     |        |
|-----|--------|--------|--------|-----|--------|-----|--------|-----|--------|
| П2  | С/П    | П3     | С/П    | П4  | С/П    | П5  | $Fx^2$ | Пx4 | $Fx^2$ |
| +   | Пx3    | $Fx^2$ | +      | Пx2 | $Fx^2$ | +   | $FV^-$ | П6  | Пx2    |
| Пx6 | $\div$ | П2     | Пx3    | Пx6 | +      | П3  | Пx4    | Пx6 | $\div$ |
| П4  | Пx5    | Пx6    | $\div$ | П5  | Пx6    | С/П | БП     | 00  |        |

Тест:  $\Lambda = 1 + 2i_1 + 3i_2 + 4i_3$ ,  $|\Lambda| = 5.4772255$ ,  $\lambda'_0 = 1.8257418 \cdot 10^{-1}$ ,  $\lambda'_1 = 3.6514837 \cdot 10^{-1}$ ,  $\lambda'_2 = 5.4772255 \cdot 10^{-1}$ ,  $\lambda'_3 = 7.3029675 \cdot 10^{-1}$ ,  $t_{\text{сч}} \sim 10\text{с}$ .

Еще более удивительными свойствами обладают бикватернионы и числа Клиффорда, применяемые при расчете оптических систем, но составление соответствующих программ для них на микрокалькуляторе представляет серьезные трудности.

## Глава 10

# ВЫЧИСЛЕНИЯ С ПОВЫШЕННОЙ ТОЧНОСТЬЮ

### 1. Выполнение арифметических операций

Иногда возникает необходимость в выполнении арифметических действий с более чем восьмизначными числами. При небольшом объеме вычислений можно обойтись без больших ЭВМ, выполняя простейшие арифметические операции на программируемом микрокалькуляторе. Идея вычислений состоит в разбиении искомых чисел справа налево на блоки обычно по 7 цифр и выполнении действий с блоками.

**Программа 168. Сложение двух 49-значных чисел.** Оба числа справа налево делятся на блоки по 7 цифр в каждом. Первое слагаемое

|    |    |    |    |    |    |    |
|----|----|----|----|----|----|----|
| П6 | П5 | П4 | П3 | П2 | П1 | П0 |
|----|----|----|----|----|----|----|

Второе слагаемое

|    |    |    |    |    |    |    |
|----|----|----|----|----|----|----|
| ПД | ПС | ПВ | ПА | П9 | П8 | П7 |
|----|----|----|----|----|----|----|

Сумма поступает на место второго слагаемого. В ответе в блоке ПД может находиться и 8-значное число. Ввод чисел осуществляется автоматически по блокам: блок П0 С/П блок П1 С/П ... блок П6 С/П блок П7 С/П ... блок ПД С/П. После этого микрокалькулятор приступает к счету. Ответ поступает в блоки с ПД по П7. Посредством регистра П4 и цикла L0 содержимое блоков вводится автоматически по очереди. Сначала индуцируется содержимое блока П7, после С/П—П8 и так до блока ПД. Угловой переключатель должен быть в положении «градус». После вывода содержимого блока ПД на индикаторе появится 00, что сигнализирует о том, что вывод окончен и микрокалькулятор готов к сложению новой пары чисел.

|    |     |     |     |    |     |    |     |     |     |
|----|-----|-----|-----|----|-----|----|-----|-----|-----|
| П0 | С/П | П1  | С/П | П2 | С/П | П3 | С/П | П4  | С/П |
| П5 | С/П | П6  | С/П | П7 | С/П | П8 | С/П | П9  | С/П |
| ПА | С/П | ПВ  | С/П | ПС | С/П | ПД | Пх0 | Пх7 | ПП  |
| 78 | П7  | Пх1 | Пх8 | ПП | 76  | П8 | Пх2 | Пх9 | ПП  |
| 76 | П9  | Пх3 | ПхA | ПП | 76  | ПА | Пх4 | ПхB | ПП  |
| 76 | ПВ  | Пх5 | ПхC | ПП | 76  | ПС | Пх6 | ПхД | +   |

|                               |       |                              |       |                              |          |                              |                                |                   |            |
|-------------------------------|-------|------------------------------|-------|------------------------------|----------|------------------------------|--------------------------------|-------------------|------------|
| $\underline{\underline{P}x0}$ | $+$   | $\underline{\underline{P}D}$ | $7$   | $\underline{\underline{P}0}$ | $6$      | $\underline{\underline{P}4}$ | $\underline{\underline{K}Px4}$ | $C/P$             | $FL0$      |
| $\underline{67}$              | $Cx$  | $F \sin$                     | $C/P$ | $BP$                         | $00$     | $+$                          | $Px0$                          | $+$               | $\uparrow$ |
| $\uparrow$                    | $1$   | $BP$                         | $7$   | $+$                          | $1$      | $+$                          | $P0$                           | $\leftrightarrow$ | $KPx0$     |
| $\leftrightarrow$             | $Px0$ | $1$                          | $BP$  | $7$                          | $\times$ | $-$                          | $B/0$                          |                   |            |

Тест:

$$\begin{array}{r}
 + 8111111811111811111811111811111811111811111811111811111 \\
 811111811111811111811111811111811111811111811111811111 \\
 \hline
 16222223622222362222236222223622222362222236222223622222
 \end{array}$$

Время счета 45 с.

**Программа 169. Вычитание 49-значного числа из 50-значного.**  
Уменьшаемое

|                              |                              |                              |                              |                              |                              |                              |
|------------------------------|------------------------------|------------------------------|------------------------------|------------------------------|------------------------------|------------------------------|
| $\underline{\underline{P}6}$ | $\underline{\underline{P}5}$ | $\underline{\underline{P}4}$ | $\underline{\underline{P}3}$ | $\underline{\underline{P}2}$ | $\underline{\underline{P}1}$ | $\underline{\underline{P}0}$ |
|------------------------------|------------------------------|------------------------------|------------------------------|------------------------------|------------------------------|------------------------------|

Вычитаемое

|                              |                              |                              |                              |                              |                              |                              |
|------------------------------|------------------------------|------------------------------|------------------------------|------------------------------|------------------------------|------------------------------|
| $\underline{\underline{P}D}$ | $\underline{\underline{P}C}$ | $\underline{\underline{P}B}$ | $\underline{\underline{P}A}$ | $\underline{\underline{P}9}$ | $\underline{\underline{P}8}$ | $\underline{\underline{P}7}$ |
|------------------------------|------------------------------|------------------------------|------------------------------|------------------------------|------------------------------|------------------------------|

Разность

|                              |                              |                              |                              |                              |                              |                              |
|------------------------------|------------------------------|------------------------------|------------------------------|------------------------------|------------------------------|------------------------------|
| $\underline{\underline{P}D}$ | $\underline{\underline{P}C}$ | $\underline{\underline{P}B}$ | $\underline{\underline{P}A}$ | $\underline{\underline{P}9}$ | $\underline{\underline{P}8}$ | $\underline{\underline{P}7}$ |
|------------------------------|------------------------------|------------------------------|------------------------------|------------------------------|------------------------------|------------------------------|

Уменьшаемое и вычитаемое заносятся в память в автоматическом режиме: блок  $P0$   $C/P$  блок  $P1$   $C/P$  ... блок  $PD$   $C/P$ . В результате счета в регистре  $P6$  может оказаться и восемизначное число. Разность выводится автоматически с  $P7$  по  $PD$ . Заметим, что нуль в блоке следует воспринимать как 7 нулей. По окончании вывода высвечивается 00. Переключатель угловой меры должен стоять в положении «градус».

|                               |               |                               |       |                              |                   |                              |        |                              |                   |
|-------------------------------|---------------|-------------------------------|-------|------------------------------|-------------------|------------------------------|--------|------------------------------|-------------------|
| $\underline{\underline{P}0}$  | $C/P$         | $\underline{\underline{P}1}$  | $C/P$ | $\underline{\underline{P}2}$ | $C/P$             | $\underline{\underline{P}3}$ | $C/P$  | $\underline{\underline{P}4}$ | $C/P$             |
| $\underline{\underline{P}5}$  | $C/P$         | $\underline{\underline{P}6}$  | $C/P$ | $\underline{\underline{P}7}$ | $C/P$             | $\underline{\underline{P}8}$ | $C/P$  | $\underline{\underline{P}9}$ | $C/P$             |
| $\underline{\underline{P}A}$  | $C/P$         | $\underline{\underline{P}B}$  | $C/P$ | $\underline{\underline{P}C}$ | $C/P$             | $\underline{\underline{P}D}$ | $Px0$  | $\underline{\underline{P}7}$ | $PP$              |
| $\underline{\underline{P}7}$  | $P7$          | $\underline{\underline{P}x1}$ | $Px8$ | $\underline{\underline{P}P}$ | $75$              | $\underline{\underline{P}8}$ | $Px2$  | $\underline{\underline{P}9}$ | $PP$              |
| $\underline{\underline{P}5}$  | $P9$          | $\underline{\underline{P}x3}$ | $PxA$ | $\underline{\underline{P}P}$ | $75$              | $\underline{\underline{P}A}$ | $Px4$  | $\underline{\underline{P}B}$ | $PP$              |
| $\underline{\underline{P}5}$  | $PB$          | $\underline{\underline{P}x5}$ | $PxC$ | $\underline{\underline{P}P}$ | $75$              | $\underline{\underline{P}C}$ | $Px6$  | $\underline{\underline{P}D}$ | $-$               |
| $\underline{\underline{P}x0}$ | $+$           | $\underline{\underline{P}D}$  | $7$   | $\underline{\underline{P}0}$ | $6$               | $\underline{\underline{P}4}$ | $KPx4$ | $C/P$                        | $FL0$             |
| $\underline{67}$              | $F \sin^{-1}$ | $C/P$                         | $BP$  | $00$                         | $\leftrightarrow$ | $Px0$                        | $+$    | $\leftrightarrow$            | $-$               |
| $Fx < 0$                      | $91$          | $1$                           | $BP$  | $7$                          | $+$               | $1$                          | $/-$   | $P0$                         | $\leftrightarrow$ |
| $B/0$                         | $\uparrow$    | $Cx$                          | $P0$  | $\leftrightarrow$            | $B/0$             |                              |        |                              |                   |

Tecti:

Время счета — около 35 с.

**Программа 170.** Точное умножение 32-значного числа на 4-значное. В ячейки памяти записываются по 4 цифры по схеме

$\times$  П8 П7 П6 П5 П4 П3 П2 П1  
П8 П7 П6 П5 П4 П3 П2 П1

В ответе во всех регистрах будет находиться по 4 цифры, а в регистре П8 их может быть и 7.

|           |          |     |           |           |          |      |                   |     |          |
|-----------|----------|-----|-----------|-----------|----------|------|-------------------|-----|----------|
| $Cx$      | ПД       | П0  | ПхД       | 1         | +        | ПД   | КПхД              | Пх9 | $\times$ |
| $\Pi x0$  | +        | КПД | 1         | ВП        | 3        | +    | 1                 | +   | П0       |
| $K\Pi x0$ | $\Pi x0$ | 1   | ВП        | 3         | $\times$ | КПхД | $\leftrightarrow$ | -   | КПД      |
| ПхД       | 7        | -   | $F_x = 0$ | <u>03</u> | Пх8      | Пх9  | $\times$          | Пх0 | +        |
| П8        | С/П      | БП  | 00        |           |          |      |                   |     |          |

**Программа 171. Точное умножение двух 9-значных чисел.** В ячейки памяти заносятся по 3 цифры по схеме:

$$\begin{array}{c} \times \\ \hline \text{ПВ} & \text{ПА} & \text{П9} & \text{П8} & \text{П7} \\ \text{П3} & \text{П2} & \text{П1} \\ \text{П6} & \text{П5} & \text{П4} \end{array}$$

В результате счета в регистре ПВ может находиться и 6 цифр, а в остальных регистрах — по 3.

|           |                  |          |           |                   |                  |            |                   |          |                   |
|-----------|------------------|----------|-----------|-------------------|------------------|------------|-------------------|----------|-------------------|
| $\Pi x_1$ | $\Pi x_4$        | $\times$ | $\Pi 7$   | $\Pi\Pi$          | $\underline{69}$ | $\Pi x_7$  | $\leftrightarrow$ | $-$      | $\Pi 7$           |
| $\Pi x_2$ | $\Pi x_4$        | $\times$ | $\Pi x_1$ | $\Pi x_5$         | $\times$         | $+$        | $\Pi x_0$         | $+$      | $\Pi 8$           |
| $\Pi\Pi$  | $\underline{69}$ |          | $\Pi x_8$ | $\leftrightarrow$ | $-$              | $\Pi 8$    | $\Pi x_3$         | $\times$ | $\Pi x_2$         |
| $\Pi x_5$ | $\times$         | $+$      | $\Pi x_1$ | $\Pi x_6$         | $\times$         | $+$        | $\Pi x_0$         | $+$      | $\Pi 9$           |
| $\Pi\Pi$  | $\underline{69}$ |          | $\Pi x_9$ | $\leftrightarrow$ | $-$              | $\Pi 9$    | $\Pi x_3$         | $\times$ | $\Pi x_2$         |
| $\Pi x_6$ | $\times$         | $+$      | $\Pi x_0$ | $+$               | $\Pi A$          | $\Pi\Pi$   | $\underline{69}$  | $\Pi xA$ | $\leftrightarrow$ |
| $-$       | $\Pi A$          |          | $\Pi x_3$ | $\Pi x_6$         | $\times$         | $\Pi x_0$  | $+$               | $\Pi B$  | $C/P$             |
| $B\Pi$    | $3$              | $+$      | $1$       | $+$               | $\Pi 0$          | $K\Pi x_0$ | $\Pi x_0$         | $1$      | $B\Pi$            |
| $3$       | $\times$         |          | $B/0$     |                   |                  |            |                   |          |                   |

Text:

$$\begin{array}{r} \times 11111111 \\ \hline 12345678987654321 \end{array}$$

Время счета 35 с.

**Программа 172\*. Умножение 14-значных чисел с получением 14 знаков в произведении.** Разбив мантиссы сомножителей слева направо по 7 цифр, первые две семерки цифр вводятся в регистры П6, П7 и

П8, П9. Ответ поступает в регистры ПА и ПВ, причем в регистре ПВ должно быть 7 цифр. Если их меньше, то недостающие слева цифры — нули. В регистре ПА обычно в ответе 8 цифр. Умножение можно представить схемой

$$\begin{array}{r} \times \text{П6} & \text{П7} \\ \text{П8} & \text{П9} \\ \hline \text{ПА} & \text{ПВ} \end{array}$$

В конце счета содержимое регистра ПА находится также в X, а ПВ — в Y.

Перед началом счета кроме сомножителей необходимо дополнительно ввести в ячейки памяти следующие числа:  $10^6 = \text{ПС}$ ,  $10^7 = \text{ПД}$ ,  $10 = \text{ПЗ}$ . В процессе счета содержимое этих регистров не меняется и в случае многократного умножения вводить каждый раз эти числа не нужно. В программе используется цикл L1. Все оставшиеся регистры — буферные.

Программа позволяет получить лишь цифры мантиссы, а порядок величины произведения легко найти грубым умножением сомножителей. Хотя микрокалькулятор дает в результате счета 15 цифр, последняя из них сомнительная.

Тест:

$$\begin{array}{r} 999999999999999 \\ 999999999999999 \\ \hline 99999999999864 \cdot 10^{13}. \end{array}$$

Время вычисления — около 7 мин.

Эту программу можно использовать при вычислении значений функций при помощи рядов.

| Cx  | ПА   | ПВ  | I   | 4   | П1  | Пх8 | ПхС | +   | ПП  |
|-----|------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| 91  | Пх8  | ПхС | Пх0 | ×   | —   | Пх3 | ×   | П8  | Пх7 |
| Пх0 | ×    | ПхВ | +   | ПВ  | Пх6 | Пх0 | ×   | ПхА | +   |
| ПА  | ПхВ  | ПхД | +   | ПП  | 91  | ПхВ | ПхД | Пх0 | ×   |
| —   | ПВ   | ПхА | Пх0 | +   | ПА  | Пх9 | ПхС | +   | ПП  |
| 91  | Пх9  | ПхС | Пх0 | ×   | —   | Пх3 | ×   | П9  | Пх0 |
| Пх8 | +    | П8  | Пх6 | ПП  | 89  | Пх6 | Пх3 | Пх0 | П6  |
| ×   | —    | ПхД | ×   | Пх7 | +   | ПП  | 87  | Пх0 | 1   |
| +   | П7   | FL1 | 06  |     | ПхВ | ПхА | С/П | Пх3 | —   |
| +   | K[x] | B/0 |     |     |     |     |     |     | Пх3 |

**Программа 173. Деление 78-значного числа на однозначное.** Перед счетом делимое и делитель вводятся в ячейки памяти по блокам по 7 цифр за исключением блока П1, куда можно ввести и восьмизначное число.

|    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |      |   |
|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|------|---|
| П1 | П2 | П3 | П4 | П5 | П6 | П7 | П8 | П9 | ПА | ПВ | : ПД | = |
|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|------|---|

|   |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |
|---|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| = | П1 | П2 | П3 | П4 | П5 | П6 | П7 | П8 | П9 | ПА | ПВ |
|---|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|

Текст программы очень простой:

|     |     |      |      |      |    |     |     |    |      |
|-----|-----|------|------|------|----|-----|-----|----|------|
| Сх  | П0  | ПС   | ПхС  | 1    | +  | ПС  | Пх0 | 1  | ВП   |
| 7   | ×   | КПхС | +    | ПхД  | ÷  | 1   | +   | П0 | КПх0 |
| Пх0 | ПхД | ×    | КПхС | ↔    | -  | Пх0 | КПС | ↔  | П0   |
| ПхС | 1   | 1    | -    | Fx=0 | 03 | С/П |     |    |      |

Тест: 55555555 5555555...5555555:5 = 11111111 1111111...1111111;

Время счета  $t_{\text{сч}} \sim 1.5$  мин.

Остаток от деления находится в регистре П0, поэтому деление можно продолжать и далее.

В случае деления на двузначное число в адресуемую память вводится по 6 цифр, а в программе фрагмент «1 ВП 7» следует поменять на «1 ПВ 6».

Организовать в программе деление многозначных чисел гораздо сложнее. Но можно запрограммировать обычный процесс деления, который мы в отсутствие микрокалькулятора выполняем вручную, переложив на вычислителя лишь операцию ввода и вывода чисел.

**Программа 174\*. Деление на 14-значное число.** Программа позволяет получать сколько угодно цифр мантиссы частного. Сначала необходимо разбить мантиссу делимого слева направо 2 раза по 7 цифр, а потом — только по 8, например,

1432187 1446789 12469111 31823793

Мантисса делителя разбивается на два блока по 7 цифр в каждом. Содержимое первых трех блоков делимого и двух делителя вводятся в память микрокалькулятора

|    |    |     |   |   |    |   |    |   |
|----|----|-----|---|---|----|---|----|---|
| П6 | П7 | П14 | : | П | П9 | = | ПВ | . |
|----|----|-----|---|---|----|---|----|---|

Первые цифры мантиссы частного поступают в регистр ПВ и на индикатор. Затем в регистр П4 вводятся следующие 8 значащих цифр мантиссы и получают очередные 8 цифр частного. Затем вводят еще 8 цифр ... Так можно продолжать сколько угодно долго. Если в результате деления получится число, содержащее менее 8 цифр, недостающие слева цифры следует заполнить нулями. В этом нет необходимости для первого цикла деления, так как нули эти не повлияют на результат.

Программа позволяет получать лишь цифры мантиссы. Порядок числа легко оценить, разделив с обычной точностью первое число на второе.

Если нужно выполнить деление на число, содержащее менее 14 цифр, то во втором блоке делителя недостающее число цифр следует справа дополнить нулями.

Память: L1—цикл, регистры P2, P3, P5, PA, PC, PD—буферные.

|     |      |     |     |     |     |      |     |     |      |
|-----|------|-----|-----|-----|-----|------|-----|-----|------|
| Cx  | PB   | 8   | P1  | 1   | BP  | 6    | PC  | 1   | 0    |
| P3  | X    | PД  | Px4 | PxД | ÷   | K[x] | P5  | PxД | X    |
| Px4 | ↔    | —   | Px3 | ×   | P4  | Px6  | Px8 | ÷   | K[x] |
| Px6 | Px8  | Px0 | ×   | —   | 9   | —    | P6  | Px7 | 9    |
| BP  | 7    | +   | Px9 | Px0 | PA  | ×    | —   | P2  | PxC  |
| ÷   | K[x] | Px6 | Px3 | ×   | Px0 | +    | P6  | Px0 | PxC  |
| ×   | Px2  | ↔   | —   | Px3 | ×   | Px5  | +   | P7  | PxB  |
| Px3 | ×    | PxA | +   | PB  | FL1 | 13   | PxB | C/P | BП   |
|     |      |     |     |     |     |      |     |     | 00   |

В качестве теста рассмотрим деление

$$568.9325825846350000000 : 6.5298742568958 = \\ = 87.127647516921197717217 \dots$$

При этом в блоки заносились следующие цифры: 5689325=П6, 8258463=П7, 6529874=П8, 2568958=П9,  $5 \cdot 10^7$ =П4, затем 0=П4 и еще раз 0=П4. Было проделано 3 цикла вычислений. Каждый цикл длится около 3 мин.

## 2. Вычисление значений функций при помощи рядов

Значения функций обычно вычисляются при помощи разложения в ряд Маклорена. Хотя ряд имеет бесконечное число членов, но суммирование прекращают, когда очередной член оказывается меньше погрешности вычислений. Обычно для вычисления одной и той же функции можно предложить несколько рядов. Величину  $e^{10.1}$  можно найти при помощи ряда, а можно найти  $e^{0.1}$  и умножить на  $e$  десять раз. Во втором случае результат будет найден гораздо быстрее, так как скорость сходимости ряда для вычисления  $e^{0.1}$  гораздо выше скорости сходимости ряда для  $e^{10.1}$ .

Хотя ряды для тригонометрических функций сходятся для любых значений аргумента, но при переводе аргумента в первую четверть ряды для вычисления тригонометрических функций сходятся значительно быстрее, давая при небольшом количестве членов ту же точность. Для вычисления синуса и косинуса, когда  $x$  лежит в первой четверти, используют следующие ряды:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \dots, \quad (10.1)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \dots, \quad 0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}. \quad (10.2)$$

Если аргумент  $\frac{\pi}{4} < x \leq \frac{\pi}{2}$ , то, введя новую величину

$$y = \frac{\pi}{2} - x, \quad (10.3)$$

получаем быстро сходящиеся для нее ряды:

$$\sin x = \cos y = 1 - \frac{y^3}{2!} + \frac{y^4}{4!} - \frac{y^6}{6!} + \frac{y^8}{8!} - \dots \quad (10.4)$$

$$\cos x = \sin y = y - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} - \frac{y^7}{7!} + \frac{y^9}{9!} - \dots \quad (10.5)$$

Для вычисления очередных членов ряда следует использовать рекуррентные формулы. Положив

$$a_1 = x, \quad (10.6)$$

для (10.1) получим

$$a_{i+1} = \frac{(-1)^i a_i x^2}{(2i+1) 2i}, \quad (10.7)$$

$$\sin x = \sum_{i=1}^{\infty} a_i. \quad (10.8)$$

Аналогично для (10.2)

$$b_1 = 1, \quad (10.9)$$

$$b_{i+1} = \frac{(-1)^i b_i x^2}{2i (2i-1)}, \quad (10.10)$$

$$\cos x = \sum_{i=1}^{\infty} b_i. \quad (10.11)$$

Остальные тригонометрические функции вычисляются при помощи рядов:

$$\operatorname{tg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + \frac{62x^9}{2835} + \dots, \quad (10.12)$$

$$\sec x = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{24} + \frac{61x^6}{720} + \frac{277x^8}{8064} + \dots \quad (10.13)$$

при  $|x| < \frac{\pi}{2}$ ;

$$\operatorname{ctg} x = \frac{1}{x} - \frac{x}{3} - \frac{x^3}{45} - \frac{2x^5}{945} - \frac{x^7}{4725} - \dots, \quad (10.14)$$

$$\operatorname{cosec} x = \frac{1}{x} + \frac{x}{6} + \frac{7x^3}{360} + \frac{31x^5}{15\cdot120} + \frac{127x^7}{608\cdot800} + \dots \quad (10.15)$$

при  $|x| < \pi$ .

Обратные тригонометрические функции вычисляют при помощи сходящихся в интервале  $-1 \leq x \leq 1$  рядов

$$\arcsin x = x + \frac{1 \cdot x^3}{2 \cdot 3} + \frac{1 \cdot 3 \cdot x^5}{2 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot x^7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7} + \dots, \quad (10.16)$$

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} - \dots \quad (10.17)$$

Для выбора наиболее быстро сходящегося ряда часто используют связывающие эти функции соотношения:

$$\arcsin x = \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}, \quad (10.18)$$

$$\arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x, \quad (10.19)$$

$$\operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{1}{x}, \quad (10.20)$$

Показательную функцию самого общего вида можно вычислить по формуле

$$a^x = 1 + x \ln a + x^2 \frac{\ln^2 a}{2!} + \dots + x^k \frac{\ln^k a}{k!} + \dots \quad (10.21)$$

Экспоненциальную функцию в случае  $|x| < 1$  вычисляют при помощи ряда

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^k}{k!} + \dots \quad (10.22)$$

Если же  $|x| > 1$ , то выделяют целую часть числа

$$n = [x], \quad x = n + \delta, \quad \text{где } |\delta| < 1,$$

и вычисления проводят по правилу

$$e^x = e^{n+\delta} = e^\delta \underbrace{eee \dots ee}_{n \text{ раз}},$$

где

$$e = 2.718 281 824 590 45 \dots,$$

$$\frac{1}{e} = 0.367 879 441 171 44 \dots$$

Величину  $e^\delta$  вычисляют по разложению (10.22).

Для вычисления логарифма при  $|x| < 1$  используют ряд

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \dots \quad (10.23)$$

Ряд этот сходится очень медленно и используется лишь для малых значений  $x$ . Поэтому число  $x$  представляют в виде произведения целой части числа 2 на некоторое число  $z$ :

$$x = 2^n z, \quad 0.5 \leq z \leq 1. \quad (10.24)$$

Полагая

$$y = \frac{1-z}{1+z}, \quad (10.25)$$

получают быстро сходящийся ряд

$$\ln x = n \ln 2 - 2 \left( y + \frac{y^3}{3} + \dots + \frac{y^{2k-1}}{2k-1} \right), \quad (10.26)$$

где  $\ln 2 = 0.693 147 180 560 \dots$

Десятичные логарифмы вычисляют по формуле

$$\lg x = M \ln x, \quad (10.27)$$

где  $M = 0.434\,294\,481\,903\dots$

Для вычисления прямых и обратных гиперболических функций используют разложения

$$\operatorname{sh} x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \dots, \quad (10.28)$$

$$\operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} + \dots, \quad (10.29)$$

$$\operatorname{th} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} - \frac{17x^7}{315} + \frac{62x^9}{2835} - \dots, \quad (10.30)$$

$$\operatorname{arsh} x = x - \frac{1 \cdot x^3}{2 \cdot 3} + \frac{1 \cdot 3 x^5}{2 \cdot 4 \cdot 5} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot x^7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7} + \dots, \quad (10.31)$$

$$\operatorname{arth} y = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} + \dots \quad (10.32)$$

Величину  $\sqrt{-x}$  можно также вычислить при помощи ряда. Для этого на микрокалькуляторе можно сначала найти грубое значение корня из числа  $x$ . Пусть это число равно  $a$ . Тогда

$$\sqrt{-x} = a \sqrt{\frac{a^2 + \delta}{a^2}} = a \sqrt{1 + \frac{\delta}{a^2}}, \quad (10.33)$$

где  $\delta = x - a^2$ ,  $|\delta| \ll a^2$ .

Разложение в ряд по малому параметру  $\left(\frac{\delta}{a^2}\right)$  дает

$$\sqrt{1 + \frac{\delta}{a^2}} = 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{\delta}{a^2} \right) - \frac{1}{8} \left( \frac{\delta}{a^2} \right)^3 + \frac{1}{16} \left( \frac{\delta}{a^2} \right)^5 - \frac{5}{128} \left( \frac{\delta}{a^2} \right)^7 + \dots \quad (10.34)$$

Тогда, подставив (10.34) в (10.33), получим более точное значение  $\sqrt{-x}$ . То же касается и любой другой дробной степени величины  $x$ .

Найти точное значение функций при помощи рядов можно по программам 168—174. Удобнее всего их вычислять, имея 2—3 микрокалькулятора. Каждый такой микрокалькулятор выполняет одно арифметическое действие. Вам остается лишь считывать те или иные числа с одного и вводить в другой. Таким путем можно вычислять значения функций с 12—14 верными знаками, чего вам не смогут дать обычные таблицы.

### 3. Итерации при вычислении функций

К вычислению функций при помощи итераций прибегают, когда легко вычислить обратную функцию. В основе подобного рода итераций лежит метод касательных Ньютона. Если требуется вычислить

значение непрерывно дифференцируемой функции  $y$  из уравнения

$$\varphi(x, y) = 0, \quad (10.35)$$

то, задавшись  $k$ -м приближением величины  $y$  методом касательных Ньютона, получим уточненное  $(k+1)$ -е приближение  $y_{k+1}$ :

$$y_{k+1} = y_k - \frac{\varphi(x, y_k)}{\varphi'_y(x, y_k)}. \quad (10.36)$$

Сходимость такого бесконечного процесса к искомому значению функции обеспечивается в том случае, когда производные  $\varphi'_y(x, y)$  и  $\varphi''_y(x, y)$  сохраняют постоянный знак в интервале, содержащем точное значение  $y$ . Для примера составим формулу для итерационного процесса вычисления значения функции  $y = \sqrt{x}$ . Приняв  $\varphi(x, y) = y^2 - x = 0$ , получим  $\varphi'_y(x, y) = 2y$  и тогда

$$y_{k+1} = \frac{1}{2} \left( y_k + \frac{x}{y_k} \right), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Число верных цифр результата примерно удваивается на каждой итерации, поэтому процесс быстро сходится.

Аналогично составляются формулы итераций для других функций:

$$y = \frac{1}{x}, \quad y_{k+1} = y_k (2 - xy_k); \quad (10.37)$$

$$y = \frac{1}{\sqrt{x}}, \quad y_{k+1} = \frac{y_k}{2} (3 - xy_k^2); \quad (10.38)$$

$$y = \sqrt[3]{x}, \quad y_{k+1} = \frac{1}{3} \left( 2y_k - \frac{x}{y_k^2} \right). \quad (10.39)$$

Итерационная процедура обычно достаточно быстро ведет к искомому результату, если функция достаточно гладкая и начальное приближение выбрано близко от корня. Первое приближение можно получить при помощи микрокалькулятора. А далее, сделав несколько итераций, можно получить точное значение функции. Рассмотрим для примера вычисление  $\sqrt{5}$ . На микрокалькуляторе получаем первое приближение

$$y_0 = 2.236\ 067\ 9$$

А дальше при помощи программ 168, 173, 174 получаем быстро сходящуюся последовательность чисел:

$$y_0 = 2.236\ 067\ 900\ 000\ 0,$$

$$y_1 = 2.236\ 067\ 977\ 499\ 8,$$

$$y_2 = 2.236\ 067\ 977\ 499\ 8.$$

Как видим, уже первая итерация дала правильный ответ. Получаем

$$\sqrt{5} = 2.236\ 067\ 977\ 8.$$

В отличие от рядов итерационный метод гораздо эффективнее, но не для всякой функции его можно применить.

## 4. Вычисление специальных функций

Здесь мы рассмотрим вопрос о наиболее рациональной организации вычисления часто применяемых в математической физике специальных функций. Мы не будем касаться вопроса об удвоенной точности, так как в данном случае он довольно сложен.

Итак, многие специальные функции вычисляют по разложению в степенной ряд. К примеру, функцию Бесселя порядка  $n$  определяют по формуле

$$J_n(x) = \frac{1}{n!} \left(\frac{x}{2}\right)^n \left\{ 1 - \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^2}{1!(n+1)!} + \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^4}{2!(n+1)(n+2)} - \dots \right\}, \quad (10.40)$$

а модифицированную функцию Бесселя по формуле

$$I_n(x) = \frac{1}{n!} \left(\frac{x}{2}\right)^n \left\{ 1 + \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^2}{1!(n+1)} + \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^4}{2!(n+1)(n+2)} + \dots \right\}. \quad (10.41)$$

Функцию Бесселя высших порядков можно без особого труда вычислить по значению функций нулевого и первого порядков, воспользовавшись рекуррентной формулой

$$J_{n+1}(x) = \frac{2n}{x} J_n(x) - J_{n-1}(x). \quad (10.42)$$

Значение функции нулевого и первого порядка можно найти в приводимых в справочниках табличных данных.

Некоторые интегральные функции удобно вычислять по степенному ряду, получаемому разложением в ряд Тейлора подынтегрального выражения и почленным интегрированием этого ряда. В случае интегрального синуса получают ряд

$$S_i(x) = \int_0^x \frac{\sin u}{u} du = x - \frac{x^3}{3!3} + \frac{x^5}{5!5} - \frac{x^7}{7!7} + \dots \quad (10.43)$$

Этот ряд достаточно быстро сходится, если  $|x| < 1$ . Ряды вычисляют, конечно, по схеме Горнера. Если же ряд сходится медленно, то значение интегрального синуса получают путем численного интегрирования.

Значения многих функций находят при помощи асимптотических формул. Так, аппроксимация гамма-функции степенным рядом приводит к чрезмерным затратам времени. Более удобной для вычислений на программируемом микрокалькуляторе является асимптотическая формула Стирлинга

$$\Gamma(x) = \sqrt{\frac{2\pi}{x}} e^{-x} x^x H(x), \quad (10.44)$$

где

$$H(x) = 1 + \frac{1}{12} + \frac{1}{288x^2} - \frac{139}{51840x^3} - \frac{571}{2488320x^4} - \dots \quad (10.45)$$

Аппроксимация годится при  $x > 0$ . В случае отрицательного значения аргумента

$$\Gamma(-x) = -\frac{\pi}{x\Gamma(x)\sin\pi x}. \quad (10.46)$$

**Программа 175.** Вычисление  $\Gamma(x)$  при любых  $x$ . Перед первым счетом необходимо ввести значения вспомогательных коэффициентов:

$\frac{1}{288} = \Pi_3$ ,  $\frac{139}{51840} = \Pi_4$ ,  $-\frac{571}{2488320} = \Pi_5$ . Затем необходимо вводить в индикаторный регистр величину  $x$  и запускать программу. Переключатель угловой меры должен стоять в положении «радиан».

|                  |     |                 |                            |     |    |     |     |                            |       |
|------------------|-----|-----------------|----------------------------|-----|----|-----|-----|----------------------------|-------|
| Fx < 0           | 21  | /—/             | ПП                         | 26  | ↑  | Fπ  | Πx2 | ×                          | F sin |
| ×                | Πx2 | ×               | /—/                        | ↑   | Fπ | ↔   | ÷   | C/P                        | BП    |
| 00               | ПП  | 26              | C/P                        | БП  | 00 | П2  | Πx5 | ↔                          | ÷     |
| Πx4              | +   | Πx2             | ÷                          | Πx3 | +  | Πx2 | ÷   | 1                          | 2     |
| F <sup>1/x</sup> | +   | Πx2             | ÷                          | 1   | +  | Πx2 | /—/ | F <sup>e<sup>x</sup></sup> | ×     |
| Π6               | Πx2 | ↑               | F <sup>x<sup>y</sup></sup> | Πx6 | ×  | ↑   | Fπ  | 2                          | ×     |
| Πx2              | ÷   | FV <sup>—</sup> | ×                          | B/0 |    |     |     |                            |       |

Тест:  $\Gamma(1) = 0.99949947$   $\Gamma(-1.5) = 2.3634628$ .

Время вычисления — не более 20 с.

**Программа 176.** Вычисление функции Бесселя по разложению в степенной ряд при  $x \leq 10$ ,  $n \geq x$ . Перед счетом вводится  $x = \Pi_2$ ,  $n = \Pi_3$ . Ответ поступает в регистры X и П8.

|                 |     |     |     |        |                 |     |    |     |        |
|-----------------|-----|-----|-----|--------|-----------------|-----|----|-----|--------|
| Cx              | П4  | 1   | П6  | Πx3    | Fx ≠ 0          | 16  | П8 | Πx6 | ×      |
| Π6              | Πx8 | 1   | —   | Fx = 0 | 07              | Πx2 | 2  | ÷   | ↑      |
| Fx <sup>2</sup> | П2  | ↔   | Πx3 | ↔      | Fx <sup>y</sup> | Πx6 | ÷  | П7  | П8     |
| KΠx4            | Πx4 | Πx3 | +   | Πx4    | ×               | Πx2 | ÷  | Πx7 | ↔      |
| ÷               | /—/ | Π7  | Πx8 | ↔      | Πx8             | +   | П8 | —   | Fx = 0 |
| 30              | Πx8 | C/P | БП  | 00     |                 |     |    |     |        |

Тест:  $J_0(2) = 0.22389078$ ,  $t_{\text{сч}} = 58$  с.

Для вычисления модифицированных функций Бесселя на место оператора с адресом 41 нужно поставить пустой оператор F НОП.

**Программа 177.** Вычисление функции Бесселя путем интегрирования. Программа предназначена для функций четного порядка. Значение порядка вводим в регистр П7, значение аргумента функции  $x = \Pi_8$ , число разбиений интервала  $n = \Pi_1$ .

|    |    |    |     |   |    |    |    |    |     |
|----|----|----|-----|---|----|----|----|----|-----|
| Cx | П2 | Fπ | 2   | ÷ | П3 | ПП | 45 | П8 | Πx3 |
| Πx | П3 | —  | Πx1 | ÷ | П2 | ПП | 45 | 1  | ПП  |

$$\begin{array}{ccccccccc}
 33 & 4 & \text{ПП} & 33 & 2 & \text{БП} & 19 & \text{Пx8} & 3 \\
 \hline
 \text{Пx2} & \times & \text{С/П} & \times & \text{Пx8} & + & \text{П8} & \text{КПx1} & \div \\
 27 & \text{Пx3} & \text{Пx2} & + & \text{П3} & \text{Пx3} & \text{Пx7} & \times & \text{Fx cos} \\
 \hline
 \text{Fsin} & \text{Пx6} & \times & \text{Fx cos} & \times & 2 & \times & \text{F}\pi & \div \\
 & & & & & & & & \text{B/0}
 \end{array}$$

Тест: при  $n=10$  разбиениях  $J_4(2)=0.033995759$ ,  $t_{\text{сч}}=1$  мин 12 с.

Для нечетных порядков функции Бесселя оператор  $\text{Fx cos}$ , записанный по адресам 48 и 53, необходимо заменить на  $\text{F sin}$ .

Эллиптические интегралы первого,

$$F(k, \varphi) = \int_0^{\varphi} \frac{d\psi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \psi}}, \quad (10.47)$$

и второго рода,

$$E(k, \varphi) = \int_0^{\varphi} \sqrt{1-k^2 \sin^2 \psi} d\psi, \quad (10.48)$$

также вычисляют путем численного интегрирования.

**Программа 178. Вычисление эллиптических интегралов первого и второго рода.** Перед счетом ввести число разбиений  $n=\text{П4}$  (обязательно четное),  $k=\text{П7}$ ,  $\varphi=\text{П8}$ . Приведенная ниже программа вычисляет интегралы первого рода, а в случае интеграла второго рода необходимо по адресу 47 поставить оператор  $\text{B/0}$ .

$$\begin{array}{ccccccccc}
 \text{Cx} & 1 & \text{П6} & \text{Пx8} & \text{П3} & \text{Пx4} & \div & \text{П2} & \text{ПП} & 38 \\
 1 & \text{ПП} & \frac{25}{\text{Пx2}} & 4 & \text{ПП} & \frac{25}{\text{Пx6}} & 2 & \text{БП} & \frac{11}{\text{Пx4}} \\
 3 & \div & \text{Пx2} & \times & \text{С/П} & \times & \text{Пx6} & + & \frac{1}{\text{П6}} & \text{Пx4} \\
 1 & - & \text{П4} & \text{Fx} \neq 0 & \frac{18}{\text{Пx2}} & \times & \text{П3} & \text{Пx3} & \text{F sin} \\
 \text{Пx7} & \times & \text{Fx}^3 & 1 & \leftrightarrow & - & \text{F}\nu - & \text{F}^{1/x} & \text{B/0}
 \end{array}$$

Тест:  $F\left(0.984807, \frac{\pi}{2}\right)=3.1530824$ ,  $n=20$ ,  $t_{\text{сч}}=2$  мин 57 с.

Интегралы Френеля

$$C(x) = \int_0^x \cos\left(\frac{\pi}{2} t^2\right) dt, \quad (10.49)$$

$$S(x) = \int_0^x \sin\left(\frac{\pi}{2} t^2\right) dt \quad (10.50)$$

при  $x < 1$  и при  $x \gg 1$  вычисляют по разложениям в степенные ряды, а в остальных случаях — путем численного интегрирования.

**Программа 179. Вычисление  $C(x)$  при  $x < 1$ .** Аргумент функции набираем на индикаторе.

$$\begin{array}{ccccccccc}
 \text{П8} & \text{П7} & Fx^3 & Fx^2 & F\pi & Fx^2 & \times & 4 & \div & \text{П2} \\
 Cx & \text{П3} & Px3 & 1 & + & \text{П3} & 2 & \times & \text{П9} & 1 \\
 - & Px9 & \times & \text{ПА} & Px3 & 4 & \times & 3 & - & \text{П9} \\
 4 & + & Px9 & \leftrightarrow & \div & Px\text{A} & \div & Px2 & \times & Px7 \\
 \times & /-/ & \text{П7} & Px8 & + & Px8 & \leftrightarrow & \text{П8} & - & Fx=0 \\
 12 & Px8 & C/P & БП & 00 & & & & & 
 \end{array}$$

Тест:  $C(1) = 0.77989341$ ,  $t_{\text{сч}} = 1 \text{ мин } 19 \text{ с.}$

**Программа 180.** Вычисление  $S(x)$  при  $x < 1$ . Величину  $x$  набрать на индикаторе.

$$\begin{array}{ccccccccc}
 \text{П8} & Fx^2 & F\pi & \times & 2 & \div & \uparrow & Fx^3 & \text{П2} & \leftrightarrow \\
 Px8 & \times & 3 & \div & \text{П7} & Px8 & Cx & \text{П3} & Px3 & 1 \\
 + & \text{П3} & 2 & \times & \text{П9} & 1 & + & Px9 & \times & \text{ПА} \\
 Px3 & 4 & \times & 1 & - & \text{П9} & 4 & + & Px9 & \leftrightarrow \\
 \div & Px\text{A} & \div & Px2 & \times & Px7 & \times & /-/ & \text{П7} & Px8 \\
 + & Px8 & \leftrightarrow & \text{П8} & - & Fx=0 & 18 & Px8 & C/P & БП \\
 00 & & & & & & & & & 
 \end{array}$$

Тест:  $S(1) = 0.43825912$ ,  $t_{\text{сч}} = 1 \text{ мин } 11 \text{ с.}$

**Программа 181.** Вычисление интегралов Френеля при  $x \geq 1$ .

На индикаторе набираем величину  $x$ . После первого С/П получаем  $C(x)$ , а после второго С/П —  $S(x)$ . Угловой переключатель должен находиться в положении «радиан».

$$\begin{array}{ccccccccc}
 \text{П9} & F\pi & \times & \text{П2} & Px9 & \times & \text{П3} & 2 & \div & \text{П9} \\
 F \cos & \text{П4} & Px9 & F \sin & \text{П5} & \text{ПП} & \underline{29} & \text{С/П} & Px5 & Px4 \\
 /-/ & \text{П5} & \leftrightarrow & \text{П4} & \text{ПП} & \underline{29} & \text{С/П} & БП & 00 & Px3 \\
 Fx^2 & 3 & \leftrightarrow & \div & 1 & - & Px5 & \times & Px2 & \div \\
 \text{П6} & Px3 & Fx^2 & 5 & \leftrightarrow & \div & 1 & - & Px4 & \times \\
 Px3 & \div & Px^2 & \div & 2 & F^{1/x} & + & Px6 & - & B/0
 \end{array}$$

Тест:

$$C(4) = 0.49841993, t = 15 \text{ с.}$$

$$S(4) = 0.42051702, t = 11 \text{ с.}$$

Погрешность результата не превышает  $5/\pi^4 x^7$ .

**Программа 182.** Вычисление  $C(x)$  численным интегрированием. Вводим  $x$  С/П  $n$  С/П, где  $n$  — число отрезков интегрирования. Угловой переключатель в положении «радиан».

$$\begin{array}{cccccccccc}
 \text{П3} & \text{С/П} & \text{П1} & Cx & \text{П2} & \text{ПП} & \underline{44} & \text{П8} & Px3 & Px2 \\
 \text{П3} & - & Px1 & \div & \text{П2} & \text{ПП} & \underline{44} & 1 & \text{ПП} & \underline{32} \\
 4 & \text{ПП} & \underline{32} & 2 & \text{БП} & \underline{18} & Px8 & 3 & \div & Px2 \\
 \times & \text{С/П} & \times & Px8 & + & \underline{Px8} & KPx1 & Px1 & Fx \neq 0 & \underline{26} \\
 Px3 & Px2 & + & \text{П3} & Px3 & Fx^2 & F\pi & \times & 2 & \div \\
 F \cos & B/0 & & & & & & & & 
 \end{array}$$

Тест:  $C(1) = 0.77993495$ ,  $t = 2$  мин 43 с,  $n = 20$ . Для вычисления  $S(x)$  оператор  $F \cos$  в программе по адресу 50 следует заменить на  $F \sin$ .

Значение интегрального синуса при  $x < 1$  и  $x > 8$  находят при помощи степенных рядов, а в остальных случаях — путем численного интегрирования.

**Программа 183. Вычисление интегрального синуса при  $x < 1$ .**  
Значение величины  $x$  набрать на индикаторе.

|     |          |           |        |                |     |           |      |           |     |
|-----|----------|-----------|--------|----------------|-----|-----------|------|-----------|-----|
| П2  | П6       | П8        | $Fx^2$ | П3             | 1   | П4        | ПП   | <u>27</u> | Пх8 |
| ↔   | —        | П8        | ПП     | <u>27</u>      | Пх8 | +         | Пх8  | ↔         | П8  |
| —   | $Fx = 0$ | <u>07</u> | Пх8    | С/П            | БП  | <u>00</u> | КПх4 | Пх6       | Пх3 |
| ×   | Пх4      | ÷         | КПх4   | $F \downarrow$ | Пх4 | ÷         | П6   | Пх4       | ÷   |
| B/0 |          |           |        |                |     |           |      |           |     |

Тест:  $S_i(0,5) = 0.49310742$ ,  $t_{\text{ч}} = 29$  с.

**Программа 184. Вычисление интегрального синуса путем численного интегрирования.** Ввести  $x$  С/П  $n$  С/П, где  $n$  — число отрезков разбиения. Угловой переключатель установить в положение «радиан».

|          |     |           |      |     |           |           |     |             |           |
|----------|-----|-----------|------|-----|-----------|-----------|-----|-------------|-----------|
| П3       | С/П | П1        | $Cx$ | П2  | ПП        | <u>32</u> | П8  | Пх3         | Пх2       |
| П3       | —   | Пх1       | ÷    | П2  | 1         | ↑         | 1   | ПП          | <u>32</u> |
| <u>4</u> | ПП  | <u>32</u> | 2    | БП  | <u>18</u> | Пх8       | 3   | ÷           | Пх2       |
| ×        | С/П | ×         | Пх8  | +   | <u>П8</u> | КПх1      | Пх1 | $Fx \neq 0$ | <u>26</u> |
| Пх3      | Пх2 | +         | П3   | Пх3 | $F \sin$  | Пх3       | ÷   | B/0         | —         |

Тест:  $S_i(2) = 1.5561761$ ,  $n = 8$ ,  $t_{\text{ч}} = 1$  мин 0 с.

**Программа 185. Вычисление интегрального синуса при  $x > 8$  при помощи асимптотического ряда.** Набираем  $x$  на индикаторе.

Тест:  $S_i(20) = 1.5482415$ ,  $t = 18$  с.

|     |          |           |     |     |          |     |     |   |     |
|-----|----------|-----------|-----|-----|----------|-----|-----|---|-----|
| П2  | $Fx^2$   | $F^{1/x}$ | П3  | 1   | 2        | ×   | П9  | 1 | —   |
| Пх9 | ×        | 1         | +   | 4   | ×        | Пх3 | ×   | 2 | —   |
| Пх2 | $F \cos$ | ×         | Пх2 | ÷   | П4       | Пх3 | 2   | 0 | ×   |
| П9  | 1        | —         | Пх9 | ×   | 1        | +   | 1   | 2 | ×   |
| Пх3 | ×        | 2         | —   | Пх2 | $F \sin$ | ×   | Пх3 | × | Пх4 |
| +   | $F\pi$   | +         | 2   | ÷   | С/П      |     |     |   |     |

Если часто приходится вычислять ту или иную функцию посредством численного интегрирования

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt, \quad (10.51)$$

то можно ускорить этот процесс, если функцию необходимо вычислять в большом количестве точек. Зафиксировав в (10.51) значение  $x$ , мы можем вычислить интеграл каким-либо способом. Но делать так каж-

дый раз невыгодно, так как для получения значений функции с достаточной точностью необходимо каждый раз брать большое количество разбиений интервала  $(a, x)$ . Гораздо проще выбрать более редкую сетку и интегрированием высокой точности составить таблицу значений интеграла на этой сетке  $F_n = F(x_n)$ . Тогда в промежутках между известными узлами

$$F(x) = F_n + \int_{x_n}^x f(t) dt, \quad (10.52)$$

где

$$x_n \leq x \leq x_{n+1}.$$

При вычислении интеграла (10.52) достаточно взять небольшое количество интервалов разбиения для достижения той же точности, что и в (10.51). А это означает, что мы значительно сократили время вычисления исходной функции  $F(x)$  без потери точности. Так, для интеграла Френеля

$$S(x) = \int_0^x \sin\left(\frac{\pi}{2} t^2\right) dt \quad (10.53)$$

составим таблицу  $S(x)$  через  $\Delta x = 0.2$ . Каждое значение функции получаем численным интегрированием по Симпсону при  $n = 50$ . Результат счета приведен в табл. 29. Если теперь нам понадобится вычислить

Таблица 29

| $x$ | $S(x)$          | $x$ | $S(x)$       |
|-----|-----------------|-----|--------------|
| 0.0 | 0.0             | 1.2 | 0.623 400 93 |
| 0.2 | 0.004 187 609 2 | 1.4 | 0.713 525 34 |
| 0.4 | 0.033 359 432   | 1.6 | 0.638 888 41 |
| 0.6 | 0.110 540 2     | 1.8 | 0.450 938 66 |
| 0.8 | 0.249 341 37    | 2.0 | 0.343 412 16 |
| 1.0 | 0.438 259 14    |     |              |

$S(0.27)$ , то воспользовавшись программой Симпсона при  $n = 10$ ,  $a = 0.2$ ,  $x = 0.27$  мы быстро получаем значение функции

$$S(0.27) = 0.004 187 609 2 + 0.006 108 736 6 = 0.010 296 346$$

Часто встречающаяся в расчетах бета-функция выражается через гамма-функцию

$$B(x, y) = \frac{\Gamma(x) \Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}, \quad (10.54)$$

**Программа 186. Вычисление бета-функции  $B(x, y)$ .** Программа позволяет найти значения функции для произвольных значений аргументов, кроме  $x = -y$ . Ввести вспомогательные коэффициенты

$1/288 = \text{П3}$ ,  $-139/51840 = \text{П4}$ ,  $571/2488320 = \text{П5}$ . Регистры П6—П8 — буферные. Аргументы функции перед счетом вводятся в операционные регистры X и Y. Переключатель угловой меры должен быть в положении «радиан».

|          |                          |                          |                                |          |                          |                          |                          |                   |                          |                         |
|----------|--------------------------|--------------------------|--------------------------------|----------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------|--------------------------|-------------------------|
| П8       | $\leftrightarrow$        | ПП                       | $\frac{22}{\text{П7}}$         | П7       | Пх2                      | $\frac{22}{\text{Пх8}}$  | Пх8                      | +                 | ПП                       | $\frac{22}{\text{С/П}}$ |
| Пх7      | $\leftrightarrow$        | $\div$                   | $\frac{\text{П7}}{\text{Пx2}}$ | Пх8      | ПП                       | $\frac{22}{\text{Пx4}}$  | Пx7                      | $\times$          | ПП                       | $\frac{22}{\text{Пx2}}$ |
| БП       | $\underline{00}$         | $F_x < 0$                | $\underline{41}$               | —        | ПП                       | $\underline{41}$         | $\uparrow$               | $F_{\pi}$         | $\leftrightarrow$        | $\div$                  |
| $\times$ | $F \sin$                 | $\times$                 | $\underline{\text{Пx2}}$       | $\times$ | $/ - /$                  | $\uparrow$               | $F_{\pi}$                | $\leftrightarrow$ | $\div$                   |                         |
| B/0      | $\underline{\text{П2}}$  | $\underline{\text{Пx5}}$ | $\leftrightarrow$              | $\div$   | $\underline{\text{Пx4}}$ | $+$                      | $\underline{\text{Пx2}}$ | $\div$            | $\underline{\text{Пx3}}$ |                         |
| $+$      | $\underline{\text{Пx2}}$ | $\div$                   | 1                              | 2        | $F^{1/x}$                | $+$                      | $\underline{\text{Пx2}}$ | $\div$            | 1                        |                         |
| $+$      | $\underline{\text{Пx2}}$ | $/ - /$                  | $F e^x$                        | $\times$ | П6                       | $\underline{\text{Пx2}}$ | $\uparrow$               | $F x^y$           | $\underline{\text{Пx6}}$ |                         |
| $\times$ | $\uparrow$               | $F_{\pi}$                | 2                              | $\times$ | $\underline{\text{Пx2}}$ | $\div$                   | $F V^-$                  | $\times$          | $\underline{\text{B/0}}$ |                         |

Тест: В (0.5,  $-1.6) = -5.684476$ ,  $t = 0$  мин 59 с.

Аналогично строятся программы и для вычисления других функций математической физики.

## 5. Преобразование периодических десятичных дробей к обыкновенным

В результате каких-либо математических операций на микрокалькуляторе нередко получаются числа типа

2.323 323 3,

т. е. периодические десятичные дроби. Легко выписать и остальные цифры числа

2.323 323 323 323 323 323 323 323 323 323 ...

Последнее число можно представить в виде суммы членов геометрической прогрессии с  $a_0 = 0.323$ ,  $q = 10^{-3}$  и числа 2. В самом общем случае первый член геометрической прогрессии обозначим через  $a_0$ , знаменатель  $q$ , а число 2 буквой  $a$ . Показатель степени в знаменателе прогрессии указывает количество цифр в периоде геометрической прогрессии.

**Программа 187\*.** Преобразование периодической дроби к обыкновенной. Перед счетом набрать 2  $F \cos^{-1} B/P \uparrow P9$ . Ввести  $a$  С/П  $a_0$  С/П 1 В/П и количество цифр в периоде С/П. На индикатор последовательно выводится целая часть, после С/П — числитель, и еще после одного С/П — знаменатель дроби. Появление сообщения  $E$  говорит об окончании вывода результатов и готовности микрокалькулятора к преобразованию новой периодической дроби.

Тест: 235.35353. Здесь  $a = 200$ ,  $a_0 = 35$ , в периоде 2 цифры.

В результате счета получаем  $235.35353 = 235 \frac{35}{99}$ . А для числа 0.0783441441  $a = 0.0783$ ,  $a_0 = 441 \cdot 10^{-7}$ , в периоде 3 цифры. В резуль-

$$0.0783441441 = \frac{782\,658}{9\,990\,000}.$$

|              |     |     |     |     |     |     |       |     |       |
|--------------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-------|-----|-------|
| П2           | С/П | П3  | С/П | П4  | Пх3 | ×   | П8    | Пх4 | 1     |
| —            | П4  | Пх2 | ×   | Пх8 | +   | П5  | Пх4   | ÷   | К [x] |
| П6           | Пх4 | ×   | Пх5 | ↔   | —   | П7  | К [x] | Пх7 | —     |
| $F_x \neq 0$ | 45  | Пх7 | 1   | 0   | ×   | П7  | Пх4   | 1   | 0     |
| ×            | П4  | Пх7 | БП  | 27  | Пх6 | С/П | Пх7   | С/П | Пх4   |
| С/П          | Пх9 | С/П | БП  | 00  |     |     |       |     |       |

## 6. Вычисление постоянных Фейгенбаума

В наше время ЭВМ стали не только вспомогательным средством познания природы и служащими всего лишь для выполнения сложных вычислений. Нынче на вычислительных машинах удается моделировать физические явления, происходящие в глубинах Солнца и звезд, в атмосфере Земли и других планет, которые экспериментально осуществить сложно, а часто и невозможно. И никого не удивляет, что опыты с плазмой моделируют с помощью ЭВМ и даже открывают определенные закономерности в ее поведении, хотя «живая» плазма участия в эксперименте и не принимает. Но вот чтобы делать открытия на программируемом микрокалькуляторе — этому еще можно удивиться. И все же американский физик Митчел Фейгенбаум совсем недавно сделал открытие именно на обычном программируемом микрокалькуляторе [5.27]. Исследуя поведение нелинейных систем, он открыл чисто численно универсальную теорию, согласно которой действие любого нелинейного оператора при последовательном удвоении периода действия оператора не зависит от конкретных особенностей системы или функции. Переход системы, описываемой нелинейными дифференциальными уравнениями, из обычного движения в хаотическое описывается универсальными числами Фейгенбаума

$$\delta = 4.669\,201\,6 \dots$$

$$\alpha = 2.502\,907\,875 \dots$$

Его универсальная теория утверждает, что расстояние между значениями параметра  $C_n$ , при котором возникает  $2^n$  устойчивых точек, при  $n$ -кратном удвоении периода действия некоторого нелинейного оператора удовлетворяет условию

$$C_{kp} - C_n = \delta^{-n} \text{const}, \quad (10.55)$$

где  $C_{kp}$  — критическое значение параметра

$$C_{kp} = C_\infty. \quad (10.56)$$

Это означает, что, обнаружив экспериментально несколько первых удвоений, что соответствует появлению дискретных пиков на частотах

$\frac{\omega}{2}$ ,  $\frac{\omega}{4}$  и т. д., можно на основании универсального закона предсказывать значение параметра  $C_{kp}$ , вслед за которым в системе возникает хаос. Универсальность Фейгенбаума позволяет достаточно просто описывать возникновение турбулентности в жидкости, хотя строгое математическое доказательство универсального закона Фейгенбаума привести пока не удалось.

Универсальные константы были получены на основе исследования некоторой нелинейной итерационной процедуры. Митчел Фейгенбаум для этого использовал итерационную схему

$$x_{n+1} = 4\lambda x_n (1 - x_n). \quad (10.57)$$

Оператор, действующий на точку  $x_n$ , имеет период, равный 1. Тогда, дважды выполнив итерационную процедуру (10.57), мы подействуем на точку  $x_n$  оператором с периодом 2. После еще одной итерации оператор будет иметь период 4 и так далее. При  $\lambda < \Lambda_1$  оператор будет иметь две неподвижные точки, одна из которых  $x=0$ . Значение второй точки  $x^*$  зависит от параметра  $\lambda$  и эта точка является устойчивой: начав итерационный процесс с произвольной точки (кроме 0), вы неизбежно придете в эту точку. При

$$\lambda = \Lambda_1 = \frac{3}{4} \quad (10.58)$$

прежняя устойчивая точка исчезает, но возникают две новые. Разрушение устойчивого итерационного процесса возникает, если

$$f'(x) = \pm 1, \quad (10.59)$$

где

$$x_{n+1} = f(x_n). \quad (10.60)$$

Очевидно, чтобы найти одну следующую устойчивую точку и значение параметра  $\Lambda_2$ , необходимо решить совместно уравнения

$$\begin{aligned} x &= 4\lambda x_1 (1 - x_1), \\ x_1 &= 4\lambda x (1 - x), \\ \{4\lambda x_1 (1 - x_1)\}' &= \pm 1, \end{aligned} \quad (10.61)$$

причем нужно взять знак минус, чтобы нелинейная функция пересекалась с прямой  $y=x$ . Решить эту систему можно, разыскивая минимум функции

$$\Phi(x, \lambda) = \{4\lambda x_1 (1 - x_1) - x\}^2 + \{(4\lambda x_1 (1 - x_1))' - 1\}^2. \quad (10.62)$$

Универсальные постоянные вычисляют как пределы

$$\delta = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\Lambda_{n+1} - \Lambda_n}{\Lambda_{n+2} - \Lambda_{n+1}}, \quad (10.63)$$

$$\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ -\frac{d_n}{d_{n+1}} \right\}, \quad (10.64)$$

где  $\alpha_n$  — алгебраическое расстояние от точки  $x^*$  до ближайшей устойчивой точки  $x_n$  периода  $2^n$ , причем берутся они по очереди то слева,

| $n$ | $x_n^*$      | $\mu_n$     | $\delta_n$ |
|-----|--------------|-------------|------------|
| 1   | 0.666 666 67 | 0.75        |            |
| 2   | 0.579 795 90 | 1.25        |            |
| 3   | 0.564 319 71 | 1.368 098 9 | 4.233 739  |
| 4   | 0.561 103 05 | 1.394 046 2 | 4.551 490  |
| 5   | 0.560 418 81 | 1.399 631 2 | 4.645 890  |
| 6   | 0.560 272 49 | 1.400 828 7 | 4.663 883  |
| 7   | 0.560 241 12 | 1.401 085 3 | 4.666 796  |

то справа от точки  $x^*$ . Вторая универсальная постоянная указывает, во сколько раз сжимается масштаб по  $x$  при  $n$ -кратном удвоении периода действия оператора. Результат двухкратной функциональной итерации и сжатие масштаба показано на рис. 62 для функции

$$x_{n+1} = 1 - \mu x_n^2. \quad (10.65)$$

Для той же функции в табл. 30 указаны первые 7 устойчивых точек  $x_n^*$  и критических параметров  $\mu_n$ . Не все устойчивые точки являются ближайшими к точке  $x^*$ , поэтому по данным таблицы невозможно

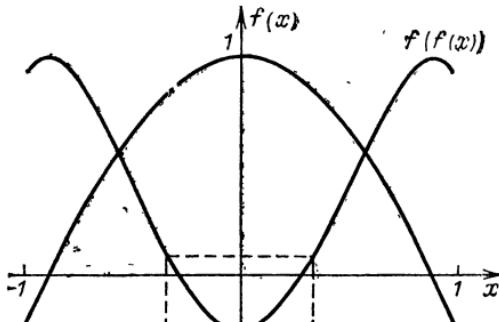


Рис. 62

определить константу  $\alpha$ . Дело в том, что эти точки сближаются и для большого периода действия оператора выделить их отдельно можно, лишь проводя вычисления с повышенной точностью. А вот константу  $\delta$  можно оценить из таблицы, выполняя вычисления на обычном микрокалькуляторе, что в свое время и сделал Фейгенбаум.

## 8. Выполнение аналитических преобразований на микроЭВМ

В наше время существуют ЭВМ, которые способны выполнять те или иные алгебраические преобразования; дифференцируют или интегрируют функции, упрощают сложные выражения, раскрывают

диаграммы Фейнмана. Реализуются эти возможности ЭВМ в языке Продьюс. Оказывается, ряд различных алгебраических преобразований можно делать и на программируемом микрокалькуляторе по соответствующим программам. Так, микрокалькулятор может произвольное количество раз дифференцировать многочлен не выше 13-й степени, брать от него определенный интеграл, раскрывать произведение одночленов.

**Программа 188. Вычисление производной алгебраического многочлена**  $\sum_{i=0}^{13} b_i x^i$ . Программа позволяет автоматически получать коэффициенты нового многочлена. Перед счетом вводятся величины:  $b_0 = \Pi_0$ ,  $b_1 = \Pi_1, \dots, b_{12} = \Pi_{12}$ ,  $b_{13} = \Pi_D$ . В результате счета коэффициенты поступают в регистры  $a_0 = \Pi_0$ ,  $a_1 = \Pi_1, \dots, a_{12} = \Pi_{12}$ ,  $a_{13} = \Pi_D$ . После счета на индикаторе высвечивается коэффициент  $a_{12}$  после С/П —  $a_{11}, \dots$  и так до  $a_0$ . Если при выводе вы сбились со счета и не можете понять, какой коэффициент на индикаторе, то нажмите  $\leftrightarrow$  и вы увидите индекс коэффициента. Если вам нужно продифференцировать функцию  $n$  раз, то необходимо  $n$  раз нажать В/О и С/П, затем считывать коэффициенты в обычном порядке.

Время счета — около 20 с. В качестве теста можно использовать данные:  $1 = \Pi_0 = \Pi_1 = \Pi_2 = \dots = \Pi_D$ , что соответствует  $b_i = 1$ . В результате счета вы получите  $a_{12} = 13$ ,  $a_{11} = 12$ ,  $a_{10} = 11, \dots, a_0 = 1$ .

|     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |
|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| Пх1 | П0  | Пх2 | 2   | ×   | П1  | Пх3 | 3   | ×   | П2  |
| Пх4 | 4   | ×   | П3  | Пх5 | 5   | ×   | П4  | Пх6 | 6   |
| ×   | П5  | Пх7 | 7   | ×   | П6  | Пх8 | 8   | ×   | П7  |
| Пх9 | 9   | ×   | П8  | ПxA | 1   | 0   | ×   | П9  | ПxB |
| 1   | 1   | ×   | ПА  | ПxC | 1   | 2   | ×   | ПВ  | ПxD |
| 1   | 3   | ×   | ПС  | Cx  | ПД  | 1   | 2   | ПxC | С/П |
| 1   | 1   | ПxB | С/П | 1   | 0   | ПxA | С/П | 9   | Пx9 |
| С/П | 8   | Пx8 | С/П | 7   | Пx7 | С/П | 6   | Пх6 | С/П |
| 5   | Пх5 | С/П | 4   | Пx4 | С/П | 3   | Пх3 | С/П | 2   |
| Пх2 | С/П | 1   | Пx1 | С/П | Cx  | Пx0 | С/П |     |     |

**Программа 189. Вычисление определенного интеграла**  $\int_a^b c_i x^i dx$ .

Программа позволяет находить значение интеграла для многочлена не выше 12-й степени. Перед программой вводятся числовые коэффициенты:  $c_0 = \Pi_0$ ,  $c_1 = \Pi_1$ ,  $c_2 = \Pi_2, \dots, c_8 = \Pi_8$ ,  $c_9 = \Pi_9$ ,  $c_{10} = \Pi_A$ ,  $c_{11} = \Pi_B$ ,  $c_{12} = \Pi_C$ . Значения определенных пределов вводятся в операционные регистры перед началом счета:  $a = X$ ,  $b = Y$ . Регистр ПД — буферный.

В качестве теста можно использовать данные  $c_0=c_1=c_2=c_3=\dots=1$ ,

$a=0$ ,  $b=1$ . В результате счета получаем  $\sum_{i=0}^{12} x^i = 3.180\ 133\ 7$ .

| ПП | 10  | ↔   | ПП  | 10 | ↔   | —   | С/П | БП | 00  |
|----|-----|-----|-----|----|-----|-----|-----|----|-----|
| ПД | ПхС | 1   | 3   | ÷  | ×   | ПхВ | 1   | 2  | ПП  |
| 67 | ПхА | 1   | 1   | ПП | 67  | Пх9 | 1   | 0  | ПП  |
| 67 | Пх8 | 9   | ПП  | 67 | Пх7 | 8   | ПП  | 67 | Пх6 |
| 7  | ПП  | 67  | Пх5 | 6  | ПП  | 67  | Пх4 | 5  | ПП  |
| 67 | Пх3 | 4   | ПП  | 67 | Пх2 | 3   | ПП  | 67 | Пх1 |
| 2  | ПП  | 67  | Пх0 | ПП | 68  | В/0 | ÷   | +  | ПхД |
|    | ×   | B/0 |     |    |     |     |     |    |     |

Время вычисления — ~1 мин.

Часто в вычислительной практике исследователей возникает необходимость в преобразованиях вида

$$(a_1x + a_2)(b_1x + b_2) \dots (m_1x + m_2) = D_0 + D_1x + D_2x^2 + \dots$$

Такое преобразование можно выполнять последовательно по схеме

$$(bx + a) \sum_{i=0}^n c_i x^i = \sum_{i=0}^{n+1} D_i x^i.$$

Приведенная ниже программа позволяет находить коэффициенты  $D_i$  по известным  $c_i$ ,  $a$  и  $b$ .

**Программа 190. Вычисление многочлена не выше 11-й степени, получаемого в результате произведения одночленов.** Перед умножением необходимо ввести коэффициенты первого сомножителя  $c_0=\Pi 0$ ,  $c_1=\Pi 1$ ,  $c_2=\Pi 2\dots$ . После В/0 вводим коэффициенты второго сомножителя:  $b$  С/П  $a$  С/П. Результат поступает в регистры  $D_0=\Pi 0$ ,  $D_1=\Pi 1$ ,  $D_2=\Pi 2$ ,  $D_3=\Pi 3$ ,  $D_4=\Pi 4$ , ...,  $D_{11}=\Pi B$ . В процессе счета величины  $b$  и  $a$  поступают в буферные регистры  $b=\Pi C$ ,  $a=\Pi D$ .

Тест:  $(2x+1)(1+x+x^2+\dots+x^{10})=1+3x+3x^2+\dots+3x^{10}+2x^{11}$ .

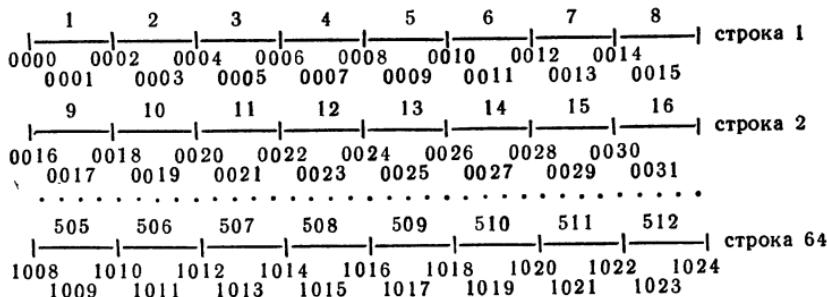
Время счета ~30 с.

|     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |
|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| ПС  | С/П | ПД  | ПхА | ПхС | ×   | ПВ  | Пх9 | ПхС | ×   |
| ПхД | ПхА | ×   | +   | ПА  | Пх8 | ПхС | ×   | ПхД | Пх9 |
| ×   | +   | П9  | Пх7 | ПхС | ×   | ПхД | Пх8 | ×   | +   |
| П8  | Пх6 | ПхС | ×   | ПхД | Пх7 | ×   | +   | П7  | Пх5 |
| ПхС | ×   | ПхД | Пх6 | ×   | +   | П6  | Пх4 | ПхС | ×   |
| ПхД | Пх5 | ×   | +   | П5  | Пх3 | ПхС | ×   | ПхД | Пх4 |
| ×   | +   | П4  | Пх2 | ПхС | ×   | ПхД | Пх3 | ×   | +   |
| П3  | Пх1 | ПхС | ×   | ПхД | Пх2 | ×   | +   | П2  | Пх0 |
| ПхС | ×   | ПхД | Пх1 | ×   | +   | П1  | ПхД | Пх0 | ×   |
| П0  | С/П | БП  | 00  |     |     |     |     |     |     |

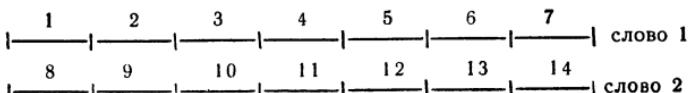
## ПРИЛОЖЕНИЕ

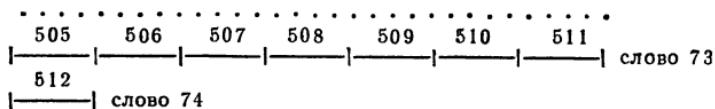
**Возможности ППЗУ микрокалькулятора МК-52.** Программируемые микрокалькуляторы МК-52 имеют возможность работы с полу-программируемым запоминающим устройством (ППЗУ), позволяю-щим длительное время (несколько месяцев) хранить тексты про-грамм либо числовые данные, которыми приходится часто поль-зоваться владельцу микрокалькулятора. Память составляет 1024 разряда, что позволяет вмещать несколько программ общей длиной 511 шагов либо 73 числовых константы. При этом работа с ППЗУ лучше оправдывает себя в режиме хранения текста программ, хуже — числовых данных. Ведь безошибочное считывание программы про-исходит очень быстро — не более 3 с.

Поле накопителя ППЗУ состоит из 64 строк. Каждая ячейка строки, содержащая одну цифру, имеет свой адрес, обозначенный на схеме числом под строкой, изменяющейся от 0 до 1023.



Над строкой указаны адресные шаги, приходящиеся на один опе-ратор программы. Как видим, оператор программы занимает 2 раз-ряда памяти. Деление информации на строки используется только при стирании информации в ППЗУ. Запись же информации в ППЗУ про-исходит словами, в каждом из которых 7 адресных шагов или 14 разрядов памяти.





Запись информации можно осуществлять с любого адресного шага, но обычно записывают с самого начала. Информация записывается и считывается словами целиком в порядке роста номера слова. Поэтому адрес последнего оператора программы должен быть кратным 7, иначе часть информации не запишется.

Известная из механики формула

$$H = \frac{gt^2}{2}$$

может быть реализована программой

Fx<sup>2</sup> Px0 X 2 ÷ C/P ...

Длина программы 6 шагов, и ее необходимо дополнить одним пустым шагом, чтобы она целиком уложилась в первое слово. Во втором слове мы будем хранить константу (*g*) 9.81 = П0.

Программа займет

$2N - 1 = 2 \cdot 7 - 1 = 13$  разрядов памяти,

где *N* — число шагов программы, а вместе с константой *g*

$2N - 1 = 2 \cdot 14 - 1 = 27$  разрядов,

где *N* — общее число адресных шагов.

Адрес записи представляет собой число, содержащее информацию о начальном адресе *A*<sub>0</sub> памяти накопителя ППЗУ и числе шагов программы *N* (или число *N* адресных шагов при записи числовых данных в адресуемую память микрокалькулятора). Первая цифра адреса — незначащая информация и может быть любой цифрой кроме нуля. Следующие четыре цифры — начальный адрес *A*<sub>0</sub>, еще две — число шагов программы. Последняя цифра мантиссы со степенью представляет собой незначащую информацию и может вообще отсутствовать. Поэтому для записи нашей программы адрес может быть равен 50000076, где

5 } — незначащая информация,  
 6 }

0000 — начальный адрес *A*<sub>0</sub>,

07 — число шагов программы *N*.

Для записи константы *g* адрес равен 90016078, где

9 } — незначащая информация,  
 8 }

0016 = *A*<sub>0</sub>,

07 = *N*.

Работа с ППЗУ имеет три режима работы: стирание, запись, считывание, которые устанавливаются переключателем «С/З/СЧ». Обмен информацией между программируемым микрокалькулятором и ППЗУ осуществляется клавишей А↑, что приводит к запоминанию в микрокалькуляторе адреса обращения к ППЗУ и клавиши ↑↓, вызывающей непосредственно обмен. Обмен информацией сопровождается индикацией — свечением знака «минус» во всех разрядах. Во время обмена запрещается нажимать какие-либо другие клавиши. Переключатель «Д/П» служит для указания вида записи: Д — запись в адресную память, П — в программную.

Итак, набрав программу на микрокалькуляторе с начального адреса и введя константу  $g$  в регистр П0, устанавливаем переключатель работы с ППЗУ в режим записи. Набираем адрес 50000076, устанавливаем переключатель «Д/П» в положение П, после чего нажимаем клавиши А↑, ↑↓. Окончание индикации говорит о завершении ввода программы. Набираем далее адрес 90016078, устанавливаем «Д/П» в положение Д и нажимаем А↑, ↑↓. Окончание индикации укажет нам на завершение ввода константы. Числовая информация программируемого микрокалькулятора в процессе считывания стирается, в чем можно убедиться самим.

Считывание информации производится в том же порядке, что и запись, но при положении СЧ переключателя рода работы с ППЗУ. Поэтому для считывания записанной информации необходимо набрать

B/0, FABT, C/3/C4 → C4, Д/П → П, 50000076, А↑, ↑↓,

а когда окончится индикация ввода, то

Д/П → Д, 90016078, А↑, ↑↓.

После окончания индикации программа и константа  $g$  будут введены для работы. Заметим, что считывание программы в адресуемую память и числовых данных в программу может привести к запрету индикации. Если это произошло, то необходимо выключить микрокалькулятор и снова включить его. Выключать микрокалькулятор вообще следует только в положении СЧ, так как в противном случае какое-либо нажатие клавиш может вызвать порчу информации в ППЗУ.

Режим стирания в ППЗУ используется в том случае, когда на место старой информации нужно записать новую. Если предшествующая запись не будет стерта, то новая информация наложится на старую, что приведет к ошибкам при записи. Стирается информация построчно, т. е. по восемь символов в строке. Для стирания всей информации в строке необходимо в адресе обращения к ППЗУ указать хотя бы один адрес, расположенный на данной строке. Объем стираемой информации определяется числом шагов в адресе обращения к ППЗУ. Стирание информации осуществляется в по-

рядке роста операторов программы, а в адресуемой — начиная с регистра П0 и кончая ПД. За один прием можно стереть от 1 до 13 строк. Процедура стирания производится так же, как запись и считывание. Если переключатель «Д/П» установлен в положение П, то будет сохранена числовая информация, если же он в положении Д, то сохранится информация о программах. Для очистки всего накопителя ППЗУ необходимо несколько раз повторить операции с новыми начальными адресами:

$$A_0 = 0000, \quad A_0 = 0208, \quad A_0 = 0416, \quad A_0 = 0624, \quad A_0 = 0832$$

с максимально возможным количеством шагов.

Для работы с ППЗУ необходимо завести картотеку программ и числовых данных, хранимых в ППЗУ. Иначе во время записи и стирания информации можно легко запутаться.

## УКАЗАТЕЛЬ ПРОГРАММ

|      |  |    |
|------|--|----|
| 1.   | Вычисление $P(a, b)$ при нормальном законе распределения . . . . .   | 48 |
| 2.   | Вычисление среднего $\bar{x}$ и стандартного отклонения $\sigma$ . . . . .   | 48 |
| 3.   | Вычисление $\bar{x}$ и среднеквадратической погрешности $S_n$ . . . . .  | 50 |
| 4.   | Вычисление средней плотности для построения гистограммы распределения . . . . .  | 52 |
| 5*.  | Вычисление $t_{\alpha/2}$ , если доверительная вероятность $\alpha=0.95$ или $\alpha=0.99$ . . . . .                             | 55 |
| 6*.  | Нахождение $\bar{x}$ и $(\bar{x}-\Delta x, \bar{x}+\Delta x)$ при заданной надежности $\alpha=0.95$ или $\alpha=0.99$ . . . . .  | 55 |
| 7.   | Вычисление теоретического коэффициента корреляции двух величин $r(x, y)$ . . . . .   | 58 |
| 8.   | Вычисление эмпирического коэффициента корреляции $r(x, y)$ . .   | 58 |
| 9.   | Оценка коэффициента корреляции $r_{ij/k}$ в случае множественной регрессии, когда влияние третьей величины исключается . . . . . | 59 |
| 10.  | Линейное сглаживание по трем точкам . . . . .  | 61 |
| 11*. | Линейное сглаживание по пяти точкам . . . . .  | 61 |
| 12.  | Вычисление $a_0$ и $a_1$ при аппроксимации кривой методом наименьших квадратов . . . . .   | 65 |
| 13.  | Вычисление $a_0$ , $a_1$ , $a_2$ при аппроксимации кривой методом наименьших квадратов . . . . .                                 | 66 |
| 14.  | Вычисление $\Phi_1(x)$ , $\Phi_2(x)$ , $a_0$ , $a_1$ . . . . .   | 79 |
| 15.  | Вычисление $\Phi_3(x)$ и $a_3$ . . . . .   | 71 |
| 16.  | Вычисление $\Phi_4(x)$ и $a_4$ . . . . .   | 71 |
| 17.  | Вычисление $a_4$ . . . . .   | 72 |
| 18.  | Вычисление коэффициентов суммы $\sum_{k=0}^4 c_k x^k$ . . . . .  | 72 |
| 19.  | Вычисление среднеквадратического отклонения теоретической кривой от экспериментальных точек . . . . .                            | 73 |
| 20.  | Вычисление параметров $a$ и $b$ , если $y=a+b/x$ . . . . .   | 77 |
| 21.  | Вычисление параметров $a$ и $b$ , если $y=a+b/x$ . . . . .   | 77 |
| 22.  | Вычисление параметров $a$ и $b$ , если $y=1/(a+bx)$ . . . . .  | 77 |
| 23.  | Вычисление параметров $a$ и $b$ , если $y=1/(a+bx)$ . . . . .  | 78 |
| 24.  | Вычисление параметров $a$ и $b$ , если $y=x/(a+bx)$ . . . . .  | 78 |
| 25.  | Вычисление $a$ и $b$ , если $y=x/(a+bx)$ . . . . .   | 78 |
| 26.  | Вычисление $a$ и $b$ , если $y=ab^x$ . . . . .   | 79 |
| 27.  | Вычисление $a$ и $b$ , если $y=aeb^x$ . . . . .  | 79 |
| 28.  | Вычисление $a$ и $b$ , если $y=1/(a+be^{-x})$ . . . . .  | 80 |
| 29.  | Вычисление $a$ и $b$ , если $y=ax^b$ . . . . .   | 80 |
| 30.  | Вычисление $a$ и $b$ , если $y=a+b^{\ln x}$ . . . . .  | 80 |

|   |     |
|---|-----|
| 31. Вычисление $a$ и $b$ , если $y=a/(b+x)$ . . . . .   | 81  |
| 32. Вычисление $a$ и $b$ , если $y=a/(b+x)$ . . . . .   | 81  |
| 33. Вычисление $a$ и $b$ , если $y=ax/(b+x)$ . . . . .  | 82  |
| 34. Вычисление $a$ и $b$ , если $y=ax/(b+x)$ . . . . .  | 82  |
| 35. Вычисление $a$ и $b$ , если $y=ax^2/(b+x)$ . . . . .  | 82  |
| 36. Вычисление $a$ и $b$ , если $y=ae^{bx}/x$ . . . . .   | 83  |
| 37. Вычисление $a$ и $b$ , если $y=a+bx^n$ . . . . .  | 83  |
| 38. Вычисление $a$ и $b$ , если $y=a+bx^k$ , где $k$ – любое число . . . . .  | 84  |
| 39. Вычисление коэффициентов ряда Фурье для заданной таблично функции . . . . .   | 85  |
| 40. Вычисление коэффициентов $a_0$ , $a_1$ , $b_1$ при аппроксимации функции выражением $\Phi(x)=a_0+a_1 \cos(\pi x/l)+b_1 \sin(\pi x/l)$ . . . . . | 87  |
| 41. Линейная интерполяция . . . . .   | 89  |
| 42. Квадратическая интерполяция при произвольных узлах . . . . .  | 89  |
| 43. Кубическая интерполяция при четырех произвольных узлах . . . . .  | 89  |
| 44*. Интерполяция при пяти произвольных узлах . . . . .   | 90  |
| 45. Параболическая интерполяция по трем узлам методом Ньютона.  | 91  |
| 46. Кубическая интерполяция по четырем узлам . . . . .  | 91  |
| 47. Интерполяция по пяти узлам . . . . .  | 92  |
| 48. Двухмерная интерполяция первого порядка . . . . .   | 96  |
| 49. Двухмерная интерполяция второго порядка . . . . .   | 96  |
| 50. Трехмерная интерполяция первого порядка . . . . .   | 97  |
| 51. Вычисление величины $\chi^2$ . . . . .  | 99  |
| 52. Вычисление величины $\chi^2$ , если шаг по $x$ равномерный . . . . .  | 101 |
| 53. Вычисление точек функции . . . . .  | 102 |
| 54. Вычисление точек функции с округлением до 0.1 . . . . .   | 103 |
| 55. Отыскание точек минимума и максимума для построения функции . . . . .   | 104 |
| 56. Вычисление точек функции, заданной параметрически (с округлением до 0.1) . . . . .  | 108 |
| 57. Построение функции с вычислением за один такт девяти значений   | 111 |
| 58*. Построение функции с вычислением за один такт десяти значений  | 111 |
| 59. Отыскание экстремальных точек при построении графика в логарифмической шкале . . . . .  | 113 |
| 60. Построение графика в логарифмической шкале с псевдоокруглением до 0.01 . . . . .  | 113 |
| 61. Отыскание экстремальных точек при построении графика в показательной шкале с $a=e$ . . . . .  | 114 |
| 62. Построение функции в показательной шкале с основанием степени $e$ и с псевдоокруглением до 0.01 . . . . .                                       | 115 |
| 63. Отыскание экстремальных точек функции в показательной шкале с основанием степени $a=10$ . . . . .   | 115 |
| 64. Построение функции в показательной шкале с основанием степени $a=10$ . . . . .  | 116 |
| 65. Отыскание экстремальных точек функции в показательной шкале с произвольным основанием $a$ . . . . .   | 116 |
| 66. Построение графика в показательной шкале с произвольным основанием $a$ . . . . .  | 117 |
| 67. Отыскание экстремальных точек при построении функции в шкале $\operatorname{arctg} x$ . . . . .   | 118 |
| 68. Построение функции в шкале $\operatorname{arctg} x$ . . . . .   | 118 |
| 69. Вычисление $y'(x)$ с точностью до $\theta(h)$ . . . . .   | 125 |
| 70. Вычисление $y''(x)$ с точностью до $\theta(h^2)$ . . . . .  | 125 |
| 74. Вычисление $y''(x)$ с точностью до $\theta(h^2)$ . . . . .  | 125 |
| 72. Вычисление $y'''(x)$ с точностью до $\theta(h^3)$ . . . . .   | 126 |
| 73. Вычисление $y'(x)$ по формулам Рунге с точностью до $\theta(h^3)$ . . . . .   | 126 |

|       |  |     |
|-------|--|-----|
| 74.   | Численное дифференцирование таблицы с точностью до $\theta(h)$                           | 127 |
| 75.   | Вычисление табличных значений $y^k$ с точностью до $\theta(h^2)$                         | 127 |
| 76.   | Вычисление табличных значений $y''$ с точностью до $\theta(h^2)$                         | 127 |
| 77.   | Вычисление табличных значений $y'''$ с точностью до $\theta(h^3)$                        | 127 |
| 78.   | Вычисление табличных значений $y^{IV}$ с точностью до $\theta(h^4)$                      | 127 |
| 79.   | Вычисление табличных значений $y^V$ с точностью до $\theta(h^5)$                         | 128 |
| 80.   | Численное интегрирование методом Симпсона по трем точкам                                 | 130 |
| 81.   | Численное интегрирование по четырем значениям функции                                    | 130 |
| 82.   | Численное интегрирование по пяти значениям функции                                       | 130 |
| 83.   | Численное интегрирование по шести значениям функции                                      | 130 |
| 84.   | Численное интегрирование по семи значениям функции                                       | 131 |
| 85.   | Численное интегрирование методом трапеции при большом количестве точек функции           | 131 |
| 86.   | Численное интегрирование методом Симпсона при большом количестве точек функции           | 131 |
| 87.   | Численное интегрирование аналитической функции методом трапеции                          | 132 |
| 88.   | Численное интегрирование аналитической функции методом Симпсона                          | 133 |
| 89.   | Численное интегрирование методом Гаусса при $n=3$  | 134 |
| 90.   | Численное интегрирование методом Гаусса при $n=5$  | 135 |
| 91.   | Численное интегрирование методом Гаусса при $n=6$  | 136 |
| 92.   | Численное интегрирование методом Чебышева при $n=7$                                      | 137 |
| 93.   | Численное интегрирование методом Чебышева при $n=9$                                      | 138 |
| 94.   | Численное интегрирование по формуле Лагерра при $n=5$                                    | 140 |
| 95.   | Численное интегрирование по формуле Эрмита при $n=5$                                     | 141 |
| 96.   | Вычисление несобственного интеграла Гаусса — Чебышева                                    | 142 |
| 97.   | Вычисление двукратного интеграла методом Гаусса при $n=2$                                | 145 |
| 98.   | Двукратное интегрирование методом Симпсона   | 147 |
| 99.   | Вычисление двукратного интеграла методом прямоугольников                                 | 147 |
| 100.  | Вычисление трехкратного интеграла методом прямоугольников                                | 148 |
| 101.  | Вычисление двукратного интеграла методом Симпсона по табличным данным                    | 148 |
| 102*. | Вычисление кратных интегралов методом Монте-Карло  | 151 |
| 103.  | Схема Эйлера первого порядка   | 162 |
| 104.  | Двухшаговая схема (а) решения дифференциального уравнения первого порядка                | 162 |
| 105.  | Двухшаговая схема (б) решения дифференциального уравнения первого порядка                | 162 |
| 106.  | Метод Адамса—Бошфорта решения дифференциального уравнения                                | 163 |
| 107.  | Метод Эйлера решения системы двух дифференциальных уравнений                             | 163 |
| 108.  | Двухшаговая схема решения системы двух дифференциальных уравнений                        | 163 |
| 109.  | Решение системы двух дифференциальных уравнений методом Адамса — Бошфорта                | 164 |
| 110.  | Решение системы трех уравнений по схеме Эйлера   | 165 |
| 111.  | Численное решение системы трех уравнений по двухшаговой разностной схеме                 | 165 |
| 112.  | Решение системы четырех уравнений по схеме Эйлера  | 166 |
| 113.  | Численное решение системы пяти уравнений по схеме Эйлера                                 | 166 |
| 114.  | Численное решение системы шести уравнений по схеме Эйлера                                | 167 |
| 115.  | Метод Рунге—Кутта четвертого порядка для дифференциального уравнения первого порядка     | 169 |
| 116.  | Решение системы двух дифференциальных уравнений методом Рунге — Кутта четвертого порядка | 170 |

|       |  |     |
|-------|--|-----|
| 117.  | Метод Рунге — Кутта четвертого порядка для решения дифференциального уравнения второго порядка . . . . .             | 171 |
| 118.  | Разностная схема Лакса первого порядка . . . . .   | 180 |
| 119.  | Разностная схема Лелевье для решения уравнения переноса . . . . .  | 181 |
| 120.  | Схема Лакса для численного решения двухмерных уравнений Максвелла для плоскополяризованной волны в вакууме . . . . . | 182 |
| 121.  | Метод первого порядка для уравнения переноса . . . . .   | 183 |
| 122.  | Метод с перешагиванием для уравнения теплопроводности . . . . .  | 184 |
| 123.  | Явный метод Дюфора — Франкеля . . . . .  | 184 |
| 124.  | Решение параболического уравнения явным методом, если $K = f(x)$   | 185 |
| 125.  | Метод с перешагиванием для параболического уравнения, если $K=f(x)$ . . . . .  | 186 |
| 126.  | Решение параболического уравнения методом первого порядка, если $K=K(x, u)$ . . . . .                                | 186 |
| 127*. | Вычисление цифр рельефа поверхности . . . . .  | 188 |
| 128*. | Вычисление цифр изолинии рельефа поверхности . . . . .   | 189 |
| 129.  | Определение собственного значения дифференциального уравнения первого порядка вариационным методом . . . . .         | 193 |
| 130.  | Вычисление собственных значений дифференциального уравнения второго порядка . . . . .                                | 193 |
| 131.  | Вычисление определителя второго порядка . . . . .  | 196 |
| 132.  | Вычисление определителя третьего порядка . . . . .   | 196 |
| 133.  | Вычисление определителя четвертого порядка . . . . .   | 197 |
| 134.  | Вычисление определителя пятого порядка . . . . .   | 197 |
| 135.  | Решение системы двух уравнений . . . . .   | 198 |
| 136.  | Решение системы трех уравнений методом Крамера . . . . .   | 198 |
| 137.  | Решение системы четырех уравнений методом Гаусса . . . . .   | 199 |
| 138.  | Решение системы пяти уравнений методом Гаусса . . . . .  | 199 |
| 139.  | Вычисление произведения матриц $A(2, 2) B(2, 2)$ . . . . .   | 200 |
| 140.  | Вычисление произведения матриц $A(3, 3) B(3, 1)$ . . . . .   | 201 |
| 141.  | Вычисление $G(1, 1)=A(1, 7) B(1, 1)$ . . . . .   | 201 |
| 142.  | Вычисление обратной матрицы $A^{-1}(2, 2)$ . . . . .   | 202 |
| 143.  | Вычисление обратной матрицы $A^{-1}(3, 3)$ . . . . .   | 202 |
| 144.  | Вычисление произвольной функции от матрицы $A(2, 2)$ . . . . .   | 203 |
| 145.  | Вычисление векторного произведения . . . . .   | 207 |
| 146.  | Поворот радиус-вектора вокруг оси $Z$ . . . . .  | 207 |
| 147.  | Вычисление матриц Эйлерового поворота . . . . .  | 208 |
| 148.  | Вычисление угла между векторами $a$ и $b$ . . . . .  | 208 |
| 149.  | Вычисление верхней границы корней многочлена третьей степени методом Ньютона ; . . . . .                             | 213 |
| 150.  | Вычисление верхней границы корней многочлена четвертой степени методом Ньютона . . . . .                             | 213 |
| 151.  | Вычисление верхней границы корней многочлена пятой степени . . . . .   | 213 |
| 152.  | Вычисление верхней границы корней многочлена шестой степени . . . . .  | 213 |
| 153.  | Вычисление верхней границы корней многочлена седьмой степени . . . . .   | 214 |
| 154.  | Вычисление верхней границы корней многочлена восьмой степени . . . . .   | 214 |
| 155.  | Метод дихотомии отыскания корней нелинейного уравнения . . . . .   | 218 |
| 156.  | Метод декахотомии отыскания корней нелинейного уравнения . . . . .   | 218 |
| 157.  | Модифицированный метод дихотомии отыскания корней нелинейного уравнения . . . . .                                    | 221 |
| 158.  | Нахождение собственных чисел матрицы $A(2, 2)$ . . . . .   | 221 |
| 159.  | Вычисление коэффициентов характеристического многочлена матрицы $A(3, 3)$ . . . . .                                  | 222 |
| 160.  | Отыскание максимума функции методом декахотомии . . . . .  | 224 |
| 161.  | Нахождение вершины холма (максимума функции) методом декахотомии . . . . .   | 226 |

|       |  |     |
|-------|--|-----|
| 162.  | Отыскание минимума функции двух переменных методом градиентного спуска . . . . .   | 228 |
| 163.  | Комплексные арифметические действия . . . . .  | 228 |
| 164.  | Комплексный корень $k$ -й степени из комплексного числа . . . . .  | 229 |
| 165.  | Вычисление функции $\sin z$ , $\cos z$ , $\operatorname{sh} z$ , $\operatorname{ch} z$ , $e^z$ , $\ln z$ , $z^{\frac{z}{1}}$ , где $z$ — комплексное число . . . . . | 229 |
| 166.  | Вычисление произведения кватернионов и радиус-вектора точки после поворота . . . . .   | 233 |
| 167.  | Вычисление нормы и получение единичного кватерниона . . . . .  | 235 |
| 168.  | Сложение двух 49-значных чисел . . . . .   | 236 |
| 169.  | Вычитание 49-значного числа из 50-значного . . . . .   | 237 |
| 170.  | Точное умножение 31-значного числа на 4-значное . . . . .  | 238 |
| 171.  | Точное умножение двух 9-значных чисел . . . . .  | 238 |
| 172*. | Умножение 14-значных чисел с получением 14 знаков в произведении . . . . .   | 238 |
| 173.  | Деление 78-значного числа на однозначное . . . . .   | 239 |
| 174*. | Деление на 14-значное число . . . . .  | 240 |
| 175.  | Вычисление $\Gamma(x)$ при любых $x$ . . . . .   | 247 |
| 176.  | Вычисление функции Бесселя по разложению в степенной ряд при $x \leq 10$ , $n \geq x$ . . . . .  | 247 |
| 177.  | Вычисление функций Бесселя путем интегрирования . . . . .  | 247 |
| 178.  | Вычисление эллиптических интегралов первого и второго рода . .   | 248 |
| 179.  | Вычисление $C(x)$ при $x < 1$ . . . . .  | 248 |
| 180.  | Вычисление $S(x)$ при $x < 1$ . . . . .  | 249 |
| 181.  | Вычисление интеграла Френеля при $x \gg 1$ . . . . .   | 249 |
| 182.  | Вычисление $C(x)$ численным интегрированием . . . . .  | 249 |
| 183.  | Вычисление интегрального синуса при $x < 1$ . . . . .  | 250 |
| 184.  | Вычисление интегрального синуса путем численного интегрирования . . . . .  | 250 |
| 185.  | Вычисление интегрального синуса при $x > 8$ при помощи асимптотического ряда . . . . .   | 250 |
| 186.  | Вычисление бета-функции $B(x, y)$ . . . . .  | 251 |
| 187*. | Преобразование периодической дроби к обыкновенной . . . . .  | 252 |
| 188.  | Вычисление производной алгебраического многочлена $\sum_{i=0}^{13} b_i x^i$ . . . . .  | 256 |
| 189.  | Вычисление определенного интеграла $\int_a^b c_i x^i dx$ . . . . .   | 256 |
| 190.  | Вычисление многочлена не выше 11-й степени, получаемого в результате произведения одночленов . . . . .   | 257 |

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бериан Б.* Программирование на языке ассемблера системы IBM/370.— М.: Мир, 1980.
2. *Бранец А. И., Шмыглевский В. А.* Применение кватернионов в задачах ориентации твердого тела.— М.: Наука, 1973.
3. *Васильев Н. Б., Гутенмахер В. Л., Раббот Ж. М., Тоом А. Л.* Заочные математические олимпиады.— М.: Высшая школа, 1981.
4. *Волков Е. А.* Численные методы.— М.: Наука, 1982.
5. *Вул Е. Б., Синай Я. Г., Ханин К. М.* Универсальность Фейгенбаума и термодинамический формализм//УМН.— 1984.—39:3.— С. 3—35.
6. *Гантмахер.* Теория матриц.— М.: Наука, 1988.
7. *Дьяконов В. П.* Справочник по расчетам на микрокалькуляторах.— М.: Наука, 1985.
8. *Лабораторные занятия по физике//Под ред. Л. Л. Гольдина.*— М.: Наука, 1983.
9. *Ильин В. А., Позняк Э. Г.* Аналитическая геометрия.— М.: Наука, 1981.
10. *Грейм И. А.* Зеркально-призменные системы.— М.: Машиностроение, 1981.
11. *Калиткин Н. Н.* Численные методы.— М.: Наука, 1978.
12. *Корн Г. и Корн Т.* Справочник по математике для научных работников и инженеров.— М.: Наука, 1984.
13. *Куров А. Г.* Курс высшей алгебры.— М.: Наука, 1975.
14. *Кучерук І. М., Дущенко В. П., Андріанов В. М.* Обробка результатів в фізичних вимірювань.— К.: Вища школа, 1981.
15. *Львовский Е. Н.* Статистические методы построения эмпирических формул.— М.: Высшая школа, 1982.
16. *Мак-Кракен Д., Дорн У.* Численные методы и программирование на фортране.— М.: Мир, 1977.
17. *Наука и жизнь.*— 1983.— № 10.— С. 21.
18. *Бойко А.* Электроника Б3-34 обретает голос//Наука и жизнь.— 1984.— № 10.— С. 96.
19. *Как отредактировать программу?//Наука и жизнь.*— 1984.— № 12.— С. 96.
20. *Поттер Д.* Вычислительные методы в физике.— М.: Мир, 1973.
21. *Руминский Л. З.* Элементы теории вероятностей.— М.: Наука, 1976.
22. *Славин Г. В.* Программирование на программируемых микрокалькуляторах типа «Электроника—Б3-34».— Таллин: Валгус, 1984.
23. *Справочник по специальным функциям//Под ред. М. Абрамовица и И. Стиган.*— М.: Наука, 1979.

24. Глазков Ю. Н. Мягкой посадки//Техника—молодежи.—1985.—№ 10.— С. 48—49.
25. Трохименко Я. К., Любич Ф. Д. Инженерные расчеты на микроКалькуляторах.— Киев: Техника, 1980.
26. Трохименко Я. К., Любич Ф. Д. Инженерные расчеты на программируемых микроКалькуляторах.— Киев: Техника, 1985.
27. Фейгенбаум М. Универсальность в поведении нелинейных систем //УФН.—1983.—141:2.— С. 343—374.
28. Цветков А. Н. Прикладные программы для микроЭВМ «Электроника Б3-21»— М.: Финансы и статистика, 1982.
29. Цветков А. Н., Епанечников В. А. Прикладные программы для микроЭВМ «Электроника Б3-34», «Электроника МК-54», «Электроника МК-56».— М.: Финансы и статистика, 1984.

## ОГЛАВЛЕНИЕ

|  |     |
|--|-----|
| Предисловие . . . . .  | 3   |
| <b>Г л а в а 1. Основы работы с микрокалькулятором . . . . .</b>   |     |
| 1. Общие сведения о микрокалькуляторах . . . . .   | 5   |
| 2. Простейшие вычисления на микрокалькуляторах . . . . .   | 8   |
| 3. Порядок вычислений со стеком . . . . .  | 11  |
| 4. Адресуемая память . . . . .   | 14  |
| 5. Вычисления с использованием стековых и адресуемых ре-<br>гистров. . . . .                                 | 14  |
| 6. Процесс программирования . . . . .  | 20  |
| 7. Безусловные и условные переходы . . . . .   | 24  |
| 8. Циклы и косвенные операции . . . . .  | 25  |
| 9. Подпрограммы . . . . .  | 31  |
| 10. Отладка и редактирование программы . . . . .   | 33  |
| 1. Способы записи программы . . . . .  | 36  |
| 2. Оптимизация программ . . . . .  | 38  |
| 13. Несколько слов о требованиях к тестам . . . . .  | 40  |
| <b>Г л а в а 2. Оценка ошибок вычислений . . . . .</b>   | 42  |
| 1. О погрешности вычислений . . . . .  | 42  |
| 2. Оценка погрешности эксперимента при помощи нормального<br>распределения . . . . .                         | 46  |
| 3. Является ли распределение нормальным? . . . . .   | 51  |
| 4. Распределение Стьюдента (Госсета) . . . . .   | 53  |
| 5. Корреляционные связи и их оценка . . . . .  | 56  |
| 6. Сглаживание исследовательских данных эксперимента . . . . .   | 60  |
| <b>Г л а в а 3. Аппроксимация экспериментальных данных функцио-<br/>    нальными зависимостями . . . . .</b> | 63  |
| 1. Метод наименьших квадратов и простейшие виды аппрок-<br>симации . . . . .                                 | 63  |
| 2. Полиномиальная аппроксимация высокого порядка . . . . .   | 67  |
| 3. Приближение экспериментальных кривых двухпараметри-<br>ческими зависимостями . . . . .                    | 73  |
| 4. Аппроксимация тригонометрическими функциями . . . . .   | 84  |
| 5. Интерполяция по Лагранжу и Гауссу . . . . .   | 88  |
| 6. Многомерная интерполяция . . . . .  | 93  |
| 7. Примеры применения интерполяции . . . . .   | 98  |
| 8. Критерий значимости и метод $\chi^2$ . . . . .  | 98  |
| <b>Г л а в а 4. Построение графиков . . . . .</b>  | 102 |
| 1. Общие принципы построения графиков . . . . .  | 102 |
| 2. Максимум и минимум графика . . . . .  | 104 |
|  | 269 |

|  |            |
|--|------------|
| 3. Графики кусочно-непрерывных функций и функций со знаком модуля . . . . .                          | 105        |
| 4. Графики функций, заданных в параметрическом виде . . . . .  | 108        |
| 5. Некоторые упрощенные способы построения графиков . . . . .  | 110        |
| 6. Графики с функциональными шкалами . . . . .   | 112        |
| 7. Построение линий пересечения поверхностей . . . . .   | 122        |
| <b>Г л а в а 5. Операции численного дифференцирования и интегрирования . . . . .</b>                 | <b>123</b> |
| 1. Численное дифференцирование . . . . .   | 123        |
| 2. Численное интегрирование таблиц функций . . . . .   | 128        |
| 3. Интегрирование функций, заданных в аналитическом виде . . . . .                                   | 132        |
| 4. Численное интегрирование аналитических функций методами Гаусса и Чебышева . . . . .               | 133        |
| 5. Вычисление несобственных интегралов . . . . .   | 138        |
| 6. Кратные интегралы . . . . .   | 143        |
| 7. Метод Монте-Карло . . . . .   | 149        |
| 8. Некоторые практические задачи . . . . .   | 152        |
| <b>Г л а в а 6. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений . . . . .</b>                        | <b>155</b> |
| 1. Сущность разностного метода решения уравнений . . . . .   | 155        |
| 2. Устойчивость разностного метода . . . . .   | 157        |
| 3. Разностные схемы для обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка . . . . .            | 158        |
| 4. Реализация разностных схем для обыкновенных дифференциальных уравнений . . . . .                  | 162        |
| 5. Метод Рунге—Кутта решения дифференциального уравнения . . . . .                                   | 168        |
| 6. Примеры решения физических задач . . . . .  | 172        |
| <b>Г л а в а 7. Решение уравнений в частных производных . . . . .</b>                                | <b>175</b> |
| 1. Устойчивость численных схем для решения уравнений в частных производных . . . . .                 | 175        |
| 2. Явные консервативные методы для гиперболических уравнений . . . . .                               | 176        |
| 3. Методы решения параболических уравнений . . . . .   | 182        |
| 4. Графическое представление результатов счета при решении уравнений в частных производных . . . . . | 187        |
| 5. Задачи определения собственных значений дифференциальных уравнений . . . . .                      | 190        |
| <b>Г л а в а 8. Операции линейной алгебры . . . . .</b>  | <b>195</b> |
| 1. Вычисление определителей и решение систем линейных уравнений . . . . .                            | 195        |
| 2. Операции линейной алгебры . . . . .   | 200        |
| 3. Вычисление обратной матрицы . . . . .   | 202        |
| 4. Блочные преобразования . . . . .  | 204        |
| 5. Некоторые операции аналитической геометрии . . . . .  | 207        |
| <b>Г л а в а 9. Решение алгебраических задач . . . . .</b>   | <b>210</b> |
| 1. Определение границ корней алгебраических многочленов . . . . .                                    | 210        |
| 2. Нахождение корней нелинейных уравнений . . . . .  | 215        |
| 3. Задачи на собственные значения . . . . .  | 221        |
| 4. Отыскание минимума и максимума функции . . . . .  | 222        |
| 5. Операции с комплексными числами . . . . .   | 228        |
| 6. Кватернионы в задачах ориентации твердого тела . . . . .  | 231        |

|  |            |
|--|------------|
| <b>Г л а в а 10. Вычисления с повышенной точностью . . . . .</b>           | <b>236</b> |
| 1. Выполнение арифметических операций . . . . .                            | 236        |
| 2. Вычисление значений функций при помощи рядов . . . . .                  | 241        |
| 3. Итерации при вычислении функций . . . . .                               | 244        |
| 4. Вычисление специальных функций . . . . .                                | 246        |
| 5. Преобразование периодических десятичных дробей к обыкновенным . . . . . | 252        |
| 6. Вычисление постоянных Фейгенбаума . . . . .                             | 253        |
| 7. Выполнение аналитических преобразований на микроЭВМ                     | 255        |
| <b>Приложение . . . . .</b>  | <b>258</b> |
| <b>Указатель программ . . . . .</b>  | <b>262</b> |
| <b>Список литературы . . . . .</b>   | <b>267</b> |

*ШЕЛЕСТ Александр Евгеньевич*  
**МИКРОКАЛЬКУЛЯТОРЫ В ФИЗИКЕ**

Заведующий редакцией *В. В. Елисеев*  
Редакторы *М. К. Ермолова, Н. Е. Калинина*  
Художественный редактор *Т. Н. Кольченко*  
Технические редакторы *И. Ш. Аксельрод,  
В. Н. Кондакова*

Корректоры *Л. И. Назарова, Н. Б. Румянцева*

ИБ № 32509

---

Сдано в набор 31.03.88. Подписано к печати 27.10.88. Формат 84×108/32. Бумага кн.-журн. Гарнитура литературная. Печать высокая. Усл. печ. л. 14,28. Усл. кр.-отт. 14,49. Уч.-изд. л. 16,96. Тираж 168 000 экз. (1-й завод 1—100 000 экз.). Заказ № 2717. Цена 90 коп.

---

Ордена Трудового Красного Знамени  
издательство «Наука»  
Главная редакция  
физико-математической литературы  
117071 Москва В-71 Ленинский проспект, 15

---

Ордена Октябрьской Революции и ордена Трудового Красного Знамени МПО «Первая Образцовая типография» Союзполиграфпрома при Государственном комитете СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли 113054 Москва, Валовая, 28

---

Отпечатано во 2-й типографии издательства  
«Наука». 121099 Москва Г-99, Шубинский пер., 6.  
Заказ 2315

90 коп.

ЗД  
Ш426

