



В МИРЕ НАУКИ И ТЕХНИКИ

В.ГИЛЬДЕ, З.АЛЬТРИХТЕР

С МИКРО- КАЛЬКУЛЯТОРОМ ПОВСЮДУ

КАК РАСШИРИТЬ
ПРИМЕНЕНИЕ ВАШЕГО МИКРОКАЛЬКУЛЯТОРА



ИЗДАТЕЛЬСТВО **МИР** МОСКВА

**С МИКРОКАЛЬКУЛЯТОРОМ
ПОВСЮДУ**

W. GILDE, S. ALTRICHTER

NOCH MEHR SPAß
MIT DEM TASCHENRECHNER

VEB FACHBUCHVERLAG
LEIPZIG 1981

В. ГИЛЬДЕ, З. АЛЬТРИХТЕР

С МИКРОКАЛЬКУЛЯТОРОМ ПОВСЮДУ

Перевод с немецкого
Ю. А. ДАНИЛОВА



МОСКВА «МИР» 1988

ББК 32.974

Г47

УДК 518.5

Гильде В., Альтрихтер З.

Г47 С микрокалькулятором повсюду: Пер. с нем. — М.: Мир, 1988. — 200 с., ил. — (В мире науки и техники)

На задачах, заимствованных из различных областей науки, техники и жизни, авторы из ГДР, хорошо известные советскому читателю по выдержавшей два издания книге «С микрокалькулятором в руках» («Мир», 1980, 1987), показывают широкие возможности современных микрокалькуляторов.

Книга предназначена для всех, кто пользуется микрокалькуляторами.

Г $\frac{1702070000-152}{041(01)-88}$ 47—88, ч.1

ББК 32.974

*Редакция научно-популярной
и научно-фантастической литературы*

Научно-популярное издание

Вернер Гильде, Зигфрид Альтрихтер
С МИКРОКАЛЬКУЛЯТОРОМ ПОВСЮДУ

Заведующий редакцией В. С. Власенков

Ст. научный редактор А. Г. Белевцева

Мл. научный редактор М. А. Харузина

Художник Л. М. Муратова

Художественный редактор Н. М. Иванов

Технический редактор Е. Н. Ирогорова

Корректор Т. И. Стифеева

ИБ № 6599

Сдано в набор 14.05.87. Подписано к печати 10.12.87. Формат 84×108/32. Бумага кн.-журн. Печать высокая. Гарнитура литературная. Объем 3,25 бум. л. Усл. печ. л. 10,92. Усл. кр.-отт. 11,25. Уч.-изд. л. 8,93. Изд. № 9/5765. Тираж 250 000 экз. Зак. 639. Цена 50 коп.

Издательство «Мир» 129820, ГСП, Москва, И-110, 1-й Рижский пер., 2

Ленинградская типография № 2 головное предприятие ордена Трудового Красного Знамени Ленинградского объединения «Техническая книга» им. Евгении Соколовой Союзполиграфпрома при Государственном комитете СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. 198052, г. Ленинград, Л-52, Измайловский проспект, 29.

© VEB Fachbuchverlag Leipzig 1981

© перевод на русский язык, «Мир», 1988

За последние годы микрокалькуляторы получили весьма широкое распространение. Массовый выпуск сделал их общедоступными. Дешевые и легкие, микрокалькуляторы без труда умещаются в школьном ранце, дамской сумочке и кармане пиджака, позволяя бесшумно и с высокой точностью решать на работе и дома, в тишине читального зала или в вагоне электрички широкий диапазон задач — от бытовых (например, подсчитывать стоимость покупок в магазине) до сложных научно-технических, еще недавно требовавших обращения к таблицам или выхода на большую ЭВМ. Микрокалькуляторы позволили существенно раздвинуть границы вычислимого и вычисляемого и уверенно обрели свое, только им принадлежащее место в ряду современных вычислительных устройств.

Сегодня микрокалькулятор мы видим в руках самых разных пользователей — от школьника до ученого. Однако как нельзя стать скрипачом, даже если вы очень музыкальны и знаете наизусть репертуар выдающихся исполнителей, но сами ни разу не держали скрипку в руках, так нельзя научиться считать на микрокалькуляторе, не проделав самостоятельно всех операций, о которых говорится в руководствах. Наоборот, все усваивается легко и просто, если прочитанное подкрепляется практическими навыками. К тому же существует множество приемов и «маленьких хитростей», облегчающих счет и уменьшающих вероятность ошибки, которые не нашли отражения в специальных изданиях и подвластны только навыку.

Технике программирования и вычислений на микрокалькуляторах помимо журнальных публикаций и ротапринтных изданий посвящено довольно много книг. Только издательство «Наука» в 1986 г. выпустило три книги: Дьяконов В. П. «Справочник по

расчетам на микрокалькуляторе» (изд. 2-е, испр. — М.: Наука, 1986); «Кибернетика. Микрокалькуляторы в играх и задачах» (М.: Наука, 1986. — Серия «Кибернетика — неограниченные возможности и возможные ограничения»); Данилов И. Д. «Секреты программируемого калькулятора» (М.: Наука, 1986. — Библиотечка «Квант», вып. 55).

Однако мало искусно владеть микрокалькулятором. Необходимо еще научиться ставить правильные вопросы и находить на них правильные ответы (разумеется, не без помощи калькулятора), и этому высокому и трудному искусству нас учит книга В. Гильде и З. Альтрихтера, предлагаемая вниманию читателя.

Как и предыдущая книга тех же авторов «С микрокалькулятором в руках»*, новая книга, задуманная как продолжение первой, представляет собой неупорядоченное собрание новелл, которые сообщают читателю много интересной информации, будоражат его воображение и любознательность. Выдержанные в истинно перельмановском духе, задачи В. Гильде и З. Альтрихтера отличает неожиданный ракурс, в котором предстают, казалось бы, хорошо известные явления, тонкая наблюдательность и разнообразие. Они разительно не похожи на задачи из стандартных сборников, не только содержащие подсказку, но и не оставляющие решающему ни единой степени свободы — настолько ответ предопределен приведенными в условии задачи данными. Задачи В. Гильде и З. Альтрихтера знакомят с тем, как мыслит инженер, математик, физик и химик, как проверяются гипотезы, делаются оценки, иными словами, — со всем, что составляет обычный арсенал современного исследователя. Еще одним несомненным достоинством книги немецких специалистов следует считать ее вариантность: она не привязана к какой-либо определенной модели микрокалькулятора, пусть даже обладающей выдающимися конструктивными особенностями.

Первая книга В. Гильде и З. Альтрихтера с успехом выдержала у нас в стране два издания. Хочется думать, что и вторую их книгу ожидает такая же счастливая судьба.

Ю. Данилов

* Гильде В., Альтрихтер З. С микрокалькулятором в руках. — М.: Мир, 1980, 1987.

Предисловие

После выхода наших предыдущих книг, в частности книги «С микрокалькулятором в руках»*, мы получили множество доброжелательных критических замечаний и дружеских писем.

Все более широкий круг людей знакомится с возможностями микрокалькуляторов и пользуется ими в работе и жизни. Учитывая это, в предлагаемой вниманию читателей книге мы продолжили серию неформальных задач, которые помогут расширить сферу применения микрокалькулятора и в то же время (мы надеемся) развлекут его владельца.

Промышленность выпускает микрокалькуляторы самых различных типов, поэтому мы не придаем значения тому, пользуется ли читатель простейшим микрокалькулятором, способным выполнять лишь четыре арифметических действия, или более совершенной моделью с большим числом клавиш для вычисления функций, что существенно облегчает расчеты. Тем, кто хотел бы более основательно познакомиться с возможностями своего микрокалькулятора и научиться грамотно его использовать, мы рекомендуем обратиться к книге Г. Кройля «Что умеет мой микрокалькулятор?»**

Как и в книге «С микрокалькулятором в руках», мы умышленно не обращали внимания на математические детали. Однако многие коллеги и читатели заверили нас, что у того, кто пользуется микрокалькулятором, возникает совершенно новое отношение к математике. Такого рода опыт соответствует историческому развитию этой науки. Великие математики

* См. примечание на стр. 6.

** Кройль Г. Что умеет мой микрокалькулятор? — М.: Мир, 1981.

прошлого — Гаусс, Ньютон, Лейбниц, Паскаль, Кеплер и другие — от природы или в силу необходимости были одаренными вычислителями. Из числовых примеров они выводили общие законы и закономерности. Когда на уроках математики нам преподносят их открытия по схеме посылка — вывод — заключение, мы познаем математику в несколько абстрагированном виде, ибо ее создатели такой схемы, как правило, не придерживались.

Наш микрокалькулятор позволяет на простых примерах прочувствовать математические зависимости между функциями. В большинстве случаев в книге использована Международная система единиц СИ, но в тех случаях, когда другие единицы казались нам более удобными или исторически обусловленными, мы от нее отходили.

В заключение хотелось бы сердечно поблагодарить всех, кто в той или иной форме высказал свои замечания и советы по поводу нашей предыдущей книги и помог тем самым созданию настоящей.

Авторы

Просьба к читателю:

ПРОЧИТЕ НЕПРЕМЕННО!

1. Несмотря на все усилия авторов и издательства, в книге такого рода всегда могут встретиться ошибки в вычислениях, логические ошибки, описки и опечатки.

Если, повторяя вслед за нами вычисления, вы получите результат, отличный от приведенного в книге, проверьте себя еще раз. Если ваш микрокалькулятор повторно воспроизведет результат, не совпадающий с приведенным, просим сообщить нам об этом.

2. По замыслу авторов, эта книга призвана помочь тем, кто имеет под рукой микрокалькулятор, заполнить свой досуг. Каждый, кто захочет, сможет извлечь из нее что-то полезное для себя (хотя это отнюдь не обязательно). Читать нашу книгу можно с любого раздела и даже от конца. Одного мы только не советуем: систематически «прорабатывать» ее.

3. Материал в книге расположен не в порядке возрастания трудности и не по принадлежности к тому или иному разделу математики. В наши намерения отнюдь не входило учить читателя математике (для этого существует множество превосходных книг), мы хотели лишь приобщить его к радости вычислений.

4. Каждый раздел, на наш взгляд, должен содержать все сведения, необходимые для его понимания, поэтому некоторые «указания» в тексте повторяются (они выделены линейками).

5. В практике используются микрокалькуляторы самых различных конструкций, отличающиеся друг от друга клавиатурой и характером выполняемых операций, поэтому мы не вводили единых обозначений, а в каждом разделе использовали символы и алгоритмы, которые в данном случае казались наиболее подходящими.

Наиболее употребительные обозначения на клавиатуре микрокалькуляторов

- C** (от англ. clear — очистить). При нажатии на клавишу C происходит очистка соответствующих регистров микрокалькулятора.
- CD** (от англ. clear display) — очистить индикатор.
- CE** (от англ. clear entry) — погасить введенное число.
- CHS** (от англ. change sign) — изменить знак.
- CI** (от англ. clear indicator) — очистить регистр индикатора.
- Cl n** (от англ. clear n) — очистить регистр номер n.
- CM** (от англ. clear memory) — очистить регистр памяти (в микрокалькуляторах с одним регистром памяти).
- EE, EEX, EXP** (от англ. enter exponent) — ввести экспоненту.
- ENTER** (от англ. enter — ввести) — сигнал окончания ввода в микрокалькуляторах с бесскобочными обозначениями.
- E** (от англ. function — функция) — перевод в режим совмещенной функции (при использовании клавиш с двумя функциональными назначениями).
- FIX n** (от англ. fix — устанавливать) — фиксация положения десятичной запятой.
- G** — перевод в режим второй совмещенной функции (при использовании клавиш с тремя функциональными назначениями).
- K** — автоматика констант.
- M** — (от англ. memory — память) — регистр памяти (в отечественных микрокалькуляторах П).
- M⁺** — к содержимому регистра памяти прибавляется число на индикаторе (в отечественных микрокалькуляторах П⁺).

- M^- — из содержимого регистра памяти вычитается число на индикаторе (в отечественных микрокалькуляторах Π^-).
- $M \times$ — содержимое регистра памяти умножается на число на индикаторе (в отечественных микрокалькуляторах $\Pi \times$).
- $M \div$ — содержимое регистра памяти делится на число на индикаторе (в отечественных микрокалькуляторах $\Pi \div$).
- $M + x^2$ — к содержимому регистра памяти прибавляется квадрат числа на индикаторе (в отечественных микрокалькуляторах $\Pi + x^2$).
- MR (от англ. memory recall) — вызов регистра памяти.
- $M \leftrightarrow X$ — обмен между числом на индикаторе и числом в регистре памяти (в отечественных микрокалькуляторах $\Pi \leftrightarrow X$).
- $rad \leftrightarrow \alpha^\circ$ (также $rad \leftrightarrow град$) — переключатель рад/град.
- $RCI\ n$ (от англ. recall n) — вызов n -го регистра памяти (в микрокалькуляторах с несколькими регистрами памяти).
- RM (от англ. recall memory) — вызов регистра памяти.
- $R\downarrow$ (от англ. roll down) — циклический сдвиг при бесскобочной записи.
- $STO\ n$ (от англ. storage n) — клавиша n -го регистра памяти.
- $\sqrt[x]{Y}$ — корень степени x из числа Y .
- $X \leftrightarrow Y$ — обмен между числом в регистре X и числом в регистре Y .
- Y^x — число Y в степени x .
- \uparrow — клавиша окончания ввода чисел (в микрокалькуляторах с бесскобочной записью).
- $+/-$ — изменить знак.
- 2^{nd} (от англ. second — вторая) — перевод в режим второй совмещенной функции (в микрокалькуляторе с клавишами, имеющими два или три функциональных назначения).
- 3^{rd} (от англ. third — третья) — перевод в режим третьей совмещенной функции (в микрокалькуляторе с клавишами, имеющими три функциональных назначения).

ЖАРКО ЛИ В АДУ?

Однажды на семинаре в Геттингенском университете между двумя физиками, профессором Эйкеном и профессором Полем, вспыхнул спор. Эйкен был высоким и тощим. Он принадлежал к тем ученым, которые мыслят неторопливо и последовательно. Поль был низеньким и толстым. Больше всего на свете он любил новые необычные идеи.

Спор начался с того, что Поль по своему обыкновению высказал довольно смелое соображение. Эйкен возразил ему:

— Что вы говорите, дорогой коллега! С тем же успехом вы могли бы попытаться вычислить температуру в аду!

— А почему бы и нет? — ответил Поль. — Располагая мы исходными данными относительно объема и давления, это не составило бы никакого труда.

Следуя отцам церкви и средневековым философам, примем, что ад находится в центре Земли и адское пламя вырывается наружу из жерл вулканов, как из печных труб. Тогда начальные данные следует искать среди результатов измерений температуры в шахтах и скважинах.

Известно, что в одной из самых глубоких шахт — 3340 м — температура достигает 70°C и повышается на 1°C через каждые $3340 : 70 = 47,7$ м.

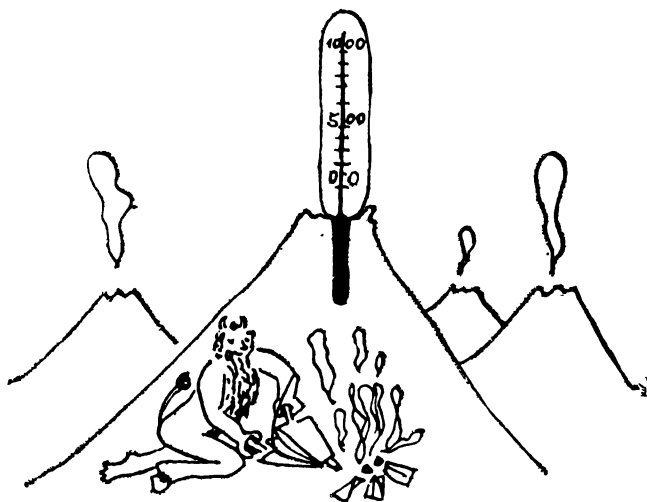
Аналогичные данные получены и для скважин. Так, в скважине глубиной 8350 м температура достигает 236°C и повышается на 1°C каждые $8350 : 236 = 35,35$ м. В литературе в качестве геологической шкалы температур приводится величина $30 \text{ м}/^{\circ}\text{C}$.

Какое бы из приведенных значений мы ни приняли за исходное, все остальные можно вычислить. Радиус Земли составляет 6357 км. Профессор Поль

скорее всего склонился бы к гипотезе о том, что с увеличением глубины температура возрастает равномерно. Если величину перепада температуры принять равной $30 \text{ м}/^{\circ}\text{C}$, то температура в аду должна достигать

$$\frac{6\,357\,000}{30} \cdot \frac{\text{м} \cdot ^{\circ}\text{C}}{\text{м}} = 211\,900 ^{\circ}\text{C}.$$

Такое значение представляет определенный интерес для вычислителя, но физически его столь же трудно представить, как ад.



Наш микрокалькулятор позволяет кое-что сказать и относительно царящего в аду давления. Предположим, что Земля имеет плотность $3,5 \text{ г}/\text{см}^3$. Как мы сейчас убедимся, довольно безразлично, какое значение принять за исходное: $3,5$ или $5,5 \text{ г}/\text{см}^3$. Результат от этого едва изменится. Столб грунта от центра Земли до ее поверхности имел бы в длину 6357 км , и при сечении в 1 см^2 его масса составляла бы

$$1 \cdot 635\,700\,000 \cdot 5,5 \text{ см}^2 \cdot \text{см} \cdot \text{г}/\text{см}^3 \approx 3,5 \cdot 10^9 \text{ г}.$$

Для проверки произведите те же вычисления с другими плотностями. Если оставаться в разумных пределах, то результат не изменится на 10^9 . Полученную массу $3,5 \cdot 10^9 \text{ г}$ выразим в килограммах; $3,5 \cdot 10^6 \text{ кг}$.

Но 10^6 кг представить довольно трудно, поэтому попробуем выразить ту же массу в тоннах: $3,5 \cdot 10^3 \text{ т} = 3500 \text{ т}$. Таким образом, на один квадратный сантиметр ада приходится масса, для перевозки которой понадобилось бы 150 грузовых вагонов. Представив себе наглядно массу, вспомним, что мы хотели вычислить давление и выразить его, как полагается в системе СИ, в паскалях (Па). Для этого нам необходимо сначала выразить вес столба Земли в ньютонах (Н):

$$1\text{Н} = 1 \text{ кг} \cdot 9,8 \text{ м/с}^2.$$

Вес массы $3,5 \cdot 10^6$ кг равен

$$3,5 \cdot 10^6 \cdot 9,81 \text{ Н} = 34,335 \cdot 10^6 \text{ Н}.$$

На квадратный сантиметр ($= 10^{-4} \text{ м}^2$) действует давление

$$\frac{34,335 \cdot 10^6 \text{ Н}}{10^{-4} \text{ м}^2} = 34,335 \cdot 10^{10} \frac{\text{Н}}{\text{м}^2} \approx 3,4 \cdot 10^{11} \text{ Па}.$$

Эту величину представить трудно. Как известно, 1 Па по порядку величины сравним с давлением, развиваемым обыкновенной комнатной мухой, сидящей на какой-нибудь опоре. Но кто в состоянии представить себе 340 миллиардов мух, взгромоздившихся одна на другую (да еще при чудовищных температурах!). Вернемся-ка мы лучше к добрым старым атмосферам:

$$1 \text{ атм} = 9,81 \cdot 10^4 \text{ Па}.$$

Следовательно, вычисленное нами давление составляет

$$\frac{3,4 \cdot 10^{11}}{9,81 \cdot 10^4} \text{ атм} \approx 3,5 \cdot 10^6 \text{ атм}.$$

В странах английского языка к введению Международной системы единиц СИ отнеслись с еще большей сдержанностью. Для английского издания этой книги понадобилось бы, например, единицы давления пересчитывать в фунты на квадратный дюйм. Так как 1 дюйм² равен 6,452 см², а 1 фунт-сила равен 0,454 кг-сила (кгс), то

$$\frac{1 \text{ кгс}}{\text{см}^2} = 1 \text{ атм} = \frac{6,452 \text{ фунт-сила}}{0,454 \text{ дюйм}^2} = 14,2 \frac{\text{фунт-сила}}{\text{дюйм}^2}.$$

Вычисленное нами давление в аду в английских единицах составит

$$3,5 \cdot 10^8 \text{ атм} \cdot 14,2 \frac{\text{фунт-сила/дюйм}^2}{\text{атм}} \approx 50 \cdot 10^6 \frac{\text{фунт-сила}}{\text{дюйм}^2}.$$

Насколько наглядно или ощутимо такое значение?

Возможно, кому-нибудь приведенные выше «адские» расчеты покажутся чрезмерно упрощенными, ибо они основаны на грубых физических предположениях. Для таких читателей мы приводим следующие соображения.

При вычислении веса столбика породы мы поступали так, как будто вся масса Земли сосредоточена в ее центре (т. е. так, будто сила притяжения Земли действует и внутри земного шара). Такое предположение допустимо только в том случае, если мы рассматриваем массы, находящиеся за пределами земного шара. Но чем глубже мы проникаем в недра Земли, тем сильнее массы, лежащие сверху, разгружают своим притяжением массы, лежащие внутри. В центре Земли сила земного притяжения не действует. Для учета этого обстоятельства физики вывели формулу, выражающую давление в шаре с массой m и плотностью ρ в состоянии гидростатического равновесия на расстоянии r от центра:

$$p = \frac{2\pi}{3} \rho^2 k (R^2 - r^2),$$

где R — радиус шара, k — универсальная гравитационная постоянная ($k = 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{Н} \cdot \text{м}^2}{\text{кг}^2}$). Так как нас интересует центр Земли, мы полагаем $r = 0$, $R = 6,357 \cdot 10^6$ м (радиус Земли).

Для того чтобы раз и навсегда устранить все трудности, связанные с выбором физических единиц, мы «тупо» применяем единицы СИ (м, кг) и в результате получаем давление в паскалях (Па):

$$p = \frac{2\pi}{3} \cdot \left(5,5 \cdot 10^3 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}\right)^2 \cdot 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{Н} \cdot \text{м}^2}{\text{кг}^2} \times \\ \times (6,357 \cdot 10^6 \text{ м})^2 \approx 1,7 \cdot 10^{11} \text{ Па}.$$

Мы видим, что по уточненной формуле давление в аду получается ровно вполупину меньше, чем в более грубом приближении. По-видимому, и температура в

аду несколько ниже вычисленной нами, но все же достаточно высока, чтобы мысль, сколь жарко придется тому, кого мы посылаем к черту, приятно согревала нас.

МНОГОЛИКАЯ ТЕОРЕМА ПИФАГОРА

Вполне возможно, что следующая легенда не имеет под собой исторической основы:

«Когда греческий математик Пифагор впервые доказал теорему, носящую ныне его имя, он на радостях принес в жертву богам сто быков (совершив гека-

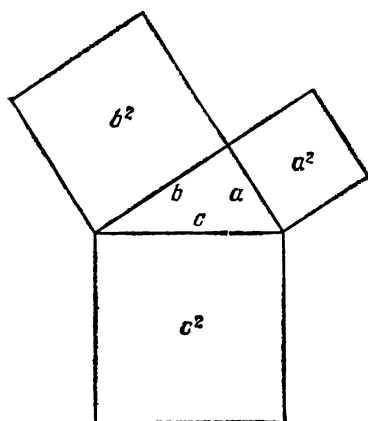


Рис. 1. Графическое представление теоремы Пифагора $a^2 + b^2 = c^2$.

томбу, т. е. большое жертвоприношение). С тех пор все скоты дрожат, заслышав об открытии новой истины».

По-видимому, теорему о том, что в прямоугольном треугольнике сумма квадратов двух меньших сторон (катетов) равна квадрату наибольшей стороны (гипотенузы), применяли еще в древнем Вавилоне (рис. 1). Но Пифагор (570—497 гг. до н. э.) оказал огромное влияние на весь ход развития математического мышления с древности до наших дней. Многие поколения

школьников испытали первое в своей жизни математическое потрясение, познакомившись с теоремой Пифагора, но, вникнув в доказательство, не могли не признать правильность теоремы. И это очень важно, ибо современная прикладная математика немыслима без теоремы Пифагора.

Пифагор и его последователи — так называемые пифагорейцы — исповедывали мистику чисел и пытались за всеми явлениями природы прежде всего найти определенные соотношения между целыми числами. Не удивительно поэтому, что особенно заинтересованные люди уже давно исследовали, при каких целочисленных значениях x , y и z уравнение

$$x^2 + y^2 = z^2$$

допускает решение. Разумеется, случай, когда все три числа x , y и z имеют общий делитель, следует заранее исключить, ибо в противном случае обе части уравнения можно было бы разделить на квадрат этого общего делителя.

Наименьшие целые числа (3, 4 и 5), удовлетворяющие теореме Пифагора, по-видимому, были известны еще древним египтянам. Многие тройки таких чисел приведены в следующей таблице:

| | | | | | | | | | | |
|-----|---|----|----|----|----|----|----|----|----|-----|
| x | 3 | 5 | 15 | 7 | 21 | 9 | 35 | 11 | 45 | ... |
| y | 4 | 12 | 8 | 24 | 20 | 40 | 12 | 60 | 28 | ... |
| z | 5 | 13 | 17 | 25 | 29 | 41 | 37 | 61 | 53 | ... |

Многоточия в конце каждой из трех строк показывают, что эта таблица далеко не полная.

Если вы, дорогой читатель, захотите продолжить таблицу и вписать в нее новые тройки чисел x , y , z , то мы советуем вам воспользоваться следующим рецептом. Выберите два натуральных, т. е. целых положительных, числа (v , w), удовлетворяющих трем условиям:

- 1) $v > w$;
- 2) числа v и w взаимно простые, т. е. не имеют общего множителя, отличного от 1 (и, следовательно, не могут быть оба четными);
- 3) числа v и w не должны быть оба нечетными,

Тогда следующие 3 числа удовлетворяют уравнению Пифагора $x^2 + y^2 = z^2$:

$$x = v^2 - w^2,$$

$$y = 2vw,$$

$$z = v^2 + w^2.$$

Предположим, например, что мы выбрали числа $v = 8$, $w = 5$. Эти два числа, как нетрудно видеть, удовлетворяют условиям 1—3. Тогда

$$x = 8^2 - 5^2 = 39,$$

$$y = 2 \cdot 8 \cdot 5 = 80,$$

$$z = 8^2 + 5^2 = 89$$

и

$$x^2 + y^2 = z^2, \text{ т. е. } 39^2 + 80^2 = 7921 = 89^2.$$

С помощью микрокалькулятора убедиться в этом совсем нетрудно.

Покажем теперь, как обстоит дело в трехмерном случае, т. е. какие целочисленные решения допускает уравнение

$$x^2 + y^2 + z^2 = u^2.$$

Числа x , y и z можно представлять себе, как длины ребер коробки из-под ботинок. Тогда u — длина ее пространственной диагонали. В следующей таблице (также неполной) приведены четверки чисел, удовлетворяющих трехмерному аналогу уравнения Пифагора:

| | | | | | | | | | |
|-----|----|---|----|---|----|----|-----|----|-----|
| x | 2 | 2 | 4 | 4 | 2 | 2 | ... | 14 | ... |
| y | 6 | 6 | 8 | 8 | 10 | 10 | ... | 10 | ... |
| z | 9 | 3 | 19 | 1 | 11 | 25 | ... | 35 | ... |
| u | 11 | 7 | 21 | 9 | 15 | 27 | ... | 39 | ... |

Если вы захотите дополнить и эту таблицу, то в качестве x , y и z вам следует выбрать два четных и одно нечетное число.

В связи с уравнением Пифагора интересно выяснить, допускает ли целочисленные решения уравнение $x^2 + y^2 = s^2 + t^2$. Оказывается, допускает и даже бесконечно много. В принципе могут представиться 2 различных случая:

- 1) все четыре неизвестных нечетны;
- 2) два неизвестных четны и два нечетны.

Несколько решений для каждого из этих двух случаев приведены в следующих таблицах.

Случай 1

| | | | | | | | | | |
|-----|---|----|----|----|----|----|----|----|-----|
| x | 7 | 11 | 13 | 15 | 19 | 19 | 11 | 21 | ... |
| y | 1 | 3 | 1 | 5 | 7 | 3 | 3 | 1 | ... |
| s | 5 | 9 | 11 | 13 | 17 | 17 | 7 | 19 | ... |
| t | 5 | 7 | 7 | 9 | 11 | 9 | 9 | 9 | ... |

Случай 2

| | | | | | | | | | |
|-----|---|----|---|----|----|----|----|----|-----|
| x | 9 | 13 | 8 | 17 | 21 | 12 | 25 | 11 | ... |
| y | 2 | 4 | 1 | 6 | 8 | 1 | 2 | 2 | ... |
| s | 7 | 11 | 4 | 15 | 19 | 8 | 23 | 5 | ... |
| t | 6 | 8 | 7 | 10 | 12 | 9 | 10 | 10 | ... |

Можете ли вы нарисовать развертку ящика, у которого не только длины 3 ребер, но и площади 3 граней и пространственные диагонали находились бы между собой в целочисленных отношениях?

ОХРАНА ОКРУЖАЮЩЕЙ СРЕДЫ И КОЭФФИЦИЕНТ ПОЛЕЗНОГО ДЕЙСТВИЯ

Кого не заботят проблемы охраны окружающей среды?

Существуют многочисленные проекты относительно того, каким образом можно было бы производить энергию, столь необходимую для поддержания и дальнейшего развития нашей цивилизации. Чаше других в качестве источников энергии, не наносящих ущерба окружающей среде и потому призванных заменить тепловые и атомные электростанции, предлагают использовать ветер, солнце и морские воды. При обсуждении таких проектов полезно не упускать из виду законы природы и с помощью микрокалькулятора прикинуть, имеет ли то или иное предложение шансы на успех.

Каждое превращение энергии, к сожалению, сопровождается необратимой потерей части энергии. Та часть энергии, которая может быть использована после превращения, определяется коэффициентом полезного действия, или КПД, η (греч. буква «эта»). В тепловых процессах КПД выражается формулой

$$\eta = \frac{T_{\text{нач}} - T_{\text{кон}}}{T_{\text{нач}}},$$

где $T_{\text{нач}}$ — начальная, а $T_{\text{кон}}$ — конечная температура процесса. Например, в паровых турбинах используется (теоретически) пар при температурах в диапазоне от 773 до 373 К, поэтому

$$\eta = \frac{773\text{К} - 373\text{К}}{773\text{К}} = 0,52.$$

Если мы вздумаем эксплуатировать турбину при температуре всего лишь 300 °С, т. е. 573 К, то ее КПД понизится до

$$\eta = \frac{573\text{К} - 373\text{К}}{573\text{К}} = 0,35.$$

Закономерность видна уже на этом примере: чем больше разность энергий между начальным и конечным состоянием, тем выше КПД. К сожалению, солнце, ветер и морские волны «работают» при малых разностях энергии (хотя их энергия весьма велика).

Поразмыслим над тем, как мы используем энергию ветра. Не будем производить расчет крупной ветровой установки, а ограничимся небольшим ветряком, питающим электроэнергией дачный домик или прицепной вагончик. Наибольшая мощность, развиваемая ветряком, рассчитывается по формуле

$$P = \frac{\pi}{4} D^2 \rho \left(\frac{2}{3} c \right)^3,$$

где D — диаметр ветрового колеса в метрах (м), ρ — плотность текущей среды (для воздуха $\rho = 1,2 \text{ кг/м}^3$), c — скорость ветра в метрах в секунду (м/с).

Мы видим, что мощность возрастает пропорционально квадрату колеса. Именно поэтому все современные ветряки и ветряные мельницы имеют очень длинные крылья. Предельная длина обусловлена соображениями прочности (силами, действующими на крыло при вращении).

Скорость ветра входит в формулу для мощности в кубе. Она также не может возрастать беспредельно, ибо при сильном ветре крылья ветряка сломаются.

Предположим, что мы хотим соорудить для кемпинга ветровую силовую установку с диаметром крыльчатки 0,66 м (т. е. обычных международных размеров). Скорость ветра примем равной 10,2 м/с, тогда

$$P = \frac{\pi \cdot 0,66^2}{4} \cdot 1,2 \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot 10,2\right)^3 \text{ Вт} = 129,09 \text{ Вт.}$$

Такая мощность на входе вполне достаточна для наших целей. Но не следует забывать о КПД нашей установки. Ветровое колесо имеет КПД $\eta_1 = 0,75$. От него с помощью передаточного ремня ($\eta_2 = 0,96$) вращение передается на вал генератора ($\eta_3 = 0,54$). Таким образом, полный КПД всей системы

$$\eta = \eta_1 \eta_2 \eta_3 = 0,75 \cdot 0,96 \cdot 0,54 = 0,39,$$

а развиваемая установкой мощность равна

$$129,09 \text{ Вт} \cdot 0,39 = 50,35 \text{ Вт.}$$

Полученную энергию необходимо где-то накапливать для последующего использования. Воспользуемся 12-вольтным аккумулятором. После часовой работы нашей ветровой установки ток достигнет значения

$$\frac{50,35 \text{ Вт}}{12 \text{ В}} = 4,2 \text{ А.}$$

Но при зарядке и разрядке аккумуляторной батареи, разумеется, необходимо учитывать ее КПД. Предположим, что КПД аккумулятора равен 50 % (это очень высокое значение). Мы видим, что от гордых 129 Вт, полученных на входе нашей установки, на выходе остается не так уж много. Аккумулятор — весьма неэкономичный накопитель энергии.

Не так-то просто воплотить нашу идею об экологически чистом (и бесплатном!) источнике электроэнергии для дачи! Придется строить «настоящую» ветровую установку с метровыми крыльями, возводить для нее башню, чтобы она всегда «ловила» ветер.

Занимаясь расчетами ветряка, мы попутно вспомнили, как быстро убывает КПД системы при умножении КПД ее частей. Именно поэтому столь нерента-

белен электромобиль. К тому же его отнюдь нельзя считать экологически чистым видом транспорта: для зарядки аккумуляторов необходимо сжечь столько топлива, сколько потребовалось бы обычному автомобилю, чтобы покрыть втрое или вчетверо большее расстояние.

С ТЕОДОЛИТОМ И МЕРНОЙ РЕЙКОЙ

На строительных площадках нередко можно видеть геодезистов. Геодезист стоит у теодолита и визирует точки на площадке. Измерив очередной угол и занеся его в таблицу, он наводит теодолит на помощника, стоящего на некотором расстоянии с мерной рейкой. Эта рейка размечена так, что числа, стоящие между двумя делениями, нанесенными на объектив теодолита, позволяют непосредственно определять расстояние.

Началом любых геодезических измерений служит исходный пункт и направление, относительно которого отсчитываются углы. Геодезический пункт отмечается большим или малым геодезическим знаком: либо деревянной пирамидой, либо бетонным столбом, помеченным крестиком.

Координаты исходного пункта задаются в виде горизонтальной координаты (ГК) и высоты (В). Теодолит устанавливается над исходной точкой, и геодезист измеряет угол между направлением базисного отрезка и направлением нового отрезка, отсчитывая его вправо (ПУ) или влево (ЛУ), а затем определяет расстояние (Р) между теодолитом и новой исходной точкой. Координаты новой $(i + 1)$ -й исходной точки вычисляются по формулам

$$\begin{aligned} V_{i+1} &= V_i + P \cos (Az), \\ GK_{i+1} &= GK_i + P \sin (Az), \end{aligned}$$

где под азимутом (Аз) следует понимать угол (ПУ или ЛУ), прибавляемый к углу, который базисный отрезок образует с направлением на север. Все геодезисты используют координаты Гаусса — Крюгера.

Вернувшись к себе, геодезист вычисляет по измеренным значениям новые координаты. На рис. 2 по-

казано, что выбранный геодезистом базисный отрезок образует с направлением на север угол $310^{\circ}12'11''$. Угловые минуты и секунды необходимо перевести в

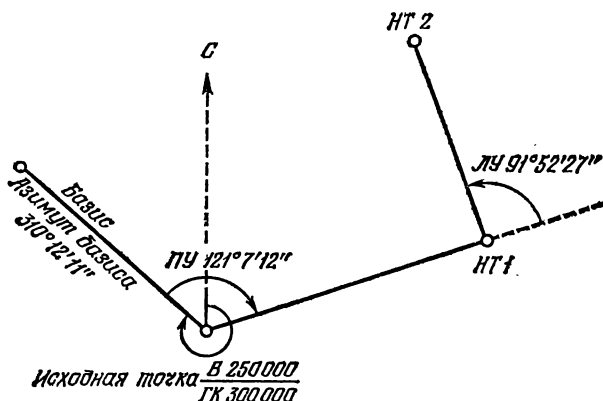


Рис. 2. Как работает геодезист.

десятые доли градуса. Для измеренного угла ПУ проделаем все вычисления параллельно:

$$310^{\circ}12'11'' + 121^{\circ}07'12'' = 431^{\circ}19'23'' = \Lambda_3,$$

$$310,2031^{\circ} + 121,1200^{\circ} = 431,3231^{\circ} = \Lambda_3.$$

Вычислим теперь координаты новой точки (НТ1), высоту

$$\begin{aligned} B_{i+1} &= B_i + P \cos(\Lambda_3) = \\ &= 250\,000 + 238\,741 \cos(431,3231^{\circ}) = \end{aligned}$$

В большинстве микрокалькуляторов предусмотрено автоматическое вычисление углов в градусной системе.

$$= 326\,452$$

и горизонтальную координату

$$ГК_{i+1} = 300\,000 + 238\,741 \sin 431,3231^{\circ} = 526\,169.$$

Удовлетворенный геодезист наносит на свой план первую новую точку с координатами

$$\frac{В\,326\,452}{ГК\,526\,169}.$$

Для дальнейших вычислений он может по своему усмотрению производить вычисления с углом $431,3231^\circ$ или же для более точного контроля вычесть полный угол и работать с углом $71,3231^\circ$.

Азимут на новую точку (НТ2)

$$Az = 431,3231^\circ - 91^\circ 52' 27'' = 339,4489^\circ.$$

Левые углы (ЛУ) необходимо вычитать, а не прибавлять!

Координаты новой точки (НТ2) равны:

$$V_{i+2} = 326\,452 + 168\,017 \cos 339,4489^\circ = 483\,776,$$

$$KГ_{i+2} = 526\,169 + 168\,017 \sin 339,4489^\circ = 467\,188.$$

Взглянув на рис. 2, мы убедимся в том, что новая точка (НТ2) действительно расположена выше, чем исходный пункт и НТ1. Ее горизонтальная координата должна быть поэтому заключена между горизонтальными координатами исходного пункта и НТ1.

Обычно геодезист строит замкнутую ломаную (полигон), т. е. на заключительном этапе возвращается к базисному отрезку и сравнивает вновь полученный результат с исходными данными.

Для тех, у кого есть микрокалькулятор, геодезические вычисления не составляют особого труда, но еще сравнительно недавно геодезисты могли пользоваться только таблицей логарифмов. Схема вычислений сводилась к следующим операциям:

- 1) вычислить азимут;
- 2) найти по таблицам значение $\lg \cos(Az)$ и проинтерполировать его;
- 3) найти по таблицам $\lg P$;
- 4) вычислить $\lg P + \lg \cos(Az)$;
- 5) найти по таблицам значение суммы из п. 4 и проинтерполировать;
- 6) прибавить значение суммы из п. 4 к V_i .

После того как все вычисления проделывались для V_i , их надлежало повторить для ГК.

Когда Гаусс в свое время по повелению курфюрста ганноверского занялся построением триангуляционной сети, на вычисления у него ушло целых семь лет!

Как почти всегда бывает в математике, все вычисления можно обратить. До сих пор мы вычисляли

координаты по азимуту и расстоянию. Но с тем же успехом мы могли бы по координатам второй точки найти расстояние до нее и ее азимут:

$$P = \sqrt{(B_i - B_{i-1})^2 + (КГ_i - КГ_{i-1})^2},$$

$$\operatorname{tg} (Az) = \frac{КГ_i - КГ_{i-1}}{B_i - B_{i-1}}.$$

Тем самым мы получаем еще один способ проверки наших вычислений. Мы получили

$$\frac{B_i 250\,000}{ГК_i 300\,000} \text{ и } \frac{B_{i+1} 326\,452}{ГК_{i+1} 526\,169}.$$

Внимание! Следите за индексами: i переходит в $i-1$, а $i+1$ в $i!$

$$P = \sqrt{(326\,452 - 250\,000)^2 + (526\,169 - 300\,000)^2} = 238\,741.$$

Полученное значение совпадает с измеренным.

$$\operatorname{tg} (Az) = \frac{526\,169 - 300\,000}{326\,452 - 250\,000} = 2,958;$$

$$Az = \operatorname{arctg} 2,958 = 71,3232^\circ = 71^\circ 19' 23''.$$

В некоторых микрокалькуляторах вместо клавиши arctg имеется клавиша tg^{-1} .

Вычисленный угол соответствует нашему исходному азимуту в $431,3231^\circ$.

Если геодезист выбирает (как это делал Гаусс) часть точек вдоль границы территории, покрываемой триангуляционной сетью, то, построив замкнутый полигон, он может вычислить его площадь:

$$S = \frac{1}{2} [(B_2 + B_1) (ГК_2 - ГК_1) + \\ + (B_3 + B_2) (ГК_3 - ГК_2) + \dots \\ \dots + (B_n + B_1) (ГК_1 - ГК_n)].$$

ПИРАМИДА ХЕОПСА

Пирамида Хеопса по праву считалась одним из семи чудес Древнего мира: хотя имеется немало других пирамид (в том числе и в других частях света),

она представляет собой самое большое и наиболее сохранившееся сооружение.

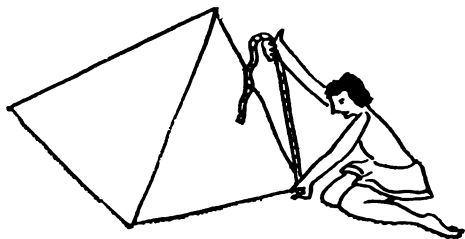
Пирамида Хеопса, одна из трех пирамид в Гизе, находится неподалеку от Каира и построена в форме правильной пирамиды с квадратом в основании. По данным точной реконструкции ширина ее основания $b = 230,35$ м; высота $h = 146,71$ м. Сложена она из кубических блоков известняка, самый большой из которых имеет длину ребра 1,5 м. Первоначально к вершине пирамиды вели 210 ступеней. Ныне несколько верхних этажей отсутствуют, равно как и большая часть тщательно подогнанных облицовочных плит, некогда покрывавших ступени. Пирамиду Хеопса (как и многие другие пирамиды) жители окрестных поселений на протяжении многих веков использовали как гигантскую «каменоломню».

Приведенные выше размеры позволяют вычислить все остальные геометрические характеристики пирамиды. Например, ее объем составляет

$$V = \frac{b^2 h}{3} = 2,595 \text{ млн. м}^3$$

(ныне объем пирамиды меньше: $2,353 \cdot 10^6 \text{ м}^3$).

С учетом имеющихся внутри пирамиды пустот и плотности известняка, из которого сложена пирамида Хеопса, ее масса составляет около 5 млн. т. При виде столь грандиозного сооружения, достигшего весьма почтенного возраста (почти 5000 лет), невольно возникает ряд вопросов. Для чего была сооружена пирамида Хеопса? Почему у нее именно такие, а не другие размеры? Не кроется ли за ней какая-то тайна? Недостатка в попытках найти ответы на эти и аналогичные вопросы — от блестящих прозрений до полной бессмыслицы — не было с глубокой древности.



Возвращаясь к реконструированным исходным размерам пирамиды — ширине ее основания и высоте, следует заметить, что этими данными мы обязаны высокоточным измерениям английского археолога Флиндерса Петри, произведенным в конце прошлого века. Петри измерял отрезки в английских дюймах. Нелишне напомнить поэтому, что

$$1 \text{ английский дюйм} = 25,4 \text{ мм},$$

$$1 \text{ м} = 39,37 \text{ дюйма}.$$

То, что пирамида Хеопса кажется нам довольно «кривой», объясняется просто. Строители пирамиды производили измерения не в английских дюймах и не в метрах. Обычной единицей длины в те времена была так называемая древнеегипетская элле (ДЕЭ):

$$1 \text{ ДЕЭ} = 20,62 \text{ дюйма} = 0,524 \text{ м}.$$

В ДЕЭ пирамида Хеопса имеет следующие размеры:

$$b = 230,35 \text{ м} = 439,6 \text{ ДЕЭ} \approx 440 \text{ ДЕЭ},$$

$$h = 146,71 \text{ м} = 280,0 \text{ ДЕЭ}.$$

В наших последующих рассуждениях важную роль играет еще одна величина, производная от b и h : высота c прямоугольных равнобедренных треугольников, образующих боковую поверхность пирамиды. По теореме Пифагора

$$c^2 = h^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2, \quad (1)$$

откуда

$$c = \sqrt{280^2 + 220^2} \text{ ДЕЭ} = 356 \text{ ДЕЭ}.$$

Еще в начале нашего века было установлено, что половина ширины основания $b/2$ и высота c треугольных граней пирамиды находятся между собой в отношении, известном под названием золотого сечения. Это тем более поразительно, что первые исторически достоверные упоминания о золотом сечении появились лишь через 2000 лет после сооружения пирамиды.

Мы говорим, что две величины находятся между собой в отношении золотого сечения, если меньшая величина относится к большей так же, как большая — к сумме обеих величин.

Золотое сечение обладает высокими эстетическими достоинствами и на протяжении многих столетий играет важную роль в архитектуре. Прежде всего проверим, что отрезки $b/2$ и c действительно образуют золотое сечение:

$$\frac{b}{2} : c = c : \left(\frac{b}{2} + c \right), \quad (2)$$

т. е.

$$\frac{220}{356} = \frac{356}{576},$$

$$0,618 = 0,618$$

“(три знака после запятой совпадают).

Позднее была замечена еще одна закономерность: площадь основания пирамиды относится к площади боковой поверхности пирамиды (четырёх треугольных граней), как последняя — к площади полной поверхности пирамиды. Так снова всплыло золотое сечение. Сказанное означает, что

$$\frac{b^2}{4 \frac{bc}{2}} = \frac{4 \frac{bc}{2}}{b^2 + 4 \frac{bc}{2}} \quad (3)$$

или в числах (все длины приведены в ДЕЭ)

$$\frac{440^2}{4 \cdot 220 \cdot 356} = \frac{4 \cdot 220 \cdot 356}{440^2 + 4 \cdot 220 \cdot 356},$$

$$0,618 = 0,618$$

Совпадение чисел отнюдь не случайно: оно означает, что соотношение (3) может быть сведено к соотношению (2), и наоборот.

Английский астроном Джон Гершель (1792—1871) полагал, что одно место в книге II, гл. 12 «Истории» древнегреческого историка Геродота (ок. 500—424 гг. до н. э.), который наряду с другими весьма деятельно интересовался пирамидой Хеопса, допускает следующую интерпретацию.

Площадь каждой боковой грани пирамиды равна квадрату ее высоты, т. е.

$$\frac{bc}{2} = h^2. \quad (4)$$

Как показывает проверка,

$$\frac{440 \cdot 356}{2} = 280^2,$$

$$78\,320 \approx 78\,400$$

(отклонение составляет около 0,1 %). Это отклонение несущественно, поскольку соотношение (4) может быть сведено к соотношению (2), если воспользоваться теоремой Пифагора (1). И снова возникает золотое сечение!

Другие комбинации геометрических величин при-
сути так называемой царской камере пирамиды Хе-
опса. Как показали многократные высокоточные из-
мерения, царская камера имеет следующие размеры
(ш — ширина, д — длина, в — высота):

$$ш_k = 206,12 \text{ дюйма} \pm 0,12 \text{ дюйма} = 5,235 \text{ м} \pm 0,003 \text{ м},$$

$$д_k = 412,24 \text{ дюйма} \pm 0,12 \text{ дюйма} = 10,471 \text{ м} \pm 0,003 \text{ м}.$$

$$в_k = 230,09 \text{ дюйма} \pm 0,15 \text{ дюйма} = 5,844 \text{ м} \pm 0,004 \text{ м}.$$

В древнеегипетских элле (1 м = 191 ДЕЭ) размеры царской камеры составляют

$$ш_k = 10 \text{ ДЕЭ},$$

$$д_k = 20 \text{ ДЕЭ},$$

$$в_k = 11,16 \text{ ДЕЭ}.$$

Стены камеры имеют площадь 100,400 и $124,6 \approx 125$ квадратных элле. Диагональ пола по теореме Пифагора

$$d_1 = \sqrt{10^2 + 20^2} \text{ ДЕЭ} = \sqrt{500} \text{ ДЕЭ} = 22,36 \text{ ДЕЭ},$$

т. е. примерно вдвое больше высоты камеры. Пространственная диагональ камеры равна соответственно

$$d_2 = \sqrt{d_1^2 + h^2} = \sqrt{500 + 125} \text{ ДЕЭ} = 25 \text{ ДЕЭ}.$$

Любители «нумерологии» обнаружили, что $ш_k : d_1 : d_k : d_2 = 2 : 3 : 4 : 5$ и что произведение квадратов первых трех чисел $2^2 \cdot 3^2 \cdot 4^2 = 576$ равно сумме полуширины основания $b/2$ и высоты c боковой грани пирамиды $\left(\frac{440}{2} + 356\right)$.

До сих пор мы говорили о достаточно серьезных исследованиях пирамиды Хеопса.

В своей книге «Борьба вокруг пирамиды Хеопса» писатель и инженер Макс Эйт (1836—1906) утверждал, что отношение

$$\frac{2b}{h} = \frac{\text{полупериметр основания пирамиды}}{\text{высота пирамиды}}$$

воспроизводит число π с пятью верными знаками после запятой! Между тем из сохранившихся древнегреческих папирусов, относящихся ко времени постройки пирамиды Хеопса (например, из папируса Ахмеса, датируемого примерно 1700 г. до н. э.), известно, что число π (отношение длины окружности к ее диаметру) тогда было известно лишь с точностью до двух знаков после запятой. Великий греческий математик Архимед (287—212 гг. до н. э.) также приводит число π лишь с двумя знаками после запятой. При наших значениях отношение $2b/h = 880/280 = 3,14286$ давало бы π с двумя верными знаками после запятой.

Комбинируя соотношения (3) и (2), получаем

$$\frac{2b}{h} = 4 \sqrt{\frac{2}{1 + \sqrt{5}}} = 3,1446.$$

Ясно, что это выражение не имеет ничего общего с числом π и совпадение первых трех знаков (3,14) чисто случайно.

Другие авторы идут еще дальше и извлекают из обмеров пирамиды Хеопса все новую и новую «космическую» информацию: расстояние Земля — Солнце равно в 10^9 больше высоты пирамиды, длина ребра (выраженная в специально созданных для этой цели единицах длины — «пирамидных метрах») в точности соответствует периоду обращения Земли вокруг Солнца, размеры пирамиды определенным образом связаны с диаметром земного шара и т. д. Даже современные авторы не могут устоять перед искушением внести свою лепту в нагнетание таинственности вокруг пирамиды Хеопса. В качестве курьеза упомянем «научно-популярную» заметку по археологии, опубликованную в одной из газет города Галле, ГДР. Там вполне серьезно обсуждался вопрос о том, не является ли пирамида Хеопса детектором космических лучей, яко-

бы создающих благоприятные условия для сохранения мумии фараона. Только «внеземного» толкования еще и не хватало!

ШИФРОВКА И ДЕШИФРОВКА

Некоторое время назад в Англии объявили забастовку шифровальщики министерства иностранных дел, т. е. люди, занимающиеся шифровкой депеш, направляемых в посольства за пределами страны, и дешифровкой дипломатической почты, поступающей из посольств. Особого ущерба дипломатической службе забастовка не нанесла. События в мире продолжали развиваться своим ходом и без переписки английских дипломатов.



Разумеется, дипломатические и военные коды устроены весьма изощренно, чтобы их не могли раскрыть разведывательные службы другой стороны. Некоторые принципы, применяемые при шифровке и

дешифровке, мы можем апробировать с помощью нашего микрокалькулятора.

Предположим, что перед нами зашифрованное сообщение:

11, 15, 18, 13, 15 18.

Первое, с чего следует начать, это попытаться ответить на вопрос, не имеем ли мы дело с совсем примитивным кодом. Даже в военном деле перехваченные донесения противника нередко удается расшифровать за считанные минуты и часы.

Взглянув на выписанные числа, нетрудно заметить, что числа 15 и 18 встречаются дважды. Это наводит на мысль о том, что шифровка произведена по принципу «одна буква — одно число». Если бы текст был не столь коротким, то профессиональные дешифровщики (их еще называют криптоаналитиками или «взломщиками кодов») занялись бы подсчетом того, сколько раз встречается в нем каждая цифра. Частота, с которой в различных языках встречаются отдельные буквы и сочетания букв, хорошо известна, и такой подсчет позволяет легко и быстро расшифровать текст. В предлагаемом примере все буквы русского алфавита, кроме буквы ё, просто перенумерованы по порядку целыми положительными числами от 1 до 32. Вы без труда прочтете зашифрованное слово: космос.

Из этого примера мы можем извлечь для себя кое-какие выводы:

- 1) никогда не шифровать текст букву за буквой;
- 2) шифровать так, чтобы исключить возможность применения частотного анализа.

На этих принципах мы и построим свой новый шифр:

| | | | | | | |
|------------------------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| шифр: | | | | | | |
| | К | О | С | М | О | С |
| Номер буквы в алфавите | 11 | 15 | 18 | 13 | 15 | 18 |
| Начальное число 30 | 330 | 165 | 270 | 234 | 195 | 270 |

Номер первой буквы (К) умножается на начальное, выбранное совершенно произвольно (разумеется, «совершенно секретное») число, а номер каждой из последующих букв умножается на номер предыдущей. При расшифровке операции производятся в обратном порядке: число 330, которым зашифрована первая

буква, делится на начальное число, а каждое из остальных чисел делится на номер предыдущей буквы.

Наш микрокалькулятор позволяет без труда производить такую шифровку и дешифровку. Номера букв ($A = 1$) выучиваются быстро. Но опытный дешифровщик так быстро не сдастся. В более длинных текстах он непременно обратит внимание на частую повторяемость некоторых чисел. В нашем примере буква О, встречающаяся в слове КОСМОС дважды, оказалась зашифрованной различными числами (в первый раз числом 165, во второй раз — числом 195), но произведение ОС в обоих случаях оказалось одним и тем же (270). При выбранном нами способе шифровки самое большое число, которое может встретиться в зашифрованном тексте, равно 1024 ($Я \cdot Я = 32 \cdot 32$). Этих недостатков можно было бы избежать, если буквы алфавита нумеровать не по порядку, а попеременно. Кроме того, можно ввести правило, по которому умножение кода очередного числа на код предыдущего числа прерывается и код очередного числа умножается (как и код первого числа) на начальное число.

Для простоты мы не меняем нумерацию букв алфавита. Каждое пятое число умножается на начальное:

| | К | О | С | М | О | С |
|------------------------|----|-----|-----|-----|-----|-----|
| Номер буквы в алфавите | 11 | 15 | 18 | 13 | 15 | 18 |
| Начальное число | 30 | | | | | |
| Сдвиг на 4 числа | | 330 | 165 | 270 | 234 | 450 |
| | | | 270 | | | 270 |

Те, кто увлекается криптографией, смогут развить эти простейшие соображения и с помощью своих микрокалькуляторов создать новые шифры.

НУЛЬ : НУЛЬ = ?

На уроках арифметики мы узнали, что $0 : 0$ может быть любым числом, а позже в курсе математического анализа нам встретилась функция

$$y = \frac{x^2 - a^2}{x - a}.$$

Вычисляя правую часть при произвольно выбранном значении a , мы получаем красивую прямую.

Например, пусть $a=2$ (рис. 3). К сожалению, при более внимательном анализе мы обнаруживаем, что красота графика этой функции обманчива: при $x=a$ и числитель и знаменатель правой части обращаются

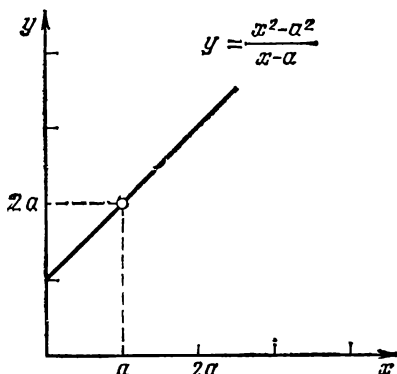


Рис. 3. При $x=a$ на графике функции точка «выколота».

в нуль. Раскрытие такой «неопределенности» доставило немало хлопот создателям математического анализа, но современные математики устранили проблему, положив по определению, что при $x=a$ функция принимает значение $y=2a$, тем самым как бы восполнив на графике функции недостающую (выколотую) точку.

Приближение к «опасному месту» — великолепная проверка для нашего микрокалькулятора.

| x | Значение y , вычисленное на хорошем микрокалькуляторе | Значение y , вычисленное на более простом микрокалькуляторе |
|-------------|---|---|
| 1,9 | 3,9 | 3,9 |
| 1,99 | 3,99 | 3,99 |
| 1,999 | 3,999 | 3,999 |
| 1,9999 | 3,9999 | 4,0000 |
| 1,99999 | 4,00000 | 4,00000 |
| 1,999999 | 4,000000 | 4,000000 |
| 1,9999999 | 4,0000000 | 4,0000000 |
| 1,99999999 | 4,00000000 | — |
| 1,999999999 | 4,000000000 | — |
| Но | | |
| 2 | Сигнал ошибки | Сигнал ошибки |

КРИВАЯ-«АНТИСНЕЖИНКА»

Некоторые математики считают, что помимо привычных нам гладких «обыкновенных» кривых имеют право на существование и несравненно более сложные «патологические» кривые. Одной из таких патологических кривых является кривая-«антиснежинка». Это замкнутая кривая, имеющая бесконечный периметр и ограничивающая тем не менее конечную площадь. Построение такой кривой начинается с равностороннего треугольника, изображенного на рис. 4, а. Все последующие треугольники строятся не вовне, а внутрь (рис. 4, б).

Построение кривой-«антиснежинки» производится по следующему алгоритму. Каждую из сторон исходного равностороннего треугольника мы делим на три равные части. На средней части мы строим вершиной внутрь равносторонний треугольник, а саму часть (его основание) стираем. Стороны нового равнобедренного треугольника втрое меньше сторон исходного треугольника (длину любой из его сторон обозначим l). Проведем ту же операцию над каждым из 12 отрезков (шестью оставшимися третями сторон исходного треугольника и шестью сторонами треугольников, построенных на средних третях) и будем продолжать действовать так неограниченное число раз. На рис. 4, в показана кривая после двукратно повторяемой операции. Приведенных выше данных достаточно для того, чтобы вычислить длину предельной кривой-«антиснежинки» и площадь той части поверхности, которая заключена внутри нее.

Вычислим сначала длину. Периметр исходного треугольника равен $3l$. После первого шага построения мы отбрасываем 3 трети l (средние трети сторон), но добавляем при этом трижды по 2 стороны новых треугольников, в результате чего длина кривой на первом шаге становится равной $U_1 = 3l + 3 \cdot \frac{l}{3}$. На следующем шаге мы отбрасываем $12 \cdot \frac{l}{3} \cdot \frac{1}{3}$ и добавляем $12 \cdot \frac{l}{3} \cdot \frac{2}{3}$, отчего длина кривой получает приращение $12 \cdot \frac{l}{3} \cdot \frac{1}{3}$ и становится равной $U_2 = 3l + l + \frac{12}{9}l$.

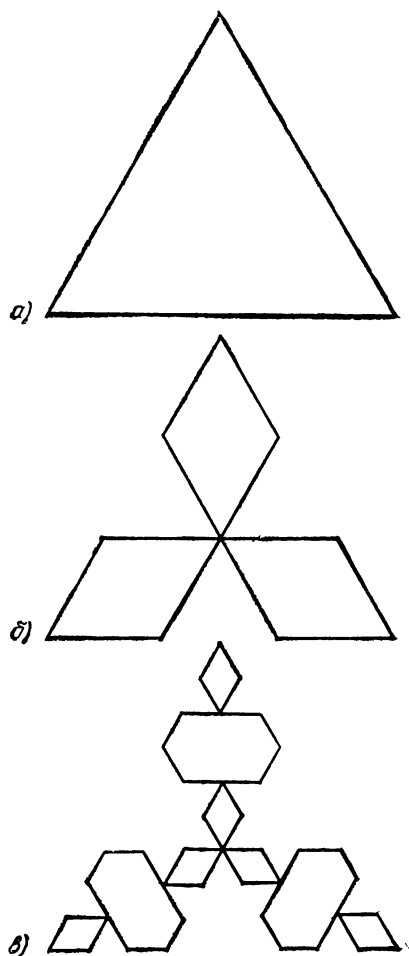


Рис. 4. Построение кривой-«антиснежинки». *a* — нулевой шаг; *б* — первый шаг; *в* — второй шаг.

Нетрудно проверить, что $U_3 = 3l + l + \frac{12}{9}l + \frac{48}{27}l$ и т. д. После бесконечного числа шагов длина предельной кривой — „антиснежинки“ достигнет величины $U = l \left\{ 3 + 1 + \frac{4}{3} + \left(\frac{4}{3}\right)^2 + \left(\frac{4}{3}\right)^3 + \dots \right\}$. Это не что иное, как бесконечный ряд, члены которого положительны и неограниченно возрастают. Сумма такого ряда также обращается в бесконечность. Ряд, как принято говорить, расходится.

Несколько труднее вычислить площадь той части поверхности, которая заключена внутри предельной кривой. Площадь S_0 исходного треугольника равна (основание · высота)/2. Выразив высоту равностороннего треугольника через его сторону с помощью теоремы Пифагора, получим

$$S_0 = \frac{l}{2} \sqrt{l^2 - \left(\frac{l}{2}\right)^2} = \frac{l^2}{4} \sqrt{3}.$$

На первом шаге построения мы выбросим из этой величины

$$12 \frac{l_1^2 \sqrt{3}}{4}, \quad \text{где } l_1 = \frac{l}{3}.$$

т. е.

$$S_1 = S_0 - 3 \frac{l^2}{4} \cdot \frac{\sqrt{3}}{9} = \frac{l^2}{4} \sqrt{3} - \frac{l^2}{4} \sqrt{3} \cdot \frac{3}{9}.$$

На втором шаге мы выбросим

$$12 \cdot \frac{l_2^2 \sqrt{3}}{4}, \quad \text{где } l_2 = \frac{l_1}{3} = \frac{l}{9},$$

т. е.

$$S_2 = \frac{l^2}{4} \sqrt{3} - \frac{l^2}{4} \sqrt{3} \frac{3}{9} - \frac{l^2 \sqrt{3}}{4} \cdot \frac{12}{81}.$$

Общий закон образования суммы уже ясен. Вынеся за скобки $S_0 = \frac{l^2}{4} \sqrt{3}$, получаем

$$\begin{aligned} S_\infty &= S_0 \left\{ 1 - \frac{3}{9} - \frac{12}{81} - \dots - \frac{3 \cdot 4^{n-1}}{3^{2n}} - \dots \right\} = \\ &= S_0 \left\{ 1 - 3 \left(\frac{1}{9} + \frac{4}{81} + \frac{16}{729} + \frac{64}{6561} + \dots \right) \right\}. \end{aligned}$$

Сумма бесконечного ряда, заключенного в круглые скобки, конечна: сколько бы членов вы ни брали, их сумма не достигает значения 0,2.

Предположив, что сумма этого ряда равна 0,2 (она действительно равна 0,2), получаем окончательно

$$S_{\infty} = S_0(1 - 0,6) = 0,4S_0.$$

Таким образом, кривая-«антиснежинка» имеет бесконечную длину, но площадь заключенной внутри ее части плоскости конечна. К кривой-«антиснежинке» ни в одной ее точке нельзя провести касательную — она, как принято говорить, нигде не дифференцируема. Именно за столь необычные свойства математики и называют такие кривые патологическими. Тот, кто отправится в путешествие по такой кривой, бесследно исчезнет. Назад он никогда не вернется.

КАК ЭТО НАЧИНАЛОСЬ

Один из пионеров вычислительной техники в Германии Конрад Цузе (род. в 1910 г.) учился в Берлинском инженерно-строительном институте, т. е. избрал себе профессию, связанную с многочисленными расчетами по довольно громоздким формулам. В своих мечтах безусый студент-первокурсник уже наносил тонкими штрихами на ватман контуры необыкновенных жилых зданий и мостов, а вместо этого его посадили за расчет балок.

Эта маловдохновляющая работа была тем более непривлекательна для Цузе, что в ту пору он был деятельным членом театрального кружка, участвовал в любительских спектаклях и сам писал пьесы. Если бы только он мог сменить профессию! Но об этом нечего было и думать: несмотря на молодость, он успел уже дважды изменить жизненные планы. А на инженерном поприще все беспросветно погрязло в нескончаемых расчетах, и профессора только и знали, что придумывали для студентов задачки одна головоломнее другой (в этом смысле в инженерных вузах мало что изменилось и поныне).

Цузе не успел и оглянуться, как оказался в железном кольце, вырваться из которого удавалось лишь немногим: ему катастрофически не хватало времени! Но он не стал сетовать на судьбу, а решил во что бы то ни стало изменить ее и принялся размышлять,

Почему вычислительная работа столь трудоемка? Потому что формулы громоздки. Можно ли упростить их? Нет! А на что, собственно, уходит время при расчете по формулам? Из-за громоздкости формул вычислитель делает «по дороге» одну или несколько ошибок, и задачу приходится пересчитывать заново. Можно ли представить ход вычислений наглядно? Разумеется можно: для этого следует лишь воспользоваться специальной картой или формуляром. Как

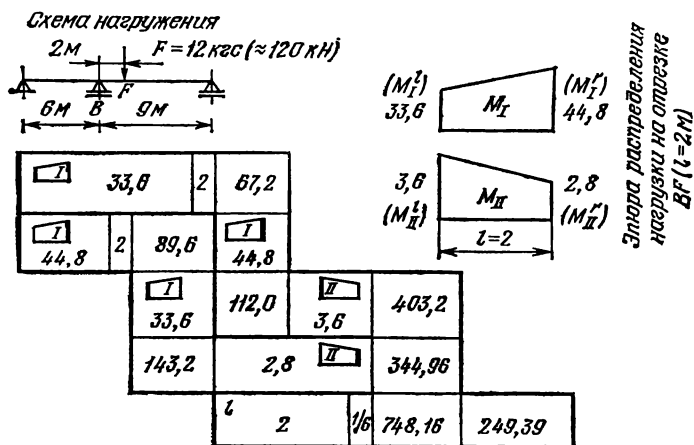


Рис. 5. Расчет балки (по Цузе).

должна выглядеть хорошая карта вычислений? Так, чтобы вычислитель мог, не размышляя, а лишь подставляя нужные числа, получать правильный результат.

После нескольких попыток Цузе построил свою карту вычислений по следующему принципу. Все «точечные» арифметические операции («:» и «·») располагаются в строку, все «штриховые» операции («+» и «—») располагаются в столбец.

Цузе было необходимо рассчитать статически неопределимую систему (рис. 5). В качестве примера ее можно представить в виде балки, покоящейся на трех опорах. Среднюю опору (мысленно) удаляют и вычисляют, какие моменты M (сила · плечо) необходимо приложить, чтобы левая и правая части балки не обрушились в отсутствие средней опоры.

Моменты вычисляются по формуле

$$\int_0^l M_I M_{II} ds = \frac{1}{6} l [M_I^l (2M_I^l + M_I^r) + M_{II}^r (M_I^l + 2M_I^r)],$$

$$l = 2 \text{ м},$$

$$M_I^l = 33,6 \text{ кгс} \cdot \text{м} = 330 \cdot 10^3 \text{ Н} \cdot \text{м},$$

$$M_{II}^l = 3,6 \text{ кгс} \cdot \text{м} = 35,3 \cdot 10^3 \text{ Н} \cdot \text{м},$$

$$M_I^r = 44,8 \text{ кгс} \cdot \text{м} = 440 \cdot 10^3 \text{ Н} \cdot \text{м},$$

$$M_{II}^r = 2,8 \text{ кгс} \cdot \text{м} = 27,5 \cdot 10^3 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

Подставляя в правую часть результаты вычислений, получаем

$$\begin{aligned} \int_0^l M_I M_{II} ds &= \frac{1}{6} \cdot 2 [3,6 (2 \cdot 33,6 + 44,8) + \\ &+ 2,8 (33,6 + 2 \cdot 44,8)] = 249,39 \text{ кгс} \cdot \text{м}. \end{aligned}$$

Карта Цузе выглядит в этом случае так, как показано на рис. 5. Даже тем, кто ничего не смыслит в строительном деле, ясно, что алгоритм Цузе нагляден и легко выполним (как известно, далеко не все алгоритмы столь же наглядны). Жирные вертикальные черты на эпюрах показывают, с какой стороны (справа или слева) приложен момент. В узких клетках стоят раз и навсегда выбранные коэффициенты 1/6 и 2 (входящие в правую часть интеграла). Начав вычисления с M_I^l , мы, не особенно размышляя, приходим к клетке со значением 403,2. Производя вычисления с помощью нашего микрокалькулятора, мы выполняем те же арифметические операции над теми же числами в той же последовательности. Число 403,2 мы вводим в регистр памяти (если наш микрокалькулятор его имеет). Цузе также записывал это число в «памяти», так как, согласно его алгоритму, над числом 403,2 дальнейшие операции не производились до тех пор, пока не будет вычислен M_I^r .

Когда разработка карт была завершена, Цузе пришла идея автоматизировать самый процесс вычислений. Ему хотелось, чтобы такие карты обрабатывались «сами собой» с помощью перфорированных в них отверстий и специальных штифтов,

Дойдя в нашем повествовании до этого места, мы не можем не отметить одно важное обстоятельство: теперь у Цузе хватало времени на то, чтобы наряду с занятиями в институте и участием в спектаклях приступить к работе в новой области! Время тянется невыносимо, когда мы «привязаны» к нелюбимой работе, но сжимается, как губка, когда то, что мы делаем, доставляет нам удовольствие, и это немедленно сказывается на нашей производительности: ведь производительность — это работа, совершаемая в единицу времени!

Цузе быстро заметил, что десятичные цифры плохо приспособлены для операций на перфокартах, и перешел к двоичной системе.

Закончив институт, Цузе приступил к созданию вычислительной машины. В течение первых 15 лет она работала на реле. После войны Цузе перешел на электронные лампы и, наконец, стал использовать достижения микроэлектроники.

В наших микрокалькуляторах используются два выдающихся достижения человеческого духа: электроника и (в качестве отправного пункта!) логика, по которой она работает.

В ГЛАЗАХ РЯБИТ

Многим из читателей, несомненно, приходилось решать простую задачу о вычислении суммы нескольких чисел. С помощью микрокалькулятора решение ее не представляет никакой проблемы. И все же, будучи человеком осторожным, вы, дорогой читатель, повторяете вычисления и... приходите к различным результатам! Вы повторяете вычисления в третий раз и... получаете третий результат! Тогда, вконец раздосадованный, вы разбиваете задачу на мелкие шаги и начинаете по несколько раз просчитывать каждый шаг.

Способность совершать ошибки при продолжительных (и в основном достаточно простых) вычислениях обусловлена «ненадежностью» людей. При обработке длинных серий чисел мы быстро устаем и нажимаем «не ту» клавишу. В подобных случаях вместо того,

чтобы пересчитывать всю сумму заново, полезно воспользоваться одним вычислительным приемом, к которому прибегали еще наши деды. Резюмеется, теперь у нас в руках не только прием, но и микрокалькулятор.

Итак, не повторяя заново все вычисления, мы проверяем их шаг за шагом по делимости на 9. Наш критерий гласит:

Остаток от деления на 9 суммы равен сумме остатков от деления на 9 всех слагаемых.

Те, кто пользуется этим правилом, знают, что существуют еще два аналогичных критерия:

Остаток от деления на 9 разности двух чисел равен разности остатков от деления на 9 каждого из них.

Остаток от деления на 9 произведения чисел равен произведению остатков от деления на 9 сомножителей.

Для того чтобы продемонстрировать действие этих критериев на числовом примере, мы не будем суммировать много слагаемых и ограничимся всего тремя числами:

| Исходные числа | Сумма цифр | Остаток от деления на 9 |
|-------------------|---------------|----------------------------|
| 613 → | 10 (: 9) | 1 |
| +726 → | 15 (: 9) | +6 |
| +999 → | 27 (: 9) | +0 |
| <hr/> | | |
| 2338 | 16 (: 9) | 7 (: 9) |
| | Остаток 7 | Остаток 7 |

Если остаток от деления на 9 суммы цифр совпадает с остатком от деления на 9 суммы остатков от деления на 9, то задача решена верно.

Производя вычисления, не следует подражать одному из авторов этой книги, который с помощью микрокалькулятора правильно нашел сумму 2338, а при вычислении «в уме» суммы цифр числа 613 получил 71! Все сошлось лишь после того, как он и сумму цифр вычислил с помощью микрокалькулятора.

Ради надежности остатки от деления на 9 также лучше всего находить с помощью микрокалькулятора. Если вы выбираете число с максимально возможным количеством знаков после запятой или если ваш микрокалькулятор всегда показывает все десятичные

знаки, то вы сразу увидите, что повторяющиеся цифры после запятой дают остаток от деления на 9:

$$10 : 9 = 1,111111 \text{ (остаток 1),}$$

$$11 : 9 = 1,222222 \text{ (остаток 2),}$$

$$50 : 9 = 5,555555 \text{ (остаток 5) и т. д.}$$

Ход вычислений при вычитании и умножении нетрудно установить самостоятельно. В уже упомянутой в предисловии книге «С микрокалькулятором в руках» в разделе «Математические курьезы» мы привели немало числовых забав и диковин. Приведем здесь еще один числовой курьез и с помощью остатков от деления на 9 убедимся, что все вычисления произведены правильно. Вычислим 11^5 , 12^5 , ..., 19^5 .

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|----|-----|------|---------|-----------|
| 11 | 121 | 1331 | 14 641 | 161 051 |
| 12 | 144 | 1728 | 20 736 | 248 832 |
| 13 | 169 | 2197 | 28 561 | 371 293 |
| 14 | 196 | 2744 | 38 416 | 537 824 |
| 15 | 225 | 3375 | 50 625 | 759 375 |
| 16 | 256 | 4096 | 65 536 | 1 048 576 |
| 17 | 289 | 4913 | 83 521 | 1 419 857 |
| 18 | 324 | 5832 | 104 976 | 1 889 568 |
| 19 | 361 | 6859 | 130 321 | 2 476 099 |

Сравнивая числа, стоящие в столбцах, нетрудно заметить следующее.

1) В столбце n^2 последняя цифра совпадает с последней цифрой числа $(n - 10)^2$. Например,

$$13^2 = 169,$$

$$3^2 = 9.$$

Если заметить, что квадраты чисел от 10 до 20 заключены между 100 и 400, квадраты чисел от 20 до 30 — между 400 и 900 и т. д., то нетрудно понять, как эстрадные вычислители извлекают корни, например $\sqrt{1156} = 34$. Они рассуждают примерно так: между 900 и 1600 идут квадраты чисел от 30 до 40, а последняя цифра квадрата 6 соответствует последней цифре корня 4 (так как $\sqrt{16} = 4$).

2. Аналогичная зависимость, естественно, наблюдается и среди последних цифр чисел n^3 :

$$\begin{aligned} 13^3 &= 2197, \\ 3^3 &= 27. \end{aligned}$$

Но последние цифры столбца n^3 в нашей таблице обладают еще одной особенностью: каждая из них встречается только один раз. Кроме того, последние цифры чисел, симметричных относительно середины столбца, в сумме всегда дают число 10:

$$1331 + 6859 = 8190.$$

3. В столбце n^4 все последние цифры (за исключением числа 15^4) попеременно равны то 1, то 6.

4. Но, пожалуй, самое удивительное ожидает нас, когда мы взглянем на последние цифры столбца n^5 : они выстроились по порядку (от 1 до 9) сверху вниз.

Ваша фантазия и ваш микрокалькулятор открывают перед вами поистине необозримое поле такого рода числовых забав.

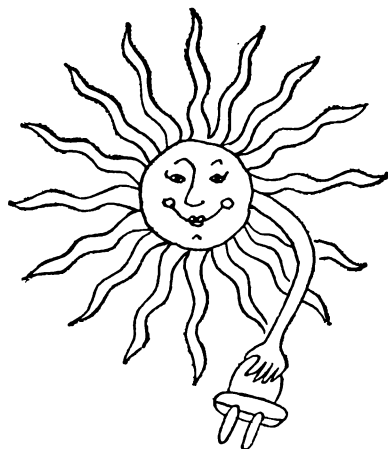
Нам осталось проверить с помощью остатков от деления на 9, правильно ли произведено умножение или при вычислении, считывании либо в результате описки где-то вкралась ошибка. В качестве примера мы выберем число 13^5 .

| Вычисление | Сумма цифр | Остаток от деления на 9 |
|-------------|---------------------------|--------------------------------|
| 13 | 4 (: 9 = 0) | 4 |
| ×13 | ×4 | ×4 |
| ×13 | ×4 | ×4 |
| ×13 | ×4 | ×4 |
| ×13 | ×4 | ×4 |
| <hr/> | | |
| = 371 293 → | 25 (: 9 = 2) Остаток 7 | 1 024 (: 9 = 113) Остаток 7 |

В этом случае наш микрокалькулятор действительно может понадобиться нам при суммировании цифр, вычислении 4^5 и, наконец, делении 1024 на 9. Совпадение остатков (равных в обоих случаях 7) показывает, что задача решена верно,

О СОЛНЕЧНОМ ИЗЛУЧЕНИИ

Все мы знаем, что без Солнца жизнь на Земле была бы невозможна. Напрашивается мысль: а что если численно оценить эффективность нашей «космической лампы»?



Воспользуемся для этого формулой излучения Макса Планка (1858—1947), позволяющей вычислить, например, какую энергию излучает 1 м^2 поверхности Солнца на каждой единице длин волн λ :

$$f(\lambda) = \frac{\alpha}{\lambda^5 (e^{\beta/\lambda} - 1)}$$

(в ваттах на метр длины волны с каждого квадратного метра поверхности Солнца), где

$$\alpha = 2hc^2 = 1,19 \cdot 10^{-16} \text{ Вт} \cdot \text{м}^2,$$

$$\beta = \frac{hc}{kT} = 2,52 \cdot 10^{-6} \text{ м},$$

$$h \text{ (постоянная Планка)} = 6,62 \cdot 10^{-31} \text{ Вт} \cdot \text{с}^2,$$

$$k \text{ (постоянная Больцмана)} = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ Вт} \cdot \text{с/К},$$

$$c \text{ (скорость света)} = 3 \cdot 10^8 \text{ м/с},$$

$$T \text{ (температура излучателя — Солнца)} = 5700 \text{ К}.$$

Если нас интересует энергия, излучаемая Солнцем в определенном диапазоне длин волн от λ_1 до λ_2 , то необходимо вычислить площадь под кривой $f(\lambda)$ на отрезке от λ_1 до λ_2 (рис. 6). С точки зрения математики задача сводится к вычислению определенного интеграла

$$I = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} f(\lambda) d\lambda.$$

Если вы не знаете интегрального исчисления, то все последующее может показаться вам совершенно неинтересным. Дело в том, что интеграл от распределения Планка «не берется», т. е. его нельзя представить в аналитически замкнутом виде. Единственное, что остается в таких случаях, — находить значения таких интегралов численно, т. е. приближенно. Для этого английский математик Томас Симпсон (1710—1761) предложил следующую формулу:

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{x_0+n \cdot 2h} f(x) dx \approx \frac{h}{3} (y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + \\ + \dots + 4y_{2n-1} + y_{2n}), \end{aligned}$$

где $y_i = f(x_i)$ ($i = 0, 1, \dots, 2n$) — значение подынтегральной функции в точке $x_i = x_0 + i \cdot h$, h — шаг интегрирования. В книге «С микрокалькулятором в руках» мы рассказали о том, как вычислять объемы бочек и судовых корпусов. Было показано, что один и тот же интеграл можно вычислять многими способами,

По формуле Симпсона площадь под кривой (интеграл) разделяется на четное ($2n$) число полос одинаковой ширины h . Площадь каждой полоски вычисляется как площадь прямоугольника: значение подынтегральной функции на левом конце отрезка умножается на длину отрезка h . Чем мельче разбиение, т. е.

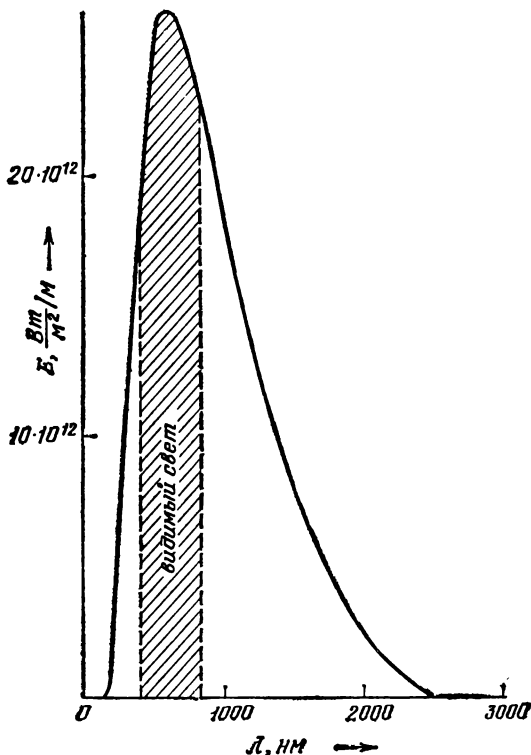


Рис. 6. Распределение энергии в солнечном спектре.

чем больше $2n$ и соответственно чем меньше h , тем точнее результат вычислений.

Мы хотим оценить, сколь велика энергия, излучаемая Солнцем в видимой области длин волн, т. е. в диапазоне от $\lambda_1 = 350 \text{ нм} = 3,5 \cdot 10^{-7} \text{ м}$ до $\lambda_2 = 700 \text{ нм} = 7 \cdot 10^{-7} \text{ м}$. Следует заметить, что нижняя граница видимой области длин световых волн, так же как и нижняя граница слышимой области длин

звуковых волн, зависит от возраста наблюдателя (слушателя). У людей моложе 30 лет нижняя граница λ_1 лежит около 300 нм, у людей старше 65 лет — превышает 400 нм.

Разделим сначала интересующий нас интервал длин волн на 4 отрезка ($2n=4$) длиной $h = (\lambda_2 - \lambda_1)/4 = 0,875 \cdot 10^{-7}$ м.

Так как независимую переменную (длину волны) принято обозначать греческой буквой «лямбда» (λ), формула Симпсона принимает вид

$$I = \int_{3,5 \cdot 10^{-7}}^{7 \cdot 10^{-7}} f(\lambda) d\lambda \approx \frac{0,875}{3} \cdot 10^{-3} [f(3,5 \cdot 10^{-7}) + 4f(4,375 \cdot 10^{-7}) + 2f(5,25 \cdot 10^{-7}) + 4f(6,125 \cdot 10^{-7}) + f(7 \cdot 10^{-7})].$$

(Предполагается, дорогой читатель, что ваш микрокалькулятор имеет регистр памяти и вы можете нажатием клавиши «M+» суммировать отдельные слагаемые.)

Для контроля приводим промежуточный результат:

$$f(3,5 \cdot 10^{-7}) = \frac{1,19 \cdot 10^{-16}}{(3,5 \cdot 10^{-7})^5 \left(e^{\frac{2,52 \cdot 10^{-6}}{3,5 \cdot 10^{-7}}} - 1 \right)} = 1,693 \cdot 10^{13}.$$

Если ваш микрокалькулятор может работать в представлении плавающей запятой, то, например, с помощью клавиши «EE» число $1,19 \cdot 10^{-16}$ можно ввести в него следующим образом: 1,19; «EE»; 16; «+/-».

Для микрокалькулятора с так называемой алгебраической логикой предпочтительнее нажать следующую последовательность клавиш: 2.52; «EE»; 6; «+/-»; «÷»; 3.5; «EE»; 7; «+/-»; «=»; e^x ; «-»; 1; «=»; «x»; 3.5; «EE»; 7; «+/-»; «y^x»; 5; «=»; «1/x»; «x»; 1.19; «EE»; 16; «+/-»; «=». Значения переменной подчеркнуты.

В подобных случаях, когда приходится многократно проделывать сложные вычисления с незначительно изменяющимися числами, весьма удобно, исходя из возможностей микрокалькулятора, заранее продумать, в какой последовательности нажимать клавиши,

Приведем остальные значения подынтегральной функции:

$$f(4,375 \cdot 10^{-7}) = 2,347 \cdot 10^{13},$$

$$f(5,25 \cdot 10^{-7}) = 2,476 \cdot 10^{13},$$

$$f(6,125 \cdot 10^{-7}) = 2,293 \cdot 10^{13},$$

$$f(7 \cdot 10^{-7}) = 1,989 \cdot 10^{13}.$$

Подставляя их в формулу Симпсона, получаем

$$I \approx \frac{0,875 \cdot 10^{-7} \cdot 10^{13}}{3} (1,693 + 4 \cdot 2,347 + 2 \cdot 2,476 + 4 \cdot 2,293 + 1,989) \approx 7,931 \cdot 10^6 \text{ Вт/м}^2.$$

Для того чтобы проверить, сколь точно используемое нами приближение, повторим вычисления еще раз при более мелком разбиении площади под кривой. Вычисленные ранее значения $f(\lambda)$ нам пригодятся: число полос мы при контрольном счете удвоим, выберем $h = \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{8} = 0,4375 \cdot 10^{-7}$; соответственно $2n = 8$. Вычислим недостающие значения $f(\lambda)$ в новых точках:

$$y_1 = f(3,9375 \cdot 10^{-7}) = 2,093 \cdot 10^{13},$$

$$y_3 = f(4,8125 \cdot 10^{-7}) = 2,465 \cdot 10^{13},$$

$$y_5 = f(5,6875 \cdot 10^{-7}) = 2,409 \cdot 10^{13},$$

$$y_7 = f(6,5625 \cdot 10^{-7}) = 2,148 \cdot 10^{13}.$$

В качестве второго приближения мы получаем значение

$$I \approx \frac{0,4375 \cdot 10^{-7}}{3} \cdot 10^{13} \cdot (1,693 + 4 \cdot 2,093 + 2 \cdot 2,347 + 4 \cdot 2,465 + 2 \cdot 2,476 + 4 \cdot 2,409 + 2 \cdot 2,293 + 4 \cdot 2,148 + 1,989) \approx 7,930 \cdot 10^6 \text{ Вт/м}^2.$$

Здесь уже гарантирована точность трех знаков после запятой.

Если бы мы захотели узнать, какую мощность излучает вся поверхность Солнца (в области видимого света), то полученный результат следовало бы умножить на площадь S_{\odot} полной поверхности Солнца. Так как диаметр Солнца $1,392 \cdot 10^9$ м, то площадь поверхности такого шара равна

$$S_{\odot} = \pi d^2 = 6,087 \cdot 10^{18} \text{ м}^2.$$

Следовательно, мощность, излучаемая поверхностью Солнца в видимой области длин волн, оценивается величиной

$$P = IS_{\odot} = 4,827 \cdot 10^{25} \text{ Вт.}$$

С такой поистине расточительной щедростью изливает в окружающее пространство свой свет «старик-Солнце», изливает бесперебойно на протяжении почти 4 млрд. лет!

В этой связи небезынтересно оценить, какую массу теряет Солнце каждую секунду при такой мощности излучения. По формуле Альберта Эйнштейна (1879—1955) масса и энергия связаны между собой соотношением

$$E = Mc^2.$$

Следовательно, масса, теряемая на излучение,

$$M = \frac{4,827 \cdot 10^{25}}{9 \cdot 10^{16}} \text{ кг} = 0,536 \cdot 10^9 \text{ кг/с,}$$

что равно массе примерно 5000 паровозов.

Подчеркнем, что в своих расчетах мы учитывали только видимую область света. Если проведенные выше вычисления распространить на весь солнечный спектр, то мощность излучения возрастет до $3,86 \cdot 10^{26}$ Вт, что соответствует расходу массы в $4,3 \cdot 10^9$ кг/с. Это означает, что Солнце каждую секунду излучает массу, равную массе 50 000 паровозов или, если такое сравнение нравится вам больше, массе пирамиды Хеопса (около 5 млн. т, см. раздел «Пирамида Хеопса»).

Разумеется, было бы интересно узнать, какая часть излучаемой Солнцем энергии приходится на долю нашей любимой планеты — Земли. Для ответа на этот вопрос физики и метеорологи разработали специальное понятие солнечной постоянной — величины, показывающей, какова мощность излучения, падающего на 1 м^2 (поверхности, перпендикулярной излучению) на высоте верхней границы атмосферы. Среднее значение солнечной постоянной равно

$$P^* = 1,395 \text{ кВт/м}^2.$$

Истинное значение ее несколько колеблется в зависимости от расстояния Солнце — Земля и некоторых

других возмущающих факторов. Те, кто думает, что мощность всего падающего на Землю солнечного излучения можно вычислить, умножив солнечную постоянную P^* на площадь поверхности половины земного шара, заблуждаются: солнечная постоянная характеризует излучение, падающее под прямым углом к поверхности, а этому условию на земном шаре удовлетворяет только площадка в окрестности ближайшей к Солнцу «макушки».

Но если воспользоваться прямоугольной проекцией освещенного полушария (а Солнце освещает именно такое сечение земного шара), то ее площадь равна площади большого круга Земли с диаметром $d_3 = 12,6 \cdot 10^6$ м, и мы получим величину

$$P = \frac{\pi}{4} (12,6 \cdot 10^6)^2 \cdot 1,395 \cdot 10^3 \text{ Вт} = 1,739 \cdot 10^{17} \text{ Вт}.$$

Она составляет $(1,739 \cdot 10^{17}) / (3,86 \cdot 10^{26}) = 0,5 / 10^9$, т. е. половину одной миллиардной от мощности, излучаемой Солнцем во все стороны. Но и от этой величины из-за сложного взаимодействия поглощения и отражения вниз на поверхность Земли попадает едва лишь 30 %.

В заключение мы хотели бы ответить еще на один интересный вопрос, тесно связанный с полученной оценкой: какая доля поступающей на Землю извне колоссальной мощности $1,739 \cdot 10^{17}$ Вт (т. е. без малого миллиард мегаватт) идет «в дело», т. е. используется?

Ответ может показаться удивительным: почти ничего! Вся поступающая от Солнца энергия с точностью до долей промилле вновь излучается Землей (в основном ее неосвещенной стороной) в космическое пространство. Таким образом устанавливается почти полный баланс (включающий в себя и около 1,5 % энергии, поступающей от радиоактивного распада в земной коре). Баланс этот настолько точен, что климат на Земле не изменяется сколько-нибудь заметным образом на протяжении тысячелетий (если бы баланс был нарушен, то Земля либо остывала бы, либо разогревалась).

Мини-производство (и мини-потребление) энергии населением Земли не оказывает ощутимого влияния на общий обмен энергии между Землей и космосом. Настораживает, однако, что изменения в химическом

составе атмосферы (например, повышение содержания двуокиси углерода и озона) приводит к существенным возмущениям сложившегося равновесия.

СОВЕТЫ ГОЛУБЕВОДАМ

Вильгельм Вундерлих — заядлый голубятник. Он разводит почтовых голубей. Каждую свободную минуту Вундерлих проводит у голубятни: все глядит — не наглядится на своих голубей. Но особый интерес вызывает у него состязания, которые проводит время от времени Общество любителей почтовых голубей. В день состязаний отобранных голубей увозят специальным транспортом за несколько сот километров и в назначенное время выпускают. Иногда (хотя и редко) Вильгельму удастся отправиться сопровождающим вместе со специальным транспортом. Когда стая взмывает и делает несколько кругов над фургоном, он отчетливо различает своего любимого голубя с белым пером на кончике левого крыла. Голуби отлично знают, где находится их первая, «родная» голубятня, и устремляются «домой» со скоростью 80 км/ч.

Сегодня голубям предстоит покрыть расстояние от Рюдерсдорфа под Берлином до Дрездена, где живет Вундерлих. Но Вильгельм и члены общества озабочены: дует сильный юго-западный ветер. Согласно сводке погоды, его порывы достигают 14 м/с. Однако решено не отменять состязания. И вот один из голубей взмывает в небо и берет курс на юг — к Дрездену. Вильгельм сияет от гордости: он узнал своего любимого голубя с белым пером на левом крыле. Но не может не тревожить сомнение: долетит ли голубь до места?

У Вильгельма всегда при себе микрокалькулятор. Голубеводы не пьют, не курят и получают для своих подопечных бесплатный корм, так что Вильгельм мог позволить себе приобрести дорогой микрокалькулятор со всякого рода усовершенствованиями. В его конструкции предусмотрено все необходимое для работы с векторами: регистры памяти, клавиши, позволяющие вычислять значения некоторых функций, $+\Sigma$, $-\Sigma$, полярные и прямоугольные координаты.

В своей записной книжке Вильгельм набросал небольшой чертеж (рис. 7). Голубь (теоретически) развивает в полете скорость 80 км/ч и держит курс на юг (180°). Ветер дует со скоростью $14 \text{ м/с} \approx 50 \text{ км/ч}$ с юго-запада, его вектор скорости направлен на СВ (45°).

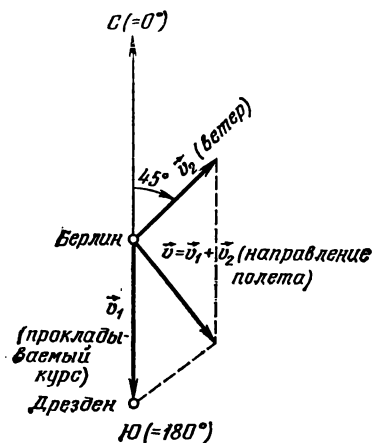


Рис. 7. Как летит почтовый голубь: он держит курс на юг, а сильный ветер сносит его на юго-восток.

Возникают следующие вопросы.

1. Под каким углом ветер будет сносить голубя, если тот летит прямо на юг (180°)? Какова реальная скорость голубя относительно поверхности Земли?

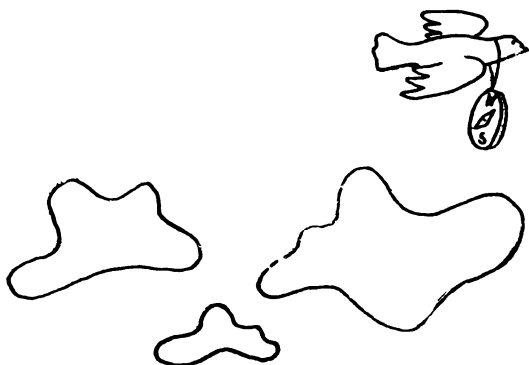
2. Под каким углом следовало бы отклониться голубю к западу, чтобы скомпенсировать снос на восток под действием ветра и лететь на юг?

Вы уже заметили, что все углы на чертеже Вильгельма отсчитываются от направления на север по часовой стрелке. Так принято отсчитывать углы у капитанов морских судов, пилотов и голубеводов.

Прежде всего Вильгельм нажал функциональную клавишу очистки всех регистров. Если бы он забыл о такой предосторожности, то числа, случайно оставшиеся в регистрах от предыдущих вычислений, могли бы исказить результаты последующих расчетов. (Такая клавиша, позволяющая производить очистку всех регистров, имеется не во всех микрокалькуляторах.)

Опишем теперь программу, позволяющую проследить маршрут почтового голубя. Каждый читатель сумеет легко приспособить ее к возможностям своего микрокалькулятора.

1. Очистить все регистры.
2. Выбрать, в какой системе представлять углы (в градусной).
3. Ввести угол, соответствующий направлению Берлин — Дрезден (180°).
4. Ввести скорость полета почтового голубя (80 км/ч).
5. Угол и скорость представлены в микрокалькуляторе в полярных координатах. Перейти от полярных координат к прямоугольным.
6. Записать полученные данные в $+\Sigma$ (первый вектор откладывается от начала координат 0).
7. Ввести угол направления, в котором дует ветер (45°).
8. Ввести скорость ветра (50 км/ч).
9. Перейти от полярных координат к прямоугольным.
10. $+\Sigma$ (к первому вектору прибавляется второй; находится результирующая, т. е. сумма, двух векторов).
11. Вызвать сумму составляющих вдоль оси y из соответствующего регистра.
12. Вызвать сумму составляющих вдоль оси x из соответствующего регистра.
13. Нажать функциональную клавишу полярных координат (скорость относительно поверхности Земли).



14. $x \rightleftharpoons y$ (курсовой угол относительно поверхности Земли).

Для того чтобы вы могли проследить, как происходит обработка чисел, приведем запись всего хода вычислений на современном микрокалькуляторе с так называемой обратной бескобочной (польской) записью (и наши комментарии по поводу каждой операции).

| Бескобочная запись | Индикатор | Примечание |
|--------------------------|-----------|-----------------------------|
| fREG | 0,00 | Очистка регистра |
| gREG | 0,00 | Выбор градусной меры углов |
| 180 Enter | 180 | Ввод направления на Дрезден |
| 80 | 80 | Скорость |
| f. R. | —80,00 | Прямоугольные координаты |
| + | 1,00 | В регистр сумм |
| 45 Enter | 45,00 | |
| 50 | 50 | |
| f. R. | 35,26 | |
| + | 2 | |
| RCL4 | 35,38 | Вызов из регистра |
| RCL7 | —44,64 | Вызов из регистра |
| g. P. | 56,95 | Полярные координаты (км/ч) |
| $x \rightleftharpoons y$ | 141,62 | Угол (в градусах) |

Относительно поверхности Земли голубь вместо 80 км/ч едва развивает скорость 50 км/ч и летит к линии юг — север под углом 142° вместо 180° .

А вот как выглядит та же программа, реализованная на микрокалькуляторе с так называемой алгебраической логикой:

| Ввод числа | Клавиша | Индикатор | Примечания |
|------------|--------------------------|-----------|---|
| | 2nd CA | 0 | Очистка всех регистров |
| 80 | $x \rightleftharpoons y$ | 0 | Ввод модуля (длины) вектора |
| 180 | 2nd P \rightarrow R | 0 | Ввод направления (угла) вектора v_1 и переход от полярных координат к прямоугольным |

| Ввод числа | Клавиша | Индикатор | Примечания |
|---------------|--------------------------------------|------------|---|
| | STO 1 $x \rightleftharpoons y$ STO 2 | —80 | Запись в регистры памяти M1 и M2 |
| 50 | $x \rightleftharpoons y$ | 0 | Ввод модуля вектора v_2 |
| 45 | 2nd P \rightarrow R | 35,355 | Ввод направления (угла) вектора v_2 и переход от полярных координат к прямоугольным |
| | SUM 1 $x \rightleftharpoons y$ SUM 2 | 35,355... | Сложение составляющих векторов и запись в регистры M1 и M2 |
| | RCL 2 $x \rightleftharpoons y$ RCL 1 | 35,355... | Вызов составляющих результирующего вектора |
| | INV 2nd P \rightarrow R | 141,623... | Обратный переход от прямоугольных координат к полярным; на индикаторе — угол в градусах |
| | $x \rightleftharpoons y$ | 56,948 | Модуль результирующего вектора |

Вильгельм теперь знает, что если его голубь будет держать курс строго на юг, как в безветренную погоду, то ветер снесет его на $180^\circ - 142^\circ = 38^\circ$ к востоку и скорость голубя относительно Земли упадет до 57 км/ч. Заодно Вильгельм прикинул: расстояние Рюдерсдорф — Дрезден составляет 160 км; при скорости 80 км/ч время в полете равно $160/80 = 2$ ч.

Вильгельм взглянул на карту. За 2 ч полета со скоростью 57 км/ч голубь покроет расстояние 114 км. Вильгельм с беспокойством взглянул на карту еще раз. При угле отклонения 38° голубь примерно через 2 ч пересечет польскую границу к востоку от Котбуса! Покинуть страну без выездной визы! Но Вильгельм тут же успокоил себя. К чему зря волноваться? Его голубь — птица умная, он непременно учтет снос ветром и будет держать курс под определенным углом к ветру. Но под каким?

Вильгельм набросал еще один чертеж (рис. 8) и сразу понял, что вычислить угол упреждения не так-то просто: сложением двух векторов тут не обойтись. Так как Вильгельму не хотелось особенно ломать голову над тем, как определить злосчастный угол, и к тому же микрокалькулятор не успел остыть

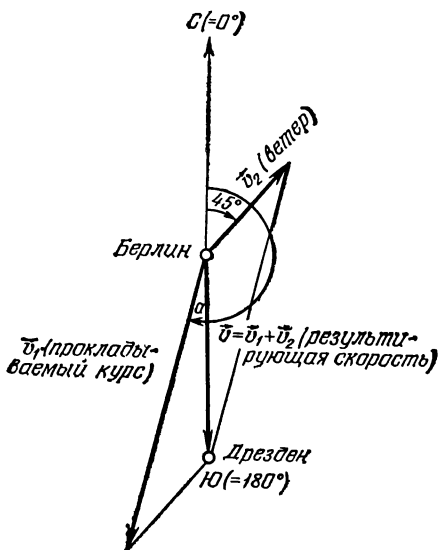


Рис. 8. Как следовало бы держать курс почтовому голубю, чтобы лететь на юг.

от предыдущих вычислений, голубятник решил попробовать, что будет, если за упреждающий угол принять вычисленный ранее угол сноса 38° , и получил «ветроустойчивый» вектор скорости голубя:

модуль 80 км/ч ,
 угол $\alpha_1 = 180^\circ + 38^\circ = 218^\circ$.

Вектор скорости оставался при этом прежним;

модуль 50 км/ч ,
 угол $\alpha_2 = 45^\circ$.

Следуя уже апробированной схеме, он ввел эти значения и получил, что при юго-западном ветре голубь должен был бы придерживаться курса с $\alpha \approx 207^\circ$ и развивать скорость 31 км/ч . Но компенсировать снос

при таких параметрах голубю не удалось бы: его снесло бы на запад (на этот раз на $207^\circ - 180^\circ = 27^\circ$), и он оказался бы где-то по направлению к Торгау.

Вильгельм прикинул еще раз, предположив, что голубь выдерживает курс 210° вместо 218° . Входные параметры для расчета оказались соответственно равными (80, 210) и (50, 45).

Выяснилось, что с учетом сноса голубь летит под углом 188° и развивает скорость 34 км/ч. Отклонение при этом достигает всего лишь 8° к западу, и наш любитель почтовых голубей счел его вполне удовлетворительным, надеясь в душе, что его голубь выберет еще более удачный курс. Как это удалось (без всякого микрокалькулятора) мудрой птице, не может сказать никто.

О КОРРЕЛЯЦИИ И НЕКОТОРЫХ МОДЕЛЯХ, ТРЕБУЮЩИХ ИЗВЕСТНОЙ ОСМОТРИТЕЛЬНОСТИ

Модели — это изображения реальности (или по крайней мере должны быть таковыми). Они могут быть материальными, осязаемыми (например, модели железной дороги), но бывают и чисто математические модели, существующие только на бумаге или в памяти вычислительной машины.

Взглянув на модель железной дороги или судна, мы сразу видим, соответствует ли она действительности и в какой мере. Оценить достоверность математической модели не так просто. Одна из простейших математических моделей сводится к вычислению корреляции. Чрезвычайно заманчиво ввести в самый большой из существующих ныне компьютеров те или иные исходные данные и предоставить ему подобрать соотношение между двумя или большим числом величин. Возникает лишь вопрос, имеет ли найденное компьютером соотношение физический смысл. Член Венгерской академии наук проф. Гилмот имел обыкновение пояснять возникающую при этом проблему на следующем примере. «Зависимость между уровнем воды в Дунае и числом студентов в Будапешт-

ском университете, вне всякого сомнения, существует, — говаривал Гилмот. — Осенью, зимой и весной уровень воды высок и в аудиториях полно студентов. В июне, июле и августе уровень воды в Дунае сильно понижается и в Будапеште не сыщешь студентов: все они разъехались на каникулы».

Зависимость между уровнем воды в Дунае и числом студентов в стенах университета, разумеется, можно представить в виде соотношения. Но имеет ли такое соотношение смысл?

Один школьник намеревался доказать, будто зимой дни короче от того, что они сжимаются от холода и даже вывел соотношение, которое устанавливало соответствие между температурой в Потсдаме и продолжительностью дня. Немного повозившись, можно обнаружить, что средняя температура в Сиднее обратно пропорциональна продолжительности дня в Цвинтшене. Однако истинная корреляция существует в том случае, если между «входными» физическими величинами имеется какая-то зависимость. Например, предел прочности чистого железа зависит от величины отдельных зерен в образце. Величина зерен тоже колеблется, однако можно определить их среднюю величину. Предположим, что средняя величина зерна в образце и предел прочности коррелированы.

| x | y |
|------------------------|-------------------|
| средний диаметр зерна, | предел прочности, |
| мм | Н/мм ² |
| 9,7 | 168 |
| 7,0 | 184 |
| 2,5 | 215 |
| 0,2 | 268 |
| 0,16 | 270 |
| 0,11 | 284 |

Ковариация величин x и y по определению равна

$$s_{xy} = \frac{1}{n-1} \left(\sum xy - \frac{1}{n} \sum x \sum y \right),$$

а коэффициент корреляции —

$$r = \frac{s_{xy}}{s_x s_y},$$

где s_x и s_y — стандартные уклонения величин x и y :

$$s_x = \sqrt{\frac{\Sigma x^2 - (\Sigma x)^2/n}{n-1}}, \quad s_y = \sqrt{\frac{\Sigma y^2 - (\Sigma y)^2/n}{n-1}}.$$

Составим таблицу всех величин, входящих в приведенные выше формулы, и будем предполагать, что наш микрокалькулятор имеет программу для соответствующих вычислений.

| x | x^2 | y | y^2 | xy |
|------|-------|-----|--------|---------|
| 9,7 | 94,00 | 168 | 28 224 | 1 629,6 |
| 7,0 | 49,00 | 184 | 33 856 | 1 288,0 |
| 2,5 | 6,25 | 215 | 46 225 | 537,5 |
| 0,2 | 0,04 | 268 | 71 824 | 53,6 |
| 0,16 | 0,03 | 270 | 72 900 | 43,2 |
| 0,11 | 0,01 | 284 | 80 656 | 31,24 |

$$\Sigma x = 19,67 \quad \Sigma x^2 = 149,42 \quad \Sigma y = 1\,389 \quad \Sigma y^2 = 333\,685 \quad \Sigma xy = 3\,583,14$$

Теперь мы уже располагаем всеми значениями, позволяющими вычислить ковариацию при $n = 6$:

$$\begin{aligned} s_{xy} &= \frac{1}{n-1} \left(\Sigma xy - \frac{1}{n} \Sigma x \cdot \Sigma y \right) = \\ &= \frac{1}{6-1} \left(3\,583,14 - \frac{1}{6} \cdot 19,67 \cdot 1\,389 \right) = -194,09. \end{aligned}$$

Стандартные уклонения равны:

$$\begin{aligned} s_x &= \sqrt{\frac{\Sigma x^2 - \frac{1}{n} (\Sigma x)^2}{n-1}} = & s_y &= \sqrt{\frac{\Sigma y^2 - \frac{1}{n} (\Sigma y)^2}{n-1}} = \\ &= \sqrt{\frac{149,42 - \frac{1}{6} \cdot 19,67^2}{6-1}} = & &= \sqrt{\frac{333\,685 - \frac{1}{6} \cdot 1\,389^2}{6-1}} = \\ &= \sqrt{16,99} = 4,12; & &= 49,26. \end{aligned}$$

Вычислим теперь решающую величину — коэффициент корреляции:

$$r = \frac{s_{xy}}{s_x s_y} = \frac{-194,09}{4,12 \cdot 49,26} = -0,96.$$

Итак, мы получили очень большой коэффициент корреляции. Следовательно, наша модель, в которой предел прочности зависит от размера зерен в образце железа, весьма правдоподобна.

Другие разновидности моделей используются для того, чтобы представить в «осязательном» для человека виде очень большие (или, наоборот, очень малые) размеры. У тех, кто не знаком с принципами моделирования, при «чтении» таких моделей нередко возникают превратные представления о моделируемом натуральном объекте. Проверить себя на устойчивость (или «иммунитет») к такого рода ошибкам вы можете, взглянув на карту Гренландии в проекции Меркатора: попытайтесь определить, с каким африканским (расположенным близ экватора) государством сравнима по площади Гренландия.

Для нашего микрокалькулятора благодатным полем приложения являются те модели, в основе которых лежат числа. Предположим, например, что мы хотим составить наглядные представления об относительных расстояниях во Вселенной.

Один световой год (расстояние, проходимое за год светом, распространяющимся со скоростью 300 000 км/с) равен

$$365 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60 \cdot 300\,000 \text{ км} = 9,46 \cdot 10^{12} \text{ км},$$

поэтому при построении нашей модели мы выберем масштаб: расстояние Земля — Солнце = $150\,000\,000 \text{ км} \approx 8$ световых минут в 1 мм, т. е. $1:150 \cdot 10^{12}$ (1 мм в нашей модели соответствует $1,5 \cdot 10^{13}$ мм во Вселенной).

Характерные расстояния перейдут при этом в следующие:

| | Расстояние или длина, км | Время, затрачи- ваемое светом на преодоление рас- стояния | Размеры в уменьшенном виде |
|-------------------------------------|-----------------------------|--|----------------------------------|
| Диаметр Земли | 13 000 | 0,04 с | $8,7 \cdot 10^{-5}$ мм |
| Расстояния: | | | |
| Земля — Солнце | $150 \cdot 10^6$ | 8 мин | 1 мм |
| Солнце — Нептун | $4500 \cdot 10^6$ | 4 ч | 30 мм |
| Расстояния до бли- жайших звезд: | | | |
| Проксима Центавра | $3,09 \cdot 10^{13}$ | 3,28 св. года | 206 м |
| Полярная звезда | $3,8 \cdot 10^{14}$ | 40,2 св. лет | 2530 м |

Расстояния до ближайших звездных скоплений:

| | | | |
|---------------------------------|---------------------|--------------------------|---------------------|
| ω-Центавра | $2 \cdot 10^{17}$ | 21 000 св. год | 1 300 км |
| Самое далекое шаровое скопление | $2 \cdot 10^{18}$ | $21 \cdot 10^4$ св. лет | 13 000 км |
| Туманность Андромеды | $4,7 \cdot 10^{18}$ | $0,5 \cdot 10^6$ св. лет | 30 000 км |
| Диаметр Вселенной | $9,5 \cdot 10^{21}$ | 10^9 св. лет | $6,3 \cdot 10^7$ км |

Наша модель отвечает своему назначению лишь в определенных пределах: невозможно представить себе наглядно ни 10^{-5} мм, ни 30 000 км. В лучшем случае мы можем утверждать, что наша модель еще раз со всей наглядностью продемонстрировала, сколь невообразимо велики размеры Вселенной. Вместе с тем она показала, что наш микрокалькулятор позволяет численно представить все эти невообразимо большие размеры.

Особенно сложны (и поэтому опасны — чреваты возможными ошибками) те случаи, когда две (или больше) модели взаимно дополняют друг друга, причем каждая из моделей имеет свой характерный масштаб.

Самый известный пример такого рода — модели судов в испытательном канале. С моделью судна, казалось бы, все обстоит очень просто: она сильно уменьшена по сравнению с натурой. Так, модель двухсотметрового танкера, выполненная в масштабе 1:200, имеет в длину 1 м. Здесь все ясно и просто, никаких сомнений пока не возникает. Но предположим, что танкер должен развивать в натуре скорость 19 узлов (морских миль в час). Спрашивается: с какой скоростью должна двигаться модель в канале, чтобы результаты измерений, произведенных при ее испытаниях, допускали пересчет на натурное судно? Со скоростью 19 узлов или скорость также следует уменьшить в масштабе 1:200? Английский кораблестроитель Вильям Фруд (1810—1879) нашел законы подобия для тел, обтекаемых потоком жидкости, которые позволяют переносить на натуру результаты измерений, произведенных на модели.

В частности, Фруд установил, что максимальная скорость судна (если не прибегать ни к каким техническим трюкам) никогда не превосходит значения

$$v_{\max} = 2,5 \sqrt{\text{длина по ватерлинии морских миль/ч.}}$$

Двухсотметровый корпус танкера имеет по ватерлинии длину около 190 м, а модель — лишь около 0,95 м. Максимальные скорости танкера и модели соответственно равны

$$v_t = 2,5 \sqrt{190} \text{ миль/ч} = 34,5 \text{ миль/ч} \approx 64 \text{ км/ч,}$$

$$v_m = 2,5 \sqrt{0,95} \text{ миль/ч} = 2,4 \text{ миль/ч} \approx 4,5 \text{ км/ч.}$$

Если модель тянуть быстрее, чем 2,4 миль/ч, то она просто-напросто «выпрыгнет» из воды.

Таким образом, кораблестроитель, испытывая будущий двухсотметровый танкер на модели, должен иметь в виду два закона подобия: подобие геометрических размеров модели и натурного судна и подобие при моделировании закона сопротивления при движении тела в воде. Разумеется, кораблестроителю необходимо заранее знать, как проектируемое судно поведет себя не только на максимальной скорости, но и на экономичной скорости в обычном рейсе. Ответ на свой вопрос он получит из закона подобия: отношения скорости к квадратному корню из длины корпуса по ватерлинии для судна и модели должны быть равны.

КРАТЧАЙШИЙ ПУТЬ

Широко распространено мнение, будто выдающиеся математики и естествоиспытатели прошлого сидели где-нибудь в тихом уголке, вперив перед собой задумчивый взор, и иногда по воле случая совершали гениальные открытия — ни тебе напряженного труда, ни нескончаемых вычислений. Те, кто так думает, глубоко заблуждаются: в действительности все обстояло иначе.

Так, Иоганн Кеплер (1571—1630) открыл законы движения планет, носящие ныне его имя, после многочисленных расчетов планетных орбит, потребовав-

ших от него поистине титанических усилий. Рене Декарт (1596—1650) вычислил тысячи вариантов хода лучей, прежде чем нашел объяснение возникновению радуги.

«Король математиков» Фридрих Гаусс всю жизнь питал пристрастие к вычислениям. Он любил пользоваться некачественными таблицами, чтобы при каждом удобном случае исправлять допущенные при их составлении ошибки. Он же принял живейшее участие в обработке данных триангуляционной съемки, потребовавшей семилетних вычислений.

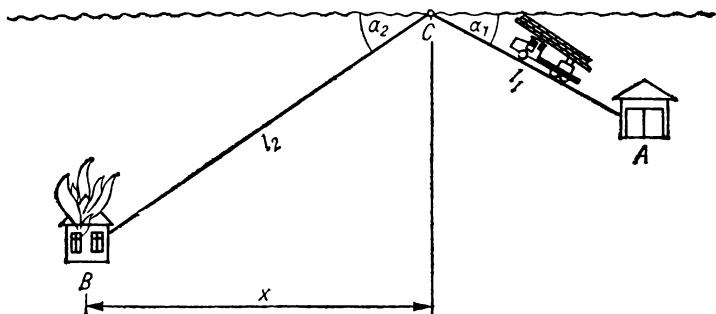


Рис. 9. Где следует заправиться водой, чтобы прибыть на пожар кратчайшим путем.

Перечень таких примеров легко можно было бы продолжить. А сколь скудными средствами располагали ученые прошлого при проведении своих расчетов. Дорого бы они дали, чтобы иметь под рукой такого верного и неутомимого помощника, как наш микрокалькулятор! Вполне возможно, что тогда и многие законы природы были бы открыты раньше и не ускользнули от внимания исследователей прошлого. Мы хотим показать вам, как с помощью микрокалькулятора решить одну задачу на экстремальные значения и тем самым прочувствовать, как совершают открытия те, кто занимается изучением природы. Для этого понадобятся кое-какие сведения из дифференциального исчисления; для тех, кто не знаком с математическим анализом, мы изберем не прямой, а «окольный» путь к решению.

Пусть требуется решить следующую задачу. В пункте А (рис. 9) расположена пожарная часть,

Поступило сообщение, что в пункте B произошел пожар. Выехавшая по вызову пожарная машина должна дозаправиться водой из реки где-то по дороге из A в B — в точке C . Где должна располагаться точка C для того, чтобы путь ACB был кратчайшим?

Вопрос о том, по каким улицам может ехать пожарная команда, для нас не имеет значения. Если угодно, примите, что пожарных к месту происшествия доставляет вертолет.

Предположим, что в интересующем нас случае речь идет о следующих расстояниях:

расстояние (по вертикали на плане) от пожарной станции до реки — 1 км,

расстояние (по вертикали на плане) от места пожара до реки 3 км;

расстояние (по горизонтали на плане) пожарная станция — место пожара — 10 км.

Нам понадобится одна переменная. Следуя установившемуся обычаю, обозначим ее x . Введем также два угла — α_1 и α_2 . Путь, который требуется минимизировать, равен

$$l = l_1 + l_2.$$

Воспользуемся теоремой Пифагора:

$$l_1 = \sqrt{1^2 + (10 - x)^2} \text{ км},$$

$$l_2 = \sqrt{3^2 + x^2} \text{ км}.$$

Для углов α_1 и α_2 выполняются соотношения

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{1}{10 - x},$$

$$\operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{3}{x}.$$

Чтобы определить, при каком значении нашей переменной x величина l минимальна и какие при этом значения принимают углы α_1 и α_2 , составим следующую таблицу сначала с шагом по x , равным 2 км, а затем и более мелким шагом.

| x | l_1 | l_2 | l | $\operatorname{tg} \alpha_1$ | $\operatorname{tg} \alpha_2$ |
|---|-------|-------|-------|------------------------------|------------------------------|
| 0 | 10,05 | 3 | 13,05 | 0,1 | |
| 2 | 8,06 | 3,61 | 11,67 | 0,125 | 1,5 |
| 4 | 6,08 | 5 | 11,08 | 0,167 | 0,75 |
| 6 | 4,12 | 6,71 | 10,83 | 0,25 | 0,5 |
| 8 | 2,24 | 8,54 | 10,78 | 0,5 | 0,375 |
| 10 | 1 | 10,44 | 11,44 | | 0,3 |
| Минимум должен лежать 6 и 8 или между 8 и 10. | | | | | |
| 7 | 3,16 | 7,62 | 10,78 | 0,333 | 0,43 |
| 9 | 1,41 | 9,49 | 10,90 | 1 | 0,333 |
| Итак, минимум лежит между 7 и 8: | | | | | |
| 7,5 | 2,69 | 8,08 | 10,77 | 0,4 | 0,4 |

Мы получили решение $x_{\min} = 7,5$, т. е. точка C должна лежать по горизонтали на расстоянии 7,5 км от точки B и 2,5 км — от точки A для того, чтобы путь ACB был кратчайшим. Длина кратчайшего пути составляет $l = (\sqrt{1 + 7,5^2} + \sqrt{9 + 2,5^2}) \text{ км} = (\sqrt{57,25} + \sqrt{15,25}) \text{ км} = 11,47 \text{ км}$, $\alpha_{\min} = 21,8^\circ$. Мы не открыли нового закона природы, а решили одну частную задачу. Как видно из приведенной выше таблицы, в точке минимума $x = x_{\min}$ выполняется равенство $\operatorname{tg} \alpha_1 = \operatorname{tg} \alpha_2$, т. е. $\alpha_1 = \alpha_2$. Это не случайное совпадение, а общее свойство решения. Обнаруженную нами закономерность можно сформулировать следующим образом: кратчайший путь из A в B через C как бы отражается от берега реки в точке C (угол падения α_1 равен углу отражения α_2).

Запишем равенство $\operatorname{tg} \alpha_1 = \operatorname{tg} \alpha_2$ в виде

$$\frac{1}{10 - x} = \frac{3}{x}.$$

Из этого уравнения, если решить его по обычным правилам арифметики, следует, что $x = 7,5$. Таким образом, задача была численно решена нами верно.

Чтобы вывести общую формулу, заменим частные значения 1, 3 и 10 км величинами a , b и c . Тогда $\operatorname{tg} \alpha_1 = a/(c - x)$, $\operatorname{tg} \alpha_2 = b/x$ и $a/(c - x_{\min}) = b/x_{\min}$ (записывая последнее равенство, мы используем най-

денную нами закономерность), откуда

$$ax_{\min} = b(c - x_{\min}),$$

$$x_{\min} = \frac{bc}{a+b}.$$

Подставляя полученное выражение для x_{\min} в формулу для

$$l = l_1 + l_2 = \sqrt{a^2 + (c - x)^2} + \sqrt{b^2 + x^2},$$

получаем

$$l = \sqrt{a^2 + \left(\frac{c^2 - bc}{a+b}\right)^2} + \sqrt{b^2 + \left(\frac{bc}{a+b}\right)^2},$$

или, после преобразования,

$$l = (a+b) \sqrt{1+k^2},$$

где $k = c/(a+b)$, и

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha = \arctg \frac{1}{k}.$$

Декарту приходилось повторять такие и аналогичные вычисления тысячекратно, но без микрокалькулятора!

ПРЕОДОЛЕНИЕ ЗВУКОВОГО БАРЬЕРА

Наверное, почти каждому из нас доводилось вздрагивать при грохоте, с которым высоко в небе преодолевает звуковой барьер реактивный самолет. А если такое случится ночью, то не всякий сразу и уснет. Спросонья нам кажется, что разбудивший нас самолет летит со скоростью звука, т. е. 330 м/с. Затем мы вспоминаем, что сверхзвуковые скорости принято измерять в числах Маха — особых единицах, названных в честь физика Эрнста Маха (1838—1916): 1 мах (1 М) соответствует скорости звука. При дальнейшем размышлении мы вспоминаем, что (вследствие давления воздуха) немаловажную роль играет высота полета. Мы вылезаем из постели, начинаем рыться на книжной полке и, наконец, извлекаем из



нее справочник, готовый помочь советом во всех случаях жизни. Для числа Маха M в справочнике приведена формула

$$M = \sqrt{5 \left\{ \left[\left[1 + 0,2 \left(\frac{v}{1225,1} \right)^2 \right]^{3,5} - 1 \right] \cdot \sqrt{\left\{ 1 - 6,875 \cdot 10^{-6} \frac{h}{0,3048} \right\}^{-5,2656} + 1} \right\}^{0,286} - 1}.$$

где v — скорость летящего тела в километрах в час (км/ч), h — высота полета в метрах (м). В этой формуле учтена и зависимость скорости звука от плотности воздуха и высоты полета. Беда лишь в том, что мы не знаем ни высоты, на которой летит самолет, ни его скорости. Оставаясь на бренной земле, ограничимся более или менее правдоподобными оценками: $v = 650$ км/ч и $h = 7777$ м. Как лучше всего вычислить значение M при заданных v и h , зависит от возможностей вашего микрокалькулятора. Обычно выражения, содержащие скобки, удобно вычислять «изнутри наружу» и для лучшего контроля записывать

промежуточные значения:

$$M = \sqrt[5]{\left[\left[\left[\left[\left[1 + 0,2 \left[\frac{650}{1255,1} \right]^2 \right]^{3,5} - 1 \right] \right] \right] \right] \right] \cdot \sqrt[7]{\left[1 - \left[6,875 \cdot 10^{-6} \right] \cdot \frac{7777}{0,3048} \right]^{-5,2656} + 1}^{0,286} - 1 \right]}.$$

Для большей наглядности мы перенумеровали все скобки. Создается впечатление, что авторам этой формулы стоило немалых трудов придать ей такой вид, при котором для вычисления любого интересующего вас значения с помощью микрокалькулятора необходимо нажать хотя бы по одному разу все клавиши! Бережно относясь к замыслу авторов, мы не упрощаем столь сложную формулу и приводим ее со всеми лишними членами.

Для того чтобы вы могли проконтролировать правильность ваших вычислений, приводим промежуточные результаты:

$$\begin{aligned} \left[\dots \right]_5^{3,5} - 1 &= 0,21; \\ \left[\dots \right]_7^{-5,2656} &= 2,76; \\ \left[\left[\dots \right]_2^{0,286} - 1 \right]_1 &= 0,14; \\ M = \sqrt[5]{5 \cdot [0,14]}_1 &= 0,84. \end{aligned}$$

Следовательно, самолет летит на высоте 7777 м со скоростью 0,84 М. При такой скорости он еще не достиг звукового барьера, и поэтому мы еще не слышим оглушительного грохота. Если кто-нибудь пожелает, то вычисления можно продолжить в трех направлениях: повышать скорость, пока она не достигнет 1 М, изменять высоту (сверхзвуковые самолеты летают на высоте от 10 000 до 30 000 м) или изменять скорость полета и высоту одновременно.

При этом вам предоставляется на выбор либо по-прежнему работать с заимствованной из справочника сложной эмпирической формулой, либо упростить ее.

ПОЧЕМУ У КИТА НЕТ НОГ?

Всякий, кому приходилось бывать в палеонтологическом музее и видеть скелеты различных «завров», невольно поражался их гигантским размерам. Из иллюстраций в научно-популярных книжках и журналах мы знаем, как необычно выглядели динозавры и другие ящеры.

Но если обратиться к млекопитающим, то для того, чтобы найти среди них гигантов, нам вовсе не нужно углубляться на сотни тысяч или даже миллионы лет в глубь истории Земли: самые крупные из когда-либо обитавших на Земле млекопитающих здравствуют ныне. Это голубые киты. (Мы стоим на грани их полного уничтожения. Вполне возможно, что наши правнуки когда-нибудь будут рассматривать в музее скелеты китов так же, как мы разглядываем скелеты доисторических ящеров.)

Самый большой из убитых китов был измерен на аргентинской станции в Антарктиде. Туловище кита имело в длину 110 футов 2¹/₂ дюйма. Там же, в Антарктиде, удалось взвесить кита, точнее самку кита («китиху»), правда, не целиком, а по частям: ее туша, разрубленная на куски, весила 183,34 т. (Живая китиха весила еще больше: в ее жилах струилась кровь, которую выпустили при разделке туши.) Китобой считают, что обычно голубой кит длиной 100 футов весит 179 т.

Здесь мы прервем свое повествование о китах и познакомимся (хотя бы в общих чертах) с единицами, принятыми в США. Герой переводного романа из ковбойской жизни имеет рост 6 футов и весит 190 фунтов. Переводчик обычно сохраняет единицы длины и веса подлинника, так как привычные нам единицы метрической системы в художественной тексте «не звучат». Сравните: «Король до последнего сантиметра» (то есть с головы до пят) и «Король до кончиков ногтей» или до «последнего дюйма», как говорят по-английски. Дюйм означает «фаланга пальца»: такие «натуральные» единицы в США пользуются большей популярностью, чем системные единицы физических величин. Впрочем, и наш слесарь измеряет диаметры труб и резьбовых соединений в дюймах. Что же касается героя переводного романа, то его

рост равен $\left(6 \cdot 30,48 + \frac{2 \cdot 30,48}{12}\right)$ см = 1,88 м, а его вес — 190 фунтам, а каждый английский фунт равен 453,50 г.

Если быть точными, то следовало бы проверить, кто именно наш герой — американец или англичанин. Дело в том, что 1 английский дюйм равен 2,539998 см, а 1 американский дюйм — 2,540005 см.

После этого небольшого отступления вернемся к голубому киту. Перевести длину его туловища (110 футов 2 $\frac{1}{2}$ дюйма) в привычные метрические меры не составляет теперь особого труда: с помощью микрокалькулятора мы вычислим, что наш гигант имеет в длину более 30 м. Таковы размеры взрослого кита.

При пересчете веса (точнее, массы) кита в метрическую систему необходимо соблюдать известную осторожность. В английском оригинале, из которого мы заимствовали данные задачи, сказано без каких-либо уточнений: 179 т. Но тонны могут быть разные: 1 длинная тонна = 1016,05 кг, а 1 короткая тонна = 907,185 кг. К тому же речь в романе вполне может идти и о метрической тонне.

Регистровые тонны отличаются в зависимости от того, идет ли речь о брутто-регистре или нетто-регистре, так как они служат единицами измерения (2,83 м³) объема судна. Грузоподъемность судна (в тоннах массы) принято измерять в так называемых дедейт-тоннах. Разница между длинной и короткой тонной составляет 11 %. При массе кита 179 т эта величина равна 19,2 т: чтобы перевезти такую массу по железной дороге, понадобился бы один грузовой вагон. Для простоты мы будем исходить в своих расчетах из 170 метрических тонн.

Напомним, что нам хотелось выяснить, почему у кита нет ног. Из школьного курса биологии мы знаем, что ноги кита превратились в плавники. Можно ли вообще было бы «сконструировать» кита с массой 170 т, который мог бы передвигаться на четырех ногах? Казалось бы, ничто этому не мешает: ведь слоны — животные отнюдь не маленькие, а они передвигаются на четырех колоннообразных ногах. Не следует, однако, забывать об одном немаловажном обстоятельстве: масса слона до смешного мала по сравнению с массой кита и достигает лишь 6 т.

Когда четырехное животное ступает по земле, вся нагрузка при каждом шаге приходится лишь на две ноги. Следовательно, если бы у кита были ноги, то на каждую из них при ходьбе приходилось бы по 85 т. Примем, что почва способна выдерживать в среднем нагрузку $2 \text{ кгс/см}^2 \approx 20 \cdot 10^4 \text{ Па}$. Чтобы кит не проваливался сквозь землю, его ступня должна была бы иметь площадь $42\,500 \text{ см}^2$.

$$\frac{42\,500 \text{ см}^2}{\pi} = r^2 = 13\,528,2 \text{ см}^2,$$

$$r = 116,3 \text{ см}.$$

Итак, диаметр китовой ступни был бы равен 2,33 м. Столь изящные ступни вряд ли могли бы без особого механизма выравнивать неровности почвы. Ноги слона с особой наглядностью показывают, что природа действует, как заправский конструктор: 6 т, распределенные на две ноги, при допустимой нагрузке на почву 2 кг-сила/см^2 соответствуют диаметру ступни

$$2 \cdot \sqrt{\frac{1500}{\pi}} \text{ см}^2 \approx 44 \text{ см}.$$

В следующий раз, когда вам случится побывать в зоопарке, прикиньте на глаз, совпадает ли наша оценка с истинной толщиной слоновьих конечностей по порядку величины.

Голубые киты питаются планктоном — мельчайшими рачками, которые называются «криль». Они в огромных количествах встречаются в водах морей, омывающих Антарктиду. Слоны, носороги, рогатый скот и все крупные животные питаются травой и листьями. Плотоядные животные имеют относительно малые размеры (львы по сравнению со слонами). Выбор «меню» имеет под собой вполне очевидную основу. Все, что растет на нашей Земле, черпает энергию, необходимую для построения тела, из солнечной энергии. Все животные образуют неразрывную цепь, в которой предыдущее звено служит пищей для последующего. Начальными звеньями этой цепи служат трава, зерна, листья или водоросли. Подобно любой паровой машине или любому электромотору, «живые машины» обладают определенным коэффициентом полезного действия (КПД). Для наших весьма прибли-

зительных оценок вполне достаточно предположить, что этот КПД равен 10 %.

Если принять за 100 % водоросли или растения, то слонам, коровам, ослам и крилю (!) в качестве первого звена цепи питания необходимы 10 %. Кит в свою очередь использует «на построение» тела лишь 10 % потребляемого им криля, то есть лишь 1 % исходной энергии.

Если бы кит питался макрелью, то образовалась бы следующая цепь:

| | | | | | | | | |
|-----------|---|-------|---|--------|---|---------|---|------|
| водоросли | — | криль | — | сельдь | — | макрель | — | кит |
| 100 | | 10 | | 1 | | 0,1 | | 0,01 |

Таким образом, кит использовал бы только

$$\frac{100 \%}{10^4} = 0,01 \%$$

исходной энергии, то есть попросту голодал бы.

Человек — завершающее звено в цепи питания. Мы употребляем в пищу макрель и яйца, пьем молоко, откармливаем свиней зерном, которое можем использовать и непосредственно.

Традиционное пристрастие к картофелю и хлебу в славянских и романских странах, как и к рису в Азии, имеет под собой глубокую основу: сокращение цепи питания.

В последние годы были организованы специальные экспедиции в Антарктиду. В их задачу входили поиск и промышленная переработка криля в качестве пищевого продукта для человечества.

Если рассмотреть последовательность $100:10^n$, описывающую эффективность использования энергии в цепи питания, то станет ясно, почему на Земле так много травоядных и так мало хищных животных. Исключение составляет только численность человеческого рода.

РАСЩЕПЛЕНИЕ УРАНА

Декабрьским днем 1938 г. сотрудники одной из берлинских лабораторий оживленно обсуждали результаты экспериментов, которым суждено было войти в историю физики как расщепление атомного ядра,

Накануне ночью два сотрудника лаборатории — физик Отто Ган (1879—1968) и его ассистент химик Фриц Штрасман подвергли бомбардировке нейтронами уран и произвели после этого тщательный химический анализ. С помощью специального прибора они регистрировали радиоактивные импульсы, испускаемые облученным препаратом, что позволяло им идентифицировать образовавшиеся элементы не только химически, но и физически — по периоду полураспада. (Напомним, что периодом полураспада называется время, в течение которого радиоактивность препарата убывает вдвое, достигая половинного уровня.)

В приведенной ниже таблице представлены подлинные результаты измерений, произведенных Отто Ганом с 11 ч 15 мин до 13 ч 25 мин. Последний столбец получается из предпоследнего вычитанием постоянной, равной 15,9 распадов/мин. Именно такой фон измерял регистрирующий прибор в отсутствие радиоактивного препарата.

| Время по часам | t , мин | Показание счетчика числа распадов | Число распадов I | $I/\Delta t$ | Приведенная радиоактивность |
|----------------|-----------|-----------------------------------|--------------------|--------------|-----------------------------|
| 11 ч 18 мин | 0 | 71 398 | — | | |
| | 2 | 71 562 | 164 | 82,0 | 66,1 |
| | 6 | 71 885 | 323 | 80,8 | 64,9 |
| | 10 | 72 170 | 285 | 71,3 | 55,4 |
| | 16 | 72 610 | 440 | 73,3 | 57,4 |
| | 28 | 73 511 | 901 | 75,1 | 59,2 |
| | 48 | 74 653 | 1142 | 57,1 | 41,2 |
| | 58 | 75 311 | 658 | 65,8 | 49,9 |
| | 89 | 76 854 | 1543 | 49,8 | 33,9 |
| | 95 | 77 200 | 346 | 57,7 | 41,8 |
| | 101 | 77 576 | 376 | 62,7 | 46,8 |
| | 115 | 78 202 | 626 | 44,7 | 28,8 |
| | 121 | 78 557 | 355 | 59,2 | 43,3 |
| 13 ч 25 мин | 127 | 78 875 | 318 | 53,0 | 37,1 |

Закон, по которому изменяется радиоактивность источника, в 1938 г. был уже известен:

$$y = y_0 \cdot e^{-at},$$

где y — число распадов в минуту в момент времени t ; y_0 — число распадов в минуту в начальный момент времени $t=0$; t — время в минутах.

Как по заданным парам значений y и t определить коэффициенты y_0 и a с помощью регрессионного анализа, уже рассказывалось в нашей предыдущей книге «С микрокалькулятором в руках» (разд. «Подгонка экспоненты», с. 138—140). Сейчас нам необходимо найти только величину a . Соответствующая формула для a имеет следующий вид:

$$a = - \frac{\Sigma(t \cdot \ln y) - \frac{\Sigma t \cdot \Sigma \ln y}{n}}{\Sigma(t^2) - \frac{(\Sigma t)^2}{n}},$$

где n — число измерений (в интересующем нас случае $n = 13$).

Имея под рукой микрокалькулятор, мы можем судить о качестве подгонки по величине r^2 , вычисляемой по формуле

$$r^2 = \frac{\left[\Sigma(t \cdot \ln y) - \frac{\Sigma t \cdot \Sigma \ln y}{n} \right]^2}{\left[\Sigma(t^2) - \frac{(\Sigma t)^2}{n} \right] \left[\Sigma(\ln y)^2 - \frac{(\Sigma \ln y)^2}{n} \right]}$$

(получить такую оценку Отто Гану было бы весьма затруднительно). Для вычисления требуемых сумм сведем результаты измерений и промежуточные результаты в следующей таблице.

| t | t^2 | y | y^2 | $\ln y$ | $t \ln y$ | $(\ln y)^2$ |
|-------------------|-------------------------|------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|-------------------------------|
| 2 | 4 | 66,1 | 4 369,21 | 4,1912 | 8,3824 | 17,5662 |
| 6 | 36 | 64,9 | 4 212,01 | 4,1728 | 25,0368 | 17,4123 |
| 10 | 100 | 55,4 | 3 069,16 | 4,0146 | 40,1460 | 16,1170 |
| 16 | 256 | 57,4 | 3 294,76 | 4,0500 | 64,8 | 16,4025 |
| 28 | 784 | 59,2 | 3 504,64 | 4,0809 | 114,2652 | 16,6537 |
| 48 | 2 304 | 41,2 | 1 697,44 | 3,7184 | 178,4832 | 13,8265 |
| 58 | 3 364 | 49,9 | 2 490,01 | 3,9100 | 226,7800 | 15,2881 |
| 89 | 7 921 | 33,9 | 1 149,21 | 3,5234 | 313,5826 | 12,4143 |
| 95 | 9 025 | 41,8 | 1 747,24 | 3,7329 | 354,6255 | 13,9345 |
| 101 | 10 201 | 46,8 | 2 190,24 | 3,8459 | 388,4359 | 14,7909 |
| 115 | 13 225 | 28,8 | 829,44 | 3,3604 | 386,4460 | 11,2923 |
| 121 | 14 641 | 43,3 | 1 874,89 | 3,7682 | 455,9522 | 14,1993 |
| 127 | 16 129 | 37,1 | 1 376,41 | 3,6136 | 458,9272 | 13,0581 |
| Σt 816 | $\Sigma(t^2)$ 77 990 | | $\Sigma(y^2)$ 31 804,66 | $\Sigma(\ln y)$ 49,9824 | $\Sigma(t \cdot \ln y)$ 3 015,8630 | $\Sigma(\ln y)^2$ 192,9557 |

Таким образом,

$$a = - \frac{3015,863 - \frac{816 \cdot 49,9824}{13}}{77\,990 - \frac{816^2}{13}} = - \frac{-121,4937}{26\,770,3077} = +0,00454$$

и

$$\begin{aligned} r^2 &= \frac{\left[3015,863 - \frac{816 \cdot 49,9824}{13}\right]^2}{\left[77\,990 - \frac{816^2}{13}\right] \cdot \left[192,9557 - \frac{49,9824^2}{13}\right]} = \\ &= \frac{1\,4760,719}{26\,770,3077 \cdot 0,7834} \approx 0,704 \approx 70 \% . \end{aligned}$$

Для того чтобы вычислить период полураспада $t_{\text{пр}}$, в исходное выражение $y = y_0 e^{-at}$ необходимо подставить

$$y = \frac{y_0}{2} \quad \text{при} \quad t = t_{\text{пр}},$$

т. е.

$$\frac{y_0}{2} = y_0 e^{-at_{\text{пр}}}.$$

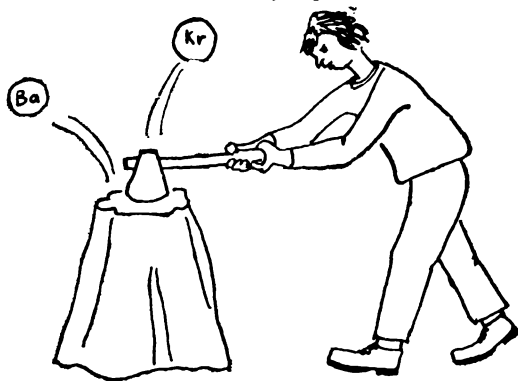
После деления на y_0 и логарифмирования по основанию e , получаем

$$\ln 0,5 = -at_{\text{пр}}, \quad \text{откуда} \quad t_{\text{пр}} = \frac{\ln 0,5}{-a}.$$

Следовательно,

$$t_{\text{пр}} = \frac{-0,6931}{-0,00454} = 152,665 \text{ мин},$$

то есть около $2\frac{1}{2}$ ч. Достигнутый к концу 30-х годов уровень знаний позволял с уверенностью утверждать,



что такая величина не может быть периодом полураспада радия. Это означало, что ядро урана претерпело расщепление. Производя более точные анализы, Отто Ган и его сотрудники установили, что ядро урана распадалось на два осколка: барий и криптон.

Так было открыто деление атомного ядра. Всю важность этого процесса даже непосредственные участники события смогли оценить лишь позднее.

ТОЧНОЕ ВРЕМЯ

В середине XVIII в. английский парламент назначил премию в 20 000 фунтов стерлингов (по тем временам неслыханно большая сумма!) за создание часов, которые показывали бы точное время в условиях открытого моря — при сильной и длительной бортовой и килевой качке. В таких часах (получивших название хронометра) испытывал острую потребность английский флот: не зная точного времени, мореплаватели не могли определять географическую долготу. В 1765 г. английский часовой мастер Харрисон представил в Адмиралтейство сконструированные им часы, которые при испытаниях показали поразительную точность: за несколько месяцев они отстали всего лишь на 10 или 20 с. Разумеется, современные морские и авиационные штурманы, космонавты или астронавты вряд ли были бы удовлетворены такой точностью, но в XVIII в. изобретатель хронометра еще мог стать состоятельным человеком.

Попытаемся понять, почему английским капитанам (как и навигаторам других стран) был столь необходим хронометр.

Кто из берлинцев не знает часов на Александерплац, показывающих точное время во многих крупных городах мира. Взглянув на эти часы, вы узнаете, который час в Нью-Йорке или Йокагаме, когда в Берлине, например, 9 часов утра. Тому же, кто знает точное время в городах, расположенных на различных меридианах, не составляет особого труда определить точное время для любой точки земного шара. Дело в том, что во всех точках, лежащих на одном меридиане от северного до южного полюса, часы показывают одно и то же время (например, одновременно

во всех точках наступает полдень, то есть тот момент, когда Солнце в своем видимом движении по небу достигает высшей точки). Единственное различие состоит в том, что жители северных широт видят солнце на юге, а жители южного полушария, например австралийцы, видят наше дневное светило на севере.

Если выделить какой-нибудь меридиан и его местное время принять за начало отсчета, то нетрудно определить местное время меридиана, проходящего через город, в котором мы живем. Как известно, международное сообщество постановило вести отсчет долготы от меридиана, проходящего через Гринвич близ Лондона (возможно, в память о том, что премию за создание морского хронометра получил англичанин).

Когда пассажирский лайнер плывет в Ленинград, штурман определяет с помощью секстанта, что наступил полдень («берет солнце») и засекает время по имеющемуся на борту судна хронометру. Этот хронометр поставлен по гринвичскому времени и показывает, например, 10 ч 45 мин 11 с. Мы, пассажиры, находимся неподалеку, и нам отлично виден и хронометр, и то, что делает штурман. Разумеется, у нас нет под рукой морского ежегодника, по которому штурман производит свои точные вычисления, зато собираясь в отпуск, мы прихватили с собой наш микрокалькулятор и можем определить нашу географическую долготу достаточно точно.

Вот как мы рассуждаем. Меридианная сеть на земном шаре простирается от гринвичского меридиана на восток до 180° долготы (восточной) и «в другую сторону» — на запад — также до 180° долготы (западной), причем оба 180° -х меридиана совпадают. Всего, таким образом, мы получаем 360° долготы, на каждом из которых каждые 24 ч наступает полдень. Солнце в своем видимом движении развивает скорость $360^\circ : 24 \text{ ч} = 15^\circ/\text{ч}$.

Мы находимся в Балтийском море, следовательно, к востоку от Гринвича. Так как солнце восходит на востоке, полдень на Балтике наступает раньше, чем в Англии. Следовательно, когда на 15° восточной долготы наступает полдень, знаменитый Биг-Бен в Лондоне бьет лишь 11 раз.

Нам требуется найти меридиан, на котором в 10 ч 45 мин 11 с по гринвичскому времени наступает полдень. Для этого необходимо установить соответствие между градусной меридианной сеткой и часами, минутами и секундами:

$$\begin{aligned} 1 \text{ ч} &\rightarrow 15^\circ, \\ 1 \text{ мин} &\rightarrow \frac{15^\circ}{60} = 0,25^\circ = 15', \\ 1 \text{ с} &\rightarrow 0,0042^\circ = 15''. \end{aligned}$$

(В тех микрокалькуляторах, где предусмотрен перевод минут и секунд в десятичные доли градуса, установить такое соответствие совсем нетрудно.)

Так как в том месте, где мы находимся, наступил полдень, местное время отличается от гринвичского на

$$\begin{array}{r} 11 - 59 - 60 \\ - 10 - 45 - 11 \\ \hline 1 - 14 - 49 \end{array}$$

(11 — 59 — 60 — иная запись 12 — 00 — 00), что соответствует разности долгот

$$\begin{array}{rclcl} 1 \text{ ч} & \rightarrow & & \rightarrow & 15^\circ \\ 14 \text{ мин} & \rightarrow & 210' & \rightarrow & 3^\circ 30' \\ 49 \text{ с} & \rightarrow & 735'' & \rightarrow & 12' 15'' \\ & & & & \hline & & & & 18^\circ 42' 15'' \end{array}$$

Стоит лишь теперь взглянуть на морскую карту или попросить у штурмана атлас Балтийского моря, как мы сразу увидим, где именно долгота $18^\circ 42'$ (угловые секунды мы для простоты отбросим) пересекает наш курс: наш лайнер находится вблизи острова Готланд.

Для профессиональных штурманов наши вычисления недостаточно точны. Ведь мы предполагали, что солнце ровно в 12 ч дня проходит нулевой меридиан, то есть стоит над Гринвичем. Но так солнце «поступает» лишь в среднем. В действительности же солнце достигает кульминации незадолго до или вскоре после полудня. Эти отклонения штурман берет из морского ежегодника, издаваемого гидрографической службой каждой морской державы.

Астрономическими методами капитан определяет место своего судна с точностью до 2 морских миль (напомним, что 1 морская миля = 1,852 км). В нашем более грубом прикидочном расчете погрешность составляет около 10 морских миль. Если бы мы находились в Атлантике (например, держали курс на Кубу), то такая ошибка в определении места была бы вполне приемлемой: кругом так много воды, что 10 милями больше или меньше — не составляет особой разницы.

Из произведенных нами расчетов помимо опыта в навигационном искусстве мы извлекаем еще один важный вывод: наши часы идут более равномерно, чем вращается Земля.

ИТЕРАЦИИ

Умение решать уравнения — давняя мечта прикладной математики. Любое продвижение на пути к ее осуществлению имеет важное практическое значение. В этом разделе мы опишем итерационные методы, особенно хорошо приспособленные для реализации на микрокалькуляторах и обладающие еще одной приятной особенностью: их применение не требует особых познаний в математике.

Прежде всего речь идет о решении трансцендентных уравнений, содержащих не только чисто степенные члены и не разрешимых в замкнутом виде.

В качестве примера приведем хотя бы уравнение

$$x^2 - \ln x - 2 = 0. \quad (1)$$

Основная идея метода итераций состоит в том, чтобы уравнение $f(x) = 0$ преобразовать к виду

$$x = g(x).$$

Тогда итерации можно задать формулой

$$x_{n+1} = g(x_n), \quad (2)$$

то есть каждое значение x , подставленное в правую часть уравнения (2), порождает более точное значение x , лежащее еще ближе к истинному решению.

Начальное значение x_0 , приближенно удовлетворяющее уравнению $f(x) = 0$, то есть такое, что $f(x_0) \approx 0$, должно быть известно заранее.

Поясним сказанное на следующем примере. Требуется решить уравнение (1), то есть найти нули трансцендентной функции

$$y = x^2 - \ln x - 2.$$

Для того чтобы получить начальное приближение x_0 , лучше всего составить таблицу значений. Так как наша функция определена только при $x > 0$ (ибо член $\ln x$ определен только при $x > 0$), начнем с $x = 0,1$.

| x | y | |
|-----|-------|----------------------|
| 0,1 | +0,3 | нуль $x \approx 0,2$ |
| 0,5 | -1 | |
| 1 | -1 | |
| 1,5 | -0,15 | нуль $x \approx 1,6$ |
| 2 | +1,3 | |

Бóльшие значения x не представляют никакого интереса, так как наша функция очень быстро возрастает.

Кто хочет получить наглядное представление о ходе изменения функции, должен нанести приведенные в таблице значения пар (x, y) на листок бумаги с координатами x и y и соединить построенные точки. Точки пересечения кривой $y = x^2 - \ln x - 2$ с осью x (в которых координата y обращается в нуль) расположены примерно там же, где и нули уравнения (1). Точность графика зависит от выбора начального значения. Но чтобы решить уравнение (1), совсем необязательно строить график: нули функции y можно найти непосредственно из составленной нами таблицы.

В рассматриваемом нами специальном случае формулу для итераций можно записать несколькими способами.

- (а) $x^2 = \ln x + 2$, Мы разрешили уравнение (1)
 $x = \sqrt{\ln x + 2}$. относительно x^2 , после чего из-
 влекли из правой и левой части
 квадратный корень.

- б) $\ln x = x^2 - 2$, Уравнение (1) мы разрешили относительно $\ln x$, после чего пропотенцировали обе части (по основанию e).
 $x = e^{x^2 - 2}$.

Напомним: $e^{\ln x} = x$.

- в) $x^2 = \ln x + 2$, Уравнение (1) мы разрешили относительно x^2 , после чего обе части разделили на x .
 $x = \frac{\ln x + 2}{x}$.

В каждом из трех случаев мы привели исходное уравнение к виду $x = g(x)$. Какая из трех записей а — в наиболее удобна для нахождения каждого из двух нулей, мы установим в ходе вычислений.

Попытаемся воспользоваться формулой (а) при $x_0 = 1,6$. Так как $x = g(x) = \sqrt{\ln x + 2}$, итерации будем вычислять по формуле

$$x_{n+1} = \sqrt{\ln x_n + 2}.$$

Каждое промежуточное решение x_n порождает более точное значение x_{n+1} . Сколько итераций необходимо проделать, зависит от требуемой точности. Сходятся ли последовательные приближения к определенному числу (точному решению) или идут вразброс, становится заметным уже после нескольких итераций.

| x_n | $x_{n+1} = \sqrt{\ln x_n + 2}$ |
|------------------|--------------------------------|
| $x_0 = 1,6$ | $x_1 = 1,57$ |
| $x_1 = 1,57$ | $x_2 = 1,566$ |
| $x_2 = 1,566$ | $x_3 = 1,5648$ |
| $x_3 = 1,5648$ | $x_4 = 1,56453$ |
| $x_4 = 1,56453$ | $x_5 = 1,564476$ |
| $x_5 = 1,564476$ | $x_6 = 1,564465$ |
| $x_6 = 1,564465$ | $x_7 = 1,5644628$ |
| ... | ... |

После семи итераций мы получаем решение с точностью до 5 знаков после запятой. Каждая итерация требует нажатия 5 клавиш. Разумеется, каждый цикл мы подвергаем определенному контролю. Достаточно следить за показаниями индикатора, чтобы заметить,

какой знак после запятой не изменяется при переходе к очередной итерации, т. е. вычислен точно.

Попытаемся теперь применить ту же формулу для вычисления нуля в окрестности точки $x_0 = 0,2$.

| x_n | $x_{n+1} = \sqrt{\ln x_n + 2}$ |
|----------------------|--------------------------------|
| $x_0 = 0,2$ | $x_1 = 0,6249$ |
| $x_1 \approx 0,62$ | $x_2 = 1,2369$ |
| $x_2 = 1,237$ | $x_3 = 1,487$ |
| ↓ | |
| Итерации не сходятся | |

Воспользуемся для вычисления приближенного решения формулой

$$x = e^{x^2 - 2}.$$

Промежуточные значения получаются следующими (приводим их для контроля за ходом вычислений):

| x_n | $x_{n+1} = e^{x_n^2 - 2}$ |
|------------------|---------------------------|
| $x_0 = 0,2$ | $x_1 = 0,14$ |
| $x_1 = 0,14$ | $x_2 = 0,138$ |
| $x_2 = 0,138$ | $x_3 = 0,1379$ |
| $x_3 = 0,1379$ | $x_4 = 0,13793$ |
| $x_4 = 0,13793$ | $x_5 = 0,137935$ |
| $x_5 = 0,137935$ | $x_6 = 0,1379348$ |

Эта итерационная процедура сходится, причем быстрее, чем первая для корня $x_0 \approx 1,6$. Поскольку мы вычислили оба нуля нашего трансцендентного уравнения, от дальнейших итераций можно воздержаться за ненадобностью. Но, может быть, вы испытываете неодолимое желание испробовать формулу

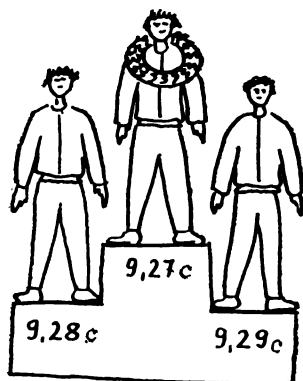
$$x = \frac{\ln x + 2}{x}.$$

при обоих начальных значениях x_0 ? Если в выбранном нами частном случае итерации сходятся к какому-нибудь пределу, то этот предел заведомо является решением уравнения.

ПОБЕДА НА ОЛИМПИАДЕ

Преисполненный гордости победитель в забеге на 100 м взошел на пьедестал, где ему должны были вручить золотую медаль чемпиона Олимпийских игр и увенчать лавровым венком. Он пробежал 100 м за 9,27 с, побив на 0,03 с прошлогодний рекорд.

Нас природа не наделила столь замечательными физическими данными, поэтому мы не будем даже пробовать свои силы на беговой дорожке, а вместо этого воспользуемся микрокалькулятором, чтобы кое-что подсчитать и поразмыслить.



Спортивный секундомер измеряет время с точностью до 0,01 с. Сколько метров успеваеет пробежать чемпион за столь малое время? За 9,27 с он пробегает

$$100 \text{ м} = 10\,000 \text{ см} = 100\,000 \text{ мм},$$

поэтому за 0,01 с он пробегает в среднем $107,87 \text{ мм} \approx 10,8 \text{ см}$.

Корпус большинства микрокалькуляторов имеет в длину около 10 см, что и соответствует разнице в показании спортивного секундомера между 9,27 с и 9,26 с.

Измеряя время с помощью электронных приборов, мы молчаливо предполагаем, что и отрезки, пробегаемые спортсменами, могут быть измерены столь же точно, как и время. Но такое предположение верно далеко не всегда,

Чтобы лучше понять суть возникающей здесь проблемы, лучше всего обратиться к примеру. Во всех крупных городах имеются плавательные бассейны, удовлетворяющие международным требованиям. допустимым считается колебание длины 50-метрового бассейна в пределах от 49,99 м до 50,01 м. Разница в 2 см соответствует

$$\frac{50,01 - 49,99}{49,99} = 0,0004 = 0,04 \%$$

В заплыве на 100 м пловец проходит длину бассейна дважды: туда и обратно. Различие между минимально и максимально допустимой длиной составляет уже 4 см, но выраженная в процентах относительная ошибка остается неизменной!

Никогда не следует вычислять только проценты. Необходимо всегда иметь в виду и те величины, к которым они относятся.

В заплыве на дистанцию 1500 м пловец преодолевает длину бассейна 30 раз. Разница между пропływаемой им дистанцией в бассейне максимально и минимально допустимой длины достигает в этом случае уже 60 см, то есть сравнима с длиной руки.

Некоторое время назад рекорд в плавании на 100 м вольным стилем составлял 49,44 с. Он был установлен в бассейне длиной 49,99 м. Расстояние 49,9 м рекордсмен проплыл дважды, поэтому отрезок длиной 2 см (разность между максимальной и минимальной длиной бассейна) он преодолел за

$$\frac{49,44 \cdot 2}{2 \cdot 49,99 \cdot 100} \text{ с} = 0,0098 \approx 0,01 \text{ с.}$$

Это означает, что показания секундомера 49,44 с и 49,45 с при установленных международных требованиях к размерам плавательных бассейнов можно (хотя и не обязательно) считать эквивалентными, то есть неразличимыми.

В плавании на 1500 м вольным стилем установлен рекорд 15 мин 2,43 с, а разность в длине дистанции, обусловленная колебаниями в допустимых размерах плавательных бассейнов, набегает до 60 см. Так как

$$15 \text{ мин } 2,43 \text{ с} = 902,43 \text{ с,}$$

на преодоление 60 см наш пловец затрачивает

$$\frac{902,40 \cdot 60}{1500 \cdot 100} = 0,36 \text{ с.}$$

Два пловца, показавшие в заплывах на 1500 м вольным стилем в различных бассейнах соответственно время 15 мин 2,07 с и 15 мин 2,43 с, могут считаться «одинаково быстрыми». Существуют виды спорта, в которых фиксируется 0,001 с (например, в таком виде горнолыжного спорта, как скоростной спуск). Здесь уже сказывается, как быстро «перепрыгивает» с одного деления на другое стрелка секундомера или частота появления цифр на индикаторе электронного секундомера.

ЧТО ТАКОЕ ОДНА СЕКУНДА?

У астрономов прошлого не было сомнений в том, что Вселенная устроена гармонично и действует с безотказной точностью, как хорошо отлаженные часы. В разделе «Точное время» мы уже рассказывали о том, что Земля вращается весьма не гармонично (то замедляется, то ускоряется). Ежегодно издаются пухлые таблицы, в которых неравномерность хода «земных часов» тщательно фиксируется. Ныне часы, изготовленные человеком, идут гораздо точнее, чем «земные часы».

А что такое одна секунда (один метр или один грамм)?

Все наши единицы измерения возникают по одной и той же схеме. Некий «законодатель» заявляет: «Секунда (или метр и т. д.) есть то, что показывает этот (вполне определенный) прибор». В простейшем случае секунду определяют как $1/24 \cdot 60 \cdot 60 = 10^{-10}$ суток (промежутка времени между двумя последовательными кульминациями Солнца). Но, к сожалению, из-за неравномерности вращения Земли такое определение секунды далеко не совершенно.

Колебания маятника позволяют очень точно измерять время, и маятниковые часы долго служили почти единственным средством измерения времени.

Настольные часы были непременным украшением каждого «добропорядочного» дома. Маятник совер-

шал секундные колебания. Когда маятник останавливался в одном крайнем положении, раздавалось «тик», и было удивительно, как долго приходится ждать, пока не раздастся следующее «так».

Предположим, что из-за температурных колебаний длина маятника изменилась так, что «тик» или «так» раздаются на $1/10\,000$ с раньше, чем следовало бы. Величина $0,0001$ с очень мала, но так как в сутках $24 \cdot 60 \cdot 60 = 86\,400$ с, ежедневная ошибка в $0,0001$ с набежит за сутки до $8,6$ с. За неделю такие часы отстанут почти на минуту: полагаясь на них, мы рискуем опоздать на поезд.

В современных научных исследованиях для измерения времени применяются кварцевые часы. В большинстве случаев они работают на частоте $32\,768$ Гц.

Нас интересует, откуда берется столь необычное число. Разумеется, мы могли бы заглянуть в какую-нибудь монографию или учебник. Но у кого под рукой наготове книга, в которой бы рассказывалось о кварцевых часах? Наш микрокалькулятор позволяет нам попытаться придать этому числу смысл (если таковой имеется).

Напомним кое-какие сведения из общего курса физики. Начнем с числа $1024 = 2^{10}$, иногда встречающегося в теории колебаний. Попытаемся выяснить, нельзя ли и число $32\,768$ представить как некоторую степень двойки. Действовать можно двумя способами: последовательно вычислять произведения $2 \cdot 2$, $2 \cdot 2 \cdot 2$, $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \dots$ или воспользоваться логарифмами

$$\begin{aligned}\lg 32\,768 &= x \lg 2, \\ x &= 15.\end{aligned}$$

Используя источник колебаний с частотой $32,768$ МГц в качестве «генератора ежесекундных сигналов», мы работаем с коэффициентом преобразования частоты $1:14$. Успехи науки и техники позволили создать «часы» с механизмом, работающим на частоте $4\,194\,304$ Гц. Нетрудно проверить, что $4,194 \cdot 10^6 = 2^{22}$.

Если операции над числами производить в десятичной системе (не представляя числа в виде степеней десятки) на десятиразрядном микрокалькуляторе, то на индикаторе появится число $4\,194\,303,990$, Теорети-

чески такое невозможно, так как все четные числа (а степени двойки четны) оканчиваются на четную цифру. В этом проявляется ограниченность возможностей нашего микрокалькулятора.

Кварцевые часы обеспечивают точность, достаточную для почти всех технических целей. Но удовлетворить запросы ученых не так-то просто. В качестве особо точных часов они предпочитают использовать колебания молекул газа на частоте $3 \cdot 10^{10}$ Гц. При этом погрешность составляет лишь $0,5 \cdot 10^{-10}$.

Атомные часы, идущие со столь высокой точностью, могут отставать или спешить лишь на $0,5 \cdot 10^{-10} = 0,5 \cdot 10^{-8} \%$. В году $365 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60 \text{ с} = 31536000 \text{ с} \approx 3 \cdot 10^7 \text{ с}$, поэтому $0,5 \cdot 10^{-8} \%$ составляет

$$\frac{3,1536 \cdot 10^7 \cdot 0,5 \cdot 10^{-10}}{100} \text{ с} = 1,5768 \cdot 10^{-5} \text{ с}.$$

Если в вашем микрокалькуляторе не предусмотрены действия над числами, представленными в виде произведения коэффициента на степень десятки, то перед вычислениями показатели степеней десятки лучше сложить в уме (с соответствующими знаками) и производить действия только над коэффициентами, за которыми уже можно следить по индикатору.

Итак, за год наши атомные часы могут (хотя и не обязательно) отставать или уйти вперед на 0,0000158 с.

И Кеплер, и Коперник были бы очень довольны, если бы им довелось узнать, что колеблющиеся атомы являются столь же неотъемлемой частью Вселенной, как Солнце или Земля.

КАКОЕ ПРОСТОЕ ЧИСЛО САМОЕ БОЛЬШОЕ?

В январе 1979 г. мировую печать облетело сообщение о том, что двум молодым американским ученым удалось найти простое число, которое больше всех ранее известных простых чисел. Речь шла о

числе $2^{21701} - 1 \approx 10^{6500}$, то есть о 6500-значном числе. Если напечатать его на пишущей машинке, то оно займет в длину 16 м! Прежний рекорд (установленный в 1971 г.) был более скромным: простое число было «всего лишь» 6000-значным.

Прежде всего определим, что такое простые числа, поиск которых с давних времен будоражит человеческий разум.

Простым называется число, не имеющее собственных (то есть отличных от него самого и единицы) делителей. (Иначе говоря, когда мы ищем простые числа, то нас не интересуют делители, совпадающие с самим числом или равные единице.)

Предположим, что мы хотим проверить на делимость число $z = 14\,256\,595\,081$. При разложении любого заданного числа на простые полезно иметь в виду хорошо известные признаки делимости.

Признак делимости на 2: число делится на 2 в том и только том случае, если его последняя цифра четная.

Признак делимости на 3: число делится на 3 в том и только том случае, если сумма его цифр делится на 3. Если сумма цифр содержит более одного знака, то необходимо вычислить сумму ее цифр и продолжать действовать так до тех пор, пока в результате мы не получим однозначное число. Исходное число делится на 3 в том и только том случае, если число, полученное в результате многократного взятия сумм цифр, совпадает с одним из трех чисел: 3, 6 или 9.

Применим признак делимости на 3 к числу z :

$$1 + 4 + 2 + 5 + 6 + 5 + 9 + 5 + 0 + 8 + 1 = 46.$$

$$4 + 6 = 10, \quad 1 + 0 = 1.$$

Следовательно, число z на 3 не делится.

Признак делимости на 4: число делится на 4 в том и только том случае, если число, образуемое двумя последними цифрами, делится на 4.

В нашем примере 81 не делится на 4, поэтому число z также не делится на 4.

Признак делимости на 5: число делится на 5 в том и только том случае, если оно оканчивается на 0 или на 5.

Следовательно, наше число z на 5 не делится.

Признак делимости на 6: число делится на 6 в том и только том случае, если оно делится на 2 и на 3.

Признак делимости на 7. Число 7 не только играет заметную роль в числовой мистике на протяжении тысячелетий, но и занимает особое место в вопросах делимости. Доказать делимость на 7 можно множеством способов, один сложнее другого. Самый простой признак делимости на 7 сводится к следующему алгоритму. Заданное число разбивается справа налево на группы из трех цифр, после чего полученным трехзначным (последнее, самое левое, число может быть двузначным) числам справа налево попеременно приписывают знаки плюс и минус и вычисляют их сумму. Если эта сумма делится на 7 (ноль делится на 7), то и исходное число делится на 7.

Применим этот признак делимости на 7 к нашему примеру: $14|256|595|081$;

$$81 - 595 + 256 - 14 = -272.$$

Число -272 на 7 не делится. Следовательно, наше исходное число z также не делится на 7.

Этот признак делимости на 7 при использовании микрокалькулятора быстрее всего приводит к результату.

Признак делимости на 8: число делится на 8 в том и только том случае, если три его последние цифры образуют число, которое делится на 8.

В нашем примере 81 не делится на 8, поэтому исходное число z также не делится на 8.

Признак делимости на 9: число делится на 9 в том и только том случае, если однозначное число, получаемое в результате суммирования его цифр, цифр суммы его цифр и т. д. (см. признак делимости на 3), равно 9. В нашем примере

$$1 + 4 + 2 + 5 + 6 + 5 + 9 + 5 + 0 + 8 + 1 = 46, \\ 4 + 6 = 10, \quad 1 + 0 = 1 \neq 9,$$

следовательно, z не делится на 9.

Признак делимости на 10: число делится на 10 в том и только том случае, если его последняя цифра равна нулю.

Признак делимости на 11. Необходимо проделать все операции, которые описаны в приведенном выше

признаке делимости на 7. Если сумма трехзначных чисел делится на 11, то исходное число также делится на 11.

Существует и более простой признак делимости на 11: цифрам исходного числа попеременно справа налево приписываются знаки плюс и минус, после чего вычисляется их сумма. Если она делится на 11, то исходное число также делится на 11. В нашем примере

$$1 - 8 + 0 - 5 + 9 - 5 + 6 - 5 + 2 - 4 + 1 = -10,$$

следовательно, z не делится на 11.

Признак делимости на 12: число делится на 12 в том и только том случае, когда оно делится на 3 и на 4.

В нашем примере число z не делится ни на 3, ни на 4. Следовательно, оно не делится и на 12.

Признак делимости на 13: проделать все операции, описанные в признаке делимости на 7; если получившееся в результате число делится на 13, то исходное число также делится на 13.

В нашем примере

$$81 - 595 + 256 - 14 = -272,$$

оно не делится на 13.

На числе 13, играющем в числовой мистике роль «несчастливого» числа, мы хотели бы остановиться, поскольку при переходе к бóльшим числам признаки делимости становятся существенно более сложными.

Вы, должно быть, заметили, что признаки делимости на 7, 11 и 13 однотипны по своей структуре. Тем более удивительно, что произведение этих простых чисел $7 \cdot 11 \cdot 13 = 1001$ совпадает с числом, столь хорошо знакомым всем по названию знаменитых восточных сказок «1001 ночь».

Но вернемся к нашему исходному вопросу о том, какое из простых чисел самое большое. Несмотря на все усилия математиков, закон распределения простых чисел и поныне неизвестен. Мы пребываем в неведении и относительно того, сколько существует пар простых чисел-«близнецов» (например, 17 и 19, 29 и 31). Действовать приходится почти вслепую. Результаты многолетних исследований сведены в таблицы, охватывающие огромную область натуральных чисел

(до 10 млн.). Установлено, что по мере продвижения «в глубь» натуральных чисел (т. е. по мере их возрастания) простые числа встречаются все реже. Например, за простым числом 370 261 идут подряд 111 составных чисел, в то время как среди 10 первых натуральных чисел встречаются 4 простых числа, что составляет 40 % от общего количества. Среди первых 100 натуральных чисел простых чисел 25, или 25 % от общего количества. Среди первых 1000 натуральных чисел простых 168, или 16,8 %, а среди первых 10 млн. натуральных чисел простых 664 579, или 6,65 %.

Промежутки между простыми числами становятся все больше, но не обрывается ли где-нибудь их последовательность?

Вот тут-то мы и подходим к ответу на вопрос, какое из простых чисел самое большое: простых чисел бесконечно много, поэтому самого большого среди них не существует! Образцовое доказательство этого утверждения предложил еще древнегреческий математик Евклид (ок. 300 г. до н. э.).

Для Евклида вопрос о делимости чисел имел особое значение в связи с поиском так называемых совершенных чисел, равных сумме своих делителей (включая 1). Например, $6 = 1 + 2 + 3$ — совершенное число. Совершенны также числа $28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14$ и $8128 = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + 127 + 254 + 508 + 1016 + 2032 + 4064$. Все найденные до сих пор совершенные числа четны. Существует ли нечетное совершенное число, пока не известно.

Структуру четных совершенных чисел выяснил Леонард Эйлер (1707—1783). Он установил, что при любом натуральном n число $2^{n-1} \cdot (2^n - 1)$ — совершенное, если число $2^n - 1$, стоящее в скобках, — простое. Наименьшее из таких чисел

$$v_1 = 2^1 (2^2 - 1) = 6,$$

затем следуют

$$v^2 = 2^2 (2^3 - 1) = 28,$$

$$v_3 = 2^4 (2^5 - 1) = 496,$$

$$v_4 = 2^6 (2^7 - 1) = 8\,128,$$

Число $2^3 (2^4 - 1)$ несовершенное, так как $2^4 - 1 = 15$ не простое.

Число $v_5 = 2^{12}(2^{13} - 1)$ было открыто еще в XV в. С помощью современной вычислительной техники добрались до числа $v_{24} = 2^{19936} \cdot (2^{16937} - 1)$; около 12 000 знаков. Излишне говорить, что такие невообразимо большие числа намного превосходят возможности нашего микрокалькулятора.

В заключение мы хотели бы позабавить читателя математической шуткой. Вы, дорогой читатель, скорее всего старше 10 и моложе 99 лет. Если это действительно так, запишите свой возраст (округленный до ближайшего целого числа лет) подряд три раза. Полученное шестизначное число делится на 7. Если не верите, можете проверить сами.

У ПРЕДЕЛОВ ПОЗНАННОГО

Физики доказали, что материя состоит из атомов, атомы — из электронов, протонов и нейтронов. Остановимся на этих субатомных частицах и не будем углубляться дальше в строение материи. Время жизни некоторых элементарных частиц чрезвычайно мало и по оценкам сведущих людей составляет величину порядка 10^{-21} с. Все это время частица движется со скоростью света, т. е. 300 000 км/с.

Прикинем с помощью нашего микрокалькулятора, что, собственно, означают эти числа.

Атомные часы пульсируют 10^{10} раз в секунду. На время жизни элементарной частицы приходится лишь $1/10^{11}$ -я часть периода колебаний атомных часов. Столь малая продолжительность, как 10^{-21} с, не поддается измерению обычными методами.

Как далеко успевает продвинуться за время жизни частица, движущаяся со скоростью света 300 000 км/с = $3 \cdot 10^{11}$ мм/с? На расстояние

$$10^{11} \frac{\text{мм}}{\text{с}} \cdot 10^{-21} \text{ с} = 10^{-10} \text{ мм}.$$

Это — диаметр атома.

Итак, время жизни элементарной частицы чрезвычайно мало, а проходимое ею (несмотря на большую скорость) расстояние по порядку величины сравнимо с размерами атома. «Распознают» такие частицы по их действию, которое физики рассчитывают заранее.

СОЛНЦЕ И ВОДА

Вы нежитесь на песке где-нибудь на балтийском пляже или на берегу большого озера. В зависимости от того, как вы лежите — ничтом или навзничь, солнце приятно согревает вам спину или живот, и вы блаженно жмуритесь. В голову приходят самые разные мысли, пока наконец вы не задумываетесь над погодой.

Солнце, как всем известно, поднимается выше всего в полдень, а в тот момент, когда вы об этом поду-

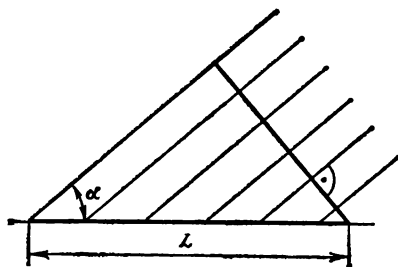


Рис. 10. При падении солнечного излучения под более косым углом его энергия распределяется по большей площади.

мали, на ваших часах уже 2 ч пополудни. Следовательно, Солнце уже прошло через зенит и начало клониться к горизонту. Так как плотность солнечного излучения зависит от высоты нашего дневного светила (рис. 10), вы пытаетесь разобраться, что, собственно, означают эти слова.

Жители приэкваториальной полосы в полдень видят Солнце прямо у себя над головой. По вашей же оценке, солнечные лучи падали в полдень на пляж под углом 50° . Теперь, в 14 ч, они падают под углом 40° . Насколько меньше солнечного излучения вы получаете по сравнению с каким-нибудь кубинцем или конголезцем?

На языке формул задача решается легко и просто. Из небольшого чертежка, сделанного палочкой прямо на песке, видно, что

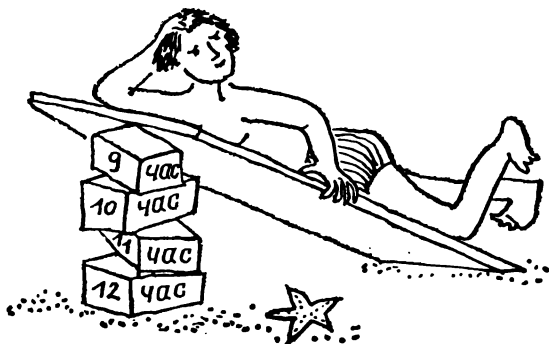
$$\frac{1}{\sin \alpha} = L,$$

где L — отрезок, по которому распределяется солнечная энергия, приходящаяся на единичный отрезок, перпендикулярный солнечным лучам. Мы производим вычисления с отрезками, пользуясь тем, что площадка, на которую падает солнечное излучение, изменяется только в одном направлении (от Солнца), а в поперечном направлении остается неизменной.

Насколько просто выглядит формула, настолько трудно представить себе те следствия, к которым она приводит (с уменьшением угла синус убывает и дробь $1/\sin \alpha$ увеличивается). Разумеется, отправляясь на пляж, вы не забыли прихватить с собой вместе с полотенцем и кремом для загара свой микрокалькулятор и без труда составите небольшую таблицу:

| Угол падения α , град | $\sin \alpha$ | $\frac{1}{\sin \alpha}$ |
|---------------------------------|---------------|-------------------------|
| 50 | 0,7660 | 1,3 |
| 40 | 0,6428 | 1,6 |
| 30 | 0,5000 | 2,0 |
| 20 | 0,3420 | 2,9 |
| 10 | 0,1736 | 5,8 |

Результат для нас, северян, поразительный: нас ежедневно «обделяют» большей частью солнечной энергии! Излучение, приходящееся в тропической зоне на 1 м^2 , в наших широтах приходится на 2 м^2 , а зимой даже на 5 м^2 . Ваш бдительный разум немедленно подсказывает, какие практические меры можно принять против косого падения солнечных лучей в



наших широтах. На пляже, где вы находитесь (как, впрочем, и везде), запрещается возводить из песка «крепости», но никто не запрещает (и тем самым как бы разрешает) строить «горки». Пользуясь этим негласным разрешением, вы решаете возвести из песка горку, склон которой располагался бы по возможности под прямым углом к солнечным лучам. На такой горке вы будете максимально использовать солнечную энергию.

Строительству песочной горки скорее всего что-нибудь помешает: либо ваша лень, либо бдительность сторожа, следящего за порядком на пляже. Но та же идея находит применение в технике: приемные поверхности солнечных батарей обычно располагают под прямым углом к солнечным лучам.

Вы, конечно же, радуетесь в душе, что не живете еще севернее и вам не приходится, как скандинавам, ютиться на скалах и утесах, вздымающихся из морской пучины. Но справедливости ради следует заметить, что коренным обитателям шхер живется не так уж плохо. В зависимости от характера земной поверхности часть падающей на нее солнечной энергии поглощается и часть отражается. Гранит поглощает 53 % и отражает 47 %, песок поглощает 32 % и отражает 68 % энергии. Именно поэтому мы так быстро загораем на песке. Зато у песка прогревается только верхний слой, и когда мы ложимся на него, песок быстро охлаждается снизу, и нам приходится передвигаться примерно на полметра в сторону — на «новый», еще не остывший слой песка. Если же мы ложимся на прогретый камень или дерево, то они долго сохраняют под нами приятное тепло. Скалы на берегах скандинавских шхер ведут себя, как кафельные печи. Впрочем, снег поглощает лишь 8 % падающей на него солнечной энергии и отражает 92 %! Этим и объясняется чудесный мартовский загар лыжников, катающихся главным образом на горных склонах (вспомним о $1/\sin \alpha$!).

Но вот вам надоело размышлять о распределении солнечной энергии, и вы погрузились в волны Балтийского моря или какого-нибудь другого водоема. Заплыв туда, где поглубже, вы переворачиваетесь на спину и лежите, покачиваясь на волнах, а мысли между тем от нечего делать переключаются на новый

объект. На этот раз ваше внимание привлекают волны, мерно вздымающиеся и опускающиеся вокруг. Когда очередная волна вознесет вас на гребне, начните отсчет времени и ведите его до тех пор, пока не окажетесь на гребне следующей волны. (Не беда, если вы не захватили с собой водонепроницаемых часов, достаточно просто отсчитывать про себя: «Двадцать один, двадцать два, двадцать три...». Каждое число соответствует по длительности примерно одной секунде.) Оказывается каждые 3,5 с набегают новая волна. Нет от них покоя! Вы выходите на берег и принимаетесь за расчеты.

Скорость распространения волны задается формулой

$$v = \frac{gt}{2\pi},$$

где $g = 9,81 \text{ м/с}^2$ — ускорение свободного падения, t — время. По нашим измерениям, $t = 3,5 \text{ с}$. Следовательно, скорость распространения волн

$$v = \frac{9,81 \cdot 3,5}{2\pi} \frac{\text{м}}{\text{с}} = 5,46 \frac{\text{м}}{\text{с}} = 19,67 \frac{\text{км}}{\text{ч}}.$$

Длина волны L (расстояние между двумя соседними гребнями) вычисляется по формуле

$$L = \frac{gt^2}{2\pi},$$

$$L = \frac{9,81 \cdot 3,5^2}{2\pi} \text{ м} = 19,13 \text{ м}.$$

Сегодня волны небольшие. Когда штормит, длина волны возрастает до 50 м и более, а скорость достигает почти 10 м/с. Высота волны в Варнемюнде достигает 3 м. Нам очень жаль, что во время туристической экскурсии по морю или круиза во время отпуска вам случилось видеть в шторм волны «высотой с гору». В действительности волны были высотой всего лишь 1,5 м или даже ниже. Ошибочные оценки высоты морских волн обусловлены оптическими иллюзиями.

В Атлантическом океане во время сильных штормов возникают (хотя и редко) волны высотой 15 м и длиной 250 м. Гребни таких волн следуют друг за другом с интервалом

$$t = \sqrt{\frac{2\pi L}{g}} = 12,6 \text{ с}$$

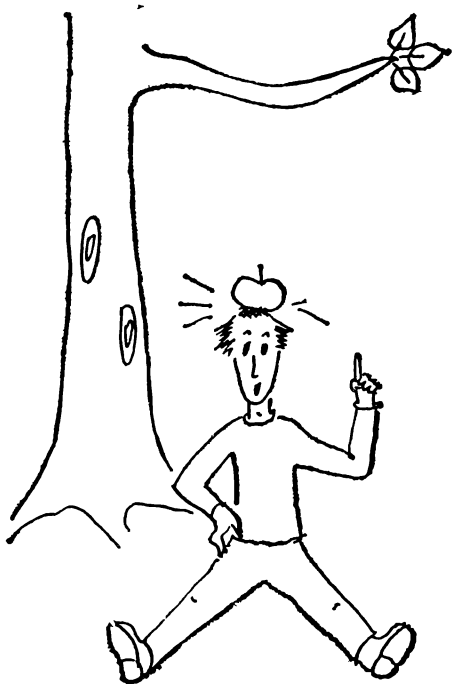
и несутся со скоростью

$$v = \frac{gt}{2\pi} = \frac{9,81 \cdot 12,6}{2\pi} \frac{\text{м}}{\text{с}} = 19,67 \frac{\text{м}}{\text{с}} = 70,81 \frac{\text{км}}{\text{ч}}.$$

Мы видим, что скорость распространения волн во всех случаях не чрезмерно велика. Дело в том, что каждая такая волна переносит многие десятки тонн воды. Наталкиваясь на препятствие — берег, мол или плывущее судно, волны превращаются в рычащих чудовищ, готовых обрушить на препятствие всю свою гигантскую энергию и смести его.

СОЛНЦЕ И ЕГО СПУТНИКИ

Согласно легенде, великий английский естествоиспытатель Исаак Ньютон (1643—1727) постиг сущность закона всемирного тяготения в тот самый миг, когда, сидя в своем саду, увидел, как с яблони упало



яблоко. Что же, пути постижения истины неисповедимы! Во всяком случае, сформулированный им закон всемирного тяготения позволяет оценить те силы притяжения, с которыми действуют друг на друга небесные тела. По закону всемирного тяготения каждое из двух тел массой m_1 и m_2 , находящихся на расстоянии r друг от друга, действует на второе тело с силой

$$F = \frac{km_1m_2}{r^2},$$

где

$$k = 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{Н} \cdot \text{м}^2}{\text{кг}^2}$$

— гравитационная постоянная, r в метрах (м), m_1 и m_2 в килограммах (кг), F в Н.

Что можно извлечь из этой, казалось бы, совсем простой формулы, мы сейчас вам покажем. Вы можете, например, сидя за своим письменным столом, определить массу Солнца. Для этого необходимо лишь привлечь еще одно важное соображение — о равновесии.

Для того чтобы Земля, с одной стороны, не сгнула бесследно в бескрайних просторах Вселенной, а с другой — не «упала» на Солнце, действующая на Землю со стороны Солнца сила притяжения

$$F = \frac{km_{\text{С}}m_{\text{З}}}{r_{\text{ЗС}}^2}$$

должна уравниваться какой-то равной по величине и противоположной по направлению силой. Это так называемая центробежная сила $F_{\text{ц}} = m_{\text{З}}\omega^2 r_{\text{ЗС}}$, действующая на тело, которое вращается по окружности (а орбиту, по которой Земля обращается вокруг Солнца, в достаточно хорошем приближении можно считать круговой). Так называемая циклическая частота ω (греч. «омега») определяется по формуле

$$\omega = \frac{2\pi}{T},$$

где T — период обращения. В нашем случае

$$\omega = \frac{2\pi}{365 \cdot 24 \cdot 3600} \text{ с}^{-1} = 199,2 \cdot 10^{-9} \text{ с}^{-1}.$$

Поскольку Земля находится в равновесии, обе силы можно приравнять:

$$\frac{km_3m_C}{r_{3C}^2} = m_3\omega^2 r_{3C},$$

откуда после несложного преобразования получаем

$$m_C = \frac{\omega^2 r_{3C}^3}{k},$$

Расстояние Земля — Солнце (r_{3C}) известно из других соотношений и составляет $r_{3C} = 1,495 \cdot 10^{11}$ м, т. е. примерно 150 млн. км. Чтобы преодолеть его, свету необходимо

$$\frac{150 \cdot 10^6 \text{ км}}{0,3 \cdot 10^6 \text{ км/с}} = 500 \text{ с} \approx 8 \text{ мин.}$$

Зная расстояние r_{3C} , мы можем определить массу Солнца:

$$m_C = \frac{(199,2 \cdot 10^{-9})^2 \cdot (1,495 \cdot 10^{11})^3}{6,67 \cdot 10^{-11}} \text{ кг} = 1,988 \cdot 10^{30} \text{ кг.}$$

Один из законов движения планет, установленных Иоганном Кеплером (1571—1630), позволяет получить новую информацию о движении планет. Мы имеем в виду так называемый *3-й закон Кеплера*, который гласит: квадраты периодов обращения планет вокруг Солнца относятся, как кубы больших полуосей их эллиптических орбит.

Математически 3-й закон Кеплера выражается формулой

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{a_1^3}{a_2^3}.$$

Так как периоды обращения планет по их почти круговым орбитам сравнительно легко определить из наблюдений, расстояния от Солнца можно вычислить последовательными приближениями.

Пусть a_3 — расстояние Солнце — Земля. Тогда для расстояния a_x от Солнца до любой планеты (обозначаемой индексом x) справедлива формула

$$a_x = a_3 \sqrt[3]{\left(\frac{T_x}{T_3}\right)^2}.$$

Расстояния у астрономов принято выражать в так называемых астрономических единицах (а. е.):

$$1 \text{ а. е.} = 1,496 \cdot 10^{11} \text{ м.}$$

Из приведенной выше формулы (при $T_3 = 365 \cdot 24 \times 3600 \text{ с} = 31,536 \cdot 10^6 \text{ с}$) следует, например, для Венеры ($T_B = 19,44 \cdot 10^6 \text{ с}$), что

$$a_B = 1 \cdot \sqrt[3]{\left(\frac{19,44}{31,54}\right)^2} \text{ а. е.} = 0,724 \text{ а. е.}$$

(напомним, что $a_3 = 1 \text{ а. е.}$). Аналогичным образом та же формула позволяет найти расстояния от Солнца и для всех других планет. Вычисленные периоды обращения планет вокруг Солнца и большие полуоси эллиптических орбит приведены в следующей таблице:

| Планета | Период, с | Большие полуоси, а. е. |
|----------|---------------------|---------------------------|
| Меркурий | $7,60 \cdot 10^6$ | 0,387 |
| Венера | $19,44 \cdot 10^6$ | 0,724 |
| Земля | $31,56 \cdot 10^6$ | 1,000 |
| Марс | $59,33 \cdot 10^6$ | 1,523 |
| Юпитер | $374,27 \cdot 10^6$ | 5,200 |
| Сатурн | $929,7 \cdot 10^6$ | 9,538 |
| Уран | $2651,5 \cdot 10^6$ | 19,182 |
| Нептун | $5200 \cdot 10^6$ | 30,055 |
| Плутон | $7817 \cdot 10^6$ | 39,44 |

По-видимому, людей издавна занимала мысль о том, почему планеты обращаются вокруг Солнца именно на тех, а не на других расстояниях. Вывести эти расстояния из известных законов природы не удавалось. Наряду с различного рода мистическими измышлениями предпринимались и серьезные попытки.

Например, в 1772 г. был предложен «закон Тициуса — Боде». Иоганн Даниель Тициус (1729—1796) был профессором математики Виттенбергского университета, а Иоганн Элерт Боде (1747—1826) — директором Берлинской обсерватории. Закон Тициуса — Боде установлен чисто эмпирически; он гласит: если среднее расстояние Солнце — Меркурий принять за 4 «единицы», то средние расстояния от Солнца до других планет получаются поочередным прибавлением к

4 чисел 3, 6, 12, В следующей таблице приведены для сравнения истинные и предсказываемые на основании закона Тициуса — Бодде размеры планетных орбит.

| Планета | Среднее расстояние от Солнца, м | То же расстояние в «единицах» | Расстояние, следующее из закона Тициуса-Бодде | Отклонение, % |
|----------|---------------------------------|-------------------------------|---|---------------|
| Меркурий | $58 \cdot 10^9$ | 4 | 4 | — |
| Венера | $108 \cdot 10^9$ | 7,45 | $4 + 3 = 7$ | 6 |
| Земля | $150 \cdot 10^9$ | 10,34 | $4 + 6 = 10$ | 2,7 |
| Марс | $228 \cdot 10^9$ | 15,72 | $4 + 12 = 16$ | 1,8 |
| — | — | — | $4 + 24 = 28$ | — |
| Юпитер | $778 \cdot 10^9$ | 53,7 | $4 + 48 = 52$ | 3,2 |
| Сатурн | $1428 \cdot 10^9$ | 98,5 | $4 + 96 = 100$ | 1,5 |
| Уран | $2872 \cdot 10^9$ | 198,1 | $4 + 192 = 196$ | 1,1 |

Две последние планеты Нептун и Плутон в таблицу не включены. Для них отклонения от закона Тициуса — Бодде велики. К тому же в то время, когда был установлен закон, они еще не были открыты. Бросается в глаза зазор, зияющий между Марсом и Юпитером: предсказываемому законом Тициуса — Бодде расстоянию в 28 «единиц» не соответствует ни одна планета. Позднее выяснилось, что в этом зазоре обращаются так называемые планетоиды (возможно, осколки более крупной планеты) с максимальным диаметром в несколько сот километров.

Как мы уже упоминали, до 1780 г. были известны шесть планет. Седьмая планета, Уран, была открыта в 1781 г. В 1801 г. философ Фридрих Гегель (1770—1831) в своей диссертации, написанной по случаю вступления в должность профессора Йенского университета, «доказал», что других планет (помимо семи уже открытых) не существует и не может существовать. Его предсказание было опровергнуто: в 1840 г. астрономы открыли Нептун, а в 1930 г. — Плутон.

В САУНЕ

Мы надеемся, что вы регулярно ходите в сауну, так как этот раздел посвящен различного рода задачкам, имеющим самое непосредственное отношение к

ней. Предполагается, что в вашем распоряжении настоящая сауна, выстроенная из дерева, в которой посетители поддают пар, выплескивая воду на раскаленные камни, а под конец прыгают в холодную воду (температура воды 10°C). Мы твердо убеждены, что вы не принадлежите к числу тех, кто сбросив в сауне 1 кг, тотчас же выпивает 2 л пива, и даже не слышали о таких людях.

Для тех, кому не приходилось бывать в сауне, сообщаем особенности финской бани. Во-первых, посетители потеют в облицованном деревом помещении, где воздух нагрет раскаленными камнями до температуры $80\text{--}100^{\circ}\text{C}$. Во-вторых, время от времени на раскаленные камни выплескивают ковш воды (в Советском Союзе любители иногда поддают пар водой с квасом), отчего влажность воздуха и электрическое поле в помещении резко меняются. В-третьих, посетители как можно быстрее прыгают в как можно более холодную воду.

Тем, кто пренебрегает третьим пунктом, не следует забывать о сухости или влажности воздуха в сауне.

Напомним, что при любой температуре воздух может содержать лишь строго определенное максимально возможное количество влаги. При температуре 0°C в 1 м^3 воздуха содержится не более 4,8 г воды, при температуре 30°C содержание воды возрастает уже до 30,4 г.

Дойдя до этого места, уместно, спросить себя, а какова собственно, масса 1 м^3 воздуха, состоящего из 23 % кислорода, 76 % азота и 1 % благородных газов.

Итальянский физик Авогадро (1776—1856) открыл, что масса 22,4 л любого газа численно совпадает с его молекулярной массой (а в случае благородного газа — с его атомной массой). Молекулярная масса кислорода равна 32, азота — 28. Атомной массой благородных газов мы пока пренебрежем. Следовательно, по закону Авогадро

$$22,4\text{ л О}_2 \sim 32\text{ г},$$

$$1\text{ л О}_2 \sim 1,428\text{ г},$$

$$1\text{ л N}_2 \sim \frac{28\text{ г}}{22,4} = 1,250\text{ г}.$$



Умножив каждую из полученных величин на процентное содержание соответствующего газа и сложив, мы найдем массу 1 л воздуха при 0°C и нормальном давлении:

$$(0,328 + 0,950) \text{ г/л} = 1,278 \text{ г/л}.$$

Более точное значение (с учетом массы благородных газов) составляет 1,2567 г/л, или 1,257 кг/м³. Эта газовая смесь из азота, кислорода и пяти благородных газов с примесью водяных паров и двуокиси углерода и называется «воздухом». О всех прочих газах, выпускаемых в воздух дымовыми трубами, химическими заводами, дизельными и бензиновыми двигателями и понижающих содержание кислорода, мы пока умалчиваем.

Каково максимальное количество влаги, которое мог бы содержать воздух в нашей сауне? Разумеется, мы могли бы оценить содержание влаги, опираясь на некоторые данные (при 0°C максимальное содержание влаги в воздухе составляет 4,8 г/м³ и т. д.). Но в литературе имеется готовая формула для подсчета этой величины:

$$F = 4,48 \cdot 10^{\frac{7,5t}{t+273,3}} \text{ г/м}^3,$$

где t — температура в $^{\circ}\text{C}$.

Прежде всего следует проверить, дает ли эта формула разумные величины на известных нам данных о максимальном содержании влаги при 0°C:

$$F = 4,48 \cdot 10^{\frac{7,5 \cdot 0}{0 + 273,3}} = 4,48 \text{ г/м}^3.$$

Полученное значение совпадает с известным. Кроме того, формула для F позволяет понять, что делает наш микрокалькулятор, когда ему приходится умножать на нуль или делить нуль на какое-нибудь число. (Нелишне напомнить, что $10^0 = 1$.)

Если ваш микрокалькулятор имеет функциональную клавишу «у^x» и клавишу «10^x», то вычислять степени можно двумя способами.

В нашей сауне поддерживается температура около 80°C. Следовательно, максимальное содержание водяного пара в воздухе составляет

$$F = 4,48 \cdot 10^{\frac{7,5 \cdot 80}{80 + 273,3}} \text{ г/м}^3 = 348,52 \text{ г/м}^3.$$

Прежде чем обсуждать, что, собственно, означает эта величина (1 м³ воздуха в сауне содержит 348,52 г влаги), подсчитаем быстро максимальное содержание влаги при 100°C:

$$F = 4,48 \cdot 10^{\frac{7,5 \cdot 100}{100 + 273,3}} \text{ г/м}^3 = 749,58 \text{ г/м}^3.$$

У вас появляется смутное ощущение, что это число вам уже где-то встречалось, и вы совершенно правы: 749,58 мм ртутного столба примерно совпадает с давлением водяного пара при кипении воды в нормальных условиях (точное значение 760 мм рт. ст.). «Неувязка» обусловлена неточностью нашей формулы. Таким образом, максимальное содержание влаги в воздухе (в г/м³) численно совпадает с давлением пара (в мм рт. ст.).

Возникает вопрос: что было бы, если бы воздух в нашей сауне содержал 348,5 г/м³ водяного пара? Мы опрометью бросились бы из сауны, чтобы не получить ожогов: при столь высокой температуре человек может выдержать без ущерба для здоровья лишь относительно сухой воздух. Относительная влажность

воздуха, определяемая отношением

$$\frac{\text{имеющееся количество водяного пара} \cdot 100}{\text{максимальное содержание водяного пара } F},$$

должна быть очень низкой.

Во многих саунах висит гигрометр, показывающий относительную влажность воздуха в процентах. Если гигрометр показывает относительную влажность 20 %, а термометр — температуру 80 °С, то абсолютная влажность воздуха составляет

$$F = 0,2 \cdot 4,48 \cdot 10^{\frac{7,5 \cdot 80}{80 + 273,3}} \text{ г/м}^3 = 69,70 \text{ г/м}^3.$$

Если плеснуть на раскаленные камни всего лишь 0,5 л воды, а кубатура сауны равна 3·3·2,5 м³ = 22,50 м³, то в каждом кубическом метре содержание влаги (водяного пара) возрастет на

$$\frac{500}{22,5} \text{ г} = 22,22 \text{ г}.$$

Абсолютная влажность возрастет с 69,70 до 91,92 г/м³, а относительная влажность поднимется с 20 до

$$\frac{91,92}{348,52} \cdot 100 \% \approx 26 \%.$$

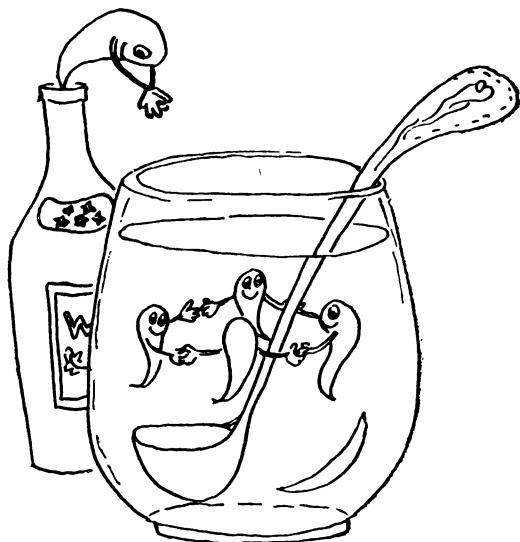
Те, кто имеет достаточный опыт хождения в сауну, знают, что при таком возрастании влажности кожа краснеет, дышать становится тяжело и ручьем льет пот.

КРЮШОН

В повседневной жизни нам довольно часто приходится смешивать жидкости с различной концентрацией тех или иных веществ с тем, чтобы получить раствор определенной концентрации.

Химик смешивает кислоты различной крепости. Автолюбитель разбавляет водой серную кислоту, чтобы раствор определенной концентрации залить в аккумулятор. Собравшиеся на дружескую вечеринку молодые люди, стремясь поразить воображение дам своими кулинарными способностями, смешивают крюшон,

Остановимся на примере с приготовлением крюшона. Предположим, что мы, готовясь к приему гостей, запаслись 3 бутылками вина по 0,75 л и 7 бутылками фруктовой воды по 0,35 л. Крепость вина (содержание спирта в вине) 12 %. Требуется приготовить крюшон крепостью 7,5 %. Даже владельцам



современного микрокалькулятора не следует пренебрегать старым вычислительным трюком: схемой вычислений, придуманной химиками для решения таких задач (рис. 11, а). Преимущество этой схемы состоит в том, что она позволяет производить вычисления на начальной стадии без использования данных о количествах смешиваемых веществ.

Обе величины, относящиеся к исходным данным (12 % спирта в вине и 0 % спирта в воде), стоят слева. В центре записано желательное содержание спирта. Вычисления производятся по направлению стрелок (рис. 11, б). Содержанию спирта, стоящему слева вверху (12 %), соответствует число долей (7,5 частей), стоящее справа вверху. Вычитание двух чисел производится в таком порядке, чтобы результат получился положительным (точнее, неотрицательным). Так как 7,5 частей вина в наших трех бутылках

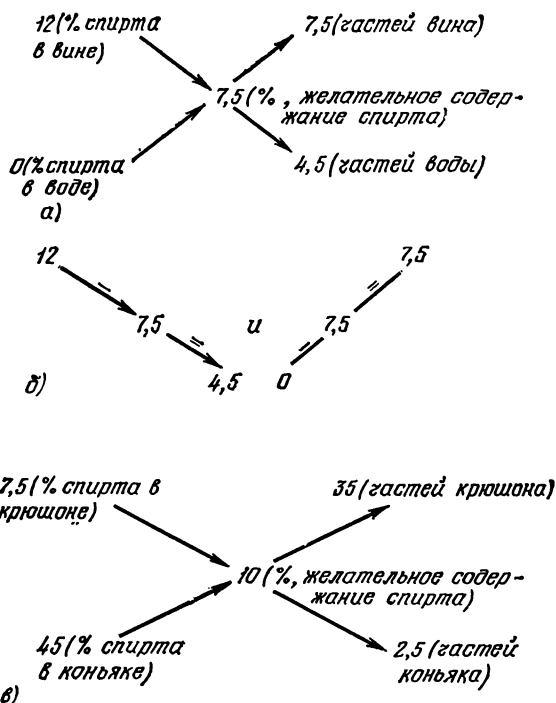


Рис. 11. Схема вычислений при составлении смесей. а — ход вычислений при составлении крошона; б — фрагмент вычислений к схеме а; в — второй вариант составления крошона.

соответствуют $0,75 \cdot 3 = 2,25$ л, мы производим вычисления на микрокалькуляторе, как обычно:

$$\frac{2,25 \cdot 4,5}{7,5} \text{ л} = 1,35 \text{ л.}$$

Столько фруктовой воды понадобится нам, чтобы разбавить вино до требуемой крепости 7,5 %. Результат наших вычислений — довольно «тяжелый удар», так как мы запаслись 7 бутылками фруктовой воды общей емкостью $0,35 \cdot 7 = 2,45$ л: «несуразное» число 1,35 л означает, что мы купили либо слишком много фруктовой воды, либо слишком мало вина.

Предположим, что мы хотим для придания крошону большей крепости добавить к нему коньяку (содержащему 45 % спирта). Нам кажется, что крепость

в 10 % будет в самый раз. Сколько коньяку потребуется влить в крюшон (рис. 11, в)?

Мы уже приготовили

$$(2,25 + 1,35) = 3,60 \text{ л}$$

крюшона, поэтому нам придется добавить

$$\frac{3,60 \cdot 2 \cdot 5}{35} \approx 0,25 \text{ л}$$

коньяку. В чаше для приготовления крюшона окажется 3,85 л напитка. Вполне достаточно для веселой вечеринки.

И НЕВОЗМОЖНОЕ ВОЗМОЖНО!

Когда прыгает лягушка или блоха (какими бы мотивами они при этом не руководствовались), никому и в голову не придет усмотреть в их прыжке нечто противоречащее законам природы, хотя прыгуны движутся против направления силы тяжести. Иное дело, если нечто подобное «позволяет себе» кусок неживой материи. Что, если он без посторонней помощи вдруг подпрыгнет? Считаете ли вы, например, возможным, чтобы кусочек меди массой примерно в 1 г, т. е. весом около 10^{-2} Н, ни с того ни с сего подпрыгнул без всякого воздействия со стороны на высоту около 5 мм?

Закон сохранения энергии не будет нарушен, если предположить, что необходимая для прыжка механическая энергия компенсируется мгновенным охлаждением куска меди. Для того чтобы ответить на вопрос о возможности самопроизвольного прыжка однограммового куска меди, мы должны оценить его вероятность.

Необходимая механическая энергия равна

$$10^{-2} \text{ Н} \cdot 5 \text{ мм} = 5 \cdot 10^{-5} \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

Соответствующее изменение температуры можно оценить по формуле

$$Q = mc \Delta T,$$

где c — удельная теплоемкость, для меди $c_{\text{Cu}} = 377 \frac{\text{Н} \cdot \text{м}}{\text{кг} \cdot \text{К}}$.

Оно составляет величину

$$\Delta T = \frac{-5 \cdot 10^{-5} \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot \text{кг} \cdot \text{К}}{10^{-3} \text{ кг} \cdot 377 \text{ Н} \cdot \text{м}}.$$

Знак минус указывает на то, что речь идет о понижении, а не о повышении температуры.

Для вычисления интересующей нас вероятности нам понадобится ввести термодинамическую функцию состояния — так называемую энтропию S , приращение которой определяется соотношением

$$\Delta S = \frac{\Delta Q}{T}.$$

С вероятностью состояния ω энтропия S связана соотношением

$$S = k \ln \omega,$$

выведенным выдающимся физиком Людвигом Больцманом (1844—1906). Формула, связывающая энтропию S и вероятность состояния ω , высечена на надгробии Больцмана на Центральном кладбище в Вене. Коэффициент k , названный в честь Больцмана *постоянной Больцмана*, имеет численное значение:

$$k = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ Вт} \cdot \text{с} / \text{К}.$$

Из формулы Больцмана следует, что приращение энтропии определяется выражением

$$\Delta S = k (\ln \omega_2 - \ln \omega_1),$$

где ω_2 — вероятность того, что кусочек меди подпрыгивает (и при этом охлаждается), а ω_1 — вероятность того, что этого не произойдет. Вычисленное выше изменение температуры столь мало, что им можно пренебречь. При комнатной температуре ($\approx 293 \text{ К}$) мы получаем

$$\Delta S = - \frac{5 \cdot 10^{-5} \text{ Н} \cdot \text{м}}{293 \text{ К}} = 1,38 \cdot 10^{-23} \frac{\text{Вт} \cdot \text{с}}{\text{К}} \cdot \ln \frac{\omega_2}{\omega_1}.$$

Напоминаем: разность логарифмов двух величин равна логарифму их отношения.

Разрешая это соотношение относительно $\ln(\omega_2/\omega_1)$, получаем

$$-\ln \frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{5 \cdot 10^{-5}}{293 \cdot 1,38 \cdot 10^{-23}} \approx 1,237 \cdot 10^{16},$$

или после потенцирования

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = e^{1,237 \cdot 10^{16}} = 10^{0,537 \cdot 10^{16}}.$$

Столь большое отношение вероятностей означает, что если кусочек меди находится в прыжке около 1 с, то в течение $10^{0,537 \cdot 10^{16}}$ с кусочек меди заведомо поконится, т. е. интересующее нас событие заведомо не происходит. Число $10^{0,537 \cdot 10^{16}}$ столь невообразимо велико, что даже наш микрокалькулятор перед ним оказывается бессильным. Если предположить, что наша Вселенная существует около 15 млрд. лет, то и этот почтенный возраст составляет лишь

$$15 \cdot 10^9 \cdot 365 \cdot 24 \cdot 3600 \text{ с} = 4,73 \cdot 10^{17} \text{ с},$$

т. е. примерно одну триллионную от полученного нами числа. Таким образом, хотя самопроизвольный прыжок кусочка меди в принципе возможен (не противоречит законам природы), вероятность его столь мала, что позволяет с достаточной уверенностью утверждать: сколько бы вы ни ждали, увидеть столь редкое событие вам вряд ли удастся.

ВЕЧНЫЙ КАЛЕНДАРЬ

Математики еще несколько веков назад придумали, как составить вечный календарь, который позволил бы, например, выяснить, приходится ли 1 января 2000 г. на воскресенье. Математики прошлого составили специальные таблицы. Заглянув в них, каждый мог получить ответ на любой вопрос такого рода. Мы же попытаемся решить ту же проблему с помощью нашего микрокалькулятора.

Продолжительность так называемого тропического года составляет 365,2422 суток, или, если угодно, 365 дней 5 ч 48 мин 46 с. Под тропическим годом

астрономы понимают промежуток времени между двумя последовательными прохождениями центра Солнца через точку весеннего равноденствия. Отцы церкви постановили на Никейском соборе (325 г.), что весеннее равноденствие приходится на 21 марта.

В нашей повседневной жизни мы отсчитываем время целыми сутками. За четыре года наш календарный год отстает от тропического на $4 \cdot (5 \text{ ч } 48 \text{ мин } 46 \text{ с}) = 23 \text{ ч } 15 \text{ мин } 4 \text{ с}$. Чтобы скомпенсировать столь большое отставание (почти в целые сутки), раз в четыре года вводится 29 февраля (високосный год). После високосного года уже тропический год отстает от календарного примерно на 45 мин.

За 25 високосных лет, т. е. за 100 календарных лет, набегают расхождения в одни сутки. Поэтому первые годы столетий, две первые цифры которых образуют двузначное число, не делящееся на 4 (например, 1900 г.), не считаются високосными. Следовательно, 1600-й год — високосный, 1700-й, 1800-й и 1900-й — невисокосные, а 2000-й год — снова високосный.

Столь простой системой человечество обходилось примерно 3000 лет. Однако время от времени в календарь необходимо было вводить поправки. Последняя реформа календаря была проведена в 1582 г. папой Григорием XIII. К тому времени существовавший ранее так называемый юлианский календарь, введенный еще Юлием Цезарем, отстал от весеннего равноденствия на 10 суток. Новый, григорианский, календарь был введен в католических странах: после 4 октября в них наступило сразу 15 октября. В странах, где господствовала протестантская церковь, отказались принять «папские выдумки», хотя реформа календаря была научно обоснована. Разум одержал верх над предрассудками лишь в период с 1700 по 1750 г. Что же касается греко-римской церкви, то она по-прежнему пользуется юлианским календарем. Именно с этим и связаны трудности с расхождением дат между старым и новым стилем.

Программа, которой мы воспользуемся, ведет отсчет времени с 1 марта 1700 г. Без дополнительных условий первый сбой приходится на 1 марта 1700 г., а действие программы простирается до 28 февраля 2100 г.

Вполне очевидно, что из-за 29 февраля такие месяцы, как январь и февраль, следует рассматривать особо, не так, как остальные 10 месяцев.

Вычислим прежде всего число дней N , прошедших с 1 марта 1700 г. до любого интересующего нас дня в январе и феврале:

$$N = [365,25(a - 1)] + [30,6(m + 13)] + d - 621\,049,$$

где a — номер года, m — номер месяца, d — номер дня. Квадратные скобки означают, что после вычисления стоящих в них произведений все цифры после запятой следует отбросить (это относится в равной мере и к a , и к m).

Для остальных месяцев число дней вычисляется по формуле

$$N = [365,25a] + [30,6(m + 1)] + d - 621\,049.$$

Смысл числа 621 049 станет ясен, если разделить его на 1700: это не что иное, как число дней, прошедших с 1 января первого года н. э. до начала нашего календаря.

Мы заведомо не знаем, сколько дней прошло с 1700 г., но в правильности обоих выражений для N нетрудно убедиться, если спросить себя: сколько дней прошло с 1 января 1979 г. по 31 декабря 1979 г.?

$$\begin{aligned} N_{1.01} &= [365,25(a - 1)] + [30,6(m + 13)] + d - 621\,049 = \\ &= [365,25 \cdot 1978] + [30,6 \cdot 14] + 1 - 621\,049 = \\ &= [722\,464,50] + [428,40] + 1 - 621\,049 = \\ &= 722\,464 + 428 + 1 - 621\,049 = \\ &= 722\,893 - 621\,049 = 101\,844. \end{aligned}$$

Если у вашего микрокалькулятора имеется функциональная клавиша «Int.» (взятие целой части числа), то воспользуйтесь ею для отбрасывания знаков после запятой. В большинстве микрокалькуляторов такой клавиши нет, поэтому отбрасывание дробной части осуществляется путем ее вычитания.

В нашем примере из числа 722 654,50 нужно вычесть 0,50, а из числа 428,40 — 0,40.

$$N_{31.12} = [365,25a] + [30,6(m + 1)] + d - 621\,049.$$

Обратите внимание на различие между правой частью выражения для $N_{31.12}$ и правой частью выражения для $N_{1.01}$: соотношение для числа дней, предшествующих любой дате вплоть до 28.02, отличается от соотношения для числа дней, предшествующих любой дате начиная с 1.03.

Продолжаем наши вычисления:

$$N_{31.12} = [365,25 \cdot 1979] + [30,6 \cdot 13] + 31 - 621\,649 = \\ = 723\,257 - 621\,049 = 102\,208;$$

$$N_{31.12} - N_{1.01} = 102\,208 - 101\,844 = 364,$$

т. е. 364 дня. Таким образом, мы получили правильное значение и убедились в надежности приведенных выше формул, а заодно научились подсчитывать, сколько дней разделяет две интересующие нас даты. Теперь ответ на вопрос о том, сколько дней нам осталось до отпуска, мы всегда сумеем дать с помощью нашего микрокалькулятора.

Убедившись в надежности наших формул, приступим к определению дня недели по следующему алгоритму: 1) разделить N на 7; 2) отбросить знаки, стоящие перед запятой; 3) оставшуюся десятичную дробь умножить на 7.

Число 0 соответствует воскресенью, 1 — понедельнику и т. д. В нашем примере с 1.01.79 и 31.12.79 мы получаем:

$$\frac{N_{1.01}}{7} = \frac{101\,844}{7} = 14549,14;$$

$$0,14 \cdot 7 \approx 1.$$

Если у вашего микрокалькулятора имеется функциональная клавиша «Fгас.», воспользуйтесь ею при вычислении дробной части числа.

Итак, 1979 г. завершился в понедельник. В правильности наших расчетов нетрудно убедиться на примере 1980 г. Если 1979 г. завершился в понедельник, то 1980 г. начался во вторник (для проверки достаточно взглянуть на календарь). Но если вы полагаете, что раз 1979 г. начался и завершился в один и тот же день недели, то и 1980 г. начался и закон-

чился во вторник, то глубоко заблуждаетесь, так как 1980 г. — високосный и 31 декабря 1980 г. пришлось на среду.

Если производимые нами действия (деление на 7 и умножение на 7) кажутся вам несколько таинственными, то представьте остаток от деления на 7 в виде дроби: например, $0,19 \sim \frac{1}{7}$; $0,34 \sim \frac{2}{7}$ и т. д. При умножении на 7 всегда будут получаться целые числа: 0 или 1, 2, ... и т. д. до 7. Необходимо лишь выбрать за начало отсчета воскресенье и число дней, делящееся на 7, а дальше наша система сработает почти автоматически. Оговорка «почти» указывает на трудности, связанные с високосными годами: 1800 и 1900.

Чтобы определить, на какой день недели приходится дата до 1900 г. по нашему алгоритму, необходимо произвести дополнительные операции сложения. Но поскольку почти никого не интересует, на какой день недели приходилось 28 мая 1825 г., и вместе с тем надо довыяснять тот же вопрос применительно к 1 июня 1982 г. (или какой-нибудь дате грядущего года), полезно несколько модифицировать приведенные выше выражения. Какое число следовало бы вычитать вместо 621 049, если бы наш календарь начинался не с 1 марта 1970 г., а с 1 марта 1900 г.?

ВСЕМИРНЫЙ ПОТОП

Если туристу, прибывшему на экскурсию в Ереван, особенно повезет, то в ясный день он увидит вершину горы Арарат, расположенную по другую сторону советско-турецкой границы. Если же не повезет и погода выдастся плохая, то нашему туристу придется довольствоваться видом на Арарат на этикетках знаменитых армянских коньяков.

По библейскому преданию, на горе Арарат высадился из своего ковчега после всемирного потопа праотец Ной вместе со своим семейством и всеми живыми тварями. Те, кому довелось побывать в Эчмиадзине, близ Еревана, в храме, где совершает богослужения глава армяно-григорианской церкви католикос, видели кусочек дерева величиной с ладонь, якобы сохранившийся фрагмент Ноева ковчега.

При средней глубине морей и океанов около 3,795 км и объеме 1 368 000 000 км³ «запасы» суши на Земле довольно скромны. Поверхность суши имеет площадь всего лишь 149 300 000 км², а средняя высота над уровнем моря достигает 840 м. Следовательно, объем суши, возвышающейся над уровнем моря, составляет лишь

$$149\,300\,000\text{ км}^2 \cdot 0,84\text{ км} = 125\,412\,000\text{ км}^3.$$

Эти нехитрые вычисления мы проделали трижды, и всякий раз результат оказывался одним и тем же. Между тем в книге Э. Бушольда «Проблема воды», откуда мы позаимствовали данные о площади поверхности и глубине мирового океана, запасах воды на нашей планете и т. д., приведен иной результат: 128 000 000 км³. Различие невелико, но оно еще раз подтверждает, что числа на страницах нашей книги следует не принимать на веру, а каждый раз проверять (разумеется, с помощью микрокалькулятора).

По библейскому преданию, потоп во времена Ноя возник из-за продолжительных дождей. Однако ученые установили, что 97,9 % всех запасов воды сосредоточено в морях и океанах и лишь 0,0009 % находится в виде водяных паров в атмосфере. Если бы



вся влага из водяных паров излилась в виде дождей на Землю и не испарялась бы снова, то объем ее, как показывают вычисления, составил бы 0,0009 % от 1 368 000 000 км³ — 12 312 км³. Распределив эти 12 312 км³ равномерно по всей поверхности суши (будем считать, что над морями и океанами дождь не идет), мы обнаружим, что слой воды мог иметь толщину всего лишь

$$\frac{12312 \text{ км}^3}{149\,300\,000 \text{ км}^2} = 8,25 \cdot 10^{-5} \text{ км} \approx 8 \text{ см.}$$

Разумеется, наши расчеты чрезмерно упрощены, и, приступая к ним, мы ввели немало «бы». Тем не менее их результат со всей очевидностью показывает, что при самых благоприятных предположениях относительно всемирного потопа Ной мог бы шествовать по воде босиком. Чтобы хоть как-то спасти легенду о всемирном потопе, необходимо принять новые предположения. Мы можем считать, например, что запасы воды, изливающейся на Землю в виде дождей, непрерывно пополняются за счет испарения с поверхности Мирового океана или что в каком-то месте шли проливные дожди столь необычной силы, что память о них запечатлелась в преданиях.

Еще одна возможность для всемирного потопа представилась бы в том случае, если бы материки просто-напросто погрузились в морскую пучину. Для этого под волнами должны были бы скрыться 125 412 000 км³ суши. Распределим их мысленно равномерным слоем по дну Мирового океана, т. е. по площади

$$\frac{1,368 \cdot 10^9 \text{ км}^3}{3,795 \text{ км}} = 3,605 \cdot 10^8 \text{ км}^2.$$

Так как на площади $3,605 \cdot 10^8 \text{ км}^2$ мы бы распределили («насыпали») $1,254 \cdot 10^8 \text{ км}^3$ грунта, уровень воды поднялся бы на

$$\frac{1,254 \cdot 10^8 \text{ км}^3}{3,605 \cdot 10^8 \text{ км}^2} = 3,48 \cdot 10^{-1} \text{ км} \approx 350 \text{ м.}$$

Таким образом, и в этом случае средняя глубина Мирового океана (3795 м) изменилась бы несущественно.

Интересно выяснить, что бы произошло, если бы весь запас воды, оцениваемый в 1 368 000 000 км³,

равномерно распределить по всей земной поверхности площадью 510 100 000 км². Получился бы настоящий Мировой океан глубиной 2680 м.

ЧИСЛО ЭЙЛЕРА

Вряд ли ученого можно почтить больше, чем назвав в его честь важную мировую константу.

Наряду с числом π одно из важнейших трансцендентных чисел e вошло в историю в неразрывной связи с именем великого математика и физика Леонарда Эйлера (1707—1783).

Как и все трансцендентные числа, число e представимо в виде бесконечной непериодической десятичной дроби. Отрезок ее из первых двадцати знаков после запятой имеет вид

$$e = 2,718\,281\,828\,459\,045235\,36.$$

То, что цифры 2 и 8 встречаются четыре раза каждая, а цифры 6, 7, 9 и 0 только по одному разу, — не более чем чистая случайность, и никакого повода для беспокойства в этой связи нет. По мере увеличения числа знаков в десятичном разложении числа e частота появления цифр выравнивается. С помощью больших ЭВМ в 60-е годы неоднократно вычислялись многие (более 100 000) знаки числа e . Результаты расчетов подтвердили гипотезу о равномерном распределении цифр в десятичном разложении этого числа.

Если для числа π во многих микрокалькуляторах предусмотрена специальная клавиша, то для вычисления e вам придется нажать клавишу «1» (ввести число 1), а затем функциональную клавишу « e^x » (разумеется, если такая клавиша предусмотрена конструкторами Вашего микрокалькулятора). С помощью микрокалькулятора вы сможете ответить на старый вопрос-шутку: что больше — e^π или π^e ?

По сравнению с числом π , значение которого (по крайней мере приближенное) известно на протяжении нескольких тысячелетий, число Эйлера e молодо. Появление его связано с возникновением так называемой высшей математики. Особая значимость числа e обусловлена тем, что оно служит основанием натуральных

логарифмов и экспоненциальной функции (или просто экспоненты) $y = e^x$. Последняя встречается во многих законах природы: в формулах, описывающих процессы роста и размножения, радиоактивного распада, барометрическую зависимость (давления от высоты), затухания. Для наиболее часто встречающихся комбинаций экспоненциальных функций, возникающих



при решении многих физических, химических и биологических задач (см. раздел «Свободное падение»), введены даже специальные названия (гиперболические функции) и обозначения:

$$y = \operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

— гиперболический синус,

$$y = \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

— гиперболический косинус,

$$y = \operatorname{th} x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

— гиперболический тангенс,

$$y = \operatorname{cth} x = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$$

— гиперболический котангенс.

Даже по названиям ясно, что гиперболические функции имеют много общего с известными из школьного курса тригонометрии обычными круговыми, или тригонометрическими, функциями. Если в вашем микрокалькуляторе нет специальных клавиш для вычисления гиперболических функций, то их значения при соответствующих x вы всегда можете вычислить с помощью приведенных выше четырех формул.

Чтобы найти число Эйлера e , проще всего вычислить $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ при как можно большем значении n . В математике для этого используют специальное обозначение

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

(читается: предел $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ при n , стремящемся к бесконечности). При $n = 10$ приближение еще плохое (2,59), при $n = 100$ оно будет 2,705, и лишь при $n = 1000$ мы получаем 2,717 (с ошибкой около 10^{-3}). Следовательно, приведенный выше предел — далеко не самый лучший способ вычисления e . Гораздо удобнее, например, представить число e в виде бесконечного ряда

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots$$

Напоминаем: $n!$ означает произведение $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n$ и называется «факториал числа n ».

Уже первые семь членов ряда дают нам $e = 2,718 \dots$, т. е. обеспечивают три верных знака

после запятой. Разложение в ряд пригодно и для вычисления e на микрокалькуляторе. Чтобы получить значение e с 9 точными знаками после запятой, необходимо взять 13 членов ряда.

Если суммирование ряда покажется вам чересчур простой операцией, то для вычисления e можно воспользоваться следующей бесконечной цепной дробью:

$$e = 2 + \frac{2}{2 + \frac{3}{3 + \frac{4}{4 + \frac{5}{5 + \dots}}}}$$

Если воспользоваться только выписанной ее частью, то и тогда мы получаем значение $e = 2,717$, т. е. с ошибкой около 10^{-3} (вряд ли нужно говорить о том, что вычисления производятся снизу вверх). Подставив вместо многоточия единицу, мы получим e с тремя верными знаками после запятой. Желаящие могут воспользоваться для вычисления e бесконечным произведением

$$e = 2 \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{16}{15} \cdot \frac{65}{64} \cdot \frac{326}{325} \cdot \frac{1957}{1956} \cdot \dots$$

Если ограничиться только выписанными членами, то мы получим значение e с тремя верными знаками после запятой.

Уловили ли вы общий закон, по которому образуются сомножители бесконечного произведения, и можете ли выписать остальные члены? От приведения дроби к простейшему виду следует воздержаться, так как сокращение общих множителей в числителе и знаменателе затрудняет поиск общей закономерности образования сомножителей. Вообще же владелец микрокалькулятора, приступая к вычислению дроби, должен был бы в принципе позаботиться о том, чтобы числитель и знаменатель не содержали «лишних» множителей, но соблюсти это правило бывает не так-то просто (сказывается ограниченность человеческих возможностей). К тому же микрокалькулятору довольно безразлично, сколько раз мы нажимаем его клавиши.

Если не предъявлять чрезмерно высоких требований, то для вычисления e можно использовать

следующие дроби:

$$e \approx \frac{87}{32} \quad (\text{с погрешностью } 10^{-3}),$$

$$e \approx \frac{878}{323} \quad (\text{с погрешностью } 10^{-5}),$$

$$e \approx \frac{2721}{1001} \quad (\text{с погрешностью } 10^{-7}).$$

(несмотря на число, стоящее в знаменателе последней дроби, приведенные приближения — не сказки из 1001 ночи, а вполне реальные числа!).

Непосредственное отношение к числу Эйлера e имеет следующая красивая задача: существует ли число x , для которого выражение $\sqrt[x]{x}$ принимает наибольшее значение? Ответ: существует и равно e , т. е. при всех $x > 0$

$$\sqrt[e]{e} = 1,44466786 \geq \sqrt[x]{x}.$$

Если не верите, можете проверить сами.

Напоминаем: при $x > 0$ $\sqrt[x]{x} = x^{1/x}$.

Нельзя не упомянуть и о том, что число Эйлера e можно заменить так называемой постоянной Эйлера C , которая определена следующим образом:

$$C = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n \right).$$

Ее значение равно

$$C = 0,577216 \dots$$

МЕЧТА ГЁТЕ

В настоящее время в околоземном космическом пространстве находятся несколько тысяч космических кораблей, искусственных спутников и их бранных «останков». Некоторые из спутников работают. Для нас особый интерес представляют спутники связи, позволяющие транслировать телевизионные передачи с

одного континента на другой. По существу каждый такой спутник представляет собой приемопередающую антенну, находящуюся на высоте 300 км над поверхностью Земли.

Весьма важно, что спутник связи неподвижно висит над некоторой точкой поверхности Земли. Инженеры рассчитывают скорость ракеты, выводящей спутник на околоземную орбиту, так, чтобы он совершал



оборот вокруг Земли ровно за одни сутки. Для земного наблюдателя такой спутник связи висит неподвижно.

Наша Земля совершает один оборот вокруг оси за 24 ч (небольшими нарушениями равномерности суточного вращения Земли мы пренебрегаем). Любая точка на экваторе находится на расстоянии 6 378,245 км от центра Земли (если лежит на уровне моря). Охват Земли по экватору

$$U = 2\pi r = 40\,075,70 \text{ км},$$

и эти 40 000 км точка на экваторе проходит за 24 ч, развивая скорость

$$\frac{40075,70 \text{ км}}{24 \cdot 60 \cdot 60 \text{ с}} = 0,46 \text{ км/с}.$$

Это небольшая величина по сравнению со скоростью обращения Земли вокруг Солнца, равной 28,9 км/с (что примерно в 60 раз больше).

Спутник связи, висящий точно над экватором на высоте 300 км, за сутки проходит путь длиной

$$U = 2\pi (6\,378 + 300) \text{ км} = 41\,459 \text{ км}$$

и развивает скорость

$$\frac{41\,959 \text{ км}}{86\,400 \text{ с}} = 0,49 \text{ км/с.}$$

Для сравнения упомянем, что скорость пули колеблется в пределах от 0,6 до 0,8 км/с. Наш спутник покинул Землю со скоростью более 11 км/с (первая космическая скорость), но потом его «притормозили».

Единицу скорости км/с представить довольно трудно. Для водителей автомашин более привычно измерять скорость в км/ч. Точка на экваторе вследствие

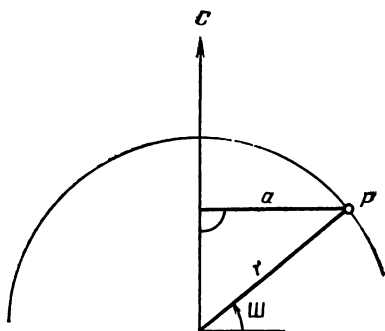


Рис. 12. С какой скоростью точка P вращается вокруг земной оси по окружности радиуса a (r — радиус Земли, Ш — географическая широта)?

суточного вращения Земли движется со скоростью 1 669,79 км/ч. В наш век реактивных самолетов это не очень большая скорость. Например, обычный пассажирский лайнер типа Ту развивает в полете среднюю скорость около 1 000 км/ч.

Нетрудно вычислить, где именно Земля вращается с такой же скоростью (рис. 12). Расстояние a , на котором находится от земной оси точка P на поверхности Земли, связана с географической широтой точки P зависимостью

$$\sin(90^\circ - \text{Ш}) = \frac{a}{r}.$$

На широте Ш длина параллели составляет $U_a = 2\pi a$. Так как эта точка обращается вокруг земной оси со скоростью 1 000 км/ч, длина параллели равна $U_a =$

$= 1000 \cdot 24 = 24\,000$ км. Следовательно,

$$a = \frac{U_a}{2\pi} = \frac{24\,000 \text{ км}}{2\pi}.$$

Подставляя полученное значение a в формулу для $\sin(90^\circ - \text{Ш})$, находим

$$\sin(90^\circ - \text{Ш}) = \cos \text{Ш} = \frac{24\,000 \text{ км}}{2\pi \cdot 6378 \text{ км}} = 0,59889.$$

Мы пренебрегаем тем, что Земля слегка сплюснута у полюсов. В предположении, что Земля шарообразна широта $\text{Ш} = 53,21^\circ = 53^\circ 12' 36''$.

Самолет, летящий вдоль 53-й параллели со скоростью 1000 км/ч, казался бы наблюдателю на Солнце (если бы такой вдруг нашелся) неподвижным. Такой наблюдатель видел бы, как Земля поворачивается под «стоящим на месте» самолетом. Наш Ту летит со скоростью несколько меньше 1 000 км/ч. Для него эффект «зависания» наблюдается севернее 53-й параллели.

В «Фаусте» Гёте есть сцена, в которой доктор Фауст и его помощник Вагнер наблюдают заход солнца (пер. Б. Пастернака):

...Закат свою печать
Накладывает на равнину.
День прожит, солнце с вышины
Уходит прочь в другие страны.
Зачем мне крылья не даны
С ним вровень мчаться неустанно!

Те, кому случалось лететь в часы заката на запад, знают, что заход солнца может длиться часами. Для Солнца мы находимся почти на одном и том же месте, а Земля вращается под нами с запада на восток. Когда мы на закате вылетаем из Москвы и солнце едва успевает скрыться за горизонтом, в Берлине оно еще только заходит.

ОТ ПЕТЕРСБЕРГА ДО УРАЛА

Огромное преимущество нашего микрокалькулятора состоит в том, что он позволяет не принимать на веру числовые данные, а проверять их с помощью вычислений.

Если вам случалось бывать в Халле-на-Заале, то вас непременно водили на Петерсберг — небольшую горку высотой 248 м к северу от города. «Вершина этой горы (!) — самая высокая точка на всей параллели до самого Урала!» — с гордостью говорят местные жители.

Если это действительно так (а почему бы и нет?), то самолет, взлетевший с вершины Петерсберга (51,6° северной широты, 12° восточной долготы) и взявший курс на восток без набора высоты, не встретит на протяжении всего маршрута ни одной более высокой горы и, лишь долетев до Урала, врежется в его склоны на высоте Петерсберга.

При выполнении столь дальнего перелета (несколько тысяч километров) умный пилот не станет полагаться только на показания бортового компаса, а постарается воспользоваться и другими навигационными средствами и методами. Одним из наиболее распространенных методов является радиолокация.

В принципе мы все знакомы с радиолокацией по антеннам транзисторных, ультракоротковолновых и телевизионных приемников: все эти антенны установлены так, чтобы обеспечить прием сигнала от передатчика с максимальной энергией. По расположению телевизионных антенн на крышах, как известно, можно указать, в каком направлении находится передатчик.

Находясь близ Петерсберга, наш пилот берет пеленг на передатчик, установленный на Урале на широте Петерсберга, и ложится курсом на пеленг. В каком направлении он летит?

Возможно, кому-нибудь из читателей наш вопрос покажется глупым: ясно, что передатчик находится от самолета строго к востоку. В худшем случае сигнал от передатчика может быть принят с запада, если успеет обогнуть Землю. В действительности же пилот не берет курс по пеленгу ни на запад, ни на восток. Взлетев с Петерсберга, он ложится на курс около 75°, т. е. берет на 15° севернее курса на восток (90°).

О своем вылете наш пилот радирует на Урал, и расположенная там радиостанция берет пеленг на самолет. Дежурный оператор делает соответствующую запись в журнале, но пеленг на самолет равен не 270°, как думает большинство из нас, т. е. самолет

приближается к станции не с запада, а также уклоняется примерно на 15° к северу, что составляет примерно 285° .

Вы, конечно, уже поняли, в чем тут дело. Пилот может прокладывать курс запад — восток, но радиоволны распространяются из одного места в другое по кратчайшему пути. А кратчайший путь на поверхности земного шара совпадает не с параллелью (за исключением параллели, соответствующей 0° широты, т. е. экватора), а с дугой большого круга, т. е. круга, центр которого совпадает с центром земного шара. На глобусе или на апельсине мы легко можем убедиться в том, что в северном полушарии более короткая из дуг большого круга, проходящего через две заданные точки, всегда проходит севернее этих точек. Как ни трудно себе это представить, дуга большого круга короче «прямого» пути (на плоской карте).



Прежде чем мы в этом убедимся, немного посчитаем. Начнем с того, что вычислим расстояние между Петерсбергом и Уралом «по прямой» на восток. На $51,6^\circ$ северной широты длина параллели составляет

$$U = 2\pi a,$$

где $a = r \cos \Pi$ (Π — широта, см. рис. 12). Подставляя a , получаем

$$\begin{aligned} U &= 2\pi r \cos 51,6^\circ = \\ &= 2\pi \cdot 6378 \text{ км} \cdot \cos 51,6^\circ = \\ &= 24\,892 \text{ км}. \end{aligned}$$

Петерсбург расположен на 12° восточной долготы, а Урал — на 55° восточной долготы. Разница долгот равна 43° . Следовательно, расстояние между Петерсбергом и Уралом по параллели равно

$$E = \frac{24\,892 \cdot 43}{360} \text{ км} = 2\,973 \text{ км}.$$

Вычислим теперь расстояние по дуге большого круга и проверим, действительно ли оно короче:

$$E_{б.к} = 60 \arccos [\sin \text{Ш}_1 \cdot \sin \text{Ш}_2 + \\ + \cos \text{Ш}_1 \cos \text{Ш}_2 \cos (\text{Д}_2 - \text{Д}_1)],$$

где Ш — широта, Д — долгота места. Восточные долготы (а в нашем примере и долгота Петербурга, и долгота Урала восточны) надлежит считать отрицательными:

$$E_{б.к} = 60 \arccos \{ \sin 51,6^\circ \sin 51,6^\circ + \cos 51,6^\circ \cdot \\ \cdot \cos 51,6^\circ \cos [-55^\circ - (-12^\circ)] \} = \\ = 1579 \text{ морских миль.}$$

Даже если вы думали, что дуга большого круга намного короче дуги параллели, вам и в голову не приходило измерять расстояние в морских милях, как это сделано в приведенной выше навигационной формуле. Необходимо пересчитать ответ в километрах (1 морская миля = 1,852 км):

$$E_{б.к.} = 1579 \cdot 1,852 \text{ км} = 2984 \text{ км.}$$

Таким образом, дуга большого круга на 49 км короче дуги параллели.

Мы упоминали о том, что радиопеленг с Урала на Петербург, по которому пилот выдерживал курс, равен не 90° , а около 75° (т. е. не с востока, а севернее). Проверим и это утверждение. При вылете с Петербурга дуга большого круга образует с направлением на север угол

$$K = \arccos \left[\frac{\sin \text{Ш}_2 - \sin \text{Ш}_1 \cos (F/60)}{\sin (E/60) \cos \text{Ш}_1} \right],$$

где расстояние E мы будем считать равным 1579 морским милям.

Если $\sin (\text{Д}_2 - \text{Д}_1) < 0$, то мы получаем угол K . Если же $\sin (\text{Д}_2 - \text{Д}_1) > 0$, то получим угол $360^\circ - K$. В нашем случае $\sin [-55^\circ - (-12^\circ)] = -0,68$,

$$K = \arccos \left[\frac{\sin 51,6^\circ - \sin 51,6^\circ \cos \frac{1579^\circ}{60}}{\sin \frac{1579^\circ}{60} \cdot \cos 51,6^\circ} \right] = \\ = 72,84^\circ = 72^\circ 50' 24''.$$

Следовательно, наше утверждение о том, что при взлете с Петербурга самолет лег на курс около 75° , вполне обоснованно.

В действительности пилот получает свой пеленг с Урала, затем он заглядывает в заранее составленные таблицы и определяет, на какой угол при заданной широте и заданном расстоянии расходятся пеленги дуги большого круга (ортодромии) и «прямой» пеленг (локсодромии). Этот угол, равный в нашем примере $17^\circ 19' 36''$, пилот прибавляет к своему пеленгу (75°) и получает, как и следовало ожидать, угол 90° . Эту поправку неукоснительно учитывают, «припасовывают» при прокладке курса авиационные и морские штурманы всего мира. Впрочем, если вы берете пеленг на передатчик с помощью своего транзисторного приемника и измеряете угол с помощью компаса, то результат измерения следует «припасовать» к пеленгу.

Наконец-то мы начинаем понимать, почему авиационные компании проявляют столь большой интерес к маршрутам, проходящим через северный полюс или над территорией Сибири: кратчайший путь по дуге большого круга в северном полушарии всегда пролегает к северу от линии, соединяющей на карте исходную и конечную точки маршрута. Суда, совершающие трансатлантические рейсы, следуют как можно более северными широтами.

СВОБОДНОЕ ПАДЕНИЕ

Не случалось ли вам в детстве испытывать непреодолимое желание, взяв в руки огромный («большой-пребольшой») зонт и взобравшись повыше прыгнуть в «бездонную бездну»? К счастью, инстинкт самосохранения оказывался более сильным, чем явно недостаточное знание законов свободного падения.

Если отвлечься от благоприятного действия трения о воздух, то формулы становятся особенно простыми. Основное действие падения зависит от величины скорости, с которой падающее тело ударяется о препятствие. Обозначим через v скорость тела, падающего с высоты h с ускорением g (на поверхности Земли $g = 9,81 \text{ м/с}^2$). Тогда

$$v = \sqrt{2gh}. \quad (1)$$

При свободном падении с высоты $h = 5$ м скорость $v = \sqrt{10 \cdot 9,81} \text{ м/с} = 9,9 \text{ м/с}$, что соответствует вполне разумной скорости для автомашины $9,9 \cdot 10^{-3} \text{ км} \cdot 3600 \text{ ч}^{-1} \approx 36 \text{ км/ч}$. При свободном падении с высоты 100 м (без учета сопротивления воздуха)

$$v = \sqrt{2 \cdot 100 \cdot 9,81} \text{ м/с} = 44,3 \text{ м/с} \approx 160 \text{ км/ч}.$$

При учете тормозящего действия воздуха вычисления становятся несколько сложнее. Будем исходить из обычного предположения, что сила сопротивления пропорциональна квадрату мгновенной скорости тела.

Мы опускаем требующий известных познаний в математике вывод применяемых в дальнейшем формул и приводим только конечный результат: h — расстояние (в метрах), пройденное телом в свободном падении, t — время (в секундах) свободного падения, g — ускорение свободного падения ($g = 9,81 \text{ м/с}^2$), a — параметр, имеющий размерность кг/м и зависящий от геометрии падающего тела, M — масса падающего тела.

Общая формула для высоты свободного падения по вертикали при сопротивлении набегающего потока воздуха, пропорциональном квадрату мгновенной скорости падающего тела, имеет вид

$$h = \frac{M}{a} \ln \operatorname{ch} \left(\sqrt{\frac{ag}{M}} t \right), \quad (2)$$

где \ln — натуральный логарифм (с основанием, равным числу Эйлера e — см. разд. «Число Эйлера»), а ch — гиперболический косинус. Из формулы (2) непосредственно следует формула для скорости:

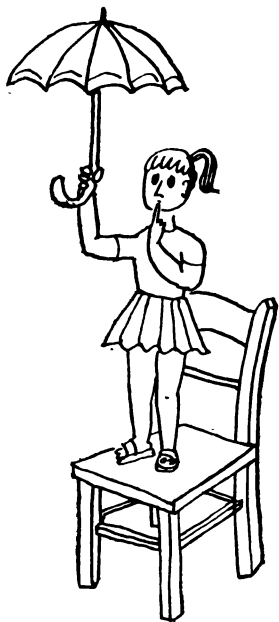
$$v = \sqrt{\frac{aM}{g}} \operatorname{th} \left(\sqrt{\frac{ag}{M}} t \right). \quad (3)$$

Формула (3) позволяет вычислять скорость свободно падающего тела в момент удара о препятствие, если задано время (продолжительность) свободного падения t . Его мы можем найти из формулы (2). После некоторых преобразований получаем

$$t = \frac{\operatorname{arch} e^{ha/M}}{\sqrt{\frac{ag}{M}}}, \quad (2a)$$

где $y = \operatorname{arsh} x$ (ареакосинус)— функция, обратная гиперболическому косинусу.

Применим теперь эти общие формулы к двум приведенным выше примерам. Будем предполагать, что падающее тело снабжено парашютом. (При падении в «безвоздушном пространстве» — когда сопротивлением воздуха мы полностью пренебрегали — наличие парашюта никак не сказывалось.) Параметр a мы



примем равным 30 кг/м, что, как известно из опытов, хорошо отражает истинное положение вещей. Массу M выберем равной 75 кг.

При высоте $h = 5$ м время падения по формуле (2а) равно

$$t = \frac{\operatorname{arch} e^{\frac{5 \cdot 30}{75}}}{\sqrt{\frac{30 \cdot 9,81}{75}}} \text{ с} = 1,36 \text{ с},$$

а скорость по формуле (3)

$$v = \sqrt{\frac{9,81 \cdot 75}{30}} \cdot \operatorname{th} \left(\sqrt{\frac{30 \cdot 9,81}{75}} \cdot 1,36 \right) \text{ м/с} = 4,91 \text{ м/с}.$$

что составляет примерно 50 % от скорости, вычисленной по формуле (1).

Перейдем к падению с высоты $h = 100$ м. Продолжительность падения по формуле (2а) составляет

$$t = \frac{\operatorname{arch} e^{40}}{\sqrt{\frac{30 \cdot 9,81}{75}}} \text{ с} = 20,5 \text{ с},$$

а скорость в конце падения

$$v = \sqrt{\frac{9,81 \cdot 75}{30}} \cdot \operatorname{th} \left(\sqrt{\frac{30 \cdot 9,81}{75}} \cdot 20,5 \right) \text{ м/с} = 4,95 \text{ м/с}.$$

Эта величина отличается менее чем на 1 % от скорости при падении с высоты 5 м.

Если в вашем микрокалькуляторе нет специальных функциональных клавиш для вычисления гиперболических и обратных гиперболических функций, но имеются клавиши для вычисления e^x и $\ln x$, то вы можете воспользоваться эквивалентными формулами

$$\operatorname{arch} x = \ln (x + \sqrt{x^2 - 1}),$$

$$\operatorname{th} x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}};$$

$e = 2,718 \dots$ — число Эйлера (см. разд. «Число Эйлера»). Они позволяют преобразовать соотношения (2а) и (3) к виду

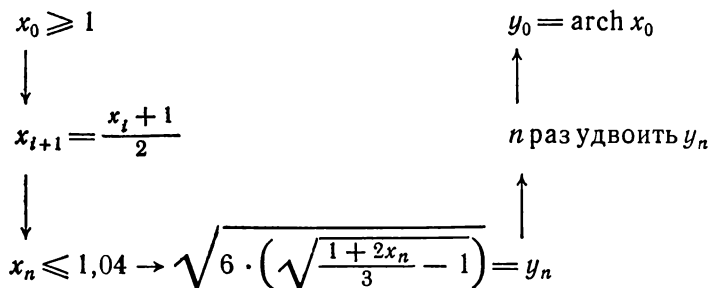
$$t = \frac{\ln \left(e^{\frac{ha}{M}} + \sqrt{e^{\frac{2ha}{M}} - 1} \right)}{\sqrt{\frac{ag}{M}}}, \quad (26)$$

$$v = \sqrt{\frac{gM}{a}} \cdot \frac{e^{\sqrt{\frac{ag}{M}} t} - e^{-\sqrt{\frac{ag}{M}} t}}{e^{\sqrt{\frac{ag}{M}} t} + e^{-\sqrt{\frac{ag}{M}} t}}. \quad (3a)$$

Подстановка числовых значений приводит к тем же результатам, что и раньше.

Если в конструкции вашего микрокалькулятора предусмотрено выполнение только самых необходимых операций, включая извлечение квадратного корня \sqrt{x} , то для вычисления $\operatorname{arch} x$ вам придется воспользоваться методом последовательных приближений.

Подробно он изложен в нашей книге «С микрокалькулятором в руках» (разд. «Гиперболические функции»), поэтому здесь мы повторим только схему вычислений:



При $h = 5$ м, $M = 75$ кг и $a = 30$ кг/м нулевое приближение оказывается равным $x_0 = e^2 = 7,389$. Для контроля за ходом вычислений приводим все промежуточные результаты:

$$x_0 = 7,389$$

$$x_1 = 2,048$$

$$x_2 = 1,235$$

$$x_3 = 1,057$$

$$x_4 = 1,014 < 1,04 \rightarrow y_4 = 0,1680$$

$$y_3 = 0,3360$$

$$y_2 = 0,6720$$

$$y_1 = 1,3440$$

$$y_0 = 2,688 = \operatorname{arch} 7,385$$

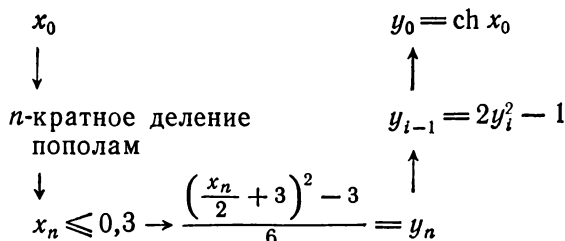
Зная y_0 , вычисляем по формуле (2а)

$$t = \frac{2,688}{\sqrt{\frac{30 \cdot 9,81}{75}}} = 1,36 \text{ с}$$

(что совпадает с ранее вычисленным значением).

Чтобы вычислить необходимое для формулы (3) значение гиперболического тангенса, воспользуемся аналогичным методом последовательных приближений для гиперболического косинуса $\operatorname{ch} x$, зная который, мы легко найдем $\operatorname{th} x$.

Вычисления проводятся по следующей схеме:



При $a = 30$ кг/м, $M = 75$ кг, $g = 9,81$ м/с² и $t = 1,36$ с мы получаем:

$$\sqrt{\frac{ag}{M}} t = 2,694 = x_0,$$

Цепочка промежуточных значений, вычисленных по приведенной выше схеме, имеет следующий вид:

$$x_0 = 2,694$$

$$x_1 = 1,347$$

$$x_2 = 0,6735$$

$$x_3 = 0,3368$$

$$x_4 = 0,1684 < 0,3 \rightarrow y_4 = 1,0142$$

$$y_3 = 1,0572$$

$$y_2 = 1,2354$$

$$y_1 = 2,0522$$

$$y_0 = 7,4232 = \operatorname{ch} 2,693$$

Для вычисления $\operatorname{th} x$ можно воспользоваться формулой

$$\operatorname{th} x = \sqrt{1 - \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}}.$$

Подставляя $\operatorname{ch} 2,693$, получаем

$$\operatorname{th} 2,694 = \sqrt{1 - \frac{1}{7,4232^2}} = 0,9909.$$

Наконец, по формуле (3) вычисляем скорость

$$v = \sqrt{\frac{9,85 \cdot 75}{30}} \cdot 0,9909 \text{ м/с} = 4,91 \text{ м/с}.$$

С помощью технических ухищрений удалось не только добиться большей маневренности спортивных парашютов, но и снизить скорость спуска до 3 м/с, что соответствует 11 км/ч. Такая скорость обеспечивает достаточно мягкую посадку.

Из приведенных вычислений видно, что если вы запаслись парашютом или каким-нибудь аналогичным приспособлением, то особой разницы между прыжком с 5 м и со 100 м нет.

ВЕЛИКА ЛИ ВСЕЛЕННАЯ?

В книге «С микрокалькулятором в руках» мы уже приводили несколько примеров вычисления космических расстояний. Попробуем теперь оценить по данным наблюдений темпы расширения нашей Вселенной.

На праздниках и торжествах принято устраивать фейерверки и запускать ракеты. Одни из этих чудес пиротехники горят белым огнем. Испускаемый ими свет напоминает солнечный и содержит волны всех длин. Другие огни имеют зеленый, желтый или красный цвет. Нужной окраски пламени пиротехники добиваются добавлением солей металлов. Соли натрия, например обычная поваренная соль, окрашивают пламя в желтый цвет, соли лития — в красноватый, медь придает пламени зеленовато-голубой оттенок. Немецкий химик Бунзен (1811—1899) предложил использовать окраску пламени для распознавания отдельных элементов. Он же создал и спектральный анализ, суть которого сводится к следующему. Свет, проходя через призму, разлагается на волны различной длины, образующие его спектр. При определенных условиях опыта в спектре отчетливо видны линии, которые могут быть однозначно сопоставлены вполне определенным химическим элементам.

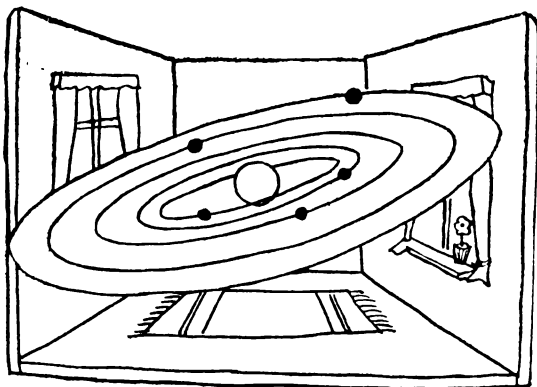
Спектральный анализ позволил астрономам установить химический состав звезд. Снять спектр Солнца, испускающего достаточно много света, сравнительно просто. Гораздо сложнее снять спектр звезд. Они испускают настолько слабый свет, что астрономам пришлось немало повозиться, прежде чем им удалось запечатлеть на фотопластинке спектральные линии. Но их усилия не пропали даром.

Астрономы сразу же обратили внимание на то, что линии в снятых ими спектрах расположены «не там, где полагается»: все линии почему-то оказались сдвинуты в сторону более длинных волн (к красному концу спектра). Исследовав величину этого красного смещения, астрономы обнаружили, что оно убывает с увеличением расстояния от звезды до Земли.

Аналогичное явление, называемое эффектом Доплера, наблюдается и в земных условиях. При приближении или удалении источника звука (например, когда пролетает самолет) высота тона, т. е. длина волны, изменяется. При удалении источника звука тон становится ниже (длина волны увеличивается, частота уменьшается), при приближении — выше (длина волны уменьшается, частота увеличивается). Эффект Доплера имеет очень простое объяснение: в одном случае скорость движения источника прибавляется к скорости распространения звука, в другом — вычитается из нее. Физическая зависимость между частотой испускаемого звука, скоростью источника и наблюдаемой частотой описывается очень простым соотношением.

Возникло предположение, что красное смещение в спектре далеких звезд также обусловлено эффектом Доплера. Тот факт, что все наблюдаемые линии сдвинуты в сторону более длинных волн, свидетельствует о расширении Вселенной: звезды удаляются от нас. Величина красного смещения позволяет судить о скорости разбегания: при увеличении расстояния до звезд на один миллион световых лет скорость разбегания возрастает на 163 км/с.

Представить себе, что звезды удаляются от нас и скорость разбегания зависит от расстояния, довольно трудно. Понять, почему так происходит, нам поможет один вполне земной пример. Предположим, что одна точка лежит на окружности радиуса 100 км, другая — на концентрической окружности радиуса 200 км (мы находимся в общем центре обеих окружностей) и окружности увеличиваются на $\frac{1}{10}$ своей длины. Тогда первая точка окажется на расстоянии 110 км от нас, а вторая — на расстоянии 220 км. Если раздувание окружностей происходит за 1 с, то первая точка «убегает» от нас со скоростью 10 км/с, а вторая — со скоростью 20 км/с.



Наблюдаемая нами картина не зависит от выбора точек на окружностях. Все точки убегают от нас, и скорость убегания пропорциональна расстоянию, отделяющему их от того места, где мы находимся. От нашего примера перейдем снова ко Вселенной.

В данный момент мы можем измерять спектральные линии звезд, отстоящих от нас на расстояние около 250 млн. световых лет. Их скорость убегания равна примерно

$$163 \frac{\text{км}}{\text{с} \cdot 10^6 \text{ св. лет}} \cdot 250 \cdot 10^6 \text{ св. лет} = 40750 \text{ км/с.}$$

Оценки скорости убегания по величине красного смещения также дают величину около 40 000 км/с, что составляет примерно $\frac{1}{7}$ скорости света.

Скорость распространения любого сигнала не может превышать скорость света, поэтому границы Вселенной удалены от нас не более чем на расстояние

$$300\,000 \frac{\text{км}}{\text{с}} : 163 \frac{\text{км}}{\text{с} \cdot 10^6 \text{ св. лет}} = 1840 \cdot 10^6 \text{ св. лет.}$$

Это число имеет смысл только в том случае, если наша Вселенная конечна. Проверим, может ли наш микрокалькулятор перевести световые годы в километры:

$$1,8 \cdot 10^9 \text{ св. лет} = 365 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60 \cdot 300\,000 \text{ км} \cdot 1,8 \cdot 10^9 = 1,7 \cdot 10^{22} \text{ км.}$$

По Эйнштейну радиус мира равен $2,5 \cdot 10^{28}$ см. Наши оценки дают величину $1,7 \cdot 10^{27}$ см, т. е. расчеты Эйн-

штейна приводят к размерам Вселенной, примерно в 10 раз превышающим наши. Но вряд ли стоит спорить из-за того, чей результат точнее: расстояние 10^{27} см столь же невообразимо велико, как и расстояние 10^{28} см.

РАЗМЕРЫ ЗЕМЛИ

В предыдущих разделах нам уже приходилось время от времени использовать радиус Земли или длину ее окружности. Всякий раз, когда возникает необходимость в такого рода данных, мы заглядываем в какой-нибудь справочник или другое издание и не задумываемся над тем, откуда берутся эти данные. Обычно на вопрос о том, как измеряют Землю, приходится слышать маловразумительный ответ: «Наверное, с помощью радара или из космоса». Но люди научились измерять Землю задолго до изобретения радара или многоканального спектрографа и даже без специальных спутников Земли умудрялись получать достаточно точные результаты. Во времена Французской революции, т. е. без малого 200 лет назад, ученые установили новую единицу длины — метр, определив его как $1/40\,000\,000$ экватора.

Перечитав внимательно разд. «От Петербурга до Урала», вы увидите, что все вычисления можно обратить. Мы вычисляли длину дуги, идущей с запада на восток по параллели, по известной широте и долготам концов дуги.

Если известны долготы (разность местного времени) двух точек земной поверхности, лежащих на одной широте, и мы измерим расстояние между ними в метрах, то вычислить длину параллели не составит особого труда. Но, зная длину параллели, мы тем самым определим и ее радиус и, разделив его на косинус широты, установим радиус Земли.

Ныне существует целый ряд высокоточных методов, позволяющих определять форму и размеры Земли. Но нельзя не удивляться остроумию метода, с помощью которого вычислил длину окружности Земли Эратосфен из Александрии (275—194 гг. до н. э.).

Из рассказов путешественников Эратосфену было известно, что в верхнеегипетском городе Сиене (ны-

нешнем Ассуане) дважды в году — в дни весеннего и осеннего равноденствия, когда день длится столько же, сколько и ночь, солнце заглядывает на дно самых глубоких колодцев. Это означает, что 21 марта и 21 сентября (по нашему календарю) солнце в полдень стоит в зените. В этой связи нельзя не высказать нашего восхищения поразительной наблюдательностью древних: вряд ли кто-нибудь из нас обратил

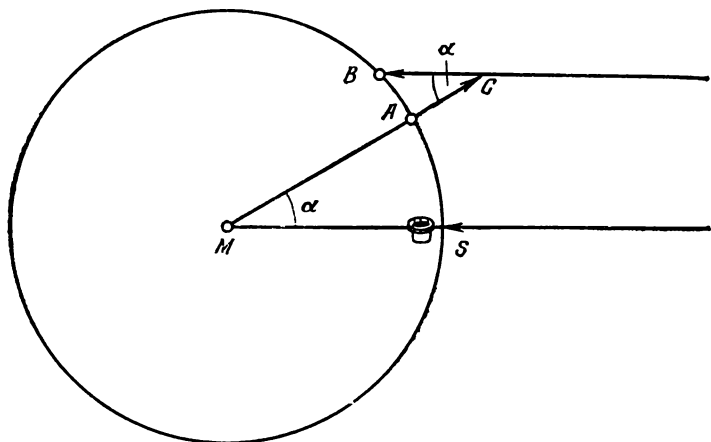


Рис. 13. Как Эратосфен вычислил длину окружности Земли.

внимание на длину собственной тени 21 марта, а Эратосфен знал, что в этот день тень самая короткая!

Вбив в землю вертикальный колышек, он установил, что в дни равноденствия солнечные лучи образуют с вертикалью угол $7^{\circ}12'$. Нашей системы угловых единиц Эратосфен не знал и скорее всего измерял углы в долях от полного угла:

$$\frac{7^{\circ}12'}{360^{\circ}} = \frac{7 \frac{12}{60}}{360^{\circ}} = \frac{1}{50}.$$

Измерив угол, Эратосфен набросал чертеж (рис. 13) и принялся размышлять.

1. Вполне допустимо считать, что Сиена (S) расположена строго к югу от Александрии (A).

2. Солнечные лучи параллельны и в точке S (Сиена), падая перпендикулярно поверхности Земли, освещают дно самых глубоких колодцев.

3. В Александрии вертикальный колышек AC отбрасывает тень AB . Угол α равен $7^{\circ}12'$, то есть составляет $\frac{1}{50}$ окружности.

4. Углы BCA и AMS равны (как накрест лежащие при параллельных).

5. Если измерить длину дуги AS (Александрия — Сиена), то она составит $\frac{1}{50}$ длины окружности Земли.

Расстояние от Александрии до Сиены составляло 5000 стадий. Следовательно, утверждал Эратосфен, длина окружности Земли должна быть в 50 раз больше:

$$5000 \text{ стадий} \cdot 50 (\text{дуга } AS) = 250\,000 \text{ стадий.}$$

Нельзя не удивляться наблюдательности древних и остроумию этого рассуждения, но хотелось бы знать, насколько верен результат Эратосфена.

Одна стадия равна 157,5 м, поэтому

$$250\,000 \cdot 157,5 \text{ м} = 39\,375 \text{ км.}$$

Это вполне приемлемое значение (по современным оценкам длина окружности Земли по экватору составляет 40 075,7 км).

С чем связана небольшая погрешность у Эратосфена? Во-первых, у него не было инструмента, позволяющего измерять углы с достаточной точностью. Во-вторых, небольшую погрешность внесло принятое Эратосфеном предположение о том, что оба города (Александрия и Сиена) лежат на одном меридиане: в действительности Сиена расположена на $3^{\circ}14'$ западнее Александрии. Не следует забывать и о том, что расстояние измерялось шагами и путь из Александрии в Сиену не был прямолинейным. Ныне расстояние от Александрии до Ассуана считается равным 791 км. Подставляя это значение в вычисления Эратосфена, мы получаем длину окружности Земли:

$$791 \text{ км} \cdot 50 = 39\,550 \text{ км,}$$

т. е. результат, весьма незначительно отличающийся от старого.

Насколько Эратосфен опередил свое время, свидетельствует приводимое ниже высказывание испанца Фалеро (1535 г.). В его время уже было совершено кругосветное плавание, и люди, естественно, хотели знать, сколь велика Земля, на которой они обитают,

Фалеро собрал и сопоставил все оценки размеров Земли, начиная с Эратосфена. Длина окружности Земли колебалась в пределах от 33 300 км у Посидония (135—51 гг. до н. э.) до 43 100 км — по оценке арабского автора IX в. Результаты Эратосфена и других ученых занимали промежуточное положение. По оценке самого Фалеро, длина окружности Земли составляла 35 560 км. По поводу собранных им данных Фалеро заметил: «Каждый волен выбирать тот результат, который придется ему по вкусу, так как доказать все равно ничего нельзя, и я думаю, что измерить Землю вообще невозможно».

В науке и технике никогда не следует говорить «никогда».

РЕЗУЛЬТАТ ПРАВИЛЬНЫЙ, НЕСМОТРА НА ОШИБКУ

Набирая на клавиатуре микрокалькулятора 3×4 , ошибиться почти невозможно. Иное дело, если требуется вычислить значение какого-нибудь громоздкого выражения со многими скобками и экспонентами. Именно в таких случаях с особой наглядностью проявляются особенности нашего микрокалькулятора и становится виден один из его наиболее существенных недостатков: стоит нажать «не на ту» клавишу, и результат окажется неверным. К сожалению, не существует общих методов, позволяющих отличать неправильный результат от правильного, хотя в некоторых случаях ошибка вполне очевидна (например, если в результате вычислений выяснилось, что высота горы равна 64 см, или получена отрицательная площадь). Чтобы удостовериться в правильности вычислений, нам не остается ничего другого, как неоднократно повторить их и убедиться в совпадении конечных результатов.

Переход к программируемым микрокалькуляторам призван уменьшить число ошибок, допускаемых при вводе данных с клавиатуры. Возможны два варианта. В первом случае программа вводится в микрокалькулятор и проверяется на одном или нескольких тестовых примерах. Во втором случае пользователь

покупает кассету с библиотекой программ и в случае необходимости обращается к нужной программе (вызывает ее).

Однако и составление программы нуждается в тщательной проверке, и число возможных ошибок здесь весьма велико.

Профессор Л. А. Растрин из СССР предложил ряд идей, позволяющих так организовать вычисления, чтобы по возможности избавиться от ошибок.

Предполагается, что компьютер, о котором пойдет речь, совершает в среднем одну ошибку за 1 ч работы. На решение всей задачи компьютеру требуется 5 ч. Таким образом, речь идет об очень большой и сложной программе.

Прежде всего вычислим вероятность появления ошибки в течение часа. Для этого микрокалькулятор нам не потребуется: компьютер совершает или не совершает ошибку с вероятностью

$$W_1 = 0,5.$$

Вероятность непоявления ошибки в течение 5 ч соответственно равна

$$W = (0,5)^5.$$

При вычислении вероятностей особое внимание следует обратить на логику.

Для вычисления W мы берем наш микрокалькулятор и набираем

$$0,5 \times 0,5 \times 0,5 \times 0,5 \times 0,5 =$$

Результат оказывается равным 0,031, и для получения его нам пришлось нажать на клавиши 20 раз. Некоторые микрокалькуляторы ставят нуль перед десятичной запятой (точкой) автоматически при наборе запятой, в таких микрокалькуляторах для набора приведенного выше произведения на клавиши требуется нажать на 5 раз меньше.

Подумайте, какие еще действия позволяет сэкономить конструкция вашего микрокалькулятора.

Удобнее всего вычислять $(0,5)^5$ с помощью функциональной клавиши « y^x » (для этого клавиши при-

дется нажать четыре раза). Результат (0,031) во всех случаях оказывается одним и тем же, но «издержки» на его получение и надежность сильно зависят от конструкции микрокалькулятора.

К чему мы клоним? А вот к чему: компьютер (устройство, машина, система), производящий миллионы операций и совершающий в среднем одну ошибку в час, в результате 5-часовой работы выдает безошибочный результат с вероятностью 3 %.

Если мы с недоверием относимся к результату, выдаваемому нашим микрокалькулятором, то нам не остается ничего другого, как пересчитать задачу с самого начала (об этом мы уже говорили). Но в точности такое же наказание должен понести за неисправную работу и большой компьютер. В рассматриваемом примере ему придется пересчитать задачу

$$\frac{1}{0,03} = 32$$

раза. Но вероятность получения правильного результата при этом станет равной отнюдь не единице, а всего лишь

$$1 - (1 - 0,031)^{32} = 63,5 \%$$

(см. разд. «Велика ли надежность» в книге «С микрокалькулятором в руках»). На 32-кратный прогон задачи компьютеру потребуется

$$32 \cdot 5 \text{ ч} = 160 \text{ ч.}$$

На рис. 14 показано, как вероятность получения правильного результата зависит от числа прогонов. Ясно, что любой инженер сочтет совершенно неприемлемым такое положение дел, при котором 5-часовой расчет приходится повторять 32 раза и компьютер оказывается плотно загруженным почти целый месяц.

Сотрудники вычислительных центров в таких случаях выходят из положения так же, как это делаем мы, производя расчеты на микрокалькуляторе: они подразделяют исходную задачу на несколько подзадач. В примере Л. А. Растригина разделим задачу на пять одночасовых подзадач. Разумеется, так удачно и поровну задачу удастся разделить только теорети-

чески, но мы хотим сейчас продемонстрировать лишь самый принцип.

Вероятность получения безошибочного результата по истечении 1 ч работы компьютера равна 0,5. Если мы хотим получить более высокую вероятность, то машину придется «гонять» дважды.

Обратите особое внимание на логику!

Один из двух полученных результатов правильный с большей вероятностью, но какой именно? Из осторожности пересчитаем задачу еще два раза и получим

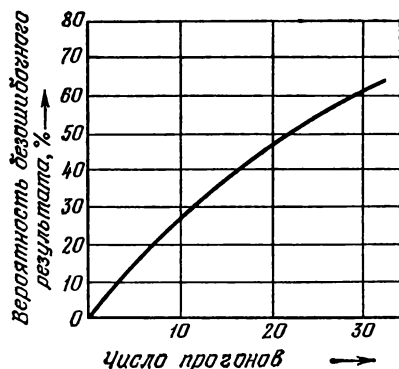


Рис. 14. Зависимость вероятности получения правильного результата от числа прогонов.

по крайней мере два совпадающих результата, относительно которых предположим, что они должны быть правильными.

Так же мы поступим с каждым часом счетного времени, затратив всего

$$(2 + 2) \cdot 5 \text{ ч} = 20 \text{ ч.}$$

Из теории надежности известно, что вероятность получения правильного результата в этом случае равна

$$(1 - 0,5^4) = 72 \text{ \%}.$$

Таким образом, затраты машинного времени мы уплотнили со 160 до 20 ч. Но и 20 ч — срок немалый, и вряд ли удовлетворит целочисленный центр. Для умень-

шения затрат машинного времени программисты разработали особые методы. В принципе все они сводятся к неоднократному повторению каждой вычислительной операции и действуют, как человек, которому нужно отправить телеграмму. Текст ее может быть и кратким:

Приеду 16,
и более подробным:

Приеду пятницу, 16 октября день рождения матери.

В случае ошибки при передаче числа 16 второй текст позволяет легко исправить ее. Приходится ли пятница на 16-е? Если да, то какого месяца? Октября? Если да, то когда у матери день рождения? 16 октября?

К сожалению, при работе с микрокалькулятором мы должны использовать простое соображение Л. А. Растригина. Предположим, что вы в среднем совершаете одну ошибку на 20 нажатий клавиш (вероятность того, что вы правильно нажали 20 клавиш, равна 0,5). Сколько прогонов и какое разбиение на подзадачи оптимально для вашего микрокалькулятора при вычислении центрального угла правильного 17-угольника Гаусса?

$$\begin{aligned}\cos \frac{360^\circ}{17} &= \frac{1}{16} + \frac{1}{16} \sqrt{17} + \frac{1}{16} \sqrt{34 - 2\sqrt{17}} + \\ &+ \frac{1}{8} \sqrt{17 + 3\sqrt{17} - \sqrt{34 - 2\sqrt{17}} - 2\sqrt{34 + 2\sqrt{17}}} = \\ &= 0,93245.\end{aligned}$$

При подсчете нажатий клавиш обратите внимание на следующее обстоятельство: знаки умножения в правой части не указаны, а при вычислении \cos и $\sqrt{\quad}$ вам понадобятся функциональные клавиши. Кроме того, для ввода данных и вызова промежуточных результатов из памяти вам понадобятся клавиши регистра памяти (если таковые имеются у вашего микрокалькулятора). Конечный результат мы приводим для сравнения. Нам удалось решить задачу, нажав на клавиши около 80 раз. Вы скорее всего допускаете одну ошибку при 20-кратном нажатии клавиш. Вероятность получения вами правильного результата при первом прогоне составляет $(0,5)^4 = 0,06 \sim 6\%$.

ПРЫЖКИ И ПОЛЕТЫ

Большинство видов лыжного спорта возникло из чисто практических («транспортно-технических») потребностей. Но спортсмены, занимающиеся прыжками на лыжах с трамплина (их несколько возвышенно называют летающими лыжниками), пожалуй, в большей мере отвечают давней мечте людей о полете (хотя бы на несколько метров).

Тысячи зрителей собираются во время соревнований по прыжкам на лыжах с трамплина. Миллионы зрителей, затаив дыхание, следят за перипетиями состязания у экранов телевизоров. Но мало кто из болельщиков знает, почему иногда спортсмены взбираются «этажом выше» и что такое критическая точка лыжного трамплина. Попытаемся подойти к прыжкам на лыжах с трамплина с физико-математических позиций.

На стадии скольжения прыгун получает необходимый разгон и (если пренебречь сопротивлением воздуха) покидает стол трамплина со скоростью $v_0 = \sqrt{2gh}$, где h — разность высот между стартом и столом, $g = 9,81 \text{ м/с}^2$ — ускорение свободного падения. Такую же скорость спортсмен развил бы в свободном падении с высоты h . Предположим, что стол разгона образует с горизонталью угол β (угол β может быть равен нулю, см. рис. 15). Затем начинается фаза полета, во время которой центр тяжести лыжника описывает кривую, имеющую форму параболы. Эта парабола после приземления сменяется прямолинейным спуском, образующим с горизонталью угол α . Наконец, склон завершается легким закруглением — так называемым выкатом. Во избежание несчастных случаев длина прыжка не должна превышать некоторой критической величины L , т. е. прыжок должен заканчиваться на прямолинейном спуске.

В качестве взаимосвязи двух наиболее важных величин, характеризующих стол разгона, приведем зависимость критической длины прыжков L от высоты h старта над столом разгона.

Для читателя, интересующегося математической стороной дела, наметим кратко ход вычислений. Из второго закона Ньютона после двукратного интегрирования получаются два соотношения для горизон-

тальной координаты x и вертикальной координаты y в зависимости от времени t как параметра:

$$x = t \cos \beta \cdot \sqrt{2gh}, \quad (1)$$

$$y = \frac{gt^2}{2} + t \sin \beta \sqrt{2gh}. \quad (2)$$

Выбранная система координат показана на рис. 15.

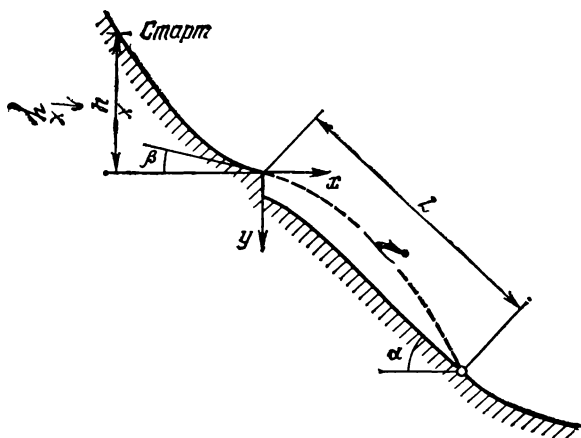


Рис. 15. Парабола, описываемая спортсменом при прыжке на лыжах с трамплина.

Постоянные интегрирования определяются из начальных условий при $t = 0$:

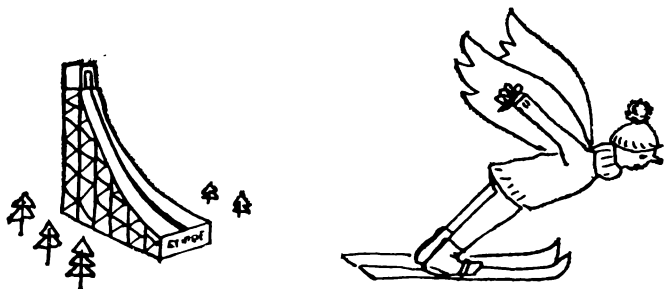
$$x = y = 0$$

и

$$v_x = \sqrt{2gh} \cos \beta,$$

$$v_y = \sqrt{2gh} \sin \beta.$$

Разрешив соотношение (1) относительно t и подставив полученное выражение в соотношение (2), мы получаем уравнение, связывающее координаты y и x . Это и есть уравнение параболы полета. Точка пересечения параболы полета с прямой, изображающей на рис. 15 плоский склон и описываемой уравнением $y = x \operatorname{tg} \alpha$, определяет теоретическую точку приземления — так называемую критическую точку лыжного трамплина.



При выводе формулы

$$L = h (\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta) \cdot 4 \cos^2 \beta \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}, \quad (3)$$

намеченном выше, наш микрокалькулятор бесполезен.

На самом большом в ГДР лыжном трамплине Гросс Ашбергшанце в Клингентале $\alpha = 28^\circ$, $\beta = 7^\circ$, поэтому

$$L = 0,42 \cdot 4 \cdot 0,985 \cdot \sqrt{1 + 0,29} \cdot h = 1,88 \cdot h.$$

При $\beta = 0$, т. е. при горизонтальном столе разгона, соотношение (3) упрощается и принимает вид

$$L = \frac{4h \cdot \sin \alpha}{\cos^2 \alpha},$$

На самых больших (так называемых полетных) трамплинах критическая длина прыжков превышает 120 м. Разумеется, было бы скучно, если бы прыжки и полеты на лыжах неукоснительно следовали выведенным выше формулам и все, кто прыгает в один и тот же день с одного и того же трамплина, показывали одинаковые результаты. К счастью, в прыжках с трамплина на лыжах существует ряд факторов, не поддающихся математическому описанию, в частности группировка спортсмена в момент отделения от стола и аэродинамика его в фазе полета самым непосредственным образом сказываются на дальности полета, а координация движений при приземлении учитывается судьями при оценке прыжка. Наконец, не последнюю роль при прыжках на лыжах играет и простое везение,

ПРИЗ В 100 000 МАРОК

Теоретики рекламного дела уверены, что всякое утверждение должно повторяться как можно чаще. От этого оно не становится истинным, но обретает большую правдоподобность.

Французский математик Пьер Ферма (1601—1665) утверждал, что ему удалось найти доказательство неразрешимости уравнения

$$x^m + y^m = z^m,$$

где m — любое целое число больше 2, в целых x , y и z . При $m = 2$ уравнение

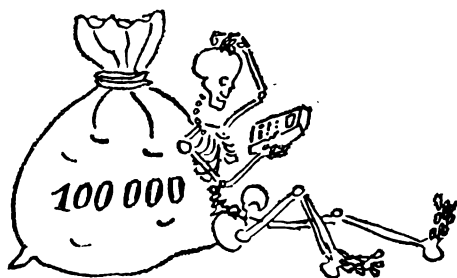
$$x^2 + y^2 = z^2$$

разрешимо в целых числах (например, отрезки длиной $x = 3$, $y = 4$, удовлетворяют теореме Пифагора: $3^2 + 4^2 = 5^2$).

Ферма не оставил после себя никаких записей с изложением своего доказательства. Тем не менее на протяжении последующих 300 лет его коллеги-математики пребывали в уверенности, что он располагал доказательством своего утверждения, получившего название великой теоремы Ферма. В 1770 г. Леонард Эйлер доказал, что теорема Ферма верна при $m = 3$ и $m = 4$. Как ни удивительно, но до сих пор ни одному математику не удалось ни доказать теорему Ферма в общем случае, ни опровергнуть ее. Разумеется, были испробованы многочисленные тройки чисел в надежде найти хотя бы одну, удовлетворяющую теореме Ферма, но пока все такие попытки не увенчались успехом.

Математик П. Вольфскель еще до первой мировой войны установил приз в 100 000 марок для того, кто сумеет строго доказать теорему Ферма. Премии Вольфскеля был бы удостоен и тот, кому удалось бы построить контрпример, опровергающий теорему Ферма.

Для того, у кого под рукой микрокалькулятор, искушение внести свою лепту в поиски доказательства теоремы Ферма почти неодолимо. Сообщаем для тех, кто захочет принять участие в поиске неуловимой пока тройки целых чисел x , y , z , удовлетворяющих



теореме Ферма, что малые числа x , y , z были перепробованы при различных m многими людьми. Например,

$$777^5 + 333^5 = 2,8730242 \cdot 10^{14},$$

$$\sqrt[5]{2,8730242 \cdot 10^{14}} = 779,2339314.$$

Увы! И на этот раз z — не целое.

Не забывайте: $\sqrt[5]{x} = x^{1/5}$.

Вы также можете попытаться получить приз в 100 000 марок (правда, две мировые войны, инфляция и денежные реформы обратили оставленный Вольфскем капитал в ничто). Торопитесь: срок представления работ на конкурс истекает 13 сентября 2007 г.

ПУТЕШЕСТВИЯ В СТАРИНУ

В наши дни, отправляясь в заграничную поездку, мы точно знаем, по какому курсу производится обмен денег, и по твердо установленным правилам обмениваем марки на рубли, злотые, доллары или гульденy. Чтобы не брать с собой в дальний путь большие суммы наличными, мы оформляем аккредитивы или кредитные письма. Может случиться и так, что в банке не окажется валюты той страны, куда мы едем. В этом случае банк обменивает нам деньги на какую-нибудь ведущую валюту — рубли, если мы отправляемся в страны СЭВ, или доллары, если нам предстоит побывать в несоциалистической стране,

Лет 500 назад обменять деньги было гораздо труднее. В Европе существовало многим больше государств, чем сейчас. В 1648 г. только германская нация Священной римской империи насчитывала свыше трехсот суверенных государств! Почти у каждого такого крохотного государства существовали своя валюта и своя система единиц. Так как почтовой карете, запряженной четверкой лошадей, нередко требовалось несколько дней, чтобы пересечь даже не очень большое государство, путешественнику необходимо было иметь при себе некую сумму в местной валюте, ибо как иначе он мог бы уплатить за обед, ночлег, лошадей, и, конечно же, таможенные и подорожные пошлины.

В одном из задачник (около 1500 г.) мы нашли следующую задачу. Путешественник проезжает через несколько стран, денежные единицы которых относятся между собой следующим образом:
12 имперIALов — 31 пизанини (денежная единица города Пиза),

23 пизанини — 12 иенских грошей,

13 иенских грошей — 12 тунисских грошей,

11 тунисских грошей — 12 барселонских грошей.

Сколько барселонских грошей получит наш путешественник за 15 имперIALов?

Для нас, обладателей микрокалькулятора, решить такую задачу не составляет особого труда. Отбросив в сторону всякие соображения о том, как наиболее «изящно» организовать вычисления, мы будем действовать напрямую с помощью неоднократно проверенного тройного правила (для удобства записи введем сокращенные обозначения необычных денежных единиц):

$$1 \text{ имперIAL} = \frac{31}{12} \text{ пизан.} = 2,58 \text{ пизанини,}$$

$$2,58 \text{ пизан.} = \frac{12 \cdot 2,58 \text{ иен.} \cdot \text{пизан}}{23 \text{ пизан.}} = 1,35 \text{ иенского гроша,}$$

$$1,35 \text{ иен.} = \frac{12 \cdot 1,35 \text{ тун.} \cdot \text{иен.}}{13 \text{ иен.}} = 1,24 \text{ тунисского гроша,}$$

$$1,24 \text{ тун.} = \frac{13 \cdot 1,24 \text{ барс.} \cdot \text{тун.}}{11 \text{ тун.}} = 1,36 \text{ барселонского гроша.}$$

Но коль скоро 1 империал, как показывают наши вычисления, соответствует 1,36 барселонского гроша, то за 15 империалов путешественник получит 20,33 барселонского гроша.

С десятичной дробью 0,33 купцы в старину обращаться не умели, поэтому ее надлежит перевести в 12-ричную, т. е. заменить 0,33 дробью $\frac{4}{12}$, или, если один грош разделить на 60 частей, — дробью $\frac{20}{60}$. На этом примере хорошо видно, насколько усложняются вычисления без десятичных дробей.

Весьма поучительно познакомиться со способом, с помощью которого купцы пятьсот лет назад производили пересчет денежных сумм из одной валюты в другую с минимальными затратами сил и времени.

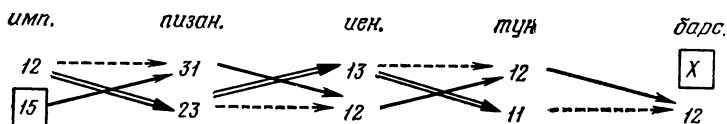


Рис. 16. Схема пересчета различных валют пятисотлетней давности.

Они заполняли табличку по схеме, показанной на рис. 16. Пунктирные линии означают, что пересчет производится прямо по курсу. В остальных случаях алгоритм пересчета сводится к следующим операциям.

1. Следуя сплошным стрелкам, перемножить по порядку все встречающиеся числа:

$$15 \cdot 31 \cdot 12 \cdot 12 \cdot 12 = 803\,520.$$

2. Следуя двойным стрелкам, перемножить по порядку все встречающиеся числа:

$$12 \cdot 23 \cdot 13 \cdot 11 = 39468.$$

3. Разделить первое произведение на второе:

$$\frac{803\,520}{39468} = 20,36.$$

Столько барселонских грошей давали примерно в 1450 г. за 15 империалов. Разумеется, десятичную дробь 0,36 следует выразить в виде дроби, соответ-

ствующей принятому в те времена делению гроша. Грош был довольно значительной суммой.



Той же схемой купцы пользовались в старину и для коммерческих расчетов. Еще в конце прошлого века по ней учили производить расчеты в коммерческих училищах.

Приведем лишь одну задачу на применение этой схемы. За 10 гульденов можно купить 11 локтей ткани, за 18 локтей ткани дают 53 фунта шерсти, а за 70 фунтов шерсти дают 15 фунтов перца. Сколько перца можно купить за 141 гульден?

| Гульдены | Ткань | Шерсть | Перец |
|------------|--------|--------|----------|
| 10 ... | > 11 | 70 ... | > 15 |
| <u>141</u> | 18 ... | > 53 | <u>X</u> |

Используя приведенное выше «цепное правило», получаем:

$$X = \frac{141 \cdot 11 \cdot 53 \cdot 15}{10 \cdot 18 \cdot 70} = \frac{1\,233\,045}{12\,600} = 97,86 \text{ фунта.}$$

Столько перца можно было купить примерно в 1500 г. за 141 гульден. (Купец того времени сказал бы, что $97 \frac{242}{280}$ фунта.)

Если не верите, то проверьте с помощью своего микрокалькулятора.

ПОПРОБУЙТЕ ОЦЕНИТЬ

Самые маленькие стальные шарики, применяемые в технике, имеют диаметр 0,3 мм. Сколько таких шариков вмещает наперсток и сколько они весят? Попробуйте прикинуть и оценить. После того как вы получите свою оценку, попробуем вычислить число шариков с помощью нашего микрокалькулятора и подходящих формул.

Как известно, объем шара может быть вычислен по формуле

$$V = \frac{4}{3} \pi r^3.$$

При $r = 0,15$ мм объем стального шарика

$$V = \frac{4}{3} \pi \cdot 0,15^3 \text{ мм}^3 = 0,0141 \text{ мм}^3.$$

Емкость наперстка среднего размера проще всего определить экспериментально: взвесить наперсток один раз пустой и один раз наполненный водой. Разность весов в граммах равна объему наперстка в кубических сантиметрах. Предположим, что, произведя взвешивания, мы получили объем наперстка $2,5 \text{ см}^3 = 2500 \text{ мм}^3$. Для того чтобы ответить на вопрос задачи (узнать, сколько стальных шариков диаметра 0,3 мм вмещает наперсток), вовсе не достаточно разделить один объем на другой. Дело в том, что шарики заполняют внутренность наперстка не сплошь, а с зазорами. Даже при так называемой плотнейшей упаковке между шариками остаются зазоры. Плотнейшая упаковка шаров — одно из наиболее важных модельных представлений в теоретической физике металлов. В случае плотнейшей упаковки независимо от диаметра шаров (по предположению имеющих одинаковые размеры), они заполняют 74 % объема. Следо-

вательно, и наши стальные шарики заполняют не более чем 0,74 объема наперстка. Таким образом, наперсток вмещает

$$n = \frac{2500 \cdot 0,74}{0,0141} = 131\,206 \text{ шариков.}$$

Это количество шариков имеет массу

$$M = nV\rho,$$

что при плотности стали

$$\rho = 7,85 \cdot 10^{-3} \frac{\text{г}}{\text{см}^3}$$

составляет

$$M = 2500 \cdot 0,74 \text{ мм}^3 \cdot 7,85 \cdot 10^{-3} \frac{\text{г}}{\text{мм}^3} = 14,5 \text{ г.}$$

Наши шарики (а их более 130 000) можно расположить и на плоской поверхности так, чтобы они образовали плотнейшую (но уже плоскую) упаковку, т. е. расположились «плечом к плечу». По вычислениям кристаллографов, они занимают при этом 90,6 % площади (см. гл. «Математика при покупке фруктов» в книге В. Гильде «Зеркальный мир» *). Поперечное сечение одного шарика имеет площадь

$$A = \pi r^2 = \pi (0,15 \text{ мм})^2 = 0,071 \text{ мм}^2.$$

Так как на плоскую поверхность мы выложили все n шариков, они занимают площадь

$$A_n = 131 \cdot 206 \cdot 0,071 \text{ мм}^2 = 9316 \text{ мм}^2.$$

Эта величина соответствует 90,6 %. А вся занимаемая шариками (вместе с зазорами) поверхность при плотнейшей упаковке имеет площадь

$$A_{\text{п. у.}} = \frac{9316 \text{ мм}^2 \cdot 100}{90,6} \approx 103 \cdot 10^2 \text{ мм}^2 \approx 100 \text{ см}^2.$$

Наконец, все шарики можно выстроить по прямой. Если это сделать, то такая цепочка из шариков имела бы в длину $131\,206 \cdot 0,3 \text{ мм}$, т. е. растянулась бы почти на 40 м.

* Гильде В. Зеркальный мир. — М.: Мир, 1982.

Предположим теперь, что все n шариков мы хотим переплавить в один шар радиуса r_1 . Тогда

$$nV = \frac{4}{3} \pi r_1^3,$$

откуда

$$r_1 = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot 2500 \cdot 0,74 \text{ мм}^3}{4\pi}} = 7,6 \text{ мм},$$

т. е. такой шар имел бы диаметр $d_1 = 15,2$ мм.

Поскольку речь зашла о шарах, мы хотим предложить вам еще одну задачу. Представьте себе, что у вас имеется шар из пробки диаметром 1 м (пробка по праву считается одним из наиболее легких материалов, применяемых в технике), т. е. вполне «удобных» размеров. Какова масса такого шара? Попробуйте прикинуть и оценить.

Пробка имеет плотность $0,3 \text{ г/см}^3$, поэтому масса нашего шара равна

$$\begin{aligned} M_n = \rho V &= 0,3 \frac{\text{г}}{\text{см}^3} \cdot \frac{4}{3} \pi (50 \text{ см})^3 = \\ &= 157,08 \cdot 10^3 \text{ г} \approx 157 \text{ кг}. \end{aligned}$$

Таким шаром «удобных» размеров манипулировать не столь удобно.

В заключение нам хотелось бы поразить вашу фантазию в последний раз. Как глубоко погрузится в воду наш пробковый шар? Попробуйте оценить.

Чтобы решить эту задачу, нам придется воспользоваться одним физическим законом, по преданию открытым древнегреческим физиком и математиком Архимедом (около 287—212 гг. до н. э.) во время купания в ванне: каждое тело, погруженное в жидкость, теряет в весе столько, сколько весит вытесненная им жидкость.

В равновесии (а мы рассматриваем именно этот случай) вес (масса) плавающего пробкового шара должен быть равен весу (массе) воды, вытесненной погруженной частью шара. Последняя имеет форму шарового сегмента высотой h_1 , а плотность воды

$$\rho_v = 1 \frac{\text{г}}{\text{см}^3},$$

поэтому должно выполняться равенство

$$\rho_n = \frac{4}{3} \pi r^3 = \rho_v \frac{\pi h_1^2}{3} (3r - h_1),$$

т. е.

$$0,3 \cdot 4 \cdot (50 \text{ см})^3 = h_1^2 \cdot 150 \text{ см} - h_1^3,$$

или

$$h_1^3 - 150h_1^2 + 150\,000 = 0. \quad (1)$$

(при выбранных единицах высота h_1 шарового сегмента получается в сантиметрах). Перед нами кубическое уравнение, решение которого «классическим» способом довольно громоздко (этот способ изложен в разд. «Решение уравнений» книги «С микрокалькулятором в руках»).

В настоящей книге мы предложили метод (см. разд. «Итерации»), позволяющий при определенных условиях не без изящества решать кубическое и другие алгебраические уравнения с помощью микрокалькулятора. Напомним, что для этого необходимо лишь преобразовать уравнение $f(x) = 0$ к виду $x = \varphi(x)$.

В нашем случае удобнее всего воспользоваться преобразованием

$$\begin{aligned} h_1^2 (h_1 - 150) + 150\,000 &= 0, \\ h_1^2 &= \frac{150\,000}{150 - h_1}, \\ h_1 &= \sqrt{\frac{150\,000}{150 - h_1}}. \end{aligned} \quad (2)$$

Выбрав для h_1 нулевое приближение, мы подставляем его в правую часть формулы (2) и получаем первое, более точное приближение. В свою очередь, подставив его в правую часть формулы (2), мы получим второе приближение и т. д. (разумеется, если итерации сходятся, что сразу же видно).

Нулевое приближение нам поможет выбрать следующее физическое соображение. Если бы плотность нашего шара была вдвое меньше плотности воды, то шар погрузился бы по экватор (так как масса всего шара была бы равна массе полушария из воды). Но пробка легче ($\rho_n = 0,3 \text{ г/см}^3$), поэтому глубина погружения h_1 пробкового шара несколько меньше.

Подставив «на пробу» в кубическое уравнение (1) $h_1 = 40$, мы получим в его левой части значение — 26 000, а при $h_1 = 30$ — значение 142 000. Следовательно, между $h_1 = 30$ и $h_1 = 40$ заключен (по крайней мере один) корень уравнения (1). Учитывая это, выберем за нулевое приближение $h_1 = 35$. Этапы вычислений приведены в таблице ниже. Подставив последнее значение в правую часть формулы (2), вы всегда можете продолжить итерации. В ходе вычислений (начиная с ввода нулевого приближения $h_1 = 35$) вы будете производить следующие операции: 35; «+/-»; «+»; 150; «=»; «1/x»; «x»; 150 000; «=»; «√x»; «+/-»; «+»; 150; «=» и т. д.

Обозначим для краткости

$$\varphi(h_1) = \sqrt{\frac{150\,000}{150 - h_1}},$$

тогда

| h_1 | $\varphi(h_1)$ |
|-------|----------------|
| 35 | 36,1 |
| 36,1 | 36,3 |
| 36,3 | 36,32 |
| 36,32 | 36,32 |

Мы видим, что после трех итераций глубину погружения пробкового шара удастся определить с двумя точными знаками после запятой.

А глубоко ли погрузится наш шар, если его опустить в ртуть ($\rho_{\text{рт}} = 13,55 \text{ г/см}^3$)? Попробуйте оценить.

СКОЛЬКО КИЛОМЕТРОВ ПРОЕХАЛА ПОКРЫШКА?

Ни один автолюбитель, когда ему приходится покупать новые покрышки, не может удержаться, чтобы не посетовать на необходимость расстаться со старыми. «Подумать только, их пробег составил целых 30 000 км!» — обычно восклицает он. Традиционное утверждение автолюбителей не вполне точно. Старые покрышки действительно позволили машине проехать 30 000 км по хорошим и плохим дорогам, но пробег

их гораздо больше. Чтобы понять, в чем тут дело, начнем с простого замечания. Если покрышка проехала какое-то расстояние, то длина его кратна длине наружного охвата покрышки. У «Волги», колесо которой вместе с покрышкой имеет радиус около 35 см, на расстоянии 30 000 км оно успевает совершить

$$U = \frac{30\,000\,000}{2\pi \cdot 0,35} = 13\,641\,852,26 \text{ оборотов} \approx \\ \approx 1,364 \cdot 10^7 \text{ оборотов.}$$

Число, что и говорить, весьма внушительное.

Но точка на покрышке движется не только прямолинейно, параллельно дорожному покрытию. Вместе с поступательным движением она совершает 13 млн. оборотов вокруг оси.

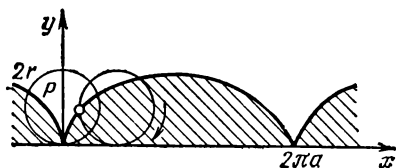


Рис. 17. Обычная циклоида.

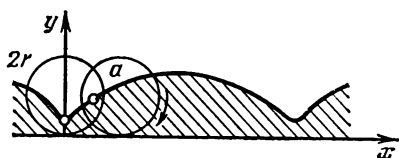


Рис. 18. Растянутая циклоида (по такой траектории движется вентиль автопокрышки).

Если вы попытаетесь построить траекторию точки, совершающей такое двойное движение, то получите кривую, получившую название циклоиды. По зрелом размышлении вы поймете, что необходимо различать следующие три случая.

1) Точка лежит на границе катящегося круга; именно с этим случаем мы встречаемся при анализе движения точек рабочей поверхности автопокрышки (рис. 17).

2) Точка лежит внутри катящегося круга (как, например, вентиль — рис. 18).

3) Точка лежит вне круга; гвоздь, торчащий из дорожного покрытия (в нашей задаче такой печальный случай представиться не может).

Рассмотрим первый случай, когда точка лежит на границе катящегося круга (и описывает траекторию, имеющую форму обычной циклоиды). Точка на рабочей поверхности покрышки, достигнув дорожного покрытия, на миг замирает, после чего устремляется вверх и вперед, затем вниз и вперед, и, достигнув в очередной раз дорожного покрытия, снова замирает на миг. Так как эта точка несет на себе тяжесть машины, на нее действует сила давления, а поскольку она вращается вокруг оси, на нее действует также центробежная сила.

Мы хотели бы знать, сколько километров успевает пройти точка на рабочей поверхности покрышки к тому моменту, когда автомашина пройдет 30 000 км. Длина циклоиды равна

$$s = 8r$$

(вывод этой формулы мы не приводим). В нашем примере

$$s = 8 \cdot 0,35 \text{ м} = 2,80 \text{ м},$$

$$U = 2\pi \cdot 0,35 \text{ м} = 2,20 \text{ м}.$$

Таким образом, по сравнению с простым поступательным движением по прямой точка, двигаясь по циклоиде, проходит путь, который оказывается длиннее прямолинейного на

$$\frac{2,80 - 2,20}{2,20} \cdot 100 \% = 27 \%.$$

Следовательно, наша автопокрышка, как показывают приведенные выше соображения, проходит не 30 000 км, а

$$(30\,000 + 0,27 \cdot 30\,000) \text{ км} = 38\,100 \text{ км}.$$

Поскольку мы познакомились с циклоидой, не следует забывать и о двигателе. Один из узлов двигателя представляет собой колесо (круглую шайбу), которое катится извне по неподвижному колесу (например, такова кинематическая схема роликов в подшипнике, обкатывающихся вокруг внутреннего коль-

ца). Точка на рабочей поверхности катящегося колеса описывает эпициклоиду (рис. 19). Длина эпициклоиды

$$s = \frac{8r(R+r)}{R},$$

где R — радиус неподвижного, а r — радиус катящегося колеса.

Эпициклоиду мы получим, если автомашина объедет вокруг Земли по окружности большего круга,

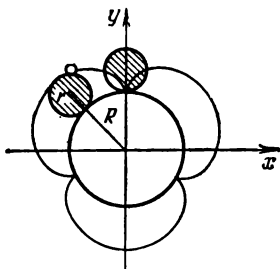


Рис. 19. Обычная эпициклоида ($R:r = 3$).

При каждом обороте колеса точка на рабочей поверхности покрышки опишет эпициклоиду — один «лепесток» длиной

$$s = \frac{8 \cdot 0,35 \cdot (6\,378\,000 + 0,35)}{6\,378\,000} \text{ м} \approx 2,80 \text{ м},$$

а так как число лепестков равно

$$\frac{40\,000\,000}{2\pi \cdot 0,35},$$

то полная длина пути, который к концу кругосветного путешествия пройдет точка, равна

$$\frac{40\,000\,000 \cdot 2,8}{2\pi \cdot 0,35} \text{ м} = 50\,929,582 \text{ км}.$$

Своего рода противоположностью эпициклоиды может служить гипоциклоида. Ее описывает точка окружности, катящейся изнутри по неподвижной окружности. В зависимости от отношения радиусов $R:r$ неподвижной (R) и катящейся (r) окружностей форма гипоциклоиды может быть довольно сложной.

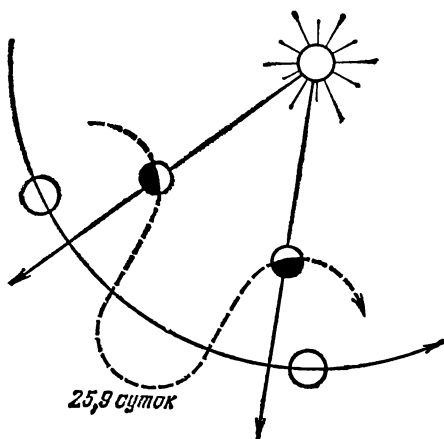


Рис. 20. Движение Луны вокруг Земли.

В простейшем случае ($R : r$ — целое число) точка, описывающая гипоциклоиду, проходит путь

$$s = 8(R - r).$$

Пользоваться формулами для длин дуг циклоид, эпициклоид и гипоциклоид имеет смысл только в том случае, если качение происходит без проскальзывания. Катящееся колесо не должно свободно проворачиваться вокруг своей оси. В реальной жизни это идеализированное математическое условие выполняется редко.

В астрономии и в теории космических полетов специалистам также приходится неоднократно сталкиваться с циклоидами. Точка на поверхности Земли описывает в мировом пространстве эпициклоиду, так как совершает вместе с Землей суточное вращение (вокруг земной оси) и годовое вращение (вокруг Солнца). Сложнее обстоит дело, если точка не связана жестко с поверхностью Земли и может в известных пределах перемещаться относительно нее (имеет «люфт»). С таким случаем мы сталкиваемся при рассмотрении движений Луны и космических тел.

Луна совершает один оборот вокруг Земли за 27,33 суток, но из-за движения всей системы Земля — Луна вокруг Солнца Луна возвращается на «исходную позицию» лишь через 29,5 суток (такой срок проходит, например, от одного полнолуния до другого).

Наблюдателю на Солнце казалось бы, что Луна не описывает вокруг Земли круг за кругом, а описывает кривую, очень похожую на ту, которую описывает вентиль вращающегося колеса (рис. 20).

СВАРКА В КОСМОСЕ

Одна из задач освоения космического пространства состоит в разработке принципиально новых технологий, например получения совершенно однородных по составу сплавов. В земных условиях получить такие сплавы невозможно: вездесущая сила тяжести разделяет различные компоненты сплавов по их плотности. И хотя разделение это весьма незначительно, полностью исключить его не представляется возможным.

С совершенно иными условиями мы встречаемся в космическом пространстве. Если космический аппарат не вращается и не кувыркается, то на его борту царит невесомость и полностью исчезает центробежная сила. Такие понятия, как «верх» и «низ», утрачивают смысл. На высоте 500 км над поверхностью Земли можно получать совершенно однородные сплавы.

Если когда-нибудь на околоземных орбитах появятся космические фабрики, то на них в числе прочих технологических операций непременно будет производиться и сварка. Во-первых, изготовленные на фабрике детали нужно где-то монтировать, а сварные соединения обладают хорошими прочностными свойствами. Кроме того, различные вещества, изготовленные на космической фабрике, необходимо запаивать в герметические капсулы для последующей доставки на Землю.

Одним из методов космической сварки является сварка электронным лучом. В земных условиях она может производиться только в больших вакуумных камерах. Создание такой камеры требует немалых материальных затрат. В космосе же к услугам сварщика «вакуумная камера» любых размеров, причем не требующая никаких дополнительных затрат. Именно поэтому советские космонавты еще в 1969 г. произвели в космосе испытания сварочной установки «Вулкан» и провели серию опытов,

Но между работой на Земле и в космосе существуют некоторые принципиальные различия и помимо вакуума. В земных условиях штепсель служит практически неограниченным источником энергии для сварки. В космической лаборатории сварщик может рассчитывать только на аккумулятор и солнечные батареи весьма ограниченной емкости.

На Земле, прежде чем производить ответственную сварку, сварщик подбирает оптимальный режим сварки на «черновом» экземпляре изделия. После того как нужный режим найден, пробный образец выбрасывают. Но доставить пробный образец на космическую станцию не так просто. Для этого необходимо запустить ракету, которая вывела бы транспортный корабль с образцом на околоземную орбиту. Не ясно также, что делать с пробным образцом после того, как надобность в нем отпадет: в космосе нет мусорных ящиков. Учитывая все эти трудности, космический сварщик, прежде чем приступить к работе, пытается определить исходные данные на основе моделей. При сварке электронным лучом решающее значение имеет такой параметр, как мощность луча. Формулу для подсчета мощности вывели два японских физика Хасимото и Мацуда:

$$U_y I = 0,5 h v_c d_l \cdot \underset{K_1}{[c_p \rho (T_{пл} - 273^\circ \text{C}) + H]} \underset{K_1}{\times} \\ \times \underset{K_2}{\left[1 + 1,2 \lambda \left(\frac{1}{d_l v_c} - \frac{1}{2\alpha} \right) \right]} \underset{K_2}{}.$$

Физический смысл входящих в формулу величин и их значения приведены ниже.

| Технологический параметр | Параметр материала |
|----------------------------------|---|
| U_y — ускоряющее напряжение, В | C_p — удельная теплоемкость, Дж/г · К |
| I — сила тока в луче, А | ρ — плотность, г/см ³ |
| h — глубина сварки, см | $T_{пл}$ — температура плавления, К |
| v_c — скорость сварки, см/с | H — теплота плавления, Дж/см ³ |
| d_l — диаметр луча, см | λ — теплопроводность, Дж/см · с · К |
| | α — коэффициент температуропроводности, см ² /с |

Попробуем проанализировать формулу Хасимото и Мацуды в целом и ее отдельные члены. Требуется подобрать мощность электронного луча (U, I). Этой мощностью мы хотим воздействовать на материал, описываемый шестью характеристиками.

Диаметр луча d_{λ} и скорость сварки v_c мы можем устанавливать, регулируя сварочный автомат. Глубина сварки h определяется главным образом толщиной свариваемого металла.

Численные значения характеристик материала зависят от выбора сорта стали. Если предположить, что космонавту предстоит осуществить сварку низколегированной стали, то

$$\begin{aligned}c_p &= 0,71 \text{ Дж/г} \cdot \text{К}, \\ \rho &= 7,65 \text{ г/см}^3, \\ \lambda &= 0,33 \text{ Дж/см} \cdot \text{с} \cdot \text{К} \\ \alpha &= 0,0615 \text{ см}^2/\text{с}, \\ H &= 2135 \text{ Дж/см}^3, \\ T_{пл} &= 1803\text{К}.\end{aligned}$$

Выбрав заранее материал для космической сварки, мы получаем тем самым возможность заранее определить численные значения всех членов, кроме одного, заключенных в прямые скобки K_1 и K_2 :

$$\begin{aligned}K_1 K_2 &= [0,71 \cdot 7,65 \cdot (1803 - 273) + 2135] \times \\ &\times \left[1 + 1,2 \cdot 0,33 \left(\frac{1}{d_{\lambda} v_c} + \frac{1}{2 \cdot 0,0615} \right) \right].\end{aligned}$$

Диаметр пучка d_{λ} и скорость сварки v_c не относятся к материальным константам, и мы пока воздержимся от их вычисления.

В разд. «Результат, правильный несмотря на ошибки», мы уже изложили соображения, по которым решение задачи удобно разделить на ряд этапов. Если у вашего микрокалькулятора имеется несколько регистров памяти, то промежуточные результаты разумно записывать в них на каждом этапе, а затем сравнивать содержимое регистров с контрольным вычислением.

Раскрывая скобки, получаем:

$$\begin{aligned} K_1 K_2 &= [8310,20 + 2135] \left[1 + \frac{0,40}{d_{\text{л}} v_c} + 3,22 \right] = \\ &= 10\,445,2 \left[4,22 + \frac{0,40}{d_{\text{л}} v_c} \right] = \\ &= 44\,078,74 + \frac{4178,08}{d_{\text{л}} v_c}. \end{aligned}$$

Если это выражение подставить в формулу для мощности луча, то она станет значительно «прозрачнее»:

$$U_y I = 0,5 h v_c d_{\text{л}} \left[44078,74 + \frac{4178,08}{d_{\text{л}} v_c} \right].$$

Космонавт выбирает $d_{\text{л}} = 0,1$ см и вносит коэффициент 0,5 в квадратные скобки:

$$U_y I = h v_c \left(2203,94 + \frac{2089,04}{v_c} \right).$$

Поскольку наш сварщик не отличается особой любовью к вычислениям, он поступает далее просто: выбирает скорость сварки $v_c = 1$ см/с, так как толщина стального листа 1 см, глубина сварки h также 1 см. В результате для мощности электронного луча он получает оценку

$$U_y I = 4299,98 \text{ Вт} \approx 4,29 \text{ кВт},$$

Находясь в космосе, энергию приходится расходовать бережно, отсюда и знаки после запятой.

СГЛАЖИВАНИЕ ФУНКЦИЙ

Разброс экспериментальных данных часто бывает весьма значительным. Их графическое представление порождает зигзагообразную кривую, не позволяющую утверждать что-либо определенное. Однако ценой некоторых усилий такие экспериментальные данные удастся огладить, подогнав к ним наилучшим образом кривую, представляющую собой комбинацию нескольких известных функций (иногда подгоночная кривая описывается даже одной функцией). Во многих случаях достаточно представить ход функции в общих чертах (так обстоит дело всякий раз, когда

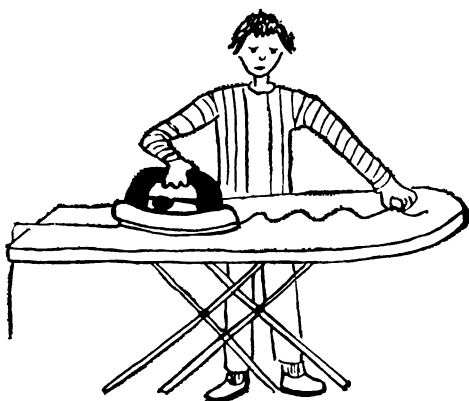
требуется выяснить тенденцию, тренд, или сравнить результаты нескольких серий испытаний). Аналитическая зависимость между переменными x и y при этом может быть не известна.

В простейшем случае полученные экспериментальные данные допускают кусочное сглаживание по формуле

$$\bar{y}_0 = \frac{1}{3}(y_{-1} + y_0 + y_{+1}), \quad (1)$$

где y_{-1} , y_0 и y_{+1} — значения сглаживаемой функции или экспериментальные данные, соответствующие значениям x , равным $x_0 - h$, x_0 и $x_0 + h$ (h — произвольно выбранный постоянный шаг по оси абсцисс), \bar{y}_0 — новое, сглаженное значение, которым надлежит заменить исходное значение y_0 . При таком подходе на каждом шаге учитываются лишь три последовательных значения y .

Обращаем ваше внимание на то, что при таком сглаживании начальное и конечное значение не учитываются, так как у начального значения нет «соседа слева» (предыдущего значения y_{-1}), а у конечного значения — «соседа справа» (последующего значения y_{+1}).



Столь же часто применяется сглаживание по формуле

$$\bar{y}_0 = \frac{1}{4}(y_{-1} + 2y_0 + y_{+1}). \quad (2)$$

Она сглаживает исходные данные не столь сильно, как формула (1), так как исправляемое значение y_0 берется с удвоенным весом по сравнению с соседними значениями.

То же самое по существу относится и к сглаживанию по формуле

$$\bar{y}_0 = \frac{1}{70} (-6y_{-2} + 24y_{-1} + 34y_0 + 24y_{+1} - 6y_{+2}), \quad (3)$$

«перерабатывающей» шаг за шагом пять идущих подряд значений y . Нетрудно видеть, что при этом два первых и два последних значения не поддаются сглаживанию из-за нехватки «соседей слева» и «соседей справа». Формулу (3) удобно применять в тех случаях, когда требуется не сгладить насильственно все неровности кривой, а сохранить характерные максимумы и минимумы, отражающие особенности описываемого кривой процесса.

До сих пор мы предполагали, что сглаживаем равноотстоящие данные, т. е. что последовательные значения x отличаются на одну и ту же величину h . Отбросим теперь это предположение. Один из эффективных способов обработки неравноотстоящих данных состоит в замене групп «соседних» точек их центром тяжести. Такое «барицентрическое» сглаживание осуществляется, например, по формулам

$$\begin{aligned} \bar{x}_s &= \frac{1}{3} (x_1 + x_2 + x_3), \\ \bar{y}_s &= \frac{1}{3} (y_1 + y_2 + y_3) \end{aligned} \quad (4)$$

или (в более общем случае)

$$\begin{aligned} \bar{x}_s &= \frac{1}{n} (x_1 + x_2 + \dots + x_n), \\ \bar{y}_s &= \frac{1}{n} (y_1 + y_2 + \dots + y_n) \end{aligned} \quad (5)$$

(величины в скобках — идущие подряд значения координат).

В случае необходимости сглаживание, производимое по формулам (1)–(5), можно многократно повторить. На рис. 21 показан результат двукратного сглаживания по формуле (4).

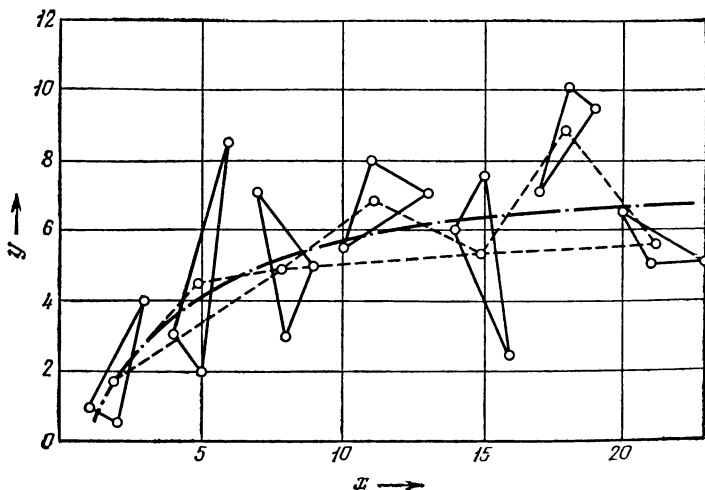


Рис. 21. Двукратное сглаживание кривой заменой групп точек их центром тяжести.

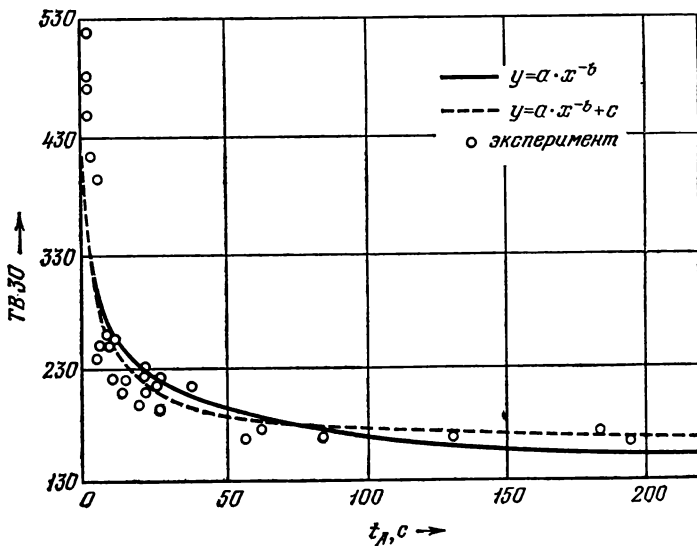


Рис. 22. Подгонка аналитического выражения, задающего сглаживающую кривую,

После того как одним из описанных выше способов кривая сглажена, можно попытаться подобрать для нее подходящее математическое выражение (подогнать степенную или показательную функцию) и с помощью метода наименьших квадратов Гаусса выбрать аналитическую функцию так, чтобы она имела наименьшее отклонение от экспериментальных точек. Как это делается, подробно описано в разд. «Подгонка степенной функции» книги «С микрокалькулятором в руках». В дальнейшем мы покажем на примере, что подгонку кривой можно улучшить. На рис. 22 светлыми кружками показаны результаты экспериментального измерения твердости стали y (по Виккерсу) в зависимости от времени охлаждения t_A в секундах. Сплошная линия соответствует функции $y = 398,3t_A^{-0,18}$ (коэффициенты 398,3 и $-0,18$ определены с помощью так называемого регрессионного анализа). Так называемая мера определенности (квадрат коэффициента корреляции), характеризующая качество подгонки, здесь достигает 88 %.

Из рис. 22 видно, что проведенная кривая не дает наилучшего приближения к реальным значениям. При больших временах охлаждения используемая степенная зависимость твердости от времени охлаждения теряет физический смысл, так как при больших t_A кривая $y = at_L^{-b}$ асимптотически стремится к нулю, т. е. неограниченно приближается к оси t_A , тогда как в действительности твердость стали по достижении некоторого минимального значения перестает убывать. Следовательно, нашу исходную кривую $y = at_L^{-b}$ необходимо усовершенствовать, добавив к ней свободный член c , т. е. заменив кривой более общего вида

$$y = ax^{-b} + c.$$

Определить коэффициенты a , b и c , указав на них замкнутые аналитические выражения, невозможно, но ничто не мешает нам вычислить их с помощью приближенных методов. С одним из таких методов мы и хотим вас познакомить. Во всяком случае, по эффективности он не уступает «методу проб и ошибок».

Прежде всего снимем с графика (см. рис. 22) две наиболее далекие друг от друга точки — пары значений (x, y) . Пусть, например, это будут точки с ко-

ординатами

$$x_1 = 20, \quad y_1 \approx 230,$$

$$x_2 = 170, \quad y_2 \approx 160.$$

Зная x_1 и x_2 , мы вычисляем x_3 по формуле

$$x_3 = \sqrt{x_1 x_2} = \sqrt{20 \cdot 170} = 58,3$$

и по графику находим значение y_3 , соответствующее полученному значению x_3 : $y_3 \approx 186,5$.

По парам значений (x, y) , т. е. по точкам, вычисляем в первом приближении коэффициент c по формуле

$$c = \frac{y_1 y_2 - y_3^2}{y_1 + y_2 - 2y_3} \approx 120.$$

(Если это значение недостаточно точно, то на следующем шаге оно автоматически будет улучшено.)

Итак, мы получили улучшенную функцию

$$y^* = y - 120 = ax^{-b}.$$

Вычисляя с помощью регрессионного анализа коэффициенты a и b , получаем

$$a = 290,4; \quad b = 0,36.$$

Второе приближение (объем выборки — 35 экспериментальных точек) приводит к следующим результатам:

| t_A c | y (экспериментально измеренная твердость, ТВ 30) | y^* | $\Delta y = y - y^*$ |
|--------------|--|-------|--------------------------|
| 0,3 | 475 | 448 | 27 |
| 0,5 | 521 | 373 | 147 |
| 0,6 | 484 | 349 | 135 |
| ... | ... | ... | ... |
| 306 | 158 | 37 | 121 |
| | | | $\Sigma \Delta y = 4304$ |

Среднее $\frac{\Sigma \Delta y}{n} = \frac{4304}{35} = 123$ дает уточненное значение коэффициента c . Таким образом, новая улучшен-

ная кривая определяется уравнением

$$y^{**} = y - 123 = ax^{-b}.$$

Значения коэффициентов a и b мы снова находим с помощью регрессионного анализа:

$$a = 289; \quad c = 0,37.$$

Таким образом, зависимость между твердостью y и временем охлаждения t_A имеет вид

$$y = 289t_A^{-0,37} + 123.$$

На нашем графике (см. рис. 22) эта кривая нанесена штриховой линией. Даже на глаз видно, что она несравненно лучше описывает «облако» экспериментальных точек, чем исходная кривая.

ДЕЛА МЕЖДУНАРОДНЫЕ

Мистер Андервуд из Великобритании заказал в ГДР цистерну. В ней он намеревался хранить нефть, необходимую для отопления дома. Проживает мистер Андервуд примерно в $9\frac{1}{2}$ милях от лондонского порта, откуда к его дому можно проехать по одной-единственной дороге. Мистер Андервуд просил учесть, что в одном месте дорога проходит под путепроводом и высота пролета составляет всего лишь 5 ярдов. В своем заказе он оговорил также вместимость резервуара: цистерна должна вмещать 1200 галлонов топлива, причем галлонов американских, а не английских. Длина цистерны не должна превышать 5 футов 11 дюймов. Мистер Андервуд просил также предусмотреть возможность хранения в цистерне нефти-сырца: если цены на нефть и дальше будут расти столь же стремительно, то придется перейти на более дешевое топливо.

Как должен выглядеть резервуар, удовлетворяющий всем требованиям заказчика? Пройдет ли он под путепроводом? Сколько баррелей (мера емкости, принятая в США) сырой нефти войдет в цистерну? Так как аналогичные резервуары должны экспортироваться в США, контролеру из ГДР пришлось заодно установить, сколько баррелей воды входит в цистерну

и сколько она вмещает бушелей (принятая в США мера емкости сыпучих тел) пшеницы, если резервуар использовать для хранения зерна.

Представитель англо-саксонского мира легко справился бы с подобными задачами, так как он считает в тех самых единицах, о которых идет речь в письме мистера Андервуда. Великое дело привычка! Нам же, чтобы составить наглядное представление о размерах и емкости резервуара, необходимо перейти к метрической системе.

Цистерна должна вмещать 1200 (английских) галлонов.

1 галлон (английский) = 4,546 л,

1 галлон (американский) = 3,787 л,

следовательно, резервуар вмещает 5455,2 л (дм³).

В длину цистерна снаружи должна иметь 5 футов 11 дюймов.

1 фут = 30,48 см,

1 дюйм = 2,54 см,

1 фут = 12 дюймов,

следовательно, цистерна должна быть длиной

$$\left(5 \cdot 30,48 + 11 \cdot \frac{30,48}{12}\right) \text{ см} = 180,3 \text{ см}.$$

В высоту цистерна должна иметь не более 5 ярдов, иначе она не пройдет при транспортировке из порта под путепроводом. Конструктор выбрал высоту 4½ ярда.

1 ярд = 91,44 см = 3 фута.

Ярд был расстоянием от кончика носа до пальцев вытянутой руки короля Генриха VIII (того самого, у которого было много жен!).

Следовательно, высота цистерны

$$4,5 \cdot 91,44 \text{ см} = 411,4 \text{ см}.$$

Но коль скоро объем, длина и высота резервуара известны, узнать его ширину не составляет особого труда:

$$\frac{5455,2 \text{ дм}^3}{41,15 \text{ дм} \cdot 18,03 \text{ дм}} = 7,35 \text{ дм} = 73,5 \text{ см}.$$

Итак, речь идет о высоком и очень плоском резервуаре. Он свободно пройдет под путепроводом с высотой пролета 5 ярдов и его нетрудно будет транспортировать на расстояние $9\frac{1}{2}$ миль.

Следует заметить, что английская миля равна 1,609 км и ее не следует смешивать с морской милей (1,852 км).

Для жидкостей существуют чисто английские и американские меры, причем необходимо различать, о каких жидкостях идет речь:

| | Англия | США |
|-------------------------------------|---------|---------|
| 1 галлон | 4,546 л | 3,787 л |
| 1 баррель = $31\frac{1}{2}$ галлона | — | 119,3 л |
| 1 баррель нефти = 42 галлона | — | 159,1 л |

Баррель нефти — международная единица, принятая на мировом рынке. Сколько же нефти сможет залить мистер Андервуд в свой резервуар?

$$\frac{5455,2 \text{ дм}^3}{159,1 \text{ дм}^3} = 34,29 \text{ баррелей.}$$

Англичанин, конечно, считает иначе:

$$\frac{1200 \text{ гал} \cdot 4,546}{42 \text{ гал} \cdot 3,787} = 34,30 \text{ баррелей нефти.}$$

При пересчете американских данных англичанин не станет переводить их в литры!

Так как один баррель воды относится к одному баррелю нефти-сырца, как $31,5:42$, нетрудно вычислить, сколько воды вмещает цистерна:

$$34,30 \text{ баррелей} \cdot \frac{42}{31,5} = 45,73 \text{ баррелей.}$$

Наконец, заполним резервуар американской пшеницей. При этом мы познакомимся с еще одним баррелем и обычной международной мерой пшеницы — бушелем:

| | Англия | США |
|-----------|---------|---------|
| 1 баррель | 163,7 л | 119,2 л |
| 1 бушель | 36,37 л | 34,24 л |

Таким образом, в резервуар, изготовленный для мистера Андервуда, входит

$$\frac{5455,2}{35,24} = 154,80 \text{ бушелей.}$$

Мы надеемся, что после таких вычислений наши читатели станут убежденными сторонниками метрической системы.

ЕСЛИ ВЗЯТЬ ВСЕ ЭТИ КАПЛИ

В известном стихотворении С. Михалкова о дождливой погоде «Если» есть такие слова:

Если взять все эти капли
И ссединить в одну,
А потом у этой капли
Ниткой смерить толщину —
Будет каплица такая,
Что не снилась никому,
И не приснится никогда
В таком количестве вода!

По утверждению географов, моря и океаны покрывают 70,8 % земной поверхности, и только 29,2 % ее приходится на сушу. Мировой океан площадью 360 800 000 км² имеет среднюю глубину 3795 м. Следовательно, объем воды в нем равен

$$\begin{aligned} 360\,800\,000 \text{ км}^2 \cdot 3,795 \text{ км} &= 1\,368\,000\,000 \text{ км}^3 = \\ &= 1,368 \cdot 10^9 \text{ км}^3. \end{aligned}$$

К счастью, океан наполнен не вином (ибо последствия были бы непредсказуемы), но, к сожалению, воду в нем нельзя назвать питьевой. Предположим, что вся вода в мировом океане пригодна для питья или, по крайней мере, что любое количество воды может быть опреснено сравнительно дешево. Тогда человечество могло бы черпать питьевую воду из океана.

Минимальная суточная потребность одного человека в питьевой воде 2,5 л. Если этого стандарта

придерживаются 6 млрд. людей, то за год они выпивают

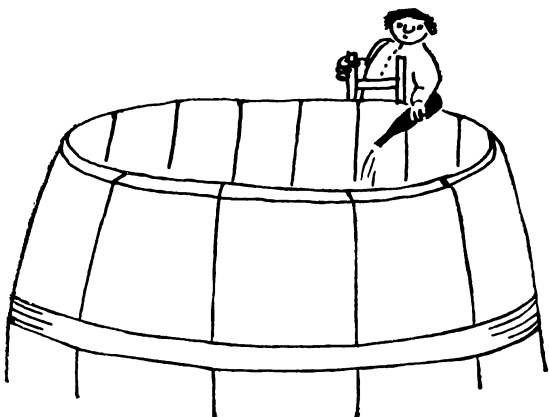
$$2,5 \cdot 6\,000\,000\,000 \cdot 365 = 5,5 \cdot 10^{12} \text{ л} = 5,5 \text{ км}^3.$$

От общего запаса воды в мировом океане это составляет

$$\frac{5,5 \text{ км}^3}{1,37 \cdot 10^9 \text{ км}^3} = 4 \cdot 10^{-9} \approx 4 \cdot 10^{-7} \text{ } \%$$

Чтобы выпить 1 % запаса воды в мировом океане, человечеству понадобилось бы 2,5 млн. лет.

Следует заметить, что потребности среднего человека в воде отнюдь не ограничиваются 2,5 л питьевой



воды за день. Человеку нужно хотя бы время от времени мыться, стирать белье, мыть посуду. Если за водой для бытовых нужд приходится ходить к источнику или колонке, суточный расход воды на человека составляет 10 л. В благоустроенной квартире, где вода течет из крана и имеется туалет, суточный расход воды на человека колеблется в пределах от 40 до 70 л. Если же из водопроводного крана течет не только холодная, но и теплая вода, «потребность в чистоте» чудовищно возрастает и суточный расход воды на человека достигает 125—135 л.

Если бы все люди на Земле придерживались уровня жизни обитателей современных квартир, то запас воды в мировом океане был бы израсходован за 50 000 лет. Но опреснение морской воды — процесс

технически сложный и энергоемкий. Пока получать питьевую воду высокого качества в сколько-нибудь значительных количествах удастся только из пресной воды. Население ГДР (17 млн.) ежегодно расходует около 1,2 млрд. м³ воды, т. е. около 190 л в день на человека. Из этих 190 л около 3 л жизненно важны, 20 или 30 л необходимы для получения различных продуктов цивилизации. Что же касается остальных 160 л, составляющих «львиную долю» суточного расхода воды на одного жителя ГДР, то их вполне можно было бы заменить непитьевой водой: в сливном бачке туалета можно было бы обойтись и соленой водой!

ШАХ КОМПЬЮТЕРУ

Случалось ли вам играть в шахматы с компьютером? Скорее всего нет, ибо еще сравнительно недавно шахматные программы для больших ЭВМ были известны только узкому кругу специалистов и использовались главным образом в качестве тестов. Первым шахматные программы для ЭВМ, предназначенных для автоматической обработки информации, начал составлять в начале 50-х годов американский специалист по кибернетике Клод Шеннон. Восторженные ожидания, которые возлагали на силу игры электронных шахматистов, поначалу не оправдались. В начале 60-х годов советский гроссмейстер Давид Бронштейн проиграл партию шахматной программе, правда, предварительно уступив ей ферзя в качестве форы. В партии-реванше Бронштейн, пожертвовав ладью и пешку, поставил шахматной программе мат в 9 ходов. Но это было лишь начало. Вскоре шахматная программа играла не против человека, а против другой шахматной программы. В 1974 г. состоялся первый матч на первенство мира по шахматам среди компьютеров (точнее говоря, среди шахматных программ). В матче приняли участие 14 программ из 7 стран. Наградой победителю должна была стать золотая медаль ценой в 1000 долларов. Названия некоторых шахматных программ свидетельствовали о безудержной фантазии их составителей: «Каисса», «Хаос», «Францль», «Виль-

гельм Тель», «Папа». Первым чемпионом мира стала советская шахматная программа «Каисса».

История «шахматных компьютеров», или, как говорили раньше, шахматных автоматов, началась с жульничества. Изобретатель и механик Вольфганг фон Кампелен (1734—1804), построивший, между прочим, несколько музыкальных и шахматных автоматов, в 1769 г. привез в Вену шахматный автомат. Внутри довольно большого ящика помещался механизм, часть которого виднелась в застекленные дверцы. На ящике за шахматной доской восседал манекен в восточном одеянии (зрителям была видна верхняя половина туловища). Руки его приводились в движение специальными рычагами и передвигали шахматные фигуры.

Со своим шахматным автоматом Кампелен объездил всю Европу, и везде ему сопутствовал неслыханный успех. Было сыграно около 300 партий, из которых автомат проиграл только шесть. С автоматом померился силами в шахматной игре (и проиграл) Наполеон. Секрет шахматного автомата Кампелена раскрылся лишь в 1834 г., когда в помещении, где находилось чудо техники, внезапно вспыхнул пожар. Оказалось, что сложный «механизм» в основании автомата был всего лишь бутафорией: внутри искусно замаскированной шестернями и рычагами полости прятался небольшого роста человек, который и приводил в движение руки манекена. Несомненно, он был незаурядным шахматистом. После неожиданного разоблачения «автомата» Кампелена шахматный мир с облегчением вздохнул. Призрак автомата, мастерски играющего в шахматы, развеялся, чтобы не возникать вновь на протяжении более чем ста лет.

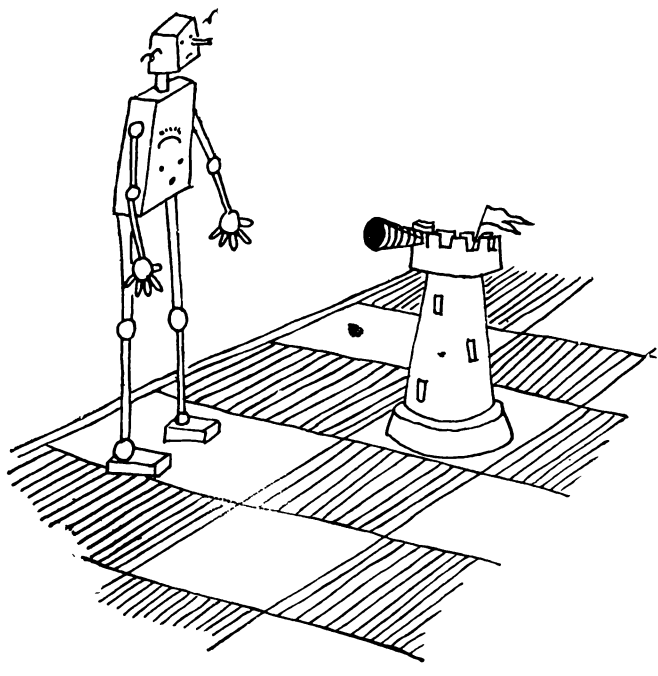
Но вернемся к настоящим шахматным компьютерам. Шахматные программы стали более эффективными, но в принципе они не изменились. Точный расчет всех вариантов вплоть до «плачевного конца» — мата на основе перебора невообразимо большого числа возможных ходов невыполним. Специалисты подсчитали, что после десяти ходов в шахматной партии может возникнуть около $1,7 \cdot 10^{29}$ различных позиций. Самому быстродействующему компьютеру на перебор всех этих вариантов потребовалось бы необычайно много лет, если даже не тысячелетий (когда числа

очень велики, неважно, будет ли у них несколькими нулями больше или меньше). Но коль скоро прямой перебор невозможен, шахматная программа должна быть построена на тех же принципах, которыми (сознательно или бессознательно) руководствуется шахматист-человек: она должна заранее отбрасывать одни варианты и тщательно анализировать другие, более многообещающие. Для этого в программе должна быть предусмотрена специальная программа, оценивающая позиции фигур с учетом возможного материального перевеса или материальных потерь и просчитывающая возможное развитие партии на 7—8 шагов вперед. Разумеется, к большим быстродействующим ЭВМ имеет доступ далеко не каждый, поэтому рассматривать их как даже потенциальных партнеров для большинства шахматистов было бы, мягко говоря, некоторым преувеличением. Совершенно новые возможности в создании шахматных автоматов открылись лишь в связи с бурным развитием программируемых микрокалькуляторов и современных микрокомпьютеров. Крупные фирмы, занимающиеся производством микрокалькуляторов, вполне отчетливо оценили ситуацию и выбросили на мировой рынок целую серию шахматных микрокомпьютеров, играющих с различной силой. На завершающей стадии находится разработка приставок к обычным бытовым телевизорам, позволяющих видеть на экране положение, сложившееся в ходе игры на доске. Поступивший на рынок микрокомпьютер «Chess-Champion МК 1» («Чемпион мира по шахматам МК 1») затрачивает на операцию $0,5 \cdot 10^{-6}$ с. Емкость регистров его оперативной памяти составляет 16 000 битов, обработка информации происходит в регистре объемом 2000 битов. (Для сравнения заметим, что наш микрокалькулятор имеет 25 регистров с адресами, в нем предусмотрено несколько сотен элементарных команд.) Микрокомпьютер МК 1 может быть переключен на игру шести категорий трудности. Время ожидания ответного хода варьируется в зависимости от выбранной категории трудности. Ответ на первый ход следует немедленно, но даже когда компьютер играет с силой начинающего и четвертый ход приходится ждать около четырех минут, следует быть на чеку. Когда же компьютер играет в полную силу,

ждать ответного хода иногда приходится до двух дней (!).

Усовершенствованный вариант шахматного микрокалькулятора получил название «Chess-Challenger» («Вызов шахматистам»). Он снабжен магнитной шахматной доской, на которой партнер передвигает фигуры за компьютер и делает собственные ходы. Сначала компьютер проверяет, не находятся ли его фигуры под угрозой, затем выясняет, не может ли он взять какую-нибудь из фигур противника. Ценность фигур определяется по международной шкале: пешки — в 1 очко, коня и слона — в 3,5 очка, ладьи — в 5 очков и ферзя — в 10 очков. Затем компьютер отыскивает скрытые угрозы (например, спертого мата) и, наконец, исходя из сложившейся на доске позиции, намечает продолжения, ведущие к выигрышу. Существенно, что компьютер просчитывает каждый вариант лишь до «статической» позиции, не требующей непосредственного принятия решений (например, о взятии фигур). Это позволяет значительно сократить число просматриваемых ходов. Если анализ позиции приводит к одинаковой оценке двух возможных ходов, то выбор между ними производится с помощью датчика случайных чисел. Компьютер следит и за тем, чтобы в дебюте одни и те же ходы не повторялись. Кроме того, наиболее ходовые варианты, признанные в международной шахматной практике (например, испанская партия с ее оптимальными вариантами), включены в программу.

Силу игры компьютера «Chess-Champion» можно варьировать более чем на десять уровней, каждый из которых отличается своим характерным временем ожидания ответного хода. На начальной ступени на «обдумывание» ответного хода у компьютера уходит не более 5 с, на высшей ступени время ожидания ответного хода может достигать до 24 ч. Столь долгое ожидание может представить интерес лишь для тех, кто играет в шахматы по переписке. На 5-й ступени (время ожидания ответного хода не превышает 11 мин) компьютер играл на равных с командой опытных шахматистов. Кроме того, он умеет анализировать предлагаемые ему позиции и решать шахматные задачи.



Усовершенствование шахматных программ приводит к далеко идущим следствиям. Дело в том, что оптимальные шахматные стратегии представляют интерес для теории принятия решений в сложных экономических, политических и военных моделях. Нас же пока интересуют только те задачи, которые могут быть не без удовольствия и пользы решены с помощью микрокалькулятора или микрокомпьютера. Много ли удовольствия «продуть» партию в шахматы компьютеру?

Если же вы когда-нибудь согласитесь сесть за одну шахматную доску с компьютером, утешением для вас, возможно, послужат следующие соображения.

Шахматная программа (или шахматный автомат) в принципе не могут играть лучше того или тех, кто ее создал (если не считать, что шахматная программа не ведает усталости и не реагирует на окружающий ее мир). Создатель хорошей шахматной программы, несомненно, должен быть отменным шахматистом.

Компьютером движет воплощенный в металле и программе человеческий дух. Проигрывая шахматную партию компьютеру, вы проигрываете сильному игроку. Дальше все зависит от вас: вы можете принять решение усовершенствовать свою игру, но можете просто выключить компьютер. Какое «продолжение» вы выберете, зависит только от вас.

МАЯК «СОЛНЦЕ»

Те, кому приходилось заниматься сферической геометрией, должно быть, помнят, сколь высокие требования она предъявляет к памяти и геометрическому воображению учащихся. Запомнить десятки громоздких формул и представить себе чертеж не плоским, а пространственным, к тому же увеличенным в миллионы раз, дано не каждому.

К счастью, в последние годы нашлось несколько умных или не любящих утруждать себя лишней работой людей (нередко обе эти категории совпадают), которые сумели существенно упростить все, что в сферической геометрии имеет отношение к проблемам навигации. Они задали себе вопрос: «Для чего нам, собственно говоря, нужен идеальный сферический треугольник? Будем рассматривать Солнце как вершину гигантского маяка и измерим с помощью секстанта, на сколько градусов возвышается маяк над горизонтом. Где находится вершина маяка в любой день, час, любую минуту и секунду, нам известно из составленных астрономами морских ежегодников».

Особенно просто определить свое местоположение мы можем в том случае, если там, где мы находимся, наступил полдень (Солнце достигло высшей точки). Тогда наш маяк находится на том же градусе долготы, что и наблюдатель (рис. 23), а географическая широта наблюдателя равна склонению Солнца.

Склонение возникает из-за наклона земной оси к плоскости земной орбиты (рис. 24). В весеннее (21 марта) и осеннее (21 сентября) равноденствия Солнце стоит примерно над экватором. В начале лета Солнце (т. е. основание маяка) находится на $23^{\circ}26'$ северной широты, а 21 декабря — соответственно на

23°26' южной широты. В остальные дни оно движется где-то между этими пределами.

Поразмыслим над тем, как нам учесть кривизну Земли (с такой задачей приходится сталкиваться, например, при определении дальности приема радиостанций, работающих в диапазоне УКВ).

Градусная сеть на Земле позволяет работать не с длинами, а с углами. Если солнечный маяк находится в нашем (северном) полушарии, то склонение берется со знаком плюс. Когда же маяк зимой оказывается в южном полушарии, склонение берется со знаком минус.

Наша географическая широта (измеренная в полдень) определяется по формуле

$\text{Ш} = 90^\circ - \text{угол, измеренный секстантом} \pm \text{склонение.}$

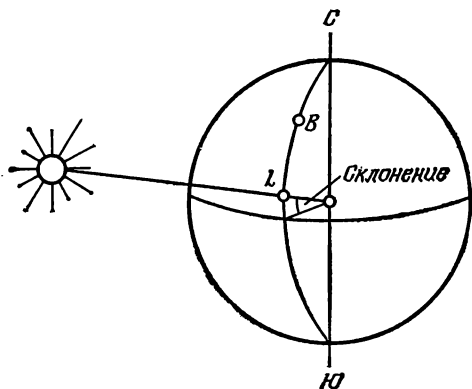


Рис. 23. Солнце в точке наивысшего подъема (В — наблюдатель, L — основание «маяка»).

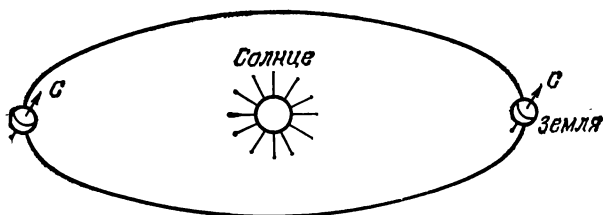


Рис. 24. Чем обусловлено склонение.

Итак, займемся измерением углов и подсчетами:

$$21 \text{ марта} \quad \text{Ш} = 90^\circ - 35^\circ 19' + 0^\circ 00' = 54^\circ 41',$$

$$21 \text{ июня} \quad \text{Ш} = 90^\circ - 58^\circ 45' + 23^\circ 26' = 54^\circ 41',$$

$$11 \text{ декабря} \quad \text{Ш} = 90^\circ - 11^\circ 53' - 23^\circ 26' = 54^\circ 41'.$$

Те, кто возьмет на себя труд проследить за тем, где проходит по территории ГДР параллель, соответствующая $54^\circ 41'$ северной широты, обнаружит, что речь идет о северной оконечности мыса Аркона на острове Рюгель. Мы видим также, как низко стоит зимой Солнце: в полдень оно поднимается над горизонтом всего на $11^\circ 53'$.

При решении задач, связанных с углами, на микрокалькуляторе неизбежно возникает трудность, связанная с тем, что обычный («покупной») микрокалькулятор «понимает» только десятичную систему счисления. Если не считать микрокалькуляторов, переводящих угловые минуты и секунды в десятичные доли углов, нам не приходилось видеть ни одного микрокалькулятора, который производил бы вычисления непосредственно в минутах.

Задачи, возникающие в мореходной астрономии, усложняются тем, что помимо угла, измеренного секстантом, необходимо взять поправку на высоту глаза наблюдателя (при вычислении дальности приема УКВ это соответствует учету величины $h_1 + h_2$), конечные угловые размеры радиуса Солнца и рефракцию. В нашем примере при высоте глаз 2 м поправки на 21 июня 1978 г. получаются такими:

| | |
|-----------------------------|------------|
| поправка на высоту глаз 2 м | —2,5' |
| поправка на рефракцию | —0,6' |
| поправка на угловые размеры | |
| поперечника Солнца | +15,8' |
| склонение | +23° 26,3' |

Минуты приведены в десятичной системе (с десятичными долями). В морских астрономических таблицах угловые размеры диаметра Солнца приведены и в десятичной, и в шестидесятиричной системах. К сожалению, наш микрокалькулятор не столь универсален.

Лучшее, что мы можем сделать, это производить сложение и вычитание минут (и их долей) отдельно, а затем выделить из полученного результата целые градусы ($60' = 1^\circ$, при вычитании минут мы заимствуем один градус из $90^\circ = 89^\circ 60'$).

По завершении вычислений мы округляем результат до целых минут: так как секстант позволяет измерять углы лишь с точностью до минут, нет необходимости приводить углы с секундами. Итак, вычисляем суммарную поправку:

$$\begin{array}{r} -2,5' \\ -0,6' \\ +15,8' \\ \hline +12,7'. \end{array}$$

С учетом суммарной поправки географическая широта места

$$\text{Ш} \approx 90^\circ - 58^\circ 32' + 12^\circ 26,3' = 55^\circ 7'.$$

КОЕ-ЧТО О ПАРУСНОМ СПОРТЕ

В ГДР существует около 250 000 лодок всевозможных типов, примерно 50 000 или 70 000 из них могут ходить под парусом. Если ветер дует по курсу (фор-девинд), то никаких проблем не возникает. Иное дело, если нужно идти против ветра.

Для неморяков скажем, что в этом случае лодка идет зигзагом под углом примерно 40° к направлению ветра. Если угол выбрать побольше, например 42° , то, как показывает опыт, судно идет несколько быстрее, но при этом увеличивается и путь, проходимый им по воде. Выбор правильного угла относительно направления ветра можно рассматривать как задачу на оптимизацию, решать которую приходится всем яхтсменам, в том числе и участникам Олимпийских игр.

Сравним четыре лодки, идущие различными курсами относительно ветра и развивающие поэтому раз-

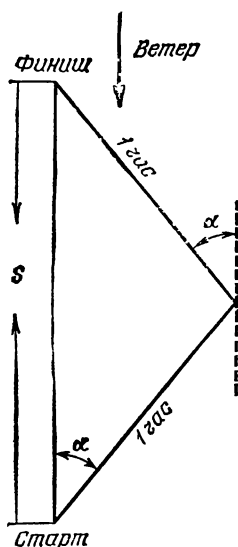


Рис. 25. Лодка следует курсом, образующим угол α с направлением ветра. Через час лодка совершает поворот на угол 2α и следует под тем же углом по другую сторону от направления ветра. При пересечении линии старт-финиш определяется расстояние S , которое засчитывается лодке за пройденное.

личные скорости (рис. 25). Какая из лодок первой придет к финишу?

| | Угол α с направлением ветра | Скорость v , мор. миль/ч |
|-----------|------------------------------------|----------------------------|
| 1-я лодка | 40° | 2,94 |
| 2-я лодка | 41° | 2,99 |
| 3-я лодка | 42° | 3,06 |
| 4-я лодка | 43° | 3,08 |

Напомним для сугубо сухопутных людей, что 1 морская миля $= 1,852$ км. На рис. 25 лодка в течение 60 мин следует курсом, образующим с направлением ветра угол α , после чего ложится на другой курс и следует им еще 60 мин. При пересечении линии старт—финиш определяется расстояние S , которое засчитывается лодке за пройденное (быстро или мед-

ленно проходит лодка это расстояние, зависит от угла α).

Вычислим расстояние S для наших четырех лодок:

| | $S = 2v \cdot \cos \alpha$ | Расстояние мор. миль |
|-----------|------------------------------------|-------------------------|
| 1-я лодка | $2 \cdot 2,94 \cdot \cos 40^\circ$ | 4,40 |
| 2-я лодка | $2 \cdot 2,99 \cdot \cos 41^\circ$ | 4,51 |
| 3-я лодка | $2 \cdot 3,06 \cdot \cos 42^\circ$ | 4,55 |
| 4-я лодка | $2 \cdot 3,08 \cdot \cos 43^\circ$ | 4,51 |

3-я лодка прошла на 0,004 морских миль больше, чем 2-я и 4-я лодки. На первый взгляд кажется, что это не так много. Но если морские мили перевести в длину корпуса лодки, то впечатление окажется иным:

$$d = 1,852 \text{ км} \cdot 0,04 = 0,07 \text{ км} = 70 \text{ м.}$$

Лодки, участвующие в парусных регатах, имеют длину корпуса около 6 м, поэтому 70 м соответствуют 12 корпусам. После 2 ч напряженной гонки это очень большое преимущество.

Приведенный пример поучителен еще в одном отношении: он показывает, что даже в задачах всего лишь с двумя параметрами (углом и скоростью) человеческий разум не умеет находить оптимальное решение, руководствуясь только интуитивными соображениями.

В гонках на кубок США принимают участие не шестиметровые иолы, а крейсерские яхты, у которых длина корпуса около 20 м. Такая яхта стоит около 20 млн. долларов и за свою жизнь успевает принять участие самое большее в 7 регатах (не считая тренировочных походов). На ней устанавливают бортовой компьютер, который помогает капитану выбрать оптимальный курс.

ЗАМЕРЗШИЙ АККУМУЛЯТОР

Наши друзья Отто и Франц — гордые владельцы автомашин, за которыми они тщательно ухаживают. С наступлением холодов оба добавляют в воду для

снегоочистителя немного антифриза. И вообще их машины великолепно подготовлены к зиме.

Зимой 1978—1979 гг. температура упала ниже 20°C . Основательно закутавшись, Отто и Франц вышли однажды утром к своим машинам, чтобы отправиться на работу. Мотор в машине Отто завелся не сразу, и водителю пришлось изрядно потерзать стартер, прежде чем мотор зарокотал и машина смогла тронуться с места.

В кабине у Франца события разворачивались иначе. Тщетно он бился со стартером. Негнущимися от мороза пальцами, открыв капот, проверил проводку и клеммы. Все было в полном порядке. Наконец Франц догадался заглянуть в аккумулятор и обомлел: кислота в нем замерзла!

Вечером оба друга потешались над утренним происшествием.

— Все объясняется очень просто, — заметил Отто. — Полностью заряженный аккумулятор с раствором кислоты плотностью $1,28 \text{ г/см}^3$ замерзает при -70°C , т. е. практически никогда не замерзает. Но когда аккумулятор разряжается, концентрация кислоты падает и у полностью разряженного аккумулятора понижается до $1,10 \text{ г/см}^3$. У пресной воды (плотность $\approx 1 \text{ г/см}^3$) точка замерзания известна: ровно 0°C . Следовательно, у разряженного аккумулятора с плотностью раствора $1,10 \text{ г/см}^3$ точка замерзания где-то между 0°C и -70°C , причем вероятнее всего она ближе к 0°C , чем к -70°C .

— Попробуем оценить температуру замерзания поточнее, — предложил Франц, доставая свой микрокалькулятор. — Две точки у меня есть: 1 г/см^3 при 0°C и $1,28 \text{ г/см}^3$ при -70°C . Через них я могу провести прямую и записать ее уравнение.

Франц хорошо помнил, что отношение приращений y и x любой прямой постоянно, и записал:

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Вычислив значение правой части

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-70 - 0}{1,28 - 1} = -250,$$

он разрешил уравнение относительно y :

$$\begin{aligned}\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} &= m, \\ y - y_1 &= m(x - x_1), \\ y &= m(x - x_1) + y_1, \\ y &= -250x - mx_1 + y_1.\end{aligned}$$

При $x_1 = 1$ значение y_1 известно: $y_1 = 0$, поэтому при $x = 0$

$$y = 0 - (-250) \cdot 1 + 0 = 250.$$

Так как значение y при $x = 0$ совпадает с коэффициентом b уравнения

$$y = mx + b,$$

уравнение принимает вид

$$y = -250x + 250.$$

— Если бы мой аккумулятор был полностью заряжен, то плотность кислоты была бы $1,10 \text{ г/см}^3$, — сказал Франц и подставил это значение в уравнение

$$y = -250 \cdot 1,10 + 250.$$

Таким образом, по оценке Франца, точка замерзания раствора оказалась при -25°C .

— Так холодно заведомо не было, — возразил Отто, — и твой аккумулятор не был полностью разряжен, так что у тебя нет никаких оснований считать линейной зависимость между плотностью кислоты и точкой замерзания.

В справочнике Отто нашел следующие данные:

| <u>Плотность, г/см³</u> | <u>Точка замерзания, °C</u> |
|------------------------------------|-----------------------------|
| 1,28 | -70 |
| 1,26 | -60 |
| 1,25 | -50 |
| 1,11 | -10 |
| 1,10 | -8 |
| 1,00 | ±0 |

— Так и знал, — заметил Франц, — именно тех данных, которые нужны, как раз и нет.

— Но даже на глаз видно, что зависимость нелинейная, — возразил Отто. — Попробуем предположить, что эта зависимость описывается логарифмической функцией. — С этими словами он достал книжку «С микрокалькулятором в руках» и раскрыл ее на разделе «Как построить счетную линейку».

Микрокалькулятор Франца имел клавишу для вычисления $\lg x$, и оба приятеля принялись составлять таблицу:

| x | $\lg x$ | y | y^2 | $(\lg x)^2$ | $y \cdot \lg x$ | i |
|-------|-------------------------------|------------------------|----------------------------|-----------------------------------|-----------------------------------|-----|
| 1,28 | 0,10721 | —70 | 4 900 | 0,01149 | —7,50470 | 1 |
| 1,26 | 0,10037 | —60 | 3 600 | 0,01007 | —6,02223 | 2 |
| 1,25 | 0,09691 | —50 | 2 500 | 0,00939 | —4,84550 | 3 |
| 1,11 | 0,04532 | —10 | 100 | 0,00205 | —0,45323 | 4 |
| 1,10 | 0,04139 | —8 | 64 | 0,00171 | —0,33114 | 5 |
| 0 | 0,000 | 0 | 0 | 0,000 | 0 | 6 |
| <hr/> | | | | | | |
| | 0,39120 ($\Sigma \lg x$) | —198 (Σy) | 11 164 (Σy^2) | 0,03471 ($\Sigma (\lg x)^2$) | —19,15680 ($\Sigma y \lg x$) | n |

Перед составлением такой таблицы следует позаботиться о том, как сократить число нажимаемых клавиш (и тем самым уменьшить возможную ошибку).

Франц надеялся получить линейную зависимость $y = a \lg x + b$ между точкой замерзания y и температурой x . Вычислим прежде всего коэффициент a :

$$a = \frac{\Sigma (y \lg x) - \frac{1}{n} [\Sigma \lg x \cdot \Sigma y]}{\Sigma (\lg x)^2 - \frac{1}{n} (\Sigma \lg x)^2}.$$

Обратите особое внимание на величины в знаменателе: не перепутайте $\Sigma (\lg x)^2$ с $(\Sigma \lg x)^2$.

$$a = \frac{-19,1568 - \frac{0,3912 \cdot (-198)}{6}}{0,03471 - \frac{0,3912^2}{6}} = -678,766.$$

Вычислим свободный член:

$$b = \frac{1}{n} (\Sigma y - a \Sigma \lg x) = \\ = \frac{1}{6} [(-198) - (-678,77) \cdot 0,3912] = 11,26.$$

Итак, предполагаемая зависимость имеет вид

$$y = -678,766 \lg x + 11,26,$$

температура замерзания = $-678,766 \cdot \lg$ (плотность кислоты) + 11,26.

Франц проверил полученную зависимость на известных числах:

$$y = -678,766 \cdot \lg 1,25 + 11,26 = -54,5.$$

Итак, экспериментально измеренная точка замерзания лежит при -50°C . Ошибку в $4,5^\circ$ Франц счел вполне приемлемой и, ободренный, принялся вычислять, при какой плотности кислоты содержимое аккумулятора превращается в ледяное месиво:

$$-20 = -678,766 \lg x + 11,26,$$

$$\lg x = \frac{-31,26}{-678,766} = 0,04605,$$

$$x = 1,11.$$

Это плотность кислоты, замерзающей при -20°C .

Затем оба автолюбителя решили вычислить квадрат коэффициента корреляции r^2 :

$$r^2 = \frac{\left[\Sigma (y \lg x) - \frac{1}{n} \Sigma \lg x \cdot \Sigma y \right]^2}{\left[\Sigma (\lg x)^2 - \frac{1}{n} (\Sigma \lg x)^2 \right] \left[\Sigma y^2 - \frac{1}{n} (\Sigma y)^2 \right]} = \\ = \frac{\left[-19,1568 - \frac{1}{6} \cdot 0,3912 \cdot (-198) \right]^2}{\left[0,03471 - \frac{1}{6} \cdot (0,3912)^2 \right] \left[11164 - \frac{1}{6} \cdot (-198)^2 \right]} = 0,916.$$

— Не так уж плохо! — заметил Отто.

— Совсем неплохо, — подтвердил Франц. — Полученное значение r^2 свидетельствует о том, что зависимость между плотностью кислоты и точкой замерзания на 92% описана правильно.

ЗЕМЛЯ КРУГЛАЯ

В нашей книге «С микрокалькулятором в руках» мы уже рассказывали о вычислениях, производимых в связи с геодезическими съемками. Упоминали мы и о том, как была измерена высота Эвереста. Один из читателей сообщил в письме, как в приведенном нами примере можно было бы учесть кривизну поверхности Земли. Предложенная им идея показалась нам заманчивой, и мы решили рассказать о двух важных проблемах, в которых необходимо учитывать шарообразность Земли: дальность приема УКВ-радиостанций и астрономическое определение географической широты.

Крыши наших домов ошестинились миллионами антенн, чутко улавливающих УКВ-радиопередачи и телевизионные программы. Каждый знает, что чем выше местность и чем выше антенна, тем лучше прием. Ультракороткие волны распространяются практически прямолинейно. Передающие станции располагаются «прямо напротив» тех, кто будет принимать их сигналы, их антенны сооружаются как можно выше: на горах или специально построенных башнях. Максимальное расстояние E между передатчиком и УКВ-приемником определяется по формуле

$$E = 4,12 \sqrt{h_1 + h_2},$$

где h_1 и h_2 — высота передающей и приемной антенн в метрах. Так как квадратные корни лишены для многих из нас наглядного смысла, мы приведем несколько числовых примеров.

Теплоход «Дружба народов» приближается к Варнемюнде со скоростью 16 узлов. Капитану необходимо по УКВ-рации вызвать на борт лоцмана. За сколько часов до прихода в Варнемюнде ему удастся это сделать? Антенна УКВ-радиостанции в Варнемюнде находится на высоте 35 м, антенна теплохода «Дружба народов» также смонтирована на самой высокой мачте (25 м над уровнем моря), поэтому

$$E = 4,12 \sqrt{35 + 24} \text{ км} = 31,65 \text{ км.}$$

или (1 морская миля = 1,852 км),

$$31,65 \text{ км} \cdot 1,852 \text{ км/мор. миль} = 17,09 \text{ мор. миль.}$$

Так как скорость в 1 узел означает, что судно проходит 1 морскую милю в час, а «Дружба народов» идет со скоростью 16 узлов, до прихода остается

$$17,09 \text{ мор. миль} : 16 \text{ мор. миль/ч} = 1,07 \text{ ч.}$$

Пересчитаем в минуты десятичную дробь 0,07 ч. Для этого можно воспользоваться специальной клавишей для перевода десятичных долей градуса в минуты (если такая клавиша есть у вашего микрокалькулятора) или вычислить дробь $60 \cdot 7/100$.

Итак, находясь в 17 морских милях от Варнемюнде, капитан берет в руки микрофон, включает 16-й канал (в котором происходит радиообмен) и устанавливает связь с лоцманской службой на берегу.

На аэродромах и в полиции применяются портативные УКВ-радиостанции. Их антенны едва возвышаются над головой человека, поэтому

$$E = 4,12 \cdot \sqrt{1,5 + 1,5} \text{ км} = 7,14 \text{ км.}$$

Из-за низкой выходной мощности радиопередатчика многие модели не обеспечивают устойчивый прием даже на этом расстоянии.

На равнинной местности, например в Берлине или Москве, сооружение высоких башен для передающих антенн позволяет вести трансляцию радио- и телепрограмм на довольно большие расстояния. Самая высокая радиобашня сооружена в Константинове (Польша) для трансляции передач варшавского радио. В книге «*Lexicon der Superlative*» («Самый, самый...»), откуда заимствованы эти данные, сообщается, что высота башни с основанием 2120 футов 8 дюймов (1 фут = 0,3048 м, 1 дюйм = 2,54 см), следовательно, высота польской радиобашни 640,40 м. Авторы книги замечают по этому поводу, что тем самым рекорд высоты, отнятый у Европы (Эйфелева башня в Париже) в связи с завершением строительства в Нью-Йорке небоскреба «Эмпайр-стейтс билдинг» вновь вернулся в Европу. Телебашня в Москве имеет высоту 537 м, телебашня в Берлине — 365 м.

Несмотря на огромную высоту польской радиобашни, она обеспечивает прием радиопередач в УКВ-диапазоне только в радиусе ~ 100 км, т. е. охватывает территорию площадью около 3500 км^2 (прикиньте на своем микрокалькуляторе и вы убедитесь сами),

но из-за квадратного корня радиус устойчивого приема увеличивается гораздо медленнее, чем высота радиобашен. Сопоставим характерные показатели трех самых высоких радио- и телебашен.

| | Высота h , м | % | Дальность приема $r = 4,12 \sqrt{h + 0}$, км | % | Площадь территории πr^2 , км ² | % |
|---------|-------------------|-----|---|-----|--|-----|
| Берлин | 365 | 100 | 79 | 100 | 19 607 | 100 |
| Москва | 537 | 147 | 95 | 120 | 28 353 | 145 |
| Варшава | 646 | 177 | 105 | 123 | 34 636 | 177 |

Приступая к составлению или проверке таблицы, проверьте, нельзя ли уменьшить число нажимаемых клавиш: чем меньше раз вы нажимаете на клавиши, тем меньше вероятность ошибки.

Из таблицы видно, что с увеличением высоты дальность приема увеличивается, хотя и не так быстро, а территория приема передач возрастает пропорционально высоте антенны. При строительстве радио- и телебашен прежде всего учитывается территория уверенного приема, а также численность населения на ней, поэтому телебашни обычно сооружают в центре города.

ДАЛЕКО ЛИ УЕДЕШЬ НА ОДНОМ ЛИТРЕ БЕНЗИНА?

Автолюбители весьма склонны хвастать тем, что их машины расходуют мало горючего. В обычном автомобиле массового производства на 1 л бензина можно проехать около 25 км.

Один владелец мопеда утверждал, что 3 л бензина ему достаточно на 100 км пути, т. е. что расход горючего составляет 1 л на 30 км.

Из осторожности проверим на экономичность лодочные моторы. Дела у их создателей обстоят не блестяще: 1 л бензина лодочному мотору едва хватает примерно на 1 морскую милю (1,852 км).

А теперь займемся исследованиями. Твердо установлено: чем больше железа, тем выше расход горючего. С повышением скорости расход горючего также возрастает, причем быстрее, чем прямо пропорционально.

Самый легкий из всех транспортных средств — велосипед. Говоря о велосипедах, мы имеем в виду не складные велосипеды (которые используются главным образом для того, чтобы засидевшиеся за рулем водители автомашин могли согнать излишки веса), а обычные туристские или дорожные. Во время продолжительной езды на таком велосипеде со скоростью, например, 9 км/ч мы расходует мощность около 30 Вт (столько же, сколько небольшая лампа накаливания). Один литр бензина содержит энергию

$$8000 \text{ ккал} = 8000 \cdot 4,1868 \cdot 10^3 \text{ Дж} = 33\,490\,000 \text{ Дж}.$$

Мы привыкли иметь дело с киловатт-часами, поэтому переведем в них:

$$8000 \text{ ккал} = 8000 \cdot 1,16 \cdot 10^{-3} \text{ кВт} \cdot \text{ч} = 9,28 \text{ кВт} \cdot \text{ч}$$

Эту энергию в 9,28 кВт·ч мы сообщим моторчику мощностью 30 Вт, который поставим на наш велосипед. Весом моторчика и 1 л бензина по сравнению с весом велосипедиста (75 кг) можно пренебречь. На подведенной энергии моторчик сможет работать

$$9280 \text{ Вт} \cdot \text{ч} : 30 \text{ Вт} = 309 \text{ ч}.$$

За это время велосипед проедет 2784 км.

Разумеется, наши расчеты — не более чем грубая прикидка, так как мы не приняли во внимание коэффициент полезного действия. Приняв его равным 25 %, мы сократим длину пробега велосипеда до 696 км. Вам и это расстояние кажется неправдоподобно большим? Напрасно: ежегодно находится какой-нибудь умелец, который на велосипедном моторчике собственной конструкции умудряется проехать на 1 л бензина около 500 км.

Если мы хотим ехать на велосипеде со скоростью не 9 км/ч, а 18 км/ч, то для этого нам потребуется мощность 120 Вт. Дело в том, что мощность возрастает гораздо быстрее скорости.

Итак, мы видим, что расход горючего можно снизить, если ездить медленнее и строить более легкие автомашины,

В то же время наш пример показывает, как дешево стоит физический труд: 30 Вт·ч работы по обычной цене за электроэнергию (8 пфеннигов за 1 кВт·ч) покупаем у электросети за

$$\frac{8 \text{ пфеннигов} \cdot 30}{1000} = 0,24 \text{ пфеннига.}$$

Но кто станет работать за 1/4 пфеннига, даже если для этого требуется проехать 9 км на велосипеде за 1 ч? Столь явное несоответствие между затратами и вознаграждением допустимо только, если затрачиваемая работа совершается ради удовольствия.

КОМПЬЮТЕР ИЛИ СЧЕТЫ?

Космический корабль с научной экспедицией на борту достиг огромной кометы, которая каждые 2 млн. лет совершает оборот вокруг Солнца. Внезапно по неизвестным причинам выходит из строя бортовой компьютер. А без расчета траектории невозможно возвратиться на родную землю. Такова завязка научно-фантастических рассказов Артура Кларка «Пленники кометы». Члены экспедиции покорились было неизбежной судьбе — погибнуть с голоду или задохнуться от недостатка кислорода. И тут находившемуся на борту журналисту приходит в голову блестящая идея. Его бабушка, японка, в детстве научила его обращаться с распространенными в странах Азии счетами. Журналисту удается вспомнить некоторые приемы вычислений на счетах. От бабушки ему известно, что при некотором навыке скорость вычислений на счетах во много раз превосходит скорость вычислений с помощью карандаша и бумаги. Из проволоки и шариков он изготавливает несколько экземпляров счет и обучает обращению с ними всех членов экспедиции. Вы догадываетесь, чем закончилась эта история.

Житель Центральной Европы знакомится со счетами — рамкой с темными и светлыми костяшками из дерева, нанизанными на толстые спицы (рис. 26), когда ему случится побывать в Советском Союзе.

Продавщицы ловко подсчитывают на счетах стоимость товаров. Быстрее всего выполняются операции сложения и вычитания, но можно также умножать и делить.

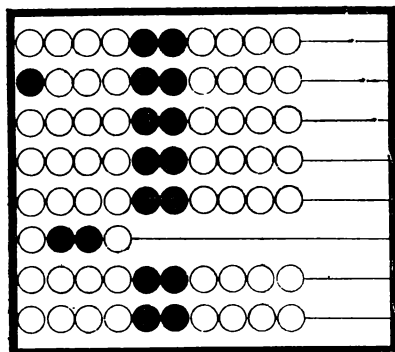


Рис. 26. Счеты для пятизначных чисел.

Так, чтобы умножить 279 на 367, число 279 прибавляют семь раз в разряде единиц, шесть — в разряде десятков и три — в разряде сотен.

Счеты, изображенные на рис. 26, позволяют производить операции с пятизначными числами. Верхние пять рядов костяшек служат для сложения или вычитания, а три нижних — для умножения или деления.

В странах Восточной Азии счеты и поныне остаются любимым вычислительным прибором. Между приверженцами японских счет проводятся даже соревнования.

Лет десять назад огромный интерес вызвало состязание между большим компьютером и одним из виртуозов вычислений на японских счетах того времени. И человек со счетами одержал победу над компьютером. С современными микрокалькуляторами японские счеты вряд ли могли бы конкурировать. Тем не менее в банковском деле и в государственных учреждениях Японии счеты и поныне находят широкое применение. По мнению японцев, счеты и более надежны в работе.

И все же, поработав некоторое время со счетами, вы сможете по достоинству оценить удобство работы

с современным калькулятором хотя бы потому, что у него имеются клавиши для вычисления многих функций.

ФИЗИЧЕСКИЕ ПОСТОЯННЫЕ ДЛЯ ВЫЧИСЛЕНИЙ

| Название | Обозначение | Численное значение | Единицы |
|--|-----------------|----------------------------|--|
| Скорость света в вакууме | c | $0,2998 \cdot 10^6$ | $\text{м} \cdot \text{с}^{-1}$ |
| Ускорение свободного падения | g | 9,80665 | $\text{м} \cdot \text{с}^{-2}$ |
| Гравитационная постоянная | λ | $6,672 \cdot 10^{-11}$ | $\text{Н} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{кг}^{-2}$ |
| Средний радиус орбиты Земли (1 а. е.) | | $0,149\,598 \cdot 10^{12}$ | м |
| Радиус Солнца | | $0,695 \cdot 10^9$ | м |
| Масса Солнца | | $1,99 \cdot 10^{30}$ | кг |
| Радиус Земли | | $6,378 \cdot 10^6$ | м |
| Масса Земли | | $5,997 \cdot 10^{24}$ | кг |
| Радиус Луны | | $1,738 \cdot 10^6$ | м |
| Масса Луны | | $7,35 \cdot 10^{22}$ | кг |
| Радиус орбиты Луны | | $0,3844 \cdot 10^9$ | м |
| Объем моля идеального газа в нормальных условиях | $V_{\text{мо}}$ | $22,4138 \cdot 10^{-3}$ | $\text{м} \cdot \text{моль}^{-1}$ |
| Число Авогадро | N_A | $6,022045 \cdot 10^{23}$ | моль^{-1} |
| Молярная газовая постоянная | R | 8,31441 | $\text{Дж} \cdot \text{К}^{-1} \cdot \text{моль}^{-2}$ |
| Постоянная Больцмана | k | $1,380662 \cdot 10^{-23}$ | $\text{Дж} \cdot \text{К}^{-1}$ |
| Постоянная Планка (квант действия) | h | $6,626176 \cdot 10^{-34}$ | $\text{Дж} \cdot \text{с}$ |
| Постоянная Стефана — Больцмана | σ | $5,67032 \cdot 10^{-8}$ | $\text{Вт} \cdot \text{м}^{-2} \cdot \text{К}^{-4}$ |

Литература

- Benschold E. Problem Wasser. — Leipzig, Jena, Berlin: Urania-Verlag, 1978.
- Bild der Wissenschaft, 1978, 15, S. 68—101.
- Clarke A. C. Die Gefangene des Kometen: Das Raumschiff. — Berlin: Verlag Neues Leben, 1977, S. 236—246.
- Gilde W. Gespiegelte Welt. — Leipzig: VEB Fachbuchverlag, 1979. [Русский перевод: Гильде В. Зеркальный мир. — М.: Мир, 1982.]
- Gilde W., Altrichter S. Seltsames um den gesunden Menschenverstand. — Leipzig: VEB Fachbuchverlag, 1976.
- Gilde W., Altrichter S. Mehr Spaß mit dem Taschenrechner. — Leipzig: VEB Fachbuchverlag, 1980. [Русский перевод: Гильде В., Альрихтер З. С микрокалькулятором в руках. — М.: Мир, 1980, 1987.]
- Keck C., Windischbauer G. Die Angst vor dem «Ex äquo»? Phys. Blätter, 1978, 5, S. 218—224.
- Kleine Enzyklopädie Mathematik. — Leipzig: VEB Bibliographisches Institut, 1965.
- Kreul H. Was kann mein elektronischer Taschenrechner? — Leipzig: VEB Fachbuchverlag, 1980. [Русский перевод: Кройль Г. Что умеет мой микрокалькулятор? — М.: Мир, 1981.]
- Lexicon der Superlative. — Gütersloh: Bertelsmann Lexicon — Verlag, 1976.
- Растрегин Л. А. По воле случая. — М.: Молодая гвардия, 1986.
- Sommerfeld A. Mechanik. — Leipzig: Akademische Verlagsgesellschaft. Geet & Portig K.-G., 1947. [Русский перевод: Зоммерфельд А. Механика. — М.: ИЛ, 1947.]
- Vogel K. Beiträge zur Geschichte der Arithmetik. — München: Minerva Publikation, 1978.
- Библиотеки программ различных фирм, выпускающих микрокалькуляторы.

Содержание

| | |
|--|-----|
| От переводчика | 5 |
| Предисловие | 7 |
| Просьба к читателю: прочтите непременно! | 9 |
| Наиболее употребительные обозначения на клавиатуре микро- калькуляторов | 10 |
| Жарко ли в аду? | 12 |
| Многоликая теорема Пифагора | 16 |
| Охрана окружающей среды и коэффициент полезного дей- ствия | 19 |
| С теодолитом и мерной рейкой | 22 |
| Пирамида Хеопса | 25 |
| Шифровка и дешифровка | 31 |
| Нуль: нуль = ? | 33 |
| Кривая «антиснежинка» | 35 |
| Как это начиналось | 38 |
| В глазах рябит | 41 |
| О солнечном излучении | 45 |
| Советы голубеводам | 52 |
| О корреляции и некоторых моделях, требующих известной осмотрительности | 58 |
| Кратчайший путь | 63 |
| Преодоление звукового барьера | 67 |
| Почему у кита нет ног? | 70 |
| Расщепление урана | 73 |
| Точное время | 77 |
| Итерации | 80 |
| Победа на олимпиаде | 84 |
| Что такое одна секунда | 86 |
| Какое простое число самое большое? | 88 |
| У пределов познанного | 93 |
| Солнце и вода | 94 |
| Солнце и его спутники | 98 |
| В сауне | 102 |
| Крюшон | 106 |
| И невозможное возможно | 109 |
| Вечный календарь | 111 |
| Всемирный потоп | 115 |
| Число Эйлера | 118 |
| Мечта Гёте | 122 |
| От Петербурга до Урала | 125 |
| Свободное падение | 129 |

| | |
|--|-----|
| Велика ли Вселенная? | 135 |
| Размеры Земли | 138 |
| Результат, правильный несмотря на ошибки | 141 |
| Прыжки и полеты | 146 |
| Приз в 100 000 марок | 149 |
| Путешествия в старину | 150 |
| Попробуйте оценить | 154 |
| Сколько километров проехала покрышка? | 158 |
| Сварка в космосе | 163 |
| Сглаживание функций | 166 |
| Дела международные | 172 |
| Если взять все эти капли | 175 |
| Шах компьютеру | 177 |
| Маяк «Солнце» | 182 |
| Кое-что о парусном спорте | 185 |
| Замерзший аккумулятор | 187 |
| Земля круглая | 192 |
| Далеко ли уедешь на одном литре бензина? | 194 |
| Компьютер или счеты? | 196 |
| Физические постоянные для вычислений | 198 |
| Литература | 199 |

В предлагаемой вниманию читателя книге микрокалькулятор предстает как гибкий и универсальный инструмент познания окружающего мира, необходимый не только инженеру, исследователю, студенту, школьнику, но и всякому любознательному человеку.

Развертывая перед изумленным читателем длинную вереницу задач самого различного содержания, авторы убедительно демонстрируют богатейшие возможности микрокалькуляторов и попутно исподволь приобщают тех, кто не искушен в различного рода вычислительных хитростях, к высокому искусству рационального счета.