Е. Д. КУЛАНИН, Н. Н. ЛЕМЕШКО, В. Л. ШАМШУРИН

МИКРО-КАЛЬКУЛЯТОРЫ В КУРСЕ МАТЕМАТИКИ

(СБОРНИК ЗАДАЧ)

Допущено
Государственным комитетом СССР
по народному образованию
в качестве учебного пособия
для средних специальных
учебных заведений

МОСКВА «ВЫСШАЯ ШКОЛА» 1989

3

ББК 74.262
К90
УДК 518

Р е ц е н з е н т ы:
канд. техн. наук. *Л.Н. Линник*
(Объединение "Московский электроламповый завод");
О.М. Сорокина
(Московский техникум электронных приборов)

К $\frac{4306020500-112}{001(01)-89}$ 103 – Св. план для сред. спец. учеб. заведений – 89

ISBN 5–06–000558–5

ПРЕДИСЛОВИЕ

Умение работать с электронно-вычислительной техникой различных типов является в настоящее время важной составляющей квалификационной характеристики любого специалиста. В пояснительной записке к программе по математике для средних специальных учебных заведений указывается: "В процессе изучения математики необходимо прививать учащимся навыки и умения работы с вычислительной техникой (микрокалькуляторами, персональными компьютерами), создавая условия для последующего овладения навыками работы на ЭВМ различных классов"*.

Цель настоящего сборника задач по математике – показать учащимся возможность решать различные математические задачи с помощью программируемого микрокалькулятора, научить применять микрокалькулятор для самостоятельного решения задач и пользоваться готовыми программами при решении определенного класса задач. Важно также показать учащимся, что главным в решении математической задачи являются знания, умения и навыки по математике, а микрокалькулятор выступает лишь в качестве вспомогательного вычислительного средства. С другой стороны, использование микрокалькулятора необходимо при решении различных прикладных задач, где важно конкретное числовое значение полученного результата и его дальнейшее практическое применение.

Решение задач, представленных в сборнике, ориентировано на использование микрокалькулятора "Электроника МК-54". Этот тип микрокалькулятора совместим по системе команд с другими программируемыми микрокалькуляторами БЗ-34, МК-56, МК-61 (у последнего несколько расширены функциональные возможности по сравнению с первыми моделями).

Для удобства работы со сборником задач в I главе даны не только сведения общего характера, касающиеся устройства микрокалькулятора МК-54, но и основные приемы работы с ним. В качестве приложения к сборнику приводятся таблицы кодов команд и назначения клавиш МК-54.

В приложении помещен также словарь основных терминов

---

*Математика: Программа для средних специальных учебных заведений на базе 8 классов средней школы. – М.: Высшая школа, 1986. С. 3.

по информатике и вычислительной технике. Цель этого приложения – не только помочь учащемуся в работе с книгой, но и расширить его кругозор, так как терминология, связанная с вычислительной техникой, все больше проникает в язык широкого круга пользователей ЭВТ.

При составлении этого словаря была использована следующая литература:

Заморин А.П., Марков А.С. Толковый словарь по вычислительной технике и программированию. – М.: Русский язык, 1987.

Трохименко Я.К. Программирование микрокалькуляторов "Электроника МК-52" и "Электроника МК-61". – Киев: Техника, 1987.

Математический энциклопедический словарь. – М.: Советская энциклопедия, 1988.

Если среднее специальное учебное заведение оснащено инженерными микрокалькуляторами, рекомендуется использовать на занятиях только те задачи, которые не требуют для своего решения большого числа однотипных вычислений. Образцы решения таких задач выполнены в режиме "Автоматическая работа" МК-54.

Материал I главы носит в целом справочный характер, однако начинающим работать с МК-54 он будет очень полезен. Кроме того, примеры I главы позволяют использовать имеющиеся в них программы при решении других задач. Содержание I главы может быть использовано преподавателем математики, а также преподавателем информатики для обучения учащихся навыкам работы с МК-54.

В подборе содержания задач авторы стремились показать прикладную направленность математики и возможность решать многие задачи специальными приемами вычислительной математики, используя электронно-вычислительную технику. Содержание сборника охватывает наиболее важные разделы программы. При этом учитывалась возможность использовать настоящий сборник при изучении дополнительных разделов курса (например, задачи на приближенное решение уравнений) и на внеклассной работе.

При подборе задач использовались задачники и пособия, указанные в списке литературы.

В начале каждого параграфа приводится пример с подробным решением. Одним из результатов решения является программа для микрокалькулятора, которая может быть использована при решении других задач этого параграфа. Готовые программы сопровождаются подробными комментариями, так как данная работа рассчитана на неподготовленного читателя. Такие комментарии (как правило, отсутствующие в справочниках и пособиях по использованию микрокалькуляторов) облегчают начинающим усвоение приемов, связанных с конструированием программ для программируемого микрокалькулятора.

Авторы не стремились к использованию больших программ. В то же время преподавателю следует учесть, что ввод программы на 20–50 шагов в программную память микрокалькулятора может занимать по времени несколько минут, поэтому, если данное занятие будет целиком посвящено решению определенного класса задач с использованием готовой программы, то программу лучше заранее ввести в микрокалькулятор с помощью самих учащихся.

Новые модели микрокалькуляторов (например, МК-52) обладают не только большим объемом памяти, но и возможностью длительное время хранить записанные в память микрокалькулятора программы, даже после отключения питания. Навыки программирования на микрокалькуляторе не исключают, а, наоборот, способствуют более быстрому усвоению приемов программирования на алгоритмическом языке, каким, например, является БЕЙСИК.

К большинству содержащихся в сборнике задач даны ответы, а к некоторым подробные решения или указания.

ГЛАВА I. ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ ВОЗМОЖНОСТИ И ОСНОВНЫЕ ПРИЕМЫ ВЫЧИСЛЕНИЙ НА ПРОГРАММИРУЕМОМ МИКРОКАЛЬКУЛЯТОРЕ "ЭЛЕКТРОНИКА МК-54"

§ 1. ОСНОВНЫЕ ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ БЛОКИ МИКРОКАЛЬКУЛЯТОРА "ЭЛЕКТРОНИКА МК-54"

Программируемый микрокалькулятор (МК), как и любая ЭВМ, работает с информацией, представленной в конечном счете двоично-десятичным кодом (сочетание нулей и единиц). Его внутреннее устройство имеет много общего с ЭВМ. Работающему с микрокалькулятором полезно ознакомиться с краткой характеристикой его основных функциональных блоков.

Индикатор (дисплей) – устройство для отображения и контроля вводимой и выводимой информации. Индикатор МК-54 представляет собой люминесцентный семисегментный индикатор, в котором каждый отображаемый символ является комбинацией четырех вертикальных и трех горизонтальных светящихся отрезков. Число разрядов индикатора – 12. Для цифр числа, представленного в обычной десятичной форме, отводится 8 разрядов, а крайний левый разряд – для отображения знака числа (только знака "–"). Диапазон представления чисел в этой форме от 10^{-7} до $10^{8} - 1$ (по модулю). Кроме того, МК-54 оперирует с числами, представленными в стандартной или показательной форме, т.е. в виде $m \cdot 10^{n}$, где $1 \leqslant |m| < 10$ – мантисса числа, а n – порядок числа (целое число).

При отображении чисел стандартного вида разряды индикатора микрокалькулятора распределяются таким образом: крайний левый разряд отводится для знака мантиссы числа (знака "–"), следующие 8 разрядов – для мантиссы числа m, следующий, 10-й разряд, – для знака порядка; если $n < 0$, то отображается только знак "–", последние 11-й и 12-й разряды отводятся для порядка числа n. Диапазон представления чисел стандартной формы от 10^{-99} до $9{,}9999999 \cdot 10^{99}$ (по модулю).

Клавиатура – устройство для ввода информации в МК (чисел и команд пользователя). Система команд МК – это все доступные пользователю команды, которые он может вводить в МК с клавиатуры. Система команд является важной характеристикой возможностей МК. Систему команд МК-54 можно условно разделить на шесть групп:

1. Управление состояниями МК (включение, выключение, выбор режимов работы).

2. Ввод чисел (операндов), команды коррекции ошибок ввода.

3. Выполнение четырех арифметических действий.

4. Операции с регистрами памяти (запись чисел в адресуемые регистры памяти, вызов содержимого регистров памяти в регистр индикации, управление регистрами стековой памяти).

5. Вычисление значений математических функций.

6. Команды управления работой МК в режиме "программирование" (команды передачи управления, команды потактового прохождения программы, команды редактирования программы).

Внешний вид микрокалькулятора "Электроника МК-54" показан на рис. 1.

Микропроцессор – основной функциональный блок внутреннего устройства МК. Именно он ведет всю переработку поступающей информации. Составными частями микропроцессора являются: арифметическое и логическое устройство (АЛУ), выполняющее элементарные операции сложения, вычитания и умножения чисел, а также различные регистры (элементы памяти): командный, адресный, операционный, накапливающий и др. С микропроцессором МК связано постоянное запоминающее устройство (ПЗУ), в котором хранятся различные микропрограммы выполнения тех или иных действий. Эти микропрограммы не могут быть изменены пользователем. Они извлекаются в процессе исполнения команд, поступающих с клавиатуры или команд программы, составленной пользователем и записанной в оперативном запоминающем уст-

Рис. 1

ройстве (ОЗУ программ). С микропроцессором соединено и ОЗУ данных (адресуемые регистры), а также регистры стековой памяти.

Устройство управления – устройство, вырабатывающее команды для обмена информацией между блоками и согласующее работу всех блоков. В перспективных моделях МК к устройству управления могут подключаться внешние устройства (магнитофон для записи и считывания программ, накопитель на магнитной карте, принтер и т.д.).

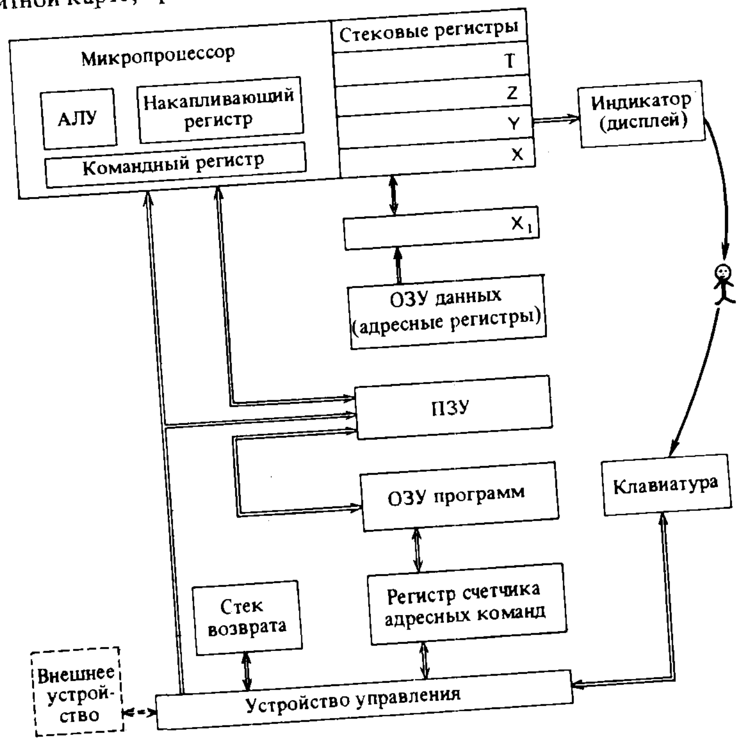


Рис. 2

На рис. 2 представлена схема функциональных блоков МК. Пользователю доступны лишь некоторые из всех регистров МК, в частности адресуемые регистры, регистры стека и предыдущего результата. В режиме "Программирование" пользователь имеет доступ к регистру счетчика адресных команд (САК) и к регистрам программной памяти, содержимое которых отображается на индикаторе в виде текущего адреса команды и ее кода. Все указанные регистры связаны с операционным регистром RX, а через него – с индикатором.

§ 2. СИСТЕМА КОМАНД МИКРОКАЛЬКУЛЯТОРА "ЭЛЕКТРОНИКА МК-54"

1. Команды управления состояниями микрокалькулятора

Включение прибора приводит МК в исходное состояние – готовности к вычислениям в автоматическом режиме. При включении микропроцессор выполняет определенные действия, например записывает нули во все регистры МК. В режиме автоматической работы пользователь сам является исполнителем алгоритма решения той или иной задачи, реализуя каждую команду нажатием соответствующей клавиши. Следующим состоянием МК является режим "Программирование". Командами $\boxed{\text{В/0}}$ $\boxed{\text{F}}$ $\boxed{\text{ПРГ}}$ пользователь устанавливает счетчик адресов команд (САК) в исходное состояние (адрес 00). После этого МК готов к приему в ОЗУ программы пользователя. Составной командой $\boxed{\text{F}}$ $\boxed{\text{АВТ}}$ МК возвращается в режим автоматической работы.

Очень важным моментом в работе с МК является состояние "переполнения", которое может возникнуть в результате недостатка числа рядов разрядной сетки индикатора МК или при выполнении недопустимой операции (деление на 0, извлечение квадратного корня из отрицательного числа и т.п.). Символом Error (ошибка) индикатор выдает сообщение о состоянии переполнения. После этого сообщения можно продолжать вычисления, вводя новое число. К командам управления состояниями МК можно отнести и действия с переключением Р – ГРД – Г, которым устанавливают представление аргумента тригонометрических функций в градусах, градах (100 град = 90°) или радианах. Управление представлением аргумента (радианы, градусы или грады) осуществляется пользователем в режиме "Автоматическая работа".

2. Ввод чисел

Числа, представленные в обычной десятичной записи, в диапазоне от 10^{-7} до $10^{8} - 1$ вводятся в регистр RX нажатием соответствующих цифровых клавиш на клавиатуре МК в последовательности, соответствующей последовательности цифр в записи числа, включая запятую, отделяющую целую часть числа от дробной. Если число отрицательное, то после ввода цифр нажимают клавишу $\boxed{/-/}$ – изменения знака числа. Число N сохраняет свою обычную форму записи при отображении на индикаторе, если $1 \leqslant |N| \leqslant 10^8 - 1$. Если же $|N| < 1$, то после нажатия клавиши $\boxed{В\uparrow}$ или выполнения любой из команд $\boxed{x \to П}$ $\boxed{n}$, $\boxed{П \to x}$ $\boxed{n}$ ($n = 0, \ldots, 9, a, b, c, d$) изображение числа N на индикаторе имеет вид $a \cdot 10^n$. Точно так же любое число N, являющееся результатом вычислений на МК, если $|N| < 1$ будет представлено в виде $a \cdot 10^n$.

Числа стандартного вида ($a \cdot 10^n$) вводят по следующему алгоритму:

– ввести мантиссу числа a (не более 8 знаков);

– ввести знак числа с помощью клавиши $\boxed{/-/}$, если $a < 0$;

– нажать клавишу $\boxed{ВП}$;

– ввести порядок числа n;

– ввести знак порядка с помощью клавиши $\boxed{/-/}$, если $n < 0$.

Коррекция ошибок при вводе чисел заключается в очистке регистра индикатора с помощью клавиши $\boxed{Cx}$. На индикаторе в этом случае появляется 0, и ввод числа производится повторно. Если ошибка допущена при вводе порядка числа, то его вводят снова.

3. Выполнение арифметических операций в режиме "Автоматическая работа"

МК-54 относится к типу микрокалькуляторов с обратной бесскобочной записью операций (обратной бесскобочной логикой вычислений). Что это означает?

Пусть нужно вычислить выражение $a + bc$. Для этого сначала вычислим произведение bc, а затем результат сложим с числом a. Мы использовали здесь неявно правила старшинства операций, требующие того, чтобы сначала выполнялись операции третьей ступени (возведение в степень, извлечение корня), затем операции умножения и деления и только после этого – операции сложения и вычитания. Если требуется изменить порядок вычислений, то используются скобки (например, $(a + b)\ c$).

В микрокалькуляторах с алгебраической логикой вычислений, выполняющих операции в привычном для нас виде, вычисление выражения $a + bc$ может происходить по-разному. Инженерный микрокалькулятор МК-41, различающий иерархию операций, вычислит данное выражение так, как оно написано, а микрокалькулятор МКШ-2 вычислит данное выражение так, как будто бы в нем имелись скобки, т.е. $(a + b)c$. Это произойдет потому, что МКШ-2 выполняет операции в последовательности их записи, не различая старшинства операций.

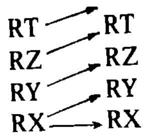
Польским математиком Я. Лукасевичем (1878–1956) была предложена запись математических выражений, не допускающая произвольного истолкования последовательности операций и в то же время позволяющая обходиться без скобок.

В обратной бесскобочной записи выражения знак операции ставится после записи чисел, а знак операции относится к последнему или двум последним числам. Так, например, выражение $a + bc$ в обратной бесскобочной записи будет выглядеть следующим образом: $abc \times +$ (горизонтальными скобками выделены два операнда каждой операции). Выражение $ab + cd$ запишется как $ab \times cd \times +$, а выражение $(a - b)(c - d)$ – как $ab - cd - \times$ и т.д. Таким образом можно записать любое математическое выражение.

Обратная бесскобочная логика вычислений широко используется в различных типах МК, в частности в МК-54. Можно легко определить, с какой логикой вычислений, алгебраической или обратной бесскобочной МК: у МК с обратной бесскобочной логикой вычислений на клавиатуре отсутствует клавиша $\boxed{=}$.

Рассмотрим, как реализована в МК-54 обратная бесскобочная запись математических выражений.

В записи выражения $abc \times +$ числа a, b, c упорядочены в соответствии со старшинством выполняемых операций. Просто последовательный ввод этих чисел в МК ни к чему не приведет: на индикаторе останется последнее вводимое число c, а предыдущие числа сотрутся. Чтобы этого не произошло необходимо при вводе чисел как-то сохранять их. Для этого в МК-54, а также в подобных ему МК имеется несколько запоминающих регистров, связанных между собой и образующих так называемый кольцевой стек. Стековый регистр МК-54 состоит из 4 регистров: регистра RX, связанного с регистром индикации, и регистров RY, RZ, RT (регистры RX и RY называются операционными регистрами). Условно их можно изобразить в виде полочек, расположенных одна над другой. Информация в стеках может перемещаться только снизу вверх или сверху вниз. Для разделения чисел при вводе и перемещении их в регистрах стека используется клавиша $\boxed{\text{В}\uparrow}$. Каждое ее нажатие сдвигает информацию из одного регистра в другой:

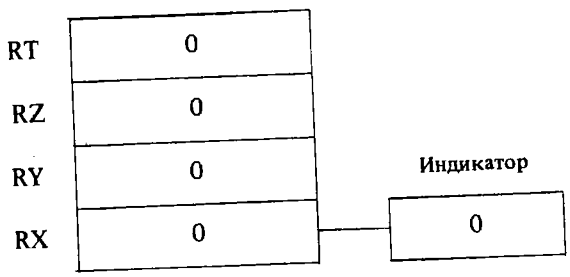


При этом содержимое в регистре RX сохраняется до ввода нового числа.

Пример 1. Вычислите значение выражения 0,5 + 2 · 3 · 4. В обратной бесскобочной записи оно имеет вид 0,5 2 3 4 X X +

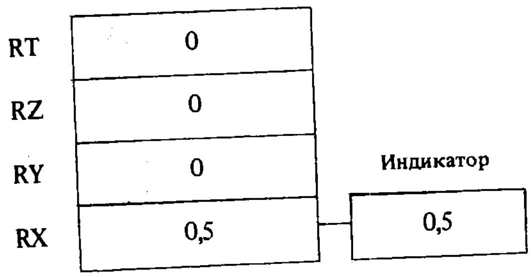
После включения МК информация в стеках распределяется следующим образом:

▲ ВКЛ



Ввод числа 0,5:

$\boxed{0}$ $\boxed{\cdot}$ $\boxed{5}$



Нажатие клавиши $\boxed{\text{В}\uparrow}$:

В↑

RT	0		
RZ	0		
RY	0,5		Индикатор
RX	0,5	—	0,5

Ввод числа 2:

$\boxed{2}$

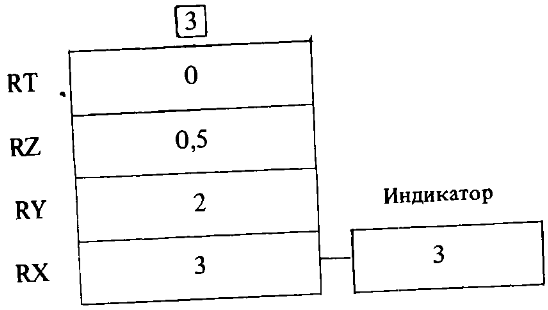
RT	0		
RZ	0		
RY	0,5		Индикатор
RX	2	—	2

Нажатие клавиши $\boxed{\text{В}\uparrow}$:

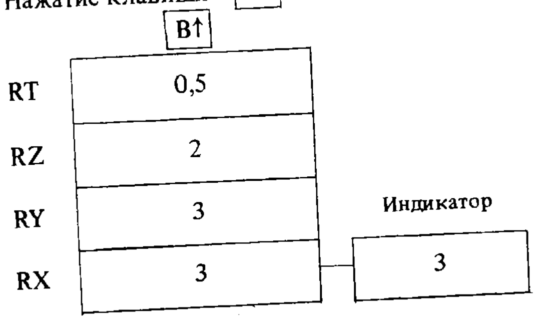
$\boxed{\text{В}\uparrow}$

RT	0		
RZ	0,5		
RY	2		Индикатор
RX	2	—	2

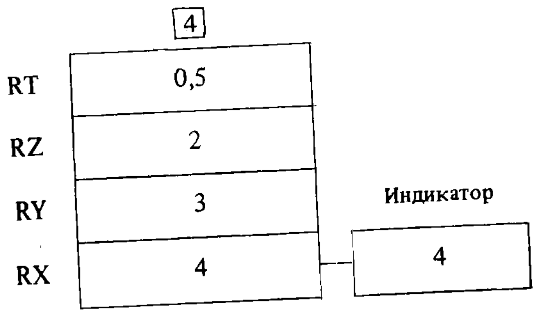
Ввод числа 3:



Нажатие клавиши $\boxed{В\uparrow}$:

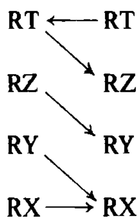


Ввод числа 4:



Выполнение операции умножения:

$\boxed{\times}$ $\boxed{\times}$



RT	0,5	
RZ	0,5	
RY	2	Индикатор
RX	12	12

Все числа сместились вниз. При этом в RT осталось число 0,5, в RX – результат умножения.

Выполнение второй операции умножения:

$\boxed{\times}$

RT	0,5	
RZ	0,5	
RY	0,5	Индикатор
RX	24	24

После смещения чисел в RT, RZ, RY – запишется число 0,5. В RX – результат $3 \cdot 4 \cdot 2 = 24$.

Выполнение операции сложения:

$\boxed{+}$

RT	0,5	
RZ	0,5	
RY	0,5	Индикатор
RX	24,5	24,5

В RT, RZ, RY – число 0,5. В RX – результат вычисления значения выражения $0,5 + 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24,5$.

Пример 2. Вычислите значение выражения $2 \cdot 3 + 4 \cdot 5$.

В обратной бесскобочной записи вид этого выражения следующий: 2 3 X 4 5 X +

Программа:

Шаг	Команда	Комментарии
1	2	Ввод числа 2. В RY, RZ, RT – нули после включения МК
2	В↑	Запись числа 2 в RY. В RZ, RT – нули, в RX – число 2
3	3	Ввод числа 3. В RX – 3, в RY – 2, в RZ, RT – нули
4	X	Вычисление значения $2 \cdot 3$. В RX – 6, в RY – 0, в RZ, RT – нули. Произошел сдвиг содержимого регистров вниз
5	4	Ввод числа 4. В RX – 4, в RY – 6, в RZ, RT – нули После выполнения операции ввод нового числа приводит к сдвигу содержимого регистров
6	В↑	Запись числа 4 в RY. В RX – 4, RZ – 6, в RT – 0
7	5	Ввод числа 5. В RX – 5, в RY – 4, в RZ – 6, в RT – 0
8	X	Вычисление значения $4 \cdot 5$. В RX – 20, в RY – 6, в RZ, RT – нули. Произошел сдвиг содержимого регистров вниз
9	+	Вычисление значения $2 \cdot 3 + 4 \cdot 5$. В RX – 26 (результат), в RY, RZ, RT – нули

Выводы:

1. После выполнения арифметической операции ввод нового операнда приводит к сдвигу содержимого регистров вверх, т.е. клавишу $\boxed{\text{В}\uparrow}$ использовать в этом случае не нужно.

2. Каждое нажатие операционной клавиши приводит к сдвигу содержимого регистров вниз.

4. Вычисление значений математических функций

Микрокалькулятор МК-54 вычисляет значения 14 элементарных функций: $1/x$, x^2, $\sqrt{x}$, 10^x, e^x, $\ln x$, $\lg x$, $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\arcsin x$, $\arccos x$, $\operatorname{arctg} x$, x^y.

Символы этих функций изображены над основными клавишами, образуя часть второй символики на клавишной панели МК. Обращение к клавишам, соответствующих вторым символам, происходит после нажатия функциональной клавиши $\boxed{F}$.

Перед вычислением тригонометрических функций необходимо предварительно выбрать меру измерения угловых величин с помощью переключателя Р – ГРД – Г.

Алгоритм вычисления значений функций (кроме функции x^y) кратко можно записать так: x $\boxed{F}$ $\boxed{f(x)}$, где x – аргумент; $\boxed{F}$ – клавиша перехода на вторую символику; $\boxed{f(x)}$ – клавиша, над которой изображен символ искомой функции.

Вычисление функции x^y происходит по следующему алгоритму:

1. Введите показатель степени – число y.
2. Нажмите клавишу $\boxed{B\uparrow}$.
3. Введите значение основания степени – число x.
4. Нажмите клавишу $\boxed{F}$.
5. Нажмите клавишу $\overset{x^y}{\boxed{\leftrightarrow}}$.

Кратко можно записать это так: y $\boxed{B\uparrow}$ x $\boxed{F}$ $\overset{x^y}{\boxed{\leftrightarrow}}$.

После вычисления значения x^y в регистре RY остается значение показателя степени – y.

Пример 3. Вычислите значение функции $y = \sin \ln x$ при $x = 1{,}5$.

П р о г р а м м а:

Шаг	Команда	Комментарии
1	1	1–3. Ввод числа 1,5
2	,	
3	5	
4	F	4 – 5. Вычисление значения ln 1,5
5	ln	
6	F	6–8. Вычисление значения sin ln 1,5
7	sin	

Р е з у л ь т а т: $\approx 0{,}3944$.

В дальнейшем ввод числа в режиме автоматической работы будем рассматривать условно как одну команду. Вычисленные значения функции также будем записывать одной составной командой, например F ln (кроме функции x^y).

2–90

Пример 4. Вычислите значение угла arccos 0,2 в градусах.

Программа:

Шаг	Команда	Комментарии
1	Г	Установка переключателя Р – ГРД – Г в положение Г
2	0,2	Ввод числа 0,2
3	F $\cos^{-1}$	Вычисление значения arccos 0,2

Результат: $\approx 78{,}46°$.

Замечание. После вычисления значения функции и отображения результата на индикаторе ввод следующего числа автоматически сдвигает содержимое регистра RX в регистр RY (т.е. нет необходимости использовать клавишу [В↑]).

5. Операции с регистрами памяти

Для хранения используемых в вычислениях чисел в МК-54 имеется 14 адресуемых регистров. Адресуемые регистры будем обозначать символом RG*N*, где *N* – номер регистра ($N = 0, 1, \ldots, 9, a, b, c, d$).

Запись числа x в адресуемый регистр памяти RG*N* осуществляется командами x [х → П] *N*. При этом число x остается в регистре RX. Вызов числа из регистра RG*N* осуществляется командами [П → х] *N*. После записи числа x в регистр RX его копия остается в регистре RG*N*. Таким образом, число x может быть использовано многократно. Для очистки регистра RG*N* в него необходимо записать число 0.

Пример 5. Запишите число –0,475 в регистр RGa, а число $2{,}18 \cdot 10^{-4}$ в регистр RG2.

Программа:

Шаг	Команда	Комментарии
1	0,475	Ввод числа 0,475 в регистр RX
2	/–/	Смена знака числа
3	х → Па	Запись числа в регистр RGa
4	2,18	Ввод мантиссы числа $2{,}18 \cdot 10^{-4}$
5	ВП	Подготовка к вводу порядка числа
6	4	Ввод числа порядка
7	/–/	Ввод знака порядка
8	х → П2	Запись числа $2{,}18 \cdot 10^{-4}$ в регистр RG2

Командами $\boxed{П \to x}$ $\boxed{a}$ и $\boxed{П \to x}$ $\boxed{2}$ проверяется содержимое регистров RGa и RG2.

После вызова числа из адресуемых регистров памяти они автоматически распределяются в регистрах стека, поэтому нет необходимости использовать клавишу $\boxed{В\uparrow}$ для записи операндов в операционные регистры при выполнении операций над этими числами.

Пример 6. Пусть числа 2, 4 и 6 записаны в регистры RG0, RG1, RG5. Вычислите значение выражения $2 + 4 \cdot 6$.

П р о г р а м м а:

Шаг	Команда	Комментарии
1	$П \to x0$	Вызов числа 2 из RG0 в регистр RX
2	$П \to x1$	Вызов числа 4 из RG1 в регистр RX
		Число 2 сдвинулось в регистр RY
3	$П \to x5$	Вызов числа 6 из RG5 в регистр RX
		Число 2 перешло в регистр RZ, а число 4 – в регистр RY
4	×	Умножение числа 4 и 6. В RX – число 24
		Число 2 из регистра RZ перешло в регистр RY
5	+	Вычисление значения $2 + 4 \cdot 6$. В RX – результат 26

С помощью специальных команд обращения к адресуемым регистрам памяти можно обеспечить дополнительные вычислительные возможности МК. Так, используя команды косвенной адресации $\boxed{К}$ $\boxed{x \to П}$ $\boxed{N}$ или $\boxed{К}$ $\boxed{П \to x}$ $\boxed{N}$, можно вычислять значения функции $[x]$ – целой части числа x. Для выделения целой части числа x необходимо соблюдение нескольких условий:

1. Число x должно принадлежать интервалу $(1, 10^8)$.

2. Номер адресуемого регистра N может принимать значения 7, 8, 9, a, b, c, d.

3. Число x должно быть предварительно записано в один из указанных регистров.

Пример 7. Найдите целую часть числа 85,631.

Программа:

Вариант 1

Шаг	Команда	Комментарии
1	85,631	Ввод числа x
2	x → П7	Запись числа x в RG7
3	К x → П7	Команда косвенной записи x в регистр RG7
4	П → x7	Вызов целой части числа x в регистр RX

Вариант 2

Шаг	Команда	Комментарии
1	85,631	Ввод числа x
2	x → П7	Запись числа в RG7
3	К П → x7	Команда косвенного вызова числа x из регистра RG7
4	П → x7	Вызов целой части числа x в регистр RX

Результат на индикаторе в обоих случаях будет изображен числом 00 000 085. При выполнении любой последующей операции это число примет вид 85 (достаточно, например, нажать клавишу $\boxed{\text{В}\uparrow}$).

Варианты программы нахождения целой части числа x различаются только тем, что в первом случае мы использовали команду $\boxed{\text{К}}$ $\boxed{\text{x} \to \text{П}}$ $\boxed{7}$, а во втором – команду $\boxed{\text{К}}$ $\boxed{\text{П} \to \text{x}}$ $\boxed{7}$. Отметим, что при использовании команды $\boxed{\text{К}}$ $\boxed{\text{x} \to \text{П}}$ $\boxed{7}$ первоначальное число 85,631 сохраняется в МК. Командой $\boxed{\text{К}}$ $\boxed{\text{П} \to \text{x}}$ $\boxed{7}$ его можно восстановить в регистре RX*.

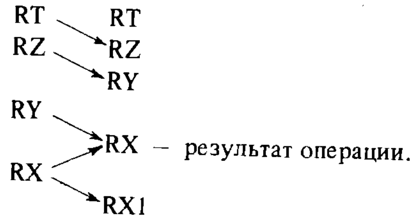
При выполнении арифметических операций мы познакомились с процессом хранения и изменения информации в стековых регистрах RX, RY, RZ, RT. Рассмотрим некоторые дополнительные операции с регистрами стека, позволяющие не только проверять содержимое регистров, но и использовать стековую память при вычислении сложных выражений. Предварительно заметим, что в дополнение к четырем стековым регистрам в МК-54 имеется еще один регистр, который обозначается RX1 и называется регистром предыдущего результата.

После выполнения операции второй операнд (если операция арифметическая) или аргумент (если вычисляется значение функции) автоматически записывается в регистр RX1. Схематически это выглядит следующим образом:

---

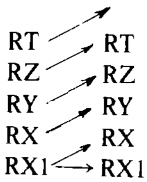
*Подробнее о командах косвенной адресации будет сказано при изучении работы МК в режиме программирования.

после выполнения операции

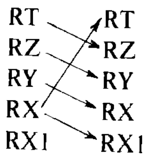


RX1

Для проверки содержимого регистра RX1 используется составная команда [F] [Bx] . После исполнения этой команды происходит следующая передвижка в регистрах стека:



Для восстановления содержимого регистра RX после выполнения команды [F] [Bx] необходимо выполнить команду [F] — кольцевой передвижки информации в стеке. При этом произойдет следующее изменение информации в стековых регистрах:



Таким образом, исполнив три раза команду [F] , можно последовательно определить содержимое регистров RY, RZ и RT.

Рассмотрим примеры использования в вычислениях стековых регистров и регистра предыдущего результата.

Пример 8. Вычислите значение выражения $(\sin 0{,}7 + 0{,}7) \times \times 0{,}7 + 23$.

П р о г р а м м а:

Шаг	Команда	Комментарии
1	23	Ввод числа 23
2	В↑	Запись числа 23 в RY
3	0,7	Ввод числа 0,7
4	В↑	Запись числа 0,7 в RY. Число 23 записалось RZ
5	В↑	Запись числа 0,7 в RY, RZ. Число 23 – в RT
6	F sin	Вычисление значения sin 0,7. В RX1 число 0,7
7	+	Вычисление значения sin 0,7 + 0,7. Число 0,7 – в RY. Число 23 – в RZ.
8	×	Вычисление значения (sin 0,7 + 0,7) · 0,7. Число 23 – в RY.
9	+	Вычисление значения (sin 0,7 + 0,7) · 0,7 + 23

Р е з у л ь т а т: 23,940 952.

Пример 9. Вычислите значение выражения $\frac{0{,}8 \ln 3{,}7 - \ln 3{,}7}{\ln 3{,}7 - 3}$.

П р о г р а м м а:

Шаг	Команда	Комментарии
1	0,8	Ввод числа 0,8
2	В↑	Запись числа 0,8 в RY
3	3,7	Ввод числа 3,7
4	F ln	Вычисление значения ln 3,7. В RX1 – число 3,7
5	×	Вычисление значения 0,8 ln 3,7. В RX1 – значение ln 3,7
6	F Вх	Вызов значения ln 3,7 из RX1 в регистр RX
7	–	Вычисление значения 0,8 ln 3,7 – ln 3,7. В RX1 снова записывается значение ln 3,7
8	F Вх	Вызов значения ln 3,7 в RX. Значение 0,8 ln 3,7 – – ln 3,7 в RY
9	3	Ввод числа 3. Значение ln 3,7 в RY. Значение 0,8 × ln 3,7 – ln 3,7 в RZ
10	–	Вычисление значения ln 3,7 – 3. Значение 0,8 ln 3,7 – – ln 3,7 – в RY. Число 3 – в RX1
11	÷	Вычисление значения выражения. Значение числителя дроби записалось в RX1

Р е з у л ь т а т: $1{,}5467971 \cdot 10^{-1}$.

Команда, реализуемая клавишей $\boxed{\leftrightarrow}$, позволяет менять местами содержимое операционных регистров RX и RY. Происходящее при этом движение информации в регистрах стека выглядит следующим образом:

$$\begin{tikzcd}[row sep=tiny]
RT \arrow[r] & RT \\
RZ \arrow[r] & RZ \\
RY \arrow[dr] & RY \\
RX \arrow[ur] \arrow[dr] & RX \\
RX1 & RX1
\end{tikzcd}$$

Таким образом, после нажатия клавиши $\boxed{\leftrightarrow}$ содержимое регистра RX записывается в регистры RY и RX1 – регистр предыдущего результата.

Это следует учитывать в процессе вычислений. При использовании регистра RX1.

Пример 10. Вычислите значение выражения $\sin x - \dfrac{x^2-1}{\sin x}$ при $x = 2{,}7845$.

П р о г р а м м а:

Шаг	Команда	Комментарии
1	2,7845	Ввод значения x
2	F sin	Вычисление значения $\sin x$. Значение x – в RX1
3	F Bx	Вызов значения x из RX1. Значение $\sin x$ – в RY.
4	F x^2	Вычисление значения x^2. Значение x – в RX1
5	1	Ввод числа 1. Значение x^2 перешло в RY, $\sin x$ – в RZ
6	–	Вычисление значения $x^2 - 1$. 1 записалась в RX1 Значение $\sin x$ переместилось в RY
7	$\leftrightarrow$	Обмен между RX и RY. В RY – значение $\sin x$, в RX – значение $x^2 - 1$. МК готов к вычислению значения $\dfrac{x^2-1}{\sin x}$
8	$\div$	Вычисление значения $\dfrac{x^2-1}{\sin x}$. Значение $\sin x$ – в RX1
9	F Bx	Вызов значения $\sin x$ из RX1 в RX. Значение $\dfrac{x^2-1}{\sin x}$ перешло в RY
10	$\leftrightarrow$	Обмен между регистрами RX и RY. МК готов к вычислению разности $\sin x - \dfrac{x^2-1}{\sin x}$
11	–	Вычисление значения выражения

Р е з у л ь т а т: $-18{,}970\,736$.

Если значение $\sin x$ хранить в одном из регистров памяти, например RG0, то п р о г р а м м а будет иметь вид:

Шаг	Команда	Комментарии
1	2,7845	Ввод числа x
2	F sin	Вычисление значения $\sin x$. Значение x – в RX1
3	x → П0	Запись значения в RG0
4	FBx	Вызов значения x из RX1
5	F x^2	Вычисление значения x^2
6	1	Ввод числа 1
7	–	Вычисление значения $x^2 - 1$
8	П → x0	Вызов значения $\sin x$ в RX. Значение $x^2 - 1$ – в RY
9	÷	Вычисление значения $\frac{x^2 - 1}{\sin x}$
10	П → x0	Вызов значения $\sin x$ в RX. Значение $\frac{x^2 - 1}{\sin x}$ – в RY
11	↔	Обмен между регистрами RX и RY
12	–	Вычисление значения выражения

Результат: –18,970 736.

6. Погрешности вычислений на микрокалькуляторах

Источники ошибок при вычислениях на МК могут иметь различную природу. К ошибкам, в частности, могут привести неточность построения математической модели явления (при решении, например, прикладных задач), приближенное значение исходных величин, входящих в условие задачи, а также особенности работы операционного устройства МК. Ниже будут рассмотрены основные правила приближенных вычислений, относящиеся к последним двум источникам ошибок, учет которых позволит уменьшить погрешности вычислений на МК.

Большинство вычислений производится, как правило, с приближенными числами, при этом результат x задают числом верных цифр, учитывая, что точное значение x неизвестно и, следовательно, неизвестно и значение абсолютной погрешности Δx. Верными называют цифры, если представленный ими результат имеет погрешность не более 1/2 младшего разряда. Так, если $x = 20{,}024$ и это значение имеет три верных цифры, то можно считать, что $19{,}95 < x < 20{,}05$.

Одним из удобных средств при вычислениях на МК является применение правил подсчета значащих цифр:

– при сложении, вычитании, умножении и делении чисел в результате следует сохранять столько значащих цифр, сколько их имеет число с наименьшим количеством значащих цифр;

– при возведении чисел в квадрат или куб в результате необходимо сохранить столько значащих цифр, сколько имеется верных значащих цифр в основании степени;

– при извлечении квадратного корня в результате необходимо сохранить столько значащих цифр, сколько их в подкоренном числе;

– при вычислениях в промежуточных результатах следует оставлять на одну цифру больше, чем рекомендуют правила, изложенные выше, а в окончательном результате эту цифру отбросить.

Любой результат вычислений МК выдает с конечным числом знаков (из-за ограничений числа разрядов индикатора), т.е. МК всегда присуща погрешность округления результата. Обычно ее считают равной ± 1 последнего разряда. Ошибки округления накапливаются и из-за ограниченного числа разрядов операционных регистров МК.

Особенно заметна погрешность результатов при вычислении значений элементарных функций. Она возникает из-за того, что вычисления значений функций МК осуществляет разложением их в ряд или непрерывную дробь с конечным числом членов. Погрешность вычислений оценивается в этом случае остаточным членом R и зависит от аргумента x. Погрешность вычислений значений элементарных функций приводится в инструкциях по эксплуатации МК.

Особенно значительны погрешности при вычислении значений функций $\sqrt{x}$ и x^y, поэтому многократное повторение их в одной программе может вызвать значительную ошибку. В справочных пособиях по МК рекомендуют обычно избегать составления таких программ, особенно если они связаны с практическими расчетами.

Приведем несколько рекомендаций по уменьшению ошибок вычислений, связанных с особенностями работы МК.

Так, при умножении следует умножать меньшее число на большее. Операции умножения и деления целесообразно чередовать друг с другом, избегая переполнения операционного регистра или попадания в область "машинного нуля". В область "машинного нуля" можно попасть при вычитании близких чисел; этого следует избегать.

Погрешность суммы нескольких приближенных чисел можно уменьшить, если начать суммирование с меньших по значению слагаемых.

Указанные рекомендации по уменьшению погрешности вычислений вызваны округлением промежуточных вычислений, когда многозначные числа не умещаются в операционных регистрах или разрядной сетке индикатора.

Здесь можно отметить, что разрядность регистров памяти бывает на один-два разряда больше, чем разрядность индикатора. Чтобы узнать, есть ли скрытые разряды в МК, можно воспользоваться следующим приемом. Вызовем на индикатор число π, затем вычтем из него 3,141 и умножим разность на 10^3. Если полученный результат будет содержать такие цифры, которые при первоначальном вводе числа π не были представлены на индикаторе, то МК содержит скрытые разряды в операционном регистре, и их количество равно количеству вновь появившихся цифр.

Для избежания риска появления больших погрешностей часто используют различные преобразования расчетных формул. Например, вычисление значения многочленов по схеме Горнера уменьшает число выполняемых операций по сравнению с прямой подстановкой значения аргумента в многочлен.

Используют некоторые искусственные преобразования, например $(a + b)^2 - a^2$ при b много меньшем a, представляют как $2ab + b^2$, что позволяет избежать вычитания близких чисел.

Таким образом, с самого начала использования МК при проведении расчетов следует помнить, что любая электронная вычислительная техника не может гарантировать абсолютную точность вычислений, даже если исходные данные были точными.

§ 3. РАБОТА МИКРОКАЛЬКУЛЯТОРА В РЕЖИМЕ "ПРОГРАММИРОВАНИЕ". ПРОГРАММИРОВАНИЕ ЛИНЕЙНЫХ АЛГОРИТМОВ

1. Общие сведения о режиме "Программирование"

В п. 1–5 описана работа МК в режиме "Автоматическая работа", когда выполнение каждой команды происходит после нажатия пользователем соответствующей клавиши (или комбинации клавиш $\boxed{F}$ $\boxed{K}$ $\boxed{П \to x}$ $\boxed{x \to П}$ с другими). При повторе вычислений, когда необходимо найти целый ряд значений какой-то величины, используя один и тот же алгоритм, в МК-54 предусмотрен режим "Программирование". В этом режиме исполнение серии команд осуществляется автоматически.

Пользователю необходимо лишь построить алгоритм вычислений или программу, ввести ее в программную память МК, осуществить ввод исходных значений тех или иных переменных и обеспечить запуск микрокалькулятора.

Переход в режим "Программирование" осуществляется нажатием клавиш $\boxed{F}$ и $\boxed{ПРГ}$. После этого ОЗУ программ, состоящее из 98 ячеек памяти, готово к приему программы пользователя, т.е. последовательности команд, необходимых для решения задачи. Максимальное число шагов (команд) программы для МК-54 составляет 98.

Каждая ячейка памяти ОЗУ программ имеет свой двузначный номер или адрес, начинающийся с 00 и кончающийся 97. При вводе программы каждая команда занимает одну ячейку памяти ОЗУ программ, а адрес ячейки записывается в счетчик адресных команд (САК). Текущее состояние САК отображается на индикаторе (11-й и 12-й разряды). При вводе очередной команды содержимое САК увеличивается на единицу. По выбору пользователя счетчик может быть установлен на любой начальный адрес от 00 до 97.

Каждой клавише МК (кроме $\boxed{\overrightarrow{ШГ}}$, $\boxed{\overleftarrow{ШГ}}$) или ее комбинации с клавишами $\boxed{К}$, $\boxed{F}$, $\boxed{x \to П}$, $\boxed{п \to X}$ присвоен свой двузначный код (см. приложение 3). Всего имеется 189 кодов. Программа пользователя при ее вводе записывается в ОЗУ программ в виде последовательности кодов, по которым микропроцессор распознает содержание команды. Поэтому каждое нажатие клавиши (или комбинации ее с $\boxed{К}$, $\boxed{F}$, $\boxed{x \to П}$, $\boxed{П \to x}$) является отдельной командой (шагом) программы. Так, например, ввод числа 1,8 не будет являться одной командой, как это мы условно считали в режиме автоматической работы (для сокращения записей), а представляет собой три команды:

Адрес	Команда	Код
00	1	01
01	.	0-
03	8	08

При вводе программы на индикаторе кроме адреса следующей вводимой команды отображаются коды трех последних

команд из ОЗУ программ, например: $\boxed{5E}$ $\boxed{4Г}$ $\boxed{05}$ $\boxed{34}$
Здесь число 34 – текущее состояние САК (т.е. адрес, по которому будет записана следующая команда); 05 – код команды, записанной по адресу 31; 4Г -- код команды, записанной по адресу 32; 5Е – код команды, записанной по адресу 33.

Любая программа должна содержать команду останова и индикации результата. Эта команда реализуется клавишей $\boxed{С/П}$ – стоп--пуск. Эта же команда используется и для запуска программы.

2. Основные этапы решения задач с помощью микрокалькулятора

При работе с МК в программируемом режиме действия пользователя можно разбить на несколько этапов:

1. Анализ задачи.
2. Составление алгоритма решения задачи.
3. Конструирование программы.
4. Ввод программы и ее редактирование.
5. Отладка программы.

Перечисленные этапы являются характерными при использовании электронно-вычислительной техники для решения задач.

Остановимся на каждом этапе подробнее.

Анализ задачи. На этом этапе необходимо четко представить себе, что нужно получить в результате решения задачи, в какой форме представить результат, какие вспомогательные данные, кроме указанных в условии, нужно использовать, каким способом решать задачу (или преобразовать данные в конечный результат).

Составление алгоритма решения задачи. После выбора способа решения задачи его необходимо детализировать в виде последовательности конечного числа возможно простых действий, учитывающие возможности МК. Последовательность элементарных действий представляет собой алгоритм решения задачи. Для большей наглядности и удобства работы с алгоритмом его лучше оформить в виде блок-схемы (см. например, учебное пособие "Основы информатики и вычислительной техники". М., 1986. Ч. I–II).

Конструирование программы. Исполнение алгоритма на МК требует дальнейшей детализации его до такой степени, чтобы каждое элементарное действие представлялось в виде команды МК. Последовательность команд исполнения алгоритма и будет являться программой решения задачи на МК. Кроме того, в конструировании программы нужно предусмотреть, в какие адресуемые регистры памяти следует записать исходные данные, в какие регистры накапливать промежуточные результаты. При конструировании программы надо стремиться максимально использовать возможности МК, чтобы добиться оптимальности программы (например, время вычислений по программе). Текст программы желательно оформить в виде таблицы, в которой были бы указаны адреса и коды команд, помещены комментарии к программе. Практика показывает, что оформление программы в виде простого списка команд затрудняет понимание ее текста даже составителем после истечения некоторого времени.

В в о д   п р о г р а м м ы. Если в ОЗУ программ нет ранее записанной программы, то ее ввод может начинаться с адреса 00. Для этого в режиме "автоматическая работа" используют команду очистки счетчика адресных команд, реализуемую клавишей $\boxed{\text{В/0}}$ – возврат–обнуление, а затем клавишами $\boxed{\text{F}}$ $\boxed{\text{ПРГ}}$ устанавливают МК в режим "Программирование". При этом на индикаторе в 11-м и 12-м разрядах появляются цифры 00 – нулевой адрес счетчика. После этого нажатием соответствующих клавиш вводят текст программы, контролируя ввод по индикатору (на индикаторе отображается адрес следующей команды и коды трех предыдущих команд).

Если в ОЗУ программ уже записана программа, которую нужно сохранить, то поступают следующим образом.

Пусть, например, программа, записанная в ОЗУ программ, оканчивается адресом 35. В режиме "Автоматическая работа" нажимается клавиша $\boxed{\text{БП}}$ – безусловный переход, а затем цифровые клавиши $\boxed{3}$ $\boxed{6}$ – адрес, с которого начнется следующая программа. Следует обратить внимание, что после нажатия клавиши $\boxed{\text{БП}}$ и ввода адреса, с которого начнется программа, на индикаторе останется прежняя информация, т.е. новый адрес не индуцируется.

Тем не менее после перехода в режим "Программирование" (клавиши $\boxed{\text{F}}$ $\boxed{\text{ПРГ}}$) на счетчике установится адрес 36, с которого будет вводиться новая программа. После этого осуществляют ввод программы.

В процессе ввода программы возможен переход в режим "Автоматическая работа" (клавиши $\boxed{\text{F}}$ $\boxed{\text{АВТ}}$), при этом на индикаторе сохранится то число, которое было до перехода в режим "Программирование". Если совершить обратный переход в режим "Программирование" (клавиши [F] [ПРГ]), то на индикаторе будет восстановлена та информация, которая была в режиме "Программирование" до нажатия клавиш [F] [АВТ] (т.е. адрес и коды команд). Таким образом, переход в процессе работы из одного режима в другой не влияет на продолжение ввода текста программы.

Р е д а к т и р о в а н и е п р о г р а м м ы. В процессе ввода программы пользователем может быть допущена ошибка ввода (нажата не та клавиша, введено другое число и пр.). В МК предусмотрены возможности исправления ошибок. Во-первых, с помощью клавиш [$\overleftarrow{\text{ШГ}}$] и [$\overrightarrow{\text{ШГ}}$] – шаг назад и шаг вперед. Клавиша [$\overleftarrow{\text{ШГ}}$] – шаг назад обеспечивает пошаговое прохождение программы в сторону уменьшения адресов. С ее помощью доходят до нужного адреса и с этого адреса вводят нужную команду. Например, пусть по адресу 09 записана при вводе команда вычисления функции F 1/x, а нужно вычислить значение функции F sin x. Если ошибка обнаружена, а на индикаторе адрес текущей команды – 19, то, нажимая клавишу [$\overleftarrow{\text{ШГ}}$] (10 раз), мы дойдем до адреса 09, и по этому адресу введем команду F sin x (изменение адресов контролируется по индикатору). То же самое можно осуществить клавишей [$\overrightarrow{\text{ШГ}}$], если мы начнем редактирование с адреса 00.

Если программа большая, то исправить ошибку по какому-то адресу можно и другим путем. В режиме "Автоматическая работа" следует нажать клавишу [БП] и набрать адрес исправляемой команды. После перехода в режим "Программирование" ([F] [ПРГ]) на индикаторе появится требуемый адрес. По этому адресу записывается новая команда.

Если при редактировании программы возникает необходимость совсем исключить ту или иную команду, то описанным выше способом по этому адресу записывается команда [К] [НОП] – нет операции. При выполнении программы МК игнорирует эту команду и переходит к выполнению команды, записанной по адресу, следующему за командой [К] [НОП].

Пусть, например, требуется исключить команду F x^2 – возведение числа в квадрат, записанную по адресу 41. Используя клавишу [БП] в автоматическом режиме, или клавишу [ШГ→] ([ШГ←]) в программируемом режиме, установим счетчик на адрес 41. По этому адресу запишем команду К НОП. При выполнении программы вычисление значения x^2 по адресу 41 происходить не будет.

Отладка программы. Цель этого этапа работы с МК – удостовериться в правильности работы программы и исключить имеющиеся ошибки. Отладку программы лучше производить с помощью тест-примера, т.е. примера со специально подобранными данными, позволяющими легко сравнивать результаты вычислений по программе с результатами, полученными другим путем (необязательно на МК).

Отладка программы производится в режиме "Автоматическая работа" с помощью клавиш [В/0] и [ПП]. По команде [ПП] микрокалькулятор выполняет программу в потактовом режиме, т.е. после каждой команды [ПП] выполняет одну команду. Результат ее выполнения отображается на индикаторе. Это позволяет контролировать выполнение каждой операции МК.

Выполнение программы. Пусть программа составлена, введена в ОЗУ программ МК и проведена ее отладка. Для выполнения программы необходимо перейти в режим "Автоматическая работа" (клавиши [F] [АВТ]), после чего либо записать исходные данные в выбранные заранее регистры памяти, либо просто осуществить ввод исходного числа в регистр RX. Далее программа запускается клавишами [В/0] и [С/П], если она начинается с нулевого адреса, либо клавишей [БП] и цифровыми клавишами, обеспечивающих ввод числа, равного адресу, с которого записана программа, а также клавишей [С/П]. Мерцающая подсветка индикатора показывает, что МК начал выполнять программу. После остановки на индикаторе появится результат вычислений по программе.

Все этапы решения задачи в программируемом режиме проиллюстрируем на примере простой линейной программы, последовательность выполнения команд которой полностью соответствует последовательности записи команд в тексте программы, независимо от промежуточных результатов.

Пример 1. Определите скорости установившегося падения титанового шарика радиусом 1,8 мм в глицерине, машинном масле и воде.

А н а л и з   з а д а ч и. Скорость установившегося падения шарика малых размеров в вязкой жидкости определяется по формуле $v = g \dfrac{\rho - \rho_ж}{\eta} \cdot \dfrac{2R^2}{9}$, где ρ – плотность шарика, R – его радиус; g – ускорение свободного падения, η – коэффициент вязкости жидкости.

Для решения задачи необходимо знать значения физических величин, входящих в формулу. Воспользовавшись справочником по элементарной физике, определим эти значения: $g \approx \approx 9{,}81$ м/с^2, плотности титана, глицерина, машинного масла и воды соответственно равны $4{,}5 \cdot 10^3$ кг/м^3, $1{,}2 \cdot 6 \cdot 10^3$ кг/м^3, $0{,}9 \cdot 10^3$ кг/м^3, $0{,}99823 \cdot 10^3$ кг/м^3. Коэффициенты вязкости указанных жидкостей соответственно равны: 1,393 Па/с, 0,66 Па/с, $1{,}05 \cdot 10^{-3}$ Па/с (1 Па = 1 Н/м^2). Значение радиуса выразим в метрах: $R = 1{,}8 \cdot 10^{-3}$ м.

А л г о р и т м   р е ш е н и я   з а д а ч и. Алгоритм вычисления скорости падения представим следующей блок-схемой (рис. 3):

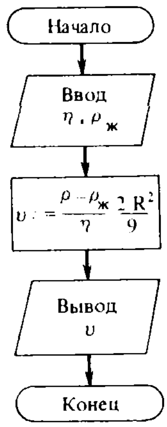


Рис. 3

К о н с т р у и р о в а н и е   п р о г р а м м ы. Изменяющиеся данные: коэффициент вязкости η и плотность жидкости будем заносить в регистры RG0 и RG1. Результат v будем выводить на индикатор. Вычисление удобнее начать с вычисления выражения $\dfrac{g \cdot 2R^2}{9\eta}$, а затем умножить его на разность $\rho - \rho_ж$.

П р о г р а м м а вычисления значения v:

Адрес	Команда	Код	Комментарии
00	1	01	00–05. Ввод числа $R = 1{,}8 \cdot 10^{-3}$
01		0–	
02	8	08	
03	ВП	0[	
04	3	03	
05	/–/	04	
06	F x^2	22	Вычисление значения R^2
07	2	02	Ввод числа 2. Значение R^2 перешло в RY
08	×	12	Вычисление значения $2R^2$. В RY – число 0
09	9	09	09–12. Ввод числа $g = 9{,}81$. Значение $2R^2$ перешло в RY
10		0–	
11	8	08	
12	1	01	
13	×	12	Вычисление значения $2gR^2$
14	9	09	Ввод числа 9. Значение $2gR^2$ – в RY
15	÷	13	Вычисление значения $\frac{2gR^2}{9}$
16	П→x0	60	Вызов значения η из RG0. Значение $\frac{2gR^2}{9}$ – в RY
17	÷	13	Вычисление значения $\frac{2gR^2}{9\eta}$
18	4	04	18–22. Ввод $\rho = 4{,}5 \cdot 10^3$. Значение $\frac{2gR^2}{9}$ – в RY
19	.	0–	
20	5	05	
21	ВП	0[	
22	3	03	
23	П→x1	61	Вызов значения ρ из RG1. Число ρ – в RY, $\frac{2gR^2}{9\eta}$ – в RZ
24	–	11	Вычисление значения $\rho - \rho_ж$. Значение $\frac{2gR^2}{9\eta}$ – в RY
25	×	12	Вычисление значения выражения
26	С/П	50	Останов и индикация результата

Р е з у л ь т а т: $1{,}6428405 \cdot 10^{-2}$.

После ввода текста программы и обнаружения возможных ошибок проводится ее редактирование.

3—90

О т л а д к а п р о г р а м м ы. Переведем МК в режим "Автоматическая работа" клавишами $\boxed{F}$ $\boxed{АВТ}$. Занесем число $\eta = 1{,}393$ в RG0, а число $\rho_{гл} = 1{,}26 \cdot 10^3$ – в RG1 (эти значения взяты для глицерина).

После этого с помощью клавиш $\boxed{В/0}$ и $\boxed{ПП}$ обеспечим пошаговое выполнение программы. После первого нажатия клавиши $\boxed{ПП}$ на индикаторе появится 1, после второго – запятая, после третьего – число 8, после четвертого в 11-м и 12-м разрядах появятся нули, после пятого – число 3 в 12-м разряде, после шестого – знак порядка. Так будет введено число $1{,}8 \cdot 10^{-3}$. Продолжая этот процесс, мы можем проконтролировать возведение числа $1{,}8 \cdot 10^{-3}$ в квадрат, умножение его на 2 и т.д., пока не получим окончательный результат. Промежуточные результаты можно оценивать устной прикидкой или повторить отдельные вычисления в режиме "Автоматическая работа", а потом сравнить их с результатами, получающимися при потактовом прохождении программы.

Если результат не вызывает сомнений, то программа готова к работе с любыми допустимыми данными задачи.

В ы п о л н е н и е п р о г р а м м ы. После того как программа отлажена, т.е. проверено ее выполнение в потактовом режиме, можно приступить к выполнению ее без участия пользователя.

В режиме "Автоматическая работа" запишем в регистры RG0 значение $\eta = 0{,}66$, а в RG1 – значение $\rho = 0{,}9 \cdot 10^3$ (для машинного числа).

Клавишами $\boxed{В/0}$ и $\boxed{С/П}$ запустим программу с нулевого адреса. Через 7 с появится результат: $3{,}8526544 \cdot 10^{-2}$.

Таким образом, скорость падения шарика в масле $v \approx$ $\approx 3{,}85 \cdot 10^{-2}$ м/с. Запишем этот результат в тетрадь и приступим к выполнению программы с другими исходными данными. Запишем в регистры RG0, RG1 соответственно числа $\eta =$ $= 1{,}05 \cdot 10^{-3}$ и $\rho = 0{,}99823 \cdot 10^3$ (для воды) и пустим программу ($\boxed{В/0}$ $\boxed{С/П}$).

Р е з у л ь т а т: 23,555 906.

Таким образом, скорость движения шарика в воде $v \approx$ $\approx 23{,}6$ м/с.

Зная коэффициенты вязкости и плотности любых других жидкостей, можно вычислять по этой программе скорости установившегося падения титанового шарика.

§ 4. ПРОГРАММИРОВАНИЕ НА МИКРОКАЛЬКУЛЯТОРЕ РАЗВЕТВЛЯЮЩИХСЯ И ЦИКЛИЧЕСКИХ АЛГОРИТМОВ

В отличие от линейных алгоритмов в разветвляющиеся алгоритмы входят условия, в зависимости от которых необходимо выполнить ту или иную серию команд. В циклических алгоритмах предусмотрено многократное выполнение серии одних и тех же команд.

Для реализации разветвляющихся и циклических алгоритмов в МК имеются команды переходов, по которым происходит изменение порядка выполнения команд программы. Адрес следующей команды указывается либо непосредственно в программе отдельной командой, либо в адресуемом регистре. В первом случае команда перехода называется прямой, во втором случае – косвенной.

Рассмотрим различные виды команд переходов, позволяющих существенно расширить круг задач, решаемых с помощью МК.

1. Команды безусловного перехода

Исполнение команды безусловного перехода реализуется клавишей $\boxed{\text{БП}}$. За командой БП в тексте программы должен быть указан двузначный адрес перехода. При этом, как и при других прямых командах перехода, содержимое счетчика увеличивается на единицу только после ввода двух цифр числа, соответствующему адресу перехода (сравните с вводом чисел в режиме "Программирование").

При исполнении этой команды происходит прерывание естественного порядка выполнения команд программы и выполняется команда, указанная в адресе перехода.

Пример 1.

Адрес	Команда	Код	Комментарии
...	...	...	....
12	F 1/x	23	
13	БП	51	Команда безусловного перехода, прерывающая порядок выполнения программы
14	18	18	Адрес перехода, указывающий адрес выполнения следующей команды
...	...	...	
18	÷	13	Выполнение деления. Эта команда выполняется после команды F 1/x

В МК-54 ветвление программы может быть обеспечено в ходе проверки выполнения различных условий. Имеется возможность проверить следующие условия: $x \geqslant 0$, $x < 0$, $x = 0$, $x \neq 0$. Они реализуются командами F x $\geqslant$ 0, F x $<$ 0, F x = 0, F x $\neq$ 0.

В зависимости от того, выполняется условие или нет, происходит определенное изменение порядка выполнения команд программы. Если условие выполняется, то исполняется следующая за адресом перехода команда (адрес перехода не воспринимается), если – не выполняется, то происходит выполнение команды, указанной в адресе перехода.

Пример 2. Составьте программу выбора наименьшего из двух чисел a и b ($\min\{a, b\} = m$).

Алгоритм поиска $\min\{a, b\}$ можно представить в виде блок-схемы (рис. 4):

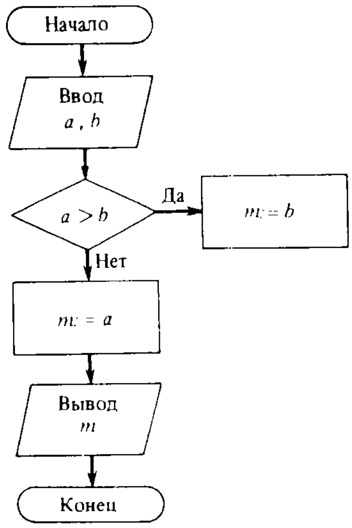


Рис. 4

Исходные числа a, b будем заносить в регистры RG0 и RG1. Результат будем выводить в RX.

Программа поиска наименьшего из двух чисел:

Адрес	Команда	Код	Комментарии
00	П → x1	61	Вызов числа a из RG0
01	П → x2	62	Вызов числа b из RG1
02	−	11	Вычисление разности $a - b$
03	F x < 0	5[	Проверка условия $a - b < 0$ $(a < b)$
04	07	07	Адрес перехода, если условие не выполняется
05	П → x1	61	Переход на адрес 05 (адрес 04 не воспринимается), если условие выполняется. Вызов числа a $(a := \min\{a, b\})$
06	С/П	50	Останов и индикация результата
07	П → x2	62	Вызов числа b $(b := \min\{a, b\})$
08	С/П	50	Останов и индикация результата

Инструкция по работе с программой:

1. Перейдите в режим "Программирование" (клавиши [В/0] [F] [ПРГ], если программа записывается с нулевого адреса, или [БП] N_1N_2 [F] [ПРГ], если программа начинается с адреса N_1N_2).

2. Введите текст программы (если программа вводится с адреса N_1N_2, то при вводе адреса перехода после команды F x < 0 это следует учесть и ввести нужный адрес).

3. Проведите редактирование программы.

4. Перейдите в режим "Автоматическая работа" (клавиши [F] [АВТ]).

5. Проведите отладку программы на контрольном примере.

6. Занесите данные в регистры RG1 и RG2.

7. Пустите программу (клавиши [В/0] [С/П] или [БП] N_1N_2 [С/П], если программа записана с адреса N_1N_2).

8. Запишите результат.

9. Для других значений a и b повторите п. 6–8.

3. Команды организации циклов

Для многократного повторения одних и тех же действий в МК-54 имеются специальные команды организации циклических вычислений, с их помощью строится счетчик числа повторений. Это команды F L0, F L1, F L2, F L3. При построении программы, содержащей циклы, в один из регистров RG0, RG1, RG2, RG3, записывается число повторений n. Во время прохождения программы после команды F L0 (F L1, F L2, F L3) происходит обращение к регистру RG0 (RG1, RG2, RG3) и из его содержимого вычитается единица и производится анализ на нуль. Если содержимое регистра не равно нулю, то происходит переход по адресу, указанному после команды цикла, а если равно нулю, то выполняется команда следующая за командой перехода.

Пример 3. Вычислите сумму квадратов первых 10 натуральных чисел.

Формула для вычислений $S = \sum_{n=1}^{10} n^2$.

А л г о р и т м вычисления суммы квадратов первых n натуральных чисел можно представить в виде блок-схемы (рис. 5):

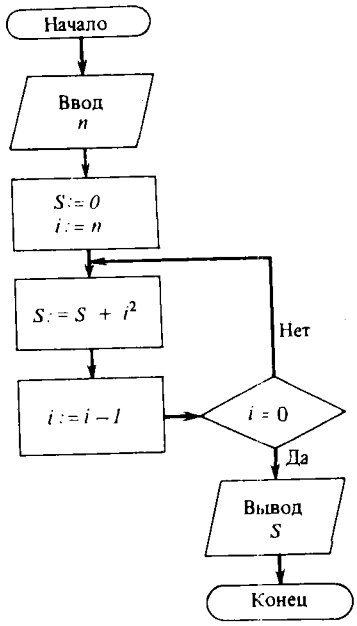


Рис. 5

К о н с т р у и р о в а н и е   п р о г р а м м ы. Для организации счетчика циклов используем регистр RG1, куда запишем число n (в нашем случае $n = 10$). Накопление результатов суммирования квадратов чисел будем производить в регистре RGa. Чтобы использовать программу для разных значений n, предусмотрим в программе команду обнуления регистра RGa.

П р о г р а м м а решения задачи.

Адрес	Команда	Код	Комментарии
00	0	00	Ввод числа 0
01	x → Па	4–	Запись числа 0 в RGa. $S := 0$ (обнуление регистра RGa)
02	П → x1	61	Вызов числа n из RG1
03	F x²	22	Вычисления значения n^2
04	П → Xa	6–	Вызов очередного значения S
05	+	10	Вычисление суммы квадратов $S := S + n^2$
06	x → Па	4–	Накошение результатов суммирования в RGa
07	F L1	5L	Организация цикла. При обращении к RG1 из его содержимого вычитается 1 ($i := i - 1$) и производится анализ на нуль
08	02	02	Адрес перехода, если содержимое регистра RG1 не равно 0 (повтор вычислений!)
09	С/П	50	Останов и индикация результата, если содержимое RG1 равно нулю

И н с т р у к ц и я по работе с программой:

1. Перейдите в режим "Программирование" (В/0 F ПРГ).
2. Введите текст программы.
3. Произведите редактирование программы.
4. Перейдите в режим "Автоматическая работа" (F АВТ).
5. Проведите отладку программы в потактовом режиме.
6. Запишите число n в RG1.
7. Запустите программу (В/0 С/П с начального адреса).
8. Запишите результат в тетрадь.
9. Для другого значения n повторите выполнение п. 6–8.

Р е з у л ь т а т для $n = 10$: $S_{10} = 385$.

В р е м я вычисления ≈ 23 с.

Замечание. Если после выполнения программы вызвать содержимое регистра RG1 (П → x1) в RX, то на индикаторе будет число 00000001.

При выполнении последнего цикла из содержимого RG1 вычитается единица, но результат нуль в RG1 не записывается и после останова программы в нем остается предпоследний результат 00000001.

Цикличность вычислений можно организовать и командой безусловного перехода. Покажем это на примере нахождения наибольшего общего делителя двух натуральных чисел.

Пример 4. Найдите наибольший общий делитель (НОД) двух натуральных чисел m и n $(m > n)$.

А н а л и з з а д а ч и. Деление с остатком числа m на n всегда приводит к результату $m = nk + r$, где частное k – натуральное число, а остаток r либо 0, либо натуральное число, меньшее n.

Производя последовательное деление, получим

$$\begin{aligned} &m = nk_0 + r_1, \\ &n = r_1 k_1 + r_2, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &r_{l-2} = r_{l-1} k_{l-1} + r_l, \\ &r_{l-1} = r_l k_l. \end{aligned} \qquad (1)$$

Последний положительный остаток в этом процессе и является НОД чисел m и n. Равенства (1) представляют собой математическую запись алгоритма Евклида для нахождения НОД двух чисел.

А л г о р и т м решения задачи. Алгоритм Евклида (1) реализовать на МК нельзя, так как результат деления чисел m на n будет представлен на индикаторе в общем виде приближенным числом без остатка деления.

Преобразуем равенства (1) следующим образом. Положим k_i $(i = 0, \ldots, l)$ равными единице, т.е. заменим деление последовательным вычитанием. При этом произойдет только увеличение числа равенств (1):

$$\begin{aligned} &m = n + r_1', \\ &r_1' = n + r_2', \\ &\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \qquad (2)$$

(пока r_i не станет меньше n)

$$\begin{aligned} &r_{i-1} = n + r'_{k_0} = n + r_1, \\ &n_1 = r'_{k_0} + r'_{k_0+1} = r_1 + r_{k_0+1}, \\ &r'_{k_0+1} = r_1 + r'_{k_0+2} \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

(пока r'_{i+p} не станет меньше r_1)

$$\begin{aligned} &r'_{k_0+k_1-1} = r'_{k_0+k_1-2} + r'_{k_0+k_1} = r'_{k_0+k_1-2} + r_2, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &r'_{k-1} = r_l + r'_k, \\ &r'_k = r_l \end{aligned}$$

Выполнение алгоритма (2) продолжится до тех пор, пока последняя разность $r_{k-1} - r_k$ не будет равна 0. Значение r_k и принимается за НОД чисел m и n. Измененный таким образом алгоритм Евклида уже можно реализовать на МК, используя только операции вычитания и проверку условия на сравнение двух чисел по значению.

А л г о р и т м (2) можно представить в виде блок-схемы (рис. 6):

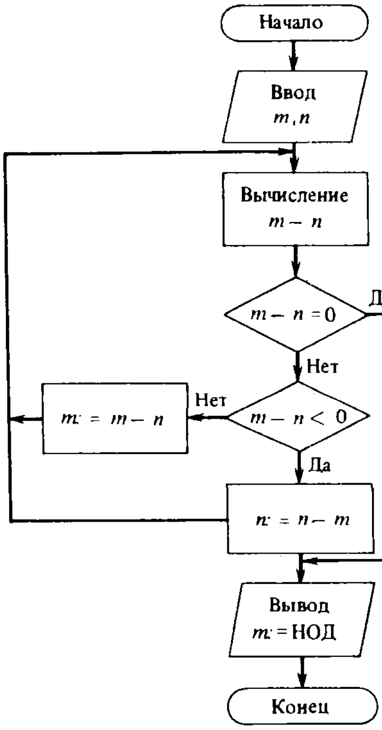


Рис. 6

К о н с т р у и р о в а н и е п р о г р а м м ы. По приведенной выше блок-схеме будем строить программу для МК следующим образом. Исходные данные – числа m и n будем записывать в регистры RG0 и RG1. Первыми шагами программы будет вычисление разности $m - n$. Накопление результата будем проводить в регистре RG3. Цикличность вычислений обеспечим командой безусловного перехода.

П р о г р а м м а вычислений НОД двух чисел:

Адрес	Команда	Код	Комментарии
00	П → X0	60	00–01. Вызов значений m и n
01	П → X1	61	
02	–	11	Вычисление разности $m - n$
03	F x = 0	5E	Проверка условия $m - n = 0$
04	07	07	Адрес перехода, если условие не выполняется
05	П → x3	63	Вызов значения $n :=$ НОД в RX
06	С/П	50	Останов и индикация результата
07	F x < 0	5[	Проверка условия $m < n$
08	10	10	Адрес перехода, если условие не выполняется
09	/–/	0L	Смена знака разности $m - n$ ($n := n - m$)
10	F Bx	0	Вызов предыдущего результата в RX. При первом цикле это число n. В последующих – очередная разность $m - n$
11	↔	14	Обмен между регистрами RY и RX. Подготовка к выполнению очередной операции $m - n$ или $n - m$ в зависимости от выполнения условия $m < n$
12	x → П3	43	Запись очередного числа m: $m - n$, или n: $n - m$ в регистр хранения результата (НОД)
13	БП	51	Организация цикла командой безусловного перехода
14	02	02	Адрес перехода. По этой команде МК снова вычислит разность $m - n$ и т.д., пока эта разность не станет равной 0

И н с т р у к ц и я по работе с программой:

1. Перейдите в режим "Программирование" (В/0 F ПРГ).
2. Введите текст программы.
3. Проведите редактирование программы.
4. Перейдите в режим "Автоматическая работа" (F АВТ).
5. Проведите отладку программы на контрольном примере.
6. Введите числа m и n в регистры RG0 и RG1.
7. Запустите программу (В/0 С/П).
8. Запишите результат в тетрадь.
9. Для других значений m и n повторите вычисления п. 6–8.

Контрольный пример: $m = 118$, $n = 82$, НОД = 2.

В р е м я в ы ч и с л е н и я 33 с.

В процессе составления программы решения задачи может оказаться, что некоторые части программы повторяются, например необходимо вычислить значение выражения для разных переменных, а результаты использовать для дальнейших вычислений. Для сокращения шагов программы вычисление значения выражения оформляют в виде подпрограммы и обращаются к ее выполнению каждый раз, когда этого потребует основная программа. Подпрограмма начинается с некоторого адреса и заканчивается командой В/0 — возврата из подпрограммы. Обращение к подпрограмме происходит по команде ПП, после которой указывается адрес начала подпрограммы. При исполнении этой команды в стеке возврата МК запоминается адрес следующей команды основной программы, а после выполнения подпрограммы МК приступает к продолжению выполнения шагов основной программы с адреса, следующего за адресом перехода. Число регистров стека возврата равняется пяти, что допускает использование до пяти вложенных друг в друга подпрограмм. При этом обращение к внутренней подпрограмме может быть осуществлено из любой внешней подпрограммы. Каждая внутренняя подпрограмма должна заканчиваться командой возврата В/0.

В процессе решения задачи необходимо заранее выделять повторяющиеся вспомогательные вычисления и оформлять их в виде подпрограмм. Для этого иногда либо используют дополнительные преобразования встречающихся формул, либо разбивают их на ряд более простых этапов, среди которых имеются одинаковые. Так, например, при программировании решения квадратного уравнения вычисление дискриминанта может быть оформлено в виде подпрограммы, так как выражение дискриминанта входит в формулы корней дважды.

Пример 5. Составьте программу вычисления значений выражения $\frac{16-(2\operatorname{tg}3x-1)^2}{\sqrt{2\operatorname{tg}3y-1}}$ для допустимых значений x и y.

Конструирование программы. Из анализа выражения следует, что прямое его программирование приведет к тому, что в программе придется два раза вычислять значение выражения вида $2\operatorname{tg}3t-1$ при $t=x$ и $t=y$. Чтобы избежать этого оформим вычисление этого выражения в виде подпрограммы.

Тогда исходное выражение примет вид $\frac{16 - a^2(x)}{\sqrt{a(x)}}$, в котором значение $a(t) = 2\text{tg}3t - 1$ при $t = x$ и $t = y$ определяется при каждом обращении к подпрограмме. Значения x и y – исходные данные будем размещать в регистрах RG0 и RG1. Результат вычисления будем выводить в регистр RX.

Программа вычисления значения выражения $\frac{16 - (2\text{tg}3x - 1)^2}{\sqrt{2\text{tg}3y - 1}}$:

Адрес	Команда	Код	Комментарии
00	1	01	00–01. Ввод числа 16 в RX
01	6	06	
02	П → x0	60	Вызов значения x из RG0. Число 16 перешло в RY
03	ПП	53	Обращение к подпрограмме
04	13	13	Адрес перехода на подпрограмму
05	F x^2	22	Возведение результата вычислений после выполнения подпрограммы в квадрат
06	–	11	Вычисление разности $16 - (2\text{tg}3x - 1)^2$
07	П → x1	61	Вызов значения y из RG1. Число $16 - (2\text{tg}3x - 1)^2$ – в RY
08	ПП	53	Обращение к подпрограмме
09	13	13	Адрес перехода
10	F $\sqrt{\ }$	21	Продолжение вычислений после возврата из подпрограммы (вычисление $\sqrt{2\text{tg}3y - 1}$)
11	÷	13	Выполнение деления. Получение результата вычислений.
12	С/П	50	Останов и индикация результата
13	3	03	Результат умножения $3x$ в первом случае и $3y$ – во втором
14	×	12	
15	F tg	1E	15–19. Вычисление значения $a(t) = 2\text{tg}3t - 1$
16	2	02	После выполнения подпрограммы результат будет находиться в регистре RX, а чис-
17	×	12	ло, находившееся в RX ранее, перейдет в RY
18	1	01	
19	–	11	
20	В/0	52	Команда возврата из подпрограммы

Инструкция по работе с программой:

1. Перейдите в режим "Программирование" ($\boxed{\text{В/0}}$ $\boxed{\text{F}}$ $\boxed{\text{ПРГ}}$, если программа начинается с нулевого адреса).
2. Введите текст программы.
3. Проведите редактирование.

4. Перейдите в режим "Автоматическая работа" (F АВТ).

5. Проведите отладку программы на контрольном примере, занеся исходные данные в регистры RG0 и RG1.

6. Введите исходные данные.

7. Пустите программу (В/0 С/П).

8. Запишите результат в тетрадь.

9. Для выполнения вычислений с другими данными выполните п. 6–8.

Контрольный пример $x = 16$, $y = 16$.

Результат: 11,86426.

Время вычисления ≈9 с.

Положив $x = 15{,}8$, $y = 58{,}9$, получим число 16,287 448.

Время вычисления ≈10 с.

§ 5. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ КОМАНД КОСВЕННОЙ АДРЕСАЦИИ

Команда косвенной адресации (выполняется после нажатия клавиши К) используется при обращении к адресуемым регистрам (косвенная запись в регистр и косвенная индикация вызова), а также при организации косвенных переходов.

Наличие команд косвенной адресации существенно расширяют функциональные возможности МК, в чем мы уже убедились на примере выделения целой части числа (§ 2, п. 5).

Рассмотрим эти команды подробнее.

1. Команды косвенной записи в регистр и команды косвенной индикации вызова

Эти команды реализуются клавишами К x → П N и К П → x N, где N – номер адресуемого регистра 0, . . . , 9, a, b, c, d. В случае косвенной записи в регистр и косвенной индикации вызова вместо прямого указания номера адресуемого регистра, записывается косвенный номер, т.е. номер того регистра, в котором хранится номер вызываемого.

При командах косвенной адресации содержимое регистра, в котором хранится номер регистра или адрес перехода, изменяется (модифицируется) в зависимости от номера регистра, входящего в команду косвенной адресации.

Команда косвенной записи в регистр: К x → П N. По этой команде производится модификация содержимого адресуемого регистра, записанного в виде кода 000 000 N ($N = 0, 1, 2, \ldots$ $\ldots, 9, 10, 11, 12, 13$, где 10, 11, 12, 13 – модифицированные коды регистров RGa, RGb, RGc, RGd).

Модификация кода происходит следующим образом. Если номер регистра, входящего в команду 0, 1, 2 или 3 (т.е. регистры RG0, RG1, RG2, RG3), то при исполнении команды из содержимого регистра вычитается единица, если номер одного из регистров RG4, RG5, RG6, то к содержимому этих регистров прибавляется единица, если номер одного из регистров RG7, RG8, RG9, RGa, RGb, RGc, RGd, то содержимое этих регистров не изменяется. Покажем это на примерах в режиме "Автоматическая работа".

Пример 1.

Шаг	Команда	Комментарии
1	12	1–2. Запись числа 12 в RG2
2	x → П2	
3	100	Ввод числа 100 в RX
4	К x → П2	Модификация кода в RG2 (вычитание 12 – 1 = 11), запись кода 00000011 в RG2 и запись числа 100 в RGb
5	П → x2	Проверка содержимого RG2 индикация кода 00000011. Это означает, что число 100 записано в RGb
6	x → Пb	Проверка содержимого RGb. Индикация числа 100

Пример 2.

Шаг	Команда	Комментарии
1	8	1–2. Запись числа 8 в RG5
2	x → П5	
3	100	Ввод числа в RX
4	К x → П5	Модификация кода в RG5 (8 + 1 = 9), запись кода 00000009 в RG5 и запись числа 100 в RG9
5	П → x5	Проверка содержимого RG2. Индикация кода 00000009
6	x → П9	Проверка содержимого RG9. Число 100 – в RG9. Индикация числа 100

Пример 3.

Шаг	Команда	Комментарии
1	1	1–2. Запись числа 1 в RGd
2	x → Пd	
3	100	Ввод числа 100 в RX
4	К x → Пd	Код в RGd остается без изменения. Запись кода 00000001 в RGd и запись числа 1 в RG1
5	П → xd	Проверка содержимого RGd. Индикация кода 00000001
6	П → x1	Проверка содержимого RG1. Число 100 – в RG1. Индикация числа 100

Косвенную запись в адресуемые регистры удобно бывает использовать в некоторых программах для автоматической записи в регистры, номера которых следуют друг за другом. Всего может быть записано до 13 чисел.

Составим программу записи 7 чисел в регистры RGd, RGc, RGb, RGa, RG9, RG8, RG7. В последствии она может быть использована в качестве фрагмента какой-либо программы.

Конструирование программы. Пусть имеется 7 четных чисел: 18, 16, 14, 12, 10, 8, 6.

Для построения программы нужно воспользоваться командой косвенной записи в регистр с модификацией кода регистра адресации (см. примеры 1 и 2).

Если мы хотим записать данные числа в регистры RG7, ... , RGd, то можно воспользоваться регистрами RG4, RG5 или RG6, так как при команде, например, К x → П5 содержимое регистра адресации RG5 увеличивается на 1. Следовательно, в регистр RG5 нужно записать число 6. Далее, чтобы автоматизировать процесс ввода, необходимо обеспечить цикличность исполнения команды К x → П5. Для этого можно использовать команду БП и сформировать счетчик количества вводимых чисел, либо воспользоваться командой организации цикла, например FL1, записав в RG1 число 7. Тогда после каждого цикла содержимое регистра RG1 будет уменьшаться на 1. И когда все регистры заполнятся, то программа завершится.

Для удобства пользователя введем в программу команду обнуления регистра RX, показывающую, что ввод чисел завершен.

П р о г р а м м а ввода чисел:

Адрес	Команда	Код	Комментарии
00	6	06	Ввод числа 6
01	x → П5	45	Запись числа 6 в RG5. Это значит, что запись чисел начинается с RG7
02	7	07	Ввод числа 7 – число циклов (по числу вводимых чисел) показывает, сколько чисел можно ввести
03	x → П1	1	Запись числа циклов в RG1
04	С/П	50	Останов перед вводом очередного числа
05	К x → П5	L5	Команда косвенной записи. Модифицированный код записывается в RG5, а введенное число записывается в регистр по соответствующему коду
06	F L1	5L	Организация цикла. После каждого цикла из RG1 вычитается 1
07	04	04	Адрес перехода после выполнения очередного цикла
08	0	00	Запись 0 в RX, когда содержимое RG1 станет равным 0. Показывает пользователю, что ввод чисел окончен
09	С/П		Останов

И н с т р у к ц и я по работе с программой:

1. Перейдите в режим "Программирование" (В/0 F ПРГ).

2. Введите текст программы.

3. Выполните редактирование.

4. Перейдите в режим "Автоматическая работа" (F АВТ).

5. Пустите программу (В/0 С/П). Число 7 на индикаторе покажет, что нужно осуществить ввод 7 чисел.

6. Введите первое число (18) и нажмите клавишу С/П . После останова повторите ввод следующего числа (16) и нажмите С/П и т.д., пока на индикаторе не появится 0, показывающий, что ввод чисел окончен.

7. Проверьте содержимое регистров RG7, . . . , RGd командой x → ПN, где N – номер регистра (0, 1, . . . , 9, a, b, c, d).

Команда косвенной индикации вызова выполняется клавишами К П → x N. По этой команде производится модификация содержимого адресуемого регистра, затем осуществляется вызов в RX содержимого регистра, номер которого равен модифицированному коду. Как и при командах косвенной записи, содержимое регистров уменьшается на единицу, если номер регистра, входящего в команду $\boxed{К}$ $\boxed{П \to x}$ N, совпадает с кодом регистра RG0, RG1, RG2, RG3 и увеличивается на единицу, если номер регистра, входящего в команду выхода, совпадает с кодом регистра RG4, RG5 и RG6. Модификация кода не происходит, если номер регистра, входящего в команду, совпадает с кодом регистра RG7, RG8, RG5, RGa (код 00000010), RGb (код 00000011), RGc (код 00000012), RGd (код 00000013).

Действие команды косвенной индикации вызова проиллюстрируем на примере в режиме "Автоматическая работа".

Пример 4.

Шаг	Команда	Комментарии
1	100	1–2. Ввод числа 100 в RG7
2	$x \to$ П7	
3	6	3–4. Ввод числа 6 в RG4
4	$x \to$ П4	
5	К П $\to x$4	По команде происходит модификация кода адреса. В RG4 будет число 7, т.е. номер регистра RG7, где находится число 100. Это число выводится на индикатор
6	П $\to x$4	Проверка содержимого RG4. После команды вызова появляется число 00000007

Команда косвенной индикации вызова используется в программах для последовательного вызова значений тех или иных переменных, хранящихся в адресуемых регистрах. Примером такой программы является программа вычислений значений многочлена по схеме Горнера.

Пример 5. Вычислите значение многочлена

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n.$$

А н а л и з з а д а ч и. Преобразуем многочлен $f(x)$ к виду

$$(\ldots((a_0x + a_1)x + a_2)x + \ldots a_{n-1})x + a_n. \qquad (1)$$

Таким образом, вычисление значения многочлена сводится к последовательному вычислению величин: a_0x, $a_0x + a_1$, $(a_0x + a_1)x$ и т.д. Последним шагом будет вычисление значения выражения (1).

А л г о р и т м решения задачи можно представить в виде блок-схемы (рис. 7):

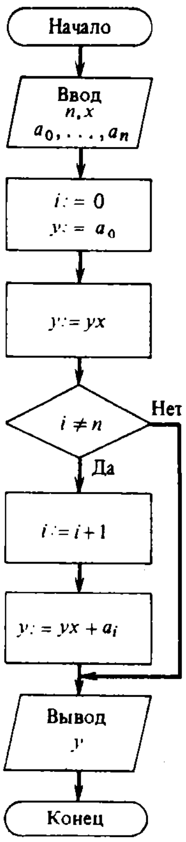


Рис. 7

К о н с т р у и р о в а н и е п р о г р а м м ы. Очевидно, что для вычислений величины $yx + a_i$ необходимо включить в программу цикл с параметром цикла n. Счетчик цикла организуем в RG3. Наибольшие затруднения вызывает то обстоятельство, что при каждом выполнении цикла требуется вводить очередное значение коэффициента a_i. Однако его можно преодолеть, использовав команду косвенной индикации вызова.

Запишем в RG0 число 13 – код RGd, а значения коэффициентов, начиная с a_0, будем записывать в регистры RGd, RGc, RGb, ... При работе программы значение $a_0 x$ вычислится до первого цикла, а при выполнении циклов по команде К П → x0 будут последовательно вызываться значения коэффициентов $a_1, a_2, \ldots$, так как будет модифицироваться код адресуемого регистра (12, 11, 10, 9, ...). При каждом цикле содержимое счетчика в RG3 будет уменьшаться на 1, а когда оно станет равным 0 программа завершится.

Значение показателя степени многочлена запишем в RG1, а не в RG3, чтобы после выполнения программы число n осталось в RG1 (в RG3 оно бы уменьшилось до 0) и можно было повторить вычисления с новым значением аргумента x. Аргумент x будем записывать в RG2. Заняв таким образом 4 регистра из 14, можно заключить, что максимальная степень многочлена $f(x)$ для этой программы не выше 10.

П р о г р а м м а вычисления значения многочлена по схеме Горнера:

Адрес	Команда	Код	Комментарии
00	1	01	Запись модифицированного кода (номера регистра) в RG0 для организации косвенного вызова содержимого регистров
01	3	03	

Адрес	Команда	Код	Комментарии
02	x → П0	40	RGj ($j = 13, \ldots, 4$)
03	П → x1	61	03–04. Вызов значения n и перезапись его
04	x → П3	43	в RG3, с тем чтобы предохранить RG1 от обнуления после вычисления программы и использовать программу многократно для данного n
05	П → xd	6Г	Вызов значения a_0 ($y := a_0$)
06	П → x2	62	Вызов значения x
07	×	12	Вычисление значения yx ($y := yx$)
08	К П → x0	Г0	Индикация косвенного вызова регистров RGc, RGb, . . . , RG4 с коэффициентами $a_1, a_2, \ldots, a_9$ в качестве их содержимого
09	+	10	Вычисление очередного значения $y = yx + a_i$
10	F L3	5–	Организация цикла. Параметр цикла n в RG3
11	06	06	Адрес перехода
12	С/П	50	Останов и индикация результата $f(x)$

Инструкция по работе с программой:

1. Перейдите в режим "Программирование" (В/0 ПРГ).
2. Введите текст программы.
3. Проведите редактирование программы.
4. Перейдите в режим "Автоматическая работа" (F АВТ).
5. Выбрав контрольный пример, запишите коэффициенты a_0, a_1, a_2, . . . в регистры RGd, RGc, RGb (не более 10 коэффициентов).

Занесите степень многочлена числа n ($n \leqslant 10$) в RG1. Значение x – в RG2. Проведите отладку программы (В/0 ПП), контролируя выполнение каждого шага по индикатору.

6. Для заданного многочлена осуществите ввод исходных данных в регистры, указанные в п. 5, и пустите программу (В/0 С/П).
7. Запишите результат в тетрадь.
8. Для вычисления значения многочлена от нового значения x повторите выполнение п. 6–7.

Контрольный пример. Вычислите значение многочлена $2x^5 + x^4 - 4x^3 - 2x^2 + 1$ при $x = 1$.

Запись коэффициентов в адресуемые регистры памяти:

$2 \to$ RGd,	$0 \to$ RG9,
$1 \to$ RGc,	$1 \to$ RG8,
$-4 \to$ RGb,	$5 \to$ RG1,
$-2 \to$ RGa,	$1 \to$ RG2.

Результат: $f(1) = -2$.
Время вычисления ≈ 7 с.

2. Условные косвенные переходы

В командах условного прямого перехода, после проверки одного из условий $x < 0$, $x = 0$, $x \geqslant 0$ или $x \neq 0$, происходит переход (если условие не выполняется!) к выполнению команды, адрес которой указан сразу после команды проверки условия, т.е. этот фрагмент программы выглядит так:

...
F x > 0
N. . . , где N – адрес перехода.
...

В МК-54 предусмотрена возможность использования команд условного косвенного перехода, т.е. когда адрес перехода записан не в тексте программы, а в одном из адресуемых регистров. Записываются эти команды следующим образом: К x < 0N, К x = 0N, К x $\geqslant$ 0N, К x $\neq$ 0N, где К – символ клавиши косвенной адресации; x < 0, x $\geqslant$ 0, x = 0, x $\neq$ 0 – символы клавиш проверки условий; N – номер адресуемого регистра (N: = = 0, . . . , 9 a, b, c, d). Адрес перехода N записывают предварительно в один из адресуемых регистров. Здесь важно, что адрес перехода может модифицироваться в зависимости от номера регистра. Если используются регистры RG0, RG1, RG2, RG3, то из содержимого этих регистров после выполнения, например, команды К x < 0 2 вычитается 1 и соответственно адрес перехода будет не N, а $N - 1$. Если используются регистры RG4, RG5, RG6, то после исполнения команды условного косвенного перехода к содержимому регистра обращения прибавляется 1 и соответственно адрес перехода будет не N, а $N + 1$. Если использовать регистры RG4, RG5, RG6, RGa, RGb, RGc, RGd, то при исполнении команды условного косвенного перехода адрес в указанных регистрах не модифицируется. В этом случае мы находимся в условиях использования команды условного прямого перехода, как, например F x ≠ 0, с той лишь разницей, что адрес перехода содержится в одном из регистров RG7, . . . , RGd. Переход на заданный адрес осуществляется, если проверяемое условие (например, $x \geq 0$) не выполняется. Если условие выполняется, то МК приступает к исполнению команды, следующей за командой условного косвенного перехода.

Команды косвенного условного перехода с адресом перехода, записанного в регистры RG0–RG3 или в регистры RG4–RG6, удобно использовать для организации различного рода комбинаций вычислений. Покажем это на примере.

Пример 6. Вычислите значения выражений: $567 - A$, $67 - A$, $7 - A$, сохранив результаты каждого вычисления. Составим программу решения задачи, используя команду условного косвенного перехода.

К о н с т р у и р о в а н и е п р о г р а м м ы. Для построения программы используем команды условного косвенного перехода К x < 04. Адрес перехода будем хранить в RG4. Так как при использовании RG4, при каждом обращении к нему, адрес будет увеличиваться на 1, то дальше поступим следующим образом: по адресам N, $N + 1$, $N + 2$ запишем число 567, число N запишем в RG4. Далее запишем команду вычисления разности, а затем команду проверки условия $x < 0$. До первой проверки условия (выполнения команды К x < 0 4) вычислим разность $567 - A$, затем адрес перехода в RG4 увеличится на 1 и станет равным $N + 1$. Программа начнет выполняться с адреса $N + 1$, с которого запишется число 67, и результатом будет разность $67 - A$. После второго обращения к RG4 адрес станет равным $N + 2$ и программа будет выполняться с адреса $N + 2$, по которому записано число A. Далее найдем разность $7 - A$. После того как разность будет меньше нуля, МК начнет выполнять команды, записанные после команды К x < 0 4. Учитывая требования задачи сохранить результаты каждого вычисления, введем в программу команду косвенной записи в регистр. Используем, например, RG5, в которой запишем предварительно начальный номер адресуемого регистра, например 7. После команды К x → П5 содержимое регистра RG5 будет увеличиваться на 1, и результат из RX (результат вычислений) после каждого обращения к регистру будет записываться в регистры RG8, RG9, RGa. Исходное число A будем вводить в регистр RG1.

П р о г р а м м а решения задачи:

Адрес	Команда	Код	Комментарии
00	4	04	00–01. Запись адреса перехода в RG4
01	x → П4	44	
02	7	07	02–03. Запись номера регистра в RG5. По команде косвенной записи номер регистра будет увеличиваться на 1 и результаты запишутся в регистры RG8, RG9, RGa (код 00000010)
03	x → П5	45	
04	5	05	04–06. Ввод числа 567.
05	6	06	
06	7	07	
07	П → x1	61	Вызов числа A из RG1
08	–	11	Вычисление очередной разности
09	К x → П5	L5	Команда косвенной записи в регистры RG8, RG9, . . . Модифицированный код регистра в RG5
10	КХ < 04	[4	Проверка условия $x < 0$. Если оно не выполняется, то происходит переход на модифицированный адрес, хранящийся в RG4. При каждом обращении к RG4 – адрес увеличивается на 1
11	С/П	50	Останов вычислений, если условие выполняется или когда код регистра (адрес) в RG4 станет > 10

Инструкция по работе с программой:

1. Перейдите в режим "Программирование" (В/0 F ПРГ).

2. Введите текст программы.

3. Проведите редактирование программы.

4. Перейдите в режим "Автоматическая работа" (F АВТ).

5. Проведите отладку программы с помощью контрольного примера в потактовом режиме (В/0 ПП).

6. Введите исходное число A в RG1.

7. Пустите программу с адреса 00 (В/0 С/П).

8. Получите результаты вызовом содержимого регистров RG8, RG9, RGa и запишите их в тетрадь.

9. Для повтора вычислений с новым значением A повторите выполнение п. 6–8.

Контрольный пример. $A = 9$.

Результаты: 558 (RG8), 58 (RG9), –2 (RGa).

Время вычисления ≈7 с.

Замечание. Для данного числа 567 мы взяли $A = 9$. При последнем шаге разность $7 - 9 = -2$ меньше 0, после чего МК переходит на адрес 11 (команда С/П) и индуцирует последнюю разность – число -2 на индикаторе.

Если взять число $A \leqslant 7$, то последняя разность будет $7 - A \geqslant 0$. Казалось бы, что МК никогда не остановится (особенно, если $A < 0$), так как условие $x < 0$ не выполняется. Однако это не так. Выполняться программа при $A \leqslant 7$ будет до тех пор, пока адрес в RG4 не увеличится до 11 (код 00000011). Это можно проверить, вызвав содержимое RG4 в RX. Получается, что, когда адрес перехода станет равным 10 (по этому адресу записана команда К $x < 0$ 4), МК должен будет выполнить эту же команду. В результате происходит останов вычислений (при этом содержимое RG4 увеличится еще на единицу и станет равным 11). Этот результат представляет собой разность значений предпоследней и последней разности числа A. В то же время выполненная таким образом программа даст нам нужные результаты. Они находятся в тех же регистрах RG8, RG9, RGa.

Проверьте это для числа $A = -10$. Проверьте также содержимое регистров RG4 и RG5.

Таким образом, программа вычисляет разности для любых значений A.

3. Безусловные косвенные переходы

Аналогично командам косвенного перехода строятся команды безусловного косвенного перехода. Они реализуются клавишами $\boxed{\text{К}}$ $\boxed{\text{БП}}$ N, где N – номер адресуемого регистра $(0, \ldots, 9, a, b, c, d)$, соответствующих одному из 14 адресуемых регистров МК.

При исполнении этой команды осуществляется прерывание последовательности команд программы и происходит переход к команде, адрес которой записан в адресуемом регистре с номером N. В зависимости от номера регистра происходит модификация адреса в регистре с номером N. Если это регистр RG0, RG1, RG2, RG3, то адрес в этих регистрах уменьшается на единицу; если это регистры RG4, RG5, RG6, то адрес увеличивается на единицу. Если адрес перехода записан в регистрах RG7, ..., RGd, то адрес при исполнении команды К БП N не модифицируется.

Рассмотрим ход выполнения команды К БП N на конкретном примере.

Пример 7. Составьте программу вычисления значения выражения $\ln\left(\frac{\sqrt{\operatorname{tg}(\ln 3{,}031 + \ln 59)}}{6}\right)$, в которой предусмотрите возможность вычисления значения выражения $\ln(\ln x + \ln y)$.

К о н с т р у и р о в а н и е п р о г р а м м ы. Для решения задачи достаточно в программу вычисления исходного выражения включить команду безусловного косвенного перехода К БП *N*. Эта команда должна стоять по адресу, следующему за вычислением $\ln x + \ln y$, и обеспечить переход на адрес, по которому записана команда вычисления $\ln(\ln x + \ln y)$.

Так как адрес перехода записывается в регистр RGN самим пользователем, то в зависимости от числа в RGN можно обеспечить различные варианты вычислений по программе. Этого было нельзя сделать, используя команду безусловного перехода БП, так как адрес перехода при этой команде фиксируется и входит в текст программы.

В качестве регистра косвенной адресации выберем, например, RG5, учитывая, что при обращении к этому регистру происходит модификация адреса (увеличивается на 1). Исходные данные – числа x и y будем записывать в регистры RG0 и RG1.

П р о г р а м м а:

Адрес	Команда	Код	Комментарии
00	П → x0	60	Вызов числа x из RG0
01	F ln	18	Вычисление значения $\ln x$
02	П → x1	61	Вызов числа y из RG1. Значение $\ln x$ переходит в RY
03	F ln	18	Вычисление значения $\ln y$
04	+	10	Вычисление значения $\ln x + \ln y$
05	К БП 5	85	Команда безусловного косвенного перехода. По этой команде происходит обращение к RG5, содержимое RG5 увеличивается на 1
06	F tg	1E	Вычисление значения $\mathrm{tg}(\ln x + \ln y)$
07	F$\sqrt{\ }$	21	Вычисление функции $\sqrt{x}$
08	6	06	Ввод числа 6
09	÷	13	Выполнение деления
10	F ln	18	Вычисление значения $\ln x$
11	С/П	50	Останов

И н с т р у к ц и я по работе с программой:

1. Перейдите в режим "Программирование" (В/0 F ПРГ).

2. Введите текст программы.

3. Проведите редактирование программы.

4. Перейдите в режим "Автоматическая работа" (F АВТ).

5. Запишите значения x и y контрольного примера в RG0 и в RG1. Запишите число 9 в RG5, чтобы обеспечить переход на адрес 10 $(9 + 1 = 10)$.

6. Проведите отладку программы в потактовом режиме ($\boxed{В/0}$ $\boxed{ПП}$).

7. Для вычисления с новыми значениями x и y выполните п. 5 и перейдите к выполнению п. 8.

8. Запустите программу с адреса 00 ($\boxed{В/0}$ $\boxed{С/П}$).

9. Запишите результат в тетрадь.

Контрольный пример. Вычислите значение $\ln(\ln 3{,}030853 + \ln 5)$.

Результат: 1.

Время вычисления ≈ 5 с.

Если проверить содержимое регистра RG5, то модифицированный код адреса в RG5 – 00000010. Если теперь снова выполнить команду пуска программы ($\boxed{В/0}$, $\boxed{С/П}$), то на индикаторе будет число $2{,}7182819 \approx e$. Это означает, что по команде К БП 5 микрокалькулятор вычислил значение $\ln 3{,}030853 + \ln 5$ и осуществил переход на адрес 11 $(10 + 1)$, по которому записана команда С/П. Если проверить снова содержимое RG5, то получим модифицированный код числа 11 – 00000011. Для вычисления значения исходного выражения $\ln\left(\frac{\sqrt{\operatorname{tg}(\ln x + \ln y)}}{6}\right)$ в RG5 необходимо записать число 5. По команде К БП 5 произойдет модификация адреса в RG5 и МК продолжит выполнение программы с адреса 06, по которому записана команда F tg.

Для данных значений x и y на индикаторе появится сообщение error. Если снова нажать клавиши $\boxed{В/0}$ $\boxed{С/П}$, то на индикаторе будет число $-1{,}2917596$ – это результат вычисления выражения $\ln\left(\frac{\sqrt{\ln x + \ln y}}{6}\right)$ (переход произошел на адрес 07 $(6 + 1 = 7)$ и значение $\operatorname{tg} x$ не вычислялось. Еще раз нажмем клавиши $\boxed{В/0}$ $\boxed{С/П}$. На индикаторе результат $-0{,}7917594 = \ln\frac{\ln x + \ln y}{6}$. Переход произошел на адрес 08 $(7 + 1 = 8)$. Если проверить содержимое RG5, то там модифицированный код числа 8 – 00000008. Еще раз нажмем клавиши $\boxed{В/0}$ $\boxed{С/П}$ – на индикаторе Error. Это результат попытки вычислить значение $\ln\frac{\ln x + \ln y}{-0{,}791759}$. Переход произошел на адрес 09

$(8 + 1 = 9)$, по которому записана операция деления. Произошло деление содержимого регистра RY, в котором находится число $\ln \frac{\ln x + \ln y}{6}$ (оно перешло туда после перемещения в регистре стека в результате выполнения операций), на число $\ln x + \ln y$, находящееся в RX. Если еще раз нажмем клавиши $\boxed{\text{В/0}}$ $\boxed{\text{С/П}}$, получим $1 = \ln(\ln x + \ln y)$. После еще одного нажатия клавиш $\boxed{\text{В/0}}$ $\boxed{\text{С/П}}$ получим результат $2{,}7182919 \approx e \approx \ln x + \ln y$. Эти же результаты мы получали сразу, вводя в RG5 число 9 в качестве адреса перехода.

4. Команда косвенного перехода на подпрограмму

Косвенный переход на подпрограмму выполняется командой К ПП N, где N – номер адресуемого регистра ($N = 0, \ldots 9, a, b, c, d$). При выполнении команды К ПП N происходит прерывание работы основной программы и осуществляется переход к выполнению подпрограммы, адрес которой указан в регистре RGN. Как и в других случаях использования косвенной адресации, при исполнении команды К ПП N может происходить модификация содержимого адресуемого регистра в зависимости от номера регистра. Если $N = 0, 1, 2, 3$, то из содержимого регистра вычитается 1, если номер регистра совпадает с RG4, RG5, RG6, то к содержимому этих регистров прибавляется 1. Адрес не модифицируется, если адрес перехода записан в регистрах RG7 – RGd.

Рассмотрим использование команды К ПП N на конкретном примере.

Пример 8. Вычислите значения выражений: 1) $x^5 + \sqrt{\lg(11 + 3x)}$; 2) $2 - \sqrt{\lg(11 + 3x^2)}$.

К о н с т р у и р о в а н и е   п р о г р а м м ы. Используя команду косвенного перехода на подпрограмму, вычислим значения указанных выражений по одной программе. Для этого вычисление значений $\sqrt{\lg(11 + 3x)}$ и $\sqrt{\lg(11 + 3x^2)}$ оформим в виде подпрограммы. Поскольку программа вычислений значений этих двух выражений будет отличаться только одной командой F x^2, то, использовав в качестве регистра косвенной адресации либо RG3, либо RG5, мы получим возможность сначала вычислить значение либо $\sqrt{\lg(11 + 3x)}$, а потом $\sqrt{\lg(11 + 3x^2)}$ (адрес уменьшится на 1), либо сначала $\sqrt{\lg(11 + 3x^2)}$, а потом

$\sqrt{\lg(11 + 3x)}$ (адрес увеличится на 1 при обращении к RG5). Выберем, например, регистр RG3, в который запишем адрес начала вычисления значения $\sqrt{\lg(11 + 3x)}$. Для хранения результата вычислений значения 1-го выражения используем регистр RG0, а значение 2-го выражения будет записываться в регистре индикации RX. Значение x будем вводить в RG1.

Программа:

Адрес	Команда	Код	Комментарии
00	1	01	00–02. Запись адреса перехода в RG3. При обращении к RG3 произойдет уменьшение содержимого на 1 и программа будет выполняться с адреса 16
01	7	07	
02	x → П3	43	
03	5	05	Начало вычисления 1-го выражения
04	П → x1	61	Вычисление значения x^5
05	F x^y	24	
06	П → x1	61	Вызов значения x в RX. Значение x^5 – в RY
07	К ПП 3	–3	Команда обращения к подпрограмме по адресу 16. В момент исполнения К ПП 3 из 17 вычитается 1 и осуществляется переход на адрес 16
08	+	10	Сложение $x^5 + \sqrt{\lg(11 + 3x)}$
09	x → П0	40	Запись результата в RG0
10	2	02	Вычисление 2-го выражения. Ввод числа 2
11	П → x1	61	Вызов значения x в RX
12	К ПП 3	–3	Обращение к подпрограмме. Сейчас из числа 16 в RG3 вычитаем 1 (16 – 1 = 15) и осуществляется переход на адрес 15
13	–	11	Вычисление значения $2 - \sqrt{\lg(11 + 3x^2)}$
14	С/П	50	Останов и индикация значения 2-го выражения
15	F x^2	22	15–22. Подпрограмма вычисления значения выражения $\sqrt{\lg(11 + 3x^2)}$ с адреса 16 и выражения $\sqrt{\lg(11 + 3x)}$ с адреса 15
16	3	03	
17	×	12	
18	1	01	
19	1	01	
20	+	10	
21	F lg	17	
22	F $\sqrt{\ }$	21	
23	В/0	52	Команда возврата из подпрограммы. В стеке возврата запоминается адрес следующей команды (в первом случае – 08, во втором случае – 13)

И н с т р у к ц и я по работе с программой:

1. Перейдите в режим "Программирование" ($\boxed{\text{В/0}}$ $\boxed{\text{F}}$ $\boxed{\text{ПРГ}}$).

2. Введите текст программы.

3. Проведите редактирование программы.

4. Перейдите в режим "Автоматическая работа" ($\boxed{\text{F}}$ $\boxed{\text{АВТ}}$).

5. Запишите значение x контрольного примера в RG0 и проведите отладку программы в потактовом режиме ($\boxed{\text{В/0}}$ $\boxed{\text{ПП}}$).

6. Введите значение x в RG0 и пустите программу с нулевого адреса ($\boxed{\text{В/0}}$ $\boxed{\text{С/П}}$).

7. Запишите результат в тетрадь (значение 2-го выражения в RX). Значение 1-го выражения вызовите из RG0.

Контрольный пример. Вычислите значения выражений:

$$2^5 + \sqrt{\lg(11 + 3 \cdot 2)} \approx 33{,}109249,$$

$$2 - \sqrt{\lg(11 + 3 \cdot 2^2)} \approx 0{,}8330651.$$

В р е м я в ы ч и с л е н и я ≈ 14 с. Следует учесть, что использование подпрограмм, создавая удобство для пользователя при составлении программ, увеличивает время вычислений МК.

Примечание. Краткие характеристики программируемых микрокалькуляторов различных типов приведены в приложении 6.

§ 1. ЧИСЛОВЫЕ ФУНКЦИИ

1. Дробно-рациональные функции

Задачи

1. Установите характер изменения функции $y = \dfrac{x^2 - 1{,}8}{4x^3 - x^2 - 2}$ на отрезке [0,8863, 0,8864], изменяя значение x на 0,00001 и заполните таблицу:

x	0,8863	0,88631	...
y			

Определите, с точностью до 10^{-5}, интервал, в котором находится абсцисса точки разрыва графика функции.

2. Определите диаметры d_1, d_2, d_3, d_4 стальной проволоки для изготовления пружины диаметром $D = 18$ мм с допустимыми нагрузками $P_1 = 75$ Н, $P_2 = 100$ Н, $P_3 = 125$ Н, $P_4 = 150$ Н при допустимом напряжении $R_S = 9 \cdot 10^8$ Н/м^2, если допустимая нагрузка P_i вычисляется по формуле $P_i = \dfrac{\pi d_i^3 R_S}{8D}$.

3. Составьте расчетную формулу для определения расхода воды Q, протекающей через трубу, в зависимости от диаметра трубы D и скорости потока воды v.

Заполните таблицу для данных значений D и v:

D, м	0,032					0,041				
v, м/с	0,2	0,3	0,5	0,8	0,9	0,2	0,3	0,5	0,8	0,9
Q, л/ч										

4. Используя программу вычисления значения многочлена по схеме Горнера, вычислите значение многочлена $f(x) = x^7 - 0{,}45x^5 + 2{,}4x^4 - 20{,}9x^2 + 0{,}8x + 18$ в промежутке $[-8;\ 8]$ с шагом $\Delta x = 2$ и заполните таблицу:

x	
$f(x)$	

2. Показательная и логарифмическая функции

Задачи

5. Для подбора подшипников валов необходимо знать коэффициент работоспособности $c = (\omega h)^{0,3}$, где ω – угловая скорость вала, рад/с; h – требуемая долговечность, ч. Вычислите коэффициент работоспособности при $\omega = 147$ рад/с и $h = 12\,600$ч.

6. По формуле определения коэффициента работоспособности подшипника валов установите зависимость долговечности подшипника от скорости вращения вала при $c = 20$ (см. задачу 5). Получите значения $h(\omega)$ при $\omega = 10, 10^2, 10^3, 10^4$ рад/с с точностью до 1 ч.

7. Скорость резания на токарном станке определяется по формуле $v = \dfrac{30}{t^{0,45} s^{0,52}}$ (м/мин), где t – глубина резания, мм; s – подача резца, мм/об. Определите скорость резания при постоянной глубине резания $t = 2{,}1$ мм и подаче $s = 3{,}2$; $3{,}6$; 4; $4{,}5$ мм/об.

8. При разметке контура логарифмического кулачка очередная точка контура определяется координатами $(r;\ \alpha)$, где r – радиус-вектор; α – угол поворота радиуса-вектора, рад. Длину r при этом вычисляют по формуле $r = r_0 e^{\alpha k}$, где r_0 – длина радиуса-вектора начальной точки; k – коэффициент ($k = \operatorname{tg}\theta = \text{const}$). Дайте пять последовательных значений радиуса-вектора r при $r_0 = 18$ мм, $k = 0{,}11$, $\alpha = \pi/20, \pi/11, \pi/8, \pi/5, \pi/2$.

3. Тригонометрические функции

Пример 1. Выразите угол $\varphi = \varphi^\circ\varphi'\varphi''$, где φ° – градусы; φ' – минуты; φ'' – секунды, радианы.

Р е ш е н и е. Для перевода угла, заданного в градусах, минутах и секундах, в радианы воспользуемся соотношениями: $\pi_{\text{рад}} = 180^\circ$, $1^\circ = 60'$, $1' = 60''$. Отсюда $\varphi = \left(\left(\dfrac{\varphi''}{60} + \varphi'\right)\dfrac{1}{60} + \varphi^\circ\right)\dfrac{\pi}{180}$. Значение φ можно вычислить на МК в режиме "Автоматическая работа" или в режиме "Программирование".

П р о г р а м м а перевода угла, выраженного в градусах, минутах и секундах, в радианы в режиме "Программирование":

Адрес	Команда	Код	RX	RY	Комментарии
00	x → П0	40	φ°	0	Запись значения φ° в RG0
01	С/П	50	φ°	0	Останов. Ввод значения φ' в RX
02	x → П1	41	φ'	φ°	Запись значения φ' в RG1
03	С/П	50	φ'	φ°	Останов. Ввод значения φ'' в RX
04	x → П2	42	φ''	φ'	Запись значения φ'' в RG2
05	6	06	6	φ''	05–06. Ввод числа 60
06	0	00	60	φ''	
07	÷	13	$\varphi''/60$	φ'	Вычисление значения $\varphi''/60$ (перевод секунд в минуты)
08	П → x1	61	φ'	$\varphi''/60$	Вызов значения φ'
09	+	10	$\varphi''/60 + \varphi' = A$	φ'	Вычисление значения $\varphi''/60 + \varphi'$
10	6	06	6		10–11. Ввод числа 60
11	0	00	60	A	
12	÷	13	$A/60$	φ'	Вычисление значения $(\varphi''/60 + \varphi')\frac{1}{60}$ (перевод минут в градусы)
13	П → x0	60	φ°	$A/60$	Вызов значения φ°
14	+	10	$A/60 + \varphi^\circ = B$	φ'	Перевод угла в градусы и доли градуса
15	x → Пd	4Г			Запись φ в градусах и долях градуса в RGd
16	F π	20	π	B	Вызов числа π
17	×	12	$B\pi$	φ'	Умножение числа градусов на π
18	1	01	1		18–20. Ввод числа 180
19	8	08	18		
20	0	00	180	$B\pi$	
21	÷	13	φ	φ'	Вычисление значения φ в радианах
22	С/П	50	φ	φ'	Останов и индикация значения φ в радианах

Инструкция по работе с программой:

1. Перейдите в режим "Программирование" (В/0 F ПРГ).
2. Введите текст программы.
3. Отредактируйте программу.
4. Перейдите в режим "Автоматическая работа" (F АВТ).
5. Проведите отладку программы на контрольном примере:

а) введите число градусов φ° и нажмите ПП ;

б) введите число минут φ' и нажмите ПП ;

в) введите число секунд φ'' и нажмите $\boxed{ПП}$;

г) продолжите нажатие клавиши $\boxed{ПП}$ до получения результата и сравните его с результатом, полученным другим способом (например, устно).

6. Введите значения $\varphi°$, φ', φ'', разделяя ввод клавишей $\boxed{С/П}$ (после ввода $\varphi°$ – $\boxed{В/0}$ $\boxed{С/П}$, чтобы обеспечить пуск с нулевого адреса).

7. Перепишите результат в тетрадь.

8. Для новых значений φ повторите выполнение п. 6–7.

Контрольный пример. $\varphi = 179°59'60''$.

Р е з у л ь т а т: π.

В р е м я в ы ч и с л е н и я ≈ 5 с.

Примечание. Значение угла в градусах и долях градуса хранится в RGd. Нажав клавиши $\boxed{П \to x}$ $\boxed{d}$, получим результат $\varphi = \pi$.

Пример 2. Переведите угол $\varphi = 2{,}3$ рад в градусы.

Р е ш е н и е. Из формулы $\pi_{рад} = 180°$ имеем $\varphi = 180 \cdot 2{,}3/\pi$. Используя МК в автоматическом режиме, получим р е з у л ь т а т $\approx 131{,}78°$.

П р о г р а м м а вычислений:

180 В↑ 2,3 $\boxed{\times}$ F π $\boxed{\div}$

Пример 3. На колесе диаметром 13 м установлен фонарь так, что луч его при вращении колеса все время обращен к земле. Определите, на каком расстоянии от проекции центра колеса на землю будет находиться световое пятно от фонаря через 1 с, 4 с, 7 с, 11 с, если угловая скорость вращения колеса $\omega = \pi/16$ рад/с, а в начальный момент времени фонарь находился в точке, повернутой относительно поверхности земли на угол 0,3 рад.

Р е ш е н и е. Световое пятно от фонаря совершает колебательные движения относительно проекции центра колеса по закону $x(t) = R\cos(\omega t + b) = 13\cos(\frac{\pi}{16}t + 0{,}3)$, где $x(t)$ – смещение светового пятна относительно проекции центра колеса. Смещение $x(t)$ для заданного значения t можно вычислить на МК либо в режиме автоматической работы, либо в программируемом режиме.

Поскольку нам необходимо найти несколько значений $x(t)$, то удобнее воспользоваться программой, вычисляющей значения $x(t)$ при любом t.

Программа:

Адрес	Команда	Код	RX	RY	Комментарии
00	П→x1	61	ω	t	Вызов ω из RG1. Значение t вводится в RX и после вызова ω переходит в RY
01	×	12	ωt	0	Вычисление значения ωt
02	П→x2	62	b	ωt	Вызов значения b из RG2
03	+	10	$\omega t + b$	0	Вычисление значения $\omega t + b$
04	F cos	1Г	$\cos(\omega t + b)$	0	Вычисление значения $\cos(\omega t + b)$
05	П→x0	60	R	$\cos(\omega t + b)$	Вызов значения R из RG0
06	×	12	$x(t)$	0	Вычисление значения $R\cos(\omega t + b) = x(t)$
07	С/П	50	$x(t)$	0	Индикация результата $x(t)$

Инструкция по работе с программой:

1. Перейдите в режим "Программирование" (В/0 F ПРГ).
2. Введите текст программы и отредактируйте ее.
3. Перейдите в режим "Автоматическая работа" (F АВТ).
4. Запишите значение R в RG0, ω – в RG1; b – в RG2.
5. Введите в RX значение t и нажмите клавиши В/0 С/П
6. Запишите результат в тетрадь.
7. Для новых значений t повторите п. 5–6.

Переключатель Р – ГРД – Г установите в положение Г.

Для $t = 1$ $x(t) \approx 11{,}43$.
Для $t = 4$ $x(t) \approx 6{,}07$.
Для $t = 7$ $x(t) \approx -1{,}36$.
Для $t = 11$ $x(t) \approx -10{,}09$.

Время вычислений ≈ 4 с.

Замечание. Число $\omega = \pi/16$ вводится после вычисления ω: F π 16 ÷ x→П↑.

Задачи

Задачи **9–12** решите с помощью МК в режиме "Автоматическая работа".

9. Переведите углы, выраженные в радианах, в градусы и доли градуса с точностью до 10^{-2}: $\varphi_1 = 0{,}57$ рад, $\varphi_2 = 2{,}14$ рад, $\varphi_3 = 5{,}2$ рад.

10. В прямом круговом конусе длина радиуса относится к длине образующей как 27 : 59. Найдите угол наклона образующей конуса к плоскости основания (в градусах).

11. Найдите x в градусах с точностью до 10^{-2} из уравнения $\sin x = \lg 2{,}845$.

12. Определите показатель преломления среды относительно воздуха, если угол падения луча равен 37°, а угол преломления луча равен 29°.

Задачи **13–15** решите, используя программы примеров 1 и 3.

13. Переведите углы, выраженные в градусах, минутах и секундах в радианы: $\varphi_1 = 17°48'56''$, $\varphi_2 = 315°8'17''$, $\varphi_3 = 114°10'14''$.

14. Переведите углы, выраженные в градусах, минутах и секундах, в градусы и доли градуса: $\varphi_1 = 24°18'4''$, $\varphi_2 = 57°24'17''$, $\varphi_3 = 16'29''$.

15. Стальной шарик равномерно вращается по окружности радиусом $R = 18$ см с угловой скоростью $\omega = \pi/9$ рад/с по часовой стрелке от точки A, расположенной в верхней части окружности и сдвинутой относительно вертикального диаметра на угол $\varphi = 1$ рад. Определите проекцию шарика на горизонтальный диаметр в момент времени $t = 0{,}8$, 1,4, 2, 2,6, 3,2, 3,8 с.

§ 2. КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

При решении задач этого параграфа МК можно использовать либо в автоматическом режиме (при решении отдельных задач), либо в режиме программирования (при решении серии однотипных задач).

В режиме программирования можно одновременно записать в программную память несколько программ, а при обращении к нужной программе указывать начальный ее адрес.

Основные программы:

1. Вычисление модуля комплексного числа $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Программа:

Адрес	Команда	Код	Комментарии
00	П → x0	60	Вызов числа a (действительной части числа $a + bi$) в RX
01	F x^2	22	Вычисление значения a^2
02	П → x1	61	Вызов числа b (мнимой части числа $a + bi$) в RX
03	F x^2	22	Вычисление значения b^2
04	+	10	Вычисление $a^2 + b^2$
05	F $\sqrt{\ }$	21	Вычисление модуля числа
06	x → Па	4–	Запись значения $\mid z \mid$ в RGa
07	С/П	50	Останов и индикация результата

Инструкция по работе с программой:

1. После ввода программы перейдите в режим "Автоматическая работа" ($\boxed{\text{F}}$ $\boxed{\text{АВТ}}$).

2. В регистры RG0 и RG1 запишите числа a и b.

3. Запуск программы произведите с нулевого адреса командами В/0, С/П.

4. Запишите с индикатора результат $\mid z \mid$ (значение $\mid z \mid$ остается в RGa).

2. Значение аргумента φ комплексного числа $z = a + bi$, записанного в тригонометрической форме $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, где $r = \mid z \mid = \sqrt{a^2 + b^2}$, вычислим из соотношения

$$\varphi = \arccos \frac{a}{\mid z \mid} \qquad (1).$$

Однако, чтобы определить значение φ, необходимо учитывать, в каком квадранте комплексной плоскости находится число z. При $b \geqslant 0$ число z находится в первом квадранте при $a \geqslant 0$ ($0° \leqslant \varphi \leqslant 90°$) и во втором квадранте при $a < 0$ ($90° < \varphi \leqslant 180°$). Таким образом, при $b \geqslant 0$ можно использовать формулу (1). При $b < 0$ и $a < 0$ число z будет находиться в третьем квадранте и должно выполняться условие $180° < \varphi < 270°$. Но в этом случае значение φ, полученное по формуле (1), будет находиться в промежутке [90°, 180°], и для нахождения истинного значения аргумента $\varphi_И$ необходимо положить $\varphi_И = 360° - \varphi$. При $b < 0$ и $a \geqslant 0$ число будет находиться в четвертом квадранте комплексной плоскости и для аргумента φ должно выполняться условие: $270° \leqslant \varphi < 360°$, но в этом случае значение φ, полученное по формуле (1), будет находиться в промежутке [0°, 90°], и для получения истинного значения аргумента $\varphi_И$ также необходимо положить $\varphi_И = 360° - \varphi$.

Исходя из этих рассуждений, можно сконструировать программу для МК, вычисляющую значения аргумента φ комплексного числа z, соответствующих положению числа z на комплексной плоскости.

Программу начнем вводить с адреса 08, чтобы использовать результат (значение $|z|$), полученный в результате работы первой программы.

Программа:

Адрес	Команда	Код	Комментарии
08	П→x0	60	Вызов значения a из RG0
09	П→xa	6–	Вызов значения $\|z\|$ из RGa
10	÷	13	Вычисление значения $a/\|z\|$
11	F $\cos^{-1}$	1–	Вычисление значения $\arccos(a/\|z\|)$
12	x→Пb	4L	Запись значения $\varphi = \arccos(a/\|z\|)$ в RGb ($0° \leqslant \varphi \leqslant 90°$)
13	П→x0	60	Вызов значения a
14	F x < 0	5[	Проверка условия $a < 0$
15	25	25	Адрес перехода, если $a \geqslant 0$
16	П→x1	61	Вызов значения b из RG1
17	F x < 0	5[	Проверка условия $b < 0$
18	27	27	Адрес перехода, если $b \geqslant 0$
19	3	03	19–21. Ввод числа 360
20	6	06	
21	0	00	
22	П→xb	6	Вызов значения φ из RGb ($0° \leqslant \varphi \leqslant 90°$)
23	–	11	Вычисление значения $\varphi_И = 360° - \varphi$ ($270° \leqslant \varphi_И < 360°$) при $a < 0$, $b < 0$ и вычисление $\varphi_И$ при $a \geqslant 0$ и $b < 0$ ($180° < \varphi_И < 270°$) после БП
24	С/П	50	Останов и индикация аргумента $\varphi_И$
25	БП	51	25–26. Команда безусловного перехода на адрес 16, если $a \geqslant 0$ и $b < 0$
26	16	16	
27	П→xb	6L	Вызов значения $\varphi = \arccos(a/\|z\|)$ в RX при $b \geqslant 0$
28	С/П	50	Останов и индикация значения φ при $b \geqslant 0$ и любом a

Инструкция по работе с программой:

1. Введите текст программы с адреса 08 ($\boxed{БП}$ $\boxed{0}$ $\boxed{8}$ $\boxed{F}$ $\boxed{ПРГ}$).
2. Перейдите в режим "Автоматическая работа" ($\boxed{F}$ $\boxed{АВТ}$).

Замечание. Сейчас в ОЗУ программ находится две программы, одна из которых вычисляет значение $|z|$, а другая значение φ (фактически это фрагменты одной программы), разделенные командой С/П.

3. Установите переключатель Р – ГРД – Г в положение Г.

4. После ввода исходных данных (a – в RG0, b – в RG1) запустите программу командами $\boxed{\text{В/0}}$ $\boxed{\text{С/П}}$ (на индикаторе появится значение $|z|$).

5. Для вычисления аргумента φ для заданных a и b, нажмите клавишу $\boxed{\text{С/П}}$ (на индикаторе появится значение φ, соответствующее положению числа z на комплексной плоскости).

6. Запишите результат в тетрадь (значение $|z|$ – в RGa).

7. Для другого числа z повторите п. 4–5.

Пример 1. Вычислите модуль комплексного числа $z = 0 - i$.

Решение. Запишем число $a = 0$ в RG0, а число $b = -1$ – в RG1.

После команд $\boxed{\text{В/0}}$ $\boxed{\text{С/П}}$ получим результат: $|z| = 1$.

Время вычисления ≈ 3 с.

Пример 2. Перевести число $z = 0 - i$ в тригонометрическую форму: $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$.

Решение. Продолжим работу с программой: нажмем клавишу $\boxed{\text{С/П}}$ и прочтем результат: $\varphi = 270°$.

Время вычисления ≈ 7 с.

Задачи

1–9. Вычислите модуль и аргумент комплексного числа z.

1. $z = -21{,}7 + 36{,}56i$.
2. $z = 0{,}86 - 112i$.
3. $z = -92{,}6 - 18{,}4i$.
4. $z = 3\pi + \pi^2 i$.
5. $z = \ln 0{,}8 - \cos 2{,}5i$.
6. $z = -e^{2,3} + \sin 50° i$.
7. $z = \ln 0{,}8 - \cos 2{,}5° i$.
8. $z = 1{,}4^9 + \operatorname{tg} 71° i$.
9. $z = 13 - \operatorname{tg} 89{,}999° i$.

10. Запишите в показательной форме число $z = -2{,}8 + \arcsin 0{,}9$.

11. Найдите произведение чисел $z_1 = 16{,}3 - 12{,}8i$ и $z_2 = -120 + 1{,}8i$, представив результат в показательной форме.

12. Точка z комплексной плоскости с начальными координатами $(-1,\ 16)$ перемещается по плоскости так, что $|z| =$

$= \text{const}$, а аргумент φ в конце пути получил приращение $\Delta\varphi = 62°$. Определите траекторию движения точки и пройденный ею путь.

13. Точка z комплексной плоскости с координатами $(24, -7)$ в момент времени t_0 совершала круговое движение и в момент времени t_1 имела координаты $(0, 25)$. Определите, на какой угол повернулся радиус-вектор точки z за время Δt относительно первоначального положения.

14. Точка z комплексной плоскости имеет координаты $(-8, 47)$. Определите координаты точки z после поворота ее относительно начала координат на $75°$ против часовой стрелки.

§ 3. ПРЕДЕЛ ЧИСЛОВОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

Пример 1. Используя определение предела последовательности, докажите, что $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{15n^2+1}{6n^2-2} = \frac{5}{2}$.

Р е ш е н и е. По определению предела последовательности для любого $\epsilon > 0$ можно найти такое натуральное число N, что при $n > N(\epsilon)$ будет $\left| \frac{15n^2+1}{6n^2-2} - \frac{5}{2} \right| < \epsilon$.

Найдем значение $N(\epsilon)$: $\left| \frac{30n^2+2-30n^2+10}{2(6n^2-2)} \right| = \left| \frac{12}{2(6n^2-2)} \right|$.

Так как n – натуральное число, то $\left| \frac{6}{6n^2-2} \right| = \frac{3}{3n^2-1} < \epsilon$. Отсюда $n^2 > \frac{3+\epsilon}{3\epsilon}$, $n > \sqrt{\frac{3+\epsilon}{3\epsilon}}$.

В качестве $N(\epsilon)$ можно взять целую часть числа $\sqrt{\frac{3+\epsilon}{3\epsilon}}$, т.е.

$$N(\epsilon) = \sqrt{\frac{3+\epsilon}{3\epsilon}}.$$

Для вычисления $N(\epsilon)$ составим программу на МК-54, учитывая возможность выделения целой части числа $1 < N < 10^8$ (см. пример 7 из § 2 гл. I) с помощью команд косвенной адресации.

П р о г р а м м а вычисления выражения $\sqrt{\frac{5+6\epsilon}{135\epsilon}}$ (МК вычисляет только арифметический корень):

Адрес	Команда	Код	RX	RY	Комментарии
00	3	03	3	0	Ввод числа 3
01	П → x0	60	ϵ	3	Вызов значения ϵ
02	+	10	$3+\epsilon$	0	Вычисление значения $3+\epsilon$
03	F Bx	0	ϵ	$3+\epsilon$	Вызов значения ϵ из RX1
04	3	03	3	ϵ	Ввод числа 3
05	×	12	$3\cdot\epsilon$	$3+\epsilon$	Вычисление значения 3ϵ
06	÷	13	$\frac{3+\epsilon}{3\epsilon}$	0	Вычисление значения $\frac{3+\epsilon}{3\epsilon}$
07	$F\sqrt{\ }$	21	$\sqrt{\frac{3+\epsilon}{\epsilon}}$	0	Вычисление значения $\sqrt{\frac{3+\epsilon}{3\epsilon}}$
08	x → П7	47	$\sqrt{\frac{3+\epsilon}{3}}$	0	Запись числа в RG7
09	К П → x7	17	0	$\sqrt{\frac{3+\epsilon}{3\epsilon}}$	Косвенный вызов из RG7
10	П → x7	67	код$[N(\epsilon)]$	0	Вызов модифицированного кода значения $\sqrt{\frac{3+\epsilon}{3\epsilon}}$ (целая часть)
11	В ↑	0E	$[N(\epsilon)]$	$[N(\epsilon)]$	Приведения кода числа $[N(\epsilon)]$ к обычному виду
12	С/П	Г0	$[N(\epsilon)]$	$[N(\epsilon)]$	Останов и индикация результата

Инструкция по работе с программой:

1. Перейдите в режим "Программирование" ($\boxed{\text{В/0}}$ $\boxed{\text{F}}$ $\boxed{\text{ПРГ}}$).
2. Введите программу с нулевого адреса.
3. Отредактируйте программу.
4. Перейдите в режим "Автоматическая работа" ($\boxed{\text{F}}$ $\boxed{\text{АВТ}}$)
5. Введите число ϵ в RG0.
6. Произведите запуск программы ($\boxed{\text{В/0}}$ $\boxed{\text{С/П}}$).
7. Запишите результат в тетрадь.
8. Для нового значения ϵ выполните п. 5–7.

Для $\epsilon = 0{,}01$ $N(\epsilon) = 10$.

Для $\epsilon = 0{,}001$ $N(\epsilon) = 31$.

Для $\epsilon = 0{,}0001$ $N(\epsilon) = 100$.

Время вычисления ≈ 5 с.

Пример 2. $\lim\limits_{n\to\infty} (-1)^n \cdot 0{,}777^n = 0.$

Р е ш е н и е. По определению предела последовательности для любого $\epsilon > 0$ можно найти такое натуральное число N, что при $n > N(\epsilon)$ будет выполняться условие

$$|(-1)^n \cdot 0{,}777^n - 0| < \epsilon. \qquad (1)$$

Для нахождения $N(\epsilon)$ найдем из (1) значение n: $|(-1)^n \cdot 0{,}777^n - 0| = 0{,}777^n < \epsilon$. Отсюда $n \lg 0{,}777 < \lg \epsilon$, а так как $\lg 0{,}777 < 0$, то

$$n > \frac{\lg \epsilon}{\lg 0{,}777}.$$

Для нахождения значений $N(\epsilon)$ составим программу вычисления выражения $\frac{\lg \epsilon}{\lg 0{,}777}$ с выделением целой части этого выражения.

П р о г р а м м а:

Адрес	Команда	Код	RX	RY	Комментарии
00	F lg	17	$\lg \epsilon$	0	Вычисление значения $\lg \epsilon$ (значение введено в RX)
01	0	00	0	$\lg \epsilon$	01–05. Ввод числа 0,777
02	,	0–	0,	–"–	
03	7	07	0,7	–"–	
04	7	07	0,77	–"–	
05	7	07	0,777	–"–	
06	F lg	17	$\lg 0{,}777$	$\lg \epsilon$	
07	÷	13	$\frac{\lg \epsilon}{\lg 0{,}777}$	0	Вычисление значения $\frac{\lg \epsilon}{\lg 0{,}777}$
08	x→П7	47	–"–	0	Запись значения $\frac{\lg \epsilon}{\lg 0{,}777}$ в RG7
09	К x→П7	47	–"–	0	Косвенная запись числа в RG7
10	П→x7	67	Код $N(\epsilon)$	$\frac{\lg \epsilon}{\lg 0{,}777}$	Вызов кода целой части числа $N(\epsilon) = [\frac{\lg \epsilon}{\lg 0{,}777}]$
11	В↑	0E	$N(\epsilon)$	$N(\epsilon)$	Перевод кода $[N(\epsilon)]$ в обычный вид целого числа
12	С/П	50	$N(\epsilon)$	$N(\epsilon)$	Останов и индикация целой части числа

Инструкция по работе с программой:

1. Перейдите в режим "Программирование" ($\boxed{\text{В/0}}$ $\boxed{\text{F}}$ $\boxed{\text{ПРГ}}$).

2. Введите текст программы.

3. Проведите редактирование.

4. Введите значение ϵ в RX и проверьте программу в потактовом режиме ($\boxed{\text{В/0}}$ $\boxed{\text{ПП}}$).

5. Запишите результат в тетрадь.

6. Введите новое значение ϵ в RX.

7. Запустите программу ($\boxed{\text{В/0}}$ $\boxed{\text{С/П}}$).

8. Запишите результат в тетрадь.

9. Для нового значения ϵ выполните п. 6–8.

Для заданных ϵ значения $N(\epsilon)$ следующие: для $\epsilon = 10^{-2}$ $N(\epsilon) = 18$, для $\epsilon = 10^{-3}$ $N(\epsilon) = 27$, для $\epsilon = 10^{-4}$ $N(\epsilon) = 36$.

Время вычисления ≈ 5 с.

Задачи

В задачах **1–8** докажите, используя определение предела последовательности, что число a является пределом последовательности (a_n) и найдите с помощью МК номера $N(\epsilon)$ такие, что при $n > N$ выполняется неравенство $|a_n - a| < \epsilon$ для $\epsilon = 0{,}01,\ 0{,}001,\ 0{,}0001$.

1. $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{24}{n^3 + 1} = 0.$

2. $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{1}{10^n} = 0.$

3. $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{3n + 1}{2n - 1} = \dfrac{3}{2}$

4. $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{n^2}{n^2 + n} = 1.$

5. $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{3n^2 + 2}{n^2} = 3.$

6. $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{5n + 6}{n} = 5.$

7. $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{2n - 5}{n} = 2.$

8. $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{1 - n}{3 + n} = -1.$

Пример. Найдите уравнения касательной и нормали к параболе $y = 0{,}5x^2 + 47{,}5x - 27$ в точках с абсциссами $x_1 = 9{,}8$, $x_2 = -3{,}5$.

Р е ш е н и е. Уравнение касательной в точке $(x_0, f(x_0))$ к кривой $y = f(x)$ имеет вид $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$. Найдем значение f (9,8). Для этого можно использовать программу вычисления значения многочлена по схеме Горнера (см. § 5 гл. I), либо использовать автоматический режим работы МК. В последнем случае п р о г р а м м а имеет вид:

Шаг	Команда	Комментарии
1	9.8	Ввод значения x_1
2	x → П0	Запись значения x_1 в RG0
3	F x²	3–4. Вычисление значения x_1^2
4	0,5	
5	×	5–6. Вычисление значения $-0{,}5\,x_1^2$
6	/–/	
7	47.5	7–9. Вычисление $47x_1$
8	П → x0	
9	×	
10	+	Вычисление значения $-0{,}5x_1^2 + 47{,}5x_1$
11	27	
12	–	Вычисление значения $f(x_1)$
13	x → Па	Запись результата в RGa

Р е з у л ь т а т: $f(x_0) = 390{,}48$.

Найдем $f'(x_0) = -x + 47{,}5$, $f'(x_0) = 57{,}3$.

Уравнение касательной $y - 390{,}48 = 57{,}7\ (x - 9{,}8)$.

Значение $-\dfrac{1}{f'(x_0)}$ для уравнения нормали к кривой определим, используя значение $f'(x_0)$:

$$-\frac{1}{f'(x_1)} \approx 2{,}65 \cdot 10^{-2}.$$

Уравнение нормали к кривой в точке $x_1 = 9{,}8$ имеет вид $y - 390{,}48 = -2{,}65 \cdot 10^{-2} \cdot (x - 9{,}8)$.

Аналогичное решение для $x_2 = -3{,}5$.

Уравнение касательной $y + 199{,}375 = 51\ (x + 3{,}5)$.

Уравнение нормали $y + 199{,}375 = -1{,}96 \cdot 10^{-2}\,(x + 3{,}5)$.

Задачи

1. Найдите уравнение касательной и нормали к кривой $y = \ln(x^2 + 0{,}3)$ в точках с абсциссами $x_1 = -7$, $x_2 = 3{,}5$.

2. Резец станка с программным управлением при обработке детали движется вдоль линий $y = -0{,}5x^4 + 1{,}7x^3 + 0{,}7x^2 + 3$ на участке от 0 до 3,5 см, где x – смещение резца вдоль оси шпинделя; y – радиус детали. Определите, на каком расстоянии от начала обработки деталь имеет наибольший диаметр. Рабочая часть при $x > 0$.

Указание. Для вычисления значения $f(x_0)$ можно использовать программу вычисления многочлена по схеме Горнера либо использовать МК в режиме "Автоматическая работа".

3.* Центральная усадьба совхоза C (рис. 8) расположена в 87 км от райцентра A и в 34 км от магистральной дороги, проходящей через райцентр. Под каким углом к магистрали следует провести подъездной путь из совхоза C, чтобы стоимость перевозок грузов из C в A и обратно была наименьшей, если известно, что стоимость перевозок по магистральной дороге будет обходиться совхозу на 45% дешевле, чем по подъездному пути?

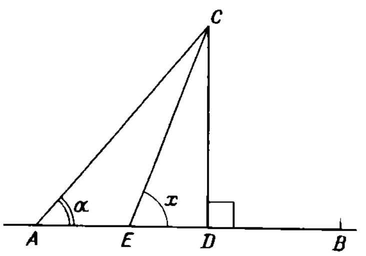


Рис. 8

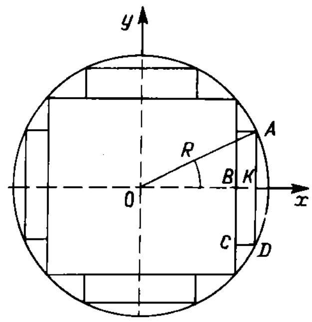


Рис. 9

4. По условию предыдущей задачи найдите наименьшую стоимость 1 т груза на 1 км пути при наличии подъездной дороги (стоимость 1 т · км равна 12,3 коп.) из совхоза C в райцентр A и обратно.

---

*Содержание задачи 3 заимствовано из сборника [13].

5. Определите, под каким углом к магистрали (рис. 8) должна быть построена подъездная дорога, чтобы суммарный годовой пробег автомобилей из C в A и B был как можно меньше, если известно, что движение между C и A будет в 2,4 раза интенсивнее, чем между C и B, а AB = 160 км, AC = 98 км, CD = 35 км.

6. На раскрученный стальной маховик действует постоянная тормозящая сила так, что за время t маховик, замедляясь, поворачивается на угол $\varphi = \frac{\pi}{3} + 520\pi t - 27t^2$. Определите угловую скорость ω в момент времени t_2 = 25 с и t_2 = 30 с, угловое ускорение ϵ и время, через которое маховик остановится.

7. Какой наибольшей толщины получатся доски при продольной распиловке бревна на квадратный брус и четыре доски, если диаметр бревна 0,35 м (рис. 9).

§ 5. ВЫЧИСЛЕНИЕ ОПРЕДЕЛИТЕЛЕЙ ВТОРОГО И ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКОВ

Для вычисления определителя второго порядка $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1$ МК-54 можно применять как в режиме "Автоматическая работа", так и в режиме "Программирование".

При решении следующих задач составьте предварительно программы вычислений на МК-54 в автоматическом режиме.

Упражнения. Вычислите определители:

1. $\begin{vmatrix} 3{,}6 & -8{,}3 \\ 16{,}4 & 5{,}2 \end{vmatrix}$.   **2.** $\begin{vmatrix} 0{,}8 & 3 \cdot 10^{-2} \\ 6{,}5 & -0{,}18 \end{vmatrix}$.

3. $\begin{vmatrix} 2 & 18{,}9 \\ 159{,}86 & 0{,}48 \end{vmatrix}$.   **4.** $\begin{vmatrix} -3{,}91 & 17{,}4 \\ 23{,}46 & -104{,}4 \end{vmatrix}$.

Для вычисления определителей третьего порядка, если такие вычисления необходимо повторять многократно, удобнее использовать режим программирования.

П р о г р а м м а вычисления определителя третьего порядка

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = c_1(a_2b_3 - a_3b_2) + c_2(a_3b_1 - a_1b_3) + \\ + c_3(a_1b_2 - a_2b_1)$$

с вводом коэффициентов в регистр RX имеет вид:

Адрес	Команда	Код	Комментарии
00	x → П1	41	Запись a_1 в RG1
01	С/П	50	Останов. Ввод элемента a_2
02	x → П2	42	Запись a_2 в RG2
03	С/П	50	Останов. Ввод a_3
04	x → П3	43	Запись a_3 в RG3
05	С/П	50	Останов. Ввод значения b_1
06	x → П4	44	Запись значения b_1 в RG4
07	С/П	50	Останов. Ввод значения b_2
08	x → П5	45	Запись значения b_2 в RG5
09	С/П	50	Останов. Ввод значения b_3
10	x → П6	46	Запись значения b_3 в RG6
11	С/П	50	Останов. Ввод значения c_1
12	x → П7	47	Запись значения c_1 в RG7
13	С/П	50	Останов. Ввод значения c_2
14	x → П8	48	Запись значения c_2 в RG8
15	С/П	50	Останов. Ввод значения c_3
16	x → П9	49	Запись значения c_3 в RG9
17	П → x2	62	Вызов значений a_2
18	П → x6	66	Вызов значений b_3
19	×	12	Вычисление значения a_2b_3
20	П → x3	63	20–22. Вычисление значения a_3b_2
21	П → x5	65	
22	×	12	
23	–	11	Вычисление значения $a_2b_3 - a_3b_2$
24	П → x7	67	Вызов значений c_1
25	×	12	Вычисление значения $c_1(a_2b_3 - a_3b_2)$
26	П → x3	63	26–34. Вычисление значения $c_2(a_3b_1 - a_1b_3)$
27	П → x4	64	
28	×	12	
29	П → x1	61	
30	П → x6	66	
31	×	12	
32	–	11	

Адрес	Команда	Код	Комментарии
33	П → x8	68	
34	×	12	
35	+	10	Вычисление значения $c_1(a_2b_3 - a_3b_2) + c_2(a_3b_1 - a_1b_3)$
36	П → x1	61	36–44. Вычисление значения $c_3(a_1b_2 - a_2b_1)$
37	П → x5	65	
38	×	12	
39	П → x2	62	
40	П → x4	64	
41	×	12	
42	−	11	
43	П → x9	69	
44	×	12	
45	+	10	Вычисление значения определителя
46	С/П	50	Останов и индикация результата в RX

И н с т р у к ц и я по работе с программой:

1. Перейдите в режим "Программирование" ($\boxed{\text{F}}$ $\boxed{\text{ПРГ}}$).
2. Введите текст программы.
3. Проведите редактирование программы.
4. Перейдите в режим "Автоматическая работа" ($\boxed{\text{F}}$ $\boxed{\text{АВТ}}$).
5. Нажмите клавишу $\boxed{\text{В/0}}$ (для пуска программы с адреса 00).
6. Введите элементы определителя контрольного примера по столбцам (после ввода очередного элемента определителя нажмите клавишу $\boxed{\text{С/П}}$).
7. Прочитайте результат на индикаторе МК и запишите его в тетрадь.
8. Для вычисления нового определителя повторите п. 5–7.

Контрольный пример. Вычислите определитель $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 6 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$.

Р е з у л ь т а т: 22.

В р е м я в ы ч и с л е н и я ≈ 10 с.

Упражнения

Пользуясь программой вычисления определителя третьего порядка, вычислите следующие определители:

5. $\begin{vmatrix} 17{,}2 & 34 & 45 \\ -7 & 8 & 16 \\ 0 & 31 & 2 \end{vmatrix}$.

8. $\begin{vmatrix} -3 & 0 & 8{,}1 \\ 0{,}24 & 16 & 0{,}31 \\ 54 & 0{,}17 & 81 \end{vmatrix}$.

6. $\begin{vmatrix} 3{,}9 & -0{,}4 & 9 \\ 8{,}3 & -4{,}2 & -0{,}1 \\ 4{,}8 & -9{,}01 & 3 \end{vmatrix}$.

9. $\begin{vmatrix} 14 & 0{,}4 & -1 \\ -0{,}8 & 1{,}2 & 1{,}3 \\ -0{,}6 & 0{,}18 & 0{,}32 \end{vmatrix}$.

7. $\begin{vmatrix} 64 & 0{,}9 & 511 \\ -4 & 2 & 56 \\ -3 & -4 & -40 \end{vmatrix}$.

§ 6. СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Составим программу для решения системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными на МК-54:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = d_1, \\ a_2x + b_2y = d_2. \end{cases} \tag{1}$$

Решая систему методом исключения неизвестных, получим

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = d_1, \\ (a_2b_2 - a_2b_1)y = a_1d_2 - a_2d_1; \end{cases} \tag{2}$$

$$y = \frac{a_1d_2 - a_2d_1}{a_1b_2 - a_2b_1}. \tag{3}$$

Подставив значение y в первое уравнение системы (2), получим

$$a_1x = d_1 - b_1\,\frac{a_1d_2 - a_2d_1}{a_1b_2 - a_2b_1};$$

$$x = \left(d_1 - b_1\,\frac{a_1d_2 - a_2d_1}{a_1b_2 - a_2b_1}\right) : a_1. \tag{4}$$

Составим программу вычисления неизвестных по формулам (3) и (4).

К о н с т р у и р о в а н и е п р о г р а м м ы. Для удобства пользователя ввод коэффициентов a_1, a_2, b_1, b_2, d_1, d_2 будем производить по столбцам непосредственно в регистр RX, отделяя ввод каждого коэффициента клавишей $\boxed{\text{С/П}}$.

Вычисление выражения $a_1b_2 - a_2b_1$ и аналогично ему выражения $a_1d_2 - a_2d_1$ оформим в виде подпрограммы. Значения неизвестных x, y будем записывать в RGa и RGb. После выполнения программы на индикаторе будет значение x.

П р о г р а м м а:

Адрес	Команда	Код	Комментарии
00	x → П1	41	00–11. Ввод коэффициентов при неизвестных и свободных членах уравнений в RX (по столбцам) и запись их в RG1 – RG6. Значение b_1 записываем дважды в RG3 и в RG7
01	С/П	50	
02	x → П2	42	
03	С/П	50	
04	x → П3	43	
05	x → П7	47	
06	С/П	50	
07	x → П4	44	
08	С/П	50	
09	x → П5	45	
10	С/П	50	
11	x → П6	46	
12	ПП	53	Обращение к подпрограмме
13	33	33	Адрес перехода
14	x → Пd	4	Запись значения $a_1b_2 - a_2b_1$ (дискриминанта) в RGd
15	П → x5	65	15–18. Перезапись значений d_1 и d_2 в RG3 и RG4
16	x → П3	43	
17	П → x6	66	
18	x → П4	44	
19	ПП	53	19–20. Обращение к подпрограмме
20	33	33	
21	П → xd	6Г	21–23. Вычисление значения y и запись его в RGb
22	÷	13	
23	x → Пb	44	
24	П → x7	67	24–31. Вычисление значения $x = (d_1 - b_1 \dfrac{a_1d_2 - a_2d_1}{a_1b_2 - a_2b_1}) : a_1$.
25	×	12	
26	П → x5	65	
27	↔	74	Чтобы произвести вычитание, производим обмен между регистрами RX и RY (адрес 27)
28	–	11	

Адрес	Команда	Код	Комментарии
29	П→x1	61	
30	÷	13	
31	x→Па	4–	
32	С/П	50	Останов и индикация значения x
33	П→x1	61	33–40. Подпрограмма вычисления выражения $a_1b_2 - a_2b_1$ (дискриминанта уравнения)
34	П→x4	64	
35	×	12	
36	П→x2	62	
37	П→x3	63	
38	×	12	
39	–	11	
40	В/0	52	

Контрольный пример 1. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 2x - y = 1, \\ x + y = 2. \end{cases}$$

Инструкция по работе с программой:

1. Перейти в режим "Автоматическая работа" ($\boxed{\text{F}}$ $\boxed{\text{АВТ}}$).

2. Подготовиться к выполнению программы с адреса 00 (В/0).

3. Ввести коэффициент $a_1 = 2$ и нажать клавишу $\boxed{\text{С/П}}$ После индикации результата 2, ввести коэффициент $a_2 = 1$ и нажать $\boxed{\text{С/П}}$. Ввести коэффициент $b_1 = -1$ и нажать $\boxed{\text{С/П}}$, ввести $b_2 = 1$ и нажать $\boxed{\text{С/П}}$, ввести $d_1 = 1$ и нажать $\boxed{\text{С/П}}$, ввести $d_2 = 2$ и нажать $\boxed{\text{С/П}}$.

4. Записать значения x и y в тетрадь (x – в RX и в RGa, y – в RGb):

$x = 1$, $y = 1$.

Контрольный пример 2. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 2x + 2y = 1, \\ 3x + 3y = 3. \end{cases}$$

Решение. Коэффициенты при неизвестных x и y пропорциональны, а коэффициенты d_1 и d_2 – нет. Следовательно, система не имеет решения (определитель системы равен 0).

Производя ввод коэффициентов и пустив программу, получим сообщение Error. Это означает, что система не имеет решений.

Замечание. Данная программа не может решать систему уравнений с бесконечным множеством решений. В этом случае на индикаторе также появится сообщение Error.

Задачи

1. Два робота, работая один 4,25 ч, а другой 3,75 ч, изготовили вместе 277 однотипных деталей. После этого в цех была дана заявка срочно изготовить 2095 этих же деталей. После переналадки роботов производительность первого увеличилась на 20%, а второго – в 1,28 раза. За сутки непрерывной работы роботы подали на автоматизированный склад требуемое в заявке число деталей. Определите приблизительно, сколько деталей в час изготовлял первоначально каждый робот.

2. В 1 кг продукта $П_1$ содержится 8,6 г калия и 13,2 г кальция, а в 1 кг продукта $П_2$ содержится 7,2 г калия и 9,8 г кальция. Сколько нужно взять продукта $П_1$ и продукта $П_2$, чтобы обеспечить в рационе кормления животных потребность калия и кальция в количестве 250 г и 361,2 г соответственно?

3. В 1 кг пшена содержится 120 г белка, а энергетическая ценность 1 кг пшена 13994,6 кДж (3340 ккал). В 1 кг трески содержится 3142,5 кДж (750 ккал). Каково должно быть содержание (в граммах) пшена и трески в одной порции блюда из этих продуктов, чтобы общее содержание белка составляло 37,125 г, а калорийность блюда была 1678,095 кДж (400,5 ккал)?

4. За первый день в течение 7,5 ч рабочие A и B изготовили 300 деталей. На следующий день они перешли работать на более производительные станки, и рабочий A стал изготовлять в час на 6, а рабочий B – на 9 деталей больше, чем в первый день. Сколько деталей в час изготовлял каждый рабочий в первый день, если во второй день за 6 ч работы рабочего A и за 5 ч работы рабочего B они изготовили столько же деталей, сколько и в первый день?

5. Общая масса двух кусков сплава 6,2 кг. В каждом килограмме первого сплава содержится 120 г олова, а в каждом килограмме второго сплава – 117 г олова. Какова масса каждого куска сплава, если вместе они содержат 730,2 г олова?

6. Для выполнения некоторой работы были привлечены двое рабочих разных профессий. Первый вид работ выполнил один рабочий, которому платили в день 8,65 руб. После него ко второму виду работ приступил другой рабочий, которому платили в день на 1,09 руб. больше, чем первому рабочему. Сколько дней работал каждый рабочий, если при расчете первый получил на 55,03 руб. больше второго, а выполнение всей работы заняло 34 дня.

7. Сумма цифр двузначного числа равна 13. Если первую цифру числа умножить на 100,89, а вторую цифру числа умножить на 227,0025, то разность получившихся чисел окажется равной нулю. Найдите данное двузначное число.

8. Две трубы, работая вместе, могут заполнить водой бассейн емкостью 3042 л за 6,5 ч. После 3 ч работы первой трубы и 5 ч работы второй в бассейн еще можно долить 1424 л воды. Сколько воды вливает в час каждая труба?

9. На маршруте $ABCDE$ длиной 147 км турист может сам выбирать способ передвижения. Двигаясь из A в E, он поступил следующим образом: до пункта C через пункт B ехал на машине, затратив на это 1 ч 45 мин, а от пункта C в пункт E через пункт D – верхом на лошади, потратив на это 2,5 ч. На обратном пути из пункта E в пункт A он поступил по-другому: до пункта D дошел пешком, преодолев расстояние в 24 км, в пункте D пересел на лошадь и добрался до пункта B за 3 ч 20 мин, а от пункта B до пункта A доехал на машине за 1 ч 12 мин. Определите скорость передвижения туриста на машине и на лошади, если средние скорости машины и лошади были постоянными при движении от A к E и обратно.

§ 7. ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ

Метод половинного деления позволяет отыскать приближенное значение одного из корней уравнения $f(x) = 0$ на отрезке $[a, b]$, где $f(x)$ – непрерывная и монотонная на отрезке $[a, b]$ функция, имеющая на концах отрезка разные знаки. Геометрически это означает, что функция $f(x)$ пересекает ось Ox на отрезке $[a, b]$. Если методами алгебраических преобразований удастся представить уравнение $f(x) = 0$ в виде $f_1(x) = f_2(x)$ и построить графики этих функций, то абсцисса точки пересечения графиков будет являться корнем уравнения $f(x) = 0$. Таким образом, удается определить интервал $[a, b]$, на котором находится корень уравнения. Напомним еще раз, что пользователю необходимо установить, принимает ли функция $f(x)$ значения разных знаков на отрезке $[a, b]$ и монотонна ли она на этом отрезке. В противном случае можно получить неверный ответ или зацикливание полученной ниже программы.

Алгоритм отыскания значения корня уравнения $f(x) = 0$ на отрезке $[a, b]$ состоит в следующем: отрезок $[a, b]$ последовательно сужается делением его на две части точкой $c_1 = (a + b)/2$, затем, если $f(a)$ и $f(c_1)$ имеют разные знаки, отрезок $[a, c_1]$ делится точкой $c_2 = (a + c_1)/2$, а если $f(a)$ и $f(c_1)$ имеют одинаковые знаки, то отрезок $[c_1, b]$ делится точкой $d_1 = (b + c_1)/2$. Поступая так дальше, добьемся того, что после n делений длина отрезка, содержащего корень уравнения $f(x) = 0$, станет меньше 2ϵ. Тогда длина половины отрезка $[c_i, d_k]$, содержащего корень уравнения x_0 и приближенное значение корня $x = (c_i + d_k)/2$, станет меньше ϵ (это отрезок $[c_i, (c_i + d_k)/2]$ либо отрезок $[(c_i + d_k)/2, d_k]$). Но так как корень уравнения x_0 содержится в одном из этих отрезков, то и разность $\left|\frac{c_i + d_k}{2} - x_0\right| = |x - x_0| < \epsilon$.

При заданных ограничениях на функцию $f(x)$ данный алгоритм позволяет достаточно эффективно находить один из корней уравнения $f(x) = 0$ с любой заданной точностью.

Из описанного алгоритма уточнения корня уравнения $f(x) = 0$ на отрезке $[a, b]$ вытекает способ построения п р о г р а м м ы для МК:

1. Найдите значение $\frac{c_i + d_k}{2}$ ($c_0 = a$, $d_0 = b$, $i = 0, 1, \ldots, k = 0, 1 \ldots$).
2. Проверьте условие $|d_k - c_i| < 2\epsilon$, если оно не выполняется, перейдите к п. 7.
3. Вычислите значения $f(c_i)$ и $f(d_k)$.
4. Проверьте условие $f(c_i) f(d_k) \leqslant 0$.
5. Вычислите новые значения d_k и c_k.
6. Перейдите к п. 1.
7. За корень уравнения $f(x) = 0$ примите $(c_i + d_k)/2$.

Этот а л г о р и т м можно представить в виде блок-схемы (рис. 10).

На этой блок-схеме: a, b – концы отрезка $[a, b]$;

ϵ — заданная степень точности вычисления корня x уравнения $f(x) = 0$; c — середина отрезка $[a, b]$; $f(a), f(c)$ — значения функции на концах отрезка $[a, c]$. Если $f(a)f(c) \leqslant 0$, то за b принимается значение c (берется левая часть отрезка $[a, b]$ и вычисления повторяются). Если $f(a)f(c) > 0$, то за a берется значение c (берется правая часть отрезка $[a, b]$) и вычисления повторяются. После очередного цикла будет выполняться условие $b - a < 2\epsilon$, тогда за значение корня принимается середина отрезка $a + b/2 = x_0$. Здесь a и b — новые значения, полученные после деления отрезка ($a = c_i$, $b = d_k$), однако для удобства составления программы их лучше обозначать теми же буквами a или b и хранить в одних и тех же регистрах.

По приведенной блок-схеме можно составить программу вычисления приближенного значения корня уравнения $f(x) = 0$, на отрезке $[a, b]$.

Распределение регистров памяти:

$a \to$ RG1, $b \to$ RG2, $2\epsilon \to$

$\to$ RG0, $c = \dfrac{b + a}{2} \to$ RG4,

$x \to$ RG5, $f(x) \to$ RGd.

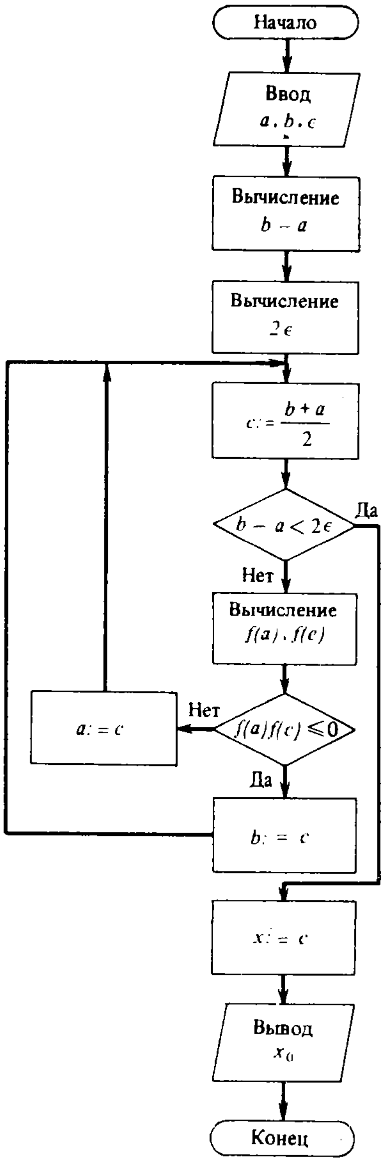


Рис. 10

Программа:

Адрес	Команда	Код	Комментарии
00	П → x1	61	00–05. Вызов значений a и b. Вычисление значения $c = \frac{a+b}{2}$ и запись c в RG4
01	П → x2	62	
02	+	10	
03	2	02	
04	÷	13	
05	x → П4	44	
06	П → x2	62	06–08. Вычисление разности $b - a$
07	П → x1	61	
08	−	11	
09	П → x0	60	09–10. Вычисление значения $(b - a) - 2\epsilon$
10	−	11	
11	F x < 0	5	11–12. Проверка условия $(b - a) < 2\epsilon$
12	15	15	
13	П → x4	64	13–14. Вызов значения $x = c = \frac{a+b}{2}$, если условие $(b - a) < 2\epsilon$ выполняется. Останов и индикация результата
14	С/П	50	
15	П → x1	61	15–17. Вызов значения a из RG1. Обращение к подпрограмме вычисления значения $f(x) f(a)$
16	ПП	53	
17	35	35	
18	x → Па	4−	Запись значения $f(x)$ в RGd
19	П → x4	64	Вызов очередного значения $c = \frac{a+b}{2}$ в RX
20	ПП	53	20–21. Обращение к подпрограмме вычисления значения $f(x) f(c)$
21	35	35	
22	П → xa	6−	Вызов значения $f(x) f(a)$ в RX
23	×	12	Вычисление значения $f(a) f(c)$
24	/−/	0	Смена знака у произведения $f(a) f(c)$
25	F x > 0	59	25–26. Проверка условия: $-f(x) f(c) \geqslant 0$ $(f(a) f(c) \leqslant 0)$
26	31	31	
27	П → x4	64	27–28. Вызов очередного значения c в RX и перезапись его в RG2, т.е. $b := c = \frac{a+b}{2}$
28	x → П2	42	
29	БП	51	Команда безусловного перехода на адрес 00
30	00	00	Организация цикла, если условие F x > 0 выполняется, т.е. $f(a) f(c) \leqslant 0$
31	П → x4	64	31–34. Вызов значения c в RX и перезапись его в RG1, т.е. $a := c = \frac{a+b}{2}$ и организация цикла вычислений, если условие F x $\geqslant$ 0 не выполняется, т.е. $f(a) f(c) > 0$
32	x → П1	41	
33	БП	51	
34	00	00	

Адрес	Команда	Код	Комментарии
35	...	...	Подпрограмма вычисления значения функции $f(x)$
...	...	...	
...	...	...	
...	...	...	
	В/0	52	

Инструкция по работе с программой:

1. Введите текст программы. С адреса 35 введите подпрограмму вычисления заданной функции $f(x)$. Если при вычислении значения сложной функции $f(x)$ необходимо дополнительно вызывать значение аргумента (он находится либо в RG4, либо в RG1), то подпрограмму следует начать с команды записи аргумента в один из свободных регистров памяти, например RG5 (т.е., команда х →П5).

2. Введите в режим "Автоматическая работа" исходные данные в указанные регистры (предварительно вычислите значение 2ϵ).

3. Запишите результат и проанализируйте его.

Пример. Две частицы движутся одновременно по разным траекториям. Одна из них движется по траектории $s_1(t) = \ln t + 2$, другая – по траектории $s_2(t) = \sqrt{t}$ (t – время в секундах). Определите с точностью до 10^{-3} с время столкновения двух частиц с момента наблюдения.

Решение. Для решения задачи необходимо в системе координат tOs определить абсциссу t_0 точки пересечения графиков функций $s_1(t)$ и $s_2(t)$. Решение будем искать из условия $s_1(t) = s_2(t)$ или $s_1(t) - s_2(t)$. Таким образом, необходимо найти корень уравнений

$$\ln t + 2 - \sqrt{t} = 0. \tag{1}$$

Функция $s(t) = \ln t - \sqrt{t} + 2$ определена на интервале $(0, \infty)$; на этом интервале она монотонна. При значениях t, близких к нулю, $s(t)$ принимает отрицательные значения ($\ln t \to -\infty$ при $t \to 0$). Поэтому можно в качестве значения a интервала $[a, b]$ взять точку $t = 0{,}1$ ($\ln 0{,}1 + 2 - \sqrt{0{,}1} = 0{,}62$), а в качестве значения b – точку $t = 1$ ($\ln 1 + 2 - \sqrt{1} = 1$). Итак, на интервале $[0{,}1,\ 1]$ функция $s(t)$ принимает значения разных знаков и, в силу непрерывности, имеет на этом интервале такую точку, что

$s(t_0) = 0$. Вычислим приближенное значение корня уравнения (1) по программе вычисления корня методом половинного деления отрезка. Составим предварительную подпрограмму вычисления значения функции $s(t)$ с адреса 35*:

Адрес	Команда	Код	Комментарии
35	x → П5	45	Запись значения аргумента функции в RG5
36	F ln	18	36–37. Вычисление значения $\ln t$
37	2	02	
38	+	10	38–39. Вычисление значения $\ln t + 2$
39	П → x5	65	
40	F $\sqrt{\ }$	21	Вычисление значения $\sqrt{t}$
41	–	11	Вычисление значения $s(t) = \ln t + 2 - \sqrt{t}$
42	В/0	52	Команда возврата из подпрограммы

Если основная подпрограмма уже введена в ОЗУ программ, то поступим следующим образом: в режиме "Автоматическая работа" выполним команды БП 35 и F ПРГ. После этого на счетчике адресов установится адрес 35, с которого и вводится подпрограмма вычисления значения функции $s(t)$. При решении следующих задач так и следует поступать, вводя только ту или иную подпрограмму. Введем исходные данные задачи: 0,1 → →RG1, 1 →RG2, 2 · 10 →RG0.

Результат: $t \approx 0{,}215$ с.

Время вычисления ≈2 мин.

Задачи

1. Решите приближенно уравнение $\ln x - \sqrt{x} + e^x = 0$ с точностью до 10^{-4} на интервале [0, 2, 1], показав, что на концах интервала функция $f(x) = \ln x - \sqrt{x} + e^x$ имеет разные знаки.

2. Найдите приближенно с точностью до 10^{-3} корень уравнения $x^2 - e^{\ln x} - 4 = 0$ на интервале $[1, \pi]$, убедившись, что функция $f(x) = x^2 - e^{\ln x} - 4$ имеет на концах интервала разные знаки.

---

*Так как функция $S(t)$ относительно простая по сложности вычислений, то можно было использовать более короткую подпрограмму (из семи команд) с использованием регистра предыдущего результата RX1: F ln F Bx F $\sqrt{\ }$ $\boxed{-}$ 2 $\boxed{+}$ В/0. Однако это можно сделать не всегда, поэтому первоначальная программа более общая.

3. Найдите с точностью до 10^{-3} абсциссу точки пересечения графиков функций $y = \cos x$ и $y = 2x$, определив интервал, которому принадлежит точка пересечения графиков функций.

4. На отрезке пути от 10 км до 1 км тело движется по траектории $s_1(x) = x^3 + 3x^2 + 1$. Движение второго тела на этом же участке описывается уравнением $s_2(x) = e^x$. Определите с точностью до 1 м, на каком участке данного отрезка может произойти столкновение, если весь километровый участок оба тела проходят за одно и то же время.

5. Жук-водомер движется прямолинейно по поверхности воды со скоростью v_1. Для того чтобы перехватить жука на отрезке его пути длиной 1 м, окуню пришлось двигаться со скоростью v_2 с глубины 1 м по кривой преследования $y = \lg(x + 1) + \sqrt{x} - 1$. Определите с точностью до 1 см, на каком участке пути окунь схватит жучка, если "расчет" его скорости v_2 при заданной траектории движения оказался верным (рис. 11).

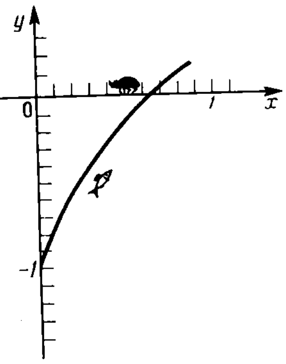


Рис. 11

6. Тело движется под водой к поверхности по траектории $y = -3e^{x^2-1} + 4x$, начав движение от стенки берега, уходящего отвесно под воду на глубину 2 м. Определите с точностью до 1 см, на каком расстоянии от берега тело покажется на поверхности воды.

7. На участке длиной 1 км реактивный самолет движется по кривой $y = 1/x$, оставляя на небе характерный белый след от выбросов двигателя. Через некоторое время в плоскости траектории первого самолета пролетает другой, кривая следа которого имеет вид $y = e^x - 1$. Определите с точностью до 1 м, на каком расстоянии от наблюдателя, находящегося в центре условной системы координат, будет находиться проекция на землю точки пересечения следов самолетов. Постройте графики этих функций и определите требуемый интервал $[a, b]$.

8. Сила F за время от 0,5 до 1,5 с изменяется по закону $F(t) = 2^{\ln t} - t$. Определите с точностью до 10^{-3} с момент времени t, при котором $F(t) = 0$.

9. Материальная точка совершает колебания по закону $y = 2\sin(\frac{x}{2} + 0,5)$. Луч света направляется из центра координат по прямой $y = 0,2x$. Определите абсциссу точки пересечения луча с траекторией движения точки на отрезке $[0, 1]$ с точностью до 10^{-3}.

§ 8. ИНТЕГРАЛ

1. Вычисление интегралов по формуле Ньютона—Лейбница

Пример 1. Найдите путь, пройденный телом за 23 с, через 3 с после начала движения, если тело движется прямолинейно со скоростью $v(t) = 10,7t^2 - 18t + 19,3$.

Решение. Путь s, пройденный телом за время $t_2 - t_1$, вычисляется по формуле

$$s = \int_{t_1}^{t_2} v(t)\, dt = \int_{3}^{23} (10,7t^2 - 18t + 19,3)\, dt =$$

$$= \left(\frac{10,7}{3} t^3 - 9t^2 + 19,3t\right)\Bigg|_{3}^{23}. \qquad (1)$$

Для вычисления значения многочлена можно воспользоваться схемой Горнера (гл. I, § 5, пример 5), либо использовать режим "Автоматическая работа" МК.

В последнем случае преобразуем выражение (1) к виду

$$s(t) = t\left(\frac{10,7}{3} t^2 - 9t + 19,3\right)$$

и вычислим его:

$$s = s(23) - s(3).$$

Запишем число 23 в RG0.

Программа:

10.7 П→x0 F x^2 $\boxed{\times}$ 3 $\boxed{\div}$ 9 П→x0 $\boxed{\times}$ $\boxed{-}$ 19.3 $\boxed{+}$ П→x0 $\boxed{\times}$ 10,7 В↑ 3 X 9 В↑ 3 $\boxed{\times}$ $\boxed{-}$ 19.3 $\boxed{+}$ 3 $\boxed{\times}$ $\boxed{-}$

Результат. $\approx 359,3$ м.

Пример 2. Основанием склада для хранения типографской бумаги является прямоугольник шириной $c = 12$ м и длиной

$l = 40$ м. Крыша склада сделана из алюминиевых листов и представляет собой параболический цилиндр (сечение склада плоскостью, перпендикулярной его основанию, изображено на рис. 12). Найдите объем склада, если его высота $h = 5{,}3$ м.

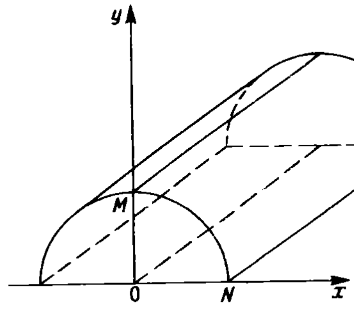


Рис. 12

Решение. Склад можно представить как опрокинутый на землю цилиндр, основанием которого является плоскость, ограниченная параболой $y = ax^2 + b$ и прямой Ox. Объем цилиндра, в основании которого лежит произвольная плоская фигура F, вычисляется так же, как и для кругового цилиндра по формуле $V = HS$, где S – площадь основания цилиндра. Так как высота цилиндра известна – это длина склада l, то остается найти площадь S криволинейной трапеции, ограниченной параболой $y = ax^2 + b$ и прямой Ox. Для этого в уравнении параболы $y = ax^2 + b$ определим коэффициенты a и b. Так как искомая парабола проходит через точки $M(0, h)$ и $N(c/2, 0)$, то, подставляя в уравнение параболы значения $x = 0$ и $y = 5{,}3$, получим $5{,}3 = a \cdot 0 + b$, откуда $b = 5{,}3$.

Подставив вместо x и y значения $x = c/2 = 6$ и $y = 0$, получим $0 = ab^2 + b$, $0 = 36a + 5{,}3$, откуда $a = -5{,}3/36$.

Итак, уравнение параболы имеет вид $y = -\frac{5{,}3}{36}x^2 + 5{,}3$.

Объем склада определим по формуле объема цилиндра $V = H\int_a^b f(x)\,dx$, где $\int_a^b f(x)\,dx$ – площадь основания криволинейной трапеции:

$$V = 40 \cdot 2\int_0^6 \left(-\frac{5{,}3}{36}x^2 + 5{,}3\right)dx = 80\left(-\frac{5{,}3}{3 \cdot 36}x^3 + 5{,}3x\right)\Big|_0^6. \qquad (2)$$

Значение V вычислим на МК, преобразовав выражение (2) к виду $V = 80 \cdot 5{,}3x\left(-\frac{x^2}{108} + 1\right)$.

Для $x = 6$ получим программу:

1 В↑ 6 F x^2 108 $\boxed{\div}$ 6 $\boxed{\times}$ 5.3 $\boxed{\times}$ 80 $\boxed{\times}$

Результат. ≈ 1696 м^3.

Пример 3. После сильного ливня на поверхности почвы образовался слой воды толщиной 2,6 см. Определите, через сколько минут впитается в почву эта вода, если известно, что скорость впитывания воды в почву в конце первой минуты $v = 0{,}42$ см/мин, а скорость впитывания в первые 2–3 ч происходит по закону $v(t) = v_1/t^\alpha$, где t – время, мин; α – коэффициент затухания скорости (принять $\alpha = 0{,}6$).

Решение. Воспользуемся формулой определения пройденного точкой пути по ее скорости:

$$s(t) = \int_0^{t_1} \frac{v_1}{t^\alpha}\, dt = v_1 \int_0^{t_1} \frac{dt}{t^\alpha} = \frac{v_1 t^{1-\alpha}}{1-\alpha}.$$

Пройденный водой путь в данном случае равен толщине слоя воды, который впитывается в почву.

Таким образом, $2{,}6 = \dfrac{0{,}42t}{(1-0{,}6)\,t^{0{,}6}}$, или $2{,}6 = \dfrac{0{,}42}{0{,}4}\,t^{0{,}4}$,

отсюда $t^{0{,}4} = \dfrac{2{,}6 \cdot 0{,}4}{0{,}42}$. Возводя обе части последнего уравнения в степень $1/0{,}4$, получим

$$t = \left(\frac{2{,}6 \cdot 0{,}4}{0{,}42}\right)^{1/0{,}4}.$$

Программа вычисления на МК:

0.4 F 1/x 2.6 В↑ 0.4 $\boxed{\times}$ 0.42 $\boxed{\div}$ F x^y

Результат. $\approx 9{,}6$ мин.

Задачи

1. Материальная точка движется по прямой со скоростью $v(t) = (17t^2 + 0{,}87\sqrt{t})$. Определите путь, пройденный точкой за время от $t_1 = 1$ с до $t_2 = 21$ с.

2. Вычислите площадь фигуры, ограниченной кривой $y = x\sqrt{7{,}9 - x^2}$, прямыми $x = 4{,}3$ и $x = 6{,}7$.

3. Раскрой шкурок на воротники производится с помощью лекала ABC (рис. 13), имеющего форму криволинейного треугольника. Сторона AC выражается функцией $y_1 = 0{,}44\sqrt{x}$, сторона AB — функцией $y_2 = 2{,}8\sqrt{x}$, а сторона BC — прямая, отстоящая от прямой, проходящей через точку A на расстояние 46 см. Конструкция деталей одежды, в том числе и воротника строится, исходя из соображений симметрии (вырезается половинка воротника, а затем ей симметричная). Определите стоимость мехового воротника из норки, выкроенного с помощью этого лекала, если стоимость 1 дм^2 шкурки равна 23 руб.

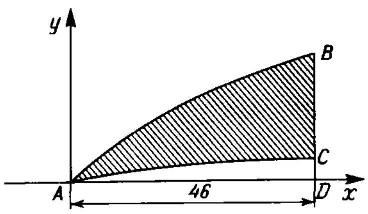


Рис. 13

4. Скорость впитывания воды в почву через 1 мин после начала работы дождевальной установки равна $v_1 = 2$ см/мин. Определите толщину слоя воды, который впитается в почву за 12 мин, если скорость впитывания $v(t) = v_1/t^{\alpha}$, где $\alpha \approx 0{,}45$ коэффициент затухания скорости впитывания.

5. Постройте по точкам график изменения толщины слоя воды, впитываемого почвой в течение 1 ч, если скорость впитывания в конце первой минуты составляет 4 см/мин, а коэффициент затухания скорости впитывания воды $\alpha = 0{,}67$.

Указание. Составьте программу вычисления $s(t)$ на МК в режиме "Программирование". Значения t принять равными 5, 10, 15, . . . , 60 мин.

6. Сила в 29 Н растягивает пружину на 4,7 см. Какую работу надо произвести, чтобы растянуть пружину на 4,7 см?

7. Вода, подаваемая с уровня основания конического бака через отверстие в дне, заполняет бак полностью. Определите затраченную при этом работу, если высота бака равна 0,7 м, радиус дна 0,3 м, а радиус верхнего основания 0,53 м (рис. 14). Плотность воды $\rho \approx 10^3$ кг/м^3, ускорение свободного падения $g \approx 9{,}81$ м/с^2.

8. Определите работу, затраченную на заполнение бензином сферической емкости радиусом 5 м, если бензин подается с уровня нижней точки сферы через отверстие в нижней точке емкости. Плотность бензина $\rho = 900$ кг/м^3, ускорение свободного падения $g \approx 9{,}81$ м/с^2.

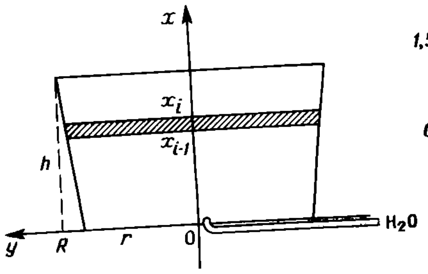


Рис. 14

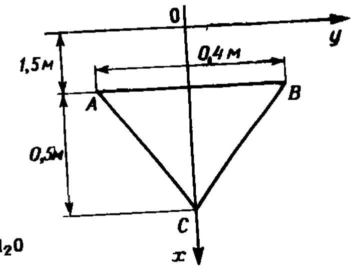


Рис. 15

9. Вычислите силу давления на пластмассовый равнобедренный треугольник, помещенный в воду на глубину 1,5 м так, что основание треугольника, равное 0,4 м, параллельно уровню воды. Высота треугольника 0,5 м (рис. 15). Плотность воды $\rho = 10^3$ кг/м^3, ускорение свободного падения $g \approx 9{,}81$ м/с^2.

10. Вычислите объем стога сена высотой 3,2 м, основанием которого является прямоугольник со сторонами 3 и 7,2 м. Сечение плоскостью, перпендикулярной большей стороне, имеет форму параболы.

2. Методы приближенного вычисления определенных интегралов

Приближенное вычисление определенного интеграла по формуле прямоугольников. Для интеграла $\int_a^b f(x)\,dx$ имеет место приближенное равенство

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{n}\left(f(x_0)+f(x_1)+\ldots+f(x_{n-1})\right). \qquad (1)$$

Равенство (1) называется формулой прямоугольников. Здесь b, a – пределы интегрирования (отрезок $[a, b]$); n – число разбиений отрезка $[a, b]$ точками $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$; $f(x_{k-1})$, $k = 1, 2, \ldots, n$ – значение функции в точке x_{k-1}. Произведение $\frac{b-a}{n} f(x_{k-1})$ равно площади прямоугольника с основанием $x_k - x_{k-1}$ и высотой $f(x_{k-1})$. Сумма площадей всех прямоугольников приближенно равна площади криволинейной трапеции, определяемой интегралом $\int_a^b f(x)\,dx$

(по избытку или недостатку). Если функция $f(x)$ имеет на отрезке $[a, b]$ непрерывную производную $f'(x)$, то для приближенной оценки ошибки этого метода вычисления определенного интеграла используют следующее соотношение:

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx - \frac{b-a}{n}\,(f(x_0) + f(x_1) + \ldots + f(x_{n-1})) \right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{M(b-a)^2}{2n}, \tag{2}$$

где M – наибольшее значение функции $|f'(x)|$ на $[a, b]$.

Из соотношения (2) можно определить выбор натурального числа n, обеспечивающего заданную точность вычислений:

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx - \frac{b-a}{n}\,(f(x_0) + f(x_1) + \ldots + f(x_{n-1})) \right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{M\,(b-a)^2}{2n} < \epsilon,$$

откуда $n > M\,(b-a)^2/(2\epsilon)$.

Следует заметить, что таким образом полученное n еще не гарантирует заданную точность вычислений на МК. Определенные ограничения на точность накладывает величина разрядной сетки МК (при больших значениях n и малой длине отрезка $[a, b]$, величина $(a-b)/n$ может попасть в область машинного нуля). При больших n может также накапливаться значительная ошибка за счет округления на МК результатов промежуточных вычислений. При работе с электронно-вычислительной техникой эти соображения необходимо учитывать, особенно в случаях, когда требуется повышенная точность к результатам вычислений. Предлагаемые ниже задачи этого не требуют.

Составим программу вычисления приближенного значения интеграла $\int_a^b f(x)\,dx$ по формуле прямоугольников для МК-54.

Конструирование программы. Из формулы прямоугольников следует, что для приближенного вычисления интеграла необходимо найти сумму произведений вида $\frac{b-a}{n}\,f(x_{k-1})$, $k = 1, 2, \ldots, n$. Обозначим это произведение через S_{k-1}, а всю сумму – через S, $S = S_0 + S_1 + \ldots + S_{n-1}$. Таким образом, нам придется вычислять значения функции

$f(x)$ в точке x_{k-1}, умножать эти значения на $(b-a)/n$ и складывать их между собой n раз. Эти однотипные вычисления оформим в виде циклического алгоритма с параметром цикла l. Так как $x_k - x_{k-1} = \frac{b-a}{n} = h$, то значение каждой новой точки $x_k = x_{k-1} + \frac{b-a}{n} = x_{k-1} + h$. После очередного цикла вычислений значение x_{k-1} будет увеличиваться на величину h, а к предыдущему значению S_{k-2} будет прибавляться величина S_{k-1} до тех пор, пока в счетчике циклов не будет величина $n-k=0$.

Приведем блок-схему алгоритма вычисления определенного интеграла по формуле прямоугольников (рис. 16):

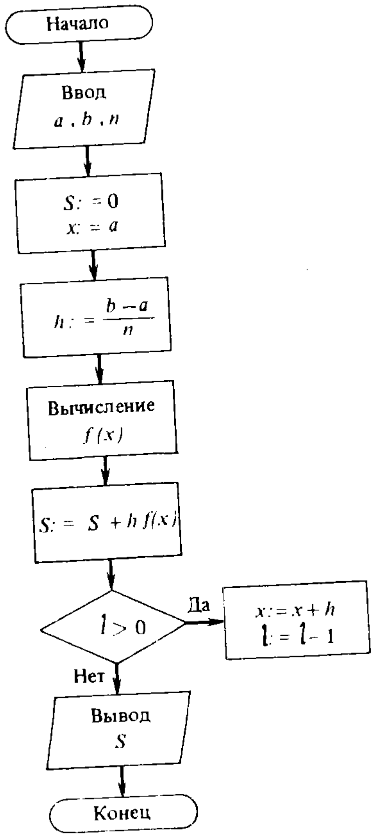


Рис. 16

Рассмотрим эту блок-схему:

1. Ввод данных: a, b – концы отрезка $[a, b]$ в RG0 и RG1, n – число отрезков разбиения в RG3.

2. S – приближенное значение интеграла (накапливается в RG6; первоначально положим $S = 0, x_0 = a$).

3. Вычисление основания прямоугольника:

$$h = x_k - x_{k-1} = \frac{b-a}{n} \quad \text{в RG5.}$$

4. Вычисление значения $f(x)$ оформляется в виде подпрограммы, чтобы можно было использовать программу для различных функций.

5. После каждого цикла к значению S в RG6 прибавляется величина $hf(x_k)$. Получается новое значение S.

6. Проверка условия $l > 0$. Если $l > 0$, то цикл вычислений повторяется. После каждого цикла из n в RG3 вычитается единица.

7. Переход к новому значению аргумента и вычитание единицы из содержимого счетчика циклов.

8. Вывод результата – приближенное значение интеграла $\int_a^b f(x)\,dx$.

П р о г р а м м а:

Адрес	Команда	Код	Комментарии
00	0	00	00–01. Запись значения $S = 0$ в RG6.
01	x → П6	46	Обнуление регистра для новых вычислений по данной программе
02	П → x1	61	Вызов значения b в RX
03	П → x0	60	Вызов значения a в RX
04	–	11	Вычисление значения разности $b - a$
05	П → x3	63	Вызов значения n из RG3
06	÷	13	06–07. Вычисление значения $h = \frac{b-a}{n}$ и запись h в RG5
07	x → П5	45	
08	П → x0	60	Вызов значения $x = x_{k-1}$, $k = 1, 2, \ldots, n$, в RX
09	ПП	53	09–10. Обращение к подпрограмме вычисления значения $f(x_{k-1})$. 24 – адрес начала подпрограммы
10	24	24	
11	П → x5	65	Вызов значения h в RX

Адрес	Команда	Код	Комментарии
12	×	12	12–15. Вычисление площади очередного прямоугольника и суммирование этих значений в RG6: $S = S + hf(x_k)$
13	П → x6	66	
14	+	12	
15	x → П6	46	
16	П → x0	60	16–19. Переход от значения x_{k-1} к x_k ($x_k = x_{k-1} + h$) и запись значения x_k в RG0.
17	П → x5	65	
18	+	10	
19	x → П0	40	
20	F L3	5–	20–21. Команда организации цикла вычислений по адресам 08–19. После каждого цикла из RG3 вычитается 1. Когда $n - k = 0$, то осуществляется переход на адрес 22.
21	08	08	
22	П → x6	66	Вывод результата S
23	С/П	50	Останов и индикация результата
24	Подпрограмма вычисления $f(x)$		
.			
.			
.	В/0	52	Команда возврата из подпрограммы на адрес 11

Инструкция по работе с программой:

1. Введите текст программы. С адреса 24 запишите подпрограмму вычисления значения функций $f(x)$.
2. Введите исходные данные $a \to$ RG0, $b \to$ RG1, $n \to$ RG3.
3. Осуществите пуск программы с адреса 00 ($\boxed{\text{В/0}}$ $\boxed{\text{С/П}}$).
4. Запишите и проанализируйте результат.

Пример 4. Аквариум имеет форму сферы со снятыми сверху и снизу шаровыми сегментами (рис. 17) высотой 4 и 3 см. Радиус сферы 18 см. Вычислите давление воды на боковые стенки аквариума, если поверхность воды находится на 7 см выше горизонтального диаметра сферы. Плотность воды $\rho = 10$ кг/м^3, ускорение свободного падения $g \approx 9{,}81$ м/с^2.

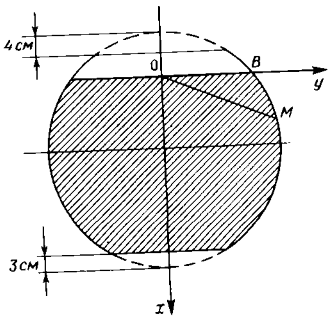


Рис. 17

Р е ш е н и е. Выберем систему координат так, чтобы ось Oy совпадала с горизонтальной поверхностью воды, а ось Ox – с вертикальным диаметром сферы. Профиль аквариума представляет собой круг с вырезанными сегментами, основания которых параллельны. Радиус круга 0,18 м. Любая точка M круга имеет координаты x и $f(x)$, где

$$f(x)=\sqrt{R^2-(x-0{,}07)^2} \tag{3}$$

(центр круга O смещен вверх по оси Ox на 0,07 единиц относительно начала координат точки O).

Таким образом, уравнение (3) представляет собой уравнение окружности с центром $O_1\,(0{,}07;\ 0)$. Для определения давления на стенки аквариума используем формулу $p = g\int_a^b \rho f(x)\,dx$, где ρ – удельная плотность вещества, кг/м^3; $f(x)$ – искомая функция.

Учитывая, что ось Ox делит сечение сферы пополам, а $x \in [0;\ 0{,}22]$, то для нашего случая получим

$$p = 2g\int_0^{0,22} \rho x\sqrt{R^2-(x-0{,}07)^2}\,dx =$$

$$= 2g\int_0^{0,22} 1000x\sqrt{0{,}18^2-(x-0{,}07)^2}\,dx.$$

Найти первообразную для подынтегральной функции в данном случае сложно, поэтому воспользуемся формулой прямоугольников для вычисления данного определенного интеграла. Определим предварительно значение n для $\epsilon = 10^{-1}$.

Найдем первую производную функции $f'(x)$:

$$f'(x)=10^3\left(\sqrt{0{,}18^2-(x-0{,}07)^2}-\frac{x\,(x-0{,}07)}{\sqrt{0{,}18^2-(x-0{,}07)^2}}\right).$$

Наибольшее значение $f'(x)$ на отрезке $[0,\ 0{,}22]$ найдем с помощью второй производной:

$$f''(x)=-10^3\left(\frac{x-0{,}07}{\sqrt{0{,}18^2-(x-0{,}07)^2}}+\right.$$

$$\left.+\frac{(2x-0{,}07)\,(0{,}18^2-(x-0{,}07)^2)+x\,(x-0{,}07)^2}{(0{,}18^2-(x-0{,}07)^2)^{3/2}}\right)=$$

$$=-10^3\,\frac{(0{,}18^2-(x-0{,}07)^2)\,((x-0{,}07)+2x-0{,}07)+x\,(x-0{,}07)^2}{(0{,}08^2-(x-0{,}07)^2)^{3/2}}.$$

Используя, где это необходимо, МК в режиме "Автоматическая работа", получим

$$f''(x) = -10^3 \frac{-2x^3 + 0{,}42x^2 + 6{,}78 \cdot 10^{-2}x + 3{,}85 \cdot 10^{-3}}{(0{,}18^2 - (x - 0{,}07)^2)^{3/2}}.$$

Найдем корни этого выражения. Из последнего выражения видно, что $f''(x)$ непрерывна на отрезке $[0, 0{,}22]$, поэтому $f''(x) = 0$, если $-2x^2 + 0{,}42x^2 + 6{,}78 \cdot 10^{-2}x + 3{,}85 \cdot 10^{-3} = 0$.

Корни этого уравнения вычислим приближенно с помощью программы приближенного отделения корней методом половинного деления. Для данного уравнения $f''(x) = 0$ при $x \approx \approx 0{,}048125$ (с точностью до 10^{-3}).

При переходе через точку x_0 производная меняет знак с "+" на "–", т.е. условие существования экстремума функции выполнено. Значение первой производной в этой точке $f'(0{,}0445804) \approx 184{,}56$. (Подсчет выполняется с помощью МК.)

Найдем значение n из соотношения $n > \frac{M(b-a)^2}{2\epsilon}$, где $M = |f'(x_0)|, x_0 \in [a, b]$:

$$n > \frac{184{,}56 \cdot 0{,}22}{2 \cdot 10^{-1}} = 44{,}7.$$

Для заданной точности вычислений положим $n = 45$. Заметим, что для $\epsilon = 10^{-2}$ $n = 447$ существенное влияние на выбор ϵ оказывает коэффициент ρ в выражении функции. Для воды $\rho = 1000$ кг/м^3, поэтому нет необходимости оценивать значение погрешности более точно.

Составим подпрограмму вычисления значения функции $f(x) = 1000x\sqrt{0{,}18^2 - (x - 0{,}07)^2}$ с адреса 24.

Подпрограмма:

Адрес	Команда	Код	Комментарии
24	0	00	24–27. Ввод числа 0,07
25	.	0–	
26	0	00	
27	7	07	
28	–	11	Вычисление разности $x - 0{,}07$
29	F x^2	22	Вычисление значения $(x - 0{,}07)^2$
30	0	00	30–33. Ввод числа 0,18

Адрес	Команда	Код	Комментарии
31	.	0–	
32	1	01	
33	8	08	
34	F x^2	22	Вычисление значения $0,18^2$
35	$\leftrightarrow$	14	Обмен между регистрами RX и RY
36	–	11	$0,18^2 - (x - 0,07)^2$
37	F $\sqrt{\ }$	21	Вычисление значения $\sqrt{0,18^2 - (x - 0,07)^2}$
38	П → x0	60	Вызов значения x
39	×	12	Вычисление значения $x\sqrt{0,18^2 - (x - 0,07)^2}$
40	1	01	40–42. Ввод числа 10^3
41	ВП	0[	
42	3	03	
43	×	12	Вычисление значения $f(x)$
44	В/0	52	Команда возврата из подпрограммы

Вычислим значение интеграла $\int\limits_0^{0,22} 10^3 x\sqrt{(0,18^2 - (x - 0,07)^2}\,dx$.

Введем текст программы. Запишем значение $a = 0$ в RG0, $b = 0,22$ в RG1, $n = 45$ в RG3.

После вычисления (время вычисления ≈ 7 мин) получили значение 3,6361919. Здесь верная цифра число 3. Чтобы получить значение давления p, умножим значение 3,6361919 на 29,81.

Результат: $P \approx 71$ Н.

Так как значение интеграла умножается на величину $2g \approx \approx 19,6$, то точность уменьшится более чем в 10 раз, и верной цифрой является только цифра 7.

Ответ: $P \approx 71$ Н.

Приближенное вычисление определенного интеграла по формуле трапеций. Для интеграла $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ имеет место приближенная формула

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{n}\Big(\frac{f(x_0)+f(x_1)}{2} +$$

$$+\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2} + \ldots + \frac{f(x_{n-1})+f(x_n)}{2}\Big), \qquad (4)$$

которая называется формулой трапеции. Здесь a, b – пределы интегрирования; $x_0 = a$, $x_1, \ldots, x_n = b$ – точки разбиения отрезка $[a, b]$, $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b; f(x_{k-1}), k = 1, 2, \ldots;$ n – значение функции в точке x_{k-1}.

Каждое произведение $\frac{b-a}{n} \frac{f(x_{k-1}) + f(x_k)}{2}$ представляет собой площадь элементарной трапеции, основания которых $f(x_{k-1})$ и $f(x_k)$, а высота $h = \frac{b-a}{n} = x_k - x_{k-1}$.

Сумма площадей всех трапеций приближенно равна площади криволинейной трапеции, определяемой интегралом $\int_a^b f(x)\,dx$.

Формулу (4) удобнее представить в таком виде:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{b-a}{n}\left[(f(x_0) + f(x_1) + \ldots + f(x_n) - \frac{f(x_0) + f(x_n)}{2})\right]. \tag{5}$$

В курсе алгебры и начал анализа показывается, что если функция $f(x)$ имеет вторую непрерывную производную, то выполняется соотношение

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx - \frac{b-a}{n}(f(x_0) + f(x_1) + \ldots + f(x_n) - \frac{f(x_0) + f(x_n)}{2}) \right| \leqslant \frac{M(b-a)^3}{12n^2}, \tag{6}$$

где M – наибольшее значение $|f''(x)|$ на $[a, b]$. Из соотношения (5) можно определить выбор значения n в зависимости от требуемой точности вычислений интеграла.

Составим программу приближенного вычисления определенного интеграла по формуле трапеций. Отличие этой программы от предыдущей заключается только в необходимости вычесть из суммы значений $f(x_{k-1})$, $k = 1, \ldots, n$, значение $\frac{f(x_0) + f(x_n)}{2}$.

Программа:

Адрес	Команда	Код	Комментарии
00	0	00	00–01. Обнуление регистра RGd
01	x → Пd	4Г	
02	П → x2	62	

Адрес	Команда	Код	Комментарии
03	П → x1	61	02–04. Вычисление разности $b - a$
04	−	11	
05	П → x3	63	
06	÷	13	05–07. Вычисление значения $\frac{b-a}{n}$ и за-
07	x → П4	44	пись его в RG4
08	П → x2	62	08–11. Перезапись значения b в RG0 и вычисление значения $f(b)$ (41 – адрес начала подпрограммы вычисления значения $f(b)$)
09	x → П0	40	
10	ПП	53	
11	41	41	
12	x → П5	45	Запись значения $f(b)$ в RG5
13	П → x1	60	13–17. Перезапись значения a из RG1 в RG0. Вычисление значения $f(a)$ и запись его в RGd
14	x → П0	40	
15	ПП	53	
16	41	41	
17	x → Пd	4Г	
18	П → x5	65	18–22. Вычисление значения
19	+	10	$-\frac{f(b)+f(a)}{2}$
20	2	02	
21	÷	13	
22	/−/	0L	
23	П → xd	6Г	23–25. Вычисление значения
24	+	10	$f(a) - \frac{f(b)+f(a)}{2}$ и запись его в RGd
25	x → Пd	4Г	
26	П → x0	60	26–29. Вычисление значения $x_k = x_{k-1} +$
27	П → x4	64	$+ \frac{b-a}{n}$, $k = 1, 2, \ldots, n$ и запись x_k в RG0
28	+	10	
29	x → П0	40	
30	ПП	53	30–31. Вычисление значения $f(x_k)$, $k =$
31	41	41	$= 1, 2, \ldots, n$
32	П → xd	6Г	32–34. Вычисление значения $f(x_{k-1}) +$
33	+	10	$+ f(x_k)$ и запись суммы в RGd
34	x → Пd	4Г	
35	F L3	58	35–36. Организация цикла вычисления суммы
36	26	26	$f(x_k)$, $k = 1, 2, \ldots, n$
37	П → x4	64	37–38. Вызов числа $\frac{b-a}{n}$ и вычисление
38	×	12	значения $\int_a^b f(x)\,dx$

Адрес	Команда	Код	Комментарии
39	x → Пd	4Г	Запись приближенного значения интеграла в RG4. Останов и индикация результата
40	С/П	50	
41	...	...	Подпрограмма вычисления значения функции $f(x)$
...	...	...	...

Инструкция по работе с программой:

1. Введите текст программы (с адреса 41 вводится программа вычисления значения функции).
2. Введите исходные данные: концы отрезка $[a, b]$ в RG1 и RG2, значение n в RG3.
3. Осуществите запуск программы ($\boxed{\text{В/0}}$ $\boxed{\text{С/П}}$).
4. Запишите результат и проанализируйте его.

В качестве примера используем программу вычисления определенного интеграла по формуле трапеций для определения величины давления воды на стенки аквариума (пример 4).

Определим значение n по заданной точности ($\epsilon = 10^{-1}$). Для этого нужно найти наибольшее значение функции $|f''(x)|$ на отрезке $[0;\ 0{,}22]$.

С помощью исследования функции $f''(x)$ на экстремум можно показать, что наибольшего значения функция $|f''(x)|$ достигает в точке $x = 0{,}22$, и ее значение в этой точке $|f''(0{,}22)| \approx 10{,}2514 \cdot 10^3 = M''$.

Подставим это значение в формулу $n > \sqrt{\dfrac{M''(b-a)^3}{12\epsilon}}$:

$$n > \sqrt{\frac{10{,}2514 \cdot 10^3 \cdot 0{,}22^3}{12 \cdot 10^{-1}}} \approx 9{,}53.$$

Отсюда следует, что для заданного ϵ n следует взять равным 10 (для $\epsilon = 10^{-2}$ $n = 30$, а по формуле прямоугольников для $\epsilon = 10^{-2}$ $n = 445$). Сравнивая для $\epsilon = 10^{-1}$ значения n, полученные для формулы прямоугольников и формулы трапеции, видно, что точность второго метода намного выше.

После ввода программы и ввода исходных данных получим

$$\int_0^{22} 10^3 x \sqrt{0{,}18^2\ (x - 0{,}07)^2}\,dx \approx 3{,}674561.$$

Значение давления $p \approx 72{,}1$ Н. Верной цифрой этого результата является цифра 7. Данное значение p получено с избытком.

Время вычисления ≈ 1 мин.

Задачи

11. Вычислите по формуле трапеции с точностью до 10^{-2} ($n = 15$) площадь металлической пластинки, имеющей форму криволинейной трапеции с нижним основанием AB длиной 3 см и ограниченной сверху кривой $y = x^2 + x$. В системе координат xOy точка A имеет координаты $(1, 0)$.

12. Вычислите по формуле трапеций с точностью до 10^{-1} площадь фигуры, ограниченной прямыми $x = 1$, $x = 3$ и кривой $y = xe^x$. Определите по ϵ значение n.

13. Частица движется прямолинейно в плоскости наблюдаемого экрана со скоростью, изменяющейся в течение 1 с по закону $v(t) = e^t \sin t$. Определите приближенно (по формуле трапеций) пройденный частицей путь за это время. Положим $n = 17$.

14. Вычислите объем прямого цилиндра высотой 13 см, основанием которого является криволинейная трапеция, ограниченная прямыми $x = 1$, $x = 6$ и кривой $f(x) = \sqrt{x} \lg x$. Положим $n = 10$.

15. Серебряная пластина толщиной 1 см имеет форму криволинейной трапеции, ограниченной сверху кривой $y = 2\ln(x + 1)^2$. Нижнее основание криволинейной трапеции является отрезком прямой длиной 3 см. Вычислите по формуле трапеций массу этой пластины при $n = 30$*, $\rho_c \approx 10{,}5$ г/см^3.

16. Вычислите по формуле трапеций площадь поверхности, образованной вращением дуги кривой $y = e^x$ на интервале $[1, 2]$ вокруг оси Ox при $n = 13$.

§ 9. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Пример. В воздухе комнаты объемом 150 м^3 содержится 0,2% углекислого газа CO_2. Вентиляция подает в минуту 15 м^3 воздуха, содержащего 0,04% CO_2, который вследствие перемешивания распределяется по всему объему комнаты равномерно. Через какое время количество углекислого газа в воздухе комнаты уменьшится вдвое?

---

*При $n = 30$ вычисляется площадь пластины с точностью до 10^{-3} см^2. При вычислении массы погрешность увеличивается за счет множителей $h = 13$ см и $\rho_c \approx 10{,}5$ г/см^3. Поэтому окончательный ответ следует давать с точностью до 1 г.

Р е ш е н и е. Обозначим через $y(t)$ объем углекислого газа в воздухе комнаты в момент времени t. Найдем, на сколько изменится объем CO_2 за промежуток времени от t до момента $t + \Delta t$. В одну минуту подается $15 \cdot 0{,}0004 = 0{,}006$ м^3 углекислого газа, а в Δt мин – $0{,}006\Delta t$. В то же время за одну минуту вентилятором выводится из комнаты 15 м^3 воздуха, а за Δt мин – $15\Delta t$ м^3. Так как $y(t)$ – количество CO_2 в комнате в момент времени t, $y(t)/150$ – количество углекислого газа в 1 м^3 воздуха в тот же момент, то за время Δt из комнаты выводилось бы $\frac{15\Delta t\, y(t)}{150} = \frac{\Delta t\, y(t)}{10}$ CO_2 (при условии, что за время Δt концентрация углекислого газа в комнате не менялась). В действительности за это время она меняется на величину, бесконечно малую при $\Delta t \to 0$, поэтому за промежуток времени Δt из комнаты выводится $\frac{\Delta t(y(t) + \alpha)}{10}$ углекислого газа, где $\alpha \to 0$ при $\Delta t \to 0$. В результате получим, что за время Δt в комнату поступает $0{,}006\Delta t$, а выводится $\frac{\Delta t(y(t) + \alpha)}{10}$ углекислого газа, т.е. $y(t + \Delta t) - y(t) = 0{,}006\Delta t - 0{,}1\Delta t(y(t) + \alpha)$. Разделим обе части данного равенства на Δt и перейдем к пределу при $\Delta t \to 0$. Получим $y'(t) = 0{,}006 - 0{,}1y(t)$, так как

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{y(t + \Delta t) - y(t)}{\Delta t} = y'(t) \text{ и } \alpha \to 0 \text{ при } \Delta t \to 0.$$

Решая полученное дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными, найдем $y(t) = 0{,}06 + Ce^{-t/10}$. При $t = 0$ в комнате содержалось $150 \cdot 0{,}002 = 0{,}3$ м^3 CO_2, поэтому $y(0) = 0{,}3 = 0{,}06 + C$, откуда $C = 0{,}24$.

Для того чтобы ответить на вопрос задачи, надо найти t из уравнения $0{,}06 + 0{,}24e^{-t/10} = 0{,}15$ $e^{-t/10} = \frac{0{,}09}{0{,}24} = 3/8$.

$$t = -10^{\ln(3/8)} = 10^{\ln(3/8)} \approx 9{,}8 \approx 10 \text{ мин.}$$

П р о г р а м м а: 8 $\boxed{\text{В}\uparrow}$ 3 $\boxed{\div}$ F ln 10 $\boxed{\times}$.

Задачи

В задачах **1–3** считать, что втекающий газ (или жидкость) вследствие перемешивания распределяется по всему объему равномерно.

1. В сосуд, содержащий 10 л воды, непрерывно поступает со скоростью 2 л в минуту раствор, в каждом литре которого содержится 0,3 кг соли. Поступающий в сосуд раствор перемешивается с водой, и смесь вытекает из сосуда с той же скоростью. Сколько соли будет в сосуде через 3 мин?

2. Сосуд вместимостью 20 л содержит воздух (80% азота и 20% кислорода). В сосуд втекает 0,1 л азота в секунду, который непрерывно перемешивается, и вытекает такое же количество смеси. Через сколько времени в сосуде будет 99% азота?

3. В баке находится 100 л раствора, содержащего 10 кг соли. В бак непрерывно подается вода, которая перемешивается с имеющимся раствором. Смесь вытекает с той же скоростью. Сколько соли в баке останется через час?

В задачах **4–5** принять, что скорость остывания (или нагревания) тела пропорциональна разности температур тела и окружающей среды.

4. Тело охладилось за 10 мин от 100 до 60°С. Температура окружающего воздуха поддерживается равной 20°С. Когда тело остынет до 35°С?

5. В сосуд, содержащий 1 кг воды при температуре 20°С, опущен алюминиевый предмет с массой 0,5 кг, удельной теплоемкостью 0,2 и температурой 75°С. Через минуту вода нагрелась на 2°С. Когда температуры воды и предмета будут отличаться одна от другой на 1°? Потерями теплоты на нагревание сосуда и прочими пренебречь.

6. Лодка замедляет свое движение под действием сопротивления воды, которое пропорционально скорости лодки. Начальная скорость лодки 1,5 м/с, через 4 с скорость ее стала 1 м/с. Когда скорость уменьшится до 1 см/с?

В задачах **7–9** использовать закон радиоактивного распада: количество радиоактивного вещества, распадающегося за единицу времени, пропорционально количеству этого вещества, имеющемуся в рассматриваемый момент.

7. За 30 дней распалось 50% первоначального количества радиоактивного вещества. Через сколько времени останется 1% от первоначального количества?

8. Согласно опытам, в течение года из каждого грамма радия распадается 0,44 кг. Через сколько лет распадется половина имеющегося количества радия?

9. В исследованной кучке горной породы содержится 100 мг урана и 14 мг уранового свинца. Известно, что уран распадается

наполовину за $4,5 \cdot 10^9$ лет и что при полном распаде 238 г урана образуется 206 г уранового свинца. Определите возраст горной породы. Считать, что в момент образования горная порода не содержала свинца, и пренебречь наличием промежуточных радиоактивных продуктов между ураном и свинцом (так как они распадаются намного быстрее урана).

10. Интенсивность света, поглощаемого слоем воды малой толщины, пропорционально интенсивности падающего на него света и толщине слоя. Слой воды толщиной 35 см поглощает половину интенсивности падающего на него света. Какую часть интенсивности света поглотит слой толщиной 2 м?

11. Парашютист прыгнул с высоты 2 км, а раскрыл парашют на высоте 0,5 км. Сколько времени он падал до раскрытия парашюта? Известно, что предельная скорость падения человека в воздухе нормальной плотности составляет 50 м/с. Изменением плотности с высотой пренебречь. Сопротивление воздуха пропорционально квадрату скорости.

12. Футбольный мяч массой 0,4 кг брошен вверх со скоростью 20 м/с. Сопротивление воздуха пропорционально квадрату скорости и равно $7 \cdot 10^{-3}$ Н при скорости 1 м/с. Вычислите время подъема мяча и наибольшую высоту подъема. Как изменятся эти результаты, если пренебречь сопротивлением воздуха?

13. Вычислите время падения мяча с высоты 16,6 м без начальной скорости с учетом сопротивления воздуха (см. задачу 12). Найдите скорость мяча в конце падения.

В задачах **14–17** принять, что жидкость из сосуда вытекает со скоростью, равной $0{,}6\sqrt{2gh}$, где $g = 9{,}8$ м/с^2 – ускорение свободного падения; h – высота уровня воды над отверстием.

14. За какое время вытечет вся вода из цилиндрического бака с диаметром основания $2R = 1{,}8$ м и высотой $H = 2{,}45$ м через отверстие в дне диаметром $2R = 6$ см? Ось цилиндра вертикальна.

15. Решите предыдущую задачу в предположении, что ось цилиндра расположена горизонтально, а отверстие находится в самой нижней части цилиндра.

16. Цилиндрический бак поставлен вертикально и имеет отверстие в дне. Половина воды из полного бака вытекает за 5 мин. За какое время вытечет вся вода?

17. Воронка имеет форму конуса радиусом $R = 6$ см и высотой $H = 10$ см, обращенного вершиной вниз. За какое время вытечет вся вода из воронки через круглое отверстие диаметра 0,5 см, сделанное в вершине конуса?

§ 10. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ

Пример 1. Какова вероятность того, что при случайном расположении в ряд кубиков, на которых нанесены буквы К, О, Э, Р, Т, Д, А, получится слова ОКТАЭДР?

Р е ш е н и е. Общее число возможных расположений семи кубиков равно числу перестановок из семи элементов $n = P_7 = 7!$ Число случаев m, благоприятствующих появлению слова ОКТАЭДР, равно единице. Поэтому вероятность появления слова ОКТАЭДР

$$P = m/n = 1/7! = 1/5040 \approx 0{,}0002.$$

Так как при решении задач на непосредственный подсчет вероятностей с помощью формул комбинаторики, довольно часто приходится находить число перестановок $P_n = n!$, то полезно составить п р о г р а м м у:

F ПРГ 1 П→x 0 $\boxed{\times}$ F L0 01 С/П.

Перед запуском программы необходимо занести число n в регистр RG0. (В нашем случае $n = 7$.)

Пример 2. На 12 карточках напечатаны числа от 11 до 22. Наудачу выбираются 4 карточки. Какова вероятность того, что сумма чисел на них будет равна 82?

Р е ш е н и е. Так как 4 карточки из 12 можно выбрать C_{12}^4 способами, а число благоприятствующих случаев равно единице (когда выбраны карточки с числами 19, 20, 21, 22), то искомая вероятность

$$P = 1/C_{12}^4.$$

В приведенной ниже программе вычисления $C_n^m = \dfrac{n!}{(n-m)!\ m!}$ в качестве подпрограммы используется программа примера 1, находящая $n!$

Для вычисления значений $n!$, $(n-m)!$ и $m!$ предусматривается обращение к подпрограмме.

Программа:

Адрес	Команда	Код	Комментарии
00	ПП	53	00–01. Обращение к подпрограмме
01	18	18	
02	x → П4	44	Запись значения $n!$ в ячейку памяти RG4
03	П → x1	61	03–04. Перезапись содержимого регистра
04	x → П0	40	RG1 $n-m$ – в регистр RG0
05	ПП	53	05–06. Вычисление значения $(n-m)!$
06	18	18	
07	x → П5	45	Запись значения $(n-m)!$ в регистр RG5
08	П → x2	62	08–09. Перезапись содержимого регистра
09	x → П0	40	RG2 m в регистр RG0
10	ПП	53	10–11. Вычисление значения $m!$
11	18	18	
12	П → x5	65	12–13. Вычисление значения $m!\ (n-m)!$
13	×	12	
14	П → x4	64	14–16. Вычисление значения $C_n^m =$
15	⟷	14	$= \dfrac{n!}{m!\ (n-m)!}$
16	÷	13	
17	С/П	50	17–23. Подпрограмма, вычисляющая значения $n!$, $(n-m)!$ и $m!$
18	1	01	
19	П → x0	60	
20	×	12	
21	F L0	5Г	
22	19	19	
23	В/0	52	

Инструкция по работе с программой:

1. Занести числа n, $n - m$ и m в регистры RG0, RG1 и RG2 соответственно.

2. Перейти в режим "Программирование", набрать текст программы и запустить ее с адреса 00, нажав клавиши $\boxed{\text{В/0}}$ $\boxed{\text{С/П}}$. В нашем случае $n = 12$, $m = 4$, $n - m = 8$ и $C_{12}^4 = 495$ $P = 1/C_{12}^4 = 1/495 \approx 0{,}002$.

Время работы программы 30 с.

Пример 3. Найдите вероятность того, что среди 12 карт, вынутых из колоды в 36 карт, будет по три карты каждой масти.

Решение. 12 карт из 36 можно выбрать C_{36}^{12} способами. Так как имеется по 9 карт каждой масти, то три карты из них можно выбрать C_9^3 способами. Учитывая то, что каждая из указанных возможностей выбора трех карт из 9 карт любой из четырех мастей может комбинироваться с любой из аналогичных возможностей выбора оставшихся трех мастей, получаем, что число благоприятствующих случаев равно $(C_9^3)^4$. Итак, вероятность

$$P=(C_9^3)^4/C_{36}^{12}.$$

Используя программу, приведенную в примере 2, получим $C_9^3 = 84$ (время работы программы 24 с) и $C_{36}^{12} \approx 1{,}25 \cdot 10^9$ (t = 1 мин 20 с).

Окончательно,

$$P \approx \frac{(84)^4}{1{,}25 \cdot 10^9} = \frac{49787136}{1{,}25 \cdot 10^9} \approx 0{,}04.$$

Пример 4. Слово ИНТЕГРАЛ составлено из букв разрезной азбуки. Наудачу извлекают 4 карточки и складывают в ряд друг за другом в порядке появления. Какова вероятность получить при этом слово ИГРА?

Решение. Число всех возможных случаев равно, очевидно, количеству упорядоченных выборов четырех элементов из восьми, т.е. числу размещений A_8^4. Так как имеется только один благоприятствующий случай, то вероятность

$$P = 1/A_8^4.$$

Программа для вычисления $A_n^m = (n-m+1)(n-m+2) \times \ldots$ $\ldots \times n$ имеет следующий вид:

1 П→x0 П→x1 + $\boxed{\times}$ F L1 01 С/П.

Перед запуском программы необходимо занести числа $n - m \to$ RG0, $m \to$ RG1. Для $n = 8$, $m = 4$ получаем $A_8^4 = 1680$ ($t \approx 8$ с) и

$$P = 1/A_8^4 = 1/1680 \approx 0{,}0006.$$

Пример 5. В ящике имеется 100 деталей, из них 12 бракованных. Наудачу извлечены 8 деталей. Найдите вероятность того, что среди извлеченных деталей нет бракованных.

Решение. Так как 8 годных деталей можно выбрать C_{88}^8 способами, а общее число возможных случаев равно C_{100}^8, то $P = C_{88}^8/C_{100}^8$. Если мы попробуем вычислить, например C_{100}^8 по программе примера 2, то на табло высветится Error в результате переполнения разрядной сетки при вычислении 100!. Однако, дополнив несколькими командами программу предыдущего примера, можно получить программу, позволяющую находить C_n^m при достаточно больших n (порядка 100), если $m \leqslant 20$.

Программа:

Адрес	Команда	Код	Комментарии
00	1	01	00–06. Вычисление значения $A_n^m = (n-m+1)(n-m+2)\ldots n$
01	П → x0	60	
02	П → x1	61	
03	+	10	
04	×	12	
05	F L1	5L	
06	01	01	
07	x → П3	43	Запись полученного результата в RG3
08	1	01	08–12. Вычисление значения $m!$
09	П → x2	62	
10	×	12	
11	F L2	58	
12	09	09	
13	П → x3	63	13–16. Вычисление значения $C_n^m = A_n^m/m!$
14	↔	14	
15	÷	13	
16	С/П	50	

Инструкция по работе с программой:

1. Занести $n-m$ в RG0, m – в RG1, m – в RG2.
2. Набрать текст программы и запустить ее с адреса 00.

Итак, получим $C_{88}^8 \approx 6{,}42 \cdot 10^{10}$, $C_{100}^8 \approx 1{,}86 \cdot 10^{11}$ (время работы программы в обоих случаях 22 с). Окончательно имеем

$$P = C_{88}^8 / C_{100}^8 \approx 6{,}42 \cdot 10^{10}/(1{,}86 \cdot 10^{11}) \approx 0{,}35.$$

Интересно сравнить скорость вычисления C_n^m данной программой и программой, приведенной в примере 2(2). Как указано в примере 3 программа (2) вычислила C_9^3 за 24 с и C_{36}^{12} за 1 мин 20 с, тогда как программа в примере 5 вычисляет эти же величины за 10 и 30 с соответственно, т.е. новая программа считает примерно в 2,5 раза быстрее.

Пример 6. В равнобедренной трапеции $ABCD$ (рис. 18) с основанием a = 15 см, высотой h = 9,5 см и углом при основании $\alpha = 65°$ выбирается наудачу точка M. Какова вероятность того, что она окажется с одном из треугольников ABE или CDF?

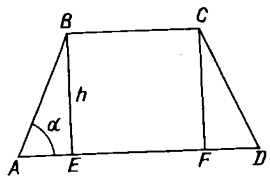


Рис. 18

Р е ш е н и е. Так как искомая вероятность равна отношению суммы площадей указанных треугольников к площади трапеции, то необходимо найти эти площади:

$$AE = h\,\mathrm{ctg}\,\alpha,\ BC = a - 2h\,\mathrm{ctg}\alpha,$$

поэтому

$$S_{ABCD} = \frac{(a + a - 2h\,\mathrm{ctg}\,\alpha)\,h}{2} = (a - h\,\mathrm{ctg}\alpha)\,h,$$

$$S_{ABE} + S_{CDF} = 2S_{ABE} = h^2\,\mathrm{ctg}\alpha,$$

$$P = \frac{S_{ABE} + S_{CDF}}{S_{ABCD}} = \frac{h^2\,\mathrm{ctg}\,\alpha}{(a - h\,\mathrm{ctg}\alpha)h} = \frac{h\,\mathrm{ctg}\,\alpha}{a - h\,\mathrm{ctg}\,\alpha} =$$

$$= \frac{h}{a\,\mathrm{tg}\,\alpha - h} = \frac{9{,}5}{15\,\mathrm{tg}65^\circ - 9{,}5} \approx 0{,}42.$$

П р о г р а м м а:

9,5 x→П0 65 F tg 15 $\boxed{\times}$ П→x0 $\boxed{-}$ F 1/x П→x0 $\boxed{\times}$.

Пример 7. В круг радиусом R вписан правильный треугольник. Внутрь круга наудачу брошены четыре точки. Найдите вероятность того, что одна точка попадет внутрь треугольника и по одной точке попадет на каждый "малый" сегмент.

Р е ш е н и е. Вероятность попадания одной точки внутрь треугольника равна

$$\frac{S_\Delta}{S_{\text{кр}}} = \frac{3R^2\sqrt{3}}{4\pi R^2} = \frac{3\sqrt{3}}{4\pi},$$

а вероятность попадания ее на сегмент –

$$\frac{S_{\text{сегм}}}{S_{\text{кр}}} = \frac{\pi R^2 - \dfrac{3R^2\sqrt{3}}{4}}{3\pi R^2} = \frac{4\pi - 3\sqrt{3}}{12\pi}.$$

Обозначим событие, вероятность которого надо найти, через A. Занумеруем точки, а также сегменты и треугольник цифрами 1, 2, 3, 4. Пусть $A_{i_1 i_2 i_3 i_4}$ – событие, состоящее в том, что точки с номерами i_1, i_2, i_3 попадут на сегменты 1, 2, 3 соответственно, а точка с номером i_4 – внутрь треугольника. Тогда событие A есть объединение попарно несовместных событий

$A_{i_1 i_2 i_3 i_4}$. Число событий $A_{i_1 i_2 i_3 i_4}$ равно 4!, все они равновероятны, поэтому по теореме сложения вероятностей $P(A) = 4! \times \times P(A_{1234})$. Найдем вероятность $P(A_{1234})$. Так как события, состоящие в попадании одной точки в одну из указанных областей, независимы, то по теореме умножения вероятностей $P(A_{1234}) = \frac{3\sqrt{3}}{4\pi} \left(\frac{4\pi - 3\sqrt{3}}{12\pi}\right)$. Окончательно получаем

$$P(A) = \frac{4! \cdot 3\sqrt{3}}{4\pi} \left(\frac{4\pi - 3\sqrt{3}}{12\pi}\right)^3 =$$

$$= \frac{18\sqrt{3}}{\pi} \left(\frac{4\pi - 3\sqrt{3}}{12\pi}\right)^3 = \frac{18\sqrt{3}}{\pi} \left(\frac{1}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4\pi}\right)^3 \approx 0{,}074.$$

П р о г р а м м а:

3 F $\sqrt{\ }$ F π $\boxed{\div}$ x→П0 4 $\boxed{\div}$ /−/ 1 В↑ 3 $\boxed{\div}$ $\boxed{+}$
В↑ F x^2 $\boxed{\times}$ П→x 0 $\boxed{\times}$ 18 $\boxed{\times}$

Пример 8. Из генеральной совокупности извлечена выборка объема $n = 60$:

варианта x_i	17	21	14	32	27
частота n_i	19	11	8	13	9 .

Найдите несмещенную оценку генеральной средней (математического ожидания).

Р е ш е н и е. Несмещенной оценкой генеральной средней является выборочная средняя:

$$x_в = \left(\sum_{i=1}^{5} n_i x_i\right)/n = (19 \cdot 17 + 11 \cdot 21 + 8 \cdot 14 + 13 \cdot 32 +$$
$$+ 9 \cdot 27)/60 \approx 22{,}08.$$

П р о г р а м м а:

19 В↑ 17 $\boxed{\times}$ 11 В↑ 21 $\boxed{\times}$ $\boxed{+}$ 8 В↑ 14 $\boxed{\times}$ $\boxed{+}$
13 В↑ 32 $\boxed{\times}$ $\boxed{+}$ 9 В↑ 27 $\boxed{\times}$ $\boxed{+}$ 60 $\boxed{\div}$

Задачи

1. Какова вероятность того, что при случайном расположении в ряд карточек, на которых написаны буквы П, А, Р, С, О, Н, К, И, Ч, В, получится слово СПРАВОЧНИК?

2. Из полной игры домино наудачу выбирают 7 костей. Какова вероятность того, что будут выбраны 7 дублей, если один дубль имеет пометку и обязательно попадает в выборку?

3. Группа студентов из 5 человек садится в пригородный электропоезд, насчитывающий 8 вагонов. Предположим, что каждый из студентов выбирает свой вагон совершенно случайно и с одинаковой вероятностью оказывается в любом из вагонов. Какова вероятность того, что все они попадут в разные вагоны?

4. Партия из 100 деталей проверяется контролером, который наугад отбирает 10 деталей и определяет их качество. Если среди выбранных контролером изделий нет ни одного бракованного, то вся партия принимается; в противном случае она посылается на дополнительную проверку. Какова вероятность того, что партия деталей, содержащая 10 бракованных изделий, будет принята контролером?

5. Рассмотрим игру в преферанс, когда старшие 32 карты карточной колоды случайным образом распределяются (сдаются) между тремя игроками, получающими по 10 карт, и "прикупом", куда кладутся две карты. Какова вероятность того, что в "прикупе" окажутся два "туза"?

6. В вещевой лотерее разыгрывается 5 предметов. Всего в урне 30 билетов. Первый подошедший к урне вынимает 4 билета. Какова вероятность того, что 2 из этих билетов окажутся выигрышными?

7. В генуэзской лотерее разыгрываются 90 номеров, из которых выигрывают 5. По условию можно ставить ту или иную сумму на любой из 90 номеров или на любую совокупность двух, трех, четырех или пяти номеров, причем для получения выигрыша должны выиграть все выбранные номера. Какова вероятность выигрыша в каждом из указанных пяти случаев?

8. Из колоды карт (52 карты) наудачу извлекаются три карты. Найти вероятность того, что это будут тройка, семерка и туз.

9. На плоскости заданы окружность радиусом $R = 15$ и точка A, находящаяся на расстоянии $d = 28$ от центра окружности. Найдите вероятность того, что прямая, проведенная наудачу через точку A, пересечет окружность.

10. Какова вероятность того, что сумма двух наугад положительных чисел, каждое из которых не больше единицы, не превзойдет единицы, а их произведение будет не больше 2/9?

11. Наудачу взяты два положительных числа x и y, каждое из которых не превышает двух. Найдите вероятность того, что произведение xy будет не больше единицы, а частное y/x — не больше двух.

12. Прямоугольная решетка состоит из цилиндрических прутьев радиуса $r = 1,5$ см. Расстояния между осями прутьев равны соответственно $a = 11$ см и $b = 15$ см. Определите вероятность попадания шариком диаметра $d = 5$ см в решетку при одном бросании без прицеливания, если траектория полета шарика перпендикулярна плоскости решетки?

13. В круг радиусом R вписан равносторонний треугольник. Какова вероятность того, что четыре наугад поставленные в данном круге точки окажутся внутри треугольника?

14. На доске для игры в стоклеточные шашки случайным образом поставлены три шашки. Какова вероятность того, что эти шашки окажутся в клетках, расположенных на одной из диагоналей шашечной доски?

15. В лотерее из сорока билетов ценные выигрыши падают на три билета. Определите вероятность получения хотя бы одного ценного выигрыша на тысячу билетов.

16. На участке AB для мотоциклиста-гонщика имеются 12 препятствий, вероятность остановки на каждом из которых равна 0,1. Вероятность того, что от пункта B до конечного пункта C мотоциклист проедет без остановки, равна 0,7. Определите вероятность того, что на участке AC не будет ни одной остановки.

17. В партии из 20 деталей имеется 5 нестандартных. Наудачу берут две детали, которые в партию не возвращаются, а затем берут еще две детали. Какова вероятность того, что первые две детали окажутся нестандартными, а вынутые во второй раз — стандартными?

18. Многократно измеряют некоторую физическую величину. Вероятность того, что при считывании показаний прибора допущена ошибка, равна 0,1. Найдите наименьшее число измерений, которое необходимо произвести, чтобы с вероятностью $P > 0,5$ можно было ожидать, что хотя бы один результат измерений окажется неверным.

19. Большая партия изделий содержит один процент брака. Каков должен быть объем случайной выборки, чтобы вероятность встретить в ней хотя бы одно бракованное изделие была не меньше 0,95?

20. Определить вероятность того, что номер первой встретившейся автомашины не содержит: а) цифры семь; б) двух и более семерок. Известно, что все номера четырехзначные, не-

повторяющиеся и равновозможные (считается возможным номер 0000).

21. Вероятность попадания в цель при одном выстреле составляет 0,9. Найти вероятность восьми попаданий при 10 выстрелах.

22. Отдел технического контроля проверяет изделия на стандартность. Вероятность того, что изделие стандартно, равна 0,9. В каждой партии содержится пять изделий. Найдите математическое ожидание дискретной случайной величины X – числа партий, в каждой из которых окажется ровно четыре стандартных изделия, – если проверке подлежит 50 партий.

23. Как известно, некоторые зарубежные фирмы, занимающиеся производством сигарет, имеют обыкновение вкладывать в пачки сигарет игральные карты. Тому из покупателей, кто сумеет собрать полную колоду карт, фирма выплачивает премию или выдает какой-нибудь приз. Предположим, что в каждую пачку вложена одна из карт колоды в 52 листа, карты распределены по пачкам случайным образом и число пачек, поступающих в продажу, неограниченно. Какое минимальное число пачек необходимо купить в среднем, чтобы собрать полную колоду карт?

24. Прибор имеет 15 предохранителей. В случае перегрузки сгорает один из предохранителей, который заменяется новым. Каково математическое ожидание M числа перегрузок, после которых в приборе окажутся замененными все первоначально установленные предохранители, если выход из строя в момент перегрузки любого из 15 предохранителей (как незамененного, так и нового) равновероятен?

25. Прибор имеет 60 элементов типа A и 25 элементов типа B. В случае отказа элементов типа A они не заменяются, а работа прибора продолжается до тех пор, пока в схеме есть хотя бы один исправный элемент типа A. Отказы элементов типа B устраняются так, что число исправных элементов типа B в схеме остается постоянным. Отказ любого из исправных элементов прибора равновозможен. Определите среднее число отказов элементов, приводящих к полному отказу прибора, т.е. к выходу из строя всех 60 элементов типа A.

26. При измерении роста случайно отобранных 30 студентов оказалось, что 5 из них имеют рост от 160 до 170 см, 18 – от 170 до 180 см и 7 – от 180 до 190 см. Найдите несмещенную оценку математического ожидания роста обследованных студентов.

ГЛАВА III. ЗАДАЧИ ПО ГЕОМЕТРИИ

§ 1. ЗАДАЧИ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

Пример 1. Острота нашего зрения характеризуется способностью различать детали изображения в одну угловую минуту. На телеэкране изображение складывается из строк, которых на экране около 600. Толщина каждой строки (или элемента картинки на экране) должна укладываться в одну угловую минуту, т.е. весь экран должен занимать в поле зрения примерно 600 угловых минут или $10°$. Измерьте ширину экрана вашего телевизора и определите расстояние, с которого лучше всего смотреть передачи (рис. 19).

Р е ш е н и е. Пусть h – ширина экрана телевизора, тогда расстояние $l = \dfrac{h}{2\,\mathrm{tg}\,5°}$. Вычислим величину $\dfrac{1}{2\,\mathrm{tg}\,5°}$ по программе:

Г: 5 F tg 2 $\boxed{\times}$ F 1/x

Получим $l \approx 5{,}7h$.

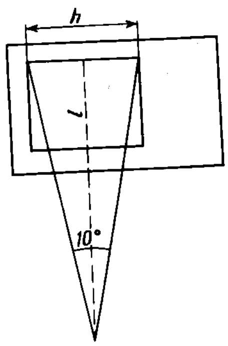


Рис. 19

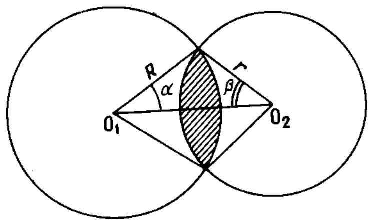


Рис. 20

Пример 2. Расстояние между центрами двух пересекающихся кругов радиусами $R = 15$ см и $r = 12$ см равно $d = 18$ см. Найдите площадь их общей части (рис. 20).

Р е ш е н и е. Искомая площадь равна сумме площадей двух секторов с углами 2α и 2β без удвоенной площади треугольника со сторонами R, r и d:

$$S = \alpha R^2 + \beta r^2 - Rd\sin\alpha.$$

Для определения углов α и β составим систему уравнений:

$$\begin{cases} R\sin\alpha = r\sin\beta, \\ R\cos\alpha + r\cos\beta = d. \end{cases}$$

Возведем в квадрат обе части первого из этих уравнений и заменим $\sin^2\alpha$, $\sin^2\beta$ на $1 - \cos^2\alpha$ и $1 - \cos^2\beta$ соответственно. Тогда наша система примет вид

$$\begin{cases} R^2\cos^2\alpha - r^2\cos^2\beta = R^2 - r^2, \\ R\cos\alpha + r\cos\beta = d. \end{cases}$$

Обозначив $x = R\cos\alpha$, $y = r\cos\beta$, $c = R^2 - r^2$, получим

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = c, \\ x + y = d. \end{cases}$$

Возведем в квадрат обе части второго уравнения системы, а затем сложим их и вычтем из второго первое. Получим

$$\begin{cases} 2x^2 + 2xy = d^2 + c, \\ 2y^2 + 2xy = d^2 - c, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} 2x(x + y) = d^2 + c, \\ 2y(x + y) = d^2 - c. \end{cases}$$

Так как $x + y = d$, то $x = R\cos\alpha = \dfrac{d^2 + c}{2d} = \dfrac{d^2 + R^2 - r^2}{2d}$ и $y = r\cos\beta = \dfrac{d^2 - c}{2c} = \dfrac{d^2 + r^2 - R^2}{2d}$. Окончательно получим:

$$\cos\alpha = \frac{d^2 + R^2 - r^2}{2d}, \quad \cos\beta = \frac{d^2 + r^2 - R^2}{2rd},$$

$$S = R^2\arccos\frac{d^2 + R^2 - r^2}{2Rd} + r^2\arccos\frac{d^2 + r^2 - R^2}{2rd} - Rd\sqrt{1 - \left(\frac{d^2 + R^2 - r^2}{2Rd}\right)^2}.$$

При составлении программы учтем, что выражение $d^2 + R^2 - r^2$ и $\dfrac{d^2 + R^2 - r^2}{2Rd}$ придется вычислить дважды, поэтому полученные выражения целесообразно сохранить в регистрах памяти. Значения $2Rd = 2 \cdot 15 \cdot 18 = 30 \cdot 18 = 540$ и $2 \cdot 12 = 24$ вычислим устно.

П р о г р а м м а:

Р: 18 F x^2 15 F x^2 $\boxed{+}$ 12 F x^2 $\boxed{-}$ $x \to П0$ 540 ÷ $x \to П1$ F $\cos^{-1}$ 18 F x^2 $\boxed{\times}$ $П \to x0$ 24 $\boxed{\div}$ 18 $\boxed{\div}$ F $\cos^{-1}$ 12 F x^2 $\boxed{\times}$ $\boxed{+}$ 1 $П \to x1$ F x^2 $\boxed{-}$ F $\sqrt{\ }$ 15 $\boxed{\times}$ 18 $\boxed{\times}$ $\boxed{-}$

О т в е т. $S \approx 106{,}8$ см^2 ≈ 107 см^2.

Задачи

1. Найдите углы параллелограмма, зная его высоты $h_1 = 4$ см, $h_2 = 5$ см и периметр $p = 23$ см.

2. Четверть круга AOB вращается около радиуса $OB = 8$ (рис. 21). На каком расстоянии OP от центра O надо провести прямую PD, параллельную прямой OA, чтобы кольцо, описанное отрезком CD, заключенным между хордой AB и окружностью, имело площадь 3π?

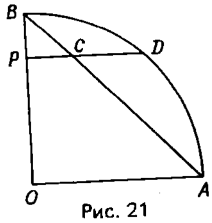


Рис. 21

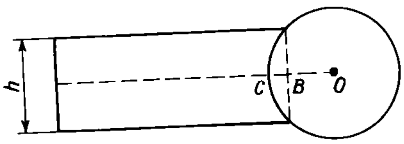


Рис. 22

3. Диаметр фрезы равен $D = 35$ см, ширина фрезеруемой поверхности, имеющей форму прямоугольника, равна $h = 19$ см. Найдите длину пути BC (рис. 22), проходимого фрезой в момент захвата полной ширины обрабатываемой поверхности.

4. В четырехугольник $ABCD$ вписана окружность и вокруг него описана окружность, $\angle A = 80°$, $\angle B = 115°$, $\angle C = 100°$, $\angle D = 65°$, периметр четырехугольника $ABCD$ равен 12 см. Найдите его площадь.

5. В треугольнике ABC даны его стороны $BC = a = 11$, $AC = b = 15$ и $l_C = 12$ – биссектриса угла C. Найдите угол C.

6. Через точку, находящуюся внутри круга, проведены две взаимно перпендикулярные прямые. Две образовавшиеся хорды делятся точкой их пересечения на отрезки $a = 3{,}5$ см, $b = 6{,}3$ см, $c = 4{,}5$ см, $d = 4{,}9$ см. Докажите, что площадь круга $S = \frac{\pi}{4}(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)$ и найдите ее.

7. На круглом биллиардном столе радиусом $R = 1{,}5$ м в точке P на расстоянии $d = 0{,}8$ м от центра стола O находится биллиардный шар. Шар ударяют кием так, что он, последовательно оттолкнувшись от борта стола биллиарда в некоторых точках A и B, возвращается в точку P. Под каким углом OPA ударили по шару кием?

8. Три одинаковые окружности, касающиеся попарно между собой, касаются, кроме того, круга радиусом $r = 12$ дм внешним образом. Найдите площади трех криволинейных треугольников, образованных указанными окружностями.

9. Стороны треугольника равны $a = 11{,}5$ см, $b = 13{,}6$ см, $c = 15{,}1$ см. Найдите медиану m_c, проведенную к стороне c.

10. Стороны треугольника равны $a = 8{,}5$ см, $b = 9{,}6$ см, $c = 10{,}9$ см. Вычислите высоту h_c, проведенную к стороне c.

11. Стороны треугольника равны $a = 1{,}9$ см, $b = 2{,}6$ см, $c = 3{,}1$ см. Найдите биссектрису l_c, проведенную к стороне c.

12. Центры четырех кругов расположены в вершинах квадрата со стороной $a = 12$ см, радиусы равны a. Вычислите площадь пересечения кругов (рис. 23).

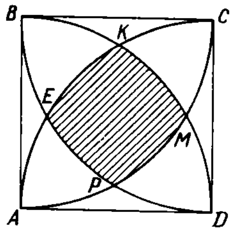


Рис. 23

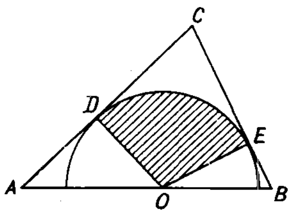


Рис. 24

13. Окружность касается сторон AC и BC треугольника ABC в точке D и E соответственно и имеет центр на стороне AB (рис. 24). Найдите площадь сектора DOE, если $BC = 13$ см, $AB = 14$ см, $AC = 15$ см.

14. Высевающий аппарат большинства сеялок представляет собой цилиндрическую катушку с желобками, которые при вращении катушки захватывают зерна и высыпают из сеялки. Поперечное сечение желобка высевающей катушки имеет вид, изображенный на рис. 25. Выразите площадь этого сечения через величины b, r и R, если известно, что $\alpha = 37°$, $\beta = 26°30'$.

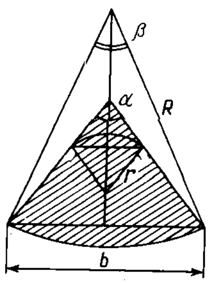


Рис. 25

1. Скалярное произведение векторов

Пример 1. Вычислите угол между векторами $\vec{a}(2, 3, -8)$ и $\vec{b}(-13, 4, 2)$.

Решение.

$$\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a}\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}\ \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}, \qquad (1)$$

где x_i, y_i, z_i $(i = 1, 2)$ – координаты векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Программа для вычисления значения $\cos(\vec{a}, \vec{b})$ по формуле (1):

Адрес	Команда	Код	Комментарии
00	3	0	00–08. Программа автоматической записи x_i, y_i, z_i в регистры RG5 – RGa по команде косвенной записи в адресуемые регистры
01	4	04	
02	x → П4	44	
03	6	06	
04	x → П0	40	
05	С/П	50	
06	К x → П4	L4	
07	F L0	5Г	
08	04	04	
09	П → x5	65	Вызов значения x_1
10	П → x8	68	Вызов значения x_2
11	×	12	Вычисление x_1x_2
12	П → x6	66	Вызов значения y_1
13	П → x9	69	Вызов значения y_2
14	×	12	Вычисление значения y_1y_2
15	+	10	Вычисление значения $x_1x_2 + y_1y_2$
16	П → x7	67	Вызов значения z_1
17	П → xa	6–	Вызов значения z_2
18	×	12	Вычисление значения z_1z_2
19	+	10	19–20. Вычисление значения $x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$ и запись результата в RG0
20	x → П0	40	
21	П → x5	65	21–29. Вычисление значения $\sqrt{x_1^2 + x_1^2 + z_1^2}$
22	F x²	22	
23	П → x6	66	
24	F x²	22	
25	П → x7	67	
26	F x²	22	

Адрес	Команда	Код	Комментарии
27	+	10	
28	+	10	
29	F $\sqrt{\ }$	21	
30	П → x8	68	30–38. Вычисление значения
31	F x^2	22	$\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}$ (значение $\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$ –
32	П → x9	69	в RY)
33	F x^2	22	
34	П → x9	6–	
35	F x^2	22	
36	+	10	
37	+	10	
38	F $\sqrt{\ }$	21	
39	×	12	Вычисление значения $\lvert\vec{a}\rvert \lvert\vec{b}\rvert$
40	П → x0	60	40–42. Вычисление значения $\cos(\vec{a} \cdot \vec{b})$
41	↔	14	
42	÷	13	
43	F $\cos^{-1}$	1–	Вычисление угла между векторами
44	С/П	50	Останов и индикация результата

Инструкция по работе с программой:

1. Запустите программу ($\boxed{В/0}$, $\boxed{С/П}$).

2. Введите значения x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2 (после ввода каждого числа нажмите клавишу $\boxed{С/П}$).

3. Запишите результат и проанализируйте его.

Примечание. Если угол между векторами нужно выразить в градусах, то перед запуском программы установить переключатель Р – ГРД – Г в положение Г. После ввода данных примера 1 получим результат $\varphi \approx 104{,}4°$.

Время вычисления ≈9 с.

Задачи

1. В параллелограмме $ABCD$ известны координаты трех точек: $A(0, 0, 0)$, $B(0{,}7, 5{,}6, 0)$, $D(12, 0{,}4, 0)$. Определите углы параллелограмма.

2. Вершины треугольника ABC заданы следующими координатами: $A(14, 5, 9{,}8)$, $B(18, 4, 9{,}8)$, $C(1{,}8, 5, 9{,}8)$. Найдите углы треугольника.

3. Найдите сумму плоских углов трехгранника, образованного векторами $\vec{a}(7, -4, 16)$, $\vec{b}(7, 4, -21)$, $\vec{c}(7, 9, -5)$.

4. Определите углы между диагональю AC и сторонами AB и AD параллелограмма $ABCD$, построенного на векторах $\overrightarrow{AB} = 8\vec{i} + 3\vec{k}$ и $\overrightarrow{AD} = -4\vec{i} + 5\vec{j} - 9\vec{k}$.

2. Векторное произведение двух векторов

Пример 2. Вычислите векторное произведение векторов $\vec{a}(-4, 5, 7)$ и $\vec{b}(0, 4, 9)$.

Р е ш е н и е. Составим программу вычисления векторного произведения двух векторов по формуле

$$[\vec{a}, \vec{b}] = \vec{i}\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix},$$

где $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – базисные векторы, образующие правую тройку, а x_i, y_i, z_i $(i = 1, 2)$ – координаты векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

П р о г р а м м а:

Адрес	Команда	Код	Комментарии
00	4	04	00–07. Программа автоматической записи координат векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ в регистры RG5 – RGa по команде косвенной записи в адресные регистры
01	x → П4	44	
02	6	06	
03	x → П0	40	
04	С/П	50	
05	К x → П4	L4	
06	F L0	5Г	
07	04	04	
08	П → x6	66	08–15. Вычисление значения $\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}$ и запись результата (коэффициента при $\vec{i}$) в RGb
09	П → xa	6–	
10	×	12	
11	П → x7	67	
12	П → x9	69	
13	×	12	
14	–	11	
15	x → Пb	44	
16	П → x5	65	16–23. Вычисление значения $-\begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_1 & z_1 \end{vmatrix}$ и запись результата (коэффициента при $\vec{j}$) в RGc
17	П → xa	6–	
18	×	12	
19	П → x8	68	
20	П → xa	6	

Адрес	Команда	Код	Комментарии
21	×	12	
22	−	11	
23	/−/	0L	
24	x → Пс	4[	24–31. Вычисление значения
25	П → x5	65	$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}$ и запись результата (коэффици-
26	П → x9	69	ента при $\vec{k}$) в RGd
27	×	12	
28	П → x8	68	
29	П → x6	66	
30	×	12	
31	−	11	
32	x → Пd	4Г	
33	С/П	50	Останов и индикация коэффициента при $\vec{k}$

Инструкция по работе с программой:

1. Запустите программу ($\boxed{\text{В/0}}$, $\boxed{\text{С/П}}$).

2. Введите значения x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2 (после ввода каждого числа нажать клавишу $\boxed{\text{С/П}}$).

3. Выведите значения коэффициентов разложения вектора $[\vec{a}, \vec{b}]$ по базисным векторам $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ из регистров RGb, RGc и RGd.

4. Запишите разложение вектора $[\vec{a},\vec{b}]$ по базисным векторам.

После ввода данных примера 2 получим результат $[\vec{a},\vec{b}] = 17\vec{i} + 36\vec{j} - 16\vec{k}$.

Время вычисления 8 с.

Задачи

5. Найдите площадь параллелограмма, построенного на векторах

$\vec{a}(-1;\ 0;\ 4{,}9)$ и $\vec{b}(4;\ -3;\ 18)$.

6. Найдите площадь треугольника ABC с координатами вершин: $A(8;\ 3;\ 5)$, $B(7;\ 3;\ 9)$ и $C(-4;\ 8;\ 0)$.

7. Сила $\vec{F} = 8\vec{i} - 9\vec{j} - 16\vec{k}$ приложена к точке M с координатами (18; 9; 0,1). Найдите момент силы относительно начала координат.

8. Найдите высоту BM параллелограмма $ABCD$, построенного на векторах $\overrightarrow{AB} = 17\vec{i} + 16\vec{j}$ и $\overrightarrow{AD} = -3\vec{i} + 4\vec{j} - 11\vec{k}$.

9. В треугольнике ABC: $\overrightarrow{AB} = 6\vec{i} + 41\vec{j} - 2\vec{k}$, $BC = 2\vec{i} - 4\vec{j} + 12\vec{k}$. Определите высоту, опущенную из вершины B на сторону AC.

3. Смешанное произведение трех векторов

Если векторы $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$ заданы своими координатами, то смешанное произведение векторов $(\vec{a}; \vec{b}; \vec{c}) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$, где x_i, y_i, z_i $(i = 1, 2)$ – координаты векторов.

Для вычисления смешанного произведения векторов с помощью МК можно воспользоваться программой вычисления определителя третьего порядка (гл. II, § 5).

Пример 3. Определите объем треугольной призмы, построенной на векторах $\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - 4\vec{k}$, $\vec{b} = 7\vec{i} - 4\vec{j} + 9\vec{k}$, $\vec{c} = 2{,}3\vec{i} - 4\vec{j} + 5\vec{k}$.

Р е ш е н и е. Найдем смешанное произведение $(\vec{a}; \vec{b}; \vec{c})$. Его модуль равен объему параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$. Объем призмы, построенной на этих векторах, равен половине объема параллелепипеда.

Значение смешанного произведения векторов $(\vec{a}; \vec{b}; \vec{c}) = 64{,}3$, тогда объем призмы 32,15 куб. ед.

Задачи

10. Найдите высоту параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a} = 3\vec{i} + 2\vec{j} - 9\vec{k}$, $\vec{b} = 11\vec{i} - 5\vec{k}$, $\vec{c} = 6\vec{j} - 14\vec{k}$.

11. Определите, принадлежат ли точки $A(2, 6, 9)$, $B(8, -3, 4)$, $C(32, 5, 9)$, $D(128, 12, -14)$ одной плоскости.

12. Найдите массу железного тетраэдра $ABCD$, расположенного в системе координат так, что его вершины имеют координаты: $A(0, 0, 0)$, $B(0, 17, 0)$, $C(17, 3, 8)$, $D(11, 8, 4)$.

Масштаб: 1 ед. длины = 1 см; плотность железа 7,88 кг/м^3.

§ 3. МНОГОГРАННИКИ

Пример. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 26) известны стороны $AB = a = 13$ см, $AD = b = 14$ см, $AA_1 = c = 15$ см. Найдите угол между плоскостями AB_1D_1 и A_1C_1D.

Р е ш е н и е. Так как данный параллелепипед прямоугольный, то удобно ввести декартову систему координат, как показано на рисунке. Для того чтобы найти угол между плоскостями, достаточно найти угол между нормальными векторами этих плоскостей. Найдем координаты векторов $\overrightarrow{AB_1}$, $\overrightarrow{AD_1}$, $\overrightarrow{DA_1}$ и $\overrightarrow{DC_1}$ в нашей системе координат.

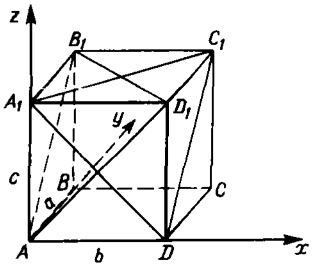


Рис. 26

Так как точка A – начало координат, то $\overrightarrow{AB_1}(0, a, c)$ и $\overrightarrow{AD_1}(b, 0, c)$. Учитывая, что точки D, A_1, C_1 имеют координаты $D(b, 0, 0)$, $A_1(0, 0, c)$, $C_1(b, a, c)$, получим $\overrightarrow{DA_1}(-b, 0, c)$ и $\overrightarrow{DC_1}(0, a, c)$. Обозначим через $\vec{n_1}$ нормальный вектор плоскости AB_1D_1 и через $\vec{n_2}$ – нормальный вектор плоскости A_1C_1D. Тогда $\vec{n_1} = [\overrightarrow{AB_1}, \overrightarrow{AD_1}]$ и $\vec{n_2} = [\overrightarrow{DA_1}, \overrightarrow{DC_1}]$. Найдем эти векторные произведения:

$$\vec{n_1} = [\overrightarrow{AB_1}, \overrightarrow{AD_1}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & a & c \\ b & 0 & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & c \\ 0 & c \end{vmatrix} \vec{i} -$$

$$- \begin{vmatrix} 0 & c \\ b & c \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{vmatrix} \vec{k} = ac\vec{i} + bc\vec{j} - ab\vec{k},$$

$$\vec{n_2} = [\overrightarrow{DA_1}, \overrightarrow{DC_1}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -b & 0 & c \\ 0 & a & c \end{vmatrix} = -ac\vec{i} + bc\vec{j} - ab\vec{k}.$$

Итак, $\vec{n_1}(ac, bc, -ab)$ и $\vec{n_2}(-ac, bc, -ab)$.

Если обозначить искомый угол через φ, то, используя формулу скалярного произведения векторов, заданных своими координатами, получаем

$$\varphi = \arccos\left(\frac{a^2b^2 + b^2c^2 - c^2a^2}{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2} \right).$$

Подставив числовые значения $a = 13$, $b = 14$, $c = 15$, найдем при помощи микрокалькулятора $\varphi \approx 70{,}1°$.

П р о г р а м м а:

Г: 13 В↑ 14 $\boxed{\times}$ F x^2 14 В↑ 15 $\boxed{\times}$ F x^2 $\boxed{+}$ x→П0
13 В↑ 15 $\boxed{\times}$ F x^2 $\boxed{-}$ F Вx П→x0 $\boxed{+}$ $\boxed{\div}$ F $\cos^{-1}$

Для того чтобы не вычислять выражение $a^2b^2 + b^2c^2 = (13 \cdot 14)^2 + (14 \cdot 15)^2$ дважды, оно запоминается в регистре RG0, аналогично для вторичного получения значения $c^2a^2 = (13 \cdot 15)^2$ используется регистр предыдущего результата (команда F Вх).

Задачи

1. Вычислите острый угол между диагоналями куба, не лежащими в одной диагональной плоскости.

2. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром a, K – середина ребра DD_1. Найдите угол между прямыми CK и A_1D.

3. Найдите угол и расстояние между скрещивающимися медианами двух боковых граней правильного тетраэдра с ребром a.

4. В прямоугольном параллелепипеде через концы трех ребер, выходящих из одной вершины, проведено сечение. Углы треугольника, получившегося в сечении, равны $\alpha = 76°$, $\beta = 34°$, $\gamma = 70°$. Определите угол наклона сечения к основанию параллелепипеда.

5. В правильной четырехугольной пирамиде плоский угол при вершине равен углу между боковым ребром и плоскостью основания. Определите двугранные углы между соседними боковыми гранями этой пирамиды.

6. Боковые ребра правильной треугольной пирамиды взаимно перпендикулярны. Определите угол наклона бокового ребра к плоскости основания пирамиды.

7. В основании пирамиды $NABC$ лежит равнобедренный треугольник с углом BAC при вершине, равным $\alpha = 52°$. Грани NAB и NAC перпендикулярны основанию. Площади граней NAB и NBC равны. Определите угол наклона грани NBC к плоскости основания.

8. В правильной четырехугольной пирамиде угол между боковым ребром и плоскостью основания равен углу между боковым ребром и плоскостью боковой грани, не содержащей это ребро. Найдите этот угол.

9. Плоский угол при вершине правильной четырехугольной пирамиды равен $\alpha = 32°$, высота пирамиды $h = 5{,}5$ см. Определите площадь основания пирамиды.

10. В основании треугольной пирамиды $SABC$ лежит равнобедренный прямоугольный треугольник ABC ($\angle A = 90°$). Углы SAB, SCA, SAC, SBA (в указанном порядке) составляют

арифметическую прогрессию, разность которой отлична от нуля. Площади граней SAB, ABC, SAC составляют геометрическую прогрессию. Найдите углы, составляющие прогрессию.

11. Через две противоположные вершины основания правильной шестиугольной призмы проведена плоскость, отсекающая равные отрезки на четырех боковых ребрах призмы. Площадь сечения равна $27\sqrt{3}$ дм^2, а угол его наклона к плоскости основания призмы равен $45°$. Найдите объем призмы.

12. Плот сколочен из 16 балок прямоугольного сечения, из которых каждая имеет размеры $3{,}6 \times 0{,}2 \times 0{,}25$ м. Вычислите, какой груз можно перевозить на этом плоту, если с целью безопасности на него грузить только 80% предельной нагрузки. Плотность дерева $0{,}7 \cdot 10^3$ кг/м^3.

13. Бак, имеющий форму прямоугольного параллелепипеда с квадратным основанием и наполненный доверху водой, поставлен на ребро так, что дно бака с горизонтальной плоскостью составляет угол в $30°$. Сколько воды (в процентах) при этом вытекло из бака, если его высота в два раза больше стороны основания?

14. Вычислите массу металлического полого стержня, поперечное сечение которого и размеры в миллиметрах даны на рис. 27. Длина стержня 1,5 м. Плотность металла $7{,}8 \cdot 10^3$ кг/м^3.

15. Поперечное сечение оросительного канала имеет форму равнобедренной трапеции, основания которой 3 и 2,5 м. Глубина канала 1 м. Глубина потока воды в канале 0,7 м. Скорость течения воды 2 км/ч. Какое количество воды протечет через поперечное сечение канала за сутки?

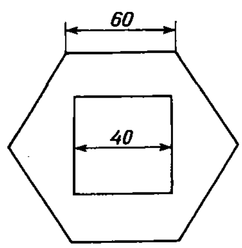


Рис. 27

16. Боковая грань правильной шестиугольной пирамиды наклонена к плоскости основания под углом $60°$ и имеет площадь $S = 19$ см^2. Найдите объем пирамиды.

17. Самая высокая из египетских пирамид – пирамида Хеопса – имеет высоту 144 м, а сторона ее квадратного основания равна 230 м. Внутренние ходы и комнаты пирамиды составляют 30% ее объема. Сколько рейсов потребовалось бы сделать десяти шеститонным грузовикам для доставки всего камня, израсходованного на ее строительство? Плотность камня $2{,}5 \cdot 10^3$ кг/м^3.

18. Противоположные ребра тетраэдра равны соответственно $a = 11{,}5$ см, $b = 14{,}9$ см, $c = 16{,}3$ см. Вычислите объем этого тетраэдра.

19. Докажите, что объем тетраэдра $SABC$, у которого ребра SA, SB и SC равны 1, а плоские углы при вершине S равны α, β и γ, может быть вычислен по формуле

$$V = \frac{1}{6}\sqrt{1 - \cos^2\alpha - \cos^2\beta - \cos^2\gamma + 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}.$$

Найдите этот объем, если $\alpha = 68°, \beta = 73°, \gamma = 81°$.

§ 4. ТЕЛА ВРАЩЕНИЯ

Пример 1. Цистерна бензовоза имеет форму цилиндра с радиусом основания 0,6 м. На сколько процентов своей емкости заполнена цистерна, если высота уровня бензина в ней 1 м.

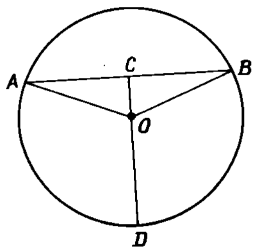


Рис. 28

Р е ш е н и е. Площадь сегмента ADB (рис. 28) равна

$$\frac{1}{2} R^2 (2\pi - \varphi + \sin\varphi).$$

Из прямоугольного треугольника AOC $\cos(\varphi/2) = (H - R)/R$, где $H = CD$ – высота уровня бензина. Тогда $\varphi = 2\arccos(H/R - 1)$ и объем заполненной части цистерны $v_1 = 1/2R^2 l(2\pi - \varphi + \sin\varphi)$, где l – длина цистерны.

Тогда искомое отношение

$$y = \frac{\frac{1}{2} R^2 l(2\pi - \varphi + \sin\varphi)}{\pi R^2 l} = \frac{1}{2\pi}(2\pi - \varphi + \sin\varphi) =$$

$$= 1 - \frac{\varphi - \sin\varphi}{2\pi}$$

П р о г р а м м а:

1 В↑ 0.6 $\boxed{\div}$ 1 – F $\cos^{-1}$ 2 $\boxed{\times}$ В↑ F sin $\boxed{-}$

F π 2 $\boxed{\times}$ $\boxed{\div}$ $\boxed{/-/}$ 1 $\boxed{+}$ 100 $\boxed{\times}$

О т в е т. $\approx 89\%$.

Пример 2. Сферический резервуар для хранения нефти снабжен прибором, измеряющим уровень нефти в нем. Каково будет показание прибора (с точностью до 0,01 м) после загрузки из полного резервуара железнодорожного состава, состоящего из 45 цистерн, если вместимость каждой цистерны 63 м^3, диаметр резервуара 25 м?

Р е ш е н и е. Так как объем загруженной нефти равен объему образовавшегося полого шарового сегмента, то

$$\pi H_1^2(R - H_1/3) = 45 \cdot 63 = 2835, \text{ или}$$

$$\pi H_1^2(H_1 - 3R) + 8505 = 0. \tag{1}$$

Подставив значение $R = 12{,}5$ в уравнение (1), получим

$$f(H_1) = \pi H_1^2(H_1 - 37{,}5) + 8505 = 0. \tag{2}$$

Решив уравнение (2), получим H_1, откуда $H_2 = 25 - H_1$.

Приближенное решение уравнения (2) найдем методом половинного деления. Учитывая, что на концах отрезка [0, 10] функция $f(H_1)$ принимает разные знаки ($f(0) = 8505 > 0$, $f(10) = -134{,}4 < 0$), причем по смыслу задачи $f(H_1)$ может иметь на указанном отрезке только один корень, используем следующий а л г о р и т м (рис. 29).

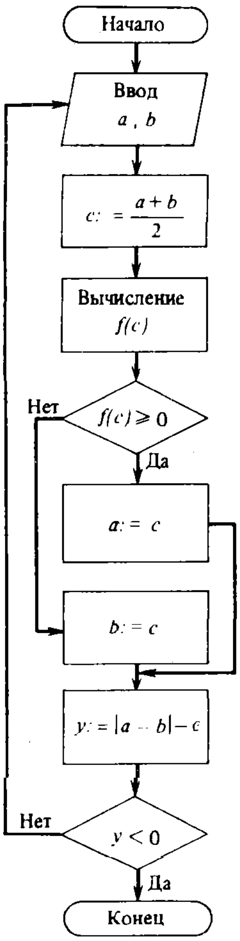


Рис. 29

Этот алгоритм применим для функций $f(x)$, имеющих единственный корень на отрезке $[a, b]$ при условии, что $f(a) > 0$, $f(b) < 0$.

В приведенной ниже программе вычисление $f(c)$ оформлено в виде подпрограммы, что делает программу универсальной: для различных $f(x)$, удовлетворяющих указанным условиям, необходимо изменять только подпрограмму (можно также использовать программу, приведенную на с. 86).

Программа:

Адрес	Команда	Код	RX	RY	Комментарии
00	П → x0	60	a		00–04. Нахождение середины отрезка c
01	П → x1	61	b	a	
02	+	10	$a + b$		
03	2	02	2	$a + b$	
04	÷	13	$\frac{a+b}{2}$		
05	x → П2	42	c		Запись значения с в RG2
06	ПП	53			06–07. Вычисление $f(c)$
07	27	27	$f(c)$		
08	F x ⩾ 0	59			08–09. Если $f(c) \geqslant 0$, то выполняется команда 10, иначе переход на команду 14
09	14	14			
10	П → x2	62	c		10–11. Значение c записывается в ячейку памяти RG0, где хранится величина a
11	x → П0	40	$a = c$		
12	БП	51			
13	16	16			
14	П → x2	62	c		
15	x → П1	41	$b = c$		
16	П → x	60	a		16–22. Вычисление $\|a - b\|$
17	П → x1	61	b		
18	–	11	$a - b$		
19	F x²	22	$(a - b)^2$		
20	F $\sqrt{\ }$	21	$\|a - b\|$		
21	П → x3	63	ϵ		
22	–	1	$y = \|a - b\| - \epsilon$		
23	F x < 0	5[			23–24. Если $\|a-b\| < \epsilon$, то выполнить команду 25, иначе переход на команду 00
24	00	00			
25	П → x2	62	c		
26	С/П	50			
27	П → x2	62	c		27–37. Подпрограмма вычисления значения $f(c) = \pi c^2 (c - 37{,}5) + 8505$
28	П → x4	64	37,5	c	
29	–	11	$c - 37{,}5$		
30	П → x2	62	c	$c - 37{,}5$	
31	F x²	22	c^2	$c - 37{,}5$	
32	F π	20	π	c^2	
33	×	12	πc^2	$c - 37{,}5$	

Адрес	Команда	Код	RX	RY	Комментарии
34	×	12	$\pi = c^2(c-37{,}5)$		
35	П → x5	65	8505	$\pi = c^2 \times (c-37{,}5)$	
36	+	10	$f(c)$		
37	В/0	52			

Инструкция по работе с программой:

1. Занесите $a = 0$, $b = 10$, $\epsilon = 0{,}01$ и константы 37,5; 8505 в регистры памяти RG0, RG1, RG3, RG4, RG5 соответственно.

2. Нажмите клавиши $\boxed{\text{В/0}}$, $\boxed{\text{С/П}}$.

3. Считайте с индикатора полученный результат. Время работы при указанном значении ϵ равно 1,5 мин.

Результат $H_1 \approx 9{,}91$ м, т.е. высота уровня нефти $H_2 \approx \approx 25 - 9{,}91 = 15{,}09$ м.

Примечание. Для того чтобы использовать данную программу для решения уравнений вида $f(x) = 0$, необходимо произвести отделение корней, т.е. найти a и b такие, что $f(x)$ имеет на отрезке $[a, b]$ единственный корень и $f(a) > 0$, $f(b) < 0$. Если $f(a)f(b) < 0$, но $f(a) < 0$, $f(b) > 0$, то выполнение условий $f(a) > 0$, $f(b) < 0$ можно добиться, изменив знак у $f(x)$.

Так как для проверки условия $f(a)f(b) < 0$ нужно вычислять значения $f(c)$ в разных точках c, то приведенную выше программу желательно дополнить командами 27–29: ПП 30 С/П. Тогда подпрограмма будет иметь номера команд 30 – 40.

Если занести значение c в регистр памяти RG2 и нажать клавиши $\boxed{\text{БП}}$, $\boxed{27}$, $\boxed{\text{С/П}}$, то получим значение $f(c)$ в результате работы подпрограммы. В нашем случае таким образом можно было бы найти значение $f(10) \approx -134{,}4 < 0$ (значение $f(0) = 8505$ вычисляется устно) перед работой по основной программе.

Пример 3. Бочку цилиндрической формы, до краев наполненную водой, наклонили под углом α к горизонту ($0 < \alpha < 90°$). Сколько воды (в процентах) останется в бочке, если отношение ее высоты к диаметру равно m?

Решение. Пусть H_1 – высота бочки; R – радиус ее основания; V_1 – объем бочки; V_2 – объем вылившейся воды; V_0 – объем оставшейся воды.

Тогда $V_1 = \pi R^2 H_1$. Если $\alpha > \operatorname{arctg}(1/m)$, то V_2, очевидно, равен половине объема цилиндра с радиусом основания R и высотой $H_2 = 2R\operatorname{ctg}\alpha$ (рис. 30), т.е.

$$V_2 = \frac{1}{2}\ \pi R^2 \cdot 2R \operatorname{ctg}\alpha = \pi R^3 \operatorname{ctg}\alpha,$$

$$V_0 = V_1 - V_2 = \pi R^2 H_1 - \pi R^3 \operatorname{ctg}\alpha = \pi R^2 (H_1 - R \operatorname{ctg}\alpha). \quad (1)$$

Если $\operatorname{arctg}(1/(2m)) < \alpha \leqslant \operatorname{arctg}(1/m)$, то задача сводится к определению объема тела, отсекаемого от цилиндра плоскостью, проведенной под углом α к его образующей (рис. 31). Введем декартову систему координат так, как показано на рис. 31. (Начало системы координат совпадает с центром основания

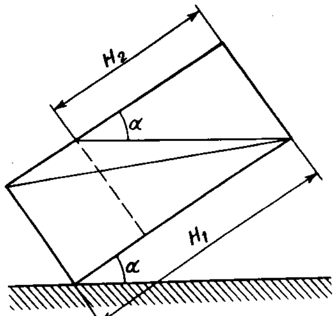


Рис. 30

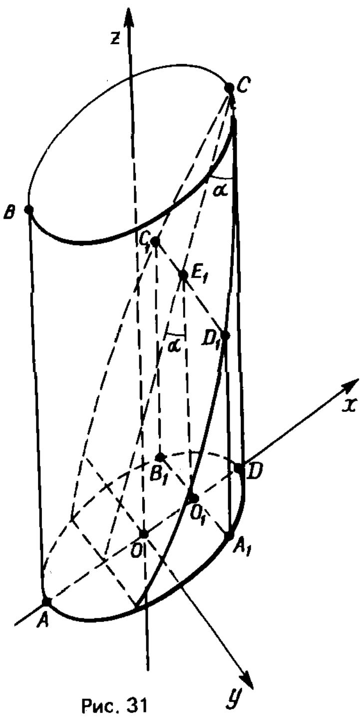


Рис. 31

цилиндра.) Тогда искомый объем можно найти по формуле $V = \int_a^b S(x)\,dx$, где $S(x)$ – площадь сечения данного тела плоскостью, перпендикулярной оси Ox и проходящей через точку $(x, 0, 0)$. В нашем случае $a = -EO = -(H_1 \operatorname{tg}\alpha - R) = -p$, $b = R$.

Из треугольника OO_1A $A_1O_1 = \sqrt{R^2 - x^2}$, тогда $A_1B_1 = 2\sqrt{R^2 - x^2}$,

$$A_1D_1 = O_1E_1 = (x + EO) \operatorname{ctg}\alpha = (x + p) \operatorname{ctg}\alpha. \quad (2)$$

(На рис. 31 точка O_1 расположена правее точки O, т.е. ее абсцисса $x > 0$. Легко проверить, что в случае $x < 0$, когда точка O_1 лежит между точками E и O, формула (2) остается справедливой.)

Отсюда

$$S(x) = S_{A_1B_1C_1D_1} = A_1B_1 \cdot A_1D_1 = 2\sqrt{R^2 - x^2}\,(x+p)\operatorname{ctg}\alpha.$$

Следовательно,

$$V_0 = \int_{-p}^{R} 2\sqrt{R^2 - x^2}\,(x+p)\operatorname{ctg}\alpha \cdot dx =$$

$$= 2\operatorname{ctg}\alpha \int_{-p}^{R} \sqrt{R^2 - x^2}\,(x+p)\,dx =$$

$$= 2\operatorname{ctg}\alpha\,\Big(\int_{-p}^{R} \sqrt{R^2 - x^2}\,x\,dx + p\int_{-p}^{R} \sqrt{R^2 - x^2}\,dx,$$

где $p = H_1 \operatorname{tg}\alpha - R$.

Найдем первый интеграл. Сделаем замену переменной: $u = R^2 - x^2$, $du = -2x\,dx$. Тогда

$$\int_{-p}^{R} \sqrt{R^2 - x^2}\,dx = \int_{R^2-p^2}^{0} u^{1/2}\left(-\frac{du}{2}\right) = \frac{1}{2}\int_{0}^{R^2-p^2} u^{1/2}\,du =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\,u^{3/2}\Big|_{0}^{R^2-p^2} = \frac{1}{3}\,(R^2 - p^2)^{3/2}.$$

Замена переменной $x = R\sin t$, $dx = R\cos t\,dt$ позволяет вычислить второй интеграл:

$$\int_{-p}^{R} \sqrt{R^2 - x^2}\,dx = \int_{-\arcsin(p/R)}^{\pi/2} R^2\cos^2 t\,dt =$$

$$= R^2 \int_{-\arcsin(p/R)}^{\pi/2} \frac{1+\cos 2t}{2}\,dt =$$

$$= \left(\frac{R^2}{2}t + \frac{R^2}{4}\sin 2t\right)\Big|_{-\arcsin(p/R)}^{\pi/2} =$$

$$= \frac{\pi R^2}{4} - \frac{R^2}{2}\left(-\arcsin\frac{p}{R}\right) +$$

$$+ \frac{R^2}{4}\cdot 2\left(-\frac{p}{R}\right)\sqrt{1 - \frac{p^2}{R^2}} =$$

$$= \frac{R^2}{2}\left(\frac{\pi}{2} + \arcsin\frac{p}{R}\right) + \frac{p}{2}\sqrt{R^2 - p^2}.$$

(При вычислении значения $\sin 2t$ при $t = -\arcsin(p/R)$ использовалась формула $\sin 2t = 2\sin t \cos t = 2\sin\sqrt{1-\sin^2 t}$.)

Окончательно имеем

$$V_0 = 2\operatorname{ctg}\alpha\cdot p\left(\frac{R^2}{2}\left(\frac{\pi}{2}+\arcsin\frac{p}{R}\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{p}{2}\sqrt{R^2-p^2}\right)+\frac{2}{3}\operatorname{ctg}\alpha\,(R^2-p^2)^{3/2}. \qquad (3)$$

Осталось рассмотреть случай, когда $0 < \alpha \leqslant \operatorname{arctg}(1/(2m))$ (рис. 32). В этом случае, как и раньше, $A_1B_1 = 2\sqrt{R^2-x^2}$, $EO_1 = x - OE = x - (R - H_1\operatorname{tg}\alpha) = x + H_1\operatorname{tg}\alpha - R = x + p$ и $O_1E_1 = EO_1\operatorname{ctg}\alpha = (x+p)\operatorname{ctg}\alpha$, откуда $S(x) = 2\operatorname{ctg}\alpha\,(x+p)\times$ $\times\sqrt{R^2-x^2}$.

Так как $OE = R - H_1\operatorname{tg}\alpha = -p$, то $V_0 = 2\operatorname{ctg}\alpha\int\limits_{-p}^{R}\sqrt{R^2-x^2}\times$ $\times(x+p)\,dx$, т.е. выражается точно таким же интегралом, как и в предыдущем случае, поэтому равенство (3) для V_0 остается справедливым.

Используя (1), (3) и учитывая, что $H_1/(2R) = m$, $p = H_1\operatorname{tg}\alpha - R$, $p/R = 2m\operatorname{tg}\alpha - 1$, $p/H_1 = \operatorname{tg}\alpha - 1/2\,m$, найдем отношение $y = \dfrac{V_0}{V_1} = \dfrac{V_0}{\pi R^2 H_1}$:

$$y = \begin{cases} \dfrac{a}{2m\operatorname{tg}\alpha}, & \operatorname{arctg}\dfrac{1}{m} < \alpha < \dfrac{\pi}{2}, \\[2ex] b + \dfrac{2}{3\pi}(1-a)\sqrt{1-a^2}, & 0 < \alpha \leqslant \operatorname{arctg}\dfrac{1}{m}, \end{cases} \qquad (4)$$

где $a = 2m\operatorname{tg}\alpha - 1$,

$$b = \frac{a}{2\pi m\operatorname{tg}\alpha}\left(\frac{\pi}{2}+\arcsin a + a\sqrt{1-a^2}\right).$$

Для удобства составления программы введем некоторые дополнительные обозначения: $c = \dfrac{a}{2m\operatorname{tg}\alpha}$, $d_0 = (1-a)\sqrt{1-a^2}$, $d = \dfrac{2}{3\pi}d_0$, тогда

$$b = \frac{c}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}+\arcsin a + a\sqrt{1-a^2}\right) = \frac{c}{\pi}b_0$$

и равенства (4) можно переписать в следующем виде:

$$y = \begin{cases} c, & \operatorname{arctg}\dfrac{1}{m} < \alpha < \dfrac{\pi}{2} \\[2ex] b + d, & 0 < \alpha \leqslant \operatorname{arctg}\dfrac{1}{m}. \end{cases} \qquad (5)$$

 Составим блок-схему алгоритма (рис. 33).

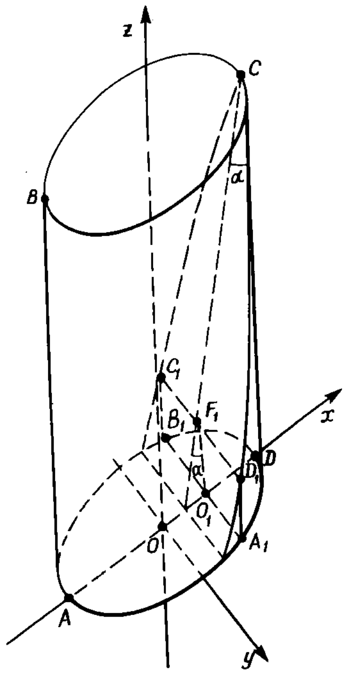


Рис. 32

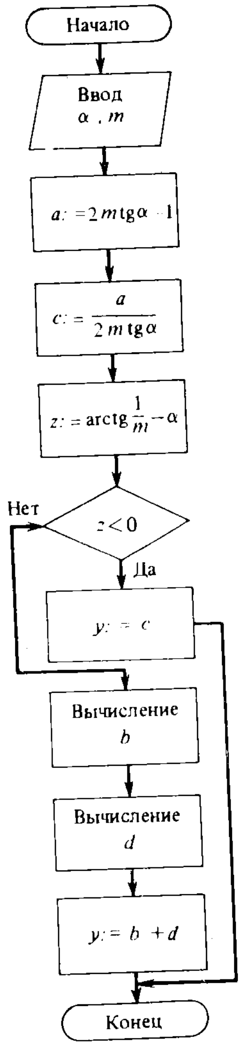


Рис. 33

Программа, соответствующая этой блок-схеме, приведена ниже:

Адрес	Команда	Код	RX	RY	Комментарии
00	П → x1	61	α		Ввод значения α
01	F tg	1E	tg α		
02	П → x2	62	m	tg α	Вызов значения m

Адрес	Команда	Код	RX	RY	Комментарии
03	×	12	$m\ \mathrm{tg}\,\alpha$		03–08. Вычисление значения $a = 2m\,\mathrm{tg}\,\alpha - 1$
04	2	02	2	$m\ \mathrm{tg}\,\alpha$	
05	×	12	$2m\,\mathrm{tg}\,\alpha$		
06	x → П0	40	$2m\,\mathrm{tg}\,\alpha$		
07	1	01	1	$2m\,\mathrm{tg}\,\alpha$	
08	−	11	a		
09	x → П3	43	a		
10	П → x0	60	$2m\,\mathrm{tg}\,\alpha$	a	10–11. Вычисление значения $c = \dfrac{a}{2m\,\mathrm{tg}\,\alpha}$
11	÷	13	c		
12	x → П4	44	c		
13	П → x2	62	m	c	13–15. Вычисление значения $z = \mathrm{arctg}\,\dfrac{1}{m} - \alpha$.
14	F 1/x	23	$1/m$	c	
15	F tg^{-1}	1L	$\mathrm{tg}^{-1}\,1/m$	c	
16	П → x1	61	α	$\mathrm{tg}^{-1}\,\dfrac{1}{m}$	
17	−	11	z	c	
18	F x < 0	5[			18–19. Проверка условия $z < 0$. Если оно выполняется, то программа продолжает работу, начиная с команды 20, в противном случае переход на команду 23.
19	23	23			
20	П → x4	64	c	z	
21	БП	51			21–22. Безусловный переход на команду 53 (конец).
22	53	53			
23	1	01	1		23–36. Вычисление значения $b_0 = \dfrac{\pi}{2} + \arcsin a + a\sqrt{1 - a^2}$
24	П → x3	63	a	1	
25	F x^2	22	a^2	1	
26	−	11	$1 - a^2$		
27	F $\sqrt{\ }$	21	$\sqrt{1 - a^2}$		
28	x → П5	45	$\sqrt{1 - a^2}$		
29	П → x3	63	a	$\sqrt{1 - a^2}$	
30	×	12	$a\sqrt{1 - a^2}$		
31	П → x3	63	a	$a\sqrt{1 - a^2}$	
32	F $\sin^{-1}$	19	$\sin^{-1} a$	$a\sqrt{1 - a^2}$	
33	+	10	$\sin^{-1} a + a\sqrt{1 - a^2}$		

Адрес	Команда	Код	RX	RY	Комментарии
34	1	01	1	$\sin^{-1}a + a\sqrt{1-a^2}$	
35	F $\sin^{-1}$	19	$\pi/2$	$\sin^{-1}a + a\sqrt{1-a^2}$	
36	+	10	b_0		
37	П→x4	64	c	b_0	37–40. Вычисление значения $b = \frac{c}{\pi} b_0$
38	×	12	cb_0		
39	F π	20	π	cb_0	
40	÷	13	b		
41	П→x5	65	$\sqrt{1-a^2}$	b	41–51. Вычисление значения d
42	1	01	1	$\sqrt{1-a^2}$	
43	П→x3	63	a	1	
44	−	11	$1-a$	$\sqrt{1-a^2}$	
45	×	12	$(1-a)\times\sqrt{1-a^2}$	b	
46	2	02	2	d_0	
47	×	12	$2d_0$		
48	F π	20	π	$2d_0$	
49	÷	13	$\frac{2}{\pi} d_0$	b	
50	3	03	3	$\frac{2}{\pi} d_0$	
51	÷	13	d	b	
52	+	10	$b+d$		
53	С/П	50			Конец программы

Перед запуском программы необходимо занести величины α и m в регистры памяти RG1 и RG2 соответственно.

В программе ответ дается в десятичных дробях, так как введение соответствующих команд удлинило бы программу, тогда как перенести запятую на два знака вправо в полученном ответе не составляет труда и устно.

В следующей таблице приведены некоторые значения величины $y_1 = y \quad 100\%$ при $m = 1$, полученные в результате работы приведенной программы:

α, рад	$5\pi/12$	$\pi/4$	arctg (1/2)	$2\pi/15$	$\pi/12$
y_1, %	87	50	21	18	9

Задачи

1. Большой склад имеет форму полуцилиндра. Сколько литров краски требуется, чтобы покрасить его крышу, если на окраску его пола ушло 50 л краски (рис. 34)?

2. Сколько олифы потребуется для наружной и внутренней окраски 100 баков, имеющих форму цилиндра, если диаметр дна равен 24 см, высота – 32 см и на окраску 1 м^2 поверхности требуется 16 г олифы.

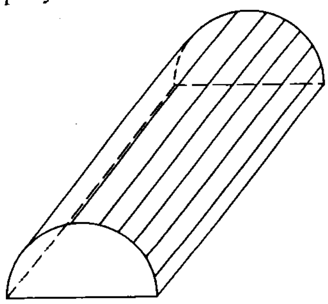


Рис. 34

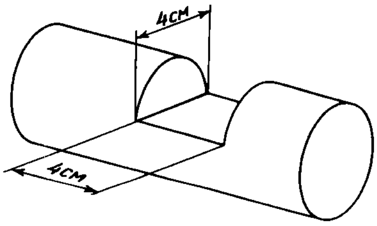


Рис. 35

3. Определите полную поверхность цилиндрической трубки длиной 1,98 м, если внешний ее диаметр равен 0,94 м, а толщина стенок – 0,06 м.

4. В цилиндрической чурке, диаметр основания которой 10 см, требуется выпилить паз, параллельный оси цилиндра, дно которого должно быть квадратом со стороной 4 см (рис. 35). Какой должна быть глубина запила?

5. В равностороннем цилиндре точка окружности верхнего основания соединена с одной из точек окружности нижнего основания. Угол между радиусами, проведенными в эти точки, равен 30°. Найдите угол между осью цилиндра и прямой, соединяющей взятые точки.

6. Высота цилиндра равна H. В развертке его боковой поверхности образующая составляет с диагональю угол α. Найдите объем и площадь поверхности цилиндра, если $H = 12$ см, $\alpha = 18°$.

7. При паровом отоплении низкого давления количество теп-

лоты, которое дает 1 $м^2$ поверхности нагрева, принимается равным 550 тепловым единицам в час. Сколько погонных метров труб диаметром 34 мм нужно установить в помещении, для отопления которого по расчетам требуется 4500 тепловых единиц в час.

8. Бочку, имеющую форму равностороннего цилиндра, до краев наполнили водой и наклонили на угол α $(0 < \alpha < 90°)$ к горизонту. Сколько воды (в процентах) осталось в бочке, если угол α равен: а) 75°; б) 40°; в) 20°.

9. Объемы, полученные от вращения прямоугольника около каждой из его сторон, соответственно равны $V_1 = 19$ $м^3$ и $V_2 = 13$ $м^3$. Найдите длину диагонали прямоугольника.

10. Жидкость, налитая в конический сосуд высотой 0,18 м с диаметром основания 0,24 м, переливается в цилиндрический сосуд, диаметр основания которого 0,10 м. Определите высоту уровня жидкости в сосуде.

11. В 1815 г. на острове Сумбава в Индонезии произошло грандиозное извержение вулкана Тамбора. В результате высота горы, первоначально составлявшая 4000 м, уменьшилась до 2850 м. На месте исчезнувшей вершины возник огромный кратер диаметром 6,5 км и глубиной 700 м. Какой объем горных пород был выброшен в атмосферу (без учета выброса продуктов вулканической деятельности)? Считать, что вулкан и кратер имеют коническую форму.

12. Высота усеченного конуса 3 м, а радиусы его оснований 1 и 2 м. Разделить объем данного усеченного конуса на три части, пропорциональные числам 2, 3 и 7, двумя плоскостями, параллельными основаниям.

13. Прямоугольник со сторонами 9 и 14 вращается вокруг оси, проходящей через его вершину параллельно диагонали, не проходящей через эту вершину. Найдите объем полученного тела вращения (рис. 36).

14. Размеры и форма бидона даны на рис. 37. Найдите вместимость бидона в литрах ($\alpha = 45°$).

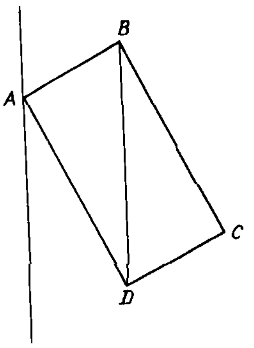


Рис. 36

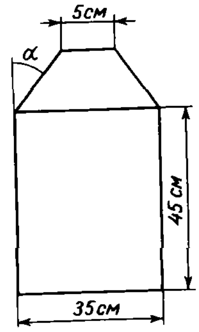


Рис. 37

15. Вода покрывает примерно 71% земной поверхности. Сколько миллионов квадратных километров земной поверхности занимает суша (считать, что радиус Земли составляет 6371 км)?

16. Вычислите длину параллели земного шара с географической широтой $\varphi = 56°$. Длина экватора $C \approx 40\,000$ км.

17. Какую часть поверхности земного шара (в процентах) занимает поверхность пояса Земли между экватором и параллелью, имеющей широту $\varphi = 48°$?

18. В результате извержения вулкана Кракатау (Индонезия) в августе 1883 г. в атмосферу было выброшено 18 км^3 пепла. Пепел рассеялся на территории, находящейся не свыше 489 км от вулкана. Найдите среднюю толщину слоя, которым пепел покрыл Землю в указанной зоне (т.е. считать, что пепел выпал равномерно). Кривизной поверхности Земли пренебречь.

19. Чашка, имеющая вид полушария, наполнена водой, а затем наклонена на угол 45°. Сколько воды (в процентах) выльется?

20. Максимальное удаление от поверхности Земли (в апогее) Ю.А. Гагарина при полете на корабле "Восток-1" 12 апреля 1961 г. было 302 км, минимальное (в перигее) – 175 км. Определите площадь поверхности Земли, которую он видел, находясь в каждом из этих положений. Какой процент составляет эта площадь от площади всей поверхности Земли? (Орбиту космического корабля можно принять за окружность.)

21. При фотографировании обратной стороны Луны автоматическая межпланетная станция находилась от нее на расстоянии, приблизительно равном 65 000 км. Под каким углом была видна в это время Луна и какую часть ее сферы (в процентах) можно было видеть с указанного расстояния? Радиус Луны равен 1738 км.

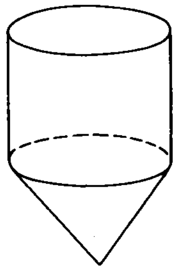


Рис. 38

22. Бункер для хранения зерна имеет форму, показанную на рис. 38. Радиус цилиндрической верхней части равен 2,1 м. Общая высота бункера равна 8,4 м, а высота конической части 3,7 м. Найдите вместимость бункера.

23. Задача Архимеда. Найдите радиус шара, имеющего объем, равный объему данного конуса или цилиндра. Решите задачу, если высота данных конуса и цилиндра $h = 15$, радиус основания $r = 3$.

24. В цилиндрический бидон радиусом 12 см и высотой 25 см погрузили шар диаметром 22 см, после чего бидон заполнили водой. Найдите объем, занимаемый водой, оставшейся в бидоне, после того как шар вынули. Какова будет высота воды в бидоне?

25. Для измерения твердости почв служит специальный прибор—твердомер. Он оценивает способность почвы сопротивляться внедрению в нее под давлением штока с коническим наконечником. Государственным стандартом предусматривается применение в твердомерах конических наконечников с площадью основания 2 см^2 и углом при вершине 30°. Какова высота такого наконечника?

26. При хранении нефтепродуктов происходит их естественная потеря из-за испарения, которая пропорциональна площади поверхности испарения. Для определения предельной нормы потери нефтепродуктов, хранящихся в горизонтальных цилиндрических резервуарах, площадь поверхности испарения должна исчисляться согласно ГОСТу в предположении, что резервуар заполнен на 75% своего объема. Найдите стандартную площадь поверхности испарения для горизонтального цилиндрического резервуара с диаметром 5 м и длиной 24 м.

27. Резервуар для хранения нефти имеет форму горизонтального цилиндра с радиусом 2 м. Какова высота уровня нефти, если резервуар заполнен на 1/3 своей емкости?

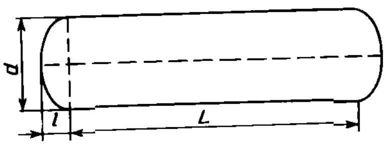


Рис. 39

28. Резервуар опрыскивателя, в котором транспортируется и размешивается рабочая жидкость для защиты растений от болезней и вредителей ядохимикатами, обычно имеет форму цилиндра с двумя сферическими крышками (рис. 39). Какой должна быть высота этих крышек l (с точностью до 0,01 м), чтобы объем резервуара равнялся 3 м^3, если длина цилиндрической части резервуара L = 2 м, диаметр d = 1,2 м.

ЛИТЕРАТУРА

1. Алгебра и начала анализа: Учебник для средних специальных учебных заведений/Под ред. Г.Н. Яковлева. – М.: Наука, 1981.

2. *Березин В.Н., Березина Л.Ю., Никольская И.Л.* Сборник задач для факультативных и внеклассных занятий по математике. – М.: Просвещение, 1985.

3. *Богомолов Н.В.* Практические занятия по математике. – М.: Высшая школа, 1970.

4. Геометрия: Учебник для средних специальных учебных заведений / /Под ред. Г.Н. Яковлева. – М.: Высшая школа, 1982.

5. *Гмурман В.Е.* Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. – М.: Высшая школа, 1979.

6. *Горст Ю.Г.* Задачник-практикум по теории вероятностей. – М.: Просвещение, 1969.

7. *Гусев В.А., Литвиненко В.Н., Мордкович А.Г.* Практикум по решению математических задач. – М.: Просвещение, 1985.

8. Дополнительные главы по курсу математики 10 класса для факультативных занятий / Сост. З.А. Скопец. – М.: Просвещение, 1970.

9. *Дьяконов В.П.* Справочник по расчетам на микрокалькуляторах. – М.: Наука, 1985.

10. Избранные задачи / Под ред. В.М. Алексеева. – М.: Мир, 1977.

11. *Кутепов А.К., Рубанов А.Т.* Задачник по геометрии. – М.: Высшая школа, 1983.

12. *Петров В.А.* Математические задачи из сельскохозяйственной практики. – М.: Просвещение, 1980.

13. *Петров М.И.* Точность вычислений на микрокалькуляторах//Наука и жизнь, 1986, № 7.

14. Сборник задач по теории вероятностей, математической статистике и теории случайных функций/Под ред. А.А. Свешникова. – М.: Наука, 1970.

15. Сборник задач по математике для факультативных занятий в 9–10 классах/Под ред. З.А. Скопеца. – М.: Просвещение, 1971.

16. *Стратилатов П.В.* Сборник задач по геометрии для 9–10 классов. – М.: Просвещение, 1986.

17. *Филиппов А.Ф.* Сборник задач по дифференциальным уравнениям. – М.: Наука, 1979.

ПРИЛОЖЕНИЯ

1. Назначение функциональных клавиш

Клавиши	Назначение клавиш
F	Признак перехода на вторую символику
0 – 9	Цифровые клавиши, осуществляющие занесение цифр от 0 до 9 в регистр RX
,	Занесение десятичной запятой
В↑	Клавиша разделения вводимых чисел и передвижения информации в стеке
Сх	Клавиша сброса содержимого регистра RX
+	Клавиша операции сложения содержимого регистра RX с содержимым регистра RY и передачи результата в регистр RX
–	Клавиша операции вычитания из содержимого регистра RY содержимого регистра RX и передачи результата в регистр RX
÷	Клавиша операции деления содержимого регистра RY на содержимое регистра RX и передачи результата в регистр RX
×	Клавиша операции умножения содержимого регистра RY на содержимое регистра RX и передачи результата в регистр RX
↔	Клавиша операции обмена содержимым между регистрами RX и RY
/–/	Клавиша операции смены знака числа и порядка
ВП	Подготовительная клавиша для ввода порядка числа
F 0 (10^x)	Вычисление степенной функции 10^x
F 1 (e^x)	Вычисление показательной функции e^x
F 2 (lg)	Вычисление десятичного логарифма

Клавиши		Назначение клавиш
F	ln 3	Вычисление натурального логарифма
F	sin 7	Вычисление функции синуса
F	cos 8	Вычисление функции косинуса
F	tg 9	Вычисление функции тангенса
F	$\sin^{-1}$ 4	Вычисление обратной функции синуса
F	$\cos^{-1}$ 5	Вычисление обратной функции косинуса
F	tg^{-1} 6	Вычисление обратной функции тангенса
F	$\sqrt{\ }$ –	Вычисление корня квадратного
F	1/x ÷	Вычисление обратной величины x
F	x^2 x	Возведение числа x в квадрат
F	x^y $\leftrightarrow$	Возведение числа x в степень y
F	π +	Вызов константы $\pi = 3{,}1415926$
F	↻	Кольцевые передвижения информации в стеке
F	Вх В↑	Восстановление предыдущего результата
F	CF Cx	Сброс действия префиксной клавиши

Клавиши	Назначение клавиш
x → П 0	Запись содержимого регистра RX в регистр RG0
x → П 1	” ” ” ” ” RG1
x → П 2	” ” ” ” ” RG2
x → П 3	” ” ” ” ” RG3
x → П 4	” ” ” ” ” RG4
x → П 5	” ” ” ” ” RG5
x → П 6	” ” ” ” ” RG6
x → П 7	” ” ” ” ” RG7
x → П 8	” ” ” ” ” RG8
x → П 9	” ” ” ” ” RG9
x → П ȧ	” ” ” ” ” RGa
x → П /-/ b	” ” ” ” ” RGb
x → П ВП c	” ” ” ” ” RGc
x → П Cx d	” ” ” ” ” RGd
П → x 0	Вызов содержимого регистра RG0 в регистр RX
П → x 1	” ” ” RG1 ”
П → x 2	” ” ” RG2 ”
П → x 3	” ” ” RG3 ”
П → x 4	” ” ” RG4 ”
П → x 5	” ” ” RG5 ”
П → x 6	” ” ” RG6 ”
П → x 7	” ” ” RG7 ”
П → x 8	” ” ” RG8 ”
П → x 9	” ” ” RG9 ”

Клавиши		Назначение клавиш
П → x	· a	Вызов содержимого регистра RGa в регистр RX
П → x	/–/ b	" " " RGb "
П → x	ВП c	" " " RGc "
П → x	Cx d	" " " RGd "

2. Назначение клавиш, используемых при программировании

Клавиши		Выполняемые команды
F	ПРГ ВП	Переход в режим "Программирование"
F	АВТ /–/	Переход в режим "Автоматическая работа"
	БП	Безусловный переход
F	$x < 0$ $\overrightarrow{\text{ШГ}}$	Прямой переход по условию ($x < 0$, $x = 0$, $x \geqslant 0$, $x \neq 0$)
F	$x = 0$ $\overleftarrow{\text{ШГ}}$	
F	$x \geqslant 0$ В/0	
F	$x \neq 0$ С/П	
ПП		Переход на подпрограмму в режиме "Программирование" Потактовое прохождение программы в режиме "Автоматическая работа"
В/0		Возврат из подпрограммы в режиме "Программирование" Переход на нулевой адрес в режиме "Автоматическая работа"

Клавиши	Назначение клавиши
С/П	Прекращение прохождения программы в режиме "Программирование" и фиксации содержимого регистра X на индикаторе Начало вычисления по программе в режиме "Автоматическая работа", а также прекращения вычислений в случае зацикливания
L0 П → x L1 x → П L2 БП L3 ПП	Организация циклов с регистрами RG0, RG1, RG2, RG3 соответственно
К	Косвенный переход и косвенное обращение к адресуемым регистрам
К БП 0 – Cx d	Косвенный безусловный переход по модифицированному адресу, хранящемуся в адресуемом регистре, индекс которого входит в команду
x = 0 К ШГ 0 – Cx d x ≠ 0 К С/П 0 – Cx d x ≥ 0 К В/0 0 – Cx d x < 0 К ШГ 0 – Cx d	Косвенный переход по условию ($x = 0$, $x \neq 0$, $x \geqslant 0$, $x < 0$). При выполнении этих команд осуществляется переход по модифицированному адресу, хранящемуся в адресуемом регистре, индекс которого входит в команду
К ПП 0 – Cx d	Косвенный переход к подпрограмме по модифицированному адресу, хранящемуся в адресуемом регистре, индекс которого входит в команду

Клавиши	Выполняемые команды
К x→П 0 – Сх	Косвенная запись содержимого регистра RX в регистр по модифицированному коду, хранящемуся в адресуемом регистре, индекс которого входит в команду
К П→x 0 – Сх	Косвенная индикация вызова в регистр RX содержимого адресуемого регистра по модифицированному коду, хранящемуся в адресуемом регистре, индекс которого входит в команду
К 0 НОП	"Нет операции", применяется при редактировании программы
$\overrightarrow{\text{ШГ}}$	Потактовое прохождение программы в порядке возрастания адресов в режиме "Программирование"
$\overleftarrow{\text{ШГ}}$	Потактовое прохождение программы в порядке уменьшения адресов в режиме "Программирование"

3. Коды операций и команд

Нажимаемые клавиши	Код	Нажимаемые клавиши	Код
0	00		0–
1	01	/–/	0L
2	02	ВП	0[
3	03	Сх	0[
4	04	С/П	50
5	05	БП	51
6	06	В/0	52
7	07	ПП	53
8	08	F 10^x	15
9	09	F lg	17
+	10	F ln	18
–	11	F e^x	16
×	12	F $\sin^{-1}$	19
÷	13	F $\cos^{-1}$	1–
↔	14	F tg^{-1}	1L
В↑	0E		

Нажимаемые клавиши	Код	Нажимаемые клавиши	Код
F sin	1[	x → П a	4–
F cos	1Г	x → П b	4L
F tg	1E	x → П c	4[
F π	20	x → П d	4Г
F $\sqrt{}$	21	п → X 0	60
F x^2	22	п → X 1	61
F 1/x	23	п → X 2	62
F x^y	24	п → X 3	63
F CF		п → X 4	64
F $x < 0$	5[	п → X 5	65
F $x = 0$	5E	п → X 6	66
F $x \geqslant 0$	59	п → X 7	67
F $x \neq 0$	57	п → X 8	68
F 0	5Г	п → X 9	69
F 1	5L	п → X a	6–
F 2	58	п → X b	6L
F 3	5–	п → X c	6[
x → П 0	40	п → X d	6Г
x → П 1	41	К НОП	54
x → П 2	42	К ВП 0	80
x → П 3	43	К БП 1	81
x → П 4	44	К БП 2	82
x → П 5	45	К БП 3	83
x → П 6	46	К БП 4	84
x → П 7	47	К БП 5	85
x → П 8	48	К БП 6	86
x → П 9	49	К БП 7	87

Нажимаемые клавиши			Код	Нажимаемые клавиши			Код
К	БП	8	88	К	x = 0	7	E7
К	БП	9	89	К	x = 0	8	E8
К	БП	a	8–	К	x = 0	9	E9
К	БП	b	8L	К	x = 0	a	E–
К	БП	c	8[	К	x = 0	b	EL
К	БП	d	8Г	К	x = 0	c	E[
К	ПП	0	–0	К	x = 0	d	EГ
К	ПП	1	–1	К	x < 0	0	[0
К	ПП	2	–2	К	x < 0	1	[1
К	ПП	3	–3	К	x < 0	2	[2
К	ПП	4	–4	К	x < 0	3	[3
К	ПП	5	–5	К	x < 0	4	[4
К	ПП	6	–6	К	x < 0	5	[5
К	ПП	7	–7	К	x < 0	6	[6
К	ПП	8	–8	К	x < 0	7	[7
К	ПП	9	–9	К	x < 0	8	[8
К	ПП	a	– –	К	x < 0	9	[9
К	ПП	b	–L	К	x < 0	a	[–
К	ПП	c	–[	К	x < 0	b	[L
К	ПП	d	–Г	К	x < 0	c	[[
К	x = 0	0	E0	К	x < 0	d	[Г
К	x = 0	1	E1	К	x ⩾ 0	0	90
К	x = 0	2	E2	К	x ⩾ 0	1	91
К	x = 0	3	E3	К	x ⩾ 0	2	92
К	x = 0	4	E4	К	x ⩾ 0	3	93
К	x = 0	5	E5	К	x ⩾ 0	4	94
К	x = 0	6	E6	К	x ⩾ 0	5	95

Нажимаемые клавиши	Код	Нажимаемые клавиши	Код
К $x \geqslant 0$ 6	96	К $x \to П$ 3	L3
К $x \geqslant 0$ 7	97	К $x \to П$ 4	L4
К $x \geqslant 0$ 8	98	К $x \to П$ 5	L5
К $x \geqslant 0$ 9	99	К $x \to П$ 6	L6
К $x \geqslant 0$ a	9–	К $x \to П$ 7	L7
К $x \geqslant 0$ b	9L	К $x \to П$ 8	L8
К $x \geqslant 0$ c	9[	К $x \to П$ 9	L9
К $x \geqslant 0$ d	9Г	К $x \to П$ a	L–
К $x \neq 0$ 0	70	К $x \to П$ b	LL
К $x \neq 0$ 1	71	К $x \to П$ c	L[
К $x \neq 0$ 2	72	К $x \to П$ d	LГ
К $x \neq 0$ 3	73	К $П \to x$ 0	Г0
К $x \neq 0$ 4	74	К $П \to x$ 1	Г1
К $x \neq 0$ 5	75	К $П \to x$ 2	Г2
К $x \neq 0$ 6	76	К $П \to x$ 3	Г3
К $x \neq 0$ 7	77	К $П \to x$ 4	Г4
К $x \neq 0$ 8	78	К $П \to x$ 5	Г5
К $x \neq 0$ 9	79	К $П \to x$ 6	Г6
К $x \neq 0$ a	7–	К $П \to x$ 7	Г7
К $x \neq 0$ b	7L	К $П \to x$ 8	Г8
К $x \neq 0$ c	7[	К $П \to x$ 9	Г9
К $x \neq 0$ d	7Г	К $П \to x$ a	Г–
К $x \to П$ 0	L0	К $П \to x$ b	ГL
К $x \to П$ 1	L1	К $П \to x$ c	Г[
К $x \to П$ 2	L2	К $П \to x$ d	ГГ

4. Таблица модифицированных кодов адресуемых регистров

Модифицированный код	Регистр, соответствующий коду	Модифицированный код	Регистр, соответствующий коду
00000000,	RG0	00000007,	RG7
00000001,	RG1	00000008,	RG8
00000002,	RG2	00000009,	RG9
00000003,	RG3	00000010,	RGa
00000004,	RG4	00000011,	RGb
00000005,	RG5	00000012,	RGc
00000006,	RG6	00000013,	RGd

5. Допустимые значения аргумента и относительная погрешность вычисления функций

Функция	Допустимые значения аргумента	Максимальная относительная погрешность
$\sin x$	$1 \cdot 10^{-49} < \lvert x \rvert < 10^{10}$	$3 \cdot 10^{-7}$
$\cos x$	$1 \cdot 10^{-49} < \lvert x \rvert < 10^{10}$	$3 \cdot 10^{-7}$
$\mathrm{tg}\, x$	$1 \cdot 10^{-49} < \lvert x \rvert < 10^{10}$	$3 \cdot 10^{-7}$
$\arcsin x$	$\lvert x \rvert \leqslant 1$	$3 \cdot 10^{-7}$
$\arccos x$	$\lvert x \rvert \leqslant 1$	$3 \cdot 10^{-7}$
$\mathrm{arctg}\, x$	$\lvert x \rvert \leqslant 9{,}9999999 \cdot 10^{99}$	
	$\lvert x \rvert \geqslant 1 \cdot 10^{-99}$	$3 \cdot 10^{-7}$
x^y	$0 < x$	$1 \cdot 10^{-6}$
e^x	$\lvert x \rvert < 100 \ln 10$	$4 \cdot 10^{-7}$
x^2	$\lvert x \rvert < 10^{50}$	$1 \cdot 10^{-7}$
10^x	$\lvert x \rvert < 99{,}999999$	$4 \cdot 10^{-7}$
$1/x$	$x \neq 0$	$1 \cdot 10^{-7}$
$\sqrt{x}$	$0 < x$	$1 \cdot 10^{-4}$
$\ln x$	$0 < x$	$3 \cdot 10^{-7}$
$\lg x$	$0 < x$	$3 \cdot 10^{-7}$

6. Краткие характеристики программируемых микрокалькуляторов

1. "Электроника БЗ-34", "Электроника МК-56", "Электроника МК-54" – микрокалькуляторы с идентичной системой команд, отличающиеся друг от друга только конструктивными решениями. Эти модели

МК имеют программную память в 98 шагов, 14 регистров адресуемой памяти, четырехрегистровый стек данных и стек возврата для построения многоуровневых подпрограмм.

2. "Электроника МК-46", "Электроника МК-64" – микрокалькуляторы, предназначенные для автоматической обработки данных, поступающих с внешних устройств, подключенных к микрокалькулятору.

Объем программной памяти 66 шагов, количество адресуемых регистров – 7. Имеется 6 стековых регистров. Функциональные возможности МК-46 и МК-64 уступают МК-54 и отражают специфику их использования (например, в электротехнических измерениях).

3. "Электроника МК-47" – микрокалькулятор с возможностью ввода числовой информации с магнитных карт. Имеет 60 шагов программной памяти, 6 стековых регистров и 7 адресуемых регистров памяти.

4. "Электроника МК-61" – модификация "Электроники МК-54". Имеет 105 шагов программной памяти, 15 адресуемых регистров. Расширены функциональные возможности (операции по выделению целой и дробной части числа, определение абсолютного значения числа, определение знака числа, автоматический перевод временной меры из десятичной системы счисления в шестидесятиричную и, наоборот, имеется генератор случайных чисел, операция по выделению наибольшего из двух чисел, логические операции). Логика вычислений аналогична МК-54.

5. "Электроника МК-52" – микрокалькулятор с расширенными функциональными возможностями по сравнению с МК-61. Емкость памяти – 512 шагов (0,5 килобайт). Ценным качеством этого МК является возможность хранения информации после отключения питания (до 5000 ч).

6. Перспективы развития микрокалькуляторов связаны как с расширением емкости программной памяти, так и с возможностью использования языков программирования высокого уровня типа БЕЙСИК. Модель "Электроника МК-85" имеет оперативную память около двух килобайтов; пользователь может составлять программы, содержащие до 100 операторов языка программирования высокого уровня БЕЙСИК. МК-85имеет матричный монохромный индикатор, позволяющий в виде бегущей строки выводить не только цифровую, но и буквенную информацию (операторы БЕЙСИКА).

7. Модель "Электроника МК-72" допускает использование трех языков: ассемблера, языка команд микрокалькулятора и БЕЙСИКА. МК-72 допускает, кроме того, возможность подключения кассетного магнитофона в качестве внешнего накопителя и бытового телевизора для отображения информации. По существу, эти модели МК более близки к микро-ЭВМ и только малые габариты дают право отнести их к микрокалькуляторам. В обиход уже входит название для этого класса ЭВТ – "карманные микро-ЭВМ". Отличие от традиционных МК заключается и в применении восьмиразрядного процессора, что существенно повышает быстродействие.

Дальнейшее совершенствование МК может привести к появлению матричных индикаторов с возможностью отображения не только текстовой, но и графической информации. В то же время доступность, надежность, простота эксплуатации, малые габариты будущих моделей останутся характерными их признаками, отличающих микрокалькуляторы от микро-ЭВМ. Все это позволяет считать микрокалькуляторы перспективным, в смысле широкого использования, вычислительным средством в повседневной практической деятельности специалиста любой профессии.

7. Краткий словарь основных терминов по электронной вычислительной технике

Адрес – автоматически распознаваемый и обрабатываемый идентификатор объекта в вычислительной системе. В языке ПМК под адресом понимают код порядкового номера шага программы. Обычно с адресом связывают местоположение или номер ячейки памяти ЭВМ.

Адрес перехода – адрес ячейки, определяемый командой передачи управления.

Адресация косвенная – адресация с указанием адреса, в котором в свою очередь находится адрес следующего шага программы.

Адресация явная – адресация с явным заданием адресов в программе.

Адресный регистр – номер регистра памяти в операторах косвенного обращения к памяти или в операторах косвенных безусловных переходов.

Алгоритм – конечная последовательность общепонятных предписаний, формальное исполнение которых за конечное время позволяет получить решение некоторой задачи или любой задачи из некоторого класса задач. Если алгоритм представить в виде ряда шагов или операций, то при исполнении алгоритма важен порядок выполнения каждого шага. Для описания алгоритма достаточно трех принципов управления: принципа последовательности (линейности), принципа условного исполнения (переход к следующему шагу определяется выполнением или невыполнением какого-либо условия) и принципа повторного исполнения (цикличность).

АЛУ – арифметико-логическое устройство для выполнения элементарных операций над бинарными представлениями операндов, хранящихся в регистрах RX и RY операционного стека ПМК.

База элементная – набор элементов, используемый при физической реализации устройств вычислительной техники. Элементная база во многом определяет смену поколений ЭВТ. Если раньше элементная база строилась на основе электронных ламп, а потом на полупроводниковых транзисторах, то сейчас – на основе больших и сверхбольших интегральных схем.

Библиотека программ – организованная совокупность программ или их частей, включающая информацию о работе с ними.

Бинарный (двоичный) код – код, в котором кодовый набор состоит из двух символов: 0 и 1.

БИС (большая интегральная схема) – интегральная схема со степенью интеграции свыше 100 логических элементов в одной конструктивной единице.

Бит – единица информации. 1 бит – единица информации, соответствующая одной позиции в бинарном (двоичном) коде.

Блок-схема программы – графическое изображение хода выполнения программы с помощью типовой символики.

Ввод–вывод – перемещение данных от источника к приемнику и от приемника к источнику. В ПМК ввод данных осуществляется вручную с клавиатуры, а вывод данных к источнику (пользователю) – с помощью индикатора. В перспективных моделях ПМК к устройствам ввода–вывода относятся также магнитные карты или магнитофон.

Вызов подпрограммы – оператор вызова подпрограммы и передача управления на вход в подпрограмму. В языке ПМК оператор вызова подпрограммы имеет вид ПП N, где N – адрес входа в подпрограмму.

Вычислительная математика – раздел математики, рассматривающий круг вопросов, связанных с использованием ЭВМ, и включающий, в частности, теорию численных методов и алгоритмов решения типовых математических задач. В рамках современной терминологии вычислительная математика – часть информатики, относящаяся к методологии применения ЭВМ для решения задач науки, техники, производства и других областей человеческой деятельности.

Вычислительная математика занимается изучением математических моделей окружающей нас действительности. Математические модели могут включать помимо естественнонаучных объектов технические, экономические, социальные и другие явления и объекты, записанные в математических терминах.

Математическое моделирование охватывает широкий круг задач научно-технического прогресса и принципиально отличается от натурного моделирования, основанного на изучении физического подобия.

Современное развитие вычислительной математики тесно связано с бурным развитием вычислительной техники.

Вычислительный эксперимент – новый вид исследовательской работы, выполняемый с помощью ЭВМ. В отличие от натурного эксперимента в вычислительном эксперименте вместо физической модели используется теоретическая модель, реализованная в виде машинной программы, а манипуляции с физической моделью на лабораторном стенде заменяются систематическими расчетами на ЭВМ, в которых искомые характеристики модели вычисляются по заданным ее параметрам.

Для изучения многих явлений природы вычислительный эксперимент является единственным средством получения научного знания в связи с принципиальной невозможностью натурного эксперимента либо из-за масштаба явления (например, изучение эволюции галактик), либо из-за невозможности воспроизвести необходимый диапазон физических характеристик (например, взаимодействие элементарных частиц сверхвысоких энергий).

В ряде случаев технического проектирования вычислительный эксперимент оказывается экономически более целесообразным из-за удешевления и повышения скорости разработки, что дает возможность рассмотреть больше вариантов, чем в случае натурного эксперимента.

Генератор случайных чисел – программа выдачи псевдослучайных чисел.

Данные – информация, представленная в форме воспринимаемой для обработки автоматическим устройством. В ПМК числовые данные пользователя представляются в двоично-десятичном коде.

Двоично-десятичный код – код для представления десятичных данных независимым кодированием каждой цифры, десятичной точки и знака двоичными цепочками одинаковой длины (обычно 4). Например, число 5875 в двоично-десятичном коде будет представлено как 01011000 01110101.

Дешифратор – преобразователь кода в управляющие сигналы.

Дешифратор адреса – преобразователь адреса в управляющие сигналы запоминающему устройству.

Запись – процесс закрепления данных в запоминающей среде, например запись данных в регистры памяти ПМК.

Зацикливание – безусловное повторение одних и тех же последовательных состояний процессора и памяти, которое может быть прекращено только извне, действиями пользователя. Зацикливание обычно связано с недостатками построенной программы или некорректным использованием математического алгоритма для данной задачи.

Интегральная схема – схема соединения электронных компонентов для реализации некоторой функции преобразования информации, выполненная на кристалле какого-либо полупроводника.

Информатика – совокупность научных направлений, изучающих свойства информации и способы ее представления и автоматизации обработки.

Информация – одно из первичных, не определяемых в рамках кибернетики понятий, предполагающее наличие материального носителя информации, источника информации, передатчика информации, приемника и канала связи между источником и приемником информации.

Клавиатура – набор клавиш для ручного ввода данных. Клавиатура МК-54 предназначена для ввода только числовой информации и некоторых специальных операторов входного языка.

Клавиша – элемент ручного управления, срабатывающий от нажатия. Одна или две клавиши ПМК могут использоваться для ввода целого оператора.

Код – набор знаков и схема кодирования для представления информации.

Команда – управляющий сигнал, инициирующий выполнение определенной операции в исполнительном устройстве.

Команда безусловного перехода – команда программы, определяющая в принудительном порядке изменение естественной (линейной) выборки команд.

Команда условного перехода – команда перехода по одному из указанных в команде адресов в зависимости от условия, заданного в этой же команде.

Команда цикла – команда условного перехода по одному из явно или неявно определенных адресов в зависимости от значения связанного с командой счетчика цикла и, возможно, от значения некоторого признака. При этом происходит одновременно изменение значения счетчика на величину шага цикла.

Мантисса – часть машинного представления числа с плавающей точкой, представленного числом с фиксированной точкой. Количество разрядов мантиссы определяется типом ЭВМ. В МК-54 количество разрядов мантиссы равно 8.

Математическая модель – приближенное описание какого-либо класса явлений внешнего мира на языке математики. В процессе математического моделирования формулируются законы, связывающие основные объекты модели. Эти законы записываются в математических обозначениях и терминах, после чего поставленная задача рассматривается как чисто математическая и решается при помощи математических методов и вычислительной техники. На следующем этапе происходит проверка того, насколько верно принятая математическая модель отражает действительность, т.е. выяснение вопроса о том, согласуются ли результаты наблюдений с теоретическими следствиями модели в пределах точности наблюдений. Если отклонения теоретических следствий от наблюдений выходят за пределы точности наблюдений, то модель отвергается как неприемлемая. Любая модель огрубляет действительность, в связи с этим уточнение старых и накопление новых знаний об изучаемом явлении могут привести к тому, что новые данные не будут согласовываться с теоретическими следствиями принятой математической модели, поэтому возникает необходимость уточнения старой или построения новой математической модели.

Машинная бесконечность – число, большее по модулю некоторого фиксированного для данного типа ЭВТ числа. Для ПМК число, большее $9{,}9999999 \cdot 10^{99}$, уже не входит в диапазон чисел, представляемых в ПМК, поэтому если при вычислениях возникло такое большое число (например, при делении 10^{55} на 10^{-75}), то на индикаторе появляется сообщение ERROR.

Машинная команда – команда, которая может быть непосредственно выполнена на ЭВМ, т.е. входящая в ее систему команд. Машинная команда представляется двоичным кодом.

Машинный нуль – число, меньшее минимального числа, представляемого в ЭВМ. Для ПМК в область машинного нуля попадают все числа, меньшие по модулю 10^{-99}. Таким образом, если в процессе выполнения программы получится число, меньшее по модулю 10^{-99}, то в соответствующий регистр будет записан 0 и попытка деления на него приведет к ошибке переполнения с индикацией сообщения ERROR.

Машинный язык – способ записи программ, допускающий их непосредственное исполнение на ЭВМ. Программа на машинном языке является последовательностью машинных команд. Процессор непосредственно воспринимает и выполняет команды, выраженные в виде двоичных кодов, расположенных в ячейках памяти вычислительной машины.

Микрокалькулятор – небольшое по размеру электронное клавишное вычислительное устройство для выполнения элементарных операций над числами, требующего ручного ввода данных и команд.

Выделяют три типа микрокалькуляторов: арифметические, инженерные и программируемые по функциональным возможностям и способу выполнения заданного алгоритма вычислений (при работе с арифметическими и инженерными МК исполнителем алгоритма является сам пользователь, а МК только реализует отдельные команды вычислений).

Микрокоманда – задание микрооперации в микропрограмме.

Микрооперация – элементарное действие электронного вычислительного устройства на уровне микропроцессора (например, сдвиг в ячейках памяти).

Микропрограмма – функционально-целостная последовательность микрокоманд, размещаемая обычно в специальной памяти.

Микропроцессор – программируемое устройство обработки данных, выполненное на основе одной или нескольких больших интегральных схем (БИС).

МикроЭВМ – вычислительное устройство на основе микропроцессора, предназначенное для относительно несложных расчетов. К классу микроЭВМ можно отнести и ПМК, если иметь в виду его портативность и предназначение для индивидуального пользования. В литературе МК часто называют карманной ЭВМ, микроЭВМ. Последние модели программируемых МК ("Электроника МК-85" и др.) очень близки по своим функциональным возможностям к персональным ЭВМ, сохраняя при этом все достоинства ПМК (малые размеры, вес, надежность и простоту обращения). Такие вычислительные машины все чаще называют микроЭВМ, подчеркивая этим некоторое отличие и от ПМК, и персонального компьютера.

Наносекунда – 10^{-9} с.

Обращение к памяти – запрос на чтение из памяти, запись в память.

Округление – приближенное представление числа в некоторой системе счисления по определенному алгоритму с помощью конечного количества цифр.

Операнд – аргумент операции. В вычислениях на МК операндами являются числа.

Оперативное запоминающее устройство (ОЗУ) – запоминающее устройство, доступ к данным которого соизмерим с временем выполнения операций вычислительным устройством.

Оператор – грамматическая конструкция, определение которой уточняется конкретным языком программирования и которая выражает последовательность машинных операций. Оператор интерпретируется как предписание выполнить определенные команды. Во входном языке ПМК словом является оператор, составленный из одного или нескольких элементов алфавита (включая оператор набора чисел). Примеры операторов: С/П, К БП *N*, F X ⩾ 0, К X ⩾ 0 *N*, П → X *N*, X → П *N*, F x = 0, +, –, ln, $\cos^{-1}$ и т.п. Каждый оператор входного языка ПМК занимает один или два шага программы (вместе с адресом перехода) и имеет код порядкового номера (00, 01, 02, . . .), называемого адресом.

Операционный стек – такое соединение регистров RX, RY, R, RT и RX1, при котором содержимое каждого из этих регистров ПМК по специальным командам засылается в соседний регистр.

Оптимизация – улучшение характеристик системы.

Оптимизация программ – основным критерием оптимальности программ для ПМК являются минимальные затраты времени на полное решение задачи. Оно образуется из времени на составление программы, на ввод в программную память, на автоматическое выполнение программы и на дополнительные операции (ввод данных, регистрация результатов и т.д.). Мощным средством оптимизации программ является рациональный выбор метода и алгоритма решения задачи, оценка требуемой точности получаемого результата. Особенно это относится к задачам, требующим использования программ с циклами и безусловными переходами (задачи, использующие методы приближенных вычислений, когда время вычислений зависит от числа итераций).

Останов – команда исполнителю прекратить выполнение алгоритма (программы). Для ПМК это команда С/П.

Отладка программы – процесс испытания работы программы и исправления обнаруживаемых при этом ошибок. Отладка состоит из многократного исполнения программы для специально подобранных тестовых наборов исходных данных. Тестовые наборы составляются таким образом, чтобы промежуточные результаты, а также результат исполнения были заранее известны и чтобы при этом процесс исполнения затрагивал все команды программы. Отладка, как правило, занимает значительную долю общего времени разработки программы, но практически никогда не дает исчерпывающих доказательств правильности каждой команды программы и лишь понижает вероятность неправильного срабатывания программы при ее эксплуатации. У ПМК существует специальная отладочная команда – команда потактового прохождения.

Каждое нажатие клавиши ПП в режиме "Автоматическая работа" приводит к выполнению очередной команды и останову. При этом результат выполнения команды высвечивается на индикаторе ПМК.

Ошибка переполнения – ошибка, возникающая в результате попытки разделить число на нуль, а также в результате любого действия, приводящего к попаданию в область машинной бесконечности (деления на числа из области машинного нуля, умножения или возведения в степень достаточно больших чисел и т.д.). На индикаторе при этом высвечивается слово ERROR (ошибка). То же самое сообщение выдается и при попытке выполнить некорректную операцию (возвести отрицательное число в степень, отличную от второй, вычислить логарифм отрицательного числа, взять арксинус или арккосинус от чисел, модуль которых больше 1, и т.д.).

Если сообщение ERROR появилось в ходе выполнения программы, то при переходе в режим "Программирование" на индикатор выводится код операции, на которой произошла ошибка. Это либо самый левый код на индикаторе, либо соседний с ним, расположенный правее. При переходе в режим "Автоматическая работа" на индикаторе высвечивается число, из-за которого произошла ошибка.

Пакет прикладных программ – комплект программ, объединенных по принципу класса решаемых с его помощью прикладных задач.

Для программируемых МК пакеты прикладных программ могут размещаться на магнитных картах или при наличии большой емкости памяти (МК-52) в программной памяти МК.

Память микрокалькулятора – часть устройства МК, предназначенная для хранения числовой информации. Для хранения и преобразования числовой информации используют регистры, образованные соединением нескольких электронных ячеек.

Плавающая запятая, представление чисел с плавающей запятой – способ записи чисел в позиционной системе счисления с основанием R, при котором число N представляется в виде $N = \pm R^p q$, где p – целое число, называемое порядком числа; q – правильная дробь $(1/R \leqslant q < 1)$, называемая мантиссой числа N. Плавающая запятая является основным способом представления чисел в ЭВМ, так как позволяет организовать вычисления с сохранением заданного числа значащих цифр в большом диапазоне значений чисел.

В ПМК число с плавающей запятой представляется в виде $x = a \cdot 10^b$, где на мантиссу a отводится 8 разрядов, $1 \leqslant |a| < 10$, на порядок b – 2 разряда и 2 разряда на знаки мантиссы и порядка. Таким образом, диапазон вычислений на ПМК $1 \cdot 10^{-99} \leqslant |x| \leqslant 9{,}9999999 \cdot 10^{99}$. Ввод порядка осуществляется после нажатия клавиши ВП.

Подпрограмма – программа решения некоторой задачи, оформленной по правилам определенной системы программирования так, что она может быть использована в качестве конструктивного элемента при решении более общей задачи. В программах для ПМК подпрограммы располагаются в конце основной программы. Каждая подпрограмма оканчивается командой возврата из подпрограммы В/0, а в основной программе имеется команда обращения к подпрограмме ПП N, где N – адрес, в котором расположена подпрограмма. При использовании подпрограмм происходит сложный обмен между регистрами адресного стека. При считывании из программной памяти оператора перехода на подпрограмму адрес начала подпрограммы заносится во входной регистр счетчика шагов адресного стека и одновременно предыдущее содержимое регистров этого стека смещается "вверх", а прежнее содержимое регистра счетчика шагов, равное адресу шага программы с адресом начала подпрограммы, оказывается записанным в регистр адресного стека. Выполнение программы в этом случае продолжается с шага подпрограммы с адресом ее начала до считывания команды В/0. После этого происходит смещение "вниз" содержимого регистров адресного стека и занесение прежнего содержимого регистра адресного стека во входной регистр счетчика шагов. В этом случае выполнение программы продолжается с шага программы, адрес которого на единицу больше адреса шага программы, содержащего адрес начала подпрограммы.

Адресный стек обеспечивает до пяти обращений из подпрограммы к подпрограмме (вложение подпрограмм). При большем числе вложений стек возврата переполнится и адрес адреса первого обращения к подпрограмме окажется стертым.

Погрешности вычислений. Пусть y_0 – точный, а y – приближенный результат последовательности вычислений. Тогда абсолютная погрешность вычислений

$$\Delta_y = |\Delta y| = |y_0 - y|,$$

а относительная

$$\delta_y = \frac{\Delta y}{|y_0|}.$$

Можно задать y числом верных знаков результата. Верными называют знаки, если представленный ими результат имеет абсолютную погрешность не более 1/2 младшего разряда. Например, если $y = 1{,}56$ задан двумя верными знаками, то $1{,}45 < y < 1{,}55$.

Из-за конечности разрядной сетки ПМК любой результат выдается с погрешностью округления. Обычно ее считают равной ± 1 последнего разряда.

Максимальные относительные погрешности, возникающие при вычислении на ПМК элементарных функций, даны в табл. 5 приложения.

Погрешность, получаемая в результате выполнения операций над приближенными числами, называется операционной погрешностью.

Операционная погрешность арифметических операций равна сумме погрешностей чисел, над которыми проводятся эти операции.

Пользователь – человек, использующий ЭВТ для решения каких-либо задач.

Постоянное запоминающее устройство (ПЗУ) – запоминающее устройство, допускающее только считывание данных. Эти данные сохраняются и после отключения питания. В ПЗУ ПМК хранятся, например, микропрограммы выполнения арифметических операций.

Программа – алгоритм, записанный на некотором алгоритмическом языке (языке программирования). Программа для ПМК – это алгоритм, записанный на входном языке данного ПМК.

Программируемое постоянное запоминающее устройство (ППЗУ) – запоминающее устройство, содержимое которого может быть изменено или обновлено программно-управляемым способом.

Программируемый микрокалькулятор (ПМК) – микрокалькулятор с относительно небольшой собственной памятью для данных и введения несложных программ. Отличается от инженерного МК возможностью многократного использования раз введенной программы вычислений с изменяемыми пользователем данными. Сходство ПМК с ЭВМ заключается в возможности программирования и автоматического исполнения алгоритма (программы), т.е. ПМК выступает в роли исполнителя алгоритма.

Программная память микрокалькулятора – совокупность ячеек памяти для записи бинарных кодов шагов программы автоматических вычислений, кодов операторов и команд. Программная память ПМК обычно организуется в виде страниц с одинаковым количеством ячеек памяти в каждой странице. Каждая ячейка имеет адрес N, состоящий из номера страницы и номера ячейки. У МК-54 таких страниц 10 ($a = 0, 1, 2, \ldots, 9$), в каждой из которых по 10 ячеек (в последней странице 8) $b = 0, 1, 2, \ldots, 9$. Таким образом, у МК-54 программная память занимает 98 ячеек памяти.

Регистр микрокалькулятора – n электронных ячеек памяти; n – число битов машинного слова. Состояние регистров подчиняется следующим правилам: 1) при подаче импульса напряжения на выключенную ячейку (состояние 0) она включается (состояние 1); 2) при подаче импульса на включенную ячейку она выключается, а импульс передается на соседнюю левую ячейку; 3) по команде управления состояние всех ячеек регистра может сдвигаться на одну ячейку влево. При подаче импульсов напряжения на крайнюю правую ячейку регистр выполняет функции счетчика импульсов, а при записи бинарного представления числа в регистр с записанным другим числом этот регистр выполняет функцию сумматора двоичных представлений чисел. Работа ПМК сводится, таким образом, к перемещению информации в его регистрах и последовательности операций сложения двоичных чисел (все операции сводятся к выполнению арифметических операций, а последние – к операции сложения).

Редактирование – исправление ошибок в программе в процессе ее отладки. Для исправления ошибочной команды в программе ПМК используют команды $\overrightarrow{\text{ШГ}}$ или $\overleftarrow{\text{ШГ}}$, если адрес ошибочной команды находится недалеко от текущего, и команду БП в режиме "Автоматическая работа" при большой разнице адресов ошибочной и текущей команд.

Для уничтожения какой-либо команды в программе на ее место необходимо записать пустую команду К НОП.

Система счисления – способ записи чисел в виде последовательности символов, называемых цифрами. В позиционной системе счисления значение числа зависит от разряда или позиции, которую занимает каждая цифра этого числа. Количество единиц младшего разряда, объединяемых в одну единицу смежного с ним старшего разряда, называется основанием системы счисления. Число, записанное цифрами $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_0$ в q-ичной системе счисления, обозначается $(a_n, a_{n-1}, \ldots, a_0)_q$ и равно $a_n q^n + a_{n-1} q^{n-1} + \ldots + a_0$. В памяти ЭВМ вся информация (числа и символы, закодированные числами) хранится в двоичном виде. В микрокалькуляторе на один символ кода отводится четыре двоичных разряда. Так как четырехзначных двоичных чисел всего $16: 0000, 0001, \ldots, 1111_2 = 15$, – то ими можно закодировать 16 различных символов. Таким образом, коды в МК-54 записываются в шестнадцатеричной системе счисления. Для изображения шестнадцатеричных цифр, больших 9, используются следующие символы: "–" – 10, "L" – 11, "[" – 12, "Г" – 13, "Е" – 14. Цифра 15 в обозначениях кодов не используется.

Фиксированная запятая, представление чисел с фиксированной запятой – обычный способ записи дробей в позиционной системе счисления в виде $N = \pm p, q$, где p – целое число, а q – правильная дробь. ПМК позволяет ввести с фиксированной запятой любое число, модуль которого лежит в диапазоне от 0,0000001 до 99999999, а также 0.

Язык программирования – система обозначений для описания данных информации и программ (алгоритмов) их обработки на ЭВМ.

Программы для первых ЭВМ составлялись на языке команд или машинном языке, в котором использовались всего два символа: нуль и единица. Понятно, что такие программы были весьма далеки от наглядности. В дальнейшем появились новые языки, называемые автокодами или языками ассемблера. В этих языках допускалось использование символов для обозначения операндов, арифметических операций и т.д. (т.е. символы стали употребляться вместо числовых кодов). При записи программы на ассемблере возникла необходимость в трансляции – переводе программы на язык машины.

В алгоритмических языках место команд заняли операторы. Один оператор фактически заменяет несколько элементарных команд. Например, программа вычисления сложного арифметического выражения на ассемблере, насчитывающая несколько десятков команд, может быть записана одним оператором присваивания на алгоритмическом языке.

Язык ПМК занимает промежуточное положение между машинным языком и ассемблером. В нем используются как коды, так и условная символическая запись команд, поэтому язык ПМК обычно называют символьно-кодовым.

Ячейка – независимо адресуемая последовательность смежных позиций в оперативной памяти ЭВМ, содержимое которых выбирается за одно обращение; соответствует, как правило, одной команде или одному типовому операнду команды машины.

ОТВЕТЫ

Глава II. Задачи по алгебре и началам анализа

§ 1. Числовые функции

1. *Указание.* П р о г р а м м а вычислений: F ПРГ: П → x 0 F x^2 П → x 0 $\boxed{\times}$ 4 $\boxed{\times}$ П → x 0 F x^2 $\boxed{-}$ 2 $\boxed{-}$ П → x 0 F x^2 1.8 $\boxed{-}$ ↔ $\boxed{\div}$ С/П. Значение x в RG0. **4.** ≈ 75,9. **7.** ≈ 11,7; ≈ 11,0; ≈ 10,4; ≈ 9,8 м/мин. **8.** ≈ 18,33; ≈ 18,57; ≈ 18,79; ≈ 19,29; ≈ 21,395 мм. **9.** ≈ 32,66°; ≈ 122,61°; ≈ 297,94°. **10.** ≈ 69,74°. **11.** ≈ 30,00°. **12.** $n \approx 1{,}24$. *Указание.* $n = \dfrac{\sin i}{\sin\varphi}$, где i – угол падения луча. **13.** ≈ 0,3109401; ≈ 5,5001917; ≈ 1,9926374. **14.** ≈ 24,301111°; ≈ 57,404722°; ≈ 0,27472221. **15.** $x(t) \approx -7{,}12$; $-16{,}35$; $-17{,}19$; $-9{,}19$; 3,53; 14,43 см. *Указание.* Чтобы воспользоваться программой примера 3 из §1, нужно положить $\omega = \dfrac{\pi}{2} - \omega$ и ввести это значение в RG1.

§ 2. Комплексные числа

1. $|z| \approx 42{,}2$; $\varphi \approx 119{,}9°$. **2.** $|z| \approx 112$; $\varphi \approx 270°$. **3.** $|z| \approx 94{,}4$; $\varphi \approx 191{,}2°$. **4.** $|z| \approx 10{,}358$; $\varphi \approx 72{,}343°$. **5.** $|z| \approx 0{,}83$; $\varphi \approx 105{,}56°$. **6.** $|z| \approx 10$; $\varphi \approx 175{,}6°$. **7.** $|z| \approx 1{,}02$; $\varphi \approx 257{,}41°$. **8.** ≈ 20,86; $\varphi \approx 8°$. **9.** ≈ 57295,8; $\varphi \approx 89{,}987°$. **10.** $3e^{i\cdot 2{,}76}$. **11.** $\approx 248{,}7e^{i\cdot 2{,}46}$. *Указание.* При вычислении z из значения φ вычесть 360°. **12.** ≈ 17,35 ед. длины. *Указание.* Представить число $z = -1 + 16i$ в тригонометрической форме и найти модуль z. Так как точка движется по окружности, то длина дуги $l = \dfrac{\pi\,|z|\,\Delta\varphi}{180°}$. **13.** ≈ 253,7°. **14.** ≈ (42,095; −22,38).

§ 3. Предел числовой последовательности

1. ≈ 14; ≈ 44; 141. *Указание.* $\dfrac{2n}{n^3+1} < \delta$, если $\dfrac{2}{n^2} < \epsilon$. **2.** 11;, 111; 1111. *Указание.* $10^n > 1 + 9n$; $\dfrac{1}{10^n} < \dfrac{1}{1+9^n}$, если $\dfrac{1}{9^n} < \epsilon$. **3.** 125; 1250; 12500. **4.** 99; 999; 9999. **5.** 14; 14; 141. **6.** 600; 6000; 60000. **7.** 500; 5000; 50000. **8.** 397; 3997; 39997.

§ 4. Производная функции

1. Уравнения касательной: $y = 0{,}28x + 5{,}86$; $y = 0{,}56x + 0{,}57$. Уравнения нормали: $y = 3{,}52x + 28{,}54$; $y = -1{,}79x + 8{,}795$. **2.** $x \approx 2{,}8$ см; ≈ 15,1 см. **3.** Р е ш е н и е. Пусть подъездной путь CE примыкает к магистрали под углом x. Тогда $CE = \dfrac{34}{\sin x}$ $DE = 34 \operatorname{ctg} x$; $AD \approx 80{,}08$; $AE = AD - DE = 80{,}08 - 34 \operatorname{ctg} x$. Пусть стоимость перевозки 1 т груза на расстояние

1 км магистрали обходится совхозу p коп., тогда стоимость перевозки 1 т груза из A в C с учетом подъездного пути будет $F(x) = p \cdot AE + 1{,}45\, p \cdot CE = p \cdot (80{,}08 - 34 \operatorname{ctg} x + 1{,}45 \frac{34}{\sin x})$ $(\arcsin \frac{34}{87} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2})$. Найдем $F_{\min}$: $F'(x) = p\,(\frac{34}{\sin^2 x} - \frac{1{,}45 \cdot 34 \cdot \cos x}{\cos^2 x})$. Из $F'(x) = 0$ имеем $\cos x = \frac{1}{1{,}45} \approx 0{,}6896$; $x \approx 46{,}4°$. 4. *Указание.* Значение стоимости подставляем в выражение $F(x) = 12{,}3 \cdot (80{,}08 - 34 \operatorname{ctg} 46{,}4° + \frac{1{,}45 \cdot 34}{\sin 46{,}4°})$. Программа вычислений: 80.08 В↑ 46.4° F tg F 1/x 34 $\boxed{\times}$ – 1.45 В↑ 34 $\boxed{\times}$ 46.4° F sin $\boxed{\div}$ $\boxed{+}$ 12,3 $\boxed{\times}$. Ответ. $\approx$ 14 руб. 23 коп. 5. Решение. Пусть m – количество рейсов, планируемое из пункта C в B в течение года. Тогда суммарный годовой пробег автомобилей из C в A и B составит $p(x) = 2{,}4\,(AE + EC) + m\,(EC + BE) = m\,(3{,}4\,EC + 1{,}4\,AE + BA)$. Очевидно, что точку E следует выбирать левее D, иначе $AE > AD$. Имеем $AE = \sqrt{AC^2 - CD^2} - CD \operatorname{ctg} x = 9{,}15 - 35 \operatorname{ctg} x$. Из $\Delta\, CDE$ $p(x) = (\frac{3{,}4 \cdot 35}{\sin x} + 1{,}4\,(9{,}15 - 35 \operatorname{ctg} x) + 160) \approx \frac{119}{\sin x} + 288{,}1 - 49 \operatorname{ctg} x$; $p'(x) = (\frac{-119 \cos x}{\sin^2 x} + \frac{49}{\sin^2 x}) = 0$. Отсюда $\cos x = 49/119 \approx 0{,}41176$, $x \approx 65{,}7°$. Ответ. Угол примыкания дороги к магистрали $\approx 66°$. 6. Решение. $\omega(+) = \varphi'(t) = 520\pi - 54t$. Из условия $\omega(t) = 0$, $52\pi - 54t = 0$ найдем $t = 520\pi/54 \approx 30{,}25$с; $\omega(30) \approx 13{,}6$ рад/с ≈ 2 об/с: $\omega(25) \approx 283{,}6$ рад/с ≈ 45 об/с; $\epsilon = \varphi''(t) = -54$ рад/с^2. 7. Решение. Пусть $\angle AOX = \alpha$. Из рис. 9: $AK = R \sin \alpha$, $OK = R \cos \alpha$, где R – радиус бревна; $AD = 2AK = 2R \sin \alpha$; $CD = OK - OB = R \cos \alpha - OB$; $OB = R \cos 45° = R \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{R}{\sqrt{2}}$; $CD = R \cos \alpha - \frac{R}{\sqrt{2}} = R\,(\cos \alpha - \frac{1}{\sqrt{2}})$; $s(\alpha) = CD \cdot AD = 2R^2 \sin \alpha\,(\cos \alpha - \frac{1}{\sqrt{2}})$ $(0 \leqslant \alpha \leqslant \pi/4)$; $s'(\alpha) = 2R^2(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha - \frac{2}{\sqrt{2}}) = 2R^2(2\cos^2 \alpha - \frac{1}{\sqrt{2}} \cos \alpha - 1)$. Решая уравнение относительно $\cos \alpha$, получим $\cos \alpha = \frac{1 + \sqrt{17}}{4\sqrt{2}}$; $\cos \alpha = \frac{1 - \sqrt{17}}{4\sqrt{2}}$ и так как $\cos \alpha \geqslant 0$, то $\cos \alpha \approx 0{,}966$; $s(\alpha_0) > 0$. Наибольшая толщина доски $CD = R\,(0{,}906 - \frac{1}{\sqrt{2}}) \approx 0{,}035$ м.

§ 5. Вычисление определителей второго и третьего порядка

1. 154,84. 2. –0,339. 3. –3020,394. 4. 0. 5. –19047,4. 6. –534,1089. 7. 20162,8. 8. –3109,9114. 9. 1,3144.

§ 6. Системы линейных уравнений

1. ≈ 29 и 41. 2. $П_1 \approx 14$ кг, $П_2 \approx 18$ кг. 3. ≈ 200 г, трески ≈ 75 г. 4. 19 и 21. 5. 1,6 и 4,6 кг. 6. 21 и 13 дн. 7. 94. 8. 361 л/ч; 107 л/ч. 9. 64 и 14 км/ч.

§ 7. Приближенное решение уравнений методом половинного деления

1. $\approx 0{,}4179$. 2. $\approx 2{,}5617$. 3. 0,4502. 4. ≈ 418 м. *Указание.* Подпрограмма вычисления $s(x)$: x → П5 3 ↔ F x^y П5 → x F x^2 3 $\boxed{\times}$ 1 $\boxed{+}$ П → x5 F e^x $\boxed{-}$ В/0. 5. ≈ 62 см. 6. ≈ 30 см. 7. ≈ 806 м. 8. $\approx 0{,}999$ с. 9. $\approx 0{,}085$.

§ 8. Интеграл

1. ≈ 3795 м. *Указание.* Программа вычисления значения интеграла функции: 17 В↑ 2 $\boxed{\div}$ x → П0 2 В↑ 0,87 $\boxed{\times}$ 3 $\boxed{\div}$ x → П1 21 F$\sqrt{\ }$ $\boxed{\div}$ 21 F x^2 $\boxed{\times}$ П → x0 П → x1 $\boxed{+}$ $\boxed{-}$. 2. $\approx 72{,}6$ кв. ед. 3. $\approx 9{,}82$ дм^2; $\approx 225{,}8$ руб. *Указание.* Искомая площадь S_{ABC} вычисляется как разность площадей криволинейных треугольников: $S_{ABD} - S_{ACD}$. 4. $\approx 14{,}3$ см. 6. $\approx 1{,}36$ Дж. 7. Решение. Сечение конического бака показано на рис. 14. Разобьем отрезок $[0, h]$ оси Ox точками $x_i = \frac{h}{n} i$ на n равных отрезков $[x_{i-1}, x_i]$. Образующая конуса имеет уравнение $y = r + x \frac{R-2}{h}$ (прямая проходит через точку $(0, r)$ и (R, h)), тогда объем i-го слоя $V_i \approx \pi y_i^2 \Delta x_i$, а его потенциальная энергия $E_п \approx \pi \rho g y_i^2 x_i \Delta x_i$, где ρ – плотность воды; g – ускорение свободного падения. При $n \to \infty$ получим $A = E_п = \pi \rho g \int\limits_0^R y^2 x\, dx$ или $A = \pi \rho g \int\limits_0^h x \left(r + x \frac{R-r}{h}\right)^2 dx$; $A = \frac{\pi \rho g h^2}{12}(r^2 + 2rR + 3R^2)$. После подстановки данных и вычисления на МК получим $A = \frac{\pi \cdot 10^3 \cdot 9{,}81 \cdot 0{,}7}{12}(0{,}3^2 + 2 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}53 + 3 \cdot 0{,}53^2) \approx 2248{,}5$ Дж. 8. $\approx 1{,}155713 \cdot 10^6$ Дж. 9. Решение. Уравнение боковой стороны BC треугольника $y = -0{,}4x + 0{,}8$, тогда давление на весь треугольник $p = 2\rho g \int\limits_{1,5}^{2} x(-0{,}4x + 0{,}8)\, dx = 2\rho g \left(\frac{-0{,}4}{3} x^3 + 0{,}4x^2\right)\Big|_{1,5}^{2}$; $\rho \approx 1{,}635$ кН. 10. ≈ 46 м^3. 11. $\approx 23{,}56$ см^2. 12. $S \approx 40{,}2$ кв. ед.; $n = 26$. 13. $\approx 0{,}910$ м. 14. $\approx 64{,}7$ см^3. 15. ≈ 107 ч. 16. $\approx 151{,}6$. *Указание.* Подпрограмма: ... F e^x F x^2 1 $\boxed{+}$ F $\sqrt{\ }$ П → x0 $\boxed{\times}$ В/0.

1. $y(t) = 3 - 3e^{-0,2t}$; $y(3) \approx 1,35$ кг. 2. Количество азота (в литрах) $x(t) = 20 - 4e^{-t/200}$; $x(t) = 19,8$ при $t = 200 \ln 20 \approx 599$ с ≈ 10 мин. 3. Количество соли $x(t) = 10e^{-t/20}$; $x(60) = 10e^{-3} \approx 0,498 \approx 0,5$ кг. 4. Р е ш е н и е. Пусть $x(t)$ – температура тела в момент времени t. Тогда $x'(t) = -k(x(t) - 20)$, где k – коэффициент пропорциональности; $\frac{dx}{20 - x} = k\,dt$; $-\ln(x - 20) = kt$; $x(t) = 20 + Ce^{-kt}$; так как $x(0) = 100$, то $100 = 20 + C$, $C = 80$; $x(10) = 60 = 20 + 80e^{-k\cdot 10}$; $k = -\frac{\ln(1/2)}{10} = \frac{\ln 2}{10}$; $x(t) = 20 + 80 \cdot 2^{-t/10} = 35$ при $t = 10(4 - \log_2 3) = 10(4 - \frac{\lg 3}{\lg 2}) \approx 24$ мин. П р о г р а м м а: 3 F lg 2 F lg $\boxed{\div}$ $\boxed{/-/}$ 4 $\boxed{+}$ 10 $\boxed{\times}$. 5. Разность температур воды и предмета $x(t) = 55 \cdot (3/5)^t$; $x(t) = 1$ при $t = \ln 55/(\ln 5 - \ln 3) \approx 7,8$ мин. П р о г р а м м а: 55 F ln 5 F ln 3 F ln $\boxed{-}$ $\boxed{\div}$. 6. $v(t) = (2/3)^{t/4 - 1}$ м/с; $v(t) = 0,01$ при $t = 4\left(\frac{2}{\lg 1,5} + 1\right) \approx 49$ с. П р о г р а м м а: 2 В↑ 1,5 F lg $\boxed{\div}$ 1 $\boxed{+}$ 4 $\boxed{\times}$ 7. Р е ш е н и е. $x' = kx$, отсюда $x(t) = Ce^{kt} = x(0)\,e^{kt}$; так как $x(30) = x(0)/2 = (x(0)e^{30k}$, то $k = \frac{1}{30} \ln \frac{1}{2} = -\frac{\ln 2}{30}$ и $x(t) = x(0) \cdot 2^{-t/30}$; $x(t) = 0,01\ x(0)$ при $t = 60/\lg 2 \approx 199$ дн. 8. Оставшееся количество радия $x(t) = x(0)(1 - 0,00044)^t$; $x(t) = \frac{1}{2}\ x(0)$ при $t = \ln 0,5/\ln 0,99956 \approx 1575$ лет. 9. Количество урана $x(t) = x(0)\,e^{-\alpha t}$; $\alpha = \ln 2/(4,5 \cdot 10^9)$; $x(t) = 100$, $x(0) = 100 + 14\ \frac{238}{206} \approx 116,2$; $t \approx 4,5 \times 10^9 \cdot \frac{\lg 1,162}{\lg 2} \approx 975 \cdot 10^6$ лет. 10. Интенсивность света, прошедшего через слой x: $y(x) = y(0) \cdot 2^{-t/35}$; $y(200) = y(0) \cdot 2^{-40/7} \approx 0,02\ y(0)$, поглощается $100\% - 2\% = 98\%$. 11. Р е ш е н и е. Составим дифференциальное уравнение: $mv' = mg - kmv^2$; $\frac{dv}{g - kv^2} = dt$, отсюда $\frac{d(\sqrt{k/g}\,v)}{g\sqrt{k/g}(1 - (\sqrt{k/g}\,v)^2} = dt$, или $\frac{du}{1 - u^2} = \sqrt{kg}\,dt$, где $u = \sqrt{k/g}\,v$. Так как $\frac{1}{1 - u^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1 - u} + \frac{1}{1 + u}\right)$, то, интегрируя, получим $\frac{1}{2} \ln C \cdot \frac{u + 1}{1 - u} = \sqrt{kg} \cdot t$, откуда $u = \frac{Ce^{2\sqrt{kg}\,t} - 1}{Ce^{2\sqrt{kg}\,t} + 1}$ и $v = \sqrt{\frac{g}{k}} \cdot \frac{Ce^{2\sqrt{kg}\,t} - 1}{Ce^{2\sqrt{kg}\,t} + 1}$. Учитывая условие $v(0) =$

$= 0$, находим $C = 1$. Итак, $v(t) = \sqrt{\frac{g}{k}}\, th \sqrt{kg}\, t$. Так как предельная скорость падения составляет 50 м/с и $\lim\limits_{t \to \infty} th \sqrt{kg}\, t = 1$, имеем $50 = \sqrt{g/k}$, где $g = 9{,}8$ м/с^2. Тогда $k \approx 3{,}9$ и $\sqrt{kg} \approx 0{,}2$. Окончательно получим $v(t) = 50 th \frac{t}{5}$ и $s(t) = \int\limits_0^t v(t)\, dt = \int\limits_0^t 50 th \frac{t}{5}\, dt = 250 \ln th \frac{t}{5}$; $s(t) = 1500$ при $t \approx 5(6 + \ln 2) \approx 33{,}5$ с. Программа: 2 F ln 6 $\boxed{+}$ 5 $\boxed{\times}$ **12.** Дифференциальное уравнение $mv' = -mg - kmv^2$, откуда скорость $v(t) = \sqrt{g/k}\, \mathrm{tg} \sqrt{kg}\,(C - t)$, $g = 9{,}8$ м/с^2, $k \approx 0{,}012$, $C = \frac{1}{\sqrt{kg}} \cdot \mathrm{arctg} \sqrt{k/g}\, v(0) \approx 1{,}78$; $v(t) = 0$ при $t = C \approx 1{,}78$ с; наибольшая высота $h = \int\limits_0^C v(t)\, dt = -\frac{1}{k} \ln \cos(\sqrt{kg} \cdot C) = -\frac{1}{k} \ln\left(\frac{k}{g} v^2(0) + 1\right)^{-1/2} = \frac{1}{2k} \ln\left(\frac{k}{g} \cdot v^2(0) + 1\right) \approx 16{,}6$ м (без сопротивления воздуха $t \approx 2$ с, $h \approx 20$ м). Программы. C: 0,012 $\boxed{\mathrm{B}\uparrow}$ 9,8 $\boxed{\div}$ F $\sqrt{\ }$ 20 $\boxed{\times}$ F tg^{-1} 0.012 $\boxed{\mathrm{B}\uparrow}$ 9,8 $\boxed{\times}$ F $\sqrt{\ }$ $\boxed{\div}$; h: 0,012 $\boxed{\mathrm{B}\uparrow}$ 400 $\boxed{\times}$ 9,8 $\boxed{\div}$ 1 $\boxed{+}$ F ln 0,024 $\boxed{\div}$.

13. Скорость $v(t) = \sqrt{g/k}\, th \sqrt{kg}\, t$, путь $s(t) = \frac{1}{k} \ln th \sqrt{kg}\, t$; $s(t) = h = 16{,}6$ м при $t = \frac{1}{\sqrt{kg}} \ln(e^{kh} + \sqrt{e^{2kh} - 1}) \approx 1{,}9$ с; $v(t) = \sqrt{\frac{g}{k}(1 - e^{-2kh})} \approx 16{,}4$ м/с, $g = 9{,}8$ м/с^2; $k = 0{,}012$. Программы. t: 0.012 $\boxed{\mathrm{B}\uparrow}$ 16.6 $\boxed{\times}$ F e^x $x \to \Pi 0$ F x^2 1 $\boxed{-}$ F $\sqrt{\ }$ $\Pi \to x0$ $\boxed{+}$ F ln 0.012 $\boxed{\mathrm{B}\uparrow}$ 9.8 $\boxed{\times}$ F $\sqrt{\ }$ $\boxed{\div}$; v: $\Pi \to x0$ F x^2 F 1/x /--/ 1 $\boxed{+}$ 9,8 $\boxed{\times}$ 0.012 $\boxed{\div}$ F $\sqrt{\ }$. **14.** Решение. Примем высоту уровня воды в баке $h(t)$ за неизвестную функцию. Тогда за время Δt объем воды в баке уменьшится на $\pi R^2 (h(t) - h(t + \Delta t))$. С другой стороны, объем вытекшей из бака воды за это же время, равен объему цилиндра, радиус основания которого $r = 3$ см, а высота равна $0{,}6 \sqrt{2g(h + \alpha)}\, \Delta t$, где $\alpha \to 0$ при $\Delta t \to 0$. Итак, переходя к пределу при $\Delta t \to 0$ в равенстве $\frac{\pi R^2 (h(t) - h(t + \Delta t))}{\Delta t} = \frac{\pi r^2 \cdot 0{,}6 \sqrt{2g(h + \alpha)}\, \Delta t}{\Delta t}$, получим $h'(t) = \frac{-0{,}6 r^2 \sqrt{2gh}}{R^2}$, откуда $\frac{dh}{\sqrt{h}} = \frac{-0{,}6 r^2}{R^2} \cdot \sqrt{2g}\, dt$ и $\sqrt{h(0)} - \sqrt{h(t)} = \sqrt{H} - \sqrt{h} = 0{,}3 \sqrt{2g} \cdot \frac{r^2}{R^2}\, t$; $h(t) = 0$ при $t = \frac{R^2}{0{,}3 r^2} \cdot \sqrt{\frac{H}{2g}} = \frac{(0{,}9)^2}{0{,}3(0{,}03)^2} \times \sqrt{\frac{2{,}45}{2 \cdot 9{,}8}} \approx 1061$ с $\approx 17{,}7$ мин. Программа: 2.45 $\boxed{\mathrm{B}\uparrow}$ 2 $\boxed{\div}$ 9,8 $\boxed{\div}$ F $\sqrt{\ }$ 0,9 $\boxed{\mathrm{B}\uparrow}$ 0.03 $\boxed{\div}$ F x^2 0,3 $\boxed{\div}$ $\boxed{\times}$. **15.** $(2R - h(t))^{3/2} = 0{,}45 \pi r^2 \sqrt{2g} \cdot \frac{t}{H}$; $h(t) = 0$ при $t = \frac{2RH}{0{,}45 \pi r^2} \cdot \sqrt{\frac{R}{g}} =$

$=\dfrac{2\cdot 0{,}9\cdot 2{,}45}{0{,}45\pi\cdot(0{,}03)^2}\cdot\sqrt{\dfrac{0{,}9}{9{,}8}}=\dfrac{4\cdot 2{,}45}{\pi\,(0{,}03)^2}\cdot\sqrt{\dfrac{0{,}9}{9{,}8}}\approx 1050$ с $\approx 17{,}5$ мин. Программа: 0.9 $\boxed{\text{B}\uparrow}$ 9.8 $\boxed{\div}$ F$\sqrt{\ }$ 0.03 Fx^2 F π $\boxed{\times}$ $\boxed{\div}$ 4 $\boxed{\times}$ 2.45 $\boxed{\times}$. **16.** $\sqrt{H}-\sqrt{h(t)}=kt,\ k=\dfrac{\sqrt{H}}{5}\left(1-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$; $h(t)=0$ при $t=$ $=5(2+\sqrt{2})\approx 17$ мин. **17.** $H^{5/2}-[h(t)]^{5/2}=\dfrac{3d^2H^2t}{8R^2}\sqrt{2g}$; $h(t)=0$ при $t=\dfrac{4R^2}{3d^2}\sqrt{\dfrac{2H}{g}}=\dfrac{4\,(0{,}06)^2}{3\,(0{,}005)^2}\sqrt{\dfrac{2\cdot 0{,}1}{9{,}8}}\approx 27{,}4$ с. Программа: 0.2 $\boxed{\text{B}\uparrow}$ 9.8 $\boxed{\div}$ F$\sqrt{\ }$ 0.06 $\boxed{\text{B}\uparrow}$ 0.005 $\boxed{\div}$ Fx^2 $\boxed{\times}$ 4 $\boxed{\times}$ 3 $\boxed{\div}$.

§ 10. Элементы теории вероятностей

1. $P=\dfrac{1}{10!}=\dfrac{1}{3\,628\,800}\approx 2{,}76\cdot 10^{-7}$. **2.** $P=\dfrac{1}{C_{27}^{6}}=\dfrac{1}{396\,010}\approx 2{,}5\times$ $\times\,10^{-6}$. **3.** $P=\dfrac{A_8^5}{8^5}=\dfrac{336}{32\,768}\approx 0{,}01$. **4.** $P=\dfrac{C_{90}^{10}}{C_{100}^{10}}\approx 0{,}33$. **5.** $P=\dfrac{C_4^2}{C_{32}^2}=$ $=\dfrac{6}{496}\approx 0{,}012$. **6.** $P=\dfrac{C_5^2\cdot C_{25}^2}{C_{30}^4}\approx 0{,}12$. **7.** $P_k=\dfrac{C_5^k}{C_{90}^k}$ $(k=1,2,3,4,5)$; $P_1\approx 0{,}0556$; $P_2\approx 0{,}0025$; $P_3\approx 0{,}85\cdot 10^{-4}$; $P_4\approx 0{,}2\cdot 10^{-5}$; $P_5\approx 0{,}2\cdot 10^{-7}$. **8.** $P=\dfrac{(C_4^1)^3}{C_{52}^3}\approx 0{,}029$. **9.** $P=\dfrac{\arcsin(R/d)}{\pi}=\dfrac{\arcsin(15/28)}{\pi}\approx 0{,}18$. **10.** $P=$ $=\dfrac{S_1}{S}$, где $S=1$, $S_1=\dfrac{1}{3}+\dfrac{2}{9}\displaystyle\int_{1/3}^{2/3}\dfrac{dx}{x}=\dfrac{1}{3}+\dfrac{2}{9}\ln 2\approx 0{,}487$. **11.** $P=$ $=(1+3\ln 2)/8\approx 0{,}38$. **12.** $P=1-\left(1-\dfrac{2r+d}{a}\right)\left(1-\dfrac{2r+d}{b}\right)\approx 0{,}87$. **13.** $P=\left(\dfrac{3\sqrt{3}}{3\pi}\right)^4\approx 0{,}029$. **14.** $P=\dfrac{2C_{10}^3}{C_{100}^3}\approx 0{,}0015$. **15.** $P=1-\dfrac{39997!\ 39000!}{40000!\ 38997!}\approx$ $\approx 1-\left(\dfrac{39}{40}\right)^3\approx 0{,}073$. **16.** $P=0{,}7\cdot 0{,}9^{12}\approx 0{,}198$. **17.** $P=\dfrac{C_5^2}{C_{20}^2}\cdot\dfrac{C_{15}^2}{C_{18}^2}\approx$ $\approx 0{,}0361$. **18.** $n=\left[\dfrac{\lg 0{,}5}{\lg 0{,}1}\right]+1=[6{,}58]+1=7$; здесь через $[a]$ обозначена целая часть числа a. **19.** $h\geqslant\left[\dfrac{\lg 0{,}05}{\lg 0{,}99}\right]+1=299$. **20.** а) $P=0{,}9^4\approx 0{,}656$; б) $P=0{,}9^4+4\cdot 0{,}1\cdot 0{,}9^3\approx 0{,}948$. **21.** $P=C_{10}^8(0{,}9)^8(0{,}1)^2\approx 0{,}19$. **22.** $M(X)=$ $=50\cdot C_5^4\cdot 0{,}9^4\cdot 0{,}1\approx 16{,}4$. **23.** Решение.* Пусть после покупки очеред-

* Решение приводится по [10].

ной пачки сигарет на руках у покупателя оказалось несколько карт, среди которых ровно i различных. Обозначим через M_i среднее число (т.е. математическое ожидание числа) пачек, которые этому покупателю надо еще купить, чтобы собрать целую колоду карт. При покупке следующей пачки может произойти одно из двух: либо карта, лежащая в ней, совпадает с одной из уже имеющихся у покупателя, либо это будет новая карта, и тогда на руках у него окажется $i+1$ различных карт. Вероятность первого события равна $i/52$ и среднее число пачек, которые надо еще купить в этом случае остается равным M_i (ситуация не изменилась), вероятность второго равна $(52-i)/52$, и тогда среднее число становится равным M_{i+1}. Отсюда $M_i = 1 + \frac{i}{52} M_i + \frac{52-i}{52} M_{i+1}$, или $M_i = M_{i+1} + \frac{52}{52-i}$. (1)

Ясно, что $M_{52} = 0$ (на руках вся колода), а найти нам нужно M_0. Используя последовательно (1), получаем $M_0 = M_1 + \frac{52}{52} = M_2 + \frac{52}{51} + \frac{52}{52} = \ldots = M_{52} + \frac{52}{1} + \ldots + \frac{52}{52} = 52 \sum_{i=1}^{52} \frac{1}{i} \approx 235{,}978$. Таким образом, чтобы собрать полную колоду карт, в среднем нужно купить не менее 236 пачек сигарет. П р о г р а м м а: П→x0 F 1/x П→x1 + x→ →П1 F L0 00 52 × С/П. Время работы 1 мин 28 с. Перед запуском программы необходимо записать 52 в RG0 и убедиться, что в RG1 содержится 0 (в противном случае занести туда 0). **24.** $MN = 15 \sum_{k=1}^{15} \frac{1}{k} \approx 49{,}77$. *Указание.* Использовать программу, приведенную в решении предыдущей задачи. **25.** $MN = 60 + 25 \sum_{k=1}^{60} \frac{1}{k} \approx 177$. **26.** $\overline{X}_в = \frac{165 \cdot 5 + 175 \cdot 18 + 185 \cdot 7}{30} \approx 175{,}67$.

Глава III. Задачи по геометрии

§ 1. Задачи для повторения

1. $\approx 51°30'$, $\approx 129°30'$. **2.** $\approx 7{,}8$; $\approx 0{,}2$. **3.** $BC = \frac{D}{2}\left(1 - \sqrt{1 - \frac{h^2}{D^2}}\right) \approx 2{,}8$ см. П р о г р а м м а: 1 В↑ 19 В↑ 35 ÷ F x^2 − F $\sqrt{}$ 1 ↔ − 35 × 2 ÷ . **4.** $S = p^2 \left(\mathrm{tg}\frac{A}{2} + \mathrm{tg}\frac{B}{2} + \mathrm{tg}\frac{C}{2} + \mathrm{tg}\frac{D}{2}\right)^{-1} \approx 7$ см^2, где p – полупериметр четырехугольника $ABCD$. **5.** $\angle C \approx 38°$.

6. ≈ 76 см^2. 7. $\varphi = \angle OPA = \arcsin \dfrac{R\sqrt{R^2+8d^2}-R^2}{4d^2} \approx 45°$. 8. $S = [12 + 7\sqrt{3} - (\dfrac{23}{6} + 2\sqrt{3})\pi]r^2 \approx 173$ см^2. 9. $m_c = \dfrac{\sqrt{2a^2+2b^2-c^2}}{2} \approx 10$ см.

10. $h_c = \dfrac{2\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{c} \approx 7{,}2$ см, здесь $p = \dfrac{a+b+c}{2} = 14{,}5$ см.

11. $l_c = \dfrac{\sqrt{ab(a+b+c)(a+b-c)}}{a+b} \approx 1{,}6$ см. 12. $S = a^2(1 + \dfrac{\pi}{3} - \sqrt{3}) \approx 45$ см^2.

13. $S = 18(\pi - \arccos \dfrac{99}{195}) \approx 47$ см^2. 14. $S = \left(\dfrac{b^2}{4} - r^2\cos^2\dfrac{\alpha}{2}\right)\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2} + \dfrac{r^2}{2}\left(\dfrac{(180° - \alpha)\pi}{180} - \sin(180° - \alpha)\right) + \dfrac{R^2}{2}\left(\dfrac{\beta\pi}{180} - \sin\beta\right) \approx 0{,}747b^2 + 0{,}08R^2 - 1{,}741r^2$.

§ 2. Векторы

1. $\approx 81°$. 2. $\angle A \approx 166°$, $\angle B \approx 10{,}5°$, $\angle C \approx 3{,}5°$. 3. $\approx 293{,}5°$. 4. $\approx 79{,}24°$ и $49{,}46°$. 5. $\approx 40{,}48$ кв. ед. 6. $\approx 28{,}4$ кв. ед. 7. $\approx 274{,}3$. 8. $\approx 19{,}8$. 9. $\approx 6{,}4$. 10. $\approx 4{,}2$. 11. Точки не принадлежат одной плоскости. 12. $\approx 2{,}6792$ кг.

§ 3. Многогранники

1. $2\operatorname{arctg}(\sqrt{2}/2) \approx 70{,}5°$. Этот результат можно также получить, воспользовавшись формулой приведенного примера при $a = b = c$, так как в этом случае указанные диагонали куба будут нормалями рассматриваемых в данном примере плоскостей. 2. $\arccos(1/\sqrt{10}) \approx 71{,}6°$. 3. $\arccos(1/6) \approx 80{,}4°$; $a\sqrt{2/35} \approx 0{,}24a$ и $\arccos(2/3) \approx 48{,}2°$; $a(\sqrt{10}/10) \approx 0{,}32a$. 4. $\arccos\sqrt{\operatorname{ctg}\alpha \operatorname{ctg}\beta} \approx 52{,}6°$. 5. $\arccos(2 - \sqrt{5}) \approx 103{,}7°$. 6. $\arccos\sqrt{2/3} \approx 35{,}3°$. 7. $\arccos(2\sin\dfrac{\alpha}{2}) \approx 28{,}7°$. 8. $\operatorname{arctg}\sqrt{3/2} \approx 50{,}8°$. 9. $S = \dfrac{2h^2(1-\cos\alpha)}{\cos\alpha} \approx 71$ см^2. 10. $90° - 2\varphi$, $90° - \varphi$, $90°$, $90° + \varphi$, где $\varphi = \dfrac{1}{2}\arccos(\sqrt{2} - 1) \approx 32{,}8°$. 11. $81\sqrt[4]{72} \approx 687{,}3$ дм^2. 12. $\approx 691{,}2$ кг.

13. $\approx 14{,}4$ %. 14. $\approx 90{,}7$ кг. 15. 89 880 м^3. 16. $V = S\sqrt{\dfrac{3S\sqrt{3}}{2}} \approx 133$ см^3.

17. 74 060. 18. $V = \dfrac{1}{6\sqrt{2}}\sqrt{(a^2+b^2-c^2)(b^2+c^2-a^2)(c^2+a^2-b^2)} \approx 277$ см^3. 19. $\approx 0{,}13$.

§ 4. Тела вращения

1. $\approx$ 78,5 л. **2.** $\approx$ 13,5 кг. **3.** $\approx$ 8,35 м^2. **4.** $\approx$ 0,42 см. **5.** $\approx$ 14,51°. **6.** $\approx$ 14,5 см^3; $\approx$ 49,2 см^2. **7.** $\approx$ 77 м. **8.** а) $\approx$ 86,6 %; б) $\approx$ 41,2 %; в) $\approx$ 13,7 %. **9.** $\approx$ 2,5 м. **10.** $\approx$ 0,35 м. **11.** $\approx$ 20,4 км^3. **12.** Высоты искомых усеченных конусов соответственно равны $h_1 \approx 0{,}88$ м; $h_2 \approx 0{,}85$ м; $h_3 \approx 1{,}27$ м. **13.** $\approx$ 5994. **14.** $\approx$ 49 л. **15.** $\approx$ 147,9 млн. км^2. **16.** $\approx$ 22 000 км. **17.** $\approx$ 37 %. **18.** $\approx$ 2,4 см. **19.** $\approx$ 88,4 %. **20.** $\approx$ 11,5 млн. км^2; $\approx$ 2,3 %. **21.** $\approx$ 3°; $\approx$ 48,7 %. **22.** $\approx$ 83,6 м^3. **23.** $\approx$ 3,23; $\approx$ 4,66. **24.** $\approx$ 5,74 л; $\approx$ 12,7 см. **25.** $h \approx 2{,}98$ см. **26.** $\approx$ 110 м^2. **27.** $\approx$ 1,47 м. **28.** $\approx$ 0,52 м.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Учебное издание

Евгений Дмитриевич Куланин
Николай Николаевич Лемешко
Владимир Леонидович Шамшурин

МИКРОКАЛЬКУЛЯТОРЫ В КУРСЕ МАТЕМАТИКИ
(сборник задач)

Зав. редакцией Е.С. Гридасова
Редактор Л.С. Куликова
Мл. редакторы Н.П. Майкова, Г.В. Вятоха
Оформление художника В.В. Коренева
Художественный редактор В.И. Пономаренко
Технический редактор Л.М. Матюшина
Корректор Г.А. Чечеткина
Оператор В.А. Фетисова

ИБ № 8527

Изд. № ФМ–927. Сдано в набор 07.06.88. Подп. в печать 16.12.88. Формат 84x108/$_{32}$. Бум. офс. № 1. Гарнитура Пресс-Роман. Печать офсетная. Объем 9,24 усл. печ. л. 18,69 усл. кр.-отт. 9,28 уч.-изд. л. Тираж 100 000 экз. Зак. № 90. Цена 30 коп.

Издательство "Высшая школа", 101430, Москва, ГСП-4, Неглинная ул., д. 29/14

Набрано на наборно-пишущих машинах издательства. Отпечатано в Ярославском полиграфкомбинате "Союзполиграфпрома" при Государственном комитете СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. 150014, Ярославль, ул. Свободы, 97.

Куланин Е.Д., Лемешко Н.Н., Шамшурин В.Л.

К90 Микрокалькуляторы в курсе математики (сборник задач): Учеб. пособие для учащихся сред. спец. учеб. заведений. – М.: Высш. шк., 1989. – 174 с.: ил.

ISBN 5-06-000558-5

Пособие написано в соответствии с программой по математике для средних специальных учебных заведений на базе 8 классов средней школы. Задачи учитывают прикладной характер математики. Содержание большинства задач связано с различными разделами физики, химии и других предметов. Значительная часть задач снабжена подробным описанием способа их решения, программами для МК "Электроника МК-54". Приводятся результаты расчета по программам.

К $\frac{4306020500-112}{001(01)-89}$ 103 – Св. план для сред. спец. учеб. заведений – 89

ББК 74.262

518