

Я.К.Трохименко, Ф.Д.Любич

**РАДИОТЕХНИЧЕСКИЕ
РАСЧЕТЫ
НА МИКРОКАЛЬКУЛЯТОРАХ**

Я.К.Трохименко, Ф.Д.Любич

**РАДИОТЕХНИЧЕСКИЕ
РАСЧЕТЫ
НА МИКРОКАЛЬКУЛЯТОРАХ**

СПРАВОЧНОЕ ПОСОБИЕ



**МОСКВА,
„РАДИО И СВЯЗЬ“
1983**

ББК 32.973

Т76

УДК 861.3:621.37 (031)

Трохименко Я. К., Любич Ф. Д.

Т76

Радиотехнические расчеты на микрокалькуляторах: Справочное пособие. — М.: Радио и связь, 1983.— 256 с., ил.

В пер.: 1 р. 30 к.

Рассмотрены особенности вычислений на непрограммируемых и программируемых микрокалькуляторах. Описаны алгоритмы моделирования сигналов и статистической обработки информации, анализа линейных и нелинейных цепей, расчета усилителей, фильтров и устройств с распределенными параметрами. Приведено свыше 450 программ на входных языках программируемых микрокалькуляторов отечественного производства.

Для инженерно-технических и научных работников, будет полезна студентам вузов.

Т $\frac{2402000000-160}{046 \text{ (01)-83}}$ 9-83

ББК 32.973
6Ф7.3

Р е ц е н з е н т: доктор техн. наук, профессор Л. Я. НАГОРНЫЙ

Редакция литературы по кибернетике и вычислительной технике

Ярослав Карпович Трохименко
Феликс Дмитриевич Любич

Радиотехнические расчеты на микрокалькуляторах. Справочное пособие

Редактор И. И. Рюжина

Обложка художника В. П. Карпова

Художественный редактор Н. С. Шеин

Технический редактор З. Н. Ратникова

Корректор Т. В. Покатова

ИБ № 421

Подписано в печать 20.06.83 г. Т-13636 Формат 60×90/16 Бумага кн.-журн.
Гарнитура «Пресс-роман» Печать офсетная Усл. печ. л. 16,0 Усл. кр.-отт. 16,125
Уч.-изд. л. 20,06 Тираж 60000 экз. Изд. № 20267 Зак. № 1399 Цена 1 р. 30 к.

Издательство «Радио и связь». 101000, Москва, Главпочтампт, а/я 693

Московская типография № 4 Союзполиграфпрома при Государственном
комитете СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли.
129041, Москва, Б. Переяславская ул., д. 46

© Издательство «Радио и связь», 1983.

ПРЕДИСЛОВИЕ

Микрокалькуляторы значительно уступают универсальным ЭВМ в быстродействии и емкости запоминающих устройств, а следовательно, и в предельной сложности решаемых задач. Однако микрокалькуляторы отличаются недостатком для стационарных ЭВМ доступностью (определенной низкой стоимостью машинного времени, портативностью и простотой пользования) и существенно превосходят последние по экономической эффективности решения относительно простых, но неотложных задач. Большинство специалистов значительную часть рабочего времени затрачивают на решение именно таких задач, в связи с чем перспективы существенного повышения производительности труда инженерно-технических и научных работников при внедрении микрокалькуляторов трудно переоценить.

Однако для эффективной реализации потенциальных возможностей, связанных с внедрением микрокалькуляторов, их пользователи нуждаются в пособиях по математическому (алгоритмическому и программному) обеспечению типовых инженерных расчетов. Таким пособием для специалистов по радиотехнике и электронике, где удельный вес математического моделирования особенно велик, и является настоящая книга. В ней приведены алгоритмы решения типовых задач, которые могут быть использованы для расчетов на непрограммируемых микрокалькуляторах, и свыше 450 программ автоматических вычислений на входных языках микрокалькуляторов "Электроника Б3-21", "Электроника Б3-34" и других программируемых микрокалькуляторов (например, "Электроника Б3-54", "Электроника МК-46", "Электроника МК-56"), построенных на их элементной базе. В книге приведены лишь те программы, составление которых связано с определенными трудностями и, в частности, с необходимостью выбора и преобразования методов и алгоритмов вычислений. При этом учтены особенности однотипных микрокалькуляторов различных выпусков и в необходимых случаях приведены возможные варианты программ.

Читатель может использовать материал книги в любой последовательности, но предварительно ему следует ознакомиться с содержанием гл. 1 и прежде всего § 1.3, где описаны особенности применяемой в книге компактной записи программ.

Авторы будут считать свою цель достигнутой, если книга поможет читателю в решении повседневных задач, и с благодарностью примут все замечания по ее содержанию.

Глава 1. ОСОБЕННОСТИ ВЫЧИСЛЕНИЙ НА МИКРОКАЛЬКУЛЯТОРАХ

1.1. Непрограммируемые микрокалькуляторы

Микрокалькуляторы, автоматически выполняющие отдельные операции над числами (*операндами*) только по командам, подаваемым нажатиями клавиш, называются *непрограммируемыми*. Простейшие из них выполняют лишь арифметические операции, но для инженерно-технических расчетов более удобны специализированные инженерные микрокалькуляторы (рис. 1), выполняющие не только арифметические операции, но и вычисляющие часто встречающиеся при расчетах элементарные функции.

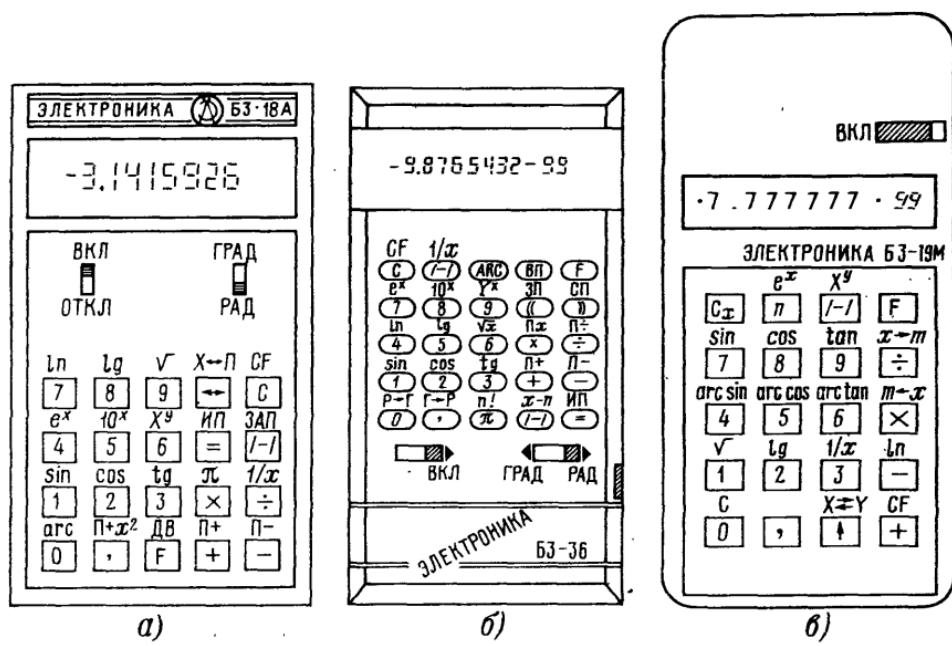


Рис. 1

Микрокалькуляторы — весьма сложные устройства, содержащие от нескольких тысяч до нескольких десятков и даже сотен тысяч транзисторов в интегральном исполнении. Однако пользователю нет необходимости подробно изучать конструкцию микрокалькулятора — ему достаточно четко представлять себе связь между нажатиями клавиш и их последствиями. Для этого удобна упрощенная функциональная схема непрограммируемого микрокалькулятора (рис. 2), отображающая взаимодействие его основных узлов — пульта управления, индикатора, процессора, памяти, постоянного запоминающего устройства (ПЗУ) и управляющего устройства (УУ).

Единственным устройством ввода информации в непрограммируемых микрокалькуляторах является *пульт управления* с клавишами и переключателями для подачи команд. Символы команд (*операторов*) обозначены на клавиатуре пульта и определяют операторы, относящиеся к нескольким основным группам, — набора чисел, функци-

нальных одноместных (выполняемых над одним операндом), двухместных (выполняемых над двумя операндами) и иногда многоместных, а также обращения к памяти и управления вычислениями.

С целью сокращения общего количества клавиш часть операторов обозначают над клавишами и для их ввода необходимо предварительно ввести префиксный оператор (модификатор), обычно обозначенный символом F. При ошибочном вводе этого оператора его стирают вводом оператора, обычно обозначаемого символом CF. К префиксным относятся и не-

которые другие операторы – например оператор arc, ввод которого перед оператором вычисления тригонометрической функции обеспечивает вычисление соответствующей обратной тригонометрической функции.

Индикатор предназначен для вывода информации в виде десятичных представлений чисел и некоторых символов, характеризующих режим работы микрокалькулятора. Он содержит ряд знакомест, из которых одно или два служат для индикации отрицательного знака числа и вспомогательных символов, а остальные – для индикации цифр десятичных разрядов чисел. Каждое из цифровых знакомест содержит несколько (обычно семь) световых элементов на светодиодах, жидкких кристаллах или газонаполненных трубках. Требуемый знак высвечивается при подаче напряжения на определенную комбинацию таких элементов.

Индикаторы некоторых микрокалькуляторов обеспечивают представление чисел только в естественной форме с запятой, фиксированной между целой и дробной частями числа. Диапазон представления чисел в естественной форме при k цифровых разрядах ограничен по абсолютной величине предельными значениями $A_{\min} = 10^{1-k}$ и $A_{\max} = 10^{k-1}$. Результат вычислений, меньший по абсолютной величине числа A_{\min} , попадает в область машинного нуля, и на индикаторе высвечивается нуль. Если же результат вычислений по абсолютной величине превышает число A_{\max} , то он попадает в область машинной бесконечности, на индикаторе высвечивается сигнал переполнения запоминающих устройств (стирание числа, высвечивание специальных символов и др.), и вычисления прекращают до устранения причин переполнения. Сигнал переполнения обычно возникает и при попытке некорректно выполнить операцию – например, извлечь квадратный корень из отрицательного числа.

Индикаторы большинства инженерных микрокалькуляторов допускают представление чисел и в показательной форме $a = M \cdot 10^n$, где число M – мантисса, а целое число n – порядок. Для микрокалькуляторов характерна стандартная показательная форма с одной отличной от нуля цифрой в целой части мантиссы ($1 \leq |M| < 10$). Диапазон представления чисел в стандартной форме значительно шире, чем в естественной, и при k разрядах мантиссы и n порядка ограничен по абсолютной величине числами $A_{\min} = 10^{1-10^m}$ и $A_{\max} = (10 - 10^{1-k}) 10^{10^m - 1}$.

Процессор (вычислитель) содержит арифметико-логическое устройство, непосредственно выполняющее операции над машинными (двоичными или десятично-двоичными) кодами операндов, и операционное устройство, предназначенное для хранения кодов операндов и результатов операций в процессе вычислений. С процессором обычно конструктивно совмещено управляющее устройство, согласующее во времени работу всех узлов микрокалькулятора, а также постоянное запоминающее устройство (ПЗУ) для хранения микропрограмм выполнения операций, записанных при изготовлении микрокалькулятора.

Входной регистр (устройство для запоминания кода операнда или оператора) операционного устройства, называемый индикаторным регистром или регистром X , соединен

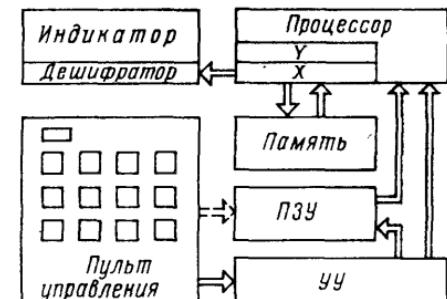


Рис. 2

с индикатором через дешифратор. Последний преобразует код числа, хранящегося в регистре X , в напряжения, подаваемые на световые элементы знакомест индикатора, что приводит к высвечиванию десятичного представления этого числа.

Группа операторов набора чисел содержит операторы набора цифр от 0 до 9, клавиши которых расположены одинаково практически во всех микрокалькуляторах (см. рис. 1), оператор набора десятичного разделительного знака (точки или запятой) и оператор $/-$ изменения знака числа, обозначаемый также символом $+/-$ или CHS. Для микрокалькуляторов, допускающих показательную форму представления чисел, характерен оператор ввода порядка, обозначаемый символом ВП, n , ЕЕ или ЕЕХ. К этой группе относится и оператор набора числа $\pi = 3,1415927$.

При вводе одного из этих операторов нажатием клавиши управляющее устройство (см. рис. 2) вызывает из ПЗУ код соответствующего знака и засыпает его в регистр X , что приводит к высвечиванию этого знака на индикаторе.

Регистры памяти (обычно один или два) непрограммируемого микрокалькулятора связаны с регистром X операционного устройства. При вводе оператора записи в память, обычно обозначаемого символом ЗАП, P , $x \rightarrow m$ или STO, содержимое регистра X засыпается также в регистр памяти. При вводе оператора вызова из памяти (обозначаемого символом ИП, $P \rightarrow X$, $m \rightarrow x$ или RCL) содержимое регистра памяти засыпается также в регистр X . Некоторые операторы (например, $P +$, $P -$, Px , $P -$, $P + x^2$) обеспечивают выполнение двухместных операций над содержимым регистра X и памяти с засылкой результата вычислений в память. В микрокалькуляторах некоторых типов предусмотрены оператор СП стирания содержимого памяти и оператор $X \leftrightarrow P$ обмена содержимым регистра X и памяти.

Операционное устройство кроме регистра X содержит также регистр Y для хранения второго операнда при выполнении двухместных операторов и иногда еще несколько регистров. Все эти регистры соединены так, что содержимое каждого регистра по специальному сигналу засыпается в другой регистр. Такое соединение называют стеком, причем различают кольцевые и магазинные стеки.

При смещении кольцевого стека "вверх" содержимое последнего регистра засыпается в регистр X (рис. 3, а), а при смещении "вниз" содержимое регистра X засыпается в последний регистр (рис. 3, б). Перемещение содержимого кольцевого стека удобно контролировать с помощью эквивалентной схемы (рис. 3, в), в которой смещение стека "вверх" и "вниз" заменено его "поворотом" по часовой стрелке или против нее.

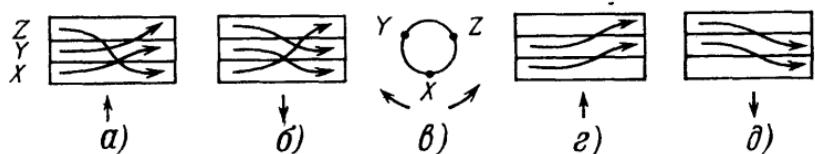


Рис. 3

В операционных устройствах непрограммируемых микрокалькуляторов обычно используют магазинные стеки, при смещении которых "вверх" содержимое каждого регистра засыпается в "верхний" регистр, причем переполнение стека приводит к стиранию содержимого последнего регистра (рис. 3, г). При смещении магазинного стека "вниз" содержимое регистров засыпается в соседние "нижние" регистры (рис. 3, д).

Выполнение вспомогательных операций над содержимым операционного стека обеспечивает оператор \uparrow смещения стека "вверх" или оператор $=$ вывода результата, оператор $X \leftarrow Y$ или \leftrightarrow обмена содержимым регистров X и Y , оператор очистки регистра X , обозначаемый символом C_x , СК или CLX, и оператор С или CL очистки всех регистров операционного стека.

Совокупность всех операторов микрокалькулятора данного типа образует словарный запас или лексику его входного (внешнего) языка. Допустимый порядок ввода операторов определен синтаксическими правилами входного языка, от выбора которых

существенно зависит сложность конструкции и, следовательно, стоимость изготовления микрокалькулятора.

Последовательность операторов, вводимая согласно синтаксису входного языка и приводящая к искомому результату, образует предложение (программу вычислений) на этом входном языке. При нарушении грамматических правил такое предложение, как и в обычных языках, не имеет смысла и приводит к ошибочному результату.

Обычные правила записи расчетных формул, называемых *арифметическими выражениями* независимо от выполняемых операций, допускают символы с протяженными элементами (например, радикалы или дробные черты), облегчающие образное восприятие формул человеком, например,

$$y = a - b / \sqrt{\ln c}. \quad (1.1)$$

Для отображения такой формулы упорядоченным множеством операторов ее следует представить без протяженных элементов как

$$a - b \div \sqrt{\ln c} = ,$$

где символы a , b и c обозначают последовательности операторов набора операндов, причем оператор вывода результата записываются в конце предложения. Такую форму называют *естественной алгебраической записью*.

При вводе операторов по правилам алгебраической записи микрокалькулятор может выполнить операцию только после ввода (набора или вызова из памяти) следующего за ним операнда и получения сигнала об окончании ввода. Таким сигналом является ввод следующего функционального оператора или в конце предложения оператора $=$. Однако следующий двухместный оператор может оказаться старшим (например, оператор умножения или деления по отношению к оператору сложения или вычитания) и должен быть выполнен, если следующий за ним оператор не является старшим, до выполнения предыдущего оператора.

Необходимость соблюдения старшинства операций и запоминания операторов перед вводом операндов существенно усложняет конструкцию операционного стека. Например, при вводе операторов слева направо при вычислении несложного арифметического выражения (1.1) перед началом собственно вычислений микрокалькулятор должен запомнить коды всех трех операндов и четырех операторов.

В связи с этим недостатком естественной алгебраической записи во входных языках микрокалькуляторов обычно предусматривается *простая запись*, отличающаяся вводом одноместных операторов после операндов, например,

$$a - b \div c \ln \sqrt{ } = .$$

В некоторых микрокалькуляторах с простым алгебраическим синтаксисом входного языка (например, в микрокалькуляторе "Электроника С3-15") предусмотрен автоматический учет старшинства операций умножения и деления по отношению к сложению и вычитанию. Однако большинство микрокалькуляторов допускает учет старшинства операций лишь с помощью простой скобочной записи, например,

$$a - (b \div c \ln \sqrt{ }) = .$$

В некоторых инженерных микрокалькуляторах с алгебраическим синтаксисом входного языка операторы скобок отсутствуют и операционное устройство содержит только регистры X и Y . При таком простом бесскобочном алгебраическом синтаксисе для временного хранения младших операндов приходится обращаться к памяти, например,

$$a \text{ ЗАП } b \div c \ln \sqrt{ } = - \text{ ИП } = / - /$$

или, когда это возможно, предварительно преобразовывать арифметическое выражение, например,

$$b \div c \ln \sqrt{ } - a = / - / .$$

Примерами инженерных микрокалькуляторов с простым бесскобочным алгебраическим синтаксисом входного языка могут служить распространенный микрокалькулятор "Электроника Б3-18А" (см. рис. 1, а) и его модификации "Электроника Б3-18М" и "Электроника Б3-37". Работу операционных стеков большинства микрокалькуляторов подобного типа можно отобразить эквивалентными схемами (рис. 4), соответствующими следующим правилам:

1. При вводе (наборе или вызове из памяти) операнда в начале предложения или после первого двухместного оператора содержимое регистра Y не изменяется (рис. 4, а), но в микрокалькуляторах некоторых типов ввод операнда после выполнения двухместной операции приводит к засыпке в регистр Y предыдущего содержания регистра X (рис. 4, б).

2. При первом вводе двухместного оператора его код и содержимое регистра X засыпаются в регистр Y (рис. 4, в), но при последующих вводах двухместных операторов их код и содержимое регистра X засыпаются в регистр Y , а в регистр X заносится результат выполнения предыдущего двухместного оператора (рис. 4, г).

3. При вводе оператора $=$ выполняется двухместная операция, код которой хранится в регистре Y , результат операции заносится в регистр X , а прежнее содержимое последнего — в регистр Y (рис. 4, д). При повторных вводах оператора $=$ выполняется двухместная операция, код которой хранится в регистре Y , а результат операции над содержимым регистра X , вводимого в операцию первым, и содержимым регистра Y , вводимого в операцию вторым, засыпается в регистр X при сохранении прежнего содержимого регистра Y (рис. 4, е). Аналогично работает стек при повторных вводах двухместных операторов, но в этом случае код предыдущего оператора в регистре Y замещается кодом введенного оператора (рис. 4, ж).

4. При вводе одноместного оператора $\sqrt{}$ и, иногда, других одноместных операторов содержимое регистра Y обычно не изменяется (рис. 4, з).

5. В некоторых микрокалькуляторах после выполнения одноместных операторов изменяется содержимое регистра Y . Иногда после ввода таких операторов результат заносится в оба регистра (рис. 4, и).

6. При вводе оператора \leftrightarrow operandы в регистрах X и Y меняются местами (рис. 4, к).

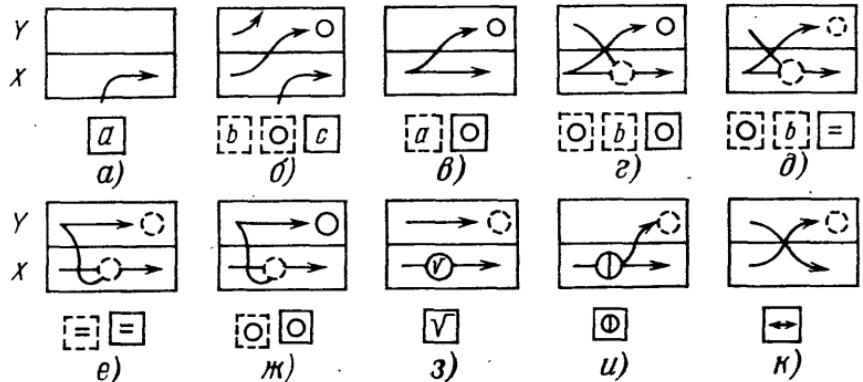


Рис. 4

Таким образом, в соответствии с приведенными правилами вычисления по формуле (1.1) на микрокалькуляторах рассматриваемых типов выполнимы без обращения к памяти вводом предложения

$$c \ln \sqrt{ } \div b \leftrightarrow - a \leftrightarrow = .$$

Во входных языках более совершенных инженерных микрокалькуляторов предусмотрен простой скобочный алгебраический синтаксис. Примером может служить микрокалькулятор "Электроника Б3-36" (см. рис. 1, б), правила работы регистров X и Y ко-

того в основном (рис. 5, а и б) совпадают с описанными выше. Отличие заключается в выполнении одноместных операций без изменения содержимого регистра Y . Исключение составляет оператор $x!$ вычисления факториала, после выполнения которого в регистр Y заносится единица (рис. 5, в).

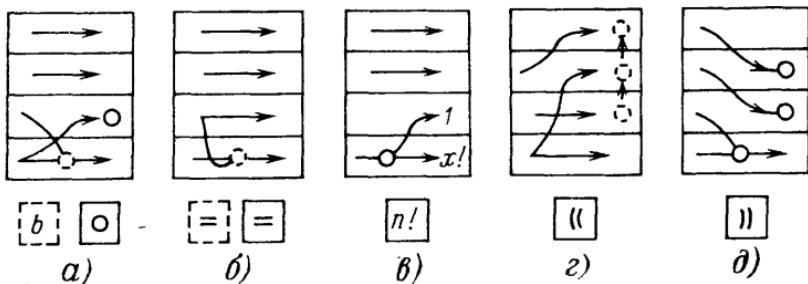


Рис. 5

Операционный стек этого микрокалькулятора содержит четыре регистра, что обеспечивает вычисление без обращения к памяти арифметических выражений со "скобкой в скобках". При вводе оператора ((открывающей скобки (рис. 5, з) содержимое регистра X и код оператора из регистра Y засыпаются в регистр Z , а прежнее содержимое последнего – в регистр T . При вводе оператора)) закрывающей скобки выполняется двухместный оператор, код которого хранился в регистре Y , и операционный стек смещается "вниз" без сохранения содержимого последнего регистра (рис. 5, д).

Достоинства ввода одноместных операторов после операндов привели к использованию во входных языках некоторых инженерных микрокалькуляторов обратного синтаксиса, при котором двухместные операторы также вводят после операндов предложением вида $a \dagger b 0$, где 0 – двухместный оператор. В этом случае для вычислений, например, по формуле (1.1) вводят предложение

$$a \dagger b \dagger c \ln \sqrt{\div} -$$

Таким образом, если для словарей микрокалькуляторов с входным языком, отличающимся алгебраическим синтаксисом, характерен оператор = или заменяющие его операторы, то в словарях входных языков с обратным синтаксисом этот оператор отсутствует, но обязательно имеется оператор \dagger .

Обратный синтаксис входного языка упрощает конструкцию операционного устройства, где требуется хранить только операнды, и микрокалькулятора в целом, так как микропрограмма выполнения любого оператора может быть вызвана из ПЗУ для немедленного исполнения непосредственно после нажатия соответствующей клавиши (штриховая стрелка на рис. 2).

Примером инженерного микрокалькулятора с обратным синтаксисом входного языка может служить распространенный микрокалькулятор "Электроника Б3-19М" (см. рис. 1, в). Он отличается трехрегистровым операционным стеком, обеспечивающим вычисление арифметических выражений с простыми скобками и работающим по следующим правилам:

- При вводе оператора \dagger стек смещается "вверх" (рис. 6, а).
- При вводе операнда в начале предложения и после оператора \dagger его код заносится в регистр X без изменения содержимого остальных регистров, но при вводе операнда после выполнения операции стек смещается "вверх" (рис. 6, б).
- При вводе двухместного арифметического оператора результат операции над содержимым регистров X и Y заносится в регистр X и стек смещается "вниз" (рис. 6, в).
- При вводе двухместного оператора X^Y результат операции заносится в регистр X , а в регистры Y и Z заносится число 2,302585.
- При вводе операторов $\sqrt{\quad}$ и $1/x$ результат операции замещает содержимое регистра

ра X без изменения содержимого остальных регистров, но при вводе других однозначных операторов результат операции заносится в регистр X , а содержимое регистра Y засыпается в регистр Z (рис. 6, g).

6. При вводе оператора $X \rightleftarrows Y$ содержимое регистров X и Y меняется местами (рис. 6, d).

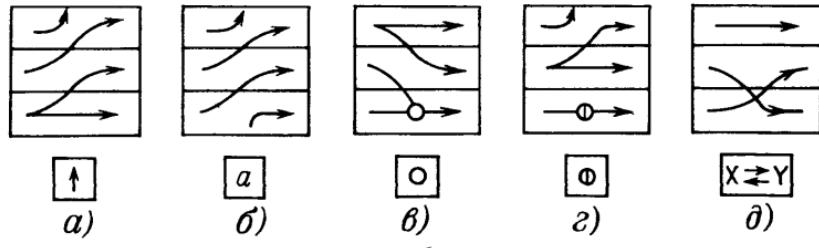


Рис. 6

В соответствии с этими правилами, например, арифметическое выражение (1.1) можно вычислить без обращения к памяти.

Таким образом, различия в использовании инженерными микрокалькуляторами разных типов в основном связаны с синтаксическими особенностями их входных языков и соответствующими правилами работы операционных устройств. Это в особенности относится к микрокалькуляторам (например, "Электроника Б3-32") с многорегистровыми операционными устройствами, обеспечивающими выполнение многоместных функциональных операторов. Поэтому пользователю следует тщательно (при необходимости экспериментально) изучить особенности работы операционного устройства используемого микрокалькулятора.

1.2. Программируемые микрокалькуляторы

Программируемые микрокалькуляторы работают как в *обычном* режиме вычислений с вводом операторов нажатиями клавиш, так и в режиме автоматических вычислений (*программируемом* режиме) по программе, предварительно вводимой (режим *программирования*) в запоминающее устройство, называемое программной памятью (ПрП). Наиболее совершенные программируемые микрокалькуляторы дополняют внешними (периферийными) устройствами – накопителями информации на магнитных карточках (МК), сменными модулями с постоянно хранящимися прикладными программами (МПП), миниатюрными печатающими устройствами (ПУ) для вывода информации на бумажную ленту (рис. 7).

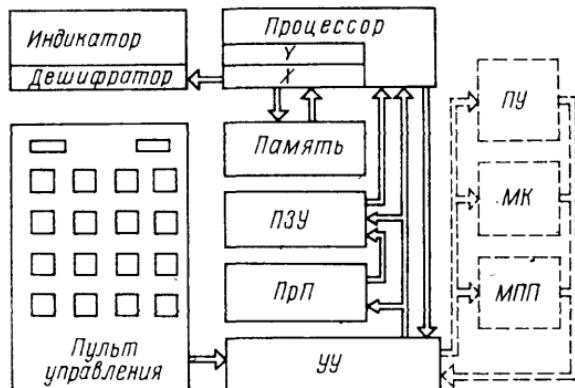


Рис. 7

Программная память содержит фиксированное число ячеек для хранения кодов операторов программы и, независимо от реальной конструкции, может условно рассматриваться как кольцевой стек, соединенный со счетчиком шагов (операторов) программы. В режиме программирования при вводе оператора нажатиями клавиш этот стек поворачивается на один шаг, код вводимого оператора заносится в его очередную ячейку, а содержимое счетчика шагов увеличивается на единицу. Если число введенных операторов превышает число ячеек программной памяти, то она переполняется, и коды избыточных операторов замещают коды начальных операторов программы.

В программируемом режиме код оператора, считанный из очередной ячейки программной памяти, вызывает из ПЗУ соответствующую микропрограмму, после выполнения которой стек программной памяти автоматически поворачивается на один или (в рассматриваемых ниже случаях переходов) несколько шагов и выполняется следующий оператор. После выполнения программы повороты прекращаются и результат вычислений высвечивается на индикаторе.

Словари входных языков программируемых микрокалькуляторов содержат (кроме операторов, используемых в обычном режиме) служебные операторы и операторы автоматического управления выполнением программы.

Группа служебных операторов включает операторы перехода в режим программирования (РП, ПРГ или LRN) и выхода из него в рабочий режим (РР, АВТ или USER), а также предназначенные для редактирования вводимой программы операторы стирания ошибочно введенного кода операции НОП или NOP, поворота программной памяти на шаг вперед (ШГ или SST) и шаг назад (ШГ или BST) и иногда некоторые другие.

Группа операторов **управления** обязательно содержит оператор "стоп/пуск" (С/П или R/S), вводимый в программу для автоматической остановки программной памяти. В рабочем режиме нажатие клавиши С/П приводит к началу выполнения программы (программируемый режим) с места ее предыдущей остановки, а нажатие клавиши С/П в программируемом режиме прекращает вычисления.

Необходимые изменения последовательности выполнения операторов программы обеспечивают операторы условных и безусловных переходов и вводимые за ними операторы передачи управления (коды которых занимают одну ячейку программной памяти независимо от числа нажимаемых при вводе клавиш). Передача управления реализуется одним из двух способов.

При первом способе оператором передачи управления служит код порядкового номера (*адрес*) оператора программы, который должен быть выполнен следующим. При считывании такого адреса стек программной памяти в соответствии с содержимым счетчика шагов поворачивается на такое число шагов, при котором считывается оператор с заданным адресом.

При втором способе оператор передачи управления, называемый **меткой** (например, LBN, где N – номер метки), вводится также и перед оператором, которому передается управление. В этом случае при считывании оператора передачи управления в виде метки стек программной памяти поворачивается, пока не будет считана такая же метка, после чего выполняется следующий оператор.

Операторы **условного перехода** (условные операторы) обычно обозначаются символом вида xQz, где Q – символ проверяемого отношения равенства или неравенства содержимого регистра X и некоторого числа z. При выполнении (в некоторых входных языках – при невыполнении) проверяемого условия выполняется оператор программы, следующий за условным оператором и оператором передачи управления. В противном случае выполняется оператор, положение которого в программе определяется оператором передачи управления.

Оператор **безусловного перехода**, обозначаемый символом БП или GTO, обеспечивает выполнение следующим оператором, положение которого в программе определяется оператором передачи управления. К операторам безусловного перехода относятся также оператор обращения к подпрограмме (ПП, SBR или SRT) и оператор "возврат/очистка" (B/O, RES или RST), после которого оператор передачи управления не вводится.

Фрагмент программы, оканчивающийся оператором В/О и предназначенный для многократного выполнения, называют *подпрограммой*. Оператор ПП и следующий за ним адрес или метка передают управление любому оператору подпрограммы. При этом смещается "вверх" внутренний стек подпрограмм магазинного типа, во входной регистр которого заносится адрес оператора передачи управления. После вычислений по подпрограмме выполнение оператора В/О увеличивает содержимое входного регистра стека подпрограмм на единицу, управление передается по этому адресу оператору, следующему за обращением к подпрограмме ("возврат"), и стек подпрограмм смещается "вниз" ("очистка"). Число регистров этого стека определяет допустимое число *вложений* подпрограмм – обращений из подпрограммы к подпрограмме. Если при выполнении оператора В/О в программируемом режиме содержимое входного регистра стека подпрограмм равно нулю, то управление перепадает второму от начала оператору программы.

В рабочем режиме нажатие клавиши ПП приводит к повороту стека программной памяти на один шаг и выполнению считываемого оператора (что обеспечивает пошаговую проверку выполнения программы), ввод оператора БП и оператора передачи управления поворачивает стек программной памяти в заданное положение, а ввод оператора В/О – в начальное положение.



Puc. 8

В некоторых входных языках предусмотрены дополнительные операторы управления программой – операторы-счетчики, при выполнении которых содержимое определенных регистров памяти изменяется на единицу, операторы косвенной адресации с хранением адреса перехода в памяти, операторы установки и проверки флага для проверки выполнения определенного условия в предыдущей части программы и другие.

Первый массовый отечественный программируемый микрокалькулятор "Электроника Б3-21" имеет программную память емкостью 60 шагов и индикатор для представления чисел, содержащих до восьми разрядов¹ мантиссы и до двух — порядка. Память состоит из 13 регистров, шесть из которых вместе с регистром X соединены в кольцевой стек, а остальные с номерами 2 — 8 образуют запоминающее устройство с произвольной выборкой (ЗУПВ).

Входной язык этого микрокалькулятора имеет обратный синтаксис одноместных и двухместных операций. Кроме операторов, обозначенных на клавишиах (рис. 8) и вводимых при нажатии последних, словарь входного языка содержит операторы $1/x$ вычисления обратной величины, x^2 возведения в квадрат и \sqrt{x} извлечения корня, вводимые после префиксного оператора F. Остальные операторы, обозначенные над клавишиами, а также операторы \circlearrowleft и \circlearrowright поворота кольцевого стека памяти, обозначенные под клавишиами, вво-

¹ В большинстве выпусков этого микрокалькулятора запятая индицируется в знакоместах мантиссы и для высвечивания ее восьмой цифры следует вычесть содержимое первого разряда. Например, при вводе оператора π высвечивается число 3,142592, но при вычитании из него числа 3 индицируется число $1,415927 \cdot 10^{-1}$ с искомой восьмой цифрой исходного числа.

дят после префиксного оператора Р. Операторы FN вызова в регистр X содержимого регистра N памяти и PN засыпки содержимого регистра X в регистр N памяти вводят нажатием соответствующей префиксной клавиши и клавиши набора номера N.

Операционный стек микрокалькулятора, содержащий регистры X и Y (им является первый регистр ЗУПВ), работает согласно следующим правилам:

1. При вызове операнда из памяти он заносится в регистр X без изменения содержимого регистра Y (рис. 9, а).
2. При вводе оператора \uparrow и наборе операнда после выполнения операции стек смещается "вверх" (рис. 9, б).
3. При вводе двухместного оператора содержимое регистра X замещается результатом операции над содержимым обоих регистров с сохранением содержимого регистра Y (рис. 9, в).
4. При вводе одноместных операторов содержимое регистра X замещается результатом операции без изменения содержимого регистра Y. Исключение составляет оператор e^{jx} , после выполнения которого в регистры X и Y заносятся соответственно значения $\cos x$ и $\sin x$ (рис. 9, г). В этом случае для вычисления $\operatorname{tg} x$ достаточно дополнительно ввести оператор \div .
5. При вводе оператора \overleftrightarrow{XY} содержимое регистров X и Y меняется местами (рис. 9, д).

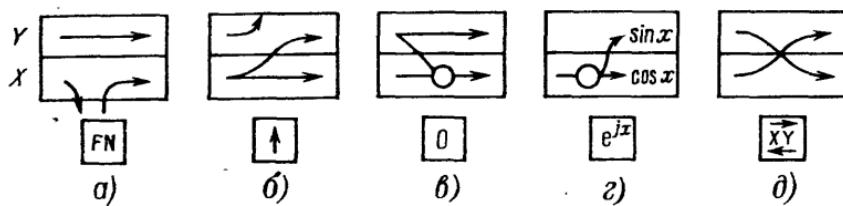


Рис. 9

Следовательно, арифметическое выражение (1.1) можно вычислить без обращения к памяти по предложению $|b| \uparrow |c| \ln \sqrt{|1 \div |a| \overleftrightarrow{XY}| - 1}$ или по предложению $|b| \uparrow |c| \ln \sqrt{|1 \div |a| - 1| / |1 - |b||}$.

Программная память микрокалькулятора разбита на 10 "страниц" по шесть ячеек с адресами ab , образованными номером $a = 0, 1, \dots, 9$ "страницы" и номером $b = 0, 1, \dots, 5$ ячейки на этой "странице". В режиме программирования в знакоместах мантиссы для контроля высвечиваются двузначные коды трех введенных последними операторов программы, а в знакоместах порядка — содержимое счетчика шагов в виде адреса ab оператора, вводимого следующим (при вводе 60-го оператора программы высвечивается -0). Большинство операторов передачи управления (табл. 1) вводятся нажатиями тех же клавиш, что и другие операторы с совпадающими кодами. Коды $ab' = a(b + 1)$ операторов передачи управления для удобства программирования будем называть *адресами переходов* ($ab' = 01; 02; \dots; 96$) и использовать их вместо адресов ($ab = 00; 01; \dots; 95$) соответствующих ячеек программной памяти.

Первым выпускам рассматриваемого микрокалькулятора присущи некоторые недостатки [20], затрудняющие вычисления, — невыполнение обращений к подпрограмме с некоторых шагов программы, неконтролируемое переполнение некоторых регистров кольцевого стека памяти при вычислении элементарных функций и неверные результаты некоторых операций (например, при сложении чисел 9,9999999 и 10 высвечивается 120 вместо 20). В последующих выпусках указанные недостатки устранены.

Большими вычислительными возможностями характеризуется программируемый микрокалькулятор "Электроника Б3-34" с более совершенным входным языком и программной памятью емкостью 98 шагов. Индикатор высвечивает все восемь цифр мантиссы и два порядка, а при переполнении индицируется символ ЕГГОГ (*error* — ошибка). Первым выпускам этого микрокалькулятора также присущи некоторые недостатки, частично отмеченные в инструкции по эксплуатации. В частности, при записи в прог-

рамме оператора $/-$ после арифметического оператора последний не выполняется в программируемом режиме, хотя в обычном режиме и при пошаговой проверке программы результат вычислений оказывается верным.

ТАБЛИЦА 1
Адреса и коды операторов программ автоматических вычислений
для микрокалькулятора "Электроника Б3-21"

Адрес перехода	Код	Клавиши	Оператор	Адрес перехода	Код	Клавиши	Оператор
01		P 0		52	52	F 5	F5
02		F 0		53	53	P /-/	5
03	03	P \uparrow	e^{jx}	54	54	5	x^2
04	04	0	0	55	55	P /-/	x^2
05		F \uparrow		56 (60)	56	/-/	/-/
06 (10)	06	\uparrow	\uparrow		58	БП	БП
11	11	P 1	P1		59	P БП	$x = 0$
12	12	F 1	F1	61	61	P 6	P6
13	13	P XY	ln	62	62	F 6	F6
14	14	1	1	63		P ВП	
15		F XY		64	64	6	6
16 (20)	16	XY	XY	65	65	F ВП	✓
21	21	P 2	P2	66 (70)	66	ВП	ВП
22	22	F 2	F2		68	ПП	ПП
23	23	P x	π		69	P ПП	$x < 0$
24	24	2	2	71	71	P 7	P7
25		F x		72	72	F 7	F7
26 (30)	26	x	x	73	73	P C _x	
31	31	P 3	P3	74	74	7	7
32	32	F 3	F3	75	75	F C _x	
33	33	P \div	e^x	76 (80)	76	C _x	C _x
34	34	3	3		78	C/P	C/P
35		F \div			79	P C/P	$x \neq 0$
36 (40)	36	\div	\div	81	81	P 8	P8
	38	X ^y	X ^y	82	82	F 8	F8
	39	P X ^y	НОП	83	83	P -	cos
41	41	P 4	P4	84	84	8	8
42	42	F 4	F4	85		F -	
43	43	P ,	\circlearrowright	86 (90)	86	-	-
44	44	4	4	91	91	P 9	P9
45	45	F ,	1/x	92	92	F 9	F9
46 (50)	46	,	,	93	93	P +	sin
	48	B/O	B/O	94	94	9	9
	49	P B/O	$x \geq 0$	95		F +	
51	51	P 5	P5	96 (-0)	96	+	+

Словарь входного языка с обратным синтаксисом рассматриваемого микрокалькулятора (рис. 10) содержит операторы входного языка микрокалькулятора "Электроника Б3-21" (исключая оператор e^{jx} и операторы поворота кольцевого стека памяти), а также операторы вычисления обратных тригонометрических функций, десятичных логарифма и антилогарифма и оператор CF для стирания ошибочно введенного префиксного оператора F. Прямые и обратные тригонометрические функции можно вычислить

при выражении углов в градусах или радианах в зависимости от положения переключателя Р-Г. При вводе всех операторов, обозначенных над клавишами, нажимают префиксную клавишу F.

Операционное устройство состоит из четырех регистров X , Y , Z и T стека и дополнительного регистра $X1$. При наборе операнда после выполнения операции, а также после его вызова из памяти и после вызова постоянного числа π содержимое операционного стека смещается "вверх" (рис. 11, а). Операнд, набираемый после выполнения оператора засылки \uparrow , заносится в регистр X без изменения содержимого остальных регистров стека (рис. 11, б). При вводе оператора \uparrow стек смещается "вверх" (рис. 11, в), а при вводе оператора \underline{XY} происходит обмен содержимым регистров X и Y (рис. 11, г).

В остальных вариантах работы операционного стека принимает участие регистр $X1$. После ввода одноместного оператора результат операции заносится в регистр X , прежнее содержимое которого засыпается в регистр $X1$ без изменения содержимого остальных регистров стека (рис. 11, д). После ввода двухместного оператора результат операции заносится в регистр X , прежнее содержимое которого засыпается в регистр $X1$, и операционный стек смещается "вниз" (рис. 11, е).

При вводе оператора \bigcirc операционный стек работает в кольцевом режиме – содержимое регистра X засыпается в регистры $X1$ и T , и стек смещается "вниз" (рис. 11, ж). При вводе оператора BX содержимое операционного стека смещается "вверх", а содержимое регистра $X1$ засыпается в регистр X (рис. 11, з).

Память микрокалькулятора состоит из 14 регистров произвольной выборки с номерами 0, 1, ..., 9, A, B, C, D. Засылка содержимого регистра X в регистр N памяти и вызов в регистр X содержимого регистра N обеспечивают соответственно операторы ПН и ИПН.

В программах автоматических вычислений операторами передачи управления служат адреса шагов программы (ячеек программной памяти) от 00 до 98, вводимые набором соответствующих цифр, что существенно упрощает программирование. Другая особенность рассматриваемого входного языка по сравнению с входным языком микрокалькулятора "Электроника Б3-21" заключается в возможности использования в программах автоматических вычислений операторов цикла, а также косвенной адресации переходов и обращений к памяти.

При каждом выполнении *оператора цикла LN* из содержимого регистра N памяти вычитается единица и результат проверяется по условию $x = 0$. Если это условие не выполняется, то управление передается по адресу, следующему в программе за оператором цикла, в противном случае – оператору, следующему в программе за этим адресом.

Операторы *косвенной* адресации, коды которых занимают один шаг программы, формируют вводом оператора-модификатора K, оператора перехода или обращения к памяти и номером N регистра памяти. При каждом выполнении такого составного оператора содержимое регистра N модифицируется – уменьшается на единицу, если $N = 0$, 1, 2 или 3, увеличивается на единицу, если $N = 4, 5$ или 6 , и не изменяется, если N – номер одного из остальных регистров (регистрам памяти A, B, C и D присвоены номера коды 10, 11, 12 и 13 соответственно).

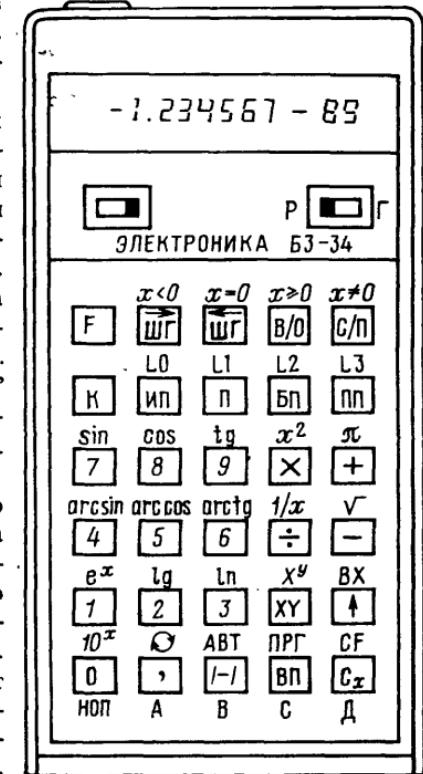


Рис. 10

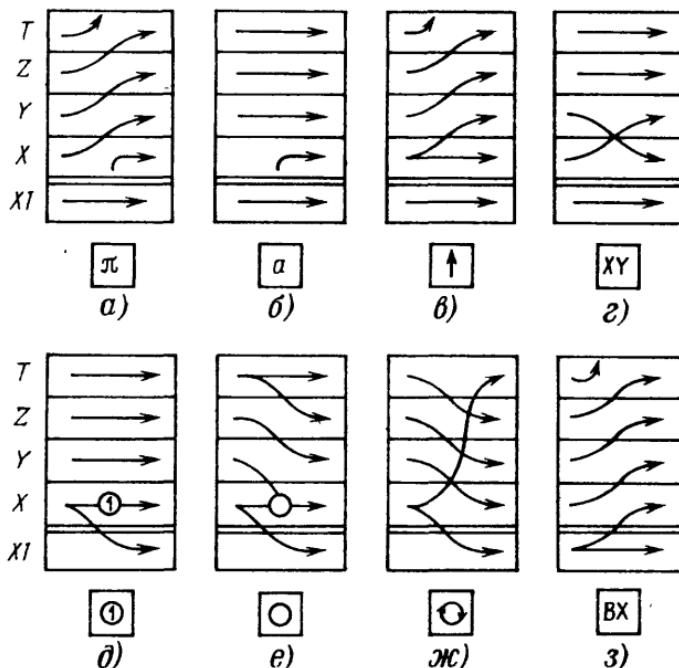


Рис. 11

При выполнении оператора косвенного условного перехода ($Kx = 0N$, $Kx \neq 0N$, $Kx \geq 0N$ или $Kx < 0N$) или косвенного безусловного перехода (КБПН или КППН) управление в другую часть программы передается по модифицированному адресу, хранящемуся в регистре N памяти. При выполнении оператора КПН косвенной засыпки содержимое регистра X засыпается в регистр памяти с модифицированным номером-кодом, хранящимся в регистре N , а при выполнении оператора косвенного вызова из памяти КИПН в регистр X вызывается содержимое регистра памяти, номер которого равен модифицированному содержимому регистра N .

Элементная база и входной язык программируемого микрокалькулятора "Электроника Б3-34" использованы в программируемых микрокалькуляторах других типов (например, настольном микрокалькуляторе "Электроника МК56" и карманном микрокалькуляторе "Электроника МК-54"). Поэтому в дальнейшем входной язык этих микрокалькуляторов будем называть входным языком МК34.

Аналогично входной язык микрокалькулятора "Электроника Б3-21" использован, например, в специализированном настольном программируемом микрокалькуляторе "Электроника МК 46". Поэтому в дальнейшем будем сокращенно называть его входным языком МК21.

Обратный синтаксис характерен и для многих зарубежных программируемых микрокалькуляторов, например, болгарского производства и выпускаемых в ряде стран по лицензии фирмы "Хьюлет-Паккард". Реже в программируемых микрокалькуляторах (например, фирмы "Тексас Инструментс") используют входные языки с алгебраическим синтаксисом.

1.3. Представление алгоритмов программами

Решение задачи в общем случае состоит из ряда взаимосвязанных этапов: выбора постановки (математической модели) задачи, выбора метода и алгоритма ее решения, выполнения алгоритма и проверки точности результата решения.

Составление достаточно точных математических моделей физических объектов явля-

ется сложной проблемой, и поэтому при решении инженерных задач обычно используют готовые типовые модели физических объектов и рекомендуемые методики их применения.

Методом называют общий подход к решению определенного класса задач, тогда как *алгоритм* решения конкретной задачи – конечная последовательность однозначных описаний операций, выполнимых исполнителем алгоритма и приводящих к искомому результату. Алгоритм представляют словесно-формульным описанием, схемой или программой.

Словесно-формульное описание содержит перечень описаний операций с указанием порядка их выполнения. Форма такого описания, как и других представлений алгоритма, зависит от выполнимости исполнителем описаний операций. Например, для математика алгоритм решения квадратного алгебраического уравнения $a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$ достаточно описать словами: "решить квадратное уравнение". Однако при необходимости указания на конкретный способ решения это описание уточняют, представив его, например, предложением: "вычислить корни квадратного уравнения по формуле

$$x_{1,2} = -a_1/(2a_2) \pm \sqrt{(a_1/(2a_2))^2 - a_0/a_2}. \quad (1.2)$$

Для исполнителя, незнакомого с этой формулой, алгоритм целесообразно уточнить с указанием последовательности выполнения операций, например, описав его следующим образом:

1. Вычислить $\alpha = -a_1/2a_2$.
2. Вычислить $\beta = a_0/a_2$.
3. Вычислить $D = \alpha^2 - \beta$.
4. Если $D < 0$, то перейти к п. 5, иначе к п. 6.
5. Записать вещественную часть $\text{Re } x_{1,2} = \alpha$ комплексно-сопряженных корней, вычислить их мнимую часть $\text{Im } x_{1,2} = \sqrt{-D}$ и закончить вычисления.
6. Вычислить вещественные корни $x_1 = \alpha + \sqrt{D}$; $x_2 = \alpha - \sqrt{D}$ и закончить вычисления.

При необходимости каждое из описаний сложных операций в этом словесно-формульном описании алгоритма заменяют последовательностями описаний более простых операций (например, автоматически выполняемых микрокалькулятором при вводе соответствующих операторов).

Более наглядно представление алгоритма *схемой*, в которой каждое описание операции проверки заданного условия заключают в ромб или близкую по форме фигуру с выходами "Да" или 1 при выполнении проверяемого условия и "Нет" или 0 при его не выполнении. Описания остальных операций заключают в прямоугольники, а окончание выполнения алгоритма обозначают овалом. Все операционные блоки схемы соединяют линиями со стрелками, указывающими порядок выполнения операций. Например, рассмотренному словесно-формальному описанию алгоритма решения квадратного уравнения соответствует схема, показанная на рис. 12.

Наиболее компактный способ представления алгоритма основан на отображении каждой операции условным символом (оператором), а требуемой последовательности операций – последовательностью операторов, называемой *программой*. Разветвления алгоритмов обычно отображают в программах одним из ранее рассмотренных способов передачи управления. Например, обозначив оператором С/П прекращение вычислений, а операторами O_i – операционные блоки показанной на рис. 12 схемы алгоритма, можно представить его программой

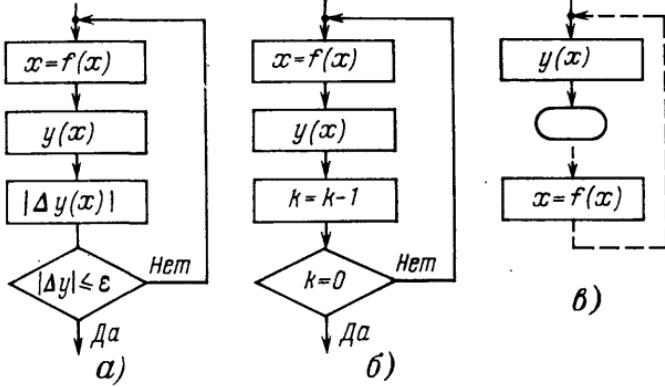
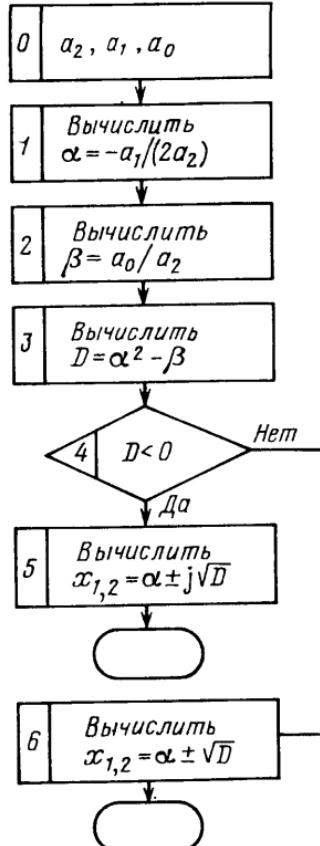
$O_1 \ O_2 \ O_3 \ O_4 \ 08 \ O_5 \ \text{С/П} \ O_6 \ \text{С/П}$

с передачей управления оператору O_6 при невыполнении условия, проверяемого оператором O_4 , с помощью адреса 08 или программой

$O_1 \ O_2 \ O_3 \ O_4 \ M1 \ O_5 \ \text{С/П} \ M1 \ O_6 \ \text{С/П}$

Достоинство представления алгоритма программой заключается в его компактности, но для составления и чтения программы необходим условный (алгоритмический) язык с "толковым словарем", определяющим назначение используемых операторов, и четкими синтаксическим правилами, определяющими правила составления программы. Поэтому это представление редко используют при решении задачи человеком, но оно является практически единственным для ввода алгоритма решения задачи в цифровые ЭВМ любых типов, в конструкции которых предусмотрено использование определенных входных (внешних) языков программирования.

При составлении программ решения сложных задач для вычислений на микрокалькуляторе в обычном или особенно программируемом режиме часто оказывается необходимым предварительно составлять более наглядное словесно-формульное описание или более наглядную схему алгоритма решения задачи. Схема особенно удобна для отобра-



жения разветвлений алгоритма, которые возникают, в частности, при решении задач с повторными выполнениями некоторой последовательности операций (*итерации*). В этих случаях обычно формируют замкнутый цикл, охватывающий итерацию, с выходом из него после выполнения определенного условия, например, вычисления результата с заданной точностью (рис. 13, а). Если число итераций задано, то выход из цикла обеспечивают включением в него счетчика итераций вида $k = k - 1$, начальное содержимое которого равно заданному числу итераций и уменьшается на единицу после каждой итерации. Выход из цикла обеспечивает условный оператор $x = 0$, проверяющий содержимое счетчика итераций (рис. 13, б). Многократное выполнение программы (например, при изменении исходных данных) также образует замкнутый цикл с прекращением вычислений и регистрацией результата после каждой итерации (рис. 13, в).

При решении задач с помощью микрокалькуляторов существенное значение имеет форма записи программы вычислений в обычном и особенно программируемом режимах.

В инструкциях по эксплуатации микрокалькуляторов для программ с арифметическими операторами обычно используют запись вида

$$C \boxed{3,6} \boxed{\times} \boxed{1,723} \boxed{+} \boxed{5,08} \boxed{=} ,$$

где операторы набора чисел записывают слитно, как и при обычной записи чисел, а арифметические и другие операторы заключают в прямоугольники, символизирующие нажимаемые клавиши. При составлении программ подобную запись целесообразно упростить, отделяя функциональные операторы пробелами или вертикальными линиями, например,

$$| C | 3,6 | \times | 1,723 | + | 5,08 | = |$$

или в общем случае произвольных значений операндов

$$| C | a | \times | b | + | c | = |,$$

причем операнды, вызываемые из памяти, обычно обозначают операторами вызова, например,

$$| C | a | \times | b | + | ИП | = |.$$

В записях программ с операторами, вводимыми после нажатия префиксной клавиши, иногда обозначают прямоугольниками как префиксную клавишу, так и вводимые после ее нажатия и надписанные над клавишами операторы. Такую запись можно упростить вводом разделителей, например

$$| C | \alpha | F | \sin | - | \beta | F | \cos | = | F | \ln | - | a | = |,$$

но она остается избыточной, так как содержит символы F нажатия префиксной клавиши, хотя следующий за ней оператор нельзя ввести без этого нажатия. Кроме того, символы префиксных клавиш не имеют отношения к алгоритму решения задачи.

В программах, приведенных в настоящей книге, префиксные операторы указаны лишь в тех случаях, когда они являются необходимыми составными частями других операторов (например, оператор arc для выполнения обратных тригонометрических функций, префиксные операторы обращения к памяти и др.). Например, приведенная программа принимает вид

$$| C | \alpha | \sin | - | \beta | \cos | = | \ln | - | a | = |$$

и более наглядно отображает алгоритм вычислений.

Добавим, что префиксные операторы, не имеющие отношения к алгоритму вычислений и используемые лишь при вводе программы, не записывают и в программы, составленные на алгоритмических языках стационарных ЭВМ. Кстати, такие операторы не указывают и в машинописных текстах, хотя для ввода верхних символов, обозначенных на клавиши пишущей машинки, необходимо предварительно нажать префиксную клавишу подъема каретки.

Особое значение имеет выбор формы записи программ автоматических вычислений на программируемых микрокалькуляторах. Такая запись должна быть достаточно удобной для составления, чтения и выполнения программы вычислений. В пособиях по программированию для записи программ часто используют таблицы, каждая строка которых содержит информацию об очередном шаге программы, включающую символы операторов и нажимаемых клавиш, коды и адреса операторов, описания операций и, иногда, содержимое операционного стека. Последовательность описаний операций в такой таблице образует словесно-формульное описание алгоритма вычислений, по которому несложно составить схему с операционными блоками, соответствующими операциями, выполняемым используемым микрокалькулятором.

Примеры подобной записи программ автоматических вычислений на входных языках МК21 и МК34 для решения квадратного уравнения по формуле (1.2) приведены в табл. 2 и 3. После выполнения этих программ высвечиваются не результаты вычислений, а условные коды (2 или 7), указывающие на характер полученных результатов (вещественные или комплексно-сопряженные корни) и места хранения одного из них.

Подобная табличная запись удобна для хранения готовых программ при изучении программирования. Однако она чрезмерно громоздка и практически непригодна для со-

ставления программы, когда приходится многократно изменять их текст в поисках наилучшего варианта. В этом случае запись программы должна быть предельно краткой и обеспечивать минимальные затраты времени на определение адресов переходов при разветвлениях алгоритма вычислений.

ТАБЛИЦА 2

Программа решения квадратного уравнения на входном языке МК21

Инструкция: Ввести программу, коэффициенты a_0 , a_1 и a_2 занести соответственно в регистры 4, 5 и 6, нажать клавиши В/О и С/П. Если после выполнения программы высвечивается 7, то корни вещественны и хранятся в регистрах Y (для вызова нажать клавишу \underline{XY}) и 7; если высвечивается 2, то корни комплексно-сопряженные, их мнимая часть хранится в регистре Y, а вещественная – в регистре 2.

№	Адрес перехода	Код оператора	Клавиши	Оператор	Описание операции	Содержимое операционного стека	
						X	Y
1	01	52	F 5	F5	Вызов из регистра 5	a_1	0
2	02	06	↑	↑	Засылка в регистр Y	a_1	a_1
3	03	62	F 6	F6	Вызов из регистра 6	a_2	a_1
4	04	36	÷	÷	Деление	a_1/a_2	a_1
5	05	24	2	2	Набор цифры 2	2	a_1/a_2
6	06	36	÷	÷	Деление	$a_1/2a_2$	a_1/a_2
7	11	56	/-/-/	/-/-/	Изменение знака	$\alpha = -a_1/2a_2$	a_1/a_2
8	12	21	P 2	P2	Засылка в регистр 2	α	a_1/a_2
9	13	42	F 4	F4	Вызов из регистра 4	a_0	a_1/a_2
10	14	06	↑	↑	Засылка в регистр Y	a_0	a_0
11	15	62	F 6	F6	Вызов из регистра 6	a_2	a_0
12	16	36	÷	÷	Деление	$\beta = a_0/a_2$	a_0
13	21	06	↑	↑	Засылка в регистр Y	β	β
14	22	22	F 2	F2	Вызов из регистра 2	α	β
15	23	55	F /-/-/	x ²	Возведение в квадрат	α ²	β
16	24	86	—	—	Вычитание	-D = β - α ²	β
17	25	49	P B/O	x > 0	Проверка x > 0	-D	β
18	26	34	3	3	Переход по адресу 34	-D	β
19	31	65	F BII	√	Извлечение корня	$\sqrt{-D}$	$\frac{\beta}{\sqrt{-D}}$
20	32	24	2	2	Набор цифры 2	2	$\sqrt{-D}$
21	33	78	C/P	C/P	Стоп	2	$\sqrt{-D}$
22	34	56	/-/-/	/-/-/	Изменение знака	D	β
23	35	65	F BII	√	Извлечение корня	\sqrt{D}	β
24	36	06	↑	↑	Засылка в регистр Y	\sqrt{D}	\sqrt{D}
25	41	22	F 2	F2	Вызов из регистра 2	α	\sqrt{D}
26	42	96	+	+	Сложение	$x_1 = \sqrt{D} + \alpha$	\sqrt{D}
27	43	71	P 7	P7	Засылка в регистр 7	x_1	\sqrt{D}
28	44	22	F 2	F2	Вызов из регистра 2	x_1	\sqrt{D}
29	45	16	XY	XY	Обмен содержимым регистров X и Y	\sqrt{D}	α
30	46	86	—	—	Вычитание	$x_2 = \alpha - \sqrt{D}$	α
31	51	7	7	7	Набор цифры 7	7	x_2
32	52	78	C/P	C/P	Стоп	7	x_2

ТАБЛИЦА 3

Программа решения квадратного уравнения на входном языке МК34

Инструкция: Ввести программу, коэффициенты a_0 , a_1 и a_2 занести соответственно в регистры 0, 1 и 2, нажать клавиши В/О и С/П. Если после выполнения программы высвечивается 7, то корни вещественны и хранятся в регистрах Y (для вызова нажать клавишу \underline{XY}) и 7; если высвечивается 4, то корни комплексно-сопряженные, их мнимая часть хранится в регистре Y , а вещественная – в регистре 4.

№	Адрес перехода	Код оператора	Клавиши	Оператор	Описание операции	Содержимое операционного стека			
						X	Y	Z	T
1	00	61	ИП 1	ИП1	Вызов из регистра 1	a_1	0	0	0
2	01	0L	/-/	/-/	Изменение знака	$-a_1$	0	0	0
3	02	62	ИП 2	ИП2	Вызов из регистра 2	a_2	$-a_1$	0	0
4	03	13	\div	\div	Деление	$-a_1/a_2$	0	0	0
5	04	02	2	2	Набор цифры 2	2	$-a_1/a_2$	0	0
6	05	13	\div	\div	Деление	$\alpha = -a_1/2a_2$	0	0	0
7	06	44	П 4	П4	Засылка в регистр 4	α	0	0	0
8	07	22	F x	x^2	Возведение в квадрат	α^2	0	0	0
9	08	60	ИП 0	ИП0	Вызов из регистра 0	a_0	α^2	0	0
10	09	62	ИП 2	ИП2	Вызов из регистра 2	a_2	a_0	α^2	0
11	10	13	\div	\div	Деление	$\beta = a_0/a_2$	α^2	0	0
12	11	11	—	—	Вычитание	$D = \alpha^2 - \beta$	0	0	0
13	12	5 [F \overline{M}	$x < 0$	Проверка $x < 0$	D	0	0	0
14	13	18	1 8	18	Переход по адресу 18	D	0	0	0
15	14	0L	/-/	/-/	Изменение знака	$-D$	0	0	0
16	15	12	F —	$\sqrt{-}$	Извлечение корня	$\sqrt{-D}$	0	0	0
17	16	04	4	4	Набор цифры 4	4	$\sqrt{-D}$	0	0
18	17	50	C/П	C/П	Стоп	4	$\sqrt{-D}$	0	0
19	18	21	F —	$\sqrt{-}$	Извлечение корня	\sqrt{D}	0	0	0
20	19	43	П 3	П3	Засылка в регистр 3	\sqrt{D}	0	0	0
21	20	64	ИП 4	ИП4	Вызов из регистра 4	α	\sqrt{D}	0	0
22	21	10	+	+	Сложение	$x_1 = \sqrt{D} + \alpha$	0	0	0
23	22	47	П 7	П7	Засылка в регистр 7	x_1	0	0	0
24	23	64	ИП 4	ИП4	Вызов из регистра 4	α	x_1	0	0
25	24	63	ИП 3	ИП3	Вызов из регистра 3	\sqrt{D}	α	x_1	0
26	25	11	—	—	Вычитание	$x_2 = \alpha - \sqrt{D}$	x_1	0	0
27	26	07	7	7	Набор цифры 7	7	x_2	x_1	0
28	27	50	C/П	C/П	Стоп	7	x_2	x_1	0

В рассмотренной табличной записи необходимым является лишь столбец операторов, образующих программу (для ввода программы достаточно последовательности нажимаемых клавиш, но последняя не отображает алгоритма вычислений). Программа становится компактнее при записи операторов в строки с фиксированным числом операторов, упрощающим определение адресов переходов. Наиболее просто определяются эти адреса, когда число операторов в строке равно числу ячеек на странице программной памяти.

Для большей компактности записи программы на входном языке МК21 будем записывать в строки по 12 (или меньше в последней строке) операторов. В этом случае левые полустроки (соответствующие страницам программной памяти) будут иметь номера $a = 0, 2, 4, 6$ и 8 , а правые – $a = 1, 3, 5, 7$ и 9 . Адрес перехода к любому оператору программы несложно определить по номеру a полустроки и номеру $b' = 1, 2, \dots, 6$ оператора в этой полустроке.

Затраты времени на запись программы сокращаются также при упрощении начертаний сложных символов. Поэтому в дальнейшем символ \overrightarrow{XY} будем заменять его упрощенным вариантом XY , а операторы \bigcirclearrowleft и \bigcirclearrowright поворотов стека памяти (в языке МК21) или операционного стека (в языке МК34) – упрощенными символами \leftarrow и \rightarrow соответственно.

Компактную запись программ следует дополнить и компактной записью инструкции по выполнению программы со стандартными описаниями размещения в памяти и операционном устройстве исходных данных и результатов вычислений, а также указаниями нажимаемых клавиш. В дальнейшем размещение исходных данных будем указывать в инструкциях символами операторов присвоения вида $a = PN$, где N – номер регистра памяти или операционного стека, куда заносится число a . При этом регистры кольцевого стека памяти для микрокалькуляторов с входным языком МК21 будем обозначать

символами CN в соответствии со схемой, показанной на рис.14. Например, запись $a = P7, b = C6, c = PY, d = PX$ будет означать, что исходные числа a, b, c и d перед пуском программы следует занести соответственно в регистры 7 ЗУПВ, С6 стека памяти, Y и X операционного стека.

В процессе вычислений исходные данные могут замещаться результатами промежуточных вычислений и перед повторными пусками программы их следует восстановить. Поэтому в инструкциях исходные данные, которые не нужно восстанавливать перед повторными пусками программы, будем заключать в круглые скобки. Например, запись $(a = P7, c = PY) b = C6, d = PX$ будет означать, что перед повторным

пуском программы необходимо ввести лишь исходные данные b и d .

Размещение результатов выполнения программы будем описывать операторами присвоения вида $PN = a$ и, например, запись $PX = P7 = h, PY = g, C1 = q$ будет означать, что результаты вычислений h, g и q размещены соответственно в регистрах X (и 7), Y и $C1$. Содержимое регистра X после выполнения программы высвечивается на индикаторе.

Служебные операторы, вводимые при первом пуске программы, будем заключать в круглые скобки – например, запись В/О С/П будет означать, что соответствующие клавиши нажимают для каждого пуска программы, а при записи (В/О) С/П клавишу В/О нажимают только при первом пуске введенной программы.

В соответствии с рассмотренными правилами программа, записанная в табл. 2, в компактной записи примет следующий вид.

Программа 1/21¹. Решение квадратного уравнения

F5	\uparrow	F6	\div	2	\div	/ - /	P2	F4	\uparrow	F6	\div
\uparrow	F2	x^2	-	$x \geq 0$	3	$\sqrt{\quad}$	2	C/P	/ - /	$\sqrt{\quad}$	\uparrow
F2	+	P7	F2	XY	-	7	C/P				

Инструкция: ($a_0 = P4$, $a_1 = P5$, $a_2 = P6$) В/О С/П $PX = 7$, $PY = x_2$, $P7 = x_1$ или $PX = 2$, $PY = \operatorname{Im} x_{1,2}$, $P2 = \operatorname{Re} x_{1,2}$.

В подобной записи отсутствуют коды операторов, но при внимательном нажатии клавиш в режиме программирования (наиболее частой ошибкой является пропуск оператора) достаточно контролировать высвечиваемые адреса крайних правых операторов строк ($ab' = 20, 40, 60, 80$ и -0). В этом случае ввод программы с максимальным числом операторов занимает не более 1–1,5 мин.

При любой записи программ на входном языке МК21 в процессе их составления для определения операторов передачи управления по нужному адресу и кодов вводимых операторов приходится обращаться к табл. 1 или запоминать эти операторы и коды. В последнем случае достаточно по расположению соответствующих клавиш запомнить операторы A ($\uparrow | XY | x | \div | , | / - / | \text{ВП} | C_x | - | +$), передающие управление соответственно по адресам переходов вида $a6 = 06, 16, 26, 36, 46, 56, 66, 76, 86$ и 96 . Тогда остальные операторы передачи управления несложно определить как Ra и Fa для адресов вида $a1$ и $a2$, $R4$ и $F4$ для адресов вида $a3$ и $a5$, а также a для адресов вида $a4$. Запомнив эти операторы, несложно определить и коды операторов, совпадающие с адресами (например, операторы π и $\sqrt{\quad}$, вводимые нажатиями клавиш РХ и F ВП, имеют соответственно коды 23 и 65, совпадающие с адресами, вводимыми нажатиями тех же клавиш).

Программы на входном языке МК34 при компактной записи целесообразно располагать по 10 операторов в строке. В этом случае адрес перехода ab к любому оператору легко определить по номеру $a = 0, 1, \dots, 9$ строки и номеру $b = 0, 1, \dots, 9$ столбца, на пересечении которых находится этот оператор. В подобной компактной записи программы, приведенная в табл. 3, примет следующий вид.

Программа 2/34. Решение квадратного уравнения

ИП1	/ - /	ИП2	\div	2	\div	P4	x^2	ИП0	ИП2
\div	-	$x < 0$	18	/ - /	$\sqrt{\quad}$	4	C/P	$\sqrt{\quad}$	P3
ИП4	+	P7	ИП4	ИП3	-	7	C/P		

Инструкция: ($a_0 = P0$, $a_1 = P1$, $a_2 = P2$) В/О С/П $PX = 7$, $PY = x_2$, $P7 = x_1$ или $PX = 4$, $PY = \operatorname{Im} x_{1,2}$, $P4 = \operatorname{Re} x_{1,2}$.

Правильность составления и ввода программы целесообразно проверять с помощью легко составляемых контрольных (тестовых) примеров, обеспечивающих проверку всех разветвлений алгоритма. Примеры целесообразно сопровождать указаниями на время их выполнения, что особенно существенно для программ с большим временем счета в связи с возможностью "зацикливания" (невыполнения оператора остановки) неверно составленной или ошибочно введенной программы. В результатах выполнения контрольных примеров высвечиваемые цифры двух последних разрядов мантиссы будем указывать лишь в необходимых случаях, так как для микрокалькуляторов различных типов и выпусков эти цифры могут отличаться.

Правильность ввода программ 1/21 и 2/34 легко проверить решением уравнения $2x^2 + 3x - 4 = 0$ с вещественными корнями $x_1 = 0,850781$; $x_2 = -2,35078$ (время счета соответственно 5 и 7 с) и уравнения $2x^2 + 3x + 4 = 0$ с комплексно-сопряженными корнями $x_{1,2} = -0,75 \pm j1,19895$ (время счета около 4 и 6 с).

Приведенные далее программы читатель может самостоятельно представить в форме,

¹ Программы решения типовых задач на входных языках МК21 и МК34 будем обозначать порядковыми номерами с указанием через косую черту входного языка с добавлением символа С для программ, не выполнимых микрокалькуляторами первых выпусков.

подобной табл. 2 или 3, и этого не потребуется при небольшом навыке в использовании компактной записи. Если при составлении программы необходимо учитывать изменения содержимого регистров операционного стека (аналогично табл. 2 и 3), то соответствующие данные целесообразно выписывать в столбец над каждым оператором в черновом тексте составляемой программы.

Простейшие вычисления на программируемых микрокалькуляторах целесообразно выполнять в обычном режиме. Однако при вычислениях в обычном режиме по программам с большим числом операторов достоверность результатов вычислений оказывается низкой в связи с возможными ошибками при вводе операторов, а исправление замеченных ошибок связано с большими потерями времени. Поэтому такие программы (даже если они выполняются однократно и не содержат замкнутых циклов) лучше вводить в программную память, что обеспечивает возможность проверки правильности ввода и выполнения программы, и выполнять пошагово или в программируемом режиме.

В книге не приведены программы решения рассматриваемых задач на непрограммируемых микрокалькуляторах, отличающихся разнообразием входных языков, но читатель может самостоятельно их составить на входном языке микрокалькулятора используемого типа по приведенным алгоритмам.

1.4. Погрешности результатов вычислений

Численный результат x решения инженерно-технической задачи с помощью микрокалькулятора практически всегда отличается от точного значения x^* соответствующей физической переменной на величину $x - x^*$, называемую *истинной ошибкой* или *погрешностью* результата вычислений. Однако точное значение x^* обычно неизвестно, и поэтому точность результата вычислений оценивают значениями *пределных абсолютной* Δx и *относительной* δx погрешностей. В соответствии с имеющейся информацией их значения выбирают так, чтобы неравенства

$$\Delta x \geq |x - x^*|; \quad \delta x = \Delta x / |x| \geq |x - x^*| / |x^*| \quad (1.3)$$

были как можно ближе к равенствам и, следовательно, оценка погрешности была близкой к ее истинному значению.

Таким образом, точное значение x^* лежит в интервале, середина которого совпадает с вычисленным значением x , а границы – со значениями $x \pm \Delta x = x(1 \pm \delta x)$. Оценки погрешностей, обеспечивающие безусловное выполнение неравенств (1.3), называют *мажоритарными*, а оценки, обеспечивающие выполнение этих неравенств с определенной вероятностью, – *статистическими*.

Точность результата вычислений часто связывают с цифрами его десятичного представления. Первые n значащих¹ цифр называют *верными*, если абсолютная погрешность результата не превышает половины единицы n -го разряда, и *верными в широком смысле*, если эта погрешность не превышает единицы n -го разряда. Относительная погрешность числа с n верными цифрами ($\Delta \leq 5 \cdot 10^{-n}$) при $n \geq 2$ определяется соотношением $\delta x \leq 1/2a_1 10^{n-1}$, где a_1 – первая значащая цифра.

Основными источниками погрешности результата решения задачи являются погрешности математической модели и погрешности вычислений. *Математическая модель* (составленность символов, отображающих числа и отношения между ними) любого физического, или, другими словами, реально существующего объекта принципиально приближена, что вытекает из следующих диалектических положений. Любое явление есть следствие и причина других явлений, причем причиной явления со свойством, описанным переменной $x(t)$, будет не координата отсчета t , обычно имеющая размерность врем-

¹ Значащими называют все отличные от нуля цифры десятичного представления числа, а также содержащиеся между ними и приписываемые справа (для указания сохраняемых разрядов) нули.

мени, а некоторое другое свойство этого же или другого явления, описанное переменной $q(t)$ в той же системе отсчета. Связь между *воздействием* (причиной) $q = q(t)$ и *реакцией* (следствием) $x = x(t)$ на это воздействие моделируют функциональными зависимостями

$$x = x(q) \equiv aq. \quad (1.4)$$

Формально в канале связи между воздействием и реакцией на это воздействие над переменной q выполняется некоторая операция, результатом которой является переменная x . Поэтому *параметр передачи* $a = x(q)/q$ канала связи можно рассматривать как *оператор*, ставящий число x в соответствие числу q . Математические модели таких операторов определяются свойствами реальных каналов причинно-следственных связей, которым (в силу их материальности) присущи все свойства каналов передачи энергии.

Влияние энергии, поступающей от источника воздействия q , проявляется в изменении свойств канала или *нелинейности* его параметра передачи $a = a(q)$. Влияние множества z сторонних по отношению к q воздействий моделируют *параметрическими изменениями* оператора $a = a(q, z)$. Всеобщая взаимосвязь явлений приводит к зависимости реакции от бесконечного множества сторонних воздействий и, как результат, к случайным изменениям параметра передачи $\bar{a} = a(q, \bar{z})$. Накопление энергии в канале связи приводит к его *инерционности*, проявляющейся в зависимости реакции от значений воздействий в предыдущие моменты времени. Свойства инерционных каналов в общем случае моделируют интегрально-дифференциальными уравнениями относительно независимой переменной t . Ограниченнная скорость распространения энергии приводит к задержке во времени и распределенности реакции (отображаемой *распределенностью параметров*) вдоль протяженных каналов связи. Свойства таких каналов моделируют интегрально-дифференциальными уравнениями с частными производными по времени и пространственными координатами.

Физический объект с n независимыми *входами* (местами приложения воздействий и определения реакций) рассматривают как автономную физическую систему¹, моделируемую в общем случае системой операторных уравнений

$$x_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} q_j; i = 1, 2, \dots, n, \quad (1.5)$$

или в сокращенной матричной записи

$$X = AQ,$$

где Q и X – векторы-столбцы переменных воздействий и реакций соответственно; A – квадратная матрица параметров передачи a_{ij} каналов связи между j -ми и i -ми входами.

Системы уравнений (1.5) можно преобразовать в другие уравнения, графы, схемы замещения, частично упорядоченные множества и иные эквивалентные математические модели [19]. Однако вследствие бесконечного многообразия свойств физических объектов их точные модели построить невозможно, а учет даже рассмотренных свойств каналов связи приводит к сложным моделям, часто непригодным для практических приложений. Поэтому математические модели физических объектов упрощают, пренебрегая теми свойствами каналов причинно-следственных связей, которые при заданных рабочих условиях достаточно мало влияют на зависимость реакции от заданного воздействия. В частности, каналы малой протяженности обычно рассматривают как сосредоточенные, а их параметры передачи как детерминированные. При медленных изменениях воздействий пренебрегают инерционностью канала связи, описывая его нелинейные свойства статическими характеристиками.

¹ Системой называют множество связанных элементов (частей системы), характеризуемое *структурой*, определяющей отношения между элементами, и *параметрами*, определяющими свойства элементов.

При достаточно малых изменениях уровня воздействия q (слабых воздействиях) их влиянием пренебрегают, рассматривая каналы связи как *линейные* (с независимым от воздействия параметром передачи) и при учете инерционности описывая их линейными дифференциальными уравнениями вида

$$a_n \frac{d^n x}{dt^n} + \dots + a_1 \frac{dx}{dt} + a_0 = b_m \frac{d^m q}{dt^m} + \dots + b_1 \frac{dq}{dt} + b_0. \quad (1.6)$$

Для удобства расчетов такие уравнения преобразуют по Лапласу в алгебраические уравнения (1.4) вида

$$x(p) = a(p)q(p) + x_0,$$

где член x_0 отображает начальные условия, а комплексную переменную $p = \sigma + j\omega$ называют оператором Лапласа или *комплексной* частотой.

При подстановке $p = j\omega$ и нулевых начальных условиях такие операторы уравнения принимают вид

$$x(j\omega) = a(j\omega)q(j\omega),$$

где параметр передачи $a(j\omega)$ называют *частотной* характеристикой.

Приближенный характер структуры математической модели является одной из причин погрешностей вычислений с помощью такой модели. Исходные данные (значения воздействий и параметров модели) также имеют погрешности, определяемые возможной точностью измерения соответствующих физических величин и точностью изготовления физических объектов. Кроме того, на результат вычислений влияют операционные погрешности, возникающие при выполнении отдельных операций, а также погрешности выбранного метода вычислений.

Операционные погрешности вычислений на микрокалькуляторах связаны с ограниченной разрядностью операндов, определяемой конструкцией запоминающих устройств. В частности, индикатор микрокалькулятора высвечивает десятичные представления чисел с фиксированным максимальным числом r разрядов мантиссы (рабочей разрядностью). Результат вычислений, содержащий большее число разрядов, автоматически округляется до r разрядов по способу, предусмотренному конструкцией микрокалькулятора. Простейшими из них являются округление отбрасыванием и округление по дополнению.

При округлении *отбрасыванием* в результате операции сохраняют без изменения первых r разрядов мантиссы, причем абсолютная погрешность округленного числа не превышает единицы последнего разряда ($\Delta < 10^{1-r}$). При округлении *по дополнению* содержимое r -го разряда увеличивают на единицу, если отбрасываемая часть больше половины этой единицы, и не изменяют в противном случае. Абсолютная погрешность округления по дополнению не превышает половины единицы последнего разряда округленного числа ($\Delta < 5 \cdot 10^{-r}$).

Несмотря на малость погрешности одного округления, ее влияние при последующих операциях может привести к значительной погрешности результата вычислений. Например, результат непосредственного вычисления арифметического выражения $((-100 : 3 + + 10) \times 6 + 140) \cdot 10^8$ на некоторых микрокалькуляторах с $r = 8$ равен единице, хотя его точное значение равно нулю. Причина этой ошибки связана с погрешностью округления результата деления и устраняется при предварительном приведении выражения в скобках к общему знаменателю и его сокращении.

Ограниченнная разрядность операндов приводит к нарушению законов ассоциативности, коммутативности и дистрибутивности, справедливых для точных чисел. Например, при умножении на микрокалькуляторе с $r = 8$ и естественной формой представления чисел, переставляя сомножители, получаем

$$| C | 0,001 | \times | 0,002 | \times | 0,004 | \times | 1000 | \times | 100\ 000 | = | (0);$$

$$| C | 1000 | \times | 0,001 | \times | 0,002 | \times | 0,004 | \times | 100\ 000 | = | (1);$$

$$| C | 1000 | \times | 100\ 000 | \times | 0,001 | \times | 0,002 | \times | 0,004 | = | (\infty).$$

Поэтому, умножая на микрокалькуляторе несколько отличающихся по порядку операндов, целесообразно представить их в показательной форме, умножить мантиссы и сложить порядки – в этом случае погрешность произведения будет минимальной. Сложение нескольких операндов следует начинать с наименьших по порядку чисел. При сложении двух операндов, отличающихся по порядку на r и более разрядов, результат будет равен большему числу, по отношению к которому меньшее число можно рассматривать как относительный машинный нуль.

Многие методы вычислений приводят теоретически к точному результату лишь при бесконечном числе операций. Так как практически выполнимо конечное число операций, то возникает остаточная (*методическая*) погрешность результата вычислений. Ее можно уменьшить, увеличив число операций, но при этом возрастет операционная составляющая погрешности результата. Кроме того, при любом числе операций их результат не может содержать числа верных цифр, большего рабочей разрядности r .

Микропрограммы вычисления элементарных функций, хранящиеся в ПЗУ микрокалькулятора, обычно составляют на основе методов последовательных приближений, и погрешности вычисления таких функций в основном являются методическими. Однако пользователь не может их уменьшить увеличением числа операций и должен рассматривать эти погрешности как операционные. Обычно их указывают в паспорте микрокалькулятора – они составляют несколько единиц последнего (иногда и предпоследнего) разряда мантиссы на индикаторе. Некоторые микрокалькуляторы (например, "Электроника Б3-36") вычисляют элементарные функции с высвечиванием числа значащих цифр, меньшего рабочей разрядности r .

В некоторых микрокалькуляторах (например, "Электроника Б3-19М" и "Электроника С3-15") вычисления выполняются с большим числом разрядов, чем высвечивается на индикаторе. Это существенно снижает операционные погрешности, в особенности при выполнении последовательности операций. Однако вследствие накопления влияния погрешностей при большом числе операций погрешность результата и в этом случае может оказаться значительной.

Результат вычислений можно рассматривать как функцию $x(a_1, \dots, a_n)$ операндов a_i и разложить в ряд Тейлора. Ограничивааясь линейными членами такого разложения при малых погрешностях операндов, получают оценку относительной погрешности

$$\delta x \approx \sum_{i=1}^k \frac{a_i}{x} \frac{\partial x}{\partial a_i} \delta a_i = \sum_{i=1}^k S_i \delta a_i, \quad (1.7)$$

где величины S_i называют *чувствительностями* результата к изменениям исходных данных (операндов).

Непосредственно по формуле (1.7) можно учесть лишь влияние малых изменений исходных данных, но с ее помощью удобно оценивать чувствительности результатов каждой операции к погрешностям операндов. Например, для суммы $x = a + b$ чувствительности $S_a = a/(a+b)$ и $S_b = b/(a+b)$; для произведения $x = ab$ чувствительности $S_a = 1$ и $S_b = 1$; для логарифма $x = \ln a$ чувствительность $S_a = 1/\ln a$.

Наиболее чувствителен к погрешностям операндов результат вычитания двух близких чисел, так как в этом случае знаменатели чувствительностей $S_a = a/(a-b)$ и $S_b = b/(a-b)$ оказываются весьма малыми. Поэтому при вычитании близких чисел для уменьшения погрешности результата стремятся так изменить арифметическое выражение, чтобы устранить это вычитание.

Примером может служить формула (1.2) при $a_1^2 \gg a_0 a_2$. Запишем эту формулу в упрощенной форме

$$x_{1,2} = \pm (|\alpha| \pm \sqrt{\alpha^2 - \beta}),$$

где знак перед выражением в скобках выбирается в соответствии со знаком коэффициента α . При $\alpha^2 \gg \beta$ корни соответствующего квадратного уравнения вещественны, но один из них равен результату вычитания близких чисел

$$x_1 = \pm (|\alpha| - \sqrt{\alpha^2 - \beta}),$$

и его относительная погрешность может оказаться чрезмерно большой. При $\alpha^2 > 10^8 \beta$ значение β является машинным нулем относительно α^2 , и при вычислениях на микрокалькуляторе с $r = 8$ получим результаты вычислений по формуле (1.2), равные $x_1 = 0$ и $x_2 = 2\alpha$.

Более точные результаты получим, умножив и разделив выражение для вычисления x_1 на значение $x_2 = \pm (\lvert \alpha \rvert + \sqrt{\alpha^2 - \beta})$. В этом случае значение $x_1 = \beta/x_2$ всегда будет отличаться от нуля при ненулевом значении β и погрешность определения корня существенно уменьшится. Поэтому при $a_1^2 > a_0 a_2$, когда значение одного из вещественных корней квадратного уравнения близко к нулю, вместо программ 1/21 и 2/34 целесообразно использовать следующие программы, составленные с учетом рассмотренного преобразования.

Программа 3/21. Решение квадратного уравнения с повышенной точностью.

F5	\uparrow	F6	\div	2	\div	$/-$	P2	F4	\uparrow	F6	\div
P3	\uparrow	F2	x^2	$-$	$x \geq 0$	F \div	$\sqrt{ }$	2	C/P	$/-$	$\sqrt{ }$
P8	F2	$x < 0$	5	\uparrow	F8	$-$	BП	P6	\uparrow	F8	$+$
P7	\uparrow	F3	XY	\div	7	C/P					

Инструкция: ($a_0 = P4$, $a_1 = P5$, $a_2 = P6$) B/O C/P $PX = 7$, $PY = x_1$, $P7 = x_2$ или $PX = 2$, $PY = \text{Im } x_{1,2}$, $P2 = \text{Re } x_{1,2}$.

Программа 4/34. Решение квадратного уравнения с повышенной точностью

ИП1	$/-$	ИП2	\div	2	\div	П4	x^2	ИП0	ИП2
\div	П5	$-$	$x < 0$	20	\uparrow	$/-$	$\sqrt{ }$	4	C/P
$\sqrt{ }$	П8	ИП4	$x < 0$	29	ИП8	$-$	BП	31	ИП8
$+$	П7	ИП5	XY	\div	7	C/P			

Инструкция: ($a_0 = P0$, $a_1 = P1$, $a_2 = P2$) B/O C/P $PX = 7$, $PY = x_1$, $P7 = x_2$ или $PX = 4$, $PY = \text{Im } x_{1,2}$, $P4 = \text{Re } x_{1,2}$.

Комплексно-сопряженные корни или один из вещественных корней по этим программам вычисляются с той же точностью, что и по программам 1/21 и 2/34, но вычисление близкого к нулю вещественного корня выполняется со значительно большей точностью. Например, при решении уравнения $x^2 + 20000x \pm 1 = 0$ по программам 1/21 и 2/34 получим $x_2 = -20000$; $x_1 = 0$, а по программам 3/21 и 4/34 получим $x_2 = -20000$; $x_1 = \mp 5 \cdot 10^{-5}$. Для уравнения $x^2 + 1000x + 1 = 0$ по программам 1/21 и 2/34 вычисляются корни $x_2 = -999,99899$ и $x_1 = -1,01 \cdot 10^{-3}$ (с ошибочной третьей цифрой мантиссы), а по программам 3/21 и 4/34 вычисляются $x_2 = -999,99899$ и $x_1 = -1,000001 \cdot 10^{-3}$.

Полную погрешность результата вычислений удобно оценивать с помощью графа распространения относительных или абсолютных погрешностей. Вершинам источникам графа распространения относительных погрешностей соответствуют погрешности δ_i исходных данных a_i и операционные или методические погрешности δ результатов операций, вершине-стоку — полная погрешность результата вычислений, а промежуточным вершинам — выполняемые операции. Веса дуг такого графа равны чувствительностям результата операции к погрешностям операндов. Полная погрешность вычислений определяется суммой произведений погрешностей промежуточных результатов на веса сходящихся к ним дуг графа.

Пример подобного графа для вычислений по (1.1) показан на рис. 15, а вычисленная по этому графу полная погрешность результата

$$\delta x = (x \delta_4 + a \delta a + (x - a)(\delta_3 + \delta b - (\delta_2 + 0,5(\delta_1 + \delta c/\ln c))))/x.$$

Предположим, что операнды $a = 7$; $b = 5$ и $c = 2$ определены с точностью 1 %, а погрешности операций (рис. 15) $\delta_1 = 10^{-6}$; $\delta_2 = \delta_3 = \delta_4 = 10^{-7}$. В этом случае $x = 7 - 5/\sqrt{\ln 2} = 0,9943881$ и $\delta x = 1,62 \cdot 10^{-3}$. Следовательно, точное значение результата вычислений лежит в интервале, ограниченном значениями $x_{\min} = x - \Delta x = x(1 - \delta x) = 0,992771$ и $x_{\max} = x(1 + \delta x) = 0,995999$, а вычисленное значение x содержит только две верных цифры.

Пусть $a = 6(1 \pm 0,01)$ при сохранении прежними остальных исходных данных. В этом случае $x = -5,6119 \cdot 10^{-3}$; $\delta x = 4,645$, и точное значение результата лежит в интервале,

ограниченном значениями $x_{\min} = -3,167917 \cdot 10^{-2}$ и $x_{\max} = 2,045537 \cdot 10^{-2}$. Основная причина погрешности результата, не содержащего ни одной верной цифры, связана с вычитанием близких чисел.

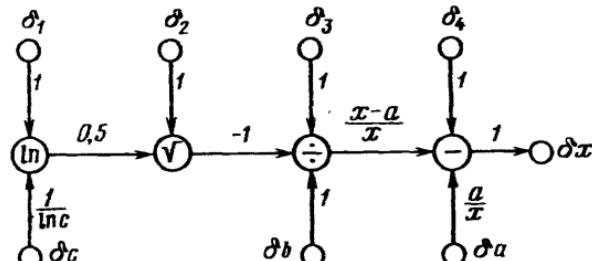


Рис. 15

Формула (1.7) справедлива только при весьма малых значениях приращений операндов. Если это условие нарушается, то прибегают к учету большего числа членов ряда Тейлора или используют другие способы учета полной погрешности, например вычисляют граничные значения результата при наихудших сочетаниях знаков изменений исходных данных, приводящих к наибольшей погрешности результата.

В последнем случае влияние изменений операнда a_i на результат вычислений x оценивают по знаку производной dx/da_i . При положительной (отрицательной) производной значение операнда $a_i \max(a_i \min)$ соответствует x_{\max} и $a_i \min(a_i \max)$ соответствует x_{\min} . Согласно этим соотношениям несложно определить интервал, в котором находится точное значение результата вычислений. Например, при вычислениях по формуле (1.1) производные $dx/da = 1$, $dx/db = -1/\sqrt{\ln c} < 0$ и $dx/dc = b/(2c \ln c \sqrt{\ln c}) > 0$. Следовательно, $x_{\min} = x(a_{\min}, b_{\max}, c_{\min})$ и $x_{\max} = x(a_{\max}, b_{\min}, c_{\max})$. При $a = 6(1 \pm 0,01)$; $b = 5(1 \pm 0,01)$; $c = 2(1 \pm 0,01)$ по формуле (1.1) вычисляем $x_{\max} = 6,01 - 4,99/\sqrt{\ln 2,01} = 3,78456 \cdot 10^{-2}$ и $x_{\min} = 5,99 - 5,01/\sqrt{\ln 1,99} = -4,95085 \cdot 10^{-2}$. Оценив операционные погрешности результата вычислений по графу, представленному на рис. 15, при $\delta a = \delta b = \delta c = 0$ убеждаемся, что их влияние не оказывается на цифрах полученных граничных оценок. Сравнение этих результатов с полученными ранее свидетельствует о том, что для рассмотренного примера вычисления по формуле (1.7) при изменении исходных данных на 1 % дают грубую оценку.

В заключение отметим, что число верных цифр в результате вычислений при решении инженерных задач может оказаться большим числа верных цифр в измеренном значении соответствующей физической величины. В этом случае в результате вычислений следует сохранить число цифр, равное или на единицу большее числа верных цифр, которые можно получить при измерении соответствующей физической величины или ее среднестатистическом определении с учетом технологического разброса при изготовлении физических объектов.

1.5. Оптимизация программ вычислений

Любая задача, связанная с вычислениями, в принципе может быть решена с помощью карандаша и бумаги, и вычислительные средства лишь ускоряют выполнение вычислений с заданной или достижимой точностью. Поэтому основной критерий эффективности применения микрокалькуляторов определяется сокращением затрат времени на составление и выполнение алгоритма решения задачи. Затраты времени на составление программного представления алгоритма на входном языке микрокалькулятора (включая выбор метода, начального варианта алгоритма и оптимизацию программы) зависят от сложности задачи, уровня математической подготовки пользователя и знания им приемов программирования. Эти затраты существенно сокращаются при наличии библиотеки готовых программ решения типовых задач на входном языке используемого микрокалькулятора.

В такую библиотеку не следует включать элементарные программы, составление которых требует меньше времени, чем их поиск. Программы библиотеки должны отвечать основному критерию качества (*оптимальности*), соответствующему минимальным затратам времени на выполнение программы

$$T_B = T_K + T_M + T_D + T_I,$$

состоящим из времени ввода операторов программы нажатиями клавиш T_K , времени T_M выполнения операторов микрокалькулятором, дополнительного времени T_D выполнения вспомогательных операций и времени T_I исправления ошибок, допущенных при выполнении программы. Составление оптимальной программы, особенно для программируемых микрокалькуляторов, связано со значительными затратами времени T_C , но в общем времени решения задачи $T = T_B + T_C/k$ доля этих затрат тем меньше, чем большее число k раз выполняется программа.

Составляющие T_K , T_M и T_I при вычислениях в обычном режиме уменьшаются при уменьшении длины (числа операторов) программы, но иногда приходится увеличивать длину программы для сокращения составляющей T_D , например, при необходимости регистрации результатов вычислений на вычислительных бланках и их считывании для ввода в микрокалькулятор.

Значительное время затрачивается на ввод многозначных операндов, каждый знак которых набирается нажатием клавиши. Поэтому сокращение числа вводов операндов при использовании особенностей лексики и синтаксиса входного языка может значительно уменьшить время выполнения программы. Например, при построении зависимости $f(\omega) = \omega^2 + a/\omega$ с переменной ω и коэффициентом a на входном языке с алгебраическим синтаксисом можно составить программу $|C| |a| \div | \omega | + | \omega | x^2 | = |$, длина которой зависит от числа операторов набора коэффициента a и дважды набираемой переменной ω . Длину программы можно сократить, занеся значение a в регистр памяти и используя особенности входного языка для обеспечения однократного ввода переменной ω . Эти условия для микрокалькуляторов "Электроника Б3-18М" и "Электроника Б3-37" реализует программа $|C| |\omega| x | = | \div | X - P | + | \leftrightarrow | X - P | = |$, для микрокалькулятора "Электроника Б3-36" – программа $|C| |\omega| x^2 | + | (| \leftrightarrow | \div | IP | \leftrightarrow |) | = |$, а для микрокалькулятора "Электроника Б3-19М" с обратным синтаксисом входного языка – программа $|\omega| \uparrow | m \rightarrow x | XY | \div | XY | x^2 | + |$.

Иногда затраты времени уменьшаются (а точность результата повышается) при увеличении длины программы за счет ввода операторов, более быстро выполняемых микрокалькулятором. Так, при возведении операндов в небольшие целые положительные и отрицательные степени вместо оператора X^Y или Y^X целесообразно вводить фрагменты вида $|a| x | = | = | \dots$ или $|a| \div | = | = | \dots$, допустимые в большинстве входных языков с алгебраическим синтаксисом.

Таким образом, оптимизация программ для обычного режима вычислений в основном сводится к рациональному выбору алгоритма, обеспечивающего эффективное использование лексики входного языка и его синтаксиса, определяющего правила работы операционного устройства микрокалькулятора.

Значительно более сложна оптимизация программ автоматических вычислений, допустимая длина которых ограничена емкостью программной памяти. Во входных языках предусмотрены различные средства управления программой, но время T_M непосредственно не связано с длиной программы, определяющей время T_K ввода программы в программную память. Длина неразветвленных частей программ автоматических вычислений также сокращается использованием особенностей лексики входного языка и правил работы операционного стека микрокалькулятора. В частности, при использовании микрокалькуляторов с входным языком МК21 следует учитывать сохранение содержимого регистра Y после выполнения всех функциональных операторов, кроме оператора e^{jx} . Например, арифметическое выражение $\omega^2 + a/\omega$ при $a = P2$ и $\omega = PX$ с учетом этой особенности можно вычислить при помощи фрагмента $| \uparrow | F2 | \div | 1/x | XY | x^2 | + |$.

Особенности вычисления оператора e^{jx} также можно использовать для сокращения длины программы, например, для вычисления выражения $(\sin a)b$ при $a = PX$ и $b = P2$ вместо фрагмента $|\sin| \uparrow |F2| \times |$ целесообразно использовать фрагмент $|e^{jx}| F2 | \times |$.

Не следует забывать и о "пунктуационном" правиле смещения операционного стека "вверх" при наборе операндов. Это правило позволяет записывать однозначные (а на входном языке МК21 и двузначные) операнды непосредственно в текст программы без увеличения ее длины. Например, выражение $(1,52x - 7)/6$ при $x = PX$ на входном языке МК21 целесообразно представить фрагментом $|\uparrow| F2 | \times | 7 | - | 6 | \div |$, а на языке МК34 – фрагментом $|ИП2| \times | 7 | - | 6 | \div |$, где $1,52 = P2$.

Длина программы автоматических вычислений, содержащей n одинаковых фрагментов из m операторов, сокращается при вынесении такого фрагмента в подпрограмму, если выполняется условие

$$mn > m + 1 + 2n, \quad (1.8)$$

так как каждая подпрограмма из m операторов оканчивается оператором В/О, а на месте каждого из n исходных фрагментов записывают два оператора (ПП и передачи управления).

Длина программы с последовательностью n одинаковых фрагментов из m операторов сокращается при охвате такого фрагмента замкнутым циклом, если выполняется условие

$$inn > n + k, \quad (1.9)$$

где k – число дополнительных операторов, необходимых для организации цикла. В программах на входном языке МК34 охватываемый циклом фрагмент дополняют операторами $|LN| A |$ с адресом A первого оператора фрагмента и занесением числа n выполнений вычислений в цикле (итераций) в регистр $N = 0, 1, 2$ или 3 . В программах на входном языке МК21 подобный цикл организуют с помощью фрагмента $|FN| 1 | - | PN | x = 0 | A |$ с исходным содержимым счетчика итераций $n = PN$, оператором A передачи управления началу охваченного циклом фрагмента и $k = 6$.

Длину программы на входном языке МК21 часто удается сократить при использовании кольцевого стека памяти. Сохранение содержимого этого стека при повторных выполнениях программы обеспечивает фрагмент вида $|FN| \rightarrow |PN|$, где N -й регистр ЗУПВ предназначен для перезаписи содержимого регистров стека при его повороте и может использоваться для хранения дополнительного операнда. Если после выполнения программы стек повернулся не полностью, то в программу следует ввести дополнительно соответствующее число операторов поворота стека. Значительные возможности сокращения длины программы автоматических вычислений обеспечивают операторы косвенной адресации во входном языке МК34.

Об относительных затратах времени на выполнение микрокалькуляторами различных операторов можно судить по данным табл. 4, но они могут отличаться для микрокалькуляторов различных выпусков и даже одного выпуска.

ТАБЛИЦА 4

Ориентировочное время¹ выполнения основных операций микрокалькуляторами "Электроника Б3-21" и "Электроника Б3-34" первых выпусков²

Операция	Время, с	
	Б3-21	Б3-34
1	2	3
Набор десятичного знака	0,17	0,3
Обращения к памяти (вызов или засылка)	0,17	0,3
Операции над содержимым ОУ (XY, ↑, BX, →)	0,17 (0,3 ³)	0,3

1	2	3
Арифметические операции	0,17 (0,3 ³)	0,3
Вычисление x^2 , \sqrt{x} , $1/x$	0,15 (0,4 ³)	0,3
Вычисление X^y	2,8	2,5
Вычисление $\ln x$, e^x , $\ln x$, 10^x	1,7	0,9
Вычисление тригонометрических функций	1,4	1,3–1,5 ⁴
Вычисление обратных тригонометрических функций	—	1,3–1,5 ⁴
Обращение к подпрограмме	0,6	0,8
Выполнение оператора условного перехода	0,3	0,4
Выполнение оператора безусловного перехода	0,2	0,3
Выполнение переходов в цикле с программной реализацией счетчика итераций	1,0	1,45
Выполнение переходов в цикле с оператором цикла	—	0,4
Косвенное обращение к регистрам памяти	—	0,5

¹ Возможны отклонения до 20 % для различных образцов микрокалькуляторов.

² Данные таблицы можно использовать для оценки времени выполнения программы автоматических вычислений без циклов с неопределенным числом итераций.

³ При нулевых значениях операндов.

⁴ В зависимости от положения переключателя Р–Г.

При оптимизации разветвленных программ автоматических вычислений приходится искать компромисс между минимальной длиной программы, обеспечивающей минимальные затраты времени на ввод программы в программную память и исправление возможных ошибок, и максимальной длиной, допустимой емкостью программной памяти и обеспечивающей минимальное время выполнения программы. Следовательно, для программ, предназначенных для задач с однократным выполнением программы за относительно небольшое время, критерием оптимальности является ее минимальная длина, тогда как для программ, предназначенных для решения задач с многократными повторными выполнениями программы или большим временем ее выполнения, критерий оптимальности заключается в минимальном времени ее выполнения.

При пуске программы автоматических вычислений нажатием клавиши С/П вначале "просматриваются" следующие свободные ячейки программной памяти (что приводит к дополнительным потерям времени) и только после этого начинается выполнение программы. Время вычислений в этом случае сокращают нажатием клавиш В/О и С/П, но можно ограничиться нажатием клавиши В/О только для первого пуска. Для этого достаточно заменить оператор С/П фрагментом С/П БП Р0 на входном языке МК21 или фрагментом С/П БП 00 (или С/П БП в конце программы) на входном языке МК34. В этом случае при повторных пусках программы оператор БП будет автоматически передавать управление первому оператору программы.

При многократных выполнениях программы с изменением переменных по заданному закону их вычисление также целесообразно автоматизировать, вводя оператор присваивания вида $x = f(x)$ в начале программы или после оператора С/П. Например, при равномерном изменении переменной x с шагом Δx в интервале $x \geq x_0$, значения x_0 и Δx заносят в память (например, в регистры 7 и 8) и оканчивают программу фрагментом | С/П | F7 | \uparrow | F8 | + | Р7 | БП | Р0 |. В этом случае для вычисления очередного результата достаточно нажать клавишу С/П, после чего будет вычислено значение $x_i = x_{i-1} + \Delta x$ и программа будет выполнена при этом значении переменной.

Потери времени на выполнение вспомогательных операций при использовании программируемых микрокалькуляторов уменьшаются при повышении удобства пользования программой – рациональном размещении исходных данных и результатов вычисле-

ний в памяти и высвечивании на индикаторе информации о характере полученных результатов. В частности, целесообразно размещать часто вызываемые или вводимые данные в регистры памяти, для обращения к которым необходимо нажимать клавиши, расположенные близко друг к другу, при многократных повторных выполнениях программы целесообразно размещать исходные данные или результаты вычислений в регистрах X и Y операционного стека – в этом случае для вызова содержимого регистра Y достаточно нажать клавишу XY .

Иногда целесообразно объединять несколько несложных программ в одну. В этом случае для пуска нужной части программы можно организовать автоматический поиск ее начала с помощью условных операторов, проверяющих коды частей программы, вводимые в регистр X . В некоторых случаях целесообразно использовать полуавтоматический режим вычислений, при котором программа останавливается после каждого вычисления промежуточных результатов для их регистрации на вычислительном бланке.

В тех случаях, когда программу не удается разместить в программной памяти, приходится использовать несколько последовательно выполняемых программ (пакет), что увеличивает время решения задачи за счет увеличения времени ввода программ. Для сокращения затрат времени при пакетном решении задачи следует так размещать в памяти результаты вычислений, чтобы они могли быть непосредственно использованы при выполнении следующей программы пакета в качестве исходных данных.

Пакет программ приходится использовать и тогда, когда число регистров памяти недостаточно для хранения исходных данных и результатов вычислений, и задачу приходится решать по частям с меньшими числами операндов. В подобных случаях следует попытаться уменьшить количество программ в пакете, уменьшая требуемое число регистров памяти за счет уменьшения числа буферных регистров, максимально используя регистры операционного стека, останавливая программу для вывода последовательно вычисляемых результатов, записывая операнды в текст программы или нормируя их.

Число буферных регистров, нужных для хранения промежуточных результатов, можно уменьшить, используя одни и те же регистры памяти или регистры операционного стека для хранения последовательно вычисляемых промежуточных результатов.

В текст программы целесообразно заносить коэффициенты с небольшим числом знаков, используя различные приемы для сокращения числа операторов набора операндов: например, записывая операторы $|3|1/x$ вместо $|0|, |3|3|3|\dots$, операторы $|4|1/x|x^2|$ вместо $|0|, |6|2|5|$, операторы $|2|\sqrt{|}$ вместо $|1|, |4|1|4|\dots$, операторы $|1|e^x|$ вместо $|2|, |7|1|8|\dots$ и т. д. Подобные приемы целесообразно использовать и при выполнении программ в обычном режиме или при вводе исходных данных.

Нормирование заключается в таком предварительном изменении значений операндов (с учетом влияния этого изменения на результат вычислений), при котором уменьшается число знаков (например, при удачном выборе размерности физических величин) или уменьшается число исходных данных (например, при делении числителя и знаменателя отношения многочленов на один из коэффициентов). Нормирование целесообразно использовать и при вычислениях в обычном режиме.

В качестве иллюстрации составления оптимальных программ рассмотрим вычисление алгебраического многочлена вида

$$A(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

с вещественными коэффициентами и аргументом. Наименьшее число операций соответствует представлению такого многочлена арифметическим выражением

$$A(x) = (\dots (a_n x + a_{n-1}) x + \dots + a_1) x + a_0. \quad (1.10)$$

вычисляемым n -кратным выполнением итерационного цикла по формуле

$$A_k = A_{k-1} x + a_{n-k}; k = 1, 2, \dots, n,$$

где $A_0 = a_n$ и $A_n = A(x)$. Вычисления по формуле (1.10) на инженерных микрокалькуляторах

ляторах с алгебраическим синтаксисом входного языка сводятся к записи в память значения x , коэффициента a_n в регистр X и n -кратному выполнению программы $|x| \text{ ИП} | + | a_{n-k}$ с набором $a_{n-k} = a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_1, a_0$ при каждом выполнении программы. После набора a_0 вводят оператор $| = |$, что приводит к вычислению искомого значения $A(x)$. Вычисления по этой формуле на инженерном микрокалькуляторе (например, "Электроника Б3-19М") с обратным синтаксисом входного языка сводятся к занесению a_n и x соответственно в регистр X и память с последующим выполнением n раз программы $|m \rightarrow x| \times |a_{n-k}| + |$.

Аналогичную программу, например, $| \uparrow | F7 | \times | a_{n-k} | + |$ при $x = P7, a_n = PX$, можно использовать и для вычислений многочлена в обычном режиме на программируемом микрокалькуляторе с входным языком МК21. Оптимальность программы автоматического вычисления многочленов зависит от ее назначения. Если критерием оптимальности является минимальное время выполнения программы, то ее следует составлять без переходов. При выполнении этого условия вследствие ограниченной емкости программной памяти можно вычислять многочлены с максимальной степенью $n = 7$.

Программа 5/21. Вычисление многочлена степени $n = 7$ вещественного аргумента с минимальным временем счета

P8	\uparrow	F7	X	\uparrow	F2	\rightarrow	P2	+	\uparrow	F8	X
\uparrow	F2	\rightarrow	P2	+	\uparrow	F8	X	\uparrow	F2	\rightarrow	P2
+	\uparrow	F8	X	\uparrow	F2	\rightarrow	P2	+	\uparrow	F8	X
\uparrow	F2	\rightarrow	P2	+	\uparrow	F8	X	\uparrow	F2	\rightarrow	P2
+	\uparrow	F8	X	\uparrow	F2	\rightarrow	P2	+	C/P	BП	P0

Инструкция: ($a_0 = P2, a_1 = C1, a_2 = C2, \dots, a_6 = C6, a_7 = P7$) $x = PX$ (B/O) C/P $PX = A(x)$.

Контрольный пример: многочлен $A(2) = 7x^7 + 6x^6 + 5x^5 + 4x^4 + 3x^3 + 2x^2 + x + 1 = 1539$ по программе вычисляется за 9 с.

Эту программу можно использовать и при $n < 7$, приняв равными нулю коэффициенты при высших степенях, но время счета (см. табл. 4) в этом случае возрастает, например, при вычислении многочлена $A(2) = 4x^4 + 3x^3 + 2x^2 + x + 1 = 99$ до 12 с. Поэтому при $n < 7$ целесообразно сокращать программу, используя для хранения коэффициентов регистры ЗУПВ.

Программа 6/21. Вычисление многочлена степени $n = 4$ с вещественным аргументом при минимальном времени счета

P6	\uparrow	F4	X	\uparrow	F3	+	\uparrow	F6	X	\uparrow	F2
+	\uparrow	F6	X	\uparrow	F8	+	\uparrow	F6	X	\uparrow	F7
+	C/P	BП	P0								

Инструкция: ($a_0 = P7, a_1 = P8, a_2 = P2, a_3 = P3, a_4 = P4$) $x = PX$ (B/O) C/P $PX = A(x)$.

Контрольный пример: многочлен $A(2) = 4x^4 + 3x^3 + 2x^2 + x + 1 = 99$ по программе вычисляется за 4 с.

Если критерием оптимальности является минимальная длина программы (при ее немногократных повторениях или возможности использования в качестве фрагмента более сложной программы), то целесообразно организовать, в первую очередь, итерационные циклы с вводом большего числа исходных данных перед каждым выполнением программы.

Программа 7/21. Вычисление многочлена степени $n < 7$ вещественного аргумента с минимальным числом операторов

F7	\uparrow	F8	X	\uparrow	,	F2	\rightarrow	P2	+	P7	F4	1
-	P4	x = 0	P0		C/P							

Инструкция: ($a_0 = P2, a_1 = C1, \dots, a_6 = C6$) $7 = P4, a_7 = P7, x = P8$ B/O C/P $PX = 0, P7 = A(x)$.

Контрольный пример: многочлен $A(2) = 7x^7 + 6x^6 + 5x^5 + 4x^4 + 3x^3 + 2x^2 + x + 1 = 1539$ по программе вычисляется за 18 с. В связи с медленным выполнением операций

над нулевыми значениями операндов многочлен $A(2) = 4x^4 + 3x^3 + 2x^2 + x + 1 = 99$ по этой программе решается за 20 с, но при $n < 7$ сократить ее длину не удается.

При вычислениях многочленов степени $n > 7$ ограничения, накладываемые емкостью программной памяти, можно устранить организацией циклов и обращений к подпрограммам, но в памяти микрокалькулятора с входным языком МК21 допустимо хранить не более 12 коэффициентов, так как один регистр необходим для хранения значения аргумента. Так как обращения к памяти выполняются быстрее, чем итерационные циклы (см. табл. 4), то при $n = 11$ оптимальной по времени счета можно считать, например, следующую программу.

Программа 8/21. Вычисление многочлена степени $n < 11$ вещественного аргумента

P3	↑	F8	X	↑	F7	ПП	6	F6	ПП	6	F5
ПП	6	F4	ПП	6	ПП	P6	ПП	P6	ПП	P6	ПП
P6	ПП	P6	ПП	P6	F2	→	P2	+	C/П	BП	P0
F2	→	P2	+	↑	F3	X	↑	B/O			

Инструкция: ($a_0 = P2, a_1 = C1, \dots, a_6 = C6, a_7 = P4, a_8 = PS, a_9 = P6, a_{10} = P7, a_{11} = P8$) $x = PX$ (B/O) C/П $PX = A(x)$.

Контрольный пример: многочлен $A(2) = 11x^{11} + 10x^{10} + 9x^9 + 8x^8 + 7x^7 + 6x^6 + 5x^5 + 4x^4 + 3x^3 + 2x^2 + x + 1 = 40\ 963$ по программе вычисляется за 16 с. Отметим для сравнения, что многочлен $A(2) = 7x^7 + 6x^6 + 5x^5 + 4x^4 + 3x^3 + 2x^2 + x + 1 = 1539$ по этой программе вычисляется за 20 с, а многочлен $A(2) = 4x^4 + 3x^3 + 2x^2 + x + 1 = 99$ – за 22 с.

При необходимости дополнительного уменьшения времени счета в этой программе операторы ПП 6 можно заменить фрагментами $\uparrow F3 \times \uparrow$, что уменьшит время выполнения программы при $n = 11$. Если $n < 11$, то для этой цели следует исключить фрагмент, начиная со второго оператора \uparrow программы и оканчивая оператором перед вызовом из памяти n -го коэффициента, и соответственно изменить адреса обращений к подпрограмме. При необходимости уменьшения числа операторов рассматриваемой программы следует организовать вычисления в итерационном цикле, что приведет к увеличению времени счета.

Максимальную степень вычисляемого многочлена можно увеличить на единицу при занесении коэффициента a_{12} в регистр X перед каждым выполнением программы, что несколько увеличивает время ввода исходных данных при использовании следующей программы.

Программа 9/21. Вычисление многочлена степени $n = 12$ вещественного аргумента

↑	F3	X	↑	F8	ПП	ВП	F7	ПП	ВП	F6	ПП
ВП	F5	ПП	ВП	F4	ПП	ВП	ПП	PВП	ПП	PВП	ПП
PВП	ПП	PВП	ПП	PВП	ПП	PВП	F2	→	P2	+	C/П
БП	P0	F2	→	P2	+	↑	F3	X	↑	B/O	

Инструкция: ($a_0 = P2, a_1 = C1, \dots, a_6 = C6, a_7 = P4, a_8 = PS, a_9 = P6, a_{10} = P7, a_{11} = P8$) $x = P3, a_{12} = PX$ (B/O) C/П $PX = A(x)$.

Контрольный пример: многочлен $A(2) = 12x^{12} + 11x^{11} + 10x^{10} + 9x^9 + 8x^8 + 7x^7 + 6x^6 + 5x^5 + 4x^4 + 3x^3 + 2x^2 + x + 1 = 90\ 115$ по программе вычисляется за 18 с.

Степень вычисляемого многочлена можно увеличить еще на единицу при $a_{13} = 1$. К такому виду можно нормировать любой многочлен степени 13 делением всех его коэффициентов на a_{13} при вводе исходных данных.

Программа 10/21. Вычисление нормированного ($a_{13} = 1$) многочлена степени $n = 13$ вещественного аргумента

↑	F3	XY	+	X	↑	F8	ПП	F7	F7	ПП	F7
F6	ПП	F7	F5	ПП	F7	F4	ПП	F7	ПП	FВП	ПП
FВП	ПП	FВП	ПП	FВП	ПП	FВП	ПП	F ВП	F2	→	P2
+	C/П	БП	P0	F2	→	P2	+	↑	F3	X	↑
											B/O

Инструкция: ($a_0 = P2, a_1 = C1, \dots, a_6 = C6, a_7 = P4, a_8 = PS, a_9 = P6, a_{10} = P7, a_{11} = P8$) $x = P3, a_{12} = PX$ (B/O) C/П $PX = A(x)$.

Контрольный пример: многочлен $A(2) = x^{13} + 12x^{12} + 11x^{11} + 10x^{10} + 9x^9 + 8x^8 + 7x^7 + 6x^6 + 5x^5 + 4x^4 + 3x^3 + 2x^2 + x + 1 = 98\ 307$ по программе вычисляется за 19 с.

Если степень многочлена $n > 13$, то его можно представить разложением вида

$$A(x) = \dots + (a_{2m+1}x^m + \dots + a_{m+1})x^{m+1} + (a_m x^m + \dots + a_0), \quad (1.11)$$

вычислить по приведенным программам множители в скобках, а затем сложить все члены. Альтернативный способ заключается в вычислении многочлена по формуле (1.10) в полуавтоматическом режиме с вводом в регистр X очередного коэффициента перед каждым выполнением программы. Этот способ реализован в следующей программе со счетчиком вводимых коэффициентов для удобства их контроля.

Программа 11/21. Вычисление многочлена произвольной степени n вещественного аргумента

P2	F7	↑	F8	X	↑	F2	+	P7	F4	1	-
P4	C/P	БП	P0								

Инструкция: ($n = P4$, $a_n = P7$, $x = P8$) $a_{n-1} = PX$ В/О С/П $PX = n - 1$, $a_{n-2} = PX$ С/П $PX = n - 2, \dots, a_0 = PX$ С/П $PX = 0$, $P7 = A(x)$.

В микрокалькуляторах с входным языком МК34 емкость программной памяти не ограничивает длину неразветвленной программы, обеспечивающей вычисление многочленов с минимальным временем счета, а использование регистров операционного стека для хранения значения аргумента позволяет разместить в памяти 14 коэффициентов многочлена.

Программа 12/34. Вычисление многочлена степени $n < 13$ вещественного аргумента

↑	↑	ИПД	X	ИПС	+	X	ИПВ	+	X	
ИПА	+	X	ИП9	+	X	ИП8	+	X	ИП7	
+	X	ИП6	+	X	ИП5	+	X	ИП4	+	
X	ИП3	+	X	ИП2	+	X	ИП1	+	X	
ИП0	+	C/P	БП							

Инструкция: ($a_0 = P0$, $a_1 = P1, \dots, a_9 = P9$, $a_{10} = PA$, $a_{11} = PB$, $a_{12} = PC$, $a_{13} = PD$) $x = PX$ (В/О) С/П $PX = A(x)$.

Контрольный пример: многочлен $A(2) = 13x^{13} + 12x^{12} + 11x^{11} + 10x^{10} + 9x^9 + 8x^8 + 7x^7 + 6x^6 + 5x^5 + 4x^4 + 3x^3 + 2x^2 + x + 1 = 196\ 611$ по программе вычисляется за 14 с.

Максимальную степень многочлена можно увеличить, разместив еще два коэффициента в регистрах операционного стека и несколько усложнив ввод исходных данных.

Программа 13/34. Вычисление многочлена степени $n < 15$ вещественного аргумента

X	+	X	ИПД	+	X	ИПС	+	X	ИПВ	
+	X	ИПА	+	X	ИП9	+	X	ИП8	+	
X	ИП7	+	X	ИП6	+	X	ИП5	+	X	
ИП4	+	X	ИП3	+	X	ИП2	+	X	ИП1	
+	X	ИП0	+	C/P	БП					

Инструкция: ($a_0 = P0$, $a_1 = P1, \dots, a_9 = P9$, $a_{10} = PA$, $a_{11} = PB$, $a_{12} = PC$, $a_{13} = PD$) $x = PX$ $\uparrow \uparrow a_{14} = PX$ XY $a_{15} = PX$ (В/О) С/П $PX = A(x)$.

Контрольный пример: многочлен $A(2) = 15x^{15} + 14x^{14} + 13x^{13} + 12x^{12} + 11x^{11} + 10x^{10} + 9x^9 + 8x^8 + 7x^7 + 6x^6 + 5x^5 + 4x^4 + 3x^3 + 2x^2 + x + 1 = 917\ 507$ по программе вычисляется за 14 с.

Степень вычисляемого многочлена можно увеличить еще на единицу при его нормировании.

Программа 14/34. Вычисление нормированного ($a_{16} = 1$) многочлена степени $n = 16$ вещественного аргумента

XY	+	BX	X	XY	+	X	ИПД	+	X	
ИПС	+	X	ИПВ	+	X	ИПА	+	X	ИП9	
+	X	ИП8	+	X	ИП7	+	X	ИП6	+	
X	ИП5	+	X	ИП4	+	X	ИП3	+	X	
ИП2	+	X	ИП1	+	X	ИП0	+	C/P	БП	

Инструкция: ($a_0 = P0, a_1 = P1, \dots, a_9 = P9, a_{10} = PA, a_{11} = PB, a_{12} = PC, a_{13} = PD$) $x = PX \uparrow \uparrow a_{14} = PX XY a_{15} = PX$ (B/O) C/P $PX = A(x)$.

Контрольный пример: многочлен $A(2) = 16x^{16} + 15x^{15} + 14x^{14} + 13x^{13} + 12x^{12} + 11x^{11} + 10x^{10} + 9x^9 + 8x^8 + 7x^7 + 6x^6 + 5x^5 + 4x^4 + 3x^3 + 2x^2 + x + 1 = 983\,043$ по программе вычисляется за 15 с.

При необходимости составления программы минимальной длины целесообразно организовать циклы с использованием косвенной адресации, реализованной, например, в следующей программе.

Программа 15/34. Вычисление многочлена степени $n \leq 11$ вещественного аргумента при минимальном числе операторов

$\uparrow \quad \text{КИПД} \quad \text{ИПД} \quad 1 \quad - \quad \text{ПД} \quad \rightarrow \quad \times \quad \text{КИПД} \quad +$
 $\text{ИПД} \quad x = 0 \quad 03 \quad \text{С/П}$

Инструкция: ($a_0 = P0, a_1 = P1, \dots, a_9 = P9, a_{10} = PA, a_{11} = PB$) $n = PD \quad x = PX$ B/O C/P $PX = 0, PY = A(x)$.

Контрольный пример: многочлен $A(2) = 11x^{11} + 10x^{10} + 9x^9 + 8x^8 + 7x^7 + 6x^6 + 5x^5 + 4x^4 + 3x^3 + 2x^2 + x + 1 = 40\,963$ по программе вычисляется за 33 с.

Многочлены степени $n > 16$ можно вычислять в полуавтоматическом режиме.

Программа 16/34. Вычисление многочлена произвольной степени n вещественного аргумента

$\text{ИП7} \quad \text{ИП8} \quad x \quad + \quad \text{П7} \quad \text{КИП0} \quad \text{ИП0} \quad \text{С/П} \quad \text{БП}$

Инструкция: $n = P0, a_n = P7, x = P8, a_{n-1} = PX$ B/O C/P $PX = n - 1, a_{n-2} = PX$ C/P $PX = n - 1, \dots, a_0 = PX$ C/P $PX = 0, P7 = A(x)$.

Многие частные приемы оптимизации, не рассмотренные здесь, использованы при составлении программ, приводимых далее.

1.6. Операции над комплексными числами

Во входных языках микрокалькуляторов не предусматриваются операторы, выполняющие действия над комплексными числами. Поэтому рассмотрим программные реализации таких операций, широко используемых в радиотехнических приложениях.

Комплексное число A представимо в алгебраической, тригонометрической или показательной формах:

$$A = \operatorname{Re} A + j \operatorname{Im} A = |A| e^{j\varphi_A} = e^{\ln |A| + j\varphi_A}, \quad (1.12)$$

где $\operatorname{Re} A$ и $\operatorname{Im} A$ – вещественная и мнимая составляющие комплексного числа, а $|A|$ и $\varphi_A = \arg A$ – его модуль и аргумент (фазовый угол).

Преобразование тригонометрической формы комплексного числа в алгебраическую соответствует простым соотношениям $\operatorname{Re} A = |A| \cos \varphi_A$; $\operatorname{Im} A = |A| \sin \varphi_A$, легко реализуемым на любом микрокалькуляторе с операторами вычисления тригонометрических функций.

Алгебраическая форма преобразуется в тригонометрическую по формулам $|A| = \sqrt{\operatorname{Re}^2 A + \operatorname{Im}^2 A}$; $\varphi_A = \operatorname{arctg}(\operatorname{Im} A / \operatorname{Re} A) + \psi$, где дополнительный угол ψ уточняет значение аргумента в зависимости от знаков составляющих $\operatorname{Re} A$ и $\operatorname{Im} A$.

При расчетах на микрокалькуляторах с входным языком МК21, не содержащим операторов вычисления обратных тригонометрических функций, для их аппроксимации [20] наиболее удобны эмпирические формулы. Высокую точность (ограниченную лишь операционными ошибками) обеспечивает аппроксимирующее выражение

$$\varphi^\circ = \operatorname{arctg} x = 90x / \sqrt{\alpha + x^2 + \sqrt{\beta(\gamma + x^2)} + \sqrt{\rho(1 + x^2)}} \quad (1.13)$$

с предельной погрешностью $0,05''$ при значениях коэффициентов $\alpha = 0,8114228$, $\beta = 1,6211707$, $\gamma = 1,056546$, $\rho = 0,403225$. Если принять $\rho = 0$, то аппроксимирующее выражение (1.13) упрощается и при значениях $\alpha = 1,2117$, $\beta = 1,622281$, $\gamma = 0,971533$ абсолютная погрешность аппроксимации не превышает $2,2''$. Правая часть формулы

(1.13) при подстановке $x = z / \sqrt{1 - z^2}$ аппроксимирует функцию $\arcsin z$, а при подстановке $x = \sqrt{1 - z^2} / z$ – функцию $\arccos z$. При таких модификациях формулы изменяется операционная погрешность, но и в этом случае полная погрешность результата не превышает долей секунды.

Обычно аргумент комплексного числа определяют в интервале $[0; 360^\circ]$ или $[0; 2\pi]$. В этом случае минимальное число проверок знаков составляющих $\operatorname{Re} A$ и $\operatorname{Im} A$ обеспечивают соотношения

$$\varphi_A^\circ = \begin{cases} 90 - \arcsin(\operatorname{Re} A / |A|) & \text{при } \operatorname{Im} A \geq 0, \\ 270 + \arcsin(\operatorname{Re} A / |A|) & \text{при } \operatorname{Im} A < 0. \end{cases}$$

Эти соотношения совместно с модификацией формулы (1.13) использованы при составлении следующей программы.

Программа 17/21. Преобразование алгебраической формы комплексного числа в тригонометрическую при вычислении аргумента в интервале $[0; 360^\circ]$, или $[0; 2\pi]$ с предельной погрешностью $0,07''$, или $3,4 \cdot 10^{-7}$ рад

```
F8 ← F8 x2 ↑ F7 x2 + P8 ÷ ↑ F2
x ← F3 x ← F5 x √ + ↑ F4 +
↑ → x √ 1 + ↑ → - ↑ F8 x
√ ↑ F7 - XY ÷ 4 - /- → x < 0 P-
← ↑ x ↑ F8 √ C/P B/P P0
```

Инструкция: $(0,1885772 = P2; 9,1670712 \cdot 10^{-2} = P3, 17,684716 = P4; 126,10829 = P5; 90 \text{ или } \pi/2 = P6) \operatorname{Re} A = P7, \operatorname{Im} A = P8 \text{ (B/O) } C/P \text{ } P X = |A|, P Y = \varphi_A^\circ \text{ в градусах или радианах в зависимости от содержимого регистра 6.}$

Контрольный пример: при $A = \sqrt{3} \pm j1$ по программе вычисляется $|A| = 1,999999$ и $\varphi_A^\circ = 29,9999; 330 \text{ или } \varphi_{A \text{ радиан}} = 0,5235987; 5,759586$ (время счета около 10 с).

В радиотехнических приложениях фазовый угол обычно определяют в интервале $]-180^\circ; 180^\circ]$ или $]-\pi; \pi]$. В этом случае минимальное число проверок обеспечивают соотношения

$$\varphi_A^\circ = \begin{cases} 90 - \arcsin(\operatorname{Re} A / |A|) & \text{при } \operatorname{Im} A \geq 0, \\ -90 + \arcsin(\operatorname{Re} A / |A|) & \text{при } \operatorname{Im} A < 0. \end{cases}$$

Программа 18/21. Преобразование алгебраической формы комплексного числа в тригонометрическую при вычислении аргумента в интервале $]-180^\circ; 180^\circ]$, или $]-\pi; \pi]$ с предельной погрешностью $0,07''$, или $3,4 \cdot 10^{-7}$ рад

```
F8 ← F8 x2 ↑ F7 x2 + P8 ÷ ↑ F2
x ← F3 x ← F5 x √ + ↑ F4 +
↑ → x √ 1 + ↑ → - ↑ F8 x
√ ↑ F7 - XY ÷ ↑ F6 x ↑ → x < 0
F- F1 /- ↑ F8 √ C/P B/P P0
```

Инструкция идентична инструкции предыдущей программы.

Контрольный пример: при $A = \sqrt{3} \pm j1$ по программе вычисляется $|A| = 1,999999$ и $\varphi_A^\circ = \pm 29,99999$ или $\varphi_{A \text{ радиан}} = \pm 0,5235987$.

В большинстве практических задач достаточно вычислять фазовый угол с точностью до сотых или даже десятых долей градуса. В этих случаях целесообразно использовать упрощенный вариант формулы (1.13)

$$\varphi^\circ = \operatorname{arctg} x = 90x / \sqrt{1,2 + x^2 + \sqrt{1,62(1 - x^2)}},$$

обеспечивающий погрешность аппроксимации не более $0,03^\circ$.

Программа 19/21. Преобразование алгебраической формы комплексного числа в тригонометрическую при вычислении аргумента в интервале $]-180^\circ; 180^\circ]$, или $]-\pi; \pi]$ с погрешностью не более $0,03^\circ$, или $5,3 \cdot 10^{-4}$ рад

```
F8 x2 ↑ F7 x2 + P2 ÷ 5 ÷ 8 ,
1 x √ + 1 + ↑ F2 x √ ↑ F7
- XY ÷ ↑ F6 x ↑ F8 x < 0 F6 F1 /-
↑ F2 √ C/P B/P P0
```

Инструкция: (90 или $\pi/2 = P6$) $\operatorname{Re} A = P7$, $\operatorname{Im} A = P8$ (B/O) С/П $PX = |A|$, $PY = \varphi_A$ в градусах или радианах в зависимости от содержимого регистра 6.

Контрольный пример: при $A = \sqrt{3} \pm j1$ по программе вычисляется $|A| = 1,999999$ и $\varphi_A^\circ = \pm 29,98036$ или $\varphi_{A\text{рад}} = \pm 0,523598$.

Для вычисления аргумента A в интервале $[0; 360^\circ]$, или $[0; 2\pi]$ достаточно в этой программе заменить фрагмент $\uparrow \dots /-$ с адресами переходов 24...36 фрагментом $4 - /- \rightarrow F8$ $x < 0$ $P6 - \uparrow F6$ x .

Преобразование алгебраической формы комплексного числа в тригонометрическую на входном языке МК34 упрощается при вычислении аргумента по формуле

$$\varphi_A^\circ = \begin{cases} \arccos(\operatorname{Re}/|A|) & \text{при } \operatorname{Im} A > 0, \\ -\arccos(\operatorname{Re}/|A|) & \text{при } \operatorname{Im} A < 0. \end{cases}$$

Программа 20/34. Преобразование алгебраической формы комплексного числа в тригонометрическую при вычислении аргумента в интервале $[0; 360^\circ]$, или $[0; 2\pi]$

ИП7 $\uparrow x^2$ ИП8 $x^2 + \sqrt{\operatorname{PA}} \div \arccos$
ПВ ИП8 $x < 0$ 21 1 $\arcsin 4 \times \text{ИПВ} -$
ПВ ИПА С/П БП

Инструкция: ($\operatorname{Re} A = P7$, $\operatorname{Im} A = P8$) (B/O) С/П $PX = PA = |A|$, $PY = PB = \varphi_A$ в градусах или радианах в зависимости от положения переключателя Р-Г.

Контрольный пример: при $A = \sqrt{3} \pm j1$ по программе вычисляется $|A| = 1,999999$ и $\varphi_A^\circ = 29,999995$; 330 или $\varphi_{A\text{рад}} = 0,52359869$; 5,7595865.

Программа 21/34. Преобразование алгебраической формы комплексного числа в тригонометрическую при вычислении аргумента в интервале $[-180; 180^\circ]$, или $[-\pi; \pi]$

ИП7 $\uparrow x^2$ ИП8 $x^2 + \sqrt{\operatorname{PA}} \div \arccos$
ПВ ИП8 $x < 0$ 17 ИПВ $/-$ ПВ ИПА С/П БП

Инструкция идентична инструкции предыдущей программы.

Контрольный пример: для $A = \sqrt{3} \pm j1$ по программе вычисляется $|A| = 1,999999$ и $\varphi_A^\circ = \pm 29,999995$ или $\varphi_{A\text{рад}} = \pm 0,52359869$.

Представление комплексного числа в тригонометрической форме удобно для его возведения в целую или дробную степень

$$A^k = |A|^k e^{j\varphi_A} A^k, \quad (1.14)$$

а также для получения результата умножения и деления двух комплексных чисел

$$C = A \times B = (|A| \times |B|) e^{j(\varphi_A + \varphi_B)}; C = A : B = (|A| : |B|) e^{j(\varphi_A - \varphi_B)}.$$

Однако сложение и вычитание комплексных чисел в тригонометрической форме громоздко, и удобнее получать результат этих операций для слагаемых в алгебраической форме $C = A \pm B = \operatorname{Re} A \pm \operatorname{Re} B + j(\operatorname{Im} A \pm \operatorname{Im} B)$.

Умножение двух комплексных чисел в алгебраической форме

$$C = A \times B = \operatorname{Re} A \operatorname{Re} B - \operatorname{Im} A \operatorname{Im} B + j(\operatorname{Im} A \operatorname{Re} B + \operatorname{Re} A \operatorname{Im} B) \quad (1.15)$$

реализуется простыми программами.

Программа 22/21. Умножение двух комплексных чисел

П5 XY П4 F7 X → F8 ↑ F4 X ↑ ←
+ ↑ F8 XY П8 F5 X → F7 ↑ F4 X
↑ ← - P7 C/П БП P0

Программа 23/34. Умножение комплексных чисел

П5 XY П4 ИП7 X ИП5 ИП8 X - ИП4
ИП8 X ИП5 ИП7 X + П8 → П7 С/П
БП

Инструкция для обеих программ: $\operatorname{Re} A = P7$, $\operatorname{Im} A = P8$, $\operatorname{Re} B = PY$, $\operatorname{Im} B = PX$ (B/O) С/П $PX = P7 = \operatorname{Re} C$, $P8 = \operatorname{Im} C$.

Эти программы удобны для последовательного вычисления произведения нескольких комплексных чисел, так как результат каждого умножения автоматически зано-

сится на место первого операнда и для следующего умножения достаточно ввести лишь очередной второй operand. Кроме того, эти программы пригодны для возведения комплексного числа в целую положительную степень k ; для этого следует ввести $\operatorname{Re} A = P7 = PY$, $\operatorname{Im} A = P8 = PX$ и k раз выполнить программу, получив, например, $(0,5 - j1)^3 = -1,375 - j0,25$.

Результат деления двух комплексных чисел

$$C = A : B = \frac{\operatorname{Re} A + j\operatorname{Im} A}{\operatorname{Re} B + j\operatorname{Im} B} = \frac{(\operatorname{Re} A + j\operatorname{Im} A)(\operatorname{Re} B - j\operatorname{Im} B)}{\operatorname{Re}^2 B + \operatorname{Im}^2 B} = \frac{\operatorname{Re} A \operatorname{Re} B + \operatorname{Im} A \operatorname{Im} B}{\operatorname{Re}^2 B + \operatorname{Im}^2 B} + j \frac{\operatorname{Im} A \operatorname{Re} B - \operatorname{Re} A \operatorname{Im} B}{\operatorname{Re}^2 B + \operatorname{Im}^2 B} = \operatorname{Re} C + j\operatorname{Im} C \quad (1.16)$$

вычисляют по следующим программам.

Программа 24/21. Деление комплексных чисел

P5	x^2	XY	P4	x^2	+	P6	F7	\uparrow	F5	\times	\rightarrow
F4	\uparrow	F8	X	\uparrow	\leftarrow	-	\uparrow	F6	\div	\uparrow	F8
XY	P8	F5	X	\rightarrow	F7	\uparrow	F4	\times	\uparrow	\leftarrow	+
\uparrow	F6	\div	P7	C/P	BП	P0					

Программа 25/34. Деление комплексных чисел

P5	x^2	XY	P4	x^2	+	P6	ИП7	ИП4	\times
ИП8	ИП5	X	+ ИП6	\div	ИП8	ИП4	X	ИП7	
ИП5	X	- ИП6	\div	ИП8	XY	P7	C/P	БП	

Инструкция для обеих программ: $\operatorname{Re} A = P7$, $\operatorname{Im} A = P8$, $\operatorname{Re} B = PY$, $\operatorname{Im} B = PX$ (B/O) C/P $PX = P7 = \operatorname{Re} C$, $P8 = \operatorname{Im} C$.

Контрольный пример: частное $(0,5 + j1) : (1 - j1) = -0,25 + j0,75$ по программам вычисляется примерно за 7 с.

Эти программы пригодны для деления нескольких комплексных чисел, а также для обращения и возведения в целую отрицательную степень k комплексного числа. В первом случае перед очередным делением составляющие делителя вводят в регистры X и Y , не изменяя содержимого регистров 7 и 8 после первого деления, и пускают программу. Во втором случае вводят $1 = P7$, $0 = P8$, $\operatorname{Re} A = PY$, $\operatorname{Im} A = PX$ и пускают программу, получая A^{-1} , после чего дополнительно k раз пускают программу.

Составляющие квадратного корня из комплексного числа в алгебраической форме

$$C = \operatorname{Re} C + j\operatorname{Im} C = \sqrt{A} = \sqrt{\operatorname{Re} A + j\operatorname{Im} A} \quad (1.17)$$

определяются формулами

$$\operatorname{Re} C = \pm \sqrt{(\sqrt{\operatorname{Re}^2 A + \operatorname{Im}^2 A} + \operatorname{Re} A)/2}; \operatorname{Im} C = \pm \operatorname{Im} A / 2\operatorname{Re} C$$

(составляющие корня имеют различные знаки при $\operatorname{Im} A < 0$).

Программа 26/21. Извлечение квадратного корня из комплексного числа в алгебраической форме

F7	x^2	\uparrow	F8	x^2	+	$\sqrt{-}$	\uparrow	F7	$+$	2	\div
$\sqrt{-}$	P7	2	X	\uparrow	F8	\div	1/x	P8	C/P	БП	P0

Программа 27/34. Извлечение квадратного корня из комплексного числа в алгебраической форме

ИП7	x^2	ИП8	x^2	+	$\sqrt{-}$	ИП7	$+$	2	\div
$\sqrt{-}$	P7	2	X	ИП8	\div	1/x	P8	C/P	БП

Инструкция для обеих программ: $\operatorname{Re} A = P7$, $\operatorname{Im} A = P8$ (B/O) C/P $PX = P8 = \operatorname{Im} C$, $P7 = \operatorname{Re} C$.

Контрольный пример: $(0,5 - j1)^{1/2} = \pm 0,899453 \pm j0,555892$.

На практике часто приходится выполнять последовательности (цепочки) операций над комплексными числами. Для этой цели удобны программы, обеспечивающие выполнение всех необходимых действий. Примером может служить следующая программа, при пуске которой для выполнения арифметической операции после клавиши БП нажимают клавишу с символом нужного оператора.

Программа 28/21. Выполнение арифметических операций над комплексными числами в алгебраической форме

C_x	F4	$/-$	\rightarrow	F5	\rightarrow	F8	\uparrow	\leftarrow	+	P8	F7
\uparrow	\leftarrow	-		P7	C/P	F5	BП	PВП	\times	BП	F1
x^2	\uparrow	F4	x^2	+	1/x	\uparrow	F4	\times	P4	F5	X
$/-$	P5	\uparrow	F8	X	\rightarrow	F7	X	\rightarrow	F4	\uparrow	F7
X	P7	F8	BП	P \div	F4	\rightarrow	F5	$/-$	BП	\uparrow	B/O

Инструкция: $Re A = P7$, $Im A = P8$, $Re B = P4$, $Im B = P5$ БП $| +, -, \times$ или $\div | C/P$
 $PX = P7 = Re C$, $P8 = Im C$. Содержимое регистров 4 и 5 сохраняется после выполнения всех операций, кроме деления, когда $P4 = Re(1/B)$, $P5 = Im(1/B)$. Регистры 2 и 3 при необходимости используют для хранения промежуточных результатов вычислений.

Контрольный пример: для вычисления арифметического выражения

$$\frac{(0,5 - j2)^2 - (1,2 + j0,5)}{6 + j1,5} + (4 - j3) = 3,12549 - j3,198039$$

следует выполнить следующие операции: $0,5 = P7 = P4$, $-2 = P8 = P5$ БП \times С/П $PX = -3,75$; $1,2 = P4$; $0,5 = P5$ БП $-$ С/П $PX = -4,95$; $6 = P4$; $1,5 = P5$ БП \div С/П $PX = -0,8745097$; $4 = P4$; $-3 = P5$; БП $+$ С/П $PX = P7 = 3,12549$; $P8 = -3,198039$.

Программа 29/34. Выполнение операций над комплексными числами в алгебраической и тригонометрической формах

ИП0	ИПА	ПП	89	П5	XY	П4	C/P	ИП5	$/-$
П5	ИП4	$/-$	P4	ИП5	ИП8	+	P8	ИП4	ИП7
+	P7	ИП8	ИП7	ПП	60	П2	ИПВ	П1	C/P
ИП5	ИП4	ПП	60	ПА	ИПВ	П0	C/P	ИП0	$1/x$
П0	ИПА	$/-$	ПА	ИПА	ИП2	+	П2	ИП0	ИП1
X	П1	ИП1	ИП2	ПП	89	П8	XY	P7	C/P
ПВ	XY	ПС	x^2	ИПВ	x^2	+	$\sqrt{\quad}$	ПВ	\div
arccos	ПД	ИПС	$x < 0$	78	ИПД	$/-$	ПД	ИПД	B/O
ИП9	ИП2	X	П2	ИП9	ИП1	X y	BП	51	ПВ
cos	XY	X	BХ	ИПВ	sin	X	B/O		

Инструкция: $Re A = P7$, $Im A = P8$, $Re B = P4$, $Im B = P5$ или $|A| = P1$, $\varphi_A = P2$, $|B| = P0$, $\varphi_B = P4$, при возведении в целую или дробную степень $n = P9$. Результат арифметических операций заносится на место операнда A в алгебраической (регистры 7 и 8) и тригонометрической (регистры 1 и 2) формах. Выполняемую операцию определяет выбор операторов пуска программы:

B/O С/П для перевода операнда B в алгебраическую форму;

БП 08 С/П для вычитания (в алгебраической форме);

БП 14 С/П для сложения (в алгебраической форме);

БП 30 С/П для перевода операнда B в тригонометрическую форму;

БП 38 С/П для деления (в тригонометрической форме);

БП 44 С/П для умножения (в тригонометрической форме);

БП 80 С/П для возведения A в степень (в тригонометрической форме);

БП 22 С/П для перевода A или результата C в тригонометрическую форму;

БП 52 С/П для перевода A или результата C в алгебраическую форму.

Аргумент вычисляется в интервале $[-180^\circ; 180^\circ]$ или $]-\pi; \pi]$ в зависимости от положения переключателя Р-Г.

Контрольный пример: для вычисления арифметического выражения

$$\sqrt{[(5 + j3) + 8e^{j30^\circ}]/(4 + j8) - (10 - j5)} \cdot 3,267e^{j10^\circ}$$

следует выполнить следующие операции: переключить Р-Г в положение Г; $5 = P7$; $3 = P8$; $8 = P0$; $30 = PA$ В/О С/П БП 14 С/П 4 = P4; $8 = P5$ БП 30 С/П БП 38 С/П $10 = P4$; $-5 = P5$ БП 08 С/П 0,5 = P9; БП 80 С/П 3,267 = P0; $10 = PA$ БП 44 С/П $P1 = 10,3891$; $P2 = -63,9002^\circ$.

Степенные многочлены с вещественными коэффициентами при комплексном аргументе $p = \sigma + j\omega$ удобно вычислять по формуле

$$A_k = \sigma \operatorname{Re} A_{k-1} - \omega \operatorname{Im} A_{k-1} + a_{n-k} + j(\omega \operatorname{Re} A_{k-1} + \sigma \operatorname{Im} A_{k-1}), \quad (1.18)$$

где $k = 1, 2, \dots, n$; $A_0 = a_n$ и $A_n = A(p)$.

Программа 30/21. Вычисление многочлена степени $n \leq 7$ комплексного аргумента

P5	XY	P4	0	P8	F7	ПП	5	ПП	F,	ПП	F,
ПП	F,	ПП	F,	ПП	F,	ПП	F,	↑	F2	→	P2
+	C/П	БП	P0	↑	F2	→	P2	+	P6	↑	F5
X	P3	F8	↑	F4	X	↑	F3	+	↑	F8	XY
P8	F5	X	P3	F6	↑	F4	X	↑	F3	-	B/O

Инструкция: ($a_0 = P2$, $a_1 = C1, \dots, a_6 = C6$, $a_7 = P7$) $\sigma = PY$, $\omega = PX$ (B/O) C/П $PX = \operatorname{Re} A(p)$, $P8 = \operatorname{Im} A(p)$.

Контрольный пример: время вычисления многочлена $A(1 + j1) = 7p^7 + 6p^6 + 5p^5 + 4p^4 + 3p^3 + 2p^2 + p + 1 = 16 - j113$ составляет около 40 с.

При некотором усложнении ввода исходных данных максимальную степень вычисляемого многочлена можно увеличить на единицу.

Программа 31/21. Вычисление многочлена степени $n \leq 8$ комплексного аргумента

↑	F5	X	P8	F4	X	↑	F7	ПП	P/-	ПП	F,
ПП	F,	ПП	F,	ПП	F,	ПП	F,	ПП	F,	↑	F2
→	P2	+	C/П	↑	F2	→	P2	+	P6	↑	F5
X	P3	F8	↑	F4	X	↑	F3	+	↑	F8	XY
P8	F5	X	P3	F6	↑	F4	X	↑	F3	-	B/O

Инструкция: ($a_0 = P2$, $a_1 = C1, \dots, a_6 = C6$, $a_7 = P7$) $\sigma = P4$, $\omega = P5$, $a_8 = PX$ B/O C/П $PX = \operatorname{Re} A(p)$, $P8 = \operatorname{Im} A(p)$.

Контрольный пример: время вычисления многочлена $A(1 + j1) = 8p^8 + 7p^7 + 6p^6 + 5p^5 + 4p^4 + 3p^3 + 2p^2 + p + 1 = 144 - j113$ составляет около 40 с.

Многочлены комплексного аргумента степени $n > 8$ целесообразно вычислять в полуавтоматическом режиме.

Программа 32/21. Вычисление многочлена произвольной степени n комплексного аргумента

P6	F4	↑	F8	X	P3	F5	↑	F7	X	↑	F3
+	↑	F8	XY	P8	F5	X	P3	F4	↑	F7	X
↑	F3	-	↑	F6	+	P7	F2	1	-	P2	C/П
БП	P0										

Инструкция: $n = P2$, $\sigma = P4$, $\omega = P5$, $a_n = P7$, $0 = P8$, $a_{n-1} = PX$ B/O C/П $PX = n - 1$, $a_{n-2} = PX$ C/П $PX = n - 2, \dots, a_0 = PX$ C/П $PX = 0$, $P7 = \operatorname{Re} A(p)$, $P8 = \operatorname{Im} A(p)$.

Контрольный пример: время вычисления двучлена $A(1 + j1) = p + 1 = 2 + j1$ составляет 8 с.

Входной язык МК34 обеспечивает вычисление в автоматическом режиме многочленов комплексного аргумента с большей максимальной степенью.

Программа 33/34. Вычисление многочлена степени $n \leq 10$ комплексного аргумента

ПС	XY	ПВ	ИПА	X	ИП9	+	ИПС	ИПА	X
ПД	XY	ИП8	ПП	42	ИП7	ПП	42	ИП6	ПП
42	ИП5	ПП	42	ИП4	ПП	42	ИП3	ПП	42
ИП2	ПП	42	ИП1	ПП	42	ИП0	ПП	42	C/П
БП	00	ИПД	ИПС	X	-	ХҮ	ИПВ	X	+
ХҮ	ИПС	X	ИПД	ИПВ	X	+	ПД	ХҮ	B/O

Инструкция: ($a_0 = P0$, $a_1 = P1, \dots, a_9 = P9$, $a_{10} = PA$) $\sigma = PY$, $\omega = PX$ (B/O) C/П $PX = \operatorname{Re} A(p)$, $PY = PD = \operatorname{Im} A(p)$.

Контрольный пример: время вычисления многочлена $A(1 + j1) = 10p^{10} + 9p^9 + 8p^8 + 7p^7 + 6p^6 + 5p^5 + 4p^4 + 3p^3 + 2p^2 + p + 1 = 288 + j351$ составляет 67 с.

При некотором усложнении ввода исходных данных можно увеличить максимальную степень вычисляемого многочлена на две единицы.

Программа 34/34. Вычисление многочлена степени $n < 12$ комплексного аргумента

```
↑ ИПВ X ИПД + XY ИПС X ПД XY
ИПА ПП 46 ИП9 ПП 46 ИП8 ПП 46 ИП7
ПП 46 ИП6 ПП 46 ИП5 ПП 46 ИП4 ПП
46 ИП3 ПП 46 ИП2 ПП 46 ИП1 ПП 46
ИП0 ПП 46 С/П БП 00 ИПД ИПС X -
XY ИПВ X + XY ИПС X ИПД ИПВ X
+ ПД XY B/O
```

Инструкция: ($a_0 = P0, a_1 = P1, \dots, a_9 = P9, a_{10} = PA$) $a_{11} = PD, \sigma = PB, \omega = PC$, $a_{12} = RX$ (B/O) С/П $RX = \operatorname{Re} A(p)$, $PY = PD = \operatorname{Im} A(p)$.

Контрольный пример: время вычисления многочлена $A(1 + j1) = 12p^{12} + 11p^{11} + 10p^{10} + 9p^9 + 8p^8 + 7p^7 + 6p^6 + 5p^5 + 4p^4 + 3p^3 + 2p^2 + p + 1 = -832 + j703$ составляет 80 с.

Программа 35/34. Вычисление нормированного ($a_{13} = 1$) многочлена степени $n = 13$ комплексного аргумента

```
↑ ИПВ X ИПВ x2 + ИПС x2 - ИПД
+ XY ИПС X ИПС ИПВ X 2 X +
ПД XY ИПА ПП 58 ИП9 ПП 58 ИП8 ПП
58 ИП7 ПП 58 ИП6 ПП 58 ИП5 ПП 58
ИП4 ПП 58 ИП3 ПП 58 ИП2 ПП 58 ИП1
ПП 58 ИП0 ПП 58 С/П БП 00 ИПД ИПС
X - XY ИПВ X + XY ИПС X ИПД
ИПВ X + ПД XY B/O
```

Инструкция: ($a_0 = P0, a_1 = P1, \dots, a_9 = P9, a_{10} = PA$) $a_{11} = PD, \sigma = PB, \omega = PC$, $a_{12} = RX$ (B/O) С/П $RX = \operatorname{Re} A(p)$, $PY = PD = \operatorname{Im} A(p)$.

Контрольный пример: время вычисления многочлена $A(1 + j1) = p^{13} + 12p^{12} + 11p^{11} + 10p^{10} + 9p^9 + 8p^8 + 7p^7 + 6p^6 + 5p^5 + 4p^4 + 3p^3 + 2p^2 + p + 1 = -896 + j639$ составляет 87 с.

Вычисление степенных многочленов комплексного аргумента степени $n > 13$ в полуавтоматическом режиме обеспечивает следующая программа.

Программа 36/34. Вычисление многочлена произвольной степени n комплексного аргумента

```
ИПА ИПВ X ИПД ИПС X - + ИПА ИПС
X ИПД ИПВ X + ПД XY ПА КИП0 ИП0
С/П БП
```

Инструкция: $n = P0, a_n = PA, \sigma = PB, \omega = PC, 0 = PD, a_{n-1} = RX$ B/O С/П $RX = n - 1, a_{n-2} = RX$ С/П $RX = n - 2, \dots, a_0 = RX$ С/П $RX = 0, PA = \operatorname{Re} A(p), PY = PD = \operatorname{Im} A(p)$.

Контрольный пример: время вычисления двучлена $A(1 + j1) = p + 1 = 2 + j1$ составляет 8 с.

При степени многочлена, меньшей максимальной для программ 30/21 и 33/34, время счета можно уменьшить, устранив избыточные операторы обращения к подпрограмме и соответственно изменив адрес перехода к ней. В этом случае окончание программы 30/21 следует дополнить операторами поворота стека в исходное положение. Длину программ 33/34 можно уменьшить, использовав освободившийся регистр памяти для организации вычислений в цикле.

Глава 2

МОДЕЛИРОВАНИЕ СИГНАЛОВ И ОБРАБОТКА ИНФОРМАЦИИ

2.1. Представления сигналов

В общем случае реакции и воздействия (являющиеся реакциями на некоторые другие воздействия), связанные соотношениями (1.4) и (1.5), представляют собой *сигналы*, характеризующие состояние физического объекта.

Сигналы описывают *непрерывными* и *дискретными* математическими моделями. К первым относятся *графические* и *буквенные* модели в виде графиков или формул, позволяющих определить значение сигнала $x(v)$ в любой точке заданного интервала независимой переменной v . Ко вторым относятся табличные модели в виде множества пар значений v_i (называемых *узлами*) и $x_i = x(v_i)$ при $i = 0, 1, \dots, N$, а также *цифровые* модели в виде программ работы ЭВМ, вычисляющих значения x_i для ряда заданных значений v_i .

В зависимости от задачи моделирования сигналы представляют во временной и операторных областях. Естественным является временное представление сигнала $x(t)$, но при моделировании инерционных связей между воздействием и реакцией приходится составлять и решать дифференциальные уравнения. Поэтому обычно прибегают к операторным представлениям в частотной (спектральной) области или области оператора Лапласа.

Спектральное представление сигнала $x(j\omega)$ связано с временным интегральным соотношением

$$x(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt \quad (2.1)$$

и является непрерывной комплексной функцией переменной ω .

Обратное преобразование

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} x(j\omega) e^{j\omega t} d\omega.$$

Периодические сигналы однозначно представляют дискретным спектром с комплексными амплитудами

$$C_k = x(jk\Omega) = \frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} x(t) e^{-jk\Omega t} dt, \quad (2.2)$$

где t_1 – любой удобный для вычислений момент времени t ; T – период рассматриваемого сигнала; $\Omega = 2\pi/T$ – круговая частота.

В этом случае обратное преобразование сводится к суммированию ряда Фурье

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{jk\Omega t}. \quad (2.3)$$

Сигналы, заданные на временном интервале $[0; \infty]$, часто представляют их изображениями по Лапласу

$$x(p) = \int_{0}^{\infty} x(t) e^{-pt} dt,$$

являющимися непрерывными комплексными функциями комплексной частоты $p = \sigma + j\omega$.

Обратное преобразование Лапласа

$$x(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{-\infty}^{\infty} x(p) e^{pt} dp,$$

где значение ϵ выбирают из условия сходимости модуля произведения $x(t)$ на множитель $e^{-\epsilon t}$.

Сигналы в виде последовательности коротких импульсов, используемые в импульсных и цифровых устройствах, во временной области описывают *решетчатыми* функциями $x(n)$ целочисленного аргумента n (нормированного времени). Часто функции $x(n)$ получают по непрерывной функции $x(t)$ дискретизацией, заключающейся в выборке

значений функции $x(t)$ через равнотстоящие интервалы времени $x(n) = x(t = nT)$. В этом случае значение T , разделяющее два смежных отсчета, называют интервалом дискретизации.

Такое представление может быть взаимно-однозначным, если дискретизируемая функция $x(t)$ относится к функциям с ограниченным спектром, а интервал дискретизации T выбран в соответствии с теоремой отсчетов Котельникова как $T \leq 1/2f_b$, где f_b – верхняя граничная частота спектра функции $x(t)$. В этом случае справедливо соотношение

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(n) \frac{\sin(\omega_b(t - kT))}{\omega_b(t - kT)}, \quad (2.4)$$

называемое рядом Котельникова.

Временное и спектральное представление финитных решетчатых функций, описываемых конечным множеством значений, связаны формулами дискретного преобразования Фурье (ДПФ)

$$\begin{aligned} x(kv) &= \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W^{nk}; \quad k \in \{0, N-1\}; \\ x(n) &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x(kv) W^{-nk}, \end{aligned} \quad (2.5)$$

где $v = 2\pi/N$ – нормированная частота, связанная с частотой Ω спектральных составляющих анализируемой функции соотношением $\Omega = v/T$, N – заданное число отсчетов функции $x(n)$ и $W = e^{-jv} = e^{-j\frac{2\pi}{N}}$.

При вещественных значениях $x(n)$ соотношение (2.5) избыточно, так как справедливо равенство $x(kv) = x^*(N - k)v$. Вместо формул (2.5) часто удобнее использовать z -преобразование решетчатой функции

$$x(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n) z^{-n}, \quad (2.6)$$

где z – комплексный аргумент, связанный с интервалом дискретизации соотношением $z = e^{j\frac{2\pi}{N}}$.

Обратное z -преобразование выполняют по формуле

$$x(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint x(z) z^{n-1} dz,$$

где контур интегрирования должен охватывать все особые точки подынтегрального выражения (для ограниченных во времени функций эти точки лежат внутри единичной окружности).

Иногда вместо полного описания сигнала достаточно ограничиться его некоторыми характеристиками. К ним относятся среднее значение (постоянная составляющая)

$$\bar{x} = \frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} x(t) dt, \quad (2.7)$$

среднее квадратическое (действующее) значение

$$x_d = \bar{x}^2 = \left(\frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} x^2(t) dt \right)^{1/2}$$

и энергетический спектр сигнала

$$W(\omega) = x(j\omega)x^*(j\omega) = |x(j\omega)|^2,$$

связанный с действующим значением соотношением

$$x_d = \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} W(\omega) d\omega.$$

Временной характеристикой случайного процесса (полезного сигнала или помехи) является автокорреляционная функция

$$R(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [x(t_1) - \bar{x}(t_1)] [x(t_2) - \bar{x}(t_2)] p[x(t_1); x(t_2)] dx(t_1) dx(t_2), \quad (2.8)$$

где $p[x(t)]$ и $p[x(t_1); x(t_2)]$ – одномерные и двумерные функции плотности вероятности анализируемого сигнала, а средние значения $\bar{x}(t_1)$ и $\bar{x}(t_2)$, в общем случае зависящие от времени, вычисляют по формуле

$$\bar{x}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) p[x(t)] dx(t).$$

Для стационарных случайных процессов среднее значение и одномерная функция плотности вероятности не зависят от времени. В этом случае вместо (2.8) используют соотношение

$$R(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [x(t) - \bar{x}] [x(t + \tau) - \bar{x}] p[x(t); x(t + \tau)] dx(t) dx(t + \tau).$$

Автокорреляционная функция эргодического случайного процесса определяется по достаточно длинной его реализации

$$R(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t) x(t - \tau) dt$$

и для решетчатых функций имеет вид

$$R(n) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{N-1} x(k) x(k+n). \quad (2.9)$$

Преобразование (2.1) автокорреляционной функции стационарного случайного процесса в силу четности этой функции описывают формулой

$$W(\omega) = 2 \int_0^\infty R(\tau) \cos \omega \tau d\tau, \quad (2.10)$$

определенной энергетический спектр переменной составляющей процесса. С помощью значения $R(0)$, соответствующего дисперсии σ^2 случайного процесса, часто нормируют автокорреляционную функцию $r(\tau) = R(\tau)/R(0) = R(\tau)/\sigma^2$.

Таким образом, практически все преобразования сигналов, выполняемые при анализе радиотехнических устройств, связаны с операцией интегрирования, которую далеко не всегда удается выполнить аналитически даже при аналитической модели преобразуемого сигнала. В этом случае приходится использовать методы численного интегрирования, из которых наиболее употребителен метод Симпсона, основанный на приближении

$$I = \int_a^b f(x) dx \approx [f(a) + 4f(a+h) + 2f(a+2h) + 4f(a+3h) + \dots + 2f(b-2h) + 4f(b-h) + f(b)] h/3, \quad (2.11)$$

где n – четное число разбиений интервала интегрирования, а $h = (b-a)/n$ – шаг интегрирования.

Для мажоритарной оценки методической погрешности интегрирования по формуле Симпсона обычно используют соотношение

$$\Delta I < h^5 f''(\theta)/90; \theta \in [a; b].$$

При оценке погрешности интегрирования применительно к анализу сигналов более удобен спектральный подход, при котором погрешность связана с искажением спектра анализируемого сигнала [23]. Введя коэффициент, равный отношению комплексной амплитуды, полученной в результате численного интегрирования гармонического сигнала, к амплитуде, являющейся результатом точного интегрирования, для формулы Симпсона получим

$$k_I = A_{\text{выч}}/A_{\text{точ}} = \omega h (2 + \cos \omega h) / (3 \sin \omega h). \quad (2.12)$$

По (2.12) несложно выбрать значение h , обеспечивающее преобразование с требуемой точностью спектра интегрируемого сигнала в заданном интервале частот от 0 до $\omega_B < \pi/h$. Следует лишь учитывать, что при уменьшении h (и увеличении n) возрастают операционные погрешности результата численного интегрирования.

В качестве базовых программ численного интегрирования примем следующие.

Программа 37/21. Интегрирование по составной формуле Симпсона

F3	↑	F2	-	↑	F4	÷	P3	ПП	PC _x	P8	ПП
6	4	X	↑	F8	+	P8	F4	2	-	P4	ПП
6	↑	F8	+	XY	+	P8	F4	x = 0	XY	F3	X
3	÷	C/P	F3	↑	F2	+	P2	F2	...	B/O	

Инструкция: записать в программу вместо многоточия операторы вычисления функции при $x = PX$ (для хранения операндов можно использовать регистры 5, 6, 7 и стека памяти); $a = P2$, $b = P3$, $n = P4$ B/O C/P PX = I.

Программа 38/34. Интегрирование по составной формуле Симпсона

ИП3	ИП2	-	ИП4	÷	П3	ПП	40	П8	ПП	
36	4	X	ИП8	+	П8	ИП4	2	-	П4	
ПП	36	↑	ИП8	+	+	П8	ИП4	x = 0	09	
ВХ	ИП3	X	3	÷	C/P	ИП3	ИП2	+	П2	
ИП2	...	B/O								

Инструкция отличается от инструкции к предыдущей программе только тем, что для организации вычислений подынтегрального выражения можно использовать регистры 0, 1, 5, 6, 7, 9, А, В, С и Д.

Если при использовании этих программ число свободных ячеек программной памяти недостаточно для организации вычисления подынтегрального выражения, то можно сократить программу, вычислив предварительно в обычном режиме шаг $h = (b - a)/n = P4$ и, после выполнения программы, умножив на $h/3$ взвешенную сумму, хранящуюся в регистре Y после выполнения программы 37/21 и в регистре X1 – после выполнения программы 38/34. Приводимая ниже сокращенная версия программы 37/21 обеспечивает 27 ячеек программной памяти для вычисления подынтегрального выражения вместо 14 ячеек у исходной программы.

Программа 39/21. Упрощенное интегрирование по составной формуле Симпсона

ПП	P/-/	P8	ПП	4	4	X	↑	F8	+	P8	F4
2	-	P4	ПП	4	↑	F8	+	XY	+	P8	F4
x = 0	0	C/P	F3	↑	F2	+	P2	F2	...	B/O	

Инструкция: записать в программу вместо многоточия операторы вычисления подынтегрального выражения (при $x = PX$); $a = P2$, $h = P3$, $n = P4$ B/O C/P F3 X 3 ÷ PX = I.

При интегрировании сложных функций в связи с ограниченной емкостью запоминающих устройств может оказаться необходимым предварительно преобразовать (в частности, нормировать операнды) подынтегральное выражение. Необходимость в аналитических преобразованиях может возникнуть при стремлении подынтегральной функции или ее производных к бесконечности в интервале интегрирования, что приведет к переполнению или чрезмерной методической погрешности результата интегрирования. Такие особенности можно устранить заменой переменных или интегрированием по частям.

Если в интервале интегрирования возникают неопределенности, то их следует раскрыть и ввести в программу разветвления для вывода соответствующих значений функции. Редактирование базовых программ может оказаться целесообразным и в других случаях, например, когда подынтегральная функция имеет постоянный множитель или когда один предел интегрирования или оба соответствуют особым точкам.

В качестве примера рассмотрим вычисление функции плотности вероятности аддитивной смеси гармонического сигнала с амплитудой A и случайным, равновероятным в интервале $[-\pi; \pi]$ распределением фазы с нормально-распределенным шумом, имеющим нулевое среднее и дисперсию σ , описываемой сверткой

$$p(z) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi^3}} \int_{-A}^{A} [e^{-((x-z)^2/2\sigma^2)} / \sqrt{A^2 - x^2}] dx, \quad (2.13)$$

где интегрируемая функция обращается в бесконечность на границах интервала интегрирования.

Для устранения указанной особенности воспользуемся подстановкой $x = A \cos y$, что дает

$$p(z) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi^3}} \int_0^\pi [e^{-(A \cos y - z)^2 / 2\sigma^2}] dy.$$

Для сокращения числа исходных данных примем нормировки $B = A/\sigma$ и $\xi = z/\sigma$:

$$p(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi^3}} \int_0^\pi e^{-(B \cos y - \xi)^2 / 2} dy.$$

Функцию (2.13) приходится вычислять много раз при различных значениях ξ и фиксированных пределах интегрирования. Поэтому целесообразно изменить начало базовой программы, обеспечив при каждом выполнении программы автоматическое восстановление пределов и шага интегрирования. Сократить текст программы можно, предварительно вычислив коэффициент $1/(3\sqrt{2\pi^3})$ и приняв его в качестве исходного операнда. Тогда на основе, например, программы 37/21 получим следующую.

Программа 40/21. Вычисление функции плотности вероятности смеси гармонического сигнала со случайной фазой и нормального шума

π	0	P2	F4	\div	P3	PП	F7	P8	PП	PВП	4
x	\uparrow	F8	+	P8	F4	2	-	P4	PП	PВП	\uparrow
F8	+	XY	+	P8	F4	$x = 0$	1	F3	x	\uparrow	F7
x	C/P	F3	\uparrow	F2	+	P2	F2	cos	\uparrow	F6	x
\uparrow	F5	-	x^2	2	\div	e^x	1/x	B/O			

Инструкция: ($\xi = P5, B = P6, 1/3\sqrt{2\pi^3} = P7$) $n = P4$ B/O C/P PX = $p(\xi)$.

Контрольный пример: при $\xi = B = 1$ и $n = 8$ получим $p(1) = 0,235893$ примерно за 80 с, при $n = 16$ получим $p(1) = 0,235891$ примерно за 160 с.

При расчетах часто приходится интегрировать функции вида $y(v)$, заданные графическими или табличными моделями. Если отсчеты $y_i = y(v_i)$ таких функций заданы, начиная с $y_0 = y(v_0)$ при постоянном шаге $h = \Delta v$, их число четно, а интегрируемая функция гладкая, то ее интеграл целесообразно вычислять по формуле Симпсона.

Программа 41/21. Интегрирование таблично заданной функции по формуле Симпсона

P8	C/P	\uparrow	4	x	\uparrow	F8	+	P8	C/P	\rightarrow	F2
2	-	P2	$x \neq 0$	F4	\leftarrow	\uparrow	+	\uparrow	F8	$+$	BП
P0	\leftarrow	\uparrow	F8	+	\uparrow	F3	x	3	\div	C/P	

Программа 42/34. Интегрирование таблично заданной функции по формуле Симпсона

P8	C/P	KИP2	XY	4	x	ИП8	+	P8	C/P		
\uparrow	ИП8	+	+ L2	00	BХ	ИП3	x	3			
\div	C/P										

Инструкция для обеих программ: ($h = P3$) $n = P2, y_0 = PX$ B/O C/P $y_1 = PX$ C/P $y_2 = PX$ C/P ... $y_n = PX$ C/P $PX = I$.

Контрольный пример: при $h = 0,2$; $n = 4$; $y_i = 1; 5; 8; 6; 2$ получим $I = 4,2$.

При неравноотстоящих узлах табличной модели функции ее целесообразно интегрировать по формуле трапеций

$$I \approx \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(v_{i+1} - v_i)(y_{i+1} + y_i)}{2}. \quad (2.14)$$

Программа 43/21. Интегрирование таблично заданной функции по формуле трапеций

P2	XY	P3	C _x	P8	C/P	P4	F3	XY	P3	+	P5
F2	\uparrow	F4	P2	XY	-	\uparrow	F5	x	2	\div	\uparrow
F8	+	BП	F \uparrow								

Программа 44/34. Интегрирование таблично заданной функции по формуле трапеций

P2	XY	P3	C _x	P8	C/P	ИП2	XY	P2	-		
XY	ИП3	XY	P3	+	x	2	\div	ИП8	XY		
-	BП	04									

Инструкция для обеих программ: $y_0 = PY, v_0 = PX$ В/О С/П $PX = -0$ $y_1 = PY, v_1 = -PX$ С/П $PX = I_1, y_2 = PY, v_2 = PX$ С/П $PX = I_2, y_3 = PY, v_3 = PX$ С/П $PX = I_3, \dots, y_n = PY, v_n = PX$ С/П $PX = I_n$, где I_i – текущее значение интеграла.

В качестве иллюстрации рассмотрим вычисление действующего значения периодического импульсного сигнала по его осциллограмме. Поскольку в соответствии с формулой (2.7) необходимо интегрировать квадрат временной характеристики $x(t)$, то в программу целесообразно ввести оператор x^2 , обеспечивающий автоматическое выполнение этой операции для каждого вводимого отсчета. Для полной автоматизации расчета программы следует дополнить операциями деления на период T (так как действующее значение инвариантно относительно периода, то вместо h можно использовать значение $1/n$, что будет эквивалентно этой операции) и извлечение квадратного корня.

Программа 45/21. Вычисление действующего значения периодического сигнала

x^2	P8	C/П	x^2	4	X	\uparrow	F8	+	P8	C/П	x^2
\rightarrow	F2	2	–	P2	$x \neq 0$	4	\leftarrow	\uparrow	+	\uparrow	F8
+	БП	F0	\leftarrow	\uparrow	F8	+	\uparrow	F3	X	3	\div
$\sqrt{\quad}$	C/П										

Инструкция: $(1/n = P3) n = P2, y_0 = PX$ В/О С/П $y_1 = PX$ С/П $y_2 = PX$ С/П $\dots, y_n = PX$ С/П $PX = Y_d$.

Контрольный пример: для $u(n) = 0; 4; 6,3; 7,8; 8,6; 3,2; 1,2; 0,4; 0,2; 0,1; 0$ при $n = 10$ после одиннадцатого выполнения программы получим $U_d = 4,39416$.

Заметим, что если интегрируемая непрерывная функция имеет изломы, то при использовании формулы Симпсона для повышения точности результата интегрирования координаты отсчета следует выбирать так, чтобы каждый гладкий участок между изломами оказывался разбитым на четное число интервалов интегрирования.

2.2. Дискретное преобразование Фурье

При дискретных преобразованиях Фурье (ДПФ) последовательности импульсных сигналов, моделируемых решетчатой функцией $x(n)$, с помощью микрокалькуляторов соотношения (2.5) целесообразно представлять формулами

$$x(jk\nu) = A_k + jB_k, \quad (2.15)$$

где

$$A_k = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \cos(2\pi kn/N); \quad B_k = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \sin(2\pi kn/N),$$

и

$$x(n) = \begin{cases} \frac{A_0}{N} + \frac{2}{N} \sum_{k=1}^{\frac{N-1}{2}} (A_k \cos \frac{2\pi kn}{N} + B_k \sin \frac{2\pi kn}{N}) + \frac{A_{N/2} \cos \pi k}{N} & \text{при четном } N; \\ \frac{A_0}{N} + \frac{2}{N} \sum_{k=1}^{\frac{N-1}{2}} (A_k \cos \frac{2\pi kn}{N} + B_k \sin \frac{2\pi kn}{N}) & \text{при нечетном } N, \end{cases}$$

где учтена избыточность $x(jk\nu)$.

При прямом ДПФ проще всего реализовать последовательный анализ, при котором за каждый цикл вычислений определяют одну пару коэффициентов A_k и B_k .

Программа 46/21. Вычисление отсчетов спектральной функции $x(jk\nu)$

P2	C _x	P5	P7	P8	π	2	X	\uparrow	F3	\div	\uparrow
F4	X	P6	F5	\uparrow	F6	X	e ^{jx}	\leftarrow	F2	XY	X
\rightarrow	X	\uparrow	F7	+	P7	\leftarrow	\uparrow	F8	+	P8	F5
1	+	P5	\uparrow	F3	–	$x \neq 0$	F8	XY	C/П	P2	БП
2	F7	x^2	\uparrow	F8	x^2	+	$\sqrt{\quad}$	C/П	БП	P0	

Программа 47/34. Вычисление отсчетов спектральной функции $x(jk\nu)$

P2	C _x	P5	P7	P8	π	2	X	ИП3	\div	
ИП4	X	P6	ИП5	ИП6	X	\uparrow	cos	ИП2	X	
ИП7	+	P7	XY	sin	ИП2	X	ИП8	+	P8	
КИП5	ИП3	ИП5	–	$x \neq 0$	41	BХ	C/П	P2	БП	
13	ИП7	x^2	ИП8	x^2	+	$\sqrt{\quad}$	C/П	БП		

Инструкция к обеим программам: ($N = P3$, $k = P4$) $x(0) = PX$ B/O C/P $PX = 1$, $x(1) = PX$ C/P $PX = 2$, $x(2) = PX$ C/P ... $x(N-1) = PX$ C/P $PX = |x(jk)|$, $P7 = A_k$, $P8 = B_k$. Переключатель Р-Г должен находиться в положении Р.

Эти программы содержат счетчик номеров вводимых отсчетов на регистре 5. Изменение содержимого счетчика позволяет ускорить вычисления, когда только часть вводимых отсчетов отлична от нуля. В качестве примера рассмотрим решетчатую функцию $x(n)$, заданную отсчетами в 32 равноотстоящих узлах (от 0 до 31), из которых только восемь (для узлов от 10 до 17) отличны от нуля и равны единице. Записав исходные данные $N = 32 = P3$, $k = 1 = P4$ и выполнив программу для нулевого отсчета ($x(0) = 0 = PX$ B/O C/P $PX = 1$), что необходимо для выполнения подготовительных операций, изменим содержимое регистра 5, вводя $10 = P5$, $x(10) = 1 = PX$ C/P и получив $PX = 11$. После этого выполняем $x(11) = 1 = PX$ C/P, повторяя подобные операции для узлов от 12 до 17. Затем снова изменяем содержимое счетчика, выполняя $N - 1 = 31 = P5$, $0 = PX$ C/P, что приведет к результатам $PX = |x(jk)| = 7,21411$; $P7 = A_1 = -6,36228$; $P8 = B_1 = 3,40071$.

Если необходимо определить все значения $x(jk)$ или несколько из них, то приведенные программы приходится использовать в рассмотренных циклах соответствующее число раз. Анализ можно ускорить при параллельном вычислении нескольких значений функции $x(jk)$. Емкость запоминающих устройств микрокалькуляторов с входным языком МК21 допускает одновременное вычисление трех комплексных отсчетов функции $x(jk)$ для произвольных трех номеров k_i .

Программа 48/21 С. Параллельное вычисление трех значений спектральной функции $x(jk)$

P8	π	2	X	0	P6	F5	\div	\uparrow	F4	X	P4
F3	X	P3	F2	X	P2	F2	ПП	/-	F3	ПП	/-
F4	ПП	/-	F6	1	+	P6	C/P	P8	БП	P3	\uparrow
F6	X	e^{jkx}	XY	P7	ПП	P8	F7	\uparrow	ПП	P8	B/O
F8	X	\uparrow	\leftarrow	$+$	\uparrow	\rightarrow	F1	\leftarrow			B/O

Инструкция: $k_1 = P2$, $k_2 = P3$, $k_3 = P4$, $N = P5$, $0 = C1 = C2 = C3 = C4 = C5 = C6$, $x(0) = PX$ B/O C/P $PX = 1$, $x(1) = PX$ C/P $PX = 2$, $x(2) = PX$ C/P ... $x(N-1) = = PX$ C/P $PX = N$, $C1 = A_{k_1}$, $C2 = B_{k_1}$, $C3 = A_{k_2}$, $C4 = B_{k_2}$, $C5 = A_{k_3}$, $C6 = B_{k_3}$ (время обработки одного отсчета около 20 с).

Эта программа содержит счетчик на регистре 6, изменение содержимого которого в процессе вычислений также позволяет сократить время анализа при нулевых отсчетах функции $x(n)$. Например, для вычисления значений $x(jv)$, $x(j2v)$ и $x(j3v)$ по функции, заданной в примере использования предыдущих программ, следует выполнить следующие операции: $k_1 = 1 = P2$, $k_2 = 2 = P3$, $k_3 = 3 = P4$, $N = 32 = P5$, $x(0) = 0 = PX$ B/O C/P $PX = 1$, $10 = P6$, $x(10) = 1 = PX$ C/P $PX = 11$, ... $PX = 17$, $x(17) = 1 = = PX$ C/P $PX = 18$, $C1 = -6,36228$, $C2 = 3,40071$, $C3 = 2,84775$, $C4 = -4,26197$, $C5 = = -0,238760$, $C6 = 2,42417$.

Программа 46/21 может оказаться непригодной для микрокалькуляторов типа "Электроника Б3-21" первых выпусков с неконтролируемым переполнением стека памяти. В этом случае можно использовать алгоритм Герцеля [24], согласно которому значения A_k и B_k определяются по формулам $A_k = u_{n-1} \cos(2\pi k/N) - u_{n-2} + x(0)$; $B_k = = u_{n-1} \sin(2\pi k/N)$ через вспомогательную функцию u_n , вычисляемую по отсчетам функции $x(n)$, вводимым в обратном порядке согласно рекуррентному соотношению $u_j = 2u_{j-1} \cos(2\pi j/N) - u_{j-2} + x(N-j)$; $u_0 = 0$; $u_1 = x(N-1)$. По этому алгоритму в процессе вычислений выбранного множества значений A_k и B_k достаточно один раз вычислить значения функций $\cos(2\pi k_i/N)$ и $\sin(2\pi k_i/N)$, что позволит вынести эти операции за пределы многократно повторяемой части программы и уменьшить время счета. Поэтому при обработке большого числа отсчетов приводимый далее пакет из двух программ целесообразно применять для микрокалькуляторов всех модификаций с входным языком МК21.

Программа 49/21. Подготовка данных для анализа спектральной функции

↑	π	XY	÷	P2	F3	ΠΠ	P,	P6	←	P3	F4
ΠΠ	P,	P7	←	P4	F5	ΠΠ	P,	P8	C _x	P2	←
P5	C/P	0	→	C _x	→	F2	×	e ^{jx}	XY	→	F1
2	X	B/O									

Программа 50/21. Вычисление значений спектральной функции $x(jk\nu)$ по алгоритму Герцеля

Герцеля

ΠΠ	7	F6	ΠΠ	P6	F7	ΠΠ	P6	F8	ΠΠ	P6	C/P
ΠΠ	7	F3	X	P3	F6	ΠΠ	5	F4	X	P4	F7
ΠΠ	5	F5	X	P5	F8	ΠΠ	5	C/P	X	2	1/x
X	→	XY	←	+	→	→	↑	B/O	↑	F2	+
P2	←	—	←	—	←	←	—	←	↑	↑	B/O

Инструкция к обеим программам пакета. Ввести программу 49/21, $k_1 = P3$, $k_2 = P4$, $k_3 = P5$, $N/2 = PX$ B/O C/P (время счета около 15 с) ($P3 = \sin(2\pi k_1/N)$, $P4 = \sin(2\pi k_2/N)$, $P5 = \sin(2\pi k_3/N)$, $P6 = 2\cos(2\pi k_1/N)$, $P7 = 2\cos(2\pi k_2/N)$, $P8 = 2\cos(2\pi k_3/N)$). Ввести программу 50/21 (сохранив в памяти результаты выполнения программы 49/21) и последовательно вводить в регистр X отсчеты функции в обратном порядке $x(N-1)$, $x(N-2) \dots x(1)$, нажимая после каждого ввода клавиши B/O и C/P (время обработки каждого отсчета около 10 с). Ввести $x(0)$ C/P $P2 = A_0$, $P3 = B_{k_1}$, $P4 = B_{k_2}$, $P5 = B_{k_3}$, $C2 = A_{k_3}$, $C4 = A_{k_2}$, $C6 = A_{k_1}$ (содержимое регистров 6, 7 и 8 сохраняется).

Следует отметить, что при уменьшении общего времени анализа использование алгоритма Герцеля приводит к большей операционной погрешности результатов анализа (в связи с итеративным накоплением погрешностей), чем при непосредственном выполнении ДПФ по предыдущим программам.

Если вычисление трех значений спектральной функции приходится повторять несколько раз, то подготовку исходных данных можно выполнить в обычном режиме (сохраняя в программной памяти программу 50/21), вычислив и записав в память данные, вычисляемые по программе 49/21, и очистив регистр 5 и стек памяти.

При выполнении программы 50/21 можно начинать с ввода последнего ненулевого отсчета, но необходимо вводить и все предыдущие отсчеты, включая нулевые.

Контрольный пример. Для вычисления трех первых значений спектральной функции по решетчатой функции $x(n)$ с 32 узлами, имеющей единичные значения в узлах от 10 до 17 и нулевые значения в остальных узлах, ввести и выполнить программу 49/21 при исходных данных $1 = P3$, $2 = P4$, $3 = P5$, $16 = PX$. Затем ввести программу 50/21 и отсчеты $x(17)$, $x(16)$, ..., $x(10)$, $x(9)$, ..., $x(1)$ с нажатием клавиш B/O и C/P после каждого ввода. Введя $x(0) = 0 = PX$ и нажав только клавишу C/P, получаем $P2 = A_0 = 8$; $P3 = B_1 = 3,40076$; $P4 = B_2 = -4,26197$; $P5 = B_3 = 2,42417$; $C6 = A_1 = -6,36225$; $C4 = A_2 = 2,84775$; $C2 = A_3 = -0,238762$.

Если интерес представляет только модуль спектральной функции, то можно окончить вычисления вводом ненулевого отсчета (в рассмотренном примере $x(10) = 1$), нажав для его обработки только клавишу C/P. В этом случае значение модуля $|x(jk\nu)| = \sqrt{A_k^2 + B_k^2}$ будет вычислено верно, но соотношения между A_k и B_k (фазовые характеристики спектральной функции) будут нарушены. При вычислении только модуля отсчеты анализируемой решетчатой функции можно вводить и в порядке возрастания номеров узлов.

Одновременное вычисление пяти смежных отсчетов спектральной функции при $k, k+1, \dots, k+4$ и коэффициента A_0 обеспечивает следующая программа.

Программа 51/34. Вычисление пяти смежных значений спектральной функции $x(jk\nu)$

P0	P1	P3	P5	P7	P9	0	P2	P4	P6
P8	PA	1	+	↑	C/P	PB	ИП0	+	P0
ΠΠ	78	ИП1	+	P1	→	ИП2	+	P2	ΠΠ
73	ИП3	+	P3	→	ИП4	+	P4	ΠΠ	73
ИП5	+	P5	→	ИП6	+	P6	ΠΠ	73	ИП7

+	П7	→	ИП8	+	П8	ПП	73	ИП9	+
П9	→	ИПА	+	ПА	→	ИПС	4	—	ПС
→	БП	12	→	ИПС	1	+	ПС	→	↑
ИПД	Х	ИПС	Х	↑	sin	ИПВ	Х	ХY	cos
ИПВ	Х								

Инструкция: в зависимости от положения переключателя Р–Г $2\pi/N$ или $360/N = РД$, $k = PC$, $x(0) = PX$ В/О С/П $PX = 1$, $x(1) = PX$ С/П $PX = 2$, $x(2) = PX$ С/П ... $PX = N - 1$, $x(N - 1) = PX$ С/П $PX = N$, $P0 = A_0$, $P1 = A_k$, $P2 = B_k$, $P3 = A_{k+1}$, $P4 = B_{k+1}$, $P5 = A_{k+2}$, $P6 = B_{k+2}$, $P7 = A_{k+3}$, $P8 = B_{k+4}$, $P9 = A_{k+5}$, $PA = B_{k+5}$.

Ввод нулевого отсчета даже при $x(0) = 0$ необходим, так как он обеспечивает автоматическую установку исходного содержания регистров. В качестве счетчика номера узла использованы регистры операционного стека, и для пропуска нулевых отсчетов (кроме начального) достаточно ввести оператор XY и записать в регистры X и Y номер следующего ненулевого отсчета. Ввод нулевых отсчетов необходимо выполнять оператором 0, а не C_x, и в том случае, когда значение вводимого отсчета случайно совпадает с его выведенным номером, следует ввести отсчет или дважды нажать клавишу ↑. Время обработки одного отсчета по этой программе составляет около 1 мин.

Контрольный пример. Для вычисления первых пяти отсчетов спектральной функции по решетчатой функции, заданной в предыдущем примере, выполняем: $2\pi/32 = \pi/16 = РД$, $k = 1 = PC$, $0 = PX$ В/О С/П $PX = 1$, $10 = PX \uparrow 1 = PX$ С/П $PX = 11$, $1 = PX$ С/П $PX = 12$, ..., $PX = 17$, $PX = 1$ С/П $PX = 18$; $P0 = A_0 = 8$; $P1 = A_1 = -6,36227$; $P2 = B_1 = 3,40071$; $P3 = A_2 = 2,84775$; $P4 = B_2 = -4,26197$; $P5 = A_3 = -0,238759$; $P6 = B_3 = 2,42417$; $P7 = A_4 = 1 \cdot 10^{-8}$; $P8 = 6,7 \cdot 10^{-7}$; $P9 = A_5 = -1,15953$; $PA = B_5 = -0,951608$.

Если требуется вычислить не более трех несмежных значений спектральной функции, затраты времени можно несколько уменьшить, используя алгоритм Герцеля.

Программа 52/34. Вычисление трех значений спектральной функции $x(jk\nu)$ по алгоритму Герцеля

П7	П8	П9	2	π	X	ИП0	÷	ПД	1
ПП	86	П4	2	ПП	86	П5	3	ПП	86
П6	C _x	ПА	ПВ	ПС	КИП0	КИП0	ИП0	С/П	ПД
ИП0	$x = 0$	57	ИП7	ИП4	Х	П4	ИП8	ИП5	Х
П5	ИП9	ИП6	Х	П6	ИП1	2	÷	П1	ИП2
2	÷	П2	ИП3	2	÷	П3	ИПД	ИПА	—
ИП7	ПА	ИП1	Х	+	П7	ИПД	ИПВ	—	ИП8
ПВ	ИП2	Х	+	П8	ИПД	ИПС	—	ИП9	ПС
ИП3	Х	+	П9	БП	26	ПА	КИПА	ИПД	Х
sin	BX	cos	2	Х	КПА	ХY	B/O		

Инструкция: $N = P0$, $k_1 = P1$, $k_2 = P2$, $k_3 = P3$, $x(N - 1) = PX$ В/О С/П $PX = N - 2$, $x(N - 2) = PX$ С/П $PX = N - 3$, $x(N - 3) = PX$ С/П ... $PX = 1$, $x(1) = PX$ С/П $PX = 0$, $x(0) = PX$ С/П $PX = -99999999$, $P7 = A_{k_1}$, $P8 = A_{k_2}$, $P9 = A_{k_3}$, $P4 = B_{k_1}$, $P5 = B_{k_2}$, $P6 = B_{k_3}$. Вычисления можно начинать с ввода последнего ненулевого отсчета, как и при использовании программы 50/21.

Время обработки одного отсчета (кроме начального и конечного) по программе 52/34 примерно 15 с. Проверить эту программу можно по результатам предыдущего контрольного примера.

При вычислении M значений спектральной функции при N отсчетах как при непосредственном ДПФ, так и при использовании алгоритма Герцеля трудоемкость анализа пропорциональна произведению MN (хотя коэффициент пропорциональности для алгоритма Герцеля примерно в четыре раза меньше, чем при непосредственном ДПФ). При выполнении полного спектрального анализа $M = N/2$, что резко увеличивает трудоемкость расчета при увеличении N . Уменьшить время анализа в этом случае удается за счет организации вычислений (исключение повторений идентичных умножений при вычислении

различных спектральных компонентов и уменьшение общего числа операций до величины, пропорциональной $N \log_2 N$). Алгоритмы, в которых реализована эта возможность, получили название алгоритмов быстрого преобразования Фурье (БПФ) и применяются практически во всех программах спектрального анализа на стационарных ЭВМ.

С помощью программируемых микрокалькуляторов можно исследовать особенности различных вариантов алгоритмов БПФ и изучить методы их программной реализации при анализе относительно небольших массивов данных с прореживанием по времени (рис. 16, а) или по частоте (рис. 16, б) при вычислении вещественных коэффициентов A_k и B_k .

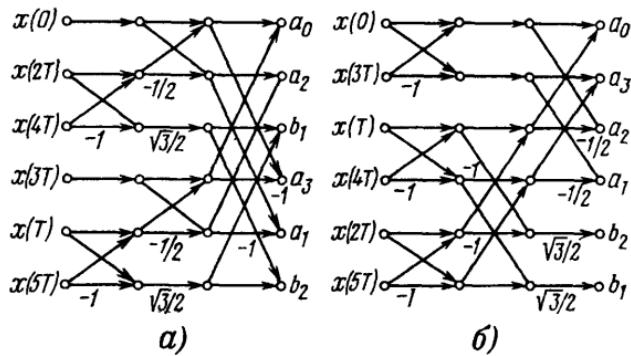


Рис. 16

Программа 53/21. Шеститочечное БПФ с прореживанием по времени

ПП	P6	P5	F7	P2	F6	P4	ПП	P6	↑	F5	XY
-	P3	-	+	P5	F6	↑	F4	+	P4	-	+
P6	F2	↑	F7	-	P7	-	+	P2	C/Π	БП	P0
←	P7	←	↑	←	+	P3	-	+	↑	F8	X
P6	F3	2	÷	→	F7	XY	+	P7	←	-	B/O

Инструкция: $x(0) = C1, x(2T) = C2, x(4T) = C3, x(3T) = C4, x(T) = C5, x(5T) = C6, \sqrt{3}/2 = 0,8660254 = P8$ (B/O) C/Π $PX = P2 = a_0, P3 = a_1, P4 = b_1, P5 = a_2, P6 = b_2, P7 = a_3$.

Программа 54/21. Шеститочечное БПФ с прореживанием по частоте

ПП	F8	XY	P7	F6	P2	ПП	P-	XY	P3	F6	P5
ПП	P-	F3	+	P4	ПП	-	F7	XY	+	P7	→
-	P3	F5	↑	F6	-	P6	ПП	-	F2	XY	+
P2	→	-	P5	F8	↑	F6	×	P6	F4	×	P4
C/Π	↑	‘	+	P6	-	+ 2	÷	←	B/O		

Инструкция: $x(0) = PX, x(3T) = C1, x(T) = C2, x(4T) = C3, x(2T) = C2, x(5T) = C5, \sqrt{3}/2 = 0,8660254 = P8$ B/O C/Π $PX = P4 = b_1, P2 = a_0, P3 = a_1, P5 = a_2, P6 = b_2, P7 = a_3$.

Контрольный пример. Для решетчатой функции времени $x(nT) = 16; 8; 4; 2; 1$ 0,5 в результате выполнения каждой из программ получим $a_0 = 31; 5; a_1 = 15,75$ $b_1 = 9,09326; a_2 = 11,25; b_2 = 3,897114; a_3 = 10,5$. Для ввода $x(nT)$ для первой программы используют операторы $16 \leftarrow 4 \leftarrow 1 \leftarrow 2 \leftarrow 8 \leftarrow 0,5 \leftarrow$, для второй – операторы $16 \leftarrow 2 \leftarrow 8 \leftarrow 1 \leftarrow 4 \leftarrow 0,5 \leftarrow$.

На входном языке МК34 можно реализовать БПФ с прореживанием по времени восмиточечного массива отсчетов (рис. 17).

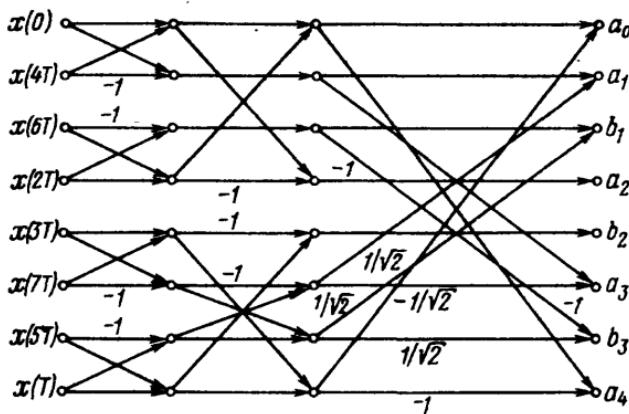


Рис. 17

Программа 55/34. Восьмиточечное БПФ с прореживанием по времени

```

П2 С/П П9 С/П П5 С/П П6 ИП2 С/П -
П3 ВХ ИП2 + П2 ИП9 С/П - П8 ВХ
ИП9 + П9 ИП5 С/П - П4 ВХ ИП5 +
П5 ИП6 С/П - П7 ВХ ИП6 + ИП9 ХY
- П6 ИП9 ВХ + П9 ИП7 ИП8 + П8
ИП7 ВХ - П7 ИП2 ИП5 - П5 ИП2 ВХ
+ П2 ИП9 - П9 ИП2 ВХ + П2 ИП3
ИП7 2 √ ÷ + П7 ИП3 ВХ - П3
ИП8 2 √ ÷ П8 ИП4 + П4 ИП8 ВХ
- П8 ИП2 С/П БП
    
```

Инструкция: $x(0) = PX$ В/О С/П $x(T) = PX$ С/П $x(2T) = PX$ С/П $x(3T) = PX$ С/П $x(4T) = PX$ С/П $x(5T) = PX$ С/П $x(6T) = PX$ С/П $x(7T) = PX$ С/П $PX = P2 = a_0$, $P3 = a_1$, $P4 = b_1$, $P5 = a_2$, $P6 = b_2$, $P7 = a_3$, $P8 = b_3$, $P9 = a_4$. При нулевом значении отсчета необходимо вводить оператор набора нуля, а не C_x , даже в том случае, когда в регистре X высвечивается нуль.

Контрольный пример: для функции времени $x(nT) = 16; 9,752108; 5,943979; 3,622897; 2,20818; 1,3459; 0,8203356; 0,5$ получим $a_0 = 40,1934$; $a_1 = 17,5276$; $b_1 = 13,2759$; $a_2 = 11,4438$; $b_2 = 6,97511$; $a_3 = 10,0559$; $b_3 = 3,02866$; $a_4 = 9,75159$.

Программы ДПФ или БПФ с комплексным представлением отсчетов преобразуемых функций пригоды для прямого и обратного преобразований при условии соответствующего изменения знака поворачивающего множителя i^{nk} в формуле (2.5).

2.3. Спектральный анализ непрерывных сигналов

Если необходимо проанализировать спектр непрерывного сигнала, заданного буквенным выражением, а выполнить интегрирование в замкнутом виде не удается, то приходится прибегать к приближенным методам анализа. Один из них основан на предельном соотношении

$$x(j\omega) = \lim_{T_d \rightarrow \infty} x(j\nu) T_d$$

между спектрами непрерывного сигнала и полученного из него путем дискретизации с интервалом T_d решетчатого сигнала, ДПФ которого дает дискретные приближенные значения искомой спектральной функции¹.

¹ Для сигналов $x(t)$ со спектром, ограниченным значением f_B при $T < 1/(2f_B)$, спектральная функция $x(j\nu)$ отображает дискретные точные значения спектральной функции $x(j\omega)$.

Практическая реализация этого метода состоит из следующих этапов:

1. Построение табличной модели анализируемой функции $x(t)$ при выбранном интервале дискретизации T_d , что можно выполнить с помощью программы вычислений заданной функции по ее буквенной модели.

2. Выполнение ДПФ полученной табличной модели в предположении, что она является моделью решетчатого сигнала с огибающей $x(t)$, по программам, приведенным в предыдущем параграфе.

3. Денормировка вычисленных значений спектральной функции согласно соотношениям

$$x(j\omega) = x(jk\Omega) \approx x(j\nu) T_d, \quad (2.16)$$

где $\Omega = 2\pi/T_d$ для непериодических сигналов.

Комплексные амплитуды составляющих спектра периодического сигнала (при выборке $N = T/T_d$, равной целому числу)

$$C_k = 2x(j\nu) T_d/N = 2x(j\nu)/N, \quad (2.17)$$

где T – период анализируемого сигнала.

Особого внимания при реализации рассмотренного алгоритма требует выбор интервала дискретизации, обеспечивающий заданную точность при минимальных затратах времени. Строгая оценка методической погрешности в этом случае является сложной задачей и необходимо максимально использовать имеющуюся информацию о реальной ширине спектра анализируемого сигнала. Так, для "простых" сигналов [2] $f_{\max} \approx k/T_c$, где T_c – длительность сигнала, а k – коэффициент, определяемый его формой, со значением от единиц до десятков.

Выбор T_d упрощается, если задана полоса анализируемых частот. В этом случае $T_d = 1/(2f_{\max})$, но по мере приближения к граничной частоте f_{\max} анализа погрешность вычисления $x(j\omega)$ для сигналов, ширина спектра которых превышает f_{\max} , резко возрастает.

Если при анализе спектров периодических сигналов для ДПФ выбирают $N = T/T_d$, то для непериодических сигналов N следует выбирать по значению частот $\omega = k\Omega$, на которых вычисляют $x(j\omega)$, связанных с интервалом дискретизации и числом N обрабатываемых отсчетов функции $x(n)$ соотношением $\Omega = 1/(NT_d)$. Если для финитных функций Ω_{\max} определяют числом ее ненулевых отсчетов, то при введении дополнительных нулевых отсчетов значение Ω можно сделать сколь угодно малым.

В качестве примера определим спектральную плотность прямоугольного импульса $x(t) = 1$ при $0 < t < \tau = 1$ мкс и $x(t) = 0$ при $0 > t \geq \tau$ на частотах, кратных 250 кГц. Полагая реальную ширину спектра примерно равной 4 МГц, выберем интервал дискретизации $1/(2f_B) = 0,125$ мкс. Чтобы получить отсчеты спектральной функции на заданных частотах, соответствующих спектральным составляющим периодического сигнала с периодом $T = 1/(250 \cdot 10^3) = 4$ мкс, найдем ДПФ решетчатой функции, заданной $N = 4/0,125 = 32$ отсчетами, из которых $1/0,125 = 8$ будут равны единице, а остальные нулю. Воспользовавшись для этого сигнала результатами ДПФ, выполненного в § 2.2, после денормировки получим следующие значения $x(j\omega)$: $x(j250 \text{ кГц}) = 9,017641 \times 10^{-7}$ (точное значение $9,003162 \cdot 10^{-7}$); $x(j500 \text{ кГц}) = 6,407288 \cdot 10^{-7}$ (точно $6,366197 \cdot 10^{-7}$); $x(j750 \text{ кГц}) = 3,044885 \cdot 10^{-7}$ (точно $3,001054 \cdot 10^{-7}$);

Если N велико, то полный спектральный анализ связан с большими затратами времени и предпочтительнее может оказаться метод, основанный на аппроксимации анализируемой функции $x(t)$, позволяющей выполнить преобразование (2.1) и получить формулу, с достаточной точностью описывающую спектр анализируемого сигнала. Например, при кусочно-линейной аппроксимации

$$x(t) \approx \begin{cases} 0 & \text{при } t < t_1, \\ \alpha_1(t - t_1) + \beta_1 & \text{при } t_1 < t < t_2, \\ \dots & \dots \\ \alpha_k(t - t_k) + \beta_k & \text{при } t_k < t < t_{k+1}, \\ 0 & \text{при } t_{k+1} < t \end{cases}$$

после интегрирования по (2.1) находим

$$x(j\omega) = - \sum_{i=1}^k \frac{B_i + j\omega A_i}{\omega^2} e^{-j\omega t_i},$$

где коэффициенты $B_i = \alpha_i - \alpha_{i-1}$, а $A_i = \beta_i - \beta_{i-1} - \alpha_{i-1}(t_i - t_{i-1})$ отличны от нуля только при наличии у функции $x(t)$ разрывов первого рода. Заметим, что при вычислении значений A_1 и B_1 следует принять $\alpha_0 = \beta_0 = 0$.

Коэффициенты A_i и B_i можно вычислить непосредственно по отсчетам функции $x(t)$.

Программа 56/21. Вычисление коэффициентов приближенной спектральной функции

P3	F1	P2	P4	C_x	P5	\uparrow	C/П	P6	F1	P7	C/П
P8	XY	-	\rightarrow	F3	\uparrow	F6	P3	-	\rightarrow	F2	\uparrow
F7	-	\uparrow	F8	P2	\leftarrow	\div	\uparrow	F5	-	XY	P5
F4	\leftarrow	P4	\rightarrow	БП	F1						

Программа 57/34. Вычисление коэффициентов приближенной спектральной функции

P3	XY	P2	P4	C_x	P5	C/П	P6	XY	P7
\uparrow	C/П	P8	XY	-	P9	ИП2	ИП7	-	ИП3
ИП6	P3	-	\div	ПА	ИП5	-	ПВ	ИПА	P5
ИП8	P2	ИПВ	ИП4	ИП9	P4	\rightarrow	БП	06	

Инструкция: $x(t_1) = PY$, $t_1 = PX$ В/О С/П ($PX = 0$) $x(t_2 - 0) = PY$, $t_2 = PX$ С/П ($PX = x(t_2 - 0)$); если функция имеет разрыв в очередной точке, то $x(t_2 + 0) = PX$; если разрыва нет, то С/П $PX = A_1$, $PY = B_1$, ..., С/П $PX = A_{k-1}$, $PY = B_{k-1}$, $x(t_{k+1} - 0) = PY$, $t_{k+1} = PX$ С/П $PX = x(t_{k+1} - 0)$, $x(t_{k+1} + 0) = PX$ С/П $PX = A_k$, $PY = B_k$... $x(t_n) = PY$, $t_n = PX$ С/П $PX = x(t_n)$, $0 = PX$ С/П $PX = A_{n-1}$, $PY = B_{n-1}$, $0 = PY$, $t_s = PX$ С/П $PX = 0$ С/П $PX = A_n$, $PY = B_n$ (где t_n – конец последнего участка аппроксимации, а t_s – произвольное значение, удовлетворяющее условию $t_s > t_n$).

Контрольный пример. Для временной характеристики, аппроксимированной кусочно-ломаной функцией (рис. 18), выполняем: 10 \uparrow

0 В/О С/П ($PX = 0$) 8 \uparrow 5 С/П ($PX = 8$) 2 $/-$ С/П $PX = 10 = A_1$, $PY = -0,4 = B_1$, 0 \uparrow 10 С/П ($PX = 0$) С/П $PX = -10 = A_2$, $PY = 0,8 = B_2$, 0 \uparrow 20 С/П ($PX = 0$) С/П $PX = 0 = A_3$, $PY = -0,4 = B_3$. Следовательно, $x(j\omega) = -(-0,4 + j10\omega + (0,8 - j10\omega)e^{-j5\omega} + (-0,4)e^{-j10\omega})/\omega^2 = ((0,4 + 0,4\cos 10\omega - 0,8\cos 5\omega + 10\omega \sin 5\omega) + j(10\omega \cos 5\omega - 10\omega + 0,8\sin 5\omega - 0,4\sin 10\omega))/\omega^2$. По этому выражению можно вычислить $\operatorname{Re} x(\omega)$ и $\operatorname{Im} x(\omega)$ или $|x(\omega)|$ и $\varphi_x(\omega)$, но его целесообразно преобразовать для уменьшения операционной погрешности и ускорения вычислений. Воспользовавшись, например, формулами для кратных аргументов тригонометрических функций, получим расчетное выражение $x(j\omega) = ((10\omega \sin 5\omega - 0,8\cos 5\omega(1 - \cos 5\omega)) - j(10\omega - 0,8\sin 5\omega)(1 - \cos 5\omega))/\omega^2$, где после раскрытия неопределенности $x(0) = 40$. По этой формуле несложно вычислить составляющие спектральной функции в обычном режиме или в режиме автоматических вычислений.

Многие задачи спектрального анализа связаны с вычислением различных специальных функций. Например, анализ распределения по спектру энергии (или мощности для периодического) сигнала при кусочно-линейной аппроксимации сводится к вычислению интегрального синуса

$$\operatorname{Si}(x) = \int_0^x \frac{\sin z}{z} dz. \quad (2.18)$$

Так, для прямоугольного импульса $W(\omega) = (A\tau \sin(\omega\tau/2)/(\omega\tau/2))^2$ и в полосе частот от ω_1 до ω_2 энергия

$$\mathcal{E} = \frac{1}{\pi} \int_{\omega_1}^{\omega_2} W(\omega) d\omega = \frac{A^2 \tau^2}{\pi} \int_{\omega_1}^{\omega_2} \left[\frac{\sin(\omega \tau/2)}{\omega \tau/2} \right]^2 d\omega \quad (2.19)$$

или после интегрирования по частям

$$\mathcal{E} = \frac{2A^2 \tau^2}{\pi} \left[\text{Si}\left(\frac{\omega_2 \tau}{2}\right) - \text{Si}\left(\frac{\omega_1 \tau}{2}\right) + \frac{\sin(\omega_2 \tau/2)}{\omega_2 \tau/2} - \frac{\sin(\omega_1 \tau/2)}{\omega_1 \tau/2} \right].$$

Функция $\text{Si}(x)$ встречается и в ряде других задач, например при описании переходной характеристики идеального фильтра, с помощью которого моделируются реальные фильтры. Вычислять интегральный синус можно по базовой программе численного интегрирования с учетом равенства нулю нижнего предела интегрирования и $\sin x/x = 1$ при $x = 0$.

Программа 58/21. Вычисление интегрального синуса

P3	0	P5	F2	P7	÷	P4	1	P8	ПП	6	4
X	↑	F8	+	P8	F7	2	-	P7	ПП	6	↑
F8	+	XY	+	P8	F7	x = 0	1	F4	×	3	÷
C/П	БП	P0	F5	↑	F4	+	P5	e ^{jx}	F5	÷	B/O

Программа 59/34. Вычисление интегрального синуса

P3	ИП2	P7	÷	P4	1	P8	C _x	P5	ПП		
38	4	X	ИП8	+	P8	ИП7	2	-	P7		
ПП	38	↑	ИП8	+	+	P8	ИП7	x = 0	09		
ВХ	ИП4	X	3	÷	C/П	БП	00	ИП5	ИП4		
+	P5	sin	ИП5	÷	B/O						

Инструкция: (четное $n = P2$) $x = PX$ (B/O) C/П $PX = \text{Si}(x)$.

Контрольный пример: $\text{Si}(2) = 1,605497$ при $n = 4$, $\text{Si}(20) = 1,548241$ при $n = 100$.

Точность результата не менее пяти верных цифр обеспечивает выбор $n > 2x$. Время выполнения программы 58/21 примерно $4,3n$ с, а программы 59/34 – около $7,2n$ с.

При $x > 1$ время счета чрезмерно велико и в этом случае целесообразно использовать асимптотическое разложение

$$\text{Si}(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{\cos x}{x} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(2k)!}{x^{2k}} - \frac{\sin x}{x} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k+1)!}{x^{2k+1}}.$$

Вычисление первых четырех членов этого разложения реализовано в следующих программах по формуле

$$\text{Si}(x) \approx \frac{\pi}{2} - \frac{\cos x}{x} \left(1 - \frac{2}{x^2} \left(1 - \frac{12}{x^2} \left(1 - \frac{12}{x^2} \right) \right) \right) - \frac{\sin x}{x^2} \left(1 - \frac{6}{x^2} \left(1 - \frac{20}{x^2} \left(1 - \frac{20}{x^2} \right) \right) \right),$$

где для уменьшения остаточной погрешности изменены коэффициенты последних членов.

Программа 60/21. Вычисление интегрального синуса при $x > 1$

P2	2	XY	÷	x ²	P3	5	X	1	-	X	1
+	3	X	↑	F3	X	2	-	↑	F2	÷	←
F2	e ^{jx}	→	X	P4	F3	3	X	1	-	X	1
+	↑	F3	X	2	-	↑	←	X	↑	F4	+
↑	F2	÷	↑	π	+	2	÷	C/П	БП	P0	

Программа 61/34. Вычисление интегрального синуса при $x > 1$

P0	2	XY	÷	x ²	↑	↑	↑	5	X		
1	-	X	1	+	3	X	X	2	-		
ИП0	sin	X	ИП0	÷	P1	→	3	X	1		
-	X	1	+	X	2	-	ИП0	cos	X		
ИП1	+	ИП0	÷	π	+	2	÷	C/П	БП		

Инструкция: $x = PX$ (B/O) C/П $PX = \text{Si}(x)$. Для программы 61/34 переключатель Р–Г должен быть в положении Р.

Контрольный пример: время вычисления $Si(20) = 1,54824$ составляет менее 20 с.
Результат вычислений по этим программам имеет не менее пяти верных цифр при

$x > 8$.

Сигналы с угловой модуляцией $x(t) = A \cos(\omega_0 t + m \sin \Omega t)$ отображаются в частотную область дискретным спектром, составляющие которого определяют с помощью функций Бесселя порядка n с аргументом, равным индексу угловой модуляции m :

$$x(t) = A \left\{ J_0(m) + \sum_{n=1}^{\infty} J_n(m) [\cos(\omega_0 - n\Omega)t + (-1)^n \sin(\omega_0 t + n\Omega)t] \right\}.$$

Для вычисления функций Бесселя удобно воспользоваться их приближенным представлением

$$J_n(x) \approx \begin{cases} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \cos n \theta_k \cos(x \sin \theta_k) & \text{для четных } n, \\ \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \sin n \theta_k \sin(x \sin \theta_k) & \text{для нечетных } n, \end{cases}$$

где $\theta_k = \pi(k - 1/4)N$.

Вычисления по этим формулам реализованы в следующих программах, обеспечивающих точность результата не менее пяти верных цифр при выборе N большим большего из значений x и n .

Программа 62/21. Вычисление функций Бесселя

F2	0	P8	π	X	cos	P5	F4	1	-	P7	4
1/x	-	↑	F4	÷	↑	π	X	P6	e^{jx}	F3	X
↑	F6	XY	P6	F5	$x > 0$	6	F2	X	cos	↑	F6
cos	БП	PC _x	F2	X	e^{jx}	F6	sin	X	↑	F8	+
P8	F7	$x = 0$	PXY	F8	↑	F4	÷	C/P	БП	P0	

Программа 63/34. Вычисление функций Бесселя (переключатель Р-Г в положении Р)

ИП2	π	X	cos	П5	C_x	П8	ИП4	1	-		
П7	4	$1/x$	-	ИП4	÷	π	X	П6	sin		
ИП3	X	ИП6	ИП2	X	ИП5	$x > 0$	34	→	cos		
XY	cos	БП	38	→	sin	XY	sin	X	ИП8		
+	П8	ИП7	$x = 0$	08	ИП8	ИП4	÷	C/P	БП		

Инструкция: ($n = P2$, $x = P3$, $N = P4$) (B/O) C/P $PX = J_n(x)$. Время счета приблизительно $13/N$ с.

Контрольный пример: время вычисления $J_4(5) = 0,046562$ при $N = 4$ составляет около 50 с.

Для $x > 1$ при условии $x > n$ можно воспользоваться асимптотическим представлением

$$J_n(x) \approx \sqrt{2/(nx)} \cos(x - \pi n/2 - \pi/4) \quad (2.20)$$

с погрешностью, примерно равной $n^2/(2x)$.

Анализ спектра радиоимпульса с линейной частотной модуляцией (ЛЧМ сигнала) приводит к необходимости вычисления интегралов Френеля

$$S(x) = \int_0^x \sin\left(\frac{\pi t^2}{2}\right) dt; \quad C(x) = \int_0^x \cos\left(\frac{\pi t^2}{2}\right) dt. \quad (2.21)$$

При спектральном анализе обычно необходимы значения обоих интегралов, для вычисления которых базовую программу численного интегрирования приходится существенно изменить.

Программа 64/21. Вычисление интегралов Френеля

P3	÷	P4	+	P5	C_x	P7	1	P8	ПП	5	4	
ПП	5	F3	2	-	P3	$x \neq 0$	÷	2	БП	1	F4	
3	÷	.	↑	F8	X	P8	F7	X	C/P	P6	F5	↑
F4	-	P5	x^2	↑	F2	X	e^{jx}	←	F6	X	↑	
F7	+	P7	→	↑	F6	X	↑	F8	+	P8	B/O	

Инструкция: ($\pi/2 = P2$) $x = PY$, четное число разбиения интервала интегрирования $N = PX$ В/О С/П $PX = S(x)$, $P8 = C(x)$. Время счета около $7N$ с.

Программа 65/34. Вычисление интегралов Френеля

↑	ИП0	П1	÷	П2	+	П3	C_x	П6	1
П7	ПП	36	4	ПП	36	ИП1	2	—	П1
$x \neq 0$	25	2	БП	11	ИП7	ИП2	3	÷	x
ИП6	ВХ	x	С/П	БП	00	П4	ИП3	ИП2	—
П3	x^2	π	x	2	÷	П5	cos	x	ИП7
+	П7	ИП5	sin	ИП4	x	ИП6	+	П6	В/О

Инструкция: ($N = P0$) $x = PX$ (В/О) С/П $PX = S(x)$, $PY = C(x)$, время счета приблизительно $11N$ с (переключатель Р–Г в положении Р).

Контрольный пример: при $N = 16$ получим $S(2) = 0,343056$; $C(2) = 0,488150$.

При фиксированном значении N с ростом значения аргумента точность вычислений по этим программам резко снижается. Так, при $x = 2$ для получения результатов с четырьмя верными цифрами необходимо выбирать $N > 30$. Поэтому при $x > 3$ целесообразнее для уменьшения затрат времени использовать асимптотическое разложение

$$C(x) = \frac{1}{2} + \frac{\sin(\pi x^2/2)}{\pi x} \left(1 - \frac{3}{(\pi x^2)^2} + \frac{3 \cdot 7}{(\pi x^2)^4} - \dots\right) - \frac{\cos(\pi x^2/2)}{\pi^2 x^3} \left(1 - \frac{5}{(\pi x^2)^2} + \frac{5 \cdot 9}{(\pi x^2)^4} - \dots\right);$$

$$S(x) = \frac{1}{2} - \frac{\cos(\pi x^2/2)}{\pi x} \left(1 - \frac{3}{(\pi x^2)^2} + \frac{3 \cdot 7}{(\pi x^2)^4} - \dots\right) - \frac{\sin(\pi x^2/2)}{\pi^2 x^3} \left(1 - \frac{5}{(\pi x^2)^2} + \frac{5 \cdot 9}{(\pi x^2)^4} - \dots\right).$$

Программа 66/21. Вычисление интегралов Френеля по асимптотическому разложению

↑	π	x	P2	x	P3	2	÷	e^{ix}	P4	XY	P5
F3	x^3	3	XY	÷	1	—	↑	F5	X	↑	F2
÷	P6	F3	x^2	5	XY	÷	1	—	↑	F4	X
↑	F3	÷	↑	F2	÷	2	$1/x$	+	↑	F6	—
С/П	F4	/—/	↑	F5	/—/	P4	XY	P5	БП	P2	

Инструкция: $x = PX$ В/О С/П $PX = C(x)$ С/П $PX = S(x)$. Время счета около 10 с для $C(x)$ и 8 с для $S(x)$. При $x > 1$ методическая погрешность результатов не превышает $5/(\pi^4 x^7)$.

Программа 67/34. Вычисление интегралов Френеля по асимптотическому разложению

↑	π	x	П0	x	П1	x^2	$1/x$	ПА	9
x	1	—	ИПА	x	1	0	x	2	+
ИП0	÷	П2	7	ИПА	x	1	—	6	x
ИПА	x	2	+	ИП0	÷	П3	ИП1	2	÷
П4	sin	П5	x	1	+	ИП4	cos	П6	ИП2
x	ИП1	÷	—	2	÷	1	ИП3	ИП6	x
—	ИП2	ИП5	x	ИП1	÷	—	2	÷	С/П

Инструкция: переключатель Р–Г в положении Р, $x = PX$ В/О С/П $PX = S(x)$, $PY = C(x)$. Время счета около 20 с.

Контрольный пример: $S(4) = 0,420516$; $C(4) = 0,498419$.

Если в первой из этих программ вычисляются только первые два члена каждого ряда, то во второй программе учтены три члена каждого ряда разложения. Поэтому в программе 67/34 методическая погрешность при $x > 1$ меньше и составляет $\Delta < 45/(\pi^6 x^{11})$.

Программы вычисления некоторых других специальных функций приведены далее при рассмотрении соответствующих радиотехнических задач.

2.4. Цифровое моделирование сигналов во временной области

Составление программы вычисления (цифровой модели) детерминированного сигнала по буквенному выражению $x(t)$ для его графического или табличного представления обычно не вызывает затруднений. Однако в тех случаях, когда последовательность значений функции $x(n)$ отображает входное воздействие в цифровых моделях радиотехнических устройств, программа их вычислений должна удовлетворять жестким требованиям минимальной длины и минимального количества используемых регистров памяти. При несоблюдении этих требований может оказаться невозможным составление цифровой модели устройства в связи с ограниченной емкостью запоминающих устройств микрокалькулятора.

В большинстве случаев уровень воздействия несуществен (например, при анализе линейных цепей) или может быть нормирован. Поэтому в приводимых далее фрагментах программ максимальное значение воздействия принимается равным удобному для программирования целому числу. Кроме того, обычно временные отрезки генерируемого сигнала, выраженные через интервал дискретизации, могут быть округлены до однозначных или двузначных чисел. В этом случае их целесообразно записывать непосредственно в текст программы, так как чаще всего ограниченная емкость памяти ограничивает возможность цифрового моделирования радиотехнических устройств на программируемых микрокалькуляторах.

В приводимых далее фрагментах программ регистры памяти обозначены символами, так как конкретный выбор их номеров зависит от структуры основного текста программы. Предполагается также, что параметры сигналов (например, m или k) однозначны и записываются непосредственно в текст программы.

Обычно фрагмент, моделирующий воздействие, помещают в начале программы, и адреса переходов в приводимых далее фрагментах указаны для этого случая. Если записываемые в текст программы параметры неоднозначны или модель воздействия помещена не в начале программы (например, после оператора С/П), то адреса переходов необходимо соответственно изменить.

1. Последовательность прямоугольных импульсов длительностью $\tau = kT_d$ с периодом $T = (m + k)T_d$ и максимальным значением 10 на входных языках МК21 и МК34 генерируются соответственно фрагментами:

FQ	1	+	PQ	m	-	$x \geq 0$	F2	k	-	$x \neq 0$	0	1	0	...
ИПQ	1	+	PQ	m	-	$x \geq 0$	13	k	-	$x \neq 0$	03	1	0	...

В этих фрагментах на регистре Q организован счетчик нормированного (относительно интервала дискретизации) времени, автоматически устанавливаемый в исходное положение после окончания очередного периода ($m + k$) генерируемой последовательности. Изменяя его начальное содержимое, можно начинать генерирование с любой начальной фазы. Например, при $k = 2$; $m = 4$; $0 = PQ$ приведенные фрагменты генерируют последовательность $x(n) = 0; 0; 0; 10; 10; 0; 0; 0; 10; 10; 0 \dots$.

2. Пилообразный периодический сигнал с периодом $T = mT_d$ и максимальным значением $m - 1$, где m – целое число, генерируется фрагментами

FQ	1	+	PQ	m	-	$x \neq 0$	0	FQ	...	;
ИПО	1	+	PQ	m	-	$x \neq 0$	03	ИПQ

При нулевом исходном содержимом регистра Q фрагменты генерируют последовательность $x(n) = 1; 2; 3; \dots; m - 1; 0; 1; 2; \dots$. Если исключить последний оператор вызова FQ или ИПQ, то при $0 = PQ$ будет генерироваться последовательность $x(n) = -(m - 1); -(m - 2); \dots; -2; -1; \dots; -m; -(n - 1); \dots$, а при изменении мест операторов + и - и замене оператора $x \neq 0$ оператором $x \geq 0$ получим генератор линейно-убывающего воздействия $x(n) = (m - 1); (m - 2); \dots; 2; 1; 0; m - 1; m - 2; \dots$. Если вместо последнего оператора вызова ввести операторы $m/2 + x^2 \sqrt{\quad}$, то получим генератор треугольного напряжения $x(n) = m/2 - 1; m/2 - 2; \dots; 2; 1; 0; 1; 2; \dots; (m/2 - 1); m/2; m/2 - 1; \dots$.

3. Экспоненциальный одиночный импульс $x(n) = Ae^{-\alpha n}$ проще всего получить при помощи фрагментов $FQ \uparrow FL \times PQ \dots$ или $IPQ \text{ ИПЛ} \times PQ \dots$, где в регистре L хранится значение $e^{-\alpha}$. Для того чтобы первый генерируемый отсчет равнялся A , в регистр Q следует занести значение Ae^{α} .

Для формирования экспоненциального импульса вида $x(n) = \alpha ne^{-\alpha n}$ при $\alpha = PL$ можно использовать фрагмент $FQ \uparrow FL + PQ \uparrow e^x \div \dots$ или $IPQ \text{ ИПЛ} + PQ \uparrow e^x \div \dots$.

4. Функция отсчетов $x(n) = \sin \alpha n / \alpha n$ при $\alpha = PR$ генерируется фрагментами

$$FQ \uparrow FR + PQ e^{jx} FQ \quad x=0 \quad XY \quad 1 \quad \uparrow \quad \div \quad \dots; \\ IPQ \quad ИПР + PQ \sin \quad ИП0 \quad x=0 \quad 10 \quad 1 \quad \uparrow \quad \div \quad \dots.$$

Если выбором α и начального содержимого регистра Q исключить нулевое значение аргумента, то эти фрагменты можно сократить на четыре оператора ($x = 0 \ A \ XY \ 1$), избежав раскрытия неопределенности.

5. Колоколообразный импульс $x(n) = e^{-(\alpha n)^2}$ при $\alpha = PR$ генерируется фрагментами

$$FQ \uparrow FR + PQ x^2 / - e^x \dots; \\ IPQ \quad ИПР + PQ x^2 e^x 1/x \dots.$$

При этом фрагмент на входном языке MK21 генерирует последовательность отсчетов любой длины, тогда как для второго фрагмента число генерируемых отсчетов ограничено возможным переполнением при условии $(\alpha n)^2 \geq \ln(10^{100} - 1)$.

6. Последовательность усеченных косинусоидальных импульсов

$$x(n) = \begin{cases} \cos(2\pi n T_d/T) - \cos \psi & \text{при } \cos(2\pi n T_d/T) \geq \cos \psi; \\ 0 & \text{при } \cos(2\pi n T_d/T) < \cos \psi \end{cases}$$

при $2\pi T_d/T = PR$, $\cos \psi = PS$ можно получить с помощью фрагментов

$$FQ \uparrow FR + PQ e^{jx} FS - \quad x < 0 \quad XY \quad C_x \dots; \\ IPQ \quad ИПР + PQ \cos \quad ИПС - \quad x < 0 \quad 10 \quad C_x \dots.$$

Первый фрагмент фактически генерирует импульсы вида $x(n) = \sin(2\pi n T_d/T) - \cos \psi$ при $x(n) \geq 0$ и нуль при отрицательных значениях $x(n)$. Необходимая начальная фаза, как и в предыдущих случаях, устанавливается начальным содержимым регистра Q .

7. Гармоническое колебание с периодом T при $2\pi T_d/T = PR$ генерируется фрагментами

$$FQ \uparrow FR + PQ e^{jx} \dots; \\ IPQ \quad ИПР + PQ \sin \text{ (или cos)} \dots.$$

Начальную fazу определяет исходное содержимое регистра Q – при $0 = PQ$ первый отсчет равен $\sin(2\pi n T_d/T)$ (или $\cos(2\pi n T_d/T)$). При использовании фрагмента на входном языке MK21 одновременно генерируются два квадратурных колебания $PY = \sin(2\pi n T_d/T)$ и $PX = \cos(2\pi n T_d/T)$, что позволяет выбрать более удобное из них при составлении полной программы моделирования.

8. Амплитудно-модулированное (AM) колебание с тональной модуляцией представимо решетчатой функцией

$$x(n) = (1 + m \sin(2\pi n T_d/T_M)) \sin(2\pi n T_d/T),$$

где T_M – период модулирующего, а T – модулируемого колебаний.

Обычно соотношения faz модулируемого и модулирующего колебаний несущественны и для генерирования AM колебания при $2\pi T_d/T_M = PR$, $T_M/T = PL$, $m = PM$ можно воспользоваться фрагментами:

$$FQ \uparrow FR + PQ FL \times \sin XY \sin X XY \leftarrow FM X \uparrow \rightarrow + \dots; \\ IPQ \quad ИПР + PQ \sin \quad ИПМ \times 1 + \quad IPQ \quad ИПЛ \times \sin X \dots.$$

При 100%-ной модуляции ($m = 1$) эти фрагменты упрощаются:

$$FQ \uparrow FR + PQ FL \times e^{jx} FQ \sin X + \dots; \\ IPQ \quad ИПР + PQ \sin 1 + \quad IPQ \quad ИПЛ \times \sin X \dots.$$

Начальное содержимое регистра Q определяет начальную фазу несущего и модулирующего колебаний.

9. Сигналы с угловой (ЧМ или ФМ) тональной модуляцией

$$x(n) = \sin((2\pi n T_d/T) + \Phi \sin(2\pi n T_d/T_m))$$

при $2\pi T_d/T = PR$, $T/T_m = PL$, $\Phi = P\Phi$ генерируются фрагментами

$$\begin{aligned} FQ &\uparrow FR + PQ \uparrow FL \times e^{jx} F\Phi \times \uparrow FQ + e^{jx} \dots, \\ IPQ &IPR + PQ \text{ ИПЛ} \times \sin \text{ ИПФ} \times IPQ + \sin \dots. \end{aligned}$$

Первый фрагмент генерирует обе квадратурные составляющие (в регистрах Y и X), второй одну – в зависимости от выбора последнего оператора.

10. Сигнал с линейной частотной модуляцией (ЛЧМ) $\omega(n) = \omega_1 + kn$, представленный функцией

$$x(n) = \sin((2\pi n T_d/T) + kn^2/2),$$

при $\sqrt{k/2} = PR$, $2\pi T_d/(T\sqrt{k/2}) = PS$ генерируется следующими фрагментами:

$$\begin{aligned} FQ &\uparrow FR + PQ \uparrow FS + \times e^{jx} \dots, \\ IPQ &\uparrow IPR + PQ \uparrow IPS + \times \sin \dots. \end{aligned}$$

При моделировании импульса заданной длительности достаточно дополнить эти фрагменты операторами, стирающими содержимое регистра Q , если оно превышает заданное число.

Для моделирования случайных сигналов или помех с заданными характеристиками используют числовые генераторы квазислучайных последовательностей. Например, формула

$$x_i = (\pi - 2 + x_{i-1})^2 - E[(\pi - 2 + x_{i-1})^2], \quad (2.22)$$

где символом $E[\cdot]$ обозначена целая часть содержимого в квадратных скобках, обеспечивает получение достаточно длинной последовательности практически некоррелированных чисел с распределением в интервале $[0; 1]$, близким к равномерному.

Программа 68/21. Генератор случайных чисел с равномерным распределением в интервале $[0; 1]$

F2 \uparrow π $+$ 2 $-$ x^2 P2 1 ВП 7 XY
- - \uparrow F2 - P2 C/P БП Р0

Инструкция: записать любое число в регистр 2, (В/О) C/P $PX = x_i \dots$.

Контрольный пример: при $0 = P2$ генерируется последовательность $x_i = 0,6967662; 0,6204366; 0,8952528; 0,8512605; 0,0285362; \dots$

При использовании микрокалькулятора "Электроника Б3-21" первых выпусков эта программа генерирует квазислучайные числа в интервале $[-5/9; 4/9]$.

Программа 69/34. Генератор случайных чисел с равномерным распределением в интервале $[-5/9; 4/9]$

ИП2 π $+$ 2 $-$ x^2 \uparrow \uparrow 1 ВП
7 $+$ BX - - П2 C/P БП

Инструкция для этой программы совпадает с предыдущей. При $0 = P2$ генерируется последовательность $x_i = 0,3032336; 0,0875227; -0,4892756; 0,42551747; -0,544166; 0,35691854; \dots$

Теоретически максимальный период генерируемой последовательности может достичь значения $10^8 - 1$, но практически этот период меньше и зависит от выбора исходного содержимого регистра 2. Более надежен реализующий метод Коробова [12] генератор квазислучайных чисел

$$x_i = (qx_{i-1}) \bmod p = [qx_{i-1} - pE[qx_{i-1}/p]],$$

где p – большое простое число (например, 2027 или 5087), а q подбирают близким к $p/2$ из множества целых чисел $p - 3^m$ для простых чисел m .

Следующие программы, реализующие этот метод, генерируют некоррелированные

квазислучайные последовательности целых чисел, равномерно распределенных в интервале $[1; p - 1]$ с периодом $p - 1$.

Программа 70/21С. Генератор Коробова

↑	F3	×	P4	↑	F2	÷	1	ВП	7	XY	+
XY	-	↑	F2	×	↑	F4	XY	-	C/P	BП	P0

Программа 71/34. Генератор Коробова

ИП3	×	↑	ИП2	÷	5	↑	9	÷	-
↑	1	ВП	7	+	BХ	-	ИП2	×	-
C/P	БП								

Инструкция: ($p = P2$, $q = P3$) $x_0 = PX$ (B/O) C/P $PX = x_1 \dots$ C/P $PX = x_i \dots$

Контрольный пример: при $p = 2027$; $q = 1298$; $x_0 = 1$ получим $x_i = 1298; 367; 21; 907; \dots$. Время счета соответственно около 5 и 9 с.

Для микрокалькуляторов "Электроника Б3-21" первых выпусков программу 70/21 следует дополнить операторами $9 \times 5 + 9 \div$, записанными между операторами \div и 1 .

Линейным преобразованием $y_i = ax_i + b$ генерируемые этими программами числа можно привести к любому требуемому интервалу, а с помощью нелинейного преобразования – изменить закон распределения. Так, для получения распределения по закону Рэлея, характерного для помехи u на выходе амплитудного детектора,

$$p(y) = ye^{-y^2/2\sigma^2}/\sigma^2; \quad x \geq 0,$$

можно использовать преобразование

$$y_n = \sqrt{2\sigma^2 \ln(1/x_n)},$$

где x_n – случайная величина, равномерно распределенная в интервале $]0; 1]$.

По значениям x_{n-1} и y_n с помощью преобразования

$$z_n = y_n \sin 2\pi x_{n-1}$$

можно получить нормально-распределенную случайную величину z с нулевым средним и дисперсией σ^2 .

Приведенные соотношения совместно с реализацией генератора Коробова использованы в следующих программах.

Программа 72/21С. Генератор шума¹ с нормальным распределением

↑	F3	×	P4	↑	F2	÷	1	ВП	7	XY	+
XY	-	↑	F2	×	↑	F4	XY	-	↑	F6	XY
P6	F2	÷	↑	π	×	2	×	sin	P5	F6	↑
F2	÷	1/x	ln	↑	F7	×	$\sqrt{-}$	↑	F5	×	C/P
F6	БП	P0									

Программа 73/34. Генератор шума с нормальным распределением

ИП3	×	↑	ИП2	÷	5	↑	9	÷	-	
↑	1	ВП	7	+	BХ	-	ИП2	×	-	
ИП6	ИП2	÷	2	×	π	×	sin	XY	П6	
ИП2	÷	1/x	ln	ИП7	×	$\sqrt{-}$	×	BХ	XY	
C/P	ИП6	БП								

Инструкция: ($p = P2$, $q = P3$, $2\sigma^2 = P7$), записать в регистры 6 и X любые числа, не превышающие $p - 1$ и не равные нулю для регистра X , (B/O) C/P $PX = z_1$, $PY = y_1$, $P6 = x_0$ C/P $PX = z_i$, $PY = y_i$, $P6 = x_{i-1} \dots$. Время вычисления одного отсчета соответственно около 15 и 20 с.

¹ Для микрокалькуляторов первых выпусков эту программу следует дополнить операторами, указанными для программы 70/21.

Контрольный пример: при $p = 2027$; $q = 1298$; $\sigma^2 = 1$; $0 = P6, 1 = PX$ получим $z_i = 0; -1,4271179; 2,7439276; 0,0824949; \dots, y_i = 0,94417391; 1,8487565; 3,0231737; 1,2682032; \dots$ Значения x_i совпадают с приведенными в контрольном примере для предыдущих программ.

При надлежащем подборе нелинейного преобразования равномерно распределенных случайных чисел можно моделировать случайные числа и с другими законами распределения.

2.5. Элементы синтеза сигналов

Построение непрерывной функции $x(t)$ по заданному частотному спектру называют гармоническим синтезом сигналов. Он сводится к суммированию конечного числа N членов усеченного тригонометрического ряда Фурье

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^N (a_k \cos \frac{2\pi k t}{T} + b_k \sin \frac{2\pi k t}{T}). \quad (2.23)$$

При небольшом числе N членов такого ряда автоматизацию их суммирования обеспечивают следующие программы.

Программа 74/21С. Суммирование ряда Фурье с $N \leq 5$

	π	x	2	\times	P8	e^{jx}	P6	F3	\times	P7	F2
ПП	8	5	ПП	F6	4	ПП	F6	3	ПП	F6	2
ПП	F6	F7	+	C/П	БП
P0	x	e^{jx}	P6	F5	\rightarrow	P5	x	\uparrow	F7	$+$	P7
F4	\rightarrow	P4	\uparrow	F6	x	\uparrow	F7	$+$	P7	F8	B/O

Инструкция: записать в программу вместо многоточий значение $a_0/2$, дополнив его при необходимости нулями, чтобы не изменять адреса переходов к подпрограмме ($a_1 = P2, b_1 = P3, a_2 = P4, b_2 = P5, a_3 = C1, b_3 = C2, a_4 = C3, b_4 = C4, a_5 = C5, b_5 = C6$), $t/T = PX$ (B/O) $C/П$ $PX = x(t/T)$.

Для микрокалькуляторов "Электроника Б3-21" первых выпусков можно воспользоваться программой 171 из [20], с помощью которой суммируется до трех членов ряда Фурье.

Программа 75/34. Суммирование ряда Фурье с $N \leq 6$

π	x	ПД	1	3	П0	C_x	\uparrow	XY	КИП0
ИПД	ИП0	x	sin	x	$+$	ИПД	ИП0	x	cos
КИП0	x	$+$	ИП0	1	$-$	$x = 0$	08	XY	...
$+$	C/П	БП							

Инструкция: установить переключатель Р-Г в положение Р, записать в текст программы вместо многоточия значение $a_0/2$ ($a_1 = P1, b_1 = P2, a_2 = P3, b_2 = P4, a_3 = P5, b_3 = P6, a_4 = P7, b_4 = P8, a_5 = P9, b_5 = P10, a_6 = P11, b_6 = P12$) $t/T = PX$ (B/O) $C/П$ $PX = x(t/T)$.

Контрольный пример: при $a_0/2 = 2; a_1 = 10; b_1 = 5; a_2 = 8; b_2 = 2; a_3 = 4; b_3 = 1; a_4 = 1; b_4 = 0,2; a_5 = 0,1; b_5 = 0,05; t/T = 0,1$ получим $x(t/T) = 16,3268$ при времени счета около 25 с и (при $a_6 = b_6 = 0$) 55 с соответственно.

Суммирование большего числа членов ряда (2.23) в полуавтоматическом режиме обеспечивают следующие программы.

P2	XY	P3	F4	1	$+$	P4	\uparrow	F7	\times	e^{jx}	P6
F2	x	P5	F6	\uparrow	F3	x	\uparrow	F5	$+$	\uparrow	F8
$+$	P8	F4	C/П	БП	P0						

P2	XY	P3	ИП4	1	$+$	П4	ИП7	\times	П0
sin	ИП2	x	ИП0	cos	ИП3	x	$+$	ИП8	$+$
P8	ИП4	C/П	БП						

Инструкция: $0 = P4$, $2\pi t/T = P7$, $a_0/2 = P8$, $a_1 = PY$, $b_1 = PX$ В/О С/П $PX = 1$, $a_2 = PY$, $b_2 = PX$ С/П $PX = 2$, ..., $a_N = PY$, $b_N = PX$ С/П $PX = N$, $P8 = x(t/T)$. Перед выполнением программы 77/34 переключатель Р–Г устанавливают в положение Р. Для проверки можно использовать результаты предыдущего контрольного примера.

При суммировании косинусоидального усеченного ряда Фурье

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^N c_k \cos\left(\frac{2\pi k t}{T} + \varphi_k\right) \quad (2.24)$$

с небольшим числом N членов можно использовать следующие программы.

Программа 78/21С. Суммирование косинусоидального ряда Фурье с $N \leq 5$

\uparrow	π	x	2	\times	P8	\uparrow	F4	$+$	cos	\uparrow	F3
x	\uparrow	F2	$+$	P7	F8	5	ПП	F/-	4	ПП	F/-
3	ПП	F/-	2	ПП	F/-	F7	С/П	БП	P0	x	\uparrow
F6	\rightarrow	P6	$+$	cos	\uparrow	F5	\rightarrow	P5	x	\uparrow	F7
$+$	P7	F8	B/O								

Инструкция: ($a_0/2 = P2$, $c_1 = P3$, $\varphi_1 = P4$, $c_2 = P5$, $\varphi_2 = P6$, $c_3 = C1$, $\varphi_3 = C2$, $c_4 = C3$, $\varphi_4 = C4$, $c_5 = C5$, $\varphi_5 = C6$) $t/T = PX$ (В/О) С/П $PX = x(t/T)$.

Программа 79/34. Суммирование косинусоидального ряда Фурье с $N \leq 6$

π	x	ПД	1	3	П0	C _x	\uparrow	XY	КИП0
ИПД	ИП0	x	$+$	cos	КИП0	x	$+$	ИП0	1
-	x = 0	08	XY	...	$+$	C/П	БП		

Инструкция: записать в программу вместо многоточия значение $a_0/2$, установить переключатель Р–Г в положение Р, ($c_1 = P1$, $\varphi_1 = P2$, $c_2 = P3$, $\varphi_2 = P4$, $c_3 = P5$, $\varphi_3 = P6$, $c_4 = P7$, $\varphi_4 = P8$, $c_5 = P9$, $\varphi_5 = PA$, $c_6 = PB$, $\varphi_6 = PC$) $t/T = PX$ (В/О) С/П $PX = x(t/T)$.

Контрольный пример: при $a_0/2 = 2$; $c_1 = 10$; $\varphi_1 = 0$; $c_2 = 8$; $\varphi_2 = 0,5$; $c_3 = 5$; $\varphi_3 = 0,8$; $c_4 = 2$; $\varphi_4 = 2$; $c_5 = 0,5$; $\varphi_5 = 3$; $c_6 = \varphi_6 = 0$; $t/T = 0,2$ получим $x(0,2) = -2,57664$ соответственно за 25 и 45 с.

При необходимости суммирования большего числа членов ряда (2.24) можно использовать полуавтоматический режим.

Программа 80/21. Суммирование косинусоидального ряда Фурье с произвольным числом N первых членов

P2	XY	P3	F4	1	$+$	P4	\uparrow	F7	x	\uparrow	F2
+	cos	\uparrow	F3	x	\uparrow	F8	$+$	P8	F4	C/П	БП
P0											

Программа 81/34. Суммирование косинусоидального ряда Фурье с произвольным числом N первых членов

КИП4	\rightarrow	ИП4	ИП7	x	$+$	cos	x	ИП8	$+$
P8		ИП4	С/П	БП					

Инструкция: $0 = P4$, $2\pi t/T = P7$, $a_0/2 = P8$, $c_1 = PY$, $\varphi_1 = PX$ В/О С/П $PX = 1$, $c_2 = PY$, $\varphi_2 = PX$ С/П $PX = 2$, ..., $c_N = PY$, $\varphi_N = PX$ С/П $PX = N$, $P8 = x(t/T)$. Перед выполнением программы 81/34 переключатель Р–Г следует установить в положение Р.

Для проверки можно использовать результаты предыдущего контрольного примера.

При полностью автоматизированном вычислении ряда Фурье число суммируемых членов ограничено емкостью запоминающих устройств. Число исходных данных можно уменьшить, нормируя члены ряда и смешая начало отсчета аргумента на величину $x_0 = 2\pi t_0/T = -\varphi_1$. Кроме того, число суммируемых членов ряда можно увеличить, записав немногозначные коэффициенты в текст программы и исключив равные нулю.

В качестве примера составим программу вычисления суммы членов ряда

$$x(t/T) = 0,2 + \sum_{k=1}^N 0,4 \frac{\sin(\pi k/5)}{\pi k/5} \cos(2\pi k t/T),$$

полученного усечением разложения спектра периодической последовательности прямоугольных импульсов с максимальным значением 1 В, длительностью 2 мкс и периодом 10 мкс. Если записать коэффициенты 0,2 и 0,4 в текст программы и учесть, что фазы всех гармоник равны 0 или 180° и равны нулю амплитуды гармоник с номерами, кратными 5, то можно составить программу, обеспечивающую суммирование до 16 членов рассматриваемого ряда.

Программа 82/34. Синтез прямоугольного импульса по дискретному спектру с $N = 16$

π	x	2	x	ПД	\cos	ИП0	x	ИП1	2
ПП	70	ИП2	3	ПП	70	ИП3	4	ПП	70
ИП4	6	ПП	70	ИП5	7	ПП	70	ИП6	8
ПП	70	ИП7	9	ПП	70	ИП8	1	1	ПП
70	ИП9	1	2	ПП	70	ИПА	1	3	ПП
70	ИПВ	1	4	ПП	70	ИПС	1	6	ПП
70	2	x	1	+	5	\div	С/П	БП	00
ИПД	x	\cos	x	+	B/O				

Инструкция: установить переключатель Р–Г в положение Р, $f(1) = \sin(\pi/5)/\pi/5 = P0$, $f(2) = \sin(2\pi/5)/2\pi/5 = P1$, $f(3) = \sin(3\pi/5)/3\pi/5 = P2$, $f(4) = P3$, $f(6) = P4$, $f(7) = P5$, $f(8) = P6$, $f(9) = P7$, $f(11) = P8$, $f(12) = P9$, $f(13) = PA$, $f(14) = PB$, $f(16) = PC$, $t/T = PX$ (B/O) С/П $PX = x(t/T)$.

Контрольный пример: время вычисления $x(0,1) = 0,504407$ составляет около 50 с.

Рассматриваемую задачу можно решить и для произвольного числа членов ряда в полуавтоматическом и автоматическом режимах работы программируемого микрокалькулятора. В последнем случае достаточно организовать цикл, охватывающий вычисление очередного члена ряда, его сложение с текущей суммой и выход из цикла после выполнения заданного числа N итераций.

Программа 83/21. Синтез прямоугольного импульса по дискретному спектру с произвольным числом N первых составляющих

\uparrow	π	x	2	x	P2	π	5	\div	P3	F4	1
+	P4	\uparrow	F2	x	\cos	P6	F3	x	\uparrow	\sin	XY
\div	\uparrow	F5	x	\uparrow	F6	x	\uparrow	F8	+	P8	F4
\uparrow	F7	$-$	$x = 0$	FXY	F8	C/P	БП	P0			

Программа 84/34. Синтез прямоугольного импульса по дискретному спектру с произвольным числом N первых составляющих

π	x	2	x	П2	π	5	\div	П3	ИП4
1	+	П4	ИП2	x	\cos	ИП4	ИП3	x	\uparrow
\sin	XY	\div	x	ИП5	x	ИП8	+	П8	ИП4
ИП7	$-$	$x = 0$	09	ИП8	C/P	БП			

Инструкция для обеих программ: ($0 = P4$, $0,4 = P5$, $N = P7$) $0,2 = P8$, $t/T = PX$ (B/O) С/П $PX = x(t/T)$. Перед выполнением программы 84/34 переключатель Р – Г следует установить в положение Р.

Время вычисления результата, контрольного примера для программы 82/34 по этим программам при $N = 16$ составляет соответственно около 2,5 и 3 мин.

В радиотехнических приложениях встречается задача построения непрерывной функции по ее табличной модели, которую в общем случае решают методами интерполяции [20]. Значения непрерывной функции времени $x(t)$ с ограниченным спектром связаны с отсчетами $x(kT_d)$ ее табличной модели с постоянным шагом T_d рядом Котельникова

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT_D) \frac{\sin \pi (t/T_D - k)}{\pi (t/T_D - k)}.$$

В частности, с помощью этого ряда сравнивают реакции реального и идеального интерполяционных фильтров аналого-цифровых систем на заданную последовательность коротких импульсов. При решении такой задачи для уменьшения числа исходных данных целесообразно перейти к нормированному аргументу $\xi = t/T_D$ и использовать усеченный ряд Котельникова

$$x(\xi) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k) \frac{\sin \pi (\xi - k)}{\pi (\xi - k)}. \quad (2.25)$$

При целых значениях аргумента значения функции $x(\xi)$ совпадают с отсчетами $x(k)$ и в использовании ряда нет необходимости. При нецелых значениях ξ автоматизацию вычисления $x(\xi)$ по формуле (2.25) обеспечивают следующие программы.

Программа 85/21С. Вычисление суммы $N < 11$ членов ряда Котельникова

↑	π	×	ПП	P9	C_x	P8	ПП	FВП	ПП	FВП	ПП
FВП	ПП	FВП	ПП	FВП	ПП	FВП	F2	ПП	F6	F3	ПП
F6	F4	ПП	F6	F5	ПП	F6	F6	×	↑	F8	+
C/П	×	БП	FC _x	←	XY	×	→	XY	←	↑	F8
+	P8	F7	↑	π	—	P7	e ^{jx}	F7	÷	↑	B/O

Инструкция: ($x(0) = C1, x(1) = C2, x(2) = C3, \dots, x(5) = C6, x(6) = P2, x(7) = P3, x(8) = P4, x(9) = P5, x(10) = P6$) $\xi = PX$ B/O C/П PX = $x(\xi)$. Время счета около 1 мин.

Программа 86/34. Вычисление суммы $N \leq 13$ членов ряда Котельникова

π	×	ПД	0	ИП0	ИПД	ПП	51	ИП1	ПП
47	ИП2	ПП	47	ИП3	ПП	47	ИП4	ПП	47
ИП5	ПП	47	ИП6	ПП	47	ИП7	ПП	47	ИП8
ПП	47	ИП9	ПП	47	ИПА	ПП	47	ИПВ	ПП
47	ИПС	ПП	47	C/П	БП	00	ИПД	π	—
ПД	sin	ИПД	÷	×	+				B/O

Инструкция: установить переключатель Р-Г в положение Р, ($x(0) = P0, x(1) = P1, \dots, x(9) = P9, x(10) = P4, x(11) = PB, x(12) = PC$) $\xi = PX$ (B/O) C/П PX = $x(\xi)$. Время счета около 70 с.

Контрольный пример: для $x(k) = 5; 6; 7; 8; 9; 10; 0; 1; 2; 3; 4; 0; 0$ при $\xi = 5,5$ получим $x(\xi) = 5,0259$.

При использовании приведенных программ суммирования членов ряда (2.25) следует учитывать, что начало временной координаты соответствует первому отсчету $x(0)$. Если заданные отсчеты невозможно обработать одновременно, то можно разбить их на группы, при обработке каждой из которых необходимо учесть соответствующее изменение аргумента, обусловленное смещением начальных отсчетов каждой группы. Так, при обработке с помощью программы 86/34 функции, заданной $N = 26$ отсчетами для значения $\xi = 13,5$ относительно отсчета $x(0)$, для первой половины отсчетов программу выполняют согласно инструкции. Однако для второй половины отсчетов от $x(13)$ до $x(25)$ следует принять $\xi = 13,5 - 13 = 0,5$. Сумма результатов первого и второго выполнения программы даст искомое значение $x(13,5)$, определяемое всеми 26 отсчетами. Ограничения, связанные с емкостью запоминающих устройств, отпадают при суммировании членов ряда Котельникова в полуавтоматическом режиме.

Программа 87/21. Вычисление суммы произвольного числа N членов ряда Котельникова

P2	F7	↑	F4	—	↑	π	×	↑	sin	XY	÷
↑	F2	×	↑	F8	+	P8	F4	1	+	P4	C/П
БП	P0										

ИП7 ИП4 - π x sin BX ÷ x ИП8
 + П8 КИП4 ИП4 С/П БП

Инструкция для обеих программ: ($\xi = t/T_d = P7$) $0 = P4 = P8, x(0) = PX$ В/О С/П $PX = 1, x(1) = PX$ С/П $PX = 2, x(2) = PX$ С/П $PX = 3, \dots, x(N-1) = PX$ С/П $PX = N, P8 = x(\xi)$. Перед выполнением программы 88/34 переключатель Р-Г следует установить в положение Р.

Для проверки можно воспользоваться результатами контрольного примера к программе 85/34.

2.6. Корреляционный анализ и статистическая обработка информации

Типичной задачей статистической обработки информации является оценка моментов случайной величины по ее выборке объемом N : начальных

$$m_k = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i^k$$

или центральных

$$M_k = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - m_1)^k.$$

Обычно ограничиваются оценкой первого начального (среднего значения) и трех центральных моментов, по которым находят оценку дисперсии $\sigma^2 = NM_2 / (N-1)$, асимметрии распределения $\gamma_3 = M_3 / \sqrt{M_2^3}$ и коэффициента эксцесса $\gamma_4 = (M_4 / M_2^2) - 3$. Первые центральные и начальные моменты связаны соотношениями

$$M_2 = m_2 - m_1^2; M_3 = m_3 - 3m_2m_1 + 2m_1^3 = m_3 - 3M_2m_1 - m_1^3; M_4 = m_4 - 4m_3m_1 + 6m_2m_1^2 - 3m_1^4 = m_4 - 4M_3m_1 - 6M_2m_1^2 - m_1^4, \quad (2.26)$$

которые использованы в следующих программах статистической обработки выборки x_1, x_2, \dots, x_N случайной величины.

Программа 89/21. Оценка среднего значения и трех центральных моментов выборки

P8	ПП	P9	ПП	F-	ПП	F-	ПП	F-	1	ПП	P9
←	←	C/П	P3	ПП	PC _x	P4	ПП	F6	F4	x^2	+
P8	+	↑	F4	×	P4	F8	ПП	F6	+	↑	F4
+	↑	F3	X	↑	←	XY	—	↑	F2	÷	C/П
3	X	XY	B/O	F8	X	↑	F2	←	+	P2	B/O

Инструкция: очистить P2, C1, ..., C4, $x_1 = PX$ В/О С/П $PX = 0, x_2 = PX$ В/О С/П $PX = 1, x_3 = PX$ В/О С/П $PX = 2, \dots, x_N = PX$ В/О С/П $PX = N-1 \leftarrow C/П$ $PX = m_1$ С/П $PX = M_2$ С/П $PX = M_3$ С/П $PX = M_4$.

Контрольный пример: для $x_1 = 1; 2; 3; 3$ следует выполнить: $C_x = P2 \rightarrow C_x \rightarrow C_x \rightarrow C_x \rightarrow 1 = PX$ В/О С/П $PX = 0, 2 = PX$ В/О С/П $PX = 1; 3 = PX$ В/О С/П $PX = 2; 3 = PX$ В/О С/П $PX = 3, \leftarrow C/П$ $PX = m_1 = 2,25$ С/П $PX = M_2 = 0,6875$ С/П $PX = M_3 = -0,28125$ С/П $PX = M_4 = 0,769532$.

Программа 90/34. Оценка среднего значения и трех центральных моментов выборки

ИП5	$x \neq 0$	46	ИП2	XY	÷	ИП1	ИП5	÷	П1
x^2	П6	—	П2	3	×	ИП6	+	ИП1	×
ИП3	ИП5	÷	XY	—	П3	4	×	ИП2	6
×	ИП6	+	ИП1	×	+	ИП1	×	ИП4	ИП5
÷	XY	—	П4	ИП1	С/П	П1	П2	П3	П4
XY	↑	↑	ИП1	+	П1	→	×	↑	ИП2
+	П2	→	Х	↑	ИП3	+	П3	→	Х
ИП4	+	П4	КИП5	ИП5	С/П	БП	51		

Инструкция: $0 = P5$, $x_1 = PX \text{ B/O C/P } PX = 1$, $x_2 = PX \text{ C/P}, \dots, x_N = PX \text{ C/P}$
 $PX = N \text{ B/O C/P } PX = P1 = m_1, P2 = M_2, P3 = M_3, P4 = M_4$.

Для проверки можно использовать предыдущий контрольный пример. Время обработки отсчета около 10 с, время вычисления моментов около 20 с.

При необходимости эту программу несложно дополнить фрагментами вычисления оценок дисперсии, асимметрии и коэффициента эксцесса. Если требуется лишь оценка m_1 и σ^2 , то приведенные программы для уменьшения времени статистической обработки целесообразно соответственно сократить. Если для обрабатываемой выборки $\sigma \ll m_1$, то определение центральных моментов по формулам (2.26) может привести к чрезмерным операционным погрешностям [20]. Их можно избежать, вычитая из вводимых значений x_i число a , близкое к ожидаемому среднему. Тогда после окончания вычислений искомое значение $m_1 = m'_1 + a$, а в формулы определения остальных центральных моментов вместо m_1 следует подставить m'_1 .

Программа 91/21. Оценка значений m_1 и σ^2

P6	F7	$x \neq 0$	F4	1	-	\leftarrow	F4	XY	\div	P2	X
\uparrow	F5	XY	-	\uparrow	\rightarrow	\div	P3	F2	\uparrow	F8	+
C/P	P4	P5	F6	\uparrow	F8	-	\uparrow	F4	+	P4	F1
X	\uparrow	F5	+	P5	F7	1	+	P7	C/P	BП	F,

Инструкция: $0 = P7, a = P8, x_1 = PX \text{ B/O C/P } PX = 1, x_2 = PX \text{ C/P } PX = 2, \dots, x_N = PX \text{ C/P } PX = N \text{ B/O C/P } PX = m_1, P3 = \sigma^2, P2 = m'_1, P4 = \Sigma (x_i - a), P5 = \Sigma (x_i - a)^2$. Для продолжения вычислений достаточно ввести $x_{N+1} = PX \text{ B/P P4 C/P}$ и продолжить описанные операции.

Контрольный пример: для выборки $x_i = 1000,8; 1001,2; 998,5; 999,4; 1000,5$ при $a = 1000$ получим $m_1 = 1000,08$ и $\sigma^2 = 1,227$, тогда как при $a = 0$ получим $m_1 = 1000,08$ и $\sigma^2 = 1,175$ с погрешностью 5 %. Время обработки одного элемента выборки около 5 с.

Для реализации рассмотренного алгоритма на входном языке МК34 в программу 90/34 достаточно ввести операцию вычитания a из вводимых значений x_i с учетом a при оценке выборочного среднего. Иногда удобнее получать текущую оценку числовых характеристик выборки. Для этого можно воспользоваться соотношениями: $m_{1i} = m_{1,i-1} + \delta; \delta = (x_i - m_{1,i-1})/i; \sigma_i^2 = ((i-1)\sigma_{i-1}^2 + (x_i - m_{1,i-1})^2)/i; M_{2i} = (i-1)(M_{2,i-1}/i + \delta^2); M_{3i} = (i-1)(M_{3,i-1}/i + (i+1)\delta^3) - 38M_{2i}; M_{4i} = (i-1)(M_{4,i-1}/i + (i^2+i+1)\delta^4) - 48(M_{3i} + 1,56M_{2i})$.

В следующей программе реализовано вычисление по этим формулам значений m_{1i} и σ_i^2 и грубой оценки дисперсии среднего $\sigma_{m1i}^2 = \sigma_i^2/(i-1)$.

Программа 92/21. Текущая оценка значений m_{1i} , σ_i^2 и σ_{m1i}^2

P2	2	P4	F2	C/P	\uparrow	F2	-	\uparrow	F4	\div	XY
X	\leftarrow	F2	+	P2	F4	1	+	P4	3	-	1
+	\div	\uparrow	F3	X	\uparrow	\rightarrow	+	P3	F4	1	-
\uparrow	F3	XY	\div	P5	F3	\uparrow	BП	0			

Инструкция: $x_1 = PX \text{ B/O C/P } PX = x_1 = m_1, x_2 = PX \text{ C/P } PX = m_1, PY = \sigma_1^2, P5 = \sigma_{m1}^2, x_3 = PX \text{ C/P } \dots x_i = PX \text{ C/P } PX = m_{1i}, PY = \sigma_{m1i}^2, P5 = \sigma_{m1i}^2, \dots$

Контрольный пример: для $x_i = 1000,8; 1001,2; 998,5; \dots$ последовательно получим $m_{1i} = 1000,8; 1001; 1000,166; \dots, \sigma_i^2 = 0; 0,08; 2,123333; \dots \sigma_{m1i}^2 = 0; 0,04; 0,707777; \dots$ Время обработки одного отсчета около 7 с.

Эта программа даже при $\sigma \ll m_1$ обеспечивает незначительную операционную погрешность, но время обработки одного отсчета примерно вдвое превышает это время для предыдущей программы.

На микрокалькуляторе с входным языком МК34 практически все необходимые текущие оценки можно вычислить с помощью одной программы.

Программа 93/34. Текущая оценка $m_1, M_2, M_3, M_4, \sigma^2, \gamma_3$ и γ_4

P7	C _x	П9	ПА	ПВ	1	П0	С/П	ИП7	-
ИП0	П6	1	+	П0	÷	П5	ИП7	+	П7
ИП9	ИП5	x^2	П2	ИП0	×	+	П8	ИП6	×
ИП0	÷	П9	ИП5	×	3	×	П1	ИПА	ИП0
÷	ИП0	1	+	ИП5	×	ИП2	×	÷	ИП6
×	XY	-	ПА	ИПВ	ИП0	÷	ИП0	x^2	ИП0
+	1	+	ИП2	x^2	×	+	ИП6	×	ИПА
2	Х	ИП1	+	ИП5	×	2	Х	-	ПВ
ИП9	x^2	÷	3	-	ПД	ИПА	ИП9	↑	$\sqrt{\quad}$
Х	÷	ПС	ИП7	БП	07				

Инструкция: $x_1 = PX$ В/О С/П $PX = x_1$, $x_2 = PX$ С/П ... $x_i = PX$ С/П $PX = m_1$, $P8 = \sigma^2$, $P9 = M_2$, $PA = M_3$, $PB = M_4$, $PC = \gamma_3$, $PД = \gamma_4$. Время обработки одного отсчета около 30 с.

Для проверки можно воспользоваться контрольным примером к программе 89/21 с $\sigma^2 = 0,916666$; $\gamma_3 = -0,493382$; $\gamma_4 = -1,37190$.

В радиотехнике большое значение имеют корреляционные соотношения между различными случайными сигналами или между значениями одного и того же сигнала в различные моменты времени. Для определения корреляционного момента R_{xy} по экспериментально полученной выборке значений случайных величин x_i и y_i используют соотношение

$$R_{xy} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N (y_j - m_{1y})(x_j - m_{1x}),$$

где оценки m_{1y} и m_{1x} обычно находят обработкой той же выборки значений y_i и x_i .

При анализе корреляционной связи между двумя непрерывными процессами по их реализациям последние предварительно дискретизируют. Чаще используют коэффициент корреляции, связанный с корреляционным моментом соотношением

$$r_{xy} = \frac{R_{xy}}{\sqrt{M_{2x}M_{2y}}} = \left(\sum_{i=1}^N x_i y_i - \frac{\sum_{i=1}^N x_i \sum_{i=1}^N y_i}{N} \right) / \sqrt{\left(\sum_{i=1}^N x_i^2 - \frac{(\sum_{i=1}^N x_i)^2}{N} \right) \times \left(\sum_{i=1}^N y_i^2 - \frac{(\sum_{i=1}^N y_i)^2}{N} \right)} \quad (2.27)$$

Программа 94/21. Вычисление коэффициента взаимной корреляции

P7	X	ПП	6	F7	↑	ПП	6	F2	↑	↔	+
P2	C/П	ПП	P8	P4	←	F7	P6	ПП	P8	↑	F4
X	$\sqrt{\quad}$	P3	F6	↑	F7	×	↑	F2	XY	-	↑
F3	÷	C/П	←	+	XY	x^2	XY	←	+	↔	B/O
←	↑	F8	$\sqrt{\quad}$	÷	P7	x^2	1	←	-	B/O	

Инструкция: очистить P2 и стек памяти, $N = P8$, $y_1 = PY$, $x_1 = PX$ В/О С/П ... $y_N = PY$, $x_N = PX$ В/О С/П С/П $PX = r_{xy}$, $F8 \div PX = R_{xy}$.

Контрольный пример: для $(y_i; x_i) = (0,5; 3), (1; 2), (4; 1), (-2; 0), (3; -1)$ получим $PX = r_{xy} = -0,135457$ (время обработки одного отсчета около 6 с, время вычисления r_{xy} около 8 с).

Программа 95/34. Вычисление характеристик совместной выборки

ИП0	$x \neq 0$	36	ИП1	ИП0	÷	П6	ИП3	ИП0	÷
P8	X	ИП5	ИП0	÷	XY	-	ПА	ИП2	ИП0
÷	ИП6	x^2	-	П7	ИП4	ИП0	÷	ИП8	x^2
-	П9	X	$\sqrt{\quad}$	÷	C/П	П1	П2	П3	П4

P5	→	↑	ИП1	+	П1	→	↑	x^2	ИП2
+	П2	→	XY	↑	ИП3	+	П3	→	↑
x^2	ИП4	+	П4	→	Х	ИП5	+	П5	ИП0
1	+	П0	С/П	БП	42				

Инструкция: $0 = P2, y_1 = PY, x_1 = PX$ В/О С/П $PX = 1, y_2 = PY, x_2 = PX$ С/П $PX = 2, y_3 = PY, x_3 = PX$ С/П $PX = 3, \dots, y_N = PY, x_N = PX$ С/П $PX = N$ В/О С/П $PX = r_{xy}, P6 = m_{1x}, P7 = M_{2x}, P8 = m_{1y}, P9 = M_{2y}, PA = R_{xy}$. При необходимости продолжения вычислений вводят: $y_{N+1} = PY, x_{N+1} = PX$ БП 42 С/П $y_{N+2} = PY, x_{N+2} = PX$ С/П ... Время обработки одной пары значений около 13 с.

Для проверки программы можно использовать контрольный пример к предыдущей программе.

Погрешности вычислений по формуле (2.27) можно уменьшить путем линейного преобразования текущего массива или текущей оценкой корреляционного момента $R_{xyi} = (i - 1)(R_{xy}(i-1)/i + \delta_x \delta_y)$ при $\delta_x = (x_i - m_{1x}(i-1))/i; \delta_y = (y_i - m_{1y}(i-1))/i$, а также моментов M_{2x} и M_{2y} .

Программа 96/21. Текущая оценка коэффициента корреляции

P7	XY	P4	F8	1	P3	+	P8	F4	ПП	F,	P5
F7	ПП	F,	F5	X	√	P5	F3	P4	F6	ПП	PC _x
P6	F5	÷	C/П	↑	←	P2	—	↑	F8	÷	↑
x^2	P4	F3	X	P3	F2	+	←	↑	F8	÷	↑
F4	+	↑	F8	X	XY	—	↑	←	F1	B/O	

Инструкция: очистить регистры 2, 6 и стек памяти, $y_1 = PY, x_1 = PX$ В/О С/П $PX = \infty$ (переполнение), $y_2 = PY, x_2 = PX$ В/О С/П ... $y_i = PY, x_i = PX$ В/О С/П $PX = r_{xyi}, P6 = R_{xyi}, C1 = m_{1yi}, C2 = M_{2yi}, C4 = m_{1xi}, C5 = M_{2xi}$. Время обработки одной пары значений около 28 с.

Программа 97/34. Текущая оценка коэффициента корреляции

ИП0	$x \neq 0$	62	→	ИП1	—	ИП0	÷	П7	ИП1	
+	П1	→	ИП3	—	ИП0	÷	П8	ИП3	+	
П3	ИП5	ИП0	÷	ИП7	ИП8	X	+	ИП0	1	
—	П9	X	П5	ИП2	ИП0	÷	ИП7	x^2	+	
ИП9	X	П2	ИП4	ИП0	÷	ИП8	x^2	+	ИП9	
X	П4	X	√	÷	C/П	ИП0	1	+	П0	
БП	03	П2	П4	П5	→	П1	XY	П3	1	
П0	C _x	БП	55							

Инструкция: $0 = P0, y_1 = PY, x_1 = PX$ В/О С/П $PX = 0, y_2 = PY, x_2 = PX$ С/П ... $y_i = PY, x_i = PX$ С/П $PX = r_{xyi}, P1 = m_{1xi}, P2 = M_{2xi}, P3 = m_{1yi}, P4 = M_{2yi}, \dots$ Время обработки пары значений около 25 с.

Для проверки этих программ можно использовать контрольный пример к программе 94/21.

Отличие от нуля коэффициента корреляции свидетельствует о линейной зависимости между средним значением одной из случайных величин и значением, принимаемым другой случайной величиной:

$$m_{1x}(y) = m_{1x} + \beta_{x/y}(y - m_{1y}) = m_{1x}(0) + \beta_{x/y}y;$$

$$m_{1y}(x) = m_{1y} + \beta_{y/x}(x - m_{1x}) = m_{1y}(0) + \beta_{y/x}x.$$

В этом случае начальные моменты $m_{1x}(y)$ и $m_{1y}(x)$ называют условными средними, а коэффициенты $\beta_{y/x} = r_{xy}\sigma_y/\sigma_x$ и $\beta_{x/y} = r_{xy}\sigma_x/\sigma_y$ – коэффициентами линейной регрессии. Для вычисления этих коэффициентов обычно используют метод наименьших квадратов, реализованный в следующих программах.

Программа 98/21. Вычисление коэффициентов уравнения линейной регрессии

```
P2   F5   +   P5   F2   x   ↑   F6   +   P6   F2   ↑
F7   +   P7   F2   x   ↑   F8   +   P8   F4   1   +
P4   C/Π   F8   ↑   F7   ÷   ↑   F5   x   P2   F4   x
↑   F7   -   P3   F2   ↑   F6   -   ↑   F3   ÷   P2
↑   F4   x   ↑   F5   XY   -   ↑   F7   ÷   P3   C/Π
```

Инструкция: $0 = P4 = P5 = P6 = P7 = P8, y_1 = PY, x_1 = PX \text{ B/O C/Π } PX = 1, y_2 = PY, x_2 = PX \text{ B/O C/Π } PX = 2 \dots y_N = PY, x_N = PX \text{ B/O C/Π } PX = N, C/Π PX = = P3 = \beta_{y/x}, P2 = m_{1,y}(0) (P4 = N, P5 = \sum y_i, P6 = \sum x_i y_i, P7 = \sum x_i, P8 = \sum x_i^2)$. Время обработки пары значений около 5 с. Для вычисления $\beta_{x/y}$ и $m_{1,x}(0)$ достаточно повторить вычисления, поменяв местами y_i и x_i .

Контрольный пример: для $(y_i; x_i) = (0,5; 3), (1; 2), (4; 1), (-2; 0), (3; -1)$ получим $\beta_{y/x} = -0,2$ и $m_{1,y}(0) = 1,5$. Поменяв местами вводимые значения, получим $\beta_{x/y} = -0,091743$ и $m_{1,x}(0) = 1,119266$. Следовательно, уравнения регрессии: $m_{1,y}(x) = 1,5 - 0,2x; m_{1,x}(y) = 1,119266 - 0,091743y$.

Программа 99/34. Вычисление коэффициентов линейной регрессии

```
ИП0 x=0 41   П1   П2   П3   П4   П5   →   ПС
ИП1 +   П1   XY   ПД   ИП3 +   П3   ИПС x2
ИП2 +   П2   ИПД x2   ИП4 +   П4   ИПС ИПД
x   ИП5 +   П5   ИП0 1   +   П0   С/Π   БП
09   ИП3 ИП2 x   ИП5 ИП1 x   -   ИП0 ИП2
x   ИП1 x2   -   П7   ÷   ПВ   ИП0 ИП5 x
ИП1 ИП3 x   -   П6   ИП7 ÷   ПА   ИП1 ИП4
x   ИП5 ИП3 x   -   ИП0 ИП4 x   ИП3 x2
-   ÷   ПД   ИП6 BX   ÷   ПС   ИПА ÷   √
ИПА x   БП   38
```

Инструкция: $0 = P0, y_1 = PY, x_1 = PX \text{ B/O C/Π } PX = 1, y_2 = PY, x_2 = PX \text{ C/Π } PX = 2 \dots y_i = PY, x_i = PX \text{ C/Π } PX = i \text{ B/O C/Π } PX = r_{xy}, PA = \beta_{y/x}, PB = m_{1,y}(0), PC = \beta_{x/y}, PD = m_{1,x}(0) (P1 = \sum x_i, P2 = \sum x_i^2, P3 = \sum y_i, P4 = \sum y_i^2, P5 = \sum x_i y_i) y_{i+1} = = PY, x_{i+1} = PX \text{ C/Π} \dots$ Время обработки пары значений около 10 с, время вычисления коэффициентов около 20 с.

Для анализа автокорреляционных функций $r(\tau)$ случайных процессов по их реализациям можно воспользоваться следующими программами вычисления нормированного эмпирического значения функции $r(n)$ для аргумента n , кратного интервалу дискретизации T_d , по формуле

$$r(n) = \frac{\sum_{i=1}^{N-S} x_i x_{i-s} - (N-S) \left(\sum_{i=1}^N x_i \right)^2 / N^2}{\left[\sum_{i=1}^N x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^N x_i \right)^2 / N \right] (N-S-1) / (N-1)} . \quad (2.28)$$

Для вычисления $r(n)$ на микрокалькуляторе с входным языком MK21 предназначен пакет из двух программ. С помощью первой вычисляются смешанные начальные моменты 2-го порядка и первый начальный момент. С помощью второй по этим данным вычисляется оценка $r(n)$ для $n = 0, 1, \dots, 5$.

Программа 100/21. Оценка автокорреляционной функции

```
P2   ↑   F8   +   P8   F2   ПП   P6   F3   ПП   P6   F4
ПП   P6   F5   ПП   P6   F6   ПП   P6   F7   ПП   P6   F6
P7   F5   P6   F4   P5   F3   P4   F2   P3   C/Π   БП   P0
x   XY   ←   +   ↑   →   XY   ←   B/O
```

Программа 101/21. Нормировка автокорреляционной функции

←	P4	P5	F8	↑	F7	÷	x^2	P8	F5	↑	F7
÷	↑	F8	—	P2	F7	1	—	÷	↑	F2	X
P2	F7	1	—	P7	F8	X	↑	F4	XY	—	↑
F2	÷	↑	F7	÷	C/Π	←	P4	БП	F4		

Инструкция: ввести программу 100/21, очистить регистр 8 и стек памяти, $x_1 = PX$ B/O C/Π $PX = x_1$, $x_2 = PX$ C/Π $PX = x_2$, ..., $x_N = PX$ C/Π $PX = x_N$ ($P2 = \sum x_i$, $C1 = \sum x_i^2$, $C2 = \sum x_i x_{i-1}$, $C3 = \sum x_i x_{i-2}$, $C4 = \sum x_i x_{i-3}$, $C5 = \sum x_i x_{i-4}$, $C6 = \sum x_i x_{i-5}$); не изменяя содержимого памяти, ввести программу 101/21, $N = P7$ B/O C/Π $PX = r(0) = 1$, $P2 = \sigma^2$ C/Π $PX = r(1)$ C/Π $PX = r(2)$... C/Π $PX = r(5)$.

Если перед первым пуском программы 101/21 в регистр X ввести значение $\sum x_i x_{i-6}$, перед следующим ввести $\sum x_i x_{i-7}$, и т. д., то вычисления по этой программе можно продолжить до определения значений $r(n)$ для дополнительного вводимых значений $\sum x_i x_{i-n}$. Эти значения можно вычислить с помощью вспомогательной программы, например следующей.

Программа 102/21. Вычисление значений $\sum x_i x_{i-n}$

↑	F8	X	XY	P8	F5	+	P5	F8	↑	F7	X
↑	F4	+	P4	F8	↑	F6	X	↑	F3	+	P3
F8	↑	F7	P8	F6	P7	F1	→	P6	X	↑	F2
+	P2	C/Π	БП	P0							

Инструкция: очистить все регистры памяти, $x_1 = PX$ B/O C/Π $x_2 = PX$ C/Π $x_3 = PX$ C/Π ... $x_N = PX$ C/Π $P2 = \sum x_i x_{i-6}$, $P3 = \sum x_i x_{i-7}$, $P4 = \sum x_i x_{i-8}$, $P5 = \sum x_i x_{i-9}$.

Контрольный пример: для проверки трех последних программ используем последовательность $x_i = 1; 3; -2; 1,5; -0,5; 0; 1; -1,5; 2; -1; 0,5; -1,5$. По программе 102/21 вычисляем и записываем значения $\sum x_i x_{i-6} = -9,25$; $\sum x_i x_{i-7} = 8$; $\sum x_i x_{i-8} = -4,25$; $\sum x_i x_{i-9} = 3,5$. Вводим программу 100/21 и для заданной последовательности выполняем ее, после чего вводим программу 101/21 и выполняем $N = 12 = P7$, $-9,25 = PX$ B/O C/Π $PX = r(0) = 1$, $P2 = \sigma^2 = 2,429923,8 = PX$ C/Π $PX = r(1) = -0,616374$; $-4,25 = PX$ C/Π $PX = r(2) = 0,391689$; $3,5 = PX$ C/Π $PX = r(3) = -0,148699$; C/Π $PX = r(4) = -0,196785$ C/Π $PX = r(5) = 0,527875$ C/Π $PX = r(6) = -0,782774$ C/Π $PX = r(7) = 0,800743$ C/Π $PX = r(8) = -0,6068243$ C/Π $PX = r(9) = 0,693394$.

Вычисление функций $r(n)$ для $n = 0, 1, \dots, 6$ можно выполнить с помощью одной программы.

Программа 103/34. Вычисление автокорреляционной функции

ИП0	$x = 0$	60	→	↑	↑	ИПД	+	ПД	→
x^2	ИП0	+	П0	→	ИПС	X	ИП6	+	П6
→	ИПВ	ПС	X	ИП5	+	П5	→	ИПА	ПВ
X	ИП4	+	П4	→	ИП9	ПА	X	ИП3	+
П3	→	ИП8	П9	X	ИП2	+	П2	→	ИП7
П8	X	ИП1	+	П1	→	П7	C/Π	БП	04
XY	ПС	ИПД	XY	÷	x^2	ПД	ИПС	X	—
ИПС	1	—	÷	П0	1	ПВ	C/Π	КИПВ	ИПС
ИПВ	—	ИПД	X	—	ИП0	÷	ИПС	ИПВ	1
+	ПВ	—	÷	БП	77				

Инструкция: очистить все регистры памяти, $x_1 = PX$ B/O C/Π $PX = x_1$, $x_2 = PX$ C/Π $PX = x_2$, ..., $x_N = PX$ C/Π $PX = x_N$, $N = PX$ B/O C/Π $PX = r(0) = 1$ ($P0 = \sigma^2$) C/Π $PX = r(1)$ C/Π ... C/Π $PX = r(6)$. Если перед выполнением второй части программы (перед вводом $N = PX$) в регистры 7, 8, ..., A ввести значения $\sum x_i x_{i-1}$, ..., $\sum x_i x_{i-10}$ (для вычисления которых можно составить программу, аналогичную программе 102/21), то их также можно нормировать с помощью этой программы.

В радиотехнических приложениях встречается задача оценки параметров известного распределения по числовым характеристикам выборки. Для этого обычно используют метод максимального правдоподобия, метод моментов или критерий χ^2 . Эти методы сводятся к решению системы линейных уравнений относительно оцениваемых параметров и отличаются лишь способом формирования такой системы. После определения параметров искомого распределения для оценки надежности (уровня значимости) проверяют (особенно в том случае, когда нет уверенности в правильном выборе закона распределения) полученные результаты, обычно используя критерий согласия χ^2 . По этому критерию согласие измеряется с помощью статистики

$$y = \sum_{k=1}^r \frac{(n_k - np_k)^2}{np_k} = \sum_{k=1}^r \frac{n_k^2}{np_k} - n, \quad (2.29)$$

где r – число классовых интервалов, на которые разбивают интервал значений, принимаемых случайной величиной x ; n_k – частота попадания этой случайной величины в k -й классовый интервал при объеме выборки n ; p_k – вероятность попадания в этот интервал, соответствующая проверяемому закону $p(x)$.

Распределение статистики y при $n \rightarrow \infty$ стремится к распределению χ^2 с $m = r - s - 1$ степенями свободы, где s – число параметров распределения $p(x)$. Подсчитав статистику y , по числу степеней свободы m и выбранному исходя из условий задачи уровню значимости α квантиль $\chi_{k,\alpha}^2$ определяют из уравнения

$$p(\chi^2 > \chi_{k,\alpha}^2) = \int_{\chi_{k,\alpha}^2}^{\infty} p_1(\chi^2) d\chi^2 = 1 - F_1(\chi_{k,\alpha}^2).$$

Если $y > \chi_{k,\alpha}^2$, то χ^2 -критерий с уровнем значимости α отрицает правильность определения параметров закона распределения. В противном случае экспериментальные результаты не противоречат теоретическим.

Вычисления по формуле (2.29) при их автоматизации целесообразно дополнить определением значений p_k для рассматриваемого закона распределения. Если принять, что ширина всех классовых интервалов такова, что интегрирование по простой формуле Симпсона в каждом из них приводит к допустимой методической погрешности, то можно воспользоваться следующей программой, обеспечивающей автоматизацию проверки по критерию χ^2 большинства встречающихся на практике распределений.

Программа 104/21. Проверка согласия по критерию χ^2

P3	\uparrow	F2	+	2	\div	PП	FC _x	F1	4	X	P7
F2	ПП	FC _x	F3	ПП	FC _x	F2	\uparrow	F3	P2	$-$	\uparrow
F7	X	\uparrow	F8	X	\uparrow	F6	X	P7	C/P	\uparrow	F7
XY	$-$	x^2	XY	\div	\uparrow	\rightarrow	$+$	\leftarrow	C/P	\dots	F7
+	P7	B/O									

Инструкция: 1. Записать в программу вместо многоточия операторы вычисления анализируемой функции $p(x)$ при $x = RX$ и хранении параметров в регистрах 4, 5 и стеке памяти; занести в регистр 6 с отрицательным знаком нормирующий множитель функции $p(x)$, деленный на 6 (если этот множитель равен единице, то $-1/6 = P6$); $n = P8$, $0 = C6$, $x_1 = P2$ (где x_1 – левая граница крайнего левого классового интервала).

2. Граница между крайним левым и следующим классовым интервалом $x_2 = RX$ B/O C/P ($RX = np_1$), ввести число n_1 попаданий случайной величины в крайний левый классовый интервал и нажать клавишу C/P.

3. Повторить п. 2 для остальных границ классовых интервалов, после чего вычисленное значение статистики $y = C6$.

В качестве примера рассмотрим вычисление статистики y при проверке гипотезы о нормальном законе с $m_1 = 3,6$ и $\sigma = 1,2$ при группировании случайного процесса с вы-

¹ Уровень значимости определяет вероятность отклонения правильной гипотезы (ошибка первого рода по критерию Неймана – Пирсона).

боркой $n = 100$ по шести интервалам. При $-2\sigma^2 = P4; m_1 = P5; -1/(6\sqrt{2\pi}\sigma) = P6$ вычисление функции $p(x) = (\exp(-(x - m_1)^2/2\sigma^2))/(\sqrt{2\pi}\sigma)$ обеспечивается фрагментом ... ↑ F5 - x^2 ↑ F4 ÷ e x ↑, помещаемым вместо многоточия в программу 104/21.

Допустим, что границы классовых интервалов $x_k = -2; 2; 3; 3,5; 4; 5; 9$ и в каждый из них соответственно попало 3; 9; 30; 45; 9 и 4 значения случайной величины. Тогда, после ввода программы с дополнительным фрагментом, следует выполнить: $-2 = P2; -2,88 = P4; 3,6 = P5; -1/6 \cdot 1,2\sqrt{2\pi} = P6; 100 = P8; 0 = C6; 2 = PX$ В/О С/П ($PX = 10,0969$) $3 = PX$ С/П ($PX = 4,98829$) $3 = PX$ В/О С/П ($PX = 21,728$) $9 = PX$ С/П ($PX = 7,45602$) $3,5 = PX$ В/О С/П ($PX = 15,8259$) $30 = PX$ С/П ($PX = 12,6944$) $4 = PX$ В/О С/П ($PX = 16,3770$) $45 = PX$ С/П ($PX = 50,0257$) $5 = PX$ В/О С/П ($PX = 24,7768$) $9 = PX$ С/П ($PX = 10,0460$) $9 = PX$ В/О С/П ($PX = 12,8243$) $4 = PX$ С/П ($PX = 6,07201$) → $PX = 91,28259$.

Для $k = 6 - 2 - 1 = 3$ и выбранного уровня значимости, например $\alpha = 0,05$ по таблице квантилей χ^2 -распределения [9], находим $\chi^2_{3,0,05} = 7,815$. Так как вычисленное значение u превосходит эту величину, то гипотезу о нормальном распределении рассматриваемой выборки следует признать несостоятельной с вероятностью 0,05 ошибки.

Методическая погрешность вычислений по программе 104/21 зависит от ширины классовых интервалов и характера интегрируемой функции $p(x)$. В следующей программе при интегрировании функции $p(x)$ каждый классовый интервал разбивается на четыре части, в связи с чем методическая погрешность уменьшается в 32 раза.

Программа 105/34. Проверка согласия по критерию χ^2

P5	XY	P2	C _x	P6	ИП2	ИП0	-	4	÷
P3	ИП0	ПП	57	ПП	53	4	ПП	50	2
ПП	50	4	ПП	50	ИП4	+	ИП3	x	3
÷	ИП1	x	↑	ИП5	-	x^2	XY	÷	ИП6
+	П6	ИП2	П0	C/П	П5	XY	П2	БП	06
×	ИП4	+	П4	ИП0	ИП3	+	П0	...	B/O

Инструкция: записать в программу вместо многоточия операторы вычисления функции $p(x)$ при $x = P0$ (для хранения коэффициентов можно использовать регистры 7 ... Д), $x_1 = P0, n = P1, x_2 = PY, n_1 = PX$ В/О С/П; повторить выполнение программы для остальных классовых интервалов с вводом $x_k = PY, n_k = PX$ С/П; зарегистрировать $P6 = u$.

В статистических расчетах часто встречается интеграл вероятности, определяемый обычно формулой

$$\Phi(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^x e^{-t^2/2} dt.$$

Программа 106/21. Вычисление интеграла вероятности

P3	3	+	P2	5	-	$x < 0$	FX Y	C _x	P2	F3	↑
F2	-	↑	F8	P4	÷	P3	↑	ПП	P9	P6	ПП
F8	4	x	↑	F6	+	P6	F4	2	-	P4	ПП
F8	↑	F6	+	XY	+	P6	F4	$x = 0$	÷	F7	x
C/П	F3	↑	F2	+	P2	F2	x^2	e x	√	÷	B/O

Инструкция: ($\sqrt{2/9\pi} = P7, n = P8$) $x = PX$ В/О С/П $PX = \Phi(x)$ при $x < 2$ или $PX = \Phi(x) - 1$ при $x \geq 2$ (n – четное число разбиения интервала интегрирования).

Контрольный пример: при $n = 8$ получим $\Phi(1) = 0,6826907$; при $n = 8$ получим $\Phi(4) = 1 - 6,466332 \cdot 10^{-5} = 0,9999353$. Время счета t , с $\approx 15 + 5n$. Максимальная погрешность (для $x \approx 2$) не превышает $2 \cdot 10^{-5}$ при $n = 8$ и $5 \cdot 10^{-6}$ при $n = 10$.

При использовании следующей программы значение $\Phi(x)$ индицируется при любом значении аргумента.

Программа 107/34. Вычисление интеграла вероятности

П3	3	+	П2	5	-	x < 0	10	C _x	П2
ИП3	ИП2	-	ИП8	П4	÷	П3	ПП	64	П6
ПП	60	4	X	ИП6	+	П6	ИП4	2	-
П4	ПП	60	ИП6	+	+	П6	ИП4	x = 0	20
BХ	2	π	÷	9	÷	√	X	ИП3	X
П0	x < 0	55	1	+	П1	ИП1	C/П	БП	00
ИП3	ИП2	+	П2	ИП2	x ²	e ^x	1/x	√	↑
B/O									

Инструкция: (четное число разбиения интервала интегрирования $n = P8$) $x = PX$ (B/O) C/P $PX = \Phi(x)$, $P0 = \Phi(x) - 1$ при $x > 2$. Время счета t , с = 15 + 7,5n.

Контрольный пример: $\Phi(2) = 0,9544728$; $\Phi(6) = 1$ ($P0 = -2,1452718 \cdot 10^{-9}$) при $n = 8$.

Иногда приходится вычислять квантили x_p нормального распределения при заданной вероятности

$$P = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{x_p} e^{-t^2/2} dt.$$

Программа 108/21. Вычисление квантилей нормального распределения

↑	1	-	2	XY	÷	x ²	ln	√	4	ln	√
-	P8	↑	F4	X	1	+	P7	F8	↑	F3	X
↑	F2	+	↑	F7	÷	↑	F8	X	C/P	БП	P0

Программа 109/34. Вычисление квантилей нормального распределения

↑	1	-	2	XY	÷	x ²	ln	√	4
ln	√	-	P8	ИП3	X	ИП2	+	ИП4	ИП8
X	1	+	÷	ИП8	X	C/P	БП		

Инструкция к обеим программам: (1,47 = P2; 0,487 = P3; 0,482 = P4) $P = PX$ (B/O) C/P $PX = x_p$

Контрольный пример: $x_p(0,5) = 0,674253$.

Для уменьшения времени счета в этих программах использована аппроксимация x_p с относительной погрешностью не более 10^{-3} .

Г л а в а 3

АНАЛИЗ ЛИНЕЙНЫХ ЦЕПЕЙ

3.1. Методика анализа

Анализ радиотехнической цепи, образованной соединением реальных компонентов, заключается в теоретическом определении ее свойств по реакциям на заданные воздействия. На первом этапе по известным математическим моделям компонентов составляют математическую модель всей цепи, а на втором – рассчитывают по этой модели ис-комые характеристики.

По отношению к слабым сигналам радиотехническую цепь рассматривают как линейную, что существенно упрощает анализ, так как в соответствии с (1.4) постоянные параметры $w = x/q$ полностью определяют свойства линейных каналов связи между воздействи-ями q и реакциями x .

Свойства двухполюсных (одновходовых) пассивных компонентов в зависимости от выбора размерности воздействия описывают входной проводимостью или сопротивлением $z_{bx} = 1/y_{bx} = u_{bx}/i_{bx}$, являющимся в общем случае функцией комплексной ча-стоты $p = \sigma + j\omega$.

Модели линейных компонентов часто составляют в виде схем замещения из идеаль-ных двухполюсников с сопротивлениями R , pL или $1/(pC)$, где R , L и C представляют

себой меру рассеяния энергии, накопления магнитной и электрической энергий соответственно. Схемы замещения активных компонентов содержат идеальные независимые или зависимые источники сигнала с размерностью тока или напряжения.

Компоненты с двумя независимыми входами рассматривают как 2×2 -полюсники или проходные четырехполюсники с определенным выбором положительных направлений входных токов и напряжений (рис. 19, а) и моделируют системой уравнений (1.5), принимающей в соответствии с выбором независимых переменных одну из следующих форм:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} y_{11} y_{12} \\ y_{21} y_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} i_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_{11} d_{12} \\ d_{21} d_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ i_2 \end{bmatrix}; \\ \begin{bmatrix} u_1 \\ i_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} h_{11} h_{12} \\ h_{21} h_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ u_2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_{11} z_{12} \\ z_{21} z_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix}; \\ \begin{bmatrix} u_1 \\ i_1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} a_{11} a_{12} \\ a_{21} a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ i_2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} u_2 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11} b_{12} \\ b_{21} b_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ i_1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

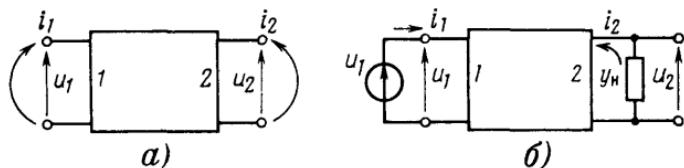


Рис. 19

По известным параметрам одной из этих систем несложно определить остальные параметры, используя приведенные в табл. 5 формулы, где $|w| = w_{11}w_{22} - w_{12}w_{21}$ – определитель матрицы соответствующих параметров. Параметры B -матрицы в табл. 5 не приведены, так как они совпадают с параметрами A -матрицы при изменении на обратную нумерации входов.

ТАБЛИЦА 5
Соотношения между параметрами линейного проходного четырехполюсника

	Y	D	H	Z	A		
1	2	3	4	5	6		
Y	y_{11}	y_{12}	$\frac{ d }{d_{22}}$	$\frac{d_{12}}{d_{22}}$	$\frac{1}{h_{11}} - \frac{h_{12}}{h_{11}}$	$\frac{z_{22}}{ z } - \frac{z_{12}}{ z }$	$\frac{a_{11}}{a_{12}} - \frac{ a }{a_{12}}$
	y_{21}	y_{22}	$-\frac{d_{21}}{d_{22}}$	$\frac{1}{d_{22}}$	$\frac{h_{21}}{h_{11}} - \frac{ h }{h_{11}}$	$-\frac{z_{21}}{ z } + \frac{z_{11}}{ z }$	$\frac{1}{a_{12}} - \frac{a_{11}}{a_{12}}$
D	$\frac{ y }{y_{22}}$	$\frac{y_{12}}{y_{22}}$	d_{11}	d_{12}	$\frac{h_{22}}{ h } - \frac{h_{12}}{ h }$	$\frac{1}{z_{11}} - \frac{z_{12}}{z_{11}}$	$\frac{a_{21}}{a_{11}} - \frac{ a }{a_{11}}$
	$-\frac{y_{21}}{y_{22}}$	$\frac{1}{y_{22}}$	d_{21}	d_{22}	$-\frac{h_{21}}{ h } + \frac{h_{11}}{ h }$	$\frac{z_{21}}{z_{11}} - \frac{ z }{z_{11}}$	$\frac{1}{a_{11}} - \frac{a_{12}}{a_{11}}$
H	$\frac{1}{y_{11}}$	$-\frac{y_{12}}{y_{11}}$	$\frac{d_{22}}{ d }$	$-\frac{d_{12}}{ d }$	h_{11}	h_{12}	$\frac{ z }{z_{22}} - \frac{z_{12}}{z_{22}}$
	$\frac{y_{21}}{y_{11}}$	$\frac{ y }{y_{11}}$	$-\frac{d_{21}}{ d }$	$\frac{d_{11}}{ d }$	h_{21}	h_{22}	$-\frac{z_{21}}{z_{22}} + \frac{1}{z_{22}}$

¹ Активными называют компоненты цепи, преобразующие энергию источника питания в энергию сигнала.

1	2	3	4	5	6					
Z	$\frac{y_{22}}{ y }$	$-\frac{y_{12}}{ y }$	$\frac{1}{d_{11}}$	$-\frac{d_{12}}{d_{11}}$	$\frac{ h }{h_{22}}$	$\frac{h_{12}}{h_{22}}$	z_{11}	z_{12}	$\frac{a_{11}}{a_{21}}$	$\frac{ a }{a_{21}}$
	$-\frac{y_{21}}{ y }$	$\frac{y_{11}}{ y }$	$\frac{d_{21}}{d_{11}}$	$\frac{ d }{d_{11}}$	$-\frac{h_{21}}{h_{22}}$	$\frac{1}{h_{22}}$	z_{21}	z_{22}	$\frac{1}{a_{21}}$	$-\frac{a_{21}}{a_{21}}$
A	$-\frac{y_{22}}{y_{21}}$	$\frac{1}{y_{21}}$	$\frac{1}{d_{21}}$	$-\frac{d_{22}}{d_{21}}$	$-\frac{ h }{h_{21}}$	$\frac{h_{11}}{h_{21}}$	$\frac{z_{11}}{z_{21}}$	$-\frac{ z }{z_{21}}$	a_{11}	a_{12}
	$-\frac{ y }{y_{21}}$	$\frac{y_{11}}{y_{21}}$	$\frac{d_{11}}{d_{21}}$	$-\frac{ d }{d_{21}}$	$-\frac{h_{22}}{h_{21}}$	$\frac{1}{h_{21}}$	$\frac{1}{z_{21}}$	$-\frac{z_{22}}{z_{21}}$	a_{21}	a_{22}

Цепь передачи сигналов представляют нагруженным проходным четырехполюсником (рис. 19, б), причем вход, на котором определены только реакции, называют *выходом*. Параметры такого канала передачи сигнала, связывающего реакции и воздействия, называют *функциями цепи* или *схемными функциями* при описании цепи схемой. Свойства линейной цепи передачи сигнала полностью определяются входным сопротивлением $Z_{\text{вх}} = u_{\text{вх}}/i_{\text{вх}}$ и коэффициентом передачи напряжения $K_{\text{н}} = u_{\text{н}}/u_{\text{вх}}$ (рис. 19, б), так как с учетом уравнения связи $i_{\text{н}} = -u_{\text{н}}u_{\text{н}}^{-1}$ по этим функциям можно определить все остальные: входную проводимость $Y_{\text{вх}} = 1/Z_{\text{вх}}$, передаточную проводимость $Y_{\text{пер}} = i_{\text{н}}/u_{\text{вх}} = -u_{\text{н}}K_{\text{н}}$, передаточное сопротивление $Z_{\text{пер}} = u_{\text{н}}/i_{\text{вх}} = Z_{\text{вх}}K_{\text{н}}$ и коэффициент передачи тока $K_{\text{т}} = i_{\text{н}}/i_{\text{вх}} = -u_{\text{н}}Z_{\text{вх}}K_{\text{н}}$.

Входное сопротивление и коэффициент передачи напряжения нагруженного проходного четырехполюсника выражают через его параметры и параметр нагрузки:

$$Z_{\text{вх}} = \frac{y_{22} + y_{\text{н}}}{y_{\text{н}}y_{11} + |y|} = \frac{d_{22} + z_{\text{н}}}{d_{11}z_{\text{н}} + |z|} = \frac{h_{11}y_{\text{н}} + |h|}{h_{22} + y_{\text{н}}} = \frac{z_{11}z_{\text{н}} + |z|}{z_{22} + z_{\text{н}}} = \frac{a_{11} - a_{12}y_{\text{н}}}{a_{21} - a_{22}y_{\text{н}}}, \quad (3.1)$$

$$K_{\text{н}} = \frac{-y_{21}}{y_{22} + y_{\text{н}}} = \frac{d_{21}}{1 + d_{22}y_{\text{н}}} = \frac{-h_{21}}{y_{\text{н}} + |h|} = \frac{z_{21}}{z_{11} + |z|y_{\text{н}}} = \frac{1}{a_{11} - a_{12}y_{\text{н}}}. \quad (3.2)$$

Следовательно, задачу анализа линейной цепи в основном можно свести к определению параметров эквивалентного проходного четырехполюсника анализируемой цепи (без учета нагрузки) и использованию формул (3.1), (3.2).

Один из методов определения этих параметров основан на представлении схемы анализируемой цепи соединением проходных четырехполюсников с последовательной заменой соединений из двух проходных четырехполюсников одним эквивалентным до замещения всей цепи. При этом параметры параллельного (рис. 20, а), параллельно-последовательного (рис. 20, б), последовательно-параллельного (рис. 20, в) и последовательного (рис. 20, г) соединений определяют, суммируя соответственно матрицы Y , D , H или Z соединяемых проходных четырехполюсников. Параметры каскадных соединений (рис. 20, д, е) определяют произведениями матриц $A = A' \times A''$ или $B = B' \times B''$, причем (в связи с выбранными на рис. 19 положительными направлениями токов) знаки параметров a_{11} и a_{21} или b_{11} и b_{21} первой матрицы при умножении изменяют на обратные.

Метод проходных четырехполюсников достаточно громоздок и не всегда применим.

¹ Отрицательный знак указывает на направление тока $i_{\text{н}}$ через нагрузку, противоположное принятому за положительное.

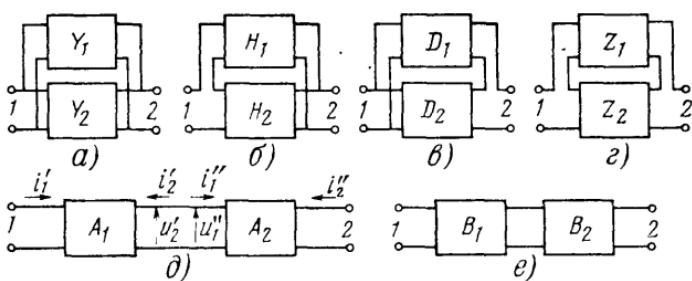


Рис. 20

Большой общностью отличаются матричные методы, основанные на непосредственном составлении матрицы A системы уравнений (1.5) по схеме анализируемой цепи. Среди них особенно удобен метод узловых напряжений с составлением матрицы Y проводимостей в канонической системе координат по принципиальной или эквивалентной схеме цепи с известными параметрами компонентов [14, 17]. При использовании этого метода n независимых входов цепи образуют пары узлов, включающими выбранный общий (базисный) узел схемы анализируемой цепи и один из остальных n узлов, а компоненты описывают матрицами проводимостей, составленными в той же системе координат методом короткого замыкания входов. В этом случае компоненты, не соединенные с общим узлом, описываются *неопределенными* (плавающими) матрицами, определители которых и суммы элементов строк и столбцов равны нулю. Например, неопределенная матрица двухполюсника (рис. 21, a)

$$Y_{\Pi} = \begin{bmatrix} y_a & -y_a \\ -y_a & y_a \end{bmatrix},$$

трехполюсника (рис. 21, б)

$$Y_{\Pi} = \begin{bmatrix} y_{aa} & y_{ab} & y_{ac} \\ y_{ba} & y_{bb} & y_{bc} \\ y_{ca} & y_{cb} & y_{cc} \end{bmatrix},$$

четырехполюсника (рис. 21, в)

$$Y_{\Pi} = \begin{bmatrix} y_{aa} & y_{ab} & y_{ac} & y_{ad} \\ y_{ba} & y_{bb} & y_{bc} & y_{bd} \\ y_{ca} & y_{cb} & y_{cc} & y_{cd} \\ y_{da} & y_{db} & y_{dc} & y_{cc} \end{bmatrix}.$$

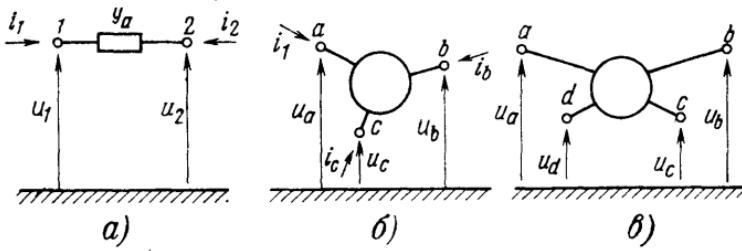


Рис. 21

При соединении компонента схемы с общим узлом в его неопределенной матрице проводимостей вычеркивают строку и столбец, соответствующие "заземляемому" полюсу. Следовательно, для построения матрицы проводимостей компонента при изменении выбора общего узла следует построить по исходной матрице неопределенную и вычеркнуть в ней строку и столбец, соответствующие требуемому выбору общего узла. Построение неопределенной матрицы сводится к суммированию элементов строк и

Программа 110/21. Построение неопределенной матрицы третьего порядка

$$\begin{array}{ccccccccc} F_7 & \uparrow & F_8 & + & /- & P_2 & \rightarrow & F_4 & \uparrow & F_5 & + & /- \\ P_6 & \uparrow & F_2 & + & /- & P_3 & F_8 & \uparrow & F_5 & + & /- & P_2 \\ F_7 & \uparrow & F_4 & + & /- & C/P & B/P & P_0 & & & & \end{array}$$

Инструкция: ($w_{aa} = P_7$, $w_{ab} = P_8$, $w_{ba} = P_4$, $w_{bb} = P_5$) (B/O) C/P $PX = w_{ca}$, $C1 = w_{ac}$, $P6 = w_{bc}$, $P2 = w_{cb}$, $P3 = w_{cc}$.

Программа 111/34. Построение неопределенной матрицы третьего порядка

$$\begin{array}{ccccccccc} I\P_7 & /- & I\P_8 & - & P_9 & I\P_4 & /- & I\P_5 & - & P_6 \\ I\P_7 & /- & I\P_4 & - & P_1 & I\P_8 & /- & I\P_5 & - & P_2 \\ I\P_1 & /- & I\P_2 & - & & C/P & B/P & & & \end{array}$$

Инструкция: ($w_{aa} = P_7$, $w_{ab} = P_8$, $w_{ba} = P_4$, $w_{bb} = P_5$) (B/O) C/P $PX = w_{cc}$, $P9 = w_{ac}$, $P6 = w_{bc}$, $P1 = w_{ca}$, $P2 = w_{cb}$.

Контрольный пример: при $w_{aa} = 10$, $w_{ab} = -1$, $w_{ba} = 5$, $w_{bb} = 2$ получим $w_{ac} = -9$, $w_{bc} = -7$, $w_{ca} = -15$, $w_{cb} = -1$, $w_{cc} = 16$.

Если параметры матрицы комплексные или являются степенными многочленами комплексного аргумента p , то вычисления по этим программам повторяют для вещественных и мнимых составляющих или элементов матрицы с одинаковыми степенями аргумента p .

Матрицу проводимостей Y всей цепи составляют по ее схеме и матрицам компонентов согласно следующим правилам: диагональные элементы матрицы Y приравнивают суммам диагональных элементов y_{ii} матриц компонентов, соединенных с i -ми узлами, а каждый недиагональный элемент матрицы y_{ij} приравнивают сумме элементов y_{ij} матриц компонентов, через которые i -й узел схемы соединен с j -м узлом. Составленная матрица Y является матрицей коэффициентов системы уравнений узловых напряжений $I = YU$ в выбранной системе координат, и при заданном векторе входных токов решение этой системы определяет вектор входных напряжений $U = Y^{-1}I$. Если необходимо определить связи между переменными на одном или двух входах цепи, то достаточно по матрице Y составить расчетные формулы для вычисления соответствующих функций цепи. Связь между переменными на двух любых независимых a -м и b -м входах определяется формулами (рис. 22, а)

$$Z_{\text{вх } a} = \frac{u_a}{i_a} = \frac{\Delta_{aa}}{\Delta} ; K_{\text{н } ba} = \frac{u_b}{u_a} = \frac{\Delta_{ab}}{\Delta_{aa}} . \quad (3.4)$$

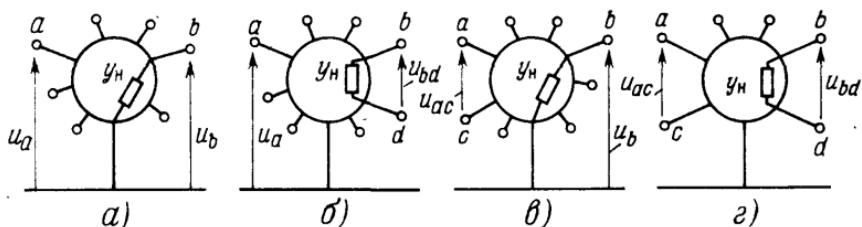


Рис. 22

При независимости только входа, на котором определено воздействие (рис. 22, б),

$$Z_{\text{вх } a} = \frac{u_a}{i_a} = \frac{\Delta_{aa}}{\Delta} ; K_{\text{н } a(b+d)} = \frac{u_{bd}}{u_a} = \frac{\Delta_{a(b+d)}}{\Delta_{aa}} ,$$

а при независимости только выхода (рис. 22, в)

$$Z_{\text{вх } ac} = \frac{u_{ac}}{i_{ac}} = \frac{\Delta_{(a+c)(a+c)}}{\Delta} ; K_{\text{н } (a+c)b} = \frac{u_b}{u_{ac}} = \frac{\Delta_{(a+c)b}}{\Delta_{(a+c)(a+c)}} .$$

Если зависимы оба выбранных входа (рис. 22, 2), то

$$Z_{\text{вх}} ac = \frac{u_{ac}}{i_{ac}} = \frac{\Delta(a+c)(a+c)}{\Delta} ; \quad K_h(a+c)(b+d) = \frac{u_{bd}}{u_{ac}} = \frac{\Delta(a+c)(b+d)}{\Delta(a+c)(a+c)} .$$

В этих формулах Δ – определитель, Δ_{aa} и Δ_{ab} – алгебраические дополнения матрицы Y , а суммарные алгебраические дополнения вида [14]

$$\Delta(a+c)(b+d) = (-1)^{a+b} M_{(a+c)(b+d)} \quad (3.5)$$

могут лишь знаком отличаться от суммарного минора $M_{(a+c)(b+d)}$, равного определителю матрицы Y , в которой вычеркнуты строка c и столбец d , а их элементы добавлены к соответственным элементам строки a и столбца b .

По матрице проводимостей Y можно определить и параметры проходного четырехполюсника, эквивалентного анализируемой цепи относительно двух ее входов a и b и описываемого матрицей

$$Y' = \begin{bmatrix} y'_{aa} & y'_{qb} \\ y'_{ba} & y'_{bb} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{bb}/M_{aa}, bb & -M_{ba}/M_{aa}, bb \\ -M_{ab}/M_{aa}, bb & M_{aa}/M_{aa}, bb \end{bmatrix},$$

где миноры M_{ij} равны определителю матрицы Y с вычеркнутыми i -й строкой и j -м столбцом, а кратный минор M_{aa}, bb – с вычеркнутыми a -ми и b -ми строками и столбцами.

Эти соотношения используют для понижения порядка определителей при анализе и при преобразовании (свертывании) схемы анализируемой цепи с последовательным устранением ее внутренних входов. Например, четырехполюсник с внутренним узлом b (рис. 23, а) и матрицей проводимостей

$$Y = \begin{bmatrix} y_{aa} & y_{ab} & y_{ac} \\ y_{ba} & y_{bb} & y_{bc} \\ y_{ca} & y_{cb} & y_{cc} \end{bmatrix}$$

замещают трехполюсником с устранимым узлом b (рис. 23, б) и матрицей проводимостей

$$Y' = \begin{bmatrix} y'_{aa} & y'_{ac} \\ y'_{ca} & y'_{cc} \end{bmatrix},$$

где

$$y'_{aa} = y_{aa} - y_{ab}y_{ba}/y_{bb}; \quad y'_{ac} = y_{ac} - y_{ab}y_{bc}/y_{bb}; \quad y'_{ca} = y_{ca} - y_{cb}y_{ba}/y_{bb}; \quad y'_{cc} = y_{cc} - y_{cb}y_{bc}/y_{bb}. \quad (3.7)$$

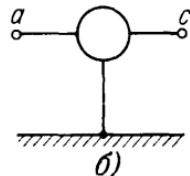
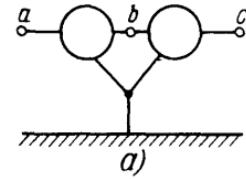
Рис. 23

Основные трудности при составлении расчетных формул для функций цепи по соотношениям (3.4) связаны с громоздкостью выражения их числителей и знаменателей через исходные параметры компонентов. Для упрощения анализа обычно целесообразно вначале разложить требуемые миноры и определитель матрицы Y по символам y_{ij} ее элементов, а затем выразить эти символы через параметры компонентов.

Разложения определителя и миноров матрицы порядка $n > 3$ упрощаются при использовании преобразований метода обобщенных чисел [16, 20].

Для упрощения расчетов при анализе линейных цепей используют различное нормирование. Простейшее заключается в выборе рабочих размерностей, уменьшающих порядок операндов (например, пикофарад вместо фарад или килогерц вместо герцов). Часто для сокращения исходных данных нормирующие коэффициенты (например, $\kappa_C = C/C_h$ или $\kappa_R = R/R_h$) выбирают так, чтобы один из однородных операндов принимал единичное значение. Подобный прием используют и при нормировании полных проводимостей с помощью коэффициентов $\kappa_Y = Y/Y_h$, когда $C_h = C/\kappa_Y$, $L_h = L\kappa_Y$ и $R_h = R\kappa_Y$.

Число коэффициентов степенного многочлена уменьшают нормированием частоты, приравнивая, например, $p_h^n = a_n p^n$ с подстановкой $p = a_n^{n-1}/n p_h$. При нормировании степенного многочлена делением на один из коэффициентов корни многочлена не изменя-



ются, что используют при решении алгебраических уравнений. Отношение степенных многочленов не изменяется при делении числителя и знаменателя на один из коэффициентов, что совместно с нормированием частоты позволяет сократить на два число исходных операндов.

Иногда нормируют переменные, что не изменяет функций линейной цепи. Например, при нормировании воздействия $u_{\text{вх}} = 1$ выходное напряжение численно равно коэффициенту передачи напряжения, а входной ток — входной проводимости. При нормировании выходного напряжения $u_{\text{вых}} = 1$ входное напряжение обратно коэффициенту передачи напряжения, а входной ток — передаточному сопротивлению.

3.2. Анализ безынерционных цепей

В ряде случаев радиотехнические цепи допустимо рассматривать как безынерционные, что существенно упрощает расчет, сводящийся в основном к операциям над вещественными числами. Анализ сложных безынерционных цепей методом проходных четырехполюсников облегчается при использовании программируемых микрокалькуляторов для преобразования параметров согласно формулам, приведенным в табл. 5.

Программа 112/21. Преобразование вещественных параметров проходных четырехполюсников

P6	F4	↑	F8	X	→	F7	↑	F5	X	↑	←
-	P2	F6	x = 0	F \div	F2	ПП	P \div /	БП	,	ПП	P \div /
F2	X	P2	XY	P3	C/P	БП	P0	1/x	↑	F4	X
P4	F5	X	P5	F7	X	P7	F8	X	P8	B/O	

Программа 113/34. Преобразование вещественных параметров проходных четырехполюсников

P6	ИП7	ИП5	X	ИП8	ИП4	X	-	P2	ИП6
x = 0	17	ИП2	ПП	29	БП	26	ИП6	ПП	29
ИП2	ВХ	X	П2	ВХ	П3	C/P	БП	00	1/x
ИП7	XY	X	П7	ИП5	ВХ	X	П5	ИП4	ВХ
X	П4	ИП8	ВХ	X	П8	B/O			

Инструкция для обеих программ: $w_{11} = P7$, $w_{12} = P8$, $w_{21} = P4$, $w_{22} = P5$; если $0 = P X$ (B/O) C/P, то $P X = P8 = w_{12}/|w|$, $P7 = w_{11}/|w|$, $P4 = w_{21}/|w|$, $P5 = w_{22}/|w|$; если $w_{ij} = P X$ (B/O) C/P, то $P X = P3 = 1/w_{ij}$, $P7 = w_{11}/w_{ij}$, $P8 = w_{12}/w_{ij}$, $P4 = w_{21}/w_{ij}$, $P5 = w_{22}/w_{ij}$, $P2 = |w|/w_{ij}$.

Следовательно, при очистке регистра X перед пуском программ получим результат взаимного преобразования матриц Y и Z или D и H , а при вводе одного из исходных параметров также в регистр X получим параметры других матриц в соответствии с формулами табл. 5 (без учета отрицательных знаков, указанных в этой таблице).

Контрольный пример: при $y_{11} = 12 = P7$, $y_{12} = -1 = P8$, $y_{21} = 10 = P4$, $y_{22} = 5 = P5$, $0 = P X$ получим $z_{11} = P5 = 7,14285 \cdot 10^{-2}$; $-z_{12} = P8 = -1,42857 \cdot 10^{-2}$; $-z_{21} = P4 = 1,42857 \cdot 10^{-1}$; $z_{22} = P7 = 1,71428 \cdot 10^{-1}$. После ввода $z_{21} = -1,42857 \cdot 10^{-1} = P X$ и выполнения программы получим $a_{11} = P7 = 1,199999$; $-a_{12} = P2 = -9,99999 \times 10^{-2}$; $a_{21} = P3 = -7$; $-a_{22} = P5 = -0,5$.

Суммирование матриц Y , Z , D и H соответствующих соединений проходных четырехполюсников целесообразно выполнять в обычном режиме, а для вычисления A -матриц каскадного соединения проходных четырехполюсников можно использовать следующие программы.

Программа 114/21. Вычисление произведения $W = W' \times W''$ вещественных матриц 2-го порядка

↑	F7	X	→	F4	X	→	F6	↑	F4	X	→
F7	X	→	F3	↑	F8	X	→	F5	X	→	F2
↑	F8	X	↑	→	+	P7	F2	↑	F5	X	↑
→	+	P4	→	P2	→	↑	→	+	P8	→	↑
F2	+	P5	C/P	БП	P0						

Инструкция: $w'_{11} = P7$, $w'_{12} = P8$, $w'_{21} = P4$, $w'_{22} = P5$, $w''_{11} = P6$, $w''_{12} = P2$, $w''_{21} = P3$, $w''_{22} = P1$ = PX (B/O) С/П $PX = P5 = w_{22}$, $P7 = w_{11}$, $P8 = w_{12}$, $P4 = w_{21}$.

Программа 115/34. Вычисление произведения $W = W' \times W''$ вещественных матриц 2-го порядка

ПД	ИП5	X	ИПВ	ИП4	X	+	П0	ИПА	ИП4
X	ИП5	ИПС	X	+	П4	ИП0	П5	ИПА	ИП7
X	ИПС	ИП8	X	+	П0	ИПВ	ИП7	X	ИПД
ИП8	X	+	П8	ИП0	П7	C/П	БП		

Инструкция: $w'_{11} = P7$, $w'_{12} = P8$, $w'_{21} = P4$, $w'_{22} = P5$, $w''_{11} = P4$, $w''_{12} = P2$, $w''_{21} = P3$, $w''_{22} = P1$ = PX (B/O) С/П $PX = P7 = w_{11}$, $P8 = w_{12}$, $P4 = w_{21}$, $P5 = w_{22}$.

Контрольный пример: при $w'_{11} = 7$, $w'_{12} = 8$, $w'_{21} = 4$, $w'_{22} = 5$, $w''_{11} = 11$, $w''_{12} = 12$, $w''_{21} = 21$, $w''_{22} = 22$ получим $w_{11} = 245$, $w_{12} = 260$, $w_{21} = 149$, $w_{22} = 158$.

Напомним, что в связи с выбранными положительными направлениями токов на входах проходных четырехполюсников (см. рис. 19) при вычислении по этим программам A -матриц каскадного соединения проходных четырехполюсников следует принимать при вводе исходных данных $-a_{11} = P7$ и $-a_{21} = P4$.

Параметры каскадного соединения проходных четырехполюсников можно также определить в результате операций над их матрицами проводимостей в соответствии с формулами (3.7). Для этого по матрицам Y' и Y'' проходных четырехполюсников каскада следует составить матрицу их каскадного соединения (см. рис. 20, д)

$$Y = \begin{bmatrix} y'_{11} & y'_{12} & 0 \\ y'_{21} & y'_{22} + y''_{11} & y'_{12} \\ 0 & y''_{21} & y''_{22} \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

и вычислить параметры эквивалентного каскаду проходного четырехполюсника по формулам (3.7).

Программа 116/21. Вычисление резистивных проводимостей проходного четырехполюсника, эквивалентного каскадному соединению

F8	↑	F4	X	↑	F5	÷	/ - /	↑	F7	+	P7
F8	↑	F6	X	↑	F5	÷	/ - /	P8	F4	↑	F2
X	↑	F5	÷	/ - /	P4	F6	↑	F2	X	↑	F5
÷	/ - /	↑	F3	+	P5	C/П	БП	P0			

Программа 117/34. Вычисление резистивных проводимостей проходного четырехполюсника, эквивалентного каскадному соединению

ИП7	ИП8	ИП4	X	ИП5	÷	-	П7	ИП8	/ - /
ИП6	X	ИП5	÷	П8	ИП4	/ - /	ИП2	X	ИП5
÷	П4	ИП3	ИП6	ИП2	X	ИП5	÷	-	П5
C/П	БП								

Инструкция к обеим программам: $y'_{11} = P7$, $y'_{12} = P8$, $y'_{21} = P4$, $y'_{22} + y'_{11} = P5$, $y''_{11} = P6$, $y_{21} = P2$, $y_{22} = P3$ (B/O) С/П $PX = P5 = y_{22}$, $P7 = y_{11}$, $P8 = y_{12}$, $P4 = y_{21}$.

Эти программы удобно использовать и для определения матрицы проводимостей каскадного соединения из нескольких проходных четырехполюсников. В этом случае после вычисления матрицы проводимостей соединения из двух проходных четырехполюсников в регистры 2, 3 и 6 вводят проводимости следующего проходного четырехполюсника, его проводимость y''_{11} добавляют к содержимому регистра 5 и вновь выполняют программу, повторяя аналогичные операции до вычисления проводимостей матрицы, эквивалентной всему каскадному соединению.

Если известны параметры проходного четырехполюсника, эквивалентного ненагруженной цепи передачи сигнала, и проводимость нагрузки (см. рис. 19, б), то все функции цепи и коэффициент передачи мощности $K_M = -K_T K_H$ можно вычислить с помощью следующих программ.

Программа 118/21. Вычисление функций цепи по проводимостям эквивалентного проходного четырехполюсника и нагрузки

P6	↑	F5	+	↑	F4	XY	÷	/-	P2	↑	F8
X	↑	F7	+	P3	1/x	C/Π	↑	F2	×	C/Π	↑
F6	×	/-	C/Π	↑	F2	XY	×	/-	C/Π	F6	×
/-	C/Π										

Инструкция: ($y_{11} = P7, y_{12} = P8, y_{21} = P4, y_{22} = P5$) $y_H = PX$ B/O C/Π $PX = Z_{bx}$
 $C/Π$ $PX = Z_{per}$ C/Π $PX = K_T$ C/Π $PX = K_M$ C/Π $PX = Y_{per}, P2 = K_H, P3 = Y_{bx}$.

Программа 119/34. Вычисление функций цепи по проводимостям эквивалентного проходного четырехполюсника и нагрузки

P9	ИП5	+	ИП4	/-	XY	÷	ПА	ИП8	×
ИП7	+	ПВ	1/x	П1	ИПА	×	П2	ИП9	×
ПС	ИПА	×	ПД	ИПС	/-	ПС	ИПА	/-	ИП9
X	П3	ИПА	C/Π	БП					

Инструкция: ($y_{11} = P7, y_{12} = P8, y_{21} = P4, y_{22} = P5$) $y_H = PX$ (B/O) C/Π $PX = PA = K_H, PB = Y_{bx}, PC = K_T, PD = K_M, P1 = Z_{bx}, P2 = Z_{per}, P3 = Y_{per}$.

Контрольный пример: при $y_{11} = 500; y_{12} = -1; y_{21} = 50\ 000; y_{22} = 50; y_H = 50$ получим $K_H = -500; K_T = 25; K_M = 12\ 500; Z_{bx} = 0,001; Y_{bx} = 1000; Z_{per} = -0,5; Y_{per} = 25\ 000$.

Расчет функций линейной безынерционной цепи, описанной матрицей проводимостей 3-го порядка (учитывающей и проводимость ветви, через которую протекает ток нагрузки) при входе 1 и выходе 3 обеспечивает следующая программа. В ней реализованы соотношения $K_H = \Delta_{13}/\Delta_{11}; Y_{bx} = y_{11} + y_{12}\Delta_{12}/\Delta_{11} + y_{13}K_H$, позволяющие несколько сократить число операторов.

Программа 120/34. Расчет функций безынерционной линейной цепи по матрице проводимостей 3-го порядка при входе 1 и выходе 3

ИП4	ИП2	×	ИП5	ИП1	×	-	ИП5	ИП3	×
ИП6	ИП2	×	-	ПД	÷	ПА	ИП9	×	ИП6
ИП1	×	ИП4	ИП3	×	-	ИП8	×	ИПД	÷
+	ИП7	+	1/x	ПС	ИПА	×	ПД	ИП0	/-
ИПД	×	ПВ	ИПС	÷	ИПВ	/-	ИПА	×	C/Π

Инструкция: ($y_{11} = P7, y_{12} = P8, y_{13} = P9, y_{21} = P4, y_{22} = P5, y_{23} = P6, y_{31} = P1, y_{32} = P2, y_{33} = P3, y_H = P0$) B/O C/Π $PX = K_M, PY = Y_{per}, PA = K_H, PB = K_T, PC = Z_{bx}, PD = Z_{per}$.

Контрольный пример: при $y_{11} = 10; y_{12} = 8; y_{13} = 9; y_{21} = 4; y_{22} = 10; y_{23} = 6; y_{31} = 1; y_{32} = 2; y_{33} = 10; y_H = 5$ получим (время счета около 18 с) $K_M = 3,85207 \times 10^{-4}; Y_{per} = 1,13636 \cdot 10^{-1}; K_H = -2,27272 \cdot 10^{-2}; K_T = 1,69491 \cdot 10^{-2}; Z_{bx} = 1,491525 \cdot 10^{-1}; Z_{per} = -3,38983 \cdot 10^{-3}$.

Программа 121/21. Расчет безынерционной линейной цепи по матрице проводимости 3-го порядка при входе 1 и выходе 3

C _x	P7	ПП	4	ПП	4	P6	ПП	4	÷	P7	F6
↑	F4	÷	P4	↑	F7	÷	P6	↑	F3	×	↑
F4	×	C/Π	F8	←	P8	F5	↑	←	P5	F2	←
XY	×	P4	F2	XY	P2	F5	×	↑	F4	-	P4
←	↑	→	X	↑	F7	+	P7	↑	F4	B/O	

Инструкция: ($y_{11} = C1, y_{12} = C2, y_{13} = C3, y_{21} = C4, y_{22} = C5, y_{23} = C6, y_{31} = P8, y_{32} = P5, y_{33} = P2, y_H = P3$) B/O C/Π $PX = K_M, PY = -K_T, P4 = K_H, P6 = Z_{per}, P7 = Y_{bx}$.

Для проверки можно воспользоваться предыдущим контрольным примером (время счета около 12 с).

Изменяя нумерацию узлов схемы и соответственно переформируя матрицу проводимостей, с помощью программ 118/21 – 121/21 можно вычислить все функции цепи с двумя или тремя входами, включая "выходные" сопротивления и проводимости. Однако трудоемкость анализа в этом случае возрастает.

Более общим является моделирование линейной цепи с n входами системой уравнений (1.5) или

$$\begin{bmatrix} w_{11} & w_{12} & \dots & w_{1n} \\ w_{21} & w_{22} & \dots & w_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ w_{n1} & w_{n2} & \dots & w_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \dots \\ q_n \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

результат решения которой определяется формулами Крамера

$$x_i = \sum_{j=1}^n \frac{\Delta_{ij}}{\Delta} q_j ; i = 1, 2, \dots, n, \quad (3.10)$$

где Δ и Δ_{ij} – определитель и алгебраические дополнения матрицы W .

В частности, при $n = 2$ эти формулы принимают вид

$$x_1 = \frac{\Delta_{11}}{\Delta} q_1 + \frac{\Delta_{21}}{\Delta} q_2; x_2 = \frac{\Delta_{12}}{\Delta} q_1 + \frac{\Delta_{22}}{\Delta} q_2.$$

Программа 122/21. Решение системы из двух линейных уравнений

F8	\uparrow	F5	\div	\uparrow	F3	\times	\rightarrow	F4	\times	\uparrow	F7
-	\leftarrow	\uparrow	F2	$-$	\uparrow	\rightarrow	\div	P6	\uparrow	F7	X
\uparrow	F2	XY	-	\uparrow	F8	\div	\uparrow	F6	C/P		

Программа 123/34. Решение системы из двух линейных уравнений

ИП7	ИП5	\times	ИП8	ИП4	\times	-	П0	ИП5	ИП2
X	ИП8	ИП3	\times	-	ИП0	\div	П1	ИП7	ИП3
X	ИП4	ИП2	\times	-	ИП0	\div	ИП1	C/P	

Инструкция к обеим программам: $w_{11} = P7$, $w_{12} = P8$, $w_{21} = P4$, $w_{22} = P5$, $q_1 = P2$, $q_2 = P3$ В/О С/П $PX = x_1$; $PY = x_2$.

Контрольный пример: для системы уравнений $4x_1 + 2x_2 = 1$; $5x_1 + 5x_2 = 3$ получим $x_1 = -0,1$; $x_2 = 0,7$.

Эти программы применимы для решения любой из систем уравнений проходного четырехполюсника относительно зависимых переменных, а также для вычисления его функций при соответствующем нормировании воздействий. Например, нормировав для системы узловых напряжений воздействия $q_1 = 1$, $q_2 = 0$, получим $Z_{bx1} = x_1$, $Z_{\text{пер}21} = x_2$, $K_{H21} = x_2/x_1$, $Y_{\text{пер}21} = -y_{H2}x_2/x_1$, $K_{T21} = -y_{H2}x_2$, а при нормировании $q_1 = 0$, $q_2 = 1$ получим $Z_{bx2} = x_2$, $Z_{\text{пер}12} = x_1$, $K_{H12} = x_1/x_2$, $Y_{\text{пер}12} = -y_{H1}x_1/x_2$, $K_{T12} = -y_{H1}x_1$.

Для автоматизации решения системы из трех линейных уравнений целесообразно использовать метод Жордана – Гаусса [9], реализованный в следующих программах.

Программа 124/21. Решение системы из трех линейных уравнений

ПП	PX	ПП	F1	ПП	F1	C/P	P4	F6	P3	F5	P2
ПП	P3	ПП	P3	ПП	P3	F2	1/x	\uparrow	F5	X	P8
\uparrow	F3	\times	\uparrow	F6	XY	-	\leftarrow	P5	F8	\uparrow	F4
X	\uparrow	F7	XY	-	\leftarrow	P6	F8	\leftarrow	P7	B/O	

Инструкция: $w_{11} = P2$, $w_{21} = P3$, $w_{31} = P4$, $w_{12} = P5$, $w_{22} = P6$, $w_{32} = P7$, $w_{13} = C1$, $w_{23} = C2$, $w_{33} = C3$, $q_1 = C4$, $q_2 = C5$, $q_3 = C6$ В/О С/П $PX = P7 = x_3$, $PS = x_1$, $P6 = x_2$ (время счета около 60 с).

Программа 125/34. Решение системы из трех линейных уравнений

ИП3	ИП6	ИП9	ПП	42	П3	XY	П6	ИПД	П9
3	П0	ИПС	ИПВ	ИПА	ПП	42	ПВ	XY	ПА

ИПД	ПС	ИП2	ИП5	ИП8	ПП	42	П4	ХУ	П7
ИПД	П1	ИП9	П2	ИП6	П8	ИП3	П5	Л0	12
ИПА	С/П	ИП7	÷	ПД	ИП4	Х	—	ХУ	ИПД
ИП1	X	—	B/O						

Инструкция: $w_{11} = P7$, $w_{12} = P8$, $w_{13} = P9$, $w_{21} = P4$, $w_{22} = P5$, $w_{23} = P6$, $w_{31} = P1$, $w_{32} = P2$, $w_{33} = P3$, $q_1 = PA$, $q_2 = PB$, $q_3 = PC$ B/O С/П PX = PA = x_1 , PB = x_2 , PC = x_3 (время счета около 30 с).

Контрольный пример: для системы уравнений

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 0 & 8 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -10 \\ 5 \end{bmatrix}$$

получим $x_1 = 3,315789$; $x_2 = -1,407894$; $x_3 = 0,4210526$.

В автоматическом режиме решение систем уравнений с несимметричными матрицами большего порядка ограничено емкостью запоминающих устройств микрокалькуляторов используемых типов. Однако при симметричной матрице коэффициентов (симметричны матрицы Y и Z обратимой и, в частности, пассивной цепи) 4-го порядка применима следующая программа.

Программа 126/34. Решение системы из четырех линейных уравнений с симметричной матрицей коэффициентов

ПП	10	ПП	15	ПП	20	ПП	25	ИПА	С/П
ИП9	ИП6	ПП	91	П9	ИП5	ИП3	ПП	91	П5
ИП2	ИП1	ПП	91	П2	ИПВ	ИПА	ПВ	ИП1	ПП
92	ПА	ИПС	ИПВ	ПС	ИП3	ПП	92	ПВ	ИПД
ИПС	ПД	ИП6	ПП	92	ПС	ИП8	ИП6	П8	ИПЗ
ПП	92	ИП4	ИП1	П6	ИП3	ПП	92	П1	ХУ
П4	ИП7	ИП6	ИП8	ПП	92	ИП3	ИП0	÷	П7
ХУ	П3	ИП8	ИП0	÷	П8	ИП6	ИП0	÷	П6
ИПД	ИП0	÷	ПД	ИП2	П0	ИП5	П2	ИП9	П5
B/O	↑	X	ИП0	÷	—	B/O			

Инструкция: $w_{11} = P0$, $w_{12} = P1$, $w_{22} = P2$, $w_{13} = P3$, $w_{23} = P4$, $w_{33} = P5$, $w_{14} = P6$, $w_{24} = P7$, $w_{34} = P8$, $w_{44} = P9$, $q_1 = PA$, $q_2 = PB$, $q_3 = PC$, $q_4 = PD$ B/O С/П PX = PA = x_1 , PB = x_2 , PC = x_3 , PD = x_4 .

Контрольный пример: для системы уравнений

$$\begin{bmatrix} 2 & 6 & 8 & 15 \\ 6 & 3 & 1 & 10 \\ 8 & 1 & 4 & 2 \\ 15 & 10 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 100 \\ 4 \\ 20 \\ 10 \end{bmatrix}$$

получим $x_1 = -3,124098$; $x_2 = 3,6173765$; $x_3 = 10,262346$; $x_4 = 0,16301119$.

При использовании метода оптимального исключения [3] и некотором усложнении ввода исходных данных на микрокалькуляторе с входным языком МК34 можно решать системы из четырех линейных уравнений и при несимметричной матрице коэффициентов.

Программа 127/34. Решение системы из четырех линейных уравнений. Погрешности вычисления корней возрастают при $q_3 \neq 0$.

ИПА	ПП	58	П6	ИПС	ПП	76	П7	ИП2	П1
ИПВ	ПП	76	П2	С/П	ИПВ	ПП	53	П7	ИПС
ИП4	ПП	73	П3	ХУ	П1	ИП6	ИП7	ИП2	Х
—	П6	ИП4	ИП3	ИП2	X	—	П2	С/П	ИПС
ИПВ	ПС	ИП3	X	—	ПП	53	ИП2	П7	ХУ
П2	БП	25	ИПА	ПВ	ИП2	X	—	ИП0	ИП1
П8	X	—	ПА	5	П9	ИПД	ИП7	П4	ИПС
X	—	ИП6	ИПВ	X	—	ИП0	КИП9	X	—
ИПА	÷	↑	ИП8	X	КИП9	ХУ	—	КП9	ХУ
ИП9	2	—	П9	→	B/O				

Инструкция: $w_{12}/w_{11} = P_1$, $w_{13}/w_{11} = P_2$, $w_{14}/w_{11} = P_3$, $q_1/w_{11} = P_5$, $0 = P_6 = P_7$, $w_{21} = P_0$, $w_{22} = P_A$, $w_{23} = P_B$, $w_{24} = P_C$, $q_2 = РД В/О С/П$ (время счета около 35 с) $w_{31} = P_0$, $w_{32} = P_A$, $w_{33} = P_B$, $w_{34} = P_C$, $q_3 = РД С/П$ (время счета около 35 с) $w_{41} = P_0$, $w_{42} = P_A$, $w_{43} = P_B$, $w_{44} = P_C$, $q_4 = РД С/П$ (время счета около 25 с) $PX = P_2 = x_3$, $P1 = x_4$, $P5 = x_1$, $P6 = x_2$.

Контрольный пример: для системы уравнений

$$\begin{bmatrix} 1 & 6 & 10 & 1 \\ 6 & 2 & 6 & 2 \\ 5 & 5 & 10 & 0 \\ 10 & 2 & 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 20 \\ 0 \\ 18 \end{bmatrix}$$

получим $x_3 = -1,999996$; $x_4 = 10,000002$; $x_1 = 0,99998$; $x_2 = 2,99999$.

Решать системы линейных уравнений на непрограммируемых микрокалькуляторах целесообразно с помощью схемы единственного деления Гаусса [6]. Вычисления по этой схеме выполняют с помощью вычислительного бланка (табл. 6) с $n + 1$ частями, содержащими $n + 2$ столбцов. В первые n столбцов нулевой части бланка записывают столбцы матрицы коэффициентов, в следующий – столбец свободных членов, а в последний ($n + 2$)-й контрольный столбец – суммы элементов каждой строки. Каждая последующая часть бланка содержит на одну строку меньше, чем предыдущая, а ее элементы вычисляют по формулам прямого хода. Элементы первой (ведущей) строки p -й части вычисляют по элементам первой (не считая ведущей) строки предыдущей части по формуле

$$\alpha_{pj}^p = \alpha_{pj}^{p-1} / \alpha_{pp}^{p-1}, j \geq p,$$

а элементы остальных строк p -й части – по формулам

$$\alpha_{ij}^p = \alpha_{ij}^{p-1} - \alpha_{ip}^{p-1} \alpha_{pj}^{p-1}, i > p, j > p. \quad (3.11)$$

Вычисленные элементы контрольного столбца должны равняться суммам остальных элементов (включая $\alpha_{pp} = 1$) соответствующих строк – нарушение этого условия свидетельствует об ошибке в вычислениях.

ТАБЛИЦА 6

Решение системы линейных уравнений по схеме единственного деления Гаусса

p	$j = 1$	$j = 2$	$j = 3$	$j = 4$	$j = 5$	$j = 6$
1	2	3	4	5	6	7
0	10	2	4	1	18	35
	1	6	10	1	9	27
	5	5	10	0	0	20
	6	2	6	2	20	36
1	1	0,2	0,4	0,1	1,8	3,5
		5,8	9,6	0,9	7,2	23,5
		4	8	-0,5	-9	2,5
		0,8	3,6	1,4	9,2	15
2		1	1,6551724	0,15517241	1,2413793	4,0517241
			1,3793104	-1,1206896	-13,965517	-13,706896
			2,2758621	1,2758621	8,2068966	11,858621

1	2	3	4	5	6	7
3			1	-0,81249992	-10,124999	-9,9374992
				3,1249998	31,249998	34,374998
4			1	1	10,00000 - 2,000000 3,000000 1,000000	11 1,000000 4,000000 2,000000
	1	1				

После окончания прямого хода в n -й части бланка оказывается вычисленным значение переменной $x_n = \alpha_{n,n+1}^{(n)}$. Остальные переменные вычисляют по формулам обратного хода

$$x_p = \alpha_{p,n+1} - \sum_{k=1}^{n-1} \alpha_{p,n+1-k} x_{n-k},$$

где $\alpha_{p,n+1}$ и $\alpha_{p,n+1-k}$ – элементы p -й ведущей строки.

При вычислениях по схеме Гаусса (как и в других схемах последовательного исключения переменных) коэффициент w_{11} и вычисляемые элементы α_{pp} должны отличаться от нуля и для уменьшения погрешностей быть по возможности большими. Поэтому целесообразно переставить перед вычислениями уравнения системы так, чтобы на главной диагонали матрицы коэффициентов оказались наибольшие по модулю. Например, уравнения системы, заданной в контрольном примере к программе 127/34, следует переставить следующим образом:

$$\left[\begin{array}{rrrr} 10 & 2 & 4 & 1 \\ 1 & 6 & 10 & 1 \\ 5 & 5 & 10 & 0 \\ 6 & 2 & 6 & 2 \end{array} \right] \left[\begin{array}{r} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \\ x'_4 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{r} 18 \\ 9 \\ 0 \\ 20 \end{array} \right]$$

Решение такой системы уравнений по схеме единственного деления представлено в табл. 6.

При решении систем линейных уравнений высокого порядка с помощью программируемых микрокалькуляторов целесообразно использовать метод Жордана – Гаусса, обеспечивающий вычисление искомых переменных в результате только прямого хода. Для удобства вычислений схему этого метода целесообразно модифицировать так, чтобы в каждой p -й части вычислительного бланка (табл. 7) строки циклически переставлялись и первой оказывалась ведущая строка.

ТАБЛИЦА 7
Решение системы линейных уравнений методом Жордана – Гаусса
с циклической перестановкой строк

p	$j = 1$	$j = 2$	$j = 3$	$j = 4$	$j = 5$	$j = 6$
1	2	3	4	5	6	7
0	10	2	4	1	18	35
	1	6	10	1	9	27
	5	5	10	0	0	20
	6	2	6	2	20	36
1		5,8	9,6	0,9	7,2	23,5
		4	8	-0,5	-9	2,5

1	2	3	4	5	6	7
		0,8 0,2	3,6 0,4	1,4 0,1	9,2 1,8	15 3,5
2			1,3793104 2,2758621 1 0,06896552 1	-1,1206896 1,2758621 0,06896552 0,15517241	-13,965517 8,2068966 1,5517241 1,2413793	-13,706896 11,758621 2,6896552 4,0517241
3				3,1249998 0,12499999 1 1,4999998 1	31,249998 2,2499999 17,999997 -10,124999	34,374998 3,375 20,499998 -9,9374992
4				1 1 1 -0,81249992	1 2,9999999 -2 10	2,000000 4,000000 -1,000000 11

Программа 128/21. Решение системы линейных уравнений порядка $n \leq 7$ методом Жордана – Гаусса с циклической перестановкой строк

```

↑ F7 ÷ P3 Cx P6 C/P P4 F6 1 + P6
F8 - 1 + x ≠ 0 P/- ← ↑ → XY ↑ →
F3 X ↑ F4 XY - БП P1 → ↑ ← XY
↑ → F6 1 - P6 x = 0 P/- ← F3 P5 F4
↑ F7 ÷ P3 F5 БП P1

```

Инструкция. После заполнения нулевой части бланка вводят $n = P8$ и, начиная с первой части, заполняют каждую p -ю часть по элементам $(p-1)$ -й части следующим образом:

1. В нижние p строк p -го столбца записывают единицы, верхний элемент p -го столбца предыдущей части вводят в регистр 7, а остальные элементы этого столбца $\alpha_{1,p}^{(p-1)}, \alpha_{2,p}^{(p-1)}, \dots, \alpha_{n,p}^{(p-1)}$ вводят против часовой стрелки в регистры кольцевого стека памяти, доворачивая его при $n \leq 7$ так, чтобы элемент $\alpha_{2,p}^{(p-1)}$ оказался в регистре $C1$.

2. В регистр X вводят первый элемент $(p+1)$ -го столбца предыдущей части $\alpha_{1,p}^{(p-1)}$ и нажимают клавиши В/О и С/П, что приводит к высвечиванию нуля.

3. В регистр X последовательно вводят по столбцам "сверху вниз" остальные элементы предыдущей части бланка, нажимая после каждого ввода только клавишу С/П и регистрируя результат на месте, соответствующем в предыдущей части ранее введенному элементу. После введения последнего элемента $\alpha_{n-1,n+2}^{(p-1)}$ и выполнения программы результат регистрируют как $\alpha_{n-1,n+2}^{(p)}$, после чего нажимают клавишу С/П для вычисления $\alpha_{n,n+2}^{(p)}$.

После заполнения всех $n+1$ частей бланка в $(n+1)$ -м столбце свободных членов оказываются записанными искомые значения переменных x_i , причем порядок их соответствует исходному порядку записи свободных членов q_i в нулевой части бланка.

При расчетах на микрокалькуляторе с входным языком МК34 порядок системы уравнений можно существенно увеличить.

Программа 129/34. Решение системы линейных уравнений порядка $n \leq 11$ методом Жордана – Гаусса с циклической перестановкой строк

```

↑ Cx XY ИП1 ÷ П0 XY 1 ПС XY
C/P ИПД ИПС 1 + ПС - x ≥ 0 26 XY
КИПС ИП0 X - БП 10 XY ИП0 БП 02

```

Пользование этой программой отличается от предыдущей лишь размещением исходных данных: $n = РД$, $\alpha_1 p = P1$, $\alpha_2 p = P2$, ..., $\alpha_n p = P9$, $\alpha_{10} p = PA$, $\alpha_{11} p = РД$. В качестве контрольного можно использовать пример, приведенный в табл. 7.

С помощью этих программ можно решать системы уравнений и более высокого порядка. Для этого при заполнении p -й части после вычисления элементов первых семи или одиннадцати строк соответственно можно вычислить элементы остальных строк, разбив их на блоки. Однако в этом случае более удобна схема единственного деления Гаусса.

3.3. Анализ цепи в операторной области

Функции линейной цепи являются дробно-рациональными функциями комплексной частоты (оператора Лапласа) $p = \sigma + j\omega$ в виде отношения степенных многочленов

$$F(p) = \frac{\sum_{i=0}^n a_i p^i}{\sum_{i=1}^m b_i p^i} = \frac{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0}{b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \dots + b_1 p + b_0} \quad (3.12)$$

с вещественными коэффициентами a_i и b_i . При составлении формул для функций сложных цепей по исходным моделям в виде схем замещения или матриц проводимостей (сопротивлений) компонентов приходится выполнять арифметические операции над коэффициентами степенных многочленов при буквенном представлении аргумента p . Одна из часто встречающихся задач заключается в определении коэффициентов произведения многочленов $c_m p^{m+n} + c_{m+n-1} p^{m+n-1} + \dots + c_1 p + c_0 = (a_n p^n + a_{n-1} \times p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0) (b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \dots + b_1 p + b_0)$.

Программа 130/21. Вычисление коэффициентов произведения трехчлена $b_2 p^2 + b_1 p + b_0$ на многочлен произвольной степени n

↑	→	F4	×	↑	F7	+	P3	←	↑	→	F5
X	↑	F8	+	P7	←	↑	F6	X	P8	F2	1
-	P2	F3	↑	F2	C/P	BП	P0				

Программа 131/34. Вычисление коэффициентов произведения трехчлена $b_2 p^2 + b_1 p + b_0$ на многочлен произвольной степени n

П1	ИП4	X	ИП7	+	П3	ИП1	ИП5	X	ИП8
+ П7	ИП1	ИП6	X	П8	ИП2	1	-	П2	
ИП3	XY	C/P	BП						

Инструкция к обеим программам: $n+3 = P2$, $b_2 = P4$, $b_1 = P5$, $b_0 = P6$, $0 = P7$, $= P8$, $a_n = PX$ B/O C/P $PX = n+2$, $PY = c_{n+2}$, $a_{n-1} = PX$ C/P $PX = n+1$, $PY = c_{n+1}$, $a_{n-2} = PX$ C/P $PX = n$, $PY = c_n$, ..., $a_0 = PX$ C/P $PX = 0$, $PY = c_0$, $P7 = c_1$, $P8 = c_0$.

Контрольный пример: $(3p^2 + 2p + 1)(4p^3 + 3p + 2) = 12p^4 + 17p^3 + 16p^2 + 7p + 2$.

При полном использовании емкости запоминающих устройств можно повысить максимальную степень многочлена меньшей степени.

Программа 132/21. Вычисление коэффициентов произведения многочлена степени $m \leq 5$ на многочлен произвольной степени n

P2	ПП	РВП	F8	+	↑	→	F1	←	ПП	F6	F7
+ P8	ПП	F6	F6	+	P7	ПП	F6	F5	+	P6	
ПП	F6	F4	+	P5	ПП	F6	P4	F3	←	C/P	BП
P0	F2	↑	F3	←	P3	X	↑	B/O			

Инструкция: $(b_5 = C1, b_4 = C2, b_3 = C3, b_2 = C4, b_1 = C5, b_0 = C6) 0 = P4 = P5 = \dots = P8, a_n = PX$ B/O C/P $PX = c_{n+5}$, $a_{n-1} = PX$ C/P $PX = c_{n+4}$, $a_{n-2} = PX$ C/P $PX = c_{n+3}$, ..., $a_1 = PX$ C/P $PX = c_6$, $a_0 = PX$ C/P $PX = c_5$, $P8 = c_4$, $P7 = c_3$, $P6 = c_2$, $P5 = c_1$, $P4 = c_0$.

Программа 133/34. Вычисление коэффициентов произведения многочлена степени $m \leq 6$ на многочлен произвольной степени n

ПД	ИП6	Х	ИПС	+	ИПД	ИП5	Х	ИПВ	+
ПС	→	ИПД	ИП4	Х	ИПА	+	ПВ	→	ИПД
ИП3	Х	ИП9	+	ПА	→	ИПД	ИП2	Х	ИП8
+ П9	→	ИПД	ИП1	Х	ИП7	+	П8	→	
ИПД	ИП0	Х	П7	→	ИПД	С/П	БП		

Инструкция: ($b_0 = P0, b_1 = P1, b_2 = P2, b_3 = P3, \dots, b_6 = P6$) $0 = P7 = \dots = P9 = PA = PB = PC, a_n = PX$ В/О С/П $PX = a_n, PY = c_{n+6}, a_{n-1} = PX$ С/П $PX = a_{n-1}, PY = c_{n-5}, a_{n-2} = PX$ С/П $\dots a_0 = PX$ С/П $PX = a_0, PY = c_6, PC = c_5, PB = c_4, PA = c_3, P9 = c_2, P8 = c_1, P7 = c_0$.

Контрольный пример: время вычисления одного коэффициента произведения $(6p^6 + 5p^5 + 4p^4 + 3p^3 + 2p^2 + p + 1)(5p^5 + 4p^4 + 3p^3 + 2p^2 + p + 1) = 30p^{11} + 49p^{10} + 58p^9 + 58p^8 + 50p^7 + 41p^6 + 30p^5 + 18p^4 + 10p^3 + 5p^2 + 2p + 1$ составляет около 15 с.

Эти же программы можно использовать и при вычислении коэффициентов произведений многочленов больших степеней, используя разложение (1.11).

В некоторых задачах приходится отыскивать коэффициенты квадрата многочлена, для чего при его небольших степенях можно использовать следующие программы.

Программа 134/21. Вычисление коэффициентов квадрата многочлена степени $n \leq 5$

F2	ПП	÷	F3	ПП.	÷	F4	ПП	÷	F5	ПП	÷
F6	ПП	÷	F7	ПП	÷	C _x	←	C/П	БП	P3	P8
F2	ПП	FC _x	F3	ПП	FC _x	F4	ПП	FC _x	F5	ПП	FC _x
F6	ПП	FC _x	F7	ПП	FC _x	C _x	←	C/П	B/O	↑	F8
X	↑	←	+	↑	→	XY	←	B/O			

Инструкция: ($a_n = P2, a_{n-1} = P3, a_{n-2} = P4, a_{n-3} = P5, a_{n-4} = P6, a_{n-5} = P7$)
B/O С/П $PX = c_{2n}$ С/П $PX = c_{2n-1}$ С/П $PX = c_{2n-2}, \dots, С/П $PX = c_0$.$

Программа 135/34. Вычисление коэффициентов квадрата многочлена степени $n \leq 9$

C _x	ИПД	ПА	ПВ	ПС	→	КИПВ	КИПС	Х	ИПВ
ИПС	-	x < 0	28	→	2	X	+	ИПВ	1
+	ПВ	→	ИПС	1	-	БП	04	x ≠ 0	32
C _x	XY	→	+	C/П	ИПА	1	-	ПА	x ≥ 0
46	ПВ	C _x	ИПД	БП	04	ИПД	+	ПС	C _x
ПВ	БП	06							

Инструкция: ($a_0 = P0, a_1 = P1, \dots, n = PД$) В/О С/П $PX = c_{2n}$ С/П $PX = c_{2n-1}$
С/П $PX = c_{2n-2}, \dots, С/П $PX = c_1$ С/П $PX = c_0$.$

Контрольный пример: $(3p^3 + 2p^2 + p + 0,5)^2 = 9p^6 + 12p^5 + 10p^4 + 7p^3 + 3p^2 + p + 0,25$.

В некоторых задачах анализа и синтеза линейных цепей возникает необходимость в вычислении произведения $C(p) = A(p)A(-p)$.

Программа 136/21. Вычисление коэффициентов c_i произведения $A(p) \cdot A(-p)$ многочленов степени $n \leq 8$

ПП	1	/-	C/П	ПП	1	C/П	БП	P0	F6	→	ПП
P9	F5	Х	ПП	F-	F4	ПП	P8	F3	ПП	P8	F2
ПП	P8	F5	XY	x ²	-	+	↑	F4	P5	F3	P4
F2	P3	F6	P2	F7	P6	F8	P7	C _x	P8	F1	B/O
X	↑	F5	-	P5	F6	→	P6	↑	B/O		

Инструкция: $a_0 = C1, a_1 = C2, a_2 = C3, a_3 = C4, a_4 = C5, a_5 = C6, a_6 = P6, a_7 = P7, a_8 = P8, 0 = P2 = P3 = P4 = P5$ В/О С/П $PX = c_0$ С/П $PX = c_2$ С/П $PX = c_4 \dots С/П $PX = c_{2n}$ (время счета около 20 с).$

Программа 137/34. Вычисление коэффициентов произведения $C(p) = A(p)A(-p)$

многочленов степени $n < 11$

C_x	ПС	ПД	КИПС	x^2	ИПД	$x \neq 0$	32	1	-
ПД	XY	ИПС	1	+	ПС	1	2	-	$x \neq 0$
31	XY	КИПС	КИПД	X		2	X	XY	-
05	XY	-	ИПС	ИПД	+	2	\div	1	БП
	XY	C/P	XY	БП		01			

Инструкция: $a_0 = P0, a_1 = P1, \dots, a_9 = P9, a_{10} = PA, a_{11} = PB$ (вместо отсутствующих коэффициентов ввести нули) В/О С/П $PX = c_0$ С/П $PX = c_1$ С/П $PX = c_4 \dots$ С/П $PX = c_{2n}$. Время счета от 45 с до 6 с в зависимости от номера коэффициента.

Контрольный пример: для $A(p) = 3p^3 + 2p^2 + p + 0,5$ получим $C(p) = A(p)A(-p) = -9p^6 - 2p^4 + p^2 + 0,25$.

Формулы вида (3.12) для функций цепей определенных классов удобно составлять непосредственно по схеме. Примером могут служить лестничные цепи (рис. 24), входные функции которых представимы разложениями в цепные дроби [11] по параметрам схемы. В частности, если потери пренебрежимо малы, все продольные ветви индуктивные (емкостные), а поперечные – емкостные (индуктивные), то автоматизацию составления формулы (3.12) для входной функции лестничной цепи, содержащей 13 или менее ветвей, обеспечивают следующие программы.

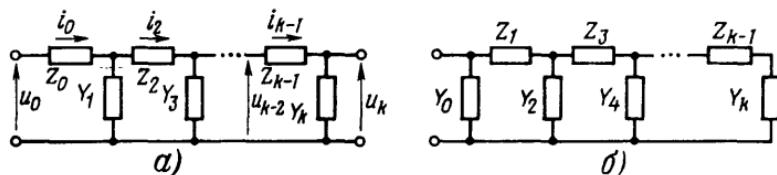


Рис. 24

Программа 138/21. Вычисление коэффициентов входной функции реактивной лестничной цепи с $k+1 < 13$ ветвями

P2	1	\rightarrow	C/P	\uparrow	F8	ПП	P-	F8	\rightarrow	P8	F7
ПП	P-	\rightarrow	P7	F6	ПП	P-	F6	\rightarrow	P6	F5	
ПП	P-	\rightarrow	P5	F4	ПП	P-	F4	\rightarrow	P4	F3	
ПП	P-	\rightarrow	P3	F2	XY	X	P2	XY	\rightarrow	C/P	
БП	F \uparrow	X	XY	\rightarrow	+	\leftarrow	\uparrow	B/O			

Инструкция: очистить память, $C_k = PX$ (или $L_k = PX$) В/О С/П $L_{k-1} = PX$ С/П $C_{k-2} = PX$ С/П ... (или $C_{k-1} = PX$ С/П $L_{k-2} = PX$ С/П ...); если начальной является продольная индуктивность L_0 или поперечная емкость C_0 , то коэффициенты $a_n, a_{n-2}, a_{n-4} \dots$ числителя нормированной (делением числителя и знаменателя на a_0) функции $Z_{\text{вх}}(p)$ или $Y_{\text{вх}}(p)$ соответственно хранятся в регистрах 2, 3, ..., 8, а коэффициенты знаменателя $b_m, b_{m-2}, b_{m-4} \dots$ – в регистрах стека $C1, \dots, C6$. Если же начальной является продольная емкость C_0 или поперечная индуктивность L_0 , то коэффициенты числителя соответственно функции $Y_{\text{вх}}(p)$ или $Z_{\text{вх}}(p)$ хранятся в стеке памяти, а знаменателя – в регистрах ЗУПВ.

Программа 139/34. Вычисление коэффициентов входной функции реактивной лестничной цепи с $k+1 < 13$ ветвями

П1	2	ПД	П0	C/P	\uparrow	КИП0	X	КПД	XY
\uparrow		КИП0	XY	КИП0	X	+	ИП0	$x \geq 0$	28 2
+		П0	-	КП0	L0	09	+	П1	ИПД 1
+		БП							

Порядок пользования этой и предыдущей программами совпадает, но после выполнения программы 139/34 коэффициенты числителя и знаменателя входной функции a_1, a_2, a_3, \dots (или b_1, a_2, b_3, \dots), кончая старшим, хранятся в регистрах 1, 2, ..., Д

(кроме $a_0 = 1$), а на индикаторе высвечивается номер следующего (начиная с конца) элемента.

Контрольный пример: для цепи с продольными индуктивностями $L_0 = L_2 = 2$ и поперечными емкостями $C_1 = C_3 = 3$ получим входную функцию $Z_{\text{вх}}(p) = (36p^4 + 18p^2 + 1)/(18p^3 + 6p)$.

Комплексное значение функции (3.12) высокого порядка $m + n$ для заданного значения аргумента $p = \sigma + j\omega$ определяют, вычислив комплексные значения многочленов числителя и знаменателя с помощью программ 30/21 – 36/34, частное от их деления – с помощью программ 24/21 или 25/34 и при необходимости преобразования результата в тригонометрическую форму с помощью программ 17/21 – 20/34.

Программа 140/34. Вычисление комплексного значения функции цепи произвольного порядка в алгебраической форме

ИП7	П0	C_x	ПВ	ПП	40	ПС	ИПВ	ПД	ИП8
П0	C_x	ПВ	ПП	62	↑	x^2	ИПВ	x^2	+
÷	ПА	ИПВ	ВХ	÷	П6	ИПД	х	ИПА	ИПС
×	+	П0	ИПА	ИПД	х	ИПС	БП	59	ИПА
+	ПА	КИП0	ИП0	$x > 0$	67	ИПВ	П6	ИП1	х
ИПА	ИП2	х	+	ПВ	ИПА	ИП1	х	ИП2	ИП6
х	-	ПА	ИП0	С/П	БП	39	ИПА	В/О	

Инструкция: ($\sigma = P1, \omega = P2, n = P7, m = P8$) $a_n = PX$ В/О С/П $PX = n - 1, a_{n-1} = PX$ С/П $PX = n - 2 \dots a_0 = PX$ С/П $PX = m, b_m = PX$ С/П $PX = m - 1$ С/П $b_{m-1} = PX$ С/П $PX = m - 2 \dots b_0 = PX$ С/П $PX = \operatorname{Re} F(p), PY = \operatorname{Im} F(p)$.

Контрольный пример: $F(2 + j) = (p^2 + 2p + 1)/(3p^3 + 2p^2 + p + 0,5) = 0,1863999 - j0,12612384$.

Вычисление комплексного значения функции цепи небольшого порядка можно полностью автоматизировать.

Программа 141/34. Вычисление комплексного значения функции цепи при $n < 3, m < 4$

ПВ	XY	ПА	ИП7	ИП8	ПП	47	ИП6	ПП	54
ИП5	+	ПС	ИП9	ПД	ИП3	ИП4	ПП	47	ИП2
ПП	54	ИП1	ПП	54	ИП0	+	↑	x^2	ИП9
x^2	+	÷	ПА	ИП9	ВХ	÷	ПВ	ИПС	П9
ИПД	ПП	55	ИП9	С/П	БП	00	↑	ИПВ	х
П9	→	ИПА	х	+	↑	ИПВ	х	ИПА	ИП9
х	+	ИП9	XY	П9	→	ИПВ	х	XY	ИПА
х	XY	-			B/O				

Инструкция: ($b_0 = P0, b_1 = P1, b_2 = P2, b_3 = P3, b_4 = P4, a_0 = P5, a_1 = P6, a_2 = P7, a_3 = P8, 0 = P9, \sigma = PY, \omega = PX$ (B/O) С/П $PX = PA = \operatorname{Re} F(p), PB = \operatorname{Im} F(p), PC = \operatorname{Re} A(p), PD = \operatorname{Im} A(p)$). Время счета около 70 с.

Для проверки можно воспользоваться примером к предыдущей программе. При необходимости получения результата в тригонометрической форме в программу 140/34 или 141/34 перед первым оператором С/П следует вставить операторы программы 20/34, соответственно изменив в ней номера регистров памяти, а в дополненной программе – адреса переходов.

Дробно-рациональную функцию (3.12) в ряде задач приходится представлять в форме отношения множителей корней

$$F(p) = h \frac{\prod_{i=1}^n (p - p_{0i})}{\prod_{i=1}^m (p - p_{ni})} = \frac{\prod_{i=1}^r (a_{2i}p^2 + a_{1i}p + a_{0i})}{\prod_{i=1}^s (b_{2i}p^2 + b_{1i}p + b_{0i})}, \quad (3.13)$$

где $h = a_n/b_m$ – постоянный множитель, r и s – соответственно суммы чисел вещественных ($a_{2i} = 0$) и пар комплексно-сопряженных корней числителя и знаменателя, а корни p_{0i} числителя и p_{ni} знаменателя называют соответственно нулями и полюсами функции.

Для уменьшения числа операндов во второй из этих формул целесообразно вынести за скобки множители a_{0i} , получая

$$F(p) = H \frac{\prod_{i=1}^r (\alpha_{0i} p^2 + \beta_{0i} p + 1)}{\prod_{i=1}^s (\alpha_{ni} p^2 + \beta_{ni} p + 1)}, \quad (3.14)$$

где постоянный множитель $H = a_{01} a_{02} \dots a_{0n} / (b_{01} b_{02} \dots b_{0m})$.

В этом случае уменьшается не только число исходных данных, но и число коэффициентов в произведениях сомножителей, так как коэффициенты при нулевых степенях, равные единице, не зависят от аргумента.

Для перехода от формулы (3.13) или (3.14) к исходной формуле (3.12) достаточно найти коэффициенты произведений множителей корней с помощью программ 130/21 – 131/34, но для составления формулы (3.13) или (3.14) необходимо вычислить нули и полюсы или, по крайней мере, найти разложения числителя и знаменателя функции (3.12) на множители 1-го и 2-го порядков. Корни алгебраического уравнения 2-го порядка несложно вычислить с помощью программ 1/21 – 4/34. Для вычисления корней нормированного алгебраического уравнения 3-й степени $p^3 + a_2 p^2 + a_1 p + a_0 = 0$ предназначены следующие программы.

Программа 142/21. Решение нормированного ($a_3 = 1$) алгебраического уравнения 3-й степени

F6	2	÷	P6	F5	↑	F2	+	X	↑	F3	+
↑	F5	X	↑	F4	XY	+	P8	X	↑	F6	/ -
XY	x > 0	,	F6	↑	F5	+	P5	XY	x ²	√	+
-	x = 0	P0	F2	+	P6	X	↑	F3	+	P7	F6
2	÷	/ -	P6	x ²	↑	F7	-	P7	F5	C/P	

Инструкция: $a_2 = P2$, $a_1 = P3$, $a_0 = P4$, $\pm |a_{\max}| = P6 = P7$ (знак максимального по модулю коэффициента a_{\max} выбирают противоположным знаку a_0) В/О С/П PX = = P5 = p_1 , P7 = D, P6 = r, где D – дискриминант, а r – вещественная часть корней квадратного уравнения, полученного делением исходного на множитель вещественного корня $p - p_1$. Для вычисления двух других корней достаточно по полученным данным найти в обычном режиме $p_{2,3} = r \pm \sqrt{D}$.

Программа 143/34. Решение нормированного ($a_3 = 1$) алгебраического уравнения 3-й степени

ИП0	П4	ИП4	2	÷	П4	П5	ИП0	↑	↑		
ИП1	+	X	ИП2	+	X	ИП3	+	ПА	ИП3		
X	x < 0	26	ИП5	/ -	P5	ИП0	↑	ИП5	+		
П0	-	x = 0	02	ИП0	ИП1	+	П4	-	2		
÷	П7	x ²	ИП2	ИП4	ИП0	X	+	-	x < 0		
56	/ -	√	ИП8	БП	67	√	ИП7	XY	-		
П8	BX	ИП7	+	P7	7	8	0	C/P	БП		

Инструкция: $a_2 = P1$, $a_1 = P2$, $a_0 = P3$, $\pm |a_{\max}| = P0$ (знак a_{\max} выбирают противоположным знаку a_0) В/О С/П PX = 780, P0 = p_1 , P7 = p_2 , P8 = p_3 (все корни вещественны) или PX = 0, P0 = p (вещественный корень), P7 = Re $p_{1,2}$, P8 = Im $p_{2,3}$. В регистре A хранится невязка первого корня.

Контрольный пример: для уравнения $3p^3 + 2p^2 + p + 0,5 = 0$ после ввода $2/3 = P1$; $1/3 = P2$; $0,5/3 = P3$, $-2/3 = P0$ получим $p_{2,3} = -0,0411656 + j0,532475$, $p_1 = -0,58433545$.

Время выполнения программы решения кубического уравнения зависит от времени вычисления вещественного корня и составляет несколько минут.

Корни нормированного алгебраического уравнения 4-й степени

$$p^4 + a_3 p^3 + a_2 p^2 + a_1 p + a_0 = 0$$

в обычном режиме вычисляют различными методами [20], а при использовании микрокалькулятора с входным языком МК21 решение этой задачи обеспечивается совместным использованием следующих трех программ.

Программа 144/21. Разложение нормированного алгебраического многочлена 4-й степени на квадратичные множители¹

ПП	P,	C/П	ПП	P,	x ≥ 0	P2	F8	↑	F7	-	P8
F7	2	÷	P7	↑	F8	XY	+	P8	-	x = 0	0
F8	C/П	F8	↑	F3	-	→	F5	-	P6	1/x	-
→	F2	X	↑	F4	-	x ≠ 0	F4	↑	←	÷	↑
F2	-	X	XY	←	-	↑	F6	X	1	-	B/O

Программа 145/21. Вычисление корней квадратичных множителей

→	P7	2	÷	/-	P3	x ²	-	F8	-	x < 0	P5
/-	√	P4	0	3	4	C/П	F5	↑	F8	÷	P8
F2	↑	F7	-	БП	F0	√	↑	F3	x < 0	F6	XY
/-	+	P4	↑	F8	XY	÷	P3	БП	Fx		

Программа 145a/21. Вычисление корней уравнения 4-й степени при изолированном вещественном корне

F4	2	X	↑	F2	÷	↑	F3	-	4	X	↑
F2	x ²	+	√	/-	P7	↑	F2	-	4	÷	P3
x ²	↑	F5	√	-	x < 0	ВП	/-	√	P4	0	3
4	C/П	F7	БП	FX	√	↑	F3	x < 0	P8	XY	/-
+	P4	↑	F8	XY	÷	P3	БП	/-			

Инструкция: 1. Ввести программу 144/21, исходные данные $a_3 = P2$, $a_2 = P3$, $a_1 = P4$, $a_0 = P5$, $\sqrt{a_0} = P7 = P8$ B/O C/П (время счета около 4,5 мин). Если $PX > 0$, то нажать клавишу C/П и после выполнения программы перейти к п. 2. Если $PX < 0$, то изменить на обратные знаки содержимого регистра 7 и 8, нажать клавишу C/П и после выполнения программы перейти к п. 2. Если $PX = 0$ или возникает переполнение, то ввести предложение F8 0 , 9 9 9 9 9 9 X P7 P8 и нажать клавиши B/O и C/П; если результат выполнения программы $PX > 0$, то нажать клавишу C/П и после выполнения программы перейти к п. 2, если же $PX < 0$, то перейти к п. 3.

2. Ввести программу 145/21 и перейти к п. 4.

3. Ввести программу 145a/21 и перейти к п. 4.

4. Нажать клавиши B/O и C/П; если высвечиваются цифры 34, то в регистрах 3 и 4 хранится пара вещественных корней; если высвечиваются цифры 034, то в регистрах 3 и 4 хранятся вещественная часть и модуль мнимой части пары комплексно-сопряженных корней. Нажать клавишу C/П и аналогично определить вторую пару корней.

При использовании микрокалькулятора с входным языком МК34 решение уравнения 4-й степени обеспечивает одна программа.

Программа 146/34. Разложение многочлена 4-й степени на квадратичные множители

$$(x^2 + \beta_1 x + \gamma_1)(x^2 + \beta_2 x + \gamma_2)$$

ИП0	x ≥ 0	34	√	ПА	ПП	66	ИП9	x ≠ 0	45
ПП	63	x ≥ 0	17	ИПД	/-	ПД	ИПА	↑	ИПД

¹ Если выполнение этой программы при ее использовании для микрокалькулятора типа "Электроника Б3-21" последнего выпуска не заканчивается в течение 8...10 мин, операторы XY + P8 с адресами 31...34 следует заменить операторами + P8 - sin, гарантирующими окончание вычислений, однако с меньшей точностью.

+	ПА	-	$x = 0$	10	ИП0	ИПА	\div	ПС	ИП3
ИПВ	-	ПД	С/П	/-/-	$\sqrt{-}$	ПА	\div	66	$x < 0$
10	ИПА	/-/-	БП	36	ИП3	2	\div	\uparrow	x^2
ИПА	2	X	+	ИП2	--	$x \geq 0$	10	$\sqrt{-}$	+
ПВ	БП	25	ИПС	2	\div	ПС	ПД	ИПА	ИП3
X	ИП1	-	П9	ИПА	ИП0	ИПА	\div	-	$x \neq 0$
97	\div	ПВ	\uparrow	ИП3	-	X	ИПА	-	ИП2
+	ИПА	X	ИП0	\div	1	-	B/O		

Инструкция: ($a_3 = P3$, $a_2 = P2$, $a_1 = P1$, $a_0 = P0$) B/O С/П $PX = P\Delta = \beta_1$, $PC = \gamma_1$, $PB = \beta_2$, $PA = \gamma_2$.

Контрольный пример: $p^4 + p^3 + 4p^2 + p + 1 = (p^2 + 0,21995155p + 0,28197167) (p^2 + 0,7800475p + 3,5464555)$ – время счета около 7 мин; $p^4 + 3p^3 + 2p^2 - 4p - 12 = (p^2 + 0,8985298p - 3,408669) (p^2 + 2,1014702p + 3,5204356)$ – время счета около 7 мин; $p^4 + p^3 + 0,2p^2 + p + 1 = (p^2 + 1,9317821p + 1) (p^2 - 0,9317821p + 1)$ – время счета около 30 с; $p^4 + 4p^3 - 10p^2 + 2p - 1 = (p^2 - 0,1654081p + 0,10618871) (p^2 + 4,1654081p - 9,4171969)$ – время счета около 7 мин.

Алгебраические уравнения нечетной степени имеют не менее одного вещественного корня, который можно вычислить в обычном режиме методом последовательных приближений [20] в интервале $]0; \pm |a_{\max}|[$, где знак максимального по модулю коэффициента a_{\max} выбирают противоположным знаку a_0 . Разделив исходное уравнение на множитель $(p - p_1)$ найденного вещественного корня, получают уравнение четной степени. Выделение вещественного корня уравнений нечетной степени упрощается при автоматических вычислениях вещественного корня и коэффициентов a'_i четного нормированного многочлена четной степени, корни которого можно найти с помощью других программ.

Программа 147/21. Выделение вещественного корня нормированного алгебраического уравнения 5-й степени

F7	2	\div	P7	F6	P8	5	P3	1	-	P3	F8
\uparrow	F2	\leftarrow	P2	+	\uparrow	F6	X	P8	F3	$x = 0$	PXY
F2	\leftarrow	\leftarrow	F2	X	\uparrow	F7	/-/-	XY	$x \geq 0$	F6	F7
\uparrow	F6	+	P6	XY	x^2	$\sqrt{-}$	+	-	$x = 0$	P0	F6
C/П	1	\uparrow	F6	X	\uparrow	\leftarrow	+	+ C/П	БП	P-	

Инструкция: $a_4 = C1$, $a_3 = C2$, $a_2 = C3$, $a_1 = C4$, $a_0 = C5$, $\pm |a_{\max}| = P6 = P7$ B/O С/П $PX = P6 = p_1$ (время счета около 9 мин) С/П $PX = a'_3$ С/П $PX = a'_2$ С/П $PX = a'_1$ С/П $PX = a'_0$ С/П $PX = \epsilon$ (остаток от деления исходного уравнения на множитель $p - p_1$).

Программа 148/34. Выделение вещественного корня нормированного алгебраического уравнения 5-й степени

ИПА	ПД	ИПД	2	\div	ПД	ПС	ИПА	\uparrow	\uparrow
ИП4	+	X	ИП3	+	X	ИП2	+	X	ИП1
+	X	ИП0	+	ПВ	ИП0	X	$x < 0$	32	ИПС
/-/-	ПС	ИПА	\uparrow	ИПС	+	ПА	$-$	$x = 0$	02
ИП4	ИПА	+	3	П9	XY	КИП9	XY	КП9	ИПА
X	+	ИП9	1	$-$	$x < 0$	44	ИПА	C/П	БП

Инструкция: $a_0 = P0$, $a_1 = P1$, $a_2 = P2$, $a_3 = P3$, $a_4 = P4$, $\pm |a_{\max}| = PA$ (B/O) С/П $PX = PA = p_1$, $PB = \delta_1$ (невязка корня), $P0 = a'_0$, $P1 = a'_1$, $P2 = a'_2$, $P3 = a'_3$.

Контрольный пример: для уравнения $p^5 + 9p^4 + 8p^3 + 5p^2 + 4p + 10 = 0$ получим $p_1 = -8,0813971$, $\delta_1 = -3,22 \cdot 10^{-4}$, коэффициенты уравнения $p^4 + 0,9186029p^3 + 0,5764052p^2 + 0,3418407p + 1,2374496$ (время решения около 5 мин).

Программа 149/21. Выделение вещественного корня нормированного алгебраического уравнения 7-й степени

F7	2	÷	P7	F8	P6	7	P3	1	-	P3	F6
↑	F2	←	P2	+	↑	F8	X	P6	F3	x = 0	PXY
F2	X	↑	F7	/ -	XY	x ≥ 0	F / -	F7	↑	F8	+
P8	XY	x ²	√	+	-	x = 0	P0	F8	C / П	1	↑
F8	X	↑	F2	←	+	P2	C / П	БП	C _x		

Инструкция: $a_6 = C1, a_5 = C2, a_4 = C3, a_3 = C4, a_2 = C5, a_1 = C6, a_0 = P2, \pm |a_{\max}| = P7 = P8$ (B/O) C / П (время счета 10...14 мин) PXY = p₁ C / П PXY = a'₅ C / П PXY = a'₄ C / П PXY = a'₃ C / П PXY = a'₂ C / П PXY = a'₁ C / П PXY = a'₀ C / П PXY = ε (остаток от деления).

Для решения полученного нормированного уравнения 6-й степени предназначены следующие две программы, выделяющие квадратичный множитель, что позволяет найти его корни и корни уравнения 4-й степени с помощью ранее приведенных программ.

Программа 150/21. Разложение на множители уравнения 6-й степени

F6	ПП	F8	P2	F7	X	P4	ПП	C _x	F7	-	P3
↑	F7	X	P5	ПП	C _x	F4	-	P4	↑	ПП	C _x
F5	-	P5	↑	F8	←	P8	XY	÷	P7	↑	F4
ПП	P8	F5	÷	P6	F8	←	F6	C / П	БП	P0	F6
X	↑	F8	←	P8	XY	-	↑	B / O			

Программа 151/21. Разложение на множители уравнения 6-й степени

←	P8	↑	F7	÷	P5	ПП	C _x	F7	÷	P4	ПП
C _x	F5	-	↑	F7	÷	P3	ПП	C _x	F4	-	↑
F7	÷	P2	↑	F8	←	P8	-	/ -	P6	X	↑
F3	+	ПП	P-	P7	F8	←	F6	C / П	БП	P0	↑
F6	X	↑	F8	←	P8	XY	-	↑	B / O		

Инструкция: ввести программу 150/21, $a_5 = C1, a_4 = C2, a_3 = C3, a_2 = C4, a_1 = C5, a_0 = C6, \beta_0 = P6, \gamma_0 = P7$ (β_0 и γ_0 – начальные приближения коэффициентов квадратичного множителя) (B/O) C / П PXY = β₁ C / П PXY = β₂ ... с регистрацией β_i. Если разность β_i – β_{i-1} уменьшается, то вычисления продолжают до совпадения двух очередных значений β_i с требуемым числом значащих цифр и вызывают P7 = γ, P2 = a'₃, P3 = a'₂, P4 = a'₁, P5 = a'₀. Если вычисления не сходятся, то вводят программу 151/21, a₀ = C1, a₁ = C2, a₂ = C3, a₃ = C4, a₅ = C5, a₄ = C6, β₀ = P6, γ₀ = P7 и повторяют вычисления.

Эти программы могут не привести к желаемому результату при близости корней по модулю. В этом случае следует предварительно преобразовать исходное уравнение 6-й степени подстановкой x = p + ξ (можно принять ξ = -a₀) с помощью следующей программы и повторить вычисления по программам 150/21 или 151/21.

П	P5	P3	1	P4	F4	↑	F2	X	↑	F8	←
+	P4	P8	F3	1	-	P3	x = 0	↑	F5	7	-
P6	F8	←	P8	F6	1	+	x = 0	P4	F5	1	-
x = 0	F0	C / П	БП	P0							

Инструкция: $a_5 = C1, a_4 = C2, a_3 = C3, a_2 = C4, a_1 = C5, a_0 = C6, \xi = P2$ (B/O) C / П PXY = 0 (коэффициенты преобразованного многочлена хранятся в "своих" регистрах).

Контрольный пример: для уравнения $p^6 + p^5 + p^4 + p^3 + p^2 + p + 1 = 0$ получим при $x = p - 1$ коэффициенты уравнения $x^6 - 5x^5 + 11x^4 - 13x^3 + 9x^2 - 3x + 1 = 0$ (время счета около 2 мин).

Для решения нормированных алгебраических уравнений 6-й и 7-й степеней предназначены следующие программы.

Программа 153/34. Выделение вещественного корня нормированного алгебраического уравнения 7-й степени

ИПА	ПД	ИПД	2	\div	ПД	ПС	ИПА	\uparrow	\uparrow
ИП6	+	x	ИП5	+	x	ИП4	+	x	ИП3
+	x	ИП2	+	x	ИП1	+	x	ИП0	+
ПВ	ИП0	x	$x < 0$	38	ИПС	$/-$	ПС	ИПА	\uparrow
ИПС	+	ПА	-	$x = 0$	02	ИП6	ИПА	+	5
П9	XY	КИП9	XY	КП9	ИПА	x	+	ИП9	1
-	$x < 0$	50	ИПА	C/P	БП				

Инструкция: $a_0 = P0, a_1 = P1, \dots, a_6 = P6, \pm |a_{\max}| = PA$ (В/О) С/П $PX = PA = p_1, PB = \delta_1, P0 = a'_0, P1 = a'_1, P2 = a'_2, P3 = a'_3, P4 = a'_4, P5 = a'_5$ (коэффициенты многочлена 6-й степени).

Контрольный пример: для уравнения $p^7 + p^6 + 2p^5 + 4p^4 + 30p^3 + 2p^2 + p + 1 = 0$ получим $p_1 = -0,31251376; \delta_1 = 0$; коэффициенты многочлена $p^6 + 0,68744862p^5 + 1,7851511p^4 + 28,924292p^2 - 7,0392392p + 8,1908591 + 3,4421157p^3$.

Программа 154/34. Выделение квадратичного множителя уравнения 6-й степени

C _x	П7	П8	П9	1	П6	5	ПД	ИП6	ИП9
ИПВ	x	ИП8	П9	ИПА	x	+	-	П8	КИПД
ИП7	ИПВ	x	ИП6	П7	ИПА	x	+	-	П6
ИПД	1	-	$x = 0$	07	ИП0	ИП7	ИПВ	x	-
П7	ИП6	ИП8	x	ИПА	ИП6	x	ИП7	-	ИП9
x	+	ИП8	ИПА	ИП9	x	+	ИП8	x	ИП9
x^2	ИПВ	x	+	ПД	\div	ИПА	П6	+	ПА
ИП7	ИП8	x	ИП6	ИП9	x	ИПВ	x	+	ИПД
\div	ИПВ	+	ПВ	ВХ	-	$x = 0$	00	ИП6	ИПА
-	$x = 0$	00	C/P	БП					

Инструкция: $(a_0 = P0, a_1 = P1, \dots, a_5 = P5) \beta_0 = PA, \gamma_0 = PB$ (можно принять начальные приближения $\beta_0 = \gamma_0 = 0$) В/О С/П $PX = 0, PA = \beta, PB = \gamma$. Время счета от нескольких минут до нескольких десятков минут в зависимости от сходимости процесса, причем процесс может расходиться и вычисления можно прекращать после 40 мин

Контрольный пример: для многочлена $p^6 + 2p^5 + 3p^4 + 4p^3 + 5p^2 + 6p + 7$ через 12 минут получим множитель $p^2 + \beta p + \gamma = p^2 + 0,80501825p + 1,9620834$.

3.4. Анализ цепи в частотной области

Задача анализа линейной цепи в частотной области заключается в вычислении для заданных функций цепи их частотных характеристик

$$F(p) \Big|_{p=j\omega} = \operatorname{Re} F(\omega) + j \operatorname{Im} F(\omega) = |F(\omega)| e^{j\varphi_F(\omega)},$$

где зависимости $|F(\omega)|$ и $\varphi_F(\omega)$ называют соответственно амплитудно-частотной (АЧХ) и фазочастотной (ФЧХ) характеристиками, причем представление частотной характеристики в алгебраической или тригонометрической формах определяется условиями задачи.

Если исходной является эквивалентная схема анализируемой цепи с идеальными резистивными, емкостными и индуктивными ветвями или любая другая модель, параметры которой – рациональные функции комплексной частоты, то обычно целесообразно вначале составить выражение (3.12) для заданной функции, а затем подстановкой $p = j\omega$ перейти к частотной характеристике и найти ее вещественную и мнимую части: или АЧХ и ФЧХ. Для этого достаточно вычислить комплексные значения многочленов числителя и знаменателя функции при $p = j\omega$ и найти частное от их деления в алгебраической или тригонометрической форме.

Комплексные значения алгебраических многочленов мнимого аргумента удобно вычислять по итерационной формуле (1.18) при $p = j\omega$ как

$$A_k = -\omega \operatorname{Im} A_{k-1} + a_{n-k} + j\omega \operatorname{Re} A_{k-1}; \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

где $A_0 = a_n$ и $A_n = A(j\omega)$.

Программа 155/21. Вычисление вещественной и мнимой частей частотной характеристики функции с произвольными степенями m и n

P6	F7	\uparrow	F4	\times	\rightarrow	F5	\times	$/-$	\uparrow	F6	+
P4	\leftarrow	P5	C/P	F4	x^2	\uparrow	F5	x^2	$+$	P6	F2
\uparrow	F5	\times	P8	F3	\uparrow	F4	\times	\uparrow	F8	$-$	\uparrow
F6	\div	P8	F2	\uparrow	F4	\times	P7	F3	\uparrow	F5	\times
\uparrow	F7	$+$	\uparrow	F6	\div	P7	C/P				

Инструкция: $\omega = P7$, $a_n = P4$, $0 = P5$, $a_{n-1} = PX$ (если $n = 0$, то $\omega = P7$, $1 = P4$, $0 = P5$, $a_0 = PX$) B/O C/P $PX = \operatorname{Im} A_1$, $a_{n-2} = PX$ B/O C/P $PX = \operatorname{Im} A_2$, $a_{n-3} = PX$ B/O C/P ... $a_0 = PX$ B/O C/P $PX = \operatorname{Im} A(\omega)$ F4 P2 F5 P3 0 = P5, $b_m = P4$, $b_{m-1} = PX$ B/O C/P $PX = \operatorname{Im} B_1$, $b_{m-2} = PX$ B/O C/P $PX = \operatorname{Im} B_2$, ..., $b_0 = PX$ B/O C/P $PX = \operatorname{Im} B(\omega)$ C/P $PX = P7 = \operatorname{Re} F(\omega)$, $P8 = \operatorname{Im} F(\omega)$.

Контрольный пример: $A(p = j2) = (p^2 + 2p + 1)/(3p^3 + 2p^2 + p + 0,5) = -0,121240 - j0,177695$.

При необходимости вычисления модуля и фазового угла частотной характеристики следует дополнительно использовать одну из программ 17/21 – 19/21.

Программа 156/34. Вычисление вещественной и мнимой частей, модуля и фазового угла частотной характеристики функции цепи при произвольных степенях n числителя и m знаменателя

ИП9	ИП7	\times	$-$	ИП8	ИП7	\times	П9	XY	П8
ИП4	1	$-$	П4	$x \neq 0$	67	$x < 0$	73	ИП5	1
$-$	П5	$x = 0$	73	ИПВ	ИП8	\times	ИПА	ИП9	\times
$-$	ИП8	x^2	ИП9	x^2	$+$	П0	\div	ПД	ИПА
ИП8	x	ИПВ	ИП9	x	$+$	ИП0	\div	ПС	\uparrow
x^2	ИПД	x^2	$+$	$\sqrt{\quad}$	П1	\div	арccos	П2	ИПД
$x < 0$	64	ИП2	$/-$	П2	ИП1	C/P	ИП8	ПА	ИП9
ПВ	0	П9	C/P	БП					

Инструкция: $n = P4$, $m = P5$, $\omega = P7$, $a_n = P8$, $0 = P9$, $a_{n-1} = PX$ (B/O) C/P $PX = n - 1$, $a_{n-2} = PX$ C/P $PX = n - 2$, ..., $a_0 = PX$ C/P $PX = 0$, $b_m = P8$, $b_{m-1} = PX$ C/P $PX = m - 1$, $b_{m-2} = PX$ C/P $PX = m - 2$, ..., $b_0 = PX$ C/P $PX = P1 = |F(\omega)|$, $PД = \operatorname{Im} F(\omega)$ ($P4 = \operatorname{Re} A(\omega)$, $P8 = \operatorname{Im} A(\omega)$, $P8 = \operatorname{Re} B(\omega)$, $P9 = \operatorname{Im} F(\omega)$, $P0 = |B(\omega)|^2$, $P7 = \omega$), $PC = \operatorname{Re} F(\omega)$, $P2 = \varphi_F$ в радианах или градусах в зависимости от положения переключателя Р-Г.

Контрольный пример: $A(p = j2) = (p^2 + 2p + 1)/(3p^3 + 2p^2 + p + 0,5)$ получим $\operatorname{Re} F(\omega) = -0,121240$; $\operatorname{Im} F(\omega) = -0,177695$; $|F(\omega)| = 0,215115$; $\varphi_{\text{рад}} = -2,16953$ или $\varphi^\circ = -124,305$.

При расчетах с помощью непрограммируемых микрокалькуляторов целесообразно в исходной функции (3.12) возвести $p = j\omega$ в соответствующие степени, получив

$$F(j\omega) = \frac{a_n j^n \omega^n + \dots + a_4 \omega^4 - ja_3 \omega^3 - a_2 \omega^2 + a_1 \omega + a_0}{b_n j^n \omega^n + \dots + b_4 \omega^4 - jb_3 \omega^3 - b_2 \omega^2 + b_1 \omega + b_0} = \\ = \frac{(\dots + a_4 \omega^4 - a_2 \omega^2 + a_0) + j\omega(\dots + a_3 \omega^3 - a_3 \omega^2 + a_1)}{(\dots + b_4 \omega^4 - b_2 \omega^2 + b_0) + j\omega(\dots + b_3 \omega^3 - b_3 \omega^2 + b_1)}. \quad (3.15)$$

В подобной форме получим выражение $F(j\omega)$ и в случае, если возвведение в степень $j = \sqrt{-1}$ выполнялось в процессе составления формулы (3.15) по заданной схеме анали-

зируемой цепи. Многочлены $P(\omega^2)$ степени q , взятые в скобки в этой формуле, удобно вычислять как

$$P_k = \omega^2 P_{k-1} + \alpha_{n-k}; \quad k = 1, 2, \dots, q, \quad (3.16)$$

где $P_0 = \alpha_n$, $P_n = P(\omega^2)$, $\alpha_{n-k} = \pm a_{n-k}$.

Эту рекуррентную формулу целесообразно использовать и для полной автоматизации вычисления частотных характеристик функций цепи небольшого порядка, например функции, не имеющей нулей (называемой многополюсной),

$$F(p) = 1 / (b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \dots + b_1 p + b_0). \quad (3.17)$$

Программа 157/21. Вычисление модуля, вещественной и мнимой частей частотной характеристики нормированной ($a_0 = 1$) многополюсной функции при $m \leq 10$

P8	ПП	P8	ПП	P-	ПП	P-	ПП	P-	ПП	P-	ПП
P-	P7	ПП	P8	F5	ПП	P9	F4	ПП	P9	F3	ПП
P9	F2	+	↑	F8	×	P8	x ²	↑	F7	x ²	+
1/x	↑	F8	×	/-	P8	F7	×	P7	F1	√	C/Π
C _x	↑	F6	→	P6	+	↑	F8	x ²	×	XY	B/O

Инструкция: ($b_0 = C1$, $-b_2 = C2$, $b_4 = C3$, $-b_6 = C4$, $b_8 = C5$, $-b_{10} = C6$, $b_1 = P2$, $-b_3 = P3$, $b_5 = P4$, $-b_7 = P5$, $b_9 = P6$) $\omega = PX$ B/O C/Π $PX = |F(\omega)|$, $P7 = \operatorname{Re} F(\omega)$, $P8 = \operatorname{Im} F(\omega)$.

Контрольный пример: для функции $F(p) = 1 / (3p^3 + 2p^2 + p + 0,5)$ при $\omega = 2$ получим $|F(\omega)| = 0,0430231$; $\operatorname{Re} F(\omega) = -0,0138824$; $\operatorname{Im} F(\omega) = 0,0407218$ (время счета около 40 с). При необходимости вычисления фазового угла следует обратиться к программе 19/21.

При полном использовании емкости запоминающих устройств микрокалькуляторов с входным языком МК21 в памяти можно хранить 11 коэффициентов функции общего вида.

Программа 158/21. Вычисление АЧХ функции цепи при $n \leq 4$, $m \leq 5$

x ²	P8	ПП	F8	P7	ПП	F8	XY	÷	↑	F7	+
P7	F4	↑	F8	×	↑	F3	+	ПП	P9	÷	1/x
P8	F6	×	↑	F5	+	x ²	↑	F8	+	↑	F7
÷	√	C/Π	↑	F8	×	↑	F2	→	P2	+	↑
B/O	C _x	ПП	6	ПП	6	ПП	6	F8	XY	x ²	B/O

Инструкция: ($a_0 = P2$, $-a_2 = P3$, $a_4 = P4$, $a_1 = P5$, $-a_3 = P6$, $b_0 = C1$, $-b_2 = C2$, $b_4 = C3$, $b_1 = C4$, $-b_3 = C5$, $b_5 = C6$) $\omega = PX$ B/O C/Π $PX = |F(\omega)|$. Время счета около 25 с. Для проверки можно воспользоваться примером к программе 156/21.

Для функций меньшего порядка можно автоматизировать вычисление вещественной и мнимой частей частотной характеристики (по которым с помощью программ 17/21 – 19/21 вычисляют модуль и фазовый угол), а также при необходимости автоматизировать приращение аргумента. Если степени числителя и знаменателя функции цепи не более шести, то можно автоматизировать вычисление модуля и фазы ее частотной характеристики.

Программа 159/21. Вычисление модуля и фазового угла многочлена мнимого аргумента степени $n \leq 6$

x ²	P8	C _x	P3	P4	7	P6	F3	↑	F4	P3	F8
X	↑	F2	→	P2	+	P4	F6	1	-	x = 0	P1
F3	x ²	↑	F8	×	↑	F4	x ²	+	P6	÷	5
÷	↑	F5	×	√	+	1	+	↑	F6	×	√
↑	F4	-	XY	÷	9	0	X	P7	F6	√	C/Π

Инструкция: ($8,1 = P5$, $\alpha_0^{(1)} = P2$, $\alpha_1 = C1$, $-\alpha_2 = C2$, $-\alpha_3 = C3$, $\alpha_4 = C4$, $\alpha_5 = C5$,

¹⁾ Символами α_i обозначены коэффициенты многочлена $P(p)$ комплексной частоты.

$-\alpha_6 = C6$) $\omega = PX$ (B/O) С/П $PX = |P(\omega)|$, $P7 = \varphi^\circ$ в интервале $[-180; 180^\circ]$ со знаком, совпадающим со знаком $P3 = \text{Im}P(\omega)/(\omega)$, при погрешности не более 0,03° (время счета 30 с).

Контрольный пример: для функции $F(p) = (p^2 + 2p + 1)/(3p^3 + 2p^2 + p + 0,5)$ при $\omega = 2$ получим для числителя $|A(\omega)| = 5$; $\varphi_A^\circ = 126,8599$ и для знаменателя $B(\omega) = 23,24327$; $\varphi_B^\circ = -108,8089$. Следовательно, $|F(\omega)| = |A(\omega)|/|B(\omega)| = 0,215115$ и $\varphi_F^\circ = \varphi_A^\circ - \varphi_B^\circ = 235,6688$ или, после приведения в интервал $[-180; 180^\circ]$, $\varphi_F^\circ = 235,6688 - 360 = -124,33$.

Программа 160/34. Вычисление АЧХ и ФЧХ многополюсной функции при $m \leq 12$

```

ПД  x2 ↑ ↑ ИПВ X ИП9 XY — X
ИП7 — X ИП5 + X ИП3 — X ИП1
+ ИПД X ПД → ИПС X ИПА — X
ИП8 + X ИП6 — X ИП4 + X ИП2
— X ИП0 + ↑ ИПД ↑ → x2 XY
x2 + √ ÷ BX XY arccos ПД → XY
x < 0 66 ИПД /-/ ПД → XY С/П БП

```

Инструкция: ($b_0 = P0, b_1 = P1, \dots, b_9 = P9, b_{10} = PA, b_{11} = PB, b_{12} = PC$) $\omega = PX$ (B/O) С/П $PX = |F(\omega)|$, $P7 = \varphi_F(\omega)$ в градусах или радианах в зависимости от положения переключателя Р-Г.

Для проверки программы можно использовать контрольный пример к программе 157/21.

При необходимости вычисления многополюсной функции степени $m \leq 14$ можно разместить один коэффициент в операционном стеке с его вводом перед каждым пуском программы.

Программа 161/34. Вычисление АЧХ и ФЧХ многополюсной функции при $m \leq 14$

```

x2 ↑ ИПС → → X — X ИПА —
X ИП8 + X ИП6 — X ИП4 + X
ИП2 — X ИП0 + XY ↑ ИПД X ИПВ
ПП 75 ИП9 + ПП 76 ИП7 ПП 75 ИП5
+ ПП 76 ИП3 ПП 75 ИП1 + XY √
X ↑ → x2 XY x2 + √ ÷ BX
→ arccos XY x < 0 69 Сx XY — XY →
XY → С/П БП 00 — XY X BX XY
B/O

```

Инструкция: ($b_0 = P0, b_1 = P1, \dots, b_9 = P9, b_{10} = PA, b_{11} = PB, b_{12} = PC, b_{13} = P7$) $b_{14} = PY$, $\omega = PX$ (B/O) С/П $PX = |F(\omega)|$, $PY = \varphi_F(\omega)$ в радианах или градусах.

В памяти микрокалькулятора с входным языком МК34 можно разместить коэффициенты функции общего вида (3.12) при $m + n \leq 9$.

Программа 162/34. Вычисление АЧХ и ФЧХ функции цепи при $n \leq 4, m \leq 5$

```

ПД  x2 ↑ ↑ ИП5 X ИП3 — X ИП1
+ X ИПД X ПС → ИП9 X ИП7 —
ИПД X ПВ → ИП4 X ИП2 — X ИП0
+ ПД → ИПА X ИП8 — X ИП6 +
ПП 59 ИПС ПВ → ПС → ИПД ПП 59
ИПС XY — ПД → ÷ С/П БП 00 ↑
x2 ИПВ x2 + √ ÷ BX XY arccos ИПВ
x < 0 76 Сx XY — ↑ → B/O

```

Инструкция. ($b_0 = P0, b_1 = P1, \dots, b_5 = PS, a_0 = P6, a_1 = P7, a_2 = P8, a_3 = P9, a_4 = PA$) $\omega = PX$ (B/O) С/П $PX = |F(\omega)|$, $PY = \varphi_F(\omega)$ в градусах или радианах. Если $\varphi_F(\omega) > 180^\circ$, то фазовый угол следует привести в интервал $[-180; 180^\circ]$ добавлением или вычитанием 360° .

Контрольный пример: для функции $F(p) = (p^3 + 2p^2 + 1)/(3p^3 + 2p^2 + p + 0,5)$ при $\omega = 2$ получим $|F(\omega)| = 0,215115$; $PД = 235,69461^\circ$, откуда $\varphi_F(\omega) = 235,69461 - 360 = -124,305^\circ$.

Программу 162/34 можно использовать как исходную при построении программ с различными соотношениями между m и n . При $m+n=9$ для различных соотношений между m и n следует изменить размещение коэффициентов в памяти и отредактировать текст программы. При $m+n < 9$ следует также соответственно изменить адрес обращения к подпрограмме. Если $m+n \leq 7$, то для построения частотных характеристик целесообразно автоматизировать изменение аргумента, как описано для программы 160/34. Можно также увеличить $m+n$, размещая два коэффициента в операционном устройстве по аналогии с подобной процедурой для программы 160/34, реализованной в программе 161/34.

Если требуется вычислить только АЧХ или ФЧХ, то можно пронормировать числитель и знаменатель заданной функции делением на коэффициент b_0 и увеличить предельную сумму степеней $m+n$ до 11.

Программа 163/34. Вычисление ФЧХ нормированной ($b_0 = 1$) функции цепи при $n \leq 4, m \leq 7$

ПД	x^2	\uparrow	\uparrow	ИПВ	x	ИП9	$+$	x	ИП7
$+$	x	ИП5	$+$	ИПД	x	ПС	\rightarrow	ИПА	x
ИП8	$+$	x	ИП6	$+$	x	1	$+$	\uparrow	x^2
ИПС	ПП	63	ПС	ИПД	x^2	\uparrow	\uparrow	ИП3	x
ИП1	$+$	ИПД	x	ПД	\rightarrow	ИП4	x	ИП2	$+$
x	ИП0	$+$	\uparrow	x^2	ИПД	ПП	63	ИПС	$-$
C/P	БП	00	\uparrow	$-x^2$	$+$	$\sqrt{-}$	\div	arccos	
XY	$x < 0$	77	C _x	XY	$-$	\uparrow	\rightarrow	B/O	

Инструкция: ($a_0 = P0, a_1 = P1, -a_2 = P2, -a_3 = P3, a_4 = P4, b_1 = P5, -b_2 = P6, -b_3 = P7, b_4 = P8, b_5 = P9, -b_6 = PA, -b_7 = PB$) $\omega = PX$ (B/O) C/P $PX = \varphi_F(\omega)$. Время счета около 60 с.

Программа 164/34. Вычисление АЧХ нормированной ($b_0 = 1$) функции цепи при $n \leq 4, m \leq 7$

ПД	x^2	\uparrow	\uparrow	ИПВ	x	ИП9	$+$	x	ИП7
$+$	x	ИП5	$+$	ИПД	x	ПС	\rightarrow	ИПА	x
ИП8	$+$	x	ИП6	$+$	x	1	$+$	x^2	ИПС
x^2	$+$	ПС	ИПД	x^2	\uparrow	\uparrow	ИП3	x	ИП1
$+$	ИПД	x	ПД	\rightarrow	ИП4	x	ИП2	$+$	x
ИП0	$+$	x^2	ИПД	x^2	$+$	ИПС	\div	$\sqrt{-}$	C/P
БП									

Инструкция: ($a_0 = P0, a_1 = P1, -a_2 = P2, -a_3 = P3, a_4 = P4, b_1 = P4, -b_2 = P6, -b_3 = P7, b_4 = P8, b_5 = P9, -b_6 = PA, -b_7 = PB$) $\omega = PX$ (B/O) C/P $PX = |F(\omega)|$. Время счета около 30 с.

Размещая два коэффициента в операционном устройстве, как показано ранее, можно повысить еще на две единицы сумму $m+n$. Если анализируемая функция представима выражением (3.14), то при условии $\beta_i > 0$ удобно использовать следующие программы.

Программа 165/21. Вычисление модуля и аргумента нормированного квадратичного множителя с автоматическим приращением частоты

P6	\uparrow	F3	x	P4	F2	x	x	1	$-$	\uparrow	x^2
XY	\rightarrow	F4	x^2	$+$	$\sqrt{-}$	\leftarrow	\uparrow	F4	\div	P4	x^2
\uparrow	F7	$+$	1	,	6	2	x	$\sqrt{-}$	$+$	4	$1/x$
$+$	$\sqrt{-}$	\uparrow	F4	$+$	XY	\div	9	0	x	\uparrow	\rightarrow
C/P	F6	\uparrow	F8	$+$	БП	P0					

Инструкция: ($\alpha = P2, \beta = P3; 0,96573 = P7, \Delta\omega = P8$) $\omega_0 = PX$ (B/O) C/P $PX =$

$|P(\omega_0 + k\Delta\omega)|$, $PY = \varphi(\omega_0 + k\Delta\omega)$ с погрешностью не более $12''$. Время счета около 9 с. При значении $\omega = 0$ или $\beta = 0$ возникает переполнение – в последнем случае $|P(\omega)| = 1/\alpha$ и $\varphi = 90^\circ$. Для изменения частоты по логарифмическому закону оператор $+$ по адресу 81 следует заменить оператором X , а в регистр 8 занести значение $10^4 k$, где k – число отсчетов на декаду.

Контрольный пример: для $P(p) = 2p^3 + 4p + 1$ при $\omega = 2$ получим $|P(\omega)| = 10,63014$; $\varphi = 131,1851$.

При анализе цепи по функции, заданной формулой (3.15),

$$|F(\omega)| = \prod_{i=1}^r |P_{0i}(\omega)| / \prod_{i=1}^s |P_{ii}(\omega)|; \quad \varphi(\omega) = \sum_{i=1}^r \varphi_{0i} - \sum_{i=1}^s \varphi_{ii}.$$

Если необходимо найти только АЧХ, то можно одновременно вычислять модуль произведения до пяти квадратичных нормированных сомножителей.

Программа 166/21. Вычисление модуля произведения до пяти нормированных квадратичных множителей

P8	1	ПП	2	ПП	2	ПП	2	ПП	2	ПП	2
C/P	БП	P0	P7	F2	←	↑	F4	P2	F8	x^2	XY
P4	X	1	–	x^2	P6	F3	←	↑	F5	P3	F8
X	x^2	XY	P5	F6	+	↑	F7	X	B/O		

Инструкция: ($\alpha_1 = P2$, $\beta_1 = P3$, $\alpha_2 = P4$, $\beta_2 = P5$, $\alpha_3 = C1$, $\beta_3 = C2$, $\alpha_4 = C3$, $\beta_4 = C4$, $\alpha_5 = C5$, $\beta_5 = C6$) $\omega = PX$ (B/O) C/P $PX = |\prod_{i=1}^5 (\alpha_i p^2 + \beta_i p + 1)|$. Время счета около 30 с.

Контрольный пример: для произведения $(0,9p^2 + 0,06p + 1)(1,2p^2 + 0,2p + 1)(2p^2 + 0,5p + 1)(4p^2 + 1,4p + 1)$ при $\omega = 2$ получим $|P(\omega)| = 1151466$.

Если многополосная нормированная ($a_0 = 1$) функция содержит не более пяти квадратичных множителей в знаменателе, то в программе 166/21 целесообразно заменить адрес 2 обращения к подпрограмме адресом FX, а перед оператором C/P ввести оператор $1/x$, что обеспечит индикацию модуля функции $|F(\omega)| = 1/|P(\omega)|$.

Программа 167/21. Вычисление аргумента произведения до четырех нормированных ($\gamma_i = 1$) квадратичных множителей

P7	C _x	ПП	PX	ПП	PX	ПП	PX	ПП	PX	9	0
X	C/P	P6	F7	↑	F3	→	P3	X	P4	F2	→
P2	X	X	1	–	P5	x^2	↑	F4	x^2	XY	+
P4	÷	5	÷	↑	F8	X	√	+	1	+	↑
F4	X	√	↑	F5	+	XY	÷	↑	F6	+	B/O

Инструкция: ($\alpha_1 = P2$, $\beta_1 = P3$, $\alpha_2 = C1$, $\beta_2 = C2$, $\alpha_3 = C3$, $\beta_3 = C4$, $\alpha_4 = C5$, $\beta_4 = C6$; $8,1 = P8$) $\omega = PX$ B/O C/P $PX = \varphi(\omega)$ с погрешностью менее $0,03^\circ$ для каждого множителя. Время счета около 30 с.

Контрольный пример: для $(2p^2 + 4p + 1)(3p^2 + 8p + 1)(0,5p^2 + 3p + 1)$ при $\omega = 2$ получим $\varphi(\omega) = 355,1299^\circ$.

Иногда вместо ФЧХ используют зависимость группового времени запаздывания (ГВЗ) от частоты

$$\tau_{\text{гр}}(\omega) = d\varphi(\omega)/d\omega. \quad (3.18)$$

Для представления функции цепи выражением (3.14) с нормированными множителями

$$\tau_{\text{гр}}(\omega) = \sum_{i=1}^r \frac{\beta_{0i}(1 + \alpha_{0i}\omega^2)}{(1 - \alpha_{0i}\omega^2)^2 + \beta_{0i}^2\omega^2} - \sum_{i=1}^s \frac{\beta_{ii}(1 + \alpha_{ii}\omega^2)}{(1 - \alpha_{ii}\omega^2)^2 + \beta_{ii}^2\omega^2},$$

где индексами "0" и "п" обозначены коэффициенты множителей числителя и знаменателя функции.

Так как аргумент $\varphi(\omega)$ функции $F(j\omega)$ равен разности аргументов числителя и знаменателя, то групповое время задержки для $F(p)$ также равно разности $\tau_{\text{гр}}(\omega)$ числителя и знаменателя. Последние значения можно вычислить раздельно для числителя и знаменателя функции, представленной формулой (3.14).

Программа 168/21. Вычисление группового времени запаздывания произведения до пяти квадратичных нормированных множителей

P8	C _x	ПП	2	ПП	2	ПП	2	ПП	2	ПП	2
C/П	БП	P0	P7	F2	←	↑	F4	P2	F8	x^2	XY
P4	X	1	—	x^2	P6	F3	←	↑	F5	P3	F8
X	x^2	XY	P5	F6	+	P6	F4	↑	F8	x^2	X
1	+	↑	F5	X	↑	F6	÷	↑	F7	+	B/O

Инструкция: ($\alpha_1 = P2, \beta_1 = P3, \alpha_2 = P4, \beta_2 = P5, \alpha_3 = C1, \beta_3 = C2, \alpha_4 = C3, \beta_4 = C4, \alpha_5 = C5, \beta_5 = C6$) $\omega = PX$ (B/O) $C/P PX = |\tau_{\text{гр}}|$. Время счета около 35 с.

Контрольный пример: $(2p^2 + 4p + 1)(3p^2 + 8p + 1)(0,5p^2 + 3p + 1)$ при $\omega = 2$ имеет $\tau_{\text{гр}} = 0,837689$.

При числе нормированных квадратичных множителей, не превышающем 4, вычисление ГВЗ можно объединить в одной программе с вычислением модуля произведения множителей.

Программа 169/21. Вычисление ГВЗ и модуля произведения до четырех нормированных квадратичных множителей

P6	C _x	P8	1	ПП	F _x	ПП	F _x	ПП	F _x	ПП	F _x
√	C/П	БП	P0	P7	F6	↑	F3	→	P3	X	P4
F2	→	P2	X	X	1	+	P5	2	—	x^2	↑
F4	x^2	+	P4	↑	F5	XY	÷	↑	F3	X	↑
F8	+	P8	F4	↑	F7	X	B/O				

Инструкция: ($\alpha_1 = P2, \beta_1 = P3, \alpha_2 = C1, \beta_2 = C2, \alpha_3 = C3, \beta_3 = C4, \alpha_4 = C5, \beta_4 = C6$) $\omega = PX$ (B/O) $C/P PX = |P(\omega)|, P8 = \tau_{\text{гр}}(\omega)$. Время счета около 25 с.

Контрольный пример: для $(2p^2 + 4p + 1)(3p^2 + 8p + 1)(0,5p^2 + 3p + 1)$ при $\omega = 2$ получим $|P(\omega)| = 1255,482; \tau_{\text{гр}}(\omega) = 0,8376893$.

Входной язык МК34 обеспечивает составление более удобных программ одновременного вычисления АЧХ и ФЧХ (или ГВЗ) схемных функций, представленных произведениями до шести квадратичных множителей.

Программа 170/34. Вычисление АЧХ и ФЧХ (или ГВЗ) функции цепи, представленной отношением произведений до трех квадратичных нормированных множителей ($r \leq 3, s \leq 3$)

x^2	↑	1	ПД	C _x	ПС	→	↑	ИП0	ИП1
ПП	45	ИП2	ИП3	ПП	45	ИП4	ИП5	ПП	45
ИПС	/—	ПС	→	ИПД	$1/x$	ПД	→	ИП6	ИП7
ПП	45	ИП8	ИП9	ПП	45	ИПА	ИПВ	ПП	45
ИПС	ИПД	C/П	БП	00	x^2	→	X	1	XY
—	↑	x^2	→	→	X	BX	→	+	√
÷	BX	ИПД	X	ПД	→	arccos	ИПС	+	ПС
→	↑	B/O							

Инструкция: ($\alpha_{n1} = P0, \beta_{n1} = P1, \alpha_{n2} = P2, \beta_{n2} = P3, \alpha_{n3} = P4, \beta_{n3} = P5, \alpha_{01} = P6, \beta_{01} = P7, \alpha_{02} = P8, \beta_{02} = P9, \alpha_{03} = PA, \beta_{03} = PB$) $\omega = PX$ (B/O) $PX = PД = |F(\omega)|, PY = PC = \varphi_F(\omega)$ в радианах или градусах.

Для вычисления АЧХ и ГВЗ подпрограмму следует заменить на

→	X	1	+	2	XY	—	BX	→	x^2
→	→	X	BX	x^2	→	XY	→	→	X
BX	→	+	÷	BX	√	ИПД	X	ПД	→
ИПС	+	ПС	→	↑	B/O				

В этом случае после выполнения программы получим $PX = PD = |F(\omega)|$, $PY = PC = \tau_{gr}(\omega)$.

Контрольный пример: для $F(p) = (3p^2 + 10p + 1)/(2p^2 + 4p + 1)(3p^2 + 8p + 1) \times X(0,5p^2 + 3p + 1)$ получим (время счета около 70 с) $|F(\omega)| = 0,018180597$ и $\varphi_F(\omega) = -236,34598^\circ$ или $\tau_{gr}(\omega) = -0,58816922$.

Эту программу легко изменить для другого соотношения между числами множителей r числителя и s знаменателя: достаточно соответствующим образом изменить число обращений к подпрограмме до изменения знака содержимого регистра C , накапливающего сумму фазовых углов или ГВЗ.

Некоторые цепи удобно анализировать в частотной области методом свертывания схемы без составления формул вида (3.12) – (3.15). Примером могут служить лестничные цепи (см. рис. 24), для которых справедливы соотношения

$$i_{j-1} = Y_j u_j + i_{j+1}; \quad u_{j-2} = Z_{j-1} i_{j-1} + u_j. \quad (3.19)$$

Нормируя $u_{\text{вых}} = u_k = 1$, учитывая $i_{k+1} = 0$ и последовательно подставляя в эти формулы $Y_k, Z_{k-1}, Y_{k-2}, \dots, Z_0$, если входная ветвь продольна (см. рис. 24, а), или Y_0 , если входная ветвь поперечна (см. рис. 24, б), получаем комплексные значения $u_0 = 1/K_H$ и $i_0 = 1/Z_{\text{пер}}$, по которым несложно вычислить $Z_{\text{вх}} = 1/Y_{\text{вх}} = u_0/i_0$, $Y_{\text{пер}} = -Y_k/u_0$ и $K_T = -Y_k/i_0$.

Программа 171/21. Вычисление комплексных значений $1/K_H$ и $1/Z_{\text{пер}}$ лестничной цепи с произвольным числом $k+1$ ветвей

P8	XY	P7	1	P4	C_x	P5	F6	↑	–	P6	C/P
P3	XY	P2	F8	X	→	F2	↑	F7	X	↑	←
–	↑	F4	+	→	F8	↑	F2	X	↑	→	F7
P4	↑	F3	X	↑	←	+	F5	+	↑	F8	P5
F1	P8	←	P7	BП	XY						

Программа 172/34. Вычисление комплексных значений $1/K_H$ и $1/Z_{\text{пер}}$ лестничной цепи с произвольным числом $k+1$ ветвей

P8	XY	P7	1	P4	C_x	P5	ИП6	1	–		
P6	C/P	P3	XY	P2	ИП7	X	ИП3	ИП8	X		
–	ИП4	+	П1	ИП8	ИП2	X	ИП7	П4	ИП3		
+	ИП5	+	П9	ИП8	П5	ИП1	П7	ИП9			
P8	BП	07									

Инструкция к обеим программам: $k+1 = P6$, $\operatorname{Re} Y_k = PY$, $\operatorname{Im} Y_k = PX$ В/О С/П $PX = k$, $\operatorname{Re} Z_{k-1} = PY$, $\operatorname{Im} Z_{k-1} = PX$ С/П $PX = k-1$, $\operatorname{Re} Y_{k-2} = PY$, $\operatorname{Im} Y_{k-2} = PX$ С/П $PX = k-2, \dots, \operatorname{Re} Z_0 = PY$, $\operatorname{Im} Z_0 = PX$ С/П $PX = 0$, $P4 = \operatorname{Re} 1/K_H$, $P5 = \operatorname{Im} 1/K_H$, $P7 = \operatorname{Re} 1/Z_{\text{пер}}$, $P8 = \operatorname{Im} 1/Z_{\text{пер}}$ или $\dots \operatorname{Re} Y_0 = PY$, $\operatorname{Im} Y_0 = PX$ С/П $PX = 0$, $P4 = \operatorname{Re} 1/Z_{\text{пер}}$, $P5 = \operatorname{Im} 1/Z_{\text{пер}}$, $P7 = \operatorname{Re} 1/K_H$, $P8 = \operatorname{Im} 1/K_H$.

Контрольный пример: при $Y_2 = 1 + j1$; $Z_1 = 2 + j2$; $Y_0 = 3 + j3$ получим $1/Z_{\text{пер}} = -8 + j16$; $1/K_H = 1 + j4$.

Выполнение этих программ приходится повторять $k+1$ раз для каждого значения частоты. Во многих случаях удается ускорить вычисления, более полно автоматизировав итерации (3.19). Например, при одинаковых продольных и одинаковых поперечных ветвях лестничной цепи несложно организовать вычисления по (3.19) в замкнутом цикле с выходом из него после выполнения заданного числа итераций. Когда значения параметров ветвей лестничной цепи различны, их приходится хранить в памяти, что ограничивает сложность автоматически анализируемой цепи.

Программа 173/21. Вычисление частотных характеристик $1/K_H$ и $1/Z_{\text{пер}}$ реактивной лестничной цепи с числом $k \leq 10$ продольных и поперечных ветвей различного типа

P6	x^2	↑	F3	X	P8	↑	F4	X	1	–	/-
P7	F5	ПП	P6	ПП	5	ПП	5	ПП	5	ПП	5
ПП	5	ПП	5	ПП	5	С/П	БП	Р0	F2	←	P2
↑	F6	X	↑	F7	X	↑	F8	+	↑	F7	P8
XY	P7	B/O									

Инструкция: если продольные ветви индуктивные, то $C_k = P3$, $-L_{k-1} = P4$, $C_{k-2} = P5$, $-L_{k-3} = C1$, $C_{k-4} = C2$, $-L_{k-5} = C3$, $C_{k-6} = C4$, $-L_{k-7} = C5$, $C_{k-8} = C6$, $-L_{k-9} = P2$ или, если продольные ветви емкостные, $-1/L_k = P3$, $1/C_{k-1} = P4$, $-1/L_{k-2} = P5$, $1/C_{k-3} = C1$, $-1/L_{k-4} = C2$, $1/C_{k-5} = C3$, $-1/L_{k-6} = C4$, $1/C_{k-7} = C5$, $-1/L_{k-8} = C6$, $1/C_{k-9} = P2$ (на места параметров отсутствующих начальных ветвей заносят нули) $\omega = PX$ (В/О) С/П $PX = P7 = \operatorname{Re} 1/K_H$, $P8 = \operatorname{Im} 1/Z_{\text{пер}}$, если входная ветвь продольная, или $PX = P7 = \operatorname{Im} 1/Z_{\text{пер}}$, $P8 = \operatorname{Re} 1/K_H$, если входная ветвь поперечная.

Программа 174/34. Вычисление частотных характеристик $1/K_H$ и $1/Z_{\text{пер}}$ реактивной лестничной цепи с числом $k \leq 12$ продольных и поперечных ветвей различного типа

		↑	↑	1	ПС	C_x	ПД	→	ИПВ	ПП	46
ИПА	ПП	46		ИП9	ПП	46		ИП8	ПП	46	ИП7
ПП	46		ИП6	ПП	46		ИП5	ПП	46	ИП4	ПП
46	ИП3	ПП	46	ИП2	ПП	46		ИП1	ПП	46	
ИП0	ПП	46		С/П	БП	00	X	ИПС	X	ИПД	
+	ИПС	ПД	→		ПС						

Инструкция: если продольные ветви индуктивные, то $C_k = PB$, $-L_{k-1} = PA$, $C_{k-2} = P9$, $-L_{k-3} = P8$, $C_{k-4} = P7$, $-L_{k-5} = P6$, $C_{k-6} = P5$, $-L_{k-7} = P4$, $C_{k-8} = P3$, $-L_{k-9} = P2$, $C_{k-10} = P1$, $-L_{k-11} = P0$, или, если продольные ветви емкостные, $-1/L_k = PB$, $1/C_{k-1} = PA$, $-1/L_{k-2} = P9$, $1/C_{k-3} = P8$, $-1/L_{k-4} = P7$, $1/C_{k-5} = P6$, $-1/L_{k-6} = P5$, $1/C_{k-7} = P4$, $-1/L_{k-8} = P3$, $1/C_{k-9} = P2$, $-1/L_{k-10} = P1$, $1/C_{k-11} = P0$ (на места параметров отсутствующих начальных ветвей заносят нули) $\omega = PX$ (В/О) С/П $PX = PC = 1/K_H = \operatorname{Re} 1/K_H$, $PД = 1/Z_{\text{пер}} = \operatorname{Im} 1/Z_{\text{пер}}$, если входная ветвь продольная, или $PX = PC = 1/Z_{\text{пер}} = \operatorname{Im} 1/Z_{\text{пер}}$, $PД = 1/K_H = \operatorname{Re} 1/K_H$, если входная ветвь поперечная.

Подобные программы можно составить и для лестничных цепей других классов (например, с поперечными резистивными и продольными емкостными ветвями). Аналогичные программы удобно составлять и для цепей других типов, параметры которых являются функциями комплексной частоты в нулевой или первой (положительной или отрицательной) степени. Однако для сложных цепей с нерегулярной структурой обычно более удобны ранее рассмотренные методы частотного анализа с предварительным составлением формул (3.12) – (3.15) для функций цепи.

3.5. Вычисление временных характеристик

Общий метод вычисления реакции $x(t)$ линейной цепи (временной характеристики) на заданное воздействие $q(t)$ заключается в решении составленного по схеме замещения анализируемой цепи обыкновенного дифференциального уравнения

$$a_n \frac{d^n x}{dt^n} + \dots + a_1 \frac{dx}{dt} + a_0 = b_m \frac{d^m q}{dt^m} + \dots + b_1 \frac{dq}{dt} + b_0. \quad (3.20)$$

Прямое преобразование такого уравнения по Лапласу приводит к описанию реакции цепи изображением $x(p) = F(p)q(p) + F(0)$, оригиналом которого является временная характеристика $x(t) = L^{-1}x(p)$, а член $F(0)$ отображает начальные условия. При воздействии единичным импульсом δ изображением $q(p) = 1$ временную характеристику $g(t) = L^{-1}F(p)$ называют импульсной, а при воздействии единичным включением с изображением $q(p) = 1/p$ временную характеристику $h(t) = L^{-1}F(p)/p$ называют переходной.

Изображение реакции в области оператора Лапласа

$$x(p) = \frac{\sum_{i=0}^n a_i p^i}{\sum_{i=0}^m b_i p^i} = \frac{\sum_{i=0}^n a_i p^i}{\prod_{i=1}^m (p - p_{ni})} = \frac{\sum_{i=0}^n a_i p^i}{\prod_{j=1}^s (b_{2j} p^2 + b_{1j} p + b_{0j})} \quad (3.21)$$

в общем случае может иметь совпадающие (кратные) полюсы. Однако каждый такой полюс с практической допустимой точностью можно заменить близко расположеннымами

простыми (некратными) полюсами, что упрощает анализ. Для вычисления временной характеристики функцию (3.21) с простыми вещественными полюсами $p_{\text{пп}} = \sigma_{\text{пп}}$ и параметрами комплексно-сопряженных полюсов $p_{\text{пп}, i+1} = n_{\text{пп}} = \sigma_{\text{пп}} \pm j\omega_{\text{пп}}$ при $n < m^1$ раскладывают в простую дробь

$$x(p) = \sum_{i=1}^m D_i / (p - p_{\text{пп}}), \quad (3.22)$$

где коэффициенты (вычленены в простых полюсах)

$$D_i = (p - p_{\text{пп}}) x(p) \Big|_{p=p_{\text{пп}}} = A(p)/B'(p) \Big|_{p=p_{\text{пп}}}$$

Оригиналом (3.22) является временная характеристика

$$x(t) = \sum_{i=1}^m D_i e^{\sigma_{\text{пп}} t} = \sum_{j=1}^s (B_{1j} \cos \omega_j t + B_{2j} \sin \omega_j t) e^{\sigma_{\text{пп}} t} = \sum_{j=1}^s A_j \cos(\omega_j t + \varphi_j) e^{\sigma_{\text{пп}} t}. \quad (3.23)$$

Для вещественных полюсов $\varphi_j = B_{2j} = 0$; $B_{1j} = D_i = A_i$, а для j -й пары комплексно-сопряженных полюсов коэффициенты D_i комплексно сопряжены и $B_{1j} = 2\operatorname{Re} D_i$, $B_{2j} = -2\operatorname{Im} D_i$, $A_j = 2|D_i|$; $\varphi_j = \arg D_i$, где D_i — коэффициент того полюса j -й пары, у которого $\omega_j > 0$. Автоматизацию вычисления коэффициентов D_i для функции, представленной выражением (3.21), обеспечивают следующие программы.

Программа 175/21. Вычисление коэффициентов разложения в простую дробь функции с $n < m$ и простыми полюсами

→	F4	$x \neq 0$	FXY	1	—	P4	←	X	→	ПП	4
F5	x^2	↑	F6	x^2	+	1/x	↑	F5	X	P7	F6
X	/-	P8	F2	↑	F7	X	→	F8	X	→	F3
↑	F8	X	P2	F7	X	↑	←	+	P3	←	↑
F2	—	↑	←	+	P2	C/P	B/O				

Инструкция: $0 = P2 = P3$, $m = P4$, $\sigma_{\text{пп}} = P7$, $\omega_{\text{пп}} = P8$, $b_m = PX$ B/O C/P $b_{m-1} = PX$ B/O C/P ... $b_1 = PX$ B/O C/P F2 P5 F3 P6 $0 = P2 = P3$, $a_n = PX$ B/O C/P $a_{n-1} = PX$ B/O C/P $a_{n-2} = PX$ B/O C/P ... $a_1 = PX$ B/O C/P $a_0 = PX$ B/O C/P $PX = P2 = \operatorname{Re} D_i$, $P3 = \operatorname{Im} D_i$. Вычисления повторяют для всех полюсов заданной функции.

Контрольный пример: для полюса $p_{\text{пп}} = -0,4 + j1,2$ функции $x(p) = (90p^3 + 188p^2 + 216p + 40)/(10p^4 + 33p^3 + 36p^2 + 40p)$ получим $D_1 = 1,499999 - j1,666666$.

Программа 176/34. Вычисления коэффициентов разложения в простую дробь функции с $n < m$ и простыми полюсами

P8	Cx	P9	ИПА	$x \neq 0$	29	P0	C/P	ИП8	ИПД
X	ИП9	ИПС	X	+	XY	ИП8	ИПС	X	+
ИП9	ИПД	X	—	P8	XY	P9	L0	07	C/P
ИПВ	X	P6	Cx	P7	ИПВ	1	—	P0	C/P
ИП0	X	ИП6	ИПД	X	ИП7	ИПС	X	+	XY
ИП6	ИПС	X	+	ИП7	ИПД	X	—	P6	XY
P7	L0	39	ИП6	ИП8	X	ИП7	ИП9	X	+
ИП6	x^2	ИП7	x^2	+	P5	÷	P11	ИП6	ИП9
X	ИП7	ИП8	X	—	ИП5	÷	P2	ИП1	C/P

Инструкция: ($n = PA$, $m = PB$) $\sigma_{\text{пп}} = PC$, $\omega_{\text{пп}} = PD$, $a_n = PX$ B/O C/P $a_{n-1} = PX$ C/P ... $a_0 = PX$ C/P $b_m = PX$ C/P $b_{m-1} = PX$ C/P ... $b_1 = PX$ C/P $PX = P1 = \operatorname{Re} D_i$, $PY = P2 = \operatorname{Im} D_i$. Вычисления повторяют для всех полюсов анализируемой функции.

¹ При $n = m$ числитель функции делят на знаменатель, получая $x(p) = D_0 + A_1(p)/B(p)$ с $n < m$ для остатка; оригиналом постоянной D_0 является единичный импульс с весовым множителем D_0 .

Для проверки программы можно использовать условия предыдущего контрольного примера, для которого должно получиться $D_1 = 1,5 - j1,666666$. Программу 176/34 несложно преобразовать для автоматического вычисления коэффициентов A_j и φ_j или B_{1j} и B_{2j} . Например, введя в эту программу фрагмент ИПД $x \neq 0 \quad 82 \rightarrow 2 \div \uparrow \rightarrow$ между операторами + и П5 по адресам 74 и 75 и используя при вычислениях только один полюс с отрицательной мнимой частью из каждой пары комплексно-сопряженных полюсов, получим коэффициенты $PX = P1 = B_{1j}$ и $PY = P2 = B_{2j}$, что ускорит вычисления.

Если изображение $x(p)$ представлено выражением (3.13) с квадратичными множителями нулей и полюсов, то коэффициенты вещественных полюсов

$$B_{1i} = \frac{1}{b_{1i}} \frac{\prod_{j=1}^r (\sigma_{pi} (a_{2j} \sigma_{pi} + a_{1j}) + a_{0j})}{\prod_{j=1}^s (\sigma_{pi} (b_{2j} \sigma_{pi} + b_{1j}) + b_{0j})},$$

включая полюс в начале координат ($b_{2i} = b_{0i} = 0$), а коэффициенты комплексно-сопряженных пар полюсов (при $b_{1j} < 4b_{2j}b_{0j}$), включая полюсы на мнимой оси ($b_{1j} = 0$), $B_{1j} = \operatorname{Re} x_1(p_j)$, $B_{2j} = -\operatorname{Im} x_1(p_j)$, где

$$x_1(p_j) = \frac{1}{jb_{2i}\omega_{pi}} \frac{\prod_{j=1}^r ((\sigma_{pi} (a_{2j} \sigma_{pi} + a_{1j}) - a_{2j} \omega_{pi}^2 + a_{0j}) + j(2a_{2j} \sigma_{pi} + a_{1j}) \omega_{pi})}{\prod_{j=1}^s ((\sigma_{pi} (b_{2j} \sigma_{pi} + b_{1j}) - b_{2j} \omega_{pi}^2 + b_{0j}) + j(2b_{2j} \sigma_{pi} + b_{1j}) \omega_{pi})}.$$

В этих формулах знаменатель вычисляют для всех квадратичных сомножителей, кроме соответствующих i -му вещественному полюсу или i -й паре комплексно-сопряженных полюсов.

Программа 177/21. Вычисление коэффициентов временных характеристик по отношению произведений квадратичных множителей функции

F4	\uparrow	F3	x^2	X	\rightarrow	F2	X	\uparrow	F5	+	XY
+	P4	F2	X	\uparrow	F6	+	\uparrow	\leftarrow	-	\uparrow	F8
X	\leftarrow	F7	X	\leftarrow	F4	\uparrow	F3	X	\uparrow	F7	X
P4	F8	X	\uparrow	\rightarrow	XY	-	P7	F4	\uparrow	\rightarrow	+
P8	x^2	\uparrow	F7	x^2	+	1/x	\uparrow	C/P	BП	P0	

Инструкция: ввести составляющие корня очередного k -го квадратичного множителя $a_{pk} = P2$, $\omega_{pk} = P3$ (для пары комплексно-сопряженных полюсов $\omega_{pk} > 0$). Если корень вещественный, то $b_{1k} = P7$, $0 = P8$, для комплексно-сопряженной пары полюсов $0 = P7$, $b_{2k}\omega_{pk} = P8$; для каждого квадратичного множителя с номером $j \neq k$ выполнить $b_{2j} = P4$, $b_{1j} = P5$, $b_{0j} = P6$ (B/O) C/P с завершением вычислений в обычном режиме вводом операторов F7 X P7 F8 /- X P8; если числитель отличается от единицы, то повторить аналогичные операции для всех множителей числителя с регистрацией результатов $P7 = B_{1k}$, $P8 = B_{2k}$. Вычисления повторяют для корней всех множителей знаменателя.

Контрольный пример: вычислить временную характеристику функции $x(p) = 1/p(p+1)(p^2 + 0,618p + 1)(p^2 + 1,619p + 1)$. С помощью программы 177/21 для полюса в начале координат выполняем: $0 = P2 = P3 = P8$, $1 = P7$, $0 = P4$, $1 = P5 = P6$ B/O C/P ($PX = 1$) $1 = P4$, $0,618 = P5$, $1 = P6$ C/P ($PX = 1$) $1 = P4$; $1,618 = P5$, $1 = P6$ C/P (F7 X P7 ($B_{11} = 1$) F8 /- X P8 ($B_{21} = 0$)).

Для вещественного полюса $p = -1$ выполняем: $-1 = P2$, $0 = P3$, $1 = P7$, $0 = P8$, $0 = P4$, $1 = P5$, $0 = P6$ C/P ($PX = 1$) $1 = P4$; $0,618 = P5$, $1 = P6$ C/P ($PX = 0,523581$) $1 = P4$; $1,618 = P5$, $1 = P6$ C/P ($PX = 3,588039$) F7 X P7 ($B_{12} = -1,894212$) F8 /- X P8 ($B_{22} = 0$).

Для первого квадратичного трехчлена с корнями $p_{3,4} = -0,309 \pm j0,9510620$ выполняем: $-0,309 = P2$; $0,951062 = P3$; $0,951062 = P8$, $0 = P4$, $1 = P5$, $0 = P6$ C/P ($PX =$

$= 1,10560$ $0 = P4$, $1 = P5$, $1 = P6$ С/П ($PX = 0,7999717$) $1 = P4$; $1,618 = P5$, $1 = P6$ С/П ($PX = 0,7999717$) $F7 \times P7$ ($B_{13} = 0,8944111$) $F8 /- \times P8$ ($B_{23} = -4,003853 \times 10^{-5}$).

Для последнего квадратичного трехчлена с корнями $p_{5,6} = -0,809 \pm j0,5878096$ выполняем: $-0,809 = P2$; $0,5878096 = P3 = P8$, $0 = P7 = P4 = P6$, $1 = P5$ С/П ($PX = 2,894197$) $0 = P4$, $1 = P5 = P6$ С/П ($PX = 7,576434$) $1 = P4$; $0,618 = P5$; $1 = P6$ С/П ($PX = 19,8336$) $F7 \times P7$ ($B_{14} = -1,988814 \cdot 10^{-4}$) $F8 /- \times P8$ ($B_{24} = -2,752532$).

Следовательно, $x(t) = (1 - 1,894212 e^{-t} + 0,8944111 e^{-0,309t} \cos 0,951062t - 4,003858 \times 10^{-5} e^{-0,309t} \sin 0,951062t - 1,989571 \cdot 10^{-4} e^{-0,809t} \cos 0,5878086t - 2,752532 e^{-0,809t} \times \sin 0,5878086t) 1(t)$. Для построения подобной характеристики по полученной формуле последнюю целесообразно упростить, сокращая число многозначных операндов и пре-небрегая членом с наименьшим значением: $x(t) = (1 - 1,8942 e^{-t} + e^{-0,309t} (0,8944 \times \cos 0,951062t - (\cos 0,5878086t/5000 + 2,752 \sin 0,5878086t) e^{-0,809t})) 1(t)$. В этом случае можно ввести в память коэффициенты $-1,8942 = P2$; $0,8944 = P3$; $0,951062 = P4$; $0,5878086 = P5$; $2,7525 = P6$, а остальные занести в текст программы вычисления $x(t)$ по заданному значению t :

/-	P8	2	÷	e^x	P7	F5	×	e^{jx}	→	F6	×
←	5	ВП	3	÷	↑	→	—	↑	F7	×	P7
F8	↑	F4	×	cos	↑	F3	×	↑	F7	—	P7
F8	0	,	3	0	9	X	e^x	↑	F7	×	P7
F8	e^x	↑	F2	×	↑	F7	+	1	+	C/П	

Функцию, заданную формулой (3.13) или (3.14), можно разложить на простые дроби по следующей более удобной программе.

Программа 178/34. Вычисление коэффициентов разложения в простую дробь по отношению произведений квадратичных множителей

ИП3	ИП1	$x = 0$	21	×	0	П4	ИП2	2	÷		
—	ПС	x^2	—	√	П5	ИП1	÷	ПД	БП		
29	П5	ПД	ИП3	ИП2	П4	÷	—	ПС	ИПВ		
П8	П0	С/П	ИП0	$x \neq 0$	32	ИПС	ИП1	×	↑		
ИП2	+	П6	+	ИПД	×	П7	ИП6	ИПС	×		
ИПД	x^2	ИП1	×	—	ИП3	+	П6	ИП4	×		
ИП5	ИП7	Х	—	ИП4	ИП7	Х	ИП5	ИП6	Х		
+	П5	XY	П4	L0	32	ИП8	$x \neq 0$	32	ИП5		
/-	ИП4	x^2	ИП5	x^2	+	÷	П5	ИП4	ВХ		
÷	П4	C_x	П8	ИПА	БП	31					

Инструкция: (при числах r и s множителей числителя и знаменателя соответственно ввести $r = PA$, $s - 1 = PB$) $b_{21} = P1$, $b_{11} = P2$, $b_{01} = P3$ В/О С/П $b_{22} = P1$, $b_{12} = P2$, $b_{02} = P3$ С/П ... $b_{2s} = P1$, $b_{1s} = P2$, $b_{0s} = P3$ С/П $a_{21} = P1$, $a_{11} = P2$, $a_{01} = P3$ С/П ... $a_{2r} = P1$, $a_{1r} = P2$, $a_{0r} = P3$ С/П $P4 = B_{11}$, $P5 = B_{21}$, $PC = \sigma_{\Pi_1}$, $PD = \omega_{\Pi_1}$. Повторяя вычисления при вводе первым очередного множителя знаменателя, найти коэффициенты для всех этих множителей.

Контрольный пример: для вычисления коэффициентов временных характеристик по данным предыдущего контрольного примера выполняем: $0 = PA$, $3 = PB$, $0 = P1$, $1 = P2$, $0 = P3$ В/О С/П $0 = P1$, $1 = P2$, $1 = P3$ С/П $1 = P1$; $0,618 = P2$, $1 = P3$ С/П $1 = P1$; $1,618 = P2$, $1 = P3$ С/П $P4 = 1$, $P5 = 0$, $PC = 0$, $PD = 0$;

$0 = P1$, $1 = P2 = P3$ В/О С/П $0 = P1$, $1 = P2$, $0 = P3$ С/П $1 = P1$, $0,618 = P2$, $1 = P3$ С/П $1 = P1$; $1,618 = P2$, $1 = P3$ С/П $P4 = -1,894212$, $P5 = 0$, $PC = -1$, $PD = 0$;

$1 = P1$; $0,618 = P2$, $1 = P3$ В/О С/П $0 = P1 = P3$, $1 = P2$ С/П $0 = P1$, $1 = P2 = P3$ С/П $1 = P1$; $1,618 = P2$, $1 = P3$ С/П $P4 = 0,89441108$; $P5 = -3,9350558 \cdot 10^{-5}$; $PC = -0,309$; $PD = 0,951062$;

$1 = P1; 1,618 = P2, 1 = P3$ В/О С/П $0 = P1 = P3, 1 = P2$ С/П $0 = P1, 1 = P2 = P3$
 С/П $1 = P1; 0,618 = P2, 1 = P3$ С/П $P4 = -1,9888133 \cdot 10^{-4}; P5 = 2,7525319; PC =$
 $= -0,809; PD = 0,58780864.$

Для вычисления временных характеристик по полученному выражению можно составить специальную программу или, в частности, воспользоваться следующей.

Программа 179/34. Вычисление временных характеристик многополюсных функций, содержащих не более одного вещественного и трех пар комплексно-сопряженных полюсов, по коэффициентам разложения в простую дробь

ПД	ИП3	x	\cos	ИП0	x	ИПД	ИП3	x	\sin
ИП1	x	+	ИПД	ИП2	x	e^x	x	ИПД	ИП7
x	\cos	ИП4	x	ИПД	ИП7	x	\sin	ИП5	x
+	ИПД	ИП6	x	e^x	x	+	ИПД	ИПВ	x
\cos	ИП8	x	ИПД	ИПВ	x	\sin	ИП9	x	+
ИПД	ИПА	x	e^x	x	+	ИПД	ИПС	x	e^x
...	x	+	C/П	БП					

Инструкция: для пар комплексно-сопряженных полюсов ввести $B_{11} = P0, B_{21} = P1, \sigma_{\pi_1} = P2, \omega_{\pi_1} = P3, B_{12} = P4, B_{22} = P5, \sigma_{\pi_2} = P6, \omega_{\pi_2} = P7, B_{13} = P8, B_{23} = P9, \sigma_{\pi_3} = PA, \omega_{\pi_3} = PB$, для вещественного полюса $\sigma_{\pi} = PC$, значение D записать в текст программы вместо многоточия; выполнять $t = PX$ (В/О) С/П $PX = x(t)$.

При анализе переходных характеристик по коэффициентам, полученным для полюсов функции цепи $F(p)$, или в общем случае при анализе функции $x(p)$ с $n = m$ значением D_0 , дополненное оператором $+$, следует ввести в текст программы перед оператором С/П. Например, для расчета переходной характеристики по данным, полученным в предыдущем примере, следует окончание программы 179/34, начиная с многоточия по адресу 70, записать следующим образом:

1	,	8	9	4	2	1	2	x	-
1	+	C/П	БП						

Введя дополненную программу в программную память, следует ввести исходные данные $0,8944111 = P0; -4,003858 \cdot 10^{-5} = P1; -0,309 = P2; 0,951062 = P3; -1,989571 \times 10^{-4} = P4; -2,752532 = P5; -0,809 = P6; 0,5878086 = P7; 0 = P8 = P9 = PA = PB; -1 = PC$ и начать выполнение программы со значения $t = 0$.

Описанный традиционный метод вычисления временных характеристик связан с необходимостью нахождения корней определителя матрицы Y или Z анализируемой цепи (полюсов ее функции). Более простым может оказаться способ, основанный на определении решетчатой функции $x(n)$, соответствующей с требуемой точностью отсчетам непрерывной функции $x(t)$ через отрезки временной оси, равные интервалу дискретизации. Функцию $x(n)$ определяют, применяя обратное z -преобразование функции $x(z)$, полученной по изображению искомой временной характеристики цепи $x(p)$.

Программное обеспечение преобразования функции $x(p)$ в функцию $x(z)$, называемого билинейным, описано в § 6.6, где приведены и программы обратного z -преобразования дробно-рациональных функций $x(z)$, которое сводится к разложению функции $x(z)$ в ряд по убывающим степеням переменной z .

3.6. Анализ влияния обратной связи

Причинно-следственная связь, моделируемая функциональным или операторным соотношением (1.4), является результатом последовательности таких связей. Примером может служить цепочка связей $x_3(x_2) = \beta x_2; x_2(x_1) = \mu^0 x_1; x_1(q) = \theta^0 q$ (рис. 25, а), эквивалентная связь $x_3(q) = \beta \mu^0 \theta^0 q$. Иногда такие последовательности образуют замкнутые контуры (рис. 25, б), описываемые системой уравнения вида

$$x_1 = \theta q + \beta x_2, \quad x_2 = \mu x_1$$

или в матричной форме записи

$$\begin{bmatrix} q \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/\theta & -\beta/\theta \\ -\mu & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}.$$

В системе с подобным контуром зависимости реакций x_1 и x_2 от независимого воздействия q определяются входными и выходными функциями

$$F_1 = \frac{x_1}{q} = \frac{\Delta_{11}}{\Delta} = \frac{\theta}{(1 - \beta\mu)} ; \quad F_2 = \frac{x_2}{q} = \frac{\Delta_{12}}{\Delta} = \frac{\theta\mu}{(1 - \beta\mu)}. \quad (3.24)$$

Эти формулы справедливы лишь при условии необратимости (невзаимности) хотя бы одного из каналов прямой μ или обратной β передачи ($\mu \neq 0$ при $\beta = 0$). В этом случае в моделируемой физической системе возникает явление, называемое *обратной связью* и вызванное зависимостью причины x_1 от ее следствия x_2 .



Рис. 25

Если каналы β и μ обратимы (например, в пассивной цепи) и, следовательно, существует единственный общий канал, связывающий x_1 и x_2 , то в этом случае $x_1 = \theta q$, $x_2 = \mu x_1 = \mu\theta q$, обратная связь не возникает, а формулы (3.24) неприменимы. Например, для трансформатора с малыми потерями можно измерить $\mu = u_{\text{вых}}/u_{\text{вх}} = n$ и $\beta = u_{\text{вх}}/u_{\text{вых}} = 1/n$, но подстановка этих значений в формулы (3.24) приведет к явно неверным результатам.

Влияние элемента цепи с параметром w , при равенстве которого разрывается контур обратной связи, часто оценивают по величине *возвратной разности* $V(w) = \Delta/\Delta^\circ$ или возвратного отношения $T(w) = V(w) - 1 = (\Delta - \Delta^\circ)/\Delta^\circ$, где Δ° равен Δ при $w = 0$. Однако если числитель заданной функции цепи зависит от параметра w , то возвратная разность лишь приближенно отображает влияние элемента с параметром w (в частности, элемента, при удалении которого разрывается цепь обратной связи) на заданную функцию. В общем случае влияние элемента физической системы (в частности, радиотехнической цепи) с параметром w на некоторую функцию $F = D/\Delta$ определяется *коэффициентом влияния* [16]

$$A_F(w) = F^\circ/F = D^\circ\Delta/D\Delta^\circ = D^\circ V(w)/D, \quad (3.25)$$

где индексом $^\circ$ обозначены значения функции, ее числителя D и знаменателя Δ при $w = 0$.

Если при $w = 0$ разрывается канал обратной передачи ($\beta = 0$), то коэффициент $A_F(w)$ определяет и влияние обратной связи, контур которой замыкается через этот канал. Например, для функций (3.24)

$$A_1(\beta) = x_1^\circ/x_1 = \theta^\circ(1 - \beta\mu)/\theta; \quad A_2(\beta) = x_2^\circ/x_2 = \theta^\circ\mu^\circ(1 - \beta\mu)/\theta\mu. \quad (3.26)$$

Обратную связь называют *отрицательной*, если при ее устраниении ($\beta = 0$) значение функции F° больше значения этой функции F при наличии обратной связи, и *положительной* в противном случае. Следовательно, обратная связь отрицательна при $A_F(w) > 1$ и положительна при $A_F(w) < 1$. Иногда обратную связь и ее влияние оценивают только по величине $(1 - \beta\mu)$ или $\beta\mu$, полагая, например, обратную связь положительной при $1 - \beta\mu < 1$ или $\beta\mu > 0$. Однако такая оценка справедлива лишь при необратимости каналов прямой и обратной передачи и в общем случае может привести к принципиальным ошибкам.

Для иллюстрации оценим влияние обратной связи через проводимость $g_{\text{ЭК}}$ биполярного транзистора с общей базой в эквивалентной схеме низкочастотного усилителя, показанной на рис. 26, а, для которой матрица проводимостей

$$Y = \begin{bmatrix} g_c + g_1 + |g_{33}| & -|g_{3K}| \\ -|g_{K3}| & g_2 + |g_{KK}| \end{bmatrix}.$$

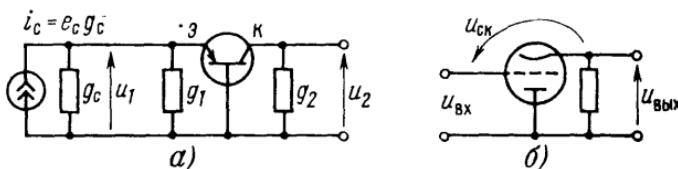


Рис. 26

Обозначим $\theta = K_{vx} = u_{vx}/e_c = u_{vx}g_c/i_c = g_c/(g_c + g_{vx}) = g_c(g_2 + |g_{KK}|)/((g_c + g_1 + |g_{33}|)(g_2 + |g_{KK}|) - |g_{3K}||g_{K3}|)$; $\mu = u_{vykh}/u_{vx} = \Delta_{12}/\Delta_{11} = |g_{K3}|/(g_2 + |g_{KK}|)$; $\beta = u_{vx}/u_{vykh} = |g_{3K}|/(g_c + g_1 + |g_{33}|)$. Следовательно, в рассматриваемом случае $\beta\mu > 0$, но вывод о положительности обратной связи был бы ошибочным. Действительно, коэффициент влияния проводимости g_{3K} (при $g_{3K} = 0$ обратная связь отсутствует) на коэффициент передачи напряжения $K_{hc} = u_{vykh}/e_c = g_c\Delta_{12}/\Delta$ определяется соотношением

$$A_K(g_{3K}) = |g_{K3}|V(g_{3K})/(|g_{K3}| - |g_{3K}|),$$

возвратная разность с учетом параметров транзистора $|g_{3B}| = |g_{33}| - |g_{3K}|$; $|g_{BK}| = |g_{KK}| - |g_{3K}|$ выражается формулой

$$V(g_{3K}) = \frac{\Delta}{\Delta^o} = 1 + \frac{|g_{3K}|(g_c + g_1 + |g_{3B}| + |g_{BK}| + |g_{3K}| - |g_{K3}|)}{(g_c + g_1 + |g_{3B}|)(g_2 + |g_{BK}|)}$$

и всегда больше единицы, так как в биполярном транзисторе $|g_{K3}| < |g_{33}| = |g_{3B}| + |g_{3K}|$. Так как $|g_{K3}| \gg |g_{3K}|$, то дополнительный множитель коэффициента влияния близок к единице и его влияние оказывается лишь при очень большой проводимости нагрузки, когда коэффициент передачи напряжения меньше единицы и влияние обратной связи проявляется в его увеличении ближе к единичному уровню.

Формальный подход к оценке влияния обратной связи приводит и к ряду других ошибочных заключений. Примером может служить распространенное утверждение о "100 %-ной обратной связи" в катодном (рис. 26, б) или эмиттерном повторителе. Для его обоснования ссылаются на равенства $u_{vx} = u_{ck} + u_{vykh}$ и $u_{vx} = Ku_{ck}$, откуда $u_{vykh}/u_{vx} = K/(1 + K)$ или, при $-1 = \beta$, $u_{vykh}/u_{vx} = K/(1 - \beta K)$. Однако исходные равенства не имеют отношения к обратной связи, так как первое следует из уравнения Кирхгофа для напряжений между выводами любого трехполюсника, а второе указывает, что отношение u_{vx}/u_{ck} обозначено буквой K . Между тем обратная связь в повторителе определяется лишь влиянием проводимости участка сетка – катод лампы или u_{be} биполярного транзистора, а $\beta > 0$ и значительно меньше единицы (кстати, при обычном для ламп допущении $i_c = 0$ на низких частотах обратная связь вообще не может существовать, так как в этом случае $\beta = 0$).

В общем случае, как следует из (3.25), анализ влияния обратной связи в операторной, частотной или временной областях сводится к вычислению многочленов числителя и знаменателя коэффициента влияния параметра цепи, при равенстве нулю которого разрывается контур исследуемой обратной связи, с последующим вычислением при необходимости оригинала коэффициента влияния. Если анализируемая цепь устойчива при $w = 0$, но при увеличении этого параметра коэффициент влияния становится равным нулю, то в анализируемой цепи возникает самоподдерживающийся (от сторонних источников энергии, в частности источников питания активных компонентов) физический процесс, называемый *самовозбуждением*. Этот процесс ограничивается нелинейностью параметров цепи и при потере устойчивости цепь перестает быть линейной даже при самом малом входном сигнале.

Инженер оценивает свойства проектируемого и еще не существующего в природе объекта по его математической модели. Устойчивость проектируемой цепи является основным показателем физической реализуемости ее модели в виде устройства, работающего в линейном режиме. Основным свидетельством устойчивости анализируемой цепи является затухание временной характеристики после прекращения воздействия. Как следует из (3.23), это условие соответствует расположению всех корней определителя матрицы Y или Z цепи (полюсов функции) слева от оси $j\omega$ на плоскости Лапласа, где вещественные части корней отрицательны. В связи с громоздкостью вычисления корней многочлена

$$\Delta = b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \dots + b_2 p^2 + b_1 p + b_0$$

для оценки его устойчивости (и устойчивости соответствующей цепи) используют более простые алгебраические или частотные критерии.

Согласно критерию Рауса – Гурвица алгебраический многочлен устойчив, если положительны коэффициент a_0 , определитель и главные миноры матрицы

$$\begin{bmatrix} b_{m-1} & b_m & \dots & 0 & 0 \\ b_{m-3} & b_{m-2} & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & b_2 & b_3 \\ 0 & 0 & \dots & b_0 & b_1 \end{bmatrix}.$$

Для составления такой матрицы порядка $m-1$ достаточно записать на главной диагонали коэффициенты $b_{m-1}, b_{m-2}, \dots, b_3, b_2, b_1$, справа от них – коэффициенты при старших, а слева – младших степенях переменной p многочлена.

При решении многих задач проще использовать критерий Гурвица, основанный на представлении анализируемого многочлена $\Delta = M(p) + N(p)$ суммой четной $M(p) = \dots + b_4 p^4 + b_2 p^2 + b_0$ и нечетной $N(p) = \dots + b_5 p^5 + b_3 p^3 + b_1 p$ частей и разложении в цепную дробь отношения $M(p)/N(p)$ при четной степени m многочлена или $N(p)/M(p)$ при нечетной степени. Анализируемый многочлен устойчив, если положительны все коэффициенты c_i такой дроби, например,

$$\frac{M(p)}{N(p)} = c_1 p + \frac{1}{c_2 p + \frac{1}{c_3 p + \dots + \frac{1}{c_m p}}} \quad (3.27)$$

Как следует из (3.27), многочлен второй степени устойчив при $a_0 > 0$; $a_1/a_2 > 0$. Для оценки устойчивости многочленов высшей степени по критерию Гурвица можно воспользоваться следующими программами.

Программа 180/21. Разложение в цепную дробь отношения четной и нечетной частей многочлена степени $m \leq 12$

F2	↑	F8	←	P2	÷	P8	F3	←	P3	ΠΠ	F7
F4	←	P4	ΠΠ	F7	F5	←	P5	ΠΠ	F7	F6	←
P6	ΠΠ	F7	F7	←	P7	ΠΠ	F7	←	0	→	F8
XY	←	P8	XY	C/Π	BΠ	P0	↑	F8	X	↑	→
XY	-	←	B/O								

Инструкция: $b_m = P2, b_{m-2} = P3, b_{m-4} = P4, \dots, b_{m-12} = P8, b_{m-1} = C1, b_{m-3} = C2, b_{m-5} = C3, \dots, b_{m-11} = C6$ B/O C/Π PX = c_1 C/Π PX = $c_2 \dots C/Π PX = c_{m-1}$ C/Π PX = c_m .

Анализируемый многочлен устойчив, если все вычисленные коэффициенты c_i положительны. Эту программу можно полностью автоматизировать, включив проверку знака вычисляемого многочлена.

Программа 180а/21. Проверка устойчивости многочлена степени $m < 12$

F2	↑	F8	←	P2	$x \neq 0$	7	÷	P8	F3	←	P3
ПП	F8	F4	←	P4	ПП	F8	F5	←	P5	ПП	F8
F6	←	P6	ПП	F8	F7	←	P7	ПП	F8	←	0
→	F8	XY	←	P8	XY	$x < 0$	C_x	→	←	C/П	БП
P0	↑	F8	x	↑	→	XY	-	←	B/O		

Исходные данные вводят для этой программы, как и для предыдущей, но при устойчивости многочлена после выполнения программы высвечивается нуль. При высвечивании положительного ($c_i = 0$) или отрицательного числа ($c_i < 0$) многочлен неустойчив. Время выполнения программы зависит от степени анализируемого многочлена, но не превышает 4 мин.

Контрольный пример: для многочлена $p^5 + 2p^4 + 2p^3 + 4p^2 + p + 1$ получим $PX = 0,5$ (многочлен неустойчив), для многочлена $p^7 + 21p^6 + 196p^5 + 910p^4 + 2359p^3 + 3388p^2 + 2484p + 720$ получим $PX = 0$ (многочлен устойчив), для многочлена $2p^4 + 3p^3 + p^2 + 5p + 1$ получим $PX = -1,2857$ (многочлен неустойчив).

Программа 181/34. Проверка устойчивости многочлена степени $m \leq 11$

↑ 1 + ПД 1 + ПО КИПО КИПО ÷
 КПД √ КИПО КИПД КИПО × - ИПО 2 +
 ПО ХУ КПО КИПО ИПО 3 - x < 0 12 ИПД
 2 - x = 0 01 С/П

Инструкция: $b_0 = P1$, $b_1 = P2$, $b_2 = P3$, ..., $b_8 = P9$, $b_9 = PA$, $b_{10} = PB$, $b_{11} = PC$,
 $11 = PX$ В/О С/П $PX = 0$, $P2 = c_1$, $P3 = c_2$, ..., $P9 = c_8$, $PA = c_9$, $PB = c_{10}$, $PC = c_{11}$,
если многочлен устойчив, или $PX = \text{ЕГГОГ}$, если многочлен неустойчив.

Программа 182/34. Проверка устойчивости многочлена степени $m < 12$

ИПД 2	+	ИПД	КИПД	ПС	ИПД		-	ПД
\rightarrow	\rightarrow	КИПД	ПВ	\rightarrow	ИПД 2		Утра-ченный блок	ПД \rightarrow
ИПС	КИПД	Х	ИПД 1	+	ПД			ИПВ КИПД
Х	ХУ	-	ИПВ	\div	КПД	\checkmark		ИПД 3
-	$x < 0$	18	\rightarrow	3	-	$x = 0$		С/П БП

Инструкция: $b_0 = P0$, $b_1 = P1$, ..., $b_9 = P9$, $b_{10} = PA$, $b_{11} = PB$, $b_{12} = PC$, $m - 2 = P\bar{D}$ (В/О) С/П $PX = 0$, если многочлен устойчив или $PX = \text{ЕГТОГ}$, если многочлен неустойчив. Время счета при $m = 12$ около 6 мин.

Если не требуются коэффициенты разложения в цепную дробь, то устойчивость многочленов целесообразно проверять с помощью программы 182/34, которая при одинаковой степени m выполняется дольше предыдущей, но с более точным результатом вычислений.

В радиотехнической практике обычно используют частотные критерии устойчивости, основанные на построении частотных голографов – геометрических мест комплексных

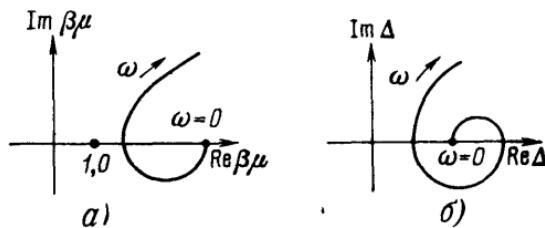


FIG. 27

личении частоты справа от годографа (рис. 27). Цепь устойчива, если годограф не охватывает критическую точку на комплексной плоскости функции цепи. Причем запас

устойчивости определяется кратчайшим расстоянием от критической точки до годографа функции устойчивой цепи.

Согласно известному критерию Найквиста система с обратной связью (см. рис. 25, б) устойчива, если частотный годограф $\beta_\mu(j\omega)$ не охватывает точки с координатами $(1, 0)$, в которой $\beta_\mu = 1$ (рис. 27, а). Этот критерий имеет ограниченное применение и справедлив, если функции μ и β имеют полюсы в левой полуплоскости Лапласа.

Более универсален и пригоден также для анализа цепей с двухполюсными активными компонентами обобщенный критерий Найквиста, согласно которому цепь устойчива, если частотный годограф возвратной разности $V(w_i) = \Delta(j\omega)/\Delta^*(j\omega)$, где Δ^* соответствует заведомо устойчивой цепи, не охватывает начала координат, или частотный годограф возвратного отношения не охватывает точки с координатами $(-1, 0)$. Этот критерий пригоден и для случая, когда возвратная разность (или отношение) определена для множества параметров, при равенстве нулю которых цепь заведомо устойчива.

Если требуется лишь оценка устойчивости анализируемой цепи, то можно принять $\Delta^* = 1$ и свести исследование к построению частотного годографа определителя $\Delta(j\omega)$. Цепь будет устойчивой, если этот годограф не охватывает начала координат (рис. 27, б). Для построения частотных годографов многочлена определителя можно использовать следующие программы.

Программа 183/21. Вычисление многочлена степени $m \leq 10$ мнимого аргумента

P3	x^2	\uparrow	F5	X	/-	\uparrow	F8	+	\uparrow	F3	X
P6	F3	x^2	\uparrow	F4	X	/-	\uparrow	F7	+	ПП	6
ПП	6	ПП	6	ПП	6	ПП	6	ПП	6	ПП	6
C/I	БП	P0	\uparrow	F3	X	\uparrow	F6	XY	P6	F3	X
/-	\uparrow	F2	\rightarrow	Установка блок			+ B/O				

Инструкция: ($b_0 = P2$, $b_1 = C1$, $b_2 = C2$, ..., $b_6 = C6$, $b_7 = P7$, $b_8 = P8$, $b_9 = P4$, $b_{10} = P5$) $\omega = PX$ (B/O) C/P $PX = \operatorname{Re} B(\omega)$, $P6 = \operatorname{Im} B(\omega)$.

Контрольный пример: время вычисления многочлена $B(p = j2) = 10p^{10} + 9p^9 + 8p^8 + 7p^7 + 6p^6 + 5p^5 + 4p^4 + 3p^3 + 2p^2 + p + 1 = -8519 + j3850$ составляет около 23 с.

Программа 183/21. Вычисление многочлена степени $m \leq 12$ мнимого аргумента

\uparrow	F3	X	\uparrow	F6	XY	P6	F3	x^2	X	/-	\uparrow	
F5	ПП	FC _x	F4	ПП	FC _x	F8	ПП	FC _x	F7	ПП	FC _x	
ПП	F7	ПП	F7	Установка блок			ПП	F7	ПП	F7	ПП	F7
F2	\rightarrow	P2	$+$	C/I	БП	P0	F2	\rightarrow	P2	$+$	\uparrow	
F	X	\uparrow	F6	XY	P6	F3	X	/-	\uparrow	B/O		

Инструкция: ($b_0 = P2$, $b_1 = C1$, ..., $b_6 = C6$, $b_7 = P7$, $b_8 = P8$, $b_9 = P4$, $b_{10} = P5$) $\omega = P3$, $b_{12} = P6$, $b_{11} = PX$ (B/O) C/P $PX = \operatorname{Re} B(\omega)$, $P6 = \operatorname{Im} B(\omega)$.

Контрольный пример: время вычисления многочлена $B(p = j2) = 12p^{12} + 11p^{11} + 10p^{10} + 9p^9 + 8p^8 + 7p^7 + 6p^6 + 5p^5 + 4p^4 + 3p^3 + 2p^2 + p + 1 = 40633 - j18678$ составляет около 30 с.

Программа 185/21. Вычисление нормированного ($b_{13} = 1$) многочлена степени $m = 13$ мнимого аргумента

x^2	-	\uparrow	F3	X	\uparrow	F6	XY	P6	F3	x^2	X
/-	\uparrow	F5	ПП	FC _x	F4	ПП	FC _x	F8	ПП	FC _x	F7
ПП	FC _x	ПП	F7	ПП	F7	ПП	F7	ПП	F7	ПП	F7
ПП	F7	F2	\rightarrow	P2	$+$	C/P	F2	\rightarrow	P2	$+$	\uparrow
F3	X	\uparrow	F6	XY	P6	F3	X	/-	\uparrow	B/O	

Инструкция: ($b_0 = P2$, $b_1 = C1$, ..., $b_6 = C6$, $b_7 = P7$, $b_8 = P8$, $b_9 = P4$, $b_{10} = P5$) $b_{12} = P6$, $b_{11} = PY$, $\omega = P3 = PX$ B/O C/P $PX = \operatorname{Re} B(\omega)$, $P6 = \operatorname{Im} B(\omega)$.

Контрольный пример: время вычисления многочлена $B(p = j2) = p^{13} + 12p^{12} + 11p^{11} + 10p^{10} + 9p^9 + 8p^8 + 7p^7 + 6p^6 + 5p^5 + 4p^4 + 3p^3 + 2p^2 + p + 1 = 40633 - j10486$ составляет около 30 с.

Программа 186/34. Вычисление многочлена произвольной степени мнимого аргумента

P2 F7 ↑ F3 X ↑ F8 XY P8 F3 X /-/
 ↑ F2 + P7 F4 1 - P4 C/Π БП Р0

Инструкция: $\omega = P3, m = P4, b_m = P7, 0 = P8, b_{m-1} = PX \text{ B/O C/Π } PX = m - 1, b_{m-2} = PX \text{ C/Π } PX = m - 2, \dots, b_1 = PX \text{ C/Π } PX = 1, b_0 = PX \text{ C/Π } PX = 0, P7 = \text{Re } B(\omega), P8 = \text{Im } B(\omega)$.

Контрольный пример: время вычисления $B(p = j2) = 2p + 1 = 1 + j4$ составляет около 5 с.

Особенности входного языка МК34 обеспечивают повышение максимальной степени вычисляемых по следующим программам многочленов.

Программа 187/34. Вычисление многочлена степени $m \leq 11$ мнимого аргумента

ПС ИП0 ИПД 1 + П0 Cx ↑ КИП0 x ≠ 0
 22 + ИПС X XY ИПС X 0 XY -
 БП 08 + → → → П0 + С/Π БП

Инструкция: $(b_0 = P0, b_1 = P1, \dots, b_9 = P9, b_{10} = PA, b_{11} = PB, m = PD) \quad \omega = PX \text{ (B/O) C/Π } PX = \text{Re } B(\omega), PY = \text{Im } B(\omega), PC = \omega$.

Контрольный пример: время вычисления многочлена $B(p = j2) = 11p^{11} + 10p^{10} + 9p^9 + 8p^8 + 7p^7 + 6p^6 + 5p^5 + 4p^4 + 3p^3 + 2p^2 + p + 1 = -8519 - j18678$ составляет около 47 с.

Программа 188/34. Вычисление многочлена степени $m \leq 15$ мнимого аргумента

ПС x^2 X ИПД XY - ИПС X ПД →
 ИПС x^2 X XY - ИПС x^2 X ИПВ ПП
 56 ИПА ПП 56 ИП9 ПП 56 ИП8 ПП 56
 ИП7 ПП 56 ИП6 ПП 56 ИП5 ПП 56 ИП4
 ПП 56 ИП3 ПП 56 ИП2 ПП 56 ИП1 ПП
 56 ИП0 + С/Π БП 00 + ИПС X ИПД
 XY ПД XY ИПС X 0 XY - B/O

Инструкция: $(b_0 = P0, b_1 = P1, \dots, b_9 = P9, b_{10} = PA, b_{11} = PB, b_{12} = PD, b_{13} = PX \uparrow b_{14} = PX \uparrow b_{15} = PX \uparrow b_{16} = PX \uparrow \omega = PX \text{ (B/O) C/Π } PX = \text{Re } B(\omega), PD = \text{Im } B(\omega), PC = \omega)$.

Контрольный пример: время вычисления многочлена $B(p = j2) = 15p^{15} + 14p^{14} + 13p^{13} + 12p^{12} + 11p^{11} + 10p^{10} + 9p^9 + 8p^8 + 7p^7 + 6p^6 + 5p^5 + 4p^4 + 3p^3 + 2p^2 + p + 1 = -188743 - j403702$ составляет около 60 с.

Программа 189/34. Вычисление нормированного ($b_{16} = 1$) многочлена степени $m = 16$ мнимого аргумента

ПС x^2 XY - ИПС x^2 X ИПД + ИПС
 X ПД → ИПС x^2 X XY + ИПС x^2
 X ИПВ ПП 59 ИПА ПП 59 ИП9 ПП 59
 ИП8 ПП 59 ИП7 ПП 59 ИП6 ПП 59 ИП5
 ПП 59 ИП4 ПП 59 ИП3 ПП 59 ИП2 ПП
 59 ИП1 ПП 59 ИП0 + С/Π БП 00 +
 ИПС X ИПД XY ПД XY /-/ ИПС X B/O

Инструкция к этой программе идентична предыдущей.

Контрольный пример: время вычисления многочлена $B(p = j2) = p^{16} + 15p^{15} + 14p^{14} + 13p^{13} + 12p^{12} + 11p^{11} + 10p^{10} + 9p^9 + 8p^8 + 7p^7 + 6p^6 + 5p^5 + 4p^4 + 3p^3 + 2p^2 + p + 1 = -123207 - j403702$ составляет около 60 с.

Программа 190/34. Вычисление многочлена произвольной степени мнимого аргумента

ИП9 /-/ ИП8 X + ИП7 ИП9 X П8 XY
 П7 ИП4 1 - П4 С/Π БП

Инструкция: $m = P4$, $b_m = P7$, $0 = P8$, $\omega = P9$, $b_{m-1} = PX$ (Б/О) С/П $PX = m - 1$, $b_{m-2} = PX$ С/П $PX = m - 2, \dots, b_0 = PX$ С/П $PX = 0$, $P7 = \operatorname{Re} B(\omega)$, $P8 = \operatorname{Im} B(\omega)$, $P9 = \omega$. Время счета около 6 с.

При $m < 10$ или $m < 11$ соответственно программы 183/21 или 187/34 для сокращения времени счета можно сократить, устранив излишние обращения к памяти и изменив адреса переходов и начало программ.

При практическом исследовании устойчивости радиотехнических цепей следует не забывать о возможности самовозбуждения за пределами рабочей полосы частот и учитывать те паразитные параметры компонентов и их соединений, которые могут привести к неустойчивости. Неустойчивость может возникнуть и на очень низких частотах (на постоянном токе) в цепях питания. В этом случае при учете соответствующих параметров, включая и внутреннее сопротивление источника питания, условием устойчивости является положительность определителя цепи для постоянного тока.

Обратная связь существенно влияет на зависимость нестабильности функций цепи от нестабильности параметров цепи, охваченной контуром обратной связи. В общем случае любую функцию цепи можно рассматривать как функцию ее параметров w_1, \dots, w_k и представить разложением в ряд Тейлора

$$F = F_0 + \sum_{i=1}^k \frac{\partial F}{\partial w_i} \Delta w_i + \sum_{i=1}^k \sum_{j=i+1}^k \frac{\partial^2 F}{\partial w_i \partial w_j} \Delta w_i \Delta w_j + \dots,$$

где F_0 – значение функции при номинальных значениях параметров, а Δw_i – отклонение i -го параметра от номинального значения.

При анализе цепи с достаточно малыми изменениями параметров ограничиваются учетом лишь линейных членов рассмотренного ряда, откуда относительное изменение функции

$$\delta F = \frac{F - F_0}{F} = \sum_{i=1}^k \frac{w_i}{F} \frac{\partial F}{\partial w_i} \frac{\Delta w_i}{w_i} = \sum_{i=1}^k S_F(w_i) \delta w_i, \quad (3.28)$$

где $\delta w_i = \Delta w_i / w_i$ – относительное изменение i -го параметра.

Величины $S_F(w_i) = (w_i/F) \partial F / \partial w_i$ называют *чувствительностями* (1-го порядка) функции F к изменениям i -го параметра. На практике удобно оценивать чувствительность при достаточно малом (например, на 0,1 %) изменении параметров. Заменив производные отношением приращений, получим расчетную формулу

$$S_F(w_i) = (w_i / \Delta w_i) (F_0 - F) / F = 1000 (F_0 / F - 1), \quad (3.29)$$

где F – значение функции при изменении i -го параметра на 0,1 %. Для вычисления чувствительности достаточно дважды повторить вычисление значений функции F и F_0 .

Г л а в а 4

АНАЛИЗ НЕЛИНЕЙНЫХ ЦЕПЕЙ

4.1. Аппроксимация нелинейных характеристик

Нелинейные цепи анализируют в основном численными методами, поскольку аналитическое решение практических задач удается найти крайне редко. Исследуя поведение нелинейной цепи, инженер прежде всего сталкивается с задачей аппроксимации нелинейных характеристик (в основном характеристик нелинейных компонентов цепи), часто задаваемых экспериментально полученными табличными или графическими моделями. Для упрощения последующего анализа к аппроксимации прибегают и тогда, когда известно аналитическое выражение характеристик нелинейных компонентов.

При выборе аппроксимирующего выражения и способа аппроксимации учитывают необходимую точность и требуемый интервал аппроксимации, а также цель и методику последующего использования аппроксимирующего выражения. Нелинейные характе-

ристики обычно аппроксимируют степенными многочленами, надлежащий выбор степени n которых и значений коэффициентов обеспечивает требуемую точность аппроксимации в заданном интервале. Простейший способ аппроксимации заключается в составлении интерполирующего выражения. В этом случае задача аппроксимации сводится к определению $n + 1$ коэффициентов многочлена степени n путем решения системы линейных уравнений, составленных для условия точного совпадения аппроксимирующего выражения с заданной характеристикой в $n + 1$ точках (узлах интерполяции).

Обычно узлы интерполяции располагают через одинаковые интервалы (шаг h) аргумента, причем начало координат часто выбирают в центре интервала аргумента, в котором выполняется аппроксимация. В этом случае для определения коэффициентов аппроксимирующих степенных многочленов степени $n \leq 8$ достаточно использовать формулы при четной степени n (нумерация отсчетов указана на рис. 28, а) :

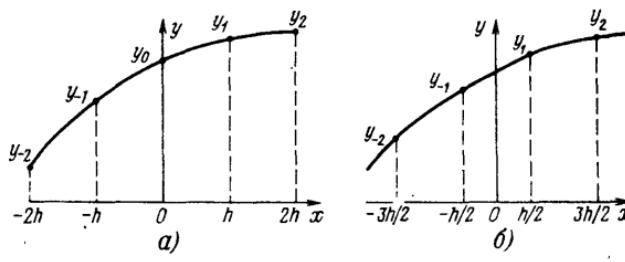


Рис. 28

$$a_8 = ((y_4 + y_{-4} - 2y_0) - 8(y_3 + y_{-3} - 2y_0) + 28(y_2 + y_{-2} - 2y_0) - (y_1 + y_{-1} - 2y_0))/40320h^8;$$

$$a_7 = ((y_4 - y_{-4}) - 6(y_3 - y_{-3}) + 14(y_2 - y_{-2}) - 14(y_1 - y_{-1}))/10080h^7;$$

$$a_6 = ((y_3 + y_{-3} - 2y_0) - 6(y_2 + y_{-2} - 2y_0) + 15(y_1 + y_{-1} - 2y_0))/720h^6 - 14a_8h^2;$$

$$a_5 = ((y_3 - y_{-3}) - 4(y_2 - y_{-2}) + 5(y_1 - y_{-1}))/240h^5 - 14a_8h^2;$$

$$a_4 = ((y_2 + y_{-2} - 2y_0) - 4(y_1 + y_{-1} - 2y_0))/24h^4 - 5a_6h^2 - 21a_8h^4;$$

$$a_3 = ((y_2 - y_{-2}) - 2(y_1 - y_{-1}))/12h^3 - 5a_5h^2 - 21a_8h^4;$$

$$a_2 = (y_1 + y_{-1} - 2y_0)/2h^2 - a_4h^2 - a_6h^4 - a_8h^6;$$

$$a_1 = (y_1 - y_{-1})/2h - a_3h^2 - a_5h^4 - a_7h^6;$$

$$a_0 = y_0$$

и при нечетной степени n (рис. 28, б) :

$$a_7 = ((y_4 - y_{-4}) - 7(y_3 - y_{-3}) + 21(y_2 - y_{-2}) - 35(y_1 - y_{-1}))/5040h^7;$$

$$a_6 = ((y_4 + y_{-4}) - 5(y_3 + y_{-3}) + 9(y_2 + y_{-2}) - 5(y_1 + y_{-1}))/1440h^6;$$

$$a_5 = ((y_3 - y_{-3}) - 5(y_2 - y_{-2}) + 10(y_1 - y_{-1}))/120h^5 - 35a_7h^2/4;$$

$$a_4 = ((y_3 + y_{-3}) - 3(y_2 + y_{-2}) + 2(y_1 + y_{-1}))/48h^4 - 35a_6h^2/4;$$

$$a_3 = ((y_2 - y_{-2}) - 3(y_1 - y_{-1}))/6h^3 - 5a_5h^2/2 - 91a_7h^4/16;$$

$$a_2 = ((y_2 + y_{-2}) - (y_1 + y_{-1}))/4h^2 - 5a_4h^2/2 - 91a_6h^4/16;$$

$$a_1 = (y_1 - y_{-1})/h - a_3h^2/4 - a_5h^4/16 - a_7h^6/24;$$

$$a_0 = (y_1 + y_{-1})/2 - a_2h^2/4 - a_4h^4/16 - a_6h^6/24.$$

Например, при пяти значениях y_i аппроксимируемой характеристики, принимая $y_{-3} = y_{-4} = y_3 = y_4 = 0$, по приведенным формулам получаем:

$$a_4 = ((y_2 + y_{-2} - 2y_0) - 4(y_1 + y_{-1} - 2y_0))/24h^4;$$

$$a_3 = ((y_2 - y_{-2}) - 2(y_1 - y_{-1}))/12h^3;$$

$$a_2 = (y_1 + y_{-1} - 2y_0)/2h^2 - a_4h^2;$$

$$a_1 = (y_1 - y_{-1})/2h - a_3h^2;$$

$$a_0 = y_0.$$

Автоматизацию вычислений по этим формулам обеспечивает следующая программа.

Программа 191/21. Вычисление коэффициентов интерполирующего многочлена степени $n = 4$

F2	↑	F3	ПП	/ - /	←	F6	↑	F2	ПП	/ - /	4
ПП	C _x	P4	XY	←	2	ПП	C _x	XY	→	F4	→
F8	1/x	XY	X	G/P	F8	÷	↑	←	БП	4	P7
-	2	÷	↑	←	F7	+	↑	F4	-	B/O	÷
↑	→	→	P2	-	3	÷	↑	F2	-	/ - /	B/O

Инструкция: $y_{-2} = P2$, $y_{-1} = P3$, $y_0 = P4$, $y_1 = P5$, $y_2 = P6$, $h = P8$, B/O C/P PX = $= a_1$, C/P PX = a_2 , C/P PX = a_3 , C/P PX = a_4 , ($a_0 = y_0$).

Контрольный пример: для $y_{-2} = e^{-1} = 0,3678794$; $y_{-1} = e^{-0,5} = 0,6065307$; $y_0 = e^0 = 1$; $y_1 = e^{0,5} = 1,648721$; $y_2 = e^1 = 2,718281$; $h = 0,5$ получим (время счета около 15 с) $a_0 = y_0 = 1$; $a_1 = 0,9978533$; $a_2 = 0,4996442$; $a_3 = 0,1773476$; $a_4 = 0,0434361$.

Аналогичные программы для $n \leq 4$ несложно составить и на входном языке МК34, но при $n > 4$ для вычисления коэффициентов аппроксимирующего многочлена по приведенным формулам нужен пакет программ, что увеличивает время вычислений. В этом случае целесообразнее использовать интерполяционный многочлен Ньютона [6], записав его в виде

$$P(x) = \alpha_0 + \alpha_1(q - q_0) + \alpha_2(q - q_0)(q - q_0 - 1) + \dots + \alpha_n(q - q_0)(q - q_0 - 1) \dots \\ \dots (q - q_0 - n + 1) = \sum_{i=0}^n \alpha_i \prod_{j=0}^{i-1} (q - q_0 - j),$$

где α_i (коэффициенты интерполирующего многочлена Ньютона) определяют через начальные разности i -го порядка $\alpha_i = \Delta^i y_0 / i!$, причем значения интерполируемой функции и узлов интерполяции пронумерованы в порядке возрастания положительных значений аргумента (рис. 29): $q = x/h$ – нормированный аргумент, а $q_0 = x_0/h$ – его значение в первом узле (если начало отсчета совпадает с первым узлом, то $q_0 = 0$).

Преобразуя многочлен Ньютона, составим алгоритм вычисления коэффициентов a_i аппроксимирующего степенного многочлена по коэффициентам α_i многочлена Ньютона:

1. Принять $\beta_i^0 = \alpha_i$.

2. Для $k = 1, 2, \dots, n-1$ вычислить

$$\beta_i^k = \begin{cases} \beta_i^{k-1} & \text{при } i < k, \\ \beta_i^{k-1} - (q_0 + n - 1)\beta_{i+1}^{k-1} & \text{при } i \geq k. \end{cases}$$

3. Вычислить $a_i = \beta_i^{n-1} / h^i$.

Вычисление коэффициентов многочлена Ньютона по отсчетам y_i аппроксимируемой функции и коэффициентов аппроксимирующего многочлена в соответствии с приведенным алгоритмом обеспечивают следующие программы.

Программа 192/21. Вычисление коэффициентов интерполяционного многочлена Ньютона степени $n \leq 6$

P2	P3	C _x	P8	F8	1	+	P8	P6	7	-	P7
F2	↑	F3	←	P2	XY	-	↑	F8	÷	P3	F7
1	+	x = 0	XY	F3	←	P2	P3	F6	1	-	P6
x < 0	F,	F8	6	-	x = 0	F↑	F2	C/P			

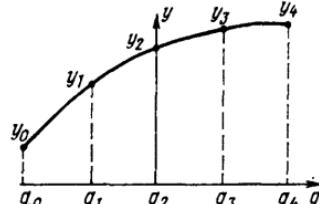


Рис. 29

Инструкция: $y_1 = C1$, $y_2 = C2, \dots, y_6 = C6$, $y_0 = PX$ B/O C/P PX = $P2 = \alpha_6$, $C1 = \alpha_0$, $C2 = \alpha_1$, $C3 = \alpha_2, \dots, C6 = \alpha_5$.

Программа 193/21. Вычисление коэффициентов a_i аппроксимирующего многочлена степени $n < 6$ по коэффициентам α_i многочлена Ньютона

F6	→	P2	F7	P4	1	P6	P5	F2	←	↑	F4
X	XY	→	XY	—	←	P2	F5	1	—	P5	x = 0
PXY	F4	1	—	P4	F6	6	—	x ≠ 0	P8	7	+
P6	P5	F2	→	P2	F5	1	—	x = 0	F6	F6	БП
F1	1	↑	F2	←	X	P2	C/P	F8	÷	БП	R-

Инструкция: $5 - q_0 = P7$, $h = P8$, $\alpha_0 = C1$, $\alpha_1 = C2$, ..., $\alpha_5 = C6$, $\alpha_6 = P2$ В/О С/П $PX = a_0$ С/П $PX = a_1$ С/П $PX = a_2$... С/П $PX = a_6$.

Контрольный пример: при $y_i = 5; 10; 30; 50; 55; 57$ и $h = 0,2$ с выбором начала координат в середине интервала аппроксимации ($q_0 = 2,5$) по программе 192/21 получим (время счета около 2 мин) $\alpha_0 = P2 = PX = -0,16944444$; $\alpha_5 = C6 = 0,225$; $\alpha_4 = C5 = 0$; $\alpha_3 = C4 = -2,5$; $\alpha_2 = C3 = 7,5$; $\alpha_1 = C2 = 5$; $\alpha_0 = C1 = 5$. Так как коэффициент α_6 вычислен в предположении наличия седьмого узла со значением $y_6 = 0$, то его следует стереть (C_x P2), не изменяя содержимого остальных регистров памяти, ввести программу 193/21; 2,5 = P7; 0,2 = P8. После выполнения программы (время счета около 3 мин) получим коэффициенты аппроксимирующего многочлена $P(x) = 41,25390 + 103,7578x - 128,9062x^2 - 382,8125x^3 + 351,5625x^4 + 703,125x^5$.

При автоматической фиксации начала координат в середине интервала аппроксимации ($q_0 = n/2$) с помощью следующей программы можно значительно повысить степень интерполяционных многочленов.

Программа 194/34. Вычисление коэффициентов интерполяционных многочленов степени $n < 9$

C _x	ПД	КИПД	ПВ	ИПД	1	+	ПС	ИПД	1
+	ПД	ИПВ	КИПД	ПВ	XY	—	ИПС	÷	КПД
ИПД	ИПА	—	x = 0	08	ИПС	ПД	ИПА	—	x = 0
02	ИПА	2	÷	ПС	ИПА	1	—	ПД	ПВ
ИПС	1	—	ПС	ИПВ	1	+	ПВ	КИПВ	ИПС
X	ИПВ	1	—	ПВ	XY	КИПВ	XY	—	КПВ
ИПВ	1	+	ПВ	ИПА	—	x = 0	44	ИПД	x = 0
36	ПД	1	ПС	С/П	ПВ	КИПД	ИПС	÷	С/П
ИПС	ИПВ	x	ПС	ИПД	1	+	ПД	БП	76

Инструкция: $y_0 = P0$, $y_1 = P1$, ..., $y_n = P9$, $n = PA$ В/О С/П $PX = 1$, $h = PX$ С/П $PX = a_0$ С/П $PX = a_1$... С/П $PX = a_n$. Время счета зависит от степени многочлена.

Для изменения положения интервала аппроксимации относительно начала координат следует делитель 2 по адресу 32 заменить делителем $1/k = n/(n - q_0)$ (например, при совпадении начала координат с первым узлом интерполяции $k = 1$, а с последним узлом $k = 0$) и уточнить адреса переходов. Если $q_0 = 0$, то целесообразно использовать следующую более короткую программу.

Программа 195/34. Вычисление коэффициентов интерполяционных многочленов степени $n < 9$ при $q_0 = 0$

C _x	ПД	КИПД	ПВ	ИПД	1	+	ПС	ИПД	1
+	ПД	ИПВ	КИПД	ПВ	XY	—	ИПС	÷	КПД
ИПД	ИПА	—	x = 0	08	ИПС	ПД	ИПА	—	x = 0
02	ИПА	1	—	ПС	ПВ	ИПВ	1	+	ПД
КИПВ	КИПД	ИПС	x	—	КПВ	ИПВ	1	+	ПВ
ИПА	—	x = 0	36	ИПС	1	—	x = 0	34	ПД
1	П6	С/П	ПВ	КИПД	ИПС	÷	С/П	ИПС	ИПВ
X	ПС	ИПД	1	+	ПД	БП	64		

Инструкция к этой программе идентична предыдущей.

Если степень выбранного для аппроксимации многочлена меньше числа узлов аппроксимируемой функции более чем на единицу ($n < N - 1$), то коэффициенты аппроксимирующего многочлена часто определяют методом наименьших квадратов. Минимум суммарного квадратичного отклонения многочлена от заданной табличной модели достигается при определении коэффициентов многочлена a_i решением системы линейных уравнений

$$\begin{bmatrix} n & \Sigma x_i & \dots & \Sigma x_i^n \\ \Sigma x_i & \Sigma x_i^2 & \dots & \Sigma x_i^{n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \Sigma x_i^n & \Sigma x_i^{n+1} & \dots & \Sigma x_i^{2n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \dots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Sigma y_i \\ \Sigma y_i x_i \\ \dots \\ \Sigma y_i x_i^n \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

При квадратичной аппроксимации $y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ вычисления автоматизируют с помощью пакета программ 196/21 и 124/21.

Программа 196/21. Формирование системы уравнений для определения коэффициентов аппроксимирующего квадратичного многочлена методом наименьших квадратов

P7	XY	P8	F2	$x = 0$	X	P3	P5	7	P6	C_x	←
F6	1	—	$x = 0$	1	1	+	P2	F7	↑	F3	+
P3	ПП	P-	P4	ПП	P-	←	ПП	P-	F8	↑	F5
+	P5	ПП	P-	ПП	P-	←	F4	P7	F3	P6	C/P
БП	P0	F7	X	↑	F6	←	+	P6	B/O		

Инструкция к пакету из программ 196/21 и 124/21: ввести программу 196/21; $0 = P2$, $y_0 = PY$, $x_0 = PX$ B/O C/P $y_1 = PY$, $x_1 = PX$ C/P $y_2 = PY$, $x_2 = PX$ C/P ... $y_N = PY$, $x_N = PX$ C/P; не изменяя содержимого памяти, ввести программу 124/21; B/O C/P $PX = P8 = a_2$, $P7 = a_1$, $P6 = a_0$.

На микрокалькуляторе с входным языком МК34 те же результаты можно получить с помощью одной программы.

Программа 197/34. Вычисление коэффициентов квадратичного аппроксимирующего многочлена методом наименьших квадратов

ПА	ХY	ПВ	1	ПС	ПД	ПП	79	ИП3	П4
5	ПД	ПП	81	ИПВ	ПС	ПП	79	С/П	ПП
26	ПП	32	ПП	37	С/П	ИП6	ИП4	↑	ПП
74	П6	ИП3	ИП2	ПП	73	П3	ИП8	ИП7	ПА
ПП	73	П7	ИП9	ИПА	ИП4	ПП	74	П8	ИПА
ИП1	÷	П9	ИП5	ИП4	ПП	73	ПА	ИП4	ИП1
÷	П5	ИП2	ИП1	÷	П4	ИПА	П2	ИП3	П1
ИП6	П3	B/O	ИП2	X	ИП1	÷	—	B/O	ПП
83	ПП	83	ИПС	КИПД	+	КПД	ИПС	ИПА	X
ПС	ИПД	1	+	ПД		B/O			

Инструкция: $0 = P1 = P3 = \dots = P9$, $y_0 = PY$, $x_0 = PX$ B/O C/P (время счета около 45 с) $y_1 = PY$, $x_1 = PX$ B/O C/P $y_2 = PY$, $x_2 = PX$ B/O C/P ... $y_N = PY$, $x_N = PX$ B/O C/P; после обработки последней пары отсчетов выполнить С/П $P7 = a_0$, $P8 = a_1$, $P9 = a_2$ (время счета около 60 с).

Контрольный пример: при $(x_i; y_i) = (1; 5), (2; 10), (3; 2)$ с помощью программ 196/21 и 124/21 получим коэффициенты многочлена $y = -13,00001 + 24,50012x - 6,50003x^2$, а с помощью программ 197/34 — многочлен $y = -12,999988 + 24,499985x - 6,4999967x^2$.

Вычисление методом наименьших квадратов коэффициентов аппроксимирующего кубического многочлена обеспечивают пакеты из программ 198/21 и 128/21 или 199/34 и 126/34.

Программа 198/21. Формирование системы из четырех уравнений для вычисления коэффициентов аппроксимирующего многочлена методом наименьших квадратов

P7	F2	+	P2	ПП	F7	F3	+	P3	ПП	F7	F4
+	P4	ПП	F7	F5	+	P5	1	↑	ПП	6	ПП
6	ПП	6	ПП	6	ПП	6	ПП	6	ПП	6	F8
C/П	БП	P0	F8	+	←	P8	F7	×	↑	B/O	

Инструкция к пакету из программ 198/21 и 128/21: ввести программу 198/21 и очистить все регистры памяти, включая стек; $y_0 = PY$, $x_0 = PX$ B/O C/П PX = 1, $y_1 = PY$, $x_1 = PX$ C/П PX = 2 ... $y_N = PY$, $x_N = PX$ C/П PX = P8 = N, C1 = $\sum x_i$, C2 = $\sum x_i^2$, C3 = $\sum x_i^3$, C4 = $\sum x_i^4$, C5 = $\sum x_i^5$, C6 = $\sum x_i^6$, P2 = $\sum y_i$, P3 = $\sum y_i x_i$, P4 = $\sum y_i x_i^2$, P5 = $= \sum y_i x_i^3$; зарегистрировав полученные результаты на вычислительном бланке, вычислить искомые коэффициенты с помощью программы 128/21.

Программа 199/34. Формирование системы из четырех уравнений для вычисления коэффициентов аппроксимирующего многочлена методом наименьших квадратов

ИП0	x=0	22	XY	ПД	1	3	П0	П1	C _x
КП1	L0	10	ИПД	П0	П2	C _x	ПД	П1	ИП0
C/П	↑	→	П6	ИП1	+	П1	ХУ	П7	ИПА
+	ПА	ИП6	↑	x ²	↑	ИП3	+	П3	→
×	↑	ИП4	+	P4	→	X	↑	ИП5	+
P5	→	X	↑	ИП8	+	P8	→	X	ИП9
+	P9	→	↑	ИП7	X	↑	ИПВ	+	PВ
→	X	↑	ИПС	+	ПС	→	X	ИПД	+
ПД	L0	19	ИП2	П0	ИП3	П2	ИП4	П6	ИП5
P7	C _x	C/П							

Инструкция к пакету из программ 199/34 и 126/34: ввести программу 199/34; 0 = P0, N = PX B/O C/П y₁ = PY, x₁ = PX C/П y₂ = PY, x₂ = PX C/П ... y_N = PY, x_N = PX C/П (P0 = N, P1 = $\sum x_i$, P2 = P3 = $\sum x_i^2$, P4 = P6 = $\sum x_i^3$, P5 = P7 = $\sum x_i^4$, P8 = $= \sum x_i^5$, P9 = $\sum x_i^6$, PA = $\sum y_i$, PB = $\sum y_i x_i$, PC = $\sum y_i x_i^2$, РД = $\sum y_i x_i^3$); не изменяя содержимого памяти, ввести программу 126/34; B/O C/П PX = PA = a₀, PB = a₁, PC = a₂, РД = a₃.

Если при аппроксимации нелинейной характеристики по ее графической или табличной модели с постоянным шагом выбирать начало координат так, чтобы узлы модели образовывали относительно него симметричные пары, то система управлений (4.1) вырождается в матричное уравнение

$$\begin{bmatrix} n & 0 & \sum x_i^2 & 0 & \dots \\ 0 & \sum x_i^4 & 0 & \sum x_i^4 & \dots \\ \sum x_i^2 & 0 & \sum x_i^4 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum y_i \\ \sum y_i x_i \\ \sum y_i x_i^2 \\ \vdots \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

Это уравнение объединяет две независимые системы уравнений относительно четных и нечетных коэффициентов аппроксимирующего многочлена, что существенно упрощает вычисление последних, позволяя автоматизировать вычисление коэффициентов аппроксимирующих многочленов до 5-й и 6-й степеней.

Программа 200/21. Формирование уравнений методом наименьших квадратов для вычисления коэффициентов аппроксимирующего многочлена 5-й степени при симметричном интервале аппроксимации

P8	ПП	F8	ПП	F8	ПП	F8	ПП	F8	ПП	F8	ПП
F8	F8	x ²	P8	↑	F3	+	P3	F8	X	↑	F4
+	P4	F8	X	↑	F5	+	P5	F8	X	↑	F6
+	P6	F8	X	↑	F7	+	P7	F2	1	+	P2
C/П	←	+	XY	→	F8	XY	←	X	↑	B/O	

Инструкция: очистить регистры ЗУПВ, $y_0 = PY$, $x_0 = PX$ В/О С/П $PX = P2 = 1$, $y_1 = PY$, $x_1 = PX$ В/О С/П $PX = P2 = 2 \dots y_N = PY$, $x_N = PX$ В/О С/П $PX = P2 = N$, $P3 = \Sigma x_i^2$, $P4 = \Sigma x_i^4$, $P5 = \Sigma x_i^6$, $P6 = \Sigma x_i^8$, $P7 = \Sigma x_i^{10}$, $C1 = \Sigma y_i$, $C2 = \Sigma y_i x_i$, $C3 = \Sigma y_i x_i^2$, $C4 = \Sigma y_i x_i^3$, $C5 = \Sigma y_i x_i^4$, $C6 = \Sigma y_i x_i^5$.

После выполнения программы 200/21 следует зарегистрировать полученные результаты, ввести программу 124/21, $N = P2$, $\Sigma x_i^2 = P3 = P6$, $\Sigma x_i^4 = P4 = P7 = C1$, $\Sigma x_i^6 = C2 = C3$, $\Sigma x_i^8 = C4$, $\Sigma y_i = P5$, $\Sigma y_i x_i^2 = C5$, $\Sigma y_i x_i^4 = C6$ В/О С/П $PX = a_0$, $C6 = a_4$, $C5 = a_2$, $\Sigma x_i^2 = P2$, $\Sigma x_i^4 = P3 = P6$, $\Sigma x_i^8 = P4 = P7 = C1$, $\Sigma x_i^{10} = C2 = C3$, $\Sigma x_i^{12} = C4$, $\Sigma y_i x_i = P5$, $\Sigma y_i x_i^3 = C5$, $\Sigma y_i x_i^5 = C6$ В/О С/П $PX = a_1$, $C6 = a_5$, $C5 = a_3$.

Аналогично можно найти коэффициенты аппроксимирующего многочлена 6-й степени, составив на входном языке МК34 программу для формирования методом наименьших квадратов системы уравнений и использовав ранее приведенные программы для ее решения (при раздельном решении системы из трех и четырех уравнений).

Распространенный способ приближенного моделирования нелинейных характеристик заключается в их кусочно-линейной аппроксимации, при которой на каждом из выбранных интервалов (их ширина определяется требуемой точностью аппроксимации) нелинейную характеристику заменяют линейной функцией $y(x) = \alpha_{i+1}x + \beta_{i+1}$; $x \in [x_i; x_{i+1}]$, коэффициенты которой вычисляются по формулам

$$\alpha_{i+1} = \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i}; \quad \beta_{i+1} = \frac{y_i x_{i+1} - y_{i+1} x_i}{x_{i+1} - x_i}, \quad (4.3)$$

легко реализуемыми программами автоматических вычислений.

Программа 201/21. Кусочно-линейная аппроксимация нелинейных характеристик

```
← F8   -   → XY   P8   F7   -   XY   P7   ←   XY
÷ P2   ↑   F7   X   ↑   F8   XY   -   P3   ↑   F2
C/П   ↑   F2   X   ↑   F3   +   БП   P4
```

Программа 202/34. Кусочно-линейная аппроксимация нелинейных характеристик

```
ИП7 XY   П7   -   XY   ИП8 XY   П8   -   XY
÷ П2   ИП7 X   ИП8 XY   -   П3   ИП2 С/П
ИП2 X   ИП3 +   БП   19
```

Инструкция к обеим программам: $y_0 = P8$, $x_0 = P7$, $y_1 = PY$, $x_1 = PX$ В/О С/П $PX = P2 = \alpha_1$, $PY = P3 = \beta_1$, $y_2 = PY$, $x_2 = PX$ В/О С/П $PX = P2 = \alpha_2$, $PY = P3 = \beta_2 \dots$

Контрольный пример: по графику, приведенному на рис. 30, при отсчетах $(y_i; x_i) = (0; 0), (4; 1), (1; 3), (5; 5)$ получим

$$y(x) = \begin{cases} 4x & \text{при } 0 \leq x \leq 1, \\ 5,5 - 1,5x & \text{при } 1 < x \leq 3, \\ 2x - 5 & \text{при } 3 < x \leq 5 \end{cases}$$

и $y(0,5) = 2$; $y(2) = 2,5$; $y(4) = 3$.

Часто в качестве аппроксимирующей используют теоретическую буквенную модель характеристики нелинейного элемента с коэффициентами, значения которых определяют по результатам экспериментальных измерений. В качестве примера рассмотрим методику определения параметров модели полупроводникового диода по его статической характеристике (рис. 31). Учитывая, что реальный диод можно рассматривать как последовательное соединение идеального диода с характеристикой $i = I_0 (e^{\Lambda u} - 1)$ и сопротивления потерь R_0 , составим уравнение, связывающее ток и напряжение на выводах диода:

$$u(i) = R_0 i + (1/\Lambda) \ln((i + I_0)/I_0), \quad (4.4)$$

в которое входят неизвестные параметры R_0 , Λ и I_0 .

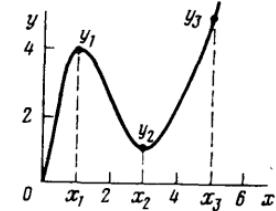


Рис. 30

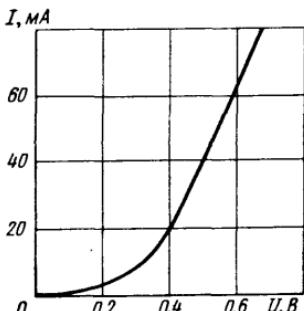


Рис. 31

По трем точкам характеристики со значениями i'_k , i'_k' можно составить систему из трех нелинейных уравнений, решение которой и даст значения трех неизвестных параметров. Однако при произвольном выборе этих точек решение такой системы с помощью микрокалькулятора может оказаться затруднительным. Поэтому обычно вводят упрощающие предположения, вытекающие из реальных соотношений между рассматриваемыми величинами. Например, при выборе значений i'_k целесообразно обеспечить неравенство $i'_k > I_0$, что позволит заменить уравнение (4.4) упрощенным:

$$u(i) \approx R_0 i + (1/\Lambda) \ln(i/I_0). \quad (4.5)$$

Если выбрать $i'_2 = 2i'_1$, $i'_3 = 4i'_1$, то система уравнений

$$\begin{aligned} u'_1 &= R_0 i'_1 + (1/\Lambda) \ln(i'_1/I_0); \\ u'_2 &= 2R_0 i'_1 + (1/\Lambda) \ln(2i'_1/I_0); \\ u'_3 &= 4R_0 i'_1 + (1/\Lambda) \ln(4i'_1/I_0) \end{aligned}$$

имеет решение: $R_0 = (u'_1 - 2u'_2 + u'_3)/i'_1$; $\Lambda = \ln 2 / (3u'_2 - 2u'_1 - u'_3)$; $I_0 = i'_1 e^{-\Lambda(2u'_2 - u'_3)}$.

Программа 203/21. Определение параметров и построение статической характеристики полупроводникового диода

F3	↑	F4	-	+	P6	↑	F2	XY	-	P7	↑
F3	XY	-	↑	F2	-	2	ln	XY	÷	P8	↑
F6	X	e ^x	↑	F5	XY	÷	P6	F7	XY	÷	P7
C/П	↑	F7	X	→	F6	XY	+	XY	÷	←	↑
→	ln	XY	←	F8	÷	↑	→	+	БП	P6	

Программа 204/34. Определение параметров и построение статической характеристики полупроводникового диода

ИП4	ИП3	↑	+	-	П0	ИП2	+	ПА	ИП2	
+	ИП3	-	2	1/x	ln	XY	÷	П8	ИП0	
×	e ^x	ИП5	Х	П6	ИПА	ИП5	÷	П7	С/П	
ИП7	XY	X	BХ	ИП6	÷	1	+	ln	ИП8	
÷	+	БП	29							

Инструкция к обеим программам: ($u'_1 = P2$, $u'_2 = P3$, $u'_3 = P4$, $i'_1 = P5$) В/О С/П $PX = P7 = R_0$, $P6 = I_0$, $P8 = \Lambda$, $i_1 = PX$ С/П $PX = u(i_1)$, $i_2 = PX$ С/П $PX = u(i_2)$, $i_3 = PX$ С/П $PX = u(i_3)$...

Контрольный пример: по характеристике, показанной на рис. 31, выбираем $i'_1 = 0,02$ А; $u'_1 = 0,4$ В; $u'_2 = 0,5$ В; $u'_3 = 0,68$ В

и по одной из приведенных программ находим $R_0 = 4$ Ом; $I_0 = 3,051758 \cdot 10^{-7}$ А; $\Lambda = 34,65736$ 1/В, а также $u(0,01) = 0,34$; $u(0,02) = 0,4$; $u(0,03) = 0,451699$; ..., что практически точно совпадает с экспериментальной кривой.

В описанном методе требуется достаточно точное определение значений i'_k , которое не всегда удается обеспечить. Требования к точности снижают, описав коэффициент Λ его теоретическим значением $\Lambda = q/kT \approx 11\,608/(273 + T^{\circ}\text{C})$. В этом случае параметры R_0 и I_0 опре-

деляют по двум точкам характеристики для i'_1 и $i'_2 = 2i'_1$, что соответствует системе уравнений $u'_1 = R_0 i'_1 + (1/\Lambda) \ln(i'_1/I_0)$; $u'_2 = 2R_0 i'_1 + (1/\Lambda) \ln(2i'_1/I_0)$ с решением $R_0 = (u'_2 - u'_1 - \ln 2/\Lambda)/i'_1$; $I_0 = i'_1 \exp(\Lambda(u'_2 - 2u'_1))$. Для рассмотренного примера ($T = 25^{\circ}\text{C}$) при $i'_1 = 0,4$; $i'_1 = 0,02$; $u'_2 = 0,5$; $i'_2 = 0,04$ получим $\Lambda = 38,95302$; $I_0 = 1,68 \times 10^{-7}$; $R_0 = 4,11$, что достаточно хорошо совпадает с ранее полученными данными. Автоматизировать решение в этом случае еще проще, чем в предыдущем.

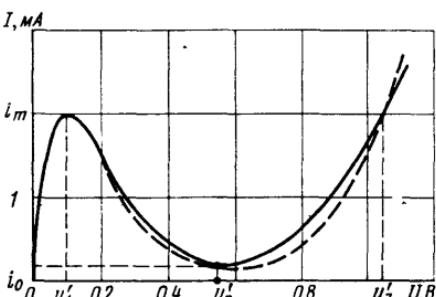


Рис. 32

В заключение рассмотрим методику определения коэффициентов выражения

$$i(u) = A_1 u e^{-\alpha_1 u} + A_2 (e^{\alpha_2 u} - 1), \quad (4.6)$$

моделирующего статические характеристики туннельных диодов (рис. 32). Для аппроксимации характеристики целесообразно выбрать u'_1 ; i_m в точке первого максимума, u'_2 ; i_0 в точке минимума и u'_3 ; i_m на восходящей ветви кривой. Четвертым условием, требуемым для формирования полной системы уравнений, примем

$$di(u)/du = A_1 (1 - \alpha_1 u) e^{-\alpha_1 u} + \alpha_2 A_2 e^{\alpha_2 u} = 0 \text{ при } u = u'_1.$$

Для упрощения примем допущения: $A_2 (e^{\alpha_2 u'_1} - 1) \approx 0$, $A_1 u'_1 e^{-\alpha_1 u'_1} \approx 0$ и $e^{\alpha_2 u'_1} \gg 1$, получим систему уравнений

$$\begin{aligned} A_1 (1 - \alpha_1 u'_1) e^{-\alpha_1 u'_1} &= 0; \\ A_1 u'_1 e^{-\alpha_1 u'_1} + A_2 e^{\alpha_2 u'_1} &= i_m; \\ A_1 u'_1 e^{-\alpha_1 u'_2} + A_2 e^{\alpha_2 u'_2} &= i_0; \\ A_2 e^{\alpha_2 u'_3} &= i_m; \end{aligned}$$

решение которой дает значения: $\alpha_1 = 1/u'_1$; $A_1 = i_m e/u'_1$; $\alpha_2 = \ln(i_0/i_m - (u'_2/u'_1) \times \times e^{(u'_1 - u'_2)/u'_1})/(u'_2 - u'_3)$; $A_2 = i_m e^{-\alpha_2 u'_3}$.

Программа 205/21. Аппроксимация статической характеристики туннельного диода

F4	↑	F5	-	P4	F7	×	1	-	e^x	÷	↑
F3	XY	-	ln	↑	F4	÷	P8	↑	F5	×	e^x
↑	F2	XY	÷	P6	F7	×	1	e^x	×	P5	C/P
↑	F8	X	e^x	P4	F7	×	e^x	÷	↑	F5	X
←	F4	1	-	↑	F6	X	↑	→	+	BП	/-

Инструкция: ($i_m = P2$, $i_0/i_m = P3$, $1/u'_1 = \alpha_1 = P7$) $u'_2 = P4$, $u'_3 = P5$ B/O C/P PX = = $P5 = A_1$, $P6 = A_2$, $P7 = \alpha_1$, $P8 = \alpha_2$, $u_1 = PX$ C/P PX = $i(u_1)$, $u_2 = PX$ C/P PX = = $i(u_2)$...

Программа 206/34. Аппроксимация статической характеристики туннельного диода

ИП5	ИП4	÷	ИП1	1/x	ПС	ИП2	X	↑	↑
1	-	e^x	÷	-	ln	ИП2	ИП3	-	÷
ПД	ИП3	X	e^x	ИП4	XY	÷	ПВ	ИП4	1
e^x	X	ИПС	X	ПА	C/P	П0	↑	ИПС	X
e^x	÷	ИПА	X	ИП0	ИПД	X	e^x	1	-
ИПВ	X	+	БП	35					

Инструкция: ($u'_1 = P1$, $u'_2 = P2$, $u'_3 = P3$, $i_m = P4$, $i_0 = P5$) B/O C/P PX = PA = A_1 , $PB = A_2$, $PC = \alpha_1$, $PD = \alpha_2$, $u_1 = PX$ C/P PX = $i(u_1)$, $u_2 = PX$ C/P PX = $i(u_2)$, $u_3 = = PX$ C/P PX = $i(u_3)$...

Контрольный пример: выбрав на характеристике (рис. 32) $i_m = 2$ мА; $i_0 = 0,2$ мА; $u'_1 = 0,1$ В; $u'_2 = 0,55$ В; $u'_3 = 1,05$ В, получим $\alpha_1 = 10$ 1/B; $\alpha_2 = 6,493498$ 1/B, $A_1 = 5,43656 \cdot 10^{-2}$ А, $A_2 = 2,18743 \cdot 10^{-6}$ А. Результаты вычисления статической характеристики показаны на рис. 32 штриховой линией.

Аналогично можно использовать буквенные модели и для составления программ (цифровых моделей) построения нелинейных характеристик других компонентов цепи.

4.2. Расчет статических режимов нелинейных цепей

Анализ статического режима нелинейной цепи сводится к формированию и решению системы уравнений равновесия, составляемой на основании законов Кирхгофа. Учитывая ограниченные возможности микрокалькуляторов, на этапе формирования такой системы следует максимально использовать упрощающие допущения, нормировку переменных и преобразование уравнений для уменьшения числа исходных данных. Эти приемы часто позволяют свести задачу к решению одного нелинейного уравнения численными методами, так как аналитическое определение корней таких уравнений возможно лишь в исключительных случаях. Поиск решения нелинейного уравнения сводится к определению интервалов аргумента, в которых находятся корни (отделению корней), и сокращению этого интервала (уточнению корней) до достижения требуемой точности.

При анализе нелинейных устройств интервал нахождения корня часто приближенно известен из физических условий задачи, но приходится анализировать эти условия, особенно тогда, когда возможна многозначность решения. В таких случаях удобно приближенное графическое представление уравнения, позволяющее рационально выбрать алгоритм уточнения корня. Среди этих алгоритмов простотой реализации отличается метод простых итераций, при котором решаемое уравнение предварительно представляется в виде

$$x = f(x) \quad (4.7)$$

и последовательно вычисляют значения $x_k = f(x_{k-1})$; $k = 1, 2, \dots$ при начальном приближении x_0 . Решение сходится к искомому корню x^* , если на интервале $[x_0; x^*]$ выполняется условие $f'(x) < 1$.

В качестве иллюстрации определим напряжение u_d на выводах полупроводникового диода, подключенного к источнику напряжения E через элемент цепи с сопротивлением R . Используя рассмотренную в § 4.1 модель диода, составим уравнение

$$E = iR + u_d = iR + iR_0 + (1/\Lambda) \ln((i + I_0)/I_0),$$

решение которого позволяет найти $u_d = E - iR$.

Составленное уравнение представим в общем виде

$$x = A + B \ln(x + a), \quad (4.8)$$

где $x = i$, $A = (E + \ln I_0 / \Lambda) / (R + R_0)$; $B = A / \Lambda (R + R_0)$; $a = I_0$.

К такому виду сводятся многие уравнения, отображающие работу полупроводниковых приборов в статическом режиме. Продифференцировав это уравнение $f'(x) = B/(x + a)$, получим условие сходимости $|x + a| > |B|$. В рассматриваемой задаче это условие соответствует неравенству $i > 1/\Lambda(R + R_0) - I_0$ и, следовательно, метод простых итераций применим лишь при $E > E_{\min}$, где напряжение E_{\min} соответствует предельному значению тока $i_{\min} = 1/\Lambda(R + R_0) - I_0$.

Метод простых итераций для решения рассматриваемой задачи можно применить и при $E < E_{\min}$, если уравнение (4.8) представить уравнением (4.7) обратным преобразованием

$$i = I_0 [\exp(\Lambda(E - i(R + R_0))) - 1],$$

когда сходимость обеспечивается при $E < E_{\min}$.

Программная реализация метода простых итераций сводится к повторным вычислениям правой части уравнения (4.7) со значением x , полученной на предыдущей итерации. По мере увеличения числа итераций методическая погрешность уменьшается, но влияние операционной ошибки может привести к "зацикливанию" вычислений вблизи корня. Поэтому целесообразно прекращать вычисления после каждой итерации для сравнения значений x_k и x_{k-1} , и принятия решения о дальнейших приближениях. Этот способ реализован в следующих программах, обеспечивающих результаты при $E > E_{\min}$ и при $E < E_{\min}$.

Программа 207/21. Расчет рабочего режима диода методом простых итераций

↑	F6	÷	1	+	ln	↑	F5	÷	↑	F2	XY
-	↑	F4	÷	P7	↑	F3	×	↑	F2	XY	-
P8	F7	C/Π	БП	P0	↑	F4	×	↑	F2	XY	-
↑	F5	×	e ^x	1	-	↑	F6	×	P7	↑	F3
×	↑	F2	XY	-	P8	F7	C/Π	БП	,		

Инструкция: $E = P2$, $R = P3$, $R + R_0 = P4$, $\Lambda = P5$, $I_0 = P6$, $i_0 = PX$ (B/O) C/Π $PX = i_1$, $P8 = u_d$, $i_1 = PX$ (для сохранения i_k в регистре X перед следующим пуском программы можно выполнить $PX = i_k$ \uparrow $F8 = u_d$ XY) C/Π $PX = u_2$, $P8 = u_d$, $i_2 = PX \dots$ C/Π $PX = i_k$, $P8 = u_d$. Если результат вычислений не сходится, то следует перейти к вычислениям при $E < E_{\min}$: $\dots i_0 = PX$ БП, C/Π $PX = i_1 \dots$ Время выполнения одной итерации около 5 с.

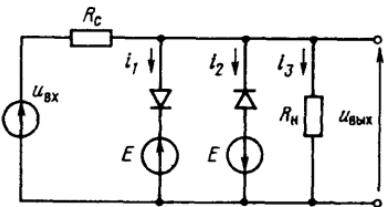
Контрольный пример: при $R = 1 \text{ кОм}$; $R_0 = 4 \text{ Ом}$; $\Lambda = 35$; $1/B = 1$; $I_0 = 2 \times 10^{-4} \text{ мА}$; $E = 1 \text{ В}$ получим $i_1 = 0,7536313$; \dots ; $i_5 = i_6 = 0,7613874 \text{ мА}$; $u_{\text{д}} = 0,2386126$. При $E = 0,1$ и вычислении i возникает переполнение – процесс не сходится; продолжаем вычисления по второму варианту: $0 = P X \text{ БП}$, $C/P P X = 6,423088 \times 10^{-3}$; \dots ; $i_{11} = i_{12} = 5,298026 \cdot 10^{-3}$; $u_{\text{д}} = 0,09470197 \text{ В}$.

Рассмотрим использование приведенной программы для вычисления передаточной характеристики двустороннего диодного ограничителя (рис. 33), описываемого (с учетом рассмотренной ранее модели диода) системой уравнений

$$u_{\text{вх}} = R_c(i_1 + i_2 + i_3) + u_{\text{вых}}; i_1 = I_0 [\exp(-\Lambda(u_{\text{вых}} - i_1 R_0)) - 1]; \\ i_2 = I_0 [\exp(\Lambda(u_{\text{вых}} - i_1 R_0)) - 1]; i_3 = u_{\text{вых}}/R_h.$$

Можно избежать решения этой системы уравнений (составленной для одинаковых диодов с равными значениями I_0 , R_0 и Λ), если при вычислении передаточной функции задаваться значениями $u_{\text{вых}}$ и для каждого из них с помощью программы 207/21, приняв $R = 0$, вычислять токи i_1 и i_2 . После этого, определив ток i_3 и полный ток через сопротивление R_c , несложно найти значения $u_{\text{вх}}$, соответствующие заданным значениям $u_{\text{вых}}$, и построить передаточную характеристику $u_{\text{вых}} = f(u_{\text{вх}})$.

Рис. 33



При расчетах на микрокалькуляторе для решения нелинейных уравнений удобен метод половинного деления, не требующий проверки сходимости и позволяющий на каждой итерации сокращать интервал, в котором находится искомый корень. Один из вариантов этого метода реализован в следующих базовых программах.

Программа 208/21. Решение уравнений методом половинного деления

```
F7 2 ÷ P7 ↑ F8 + P8 ÷ sin x = 0 P X
F8 C/P ... xY0 P0 F8 ↑ F7 - P8 БП P0
```

Программа 209/34. Решение уравнений методом половинного деления

```
ИП7 2 ÷ ИП7 ИП8 + ИП8 BX - x = 0
13 ИП8 C/P ... xY0 00 ИП8 ИП7 - П8
БП 00
```

Инструкция: записать в программу вместо многоточия операторы вычисления правой части решаемого уравнения $0 = f(x)$ при $x = P8$, записать вместо $xY0$ оператор $x < 0$, если на левой границе исходного интервала невязка $f(x_1) > 0$, или оператор $x \geq 0$ в противном случае; ширина исходного интервала $\Delta x_0 = P7$; его левая граница $x_1 = P8$ В/О С/П $PX = P7 = x^*$ (искомый корень).

В этой программе для автоматического прекращения вычислений использован критерий "максимальной точности", по которому сокращение интервала нахождения корня прекращается, если $\Delta x_0/x < 10^{-8}$. Это позволяет оценить число требуемых итераций по формуле $k = 1 + (8 + \lg(\Delta x_0/x^*)/\lg 2)$, где Δx_0 – начальная ширина интервала, а x^* – искомый корень уравнения. Определив время выполнения одной итерации и ожидаемое значение корня, с помощью этой формулы можно оценить полное время решения уравнения.

В качестве иллюстрации рассмотрим задачу вычисления статической зависимости $U_{\text{КЭ}} = f(U_{\text{БЭ}})$ для биполярного транзистора в схеме с общим эмиттером (рис. 34, а). Описывая транзистор упрощенной моделью Эберса – Молла¹ (рис. 34, б), составим систему уравнений цепи

¹ Значения параметров α_I и α_N модели Эберса – Молла, приводимые в справочниках, отличаются от параметра h_{12} транзистора.

$$I_E = \frac{I_{E0}}{1 - \alpha_N \alpha_I} (e^{\Lambda(U_{B3} - I_B R_6)} - 1) - \frac{\alpha_I I_{K0}}{1 - \alpha_N \alpha_I} (e^{\Lambda(U_{B3} - U_{K3} - I_B R_6)} - 1);$$

$$I_K = \frac{\alpha_N I_{E0}}{1 - \alpha_N \alpha_I} (e^{\Lambda(U_{B3} - I_B R_6)} - 1) - \frac{I_{K0}}{1 - \alpha_N \alpha_I} (e^{\Lambda(U_{B3} - U_{K3} - I_B R_6)} - 1);$$

$$I_B = I_E - I_K; \quad U_{K3} = E - I_K R_K. \quad (4.9)$$

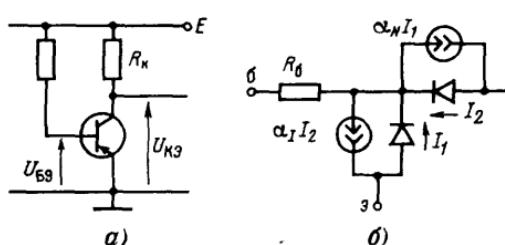


Рис. 34

При решении этой системы уравнений ее обычно упрощают исходя из реальных соотношений между значениями токов и напряжений. В рассматриваемом случае для иллюстрации путей алгоритмизации решения нелинейных уравнений попытаемся решить задачу, не прибегая к подобным упрощениям. Обозначив $x = e^{\Lambda(U_{B3} - I_B R_6)}$, из второго и четвертого уравнений (4.9) составим выражение

$$x = (A - \Lambda U_{K3}) / B (C - e^{-\Lambda U_{K3}}),$$

где $A = \Lambda E + B(C - 1)$; $B = \Lambda R_K I_{K0} / (1 - \alpha_N \alpha_I)$; $C = \alpha_N I_{E0} / I_{K0}$.

Учитывая, что $I_B = (U_{B3} - \ln x / \Lambda) / R_6$ и подставив значение x в разность первого и второго уравнений, определяющую ток базы, получим уравнение с одним искомым неизвестным

$$G(D + e^{-\Lambda U_{K3}})x + \ln x - F = 0,$$

где $G = \Lambda R_6 I_{K0} (1 - \alpha_I) / (1 - \alpha_N \alpha_I)$; $D = I_{E0} (1 - \alpha_N) / I_{K0} (1 - \alpha_I)$; $F = \Lambda U_{B3} + G(D + 1)$.

При решении этого уравнения на микрокалькуляторе с входным языком МК21 возникают затруднения с размещением в памяти исходных данных. Эти затруднения можно преодолеть, пронормировав напряжение $y = \Lambda U_{K3}$, как это реализовано в следующей программе.

Программа 210/21. Расчет статической зависимости $U_{K3} = f(U_{B3})$ для биполярного транзистора в схеме с общим эмиттером

F7	2	÷	P7	↑	F8	+	P8	÷	sin	x = 0	PX
F8	C/P	←	↑	→	F8	/-	e ^x	XY	+	→	P4
-	↑	F3	X	→	F8	↑	F2	-	↑	←	÷
↑	ln	←	X	↑	F5	X	↑	F6	-	↑	→
+	x < 0	P+	F8	↑	F7	-	P8	←	BП	P0	

Инструкция: ($A = P2$, $B = P3$, $C = P4$, $G = P5$, $F = P6$, $D = C1$) $\Lambda E = P7$, $0 = P8$ B/O C/P PX = ΛU_{K3} .

Контрольный пример: при $I_{K0} (1 - \alpha_N \alpha_I) = 5 \cdot 10^{-7}$ А; $I_{E0} (1 - \alpha_N \alpha_I) = 10^{-6}$ А; $\alpha_N = 0,98$; $\alpha_I = 0,8$; $E = 10$ В; $R_K = 1$ кОм; $R_6 = 100$ Ом; $\Lambda = 39$ 1/В, вычислив предварительно $B = 0,0195$; $C = 1,96$; $A = 390,01872$; $D = 0,2$; $G = 0,00039$; $F = 39U_{B3} + 0,000468$ для $U_{B3} = 0,2$; $0,21$; $0,22$ В последовательно вычисляем $U_{K3} = 7,96540$ (PX = 310,6506); $7,17424$ (PX = 279,9195); $6,156339$ (PX = 240,09722). Время выполнения программы около 4 мин.

На входном языке МК34 можно составить более удобную программу без нормирования вводимых и выводимых переменных. Заметим, однако, что при решении нелинейных уравнений с экспоненциальными членами возможно переполнение при больших начальных отклонениях от искомых корней. Во входном языке МК34 диапазон значений функции e^x ограничен не только сверху, но и снизу, когда $e^x \rightarrow 0$, а попытка вычислить значение e^x при $x < -230,2583$ рассматривается как некорректная операция (с

высвечиванием символа ЕГГОГ), в отличие от входного языка МК21, где нижняя граница аргумента e^x обусловлена лишь рабочей разрядностью. Это заставляет вводить в программу проверку значений аргумента при вычислении члена $e^{-\Lambda U_{K3}}$, принимая его равным нулю при $\Lambda U_{K3} > 99$. Для сокращения времени вычислений в приводимой ниже программе вычисления прекращаются при выполнении условия $\Delta U_{K3}/E < 10^{-8}$, что обеспечивает постоянную абсолютную погрешность решения независимо от начального значения U_{K3} .

Программа 211/34. Расчет статической зависимости $U_{K3} = f(U_{B3})$ для биполярного транзистора в схеме с общим эмиттером

П9	ИП4	ИП3	1	+	X	+	ПА	ИП0	П7
ИП1	ИП2	1	-	X	+	ПВ	С _x	П8	ИП7
2	÷	П7	ИП8	+	П8	ИП0	ИП7	+	ИП0
-	x = 0	41	ИП9	ИПС	-	ИП6	÷	ПД	ИП8
C/P	C _x	ПД	9	9	ИП8	ИП5	X	-	x ≥ 0
55	BХ	e ^x	1/x	ПД	ИП8	ИПВ	-	ИПД	ИП2
-	÷	ИП1	÷	↑	ln	ИП5	÷	ПС	XY
ИП3	ИПД	+	X	ИП4	X	+	ИПА	-	x < 0
19	ИП8	ИП7	-	П8	БП	19			

Инструкция: ($E = P0$, $B' = R_K I_{K0} / (1 - \alpha_N \alpha_I) = P1$, $C = \alpha_N I_{\varnothing 0} / I_{K0} = P2$, $D = I_{\varnothing 0} (1 - \alpha_N) / I_{K0} (1 - \alpha_I) = P3$, $G = R_B I_{K0} (1 - \alpha_I) / (1 - \alpha_N \alpha_I) = P4$, $\Lambda = P5$, $R_6 = P6$) $U_{B3} = PX$ В/О С/П $PX = P8 = U_{K3}$; $PY = PD = I_B$.

Контрольный пример: при $10 = P0$; $5 \cdot 10^{-4} = P1$; $1,96 = P2$; $0,2 = P3$; $10^{-5} = P4$; $39 = P5$; $100 = P6$; $0,24 = PX$ получим (время счета около 7 мин.) $U_{K3} = 3,312982$ В; $I_B = 0,1363596$ мА.

Для сравнения рассмотрим анализ более сложной схемы с непосредственной связью двух биполярных транзисторов с общим коллектором и общим эмиттером (рис. 35). Используя модель Эберса – Молла, пренебрежем влиянием сопротивления R_6 , весьма незначительным в этом случае, и составим систему уравнений

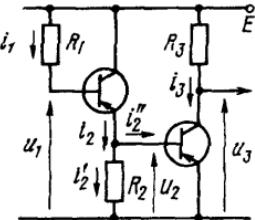


Рис. 35

$$\begin{aligned} i_1 &= \frac{E - u_1}{R_1} = \frac{I'_{\varnothing 0} (1 - \alpha'_N)}{1 - \alpha'_N \alpha'_I} (e^{\Lambda(u_1 - u_2)} - 1) + \frac{I'_{K0} (1 - \alpha'_I)}{1 - \alpha'_N \alpha'_I} (e^{\Lambda(u_1 - E)} - 1); \\ i_2 &= i'_2 + i''_2 = \frac{I'_{\varnothing 0}}{1 - \alpha'_N \alpha'_I} (e^{\Lambda(u_1 - u_2)} - 1) - \frac{I'_{K0} \alpha'_I}{1 - \alpha'_N \alpha'_I} (e^{\Lambda(u_1 - E)} - 1) = \\ &\equiv \frac{I''_{\varnothing 0} (1 - \alpha''_N)}{1 - \alpha''_N \alpha''_I} (e^{\Lambda u_2} - 1) + \frac{I''_{K0} (1 - \alpha''_I)}{1 - \alpha''_N \alpha''_I} (e^{\Lambda(u_2 - u_3)} - 1) + u_2 / R_2; \\ i_3 &= \frac{E - u_3}{R_3} = \frac{\alpha''_N I''_{\varnothing 0}}{1 - \alpha''_N \alpha''_I} (e^{\Lambda u_2} - 1) - \frac{I''_{K0}}{1 - \alpha''_N \alpha''_I} (e^{\Lambda(u_2 - u_3)} - 1). \end{aligned}$$

Учитывая, что при $\Lambda(u_1 - E) \ll 0$ коллекторный $p-n$ -переход первого транзистора надежно заперт, примем $\exp(\Lambda(u_1 - E)) \approx 0$ и тогда для токов i_2 и i_1 справедливо соотношение $i_1 \approx (1 - \alpha'_N) i_2 - I'_{K0}$. Задаваясь значением u_3 , из последнего уравнения определим $x = e^{\Lambda u_2} = ((E - u_3 + A)/B(C - e^{-\Lambda u_3}))$, где $A = (\alpha''_N I''_{\varnothing 0} - I''_{K0}) R_3 / (1 - \alpha'_N \alpha'_I)$; $B = I''_{K0} R_3 / (1 - \alpha'_N \alpha'_I)$; $C = \alpha'_N I_{\varnothing 0} / I_{K0}$.

Воспользовавшись вторым уравнением системы и установленной связью между токами i_1 и i_2 , запишем

$$i_1 R_1 = D(F + e^{-\Lambda u_3})x - G + H \ln x,$$

где $D = I''_{K0} R_1 (1 - \alpha''_I) (1 - \alpha'_N) / (1 - \alpha''_N \alpha''_I)$; $F = I''_{\varnothing 0} (1 - \alpha''_N) / I''_{K0} (1 - \alpha''_I)$; $G =$

$$= (I'_{K0} + I''_{\varnothing 0} (1 - \alpha'_N) + I''_{K0} (1 - \alpha''_J)) (1 - \alpha'_N) / (1 - \alpha''_N \alpha''_J) R_1; H = (1 - \alpha'_N) R_1 / \Lambda R_2.$$

Согласно первому уравнению системы должны выполняться равенства $u_1 = E - i_1 R_1$; $u_1 = (1/\Lambda) \ln (((i_1 R_1 + N)/M + 1)x)$, где $N = I'_{K0} R_1 (1 - \alpha'_J) / (1 - \alpha'_N \alpha'_J)$; $M = I''_{\varnothing 0} R_1 (1 - \alpha''_N) / (1 - \alpha''_N \alpha''_J)$.

Следовательно, выбранное значение u_3 должно удовлетворять уравнению $E - i_1 R_1 - (1/\Lambda) \ln (((i_1 R_1 + N)/M + 1)x) = 0$, по знаку невязки которого можно судить о пути дальнейшего уточнения корня. Так, если реальное значение u_3 меньше выбранного, то вычисленные значения x и $i_1 R_1$ окажутся больше истинных, а невязка – отрицательной.

Программа 212/34. Расчет статического режима в схеме на транзисторах с общим коллектором и общим эмиттером

ИП0	П7	Cx	П9	→	ИП7	2	÷	П7	ИП0
+	ИП0	-	$x \neq 0$	81	ИП9	+	П9	5	-
0	XY	$x < 0$	30	ИП9	ИП1	X	e^x	$1/x$	XY
→	↑	ИП2	+	ИПД	X	XY	ИПС	-	ИПВ
X	ИП9	ИП0	-	ИПА	-	XY	÷	П8	X
BX	ln	ИП4	X	+	ИП3	-	↑	↑	ИП6
+	ИП5	÷	1	+	ИП8	X	ln	ИП1	÷
+	ИП0	-	$x < 0$	04	→	ИП9	ИП7	-	БП
03	XY	ИП0	XY	-	П7	ИП8	ln	ИП1	÷
P8	ИП9	C/P	БП						

Инструкция: ($E = P0$, $\Lambda = P1$, $F = P2$, $G = P3$, $H = P4$, $M = P5$; $N = P6$, $A = PA$, $B = PB$, $C = PC$, $D = PD$) (B/O) C/P P7 = u_1 , P8 = u_2 , PX = P9 = u_3 .

Контрольный пример: при $I'_{\varnothing 0} / (1 - \alpha'_N \alpha'_J) = 2 \cdot 10^{-6}$ А; $I'_{K0} / (1 - \alpha'_N \alpha'_J) = 10^{-6}$ А; $\alpha'_N = 0,98$; $\alpha'_J = 0,8$; $I''_{\varnothing 0} / (1 - \alpha'_N \alpha'_J) = 10^{-5}$ А; $I''_{K0} / (1 - \alpha'_N \alpha''_J) = 2 \cdot 10^{-6}$ А; $\alpha''_N = 0,95$; $\alpha''_J = 0,8$; $\Lambda = 39$; $R_1 = 2$ МОм; $R_2 = 20$ кОм; $R_3 = 1$ кОм; $E = 5$ В, вычислив $F = 1,25$, $G = 0,468$; $H = 0,05128051$; $M = 0,08$; $N = 0,4$; $A = 7,5 \cdot 10^{-3}$; $B = 2 \times 10^{-3}$; $C = 4,75$; $D = 1,6 \cdot 10^{-2}$, получим (время счета около 15 мин) $u_1 = 0,248442$; $u_2 = 0,141251$; $u_3 = 2,662398$.

Аналогично можно составить программы анализа статического режима и для других схем включения транзисторов. Заметим, что достигаемая при вычислениях по таким программам точность результата избыточна и достаточно определять значения напряжений с точностью до 1 % от E , для чего при исходном интервале напряжений $[0; E]$ необходимо выполнить лишь 7 итераций. Поэтому при наличии свободного регистра памяти целесообразно организовать счетчик итераций с прекращением вычислений после достижения числа итераций, соответствующих требуемой точности.

Среди других методов решения нелинейных уравнений наиболее известны методы хорд и касательных Ньютона, программная реализация которых на входном языке МК21 рассмотрена в [20]. Иногда применение этих методов приводит к уменьшению времени вычислений, но их программная реализация требует большей (чем для метода половинного деления) емкости запоминающих устройств и связана с необходимостью дополнительного аналитического исследования решаемого уравнения.

4.3. Анализ нелинейных цепей при гармонических воздействиях

В радиотехнике для преобразования спектра сигналов, рассматриваемых во многих задачах как гармонические, широко используют безынерционные (для рассматриваемого диапазона частот) нелинейные цепи. Реакция $x(q)$ такой цепи на гармоническое воздействие $q(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$ будет периодической функцией времени, а составляющие ее дискретного спектра в общем случае определяются формулой (2.2). Эту формулу можно упростить, приняв $\varphi = 0$. В этом случае¹ в силу четности функции $q(t)$ независимо от вида нелинейности реакция также будет четной функцией

¹ При необходимости фазовые сдвиги $\varphi_k = k\varphi_0$ гармоник можно вычислить после определения спектральных составляющих реакции.

$$x(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos k\omega t, \quad (4.10)$$

где $A_k = \frac{2}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} x(A \cos \omega t) \cos k\omega t dt.$

При известной характеристики $x(q)$ нелинейного канала передачи сигнала после подстановки $q(t) = A \cos \omega t$ коэффициенты A_k (амплитуды гармоник) можно вычислить с помощью одной из базовых программ численного интегрирования (см. гл. 2). Задача упрощается, если характеристика канала передачи аппроксимирована степенным многочленом $x(q) = \sum_{i=0}^n a_i q^i$. В этом случае для вычисления амплитуд гармоник можно воспользоваться формулами:

$$\begin{aligned} x_0(t) &= a_n; \quad x_1(t) = a_{n-1} + (A \cos \omega t) a_n; \dots, \\ x_k(t) &= a_{n-k} + A \cos \omega t \sum_{i=0}^{k-1} A_i^{k-1} \cos i \omega t = \sum_{i=0}^k A_i^k \cos i \omega t. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Коэффициенты A_i^k этого разложения связаны с полученными на предыдущей итерации коэффициентами $A_i^{(k-1)}$ соотношениями:

$$\begin{aligned} A_0^{(k)} &= a_{n-k} + A \cdot A_1^{(k-1)} / 2; \quad A_1^{(k)} = A (A_0^{(k-1)} + A_2^{(k-1)}) / 2; \\ A_2^{(k)} &= A (A_1^{(k-1)} + A_3^{(k-1)}) / 2; \dots, \quad A_i^{(k)} = A (A_{i-1}^{(k-1)} + A_{i+1}^{(k-1)}) / 2; \dots; \\ A_{k-1}^{(k)} &= A \cdot A_{k-2}^{(k-1)} / 2; \quad A_k^{(k)} = A \cdot A_{k-1}^{(k-1)} / 2. \end{aligned}$$

При $k = n$ коэффициенты $A_i^{(n)}$ равны искомым амплитудам гармоник спектра реакции. Описанный алгоритм реализован в следующих программах, отличающихся степенью многочлена, аппроксимирующего нелинейную характеристику канала передачи.

Программа 213/21. Вычисление спектра реакции на гармоническое воздействие при аппроксимации нелинейной характеристики многочленом степени $n \geq 5$

F7	ПП	F3	F6	ПП	P3	F5	ПП	P3	F4	ПП	P3
F3	ПП	P3	F2	+	C/П	+	→	F8	↑	ПП	BП
ПП	BП	2	X	↑	←	←	XY	+	ПП	P8	↑
ПП	P8	←	↑	B/O	→	X	→	X	→	X	B/O
←	←	XY	+	←	←	XY	←	←	B/O		

Инструкция: ($a_0 = P2, a_1 = P3, a_2 = P4, a_3 = P5, a_4 = P6, a_5 = P7, A/2 = P8$) $0 = C1 = \dots = C6$ B/O C/П PX = *A₀, C1 = A₁, C2 = A₂, C3 = A₃, C4 = A₄, C5 = A₅.

Время счета около 1 мин.

Контрольный пример: при $A = 4$ и $x(q) = 1 + 1000q + 200q^2 + 100q^3 + 20q^4 + 10q^5$ получим $A_0 = 3521; A_1 = 15200; A_2 = 4160; A_3 = 4800; A_4 = 640; A_5 = 640$. При вычислении спектра для нескольких значений амплитуды воздействия целесообразно очищать регистры стека после вызова и регистрации очередного вычисленного коэффициента ($\leftarrow PX = A_1, C_X \leftarrow PX = A_2, C_X \leftarrow \dots$).

Программа 214/34. Вычисление спектра реакции на гармоническое воздействие при аппроксимации нелинейной характеристики многочленом степени $n \leq 6$

ПД	ИП6	X	П8	ИП5	П7	ИПД	2	÷	ПД
C _X	П9	ПА	ПВ	ПС	ИП8	ПП	78	ИП4	+
П7	ИП9	ПП	70	ИП3	+	П7	ИПА	ПП	62
ИП2	ПП	51	ИП1	ПП	51	ИП0	+	П7	ИПД
↑	↑	X	X	x ²	2	X	ИП6	X	ПД
C/П	+	П7	ИПД	ИПВ	X	ИПС	XY	ПС	XY
ИПА	+	ИПД	X	ИПВ	XY	ПВ	XY	ИП9	+

ИПД X ИПА XY ПА XY ИП8 + ИПД X
 ИП9 XY П9 XY ИП7 2 X + ИПД X
 ИП8 XY П8 XY ИПД X B/O

Инструкция: ($a_0 = P0, a_1 = P1, \dots, a_6 = P6$) $A = PX$ B/O C/P $PX = PD = A_6$;
 $P7 = A_0, P8 = A_1, P9 = A_2, PA = A_3, PB = A_4, PC = A_5$. Время счета около 70 с.

Контрольный пример: при $A = 4$ и $x(q) = 1 + 1000q + 200q^2 + 100q^3 + 20q^4 + 10q^5 + 2q^6$ получим $A_0 = 6081; A_1 = 15\ 200; A_2 = 8000; A_3 = 4800; A_4 = 2176; A_5 = 640; A_6 = 256$.

Эти программы особенно удобны при вычислении реакции заданной цепи на воздействия различной амплитуды. При вычислениях по следующим программам приходится вводить значения коэффициентов перед каждым пуском.

Программа 215/21. Вычисление спектра реакции на гармоническое воздействие при аппроксимации нелинейной характеристики многочленом степени $n < 11$

→	C/P	P7	F2	ПП	–	↑	F7	+	←	2	X
P7	F2	ПП	ВП	P2	F4	ПП	ВП	P3	F4	↑	F5
ПП	F7	P4	F5	↑	F6	ПП	F7	P5	F6	ПП	PC _x
P6	F7	ПП	–	B/O	↑	F3	+	↑	F8	X	←
↑	F7	XY	P7	+	↑	F8	X	B/O			

Инструкция: $0 = P2 = P3 = \dots = P7 = C1 = C2 = \dots = C6, A/2 = P8, a_n = PX$ B/O C/P $a_{n-1} = PX$ C/P $a_{n-2} = PX$ C/P $a_{n-3} = PX$ C/P $a_{n-4} = PX$ C/P ... $a_1 = PX$ C/P $a_0 = PX$ C/P $C1 = A_0, C2 = A_2, C3 = A_4, C4 = A_6, C5 = A_8, C6 = A_{10}, P2 = A_1, P3 = A_3, P4 = A_5, P5 = A_7, P6 = A_9, P7 = A_{11}$. Время обработки одного коэффициента около 30 с.

Программа 216/34. Вычисление спектра реакции на гармоническое воздействие при аппроксимации нелинейной характеристики многочленом степени $n < 10$

ИПД X	П1	C/P	П0	ИПД 2	ПС ÷	ПД
C _x	КПС	C/P	ИП1	ИПД1 X	+	ИП0 XY П0
XY	2	X	2	ПВ XY	КИПВ +	ИПД X
ИПВ	1	–	ПВ	ИПС	1	+ x ≠ 0 50
XY	КИПВ	XY	КПВ	ХY	ИПВ 2	+ БП 24
XY	КИПВ	XY	КПВ	ХY	ИПД X	КПС ИПС 1
+	ПС					

Инструкция: $A = PD, a_n = PX$ B/O C/P $a_{n-1} = PX$ C/P ... $a_1 = PX$ C/P $a_0 = PX$ C/P $P0 = A_0, P1 = A_1, \dots, P9 = A_9, PA = A_{10}$. Время выполнения программы зависит от номера коэффициента и лежит в пределах от нескольких секунд до 1 мин.

Программа 217/34. Вычисление спектра реакции на гармоническое воздействие при аппроксимации нелинейной характеристики многочленом степени $n < 12$

ИПД X	П1	C/P	П0	ИПД 2	÷	ПД	C/P		
ИП1	ПС	ИПД X	+	ИП0 XY	П0	XY	2		
X	ИП2	+	ИПД X	П1	ИП3	ИП2	ПП	82	
П2	ИП4	ИП3	ПП	82	П3	ИП5	ИП4	ПП	82
П4	ИП6	ИП5	ПП	82	П5	ИП7	ИП6	ПП	82
П6	ИП8	ИП7	ПП	82	П7	ИП9	ИП8	ПП	82
П8	ИПА	ИП9	ПП	82	П9	ИПВ	ИПА	ПП	82
ПА	ИПВ	ИПД X	ИПС	ИПД X	ПВ	ХY	ПС		
БП	09	ИПС	XY	ПС	→	+	ИПД X	B/O	

Инструкция: $0 = P0 = P1 = \dots = P9 = PA = PB = PC, A = PD, a_n = PX$ B/O C/P $a_{n-1} = PX$ C/P ... $a_1 = PX$ C/P $a_0 = PX$ C/P $P0 = A_0, P1 = A_1, \dots, P9 = A_9, PA = A_{10}, PB = A_{11}, PC = A_{12}$. Время обработки каждого коэффициента около 1 мин.

Проверить последние четыре программы можно с помощью данных контрольного

примера к программе 214/34. Программу 217/34 целесообразно использовать лишь при $10 < n \leq 12$, а при однократном вычислении амплитуд гармоник даже при $n \leq 6$ наиболее удобна программа 216/34.

Рассмотренные программы применимы также для разложения функции $\cos^k \alpha$ на сумму косинусов кратного аргумента. Для этого достаточно в исходных данных принять $a_i = 0$, кроме $a_k = 1$.

Если характеристика $x(q)$ задана табличной или графической моделью, то спектр реакции можно определить, не вычисляя коэффициенты аппроксимирующего многочлена. Например, при "слабой" нелинейности по пяти отсчетам функции в равноотстоящих узлах с шагом $A/2$ коэффициенты первых четырех гармоник и постоянную составляющую вычисляют по формулам (рис. 36, a).

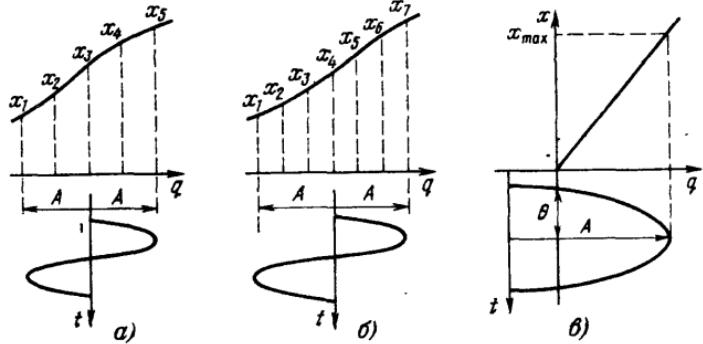


Рис. 36

$$A_0 = ((x_5 + x_1) + 2(x_4 + x_2))/6; \quad A_1 = ((x_5 - x_1) + (x_4 - x_2))/3;$$

$$A_2 = ((x_5 + x_1) - 2x_3)/4; \quad A_3 = ((x_5 - x_1) - 2(x_4 - x_2))/6;$$

$$A_4 = ((x_5 + x_1) - 4(x_4 + x_2) + 6x_3)/12.$$

(4.12)

Эти значения позволяют оценить нелинейные искажения по коэффициенту гармоник

$$K_{\text{гар}} = \sqrt{A_2^2 + A_3^2 + A_4^2} / A_1. \quad (4.13)$$

Программа 218/21. Вычисление спектра реакции и коэффициента гармоник методом пяти ординат

-	P5	-	+	2	÷	↑	F6	-	→	F7	+
↑	F8	+	3	÷	P2	←	2	÷	P4	↑	F2
-	↑	F6	+	P6	F8	↑	F7	-	P7	↑	F5
+	3	÷	P3	↑	F7	-	2	÷	P5	x^2	↑
F6	x^2	+	↑	F4	x^2	+	$\sqrt{\quad}$	↑	F3	÷	C/P

Инструкция: $x_3 = P6$, $x_2 = P7$, $x_4 = P8$, $x_5 = PY$, $x_1 = PX$ В/О С/П $PX = K_{\text{гар}}$, $P2 = A_0$, $P3 = A_1$, $P4 = A_2$, $P5 = A_3$, $P6 = A_4$. Время счета около 10 с.

Программа 219/34. Вычисление спектра реакции и коэффициента гармоник методом пяти ординат

ИП4	ИП0	+	↑	ИП1	ИП3	+	П7	2	×
+	6	÷	П9	→	ИП2	2	×	-	4
÷	ПВ	→	ИП7	4	×	-	ИП2	6	×
+	1	2	÷	ПД	ИП4	ИП0	-	↑	ИП3
ИП1	-	П8	+	3	÷	ПА	→	ИП8	2
Х	-	6	÷	ПС	x^2	ИПД	x^2	+	ИПВ
x^2	+	$\sqrt{\quad}$	ИПА	÷	C/P	БП			

Инструкция: $(x_1 = P0, x_2 = P1, x_3 = P2, x_4 = P3, x_5 = P4)$ (В/О) С/П $PX = K_{\text{гар}}$, $P9 = A_0$, $PA = A_1$, $PB = A_2$, $PC = A_3$, $PD = A_4$. Время счета около 25 с.

Контрольный пример: при $x_1 = 0,5$; $x_2 = 4,5$; $x_3 = 9$; $x_4 = 10$; $x_5 = 8$ получим $K_{\text{теп}} = 0,570962$; $A_0 = 6,25$; $A_1 = 4,333333$; $A_2 = -2,375$; $A_3 = -0,5833333$; $A_4 = -0,375$.

Приведенные программы особенно удобно использовать при многократных повторных вычислениях, например, для выбора рабочей точки активного компонента по минимуму нелинейных искажений. Точность анализа повышается с увеличением числа от счетов нелинейной характеристики. Так, при семи отсчетах характеристики в равноотстоящих узлах с шагом $A/3$ (рис. 36, б) спектральные составляющие реакции на гармоническое воздействие:

$$\begin{aligned} A_0 &= x_4 + (-270\alpha_1 + 756\alpha_2 + 334\alpha_3)/2560; \quad A_1 = (-180\beta_1 + 1008\beta_2 + 668\beta_3)/2560; \\ A_2 &= (-1215\alpha_1 + 486\alpha_2 + 559\alpha_3)/2560; \quad A_3 = (-630\beta_1 - 360\beta_2 + 450\beta_3)/2560; \\ A_4 &= (270\alpha_1 - 756\alpha_2 + 306\alpha_3)/2560; \quad A_5 = (810\beta_1 - 648\beta_2 + 162\beta_3)/2560; \\ A_6 &= (1215\alpha_1 - 486\alpha_2 + 81\alpha_3)/2560, \end{aligned} \quad (4.14)$$

где $\alpha_1 = x_5 + x_3 - 2x_4$; $\alpha_2 = x_6 + x_2 - 2x_4$; $\alpha_3 = x_7 + x_1 - 2x_4$; $\beta_1 = x_5 - x_3$; $\beta_2 = x_6 - x_2$; $\beta_3 = x_7 - x_1$.

Программа 220/21. Вычисление спектра реакции методами семи ординат

ПП	F5	ПП	РВП	ПП	РВП	F8	↑	F2	ПП	РВП	ПП
P4		ПП	PC _x	ПП	PC _x	F8	↑	F2	ПП	PC _x	ПП
→	2	5	6	0	÷	C/П	→	C _x	←	F6	↑
F4	B/O	+	↑	F5	-	↑	F5	-	↑	←	X
↑	→	→	+	↑	←	F1	←	F7	↑	F3	B/O

Инструкция: ($x_1 = P2$, $x_2 = P3$, $x_3 = P4$, $x_4 = P5$, $x_5 = P6$, $x_6 = P7$, $x_7 = P8$) 334 = C3; 756 = C2; -270 = C1 B/O C/П PX = $A_0 - x_4$; 668 = C3; 1008 = C2; -180 = C1 C/П PX = A_1 ; 559 = C3; 486 = C2; -1215 = C1 B/O C/П PX = A_2 ; 450 = C3; -360 = C2; -630 = C1 C/П PX = A_3 ; 306 = C3; -756 = C2; 270 = C1 B/O C/П PX = A_4 ; 262 = C3; -648 = C2; 810 = C1; C/П PX = A_5 ; 81 = C3; -486 = C2; 1215 = C1 B/O C/П PX = A_6 . Время выполнения программы около 20 с.

Программа 221/34. Вычисление спектра реакции методом семи ординат

ИП3	ИП5	+	ИП4	2	Х	П0	-	ИП8	Х
ИП6	ИП2	+	ИП0	-	ИП9	Х	+	ИП7	ИП1
+	ИП0	-	ИПА	Х	+	2	5	6	0
П0	÷	ИП5	ИП3	-	ИПВ	Х	ИП6	ИП2	-
ИПС	Х	+	ИП7	ИП1	-	ИПД	Х	+	ИП0
÷	C/П	БП							

Инструкция: ($x_1 = P1$, $x_2 = P2$, ..., $x_7 = P7$) -270 = P8; 756 = P9; 334 = PA; -180 = PB; 1008 = PC; 668 = PD B/O C/П PX = A_1 , PY = $A_0 - x_4$; -1215 = P8; 486 = P9; 559 = PA; -630 = PB; -360 = PC; 450 = RD C/П PX = A_3 , PY = A_2 ; 270 = P8; -756 = P9; 306 = PA; 810 = PB; -648 = PC; 162 = RD C/П PX = A_5 , PY = A_4 ; 1215 = P8; -486 = P9; 81 = PA C/П PY = A_6 .

Контрольный пример: при значениях $x_1 = x_2 = x_3 = 0$; $x_4 = 1$; $x_5 = 2$; $x_6 = 3$; $x_7 = 4$ получим $A_0 - x_4 = 0,55625$ или $A_0 = 1,55625$; $A_1 = 2,084375$; $A_2 = 0,6265625$; $A_3 = -0,2109375$; $A_4 = -0,05625$; $A_5 = 0,1265625$; $A_6 = -0,1265625$.

При кусочно-линейной аппроксимации характеристики $x(q)$ с углом отсечки θ входного сигнала $q = A \cos \omega t$ спектральные составляющие связаны с максимальным значением реакции x_{\max} (рис. 36, в) соотношением $A_k = \alpha_k(\theta)x_{\max}$. В этом случае для вычисления коэффициентов Берга $\alpha_0(\theta) = (\sin \theta - \theta \cos \theta)/(\pi(1 - \cos \theta))$; $\alpha_k(\theta) = [(\sin(k-1)\theta)/(k(k-1)) - (\sin(k+1)\theta)/(k(k+1))] / (\pi(1 - \cos \theta))$ следует воспользоваться программой 222/21.

Программа 222/21. Вычисление коэффициентов Берга

```

P3   1     8     0     ÷     ↑     π     XY    X     P4     cos     X
-     P5     F2     x = 0 P,     F4     ↑     cos     X     XY     sin     XY
БП   F7   1     +     ПП     P8     P8     F2     1     -     x = 0 6
F4   БП   БП     ПП     P8     ↑     F8     -     ↑     F5     ÷     С/П
P7   ↑     F4     X     ejx     F7     ÷     ↑     F2     ÷     B/O

```

Инструкция: ($k = P2$), $\theta^\circ = PX$ B/O C/П $PX = \alpha_k(\theta)$. Время счета около 15 с.

Контрольный пример: $\alpha_0(30^\circ) = 0,110598$; $\alpha_1(30^\circ) = 0,215223$; $\alpha_2(90^\circ) = 0,2122065$.

Иногда удобнее непосредственно вычислять амплитуды A_k гармоник реакции на воздействие $q(t) = A \cos \omega t$ при отсечке θ или коэффициенты $\gamma_k(\theta) = (1 - \cos \theta)\alpha_k(\theta)$ при заданной крутизне $S = \Delta x / \Delta q$ прямой ветви (см. рис. 36, б) аппроксимированной характеристики.

Программа 223/21. Вычисление амплитуд гармоник при отсечке гармонического воздействия

```

P2   x ≠ 0  FBП  1     -     x ≠ 0  P/-/  P6   2     +     ↑     F3
x     sin     XY     ÷     P7     F6     ↑     F3     X     sin     XY     ÷
↑     F7   -     ↑     F2     ÷     БП     F8     F3     ejx     X     ↑
F3   XY   -     БП     F8     F3     ↑     cos     X     XY     sin     XY
-     ↑     F4     X     ↑     F5     X     ↑     π     ÷     С/П

```

Инструкция: ($\theta_{\text{рад}} = P3$, $S = P4$, $A = P5$), $k = PX$ B/O C/П $PX = A_k$. Для вычисления коэффициентов $\gamma_k(\theta)$ достаточно принять $\theta_{\text{рад}} = P3$, $1 = P4 = P5$, $k = PX$ и после выполнения программы получить $PX = \gamma_k(\theta)$.

Контрольный пример: при $\theta = \pi/3$; $S = \pi$; $A = 1$ получим $A_0 = 0,3424266$; $A_1 = 0,6141847$; $A_2 = 0,4330126$.

При использовании микрокалькулятора с входным языком МК34 для одновременного вычисления коэффициентов $\alpha_k(\theta)$ и $\gamma_k(\theta)$ можно воспользоваться следующей программой.

Программа 224/34. Вычисление коэффициентов $\alpha_k(\theta)$ и $\gamma_k(\theta)$

```

π   X   1   8   0   ÷   П3   cos   1   XY
-   P4   ИП0   x = 0 24   ИП3   sin   ИП3   ↑   cos
X   -   БП   53   1   +   П5   ИП3   X   sin
ИП5   ИП0   X   ÷   П6   ИП0   1   -   x = 0 43
ИП3   БП   51   П5   ИП3   X   sin   ИП5   ИП0   X
÷   ИП6   -   π   ÷   ↑   ИП4   ÷   С/П   БП

```

Инструкция: переключатель Р–Г установить в положение Р, ($k = P0$), $\theta^\circ = PX$ (B/O) C/П $PX = \alpha_k(\theta)$, $PY = \gamma_k(\theta)$. Время счета около 15 с. Для проверки программы можно воспользоваться данными предыдущих контрольных примеров.

Анализ воздействия гармонического напряжения на полупроводниковые приборы, идеализированные $p-n$ -переходы которых описывают показательными функциями, приводит к задаче определения спектра функции

$$e^{\Lambda A} \cos \omega t = I_0(\Lambda A) + 2 \sum_{k=1}^{\infty} I_k(\Lambda A) \cos k \omega t,$$

где I_k – модифицированные функции Бесселя, разлагаемые в ряд

$$I_n(x) = \frac{1}{n!} \left(\frac{x}{2}\right)^n \left[1 + \frac{(x/2)^2}{1!(n+1)} + \frac{(x/2)^4}{2!(n+1)(n+2)} + \dots\right].$$

Программа 225/21. Вычисление модифицированных функций Бесселя

```

P3   1     P6   F3   x ≠ 0 FX   P8   ↑   F6   X   P6   F8
1     -     x = 0 P1   F2   2     ÷   ↑   x2   P5   F3   XY

```

X ^y	0	P4	F6	÷	P7	P8	F4	1	+	P4	↑
F3	+	X	↑	F5	÷	↑	F7	XY	÷	P7	↑
F8	XY	+	P8	-	x = 0	F5	F8	C/P	БП	P0	

Программа 226/34. Вычисление модифицированных функций Бесселя

P3	x = 0	04	1	P0	1	ИП0	X	L0	06	
P7	ИП3	ИП2	2	÷	x ²	П5	X ^y	√	ИП7	
÷	P7	P8	C _x	P4	КИП4	ИП4	↑	ИП3	+	
X	ИП5	÷	ИП7	XY	÷	P7	ИП8	+	P8	
BX	-	x = 0	25	ИП8	C/P	БП				

Инструкция к обеим программам: (x = P2) n = PX (B/O) C/P PX = I_n(x). Время счета зависит от значений x и n.

Контрольный пример: время вычисления I₁ (0,39) = 0,198731 составляет около 20 и 35 с по программам 225/21 и 226/34 соответственно.

При расчете смесителей и анализе побочных каналов приемных устройств оказывается необходимым определять спектр реакции при одновременном воздействии на нелинейную цепь двух гармонических колебаний. В этом случае спектр реакции наряду с гармониками каждой из частот воздействия содержит комбинационные составляющие с частотами |nω₁ ± mω₂|. При полиномиальной аппроксимации нелинейной характеристики смесителя спектр можно рассчитывать аналогично расчету спектра реакции на монохроматическое воздействие. Однако при такой схеме вычислений ограниченная емкость памяти микрокалькуляторов не позволяет использовать аппроксимацию характеристики полиномом больше 3-й степени.

Программа 227/21. Определение комбинационных частот при аппроксимации нелинейной характеристики кубическим многочленом

F7	x ²	XY	F8	x ²	+	2	÷	↑	F5	X	P6
F4	X	↑	F2	+	C/P	F6	2	÷	+	↑	F3
+	↑	F7	X	C/P	F7	2	÷	X	↑	F4	X
C/P	F5	X	2	÷	↑	F7	X	C/P	F8	X	3
X	C/P	F7	↑	F8	P7	X	XY	P8	F4	X	C/P

Инструкция: (a₀ = P2, a₁ = P3, a₂ = P4, a₃ = P5, амплитуды воздействий A₁ = P7, A₂ = P8) B/O C/P PX = A₀, C/P PX = A₁ω₁, C/P PX = A₂ω₁, C/P PX = A₃ω₁, C/P PX = A₂ω₁ ± ω₂, C/P PX = A₁ω₁ ± ω₂, B/O C/P PX = A₀, C/P PX = A₁ω₂, C/P PX = A₂ω₂, C/P PX = A₃ω₂, C/P PX = A₁ω₁ ± 2ω₂, C/P PX = A₂ω₁ ± 2ω₂, C/P PX = A₁ω₁ ± ω₂ ...

Программа 228/34. Определение комбинационных частот при аппроксимации нелинейной характеристики кубическим многочленом

ИП0	P4	ПП	32	ИП5	P6	→	ИП7	P8	→	
ИП9	ПА	→	ИПД	ПС	ПП	32	Х	ИП2	Х	
ПВ	ИП5	ИПС	+	П5	ИП6	ИПД	+	П6	C/P	
БП	00	→	↑	ИП1	X	П5	→	↑	x ²	
ИП2	X	2	÷	P7	ИП4	+	P4	→	↑	
↑	x ²	X	ИП3	X	4	÷	P9	3	X	
ИП5	+	P5	→	↑	→	x ²	X	ИП3	X	
3	X	4	÷	ПД	→	B/O				

Инструкция: (a₀ = P0, a₁ = P1, a₂ = P2, a₃ = P3) A₁ = PY, A₂ = PX (B/O) C/P PX = P6 = A₁ω₂, P4 = A₀, P5 = A₁ω₁, P7 = A₂ω₁, P8 = A₂ω₂, P9 = A₃ω₁, PA = A₃ω₂, PB = A₁ω₁ ± ω₂, PC = A₁ω₁ ± 2ω₂, PD = A₂ω₁ ± ω₂. Время счета около 40 с.

Контрольный пример: при x(q) = 3 + 5q + 10q² + 2q³ и q(t) = 3 cos ω₁t + 0,5 cos ω₂t получим A₀ = 49,25; A₁ω₁ = 56,625; A₁ω₂ = 9,4375; A₂ω₁ = 45; A₂ω₂ = 1,25; A₃ω₁ = 13,5; A₃ω₂ = 0,0625; A₁ω₁ ± ω₂ = 15; A₁ω₁ ± 2ω₂ = 1,125; A₂ω₁ ± ω₂ = 6,75.

В общем случае амплитуды комбинационных составляющих A_{nm} приходится искать с помощью преобразования Фурье

$$A_{nm} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(A_1 \cos \omega_1 t + A_2 \cos \omega_2 t) \cos ((n\omega_1 \pm m\omega_2)t) dt$$

с учетом четности функции $x(q)$ при нулевых начальных фазах воздействующих колебаний.

Пределы интегрирования становятся конечными, если частоты ω_1 и ω_2 имеют общий период T_0 и $\omega_1 = 2k\pi/T_0$; $\omega_2 = 2r\pi/T_0$ при целых числах k и r . В этом случае

$$\begin{aligned} A_{nm} &= \frac{2}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(A_1 \cos k\omega_0 t + A_2 \cos r\omega_0 t) \cos ((nk \pm mr)\omega_0 t) dt = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x(\nu) \cos (\xi\nu) d\nu, \end{aligned}$$

где $\nu = \omega_0 t$, $\xi = nk \pm mr$.

Переходя к ДПФ и учитывая четность интегрируемой функции, получаем

$$A_{nm} = \frac{2}{N} \left[\sum_{i=1}^{N-1} x(i\Delta\nu) \cos (\xi i\Delta\nu) + \frac{x(0) - x(\pi)}{2} \right],$$

где $N = \pi/\Delta\nu$ – число разбиений общего полупериода $0,5T_0$.

Программа 229/21. Вычисление амплитуд комбинационных составляющих в спектре реакции безынерционной цепи на бигармоническое воздействие

ПП	F4	π	\uparrow	F8	\div	P7	ПП	F4	\rightarrow	2	\div
\leftarrow	F8	1	-	P8	$x \neq 0 \div$	P7	ПП	F4	BП	F2	\rightarrow
C/P	F7	\uparrow	F8	X	...	B/O					.

Инструкция: записать в программу вместо многоточия операторы вычисления $\sum x(i\Delta\nu) \cos (\xi i\Delta\nu)$ по значению $i\Delta\nu = PX$; $N = P8$, $0 = C6 = P7$ B/O C/P $PX = NA_{nm}/2$.

Программа 230/34. Вычисление амплитуд комбинационных составляющих в спектре реакции безынерционной цепи на бигармоническое воздействие

P0	P1	Cx	ПД	ПП	30	π	ИП0	\div	P3
π	ПП	30	2	\div	ПД	КИП0	ИП0	ИП3	X
ПП	30	L0	17	ИПД	2	X	ИП1	\div	C/P
P2	...	ИПД	+	ПД	B/O				.

Инструкция: записать в программу вместо многоточия фрагмент вычисления $x(i\Delta\nu) \times \cos (\xi i\Delta\nu)$ по значению аргумента $i\Delta\nu = P2$ с использованием при необходимости регистров 4, ..., 9, A, B, C; $N = PX$ B/O C/P $PX = A_{nm}$.

В качестве примера рассмотрим расчет амплитуд гармоник на выходе транзисторного смесителя с характеристикой $x(u) = e^{\Lambda u}$ при воздействии в виде суммы сигнала с частотой $f_1 = 765$ кГц и амплитудой A_1 и напряжения гетеродина с частотой $f_2 = 615$ кГц и амплитудой A_2 . Частоты возбуждения: $\omega_1 = 51\omega_0$; $\omega_2 = 41\omega_0$, где $f_0 = \omega_0/(2\pi) = 15$ кГц и $q = A_1 \cos 51\nu + A_2 \cos 41\nu$. При использовании программы 229/21 занесем в память $\xi = P2$, $51 = P3$, $41 = P4$, $\Lambda A_1 = P5$, $A_2/A_1 = P6$ и заменим в программе многоточие фрагментом

\uparrow	F2	X	cos	\leftarrow	F3	X	cos	\leftarrow	F4	X	cos
\uparrow	F6	X	\uparrow	\rightarrow	+	\uparrow	F5	X	e^x	\uparrow	\rightarrow
X	\uparrow	\rightarrow	+	\leftarrow							.

Выбор числа N разбиений полупериода должен обеспечить ортогональность (по отношению к вычисляемой) остальных составляющих анализируемого спектра. Предположим, что в рассматриваемом случае допустимо пренебречь комбинационными составляющими выше 4-го порядка для напряжения гетеродина и 1-го – для напряжения полезного

сигнала. Тогда спектр будет содержать составляющие с частотами 0; 10; 31; 41; 51; 72; 82; 92; 113; 123; 133; 164; 174; 215. Для вычисления, например, нормированной частоты 31 (соответствующей сумме частот сигнала и 2-й гармоники гетеродина) необходимо выбрать нормированную частоту дискретизации $2N$ так, чтобы с учетом преобразования $v_{\text{пр}i} = |v_i \pm 2kN|$ (k – целое число) не совпала с выделяемой частотой. Например, при $N = 16$ необходимая частота будет вычислена верно (достаточно принять $\xi = 31$ или $\xi = 1$). Следует добавить, что для безынерционных преобразователей амплитуды составляющих с частотами $|nf_c + mf_g|$ и $|nf_c - mf_g|$ всегда равны и выбранное значение N позволяет рассчитать все гармоники рассматриваемого комбинационного спектра. Так, при $\xi = 31$; $A_1 = 0,01$; $A_2/A_1 = 100$ по составленной программе (время счета около 8 мин) получим $PX = 0,0108498$ или $A_{21} = 0,001356552$ после деления на $N/2 = 8$.

Отметим, что при полосе $\Delta f_{\text{пч}}$ последующего тракта изменение комбинационной частоты кратности n в этой полосе на величину $\pm \Delta f_{\text{пч}}/(2n)$ сохранит ее в полосе. В этом случае очевидно и без анализа дискретизованных частот, что выбор значения $N > \omega_{\text{max}}/\omega_0 = \omega_g/\omega_0 + \omega_c/\omega_0$ позволит правильно определить все учитываемые составляющие комбинационного спектра.

В заключении приведем программы анализа взаимных побочных каналов приема, попадающих в полосу пропускания преселектора $f_{\min} < f_c < f_{\max}$, выполненного в соответствии со следующим алгоритмом:

1. Принять $m + n = 1$; $m = 0$; $n = 1$.
2. Принять $m + n = m + n + 1$; $m = 0$; $n = (m + n) - m$ и вычислить $f_c = |mf_c \pm \pm f_{\text{пч}}|/n$. Если условие $f_{\max} > f_c > f_{\min}$ выполняется, закончить вычисления; иначе перейти к п. 3.
3. Принять $m = m + 1$; $n = m - 1$; если $(mf_g - f_{\text{пч}})/n < f_{\max}$, то перейти к п. 4, иначе к п. 2.
4. Если $n = 0$, то перейти к п. 2, иначе к п. 3.

Программа 231/21. Вычисление частот побочных каналов приема

F8	1	-	P8	0	P6	↑	F8	+	/-	P7	x ≠ 0
P0	F2	X	↑	←	F3	-	x ≥ 0	,	ПП	P7	F5
-	x < 0	P0	БП	P/- /- /-	ПП	P7	→	↑	F3	+	
ПП	P7	1	+	БП	↑	↑	F7	÷	↑	F4	-
x ≥ 0	P+	F5	-	x < 0	P+	XY	C/П	F6	B/O		

Программа 232/34. Вычисление частот побочных каналов приема

ИП8	1	-	П8	C _x	П6	ИП8	+	x ²	√		
П7	x ≠ 0	00	ИП6	ИП2	X	ПД	ИП3	-	x ≥ 0		
-30	ПП	43	XY	ИП5	-	x < 0	00	БП	34		
x ²	√	ИП	43	ИПД	ИП3	+	ПП	43	1		
+	БП	05	ИП7	÷	↑	ИП4	-	x ≥ 0	58		
XY	↑	ИП5	-	x < 0	58	XY	C/П	XY	ИП6		
										B/O	

Инструкция к обеим программам: $f_g = P2$, $f_{\text{пч}} = P3$, $f_{\min} = P4$, $f_{\max} = P5$, $0 = P8$ B/O C/П $PX = f_{c1}$, $P6 = m_1$, $P7 = n_1$ C/П ... C/П $PX = f_{ck}$, $P6 = m_k$, $P7 = n_k$.

Контрольный пример: при $f_g = 3500$ кГц; $f_{\text{пч}} = 465$ кГц; $f_{\min} = 2985$ кГц и $f_{\max} = 3085$ кГц получим $f_{c1} = 3035$ кГц ($n_1 = m_1 = 1$) соответственно через 10 и 40 с; $f_{c2} = 2994,166$ кГц; $m_2 = 5$; $n_2 = 6$ (приблизительно через 5 и 10 мин соответственно) и т. д.

Таким образом, время анализа согласно выбранному алгоритму оказывается достаточно большим.

4.4. Нелинейное программирование

Численному результату решения многих задач можно поставить в соответствие непротиворечивую вещественную функцию, называемую **целевой** и принимающую мини-

мальное значение при значениях искомых переменных, удовлетворяющих условиям задачи, включая требования качества (оптимальности) решения. Целенаправленный поиск таких оптимальных значений переменных по минимуму целевой функции относится к разделу математики, называемому *математическим программированием*.

Основная задача математического программирования (задача *оптимизации*) формулируется следующим образом: найти оптимальные значения переменных x_1, x_2, \dots, x_n , соответствующие минимуму целевой функции $\Phi(x_1, \dots, x_n) = \Phi(X)$ при ограничениях в виде равенств $H_i(X) = 0, i = 1, 2, \dots, m$, и неравенств $G_j(X) \geq 0, j = 1, 2, \dots, l$. При отсутствии ограничений решение рассматриваемой задачи называют *безусловной оптимизацией*. Если целевая функция или хотя бы одно из ограничений нелинейны относительно оптимизируемых переменных, то задачу решают методами *нелинейного программирования* [18, 24].

В пространстве оптимизируемых переменных каждой точке X с проекциями x_1, \dots, x_n на координате оси соответствует направленный в эту точку из начала координат вектор $X = [x_1 \dots x_n]$ и значение целевой функции $\Phi(X)$. Большинство итерационных методов нелинейного программирования основано на выборе на каждой итерации определенного направления в пространстве переменных и одномерного поиска вдоль выбранного направления значения вектора X , соответствующего ближайшему минимуму целевой функции. Многократное повторение таких итераций приводит к локальному или глобальному (наименьшему из локальных) минимуму целевой функции $\min \Phi(X) = \Phi(X^*)$, которому соответствует искомый оптимальный вектор (*оптимум*) X^* .

Простейшая задача одномерного поиска заключается в минимизации функции $\Phi(x)$ одной переменной и обычно состоит из трех этапов: выбора начального значения аргумента x_0 , поиска интервала, в котором находится оптимум, и сокращения ширины этого интервала до заданного значения ϵ , определяющего требуемую точность вычисления оптимума x^* . Время оптимизации существенно зависит от выбора начальной точки, но твердых правил этого выбора для произвольных функций не существует. В лучшем случае удается методами математического анализа определить область монотонного изменения функции и выбрать начальную точку x_0 на границе этой области.

Границы интервала, в котором находится оптимум, определяют, вычисляя значения функции $\Phi(x_i)$ для ряда значений аргумента, начиная с начального, с постоянным (равномерный поиск) или увеличивающимся (ускоренный поиск) шагом $h_i = x_{i+1} - x_i$. Поиск прекращают при увеличении очередного значения функции согласно соотношению

$$\dots > \Phi(x_{k-1}) > \Phi(x_k) < \Phi(x_{k+1}), \quad (4.15)$$

причем в качестве интервала, содержащего оптимум, выбирают $[x_{k-1}; x_{k+1}]$, так как меньший интервал $[x_k; x_{k+1}]$ может не содержать точки оптимума.

Среди различных методов минимизации функции одной переменной для вычислений на микрокалькуляторах удобен метод последовательного равномерного поиска, характеризующийся малым числом операций на каждой итерации и обеспечивающий совмещение этапов поиска и сокращения интервала оптимума. При использовании этого метода на p -й итерации последовательно вычисляют значения $\Phi(x_i)$ с постоянным шагом h_p до выполнения условия (4.15) и на следующей итерации для поиска другой границы интервала оптимума принимают $h_{p+1} = -h_p/a$, где a – вещественный положительный делитель. Вычисления прекращают при выполнении условия $|h_p| < \epsilon$, где ϵ – наперед заданное число, определяющее требуемую точность вычисления оптимума $x^* \pm \epsilon$. Этот алгоритм реализован в следующих базовых программах.

Программа 233/21. Минимизация функции одной переменной последовательным равномерным поиском

F4	↑	F7	+	P7	...	↑	F6	XY	P6	–	x < 0
P0	F4	a	÷	/-	P4	x^2	↑	F5	–	x < 0	P0
C/P											

Программа 234/34. Минимизация функции одной переменной последовательным равномерным поиском

ИП4 ИП7 + П7 ... ИП6 XY П6 -	$x < 0$
00 ИП4 /-/ a ÷ П4 x^2 ИП5 -	$x < 0$
00 С/П	

Инструкция к обеим программам: записать в программу вместо символа a делитель шага, а вместо многоточия фрагмент вычисления минимизируемой функции при $x = P_1 = P_7$, $(\epsilon/a)^2 = P_5$, $x_0 = P_7$, $h_0 = P_4$, $\Phi(x_0) = P_6$ В/О С/П $PX = (h^*/a)^2 - (\epsilon/a)^2$, $P_7 = x^*$, $P_4 = h^*$, $P_6 = \Phi(x^*)$. Если функцию $\Phi(x_0)$ вычислить сложно, то можно ввести $10^{99} = P_6$.

В качестве примера использования этих программ рассмотрим определение минимального по модулю отрицательного сопротивления туннельного диода на падающем участке его статической характеристики (см. рис. 32) и соответствующего напряжения на диоде.

В искомой точке производная $i'(u) = -g_d$ достигает максимального отрицательного значения. Воспользовавшись аппроксимацией (4.6) статической характеристики и выражением ее производной

$$i'(u) = A_1 (1 - \alpha_1 u) e^{-\alpha_1 u} + A_2 \alpha_2 e^{\alpha_2 u},$$

примем в качестве целевой функцию $\Phi(u) = [1/i'(u)]^2 = |R_d|^2$, достающей минимального значения в искомой точке интервала $[u'_1; u'_2]$.

Приняв $a = 2$, на основе программы 234/34 составим следующую рабочую программу.

Программа 235/34. Вычисление максимального сопротивления туннельного диода на падающем участке статической характеристики

ИП4 ИП7 + П7 ИП2 X e ^X ИП2 X ИП3	
X ИП0 ИП7 X П8 e ^X ИП8 1 + X	
ИП1 X + x ² 1/x ИП6 XY П6 - x < 0	
00 ИП4 /-/ 2 ÷ П4 x ² ИП5 - x < 0	
00 ИП6 √ С/П	

Инструкция: ($-\alpha_1 = P_0$, $A_1 = P_1$, $\alpha_2 = P_2$, $A_2 = P_3$, $(\epsilon/2)^2 = P_5$) $u'_1 = P_7$, $h_0 = P_4$, $10^{99} = P_6$ В/О С/П $PX = |R_d|$, $P_7 = u^*$, $P_4 = h^*$.

По данным контрольного примера к программе 206/34, введем исходные данные $-\alpha_1 = -10$; $A_1 = 5,43565 \cdot 10^{-2}$; $\alpha_2 = 6,493498$; $A_2 = 2,18743 \cdot 10^{-6}$; $(\epsilon/2) = 10^{-6}$; $u'_1 = 0,1$; $h_0 = 0,05$ и после выполнения программы 235/34 (время счета около 3 мин) получим $|R_d| = 136,8897 \approx 137$ Ом; $u^* = 0,1984 \pm 0,00078$ В.

В связи с простой реализацией последовательного равномерного поиска его целесообразно использовать и при одномерном поиске минимума функции нескольких переменных. В этом случае существенное значение приобретает методика выбора направления поиска на каждой итерации. Простейшие методы нелинейного программирования [19, 23] основаны на одномерном поиске по направлениям координатных осей (координатный спуск) или антиградиента, соответствующего направлению максимального уменьшения функции (скорейший спуск). При вычислениях на программируемых микрокалькуляторах целесообразен координатный спуск, реализуемый небольшим числом операторов.

При координатном спуске число операций можно уменьшить, ограничившись на каждой итерации поиском одной границы интервала оптимума по каждой координате. В этом случае траектория поиска напоминает спираль, направление которой зависит от знака начального шага.

Программа 236/21. Минимизация функции двух переменных методом спирального координатного спуска

F4 ↑ F7 + P7 ПП P5 x < 0 P0 F4 ↑ F8	
+ P8 ПП P5 x < 0 1 F4 a ÷ /-/ P4 x ²	
↑ F5 - x < 0 P0 C/П ... ↑ F6 XY P6 -	
B/O	

Программа 237/34. Минимизация функции двух переменных методом спирального координатного спуска

```

ИП4 ИП7 + П7 ПП 27 x < 0 00 ИП4 ИП8
+ П8 ПП 27 x < 0 08 ИП4 /- a ÷
П4 x2 ИП5 - x < 0 00 С/П ... ИП6 XY
П6 - B/O

```

Инструкция к обеим программам: записать в программу вместо символа a операторы набора делителя шага, вместо многоточия операторы минимизируемой функции (при $x_1 = P7$, $x_2 = P8$) $x_{10} = P7$, $x_{20} = P8$, $h_0 = P4$, $(\epsilon/a)^2 = P5$, $\Phi(X_0) = P6$ В/О С/П $PX = (h^*/a)^2 - (\epsilon/a)^2$, $P7 = x_1^*$, $P8 = x_2^*$, $P6 = \Phi(X^*)$. Вместо $\Phi(X_0)$ можно принять $1 \cdot 10^{99}$.

Контрольный пример. Минимизируем функцию $\Phi(x_1, x_2) = (x_1^2 + x_2^2 - 11)^2 + (x_1 + x_2^2 - 7)^2$, используемую [23] в качестве тестовой для сравнения качества алгоритмов нелинейного программирования при $X_0 = [1; 1]$, что при $h_0 = 1$ приводит к $\Phi(X^*) = -0$ с $X^* = [3; 2]$. При той же исходной точке, $a = 3$, $(\epsilon/3)^2 = 2,5 \cdot 10^{-9}$ программы 236/21 и 237/34 минимизируют эту функцию до значений $\Phi(X^*) = 1,88064 \cdot 10^{-7}$ и $\Phi(X^*) = 1,87361 \cdot 10^{-7}$ за 7 и 11 мин соответственно при $x_1^* = 2,99994$ и $x_2^* = 1,99994$.

Существенные трудности возникают при минимизации функций с "крутыми оврагами" – вытянутыми областями в пространстве переменных с резким возрастанием значения целевой функции по обе стороны от оси оврага. В случае овражных функций целесообразно автоматизировать лишь поиск границ области минимума по каждой переменной с прекращением вычислений после каждой итерации для регистрации результатов и выбора направления и шага поиска в соответствии с имеющейся информацией о поведении минимизируемой функции.

Программа 238/21. Поитерационная минимизация функции двух переменных поиском границ интервала оптимума

```

F4 ↑ F7 + P7 ПП Р÷ x < 0 P0 С/П F4 ↑
F8 + P8 ПП Р÷ x < 0 FXY C/П ... ↑ F6 XY
P6 - B/O

```

Программа 239/34. Поитерационная минимизация функции двух переменных поиском границ интервала оптимума

```

ИП4 ИП7 + П7 ПП 18 x < 0 00 С/П ИП4
ИП8 + П8 ПП 18 x < 0 09 С/П ... ИП6
XY П6 - B/O

```

Инструкция к обеим программам: записать в программу вместо многоточий операторы вычисления минимизируемой функции (при $x_1 = P7$, $x_2 = P8$); $x_{10} = P7$, $x_{20} = P8$, $h_0 = P4$, $\Phi(X_0) = P6$; при оптимизации по x_1 пускать программу нажатием клавиши В/О С/П, при оптимизации по x_2 – нажатием клавиш БП F XY С/П или БП 0 9 С/П соответственно (при переходе к оптимизации x_2 после оптимизации x_1 достаточно нажать клавишу С/П).

Программы 238/21 и 239/34 удобны для оптимизации овражных функций при различном выборе стратегии поиска оптимума и допускают изменение h и при необходимости x_1 и x_2 перед каждым пуском программы. Если вычисления прекращаются через один шаг после начала поиска, то в выбранном направлении значения функции возрастают и нужно изменить знак шага h перед следующим пуском программы. По мере явного приближения к минимуму уменьшают шаг h поиска, прекращая вычисления после достижения оптимума с требуемой точностью.

Среди тестовых функций, используемых для сравнения алгоритмов минимизации овражных функций [23], наиболее известна функция Розенброка $\Phi(x_1, x_2) = 100 \times (x_1^2 - x_2)^2 + (1 - x_1)^2$ с изогнутым крутым оврагом, минимумом $\Phi(X^*) = 0$ при $X^* = [1; 1]$ и началом поиска минимума из точки $X_0 = [-1,2; 1]$.

Поиск минимума вдоль оврага этой функции с помощью, например, программы 238/21 при $x_{10} = -1,2$; $x_{20} = 1$; $\Phi(X_0) = 25$ можно начать следующим образом: 0,2 = P4 В/О С/П Р7 = -0,8; Р6 = 16,2 С/П Р8 = 1,2; Р6 = 34,6; -0,2 = Р4 БП FXY С/П Р8 = 0,4; Р6 = 9; 0,2 = Р4 В/О С/П Р7 = -0,4; Р6 = 7,72 С/П Р8 = 0,6; Р6 = 21,32; -0,2 = Р4 БП FXY С/П Р8 = 0; Р6 = 4,52; 0,2 = Р4 В/О С/П Р7 = 0,4; Р6 = 2,92 С/П Р8 = 0,4; Р6 = 6,12 ...

Таким образом, данный алгоритм обеспечивает достаточно быстрый спуск вдоль крутого оврага функции Розенброка. Благодаря небольшому числу операторов, необходимых для реализации этого алгоритма, с его помощью можно минимизировать функции с большим числом переменных. Программная реализация алгоритма на входном языке МК21 для минимизации функции трех переменных сохраняет свободным 24 ячейки программной памяти для организации вычисления функции. Значительно большими возможностями отличается, например, следующая программа на входном языке МК34.

Программа 240/34. Поитерационная минимизация функции шести переменных поиском границ интервала оптимума

ИП0	ИП1	+	П1	ПП	54	$x < 0$	00	С/П	ИП0
ИП2	+	П2	ПП	54	$x < 0$	09	С/П	ИП0	ИП3
+	П3	ПП	54	$x < 0$	18	С/П	ИП0	ИП4	+
П4	ПП	54	$x < 0$	27	С/П	ИП0	ИП5	+	П5
ПП	54	$x < 0$	36	С/П	ИП0	ИП6	+	П6	ПП
54	$x < 0$	45	С/П	...	ИПД	ХУ	ПД	-	В/О

Инструкция: записать в программу вместо многоточия операторы вычисления минимизируемой функции (при $x_1 = P1, x_2 = P2, \dots, x_6 = P6$); $x_{10} = P1, x_{20} = P2, \dots, x_{60} = P6, h = P0, \Phi(X_0) = PД$; пускать программу при оптимизации переменной x_1 нажатиями клавиш В/О и С/П, переменной x_2 – БП 09 С/П, переменной x_3 – клавиш БП 18 С/П, переменной x_4 – клавиш БП 27 С/П, переменной x_5 – клавиш БП 36 С/П, переменной x_6 – клавиш БП 45 С/П; при спиральном спуске нажимать клавишу (В/О) С/П; после каждого выполнения программы $PД = \Phi(X^*)$, $P1 = x_1^*, P2 = x_2^*, \dots, P6 = x_6^*$.

Контрольный пример: минимизировать функцию шести переменных

$$\Phi(X) = \exp\left(\sum_{i=1}^6 x_i\right) / \prod_{i=1}^6 x_i^i$$

с ограничениями $x_i > 0$ и оптимумом $X^* = [1; 2; 3; 4; 5; 6]$.

Запишем в программу 240/34 фрагмент вычисления заданной функции

ИП1	ИП2	+	ИП3	+	ИП4	+	ИП5	+	ИП6
+	e^x	ИП1	\div	ИП2	x^2	\div	ИП3	\uparrow	x^2
x	\div	ИП4	x^2	x^2	\div	ИП5	\uparrow	x^2	x^2
x	\div	ИП6	x^2	\uparrow	x^2	x	\div		

При $x_{10} = x_{20} = x_{30} = x_{40} = x_{50} = x_{60} = h = 0,1$; $\Phi(X_0) = 1,8221188 \cdot 10^{21}$ на первом витке спирального спуска получим: В/О С/П Р1 = 1,1; РД = $4,50275 \cdot 10^{10}$ С/П Р2 = 2,1; РД = $7,54447 \cdot 10^{18}$ С/П Р3 = 3,1; РД = $5,08659 \cdot 10^{15}$; С/П Р4 = 4,1; РД = $9,82810 \cdot 10^{10}$ С/П Р5 = 5,1; РД = $4,2275731$ С/П Р6 = 6,1; РД = $3,3103895 \cdot 10^{-4}$. Время первого выполнения программы около 190 с, последующих – приблизительно $190i$, где i – номер переменной.

При выборе на следующих витках $h_2 = -0,02$; $h_3 = 0,005$; $h_4 = -0,001$ после четвертого витка получим $\Phi(X^*) = 3,2716195 \cdot 10^{-4}$ при $X^* = [0,999; 1,999; 2,999; 3,999; 4,999; 5,999]$.

Если фрагмент вычисления целевой функции не помещается в свободной части программной памяти, то достаточно автоматизировать только вычисление функции с регистрацией в вычислительном бланке результатов для выбора направления и шага поиска на

каждой итерации в соответствии с накапливаемой информацией о поведении функции. Следует отметить, что при поиске оптимальных значений переменных методами нелинейного программирования приходится многократно повторять вычисления минимизируемой функции, что связано со значительными затратами времени. Поэтому к таким методам следует прибегать лишь тогда, когда решение задачи нельзя найти другими методами с меньшими затратами времени.

4.5. Расчет динамических характеристик нелинейных цепей

При анализе нелинейной цепи в динамическом режиме в общем случае приходится решать систему нелинейных дифференциальных уравнений, обычно представляемую в нормальной форме Коши:

$$x'_1 \equiv dx_1/dt = f_1(x_1, \dots, x_n, t); \dots x'_n \equiv dx_n/dt = f_n(x_1, \dots, x_n, t).$$

В простейшем численном методе решения такой системы, называемом методом Эйлера, каждое последующее значение $x_{i,k+1}$ переменной вычисляют через интервал времени (шаг интегрирования) h по предыдущим значениям $x_{i,k}$:

$$x_{1,k+1} = x_{1,k} + h f_1(x_{1,k}, \dots, x_{n,k}, t_k); \dots x_{n,k+1} = x_{n,k} + h f_n(x_{1,k}, \dots, x_{n,k}, t_k).$$

Простота программной реализации метода Эйлера позволяет с помощью программируемых микрокалькуляторов автоматизировать решение систем, содержащих до трех или даже четырех несложных уравнений.

Программа 241/21. Решение системы из двух дифференциальных уравнений методом Эйлера

...	↑	F2	×	↑	F7	+	P6	...	↑	F2	×
↑	F8	+	P8	F2	↑	F3	+	P3	F6	P7	C/P

Программа 242/34. Решение системы из двух дифференциальных уравнений методом Эйлера

...	ИП2	×	ИП7	+	P6	...	ИП2	×	ИП8
+	P8	ИП2	ИП3	+	P3	ИП6	P7	C/P	

Инструкция: записать в программу вместо первого и второго многоточий соответственно фрагменты вычисления правой части второго и первого уравнений (при $t = P3, x_2 = P7, x_1 = P8$); $t_0 = P3, h = P2, x_{2,0} = P7, x_{1,0} = P8$ C/P $PX = P7 = x_{2,1}, P8 = x_{1,1}, P3 = t_1$ B/O C/P ... B/O C/P $PX = P7 = x_{2,k}, P8 = x_{1,k}, P3 = t_k$. Если имеются свободные ячейки программной памяти, то целесообразно заменить оператор C/P соответственно операторами C/P БП Р0 или C/P БП.

Программа 243/21. Решение системы из трех дифференциальных уравнений методом Эйлера

...	↑	F2	×	↑	F6	+	←	...	↑	F2	×
↑	F7	+	←	...	↑	F2	×	↑	F8	+	P8
F2	↑	F3	+	P3	→	P7	→	P6	C/P		

Программа 244/34. Решение системы из трех дифференциальных уравнений методом Эйлера

...	ИП2	×	ИП6	+	P9	...	ИП2	×	ИП7
+	P5	...	ИП2	×	ИП8	+	P8	ИП2	ИП3
+	P3	ИП5	P7	ИП9	P6	C/P			

Инструкция: записать в программу вместо многоточий соответственно фрагменты вычисления $f_1(x_1, x_2, x_3, t), f_2(x_1, x_2, x_3, t)$ и $f_3(x_1, x_2, x_3, t)$ при $t = P3, x_1 = P6, x_2 = P7, x_3 = P8$; ввести $h = P2, t_0 = P3, x_{1,0} = P6, x_{2,0} = P7, x_{3,0} = P8$ B/O C/P ... B/O C/P $PX = P6 = x_{1,k}, P7 = x_{2,k}, P8 = x_{3,k}, P3 = t_k$.

В качестве примера рассмотрим переходный процесс в цепи, эквивалентная схема которой приведена на рис.37, при включении гармонического сигнала. Необходимость

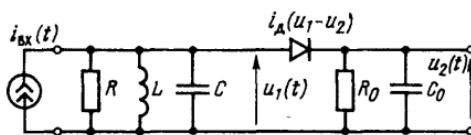


Рис. 37

$$i_{bx}(t) = i_L + u_1/R + Cdu_1/dt + i_D(u_1 - u_2); \quad u_1 = Ldi_L/dt;$$

$$i_D(u_1 - u_2) = u_2/R_h + C_hdu_2/dt$$

и воспользовавшись экспоненциальной аппроксимацией характеристики диода $i_D(u_1 - u_2) = I_0(\exp(\Lambda(u_1 - u_2)) - 1)$, приведем систему к нормальной форме:

$$du_1/d\tau = \rho(i_{bx}(t) - i_L - I_0(\exp(\Lambda(u_1 - u_2)) - 1)) - u_1/Q; \quad di_L/d\tau = u_1/\rho;$$

$$du_2/d\tau = \alpha I_0(\exp(\Lambda(u_1 - u_2)) - 1) - u_2/(\omega_p R_h C_h),$$

где $\rho = \sqrt{L/C}$, $Q = \omega_p RC$, $\omega_p = 1/\sqrt{LC}$, $\alpha = C/C_h$ и "безразмерное" время $\tau = \omega_p t$.

Составляя рабочую программу, учтем, что при использовании метода Эйлера шаг интегрирования h должен быть достаточно малым, но регистрация чрезмерно большого числа точек затруднит анализ. Поэтому введем в программу счетчик, выводящий результаты вычислений после заданного числа шагов. Для этого ограничимся случаем совпадения частоты воздействия с резонансной частотой контура и примем $\Lambda = 39$ Гц.

Программа 245/34. Анализ переходных процессов в амплитудном детекторе

П0	ИП7	ИП6	-	3	9	x	e^x	1	-
ИП4	x	↑	ИПД	ИПА	x	x	ИП6	ИПС	÷
-	ИП2	x	ИП6	+	П9	XY	ИП8	+	ИП3
sin	ИП1	x	XY	-	ИПА	x	ИП7	ИПВ	÷
-	ИП2	x	ИП7	+	П5	ИП7	ИПА	÷	ИП2
x	ИП8	+	П8	ИП2	ИП3	+	П3	ИП5	П7
ИП9	П6	L0	01	C/P	1	0	П0	БП	

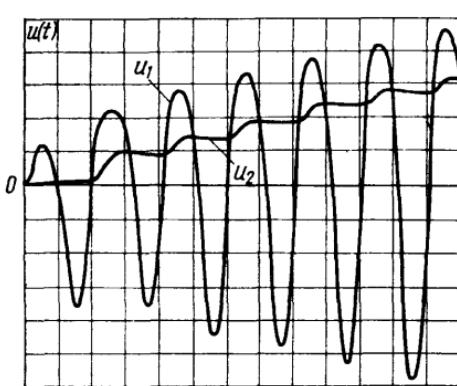


Рис. 38

в таком анализе возникает при детектировании широкополосного сигнала, когда известные приближенные методы линеаризации приводят к значительной погрешности.

Составив систему уравнений равновесия

$$i_{bx}(t) = i_L + u_1/R + Cdu_1/dt + i_D(u_1 - u_2); \quad u_1 = Ldi_L/dt;$$

$$i_D(u_1 - u_2) = u_2/R_h + C_hdu_2/dt$$

$$\text{где } \rho = \sqrt{L/C}, \quad Q = \omega_p RC, \quad \omega_p = 1/\sqrt{LC}$$

$$\text{и } \alpha = C/C_h \text{ и "безразмерное" время } \tau = \omega_p t.$$

$$\text{Составляя рабочую программу, учтем, что при использовании метода Эйлера шаг интегрирования } h \text{ должен быть достаточно малым, но регистрация чрезмерно большого числа точек затруднит анализ. Поэтому введем в программу счетчик, выводящий результаты вычислений после заданного числа шагов. Для этого ограничимся случаем совпадения частоты воздействия с резонансной частотой контура и примем } \Lambda = 39 \text{ Гц.}$$

$$\text{Программа 245/34. Анализ переходных процессов в амплитудном детекторе}$$

$$\text{П0 ИП7 ИП6 - 3 9 x } e^x 1 -$$

$$\text{ИП4 x } \uparrow \text{ ИПД ИПА x x ИП6 ИПС } \div$$

$$- \text{ ИП2 x ИП6 + П9 XY ИП8 + ИП3}$$

$$\text{sin ИП1 x XY - ИПА x ИП7 ИПВ } \div$$

$$- \text{ ИП2 x ИП7 + П5 ИП7 ИПА } \div \text{ ИП2}$$

$$x \text{ ИП8 + П8 ИП2 ИП3 + П3 ИП5 П7}$$

$$\text{ИП9 П6 L0 01 C/P 1 0 П0 БП}$$

Инструкция: амплитуда $I_{bx} = P1$, $h = P2$, $\tau_0 = P3$, $I_0 = P4$, $u_{10} = P6$, $u_{20} = P7$, $i_{L0} = P8$, $\rho = PA$, $Q = PB$, $\omega_p R_h C_h = PC$, $\alpha = PD$, $10 = PX$ В/О С/П $PX = u_2(10h)$ В/О С/П $PX = u_2(20h)$ В/О С/П ... В/О С/П $PX = u_2(10h)$, $P7 = u_1(k10h)$, $P8 = i_L(k10h)$, $P3 = \tau_0 + k10h$.

При $h = \pi/50$; $I_{bx} = 0,2$ мА; $I_0 = 10^{-3}$ мА; $\rho = 1$ кОм; $Q = 10$; $\omega_p R_h C_h = 100$; $\alpha = 0,1$ и нулевых начальных условиях получим $u_2(T/10) = 3,28061 \cdot 10^{-5}$; $u_2(T/5) = 1,05032 \cdot 10^{-3}$; ..., где $T = 2\pi/\omega_p$. Время выполнения программы около 4 мин.

Результаты вычислений приведены в виде графиков на рис. 38.

В рассмотренной задаче резкое изменение значения экспоненциального члена при нарастании входного напряжения заставляет для уменьшения методической погрешности выбирать очень малый шаг интегрирования, что, в свою очередь, приводит к увеличению операционной составляющей погрешностей результатов расчета.

Меньшей методической погрешностью отличается модифицированный метод Эйлера, согласно которому

$$x_{1,k+1} = x_{1,k} + hf_1(x_{1,k} + hx'_{1,k}/2, \dots, x_{n,k} + hx'_{n,k}/2, t_k + h/2);$$

$$x_{n,k+1} = x_{n,k} + hf_n(x_{1,k} + hx'_{1,k}/2, \dots, x_{n,k} + hx'_{n,k}/2, t_k + h/2).$$

Реализовать этот метод на микрокалькуляторах с рассматриваемыми входными языками в автоматическом режиме удается не более чем для двух уравнений, образующих систему.

Программа 246/21. Решение системы из двух дифференциальных уравнений модифицированным методом Эйлера

ПП	P÷	X	P2	F3	+	P3	ПП	P÷	÷	P2	↑
F3	+	P3	F7	P8	F5	P6	C/P	...	↑	F2	X
↑	F6	+	←	...	↑	F2	X	↑	F8	+	P7
→	P5	F2	2	B/O							

Программа 247/34. Решение системы из двух дифференциальных уравнений модифицированным методом Эйлера

ПП	22	ИП3	+	П3	ИП2	2	X	P2	ПП
22	2	÷	P2	ИП3	+	П3	ИП7	P8	ИП5
П6	C/P	...	ИП2	X	ИП6	+	П4	...	ИП2
X	ИП8	+	P7	ИП4	P5	ИП2	B/O		

Инструкция к обеим программам: записать в программу вместо многоточий фрагменты вычисления соответственно $f_1(x_1, x_2, t)$ и $f_2(x_1, x_2, t)$ по значениям $x_1 = P5$, $x_2 = P7$, $t = P3$, ввести $h/2 = P2$, $t_0 = P3$, $x_{1,0} = P5 = P6$, $x_{2,0} = P7 = P8$ B/O C/P B/O C/P PX = P5 = P6 = $x_{1,k}$, $P7 = P8 = x_{2,k}$, $P3 = t_k$.

Эти программы существенно упрощаются при решении одного дифференциального уравнения. В качестве примера рассчитаем переходные процессы в цепи, образованной последовательным соединением полупроводникового диода, резистора R и идеального источника напряжения $u_{bx}(t)$. С учетом нелинейных емкостей диода с несимметричным резким $p-n$ -переходом составим дифференциальное уравнение

$$u_{bx}(t) = u_d(t) + R [I_0 (\exp(\Lambda u_d(t)) - 1) + (\Lambda I_0 \tau \exp(\Lambda u_d(t))) / 2 + \alpha / \sqrt{u_b - u_d(t)} du_d(t) / dt],$$

где $u_d(t)$ – напряжение на диоде, а остальные обозначения соответствуют общепринятым для полупроводниковых приборов.

Для сокращения числа исходных данных обозначим $A = -I_0 R$, $\beta = \Lambda I_0 \tau / 2\alpha$, $\gamma = \alpha R$, $x = u_d(t)$, $q = u_{bx}(t)$. Тогда

$$dx/dt = (q - x + A(e^{\Lambda x} - 1)) / (\beta e^{\Lambda x} + 1/\sqrt{u_b - x}) \gamma.$$

Составляя программы, учтем, что при вводе воздействия перед каждым выполнением программы правая часть уравнения не зависит в явном виде от t , а шаг интегрирования в процессе вычислений делится на коэффициент γ . Записав $\Lambda = 39.1/8$ в текст, с учетом приведенных замечаний составим следующую программу, обеспечивающую достаточно точное решение рассматриваемой задачи.

Программа 248/21С. Анализ переходных процессов в цепи с инерционным диодом

→	ПП	X	X	P2	←	←	P8	ПП	X	÷	P2
F7	P6	C/P	БП	P0	F7	3	9	X	e ^X	1	–
→	F4	X	→	F5	↑	F7	–	√	1/x	↑	←
+	←	↑	F3	X	↑	F8	+	↑	F7	–	↑
→	÷	↑	F2	X	↑	F6	+	P7	F2	2	B/O

Инструкция: $h/2\gamma = P2$, $A = P3$, $\beta = P4$, $u_b = P5$, $x_0 = P6 = P7$, $q_0 = P8$, $q_1 = PX$ B/O C/P PX = x_1 , $q_2 = PX$ C/P PX = x_2 , . . . , $q_n = PX$ C/P PX = x_n . Время счета около 20 с.

Контрольный пример: для $A = -10^{-4}$, $\beta = 2$, $u_b = 1$, $h/2\gamma = 0,005$ и нулевых начальных условий при воздействии $q_i = 1$ получим $x_i = 0,003333333; 0,00624377; 0,00892702; \dots$

При решении одного дифференциального уравнения 1-го порядка целесообразно использовать метод Рунге – Кутта 4-го порядка, характеризующийся высокой точностью и широко используемый при расчетах на ЭВМ. Согласно этому методу каждое последующее значение искомой функции вычисляют по формуле

$$x_{k+1} = x_k + (g_1 + 2g_2 + 2g_3 + g_4)/6; k = 0, 1, 2, \dots,$$

где $g_1 = hf(x_k, t_k)$; $g_2 = hf(x_k + g_1/2, t_k + h/2)$; $g_3 = hf(x_k + g_2/2, t_k + h/2)$; $g_4 = hf(x_k + g_3, t_k + h)$.

Программа 248/21. Решение дифференциального уравнения методом Рунге – Кутта 4-го порядка

ПП	F4	ПП	P÷	+	P4	ПП	F4	+	P4	F7	+
P7	ПП	P÷	3	÷	P7	P8	C/П	F2	↑	F3	+
P3	...	↑	F2	X	↑	F8	+	P7	F4	+	P4
B/O											

Программа 249/34. Решение дифференциального уравнения методом Рунге – Кутта 4-го порядка

ПП	27	ПП	23	+	P4	ПП	27	+	P4		
XY	ИП7	+	П7	ПП	23	3	÷	П7	П8		
C/П	БП	00	ИП2	ИП3	+	П3	...	ИП2	X		
↑	ИП8	+	П7	XY	↑	↑	ИП4	+	P4		
B/O											

Инструкция к обеим программам: записать вместо многоточия фрагмент вычисления правой части уравнения по значениям $t = P3$, $x = P7$; ввести $h/2 = P2$, $t_0 = P3$, $3x_0 = P4$, $x_0 = P7 = P8$ B/O C/П $PX = x_1$ C/П $PX = x_2 \dots$ C/П $PX = x_k$ (при использовании программы 248/21 для каждого пуска нажимать клавиши B/O и C/П).

В качестве примера исследуем процесс опрокидывания триггера на туннельном диоде (рис. 39, а) при $C \gg C_D$. Апроксимируя статическую характеристику диода выражением (4.6), на основании баланса токов $i_D - (E_0 - u)/R - (u_3 - u)/R_0 + Cdu/dt = 0$, обозначая $x = \alpha_1 u$, $y = \omega_3 R_3/R_0$, $R_3 = RR_0/(R + R_0)$, $\tau = t/CR_3$, $A = A_1 R_3$, $B = A_2 R_3 \alpha$, $\beta = \alpha_2/\alpha_1$, $D = \alpha(A_2 R_0 + R_3 E_0/R)$, получаем

$$dx/d\tau = y - x(1 + Ae^{-x}) - Be^{\beta x} + D.$$

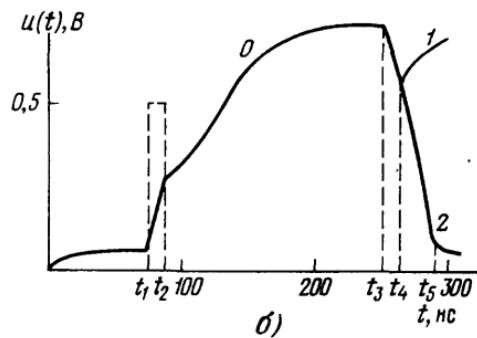
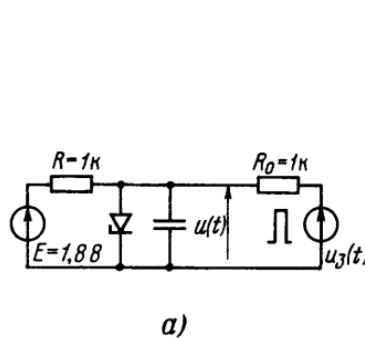


Рис. 39

Для анализа поведения триггера при произвольном воздействии значение u нормированного запускающего напряжения будем вводить в регистр X перед каждым пуском программы. В этом случае правая часть уравнения окажется независимой в явном виде от времени, что позволит исключить из базовой программы фрагмент, вычисляющий изменение переменной τ . Обеспечив запись значения $h/2 = 1/20$ в текст и запись вводимого воздействия в стек памяти, составим следующую рабочую программу.

Программа 250/21С. Анализ режима запуска триггера на туннельном диоде

←	ПП	3	ПП	3	+	P4	ПП	3	+	P4	F7
+	P7	ПП	3	3	÷	P7	P8	C/П	F7	↑	e ^x
÷	←	F6	X	e ^x	↑	F3	X	↑	→	+	↑
F2	X	↑	F7	+	↑	F5	—	2	0	→	XY
—	XY	←	÷	↑	F8	+	P7	F4	+	P4	B/O

Инструкция: $A = P2$, $B/A = P3$, $D = P5$, $\beta = P6$, $x_0 = P7 = P8$, $3x_0 = P4$, $y_0 = PX$ B/O C/P $PX = x_1$, $y_1 = PX$ B/O C/P $PX = x_2$, $y_2 = PX$ B/O C/P $PX = x_3 \dots$

Контрольный пример: при $R = R_0 = 1$ кОм; $C = 100$ пФ; $E_0 = 1,8$ В; $A_1 = 0,05$ А; $A_2 = 2,2 \cdot 10^{-6}$ А; $\alpha_1 = 10$ 1/В; $\alpha_2 = 6,5$ 1/В и вычислив $A = 25$; $B/A = 4,4 \cdot 10^{-4}$; $D = 9,011$; $\beta = 0,65$, а также приняв $x = 10u$; $y = 5u_3$, $\tau = 2 \cdot 10^7 t$ (в этом случае $h = 5 \cdot 10^{-9}$ с), получим оценку процесса установления после включения источника питания: $0 = P4 = P7 = P8$ B/O C/P $PX = 0,430988$ C_x B/O C/P $PX = 0,5324294 \dots$ B/O C/P $PX = 0,626000$ (первое устойчивое состояние). При подаче положительного импульса длительностью $10 \cdot 10^{-9}$ с и напряжением 2 В находим: $10 = PX$ B/O C/P $PX = 1,527229$ $10 = PX$ B/O C/P $PX = 2,552498$ C_x B/O C/P \dots C_x B/O C/P $PX = 7,481831$ (второе устойчивое состояние).

Результаты расчета приведены на рис. 39, б (восходящая начальная часть характеристики – кривая 0). Там же показана расчетная реакция триггера на опрокидывающий импульс напряжением –2 В с длительностью 10 нс (ветвь 1) и 40 нс (ветвь 2), соответствующей интервалам $[t_3; t_4]$ и $[t_3; t_5]$. В рассматриваемой цепи динамическая постоянная времени существенно зависит от уровня сигнала, и для уменьшения времени вычислений целесообразно изменять шаг интегрирования в процессе вычислений, сохраняя, однако, его значение таким, при котором методическая погрешность остается достаточно малой (о чем можно судить по приращению переменной x_i на каждой итерации).

В некоторых случаях удается уменьшить объем вычислений, учитывая особенности анализируемой цепи. Так, если итерационная цепь содержит только безынерционные нелинейные элементы при кусочно-линейной аппроксимации их характеристик, то анализ реакции цепи на произвольное воздействие сводится к расчету процессов в линейной цепи, параметры которой изменяются при каждом изломе кусочно-линейных характеристик. Получив аналитические выражения для каждого из линейных участков и "шив" решения на их границах, можно составить расчетные выражения для решения задачи. Однако при практической реализации этого метода могут возникнуть затруднения в определении моментов времени, соответствующих переходу от одного линейного участка характеристик к другому.

Проиллюстрируем особенности этого метода на примере анализа двустороннего диодного ограничителя с емкостной нагрузкой (рис. 40, а) при аппроксимации характеристик диодов отрезками прямых с $R_D = \infty$ при $u_D < 0$ и $R_D = \text{const}$ при $u_D \geq 0$ и пренебрежении емкостью диодов.

При воздействии гармоническим напряжением $u_1(t) = U_1 \cos(\omega t + \varphi)$ с амплитудой $U_1 > E\sqrt{1 + \omega^2 \tau^2}$, где $\tau = RC$, в анализируемой цепи возможны два режима:

1. При $|u_2(t)| < |E|$ оба диода смешены в обратном направлении и справедлива эквивалентная схема, показанная на рис. 40, б, где $i(t) = U_1 \cos \omega t / R$. В этом случае

$$u_2(t) = (U_1 / \sqrt{1 + \omega^2 \tau^2}) \left\{ (\cos[(\omega(t - t_i)) + \varphi - \psi]) - \cos(\varphi - \psi) \right\} \exp(-(t - t_i)/\tau) + u_2(t_i) \exp(-(t - t_i)/\tau),$$

где $t \in [t_i; t_{i+1}]$, $\psi = \arctg \omega t$, t_i – момент перехода цепи в рассматриваемое состояние.

2. При $|u_2(t)| \geq |E|$ один из вентилей открыт и цепь описывается эквивалентной схемой (см. рис. 40, б), при $i(t) = i_1(t) = U_1 \cos \omega t / R_1 \pm E / R_D$, а $R_1 = RR_D / (R + R_D)$;

$$u_2(t) = (U_1 R_D / (R + R_D) \sqrt{1 + \omega^2 \tau_1^2}) (\cos(\omega(t - t_j) + \varphi - \psi_1) - \cos(\varphi - \psi_1)) \times \exp(-(t - t_j)/\tau_1) \pm ER / (R + R_D) + (U_1(t_j) \mp ER(R + R_D)) \exp(-(t - t_j)/\tau_1),$$

где $\tau_1 = R_1 C$; $\psi_1 = \arctg \omega t_1$, t_j – момент перехода цепи в рассматриваемое состояние.

Приняв обозначения $A_1 = U_1 / \sqrt{1 + \omega^2 \tau^2}$; $A_2 = U_1 R_D / (R + R_D) \sqrt{1 + \omega^2 \tau_1^2}$; $\theta_1 =$

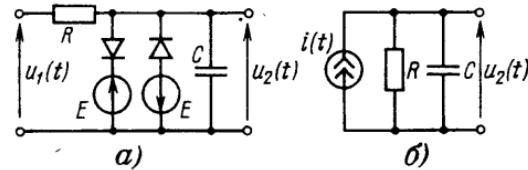


Рис. 40

$= \varphi - \psi$; $\theta_2 = \varphi - \psi_1$; $B_1 = 0$; $B_2 = ER/(R + R_D)$; $D_1 = u_2(t_i)$; $D_2 = (U_1(t_j) - B_2)$; $\beta_1 = 1/\omega\tau$, $\beta_2 = 1/\omega\tau_1$, $x = \omega t$, выражения для обоих режимов можно обобщить:

$u_2(x) = A_k(\cos(x - x_k + \theta_k) - \cos \theta_k \exp(-\beta_k(x - x_k)) + B_k + D_k \exp(-\beta_k(x - x_k)))$.

Программу для вычисления по этой формуле несложно составить на входном языке программируемого микрокалькулятора любого типа. Алгоритм вычислений при допущении $u_2(0) = 0$ можно описать следующим образом:

1. Принять $x_k = 0$; $k = 1$, $B_k = D_k = 0$ и, последовательно вычисляя значения $u_2(x)$, определить момент времени x_1 , при котором впервые выполнится равенство $|u_2(x_1)| = |E|$.

2. Принять $x_k = x_1$; $A_k = A_2$; $\theta_k = \theta_2$; $\beta_k = \beta_2$; $B_k = \pm ER/(R + R_D)$; $D_k = \pm E(1 - R/(R + R_D))$, выбрав знаки, соответствующие знаку напряжения $u_2(x_1)$, и повторяя вычисления $u_2(x)$ до момента времени x_2 , при котором $u_2(x_2) = u_2(x_1)$.

3. Принять $x_k = x_2$, $A_k = A_1$, $\theta_k = \theta_1$, $\beta_k = \beta_1$, $B_k = 0$; $D_k = \pm E$ (со знаком, совпадающим со знаком $u_2(x_2)$) и определить x_3 по условию $u_2(x_3) = -u_2(x_2)$, после чего перейти к п. 2.

Степень автоматизации вычислений можно повысить при резерве памяти микрокалькулятора, но в рассматриваемой цепи уже после одного периода воздействующего напряжения устанавливается режим, представляющий практический интерес. Значительно больших затрат времени (как при решении дифференциальных уравнений, так и при использовании кусочно-линейной аппроксимации нелинейных характеристик) требует анализ установления процессов в нелинейных цепях, содержащих высокодобротные колебательные контуры.

4.6. Анализ автоколебаний в нелинейных цепях

Анализ устойчивости нелинейной цепи начинают с определения ее возможных состояний статического равновесия. Для этого решают нелинейное уравнение, получаемое из дифференциального уравнения, описывающего поведение цепи при $d^n x_i / dt^n \equiv 0$, $n \geq 1$. Методы решения таких задач и их программные реализации рассмотрены в § 4.3.

Последующий анализ связан с определением дифференциальных (слабосигнальных) параметров нелинейных элементов в каждом из найденных состояний равновесия. В связи с большой операционной погрешностью при вычислениях на ЭВМ численное дифференцирование используют редко. Однако в инженерных приложениях, когда точность моделирования нелинейных характеристик низка и они относительно гладки, вычисления при восьмиразрядных операндах обеспечивают приемлемую точность численного дифференцирования: обычно три-четыре верных цифры.

Программа 251/21. Вычисление дифференциальных параметров нелинейных элементов

↑	F2	-	+	2	÷	ПП	P4	P4	F3	↑	F2
+	ПП	P4	↑	F4	-	↑	F2	÷	C/P	БП	P0
P3	...	B/O									

Программа 252/34. Вычисление дифференциальных параметров нелинейных элементов

↑	ИП2	-	+	2	÷	ПП	21	П4	ИП3
ИП2	+	ПП	21	ИП4	-	ИП2	÷	C/P	БП
00	П3	...	B/O						

Инструкция к обеим программам: записать в программу вместо многоточия фрагмент вычисления нелинейной функции $x(q)$ по значению аргумента, хранящемуся в регистрах X и 3; $\Delta q = P2$, $q = PX$ (B/O) C/P $PX = \Delta x(q)/\Delta q \approx dx(q)/dq$, $P4 = x(q - \Delta q/2)$. Точность результата оценивают по его изменению при изменении Δq .

Контрольный пример: для зависимости $i_d(u) = Aue^{-\alpha u} + B(e^{\beta u} - 1)$, записав $A =$

= P5, $\alpha = P6$, $B = P7$, $\beta = P8$ и составив фрагмент вычисления функции, например, на языке МК21С,

\uparrow	F8	\times	e^x	\leftarrow	F6	\times	e^x	\div	\uparrow	F5	\times
\rightarrow	1	-	\uparrow	F7	\times	\uparrow	\leftarrow	+	B/O		

при $A = 0,05$; $\alpha = 10$; $B = 2,2 \cdot 10^{-6}$; $\beta = 6,5$; $\Delta u = 0,001$; $u = 0,05$ получим $g_d = = di/du \approx 0,0151832$ (См) или $R_d = 1/g_d = 65,86226$ Ом.

Полученные значения дифференциальных параметров позволяют построить линейное приближение характеристики в окрестности точки равновесия и проанализировать устойчивость методами, рассмотренными в § 3.6. Если цепь устойчива во всех состояниях статического равновесия, то автоколебания не возникают. Если же цепь неустойчива во всех состояниях равновесия, то в ней возникают автоколебания. Когда цепь устойчива лишь в некоторых состояниях равновесия, необходим анализ ее поведения вблизи каждого неустойчивого состояния с учетом нелинейности.

Анализ формы автоколебаний, строго говоря, требует решения нелинейных дифференциальных уравнений, описывающих рассматриваемую цепь, например, рассмотренными в § 4.5 методами. При практическом применении программ, реализующих эти методы, следует учитывать, что автоколебания исследуют в пренебрежении внешними воздействиями (исключением являются задачи синхронизации автогенераторов и анализ параметрических систем) и решаемое уравнение является однородным, а его коэффициенты явно не зависят от времени. Это позволяет упростить базовые программы, рассмотренные в § 4.4, исключив фрагменты автоматического вычисления значений не зависящей переменной и освободив регистр 3 для его использования при вычислении функции.

Остановимся на практических трудностях, с которыми приходится встречаться при анализе автогенераторов различных типов.

Поведение релаксационных автогенераторов обычно описывают нелинейным дифференциальным уравнением 1-го порядка $F(x, dx/dt) = 0$, которое не всегда удается привести к нормальному виду. Если же это удается, то правая часть уравнения в нормальной форме при некоторых значениях переменной становится бесконечно большой, что препятствует ее интегрированию с приемлемой точностью. Например, параллельное соединение емкости и безынерционного двухполюсника с характеристикой вида $u(i) = -\alpha i + \beta i^3$ при $\alpha > 0$ приводит к уравнению, неразрешимому относительно u_C , или с особой точкой при $i = \pm \sqrt{\alpha/3\beta}$ для переменной i : $di/dt = i/C(\alpha - 3\beta i^2)$. Однако после возникновения релаксационных колебаний ток i в течение всего периода отличен от нуля (ввиду мгновенного изменения полярности i), что допускает интегрирование обратной производной $dt/di = C(\alpha - 3\beta i^2)/i$, выполняемое в данном случае точно.

При более сложной зависимости $u(i)$ для вычислений можно воспользоваться базовыми программами, допускающими изменение шага в процессе интегрирования по формуле Симпсона.

Программа 253/21. Анализ процессов в релаксационном генераторе

P3	ПП	3	ПП	F X	+	+	+	P8	ПП	F X	\uparrow
F3	С/П	БП	F0	F2	\uparrow	F3	+	P3	...	\uparrow	F2
X	3	\div	\uparrow	F8	+	P8	B/O				

Программа 254/34. Анализ процессов в релаксационном генераторе

P3	ПП	23	ПП	16	4	X	ПП	16	ИП8	
+	П8	ИП3	С/П	БП	01		ИП8	+	П8	ИП2
ИП3	+	П3	...	ИП2	X	3	\div	B/O	-	

Инструкция к обеим программам: записать в программу вместо многоточия фрагмент вычисления правой части уравнения $dt/dx = f(x)$ (при $x = P3$); $h/2 = \Delta x/2 = P2$, $t_0 = P8$, $x_0 = PX$ B/O C/П $PX = x_1$, $PY = t_1$ C/П $PX = x_2$, $PY = t_2$ C/П $PX = x_3$, $PY = t_3$...

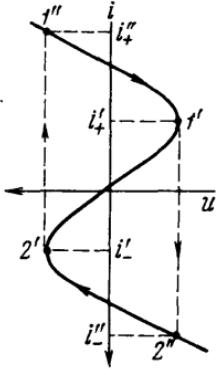


Рис. 41

Вычисления по этой программе продолжают, пока увеличивается t_i . Максимальному значению t_i соответствуют точки 1' или 2' (рис. 41) нелинейной зависимости $u_C(-i) = u_C(-Cd\mu_C/dt)$ для рассматриваемого ранее релаксационного генератора с емкостью (фазовой) траектории в системе координат u_C и du_C/dt . В момент времени, соответствующий максимуму t_i (для его точного определения можно изменять шаг интегрирования в процессе вычислений), скачкообразно изменяется переменная $i = x$ с переходом в точку 1'' или 2''. Значения i'_- , i'_+ , i''_- и i''_+ определяются по нелинейной характеристике, и при продолжении вычислений изображающая точка будет смещаться по другой ветви до нового скачкообразного перехода. При использовании программ 253/21 или 254/34 после определения момента скачка значение $x' = i'$ следует заменить значением i'' , записав его в регистр X , и продолжить вычисления, нажимая для первого пуска клавиши В/О и С/П.

Контрольный пример: записав в программу фрагмент вычисления выражения $C(\alpha - 3\beta i^2)/i$ при $\alpha = 12$; $\beta = 1$; $C = 0,12$; $i' = \pm 2$; $i'' = \pm 4$; $h/2 = 0,1$; $t_0 = 0$; $i_0 = 0,2$, получим $i_1 = 0,4$; $t_1 = 0,9784$; $i_2 = 0,6$; $t_2 = 1,5264$; ...; $i_9 = 2$; $t_9 = 2,604953$; $i_{10} = 2,2$; $t_{10} = 2,590999$. Так как $t_{10} < t_9$, выполняем F2 /-/ P2 и снова получаем i_9 и t_9 , продолжая $i''_+ = -4 = PX$ В/О С/П $i_{10} = -3,8$; $t_{10} = 2,81889$; $i_{11} = -3,6$; $t_{11} = 3,000432$; ...

Во многих случаях при анализе релаксационных генераторов оправдана кусочно-линейная аппроксимация (особенно при ключевом режиме, характерном, например, для мультивибраторов), позволяющая получить формулы, связывающие параметры типовых схем с параметрами генерируемых колебаний. Составление программ по таким замкнутым формулам обычно не вызывает затруднений. Автоматизация вычислений в этом случае целесообразна, например, при необходимости оптимизации параметров схемы для получения колебаний заданной формы, когда расчет приходится многократно повторить.

Автогенераторы, моделируемые дифференциальными уравнениями 2-го порядка, также могут генерировать автоколебания, близкие по форме к релаксационным. В этом случае для определения параметров генерируемых колебаний приходится решать нелинейное дифференциальное уравнение 2-го порядка. Заменой $dx/dt = y$, $d^2x/dt^2 = dy/dt$ его можно представить системой из двух дифференциальных уравнений 1-го порядка. Для решения этой системы пригодны программы 241/21 и 242/34 или 246/21 и 246/34, которые при анализе автогенераторов, как уже отмечалось, можно упростить, исключив автоматическое вычисление переменной t . В качестве примера рассмотрим автогенератор на туннельном диоде (рис. 42, а), исходная рабочая точка которого выбрана на падающем участке статической характеристики. Аппроксимируя статическую характеристику туннельного диода вблизи рабочей точки многочленом 3-й степени $i(u) = a_0 + a_1 u + a_2 u^2 + a_3 u^3$, коэффициенты которого несложно определить по ранее приведенным программам с учетом уравнения $u = E - u_d$, связывающего напряжение на выводах диода и контура. Составим дифференциальное уравнение цепи на основании первого закона Кирхгофа

$$i(u) + Cd\mu/dt + u/R + (1/L) \int u dt = 0,$$

после его дифференцирования получим

$$\frac{d^2u}{dt^2} + \frac{1}{RC} \frac{du}{dt} + \frac{1}{C} \frac{di(u)}{du} \frac{du}{dt} + \omega_0^2 u = 0,$$

где $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$, $di(u)/du = a_1 + 2a_2 u + 3a_3 u^2$.

Для сокращения числа операндов обозначим $\tau = \omega_0 t$, $y = (|3a_3 R/(1+a_1 R)|)^{-1/2} u$, $\epsilon = (1+a_1 R)/\omega_0 RC$, $b = 2a_2 R/(|3a_3 R(1+a_1 R)|)^{1/2}$ и уравнение примет вид

$$d^2y/d\tau^2 + \epsilon(1 \pm by \pm y^2) dy/d\tau + y = 0,$$

где знаки членов в скобках совпадают со знаком подкоренного выражения для переменной y . Приняв $x = dy/d\tau$, представим это уравнение системой из двух дифференциальных уравнений 1-го порядка

$$dx/d\tau = -\epsilon(1 \pm by \pm y^2)x - y; \quad dy/d\tau = x,$$

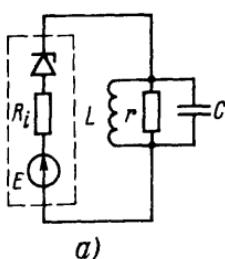
содержащих всего два коэффициента. На основании базовой программы 246/21 составим следующую рабочую программу.

Программа 255/21. Анализ автоколебаний в LC-генераторе на туннельном диоде

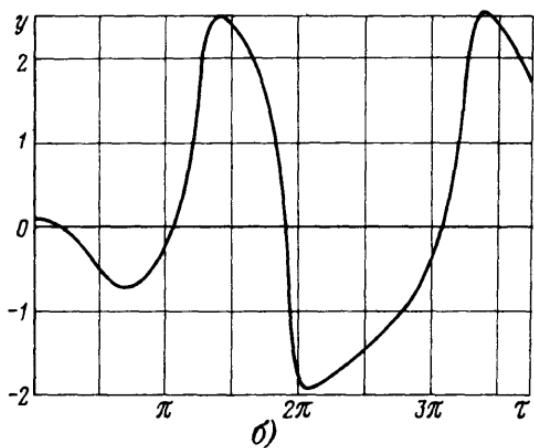
ПП	2	X	P2	ПП	2	÷	P2	F7	P8	F5	P6
C/П	БП	P0	F7	↑	F2	×	↑	F6	+	←	F5
↑	F3	+	X	1	-	↑	F4	×	↑	F7	X
↑	F5	-	↑	F2	X	↑	F8	+	P7	→	P5
F2	2	B/O									

Инструкция: $h/2 = P2$, $b = P3$, $\epsilon = P4$, $y_0 = P5 = P6$, $x_0 = P7 = P8$ B/O C/П PX = = y_1 C/П PX = y_2 C/П PX = y_3 ... Время счета на каждом шаге около 15 с.

Контрольный пример: при $R = 0,25$ кОм; $L = 50$ мГн; $C = 800$ пФ; $i = 30 - 10u + t$; $2u^2 + 0,8u^3$ (i , мА; u , В); $\omega_0 = 5 \cdot 10^6$ 1/с; $\epsilon = -1,5$; $b = -1,054092$ (с учетом зна- ка подкоренного выражения); $y = 1,265u$; $h/2 = \pi/40$; $x_0 = 0$; $y_0 = 0,1$ получим $y_i = 0,09876$; $0,094402$; ... Результаты вычислений отображены в виде графика на рис. 42, б.



a)



б)

Рис. 42

Распространенным методом исследования автогенераторов, описываемых дифференциальными уравнениями 2-го порядка, является отображение их поведения на фазовой плоскости с координатами x и $y = dx/dt$. Анализ процессов в такой системе координат позволяет свести исходное нелинейное уравнение вида $d^2x/dt^2 + f(x; dx/dt) = 0$ к уравнению 1-го порядка $dy/dx = -f(x, y)/y$, заменив $dx/dt = y$, $d^2x/dt^2 = (dy/dx)y$.

Для построения фазовых траекторий эффективен δ -метод [8], согласно которому на каждом $(i+1)$ -м шаге построения траектории элементарный участок рассматривается как дуга окружности с центром в точке $x_{0,i+1} = -\delta_i = -(x_i - f(x_i, y_i))$. Задавшись углом поворота $\Delta\varphi$ вокруг этого центра, координаты изображающей точки на $(i+1)$ -м шаге

$$\begin{aligned} x_{i+1} &\approx (x_i + \delta_i) \cos \Delta\varphi + y_i \sin \Delta\varphi - \delta_i, \\ y_{i+1} &\approx y_i \cos \Delta\varphi - (x_i + \delta_i) \sin \Delta\varphi \end{aligned}$$

выражают через координаты, вычисленные на предыдущем шаге.

Программа 256/21. Построение фазовых портретов автогенераторов

...	↑	F4	+	XY	P4	F3	X	→	F2	X	↑
F4	-	P4	F5	↑	F2	X	→	F3	X	↑	F4
+	P4	←	↑	←	-	P5	↑	F4	C/П	БП	P0

Программа 257/34. Построение фазовых портретов автогенераторов

... ↑ ИП4 + П4 ИП2 × XY - ИП5
 ИП3 × + ИП5 ИП2 × ИП4 ИП3 × -
 П5 XY П4 С/П БП

Инструкция к обеим программам: записать в начале программы фрагмент вычисления функции $\delta(x_i, y_i)$ решаемого уравнения (по значениям $x_i = P4, y_i = P5$; $\cos \Delta\varphi = P2, \sin \Delta\varphi = P3, x_0 = P4, y_0 = P5$ (В/О) С/П $PX = P4 = x_i, PY = P5 = y_i$).

В качестве примера рассмотрим анализ колебаний в автогенераторе, моделируемом уравнением Ван-дер-Поля

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \epsilon(1-x^2)dx/dt + x = 0,$$

или, после замены $dx/dt = y$,

$$dy/dx = -(x + \delta(x, y))/y,$$

где $\delta(x, y) = \epsilon(1-x^2)y$.

Составив фрагмент вычисления функции δ (например, F4 x² 1 XY - ↑ F5 × ↑ F8 X), получим рабочую программу, по которой при $\epsilon = -2 = P8; x_0 = 0,001; y_0 = 0; \Delta\varphi = \pi/24$ последовательно вычислим (время одного выполнения программы около 10 с) $(x_i; y_i) = (9,91444 \cdot 10^{-4}; -1,30526 \cdot 10^{-4}); (9,63692 \cdot 10^{-4}; -2,9289 \times 10^{-4}); (9,12206 \cdot 10^{-4}; -4,92634 \cdot 10^{-4})$...

Графическое представление результатов вычислений (рис. 43) показывает, что изображающая точка выходит на предельный цикл практически за один период, максимальное значение колебаний близко к 2, а их форма существенно отличается от гармонической.

Движение изображающей точки можно "развернуть" во времени, введя приближенное вычисление интервала Δt прохождения каждого элементарного участка фазовой траектории по формуле $t_{i+1} = t_i + 2(x_{i+1} - x_i)/(y_{i+1} + y_i)$, и организовать вывод значений x_i и t_i после каждого выполнения программы. Следует быть особенно внимательным в моменты прохождения участков с $y_i \approx 0$, когда возможна большая операционная погрешность, особенно в случае случайного совпадения $y_{i+1} \approx -y_i$ (избежать которого в подобной ситуации можно изменением $\Delta\varphi$).

Если есть основания предполагать, что в установившемся режиме форма колебаний близка к гармонической, то рассмотренные методы анализа могут потребовать чрезмерных затрат времени. В этом случае обычно используют квазилинейные методы расчета, основанные на замещении всех нелинейных элементов цепи линейными (относительно мгновенного значения гармонического колебания) моделями, параметры которых зависят от амплитуды воздействий. Эти параметры, называемые средними, определяют отношениями амплитуды 1-й гармоники реакции к амплитуде воздействия.

Для практических целей на этом этапе применимы программы § 4.3.

При оценочных расчетах средних параметров по аналитическому выражению статических характеристик, отличающемуся от полиномиальной аппроксимации (в этом случае применимы формулы кратных дуг) целесообразно использовать следующие базовые программы, обеспечивающие приемлемую точность при достаточно гладкой характеристике.

Программа 258/21. Оценка средних параметров нелинейных элементов

P3	0	P5	F2	XY	/-	ПП	F,	ПП	÷	/-	P5
F3	ПП	P,	ПП	÷	3	÷	↑	F3	÷	C/П	F3
2	÷	↑	F4	+	P4	...	↑	F5	+	P5	B/O

Программа 259/34. Оценка средних параметров нелинейных элементов

П3	C _x	П5	ИП2	ИП3	-	ПП	30	ПП	25
/ -		П5	ИП3	ПП	28	ПП	25	3	÷ ↑
ИП3	÷	C/П	БП	00	ИП3	2	÷	ИП4	+
П4	...	ИП5	+	П5	B/O				

Инструкция к обеим программам: записать в программу вместо многоточия фрагмент вычисления аппроксимирующей функции по значению аргумента, хранящемуся в регистрах 4 и X; постоянная составляющая $q_0 = P2$, амплитуда воздействия $q_m = RX$ B/O C/P $PX = F_{cp} = x_{m1}/q_m$, $PY = x_{m1}$. При использовании программы 259/34 клавишу B/O достаточно нажать лишь при первом пуске.

В качестве примера рассмотрим вычисление средней крутизны $S_{cp} = I_{Km1}/U_{Bm}$ биполярного транзистора при использовании аппроксимации $i_K \approx I_o \exp(\Lambda U_B/(1 + B \exp(\Lambda u_B)))$.

Записав в программу 259/34 фрагмент ИП6 ИП8 ИП4 $\times e^x \times BX$ ИП7 $\times 1 + \div$ при $I_o = P6$, $B = P7$, $\Lambda = P8$, получим рабочую программу, по которой при $I_o = 10^{-3}$ mA, $B = 2 \cdot 10^{-4}$; $\Lambda = 30$ получим $S_{cp}(U_{B0} = 0; U_{Bm} = 0,05$ В) = 0,039322 mA/B; $S_{cp} \times (U_{B0} = 0,2; U_{Bm} = 0,2$ В) = 13,20336 mA/B и т. д.

Дальнейший расчет выполняют методами анализа линейных цепей, включая анализ устойчивости и определение зависимости корней определителя матрицы коэффициентов уравнения равновесия цепи от амплитуды автоколебаний (если они возникают) для определения стационарной амплитуды.

Проиллюстрируем рассматриваемый подход на примере автогенератора (рис. 44, а), эквивалентная схема которого (рис. 44, б) содержит

средние значения крутизны и входной проводимости транзистора. Полагая на рабочих частотах $\omega C_b \gg g(A)$ и учитывая проводимость резистора $R5$ в величине $g(A)$, получим квазилинейное уравнение автогенератора

$$\begin{bmatrix} g(A) + pC + 1/pL_2 & -pC \\ S(A) - pC & G_0 + pC + 1/pL_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix}$$

с определителем матрицы коэффициентов

$$\Delta(p) = p^3 L_1 L_2 C (g(A) + S(A) + G_0) + p^2 (L_1 L_2 G_0 g(A) + C(L_1 + L_2)) + p(L_2 g(A) + L_1 G_0) + 1,$$

где A – амплитуда колебаний (в данном случае – амплитуда напряжения на базе).

По критерию Раусса – Гурвица находим, что автоколебания могут возбудиться при выполнении неравенства

$$S(A) > g(A) G_0 (L_2 g(A) + L_1 G_0) / C + L_2 g(A) / L_1 + L_1 G_0 / L_2.$$

Выполнение этого неравенства при $A = 0$ (в этом случае средние значения параметров равны дифференциальным) свидетельствует о мягком возбуждении автогенератора. Стационарная амплитуда соответствует превращению рассматриваемого неравенства в равенство. Если же неравенство выполняется только при $A > 0$, то возможно жесткое самовозбуждение, соответствующее одному из двух условий равенства, при котором выполняется условие устойчивости амплитуды $dR_{pk}/dA < 0$.

Частоту автоколебаний можно определить при подстановке в определитель $\Delta(p)$ значений $S(A_{ct})$ и $g(A_{ct})$, учитывая, что он будет иметь пару корней на оси $j\omega$ и поэтому должен делиться без остатка на $p^2 + \omega_{ct}^2$. Так, при $\Delta(p) / (p^2 + \omega_{ct}^2) = (a_3 p^3 + a_2 p^2 + a_1 p + a_0) / (p^2 + \omega_{ct}^2)$ остаток от деления должен обращаться в нуль при $p = j\omega_{ct}$.

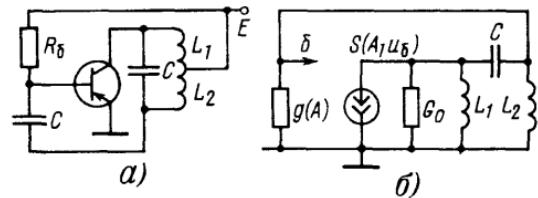


Рис. 44

Все расчеты при использовании квазилинейного метода могут быть выполнены с помощью программируемых микрокалькуляторов, но допустимость применения этого метода иногда требует дополнительной проверки.

Квазилинейный метод позволяет приблизенно анализировать и процесс установления амплитуды автоколебаний. Если, например, в правой полуплоскости расположена пара полюсов определителя, то оригиналом будут устанавливающиеся автоколебания $x_i(t) = A(t) \cos(\omega_i t + \psi_i(t))$. При медленном изменении амплитуды, определенной для времени t_1 , $A(t_1 + \Delta t) \approx A(t_1) \exp(Re p_i(A(t_1)) \Delta t)$, где $Re p_i(A(t_1))$ – вещественная часть полюса в правой полуплоскости. Тогда $\Delta A / \Delta t = (A(t_1 + \Delta t) - A(t_1)) / \Delta t \approx A(t_1) (\exp(Re p_i(A(t_1)) \Delta t) - 1) / \Delta t$, что при $\Delta t \rightarrow 0$ приводит к дифференциальному уравнению относительно исходной амплитуды $dA/dt = A Re p_i(A)$, которое несложно решить рассмотренными методами.

В данной цепи (см. рис. 44) влияние емкости C и проводимости $g(A)$ проявляется в эффекте детектирования автоколебаний, что может привести к "прерывистой" автогенерации. Это явление также можно анализировать квазилинейными методами, если связать изменение постоянного напряжения на базе с амплитудой автоколебаний.

Во многих случаях анализ установления автоколебаний можно упростить, используя методы цифрового моделирования [20], рассмотренные в последующих главах.

Глава 5

РАСЧЕТ УСИЛИТЕЛЕЙ

5.1. Особенности расчета

Отношение полезной мощности в нагрузке проходного четырехполюсника к полезной мощности, поступающей на его вход от источника сигнала (см. рис. 19, б), называют коэффициентом передачи входной полезной мощности

$$K_M = \operatorname{Re}(u_H i_H^*) / \operatorname{Re}(u_{BX} i_{BX}^*) = \operatorname{Re} Y_H |K_H|^2 / \operatorname{Re} Y_{BX}, \quad (5.1)$$

где звездочкой отмечены комплексно-сопряженные величины, $K_H = u_H / u_{BX}$ – коэффициент передачи входного напряжения, $Y_{BX} = i_{BX} / u_{BX}$ – входная проводимость проходного четырехполюсника.

Реальные источники сигнала характеризуются конечной внутренней проводимостью $Y_C = 1/Z_C$ (рис. 45, а, б), и коэффициент передачи полезной мощности сигнала

$$K_{MC} = \frac{\operatorname{Re}(u_H i_H^*)}{\operatorname{Re}(e_C i_{BX}^*)} = \frac{\operatorname{Re} Y_H}{\operatorname{Re} Y_{BX} C} |K_{HC}|^2 = K_{M BX} K_M, \quad (5.2)$$

где коэффициент передачи напряжения сигнала $K_{HC} = u_H / e_C = K_{H BX} K_H$, коэффициент передачи напряжения входной цепи $K_{H BX} = u_{BX} / e_C = Y_C / (Y_C + Y_{BX})$, коэффициент передачи полезной мощности входной цепи $K_{M BX} = \operatorname{Re} Y_{BX} |K_{H BX}|^2 / \operatorname{Re} Y_{BX} C$ и эквивалентная проводимость на выводах идеального источника напряжения сигнала $Y_{BX C} = i_{BX} / e_C = Y_C Y_{BX} / (Y_C + Y_{BX})$.

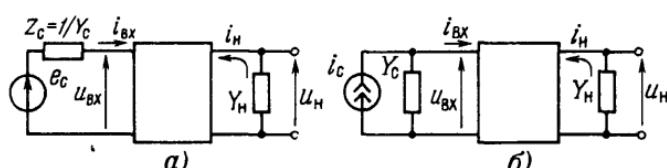


Рис. 45

Отражения сигнала от входа проходного четырехполюсника отсутствуют при комплексном согласовании на входе ($Y_{BX} = Y_C$), но коэффициент передачи полезной мощности сигнала достигает *располагаемого* (достигимого) значения $K_p = 0,5 K_M$ при со-

проженном согласовании на входе ($Y_{\text{вх}} = Y_{\text{c}}^*$). Это значение максимально при одновременном сопряженном согласовании на входе и выходе ($Y_{\text{вх}} = Y_{\text{c}}^*, Y_{\text{вых}} = Y_{\text{h}}^*$). Выходную проводимость $Y_{\text{вых}} = i_{\text{вых}}/u_{\text{вых}}$ определяют при $e_{\text{c}} = 0$ и замене нагрузки идеальным источником напряжения $u_{\text{вых}}$.

Коэффициент передачи полезной мощности часто выражают в десятичных единицах отношения мощностей (дбизбалах)

$$K_{\text{мс дБ}} = K_{\text{м вх дБ}} + 10 \lg (\text{Re } Y_{\text{h}} / \text{Re } Y_{\text{вх}}) + 20 \lg |K_{\text{h}}|. \quad (5.3)$$

Если цепь передачи сигнала образована каскадным соединением n проходных четырехполюсников (рис. 46), то ее коэффициент передачи мощности

$$K_{\text{мс дБ}} = K_{\text{м вх дБ}} + 10 \lg (\text{Re } Y_{\text{h}} / \text{Re } Y_{\text{вх}1}) + \sum_{i=1}^n 20 \lg |K_{\text{hi}}|, \quad (5.4)$$

где $Y_{\text{вх}1}, K_{\text{hi}}$ – входная проводимость 1-го и коэффициент передачи входного напряжения i -го проходных четырехполюсников.

Частотная характеристика коэффициента передачи напряжения в этом случае определяется амплитудно-частотной характеристикой

$$|K_{\text{hc}}(\omega)| = |K_{\text{h вх}}(\omega)| \prod_{i=1}^n |K_{\text{hi}}(\omega)| \quad (5.5)$$

и фазо-частотной характеристикой

$$\varphi_{\text{hc}}(\omega) = \varphi_{\text{h вх}}(\omega) + \sum_{i=1}^n \varphi_{\text{hi}}(\omega). \quad (5.6)$$

Влияние проходного четырехполюсника на передачу сигнала оценивают также отношением $K_{\text{им}}$ полезной мощности $|u_{\text{h}}|^2 \text{Re } Y_{\text{h}}$ в нагрузке проходного четырехполюсника к мощности $|u_{\text{ho}}|^2 \text{Re } Y_{\text{h}}$, выделяемой в нагрузке при непосредственном присоединении к ней источника сигнала. Если $\text{Re } Y_{\text{h}} = g_{\text{h}}$ и $\text{Re } Y_{\text{c}} = g_{\text{c}}$ (мнимые части полных проводимостей могут быть отнесены к проходному четырехполюснику), то $|u_{\text{ho}}|^2 g_{\text{h}} = |e_{\text{c}}|^2 g_{\text{c}}^2 g_{\text{h}} / (g_{\text{c}} + g_{\text{h}})^2$ и $K_{\text{им}} = |K_{\text{ин}}|^2 = ((g_{\text{c}} + g_{\text{h}})/g_{\text{c}})^2 |K_{\text{hc}}|^2$, где $K_{\text{ин}} = u_{\text{h}}/u_{\text{ho}}$.

При согласовании (с помощью трансформатора без потерь) проводимостей источника сигнала и нагрузки в последней выделяется максимальная мощность $|u_{\text{ho c}}|^2 g_{\text{h}} = ((g_{\text{c}} + g_{\text{h}})/g_{\text{c}})^2 |K_{\text{hc}}|^2$

$$K_{\text{имс}} = |K|^2 = 4(g_{\text{h}}/g_{\text{c}}) |K_{\text{hc}}|^2, \quad (5.7)$$

где $K = u_{\text{h}}/u_{\text{ho c}}$.

Следовательно, функции $K(p)$, $K_{\text{ин}}(p)$ и $K_{\text{hc}}(p)$ различаются лишь постоянным множителем, с точностью до которого они характеризуются одинаковой частотной характеристикой $K(j\omega)$.

В случае пассивного четырехполюсника предельное значение $K_{\text{имс}} = 1$ достигается при отсутствии потерь в четырехполюснике. Если $K_{\text{имс}} < 1$ и влияние проходного четырехполюсника проявляется в уменьшении мощности в нагрузке, то передачу сигнала называют *затуханием*. Амплитудно-частотную характеристику затухания обычно оценивают в дбизбалах согласно соотношению

$$A = 10 \lg (1/|K(\omega)|^2) = -20 \lg |K(\omega)|. \quad (5.8)$$

Если $K_{\text{имс}} > 1$, то передачу сигнала называют *усилением*, а нагруженный проходной четырехполюсник – *усилителем*. Усилители обязательно содержат активные компоненты, преобразующие энергию источника питания в энергию сигнала, выделяемого в нагрузке под воздействием входного сигнала. Для обеспечения заданного усиления мощности усилителя обычно собирают из нескольких соединенных каскадно усилительных ступеней, образованных активными компонентами с цепями их питания и элементами связи.

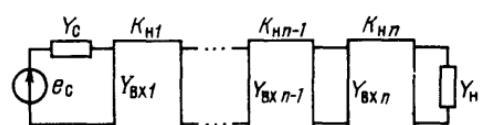


Рис. 46

Расчет усилителя с заданными характеристиками чаще всего сводят к ориентировочному выбору его схемы, расчету характеристик по этой схеме и (при их несовпадении с заданными) уточнению выбора компонентов и схемы их соединения. Пассивные компоненты обычно моделируют схемами замещения с учетом рабочих и при необходимости паразитных параметров. Основные трудности при расчете усилителей связаны с моделированием свойств активных компонентов, существенно зависящих от режима питания. При этом используют различные модели для постоянного тока, сильных и слабых сигналов. При расчете усилителя на постоянном токе и при сильных низкочастотных сигналах свойства активных компонентов описывают графическими или буквенными моделями статических характеристик. Такие модели для туннельных диодов и биполярных транзисторов рассмотрены в гл. 4.

Статические характеристики $I_C = f(U_{ЗИ}, U_{СИ})$ полевых транзисторов с $p-n$ -затвором в области малых напряжений $U_{СИ} < U_{отс} - U_{ЗИ}$ моделируют [10] выражением

$$I_C = I_{\max} \left[3 \frac{U_{СИ}}{U_{отс}} - 2 \left(\frac{U_{СИ} + U_{ЗИ}}{U_{отс}} \right)^{3/2} + 2 \left(\frac{U_{ЗИ}}{U_{отс}} \right)^{3/2} \right], \quad (5.9)$$

а в области $U_{СИ} > U_{отс} - U_{ЗИ}$ – формулой

$$I_C = I_{\max} \left[1 + \frac{U_{ЗИ}}{U_{отс}} \left(2 \sqrt{\frac{U_{ЗИ}}{U_{отс}}} - 3 \right) \right], \quad (5.10)$$

где ток I_{\max} определяют при $U_{ЗИ} = 0$ и $U_{СИ} = U_{отс}$.

Статические характеристики МДП-транзисторов с учетом влияния напряжения подложки в области $U_{СИ} < U_{отс} - U_{ЗИ}$ моделируют выражением

$$I_C = S_y [2(U_{ЗИ} \pm U_{отс} - \eta U_{\Pi}) U_{СИ} - (1 - \eta) U_{СИ}^2], \quad (5.11)$$

а в области $U_{СИ} > U_{отс} - U_{ЗИ}$ – выражением

$$I_C = S_y (U_{ЗИ} \pm U_{отс} - \eta U_{\Pi}^2),$$

где η – коэффициент влияния напряжения U_{Π} подложки, $S_y = I_{\max}/U_{отс}^2$ – удельная крутизна, знак минус выбирают для транзисторов с индуцированным каналом, а знак плюс – с встроенным каналом.

При необходимости построения статических характеристик по взятым из справочников значениям параметров $U_{отс}$, I_{\max} , S_y и η для формул (5.9) – (5.11) несложно составить программы, упрощающие вычисление тока стока при различных напряжениях $U_{ЗИ}$, $U_{СИ}$ и U_{Π} .

Для расчета усилителей при слабых сигналах повышенной частоты используют модели компонентов в виде схем замещения с частотно-независимыми (например, R , C и L) параметрами или операторными параметрами Z и Y , описываемыми в рабочем диапазоне частот графиками частотных характеристик или рациональными функциями комплексной частоты.

Компонент цепи при слабых сигналах представим на каждом k -м независимом входе параллельным соединением проводимости Y_{kk} и идеального источника тока $i_k = Y_{kk} u_1 + \dots + Y_{kn} u_n$, управляемого напряжениями на остальных входах. Подобную модель двухвходового (в частности, трехполюсного) компонента (рис. 47, а) несложно эквивалентно преобразовать в удобную для расчета модель с одним зависимым источником (рис. 47, б).

Свойства дискретных активных компонентов с двумя входами при слабых сигналах описывают в паспортных данных параметрами эквивалентного линейного проходного четырехполюсника, измеренными относительно одного из выводов компонента, например, h -или y -параметрами для биполярного транзистора в схеме с общей базой или общим эмиттером. По известным h -параметрам транзистора в соответствии с формулами табл. 5 несложно определить y -параметры для той же схемы включения. Для определения параметров других схем включения и расчета усилителей удобно использовать неопределенную матрицу (3.3), принимающую при обозначении выводов эквивалентного транзистору трехполюсника буквами b , z и k вид

$$Y_{BT} = \begin{bmatrix} Y_{bb} & Y_{be} & Y_{bk} \\ Y_{eb} & Y_{ee} & Y_{ek} \\ Y_{kb} & Y_{ke} & Y_{kk} \end{bmatrix}. \quad (5.12)$$

Если, например, известны слабосигнальные (дифференциальные) проводимости транзистора для схемы с общим эмиттером $Y_{11e} = Y_{bb}$, $Y_{12e} = Y_{bk}$, $Y_{21e} = Y_{kb}$ и $Y_{22e} = Y_{kk}$, то в обычном режиме или с помощью программ 110/21 или 111/34 несложно вычислить остальные элементы матрицы (5.12). Эта матрица содержит 9 элементов (из них 4 независимых), но она определяет все параметры транзистора, измеряемые при различном выборе общего узла, так как $y_{bb} = Y_{11e}$, $y_{ee} = Y_{11b}$, $y_{kk} = Y_{22b} = Y_{22e}$. При расчете усилителей, в которых ни один из выводов транзистора не соединен с общим узлом, приходится одновременно использовать все 9 проводимостей матрицы (5.12).

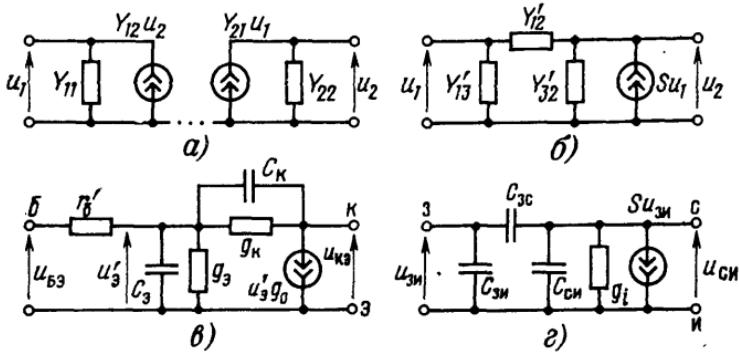


Рис. 47

Для расчета отдельных усилительных ступеней обычно используют схемы замещения активных компонентов с частотно-независимыми параметрами, например, показанную на рис. 47, в схему замещения биполярного транзистора или схему замещения (рис. 47, г) биполярного транзистора, аналогочную схеме замещения электронной лампы. В рабочем диапазоне частот интегральных активных компонентов влияние внутренней обратной связи через проводимость Y_{12} мало и обычно учитывают лишь паразитные входное и выходное сопротивления. Иногда приходится учитывать и частотные свойства параметра прямой передачи, например, $Y_{21} = S_0 / (\omega r + 1)$.

При анализе цепи методом узловых напряжений все параметры должны иметь разность проводимостей. Затруднения возникают при моделировании активных компонентов, если в справочнике приведены параметры идеализированных моделей с зависимыми источниками напряжения и нулевыми входными или выходными сопротивлениями. В таких случаях достаточно ввести фиктивное сопротивление r , достаточно малое по сравнению с последовательным ему сопротивлением цепи. Это практически не повлияет на рассчитываемые характеристики, но обеспечит преобразование источника напряжения (рис. 48, а) в источник тока $i = Su_1 = \mu u_1 / r$ (рис. 48, б) или источник тока, управляемый током (рис. 48, в), в источник тока $i = Su_1 = \alpha u_1 / r$, управляемый напряжением.

Рабочую область частот широкополосных усилителей для упрощения расчета разбивают на об-

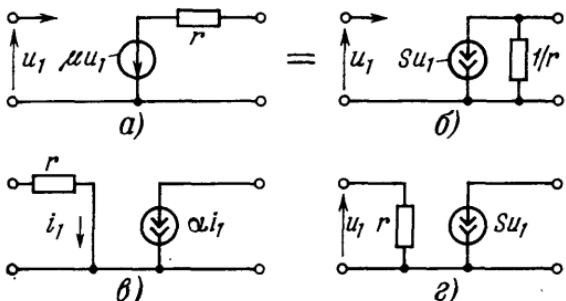


Рис. 48

ласть низших (где учитывают лишь инерционные элементы цепи питания), средних (где пренебрегают влиянием инерционных элементов) и высших (где учитывают паразитные инерционные параметры) частот. В диапазоне частот, где допустимо пренебрежение реактивными составляющими параметров, их измеряют на низких частотах или определяют по статическим характеристикам для заданного режима питания с помощью графических построений [17] или дифференцированием их буквенных моделей. Так, для приближенной оценки проводимостей транзистора с общей базой можно упростить уравнения (4.9) с учетом неравенств $I_{\text{Б}}R_{\text{Б}} < U_{\text{ЭБ}}$ и $U_{\text{КБ}} \gg U_{\text{ЭБ}}$, получив

$$Y_{11\text{Б}} = g_{\text{ЭЭ}} = dI_{\text{Э}}/dU_{\text{ЭБ}} \Big|_{U_{\text{КБ}}} = \text{const} = \Lambda I_{\text{Э0}} \exp(\Lambda U_{\text{ЭБ}})/A;$$

$$Y_{21\text{Б}} = g_{\text{КЭ}} = dI_{\text{К}}/dU_{\text{ЭБ}} \Big|_{U_{\text{КБ}}} = \text{const} = -\alpha_N \Lambda I_{\text{Э0}} \exp(\Lambda U_{\text{ЭБ}})/A;$$

$$Y_{12\text{Б}} = g_{\text{ЭК}} = dI_{\text{Э}}/dU_{\text{КБ}} \Big|_{U_{\text{ЭБ}}} = \text{const} = -\alpha_I \Lambda I_{\text{К0}} \exp(\Lambda U_{\text{КБ}})/A;$$

$$Y_{22\text{Б}} = g_{\text{КК}} = dI_{\text{К}}/dU_{\text{КБ}} \Big|_{U_{\text{ЭБ}}} = \text{const} = \Lambda I_{\text{К0}} \exp(\Lambda U_{\text{КБ}})/A,$$

где $A = 1 - \alpha_N \alpha_I$, а в формулы подставляют модули α_N и α_I .

Эти формулы отличаются значительной погрешностью при определении параметров $Y_{12\text{Б}}$ и $Y_{22\text{Б}}$, но удобны для оценки зависимости слабосигнальных параметров от выбора постоянных токов и напряжений на выводах транзистора.

Программа 260/21. Вычисление слабосигнальных низкочастотных проводимостей биполярного транзистора с общей базой

P7	F6	XY	X	e ^x	P8	F7	X	e ^x	←	F2	↑
F3	X	1	XY	—	↑	F6	XY	÷	↑	F8	X
→	X	↑	F5	X	P7	↑	F3	X	/—/	P8	←
↑	F4	X	↑	F2	X	/—/	C/P	BП	P0		

Программа 261/34. Вычисление слабосигнальных низкочастотных проводимостей биполярного транзистора с общей базой

ИП6	X	e ^x	XY	ИП6	X	e ^x	XY	ИП2	ИП3
X	1	XY	—	ИП6	÷	P0	÷	ИП5	X
П7	0	ИП3	—	X	P8	XY	ИП0	—	ИП4
X	↑	ИП2	0	XY	—	X	C/P	BП	

Инструкция к обеим программам: ($\alpha_N = P2$, $\alpha_I = P3$, $I_{\text{Э0}} = P4$, $I_{\text{К0}} = P5$, $\Lambda = P6$)
 $U_{\text{ЭБ}} = PY$, $U_{\text{КБ}} = PX$ (B/O) C/P $PX = Y_{21\text{Б}} = g_{\text{КЭ}}$, $PY = Y_{11\text{Б}} = g_{\text{ЭЭ}}$, $P7 = Y_{22\text{Б}} = g_{\text{КК}}$, $P8 = Y_{12\text{Б}} = g_{\text{ЭК}}$.

Контрольный пример: при $\Lambda = 39$; $\alpha_N = 0,995$; $\alpha_I = 0,75$; $I_{\text{Э0}} = I_{\text{К0}} = 1 \cdot 10^{-5}$; $U_{\text{ЭБ}} = 0,1$; $U_{\text{КБ}} = -1$ получим (время счета около 15 с) $Y_{11\text{Б}} = g_{\text{ЭЭ}} = 7,5928 \cdot 10^{-2}$; $Y_{21\text{Б}} = g_{\text{КЭ}} = -1,33117 \cdot 10^{-20}$; $Y_{22\text{Б}} = -7,55492 \cdot 10^{-2}$; $Y_{12\text{Б}} = g_{\text{КК}} = 1,7749 \cdot 10^{-20}$.

Рабочую точку полевых транзисторов в усилителях обычно выбирают в пологой области стоковых характеристик ($U_{\text{СИ}} > U_{\text{отс}} - U_{\text{ЗИ}}$). Дифференцируя (5.10) по напряжению $U_{\text{ЗИ}}$, получаем для этой области параметр прямой передачи (крутизну стоково-затворной статической характеристики)

$$S = S_{\text{max}} (1 - \sqrt{U_{\text{ЗИ}}/U_{\text{отс}}}),$$

где значение $S_{\text{max}} = 3I_{\text{max}}/U_{\text{отс}}$ соответствует $U_{\text{ЗИ}} = 0$ и $U_{\text{СИ}} = U_{\text{отс}}$.

На начальном крутом участке стоковых характеристик (иногда используемом для регулировки усиления) согласно выражению (5.9) получаем

$$S = S_{\text{max}} (\sqrt{U_{\text{СИ}} + U_{\text{ЗИ}}} - \sqrt{U_{\text{ЗИ}}})/U_{\text{отс}}.$$

Программа 262/21. Вычисление крутизны S полевого транзистора с общим истоком

F4	↑	F8	—	↑	F7	—	x ≥ 0	4	F7	↑	F8
+	√	↑	F8	√	—	↑	F5	X	↑	F4	√
÷	БП	РВП	F8	↑	F4	÷	√	1	—	/—/	↑
·	F5	X	C/P	BП	P0						

Программа 263/34. Вычисление крутизны S полевого транзистора с общим истоком

ИП4	ИП8	-	ИП7	-	$x \geq 0$	21	ИП7	ИП8	+
$\sqrt{ }$	ИП8	$\sqrt{ }$	-	ИП5	x	ИП4	$\sqrt{ }$	\div	БП
29	1	ИП8	ИП4	\div	$\sqrt{ }$	-	ИП5	x	С/П
БП									

Инструкция к обеим программам: ($U_{СИ} = P7$, $U_{ЗИ} = P8$, $U_{отс} = P4$, $S_{max} = P5$)
(В/О) С/П РХ = S .

Контрольный пример: при $S_{max} = 0,15 \text{ мСм}$; $U_{отс} = 3 \text{ В}$; $U_{СИ} = 2 \text{ В}$; $U_{ЗИ} = 1,5 \text{ В}$ ($U_{СИ} > U_{отс} - U_{ЗИ}$) получим $S = 0,0439 \text{ мСм}$ и при $U_{ЗИ} = 0,1 \text{ В}$ ($U_{СИ} < U_{отс} - U_{ЗИ}$) получим $S = 0,09811 \text{ мСм}$.

Подобные программы применимы лишь для оценки зависимости параметров активных компонентов от режима питания. Для расчета характеристик усилителя приходится использовать более точные значения параметров, измеренные и статистически обработанные или взятые из справочников для выбранного режима питания.

Расчет каскадного усилителя после выбора его структурной схемы в соответствии с заданной мощностью в нагрузке, коэффициентом усиления мощности и частотной характеристикой усиления начинают с оконечной ступени (нагрузка которой известна), и вычисляют для каждой ступени коэффициент передачи напряжения и входную проводимость, являющуюся проводимостью нагрузки для предыдущей ступени. После расчета всех ступеней по (5.5), (5.6) вычисляют частотную характеристику коэффициента усиления напряжения, по которой определяют (при известных проводимости источника сигнала и входной проводимости 1-й ступени) коэффициент усиления полезной мощности в заданном диапазоне частот.

Уровень мощности сигнала максимальен в нагрузке оконечной ступени (мощного усилителя), потребляющей основную часть энергии от источника питания. Поэтому оконечную и иногда предоконечную ступени на средних частотах рассчитывают с помощью статических характеристик активных компонентов с обеспечением допустимого уровня нелинейных искажений при максимальном уровне входного сигнала и максимального КПД = P_h/P_0 , где P_h – полезная мощность в нагрузке, P_0 – мощность потребления. Вычисления в этом случае несложны и в настоящей книге не рассматриваются.

5.2. Расчет усилителя в статическом режиме

Расчет статического режима усилителя с заданной схемой заключается в определении постоянных токов и напряжений на выводах активных компонентов, а также потребляемой мощности. При проектировании усилителя задача расчета сводится к определению с помощью вычислений схемы питания активных компонентов, обеспечивающей требуемые характеристики усиления и их стабильность при максимальном в общем случае КПД. Решение этой задачи упрощается при разделении по постоянному току активных компонентов (для повышения стабильности режима питания) с помощью разделительных конденсаторов или трансформаторов.

Расчет цепи питания активного компонента начинают с выбора рабочей точки по статическим характеристикам [17] или паспортным данным. Рабочая точка однозначно задается двумя постоянными токами или напряжениями на выводах трехполюсного компонента, и для определения остальных токов и напряжений приходится использовать графические или буквенные модели статических характеристик.

Рассмотрим обобщенную схему питания биполярного транзистора, размыкая или закорачивая элементы которой (рис. 49) можно получить практически все схемы питания от одного источника. Представив уравнения (4.9) в приближенной форме

$$I_E = I_0 (\exp(\Delta U_{EB}) - 1); \quad I_K = -\alpha_N I_E, \quad (5.13)$$

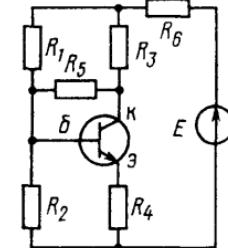


Рис. 49

где $I_0 = I_{30}/(1 - \alpha_N \alpha_I)$, составим уравнение [20] $U_{\text{ЭБ}} = (1/\Lambda) \ln (AE + BU_{\text{ЭБ}} + 1)$, связывающее напряжение $U_{\text{ЭБ}}$ с параметрами обобщенной схемы питания. В этом уравнении приняты обозначения: $A = (af - b)/cI_0 (f - \alpha_N)$; $B = (1 - fh)/(cI_0 (f - \alpha_N))$; $a = 1 + G_1 R_3 = 1 + R_3/R_1$; $b = 1 + C_2 R_4 = 1 + R_4/R_2$; $d = 1 + G_1 R_6 = 1 + R_6/R_1$; $c = aR_4 + bR_3 + abR_6$; $f = bd + G_3 c + G_1 R_4 = bd + c/R_5 + R_4/R_1$; $h = G_2 R_3 + a(1 + G_2 R_6) = R_3/R_2 + a(1 + R_6/R_2)$; $I_0 = I_{30}/(1 - \alpha_N \alpha_I)$. После вычисления $U_{\text{ЭБ}}$ решением этого уравнения и значений I_3 и I_K по уравнениям (5.13) можно найти

$$U_{\text{КБ}} = CE + DU_{\text{ЭБ}},$$

где $C = (a\alpha_N - b)/(f - \alpha_N)$; $D = (1 - \alpha_N h)/(f - \alpha_N)$.

Программа 264/21. Расчет статического режима биполярного транзистора по заданной схеме питания

F8	↑	F3	X	↑	F2	+	ln	3	9	÷	↑
F8	XY	P8	-	x^2	↑	F7	-	$x < 0$	P0	F8	3
9	X	e^x	1	-	↑	F6	X	↑	←	X	C/Π
F8	↑	F5	X	↑	F4	+	C/Π				

Инструкция: $(A|E| + 1 = P2, B = P3, C|E| = P4, D = P5, I_0 = P6)$, квадрат допустимой погрешности $U_{\text{ЭБ}}$ при вычислениях $\epsilon^2 = P7$; $\alpha_N = C1$; $|E| > U_{\text{ЭБ нач.}} = P8$ В/О С/Π $PX = I_K$, $PY = I_3$ С/Π $PX = U_{\text{КБ}}$, $P8 = U_{\text{ЭБ}}$.

Программа 265/34. Расчет статического режима биполярного транзистора по заданной схеме питания

ИП8	ИП3	X	ИП2	+	ln	ИП1	÷	ИП8	XY
П8	-	x^2	ИП7	-	$x < 0$	00	ИП8	ИП1	X
e^x	1	-	ИП6	X	ПА	↑	ИП0	X	ПВ
-	ПС	ИП8	ИП5	X	ИП4	+	ПД	C/Π	БП

Инструкция: $(\alpha_N = P0, \Lambda = P1, AE + 1 = P2, B = P3, CE = P4, D = P5, I_0 = P6, \epsilon^2 = P7, U_{\text{ЭБ нач.}} = P8)$ (В/О) С/Π $PX = PД = U_{\text{КБ}}$, $P8 = U_{\text{ЭБ}}$, $PA = I_3$, $PB = I_K$, $PC = I_B$.

В связи с приближенностью модели (5.13) и исходных данных, определяющих свойства транзистора, точность результатов вычислений мала, но достаточна для сравнительной оценки влияния параметров цепи питания на изменения постоянных токов и напряжений на выводах транзистора.

Контрольный пример: при $R_1 = 100 \text{ кОм}$; $R_2 = 20 \text{ кОм}$; $R_3 = 1 \text{ кОм}$; $R_4 = 1 \text{ кОм}$; $R_5 = 50 \text{ кОм}$; $R_6 = 0,5 \text{ кОм}$; $\Lambda = 39 \text{ 1/B}$; $\alpha_N = 0,99$; $I_0 = 0,01 \text{ мА}$; $E = -10 \text{ В}$, предварительно вычислив $a = 1,01$; $b = 1,05$; $d = 1,005$; $c = 2,59025$; $f = 1,117055$; $h = 1,08525$; $E|A| + 1 = 238,6921$; $B = -64,50334$; $C|E| = -3,943174$; $D = -0,5855535$, получим $U_{\text{ЭБ}} = 0,139 \text{ В}$ (при $\epsilon = 0,001$); $U_{\text{КБ}} = -4,025 \text{ В}$; $I_3 = 2,287 \text{ мА}$; $I_K = 2,264 \text{ мА}$; $I_B = 0,023 \text{ мА}$.

Полученные по этим программам результаты могут служить исходными данными для приближенного вычисления слабосигнальных проводимостей транзистора в расчетной рабочей точке с помощью программ 260/21 и 261/34.

Мощность, потребляемая от источника питания при рассматриваемой схеме,

$$P_0 = (I_3 R_4 + U_{\text{ЭБ}})/R_2 + I_3 E, \quad (5.14)$$

где все величины принятые положительными независимо от типа транзистора и полярности напряжения питания.

Стабильность режима питания в рассматриваемой схеме увеличивается при увеличении глубины отрицательной обратной связи по постоянному току. Стабильность режима можно оценить по чувствительности $S_K (B)$ тока коллектора к изменениям статического коэффициента усиления тока $B^1 = I_K/I_B$. Для этого по уравнениям Кирхгофа, свя-

¹ Символом B обозначено отношение I_K/I_B токов, устанавливающихся в зависимости от параметров цепи для постоянного тока, отличающееся от параметра $h_{12} B$, изменяемого при фиксированном напряжении на коллекторе.

зывающим постоянные токи и напряжения при исключении $U_{K\bar{B}}$, мало влияющего на изменения тока коллектора в рабочей области статических характеристик, составим уравнение $I_K = BI_B(I_K)$, откуда получим

$$S_K(B) = BdI_K/I_KdB = 1/(1 + I_K/I_B(1 + 1/(R_3G_5 + R_4G_2(1 + R_3G_5) + (R_4 + R_6 + R_4R_6G_2)(G_1 + G_5 + G_1G_5R_3)))),$$

где $G_1 = 1/R_1$, $G_2 = 1/R_2$, $G_5 = 1/R_5$.

По этой формуле можно определить чувствительность $S_K(B)$ для любой схемы питания биполярного транзистора, полученной из рассматриваемой обобщенной схемы размыканием или закорачиванием ее резистивных двухполюсных элементов.

При синтезе цепи питания на все или некоторые сопротивления накладываются ограничения, связанные с влиянием этих сопротивлений на усиление сигнала. В усилителях слабых сигналов чаще всего используют схему питания (рис. 50, а – в), обеспечивающую достаточно высокую стабильность режима питания вследствие последовательной отрицательной обратной связи, петля которой замыкается через сопротивления R_2 и R_4 .

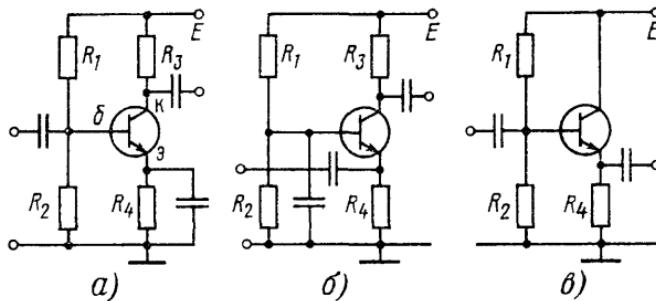


Рис. 50

В наиболее распространенной схеме включения транзистора с общим эмиттером (рис. 50, а) для устранения обратной связи на частоте сигнала резистор R_4 шунтируют конденсатором большой емкости, а в RC -усилителях цепь питания изолируют разделительными конденсаторами на выходе и входе (входной конденсатор обычно относят к схеме предыдущей усилительной ступени).

При расчете рассматриваемой схемы питания задаются сопротивлением R_3 , шунтирующим нагрузку усилительной ступени, и R_2 , уменьшение которого повышает стабильность режима питания, но уменьшает усиление и увеличивает мощность потребления. Значения остальных сопротивлений при заданном режиме питания транзистора и напряжении источника E определяют по формулам

$$R_4 = (E - I_KR_3 - U_{K\bar{E}})/(I_B + I_K);$$

$$R_1 = (E - U_{B\bar{E}} - I_3R_4)/(I_3R_4 + U_{B\bar{E}})/R_2 + I_B.$$

При этом мощность потребления рассматриваемой стандартной схемы питания определяется формулой (5.14), а чувствительность

$$S_K(B) = 1/(1 + I_KR_4(G_1 + G_2)/I_B(1 + (G_1 + G_2)R_4))).$$

Выбрав исходными напряжения $U_{B\bar{E}}$ и $U_{K\bar{E}}$, сопротивления R_2 и R_3 резисторов и параметры I_0 , $\alpha_N \approx h_{21}$ Б и А модели Эберса – Молла для биполярного транзистора, можно определить по приведенным формулам и уравнениям (5.13) все остальные величины, характеризующие статический режим.

Программа 266/21. Вычисление значений I_3 , I_B , P_0 , R_1 и R_4 для стандартной схемы питания биполярного транзистора

↑	F5	X	e^x	XY	–	F6	X	↑	F6	–	C/P
↑	←	F4	X	/–/	XY	+	C/P	←	F3	X	↑
F8	–	↑	F7	+	↑	→	→	→	P8	÷	C/P →

+ ↑ F2 ÷ XY ← F8 + ← + → ↑
F7 XY × C/Π → - ↑ ← ← ÷ C/Π

Инструкция: ($R_2 = P2, R_3 = P3, \alpha_N = P4, \Lambda = P5, I_0 = P6, E = P7$) $U_{K3} = P8, U_{B3} = P9$ = PX B/O C/Π $PX = I_3$ C/Π $PX = I_B$ C/Π $PX = R_4$, C/Π $PX = P_0$ C/Π $PX = R_1$.

Контрольный пример: при $R_2 = 10$ кОм; $R_3 = 3$ кОм; $\alpha_N = 0,98$; $\Lambda = 30$; $I_0 = 1 \times 10^{-4}$ мА; $E = 10$ В; $U_{K3} = 4$ В; $U_{B3} = 0,08$ В получим $I_3 = 1,0023$ мА; $I_B = 0,0200$ мА; $R_4 = 3046$ Ом; $P_0 = 13,156$ мВт; $R_1 = 20,6$ кОм.

Программа 267/21. Вычисление чувствительности $S_K(B)$ для стандартной схемы питания биполярного транзистора

F5 1/x ↑ F2 1/x + ↑ F4 × 1/x 1 +
↑ F7 X 1/x ↑ F8 X 1 + 1/x C/Π БП
P0

Инструкция: ($I_B = P7, I_K = P8, R_4 = P4, R_1 = P5, R_2 = P2$) (B/O) C/Π $PX = S_K(B)$.

Контрольный пример: при $I_B = 0,1$ мА; $I_K = 2$ мА; $R_1 = 200$ кОм; $R_2 = 20$ кОм; $R_4 = 2$ кОм получим $S_K(B) = 0,3354$.

Программа 268/34. Расчет стандартной схемы питания биполярного транзистора

ИП6	ИП7	X	e ^x	1	-	ИП0	X	ПА	ИП5
×	ПВ	ИП9	ИПВ	ИП3	X	-	ИП8	-	ИПА
÷	П4	ИПА	X	ИП7	+	ПС	ИП2	÷	ИПА
+	ИП9	X	ПД	ИП9	ИПС	-	ИПС	ИП2	÷
ИПА	ИПВ	-	ПС	+	÷	П1	1/x	ИП2	1/x
+	ИП4	X	↑	1	+	XY	ИПА	X	ИПС
÷	1	+	÷	C/Π	БП				

Инструкция: ($I_0 = P0, R_2 = P2, R_3 = P3, \alpha_{ct} = P5, \Lambda = P6, U_{B3} = P7, U_{K3} = P8, |E| = P9$) (B/O) C/Π $PX = S_K(B)$, $P1 = R_1, P4 = R_4, PA = I_3, PB = I_K, PC = I_B, PD = P_0$. Время счета около 25 с.

Контрольный пример: при $I_0 = 0,02$ мА, $R_2 = 5$ кОм, $R_3 = 7$ кОм, $\alpha_{ct} = 0,95, \Lambda = 39$ 1/В, $U_{B3} = 0,1$ В, $U_{K3} = 2$ В, $E = 9$ В получим $S_K(B) = 0,00673$; $R_1 = 46,1$ кОм; $R_4 = 5,81$ кОм; $I_3 = 0,968$ мА; $I_K = 0,919$ мА; $I_B = 0,048$ мА; $P_0 = 9,9$ мВт.

Рассмотренные формулы и реализующие их программы пригодны для расчета статического режима и при других схемах включения транзистора на частоте сигнала, но в этом случае изменяются требования к значениям сопротивления резистивных двухполюсников.

При включении транзистора на частоте сигнала по схеме с общей базой (см. рис. 50, б) в усилителях с RC -связью сопротивление R_4 щунтирует вход усилителя, а увеличение сопротивлений R_1 и R_2 снижает потребляемую мощность, но уменьшает стабильность статического режима. При включении транзистора в схеме с общим коллектором (см. рис. 50, в) сопротивление в цепи коллектора закорочено и в приведенных выше формулах достаточно принять $R_3 = 0$. В этом случае стабильность режима питания возрастает

при уменьшении сопротивления R_2 , но снижается входное сопротивление. Иногда для повышения входного сопротивления принимают $1/R_2 = 0$, но в этом случае разрывается цепь отрицательной обратной связи и стабильность режима питания уменьшается.

Иногда вводят параллельную отрицательную обратную связь, которая снижает входное и выходное сопротивления усилителя на транзисторе с общим эмиттером, но приемлема при включении транзистора с общей базой. Примером может служить схема с комбинированной параллельной и последовательной отрицательной обратной связью по постоянному току (рис. 51), получающаяся из обобщенной схемы питания при $1/R_1 = 0$. Мощность потребления в этом случае определяется формулой (5.14), а токи и напряжения связаны системой из уравнений (5.13) и уравнений

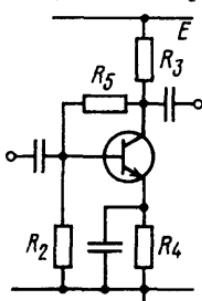


Рис. 51

$$R_4 = ((E - U_{K3})R_2 - (U_{B3} + I_3 R_1)R_3)/I_3(R_2 + R_3);$$

$$R_5 = (U_{K3} - U_{B3})/(U_B + (I_3 R_4 + U_{B3})/R_2);$$

$$S_K(B) = (R_5 + R_3 + R_4 + R_4(R_3 + R_5)/R_2)/(R_5 + (R_3 + R_4 + R_4(R_3 + R_5)/R_2))I_3/I_B).$$

Программа 269/34. Расчет комбинированной схемы питания биполярного транзистора

ИП1	ИП7	\times	e^x	1	-	ИП0	\times	ПА	\uparrow
ИП6	\times	-	ПВ	ИП9	ИП8	-	ИП7	ИП2	\div
ИПA	+	ИП3	\times	-	ИП3	ИП2	\div	1	+
ИПA	\times	\div	П4	ИПA	\times	ИП7	+	ИП2	\div
\uparrow	ИПA	+	ИП9	\times	ПС	\rightarrow	ИПB	+	ИП8
ИП7	-	XY	\div	П5	ИП3	+	ИП4	\times	ИП2
\div	ИП4	+	ИП3	+	ПД	ИП5	+	ИПД	ИПA
\times	ИПB	\div	ИП5	+	\div	C/P	БП		

Инструкция: $I_0 = P0$, $\Lambda = P1$, $R_2 = P2$, $R_3 = P3$, $\alpha = P6$, $|U_{B3}| = P7$, $|U_{K3}| = P8$, $|E| = P9$ (В/О) С/П РХ = $S_K(B)$, $P4 = R_4$, $P5 = R_5$, $P4 = I_3$, $PB = I_B$, $PC = P_0$.

Контрольный пример: при $I_0 = 0,02$ мА; $R_2 = 5$ кОм; $R_3 = 7$ кОм; $\alpha = 0,95$; $\Lambda = 39$ 1/В; $U_{B3} = 0,1$ В; $U_{K3} = 2$ В; $E = 9$ В получим (время счета около 30 с) $S_K(B) = 0,190398$; $R_4 = 0,036$ кОм; $R_5 = 25,2$ кОм; $I_3 = 0,968$ мА; $I_B = 0,0484$ мА; $P_0 = 8,96$ мВт. Для получения этих результатов с помощью микрокалькулятора с входным языком MK21 приходится использовать пакет из трех программ.

Относительной простотой отличаются схемы питания полевых транзисторов. Наиболее распространенная схема питания от одного источника с последовательной отрицательной обратной связью по постоянному току (рис. 52) обеспечивает удовлетворительную стабильность статического режима при изменениях температуры. Одной из основных причин температурной нестабильности является падение напряжения теплового тока затвора I_3 на сопротивлении R_3 , приводящее к дрейфу тока стока. В усилителях рабочую точку полевых транзисторов обычно выбирают на пологих участках стоковой статической характеристики при $U_{СИ} > U_{отс} - U_{ЗИ}$. В рабочем диапазоне напряжения $U_{ЗИ}$ имеется две термостабильные точки $U_{ЗИ0}$ и $U_{ЗИ1}$, обеспечивающие соответственно постоянство тока стока или крутизны характеристики прямой передачи при изменениях температуры в широком диапазоне частот.

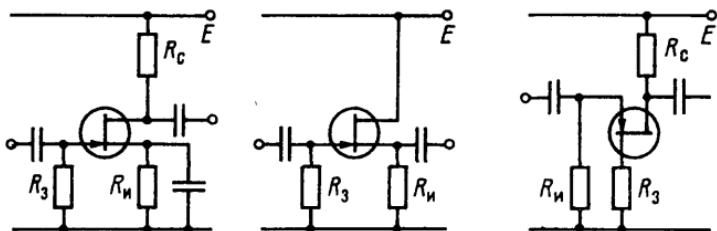


Рис. 52

Температурный дрейф снижается при уменьшении сопротивления R_3 , но при этом уменьшается и входное сопротивление в схеме усилителя с общим истоком или общим стоком. Поэтому величину R_3 выбирают [10] в пределах от нескольких десятков килоомов до нескольких мегаомов.

При изменениях теплового тока затвора I_3 изменяется падение напряжения на величину $\Delta I_3 R_3$, что приводит к изменениям тока стока $\Delta I_C = S \Delta U_{ЗИ}$. В рассматриваемой схеме эти изменения связаны соотношениями $\Delta U_{ЗИ} = \Delta I_3 R_3 - \Delta I_C R_i = \Delta I_3 R_3 - S \Delta U_{ЗИ} R_i$ или $\Delta U_{ЗИ} = \Delta I_3 R_3 / (1 + SR_i)$. Следовательно, зависимость стабильности режима питания от сопротивлений R_3 и R_i можно приближенно оценить по чувствительности напряжения между затвором и истоком к изменениям тока затвора

$$S_{3И}(I_3) = \frac{I_3 dU_{3И}}{U_{3И} dI_3} = \frac{I_3 R_3}{U_{3И} (1 + R_i S_{\max}) (1 + \sqrt{U_{3И}/U_{отс}})}.$$

В рабочем режиме токи и напряжения полевого транзистора связаны уравнениями $U_{СИ} = E - I_C(R_c + R_4)$; $U_{3И} = I_3 R_3 - I_C R_c$ и (5.10), а мощность потребления $P_0 = I_C E$.

Программа 270/34. Расчет стандартной схемы питания полевого транзистора с $p-n$ -затвором

ИП9	ИП7	-	ИП8	-	$x < 0$	63	ИП7	ИП9	÷
П2	\checkmark	2	x	3	-	ИП2	x	1	+
ИП6	x	П0	ИП5	x	ПС	ИП7	ИП0	÷	ПА
ИП5	ИП7	ИП8	+	-	ИП0	÷	ПВ	ИП2	\checkmark
1	+	3	x	ИП6	x	ИП9	÷	ПД	ИПА
x	1	+	ИП7	x	1/x	ИП1	x	ИП4	x
C/П	БП	00	0	C/П	БП				

Инструкция: $(I_3 = P1, R_3 = P4, |E| = P5, I_{\max} = P6, |U_{3И}| = P7, |U_{СИ}| = P8, U_{отс} = P9)$ (B/O) C/P PX = $S_{3И}(I_3)$, P0 = I_C , PA = R_i , PB = R_c , PC = P_0 , PD = S. Если рабочая точка выбрана ошибочно при $U_{СИ} < U_{отс} - U_{3И}$, то после выполнения программы высвечивается нуль.

Контрольный пример: при $I_3 = 10^{-3}$ мА; $R_3 = 100$ кОм; $E = 9$ В; $I_{\max} = 1$ мА; $U_{3И} = 2$ В; $U_{СИ} = 4$ В; $U_{отс} = 5$ В получим $S_{3И}(I_3) = 6,75 \cdot 10^{-3}$; $I_C = 0,305$ мА; $R_i = 6,536$ кОм; $R_c = 9,8$ кОм; $P_0 = 2,75$ мВт; $S = 0,979$ мСм.

При расчетах статических режимов затруднения могут возникнуть при непосредственном соединении нескольких активных компонентов. Если режим питания каждого активного компонента может быть выбран независимо, то, задавшись двумя постоянными токами или напряжениями для каждого транзистора, следует определить по уравнениям (5.13) или более точным уравнениям, рассмотренным в гл. 4, остальные токи и напряжения на выводах транзистора. После этого достаточно составить и решить линейную относительно всех переменных систему уравнений, связывающую токи и напряжения транзисторов с сопротивлениями резистивных двухполюсников схемы.

В качестве примера рассмотрим схему, показанную на рис. 53, а, при $R_1 = 200$ кОм; $R_2 = 20$ кОм; $R_3 = 10$ кОм и однотипных транзисторах со слабосигнальными проводимостями $y_{113} = g_{bb} = 1$ мСм; $y_{123} = g_{bk} = -2$ мкСм; $y_{213} = g_{kb} = 40$ мСм; $y_{223} = g_{kk} = 0,1$ мСм. По эквивалентной схеме (рис. 53, б) для медленных изменений токов и напряжений составим матрицу проводимостей

$$\begin{bmatrix} g_1 + g_{bb} & g_{bk} & 0 & -g_1 \\ g_{kb} & g_{kk} + g_{bb} + g_2 & g_{bk} & -g_2 \\ 0 & g_{kb} & g_{kk} + g_3 & -g_3 \\ -g_1 & -g_2 & -g_3 & g_1 + g_2 + g_3 + G \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 40000 & 1 & 150 & -2 \\ 0 & 40000 & 200 & -100 \\ -5 & -50 & -100 & 160 + G \end{bmatrix},$$

где все величины выражены в микросименсах, $g_1 = 1/R_1$, $g_2 = 1/R_2$, $g_3 = 1/R_3$, $G = 1/R$.

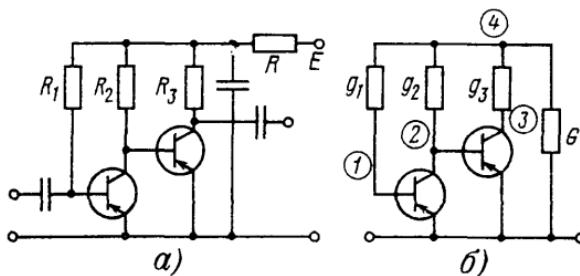


Рис. 53

Из условия самовозбуждения (потери устойчивости) $\Delta = \Delta^0 + G\Delta_{44} = 0$ для определителя составленной матрицы, находим $G_{\text{крит}} = -\Delta^0/\Delta_{44} = 1,702 \text{ мСм}$ и, следовательно, для устойчивости режима питания необходимо выбрать $R < 580 \Omega$ или изменить другие параметры.

5.3. Расчет усилителя на средних частотах

В основной части полосы пропускания (на средних частотах) широкополосных усилителей влияние паразитных инерционных параметров пренебрежимо мало и все параметры усилителя вещественны. В некоторых случаях (например, на частоте резонанса) допустимо пренебрежение реактивными параметрами и при расчете некоторых характеристик узкополосных усилителей.

При анализе методом узловых напряжений в цепи передачи сигнала целесообразно источник сигнала заменить эквивалентным источником тока с $i_c = e_c g_c$ (см. рис. 45, б). В этом случае на средних частотах такая цепь представима вещественной матрицей

$$Y = \begin{bmatrix} g_c + g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_h + g_{22} \end{bmatrix}, \quad (5.15)$$

где ненагруженный усилитель описан слабосигнальными проводимостями g_{11} , g_{12} , g_{21} и g_{22} .

Подобная модель справедлива как для усилителя в целом, так и для любой его ступени; в последнем случае проводимость g_c источника сигнала будет выходной проводимостью предыдущей ступени, а проводимость g_h – входной проводимостью последующей ступени. При непосредственном присоединении идеального источника напряжения $u_{\text{вх}}$ к входу усилителя ($1/g_c = 0$) по матрице (5.15) получим

$$K_h = u_h/u_{\text{вх}} = \Delta_{12}/\Delta_{11} = -g_{21}/(g_h + g_{22}), \quad (5.16)$$

$$K_m = u_{\text{вх}}^2 g_h / u_{\text{вх}}^2 g_{\text{вх}} = g_h K_h^2 / g_{\text{вх}}, \quad (5.17)$$

$$K_t = i_h/i_{\text{вх}} = -u_h g_h / u_{\text{вх}} g_{\text{вх}} = -K_m / K_h, \quad (5.18)$$

$$g_{\text{вх}} = i_{\text{вх}}/u_{\text{вх}} = \Delta^c/\Delta_{11} = g_{11} + g_{12} K_h, \quad (5.19)$$

где определитель Δ^c равен Δ при $g_c = 0$.

При конечной проводимости g_c получим

$$K_{hc} = u_h/e_c = g_c u_h / i_c = g_c \Delta_{12} / \Delta = -g_c g_{21} / ((g_c + g_{11})(g_h + g_{22}) - g_{12} g_{21});$$

$$K_{mc} = K_{m \text{вх}} K_m, \quad (5.20)$$

где с учетом схемы с источником напряжения (см. рис. 45, а) при $i_c = e_c g_c$ коэффициент передачи мощности на входе $K_{m \text{вх}} = g_c / (g_c + g_{\text{вх}})$. В этом случае располагаемый коэффициент усиления мощности, соответствующий номинальной мощности источника сигнала $0,25e_c^2 g_c$ при согласовании на входе,

$$K_p = 4g_h K_{hc}^2 / g_c = g_h K_h^2 / g_c \quad (5.21)$$

и выходная проводимость

$$g_{\text{вых}} = i_{\text{вых}}/u_{\text{вых}} = \Delta^h/\Delta_{22} = g_{22} - g_{12} g_{21} / (g_c + g_{11}),$$

где Δ^h соответствует определителю Δ при $g_h = 0$.

Программа 271/21. Расчет усилителя на средних частотах

F5	↑	F3	+	↑	F4	÷	/-	1/x	P6	↑	F8
×	↑	F7	XY	+	P7	F2	+	↑	F8	XY	÷
↑	F4	×	↑	F5	XY	-	P5	F3	↑	F7	÷
↑	F6	/-	XY	×	P8	×	P4	F2	↑	F7	+
÷	P2	↑	F6	×	P3	F4	×	C/P	БП	P0	

Инструкция: $g_{11} = P7$, $g_{12} = P8$, $g_{21} = P4$, $g_{22} = P5$, $g_c = P2$, $g_h = P3$ (B/O) C/P $PX = K_{mc}$, $P4 = K_m$, $P6 = K_h$, $P8 = K_t$, $P7 = g_{\text{вх}}$, $P5 = g_{\text{вых}}$, $P2 = K_{m \text{вх}}$.

Программа 272/34. Расчет усилителя на средних частотах

ИП7	ИП4	ИП5	ИП2	+	÷	ПА	ИП8	×	-
ПС	ИП2	XY	÷	ИПА	×	ПВ	ИПА	×	lg
1	0	×	П0	ИПА	/-	ПА	ИП5	ИП4	ИП8
×	ИП1	ИП7	+	÷	-	П3	ИП1	↑	ИПС
+	÷	П9	ИПА	×	ПД	ИП9	lg	1	0
×	ИП0	+	С/П	БП					

Инструкция: ($g_{11} = P7$, $g_{12} = P8$, $g_{21} = P4$, $g_{22} = P5$, $g_c = P1$, $g_h = P2$) (B/O) С/П
 $PX = K_{MC}$ (дБ), $P0 = K_M$ (дБ), $PA = K_H$, $PB = K_T$, $PC = g_{BX}$, $PD = K_{HC}$, $P3 = g_{VYKH}$,
 $P9 = K_{HVBX}$.

Контрольный пример: при $g_{11} = 1$ мСм; $g_{12} = -1 \cdot 10^{-3}$ мСм; $g_{21} = -100$ мСм;
 $g_{22} = 0,1$ мСм; $g_c = 0,1$ мСм; $g_h = 0,2$ мСм получим $K_{MC} = 36,387$ дБ; $K_M = 45,229$ дБ;
 $K_H = 333,33$; $K_T = -100$; $g_{BX} = 0,6666$ мСм; $g_{VYKH} = 0,00909$ мСм; $K_{HVBX} = 0,1304$;
 $K_{HC} = 43,478$.

При выборе структурной схемы усилителя по заданному усилинию мощности приходится оценивать располагаемый коэффициент усиления мощности каждой ступени. Его максимальное значение на средних частотах

$$K_{p\max} = (g_{21}/(\sqrt{g_{11}g_{22}} + \sqrt{\Delta'}))^2, \quad (5.22)$$

где $\Delta' = g_{11}g_{22} - g_{12}g_{21}$, соответствует оптимальным проводимостям источника сигнала и нагрузки

$$g_{c\text{ opt}} = \sqrt{\Delta'g_{11}/g_{22}}; \quad g_{h\text{ opt}} = \sqrt{\Delta'g_{22}/g_{11}}. \quad (5.23)$$

При полном согласовании по условиям (5.23) коэффициент передачи входного напряжения $K_{h\text{ opt}} = -g_{21}/(g_{22} + g_{h\text{ opt}})$ и коэффициент передачи напряжения сигнала $K_{hc\text{ opt}} = 0,5K_{h\text{ opt}}$.

Программа 273/21. Расчет согласованного усилителя на средних частотах

F8	↑	F4	×	→	F5	↑	F7	×	↑	←	-
√	P3	XY	√	+	↑	F4	XY	÷	x ²	P6	ln
4	,	3	4	3	×	x	←	F7	↑	F5	÷
↑	F3	×	P2	F3	XY	÷	P3	↑	F5	+	↑
F4	/-	XY	÷	2	÷	↑	→	C/P	БП	P0	

Инструкция: ($g_{11} = P7$, $g_{12} = P8$, $g_{21} = P4$, $g_{22} = P5$) (B/O) С/П $PX = K_{p\max}$ (дБ),
 $PY = K_{hc}$, $P6 = K_{p\max}$, $P2 = g_{c\text{ opt}}$, $P3 = g_{h\text{ opt}}$.

Программа 274/34. Расчет согласованного усилителя на средних частотах

ИП5	ИП7	×	П9	ИП8	ИП4	×	-	√	П6
ИП9	√	+	ИП4	XY	÷	x ²	П0	ИП4	/-
ИП6	ИП7	ИП5	÷	√	×	ПА	ВХ	x ²	÷
ПВ	ИП5	+	÷	2	÷	ПС	ИП0	/-	ИПС
÷	ПД	ИП0	lg	1	0	×	C/P	БП	

Инструкция: ($g_{11} = P7$, $g_{12} = P8$, $g_{21} = P4$, $g_{22} = P5$) (B/O) С/П $PX = K_{p\max}$ (дБ),
 $P0 = K_{p\max}$, $PA = g_{c\text{ opt}}$, $PB = g_{h\text{ opt}}$, $PC = K_{h\text{ opt}}$, $PD = K_T\text{ opt}$.

Контрольный пример: при $g_{11} = 1$ мСм; $g_{12} = -10^{-3}$ мСм; $g_{21} = 40$ мСм; $g_{22} = 0,1$ мСм получим $K_{p\max}$ (дБ) = 35,259 дБ; $K_{p\max} = 3356,8$; $g_{c\text{ opt}} = 1,1832$ мСм; $g_{h\text{ opt}} = 0,11832$ мСм; $K_{hc\text{ opt}} = -91,608$; $K_T\text{ opt} = 36,643$.

С помощью приведенных программ удобно оценивать предельные характеристики RC -ступеней с различным включением активного компонента. Например, если для транзистора с общим эмиттером при $Y_{11\beta} = 1$ мСм; $Y_{12\beta} = 10^{-3}$ мСм; $Y_{21\beta} = 40$ мСм; $Y_{22\beta} = 0,1$ мСм получим предельные характеристики, вычисленные в последнем контрольном примере (в пренебрежении влиянием цепей питания), то для того же транзистора в схеме с общей базой по матрице (5.12) получим $Y_{11\beta} = g_{33} = 41,099$ мСм; $Y_{12\beta} = g_{3k} = -0,099$ мСм; $Y_{21\beta} = g_{k3} = -40,1$ мСм; $Y_{22\beta} = g_{kk} = 0,1$ мСм и по про-

грамме 273/21 или 274/34 вычислим $K_{p\max} = 24,453$ дБ; $g_{c\text{ opt}} = 7,585$ мСм; $g_{n\text{ opt}} = 0,0185$ мСм. При включении такого транзистора в схему с общим коллектором ($Y_{11k} = g_{66} = 1$ мСм; $Y_{12k} = g_{63} = -0,999$ мСм; $Y_{21k} = g_{36} = -41$ мСм; $Y_{22k} = g_{33} = 41,099$ мСм) получим $K_{p\max} = 15,625$ дБ; $g_{c\text{ opt}} = 0,05836$ мСм; $g_{n\text{ opt}} = 2,3987$ мСм.

По вычисленным оптимальным проводимостям нагрузки и источника сигнала определяют коэффициенты трансформации $n_{\text{вх}} = u_{\text{вх}}/u_c = \sqrt{g_c/g_{\text{c opt}}}$ для согласования на входе и $n_{\text{вых}} = u_n/u_{\text{вых}} = \sqrt{g_n/g_{\text{n opt}}}$ для согласования на выходе.

При проектировании усилителей существенна оценка влияния нестабильности параметров, связанной с изменением рабочих условий и технологическим разбросом. Влияние малых изменений параметров на функции цепи оценивают по (3.28), вычисляя соответствующие чувствительности. Параметры g_{12} и g_{21} проходного четырехполюсника, эквивалентного ступени RC -усилителя, обычно равны соответствующим параметрам активных компонентов, но параметры g_{11} и g_{22} ступени и активного компонента несколько отличаются вследствие влияния цепей питания.

Нестабильность усиления в основном определяется изменениями параметра g_{21} , влияние которого оценивают чувствительностями коэффициента передачи напряжения сигнала $S_{\text{hc}}(g_{21}) = (g_{21}/K_{\text{hc}}) dK_{\text{hc}}/dg_{21} = 1 + g_{12}g_{21}/\Delta = (g_c + g_{11})/(g_c + g_{\text{вх}})$, входной проводимости $S_{\text{вх}}(g_{21}) = 1/(1 - g_{11}(g_h + g_{22}))/g_{12}g_{21} = g_{12}K_h/g_{\text{вх}}$, выходной проводимости $S_{\text{вых}}(g_{21}) = g_{21}K_{\text{обр}}/g_{\text{вых}}$, где $K_{\text{обр}} = u_{\text{вх}}/u_n = -g_{12}/(g_c + g_{11})$. Влияние нестабильности параметра g_{12} оценивают чувствительностями $S_{\text{hc}}(g_{12}) = 1 - S_{\text{hc}}(g_{21})$; $S_{\text{вх}}(g_{12}) = S_{\text{вх}}(g_{21})$; $S_{\text{вых}}(g_{12}) = S_{\text{вых}}(g_{21})$. При отсутствии обратной связи ($g_{12} = 0$) все эти чувствительности равны нулю, кроме $S_{\text{hc}}(g_{21}) = S_h(g_{21}) = 1$.

Программа 275/21. Вычисление K_h , K_{hc} , $K_{\text{обр}}$, $g_{\text{вх}}$, $g_{\text{вых}}$, $S_{\text{hc}}(g_{21})$, $S_{\text{вх}}(g_{21})$ на средних частотах

$$\begin{array}{ccccccccccccccccc} \uparrow & F5 & + & 1/x & \uparrow & F4 & /- & \times & P3 & \uparrow & F8 & \times \\ \uparrow & F7 & + & P6 & F2 & \uparrow & F7 & + & \uparrow & F8 & /- & \div \\ 1/x & \uparrow & \leftarrow & F3 & \times & /- & 1 & + & 1/x & \rightarrow & \uparrow & \rightarrow \\ F4 & \times & \uparrow & F5 & + & \rightarrow & F8 & \uparrow & F3 & \times & \uparrow & F6 \\ \div & \rightarrow & F2 & \uparrow & F6 & + & \div & \uparrow & F3 & \times & C/\Pi \end{array}$$

Инструкция. ($g_{11} = P7$, $g_{12} = P8$, $g_{21} = P4$, $g_{22} = P5$, $g_c = P2$) $g_h = PX$ В/О С/П $PX = K_{\text{hc}}$, $P3 = K_h$, $P6 = g_{\text{вх}}$, $C1 = S_{\text{вх}}(g_{21}) = S_{\text{вх}}(g_{12})$, $C2 = g_{\text{вых}}$, $C3 = K_{\text{обр}}$, $C4 = S_{\text{hc}}(g_{21}) = 1 - S_{\text{hc}}(g_{12})$.

Программа 276/34. Вычисление K_{hc} , K_h , $K_{\text{обр}}$, $g_{\text{вх}}$, $g_{\text{вых}}$ и их чувствительностей к изменениям g_{12} и g_{21} на средних частотах

$$\begin{array}{ccccccccccccc} \text{ИП8} & /- & \text{ИП7} & \text{ИП1} & + & \div & \text{ПВ} & \text{ИП4} & \times & \text{ИП5} \\ + & \text{ПД} & \text{ИП4} & /- & \text{ИП5} & \text{ИП2} & + & \div & \text{ПА} & \text{ИП8} \\ \times & \text{ИП7} & + & \text{ПС} & \text{ИП1} & \uparrow & \text{ИПС} & + & \div & \text{ИПА} \\ \times & \text{П0} & 1 & \text{ИПА} & \text{ИПВ} & \times & - & 1/x & \text{П3} & \text{ИП8} \\ \text{ИПА} & \times & \text{ИПС} & \div & \text{П6} & \text{ИП4} & \text{ИПВ} & \times & \text{ИПД} & \div \\ \text{П9} & 1 & \text{ИП3} & - & \text{С/П} & \text{БП} & & & & \end{array}$$

Инструкция: ($g_{11} = P7$, $g_{12} = P8$, $g_{21} = P4$, $g_{22} = P5$, $g_c = P1$, $g_h = P2$) (В/О) С/П $PX = S_{\text{hc}}(g_{12})$, $P0 = K_{\text{hc}}$, $PA = K_h$, $PB = K_{\text{обр}}$, $PC = g_{\text{вх}}$, $PД = g_{\text{вых}}$, $P3 = S_{\text{hc}}(g_{21})$, $P6 = S_{\text{вх}}(g_{21}) = S_{\text{вх}}(g_{12})$, $P9 = S_{\text{вых}}(g_{21}) = S_{\text{вых}}(g_{12})$.

Контрольный пример: при $g_{11} = 1$ мСм; $g_{12} = -10^{-3}$ мСм; $g_{21} = 50$ мСм; $g_{22} = 0,2$ мСм; $g_c = 0,05$ мСм; $g_h = 0,3$ мСм получим $K_{\text{hc}} = -4,34782$; $K_h = -100$; $K_{\text{обр}} = 0,0009523809$; $g_{\text{вх}} = 1,1$ мСм; $g_{\text{вых}} = 0,247619$ мСм; $S_{\text{hc}}(g_{21}) = 0,9130434$; $S_{\text{вх}}(g_{21}) = S_{\text{вх}}(g_{12}) = 0,090909$; $S_{\text{вых}}(g_{21}) = S_{\text{вых}}(g_{12}) = 0,1923076$; $S_h(g_{12}) = 0,0869565$.

Основной способ уменьшения влияния нестабильности параметров заключается во введении отрицательной обратной связи. Усилитель с простейшей параллельной цепью

обратной связи через резистивный двухполюсник с проводимостью g_0 (рис. 54, а) описывается матрицей

$$Y = \begin{bmatrix} g_c + g_{11} + g_0 & g_{12} - g_0 \\ g_{21} - g_0 & g_h + g_{22} + g_0 \end{bmatrix}, \quad (5.24)$$

причем обратная связь отрицательна при $(g_{21} - g_0)(g_{12} - g_0) < 0$ и положительна в противном случае. Параллельная обратная связь мало влияет на K_H и ее влияние в основном оценивают по изменениям $K_{HC} = (g_c / (g_c + g_{11}))K_H / (1 - K_H K_{obr})$.

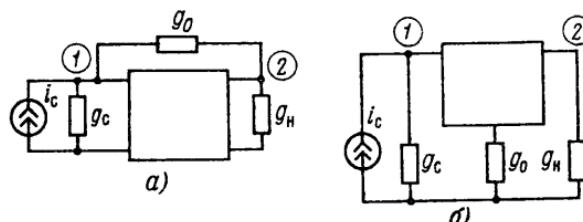


Рис. 54

Программа 277/21. Оценка влияния параллельной обратной связи на средних частотах

\uparrow	F7	+	P6	F4	-	P3	F8	-	/-	\leftarrow	F5
$+$	\uparrow	F3	\div	$1/x$	\uparrow	\rightarrow	XY	P3	\times	XY	\leftarrow
F6	XY	+	P6	F2	+	\leftarrow	F6	\uparrow	F2	$+$	\uparrow
\rightarrow	\div	$1/x$	\rightarrow	\uparrow	F3	\times	\uparrow	F6	\div	\rightarrow	F2
\uparrow	F6	+	\div	\uparrow	F3	\times	C/P	BП	P0		

Инструкция: ($g_{11} = P7, g_{12} = P8, g_{21} = P4, g_{22} + g_h = P5, g_c = P2, g_0 = PX$ (B/O) $C/P PX = K_{HC}, P3 = K_H, P6 = g_{BX}, C1 = S_{BX}(g_{21}) = S_{BX}(g_{12}), C2 = S_{HC}(g_{21}) = 1 - S_{HC}(g_{12})$).

Программа 278/34С. Анализ усилителя с параллельной цепью обратной связи на средних частотах

P0	ИП7	+	П3	ИП0	ИП15	+	П9	ИП8	ИП0
-	П6	ИП4	ИП0	-	П0	/-	ИП9	ИП2	+
\div	ПА	ИП6	\times	ИП3	+	ПС	ИП6	/-	ИП7
ИП1	+	\div	ПВ	ИП0	\times	ИП9	+	ПД	ИП0
ИПВ	\times	ИПД	\div	П9	ИП6	ИПА	\times	ИПС	\div
П6	ИП1	ИП3	+	ИП1	ИПС	+	\div	П3	ИП1
\uparrow	ИПС	$+$	\div	ИПА	\times	П0	1	ИП3	-
C/P	БП								

Инструкция: ($g_{11} = P7, g_{12} = P8, g_{21} = P4, g_{22} = P5, g_c = P1, g_h = P2, g_0 = PX$ (B/O) $C/P PX = S_{HC}(g_{12}), P0 = K_{HC}, PA = K_H, PB = K_{obr}, PC = g_{BX}, PD = g_{вых}, P3 = S_{HC}(g_{21}), P6 = S_{BX}(g_{21}) = S_{BX}(g_{12}), P9 = S_{вых}(g_{21}) = S_{вых}(g_{12})$).

Контрольный пример: при $g_{11} = 1 \text{ мСм}$; $g_{12} = -10^{-3} \text{ мСм}$; $g_{21} = 50 \text{ мСм}$; $g_{22} = 0,2 \text{ мСм}$; $g_c = 0,05 \text{ мСм}$; $g_h = 0,3 \text{ мСм}$; $g_0 = 0,01 \text{ мСм}$ ($1/g_0 = 100 \text{ кОм}$) получим $K_{HC} = -2,92208$; $K_H = -98,0196$; $K_{obr} = 0,01047619$; $g_{BX} = 2,088215 \text{ мСм}$; $g_{вых} = 0,7337047$; $S_{HC}(g_{12}) = 0,504259$; $S_{HC}(g_{21}) = 0,4957404$; $S_{BX}(g_{21}) = S_{BX}(g_{12}) = 0,516334$; $S_{вых}(g_{21}) = S_{вых}(g_{12}) = 0,7137813$.

Усилитель с простейшей цепью последовательной обратной связи через резистивный двухполюсник с сопротивлением $r_0 = 1/g_0$ (рис. 54, б) описывается матрицей проводимостей

$$Y = \begin{bmatrix} g_{11} + g_c & g_{12} & -(g_{11} + g_{12}) \\ g_{21} & g_{22} + g_h & -(g_{21} + g_{22}) \\ -(g_{11} + g_{21}) & -(g_{12} + g_{22}) & g_0 + g_\Sigma \end{bmatrix} \quad (5.25)$$

где $g_\Sigma = g_c + g_{11} + g_{12} + g_{21} + g_{22} + g_h$.

Анализировать рассматриваемый усилитель можно различными способами. Расчетные формулы, составленные по матрице (5.25), оказываются достаточно громоздкими, а устранение обратной связи ($r_0 = 1/g_0 = 0$) требует перехода к матрице 2-го порядка, что усложняет автоматизацию анализа. Поэтому целесообразно воспользоваться формулами (3.7), вычислив проводимости проходного четырехполюсника, эквивалентного анализируемому усилителю

$$g'_{11} = (g_{11} + r_0 |g|)/A; \quad g'_{12} = (g_{12} - r_0 |g|)/A;$$

$$g'_{21} = (g_{21} - r_0 |g|)/A; \quad g'_{22} = (g_{22} + r_0 |g|)/A,$$

где $A = 1 + r_0 (g_{11} + g_{12} + g_{21} + g_{22})$, $|g| = g_{11}g_{22} - g_{12}g_{21}$.

Программа 279/21С. Вычисление эквивалентных проводимостей усилителя с последовательной обратной связью

P2	F7	↑	F8	+	↑	F4	+	↑	F5	+	↑
F2	X	1	+	P3	F4	↑	F8	X	→	F7	↑
F5	X	↑	←	—	↑	F2	X	P2	F5	ΠП	—
P5	F8	ΠП	F-	/—	P8	F4	ΠП	F-	/—	P4	F7
ΠП	—	P7	C/P	/—	↑	F2	+	↑	F3	÷	B/O

Программа 279а/34. Вычисление эквивалентных проводимостей усилителя с последовательной обратной связью.

P0	ИП7	ИП8	+	ИП4	+	ИП5	+	X	1
+	П9	ИП7	ИП5	×	ИП4	ИП8	×	—	ИП0
×	П6	ИП5	ΠП	44	П5	ИП8	ΠП	43	/—
П8	ИП4	ΠП	43	/—	П4	ИП7	ΠП	44	П7
C/P	БП	00	/—	ИП6	+	ИП9	÷	↑	B/O

Инструкция к обеим программам: $g_{11} = P7$, $g_{12} = P8$, $g_{21} = P4$, $g_{22} = P5$, $r_0 = PX$ (B/O) C/P $PX = P7 = g'_{11}$, $P8 = g'_{12}$, $P4 = g'_{21}$, $P5 = g'_{22}$. Для первой программы клавишу B/O нажимать перед каждым пуском.

Контрольный пример: при $g_{11} = 1 \text{ мСм}$, $g_{12} = -1 \cdot 10^{-3} \text{ мСм}$, $g_{21} = 50 \text{ мСм}$, $g_{22} = 0,1 \text{ мСм}$, $r_0 = 0,1 \text{ кОм}$ получим $g'_{11} = 0,166123 \text{ мСм}$, $g_{12} = -2,6187 \cdot 10^{-3} \text{ мСм}$, $g'_{21} = 8,18098 \text{ мСм}$, $g'_{22} = 0,0188219 \text{ мСм}$.

После вычисления проводимостей эквивалентного усилителю с последовательной обратной связью проходного четырехполюсника характеристики усилителя можно найти по любым формулам и программам (например, по программам 275/34 и 276/21) расчета усилительной цепи общего вида.

При расчете каскадных усилителей возникает необходимость в расчете каждой усилительной ступени и усилителя в целом. При отсутствии контура обратной связи, охватывающего весь усилитель или несколько ступеней, целесообразно представить каждую усилительную ступень эквивалентным проходным четырехполюсником со слабосигнальными проводимостями и воспользоваться следующими программами для последовательного (начиная с окончной ступени) вычисления характеристик каждой ступени и их каскадного соединения.

Программа 280/21. Анализ каскадного усилителя на средних частотах

F5	↑	F6	+	↑	F4	÷	1/x	/—	P2	↑	←
X	→	F8	×	↑	F7	+	↑	F6	XY	P6	÷
↑	F2	x^2	×	ln	4	,	3	4	X	P3	↑
→	+	←	F3	C/P	БП	P0					

Инструкция: ввести параметры последней ступени и нагрузки $g_H = P6$, $g_{11n} = P7$, $g_{12n} = P8$, $g_{21n} = P4$, $g_{22n} = P5$, $1 = C1$ B/O C/P $PX = P3 = K_{Mn}$ (дБ), $P2 = K_{Hn}$, $P6 = g_{bxn}$, ..., ввести параметры очередной ступени $g_{11n-i} = P7$, $g_{12n-i} = P8$, $g_{21n-i} = P4$, $g_{22n-i} = P5$ C/P $PX = P3 = K_{Mn-i}$ (дБ), $P2 = K_{Hn-i}$, $P6 = g_{bxn-i}$, $C1 = K_{H'}$, $C6 = K_M$ (дБ).

Программа 281/34. Анализ каскадного усилителя на средних частотах

ИП4	/ -	ИП5	ИП0	+	÷	ПА	ИП8	×	ИП7	
+		ИП0	XY	П0	÷	ИПА	x^2	×	lg	1
0						ПД	ИПА	ИПС	×	ПС
ИПВ	С/П	БП								

Инструкция: ввести параметры оконечной ступени и нагрузки $g_H = P0$, $g_{11n} = P7$, $g_{12n} = P8$, $g_{21n} = P4$, $g_{22n} = P5$, $1 = PC$ В/О С/П $PX = PB = K_{Mn}$, $P0 = g_{BxN}$, $PA = K_{Hn}$, ..., ввести параметры очередной ступени $g_{11n-i} = P7$, $g_{12n-i} = P8$, $g_{21n-i} = P4$, $g_{22n-i} = P5$ С/П $PX = PB = K_{Mn-i}$ (дБ), $P0 = g_{BxN-i}$, $PA = K_{Hn-i}$, $PC = K_M$, $PD = K_{M\Sigma}$.

В качестве примера рассмотрим усилитель, схема которого показана на рис. 55, а, с одинаковыми параметрами транзисторов (при измерении в схеме с общим эмиттером): $Y_{11\beta} = y_{66} = 0,9 \text{ мСм}$; $Y_{12\beta} = y_{6k} = -2 \text{ мкСм}$; $Y_{21\beta} = y_{k6} = 40 \text{ мСм}$; $Y_{22\beta} = y_{kk} = 0,8 \text{ мСм}$.

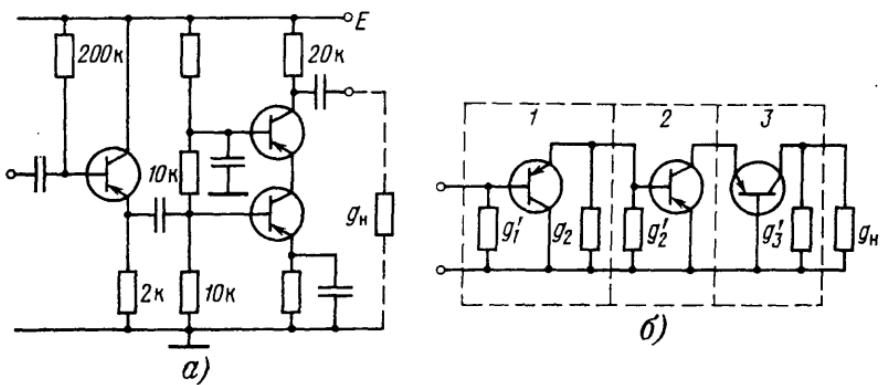


Рис. 55

На средних частотах анализируемый усилитель можно представить эквивалентной схемой (рис. 55, б) с проводимостью нагрузки $g_H = 0,05 \text{ мСм}$ и слабосигнальными параметрами оконечной ступени $g_{11} = g_{33} = g_{66} + g_{6k} + g_{k6} + g_{kk} = 41,698 \text{ мСм}$, $g_{12} = -(g_{kk} + g_{6k}) = -0,798 \text{ мСм}$, $g_{21} = -(g_{k6} + g_{kk}) = -40,8 \text{ мСм}$, $g_{22} = g_{kk} + g'_3 = 0,85 \text{ мСм}$. Параметры предоконечной ступени $g_{11} = g_{66} + g'_1 = 1,1 \text{ мСм}$, $g_{12} = g_{6k} = -2 \cdot 10^{-3} \text{ мСм}$, $g_{21} = g_{k6} = 40 \text{ мСм}$, $g_{22} = g_{kk} = 0,8 \text{ мСм}$, а параметры первой ступени $g_{11} = g'_1 + g_{66} = 0,905 \text{ мСм}$, $g_{12} = g_{6k} = -(g_{66} + g_{6k}) = -0,898 \text{ мСм}$; $g_{21} = g_{6k} = -(g_{66} + g_{k6}) = -40,9 \text{ мСм}$, $g_{22} = g'_2 + g_{33} = 42,198 \text{ мСм}$.

Введя в запоминающие устройства микрокалькулятора программу 280/21 или 281/34, проводимость нагрузки и слабосигнальные параметры оконечной ступени, а также очистив регистр D и записав единицу в регистр C , после выполнения программы получим $K_{M3} = 12,69 \text{ дБ}$, $g_{Bx3} = 5,522 \text{ мСм}$, $K_{H3} = 45,3333$. Введя слабосигнальные проводимости предконечной ступени (не изменяя содержимого остальных регистров памяти), после выполнения программы получим $K_{M2} = 22,97 \text{ дБ}$, $g_{Bx2} = 1,114 \text{ мСм}$, $K_{H2} = -6,327$. Введя слабосигнальные проводимости первой ступени, после выполнения программы получим $K_{M1} = 12,4 \text{ дБ}$, $g_{Bx1} = g_{Bx} = 0,057 \text{ мСм}$, $K_{H1} = 0,944$, $K_M = 48,1 \text{ дБ}$, $K_H = -270,8$.

Расчет каскадного усилителя усложняется при охвате двух или нескольких его ступеней обратной связью. Методика анализа в этом случае существенно зависит от выбранной схемы обратной связи. Для параллельной обратной связи (см. рис. 54, а), охватывающей каскадный усилитель или несколько его ступеней, достаточно с помощью программ 116/21 или 117/34 вычислить параметры проходного четырехполюсника, эквивалентного охваченной обратной связью части усилителя при $g_0 = 0$, с последующим ис-

пользованием программы 277/34 или 278/21. Оценить характеристики отдельных степеней каскада, охваченного обратной связью, можно с помощью программы 280/21 или 281/34 при проводимости нагрузки $g_{\text{H}} = g_0^0 + g_0$ с вычислением K_{H}^0 , g_{Bx}^0 и K_{M}^0 . В этом случае с учетом влияния обратной связи $K_{\text{H}} = K_{\text{H}}^0 + g_0 / (g_0 + g_{22}n + g_{\text{H}})$, где $g_{22}n$ – эквивалентная проводимость выходной ступени, $g_{\text{Bx}} = g_{\text{Bx}}^0 + g_0 (g_{22}n + g_{\text{H}}) / (g_0 + g_{\text{H}} + g_{22}n)$ и $K_{\text{M}} = g_{\text{H}} K_{\text{H}}^0 / g_{\text{Bx}}$. По этим данным в соответствии с формулами (5.2) и (5.5) вычисляют K_{Hc} и K_{Mc} .

5.4. Расчет усилителя на границах полосы пропускания

Полосу пропускания широкополосных усилителей определяют верхней ω_{B} и нижней ω_{H} граничными частотами, на которых усиление мощности уменьшается по отношению к усилинию на средних частотах на определенную величину (обычно на 3 дБ).

В области низких частот влияние паразитных реактивных параметров компонентов усилителя пренебрежимо мало и усиление изменяется лишь под влиянием разделительных и шунтирующих элементов цепей питания активных компонентов. Если необходимо точно знать частотную характеристику усилителя в области низких частот, то эквивалентную схему усилительной ступени для низких частот целесообразно представить каскадом из двух проходных четырехполюсников, обозначенных штриховыми линиями на рис. 56. В этом случае для окончательного проходного четырехполюсника

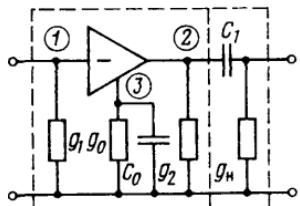


Рис. 56

$$y_{\text{Bx}} = g_{\text{H}} K_{\text{H}}; K_{\text{H}} = (\omega^2 C^2 + j\omega C g_{\text{H}}) / (g_{\text{H}}^2 + \omega^2 C^2),$$

а при устраниении узла 3 согласно формулам (3.7) для первого четырехполюсника

$$Y = \begin{bmatrix} g_1 + \frac{g_{11}y_0 + |g|}{y_0 + g_{\Sigma}} & \frac{g_{12}y_0 - |g|}{y_0 + g_{\Sigma}} \\ \frac{g_{21}y_0 - |g|}{y_0 + g_{\Sigma}} & g_2 + \frac{g_{22}y_0 + |g|}{y_0 + g_{\Sigma}} + g_{\text{H}} K_{\text{H}2} \end{bmatrix},$$

где g_{ij} – параметры активного компонента при общем узле 3; $|g| = g_{11}g_{22} - g_{12}g_{21}$ и $g_{\Sigma} = g_{11} + g_{12} + g_{21} + g_{22}$.

По этой матрице несложно составить выражения для вычисления $K_{\text{H}1}$ и $y_{\text{Bx}} = y_{\text{Bx}1}$, по которым определяют $K_{\text{H}} = K_{\text{H}1} K_{\text{H}2}$.

Усиление в области высших частот иногда уменьшается вследствие преобладающего влияния емкости, шунтирующей нагрузку и не зависящей от частоты. При этих условиях усилитель отображается матрицей слабосигнальных проводимостей

$$Y = \begin{bmatrix} g_c + g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{\text{H}} + g_{22} + pC \end{bmatrix}$$

и частотными характеристиками $K_{\text{H}}(\omega) = (-g_{21}(g_{\text{H}} + g_{22}) - j\omega C g_{21}) / ((g_{\text{H}} + g_{22})^2 + \omega^2 C^2)$; $y_{\text{Bx}}(\omega) = g_{11} + g_{12} K_{\text{H}}(\omega)$, причем граничная частота по уровню 3 дБ определяется простым выражением $\omega_{\text{B}} = (g_{\text{H}} + g_{22}) / C$. Проанализировать такую цепь вблизи граничной частоты ω_{B} несложно с помощью микрокалькулятора любого типа.

В общем случае нагруженного проходного четырехполюсника с комплексными параметрами матрицы проводимостей

$$Y = \begin{bmatrix} y_{11} y_{12} \\ y_{21} y_{22} + y_{\text{H}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11} + jb_{11} & g_{12} + jb_{12} \\ g_{21} + jb_{21} & g_{22} + g_{\text{H}} + j(b_{22} + b_{\text{H}}) \end{bmatrix}$$

коэффициент передачи входного напряжения

$$K_{\text{H}} = \operatorname{Re} K_{\text{H}} + j \operatorname{Im} K_{\text{H}} = -(g_{21}(g_{22} + g_{\text{H}}) + b_{21}(b_{22} + b_{\text{H}})) / A + j((b_{21}(g_{22} + g_{\text{H}}) - g_{21}(b_{22} + b_{\text{H}})) / A), \text{ где } A = (g_{22} + g_{\text{H}})^2 + (b_{22} + b_{\text{H}})^2, \quad (5.26)$$

а входная проводимость

$$y_{\text{bx}} = \operatorname{Re} y_{\text{bx}} + j \operatorname{Im} y_{\text{bx}} = g_{11} + g_{12} \operatorname{Re} K_{\text{H}} - b_{12} \operatorname{Im} K_{\text{H}} + j(b_{11} + g_{12} \operatorname{Im} K_{\text{H}} + b_{12} \operatorname{Re} K_{\text{H}}). \quad (5.27)$$

Программа 282/34. Анализ каскадного усилителя в области высших частот

ИП2	ИП3	+	П3	x^2	ИПА	ИПВ	+	ПВ	x^2
+	↑	/ - /	ПД	ИП1	ИП3	×	ИП0	ИПВ	×
+	ИПД	÷	ПС	ИП1	ИПВ	×	ИП0	ИП3	×
-	ИПД	÷	ПД	ИП7	ИП8	ИПС	×	+	ИП5
ИПД	×	-	П3	ИП8	ИПД	×	ИП5	ИПС	×
+	ИП4	+	ПВ	ИПС	ИП9	×	ИПД	ИП6	×
-	ИПД	ИП9	×	ИПС	ИП6	×	+	П6	XY
П9	С/П	БП							

Инструкция: ввести $0 = P6$, $1 = P9$, параметры нагрузки $g_{\text{H}} = P3$, $b_{\text{H}} = PB$; перед каждым i -м выполнением программы ($i = 0, 1, 2, \dots$) ввести (не изменяя содержимого других регистров) параметры очередной ($n - i$)-й ступени, начиная с оконечной, $g_{11,n-i} = P7$, $b_{11,n-i} = P4$, $g_{12,n-i} = P8$, $b_{12,n-i} = P5$, $g_{21,n-i} = P1$, $b_{21,n-i} = P0$, $g_{22,n-i} = P2$, $b_{22,n-i} = PA$ и выполнить (В/О) С/П $PX = P9 = \operatorname{Re} K_{\text{H}}$, $PY = P6 = \operatorname{Im} K_{\text{H}}$, $PC = \operatorname{Re} K_{\text{H},n-i}$, $PD = \operatorname{Im} K_{\text{H},n-i}$, $P3 = \operatorname{Re} y_{\text{bx},n-i}$, $PB = \operatorname{Im} y_{\text{bx},n-i}$. Время выполнения программы около 25 с.

В качестве контрольного примера определим коэффициент передачи напряжения и входную проводимость усилителя, схема которого приведена на рис. 55, а, и его ступеней в предположении, что на заданной частоте проводимость (все проводимости выражены в миллисименсах) нагрузки $y_{\text{H}} = 0,05 + j0,05$, параметры транзисторов одинаковы (для схемы с общим эмиттером $Y_{11,3} = y_{66} = 1,2 + j0,2$; $Y_{12,3} = y_{6K} = -4 \cdot 10^{-3} - j2 \cdot 10^{-2}$; $Y_{21,3} = y_{K6} = 40 - j0,05$; $Y_{22,3} = y_{KK} = 0,1 + j0,1$), а реактивными параметрами остальных элементов можно пренебречь.

Определив с помощью матрицы (5.12) слабосигнальные проводимости оконечной ступени в соответствии с эквивалентной схемой усилителя (рис. 55, б) $y_{11} = y_{33} = y_{66} + y_{6K} + y_{K6} + y_{KK} = 41,296 + j0,23$; $y_{12} = y_{3K} = -(y_{6K} + y_{KK}) = -0,096 - j0,08$; $y_{21} = y_{K3} = -(y_{K6} + y_{KK}) = -40,1 - j1,15$; $y_{22} = g'_3 + y_{KK} = 0,15 + j0,1$, при заданной нагрузке по программе 282/34 получим $K_{\text{H}} = K_{\text{H}3} = 131,08 + j92,56$; $y_{\text{bx}3} = 36,11712 - j19,14216$.

По проводимостям предоконечной ступени $y_{11} = g'_2 + y_{66} = 1,4 + j0,2$; $y_{12} = y_{6K} = -0,004 - j0,02$; $y_{21} = y_{K6} = 40 - j0,05$; $y_{22} = y_{KK} = 0,1 + j0,1$ после выполнения программы получим $K_{\text{H}} = K_{\text{H}3} K_{\text{H}2} = -155,50082 - j20,649969$; $K_{\text{H}2} = -0,86582512 + j0,45385112$; $y_{\text{bx}2} = 1,4125403 + j0,2155011$.

Определив проводимости первой ступени $y_{11} = g'_1 + y_{66} = 1,205 + j0,2$; $y_{12} = y_{63} = -(y_{66} + y_{6K}) = -1,196 - j0,18$; $y_{21} = y_{36} = -(y_{66} + y_{K6}) = -41,2 + j0,195$; $y_{22} = g'_2 + y_{33} = 41,796 + j0,23$, после выполнения программы получим $K_{\text{H}} = K_{\text{H}3} K_{\text{H}2} K_{\text{H}1} = -147,95321 - j21,917303$; $K_{\text{H}1} = 0,95336728 + j0,014342678$; $y_{\text{bx}} = y_{\text{bx}1} = 0,067354382 + j0,01124005$.

При расчетах на микрокалькуляторе с входным языком МК21 вычисления по (5.26) и (5.27) приходится выполнять с помощью пакета из нескольких программ. В этом случае для вычисления комплексных чисел $K_{\text{H}} = -y_{21}/(y_{22} + y_{\text{H}})$ и $y_{\text{bx}} = y_{11} + y_{12} K_{\text{H}}$ целесообразно использовать программы, приведенные в § 1.6.

Для вычислений по (5.26) и (5.27) в диапазоне высших частот необходимо предварительно определять вещественные и мнимые части слабосигнальных проводимостей. Трудоемкость решения этой задачи зависит от схемы усилителя и свойств его активных компонентов. Емкости и резистивные проводимости схемы замещения биполярного транзистора (см. рис. 47, б) практически не зависят от частоты в диапазоне, ограниченном частотой $\omega_S = (1 + r_6 g_3)/(r_6 C_3)$. Однако проводимости эквивалентного проходного четырехполюсника, используемые в (5.26) и (5.27), зависят от частоты вследствие

влияния распределенного сопротивления области базы r_6 . Приводимые в справочниках параметры схемы замещения (см. рис. 47, в) обычно соответствуют определенному режиму питания, который может отличаться от режима питания транзисторов в проектируемом усилителе. Поэтому при определении проводимостей эквивалентного транзистору проходного четырехполюсника (см. рис. 47, а) целесообразно учитывать зависимость параметров от режима питания.

В наибольшей степени зависит от режима питания слабосигнальная проводимость $g_3 \approx \Delta I_3 = \gamma I_K$, а также параметры $C_3 = \tau g_3$ и $g_r = \beta g_3$, в меньшей степени зависят от режима g_K и C_K , а величину r_b обычно считают не зависящей от режима питания. Зная параметры g_3 , C_3 и g_K для заданного режима питания, по измерениям токов I_3 и I_K можно определить коэффициенты γ , τ и β и оценить зависимости слабосигнальных проводимостей транзистора от режима питания.

Частотные характеристики эквивалентного транзистору проходного четырехполюсника [17] представимы выражениями

$$\begin{aligned} Y_{113} &= y_{66} = g_{66} + jb_{66} \approx ((a + \nu^2) + j\nu(1 - a)) / r_b(1 + \nu^2); \\ Y_{123} &= y_{6K} = g_{6K} + jb_{6K} \approx -(g_{6K}(0) + \nu^2 C_K / a\tau) + j\nu(C_K / a\tau - g_{6K}(0)) / (1 + \nu^2); \\ Y_{213} &= y_{K6} = g_{K6} + jb_{K6} \approx (1 - j\nu)\beta a / r_b(1 + \nu^2); \\ Y_{223} &= y_{KK} = g_{KK} + jb_{KK} \approx (g_{EK}(0) + \nu^2 \xi C_K) / (\tau(1 + \nu^2)) + j\nu \xi C_K / (\tau(1 + \nu^2)), \end{aligned} \quad (5.28)$$

где низкочастотные значения $g_{6K}(0) = g_K / (1 + r_b(g_3 + g_K))$; $g_{EK}(0) = g_{6K}(0) + 1/r_K$; $r_K = 1/g_K$; $\nu = \omega/\omega_S$; $a = r_b g_3 / (1 + r_b g_3)$.

Вычисления по этим формулам обеспечиваются следующей программой, содержащей общую часть для выполнения подготовительных операций и "сменные" части для вычисления искомых значений эквивалентных проводимостей.

Программа 283/21. Вычисление частотных характеристик эквивалентных проводимостей биполярного транзистора с общим эмиттером

F7	↑	F2	X	↑	F3	X	1	+	÷	↑	←
F8	X	↑	π	X	2	X	↑	F4	X	↑	←
F1	x^2	1	+	$1/x$	→	→	...				

Инструкция: дополнить программу фрагментом для вычисления $Y_{113} = y_{66}$

XY	-	↑	←	X	←	↑	F3	...	P6	+	P5	F6	1
→	X	↑	←	C/P	BП	P0			÷	↑	F5	X	;

для вычисления $Y_{213} = y_{6K}$

↑	F5	-	←	X	↑	F5	...	XY	→	F6	XY	÷
X	←	↑	→	X	→	X	↑	←	↑	←	C/P	;

для вычисления $Y_{213} = y_{K6}$

÷	x^2	P6	√	↑	←	X	...	↑	F5	X	↑	F3
P6	→	X	→	X	↑	←	XY	+	↑	F6	X	√
							C/P	BП	P0			;

или для вычисления $Y_{223} = y_{KK}$

←	↑	→	X	→	X	↑	F6	XY	X	←	X	
C/P	BП	P0					F5	+	↑	←	XY	;

записать исходные данные $\gamma = P2$, $r_b = P3$, $\tau = P4$, $I_K = P7$, $f = P8$; при вычислении y_{6K} дополнительно записать $g_{6K}(0) = P5$, $C_K / \tau = P6$; при вычислении y_{K6} дополнительно записать $\beta = P5$; при вычислении y_{KK} дополнительно записать $g_{EK}(0) = P5$, $\beta C_K / \tau = P6$; выполнить В/O С/P PX = Re $y_{ij}(f)$, PY = Im $y_{ij}(f)$. Результаты программы вычисля-

ет в миллисименсах, причем составляющие $y_{бк}$ и $y_{кк}$ высвечиваются с обратным знаком. После вычисления проводимости $y_{кб}$ ее модуль хранится в регистре 6.

Программа 284/34. Вычисление у-параметров биполярного транзистора в области высших частот

ИП7	ИП0	X	↑	ИП1	1/x	+	÷	П9	ИП8
π	X	2	X	ПА	X	ИП2	X	ПВ	x^2
1	+	ПС	ИП1	X	ПД	ИПВ	1	ИП9	-
X	ИПД	÷	ИП9	ИПВ	x^2	+	ИПД	÷	С/П
ИПА	ИП4	X	ИП5	ИПВ	X	-	ИПС	÷	ИПА
ИПВ	X	ИП4	X	ИП5	+	ИПС	÷	С/П	ИП3
ИП9	X	↑	ИПВ	X	0	ХҮ	-	ИПД	÷
ХҮ	ИПД	÷	С/П	ИП3	ИП4	X	ИП2	÷	ИПВ
X	ИПС	÷	↑	ИПВ	X	ИП6	+	С/П	БП

Инструкция: ($\gamma = P0$, $r_6 = P1$, $\tau = P2$, $\beta = P3$, $C_k = P4$, $g_{бк}(0) = P5$, $g_{зк}(0) = P6$, $I_k = P7$, $f = P8$) (Б/О) С/П PX = Re $y_{бб}$, PY = Im $y_{бб}$ С/П PX = Re $y_{бк}$, PY = Im $y_{бк}$ С/П PX = Re $y_{кб}$, PY = Im $y_{кб}$ С/П PX = Re $y_{кк}$, PY = Im $y_{кк}$. После первого выполнения программы P9 = a, PA = ω, PB = ν, PC = 1 + ν². Время вычисления каждого параметра около 30 с.

Контрольный пример: при $r_6 = 50$ Ом, $\beta = 50$, $g_{бк}(0) = 10^{-2}$ мСм, $g_{зк}(0) \approx 0$, $C_k = 5$ пФ, $C_z = 10$ пФ, $g_z = 0,5$ мСм, $I_k = 1$ мА определим коэффициенты $\gamma = g_z/I_k = 0,5$, $\tau = C_z/g_z = 0,02$ мкс и вычислим для тока $I_k = 5 \cdot 10^{-3}$ А и частоты $f = 10$ МГц параметры $Y_{11z} = y_{бб} = 2,56218 \cdot 10^{-3} + j2,43477 \cdot 10^{-3}$; $Y_{12z} = y_{бк} = -(9,5860957 \cdot 10^{-4} + j6,1493381 \cdot 10^{-4})$; $Y_{21z} = y_{кб} = 0,10898 - j0,015217$; $Y_{22z} = y_{кк} = 4,780677 \cdot 10^{-4} + j3,4239077 \cdot 10^{-3}$.

Параметры транзистора для других схем включения можно определить по результатам вычислений с помощью матрицы (5.28).

Значительно проще задача анализа усилителей на высоких частотах при использовании полевых транзисторов или электронных ламп, эквивалентные параметры которых в схемах замещения (см. рис. 47, г) практически не зависят от частоты в рабочем диапазоне частот. Зависимость параметров S и g_i от режима питания можно определить с помощью программ 262/21 или 263/34, а эквивалентные емкости при изменении режима в линейной области выходных характеристик изменяются не более чем на 10 %. Эквивалентные емкости в аналогичной схеме замещения электронной лампы также мало зависят от режима питания, а зависимость параметров S и g_i от напряжений питания не сложно оценить по статическим характеристикам или аналитическим выражениям "закона трех вторых".

Таким образом, ступень широкополосного усиления на электронной лампе или полевом транзисторе представима матрицей проводимостей

$$Y = \begin{bmatrix} g_{11} + j\omega C_{11} & g_{11} - j\omega C_{12} \\ g_{21} - j\omega C_{12} & g_{22} + g_H + j\omega(C_{22} + C_H) \end{bmatrix}, \quad (5.29)$$

в которой от частоты обычно зависят лишь параметры g_H и C_H ступеней предварительного усиления, соответствующие параметрам входной проводимости последующей ступени.

В этом случае коэффициент передачи входного напряжения

$$K_H = \frac{\omega^2 C_{12} (C_{22} + C_H) - g_{21} (g_{22} + g_H) + j\omega(g_{21} (C_{22} + C_H) + C_{12} (g_{22} + g_H))}{(g_H + g_{22})^2 + \omega^2 (C_{22} + C_H)^2}$$

и входная проводимость

$$y_{BX} = g_{11} + g_{12} \operatorname{Re} K_H - \omega C_{12} \operatorname{Im} K_H + j(g_{12} \operatorname{Im} K_H + \omega(C_{11} + C_{12} \operatorname{Re} K_H)).$$

Программа 285/34. Анализ усилителя на электронной лампе или полевом транзисторе в области высших частот

π	x	2	x	P9	x^2	ИП2	x^2	x	ИП1
x^2	+			ПД	ИП2	ИП0	x	ИП1	ИП5
ИП9	x			ИПД	\div	ПВ	ИП9	x^2	ИП5
x							ИП5	x	ИП2
ИП7	+			ИП1	x	—	ИПД	\div	ПА
ИПА				ИП9	ИП5	x	ИПВ	x	ИП4
ИПА					ИП9	x	ИП4	ИПВ	ИП8
ПД						ИП5	x	x	+
							ИП4	ИПВ	
								С/П	БП

Инструкция: ($g_{11} = P7$, $C_{11} = P8$, $g_{12} = P4$, $C_{12} = P5$, $g_{\text{H}} + g_{22} = P1$, $C_{\text{H}} + C_{22} = P2$, $g_{21} = P0$) $f = PX$ (В/О) C/Π $PX = |K_{\text{H}}(\omega)|$, $PA = \operatorname{Re} K_{\text{H}}(\omega)$, $PB = \operatorname{Im} K_{\text{H}}(\omega)$, $PC = \operatorname{Re} y_{\text{bx}}(\omega)$, $PD = \operatorname{Im} y_{\text{bx}}(\omega)$, $P9 = \omega$ (проводимости в миллесименсах, емкости в нанофарадах, частота в мегагерцах). Время счета около 20 с.

Эта программа, в отличие от универсальной программы 282/34, удобна для построения частотных характеристик усилителя без предварительного вычисления слабосигнальных параметров активных компонентов на заданных частотах. Исключение составляет вычисление частотно-зависимых параметров предыдущих ступеней $g_{\text{H}i}(\omega) = \operatorname{Re} y_{\text{bx}i+1}(\omega)$ и $C_{\text{H}i}(\omega) = \operatorname{Im} y_{\text{bx}i+1}(\omega)/\omega$.

При включении активных компонентов с различным выбором общего узла возникает необходимость в определении их параметров по известным параметрам g_{ij} и C_{ij} исходной схемы включения. Для решения этой задачи можно использовать программы 110/21 или 111/34 или вычислить требуемые параметры в обычном режиме в соответствии с их положением в неопределенной матрице полевого транзистора (или электронной лампы при замене индексов, соответствующих затвору, истоку и стоку, индексами, соответствующими сетке, катоду и аноду)

$$Y_{\text{ПТ}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -S & S + g_i & -g_i \\ S & -(S + g_i) & g_i \end{bmatrix} + j\omega \begin{bmatrix} C_{\text{зи}} + C_{\text{зс}} & -C_{\text{зи}} & -C_{\text{зс}} \\ -C_{\text{зи}} & C_{\text{си}} + C_{\text{зи}} & -C_{\text{си}} \\ -C_{\text{зс}} & -C_{\text{си}} & C_{\text{зс}} + C_{\text{си}} \end{bmatrix}. \quad (5.30)$$

В качестве примера рассмотрим каскодный усилитель на электронных лампах (рис. 57, а) с одинаковыми параметрами $S = 8 \text{ мСм}$; $g_i = 0,05 \text{ мСм}$; $C_{\text{зк}} = 10 \text{ пФ}$; $C_{\text{са}} = 5 \text{ пФ}$; $C_{\text{ак}} = 8 \text{ пФ}$ при проводимости нагрузки усилителя $y_{\text{H}} = (0,1 + j\omega 0,02) \text{ мСм}$.

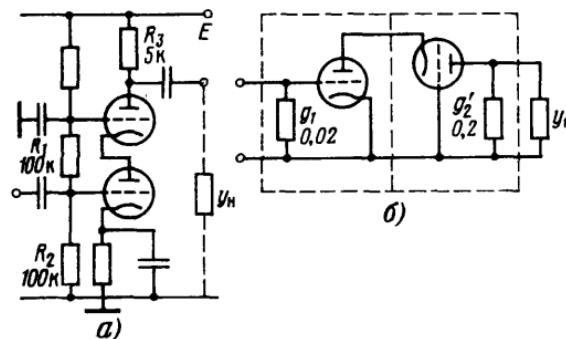


Рис. 57

По эквивалентной схеме усилителя для высших частот (рис. 57, б) и матрице (5.30) находим параметры матрицы (5.29) для окончательной ступени: $g_{11} = g_{\text{KK}} = S + g_i = 8,05 \text{ мСм}$; $C_{11} = C_{\text{ак}} + C_{\text{зк}} = 0,018 \text{ нФ}$; $g_{12} = g_{\text{ка}} = -g_i = -0,05 \text{ мСм}$; $C_{12} = C_{\text{ак}} = 0,008 \text{ нФ}$; $g_{21} = g_{\text{ак}} = -(S + g_i) = -8,05 \text{ мСм}$; $g_{22} + g_{\text{H}} = g_{\text{aa}} + g'_1 + g_{\text{H}} = g_i + g'_1 + g_{\text{H}} = 0,35 \text{ мСм}$; $C_{22} + C_{\text{H}} = C_{\text{ак}} + C_{\text{зк}} + C_{\text{H}} = 0,033 \text{ нФ}$.

С помощью программы 285/34 на частотах f (МГц) = 0; 0,5; 1 получим $|K_{\text{H}2}| = 23; 22,053; 19,789$, $K_{\text{H}2} = 23 + j0; 21,164 - j6,1972; 17,088 - j9,9795$, $y_{\text{bx}2} = 6,9 +$

+ j0; 7,1575 + j0,89833; 7,6972 + j1; 4710 и $C_{bx_2} = \text{Im } y_{bx_2}/\omega = 0$; 0,28595 нФ; 0,234118 нФ.

По параметрам первой ступени $g_{11} = g'_1 = 0,02$ мСм; $C_{11} = C_{ca} + C_{ck} = 0,015$ нФ; $g_{12} = 0$; $C_{12} = C_{ca} = 0,005$ нФ; $g_{21} = S = 8$ мСм; $g_{22} + g_h = g_i + g'_2 + \text{Re } y_{bx_2}$; $C_{22} + C_h = C_{ac} + C_{ak} + C_{bx_2}$, с помощью программы 285/34 на тех же частотах вычисляем $|K_{h_1}| = 1,1188$; 1,0728316; 0,98797, $K_{h_1} = -1,1188$; $-1,0640 + j0,13721$; $-0,96888 + j0,19325$, $y_{bx_1} = y_{bx} = 0,02$; $0,017845 + j0,030410$; $0,013929 + j0,0063809$. Для усилителя $|K_h| = |K_{h_1}| |K_{h_2}| = 25,734$; 23,695; 19,551.

На микрокалькуляторе с входным языком МК21 аналогичные результаты вычисляются с помощью пакета из нескольких программ. Поэтому на таких микрокалькуляторах целесообразнее вычислять $K_h = -y_{21}/(y_{22} + y_h)$ и $y_{bx} = y_{11} + y_{12}K_h$ для каждой ступени каскада с помощью программ, реализующих операции над комплексными числами, приведенных в § 1.6.

Сравнительно просто анализируются усилители без обратной связи ($y_{12} = 0$), т. е. в случае использования активных компонентов с пренебрежимо малой внутренней обратной связью. К ним относятся многие интегральные активные компоненты (в частности, операционные усилители), для которых достаточно учесть входные и выходные резистивные проводимости и емкости, не зависящие от частоты. Расчет несколько усложняется при частотной зависимости параметра прямой передачи, обычно описываемой выражением $y_{21} = S_0/(1 + j\omega\tau) = S_0/(1 + j\omega/\omega_S)$, где $\tau = 1/\omega_S$; $\omega_S = 2\pi f_S$ – частота, на которой квадрат модуля параметра y_{21} уменьшается в два раза по сравнению с низкочастотным значением. В этом случае усиительная ступень с таким активным компонентом представима матрицей

$$Y = \begin{bmatrix} g_{11} + j\omega C_{11} & 0 \\ S_0/(1 + j\omega\tau) & g_h + g_{22} + j\omega(C_{22} + C_h) \end{bmatrix}, \quad (5.31)$$

а расчет усиления ступени сводится к вычислению коэффициента передачи напряжения

$$K_h = S_0 \left[\frac{\omega^2 \tau (C_h + C_{22}) - (g_h + g_{22}) + j\omega(\tau(g_h + g_{22}) + C_h + C_{22})}{(1 + \omega^2 \tau^2)((g_h + g_{22})^2 + \omega^2(C_h + C_{22})^2)} \right],$$

так как входная проводимость ступени равна $y_{11} = g_{11} + j\omega C_{11}$.

Программа 286/34. Расчет K_h усиительной ступени при $y_{12} = 0$ и $y_{21} = S_0/(1 + j\omega\tau)$

π	x	2	x	x^2	ПД	ИП8	x^2	x	1
+	ИП1	ИП4	+	П3	x^2	ИП5	ИП2	+	П6
x^2	ИПД	x	+	x	ИП7	\div	П9	ИП6	ИП8
x	ИПД	x	ИП3	$-$	ИП9	\div	П0	ИП3	ИП8
x	ИП6	+	ИПД	$\sqrt{-}$	x	ИП9	\div	ПА	x^2
ИП0	x^2	+	$\sqrt{-}$	C/P	BП				

Инструкция: ($S_0 = P7$, $\tau = 1/\omega_S = P8$, $g_{22} = P4$, $C_{22} = P5$, $g_h = P1$, $C_h = P2$) $f = P X$ (частота в мегагерцах, емкости в нанофарадах, проводимости в миллисисиенсах) (B/O) $C/P P X = |K_h(f)|$, $P0 = \text{Re } K_h(f)$, $PA = \text{Im } K_h(f)$, $PD = \omega^2$. Время счета около 20 с.

Программа 287/21. Расчет K_h усиительной ступени при $y_{12} = 0$ и $y_{21} = S_0/(1 + j\omega\tau)$

\uparrow	π	x	2	x	x^2	P6	\uparrow	F5	x^2	x	\uparrow
F4	x^2	+	P3	F8	x^2	\uparrow	F6	X	1	+	\uparrow
F3	X	\uparrow	F7	\div	P2	F4	\uparrow	F8	X	\uparrow	F5
+	\uparrow	F6	$\sqrt{-}$	x	\uparrow	F2	\div	P3	F6	\uparrow	F8
X	\uparrow	F5	X	\uparrow	F4	$-$	\uparrow	F2	\div	P2	C/P

Инструкция: ($S_0 = P7$, $\tau = P8$, $g_{22} + g_h = P4$, $C_{22} + C_h = P5$) $f = P X$ B/O C/P $P X = P2 = \text{Re } K_h(f)$, $P3 = \text{Im } K_h(f)$, $P6 = \omega^2$. Время счета около 20 с.

Контрольный пример: при $S_0 = 100$ мСм; $\tau = 0,2$; $g_{22} = 1/100$ Ом = 10 мСм; $C_{22} =$

$$= 20 \text{ пФ} = 0,02 \text{ нФ}; g_{\text{H}} = 1/1 \text{ кОм} = 1 \text{ мСм}; C_{\text{H}} = 50 \text{ пФ} = 0,05 \text{ нФ} \text{ получим } |K_{\text{H}}(0)| = 9,0909; K_{\text{H}}(0) = -9,0909; |K_{\text{H}}(0,5 \text{ МГц})| = 7,696; K_{\text{H}}(0,5 \text{ МГц}) = -6,433 + j4,224.$$

Если в основной схеме включения активного компонента $y_{12} = 0$ и $y_{11} = 0$, то приведенные программы пригодны для анализа каскадного соединения с любой схемой включения активных компонентов. Однако при $y_{11} \neq 0$ для основной схемы включения в других схемах включения y_{12} отличается от нуля и приведенные программы неприменимы.

5.5. Расчет резонансных усилителей

В низкочастотных узкополосных усилителях необходимую избирательность обычно обеспечивают с помощью активных фильтров, дополняя их для получения требуемой мощности сигнала в нагрузке ступенями широкополосного усиления. По аналогичной схеме чаще всего собирают и высокочастотные узкополосные усилители, в которых требуемая избирательность достигается с помощью пассивных фильтров, рассмотренных в гл. 6.

В радиотехнических устройствах используют резонансные усилители, активные компоненты которых связаны между собой и с внешними цепями с помощью резонансных LC -контуров высокой добротности. Типовая схема ступени резонансного усилителя с инвертирующим напряжением активным компонентом показана на рис. 58, а). Характерной особенностью такой схемы является наличие RC -фильтра, развязывающего общие цепи питания по высокой частоте. Выбор сопротивлений R_{Φ} и R_0 определяется компромиссом между требуемыми стабильностью режима питания и развязкой общих цепей питания на частоте сигнала. Характерно и частичное включение в контур, определяющий частотные свойства рассматриваемой ступени, полных проводимостей нагрузки и проводимости y_{22} активного компонента, которые для упрощения записи обозначим символовыми выражениями $y_{22} = g_1 + jb_1$ и $y_{\text{H}} = g_2 + jb_2$.

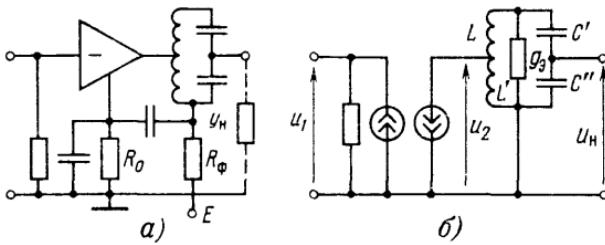


Рис. 58

Рассматриваемую ступень резонансного усиления удобно представить эквивалентной схемой (рис. 58, б) с приведенными резистивной проводимостью и емкостью контура

$$g_3 = g_0 + k_1^2 g_1 + k_2^2 g_2; \quad C_3 = C + (k_1^2 b_1 + k_2^2 b_2) / \omega_0,$$

где ω_0 – резонансная частота; g_0 – проводимость ненагруженного контура, определяемая в основном потерями в катушке; $C = C' C'' / (C' + C'')$; k_1 и k_2 – коэффициенты включения соответственно выходной цепи активного компонента и нагрузки. В общем случае при емкостной связи с контуром $k = C'' / (C' + C'') = C/C'$, при автотрансформаторной связи $k = (L' + M)/L$ и при трансформаторной связи $k = M/L$, где M – коэффициент взаимоиндукции.

Следует отметить, что по приведенным выше формулам не всегда можно с требуемой точностью определить вносимые в контур проводимости и емкости. Это прежде всего относится к емкостной связи, при которой точность приведенных формул удовлетворительна, если отношение C'/C меньше некоторого значения, зависящего от коэффициента включения. Так, при $k_1 < 0,2$ погрешностью расчета можно пренебречь, если $C'/C < 1$, но при $k_1 < 0,8$ требуется отношение $C'/C \leq 5$.

Коэффициенты передачи напряжения в рассматриваемой цепи связаны с параметрами эквивалентной схемы соотношениями

$$K' = u_2/u_1 = k_1^2 y_{21} / (g_0 (1 + j\xi) + k_1^2 g_1 + k_2^2 g_2);$$

$$K'' = u_{\text{H}}/u_2 = k_2/k_1 \text{ и } K_{\text{H}} = u_{\text{H}}/u_{\text{BX}} = K' K'' = K,$$

где $\xi = 2\Delta f Q/f_p$ – обобщенная расстройка, выраженная через относительную расстройку и добротность Q ненагруженного контура.

По отношению к коэффициенту передачи напряжения K на частоте резонанса $K_0 = k_1 k_2 y_{21} / g_0 \beta$ частотная характеристика ступени определяется формулой

$$K(j\omega) = K_0 / (1 + j\xi/\beta),$$

где $\beta = \Delta f_{\text{з}}/\Delta f_p = 1 + (k_1^2 g_1 + k_2^2 g_2)/g_0$ – коэффициент, характеризующий расширение полосы пропускания контура (по уровню 3 дБ относительно усиления мощности) с учетом вносимых проводимостей.

На практике обычно $g_{\text{H}} > g_1$, и максимальный коэффициент усиления $K_{\max} = |y_{21}| / (2\sqrt{(g_1 + g_0)g_{\text{H}}})$ соответствует выбору $k_1 = 1$, $k_2 = \sqrt{(g_0 + g_1)/g_2}$ и $\beta = 2(1 + g_1/g_0)$. Если полоса пропускания в этом случае больше требуемой, то коэффициенты включения следует определять из соотношений

$$k_1 = \sqrt{(\beta_{\text{тр}} - 1)g_0/2g_1} \text{ и } k_2 = k_1 \sqrt{g_1/g_2},$$

при соблюдении которых $K = y_{21} (\beta_{\text{тр}} - 1) / (\beta_{\text{тр}} \sqrt{g_1 g_2})$.

Программа 288/21. Расчет характеристик резонансного усилителя

$x = 0$	FXY	F3	\uparrow	F4	$+$	XY	\div	2	\times	P8	1
$-$	\uparrow	F3	\times	2	\div	XY	\leftarrow	F5	\div	$\sqrt{}$	P7
F4	\div	$\sqrt{}$	P6	1	$-$	$x < 0$	FCx	F7	\times	\uparrow	F2
x	\uparrow	F8	\div	\uparrow	F3	\div	C/P	BП	P0	\rightarrow	\uparrow
F4	$-$	\uparrow	F5	\div	$\sqrt{}$	P7	1	P6	BП	5	

Инструкция: ($|y_{21}| = P2$, $g_0 = P3$, $g_1 = P4$, $g_2 = P5$) $\beta_{\text{треб}} = PX$ (B/O) C/P $PX = K$, $P6 = k_1$, $P7 = k_2$, $P8 = \beta$. Для вычисления K_{\max} перед выполнением программы следует очистить регистр X.

Контрольный пример: при $|y_{21}| = 50 \text{ мСм}$ $g_0 = 0,1 \text{ мСм}$, $g_1 = 0,2 \text{ мСм}$, $g_2 = 5 \text{ мСм}$, $0 = PX$ получим $K_{\max} = 20,41241$; $k_1 = 1$; $k_2 = 0,2449489$; $\beta = 6$; при $\beta_{\text{треб}} = 2$ получим $K = 12,5$; $k_1 = 0,5$; $k_2 = 0,1$.

После выбора оптимальных значений коэффициентов включения по заданной индуктивности L контура определяют остальные его параметры: $C = C' C'' / (C' + C'') = ((1/\omega_p L) - k_1^2 b_1 - k_2^2 b_2) / \omega_p L$; $C' = C/k_2$; $C'' = CC' / (C' - C)$.

Число витков w_1 катушки, от которых необходим отвод для полученного заданного коэффициента k_1 , когда коэффициент связи витков катушки между собой близок к единице, примерно равно $k_1 w$, где w – число витков катушки.

Программа 289/21. Расчет параметров контура резонансной усилительной ступени

\leftarrow	F8	\uparrow	π	\times	2	\times	\uparrow	\rightarrow	\times	$1/x$	\rightarrow
F6	x^2	\uparrow	F4	\times	\rightarrow	F7	x^2	\uparrow	F5	\times	\uparrow
\leftarrow	$+$	\uparrow	\leftarrow	XY	$-$	\uparrow	\leftarrow	\div	\uparrow	P3	F7
\div	P2	F7	1	\leftarrow	XY	\uparrow	F3	XY	\div	P3	XY
C/P	BП	P0									

Инструкция: ($b_1 = P4$, $b_2 = P5$, $k_1 = P6$, $k_2 = P7$, $f_p = P8$) $L = PX$ (B/O) C/P $PX = C$, $P2 = C'$, $P3 = C''$.

Контрольный пример: при $b_1 = 2,5 \cdot 10^{-3}$ См, $b_2 = 3 \cdot 10^{-3}$ См, $L = 1 \text{ мкГн}$; $k_1 = 0,8$; $k_2 = 0,2$; $f_p = 10 \text{ МГц}$ получим $C = 2,259283 \cdot 10^{-4} \text{ нФ} \approx 22 \text{ пФ}$; $C' = 1,129641 \times 10^{-3} \text{ нФ} \approx 1130 \text{ пФ}$; $C'' = 2,844103 \cdot 10^{-4} \text{ нФ} \approx 284 \text{ пФ}$. При $L = 10 \text{ мкГн}$ получим $C < 0$, что свидетельствует о нереализуемости контура при заданных исходных данных.

Если использовано только индуктивное включение, то в качестве емкости контура следует принимать вычисленное значение C , при емкостном включении со стороны активного компонента в последней из программ при вводе исходных данных k_1 и k_2 их следует поменять местами.

Программа 290/34. Расчет резонансного усилителя

```

x = 0 09 ИП3 ИП2 ÷ 1 + 2 × П8
1 - ИП2 × ПД 2 ÷ П9 ИП5 ÷
√ ПВ ИП9 ИП3 ÷ √ ПА 1 - x < 0
43 ИПА ИПВ × ИП7 × ИП8 ÷ ИП2 ÷
С/П БП 54 ИПД ИП3 - ИП5 ÷ √ ПВ
1 ПА БП 33 ИП0 π × 2 × 1/x
↑ ИП1 ÷ ИПА x2 ИП4 × - ИПВ x2
ИП6 × - × ИП9 ИПВ ÷ ИП С ИП9 1
ИПВ - ÷ ПД ИП9 БП 40

```

Инструкция: ($f_p = P0$, $L = P1$, $g_0 = P2$, $g_1 = P3$, $g_2 = P4$, $b_1 = P5$, $b_2 = P6$, $|y_{21}| = P7$) $\beta_{\text{треб}}$ или при вычислении $K_{\max} 0 = PX$ В/О С/П $PX = K$, $P8 = \beta$, $PA = k_1$, $PB = k_2$. Если при заданном $\beta_{\text{треб}}$ полученные результаты неудовлетворительны, подбирают $\beta_{\text{треб}}$, повторяя вычисления до получения оптимальных результатов. После этого выполняют С/П $PX = C$, $PC = C'$, $PD = C''$. Если изменяют только один из параметров (например, L), то для пересчета емкостей достаточно нажать клавишу С/П.

В связи с относительно большим коэффициентом усиления K'_1 резонансного усилителя существенно оказывается обратная связь через активный компонент, которая может привести к искажению частотной характеристики и самовозбуждению усилителя. Коэффициент усиления напряжения с учетом обратной связи

$$K_{\text{nc}} = K_{\text{вх}} K / (1 - K_{\text{у2}} / y_{\text{c3}}),$$

где $y_{\text{c3}} = y_c + y_{11}$ – проводимость на входе усилителя с учетом проводимости источника сигнала. Если, как обычно, сигнал на вход усилительной ступени поступает от входного колебательного контура, то

$$y_{\text{c3}} = g_{\text{c3}} (1 + j(\xi - \xi_0) / \gamma),$$

где g_{c3} – эквивалентная проводимость входного контура, приведенная к входу рассматриваемой ступени; $\xi_0 = 2(f_p - f_{pc})Q / f_{pc}$ – обобщенная расстройка входного контура относительно выходного контура с добротностью Q ; $\gamma = \Delta f_{\text{c3}} / \Delta f_0$ – коэффициент, равный отношению полосы пропускания входного контура к полосе пропускания выходного ненагруженного контура. С учетом этих соотношений

$$|K_{\text{nc}} / K_0| = |(1 + j\xi_1) / ((1 + A - \xi_1 \xi_2) + j(\xi_1 + \xi_2 + B))|,$$

где $A = \text{Re}(-k_1^2 y_{12} y_{21} / g_0 \beta g_{\text{c3}})$, $B = \text{Im}(-k_1^2 y_{12} y_{21} / g_0 \beta g_{\text{c3}})$, $\xi_1 = \xi / \beta$, $\xi_2 = (\xi - \xi_0) / \gamma$. Эта величина возрастает при приближении к самовозбуждению (режим регенерации), стремясь к бесконечности при потере устойчивости.

Программа 291/21. Расчет АЧХ резонансного усилителя с учетом влияния обратной связи

```

↑ F4 ÷ P7 F6 - ↑ F5 ÷ P8 ↑ F7
X ← F7 + ↑ F3 + x2 → ↑ F2 -
1 - x2 ↑ ← + ← F8 x2 1 + ↑
→ ÷ √ C/П БП P0

```

Инструкция: ($A = P2$, $B = P3$, $\beta = P4$, $\gamma = P5$, $\xi_0 = P6$) $\xi = PX$ (В/О) С/П $PX = |K_{\text{nc}} / K_0|$.

Программа 292/34. Расчет АЧХ резонансного усилителя с учетом обратной связи

```

ПД ИП3 ÷ ПА ИПД ИП0 - ИП2 ÷ ПВ
ИП1 x2 ИП9 / - ИП3 ИП6 × × ÷ ПД
ИП7 ИП4 × ИП8 ИП5 × - × 1 +
ИПА ИПВ × - x2 ИП С ИП8 ИП4 × ИП7
ИП5 × + ИПД × ИПА + ИПВ + x2
ИП С + ИПА x2 1 + ÷ 1/x √ С/П
БП

```

Инструкция: ($\xi_0 = P0$, $k_1 = P1$, $\gamma = P2$, $\beta = P3$, $g_{21} = P4$, $b_{21} = P5$, $g_0 = P6$, $g_{12} = P7$, $b_{12} = P8$, $g_{c3} = P9$) $\xi = PX$ (B/O) С/П $PX = |K_{HC}/K_0|$.

В качестве примера применения этих программ исследуем влияние внутренней обратной связи биполярного транзистора в схеме резонансного усилителя, показанной на рис. 59 при параметрах транзистора для частоты 10 МГц и выбранного режима питания $Y_{113} = (2,6 + j2,4) \cdot 10^{-3}$ См; $Y_{123} = -(5,3 + j30,7) \cdot 10^{-5}$ См; $Y_{213} = (0,1 - j0,015)$ См; $Y_{223} = (1 + j1,6) \cdot 10^{-3}$ См; параметрах входного контура $Q = 100$; $g_0 = 5 \cdot 10^{-5}$ См; $f_p = 10$ МГц; $k'_1 = 0,15$; $k'_2 = 0,2$; параметрах выходного контура $f_p = 10$ МГц; $Q = 100$; $g_0 = 5 \cdot 10^{-5}$ См; $k_1 = 0,25$; $k_2 = 0,1$ и проводимости нагрузки $y_H = g_H = 5 \cdot 10^{-3}$ См.

По исходным данным вычисляем для выходного контура коэффициент $\beta = 1 + (k_1^2 g_{KK} + k_2^2 g_H)/g_0 \approx 3,25$; коэффициент усиления входного напряжения транзистора на частоте резонанса контура $K_0 = u_H/u_1 = k_1 k_2 |Y_{213}|/g_0 \beta \approx 15,56$ и приведенную к входу транзистора проводимость эквивалентного источника сигнала $g_{c3} = (g_0 + k_1^2 g_c + k_2^2 g_{11})/k_2^2 \approx 5,26 \cdot 10^{-3}$ См.

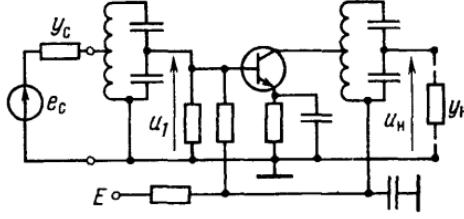


Рис. 59

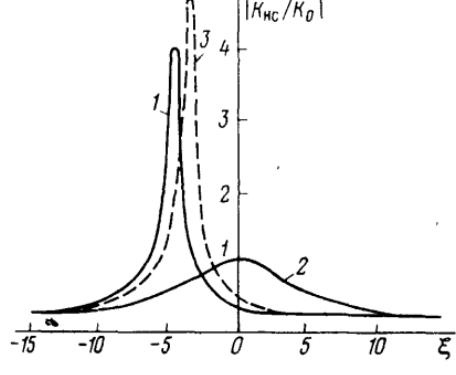


Рис. 60

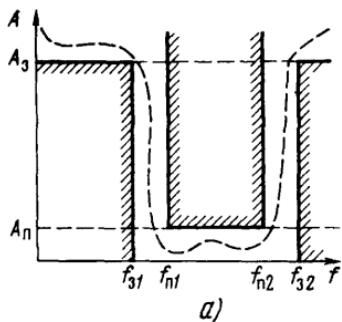
С помощью программы 292/34 или (после вычисления величин A и B) программы 291/21 строим зависимость $|K_{HC}/K_0|$ от расстройки ξ (кривая 1 на рис. 60) с максимальным значением $|K_{HC\max}/K_0| \approx 4,05$. Для сравнения вычисляем зависимость $|K_{HC}/K_0|$ при $y_{12} = 0$ (в этом случае для программы 291/21 следует принять $A = B = 0$), отображенную кривой 2 на рис. 60. Полученные результаты свидетельствуют о близости режима работы усилителя к самовозбуждению, так как отношение $|K_0/K_{HC}| = 1/4,05 \approx 0,25$, тогда как для устойчивой работы усилителя эта величина должна быть более 0,8. Кроме того, при расстройке входного контура на $\Delta f = -125$ кГц (что соответствует $f_{p1} = 9,875$ МГц и $\xi_0 = 2,5$) максимальное значение отношения $|K_{HC}/K_0|$ возрастает до 4,73 (кривая 3 на рис. 60) и, следовательно, обратная величина уменьшается до 0,211. Как следует из этого, необходимо принять дополнительные меры для повышения устойчивости.

Глава 6 РАСЧЕТ ФИЛЬТРОВ

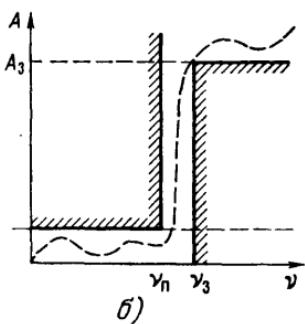
6.1. Основные этапы проектирования фильтров

В заданиях на проектирование фильтров основным обычно является требование к АЧХ передаточной функции, задаваемое граничными частотами f_{π_1} и f_{π_2} полосы пропускания, в которой затухание (5.8) не превышает заданного значения A_{π_1} , и граничными частотами полосы задержания f_{z_1} и f_{z_2} , в которой затухание должно быть не меньше заданного значения A_z . При этом для полосового фильтра (ПФ) $f_{z_1} < f_{\pi_1}, f_{z_2} >$

$> f_{\pi_2}$ (рис. 61, а), для режекторного фильтра (РФ) $f_{z_1} > f_{\pi_1}, f_{z_2} < f_{\pi_2}$, для фильтра нижних частот (ФНЧ) $f_{\pi_1} = 0$; $f_{\pi_2} = f_{\pi} < f_z$, для фильтра высших частот (ФВЧ) $f_{z_1} = 0; f_{z_2} = f_z < f_{\pi}$. Расчет фильтра в основном обычно сводят к расчету фильтра-прототипа (ФП) с последующим преобразованием схемы физически реализуемого ФП к схеме заданного пассивного, активного или цифрового фильтра с заданными характеристиками (рис. 62).



а)



б)

Рис. 61

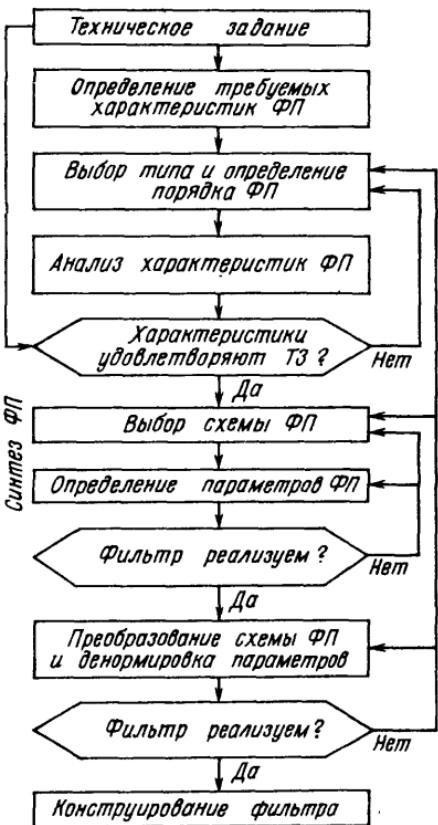


Рис. 62

Фильтром-прототипом называют ФНЧ с нормированной полосой пропускания с $\nu_{\pi} = 1$, нагруженный на единичное (в выбранной расчетной системе единиц) сопротивление. Текущая частота f и частота в масштабе ФП связаны соотношениями $\nu = f/f_{\pi}$ для ФНЧ, $\nu = f_{\pi}/f$ для ФВЧ, $\nu = (f^2 - f_{\pi_1}f_{\pi_2})/f(f_{\pi_2} - f_{\pi_1})$ для ПФ и $\nu = f(f_{\pi_2} - f_{\pi_1})/(f^2 - f_{\pi_1}f_{\pi_2})$ для РФ. По этим формулам и требованиям к затуханию фильтра определяют требования к АЧХ фильтра-прототипа (рис. 61, б). Например, если проектируемый фильтр должен обеспечивать затухание $A \geq A_3 = 60$ дБ в полосе $f_{z_1} < 92$ кГц и $f_{z_2} > 108,24$ кГц при неравномерности затухания не более $A_{\pi} = 1$ дБ в полосе пропускания от $f_{\pi_1} = 96$ кГц до $f_{\pi_2} = 104$ кГц, то $\nu'_3 = (92^2 - 96 \cdot 104)/92(104 - 96) = 2,065217$; $\nu''_3 = (108,4^2 - 96 \cdot 104)/108,24(104 - 96) = 2,000061$. Следовательно, ФП должен иметь затухание $A \geq 60$ дБ на частотах $\nu \geq \nu_3 = 2$ и не более 1 дБ в полосе частот $\nu \in [0; 1]$.

Программа 293/21. Прямое преобразование частоты для ПФ и РФ

P4	F8	↑	F7	-	→	F7	x	↑	F4	x^2	-
↑	←	÷	↑	F4	÷	x^2	√	↑	1/x	C/P	БП
P0											

Программа 294/34. Прямое преобразование частоты для ПФ и РФ

P0 x^2 ИП7 ИП8 x - ИП8 ИП7 - ИП0
 x \div x^2 $\sqrt{\quad}$ \uparrow $1/x$ С/П БП

Инструкция к обеим программам: $f_{\text{п}1} = P7, f_{\text{п}2} = P8, f = PX$ (B/O) С/П $PX = \nu$ для РФ, $PY = \nu$ для ПФ. Время счета около 5 с.

Контрольный пример: при $f_{\text{п}1} = 461, f_{\text{п}2} = 469, \nu = 450$ получим $\nu = 0,2626012$ для РФ и $\nu = 3,808055$ для ПФ.

Обратное преобразование частоты для ФНЧ и ФВЧ легко выполнить по приведенным ранее формулам в обычном режиме. Для ПФ обратное преобразование частоты выражается формулой $f_{1,2} = \sqrt{[\nu(f_{\text{п}2} - f_{\text{п}1})/2]^2 + f_{\text{п}1}f_{\text{п}2}} \pm \nu(f_{\text{п}2} - f_{\text{п}1})/2$, а для РФ в этой формуле достаточно заменить ν на $1/\nu$.

Программа 295/21. Обратное преобразование частоты для ПФ и РФ

P4 F8 \uparrow F7 x \rightarrow F7 - \uparrow F4 x 2
 \div P5 x^2 \uparrow \leftarrow + $\sqrt{\quad}$ \uparrow F5 - \rightarrow F5
+ \uparrow \leftarrow С/П БП Р0

Программа 296/34. Обратное преобразование частоты для ПФ и РФ

ИП8 ИП7 - x 2 \div П0 \uparrow x^2 ИП7
ИП8 x + $\sqrt{\quad}$ + BX ИП0 - С/П БП

Инструкция: $f_{\text{п}1} = P7, f_{\text{п}2} = P8$, для ПФ $\nu = PX$ или для РФ $1/\nu = PX$ (B/O) С/П $PX = f_1, PY = f_2$. Время счета около 6 с.

Контрольный пример: при $f_{\text{п}1} = 140, f_{\text{п}2} = 150, \nu = 1,05$ для ПФ получим $f_1 = 139,7588; f_2 = 150,2588$, а для РФ $f_1 = 140,2300; f_2 = 149,7538$.

После определения требований к фильтру-прототипу выбирают его тип и порядок, проверяя соответствие характеристик выбранного ФП заданным. Расчет ФП (см. рис. 62) упрощается при использовании справочников, например [1, 22] при расчете LC-фильтров или [7] при расчете активных RC-фильтров. Подобные справочники целесообразно использовать и на следующем этапе синтеза фильтра с заданными свойствами, но при отсутствии справочных данных пригодна описываемая далее методика.

После определения схемы и параметров ФП их преобразуют в схему проектируемого фильтра заменой каждой ветви ФП соответствующей ветвью проектируемого фильтра и вычислением (денормировкой) параметров ветвей. Структура соответствующих ветвей ФП и проектируемых фильтров различных типов, а также расчетные формулы приведены в табл. 8. Денормировку параметров ФНЧ или ФВЧ несложно выполнить в обычном режиме по формулам, приведенным в табл. 8. Определение параметров полосовых и режекторных фильтров упрощается при использовании следующих программ.

Программа 297/21. Денормировка параметров ПФ и РФ

\uparrow F8 x P2 1 P4 F8 С/П x $x \neq 0$ P/-/ \uparrow
F2 x 4 x /-/ 1/x 1 + $\sqrt{\quad}$ XY $\sqrt{\quad}$ +
 \uparrow 1/x P4 F5 x С/П F4 x^2 1 + \uparrow F2
 x ПП C_x x^2 XY \div /-/ ПП C_x БП P4 \uparrow
F6 x $x \geq 0$ P9 F7 x С/П F4 B/O

Программа 298/34. Денормировка параметров ПФ и РФ

ИП8 x П4 1 П0 ИП8 С/П x $x \neq 0$ 31
ИП4 x x^2 $\sqrt{\quad}$ 4 x 1/x \uparrow ИП0 +
 $\sqrt{\quad}$ XY $\sqrt{\quad}$ + 1/x П0 BX ИП5 ПП 52
 x^2 1 + ИП4 ПП 45 x^2 ИПА /-/ ПА
1/x ПП 45 БП 24 x ПА ИП7 XY $x < 0$
52 ИП6 x С/П ИП0 B/O

ТАБЛИЦА 8
Преобразование фильтра-прототипа

Тип проектируемого фильтра	Элемент ФП	Преобразованный элемент фильтра	Расчетная формула
ФНЧ			$L = K_L L'$
			$C = K_C C'$
ФВЧ			$C = K_C / L'$
			$L = K_L / C'$
ПФ			$H = K_A K_H B;$
			$Q = K_Q / K_A B$
			$H_{1,2} = K_A K_H B (1 + (f_0/f_{1,2})^2);$ $Q_{1,2} = K_H K_Q \times (f_0/f_{1,2})^2 / H_{1,2};$ $f_{1,2} = f_0 (\sqrt{1 + 1/4 K_A B D} \pm 1/K_A \sqrt{B D})$
РФ			$H = K_A K_H / B;$
			$Q = K_Q B / K_A;$
			$H_{1,2} = K_A K_H (1 + (f_0/f_{1,2})^2) / D;$
			$Q_{1,2} = K_H K_Q \times (f_0/f_{1,2})^2 / H_{1,2}$

$$K_A = \sqrt{f_{01} f_{02}} / (f_{02} - f_{01}) = f_0 / \Delta f_0; K_L = R_H / 2\pi f_0; K_C = 1/2\pi f_0 R_H$$

Инструкция к обеим программам: $f_{\pi_0} = \sqrt{f_{\pi_1} f_{\pi_2}} = PS$, $K_C = P6$, $K_L = P7$, $K_A = P8$; для денормировки параметров ветвей с одиночными элементами L' или $-C' = -PX$ В/О С/П C_x С/П $PX = L$ или $-C$ (или L); при денормировке параметров ветвей с параллельными контурами $-C' = PX$ В/О С/П $L' = PX$ С/П $PX = f_{oi}$ С/П $PX = -C_1$ С/П $PX = L_1$ С/П $PX = f_{o2}$ С/П $PX = -C_2$ С/П $PX = L_2$ (f_{oi} – резонансные частоты контуров); при денормировке параметров последовательных контуров $L' = PX$ В/О С/П $-C' = PX$ С/П $PX = f_{o1}$ С/П $PX = L_1$ С/П $PX = -C_1$, С/П $PX = f_{o2}$ С/П $PX = L_2$, С/П $PX = -C_2$. При определении параметров режекторного фильтра вводят обратные значения параметров ФП с обратным знаком (для преобразования нажимают клавиши $1/x$ $/-$).

В качестве контрольного примера приведем результаты преобразования ФП, схема которого приведена на рис. 63, а с параметрами $L'_1 = 1,02$; $C'_1 = 0,98$; $L'_2 = 1,25$; $C'_2 = 0,25$; $L'_3 = 0,98$; $C'_3 = 1,1$; $L'_4 = 0,69$; $C'_4 = 1$.

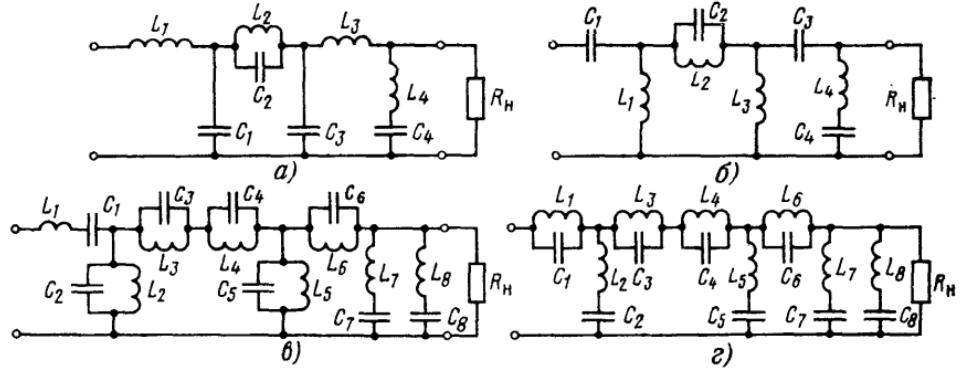


Рис. 63

При преобразовании заданного ФП в ФНЧ с $f_{\pi} = 10$ кГц и $R_H = 2$ кОм ($K_L = 31,83098$ мГн; $K_C = 7,957747$ нФ) по формулам табл. 8 получим (рис. 63, а): $L_1 = 32,46760$ мГн; $C_1 = 7,798592$ нФ; $L_2 = 39,78873$ мГн; $C_2 = 1,989436$ нФ; $L_3 = 31,19436$ мГн; $C_3 = 8,753521$ нФ; $L_4 = 21,96338$ мГн; $C_4 = 7,957747$ нФ.

При преобразовании ФП в ФВЧ с теми же значениями f_{π} и R_H (рис. 63, б) по формулам табл. 8 получим: $C_1 = 7,801712$ нФ; $L_1 = 32,48059$ мГн; $C_2 = 6,366197$ нФ; $L_2 = 127,3239$ мГн; $C_3 = 8,120149$ нФ; $L_3 = 28,93726$ мГн; $C_4 = 11,53296$ нФ; $L_4 = 31,83098$ мГн.

При преобразовании ФП в ПФ с $f_{\pi_1} = 461$ кГц; $f_{\pi_2} = 469$ кГц; $R_H = 2$ кОм ($K_L = 0,6845627$ мГн; $K_C = 0,1711406$ нФ; $K_A = 58,12284$; $f_{\pi_0} = 464,9827$ кГц) получим (рис. 63, в): $L_1 = 40,58450$ мГн; $C_1 = 0,002886729$ нФ; $f_{o1} = f_{o2} = f_{o5} = f_{o6} = 464,9827$ кГц; $L_2 = 0,01201822$ мГн; $C_2 = 9,748239$ нФ; $f_{o3} = 472,1931$ кГц; $L_3 = 0,02319327$ мГн; $C_3 = 4,898224$ нФ; $f_{o4} = 457,8824$ кГц; $L_4 = 0,02391815$ мГн; $C_4 = 5,051313$ нФ; $L_5 = 0,01070714$ мГн; $C_5 = 10,94190$ нФ; $L_6 = 38,99295$ мГн; $C_6 = 3,004555 \cdot 10^{-3}$ нФ; $f_{o7} = 469,8230$ кГц; $L_7 = 54,34567$ мГн; $C_7 = 2,111574 \times 10^{-3}$ нФ; $f_{o8} = 460,1923$ кГц; $L_8 = 55,483$ мГн; $C_8 = 2,155764 \cdot 10^{-3}$ нФ.

При преобразовании ФП в РФ с теми же значениями f_{π_1} , f_{π_2} и R_H получим (рис. 63, г): $L_1 = 0,01201341$ мГн; $C_1 = 9,752140$ нФ; $f_{o1} = f_{o2} = f_{o5} = f_{o6} = 464,9827$ кГц; $L_2 = 40,60074$ мГн; $C_2 = 0,002885575$ нФ; $f_{o3} = 467,2241$ кГц; $L_3 = 0,007325763$ мГн; $C_3 = 15,83932$ нФ; $f_{o4} = 462,7521$ кГц; $L_4 = 0,007396559$ мГн; $C_4 = 15,99239$ нФ; $L_5 = 0,0115423$ мГн; $C_5 = 10,15018$ нФ; $L_6 = 36,17157$ мГн; $C_6 = 0,003238911$ нФ; $f_{o7} = 468,3172$ кГц; $L_7 = 79,01288$ мГн; $C_7 = 0,001461712$ нФ; $f_{o8} = 461,6720$ кГц; $L_8 = 80,15016$ мГн; $C_8 = 0,001482752$ нФ.

Следует учитывать, что расчетные параметры узкополосных полосовых и режекторных фильтров иногда оказываются практически нереализуемыми. Так, в рассмотренном

пример первый контур полосового фильтра должен содержать индуктивность $L_1 = 40,5845$ мГн и емкость $C_1 = 2,8867729$ пФ, но при самом рациональном изготовлении катушки ее собственная емкость окажется больше расчетной. В некоторых случаях (например, при проектировании пьезоэлектрических фильтров) к параметрам резонаторов фильтра предъявляются еще более жесткие требования.

В подобных ситуациях фильтры реализуют введением инверторов сопротивлений, преобразующих имитанс нагрузки согласно соотношению $Z_{\text{вх}} = K^2 Y_{\text{н}}$ или $Y_{\text{вх}} = Z_{\text{н}}/K^2$, где постоянная K зависит от параметров инвертора. Часто приходится прибегать к каскадному включению нескольких инверторов, влияние которых учитывают согласно следующим правилам: при четном числе инверторов (их нумеруют, начиная от входа фильтра) структуру и тип реактивных элементов не изменяют, а реактивные параметры уточняют в соответствии с формулами $L' = L K_1^2 K_3^2 K_5^2 \dots K_{2n-1}^2 / (K_2^2 K_4^2 \dots K_{2n}^2)$; $C' = C K_1^2 K_3^2 \dots K_{2n-1}^2 / K_1^2 K_2^2 \dots K_{2n-1}^2$; при нечетном числе инверторов последовательные соединения и индуктивности заменяют соответственно параллельными соединениями ветвей и емкостями и наоборот, а параметры элементов вычисляют по формулам $L' = C K_1^2 K_3^2 \dots K_{2n-1}^2 / K_1^2 K_2^2 \dots K_{2n}^2$; $C' = L K_2^2 K_4^2 \dots K_{2n}^2 / (K_1^2 K_3^2 \dots K_{2n-1}^2)$. В качестве примера на рис. 64, а показана схема фильтра, содержащая четыре инвертора, а на рис. 64, б – эквивалентная ей схема после преобразования без инверторов.

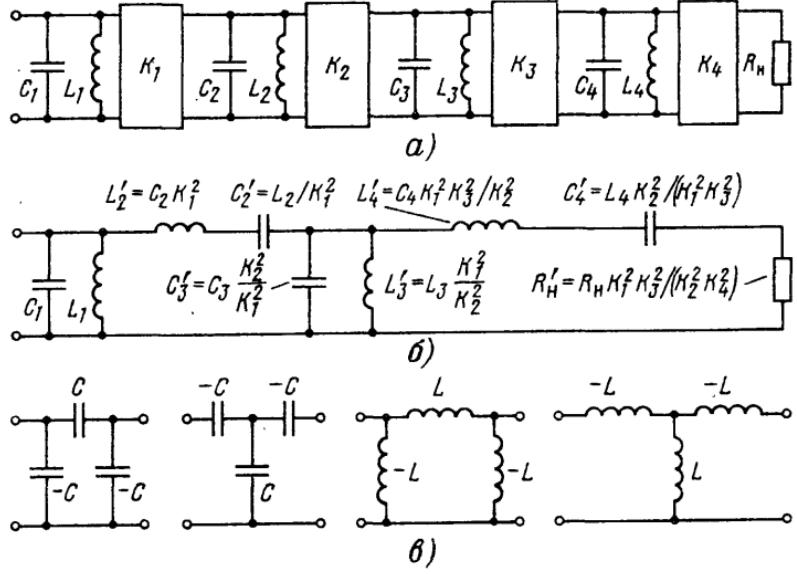


Рис. 64

Эквивалентные схемы часто используемых инверторов показаны на рис. 64, в. При правильном выборе типа и места включения инвертора реализация отрицательных параметров сводится к уменьшению на соответствующую величину параметров ветвей фильтра, последовательных или параллельных ветвям инвертора. Однако зависимость коэффициентов преобразования от частоты приводит к отличию характеристик фильтра с инверторами от характеристик исходной цепи. Это отличие тем меньше, чем узкополоснее фильтр, и при $\Delta f_0/f_0 < 0,05$ становится пренебрежимо малым. Использование фильтров с равным числом инверторов индуктивного и емкостного типов позволяет сохранить практически неизменными характеристики исходной цепи и при больших расстройках. Фильтры, содержащие инверторы рассмотренного типа, называют квазиполиномиальными.

Программа 299/21. Преобразование параметров фильтра при $q < 6$ инверторах

XY	P8	F1	1	-	$x \neq 0$	PВП	1	-	$x \neq 0$	F/-/ 1
-	-	$x \neq 0$	P/-/ 1	-	$x \neq 0$	F,	1	-	$x \neq 0$	P, F7
ПП	PC _x	F6	ПП	PC _x	F5	ПП	PC _x	F4	ПП	PC _x F3
ПП	PC _x	F2	ПП	PC _x	C/П	БП	P0	x^2	\uparrow	F8 $x \geq 0$
8	XY	1/x	X	/-	P8	B/O				

Инструкция: $K_1 = P2, K_2 = P3, K_3 = P4, K_4 = P5, K_5 = P6, K_6 = P7, L_i$ или $-C_i = PY$, число инверторов между входом и преобразуемым элементом $n = PX$ (B/O) C/P $PX = L'_i$ или $-C'_i$.

Программа 300/34. Преобразование параметров фильтра при $q < 12$ инверторах

P0	XY	ПД	C _x	КИП0	$x \neq 0$	17	x^2	ИПД	$x \geq 0$
13	XY	1/x	X	-	БП	02	ИПД	C/P	БП

Инструкция: $K_1 = P1, K_2 = P2, \dots, K_9 = P9, K_{10} = PA, K_{11} = PB, K_{12} = PC, L_i$ или $-C_i = PY, n + 1 = PX$ (B/O) C/P $PX = L'_i$ или $-C'_i$. Для резистивного сопротивления нагрузки $R_H = PX$ (B/O) C/P $PX = R_H$ или $-G_H$.

Контрольный пример: для схемы, показанной на рис. 64, б, при $L_1 = 1$ мГн; $C_1 = 1$ нФ; $L_2 = 1,25$ мГн; $C_2 = 0,8$ нФ; $L_3 = 2$ мГн; $C_3 = 0,5$ нФ; $L_4 = 4$ мГн; $C_4 = 0,25$ нФ; $R_H = 1$ кОм; $K_1 = 5$ кОм; $K_2 = 8$ кОм; $K_3 = 10$ кОм; $K_4 = 4$ кОм получим эквивалентную схему (см. рис. 64, в) с параметрами: $C'_2 = 0,05$ нФ; $L'_2 = 25$ мГн; $C'_3 = 1,28$ нФ; $L'_3 = 0,78125$ мГн; $C'_4 = 0,1024$ нФ; $L'_4 = 9,765625$ мГн; $R_H = 2,441406$ кОм.

При переходе к квазиполиномиальному фильтру часто приходится определять параметры инверторов при наложении определенных ограничений на параметры фильтра с инверторами. Например, при проектировании LC-фильтров часто стремятся выбором инверторов добиться равенства параметров однотипных элементов (например, индуктивностей) резонаторов фильтра для повышения его технологичности.

Программа 301/21. Вычисление постоянных преобразования инверторов квазиполиномиального фильтра с одинаковым параметром резонаторов

\uparrow	F8	XY	P8	$x \geq 0$	F1	XY	\div	.	/-	$\sqrt{-}$	\uparrow	\rightarrow
F1	C/P	БП	P0									

Инструкция: сохраняемый параметр первого резонатора L_1 или $-C_1 = P8, L_2 = -C_2 = PX$ B/O C/P $PX = C1 = K_1, L_3$ или $-C_3 = PX$ C/P $PX = C1 = -K_2 \dots$

Программа 302/34. Вычисление постоянных преобразования инверторов квазиполиномиального фильтра с одинаковым параметром резонаторов

\uparrow	1	ПД	XY	ИП0	XY	П0	$x \geq 0$	10	XY
\div	x^2	$\sqrt{-}$	$\sqrt{-}$	КПД	C/P	ИПД	1	$+$	БП
02									

Инструкция: сохраняемый параметр L_1 или $-C_1 = P0, -C_2$ или $L_2 = PX$ B/O C/P $PX = P1 = K_1, L_3$ или $-C_3 = PX$ C/P $PX = P2 = K_2 \dots$

Эти программы несложно дополнить фрагментами для вычисления вторых элементов резонаторов и постоянных преобразования инверторов по значениям средней частоты полосы пропускания ПФ или задержания РФ. При этом следует учитывать, что пренебрежение потерями в элементах LC-фильтров может привести к существенным отличиям реальных характеристик от расчетных. Потери прежде всего приводят к увеличению затухания в фильтре на величину ΔA , которая при одинаковых нагрузках для ФВЧ при $f \rightarrow \infty$ и ФНЧ при $f = 0$ определяется формулой

$$\Delta A_{dB} = 20 \lg \left(1 + 0,5 \sum_{i=1}^k \alpha_i / Q_i \right),$$

где α_i – параметр i -го элемента фильтра-прототипа, Q_i – добротность этого элемента.

Дополнительное затухание в полосовом фильтре определяют по формуле

$$\Delta A_{\text{дБ}} = 20 \lg \left(1 + \left(f_{\text{оп}} / 2\Delta f \right) \sum_{i=1}^k \alpha_i / Q_i \right),$$

где $f_{\text{оп}}$ – средняя частота полосы пропускания, Δf – ее ширина.

Вычисления по этим формулам несложно автоматизировать, но учет лишь дополнительного затухания оказывается недостаточным – потери также приводят к смещению полюсов передаточной функции фильтра и, как следствие, искажению его характеристики. Это особенно опасно при проектировании узкополосных фильтров, но именно в этом случае влияние потерь может быть достаточно точно учтено при использовании метода предыскажений [1], справедливого в случае "однородных" потерь – равенства добротностей всех элементов фильтра. Так как при этом условии все полюсы передаточной функции смещены влево от оси $j\omega$ на величину σ_m , то их предварительным смещением вправо на $\sigma_m = 1/Q_m$ удается сохранить неизменными все характеристики фильтра (для полосовых фильтров на $\sigma_m = f_{\text{оп}}/\Delta f Q_m$). Для этого, подставив $p = q - \sigma_m$ в передаточную функцию фильтра $K(p)$, находят функцию $K(q)$, по которой и определяют параметры реактивных элементов фильтра без учета потерь.

При практическом использовании метода предыскажений следует проверить физическую реализуемость фильтра при заданных ограничениях на добротности его элементов. Эта проверка сводится к определению положения крайнего правого полюса, для чего следует по наименьшему из модулей вещественных полюсов передаточной функции ФП ($|\sigma_m|$) определить добротность элементов фильтра, минимально необходимую для его реализации. Например, если $f_{\text{оп}} = 465 \text{ кГц}$; $\Delta f = 8 \text{ кГц}$, то при $\sigma_m = 0,1$ фильтр реализуем, когда $Q_i > Q_m = 465/8 \cdot 0,1 = 581,25$.

После проверки реализуемости вычисляют коэффициенты многочленов $B(p + \sigma_m)$ при смещении аргумента исходных многочленов $A(p)$. Этую операцию можно выполнить по следующим специализированным программам, в которых исходный многочлен $A(p)$ преобразуется в многочлен $B(p + \sigma_m)$, нормированный относительно коэффициента b_0 ($b_0 = 1$).

Программа 303/21. Преобразование многочленов степени $m \leq 7$ при использовании метода предыскажений

C _x	P4	P5	F3	7	P7	F8	X	↑	F2	+	P6
F7	1	-	P7	F2	→	P2	F6	↑	F7	$x=0$	P1
F7	1	+	P7	F2	←	X	↑	F3	P2	F1	P3
F7	9	-	$x=0$	P4	F4	1	+	P4	F5	X	$x=0$
P-	F6	P5	F6	↑	F5	÷	C/P	БП	0		

Инструкция: $b_0 = C1, b_1 = C2, \dots, b_5 = C6, b_6 = P2, b_7 = P3, \sigma_m = P8$ В/О С/П $PX = b'_0/b'_0 = 1, P5 = P6 = b'_0$ С/П $PX = b'_1/b'_0, P5 = 2b'_0, P6 = 2b'_1$ С/П ... С/П $PX = b'_k/b'_0, P5 = k!b'_0, P6 = k!b'_k$.

Программа 304/34. Преобразование многочленов степени $m \leq 9$ при использовании метода предыскажений

C _x	ПД	C _x	ИПА	ПС	→	КИПС	+	ИПВ	X
КИПС	ИПД	1	+	÷	ИПС	ИПД	-	X	КИС
→	ИПС	1	-	ПС	ИПД	-	$x=0$	05	→
КИПД	+	КПД	ИПД	1	+	ПД	ИПА	-	$x=0$
02.	ИПА	ПС	КИПС	ИП0	÷	C/P	ИПС	1	-
БП	42								

Инструкция: $b_0 = P0, b_1 = P1, \dots, b_9 = P9, n = PA, \sigma_m = PB$ В/О С/П $PX = b'_n/b'_0$ С/П $PX = b'_{n-1}/b'_0 \dots$ С/П $PX = b'_0/b'_0 = 1, P0 = b'_0, P1 = b'_1, \dots, P9 = b'_9$. При $\sigma_m > 0$ увеличивается затухание, при $\sigma_m < 0$ вносятся предыскажения (полюсы смещаются вправо).

Контрольный пример: для многочлена $7p^7 + 6p^6 + 5p^5 + 4p^4 + 3p^3 + 2p^2 + p + 1$ при $\sigma_m = 1$ получим $b'_0 = 29$ и коэффициенты нормированного многочлена $0,24137931q^7 + 1,8965517q^6 + 6,4827586q^5 + 12,551724q^4 + 14,965517q^3 + 11,103448q^2 + 4,8275862q + 1$. Время счета около 4 мин.

По абсолютной величине коэффициента b'_0 можно судить о дополнительном затухании, вносимом потерями в реактивных элементах. При представлении синтезируемой функции формулой (3.14) удобны следующие программы, по которым одновременно вычисляется суммарное дополнительное затухание $\Sigma\Delta A$, дБ, вносимое преобразуемыми сомножителями функции.

Программа 305/21. Преобразование множителей передаточной функции при использовании метода предыскажений

$$\begin{array}{ccccccccc} F8 & \uparrow & F4 & X & \uparrow & F5 & + & XY & + & P5 & F8 & X \\ 1 & + & P2 & \ln & \uparrow & F7 & \times & \uparrow & F6 & + & P6 & F2 \\ 1/x & \uparrow & F5 & X & P5 & F4 & \times & P4 & C/P & B\Psi & P0 \end{array}$$

Программа 306/34. Преобразование множителей передаточной функции при использовании метода предыскажений

$$\begin{array}{ccccccccc} IP5 & IP4 & IP8 & X & + & \uparrow & BX & + & XY & IP8 \\ X & 1 & + & \div & IP5 & IP4 & BX & \uparrow & lg & 2 \\ 0 & X & IP6 & + & IP6 & \rightarrow & \div & IP4 & C/P & B\Psi \end{array}$$

Инструкция: $\alpha_k = P4$, $\beta_k = P5$, $0 = P6$, $\sigma_m = P8$ (только для программы 305/21 ввести $20/\ln 10 = P7$) (B/O) C/P $PX = \alpha'_k$, $P5 = \beta'_k$, $P6 = \Sigma\Delta A$, дБ.

Контрольный пример: для трехчлена $4p^2 + 8p + 1$ при $\sigma_m = 0,1$ получим $2,173913p^2 + 4,782608p + 1$ и $\Delta A = 5,296359$ дБ.

Для вычисления произведений квадратичных множителей следует воспользоваться программой 130/21 или 131/34.

При автоматизации проектирования фильтров с помощью ЭВМ наиболее серьезной является проблема точности результатов вычислений, так как положение корней степенных многочленов может существенно измениться даже при незначительном округлении их коэффициентов. Поэтому все вычисления на микрокалькуляторах при расчетах фильтров следует выполнять с максимальной точностью.

6.2. Определение типа и передаточной функции фильтра-прототипа

Определение передаточной функции фильтра-прототипа $K(p) = A(p)/B(p)$ начинают с определения квадрата модуля частотной характеристики

$$|K(j\nu)|^2 = K(p)K(-p) \Big|_{p=j\nu}, \quad (6.1)$$

удовлетворяющей требованиям к проектируемому фильтру. Обычно передаточную функцию нормируют так, чтобы ее максимальное значение равнялось единице. Тогда

$$|K(j\nu)|^2 = 1/(1 + |T(j\nu)|^2), \quad (6.2)$$

где функцию $T(p)$, связанную с $|T(j\nu)|^2$ соотношением, аналогичным (6.1), называют *характеристической* [15]. Так как $T(p) = Q(p)/B(p)$ – дробно-рациональная функция комплексной частоты, то многочлены $A(p)$, $B(p)$ и $Q(p)$ связаны соотношением

$$B(p)B(-p) = A(p)A(-p) + Q(p)Q(-p), \quad (6.3)$$

и по любым двум из этих многочленов можно определить третий.

При анализе избирательных свойств фильтров формулу (6.2) часто записывают в виде

$$|K(j\nu)|^2 = 1/(1 + \epsilon^2 \Phi(\nu^2)), \quad (6.4)$$

где коэффициент ϵ характеризует постоянство затухания в полосе пропускания $\nu \in [0; 1]$, а дробно-рациональная функция $\Phi(\nu^2) \leq 1$ в полосе пропускания и > 1 за ее пределами при $\nu > 1$.

Рассмотрим основные формулы и программы для выбора порядка и определения передаточных функций фильтров основных типов.

1. Фильтры Баттервортса с максимально гладкой АЧХ отличаются передаточной функцией с квадратом ее модуля

$$|K(j\nu)|^2 = 1/(1 + \epsilon^2 \nu^{2n}), \quad (6.5)$$

где величина ϵ связана с допустимой неравномерностью затухания в полосе пропускания $A_{\text{пп}}$, дБ, соотношением

$$\epsilon < \sqrt{10^{A_{\text{пп}}/10} - 1}. \quad (6.6)$$

По заданному минимальному затуханию A_3 на частоте $\nu_3 > 1$ необходимый порядок фильтра определяют по формуле

$$n = \text{Ev}(\ln((10^{A_3/10} - 1)/(10^{A_{\text{пп}}/10} - 1))/2 \ln \nu_3),$$

где $\text{Ev}(x)$ – целая часть с избытком или $\text{Ev}(x) = E(x) + 1$ при нецелом x и $\text{Ev}(x) = x$ при целом.

Корни знаменателя передаточной функции вычисляют по формуле

$$p_k = (1/\epsilon)^{1/n} (\sin(\pi(0,5 - k)/n) + j \cos(\pi(0,5 - k)/n))$$

при $k = 1, 2, \dots, 2n$. Отбрав n корней с отрицательными вещественными частями, передаточную функцию фильтра Баттервортса определяют по формуле $K(p) = 1/(p - p_{11})(p - p_{12}) \dots (p - p_{nn})$.

Программа 307/21С. Расчет фильтра Баттервортса

F3	ПП	F-	P5	F4	ПП	F-	↑	F5	÷	ln	↑
F2	ln	÷	1	ВП	7	XY	-	-	P6	1/x	↑
F5	1/x	X ^y	P7	2	1/x	1	-	P8	↑	π	×
↑	F6	÷	e ^{jx}	→	F7	XY	×	←	×	↑	→
C/П	F8	БП	P5	1	0	X ^y	1	-	√	B/O	

Инструкция: $\nu_3 = P2$, $A_{\text{пп}}(\text{дБ})/10 = P3$, $A_3(\text{дБ})/10 = P4$ B/O C/П PX = Re p_1 , PY = Im p_1 , P5 = ϵ , P6 = n C/П PX = Re p_2 , PY = Im p_2 C/П PX = Re p_3 , PY = Im p_3 , ..., C/П PX = Re p_n , PY = Im p_n .

Контрольный пример: при $\nu_3 = 2$; $A_{\text{пп}} = 1$ дБ; $A_3 = 20$ дБ получим $\epsilon = 0,5088468$; $n = 5$; $p_1 = -0,3537242 + j1,088651$; $p_2 = -0,9260622 + j0,6728234$; $p_3 = -1,144675$; $p_4 = -0,9260622 - j0,6728234$; $p_5 = -0,3537242 - j1,088651$.

Если вместо полюсов желательно вычислять квадратичные множители знаменателя передаточной функции $\alpha_k p^2 + \beta_k p + 1$, то это можно сделать по следующей программе, автоматизирующей вычисление α_k и β_k для комплексно-сопряженных пар полюсов и $\alpha_k = 0$, β_k для вещественного полюса.

Программа 308/21С. Расчет фильтра Баттервортса с вычислением квадратичных множителей знаменателя передаточной функции

F3	ПП	F-	P5	F4	ПП	F-	↑	F5	÷	ln	↑
F2	ln	÷	1	ВП	7	XY	-	-	P6	1/x	↑
F5	X ^y	P7	2	1/x	P8	↑	π	×	F6	÷	
e ^{jx}	x ≠ 0	FC _x	F7	x	2	×	↑	F7	x ²	C/П	F8
1	+	БП	,	1	0	X ^y	1	-	√	B/O	

Инструкция: $\nu_3 = P2$, $A_{\text{пп}}/10 = P3$, $A_3/10 = P4$ B/O C/П PX = α_1 , PY = β_1 , P5 = ϵ , P6 = n ... C/П PX = α_k , PY = β_k (Если PX = 0, то P7 = β_k , а $\alpha_k = 0$).

Контрольный пример: при $\nu_3 = 2$, $A_{\text{пп}} = 1$ дБ, $A_3 = 20$ дБ получим множители передаточной функции $K(p) = 1/(0,7631935p^2 + 0,5399201p + 1)(0,7631935p^2 + 1,413529p + 1)(0,873609p + 1)$.

При использовании микрокалькуляторов "Электроника Б3-21" первых выпусков в программах 307/21С и 308/21С следует заменить операторы 1 ВП 7 XY -- оператором C/П и соответственно изменить адреса переходов. В этом случае порядок n опре-

деляют по содержимому регистра 6 округлением его до ближайшего большего целого числа.

Программа 309/34. Расчет фильтра Баттервортса

ИП2	ПП	61	ИП1	ПП	61	÷	ln	ИП0	ln
÷	П4	1	-	x < 0	18	1	П4	КИП4	ИП4
1/x	ИП3	X ^y	ПД	x ²	ПС	2	1/x	1	-
П5	π	X	ИП4	÷	П6	sin	ИПД	÷	ПА
ИПА	/-	П8	1/x	ИП6	cos	ИПД	÷	ПВ	x ≠ 0
57	ИП8	ИПС	X	2	X	ИПС	C/P	ИП5	БП
28	1	0	÷	10 ^x	1	-	√	П3	B/O

Инструкция: установить переключатель Р-Г в положение Р; $v_3 = P0, A_{\Pi} = P1, A_3 = P2$ B/O C/P $PX = PC = \alpha_1, PY = \beta_1, P3 = \epsilon, P4 = n, PA = \operatorname{Re} p_1, PB = \operatorname{Im} p_1$ C/P ... C/P $PX = PC = \alpha_k, PD = \beta_k, PA = \operatorname{Re} p_k, PB = \operatorname{Im} p_k$.

Для проверки программы можно воспользоваться данными двух предыдущих контрольных примеров.

Характеристический полином для фильтра Баттервортса $Q(p) = \epsilon p^n$ имеет n -кратный корень в начале координат. Для вычисления АЧХ согласно формуле (6.1) можно использовать выражение $|K(\nu)| = 1/\sqrt{1 + \epsilon^2 \nu^{2n}}$ или $A(\nu) = 4,34295 \ln(1 + \epsilon^2 \nu^{2n})$, автоматизируемое следующей программой.

Программа 310/21. Построение АЧХ фильтра Баттервортса

P8	↑	F4	XY	X ^y	↑	F5	X	x ²	1	+	ln
4	,	3	4	2	9	5	X	C/P	F8	↑	F7
+	БП	P0									

Инструкция: ($n = P4, \epsilon = P5, \Delta\nu = P7$) $\nu_0 = PX$ B/O C/P $PX = A(\nu_0)$ C/P $PX = A(\nu + \Delta\nu)$ C/P $PX = A(\nu_0 + 2\Delta\nu)$ C/P ... Для вычисления $A(\nu)$ при произвольном значении ν достаточно ввести его в регистр X перед пуском программы. Если желательно изменение частоты в логарифмическом масштабе, то следует заменить в программе оператор + (после F7) оператором X и занести в регистр 7 множитель частоты.

2. Фильтры Чебышева отличаются равноволновым приближением в полосе пропускания и монотонно возрастающим затуханием за ее пределами. Квадрат модуля передаточной характеристики фильтра

$$|K(j\nu)|^2 = 1/(1 + \epsilon^2 T_n^2(\nu)), \quad (6.7)$$

где $T_n(\nu)$ – полином Чебышева n -го порядка, коэффициенты и корни которого можно вычислить с помощью программ 73 и 74 из [20].

Коэффициент ϵ определяют по (6.6), а затухание на частоте ν_3 по выражению

$$|K(\nu_3)|^2 = 1/(1 + \epsilon^2 \operatorname{ch}(n \operatorname{arsh} \nu_3)).$$

По заданным значениям ν_3, A_3 и A_{Π} порядок фильтра определяют по формуле

$$n = \operatorname{Ev} [\operatorname{arc} (\sqrt{10^{A_3/10} - 1/\epsilon}) / \operatorname{arsh} \nu_3]. \quad (6.8)$$

Программа 311/21C. Определение ϵ и n фильтра Чебышева

F2	ПП	РВП	P6	F3	ПП	F,	P5	F4	ПП	F,	↑
F5	÷	ПП	РВП	F6	÷	P6	1	ВП	7	XY	-
-	C/P	БП	P0	1	0	÷	1	0	X ^y	1	-
√	B/O	x ²	1	-	√	XY	√	+	ln	↑	B/O

Инструкция: $\nu_3 = P2, A_{\Pi} = P3, A_3 = P4$ B/O C/P $PX = n, P5 = \epsilon$. Неокругленное значение n хранится в регистре 6.

При расчете на микрокалькуляторе "Электроника Б3-21" первых выпусков целесообразно увеличение n до выполнения неравенства $A_3 \text{ист} \geq A_3$. Время вычислений в этом случае возрастет; но составленная по этому алгоритму следующая программа будет пригодной для всех выпусков микрокалькулятора "Электроника Б3-21" и обеспечит вычисление истинного значения A_3 при целом значении n порядка.

Программа 312/21. Вычисление n , ϵ и $A_{\text{заст}}$ фильтра Чебышева

F3	1	0	X^Y	1	-	$\sqrt{\quad}$	P5	C_x	P6	F2	x^2
1	-	$\sqrt{\quad}$	XY	$\sqrt{\quad}$	+	ln	P8	F6	1	+	P6
\uparrow	F8	X	e^x	\uparrow	$1/x$	+	2	\div	\uparrow	F5	X
x^2	1	+	ln	1	0	ln	\div	\uparrow	F4	-	$x \geq 0$
P \div	F1	C/P	BП	P0							

Инструкция: $\nu_3 = P2$, $A_{\Pi}/10 = P3$, $A_3/10 = P4$ В/О С/П $PX = 0,1A_{\text{заст}}$, $PS = \epsilon$, $P6 = n$.
Полюсы передаточной функции фильтра Чебышева определяют по формуле

$$p_k = \pm \sin\left(\frac{k - 0,5}{n}\pi\right) \operatorname{sh}\left(\frac{1}{n} \operatorname{arsh}\frac{1}{\epsilon}\right) + j \cos\left(\frac{k - 0,5}{n}\pi\right) \operatorname{ch}\left(\frac{1}{n} \operatorname{arsh}\frac{1}{\epsilon}\right),$$

реализованной следующей программой.

Программа 313/21. Вычисление полюсов передаточной функции фильтра Чебышева

2	1/x	P4	F2	1/x	x^2	1	+	$\sqrt{\quad}$	XY	$\sqrt{\quad}$	+
ln	\uparrow	F3	\div	e^x	\uparrow	1/x	P8	+	2	\div	P7
\uparrow	F8	-	P8	F4	1	-	P4	\uparrow	π	X	\uparrow
F3	\div	e^{jx}	\rightarrow	F8	X	\leftarrow	\uparrow	F7	X	\uparrow	\rightarrow
C/P	BП	F,									

Инструкция: $\epsilon = P2$, $n = P3$ В/О С/П $PX = \operatorname{Re} p_1$, $PY = \operatorname{Im} p_1$ С/П $PX = \operatorname{Re} p_2$,
 $PY = \operatorname{Im} p_2$ С/П ... С/П $PX = \operatorname{Re} p_k$, $PY = \operatorname{Im} p_k$.

При вычислении вместо полюсов передаточной функции коэффициентов квадратичных множителей $\alpha_k p^2 + \beta_k p + 1$ ее знаменателя можно воспользоваться следующей программой.

Программа 314/21. Вычисление коэффициентов квадратичных множителей знаменателя передаточной функции фильтра Чебышева

F2	1/x	x^2	1	+	$\sqrt{\quad}$	XY	$\sqrt{\quad}$	+	ln	\uparrow	F3
\div	e^x	\uparrow	1/x	-	2	\div	P8	2	1/x	P4	\uparrow
F3	\div	\uparrow	π	X	e^{jx}	\rightarrow	F8	X	1/x	2	\div
\leftarrow	$x \neq 0$	P-	x^2	\uparrow	F8	x^2	$+$	1/x	\uparrow	\rightarrow	1/x
X	XY	C/P	F4	1	+	BП	F \div				

Инструкция: $\epsilon = P2$, $n = P3$ В/О С/П $PX = \alpha_1$, $PY = \beta_1$ С/П $PX = \alpha_2$, $PY = \beta_2$...
С/П $PX = \alpha_k$, $PY = \beta_k$

Контрольный пример: при $\nu_3 = 1,3$; $A_{\Pi} = 1$ дБ; $A_3 = 20$ дБ по программе 311/21 получим $n = 5$ ($P6 = 4,845989$); $\epsilon = 0,5088468$ по программе 313/21 получим $p_1 = -0,08945813 + j0,9901068$; $p_2 = -0,2342044 + j0,6119196$; $p_3 = -0,2894925$; $p_4 = -0,2342044 - j0,6119196$; $p_5 = -0,08945813 - j0,9901069$ и по программе 314/21 получим коэффициенты множителей знаменателя передаточной функции $K(p) = 1/(1,011823p^2 + 0,181017p + 1)(2,329386p^2 + 1,091105p + 1)(3,454318p + 1)$.

Все эти результаты можно получить с помощью одной следующей программы.

Программа 315/34. Расчет фильтра Чебышева

ИП2	ПП	89	ИП1	ПП	89	\div	\uparrow	x^2	1	
-	$\sqrt{\quad}$	+	ln	ИП0	\uparrow	x^2	1	-	$\sqrt{\quad}$	
+	ln	\div	П4	КИП4	ИП3	1/x	\uparrow	x^2	1	
+	$\sqrt{\quad}$	+	ln	ИП4	\div	e^x	\uparrow	1/x	П9	
+	2	\div	П5	ИП9	-	П6	2	1/x	1	
-	П7	π	X	ИП4	\div	П8	sin	X	ПА	
ИПА	/ - /	ПД	1/x	ИП8	cos	ИП5	X	ПВ	$x \neq 0$	
83	x^2	ИПА	x^2	+	1/x	ПС	ИПД	2	X	
X	ПД	ИПС	ПС	C/P	ИП6	ИП7	BП	49	1	
0	\div	10^x	1	-	$\sqrt{\quad}$	П3	B/O			

Инструкция: установить переключатель Р–Г в положение Р; $\nu_3 = P0$, $A_{\text{пп}} = P1$, $A_3 = P2$ В/О С/П $PX = PC = \alpha_1$, $PD = \beta_1$, $PA = \text{Re } p_1$, $PB = \text{Im } p_1$, $P3 = \epsilon$, $P4 = n$ С/П $PX = PC = \alpha_2$, $PY = \beta_2$, $PA = \text{Re } p_2$, $PB = \text{Im } p_2 \dots$

Характеристику затухания целесообразно строить по формуле

$$A(\nu) = \begin{cases} 10 \lg (1 + \epsilon^2 \cos^2(n \arccos \nu)) & \text{при } \nu \leq 1; \\ 10 \lg (1 + \epsilon^2 \operatorname{ch}^2(n \operatorname{arch} \nu)) & \text{при } \nu \geq 1, \end{cases}$$

реализованной в следующих программах.

Программа 316/21. Вычисление затухания фильтра Чебышева

x^2	1	—	$x \geq 0$	3	$\sqrt{\quad}$	XY	$\sqrt{\quad}$	+	ln	\uparrow	F2
X	e^x	\uparrow	$1/x$	+	2	\div	BП	P7	$/-$	P7	F4
X	$\sqrt{\quad}$	+	5	XY	+	\div	\uparrow	F7	X	$\sqrt{\quad}$	\uparrow
F6	X	\uparrow	F2	X	cos	\uparrow	F3	X	x^2	1	+
ln	\uparrow	F5	X	C/П	BП	P0					

Инструкция: $n = P2$, $\epsilon = P3$; $4,34295 = P5$, $\nu = PX$ (В/О) С/П $PX = A(\nu)$. В программе использована аппроксимация функции $\arccos x$, обеспечивающая погрешность не более 0,0004 рад.

Программа 317/34. Вычисление затухания фильтра Чебышева

P0	x^2	1	—	$x \geq 0$	21	$\sqrt{\quad}$	ИП0	+	ln		
ИП2	X	e^x	\uparrow	$1/x$	+	2	\div	BП	25		
ИП0	arccos	ИП2	X	cos	ИП3	X	x^2	1	+		
lg	1	0	X	C/П	BП						

Инструкция: установить переключатель Р–Г в положение Р; ($n = P2$, $\epsilon = P3$), $\nu = PX$ (В/О) С/П $PX = A(\nu)$.

3. Обращенный фильтр Чебышева обеспечивает равноволновую аппроксимацию характеристики затухания в полосе задержания и монотонно возрастающее затухание в полосе пропускания. Для такого фильтра

$$A(\nu) = 10 \lg (1 + 1/\epsilon^2 T_n^2(\nu_3/\nu))). \quad (6.9)$$

При расчете этого фильтра по заданному значению A_3 (определеняющему минимальное затухание в полосе задержания) находят коэффициент

$$\epsilon = 1/\sqrt{10^{0,1} A_3 - 1}, \quad (6.10)$$

а по допустимому затуханию в полосе пропускания

$$A_{\text{пп}} \leq 10 \lg (1 + 1/(\epsilon^2 T_n^2(\nu_3)))$$

определяют необходимый порядок фильтра

$$n = \text{Ev} [\operatorname{arch}(1/\epsilon \sqrt{10^{0,1} A_{\text{пп}} - 1}) / \operatorname{arch} \nu_3].$$

После округления значения n до ближайшего большего целого из неравенств $A_{\text{пп}} \text{ ист} \leq A_{\text{пп}}$ и $A_{\text{пп}} \text{ ист} \geq A_3$ второе становится равенством. На практике чаще стремятся обратить в равенство первое отношение, что увеличивает затухание за пределами полосы пропускания. В этом случае при расчете фильтра целесообразен следующий алгоритм. 1) принять $n = 1$; 2) из условия $A_{\text{пп}} \text{ ист} = A_{\text{пп}}$ определить значение $\epsilon = \operatorname{ch}(n \operatorname{arch} \nu_3) / (10^{0,1} A_{\text{пп}} - 1)$; 3) если $A_{\text{пп}} \text{ ист} = \ln(1 + 1/\epsilon^2) < A_3$, то принять $n = n + 1$ и перейти к п. 2, иначе закончить вычисления.

Программа 318/21. Вычисление ϵ и порядка n обращенного фильтра Чебышева

C _x	P6	F2	x^2	1	—	$\sqrt{\quad}$	XY	$\sqrt{\quad}$	+	ln	P8
F3	1	0	\div	1	0	X ^y	1	—	P7	F6	1
+	P6	\uparrow	F8	X	e^x	\uparrow	$1/x$	+	2	\div	\uparrow
F7	$\sqrt{\quad}$	X	$1/x$	P5	x^2	$1/x$	1	+	ln	0	,
2	3	\div	\uparrow	F4	—	$x \geq 0$	F \div	F1	C/П	BП	P0

Программа 319/34. Вычисление ϵ и n обращенного фильтра Чебышева

C_x	P_6	$ИП2$	\uparrow	x^2	1	$-$	$\sqrt{ }$	$+$	ln
P_8	$ИП3$	1	0	\div	10^x	1	$-$	$ИП7$	$ИП6$
1	$+$	$ИП6$	$ИП8$	X	e^x	\uparrow	$1/x$	$+$	2
\div	$ИП7$	$\sqrt{ }$	X	$1/x$	$ИП5$	x^2	$1/x$	1	$+$
lg	1	0	X	\uparrow	$ИП4$	$-$	$x \geq 0$	19	XY
C/P	$БП$								

Инструкция к обеим программам: ($v_3 = P2, A_{\Pi} = P3, A_3 = P4$) (B/O) C/P $PX = A_3$ ист $P5 = \epsilon, P6 = n$. Время вычисления зависит от n .

Контрольный пример: при $v_3 = 1,2; A_{\Pi} = 1$ дБ; $A_3 = 20$ дБ получим A_3 ист = 20,6 дБ; $\epsilon = 0,09385773; n = 6$.

Программа 320/21. Вычисление затухания обращенного фильтра Чебышева

\uparrow	F_8	XY	\div	x^2	1	$-$	$x \geq 0$	F_4	$\sqrt{ }$	XY	$\sqrt{ }$
$+$	ln	\uparrow	F_2	X	e^x	\uparrow	$1/x$	$+$	2	\div	$БП$
FC_x	$/-$	P_7	F_4	X	$\sqrt{ }$	$+$	5	XY	$+$	\div	\uparrow
F_7	X	$\sqrt{ }$	\uparrow	F_6	X	\uparrow	F_2	X	cos	\uparrow	F_3
X	x^2	1	$+$	\div	ln	\uparrow	F_5	X	C/P	$БП$	P_0

Инструкция: ($n = P2, \epsilon = P3; 40,5 = P4; -4,34295 = P5; \pi/2 = P6, v_3 = P8$), $v = PX$ (B/O) C/P $PX = A(v)$.

Программа 321/34. Вычисление затухания обращенного фильтра Чебышева

$ИП2$	XY	\div	P_3	\uparrow	x^2	1	$-$	$x \geq 0$	24
$\sqrt{ }$	$+$	ln	\uparrow	$ИП0$	X	e^x	\uparrow	$1/x$	$+$
2	\div	$БП$	29	$ИП3$	$arccos$	$ИП0$	X	cos	$ИП1$
X	x^2	$1/x$	1	$+$	lg	1	0	X	C/P

БП

Инструкция: установить переключатель Р-Г в положение Р ($n = P0, \epsilon = P1, v_3 = P2$), $v = PX$ (B/O) C/P $PX = A(v)$.

Контрольный пример: при $n = 10; \epsilon = 0,05; v_3 = 1,2$ для $v = 1,0$ получим $A(v) = 0,0272$.

Полюсы передаточных функций p' обращенного и p обычного фильтров Чебышева связаны соотношением $p' = v_3/p$ и для вычисления p' можно воспользоваться программами 313/21 или 315/34 с последующим преобразованием p . Нули передаточной функции обращенного фильтра Чебышева, равные корням многочлена $T_n(v_3/v)$, можно вычислить по программе 76, приведенной в [20].

4. Фильтры Бесселя отличаются максимально-плоской зависимостью группового времени задержки (ГВЗ) ρ_{gr} от частоты. При $n \geq 3$ и $v \sim 1$ затухание фильтра удовлетворительно аппроксимируется выражением

$$A(v) \approx 10(\nu \tau_0)^2 / (2n - 1) \ln 10, \quad (6.11)$$

где начальное время задержки τ_0 связано с ГВЗ соотношением

$$\tau_{gr} \approx \tau_0 (1 - (2^n n! / (2n)!)^2 (\nu \tau_0)^2 + \dots). \quad (6.12)$$

При расчете фильтров Бесселя обычно задают допустимые значения A_{Π} и $\Delta \tau_{gr}/\tau_0$, по которым можно вычислить n, τ_0 и истинное значение $\Delta \tau_{gr}/\tau_0$.

Программа 322/21. Вычисление n, τ_0 и $\Delta \tau_{gr}/\tau_0$ фильтра Бесселя

C_x	P_4	1	P_5	1	0	ln	\uparrow	F_2	X	5	\div
P_6	F_4	1	$+$	P_4	4	X	2	$-$	P_7	x^2	\uparrow
F_5	X	P_5	F_7	\uparrow	F_6	X	4	\div	$\sqrt{ }$	P_8	F_4
XY	X^y	\uparrow	F_5	\div	\uparrow	F_3	$-$	$x < 0$	F_2	F_4	C/P
$BП$	P_0										

Программа 323/34. Вычисление $n, \tau_0, \Delta \tau_{gr}/\tau_0$ фильтра Бесселя

C_x	P_4	1	P_5	1	0	ln	$ИП2$	X	5
\div	P_6	$ИП4$	1	$+$	P_4	4	X	2	$-$

$$\begin{array}{ccccccccc} \text{П7} & x^2 & \text{ИП5} & x & \text{П5} & \text{ИП7} & \text{ИП6} & x & \text{П9} & 4 \\ \div & \sqrt{} & \text{П8} & \text{ИП4} & \text{ИП9} & x^y & \text{ИП5} & \div & \uparrow & \text{ИП3} \\ - & x < 0 & 12 & \text{ХY} & \text{ИП4} & \text{С/П} & \text{БП} & & & \end{array}$$

Инструкция к обеим программам: ($A_{\text{п}} = P2$, $(\Delta\tau_{\text{гр}}/\tau_0)_{\text{доп}} = P3$) (В/О) С/П PX = P4 = n, $PY = \Delta\tau_{\text{гр}}/\tau_0$, $P8 = \tau_0$.

Если заданы абсолютное значение допустимого изменения ГВЗ фильтра-прототипа $\Delta\tau_{\text{гр}}$ и допустимое значение $A_{\text{п}}$, то параметры фильтра можно вычислить с помощью следующих программ.

Программа 324/21. Вычисление n , τ_0 и $\Delta\tau_{\text{гр}}$ фильтра Бесселя

$$\begin{array}{cccccccccc} \text{C}_x & \text{P4} & 1 & \text{P5} & 1 & 0 & \ln & \uparrow & \text{F2} & x & 5 & \div \\ \div & \text{P6} & \text{F4} & 1 & + & \text{P4} & 4 & \times & 2 & - & \text{P7} & x^2 & \uparrow \\ \text{F5} & x & \text{P5} & \text{F7} & \uparrow & \text{F6} & x & 4 & \div & \sqrt{} & \text{P8} & \text{F4} \\ \text{ХY} & \text{X}^y & \uparrow & \text{F8} & x & \uparrow & \text{F5} & \div & \uparrow & \text{F3} & - & x < 0 \\ \text{F2} & \text{F4} & \text{C/П} & \text{БП} & \text{P0} & & & & & & & & \end{array}$$

Программа 325/34. Вычисление n , τ_0 и $\Delta\tau_{\text{гр}}$ фильтра Бесселя

$$\begin{array}{cccccccccc} \text{C}_x & \text{П4} & 1 & \text{П5} & 1 & 0 & \ln & \text{ИП2} & x & 5 \\ \div & \text{П6} & \text{ИП4} & 1 & + & \text{П4} & 4 & \times & 2 & - \\ \text{П7} & x^2 & \text{ИП5} & x & \text{П5} & \text{ИП6} & \text{ИП7} & x & \text{П9} & 4 \\ \div & \sqrt{} & \text{П8} & \text{ИП4} & \text{ИП9} & \text{X}^y & \text{ИП8} & x & \text{ИП5} & \div \\ \uparrow & \text{ИП3} & - & x < 0 & 12 & \text{ХY} & \text{ИП4} & \text{С/П} & \text{БП} & \end{array}$$

Инструкция: ($A_{\text{п}} = P2$, $\Delta\tau_{\text{гр}}_{\text{доп}} = P3$) (В/О) С/П PX = P4 = n, $PY = \Delta\tau_{\text{гр}}$, $P8 = \tau_0$.

Контрольный пример: при $A_{\text{п}} = 1$ дБ и $\Delta\tau_{\text{гр}}/\tau_0 \leq 0,01$ по программам 322/21 и 323/34 получим $n = 3$; $\tau_0 = 1,072982$; $\Delta\tau_{\text{гр}}/\tau_0 = 0,006782252$, а при $A_{\text{п}} = 3$ дБ и $\Delta\tau_{\text{гр}} \leq 0,05$ по программам 324/21 и 325/34 получим $n = 5$; $\tau_0 = 2,493387$; $\Delta\tau_{\text{гр}} = 0,02593102$.

Вычисление коэффициентов знаменателя передаточной функции фильтра Бесселя $K(p) = 1/(b_n p^n + b_{n-1} p^{n-1} + \dots + b_1 p + 1)$ по формуле

$$b_i = (2n-i)! / (2\tau_0)^i / i! (2n)! (n-i) \quad (6.13)$$

обеспечивают следующие программы.

Программа 326/21. Вычисление коэффициентов знаменателя $K(p)$ фильтра Бесселя

$$\begin{array}{cccccccccc} \text{C}_x & \text{P5} & 1 & \text{P2} & \text{C/П} & \text{F5} & 1 & + & \text{P5} & \text{F7} & \text{ХY} & - \\ \text{ХY} & + & \div & \uparrow & \text{F5} & \div & \uparrow & \text{F8} & \times & 2 & \times & \uparrow \\ \text{F2} & x & \text{БП} & 0 & & & & & & & & & \end{array}$$

Программа 327/34. Вычисление коэффициентов знаменателя $K(p)$ фильтра Бесселя

$$\begin{array}{cccccccccc} \text{C}_x & \text{П5} & 1 & \text{П2} & \text{С/П} & \text{ИП7} & \text{ИП5} & - & \uparrow & \text{ИП7} \\ + & \div & & \text{КИП5} & \text{ХY} & \text{ИП5} & \div & \text{ИП8} & \times & 2 & \times \\ \text{ИП2} & x & \text{БП} & 03 & & & & & & & & \end{array}$$

Инструкция: ($n = P7$, $\tau_0 = P8$) В/О С/П PX = b_0 С/П PX = $b_1 \dots$ С/П PX = b_n .

Контрольный пример: при $n = 5$; $\tau_0 = 2,493387$ получим $b_0 = 1$; $b_1 = 2,493387$; $b_2 = 2,763101$; $b_3 = 1,722370$; $b_4 = 0,613505$; $b_5 = 0,1019803$.

Для вычисления полюсов передаточной функции фильтра Бесселя приходится обращаться к общим методам решения алгебраических уравнений, но для фильтров с $n < 11$ проще воспользоваться данными табл. 9, полученными для фильтра Бесселя с нормированным значением $\tau_0 = 1$. По известному значению τ_0 достаточно денормировать коэффициенты квадратичных множителей $\alpha_k = \tau_0^2 \alpha'_k$; $\beta_k = \tau_0 \beta'_k$ по значениям α'_k и β'_k , приведенным в табл. 9. Например, для фильтра 5-го порядка получим при $\tau_0 = 2,493387$ коэффициенты $\beta_1 = 0,27421763 \cdot 2,493387 = 0,6837306$; $\alpha_2 = 0,070064906 \times 2,493387^2 = 0,4355920$; $\beta_2 = 1,171166$; $\alpha_3 = 0,3424172$; $\beta_3 = 0,6384899$; откуда $K(p) = 1/(0,6837306 + 1)(0,435592p^2 + 1,171166p + 1)(0,3424172p^2 + 0,6384899p + 1)$.

ТАБЛИЦА 9

Коэффициенты разложения на квадратичные множители $(\alpha' p^2 + \beta' p + 1)$ знаменателя нормированной передаточной функции фильтра Бесселя

Порядок фильтра	Коэффициент	Значения i -х коэффициентов					
		1	2	3	4	5	6
2	α_i β_i	0,3333333333 1,0000000000					
3	α_i β_i	0 0,43062884	0,15481236 0,56937112				
4	α_i β_i	0,10940762 0,63337504	0,087048867 0,36626497				
5	α_i β_i	0 0,27421763	0,070064906 0,46970902	0,055077755 0,25607336			
6	α_i β_i	0,053188291 0,45192595	0,047955137 0,35829281	0,03715887 0,18978123			
7	α_i β_i	0 0,20113493	0,038961376 0,37077909	0,034558375 0,28131479	0,027324805 0,14677119		
8	α_i β_i	0,031272257 0,34949162	0,020647498 0,117235831	0,025927388 0,22651666	0,029468327 0,30675590		
9	α_i β_i	0 0,15880530	0,024637054 0,30201914	0,022911268 0,25680882	0,020084958 0,18632574	0,016182596 0,096040998	
10	α_i β_i	0,020547573 0,28446244	0,012912773 0,080289457	0,019769737 0,26156513	0,018235146 0,21763750	0,015967914 0,15604647	
11	α_i β_i	0 0,13119331	0,014804933 0,18658176	0,012969004 0,13268973	0,016940188 0,25356852	0,016132397 0,22772145	0,010565187 0,068245233

В пределах полосы пропускания затухание фильтра Бесселя при $n > 3$ хорошо аппроксимируется выражением

$$A(\nu) = 10(\nu \tau_0)^2 \lg e / (2n - 1), \quad (6.14)$$

но вычислять затухание при $\nu > \nu_n$ следует общими методами анализа линейных цепей.

5. Фильтры Кауэра, или эллиптические фильтры, имеют равноволновое приближение затухания как в полосе пропускания, так и в полосе задержания. Квадрат модуля передаточной функции такого фильтра

$$|K(j\nu)|^2 = \prod_{i=1}^k (\nu_i^2 - \nu^2)^2 / \left(\prod_{i=1}^k (\nu_i^2 - \nu^2)^2 + \epsilon^2 U_n^2(\nu) \right),$$

где k – число полюсов затухания (нулей передаточной функции), а числитель дроби Чебышева определяют соотношениями

$$U_n(\nu) = 2\nu U_{n-1}(\nu) - U_{n-2}(\nu) \quad (6.15)$$

по числителям $U_{n-1}(\nu)$ и $U_{n-2}(\nu)$ двух младших дробей для выбранного числа k полюсов затухания (табл. 10).

ТАБЛИЦА 10

Определение числителей младших дробей Чебышева

Число k полюсов затухания	Числители двух младших дробей Чебышева	Коэффициенты младших дробей Чебышева
1	$U_2(\nu) = \gamma_1 \nu^2 - \nu_1^2$ $U_3(\nu) = (\gamma_1 + \delta_1) \nu^3 - (\nu_1^2 + \delta_1) \nu$	$\gamma_k = 2\nu_k^2 - 1$ $\delta_k = 2\nu_k \sqrt{\nu_k^2 - 1}$ ($\nu_k > 1$)
2	$U_4(\nu) = \alpha_0 \nu^4 - \alpha_2 \nu^2 + \alpha_4$ $U_5(\nu) = (\alpha_0 + \alpha_1) \nu^5 - (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) \nu^3 + (\alpha_3 + \alpha_4) \nu$	$\alpha_0 = \gamma_1 \gamma_2 + \delta_1 \delta_2$; $\alpha_1 = \gamma_1 \delta_2 + \gamma_2 \delta_1$; $\alpha_2 = \nu_1^2 \gamma_2 + \nu_2^2 \gamma_1 + \delta_1 \delta_2$; $\alpha_3 = \nu_1^2 \delta_2 + \nu_2^2 \delta_1$ $\alpha_4 = \nu_1^2 \nu_2^2$
3	$U_6(\nu) = \beta_0 \nu^6 - \beta_2 \nu^4 + \beta_4 \nu^2 - \beta_6$ $U_7(\nu) = (\beta_0 + \beta_1) \nu^7 - (\beta_1 + \beta_2 + \beta_3) \nu^5 + (\beta_3 + \beta_4 + \beta_5) \nu^3 - (\beta_5 + \beta_6) \nu$	$\beta_0 = \gamma_3 \alpha_0 + \delta_3 \alpha_1$; $\beta_1 = \delta_3 \alpha_0 + \gamma_3 \alpha_1$ $\beta_2 = \nu_3^3 \alpha_0 + \delta_3 \alpha_1 + \gamma_3 \alpha_2 + \delta_3 \alpha_3$ $\beta_3 = \nu_3^2 \alpha_1 + \delta_3 \alpha_2 + \gamma_3 \alpha_3$ $\beta_4 = \nu_3^2 \alpha_2 + \delta_3 \alpha_3 + \gamma_3 \alpha_4$; $\beta_5 = \nu_3^2 \alpha_3 + \delta_3 \alpha_4$ $\beta_6 = \nu_3^3 \alpha_4$ ($\alpha_k, \gamma_k, \delta_k$ – см. выше)

Вычисление коэффициентов многочленов $U_n(\nu)$ по формуле (6.15) автоматизируют следующие программы, выполняемые $n - k$ раз для определения коэффициентов числителя степени n по коэффициентам $U_k(\nu)$ и $U_{k-1}(\nu)$. Многочлены имеют только четные или только нечетные степени аргумента ν .

Программа 328/21. Вычисление коэффициентов числителя дроби Чебышева порядка $n < 12$

F2	↑	+	P2	F3	ПП	F5	P3	F4	ПП	F5	P4
F5	ПП	F5	P5	F6	ПП	F5	P6	F7	ПП	F5	P7
F8	ПП	F5	P8	C/P	БП	P0	XY	←	–	+	B/O

Инструкция: ввести коэффициенты $U_k(\nu)$, начиная со старших степеней, в регистры 2, 3, ..., 8 и коэффициенты $U_{k-1}(\nu)$, начиная со старших степеней, в регистры C1, C2, ..., C6; после выполнения $n - k$ раз программы искомые коэффициенты хранятся, начиная со старших, в регистрах 2, 3, ..., 8.

Программа 329/34. Вычисление коэффициентов числителя дроби Чебышева порядка

$n \leq 13$

ИП6	ПД	2	\times	ИПС	-	П6	ИП5	ПС	2	
X	ИПВ	-		П5	ИП4	ПВ	2	\times	ИПА	-
П4	ИП3	ПА	2	\times	ИП9	-	П3	ИП2	П9	
2	\times	ИП8	-	П2	ИП1	П8	2	\times	ИП7	
-	П1	ИП0	П7	2	\times	П0	С/П	БП		

Инструкция: занести, начиная со старших членов, коэффициенты $U_k(\nu)$ в регистры 0, 1, ..., 6, а коэффициенты $U_{k-1}(\nu)$ в регистры 7, 8, ..., С, Д. После m -го выполнения программы $P0 = \alpha_{k+m}$, $P1 = \alpha_{k+m-1}$, ..., $P6 = \alpha_{k+m-11}$. Время счета около 16 с.

Контрольный пример. Для двух полюсов затухания на нормированных частотах $\nu_1 = \sqrt{2}$ и $\nu_2 = \sqrt{5}$ для функции $U_n(\nu)$ из табл. 10 получим $\gamma_1 = 3$; $\delta_1 = 2\sqrt{2}$; $\gamma_2 = 9$; $\delta_2 = 4\sqrt{5}$; $\alpha_0 = 27 + 8\sqrt{10} = 52,29822$; $\alpha_1 = 12\sqrt{5} + 18\sqrt{2} = 52,28865$; $\alpha_2 = 18 + 15 + 8\sqrt{10} = 58,29822$; $\alpha_3 = 8\sqrt{5} + 10\sqrt{2} = 32,03067$; $\alpha_4 = 10$, откуда $U_4(\nu) = 52,29822\nu^4 - 58,29822\nu^3 + 10$; $U_5(\nu) = 104,5868\nu^5 - 142,6175\nu^4 + 42,03067\nu$.

После семи выполнений программы получим коэффициенты многочлена $U_{12}(\nu) = 13387,11\nu^{12} - 41682,79\nu^{10} + 49044,37\nu^8 - 26874,99\nu^6 + 6754,849\nu^4 - 634,5435\nu^2 + 10$.

Для фильтра с одним полюсом затухания вычисление коэффициентов числителя дроби Чебышева, включая и подготовительные операции, может быть автоматизировано с помощью следующей программы.

Программа 330/21. Вычисление коэффициентов числителя дроби Чебышева порядка $n \leq 12$ при одном полюсе затухания

x^2	1	-	P3	\times	$\sqrt{\quad}$	P2	F3	+	XY	/ - /	\rightarrow
F2	+	XY	\rightarrow	F2	+	P2	\uparrow	F3	XY	-	P3
C/P	F2	\uparrow	+	P2	F3	ПП	F9	P3	F4	ПП	F9
P4	F5	ПП	F9	P5	F6	ПП	F9	P6	F7	ПП	F9
P7	F8	ПП	F9	P8	БП	P4	XY	\leftarrow	-	+	B/O

Инструкция: очистить регистры памяти, $\nu_1 = PX$ B/O C/P P2 = α_3 , P3 = α_1 , C/P P2 = α_4 , P3 = α_2 , P4 = α_0 C/P ... C/P P2 = α_{12} , P3 = α_{10} , P4 = α_8 , P5 = α_6 , P6 = α_4 , P7 = α_2 , P8 = α_0 .

Контрольный пример: при $\nu_1 = 1,2$ после шести выполнений программы получим коэффициенты многочлена $U_8(\nu) = 111,1033\nu^8 - 238,2067\nu^6 + 163,4552\nu^4 - 37,35187\nu^4 + 1,44$.

Аналогичную программу несложно составить и на входном языке МК34. Для этого следует заменить в программе 329/34 адрес безусловного перехода на 24 и ввести в начало программы фрагмент

x^2	P0	2	\times	1	-	P7	1	-	ИП0	
X	2	\times	$\sqrt{\quad}$	ИП0	/ - /	П8	XY	-	П1	
ИП7	ВХ	+	П0	...						

В выражение для квадрата модуля передаточной функции входит квадрат числителя дроби Чебышева. Для возведения $U_n(\nu)$ степени $n < 10$ и $n \leq 16$ следует соответственно использовать программы 134/21 и 135/34.

Расчет затухания фильтра Каузера в полосе пропускания нецелесообразен, так как характеристика затухания в этом случае заведомо равноволновая с числом n максимумов. Равноволновое затухание в полосе задержания обеспечивает выбором частот полюсов затухания, например, по методике, описанной в [7]. Однако равноволновая аппроксимация затухания в полосе задержания не всегда оптимальна, а использование упомянутой методики связано с трудоемкими вычислениями. Поэтому часто задаются расположением полюсов затухания и по расчету АЧХ корректируют это положение до получения требуемых результатов.

Программа 331/21. Расчет затухания в полосе задержания фильтра Кауэра с одним полюсом затухания на частоте

x^2	P8	1	-	$\sqrt{-}$	XY	$\sqrt{-}$	+	ln	\uparrow	F2	X
P7	F4	\uparrow	F8	-	\leftarrow	F8	X	XY	-	\uparrow	\rightarrow
\div	2	X	1	+	x^2	1	-	$\sqrt{-}$	XY	$\sqrt{-}$	+
ln	\uparrow	F7	+	e^x	\uparrow	$1/x$	+	\uparrow	F3	X	x^2
1	+	ln	\uparrow	F5	X	C/P	BП	P0			

Инструкция: ($n - 2 = P2, \epsilon/2 = P3, \nu_1^2 = P4, 4,342945 = P5, \nu = PX$ (B/O) C/P $PX = A(\nu)$). Значение ϵ определяют по формуле (6.6).

Контрольный пример: при $n = 12; \epsilon = 0,1; \nu_1 = 1,2$ для $\nu = 1,15$ получим $A = 45,964$ дБ.

Программа 332/21. Расчет затухания в полосе задержания фильтра Кауэра с полюсами затухания на частотах ν_1 и ν_2

x^2	P8	ПП	C _x	F2	X	P7	F4	ПП	F5	P7	F5
ПП	F5	e^x	\uparrow	$1/x$	+	\uparrow	F3	X	x^2	1	+
ln	\uparrow	F6	X	C/P	BП	P0	\uparrow	F8	-	\leftarrow	F8
X	XY	-	\uparrow	\rightarrow	\div	2	X	1	+	x^2	1
-	$\sqrt{-}$	XY	$\sqrt{-}$	+	ln	\uparrow	F7	+	B/O		

Инструкция: ($n - 4 = P2, \epsilon/2 = P3, \nu_1^2 = P4, \nu_2^2 = P5, 4,342945 = P6, \nu = PX$ (B/O) C/P $PX = A(\nu)$).

Контрольный пример: при $n = 8; \epsilon = 0,1; \nu_1 = 1,2; \nu_2 = 1,4; \nu = 1,1$ получим $A(\nu) = 18,415$ дБ.

Программа 333/21. Расчет затухания в полосе задержания фильтра Кауэра с полюсами затухания на частотах ν_1, ν_2, ν_3

x^2	P8	ПП	F8	F2	X	P7	F4	ПП	5	P7	F5
ПП	5	P7	F6	ПП	5	e^x	\uparrow	F3	X	x^2	1
+	ln	4	,	3	4	3	X	C/P	\uparrow	F8	-
\leftarrow	F8	X	XY	-	\uparrow	\rightarrow	\div	2	X	1	+
x^2	1	-	$\sqrt{-}$	XY	$\sqrt{-}$	+	ln	\uparrow	F7	+	B/O

Инструкция: ($n - 6 = P2, \epsilon/2 = P3, \nu_1^2 = P4, \nu_2^2 = P5, \nu_3^2 = P6, \nu = PX$ B/O C/P $PX = A(\nu)$).

В этой и следующей программах принято приближение $\operatorname{ch} x \approx e^x/2$, что приводит к методической погрешности ΔA , которую в зависимости от значения ϵ и A можно оценить по графику, показанному на рис. 65. Например, при $n = 8; \epsilon = 0,6; \nu_1 = 1,2; \nu_2 = 1,3; \nu_3 = 1,5$ для $\nu = 1,01$ по программе 333/21 получим $A(\nu) = 5,982541$ и с учетом поправки $A(\nu) = 5,241465 + 0,21$ дБ.

Программа 334/21. Расчет затухания в полосе задержания фильтра Кауэра 9-го порядка с четырьмя полюсами затухания

x^2	P8	ПП	P8	F3	ПП	P/-/	F4	ПП	P/-/	F5	ПП
P/-/	F6	ПП	P/-/	e^x	0	P7	F2	X	x^2	1	+
ln	4	,	3	4	3	X	C/P	\uparrow	F8	-	\leftarrow
F8	X	XY	-	\uparrow	\rightarrow	\div	2	X	1	+	x^2
1	-	$\sqrt{-}$	XY	$\sqrt{-}$	+	ln	\uparrow	F7	+	P7	B/O

Инструкция: ($\epsilon/2 = P2, \nu_1^2 = P3, \nu_2^2 = P4, \nu_3^2 = P5, \nu_4^2 = P6, \nu = PX$ B/O C/P $PX = A(\nu)$).

Контрольный пример: при $\epsilon = 0,2; \nu_1 = 1,05; \nu_2 = 1,15; \nu_3 = 1,3; \nu_4 = 1,5; \nu = 2$ получим $A(\nu) = 48,02342$ дБ.

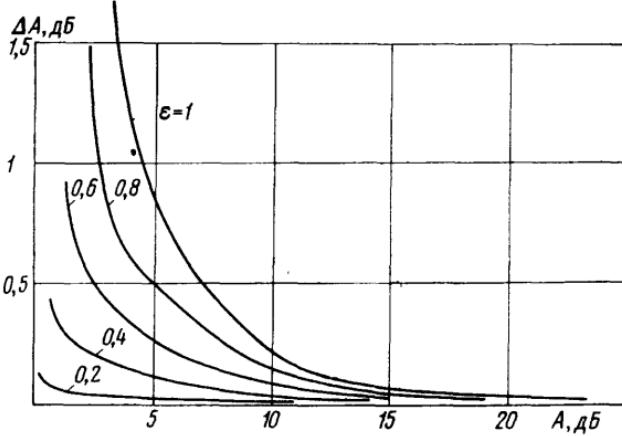


Рис. 65

Программа 335/34. Расчет затухания фильтра Кауэра произвольного порядка при $k \leq 7$ полюсах затухания во всем диапазоне частот

ИПА	ИПВ	ПО	2	x	-	\rightarrow	\rightarrow	x^2	ПД
1	-	$x \geq 0$	44	$\sqrt{-}$	+	\ln	x	Π_9	ПП
68	x^2	1	-	$\sqrt{-}$	+	$x < 0$	29	$1/x$	x^2
$\sqrt{-}$	\ln	Π_9	+	L0	18	e^x	\uparrow	$1/x$	+
2	\div	БП	56	\rightarrow	arccos X	Π_9	ПП	68	
arccos	ИП9	+	L0	47	cos	ИПС	X	x^2	1
+	lg	1	0	X	C/P	БП	00	ИП0	1
+	П0	КИП0	x^2	\uparrow	ИПД	2	X	X	XY
-	ИПД	-	XY	ИПД	-	\div	\uparrow	B/O	

Инструкция. установить переключатель Р-Г в положение Р; ($n = PA$, $k + 1 = PB$, $\epsilon = PC$, $\nu_1 = P1$, $\nu_2 = P2$, ..., $\nu_i = P7$), $\nu = PX$ (B/O) C/P PX = A(ν).

Расчет фильтра Кауэра с полюсами затухания целесообразно выполнять в следующем порядке: 1) по результатам расчета затухания с помощью программ 331/21 – 335/34 определить частоты полюсов затухания, удовлетворяющие предъявляемым к фильтру требованиям; 2) с помощью программ 328/21 – 330/34 при выбранных значениях ν_i вычислить коэффициенты числителя дроби Чебышева и определить квадрат модуля $K(p)$; 3) вычислить корни знаменателя передаточной функции, отнеся к искомой функции $K(p)$ корни с отрицательными вещественными частями.

6.3. Синтез LC-фильтров

В процессе синтеза LC-фильтра (в частности, фильтра-прототипа) по заданной передаточной функции необходимо определить параметры эквивалентного проходного реактивного четырехполюсника при сопротивлениях R_h нагрузки и R_c источника сигнала. С этой целью по характеристической функции $T(p)$, определяемой соотношением (6.2), и нормированному коэффициенту передачи напряжения $K(p) = 0,5\sqrt{R_h/R_c} K_{hc}(p)$ для такого четырехполюсника находят [15] матрицу

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{R_h R_c}} \begin{bmatrix} ((1/K(p))_q + T(p)_q) R_c & ((1/K(p))_h + T(p)_h) R_c R_h \\ ((1/K(p))_h - T(p)_h) & ((1/K(p))_q - T(p)_q) R_h \end{bmatrix}, \quad (6.16)$$

где индексами "q" и "h" обозначены четные и нечетные части соответствующих функций.

По A -параметрам определяют используемые при синтезе проводимости проходного четырехполюсника

$$Y_{\text{вх}\text{ к3}} = A_{22}/A_{12}; \quad Y_{\text{вх}\text{ xx}} = A_{21}/A_{11}; \quad Y_{\text{вых}\text{ к3}} = A_{11}/A_{12}; \quad Y_{\text{вых}\text{ xx}} = A_{21}/A_{22}, \quad (6.17)$$

соответствующие условиям короткого замыкания для холостого хода на другой стороне.

При проектировании фильтров Баттервортса и Чебышева функция $T(p)$ известна, а при расчете фильтров других типов ее определяют согласно (6.3). Иногда приходится решать обратную задачу определения функции $K(p)$ по известной функции $T(p)$, сводимой к аналогичным вычислениям, облегченным программами 136/21 и 137/34.

В качестве примера определим параметры реактивного четырехполюсника, реализующего функцию $K(p) = (0,5p^2 + 1)/(p^3 + 2p^2 + 2p + 1)$ при $R_H = R_C = 1$. С помощью программ 136/21 или 137/34 находим $(p^3 + 2p^2 + 2p + 1)(-p^3 + 2p^2 - 2p + 1) = -p^6 + p^4 + 1$; $(0,5p^2 + 1)(0,5p^2 + 1) = 0,25p^4 + p^2 + 1$. Из соотношения (6.3) следует $Q(p)Q(-p) = (-p^6 + 1) - (0,25p^4 + p^2 + 1) = -p^6 - 0,25p^4 - p^2$. Определив корни этого многочлена $p_{1,2} = 0$; $p_{3,4,5,6} = \pm(\sqrt{7} \pm j3)/4$, находим, что одним из четырех возможных вариантов многочлена $Q(p)$ будет $p(p - (-\sqrt{7} + j3)/4)(p - (-\sqrt{7} - j3)/4) = p^3 + (\sqrt{7}/2)p^2 + 1$. В этом случае $T(p) = Q(p)/M(p) = (p^3 + (\sqrt{7}/2)p^2 + 1)/(0,5p^2 + 1)$ и согласно формуле (6.16)

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ((4 + \sqrt{7})/2)p^2 + 1 & 2p^2 + 3p \\ 0,5p^2 + 1 & 0,5p^2 + 1 \\ \frac{p}{0,5p^2 + 1} & \frac{((4 - \sqrt{7})/2)p^2 + 1}{0,5p^2 + 1} \end{bmatrix}.$$

По (6.17) находим $Y_{\text{вх кз}} = ((4 - \sqrt{7})/2)p^2 + 1)/(2p^3 + 3p)$; $Y_{\text{вх хх}} = p/(((4 + \sqrt{7})/2)p^2 + 1)$; $Y_{\text{вых кз}} = ((4 + \sqrt{7})/2)p^2 + 1)/(2p^3 + 3p)$; $Y_{\text{вых хх}} = p/(((4 - \sqrt{7})/2)p^2 + 1)$.

Если источник напряжения сигнала близок к идеальному и сопротивление R_C достаточно мало, то $Y_{22} = Y_{\text{вых кз}} = N_H(p)/N_Q(p)$ или $Y_{22} = Y_{\text{вых хх}} = N_Q(p)/N_H(p)$ [11].

Так как при $R_C = 0$ проводимость Y_{11} четырехполюсника не влияет на передаточную функцию, то однозначно определяется лишь параметр Y_{22} и для синтеза этого достаточно. Иногда желательно определить значения остальных проводимостей реактивного четырехполюсника. Для этого следует найти коэффициенты вспомогательного многочлена $Q(p)$, удовлетворяющего уравнению

$$N(p)Q(-p) + Q(p)N(-p) = 2M(p)M(-p), \quad (6.18)$$

где $M(p)$ и $N(p)$ — многочлены числителя и знаменателя реализуемой передаточной функции $K(p)$.

Минимальная степень многочлена $Q(p)$, равная минимальному числу элементов фильтра без потерь, на единицу меньше степени многочлена $N(p)$, а коэффициенты b_i многочлена $Q(p)$ связаны с коэффициентами a_i многочлена $N(p)$ и коэффициентами c_i многочлена $M(p)M(-p)$ уравнением

$$\begin{bmatrix} a_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_2 & -a_1 & a_0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_4 & -a_3 & a_2 & -a_1 & a_0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \pm a_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_4 \\ \dots \\ c_{2n-2} \end{bmatrix},$$

имеющим единственное решение. После определения коэффициентов многочлена $Q(p)$ для синтезируемого фильтра с минимальным числом элементов и $R_H = 1$ получим

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1/K(p))_Q & (1/K(p))_H \\ (Q(p)/M(p))_H & (Q(p)/M(p))_Q \end{bmatrix},$$

после чего искомые параметры несложно определить по (6.17). Так, для рассматриваемого примера, составив матричное уравнение

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0,25 \end{bmatrix},$$

получим $K(p) = (p^2/2 + 3p/4 + 1)/(0,5p^2 + 1)$ и матрицу A -параметров синтезируемого проходного четырехполюсника

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (2p^2 + 1)/(0,5p^2 + 1) & 2p \\ 3p/(2p^2 + 4) & 1 \end{bmatrix}$$

По (6.17) находим $Y_{\text{вх кз}} = 1/2p$; $Y_{\text{вх хх}} = 3p/(8p^2 + 4)$; $Y_{\text{вых кз}} = (2p^2 + 1)/(p^3 + 2p)$; $Y_{\text{вых хх}} = 3p/(2p^2 + 4)$.

Из возможных схемных реализаций реактивного четырехполюсника с требуемой входной функцией чаще всего используют лестничные цепи (см. рис. 24). Автоматизацию вычисления параметров такой цепи по коэффициентам a_i числителя степени n и b_i знаменателя степени $m = n - 1$ входной функции $Y_{\text{вх}}$ или $Z_{\text{вх}} = 1/Y_{\text{вх}}$ обеспечивают следующие программы.

Программа 336/21. Определение элементов лестничной цепи по заданной входной функции при $n < 12$

F2	↑	F8	←	P2	÷	P8	F3	←	P3	ΠΠ	F7
F4	←	P4	ΠΠ	F7	F5	←	P5	ΠΠ	F7	F6	←
P6	ΠΠ	F7	F7	←	P7	ΠΠ	F7	←	0	→	F8
XY	←	P8	XY	C/Π	BП	P0	↑	F8	X	↑	→
XY	-	←	B/O								

Инструкция: $a_n = P2$, $a_{n-2} = P3$, ..., $a_{n-12} = P8$, $b_{n-1} = C1$, $b_{n-3} = C2$, ..., $b_{n-11} = C6$ (незанятые регистры очищают) (B/O) C/Π PX = C_1 , или L_1 C/Π PX = L_2 , или C_2 ... C/Π PX = C_n , или L_n .

Программа 337/34. Определение параметров лестничной цепи по заданной входной функции при $n < 11$

↑	1	+	P0	КИП0	КИП0	÷	↑	↑	ИП0
ΠД	→	C/Π	→	КИП0	XY	КИП0	X	-	ИП0
2	+	P0	→	КП0	ИП0	2	-	$x \neq 0$	33
→	L0	13	ИПД	BП					

Инструкция: $a_0 = P1$, $b_1 = P2$, $a_2 = P3$, $b_3 = P4$, ..., $b_{11} = PC$, $n + 1 = PX$ B/O C/Π PX = C_1 , или L_1 C/Π PX = L_2 , или C_2 , ..., C/Π PX = C_n , или L_n .

В качестве примера определим параметры лестничной цепи, реализующей фильтр Баттерворта 9-го порядка по функции входного сопротивления:

$$Z_{\text{вх}}(p) = \frac{5,7587708p^8 + 31,163439p^6 + 41,986389p^4 + 16,581719p^2 + 1}{2p^9 + 16,581719p^7 + 41,986389p^6 + 31,163439p^5 + 5,7587708p}$$

Так как у заданной функции $n < m$, то будем синтезировать обратную функцию $Y_{\text{вх}}(p) = 1/Z_{\text{вх}}(p)$. В этом случае первым элементом лестничной цепи будет поперечная емкость C_1 , вторым — продольная индуктивность L_2 и последним — поперечная емкость C_9 . По программе 336/21 вычислим параметры фильтра, приведенные в табл. 11, где даны значения параметров с четырьмя верными цифрами [22] и относительные погрешности вычислений.

ТАБЛИЦА 11

Результаты вычислений параметров фильтра

Параметр	Точное значение	Расчет по заданному $Z(p)$	Погрешность, %	Расчет при семи знаках	Погрешность, %
1	2	3	4	5	6
C_1	0,3473	0,3472963	-	0,347283	-
L_2	1,000	0,9999997	-	0,9999661	-

1	2	3	4	5	6
C_2	1,532	1,532087	—	1,532049	—
L_3	1,879	1,879377	—	1,879348	—
C_5	2,000	1,999914	—	2,001127	0,06
L_4	1,879	1,878441	-0,03	1,888439	0,5
C_7	1,532	1,525744	-0,4	1,596829	4,06
L_8	1,000	0,9864432	-1,34	1,176672	17,67
C_9	0,3473	0,3537277	1,85	0,2817014	-18,86

Следует подчеркнуть, что обеспечение требуемой точности результатов при синтезе фильтров высокого порядка является сложной задачей, а известные методы снижения погрешностей, применяемые при расчетах на ЭВМ, неприменимы для микрокалькуляторов с фиксированной разрядностью. Между тем уже при расчете с семью значащими цифрами погрешность вычислений (см. табл. 11) быстро возрастает. Поэтому ограничимся следующими рекомендациями:

1. При расчете симметричных фильтров (например, Баттервортса и Чебышева) целесообразно вычислять только первые $n/2$ параметров, определяя остальные параметры из условия симметрии схемы.

2. При расчете несимметричных фильтров целесообразно выполнять вычисления дважды для функций $Z_{\text{вх}}(p)$ и $Z_{\text{вых}}(p)$ или $Y_{\text{вх}}(p)$ и $Y_{\text{вых}}(p)$ и сравнивать результаты. Степень их расхождения позволит, по крайней мере, оценить погрешности реализации.

Кроме того, определив с помощью программы 138/21 или 139/34 входную функцию реализованного фильтра, можно сравнить ее коэффициенты с коэффициентами исходной функции, что также позволит оценить погрешность.

Например, для параметров, приведенных в третьем столбце табл. 11 (с учетом короткого замыкания емкости C_9), по этим программам получим $Y_{\text{вх кз}}(p) = (5,651237p^8 + 30,65956p^6 + 41,54414p^4 + 16,4964p^2 + 1)/(2p^9 + 16,27209p^7 + 41,42706p^5 + 30,91866p^3 + 5,743324p)$.

Точность вычислений по программам 138/21 и 139/34 значительно выше, чем по программе 336/21 и особенно 337/34, в которой вычтываются близкие числа. Поэтому программы 138/21 и 139/34 пригодны и для оценки влияния погрешностей вычисления параметров фильтра на коэффициент передачи напряжения.

Согласно формулам (6.16) и (6.17) $Y_{\text{вх кз}} = ((1/K(p)_q - T(p)_q)/((1/K(p)_H + T(p)_H))$; $Y_{\text{вх xx}} = ((1/K(p)_H - T(p)_H)/((1/K(p)_q + T(p)_q))$ и при $K(p) = 1/N(p)$, $M(p) = 1$ функции $1/K(p)$ и $T(p)$ — многочлены, причем $N(p)_q - T(p)_q = F_{\text{kz}}(p)$; $N(p)_q + T(p)_q = G_{\text{xx}}$; $N(p)_H + T(p)_H = G_{\text{kz}}(p)$; $N(p)_H + T(p)_H = F_{\text{xx}}(p)$, где F_{kz} и F_{xx} — числители функций $Y_{\text{вх кз}}$ и $Y_{\text{вх xx}}$, а G_{kz} и G_{xx} — их знаменатели. Из этих соотношений следует

$$K(p) = 2/(F_{\text{kz}}(p) + G_{\text{xx}}(p) + G_{\text{kz}}(p) + F_{\text{xx}}(p)). \quad (6.19)$$

Для рассматриваемого фильтра, определив $Y_{\text{вх xx}}(p)$ с помощью программы 138/21 или 139/34, по формуле (6.19) получим $K(p) = 1/(0,999495p^9 + 5,755802p^8 + 16,57347p^7 + 31,14931p^6 + 41,96992p^5 + 41,97291p^4 + 31,15584p^3 + 16,579p^2 + 5,7583p + 1)$. Сравнение подобного результата с исходным выражением для $K(p)$ позволяет судить о точности определения параметров фильтра и необходимости их уточнения.

Для более полного представления о погрешностях синтеза в табл. 12 приведены вычисленные по предложенной методике коэффициенты $K(p)$ рассматриваемого фильтра Баттервортса 9-го порядка. Столбцы этой таблицы содержат (в порядке нумерации): 1) значения коэффициентов с восемью верными цифрами; 2) значения, полученные при выборе элементов фильтра (параметры, приведенные в первом столбце табл. 12) согласно [22]; 3) значения, полученные при расчете с восемью значащими цифрами; 4) зна-

чения, полученные при округлении промежуточных результатов до семи значащих цифр; 5) значения, полученные при вычислении первых пяти параметров схемы с максимальной точностью и определении остальных параметров по условию симметрии схемы; 6) то же, но при округлении промежуточных результатов до семи значащих цифр. Эти результаты подтверждают приведенные ранее рекомендации о возможных путях повышения точности синтеза.

ТАБЛИЦА 12

Коэффициенты передаточной функции синтезированного фильтра

a_i	1	2	3	4	5	6
a_9	1	0,999495	0,9999975	0,9999975	0,9999445	1,000326
a_8	5,7587708	5,755802	5,704997	6,429339	5,758452	5,760873
a_7	16,581719	16,57347	16,42688	18,51261	16,58083	16,58801
a_6	31,163439	31,14931	30,91147	34,30360	31,1619	31,17499
a_5	41,986389	41,96992	41,70669	45,46826	41,98456	43,00064
a_4	41,986389	41,97291	41,76523	44,73418	41,98487	41,99853
a_3	31,163439	31,15584	31,04103	32,67870	31,16257	31,17044
a_2	16,581719	16,579	16,53905	17,11693	16,58140	16,58424
a_1	5,7587708	5,7583	5,751046	5,851707	5,758716	5,75920

При синтезе фильтров с передаточной функцией $K(p)$, имеющей нули (полюсы затухания), кроме операции разложения в цепную дробь входной функции приходится выделять полюсы затухания, реализуемые для функций $Y(p)$ и $Z(p)$ звенями, показанными соответственно на рис. 66, а и б. Алгоритм вычисления параметров таких звеньев следующий:

1. Вычисление индуктивности L_0 при синтезе $Z_{\text{вх}}$ или емкости C_0 при синтезе $Y_{\text{вх}}$ по формуле для L_0 или $C_0 = M(p) / (pN(p))$ при $p = j\nu_i$, где $M(p) / N(p)$ – синтезируемая функция, а ν_i – частота выделяемого полюса затухания.

2. Вычисление остаточной функции $Z'(p) = Z(p) - pL_0 = (N(p) - pL_0 M(p)) / M(p)$ или $Y'(p) = Y(p) - pC_0 = (N(p) - pC_0 M(p)) / M(p)$.

3. Разложение числителя остаточной функции на сомножители $(p^2 + \nu_i^2)$ и $N'(p) = (N(p) - pC_0 M(p)) / (p^2 + \nu_i^2)$.

4. Вычисление L_1 или $C_1 = pN'(p) / M(p)$ при $p = j\nu_i$ и $C_1 = 1/\nu_i^2 L_1$ или $L_1 = 1/\nu_i^2 C_1$.

5. Вычисление остаточной функции $Z''(p) = (M(p) - pN'(p) / L_1) / N'(p)$ или $Y''(p) = (M(p) - pN'(p) / C_1) / N'(p)$.

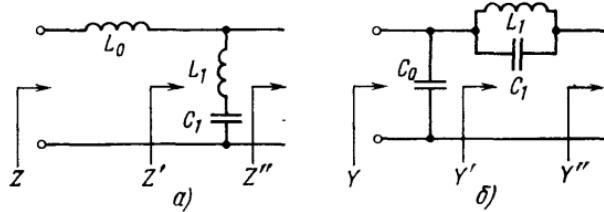


Рис. 66

После этого переходят к выделению следующего полюса затухания или после выделения всех полюсов раскладывают остаточную функцию в цепную дробь.

Программа 338/21. Выделение полюса затухания при реализации входной функции до десятого порядка

←	↑	→	XY	←	ПП	F8	C/P	←	C _x	P8	F2
ПП	F8	F3	ПП	F8	F4	ПП	F8	F5	ПП	F8	F6

ПП	F8	→	0	←	÷	P8	C/П	↑	F8	×	←	
↑	→	-	→	↑		F7	X	←	+	←		БП
F5	↑	F8	+	↑		F7	X	P8	B/O			

Инструкция: 1) ввести $a_n = C1$, $a_{n-1} = C2$, ..., $a_{n-10} = C6$, $b_{n-1} = P2$, $b_{n-3} = P3$, ..., $b_{n-9} = P6$, $-v_i^2 = P7$, $0 = P8 = PX$; 2) выполнить программу пять раз, нажимая клавиши B/O и C/П (что приведет к вычислению $N(p)$ при $p = j\nu_i$); 3) нажать клавишу C/П и зарегистрировать $PX = C_0$ или L_0 ; 4) выполнить F2 C/П F3 C/П F4 C/П F5 C/П F6 C/П ← P8 (что приведет к вычислению коэффициентов многочлена $N'(p)$ и очистке регистра 8; 5) повторить выполнение пп. 2 и 3, зарегистрировав высвечиваемое значение L_1 или C_1 ; 6) выполнить $1/x$ P8 ↑ F7 ÷ /- ($PX = C_1$ или L_1); 7) поменять местами коэффициенты числителя и знаменателя, выполнив F2 ← P2 F3 ← P3 F4 ← P4 F5 ← P5 F6 ← P6; 8) выполнить п. 4; 9) перейти к п. 1 для выделения следующего полюса затухания, поменяв местами коэффициенты числителя и знаменателя и вводя $-v_i^2 = P7$, $0 = P8 = PX$, или вызвать из памяти коэффициенты $P2 = a_{n-2}$, $P3 = a_{n-4}$, ..., $C1 = b_{n-3}$, $C2 = b_{n-5}$, ... остаточной функции и зарегистрировать их.

Выделение каждого звена цепного фильтра уменьшает на два число коэффициентов его схемной функции, но вследствие операционных погрешностей содержимое соответствующих регистров памяти отличается от нуля. Для предотвращения накопления погрешностей при повторении программы целесообразно очищать эти регистры после выполнения п. 7 инструкции.

Эту программу можно использовать и при определении параметров простых звеньев лестничного фильтра, для чего следует выполнить пп. 1 – 3 инструкции, приняв $\nu_i \gg 1$ (но при $a_n \nu_i^{2n} < 10^{10}$), очистить регистр 7, повернуть стек памяти на один шаг по часовой стрелке и выполнить пп. 4 и 7. После этого можно повторить вычисления или перейти к выделению полюса затухания.

В качестве примера синтезируем лестничный фильтр 5-го порядка с полюсом затухания на частоте $\nu = 2,125$ по входной функции

$$Y_{\text{вх xx}} = \frac{110,23086p^8 + 172,82389p^3 + 61,498228p}{71,898712p^4 + 85,417022p^2 + 13,530435}. \quad (6.20)$$

Введя программу 338/21 и исходные данные ($110,23086 = C1$; $172,82389 = C2$; $61,498228 = C3$; $71,898712 = P2$; $85,417022 = P3$; $13,530435 = P4$; $-2,125^2 = P7$; $0 = C4 = C5 = C6 = P5 = P6 = P8 = PX$), выполняем: B/O C/П B/O C/П B/O C/П B/O C/П B/O C/П ($PX = -140762$) C/П $PX = C_0 = 1,397513$ F2 C/П F3 C/П F4 C/П F5 C/П F6 C/П ← P8 B/O C/П B/O C/П B/O C/П B/O C/П ($PX = -14387,33$) C/П $PX = C_1 = 0,1428402$ 1/x P8 ↑ F7 ÷ $PX = -L_1 = -1,550356$ F2 ← P2 F3 ← P3 F4 ← C_x F5 ← C_x F6 ← C_x P6 ← F2 C/П F3 C/П F4 C/П F5 C/П F6 C/П ← P8 ($P2 = a''_3 = 9,75147$; $P3 = a''_1 = 9,431489$; $C1 = b''_2 = 3,63037$; $C2 = b''_0 = 2,885422$).

Для вычисления остальных параметров фильтра вводим, не выключая микрокалькулятор, программу 336/21, очищаем регистр 7 и выполняем: B/O C/П $PX = C_2 = 2,686081$ C/П $PX = L_2 = 2,620181$ C/П $PX = C_3 = 0,4625529$. Синтезированная схема фильтра показана на рис. 67, а.

При синтезе возможны различные схемные реализации, при выборе которых прихо-

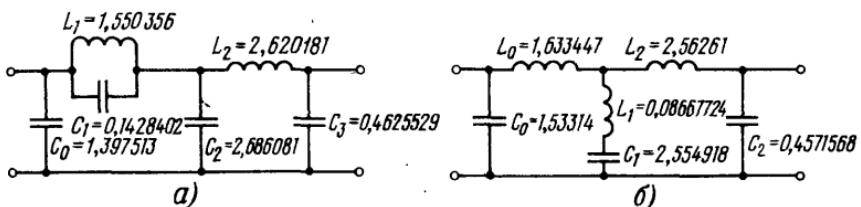


Рис. 67

дится учитывать дополнительные критерии оптимальности фильтра. Для примера реализуем еще одну схему фильтра, отличающуюся местом включения контура, формирующего полюс затухания.

После ввода программы 338/21 и исходных данных начинаем синтез с вычисления емкости C_0 , формирующей полюс затухания в бесконечности. Для этого выполняем:

$$-\nu^2 = -10^{18} = P7; 0 = PX \text{ B/O C/P B/O C/P B/O C/P B/O C/P B/O C/P} (PX = -1,102308 \cdot 10^{17}) \text{ C/P } PX = C_0 = 1,53314 C_x P7 F2 C/P F3 C/P F4 C/P F5 C/P F6 C/P \leftarrow P8 F2 \leftarrow P2 F3 \leftarrow P3 F4 \leftarrow C_x P4 F5 \leftarrow C_x P5 F6 \leftarrow C_x P6 \leftarrow \dots \rightleftharpoons 2,125 x^2 / - P7 C_x P8 \text{ B/O C/P B/O C/P B/O C/P B/O C/P B/O C/P} (PX = L_0 = 1,633447 F2 C/P F3 C/P F4 C/P F5 C/P F6 C/P \leftarrow P8 B/O C/P B/O C/P B/O C/P B/O C/P B/O C/P) PX = -5334,764 C/P PX = L_1 = 0,08667724 1/x P8 \uparrow F7 \div PX = -C_1 = -2,554918 F2 \leftarrow P2 F3 \leftarrow P3 F4 \leftarrow C_x P4 F5 \leftarrow C_x P5 F6 \leftarrow C_x P6 \leftarrow F2 C/P F3 C/P F4 C/P F5 C/P F6 C/P (P2 = 3,510262 P3 = 2,996346 C1 = 1,369799).$$

Остаточную функцию $Z'(p) = (3,510262p^3 + 2,996346)/1,369799p$ несложно реализовать, выполнив в обычном режиме деление с результатом $Z'(p) = 2,56261p + 1/0,4571568p$, откуда $L_2 = 2,56261$ и $C_2 = 0,4571568$. Реализованный вариант фильтра показан на рис. 67, б.

При расчетах на микрокалькуляторе с входным языком МК34 можно воспользоваться более удобной программой.

Программа 339/34. Синтез лестничного фильтра до 10-го порядка с полюсами затухания

ИПВ	ИПА	\div	ПП	53	ИПД	$x = 0$	19	ПП	59
КИП0	КИП0	\times	ПП	91	L0	11	ИПС	БП	35
38	ПП	59	ПП	38	$1/x$	ПС	ПП	81	ПП
59	ПП	81	ИПД	\div	C/P	БП	00	C_x	\uparrow
\uparrow	\rightarrow	XY	КИП0	+	ИПД	X	ИП0	$x = 0$	41
\rightarrow	\div	C/P	ПС	1	2	P0	ИПС	B/O	КИП0
КИП0	ИПС	X	-	ПВ	ИПД	X	КИП0	$x \neq 0$	54
КИП0	ИПС	X	-	+	ПП	91	L0	65	БП
54	КИП0	КИП0	$x \neq 0$	54	ПП	91	XY	КП0	БП
81	ИП0	2	+	P0	\rightarrow	KП0	B/O		

Инструкция: $a_n = PB$, $b_{n-1} = PA$, $a_{n-2} = P9$, $b_{n-3} = P8$, $a_{n-4} = P7$, ..., $b_{n-9} = P2$, $a_{n-10} = P1$, $-\nu_i^2 = PД$ (при выделении полюса затухания) или $0 = PД$ (при реализации простого звена) $B/O C/P PX = L_0$ или $C_0 C/P PX = L_1$ (или C_1) $C/P PX = -C_1$ (или $-L_1$) при реализации полюса затухания или $(B/O) C/P PX = L_1$ (или C_1) $C/P PX = C_2$ (или L_2) при выделении простого звена ($\nu_i = 0$), ...

Контрольный пример: после ввода коэффициентов функции (6.20) и очистки незадействованных регистров выполняем: $-2,125^2 = PД$ $B/O C/P PX = C_0 = 1,3975668 C/P PX = C_1 = 0,14276847 C/P PX = -1,5511358 C_x P1 P2 P3 P4 P5 P6 P7 PД B/O C/P PX = C_2 = 2,690433 C/P PX = L_2 = 2,643947 ИПВ = C_3 = 0,4573391$.

Напомним, что при проектировании LC-фильтров после синтеза фильтра-прототипа выполняют преобразование схемы и денормировку ее параметров в соответствии с формулами, приведенными в табл. 8.

6.4. Практический расчет фильтров

Рассмотрим возможности описанного программного обеспечения на примере расчета полосового фильтра с $A_{\Pi} < 1$ дБ, $A_3 \geq 60$ дБ, $f_{\Pi_1} = 96$ кГц, $f_{\Pi_2} = 104$ кГц, $f_{3_1} = 92$ кГц, $f_{3_2} = 108,24$ кГц. В соответствии с алгоритмом расчета (см. рис. 66) с помощью программы 293/21 или 294/34 находим, что ФП должен обеспечить затухание 60 дБ на нормированных частотах $\nu = 2,065217$ и $\nu = 2,000061$, из которых выбираем меньшую, приняв $\nu_3 = 2$.

Так как требования к временным характеристикам и ФЧХ не оговорены, попытаем-

ся синтезировать фильтр Чебышева. С помощью программ 311/21 и 313/21 или программы 315/34 находим, что требуемую АЧХ обеспечит фильтр Чебышева 7-го порядка с $A(\nu_3) = A(2) = 68,18371$ дБ. Это позволит улучшить АЧХ в полосе пропускания при уменьшении A_p до 0,5 дБ при $A_3 = 64,91622$ дБ и координатах полюсов $p_{1,2} = -0,05700306 \pm j1,006408$; $p_{3,4} = -0,159719 \pm j0,8070769$; $p_{5,6} = -2,308007 \pm j0,4478939$; $p_7 = -0,2561693$.

Предположим, что необходимо реализовать LC -фильтр с добротностью контуров $Q \leq 150$. При преобразовании ФП в полосовой фильтр его ветви представляют собой контуры примерно одинаковой добротности. Влияние потерь учитывается по методу предыскажений, но при $Q_{\max} = 150$ смещение полюсов $\sigma_m = f_0/\Delta f Q_{\max} = 100/(8 \times 150) = 0,08333$, что свидетельствует о нереализуемости фильтра Чебышева по исходным данным, так как требуется минимальная добротность $Q_{\min} = f_0/\Delta f (\operatorname{Re} p_i)_{\min} \approx 220$.

Попытаемся реализовать фильтр Баттервортса. С помощью программ 307/21 и 308/21 или программы 309/34 получим (при $A_p = 1$ дБ, $A_3 = 60$ дБ и $\nu_3 = 2$) $\epsilon = 0,5088468$; $n = 11$ при $p_{1,2} = -0,1513294 + j1,052520$; $p_{3,4} = 0,441729 \pm j0,9672519$; $p_{5,6} = -0,6963422 + j0,8036217$; $p_{7,8} = -0,8945419 \pm j0,5748873$; $p_{9,10} = -1,020271 + j0,2995786$; $p_{11} = -1,063343$. Для реализации такого фильтра достаточна добротность контуров $Q > 100/(8 \cdot 0,1513294) \approx 82,6$, но порядок фильтра относительно большой, а запас по A_p и A_3 практически отсутствует.

При одинаковой неравномерности в полосе пропускания расстояние между мнимой осью и ближайшим полюсом увеличивается с уменьшением порядка фильтра, а снижение затухания на частоте ν_3 можно скомпенсировать введением полюсов затухания (нулей передачи). Поэтому попытаемся синтезировать фильтр Кауэра 5-го порядка с одним полюсом затухания.

Задавшись $\epsilon = 0,4$ (что соответствует $A_p \approx 0,645$), $n = 5$ и подбирая частоту ν_3 полюса затухания, с помощью программы 331/21 или 335/34 определяем, что требуемая АЧХ обеспечивается при $\nu_3 = 2,125$. Для определения коэффициентов $K(p)$ используем сначала программу 330/21 или 329/34 с дополнительным фрагментом. Вводя $\nu_3 = 2,125 = RX$ и трижды выполнив программу, вычисляем коэффициенты дроби Чебышева $U_5(\nu) = 64\nu^5 - 82\nu^3 + 21,515625\nu$. Затем с помощью программы 134/21 или 135/34 после умножения коэффициентов дроби на ϵ^2 получаем $|K(\nu)|^2 = (4,51565 - \nu^2)^2 / (655,36\nu^{10} - 167,36\nu^8 + 1516,48\nu^6 - 563,57\nu^4 + 65,03628\nu^2 + 20,790869)$ или после перехода к переменной p и нормирования функции по свободному члену $K(p) \times K(-p) = (1 + 0,22145329p^2)^2 / (1 + 3,1894809p^2 - 27,638351p^4 - 74,370543p^6 - 82,358432p^8 - 32,139876p^{10})$.

Обозначим $x = 1/p^2$, составим уравнение $x^5 - 3,1894809x^4 - 27,638351x^3 - 74,37054x^2 - 82,358432x - 32,139876 = 0$ и с помощью программы 147/21 или 148/34 получим $x_1 = 7,9860304$, откуда $p_{1,2} = \pm 1/\sqrt{x_1} = \pm 0,35386247$. Разделив исходное уравнение на $(x - x_1)$ и разложив частное на квадратичные множители с помощью программы 144/21 или 146/34 отнесем к функции $K(p)$ корни левой полуплоскости и составим ее знаменатель $(1 + 0,18351866p + 0,98273208p^2)(1 + 1,103614p + 2,041364p^2)(1 + 2,8259565p)$. Ближайшая пара полюсов отстоит от мнимой оси на расстоянии $\operatorname{Re} p_{1,2} = -0,09337174$, откуда $Q_{\text{треб}} = 100/(8 \cdot 0,09337174) = 134$ и, следовательно, при $Q = 150$ фильтр реализуем. С помощью программы 130/21 или 131/34 окончательно находим $K(p) = (1 + 0,22145329p^2) / (5,6691911p^5 + 6,1297082p^4 + 10,577501p^3 + 6,8640103p^2 + 4,1130891p + 1)$.

Выполнив смещение полюсов на расстояние $\sigma_m = -1/12$, с помощью программы 303/21 или 304/34 (можно вначале преобразовать множители по программам 305/21 и 306/34, а затем их перемножить) получим функцию, в которой смещены только полюсы (учтут потерю в контурах, формирующие полюсы затухания, выполняют отдельно):

$$K(p) = (1 + 0,22145329p^2) / (5,6691911p^8 + 3,7675451p^4 + 8,927958p^3 + 3,1766298p + 0,6990609). \quad (6.21)$$

Частотная характеристика квадрата модуля этой функции (штрих-пунктирная линия на рис. 68) значительно отличается от требуемой (сплошная линия на рис. 68) и нереализуема в пассивной цепи. Сместив полюсы на расстояние $\sigma_m = 1/12$, получим функцию (ее АЧХ показана на рис. 68 штриховой линией) $K(p) = (1 + 0,22145329p^2) / (5,6691911p^5 + 8,4918709p^4 + 13,0144p^3 + 9,7965979p^2 + 5,4930115p + 1,3968637)$, соответствующую фильтру с $Q = 150$, синтезированному без учета потерь.

Функция (6.21) имеет максимум около 19 дБ на частоте $\nu \approx 1$, тогда как в реактивном фильтре $|K(\nu)|_{\max} = 1$. Поэтому следует с максимальной точностью найти максимум модуля функции (6.21), равный $|K(p)|_{\max} = 9,730755$ при $\nu = 1,00393$. Введя постоянный множитель, равный этому значению модуля, в знаменатель, получаем реализуемую функцию

$$K(p) = (1 + 0,22145329p^2) / (9,730755(5,6691911p^5 + 3,7676451p^4 + 8,9279580p^3 + 4,4422321p^2 + 3,1766298p + 0,6990609)).$$

Для вычисления функции $T(p)$ с помощью программы 136/21 или 137/34 по знаменателю передаточной функции (6.21) находим

$$N(p)N(-p) = -3043,2339p^{10} - 8241,0607p^8 - 7788,4019p^6 - 3003,5592p^4 - 367,40639p^2 + 46,272521.$$

Для числителя функции аналогично находим $M(p)M(-p) = 1 + 0,44290658p^2 + 0,04904155p^4$ и на основании соотношения (6.18) получаем $Q(p)Q(-p) = 3043,2339p^{10} + 8241,0607p^8 + 7788,4019p^6 + 3003,6082p^4 + 367,8493p^2 - 45,272521$. Подставив $x = 1/p^2$ и решив полученное уравнение, запишем многочлен $Q(p) = 55,16535p^5 + 35,237651p^4 + 86,948109p^3 + 42,1900747p^2 + 30,58722p + 6,728044$, все корни которого расположены в левой полуплоскости.

Выделив $(1/K(p))_q = (36,661061p^4 + 43,226275p^2 + 6,8023909) / (1 + 0,22145329p^2)$; $(1/K(p))_n = (55,165511p^2 + 86,875772p + 30,911006) / (1 + 0,22145329p^2)$; $(T(p))_q = (35,237651p^4 + 42,1900747p^2 + 6,728044) / (1 + 0,22145329p^2)$; $(T(p))_n = (55,16535p^5 + 85,948109p^3 + 30,58722p) / (1 + 0,22145329p^2)$, найдем в соответствии с (6.16) и (6.18) функцию (6.19), две схемные реализации которой показаны на рис. 67.

В общем случае в схему лестничного фильтра входит идеальный трансформатор (рис. 69, а) и для определения его коэффициентов трансформации необходимо повторить синтез по выходной функции. Сформировав по (6.17) функцию $Y_{\text{вых } xx}$ и синтезировав ее с помощью программы 338/21 или 339/34, получим параметры фильтра с идеальным трансформатором, приведенные в табл. 13.

Коэффициент трансформации $n = \sqrt{C_i''/C_i'} = \sqrt{L_i'/L_i''}$ определяют по значениям L_i' и L_i'' или C_i' и C_i'' , полученным соответственно при реализации функций $Y_{\text{вх } xx}$ и $Y_{\text{вых } xx}$. Сравнение значений n в обоих случаях позволяет оценить погрешности синтеза и выбрать среднее значение. Величину n определяют также из формулы $K(0) = n / (1 + n^2)$, где $K(0) = 0,5K_n(0)$. В нашем случае $K_n(0) = 1 / (9,730755 \cdot 0,6990609) = 0,1470071$, что соответствует значению $n = 13,53087$, отличающемуся лишь на 1,2 % от усредненного по данным табл. 13 значения $n = 13,37$. Учитывая минимальную погрешность параметров первых звеньев, примем $n = 13,53$; $L_{1n} = 1,633$; $C_{1n} = 1,533$; $L_{2n} = 0,089$; $C_{2n} = 2,489$; $L_{3n} = 2,845$; $C_{3n} = 0,4115$.

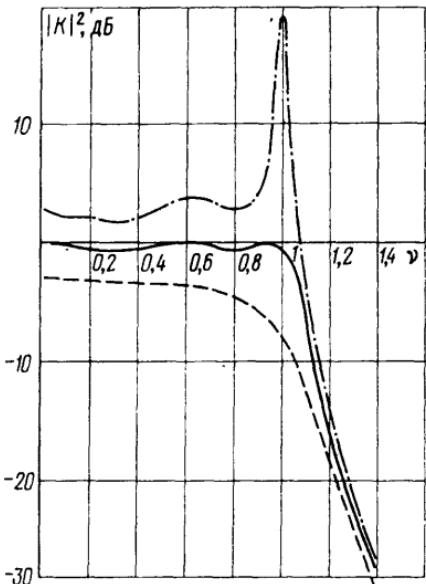
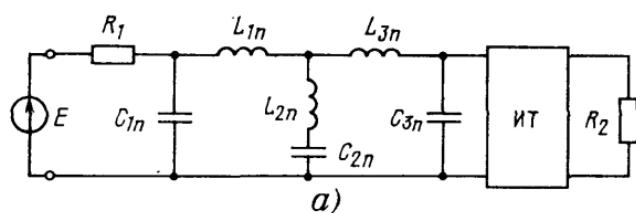
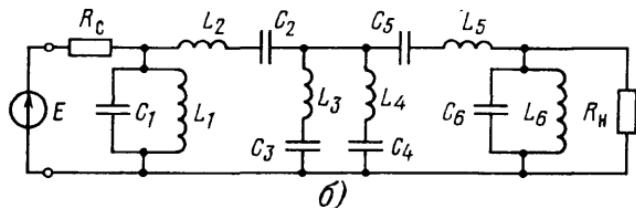


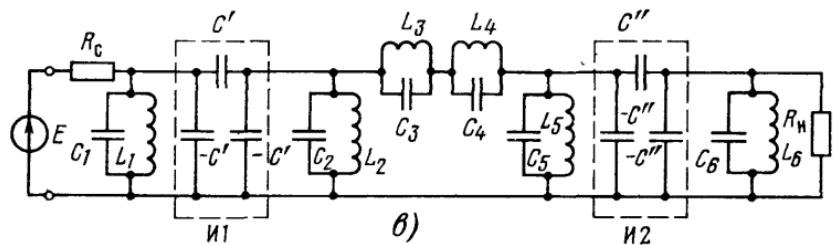
Рис. 68



a)

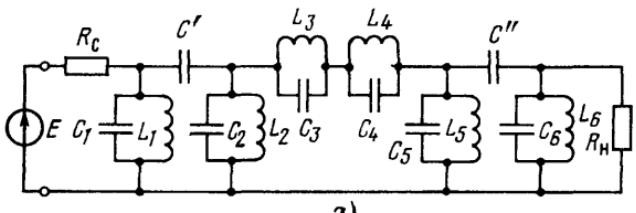


b)



I1

I2



d)

Рис. 69

ТАБЛИЦА 13

Результаты синтеза фильтра по функциям $Y_{\text{вх } xx}$ и $Y_{\text{вых } xx}$

Параметр	Значение параметра при синтезе по функциям		n
	$Y_{\text{вх } xx}$	$Y_{\text{вых } xx}$	
C_1	1,53314	312,6528	14,28
L_1	1,633447	0,008414342	13,97
L_2	0,08667724	0,0004993538	13,17
C_2	2,554918	443,4797	13,17
L_3	2,56261	0,01555009	12,84
C_4	0,4571568	75,32320	12,84

Пусть сопротивление источника сигнала $R_c = 10 \text{ кОм}$. Так как сопротивление нагрузки не задано, примем $R_h = n^2 R_c = 1,83 \text{ МОм}$. Определив при $f_0 = 100 \text{ кГц}$ коэффициенты преобразования $K_L = 10^3 R_c / 2\pi f_0 = 15,91549$; $K_C = 10^{-12} / (2\pi f_0 R_c) = 159,1549$;

$K_A = 100/8 = 12,5$, с помощью программы 297/21 или 298/34 найдем параметры схемы фильтра (рис. 69, б): $C_1 = 3,049806 \text{ нФ}$; $L_1 = 0,8305541 \text{ мГн}$; $L_2 = 324,875 \text{ мГн}$; $C_2 = 7,796935 \text{ нФ}$; $L_3 = 32,64733 \text{ мГн}$; $C_3 = 65,47299 \text{ пФ}$ ($f_{03} = 108,8591 \text{ кГц}$); $L_4 = 38,68815 \text{ мГн}$; $C_4 = 77,58762 \text{ пФ}$ ($f_{04} = 91,86178 \text{ кГц}$); $C_5 = 4,475358 \text{ пФ}$; $L_5 = 565,9947 \text{ мГн}$; $C_6 = 818,6532 \text{ пФ}$; $L_6 = 3,094142 \text{ мГн}$.

Полученная схема практически нереализуема в связи с большой собственной емкостью катушек большой индуктивности, не учитываемой при расчете. Чтобы обеспечить реализуемость фильтра, преобразуем его в квазиполиномиальный, введя два инвертора емкостного типа (рис. 69, в), при расчете которых следует стремиться к обеспечению наименьшего разброса параметров индуктивных катушек. Обозначив параметры схемы, показанной на рис. 69, б штрихами, получим для схемы с инверторами (рис. 69, в) индуктивности: $L_1 = L'_1 = 830,5541 \text{ мкГн}$; $L_2 = K_1^2 C_2 = 7,796935 K_1^2 \text{ мкГн}$; $L_3 = K_1^2 C_3 = 65,47299 K_1^2 \text{ мкГн}$; $L_4 = K_1^2 C_4 = 77,58762 K_1^2 \text{ мкГн}$. Приравняв $L_{\max} = L_4$ к L_1 и L_1 к $L_{\min} = L_5$, получим $77,58762 K_1^2 / 830,5541 = 830,5541 / (4,475358 K_1^2)$, откуда с учетом используемых размерностей $K_1 = 6,676193 \cdot 10^3$; $C = 1/(2\pi f_0 K_1) = 10^{12} / (2\pi \cdot 10^5 \cdot 6,676193 \cdot 10^3) = 238,3917 \text{ пФ}$.

Выбрав из ряда номинальных значений $C' = 240 \text{ пФ}$ и уточнив $K_1 = 6,63146$, находим параметры (см. рис. 69, в): $L_1 = 830,55 \text{ мкГн}$; $L_2 = 342,88 \text{ мкГн}$; $L_3 = 2879,25 \text{ мкГн}$; $L_4 = 3412 \text{ мкГн}$; $L_5 = 196,8 \text{ мкГн}$; $C_1 = 3049,8 \text{ пФ}$; $C_2 = 7387,5 \text{ пФ}$; $C_3 = 742,4 \text{ пФ}$; $C_4 = 879,75 \text{ пФ}$; $C_5 = 12870,5 \text{ пФ}$. При определении постоянной преобразования второго инвертора следует учесть возможность согласования с нагрузкой. Например, при $R_H = 150 \text{ кОм}$ из условия $R_H = K_1^2 R_H / K_2^2$ находим $K_2 = \sqrt{(1,83 \cdot 10^6 / 150 \cdot 10^3) K_1} = 23,31893$. Определив $C'' = 68,25136 \approx 68 \text{ пФ}$ и уточнив $K_2 = 23,405$, определяем $L_6 = 248 \text{ мкГн}$ и $C_6 = C_6 K_2^2 / K_1^2 = 10,197 \text{ пФ}$.

Компенсируя отрицательные емкости инверторов уменьшением соответствующих емкостей фильтра и округляя результат до ближайших номинальных значений, получаем (рис. 69, г): $C_1 = 3049,8 - 240 = 2700 \text{ пФ}$; $C_2 = 7387,5 - 240 \approx 7200 \text{ пФ}$; $C_3 = 750 \text{ пФ}$; $C_4 = 810 \text{ пФ}$; $C_5 = 12870,5 - 68 \approx 12000 \text{ пФ}$; $C_6 = 10,197 - 68 \approx 10000 \text{ пФ}$ ($C' = 240 \text{ пФ}$; $C'' = 68 \text{ пФ}$). Для сохранения резонансных частот контуров примем $L_1 = 1/(4\pi^2 f_0^2 (C_1 + C')) = 861,6 \text{ мкГн}$; $L_2 = 1/(4\pi^2 f_0^2 (C_2 + C')) = 340,5 \text{ мкГн}$; $L_3 = 1/(4\pi^2 f_0^2 (C_3 + C'')) = 209,9 \text{ мкГн}$; $L_6 = 1/(4\pi^2 f_0^2 (C_6 + C'')) = 251,6 \text{ мкГн}$. По резонансным частотам $f_{03} = 108,8591 \text{ кГц}$ и $f_{04} = 91,86178 \text{ кГц}$ вычисляем $L_5 = 1/(4\pi^2 f_{03}^2 C_5) = 2850 \text{ мкГн}$ и $L_4 = 1/(4\pi^2 f_{04}^2 C_4) = 3705,8 \text{ мкГн}$.

Следует отметить, что разброс индуктивностей ($L_{\max}/L_{\min} = 17,7$) у синтезированного фильтра достаточно велик, хотя и меньше, чем у полиномиального. Поэтому в том случае, когда фильтр предназначен для серийного изготовления, целесообразно рассмотреть и другие возможные реализации, выбрав из них оптимальную.

Приведем еще один метод, позволяющий удовлетворить заданные в рассматриваемом примере требования при $n = 8$. Задавшись $v_3 = 2$; $A_3 = 30 \text{ дБ}$ и $A_{\Pi} = 0,5 \text{ дБ}$, с помощью программы 311/21 или 315/34, найдем, что такие характеристики обеспечивают фильтр Чебышева 2-го порядка. Определив по программе 313/21 или 315/34 вещественную часть $\operatorname{Re} p_1 = -0,1753532$ ближайшего к мнимой оси полюса, убеждаемся в реализуемости такого фильтра при добротности контуров $Q \geq 71,3$. Каскадное соединение двух таких фильтров обеспечит выполнение исходных требований.

При реализации этого варианта следует предусматривать включение развязывающей ступени (например, усилителя без обратной связи) между частями фильтра, так как практически невозможно реализовать пассивный фильтр с кратными полюсами. Однако, представив синтезируемую функцию $K(p)$ двумя множителями 3-го и 5-го порядков, можно реализовать фильтр без развязки между его частями. Так, если для множителя 5-го порядка принять $A_{\Pi} = 0,26 \text{ дБ}$, а для множителя 3-го порядка $A_{\Pi} = 0,74 \text{ дБ}$, то на частоте $v = 2$ такой фильтр имеет $A_3 = 60,1 \text{ дБ}$ при добротности контуров $Q \geq 93,5$.

При поиске оптимального разбиения передаточной функции фильтра на множители

приходится многократно вычислять вещественную часть полюса, ближайшего к минимуму оси и затухание на частоте ν_3 , для чего целесообразно использовать следующую программу.

Программа 340/21. Вычисление $|Re p_i|_{\min}$ и $A(\nu_3)$ для фильтра Чебышева

↑	F8	X ^y	1	-	P5	1/x	1	+	III	F7	P6
π	↑	F2	X	2	÷	e ^{jx}	F6	X	C/P	F3	x^2
1	-	III	F7	x^2	1	+	↑	F5	X	1	+
ln	↑	F7	X	C/P	BП	P0	$\sqrt{\quad}$	XY	$\sqrt{\quad}$	+	ln
↑	F2	1/x	P2	X	e ^x	↑	1/x	-	2	÷	B/O

Инструкция: ($n = P2$, $\nu_3 = P3$, $10^{0.1} = 1,258925 = P8$, $10/\ln 10 = 4,342944 = P7$)
 $A_{\text{пп}} = PX$ (B/O) C/P $PX = |Re p_i|_{\min}$ C/P $PY = A(\nu_3)$.

Программа 341/34. Вычисление $|Re p_i|_{\min}$ и $A(\nu_3)$ для фильтра Чебышева

↑	1	0	÷	BХ	X ^y	1	III	-	II
ИП1	III	38	x^2	1	+	X	1	+	lg
1	0	X	ИП2	1/x	$\sqrt{\quad}$	III	38	π	ИП0
÷	2	÷	sin	X	C/P	BП	00	↑	x^2
ИП3	/-	P3	+	$\sqrt{\quad}$	+	ln	ИП0	1/x	P0
÷	e ^x	↑	1/x	-	2	÷			B/O

Инструкция: установить переключатель Р-Г в положение Р; ($n = P0$, $\nu_3 = P1$) $A_{\text{пп}} = PX$ (B/O) C/P $PX = |Re p_i|_{\min}$; $PY = A(\nu_3)$.

Контрольный пример: при $n = 5$; $\nu_3 = 2$; $A_{\text{пп}} = 0,26$ получим $|Re p_i|_{\min} = 0,133703$; $A(\nu_3) = 39,077$ дБ.

Правильность результатов синтеза и влияние разброса параметров удобно оценивать, построив АЧХ по вычисленным значениям параметров.

Программа 342/21. Расчет АЧХ лестничных ФНЧ до 6-го порядка по параметрам элементов

P2	F8	P5	0	P6	F7	+	x^2	P3	6	P4	F5
III	P8	P3	F5	X	P5	F6	X	P6	F7	→	P7
↑	F2	X	↑	F6	-	P6	F4	1	-	$x = 0$	FXY
F7	→	P7	↑	F5	+	III	P8	$\sqrt{\quad}$	C/P	BП	P0
x^2	↑	F6	x^2	+	1/x	↑	F3	X	B/O		

Инструкция: ($L_1 = C1$, $C_2 = C2$, $L_3 = C3$, $C_4 = C4$, $L_5 = C5$, $C_6 = C6$, $R_c = P7$, $R_h = P8$ для фильтра с продольной начальной ветвью (рис. 70, а) или $C_1 = C1$, $L_2 = C_2$, $C_3 = C3$, $L_4 = C4$, $C_5 = C5$, $L_6 = C6$, $G_c = P7$, $G_h = P8$ для фильтра с поперечной начальной ветвью (рис. 70, б) (если порядок фильтра менее 6-ти, в соответствующие регистры памяти вводят нули); $\omega = PX$ (B/O) C/P $PX = |K(\omega)/K(0)|$, $P5 = \text{Re } Z_{bx}(\omega)$ или $\text{Re } Y_{bx}(\omega)$, $P6 = \text{Im } Z_{bx}(\omega)$ или $\text{Im } Y_{bx}(\omega)$. Время счета около 45 с.

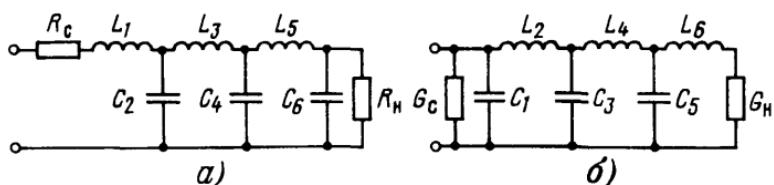


Рис. 70

Программа 343/34. Расчет АЧХ лестничных ФНЧ до 8-го порядка по параметрам элементов

ИП9	ПА	ИП0	+	x^2	ПС	C_x	ПВ	→	8
ПД	→	ИПА	x^2	ИПВ	x^2	+	1/x	↑	ИПС
X	ПС	→	↑	ИПА	X	ПА	→	ИПВ	X

$$\begin{array}{ccccccccc} XY & КИПД & X & XY & - & ПВ & \rightarrow & ИПД & 1 \\ x=0 & 10 & ИПС & ИПА & ИПО & + & x^2 & ИПВ & x^2 \\ \div & lg & 1 & 0 & X & С/П & БП & & + \end{array}$$

Инструкция: ($R_c = P_0, L_1 = P_1, C_2 = P_2, L_3 = P_3, C_4 = P_4, L_5 = P_5, C_6 = P_6, L_7 = P_7, C_8 = P_8, R_h = P_9$ или $G_c = P_0, C_1 = P_1, L_2 = P_2, C_3 = P_3, L_4 = P_4, C_5 = P_5, L_6 = P_6, C_7 = P_7, L_8 = P_8, G_h = P_9$) $\omega = PX$ (B/O) С/П $PX = (A(\omega) - A(0))$ дБ; $PA = \operatorname{Re} Z_{bx}(\omega)$ или $\operatorname{Re} Y_{bx}(\omega)$; $PB = \operatorname{Im} Z_{bx}(\omega)$ или $\operatorname{Im} Y_{bx}(\omega)$.

Контрольный пример: при $L_1 = 0,51; C_2 = 2,9; L_3 = 0,98; C_4 = 3,3; L_5 = 0,98; C_6 = 2,5; R_c = 0,5; R_h = 1 (L_7 = C_8 = 0)$ получим $|K(0,3)/K(0)| = 1,02608; Z_{bx}(0,3) = 0,298299 + j0,014357$.

6.5. Расчет активных RC-фильтров

Активные RC-фильтры строят в виде каскадного соединения связанных звеньев, каждое из которых соответствует множителю $(\alpha_{0i}p^2 + \beta_{0i}p + 1) / (\alpha_{pij}p^2 + \beta_{pij}p + 1)$ передаточной функции (3.14). Различные множители 1-го ($\alpha_{0i} = \alpha_{pij} = 0$) и 2-го порядков реализуют звеньями шести основных типов: 1) низкочастотное звено 1-го порядка (НЧ1) с передаточной функцией $K_{H1}(p) = K_0 / (ap + 1)$; 2) низкочастотное звено 2-го порядка (НЧ2) с $K_{H2} = K_0 / (ap^2 + bp + 1)$; 3) высокочастотное звено 1-го порядка (ВЧ1) с $K_{B1}(p) = pK_0 / (ap + 1)$; 4) высокочастотное звено 2-го порядка (ВЧ2) с $K_{B2}(p) = p^2K_0 / (ap^2 + bp + 1)$; 5) полосопропускающее звено (ПЗ) с $K_{P3}(p) = pK_0 / (ap^2 + bp + 1)$; 6) режекторное звено (РЗ) с $K_{R3}(p) = K_0(p^2 + \omega_0^2) / (ap^2 + bp + 1)$.

Звенья связывают, включая между ними буферные ступени или обеспечивая для каждого звена выполнение неравенства $Y_{\text{вых}} \gg Y_h$, при котором влияние входной проводимости следующего звена пренебрежимо мало. Активные компоненты в звеньях RC-фильтров не предназначены для усиления мощности и лишь обеспечивают необходимый для обратной связи невзаимный канал прямой передачи. Обычно активными компонентами RC-фильтров служат операционные усилители с глубокой отрицательной обратной связью, характеризующиеся высокой стабильностью коэффициента передачи напряжения μ холостого хода при достаточно малом выходном сопротивлении. При нестабильности μ и других параметров фильтра существенно изменяются его частотные характеристики, в связи с чем оценка стабильности характеристик по чувствительности к изменениям параметров имеет важное значение при проектировании RC-фильтров.

Активные RC-фильтры обычно проектируют по заданной передаточной функции в реальном масштабе частот. Поэтому после определения передаточной функции фильтра-прототипа преобразование и денормировку частоты удобно выполнять с помощью (3.14) для функции $K(s)$ прототипа, где s – нормированная комплексная частота. В этом случае преобразование каждого множителя $K(s)$ позволит получить искомую функцию $K(p)$ также в форме (3.14), удобной для последующего синтеза.

Переход от ФП к фильтру низших или высших частот соответствует элементарным преобразованиям $p = \omega_n s$ и $p = \omega_n / s$. Поэтому рассмотрим только преобразования, необходимые для расчета полосовых фильтров. Для такого фильтра связь между частотами в комплексной области описывается выражением $s = (p^2 + \omega_{p1}\omega_{p2}) / (p(\omega_{p2} - \omega_{p1})) = (p^2 + \omega_0^2) / (p\Delta\omega)$, которое преобразует множитель $(\beta's + 1)$ в множитель $(ap^2 + bp + 1) / pK_0$ с коэффициентами $\alpha = 1/\omega_0^2, \beta = K_0 = \Delta\omega / (\omega_0^2\beta')$. Множитель 2-й степени $(\alpha's^2 + \beta's + 1)$ с комплексно-сопряженными корнями соответствует преобразованному множителю $(a_4 p^4 + a_3 p^3 + a_2 p^2 + a_1 p + 1) / K_0 p^2$, где $a_4 = 1/\omega_0^4, a_3 = a' \Delta\omega / \omega_0^2, a_2 = (2\omega_0^2 + \beta' \Delta\omega^2) / \omega_0^4, a_1 = \alpha \Delta\omega / \omega_0^4, K_0 = (\Delta\omega)^2 / \omega_0^4$.

В процессе преобразования частоты многочлены 4-й степени целесообразно раскладывать на квадратичные множители согласно следующей методике. Трехчлен $(s^2 + a_1 s + a_0)$ преобразуют в отношение $(p^2 + \beta_1 p + \gamma_1) (p^2 + \beta_2 p + \gamma_2) / (\Delta\omega^2 p^2)$ с коэффициентами

$$\beta_{1,2} = (a_1 \pm \sqrt{2(4 - x - a_0) + a_1^2}) \Delta\omega / 2;$$

$$\gamma_{1,2} = (A + a_0 \pm a_1 (A - x + a_0) / \sqrt{2(A - x - a_0) + a_1^2}) (\Delta\omega)^2 / 4,$$

где $A = \sqrt{(x + a_0)^2 - a_1^2 x}$; $x = 4\omega_0^2 / (\Delta\omega)^2$.

Программа 344/34. Преобразование квадратичного трехчлена

F5	\uparrow	F2	/-	P2	x^2	X	\leftarrow	F3	+	\uparrow	X
XY	\rightarrow	-	$\sqrt{\quad}$	\uparrow	\leftarrow	-	2	X	\uparrow	F2	x^2
+	$\sqrt{\quad}$	P8	\uparrow	F2	+	\uparrow	F4	/-	P4	X	C/P
\rightarrow	\uparrow	F3	+	\uparrow	F5	-	XY	\leftarrow	F8	\div	\uparrow
F2	X	\uparrow	\rightarrow	\uparrow	F4	x^2	X	C/P	B/P		P0

Инструкция: ($a_1 = P2$, $a_0 = P3$, $\Delta\omega/2 = P4$, $(2\omega_0/\Delta\omega)^2 = P5$, $\omega_0^2 = P6$) B/O C/P
 $PX = \beta_1$ C/P $PX = \gamma_1$ C/P $PX = \beta_2$ C/P $PX = \gamma_2$.

Контрольный пример: для $s^2 + 4s + 13$ при ширине полосы пропускания $\Delta\omega = 2$ и средней частоте $\nu_0 = 10$ получим коэффициенты отношения $(p^2 + 2,830829p + 54,76302) (p^2 + 5,16917p + 182,6039) / 4p^2$.

Преобразование стандартного трехчлена $(\alpha' s^2 + \beta' s + 1)$ в функцию $(\alpha_1 p^2 + \beta_1 p + 1) (\alpha_2 p^2 + \beta_2 p + 1) / K_0 p^2$ выполняют по формулам

$$\alpha_{1,2} = (B + 1 \pm \beta' (B - \alpha' x + 1)) / \sqrt{2\alpha' (B - \alpha' x - 1) + \beta'^2} / (\alpha' x \omega_0^2);$$

$$\beta_{1,2} = (\beta' \pm \sqrt{2\alpha' (B - \alpha' x - 1) + \beta'^2}) 2 / (\alpha' x \Delta\omega); \quad K_0 = (\Delta\omega)^2 / (\alpha' \omega_0^4),$$

где $B = \sqrt{(\alpha' x + 1)^2 - \beta'^2 x}$; $x = (2\omega_0 / \Delta\omega)^2$.

Программа 345/34. Преобразование стандартного трехчлена

ИП2	ИП3	\div	2	X	x^2	P4	ИП0	X	ИП5
1	+	x^2	ИП4	ИП1	x^2	X	-	$\sqrt{\quad}$	1
+	Π_6	ИП5	-	2	-	ИП0	X	2	X
ИП1	x^2	+	$\sqrt{\quad}$	ИП7	ИП6	ИП5	-	ИП1	X
ИП7	\div	ИП8	ИП6	+	ИП5	π	ИП2	X	x^2
4	X	X	ИП6	\div	С/П	ИП1	ИП7	+	ИП5
π	X	ИП3	X	ПА	\div	С/П	ИП6	ИП8	-
ИП9	\div	С/П	ИП1	ИП7	-	ИПА	\div	С/П	4
ИП9	\div	С/П	B/P						

Инструкция: ($\alpha' = P0$, $\beta' = P1$, $f_0 = P2$, $\Delta f = P3$) B/O C/P $PX = \alpha_1$ C/P $PX = \beta_1$ C/P $PX = \alpha_2$ C/P $PX = \beta_2$ C/P $PX = K_0$.

Контрольный пример: для $s^2/13 + 4s/13 + 1$ при $f_0 = 5/\pi$ и $\Delta f = 1/\pi$ получим коэффициенты преобразованного множителя $(0,01826039p^2 + 0,05169171p + 1)(0,005476303p^2 + 0,02830829p + 1) / (5,2 \cdot 10^{-3} p^2)$.

После несложных изменений эти же программы пригодны и для преобразования множителя режекторного звена.

Представив заданную функцию $K(p)$ множителями звеньев, приступают к синтезу каждого звена. При расчете звена по нескольким заданным параметрам и заданной функции звена определяют остальные параметры, проверяя допустимость принятых упрощений сравнением с экспериментальными данными, и оценивают коэффициенты чувствительности к изменениям параметров.

Известно много схемных реализаций активных RC -фильтров. Поэтому ограничимся методикой расчета наиболее распространенных звеньев каждого типа на операционных усилителях.

1. Звено НЧ1 обычно строят по схеме, показанной на рис. 71, а, с использованием не инвертирующего напряжение операционного усилителя. Его параметры можно рассчитать в обычном режиме по коэффициентам передаточной функции $K_{H1}(p)$ согласно соотношениям $K_0 = \mu$, $\beta = RC$ в пренебрежении влиянием входной проводимости $y_{bx} = g_{bx} + j\omega C_{bx} = 1/R_{bx} + j\omega C_{bx}$ операционного усилителя. При больших значениях β для выполнения условий $R \ll R_{bx}$ может потребоваться большая емкость C . В этом случае либо принимают $K_0 = \mu R_{bx} / (R + R_{bx})$ и $\beta = RR_{bx}C / (R + R_{bx})$, либо используют схему

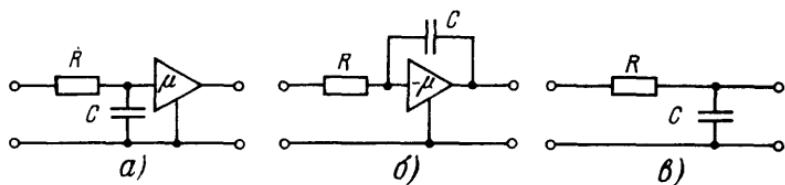


Рис. 71

му, показанную на рис. 71, б, для которой $K_0 = \mu$, $\beta = RC(1 + \mu)$ при $R \ll R_{\text{вых}}$ или $K_0 = R_{\text{вых}}/(R + R_{\text{вых}})$, $\beta = RR_{\text{вых}}C(1 + \mu)/(R + R_{\text{вых}})$ с учетом входного сопротивления активного компонента. Если необходимо учесть выходное сопротивление источника сигнала для звена, то вместо R принимают $R + R_{\text{вых}}$, выполнив соотношения $R_{\text{вых}} \ll R$, $R_{\text{вых}} \gg C$ для уменьшения влияния нестабильности параметров активных компонентов. При $K_0 = 1$ передаточная функция рассматриваемого звена реализуема простейшей пассивной цепью (рис. 71, в) с $\beta = RC$.

2. Звено НЧ2 чаще всего собирают по схеме, показанной на рис. 72, параметры которой связаны с функцией $K_{\text{НЧ2}}(p)$ звена соотношениями: $K_0 = \mu R_0 / (R_0 + R_1 + R_2)$, $\alpha = K_0 R_1 R_2 C_1 C_2 (1 + R_{\text{вых}}/R_1 + R_{\text{вых}}/R_2)/\mu$, $\beta = K_0 (C_1 (R_1 + R_2) - C_2 R_2 (\mu - 1 - R_1/R_0))/\mu + C_2 R_{\text{вых}}$. Если можно пренебречь $R_{\text{вых}}$, то $\alpha = K_0 R_1 X \times R_2 C_1 C_2 / \mu$, $\beta = K_0 (C_1 (R_1 + R_2) - C_2 R_2 (\mu - 1 - R_1/R_0))$.

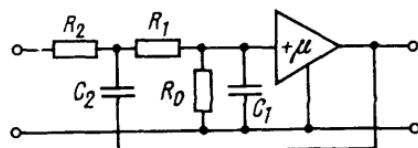


Рис. 72

Программа 346/21. Анализ звена НЧ2 активного RC-фильтра

F2	\uparrow	F3	$+$	\uparrow	\leftarrow	F4	XY	$+$	\div	P8	\uparrow
F7	X	C/P	F2	X	\uparrow	F3	X	\uparrow		F6	X
F5	XY	X	C/P	\rightarrow	X	\leftarrow	F2	\uparrow		F4	\div
$+$	\uparrow	F7	-	\uparrow	F3	X	\uparrow		F6	\times	
$+$	\uparrow	F8	X	C/P	BП	P0				\uparrow	\rightarrow

Инструкция: ($R_1 = P2$, $R_2 = P3$, $R_0 = P4$, $C_1 = P5$, $C_2 = P6$, $\mu = P7$) (B/O) C/P $PX = K_0$ C/P $PX = \alpha$ C/P $PX = \beta$.

Контрольный пример: при $R_1 = 2$ кОм, $R_2 = 5,1$ кОм, $R_0 = 10$ кОм, $C_1 = 1$ нФ, $C_2 = 5$ нФ, $\mu = 0,95$ получим $K_0 = 0,5555555$; $\alpha = 29,82456 (10^{-12}/\text{с}^2)$; $\beta = 7,880116 (10^{-6}/\text{с})$.

Программа 347/34. Анализ звена НЧ2 с учетом $R_{\text{вых}}$

ИП0	\uparrow	ИП1	ИП2	$+$	ИП7	$+$	\div	ИП8	ИП6
X	C/P	ИП3	ИП1	$1/x$	ИП2	$1/x$	$+$	X	1
+	ИП1	X	ИП2	X	ИП4	X	ИП5	X	ИП8
X	ПА	C/P	ИП7	ИП4	X	ИП1	ИП0	\div	1
+	ИП6	-	ИП2	X	ИП5	X	+	ИП8	X
ИП2	ИП3	X	$+$	ПВ	C/P	BП			

Инструкция: $R_0 = P0$, $R_1 = P1$, $R_2 = P2$, $R_{\text{вых}} = P3$, $C_1 = P4$, $C_2 = P5$, $\mu = P6$ (B/O) C/P $PX = K_0$ C/P $PX = \alpha$ C/P $PX = \beta$.

С помощью этих и других программ анализа несложно определить чувствительность результата Р анализа к изменениям исходного параметра w . Для этого согласно формуле (3.29) достаточно повторить выполнение программы при $w' = 1,001w$, вычислив в обычном режиме чувствительность $S_P(w) = (P' - P)1000/P$. Например, повторив выполнение программы 346/21 при $R_1 = 1,001 \cdot 2 = 2,002$, получим $\alpha = 29,83947$, откуда $S_\alpha(R_1) = 29,85089 - 29,82456)1000/29,82456 = 0,882788$.

Программа 348/34. Анализ звена НЧ2 с вычислением чувствительностей

ПД	ИП	42	ПА	ИП8	ПВ	ИП9	ПС	КИПД	1
,	0	0	1	Х	КПД	ИП	42	ИПА	ИП
33	П7	ИП8	ИПВ	ИП	33	П8	ИП9	ИПС	ИП
33	П9	С/П	—	ВХ	÷	1	0	0	0
Х	В/О	ИП0	↑	ИП1	ИП2	+	П8	+	÷
П7	ИП6	Х	П9	ИП1	ИП0	÷	1	+	ИП6
—	ИП2	Х	ИП5	Х	ИП8	ИП4	Х	+	ИП7
Х	ИП3	ИП5	Х	+	П8	ИП1	1/Х	ИП2	1/Х
+	ИП3	Х	1	+	ИП1	Х	ИП2	Х	ИП4
Х	ИП5	Х	ИП7	Х	П7	В/О			

Инструкция: ($R_0 = P0, R_1 = P1, R_2 = P2, R_{\text{вых}} = P3, C_1 = P4, C_2 = P5, \mu = P6$), номер регистра, в котором хранится параметр, относительно которого определяют чувствительности, $n = PX$ В/О С/П $PX = P9 = SK_0(w_n)$, $PA = \alpha$, $PB = \beta$, $PC = K_0$, $P7 = S_\alpha(w_n)$, $P8 = S_\beta(w_n)$.

Для решения задачи синтеза звена НЧ2 необходимо по заданным значениям K_0 , α и β определить параметры схемы. Так как заданы три величины, то для расчета шести параметров звена тремя из них следует задаться. Если заданы μ , R_0 и отношение $m = R_2/R_1$, то остальные параметры определяются по формулам: $R_1 = (A - 1/(1+m))R_0$; $R_2 = mR_1$; $C_1 = \tau_1/R_1$; $C_2 = \tau_2/R_2$, где $A = \mu/(K_0(1+m))$; $\tau_1 = R_1C_1 = A(0,5\beta \pm \sqrt{(\beta/2)^2 + \alpha(\mu - 1 - R_1/R_0)/A})$; $\tau_2 = R_2C_2 = \alpha\mu/(K_0\tau_1)$.

Программа 349/21. Синтез звена НЧ2

F7	1	+	1/Х	↑	←	F6	Х	P8	↑	→	—
1	+	→	F4	Х	С/П	↑	→	F7	Х	С/П	←
←	↑	F5	XY	÷	↑	F3	Х	↑	F8	÷	↑
F2	x^2	+	$\sqrt{\quad}$	↑	F2	+	↑	F8	Х	↑	→
÷	С/П	F3	XY	÷	↑	F6	Х	↑	→	÷	С/П

Инструкция: ($\beta/2 = P2, \alpha = P3, R_0 = P4, \mu = P5, \mu/K_0 = P6, m = P7$) В/О С/П $PX = R_1$ С/П $PX = R_2$ С/П $PX = C_1$ С/П $PX = C_2$.

При выполнении неравенства $-A\beta^2/4\alpha < (\mu - 1 - R_1/R_0) < 0$ результаты программы соответствуют одному из решений, и для получения второго достаточно изменить знак β , введя $-\beta/2 = P2$ и повторив выполнение программы – в этом случае C_1 и C_2 получаются с обратным знаком. Вывод отрицательных параметров или переполнение свидетельствует о нереализуемости звена (как и в последующих программах синтеза) при исходных условиях.

Контрольный пример: при $\beta = 7,880116$; $\alpha = 29,82456$; $R_0 = 10$; $\mu = 0,95$; $K_0 = 0,5555555$; $m = 2,55$ получим $R_1 = 2$; $R_2 = 5,1$; $C_1 = 0,9999986$; $C_2 = 5,000005$ и после изменения знака (F2 $/-$ P2) $R_1 = 2$; $R_2 = 5,1$; $C_1 = 0,8978883$; $C_2 = 5,56862$.

Влияние выходного сопротивления можно оценить по формулам $\delta\alpha = \Delta\alpha/\alpha = R_{\text{вых}} \times (R_1 + R_2)/R_1 R_2$; $\delta\beta = \Delta\beta/\beta = R_{\text{вых}} C_2/\beta$ или при использовании следующей программы.

Программа 350/34. Синтез звена НЧ2 с учетом $R_{\text{вых}}$

ИП3	ИП4	÷	ИП5	1	+	ПД	÷	П7	ИПД
1/Х	—	ИП0	Х	П8	С/П	ИП5	Х	П9	С/П
ИП3	ИП6	ИП0	÷	—	ИП8	ИП0	÷	1	+
ИП6	ИП9	÷	1	+	Х	—	ИП1	ИП6	ИПД
Х	ИП9	÷	1	+	÷	ПД	Х	ИП7	÷
ИП2	2	÷	ПА	x^2	+	$\sqrt{\quad}$	ПВ	ИПА	+
ИП7	Х	ПС	ИП8	÷	С/П	ИПД	ИП3	Х	ИПС
÷	ИП4	÷	ИП9	÷	С/П	ИПВ	/-	БП	57

Инструкция: $R_0 = P0, \alpha = P1, \beta = P2, \mu = P3, K_0 = P4, m = P5, R_{\text{вых}} = P6$ В/О С/П

$PX = R_1$, $C/\Pi PX = R_2$, $C/\Pi PX = C_1$, $C/\Pi PX = C_2$ (первый вариант) $C/\Pi PX = C_1$, $C/\Pi PX = C_2$ (второй вариант).

Если, кроме μ , R_0 , α и β , удобнее задавать C_1 и C_2 , то расчет звена сводится к решению уравнения $x^2(1 - \mu + mA) - x(\beta/\tau_0 - \alpha\mu/\tau_0^2 + B(\mu - 2)) + \alpha/\tau_0^2 + B(B - \beta/\tau_0) = 0$, где $m = C_1/C_2$, $A = 1 - \beta/\tau_0 + \alpha/\tau_0^2$, $\tau_0 = R_0 C_1$, $B = R_{\text{вых}} C_2 / \tau_0$. После решения этого уравнения $R_2 = xR_0 C_1 / C_2$, $R_1 = (\alpha(R_0 + R_2) - R_{\text{вых}} R_0 R_2 C_1 C_2) / ((R_0 C_1 C_2) \times (R_2 + R_{\text{вых}} - \alpha))$, $K_0 = \mu R_0 / (R_0 + R_1 + R_2)$.

Если допустимо пренебречь влиянием $R_{\text{вых}}$, то расчетные соотношения упрощаются и реализуемы следующими двумя программами.

Программа 351/21. Вычисление R_2 звена НЧ2

F7	↑	F6	X	←	F5	X	1/x	↑	←	F4	X
↑	F2	-	2	÷	P8	→	↑	F2	-	↑	→
÷	→	F5	↑	F6	÷	↑	F4	-	1	+	↑
F3	÷	↑	←	+	↑	F8	x^2	XY	-	$\sqrt{\quad}$	↑
/-	→	F8	-	↑	F6	X	1/x	C/\Pi	←	БП	C _X

*Инструкция: ($\beta/\alpha = P2$, $\alpha = P3$, $\mu = P4$, $C_1 = P5$, $C_2 = P6$, $R_0 = P7$) В/О $C/\Pi PX = R_2$ (первый вариант) $C/\Pi PX = R_2$ (второй вариант).

Контрольный пример: при $\alpha = 10$; $\beta = 2$; $C_1 = 1,5$; $C_2 = 2$; $R_0 = 50$; $\mu = 1,75$ получим $R'_2 = 2,678571$ и $R''_2 = -50$, следовательно, второй вариант нереализуем; при тех же исходных данных и $\mu = 1,7$ получим $R'_2 = 3,176007$ и $R''_2 = 25,12186$ (реализуемы оба варианта), а при $\mu = 1,6$ произойдет переполнение, т. е. звено нереализуемо.

Для вычисления R_1 и оценки погрешности пренебрежения $R_{\text{вых}}$ после выполнения программы 351/21 и сохранения содержимого памяти следует ввести следующую программу и исходные данные $R_{\text{вых}} = P8$ и $R_2 = PX$.

Программа 352/21. Вычисление R_1 , K_0 , $\delta\alpha$ и $\delta\beta$ звена НЧ2

↑	1/x	→	F7	+	→	F7	X	↑	F5	X	↑
F6	X	↑	F3	÷	1	-	↑	←	XY	÷	C/\Pi
XY	+	XY	→	F7	XY	÷	↑	F4	X	C/\Pi	←
1/x	↑	←	+	↑	F8	XY	X	C/\Pi	F6	X	↑
F2	÷	↑	F3	÷	C/\Pi	БП	P0				

После первого пуска программы (В/О C/Π) высвечивается R_1 , после следующих пусков нажатием клавиши C/Π последовательно высвечиваются K_0 , $\delta\alpha$ и $\delta\beta$.

Контрольный пример: после выполнения программы 351/21 при $\mu = 1,7$; $R_{\text{вых}} = 0,05$; $R'_2 = 3,176007$ и сохранившимся в памяти исходным данным предыдущего контрольного примера получим $R_1 = 1,140134$; $K_0 = 1,564912$; $\delta\alpha = 0,0595976$; $\delta\beta = 0,05$; введя второе значение $R''_2 = 25,12186$, получаем $R_1 = 0,1998836$; $K_0 = 1,128492$; $\delta\alpha = 0,2521357$; $\delta\beta = 0,05$.

Программа 353/34. Синтез звена НЧ2 по заданным C_1 и C_2

ИП6	ИП2	X	ИП1	ИП0	X	П7	÷	П8	↑
ИП4	ИП7	÷	П9	-	X	ИП3	ИП7	x^2	÷
ПА	+	ВХ	ИП9	-	1	+	ИП1	ИП2	÷
X	ИП5	-	1	+	ПД	÷	ПС	ИП8	ИП5
2	-	X	ИП9	+	ИПА	ИП5	X	-	ИПД
÷	2	÷	ПД	x^2	ИПС	-	$\sqrt{\quad}$	ПС	ИПД
+	ИП7	X	ПА	ИП2	÷	П9	ИП0	+	ИПЗ
X	ИПА	ИП7	X	ИП6	X	-	ИП9	ИП6	+
ИП7	X	ИП2	X	ИП3	-	÷	C/\Pi	ИП9	C/\Pi
ИПС	/-	БП	58						

*Инструкция: ($R_0 = P0$, $C_1 = P1$, $C_2 = P2$, $\alpha = P3$, $\beta = P4$, $\mu = P5$, $R_{\text{вых}} = P6$) В/О $C/\Pi PX = R'_1$ $C/\Pi PX = R''_1$ $C/\Pi PX = R'_2$ $C/\Pi PX = R''_2$.

Контрольный пример: при $R_0 = 10$; $C_1 = 1$; $C_2 = 4$; $\alpha = 52$; $\beta = 1$; $\mu = 3,8$; $R_{\text{вых}} = 1$ получим $R'_1 = 8$; $R'_2 = 1,999999$; $R''_1 = -11,40845$; $R''_2 = -0,8179959$ (реализуем лишь первый вариант).

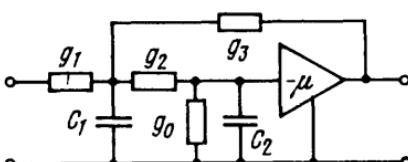


Рис. 73

$\times (g_1 + g_2 + \mu g_3) + g_0 (g_1 + g_2 + g_3))$; $\beta = \alpha(g_1 + g_2 + g_3)/C_1 + (g_2 + g_4)/C_2$; $K_0 = -\alpha \mu g_1 g_2 / C_1 C_2$. Если задаться значениями проводимостей резисторов звена, то для вычисления C_1 и C_2 можно воспользоваться одной из следующих программ.

Программа 354/21. Вычисление C_1 и C_2 звена НЧ2 с инвертирующим активным компонентом

F6	↑	F5	×	↑	F3	+	↑	F4	XY	×	←
F3	+	↑	F5	+	↑	F2	×	XY	→	+	↑
←	X	←	F8	X	←	F2	↑	F4	+	1/x	↑
→	X	→	X	↑	F7	X	←	2	÷	↑	x^2
XY	→	-	√	↑	←	XY	+	C/P	-	+	C/P

Инструкция: $g_0 = P2$, $g_1 = P3$, $g_2 = P4$, $g_3 = P5$, $\mu + 1 = P6$, $\alpha = P7$, $\beta = P8$ В/О С/П $PX = C'_1$ В/О С/П $PX = C''_1$. Значения $C_2 = -\alpha \mu g_1 g_2 / C_1 K_0$ вычисляют в обычном режиме.

Программа 355/34. Вычисление емкостей звена НЧ2 с инвертирующим напряжение активным компонентом

ИП4	1	+	ИП3	÷	ИП1	1/x	+	ИП2	÷	
ИП1	1/x	ИП2	1/x	ИП3	1/x	+	+	ИП0	ИП0	
÷	+	P8	ИП1	/-	ИП2	×	×	ИП4	XY	
÷	C/P	ИП8	ИП0	1/x	ИП2	1/x	+	÷	П9	
ИП7	X	ИП5	X	ПА	ИП9	ИП6	X	2	÷	
ПВ	x^2	ИПА	-	√	ПА	ИПВ	+	C/P	ИП8	
XY	÷	ИП5	X	C/P	ИПА	/-	BП	55		

Инструкция: ($R_0 = P0$, $R_1 = P1$, $R_2 = P2$, $R_3 = P3$, $\mu = P4$, $\alpha = P5$, $\beta = P6$) В/О С/П $PX = K_0$ С/П $PX = C'_1$ С/П $PX = C''_1$ С/П $PX = C'_2$ С/П $PX = C''_2$.

Контрольный пример: при $g_0 = 5$; $g_1 = 1$; $g_2 = 2$; $g_3 = 3$; $\mu + 1 = 100$; $\alpha = 0,1$; $\beta = 0,2$ получим $C'_1 = 14,25768$; $C'_2 = 4,432696$; $C''_1 = 3,799454$; $C''_2 = 16,63396$; $K_0 = -0,31329113$.

3. Высокочастотное звено ВЧ1 обычно строят на активном неинвертирующем компоненте (рис. 74, а), а при $K_0 = 1$ на пассивной RC -цепочке (рис. 74, б). Для этого звена $\beta = RC$, $K_0 = \mu$.

4. Высокочастотное звено ВЧ2 чаще всего реализуют с помощью неинвертирующего операционного усилителя (рис. 75) по соотношениям

$$\alpha = R_1 R_2 C_1 C_2; \quad \beta = R_1 (C_1 + C_2) - R_1 C_1 (\mu - 1); \quad K_0 = \mu \alpha.$$

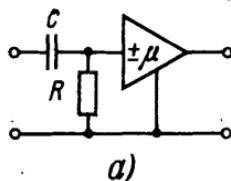
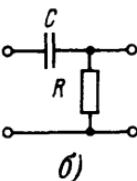


Рис. 74



б)

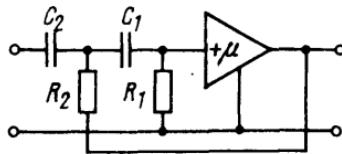


Рис. 75

При необходимости влияние активных компонентов учитывают изменениями сопротивлений $R'_1 = R_{\text{вх}}R_1/(R_{\text{вх}} - R_1)$ и $R'_2 = R_2 - R_{\text{вых}}$. При значительном сопротивлении R_c источника сигнала $\alpha = R_1R_2C_1C_2(1 + R_c(1/R_1 + (1 - \mu)R_2))$; $\beta = R_2(C_1 + C_2) + R_1C_1(1 - \mu) + R_cC_2$. При заданных коэффициентах функции $K_{B_2}(p)$ и параметрах μ , C_1 и C_2 сопротивления звена рассчитывают по следующим программам.

Программа 356/21. Расчет R_1 и R_2 звена ВЧ2

F5	\uparrow	F4	$+$	XY	\div	\leftarrow	F6	1	$-$	P7	\uparrow
\rightarrow	X	\uparrow	F2	X	4	X	\uparrow	F3	x^2	$+$	$\sqrt{\quad}$
\uparrow	/-	\rightarrow	F3	$+$	\uparrow	F4	\div	\uparrow	F7	/-	\div
2	\div	C/P	\uparrow	F2	XY	\div	\uparrow	F4	\div	\uparrow	F5
\div	C/P	BП		P4							

Инструкция: $\alpha = P2$, $\beta = P3$, $C_1 = P4$, $C_2 = P5$, $\mu = P6$ B/O C/P PX = R'_1 C/P PX = R'_2 C/P PX = R''_1 C/P PX = R''_2 .

Программа 357/34. Расчет R_1 и R_2 звена ВЧ2

ИП1	ИП2	$+$	ИП0	1	$-$	X	4	X	ИП3
X	ИП2	\div	ИП4	x^2	$+$	$\sqrt{\quad}$	ИП6	ИП4	$+$
2	\div	ИП1	\div	1	ИП0	$-$	\div	C/P	ИП3
XY	\div	ИП1	\div	ИП2	\div	C/P	ИП6	/-	БП

17

Инструкция: $\mu = P0$, $C_1 = P1$, $C_2 = P2$, $\alpha = P3$, $\beta = P4$ B/O C/P PX = R'_1 C/P PX = R'_2 C/P PX = R''_1 C/P PX = R''_2 .

Контрольный пример: при $\mu = 0,8$; $\alpha = 0,01$; $\beta = 0,5$; $C_1 = 0,03$; $C_2 = 0,07$ получим $R'_1 = 82,36981$; $R'_2 = 0,05781128$; $R''_1 = 0,9635216$; $R''_2 = 4,942187$.

Программа 358/21. Вычисление α и β звена ВЧ2

F7	1	XY	$-$	P8	\uparrow	F3	\div	\uparrow	F2	$1/x$	$+$
\uparrow	F4	X	1	$+$	\uparrow	F2	X	\uparrow	F3	X	\uparrow
F5	X	\uparrow	F6	X	C/P	F6	\uparrow	F4	X	\leftarrow	F5
$+$	\uparrow	F3	X	\uparrow	\rightarrow	$+$	\rightarrow	F8	\uparrow	F2	X
\uparrow	F5	X	\uparrow	\leftarrow	$+$	C/P	BП	P0			

Инструкция: $R_1 = P2$, $R_2 = P3$, $R_c = P4$, $C_1 = C5$, $C_2 = P6$, $\mu = P7$ B/O C/P PX = α C/P PX = β .

Программа 359/34. Вычисление α и β звена ВЧ2

ИП1	$1/x$	1	ИП0	$-$	ИП2	\div	$+$	ИП3	X
1	$+$	ИП1	X	ИП2	X	ИП4	X	ИП5	X
C/P	ИП4	ИП5	$+$	ИП2	X	1	ИП0	$-$	ИП4
X	ИП1	X	$+$	ИП3	ИП5	X	$+$	C/P	BП

Инструкция: $\mu = P0$, $R_1 = P1$, $R_2 = P2$, $R_c = P3$, $C_1 = P4$, $C_2 = P5$ B/O C/P PX = α C/P PX = β .

Контрольный пример: при $C_1 = 0,03$; $C_2 = 0,07$; $\mu = 0,8$; $R_1 = 82,36981$; $R_2 = 0,05781128$; $R_c = 0,1$ получим $\alpha = 0,01347167$; $\beta = 0,5069999$, а при $R_1 = 0,9635216$ и $R_2 = 4,942187$ получим $\alpha = 0,01107832$; $\beta = 0,5069998$. Сравнение с исходными данными для синтеза звена свидетельствует о том, что при выборе второго варианта звена влияние R_c оказывается меньшим.

5. Полосовое звено (ПЗ) со схемой, показанной на рис. 76, характеризуется соотношениями: $\alpha = R_0R_1R_2C_1C_2/(R_1 + R_2)$, $\beta = R_0(C_1 + C_2R_2(1 +$

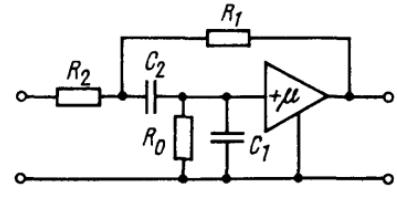


Рис. 76

$+ R_1/R_0 + R_1/(R_2 - \mu)) / (R_1 + R_2)$, $K_0 = R_0 R_1 C_1 \mu \beta / (R_1 + R_2)$. Для расчета по заданным значениям α , β , μ , R_0 , C_1 и C_2 используют формулы $R_1 = \mu R_0 (R_0 C_1 + R_0 C_2 - \beta) / \alpha - 1$, $R_2 = \alpha R_1 / (R_0 R_1 C_1 C_2 - \alpha)$, $K_0 / \beta = R_0 R_1 C_2 \mu / (R_1 + R_2)$, реализуемые следующими программами.

Программа 360/21. Синтез ПЗ

F4	↑	F5	+	↑	F6	×	↑	F3	-	↑	F4
X	↑	F6	×	↑	F2	÷	1	+	↑	F6	XY
÷	↑	F7	×	P8	C/P	F5	↑	F6	×	↑	←
F4	×	↑	F2	÷	↑	F8	1/x	-	1/x	C/P	↑
F8	XY	+	÷	↑	F7	×	↑	→	×	C/P	

Инструкция: $\alpha = P2$, $\beta = P3$, $C_1 = P4$, $C_2 = P5$, $R_0 = P6$, $\mu = P7$ B/O C/P PX = R_1 C/P PX = R_2 C/P PX = K_0 / β (коэффициент передачи звена на частоте резонанса).

Программа 361/34. Синтез ПЗ

ИП5	ИП0	×	ИП1	ИП2	+	ИП0	×	ИП4	-		
ИП0	×	ИП1	ИП3	÷	Х	1	+	÷	ИП6		
C/P	ИП6	↑	ИП1	Х	ИП2	Х	ИП0	Х	ИП3		
-	÷	ИП3	Х	C/P	ИП6	+	1/x	ИП6	Х		
ИП0	Х	ИП2	Х	ИП5	Х	C/P	БП				

Инструкция: ($R_0 = P0$, $C_1 = P1$, $C_2 = P2$, $\alpha = P3$, $\beta = P4$, $\mu = P5$) B/O C/P PX = R_1 C/P PX = R_2 C/P PX = K_0 / β .

Контрольный пример: при $\alpha = 0,8$; $\beta = 0,2$; $C_1 = 0,5$; $C_2 = 0,25$; $R_0 = 3$; $\mu = 1,2$ получим $R_1 = 0,7432257$; $R_2 = -1,140594$ (звено нереализуемо); при выборе $\mu = 5$ получим $R_1 = 3,096774$; $R_2 = 6,857143$; $K_0 / \beta = 1,1666666$.

Программа 362/21. Анализ ПЗ

F2	↑	F3	+	P8	1/x	Х	↑	F6	×	↑	F5
X	↑	F7	Х	←	F4	Х	↑	F3	Х	C/P	F6
1/x	↑	F3	1/x	+	↑	F2	Х	1	+	↑	F7
-	↑	F3	Х	↑	F5	Х	↑	F8	÷	↑	F4
+	↑	F6	Х	C/P	→	↑	F7	Х	C/P	БП	P0

Инструкция: ($R_1 = P2$, $R_2 = P3$, $C_1 = P4$, $C_2 = P5$, $R_0 = P6$, $\mu = P7$) B/O C/P PX = α C/P PX = β C/P PX = K_0 .

Программа 363/34. Анализ ПЗ

ИП3	↑	ИП4	+	÷	ИП0	Х	ИП2	Х	ИП6		
ИП1	Х	ИП4	Х	C/P	ИП3	ИП0	÷	ИП3	ИП4		
÷	+	1	+	ИП5	-	ИП4	↑	ИП3	+		
÷	Х	ИП2	Х	ИП1	+	ИП0	Х	C/P	ИП6		
ИП5	Х	XY	÷	C/P	БП						

Инструкция: ($R_0 = P0$, $C_1 = P1$, $C_2 = P2$, $R_1 = P3$, $R_2 = P4$, $\mu = P5$) B/O C/P PX = α C/P PX = β C/P PX = K_0 .

На низких частотах (до сотен герц) часто используют звено ПФ с инвертирующим активным компонентом (рис. 77, а), рассчитываемое по формулам $\alpha = R_1 R_2 C_1 C_2 (1 + \mu)$; $\beta = R_1 C_1 + R_1 C_2 + R_2 C_2$; $K_0 = -\mu R_2 C_2$ или при заданных значениях α , β , μ , C_1 и C_2 по формулам $R_1 = (\beta C_1 + (\beta^2 C_1^2 - 4\alpha C_1 (C_1 + C_2) / (1 + \mu))^{1/2}) / (2(C_1 + C_2) C_1)$; $R_2 = (\beta - R_1 (C_1 + C_2)) / C_2$.

Низкой чувствительностью к изменениям параметров отличаются характеристики ПЗ, схема которого показана на рис. 77, б [15]. Для составления программ вычислений можно использовать формулы анализа $\alpha = (1 - \mu_1 \mu_2) R_1 C_1 R_2 C_2$; $\beta = R_1 C_1 + R_2 C_2$; $K_0 = \mu_1 \mu_2$ и формулы синтеза (при заданных α , β , $\mu_1 \mu_2$, C_1 и C_2) $\tau_1 = R_1 C_1 = (\beta \pm \sqrt{(\beta^2 - 4\alpha) / (1 - \mu_1 \mu_2)})^{1/2} / 2$; $\tau_2 = R_2 C_2 = \beta - \tau_1$.

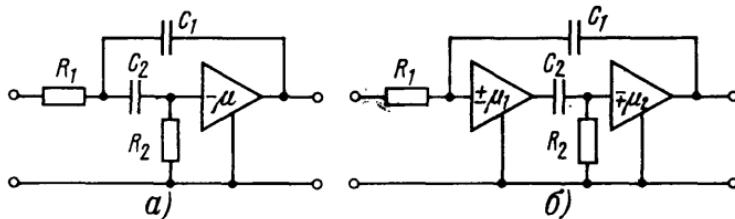


Рис. 77

6. Режекторные звенья (РЗ) обычно собирают на основе двойного Т-моста, схема которого приведена на рис. 78, с передаточной функцией

$$K(p) = \frac{(1 + pR_2(C_1 + C_3) + p^2C_1C_3R_2(R_1 + R_3) + p^3C_1C_2C_3R_1R_2R_3)/(1 + p(R_1C_2 + R_2(C_1 + C_3) + C_3(R_1 + R_3)) + p^2(C_1C_3R_2(R_1 + R_3) + R_1C_2(R_3C_3 + R_2(C_1 + C_3))) + p^3R_1R_2R_3C_1C_2C_3) + Y_H((R_1 + R_3) + p(R_1R_3C_2 + R_2(R_1 + R_3)(C_1 + C_3) + p^2R_1R_2R_3C_2(C_1 + C_3)))}{(1 + p(R_1C_2 + R_2(C_1 + C_3) + C_3(R_1 + R_3)) + p^2(C_1C_3R_2(R_1 + R_3) + R_1C_2(R_3C_3 + R_2(C_1 + C_3))) + p^3R_1R_2R_3C_1C_2C_3) + Y_H((R_1 + R_3) + p(R_1R_3C_2 + R_2(R_1 + R_3)(C_1 + C_3) + p^2R_1R_2R_3C_2(C_1 + C_3)))}.$$

Эта функция обращается в нуль на частоте ω_0 , если одновременно выполняются условия $\omega_0^2C_1C_3R_2(R_1 + R_3) = 1$ и $C_1 + C_3 = \omega_0^2C_1C_2R_1R_3C_3$.

При синтезе фильтра обычно принимают $\tau = R_1C_1 = R_3C_3$ и задают значения $C_1 - C_3$. Тогда $R_1 = \sqrt{((C_1 + C_3)/C_2)} / (\omega_0 C_1)$, $R_2 = \sqrt{C_2/(C_1 + C_3)^3/\omega_0}$; $R_3 = \sqrt{((C_1 + C_3)/C_2)} / (C_3 \omega_0)$ и $K(p) = (p^2 + \omega_0^2) / (p^2(1 + C_H/C_1 + C_H/C_3) + p\omega_0^2(R_1(C_1 + C_2 + C_3 + C_H) + R_3C_H + R_1R_3C_2/R_H) + \omega_0^2(1 + (R_1 + R_3)/R_H))$, где $1/R_H + j\omega C_H = Y_H$.

Погрешности в подборе параметров моста приводят к его разбалансу. Для максимального приближения к балансу значения чувствительностей модуля передаточной функции на частоте ω_0 к нестабильности параметров рассчитывают по формулам $S_K(R_1) = ((C_1 + C_3)C_2 + C_3^2)^{1/2}/M$; $S_K(R_2) = (C_1 + C_3)/M$; $S_K(R_3) = ((C_1 + C_3)C_2 + C_1^2)^{1/2}/M$; $S_K(C_1) = ((C_1 + C_3)^2 + C_2C_3^2/(C_1 + C_3))^{1/2}/M$; $S_K(C_2) = ((C_1 + C_3)C_2)^{1/2}/M$; $S_K(C_3) = ((C_1 + C_3)^2 + C_2C_1^2/(C_1 + C_3))^{1/2}/M$, где $M = (C_1 + C_3)((C_1 + C_2 + C_3)^3/C_1^2C_2)^{1/2}$.

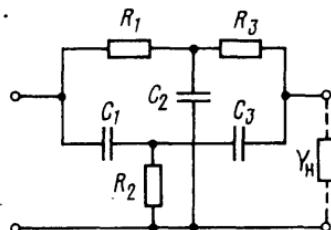


Рис. 78

Программа 364/21. Вычисление чувствительностей двойного Т-моста

F2	\uparrow	P7	F3	P6	$+$	P5	\uparrow	F4	$+$	\uparrow	X
X	\uparrow	F3	\div	$\sqrt{}$	\uparrow	F2	\div	\uparrow	F5	\times	P8
F4	ΠΠ	BΠ	C_x	ΠΠ	x^2	F2	ΠΠ	BΠ	F3	\uparrow	F5
P6	\div	P7	БΠ	P4	x^2	\uparrow	F7	\times	\leftarrow	F6	\uparrow
F5	\times	\uparrow	\rightarrow	$+$	$\sqrt{}$	\uparrow	F8	\div	C/Π	B/O	

Инструкция: $C_1 = P2$, $C_2 = P3$, $C_3 = P4$ B/O C/Π PX = $S_K(R_1)$ C/Π PX = $S_K(C_2)$, C/Π PX = $S_K(R_3)$ C/Π PX = $S_K(C_1)$, C/Π PX = $S_K(R_2)$ C/Π PX = $S_K(C_3)$.

Контрольный пример: при $C_1 = C_3 = 1$; $C_2 = 10$ получим $S(R_1) = S(R_3) = 0,0728613$; $S(C_2) = 0,07253236$; $S(C_1) = S(C_3) = 0,07635781$; $S(R_2) = 0,0767258$.

Параметры моста несложно вычислить в обычном режиме, введя в память $C_1 = P2$, $C_2 = P3$, $C_3 = P4$, $C_1 + C_3 = P5$, $\omega_0 = P8$ и выполнив: F5 \uparrow F3 \div $\sqrt{}$ \uparrow F8 \div (PX = $\tau_1 = \tau_2$) \uparrow F2 \div (PX = R_1) F4 \div (PX = R_3) F8 x^2 \times \uparrow F5 \times $1/x$ (PX = R_2).

При расчете РЗ с двойным Т-мостом обычно известны коэффициенты числителя передаточной функции $K_{P3}(p) = K_0(\gamma p^2 + 1) / (\alpha p^2 + \beta p + 1)$ и по расчетным формулам $\gamma = 1/\omega_0^2$; $K_0 = 1/(1 + (R_1 + R_3)/R_H)$; $\alpha = (1 + C_H(1/C_1 + 1/C_3))/(1 + (R_1 + R_3)/R_H) \times \omega_0^2$; $\beta = (R_1(C_1 + C_2 + C_3) + C_H(R_1 + R_3) + R_1R_3C_2/R_H)/(1 + (R_1 + R_3)/R_H)$ можно найти составляющие проводимости нагрузки моста, обеспечивающие заданный $K(p)$: $g_H = 1/R_H = -C_3(C_1(\alpha - \beta/A) + C_2 + C_3)/(C_1 + C_3)(\alpha A - \beta + 1/A)$; $C_H = \alpha A g_H - C_1C_3(1 - \omega_0^2)/(C_1 + C_3)$, где $A = \omega_0((C_1 + C_3)/C_2)^{1/2}$.

Программа 365/21. Расчет нагрузки двойного Т-моста

F2	\uparrow	F4	X	\leftarrow	F4	$+$	\uparrow	\rightarrow	\div	P4	F3
\div	\uparrow	F7	X	$\sqrt{-}$	\uparrow	\leftarrow	\uparrow	F5	X	P3	XY
+	\uparrow	F6	XY	-	\rightarrow	\div	\uparrow	F7	XY	X	\rightarrow
F5	X	1	-	P2	\leftarrow	-	\uparrow	F8	+	\uparrow	\leftarrow
\div	\uparrow	F4	\div	C/П	F3	X	\uparrow	F2	+	БП	F8

Инструкция: $C_1 = P2$, $C_2 = P3$, $C_3 = P4$, ($\alpha = P5$, $\beta = P6$, $\omega_0^2 = P7$, $(C_2 + C_3)/C_1 = P8$) B/O $C/П$ $PX = g_H$ $C/П$ $PX = C_H$.

Контрольный пример: при $C_1 = 5$; $C_2 = 100$; $C_3 = 20$; $\omega_0 = 0,2$; $\alpha = 4,6875$; $\beta = 18,80208$ получим $g_H = 8$; $C_H = 0,5$.

Программа 366/34. Расчет двойного Т-моста

ИП1	ИП3	$+$	ИП6	ИП2	\div	ИП0	X	$\sqrt{-}$	ИП7
ИП0	\div	ПД	ИП1	\div	C/П	ИП7	$1/x$	ИП6	\div
C/П	ИПД	ИП3	\div	C/П	ИП4	ИП5	ИП7	\div	-
ИП0	X	ИП1	X	ИП2	$+$	ИП3	$+$	ИП3	X
ИП5	ИП4	ИП7	X	-	ИП7	$1/x$	-	\div	ИП6
\div	C/П	ИП4	X	ИП7	X	ИП0	ИП4	X	1
-	ИП1	X	ИП3	X	ИП6	\div	+	C/П	

Инструкция: $\omega_0^2 = P0$, $C_1 = P1$, $C_2 = P2$, $C_3 = P3$, $\alpha = P4$, $\beta = P5$ B/O $C/П$ $PX = R_1$ $C/П$ $PX = R_2$ $C/П$ $PX = R_3$, $C/П$ $PX = g_H$ $C/П$ $PX = C_H$.

Коэффициенты α и β только при определенных их значениях могут быть реализованы пассивным звеном. В общем случае приходится использовать активное звено, типовая схема которого приведена на рис. 79. Если $\alpha > \gamma$, то принимают $1/R_0 = 0$ и синтезируют звено по значениям α , β , γ , C_1 , C_2 и C_3 согласно формулам: $n = C_1/C_3$; $m = n \times X (\alpha/\gamma - 1)/(n + 1)$; $C_0 = mC_3$; $\mu = 1 + (m/n - \beta/\sqrt{\gamma} (1 + n))/2 = K_0$; $R_2 = n \times X (\gamma/C_2 C_3 (1 + n))^{1/2}$; $R_3 = R_2 C_2/C_1$; $R_1 = R_3/n$.

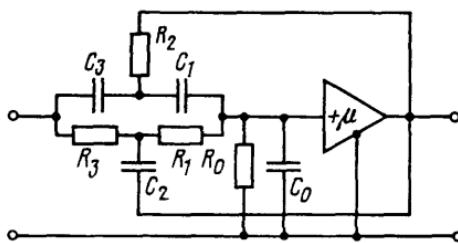


Рис. 79

Программа 367/21. Синтез Р3 при $\alpha > \gamma$

F7	1	$+$	P8	\uparrow	F3	XY	\div	2	\div	\leftarrow	F5
X	$C/П$	F2	\uparrow	F8	\div	1	-	\rightarrow	\uparrow	\leftarrow	-
C/П	F4	\uparrow	F8	\div	\uparrow	F6	\div	\uparrow	F7	X	\uparrow
F5	\div	$\sqrt{-}$	\uparrow	F7	X	C/П	\uparrow	F6	X	\uparrow	F5
\div	\uparrow	F7	\div	C/П	\uparrow	F7	\div	C/П	БП	P0	

Инструкция: $\beta/2\sqrt{\gamma} = P2$, $\alpha/\gamma - 1 = P3$, $\gamma = P4$, $C_1 = P5$, $C_2 = P6$, $n = C_1/C_3 = P7$ B/O $C/П$ $PX = C_0$ $C/П$ $PX = \mu$ $C/П$ $PX = R_2$ $C/П$ $PX = R_3$ $C/П$ $PX = R_1$.

Контрольный пример: для $K_{P3}(p) = K_0(1 + 0,2p^2)/(1 + 0,1p + 5p^2)$ при $C_1 = 0,2$; $C_2 = 0,5$; $C_3 = 0,4$ получим $C_0 = 3,2$; $K_0 = \mu = 8,925464$; $R_1 = 4,082482$; $R_2 = 0,4082482$; $R_3 = 2,041241$.

Если $\alpha < \gamma$, то принимают $C_0 = 0$ и ведут расчет по формулам: $n = C_1/C_3$; $m = R_1/R_0 = (\gamma/\alpha - 1)/(n + 1)$; $\mu = \beta(m + 1/(1 + n))/2\sqrt{\gamma} - m/2 + 1$; $R_2 = n(\gamma/C_2 C_3 \times (1 + n))^{1/2}$; $R_3 = C_2 R_2/nC_1$; $R_1 = R_3/n$; $R_0 = R_1/m$; $K_0 = 1/(1 + (1 + n)m)$.

Программа 368/21. Синтез Р3 при $\alpha < \gamma$

F7	1.	$+$	P8	\div	X	X	\uparrow	F4	X	\uparrow	F5
\div	\uparrow	F6	\div	$\sqrt{-}$	C/П	\uparrow	F6	X	\uparrow	F5	\div

$$\begin{array}{ccccccccc} \uparrow & F7 & \div & C/\Pi & \uparrow & F7 & \div & C/\Pi & \leftarrow \\ \div & 2 & \div & \rightarrow & \div & 1/x & C/\Pi & F8 & 1/x \\ \times & 1/x & C/\Pi & F2 & \times & \uparrow & \leftarrow & - & 1 \\ & & & & & & & & + \\ & & & & & & & & \uparrow \\ & & & & & & & & F8 \end{array}$$

Инструкция: $\beta/2\sqrt{\gamma} = P2$, $\gamma/\alpha - 1 = P3$, $\gamma = P4$, $C_1 = P5$, $C_2 = P6$, $C_1/C_3 = n = P7$
 В/О C/Π $PX = R_2$ C/Π $PX = R_3$ C/Π $PX = R_1$ C/Π $PX = R_0$ C/Π $PX = K_0$ C/Π $PX = \mu$.

Контрольный пример: для $K_{p3}(p) = K_0(1 + 16p^2)(1 + 2p + 4p^2)$ при $C_1 = 1$; $C_2 = 2$; $n = 1/3$ получим $R_2 = 0,4714045$; $R_3 = 2,828427$; $R_1 = 8,485281$; $R_0 = 3,771236$; $K_0 = 0,25$; $\mu = 0,625$.

При расчетах на микрокалькуляторе с входным языком МК34 целесообразно использовать одну следующую программу, в которой алгоритм вычислений выбирается в зависимости от соотношений α и γ .

Программа 369/34. Синтез РЗ

$$\begin{array}{ccccccccc} \text{ИП0} & \text{ИП1} & \text{ИП3} & \div & \text{П6} & 1 & + & \text{П8} & \div & \text{ИП2} \\ \div & \text{ИП3} & \div & \sqrt{} & \text{ИП6} & \times & \text{ПА} & \text{ИП2} & \times & \text{ИП1} \\ \div & \text{ИП6} & \div & \text{ПВ} & \text{ИП6} & \div & \text{П9} & \text{ИП0} & \text{ИП4} & - \\ \text{ИП8} & \div & x \geq 0 & 68 & \text{ИП4} & \div & \text{П7} & \text{ИП8} & 1/x & + \\ \text{ИП5} & \times & \text{ИП0} & \sqrt{} & \div & \text{ИП7} & - & 2 & \div & 1 \\ + & \text{ПС} & \text{ИП8} & \text{ИП7} & \times & 1 & + & 1/x & \text{ПД} & \text{ИП9} \\ \text{ИП7} & \div & \text{П8} & C_x & \text{П7} & C/\Pi & \text{БП} & 00 & \uparrow & /-/- \\ \text{ИП0} & \div & \text{ИП6} & \times & \text{П7} & \text{ИП6} & \div & \text{ИП5} & \text{ИП0} & \sqrt{} \\ \div & \text{ИП8} & \div & - & 2 & \div & 1 & + & \text{ПС} & \text{ПД} \\ \text{ИП3} & \text{ИП7} & \times & \text{П7} & C_x & \text{П8} & C/\Pi & & & \end{array}$$

Инструкция: $\gamma = P0$, $C_1 = P1$, $C_2 = P2$, $C_3 = P3$, $\alpha = P4$, $\beta = P5$ В/О C/Π $PX = 0$
 $P7 = C_0$, $P8 = R_0$, $P9 = R_1$, $PA = R_2$, $PB = R_3$, $PC = \mu$, $PD = K_0$.

Автоматизацию вычислений коэффициентов $K_{p3}(p)$ при $1/R_0 = 0$ и $K_0 = \mu$ по формулам $\gamma = C_1 C_3 (R_1 + R_3) R_2$; $n = C_1/C_3 = R_3/R_1$; $m = C_0/C_3$; $\alpha = \gamma(1 + (1 + 1/n)m)$; $\beta = \sqrt{\gamma}(1 + n)(m/n - 2(\mu - 1))$ обеспечивает следующая программа.

Программа 370/21. Анализ РЗ при $1/R_0 = 0$

$$\begin{array}{ccccccccc} F3 & \uparrow & F2 & + & \div & \rightarrow & F4 & \uparrow & F2 & \div & \uparrow & F8 \\ /-/- & XY & + & + & 2 & + & \uparrow & \leftarrow & \div & \rightarrow & F2 & 1/x \\ \uparrow & F3 & 1/x & + & \uparrow & F4 & \times & 1 & + & \rightarrow & F5 & \uparrow \\ F7 & + & \uparrow & F6 & \times & \uparrow & F2 & \times & \uparrow & F3 & \times & C/\Pi \\ \sqrt{} & \uparrow & \leftarrow & X & X & C/\Pi & \leftarrow & X & C/\Pi & B\Pi & P0 & \end{array}$$

Инструкция: $C_1 = P2$, $C_3 = P3$, $C_0 = P4$, $R_1 = P5$, $R_2 = P6$, $R_3 = P7$, $\mu = P8$ В/О C/Π $PX = \gamma$ C/Π $PX = \alpha$ C/Π $PX = \beta$.

При $C_0 = 0$ вычисления по формулам $\gamma = C_1 C_3 (R_1 + R_3) R_2$; $n = C_1/C_3 = R_3/R_1$; $m = R_1/R_0$; $\alpha = \gamma/(1 + (1 + n)m)$; $\beta = \sqrt{\gamma}(m + 2(\mu - 1)/(m + 1/(1 + n)))$; $K_0 = 1/(1 + (1 + n)m)$ реализованы следующей программой.

Программа 371/21. Анализ РЗ при $C_0 = 0$

$$\begin{array}{ccccccccc} F5 & \uparrow & F7 & + & \leftarrow & F7 & + & \div & \uparrow & F4 & \times & \uparrow \\ F5 & + & \leftarrow & F8 & 1 & - & 2 & \times & \uparrow & F4 & \times & \uparrow \\ F5 & + & \uparrow & \rightarrow & \div & \rightarrow & \uparrow & \rightarrow & F4 & \div & 1 & + \\ 1/x & C/\Pi & \leftarrow & \uparrow & F6 & \times & \uparrow & F2 & \times & \uparrow & F3 & \times \\ C/\Pi & \sqrt{} & \uparrow & \rightarrow & X & X & C/\Pi & \leftarrow & \leftarrow & X & C/\Pi & \end{array}$$

Инструкция: $(C_1 = P2$, $C_3 = P3$, $R_0 = P4$, $R_1 = P5$, $R_2 = P6$, $R_3 = P7$, $\mu = P8)$ В/О C/Π $PX = K_0$ C/Π $PX = \gamma$ C/Π $PX = \alpha$ C/Π $PX = \beta$.

Контрольный пример: при $C_1 = 1$, $C_3 = 2$, $C_0 = 3$, $R_1 = 10$, $R_2 = 8$, $R_3 = 5$; $\mu = 1,5$ и $1/R_0 = 0$ по программе 370/21 получим $\gamma = 240$; $\alpha = 1320$; $\beta = 46,47579$, а при $C_0 = 0$; $C_1 = 1$; $C_3 = 3$; $R_0 = 3,771236$; $R_1 = 8,485281$; $R_2 = 0,4714045$; $R_3 = 2,828427$; $\mu = 0,625$ получим $K_0 = 0,25$; $\gamma = 15,999999$; $\alpha = 3,999999$; $\beta = 1,999999$.

Программа 372/34. Анализ РЗ

```

ПД - ИП4 ИП5 X ИП1 ИП3 + X ИП2 X
П6 С/П ИП1 ИПД x > 0 51 ÷ ПА ИП4 ИП5
÷ 1 + ПВ X 1 + ПС ÷ С/П
ИП6 √ ИПА ИП0 1 - 2 X + X
ИПВ 1/x ИПА + ÷ С/П ИПС 1/x С/П БП
00 ↑ /- ИП5 ÷ ПА ИП5 ИП4 ÷ ПВ
1 + X 1 + ИП6 X С/П ИПА ИПВ
X ИП0 1 - 2 X - ИПВ 1/x 1
+ X ИП6 √ X С/П ИП0 С/П БП

```

Инструкция: $\mu = P_0, R_1 = P_1, R_2 = P_2, R_3 = P_3, C_1 = P_4, C_3 = P_5, R_0$ или $-C_0 = P_X$ В/О С/П $P_X = \gamma$ С/П $P_X = \alpha$ С/П $P_X = \beta$ С/П $P_X = K_0$.

Для построения частотных характеристик активных и пассивных фильтров следует использовать общие программы анализа, приведенные в гл. 3.

6.6. Расчет цифровых фильтров

Цифровым фильтром называют вычислительное устройство, реализующее заданный алгоритм селективной обработки сигналов в реальном масштабе времени. Известно множество алгоритмов фильтрации во временной области при различных системах базисных функций. Поэтому при проектировании цифровых фильтров возникает необходимость как в определении параметров алгоритма фильтрации (коэффициентов цифрового фильтра), так и в проверке особенностей алгоритма, и в частности, оценке уровней шума квантования. Для решения этих задач часто достаточно программируемого микрокалькулятора, обеспечивающего не только выполнение необходимых расчетов, но и моделирование простейших цифровых фильтров. Непосредственное использование микрокалькулятора допускает лишь ручной ввод информации, но при его сопряжении с аналого-цифровым преобразователем возможно выполнение алгоритмов фильтрации и в реальном масштабе времени.

Наибольшее распространение нашли цифровые фильтры, работающие во временной области и моделирующие решение разностного уравнения

$$y(i) = \sum_{k=0}^M a_k x(i-k) + \sum_{k=1}^N b_k y(i-k); \quad i = 0, 1, 2, \dots, \quad (6.22)$$

где $y(i)$ – отсчеты искомой реакции, а $x(i)$ – отсчеты воздействия, причем $y(i) = x(i) = 0$ при $k > i$.

Это уравнение всегда можно привести к форме

$$y(i) = \sum_{k=0}^L c_k x(i-k), \quad i = 0, 1, 2, \dots, \quad (6.23)$$

где $c_k = \sum_n a_n b_n^k$.

В общем случае верхний предел суммы L в (6.23) может быть бесконечным. Такой фильтр называют фильтром с бесконечной импульсной характеристикой (БИХ-фильтром). Фильтр с конечным пределом L называют КИФ-фильтром.

При ограниченных аппаратурных ресурсах БИХ-фильтр реализуем лишь в рекурсивной структуре, где в соответствии с выражением (6.22) искомая реакция определяется как взвешенная сумма отсчетов предыдущих входной и выходной последовательностей. КИХ-фильтры обычно реализуют в соответствии с выражением (6.23) в виде нерекурсивного или трансверсального фильтра, вычисляющего реакцию суммированием взвешенных отсчетов только входной последовательности.

Расчет цифрового фильтра сводится к определению коэффициентов в (6.22) или (6.23) по заданным требованиям к фильтру. Если вместо последовательностей $y(i)$ и $x(i)$ рассматривают их z -преобразования, то определению подлежит передаточная функция фильтра

$$K(z) = y(z)/x(z) = \sum_{k=0}^M a_k z^{-k} / (1 + \sum_{k=0}^N b_k z^{-k}).$$

Методы расчета зависят от типа фильтра и требований к нему. Метод инвариантного преобразования импульсной характеристики (метод стандартного z -преобразования) используют тогда, когда необходимо точное совпадение непрерывной импульсной характеристики фильтра с ее дискретизованной последовательностью. Согласно этому методу преобразование Лапласа $G(p)$ заданной непрерывной функции $g(t)$ представляют, объединив комплексные полюсы в пары, выражением

$$G(p) = \sum_{k=0}^N \frac{A_k}{p + \alpha_k} + \sum_{k=0}^M \frac{B_k p + C_k}{p^2 + \beta_k p + \gamma_k}.$$

Каждый член этого выражения преобразуют по формулам $A/(p + \alpha) \rightarrow AT/(1 + \delta z^{-1})$; $(Bp + C)/(p^2 + \beta p + \gamma) \rightarrow (B + Dz^{-1})T/(1 + \sigma z^{-1} + \eta z^{-2})$, где T — период дискретизации, а коэффициенты $\delta = -\exp(-\alpha T)$; $D = -\exp(-\beta T/2)(B \cos(\sqrt{\gamma - \beta^2/4}T) + ((\beta B/2 - C)/\sqrt{\gamma - \beta^2/4}) \sin(\sqrt{\gamma - \beta^2/4}T))$; $\sigma = -2\exp(-\beta T/2) \cos(\sqrt{\gamma - \beta^2/4}T)$; $\eta = \exp(-\beta T)$. Преобразование членов, соответствующих вещественным полюсам, несложно выполнить в обычном режиме, а для определения квадратичных членов целесообразно использовать следующие программы.

Программа 373/21. Стандартное z -преобразование квадратичных членов передаточной функции

F4	x^2	4	\div	\uparrow	F5	XY	$-$	$\sqrt{}$	P7	\uparrow	F8
X	P6	F4	\uparrow	F8	X	$/-$	e^x	P5	F2	X	2
\div	\uparrow	F3	$-$	\uparrow	F7	\div	P7	F6	e^{jx}	\leftarrow	F7
X	\rightarrow	P7	\uparrow	F2	X	\uparrow	\leftarrow	+	\uparrow	F5	\checkmark
$/-$	XY	X	C/P	F7	X	2	X	C/P	F5	C/P	

Инструкция: ($B = P2$, $C = P3$, $\beta = P4$, $T = P8$), $\gamma = P5$, B/O C/P $PX = D$ C/P $PX = \sigma$ C/P $PX = \eta$.

Программа 374/34. Стандартное z -преобразование квадратичных членов передаточной функции

ИП2	ИП4	X	2	\div	e^x	П5	ИП3	ИП2	x^2
4	\div	$-$	\checkmark	П6	ИП4	X	П7	\sin	ИП2
ИП0	X	2	\div	ИП1	$-$	X	ИП6	\div	ИП0
ИП7	\cos	П7	X	$+$	ИП5	$/-$	П5	\div	C/P
ИП7	ИП5	\div	2	X	C/P	ИП5	x^2	$1/x$	C/P

Инструкция: ($B = P0$, $C = P1$, $\beta = P2$, $\gamma = P3$, $T = P4$) B/O C/P $PX = D$ C/P $PX = \sigma$ C/P $PX = \eta$.

Контрольный пример: для $(6p + 20,6)/(p^2 + 0,2p + 4,01)$ получим коэффициенты члена $(6 + 10,48693z^{-1})T/(1 + 0,7530901z^{-1} + 0,818730z^{-2})$ при времени счета соответственно 15 и 20 с.

Если преобразованную функцию необходимо привести к отношению многочленов, то можно воспользоваться программами 130 – 133 вычисления коэффициентов произведения многочленов, приведенных в гл. 3.

Если техническое задание регламентирует только АЧХ цифрового фильтра, то обычно используют билинейное преобразование. В этом случае расчет фильтра начинают с определения характеристических частот аналогового фильтра-прототипа ν_i по заданным частотам f_i цифрового фильтра, используя соотношение $\nu_i = \operatorname{tg}(\omega_i T/2)$. Затем по требуемым характеристикам выбирают класс фильтра-прототипа, определяют его порядок и передаточную функцию (по программам, приведенным в предыдущих главах). Последний этап расчета заключается в замене переменной p в функции $K(p)$ аналогового фильтра выражением $p = (2/T)(z - 1)/(z + 1)$ и приведении полученной передаточной функции $K(z)$ к форме, удобной для синтеза цифрового фильтра.

Если передаточная функция $K(p)$ представлена выражением (3.14), то для билинейного преобразования каждого квадратичного множителя пригодна формула $(\alpha p^2 + \beta p + 1) \rightarrow (Az^2 + Bz + C)/(z + 1)^2$, где $A = (2/T)^2 \alpha + (2/T)\beta + 1$; $B = 2(1 + (2/T)\alpha)$; $C = (2/T)^2 \alpha - (2/T)\beta + 1$, а при $\alpha = 0$ коэффициенты $A = 0$; $B = 1 + (2/T)\beta$ и $C = 1 - (2/T)\beta$.

Программа 375/21. Билинейное преобразование трехчлена

F2	4	x	↑	F4	x^2	÷	P8	F3	2	x	↑
F4	÷	1	+	P6	↑	F8	+	P5	F8	XY	-
2	+	P7	F8	2	x	2	XY	$x \neq 0$	F6	-	P6
F5	P5	C/P	F6	C/P	F7	C/P	BП	P0			

Инструкция: ($\alpha = P2$, $\beta = P3$, $T = P4$) (B/O) C/P $PX = P5 = A$ C/P $PX = P6 = B$ C/P $PX = P7 = C$.

Программа 376/34. Билинейное преобразование трехчлена

ИП0	4	x	ИП2	x^2	÷	П6	ИП1	2	x
ИП2	÷	1	+	П4	+	П3	ИП6	ИП4	-
2	+	П5	ИП6	$x \neq 0$	33	1	XY	-	2
x	П4	ИП3	П3	C/P	ИП4	C/P	ИП5	C/P	BП

Инструкция: ($\alpha = P0$, $\beta = P1$, $T = P2$) (B/O) C/P $PX = P3 = A$ C/P $PX = P4 = B$ C/P $PX = P5 = C$.

Контрольный пример: при $T = 0,5$ программа преобразует трехчлен $4p^2 + 3p + 1$ в выражение $(77z^2 - 126z + 53)/(z + 1)^2$, двучлен $3p + 1$ – в выражение $(13z - 11)/(z + 1)$.

При необходимости трехчлены от z умножают с помощью программ 130/21 или 131/34, что позволяет привести функцию к виду $K(z) = A(z)(z + 1)^m \cdot N/M(z)$. Представление такой функции отношением многочленов упрощается при использовании следующих программ.

Программа 377/21. Умножение многочлена $A(z)$ на множитель $(z + 1)^k$ при $n + k \leq 13$

F2	↑	F3	XY	+	P3	F4	XY	+	P4	F5	XY
+	P5	F6	XY	+	P6	F7	XY	+	P7	F8	XY
+	P8	←	XY	+	←	XY	+	←	XY	+	←
XY	+	←	XY	+	←	XY	+	←	XY	C/P	BП
P0											

Инструкция: $a_n = P2$, $a_{n-1} = P3$, ..., $a_{n-6} = P8$, $a_{n-7} = C1$, ..., $a_{n-12} = C6$ (незанятые регистры очистить) (B/O), пустить программу k раз нажатием клавиши C/P, $P2 = a'_{n+k}$, $P3 = a'_{n+k-1}$, ..., $P8 = a'_{n+k-6}$, $C1 = a'_{n+k-7}$, ... (при $n + k = 13$ получим $PX = a'_0$).

Программа 378/34. Умножение многочлена $A(z)$ на множитель $(z + 1)^k$ при $n + k \leq 14$

ИП0	ИП1	+	П1	BХ	ИП2	+	П2	BХ	ИП3
+	П3	BХ	ИП4	+	П4	BХ	ИП5	+	П5
BХ	ИП6	+	П6	BХ	ИП7	+	П7	BХ	ИП8
+	П8	BХ	ИП9	+	П9	BХ	ИПА	+	ПА
BХ	ИПВ	+	ПВ	BХ	ИПС	+	ПС	BХ	ИПД
+	ПД	BХ	C/P	BП					

Инструкция: $a_n = P0$, $a_{n-1} = P1$, $a_{n-2} = P2$, ..., $a_{n-13} = PД$ (незанятые регистры очистить) (B/O), пустить программу k раз нажатием клавиши C/P, $P0 = a'_{n+k}$, $P1 = a'_{n+k-1}$, $P2 = a'_{n+k-2}$, ..., $PД = a'_{n+k-13}$ (если $n + k = 14$, то $PX = a'_0$).

Контрольный пример: для $(25z^2 - 30z + 9)(z + 1)^3$ после трехкратного выполнения программы получим коэффициенты многочлена $25z^5 + 45z^4 - 6z^3 - 38z^2 - 3z + 9$.

Если функция невысокого порядка $K(p)$ представлена отношением многочленов, то для непосредственного билинейного преобразования каждого из них можно воспользоваться следующими программами.

Программа 379/21. Билинейное преобразование многочлена степени $n \leq 6$

P2	C _x	P3	1	+	P7	C/Π	P5	7	P4	F3	↑	
F2	P3	XY	—	↑	F8	÷	←	P2	F4	1	—	
$x = 0$	1	P3	F5	↑	F2	+	P2	F7	P6	F6	1	
—	P6	F5	X	↑	F4	÷	P5	↑	F2	←	+	
P2	E4	1	+	P4	8	—	$x = 0$	F/-	F7	БП	0	

Инструкция: очистить регистр 2 и стек памяти, выполнить $T/2 = P8, a_n = PX$ В/О С/П $a_{n-1} = PX$ С/П ... $a_0 = PX$ С/П $P2 = a'_n, C1 = a'_{n-1}, C2 = a'_{n-6}, \dots$ Время счета после каждого ввода (кроме первого) от 80 до 50 с.

Программа 380/34. Билинейное преобразование многочлена степени $n \leq 8$

Инструкция: $(T/2 = P\bar{D})$ $a_n = PX$ В/О С/П $a_{n-1} = PX$ С/П $a_{n-2} = PX$ С/П ...
 $a_0 = PX$ С/П $P0 = a'_n$, $P1 = a'_{n-1}$, $P2 = a'_{n-2}$, ... Время счета после каждого ввода увеличивается от 20 с примерно до 2 мин.

Для проверки программ можно воспользоваться данными контрольного примера к программам 375/21 и 376/34.

Приведенные программы обеспечивают вычисление преобразованного многочлена $(a'_n z^n + a'_{n-1} z^{n-1} + \dots + a'_0) / (1+z)^n$. Для преобразования многочленов степени до $n \leq 12$ или $n \leq 14$ применим следующий алгоритм: 1) представить преобразуемый многочлен формулой $A(p) = A_1(p)p^k + A_2(p)$ так, чтобы степень каждого из многочленов удовлетворяла ограничениям для программы 379/21 или 380/34; 2) выполнить с помощью этих программ преобразование к многочлену $A(z) = (A_1(z)(z-1)^k + A_2(z)(z+1)^{n-k}) / (z+1)^n$, где k — степень многочлена $A_1(z)$; 3) с помощью 376/21 или 377/34 вычислить коэффициенты произведения $A_2(z)(z+1)^{n-k}$ и, заменив в этих программах операторы $+$ и операторами $-$, найти коэффициенты произведения $A_1(z) \times (z-1)^k$; 4) сложить коэффициенты при одинаковых степенях z обоих слагаемых.

При расчете цифровых полосовых фильтров вместо отображения $p = (z - 1)/(z + 1)$ используют [13] преобразование

$$p = (z^2 - 2z \cos \omega_0 T + 1) / (z^2 - 1), \quad (6.24)$$

обеспечивающее непосредственный переход от аналогового фильтра-прототипа к цифровому полосовому фильтру. При таком преобразовании частоты f_i цифрового фильтра связаны с частотами ν_i аналогового ФП соотношением

$$v_i = (\cos \omega_0 T - \cos \omega_i T) / \sin \omega_i T. \quad (6.25)$$

Для преобразования граничных частот f_{π_1} и f_{π_2} цифрового фильтра в одну граничную частоту ν_π прототипа значение ω_0 выбирают из соотношения $\cos \omega_0 T = \cos ((f_{\pi_2} + f_{\pi_1}) T / 2) / \cos ((f_{\pi_2} - f_{\pi_1}) T / 2)$.

Программа 381/21. Преобразование частот при расчете цифрового полосового фильтра

F3	/ -	ΠΠ	F5	F7	P8	F3	ΠΠ	F5	F7	↑	F8
÷	P8	F2	ΠΠ	P6	P2	F3	ΠΠ	P6	P3	F4	ΠΠ
P6	P4	F5	ΠΠ	P6	P5	C/Π	↑	F4	+	2	÷
↑	F6	÷	↑	π	X	2	X	e ^{jx}	P7	XY	→
F8	XY	-	↑	←	÷	B/O					

Инструкция: $f_{3_1} = P2, f_{\pi_1} = P3, f_{\pi_2} = P4, f_{3_2} = P5$ ($1/T = P6$) В/О С/П $PX = P5 = \nu_{3_2}, P2 = \nu_{3_1}, P3 = \nu_{\pi_1}, P4 = \nu_{\pi_2}, P8 = \cos \omega_0 T$.

Программа 382/34. Преобразование частот при расчете цифрового полосового фильтра

ИП3	ИП2	+	ИП5	÷	π	\times	cos	ИП3	ИП2
-	ИП5	÷	π	\times	cos	÷	П0	1	ПД
КИПД	ИП5	÷	2	\times	π	\times	↑	cos	ИП0
XY	-	XY	sin	÷	КПД	ИПД	1	+	ПД
5	-	x = 0 20	С/П	БП					

Инструкция: $f_{3_1} = P1, f_{\pi_1} = P2, f_{\pi_2} = P3, f_{3_2} = P4$ ($1/T = P5$) (В/О) С/П $P1 = \nu_{3_1}, P2 = \nu_{\pi_1}, P3 = \nu_{\pi_2}, P4 = \nu_{3_2}, P0 = \cos \omega_0 T$.

Контрольный пример: для границ полосы пропускания $f_{\pi_1} = 1,8$ кГц и $f_{\pi_2} = 2$ кГц и границ полосы задержания $f_{3_1} = 1,5$ кГц и $f_{3_2} = 2,5$ кГц при частоте дискретизации $1/T = 100$ кГц получим $\nu_{\pi_1} = -0,006283; \nu_{\pi_2} = 0,06282; \nu_{3_1} = -0,02826; \nu_{3_2} = 0,03332; \cos \omega_0 T = 0,9929$. Сравнивая модули результатов, выбираем $\nu_{\pi} = 0,02826$ и, нормируя эту величину по частоте 0,006282 (границная частота полосы пропускания ФП после нормирования $\nu_{\pi} = 1$), получаем $\nu_3 = 4,4979$.

При задании функции $K_A(p)$ прототипа отношением квадратичных множителей преобразование (6.24) целесообразно выполнять так, чтобы $K_{\text{Ц}}(z)$ также получалась в виде отношения произведений квадратичных множителей. Это облегчит синтез цифрового фильтра, часто реализуемого каскадным соединением звеньев 2-го порядка. Подобное преобразование можно описать формулой

$$(p^2 + \beta p + \gamma) \rightarrow (1 + \beta + \gamma) (z^2 + A_1 z + B_1) (z^2 + A_2 z + B_2) / (z^2 - 1)^2,$$

где

$$A_{1,2} = -((2 + \beta) (\cos \omega_0 T \pm \sqrt{(M - P)/2 + \sqrt{(4\gamma - \beta^2)(M + P)/2}})) / (1 + \beta + \gamma);$$

$$B_{1,2} = ((\cos \omega_0 T)^2 + 2(\cos \omega_0 T) \sqrt{(M - P)/2 + M}) / (1 + \beta + \gamma);$$

$$M = ((\sin^2 \omega_0 T + \gamma)^2 + (\beta \sin \omega_0 T)^2)^{1/2}; P = \sin^2 \omega_0 T + \gamma - \beta^2/2.$$

Программа 383/21. Преобразование ФНЧ-прототипа в полосовой цифровой фильтр

F4	↑	F7	+	P4	x^2	↑	F5	+	$\sqrt{\quad}$	↑	F8
x^2	+	P5	F4	+	2	÷	↑	F3	\times	$\sqrt{\quad}$	P3
F4	-	$\sqrt{\quad}$	/-	P4	↑	F8	-	↑	F2	\times	↑
F3	/-	P3	+	↑	F6	÷	C/П	F4	/-	↑	F8
X	↑	F5	+	+	↑	F6	÷	C/П	F4	БП	4

Инструкция: $2 + \beta = P2, 4\gamma - \beta^2 = P3, \gamma - \beta^2/2 = P4, (\gamma - \beta^2/4)\beta^2 = P5, 1 + \beta + \gamma = P6, \sin^2 \omega_0 T = P7, \cos \omega_0 T = P8$ В/О С/П $PX = A_1$ С/П $PX = B_1$ С/П $PX = A_2$ С/П $PX = B_2$.

Программа 384/34. Преобразование ФНЧ-прототипа в полосовой цифровой фильтр

ИП1	1	ИПД	x^2	-	P2	+	P3	x^2	ИП2
ИП0	x^2	X	-	$\sqrt{\quad}$	P4	ИП3	ИП0	x^2	2
\div	-	P5	-	2	÷	P6	ИП5	+	ИП1
4	X	ИП0	x^2	-	X	$\sqrt{\quad}$	P7	ИП6	$\sqrt{\quad}$
P6	ИП0	ИП1	+	1	+	P8	ИП6	/-	P6
ИПД	-	ИП0	2	+	X	ИП7	/-	P7	+
ИП8	÷	C/П	ИПД	x^2	ИП4	+	ИП6	2	X
ИПД	X	-	ИП8	÷	C/П	БП	47		

Инструкция: ($\beta = P0, \gamma = P1, \cos \omega_0 T = PД$) В/О С/П $PX = A_1$ С/П $PX = B_1$ С/П $PX = A_2$ С/П $PX = B_2$.

Все более широкое применение находят КИХ-фильтры, основное достоинство которых заключается в простоте получения линейной фазовой характеристики. Такие фильтры обычно рассчитывают методом взвешивания, согласно которому требуемую частоту

ную характеристику (являющуюся для цифрового фильтра периодической функцией частоты с аргументом $e^{j\omega T}$) аппроксимируют взвешиванием отсчетов импульсной характеристики

$$g'(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K'(e^{j\nu}) e^{jn\nu} d\nu,$$

где $\nu = \omega T$, а $K'(e^{j\nu})$ – требуемая частотная характеристика.

Взвешивание заключается в умножении значений $g'(n)$ на весовую последовательность $w(n)$ конечной длительности, называемую окном, $g(n) = g'(n)w(n)$. Изменение функции $w(n)$ позволяет управлять сходимостью ряда Фурье

$$K(e^{j\nu}) = \sum_{n=-\lfloor(N-1)/2\rfloor}^{\lfloor(N-1)/2\rfloor} g(n) e^{-jn\nu},$$

описывающего частотную характеристику КИХ-фильтра, причем здесь и далее число N предполагается нечетным. При реализации КИХ-фильтра методом взвешивания часто используют обобщенное окно Хэмминга

$$w(n) = \begin{cases} \alpha + (1 - \alpha) \cos(2\pi n/N) & \text{при } |n| \leq (N-1)/2, \\ 0 & \text{при } |n| > (N-1)/2, \end{cases}$$

где $0 \leq \alpha \leq 1$. В этом случае значения $g(n)$ можно вычислить по значениям $g'(n)$ с помощью следующих программ.

Программа 385/21. Взвешивание отсчетов импульсной характеристики КИХ-фильтра с обобщенным окном Хэмминга

P8	C _x	P4	F3	2	÷	P5	F4	1	+	P4	F5
–	x ≥ 0	X	C _x	P8	π	X	↑	F5	÷	cos	↑
F2	X	–	↑	F2	+	↑	F8	X	C/P	P8	BП
F1											

Инструкция: ($\alpha = P2, N = P3$) $g'(0) = PX$ B/O C/P $PX = g(0), g'(1) = PX$ C/P $PX = g(1), g'(2) = PX$ C/P $PX = g(2) \dots$

Программа 386/34. Взвешивание отсчетов импульсной характеристики КИХ-фильтра с обобщенным окном Хэмминга

P8	C _x	P4	ИП3	2	÷	П5	ИП4	ИП5	–		
x ≥ 0	14	C _x	П8	ИП4	π	X	ИП5	÷	cos		
↑	ИП2	X	–	ИП2	+	ИП8	X	C/P	П8		
КИП4	БП	07									

Инструкция: ($\alpha = P2, N = P3$) $g'(0) = PX$ B/O C/P $PX = g(0), g'(1) = PX$ C/P $PX = g(1), g'(2) = PX$ C/P $PX = g(2) \dots$

При нумерации отсчетов значению $n = 0$ соответствует центральный отсчет симметричной импульсной характеристики.

Контрольный пример: при $\alpha = 0,54; N = 7$ для $g'(n) = 1; 0,9; 0,6; 0,2; -0,1; \dots$ получим $g(n) = 1; 0,7441248; 0,2625842; 0,02511087; 0; \dots$

Если значения $g'(n)$ вычисляют по известной формуле, то фрагмент ее реализации целесообразно включить в программу взвешивания отсчетов. Например, при проектировании ФНЧ с $g'(n) = \sin(n\omega_0 T) / (\pi n)$ на базе программы 384/21 несложно составить следующую.

Программа 387/21. Расчет КИХ-фильтра низких частот

F7	P8	C _x	P4	F3	2	÷	P5	F4	1	+	P4	
F5	–	x ≥ 0	P3	C _x	P8	π	X	↑	F5	÷	cos	
↑	F2	X	–	↑	F2	+	↑	F8	X	↑	π	
÷	C/P	F4	↑	F7	X	e ^{jx}	F4	÷	P8	БП	PXY	

Инструкция: ($\alpha = P2, N = P3, \omega_0 T = P7$) B/O C/P $PX = g(0)$ C/P $PX = g(1) \dots$ C/P $PX = g(k)$.

Контрольный пример: при $\alpha = 0,57$; $N = 257$; $\omega_0 T = 2\pi 0,1245 = 0,7822565$ получим $g(n) = 0,248999; 0,224342; 0,159069; \dots$

Иногда используется метод частотной выборки [5], основанный на реализации равноточных отсчетов требуемой частотной характеристики $K(n)$ функциями вида

$$S(\omega, n) = e^{-j\pi n/N} \sin(\omega NT/2) / \sin(\omega T/2 - \pi n/N).$$

Частотная характеристика фильтра, рассчитанная этим методом,

$$K(e^{j\omega T}) = \frac{e^{-j\omega T(N-1)/2}}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \frac{K(n) e^{j\pi n/N} \sin(\omega TN/2)}{\sin(\omega T/2 - \pi n/N)}.$$

Для фильтра с симметричной импульсной характеристикой при нечетном N , когда частоту отсчитывают в точках $\omega T = 2\pi/T$ и справедливы соотношения $|K(n)| = K(N-n)$; $\varphi_k(n) = -\pi n(N-1)/N$ при $n = 0, 1, \dots, (N-1)/2$ и $\varphi_k(n) = \pi(N-n)(N-1)/N$ при $n = (N+1)/2, \dots, N-1$, частотная характеристика

$$\begin{aligned} K(e^{j\omega T}) &= (\sin(\omega TN/2)/N \sin(\omega T/2)) K(0) + \\ &\quad + 2 \sin \omega T \sum_{n=1}^{N-1} |K(n)| (-1)^n \sin(\pi n/N) / (\cos(2\pi n/N) - \cos \omega T). \end{aligned}$$

Программа 388/21. Расчет АЧХ КИХ-фильтра с симметричной импульсной характеристикой при нечетном $N \leq 13$

\uparrow	π	X	2	X	P4	F8	X	\sin	XY	\sin	\div
P5	F2	P7	6	\uparrow	1	-	P3	π	X	\uparrow	F8
\div	2	X	cos	XY	sin	P6	F4	cos	-	\uparrow	F6
XY	\div	\uparrow	F4	sin	X	\uparrow	F2	\rightarrow	P2	X	\uparrow
F7	+	P7	\uparrow	F3	$x < 0$	X	F5	X	C/P	BП	P0

Инструкция: ($|K(0)|/N = P2, -|K(1)|/N = C1, 2|K(2)|/N = C2, \dots, N = P8$)
 $fT = PX$ (B/O) C/P $PX = K(e^{j2\pi fT}) \dots$

В связи с симметрией значений $K(n)$ относительно частоты $f = 1/(2T)$ в память заносят лишь половину отсчетов от нулевого до $K((N-1)/2)$.

Программа 389/34. Расчет АЧХ КИХ-фильтра с симметричной импульсной характеристикой при нечетном $N \leq 19$

π	X	2	X	cos	PВ	ИПД	1	+	2	
\div	P0	C _x	PС	КИП0	π	ИПД	\div	ИП0	$x \neq 0$	
35	X	sin	BХ	2	X	cos	ИПВ	-	\div	
X	ИПС	+	БП	13	ИПС	2	X	ИПВ	arccos	
PВ	sin	X	ИПА	+	ИПВ	2	\div	PВ	ИПД	
X	sin	X	ИПВ	sin	\div	ИПД	\div	C/P	BП	

Инструкция: ($|K(0)| = PA, -|K(1)| = P1, |K(2)| = P2, -|K(3)| = P3, \dots, N = PД$)
 $fT = PX$ (B/O) C/P $PX = K(e^{j2\pi fT})$. Время счета зависит от N и при $N = 13$ составляет около 80 с.

При попытках вычислить по этим программам АЧХ на нормированных частотах $fT = n$ возможно переполнение, но в таких вычислениях нет необходимости, так как результат совпадает с известными значениями $K(n)$.

Контрольный пример: при $N = 13$; $K(0) = K(1) = K(2) = 1$; $K(3) = 0,5$; $K(4) = K(5) = K(6) = 0$ для значений $fT = 0,1$ и $0,4$ получим значения $K(0,1) = 0,8824098$ и $K(0,4) = -0,03857367$.

Если расчет АЧХ подтверждает выполнимость требований технического задания, то искомую передаточную функцию фильтра определяют по формуле

$$K(z) = ((1-z)^{-N/N}) \sum_{n=0}^{N-1} K(n) / (1-z^{-1}) e^{j2\pi n/N}.$$

В противном случае, изменяя значения $K(n)$, пытаются оптимизировать АЧХ по требу-

емому критерию. Для решения задачи оптимизации обычно привлекают методы линейного программирования, реализация которых на микрокалькуляторах рассмотрена в [20].

После расчета функции $K(z)$ цифрового фильтра необходима проверка его характеристик. Для вычисления частотной характеристики достаточно в функции $K(z)$ принять $z = e^{j\omega T} = \cos \omega T + j \sin \omega T$. В этом случае достаточно модифицировать программы 30/21 – 33/34. Примером подобной модификации может служить следующая программа.

Программа 390/21. Вычисление нормированного ($a_8 = 1$) многочлена 8-й степени аргумента $z = \exp(j\omega T)$

e ^{jx}	P2	P4	XY	P3	P5	ПП	F,	ПП	F,	ПП	F,
ПП	F,	ПП	F,	ПП	F,	ПП	F,	ПП	F4	↑	F8 +
P4	C/P	BП	P0	F7	←	P7	↑	F4	+ ↑	F2	
X	P4	F3	X	P6	F5	↑	F2	X	P5	F3 X	
↑	F4	XY	–	P4	F5	↑	F6	+	P5	B/O	

Инструкция: ($a_0 = P8, a_1 = P7, a_2 = C6, a_3 = C5, a_4 = C4, a_5 = C3, a_6 = C2, a_7 = C1$) $\omega T = PX$ (B/O) C/P $PX = P4 = \operatorname{Re} A(\omega T), P5 = \operatorname{Im} A(\omega T)$. Время счета около 40 с.

Контрольный пример: для $A(z) = z^8 + 7z^7 + 6z^6 + 5z^5 + 4z^4 + 3z^3 + 2z^2 + z + 10$ при $\omega T = 0,1$ получим $\operatorname{Re} A(\omega T) = 34,8959$; $\operatorname{Im} A(\omega T) = 13,95325$.

При расчете на микрокалькуляторах с входным языком МК34 достаточно в начале программы 33/34 включить фрагмент $\cos BX \sin$ и изменить адрес обращения к подпрограмме на 45. Вычислив числитель и знаменатель функции $K(z)$ с помощью таких программ, несложно определить ее АЧХ и ФЧХ на заданной частоте.

При анализе АЧХ КИХ-фильтров для упрощения расчетов целесообразно использовать симметрию или антисимметрию коэффициентов многочленов передаточной функции. Так, для "симметричного" КИХ-фильтра (без учета задержки) расчет сводится к суммированию членов косинусоидального ряда с вещественными коэффициентами.

Если коэффициенты КИХ-фильтра непосредственно описывают его импульсную характеристику, то для анализа БИХ-фильтра приходится прибегать к обратному преобразованию функции $K(z)$ или в более общем случае к обратному z -преобразованию отклика фильтра на заданное воздействие. При численном анализе эта операция заключается в разложении в ряд по убывающим степеням z преобразуемой функции

$$F(z) = \sum_{i=0}^n a_i z^i / \sum_{i=0}^m b_i z^i = \sum_{k=0}^{\infty} C_k z^{-k},$$

оригиналом которого является

$$f(n) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k \delta(n-k).$$

Вычисление коэффициентов разложения C_k функции $F(z)$ до 6-го порядка обеспечивают следующие программы.

Программа 391/21. Анализ БИХ-фильтров до 6-го порядка во временной области

↑	F2	÷	↑	F3	ПП	F,	F4	ПП	F,	F5	ПП
F,	F6	ПП	F,	F7	ПП	F,	F8	ПП	F,	XY	C/P
C _x	←	BП	P0	X	XY	←	XY	–	↑	→	XY
←	B/O										

Инструкция: $b_n = P2, b_{n-1} = P3, \dots, b_{n-6} = P8, a_{n-1} = C1, a_{n-2} = C2, \dots, a_{n-6} = C6, a_n = PX$ (B/O) C/P $PX = C_0$ C/P $PX = C_1$ C/P $PX = C_2 \dots C/P$ $PX = C_k \dots$ Время счета около 15 с.

Программа 392/34. Анализ БИХ-фильтров до 6-го порядка во временной области

C _x	ИП0	ИП7	÷	–	↑	↑	ИП8	×	ИП1		
+	P0	→	ИП9	×	ИП2	+	P1	→	ИПA		

$$\begin{array}{ccccccc} X & ИП3 & + & П2 & \rightarrow & ИПВ & X \\ \rightarrow & ИПС & X & ИП5 & + & П4 & \rightarrow \\ + & П5 & C_x & П6 & XY & - & С/П \end{array} \quad \begin{array}{ccccc} ИП4 & + & П3 \\ ИПД & X & ИП6 \\ С/П & БП \end{array}$$

Инструкция: $a_n = P0, a_{n-1} = P1, a_{n-2} = P2, \dots, a_{n-6} = P6, b_m = P7, b_{m-1} = P8, \dots, b_{m-6} = PД$ (B/O) $C/П PX = C_0, C/П PX = C_1, \dots$

Контрольный пример: для функции $K(z) = (z^3 + 3z^2 + 3z + 1)/(100z^3 - 200z^2 + 100z - 50)$ получим $C_k = g(k) = 0,01; 0,05; 0,12; 0,205; 0,315; 0,485; 0,7575; \dots$

Для моделирования простых цифровых фильтров, обычно выполняемого на ЭВМ, можно использовать программируемый микрокалькулятор. При моделировании трансверсальных КИХ-фильтров необходимо запоминать M предыдущих значений входной последовательности и хранить в памяти $M + 1$ весовых коэффициентов импульсной характеристики. С учетом буферного регистра на микрокалькуляторе с P регистрами памяти можно моделировать произвольный трансверсальный фильтр порядка $M \approx (P - 2)/2$.

Программа 393/21. Моделирование произвольного трансверсального фильтра порядка $M \leq 6$

$$\begin{array}{cccccccccccc} \rightarrow & \uparrow & F8 & X & \rightarrow & \uparrow & F7 & ПП & P5 & F6 & ПП & P5 \\ F5 & ПП & P5 & F4 & ПП & P5 & F3 & ПП & R5 & F2 & X & \leftarrow \\ XY & \rightarrow & + & C/П & БП & P0 & X & \leftarrow & XY & \rightarrow & + & \rightarrow \\ \uparrow & & & & & & & & & & & \end{array}$$

Инструкция: ($C_0 = P2, C_1 = P3, C_2 = P4, C_3 = P5, C_4 = P6, C_5 = P7, C_6 = P8$) $x(n) = PX$ (B/O) $C/П PX = y(n)$.

Программа 394/34. Моделирование произвольного трансверсального фильтра порядка $M \leq 7$

$$\begin{array}{ccccccccccc} XY & \rightarrow & XY & ИПД & ИП7 & X & ИПС & ПД & \rightarrow & ИПВ \\ ПС & \rightarrow & ИПА & ПВ & \rightarrow & ИП9 & ПА & \rightarrow & ИП8 & П9 \\ \rightarrow & XY & П8 & ИП1 & X & + & ИП2 & ИП9 & X & + \\ ИП3 & ИПА & X & + & ИП4 & ИПВ & X & + & ИП5 & ИПС \\ X & + & ИП6 & ИПД & X & + & XY & ИП0 & X & + \\ С/П & БП & & & & & & & & \end{array}$$

Инструкция: ($C_0 = P0, C_1 = P1, \dots, C_7 = P7$) $0 = PY = PZ = PT, x(0) = PX$ B/O $C/П PX = y(0), x(1) = PX$ $C/П PX = y(1)$... (нулевые отсчеты вводить только нажатием клавиши C_x !).

Контрольный пример: для $C_0 = 0,152; C_1 = 0,184; C_2 = 0,167; C_3 = 0,135; C_4 = 0,103; C_5 = 0,075; C_6 = 0,053$ при $x(n) = 1; 1; 1; 1; -1; -1; 1; 1; -1; -1; 1$ порядка 13 коэффициенты такого согласованного фильтра $C_0 = C_2 = C_4 = C_5 = C_8 = C_9 = C_{10} = C_{11} = C_{12} = 1$, а $C_1 = C_3 = C_6 = C_7 = -1$. Программная реализация такого фильтра на входном языке МК21 приведена в [20], а на входном языке МК34 отображается следующей программой.

Обычно коэффициенты КИХ-фильтров симметричны относительно центрального отсчета, соответствующего значению $i = (N - 1)/2$ при нечетном N и $i = N/2$ при четном. Это позволяет примерно вдвое уменьшить число требуемых регистров памяти и соответственно повысить предельный порядок M моделируемого фильтра. Если коэффициенты C_i являются немногозначными целыми числами, то их можно записать в текст программы, дополнительно повысив значение M . Например, при выполнении операции "скользящего" интегрирования, записываемого в дискретной форме $y(iT) = \sum_{j=n-M}^n x \times x(i - j)$, все $M + 1$ коэффициентов нерекурсивного фильтра равны единице. Другим примером является нерекурсивный фильтр, выделяющий кодовую последовательность Баркера [2] из ее смеси с помехой. Для последовательности $1; 1; 1; 1; 1; -1; -1; 1; 1; -1; -1; 1$ порядка 13 коэффициенты такого согласованного фильтра $C_0 = C_2 = C_4 = C_5 = C_8 = C_9 = C_{10} = C_{11} = C_{12} = 1$, а $C_1 = C_3 = C_6 = C_7 = -1$. Программная реализация такого фильтра на входном языке МК21 приведена в [20], а на входном языке МК34 отображается следующей программой.

Программа 394/21. Модель согласованного нерекурсивного фильтра

ПД	ИПВ	+	ИПА	ПВ	+	ИП9	ПА	+	ИП8
П9	+	ИП7	П8	+	ИП6	П7	-	ИП5	П6
-	ИП4	П5	+	ИП3	П4	+	ИП2	П3	-
ИП1	П2	+	ИП0	П1	-	ИПД	П0	ХҮ	С/П
БП									

Инструкция: $0 = P1 = P2 = \dots = PB = PC$ $x(0) = PX$ В/О С/П $PX = y(0)$, $x(1) = PX$ С/П $PX = y(1)$...

Контрольный пример: при вводе последовательности Баркера порядка 13 получим $y(n) = 1; 0; 1; 0; 1; 0; 1; 0; 1; 0; 1; 0; 1; 0; 13$.

При моделировании рекурсивных фильтров, рассчитанных методом билинейного преобразования по аналоговому прототипу с равным единице числителем передаточной функции $K(p)$ коэффициенты числителя функции $K_{\text{ц}}(z)$ равны целым членам биномиального разложения, что позволяет ввести их значения непосредственно в текст программы. В этом случае на программируемом микрокалькуляторе с Π регистрами памяти возможно моделирование цифровых фильтров максимального порядка $M \approx (\Pi - 1)/3$ (точное значение M зависит от особенностей работы операционного устройства).

Эвено цифрового рекурсивного ФНЧ 2-го порядка с передаточной функцией $K_{\text{ц}}(z) = (1 + 2z^{-1} + z^{-2}) / (b_0 + b_1z^{-1} + b_2z^{-2})$ моделируется следующей программой.

Программа 395/21. Модель цифрового ФНЧ 2-го порядка

↑	←	XY	+	+	XY	←	+	←	↑	F4	X
←	↑	F3	X	→	→	XY	←	-	↑	←	-
↑	F2	÷	↑	→	F1	←	←	←	F1	C/П	БП
P0											

Инструкция: очистить стек памяти; ($b_0 = P2$, $b_1 = P3$, $b_2 = P4$) $x(0) = PX$ (В/О) С/П $PX = y(0)$, $x(1) = PX$ С/П $PX = y(1)$... $x(k) = PX$ С/П $PX = y(k)$.

Контрольный пример. (при $b_0 = 10$; $b_1 = -2$; $b_2 = -0,5$ и вводе $x(n) = 1; 1; 1; \dots$ получим $y(n) = 0,1; 0,32; 0,469; 0,5098; \dots$

Для моделирования этой программой эвена ФВЧ 2-го порядка с передаточной функцией $K_{\text{ц}}(z) = (1 - 2z^{-1} + z^{-2}) / (b_0 + b_1z^{-1} + b_2z^{-2})$ операторы $++$ с адресами 04 и 05 следует заменить фрагментом $- + / -$.

Цифровой резонатор с передаточной функцией $K_{\text{ц}}(z) = (1 - z^{-2}) / (b_0 + b_1z^{-1} + b_2z^{-2})$ моделируется следующей программой.

Программа 396/21. Цифровая модель резонатора

↑	←	←	-	←	↑	F3	X	XY	←	+	↑
F4	X	↑	→	→	+	↑	F2	÷	↑	→	→
→	XY	C/П	БП	P0							
P0											

Инструкция: ($b_0 = P2$, $b_1/b_2 = P3$, $-b_2 = P4$) $x(0) = PX$ В/О С/П $PX = y(0)$, $x(1) = PX$ С/П $PX = y(1)$... $x(k) = PX$ С/П $PX = y(k)$.

Контрольный пример: при $b_0 = 35$; $b_1 = -55$; $b_2 = 33$ для $x(n) = 10; 0; 0; 0; \dots$ получим $y(n) = 0,2857142; 0,4489795; 0,1504372; -0,1869222; \dots$

Цифровой ФНЧ 3-го порядка с передаточной функцией $K_{\text{ц}}(z) = (1 + 3z^{-1} + 3z^{-2} + z^{-3}) / (b_0 + b_1z^{-1} + b_2z^{-2} + b_3z^{-3})$ моделируется следующей программой.

Программа 397/21. Цифровая модель ФНЧ 3-го порядка

↑	→	+	→	↑	F5	X	P7	→	↑	F7	-
+	+	P7	F4	XY	→	XY	X	XY	→	XY	-
+	+	P8	F3	XY	→	XY	X	XY	→	→	XY
-	↑	F7	+	↑	F8	+	↑	F2	÷	↑	→
F1	C/П	БП	P0								
P0											

Инструкция: очистить стек памяти; ($b_0 = P2$, $b_1 = P3$, $b_2 = P4$, $b_3 = P5$) $x(0) = PX$ B/O C/P $PX = y(0)$, $x(1) = PX$ C/P $PX = y(1)$... $x(k) = PX$ C/P $PX = y(k)$.

Контрольный пример: при $b_0 = 100$; $b_1 = -10$; $b_2 = 5$; $b_3 = -2$ и воздействии $x(n) = 1; 0,5; 0,2; 0,1; \dots$ получим $y(n) = 0,01; 0,036; 0,0501; 0,03541; \dots$

Эту программу несложно модифицировать для моделирования фильтров 3-го порядка с простым или кратным нулем в начале координат.

Цифровой рекурсивный ФНЧ 4-го порядка с передаточной функцией $K_{\Pi}(z) = (1 + 4z^{-1} + 6z^{-2} + 4z^{-3} + z^{-4}) / (b_0 + b_1z^{-1} + b_2z^{-2} + b_3z^{-3} + b_4z^{-4}) = (1 + 2z^{-1} + z^{-2}) \times (1 + 2z^{-1} + z^{-2}) / (b'_0 + b'_1z^{-1} + b'_2z^{-2}) (b''_0 + b''_1z^{-1} + b''_2z^{-2})$ реализуем либо одним звеном 4-го порядка (программа 398/21 или 400/34) или каскадным соединением двух звеньев 2-го порядка (программа 399/21).

Программа 398/21. Цифровая модель ФНЧ 4-го порядка

\uparrow	\rightarrow	XY	ПП	8	+	ПП	8	ПП	8	\uparrow	F7
\rightarrow	XY	P7	F6	ПП	7	\leftarrow	\uparrow	\rightarrow	F5	ПП	7
F8	\uparrow	F3	ПП	7	\uparrow	F8	\rightarrow	P7	XY	P8	F4
X	\uparrow	F8	+	\uparrow	F2	\div	P8	C/P	X	\uparrow	F7
+	P7	B/O	+	+	+	+	XY	\rightarrow	XY	+	B/O

Инструкция: ($b_0 = P2$, $-b_1 = P3$, $-b_2 = P4$, $-b_3 = P5$, $-b_4 = P6$) $x(0) = PX$ B/O C/P $PX = y(0)$, ... $x(k) = PX$ B/O C/P $PX = y(k)$. Время счета около 20 с.

Контрольный пример: $b_0 = 100$; $b_1 = -40$; $b_2 = -6$; $b_3 = 2$; $b_4 = 0,25$ для $x(n) = 1; 1; 1; \dots$ получим $y(n) = 0,01; 0,054; 0,1322; 0,20592; \dots$

Программа 399/21. Цифровая модель каскада из двух ФНЧ 2-го порядка

ПП	4	F3	X	P8	F4	ПП	РВП	F2	\div	ПП	4
F6	X	P8	F7	ПП	РВП	F5	\div	\uparrow	\leftarrow	\leftarrow	F1
C/P	БП	P0	\uparrow	\leftarrow	XY	+	+	XY	\leftarrow	+	\leftarrow
\uparrow	B/O	XY	\leftarrow	XY	X	XY	\rightarrow	\rightarrow	XY	-	\uparrow
F8	-	\uparrow	B/O								

Инструкция: ($b'_0 = P2$, $b'_1 = P3$, $b'_2 = P4$, $b''_0 = P5$, $b''_1 = P6$, $b''_2 = P7$) $x(0) = PX$ B/O C/P $PX = y(0)$, $x(1) = PX$ C/P $PX = y(1)$... $x(k) = PX$ C/P $PX = y(k)$.

Контрольный пример: при $b'_0 = b''_0 = 10$; $b'_1 = b''_1 = -2$; $b'_2 = b''_2 = -0,5$ для $x(n) = 1; 1; 1; \dots$ получим $y(n) = 0,01; 0,054; 0,1322; \dots$

Составление подобных программ упрощается при использовании микрокалькулятора с входным языком МК34.

Программа 400/34. Цифровая модель ФНЧ 4-го порядка

ИП8	ИП7	П8	4	X	+	ИП6	П7	6	X	
+	ИП5	П6	4	X	+	ХҮ	П5	+	ИПС	
ИП4	X	-	ИПВ	ПС	ИП3	X	-	ИПА	ПВ	
ИП2	X	-	ИП9	ПА	ИП1	X	-	ИП0	\div	
П9	C/P	БП								

Инструкция: ($b_0 = P0$, $b_1 = P1$, $b_2 = P2$, $b_3 = P3$, $b_4 = P4$) $x(0) = PX$ B/O C/P $PX = y(0)$, $x(1) = PX$ C/P $PX = y(1)$... $x(k) = PX$ C/P $PX = y(k)$. Время счета около 12 с.

В качестве примера применения программ рассмотрим расчет и моделирование цифрового ФНЧ 4-го порядка с полосой пропускания 1 кГц при допустимой неравномерности затухания не более 0,5 дБ и частоте дискретизации 20 кГц. Определив границу полосы пропускания аналогового прототипа $\Omega_{\Pi} = \text{tg}(2\pi 10^3 / (2 \cdot 2 \cdot 10^4)) = 0,1583846$ по передаточной функции фильтра Чебышева $K(s) = 1 / (0,94035s^2 + 0,32972s + 1) \times (2,8064s^2 + 2,37565s + 1)$, после денормировки частоты прототипа (подставив $p = s/0,1583846$) находим $K(p) = 1 / (111,8734p^2 + 14,99977p + 1)(37,48566p^2 + 2,082403p + 1)$. Выполнив с помощью программы 375/21 или 376/34 замену $p = (z - 1) / (z + 1)$

и умножив многочлены с помощью программы 377/21 или 378/34 (при использовании программ, подобных 399/21, в умножении нет необходимости), получим $K(z) = (1 - z^{-1})^4 / (5187,466 - 18326,73z^{-1} + 24806,7z^{-2} - 15214,45z^{-3} + 3862,999z^{-4})$. По вычисленным значениям коэффициентов b_i , с помощью программы 397/21 или 399/34 для $x(n) = 1; 1; \dots; 1; \dots$ получим переходную характеристику фильтра $h(n) = 1,927723 \cdot 10^{-4}; 1,644904 \cdot 10^{-3}; 7,00991 \cdot 10^{-3}; \dots; h(10) = 0,5855593; \dots$

По приведенным или подобным им программам можно исследовать влияние округления коэффициентов цифрового фильтра (влияние разрядности) на его характеристики и решить другие практические важные задачи.

Процесс моделирования реакции фильтра на заданную входную последовательность облегчается при дополнении программной модели цифрового фильтра фрагментом, автоматически генерирующим требуемое воздействие. Примеры таких фрагментов-генераторов для наиболее распространенных видов тестовых последовательностей приведены в гл. 2. Вычисление последовательности $u(n)$ для цифрового фильтра, построенного по аналоговому прототипу, обеспечивает определение временной характеристики аналогового прототипа при дискретизации входного сигнала. Это можно с успехом использовать для построения временных характеристик аналоговых линейных и, в особенности, нелинейных избирательных цепей, включая автогенераторы. Примеры подобного цифрового моделирования аналоговых цепей, и в частности моделирование процесса установления колебаний в автогенераторах, рассмотрены в [20].

Для иллюстрации приведем лишь модель автогенератора с прерывистой генерацией, эквивалентная схема которого показана на рис. 80, а, а нелинейные свойства активного компонента отображены зависимостью $i(u_1) = S_0 u_1 / \sqrt{1 + u_1^2}$. По проводимой ниже программе вычисляют $i(u_1)/S_0$ и поэтому значение S_0 учитывают при расчете коэффициентов передаточной функции цифрового резонатора $b_0 = (1 + \omega_p^2 + \omega_p d) / (\omega_p \times d R S_0)$, $b_1 = 2(\omega_p^2 - 1) / (\omega_p d R S_0)$, $b_2 = (1 + \omega_p^2 - \omega_p d) / (\omega_p d R S_0)$, где $\omega_p = 1 / \sqrt{LC}$, $d = 1/Q$. Изменение напряжения смещения u_c на конденсаторе C_q за интервал дискретизации T учитывается выражением $u_c(n) = u_c(n-1) + (u_c(n) - u_c(n-1)) (1 - \exp(-T/\tau)) \approx u_c(n-1) + (u_c(n) - u_c(n-1)) T/\tau$, где $\tau = \tau_{\text{зар}} = C_q R_{\text{пр}}$, если $u_1(n) - u_c(n-1) > 0$ или $\tau = \tau_{\text{раз}} = C_q R_q$ при $u_1(n) - u_c(n-1) < 0$, где $R_{\text{пр}}$ — сопротивление открытого диода D .

С учетом принятых приближений процессы в рассматриваемой цепи моделируются следующей программой.

Программа 401/34. Цифровая модель автогенератора

ИП3	XY	ИП5	-	ПА	$x < 0$	08	ИП4	X	ИП5	
+		ИП6	\uparrow	x^2	1		+	$\sqrt{\quad}$	\div	ПД
ИП7	-	ИП9	ИП2	X	-		ИП8	P9	ИП1	X
-		ИП0	\div	P8	ИП6	P7	ИПД	P6	ИП8	C/P
БП										

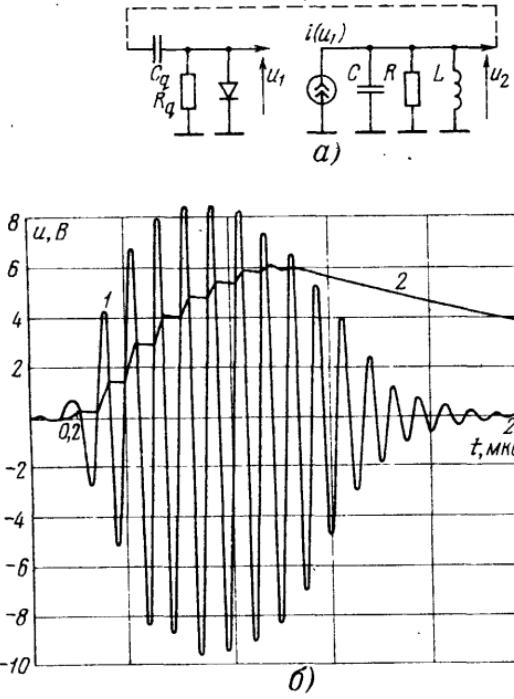


Рис. 80

Инструкция: $(b_0 = P0, b_1 = P1, b_2 = P2, T/\tau_{\text{зар}} = P3, T/\tau_{\text{раз}} = P4) u_c(0) = P5, i(-1) = P6, i(-2) = P7, u_2(-1) = P8, u_2(-2) = P9, u_1(0) = PX$ (B/O) С/П $PX = P8 = u_2(0)$ С/П $PX = u_2(1) \dots$ С/П $PX = u_2(k)$. Значение постоянной составляющей $u_c(n)$ хранится в регистре 5.

Контрольный пример: при $Q = 5; f_p = 10 \text{ МГц}; R = 1 \text{ кОм}; S_0 = 10 \text{ мСм}; \tau_{\text{зар}} = 0,1 \text{ мкс}; \tau_{\text{раз}} = 2,5 \text{ мкс и } T = 10 \text{ нс}$, предварительно вычислив $\omega_p = \sqrt{\omega_p^2 + \omega_p d} / (\omega_p dRS_0) = 1,8013; b_1 = 2(\omega_p^2 - 1) / (\omega_p^2 \times dRS_0) = -2,7528; b_2 = (1 + \omega_p^2 - \omega_p d) / (\omega_p^2 dRS_0) = 1,6013$, приняв начальные условия $0 = P5 = P6 = P7 = P8 = P9$ и $u_1(0) = 0,01$, получим результаты, показанные графически на рис. 80, б (где зависимости $u_2(t)$ и $u_c(t)$ показаны соответственно кривыми 1 и 2), свидетельствующие о возникновении прерывистой генерации. Цепь обратной передачи реализуется сохранением в регистре X значения $u_2(k)$, принимаемого при следующем выполнении программы в качестве напряжения $u_1(k+1)$.

Подобная приближенная модель (как и модель на входном языке MK21 [20]) позволяет качественно оценить процессы в исследуемой цепи.

Глава 7

РАСЧЕТ УСТРОЙСТВ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

7.1. Расчет эквивалентных параметров проводников

Иногда приходится учитывать распределенные параметры проводников, образующих или соединяющих компоненты цепи передачи сигнала, вычисляя их эквивалентные со средоточенные параметры (в частности, индуктивность и емкость), зависящие от материала и конфигурации проводников и заданных рабочих условий (например, частоты сигнала).

В большинстве случаев эквивалентные параметры проводников типовых конфигураций целесообразно вычислять в обычном режиме по формулам, приведенным в справочниках. Применение программируемого режима целесообразно при необходимости решения уравнений, расчетах по сложным формулам и аппроксимации функциональных зависимостей.

Например, индуктивность (в микрогенри) круглого прямого провода длиной l и диаметром d (размеры в миллиметрах) вычисляют по формуле

$$L = 2 \cdot 10^{-4} l (\ln(4l/d) - \theta), \quad (7.1)$$

где $\theta = 1 - 0,25\mu$ (для немагнитных материалов $\theta = 0,75$) на низких частотах и стремится к единице при повышении частоты, а μ — относительная магнитная проницаемость материала провода. Для коротких проводов длиной $l < 100d$ коэффициент θ в этой формуле дополняют слагаемым $d/2l$.

Для обеспечения требуемой индуктивности при заданной длине провода в соответствии с формулой (7.1) необходим диаметр провода $d = 4l/\exp(5 \cdot 10^3 L/l + \theta)$, а при заданных значениях L и d требуемая длина провода $l = 5 \cdot 10^3 L / (\ln(4l/d) - \theta)$ может быть вычислена методом простых итераций с прекращением вычислений, когда модуль разности двух очередных значений правой части уравнения становится меньшим наперед заданного малого числа ϵ . Эти вычисления несложно выполнить в обычном режиме, но при необходимости многократных вычислений целесообразно использовать программируемый режим.

Программа 402/21. Вычисление L, l и d круглого провода

F6	\uparrow	$x \neq 0$	F7	F7	$x \neq 0$	P5	\div	4	\times	ln	\uparrow
F4	ПП	C_x	F6	$-$	x^2	XY	P6	F5	$-$	$x < 0$	P0
F6	С/П	F6	\times	P8	С/П	ПП	C_x	F4	$+$	e^x	\uparrow
F6	XY	\div	4	\times	P7	С/П	F7	P6	БП	P0	$-$
5	ВП	3	\div	\uparrow	F8	$x \neq 0$	P,	XY	\div	\uparrow	B/O

Инструкция: $l = P6$, $d = P7$, $L = P8$ (вместо неизвестного значения x вводят 0), $\theta = P4$, $e^2 = P5$ В/О С/П $PX = x$.

Программа 403/34. Вычисление L , l и d круглого провода

ИП9	$x = 0$	08	ПП	42	x	П9	С/П	ИП7	$x \neq 0$
26	\div	5	ВП	3	x	ИП5	$+$	e^x	ИП7
XY	\div	4	x	П8	С/П	ИП8	П7	ПП	42
ИП9	XY	\div	П7	$-$	x^2	ИП6	$-$	$x < 0$	28
ИП7	C/П	ИП7	\uparrow	ИП8	4	ИП6	\div	ln	ИП5
$-$	5	ВП	3	\div	B/O				

Инструкция: $l = P7$, $d = P8$, $L = P9$ (вместо неизвестного значения x ввести 0), $\theta = P5$, $e^2 = P6$ В/О С/П $PX = x$.

Контрольный пример: при $l = 1000$ мм; $d = 0,5$ мм; $\theta = 0,75$ получим $L = 1,647439$ мкГн; при указанных значениях l и L получим $d = 0,5$ и при указанных значениях d и L и $e = 10^{-3}$ получим $l = 1000$ мм.

Эти программы и формула (7.1) пригодны также для расчета параметров одновитковых петель, периметр которых значительно больше диаметра провода, при $\theta = 2,451$ для круглого, $\theta = 2,561$ для правильного восьмиугольного, $\theta = 2,636$ для правильно-го шестиугольного, $\theta = 2,712$ для правильного пятиугольного, $\theta = 2,853$ для квадратного и $\theta = 3,197$ для равностороннего треугольного витков на низких частотах.

Программируемый режим целесообразен и при расчетах по громоздким формулам. В качестве примера рассмотрим вычисление взаимной индуктивности (в микрогенри): $M = 2 \cdot 10^{-4} (2l_1 \ln(A/h) + (l_1 + l_2) \ln(A/B) + C - D)$, где $A = l_1 + l_2 + D$, $B = l_2 - l_1 + C$, $D = ((l_1 + l_2)^2 + h^2)^{1/2}$, $C = ((l_1 - l_2)^2 + h^2)^{1/2}$, для двух параллельных проводов с длинами $2l_1$ и $2l_2$, расположенными на расстоянии h (все размеры в миллиметрах) с центрами на перпендикуляре к проводам ($l_2 \geq l_1$).

Программа 404/21. Вычисление взаимоиндуктивности параллельных проводов

F8	\uparrow	F7	$+$	P2	x^2	\leftarrow	F7	$-$	P3	x^2	\uparrow
F6	x^2	XY	$+$	$\sqrt{-}$	P5	\rightarrow	$+$	$\sqrt{-}$	\uparrow	F2	$+$
P4	F5	XY	$-$	P5	F3	$+$	\uparrow	F4	\div	ln	\uparrow
F2	X	P2	F4	\uparrow	F6	\div	ln	\uparrow	F7	X	2
X	\uparrow	F2	$-$	\uparrow	F5	$+$	5	BП	3	\div	C/П

Программа 405/34. Вычисление взаимоиндуктивности параллельных проводов

6	П0	ИП8	ИП7	$/-$	П7	$+$	\uparrow	x^2	ИП6
x^2	$+$	$\sqrt{-}$	КП0	$+$	КП0	L0	02	ИП6	\div
ln	ИП7	X	ИП7	ИП8	$+$	ИП1	ИП4	\div	ln
X	$+$	$+$	ИП5	$+$	ИП2	$-$	5	BП	3
\div	C/П	БП							

Инструкция к обеим программам: ($h = P6$, $l_1 = P7$, $l_2 = P8$) В/О С/П $PX = M$.

Контрольный пример: при $l_1 = 100$ мм; $l_2 = 500$ мм; $h = 10$ мм получим $M = 0,200156$ мкГн (время счета около 20 с).

При расчете параметров проводников часто используют nomogramмы, графики и таблицы для аппроксимации зависимостей параметров от геометрических размеров и рабочих условий. В этом случае программируемый микрокалькулятор позволяет избежать обращения к справочникам, но если не удается найти простую аппроксимацию, обеспечивающую требуемую точность расчета во всем интервале изменения аргумента, то последний целесообразно разбивать на несколько частей, составляя аппроксимирующие формулы для каждой из них.

В качестве примера аппроксимируем известную формулу для вычисления индуктивности однослойной катушки $L = Fn^2d$, где n – число витков, $F = \pi^2(d/l)k$, l – длина и d – диаметр катушки (размеры в миллиметрах, индуктивность в микрогенри), а зависимость $k = k(d/l)$ в справочниках задают в виде таблиц или графиков.

При малых значениях $d/l = x$ коэффициент k можно аппроксимировать рядом $k = 1 + 4x/3\pi + x^2/8 - x^4/64 + \dots$, но при увеличении аргумента x сходимость этого ряда быстро ухудшается. Поэтому разобьем интервал x на несколько частей и попытаемся с помощью табличных данных и микрокалькулятора подобрать простые аппроксимационные формулы для каждого участка интервала.

Так как при $x = 0$ коэффициент $k = 1$, то при малых значениях x целесообразно использовать формулу вида $k = 1/(1 + ax)$. С помощью микрокалькулятора после нескольких проб находим аппроксимацию $k \approx 1/(1 + 0,45x)$, обеспечивающую вычисление k с погрешностью менее 1 % в интервале $0 < x < 4$. Подберем подобным образом выражение $k = 1/(1,33 + 0,36x)$ с погрешностью менее 1 % в интервале $4 < x < 10$ и при необходимости выражения для более широкого интервала значений аргумента, удобные при составлении программ. В начальной части подобных программ необходимо ввести фрагмент, выбирающий нужную аппроксимацию в зависимости от значения аргумента.

Программа 406/21. Вычисление индуктивности однослоиной катушки с погрешностью менее 1 % при $d/l < 10$

π	\uparrow	F4	\times	1	0	\div	x^2	\uparrow	F7	XY	\times
P2	F8	\div	4	$-$	$x < 0$,	F1	1	0	0	XY
\div	4	5	БП	F6	F1	1	3	3	XY	\div	3
6	$+$	$1/x$	\uparrow	F2	\times	C/P	БП	P0			

Программа 407/34. Вычисление индуктивности однослоиной катушки с погрешностью менее 1 % при $d/l < 10$

ИП7	ИП8	\div	P0	4	$-$	$x < 0$	16	4	5
\uparrow	1	0	0	БП	22	3	6	\uparrow	1
3	3	ИП0	\div	$+ 1/x$	π	1	0	\div	
ИП4	\times	x^3	\times	ИП7	\times	C/P	БП		

Инструкция к обеим программам: ($n = P4$, $d = P7$, $l = P8$) (B/O) C/P PX = L.

Контрольный пример: при $d = 100$ мм; $l = 100$ мм; $n = 100$ получим $L = 680,6623$ мкГн; при $d = 500$ мм; $l = 100$ мм; $n = 100$ получим $L = 7883,07$ мкГн.

7.2. Расчет параметров линий передачи

Рассмотрим расчет электрических параметров линий передачи по их геометрическим размерам при распространении поперечных или квазипоперечных электромагнитных волн. При отсутствии специальных оговорок в расчетных формулах физические величины будем выражать в следующих единицах измерения: волновое сопротивление Z_0 в омах, фазовую постоянную β в радианах на метр, постоянную затухания α в неперах на метр, частоту в мегагерцах и геометрические размеры в миллиметрах.

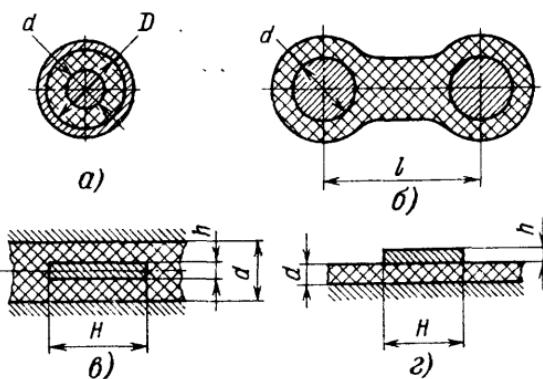


Рис. 81

1. Коаксиальная линия передачи (рис. 81, a) с малыми потерями (выполненная из меди) имеет практически вещественное волновое сопротивление

$$Z_0 = 60 \ln(D/d) / \sqrt{\epsilon}, \quad (7.2)$$

где ϵ – относительная диэлектрическая проницаемость заполнения, и постоянную распространения с составляющими

$$\beta = \pi f \sqrt{\epsilon} / 150, \quad (7.3)$$

$$\alpha = (1/D + 1/d) \sqrt{f} / 24Z_0 + (\beta \operatorname{tg} \delta)/2. \quad (7.4)$$

Распространение в коаксиальной линии только поперечной электромагнитной волны, для которой справедливы формулы (7.2) – (7.4), обеспечивают выполнением условия

$$f < 6 \cdot 10^5 / (\pi(D+d)\sqrt{\epsilon}). \quad (7.5)$$

Кроме того, при оценке затухания в линии предполагается выполнение условия $\alpha \ll d$, где α – глубина проникновения тока в проводники линии. Поэтому формула (7.4) обеспечивает достаточную для практических целей точность вычисления при условии $f \gg 1/d^2$.

Автоматизацию вычислений электрических параметров рассматриваемой линии обеспечивают следующие программы.

Программа 408/21. Вычисление параметров коаксиальной линии по ее геометрическим размерам

P6	F3	↑	F2	÷	ln	6	0	x	↑	F4	✓
÷	P8	C/Π	F6	↑	F4	✓	x	↑	π	x	1
5	0	÷	C/Π	↑	F5	x	2	÷	←	F2	1/x
↑	F3	1/x	+	↑	F6	✓	x	↑	F8	÷	2
4	÷	↑	→	+	C/Π	P6	БП	2			

Инструкция: ($d = P2$, $D = P3$, $\epsilon = P4$, $\operatorname{tg}\delta = P5$) $f_1 = PX$ B/O C/Π $PX = Z_0$ C/Π $PX = \beta$ C/Π $PX = \alpha$, $f_2 = PX$ C/Π $PX = \beta$ C/Π $PX = \alpha$...

Программа 409/34. Вычисление параметров коаксиальной линии

P4	ИП1	ИП0	÷	ln	6	0	x	ИП2	✓
÷	П5	C/Π	ИП4	ИП2	✓	x	π	x	1
5	0	÷	C/Π	ИП3	x	2	÷	ИП0	1/x
ИП1	1/x	+	ИП4	✓	x	2	4	÷	ИП5
÷	+	C/Π	P4	БП	13				

Инструкция: ($d = P0$, $D = P1$, $\epsilon = P2$, $\operatorname{tg}\delta = P3$) $f_1 = PX$ B/O C/Π $PX = Z_0$ C/Π $PX = \beta$ C/Π $PX = \alpha$, $f_2 = PX$ C/Π $PX = \beta$ C/Π $PX = \alpha$...

Контрольный пример: при $d = 0,72$ мм; $D = 4,8$ мм; $\epsilon = 2,3$; $\operatorname{tg}\delta = 4 \cdot 10^{-4}$ на частоте $f = 1$ МГц получим $Z_0 = 75,05543$ Ом; $\beta = 0,03176307$ рад/м; $\alpha = 8,930427 \times 10^{-4}$ Нп/м; на частоте $f = 100$ МГц получим $\beta = 3,176307$ рад/м; $\alpha = 9,502163 \times 10^{-3}$ Нп/м.

Теоретическая погрешность вычисления Z_0 и β для поперечных волн определяется округлением коэффициентов в формулах (7.2) и (7.3) и составляет около 0,02 %. Поэтому практически эти формулы можно считать точными, оценивая погрешность результата только по погрешностям исходных данных. Погрешность определения α существенно зависит от частоты, состояния поверхности и ряда других факторов. Поэтому выражение (7.4) в большей мере пригодно для сравнения затухания в линиях различных размеров при прочих равных условиях, чем для точного вычисления параметра α .

Иногда приходится рассчитывать размеры коаксиальной линии по заданным значениям Z_0 , α , ϵ и f . Для этого можно воспользоваться следующими программами, обеспечивающими вычисление $d = (1 + A)\sqrt{f}/(24Z_0(\alpha - \beta\operatorname{tg}\delta)/2))$, $D = d/A$, где $A = \exp(-Z_0\sqrt{\epsilon}/60)$, а значение β определено формулой (7.3).

Программа 410/21. Расчет размеров коаксиальной линии

P6	↑	π	x	↑	F3	✓	x	↑	F4	x	3
0	0	÷	↑	F5	XY	—	↑	F2	x	2	4
x	P8	F3	✓	6	0	÷	↑	F2	x	/-	e ^x
P7	1	+	↑	F6	✓	x	↑	F8	÷	C/Π	↑
F7	÷	C/Π	БП	P0							

Инструкция: ($Z_0 = P2$, $\epsilon = P3$, $\operatorname{tg}\delta = P4$, $\alpha = P5$) $f = PX$ (B/O) C/Π $PX = d$ C/Π $PX = D$.

Программа 411/34. Расчет размеров коаксиальной линии

P4	ИП0	ИП1	$\sqrt{\quad}$	x	6	0	\div	\uparrow	$/-$
e^x	P5	1	+	ИП4	$\sqrt{\quad}$	x	2	4	\div
ИП0	\div	ИП3	ИП4	ИП1	$\sqrt{\quad}$	x	π	x	3
0	0	\div	ИП2	x	-	\div	C/П	ИП5	\div
C/П БП									

Инструкция: ($Z_0 = P0$, $\epsilon = P1$, $\operatorname{tg}\delta = P2$, $\alpha = P3$) $f = PX$ (B/O) C/П $PX = d$ C/П $PX = D$.

Контрольный пример: при $Z_0 = 150 \Omega$; $\epsilon = 2,3$; $\operatorname{tg}\delta = 4 \cdot 10^{-4}$; $\alpha = 10^{-4} \text{ Нп/м}$; $f = 100 \text{ МГц}$ получим $d = -5,306665$, что свидетельствует о нереализуемости линии в связи с потерями в диэлектрике; приняв $\alpha = 0,01$, получим $d = 0,3033136 \text{ мм}$, $D = 13,44286 \text{ мм}$.

2. Двухпроводную линию используют практически только на относительно низких частотах. Волновое сопротивление такой линии в однородной диэлектрической среде без учета потерь

$$Z_0 = 4\pi^2 c \sqrt{\mu/\epsilon} \ln(l/d + \sqrt{(l/d)^2 - 1}), \quad (7.6)$$

где d – диаметр проводников, l – расстояние между ними, c – скорость света.

Для расчета реальных конструкций двухпроводных линий (рис. 81, б) в формуле (7.6) значение ϵ заменяют эффективным значением, лежащим в пределах $1 < \epsilon_{\text{эфф}} < \epsilon$. Это значение обычно оценивают эмпирически, что приводит к значительным погрешностям. С учетом $\mu = 1$, $d/l < 1$ формулу (7.6) упрощают, заменяя ее расчетным соотношением

$$Z_0 \approx 120 \ln(2l/d) / \sqrt{\epsilon_{\text{эфф}}}. \quad (7.7)$$

Для инженерной оценки погонного сопротивления двухпроводной линии, работающей в диапазоне частот, на которых не выполняется неравенство $\sigma \ll d$, можно воспользоваться асимптотически верным приближением

$$R' \approx 2 \sqrt{\mu\rho f / 4\pi^3 d^2 + 4\rho^2 / \pi^2 d^4},$$

где ρ – удельное сопротивление проводников.

В случае медных проводников

$$R' \approx (4d^2 f + 1)^{1/2} / (24d^2). \quad (7.8)$$

Зависимость волнового сопротивления от потерь возрастает с уменьшением частоты, и на относительно низких частотах может возникнуть необходимость в учете комплексного характера волнового сопротивления. В этом случае, пренебрегая потерями в диэлектрике, можно записать

$$Z = Z_0 \sqrt{1 - j48R'/Z_0 f \sqrt{\epsilon}} ;$$

$$\alpha + j\beta = \pi f \sqrt{\epsilon} \sqrt{-1 + j48R'/Z_0 f \sqrt{\epsilon}} / 150,$$

где Z_0 вычислено по формуле (7.7), а R' – по формуле (7.8).

Расчет по этим формулам автоматизирован следующими программами, где использован алгоритм извлечения корня из комплексного числа, реализованный программами 26/21 и 27/34.

Программа 412/21. Вычисление волнового сопротивления двухпроводной линии на низких частотах

P5	\uparrow	F2	x^2	x	8	x	2	+	\uparrow	F2	x^2
x^2	\div	\uparrow	F5	x^2	\div	\uparrow	F4	\div	P6	F3	\uparrow
F2	\div	2	x	ln	6	0	x	x^2	\uparrow	F4	\div
2	x	P7	\uparrow	F6	+	x	$\sqrt{\quad}$	\uparrow	F7	+	$\sqrt{\quad}$
\leftarrow	F7	-	$\sqrt{\quad}$	$/-$	\uparrow	\rightarrow	C/П	BП	P0		

Инструкция: ($d = P2$, $l = P3$, $\epsilon = P4$) $f = PX$ (B/O) C/П $PX = \operatorname{Re} Z(f)$, $PY = \operatorname{Im} Z(f)$.

Программа 413/21. Вычисление постоянной распространения двухпроводной линии на низких частотах

$$\begin{array}{ccccccccc}
 \uparrow & F4 & \sqrt{x} & x & \leftarrow & F2 & x^2 & x & P5 \\
 + & \leftarrow & F3 & \uparrow & F2 & \div & 2 & x & \ln 3 \\
 \uparrow & F5 & x & x^2 & \uparrow & \rightarrow & XY & \div & 4 \\
 + & P6 & 4 & - & P7 & \rightarrow & 9 & 5 & , 5 \\
 F7 & \sqrt{x} & x & P7 & F6 & \sqrt{x} & x & \uparrow & F7 \\
 & & & & & & & & C/P \quad B/P \quad P0
 \end{array}$$

Инструкция: ($d = P2$, $l = P3$, $\epsilon = P4$) $f = PX$ (B/O) $C/P \quad PX = \alpha$, $PY = \beta$.

Программа 414/34. Расчет параметров двухпроводной линии на низких частотах

$$\begin{array}{ccccccccc}
 P3 & IP0 & x^2 & x & P4 & 4 & x & 1 & + \quad IP1 \\
 IP0 & \div & 2 & x & \ln 3 & 0 & x & \times & IP5 \quad IP4 \\
 x & x^2 & \div & 4 & + & \sqrt{2} & + & \quad IP6 & 4 \\
 - & P7 & \sqrt{IP5} & 2 & x & IP2 & \sqrt{\div} & \quad IP5 \\
 x & \uparrow & /-/- & IP5 & IP6 & \sqrt{x} & C/P & IP6 & \sqrt{ } \\
 IP3 & IP2 & \sqrt{x} & \pi & x & 3 & 0 & 0 & \div \\
 x & BX & IP7 & \sqrt{x} & C/P & B/P & & &
 \end{array}$$

Инструкция: ($d = P0$, $l = P1$, $\epsilon = P2$) $f = PX$ (B/O) $C/P \quad PX = \operatorname{Re} Z(f)$, $PY = \operatorname{Im} Z(f)$ $C/P \quad PX = \alpha$, $PY = \beta$.

Контрольный пример: при $d = 2$ мм; $l = 8$ мм; $\epsilon = 4$; $f = 0,001$ МГц получим $Z = 159,1374 - j98,78296$ Ом; $\alpha = 3,3162 \cdot 10^{-5}$ Нп/м; $\beta = 5,342337 \cdot 10^{-5}$ рад/м.

3. Полосковые линии обычно используют для передачи электромагнитной энергии на небольшие расстояния, и при решении большинства практических задач достаточно оценить волновое сопротивление такой линии. Наиболее распространены симметричная (рис. 81, а) и несимметрическая (рис. 81, б) конструкции полосковых линий. Для симметричной линии с бесконечно тонким центральным проводником ($h \rightarrow 0$) известна [4] точная формула.

$$Z_0 = 29,976\pi K(x) / \sqrt{\epsilon} K(x') \approx 94,17 K(x) / \sqrt{\epsilon} K(x'), \quad (7.9)$$

где K – полный эллиптический интеграл 1-го рода аргумента $x = \operatorname{sech}(\pi H/(2d))$ или $x' = \sqrt{1 - x^2}$. Отношение $K(x)/K(x')$ можно вычислить с погрешностью менее 8×10^{-6} по формуле

$$\frac{K(x)}{K(x')} = \begin{cases} \ln(2(1 + \sqrt{x}) / (1 - \sqrt{x})) / \pi & \text{при } 1/\sqrt{2} \leq x \leq 1; \\ \pi / \ln(2(1 + \sqrt{x'}) / (1 - \sqrt{x'})) & \text{при } 0 \leq x \leq 1/2. \end{cases}$$

Программа 415/21. Вычисление волнового сопротивления симметричной полосковой линии с бесконечно тонким центральным проводником

$$\begin{array}{ccccccccc}
 F2 & \uparrow & \pi & x & e^x & P5 & \uparrow & F8 & - \quad P6 \quad x < 0 \\
 F5 & 1 & + & \uparrow & F5 & \sqrt{\div} & 2 & \div & \sqrt{ } \quad 1 \\
 2 & - & \div & B/P & F6 & F5 & x^2 & 1 & - \quad \sqrt{ } \quad \uparrow \quad F5 \\
 + & 2 & x & \ln & \uparrow & \pi & \div & \uparrow & F6 \quad x \geq 0 \quad P- \quad F1 \\
 1/x & \uparrow & F3 & \sqrt{\div} & \uparrow & F7 & x & C/P \quad B/P \quad P0
 \end{array}$$

Инструкция: ($H/d = P2$; $\epsilon = P3$; $94,17 = P7$; $(1 + \sqrt{2})^2 = 5,828426 = P8$) (B/O)
 $C/P \quad PX = Z_0$.

Программа 416/34. Вычисление волнового сопротивления симметричной полосковой линии с бесконечно тонким центральным проводником

$$\begin{array}{ccccccccc}
 IP0 & IP1 & \div & \pi & x & e^x & P3 & 2 & \sqrt{ } \quad 1 \\
 + & x^2 & - & P4 & x < 0 & 33 & 1 & IP3 & 1 \\
 IP3 & \sqrt{\div} & 2 & \div & \sqrt{ } & + & BX & 1 & - \\
 \div & B/P & 40 & IP3 & \uparrow & x^2 & 1 & + & \sqrt{ } \\
 2 & x & \ln & \pi & \div & P5 & IP4 & x \geq 0 & 52 \quad IP5 \\
 1/x & P5 & IP5 & IP2 & \sqrt{\div} & 9 & 4 & , & 1 \\
 7 & x & C/P & B/P & & & & &
 \end{array}$$

Инструкция: ($H = P0$, $d = P1$, $\epsilon = P2$) (B/O) C/P $PX = Z_0$.

При $H = 5$; $d = 0,5$; $\epsilon = 2,5$ получим $Z_0 = 5,70412 \text{ Ом}$, а при $H = 1$; $d = 5$; $\epsilon = 2,5$ получим $Z_0 = 96,7713 \text{ Ом}$.

Заметим, что во избежание чрезмерной операционной погрешности (или даже переполнения), возникающей при вычислениях для $H/d \gg 1$ за счет погрешности вычитания близких чисел $1 - \sqrt{x^2}$, в программах 414/21 и 416/34 сначала вычисляется значение $z = e^{\pi H} / (2d)$, которое сравнивается с числом $1 + \sqrt{2}$. Если $z < 1 + \sqrt{2}$, то

$$Z_0 = 94,17 \ln 2 ((\sqrt{(a^2 + 1)/2a} + 1) / (\sqrt{(a^2 + 1)/2a} - 1)) / \pi \sqrt{\epsilon},$$

иначе $Z_0 = 94,17 \pi (\sqrt{\epsilon} \ln(2(a^2 + \sqrt{a^4 - 1}))$. Погрешность Z_0 при вычислениях по приведенным формулам возрастает при увеличении толщины центрального проводника и уменьшении отношения H/d . Так, при $H/d = 10$ и $h/d = 0,01$ погрешность составляет около 1,2 % а при $h/d = 0,1$ возрастает до 13 %. При $H/d = 0,2$ и $h/d = 0,1$ погрешность превышает 100 %. Поэтому при $h/d > 0,001$ лучшее приближение дает [4] формула

$$Z_0 = 94,17 / (\sqrt{\epsilon} (x(H/d) + (\ln F(x)) / \pi)),$$

где $F(x) = (x + 1)^{x+1} / (x - 1)^{x-1}$, а $x = 1 / (1 - h/d)$. При $H/d \geq 0,35 (1 - h/d)$ и $h/d < 0,25$ погрешность расчета по этой формуле не превышает 1 %.

Вычисления по этой формуле реализованы следующими программами, в которые включен блок проверки погрешности, т. е. выполнения неравенств, при соблюдении которых погрешность не превышает 1 %. Если хотя бы одно из приведенных неравенств не выполняется, то после пуска программы на индикаторе высвечивается 0. При необходимости вычисления можно продолжить, нажав клавишу С/П, но погрешность результата в этом случае может оказаться значительной.

Программа 417/21. Определение волнового сопротивления симметричной полосковой линии

F3	↑	F4	-	P6	÷	P7	F2	↑	F6	÷	←
F6	0	,	3	5	X	↑	F2	-	x < 0	P5	F7
3	X	4	-	x ≥ 0	P/-	C _x	C/P	F7	1	+	2
-	P6	÷	X ^y	↑	F6	x ^z	X	ln	↑	π	÷
↑	→	+	↑	F5	√	÷	↑	F8	XY	÷	C/P

Инструкция: ($H = P2$, $d = P3$, $h = P4$, $\epsilon = P5$, $94,172 = P8$) B/O C/P $PX = Z_0$.

Программа 418/34. Определение волнового сопротивления симметричной полосковой линии

ИП1	↑	ИП2	-	ИП4	÷	ИП5	ИП0	ИП4	÷
P6	ИП4	0	,	3	5	X	ИП0	-	x < 0
28	ИП5	3	X	4	-	x ≥ 0	30	C _x	C/P
ИП5	1	+	↑	ln	X	ИП5	1	-	↑
ln	X	-	π	÷	ИП6	+	ИП3	√	X
9	4	,	1	7	2	XY	÷	C/P	БП

Инструкция: ($H = P0$, $d = P1$, $h = P2$, $\epsilon = P3$) (B/O) C/P $PX = Z_0$.

Для оценки точности результатов вычислений по этим программам сравним их с приведенными в [4] точными значениями Z_0 при $d = 1, \epsilon = 1$ в случаях:

1. $H = 8,86585$; $h = 0,01$. По приведенным программам получим $Z_0 = 10,00031$ с погрешностью 0,0032 %.

2. $H = 5,56278$; $h = 0,35$. После пуска программы на индикаторе высвечивается 0 и, следовательно, не гарантируется погрешность менее 1 %. При дополнительном пуске программы получим $Z_0 = 10,00027$ с погрешностью 0,003 %.

3. $H = 0,18936$; $h = 0,01$. После пуска программы высвечивается 0, а после повторного пуска нажатием клавиши С/П получим $Z_0 = 144,265$ с погрешностью 3,8 %.

4. $H = 0,06705$; $h = 0,35$. После пуска программы высвечивается 0, а после дополнительного нажатия клавиши С/П получим $Z_0 = 97,895$ с погрешностью около 2,1 %.

Если выполняется неравенство $l > 2d$, то в симметричной полосковой линии волны высших порядков практически отсутствуют. В этом случае фазовая постоянная определяется формулой

$$\beta \approx \pi f \sqrt{\epsilon} / 150. \quad (7.10)$$

Для оценки затухания в полосковой симметричной линии с медным полосковым проводником практически пригодно приближение

$$\alpha = k \sqrt{f/HZ_0} + \beta \operatorname{tg} \delta / 2, \quad (7.11)$$

где k зависит от геометрических размеров линии; для грубой оценки можно принять $k = 0,2$.

Вычисления по этим формулам можно включить в программу 417/34, а при использовании микрокалькулятора с входным языком МК21 составить отдельную программу.

Волновое сопротивление несимметричной полосковой линии (рис. 81, г) [4]

$$Z_0 = \begin{cases} \frac{376,687}{\pi \sqrt{2} \sqrt{\epsilon + 1}} \left[\ln\left(\frac{8d}{H_c}\right) + \left(\frac{H_c}{d}\right)^2 \frac{1}{32} - \frac{(\epsilon - 1)}{2(\epsilon + 1)} \left(\ln\frac{\pi}{2} + \frac{1}{\epsilon} \ln\frac{4}{\pi} \right) \right] \text{при } H < d, \\ \frac{376,687}{2 \sqrt{\epsilon}} \left[\frac{H_c}{2d} + 0,441 + 0,082 \frac{(\epsilon - 1)}{\epsilon^2} + \frac{(\epsilon + 1)}{2\pi\epsilon} (1,451 + \ln(H_c/2d + 0,94)) \right]^{-1} \end{cases}$$

при $H > d$,
(7.12)

где $H_c = H + h(1 + \ln(2x/h))/\pi$, а $x = d$ при $H > d/(2\pi) > 2h$ и $x = 2\pi H$ при $d/2\pi > H > 2h$.

Эта формула обеспечивает хорошее совпадение с экспериментальными данными [4] при $2 < \epsilon < 10$ и $0,1d < H < 5d$. Вычисления по этой формуле автоматизируются по следующим программам (при использовании микрокалькуляторов первых выпусков в процессе выполнения первых двух из этих программ возможно переполнение регистров кольцевого стека памяти при вычислении логарифма).

Программа 419/21. Вычисление Z_0 несимметричной полосковой линии при $H < d$

F5	1	-	2	÷	+ P8	÷	← F5	÷	↑ F7
X ^y	2	X	ln	↑	→ X	← F6	↑ F4	÷	
ln	1	+	↑ F4	X	↑ π	÷ ↑	F2	+	
↑	F3	÷ 8	÷ x ²	4	× XY	ln	-	↑	
→	-	↑ F8	√	÷ 4	2 ,	4 X	C/P		

Инструкция: ($H = P2$, $d = P3$, $h = P4$, $\epsilon = P5$, $2x = P6$, $\pi/4 = 0,7853981 = P7$) B/O C/P PX = Z₀.

Программа 420/21. Вычисление Z_0 несимметричной полосковой линии при $H > d$

F5	1/x	1	- X	6 ,	1	÷ ← F6	↑
F4	÷ ln	1	+	↑ F4	× ↑ F2	+	↑
F3	÷ ↑	← F7	X 4	+ ln ↑	F5 1/x		
X	+	↑ π	÷ ↑	→ + ↑	→ - ↑		
F8	+	↑ F5	√ X 3	7 7 XY	÷ C/P		

Инструкция: ($H = P2$, $d = P3$, $h/\pi = P4$, $\epsilon = P5$, $2x/\pi = P6$; $2,134 = P7$; $0,882 = P8$) B/O C/P PX = Z₀.

Программа 421/34. Вычисление волнового сопротивления несимметричной полосковой линии

ИП0	π	X 2	X	P4	ИП1	-	$x \geq 0$	12
ИП1	P4	ИП4 2	X	ИП2	÷ ln	1	+	
ИП2	X	π ÷	ИП0 +	ИП1	÷ P5	1		
-	x ≥ 0	62	ИП9 ИП5	ИПA	X 4	+	ln	
π	÷	↑ ИП3 ИП8	X +	ИПC	+	ИПС		
ИП3	÷	- ИП3 ÷	ИПB +	ИП5	+	÷		

БП	94	4	ИП5	8	÷	x^2	×	ВХ	ln
-	π	4	÷	ln	↑	ИП3	÷	-	2
ln	+	ИП3	1	+	П8	2	-	ИП8	÷
x	-	ИПД	x	ИП8	√	÷	C/P		

Инструкция: ($H = P0$; $d = P1$; $h = P2$; $\epsilon = P3$; $376,687 = P9$; $2,134 = PA$; $0,882 = PB$; $0,164 = PC$; $42,4 = PD$) В/О С/П $PX = Z_0$.

Контрольный пример: при $H = 1$; $d = 2$; $h = 0,1$; $\epsilon = 2,4$ (так как $H > d/2\pi$, то $x = d = 2$) по этим программам получим $Z_0 = 116,3575$ Ом, а при $H = 10$; $d = 0,5$; $h = 0,1$; $\epsilon = 2,4$ ($x = d = 0,5$) получим $Z_0 = 10,64091$ (или $10,63207$ – по программе 421/34).

Вычисления в программах 419/21 – 421/34 ведутся по формулам (7.12), преобразованным следующим образом.

$$Z_0 = \begin{cases} \frac{A}{\sqrt{1+\epsilon}} \left[4 \left(\frac{H_c}{8d} \right)^2 - \ln \left(\frac{H_c}{8d} \right)^2 - \left(\frac{\epsilon-1}{\epsilon+1} \right) \ln \left(2 \left(\frac{\pi}{4} \right)^{1-\frac{1}{\epsilon}} \right) \right] & \text{при } H < d, \\ \frac{B}{\sqrt{\epsilon}} \left[\frac{H_c}{d} + C + D \frac{\epsilon-1}{\epsilon^2} + \frac{\epsilon+1}{\pi\epsilon} \ln \left(K \frac{H_c}{d} + 4 \right) \right]^{-1} & \text{при } H > d, \end{cases}$$

где $H_c = H + h(1 + \ln(2x/h))/\pi$; $x = d$ при $H > d/(2\pi) > 2h$ или $x = 2\pi H$ при $d/2\pi > H > 2h$; $A = 376,687/(2\sqrt{2\pi}) \approx 42,4$; $B = 376,687$ (в программе 274/21 принято $B = 377$); $C = 0,882$; $D = 0,164$ (в программе 274/21 принято $D = 1/6,1$); $K = e^{1,451}/2$.

Составляющие постоянной распространения α и β для несимметричной полосковой линии можно вычислять по (7.10) и (7.11).

7.3. Расчет режима работы линий передачи

К типовым вычислительным задачам, связанным с расчетом режима работы линий передачи, можно отнести: расчет распределения токов и напряжений вдоль линии передачи, нагруженной на известную нагрузку; расчет модуля и фазы коэффициента отражения от известной нагрузки; расчет сопротивления нагрузки по известным КСВ и положению минимума напряжения или тока в линии и расчет входного сопротивления отрезка линии длиной l , нагруженного на известную нагрузку.

Распределение напряжения вдоль линии, нагруженной на сопротивление $Z_H = R_H + jX_H$, описывается выражением

$$u(x)/u_H = ((R_H \operatorname{ch}(\alpha x) + Z_0 \operatorname{sh}(\alpha x) - X_H \operatorname{sh}(\alpha x) \sin(\beta x)) + j(R_H \operatorname{sh}(\alpha x) + Z_0 \operatorname{ch}(\alpha x) + X_H \operatorname{ch}(\alpha x) \cos(\beta x)))/(R_H + jX_H). \quad (7.13)$$

Программа 422/34. Расчет распределения амплитуд и фаз напряжения вдоль нагруженной линии передачи

П9	ИП3	x	e^x	ПА	↑	$1/x$	+	П6	ИП1
x	ИПА	↑	$1/x$	-	П7	ИП0	x	+	ИП9
ИП4	x	П9	cos	x	ИП2	ИП7	x	ИП9	sin
x	-	ПВ	ИП1	x	ИП1	ИП7	x	ИП0	ИП6
x	+	ИП9	sin	x	ИП2	ИП6	x	ИП9	cos
x	+	ПС	ИП2	x	+	ПА	ИПС	ИП1	x
ИПВ	ИП2	x	-	ПВ	x^2	XY	x^2	+	√
ПД	÷	arccos	П9	ИПС	$x < 0$	80	ИП9	/-	П9
ИП9	ИПД	ИП1	x^2	ИП2	x^2	+	÷	2	÷
ИП5	x	ПД	C/P	БП					

Инструкция: установить переключатель Р–Г в положение Р; ($Z_0 = P0$, $R_H = P1$, $X_H = P2$, $\alpha = P3$, $\beta = P4$, $|u_H| = P5$) $x = PX$ (В/О) С/П $PX = |u(x)|$, $PY = \varphi_H = \arg(u(x)/u_H)$. Время счета около 35 с.

При использовании микрокалькулятора с входным языком МК21 приходится ограничиться вычислением только модуля напряжения в линии.

Программа 423/21. Расчет распределения модуля напряжения вдоль нагруженной линии передачи

\uparrow	F4	x	e^x	P8	F5	x	e^{jx}	\leftarrow	F3	x	2
X	P7	F2	x^2	\uparrow	F3	x^2	$+$	P6	1	-	2
+	\rightarrow	X	\uparrow	F7	+	P7	F8	\uparrow	$1/x$	$+$	P8
-	\rightarrow	\uparrow	F2	X	\uparrow	F7	$+$	2	X	\leftarrow	\uparrow
F8	X	\uparrow	\rightarrow	$+$	\uparrow	F6	\div	$\sqrt{-}$	2	\div	C/P

Инструкция: ($R_H/Z_0 = P2, X_H/Z_0 = P3, \alpha = P4, \beta = P5$) $2x = PX$ B/O C/P $PX = |u(x)/u_H|$.

Контрольный пример: при $Z_0 = 150 \Omega$; $R_H = 75 \Omega$; $X_H = -750 \Omega$; $\alpha = 0,01 \text{Нп/м}$; $\beta = 15 \text{ рад/м}$ и $x = 2 \text{ м}$ получим $|u(2)| = 0,35216|u_H|$.

При вычислении коэффициента отражения по напряжению

$$p = (((R_H - Z_0)^2 + X_H^2) / ((R_H + Z_0)^2 + X_H^2)^{1/2}) e^{-\varphi p}$$

на микрокалькуляторе с входным языком МК21 фазовый угол можно вычислять в интервале $[-180; 180^\circ]$ по приближению

$$\arctg x = 90x^a / (x^a + 1), \quad (7.14)$$

обеспечивающему при $a = 1,2128$ погрешность не более $0,57^\circ$, приемлемую для большинства практических приложений.

Программа 424/21. Вычисление коэффициента отражения по напряжению

F3	x^2	1	P7	F2	x^2	$+$	1	$+$	2	\div	1
-	P5	F2	$+$	\leftarrow	F2	$-$	\uparrow	\rightarrow	\div	$\sqrt{-}$	C/P
F3	\uparrow	F5	$x \neq 0$	F8	\div	$x \neq 0$	F8	\uparrow	F4	XY	
X ^y	1	$+$	\div	P7	F5	$x < 0$	F8	F7	2	XY	-
P7	F3	$x < 0$	F9	F7	$/-$	P7	F7	9	0	X	C/P

Инструкция: ($R_H/Z_0 = P2, X_H/Z_0 = P3, a/2 = 0,6064 = P4$) B/O C/P $PX = |p|$ C/P $PX = \varphi_p^\circ$

Контрольный пример: при $R_H/Z_0 = X_H/Z_0 = 0,1$ и $a/2 = 0,6064 = P4$ получим $|p| = 0,819836$; $\varphi^\circ = 168,5667^\circ \pm 0,57^\circ$.

Значение фазового угла можно вычислить точнее по программе 17/21 или по следующей программе.

Программа 425/34. Вычисление коэффициента отражения по напряжению

ИП1	x^2	ИП2	x^2	$+$	ИП0	x^2	$-$	ИП0	ИП2
2	X	X	x^2	XY	x^2	$+$	$\sqrt{-}$	ПД	\div
arccos ПВ	ИП2	$x < 0$	29	ИПВ	$/-$	ПВ	XY	x^2	
ИП1	ИП0	$+$	x^2	$+$	ИПД	XY	\div	C/P	BП

Инструкция: установить переключатель Р-Г в положение Г; ($Z_0 = P0, R_H = P1, X_H = P2$) (B/O) C/P $PX = |p|, PY = \varphi_p^\circ$.

При экспериментальных исследованиях, связанных с одномерно распределенными параметрами, часто возникает задача определения сопротивления комплексной нагрузки $Z_H = R_H + jX_H$ линии передачи по известным значениям КСВ ($K_{ct} U$) и расстоянию первого минимума распределения амплитуды напряжения в линии от нагрузки I_0 . Для этого обычно по диаграмме Вольперта – Смита графически (и с соответственно большими погрешностями) находят искомые значения, связанные с исходными данными соотношениями

$$R_H = (1 - |p|^2) / (1 - 2|p|\cos\varphi + |p|^2)Z_0; \quad X_H = 2|p|\sin\varphi / (1 - 2|p|\cos\varphi + |p|^2)Z_0,$$

где $|p| = (K_{ct} U - 1) / (K_{ct} U + 1)$; $\varphi = 2\beta I_0 - \pi$.

Следующие две программы полностью заменяют диаграмму Вольперта – Смита, обеспечивая высокую точность определения R_H и X_H .

Программа 426/21. Вычисление сопротивления нагрузки линии

P4	F3	X	2	X	↑	π	-	e ^{jx}	→	F1	→
F4	1	-	2	+	÷	P5	2	X	↑	←	X
←	X	-	F5	x ²	1	+	2	-	P5	→	-
↑	→	XY	P6	÷	↑	F2	X	P7	F5	↑	F6
÷	↑	F2	X	↑	F7	XY	/-	C/П	БП	Р0	

Инструкция: ($Z_0 = P2$, $\beta = 2\pi/\lambda_H = P3$), $I_0 = PY$, $K_{ct}U = PX$ (B/O) C/П $PX = R_H$, $PY = X_H$.

Программа 427/34. Вычисление сопротивления нагрузки в линии

P2	1	-	↑	↑	2	+	÷	P3	XY		
2	X	ИП1	X	π	-	P4	cos	X	2		
X	ИП3	x ²	XY	-	1	+	P5	ИП3	XY		
÷	2	X	ИП4	sin	X	ИП0	X	1	ИП3		
x ²	-	ИП5	÷	ИП0	X	C/П	БП				

Инструкция: установить переключатель Р-Г в положение Р;

($Z_0 = P0$, $\beta = 2\pi/\lambda_H = P1$) $I_0 = PY$, $K_{ct}U = PX$ (B/O) C/П $PX = R_H$, $PY = X_H$.

Контрольный пример: при $K_{ct}U = 2$; $I_0 = 0,4$ м; $Z_0 = 75$ Ом; $\beta = 0,6283185$ ($\lambda_H = 10$ м) получим $R_H = 39,32404$; $X_H = -14,20836$.

Для расчета входного сопротивления линии без потерь с комплексной нагрузкой $Z_H = R_H + jX_H$ согласно соотношению

$$Z_{bx} = \frac{R_H + j(X_H \cos 2\beta l + Z_0(1 - (R_H^2 + X_H^2)/Z_0^2)\sin^2 \beta l / 2)}{1 - X_H \sin 2\beta l / Z_0 - (1 - (R_H^2 + X_H^2)/Z_0^2)\sin^2 \beta l} \quad (7.15)$$

можно воспользоваться следующими программами.

Программа 428/21. Расчет входного сопротивления линии без потерь

F4	x ²	↑	F5	x ²	+	↑	F2	x ²	÷	1	-
↑	F3	sin	x ²	X	P7	F2	X	2	÷	P8	F3
2	X	e ^{jx}	P6	F8	X	P8	F5	X	↑	F2	÷
1	XY	-	↑	F7	+	P7	F6	↑	F5	X	↑
F8	-	↑	F7	÷	P5	F4	↑	F7	÷	P4	C/П

Инструкция: ($Z_0 = P2$, $\beta l = P3$) $R_H = P4$, $X_H = P5$ B/O C/П $PX = P4 = R_{bx}$, $P5 = X_{bx}$.

Программа 429/34. Расчет входного сопротивления линии без потерь

↑	ИП3	X	P4	sin	x ²	ИП1	x ²	ИП2	x ²		
+	ИП0	x ²	÷	1	-	P5	X	ИП4	2		
X	P4	sin	ИП2	X	ИП0	÷	-	1	+		
P6	ИП2	ИП4	cos	X	ИП0	ИП5	X	ИП4	sin		
X	2	÷	-	ИП6	÷	P8	x ²	ИП1	ИП6		
÷	P7	x ²	+	√	ПА	ИП8	↑	ИП7	÷		
arctg	ПВ	→	ИП7	C/П	БП						

Инструкция. ($Z_0 = P0$, $R_H = P1$, $X_H = P2$, $\beta = P3$), $I = PX$ (B/O) C/П $PX = P1 = R_{bx}$, $PY = P2 = X_{bx}$, $PA = |Z_{bx}|$, $PB = \varphi_{bx}$ в градусах или радианах в зависимости от положения переключателя Р-Г.

Контрольный пример: при $Z_0 = 75$; $R_H = 100$; $X_H = -50$; $\beta = 3$; $l = 0,5$ получим $R_{bx} = 43,28655$; $X_{bx} = 18,62691$.

Для расчета входного сопротивления линии с потерями

$$Z_{bx} = \frac{(1 - |p|^2 e^{-4\alpha l}) - 2j|p|e^{-2\alpha l} \sin(2\beta l - \varphi_p)}{(1 + |p|^2 e^{-4\alpha l}) - 2|p|e^{-2\alpha l} \cos(2\beta l - \varphi_p)} Z_0$$

по известному модулю $|p|$ и аргументу φ_p коэффициента отражения можно воспользоваться следующими программами.

Программа 430/21. Вычисление входного сопротивления линии с потерями

F2	↑	F5	-	P7	F3	X	/-	e ^x	↑	F4	X
P6	2	X	↑	F7	sin	X	/-	P8	F7	cos	X
P7	F6	x ²	1	+	P6	2	-	/-	←	F6	↑
F7	-	P6	→	↑	F6	÷	P7	F8	↑	F6	÷
P8	x ²	↑	F7	x ²	+	√	P6	C/P	BП	P0	

Инструкция: $2\beta l = P2$, $\alpha/\beta = P3$, $|p| = P4$, φ_p (рад) = P5 (B/O) C/P $PX = P6 = |Z_{bx}|/Z_0$, $P7 = R_{bx}/Z_0$, $P8 = X_{bx}/Z_0$.

Контрольный пример: при $\alpha = 0,01$; $\beta = 1$; $l = \pi/10$; $|p| = 0,3037835$; $\varphi_p = 2,0299896$ получим $|Z_{bx}/Z_0| = 1,097909$; $R_{bx}/Z_0 = 0,918506$; $X_{bx}/Z_0 = 0,6014585$.

Более удобно вычислять Z_{bx} , $|p|$ и φ_p непосредственно по заданным значениям R_h и X_h .

Программа 431/34. Вычисление входного сопротивления и коэффициента отражения линии с потерями

ИП1	x ²	ИП0	x ²	-	ИП2	x ²	+	BХ	ИП1
ИП0	+	x ²	+	ПА	÷	ИП0	ИП2	2	X
X	ИПА	÷	ПВ	x ²	XY	x ²	+	√	П7
÷	arccos	П8	ИПВ	x < 0	39	ИП8	/-	П8	ИП7
ИП3	ИП6	2	X	ПА	X	e ^x	÷	ПВ	x ²
1	+	ИП8	ИПА	ИП4	X	-	ПД	cos	ИПВ
X	2	X	-	ИП0	÷	П9	1	ИПВ	x ²
-	ИП9	÷	ПС	x ²	ИПД	sin	ИПВ	X	2
X	ИП9	÷	ПД	x ²	+	√	C/P	P6	BП

39

Инструкция: установить переключатель Р-Г в положение Р; $Z_0 = P0$, $R_h = P1$, $X_h = P2$, $\alpha = P3$, $\beta = P4$, $l = P6$ (B/O) C/P $PX = |Z_{bx}|$, $PC = R_{bx}$, $PD = X_{bx}$, $P7 = |p|$, $P8 = \varphi_p$ в радианах. При повторных вычислениях с изменением исходных данных (кроме $l = PX$) для пуска программы нажимать клавиши В/О С/П.

Если вычисления ведут по заданным значениям проводимости нагрузки $Y_h = G_h + jB_h$, то по программам 428/21, 429/34 и 431/34 будет вычислена входная проводимость, а по программам 423/34, 424/21 и 425/34 – коэффициент отражения по току, отличающийся знаком, соответствующим изменению аргумента на 180° .

7.4. Расчет элементов устройств с распределенными параметрами

Проектирование устройств с распределенными параметрами часто связано с расчетом согласующих элементов: реактивностей, реализуемых отрезками линий передачи (шлейфами), четвертьволновыми трансформаторами и т. п. При согласовании заданной нагрузки с проводимостью $Y_h = G_h + jB_h$ и линии передачи с помощью реактивного элемента прежде всего определяют расстояние до согласующего элемента x_0 из условия $\operatorname{Re} Y_{bx}(x_0) = Y_0$, откуда следует

$$\operatorname{tg} \beta x_0 = \frac{B_h Y_0 \pm \sqrt{G_h Y_0 ((G_h - Y_0)^2 + B_h^2)}}{G_h^2 + B_h^2 - G_h Y_0},$$

после чего определяют проводимость реактивного согласования элемента, необходимую для согласования

$$B_x = -\operatorname{Im} [Y_{bx}(x_0)] = -\frac{B_h Y_0 (1 - \operatorname{tg}^2 \beta x_0) + \operatorname{tg} \beta x_0 (Y_0^2 - G_h^2 - B_h^2)}{G_h (1 + \operatorname{tg}^2 \beta x_0)}.$$

Программа 432/21. Расчет согласования с помощью шлейфа

F2	x^2	\uparrow	F3	x^2	$+$	1	$-$	P4	F2	$-$	P5
\uparrow	F2	$-$	1	$+$	\uparrow	F2	\times	$\sqrt{ }$	$/-$	\uparrow	\rightarrow
F3	$+$	\uparrow	F5	\div	P8	\uparrow	F4	\times	\rightarrow	F8	x^2
1	$-$	2	$+$	P7	F3	\times	\uparrow	\leftarrow	$+$	$/-$	\uparrow
F2	\div	\uparrow	F7	\div	$/-$	\uparrow	F8	C/P	\leftarrow	БП	3

Инструкция: R_h/Z_0 или $G_h/Y_0 = P2$, X_h/Z_0 или $B_h/Y_0 = P3$, В/О С/П $PX = \operatorname{tg}\beta l$, $PY = X_{\text{шл}1}/Z_0$ или $B_{\text{шл}1}/Y_0$, С/П $PX = \operatorname{tg}\beta l_2$, $PY = X_{\text{шл}2}/Z_0$ или $B_{\text{шл}2}/Y_0$.

После выполнения этой программы для каждого из двух найденных значений $\operatorname{tg}\beta l$ определяют точку включения согласующей реактивности

$$l_i = \begin{cases} \operatorname{arctg}(\operatorname{tg}\beta l_i)/\beta & \text{при } \operatorname{tg}\beta l_i > 0, \\ (\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}\beta l_i + \pi))/\beta & \text{при } \operatorname{tg}\beta l_i < 0 \end{cases} \quad (7.16)$$

и выбирают меньшее значение l_i .

Например, если $G_h/Y_0 = 0,1$; $B_h/Y_0 = -0,8$, то, вычислив по программе 432/21 значения $\operatorname{tg}\beta l_1 = -2,146888$; $B_{\text{шл}}/Y_0 = -3,807886$; $\operatorname{tg}\beta l_2 = -0,7622024$; $B_{\text{шл}}/Y_0 = 3,807887$, по (7.16) при значении $\beta = 10$ найдем $l_1 = (\operatorname{arctg}(-2,146888) + \pi)/10 = 0,20067036$ и $l_2 = (\operatorname{arctg}(-0,7622024) + \pi)/10 = 0,24903276$.

Программа 433/34. Расчет согласования с помощью шлейфа

ИП1	x^2	ИП2	x^2	$+$	П4	ИП1	ИП0	\times	$-$
П5	ВХ	ПД	$-$	ИП0	x^2	$+$	ИПД	\times	$\sqrt{ }$
П6	ИП2	ИП0	x	$+$	ИП5	\div	П7	arctg	$x < 0$
33	π	$+$	ИП3	\div	ПА	ИП4	ИП0	x^2	$-$
ИП7	x	ИП0	ИП2	x	ИП7	x^2	1	$-$	x
$+$	ИП7	x^2	1	$+$	\div	ИП1	\div	ИПА	С/П
ИП6	$/-$	БП	20						

Инструкция: установить переключатель Р-Г в положение Р; Z_0 или $Y_0 = P0$, R_h или $G_h = P1$, X_h или $B_h = P2$, $\beta = P3$ В/О С/П $PX = l_1$, $PY = B_{\text{шл}1}$, С/П $PX = l_2$, $PY = B_{\text{шл}2}$.

Правильность расчета согласования можно проверить с помощью программы 428/21 или 429/34. Эти же программы могут быть с успехом использованы при анализе частотных характеристик, например, ступенчатых переходов. Пусть, например, необходимо определить входное сопротивление двухступенчатого перехода, согласующего линии с

$Z_{0_{\text{вх}}} = 50 \Omega$ и $Z_{0_{\text{вых}}} = 75 \Omega$ (рис. 82) и состоящего из двух отрезков линии равной длины с волновыми сопротивлениями $Z_{o_1} = 67,36096 \Omega$ и $Z_{o_2} = 55 \Omega$ на частоте, при которой равны электрические длины отрезков $\beta l_1 = \beta l_2 = 1,5$.

Введя программу 428/21 и 429/34 в программную память микрокалькулятора и приняв, что выходная линия идеально согласована, определим сопротивление на входе согласующего отрезка l_2 , подключенного к выходной линии, по следующим данным: $Z_0 = 55 \Omega$; $R_h = 50 \Omega$; $X_h = 0$; $\beta l = 1,5$. Результаты выполнения программы ($R_{\text{вх}} = 60,4365 \Omega$ и $X_{\text{вх}} = 0,8141124 \Omega$) хранятся в регистрах, содержащих до выполнения программы значения Z_h , что позволяет непосредственно перейти к расчету входного сопротивления первой ступени согласующего перехода с дополнительным вводом в регистр 2 или 0 (в зависимости от типа микрокалькулятора) только нового значения $Z_0 = 67,36096 \Omega$, в случае $\beta l_1 \neq \beta l_2$, значения электрической длины первого отрезка перехода в соответствующий регистр. После этого с помощью программы вычисляется $R_{\text{вх}} = 75,13333 \Omega$ и $X_{\text{вх}} = 0,1495476 \Omega$ и по этим данным при необходимости несложно вычислить коэффициент отражения или КСВ в первой линии. При

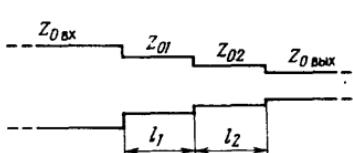


Рис. 82

сопротивление на входе согласующего отрезка l_2 , подключенного к выходной линии, по следующим данным: $Z_0 = 55 \Omega$; $R_h = 50 \Omega$; $X_h = 0$; $\beta l = 1,5$. Результаты выполнения программы ($R_{\text{вх}} = 60,4365 \Omega$ и $X_{\text{вх}} = 0,8141124 \Omega$) хранятся в регистрах, содержащих до выполнения программы значения Z_h , что позволяет непосредственно перейти к расчету входного сопротивления первой ступени согласующего перехода с дополнительным вводом в регистр 2 или 0 (в зависимости от типа микрокалькулятора) только нового значения $Z_0 = 67,36096 \Omega$, в случае $\beta l_1 \neq \beta l_2$, значения электрической длины первого отрезка перехода в соответствующий регистр. После этого с помощью программы вычисляется $R_{\text{вх}} = 75,13333 \Omega$ и $X_{\text{вх}} = 0,1495476 \Omega$ и по этим данным при необходимости несложно вычислить коэффициент отражения или КСВ в первой линии. При

использовании микрокалькулятора с входным языком МК34 эти вычисления можно также автоматизировать, дополнив соответствующим фрагментом программы 428/34.

Часто волновое сопротивление многоступенчатого перехода изменяют по показательному закону, а электрические длины всех отрезков перехода выбирают одинаковыми. В этом случае нумеруют отрезки, начиная от нагрузки, $Z_{o_1} = R_H \sqrt{K}$; $Z_{o_2} = KZ_{o_1}$; ...; $Z_{oi} = KZ_{o_{i-1}}$, где $K = (Z_{ovx}/R_H)^{1/n}$, а Z_{ovx} – волновое сопротивление питающей линии.

Если n – число ступеней перехода – велико, то целесообразно модифицировать программы 428/21 и 429/34 для большего удобства решения рассматриваемой задачи.

Программа 434/21. Расчет многоступенчатого перехода

F2	\uparrow	F8	\times	P2	ПП	8	\uparrow	F5	\times	P4	F6
X	\leftarrow	F3	x^2	XY	x^2	+	1	-	2	\div	1
+	P7	F5	\times	\leftarrow	F6	\times	\uparrow	F4	XY	-	P4
F7	\uparrow	\rightarrow	-	\uparrow	\rightarrow	-	\uparrow	F2	\div	ПП	8
C/П	БП	P0	$1/x$	\uparrow	F3	\times	P3	F4	\times	P4	B/O

Инструкция: $Z_{o_1}/\sqrt{K} = P2$, $R_H = P3$, $X_H = P4$, $\cos(2\beta l) = P5$, $\sin(2\beta l) = P6$, $K = P8$ (B/O) C/П $PX = P4 = X_{Bx_1}$; $P3 = R_{Bx_1}$; $P2 = Z_{o_1}$ C/П $PX = P4 = X_{Bx_2}$, $P3 = R_{Bx_2}$; $P2 = Z_{o_2}$, ..., C/П $PX = P4 = X_{Bxi}$, $P3 = R_{Bxi}$, $P2 = Z_{oi}$.

В этой программе реализовано последовательное вычисление входного сопротивления каждой ступени перехода по следующему алгоритму:

$$Z_{oi} = Z_{o_{i-1}} K; R'_{Hi} = R_{\text{вых}}(i-1)/Z_{oi}; X'_H = X_{\text{вых}}(i-1)/Z_{oi}; A_i = ((1 + R'^2_{Hi}) + (X'^2_{Hi}) + (1 - R'^2_{Hi} - X'^2_{Hi}) \cos(2\beta l))/2 - X'^2_{Hi} \sin(2\beta l); R'_{\text{вых}i} = R'_{Hi}/A_i; X'_{\text{вых}i} = (X'^2_{Hi} \cos(2\beta l) + (1 - R'^2_{Hi} - X'^2_{Hi}) \cos(2\beta l))/A_i; R_{\text{вых}i} = R'_{\text{вых}i} Z_{oi}; X_{\text{вых}i} = X'_{\text{вых}i} Z_{oi}.$$

В качестве примера рассмотрим расчет входного сопротивления четырехступенчатого перехода, согласующего выходную линию с $Z_{\text{вых}} = 75$ Ом с питающей линией, имеющей $Z_o = 150$ Ом. Предварительно вычислив $K = (150/75)^{1/4} = 1,189207$ и $\sqrt{K} = 1,090507$, рассчитаем входное сопротивление перехода на частоте, для которой $2\beta l = 0,9\pi$, для чего введем предложение $\pi 0, 9 \times e^{jx} \div P5 XY P6$ и занесем $0 = P4$; $75 = P3$, $75/1,090507 = P2$, $K = P8$. После первого пуска программы нажатием клавиш B/O и C/П получим $PX = P3 = 2,379984$, $P4 = 88,77948$, $P2 = 81,78806$ или $Z_{o1} = 81,78806$ Ом и $Z_{Bx_1} = 88,77948 + j2,379984$ Ом. Последующее трехкратное выполнение программы дает значения:

$$\begin{aligned} Z_{o2} &= 97,26294 \text{ Ом}; Z_{Bx_2} = 106,9285 + j0,2826974 \text{ Ом}; \\ Z_{o3} &= 115,6657 \text{ Ом}; Z_{Bx_3} = 124,7071 + j2,716235 \text{ Ом}; \\ Z_{\text{пер}} &= 137,5505 \text{ Ом}; Z_{\text{вх пер}} = 151,9690 + j1,452527 \text{ Ом}. \end{aligned}$$

Повторяя описанную процедуру при других значениях $2\beta l$, получаем результаты, позволяющие оценить частотные свойства перехода.

Для аналогичных расчетов на микрокалькуляторе с входным языком МК34 пользователю достаточно дополнить программу 429/34 фрагментом вычисления нового значения Z_{o1} на каждом итерационном цикле.

Отрезки линий передачи часто используют в качестве резонаторов, перстраивают которые изменением величины реактивного элемента (обычно емкости), подключенного к одному из концов линии (рис. 83). При расчете резонансных частот такого резонатора приходится решать трансцендентное уравнение

$$-\omega C Z_o \operatorname{tg} \beta l + 1 = 0. \quad (7.17)$$

Заметим, что к решению уравнения вида $A x \operatorname{tg} x + 1 = 0$ сводится и задача определения резонансных частот объемных резонаторов.

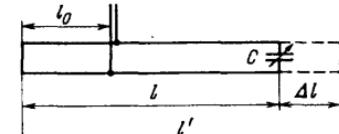


Рис. 83

Программа 435/21. Вычисление резонансных частот нагруженного емкостью отрезка линии

C_x	P4	P7	π	2	\div	P6	1	/ - /	P8	F6	2
\div	P6	\uparrow	F7	$+$	P7	\div	sin	$x = 0$	P / - /	F7	\uparrow
F3	X	C/P	F4	\uparrow	π	$+$	B/O	F7	e^{jx}	\div	\uparrow
F7	X	\uparrow	F2	\times	1	$-$	\uparrow	F8	XY	P8	X
$x < 0$	FXY	F6	/ - /	P6	БП	FXY					

Инструкция: ($A = 3Z_0 C / (10^4 l \sqrt{\epsilon}) = P2$, $B = 150 / \pi l \sqrt{\epsilon} = P3$; представлять емкости в пикофарадах, l в метрах, Z_0 в омах) B/O C/P PX = f_{p1} C/P PX = f_{p2} C/P PX = f_{p3} ...

Программа 436/34. Вычисление резонансных частот нагруженного емкостью отрезка линии

ИП0	ИП1	X	3	X	1	ВП	4	\div	ИП3	
ИП4	$\sqrt{ }$	X	\div	П5	BХ	π	X	\div	5	
0	XY	\div	П6	C _x	П7	П8	π	\div		
П9	/ - /	ПА	ИП9	2	\div	П9	ИП8	+	П8	
BХ	-	$x = 0$	53	ИП8	ИП6	X	C/P	ИП7	π	
+	БП	25	ИП8	\uparrow	tg	X	ИП5	X	1	
-	ИПА	XY	ПА	X	$x < 0$	33	ИП9	/ - /	П9	
БП	33									

Инструкция: установить переключатель Р-Г в положение Р; ($Z_0 = P0$, $C = P1$, $l = P3$, $\epsilon = P4$) B/O C/P PX = f_{p1} C/P PX = f_{p2} C/P PX = f_{p3} ...

Контрольный пример: при $Z_0 = 75$ Ом, $\epsilon = 2,5$, $l = 1$ м, $C = 10$ пФ получим $f_{p1} = 41,58989$ МГц, $f_{p2} = 126,110$ МГц ...

Остальные параметры рассматриваемого резонатора (в пренебрежении потерями в конденсаторе) вычисляют по формулам

$$Q_i = \beta_i / 2 (\alpha_i + (R/2Z_0 - GZ_0/2) \sin 2\beta_i l / 2\beta_i l); \Delta f_p = f_{pi} / Q_i;$$

$$R_{\text{вых рез}} = Z_0 \sin^2 \beta_i l_0 / [(\alpha_i + (R/2Z_0 - GZ_0/2) \sin 2\beta_i l / 2\beta_i l) l].$$

Определив $\beta_i = 2\pi f_{pi} \sqrt{\epsilon} / C$ с учетом зависимости от частоты постоянной затухания $\alpha(f) = \alpha_1 \sqrt{f_{pi}} + \alpha_2 f_{pi}$, по приведенным соотношениям можно определять добротность, полосу пропускания и входное сопротивление на расстоянии l_0 (см. рис. 83) для любой резонансной частоты. Значения коэффициентов α_1 и α_2 , аппроксимирующих зависимость постоянной затухания от частоты, определяются конструкцией резонатора и материалом, из которого он изготовлен. Например, для резонатора в виде отрезка воздушной коаксиальной линии, изготовленной из меди, можно принять $\alpha_1 = (1 + d/D) / (24dZ_0)$; $\alpha_2 = \pi \sqrt{\epsilon} \operatorname{tg}(\delta/300)$.

Программа 437/21. Вычисление Q_i , Δf_i , $R_{\text{вх } i}$ резонатора

P7	\uparrow	F4	X	P8	\uparrow	e^{jx}	F8	\div	1	-	2
+	\leftarrow	F7	X	\uparrow	F3	X	\rightarrow	\uparrow	F7	$\sqrt{ }$	X
\uparrow	F2	X	\uparrow	\leftarrow	-	\uparrow	\leftarrow	F8	XY	\div	4
\div	C/P	\uparrow	F7	XY	\div	C/P	F6	\uparrow	F8	X	2
\div	e^{jx}	F5	X	X	\uparrow	\rightarrow	\div	C/P	БП	P0	

Инструкция: $\alpha_1 l = P2$, $\alpha_2 l = P3$, $\pi l \sqrt{\epsilon} / 75 = P4$, $Z_0 = P5$, $l_0/l = P6$, $f_{pi} = PX$ (B/O) C/P PX = Q_i C/P PX = Δf_i C/P PX = $R_{\text{вх } i}$.

Программа 438/34. Вычисление Q_i , Δf_i и $R_{\text{вх } i}$ резонатора

P6	π	X	ИП4	$\sqrt{ }$	X	ИП3	X	7	5	
\div	П7	\uparrow	sin	XY	\div	1	+	П8	2	
-	ИП2	X	ИП6	X	ИП8	ИП1	X	ИП6	$\sqrt{ }$	
X	XY	-	ИП3	X	П9	ИП7	XY	\div	4	

÷ С/П ИП6 ХY ÷ С/П ИП7 ИП3 ÷ ИП0
 × 2 ÷ sin x^2 ИП5 X ИП9 ÷ С/П
 БП

Инструкция: $I_0 = P0$, $\alpha_1 = P1$, $\alpha_2 = P2$, $I = P3$, $\epsilon = P4$, $Z_0 = P5$, $f_{pi} = PX$ (В/О)
 С/П $PX = Q_l$ С/П $PX = \Delta f_i$ С/П $PX = R_{вхi}$.

Контрольный пример: при $Z_0 = 75$ Ом; $I = 1$ м; $C = 10$ пФ; $\epsilon = 2,5$; $I_0 = 0,2$ м; $\alpha_1 = 0,0005$; $\alpha_2 = 1,6 \cdot 10^{-6}$ для резонансных частот, найденных в предыдущем примере, получим: ($f_{pi} = 41,58989$ МГц) $Q_1 = 184,9259$; $\Delta f_1 = 0,2249002$ МГц; $R_{вых1} = 1489,887$ Ом и ($f_{pi} = 126,1195$ МГц) $Q_2 = 327,0036$; $\Delta f_2 = 0,3856822$ МГц; $R_{вых2} = 6457,29$ Ом.

Программы 437/21 и 438/34 можно использовать и для расчета параметров резонатора в виде отрезка линии, закороченного с двух сторон. Так как его можно рассматривать как предельный случай резонатора, нагруженного емкостью $C \rightarrow \infty$, то $f_{pi} = 150i/(\sqrt{\epsilon}l_1)$ (МГц), $Q_i = i\pi/(2\alpha_i l)$; $\Delta\varphi_i = f_{pi}/Q_i$; $R_{вхi} = Z_0 \sin^2 \beta_i l_0 / (\alpha_i l)$ и легко составить более простые программы с меньшим временем счета.

С помощью программируемых микрокалькуляторов можно успешно расчитывать и достаточно сложные устройства, например, анализировать диаграммы направленности многоэлементных антенн. В качестве примера рассмотрим пятиэтажную antennную систему, содержащую по семь диполей с рефлекторами на каждом этаже (рис. 84).

По приведенным на рис. 84 обозначениям размеров и фазам питания элементов антенны для напряженности поля в дальней зоне рассматриваемой антенны (без учета влияния Земли) можно записать

$$E_{\Sigma}(r, \psi, \theta) = \sum_{i=1}^5 \sum_{j=1}^7 (E_{gij}(r) + E_{pij}(r)e^{j\beta l_0 \cos\psi \cos\theta}) \cos\psi e^{j\beta(l_{bj} \sin\psi + l_{ri} \sin\theta)},$$

где E_{gij} и E_{pij} – парциальные значения напряженности поля, создаваемые каждым диполем и рефлектором системы в точке с полярными координатами r , ψ и θ .

Если принять равенство амплитуд токов, питающих все элементы системы, опережение токов, питающих рефлектор, на 90° от токов, питающих соответствующие диполи, равенство расстояний l_b между этажами и равенство расстояний l_r между элементами в каждом этаже и симметричность фазовых сдвигов относительно центрального элемента ($\varphi_{ij} = \varphi_{(1-i)(5-j)} = \varphi_{00} + \Delta\varphi_{Bn} + \Delta\varphi_{Gm}$, где $n = i - 4$, $m = j - 3$, причем $\Delta\varphi_{Bn} = -\Delta\varphi_{B(-n)}$ и $\Delta\varphi_{Gm} = -\Delta\varphi_{G(-m)}$), то напряженность поля антенны

$$E_{\Sigma}(r, \psi, \theta) = E_0(r) \cos\psi \cos(\pi/4 - \beta l_0 \cos\theta \cos(\psi)/2) (1 + 2 \sum_{m=1}^2 \cos(\Delta\varphi_{Bn} + n\beta l_b \sin\theta)) (1 + 2 \sum_{m=1}^3 \cos(\Delta\varphi_{Gm} + m\beta l_r \sin\psi)).$$

Если питать antennу с фазовым сдвигом, изменяющимся по линейному закону, то $\Delta\varphi_{Bn} = n\Delta\varphi_B$; $\Delta\varphi_{Gm} = m\Delta\varphi_G$ и при выборе $l_0 = \pi/(2\beta)$ диаграмма направленности рассматриваемой antennной системы

$$R(\psi, \theta) = E_{\Sigma}(r, \psi, \theta)/E_0(r) = \cos\psi \cos((1 - \cos\theta \cos\psi)\pi/4)(4\cos^2(\Delta\varphi_B + \beta l_b \sin\theta) +$$

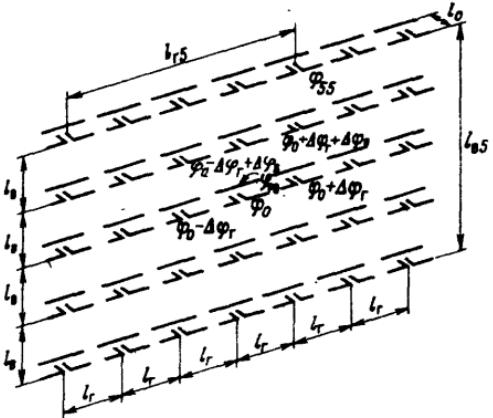


Рис. 84

$$+ 2 \cos(\Delta\varphi_B + \beta l_B \sin \theta) - 1)(8 \cos^3(\Delta\varphi_T + \beta l_T \sin \psi) + 4 \cos^2(\Delta\varphi_T + \beta l_T \sin \psi) - 4 \cos(\Delta\varphi_T + \beta l_T \sin \theta) - 1).$$

Программа 439/21. Расчет диаграммы направленности антенной системы

F2	e^{jx}	F6	X	\uparrow	F4	+	cos	4	X	X	+
+	1	-	P8	F3	e^{jx}	F7	X	\uparrow	F5	+	cos
2	X	X	+	X	XY	-	4	X	1	-	\uparrow
F8	X	\uparrow	F3	cos	XY	X	P8	F2	cos	X	1
-	\uparrow	π	X	4	\div	cos	\uparrow	F8	X	C/P	

Инструкция: ($\theta = P2$, $\psi = P3$, $\Delta\varphi_B = P4$, $\Delta\varphi_T = P5$, $\beta l_B = P6$, $\beta l_T = P7$) B/O C/P
 $PX = R(\psi, \theta)$.

Контрольный пример: при $\beta l_T = 1,5\pi$; $\beta l_B = \pi/2$; $\Delta\varphi_T = 0,5$; $\Delta\varphi_B = 0,2$ в направлении $\psi = -0,15$; $\theta = -0,12$ получим $R(\psi, \theta) = 31,78222$, а для $\psi = 0,6$; $\theta = 0$ получим $R(\psi, \theta) = -3,917536$, где отрицательное значение результата означает отличие на π фазы волны, излучаемой по заданному направлению и по направлению основного лепестка антенны.

7.5. Расчет RC-цепей с распределенными параметрами

В волновых уравнениях при анализе RC-цепей с распределенными параметрами принимают $L' = G' = 0$. В этом случае постоянная распространения $\gamma = \alpha + j\beta = (1 + j)\sqrt{\omega R'C'/2}$ и входное сопротивление линии $Z_0 = \sqrt{R'/(j\omega C')} = (1 - j)\sqrt{R'/(2\omega C')}$ являются функциями погонных параметров R' и C' линии, а процесс передачи воздействия вдоль линии является диффузионным. Однако уравнения, описывающие распределение комплексных амплитуд тока и напряжения в LC-линиях через приведенные значения γ и Z_0 , можно использовать при анализе режима работы этих линий. Необходимость в таком анализе возникает прежде всего при проектировании трансверсальных фильтров на основе отрезков RC-линий.

Для расчета распределения комплексных амплитуд напряжения вдоль однородной RC-линии в стационарном режиме целесообразно использовать программы, выполняющие вычисления по формуле $|u(x)/u_H| = (ch\alpha x + A sh\alpha x) \cos \alpha x + B sh\alpha x \sin \alpha x + j((sh\alpha x + A ch\alpha x) \sin \alpha x - B sh\alpha x \cos \alpha x)$. В этой формуле учтено равенство фазовой постоянной и постоянной затухания, принято обозначение $A = (G_H + B_H)\sqrt{R'/2C'}$, $B = (G_H - B_H)\sqrt{R'/2C'}$, а координата x отсчитывается от конца линии, нагруженной на проводимость $Y_H = G_H + jB_H$.

Программа 440/21. Расчет распределения амплитуд напряжения в нагруженной RC-линии с распределенными параметрами

P2	e^x	\uparrow	1/x	+	P7	-	+	\uparrow	P8	F4	X
P5	F3	X	\uparrow	F7	XY	+	P7	F4	X	P6	F3
X	\uparrow	F8	+	P8	F2	e^{jx}	\leftarrow	F6	X	P6	F8
X	\rightarrow	\uparrow	F5	X	P5	F7	X	\uparrow	F6	+	\leftarrow
\uparrow	F5	-	P8	x^2	\uparrow	\rightarrow	P7	x^2	+	$\sqrt{-}$	C/P

Инструкция: ($A = P3$, $B = P4$), $\alpha x = PX$ B/O C/P $PX = 2|u(x)/u_H|$, $P7 = 2 \operatorname{Re}(u(x)/u_H)$, $P8 = 2 \operatorname{Im}(u(x)/u_H)$.

Контрольный пример: при $R' = 100 \text{ кОм}/\text{м}$, $C' = 2 \text{ нФ}/\text{м}$, $G_H = 1 \text{ кОм}^{-1}$, $B_H = 0$, предварительно вычислив $A = B = 100/4 = 5$, для $\alpha x = 0,1$ получим $2|u(x)/u_H| = 4,000045$ или $|u(x)| = 2,0000225|u_H|$. При необходимости по содержимому регистров 7 и 8 несложно определить фазовый сдвиг с помощью программ, приведенных в § 1.6.

Программа 441/34. Расчет распределения амплитуд напряжения в нагруженной RC-линии с распределенными параметрами

ПД	ИП4	ИП0	X	ИП1	X	π	X	$\sqrt{-}$	ИП5	
ИП0	ИП1	\div	2	\div	$\sqrt{-}$	\uparrow	ИП2	ИП3	+	
X	П6	\rightarrow	ИП2	ИП3	-	X	П7	ИПД	ИП5	

\times	P8	e^x	\uparrow	\uparrow	$1/x$	-	2	\div	P9
-	ПД	ИП6	ИП9	X	+	ИП8	cos	X	ИП7
ИПД	X	ИП8	sin	X	+	ПА	ИП9	ИП6	ИПД
X	+	ИП8	sin	X	ИП7	ИП9	X	ИП8	cos
X	-	ПВ	\uparrow	x^2	ИПА	x^2	+	$\sqrt{\quad}$	ПД
\div	arccos	ПС	ИПВ	$x \geq 0$	90	ИПС	$/-$	ПС	ИПС
ИПД	C/P	БП	29						

Инструкция: (установить переключатель Р-Г в положение Р; $R' = P0$, $C' = P1$, $G_H = P2$, $B_H = P3$, $f = P4$), $x = PX$ (B/O) C/P $PX = |u(x)/u_H|$, $PY = \varphi(x)$, $PA = \operatorname{Re}(u(x)/u_H)$, $PB = \operatorname{Im}(u(x)/u_H)$.

Контрольный пример. при $R' = 100$; $C' = 2$; $G_H = 1$; $B_H = 0$; $f = 2/\pi$, $x = 0,005$ получим $|u(x)/u_H| = 2,0000246$; $\varphi^\circ = -1,5641296$ рад; $\operatorname{Re}(u(x)/u_H) = 1,9999802$; $\operatorname{Im}(u(x)/u_H) = -0,01333331$.

Вычисление гиперболических функций произвольного комплексного аргумента [20] в приведенных программах сведено к вычислению функций

$$\begin{aligned} \operatorname{sh} \sqrt{jx} &= \operatorname{sh}(1 + j)\sqrt{x/2} = \operatorname{sh}z \cos z + j \operatorname{ch}z \sin z; \\ \operatorname{ch} \sqrt{jx} &= \operatorname{ch}(1 + j)\sqrt{x/2} = \operatorname{ch}z \cos z + j \operatorname{sh}z \sin z, \end{aligned}$$

где $z = \sqrt{x/2}$.

Эти функции приходится вычислять и при решении других задач расчета устройств с распределенными RC -цепями. В таких случаях целесообразно использовать следующие программы с минимальным числом обращений к памяти, что упрощает их применение в качестве фрагментов более сложных программ.

Программа 442/21. Вычисление функции $\operatorname{sh}(1 + j)z$

P8	e^x	\uparrow	$1/x$	P7	-	2	\div	\uparrow	F7	+	P7
F8	cos	X	P6	F7	\uparrow	F8	sin	X	\uparrow	F6	C/P
БП	P0										

Программа 443/34. Вычисление функции $\operatorname{sh}(1 + j)z$

\uparrow	e^x	\uparrow	\uparrow	$1/x$	-	2	\div	\uparrow	BX	
\rightarrow	XY	sin	X	\rightarrow	cos	X	\uparrow	XY	\rightarrow	C/P
БП										

Инструкция к обеим программам: $z = PX$ (B/O) C/P $PX = \operatorname{Re} \operatorname{sh}(1 + j)z$, $PY = \operatorname{Im} \operatorname{sh}(1 + j)z$.

Программа 444/21. Вычисление функции $\operatorname{ch}(1 + j)z$

P8	e^x	\uparrow	$1/x$	P7	+	2	\div	\uparrow	F7	-	P7
F8	cos	X	P6	F7	\uparrow	F8	sin	X	\uparrow	F6	C/P
БП	P0										

Программа 445/34. Вычисление функции $\operatorname{ch}(1 + j)z$

\uparrow	e^x	\uparrow	\uparrow	$1/x$	-	2	\div	\uparrow	BX	
\rightarrow	XY	cos	X	\rightarrow	sin	X	\uparrow	XY	\rightarrow	XY
C/P	БП									

Инструкция к обеим программам: $z = PX$ (B/O) C/P $PX = \operatorname{Re} \operatorname{ch}(1 + j)z$, $PY = \operatorname{Im} \operatorname{ch}(1 + j)z$.

Контрольный пример: при $z = 0,5$ получим (время счета около 10 с) $\operatorname{sh}(1 + j)z = 0,457304 + j0,540612$ и $\operatorname{ch}(1 + j)z = 0,989584 + j0,249826$.

При возбуждении теоретически бесконечной RC -линии с распределенными параметрами от источника единичного напряжения на ее входе переходная характеристика по напряжению на расстоянии x от входа [9] $h_H(x, t) = 1 - \Phi(x \sqrt{R'C'/2t})$, где интеграл вероятности $\Phi = \Phi(z) = \sqrt{2/\pi} \int_0^z (\exp(-t^2/2)) dt$, а переходная характеристика по току

(таковая реакция на воздействие единичным скачком напряжения) $h_T(x, t) = \sqrt{C'/\pi R' t} \times \exp(-x^2 R' C'/4t)$. Вычисления по этим формулам обеспечивают программы, где численное интегрирование выполняется методом трапеций с шагом Δt .

Программа 446/21. Вычисление переходных характеристик по напряжению и току в RC-линии с распределенными параметрами

$$\begin{array}{ccccccccccccc} C_x & P6 & P7 & P8 & F5 & \uparrow & F6 & + & P6 & \uparrow & F2 & XY \\ \div & \uparrow & F4 & x^2 & X & 2 & \div & /-/- & e^X & 2 & \div & \uparrow \\ \pi & \div & \sqrt & \uparrow & F7 & XY & P7 & + & \uparrow & F5 & X & \uparrow \\ F8 & + & P8 & F2 & \uparrow & F6 & \div & 2 & X & \sqrt & \uparrow & F3 \\ \div & \uparrow & F7 & X & \uparrow & F8 & C/\Pi & B\Pi & F\uparrow & & & \end{array}$$

Инструкция: $R'C' = P2$, $R' = P3$, $x = P4$, $\Delta t = P5$ B/O C/P $PX = h_H(x, \Delta t)$, $PY = h_T(x, \Delta t)$ C/P $PX = h_H(x, 2\Delta t)$, $PY = h_T(x, 2\Delta t)$... C/P $PX = h_H(x, k\Delta t)$, $PY = h_T(x, k\Delta t)$.

Программа 447/34. Вычисление переходных характеристик по напряжению и току в RC-линии с распределенными параметрами

$$\begin{array}{ccccccccccccc} C_x & \Pi4 & \Pi5 & \Pi6 & \Pi\text{P}0 & \Pi\text{P}1 & X & \Pi\text{P}2 & x^2 & X \\ \Pi\text{P}3 & \Pi\text{P}4 & + & \Pi4 & \div & 2 & \div & e^X & 1/x & 2 \\ \div & \pi & \div & \sqrt & \Pi\text{P}5 & XY & \Pi5 & + & \Pi\text{P}3 & X \\ \Pi\text{P}6 & + & \Pi6 & \Pi\text{P}1 & \Pi\text{P}0 & \div & \Pi\text{P}4 & \div & 2 & X \\ \sqrt & \Pi\text{P}5 & X & \Pi\text{P}6 & C/\Pi & B\Pi & 04 & & & \end{array}$$

Инструкция: $R' = P0$, $C' = P1$, $x = P2$, $\Delta t = P3$ B/O C/P $PX = h_H(x, \Delta t)$, $PY = h_T(x, \Delta t)$... C/P $PX = h_H(x, k\Delta t)$, $PY = h_T(x, k\Delta t)$.

Контрольный пример: при $R' = 100$ кОм/м; $C' = 2$ нФ/м; $x = 0,01$ м и $\Delta t = 0,05$ мкс получим $h_H(x, i\Delta t) = 0,018048895$; $0,055072071$; ...; $h_T(x, i\Delta t) = 0,32286844$; $0,24000779$... (в микровольтах и миллиамперах соответственно).

Обычно распределенные RC-цепи используют в гибридных устройствах, содержащих также активные и пассивные компоненты с сосредоточенными параметрами. В матрицу слабосигнальных параметров системы уравнений равновесия, описывающей такие устройства, входят гиперболические функции аргумента $\sqrt{pR'C'}$, и поэтому функции гибридной цепи оказываются трансцендентными. При ее анализе следует прежде всего избавиться от иррациональности, используя замену $s = \sqrt{p}$, которая приводит к двузначности отображения плоскости переменной $p = \sigma + j\omega$ в плоскость переменной $s = u + jv$, хотя обратное преобразование $p = s^2$ однозначно.

При синтезе гибридных устройств по координатам нулей и полюсов передаточной или входной функции, заданной в одной из комплексных плоскостей, приходится определять их координаты в другой плоскости, используя соотношения $s = u + jv = \pm (((\sqrt{\sigma^2 + \omega^2} + \sigma)/2)^{1/2} + j(\omega(\sqrt{\sigma^2 + \omega^2} - \sigma)/2)^{1/2}/|\omega|)$, $p = \sigma + j\omega = (u^2 - v^2) + 2juv$. Вычисления по первой из этих формул можно выполнить с помощью программ извлечения корня из комплексного числа, приведенных в § 1.6, но их целесообразно дополнить обратным преобразованием, составив следующие универсальные программы. По этим программам при преобразовании p в s вычисляют только одно значение s , а координаты второго значения определяют изменением знаков вычисленных значений составляющих s .

Программа 448/21. Прямое и обратное преобразования $s = \sqrt{p}$

$$\begin{array}{ccccccccccccc} F7 & x^2 & \uparrow & F8 & x^2 & + & x \neq 0 & F, & \sqrt & \uparrow & F7 & - \\ 2 & \div & \uparrow & \sqrt & P5 & F7 & + & \sqrt & P4 & F8 & x < 0 & F7 \\ F5 & /-/- & P5 & B\Pi & F7 & F4 & x^2 & \uparrow & F5 & x^2 & - & P7 \\ F4 & \uparrow & F5 & X & 2 & X & P8 & C/\Pi & B\Pi & P0 & & \end{array}$$

Программа 449/34. Прямое и обратное преобразования $s = \sqrt{p}$

$$\begin{array}{ccccccccccccc} \Pi\text{P}7 & x^2 & \Pi\text{P}8 & x^2 & + & x \neq 0 & 27 & \sqrt & \Pi\text{P}7 & + \\ 2 & \div & \sqrt & P4 & BX & \Pi\text{P}7 & - & \sqrt & P5 & \Pi\text{P}8 & & \end{array}$$

$x < 0$ 39 ИП5 /-/ П5 БП 39 ИП4 x^2 ИП5
 x^2 - П7 ИП4 ИП5 x 2 x П8 С/П
БП

Инструкция к обеим программам: $\sigma = P7, \omega = P8$ (или $u = P4, v = P5, 0 = P7 = P8$) (B/O) С/П $PX = \sigma P4 = u, P5 = v$ (или $P8 = \sigma, P7 = \omega$).

Контрольный пример: при $p = -0,5 + j2$ получим $s = 0,88361552 + j1,1317139$ (второе значение $s = -0,8836155 - j1,131713$), а при обратном преобразовании результата $p = -0,49999999 + j1,9999999$.

В качестве примера синтеза гибридных цепей рассмотрим расчет звена активного фильтра, схема которого приведена на рис. 85. Передаточная функция такого звена в виде коэффициента передачи напряжения $K(p) = 1/(\mu + (1 - \mu) \operatorname{ch} \sqrt{pR'C'l})$ имеет в плоскости p дискретное множество полюсов. Первая их пара, называемая доминирующей, определяется выражением $p = (\ln(M + \sqrt{M^2 - 1}))^2/\tau$, где $M = -\mu/(1 - \mu)$ и $\tau = R'C'l^2$.

Поскольку избирательные свойства такого звена в области низших частот практически определяются доминирующей парой полюсов, то остальные полюсы можно учитывать лишь при $\omega\tau \gg 1$ и при синтезе фильтра с каскадным соединением звеньев рассматривать данное звено как звено НЧ2, реализующее заданную пару комплексно-сопряженных полюсов p_i, i_{+1} . При расчёте параметров такого звена следует с помощью программы 443/21 или 444/34 определить координаты доминирующей пары полюсов на плоскости s , после чего из уравнения для мнимой части знаменателя передаточной функции $\operatorname{sh}(u_i \sqrt{\tau}) \sin(v_i \sqrt{\tau}) = 0$ найти $\tau = (\pi/v_i)^2$, а из уравнения $\mu + (1 - \mu) \operatorname{ch}(u_i \sqrt{\tau}) \times \cos(v_i \sqrt{\tau}) \equiv \mu - (1 - \mu) \operatorname{ch}(\pi u_i/v_i) = 0$ определить $\mu = \operatorname{ch}(\pi u_i/v_i)/(1 + \operatorname{ch}(\pi u_i/v_i))$. Например, для реализации передаточной функции $K(p) = 1/(p^2 + 0,4p + 1,04)$ по значениям $p_{1,2} = -0,2 + j$ следует найти $s_{1,2} = \pm(0,64023586 + j0,78096219)$, $\tau = 4,0227204^2 = 16,182279$ и $\mu = 0,868541$.

Для построения АЧХ рассматриваемого звена, описываемой выражением $K(j\omega) = 1/(\mu + (1 - \mu) \operatorname{ch} \sqrt{\omega\tau/2} \cos \sqrt{\omega\tau/2} + j(1 - \mu) \operatorname{sh} \sqrt{\omega\tau/2} \sin \sqrt{\omega\tau/2})$ можно воспользоваться следующими программами.

Программа 450/34. Вычисление частотных характеристик звена НЧ2 активного фильтра с распределенными параметрами

\uparrow	F3	x	$\sqrt{\quad}$	P4	e^x	\uparrow	$1/x$	$-$	2	\div	P5
x^2	1	+	$\sqrt{\quad}$	\uparrow	F4	\cos	x	1	$-$	\uparrow	F2
x	-	1	+	P7	F4	e^{jx}	F5	x	\uparrow	F2	X
-	P8	x^2	\uparrow	F7	x^2	+	\ln	4	,	3	4
3	\times	C/P	BП	P0							

Инструкция¹: $\mu = P2, \pi\tau = P3, f = PX$ (B/O) С/П $PX = -A$ дБ, $P7 = \operatorname{Re} 1/K(\omega)$, $P8 = \operatorname{Im} 1/K(\omega)$.

Программа 451/21. Вычисление частотных характеристик звена НЧ2 активного фильтра с распределенными параметрами

ИП1	x	$\sqrt{\quad}$	П2	e^x	\uparrow	$1/x$	$-$	2	\div	
П3	x^2	1	+	$\sqrt{\quad}$	ИП2	\cos	x	1		ИП0
-	x	ИП0	+	П4	ИП3	ИП2	\sin	x	1	
ИП0	-	x	П5	x^2	ИП4	x^2	+	$\sqrt{\quad}$		П6

¹ Для расчета АЧХ звена в нормированном диапазоне частот достаточно принять $\tau/2 = P3$ (при использовании программы 450/21) или $\tau/2 = P1$ (при использовании программы 451/21) и $v = \omega\tau = PX$.

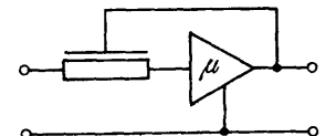


Рис. 85

÷ $\arccos \Pi_7$ ИП5 $x < 0$ 49 ИП7 /-/ П7 ИП7
 1 8 0 X π ÷ ИП6 lg 2 0
 X С/П БП

Инструкция¹: установить переключатель Р-Г в положение Р; $\mu = P0$, $\pi\tau = P1$, $f = PX$ (В/О) С/П $PX = -A(\omega)$ дБ, $PY = \varphi_K^\circ$.

Воспользуемся одной из этих программ для построения АЧХ и ФЧХ рассчитанного звена и сравнения их с характеристиками нормированного прототипа $K_H(p) = 1,04/(p^2 + 0,4p + 1,04)$. При вычислениях целесообразно принять $\tau/2 = 8,091139$, что позволит непосредственно вычислять $K(j\nu)$ без дополнительного вычисления $\nu = \omega/\omega_{\text{пп}}$.

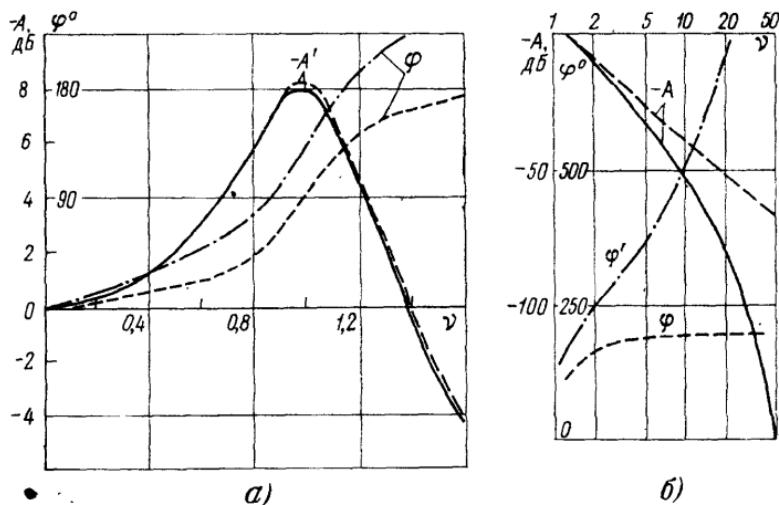


Рис. 86

Построим по результатам анализа характеристики фильтра в полосе пропускания (рис. 86, а) и за ее пределами (рис. 86, б), обозначив сплошной и штриховой линиями АЧХ соответственно звена с распределенными параметрами и прототипа, а ФЧХ – соответственно штрихпунктирной линией и штриховой линией с двумя точками. Результаты вычислений свидетельствуют о том, что в полосе пропускания АЧХ практически совпадает для обеих реализаций, а в полосе задержания затухание звена с распределенными параметрами больше, чем у прототипа. Групповое время запаздывания у звена с распределенными параметрами больше, чем у прототипа, но ФЧХ более линейна и, следовательно, изменение ГВЗ меньше у звена с распределенными параметрами.

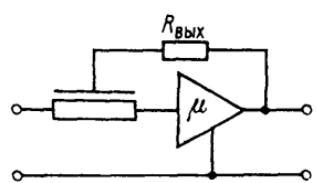


Рис. 87

Пренебрежение выходным сопротивлением активного компонента с повышением частоты становится неоправданным, так как с учетом этого сопротивления (при обозначении $\alpha = R_{\text{вых}}/R'l$) передаточная функция (рис. 87)

$$K(p) = (1 + \alpha \sqrt{p} \operatorname{sh} \sqrt{p}\tau) / (\mu + (1 - \mu) \operatorname{ch} \sqrt{p}\tau + \alpha \sqrt{p} \operatorname{sh} \sqrt{p}\tau) \quad \text{при } p = |j\omega| \rightarrow \infty$$

стремится к единице независимо от значения α .

Для построения частотных характеристик звена с учетом выходного сопротивления представим передаточную функцию выражением

¹ Для расчета АЧХ звена в нормированном диапазоне частот достаточно принять $\tau/2 = P3$ (при использовании программы 450/21) или $\tau/2 = P1$ (при использовании программы 451/21) и $\nu = \omega\tau = PX$.

$$K(j\omega) = ((1+A) + jB) / ((\mu + (1-\mu)\operatorname{ch} z \cos z + A) + j((1-\mu)\operatorname{sh} z \sin z + B)),$$

где $A = \alpha z (\operatorname{sh} z \cos z - \operatorname{ch} z \sin z)$; $B = \alpha z (\operatorname{sh} z \cos z + \operatorname{ch} z \sin z)$; $z = \sqrt{\omega\tau/2}$.

Программа 452/34. Вычисление АЧХ и ФЧХ звена активного фильтра с распределенными параметрами при учете выходного сопротивления

ИП2	\times	$\sqrt{\quad}$	П3	П6	e^x	\uparrow	$1/x$	П4	+
2	\div	П5	ИП4	-	П4	ПП	82	П8	ИП4
ПП	82	1	ПП	62	ПВ	ИПС	ПА	ИП3	sin
ИП4	\times	1	ИП0	-	\times	ИП8	+	П8	ИП5
ИП3	cos	\times	1	-	1	ИП0	-	\times	ИП7
ПП	62	ИПВ	-	ИПА	ИПС	\div	lg	2	0
\times	C/P	\div	П7	\uparrow	x^2	ИП8	x^2	+	$\sqrt{\quad}$
ПС	\div	arccos	ПД	ИП8	$x \geq 0$	80	ИПД	/-	ПД
ИПД	B/O	ИП3	cos	\times	ИП5	ИП6	/-	П6	sin
\times	-	ИП1	\times	ИП3	\times	B/O			

Инструкция: установить переключатель Р-Г в положение Р; ($\mu = P0$, $\alpha = P1$, $\pi\tau = P2$) $f = PX$ В/О С/П $PX = -A(\omega)$ дБ = $|K(\omega)|$ дБ, $PY = \varphi_K$ рад.

При расчетах на микрокалькуляторе с входным языком МК21, отличающимся меньшей емкостью запоминающих устройств, комплексные значения числителя N и знаменателя M передаточной функции можно вычислять раздельно. В этом случае для вычисления АЧХ и ФЧХ следует воспользоваться программами деления комплексных чисел, приведенных в § 1.6.

Программа 453/21. Вычисление комплексных значений числителя N и знаменателя M передаточной функции звена с распределенными параметрами¹

$\sqrt{\quad}$	P5	e^x	\uparrow	$1/x$	+	P6	-	+	P7	F5	e^{jx}
\leftarrow	F6	\times	P8	F7	\times	\uparrow	F3	\times	\rightarrow	\uparrow	F7
\times	P7	F6	\times	\uparrow	F3	\times	\uparrow	F2	+	\rightarrow	ПП
PC_x	P6	ПП	PC _x	P5	C/P	БП	P0	F7	\uparrow	F8	/-
P8	+	\uparrow	F5	\times	\uparrow	F4	\times	\uparrow	\leftarrow	+	B/O

Инструкция: для вычисления числителя $2 = P2$, $0 = P3$, $\alpha = P4$, $\omega\tau/2 = PX$ (B/O) C/P $PX = P5 = \operatorname{Im} N$, $P6 = \operatorname{Re} N$; для вычисления знаменателя $2\mu = P2$, $1 - \mu = P3$, $\alpha = P4$, $\omega\tau/2 = PX$ (B/O) C/P $PX = P5 = \operatorname{Im} M$, $P6 = \operatorname{Re} M$.

Контрольный пример: для $\mu = 0,868541$; $\alpha = 10^{-4}$; $\omega\tau/2 = 8,091139$ получим $K(j\omega) = (1,993903 - j0,003223888) / (-0,4374598 + j0,6561936)$.

Если ограничиться вычислением АЧХ и учесть, что влияние выходного сопротивления проявляется лишь на высоких частотах ($\nu \gg 1$), то, приняв $\operatorname{sh} z \approx \operatorname{ch} z \approx e^z/2$, получим $|K(j\omega)| \approx (\alpha z (\cos z - \sin z) + e^{-z} + \alpha^2 z^2 e^z/2) / ((1 - \mu)\mu \cos z + \alpha z \mu (\cos z - \sin z) + (1 - \mu + \alpha z)^2 + \alpha^2 z^2) e^z/4)^{1/2}$.

Программа 454/21. Расчет АЧХ звена активного фильтра с распределенной RC-цепью при учете входного сопротивления²

$\sqrt{\quad}$	P4	\uparrow	F3	\times	P6	XY	e^x	\times	P5	2	\div
XY	$1/x$	+	P7	F2	1	-	\uparrow	F6	\div	P8	1
-	x^2	1	\uparrow	F5	\times	4	\div	P6	F4	e^{jx}	
XY	-	P4	F8	\times	\uparrow	F4	-	\uparrow	F6	XY	-
P6	F7	\uparrow	F4	+	\uparrow	F6	\div	$\sqrt{\quad}$	C/P	БП	P0

Инструкция: ($\mu = P2$, $\alpha = P3$) $PX = \omega\tau/2$ В/О С/П $PX = |K(\omega)|$ (время счета око-

¹ По программе 453/21 вычисляется удвоенное значение числителя и знаменателя.

² См. примечание к программе 450/21.

ло 15 с). Для вычисления $-A(\omega) = |K(\omega)|$ в децибелах достаточно после окончания вычислений по программе ввести в обычном режиме предложение `ln 8 , 6 8 6 X`.

Эта программа обеспечивает методическую погрешность результата вычислений, не превышающую десятых долей децибела для частот, больших частоты среза звена в 2–5 раз в зависимости от значений α и μ . Попытка вычисления $|K(\omega)|$ на частотах, не удовлетворяющих этому соотношению, может привести к переполнению.

Контрольный пример: при $\mu = 0,868541$, $\alpha = 10^{-4}$, $\omega\tau/2 = 16,18227$ (что соответствует $\nu = 2$) получим $|K(\omega)| = 0,3359123$ или $-9,475615$ дБ (при точном значении $-10,09574$ дБ).

Программы, подобные приведенным, можно составить и для расчета других типов звеньев с распределенными RC -структурами, что существенно облегчит их проектирование в соответствии с методикой, рассмотренной в гл. 6.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Альбац М. Е. Справочник по расчету фильтров и линий задержки. – М.: Госэнергоиздат, 1963. – 200 с.
2. Варакин Л. Е. Теория сложных сигналов. – М.: Сов. радио, 1970. – 376 с.
3. Воеводин В. В. Численные методы алгебры. Теория и алгоритмы. – М.: Наука, 1966. – 248 с.
4. Ганстон М. А. Справочник по волновым сопротивлениям фидерных линий СВЧ. – М.: Связь, 1976. – 150 с.
5. Голд Б., Рэйдер Ч. Цифровая обработка сигналов: Пер. с англ./Под ред. А. М. Трахтмана. Т. 2. – М.: Мир, 1971. – 547 с.
6. Демидович Б. П., Марон М. А. Основы вычислительной математики. – М.: Наука, 1966. – 664 с.
7. Знаменский А. Е., Теплюк И. Н. Активные RC -фильтры. – М.: Связь, 1970. – 280 с.
8. Канингхэм В. Введение в теорию нелинейных систем. Пер. с англ./Под ред. Е. Б. Пастернака. – М.; Л.: Госэнергоиздат, 1962. – 455 с.
9. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике: Пер. с англ./Под ред. И. Г. Арамановича. – М.: Наука, 1974. – 831 с.
10. Немчинов В. М., Никитаев В. Г., Ожогин М. А., Ляхович В. В. Усилители с полевыми транзисторами. – М.: Сов. радио, 1980. – 192 с.
11. Ортизи Ж. Теория электронных цепей. Т. 2.: Пер. с франц./Под ред. Л. Р. Явича. – М.: Мир, 1971. – 547 с.
12. Программное обеспечение ЭВМ МИР-1 и МИР-2. Т. 1: Численные методы/ В. М. Глушков, И. Н. Молчанов, Б. Н. Брускин и др. – Киев: Наукова думка, 1976. – 280 с.
13. Рабинер Л., Гоулд Б. Теория и применение цифровой обработки сигналов: Пер. с англ./Под ред. Ю. Н. Александрова. – М.: Мир, 1977. – 848 с.
14. Сигорский В. П. Анализ электронных схем. – Киев: ГИТЛ, 1960. – 176 с.
15. Темеш Г., Митра С. Современная теория фильтров и их проектирование: Пер. с англ./Под ред. И. Н. Теплюка. – М.: Мир, 1977. – 560 с.
16. Трохименко Я. К. Метод обобщенных чисел и анализ линейных цепей. – М.: Сов. радио, 1972. – 312 с.
17. Трохименко Я. К. Радиоприемные устройства на транзисторах. – 5-е изд. – Киев: Техника, 1972. – 352 с.
18. Трохименко Я. К., Каширский И. С. Обобщенная оптимизация электронных схем. – Киев: Техника, 1979. – 192 с.
19. Трохименко Я. К., Каширский И. С., Ловкий В. К. Проектирование радиотехнических цепей на инженерных ЭЦВМ. – Киев: Техника, 1976. – 272 с.
20. Трохименко Я. К., Любич Ф. Д. Инженерные расчеты на микрокалькуляторах. – Киев: Техника, 1980. – 394 с.
21. Трохименко Я. К., Тараненко З. И. Замедляющие системы. – Киев: Техника, 1965. – 308 с.
22. Ханзел Г. Справочник по расчету фильтров: Пер. с англ./Под ред. А. Е. Знаменского. – М.: Сов. радио, 1974. – 288 с.
23. Химмельбау Д. Прикладное нелинейное программирование: Пер. с англ./Под ред. М. Л. Быховского. – М.: Мир, 1976. – 620 с.
24. Хэмминг Р. В. Численные методы: Пер. с англ./Под ред. Р. С. Гутера. – М.: Наука, 1968. – 268 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Стр.
3

Предисловие	
Глава 1. ОСОБЕННОСТИ ВЫЧИСЛЕНИЙ НА МИКРОКАЛЬКУЛЯТОРАХ	
1.1. Непрограммируемые микрокалькуляторы	4
1.2. Программируемые микрокалькуляторы	10
1.3. Представление алгоритмов программами	16
1.4. Погрешности результатов вычислений	24
1.5. Оптимизация программ вычислений	29
1.6. Операции над комплексными числами	37
Глава 2. МОДЕЛИРОВАНИЕ СИГНАЛОВ И ОБРАБОТКА ИНФОРМАЦИИ	
2.1. Представление сигналов	44
2.2. Дискретное преобразование Фурье	49
2.3. Спектральный анализ непрерывных сигналов	54
2.4. Цифровое моделирование сигналов во временной области	60
2.5. Элементы синтеза сигналов	64
2.6. Корреляционный анализ и статистическая обработка информации	68
Глава 3. АНАЛИЗ ЛИНЕЙНЫХ ЦЕПЕЙ	
3.1. Методика анализа	76
3.2. Анализ безынерционных цепей	82
3.3. Анализ цепи в операторной области	90
3.4. Анализ цепи в частотной области	98
3.5. Вычисление временных характеристик	106
3.6. Анализ влияния обратной связи	110
Глава 4. АНАЛИЗ НЕЛИНЕЙНЫХ ЦЕПЕЙ	
4.1. Аппроксимация нелинейных характеристик	117
4.2. Расчет статических режимов нелинейных цепей	125
4.3. Анализ нелинейных цепей при гармонических воздействиях	130
4.4. Нелинейное программирование	138
4.5. Расчет динамических характеристик нелинейных цепей	143
4.6. Анализ автоколебаний в нелинейных цепях	148
Глава 5. РАСЧЕТ УСИЛИТЕЛЕЙ	
5.1. Особенности расчета	154
5.2. Расчет усилителя в статическом режиме	159
5.3. Расчет усилителя на средних частотах	165
5.4. Расчет усилителя на границах полосы пропускания	171
5.5. Расчет резонансных усилителей	177
Глава 6. РАСЧЕТ ФИЛЬТРОВ	
6.1. Основные этапы проектирования фильтров	180
6.2. Определение типа и передаточной функции фильтра-прототипа	188
6.3. Синтез LC-фильтров	199
6.4. Практический расчет фильтров	205
6.5. Расчет активных RC-фильтров	211
6.6. Расчет цифровых фильтров	222
Глава 7. РАСЧЕТ УСТРОЙСТВ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ	
7.1. Расчет эквивалентных параметров проводников	234
7.2. Расчет параметров линий передачи	236
7.3. Расчет режима работы линий передачи	242
7.4. Расчет элементов устройств с распределенными параметрами	245
7.5. Расчет RC-цепей с распределенными параметрами	250
Список литературы	256