

В.В.Афанасьев  
О.Н.Веселовский

# Расчеты электрических цепей на программируемых МИКРО- КАЛЬКУЛЯТОРАХ



В.В.Афанасьев  
О.Н.Веселовский

**Расчеты  
электрических  
цепей  
на программируемых  
МИКРО-  
КАЛЬКУЛЯТОРАХ**



МОСКВА  
ЭНЕРГОАТОМИЗДАТ  
1992

ББК 31.211

А 94

УДК 621.3.06.001.24:681.3.06

Рецензент доктор техн. наук. О. П. Михайлов

А 94      Афанасьев В.В., Веселовский О.Н.  
Расчеты электрических цепей на программируемых микрокалькуляторах. — М.: Энергоатомиздат, 1992. — 192 с.: ил.  
ISBN 5-283-00726-X

Приводятся сведения о принципиальном устройстве и вычислительных возможностях программируемых микрокалькуляторов (ПМК).

Рассматриваются основы теории электрических цепей с точки зрения использования ПМК. Даются рекомендации о целесообразности использования каждого из двух режимов: "Автоматическая работа" и "Программирование". Тексты программ предшествуют алгоритмы вычислений, а завершается каждая программа инструкцией и контрольным примером.

Для инженерно-технических работников и студентов вузов.

A 2202020000-185  
051 (01)-92 40-91

ББК 31.211

ISBN 5-283-00726-X

© Авторы, 1992

## **ПРЕДИСЛОВИЕ**

В последние годы логика научно-технического прогресса выдвинула на передний план использование в научной и инженерной деятельности электронных вычислительных машин. Арифметические и логарифмические линейки — надежные спутники инженера и научного работника в недавнем прошлом — преданы забвению. Информатику и применение ЭВМ изучают учащиеся средних школ.

Опыт показывает, что значительная часть научных и инженерных расчетов может быть с успехом выполнена на распространенных и недорогих микрокалькуляторах, представляющих собой простейшие электронные вычислительные устройства персонального пользования. Программируемые микрокалькуляторы (ПМК) расширяют эти возможности за счет того, что они могут работать в двух режимах: "Командный режим" (в инструкциях к калькуляторам он называется режимом "Автоматическая работа") и "Программирование". Если какой-либо расчет должен быть выполнен однократно, то удобно пользоваться первым режимом, если многократно, да еще с вариацией параметров, — то вторым.

Особый интерес к ПМК проявляется в средних и высших учебных заведениях. Применение этих устройств рассматривается не только как средство вычислений, но и как переходный или подготовительный этап к работе на персональных ЭВМ и ЭВМ коллективного пользования. Приступающие к изучению вычислительной техники овладевают при работе с ПМК начальной системой понятий, терминов и методов программирования и автоматизированных вычислений.

Предлагаемая вниманию читателей книга ориентирована на лиц, занимающихся расчетами различных режимов электрических цепей, т.е. на широкий круг инженерно-технических работников. Одна из задач, которые ставят перед собой авторы, состоит в том, чтобы подготовить начинающих к самостоятельной работе по программированию и применению ЭВМ. Поэтому в книге приводятся основные сведения о ПМК (не заменяющие заводскую инструкцию) и программировании в машинных кодах, а затем, основываясь на известных читателю, но систематизированных под определенным углом зрения сведениях из теоретической или общей электротехники, авторы постепенно усложняют методы программирования и приводят тексты разнообразных программ.

Всем программам предшествует запись алгоритма вычислений, и если это представляется целесообразным, даются рекомендации "ручного"

счета на микрокалькуляторе. Программы приводятся в расширенном виде, с указанием адресов и кодов, что позволяет пользователю избежать обычных ошибок при вводе программы, а также легко проверять и редактировать введенную программу.

В книге приведены минимальные сведения из теоретической электротехники, позволяющие читателю либо вспомнить тот или иной раздел теории цепей, либо точнее осмыслить возможности применения численных методов расчета и ПМК среди всей совокупности средств анализа электрических цепей.

Авторы надеются, что их книга найдет своего читателя и будет способствовать широкому внедрению ПМК.

Авторы считают своим приятным долгом выразить признательность рецензенту доктору техн. наук, проф. О.П. Михайлову за ряд ценных замечаний, которые способствовали улучшению рукописи.

Все пожелания читателей по содержанию книги будут приняты с благодарностью. Их следует направлять в адрес Энергоатомиздата: 113114, Москва, М-114, Шлюзовая наб. 10.

*Авторы*

## *Глава первая*

# **ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ, ТЕОРЕМЫ И ПРИНЦИПЫ ТЕОРИИ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ**

## **1.1. ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ И СХЕМЫ**

**Электрическая цепь** – понятие созидающее и весьма общее. Оно охватывает совокупность устройств и объектов, образующих путь для электрического тока, электромагнитные процессы в которых могут быть описаны с помощью понятий об ЭДС, токе и напряжении. Графическое изображение электрической цепи, содержащее условные обозначения ее элементов и показывающее соединения этих элементов, называют схемой электрической цепи.

Задача исследования множества реальных электротехнических устройств (генераторов, трансформаторов, усилителей, электродвигателей, электропечей, радиоприемников и т.п.) была бы практически неосуществимой, если бы не были найдены способы упрощения и обобщения сложной картины физических процессов в этих устройствах, если бы не удалось создать такие представления об элементах цепи и схем, которые позволяют абстрагироваться от конкретных физических и геометрических характеристик реальных устройств.

Электромагнитные состояния технических устройств или процессы в них можно характеризовать с помощью понятий теории поля либо (при выполнении определенных условий) понятий теории электрических цепей. Здесь и электромагнитное поле, и электрическая цепь – математические модели, предназначенные для описания электромагнитных процессов устройств. В отличие от теории поля, которая описывает электромагнитные явления в любой точке пространства, занимаемого устройством, и вне его и оперирует с векторными величинами (напряженностями и индукциями составляющих электромагнитного поля и плотностью электрического тока), теория электрических цепей оперирует с интегральными скалярными величинами – напряжениями и токами элементов цепей.

То обстоятельство, что энергетические процессы в реальных устройствах и соотношения между напряжениями и токами на их выводах (полюсах) можно описать с помощью некоторых алгебраических или дифференциальных уравнений, а этим уравнениям поставить в соответствие некоторую упрощенную и идеализированную схему, содержащую условные обозначения идеализированных и обобщенных элементов, позволяет заменить реальную цепь схемой замещения, отображающей

свойства реальной цепи при определенных условиях. Эта математическая модель позволяет сосредоточить внимание исследователя только на рассмотрении взаимосвязи напряжений и токов на выводах компонентов реального электрического устройства. Геометрические же размеры этих компонентов и их материалы учитываются в параметрах элементов электрических схем.

Схема замещения, которую в дальнейшем для краткости будем называть просто схемой, может быть видоизменена, например упрощена, но так, чтобы величины, подлежащие рассмотрению (напряжения, токи), имели те же значения, что и в исходной схеме замещения. В этом случае говорят об эквивалентной схеме замещения.

При изучении теории цепей важно различать цепи с сосредоточенными параметрами и цепи с распределенными параметрами. К первым относится класс цепей, для которых длина электромагнитной волны несизмеримо велика по сравнению с геометрическими размерами реальных устройств; в этом случае геометрическими размерами можно пренебречь и полагать каждый элемент схемы некоторым точечным устройством, а напряжения и токи – не зависящими от пространственных координат. Ко вторым относится класс цепей, для которых длина электромагнитной волны соизмерима с размерами элементов; в этом случае напряжения и токи становятся функциями пространственных координат. Классическими примерами цепей с распределенными параметрами являются питающие линии ("длинные линии") и большие интегральные схемы при высоких частотах.

В теории цепей скалярным величинам – напряжению  $u$ , току  $i$  и мощности  $p$  – присваиваются условно-положительные направления. Это вызывается необходимостью однозначного математического описания элементов цепей и сопоставления результатов теоретического анализа моделей устройства с экспериментом. Условно-положительные направления показываются стрелками, и их выбор не связан с физическими процессами в элементе схемы. Рассмотрим рис. 1.1; если реальный ток в какой-то период времени совпадает с направлением тока от точки  $a$  к точке  $b$ , то будем считать его положительным, если же реальный ток будет направлен от точки  $b$  к точке  $a$ , то будем его считать отрицательным. Стрелка напряжения направлена от полюса, потенциал которого принят высшим, к полюсу с более низким потенциалом.

В теории цепей с сосредоточенными параметрами различают активные, пассивные и вспомогательные элементы, прообразами которых послужили элементы реальных цепей: источники энергии, приемники (потребители) и коммутационные устройства.

Реальным источникам электрической энергии, т.е. электротехническим устройствам, в которых происходит преобразование первичной, неэлектрической энергии в электрическую, в схемах замещения соответствуют активные элементы схем: источники напряжения и источники тока. *Источником напряжения называется сосредоточенный двухполюс-*

Рис. 1.1. Условно-положительные направления тока и напряжения на участке пассивной цепи

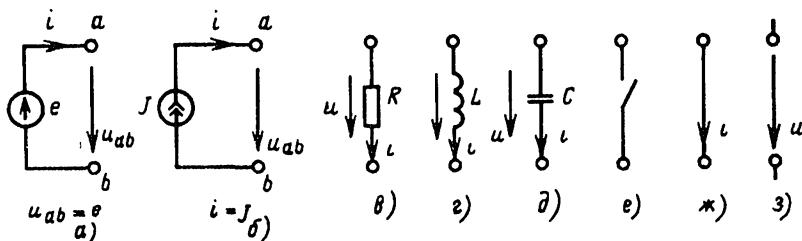
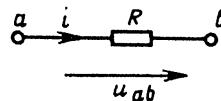


Рис. 1.2. Элементы схем замещения

ный элемент с известным (заданным) напряжением и неопределенным, зависящим от нагрузки током. Источником тока называется сосредоточенный двухполюсный элемент с известным (заданным) током и неопределенным, зависящим от нагрузки напряжением. Условные обозначения этих идеализированных источников приведены на рис. 1.2, а и б.

Требует отдельного пояснения рис. 1.2, а. Здесь показан источник напряжения  $u_{ab}$ , а внутри окружности указано направление ЭДС. В теории цепей можно вполне обойтись без понятия об ЭДС, источник которой имеет то же определение, что и источник напряжения. Однако, поскольку в большинстве учебных пособий, а следовательно, при изучении теории цепей в высшей школе используется понятие об ЭДС, в этой книге тоже будет встречаться это понятие, но всегда нужно иметь в виду, что численно ЭДС и напряжения идеализированного источника равны, а положительные направления их противоположны.

К пассивным относятся идеализированные двухполюсные элементы схем, каждый из которых связан с потреблением или преобразованием лишь одного вида энергии. Необратимые преобразования энергии происходят в *резистивном* элементе, условное обозначение которого показано на рис. 1.2, в. Реальным прообразом такого элемента может служить резистор или реостат, т.е. электротехническое устройство, предназначенное для использования его электрического сопротивления. И хотя реальный резистор может какую-то (относительно небольшую) часть энергии запасать в виде электрического и магнитного полей, главным, определяющим его качеством является преобразование электрической энергии в тепловую, поэтому в схемах замещения резистивный элемент обладает только сопротивлением  $R$  или обратной ему величиной — проводимостью  $G$ ; параметры, связанные с магнитным и электрическим полями, полагаются паразитными, и ими пренебрегают. Следовательно, резистив-

ным называется сосредоточенный двухполюсный элемент схемы, напряжение и ток которого связаны между собой соотношениями

$$u = Ri; \quad i = Gu; \quad R = 1/G.$$

Электрическое сопротивление представляет собой скалярную величину, равную отношению постоянного напряжения на участке пассивной электрической цепи к постоянному току в нем. В цепи переменного тока сопротивление резистивного элемента больше, что объясняется эффектами вытеснения тока и уменьшения эффективного сечения проводника. Сопротивление переменному току называют активным и определяют из энергетических соображений:

$$R = P/I^2,$$

где  $P$  -- активная мощность;  $I$  -- действующий ток.

Способность запасать энергию в виде магнитного поля присуща индуктивному элементу схем. Прообразом такого элемента является индуктивная катушка, т.е. элемент реальной цепи, предназначенный для использования его индуктивности. Конечно, реальная катушка имеет паразитную емкость и собственное сопротивление обмотки, но этими параметрами, как малыми, пренебрегают, выделяя главное и определяющее ее свойство, связанное с изменениями магнитного поля. Будем называть индуктивным такой сосредоточенный двухполюсный элемент схемы, напряжение на полюсах которого пропорционально скорости изменения тока в нем (рис. 1.2,г) или (и) скоростям изменения токов в других индуктивных элементах, магнитно связанных с первым:

$$u_i = \sum_k L_{ik} \frac{di_k}{dt},$$

где для  $k = i$   $L_{ii}$  -- собственная индуктивность  $i$ -го элемента и для  $k \neq i$   $L_{ik} = L_{ki}$  -- взаимная индуктивность  $i$ -го и  $k$ -го элементов, (обычно обозначается буквой  $M_{ik} = M_{ki}$ ).

Способностью запасать энергию в виде электрического поля обладает емкостный элемент схем. Прообразом такого элемента является конденсатор, т.е. элемент реальной цепи, предназначенный для использования его емкости. Реальный конденсатор имеет паразитные параметры: индуктивность выводов и электрическую проводимость диэлектрика, однако в электрических схемах этими малыми параметрами пренебрегают, оставляя главное и определяющее свойство конденсатора, связанное с изменением и запасанием энергии электрического поля. Будем называть емкостным такой сосредоточенный двухполюсный элемент схемы, ток которого пропорционален скорости изменения напряжения на его полюсах или (и) скорости изменения напряжений на полюсах конденсаторов, связанных с первым через электрические поля (рис. 1.2,д):

$$i_i = \sum_k C_{ik} \frac{du_k}{dt},$$

где для  $k = i$   $C_{ii}$  – собственная емкость  $i$ -го элемента и для  $k \neq i$   $C_{ik} = C_{ki}$  – взаимная емкость  $i$ -го и  $k$ -го элементов.

Мгновенная мощность, связанная с преобразованием энергии в активных или пассивных элементах схем, определяется как произведение напряжения и тока

$$p = ui,$$

а энергия к рассматриваемому моменту времени  $t$  – как

$$w(t) = \int_{-\infty}^t p(t) dt,$$

причем  $w(-\infty) = 0$ .

Последний интеграл для активных элементов может принимать положительные и отрицательные значения, а для пассивных элементов он всегда имеет лишь неотрицательные значения.

К группе вспомогательных элементов схем относятся короткозамыкающий идеальный проводник, разъем и ключ в двух состояниях: разомкнутом и замкнутом.

*Идеальный проводник* – это сосредоточенный двухполюсный элемент схемы, напряжение на полюсах которого равно нулю, а ток не определен (рис. 1.2, ж):

$$u = 0.$$

*Разъем* – это сосредоточенный двухполюсный элемент схемы, ток которого равен нулю, а напряжение не определено (рис. 1.2, з):

$$i = 0.$$

С помощью этих элементов можно, в частности, моделировать амперметры, вольтметры, ваттметры.

*Ключ* – это сосредоточенный двухполюсный элемент схемы, который в замкнутом состоянии подобен идеальному проводнику; в разомкнутом состоянии подобен разъему; переводится из одного состояния в другое мгновенно.

Ключ, показанный на рис. 1.2, е, моделирует различные коммутирующие устройства реальной цепи (выключатели, контакторы, реле), а также аварийные ситуации (короткое замыкание участка цепи, обрыв провода).

В мировой электротехнической литературе постепенно сложился своеобразный электротехнический жаргон, который допускает употребление некоторых понятий, не согласующихся со строгими физическими представлениями. Например, мощность, как известно, есть физическая

величина, характеризующая изменение энергии во времени (математически – это скорость изменения энергии), и она не может "потребляться", "генерироваться", "передаваться" и т.п. Эти термины применимы только к понятию "энергия", однако в целях большего лаконизма употребляются термины "установленная", "генерируемая", "передаваемая" мощность. Равным образом в теории цепей идеализированные элементы схем ради той же лаконичности часто называют резисторами, катушками, конденсаторами и проводниками, перенося, таким образом, на модели признаки реальных устройств. Однако эти неточности терминологии не вызывают обычно никаких недоразумений.

В современной теории электрических цепей используется исключительно Международная система единиц (СИ).

## 1.2. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ЗАДАЧИ АНАЛИЗА ЦЕПЕЙ

Основные уравнения теории цепей построены на законах Кирхгофа. Эти уравнения являются топологическими: они определяются топологией (конфигурацией схемы) цепи и не зависят от ее элементного состава.

К основным топологическим понятиям теории электрических цепей относятся ветвь, узел и контур.

*Ветвью* называется участок электрической цепи, вдоль которого проходит один и тот же ток. В более широком смысле ветвью можно называть любой двухполюсный участок цепи; последнее, расширенное толкование удобно для машинных методов расчета цепей.

*Узлом* называется место соединения ветвей электрической цепи. При "ручном" счете обычно места соединения двух ветвей полагают управляемыми узлами и принимают во внимание только узлы, в которых соединяются не менее трех ветвей.

*Контуром* называется любая замкнутая последовательность ветвей, при обходе которой каждый узел встречается не более одного раза.

*Первый закон Кирхгофа* утверждает, что алгебраическая сумма токов в любом узле цепи равна нулю:

$$\sum_k i_k = 0.$$

Условимся токам, направленным от узла, присваивать знак "+", а токам, направленным к узлу, – знак "-".

*Второй закон Кирхгофа* утверждает, что алгебраическая сумма напряжений в любом замкнутом контуре равна нулю:

$$\sum_j u_j = 0.$$

Условимся напряжениям, положительное направление которых сов-

падает с произвольно выбранным направлением обхода контура, присваивать знак "+", в противном случае – знак "-". Если пользоваться понятием ЭДС, то, учитывая противоположность условно-положительных направлений напряжения и ЭДС источника, последнее уравнение можно переписать так:

$$\sum_j u_j = \sum_j e_j.$$

В электрической цепи существуют токи в ветвях и напряжениях на участках как реакция на воздействие источников. Различают регулярные (детерминированные) и нерегулярные (случайные) воздействия. Регулярные воздействия представляют собой заданную периодическую функцию времени и существуют неопределенно долгое время.

При любого рода коммутациях, а также при случайных или ограниченных во времени воздействиях (включение и отключение источников, импульсные воздействия, внезапные изменения схемы) возникают переходные процессы, в результате которых цепь переходит из одного уставновившегося режима в новый установившийся режим. Установившиеся режимы обусловлены регулярными воздействиями либо состоянием покоя (отсутствием воздействия). И хотя переходные процессы, связанные с изменениями энергии, запасенной в реактивных элементах цепи, в теоретическом плане протекают бесконечно долго, в инженерных расчетах их время ограничивают некоторой условной величиной. Обычно переходные процессы – это быстротекущие процессы, продолжающиеся в течение времени, измеряющегося секундами или долями секунд.

Задачей анализа цепи является определение реакции или отклика при известных воздействиях и схеме цепи. Возможна и иная постановка задачи: определение воздействий при известных реакциях и схеме цепи. Типовой является задача расчета токораспределения. Обратной анализу является задача синтеза цепи.

Значения токов или напряжений на полюсах элементов цепи находятся в результате решения систем уравнений, составленных по законам Кирхгофа или вытекающих из этих законов. Однако следует иметь в виду, что топологические уравнения необходимы, но недостаточны для однозначного вычисления значений токов и напряжений. Задача анализа цепи становится выполнимой, если эти уравнения дополнить компонентными уравнениями, которые приведены в табл. 1.1.

Если цепь содержит два индуктивно связанных элемента, то для каждой катушки в соответствии с обозначениями рис. 1.3 можно записать

$$u_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} \pm M \frac{di_2}{dt};$$

$$u_2 = L_2 \frac{di_2}{dt} \pm M \frac{di_1}{dt},$$

Таблица 1.1

Параметр	Ток	Напряжение	Мощность $p = ui$
Сопротивление $R$	$i = u/R$	$u = Ri$	$p = R i^2$
Проводимость $G$	$i = Gu$	$u = i/G$	$p = Gu^2$
Индуктивность $L$	$i = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t u dt$	$u = L \frac{di}{dt}$	$p = Li \frac{di}{dt}$
Емкость $C$	$i = C \frac{du}{dt}$	$u = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i dt$	$p = Cu \frac{du}{dt}$
Источник напряжения	Любой	$u = e$	$p = ei$
Источник тока	$i = j$	Любое	$p = uj$

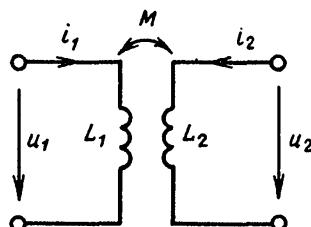


Рис. 1.3. Индуктивно связанные идеальные катушки

где верхние знаки относятся к согласному включению катушек, а нижние знаки — к встречному включению.

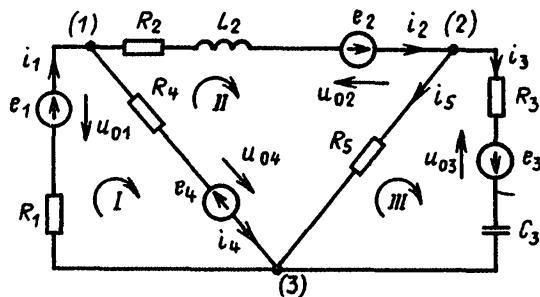
При рассмотрении табл. 1.1 обнаруживается дуальность резистивных элементов  $R$  и  $G$  и дуальность реактивных элементов  $L$  и  $C$ : попарная запись уравнений оказывается идентичной, если при переходе от  $R$  к  $G$  или от  $L$  к  $C$  (и наоборот) одновременно поменять местами  $i$  и  $u$ . Источники напряжения и тока тоже являются дуальными элементами схем. Свойство дуальности схем и их элементов расширяет возможности исследования цепей.

Для сокращения объема совместно решаемых уравнений на практике часто используют более "крупные", чем элементы, компоненты схемы: ветви, двухполюсники, четырехполюсники и т.д.

**Пример 1.1.** Составить для схемы на рис. 1.4 топологические и компонентные уравнения.

Обозначим узлы схемы цифрами в скобках. Нумерация элементов соответствует выбранному номеру ветви. В заданной схеме пять ветвей и три узла (не считая устранимых). Направлениями токов и обходом контуров задаемся произвольно. Источники могут быть учтены либо их ЭДС, либо равными и противоположными по направлению напряжениями (например,  $e_1 = u_{01}$ ).

Рис. 1.4. К примеру 1.1



По первому закону Кирхгофа:

для узла 1

$$-i_1 + i_2 + i_4 = 0; \quad (1)$$

для узла 2

$$-i_2 + i_3 + i_5 = 0. \quad (2)$$

Если составить уравнение по первому закону Кирхгофа для оставшегося узла 3, то оно оказывается зависимым, так как его можно получить, сложив уравнения (1) и (2). Если число узлов схемы равно  $q$ , то по первому закону Кирхгофа составляется  $q - 1$  независимых уравнений.

Если обозначить напряжения на выводах ветвей как  $u_1 \dots u_5$  и считать, что их положительные направления совпадают с положительными направлениями токов в ветвях, то по второму закону Кирхгофа:

для контура I

$$u_1 + u_4 = 0; \quad (3)$$

для контура II

$$u_2 + u_5 - u_4 = 0; \quad (4)$$

для контура III

$$u_3 - u_5 = 0. \quad (5)$$

Если составить уравнение еще для какого-нибудь контура (например, для внешнего), то оно окажется зависимым, так как может быть получено в результате комбинации уравнений (3) – (5). Независимыми контурными уравнения получаются лишь в том случае, если в каждый новый контур входит хотя бы одна ветвь, не учтенная в предыдущих уравнениях.

Компонентные уравнения:

$$u_1 = u_{31} = R_1 i_1 - u_{01}; \quad (6)$$

$$u_2 = u_{12} = R_2 i_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} - u_{02}; \quad (7)$$

$$u_3 = u_{23} = R_3 i_3 + \frac{1}{C_3} \int_{-\infty}^t i_3 dt - u_{03}; \quad (8)$$

$$u_4 = u_{13} = R_4 i_4 + u_{04}; \quad (9)$$

$$u_5 = u_{23} = R_5 i_5. \quad (10)$$

Совместное решение приведенных десяти уравнений позволяет при заданных параметрах элементов (активных и пассивных) вычислить значения всех токов ветвей. В практических ("ручных") расчетах целесообразно компонентные уравнения (6) – (10) включить в контурные уравнения (3) – (5): в этом случае общее число уравнений становится равным числу искомых величин – токов ветвей. Например, для контура II можно сразу записать одно из двух уравнений:

$$\left. \begin{aligned} R_2 i_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} - u_{02} + R_5 i_5 - u_{04} - R_4 i_4 &= 0; \\ R_2 i_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} + R_5 i_5 - R_4 i_4 &= e_2 + e_4. \end{aligned} \right\} \quad (1.1)$$

### 1.3. ОСНОВНЫЕ ПРИНЦИПЫ АНАЛИЗА ЦЕПЕЙ

Разработано много разнообразных методов расчета электрических цепей, но прежде чем выбрать тот или иной метод, необходимо в результате предварительного анализа установить принцип расчета. Последний определяется видом воздействия, которое может быть задано в функции времени или частоты: в первом случае анализ выполняется во временной области, во втором – в частотной.

#### 1.3.1. Анализ цепей при постоянных воздействиях (цепей постоянного тока)

Наиболее простым является постоянное воздействие, которое не зависит от времени. Индуктивность и взаимная индуктивность элементов цепи при постоянных токах не проявляются, поскольку при  $i = I = \text{const}$

$$u_{ab} = u_L = L \frac{di_1}{dt} \pm M \frac{di_2}{dt} = 0,$$

следовательно, участок схемы с идеализированной индуктивностью из 14

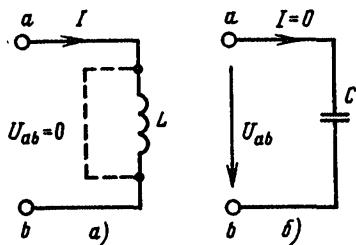
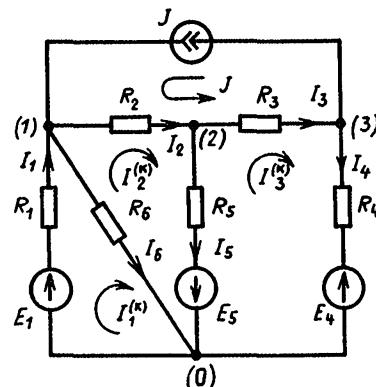


Рис. 1.5. Индуктивность (а) и емкость (б) при постоянных воздействиях

Рис. 1.6. Резистивная схема



рассмотрения исключается ("закорачивается", заменяется идеализированным проводником), как это показано штриховой линией на рис. 1.5, а.

Емкость и взаимная емкость элементов цепи при постоянных токах не проявляются; конденсатор, будучи заряжен до постоянного напряжения  $U_{ab}$  (рис. 1.5, б), не изменяет свой заряд, и при  $u_{ab} = U_{ab} = \text{const}$

$$i = C \frac{du_{ab}}{dt} = 0.$$

Следовательно, в установившемся режиме при постоянных напряжениях конденсатор проявляет себя, как разрыв цепи, и может быть заменен разъемом.

Указанные особенности имеют своим следствием то обстоятельство, что любая электрическая цепь при постоянных воздействиях рассматривается как резистивная.

Составим уравнения по законам Кирхгофа для резистивной цепи при постоянных воздействиях.

Для схемы на рис. 1.6, имеющей семь ветвей и четыре узла, составляются три уравнения по первому закону Кирхгофа ( $q-1$ ) и три уравнения по второму закону Кирхгофа ( $p - n_j - q + 1$ , где  $p$  — общее число ветвей;  $n_j$  — число ветвей, содержащих источники тока, поскольку ток в этих ветвях задан), контуры и направления обхода показаны стрелками:

$$-I_1 + I_2 + I_6 - J = 0; R_1 I_1 + R_6 I_6 = E_1;$$

$$-I_2 + I_3 + I_5 = 0; R_2 I_2 + R_5 I_5 - R_6 I_6 = E_5;$$

$$-I_3 + I_4 + J = 0; R_3 I_3 + R_4 I_4 - R_5 I_5 = -E_4 - E_5.$$

Совместное решение этих уравнений позволяет вычислить значения всех неизвестных токов ветвей.

### 1.3.2. Анализ цепей при гармонических воздействиях (принцип комплексных изображений)

Центральное место в анализе цепей занимают цепи при гармонических воздействиях. Достоинства гармонических функций состоят прежде всего в том, что они имеют подобные себе производные и интегралы, а любая периодическая несинусоидальная функция может быть представлена в виде суммы гармонических функций.

Известно, что синусоиду или косинусоиду можно получить в результате развертки во времени проекции вращающегося отрезка на вертикальную или горизонтальную ось (рис. 1.7):

$$x_1(t) = A_m \sin(\omega t + \psi) = A_m \cos(\omega t + \psi - \pi/2);$$

$$x_2(t) = A_m \cos(\omega t + \psi) = A_m \sin(\omega t + \psi + \pi/2).$$

Из рис. 1.7 видно, что отрезку  $A_m$  можно придать смысл вращающегося с угловой скоростью  $\omega$  радиуса-вектора, положение которого в данный момент времени полностью характеризует значение гармонического колебания, поскольку известны его амплитуда  $A_m$ , начальная фаза  $\psi$  и частота  $\omega = 2\pi/T$ . Поэтому в теории гармонических процессов вместо того, чтобы рассматривать (складывать, вычитать) синусоиды одинаковой частоты, оперируют с их изображениями в виде отрезков или векторов.

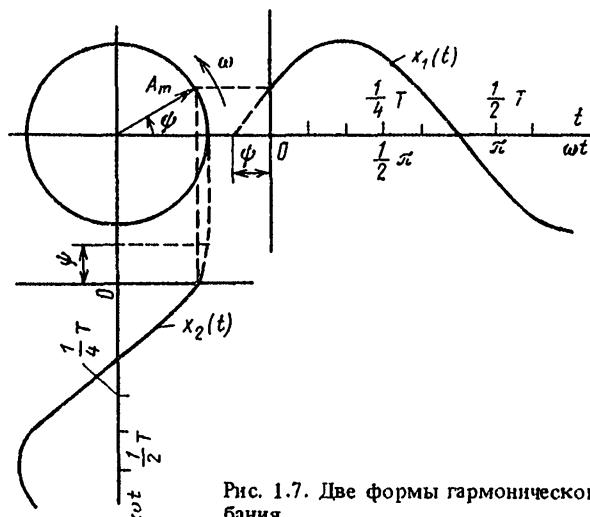


Рис. 1.7. Две формы гармонического колебания

Рис. 1.8. Вектор на комплексной плоскости

торов, которые складывают и вычитают геометрически. Так образуются векторные диаграммы гармонических токов и напряжений.

Известно далее, что вектор  $A_m$  можно записать в виде комплексного числа, которое становится изображением или "символом" гармонического процесса. Тригонометрические или геометрические операции с синусоидами или радиусами-векторами в этом случае могут быть заменены алгебраическими операциями над символами, т.е. над комплексными числами.

В основу комплексных изображений гармонических колебаний положены известная из математики формула Эйлера и вытекающие из нее соотношения (рис. 1.8) :

$$e^{\pm j\psi} = \cos \psi \pm j \sin \psi;$$

$$\underline{A}_m = A_m e^{j\psi} = a + jb = A_m \cos \psi + jA_m \sin \psi;$$

$$\underline{A}_m^* = A_m e^{-j\psi} = a - jb = A_m \cos \psi - jA_m \sin \psi.$$

Здесь обозначены:  $\underline{A}_m$  – комплексное число;  $\underline{A}_m^*$  – сопряженное комплексное число;  $a = \operatorname{Re}[\underline{A}_m] = \operatorname{Re}[\underline{A}_m^*] = (\underline{A}_m + \underline{A}_m^*)/2$ ;  $b = \operatorname{Im}[\underline{A}_m] = -\operatorname{Im}[\underline{A}_m^*] = (\underline{A}_m - \underline{A}_m^*)/(2j)$ ,  $\underline{A}_m \underline{A}_m^* = A_m^2$ .

Следовательно, модуль комплексного числа

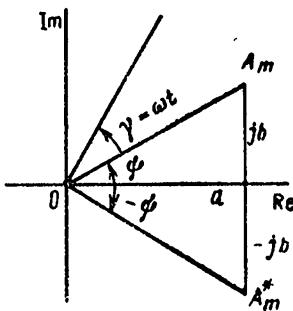
$$A_m = \sqrt{\underline{A}_m \underline{A}_m^*} = \sqrt{a^2 + b^2},$$

а аргумент

$$\psi = \begin{cases} \arccos a/A_m & \text{при } b \geq 0, \\ -\arccos a/A_m & \text{при } b < 0. \end{cases}$$

Умножение комплексного числа  $A_m e^{j\psi}$  на "поворотный множитель"  $e^{\pm j\gamma}$  соответствует повороту вектора на комплексной плоскости на угол  $\pm \gamma$ ; в частном случае, когда  $\gamma = \pi/2$ ,

$$e^{\pm j\pi/2} = \cos \pi/2 \pm j \sin \pi/2 = \pm j; 1/j = -j.$$



Следовательно, умножение комплексного числа на  $\pm j$  равнозначно повороту вектора на комплексной плоскости на угол  $\pm \pi/2$  (положительное направление вращения – против часовой стрелки). Если же  $\gamma = \omega t$ , то рассматриваемый вектор вращается с угловой скоростью  $\omega$ , так как угол поворота  $\gamma$  стал функцией времени, тогда  $A_m e^{j\psi} e^{j\omega t} = \underline{A}_m e^{j\omega t}$  – комплексная функция времени, а  $A_m e^{j\psi} = \underline{A}_m$  – комплексная амплитуда.

Поскольку в соответствии с формулой Эйлера

$$\begin{aligned}\underline{A}_m e^{j\omega t} &= A_m e^{j\psi} e^{j\omega t} = A_m e^{j(\omega t + \psi)} = \\ &= A_m \cos(\omega t + \psi) + jA_m \sin(\omega t + \psi),\end{aligned}$$

следовательно, гармонические функции

$$A_m \sin(\omega t + \psi) = \operatorname{Im}[\underline{A}_m e^{j\omega t}];$$

$$A_m \cos(\omega t + \psi) = \operatorname{Re}[\underline{A}_m e^{j\omega t}].$$

Производная и интеграл от комплексной функции времени

$$\frac{d}{dt} [\underline{A}_m e^{j\omega t}] = j\omega \underline{A}_m e^{j\omega t};$$

$$\int \underline{A}_m e^{j\omega t} dt = \frac{1}{j\omega} \underline{A}_m e^{j\omega t}.$$

Обратимся к терминам и понятиям теории электрических цепей. Любой гармонический ток (напряжение) можно характеризовать мгновенным, амплитудным, средневыпрямленным и действующим значениями.

*Мгновенным* называется значение электрического тока в рассматриваемый момент времени. Мгновенные значения величин в эксперименте можно наблюдать на осциллографе.

*Амплитудным*  $A_m$  называется наибольшее значение гармонической функции. В практических условиях оно может измеряться с помощью осциллографа или специальным прибором.

*Средневыпрямленным* значением гармонического тока называется среднее за полупериод его значение. Так, принимая нулевую начальную фазу, имеем

$$\begin{aligned}A_{\text{ср в}} &= \frac{2}{T} \int_0^{T/2} A_m \sin \omega t dt = \frac{2}{T} \int_{-T/4}^{T/4} A_m \cos \omega t dt = \\ &= \frac{2}{\pi} A_m \approx 0,636 A_m.\end{aligned}$$

*Действующим* называется среднеквадратичное значение электрического тока за период. При нулевой начальной фазе

$$A = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T [A_m \sin \omega t]^2 dt} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T [A_m \cos \omega t]^2 dt} = \\ = A_m / \sqrt{2} \approx 0,707 A_m.$$

Если принять, что в схеме на рис. 1.4 действуют гармонические ЭДС, то в установившемся режиме линейной цепи все токи в ветвях тоже будут гармоническими, следовательно, можно записать соответствия

$$e_k(t) = E_{mk} \cos(\omega t + \psi_{ek}) \doteq E_{mk} e^{j\psi_{ek}} e^{j\omega t} = \underline{E}_{mk} e^{j\omega t}; \\ i_k(t) = I_{mk} \cos(\omega t + \psi_{ik}) \doteq I_{mk} e^{j\psi_{ik}} e^{j\omega t} = \underline{I}_{mk} e^{j\omega t}.$$

Основные компонентные уравнения приведены в табл. 1.2.

Следовательно, уравнение (1.1) можно переписать в комплексной форме:

$$R_2 \underline{I}_{2m} e^{j\omega t} + j\omega L_{2m} \underline{I}_{2m} e^{j\omega t} + R_5 \underline{I}_{5m} e^{j\omega t} - R_4 \underline{I}_{4m} e^{j\omega t} = \\ = \underline{E}_{2m} e^{j\omega t} + \underline{E}_{4m} e^{j\omega t}.$$

Множитель вращения сокращается, и последнее уравнение преобразуется к следующему виду:

$$R_2 \underline{I}_{2m} + j\omega L_{2m} \underline{I}_{2m} + R_5 \underline{I}_{5m} - R_4 \underline{I}_{4m} = \underline{E}_{2m} + \underline{E}_{4m}. \quad (1.2)$$

Таблица 1.2

Функция времени	Комплексное изображение
$u_R = Ri$	$\underline{U}_{Rm} e^{j\omega t} = R \underline{I}_m e^{j\omega t}$
$u_L = L \frac{di}{dt}$	$\underline{U}_{Lm} e^{j\omega t} = j\omega L \underline{I}_m e^{j\omega t}$
$u_M = \pm M \frac{di}{dt}$	$\underline{U}_{Mm} e^{j\omega t} = \pm j\omega M \underline{I}_m e^{j\omega t}$
$u_C = \frac{1}{C} \int i dt$	$\underline{U}_{Cm} e^{j\omega t} = \frac{1}{j\omega C} \underline{I}_m e^{j\omega t}$

Если обе части этого уравнения, записанного в комплексных амплитудах, разделить на  $\sqrt{2}$ , то получится уравнение, записанное в комплексных действующих значениях:

$$R_2 \underline{I}_2 + j\omega L_2 \underline{I}_2 + R_5 \underline{I}_5 - R_4 \underline{I}_4 = \underline{E}_2 + \underline{E}_4. \quad (1.3)$$

Очевидно, что уравнения (1.2) и (1.3), представляющие собой запись второго закона Кирхгофа в комплексной форме, можно составить непосредственно по схеме. Например, для контура III (см. рис. 1.4) имеем

$$-R_5 \underline{I}_5 + R_3 \underline{I}_3 + \frac{1}{j\omega C_3} \underline{I}_3 = \underline{E}_3,$$

или

$$-R_5 \underline{I}_5 + R_3 \underline{I}_3 - j \frac{1}{\omega C_3} \underline{I}_3 = \underline{E}_3.$$

В полученных уравнениях:  $X_L = \omega L$  – реактивное сопротивление индуктивной катушки, или, короче, *индуктивное сопротивление*, Ом;  $X_C = 1/(\omega C)$  – реактивное сопротивление конденсатора, или, короче, *емкостное сопротивление*, Ом.

В общем виде законы Кирхгофа в комплексной форме записываются так:

$$\sum_k \underline{I}_k = 0;$$

$$\sum_j \underline{U}_j = 0, \text{ или } \sum_j \underline{Z}_j \underline{I}_j = \sum_j \underline{E}_j.$$

В последнем выражении величина  $\underline{Z}$  является *комплексным сопротивлением*, смысл которого вытекает из закона Ома для пассивной ветви при фиксированной частоте, записанного в комплексной форме:

$$\frac{\underline{U}_m e^{j\omega t}}{\underline{I}_m e^{j\omega t}} = \frac{\underline{U}_m}{\underline{I}_m} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = \frac{\underline{U} e^{j\psi_u}}{\underline{I} e^{j\psi_i}} = Z e^{j(\psi_u - \psi_i)} = Z e^{j\varphi}. \quad (1.4)$$

Таким образом, комплексное сопротивление пассивной ветви есть комплексное число, модуль которого равен отношению действующих напряжения и тока (или амплитуд), а аргумент – разности начальных фаз этих величин, при этом  $-\pi/2 \leq \varphi \leq \pi/2$ . Переходя к алгебраической форме комплексного сопротивления, получаем

$$\underline{Z} = Z e^{\pm j\varphi} = Z \cos \varphi \pm j Z \sin \varphi = R \pm jX,$$

при этом мнимая часть комплексного сопротивления может быть положительной — при индуктивном характере, отрицательной — при емкостном характере и равной нулю — при резистивном сопротивлении или резонансе.

### Комплексная проводимость

$$\begin{aligned} \underline{Y} &= \frac{I_m e^{j\omega t}}{U_m e^{j\omega t}} = \frac{I_m e^{j\psi_i} e^{j\omega t}}{U_m e^{j\psi_u} e^{j\omega t}} = \\ &= \frac{I e^{j\psi_i}}{U e^{j\psi_u}} = Y e^{-j(\psi_u - \psi_i)} = Y e^{-j\varphi}. \end{aligned} \quad (1.5)$$

В алгебраической форме:

$$\underline{Y} = Y e^{\mp j\varphi} = Y \cos \varphi \mp j Y \sin \varphi = G \mp jB,$$

где верхний знак относится к случаю индуктивного характера ветви, а нижний — емкостного.

Сопоставление (1.4) и (1.5) позволяет записать соотношения  $\underline{Z} = 1/\underline{Y}$  и  $\underline{Y} = 1/\underline{Z}$ , из которых можно получить формулы перехода от последовательной схемы замещения ветви к параллельной и обратно:

$$\begin{aligned} \underline{Y} &= \frac{1}{\underline{Z}} = \frac{1}{R \pm jX} = \frac{R \mp jX}{(R \pm jX)(R \mp jX)} = \\ &= \frac{R}{R^2 + X^2} \mp j \frac{X}{R^2 + X^2} = G \mp jB. \end{aligned}$$

На основе принципа дуальности можно записать как

$$\underline{Z} = \frac{G}{G^2 + B^2} \pm j \frac{B}{G^2 + B^2} = R \pm jX.$$

Следовательно, при переходе от последовательной схемы к эквивалентной параллельной и обратно можно пользоваться следующими соотношениями:

$$G = R/Z^2; \quad R = G/Y^2; \quad B = X/Z^2; \quad X = B/Y^2; \quad Y = 1/Z; \quad Z = 1/Y.$$

На рис. 1.9 приведены треугольники сопротивлений и проводимостей, из которых следуют очевидные соотношения, вытекающие также из предыдущих рассуждений:

$$Z = \sqrt{R^2 + X^2}; \quad Y = \sqrt{G^2 + B^2};$$

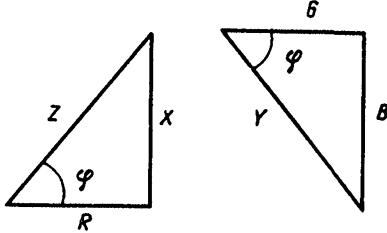


Рис. 1.9. Треугольники сопротивлений и проводимостей

$$R = Z \cos \varphi; \quad G = Y \cos \varphi;$$

$$X = Z \sin \varphi; \quad B = Y \sin \varphi;$$

$$\operatorname{tg} \varphi = X/R; \quad \operatorname{tg} \varphi = B/G.$$

Таким образом, символический принцип анализа позволяет в процессе расчета исключить из рассмотрения функцию времени и перейти в частотную область. Этот принцип предполагает следующий алгоритм расчетных действий.

1. Гармонические воздействия заменяют комплексными изображениями их действующих значений  $\underline{U}$ ,  $\underline{E}$ ,  $\underline{J}$  (или их амплитуд  $\underline{U}_m$ ,  $\underline{E}_m$ ,  $\underline{J}_m$ ).

2. Схему замещения с пассивными параметрами  $R$ ,  $L$ ,  $C$ ,  $M$  заменяют комплексной схемой замещения с параметрами  $R$ ,  $j\omega L$ ,  $-j\frac{1}{\omega C}$ ,  $\pm j\omega M$ .

3. Составляют и решают системы уравнений равновесия цепи (уравнения Кирхгофа или основанные на них другие уравнения) относительно комплексных изображений искомых величин;

4. По комплексным изображениям записывают мгновенные значения искомых величин.

**Пример 1.2.** Выполнить переход от мгновенных значений к комплексным амплитудам.

Пусть мгновенное значение (функция времени) напряжения,  $B$ ,

$$u = 141 \cos(\omega t + \pi/4),$$

тогда комплексная амплитуда,  $B$ ,

$$\underline{U}_m = 141 e^{j\pi/4} = 141 e^{j45^\circ}$$

и комплексное действующее напряжение,  $B$ ,

$$\underline{U} = \frac{141}{\sqrt{2}} e^{j\pi/4} = 100 e^{j\pi/4} = 100 e^{j45^\circ}.$$

Выполнить переход от комплексных изображений к мгновенным значениям: пусть комплексный действующий ток,  $A$ ,

$$\underline{I} = 5 e^{-j30^\circ},$$

тогда мгновенное значение (функция времени) этого тока может быть выражено в косинусной или синусной форме:

$$i = \frac{\operatorname{Re} \left\{ I_m e^{j\omega t} \right\}}{\operatorname{Im} \left\{ I_m e^{j\omega t} \right\}} = \frac{\operatorname{Re} \left\{ \sqrt{2} \cdot 5 e^{-j30^\circ} e^{j\omega t} \right\}}{\operatorname{Im} \left\{ e^{j(\omega t - 30^\circ)} \right\}} = \begin{cases} 5\sqrt{2} \cos(\omega t - 30^\circ) \\ 5\sqrt{2} \sin(\omega t - 30^\circ). \end{cases}$$

### 1.3.3. Анализ цепей при периодических негармонических воздействиях

Если воздействие задается в виде периодической несинусоидальной функции времени, удовлетворяющей условиям Дирихле, то, как известно из математики, такую функцию можно представить в виде гармонического ряда (ряда Фурье).

Воспользовавшись известным из физики принципом независимости действия сил (для линейных систем), который в теории электрических цепей более известен под названием принципа суперпозиции или наложения, можно вести расчет цепи, находя последовательно реакции на каждую гармонику воздействия. Эти расчеты выполняются в комплексной форме. Верхний предел теоретически бесконечного ряда в инженерных расчетах ограничивается некоторым разумным числом; гармониками более высокого порядка пренебрегают.

## 1.4. ТЕОРЕМЫ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ И ОСНОВАННЫЕ НА НИХ МЕТОДЫ РАСЧЕТА

### 1.4.1. Теорема о линейных соотношениях в линейных электрических цепях

В любой линейной электрической цепи при изменении одного из параметров пассивного элемента или напряжения (тока) одного из источников между любой парой величин (напряжений или токов ветвей) существуют линейные соотношения типа

$$y = a + bx. \quad (1.6)$$

Коэффициенты  $a$  и  $b$  определяются из двух любых частных случаев. Например, пусть в цепи постоянного тока

$$I_i = a + bI_j. \quad (1.7)$$

Тогда из опытов холостого хода и короткого замыкания:  
при  $I_j = 0$

$$a = I_i(x.x);$$

при  $I_j = I_{j(\text{к.з})}$

$$I_{i(\text{к.з})} = a + bI_{j(\text{к.з})} = I_{i(\text{x.x})} + bI_{j(\text{к.з})};$$

$$b = (I_{i(\text{к.з})} - I_{i(\text{x.x})})/I_{j(\text{к.з})}.$$

Для цепи гармонического тока выражение (1.7) записывается в комплексной форме:

$$\underline{I}_i = \underline{A} + \underline{B}\underline{I}_j.$$

На этой теореме, вернее, на ее следствии, основан метод пропорционального пересчета для цепей с одним источником. Действительно, пусть в некоторой схеме имеется один источник, ЭДС которого  $E$ , тогда ток в любой ветви

$$I_i = a + bE,$$

но при  $E = 0$   $I_{i(0)} = 0$ , следовательно,  $a = 0$  и  $I_i = bE$ : во сколько раз изменяется ЭДС (или ток) источника, во столько же раз изменяется и ток в любой ветви.

#### 1.4.2. Теорема взаимности (обратимости)

Если источник напряжения (ЭДС), находящийся в одном контуре пассивной цепи, вызывает определенный ток в другом контуре, то тот же источник, перенесенный во второй контур, вызывает в первом такой же ток, какой был во втором. Эту теорему можно образно представить себе в следующих условиях: в одном контуре действует источник напряжения, в другом включен амперметр; если собственные сопротивления источника и амперметра принять равными друг другу (например, оба равны нулю), то перемена местами источника и амперметра не изменит показание амперметра.

Теорема взаимности распространяется и на пассивную цепь с источником тока: если источник тока, включенный между парой входных выводов, вызывает между парой выходных выводов определенное напряжение, то тот же источник, перенесенный на выходные выводы, вызовет на входных выводах такое же напряжение, какое было ранее на выходных. Выходными и входными могут быть любые пары выводов сложной схемы.

Цепи, в которых выполняется условие взаимности, называются взаимными или обратимыми.

Использование теоремы взаимности может заметно облегчить решение задачи, если перенос источника в ветвь с искомым током (или напряжением) приводит к упрощению схемы.

### 1.4.3. Теорема суперпозиции (наложения)

Ток в любой ветви сложной схемы может быть представлен в виде алгебраической суммы частичных токов, вызываемых действием каждого источника в отдельности. Аналогично напряжение между любой парой выводов может быть представлено в виде алгебраической суммы частичных напряжений, вызванных каждым источником в отдельности.

Иногда по тем или иным соображениям источники можно группировать и вычислять искомый ток как алгебраическую сумму частичных токов, вызванных каждой группой источников.

Нужно иметь в виду, что расчет методом суперпозиции требует внимательного отношения к округлению значений частичных токов (напряжений), так как при алгебраическом суммировании может возникнуть большая погрешность. Так, если в некоторой схеме реальный ток равен разности частичных:

$$I = I' - I'' = 110 - 108 = 2 \text{ A},$$

то ошибка в вычислении каждого из частичных токов только в третьем знаке может дать недопустимую погрешность, скажем,  $111 - 107 = 4 \text{ A}$ .

### 1.4.4. Теорема компенсации

Любую ветвь сложной цепи без нарушения токораспределения можно заменить идеальным источником, напряжение которого равно падению напряжения на выводах заменяемой ветви и направлено согласно с током. Аналогично любую ветвь можно заменить идеальным источником, ток которого равен току заменяемой ветви и совпадает с ним по направлению.

Содержание теоремы иллюстрирует рис. 1.10. Теорема компенсации используется для эквивалентных преобразований схем.

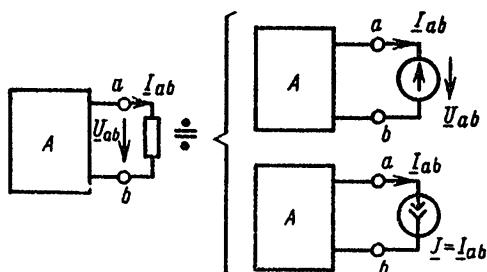


Рис. 1.10. К теореме компенсации

#### 1.4.5. Теорема об активном двухполюснике (об эквивалентном источнике)

Эта теорема в связи с существованием двух эквивалентных схем источников тоже может иметь две формулировки:

1) активный двухполюсник в расчетном отношении можно заменить источником с последовательной схемой замещения, напряжение (ЭДС) которого равно напряжению холостого хода на выводах выделенной (рассматриваемой) ветви, а сопротивление равно входному сопротивлению того же двухполюсника, из схемы которого исключены все источники.

2) активный двухполюсник в расчетном отношении можно заменить источником с параллельной схемой замещения, ток которого равен току короткого замыкания исследуемого двухполюсника, а проводимость равна входной проводимости того же двухполюсника, из схемы которого исключены все источники.

Содержание теоремы иллюстрирует рис. 1.11. Теорема широко используется в методе расчета, который получил название метода эквивалентного источника (напряжения или тока). Обычно этот метод применяется в тех случаях, когда необходимо исследовать процессы только в одной (выделенной) ветви.

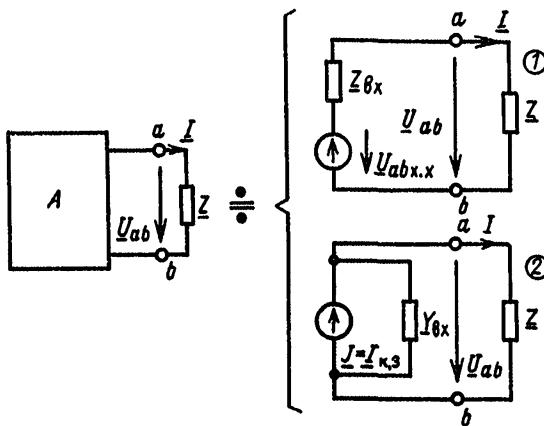


Рис. 1.11. К теореме об активном двухполюснике:

$$1 - I = \frac{U_{abx.x}}{(Z_{Bx} + Z)}; I_{k.3} = \frac{U_{abx.x}}{Z_{Bx}}; 2 - Y_{Bx} = \frac{1}{Z_{Bx}}; U_{ab} = \frac{I}{(Y_{Bx} + 1/Z)}; U_{abx.x} = Z_{Bx} I_{k.3}$$

\*Под "исключением" источников понимается замена источников напряжения (ЭДС) идеальным проводником, а источников тока – разъемом.

#### 1.4.6. Баланс мощностей

Для любой ветви при гармонических токе и напряжении можно выразить мощность в комплексной форме:

$$\underline{S} = \underline{U}\underline{I}^* = P + jQ,$$

где  $P = \operatorname{Re}[\underline{U}\underline{I}^*] = UI \cos \varphi$  – активная мощность, Вт;  $Q = \operatorname{Im}[\underline{U}\underline{I}^*] = UI \sin \varphi$  – реактивная мощность, вар;  $S = UI = \sqrt{P^2 + Q^2}$  – полная мощность, В·А.

Для активной ветви, рассматриваемой как источник, произведение  $\underline{U}\underline{I}^*$  принимается со знаком "+", если условно-положительные направления напряжения и тока не совпадают (или ЭДС и тока совпадают). При этом если  $\operatorname{Re}[S] > 0$ , то данная ветвь действительно является источником энергии.

Для пассивных ветвей, определяемых уравнением

$$\underline{U} = \underline{Z}\underline{I} \text{ или } \underline{I} = \underline{Y}\underline{U},$$

при одинаковых условно-положительных направлениях напряжения и тока потребляемая мощность вычисляется как

$$\underline{S} = \underline{Z}\underline{I}^2, \text{ или } \underline{S} = \underline{Y}^*\underline{U}^2.$$

В электрических цепях существует равенство комплексных генерируемых и потребляемых мощностей:

$$\underline{S}_{\text{ген}} = \underline{S}_{\text{потр}},$$

откуда

$$\Sigma P_{\text{ген}} = \Sigma P_{\text{потр}}; \quad \Sigma Q_{\text{ген}} = \Sigma Q_{\text{потр}}.$$

Для цепи постоянного тока баланс мощностей

$$\sum_i E_i I_i + \sum_j U_j J_j = \sum_k R_k I_k^2,$$

где  $U_j$  – напряжение на выводах источника тока.

#### 1.5. ЭКВИВАЛЕНТНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ СХЕМ

Для "ручного" расчета электрических цепей, в том числе и с использованием ПМК, принципиальное значение имеет степень сложности (разветвленности) схемы. Поэтому должны быть использованы любые возможности сокращения числа независимых контуров и узлов. Объем памяти современных ПМК практически исключает использование матриц или определителей более чем третьего, четвертого порядков. В свя-

зи с этим, прежде чем приступить к расчету токораспределения, следует выполнить целесообразные эквивалентные преобразования схем.

Эквивалентным называется такое преобразование, при котором напряжения и токи ветвей схем, не затронутых преобразованием, остаются неизменными.

### 1.5.1. Эквивалентное сопротивление $n$ последовательных пассивных двухполюсников

$$\underline{Z}_3 = \sum_{k=1}^n \underline{Z}_k .$$

### 1.5.2. Эквивалентная проводимость $n$ параллельных пассивных двухполюсников

$$\underline{Y}_3 = \sum_{k=1}^n \underline{Y}_k .$$

### 1.5.3. Взаимные эквивалентные преобразования пассивных двухполюсников, соединенных треугольником или звездой

Сопротивление луча эквивалентной звезды пассивных ветвей равно произведению сопротивлений прилегающих сторон треугольника, деленному на сумму сопротивлений всех сторон треугольника (рис. 1.12):

$$\underline{Z}_1 = \frac{\underline{Z}_{31}\underline{Z}_{12}}{\underline{Z}_{12} + \underline{Z}_{23} + \underline{Z}_{31}} ; \quad \underline{Z}_2 = \frac{\underline{Z}_{12}\underline{Z}_{23}}{\underline{Z}_{12} + \underline{Z}_{23} + \underline{Z}_{31}} ;$$

$$\underline{Z}_3 = \frac{\underline{Z}_{23}\underline{Z}_{31}}{\underline{Z}_{12} + \underline{Z}_{23} + \underline{Z}_{31}} .$$

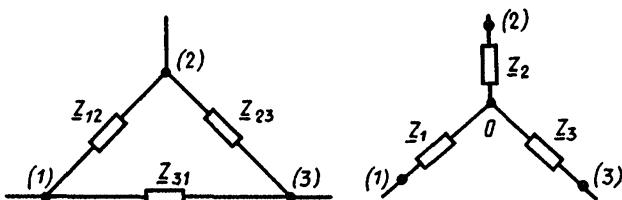


Рис. 1.12. Треугольник и звезда сопротивлений

Сопротивление стороны эквивалентного треугольника пассивных ветвей равно сумме сопротивлений двух прилегающих лучей звезды плюс произведение этих же сопротивлений, деленное на сопротивление оставшегося (противолежащего) луча:

$$\underline{Z}_{12} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_1 \underline{Z}_2 / \underline{Z}_3; \quad \underline{Z}_{23} = \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3 + \underline{Z}_2 \underline{Z}_3 / \underline{Z}_1;$$

$$\underline{Z}_{31} = \underline{Z}_3 + \underline{Z}_1 + \underline{Z}_3 \underline{Z}_1 / \underline{Z}_2,$$

или на основе принципа дуальности можно записать

$$\underline{Y}_{12} = \frac{\underline{Y}_1 \underline{Y}_2}{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3}; \quad \underline{Y}_{23} = \frac{\underline{Y}_2 \underline{Y}_3}{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3}; \quad \underline{Y}_{31} = \frac{\underline{Y}_3 \underline{Y}_1}{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3}.$$

#### 1.5.4. Взаимные эквивалентные преобразования активных ветвей

На рис. 1.13, а, б представлены две эквивалентные схемы активных ветвей, для которых переход от одной к другой осуществляется при помощи следующих выражений:

$$\underline{J} = \underline{E}/\underline{Z}_i = \underline{U}/\underline{Z}_i; \quad \underline{Y}_i = 1/\underline{Z}_i; \quad \underline{U} = \underline{E} = \underline{J}/\underline{Y}_i; \quad \underline{Z}_i = 1/\underline{Y}_i.$$

**П р и м е ч а н и я:** 1. Указанные преобразования не эквивалентны по мощности: например, при разомкнутых выводах *a* и *b* в схеме на рис. 1.13, а не расходуется энергия, а в схеме на рис. 1.13, б – расходует-

Рис. 1.13. Активные ветви (эквивалентные преобразования)

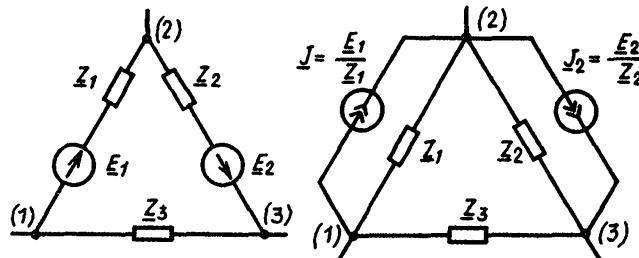
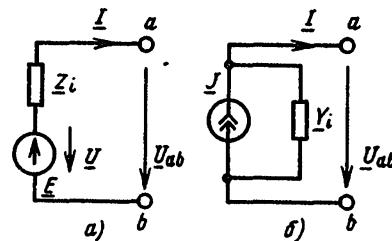


Рис. 1.14. Преобразование активного треугольника ветвей в пассивный

ся, поскольку образована замкнутая цепь источника тока и пассивной ветви.

2. Если  $Z_i = 0$  или  $Y_i = 0$ , то активные ветви называются вырожденными и указанные здесь преобразования невозможны.

3. Преобразование источника напряжения в источник тока позволяет преобразовать треугольник с активными ветвями в звезду (рис. 1.14).

### 1.5.5. Перенос источников

Обычно перенос источников применяется, для того чтобы избавиться от вырожденных источников. Однако этот же прием может быть использован и в других целях (с невырожденными источниками).

Источник напряжения может быть перенесен "за узел", для чего во все ветви, сходящиеся в одном узле с преобразуемой ветвью, включают-ся источники такого же напряжения, противоположным образом ориен-тированные относительно общего узла (рис. 1.15).

Идеальный источник тока можно заменить несколькими ветвями с идеальными источниками такого же тока, но включенными параллель-но всем ветвям, образующим контур с заменяемой ветвью (рис. 1.16).

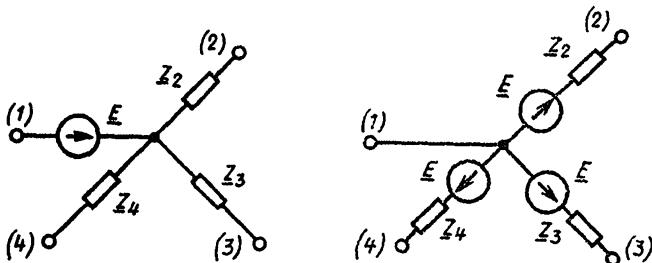


Рис. 1.15. Перенос источника напряжения

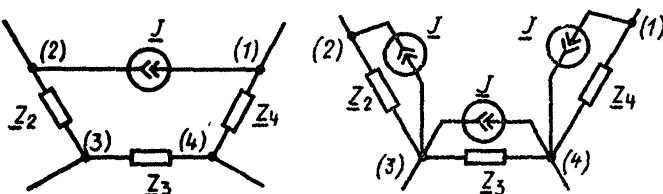


Рис. 1.16. Перенос источника тока

### 1.5.6. "Свертывание" активной схемы с двумя узлами

Возможны два варианта преобразования: в одном из них в итоге получается схема с эквивалентным источником напряжения (ЭДС), в другом — с эквивалентным источником тока (рис. 1.17). Параметры эквивалентных источников вычисляются по формулам

$$\left. \begin{aligned} \underline{E}_3 &= \frac{-\underline{E}_1 \underline{Y}_1 + \underline{E}_2 \underline{Y}_2 + \dots + \underline{J}}{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3 + \dots} = \frac{\sum_i \underline{E}_i \underline{Y}_i + \sum_j \underline{J}_j}{\sum_k \underline{Y}_k}; \\ \underline{Z}_3 &= \frac{1}{\underline{Y}_3}; \quad \underline{Y}_3 = \underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3 + \dots = \sum_k \underline{Y}_k; \\ \underline{J}_3 &= -\underline{E}_1 \underline{Y}_1 + \underline{E}_2 \underline{Y}_2 + \dots + \underline{J} + \dots = \underline{E}_3 \underline{Y}_3. \end{aligned} \right\} \quad (1.8)$$

**П р и м е ч а н и е.** В (1.8) в знаменателе учитываются все ветви, имеющие конечное значение проводимостей  $\underline{Y}_k$ , а в числителе — только ветви с источниками.

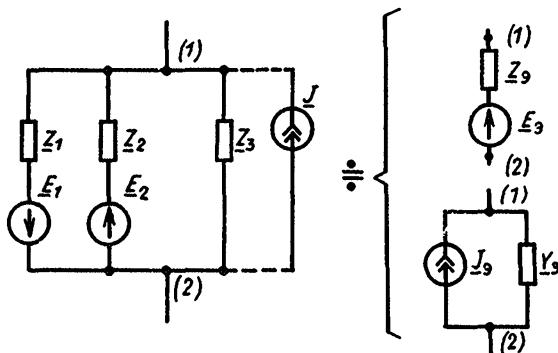


Рис. 1.17. "Свертывание" активной схемы с двумя узлами

### 1.5.7. Выражения закона Ома для обобщенной ветви (обобщенный закон Ома)

Представим себе некоторую обобщенную ветвь, содержащую пассивный элемент  $\underline{Z}$  (или  $\underline{Y}$ ) и источники напряжения и тока (рис. 1.18). Схема на рис. 1.18, *a* и *б*, являются дуальными. В схеме на рис. 1.18, *а* ток через пассивный элемент будет  $\underline{I} - \underline{J}_0$ ; тогда по второму закону Кирхгофа имеем

$$\underline{Z}(\underline{I} - \underline{J}_0) - \underline{U} = -\underline{E} = -\underline{U}_0,$$

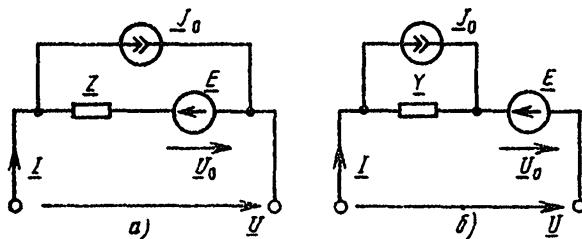


Рис. 1.18. Обобщенные ветви с пассивными элементами  $Z$  (а) и  $Y$  (б)

или

$$\underline{U} - \underline{U}_0 = Z(\underline{I} - \underline{J}_0). \quad (1.9)$$

Для дуальной схемы на рис. 1.18, б

$$\underline{I} - \underline{J}_0 = \underline{Y}(\underline{U} - \underline{U}_0). \quad (1.10)$$

Выражения (1.9) и (1.10) представляют собой уравнения Ома для обобщенной ветви. Из этих уравнений как частные случаи получаются выражения закона Ома для пассивной ветви ( $U_0 = 0$  и  $J_0 = 0$ ) или для любой комбинации пассивного и активного элементов ветви.

## Глава вторая

### ПРОГРАММИРУЕМЫЕ МИКРОКАЛЬКУЛЯТОРЫ И ОСНОВЫ ПРОГРАММИРОВАНИЯ

#### 2.1. РЕЖИМЫ РАБОТЫ ПМК

Программируемый микрокалькулятор "Электроника МК-54" (и его функциональные аналоги "Электроника МК-56" и "Электроника Б3-34", а также его модификации с расширенными возможностями "Электроника МК-61" и "Электроника МК-52") предназначен для автоматизации решения учебных, инженерных и научных задач, требующих сравнительно больших объемов вычислений.

Исходные данные, команды оператора или программы вводятся с помощью клавиатуры (рис. 2.1), имеющей одинарную, двойную или тройную символику команд. Желтая клавиша [F] и белая [K] называются префиксными (по-французски prefixe – приставка); последовательное нажатие одной из них в сочетании с цифровой или операционной клавишей задает команду, обозначенную символом соответствующего цвета над этой клавишей или под ней. Например, если нажать

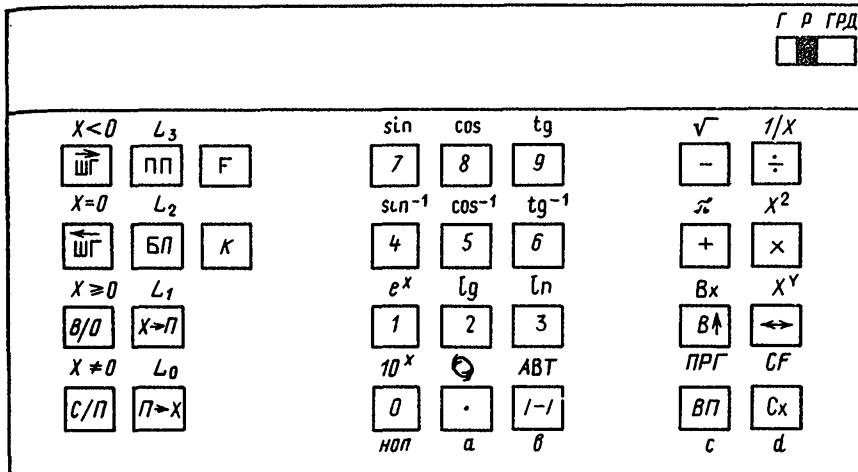


Рис. 2.1. Клавиатура ПМК "Электроника МК-56"

клавишу  $[+]$ , то на индикаторе появится результат сложения пары чисел из операционных регистров; если же последовательно нажать клавиши  $[F]$  и  $[+]$ , то на индикаторе высветится приближенное значение числа  $\pi$ : 3,1415926. Если клавиша  $[F]$  была нажата по ошибке, то ее действие отменяется клавишей  $[Cx]$  (над которой желтым цветом написан символ  $CF$ ).

Условимся в дальнейшем при записи инструкций пользователю и программ ПМК опускать указания на использование префиксной клавиши  $[F]$  и приводить лишь символы команд.

Программируемый микрокалькулятор может работать в двух режимах: командном и программирования.

В *командном* режиме\* ПМК либо выполняет команды, непосредственно подаваемые с клавиатуры оператором, либо производит вычисления без участия оператора по командам программы, введенной ранее в память ПМК.

В режиме *программирования* осуществляется ввод с клавиатуры программы вычисления в программную память ПМК, проверка правильности ее ввода и редактирование программы.

\* В [5] этот режим не очень удачно назван "Автоматическая работа". Мы будем придерживаться названия "Командный режим", вернее раскрывающего функций ПМК в данном режиме.

## 2.2. РАБОТА ПМК В КОМАНДНОМ РЕЖИМЕ

Командный режим автоматически устанавливается после включения питания ПМК (в этом случае в старшем цифровом разряде индикатора высвечивается 0) или в результате выполнения команды АВТ\* если до этого ПМК находится в режиме программирования.

- В командном режиме работы ПМК:
- на индикаторе отображаются вводимая числовая информация (даные) или результаты вычислений в десятичной системе счисления;
  - в регистры числовой памяти вводятся данные и промежуточные результаты вычисления;
  - производятся вычисления по командам, подаваемым оператором с клавиатуры;
  - устанавливается начальный адрес вводимой или введенной прежде программы;
  - производятся вычисления по командам программы, хранящейся в программной памяти;
  - осуществляется пошаговое исполнение команд тестируемой программы;
  - командой ПРГ микрокалькулятор переводится в режим программирования.
- Работа ПМК в командном режиме не затрагивает содержимого регистров программной памяти.

### 2.2.1. Ввод и вывод чисел

Для приема, хранения и обработки чисел в ПМК имеются 14 адресуемых регистров и 5 согласованно работающих регистров стека. Каждый регистр числовой памяти имеет свое цифровое или буквенное обозначение. После включения ПМК все регистры находятся в нулевом состоянии.

Условное изображение стека, соответствующее этимологии этого понятия\*\*, показано на рис. 2.2, на котором многоточие представляет содержимое соответствующих регистров стека.

Любое число, введенное с клавиатуры ПМК, помещается только в регистре стека X, и только его содержимое (в десятичном представлении) высвечивается на 12-разрядном индикаторе: 8 разрядов отводится под мантиссу числа, 2 – под его порядок и 2 – под знаки мантиссы и порядка.

---

\* АВТ – сокращенное обозначение режима "Автоматическая работа", принятое заводом-изготовителем ПМК.

\*\* Английское слово stack многозначное, в частности оно означает "штабель", "стеллаж", "книгохранилище".

Рис. 2.2. Условное изображение стека

T	• • •
Z	• • •
Y	• • •
X	• • •
X1	• • •

Для сокращения записей инструкций пользователю условимся ввод значений величин в регистры числовой памяти обозначать в дальнейшем операторами присваивания вида

PN: = ...,

где Р – "содержимое регистра"; N – буквенный или цифровой адрес регистра; многоточие – имя или значение вводимой величины.

С той же целью вывод значений величин из регистров числовой памяти (фактически их запись на бумаге) будем сокращенно записывать также в виде операторов присваивания

...: = PN,

где многоточие означает имя величины, значение которой содержится в регистре N.

Числа вводятся в регистр X в результате выполнения команд, подаваемых нажатием цифровых клавиш [0], ..., [9], клавиш десятичной точки [.], ввода порядка [ВП] и смены знака [/]/[—].

Включим ПМК (на индикаторе появится 0) и выполним несколько примеров, показывающих работу пользователя ПМК при вводе чисел в регистр стека X.

Пример 2.1. PX: = 45,67.

Решение. Нажать последовательно клавиши [4], [5], [.], [6] и [7]. На индикаторе высвечивается 45.67              .

Здесь и далее символом    в случае необходимости обозначаются незаполненные разряды индикатора. Точка, отображающая десятичную запятую мантиссы, отдельного разряда не занимает.

Правильность ввода числа в регистр X следует контролировать по индикатору. Если при вводе числа допущена ошибка, следует командой Сх очистить регистр X и набрать число еще раз.

Пример 2.2. PX: = -0,0123.

Решение. Очистить регистр X командой Сх (на индикаторе появится 0.                           ). Нажать последовательно клавиши [0], [.], [0], [1], [2], [3] и [/]. При изменении знака изображение числа на индикаторе -0.0123               преобразуется в форму с плавающей запятой (точкой): -1.23               -0.2.

Пример 2.3. PX: =  $-1.23 \cdot 10^{-5}$ .

Решение. Очистить регистр X. Нажать последовательно клавиши [1], [.], [2], [3] и, завершая ввод мантиссы числа, клавишу [/].

затем клавишами **[ВП]** (Ввод Порядка) **[1]**, **[5]** и **[/-]** ввести порядок числа. На индикаторе заданное число будет выглядеть иначе: **-1.23456789E-15**.

Если при вводе мантиссы числа произошла ошибка, следует очистить регистр Х и повторить ввод. Если же ошибка допущена только при вводе порядка числа, то достаточно повторить набор верного значения порядка и (если необходимо) изменить его знак. Так, если в последнем примере значение порядка надо исправить на +5, то достаточно нажать клавиши **[0]**, **[5]**, **[+/-]** и изображение на индикаторе исправленного числа примет такой вид: **-1.23E+05**.

Процедуры ввода чисел в остальные регистры числовой памяти и извлечение их содержимого в регистр стека X будут рассмотрены постепенно по мере углубления знакомства с работой на ПМК.

### **2.2.2. Вычисления на ПМК при ручном управлении**

**Выполнение одноместных операций.** Одноместные операции выполняются только с числом, находящимся в регистре стека X. К одноместным операциям относятся вычисления значений элементарных функций:  $\sqrt{x}$ ,  $x^2$ ,  $1/x$ ,  $e^x$ ,  $10^x$ ,  $\ln x$ ,  $\lg x$ ,  $\sin x$ ,  $\cos x$ ,  $\operatorname{tg} x$ ,  $\arcsin x$ ,  $\arccos x$ ,  $\arctg x$ . Для вычисления значения какой-либо функции в регистр X вводится значение ее аргумента, нажимается клавиша **F** (**F** – от слова *function*), а затем клавиша, над которой записан символ вычисляемой функции\*.

На рис. 2.3 приведены примеры вычисления значений некоторых функций и состояния регистров стека. Стрелки указывают передачу значений (начало стрелки — положение перед выполнением команды, конец стрелки — положение после выполнения команды). Из рисунка видно, что результат одноместных операций попадает также в регистр X; его прежнее содержимое переходит в регистр предыдущего результата X1. Содержимое остальных регистров остается без изменения.

Если необходимо воспользоваться содержимым регистра предыдущего результата X1, то нужно подать команду Вх (Вх – от Вверх). При этом копия числа в регистре X1 перейдет в регистр X, сместив информацию в стеке на одну позицию "вверх".

После выполнения любой команды следующее число можно вводить в регистр X, не удаляя предыдущий результат (он будет автоматически вытеснен в соседний регистр Y).

Результат вычислений, по модулю меньший  $1 \cdot 10^{-99}$ , попадает в область машинного нуля, и в старшем цифровом разряде индикатора выс-

\*Во всех ПМК, кроме "Электроники Б3-34", команды вычисления значений обратных тригонометрических функций обозначены как  $\sin^{-1}$ ,  $\cos^{-1}$  и  $\operatorname{tg}^{-1}$ .

T	0. → 0. → 0.	0. → 0. → 0.	0. → 0. → 0.
Z	0. → 0. → 0.	0. → 0. → 0.	0. → 0. → 0.
Y	0. → 0. → 0.	2.7182818 → 2.7182818 → 2.7182818	2.7182818 → 2.7182818 → 2.7182818
X	0. × 1. × 2.7182818	1. × 10. × 2.3025851	10. × 2.3025851
X1	0. → 0. → 1.	1. → 10. → 1.	10. → 10.
Команды	1	e <sup>x</sup>	1
		10 <sup>x</sup>	ln
			2

→ 0. → 0. → 0.	→ 0. → 0. → 0.
→ 2.7182818 → 2.7182818 → 2.7182818	→ 2.7182818 → 2.7182818 → 2.7182818
→ 2.3025851 → 2.3025851 → 2.3025851	→ 2.3025851 → 2.3025851 → 2.3025851
2. × 4. × 2.5_000000_01 × 5._000000_01	2.5_000000_01
10. → 2. → 4.	2.5 _ 01
x <sup>2</sup>	1/x
	√

Рис. 2.3. Диаграмма состояния регистров стека при выполнении одноместных операций

вечивается 0. Если же результат вычисления по модулю превышает число  $9.999999 \cdot 10^9$ , то он попадает в область машинной бесконечности. В таких случаях на индикаторе высвечивается код ошибки ЕГГОГ (от английского errort — ошибка). После появления кода ошибки можно ввести другое число и продолжить вычисления.

Вводимые значения аргумента тригонометрических функций и выводимые значения обратных тригонометрических функций выражаются в градусах, радианах, либо в градах\* в зависимости от положения переключателя ГРГРД. Условимся в необходимых случаях его правильное положение указывать подчеркиванием соответствующей аббревиатуры в обозначении переключателя, например ГРГРД.

С помощью этого переключателя можно переходить от градусной меры к радианной. Если значение модуля аргумента не превышает  $180^\circ$ , то

$$RX: = \varphi^\circ \underline{\Gamma} \underline{P} \underline{GRD} \cos \underline{\Gamma} \underline{P} \underline{GRD} \cos^{-1} \varphi_p : = RX$$

Перевод значения аргумента из радианной меры в градусную, если оно по модулю не превышает  $\pi$  рад, выполняется аналогично:

$$RX: = \varphi_p \underline{\Gamma} \underline{P} \underline{GRD} \cos \underline{\Gamma} \underline{P} \underline{GRD} \cos^{-1} \varphi^\circ : = RX$$

\*1 град — внесистемная метрическая единица плоского угла, равная  $1/100$  прямого угла.

**Пример 2.4.** Используя содержимое регистра предыдущего результата, вычислить значения: 1)  $y = \sin 60^\circ$ ; 2)  $y = \cos 60^\circ$ ; 3)  $y = \operatorname{tg} 60^\circ$

**Решение.**

**ГР ГРД**

$$\overline{PX} : = 60 \sin y : = PX$$

$$Bx \cos y : = PX$$

$$Bx \operatorname{tg} y : = PX$$

**Ответ:**  $\sin 60^\circ = 0.86602544$ ;  $\cos 60^\circ = 0.50000002$ ;  $\operatorname{tg} 60^\circ = 1.7320508$ .

**Выполнение двухместных операций.** К двухместным операциям относятся операции сложения, вычитания, умножения и деления двух чисел (операндов), а также возведение положительного числа в степень с произвольным показателем.

Для размещения операндов двухместных операций предназначены регистры стека X и Y, называемые операционными регистрами. Запись любого числа в регистр Y осуществляется только из регистра X командой  $B \uparrow$ , т.е.

$$PY : = \dots \equiv PX : \dots B \uparrow.$$

По команде  $B \uparrow$  информация в стеке (без учета регистра X1) смещается на одну позицию "вверх". При этом содержимое регистра X сохраняется, а регистра T — уничтожается. Кроме того, команда  $B \uparrow$  автоматически нормализует число, записанное в регистре X, и его копию, пересылаемую в регистр Y.

Для выполнения двухместной операции необходимо значение первого операнда ввести в регистр Y, а второго — в регистр X, затем подать одну из команд  $+$ ,  $-$ ,  $x$ ,  $\div$  или  $x^y$ . Если операнды ошибочно введены в другом порядке, то ошибку легко исправить командой  $\leftrightarrow$ . Примеры выполнения двухместных операций и особенности перемещения содержимого регистров стека показаны на рис. 2.4.

Из рассмотренных примеров видно, что запись формулы, отображающей (при ее чтении слева направо) последовательности операций на ПМК, отличается от общепринятой. Все операции в этой записи равнозначны, и символы операторов (команд) ставятся не между именами операндов, а после них, т.е. вместо  $-5$  пишут  $5 - /$ , вместо  $\sin 60^\circ$  —  $60 \sin$ , а вместо  $2 \cdot 3 - 2 \cdot 3 x$ . Такая запись, называемая обратной или инверсной польской\*, избавляет от необходимости использовать скобки и проверять приоритеты. Например, правая часть выражения

$$u = U_m \cos(\omega t + \psi_u)$$

\*В честь польского математика Яна Лукашевича (J. Lukasiewicz), предложившего такой способ записи алгебраических выражений в 1921 г.

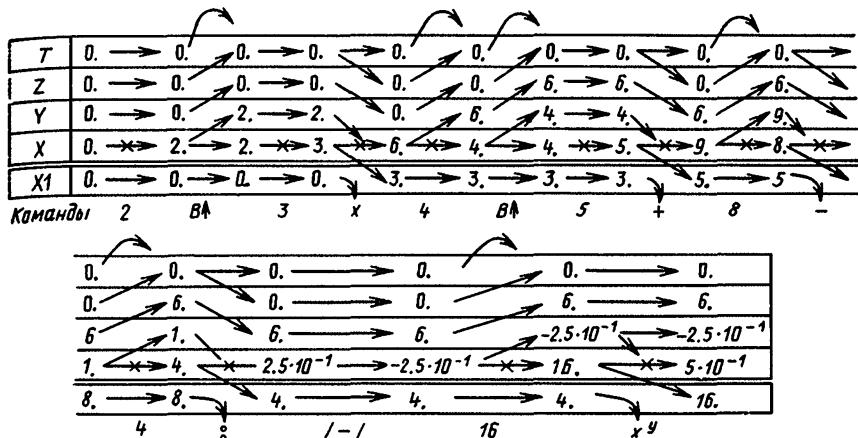


Рис. 2.4. Диаграмма состояния регистров стека при выполнении двухместных операций

в обратной польской записи выглядит так:

$$\omega t \times \psi_u + \cos U_m \times.$$

В этом случае алгоритм вычисления значения этого выражения при известных значениях входящих в него величин можно представить следующим образом:

$$\omega B \uparrow t \times \psi_u + \cos U_m \times.$$

Здесь учтено, что результат предыдущей операции может участвовать в качестве первого операнда последующей (рис. 2.4); при вводе второго операнда последующей операции результат предыдущей операции автоматически смещается в регистр Y, и поэтому команда B↑ является ненужной.

В последней записи  $U_m$ ,  $\omega$ ,  $t$  и  $\psi_u$  обозначают ввод значений соответствующих величин в регистр X. Для таких операций мы условились выше применять операторы присваивания вида PX: = ... . Заменяя в этой записи имена всех операндов операторами присваивания, получаем такую запись последовательности действий вычисления:

$$PX: = \omega B \uparrow PX: = t \times PX: = \psi_u + \cos PX: = U_m \times u: = PX$$

которая, очевидно, может быть записана короче:

$$PY: = \omega PX: * t \times PX: = \psi_u + \cos PX: = U_m \times u: = PX$$

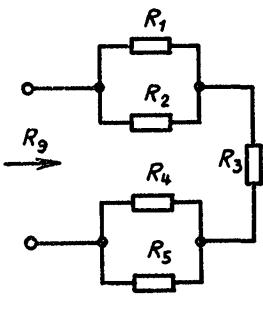


Рис. 2.5. К примеру 2.5

Наличие регистров стека позволяет выполнять на ПМК сложные комбинированные расчеты без записи промежуточных результатов. В этих случаях результат предыдущей операции участвует в качестве первого операнда последующей операции.

**Пример 2.5.** Найти эквивалентное сопротивление пассивного двухполюсника со смешанным соединением резисторов (рис. 2.5), если  $R_1 = 20 \text{ Ом}$ ,  $R_2 = 30 \text{ Ом}$ ,  $R_3 = 7 \text{ Ом}$ ,  $R_4 = 10 \text{ Ом}$ ,  $R_5 = 15 \text{ Ом}$ .

**Р е ш е н и е.** Эквивалентное сопротивление можно найти по формуле (при параллельном соединении резисторов складываются их проводимости, а при последовательном – сопротивления)

$$R_3 = \frac{1}{G_1 + G_2} + R_3 + \frac{1}{G_4 + G_5},$$

где  $G_1$ ,  $G_2$  и  $G_4$ ,  $G_5$  – проводимости параллельно включенных резисторов.

Выражая проводимости резисторов через их сопротивления, получаем

$$R_3 = \frac{1}{1/R_1 + 1/R_2} + R_3 + \frac{1}{1/R_4 + 1/R_5}.$$

В обратной польской записи правая часть этой формулы примет такой вид:

$$R_1 \ 1/x \ R_2 \ 1/x + 1/x \ R_3 + R_4 \ 1/x \ R_5 \ 1/x + 1/x + .$$

Следовательно, последовательность действия оператора можно записать следующим образом:

$$\text{PX:} = R_1 \ 1/x \ \text{PX:} = R_2 \ 1/x + 1/x \ \text{PX:} = R_3 +$$

$$\text{PX:} = R_4 \ 1/x \ \text{PX:} = R_5 \ 1/x + 1/x + R_3: = \text{PX}$$

Ответ:  $R_3 = 25 \text{ Ом}$ .

Кроме стековой в ПМК предусмотрена память из 14 адресуемых регистров 0, ..., 9, a, b, c и d. Запись числа в адресуемый регистр производится только из регистра X по команде, подаваемой последовательным нажатием клавиши **x → П** (из X в "Память") и клавиши, совпадающей с адресом регистра.

Таким образом,

$$\text{PN:} = \dots \equiv \text{PX:} = \dots x \rightarrow \Pi \ N$$

Запись числа в адресуемый регистр стирает информацию в нем, однако не меняет содержимого регистров стека.

Для вызова числа из адресуемого регистра используют команду, передаваемую клавишей **П → x** (из "Памяти" в X) и клавишей, соответствующей адресу вызываемого регистра, т.е.

$$\dots : = PN \equiv \Pi \rightarrow x N \dots : = PX$$

Вызов числа из адресуемого регистра не меняет его содержимого. При этом информация в стеке смещается "вверх" на одну позицию, как при вводе числа из регистра X1 или с клавиатуры. Число  $\pi$  вызывается в регистр X командой  $\pi$ .

**Внимание!** После записи числа в адресуемый регистр или извлечения его содержимого очередное число, набираемое на клавиатуре ПМК, вводится в регистр X без предварительной команды  $B \uparrow$ .

**Пример 2.6:** Найти проводимости сторон эквивалентного треугольника резисторов через сопротивления лучей звезды (рис. 2.6) при  $R_1 = 6 \text{ Ом}$ ,  $R_2 = 10 \text{ Ом}$ ,  $R_3 = 15 \text{ Ом}$ .

Решение. Как известно,

$$G_{12} = G_1 G_2 / G_\Delta; \quad G_{23} = G_2 G_3 / G_\Delta; \quad G_{31} = G_3 G_1 / G_\Delta,$$

где  $G_\Delta$  – сумма проводимостей лучей звезды резисторов.

Для хранения промежуточных результатов  $G_1$ ,  $G_2$  и  $G_3$  отведем одноименные регистры, а для записи  $G_\Delta$  – регистр 0. Тогда последовательность действий оператора могла бы быть, например, такой:

$$PX: = R_1 \ 1/x \ x \rightarrow \Pi \ 1$$

$$PX: = R_2 \ 1/x \ x \rightarrow \Pi \ 2$$

$$PX: = R_3 \ 1/x \ x \rightarrow \Pi \ 3$$

$$+ \quad + \quad x \rightarrow \Pi \ 0$$

$$\Pi \rightarrow x \ 1 \ \Pi \rightarrow x \ 2 \times \Pi \rightarrow x \ 0 \div G_{12}: = PX$$

$$\Pi \rightarrow x \ 2 \ \Pi \rightarrow x \ 3 \times \Pi \rightarrow x \ 0 \div G_{23}: = PX$$

$$\Pi \rightarrow x \ 3 \ \Pi \rightarrow x \ 1 \times \Pi \rightarrow x \ 0 \div G_{31}: = PX$$

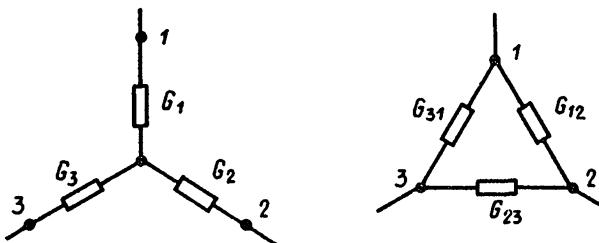
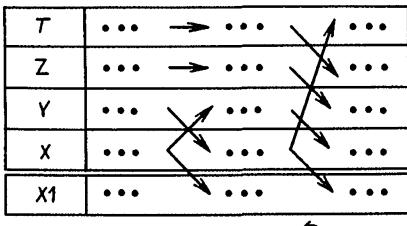


Рис. 2.6. Преобразование звезды резисторов в эквивалентный треугольник



Команды       $\leftrightarrow$        $\textcirclearrowright$

Рис. 2.7. Диаграмма состояния регистров стека при выполнении команд  $\leftrightarrow$  и  $\textcirclearrowright$

Ответ:  $G_{12} = 4.9999998 \cdot 10^{-2}$  См;  $G_{23} = 2.0000000 \cdot 10^{-2}$  См;  
 $G_{31} = 3.3333333 \cdot 10^{-2}$  См.

В заключение познакомимся с двумя последними командами, управляющими перемещением информации в стеке, которые, в частности, могут использоваться для контроля содержимого его регистров.

Команда  $\leftrightarrow$  меняет местами содержимое регистров X и Y, не затрагивая регистров стека Z и T.

Напротив, команда  $\textcirclearrowright$  касается всех регистров стека — она вызывает перемещение информации в стеке "по кольцу". В обоих случаях предыдущее содержимое регистра X копируется в регистре X1.

Диаграммы на рис. 2.7 показывают движение информации в стеке при выполнении этих команд.

### 2.2.3. Вычисления на ПМК под управлением программы

Вычисления в этом случае выполняются в полном соответствии с инструкцией к работе с программой, составленной автором используемой программы, с учетом поправок, обусловленных возможным изменением ее начального адреса.

К каждой готовой программе кроме обязательной инструкции к работе с ней обычно дается контрольный пример, позволяющий проверить правильность введения программы. Вычисления по исходным данным контрольного примера осуществляются в соответствии с упомянутой инструкцией. По выполнении программы показания индикатора сверяют с результатами контрольного примера. Если результат выполнения программы не совпадает с контрольным значением, то нужно (в режиме программирования) по шагам просмотреть программу и исправить ошибочно введенные команды. После этого, вернувшись в командный режим, надо снова повторить вычисления по исходным данным контрольного примера.

При зацикливании программы, т.е. отсутствии результата в течение времени, явно превышающего время счета по данной программе, ее выполнение прерывают командой С/П (Стоп–Пуск), а затем проверяют правильность ввода программы и устраняют обнаруженные ошибки.

При отладке новой программы часто применяют ее пошаговое исполнение по команде ПП (Пошаговый Проход). Одно нажатие клавиши **ПП** вызывает исполнение одной команды; результат ее выполнения контролируют по индикатору. С этой целью следует заранее подготовить какой-либо пример, определить и записать содержимое регистра X после выполнения каждого шага составляемой программы.

Если в процессе пошагового исполнения будет обнаружена ошибка, то она может быть следствием ошибки ввода либо ошибок самой программы. В последнем случае нужно еще раз проанализировать ее текст, внести необходимые изменения, после чего повторить ввод программы, а затем и проверку правильности ее ввода. Описанную процедуру повторяют до тех пор, пока результат вычисления по программе не совпадет с результатом контрольного примера.

#### 2.2.4. Перевод ПМК в режим программирования

Для перевода ПМК в режим программирования на адрес *тп* регистра программной памяти сначала командой безусловного перехода по адресу *тп*: БП *т n\** устанавливают нужное значение счетчика адресов, на индикаторе при этом не произойдет никаких изменений. Затем командой ПРГ микрокалькулятор переводится в режим программирования. При безошибочном выполнении команды БП *тп* в правой части индикатора высвечивается двузначное число *тп* – нужное значение счетчика адресов. Если же это число отлично от *тп*, то командой АВТ микрокалькулятор возвращают в командный режим и повторяют описанную процедуру. Однако при незначительном отклонении от *тп* значение счетчика адресов можно установить и в режиме программирования, пользуясь командами  $\overrightarrow{ШГ}$  (Шаг вперед) или  $\overleftarrow{ШГ}$  (Шаг назад).

### 2.3. РАБОТА ПМК В РЕЖИМЕ ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Перевод ПМК в режим программирования описан в п. 2.2.4. В этом режиме в отличие от командного на индикаторе в общем случае высвечиваются четыре пары символьно-цифровых изображений, разделенных пробелами.

В режиме программирования ПМК:

на индикаторе отображаются двузначные шестнадцатеричные числа – коды введенных команд программы и двузначный десятичный адрес очередного регистра программной памяти;

в регистры программной памяти (00, ..., 97) вводятся коды команд программ;

---

\* В командном режиме работы ПМК команду БП 00 можно заменить командой В/О (Возврат–Обнуление).

осуществляется пошаговый контроль кодов команд тестируемой программы;

исправляются ошибки в тестируемой программе;

командой АВТ микрокалькулятор переводится в командный режим.

Работа ПМК в режиме программирования не затрагивает содержимого регистров стека и адресуемых регистров числовой памяти.

### 2.3.1. Информация на индикаторе

В режиме программирования ПМК первые девять разрядов его индикатора отведены под три пары кодов команд и предшествующие им пробелы, оставшиеся три разряда занимают пробел и двузначный адрес очередного регистра программной памяти — адрес очередной команды.

На рис. 2.8 в качестве примера приведены несколько последовательных изображений состояния индикатора после ввода команд, символы которых записаны слева, и соответствующий фрагмент бланка программы. Крайнее слева двузначное число или символ — код последней введенной команды (1Г — код cos, 41 — код  $x \rightarrow \Pi$  и т.д.), далее идут коды двух предыдущих команд и, наконец, последняя пара десятичных цифр — адрес очередной (записанной в следующей строке) команды. Коды служат для визуального контроля правильности ввода команды оператором.

Код — это двузначное число в шестнадцатеричной системе счисления. Так как обычных цифр для изображения таких чисел не хватает, используют дополнительные символы: "цифра" 10 изображается символом — , 11 — L, 12 — [ , 13 — Г, 14 — Е. Цифра 15, изображаемая пробелом, в ПМК "Электроника МК-54" и его аналогах применяется только в обозначении кода 0 — команды Вх.

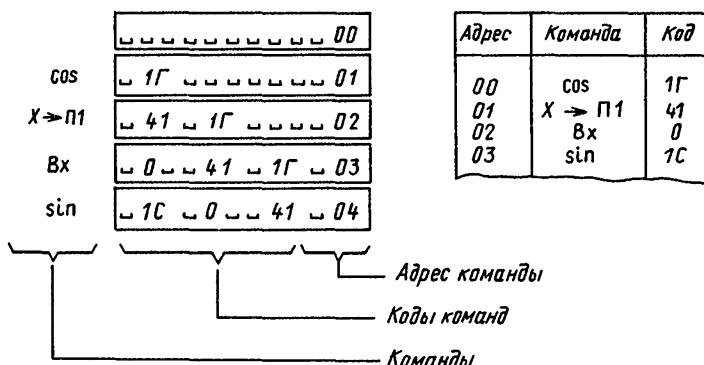


Рис. 2.8. Диаграмма состояния индикатора при вводе команд программы

После ввода любой команды программы крайнее справа число на индикаторе должно на единицу превышать ее адрес (рис. 2.8).

Предельный объем программ, предназначенных для одновременного хранения в памяти ПМК, не может превышать 98 шагов. Если число введенных команд больше 98, то коды избыточных команд замещают коды начальных команд программы.

### 2.3.2. Ввод программы

После перехода в режим программирования следует убедиться по индикатору, что счетчик адресов команд имеет нужное значение. Остальные символы на индикаторе представляют собой фрагмент предыдущей программы.

1 2 3 4 5 6 7 8 9 - L C Г Е																
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	.	/-	ВП	Cx	B↑	Bx
1	+	-	×	:	↔	$10^x$	$e^x$	$\lg$	$\ln$	$\sin^{-1}$	$\cos^{-1}$	$\tg^{-1}$	$\sin$	$\cos$	$\tg$	
2	$\pi$	$\sqrt{x}$	$x^2$	$1/x$	$x^y$	$\circlearrowleft$	$\overrightarrow{0^3}$					$\overrightarrow{0^m}$				
3	$\overleftarrow{0^m}$	$ x $	$3H$	$\overleftarrow{0^t}$	$[x]$	{x}	max	$\wedge$	$\vee$	$\oplus$	инв	CЧ				
4	$x \Rightarrow \Pi$	$x \Rightarrow \Pi$	$x \Rightarrow \Pi$	$x \Rightarrow \Pi$	$x \Rightarrow \Pi$	$x \Rightarrow \Pi$	$x \Rightarrow \Pi$	$x \Rightarrow \Pi$	$x \Rightarrow \Pi$							
5	$0$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	a	b	c	d	e	
6	$\Pi \Rightarrow x$	$\Pi \Rightarrow x$	$\Pi \Rightarrow x$	$\Pi \Rightarrow x$	$\Pi \Rightarrow x$	$\Pi \Rightarrow x$	$\Pi \Rightarrow x$	$\Pi \Rightarrow x$	$\Pi \Rightarrow x$							
7	$Kx \neq 0$	$Kx \neq 0$	$Kx \neq 0$	$Kx \neq 0$	$Kx \neq 0$	$Kx \neq 0$	$Kx \neq 0$	$Kx \neq 0$	$Kx \neq 0$							
8	$K \text{БП}$	$K \text{БП}$	$K \text{БП}$	$K \text{БП}$	$K \text{БП}$	$K \text{БП}$	$K \text{БП}$	$K \text{БП}$	$K \text{БП}$							
9	$0$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	a	b	c	d	e	
-	$K \text{ПП}$	$K \text{ПП}$	$K \text{ПП}$	$K \text{ПП}$	$K \text{ПП}$	$K \text{ПП}$	$K \text{ПП}$	$K \text{ПП}$	$K \text{ПП}$							
Г	$K \Pi \Rightarrow x$	$K \Pi \Rightarrow x$	$K \Pi \Rightarrow x$	$K \Pi \Rightarrow x$	$K \Pi \Rightarrow x$	$K \Pi \Rightarrow x$	$K \Pi \Rightarrow x$	$K \Pi \Rightarrow x$	$K \Pi \Rightarrow x$							
С	$Kx < 0$	$Kx < 0$	$Kx < 0$	$Kx < 0$	$Kx < 0$	$Kx < 0$	$Kx < 0$	$Kx < 0$	$Kx < 0$							
Л	$Kx \Rightarrow \Pi$	$Kx \Rightarrow \Pi$	$Kx \Rightarrow \Pi$	$Kx \Rightarrow \Pi$	$Kx \Rightarrow \Pi$	$Kx \Rightarrow \Pi$	$Kx \Rightarrow \Pi$	$Kx \Rightarrow \Pi$	$Kx \Rightarrow \Pi$							
Е	$0$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	a	b	c	d	e	

Рис. 2.9. Таблица кодов команд ПМК

Коды команд записывают в регистры программной памяти ПМК нажатием клавиш с символами соответствующих команд в последовательности, определяемой текстом программы. При вводе команды адрес регистра программной памяти автоматически увеличивается на единицу. Высвечиваемые при вводе коды сравнивают с кодами вводимых команд (рис. 2.9). При ошибочно введенном коде программу возвращают на шаг назад (командой  $\overleftarrow{ШГ}$ ) и повторяют ввод нужной команды.

**Внимание!** Команды условных и безусловных переходов, перехода на подпрограмму и организации циклов, например

$x \neq 0, \text{ БП } \text{ ПП } \angle_0,$   
 $mn \quad mn \quad mn \quad mn$

хранящихся в двух соседних регистрах программной памяти, исправляются целиком после возврата на два шага. В некоторых случаях достаточно вернуться на один шаг, а адрес  $mn$  такой команды исправить командой, код которой совпадает с требуемым адресом, например адрес 10 можно ввести командой "+", 15 –  $10^x$ , 20 – "π" и т.д.

### 2.3.3. Пошаговый контроль и редактирование программы

Для пошагового контроля и редактирования надо, начав с первой команды программы, командой  $\overrightarrow{ШГ}$  "прогнать" записанную в память программу, сверив ее с текстом в кодах ПМК. Если на левом краю индикатора появился ошибочный код, то командой  $\overleftarrow{ШГ}$  программу возвращают на шаг или на два шага назад и нужной командой вводят верный код. Если какая-либо команда программы пропущена, то в программную память ПМК придется ввести ее и все последующие команды.

Ненужные команды новой, разрабатываемой пользователем программы исключаются командой НОП (Нет Операции).

## 2.4. ПОРЯДОК РАБОТЫ С ПРИКЛАДНОЙ ПРОГРАММОЙ

В процессе подготовки ПМК к решению конкретной задачи по программе необходимо:

- 1) выбрать начальный адрес  $mn$  размещения программы в памяти ПМК. Изменить, если нужно, соответствующим образом адреса команд и переходов в тексте программы и в инструкции к ней;
- 2) в командном режиме работы ПМК командой БП  $mn$  установить начальный адрес программы;
- 3) командой ПРГ перевести ПМК в режим программирования;
- 4) ввести команды программы, вспомогательные команды (например, БП  $mn$ ) и, если нужно, команды подпрограммы;

- 5) перевести калькулятор в командный режим;  
 6) в точном соответствии с измененной инструкцией к программе выполнить контрольный пример.

Совпадение результата выполнения контрольного примера с контрольным результатом позволяет переходить к непосредственному использованию прикладной программы.

**Пример 2.7.** Ввести в память ПМК, начиная с адреса 20, программу 2.1 вычисления значения полинома

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i \text{ при } n \leq 12$$

по схеме Горнера [2], которая в наших обозначениях выглядит так:

*Программа 2.1. Вычисление значения полинома  $n \leq 12$*

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	B↑	ОЕ	06	L <sub>0</sub>	5Г
01	B↑	ОЕ	07	03	03
02	Cx	ОГ	08	P → xd	6Г
03	KП → xB↑	ГЕ	09	+	10
04	+	10	10	C/П	50
05	x	12			

Инструкция:

$$\begin{aligned} Pd: &= a_0 \quad P1: = a_1 \dots P9: = a_9 \\ Pa: &= a_{10} \quad Pb: = a_{11} \quad Pc: = a_{12} \\ (B/O \quad P0: &= n \quad PX: = x \quad C/P \quad P_n(x): = PX) \end{aligned}$$

В скобках указана многократно повторяемая последовательность действий пользователя программы.

**Решение.** 1. По условию задачи  $m$  равно 20. Увеличим в программе значения адресов всех команд и адреса перехода 03 в команде  $L_0$  на 20 единиц. Дополним программу оператором БП 20. Это освободит нас от необходимости вручную устанавливать начальный адрес программы перед началом очередного вычисления, кроме первого. В инструкции к программе команду B/O, устанавливающую счетчик адресов на 00, заменим однократно выполняемой командой БП 20. В результате этих изменений программа и инструкция к ней примут следующий вид:

*Программа 2.1а*

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
20	В↑	ОЕ	27	23	23
21	В↑	ОЕ	28	Π → xd	6Г
22	Сх	ОГ	29	+	10
23	КП → x В↑	ГЕ	30	С/П	50
24	+	10	31	БП	51
25	x	12	32	20	20
26	L <sub>0</sub>	5Г			

Инструкция:

Pd: = a<sub>0</sub> P1: = a<sub>1</sub> ... P9: = a<sub>9</sub>

Pa: = a<sub>10</sub> Pb: = a<sub>11</sub> Pc: = a<sub>12</sub>

БП 20 (P0: = n РХ: = x С/П P<sub>n</sub>(x): = РХ)

Следует заметить, что не всякую программу можно сравнительно легко приспособить к вводу с адреса, отличного от адреса 00. Примером может служить программа 2.12 вычисления значения полинома, приведенная в [8], начальный адрес которой невозможно изменить без ее существенной переработки.

2. Командой БП 20 устанавливаем начальный адрес программы.
3. Командой ПРГ' переводим ПМК в режим программирования. В правой части индикатора появится число 20.
4. Введем команды программы, включая вспомогательную команду БП 20. По окончании ввода на индикаторе справа высвечивается число 33.
5. Командой АВТ переводим калькулятор в командный режим. На индикаторе появится число, которое было на нем перед переводом калькулятора в режим программирования.
6. В точном соответствии с измененной инструкцией к программе выполним контрольный пример. Если  $P_2(x) = 2x^2 - 14x + 24$ , то  $n = 2$ ,  $a_0 = 24$ ,  $a_1 = -14$ ,  $a_2 = 2$ ;  $P_2(2) = 4$ .

## 2.5. ОСНОВЫ ПРОГРАММИРОВАНИЯ ДЛЯ ПМК

### 2.5.1. Алгоритм, программа и инструкция

Важным этапом процесса подготовки решения задачи на ПМК является выбор алгоритма ее решения.

Под *алгоритмом* понимают понятное и точное предписание исполнителю совершить последовательность действий, направленных на дости-

жение цели или на решение поставленной задачи. Для описания алгоритмов используют алгоритмические языки, схемы и языки программирования. Наиболее компактным средством описания вычислительного алгоритма, ориентированным на ПМК, является программа на его языке программирования.

Язык программирования ПМК включает в себя совокупность символов команд ПМК, правила ввода данных и последовательность выполняемых команд.

Напомним, что в рассматриваемом ПМК команды выполняются в порядке следования их символов над одним или двумя предшествующими операндами. Результат операции может использоваться в качестве первого операнда для последующей операции в цепочечных вычислениях.

Последовательность символов команд, образованная в соответствии с правилами языка программирования ПМК, образует программу вычисления для ПМК.

Словарь языка программирования ПМК кроме символов команд, используемых при ручных вычислениях, содержит служебные команды (ПРГ, АВТ, ШГ и др.) и команды управления порядком выполнения программ (С/П, БП *ти*,  $x = 0$  *ти* и др.).

Составление программы вычислений, рассчитанной только на пользователя, управляющего ПМК (примеры 2.4–2.6), либо предназначенной для совместного, поочередного исполнения пользователем и ПМК (пример 2.7), является, очевидно, необходимой предпосылкой реализации любого вычислительного алгоритма. Под программой, в более узком смысле этого слова, часто понимают последовательность символов команд, вводимых в программную память ПМК. Остальную часть последовательности символов команд, дополненную специальными обозначениями (операторами присваивания, скобками и т.п.), называют инструкцией для пользователя программы, инструкцией к программе или просто инструкцией.

Простейшие вычисления на ПМК, как правило, выполняют по программам (в расширенном толковании этого термина) "вручную". Однако при реализации сложных алгоритмов или простых, но многократно исполняемых алгоритмов достоверность результатов невысока из-за возможных ошибок ввода данных и команд. В таких случаях целесообразнее составить программу для ПМК и инструкцию к ней (или воспользоваться готовой программой), ввести программу в память ПМК и выполнять вычисления под ее управлением. При этом, по крайней мере, исключаются ошибки ввода команд и, следовательно, повышается достоверность результатов вычислений.

## 2.5.2. Виды алгоритмов и их реализация

По способу управления порядком выполнения команд различают всего три вида алгоритмов: линейные, разветвляющиеся и циклические.

Простейшие алгоритмы являются линейными, т.е. все их команды выполняются строго последовательно. У разветвляющихся алгоритмов вычисления происходят по нескольким ветвям, в зависимости от выполнения какого-либо логического условия. В циклических алгоритмах их определенные фрагменты повторяются при различных значениях некоторой группы данных заданное число раз или до выполнения определенного логического условия.

Рассмотрим примеры алгоритмов различных видов и реализующих их на ПМК программ.

**Программы реализации линейных алгоритмов.** Рассмотрим порядок составления программы вычисления на ПМК значения гиперболического синуса вещественного аргумента в соответствии с алгоритмом, определенным формулой

$$\text{sh } x = (e^x - e^{-x})/2. \quad (2.1)$$

Предположим, что значение аргумента этой функции введено в регистр стека X. При вычислении  $\text{sh } x$  на ПМК "вручную" последовательность действий пользователя может быть, например, такой:

$$\text{PX:} = x \ e^x \ \text{Bx} / -/ e^x - 2 \div \text{sh } x: = \text{PX}.$$

Очевидно,  $\text{sh } x$  можно определить и такой формулой:

$$\text{sh } x = \frac{e^x - 1/e^x}{2}. \quad (2.2)$$

Этот алгоритм вычисления  $\text{sh } x$  реализуется последовательностью команд

$$\text{PX:} = x \ e^x \ \text{B}\uparrow 1/x - 2 \div \text{sh } x: = \text{PX}$$

короче предыдущей на одну команду.

Из этой последовательности выделим цепочку команд ПМК, которая образует будущую программу. Первую и последнюю команды может выполнить только пользователь, поэтому они войдут в инструкцию к программе. В результате получим:

Программа	Инструкция
$e^x$	$\text{PX:} = x$
$B\uparrow$	
$1/x$	
2	
$\div$	$\text{sh } x: = \text{PX}$

После ввода в регистр  $X$  значения  $x$  пользователь командой С/П запускает программу на счет. Поэтому в инструкции после  $PX := x$  надо вписать команду С/П, передающую программе управление вычислением. После выполнения всех команд программы управление снова должно быть передано пользователю, чтобы он мог записать полученный результат. Для этого программа обязательно должна завершаться командой С/П. Отсутствие этой команды ведет к "зацикливанию" вычислений.

Вот как теперь будут выглядеть программа вычисления  $shx$  и инструкция к ней:

Программа	Инструкция
	$PX := x$
$e^x$	С/П
$B\uparrow$	
$1/x$	
-	
2	
$\div$	
C/П	$shx := PX$

Общепринято все программы записывать, начиная с адреса 00. Поскольку счетчик адресов устанавливается пользователем, инструкция должна, очевидно, начинаться командой В/О, эквивалентной в данном случае команде БП 00.

Оформим программу вычислений значения  $shx$  в виде таблицы программы 2.2, сопроводив ее инструкцией и контрольным примером.

*Программа 2.2. Вычисление значения  $shx$*

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	$e^x$	16	04	2	02
01	$B\uparrow$	OE	05	$\div$	13
02	$1/x$	23	06	C/П	50
03	-	11			

Инструкция:

(В/О  
 $PX := x$   
С/П  
 $shx := PX$ )

Напомним, что в скобках указывается повторяемая последовательность команд.

**Контрольный пример:**  $sh\ 1,25 \approx 1,6019189$ .

П р и м е ч а н и е. Для большей компактности программу можно записывать в столбцы (строчки) по 10 символов команд или меньше в последнем столбце (строчке). Такая запись обеспечивает быстрое определение адресов переходов при разветвленных алгоритмах вычислений.

Вот как выглядит предыдущая программа при сокращенной форме записи:

*Программа 2.2а*

$e^x\ B\uparrow\ 1/x - 2 \div C/P$

Применяется также и промежуточная форма записи программы, в которой перед каждой командой записывается ее адрес с точкой между ними:

*Программа 2.2б*

00.e<sup>x</sup> 01.B<sup>↑</sup> 02.1/x 03. – 04. 2 05. ÷ 06. C/P

**Пример 2.8.** Составить программу вычисления значения функции  $chx$  и инструкцию к ней.

Р е ш е н и е. Функция  $chx$  определяется формулой

$$chx = (e^x + e^{-x})/2, \quad (2.3)$$

отличающейся от формулы для  $shx$  только знаком перед вторым слагаемым. Поэтому для получения программы вычисления  $chx$  команду вычитания с адресом 03 в программе 2.2 следует заменить командой сложения. В тексте инструкции обозначение  $sh$  заменяется на  $ch$  (программа 2.3).

*Программа 2.3. Вычисление значения  $chx$*

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	$e^x$	16	04	2	02
01	$B\uparrow$	OE	05	$\div$	13
02	$1/x$	23	06	C/P	50
03	+	10			

Инструкция:

(B/O

PX := x

C/P

chx := PX)

**Контрольный пример:**  $\text{ch } 1,25 = 1,8884237$ .

**Пример 2.9.** Составить программу вычисления значения гиперболического тангенса  $\text{th}x$ .

**Решение.** Функция  $\text{th}x$  определяется формулой

$$\text{th}x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}. \quad (2.4)$$

Предположим, что значение аргумента функции введено в регистр стека X. Искомое значение функции вычисляется в программе 2.4а и результат помещается также в регистр X.

*Программа 2.4а*

$e^x \rightarrow 1/x - Bx \rightarrow 1/x + \div C/\Pi$

Сделав в (2.4) подстановку

$$e^{-x} = \tan \alpha,$$

после несложных преобразований получим

$$\text{th}x = \cos(2 \arctg e^{-x}).$$

Этому алгоритму отвечает, по-видимому, самая короткая, хотя и дающая менее точные значения функции  $\text{th}x$  программа 2.4б.

*Программа 2.4б*

$e^x \rightarrow 1/x \rightarrow \tan^{-1} 2 \times \cos C/\Pi$

Остановимся на последнем варианте программы и оформим ее в виде таблицы, считая, что она вводится в программную память ПМК, начиная с адреса 00 (программа 2.4).

*Программа 2.4. Вычисление значения  $\text{th}x$*

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	$e^x$	16	04	x	12
01	$1/x$	23	05	$\cos$	1Г
02	$\tan^{-1}$	1Л	06	C/Π	50
03	2	02			

Инструкция:

Г Р ГРД или Г Р ГРД

(В/О

РХ: = x

С/П

th x: = РХ)

Контрольный пример:

Г Р ГРД

th 1,25 = 0,84828367.

Г Р ГРД

th 1,25 = 0,84828362.

Разность полученных значений  $5 \cdot 10^{-8}$  обусловлена операционными погрешностями процесса вычисления.

Программы реализации разветвляющихся алгоритмов. Разветвляющийся алгоритм содержит, по крайней мере, одно логическое условие, предусматривающее выполнение одной из двух возможных последовательностей команд;

Программируемый микрокалькулятор располагает четырьмя составными командами условных переходов

$$x < 0; \quad x = 0; \quad x \geq 0; \quad x \neq 0,$$

*mn*              *mn*              *mn*              *mn*

позволяющими составить сложные программы с разветвлениями.

В этих командах  $x < 0$ ,  $x = 0$ ,  $x \geq 0$ ,  $x \neq 0$  – условия, а *mn* – двузначное десятичное число – адрес перехода при невыполнении условия.

При выполнении команды условного перехода содержимое регистра X проверяется на соблюдение указанного в команде условия. Если это условие не соблюдается, то дальше по программе будет выполняться команда, адрес которой указан в команде условного перехода *mn*.

Выполнение команд условных переходов не изменяет содержимого регистра X.

Проиллюстрируем несколькими примерами особенности выполнения команд условных переходов.

**Пример 2.10.** Составить программу вычисления модуля вещественного числа x, помещенного в регистр X.

Р е ш е н и е. По определению абсолютной величиной (модулем) числа x называется число  $|x|$ , удовлетворяющее соотношению

$$|x| = \begin{cases} x & \text{при } x \geq 0, \\ -x & \text{при } x < 0. \end{cases}$$

Поэтому программу можно начать командой

$x \geq 0$ ,

,

где прямоугольник оставляет место для адреса перехода. Если число, находящееся в регистре стека X, удовлетворяет условию  $x \geq 0$ , то выполнение программы должно быть остановлено сразу после проверки знака числа:

$x \geq 0$   
[ ] .  
С/П

Если же в регистре X находится отрицательное число, т.е. условие  $x \geq 0$  не выполняется, то нужно изменить знак этого числа и остановить программу:

/ - /  
С/П .

В принципе этот участок программы можно записать в любом месте программной памяти ПМК. Можно, например, дописать его к предыдущему фрагменту программы и тогда получим

$x \geq 0$   
[ ]  
С/П  
/ - /  
С/П ,

где вместо прямоугольника нужно вписать адрес команды / - /.

Если же знак числа проверять командой

$x < 0$   
[ ] ,

то программа окажется короче предыдущей на один шаг:

$x < 0$   
[ ]  
/ - /  
С/П .

Здесь, очевидно, вместо прямоугольника следует вписать адрес команды С/П.

Оформим последнюю программу в виде таблицы, считая, что она вводится в память ПМК, начиная с адреса 00.

#### Программа 2.5. Вычисление модуля вещественного числа

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	$x < 0$	5C	02	/ - /	0L
01	03	03	03	С/П	50

Инструкция:

(В/О

РХ: = x

С/П

|x|: = РХ)

Контрольные примеры: |5| = 5, |-5| = 5.

Примеры. Поскольку при извлечении квадратного корня из положительного числа ПМК выдает только его арифметическое значение, модуль проще всего получить (с потерей точности при округлении) последовательным возведением числа  $x$  в квадрат и извлечением корня и тогда программа 2.5а, выполняющая те же функции, что и предыдущая программа, станет еще на один шаг короче. Этот прием позволяет определять модули чисел, порядок которых лежит в пределах от -49 до 49.

Программа 2.5а

Адрес	Команда	Код
00	$x^2$	22
01	$\sqrt{x}$	21
02	С/П	50

Пример 2.11. Написать программу вычисления значения функции  $\text{sign } x$ :

$$\text{sign } x = \begin{cases} 1, & \text{если } x > 0; \\ 0, & \text{если } x = 0; \\ -1, & \text{если } x < 0. \end{cases}$$

Решение. Указанный алгоритм реализуется программой 2.6.

Программа 2.6. Вычисление значения  $\text{sing } x$

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	$x \neq 0$	57	05	С/П	50
01	05	05	06	1	01
02	$x \geq 0$	59	07	/-/	07
03	06	06	08	С/П	50
04	1	01			

Инструкция:

(В/О  
РХ: =  $x$

С/П

signx: = РХ)

Контрольные примеры: sign 0 = 0; sign (-5) = -1; sign 5 = 1.

Программы 2.6а и 2.6б реализуют другой алгоритм вычисления значения функции sign  $x$ :

$$\text{sign } x = \begin{cases} 0, & \text{если } x = 0, \\ x/|x|, & \text{если } x \neq 0. \end{cases}$$

Программа 2.6а

Адрес	Команда	Код
00	$x \neq 0$	57
01	07	07
02	B↑	0E
03	$x < 0$	5C
04	06	06
05	/-/-	0L
06	÷	13
07	С/П	50

Программа 2.6 б

Адрес	Команда	Код
00	$x \neq 0$	57
01	06	06
02	B↑	0E
03	$x^2$	22
04	$\sqrt{x}$	21
05	÷	13
06	С/П	50

Порядок работы с этими программами не изменится. В программе 2.6а  $|x|$  вычисляется фрагментом

$x < 0$   
[06],  
/-/-

а в программе 2.6б – фрагментом

$x^2$ ,  
 $\sqrt{x}$

совпадающими с программами 2.5 и 2.5а (без команды С/П).

П р и м е ч а н и е. В ПМК "Электроника МК-61" и "Электроника МК-52" значения функций  $|x|$  и sign  $x$  вычисляются автоматически: первая – командой  $|x|$  (код – 31), а вторая – командой ЗН (ЗНак, код – 32).

В системе команд ПМК отсутствуют команды проверки соотношений между двумя операндами, например  $a$  и  $b$ . Поэтому в тех случаях, когда такие операции предусматриваются реализуемыми алгоритмами, вместо

$a < b$ ,  $a = b$ ,  $a \geq b$  и  $a \neq b$

используются эквивалентные условия

$a - b < 0$ ,  $a - b = 0$ ,  $a - b \geq 0$  и  $a - b \neq 0$ .

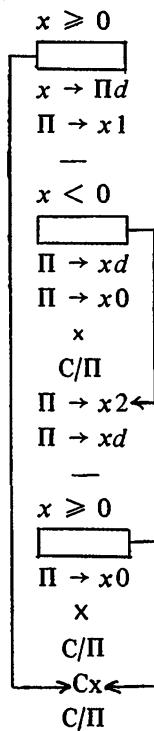
**Пример 2.12.** Составить программу вычисления значений функции  $u(t)$  (рис. 2.10):

$$u(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < 0; \\ \frac{U_m}{t_1} t & \text{при } 0 \leq t < t_1; \\ \frac{U_m}{t_1} (2t_1 - t) & \text{при } t_1 \leq t \leq 2t_1; \\ 0 & \text{при } 2t_1 \leq t. \end{cases}$$

**Решение.** Пусть

$$P0 = U_m/t_1, P1 = t_1, P2 = 2t_1, PX = t.$$

В этом случае черновой вариант программы может быть, например, таким:



Здесь регистр  $d$  используется для хранения значения аргумента  $t$ . Направленные отрезки (стрелки), идущие от прямоугольников к символам команд, указывают передачу управления в программе при невыполнении условий, записанных над прямоугольниками.

Заменой переменной  $t$  на  $t'$  ( $t' = t - t_1$ ) выражению для функции  $u$  можно придать более простой вид:

$$u(t') = \begin{cases} \frac{U_m}{t_1} (t_1 - |t'|), & \text{при } |t'| \leq t_1; \\ 0 & \text{при } |t'| > t_1. \end{cases}$$

Программа 2.7, реализующая этот алгоритм, оказывается ровно на 1/3 короче предыдущей; при этом высвобождается адресуемый регистр 2.

#### Программа 2.7. Вычисление значений одиночного треугольного импульса

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	$\Pi \rightarrow x1$	61	07	$x \geq 0$	59
01	-	11	08	12	12
02	$x^2$	22	09	$\Pi \rightarrow x0$	60
03	$\sqrt{\quad}$	21	10	x	12
04	$\Pi \rightarrow x1$	61	11	C/P	50
05	$\leftrightarrow$	14	12	Cx	0Г
06	-	11	13	C/P	50

Инструкция:

P0: =  $U_m/t_1$  P1: =  $t_1$

(B/O PX: = t C/P u(t): = PX)

Контрольный пример:

Результаты вычислений при  $U_m = 10$  В и  $t_1 = 10$  мс для нескольких значений  $t$  сведены в табл. 2.1

Таблица 2.1

$t$ , мс	-5	0	5	10	15	20	25
$u(t)$ , В	0	0	5	10	5	0	0

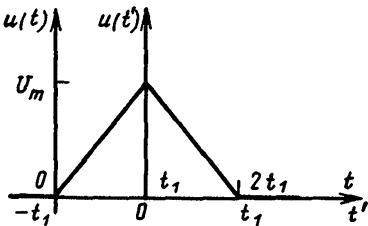


Рис 2.10. К примеру 2.12

**Программы реализации циклических алгоритмов.** Различают алгоритмы с известным числом повторений (циклов) и итерационные (от латинского *iteratio* – повторение), в которых число повторений заранее не известно, но известно условие завершения цикла.

Если число повторений какого-либо фрагмента алгоритма (тела цикла) известно, то можно воспользоваться предусмотренными в ПМК специальными составными командами организации цикла:

$L_0, L_1, L_2$  и  $L_3,$   
 $mn \quad mn \quad mn \quad mn$

в которых двузначное десятичное число  $mn$  – адрес начала тела цикла.

До начала циклических вычислений значение числа повторений (счетчик цикла) заносится в один из адресуемых регистров  $0, \dots, 3$ , номер которого совпадает с индексом символа команды организации цикла. При выполнении этой команды счетчик цикла модифицируется – уменьшается на единицу, а затем проверяется на равенство нулю. Если модифицированный счетчик не равен нулю, то происходит возврат в начало тела цикла по адресу  $mn$ , а если равен нулю, то осуществляется выход из цикла на очередной адрес программы.

При выполнении команд организации циклов содержимое регистра X не изменяется. После завершения циклического вычислительного процесса счетчик цикла всегда равен единице (00000001).

Рассмотрим пример алгоритма, позволяющего при его программировании использовать команду организации цикла – вычисление вещественного корня  $\bar{x}$  нелинейного уравнения  $f(x) = 0$  методом половинного деления (бисекции, дихотомии).

В соответствии с этим методом интервал  $[a; b]$ , в пределах которого  $f(x)$  меняет знак, делится пополам. Затем выбирается тот полуинтервал, на котором  $f(x)$  меняет знак, он снова делится пополам и т.д. (отсюда и название метода). Выбор интервала осуществляется сменой границы – принимается та, на которой знак  $f(x)$  противоположен знаку  $f(x)$  в середине интервала. Процесс продолжается до тех пор, пока длина интервала, содержащего корень, не станет меньше  $\epsilon$  – заданной точности вычисления корня. Число делений интервала  $[a; b]$ , требуемое для достижения допустимой погрешности, определяется неравенством

$$\frac{|a - b|}{2^k} \leq \epsilon,$$

откуда

$$k = \left\lceil \frac{\ln |a - b| - \ln \epsilon}{\ln 2} \right\rceil + 1.$$

Здесь квадратные скобки обозначают целую часть числа, заключенного в них.

В качестве приближенного значения корня можно взять любое число из найденного интервала, так как оно будет удовлетворять заданной точности.

Этот алгоритм реализован в программе 2.8. Здесь следует иметь в виду, что  $a$  и  $b$  должны принимать такие значения границ интервала, при которых  $f(a) > 0$ ,  $f(b) < 0$ .

**Программа 2.8. Вычисление вещественного корня  $f(x) = 0$   
методом половинного деления**

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	$x \rightarrow Pb$	4L	11	$\Pi \rightarrow xa$	.6-
01	$\leftrightarrow$	14	12	$\Pi \rightarrow xc$	6C
02	$x \rightarrow Pa$	4-	13	$L_0$	5Г
03	+	10	14	00	00
04	2	02	15	C/P	50
05	$\div$	13	16	$\Pi \rightarrow xe$	6C
06	$x \rightarrow Pс$	4C	17	$\Pi \rightarrow xb$	6L
07	PП	53	18	$L_0$	5Г
08	22	22	19	00	00
09	$x < 0$	5C	20	$\leftrightarrow$	14
10	16	16	21	C/P	50

Инструкция:

$f(x) \rightarrow \text{ПП} 22$

$x: = \text{РХ, Рс}$

$\{1 - 9, d\}$

...

B/O

P0: = k

PY: = a

РХ: = b

C/P

$\bar{x}: = \text{РХ, Рс}$

Значения символьических обозначений команд в первых четырех строках инструкции, обусловленных обращением к подпрограмме, поясняются ниже (см. п. 2.5.4).

В программе 2.8 для хранения счетчика циклов используется регистр 0. Тело цикла начинается фрагментом  $x \rightarrow Pb \leftrightarrow x \rightarrow Pa$ , обеспечивающим запись текущих значений границ интервала в регистры  $a$  и  $b$ , а заканчивается либо командами  $\Pi \rightarrow xa$ ,  $\Pi \rightarrow xc$ , либо командами  $\Pi \rightarrow xc$ ,  $\Pi \rightarrow xb$  в зависимости от знака функции в середине интервала. В любом случае этими командами в регистры Y и X вызываются значе-

ния границ суженного интервала, на которых функция  $f(x)$  принимает соответственно положительное и отрицательное значения.

При каждом выполнении тела цикла определяется и "запоминается" значение середины интервала (команды 03–06), затем выбирается та из его половин, на концах которой функция имеет разные знаки (команды 11, 12 или 16, 17), и, наконец, счетчик циклов уменьшается на единицу, а управление передается по адресу 00 – начало цикла. Этот процесс будет продолжаться до тех пор, пока в регистре 0 не окажется единица. Тогда по команде  $\angle_0 00$  в последний раз будет проверено равенство нулю модифицированного счетчика (1–1), и, так как это условие соблюдается, управление передается на команду С/П или  $\leftrightarrow$  С/П – следующую после адреса перехода. Вычисление значения корня  $\bar{x}$  уравнения  $f(x) = 0$  на этом заканчивается.

Если команду  $\angle_0 00$ , записанную по адресам 18–19, заменить командой  $\angle_0 02$  и в связи с этим внести соответствующие изменения некоторых других команд, то программу можно сократить на один шаг (программа 2.8а).

*Программа 2.8а*

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	$x \rightarrow Pb$	4C	11	$\Pi \rightarrow xa$	6–
01	$\leftrightarrow$	14	12	$\Pi \rightarrow xc$	6C
02	$x \rightarrow Pa$	4–	13	$\angle_0$	5Г
03	+	10	14	00	00
04	2	02	15	С/П	50
05	$\div$	13	16	$\Pi \rightarrow xb$	6Л
06	$x \rightarrow Pс$	4[	17	$\Pi \rightarrow xc$	6C
07	ПП	53	18	$\angle_0$	5Г
08	21	21	19	02	02
09	$x < 0$	5C	20	С/П	50
10	16	16			

Инструкция:

$f(x) \rightarrow ПП 21$

$x := РX, Рc$

$\{1 - 9, d\}$

...

В/О Р0: = k РY: = a РX: = b С/П  $\bar{x}$ : = РX, Рc

Контрольный пример. Найти значение корня  $\bar{x} \in [2; 2,2]$  уравнения

$$x^3 - 2x - 5 = 0$$

с абсолютной погрешностью  $10^{-4}$ .

**Р е ш е н и е.** Согласно инструкции к программе 2.8а подпрограмма вычисления значения функции

$$f(x) = x^3 - 2x - 5$$

записывается в память ПМК вслед за программой, начиная с адреса 21, причем перед обращением к ней значение аргумента  $x$  находится в регистрах  $X$  и  $c$ . Поэтому подпрограмма вычисления значения функции  $f(x)$  может быть, например, такой:

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
21	$x^2$	22	26	$x$	12
22	Bx	0	27	-	11
23	X	12	28	5	05
24	Bx	0	29	-	11
25	2	02	30	B/O	52

Подпрограмма в отличие от программы заканчивается командой B/O, а не C/P.

Для отыскания значения корня на интервале  $[2; 2,2]$  с абсолютной погрешностью  $\epsilon = 10^{-4}$  необходимо выполнить не менее 11 сокращений указанного интервала:

$$k = \left\lceil \frac{\ln 0,2 - \ln 10^{-4}}{\ln 2} \right\rceil + 1 = 11.$$

Так как  $f(2) < 0$ , а  $f(2,2) > 0$ , то  $a = 2,2$ , а  $b = 2$ . Выполнив последовательно все пункты инструкций, найдем  $\bar{x} = 2,0946288$ . Следовательно, значение искомого корня с указанной погрешностью равно  $\bar{x} = 2,0946$ . Время счета 1,3 мин.

Достаточно часто приходится применять итерационные циклические алгоритмы, в которых число циклов заранее не известно — оно определяется в ходе вычислений. Для примера рассмотрим алгоритм определения с заданной точностью значения корня нелинейного уравнения  $f(x) = 0$  методом простых итераций.

Для использования этого метода нелинейное уравнение заменяют равносильным уравнением  $x = \varphi(x)$ . Затем выбирают начальное приближенное значение  $x_0 \in [a; b]$  и последовательно вычисляют

$$x_1 = \varphi(x_0);$$

$$x_2 = \varphi(x_1);$$

.....

$$x_n = \varphi(x_{n-1}).$$

Если производная  $\varphi'(x)$  удовлетворяет условию

$$|\varphi'(x)| \leq 1$$

при любом  $x \in [a; b]$ , то эта последовательность сходится к искомому значению корня  $\bar{x}$ . На практике итерационный процесс прекращают при достижении условия

$$|x_n - x_{n-1}| < \epsilon.$$

Метод простых итераций реализован в программе 2.9, в которой это неравенство заменено равносильным

$$|x_n - x_{n-1}| - \epsilon < 0.$$

**Программа 2.9. Вычисление вещественного корня  $f(x) = 0$   
методом простых итераций**

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	$x \rightarrow P1$	41	08	$x^2$	22
01	$P \rightarrow x1$	61	09	$\sqrt{ }$	21
02	$P\bar{P}$	53	10	$P \rightarrow x0$	60
03	16	16	11	-	11
04	$P \rightarrow x1$	61	12	$x < 0$	5C
05	$\leftrightarrow$	14	13	01	01
06	$x \rightarrow P1$	41	14	$P \rightarrow x1$	61
07	-	11	15	C/P	50

Инструкция:

$\varphi(x) \rightarrow P\bar{P}16$

$x := P\bar{X}, P1$

{2 - d}

...

B/O P0: =  $\epsilon$  P $X$ : =  $x_0$  C/P  $\bar{x}$ : = P $X$ , P1

В программе 2.9 регистр 1 предназначен для записи начального значения корня и его последовательных приближений (команды  $x \rightarrow P1$  по адресам 00 и 06 соответственно). При каждом выполнении тела цикла (команды 01 – 11) в подпрограмме вычисляется значение функции  $\varphi(x)$ , которое принимается за следующее приближение корня, и определяется разность

$$|\varphi(x_{n-1}) - x_{n-1}| - \epsilon.$$

До тех пор пока она остается неотрицательной, команда  $x < 0$  01 возобновляет выполнение программы с адреса 01. Как только эта раз-

ность станет отрицательной, команда  $x < 0$  01 передаст управление на следующую за ней команду  $\Pi \rightarrow x 1$  – вызов в регистр X последнего приближения корня  $x_n = \varphi(x_{n-1})$ . Команда С/П прекращает выполнение программы.

**Контрольный пример.** Найти значение корня  $\bar{x} \in [-0,6; 0]$  уравнения  $2^x - 5x - 3 = 0$  с абсолютной погрешностью  $10^{-3}$ .

Решение. Обозначим

$$\varphi(x) = (2^x - 3)/5$$

и составим подпрограмму вычисления ее значения:

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
16	2	02	20	5	05
17	$x^y$	24	21	$\div$	13
18	3	03	22	B/O	52
19	–	11			

Затем введем в регистры программной памяти ПМК, начиная с адреса 00, программу 2.9, а с адреса 16 – подпрограмму вычисления значения функции  $\varphi(x)$ .

Положив далее  $\epsilon = 10^{-3}$ ,  $x_0 = -0,6$ , выполним последовательно все пункты инструкции работы с программой. В результате получим  $\bar{x}_1 = -0,45401092$ , откуда значение искомого корня с указанной погрешностью равно  $\bar{x}_1 = -0,454$ .

Время счета 40 с.

Примечания: 1. В качестве  $x_0$  можно было взять правую границу указанного интервала, т.е. положить  $x_0 = 0$ .

2. Значения второго корня рассматриваемого уравнения, заключенного в интервале  $[4; 5]$ , при показанном выше его преобразовании найти невозможно, так как на этом интервале  $\varphi'(x) > 1$ . Чтобы вычислить значение второго корня  $\bar{x}_2$ , надо выбрать другое выражение для правой части уравнения  $x = \varphi(x)$ :

$$\varphi(x) = \frac{\ln(5x + 3)}{\ln 2}.$$

В этом случае, полагая  $x_0 = 4$ , с той же точностью получаем  $\bar{x}_2 = 4,738$ .

### 2.5.3. Применение команды безусловного перехода

Передача управления команде программы по адресу *тп* реализуется составной командой безусловного перехода БП. Одно из возмож-

*тп*

ных применений этой команды – организация автоматического возврата к определенному адресу программы, например к ее началу. Инструкции к приведенным выше программам предусматривали подачу команды В/О, равносильной в данном случае команде БП 00, перед каждым новым вычислением. При многократном использовании программы это действие можно осуществить программно. Например, если дополнить программы 2.2–2.4 фрагментом

07	БП	51
08	00	00

то он обеспечит переход соответствующих программ на их начальные адреса при вычислении очередного (не первого) значения искомой величины. Теперь, после ввода программы в память ПМК, достаточно только один раз подать команду В/О. Соответственно и инструкции, например, к программе 2.2 можно придать такой вид:

В/О (РХ: = x С/П shx: = РХ)

Автоматический возврат можно обеспечить и при записи программы в память ПМК с любого адреса – достаточно лишь указать его в команде безусловного перехода (пример см. в § 2.4).

Иногда при программировании разветвляющихся алгоритмов заключительные фрагменты команд получаются одинаковыми. В таких случаях один из фрагментов – последний в программе – можно заменить командой БП *tn*, где *tn* – адрес начала оставшегося фрагмента.

Другие многочисленные примеры использования команды безусловного перехода можно найти в большинстве сравнительно сложных прикладных программ.

В заключение отметим два нестандартных способа передачи управления, которые, однако, часто используются в программах для сокращения их объема. Имеются в виду команда В/О и команды косвенного безусловного перехода (см. 2.5.5) К БП 0 – К БП 3, занимающие в памяти ПМК по одному регистру.

Команда В/О, помещенная вне подпрограммы, передает управление по адресу 01 и, следовательно, заменяет команду БП 01.

Если в программе имеется одна из команд организации цикла, допустим  $L_0\ mn$ , то после завершения цикла в регистре 0 остается единица. Команда К Б П 0 модифицирует содержимое этого регистра, уменьшая его на единицу ( $1 - 1 = 0$ ), и передает управление по адресу 00.

#### 2.5.4. Команда перехода на подпрограмму

Если в ходе выполнения программы требуется несколько раз выполнить одну и ту же последовательность команд, то достаточно ввести ее в программную память один раз, определенным образом офор-

мив, а в соответствующих местах основной программы дать составную команду обращения к подпрограмме\* ПП  $mn$ , где  $mn$  – адрес, с которого начинается подпрограмма. Заключительная команда подпрограммы В/О передает управление команде головной программы, следующей за адресом перехода.

**Пример 2.13.** Составить программу вычисления модуля  $\beta$  и аргумента  $\nu$  коэффициента отражения  $\rho = \rho e^{j\nu}$  от нагрузки  $\underline{Z}_H = R_H + jX_H$  для отрезка однородной линии без потерь с волновым сопротивлением  $Z_B = R_B$  (о коэффициенте отражения см. § 9.5).

Решение. В соответствии с формулой

$$\underline{\rho} = \rho e^{j\nu} = \frac{\underline{Z}_H - R_B}{\underline{Z}_H + R_B} = \frac{(R_H - R_B) + jX_H}{(R_H + R_B) + jX_H}$$

модуль  $\rho$  коэффициента отражения равен отношению модулей числителя и знаменателя, а его аргумент  $\nu$  – разности аргументов числителя и знаменателя дроби. Однако при известных значениях  $R_B$ ,  $R_H$  и  $X_H$  числитель и знаменатель этой дроби представляют собой комплексные числа в алгебраической форме. Поэтому при реализации рассматриваемого алгоритма предстоит выполнить дважды одну и ту же сравнительно трудоемкую операцию – преобразовать число  $\underline{Z}$  из алгебраической формы  $\underline{Z} = \text{Re}\underline{Z} + j\text{Im}\underline{Z}$  в показательную  $\underline{Z} = Z e^{j\varphi}$ .

В программе 2.10 эти преобразования выполняются подпрограммой, начинающейся с адреса 21, в основу которой положен следующий алгоритм:

$$Z = \sqrt{(\text{Re}\underline{Z})^2 + (\text{Im}\underline{Z})^2};$$

$$\varphi = \begin{cases} \arccos(\text{Re}\underline{Z}/Z), & \text{если } \text{Im}\underline{Z} \geq 0; \\ -\arccos(\text{Re}\underline{Z}/Z), & \text{если } \text{Im}\underline{Z} < 0. \end{cases}$$

**Программа 2.10. Вычисление модуля и аргумента коэффициента отражения (для линии без потерь)**

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	$x \rightarrow \Pi c$	41	21	$B \uparrow$	0E
01	$\leftrightarrow$	14	22	$x^2$	22
02	$x \rightarrow \Pi b$	4L	23	$\Pi \rightarrow x c$	61
03	$\Pi \rightarrow xd$	6Г	24	$x^2$	22
04	+	10	25	+	10
05	ПП	53	26	$x \neq 0$	57

\*Приставка "под" в слове "подпрограмма" указывает на подчиненность ее основной программе, которую в этом случае называют головной.

*Продолжение программы 2.10*

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
06	21	21	27	40	40
07	$x \rightarrow Pa$	4-	28	$\sqrt{ }$	21
08	$\leftrightarrow$	14	29	$\div$	13
09	$x \rightarrow P9$	49	30	Bx	0
10	$P \rightarrow xb$	6L	31	$\leftrightarrow$	14
11	$P \rightarrow xd$	6Г	32	$\cos^{-1}$	1-
12	-	11	33	$P \rightarrow xc$	6C
13	ПП	53	34	$x \geq 0$	59
14	21	21	35	38	38
15	$P \rightarrow xa$	6-	36	Q	25
16	-	11	37	B/O	52
17	$\leftrightarrow$	14	38	Q	25
18	$P \rightarrow x9$	69	39	/-	OL
19	$\div$	13	40	B/O	52
20	C/P	50			

Инструкция:

$Pd := R_B$  (B/O PY: = Re  $Z_H$  PX: = Jm  $Z_H$

C/P  $\rho$ : = PX  $\nu$ : = PY).

Контрольный пример:

при  $R_B = 75$  Ом и  $Z_H = 30 + j45$  Ом

$\rho = 0,55708604$ ,  $\nu = 1,9513028$  рад (Г Р ГРД).

Время счета 20 с.

Необходимость организации обращения к подпрограмме возникает также при разработке программ, использующих значения функции, алгоритм вычисления которых определяется конкретным пользователем (например, программы 2.8а и 2.9). Тогда в головной программе помещают команду обращения к подпрограмме по адресу, следующему за адресом последней команды программы: подпрограмма вычисления значения конкретной функции, составленная самим пользователем, дописывается в программной памяти ПМК к концу головной программы.

В подпрограмме можно использовать все свободные адресуемые регистры памяти, т.е. те, которые не заняты числовыми данными и промежуточными результатами головной программы.

Пример 2.14. Составить программу вычисления значения произвольной вещественной функции с заданным значением шага изменения ее аргумента.

Решение. Предположим, что значение шага изменения аргумента  $\Delta x$  введено в регистр  $d$ , а начальное значение аргумента  $x_0$  — в регистр

Х, его текущее значение будет храниться в регистре *c*. В программе 2.11 по первой команде  $x \rightarrow \text{Пc}$  запоминается значение аргумента функции. Затем командой ПП 09 осуществляется переход на подпрограмму вычисление значения функции. После выполнения всех команд подпрограммы произойдет возврат в головную программу — в данном случае на выполнение команды С/П. После останова на индикаторе высвечивается исходное значение функции. Командой С/П снова пустим программу на счет. При этом из регистров *c* и *d* последовательно вызываются и оказываются в регистрах стека У и Х значения аргумента функции и шага его изменения; командой + находится очередное значение аргумента, затем управление передается на начало программы, и далее весь цикл функционирования программы повторяется.

*Программа 2.11. Вычисление значений функции с заданным шагом*

Адресс	Команда	Код	Адресс	Команда	Код
00	$x \rightarrow \text{Пc}$	4C	05	$\text{П} \rightarrow xd$	6Г
01	ПП	53	06	+	10
02	09	09	07	БП	51
03	С/П	50	08	00	00
04	$\text{П} \rightarrow xc$	6C			

Инструкция:

$f(x) \rightarrow \text{ПП } 09$

$x : = \text{РХ}, \text{Рc}$

$\{0 - b\}$

...

В/О  $Pd : = \Delta x$  РХ : =  $x_0$  (С/П  $f(x) : = \text{РХ}$ )

Здесь  $f(x) \rightarrow \text{ПП } 09$  указывает, что подпрограмма вычисления функции  $f(x)$  (составляемая самим пользователем) записывается в регистры программной памяти, начиная с адреса 09.

Запись  $x : = \text{РХ}, \text{Рc}$  подсказывает пользователю, что перед очередным обращением к подпрограмме значение аргумента *x* функции  $f(x)$  находится в регистрах Х и *c*.

Далее в фигурных скобках приводятся адреса свободных регистров числовой памяти.

Вместо многоточий вписывается фрагмент инструкции, относящийся к работе пользователя с введенной подпрограммой (положение переключателя Г Р ГРД, распределение адресуемых регистров под числовые величины, входящие в функцию и др.).

Потребитель этой программы должен дописать к ней, начиная с адреса 09, подпрограмму вычисления значения нужной ему функции. Например, подпрограмма вычисления значения функции на рис. 2.10 может быть получена из составленной ранее программы 2.7 заменой команды

С/П командой В/О и увеличением значений всех адресов ее команд на девять единиц:

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
09	$\Pi \rightarrow x_1$	61	16	$x \geq 0$	59
10	-	11	17	21	21
11	$x^2$	22	18	$\Pi \rightarrow x_0$	60
12	$\sqrt{x}$	21	19	X	12
13	$\Pi \rightarrow x_1$	61	20	B/O	52
14	$\leftrightarrow$	14	21	Cx	0Г
15	-	11	22	B/O	50

В инструкции к программе 2.11, "работающей" с этой подпрограммой, переменную  $x$  следуют заменить на  $t$ , а вместо многоточий вписать  $P0 := U_m/t_1$   $P1 := t_1$ .

Из одной подпрограммы можно обратиться ко второй подпрограмме, из второй — к третьей и так до пяти раз.

### 2.5.5. Команды косвенной адресации

В ПМК имеются следующие команды, соответствующие рассмотренным выше командам обращения к адресуемым регистрам и командам передачи управления, но не с прямой, а с косвенной адресацией:

команды косвенной записи числа в адресуемый регистр

(К  $x \rightarrow \Pi 0, \dots, K x \rightarrow \Pi d$ );

команды косвенного вызова числа из адресуемого регистра

(К  $\Pi \rightarrow x_0, \dots, K \Pi \rightarrow x_d$ );

команды косвенного условного перехода

(К  $x < 0 0, \dots, K x < 0 d; K x = 0 0, \dots, K x = 0 d$  и т. д.);

команды косвенного безусловного перехода

(К БП 0, ..., К БП  $d$ );

команды косвенного перехода на подпрограмму

(К ПП 0, ..., К ПП  $d$ ).

При выполнении любой из этих команд сначала происходит обращение к адресуемому регистру, номер которого указан в команде. Предварительно в него помещается некоторое натуральное число. В результате такого обращения это число определенным образом модифицируется, образуя либо номер адресуемого регистра в командах обращения к ад-

ресуемым регистрам, либо адрес перехода в командах передачи управления.

В зависимости от номера адресуемого регистра его содержимое при выполнении команды косвенной адресации:

уменьшается на единицу при обращении к регистрам

0, ..., 3;

увеличивается на единицу при обращении к регистрам

4, ..., 6;

не изменяется при обращении к остальным регистрам.

При этом число 10 является десятичным номером регистра  $a$ , число 11 — регистра  $b$ , число 12 —  $c$  и число 13 —  $d$ .

Команды косвенной передачи управления, выполняя в программе те же функции, что и команды прямой адресации, занимают всего один регистр программной памяти. При этом, однако, увеличивается число адресуемых регистров, используемых в программе, и команд инструкции или программы для записи адресов переходов в эти регистры.

Действия команд косвенного обращения к адресуемым регистрам рассмотрим на примере двух фрагментов программы 2.12 [8] вычисления значения полинома  $P_n(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$  при  $n \leq 10$  по схеме Горнера.

Программа 2.12. Вычисление значения полинома  $n \leq 10$

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	$Kx \rightarrow P4$	Л4	09	—	11
01	С/П	50	10	$x \rightarrow P2$	42
02	БП	51	11	X	12
03	00	00	12	$KP \rightarrow x3$	Г3
04	$P \rightarrow x4$	64	13	+	10
05	1	01	14	$L_2$	58
06	+	10	15	11	11
07	$x \rightarrow P3$	43	16	С/П	50
08	5	05			

Инструкция:

В/О P4: = 4

PX: =  $a_0$  С/П

PX: =  $a_1$  С/П

.....

PX: =  $a_n$  С/П

(PX: =  $x$  БП 03 С/П  $P_n(x)$ : = PX)

**П р и м е ч а н и е.** Если степень полинома  $n < 10$ , нули вместо коэффициентов при старших степенях вводить не нужно.

Перед началом работы программы в соответствии с инструкцией в регистр 4 должно быть занесено число 4.

Первый фрагмент программы

$K x \rightarrow P4$

С/П

БП

00

представляет собой цикл, тело которого

$K x \rightarrow P4$

С/П

обеспечивает ввод значения очередного коэффициента полинома в предназначенный для него адресуемый регистр и останов программы. Действительно, после первого пуска программы по команде  $K x \rightarrow P4$  содержимое регистра 4 автоматически увеличится на единицу и станет равным 5. Поэтому число  $a_0$  из регистра X будет переписано в регистр 5. В результате повторения команды  $K x \rightarrow P4$  следующее число ( $a_1$ ) окажется в регистре 6 ( $5 + 1 = 6$ ). Значение коэффициента  $a_2$  попадает уже в регистр 7 и т.д. до коэффициентов  $a_8$ ,  $a_9$  и  $a_{10}$ , значения которых окажутся в регистрах  $d$ , 0 и 1 соответственно.

Следующая цепочка команд  $P \rightarrow x4 1 + x \rightarrow P3$  обеспечивает последующее правильное формирование в регистре 3 адресов хранения значений коэффициентов полинома, начиная со старшего. Из содержимого регистра 3 с помощью команд  $5 - x \rightarrow P2$  образуется счетчик циклов в регистре 2.

В соответствии со схемой Горнера

$$(\dots ((0 + a_n)x + a_{n-1})x + \dots + a_1)x + a_0$$

тело цикла состоит из команд

$KP \xrightarrow{x} x3$   
+

При каждом выполнении команды  $KP \rightarrow x3$  содержимое регистра 3 будет уменьшаться на единицу, образуя в убывающем порядке адреса регистров, из которых в том же порядке будут извлекаться значения коэффициентов полиномов. Для хранения значения аргумента используются все регистры стека, кроме регистра X. После  $n + 1$ -кратного выполнения тела цикла управление передается на заключительную команду С/П. После останова программы на индикаторе появится искомый результат.

## РАСЧЕТ ЛИНЕЙНЫХ РЕЗИСТИВНЫХ ЦЕПЕЙ

3.1. РАСЧЕТ ЦЕПЕЙ С ОДНИМ ИСТОЧНИКОМ  
МЕТОДОМ "СВЕРТЫВАНИЯ" СХЕМЫ И МЕТОДОМ  
ПРОПОРЦИОНАЛЬНОГО ПЕРЕСЧЕТА

Если разветвленная схема содержит лишь один источник напряжения (или тока), то всю пассивную часть схемы заменяют эквивалентным резистором, вычисляют входной ток (напряжение), а затем "разворачивают" схему, находя последовательно токи во всех ветвях и напряжения между любыми узлами. В случае необходимости имеющиеся в схеме соединения треугольником (звездой) предварительно преобразуют в эквивалентные звезды (треугольники).

Пример 3.1. Требуется вычислить все токи в схеме на рис. 3.1, Даные схемы:  $R_1 = R_5 = R_3 = R_6 = 2 \Omega$ ;  $R_2 = 10 \Omega$ ;  $R_4 = 8 \Omega$ ;  $R_7 = 3 \Omega$ ;  $E = 50 \text{ В}$ .

а) "Свертывание" схемы. Решение:

$$R_{67} = R_6 R_7 / (R_6 + R_7) = 2 \cdot 3 / (2 + 3) = 1,2 \Omega; R_{367} = R_3 + R_{67} = 2 + 1,2 = 3,2 \Omega;$$

$$R_{3467} = R_4 R_{367} / (R_4 + R_{367}) = 8 \cdot 3,2 / (8 + 3,2) = 2,28 \Omega;$$

$$R_{34567} = R_5 + R_{3467} = 2 + 2,28 = 4,28 \Omega;$$

$$R_{234567} = R_2 R_{34567} / (R_2 + R_{34567}) = 10 \cdot 4,28 / (10 + 4,28) = 3 \Omega;$$

$$R_9 = R_{bx} = R_1 + R_{234567} = 2 + 3 = 5 \Omega.$$

$$I_1 = I_{bx} = E/R_{bx} = 50/5 = 10 \text{ А.}$$

б) "Развертывание" схемы.

$$U_{14} = E - R_1 I_1 = 50 - 2 \cdot 10 = 30 \text{ В}; I_2 = U_{14}/R_2 = 30/10 = 3 \text{ А};$$

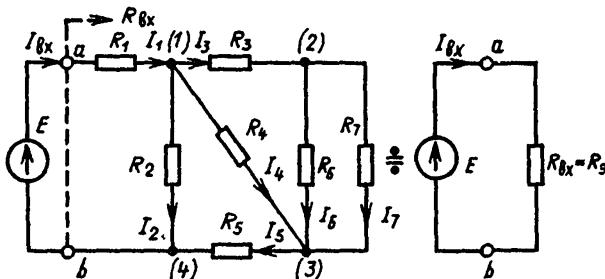


Рис. 3.1. К примерам 3.1 и 3.2

$$\begin{aligned}
 I_5 &= I_1 - I_2 = 10 - 3 = 7 \text{ A}; \quad U_{34} = R_5 I_5 = 2 \cdot 7 = 14 \text{ В}; \\
 U_{13} + U_{34} - U_{14} &= 0, \text{ откуда } U_{13} = U_{14} - U_{34} = 30 - 14 = 16 \text{ В}; \\
 I_4 &= U_{13}/R_4 = 16/8 = 2 \text{ А}; \quad I_3 = I_1 - I_2 - I_4 = 10 - 3 - 2 = 5 \text{ А}; \\
 U_{23} &= U_{13} - U_{12} = U_{13} - R_3 I_3 = 16 - 2 \cdot 5 = 6 \text{ В}; \\
 I_6 &= U_{23}/R_6 = \frac{6}{2} = 3 \text{ А}; \quad I_7 = U_{23}/R_7 = \frac{6}{3} = 2 \text{ А}.
 \end{aligned}$$

Процедура "свертывания" схемы выполняется на ПМК в командном режиме как цепочная последовательность операций:

$$\begin{aligned}
 \text{PX:} &= R_7 \\
 1/x \text{ PX:} &= R_6 \quad 1/x + 1/x \quad (\text{параллельное соединение } R_6 \text{ и } R_7) \\
 \text{PX:} &= R_3 + \quad (\text{последовательное соединение } R_6 \text{ и } R_3) \\
 1/x \text{ PX:} &= R_4 \quad 1/x + 1/x \quad (\text{параллельное соединение } R_{367} \text{ и } R_4) \\
 \text{PX:} &= R_5 + \quad (\text{последовательное соединение } R_{3467} \text{ и } R_5) \\
 1/x \text{ PX:} &= R_2 \quad 1/x + 1/x \quad (\text{параллельное соединение } R_{34567} \text{ и } R_2) \\
 \text{PX:} &= R_1 + \quad (\text{последовательное соединение } R_{234567} \text{ и } R_1) \\
 R_3: &= \text{PX} \quad (\text{ответ на индикаторе})
 \end{aligned}$$

**Пример 3.2.** Решить задачу 3.1 методом пропорционального пересчета.

**Решение:** Задаемся произвольным значением тока в удаленной от источника ветви, например  $I'_7 = 1 \text{ А}$ , тогда

$$\begin{aligned}
 U'_{23} &= I'_7 R_7 = 1 \cdot 3 = 3 \text{ В}; \quad I'_6 = U'_{23}/R_6 = 3/2 = 1,5 \text{ А}; \\
 I'_3 &= I'_6 + I'_7 = 1 + 1,5 = 2,5 \text{ А}; \quad U'_{13} = R_3 I'_3 + U'_{23} = \\
 &= 2 \cdot 2,5 + 3 = 8 \text{ В}; \quad I'_4 = U'_{13}/R_4 = \frac{8}{8} = 1 \text{ А}; \\
 I'_5 &= I'_4 + I'_6 + I'_7 = 1 + 1,5 + 1 = 3,5 \text{ А}; \quad U'_{14} = U'_{13} + R_5 I'_5 = \\
 &= 8 + 2 \cdot 3,5 = 15 \text{ В}; \quad I'_2 = U'_{14}/R_2 = 15/10 = 1,5 \text{ А}; \\
 I'_1 &= I'_2 + I'_3 + I'_4 = 1,5 + 2,5 + 1 = 5 \text{ А}; \quad U'_{ab} = U'_{14} + R_1 I'_1 = \\
 &= 15 + 2 \cdot 5 = 25 \text{ В}; \quad k = E/U'_{ab} = \frac{50}{25} = 2.
 \end{aligned}$$

Поскольку расчетное значение  $U'_{ab}$  оказалось в  $k = 2$  раз меньше ЭДС источника, в соответствии с теоремой о линейных соотношениях все

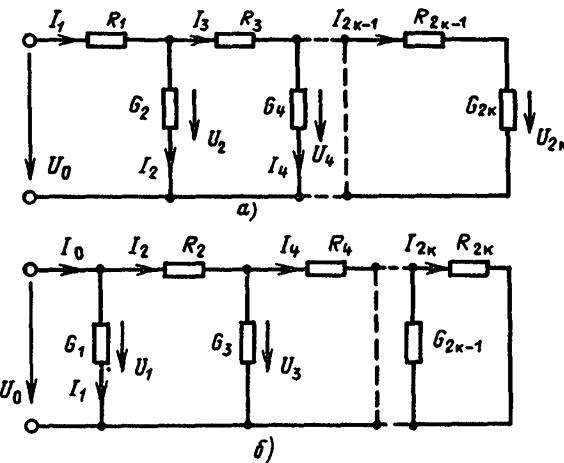


Рис. 3.2. Первая (а) и вторая (б) канонические лестничные резистивные схемы

расчетные значения (в нашем примере все значения токов и напряжений, снабженные штрихами) следует увеличить в  $k$  раз. Так,  $I_7 = I'_7 \cdot k = 1 \cdot 2 = 2$  А;  $U_{23} = U'_{23} \cdot k = 3 \cdot 2 = 6$  В и т.д.

Методы свертывания схемы и пропорционального пересчета могут комбинироваться с методом наложения, когда каждый из частичных токов рассчитывается как результат воздействия соответствующего источника.

В электротехнике и радиотехнике часто встречаются так называемые лестничные (цепные) схемы, простейшим вариантом которых являются лестничные резистивные схемы. Возможны две канонические лестничные схемы, приведенные на рис. 3.2, а и б. Отличительной особенностью первой канонической схемы на рис. 3.2, а является наличие так называемого  $T$ -входа, когда первым со стороны входа идет продольный элемент с сопротивлением  $R_1$ . Особенностью второй канонической схемы на рис. 3.2, б является наличие  $\Pi$ -входа, когда первым со стороны входа идет поперечный элемент с проводимостью  $G_1$ .

Алгоритм расчета первой канонической схемы  $U_{2i} = U_{2i-2} - R_{2i-1} \times I_{2i-1}$ ;  $I_{2i+1} = I_{2i-1} - G_{2i} U_{2i}$ , если  $i = 1, 2, 3, \dots, k$ ;  $I_1 = G_0 U_0$ , где  $G_0$  – входная проводимость, которая может быть представлена в виде цепной дроби:

$$G_0 = \frac{1}{R_1 + \frac{1}{G_2 + \frac{1}{\dots}}}$$
(3.1)

$$R_3 + \frac{1}{R_{2k-1} + \frac{1}{G_{2k}}}.$$

В справедливости (3.1) легко убедиться, если сопоставить схему на рис. 3.2,*a* с цепной дробью, прочитанной в обратном порядке, начиная с правого нижнего члена.

Приведенная далее программа 3.1 позволяет вычислить входную проводимость  $G_0$ , напряжения на поперечных элементах и токи продольных ветвей схемы.

**Программа 3.1. Вычисление значения проводимости (сопротивления) лестничной схемы, напряжений и токов ее элементов**

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	НОП	54	11	↔	14
01	+	10	12	-	11
02	$1/x$	23	13	$x \rightarrow \Pi c$	4C
03	C/П	50	14	C/П	50
04	B/O	52	15	X	12
05	$x \rightarrow \Pi c$	4C	16	$\Pi \rightarrow xd$	6Г
06	X	12	17	↔	14
07	$x \rightarrow \Pi d$	4Г	18	-	11
08	C/П	50	19	БП	51
09	X	12	20	07	07
10	$\Pi \rightarrow xc$	6C			

Инструкция для расчета первой канонической схемы:

B/O Cx B↑ (подготовка к вычислениям);

PX; =  $G_{2k}$  C/П PX; =  $R_{2k-1}$  C/П

.....

PX; =  $G_2$  C/П PX; =  $R_1$  C/П

$G_0$  := PX

$\overset{\rightarrow}{\Pi}\Gamma$  PX; =  $U_0$  C/П  $I_1$  := PX

PX; =  $R_1$  C/П  $U_2$  := PX

PX; =  $G_2$  C/П  $I_3$  := PX

.....

PX; =  $R_{2k-1}$  C/П  $U_{2k}$  := PX

Пример 3.3. Для схемы на рис. 3.2,*a*, содержащей только первые четыре элемента, дано:  $R_1 = 10$  Ом;  $G_2 = 0,1$  См;  $R_3 = 15$  Ом;  $G_4 =$

$= 0,2 \text{ См}$ ;  $U_0 = 100 \text{ В}$ . Вычислить  $G_0$ , напряжения на поперечных ветвях и токи в продольных ветвях.

Решение: В/О Сх Вт

$$P_X := 0,2 \text{ C/P } P_X := 15 \text{ C/P } P_X := 0,1 \text{ C/P } P_X := 10 \text{ C/P } G_0 = \\ = 6 \cdot 10^{-2} := P_X \text{ (на индикаторе } 5.9999998 \cdot 10^{-2})$$

ШГ РХ: = 100 С/П I<sub>1</sub> = 6 : = РХ (на индикаторе 5.9999998)

$$P_X : = 10 \text{ C}/\Pi \quad U_2 = 40 : = P_X$$

PX := 0,1 C/P I<sub>3</sub> = 2 := PX (на индикаторе 1.9999998)

PX := 15 C/P U<sub>4</sub> = 10 := PX (на индикаторе 10.000003)

Алгоритм расчета второй канонической схемы:

$$l_{2i} = I_{2i-2} - G_{2i-1} U_{2i-1};$$

$U_{2i+1} = U_{2i-1} - R_{2i} I_{2i}$ , если  $i = 1, 2, \dots, k$ ;

$$U_1 = R_0 I_0,$$

где  $R_0$  — входное сопротивление, которое может быть представлено в виде цепной дроби:

$$R_0 = \cfrac{1}{G_1 + \cfrac{1}{R_2 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{G_{2k-1} + \cfrac{1}{R_{2k}}}}}}$$
(3.2)

Поскольку выражения (3.1) и (3.2) одинаковы по своей структуре, что вполне естественно, так как первая и вторая канонические схемы являются дуальными, для расчетов второй канонической схемы можно пользоваться той же программой 3.1, но в инструкции все вводимые и выводимые величины следует заменить дуальными.

#### **Инструкция для расчета второй канонической схемы:**

B/O Cx B↑

$$P_X := R_{2k} \text{ C/P } P_X := G_{2k-1} \text{ C/P}$$

$$R_X = R_{\perp} G/\Pi, \quad R_X^{\parallel} = G_{\parallel}/G/\Pi$$

IX. RY

$$\vec{W}\Gamma_{\text{PV}} = I - C/\Pi(U)U^* = \text{PV}$$

$\text{PV}_i \equiv G_i / \Pi J_{\alpha i} \in \text{PV}$

$$\text{PX} \equiv R_2 \text{ C}/\Pi I_2 \cdot \equiv \text{PX}$$

$$RX := G_{2k-1} \frac{C}{\Pi} I_{2k} := RX$$

**Пример 3.4.** Для схемы на рис. 3.2,б, содержащей только первые четыре элемента, дано:  $G_1 = 0,08 \text{ См}$ ;  $R_2 = 5 \text{ Ом}$ ;  $G_3 = 0,2 \text{ См}$ ;  $R_4 = 10 \text{ Ом}$ ;  $I_0 = 10 \text{ А}$ .

Вычислить  $R_0$ , напряжения и токи.

Ответ:  $R_0 = 5 \text{ Ом}$ ;  $U_1 = 50 \text{ В}$ ;  $I_2 = 6 \text{ А}$ ;  $U_3 = 20 \text{ В}$ ;  $I_4 = 2 \text{ А}$ .

### 3.2. МЕТОД КОНТУРНЫХ ТОКОВ

Этот метод является одним из самых распространенных, запись уравнений поддается формализации, удобной для применения ЭВМ. Сущность метода состоит в уменьшении числа топологических уравнений за счет замены реальных токов ветвей расчетными контурными токами, введенными в уравнения второго закона Кирхгофа. Благодаря этому число достаточных контурных уравнений становится равным числу независимых контуров. Ток источника тока можно рассматривать замыкающимся по любым ветвям, образующим контур с ветвью источника: дополнительных уравнений наличие ветвей с источниками токов не требует.

Пусть на схеме на рис. 1.6 стрелки контуров изображают теперь контурные токи  $I_1^{(k)}$ ,  $I_2^{(k)}$  и  $I_3^{(k)}$ , замыкающиеся по ветвям каждого контура. Тогда реальные токи представляют собой алгебраические суммы контурных токов (ток внешнего контура принимаем равным нулю):

$$\begin{aligned} I_1 &= I_1^{(k)}; \quad I_2 = I_2^{(k)} + J; \quad I_3 = I_3^{(k)} + J; \\ I_4 &= I_3^{(k)}; \quad I_5 = I_2^{(k)} - I_3^{(k)}; \quad I_6 = I_1^{(k)} - I_2^{(k)}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Легко убедиться, что для контурных токов первый закон Кирхгофа удовлетворяется автоматически. Например, для первого узла с учетом (3.3)

$$-I_1 + I_2 + I_6 - J = -I_1^{(k)} + I_2^{(k)} + J + I_1^{(k)} - I_2^{(k)} - J \equiv 0.$$

Именно это обстоятельство позволяет уменьшить число совместно решаемых уравнений до числа независимых уравнений, составляемых по второму закону Кирхгофа.

Контурные уравнения составляются таким образом, что сначала учитываются все падения напряжения на элементах рассматриваемого контура от "собственного" контурного тока, а затем в этом же контуре, но от токов соседних контуров (с учетом знаков):

$$I_1^{(k)} (R_1 + R_6) - I_2^{(k)} R_6 = E_1;$$

$$I_2^{(k)}(R_2 + R_5 + R_6) - I_1^{(k)}R_6 - I_3^{(k)}R_5 + R_2J = E_5;$$

$$I_3^{(k)}(R_3 + R_4 + R_5) - I_2^{(k)}R_5 + R_3J = -E_4 - E_5.$$

Очевидно, что слагаемые  $R_2J$  и  $R_3J$  как известные величины можно перенести в правую часть уравнений.

Каноническая форма записи контурных уравнений:

$$\left. \begin{aligned} R_{11}I_1^{(k)} + R_{12}I_2^{(k)} + \dots + R_{1n}I_n^{(k)} &= E_1^{(k)}; \\ R_{21}I_1^{(k)} + R_{22}I_2^{(k)} + \dots + R_{2n}I_n^{(k)} &= E_2^{(k)}; \\ \dots &\dots \\ R_{n1}I_1^{(k)} + R_{n2}I_2^{(k)} + \dots + R_{nn}I_n^{(k)} &= E_n^{(k)}, \end{aligned} \right\} \quad (3.4)$$

где  $I_i^{(k)}$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) – контурные токи;  $R_{ii}$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) – собственное сопротивление  $i$ -го контура, равное сумме сопротивлений всех ветвей, входящих в контур;  $R_{ij} = R_{ji}$  ( $i \neq j$ ;  $i, j = 1, 2, \dots, n$ ) – сумма сопротивлений общих для рассматриваемых контуров ветвей, взятая со знаком “–”, если контурные токи в общих ветвях не совпадают, и со знаком “+”, если они совпадают;  $E_i^{(k)}$  – контурные ЭДС, равные алгебраической сумме ЭДС в контуре с учетом расчетных ЭДС, образуемых токами источников тока, замыкающимися по ветвям рассматриваемого контура; ЭДС, направления которых совпадают с направлением контурного тока, принимаются со знаком “+”, в противном случае – со знаком “–”.

Уравнения типа (3.4) решаются методом последовательного исключения переменных (методом Гаусса) или при помощи определителей (методом Крамера).

Например, по правилу Крамера

$$I_1^{(k)} = \Delta_1 / \Delta; \quad I_2^{(k)} = \Delta_2 / \Delta; \quad \dots \quad I_k^{(k)} = \Delta_k / \Delta,$$

где определитель системы уравнений

$$\Delta = \begin{vmatrix} R_{11} & R_{12} & \dots & R_{1n} \\ R_{21} & R_{22} & \dots & R_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ R_{n1} & R_{n2} & \dots & R_{nn} \end{vmatrix},$$

а определитель  $\Delta_k$  получается путем замены в определителе системы  $k$ -го столбца столбцом контурных ЭДС.

Программируемые калькуляторы обычно применяют для вычисления определителей второго и третьего порядков. Если порядок определителей выше третьего, то предварительно следует понизить его известным из математики способом.

Программы решения систем линейных алгебраических уравнений приведены в § 3.4.

### 3.3. МЕТОД УЗЛОВЫХ НАПРЯЖЕНИЙ (УЗЛОВЫХ ПОТЕНЦИАЛОВ)

Метод расчета цепей, в котором в качестве неизвестных выступают потенциалы узлов относительно одного, выбранного в качестве базисного, называется *методом узловых потенциалов*. Потенциал базисного узла может быть принят произвольным. Разности потенциалов между любым узлом и базисным называют узловыми напряжениями; если потенциал базисного узла равен нулю, то узловые напряжения численно совпадают с потенциалами узлов.

Уравнения, составленные по методу узловых напряжений (потенциалов), вытекают из первого закона Кирхгофа, и, следовательно, число необходимых и достаточных (независимых) уравнений равно числу независимых узлов схемы.

Выберем на схеме на рис. 1.6 узел 0 в качестве базисного, т.е. приравняем его потенциал любому произвольно выбранному числу, например нулю.

Очевидно, что если будут вычислены потенциалы всех узлов, то токи во всех ветвях могут быть найдены по закону Ома (в ветви с источником — по обобщенному закону Ома). Легко убедиться, что уравнения, составленные для узловых напряжений по второму закону Кирхгофа, удовлетворяются автоматически. Например, для контура 1 – 2 – 3 – 0 имеем

$$U_{12} + U_{23} + U_{30} + U_{01} = \varphi_1 - \varphi_2 + \varphi_2 - \varphi_3 + \\ + \varphi_3 - \varphi_0 + \varphi_0 - \varphi_1 \equiv 0.$$

Именно поэтому в методе узловых напряжений и составляются уравнения только по первому закону Кирхгофа.

Например, для узла 1 имеем

$$-I_1 + I_2 + I_6 = -(U_{01} + E_1)G_1 + U_{12}G_2 + U_{10}G_6 = \\ = -(\varphi_0 - \varphi_1 + E_1)G_1 + (\varphi_1 - \varphi_2)G_2 + (\varphi_1 - \varphi_0)G_6 = 0.$$

Учтем, что по условию  $\varphi_0 = 0$ , и перегруппируем слагаемые:

$$\varphi_1(G_1 + G_2 + G_6) - \varphi_2G_2 = E_1G_1.$$

Остальные уравнения получим по аналогии:

$$\varphi_2(G_2 + G_3 + G_5) - \varphi_1 G_2 - \varphi_3 G_3 = -E_5 G_5;$$

$$\varphi_3(G_3 + G_4) - \varphi_2 G_3 = -J + E_4 G_4.$$

Каноническая форма записи уравнений узловых потенциалов:

$$\left. \begin{aligned} G_{11}\varphi_1 + G_{12}\varphi_2 + \dots + G_{1n}\varphi_n &= I_1^{(y)}; \\ G_{21}\varphi_1 + G_{22}\varphi_2 + \dots + G_{2n}\varphi_n &= I_2^{(y)}; \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots & \\ G_{n1}\varphi_1 + G_{n2}\varphi_2 + \dots + G_{nn}\varphi_n &= I_n^{(y)}, \end{aligned} \right\} \quad (3.5)$$

где  $\varphi_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) – потенциалы узлов;  $G_{ii}$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) – сумма проводимостей всех ветвей, сходящихся в  $i$ -м узле, принятая со знаком "+";  $G_{ij} = G_{ji}$  ( $i \neq j$ ;  $i, j = 1, 2, \dots, n$ ) – сумма проводимостей всех ветвей, соединяющих  $i$ -й и  $j$ -й узлы, принятая со знаком "-";  $I_i^{(y)}$  – узловой ток  $i$ -го узла, равный алгебраической сумме всех токов источников, содержащихся в ветвях, которые сходятся в узле; если ток источника направлен к узлу  $i$ , то его знак "+", если от узла  $i$ , – то "-".

Ветви с источниками ЭДС преобразуются в ветви с источниками тока: например, в ветви 4 схемы на рис. 1.6 действует источник тока  $J_4 = E_4 G_4$ , направленный к узлу 3.

Система уравнений (3.5) может быть решена методом последовательного исключения переменных или при помощи определителей. Например:

$$\varphi_1 = \Delta_1 / \Delta; \quad \varphi_2 = \Delta_2 / \Delta, \quad \dots, \quad \varphi_k = \Delta_k / \Delta,$$

где  $\Delta$  – определитель системы (3.5);  $\Delta_k$  – тот же определитель,  $k$ -й столбец которого заменен столбцом узловых токов.

Определители вычисляются по программам, приведенным в § 3.4. Токи схемы на рис. 1.6 при известных потенциалах узлов находятся следующим образом [см. (1.10)]:

$$I_1 = (E_1 - \varphi_1) G_1;$$

$$I_2 = G_2 U_{12} = G_2 (\varphi_1 - \varphi_2);$$

$$I_4 = G_4 (U_{30} - E_4) = (\varphi_3 - E_4) G_4;$$

.....

### 3.4. ПРОГРАММЫ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С ВЕЩЕСТВЕННЫМИ ПЕРЕМЕННЫМИ

#### 3.4.1. Вычисление определителя второго порядка

Определитель второго порядка

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Программа 3.2 вычисления определителя второго порядка приведена ниже.

*Программа 3.2. Вычисление определителя второго порядка  
с вещественными элементами*

Адрес	Операция	Код	Адрес	Операция	Код
00	$\Pi \rightarrow x8$	68	04	$\Pi \rightarrow x9$	69
01	$\Pi \rightarrow x6$	66	05	X	12
02	X	12	06	-	11
03	$\Pi \rightarrow x5$	65	07	C/P	50

Инструкция:

P8 : = a<sub>11</sub>

P9 : = a<sub>12</sub>

P5 : = a<sub>21</sub>

P6 : = a<sub>22</sub>

В/О C/P Δ : = PX

В интересах наглядности вводимые величины можно представить в виде мнемонической схемы, согласованной с размещением клавиш в ПМК:

$$\begin{bmatrix} P8 & P9 \\ P5 & P6 \end{bmatrix}$$

Контрольный пример:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 8 \end{vmatrix} = 4.$$

### 3.4.2. Вычисление определителя третьего порядка

Определитель третьего порядка

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) + \\ + a_{21}(a_{13}a_{32} - a_{12}a_{33}) + a_{31}(a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}).$$

Программа 3.3 вычисления определителя третьего порядка приведена ниже.

*Программа 3.3. Вычисление определителя третьего порядка с вещественными элементами*

Адресс	Операция	Код	Адресс	Операция	Код
00	$\Pi \rightarrow x5$	65	15	-	11
01	$\Pi \rightarrow x3$	63	16	$\Pi \rightarrow x4$	64
02	X	12	17	X	12
03	$\Pi \rightarrow x6$	66	18	+	10
04	$\Pi \rightarrow x2$	62	19	$\Pi \rightarrow x8$	68
05	X	12	20	$\Pi \rightarrow x6$	66
06	-	11	21	X	12
07	$\Pi \rightarrow x7$	67	22	$\Pi \rightarrow x9$	69
08	X	12	23	$\Pi \rightarrow x5$	65
09	$\Pi \rightarrow x9$	69	24	X	12
10	$\Pi \rightarrow x2$	62	25	-	11
11	X	12	26	$\Pi \rightarrow x1$	61
12	$\Pi \rightarrow x8$	68	27	X	12
13	$\Pi \rightarrow x3$	63	28	+	10
14	X	12	29	C/P	50

Инструкция:

$$P7 := a_{11} \quad P8 := a_{12} \quad P9 := a_{13} \quad P4 := a_{21} \quad P5 := a_{22} \\ P6 := a_{23} \quad P1 := a_{31} \quad P2 := a_{32} \quad P3 := a_{33} \quad B/O \quad C/P \quad \Delta := RX$$

Ввод данных удобно вести в соответствии с мнемонической схемой:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \div \begin{bmatrix} P7 & P8 & P9 \\ P4 & P5 & P6 \\ P1 & P2 & P3 \end{bmatrix} .$$

Контрольный пример:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & 4 \\ 7 & 8 & -2 \end{vmatrix} = 149,$$

Время счета 9 с.

### 3.4.3. Решение системы двух линейных уравнений

Для решения системы двух линейных уравнений [8]

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1;$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2$$

используется программа 3.4.

#### Программа 3.4. Решение системы двух линейных уравнений

Адресс	Команда	Код	Адресс	Команда	Код
00	$x \rightarrow \Pi_6$	46	13	-	11
01	$\leftrightarrow$	14	14	$Kx \rightarrow \Pi_1$	$\angle_1$
02	$x \rightarrow \Pi_7$	47	15	$\angle_0$	5Г
03	6	06	16	7	07
04	$x \rightarrow \Pi_1$	41	17	$\Pi \rightarrow x_4$	64
05	2	02	18	$\div$	13
06	$x \rightarrow \Pi_0$	40	19	C/П	50
07	C/П	50	20	$\Pi \rightarrow x_5$	65
08	$\Pi \rightarrow x_6$	66	21	X	12
09	$\div$	13	22	$\Pi \rightarrow x_3$	63
10	$Kx \rightarrow \Pi_1$	$\angle_1$	23	$\leftrightarrow$	14
11	$\Pi \rightarrow x_7$	67	24	-	11
12	X	12	25	C/П	50

Инструкция:

В/О

РУ : =  $a_{11}$  РХ : =  $a_{21}$  С/П

РУ : =  $a_{12}$  РХ : =  $a_{22}$  С/П

РУ : =  $b_1$  РХ : =  $b_2$  С/П

$x_2$  : = РХ С/П  $x_1$  : = РХ

Контрольный пример:

$$2x_1 + 3x_2 = 7;$$

$$5x_1 + 7x_2 = 17.$$

Ответ:  $x_2 = 1$ ;  $x_1 = 2$ .

### 3.4.4. Решение системы трех линейных уравнений

Для решения системы трех линейных уравнений [8]

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1;$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2;$$

$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3$$

используется программа 3.5.

*Программа 3.5. Решение системы трех линейных уравнений*

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	$x \rightarrow \Pi d$	4Г	32	X	12
01	⊗	25	33	-	11
02	$x \rightarrow \Pi C$	4С	34	$\Pi \rightarrow x8$	68
03	⊗	25	35	$\Pi \rightarrow x6$	66
04	$x \rightarrow \Pi b$	4Л	36	X	12
05	1	01	37	$\Pi \rightarrow x9$	69
06	1	01	38	$\Pi \rightarrow x5$	65
07	$x \rightarrow \Pi 1$	41	39	X	12
08	3	03	40	-	11
09	$x \rightarrow \Pi 0$	40	41	÷	13
10	C/Π	50	42	$x \rightarrow \Pi c$	4C
11	$\Pi \rightarrow x d$	6Г	43	C/Π	50
12	÷	13	44	$\Pi \rightarrow x2$	62
13	Kx → Π1	Л1	45	$\Pi \rightarrow x5$	65
14	$x \rightarrow \Pi 2$	42	46	$\Pi \rightarrow xc$	6C
15	$\Pi \rightarrow xc$	6[	47	X	12
16	X	12	48	-	11
17	-	11	49	$\Pi \rightarrow x8$	68
18	Kx → Π1	Л1	50	÷	13
19	⊗	25	51	$x \rightarrow \Pi b$	4Л
20	$\Pi \rightarrow x2$	62	52	C/Π	50
21	$\Pi \rightarrow xb$	6Л	53	$\Pi \rightarrow x4$	64
22	X	12	54	$\Pi \rightarrow x7$	67
23	-	11	55	$\Pi \rightarrow xc$	6C
24	Kx → Π1	Л1	56	X	12
25	Л0	5Г	57	-	11
26	10	10	58	$\Pi \rightarrow xa$	6-
27	$\Pi \rightarrow x8$	68	59	$\Pi \rightarrow xb$	6Л
28	$\Pi \rightarrow x3$	63	60	X	12
29	X	12	61	-	11
30	$\Pi \rightarrow x9$	69	62	$x \rightarrow \Pi a$	4-
31	$\Pi \rightarrow x2$	62	63	C/Π	50

Инструкция:

В/О

PZ : = a<sub>11</sub> PY : = a<sub>21</sub> PX : = a<sub>31</sub> С/П

PZ : = a<sub>12</sub> PY : = a<sub>22</sub> PX : = a<sub>32</sub> С/П

PZ : = a<sub>13</sub> PY : = a<sub>23</sub> PX : = a<sub>33</sub> С/П

PZ : = b<sub>1</sub> PY : = b<sub>2</sub> PX : = b<sub>3</sub> С/П

x<sub>3</sub> := PX (или Pс)

С/П x<sub>2</sub> := PY (или Pb)

С/П x<sub>1</sub> := PZ (или Pa)

### 3.5. СЛУЧАЙ ДВУХ УЗЛОВ

Частным случаем метода узловых напряжений является случай двух узлов, между которыми включено любое число активных и пассивных ветвей. На рис. 3.3, а в качестве примера приведена схема, содержащая два узла (a и b), активные ветви с источниками ЭДС, одну пассивную ветвь и одну активную ветвь с источником тока.

Применим к этой схеме метод узлового напряжения (узловых потенциалов):

$$\begin{aligned} \varphi_a \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + G_4 \right) - \varphi_b \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + G_4 \right) &= \\ = \frac{E_1}{R_1} - \frac{E_2}{R_2} + J_4, \end{aligned}$$

откуда

$$U_{ab} = \varphi_a - \varphi_b = \frac{E_1/R_1 - E_2/R_2 + J_4}{1/R_1 + 1/R_2 + 1/R_3 + G_4} =$$

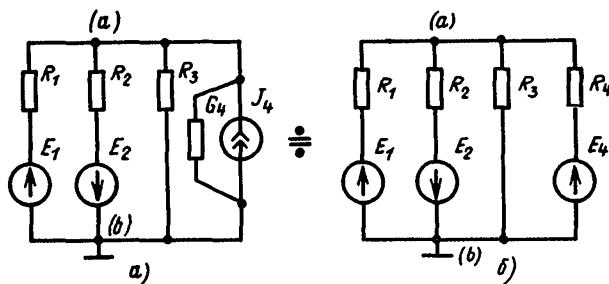


Рис. 3.3. Схемы с двумя узлами

$$= \frac{E_1/R_1 - E_2/R_2 + E_4/R_4}{1/R_1 + 1/R_2 + 1/R_3 + 1/R_4}.$$
(3.6)

Если  $\varphi_b = 0$ , то  $U_{ab} = \varphi_a$ .

В последнем выражении мы заменили источник тока  $J_4$  на эквивалентный источник ЭДС  $E_4$ , заменив одновременно проводимость  $G_4$  на сопротивление  $R_4$ ; соответствующая схема приведена на рис. 3.3,б. Обратим внимание, что слагаемые в числителе (3.6) имеют знак "+" в тех случаях, когда ЭДС и токи источников направлены к узлу  $a$ , и знак "-", если в противоположную сторону. Кроме того, заметим, что в числителе число слагаемых равно числу активных ветвей, а в знаменателе — числу ветвей, получаемых после исключения активных элементов.

Расчеты по формуле типа (3.6) при произвольном числе ветвей  $N$  могут быть представлены в виде следующей программы.

**Программа 3.6. Вычисление узлового напряжения (случай двух узлов) и эквивалентной проводимости**

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	$KP \rightarrow x4$	Г4	09	$x \rightarrow P0$	40
01	$\textcircled{Q}$	25	10	$1/x$	23
02	$P \rightarrow x4$	64	11	$\leftrightarrow$	14
03	$C/P$	50	12	$P \rightarrow x1$	61
04	$1/x$	23	13	+	10
05	X	12	14	$x \rightarrow P1$	41
06	$Bx$	0	15	X	12
07	$P \rightarrow x0$	60	16	$BP$	51
08	+	10	17	00	00

**Инструкция:**

В/О  $P0 = P1 = P4 : = 0$  С/П

$i := RX$ . Если  $i \leq N$ ,

то  $RY := E_i$   $RX := R_i$  С/П

иначе  $U_{ab} := RY$

**П р и м е ч а н и я:** 1.  $i$  — номер ветви (высвечивается на индикаторе перед очередным вводом);  $N$  — число ветвей;

2.  $G_3 = 1/R_3 : = P0$ ,

где  $R_3$  — сопротивление эквивалентной схемы замещения для преобразования параллельных ветвей (см. рис. 1.17), причем  $E_3 = U_{ab}$ .

**Пример 3.5.** Пусть для схемы на рис. 3.3,б дано:

$E_1 = 100$  В;  $R_1 = 25$  Ом;  $E_2 = 80$  В;  $R_2 = 40$  Ом;  $R_3 = 50$  Ом;

$E_4 = 40$  В;  $R_4 = 5$  Ом.

Решение:  $N = 4$ .

$$B/O PO = P1 = P4 := 0 \text{ С/П} \quad (\text{на индикаторе 1})$$

$$\text{Так как } i = 1, \text{ то } PY := 100 \text{ PX} := 25 \text{ С/П} \quad (\text{на индикаторе 2})$$

$$\text{Так как } i = 2, \text{ то } PY := -80 \text{ PX} := 40 \text{ С/П} \quad (\text{на индикаторе 3})$$

$$\text{Так как } i = 3, \text{ то } PY := 0 \text{ PX} := 50 \text{ С/П} \quad (\text{на индикаторе 4})$$

$$\text{Так как } i = 4, \text{ то } PY := 40 \text{ PX} := 5 \text{ С/П} \quad (\text{на индикаторе 5})$$

$$\text{Так как } i = 5 > 4, \text{ то } U_{ab} := PY \text{ (на индикаторе 35,087719)}$$

$$G_3 = PO \quad (\text{на индикаторе } 2,85 \cdot 10^{-1})$$

Ответ:  $U_{ab} \approx 35,1 \text{ В}; G_3 = 0,285 \text{ См}; R_3 = 1/G_3 = 3,51 \text{ Ом}$ .

### 3.6. ВЗАИМНЫЕ ЭКВИВАЛЕНТНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ РЕЗИСТИВНЫХ ТРЕУГОЛЬНИКА И ЗВЕЗДЫ

Схемы резистивных треугольника и звезды приведены на рис. 3.4.

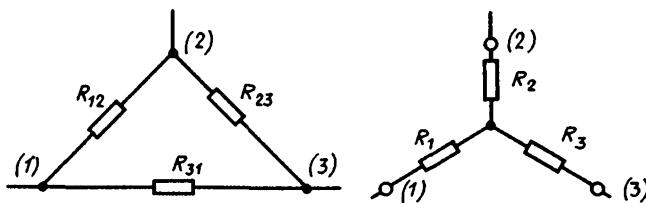


Рис. 3.4. Резистивные треугольник и звезда

#### 3.6.1. Преобразование треугольника в звезду

Преобразование треугольника в звезду осуществляется по формулам

$$R_1 = \frac{R_{31}R_{12}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}} = \frac{R_{31}R_{12}}{R};$$

$$R_2 = \frac{R_{12}R_{23}}{R}; \quad R_3 = \frac{R_{23}R_{31}}{R}.$$

Для взаимных преобразований треугольника и звезды сопротивлений (проводимостей) используется программа 3.7.

**Программа 3.7. Взаимные преобразования треугольника и звезды сопротивлений**

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	$\Pi \rightarrow x_1$	61	13	$\Pi \rightarrow x_2$	62
01	$\Pi \rightarrow x_2$	62	14	X	12
02	+	10	15	$\Pi \rightarrow x_4$	64
03	$\Pi \rightarrow x_3$	63	16	$\div$	13
04	+	10	17	$x \rightarrow \Pi b$	4L
05	$x \rightarrow \Pi_4$	44	18	$\Pi \rightarrow x_2$	62
06	$\Pi \rightarrow x_1$	61	19	$\Pi \rightarrow x_3$	63
07	$\Pi \rightarrow x_3$	63	20	X	12
08	X	12	21	$\Pi \rightarrow x_4$	64
09	$\Pi \rightarrow x_4$	64	22	$\div$	13
10	$\div$	13	23	$x \rightarrow \Pi c$	4C
11	$x \rightarrow \Pi a$	4-	24	C/P	50
12	$\Pi \rightarrow x_1$	61			

Инструкция:

В/О

P1 := R<sub>12</sub> P2 := R<sub>23</sub> P3 := R<sub>31</sub> C/P

R<sub>1</sub> := Pa R<sub>2</sub> := Pb R<sub>3</sub> := Pc

Контрольный пример:

R<sub>12</sub> = 3 Ом; R<sub>23</sub> = 6 Ом; R<sub>31</sub> = 9 Ом.

Ответ: R<sub>1</sub> = 1,5 Ом; R<sub>2</sub> = 1 Ом; R<sub>3</sub> = 3 Ом.

Время счета – около 8 с.

### 3.6.2. Преобразование звезды в треугольник

В силу отмеченной в п. 1.5.3 дуальности соответствующих формул программа 3.7 пригодна также и для обратного перехода: от звезды к треугольнику. В этом случае в инструкции к программе все величины следует заменить дуальными:

В/О

P1 := G<sub>1</sub> P2 := G<sub>2</sub> P3 := G<sub>3</sub> C/P

G<sub>31</sub> := Pa G<sub>12</sub> := Pb G<sub>23</sub> := Pc

Контрольный пример:

R<sub>1</sub> = 1,50 Ом (G<sub>1</sub> = 0,667 См); R<sub>2</sub> = 1,00 Ом;

(G<sub>2</sub> = 1,00 См); R<sub>3</sub> = 3,00 Ом; (G<sub>3</sub> = 0,333 См).

Ответ: G<sub>31</sub> = 0,111 См; (R<sub>31</sub> = 9,00 Ом); G<sub>12</sub> = 0,333 См; (R<sub>12</sub> = 3,00 Ом); G<sub>23</sub> = 0,166 См; (R<sub>23</sub> = 6,00 Ом).

## РАСЧЕТ НЕЛИНЕЙНЫХ РЕЗИСТИВНЫХ ЦЕПЕЙ

### 4.1. ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА НЕЛИНЕЙНЫХ ЦЕПЕЙ И МЕТОДОВ ИХ РАСЧЕТА

Признаком нелинейного элемента цепи является нелинейность характеристик  $u(i)$ ,  $\psi(i)$ ,  $q(u)$ , первая из которых относится к нелинейному резистору (вольт-амперная характеристика), вторая — к нелинейной индуктивной катушке (вебер-амперная характеристика) и третья — к нелинейному конденсатору (кулон-вольтная характеристика). В этой книге рассматриваются только нелинейные резистивные цепи, методы расчета которых лучше развиты и удобны для применения ПМК.

Многие элементы реальных схем, такие как терморезисторы, варисторы, лампы накаливания, электровакуумные диоды и триоды, газоразрядные приборы, полупроводниковые диоды и стабилитроны, транзисторы, тиристоры и т. п., моделируются в схемах замещения нелинейными резистивными элементами (неуправляемыми и управляемыми).

Если нелинейная вольт-амперная характеристика размещается только в первом и третьем квадрантах прямоугольной системы координат  $u$ ,  $i$ , то это является признаком пассивной ветви с нелинейным элементом, если же какая-то часть характеристики проходит во втором или четвертом квадранте, то это признак активной ветви.

Существуют три способа представления вольт-амперных характеристик некоторой  $k$ -й ветви:

1) табличный, который используется чаще всего совместно с интерполяцией при численном итерационном анализе обычно при помощи ЭВМ;

2) графический в виде кривых  $u_k(i_k)$  или  $i_k(u_k)$ , который применяется в графических расчетах нелинейных цепей; точность расчета в этом случае, естественно, определяется точностью графических построений и часто является вполне достаточной, особенно для предварительных расчетов или качественного анализа;

3) аналитический, предполагающий замену таблицы и/или графика некоторым аналитическим выражением  $u_k = u_k(i_k)$  или  $i_k = i_k(u_k)$ , с той или иной степенью точности отображающим экспериментальные данные, заключенные в таблице или графике. Отыскание такого выражения называется, как известно, аппроксимацией (от латинского *approximare* — приближаться).

Электрическая цепь считается нелинейной, если она содержит хотя бы один нелинейный элемент. Для расчета нелинейных цепей обычно применяют законы Кирхгофа (методы токов или напряжений ветвей), а также методы узлового напряжения (при двух узлах) или эквивалентного

генератора (когда цепь содержит только одну ветвь с нелинейным элементом, которую можно сделать "выделенной"). Расчеты могут выполняться графически, аналитически или с использованием численных методов.

## 4.2. ГРАФИЧЕСКИЙ МЕТОД

Начнем анализ нелинейных цепей с наглядного и простого графического метода.

**Пример 4.1.** Нелинейный двухполюсник (рис. 4.1) состоит из двух последовательно включенных нелинейных резисторов 1 и 2, характеристики которых приведены на рис. 4.2 (кривые 1 и 2 соответственно). Определить ток  $I$  двухполюсника и напряжения на резисторах при напряжении источника  $U_0 = 35$  В.

Решение. Рассмотрим первый способ.

Уравнение цепи (по второму закону Кирхгофа)

$$U_1(I_1) + U_2(I_2) = U_0. \quad (4.1)$$

Так как  $I_1 = I_2 = I$ , то

$$U_1(I) + U_2(I) = U_0. \quad (4.2)$$

Решить это уравнение графически — найти значение координаты  $I$  точки пересечения характеристики двухполюсника  $U_1(I) + U_2(I)$  с характеристикой источника напряжения  $U = U_0$ .

На рис. 4.3 кроме вольт-амперных характеристик нелинейных резисторов (кривые 1 и 2) показаны характеристики источника напряжения (отрезок 3) и нелинейного двухполюсника (кривая 4), полученные суммированием кривых 1 и 2 при одинаковых значениях тока  $I$ . Ордината точки пересечения  $a$  кривой 4 и прямой 3 определяет искомое значение тока  $I = 0,2$  А. Опуская перпендикуляры из точек  $b$  и  $c$  на ось абсцисс, получаем значения напряжений на резисторах  $U_1 = 10$  В и  $U_2 = 25$  В.

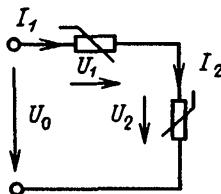


Рис. 4.1 Схема цепи с последовательным соединением двух нелинейных резисторов

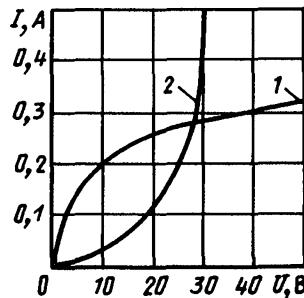


Рис. 4.2 Вольт-амперные характеристики двух нелинейных резисторов

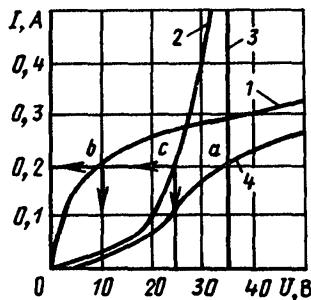


Рис. 4.3. Построение вольт-амперной характеристики нелинейного пассивного двухполюсника

Рис. 4.4. Определение точки пересечения характеристик  $U_1 (I)$  и  $U_0 - U_2 (I)$

Второй способ – метод пересечения характеристик.

Название метода связано с тем, что значения пары искомых величин (например,  $U_1$ ,  $I_1$ ) определяются как координаты точки пересечения характеристики нелинейного элемента и внешней характеристики активного двухполюсника (эквивалентного генератора), к которому подключен этот нелинейный элемент.

Перепишем уравнение цепи (4.2) в виде

$$U_1 (I) = U_0 - U_2 (I), \quad (4.3)$$

построим характеристику первого нелинейного резистора (левая часть уравнения) и внешнюю характеристику активного двухполюсника (правая часть уравнения), состоящего из источника напряжения  $U_0$  и второго резистора (рис. 4.4). Практически это означает, что из абсциссы  $U = U_0 = 35$  В вычитаются абсциссы кривой  $U_2 (I)$ , т.е. кривой 2 на рис. 4.3. Получается "опрокинутая" кривая 5 (зеркальное отражение кривой 2) на рис. 4.4, а сам метод иногда называют методом опрокинутой характеристики. Опустив перпендикуляры из точки пересечения характеристик на оси  $I$  и  $U$ , найдем соответственно значения  $I_1 = I_2 = I = 0,2$  А и  $U_1 = 10$  В. Тогда

$$U_2 = U_0 - U_1 = 35 - 10 = 25 \text{ В.}$$

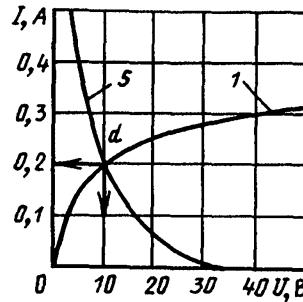
Если же (4.2) переписать иначе:

$$U_2 (I) = U_0 - U_1 (I), \quad (4.4)$$

то получается графическое решение, представленное на рис. 4.5, из которого следуют те же самые ответы:

$$I_2 = I_1 = I = 0,2 \text{ А}; \quad U_2 = 25 \text{ В};$$

$$U_1 = U_0 - U_2 = 35 - 25 = 10 \text{ В.}$$



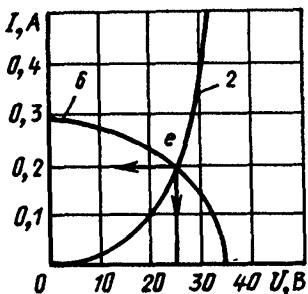


Рис. 4.5. Определение точки пересечения характеристик  $U_2 (I)$  и  $U_0 - U_1 (I)$

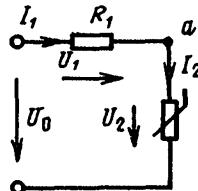


Рис. 4.6. Схема цепи с последовательным соединением линейного и нелинейного резисторов

Если схема содержит несколько параллельных ветвей, то путем графических построений находят узловое напряжение и по нему — токи в ветвях.

В тех случаях, когда схема содержит одну ветвь с нелинейным резистором, путем свертывания линейной части схемы ее приводят к виду, представленному на рис. 4.6. В схеме  $U_0$  можно придать смысл напряжения, а  $R_1$  — сопротивления эквивалентного источника.

#### 4.3. ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ АНАЛИЗА

Графическое решение нелинейного уравнения дает грубое приближение корня. Для уточнения его значения при аналитическом задании функции  $f(x)$  используют различные численные итерационные алгоритмы (методы : деления отрезка пополам, хорд, касательных, простой итерации). В последнем методе уравнение  $f(x) = 0$  представляют в виде  $g(x) = \varphi(x)$ , так чтобы

$$|g'(x_0)| < |\varphi'(x_0)|,$$

где  $x_0$  — приближенное значение корня.

Далее вычисляют значение функции  $g(x_0) = \varphi(x_1)$ , а затем — функция, обратной  $\varphi(x)$ . Найденное первое уточненное значение корня  $x = x_1$  используется таким же образом для вычисления второго приближения корня и т.д. В результате получается сходящаяся последовательность значений  $x_1, x_2, \dots$  корня уравнения  $f(x) = 0$ , которую прерывают при достижении удовлетворительной точности.

Рассмотренный алгоритм уточнения значения корня нелинейного уравнения реализован в программе 4.1. Выполнение программы прекращается, как только модуль разности двух последних значений корня станет меньше некоторого, заранее обусловленного положительного числа  $\epsilon$ .

**Программа 4.1. Решение нелинейного уравнения методом итераций**

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	$x \rightarrow P3$	43	09	$x \rightarrow P3$	43
01	$P \rightarrow x^3$	63	10	-	11
02	PП	53	11	$x^2$	22
03	18	18	12	$\sqrt{x}$	21
04	$x \rightarrow P1$	41	13	$P \rightarrow x_0$	60
05	PП	53	14	-	11
06	$18 + k$	$18+k$	15	$x < 0$	5[
07	$P \rightarrow x^3$	63	16	1	01
08	$\leftrightarrow$	14	17	C/P	50

Инструкция:

$$g(x) \rightarrow P\bar{P}18 \quad x := P\bar{X}, P3$$

$$\varphi^{-1}(x) \rightarrow P\bar{P}(18+k) \quad x := P\bar{X}, P1$$

$$\{2, 4 - \tilde{d}\}$$

...

$$P0 := \epsilon \quad B/O \quad P\bar{X} := x_0 \quad C/P \quad \bar{x} := P3$$

$$g(x) = \varphi(x) := P1$$

П р и м е ч а н и я: 1.  $k$  – число шагов подпрограммы вычисления функции  $g(x)$ .

2. После выполнения программы на индикаторе высвечивается значение  $|x_{n-1} - x_n| = \epsilon$ .

**Пример 4.2.** В схеме цепи на рис. 4.1 рабочие участки вольт-амперных характеристик нелинейных резисторов при  $U, I \geq 0$  заданы выражениями

$$U_1 = -116,7I_1 + 833,3I_1^2; \quad (4.5)$$

$$I_2 = (-11,67U_2 + 0,8333U_2^2) \cdot 10^{-3} \quad (4.6)$$

и показаны на рис. 4.2.

Определить значения тока и напряжений на нелинейных резисторах при  $U_0 = 35$  В методом итераций.

**Р е ш е н и е.** В результате графического решения этой задачи (см. пример 4.1) получены следующие значения искомых величин:

$$I = I_1 = I_2 = 0,2 \text{ A}; \quad U_1 = 10 \text{ В}; \quad U_2 = 25 \text{ В}.$$

Для уточнения значения  $I$ , а вместе с ним  $U_1$  и  $U_2$ , методом итераций уравнение цепи (4.2) можно представить, например, равенством (4.3) или (4.4). Если выбрать первый вариант, то, как видно из рис. 4.4, в окрестности точки  $d$

$$|\frac{d}{dI} [U_0 - U_2(I)]| < \frac{d}{dI} U_1(I).$$

Поэтому

$$g(I) = U_0 - U_2(I);$$

$$\varphi(I) = U_1(I),$$

где  $U_2(I)$  – функция, обратная (4.6) :

$$U_2(I) = 7 + \sqrt{49 + 1200I}.$$

Введем в программную память ПМК программу 4.1 уточнения итерационным методом значения корня нелинейного уравнения. Подпрограмма 4.1.1 вычисления значения функции  $g(I)$  содержит 13 команд ( $k = 13$ ). Следовательно, по адресам 05–06 головной программы нужно ввести команду ПП 31 и, начиная с адреса 31, – подпрограмму 4.1.2 вычисления значения функции

$$I = I(U_1) = 7 \cdot 10^{-2} + \sqrt{49 \cdot 10^{-4} + 1,2 \cdot 10^{-3} U_1},$$

обратной функции  $\varphi(I) = U_1(I)$ .

#### Подпрограмма 4.1.1

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
18	$\Pi \rightarrow xb$	6\_\_	25	+	10
19	x	12	26	$x \rightarrow \Pi 2$	42
20	$\Pi \rightarrow xa$	6–	27	$\Pi \rightarrow x9$	69
21	$x^2$	22	28	$\leftrightarrow$	14
22	+	10	29	–	11
23	$\sqrt{\quad}$	21	30	B/O	52
24	$\Pi \rightarrow xa$	6–			

#### Подпрограмма 4.1.2

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
31	$\Pi \rightarrow xd$	6\_\_	36	$\sqrt{\quad}$	21
32	x	12	37	$\Pi \rightarrow xc$	6[
33	$\Pi \rightarrow xc$	6[	38	+	10
34	$x^2$	22	39	B/O	52
35	+	10			

Инструкция:

$$Pa : = 7 \quad Pb : = 1200 \quad Pc : = 7 \cdot 10^{-2} \quad Pd : = 1,2 \cdot 10^{-3}$$

P9 : = 35

P0 : =  $\epsilon = 10^{-3}$  В/О РХ : =  $I_0 = 0,2$  С/П

(На индикаторе  $|I_{n-1} - I_n| - \epsilon = -2,8742 \cdot 10^{-4}$ )

$U_1 : = P1 = 10,840645$

$U_2 : = P2 = 24,159355$

$I = I_1 = I_2 : = P3 = 2,0382366 \cdot 10^{-1}$

Время счета приблизительно 25 с.

Ответ:  $U_1 = 10,8$  В;  $U_2 = 24,2$  В;  $I_1 = I_2 = 0,204$  А (с округлениями).

Если уравнение цепи записать по первому закону Кирхгофа

$$I_1(U_1) = I_2(U_2)$$

и преобразовать характеристики к функциям одного аргумента, например,  $U_1$ :

$$I_1(U_1) = I_2(U_0 - U_1),$$

то в результате решения этого уравнения сначала находится значение напряжения  $U_1$ , затем по (4.1) –  $U_2$  и, наконец, по характеристикам  $I_1(U_1)$  или  $I_2(U_2)$  – значения  $I_1 = I_2 = I$  (метод напряжений элементов).

Из рис. 4.4 видно, что

$$\frac{dI_1}{dU} < \left| \frac{dI_2}{dU} \right|,$$

поэтому за функцию  $g(I)$  следует выбрать характеристику

$$I_1(U) = 7 \cdot 10^{-2} + \sqrt{49 \cdot 10^{-4} + 1,2 \cdot 10^{-3} U},$$

а за функцию  $\varphi(U)$  – выражение

$$I_2(U_0 - U) = [-11,67(U_0 - U) + 0,8333(U_0 - U)^2] \cdot 10^{-3}.$$

Подпрограмма вычисления функции  $I_1(U)$  совпадает с подпрограммой 4.1.2, если последовательность адресов команд 31 ... 39 заменить последовательностью 18 ... 26. Для вычисления функции, обратной  $I_2(U_0 - U)$ , пригодна подпрограмма 4.1.1, если последовательность адресов 18–30 заменить на 27 ... 39.

Поскольку теперь  $k = 9$ , в головной программе 4.1 по адресам 05–06 надо записать команду БП 27. Положив далее  $\epsilon = 0,1$  и  $U_{10} = 10$  В, внесем необходимые изменения в инструкцию к программе:

$Pa : = 7 Pb : = 1200 Pc : = 7 \cdot 10^{-2} Pd : = 1,2 \cdot 10^{-3}$

P9 : = 35

$$P0 := \epsilon = 0,1 \text{ В/О} \quad RX := U_{10} = 10 \text{ С/П}$$

$$(\text{На индикаторе } |U_{1(n-1)} - U_{1n}| - \epsilon = -7,5066 \cdot 10^{-2})$$

$$U_1 := P3 = 10,865579$$

$$U_2 := P2 = 24,134421$$

$$I_1 = I_2 := P1 = 2,0382366 \cdot 10^{-1}$$

Ответ:  $I_1 = I_2 = 0,204 \text{ А}; \quad U_1 = 10,9 \text{ В}; \quad U_2 = 24,1 \text{ В.}$

Рассмотренный способ представления исходного уравнения цепи и его решения методом итерации нагляден, но не лишен и недостатка: необходимость вычисления значения двух функций  $g(x)$  и  $\varphi^{-1}(x)$  усложняет алгоритм и соответствующую программу уточнения значения корня. Поэтому исходное уравнение  $f(x) = 0$  чаще всего преобразуют к эквивалентному равенству  $x = \varphi(x)$ , решение которого сводится к последовательному вычислению значения функции  $\varphi(x)$  до получения удовлетворительной точности (метод простой итерации — см. п. 2.5.2, программа 2.9).

**Пример 4.3.** В схеме цепи на рис. 4.1 рабочие участки характеристик нелинейных резисторов заданы выражениями (токи — в амперах, напряжения — в вольтах)

$$U_1(I_1) = 1000I_1 + 10\sqrt[3]{I_1};$$

$$U_2(I_2) = 500I_2 + 20\sqrt[3]{I_2},$$

напряжение источника  $U_0 = 18 \text{ В.}$

Определитель значения тока цепи и напряжений на нелинейных резисторах.

**Решение.** По второму закону Кирхгофа

$$U_1(I_1) + U_2(I_2) = U_0.$$

Подставляя сюда заданные характеристики и учитывая, что

$$I_1 = I_2 = I,$$

получаем следующее нелинейное уравнение:

$$1500I + 30\sqrt[3]{I} - 18 = 0,$$

или, если ток выражать в миллиамперах,

$$1,5I + 3\sqrt[3]{I} - 18 = 0.$$

Найдем отрезок, содержащий единственный корень этого уравнения. Очевидно, непрерывная функция

$$f(I) = 1,5I + 3\sqrt[3]{I} - 18$$

на концах отрезка  $[1; 10]$  меняет знаки:  $f(1) < 0; \quad f(10) > 0$ . Следо-

вательно, корень рассматриваемого уравнения принадлежит отрезку [1; 10].

Для уточнения значения корня исходного уравнения методом простой итерации представим его в виде  $I = f(I)$  следующим образом:

$$I = 12 - 2\sqrt[3]{I}. \quad (4.7)$$

Проверим сходимость итерационного процесса:

$$|d\varphi/dI| = 2/(3\sqrt[3]{I^2}).$$

На отрезке [1; 10]

$$|d\varphi/dI| < 1,$$

следовательно, на этом отрезке итерационный процесс сходится.

По предлагаемой ниже программе 4.2 вычисления повторяются до тех пор, пока предпоследний и последний результаты не будут содержать достаточного числа одинаковых цифр.

*Программа 4.2. Решение нелинейного уравнения  $x = \varphi(x)$  методом простой итерации*

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	$x \rightarrow P0$	40	04	$\leftrightarrow$	14
01	PП	53	05	C/P	50
02	08	08	06	БП	51
03	$P \rightarrow x_0$	60	07	00	00

Инструкция:

$\varphi(x) \rightarrow P\P 08$

$x := PX, P0$

{ 1 - d }

.....

B/O PX : =  $x_0$

(C/P  $x_n :$  = PX

$x_{n-1} :$  = PY)

Значение функции

$$\varphi(I) = 12 - 2\sqrt[3]{I}$$

вычисляется подпрограммой 4.2.1.

*Подпрограмма 4.2.1*

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
08	3	03	13	X	12
09	1/x	23	14	$\Pi \rightarrow x_1$	61
10	$\leftrightarrow$	14	15	$\leftrightarrow$	14
11	$x^y$	24	16	-	11
12	2	02	17	B/O	52

**Инструкция:**

P1 := 12

B/O

PX := 1

(C/P x<sub>n</sub> := PX

x<sub>n - 1</sub> := PY)

Решение уравнения (4.7) представлено в табл. 4.1. Время вычисления очередного значения  $I$  приблизительно равно 5 с.

*Таблица 4.1*

$n$	$I_n$	$I_{n+1} = 12 - 2\sqrt[3]{I_n}$	$ I_{n+1} - I_n $
0	1	10	9
1	10	7,691131	2,308869
2	7,691131	8,052155	0,361024
3	8,052155	7,991326	0,06829
4	7,991326	8,001446	0,01012
5	8,001446	7,999759	0,001687
6	7,999759	8,000004	0,000281
7	8,000004	7,999993	0,000047
8	7,999993	8,000001	0,000008
9	8,000001	8	0,000001
10	8	8	0

Легко проверить, что  $I = 8$  является точным решением уравнения (4.7). Из табл. 4.1 видно, что при округлении получаемых результатов до единиц итерационный процесс можно было прервать после второго-третьего шага.

Таким образом,

$$I_1 = I_2 = I = 8 \text{ mA} = 8 \cdot 10^{-3} \text{ A.}$$

Подставляя найденное значение тока в выражение для рабочих участков характеристики первого и второго резисторов, получаем соответственно

$$U_1 = 10 \text{ В}, \quad U_2 = 8 \text{ В}.$$

Процесс уточнения значения корня нелинейного уравнения можно автоматизировать (программа 2.9 и контрольный пример к ней).

#### 4.4. АППРОКСИМАЦИЯ ХАРАКТЕРИСТИКИ НЕЛИНЕЙНОГО РЕЗИСТОРА

Задачу математической аппроксимации характеристик можно разбить на два этапа:

- выбор аппроксимирующей функции;
- определение значений входящих в нее коэффициентов.

##### 4.4.1. Выбор аппроксимирующей функции

На выбор той или иной функции влияет вид графика вольт-амперной характеристики на рабочем участке. Рассмотрим следующие функции  $y(x)$  с двумя коэффициентами  $a$  и  $b$ :

- |  |  |
|--|--|
| 1) линейную<br>2) обратно-пропорциональную<br>3) дробно-линейные:<br>3.1) $y = 1/(ax + b)$ ;<br>3.2) $y = x/(ax + b)$ ;<br>4) степенную<br>5) экспоненциальную<br>6) логарифмическую | $\left. \begin{array}{l} y = ax + b; \\ y = a/x + b; \\ y = ax^b; \\ y = b e^{ax}; \\ y = a \ln x + b. \end{array} \right\}$ |
|--|--|
- (4.8.)

Рекомендуется следующий порядок выбора одной из нескольких аппроксимирующих функций указанного множества [1, 7].

1. По известным значениям  $x_1, y_1$  и  $x_n, y_n$  находим некоторые промежуточные значения  $\bar{x}_s, \bar{y}_s$ , используя табл. 4.2.

2. По вычисленному значению  $\bar{x}_s$ , используя линейную интерполяцию, находим  $y_s$ :

$$y_s = y_{k+1} + \frac{y_{k+1} - y_k}{x_{k+1} - x_k} (\bar{x}_s - x_{k+1}), \quad (4.9)$$

где  $x_k < \bar{x}_s < x_{k+1}$ ,  $k = 1, \dots, n - 1$ .

### 3. Сравнивая значения

$$\Delta_s = |y_s - \bar{y}_s|$$

для различных аппроксимирующих функций, выбирают ту из них, для которой значение  $\Delta_s$  минимально.

Таблица 4.2

Вид за- ви- си- мости	1	2	3.1	3.2	4	5	6
$\bar{x}_s$	$\frac{x_1 + x_n}{2}$	$\frac{2}{1/x_1 + 1/x_n}$	$\frac{x_1 + x_n}{2}$	$\frac{2}{1/x_1 + 1/x_n}$	$\sqrt{x_1 x_n}$	$\frac{x_1 + x_n}{2}$	$\sqrt{x_1 x_n}$
$\bar{y}_s$	$\frac{y_1 + y_n}{2}$	$\frac{y_1 + y_n}{2}$	$\frac{2}{1/y_1 + 1/y_n}$	$\frac{2}{1/y_1 + 1/y_n}$	$\sqrt{y_1 y_n}$	$\sqrt{y_1 y_n}$	$\frac{y_1 + y_n}{2}$

Пример 4.3. Рабочий участок вольт-амперной характеристики нелинейного резистора задан табл. 4.3.

Таблица 4.3

$u$ , В	0,0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
$i$ , мА	0,10	0,17	0,27	0,45	0,74	1,22

Подобрать функцию  $i = i(u)$  типа 1–6 [см. (4.8)], аппроксимирующую рабочий участок вольт-амперной характеристики.

Р е ш е н и е. По условию задачи для аппроксимации пригодны лишь функции следующих трех типов:

- 1)  $i = au + b$ ;
- 3.1)  $i = 1/(au + b)$ ;
- 5)  $i = b e^{au}$ .

Для наглядности вычертим табл. 4.4 и заполним ее первую и вторую строки значениями  $\bar{i}_s$  и  $\bar{u}_s$ , вычисленными по соответствующим формулам табл. 4.2.

Для вычисления значения  $i_s(\bar{u}_s)$  в промежуточной точке  $\bar{u}_s = 0,5$  воспользуемся линейной интерполяцией (4.9):

$$i_s(0,5) = 0,45 + \frac{0,45 - 0,27}{0,6 - 0,4} (0,5 - 0,6) = 0,36 \text{ мА.}$$

Таблица 4.4

Вид зависимости	1	3.1	5
$\bar{u}_s$ , В	0,5	0,5	0,5
$\bar{i}_s$ , мА	0,66	0,18	0,35
$i_s(\bar{u}_s)$ , мА	0,36	0,36	0,36
$\Delta_s =  i_s - \bar{i}_s $ , мА	0,3	0,18	0,01

Заметим, что в нашем случае, когда точка  $\bar{u}_s = 0,5$  является серединой отрезка  $[0,4; 0,6]$ , значение величины  $i_s(0,5)$  может быть найдено проще:

$$i_s(0,5) = 1/2 [i(0,4) + i(0,6)] = 1/2 (0,27 + 0,45) = 0,36 \text{ мА.}$$

В общем же случае для вычисления значения функции  $y(\bar{x}_s)$ ,  $x_k < \bar{x}_s < x_{k+1}$ , по известным ее значениям в узлах  $y(x_k)$  и  $y(x_{k+1})$  можно воспользоваться программой 4.3 линейной интерполяции функции.

#### Программа 4.3. Линейная интерполяция функций

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	$x \rightarrow \text{Пс}$	4C	11	$\Pi \rightarrow xd$	6Г
01	$\leftrightarrow$	14	12	-	11
02	$x \rightarrow \text{Па}$	4-	13	X	12
03	C/П	50	14	$\Pi \rightarrow xa$	6-
04	$x \rightarrow \text{Пd}$	4Г	15	$\Pi \rightarrow xb$	6L
05	$\leftrightarrow$	14	16	-	11
06	$x \rightarrow \text{Пb}$	4L	17	$\div$	13
07	C/П	50	18	$\Pi \rightarrow xd$	6Г
08	$\Pi \rightarrow xb$	6L	19	+	10
09	-	11	20	C/П	50
10	$\Pi \rightarrow xc$	6C	21	БП	51
			22	08	08

Инструкция:

(B/O PY : =  $x_k$  PX : =  $y_k$  C/П  
 PY : =  $x_{k+1}$  PX : =  $y_{k+1}$  C/П  
 (PX : =  $\bar{x}_s$  C/П  
 $y(\bar{x}_s) := PX))$

Вычисленное значение  $i(\bar{u}_s)$  запишем в третьей строке табл. 4.4 в каждом ее столбце.

Наконец, для каждого типа функции находим величину  $\Delta_s = |i_s - \bar{i}_s|$  и записываем ее в последней строке в соответствующих столбцах табл. 4.4.

Минимальное значение  $\Delta_s = 0,01$  относится к зависимости пятого типа, т.е. к функции

$$i = b e^{ax},$$

которая и является наиболее подходящей из рассматриваемого множества функций для аппроксимации рабочего участка вольт-амперной характеристики.

Значения параметров  $a$  и  $b$  выбранного типа функции определяются на следующем этапе процесса аппроксимации.

#### 4.4.2. Определение значений параметров аппроксимирующей функции

Прежде всего заметим, что функцию любого типа из приведенного множества можно привести к линейной функции

$$Y = AX + B \quad (4.10)$$

с помощью соответствующих функциональных преобразований переменных  $x$  и  $y$  (табл. 4.5).

Для некоторых функций иногда приходится смещать начало отсчета значений аргумента и (или) функции так, чтобы они принимали только положительные значения.

Таким образом, вместо использования частных алгоритмов оптимизации (в определенном смысле) значений коэффициентов различных ап-

Таблица 4.5

Номер функции	Вид функции	$Y(y)$	$X(x)$	$A$	$B$
1	$y = ax + b$	$y$	$x$	$a$	$b$
2	$y = \frac{a}{x} + b$	$y$	$1/x$	$a$	$b$
3.1	$y = \frac{1}{ax + b}$	$1/y$	$x$	$a$	$b$
3.2.	$y = \frac{x}{ax + b}$	$1/y$	$1/x$	$b$	$a$
4	$y = ax^b$	$\ln y$	$\ln x$	$b$	$\ln a$
5	$y = b e^{ax}$	$\ln y$	$x$	$a$	$\ln b$
6	$y = a \ln x + b$	$y$	$\ln x$	$a$	$b$

проксимирующих функций достаточно реализовать алгоритм определения оптимальных значений коэффициентов  $A$  и  $B$  выражения (4.10).

Для определения этих коэффициентов обычно используют следующие методы, основанные на соответствующем условии точности аппроксимации:

- точечного приближения;
- равномерного приближения;
- наименьших квадратов.

При аппроксимации характеристик нелинейных элементов требования к точности обычно невысоки, так как разброс этих характеристик и параметров других элементов цепи довольно велик; точность аппроксимации должна быть одного порядка с точностью задания характеристик.

В соответствии с методом наименьших квадратов среднеквадратичное отклонение  $\sigma$  всех  $n$  точек от аппроксимирующей прямой (4.10) – так называемой линии регрессии – будет минимальным, если значения коэффициента  $A$  и  $B$  вычислять по формулам [3]

$$A = \frac{n \sum_{i=1}^n X_i Y_i - \sum_{i=1}^n X_i \sum_{i=1}^n Y_i}{n \sum_{i=1}^n X_i^2 - (\sum_{i=1}^n X_i)^2};$$

$$B = \frac{1}{n} (\sum_{i=1}^n Y_i - A \sum_{i=1}^n X_i),$$

при этом

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n [Y_i - (AX_i + B)]^2 = \\ &= \frac{1}{n} [\sum_{i=1}^n Y_i^2 - B \sum_{i=1}^n Y_i - A \sum_{i=1}^n X_i Y_i]. \end{aligned}$$

Этот алгоритм воплощен в программе 4.4, разработанной на базе программы В. Адриана, опубликованной в [4]. Фрагменты программы 4.4 приведены в табл. 4.6.

*Программа 4.4. Вычисление коэффициентов линии регрессии*

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	6	06	04	Л0	5Г
01	$x \rightarrow П0$	40	05	03	03
02	Cx	0Г	06	C/П	50
03	$K x \rightarrow ПВ \uparrow$	LE			
...	...	...	...	...	...

*Продолжение программы 4.4*

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
<b>Фрагмент из табл. 4.6</b>					
11	$x \rightarrow Pa$	4-	40	X	12
12	7	07	41	-	11
13	$x \rightarrow Pс$	4[	42	$P \rightarrow x1$	61
14	$x \rightarrow P0$	40	43	$P \rightarrow x4$	64
15	$P \rightarrow xa$	6-	44	X	12
16	KППd	-Г	45	$P \rightarrow x6$	66
17	$P \rightarrow xb$	6L	46	$x^2$	22
18	KППd	-Г	47	-	11
19	$P \rightarrow xa$	6-	48	÷	13
20	$x^2$	22	49	$x \rightarrow Pa$	4-
21	KППd	-Г	50	$P \rightarrow xb$	66
22	$P \rightarrow xb$	6L	51	X	12
23	$x^2$	22	52	-	11
24	KППd	-Г	53	$P \rightarrow x1$	61
25	$P \rightarrow xa$	6-	54	÷	13
26	$P \rightarrow xb$	6L	55	$x \rightarrow Pb$	4L
27	X	12	56	X	12
28	KППd	-Г	57	/-	0L
29	1	01	58	$P \rightarrow x3$	63
30	KППd	-Г	59	+	10
31	$P \rightarrow x1$	61	60	$P \rightarrow xa$	6-
32	C/P	50	61	$P \rightarrow x2$	62
33	KБPс	8[	62	X	12
34	$P \rightarrow x5$	65	63	-	11
35	$P \rightarrow x1$	61	64	$P \rightarrow x1$	61
36	$P \rightarrow x2$	62	65	÷	13
37	X	12	66	$x \rightarrow Pс$	4C
38	$P \rightarrow x5$	65	67	$P \rightarrow xa$	6-
39	$P \rightarrow x6$	66	68	$P \rightarrow xb$	6L

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
<b>Фрагмент из табл. 4.6</b>					
73	$x \rightarrow Pa$	4-	76	†	10
74	C/P	50	77	$K x \rightarrow ПВ↑$	L E
75	KП → x0	Г0	78	B/O	52

Таблица 4.6

Адрес	Вид зависимости							
	1	2	3.1		3.2			
07	НОП	54	НОП	54	$1/x$	23	$1/x$	23
08	$x \rightarrow Pb$	4L						
09	$\leftrightarrow$	14	$\leftrightarrow$	14	$\leftrightarrow$	14	$\leftrightarrow$	14
10	НОП	54	$1/x$	23	НОП	54	$1/x$	23
69	НОП	54	НОП	54	НОП	54	$\leftrightarrow$	14
70	$x \rightarrow Pb$	4L						
71	$\leftrightarrow$	14	$\leftrightarrow$	14	$\leftrightarrow$	14	$\leftrightarrow$	14
72	НОП	54	НОП	54	НОП	54	НОП	54

Адрес	Вид зависимости					
	4	5	6			
07	ln	18	ln	18	НОП	54
08	$x \rightarrow Pb$	4L	$x \rightarrow Pb$	4L	$x \rightarrow Pb$	4L
09	$\leftrightarrow$	14	$\leftrightarrow$	14	$\leftrightarrow$	14
10	ln	18	НОП	54	ln	18
69	$\leftrightarrow$	14	$e^x$	16	НОП	54
70	$x \rightarrow Pb$	4L	$x \rightarrow Pb$	4L	$x \rightarrow Pb$	4L
71	$\leftrightarrow$	14	$\leftrightarrow$	14	$\leftrightarrow$	14
72	$e^x$	16	НОП	54	НОП	54

Инструкция:

 $Pd := 75$ 

В/О С/П (PX = i = 0)

пока  $i < n$  $PY := X_i$ ,  $PX := Y_i$  С/П (PX = i)

Время обработки — около 20 с, иначе

 $\overrightarrow{ШГ}$  С/П $A := Pa$   $B := Pb$   $\sigma^2 := Pc$ 

Время счета — приблизительно 15 с.

**Пример 4.4.** Найти значения коэффициентов  $I_0$  и  $a$  функции  $i = I_0 e^{au}$ , выбранной в примере 4.3 для аппроксимации рабочего участка вольт-амперной характеристики (табл. 4.3) нелинейного резистора.

Решение. Введем в память ПМК программу 4.4, записав по адресам 07 ... 10 и 69 ... 72 команды соответствующих фрагментов 5-го

столбца табл. 4.6 [5 – номер, под которым экспонента вошла в список аппроксимирующих функций (4.8)].

Полагая далее  $y = i$ ,  $u = x$ ,  $a = \alpha$ ,  $b = I_0$ ,  $n = 6$ , выполняем последовательно все команды инструкции к программе 4.4:

$Pd := 75$

$B/O C/P$  (на индикаторе 0)

$PY := 0 \quad PX := 0,1 \quad C/P$  (на индикаторе 1)

$PY := 0,2 \quad PX := 0,17 \quad C/P$  (на индикаторе 2)

$PY := 0,4 \quad PX := 0,27 \quad C/P$  (на индикаторе 3)

$PY := 0,6 \quad PX := 0,45 \quad C/P$  (на индикаторе 4)

$PY := 0,8 \quad PX := 0,74 \quad C/P$  (на индикаторе 5)

$PY := 1 \quad PX := 1,22 \quad C/P$  (на индикаторе 6)

Так как  $i = 6 = n$ , то

$\overrightarrow{W} C/P$  (на индикаторе 2.49008)

$\alpha = a := Pa = 2.49008$

$I_0 = b := Pb = 1.0101568 \cdot 10^{-1}$

$\sigma^2 := Pc = 1.2966666 \cdot 10^{-4}$

Ответ:  $I_0 = 0,1 \text{ мА}$ ;  $\alpha = 2,49 \text{ В}^{-1}$ .

Таким образом,  $i = 0,1 e^{2,49 u} \text{ мА}$ .

#### 4.5. АНАЛИТИЧЕСКИЙ МЕТОД РАСЧЕТА

Если имеется аналитическое выражение вольт-амперной характеристики, то задача расчета нелинейной цепи может быть выполнена аналитически путем непосредственного или численного решения получающихся уравнений.

Пример 4.5. Цепь на рис. 4.6 содержит в последовательном соединении линейный резистор сопротивлением  $R_1 = 50 \text{ Ом}$  и нелинейный резистор, вольт-амперная характеристика которого определяется выражением (ток – в амперах, напряжение – в вольтах)

$$I_2 = \begin{cases} 2 \cdot 10^{-4} U_2^2 & \text{при } U_2 \geq 0; \\ 0 & \text{при } U_2 < 0. \end{cases} \quad (4.11)$$

Напряжение на выводах цепи  $U_0 = 100 \text{ В}$ .

Определить значения тока и напряжений резисторов.

Решение. Сначала решим эту задачу методом токов элементов. На основании второго закона Кирхгофа

$$U_1(I_1) + U_2(I_2) = U_0, \quad (4.12)$$

где

$$U_1(I_1) = R_1 I_1 = 50 I_1; \quad (4.13)$$

$$U_2(I_2) = 50\sqrt{2} \sqrt{I_2}, \quad (4.14)$$

причем последнее выражение напряжения на линейном резисторе получено из (4.11).

Обозначая  $I = I_1 = I_2$  (баланс токов в узле  $a$ ), получаем иррациональное уравнение

$$I + \sqrt{2} \sqrt{I} = 2, \quad (4.15)$$

которое после несложных преобразований принимает вид

$$I^2 - 6I + 4 = 0. \quad (4.16)$$

Значения корней этого квадратного уравнения  $I'$  и  $I''$  вычислим на ПМК вручную, использовав общеизвестный алгоритм решения таких уравнений:

$$PX = PY = PZ : = 3 x^2 \quad PX : = 4 - \sqrt{P0} : = PX + I' : =$$

$$PX = 5,2360679$$

$$\Leftrightarrow PX : = P0$$

$$- I'' : = PX = 7,639321 \cdot 10^{-1}$$

Проверка показывает, что из этих двух величин корнем уравнения (4.15) является только

$$I = 0,764 \text{ A}$$

(значение округлено).

Подставляя это значение тока соответственно в выражения (4.13) и (4.14), получаем:

напряжение на линейном резисторе

$$U_1 = R_1 I = 50 \cdot 0,764 = 38,2 \text{ В};$$

напряжение на нелинейном резисторе

$$U_2 = 50\sqrt{2} \sqrt{I} = 61,8 \text{ В.}$$

Решим эту задачу методом напряжений элементов. Для этого выразим аргумент  $I_1 = I_2 = I$  в характеристике (4.13) через (4.11):

$$U_1 = R_1 I_1 = 10^{-2} U_2^2.$$

Подставим теперь это выражение в (4.12). В результате получим квадратное уравнение для определения  $U_2 \geq 0$ :

$$U_2^2 + 100 U_2 - 10^4 = 0.$$

Решая это уравнение, получаем

$$U_2 = 61,8 \text{ В.}$$

Теперь по (4.12) находим  $U_1$ :

$$U_1 = U_0 - U_2 = 100 - 61,8 = 38,2 \text{ В.}$$

И, наконец, вычисляем  $I_1 = I_2$ :

$$I_1 = \frac{U_1}{R_1} = \frac{38,2}{50} = 0,764 \text{ А.}$$

## Гла́ва пятая

# РАСЧЕТ ЦЕПЕЙ ПРИ ГАРМОНИЧЕСКИХ ВОЗДЕЙСТВИЯХ

Установившиеся процессы в цепях при гармонических воздействиях рассчитывают на основе символьического принципа или принципа комплексных амплитуд (комплексных действующих значений). В гл. 1 приведены основы символьического принципа, который включает в себя алгебраические действия над комплексными числами. Поскольку в комплексной форме могут быть записаны основные законы цепей — законы Ома и Кирхгофа, следовательно, для расчета цепей при гармонических воздействиях может быть использован весь расчетный аппарат, основанный на этих законах: методы эквивалентных преобразований схем, контурных токов, узловых напряжений, эквивалентного источника и т.д. Иначе говоря, все расчетные приемы, описанные в гл. 3, применимы и для цепей гармонического тока, но записи уравнений и математические операции выполняются в комплексной форме.

## 5.1. ДЕЙСТВИЯ НАД КОМПЛЕКСНЫМИ ЧИСЛАМИ

В расчетах используются только две формы записи комплексного числа  $\underline{z}$ :

алгебраическая

$$\underline{z} = a + jb;$$

показательная

$$\underline{z} = ce^{j\alpha} (|\alpha| \leqslant \pi \text{ или } |\alpha| \leqslant 180^\circ).$$

Геометрическая интерпретация комплексного числа представлена на рис. 5.1.

При сложении или вычитании комплексных чисел удобно иметь их в алгебраической форме, а при умножении, делении, возведении в целую степень и извлечении корня — в показательной форме.

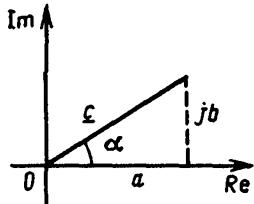


Рис. 5.1. Геометрическое представление комплексного числа

Пример:

$$\begin{aligned} & (a_1 + jb_1) + (a_2 - jb_2) - (a_3 - jb_3) = \\ & = (a_1 + a_2 - a_3) + j(b_1 - b_2 + b_3); \end{aligned}$$

$$\frac{c_1 e^{j\alpha_1} c_3 e^{j\alpha_3}}{c_2 e^{j\alpha_2}} = \frac{c_1 c_3}{c_2} e^{j(\alpha_1 + \alpha_3 - \alpha_2)};$$

$$\sqrt{c e^{j\alpha}} = \begin{cases} \sqrt{c} e^{j\frac{\alpha}{2}}; \\ \sqrt{c} e^{j(\frac{\alpha}{2} \pm \pi)}. \end{cases}$$

### 5.1.1. Перевод комплексного числа из показательной формы в алгебраическую

Иногда такое преобразование легко выполнить в уме, исходя из геометрической интерпретации комплексного числа. Например,  $10e^{\pm j180^\circ}$  или  $10e^{\pm j\pi} = -10$ , а  $10e^{\pm j90^\circ}$  или  $10e^{\pm j\pi/2} = \pm j10$ . В общем же случае для перевода комплексного числа из показательной формы в алгебраическую можно воспользоваться алгоритмом

$$a = c \cos \alpha;$$

$$b = c \sin \alpha;$$

$$\underline{z} = a + jb$$

(см. рис. 5.1), который при разовых вычислениях и наличии двух свободных адресуемых регистров ПМК, например  $c$  и  $d$ , удобно исполнить в таком порядке:

$$Pc : = c \quad Pd : = \alpha \quad \cos x a : = PX$$

$$PX : = Pc \quad PX : = Pd \quad \sin x b : = PY$$

$$\underline{z} = a + jb.$$

При этом переключатель ГРД надо поставить в положение, соответствующее единице измерения аргумента комплексного числа.

**Пример 5.1.** Записать в алгебраической форме следующие числа:

$$1) 10 e^{-j30^\circ};$$

$$2) 10 e^{-j\pi/6}.$$

**Решение:** 1) Г Р ГРД

$$PC : = 10 \quad Pd : = -30 \cos x a : = PX = 8,6602544$$

$$PX : = Pd \sin x b : = PY = -5,0000002$$

$$\text{Ответ: } 10 e^{-j30^\circ} = 8,66 - j5,00 \text{ (с округлением).}$$

2) Г Р ГРД

$$Pc : = 10 \quad Pd : = -\pi/6 \cos x a : = PX = 8,6602544$$

$$PX : = Pd \sin x b : = PY = -5,0000002$$

$$\text{Ответ: } 10 e^{-j\pi/6} = 8,66 - j5,00 \text{ (с округлением).}$$

При многократных вычислениях этот алгоритм можно представить программой 5.1, в которой кроме регистров стека приходится использовать один из свободных адресуемых регистров ПМК (в данном случае регистр  $d$ ).

*Программа 5.1. Преобразование показательной формы комплексного числа в алгебраическую*  
 $c e^{ja} = a + jb$

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	$x \rightarrow Pd$	4Г	05	$\Pi \rightarrow xd$	6Г
01	sin	1[	06	cos	1Г
02	$\leftrightarrow$	14	07	X	12
03	X	12	08	C/P	50
04	Bx	0			

**Инструкция:**

Г Р ГРД или Г Р ГРД

(В/О  $PY : = c \quad PX : = a \quad C/P$

$a : = PX \quad b : = PY \quad c = a + jb$ )

Время счета — примерно 5 с.

**Контрольные примеры:**

$$1) 10 e^{j45^\circ} = 7,0710681 + j7,0710681 \text{ (Г Р ГРД) ;}$$

$$2) 10 e^{j\pi/4} = 7,0710681 + j7,0710681 \text{ (Г Р ГРД) .}$$

### 5.1.2. Перевод комплексного числа из алгебраической формы в показательную

Пользуясь геометрической интерпретацией комплексного числа (рис. 5.1), нетрудно записать в показательной форме вещественные и мнимые числа. Так, число  $-10$  можно записать и как  $10 e^{\pm j 180^\circ}$ , и как  $10 e^{\pm j \pi}$ , а числа  $\pm j 10$  – в виде  $10 e^{\pm j 90^\circ}$  либо  $10 e^{\pm j \pi/2}$ . Для перевода остальных чисел при одноразовых вычислениях удобно пользоваться алгоритмом

$$\alpha = \operatorname{arctg} \frac{b}{a}; \quad c = \frac{b}{\sin \alpha}; \quad \underline{c} = c e^{j\alpha},$$

для чего выполняются следующие операции:

$$PZ = PY : = b \quad PX : = a \div \operatorname{tg}^{-1} \alpha : = PX$$

$$\sin \div c : = PX$$

$$\underline{c} = c e^{j\alpha}$$

**Пример 5.2.** Записать в показательной форме следующие числа:

$$1) 4 + j3; \quad 2) -6 + j8.$$

**Решение.** Г Р ГРД 1)  $PZ = PY : = 3 \quad PX : = 4 \div \operatorname{tg}^{-1} \alpha : = PX = 36,8699 \sin \div c : = PX = 4,9999998,$

$$\text{Ответ: } 4 + j3 = 5 e^{j36,87^\circ} \text{ (с округлением).}$$

2)  $PZ = PY : = 8 \quad PX = -6 \div \operatorname{tg}^{-1} \alpha : = PX = -53,1301 \sin \div c : = PX = -9,9999998.$

$$\text{Ответ: } -6 + j8 = -10 e^{-j53,13^\circ} \text{ (с округлением).}$$

Г Р ГРД

$$1) 4 + j3 = 5 e^{j0,6435},$$

$$2) -6 + j8 = -10 e^{-j0,9272}.$$

При многократных вычислениях можно воспользоваться программой 5.2.

**Программа 5.2. Преобразование алгебраической формы комплексного числа в показательную**

$$a + jb = c e^{j\alpha}$$

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	$x \rightarrow \Pi d$	4Г	05	$\Pi \rightarrow xd$	6Г
01	$\leftrightarrow$	14	06	$\leftrightarrow$	14
02	$\div$	13	07	$\sin$	1[
03	$\operatorname{tg}^{-1}$	1L	08	$\div$	13
04	$B \uparrow$	OE	09	$C/P$	50

Инструкция:

Г Р ГРД или Г Р ГРД

(В/О РY : = a РX : = b С/П c : = РX a : = РY

$$\underline{c} = c e^{j\alpha}$$

Время счета — примерно 5 с.

Контрольные примеры:

1)  $6 - j8 = 9,9999998 e^{-j53,1301^\circ}$  (Г Р ГРД);

2)  $-4 - j3 = -4,9999998 e^{j36,8699^\circ}$  (Г Р ГРД).

Особенность рассмотренного алгоритма состоит в том, что модули чисел, изображения которых лежат во втором и третьем квадрантах комплексной плоскости, получаются со знаком минус, от которого, впрочем, при необходимости легко избавиться, если помнить, что  $-1 = e^{\pm j180^\circ}$  или  $-1 = e^{\pm j\pi}$ . Так,  $-10 e^{-j53,13^\circ} = 10 e^{j126,87^\circ}$   
 $-5 e^{j36,87^\circ} = 5 e^{-j143,13^\circ}$ .

Если программы 5.1 и 5.2 введены в память ПМК, то вычисление какого-либо выражения организуется следующим образом. Сначала очередная пара операндов по одной из программ преобразуется в форму, соответствующую выполняемой операции. Сама же операция осуществляется вычислителем на ПМК вручную. Промежуточные результаты по возможности отправляются на хранение в адресуемые регистры числовой памяти (естественно, после записи или запоминания адреса их хранения).

Пример 5.3. Найти напряжение  $u_{C2}(t)$  в схеме на рис. 5.2, а при  $u(t) = 10\sqrt{2} \cos 10^4 t$  В,  $L_1 = 5$  мГн,  $R_1 = 150$  Ом,  $C_1 = 0,667$  мкФ,  $R_2 = 200$  Ом,  $C_2 = 1$  мкФ,  $L_3 = 10$  мГн.

Решение. В соответствии с символьическим методом

$$u_{C2}(t) = \operatorname{Re} [\sqrt{2} \underline{U}_{C2} e^{j\omega t}].$$

Здесь  $\omega = 10^4$  1/с. Комплекс действующего напряжения на втором конденсаторе  $\underline{U}_{C2}$  найдем по закону Ома:

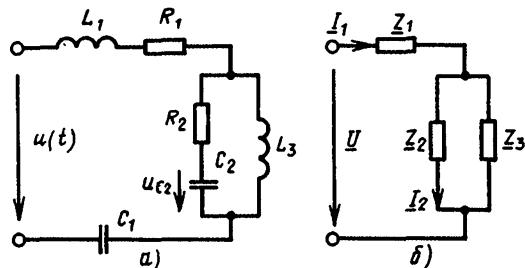


Рис. 5.2. К примеру 5.3

$$\underline{U}_{C2} = \underline{Z}_{C2} \underline{I}_2,$$

где  $\underline{Z}_{C2} = -j \frac{1}{\omega C_2}$ , а  $\underline{I}_2$  определяется из анализа схемы на рис. 5.2, б.  
На этой схеме

$$\underline{U} = 10 \text{ В},$$

$$\underline{Z}_1 = R_1 + j\omega L_1 - j \frac{1}{\omega C_1} = 150 + j50 - j150 = 150 - j100 \text{ Ом};$$

$$\underline{Z}_2 = R_2 - j \frac{1}{\omega C_2} = 200 - j100 \text{ Ом}; \quad \underline{Z}_3 = j\omega L_3 = j100 \text{ Ом}.$$

Расчет  $\underline{I}_2$  можно выполнить в следующей последовательности:

1) определить входное сопротивление цепи:

$$\underline{Z}_{bx} = \underline{Z}_1 + \frac{1}{\underline{Y}_2 + \underline{Y}_3} = Z_1 + \frac{\underline{Z}_2 \underline{Z}_3}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3};$$

2) вычислить  $\underline{I}_1$ :

$$\underline{I}_1 = \underline{U}/\underline{Z}_{bx};$$

3) по формуле делителя тока найти

$$\underline{I}_2 = \underline{I}_1 \frac{\underline{Z}_3}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3}.$$

После преобразования для  $\underline{U}_{C2}$  получим выражение

$$\underline{U}_{C2} = \underline{U} \frac{\underline{Z}_{C2} \underline{Z}_3}{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2 + \underline{Z}_2 \underline{Z}_3 + \underline{Z}_3 \underline{Z}_1}. \quad (5.1)$$

Введем в память ПМК программу 5.2 перевода комплексного числа из алгебраической формы в показательную, дополнив ее составной командой БП 00; программу 5.1 обратного преобразователя числа введем с адреса 12, а дополнив ее соответственно командой БП 12, получим программу 5.3.

#### Программа 5.3. Преобразование форм комплексного числа

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	$x \rightarrow \Pi d$	4Г	11	00	00
01	$\leftrightarrow$	14	12	$x \rightarrow \Pi d$	4Г
02	$\div$	13	13	$\sin$	1С
03	$\operatorname{tg}^{-1}$	1Л	14	$\leftrightarrow$	14
04	$B^{\uparrow}$	ОЕ	15	X	12
05	$\Pi \rightarrow xd$	6Г	16	Bx	0

*Продолжение программы 5.3*

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
06	$\leftrightarrow$	14	17	$\Pi \rightarrow xd$	6Г
07	$\sin$	1C	18	$\cos$	1Г
08	$\div$	13	19	X	12
09	C/П	50	20	C/П	50
10	БП	51	21	БП	51
			22	12	12

Инструкция:

G P ГРД

$$a + jb = c e^{j\alpha}$$

$$\begin{aligned} \text{В/О } PY : &= a \text{ PX :} = b \text{ C/П} \\ c : &= \text{PX } a : = \text{PY } c = c e^{j\alpha} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ce^{j\alpha} &= a + jb \text{ БП 12 (PY :} = c \text{ PX :} = \alpha \text{ C/П} \\ a : &= \text{PX } b : = \text{PY } c = a + jb) \end{aligned}$$

Преобразуем значения сопротивлений  $Z_1$ ,  $Z_2$  и  $Z_3$  в показательную форму, записав их модули в адресуемые регистры 1, 3 и 5, а аргументы — в регистры 2, 4 и 6:

$$\begin{aligned} \text{В/О } PY : &= 150 \text{ PX :} = -100 \text{ C/П} \\ P1 : &= \text{PX} = 180,27756 \quad P2 : = \text{PY} = -33,690068 \\ PY : &= 200 \text{ PX :} = -100 \text{ C/П} \\ P3 : &= \text{PX} = 223,60679 \quad P4 : = \text{PY} = -26,565051 \\ P5 : &= 100 \quad P6 : = 90 \end{aligned}$$

Теперь обнулим регистры 7 и 8:

$$P7 : = 0 \quad P8 : = 0,$$

в которых будем накапливать значения соответственно вещественной и мнимой суммы парных произведений сопротивлений ветвей:

БП 12

$$\begin{aligned} \text{PX :} &= P1 \quad \text{PX :} = P3 \times \text{PX :} = P2 \quad \text{PX :} = P4 + \text{C/П} \\ &\quad \text{PX :} = P7 + P7 : = \text{PX} \\ &\quad \leftrightarrow \quad \text{PX :} = P8 + P8 : = \text{PX} \\ \text{PX :} &= P3 \quad \text{PX :} = P5 \times \text{PX :} = P4 \quad \text{PX :} = P6 + \text{C/П} \\ &\quad \text{PX :} = P7 + P7 : = \text{PX} \\ &\quad \leftrightarrow \quad \text{PX :} = P8 + P8 : = \text{PX} \\ \text{PX :} &= P5 \quad \text{PX :} = P1 \times \text{PX :} = P6 \quad \text{PX :} = P2 + \text{C/П} \\ &\quad \text{PX :} = P7 + P7 : = \text{PX} \\ &\quad \leftrightarrow \quad \text{PX :} = P8 + P8 : = \text{PX} \end{aligned}$$

Преобразуем значение знаменателя дроби (5.1) в показательную форму и запишем модуль и аргумент результата в любые два свободных регистра, например, 1 и 2:

$$\begin{aligned} \text{В/О С/П } P1 &:= \text{PX} = 39999,996 \\ P2 &:= \text{PY} = 2,8647891 \cdot 10^{-6} \end{aligned}$$

Числитель дроби (5.1) равен

$$Z_{C2} Z_3 = -j \frac{1}{\omega C_2} j \omega L_3 = \frac{L_3}{C_2} = 10^4 \text{ Ом}^2.$$

И, наконец, выполнив следующие действия:

$$\text{PY:} = 10^4 \quad \text{PX:} = 10 \times \text{PX:} = P1 \div U: = \text{PX} = 2,5000002$$

$$\text{PX:} = P2 \quad /-/\psi_u := \text{PX} = -2,8647891 \cdot 10^{-6},$$

получим искомое значение  $U_{C2} = U_{C2} e^{j\psi_u} = 2,5 e^{j0} \text{ В (с округлением)}$

Следовательно,

$$u_{C2}(t) = \sqrt{2} \cdot 2,5 \cos(10^4 t + 0^\circ) = 3,54 \cos 10^4 t \text{ В.}$$

### 5.1.3. Сложение и вычитание комплексных чисел, записанных в показательной форме

Предлагаемая ниже программа 5.4 автоматизирует уже не только преобразования комплексных чисел, но и операции сложения и вычитания чисел в показательной форме. Эта программа является наиболее удобной по своей универсальности для расчета комплексных выражений.

#### Программа 5.4. Вычисление суммы (разности) и преобразование комплексных чисел

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	НОП	54	23	X	12
01	ПП	53	24	В/О	52
02	16	16	25	$x \neq 0$	57
03	$\Pi \rightarrow xb$	6L	26	37	37
04	+	10	27	$\leftrightarrow$	14
05	$x \rightarrow \Pi b$	4L	28	$x = 0$	5E
06	$\leftrightarrow$	14	29	33	33
07	$\Pi \rightarrow x a$	6-	30	$\cos^{-1}$	1-
08	+	10	31	$\leftrightarrow$	14
09	$x \rightarrow \Pi a$	4-	32	В/О	52
10	С/П	50	33	$\div$	13
11	В/О	52	34	Bx	0
12	$\leftrightarrow$	14	35	$\leftrightarrow$	14

*Продолжение программы 5.4*

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
13	III	53	36	$\operatorname{tg}^{-1}$	1L
14	25	25	37	$\leftrightarrow$	14
15	C/P	50	38	Bx	0
16	$x \rightarrow \Pi d$	4F	39	cos	1F
17	cos	1F	40	$\div$	13
18	$\leftrightarrow$	14	41	B/O	52
19	X	12	42	PП	53
20	Bx	0	43	16	16
21	$\Pi \rightarrow xd$	6F	44	$\leftrightarrow$	14
22	sin	1C	45	C/P	50

Инструкция:

1. Преобразование алгебраической формы комплексного числа в показательную  $a + jb = ce^{j\alpha}$

Г Р ГРД или Г Р ГРД

(БП 13 PY: = a RX: = b C/P

$$c: = RX \quad \alpha: = PY \quad \underline{c} = ce^{j\alpha})$$

Время счета — примерно 7 с.

2. Преобразование показательной формы комплексного числа в алгебраическую  $ce^{j\alpha} = a + jb$

Г Р ГРД или Г Р ГРД

(БП 42 PY: = c RX: = a C/P

$$a: = RX \quad b: = PY \quad \underline{c} = a + jb)$$

Время счета — примерно 7 с.

3. Вычисление значения суммы

$$\sum_i c_i e^{j\alpha_i} = a + jb = ce^{j\alpha}$$

Г Р ГРД или Г Р ГРД

(B/O Pa: = 0 Pb: = 0

$$(PY: = c_i \quad RX: = \alpha_i \quad C/P$$

$$a: = RX = Pa \quad b: = PY = Pb \quad \underline{c} = a + jb)$$

Если ответ нужен в показательной форме, то выполнить следующие операции:

$$(\overline{\text{III}} \quad C/P \quad c: = RX \quad \alpha: = PY \quad \underline{c} = ce^{j\alpha}).$$

**П р и м е ч а н и е.** Вычитание комплексного числа  $\underline{c}_i$  заменяется прибавлением числа  $-\underline{c}_i$ .

**Пример 5.4.** Преобразовать число  $30 - j40$  в показательную форму, выразив его аргумент в градусах.

Решение:

Г Р ГРД

БП 13  $PY: = 30 \quad PX: = -40 \quad C/P$   
 $c: = PX = 49,999998 \quad a: = PY = -53,1301$

Ответ:  $30 - j40 = 50e^{-j53,13^\circ}$ .

**Пример 5.5.** Преобразовать предыдущий результат в алгебраическую форму.

Решение. Г Р ГРД

БП 42  $PY: = 50 \quad PX: = -53,13 \quad C/P$   
 $a: = PX = 30,000071 \quad b: = PY = -39,999947$

Ответ:  $50e^{-j53,13^\circ} = 30 - j40$  (с округлением).

**Пример 5.6.** Вычислить  $\underline{S} = 10e^{+j60^\circ} + 20 + 30e^{-j60^\circ}$ .

Решение. Г Р ГРД

B/O  $Pa: = 0 \quad Pb: = 0$   
 $PY: = 10 \quad PX: = 60 \quad C/P$   
 $PY: = 20 \quad PX: = 0 \quad C/P$   
 $PY: = 30 \quad PX: = -60 \quad C/P$

$\text{Re } \underline{S} : = PX = 40,000001, \text{Im } \underline{S} : = PY = -17,320509$

Ответ:  $\underline{S} = 40 - j17,3$  (точное значение  $\underline{S} = 40 - j10\sqrt{3}$ ).

Если требуется этот результат привести в показательной форме, то, убедившись, что вещественная часть (40,000001) находится в регистре X, а мнимая часть (-17,320509) — в регистре Y, произвести следующие манипуляции:

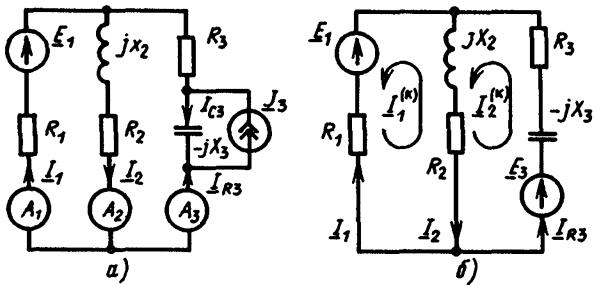
$\xrightarrow{\text{ШГ}} \text{C/P} \quad \text{mod } \underline{S} : = PX = 43,588988$   
 $\arg \underline{S} : = PY = -23,413225$

Ответ:  $\underline{S} = 43,6 e^{-j23,4^\circ}$ .

**Пример 5.7.** Определить показания амперметров и проверить баланс мощностей элементов схемы на рис. 5.3,а, если  $E_1 = 250e^{j90^\circ}$  В,  $\underline{J}_3 = 5\sqrt{2}e^{j45^\circ}$  А,  $R_1 = 25$  Ом,  $R_2 = 50$  Ом,  $X_2 = 50$  Ом,  $R_3 = 20$  Ом и  $X_3 = 20$  Ом.

Решение. Определим токи элементов методом контурных токов. Предварительно исключим из схемы на рис. 5.3 амперметры и заменим источник тока  $\underline{J}_3$  с параллельным конденсатором  $\underline{Z}_{C3} = -j20$  Ом источником ЭДС  $\underline{E}_3 = \underline{Z}_{C3}\underline{J}_3 = 100\sqrt{2}e^{-j45^\circ}$  В с последовательно вклю-

Рис. 5.3. К примеру 5.7



ченным конденсатором такого же сопротивления (рис. 5.3, б). Выберем направления положительных значений токов ветвей и контурных токов (против часовой стрелки) в обоих внутренних контурах.

Запишем систему контурных уравнений для этой схемы в канонической форме:

$$\begin{vmatrix} \underline{Z}_{11} & -\underline{Z}_{12} \\ -\underline{Z}_{21} & \underline{Z}_{22} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \underline{I}_1^{(k)} \\ \underline{I}_2^{(k)} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \underline{E}_1^{(k)} \\ \underline{E}_2^{(k)} \end{vmatrix};$$

здесь

$$\underline{Z}_{11} = R_1 + R_2 + jX_2 = 75 + j50 = 90,14 e^{j33,69^\circ} \Omega;$$

$$\underline{Z}_{22} = R_2 + R_3 + j(X_2 - X_3) = 70 + j30 = 76,16 e^{j23,20^\circ} \Omega;$$

$$\underline{Z}_{12} = \underline{Z}_{21} = R_2 + jX_2 = 50 + j50 = 50\sqrt{2} e^{j45^\circ} \Omega.$$

$$\underline{E}_1^{(k)} = -\underline{E}_1 = -250 e^{j90^\circ} = 250 e^{-j90^\circ} \text{ В};$$

$$\underline{E}_2^{(k)} = \underline{E}_3 = \underline{Z}_{C3} \underline{J}_3 = 100\sqrt{2} e^{-j45^\circ} \text{ В.}$$

Решение системы уравнений относительно  $\underline{I}_1^{(k)}$ ,  $\underline{I}_2^{(k)}$  может быть найдено с помощью определителей:

$$\underline{I}_1^{(k)} = \underline{\Delta}_1 / \underline{\Delta}, \quad \underline{I}_2^{(k)} = \underline{\Delta}_2 / \underline{\Delta},$$

где

$$\underline{\Delta} = \begin{vmatrix} 90,14 e^{j33,69^\circ} & -50\sqrt{2} e^{j45^\circ} \\ -50\sqrt{2} e^{j45^\circ} & 76,16 e^{j23,20^\circ} \end{vmatrix};$$

$$\underline{\Delta}_1 = \begin{vmatrix} 250 e^{-j90^\circ} & -50\sqrt{2} e^{j45^\circ} \\ 100\sqrt{2} e^{-j45^\circ} & 76,16 e^{j23,20^\circ} \end{vmatrix};$$

$$\underline{\Delta}_2 = \begin{vmatrix} 90,14 e^{j33,69^\circ} & 250 e^{-j90^\circ} \\ -50\sqrt{2} e^{j45^\circ} & 100\sqrt{2} e^{-j45^\circ} \end{vmatrix}.$$

Значения этих определителей вычислим с помощью программы 5.4.  
Для определения значения  $\underline{\Delta}$  необходимо выполнить следующие действия:

B/O  $P_a = 0 \quad P_b = 0$

$PY := 90,14 \quad PX := 76,16 \times$

$PY := 33,69 \quad PX := 23,2 +$

C/П

$PY := -5000 \quad PX := 90$

C/П

$\xrightarrow{\text{III}} \quad C/P$

$\text{mod } \underline{\Delta} := PX = 3824,3578 \quad \arg \underline{\Delta} := PY = 11,314802$

$\underline{\Delta} = 3824 e^{j11,31^\circ}$

Значения составляющих  $\underline{\Delta}$  можно было бы не записывать на бумаге, а сразу отправить на хранение в любые два свободных регистра, например P0 и P1. В этом случае последняя строка имела бы вид

$P0 := PX = \text{mod } \underline{\Delta} \quad P1 := PY = \arg \underline{\Delta}$ .

Вычислим  $\underline{\Delta}_1$ :

B/O  $P_a := 0 \quad P_b := 0$

$PY := 250 \quad PX := 76,16 \times$

$PY := -90 \quad PX := 23,2 +$

C/П

$PY := 10000 \quad PX := 0$

C/П

$\xrightarrow{\text{III}} \quad C/P$

$\text{mod } \underline{\Delta}_1 := PX = 24749,437 \quad \arg \underline{\Delta}_1 := PY = -44,999482$

$\underline{\Delta}_1 = 24749 e^{-j45^\circ}$ .

Для определения  $I_1^{(k)}$  поступим следующим образом (убедившись заранее, что  $PX = \text{mod } \underline{\Delta}_1$ ,  $PY = \arg \underline{\Delta}_1$ ):

$PX := P0 \div I_1^{(k)} = PX = 6,4715275$

$\Leftrightarrow PX := P1 - \psi_{i1}^{(k)} := PX = -56,314284$

$I_1^{(k)} = 6,47 e^{-j56,3^\circ} \text{ A.}$

Аналогичным образом вычислим  $\underline{\Delta}_2$  и  $I_2^{(k)}$ :

В/О  $P_a: = 0$   $P_b: = 0$

$$PY: = 90,14 \quad PX: = 100\sqrt{2} \times$$

$$PY: = 33,69 \quad PX: = -45 \quad +$$

С/П

$$PY: = 250 \quad PX: = 50\sqrt{2} \times$$

$$PX: = -45^\circ$$

$\rightarrow$  С/П

ШГ С/П

$$PX: = P_0 \div I_2^{(k)}: = PX = 7,6234823$$

$$\leftrightarrow PX: = P_1 - \psi_{i2}^{(k)}: = PX = -42,278474$$

$$I_2^{(k)} = 7,62 e^{-j42,3^\circ} \text{ A.}$$

Найдем токи ветвей исходной схемы:

$$I_1 = -I_1^{(k)} = -6,47 e^{-j56,3^\circ} = 6,47 e^{j123,7^\circ} \text{ A;}$$

$$I_{R3} = I_2^{(k)} = 7,62 e^{-j42,3^\circ} \text{ A;}$$

$$I_2 = I_2^{(k)} - I_1^{(k)}.$$

Для вычисления этой разности снова обратимся к программе 5.4:

В/О  $P_a: = 0$   $P_b: = 0$

$$PY: = 7,62 \quad PX: = -42,3$$

С/П

$$PY: = -6,47 \quad PX: = -56,3$$

$\rightarrow$  С/П

ШГ С/П

$$I_2 = :PX = 2,0720045 \quad \psi_{i2}: = PY = 7,2265923;$$

$$I_2 = 2,07 e^{j7,23^\circ}$$

Ток  $I_{C3} = J_3 - I_2^{(k)}$  вычислим аналогично. В результате получим

$$I_{C3} = -10,15 e^{-j86,4^\circ} = 10,15 e^{j93,6^\circ}.$$

Таким образом, показания амперметров  $A_1, A_2$  и  $A_3$  будут соответственно 6,47; 2,07 и 7,62 А.

Для того чтобы убедиться в правильности вычислений, составим баланс комплексных мощностей активных и пассивных элементов цепи.

Мощность источников

$$E_1 I_1^* + U_{C3} J_3^* = E_1 I_1^* - jX_3 I_{C3} J_3^* = 250 e^{j90^\circ} \cdot 6,47 e^{-j123,7^\circ} +$$

$$+ 20 e^{-j90^\circ} \cdot 10,15 e^{j93,6^\circ} \cdot 5\sqrt{2} e^{-j45^\circ}.$$

Эту сумму вычислим также с помощью программы 5.4; в результате получим

$$S_{\text{ист}} = 2422,4 - j1846,7 \text{ В} \cdot \text{А.}$$

Мощность пассивных элементов

$$R_1 I_1^2 + (R_2 + jX_2) I_2^2 + R_3 I_{R3}^2 - jX_3 I_{C3}^2 = 25 \cdot 6,72^2 + \\ + 50 \sqrt{2} e^{j45^\circ} \cdot 2,07^2 + 20 \cdot 7,62^2 - j20 \cdot 10,15^2 = 2422,1 - j1846,2 \text{ В} \cdot \text{А.}$$

Относительные ошибки вычислений

$$\delta_P \% = 2 \frac{2422,4 - 2422,1}{2422,4 + 2422,1} 100 \% = 0,01 \%;$$

$$\delta_Q \% = 2 \frac{1846,7 - 1846,2}{1846,7 + 1846,2} 100 \% = 0,03 \%.$$

## 5.2. ВЫЧИСЛЕНИЕ ЗНАЧЕНИЯ ОПРЕДЕЛИТЕЛЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА С КОМПЛЕКСНЫМИ ЭЛЕМЕНТАМИ, ЗАДАННЫМИ В АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ ФОРМЕ

Если элементы определителя заданы в показательной форме комплексных чисел, то вычисление его значения получается экономнее при использовании программы 5.4, как это показано в примере 5.7.

Для вычисления значения определителя второго порядка при алгебраической форме выражения его элементов используется алгоритм

$$\Delta = \begin{vmatrix} a + jb & c + jd \\ e + jf & g +jh \end{vmatrix} = \\ = (ag - bh - ce + df) + j(-de + ah - cf + bg),$$

для реализации которого может быть рекомендована программа 5.5.

*Программа 5.5. Вычисление значения определителя второго порядка с комплексными элементами, заданными в алгебраической форме*

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	$\Pi \rightarrow x1$	61	16	$\Pi \rightarrow x7$	67
01	$\Pi \rightarrow x8$	68	17	X	12
02	X	12	18	$\Pi \rightarrow x2$	62
03	$\Pi \rightarrow x4$	64	19	$\Pi \rightarrow x8$	68
04	$\Pi \rightarrow x5$	65	20	X	12
05	X	12	21	-	11
06	-	11	22	$\Pi \rightarrow x3$	63
07	$\Pi \rightarrow x3$	63	23	$\Pi \rightarrow x5$	65

*Продолжение программы 5.5*

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
08	$\Pi \rightarrow x_6$	66	24	X	12
09	X	12	25	-	11
10	-	11	26	$\Pi \rightarrow x_4$	64
11	$\Pi \rightarrow x_2$	62	27	$\Pi \rightarrow x_6$	66
12	$\Pi \rightarrow x_7$	67	28	X	12
13	X	12	29	+	10
14	+	10	30	C/P	50
15	$\Pi \rightarrow x_1$	61			

Инструкция:

$\underline{\Gamma} P$  ГРД или  $\underline{\Gamma} \underline{P}$  ГРД  
 $(B/O P1: = a P2: = b P3: = c$   
 $P4: = d P5 = e P6: = f P7: = g$   
 $P8: = h C/P$   
 $Re \underline{\Delta}: = PX Im \underline{\Delta}: = PY)$

Пример 5.8:

$$\underline{\Delta} = \begin{vmatrix} (5 - j2) & -5 \\ -5 & (5 + j5) \end{vmatrix} = 10 + j15,$$

*Глава шестая*

**ПЕРИОДИЧЕСКИЕ НЕГАРМОНИЧЕСКИЕ ПРОЦЕССЫ**

**6.1. ЧИСЛЕННЫЙ ГАРМОНИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ  
ВЕЩЕСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ**

Ряд Фурье для периодической вещественной функции  $u(t)$  с периодом  $T$  может быть записан как

$$u(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos k\omega t + \sum_{k=1}^{\infty} B_k \sin k\omega t = \\ = U_0 + \sum_{k=1}^{\infty} U_{mk} \cos(k\omega t - \psi_{uk}),$$

где

$$A_k = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} u(t) \cos k\omega t dt; \quad B_k = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} u(t) \sin k\omega t dt;$$

$$\omega = 2\pi/T; \quad U_0 = A_0/2; \quad U_{mk} = \sqrt{A_k^2 + B_k^2};$$

$$\psi_{uk} = \begin{cases} \arccos \frac{A_k}{\sqrt{A_k^2 + B_k^2}}, & \text{если } B_k > 0; \\ -\arccos \frac{A_k}{\sqrt{A_k^2 + B_k^2}}, & \text{если } B_k < 0. \end{cases}$$

Для приближенного вычисления значений  $A_k$ ,  $B_k$ , выражаемых интегралами, можно воспользоваться формулой прямоугольников:

$$A_k \approx \frac{2}{n} \sum_{i=0}^{n-1} u(\xi_i) \cos k \frac{2\pi}{n} \left(i + \frac{1}{2}\right);$$

$$B_k \approx \frac{2}{n} \sum_{i=0}^{n-1} u(\xi_i) \sin k \frac{2\pi}{n} \left(i + \frac{1}{2}\right),$$

где  $\xi_i$  — значение абсциссы середины  $(i+1)$ -го интервала при делении периода анализируемой функции на  $n$  равных частей. Тогда  $u(\xi_i)$  — средняя ордината на  $(i+1)$ -м интервале,

Если заданная функция  $u(t)$  симметрична относительно оси ординат (четная функция), то она содержит только косинусоиды и в общем случае постоянную составляющую:

$$\begin{aligned} u(t) &= \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos k \omega t = \\ &= U_0 + \sum_{k=1}^{\infty} U_{mk} \cos(k \omega t - \psi_{uk}), \end{aligned}$$

причем  $\psi_{uk} = 0$  либо  $\psi_{uk} = \pm \pi$ .

Если переменная составляющая заданной функции симметрична относительно начала координат, то она содержит только синусоиды:

$$\begin{aligned} u(t) &= \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} B_k \sin k \omega t = \\ &= U_0 + \sum_{k=1}^{\infty} U_{mk} \cos(k \omega t - \psi_{uk}), \end{aligned}$$

причем  $\psi_{uk}$  равно либо  $+\pi/2$ , либо  $-\pi/2$ .

Если заданная функция симметрична относительно оси абсцисс при совмещении двух полупериодов во времени, то она содержит только нечетные гармоники.

При использовании символьического метода расчета гармонических составляющих искомых величин более удобным является ряд Фурье в комплексной форме

$$u(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \underline{C}_k e^{jk\omega t},$$

в котором

$$\underline{C}_k = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0 + T} u(t) e^{-jk\omega t} dt,$$

откуда видно, что

$$\underline{C}_k = \underline{C}_{-k}^*.$$

Нетрудно показать, что

$$U_0 = C_0;$$

$$U_{mk} = 2 \operatorname{mod} \underline{C}_k = 2 \operatorname{mod} \underline{C}_{-k};$$

$$\psi_{uk} = -\arg \underline{C}_k = \arg \underline{C}_{-k}.$$

Интеграл, определяющий значение  $\underline{C}_k$ , также может быть заменен суммой по формуле прямоугольников:

$$\underline{C}_k \approx \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} u(\xi_i) e^{-jk \frac{2\pi}{n} \left( i + \frac{1}{2} \right)}.$$

Этот алгоритм реализован в приводимых ниже программах 6.1 и 6.2. Программа 6.1 предназначена для вычисления значений модуля и аргумента коэффициента  $\underline{C}_k$  при аналитическом выражении функции  $u(t)$ . Попытка вычисления постоянной составляющей функции, среднее значение которой в области ее определения равно нулю ( $C_0 = 0$ ), приводит к появлению на индикаторе кода ошибки ЕГГОГ. В этом случае для продолжения вычислений следует нажать клавишу С/П.

*Программа 6.1. Вычисление значений модуля и аргумента коэффициентов комплексного ряда Фурье функции, заданной аналитически*

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	/-/	0L	31	↔	14
01	$x \rightarrow \Pi 5$	45	32	$\Pi \rightarrow x 3$	63

*Продолжение программы б.1*

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
02	Сх	0Г	33	+	10
03	$x \rightarrow \Pi_2$	42	34	$x \rightarrow \Pi_3$	43
04	$x \rightarrow \Pi_3$	43	35	$L_0$	5Г
05	$\Pi \rightarrow x_0$	60	36	$0_5$	05
06	2	02	37	$x^2$	22
07	X	12	38	$\leftrightarrow$	14
08	1	01	39	$x^2$	22
09	-	11	40	+	10
10	$\pi$	20	41	$\sqrt{\quad}$	21
11	X	12	42	$\Pi \rightarrow x_2$	62
12	$\Pi \rightarrow x_1$	61	43	Bx	0
13	$\div$	13	44	$\sqrt{\quad}$	21
14	$x \rightarrow \Pi_4$	44	45	$\div$	13
15	ПП	53	46	$\cos^{-1}$	1-
16	61	61	47	$\Pi \rightarrow x_3$	63
17	$\Pi \rightarrow x_4$	64	48	$x \geqslant 0$	59
18	$\Pi \rightarrow x_5$	65	49	54	54
19	X	12	50	∅	25
20	$x \rightarrow \Pi_4$	44	51	$\leftrightarrow$	14
21	sin	1C	52	BП	51
22	$\leftrightarrow$	14	53	57	57
23	X	12	54	∅	25
24	Bx	0	55	/-/	0L
25	$\Pi \rightarrow x_4$	64	56	$\leftrightarrow$	14
26	cos	1Г	57	$\Pi \rightarrow x_1$	61
27	X	12	58	$x \rightarrow \Pi_0$	40
28	$\Pi \rightarrow x_2$	62	59	$\div$	13
29	+	10	60	C/П	50
30	$x \rightarrow \Pi_2$	42			

Инструкция:

$u(t) \rightarrow \Pi_61$

$t := RX, R4$

{6 - d}

Г Р ГРД

P0 = P1 : = n

(B/O RX: = k C/Π

mod  $C_k$  := RX arg  $C_k$  := PY k := P5)

Время счета — приблизительно  $11n$  с для  $C_0$ ;  $13n$  с — для  $C_k$  ( $k \neq 0$ ).

Контрольный пример.

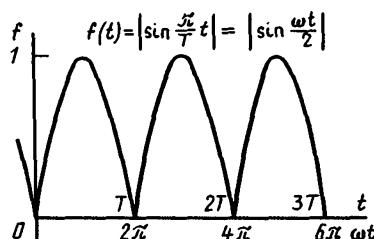
Найти первые четыре коэффициента ряда Фурье функции (рис. 6.1):

$f(t) = \sin |\omega t/2|$  при  $0 \leqslant \omega t \leqslant 2\pi$ .

Рис. 6.1. График функции "модуль синуса"

Решение. Составим и введем следующую подпрограмму для вычисления значений функций:

Адрес	Команда	Код
61	2	02
62	÷	13
63	sin	1C
64	B/O	52



Разделим область определения анализируемой функции на 12 равных частей ( $n = 12$ ):

Г Р ГРД

$$P0 = P1 := 12$$

$$B/O PX := 0 \text{ С/П}$$

$$C_0 := PX = 6,3844149 \cdot 10^{-1}$$

Время счета 130 с.

$$B/O PX := 1 \text{ С/П}$$

$$\operatorname{mod} C_1 := PX = 2,1034047 \cdot 10^{-1} \quad \arg C_1 := PY = 3,1415926 = \pi.$$

Время счета 160 с.

$$B/O PX := 2 \text{ С/П}$$

$$\operatorname{mod} C_2 := PX = 4,043529 \cdot 10^{-2} \quad \arg C_2 := PY = \pi$$

$$B/O PX := 3 \text{ С/П}$$

$$\operatorname{mod} C_3 := PX = 1,5925324 \cdot 10^{-2} \quad \arg C_3 := PY = -\pi$$

$$B/O PX := 4 \text{ С/П}$$

$$\operatorname{mod} C_4 := PX = 7,4200515 \cdot 10^{-3} \quad \arg C_4 := PY = \pi.$$

Таким образом, тригонометрический многочлен, приближенно представляющий заданную функцию на  $[0; 2\pi]$ , будет иметь вид

$$\begin{aligned} f(t) &= \sum_{k=-4}^4 C_k e^{j k \omega t} = C_0 + 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 C_k e^{j k \omega t} = \\ &= 0,638 + 2 \cdot 0,210 \cos(\omega t + \pi) + 2 \cdot 0,040 \cos(2\omega t + \pi) + \\ &+ 2 \cdot 0,016 \cos(3\omega t - \pi) + 2 \cdot 0,007 \cos(4\omega t + \pi) = 0,638 - \\ &- 0,420 \cos \omega t - 0,080 \cos 2\omega t - 0,032 \cos 3\omega t - 0,014 \cos 4\omega t. \end{aligned}$$

Разложение в тригонометрический ряд Фурье заданной функции, полученное аналитическим путем, с округлением значений коэффициентов до трех значащих цифр выглядит так:

$$f(t) = 0,637 - 0,424 \cos \omega t - 0,085 \cos 2\omega t -$$

$$- 0,036 \cos 3\omega t - 0,020 \cos 4\omega t.$$

Увеличение числа разбиений  $n$ , естественно, повышает точность значений коэффициентов ряда, но при этом возрастает время их вычисления.

Программа 6.2 позволяет вычислять значения модуля и аргумента коэффициента  $C_k$  при табличном задании функции на отрезке  $[0; T]$  в  $n$  равноотстоящих точках. Эти значения вводятся в регистр  $x$  последовательно после очередного прерывания процесса накапливания суммы составляющих искомого коэффициента.

**Программа 6.2. Вычисление значений модуля и аргумента коэффициентов комплексного ряда Фурье при табличном задании функции**

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	/-	0L	30	↔	14
01	$x \rightarrow \Pi_5$	45	31	$\Pi \rightarrow x_3$	63
02	$Cx$	0Γ	32	+	10
03	$x \rightarrow \Pi_2$	42	33	$x \rightarrow \Pi_3$	43
04	$x \rightarrow \Pi_3$	43	34	$L_0$	5Γ
05	$C/\Pi$	50	35	05	05
06	$\Pi \rightarrow x_1$	61	36	$x^2$	22
07	$\Pi \rightarrow x_0$	60	37	↔	14
08	-	11	38	$x^2$	22
09	2	02	39	+	10
10	X	12	40	$\sqrt{\phantom{x}}$	21
11	1	01	41	$\Pi \rightarrow x_2$	62
12	+	10	42	Bx	0
13	π	20	43	$\sqrt[n]{\phantom{x}}$	21
14	X	12	44	÷	13
15	$\Pi \rightarrow x_1$	61	45	$\cos^{-1}$	1-
16	÷	13	46	$\Pi \rightarrow x_3$	63
17	$\Pi \rightarrow x_5$	65	47	$x \geq 0$	59
18	X	12	48	53	53
19	$x \rightarrow \Pi_4$	44	49	∅	25
20	sin	1C	50	↔	14
21	↔	14	51	BΠ	51
22	X	12	52	56	56
23	Bx	0	53	∅	25
24	$\Pi \rightarrow x_4$	64	54	/-	0L
25	cos	1Γ	55	↔	14
26	X	12	56	$\Pi \rightarrow x_1$	61
27	$\Pi \rightarrow x_2$	62	57	$x \rightarrow \Pi_0$	40
28	+	10	58	÷	13
29	$x \rightarrow \Pi_2$	42	59	C/P	50

**Инструкция:**

**Г Р ГРД**

$P0 = P1 := n$   
 (B/O  $PX := k \text{ C/P}$ .  
 $PX := u(\xi_1) \text{ C/P}$   
 $PX := u(\xi_2) \text{ C/P}$   
 . . . . .  
 $PX := u(\xi_n) \text{ C/P}$

$\text{mod } C_k := PX \arg C_k := PY)$

Время счета  $10n$  с для  $C_0$ ,  $12n$  с – для  $C_k$  ( $k \neq 0$ ).

**Контрольный пример.** Найти первые четыре коэффициента комплексного ряда Фурье функции (рис. 6.2).

**Решение.** 1. Разделим область определения анализируемой функции на 12 равных частей ( $n = 12$ ).

2. Таблица значений анализируемой функции в середине интервалов разбиения имеет вид

$i$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$f(\xi_i)$	1	1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1

### 3. Г РД

$P0 = P1 := 12$

B/O  $PX := 0 \text{ C/P}$  ( $PX = 0$ )

$PX := f(\xi_1) = 1 \text{ C/P}$  ( $PX = 0$ )

$PX := f(\xi_2) = 1 \text{ C/P}$  ( $PX = 0$ )

. . . . .

$PX := f(\xi_6) = 1 \text{ C/P}$  ( $PX = 0$ )

$PX := f(\xi_7) = -1 \text{ C/P}$  ( $PX = 0$ )

. . . . .

$PX := f(\xi_{12}) = -1 \text{ C/P}$  ( $PX = \text{ЕГГОГ}$ )

$C_0 = 0 \text{ C/P}$

Общее время счета – приблизительно 2 мин.

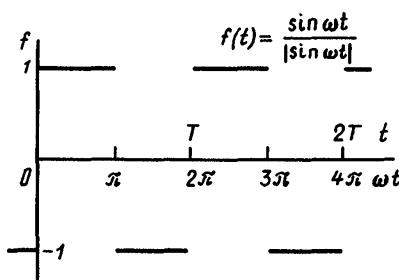


Рис. 6.2. График функции "знак синуса"

B/O PX: = 1 C/Π (PX = 0)  
 PX: =  $f(\xi_1)$  = 1 C/Π (PX =  $-2,5881903 \cdot 10^{-1}$ )  
 PX: =  $f(\xi_2)$  = 1 C/Π (PX =  $-9,6592584 \cdot 10^{-1}$ )  
 . . . . .  
 PX: =  $f(\xi_6)$  = 1 C/Π (PX =  $-3,8637036$ )  
 PX: =  $f(\xi_7)$  = -1 C/Π (PX =  $-4,1225225$ )  
 . . . . .

PX: =  $f(\xi_{12})$  = -1 C/Π (PX =  $6,4395051 \cdot 10^{-1}$ )  
 $\text{mod } C_1$  : = PX =  $6,4395051 \cdot 10^{-1}$   $\arg C_1$  = PY =  $-1,5707962$ .  
 Общее время счета — около 2 мин 20 с.

Аналогичным образом вычисляются

$\text{mod } C_2$  =  $2,9356524 \cdot 10^{-8}$   $\arg C_2$  =  $-1,4570043$ ;  
 $\text{mod } C_3$  =  $2,3570227 \cdot 10^{-1}$   $\arg C_3$  =  $-1,5707959$ .

Тригонометрический многочлен, аппроксимирующий заданную функцию на интервале  $[0; 2\pi]$ , будет иметь вид

$$\begin{aligned} f(t) &= \sum_{k=-3}^3 C_k e^{jk\omega t} = C_0 + 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 C_k e^{jk\omega t} = \\ &= 1,288 \cos(\omega t - \pi/2) + 0,470 \cos(3\omega t - \pi/2) = \\ &= 1,288 \sin \omega t + 0,470 \sin 3\omega t \end{aligned}$$

(2-я гармоника ввиду пренебрежимой малости ее амплитуды здесь опущена).

Первые два слагаемых ряда Фурье, вычисленные аналитически (с таким же округлением), имеют вид

$$f(t) = 1,273 \sin \omega t + 0,424 \sin 3\omega t.$$

## 6.2. ЧИСЛЕННЫЙ ГАРМОНИЧЕСКИЙ СИНТЕЗ ВЕЩЕСТВЕННОЙ ФУНКЦИИ

С любой требуемой точностью значение вещественной функции  $u(\xi)$  ( $\xi = \frac{2\pi}{T}t$ ), определенной на интервале  $[0, 2\pi]$ , представляется в виде суммы

$$u(\xi) = U_0 + \sum_{k=1}^n U_{mk} \left\{ \begin{array}{l} \sin \\ \cos \end{array} \right\} (k\xi + a_k).$$

Для вычисления удобно абсолютное значение аргумента синтезируемой функции  $\xi$  выразить через относительное значение ее аргумента  $x = t/T$  по формуле  $\xi = 2\pi x$  ( $0 \leq x \leq 1$ ). Тогда

$$u(x) = U_0 + \sum_{k=1}^n U_{mk} \begin{cases} \sin \\ \cos \end{cases} (2\pi kx + \alpha_k).$$

Если при гармоническом синтезе достаточно ограничиться постоянной составляющей и тремя гармониками, то удобно пользоваться программой 6.3.

*Программа 6.3. Гармонический синтез функции по постоянной составляющей и первым трем гармоникам*

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	$\Pi \rightarrow x2$	62	15	$\Pi \rightarrow x0$	60
01	X	12	16	X	12
02	$x \rightarrow \Pi 0$	40	17	$K\Pi \rightarrow x1$	G1
03	3	03	18	+	10
04	$x \rightarrow \Pi 3$	43	19	cos/sin	1Г/1С
05	1	01	20	$K\Pi \rightarrow x1$	G1
06	4	04	21	X	12
07	$x \rightarrow \Pi 1$	41	22	+	10
08	Cx	0Г	23	$L_3$	5-
09	B↑	0E	24	10	10
10	$\Pi \rightarrow x3$	63	25	$\Pi \rightarrow x7$	67
11	2	02	26	+	10
12	X	12	27	C/П	50
13	1	01	28	K БП 3	83
14	-	11			

Инструкция:

Г Р ГРД

P2: =  $2\pi$

P7: =  $U_0$

P8: =  $U_{m1}$  P9: =  $\alpha_1$

Pa: =  $U_{m2}$  Pb: =  $\alpha_2$

Pc: =  $U_{m3}$  Pd: =  $\alpha_3$

(В/О PX: = x C/П

$u(x)$ : = PX)

П р и м е ч а н и е. По адресу 19 записывается команда "cos", если переменная часть ряда Фурье представлена четными функциями, и команда "sin"— если нечетными.

**Контрольный пример.** Синтезировать вещественную функцию  $f(x)$  на интервале  $[0; 1]$  с шагом 0,1 по первым трем нечетным коэффициентам вещественного ряда Фурье.

Исходные данные:

$$\frac{a_0}{2} = 0; \quad b_1 = 4/\pi; \quad b_3 = -4/9\pi; \quad b_5 = 4/25\pi.$$

**Решение.**

**Г Р ГРД**

Так как переменная часть ряда Фурье представлена только нечетными функциями, то по адресу 19 программы записываем команду sin:

$$P2: = 2\pi$$

$$P7: = a_0/2 = 0$$

$$P8: = b_1 = 4/\pi \quad P9: = a_1 = 0$$

$$Pa: = b_3 = -4/9\pi \quad Pb: = a_3 = 0$$

$$Pc: = b_5 = 4/25\pi \quad Pd: = a_5 = 0$$

$$B/O PX: = 0 \text{ С/П}$$

$$f(0): = PX = 0$$

Время счета — приблизительно 20 с.

$$PX: = 0,1 \text{ С/П}$$

$$f(0,1): = PX = 6,1384448 \cdot 10^{-1} \text{ и т.д.}$$

Округленные результаты расчета сведены в таблицу:

$x_i$	0	0,1	0,2	0,3	0,4
Расчет $f(x_i)$	0	0,6138	1,2941	1,2941	0,6138
Точное значение $f(x_i)$	0	0,6283	1,2566	1,2566	0,6283
$x_i$	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
Расчет $f(x_i)$	0	-0,6138	-1,2941	-1,2941	-0,6158
Точное значение $f(x_i)$	0	-0,6283	-1,2566	-1,2566	-0,6283
					0

Если при гармоническом синтезе необходимо учесть большее, чем три, число гармоник, следует пользоваться программой 6.4.

#### Программа 6.4. Гармонический синтез функции по постоянной составляющей и любому числу гармоник

Адрес	Команда	Код		Адрес	Команда	Код
00	$\pi$	20		11	$\oint$	25
01	X	12		12	$\Pi \rightarrow x^4$	64
02	2	02		13	$\div$	13

*Продолжение программы 6.4*

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
03	X	12	14	$\Pi \rightarrow x_0$	60
04	$x \rightarrow \Pi_0$	40	15	+	10
05	0	00	16	$\Pi \rightarrow x_4$	64
06	$x \rightarrow \Pi_4$	44	17	X	12
07	$\Pi \rightarrow x_1$	61	18	sin/cos	1C/1Г
08	+	10	19	X	12
09	C/П	50	20	БП	51
10	$K\Pi \rightarrow x_4$	Г4	21	08	08

Инструкция:

Г Р ГРД

$P_1 := U_0$

B/O PX: = x C/П

PX =  $U_0$

PY: =  $U_{m1}$  PX: =  $\alpha_1$  (рад) C/П

PX =  $U_0 + U_{m1} \begin{Bmatrix} \sin \\ \cos \end{Bmatrix} (2\pi x + \alpha_1)$

PY: =  $U_{m2}$  PX: =  $\alpha_2$  (рад) C/П

PX =  $U_0 + \sum_{k=1}^2 U_{mk} \begin{Bmatrix} \sin \\ \cos \end{Bmatrix} (2\pi kx + \alpha_k)$

.....

PY: =  $U_{mn}$  PX: =  $\alpha_n$  (рад) C/П

PX =  $U_0 + \sum_{k=1}^n U_{mk} \begin{Bmatrix} \sin \\ \cos \end{Bmatrix} (2\pi kx + \alpha_k)$

**Контрольный пример.** Синтезировать вещественную функцию  $f(x)$  на интервале  $[0; 1]$  с шагом 0,1 по ее постоянной и первым пяти гармоническим составляющим.

Исходные данные:

$$a_0/2 = \pi^2/3; a_1 = -4; \psi_1 = 0; a_2 = 1;$$

$$\psi_2 = 0; a_3 = -4/9; \psi_3 = 0; a_4 = 1/4;$$

$$\psi_4 = 0; a_5 = -4/25; \psi_5 = 0.$$

Решение.

Г Р ГРД

Так как тригонометрический многочлен представлен только четными коэффициентами, то по адресу 18 записываем команду "cos":

$$P1 := \frac{a_0}{2} = \pi^2/3$$

$$B/O\ PX := 0\ C/\Pi$$

$$PX = \frac{a_0}{2} = 3,289868$$

Время счета — около 3 с.

$$PY := -4\ PX; = 0\ C/\Pi$$

$$PX = \frac{a_0}{2} + U_{m1} \cos 0 = -7,10132 \cdot 10^{-1}$$

Время счета — около 4 с.

$$PY := 1\ PX; = 0\ C/\Pi$$

$$PX = \frac{a_0}{2} + U_{m1} \cos 0 + U_{m2} \cos 0 = 2,89868 \cdot 10^{-1}$$

$$PY := -4/9\ PX; = 0\ C/\Pi$$

$$PX = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^3 U_{mk} \cos 0 = -1,545764 \cdot 10^{-1}$$

$$PY := 1/4\ PX; = 0\ C/\Pi$$

$$PX = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^4 U_{mk} \cos 0 = 9,542356 \cdot 10^{-2}$$

$$PY := -4/25\ PX; = 0\ C/\Pi$$

$$PX = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^5 U_{mk} \cos 0 = -6,457644 \cdot 10^{-2}$$

Ответ:  $f(0) = -0,06457644$ .

Дальнейшие вычисления производятся аналогично; округленные результаты расчета сведены в таблицу.

$x_i$	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
Расчет $f(x_i)$	$-6,458 \cdot 10^{-2}$	0,458	1,522	3,595	6,335	9,144
Точное значение $f(x_i)$	0	0,3948	1,5791	3,553	6,3165	9,8696
$x_i$	0,6	0,7	0,8	0,9	1	
Расчет $f(x_i)$	6,335	3,595	1,522	0,458	$-6,458 \cdot 10^{-2}$	
Точное значение $f(x_i)$	6,3165	3,553	1,5791	0,3948	0	

## ЧИСЛЕННЫЕ РАСЧЕТЫ ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ В ЦЕПЯХ С СОСРЕДОТОЧЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

Согласно законам теории цепей переходный процесс в электрической цепи с конечным числом сосредоточенных линейных двухполюсных элементов при  $t > 0$  описывается системой линейных обыкновенных дифференциальных уравнений при известных  $n$  начальных значениях напряжений на конденсаторах и токов через катушки\*. Эти величины называются переменными состояния цепи.

Рассмотрим алгоритм формирования "вручную" уравнений для вычисления переменных состояния — уравнений состояния.

Будем считать известными мгновенные значения токов катушек и напряжения на конденсаторах. С учетом принципа компенсации изобразим схему замещения заданной цепи для произвольного момента времени  $t > 0$ . Например, для схемы цепи, показанной на рис. 7.1, в результате описанной замены получим схему замещения, как на рис. 7.2. Затем запишем систему выражений для мгновенных значений напряжений на всех катушках и токов через все конденсаторы. В рассматриваемом случае искомые выражения, записанные по законам Кирхгофа, выглядят следующим образом:

$$L_1 \frac{di_{L1}}{dt} = u_{01} - i_{L1}R_1 - u_{C2};$$

$$C_2 \frac{du_{C2}}{dt} = i_{L1} - i_{L3};$$

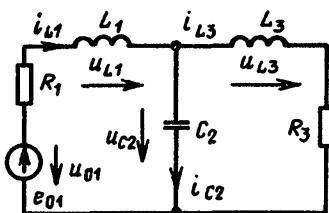


Рис. 7.1. К выводу уравнений переменных состояния

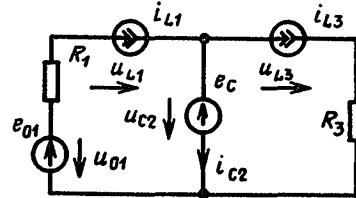


Рис. 7.2. Схема замещения (к рис. 7.1)

\*Предполагается, что в цепи нет ни одного сечения, состоящего только из катушек и источников тока, и ни одного контура, содержащего только конденсаторы и источники напряжения.

$$L_3 \frac{di_{L3}}{dt} = u_{C2} - i_{L3}R_3.$$

И, наконец, сокращая первое уравнение на  $L_1$ , второе – на  $C_2$ , а третье – на  $L_3$ , получаем систему уравнений состояния, записанную в нормальной форме (форме Коши):

$$\frac{di_{L1}}{dt} = -\frac{R_1}{L_1}i_{L1} - \frac{1}{L_1}u_{C2} + 0 + \frac{1}{L_1}u_{01};$$

$$\frac{du_{C2}}{dt} = \frac{1}{C_2}i_{L1} + 0 + \frac{1}{C_2}i_{L3};$$

$$\frac{di_{L3}}{dt} = 0 + \frac{1}{L_3}u_{C2} - \frac{R_3}{L_3}i_{L3}.$$

В общем случае уравнения такого типа могут быть записаны в матричной форме:

$$dX/dt = AX + BW,$$

где  $X$  и  $W$  – векторы переменных состояния и воздействий,  $\dim X = n \times 1$ ,  $\dim W = m \times 1$ ,  $n$  и  $m$  – число энергоемких элементов и источников соответственно;  $A$  и  $B$  – матрицы параметров цепи,  $\dim A = n \times n$ ,  $\dim B = n \times m$ .

Если известны  $X(0)$  и  $W(t)$  для любого  $t \geq 0$ , то последующие состояния цепи определяются однозначно.

Вектор  $Y(t)$  значений величин, не совпадающих с переменными состояния, находится как линейная комбинация векторов переменных состояния и воздействий:

$$Y = CX + DW.$$

Если  $k$  – число искомых величин  $y(t)$ , то

$$\dim Y = k \times 1, \dim C = k \times n, \dim D = k \times m.$$

### 7.1. ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ

ПЕРВОГО ПОРЯДКА ВИДА  $dx/dt = ax + bw$

ПРИ  $t \geq t_0$  И ЗАДАННОМ ЗНАЧЕНИИ  $x(t_0) = x_0$

Приближенные дискретные значения  $x_n$  искомой переменной при  $t_n = n\Delta t = nh$  определяются последовательно с шагом  $h = \Delta t$ , начиная от момента  $t_0$ , для которого известно  $x(t_0)$ . Искомые значения находятся по методу Рунге–Кутта второго порядка:

$$x_{n+1} = x_n + \frac{\Delta t}{2}(a_{1n} + a_{2n}),$$

где  $a_{1n} = ax_n + bw_n$ ;  $a_{2n} = a(x_n + a_{1n}\Delta t) + bw_{n+1}$ .

Тогда  $y_{n+1} = cx_{n+1} + dw_{n+1}$ .

Для решения уравнения используем программу 7.1.

**Программа 7.1. Численное решение дифференциального уравнения первого порядка**

Адресс	Команда	Код	Адресс	Команда	Код
00	В/О	52	21	ПП	53
01	$x \rightarrow \Pi 6$	46	22	42	42
02	$\leftrightarrow$	14	23	$\Pi \rightarrow xd$	6Г
03	∅	25	24	$\leftrightarrow$	14
04	$\Pi \rightarrow xc$	6C	25	X	12
05	X	12	26	Bx	0
06	+	10	27	$\Pi \rightarrow xb$	6Л
07	$\Pi \rightarrow x6$	66	28	X	12
08	L <sub>1</sub>	5L	29	$\Pi \rightarrow x6$	66
09	13	13	30	$\Pi \rightarrow xa$	6-
10	C/Π	50	31	X	12
11	$\Pi \rightarrow x0$	60	32	+	10
12	$x \rightarrow \Pi 1$	41	33	$\Pi \rightarrow x7$	67
13	ПП	53	34	X	12
14	21	21	35	2	02
15	+	10	36	÷	13
16	$x \rightarrow \Pi 6$	46	37	B↑	0E
17	$\Pi \rightarrow x8$	68	38	$\Pi \rightarrow x9$	69
18	$\Pi \rightarrow x7$	67	39	+	10
19	+	10	40	$x \rightarrow \Pi 9$	49
20	$x \rightarrow \Pi 8$	48	41	В/О	52

**Инструкция:**

w(t) → ПП 42

t := P8

{ 2 ← 5 }

.....

Pa: = a Pb: = b Pc: = c Pd: = d

P1: = 1 P2: = n + 1

P7: = Δt P8: = t<sub>0</sub> P9: = x<sub>0</sub> = x(t<sub>0</sub>)

B/O C/Π PX = x<sub>0</sub>

(C/Π x<sub>n+1</sub>: = PX y<sub>n+1</sub>: = PY t<sub>n+1</sub>: = P8)

**П р и м е ч а н и я:** 1. Программой предусмотрена возможность вычисления с пропуском  $n$  последовательных значений искомых функций. В таких случаях в регистр 0 необходимо ввести число  $n + 1$ .

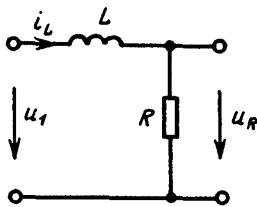


Рис. 7.3. Схема цепи к примеру 7.1

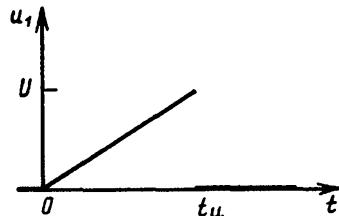


Рис. 7.4. График импульса напряжения треугольной формы

2. По завершении очередного шага вычислений можно изменить значения  $\Delta t$  и  $n$ , а также (при необходимости) и подпрограмму вычисления функции  $w(t)$  и вновь запустить программу на счет командой С/П.

3. Значение  $u_0$  вычисляется вручную.

**Пример 7.1.** Для цепи (рис. 7.3) с параметрами  $R = 1 \text{ кОм}$ ,  $L = 0,1 \text{ Гн}$  вычислить значения тока катушки  $i_L(t)$  и напряжения на резисторе  $u_R(t)$  на интервале  $[0, t_u]$  с шагом  $\Delta t_1 = 0,2t_u$  и на интервале  $[t_u, 1,5t_u]$  с шагом  $\Delta t_2 = 0,1t_u$  при действии на входе цепи импульса напряжения  $u_1(t)$  (рис. 7.4), у которого  $U = 10 \text{ В}$ ,  $t_u = 1 \text{ мс}$ .

**Р е ш е н и е.** Определим начальное значение функции  $x(0) = i_L(0)$ . По первому закону коммутации

$$i_L(0) = i_L(0-) = 0.$$

Вычислим начальное значение функции  $y(0) = u_R(0)$ . Поскольку  $i_R(t) = i_L(t)$ , то

$$u_R(0) = Ri_R(0) = Ri_L(0) = 0.$$

Для цепи на рис. 7.3 уравнение состояния при  $t \geq t_0 = 0$  имеет следующий вид:

$$\frac{di_L}{dt} = -\frac{R}{L} i_L + \frac{1}{L} u_1 = ai_L + bu_1,$$

где  $a = -R/L = -10 \cdot 10^3 \text{ 1/с}$ ;  $b = 1/L = 10 \text{ См/с}$ ;  $i_L(0) = 0$ .

Для определения  $u_R(t)$  при  $t \geq 0$  служит уравнение

$$u_R = Ri_L = ci_L + du_1;$$

здесь  $c = R = 10^3 \text{ Ом}$ ;  $d = 0$ .

Составим подпрограмму 7.1.1 вычисления значения функции воздействия

$$u_1(t) = \begin{cases} \frac{U}{t_u} t & \text{при } 0 < t \leq t_u; \\ 0 & \text{при } t > t_u. \end{cases}$$

*Подпрограмма 7.1.1*

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
42	$\Pi \rightarrow x5$	65	49	$\Pi \rightarrow x8$	68
43	$\Pi \rightarrow x8$	68	50	$\Pi \rightarrow x5$	65
44	-	11	51	$\div$	13
45	$x < 0$	5C	52	$\Pi \rightarrow x4$	64
46	49	49	53	X	12
47	Cx	0Г	54	B/O	52
48	B/O	52			

Введем в память ПМК программу 7.1 и подпрограмму 7.1.1, а также исходные данные для расчета искомых величин при  $0 < t < t_u$ :

$$P4: = 10 \quad P5: = 1 \cdot 10^{-3}$$

$$Pa: = -10^4 \quad Pb: = 10 \quad Pc: = 1000 \quad Pd: = 0 \quad P1: = 1$$

$$P0: = n = 8 * \quad P7: = \Delta t = 0,025 \cdot 10^{-3} \quad P8: = t_0 = 0$$

$$P9: = x_0 = i_{L_0} = 0$$

$$\text{B/O C/P RX} = 0$$

$$(\text{C/P } i_{L,n+1}: = \text{PX } u_{R,n+1}: = \text{PY } t_{n+1}: = \text{P8})$$

Время счета — около 3 мин.

Для расчета искомых величин при  $t > t_u$  выполним такие действия:

$$P0: = n = 4**$$

$$(\text{C/P } i_{L,n+1}: = \text{PX } u_{R,n+1}: = \text{PY } t_{n+1}: = \text{P8})$$

Время счета 1,5 мин.

Результаты вычислений  $i_L$  и  $u_R$ , округленные до четырех значащих цифр, сведены в табл. 7.1.

$$*_n = \Delta t_1 / \Delta t = \frac{0,2 \cdot 10^{-3}}{0,025 \cdot 10^{-3}} = 8.$$

$$**_n = \Delta t_2 / \Delta t = \frac{01 \cdot 10^{-3}}{0,025 \cdot 10^{-3}} = 4.$$

Таблица 7.1

$t, \text{ мс}$	$u_1(t), \text{ В}$	$i_L(t), \text{ мА}$		$u_R(t), \text{ В}$	
		Методы расчета			
		численный	аналитический	численный	аналитический
0,0	0,0	0,000	0,000	0,000	0,000
0,2	2,0	1,139	1,135	1,139	1,135
0,4	4,0	3,019	3,018	3,019	3,018
0,6	6,0	5,003	5,002	5,003	5,002
0,8	8,0	7,000	7,000	7,000	7,000
1,0	10,0	9,000	9,000	9,000	9,000
1,1	0,0	3,800	3,311	3,800	3,311
1,2	0,0	1,416	1,218	1,416	1,218
1,3	0,0	0,527	0,448	0,527	0,448
1,4	0,0	0,196	0,164	0,196	0,164
1,5	0,0	0,073	0,061	0,073	0,061

Точность вычислений можно повысить, если уменьшить  $\Delta t$  до значения  $\Delta t \ll \tau = L/R$ . Например, для  $t > t_i$  при  $\Delta t = \tau/10 = 1 \cdot 10^{-5}$ ,  $n = 10$  получим следующие результаты:

$t, \text{ мс}$	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5
$i_L(t), \text{ мА}$	3,596	1,325	0,488	0,180	0,066
$u_R(t), \text{ В}$	3,596	1,325	0,488	0,180	0,066

## 7.2. ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ СИСТЕМЫ ДВУХ ОБЫКНОВЕННЫХ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Рассмотрим линейные дифференциальные уравнения

$$dx_1/dt = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + v_1;$$

$$dx_2/dt = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + v_2,$$

где

$$v_1 = \sum_{i=1}^n b_{1i} w_i(t); \quad v_2 = \sum_{i=1}^n b_{2i} w_i(t).$$

Решение этих уравнений выполняется методом Рунге–Кутта второго порядка:

$$x_{1(n+1)} = x_{1n} + \frac{\Delta t}{2} (c_{1n} + c_{2n});$$

$$x_{2(n+1)} = x_{2n} + \frac{\Delta t}{2} (d_{1n} + d_{2n});$$

здесь  $c_{1n} = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + v_{1n}$ ;  $d_{1n} = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + v_{2n}$ ;  $c_{2n} = a_{11}(x_1 + \Delta t c_{1n}) + a_{12}(x_2 + \Delta t d_{1n}) + v_{1(n+1)}$ ;  $d_{2n} = a_{21}(x_1 + \Delta t c_{1n}) + a_{22}(x_2 + \Delta t d_{1n}) + v_{2(n+1)}$ .

Численное решение системы двух линейных дифференциальных уравнений первого порядка  $dx_1/dt = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + v_1$ ;  $dx_2/dt = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + v_2$  при  $t > t_0$  и известных значениях  $x_1(t_0)$  и  $x_2(t_0)$  осуществляется программой 7.2.

### Программа 7.2. Численное решение системы двух линейных дифференциальных уравнений первого порядка

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	В/О	52	28	+	10
01	Сх	0Г	29	$Kx \rightarrow П0$	Л0
02	6	06	30	$KП \rightarrow x0$	Г0
03	$x \rightarrow П0$	40	31	$L_0$	5Г
04	$KП \rightarrow xB\uparrow$	ГЕ	32	20	20
05	$Kx \rightarrow П0$	Л0	33	В/О	52
06	$C/P$	50	34	$PП$	53
07	$KП \rightarrow x0$	Г0	35	$56 + M$	$56 + M$
08	$L_0$	5Г	36	$P \rightarrow xc$	6C
09	04	04	37	$P \rightarrow x5$	65
10	$PП$	53	38	X	12
11	15	15	39	+	10
12	$P \rightarrow x9$	69	40	$P \rightarrow xd$	6Г
13	+	10	41	$P \rightarrow x2$	62
14	$x \rightarrow P1$	41	42	X	12
15	Сх	0Г	43	+	10
16	6	06	44	$x \rightarrow P4$	44
17	$x \rightarrow П0$	40	45	$PП$	53
18	$PП$	53	46	56	56
19	34	34	47	$P \rightarrow xa$	6-
20	$P \rightarrow x9$	69	48	$P \rightarrow x5$	65
21	X	12	49	X	12
22	2	02	50	+	10
23	÷	13	51	$P \rightarrow xb$	6L
24	$B\uparrow$	0E	52	$P \rightarrow x2$	62
25	$KП \rightarrow xB\uparrow$	ГЕ	53	X	12
26	+	10	54	+	10
27	$Kx \rightarrow PВ\uparrow$	LE	55	В/О	52

**П р и м е ч а н и е.** Вычисления значений функций  $v_1$  и  $v_2$  осуществляются за  $M$  и  $N$  шагов соответственно подпрограммами, записанными по адресам  $56 \div (55 \div M)$ ,  $(56 + M) \div (55 + M + N)$ . Примеры подпрограмм некоторых функций приведены в приложении.

Инструкция:

$$v_1(t) \rightarrow \text{ПП } 56 \quad v_2(t) \rightarrow \text{ПП } (56 + M)$$

$$t := P1$$

$$\{7, 8\}$$

.....

$$Pa = a_{11} \quad Pb = a_{12} \quad Pc = a_{21} \quad Pd = a_{22}$$

$$P9 := \Delta t$$

$$P1 := t_0 \text{ B/O}$$

$$P6 := x_1(t_0) = x_{10} \text{ C/P}$$

$$P3 := x_2(t_0) = x_{20} \text{ C/P}$$

$$(\text{C/P } x_{1(n+1)} := \text{PX} \text{ C/P } x_{2(n+1)} := \text{PX})$$

Время вычислений одной пары значений переменных состояния  $x_1$  и  $x_2$  – примерно  $\left(36 + \frac{N + M}{2}\right)$  с.

**Пример 7.2.** Найти значения напряжения на конденсаторе  $u_C(t)$  и тока  $i_L(t)$  при  $0 \leq t \leq 4$  мс с шагом  $\Delta t = 0,5$  мс для цепи со схемой на рис. 7.5, если  $R = 200$  Ом,  $L = 0,2$  Гн,  $C = 20$  мкФ,  $i_0(t) = 2 \cos 250t$  А.

**Р е ш е н и е.** Из анализа цепи находим:

a) независимые начальные условия

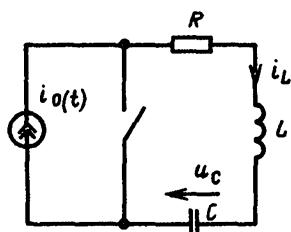
$$i_L(0) = 2 \text{ A}; \quad u_C(0) = 0;$$

б) систему уравнений состояния электрической цепи:

$$\frac{di_1}{dt} = -\frac{R}{L} i_L - \frac{1}{L} u_C + 0 = a_{11} i_L + a_{12} u_C + 0;$$

$$\frac{du_C}{dt} = \frac{1}{C} i_L + 0 + 0 = a_{21} i_L + a_{22} 0 + 0,$$

где  $a_{11} = -R/L = -10^3 \text{ с}^{-1}$ ;  $a_{12} = -1/L = -5 (\text{Ом} \cdot \text{с})^{-1}$ ;  $a_{21} = 1/C = 5 \cdot 10^4 \text{ Ом/с}$ ;  $a_{22} = 0$ .



Подпрограмма 7.2.1 вычисления функций  $v_1$  и  $v_2$  записывается по адресам 56–57 и выглядит в данном случае следующим образом:

Рис. 7.5. Схема цепи к примеру 7.2

*Подпрограмма 7.2.1*

Адрес	Команда	Код
56	Cx	0Г
57	B/O	52

**П р и м е ч а н и е.** Здесь частный случай: в послекоммутационной цепи  $RLC$  нет внешних источников ( $w_1 = 0$  и  $w_2 = 0$ ). В программе по адресу 35 следует ввести число 56:

$$Pa: = -1000 \quad Pb: = -5 \quad Pc: = 5 \cdot 10^4 \quad Pd: = 0$$

$$P9: = 0,5 \cdot 10^{-3}$$

$$P1: = 0 \quad B/O$$

$$P6: = 2 \quad C/P$$

$$P3: = 0 \quad C/P$$

$$C/P \quad x_{11} = i_L(0,5 \cdot 10^{-3}): = PX = 1,1875 \text{ (округленное значение)}$$

Время счета 36 с.

$$C/P \quad x_{21} = u_C(0,5 \cdot 10^{-3}): = PX = 37,5 \text{ (округленное значение)}$$

$$C/P \quad x_{12} = i_L(1 \cdot 10^{-3}): = PX = 0,6348$$

$$C/P \quad x_{22} = u_C(1 \cdot 10^{-3}): = PX = 58,59$$

Результаты вычислений значений  $i_L(t)$  и  $u_C(t)$  с шагом 0,5 мс для  $0 \leq t \leq 4$  мс приведены в таблице выходных данных:

$t, \text{ мс}$	0	0,5	1,0	1,5	2
$i_L, \text{ А}$	2	1,1875	0,6348	0,2670	0,0298
$u_C, \text{ В}$	0	37,50	58,59	68,66	71,53

$t, \text{ мс}$	2,5	3	3,5	4
$i_L, \text{ А}$	-0,1'164	-0,2001	-0,2416	-0,2554
$u_C, \text{ В}$	69,85	65,48	59,69	53,29

Эти величины в свою очередь могут служить входными величинами программ вычисления зависимых переменных, например  $u_L(t)$  или  $u_R(t)$ .

### 7.3. АНАЛИЗ УСТАНОВИВШЕГОСЯ ПРОЦЕССА ПРИ ВОЗДЕЙСТВИИ НА ВХОД ЦЕПИ ИСТОЧНИКОВ ПЕРИОДИЧЕСКИХ НЕСИНУСОИДАЛЬНЫХ ТОКОВ ИЛИ НАПРЯЖЕНИЙ

Пусть на вход цепи воздействуют одинаковые импульсы напряжения или тока, интервал между которыми соизмерим с постоянной времени цепи. В этом случае переходный процесс при воздействии очередного импульса возникает в момент, когда не "закончился" еще переходный процесс от предыдущего импульса, т.е. пауза между импульсами  $t_p < (4 \div 5)\tau$ , где  $\tau$  — постоянная времени цепи. В такой цепи при воздействии достаточно большого числа импульсов устанавливается некоторый режим, который и будет сейчас исследован.

Рассмотрим дифференциальное уравнение первого порядка, представленное в нормальном виде:

$$dx/dt = ax + v(t), |t| < \infty;$$

здесь  $x(t)$  — искомая непрерывная функция  $t$ ;  $v(t) = v(t+T)$  — известная периодическая функция-воздействие;  $T$  — период.

Частное (установившееся) решение заданного уравнения будет также периодической функцией того же периода  $x(t) = x(t+T)$ .

Выберем локальное время  $t'$ , начало отсчета которого совпадает с началом действия очередного импульса периодического воздействия. Тогда из условий непрерывности и периодичности функции  $x(t)$  получим  $x(0+) = x(T-)$ ;  $x(0-) = x(T+)$ . Интегрируя заданное уравнение аналитически и используя любое из этих условий, получаем искомое выражение для  $x(t)$ .

Численным путем задача решается в два этапа. Сначала определяется "начальное" значение  $x_0$  искомой функции, а затем любым численным методом — конечный набор ее значений  $x_i (i = 1, 2, \dots, n)$ ,  $n$  — число делений периода  $T$ .

Если воспользоваться методом Эйлера первого порядка, то для  $x_0$  получим следующее выражение:

$$x_0 = \frac{\sum_{i=0}^{n-1} v_i (1 + ah)^{n-1-i}}{1 - (1 + ah)^n} h,$$

где  $h = T/n$  — шаг.

Ниже приводится текст программы 7.3, в которой последовательно вычисляются сначала  $x_0$ , а затем  $x_i (i = 1, 2, \dots, n)$ .

**Программа 7.3. Вычисление установившегося значения выходной величины при воздействии периодических несинусоидальных токов и напряжений**

Адресс	Команда	Код	Адресс	Команда	Код
00	$\Pi \rightarrow x_1$	61	32	$x \rightarrow \Pi d$	4Г
01	$\Pi \rightarrow x_c$	6C	33	C/П	50
02	$x^y$	24	34	2	02
03	$x \rightarrow \Pi d$	4Г	35	$x \rightarrow \Pi 0$	40
04	Cx	0Г	36	ПП	53
05	$x \rightarrow \Pi 9$	49	37	64	64
06	ПП	53	38	$\Pi \rightarrow x_c$	6C
07	64	64	39	$\Pi \rightarrow x_a$	6-
08	$\Pi \rightarrow x_c$	6C	40	X	12
09	X	12	41	+	10
10	$x \rightarrow \Pi 0$	40	42	$\Pi \rightarrow xb$	6L
11	$\Pi \rightarrow x_9$	69	43	X	12
12	$\Pi \rightarrow xb$	6L	44	2	02
13	+	10	45	$\vdots$	13
14	$x \rightarrow \Pi 9$	49	46	$L_0$	5Г
15	ПП	53	47	52	52
16	64	64	48	$\Pi \rightarrow xd$	6Г
17	$\Pi \rightarrow x_0$	60	49	+	10
18	+	10	50	БП	51
19	$x \rightarrow \Pi 0$	40	51	31	31
20	$L_1$	5L	52	$B^\uparrow$	0Е
21	08	08	53	$\Pi \rightarrow x_c$	6C
22	1	01	54	+	10
23	$\Pi \rightarrow xd$	6Г	55	$x \rightarrow \Pi d$	4Г
24	-	11	56	+	10
25	$\div$	13	57	$x \rightarrow \Pi c$	4C
26	$\Pi \rightarrow xb$	6L	58	$\Pi \rightarrow x_9$	69
27	X	12	59	$\Pi \rightarrow xb$	6L
28	0	00	60	+	10
29	$x \rightarrow \Pi 9$	49	61	$x \rightarrow \Pi 9$	49
30	$\leftrightarrow$	14	62	БП	51
31	$x \rightarrow \Pi c$	4C	63	36	36

Инструкция:

$v(t') \rightarrow \Pi \Pi$  64

$t' := P9$

{ 2 - 8 }

.....

$Pa := a \quad Pb := h \quad Pc := a \cdot \Delta t + 1$

$P1 := n$

B/O C/П  $x_0 = x(0) := P\bar{X}$

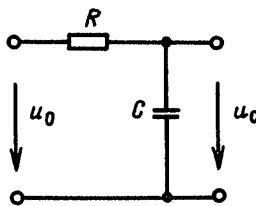


Рис. 7.6. Схема цепи к примеру 7.3

Время счета  $(8 + 4n + 3M^*)$  с.

(С/П  $x_{n+1} = \text{PX } t'_{n+1} = \text{PY}$ )

Время счета  $(15 + M)$  с.

П р и м е ч а н и е. Выбор шага  $h = \Delta t$  можно сделать из следующего соотношения:

$$T/n = \Delta t \leq |a|/m,$$

где  $m \geq 10$ .

**Пример 7.3.** Найти с шагом  $\Delta t$  установившееся значение напряжения на выходе четырехполюсника (рис. 7.6) при  $T \leq t \leq (k+1)T$ , напряжение на входе которого аппроксимируется функцией  $u_0(t)$  (рис. 7.7):

$$u_0(t) = \begin{cases} U_{m0} \sin \frac{2\pi}{T} t', & 0 \leq t' < T/2; \\ 0, & T/2 \leq t' < T, \end{cases}$$

где  $U_{m0} = 10$  В;  $T = 1$  мс.

Параметры элементов четырехполюсника:

$$R = 1000 \text{ Ом}, C = 1 \text{ мкФ}.$$

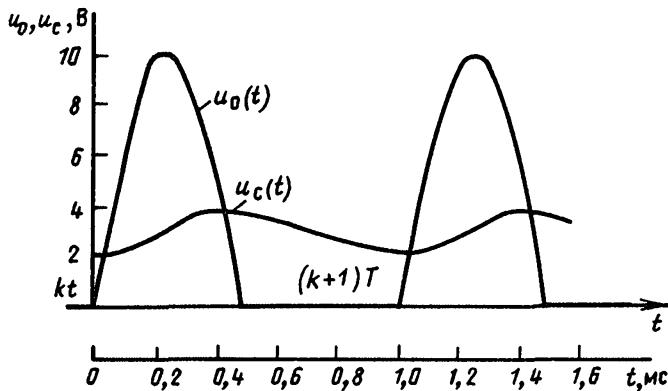


Рис. 7.7. Графики входного и выходного напряжений цепи примера 7.3

\*М – число команд подпрограммы вычисления функции  $v(t')$ .

Решение. Дифференциальное уравнение  $Ri_C + u_C = u_0$  подстановкой  $i_C = Cdu_C/dt$  приводится к виду

$$\frac{du_C}{dt} = -\frac{1}{RC} u_C + \frac{1}{RC} u_0 = au_C + v(t),$$

где  $a = -1/RC = -1000 \text{ 1/c}$ ;

$$v(t) = \frac{1}{RC} u_0(t) =$$

$$= \begin{cases} \frac{U_{m0}}{RC} \sin \frac{2\pi}{T} t' = 10^4 \sin 2\pi 10^3 t', & 0 \leq t' \leq 0,5 \cdot 10^{-3} \text{ с;} \\ 0, & 0,5 \cdot 10^{-3} < t \leq 1 \cdot 10^{-3} \text{ с.} \end{cases}$$

Выберем  $\Delta t = RC/10 = 10^{-4}$ .

Составим и введем подпрограмму 7.3.1 вычисления функции  $v(t)$ .

Подпрограмма 7.3.1

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
64	$\Pi \rightarrow x2$	62	69	$x < 0$	5C
65	$\Pi \rightarrow x3$	63	70	72	72
66	$\Pi \rightarrow x9$	69	71	Cx	0F
67	X	12	72	X	12
68	sin	1C	73	B/O	52

Г Р ГРД

$$P2: = U_{m0}/RC = 10^4 \quad P3: = 2\pi/T = 2\pi \cdot 10^3$$

$$Ra: = -1000 \quad Pb: = 10^{-4} \quad Rc: = 0,9$$

$$P1: = 10$$

В/О С/П  $u_C(0): = PX = 2,156$  (значение округленное)

Время счета — около 85 с.

С/П  $u_C(\Delta t): = PX = 2,245$  (значение округленное)

Время счета — приближенно 25 с.

Повторяя вычисления еще  $n - 1 = 10 - 1 = 9$  раз, получим следующую таблицу результатов:

$t, \text{ мс}$	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
$u_C(t), \text{ В}$	2,156	2,245	2,772	3,412	3,810	3,712

<i>t, мс</i>	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
<i>u<sub>C</sub>(t), В</i>	3,360	3,041	2,752	2,490	2,254

График  $u_C(t)$  построен на рис. 7.7. Небольшое нарушение повторяемости значений во втором периоде объясняется накоплением погрешности в микрокалькуляторе.

## *Глава восьмая*

### **ВЫЧИСЛЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ ЛИНЕЙНЫХ ЧЕТЫРЕХПОЛЮСНИКОВ**

#### **8.1. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ**

*Четырехполюсником* называется часть электрической цепи, имеющая две пары выводов, которые могут быть *входными* и *выходными*. На одной или на обеих парах разомкнутых выводов автономного (активного) четырехполюсника обнаруживается напряжение, которое может быть обозначено как напряжение холостого хода. На разомкнутых выводах неавтономного (пассивного) четырехполюсника напряжение отсутствует. Автономный и неавтономный четырехполюсники могут содержать зависимые источники энергии.

Четырехполюсник называется *симметричным*, если перемена местами входных и выходных выводов не изменяет режима работы участков цепей, присоединенных к четырехполюснику. В противном случае четырехполюсник называется *несимметричным*.

#### **8.2. ПЕРВИЧНЫЕ ПАРАМЕТРЫ ЧЕТЫРЕХПОЛЮСНИКОВ**

Между величинами  $\underline{U}_1$ ,  $\underline{I}_1$ ,  $\underline{U}_2$  и  $\underline{I}_2$  могут быть установлены простые линейные соотношения, число которых равно числу сочетаний из четырех по два, т.е. шести:

Уравнения в *Y*-параметрах (рис. 8.1):

$$\left. \begin{array}{l} \underline{I}_1 = \underline{Y}_{11}\underline{U}_1 + \underline{Y}_{12}\underline{U}_2; \\ \underline{I}_2 = \underline{Y}_{21}\underline{U}_1 + \underline{Y}_{22}\underline{U}_2, \end{array} \right\} \quad (8.1)$$

где  $\underline{Y}_{12} = \underline{Y}_{21}$ .

Уравнения в *Z*-параметрах (рис. 8.1):

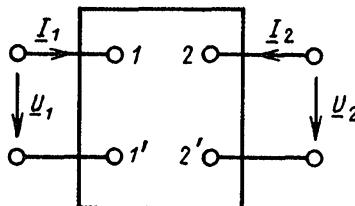


Рис. 8.1. Четырехполюсник

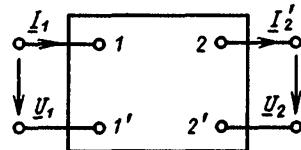


Рис. 8.2. Четырехполюсник при прямом питании

$$\left. \begin{array}{l} \underline{U}_1 = \underline{Z}_{11}\underline{I}_1 + \underline{Z}_{12}\underline{I}_2; \\ \underline{U}_2 = \underline{Z}_{21}\underline{I}_1 + \underline{Z}_{22}\underline{I}_2, \end{array} \right\} \quad (8.2)$$

причем  $\underline{Z}_{12} = \underline{Z}_{21}$ .

Уравнения в  $H$ -параметрах (рис. 8.1):

$$\left. \begin{array}{l} \underline{U}_1 = \underline{H}_{11}\underline{I}_1 + \underline{H}_{12}\underline{U}_2; \\ \underline{I}_2 = \underline{H}_{21}\underline{I}_1 + \underline{H}_{22}\underline{U}_2, \end{array} \right\} \quad (8.3)$$

где  $\underline{H}_{12} = -\underline{H}_{21}$ .

Уравнения в  $G$ -параметрах (рис. 8.1):

$$\left. \begin{array}{l} \underline{I}_1 = \underline{G}_{11}\underline{U}_1 + \underline{G}_{12}\underline{I}_2; \\ \underline{U}_2 = \underline{G}_{21}\underline{U}_1 + \underline{G}_{22}\underline{I}_2, \end{array} \right\} \quad (8.4)$$

где  $\underline{G}_{12} = -\underline{G}_{21}$ .

Уравнения в  $A$ -параметрах (рис. 8.2):

$$\left. \begin{array}{l} \underline{U}_1 = \underline{A}_{11}\underline{U}_2 + \underline{A}_{12}\underline{I}'_2 = \underline{A}\underline{U}_2 + \underline{B}\underline{I}'_2; \\ \underline{I}_1 = \underline{A}_{21}\underline{U}_2 + \underline{A}_{22}\underline{I}'_2 = \underline{C}\underline{U}_2 + \underline{D}\underline{I}'_2. \end{array} \right\} \quad (8.5)$$

Если на тот же четырехполюсник подавать питание с другой стороны, то направление потока энергии через четырехполюсник (а следовательно, и токов) изменится на противоположное (рис. 8.3). Тогда можно записать уравнения в  $B$ -параметрах:

$$\left. \begin{array}{l} \underline{U}_2 = \underline{B}_{11}\underline{U}_1 + \underline{B}_{12}\underline{I}'_1 = \underline{D}\underline{U}_1 + \underline{B}\underline{I}'_1; \\ \underline{I}_2 = \underline{B}_{21}\underline{U}_1 + \underline{B}_{22}\underline{I}'_1 = \underline{C}\underline{U}_1 + \underline{A}\underline{I}'_1. \end{array} \right\} \quad (8.6)$$

Очевидно,  $\underline{I}'_1 = -\underline{I}_1$ ,  $\underline{I}'_2 = -\underline{I}_2$ .

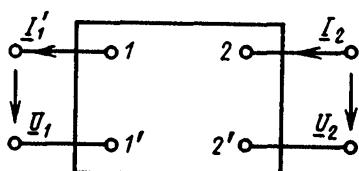


Рис. 8.3. Четырехполюсник при обратном питании

Обратим внимание, что при "обратном питании" коэффициенты  $\underline{A}$  и  $\underline{D}$  поменялись местами [ср. (8.5) и (8.6)]. Следовательно, для симметричного четырехполюсника  $\underline{A} = \underline{D}$ . Эти уравнения называют уравнениями передачи четырехполюсника.

$\underline{Y}, \underline{Z}, \underline{H}, \underline{G}, \underline{A}, \underline{B}$  – первичные параметры четырехполюсника, которые могут быть определены экспериментально или путем расчета известной схемы, и все они могут быть выражены одни через другие. Вопрос о выборе той или иной системы уравнений решается в зависимости от конкретных условий и в частности в зависимости от способа соединений простых четырехполюсников в сложные. Например, при каскадном соединении, когда на выход одного четырехполюсника включается вход последующего, удобна форма  $\underline{A}$ -параметров, в устройствах с обратной связью – форма  $\underline{H}$ -параметров и т.д.

### 8.3. ВЫЧИСЛЕНИЕ ПЕРВИЧНЫХ ПАРАМЕТРОВ

Из (8.1) непосредственно следует:

а) при  $U_2 = 0$  (короткое замыкание выводов 2–2'):

$\underline{Y}_{11} = (\underline{I}_1 / \underline{U}_1)_{U_2 = 0}$  – входная проводимость со стороны выводов 1–1' при закороченных противоположных выводах;

$\underline{Y}_{21} = (\underline{I}_2 / \underline{U}_1)_{U_2 = 0}$  – передаточная или взаимная проводимость при закороченных выводах 2–2';

б) при  $U_1 = 0$  (при "обратном питании" и при закороченных выводах 1–1'):

$\underline{Y}_{12} = (\underline{I}_1 / \underline{U}_2)_{U_1 = 0}$  – передаточная или взаимная проводимость при закороченных выводах 1–1';

$\underline{Y}_{22} = (\underline{I}_2 / \underline{U}_2)_{U_1 = 0}$  – входная проводимость при закороченных выводах 1–1'.

В этих двух режимах достаточно определить значения только трех из четырех параметров:  $\underline{Y}_{11}$ ,  $\underline{Y}_{22}$  и  $\underline{Y}_{12}$  или  $\underline{Y}_{21}$ , так как значения последних связаны соотношением  $\underline{Y}_{12} = \underline{Y}_{21}$  – "уравнением связи". Для симметричного четырехполюсника, кроме того,  $\underline{Y}_{11} = \underline{Y}_{22}$ .

Из (8.2) следует:

а) при  $I_2 = 0$  (холостой ход):

$\underline{Z}_{11} = (\underline{U}_1 / \underline{I}_1)_{I_2 = 0}$  – входное сопротивление при разомкнутых выводах 2–2';

$\underline{Z}_{21} = (\underline{U}_2 / \underline{I}_1)_{I_2 = 0}$  – передаточное или взаимное сопротивление при разомкнутых выводах 2–2';

б) при  $I_1 = 0$  (при "обратном питании" и при разомкнутых выводах 1–1'):

$\underline{Z}_{12} = (\underline{U}_1/\underline{I}_2)_{I_1=0}$  — передаточное или взаимное сопротивление при разомкнутых выводах  $I-1'$ ;

$\underline{Z}_{22} = (\underline{U}_2/\underline{I}_2)_{I_1=0}$  — выходное сопротивление при разомкнутых выводах  $I-1'$ .

Для симметричного четырехполюсника  $Z_{11} = Z_{22}$ .

Из (8.5) следует

$$\left. \begin{array}{l} \underline{A}_{11} = \underline{A} = (\underline{U}_1/\underline{U}_2)_{I_2=0}; \quad \underline{A}_{12} = \underline{B} = (\underline{U}_1/\underline{I}'_2)_{U_2=0}; \\ \underline{A}_{21} = \underline{C} = (\underline{I}_1/\underline{U}_2)_{I_2=0}; \quad \underline{A}_{22} = \underline{D} = (\underline{I}_1/\underline{I}'_2)_{U_2=0}. \end{array} \right\} \quad (8.7)$$

Определитель матрицы  $\underline{A}$ -параметров образует "уравнение связи"

$$\underline{A}_{11}\underline{A}_{22} - \underline{A}_{12}\underline{A}_{21} = 1 \text{ или } \underline{AD} - \underline{BC} = 1; \quad (8.8)$$

для симметричного четырехполюсника  $\underline{A}_{11} = \underline{A}_{22}$  или  $\underline{A} = \underline{D}$ .

Системы  $\underline{A}$ - и  $\underline{B}$ -параметров являются обобщенными, удобными для анализа различных четырехполюсников (фильтров, каскадных соединений, линий с распределенными параметрами). В этих системах удобно записываются входные и выходные сопротивления нагруженного четырехполюсника, а также четырехполюсников с разомкнутыми или короткозамкнутыми выводами.

При прямом питании для пассивной нагрузки ( $\underline{U}_2 = \underline{Z}_{2H}\underline{I}'_2$  или  $\underline{I}'_2 = \underline{Y}_{2H}\underline{U}_2$ )

$$\underline{Z}_1 = \frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_1} = \frac{\underline{A}\underline{Z}_{2H} + \underline{B}}{\underline{C}\underline{Z}_{2H} + \underline{D}} = \frac{\underline{A} + \underline{B}\underline{Y}_{2H}}{\underline{C} + \underline{D}\underline{Y}_{2H}}, \quad (8.9)$$

откуда при  $\underline{Z}_{2H} = 0$  и  $\underline{Y}_{2H} = 0$  имеем соответственно

$$\underline{Z}_{1K} = \underline{B}/\underline{D} \text{ и } \underline{Z}_{1X} = \underline{A}/\underline{C}, \quad (8.10)$$

где индексы  $K$  и  $X$  соответствуют режимам короткого замыкания и холостого хода на выходных выводах.

Из (8.6) следует

$$\left. \begin{array}{l} \underline{B}_{11} = \underline{D} = (\underline{U}_2/\underline{U}_1)_{I_1=0}; \quad \underline{B}_{12} = \underline{B} = (\underline{U}_2/\underline{I}'_1)_{U_1=0}; \\ \underline{B}_{21} = \underline{C} = (\underline{I}_2/\underline{U}_1)_{I_1=0}; \quad \underline{B}_{22} = \underline{A} = (\underline{I}_2/\underline{I}'_1)_{U_1=0}. \end{array} \right\} \quad (8.11)$$

При  $\underline{U}_1 = \underline{Z}_{1H}\underline{I}'_1$  или  $\underline{I}'_1 = \underline{Y}_{1H}\underline{U}_1$

$$\underline{Z}_2 = \frac{\underline{U}_2}{\underline{I}_2} = \frac{\underline{D}\underline{Z}_{1H} + \underline{B}}{\underline{C}\underline{Z}_{1H} + \underline{A}} = \frac{\underline{D} + \underline{B}\underline{Y}_{1H}}{\underline{C} + \underline{A}\underline{Y}_{1H}}, \quad (8.12)$$

откуда при  $\underline{Z}_{1H} = 0$  и  $\underline{Y}_{1H} = 0$  имеем

$$\underline{Z}_{2x} = \underline{B}_{11}/\underline{B}_{21} = \underline{D}/\underline{C}; \quad \underline{Z}_{2k} = \underline{B}_{12}/\underline{B}_{22} = \underline{B}/\underline{A}. \quad (8.13)$$

Если провести опыты "прямого" и "обратного" питания и определить  $\underline{Z}_{1x}$ ,  $\underline{Z}_{2x}$ ,  $\underline{Z}_{2k}$ , то из (8.8), (8.10) и (8.13)

$$\underline{A} = \sqrt{\underline{Z}_{1x}/(\underline{Z}_{2x} - \underline{Z}_{2k})}. \quad (8.14)$$

Выражения (8.10), (8.13) и (8.14) позволяют опытным или расчетным (при известной схеме четырехполюсника) путем определить  $\underline{A}$ - и  $\underline{B}$ -параметры [кроме возможности определить их из (8.7) и (8.11)].

Из (8.3) находим

$$\underline{H}_{11} = (\underline{U}_1/\underline{I}_1)_{U_2=0}; \quad \underline{H}_{12} = (\underline{U}_1/\underline{U}_2)_{I_1=0};$$

$$\underline{H}_{21} = (\underline{I}_2/\underline{I}_1)_{U_2=0}; \quad \underline{H}_{22} = (\underline{I}_2/\underline{U}_2)_{I_1=0}.$$

Из (8.4) получаем

$$\underline{G}_{11} = (\underline{I}_1/\underline{U}_1)_{I_2=0}; \quad \underline{G}_{12} = (\underline{I}_1/\underline{I}_2)_{U_1=0};$$

$$\underline{G}_{21} = (\underline{U}_2/\underline{U}_1)_{I_2=0}; \quad \underline{G}_{22} = (\underline{U}_2/\underline{I}_2)_{U_1=0}.$$

#### 8.4. ВТОРИЧНЫЕ (ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИЕ) ПАРАМЕТРЫ И ИХ ВЫЧИСЛЕНИЕ

К вторичным параметрам четырехполюсника относятся два характеристических сопротивления и мера передачи. Если четырехполюсник нагружен на сопротивление, равное характеристическому  $\underline{Z}_2 = \underline{Z}_{2c}$ , то его входное сопротивление будет характеристическим  $\underline{Z}_{1c}$ ; если на входные выводы четырехполюсника включено сопротивление  $\underline{Z}_1 = \underline{Z}_{1c}$ , то его выходное сопротивление будет характеристическим  $\underline{Z}_{2c}$ . Указанным двум условиям отвечают сопротивления

$$\underline{Z}_{1c} = \sqrt{\underline{A}_{11}\underline{A}_{12}/(\underline{A}_{21}\underline{A}_{22})} = \sqrt{\underline{AB}/(\underline{CD})} = \sqrt{\underline{Z}_{1x}\underline{Z}_{1k}};$$

$$\underline{Z}_{2c} = \sqrt{\underline{B}_{11}\underline{B}_{12}/(\underline{B}_{21}\underline{B}_{22})} = \sqrt{\underline{DB}/(\underline{CA})} = \sqrt{\underline{Z}_{2x}\underline{Z}_{2k}}.$$

Очевидно, что для симметричных четырехполюсников, поскольку  $\underline{A} = \underline{D}$ , имеем  $\underline{Z}_{1c} = \underline{Z}_{2c} = \underline{Z}_c$ .

Сопротивление  $\underline{Z}_c$  иногда называют повторным, так как при согласованной нагрузке входное сопротивление четырехполюсника "повторяет" нагрузочное сопротивление.

Мерой или характеристической постоянной передачи называется комплексное число

$$\underline{\Gamma} = \underline{A} + j\underline{B}, \quad (8.15)$$

вещественная часть которого  $A$  называется постоянной ослабления, мнимая  $B$  — постоянной фазы (не путать с первичными параметрами четырехполюсника  $\underline{A}$  и  $\underline{B}$ ).

Мера передачи определяется при согласованной нагрузке из соотношения

$$\frac{\underline{U}_1 \underline{I}_1}{\underline{U}_2 \underline{I}'_2} = (\sqrt{\underline{AD}} + \sqrt{\underline{BC}})^2 = e^{2\underline{\Gamma}},$$

откуда

$$\begin{aligned} \underline{\Gamma} &= \frac{1}{2} \ln \frac{\underline{U}_1 \underline{I}_1}{\underline{U}_2 \underline{I}'_2} = \frac{1}{2} \ln \left[ \frac{\underline{U}_1 \underline{I}_1}{\underline{U}_2 \underline{I}'_2} e^{j[(\psi_{u1} - \psi_{u2}) + (\psi_{i1} - \psi_{i2})]} \right] = \\ &= \frac{1}{2} \ln \frac{S_1}{S_2} + j \frac{1}{2} [(\psi_{u1} - \psi_{u2}) + (\psi_{i1} - \psi_{i2})]. \end{aligned} \quad (8.16)$$

Сравнение (8.16) с (8.15) дает

$$A = \frac{1}{2} \ln \frac{S_1}{S_2} = \frac{1}{2} \ln \frac{\underline{U}_1 \underline{I}_1}{\underline{U}_2 \underline{I}'_2};$$

$$B = \frac{1}{2} [(\psi_{u1} - \psi_{u2}) + (\psi_{i1} - \psi_{i2})],$$

где величина  $A$  измеряется в неперах (Нп);  $B$  — в радианах (рад). Для симметричного четырехполюсника

$$\frac{\underline{U}_1}{\underline{U}_2} = \frac{\underline{I}_1}{\underline{I}'_2} = e^{\underline{\Gamma}} = e^A e^{jB}; \quad A = \ln \frac{\underline{U}_1}{\underline{U}_2} = \ln \frac{\underline{I}_1}{\underline{I}'_2};$$

$$B = \psi_{u1} - \psi_{u2} = \psi_{i1} - \psi_{i2}.$$

В технике связи ослабление измеряется в белах (Б) или децибелах (дБ), причем  $1 \text{ Нп} = 0,868 \text{ Б} = 8,686 \text{ дБ}$ ;  $1 \text{ дБ} = 0,115 \text{ Нп}$ ;  $1 \text{ Б} = 10 \text{ дБ}$ .

Ослабление, дБ,

$$A = 10 \lg \frac{S_1}{S_2} = 10 \lg \frac{\underline{U}_1 \underline{I}_1}{\underline{U}_2 \underline{I}'_2} = 10 \lg \frac{Z_{1c} I_1^2}{Z_{2c} I_2^2}.$$

Для симметричного четырехполюсника ослабление, дБ,

$$A = 20 \lg \frac{\underline{U}_1}{\underline{U}_2} = 20 \lg \frac{\underline{I}_1}{\underline{I}'_2}.$$

Для вычисления меры передачи и ее составляющих используются либо выражения через первичные параметры

$$e^{\underline{\Gamma}} = \sqrt{\underline{AD}} + \sqrt{\underline{BC}};$$

$$\operatorname{ch} \underline{\Gamma} = \sqrt{\underline{AD}},$$

либо ее выражения через параметры холостого хода и короткого замыкания

$$\underline{\Gamma} = A + jB = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + \operatorname{th} \underline{\Gamma}}{1 - \operatorname{th} \underline{\Gamma}},$$

причем

$$\operatorname{th} \underline{\Gamma} = \sqrt{\underline{Z}_{1\kappa}/\underline{Z}_{1x}}.$$

Уравнения четырехполюсников, выраженные через характеристические (вторичные) параметры, выглядят следующим образом:

$$\underline{U}_1 = \underline{m}(\underline{U}_2 \operatorname{ch} \underline{\Gamma} + \underline{Z}_{2c} \underline{I}_2 \operatorname{sh} \underline{\Gamma});$$

$$\underline{I}_1 = \frac{1}{\underline{m}} \left( \frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_{2c}} \operatorname{sh} \underline{\Gamma} + \underline{I}_2 \operatorname{ch} \underline{\Gamma} \right),$$

где  $\underline{m} = \sqrt{\underline{Z}_{1c}/\underline{Z}_{1x}} = \sqrt{\underline{A}/\underline{D}}$  – коэффициент трансформации. Очевидно, что для симметричного четырехполюсника  $\underline{m} = 1$ .

Вычисление значений гиперболических косинуса и синуса комплексного аргумента

$$\operatorname{ch}(A + jB) = \operatorname{ch} A \cos B + j \operatorname{sh} A \sin B = r + jq;$$

$$\operatorname{sh}(A + jB) = \operatorname{sh} A \cos B + j \operatorname{ch} A \sin B = r + jq.$$

осуществляется программой 8.1.

#### Программа 8.1. Вычисление значений гиперболических косинуса и синуса комплексного аргумента

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	$x \rightarrow \Pi d$	4Г	15	$\Pi \rightarrow xd$	6Г
01	$\sin$	1С	16	$\cos$	1Г
02	$\leftrightarrow$	14	17	$\Pi \rightarrow xc$	6С
03	$e^x$	16	18	$\operatorname{tg}$	1Е
04	$1/x$	23	19	$\operatorname{БП}$	51
05	$\operatorname{tg}^{-1}$	1Л	20	$\operatorname{28}$	28
06	2	02	21	$\emptyset$	25
07	X	12	22	$\operatorname{tg}$	1Е
08	$x \rightarrow \Pi c$	4С	23	$\div$	13
09	$\Pi \rightarrow x0$	60	24	$\Pi \rightarrow xd$	6Г
10	$x = 0$	5Е	25	$\cos$	1Г

*Продолжение программы 8.1*

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
11	21	21	26	$\Pi \rightarrow xc$	6C
12	Q	25	27	sin	1C
13	sin	1C	28	$\div$	13
14	$\div$	13	29	C/P	50

Инструкция:

Г Р ГРД (В/О

$$PO := \begin{cases} 0 & \text{для вычисления } sh(A + jB) \\ 1 & \text{для вычисления } ch(A + jB) \end{cases}$$

PY: = A PX: = B B/O C/P

r: = PX q: = PY)

Пример 8.1. Вычислить:

$$1) sh(0,65 + j1,334) = 0,163 + j1,185;$$

$$2) ch(0,65 + j1,334) = 0,286 + j0,677 \text{ (значения функций округлены)}$$

Время счета 15 с.

Вычисление значений гиперболического тангенса комплексного аргумента

$$th(A + jB) = \frac{sh 2A}{ch 2A + \cos 2B} + j \frac{\sin 2B}{ch 2A + \cos 2B} = r + jq.$$

осуществляется программой 8.2

*Программа 8.2. Вычисление значений гиперболического тангенса комплексного аргумента*

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	B↑	0E	13	$\div$	13
01	2	02	14	$x \rightarrow \Pi 2$	42
02	X	12	15	-	11
03	$x \rightarrow \Pi 1$	41	16	$\Pi \rightarrow x1$	61
04	sin	1C	17	cos	1Г
05	$\leftrightarrow$	14	18	+	10
06	$e^x$	16	19	$x \rightarrow \Pi 1$	41
07	$x^2$	22	20	$\div$	13
08	B↑	0E	21	$\Pi \rightarrow x2$	62
09	B↑	0E	22	$\Pi \rightarrow x1$	61
10	$1/x$	23	23	$\div$	13
11	-	11	24	C/P	50
12	2	02			

Инструкция: Г Р ГРД

В/О

$PY := A \cdot PX := B \cdot C/P$   
 $r := PX; q := PY$

Пример 8.2. Вычислить  $\operatorname{th}(0,65 + j1,334)$ .

$PY := 0,65 \cdot PX := 1,334 \text{ В/О С/П}$

Ответ:  $1,571 + j0,422$ .

Вычисление обратного гиперболического тангенса комплексного аргумента (вычисление характеристической постоянной передачи)

$$\underline{\Gamma} = A + jB = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + \operatorname{th} \underline{\Gamma}}{1 - \operatorname{th} \underline{\Gamma}},$$

где  $\operatorname{th} \underline{\Gamma} = \sqrt{\underline{Z}_{1x}/\underline{Z}'_{1x}} = R e^{j\rho}$ , а аргумент  $\rho$  может выражаться как в радианах, так и в градусах, осуществляется программой 8.3.

Программа 8.3. Вычисление обратного гиперболического тангенса комплексного аргумента

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	$x \rightarrow \Pi a$	4-	28	$x^2$	22
01	$\sin$	1C	29	+	10
02	$\leftrightarrow$	14	30	$\sqrt{\quad}$	21
03	X	12	31	$\Pi \rightarrow x5$	65
04	$x \rightarrow \Pi 1$	41	32	$\leftrightarrow$	14
05	$\Pi \rightarrow xa$	6-	33	$\div$	13
06	Bx	0	34	$\ln$	18
07	$\Pi \rightarrow xa$	6-	35	2	02
08	$\cos$	1Г	36	$\div$	13
09	X	12	37	$x \rightarrow \Pi c$	4C
10	$x \rightarrow \Pi 2$	42	38	$\Pi \rightarrow x1$	61
11	1	01	39	$\Pi \rightarrow x3$	63
12	+	10	40	$\div$	13
13	$x \rightarrow \Pi 3$	43	41	$\operatorname{tg}^{-1}$	1L
14	$/-$	0L	42	$x \rightarrow \Pi 6$	46
15	2	02	43	$\Pi \rightarrow x1$	61
16	+	10	44	$/-$	0L
17	$x \rightarrow \Pi 4$	44	45	$\Pi \rightarrow x4$	64
18	$\Pi \rightarrow x3$	63	46	$\div$	13
19	$x^2$	22	47	$\operatorname{tg}^{-1}$	1L
20	$\Pi \rightarrow x1$	61	48	$\Pi \rightarrow x6$	66
21	$x^2$	22	49	-	11
22	+	10	50	$/-$	0L
23	$\sqrt{\quad}$	21	51	2	02
24	$x \rightarrow \Pi 5$	45	52	$\div$	13
25	$\Pi \rightarrow x4$	64	53	$\Pi \rightarrow xc$	6C
26	$x^2$	22	54	C/П	50
27	$\Pi \rightarrow x1$	61			

Инструкция:

Г Р ГРД или Г Р ГРД

В/О

PY: = R PX: = ρ С/П

A: = PX; B: = PY

Пример 8.3. Вычислить  $\Gamma = A + jB$ , если  $\text{th} \underline{\Gamma} = 1 e^{-j1,1}$  (угол в радианах).

PY: = 1; PX: = -1,1 В/О С/П

Ответ:  $A = 0,2446$  Нп;  $B = -0,785$  рад (или  $B = -45^\circ$ ).

Вычисление обратного гиперболического косинуса вещественного аргумента, если известно, что  $\text{ch} A = R$  и  $A = \ln(R + \sqrt{R^2 - 1})$  для  $\text{ch} A > 1$ , осуществляется программой 8.4.

*Программа 8.4. Вычисление обратного гиперболического косинуса вещественного аргумента*

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	V↑	0E	04	√	21
01	x <sup>2</sup>	22	05	+	10
02	1	01	06	ln	18
03	-	11	07	C/П	50

Инструкция:

Г Р ГРД или Г Р ГРД

В/О

PX: = ch A = R С/П

A: = PX

Пример 8.4. Вычислить  $A$ , если  $\text{ch} A = 17$ .

17: = PX В/О С/П

Ответ:  $A = 3,525$ .

## Глава девятая

### ЦЕПИ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ ("ДЛИННЫЕ ЛИНИИ")

#### 9.1. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ И УРАВНЕНИЯ

Электрическая цепь, в которой электрические сопротивления, проводимости, индуктивности и электрические емкости распределены вдоль цепи, называется цепью с распределенными параметрами. Реаль-

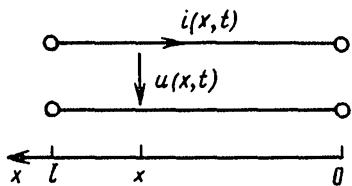


Рис. 9.1. Схематическое изображение отрезка однородной линии

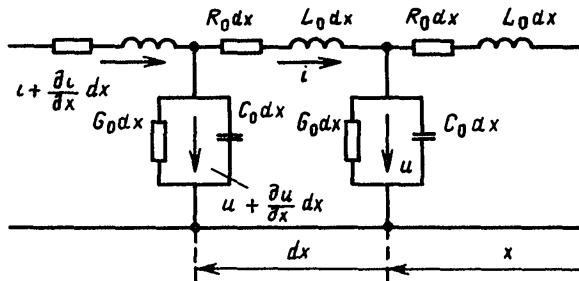


Рис. 9.2. Т-образная схема замещения участка однородной линии длиной  $dx$

ными прототипами таких цепей являются двухпроводные линии, коаксиальные кабели, полосковые линии и т.п., а схемой замещения – каскадное соединение четырехполюсников. Если параметры цепи распределены вдоль основной координаты равномерно, то такая "длинная" (сравнительно с длиной электромагнитной волны) линия называется однородной.

Расчетная модель однородной линии представлена на рис. 9.1, где два параллельных проводника разделены диэлектриком. Далее предполагается, что размеры и форма проводников, а также электрические и магнитные свойства материалов проводника и диэлектрика учтены в заданных погонных, т.е. приходящихся на единицу длины, параметрах:  $R_0$  – погонном сопротивлении;  $L_0$  – погонной индуктивности;  $G_0$  – погонной проводимости утечки и  $C_0$  – погонной емкости.

Если на расстоянии  $x$  от конца однородной линии общей длиной  $l$  выделить какой-либо короткий участок длиной  $dx$  (рис. 9.2), то, предполагая, что размеры этого участка несопоставимо малы по сравнению с длиной электромагнитной волны, возбуждаемой источником в начале линии, параметры этого участка ( $R_0 dx$ ,  $L_0 dx$ ,  $G_0 dx$  и  $C_0 dx$ ) можно полагать сосредоточенными. Тогда на основании законов Кирхгофа, составленных для выделенного участка, можно получить дифференциальные уравнения для напряжений и токов  $u(x, t)$  и  $i(x, t)$ , являющихся функциями времени и расстояния:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial x} = R_0 i + L_0 \frac{\partial i}{\partial t}; \\ \frac{\partial i}{\partial x} = G_0 u + C_0 \frac{\partial u}{\partial t}. \end{array} \right\} \quad (9.1)$$

Решение этой системы уравнений, получивших название телеграфных, отыскивается с учетом начальных и граничных условий. Далее будет рассматриваться только установившийся режим работы линии, граничные условия для которой устанавливаются функциональными зависимостями между током и напряжением в начале ( $x = l$ ) и в конце ( $x = 0$ ) линии.

## 9.2. ТЕЛЕГРАФНЫЕ УРАВНЕНИЯ В СИМВОЛИЧЕСКОЙ ФОРМЕ

При гармонических воздействиях анализ работы длинных линий (как и цепей с сосредоточенными параметрами) существенно упрощается, если применить символический принцип (принцип комплексных амплитуд). При этом исчезает зависимость от времени и телеграфные уравнения, содержащие частные производные, превращаются в систему обыкновенных линейных дифференциальных уравнений.

Действительно, введем в (9.1) вместо функций  $u(x, t)$  и  $i(x, t)$  комплексы мгновенных значений этих величин:

$$\underline{u}(x, t) = \sqrt{2} \underline{U}(x) e^{j\omega t};$$

$$\underline{i}(x, t) = \sqrt{2} \underline{I}(x) e^{j\omega t},$$

тогда (9.1) преобразуется в следующую систему уравнений:

$$d\underline{U}/dx = (R_0 + j\omega L_0) \underline{I} = \underline{Z}_0 \underline{I}; \quad (9.2)$$

$$d\underline{I}/dx = (G_0 + j\omega C_0) \underline{U} = \underline{Y}_0 \underline{U}, \quad (9.3)$$

где  $\underline{Z}_0 = R_0 + j\omega L_0$  – продольное комплексное погонное сопротивление;  $\underline{Y}_0 = G_0 + j\omega C_0$  – поперечная комплексная погонная проводимость.

Дифференцируя (9.2) и (9.3) по  $x$  и подставляя одно уравнение в другое, получаем

$$d^2 \underline{U}/dx^2 - \underline{\gamma}^2 \underline{U} = 0; \quad (9.4)$$

$$d^2 \underline{I}/dx^2 - \underline{\gamma}^2 \underline{I} = 0, \quad (9.5)$$

где

$$\underline{\gamma} = \alpha(\omega) + j\beta(\omega) = \sqrt{\underline{Z}_0 \underline{Y}_0} \quad (9.6)$$

называется коэффициентом распространения на единицу длины линии, а его вещественная часть  $\alpha$  – собственным затуханием (ослаблением) и мнимая часть  $\beta$  – коэффициентом фазы.

Для определенности условимся в дальнейшем понимать под  $\gamma$  то его значение, аргумент которого не выходит за пределы

$$0 < \arg \underline{\gamma} \leq \pi/2.$$

### 9.3. РЕШЕНИЯ ТЕЛЕГРАФНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫХ ФУНКЦИЯХ

Общие решения уравнений (9.4), (9.5) можно записать в виде суммы двух экспоненциальных функций:

$$\underline{U}(x) = \underline{U}_n e^{\underline{\gamma}x} + \underline{U}_0 e^{-\underline{\gamma}x}; \quad (9.7)$$

$$\underline{I}(x) = \underline{I}_n e^{\underline{\gamma}x} - \underline{I}_0 e^{-\underline{\gamma}x}. \quad (9.8)$$

Здесь постоянные интегрирования  $\underline{U}_n$  и  $\underline{I}_n$ ,  $\underline{U}_0$  и  $\underline{I}_0$  связаны следующими соотношениями:

$$\underline{U}_n = Z_B \underline{I}_n; \quad \underline{U}_0 = Z_B \underline{I}_0,$$

где

$$Z_B = \sqrt{Z_0/Y_0} \quad (9.9)$$

– волновое (характеристическое) сопротивление однородной линии. Из двух значений  $Z_B$  надо взять то, для которого

$$0 < |\arg Z_B| \leq \pi/4 \text{ или } \operatorname{Re} Z_B \geq 0.$$

Слагаемые в правых частях (9.7), (9.8) можно рассматривать как составляющие комплексов действующих значений напряжения и тока в сечении отрезка линии с координатой  $x$ . Нетрудно установить физический смысл полученных решений, если перейти к мгновенным значениям  $u(x, t)$  и  $i(x, t)$ . Действительно, исходя, например, из выражения (9.7) и учитывая, что постоянные интегрирования  $\underline{U}_n$  и  $\underline{U}_0$  – комплексные числа:

$$\underline{U}_n = U_n e^{j\psi_{un}}; \quad \underline{U}_0 = U_0 e^{j\psi_{u0}},$$

получаем

$$u(x, t) = \operatorname{Re} \underline{u}(x, t) = \operatorname{Re} \sqrt{2} \underline{U}(x) e^{j\omega t} = \operatorname{Re} \sqrt{2} (\underline{U}_n e^{\underline{\gamma}x} +$$

$$+ \underline{U}_0 e^{-\gamma x}) e^{j\omega t} = \sqrt{2} U_{\pi} e^{\alpha x} \cos(\omega t + \beta x + \psi_{u\pi}) + \\ + \sqrt{2} U_0 e^{-\alpha x} \cos(\omega t - \beta x + \psi_{u0}).$$

Первое слагаемое выражения

$$u_{\pi}(x, t) = \sqrt{2} U_{\pi} e^{\alpha x} \cos(\omega t + \beta x + \psi_{u\pi})$$

представляет собой уравнение гармонической волны, затухающей по мере удаления от начала отрезка линии.

С течением времени волна перемещается по линии. Фазовая скорость волны  $v_{\phi}$  определяется как скорость перемещения точки, фаза колебаний в которой  $\Phi_{\pi}(x, t) = \omega t + \beta x + \psi_{u\pi}$  остается неизменной. Из условия постоянства фазы волны

$$d\Phi_{\pi}(x, t) = \frac{\partial \Phi_{\pi}}{\partial x} dx + \frac{\partial \Phi_{\pi}}{\partial t} dt = \beta dx + \omega dt = 0$$

следует, что волна  $u_{\pi}(x, t)$  перемещается со скоростью

$$v_{\phi} = dx/dt = -\omega/\beta$$

в направлении, противоположном положительному направлению оси  $x$  (знак минус!), т.е. к концу отрезка. Эта волна называется прямой.

Аналогичный анализ второго слагаемого

$$u_0(x, t) = \sqrt{2} U_0 e^{-\alpha x} \cos(\omega t - \beta x + \psi_{u0})$$

показывает, что оно представляет собой также бегущую волну, но распространяющуюся от нагрузки к источнику с той же скоростью  $v_{\phi}$ . Амплитуда этой волны, называемой обратной, убывает от конца отрезка линии к его началу.

Итак, мгновенное напряжение  $u(x, t)$  в отрезке линии можно представить как сумму двух волн, движущихся с одинаковой скоростью в противоположных направлениях, причем каждая из этих волн одинаково затухает в направлении своего движения.

Точно так же можно показать, что при указанных на рис. 9.1 положительных направлениях мгновенное значение тока  $i(x, t)$  есть разность прямой  $i_{\pi}(x, t)$  и обратной  $i_0(x, t)$  затухающих волн тока, движущихся со скоростью  $v_{\phi} = \omega/\beta$  навстречу друг другу.

Возвращаясь к уравнениям отрезка однородной линии в экспоненциальных функциях (9.7) – (9.8), отметим, что постоянные интегрирования  $\underline{U}_{\pi}$  и  $\underline{U}_0$  (или  $\underline{I}_{\pi}$  и  $\underline{I}_0$ ) можно выразить через любую пару из четверки величин  $\underline{U}_1$ ,  $\underline{I}_1$ ,  $\underline{U}_2$  и  $\underline{I}_2$ . Возможное число различных по фор-

ме, но по существу эквивалентных пар уравнений для  $\underline{U}(x)$  и  $\underline{I}(x)$ , получающихся при этом, равно шести (число сочетаний из четырех по два).

#### 9.4. РЕШЕНИЯ ТЕЛЕГРАФНЫХ УРАВНЕНИЙ В ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ ФУНКЦИЯХ

Общие решения уравнений (9.7), (9.8) могут быть записаны также в виде линейной комбинации гиперболических функций  $\text{sh } \gamma x$  и  $\text{ch } \gamma x$ , например

$$\underline{U}(x) = \underline{A}_1 \text{ch } \gamma x + \underline{A}_2 \text{sh } \gamma x.$$

Для уменьшения числа постоянных интегрирования найдем  $\underline{I}(x)$  прямо из уравнения (9.2) :

$$\underline{I}(x) = \frac{1}{Z_B} (\underline{A}_1 \text{sh } \gamma x + \underline{A}_2 \text{ch } \gamma x).$$

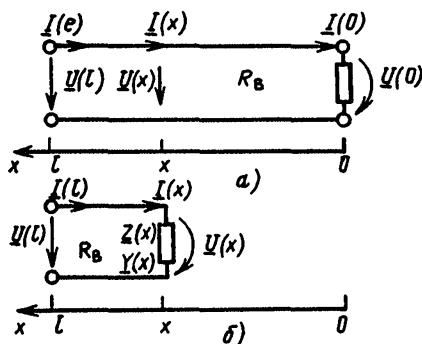
Выразим  $\underline{U}(x)$  и  $\underline{I}(x)$  через  $\underline{U}_2 = \underline{U}(0)$  и  $\underline{I}_2 = \underline{I}(0)$  :

$$\left. \begin{aligned} \underline{U}(x) &= \underline{U}_2 \text{ch } \gamma x + \frac{Z_B}{\underline{Z}} \underline{I}_2 \text{sh } \gamma x; \\ \underline{I}(x) &= \frac{1}{Z_B} \underline{U}_2 \text{sh } \gamma x + \underline{I}_2 \text{ch } \gamma x. \end{aligned} \right\} \quad (9.10)$$

Связь между  $\underline{U}_2$  и  $\underline{I}_2$  определяется граничным условием на конце отрезка линии. Если, например, в конце отрезка линии включен пассивный двухполюсник с сопротивлением  $Z_2$  (проводимостью  $\underline{Y}_2$ ), то указанная связь дается законом Ома:

$$\underline{U}_2 = Z_2 \underline{I}_2 \text{ или } \underline{I}_2 = \underline{Y}_2 \underline{U}_2.$$

Участок однородной линии вместе с пассивной нагрузкой справа от сечения с координатой  $x$  (рис. 9.3, а) можно заменить пассивным двухполюсником с сосредоточенными элементами (рис. 9.3, б), причем напряжения и токи в оставшейся части отрезка линии и источнике не изменяются, если сопротивление участка вычислить по формуле



последовательно с  $R_B$  и  $\underline{Y}(x)$ . Тогда эквивалентное сопротивление участка  $\underline{Z}(x)$  определяется по формуле

Рис. 9.3. К определению эквивалентного сопротивления (проводимости) участка линии

$$\underline{Z}(x) = \frac{\underline{U}(x)}{\underline{I}(x)} = \underline{Z}_B \frac{\underline{Z}_2 \operatorname{ch} \underline{\gamma}x + \underline{Z}_B \operatorname{sh} \underline{\gamma}x}{\underline{Z}_2 \operatorname{sh} \underline{\gamma}x + \underline{Z}_B \operatorname{ch} \underline{\gamma}x} = \underline{Z}_B \frac{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_B \operatorname{th} \underline{\gamma}x}{\underline{Z}_B + \underline{Z}_2 \operatorname{th} \underline{\gamma}x},$$

Величина

$$Y(x) = \underline{I}(x)/\underline{U}(x) = \underline{Z}^{-1}(x)$$

называется проводимостью участка линии.

При  $\alpha \neq 0$  и неограниченном возрастании длины участка его сопротивление стремится к волновому:

$$\lim_{\alpha x \rightarrow \infty} \underline{Z}(x) = \underline{Z}_B.$$

При  $\underline{Z}_2 = \underline{Z}_B$  получается  $\underline{Z}(x) = \underline{Z}_B$ , т.е. если сопротивление нагрузки равно волновому, то и в любом сечении отрезка сопротивление равно волновому сопротивлению линии. Такая нагрузка называется согласованной, а режим работы — согласованным режимом отрезка линии. Уравнения согласования нагруженного отрезка ( $\underline{Z}_2 = \underline{Z}_B$ ) примут простейший вид:

$$\underline{U}(x) = \underline{U}_2 e^{\underline{\gamma}x}; \quad \underline{I}(x) = \underline{I}_2 e^{\underline{\gamma}x}.$$

Если  $\underline{Z}_2 = 0$  (режим короткого замыкания линии), то при длине  $l$  отрезка линии

$$\underline{Z}_K(l) = \underline{Z}_B \operatorname{th} \underline{\gamma}l;$$

при  $\underline{Y}_2 = 0$  (режим холостого хода линии) получается

$$\underline{Z}_X(l) = \underline{Z}_B / \operatorname{th} \underline{\gamma}l.$$

Из двух последних выражений имеем

$$\underline{Z}_B = \sqrt{\underline{Z}_K(l) \underline{Z}_X(l)};$$

$$\operatorname{th} \underline{\gamma}l = \operatorname{th}(\alpha + j\beta)l = \sqrt{\underline{Z}_K(l) / \underline{Z}_X(l)} = T e^{j\theta}.$$

В свою очередь из последнего соотношения получаем

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= \frac{1}{2l} \operatorname{Arth} \frac{2 \cos \theta}{1/T + T}; \\ \beta_K &= \frac{1}{2l} \left[ \operatorname{arctg} \frac{2 \sin \theta}{1/T - T} + k\pi \right], \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \end{aligned} \right\} \quad (9.11)$$

Ввиду того что коэффициент фазы  $\beta$  определяется неоднозначно,

при его вычислении необходима проверка на соответствие неравенству

$$0 < \omega/\beta_k < c, \quad (9.12)$$

где  $c = 3 \cdot 10^8$  м/с =  $3 \cdot 10^5$  км/с.

Минимальное значение  $\beta$ , удовлетворяющее (9.11) – (9.12), определяет лишь одно допустимое – максимальное – значение фазовой скорости распространения волн напряжения и тока. Сделать выбор среди всех возможных значений скорости распространения, опираясь лишь на результаты измерения сопротивлений холостого хода и короткого замыкания отрезка линии, нельзя.

Описанный алгоритм вычисления значений характеристических параметров однородной линии по измеренным значениям сопротивлений холостого хода и короткого замыкания ее отрезка воплощен в программе 9.1.

**Программа 9.1. Вычисление значений характеристических параметров линии по сопротивлениям холостого хода и короткого замыкания ее отрезка**

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	B↑	0E	36	X	12
01	2	02	37	+	10
02	X	12	38	$\Pi \rightarrow x8$	68
03	$x \rightarrow \Pi 8$	48	39	$\div$	13
04	$\Pi \rightarrow x\sigma$	6L	40	$x \rightarrow \Pi 7$	47
05	$\Pi \rightarrow xd$	6Г	41	$\Pi \rightarrow x0$	60
06	+	10	42	X	12
07	2	02	43	$\Pi \rightarrow x9$	69
08	$\div$	13	44	–	11
09	$x \rightarrow \Pi \sigma$	4L	45	$x < 0$	5C
10	$\Pi \rightarrow x\alpha$	6–	46	52	52
11	$\Pi \rightarrow xc$	6C	47	$\leftrightarrow$	14
12	X	12	48	$K\Pi \rightarrow x4$	Г4
13	$\sqrt{\phantom{x}}$	21	49	$\leftrightarrow$	14
14	$x \rightarrow \Pi \alpha$	4–	50	БП	51
15	$\Pi \rightarrow xc$	6C	51	33	33
16	$\div$	13	52	$\Pi \rightarrow x7$	67
17	$x \rightarrow \Pi c$	4C	53	$\Pi \rightarrow xd$	6Г
18	Cx	0Г	54	cos	1Г
19	$x \rightarrow \Pi 4$	44	55	2	02
20	$\Pi \rightarrow x\sigma$	6L	56	X	12
21	$\Pi \rightarrow xd$	6Г	57	$\Pi \rightarrow xc$	6C
22	–	11	58	$1/x$	23
23	$x \rightarrow \Pi d$	4Г	59	$\Pi \rightarrow xc$	6C
24	sin	1C	60	+	10
25	2	02	61	$\div$	13

*Продолжение программы 9.1*

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
26	X	12	62	$\cos^{-1}$	1-
27	$\Pi \rightarrow xc$	6C	63	2	02
28	$1/x$	23	64	$\div$	13
29	$\Pi \rightarrow xc$	6C	65	tg	1E
30	-	11	66	ln	18
31	$\div$	13	67	$/-$	0L
32	$\operatorname{tg}^{-1}$	1L	68	$\Pi \rightarrow x8$	68
33	B↑	0E	69	$\div$	13
34	$\pi$	20	70	C/P	50
35	$\Pi \rightarrow x4$	64			

Инструкция:

Г Р ГРД В/О Р0: =  $3 \cdot 10^5$  (км/с) или  $3 \cdot 10^8$  (м/с)

$P_a: = Z_k \quad P_b: = \varphi_k$

$P_c: = Z_x \quad P_d: = \varphi_x$

$P_9: = \omega \quad P_X: = l \text{ C}/\Pi$

$\alpha: = P_X \quad \beta: = P_Y$

$Z_B: = P_a \quad \varphi_B: = P_b$

Для иллюстрации программы 9.1 рассмотрим пример

**Пример 9.1.** Для определения значений характеристических параметров однородной линии измерены сопротивления ее отрезка длиной  $l = 200$  км на частоте  $\omega = 5000$  1/с при холостом ходе и коротком замыкании:

$$Z_x = 747 e^{-j27^\circ 41'} \Omega \text{ и } Z_k = 516 e^{j0^\circ 35'} \Omega.$$

Вычислить значения  $Z_B = Z_B e^{j\varphi_B}$  Ом и  $\underline{\gamma} = (\alpha + j\beta)$  1/км.

Решение. Переведем из градусов и минут в радианы значения аргументов сопротивлений (см. п. 2.2):

$$\varphi_x = -27^\circ 41' = -27,683333^\circ = -0,4831654 \text{ рад};$$

$$\varphi_k = 0^\circ 35' = 0,5833333^\circ = 1,0181086 \cdot 10^{-2} \text{ рад.}$$

В соответствии с инструкцией к программе 9.1 выполним следующие действия:

Г Р ГРД В/О Р0: =  $3 \cdot 10^5$

$P_a: = 516 \quad P_b: = 0,0102$

$P_c: = 747 \quad P_d: = -0,483$

$$\begin{aligned}
 P9 &= 5 \cdot 10^3 \text{ РХ} = 200 \text{ С/П} \\
 \alpha &= \text{РХ} = 4,6693892 \cdot 10^{-3} \\
 \beta &= \text{РУ} = 1,8006946 \cdot 10^{-2} \\
 Z_B &= \text{Ра} = 620,8478 \\
 \varphi_B &= \text{Рб} = -2,364 \cdot 10^{-1}
 \end{aligned}$$

Время счета — около 45 с.

$$\begin{aligned}
 \text{Ответ: } \underline{\zeta}_B &= Z_B e^{j\varphi_B} = 621 e^{-j0,236} = 621 e^{-j13,54^\circ} = \\
 &= 621 e^{-j13,54^\circ} \Omega;
 \end{aligned}$$

$$\underline{\gamma} = \alpha + j\beta = (4,67 + j18,01) \cdot 10^{-3} \text{ 1/км.}$$

При известных значениях вторичных параметров однородной линии  $\underline{Z}_B$  и  $\underline{\gamma}$  и угловой частоты  $\omega$  при помощи формул (9.6), (9.9) нетрудно определить ее первичные параметры.

Действительно,

$$\underline{Z}_0 = R_0 + j\omega L_0 = \underline{\gamma} \underline{Z}_B; \quad (9.13)$$

$$\underline{Y}_0 = G_0 + j\omega C_0 = \underline{\gamma} / \underline{Z}_B, \quad (9.14)$$

откуда

$$R_0 = \operatorname{Re} \underline{Z}_0; \quad L_0 = \operatorname{Im} \underline{Z}_0 / \omega;$$

$$G_0 = \operatorname{Re} \underline{Y}_0; \quad C_0 = \operatorname{Im} \underline{Y}_0 / \omega.$$

Именно такой алгоритм вычисления значений первичных параметров однородной линии положен в основу программы 9.2. Ее входными величинами являются  $\omega$ ,  $\operatorname{mod} \underline{Z}_B$ ,  $\operatorname{arg} \underline{Z}_B$ ,  $\operatorname{mod} \underline{\gamma}$  и  $\operatorname{arg} \underline{\gamma}$ , а выходными —  $R_0, L_0, G_0$  и  $C_0$ .

**Программа 9.2. Вычисление значений первичных параметров линии по известным значениям волнового сопротивления и коэффициента распространения**

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	$\Pi \rightarrow x a$	6-	20	$x \rightarrow \Pi c$	4C
01	$\Pi \rightarrow x c$	6C	21	$\Pi \rightarrow x 7$	67
02	X	12	22	$\Pi \rightarrow x 8$	68
03	$x \rightarrow \Pi 7$	47	23	$\Pi \Pi$	53
04	$\Pi \rightarrow x b$	6L	24	31	31
05	$\Pi \rightarrow x d$	6Г	25	$\Pi \rightarrow x 9$	69
06	+	10	26	$\div$	13
07	$x \rightarrow \Pi 8$	48	27	$x \rightarrow \Pi b$	4L
08	$\Pi \rightarrow x c$	6C	28	$\leftrightarrow$	14
09	$\Pi \rightarrow x a$	6-	29	$x \rightarrow \Pi a$	4-
10	$\div$	13	30	C/П	50

*Продолжение программы 9.2*

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
11	$\Pi \rightarrow xd$	6Г	31	$x \rightarrow Pa$	4-
12	$\Pi \rightarrow xb$	6Л	32	$\cos$	1Г
13	-	11	33	$\leftrightarrow$	14
14	$\Pi\Pi$	53	34	X	12
15	31	31	35	Bx	0
16	$\Pi \rightarrow x9$	69	36	$\Pi \rightarrow xa$	6-
17	$\div$	13	37	$\sin$	1С
18	$x \rightarrow \Pi d$	4I	38	X	12
19	$\leftrightarrow$	14	39	B/O	52

**Инструкция:**

$\Gamma \underline{P} \text{ ГРД } B/O$

$Pc := \operatorname{mod} \underline{\gamma} \quad Pd := \arg \underline{\gamma}$

$Pa := z_B \quad Pb := \varphi_B$

$P9 := \omega \text{ С/П}$

$R_0 := PX = Pa$

$L_0 := PY = Pb$

$G_0 := Pc$

$C_0 := Pd$

Время счета – приблизительно 20 с.

Как правило, величина  $\underline{\gamma}$  приводится в алгебраической форме записи, поскольку известный физический смысл имеют только ее вещественная  $a$  и мнимая  $b$  части. Поэтому перед вводом данных в ПМК необходимо преобразовать  $\underline{\gamma}$  из алгебраической формы записи в показательную (вручную или с помощью вспомогательной программы).

Пример 9.2. Вычислить значения первичных параметров  $R_0$ ,  $L_0$ ,  $G_0$  и  $C_0$  для линии предыдущего примера, полагая при  $\omega = 5000 \text{ 1/c}$  известными

$$\underline{Z}_B = 621 e^{-j0,236} \text{ Ом и } \underline{\gamma} = (4,67 + j18,01) \cdot 10^{-3} \text{ 1/км.}$$

Решение. Сначала вычислим вручную значения модуля и аргумента  $\underline{\gamma}$  и введем их соответственно в регистры  $c$  и  $d$ :

$$\Gamma \underline{P} \text{ ГРД } PY = PZ := 18,01 \cdot 10^{-3} \quad PX := 4,67 \cdot 10^{-3} \div \operatorname{tg}^{-1}$$

$$Pd := PX = 1,3170836 \quad \sin \div Pc := PX = 1,8605617 \cdot 10^{-2}$$

Продолжим выполнение операций, предписанных инструкцией к программе 9.2:

$$Pa := 621 \quad Pb := -0,236 \quad P9 := 5000 \text{ B/O С/П}$$

$$R_0 := PX = Pa = 5,4347237$$

$$L_0 = PY = Pb = 2,0392228 \cdot 10^{-3}$$

$$G_0 = P_c = 5,3065776 \cdot 10^{-7}$$

$$C_0 = P_d = 5,991207 \cdot 10^{-9}$$

Время счета – приблизительно 20 с.

Ответ:  $R_0 = 5,43 \text{ Ом/км}$ ;  $L_0 = 2,04 \text{ мГн/км}$ ;  $G_0 = 5,31 \cdot 10^{-7} \text{ См/км}$ ;  
 $C_0 = 5,99 \cdot 10^{-9} \text{ Ф/км}$ .

Проверка:

$$\underline{Z}_B = \sqrt{\frac{R_0 + j\omega L_0}{G_0 + j\omega C_0}} = \sqrt{\frac{5,43 + j5 \cdot 2,04}{(5,31 + j50 \cdot 5,99) \cdot 10^{-7}}} = \\ = 621,09498 e^{-j0,23573305} \approx 621 e^{-j0,236} \text{ Ом.}$$

Если в формулы (9.13) – (9.14) в общем виде сначала подставить  $\underline{Z}_B = Z_B e^{j\varphi_B}$  и  $\underline{\gamma} = \alpha + j\beta$ , а затем приравнять вещественные и мнимые части этих формул, то получится группа четырех равенств, в явном виде определяющих первичные параметры через составляющие вторичные:

$$R_0 = (\alpha \cos \varphi_B - \beta \sin \varphi_B) Z_B;$$

$$L_0 = (\beta \cos \varphi_B + \alpha \sin \varphi_B) Z_B / \omega;$$

$$G_0 = (\alpha \cos \varphi_B + \beta \sin \varphi_B) / Z_B;$$

$$C_0 = (\beta \cos \varphi_B - \alpha \sin \varphi_B) / Z_B \omega.$$

Указанный алгоритм вычисления значений первичных параметров может быть реализован на ПМК вручную или программой 9.3, которая ходит и длиннее предыдущей (на шесть шагов), зато в отличие от последней не требует предварительного преобразования величины  $\underline{\gamma}$  в показательную форму записи.

**Программа 9.3. Вычисление значений первичных параметров линии по известным значениям волнового сопротивления и коэффициента распространения**

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	$\Pi \rightarrow xc$	6C	23	$\Pi \rightarrow xb$	6L
01	$\Pi \rightarrow xb$	6L	24	$\Pi \rightarrow x8$	68
02	sin	1C	25	–	11
03	X	12	26	$\Pi \rightarrow xa$	6–
04	$x \rightarrow \Pi 8$	48	27	÷	13
05	Bx	0	28	$\Pi \rightarrow x9$	69

*Продолжение программы 9.3*

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
06	$\Pi \rightarrow xd$	6Г	29	$\div$	13
07	X	12	30	$x \rightarrow \Pi d$	4Г
08	$x \rightarrow \Pi 7$	47	31	$\Pi \rightarrow xb$	6L
09	$\Pi \rightarrow xd$	6Г	32	$\Pi \rightarrow x8$	68
10	$\Pi \rightarrow xb$	6L	33	+	10
11	cos	1Г	34	$\Pi \rightarrow xa$	6-
12	X	12	35	X	12
13	$x \rightarrow \Pi b$	4L	36	$\Pi \rightarrow x9$	69
14	Bx	0	37	$\div$	13
15	$\Pi \rightarrow xc$	6C	38	$x \rightarrow \Pi b$	4L
16	X	12	39	$\Pi \rightarrow x6$	66
17	$x \rightarrow \Pi 6$	46	40	$\Pi \rightarrow x7$	67
18	$\Pi \rightarrow x7$	67	41	-	11
19	+	10	42	$\Pi \rightarrow xa$	6-
20	$\Pi \rightarrow xa$	6-	43	X	12
21	$\div$	13	44	$x \rightarrow \Pi a$	4-
22	$x \rightarrow \Pi c$	4C	45	C/П	50

Инструкция:

Г Р ГРД В/О

( $Pa := z_B$   $Pb := \varphi_B$

$Pc := a$   $Pd := \beta$

$P9 := \omega$  С/П

$R_0 := PX = Pa$

$L_0 := PY = Pb$

$G_0 := Pc$

$C_0 := Pd$ )

Время счета — около 17 с.

Для проверки правильности работы этой программы введем в соответствии с инструкцией к ней исходные данные предыдущего примера:

Г Р ГРД

$Pa := 621$   $Pb := -0,236$

$Pc := 4,67 \cdot 10^{-3}$   $Pd := 18,01 \cdot 10^{-3}$

$P9 := 5000$  В/О С/П

$R_0 := PX = Pa = 5,4347233$

$L_0 := PY = Pb = 2,0392228 \cdot 10^{-3}$

$G_0 := 5,3065619 \cdot 10^{-7}$

$C_0 := 5,9912074 \cdot 10^{-9}$

В зависимости от требуемой точности расчета и соотношения значений коэффициента затухания линии  $\alpha$  и длины  $l$  ее отрезка для анализа

используют частные случаи рассмотренной модели, например линии с малыми потерями, линии без искажений и др. Самая грубая, но весьма распространенная модель в этом ряду — однородная линия без потерь. Дополнительными свойствами, которыми наделяют такую линию, являются ограничения  $R_0 = 0$  и  $G_0 = 0$  в рассматриваемом диапазоне частот. В этом случае вторичные параметры принимают весьма простой вид:

$$\alpha = \alpha(\omega) = 0;$$

$$\beta = \beta(\omega) = \omega \sqrt{L_0 C_0};$$

$$Z_B = Z_B(\omega) = R_B = \sqrt{L_0/C_0}.$$

Для воздушных линий передач фазовая скорость практически равна скорости света:  $v_\phi = c = 3 \cdot 10^8$  м/с =  $3 \cdot 10^5$  км/с.

Для радиотехнических кабелей (ГОСТ 11326.1-79 – 11326.92-79)

$$v_\phi = c/k_y,$$

где  $k_y$  – коэффициент укорочения длины волны. Его значения для конкретного кабеля приводятся в ГОСТ.

## 9.5. СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ ОТРЕЗКА ЛИНИИ БЕЗ ПОТЕРЬ

Так как

$$\operatorname{ch} \gamma x = \operatorname{ch} j\beta x = \cos \beta x;$$

$$\operatorname{sh} \gamma x = \operatorname{sh} j\beta x = j \sin \beta x,$$

то система уравнений однородной линии с потерями (9.10) заменяется для линии без потерь системой уравнений с тригонометрическими функциями от вещественного аргумента

$$\underline{U}(x) = \underline{U}_2 \cos \beta x + jR_B I_2 \sin \beta x;$$

$$\underline{I}(x) = j \frac{\underline{U}_2}{R_B} \sin \beta x + \underline{I}_2 \cos \beta x.$$

Используя коэффициент отражения волны напряжения от конца отрезка  $\rho_2 = \underline{U}_{20}/\underline{U}_{2n} = \underline{\rho}_2 e^{j\nu_2}$ , получаем другую, эквивалентную систему уравнений:

$$\underline{U}(x) = \underline{U}_n(x) [1 + \underline{\rho}_2 e^{-j2\beta x}]; \quad (9.15)$$

$$\underline{I}(x) = \underline{I}_n(x) [1 - \underline{\rho}_2 e^{-j2\beta x}], \quad 0 \leq x \leq l, \quad (9.16)$$

в которой

$$\underline{U}_n(x) = \underline{U}_{2n} e^{j\beta x}, \quad \underline{I}_n(x) = \underline{I}_{2n} e^{j\beta x},$$

причем

$$\underline{U}_n(x)/\underline{I}_n(x) = \underline{U}_{2n}/\underline{I}_{2n} = R_B.$$

При пассивной нагрузке ( $\underline{Z}_2 = \underline{Z}_2 I_2$  или  $I_2 = \underline{Y}_2 \underline{U}_2$ ) коэффициент отражения в сечении нагрузки определяется формулой

$$\underline{\rho}_2 = \rho_2 e^{j\nu_2} = \frac{\underline{Z}_2 - R_B}{\underline{Z}_2 + R_B} = - \frac{\underline{Y}_2 - G_B}{\underline{Y}_2 + G_B}. \quad (9.17)$$

Поскольку амплитуда отраженной волны не может превышать при любой нагрузке амплитуду падающей волны,  $0 \leq \rho_2 \leq 1$ . Для определенности  $0 \leq |\nu_2| \leq \pi$ .

Значение  $\rho_2$  можно вычислить вручную или по программе 2.10. В зависимости от характера нагрузки в отрезке линии может наблюдаться один из трех типов установившегося режима:

1) режим бегущих волн ( $\underline{Z}_2 = R_B$  или  $\underline{Y}_2 = G_B$ ):

$$u(x, t) = \sqrt{2} \underline{U}_2 \cos(\omega t + \beta x);$$

$$i(x, t) = \sqrt{2} \underline{I}_2 \cos(\omega t + \beta x);$$

2) режим стоячих волн ( $\underline{Z}_2 = 0$ ;  $\underline{Y}_2 = 0$ ;  $\operatorname{Re} \underline{Z}_2 = 0$ ;  $\operatorname{Re} \underline{Y}_2 = 0$ ):

$$u(x, t) = 2\sqrt{2} \underline{U}_{2n} \cos(\beta x - \nu_2/2) \cos(\omega t + \nu_2/2);$$

$$i(x, t) = -2\sqrt{2} \underline{I}_{2n} \sin(\beta x - \nu_2/2) \sin(\omega t + \nu_2/2);$$

3) режим смешанных волн ( $\underline{Z}_2 \neq R_B$  или  $\underline{Y}_2 \neq G_B$ ):

$$u(x, t) = \sqrt{2} \underline{U}_{2n} (1 - \rho_2) \cos(\omega t + \beta x) + 2\sqrt{2} \underline{U}_{2n} \rho_2 \cos(\beta x - \nu_2/2) \times \\ \times \cos(\omega t + \nu_2/2); \quad i(x, t) = \sqrt{2} \underline{I}_{2n} (1 - \rho_2) \cos(\omega t + \beta x) - \\ - 2\sqrt{2} \underline{I}_{2n} \rho_2 \sin(\beta x - \nu_2/2) \sin(\omega t + \nu_2/2).$$

Первые слагаемые последней пары выражений описывают бегущие волны, а вторые — стоячие волны (отсюда и название режима).

Интерес представляет распределение амплитудных или действующих значений напряжения и тока вдоль отрезка линии. Для получения этих зависимостей обратимся сначала к (9.15) и найдем его модуль:

$$U(x) = U_{2n} [1 + \rho_2^2 + 2\rho_2 \cos(2\beta x - \nu_2)]^{1/2}. \quad (9.18)$$

В нормированной системе координат  $\bar{U}(\bar{x}) = U(\bar{x})/U_{2\Pi}$ ,  $\bar{x} = x/\lambda$ , (9.18) примет вид

$$\bar{U}(x) = [1 + \rho_2^2 + 2\rho_2 \cos(4\pi\bar{x} - \nu_2)]^{1/2}, \quad (9.19)$$

где

$$\lambda = \lambda_0/k_y = c/(fk_y).$$

Заменяя в (9.18), (9.19)  $\rho_2$  на  $-\rho_2$  и  $\bar{U}(\bar{x})$  на  $\bar{I}(\bar{x}) = I(\bar{x})/I_{2\Pi}$ , получаем

$$I(x) = I_{2\Pi} [1 + \rho_2^2 - 2\rho_2 \cos(2\beta x - \nu_2)]^{1/2}; \quad (9.20)$$

$$\bar{I}(\bar{x}) = [1 + \rho_2^2 - 2\rho_2 \cos(4\pi\bar{x} - \nu_2)]^{1/2}. \quad (9.21)$$

Отметим особенности функций относительных амплитуд (действующих значений) напряжений  $\bar{U}(\bar{x})$  и тока  $\bar{I}(\bar{x})$ :

- 1) эти функции являются периодическими с периодом 0,5;
- 2) их максимальные ( $1 + \rho_2$ ) и минимальные ( $1 - \rho_2$ ) значения определяются только модулем коэффициента отражения  $\rho_2$ ;
- 3) сечения отрезка линии, в которых наблюдаются максимумы функций  $\bar{U}(\bar{x})$ , совпадают с сечениями, в которых функция  $\bar{I}(\bar{x})$  принимает минимальные значения, и наоборот. Координаты этих сечений

$$\bar{x}_k = (k\pi + \nu_2)/4\pi, \quad 0 \leq \bar{x}_k \leq \bar{l},$$

определяются лишь значением аргумента коэффициента отражения.

Алгоритмы вычисления функций  $\bar{U}(\bar{x})$  и  $\bar{I}(\bar{x})$ , задаваемые (9.19), (9.21), воплощены в программе 9.4.

#### Программа 9.4. Расчет распределения действующих значений напряжения и тока вдоль отрезка однородной линии

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	$x \rightarrow \Pi d$	4Г	15	1	01
01	4	04	16	+	10
02	X	12	17	+	10
03	$\pi$	20	18	Bx	0
04	X	12	19	$\Pi \rightarrow x7$	67
05	$\Pi \rightarrow xb$	6L	20	-	11
06	-	11	21	$\sqrt{ }$	21
07	cos	1Г	22	$\leftrightarrow$	14
08	$\Pi \rightarrow xa$	6-	23	$\sqrt{ }$	21
09	X	12	24	C/П	50
10	2	02	25	$\Pi \rightarrow xd$	6Г
11	X	12	26	$\Pi \rightarrow xc$	6C

*Продолжение программы 9.4*

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
12	$x \rightarrow P7$	47	27	+	10
13	$P \rightarrow x^a$	6-	28	БП	51
14	$x^2$	22	29	00	00

Инструкция:

$\Gamma \underline{P}$  ГРД В/О

$Pa := \rho_2 \quad Pb := \nu_2 \quad Pc := \Delta \bar{x}$

$RX := \bar{x}_0$

(С/П  $\bar{U}(\bar{x}) := RX \quad \bar{I}(\bar{x}) := PY$ )

Время счета одной пары значений — около 8 с.

П р и м е ч а н и е:  $\bar{x} := Pd$ .

Пример 9.3. Вычислить значения  $\bar{U}(\bar{x})$  и  $\bar{I}(\bar{x})$  на интервале  $0 \leq \bar{x} \leq 0,5$  с шагом  $\Delta \bar{x} = 6,25 \cdot 10^{-2}$  и построить графики этих функций, если  $\rho_2 = 0,3314 e^{-j1,241}$

Р е ш е н и е. В соответствии с инструкцией выполним следующие операции  $\Gamma \underline{P}$  ГРД:

$Pa := 0,3314 \quad Pb := -1,241 \quad Pc := 6,25 \cdot 10^{-2}$

В/О  $RX := 0 \quad C/P$

Результаты работы программы после каждого запуска сведены в табл. 9.1 (значения расчетных величин округлены до трех значащих цифр после десятичной запятой).

Таблица 9.1

$\bar{U}(\bar{x}) := RX$	$\bar{I}(\bar{x}) := PY$	$\bar{x} := Pd$
1,151	0,946	0,0000
0,905	1,184	0,0625
0,695	1,318	0,1250
0,717	1,306	0,1875
0,946	1,151	0,2500
1,184	0,905	0,3125
1,318	0,695	0,3750
1,306	0,717	0,4375
1,151	0,946	0,5000

На рис. 9.4 приведены графики функций  $\bar{U}(\bar{x})$  и  $\bar{I}(\bar{x})$  на интервале  $[0; 0,5]$ .

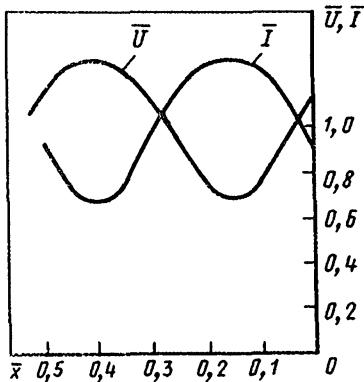


Рис. 9.4. Изменение нормированных амплитуд напряжения и тока вдоль отрезка линии без потерь

В § 9.6 приводится программа расчета распределения абсолютных значений  $U(\bar{x})$  и  $I(\bar{x})$ .

Из отношения уравнений (9.15) и (9.16) найдем выражения эквивалентных сопротивления и проводимости в произвольном сечении нагруженного отрезка однородной линии:

$$\left. \begin{aligned} Z(x) &= \frac{U(x)}{I(x)} = R_B \frac{1 + \underline{\rho}_2 e^{-j2\beta x}}{1 - \underline{\rho}_2 e^{-j2\beta x}}, \quad 0 \leq x \leq l; \\ Y(x) &= \frac{I(x)}{U(x)} = G_B \frac{1 - \underline{\rho}_2 e^{-j2\beta x}}{1 + \underline{\rho}_2 e^{-j2\beta x}}, \quad 0 \leq x \leq l. \end{aligned} \right\} \quad (9.22)$$

Переходя к нормированной координате  $\bar{x}$  и выделяя вещественную и мнимую части (9.22), получаем

$$R(\bar{x}) = R_B \frac{1 - \underline{\rho}_2^2}{1 + \underline{\rho}_2^2 - 2\underline{\rho}_2 \cos(4\pi\bar{x} - \nu_2)}; \quad (9.23)$$

$$X(\bar{x}) = -R_B \frac{2\underline{\rho}_2 \sin(4\pi\bar{x} - \nu_2)}{1 + \underline{\rho}_2^2 - 2\underline{\rho}_2 \cos(4\pi\bar{x} - \nu_2)}. \quad (9.24)$$

Если заменить здесь  $R$  на  $G$ ,  $X$  на  $B$ ,  $R_B$  на  $G_B$  и  $\rho$  на  $-\underline{\rho}$ , то получим зависимости вещественной и мнимой частей эквивалентной проводимости нагруженного отрезка от координаты  $\bar{x}$ :

$$G(\bar{x}) = G_B \frac{1 - \underline{\rho}_2^2}{1 + \underline{\rho}_2^2 + 2\underline{\rho}_2 \cos(4\pi\bar{x} - \nu_2)}; \quad (9.25)$$

$$B(\bar{x}) = G_B \frac{2\underline{\rho}_2 \sin(4\pi\bar{x} - \nu_2)}{1 + \underline{\rho}_2^2 + 2\underline{\rho}_2 \cos(4\pi\bar{x} - \nu_2)}. \quad (9.26)$$

Проанализируем последние выражения. Поскольку, как нетрудно доказать, их знаменатель неотрицателен при любых значениях  $\bar{x}$ , знаки

этих функций определяются знаками их числителей. Следовательно,  $R(\bar{x}) \geq 0$ ,  $G(\bar{x}) \geq 0$ , а  $X(\bar{x})$  и  $B(\bar{x})$  — знакопеременные функции. Период их изменения равен 0,5. Можно убедиться, что на тех участках отрезка линии, где амплитуда напряжения при перемещении к началу отрезка возрастает,  $X(\bar{x})$  и  $B(\bar{x})$  носят индуктивный характер, а там, где она убывает, — емкостный характер. В тех сечениях отрезка линии, в которых амплитуда напряжения максимальна, а тока — минимальна, эквивалентные сопротивление и проводимость вещественны и равны

$$R(\bar{x}_k) = R_B \frac{1 + \rho_2}{1 - \rho_2}, \quad X(\bar{x}_k) = 0;$$

$$G(\bar{x}_k) = G_B \frac{1 - \rho_2}{1 + \rho_2}, \quad B(\bar{x}_k) = 0.$$

Там же, где амплитуда напряжения минимальна, а тока — максимальна,

$$R(\bar{x}_k) = R_B \frac{1 - \rho_2}{1 + \rho_2}, \quad X(\bar{x}_k) = 0;$$

$$G(\bar{x}_k) = G_B \frac{1 + \rho_2}{1 - \rho_2}, \quad B(\bar{x}_k) = 0.$$

В сечениях отрезка с координатами

$$\bar{x}_n = \frac{1}{4\pi} \left[ \nu_2 \pm \arccos \frac{2\rho_2}{1 + \rho_2^2} + 2n\pi \right], \quad 0 \leq \bar{x}_n \leq \bar{l},$$

мнимая часть эквивалентного сопротивления  $X(\bar{x}_n)$  принимает экстремальные значения, равные

$$X(\bar{x}_n) = \pm R_B \frac{2\rho_2}{1 - \rho_2^2}.$$

В сечениях отрезка линии с координатами

$$\bar{x}_n = \frac{1}{4\pi} \left[ \nu_2 \pm \arccos \left( -\frac{2\rho_2}{1 + \rho_2^2} \right) + 2n\pi \right], \quad 0 \leq \bar{x}_n \leq \bar{l},$$

мнимая часть эквивалентной проводимости  $B(\bar{x}_n)$  принимает экстремальные значения, равные

$$B(\bar{x}_n) = \mp G_B \frac{2\rho_2}{1 - \rho_2^2}.$$

Зависимости  $R(\bar{x})$  и  $X(\bar{x})$  или  $G(x)$  и  $B(x)$  от координаты  $\bar{x}$  при ее изменении с постоянным шагом  $\Delta\bar{x}$  удобно рассчитывать по программе 9.5, в основу которой положен алгоритм, описываемый формулами (9.23) – (9.26).

**Программа 9.5. Расчет распределения сопротивлений и проводимостей вдоль отрезка однородной линии**

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	$x \rightarrow Pd$	4Г	19	$\Pi \rightarrow xa$	6-
01	4	04	20	$x^2$	22
02	X	12	21	+	10
03	$\pi$	20	22	$\Pi \rightarrow x0$	60
04	X	12	23	$\div$	13
05	$\Pi \rightarrow xb$	6L	24	$\div$	13
06	-	11	25	Bx	0
07	$x \rightarrow \Pi 9$	49	26	1	01
08	sin	1C	27	$\Pi \rightarrow xa$	6-
09	2	02	28	$x^2$	22
10	$\Pi \rightarrow xa$	6-	29	-	11
11	X	12	30	$\leftrightarrow$	14
12	X	12	31	$\div$	13
13	Bx	0	32	C/П	50
14	$\Pi \rightarrow xb$	69	33	$\Pi \rightarrow xd$	6Г
15	cos	1Г	34	$\Pi \rightarrow xc$	6С
16	X	12	35	+	10
17	1	01	36	БП	51
18	+	10	37	00	00

**Инструкция:**

**Г Р ГРД В/О**

P0: =  $R_B$  или P0: =  $G_B$

$Pa: = \begin{cases} -\rho_2, & \text{если } P0 = R_B \\ \rho_2, & \text{если } P0 = G_B \end{cases}$

Pb: =  $\nu_2$

Pc: =  $\Delta\bar{x}$  PX: =  $\bar{x}_0$  (C/П)

$R(\bar{x}), G(\bar{x}): = PX$

$X(\bar{x}), B(\bar{x}): = PY$

Время счета одной пары значений – около 15 с.

**П р и м е ч а н и е:**  $\bar{x}: = Pd$ .

**Пример 9.4.** Определить значения  $R(\bar{x})$  и  $X(\bar{x})$  на интервале от 0 до  $\bar{l} = l/\lambda = 2,2$  с шагом  $\Delta\bar{x} = 5,00 \cdot 10^{-2}$  и построить графики этих функций, если  $R_B = 50$  Ом  $\rho_2 = \rho_2 e^{j\nu_2} = 0,3304 e^{-j1,234}$

**Решение.** В соответствии с инструкцией к программе 9.5 выполним следующие действия:

**Г Р ГРД В/О**

$P_0 := 50 \text{ Pa} := -0,3304 \text{ Pb} := -1,234$

$P_c := 0,05 \text{ Px} := 0 \text{ С/П}$

Результаты работы программы после каждого запуска приведены в табл. 9.2 (значения расчетных величин округлены до четырех значащих цифр).

Таблица 9.2

$R(\bar{x}) := Px$	$X(\bar{x}) := Py$	$\bar{x} := Pd$	$R(\bar{x}) := Px$	$X(\bar{x}) := Py$	$\bar{x} := Pd$
50,00	-35,00	0,00	78,70	-33,24	0,45
34,29	-24,36	0,05	50,00	-35,00	0,50
27,25	-12,25	0,10	...	...	...
25,17	-0,4226	0,15	50,00	-35,00	2,00
26,96	11,38	0,20	34,29	-24,36	2,05
33,56	23,49	0,25	27,29	-12,25	2,10
48,45	34,43	0,30	25,17	-0,4226	2,15
76,34	34,31	0,35	26,96	11,38	2,20
99,31	1,667	0,40			

Пропустив ряд значений аргумента  $\bar{x}$ , продолжим выполнение программы с нового значения  $\bar{x}_0 = 2,00$ :

**В/О Px := 2 С/П**

Результаты вычисления занесем в табл. 9.2.

Графики функций  $R(\bar{x})$  и  $X(\bar{x})$  показаны на рис. 9.5.

Из сопоставления формул (9.23), (9.25) и (9.24), (9.26) видно, что графики функций  $G(\bar{x})$  и  $B(\bar{x})$  подобны графикам функций  $R(\bar{x})$  и  $X(\bar{x})$  соответственно, но смещены относительно последних вдоль оси абсцисс на 0,25.

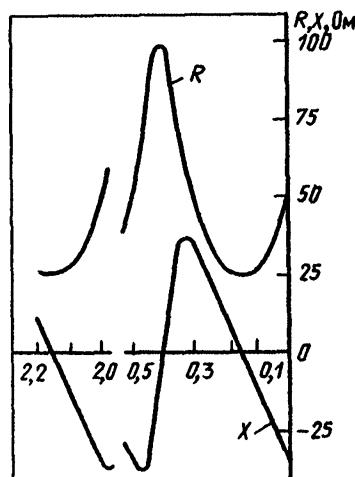


Рис. 9.5. Графики зависимостей вещественной и минимой частей сопротивления участка линии от его длины

## 9.6. АНАЛИЗ ОТРЕЗКА ОДНОРОДНОЙ ЛИНИИ БЕЗ ПОТЕРЬ

Рассмотрим порядок расчета установившегося процесса в отрезке однородной линии без потерь длиной  $l$  с волновым сопротивлением  $R_B$ , включенным между генератором гармонических колебаний частоты  $\omega$  и пассивной нагрузкой. Заменим генератор эквивалентным активным двухполюсником, состоящим из последовательно включенных сосредоточенных компонентов: источника напряжения  $U_{0i}$  и пассивной ветви  $Z_i$ . Нагрузку представим эквивалентным пассивным двухполюсником  $Z_2$  (рис. 9.6, а).

Определим по (9.17) коэффициент отражения в конце отрезка линии. Заменим нагруженный отрезок однородной линии сосредоточенной пассивной ветвью, сопротивление которой  $Z(l)$  вычислим по (9.22) при  $x = l$  (программа 9.5 при  $\bar{x}_0 = l/\lambda$ , рис. 9.6, б).

В соответствии с рис. 9.6, б

$$I(l) = I_1 = \frac{U_{0i}}{Z_i + Z(l)}; \quad (9.27)$$

$$U(l) = U_1 = U_{0i} \frac{Z(l)}{Z_i + Z(l)}. \quad (9.28)$$

По программе 9.4 рассчитаем распределение нормированных значений  $\bar{U}(\bar{x})$ ,  $\bar{I}(\bar{x})$ . Сравнив известные абсолютные и относительные амплитуды (действующие значения) напряжения и тока в начале отрезка ( $x = l$ ), получим (путем пересчета масштаба по оси ординат) распределение абсолютных значений этих величин.

Этих же результатов можно достичь непосредственно, если воспользоваться программой 9.6, являющейся модернизацией программы 9.4. Ее входными величинами кроме уже знакомых являются значения коэффициентов  $U_{2n}$  и  $I_{2n}$ , вычисляемые по формулам

$$U_{2n} = U(l) [1 + \rho_2^2 + 2\rho_2 \cos(2\beta l - \nu_2)]^{-1/2} =$$

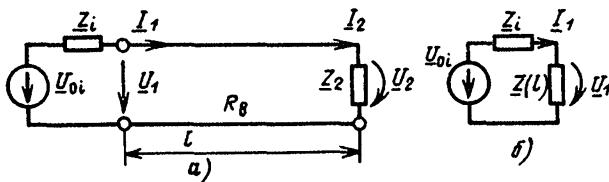


Рис. 9.6. К анализу отрезка линии без потерь

$$= U(l) [1 + \rho_2^2 + 2\rho_2 \cos(4\pi l - \nu_2)]^{-1/2}; \quad (9.29)$$

$$\begin{aligned} I_{2n} &= I(l) [1 + \rho_2^2 - 2\rho_2 \cos(2\beta l - \nu_2)]^{-1/2} = \\ &= I(l) [1 + \rho_2^2 - 2\rho_2 \cos(4\pi l - \nu_2)]^{-1/2}. \end{aligned} \quad (9.30)$$

Последние выражения следуют из (9.18) и (9.20) при  $x = l$ .

*Программа 9.6. Расчет распределения действующих значений напряжения и тока вдоль отрезка однородной линии*

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	$x \rightarrow Pd$	4Г	17	+	10
01	4	04	18	$Bx$	0
02	X	12	19	$\Pi \rightarrow x7$	67
03	$\pi$	20	20	-	11
04	X	12	21	$\sqrt{\phantom{x}}$	21
05	$\Pi \rightarrow xb$	6L	22	$\Pi \rightarrow x9$	69
06	-	11	23	X	12
07	cos	1Г	24	$\leftrightarrow$	14
08	$\Pi \rightarrow xa$	6-	25	$\sqrt{\phantom{x}}$	21
09	X	12	26	$\Pi \rightarrow x8$	68
10	2	02	27	X	12
11	X	12	28	C/P	50
12	$x \rightarrow \Pi 7$	47	29	$\Pi \rightarrow xd$	6Г
13	$\Pi \rightarrow xa$	6-	30	$\Pi \rightarrow xc$	6C
14	$x^2$	22	31	+	10
15	1	01	32	БП	51
16	+	10	33	00	00

Инструкция:

Г Р ГРД В/О

P8: =  $U_{2n}$  P9: =  $I_{2n}$

Pa: =  $\rho_2$  Pb: =  $\nu_2$  Pc: =  $\Delta x$

PX: =  $\bar{x}_0$

(С/П  $U(\bar{x})$ : = PX  $I(\bar{x})$ : = PY)

Время счета одной пары значений — около 12 с.

Примечание:  $\bar{x}$ : =  $Pd$ .

Пример. 9.5. Построить графики распределения действующих значений напряжения  $U(\bar{x})$  и тока  $I(\bar{x})$  вдоль отрезка однородной линии с  $R_B = 50$  Ом относительной длины  $\bar{l} = 2,2$ , если  $U_{0i} = 10$  В,  $Z_i = 50$  Ом,  $Z_2 = 50 - j35$  Ом.

Решение. Коэффициент отражения в конце линии согласно (9.17)

$$\underline{\rho}_2 = \rho_2 e^{j\nu_2} = \frac{\underline{Z}_2 - R_B}{\underline{Z}_2 + R_B} = \frac{-j35}{100 - j35} = 0,3304 e^{-j1,234}.$$

Значение эквивалентного сопротивления нагруженного отрезка линии (см. результат вычислений примера 9.4 при  $\bar{x} = 2,2$ )

$$\underline{Z}(l) = R_B \frac{1 + \underline{\rho}_2 e^{-j4\pi l}}{1 - \underline{\rho}_2 e^{-j4\pi l}} = 26,96 + j11,38 = 29,26 e^{j0,399} \text{ Ом.}$$

По (9.27), (9.28) вычисляем  $U(\bar{l})$  и  $I(\bar{l})$ :

$$\underline{I}(\bar{l}) = \frac{\underline{U}_{0i}}{\underline{Z}_i + \underline{Z}(\bar{l})} = \frac{10}{50 + 26,96 + j11,38} = 0,129 e^{-j0,147} \text{ А;}$$

$$U(\bar{l}) = \underline{Z}(l) \underline{I}(l) = 3,77 e^{j0,252} \text{ В.}$$

Следовательно,  $U(\bar{l}) = 3,77$  В,  $I(\bar{l}) = 0,129$  А.

Определим  $U_{2n}$  и  $I_{2n}$ , подставив необходимые значения в (9.29) и (9.30):

$$U_{2n} = 3,77/0,752 = 5,01 \text{ В;}$$

$$I_{2n} = 0,129/1,29 = 0,1 \text{ А.}$$

Шаг изменения относительной координаты  $\Delta\bar{x}$  примем равным 0,05. В соответствии с инструкцией к программе 9.6 выполним следующие действия:

Г Р ГРД В/О

P8: = 5,01 P9: = 0,1

Pa: = 0,3304 Pb: = -1,234 Pс: = 0,05

PX: = 0 С/П

Результаты вычислений по программе 9.6 для  $0 \leq \bar{x} \leq 0,5$  приведены в табл. 9.3.

Таблица 9.3

$U(\bar{x}) := PX, \text{ В}$	$I(\bar{x}) := PY, \text{ мА}$	$\bar{x} := Pd$	$U(\bar{x}) := PX, \text{ В}$	$I(\bar{x}) := PY, \text{ мА}$	$\bar{x} := Pd$
5,77	94,4	0,00	5,71	95,9	0,30
4,80	114,0	0,05	6,41	76,4	0,35
3,83	127,9	0,10	6,66	67,0	0,40
3,35	133,0	0,15	6,44	75,2	0,45
3,77	128,5	0,20	5,77	94,4	0,50
4,72	115,2	0,25			

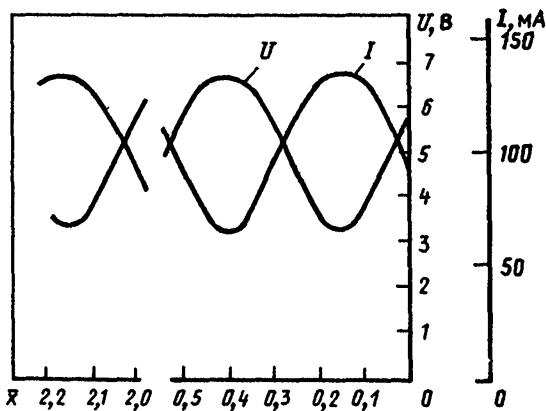
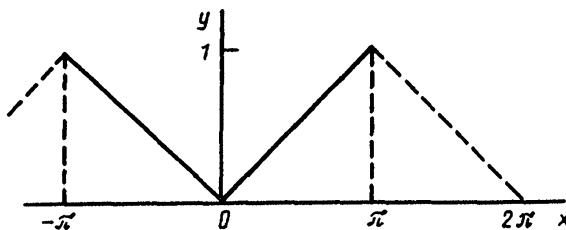


Рис. 9.7. Изменение действующих значений напряжения и тока вдоль отрезка линии без потерь

Как известно, функции  $U(\bar{x})$  и  $I(\bar{x})$  периодичны с периодом 0,5. Поэтому полученные результаты можно распространить и на оставшийся участок отрезка линии. Графики функций  $U(\bar{x})$  и  $I(\bar{x})$  показаны на рис. 9.7.

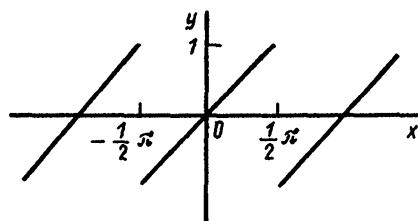
**ПРИЛОЖЕНИЕ. ПРОГРАММЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ НЕКОТОРЫХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ**

1. Программа вычисления функции  $y = \frac{1}{\pi} |x|$  для  $-\pi \leq x \leq \pi$ .



Адрес	Команда	Код
00	$\cos$	1Г
01	$\cos^{-1}$	1-
02	$\pi$	20
03	$\div$	13
04	C/П	50

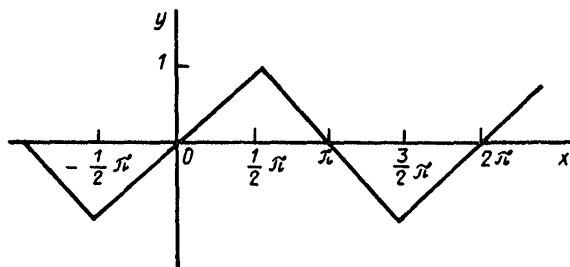
2. Программа вычисления функции  $y = \frac{2}{\pi} x$  для  $-\pi/2 \leq x \leq \pi/2$ .



Адрес	Команда	Код
00	$\operatorname{tg}$	1E
01	$\operatorname{tg}^{-1}$	1L
02	2	02
03	X	12
04	$\pi$	20
05	$\div$	13
06	C/П	50

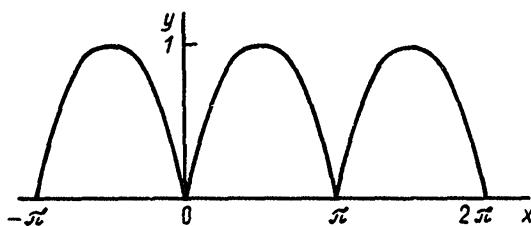
### 3. Программа вычисления функции

$$y = \begin{cases} \frac{2}{\pi}x & \text{для } |x| \leq \frac{\pi}{2}; \\ -\frac{2}{\pi}(x - \pi) & \text{для } \frac{\pi}{2} < x < \frac{3}{2}\pi; \\ \frac{2}{\pi}(x - 2\pi) & \text{для } \frac{3}{2}\pi < x < 2\pi. \end{cases}$$



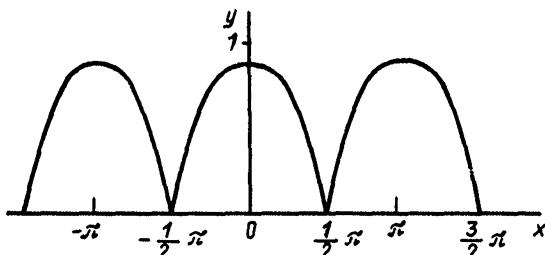
Адрес	Команда	Код
00	sin	1C
01	sin <sup>-1</sup>	19
02	2	02
03	X	12
04	π	20
05	÷	13
06	C/П	50

### 4. Программа вычисления функции $y = |\sin x|$ .



Адрес	Команда	Код
00	sin	1C
01	x < 0	5C
02	04	04
03	/-	0L
04	C/П	50

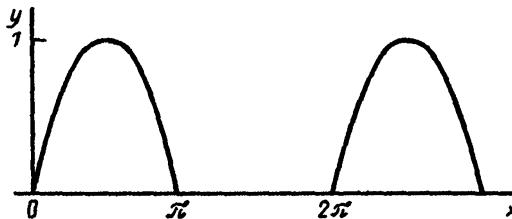
### 5. Программа вычисления значения функции $y = |\cos x|$ .



Адрес	Команда	Код
00	cos	1Г
01	x < 0	5C
02	04	04
03	/-	0L
04	C/П	50

6. Программа вычисления функции

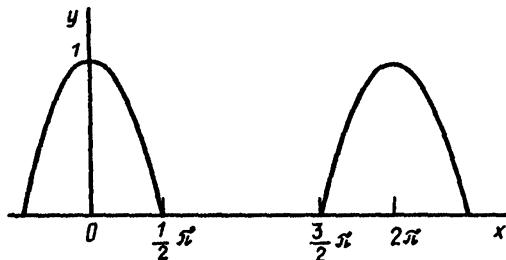
$$y = \begin{cases} \sin x, & 0 \leq x < \pi; \\ 0, & \pi \leq x < 2\pi. \end{cases}$$



Адрес	Команда	Код
00	sin	1C
01	x < 0	5C
02	04	04
03	0	00
04	C/П	50

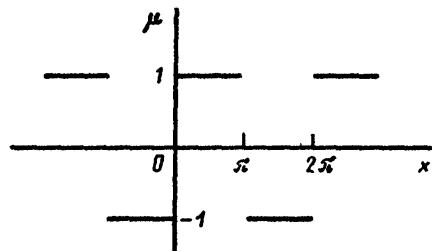
7. Программа вычисления значений функции

$$y = \begin{cases} \cos x, & |x| < \pi/2; \\ 0, & \pi/2 \leq |x| \leq \pi. \end{cases}$$



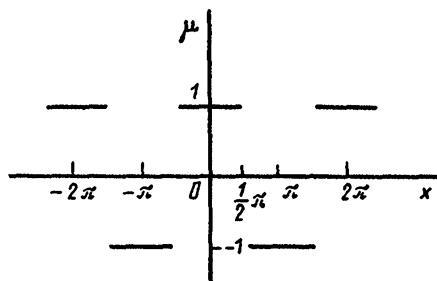
Адрес	Команда	Код
00	cos	1Г
01	x < 0	5C
02	04	04
03	0	00
04	C/П	50

8. Программа вычисления значения функции  $\mu(x)$  (меандр) при  $x \neq k\pi$ .



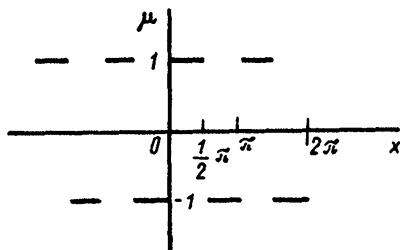
Адрес	Команда	Код
00	sin	1C
01	B↑	0E
02	x < 0	5C
03	05	05
04	/-/	0L
05	÷	13
06	C/П	50

9. Программа вычисления значения функции  $\mu\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$  при  $x \neq (2k + + 1) \frac{\pi}{2}$ .



Адрес	Команда	Код
00	cos	1Г
01	B↑	0Е
02	$x < 0$	5С
03	05	05
04	/-/	0Л
05	÷	13
06	C/П	50

10. Программа вычисления значения функции  $\mu(2x)$ .



Адрес	Команда	Код
00	tg	1Е
01	B↑	0Е
02	$x < 0$	5С
03	05	05
04	/-/	0Л
05	÷	13
06	C/П	50

## СПИСОК ПРОГРАММ

- Программа 2.1 Вычисление значения полинома  $n < 12$  (см. также программу 2.12)
- Программа 2.2. Вычисление значения  $\sin x$
- Программа 2.3. Вычисление значения  $\cosh x$
- Программа 2.4. Вычисление значения  $\tanh x$
- Программа 2.5. Вычисление модуля вещественного числа
- Программа 2.6. Вычисление значения  $\operatorname{sign} x$
- Программа 2.7. Вычисление значений одиночного треугольного импульса
- Программа 2.8. Вычисление вещественного корня  $f(x) = 0$  методом половинного деления
- Программа 2.9. Вычисление вещественного корня  $f(x) = 0$  методом простых итераций
- Программа 2.10. Вычисление модуля и аргумента коэффициента отражения (для линии без потерь)
- Программа 2.11. Вычисление значений функции с заданным шагом
- Программа 2.12. Вычисление значения полинома  $n \leq 10$
- Программа 3.1. Вычисление значения проводимости (сопротивления) лестничной схемы, напряжений и токов ее элементов
- Программа 3.2. Вычисление определителя второго порядка с вещественными элементами
- Программа 3.3. Вычисление определителя третьего порядка с вещественными элементами
- Программа 3.4. Решение системы двух линейных уравнений
- Программа 3.5. Решение системы трех линейных уравнений
- Программа 3.6. Вычисление узлового напряжения (случай двух узлов) и эквивалентной проводимости
- Программа 3.7. Взаимные преобразования треугольника и звезды сопротивлений
- Программа 4.1. Решение нелинейного уравнения методом итераций
- Программа 4.2. Решение нелинейного уравнения  $x = \varphi(x)$  методом простой итерации
- Программа 4.3. Линейная интерполяция функций
- Программа 4.4. Вычисление коэффициентов линии регрессии
- Программа 5.1. Преобразование показательной формы комплексного числа в алгебраическую
- Программа 5.2. Преобразование алгебраической формы комплексного числа в показательную
- Программа 5.3. Преобразование форм комплексного числа
- Программа 5.4. Вычисление суммы (разности) и преобразование комплексных чисел
- Программа 5.5. Вычисление значения определителя второго порядка с комплексными элементами, заданными в алгебраической форме
- Программа 6.1. Вычисление значений модуля и аргумента коэффициентов комплексного ряда Фурье функции, заданной аналитически

- Программа 6.2.** Вычисление значений модуля и аргумента коэффициентов комплексного ряда Фурье при табличном задании функции
- Программа 6.3.** Гармонический синтез функции по постоянной составляющей и первым трем гармоникам
- Программа 6.4.** Гармонический синтез функций по постоянной составляющей и любому числу гармоник
- Программа 7.1.** Численное решение дифференциального уравнения первого порядка
- Программа 7.2.** Численное решение системы двух линейных дифференциальных уравнений первого порядка
- Программа 7.3.** Вычисление установившегося значения выходной величины при воздействии периодических несинусоидальных токов или напряжений
- Программа 8.1.** Вычисление значений гиперболических косинуса и синуса комплексного аргумента
- Программа 8.2.** Вычисление значений гиперболического тангенса комплексного аргумента
- Программа 8.3.** Вычисление обратного гиперболического тангенса комплексного аргумента
- Программа 8.4.** Вычисление обратного гиперболического косинуса вещественного аргумента
- Программа 9.1.** Вычисление значений характеристических параметров линии по сопротивлениям холостого хода и короткого замыкания ее отрезка
- Программа 9.2.** Вычисление значений первичных параметров линии по известным значениям волнового сопротивления и коэффициента распространения
- Программа 9.3.** Вычисление значений первичных параметров линии по известным значениям волнового сопротивления и коэффициента распространения
- Программа 9.4.** Расчет распределения действующих значений напряжения и тока вдоль отрезка однородной линии
- Программа 9.5.** Расчет распределения сопротивлений и проводимостей вдоль отрезка однородной линии
- Программа 9.6.** Расчет распределения действующих значений напряжения и тока вдоль отрезка однородной линии
- Программы вычисления некоторых периодических функций**

## **Список литературы**

1. Алимов В.И. Вычисления на калькуляторе "Электроника Б3-34": Учеб. пособие для вузов. Томск, ТПИ 1984. 95 с.
2. Дьяконов В.П. Справочник по расчетам на микрокалькуляторах. М.: Наука, 1985. 244 с.
3. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. М.: Наука, 1984. 832 с.
4. Метод наименьших квадратов//Наука и жизнь. 1985. № 2. С. 62–63.
5. Микрокалькулятор "Электроника МК-54": Техническое описание и инструкция по эксплуатации.
6. Сборник задач и упражнений по теоретическим основам электротехники: Учеб. пособие для вузов/Под ред. проф. П.А. Ионкина. М.: Энергоиздат, 1982. 768 с.
7. Трохименко Я.К., Любич Ф.Д. Инженерные расчеты на программируемых микрокалькуляторах. Киев: Техника, 1985. 328 с.
8. Цветков А.Н., Епанечников В.А. Прикладные программы для микроЭВМ "Электроника Б3-34", "Электроника МК-56", "Электроника МК-54". М.: Финансы и статистика, 1984. 175 с.

## ОГЛАВЛЕНИЕ

<i>Предисловие . . . . .</i>	3
<i>Глава первая. Основные понятия, теоремы и принципы теории электрических цепей . . . . .</i>	5
1.1. Электрические цепи и схемы . . . . .	5
1.2. Основные уравнения и задачи анализа цепей . . . . .	10
1.3. Основные принципы анализа цепей . . . . .	14
1.4. Теоремы электрических цепей и основанные на них методы расчета . . . . .	23
1.5. Эквивалентные преобразования схем . . . . .	27
<i>Глава вторая. Программируемые микрокалькуляторы и основы программирования . . . . .</i>	32
2.1. Режимы работы ПМК . . . . .	32
2.2. Работа ПМК в командном режиме . . . . .	34
2.3. Работа ПМК в режиме программирования . . . . .	43
2.4. Порядок работы с прикладной программой . . . . .	46
2.5. Основы программирования для ПМК . . . . .	48
<i>Глава третья. Расчет линейных резистивных цепей . . . . .</i>	73
3.1. Расчет цепей с одним источником методом "свертывания" схемы и методом пропорционального пересчета . . . . .	73
3.2. Метод контурных токов . . . . .	78
3.3. Метод узловых напряжений (узловых потенциалов) . . . . .	80
3.4. Программы решения систем линейных алгебраических уравнений с вещественными переменными . . . . .	82
3.5. Случай двух узлов . . . . .	86
3.6. Взаимные эквивалентные преобразования резистивных треугольника и звезды . . . . .	88
<i>Глава четвертая. Расчет нелинейных резистивных цепей . . . . .</i>	90
4.1. Общая характеристика нелинейных цепей и методов их расчета . . . . .	90
4.2. Графический метод . . . . .	91
4.3. Численные методы анализа . . . . .	93
4.4. Аппроксимация характеристики нелинейного резистора . . . . .	100
4.5. Аналитический метод расчета . . . . .	107
<i>Глава пятая. Расчет цепей при гармонических воздействиях . . . . .</i>	109
5.1. Действия над комплексными числами . . . . .	109
5.2. Вычисление значения определителя второго порядка с комплексными элементами, заданными в алгебраической форме . . . . .	122
<i>Глава шестая. Периодические негармонические процессы . . . . .</i>	123
6.1. Численный гармонический анализ вещественных функций . . . . .	123
6.2. Численный гармонический синтез вещественной функции . . . . .	130
<i>Глава седьмая. Численные расчеты переходных процессов в цепях с сосредоточенными параметрами . . . . .</i>	135
7.1. Численное решение уравнения первого порядка вида $dx/dt = ax + bw$ при $t \geq t_0$ и заданном значении $x(t_0) = x_0$ . . . . .	136
7.2. Численное решение системы двух обыкновенных линейных дифференциальных уравнений . . . . .	140

<b>7.3. Анализ установившегося процесса при воздействии на вход цепи источников периодических несинусоидальных токов или напряжений</b>	<b>144</b>
<b>Глава восьмая. Вычисление параметров линейных четырехполюсников</b>	<b>148</b>
8.1. Основные определения . . . . .	148
8.2. Первичные параметры четырехполюсников . . . . .	148
8.3. Вычисление первичных параметров . . . . .	150
8.4. Вторичные (характеристические) параметры и их вычисление . . . . .	152
<b>Глава девятая. Цепи с распределенными параметрами ("длинные линии")</b>	<b>157</b>
9.1. Основные определения и уравнения . . . . .	157
9.2. Телеграфные уравнения в символьической форме . . . . .	159
9.3. Решения телеграфных уравнений в экспоненциальных функциях . . . . .	160
9.4. Решения телеграфных уравнений в гиперболических функциях . . . . .	162
9.5. Система уравнений отрезка линии без потерь . . . . .	170
9.6. Анализ отрезка однородной линии без потерь . . . . .	178
<b>Приложение. Программы вычисления некоторых периодических функций</b>	<b>182</b>
<b>Список программ . . . . .</b>	<b>186</b>
<b>Список литературы . . . . .</b>	<b>188</b>

Производственно-практическое издание

Афанасьев Виктор Васильевич  
Веселовский Олег Николаевич

**РАСЧЕТЫ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ НА ПРОГРАММИРУЕМЫХ  
МИКРОКАЛЬКУЛЯТОРАХ**

Зав. редакцией *М.П. Соколова*

Редактор *Л.А. Решмина*

Художник обложки *В.Ф. Громов*

Художественные редакторы *В.А. Гозак-Хозак, Т.Н. Хромова*

Технический редактор *М.А. Канониди*

Корректор *С.В. Малышева*

ИБ № 3036

Набор выполнен в издательстве. Подписано в печать с оригинала-макета 02.03.91.

Формат 60 x 88 1/16. Бумага офсетная № 2. Печать офсетная. Усл. печ. л. 11,76.

Усл.кр.-отт. 12,12. Уч.-изд.л. 10.77. Тираж 10000 экз. Заказ 6498. С 185.

Энергоатомиздат, 113114, Москва, М-114, Шлюзовая наб., 10.

Отпечатано в ордена Октябрьской Революции и ордена Трудового Красного Знамени МПО "Первая Образцовая типография" Министерства печати и информации Российской Федерации. 113054, Москва, Валовая ул., 28.

# **Расчеты электрических цепей на программируемых МИКРО- КАЛЬКУЛЯТОРАХ**

Авторы книги Виктор Васильевич Афанасьев и Олег Николаевич Веселовский — сотрудники кафедры общей электротехники Новосибирского электротехнического института. В.В. Афанасьев — доцент кафедры, О. Н. Веселовский — заведующий кафедрой, доктор технических наук.

Предлагаемая вниманию читателей книга не носит универсального характера, она из является также узко специализированным изданием, она ориентирована на лиц, занимающихся расчетами различных электрических схем в стационарных и переходных режимах, т.е. на широкий круг инженеров-электриков и студентов, изучающих теоретическую и общую электротехнику. Одна из задач, которые ставят перед собой авторы, состоит в том, чтобы подготовить начинающих к самостоятельной работе по программированию и применению ЭВМ. Программы приводятся в расширенной форме, с указанием адресов и кодов, что позволяет пользователю легко контролировать ввод программы и редактировать ее.

Авторы умело (и весьма изобретательно) используют достаточно скромные возможности микрокалькуляторов для решения широкого набора электротехнических задач.

ЭНЕРГОАТОМИЗДАТ