



Εργασία 2

(Προθεσμία: Παρασκευή 12 Νοεμβρίου 2021)

ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ – ΤΥΧΑΙΕΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΕΣ

1. Για 2 ενδεχόμενα A και B, βρέθηκε ότι
- Μόνο το A συνέβη N1 φορές
 - Μόνο το B συνέβη N2 φορές
 - Το A και B συνέβη N3 φορές
 - Ούτε το A ούτε το B συνέβη N4 φορές.

Ποιά είναι η δεσμευμένη πιθανότητα $P(A|B)$;

BAYESIAN ΘΕΩΡΙΑ ΑΠΟΦΑΣΕΩΝ

2. Ο ακόλουθος πίνακας δίνει τις υπό συνθήκη πιθανότητες μιας τυχαίας μεταβλητής X για τρεις κατηγορίες ω_1 , ω_2 , και ω_3 (τρία ζάρια). Έστω ότι γνωρίζουμε τις a priori (εκ των προτέρων) πιθανότητες $p(\omega_1) = 0.3$ και $p(\omega_2) = 0.3$. Δηλαδή, διαλέγουμε ένα ζάρι το ρίχνουμε και προσπαθούμε να μαντέψουμε ποιο ζάρι είχαμε διαλέξει.

Να υπολογιστεί το ολικό σφάλμα της ταξινόμησης χρησιμοποιώντας τον κανόνα απόφασης Bayes.

$p(X=x \omega)$						
	X=1	X=2	X=3	X=4	X=5	X=6
ω_1	0.3	0.2	0.1	0.1	0.2	0.1
ω_2	0.2	0.2	0.4	0.05	0.1	0.05
ω_3	0.1	0.3	0.15	0.05	0.3	0.1

3. Υπολογίστε την εξίσωση της επιφάνειας απόφασης και το ολικό σφάλμα της κατηγοριοποίησης κατά Bayes για δυο κατηγορίες ω_1 και ω_2 , με $p(\omega_1)=0.25$, όπου θεωρούμε δείγματα σε 2-διαστάσεις από Γκαουσιανές κατανομές που περιγράφονται από τις ακόλουθες πυκνότητες πιθανότητας:

$$p(\bar{x} / \omega_1) = N(\bar{\mu}_1, \bar{\Sigma}_1) \text{ και } p(\bar{x} / \omega_2) = N(\bar{\mu}_2, \bar{\Sigma}_2)$$

με
$$\bar{\mu}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \Sigma_1 = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 9 \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad \bar{\mu}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \Sigma_2 = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 9 \end{pmatrix}$$

4. (α) Να ευρεθεί η βέλτιστη λύση (απόφαση), όταν $\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$, $P(x|\omega_1) = N(2, 0.5)$, $P(x|\omega_2) = N(1.5, 0.2)$, $P(\omega_1)=1/3$, $P(\omega_2)=2/3$ με $\lambda = \begin{bmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ και να υπολογισθεί το ελάχιστο κόστος.
- (β) Να προσομοιωθεί η διαδικασία υπολογιστικά, δημιουργώντας τυχαίους αριθμούς που ακολουθούν την κανονική κατανομή με την εντολή `randn`, και να εκτιμηθεί αριθμητικά το κόστος από την λύση (α).

Ξάνθη, 05/11/2021