

Лабораторная работа 3.2.5

Спектры электрических сигналов (компьютер)

4 декабря 2021 г.

Старченко Иван Александрович

Цель работы: изучить спектральный состав периодических электрических сигналов.

В работе используются: анализатор спектра (ПК), генератор прямоугольных импульсов и сигналов специальной формы, осциллограф.

В работе изучается спектральный состав периодических электрических сигналов различной формы: последовательности прямоугольных импульсов, последовательности пугов и амплитудно модулированных гармонических колебаний. Спектры этих сигналов наблюдаются с помощью промышленного анализатора спектра и сравниваются с рассчитанными теоретически.

1 Теоретические сведения

Сколько угодно сложный электрический сигнал $V(t)$ может быть разложен на более простые сигналы. В радиотехнике широко используется разложение сигнала $V(t)$ на совокупность гармонических сигналов различных частот ω . Функция $F(\omega)$, описывающая зависимость амплитуд отдельных гармоник от частоты, называется амплитудной спектральной характеристикой сигнала $V(t)$. Представление сложного периодического сигнала в виде суммы дискретных гармонических сигналов в математике называется разложением в ряд Фурье.

Зная спектральный состав $F(\omega)$ периодической последовательности некоторого импульса $V(t)$, мы можем осуществить обратное преобразование Фурье: сложив отдельные гармоники со своими амплитудами и фазами, получить необходимую последовательность импульсов. Степень совпадения полученного сигнала с $V(t)$ определяется количеством синтезированных гармоник: чем их больше, тем лучше совпадение. Рассмотрим конкретные примеры периодических функций, которые будут предметом исследования в нашей работе.

Рассмотрим конкретные примеры периодических функций, которые будут предметом исследования в нашей работе.

1.1 Спектральный анализ электрических сигналов

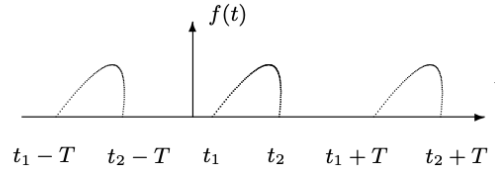


Рис. П.1. График периодической функции с периодом повторения T

Пусть заданная функция $f(t)$ периодически повторяется с частотой $\Omega_1 = 2\pi/T$, где T – период повторения (рис. П.1). Её разложение в ряд Фурье имеет вид

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\Omega_1 t) + b_n \sin(n\Omega_1 t)]$$

или

$$f(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\Omega_1 t - \psi_n)$$

Здесь $a_0/2 = A_0/2$ – постоянная составляющая (среднее значение) функции $f(t)$; a_n и b_n – амплитуды косинусных и синусных членов разложения. Они определяются выражениями

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} f(t) \cos(n\Omega_1 t) dt$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} f(t) \sin(n\Omega_1 t) dt$$

Точку начала интегрирования t_1 можно выбрать произвольно. В тех случаях, когда сигнал четен относительно $t = 0$, в тригонометрической записи остаются только косинусные члены, т.к. все коэффициенты b_n обращаются в нуль. Для нечетной относительно $t = 0$ функции, наоборот, ряд состоит только из синусных членов.

Амплитуда A_n и фаза ψ_n n -й гармоники выражаются через a_n и b_n следующим образом:

$$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}; \quad \psi_n = \arctg \frac{b_n}{a_n}$$

Как мы видим, спектр любой периодической функции состоит из набора гармонических колебаний с дискретными частотами: $\Omega_1, 2\Omega_1, 3\Omega_1 \dots$ и постоянной составляющей, которую можно рассматривать как колебание с нулевой частотой $(0 \cdot \Omega_1)$.

Представим выражение в комплексной форме. Для этого заменим косинусы экспонентами в соответствии с формулой

$$\cos \alpha = \frac{e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}}{2}$$

Подстановка даёт

$$f(t) = \frac{1}{2} \left(A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-i\psi_n} e^{in\Omega_1 t} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{i\psi_n} e^{-in\Omega_1 t} \right)$$

Введём комплексные амплитуды \tilde{A}_n и \tilde{A}_{-n}

$$\tilde{A}_n = A_n e^{-i\psi_n}; \quad \tilde{A}_{-n} = A_n e^{i\psi_n}; \quad \tilde{A}_0 = A_0$$

Разложение $f(t)$ приобретает вид

$$f(t) = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{A}_n e^{in\Omega_1 t}$$

Как мы видим, введение отрицательных частот (типа $n\Omega_1$) позволяет записать разложение Фурье особенно простым образом.

Для расчёта комплексных амплитуд A_n умножим левую и правую части на $e^{-ik\Omega_1 t}$ и проинтегрируем полученное равенство по времени на отрезке, равном одному периоду, например, от $t_1 = 0$ до $t_2 = 2\pi/\Omega_1$. В правой части обратятся в нуль все члены, кроме одного, соответствующего $n = k$. Этот член даёт $A_k T/2$. Имеем поэтому

$$A_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) e^{-ik\Omega_1 t} dt$$

Рассмотрим периодические функции, которые исследуются в нашей работе.

1.2 Периодическая последовательность прямоугольных импульсов

С амплитудой V_0 , длительностью τ , частотой повторения $f_{\text{повт}} = 1/T$, где T — период повторения импульсов.

Среднее значение

$$\langle V \rangle = \frac{a_0}{2} = \frac{A_0}{2} = \frac{1}{T} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} V_0 dt = V_0 \frac{\tau}{T}$$

Амплитуды косинусных составляющих равны

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} V_0 \cos(n\Omega_1 t) dt = 2V_0 \frac{\tau}{T} \frac{\sin(n\Omega_1 \tau/2)}{n\Omega_1 \tau/2} \sim \frac{\sin x}{x}$$

Поскольку наша функция чётная, все амплитуды синусоидальных гармоник $b_n = 0$. Спектр $F(\nu)$ последовательности прямоугольных импульсов представлен на рис. П.3. Амплитуды гармоник A_n меняются по Закону $(\sin x)/x$. На рис. П.3 изображён спектр для случая, когда T кратно τ . Назовём шириной спектра $\Delta\omega$ (или $\Delta\nu$) расстояние от главного максимума ($\nu = 0$) до первого нуля, возникающего, как нетрудно убедиться, при $\Omega_1 = 2\pi/\tau$. При этом

$$\Delta\omega\tau \simeq 2\pi \quad \text{или} \quad \Delta\nu\Delta t \simeq 1$$

Полученное соотношение взаимной связи интервалов $\Delta\nu$ и Δt является частным случаем соотношения неопределённости в квантовой механике. Несовместимость острой локализации волнового процесса во времени с узким спектром частот - явление широко известное в радиотехнике. Ширина селективной настройки $\Delta\nu$ радиоприёмника ограничивает приём радиосигналов. Длительностью $t < 1/\Delta\nu$.

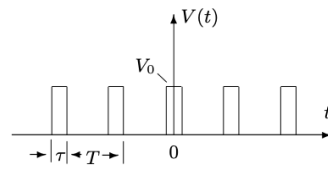


Рис. П.2. Периодическая последовательность прямоугольных импульсов

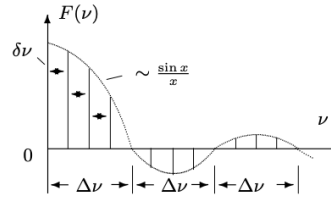


Рис. П.3. Спектр периодической последовательности прямоугольных импульсов

1.3 Периодическая последовательность цугов

Гармонического колебания $V_0 \cos(\omega_0 t)$ с длительностью цуга τ и периодом повторения T (рис. П.4)

Функция $f(t)$ снова является чётной относительно $t = 0$. Амплитуда n -й гармоники равна

$$\begin{aligned} A_n &= a_n = \frac{2}{T} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} V_0 \cos(\omega_0 t) \cdot \cos(n\Omega_1 t) dt = \\ &= V_0 \frac{\tau}{T} \left(\frac{\sin[(\omega_0 - n\Omega_1)\frac{\tau}{2}]}{(\omega_0 - n\Omega_1)\frac{\tau}{2}} + \frac{\sin[(\omega_0 + n\Omega_1)\frac{\tau}{2}]}{(\omega_0 + n\Omega_1)\frac{\tau}{2}} \right) \end{aligned}$$

Такое спектральное распределение $F(\omega)$ для случая, когда $\frac{T}{\tau}$ равно целому числу, представлено на рис. П.5. Сравнивая спектр последовательности прямоугольных импульсов и спектр цугов (см. рис. П.3 и П.5),

мы видим, что они аналогичны, но их максимумы сдвинуты по частоте на величину ω_0 .

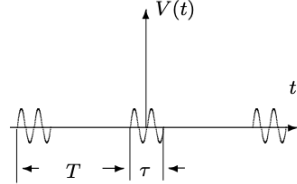


Рис. П.4. Периодическая последовательность пугов

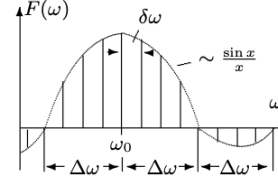


Рис. П.5. Спектр периодической последовательности пугов

1.4 Амплитудно-модулированные колебания.

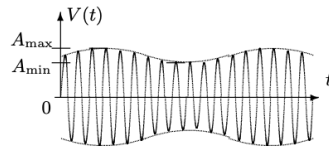


Рис. П.6. Гармонические колебания, модулированные по амплитуде

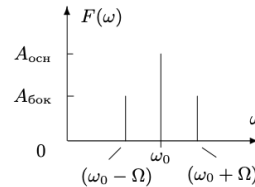


Рис. П.7. Спектр колебаний, модулированных по амплитуде

Рассмотрим гармонические колебания высокой частоты ω_0 , амплитуда которых медленно меняется по гармоническому закону с частотой Ω ($\Omega \ll \omega_0$) (рис. П.6):

$$f(t) = A_0[1 + m \cos(\Omega t)] \cos(\omega t)$$

Коэффициент m называют глубиной модуляции. При $m < 1$ амплитуда колебаний меняется от минимальной $A_{\min} = A_0(1 - m)$ до максимальной $A_{\max} = A_0(1 + m)$. Глубина модуляции может быть представлена в виде

$$m = \frac{A_{\max} - A_{\min}}{A_{\max} + A_{\min}}$$

Простым тригонометрическим преобразованием можно найти спектр амплитудно-модулированных колебаний:

$$\begin{aligned} f(t) &= A_0 \cos(\omega_0 t) + A_0 m \cos(\Omega t) \cos(\omega_0 t) = \\ &= A_0 \cos(\omega_0 t) + \frac{A_0 m}{2} \cos(\omega_0 + \Omega) t + \frac{A_0 m}{2} \cos(\omega_0 - \Omega) t \end{aligned}$$

τ , мкс	40	60	80	100	120	140	160	180	200
$\Delta\nu$, кГц	25	16,5	12,5	10	8,5	7	6,5	5,5	5
$\frac{1}{\tau}$, кГц	25	16,66	12,5	10	8,33	7,14	6,25	5,56	5

Таблица 1: Зависимость ширины спектра от времени длительности импульса

Спектр $F(\omega)$ таких колебаний содержит три составляющих (рис. П. 7) Основная компонента представляет собой исходное немодулированное колебание с несущей частотой ω_0 и амплитудой $A_{oc} = A_0$ — первое слагаемое в правой части; боковые компоненты спектра соответствуют гармоническим колебаниям с частотами $(\omega_0 + \Omega)$ и $(\omega_0 - \Omega)$ — Второе и третье слагаемые. Амплитуды этих двух колебаний одинаковы и составляют $m/2$ от амплитуды немодулированного колебания: $A_{бок} = A_0 m/2$

2 Обработка данных

2.1 Периодические прямоугольные импульсы

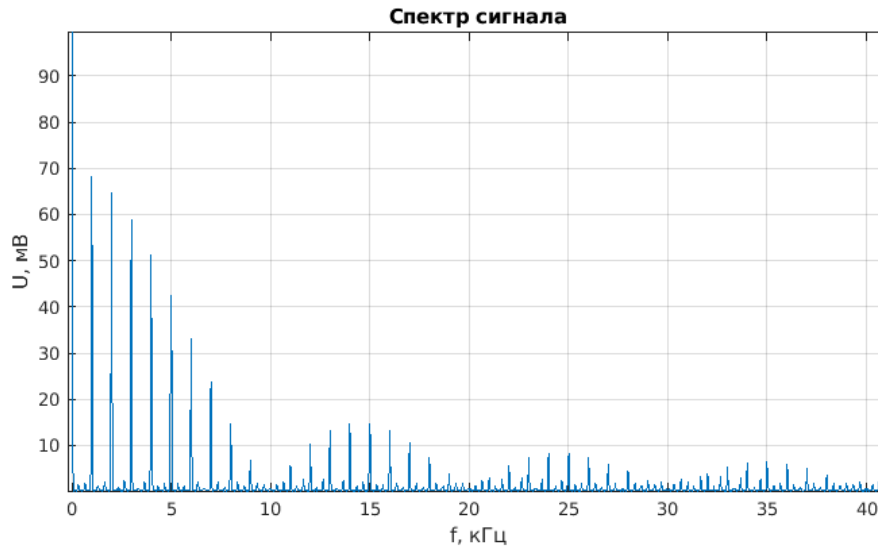
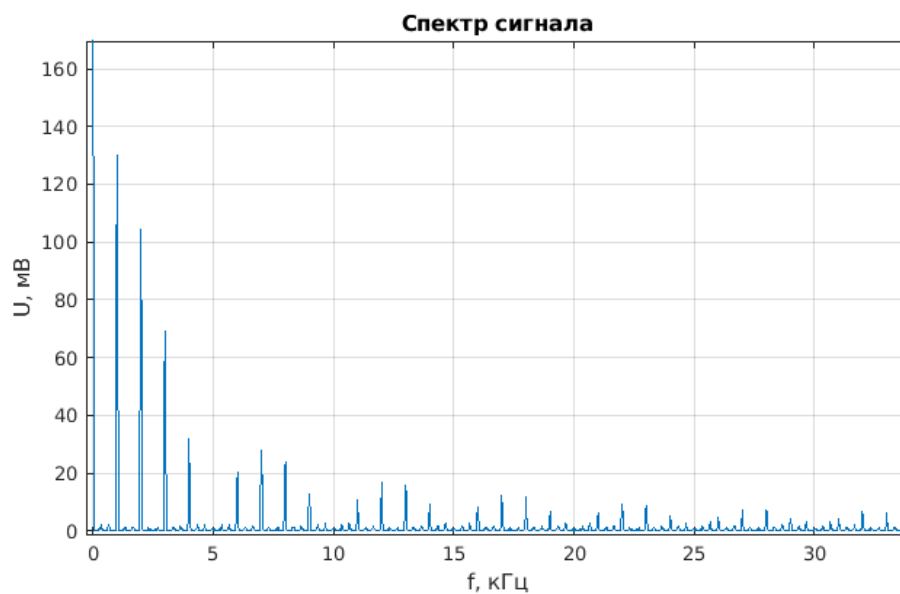
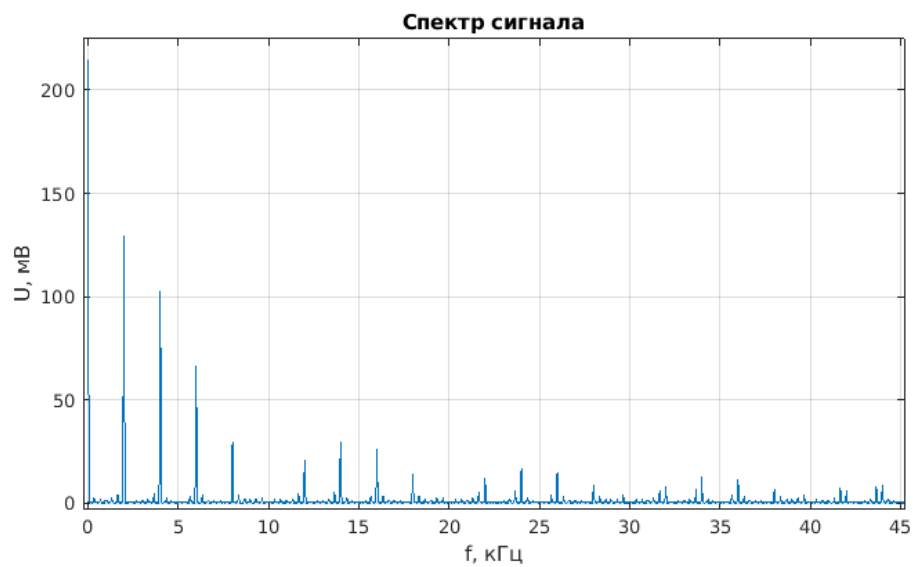


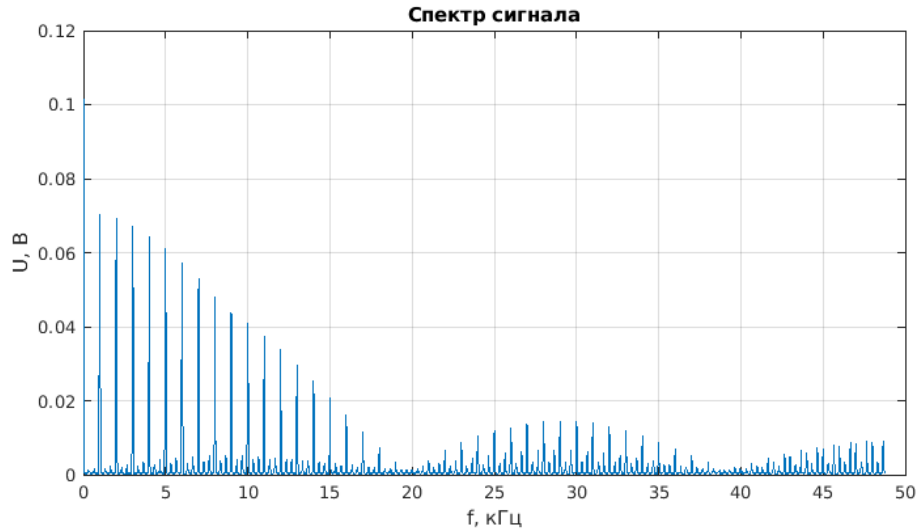
Рис. 1: Спектр при $f_{повт} = 1$ кГц, $\tau = 100$ мкс

При фиксированной частоте $f_{повт} = 1$ кГц будем менять τ , при этом будет меняться ширина спектра. Зафиксируем наблюдения в таблице.

Построим график зависимости $\Delta\nu(\frac{1}{\tau})$:

Рис. 2: Спектр при $f_{\text{повт}} = 1$ кГц, $\tau = 200$ мксРис. 3: Спектр при $f_{\text{повт}} = 2$ кГц, $\tau = 100$ мкс

Из графика следует выполнение соотношения неопределённости для прямоугольных импульсов: $\Delta\nu \cdot \tau \approx 1$.

Рис. 4: Спектр при $f_{\text{повт}} = 1$ кГц, $\tau = 50$ мкс

$\delta\nu$, кГц	0,5	1	2	4	5
$f_{\text{повт}}$, кГц	0,5	1	2	4	5

Таблица 2: Зависимость расстояния между компонентами спектра от частоты повторения цугов

2.2 Периодическая последовательность цугов

Установим несущую частоту цугов $\nu_0 = 25$ кГц, частота запуска цугов $f_{\text{повт}} = 1$ кГц с длительностью импульса $\tau = 100$ мкс.

Проанализируем, как меняется спектр при изменении длительности импульса цуга.

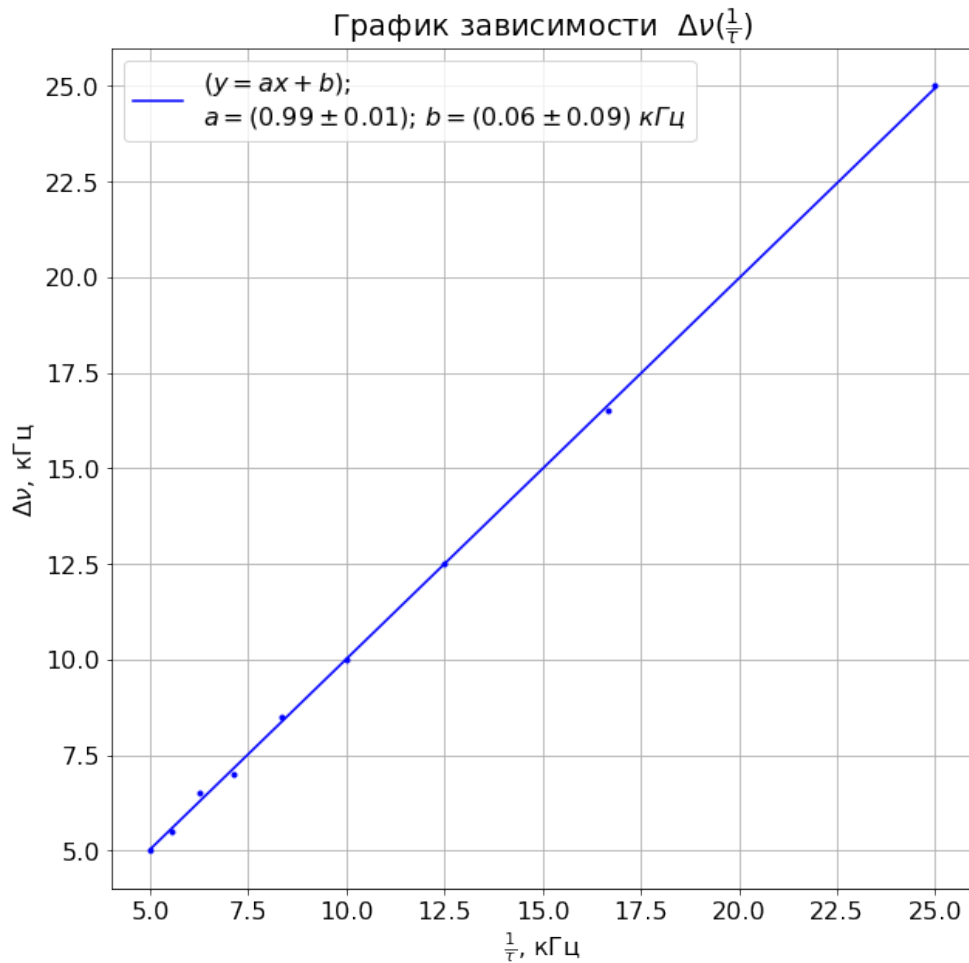
Теперь проанализируем, как меняется спектр при изменении несущей частоты.

Установим несущую частоту $\nu_0 = 30$ кГц при $\tau = 100$ Гц, варьируя частоту запуска цугов. Снимем зависимость расстояния между соседними спектральными компонентами от частоты повторения цугов:

Данные по расстоянию между компонентами спектра получены по более, чем 80 точек данных, и с точностью до погрешности генератора совпадают со значениями частоты повторения цугов $f_{\text{повт}}$.

Получается, что $\delta\nu = k f_{\text{повт}}$, где $k \approx 1$. Из теории следует, что значения двух величин совпадают, значит экспериментальная зависимость верна.

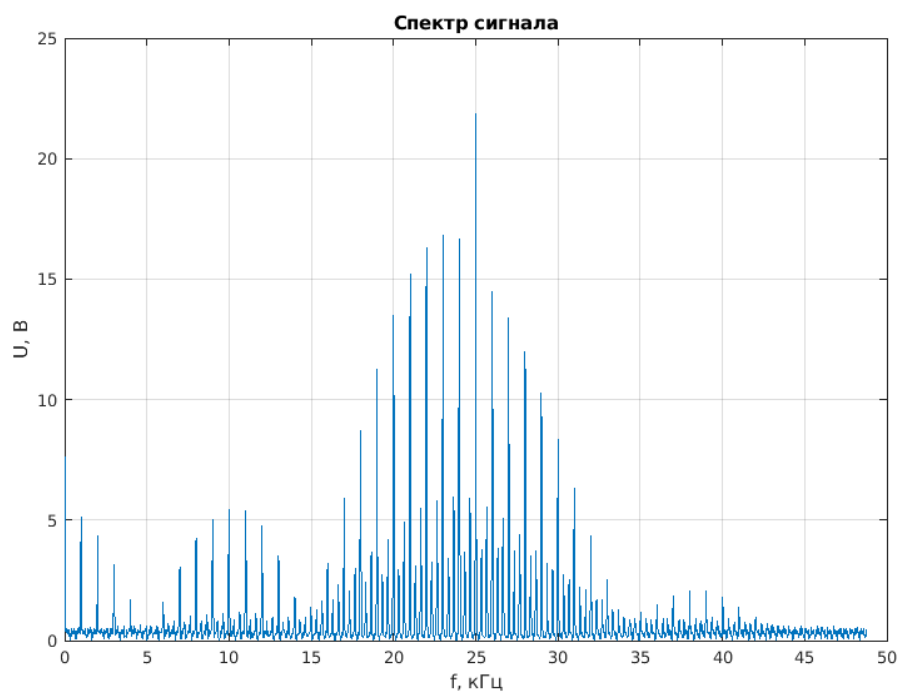
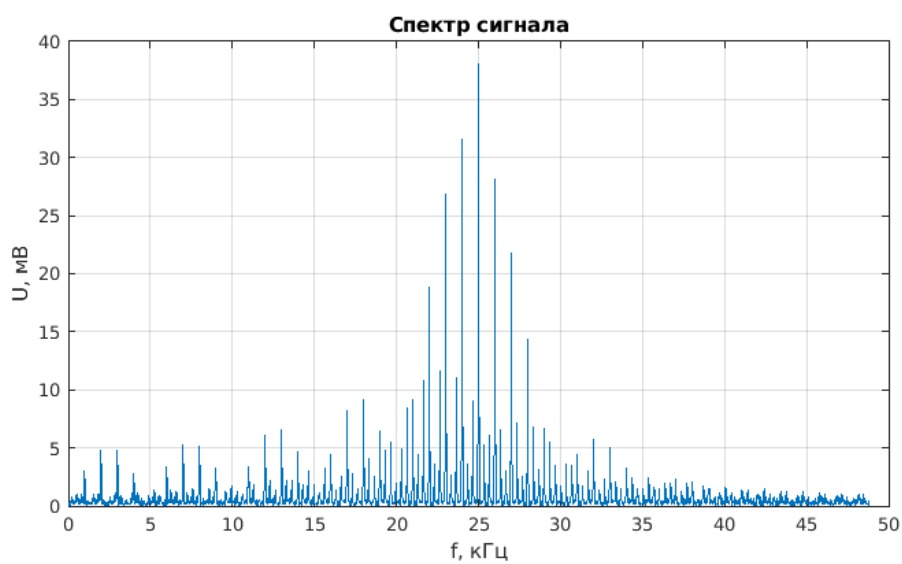
И для прямоугольных импульсов, и для цугов при повышении частоты

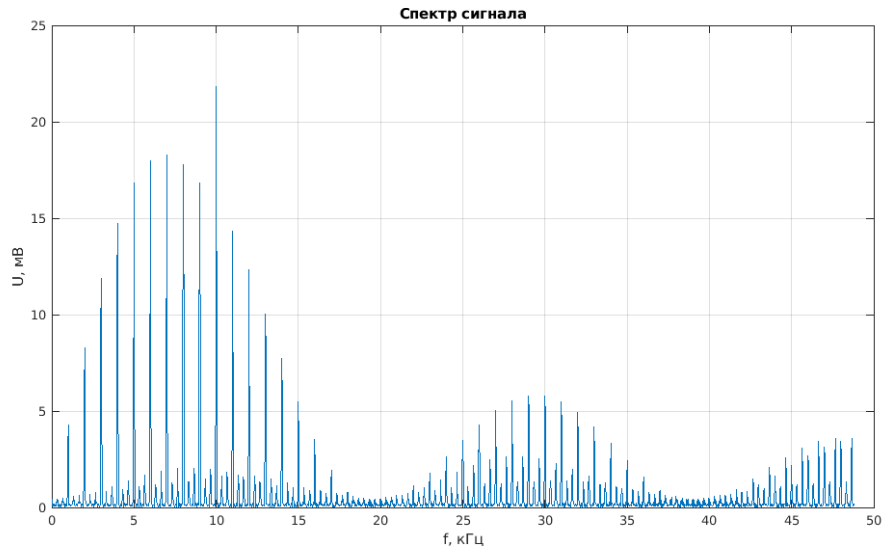
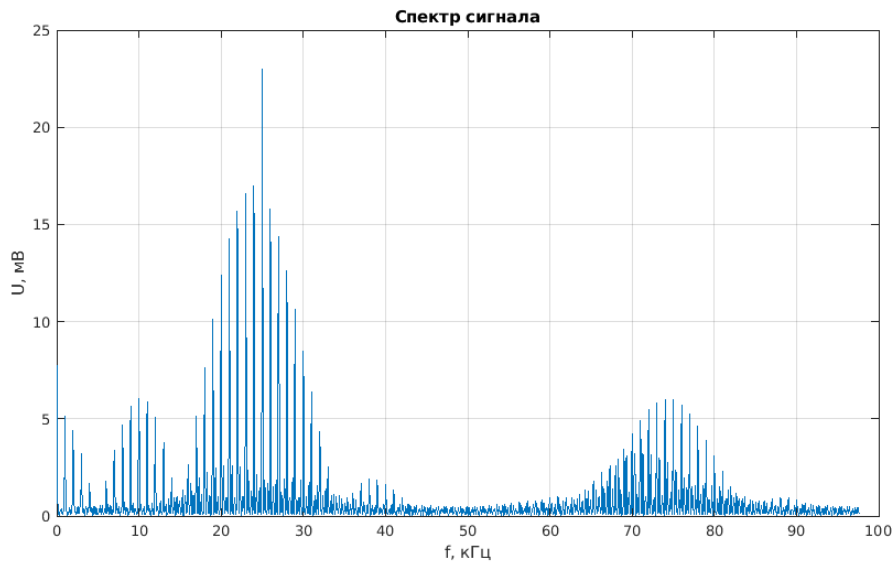
Рис. 5: Зависимость $\Delta\nu(\frac{1}{\tau})$

повторения импульсов увеличивается расстояние между компонентами спектра, а при повышении длительности импульса уменьшается ширина спектра. Разница между графиками спектров прямоугольного импульса и цуга в том, что спектр цуга смещён на значение несущей частоты в сторону повышения частоты. То есть при устремлении несущей частоты к нулю графики наложатся друг на друга.

2.3 Амплитудно-модулированные колебания

Установим синусоидальный сигнал частоты $\nu_0 = 25 \text{ кГц}$, амплитуды $0,5 \text{ В}$. Подключим модуляцию к этому сигналу амплитуды $0,1 \text{ В}$ и частоты $\nu = 1 \text{ кГц}$.

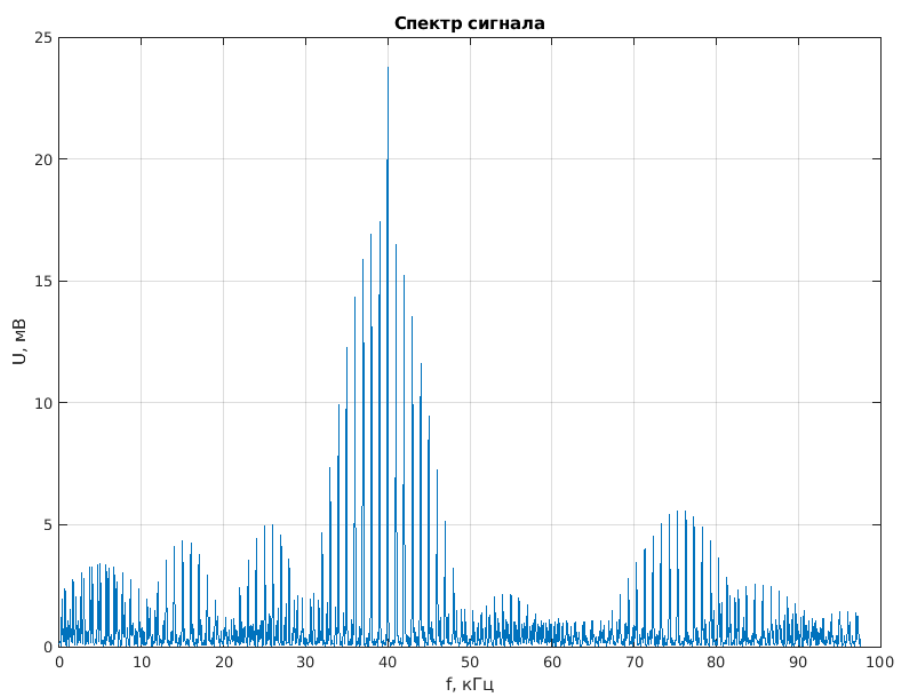
Рис. 6: Спектр при $\nu_0 = 25$ кГц, $\tau = 100$ мксРис. 7: Спектр при $\nu_0 = 25$ кГц, $\tau = 200$ мкс

Рис. 8: Спектр при $\nu_0 = 10$ кГц, $\tau = 100$ мксРис. 9: Спектр при $\nu_0 = 25$ кГц, $\tau = 100$ мкс

Меняя глубину модуляции до 1, измерим следующие значения:

Построим график зависимости.

Получилось значение $k = 0,511 \pm 0,021$, согласно же теории это значение должно равняться 0,5. То есть получилось верное соотношение

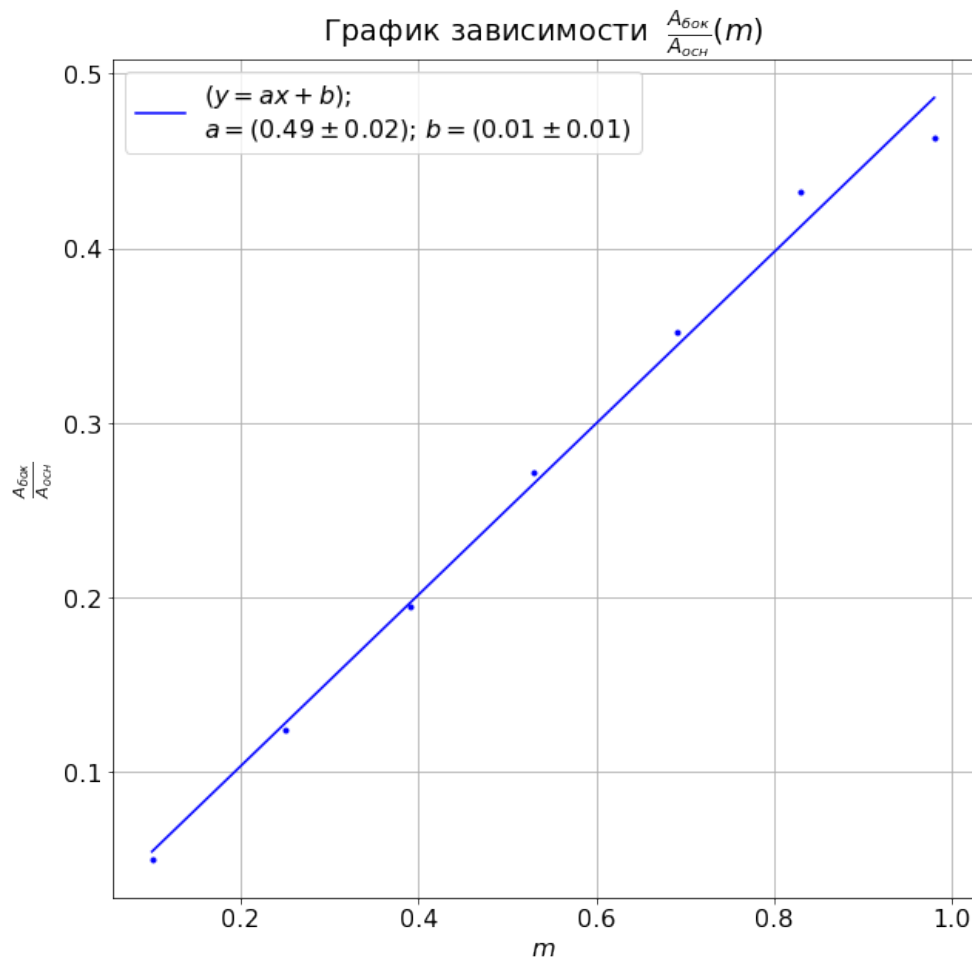
Рис. 10: Спектр при $\nu_0 = 40$ кГц, $\tau = 100$ мкс

$A_{min}, \text{ мВ}$	450	375	300	225	150	75	0
$A_{max}, \text{ мВ}$	550	625	700	775	850	925	1000
m	0,1	0,25	0,4	0,55	0,7	0,85	1
$A_{бок}, \text{ мВ}$	17	43	68	94	120	147	174
$A_{осн}, \text{ мВ}$	343	341	342	342	340	342	341
$\frac{A_{бок}}{A_{осн}}$	0,496	0,126	0,199	0,275	0,353	0,430	0,510

Таблица 3: Зависимость $\frac{A_{бок}}{A_{осн}}$ от m

амплитуд при различных модуляциях.

При увеличении частоты модуляции две боковые гармоники отдаляются от основной по величине на спектре.

Рис. 11: График зависимости $\frac{A_{бок}}{A_{осн}}$ от m

3 Заключение

В ходе выполнения работы теоретическое описание спектров исследуемых сигналов подтвердилось на основе их изучения с помощью генератора и осциллографа.

4 Литература

- Никулин М.Г. Лабораторный практикум по общей физике. Электричество и магнетизм
- Описание лабораторных работ на кафедре общей физики МФТИ
- П.В. Попов, А.А. Нозик. Обработка результатов учебного эксперимента