Лабораторная работа 2.1.2
Определение $\frac{C_p}{C_v}$ методом изобарического расширения газа.

17 марта 2021 г.

Старченко Иван Александрович

Цель работы: определение $\frac{C_p}{C_v}$ для воздуха.

Используемое оборудование: стеклянный сосуд; U-образный жидкостный манометр; резиновая груша; секундомер.

1. Теоретическое введение

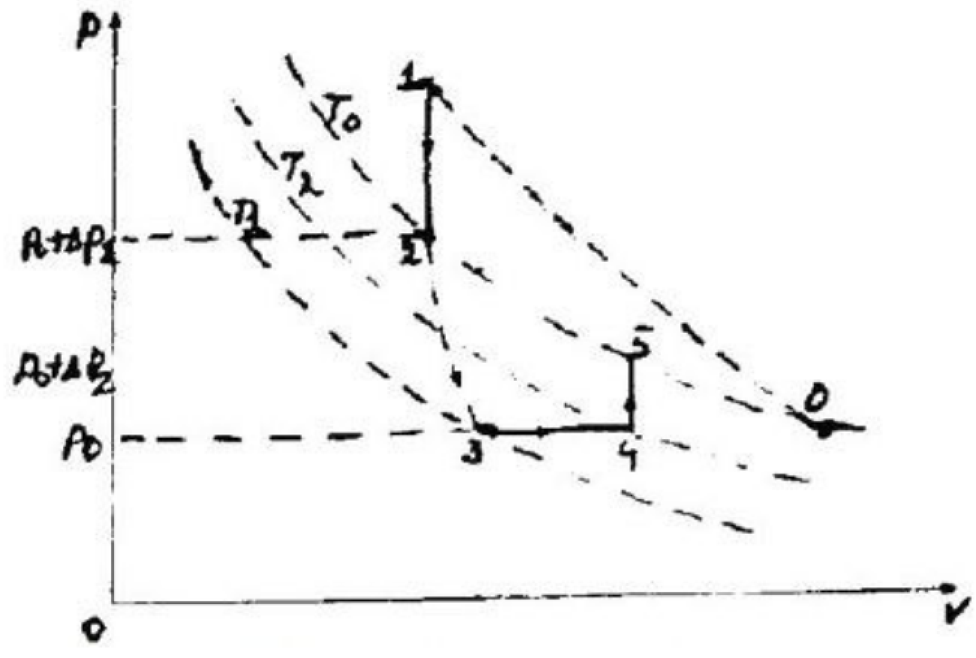

Рис. 1: Диаграмма, характеризующая процессы, производимые над воздухом, заключенным в объеме ΔV

С помощью резиновой груши, соединённой трубкой с краном K_1, в сосуде создаётся заданное избыточное давление p_1 воздуха. При этом газ оказывается перегретым, так как совершается работа над газом, соответственно, его внутренняя энергия увеличивается, соответственно, температура тоже увеличивается.

Мысленно выделим в сосуде некоторый объем ΔV воздуха. Будем следить за изменением его состояния. Вследствие теплообмена со стенками сосуда через некоторое время газ остынет до комнатной температуры T_0 (изохорное охлаждение, процесс $1 \longrightarrow 2$ на рис. 2). При этом давление воздуха понизится до $p_0 + \Delta p_1$, где

$$\Delta p_1 = \rho g \Delta h_1. \qquad (1)$$

Откроем кран K. За время Δt порядка 0,5 с произойдёт адиабатическое расширение газа ($2 \longrightarrow 3$), и его температура окажется ниже комнатной. Далее газ будет изобарически нагреваться (процесс $3 \longrightarrow 4$). Зададим время τ, в течение которого кран K остается открытым, таким чтобы можно было пренебречь временем Δt адиабатического расширения воздуха. После закрытия крана газ станет изохорически нагревается до комнатной температуры (процесс $4 \longrightarrow 5$), причём давление внутри возрастет до $p_0 + \Delta p_2$, где

$$\Delta p_2 = \rho g \Delta h_2. \qquad (2)$$

Наибольший интерес представляет исследование зависимости отношения перепадов давления $\dfrac{\Delta p_1}{\Delta p_2}$ от времени τ.

С хорошей точностью мы можем считать воздух в идеальным газом. Рассмотрим изобарическое расширение воздуха. Для этого запишем уравнение теплового баланса для изменяющейся со временем массы газа $m = \dfrac{p_0 V_0}{RT}\mu$:

$$c_p m dT = -\alpha(T - T_0)dt,$$

где c_p — удельная теплоемкость воздуха при постоянном давлении, α — положительный постоянный коэффициент, характеризующий теплообмен, V_0 — объем сосуда.

$$c_p \frac{p_0 V_0}{RT}\mu dT = -\alpha(T - T_0)dt \qquad \text{или} \qquad \frac{dT}{T(T - T_0)} = -\frac{\alpha dt}{c_p \dfrac{p_0 V_0}{R}\mu}.$$

Заметим, что $\dfrac{1}{T(T-T_0)} = -\dfrac{1}{T_0}\left(\dfrac{1}{T} - \dfrac{1}{T-T_0}\right)$. Тогда $\left(m_0 = \dfrac{p_0V_0}{RT_0}\mu\right)$:

$$\frac{1}{T_0}\left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T-T_0}\right)dT = \frac{\alpha dt}{c_p m_0 T_0}.$$

После сокращения на T_0 выполним интегрирование:

$$\int\limits_{T_1}^{T_2}\left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T-T_0}\right)dT = \frac{\alpha}{c_p m_0}\int\limits_0^{\tau} dt,$$

откуда ($\Delta T_1 = T_1 - T_0,\ \Delta T_2 = T_2 - T_0$):

$$\ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right) - \ln\left(\frac{T_2 - T_0}{T_1 - T_0}\right) = \frac{\alpha}{c_p m_0}\tau \qquad \text{или} \qquad \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\frac{\Delta T_1}{\Delta T_2}\right) = \frac{\alpha}{c_p m_0}\tau.$$

Наконец,

$$\frac{\Delta T_1}{T_1} = \frac{\Delta T_2}{T_2}\exp\left(\frac{\alpha}{c_p m_0}\tau\right). \qquad (3)$$

Для адиабатического расширения (процесс $2 \longrightarrow 3$) справедливо данное соотношение: $T^{\gamma} = const \cdot p^{\gamma-1}$ $\left(\text{здесь } \gamma = \dfrac{C_p}{C_v}\right)$. После взятия логарифмических производных получим:

$$\gamma\frac{dT}{T} = (\gamma-1)\frac{dp}{p} \qquad \text{или} \qquad \frac{dT}{T} = \frac{(\gamma-1)}{\gamma}\frac{dp}{p}.$$

Переходя к конечным приращениям найдём:

$$\frac{\Delta T_1}{T_1} = \frac{(\gamma-1)}{\gamma}\frac{\Delta p_1}{p_0}. \qquad (4)$$

При изохорическом нагреве газа выполняется соотношение: $\dfrac{p}{T} = const$. Возьмём от этого выражения логарифмическую производную: $\dfrac{dp}{p} = \dfrac{dT}{T}$. В конечных приращениях

$$\frac{\Delta T_2}{T_2} = \frac{\Delta p_2}{p_0}. \qquad (5)$$

После подстановки (4) и (5) в (3) получим:

$$\frac{(\gamma-1)}{\gamma}\frac{\Delta p_1}{p_0} = \frac{\Delta p_2}{p_0}\exp\left(\frac{\alpha}{c_p m_0}\tau\right).$$

Наконец, подставив в это уравнение выражения (1) и (2), получим:

$$\frac{(\gamma-1)}{\gamma}\Delta h_1 = \Delta h_2 \exp\left(\frac{\alpha}{c_p m_0}\tau\right) \quad \text{или} \quad \frac{\Delta h_1}{\Delta h_2} = \frac{\gamma}{\gamma-1}\exp\left(\frac{\alpha}{c_p m_0}\tau\right).$$

Следовательно:

$$\ln\left(\frac{\Delta h_1}{\Delta h_2}\right) = \ln\left(\frac{\gamma}{\gamma-1}\right) + \left(\frac{\alpha}{c_p m_0}\right)\tau. \tag{6}$$

Из графика зависимости $\ln\left(\frac{\Delta h_1}{\Delta h_2}\right)$ от τ определим γ.

2. Эксперементальная установка

Экспериментальная установка состоит из стеклянного сосуда A, снабжённого краном K_1, и U-образного жидкостного манометра, измеряющего избыточное давление газа в сосуде. Схема установки показана на рис. 2.

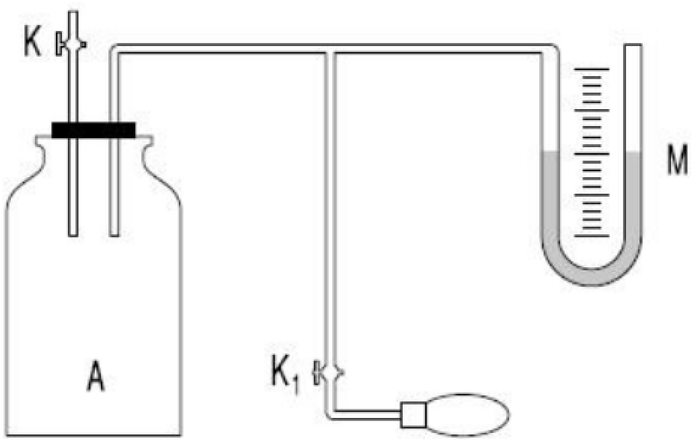

Рис. 2: Установка для определения $\frac{C_p}{C_v}$ методом адиабатического расширения газа

3. Снятие данных

На первом этапе будем открывать кран K_1 и заполнять сосуд CO_2 так, чтобы разность уровней жидкости в манометре составлял 10см, т. к. для большей разницы мощности газгольдера хватать не будет.

Далее закроем K_1, после установления состояния равновесия измерим Δh_1 и занесем в таблицу.

Потом откроем K_2 на время $\tau = 5$с. После того, как давление в сосуде перестанет менятся измерим и занесем в таблицу Δh_2.

Теперь востановим атмосферное давление в сосуде, открыв краны K_1 и K_2 на $3-4$ минуты.

И повторим так 7 раз, увеличивая время открытия крана K_2 до 35с

Теперь построим график $ln\dfrac{\Delta h_1}{\Delta h_2}(\tau)$ и по нему найдем γ

Таблица 1: Экспериментальные данные

$h_{1к}$, мм	$h_{1н}$, мм	Δh_1, мм	$h_{2к}$, мм	$h_{2н}$, мм	Δh_2, мм	τ, с	$\dfrac{\Delta h_1}{\Delta h_2}$	$ln\dfrac{\Delta h_1}{\Delta h_2}$
22.3	14.8	7.5	18.8	17.2	1.6	5	4.69	1.54
22.8	13.1	9.7	18.7	17.3	1.4	10	6.93	1.94
22.6	13.2	9.4	18.6	17.4	1.2	15	7.83	2.06
22.6	13.1	9.5	18.4	17.6	0.8	20	11.88	2.47
22.4	13.3	9.1	18.3	17.7	0.6	25	15.17	2.72
22.2	13.5	8.7	18.2	17.7	0.5	30	17.40	2.86
22.7	13.1	9.6	18.2	17.8	0.4	35	24.00	3.18

Полученный график(построенный в MATLAB) приведенен в конце.

4. Аппроксимация полученных данных

Проведем апроксимирующую прямую ($y = k \cdot x + b$) в программе MATLAB и найдем b. Полученное уравнение имеет вид:

$$y = 0.0529 \cdot x + 1.3379 \tag{1}$$

$$b = \ln\left(\frac{\gamma}{\gamma - 1}\right) \Rightarrow \gamma = \frac{e^b}{e^b - 1} = 1 + \frac{1}{e^b - 1} \Rightarrow \gamma = 1.36 \tag{2}$$

Рассчитаем погрешности полученной величины в программе MATLAB с помощью формулы:

$$\sigma_b = \sqrt{\frac{1}{n} \cdot \langle\left(\ln\frac{\Delta h_1}{\Delta h_2}\right)^2\rangle - \left(\langle\ln\left(\frac{\Delta h_1}{\Delta h_2}\right)\rangle\right)^2 - \ k^2(\langle\tau^2\rangle - \langle\tau\rangle^2)} \Rightarrow \sigma_b = 0.0136 \tag{3}$$

Найдем погрешность b:

$$\varepsilon_b = \frac{\sigma_b}{b} \cdot 100\% = \frac{0,0138}{1,3379} \cdot 100\% = 1,03\% \tag{4}$$

Теперь испольлзуй погрешность b, найдем погрешность требуемой величины:

$$\sigma_\gamma = \gamma \cdot \frac{\sigma_b}{b} = 0,02. \tag{5}$$

Найдем относительную погрешность показателя адиабаты для воздуха:

$$\varepsilon_\gamma = \frac{\sigma_\gamma}{\gamma} = \frac{0,02}{1,36} \cdot 100\% = 1.46\%. \tag{6}$$

5. Заключение

Итогом работы стало получение показателя адиабаты:

$$\gamma = 1.38 \pm 0.02; ; \varepsilon_\gamma = 1,46\% \tag{7}$$

Теперь сравним с табличным значением. Согласно Wikipedia, показатель адиабаты воздуха при $20°C$ равен 1.40, что входит в диапазон погрешности. Это говорит о применимости данного метода для получения показателя адиабаьы воздуха

6. Список используемой литературы

- Гладун А. Д. Лабораторный практикум по общей физике. Термодинамика и молекулярная физика

- Описание лабораторных работ на кафедре общей физики МФТИ

7. Графики

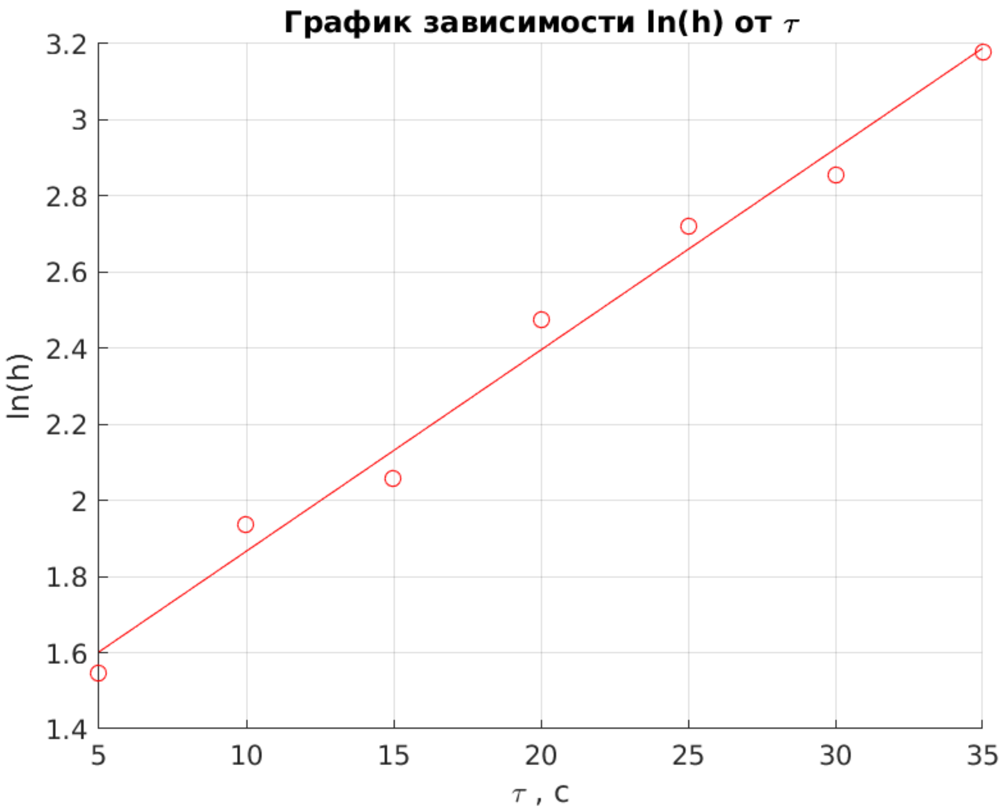
График зависимости ln(h) от τ
3.2
3
2.8
2.6
2.4
2.2
2
1.8
1.6
1.4
ln(h)
5
10
15
20
25
30
35
τ , с