Оглавление

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

I семестр

ТИПОВОЙ РАСЧЕТ

РЕШЕНИЕ ТИПОВЫХ ЗАДАЧ

Задача 1

Решение задачи основано на непосредственном использовании определения предела последовательности:

$$\lim_{n\to\infty} u_n = A \;\Leftrightarrow\; \forall\varepsilon > 0 \;\exists N(\varepsilon) : \forall n > N(\varepsilon) \;\Rightarrow\; |u_n - A| < \varepsilon.$$

Пример 1

С помощью определения предела последовательности показать, что последовательность $u_n = (2n-1)/(n+1)$ при $n \to \infty$ имеет своим пределом число 2. Найти целое значение N, начиная с которого $|u_n - A| < 10^{-2}$.

Решение

Рассмотрим неравенство

$$|u_n - 2| = \left|\frac{2n-1}{n+1} - 2\right| = \left|\frac{-3}{n+1}\right| < \varepsilon, \quad n - \text{натуральное},$$

откуда $n > \varepsilon/3 - 1$. Следовательно, $\forall\varepsilon > 0 \;\exists N(\varepsilon) = [3/\varepsilon - 1]$: $\forall n > N \;\Rightarrow$ $|u_n - 2| < \varepsilon$, где квадратные скобки обозначают целую часть числа. Т.о., число 2 является пределом последовательности. Пусть теперь $\varepsilon = 10^{-2}$. Тогда $N(1/100) = [3/0{,}01 - 1] = [300 - 1] = 299$.

Задача 2

При решении задач 2а и 2б рекомендуется пользоваться I и II замечательными пределами:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1, \qquad \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e.$$

Пример 2

Найти предел $A = \lim\limits_{x\to 0}(\cos 2x)^{\frac{1}{x^2}}$.

Решение

$$\lim_{x\to 0}(\cos 2x)^{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0}(1 + (\cos 2x - 1))^{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0}(1 - 2\sin^2 x)^{\frac{1}{x^2}} =$$

$$= \lim_{x\to 0}(1 - 2\sin^2 x)^{\frac{-1}{2\sin^2 x}\cdot\frac{-2\sin^2 x}{x^2}} = \lim_{x\to 0}\left[(1 - 2\sin^2 x)^{\frac{-1}{2\sin^2 x}}\right]^{\frac{-2\sin^2 x}{x^2}} = e^{-2}.$$

т.к. выражение в квадратной скобке стремится к числу e по I замечательному пределу, а выражение в показателе – к числу -2 по II замечательному пределу.

Задачи 3, 4

Эти задачи являются стандартными задачами дифференцирования. Для вычисления $y'(x)$ необходимо знать:

- производные основных элементарных функций;
- правила дифференцирования суммы, разности, произведения и частного;
- правило дифференцирования сложной функции (правило "цепочки").

Правило "цепочки"

Пусть сложная функция $y(x)$ задана цепочкой равенств:

$$y = f(u),\ u = g(t),\ t = p(x) \text{ или } y(x) = f(u(t(x)))$$

(цепочка может быть произвольной длины). В этом случае

$$y'(x) = \frac{df}{du} \cdot \frac{du}{dt} \cdot \frac{dt}{dx}. \tag{1}$$

Пример 3

Найти производную $y'(x)$:

$$y = \sin\left(\ln\left(\sqrt{1+x^2} - x\right)\right).$$

Решение

Полагаем $t = \sqrt{1+x^2} - x$, $u = \ln t$, $y = \sin u$. Согласно формуле (1) имеем

$$y'(x) = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \cos u \cdot \frac{1}{t} \cdot \left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} - 1\right) =$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \cdot \cos\left(\ln\left(\sqrt{1+x^2} - x\right)\right).$$

Можно не вводить промежуточные функции и сразу написать:

$$y' = \cos\left(\ln\left(\sqrt{1+x^2} - x\right)\right) \cdot \left(\ln\left(\sqrt{1+x^2} - x\right)\right)' =$$

продифференцировали синус, умножили на производную аргумента:

$$= \cos\left(\ln\left(\sqrt{1+x^2} - x\right)\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{1+x^2} - x} \cdot \left(\sqrt{1+x^2} - x\right)' =$$

продифференцировали логарифм и умножили на производную аргумента. Нашли производную аргумента логарифма:

$$\cos\left(\ln\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{1+x^2}-x}\cdot\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}-1\right)=$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\cdot\cos\left(\ln\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)\right).$$

Пример 4

Найти производную $y'(x)$:

$$y(x)=\arcsin\left(\sqrt{1-e^x}\right).$$

Решение

Имеем

$$y'=\frac{1}{\sqrt{1-(1-e^x)}}\cdot\left(\sqrt{1-e^x}\right)'=\frac{1}{\sqrt{e^x}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{1-e^x}}\cdot(1-e^x)'=-\frac{\sqrt{e^x}}{2\sqrt{1-e^x}}.$$

Задача 5

Данная задача связана с вычислением логарифмической производной. Пусть задана функция $y=f(x)$. Имеем:

$$\ln y=\ln f(x),\quad \frac{1}{y(x)}\cdot y'(x)=(\ln(f(x)))',$$

следовательно:

$$y'(x)=y(x)\cdot(\ln(f(x)))'. \tag{2}$$

Формула логарифмической производной упрощает нахождение производной, если функция $\ln(f(x))$ дифференцируется легче, чем исходная функция $f(x)$ ($f(x)$ содержит произведения, частное, степени и удобна для логарифмирования).

Пусть, например, функция задана в виде:

$$y=f(x)\equiv\frac{(f_1(x))^{a(x)}\,(f_2(x))^{b(x)}}{(f_3(x))^{c(x)}}.$$

В этом случае

$$\ln\left(f(x)\right)=a(x)\ln\left(f_1(x)\right)+b(x)\ln\left(f_2(x)\right)-c(x)\ln\left(f_3(x)\right)$$

и, согласно формуле (2),

$$y'=y(x)\left[a(x)\ln\left(f_1(x)\right)+b(x)\ln\left(f_2(x)\right)-c(x)\ln\left(f_3(x)\right)\right]'.$$

Дифференцировать каждое слагаемое внутри скобок проще, чем дифференцировать исходную функцию.

Пример 5

Найти производную функции

$$y = \frac{(1+x^2)^{2x} \cdot \sin^2 x}{\sqrt{1+\ln x}}.$$

Решение

Имеем $\qquad \ln y = 2x \ln\left(1+x^2\right) + \ln \sin^2 x - \frac{1}{2} \ln\left(1+\ln x\right);$

$$\frac{y'}{y} = 2\ln\left(1+x^2\right) + \frac{4x^2}{1+x^2} + 2\cdot\frac{\cos x}{\sin x} - \frac{1}{2\left(1+\ln x\right)} \cdot \frac{1}{x}.$$

Отсюда находится производная y'.

Задача 6

В этой задаче требуется найти производную функции, заданной параметрически. Пусть функция $y(x)$ задана параметрически:

$$\begin{cases} x = x(t); \\ y = y(t). \end{cases}$$

Для ее производной справедлива следующая формула:

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}. \tag{3}$$

Пример 6

Найти производную функции $y(x)$, заданной параметрически:

$$\begin{cases} x = \sin^4 t; \\ y = \cos^4 t. \end{cases}$$

Решение

Имеем:

$$x'_t = 4\sin^3 t \cdot \cos t; \quad y'_t = -4\cos^3 t \cdot \sin t.$$

По формуле (3) находим:

$$y'_x = \frac{-\,4\cos^3 t \cdot \sin t}{4\sin^3 t \cdot \cos t} = -\operatorname{ctg}^2 t.$$

Задача 7

Найти производную функции, заданной неявно. Пусть уравнение

$$F(x, y) = 0$$

определяет неявным образом некоторую дифференцируемую функцию $y(x)$. Для ее производной справедлива формула:

$$y'(x) = -\frac{F'_x(x,y)}{F'_y(x,y)}. \tag{4}$$

Здесь F'_x и F'_y производные функции $F(x,y)$ по переменной x и y соответственно (при дифференцировании по x переменная y считается постоянной и наоборот).

Пример 7

Найти производную $y'(x)$ неявной функции $y(x)$ определенной уравнением:

$$x^2y - \sin\left(x - y^3\right) - 5 = 0.$$

Решение

Имеем:

$$F(x,y) = x^2y - \sin\left(x - y^3\right) - 5;$$

$$F'_x = 2xy - \cos\left(x - y^3\right); \quad F'_y = x^2 - \cos\left(x - y^3\right) \cdot \left(-3y^2\right)$$

и по формуле (5) находим:

$$y' = -\frac{2xy - \cos(x - y^3)}{x^2 + 3y^2\cos(x - y^3)}.$$

Производную y' можно найти, не прибегая к формуле (4).

Пример 8

Найти производную y' функции, заданной неявно уравнением:

$$x^2y^3 - xy + \sin y = 0.$$

Решение

Функция $y(x)$ определяется исходным уравнением, поэтому, если подставить ее вместо y в левую часть равенства, получим тождество

$$x^2y^3(x) - xy(x) + \sin y(x) \equiv 0. \tag{5}$$

Продифференцируем левую часть равенства (5) по правилу дифференцирования сложной функции:

$$2xy^3(x) + 3x^2y^2(x) \cdot y'(x) - y(x) - xy'(x) + \cos y(x) \cdot y'(x) \equiv 0.$$

Отсюда легко находим y':

$$y' = \frac{y - 2xy^3}{3x^2y^2 - x + \cos y}.$$

Дифференцируя равенство еще раз, можно найти y'' и т.д.

Задачи 8, 9

Вычислить предел по правилу Лопиталя. Правило Лопиталя используется при вычислении пределов, содержащих неопределенности типов $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, а также неопределенностей, сводящиеся к указанным типам.

Пример 9

Найти предел $\quad A = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arcsin x^2}{\ln^2(1+x)}$.

Решение

Неопределенность типа $\frac{0}{0}$. Используем правило Лопиталя:

$$A = \lim_{x\to 0} \frac{\left(\arcsin x^2\right)'}{\left(\ln^2(1+x)\right)'} = \lim_{x\to 0} \frac{2x}{\sqrt{1-x^4}} \cdot \frac{(1+x)}{2\ln(1+x)} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{2(1+x)}{\sqrt{1-x^4}} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{x}{\ln(1+x)} = 2\lim_{x\to 0} \frac{x}{\ln(1+x)}.$$

Снова имеем неопределенность типа $\frac{0}{0}$. Повторно применяем правило Лопиталя:

$$A = 2\lim_{x\to 0} \frac{(x)'}{(\ln(1+x))'} = 2\lim_{x\to 0}(1+x) = 2.$$

Пример 10

Найти предел $\quad A = \lim\limits_{x\to +0} \dfrac{\ln x}{x^{-2}}$.

Решение

Неопределенность типа $\frac{\infty}{\infty}$. Применяем правило Лопиталя:

$$A = \lim_{x\to +0} \frac{(\ln x)'}{(x^{-2})'} = \lim_{x\to +0} \frac{-\,x^2}{2} = 0.$$

Пример 11

Найти предел $\quad A = \lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\sin x}\right)$.

Решение

Неопределенность типа $\infty - \infty$. Преобразуем к неопределенности типа $\frac{0}{0}$ и применим дважды правило Лопиталя:

$$A = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{x\sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{\sin x + x\cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{-\,\sin x}{2\cos x - x\sin x} = 0.$$

Пример 12

Найти предел $\quad A = \lim\limits_{x\to \infty} x \cdot \ln\left(\dfrac{1+x}{x}\right)$.

Решение
Неопределенность типа $0 \cdot \infty$. Преобразуем к неопределенности типа $\frac{0}{0}$ и применим правило Лопиталя:

$$A = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln\left(1+x^{-1}\right)}{x^{-1}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\left(1+x^{-1}\right)^{-1}\cdot\left(-x^{-2}\right)}{\left(-x^{-2}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{1}{1+x^{-1}} = 1.$$

Пример 13
Найти предел $\quad A = \lim\limits_{x\to 0} (\cos x)^{1/x}$.

Решение
Неопределенность типа 1^∞. Преобразуем к неопределенности типа $\frac{0}{0}$ и применим правило Лопиталя:

$$A = \lim_{x\to 0} e^{\ln(\cos x)/x} = e^B; \quad B = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(\cos x)}{x};$$

$$B = \lim_{x\to 0} \frac{-\operatorname{tg} x}{1} = 0 \;\Rightarrow\; A = e^0 = 1.$$

Задача 10
Разложить функцию по формуле Тейлора. Если $x_0 \neq 0$, полезно сделать замену $x - x_0 = t$ и далее воспользоваться разложениями основных элементарных функций.

Пример 14
Разложить по формуле Тейлора функцию $y = \dfrac{5x-8}{3x+12}$ в окрестности точки $x_0 = 2$ до $o((x-2)^4)$.

Решение
Делаем замену $x - 2 = t;\ x = 2 + t$:

$$y = \frac{10+5t-8}{6+3t+12} = \frac{2+5t}{18}\cdot\frac{1}{1+t/6}.$$

Используем стандартное разложение:

$$= \frac{2+5t}{18}\left(1 - \frac{t}{6} + \frac{t^2}{6^2} - \frac{t^3}{6^3} + \frac{t^4}{6^4} + o(t^4)\right) =$$

$$= \frac{1}{9} + \frac{7}{27}t - \frac{7}{162}t^2 + \frac{7}{972}t^3 - \frac{7}{5832}t^4 + o(t^4).$$

Возвращаясь к старой переменной, окончательно находим:

$$y = \frac{1}{9} + \frac{7}{27}(x-2) - \frac{7}{162}(x-2)^2 + \frac{7}{972}(x-2)^3 - \frac{7}{5832}(x-2)^4 +$$

$$+o\left((x-2)^4\right).$$

Пример 15

Разложить по формуле Тейлора функцию

$$y = (2x^2 - 3x)\cdot\ln(7x+8)$$

в окрестности точки $x_0 = -1$ до $o((x+1)^4)$.

Решение

Делаем замену $x+1=t;\ x=t-1$:

$$y = \left[2(t^2-2t+1)-3t+3\right]\cdot\ln(1+7t) = \left(2t^2-7t+5\right)\cdot\ln(1+7t).$$

Используем разложение для логарифма:

$$y = (2t^2-7t+5)\cdot\left[7t - \frac{7^2t^2}{2} + \frac{7^3t^3}{3} - \frac{7^4t^4}{4} + o\left(t^4\right)\right] =$$

$$= 35t - \frac{7^3}{2}t^2 + \frac{7^3\cdot 601}{6}t^3 - \frac{7^4\cdot 607}{12}t^4 + o\left(t^4\right);$$

Возвращаемся к переменной x:

$$y = 35(x+1) - \frac{7^3}{2}(x+1)^2 + \frac{7^3\cdot 601}{6}(x+1)^3 - \frac{7^4\cdot 607}{12}(x+1)^4 +$$

$$+o\left((x+1)^4\right).$$

Задачи 12, 13, 14, 15

Построить графики элементарных функций.

Пример 16

Построить график функции $\quad y = \dfrac{x^3+3x^2+15x+18}{x^2+5x+6}.$

Решение

Область определения: $x\neq -2;\ x\neq -3$ (нули знаменателя).

Функция имеет вид $y = P(x)/Q(x)$. Так как $P(-2) = -8 \neq 0$, $P(-3) = -27 \neq 0$, то прямые $x=-2$ и $x=-3$ являются вертикальными асимптотами. При этом значение функции стремится к $-\infty$ когда x стремится к -2 справа или к -3 слева (это легко определяется по знакам числителя и знаменателя в окрестности указанных точек). Аналогично, значение функции стремится к $+\infty$ когда x стремится к -2 слева и к -3 справа.

Поделив ("уголком") числитель на знаменатель, выделим целую часть дроби:

$$y = x - 2 + \frac{19x+30}{x^2+5x+6} \tag{6}$$

Отсюда видно, что прямая $y = x-2$ является наклонной асимптотой (так как при $x\to\infty$ дробная часть функции в формуле (6) стремится к нулю. Наклонную асимптоту можно найти и по стандартным формулам. Из формулы (6) следует, что график функции пересекает наклонную асимптоту в единственной точке: $x = -30/19 \approx -1,58$. Строим эскиз графика.

Положение экстремумов и точки перегиба уточним с помощью производных. Имеем:

$$y' = \frac{x^2(x^2+10x+18)}{(x^2+6x+6)^2}; \qquad y'' = \frac{x(38x^2+180x+216)}{(x^2+5x+6)^3}.$$

Из выражений для производных следует, что $x = 0$ - точка перегиба, в точке $x = -5+\sqrt{7} \approx -2,35$ функция достигает минимума (который, как легко вычислить, положителен), в точке $x = -5-\sqrt{7} \approx -7,64$ функция достигает максимума. Уточненный график функции представлен на рис.1.

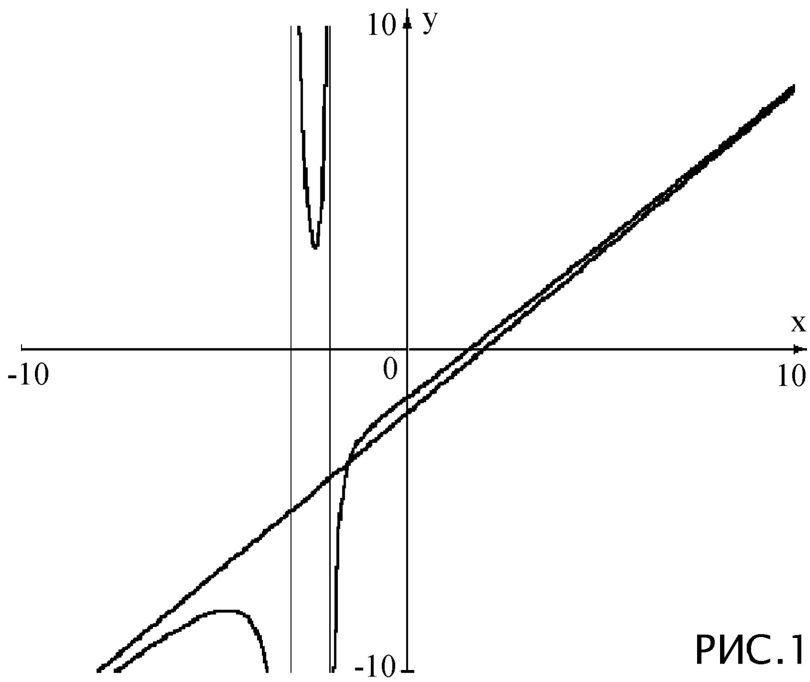

РИС.1

Пример 17

Построить график функции $y = x^3 \cdot \sqrt[5]{(x+2)^2}$.

Решение

Функция обращается в нуль в двух точках: $x = -2$; $x = 0$. При $x > 0$ функция положительна и монотонно растет. При больших положительных значениях x имеем:

$$y \approx x^3 \cdot x^{2/5} = x^{17/5}.$$

При $x < 0$ значения функции отрицательны. Отсюда, в частности, следует, что на интервале $(-2; 0)$ функция достигает минимума (который уточним с помощью производной). При больших отрицательных значениях x имеем

$$y \approx -|x|^{17/5}.$$

Делаем эскиз графика функции.

Далее, вычисляя производные:

$$y' = \frac{x^2}{5} \cdot (x+2)^{-3/5} \cdot (17x+30),$$

$$y'' = \frac{x}{5} \cdot (x+2)^{-8/5} \cdot \left(204x^2/5 + 144x + 120\right),$$

определяем положение экстремумов и точек перегиба. Из этих формул следует, что в точке $x = -30/17$ функция достигает минимума; $x = 0$ и $x = 5\left(-144 \pm \sqrt{1152}\right)/408$ - точки перегиба. В точке $x = -2$ производная функции $y'(x)$ обращается в бесконечность - касательная к графику в данной точке вертикальна.

Уточненный график функции приведен на рис. 2.

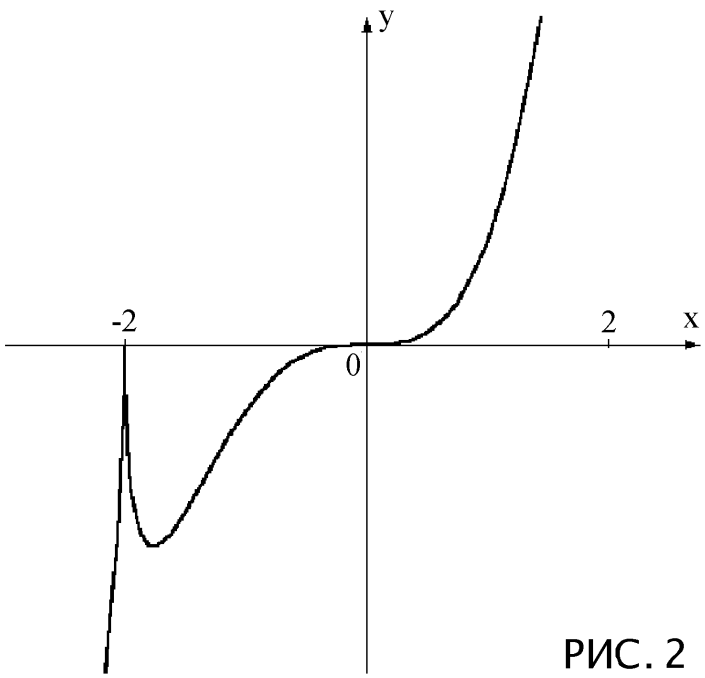

РИС. 2

Пример 18

Построить график функции: $y = \dfrac{e^{x-3}}{2x+7}$.

Решение

Прямая $x = -7/2$ - вертикальная асимптота. Используя правило Лопиталя, имеем:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{x-3}}{2x+7} = +\infty; \quad \lim_{x\to-\infty} \frac{e^{x-3}}{2x+7} = 0.$$

Функция имеет положительный знак при $x > -7/2$ и отрицательна при $x < -7/2$. Этих данных достаточно, чтобы нарисовать эскиз графика.

Вычислим производные и уточним положение экстремумов и точек перегиба:

$$y' = \frac{2x+5}{(2x+7)^2} \cdot e^{x-3}; \quad y'' = \frac{(4x^2+20x+29)}{(2x+7)^3} \cdot e^{x-3}.$$

Вторая производная нулей не имеет и меняет знак при переходе через вертикальную асимптоту. Точка $x = -5/2$ - минимум. График функции приведен на рис.3.

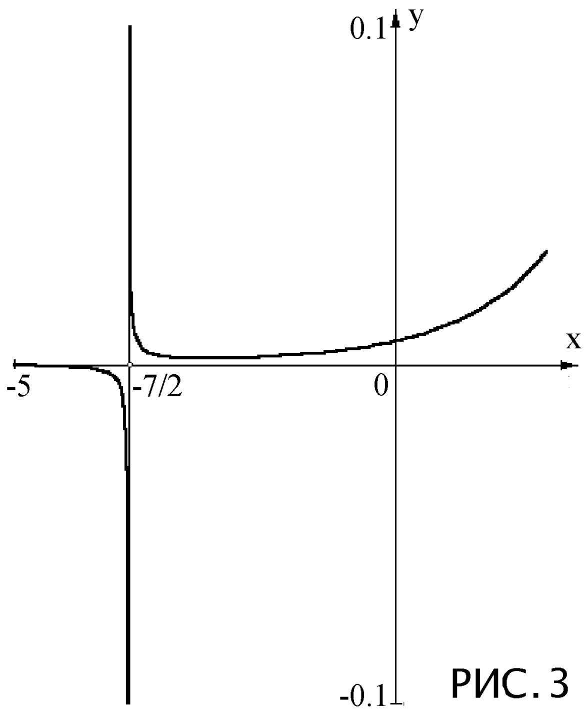

РИС. 3

Пример 19

Построить линию, заданную уравнением в полярных координатах:

$$\rho = 4\sin^2 3\varphi.$$

Решение

Используя свойства тригонометрических функций, имеем

$$\rho = 2\left(1 - \cos 6\varphi\right).$$

Следовательно, период функции равен $2\pi/6 = 60^\circ$. При возрастании угла от 0° до 30° значения функции возрастают от 0 до 4. При дальнейшем увеличении угла до 60° значения функции убывают до 0. На рис. 4 приведен график одного лепестка. Всего таких лепестков будет 6 (на рисунке они не указаны):

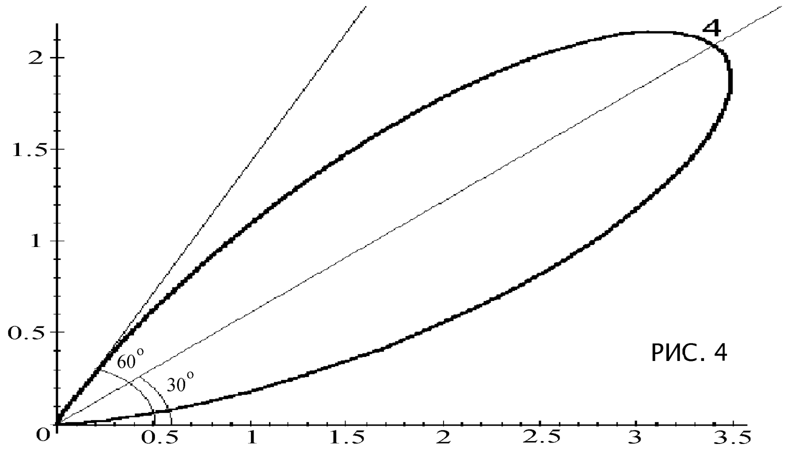

РИС. 4

Задачи 16,17

Вычислить приближенное значение функции. При решении этих задач следует использовать приближенную формулу

$$y(x_1) \approx y(x_0) + y'(x_0)(x_1 - x_0) \tag{7}$$

В некоторых вариантах указанных задач потребуются приближенные значения следующих логарифмов: $\ln 3 \approx 1,099$; $\ln 4 \approx 1,386$; $\ln 5 \approx 1,609$; $\ln 6 \approx 1,792$.

Пример 20

Вычислить приближенно $\sqrt[7]{130}$.

Решение

Положим $y(x) = \sqrt[7]{x}$; $x_0 = 128$; $x_1 = 130$. Имеем $y(x_0) = \sqrt[7]{128} = 2$; $y'(x) = \left(x^{-6/7}\right)/7$; $y'(x_0) = \left(128^{-6/7}\right)/7 = 1/448$. Наконец, по формуле (7) находим:

$$y(x_1) = \sqrt[7]{130} \approx 2 + \frac{1}{448}\cdot(130 - 128) = 2 + \frac{1}{224} \approx 2,004.$$

Пример 21

Вычислить приближенно $\operatorname{ctg} 48^\circ$.

Решение

Рассмотрим функцию $y(x) = \operatorname{ctg} x$. Перейдем к безразмерной переменной – от градусов к радианам. Выберем, соответственно, $x_0 = 45^\circ = \pi/4$; $x_1 = 48^\circ = 48\pi/180$. Найдем значения функции и ее производной:

$$y(x_0) = \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1;\ y'(x) = -\frac{1}{\sin^2 x};\ y'(x_0) = -\frac{1}{\sin^2 \pi/4} = -2.$$

Используя формулу для приближенных вычислений, получим:

$$\operatorname{ctg} 48^\circ = \operatorname{ctg}\frac{48\pi}{180} \approx 1 - 2\left(\frac{48\pi}{180} - \frac{\pi}{4}\right) = 1 - \frac{\pi}{30} \approx 0,9.$$

Задачи 18, 19

Вычислить частные производные. Эти задачи являются стандартными. При нахождении частной производной $\partial z/\partial x$ следует считать переменную y константой; аналогично при нахождении $\partial z/\partial y$ следует считать переменную x константой. Смешанные производные второго порядка определяются как повторные производные:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right); \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right).$$

При некоторых предположениях относительно функции $z(x, y)$ можно утверждать, что результат не зависит от порядка дифференцирования:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}. \tag{8}$$

Пример 22

Для функции $z = \ln\left(1 + \frac{x^2}{y^3}\right)$ вычислить смешанные производные $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ и убедиться, что они равны.

Решение

Вычисляем первые производные:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{1 + x^2/y^3} \cdot \frac{2x}{y^3} = \frac{2x}{x^2 + y^3}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{1 + x^2/y^3} \cdot \frac{-3x^2}{y^4} = \frac{-3x^2}{y\left(x^2 + y^3\right)}.$$

Дифференцируя первое равенство по y, а второе – по x, находим смешанные производные:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = -\frac{2x}{\left(x^2 + y^3\right)^2} \cdot 3y^2 = -\frac{6xy^2}{\left(x^2 + y^3\right)^2}.$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -\frac{6x}{y\left(x^2+y^3\right)} + \frac{3x^2}{y\left(x^2+y^3\right)^2} \cdot 2x = \frac{-6xy^2}{\left(x^2+y^3\right)^2}.$$

Убеждаемся, что равенство (8) выполнено.

Задача 20

Найти и исследовать точки экстремума функции нескольких переменных. Сначала из условия равенства нулю первых производных ищутся стационарные точки. Затем в этих точках вычисляем вторые производные и составляем из них матрицу. Находим угловые миноры; достаточным условием максимума является выполнение условий $\Delta_1 < 0$, $\Delta_2 > 0$, $\Delta_3 < 0$, минимума - $\Delta_1 > 0$, $\Delta_2 > 0$, $\Delta_3 > 0$.

Пример 23

Найти и исследовать точки экстремума функции
$u(x, y, z) = 5x^2 + y^2 + z^2 - 2xy + 2xz - yz - y$.

Решение

Найдем стационарные точки из условия

$$\begin{cases} \partial u/\partial x = 10x - 2y + 2z = 0 \\ \partial u/\partial y = 2y - 2x - z - 1 = 0 \\ \partial u/\partial z = 2z + 2x - y = 0 \end{cases}$$

Решая получившуюся систему уравнений, получим координаты стационарной точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$, $x_0 = 1/11, y_0 = 8/11, z_0 = 3/11$. В M_0 выполнено необходимое условие экстремума. Проверим выполнение достаточного условия экстремума. Применим критерий Сильвестра. Вычислим в M_0 вторые производные

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 10,\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2,\ \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 2,\ \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = -2,\ \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} = 2,\ \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} = -1,$$

и составим из них матрицу $A = \|a_{ij}\|$,

$$A = \begin{pmatrix} 10 & -2 & 2 \\ -2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Угловые миноры матрицы A

$$\Delta_1 = a_{11} = 10,\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 10 & -2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = 16,\ \Delta_3 = \det A = 22.$$

Т.к. $\Delta_1 > 0$, $\Delta_2 > 0$, $\Delta_3 > 0$, то в точке M_0 функция $u(x, y, z)$ имеет локальный минимум.

ПРАКТИЧЕСКИЕ ЗАДАНИЯ

ЗАДАЧА 1. С помощью определения предела последовательности показать, что данная последовательность u_n при $n \to \infty$ имеет своим пределом число A. Найти целое значение N, начиная с которого $|u_n - A| < \varepsilon$.

№	u_n	A	ε		№	u_n	A	ε
1	$\dfrac{7n-1}{n+1}$	7	10^{-2}		16	$\dfrac{2n}{1+n^2}$	0	10^{-1}
2	$\dfrac{4n^2+1}{3n^2+2}$	$\frac{4}{3}$	10^{-2}		17	$\dfrac{3n^3}{n^3-2}$	3	10^{-2}
3	$\dfrac{9-n^3}{1+2n^3}$	$-\frac{1}{2}$	10^{-2}		18	$\dfrac{4+2n}{1-3n}$	$-\frac{2}{3}$	10^{-2}
4	$\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n$	0	10^{-3}		19	$\dfrac{5n+15}{6+n}$	5	10^{-2}
5	$1+\dfrac{(-1)^n}{2n+1}$	1	10^{-2}		20	$\dfrac{3-n^2}{1+2n^2}$	$-\frac{1}{2}$	10^{-2}
6	$\dfrac{4n-3}{2n+1}$	2	10^{-3}		21	$\dfrac{7-n}{n+3}$	-1	10^{-2}
7	$\dfrac{1-2n^2}{2+4n^2}$	$-\frac{1}{2}$	10^{-2}		22	$\dfrac{3n^2+4}{2-n^2}$	-3	10^{-2}
8	$\dfrac{2n+(-1)^n}{n}$	2	10^{-2}		23	$-\dfrac{5+4n^3}{3+2n^3}$	-2	10^{-2}
9	$-\dfrac{5n}{n+1}$	-5	10^{-2}		24	$\left(\dfrac{1}{3}\right)^{2n}$	0	10^{-3}
10	$\dfrac{1}{\ln(n+1)}$	0	$\frac{1}{3}$		25	$3-\dfrac{(-1)^n}{n+5}$	3	10^{-2}
11	$\dfrac{n+1}{1-2n}$	$-\frac{1}{2}$	10^{-2}		26	$\dfrac{9n+7}{2n-3}$	$\frac{9}{2}$	10^{-2}
12	$\dfrac{2n+1}{3n-5}$	$\frac{2}{3}$	10^{-2}		27	$\dfrac{2+n^2}{4+2n^2}$	$\frac{1}{2}$	10^{-2}
13	$\dfrac{1-2n^2}{n^2+3}$	-2	10^{-2}		28	$\dfrac{-5n+(-1)^n}{2n+3}$	$-\frac{5}{2}$	10^{-2}
14	$\dfrac{3n^2}{2-n^2}$	-3	10^{-2}		29	$\dfrac{2}{\ln(3n+4)}$	0	$\frac{1}{4}$
15	$\dfrac{n}{3n-1}$	$\frac{1}{3}$	10^{-2}		30	$\left(-\dfrac{2}{7}\right)^n$	0	10^{-3}

ЗАДАЧА 2. Вычислить предел.

1	$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg}^2 x - \sin^2 x}{(1-\cos x)^2}$	2	$\lim\limits_{x\to \pi/2} (\sin x)^{\operatorname{tg}^2 x}$
3	$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} 2x - 2\operatorname{tg} x}{\sin 2x - 2\sin x}$	4	$\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{\cos x}{\cos 2x}\right)^{1/x^2}$
5	$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{4\operatorname{tg} x - \sin 4x}{\operatorname{tg} x - \sin x}$	6	$\lim\limits_{x\to \pi/4} (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} 2x}$
7	$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} 2x - 2\sin x}{x^3}$	8	$\lim\limits_{x\to \infty} \left(\dfrac{2x-1}{2x+3}\right)^{x}$
9	$\lim\limits_{x\to \pi/4} \dfrac{\operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x}{\pi/4 - x}$	10	$\lim\limits_{x\to \pi/2} (2-\sin x)^{\operatorname{tg}^2 x}$
11	$\lim\limits_{x\to \pi/4} (\cos x - \sin x)\operatorname{tg} 2x$	12	$\lim\limits_{x\to 0} (3^x + x)^{1/x}$
13	$\lim\limits_{x\to -\pi/4} \dfrac{\operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x}{\pi/4 + x}$	14	$\lim\limits_{x\to 0} (2\cos x - 1)^{\operatorname{ctg}^2 x}$
15	$\lim\limits_{x\to \pi/6} \dfrac{1 - 2\sin x}{1 - 2\cos 2x}$	16	$\lim\limits_{x\to \infty} \left(\dfrac{3x+2}{3x+1}\right)^{x}$
17	$\lim\limits_{x\to \pi/6} \dfrac{\sin x - \cos 2x}{\pi/6 - x}$	18	$\lim\limits_{x\to 0} \left(\operatorname{tg}(\dfrac{\pi}{4} + x)\right)^{\operatorname{ctg} x}$
19	$\lim\limits_{x\to \pi/3} \dfrac{1 - 2\cos x}{\pi - 3x}$	20	$\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1+\operatorname{tg} x}{1+\sin x}\right)^{1/x^3}$
21	$\lim\limits_{x\to \pi/2} (1-\sin x)\operatorname{tg}^2 x$	22	$\lim\limits_{x\to 0} (2-\cos x)^{1/sinx}$
23	$\lim\limits_{x\to \pi/3} \dfrac{\sqrt{3} - 2\sin x}{\pi/3 - x}$	24	$\lim\limits_{x\to \infty} \left(\dfrac{x^2+2x+1}{x^2+2x-2}\right)^{x^2}$
25	$\lim\limits_{x\to \pi/4} \dfrac{1 - \sin 2x}{(1-\sqrt{2}\sin x)^2}$	26	$\lim\limits_{x\to \pi/4} \left(2 - \operatorname{tg}^2 x\right)^{\frac{1}{x-\pi/4}}$
27	$\lim\limits_{x\to \pi/2} (\sec x - \operatorname{tg} x)$	28	$\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{3x^2+2x+1}{3x^2+2x-1}\right)^{x}$
29	$\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1+2x}{1+\sin x}\right)^{2/x}$	30	$\lim\limits_{x\to 0} (\cos x)^{1/x^2}$

ЗАДАЧА 3. Вычислить производную $y'(x)$.

№	$y(x)$	№	$y(x)$
1	$\ln\left(\cos\left(\frac{x-1}{x}\right)\right)$	16	$\arcsin\left(\frac{\sqrt{x}}{2}\right)$
2	$x\sin\left(\ln x-\frac{\pi}{4}\right)$	17	$\operatorname{arctg}\left(e^{x}+e^{-x}\right)$
3	$\operatorname{arctg}\left(\ln\left(\frac{1}{x}\right)\right)$	18	$\arcsin\sqrt{x-1}$
4	$\frac{x}{\ln^2 x}$	19	$\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{x-1}{2}}$
5	$\ln\left(\ln\left(3-2x^3\right)\right)$	20	$\operatorname{tg}^2\sqrt{3x}$
6	$2^{\operatorname{ctg}(1/x)}$	21	$\frac{\operatorname{tg}^2 x}{2}+\ln(\cos x)$
7	$\sqrt{e^{\sin^2 x}}$	22	$\ln(\sin x)+\frac{\operatorname{ctg}^2 x}{2}-\frac{\operatorname{ctg}^4 x}{4}$
8	$\sqrt{\cos^2 x-2\sin^2 x}$	23	$\frac{2}{3}(\ln x-5)\sqrt{1+\ln x}$
9	$\sqrt{3\sin^2 x+5\cos^2 x}$	24	$\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}$
10	$\frac{\cos^3 x}{15}(3\cos^2 x-5)$	25	$\ln^3(2x+\sqrt{3})$
11	$\frac{x^2}{\ln x}$	26	$\sqrt[3]{x+\sqrt{x}}$
12	$\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}$	27	$\frac{1+\cos 2x}{1-\cos 2x}$
13	$\frac{3}{4}\sqrt[3]{(1+\ln x)^4}$	28	$\ln(\sin x)+\frac{1}{2}\operatorname{ctg}^2 x$
14	$\frac{1}{3}\operatorname{arctg}(3\operatorname{tg} x)$	29	$\frac{\operatorname{tg}^5 x}{5}+\frac{\operatorname{tg}^7 x}{7}$
15	$e^{\operatorname{tg}^2(3x)}$	30	$\frac{1}{2}\arcsin\frac{x^2}{\sqrt{3}}$

ЗАДАЧА 4. Вычислить производную $y'(x)$.

№	$y(x)$	№	$y(x)$
1	$\dfrac{1+2x^2}{x\sqrt{1+x^2}}$	16	$\dfrac{\sqrt[3]{1+x^3}}{x^2}\left(x^2-3\right)$
2	$\dfrac{\sqrt{1+x^2}}{3}\left(x^2-2\right)$	17	$\dfrac{1}{\sqrt{2}}\ln\dfrac{\sqrt{2+2x}-\sqrt{2-x}}{\sqrt{2+2x}+\sqrt{2-x}}$
3	$\dfrac{\sqrt{1+x^2}}{3x^3}\left(2x^2-1\right)$	18	$\dfrac{1}{3}\operatorname{arctg}\left(\dfrac{5\operatorname{tg}x+4}{3}\right)$
4	$\operatorname{arctg}\left(\dfrac{x}{2}+\sqrt{\dfrac{x^2}{4}+x-1}\right)$	19	$\dfrac{1}{2}\arcsin\dfrac{8x+3}{\sqrt{41}}$
5	$\dfrac{1}{\sqrt{3}}\ln\left(\sqrt{3}x+\sqrt{3x^2-2}\right)$	20	$\ln\sqrt[3]{\dfrac{x+2}{\cos^2 x}}$
6	$\dfrac{2}{35}(1+x)^{5/2}(5x-2)$	21	$\ln\sqrt{\dfrac{1+x}{\operatorname{tg}x}}$
7	$\left(1+2x^2\right)^{5/2}\cdot\dfrac{5x^2-1}{70}$	22	$\operatorname{arctg}^2\dfrac{1}{\sqrt{2x}}$
8	$\dfrac{x-2}{4\sqrt{4x-x^2}}$	23	$\ln\sqrt[4]{\dfrac{1+4x}{\sin^3 x}}$
9	$\ln\left(x+\dfrac{1}{2}+\sqrt{x^2+x+1}\right)$	24	$\arcsin\dfrac{x-1}{\sqrt{x}}$
10	$\dfrac{2}{15}(3x-4)(2+x)^{3/2}$	25	$\ln 5(1+3\operatorname{tg}x)$
11	$\dfrac{4}{3}\left(\sqrt[4]{x^3}-\ln\left(1+\sqrt[4]{x^3}\right)\right)$	26	$\ln\left(\dfrac{(x-2)^5}{(x+1)^3}\right)$
12	$\ln\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1}$	27	$\dfrac{2(10+3x)}{9\sqrt{5+3x}}$
13	$\dfrac{3x-9}{10}\sqrt[3]{(x+2)^2}$	28	$\dfrac{4}{21}(3e^x-4)(e^x+1)^{3/4}$
14	$\dfrac{20x+32}{45}(x-2)\sqrt[4]{x-2}$	29	$2\sqrt{x+1}(\ln(x+1)-2)$
15	$\dfrac{1}{\sqrt{2}}\ln\dfrac{\sqrt{x^2-x+2}+x-\sqrt{2}}{\sqrt{x^2-x+2}+x+\sqrt{2}}$	30	$\dfrac{1}{24}\ln\dfrac{x^3}{x^3+8}$

ЗАДАЧА 5. Вычислить логарифмическую производную $y'(x)$.

№	$y(x)$	№	$y(x)$	№	$y(x)$
1	$\dfrac{x\sqrt{x^2+1}}{\sqrt[3]{x^3+1}}$	11	$(\operatorname{arctg} x)^x$	21	$x^{1/x}$
2	$x\sqrt[3]{\dfrac{x^2}{x^2+1}}$	12	$(\sin 3x)^x$	22	$\sqrt{\cos x}\cdot 2^{\sqrt{\cos x}}$
3	$\dfrac{x-1}{\sqrt{x(2-x)}}$	13	$\dfrac{\sqrt{x-1}}{\sqrt[3]{(x+2)^2}\sqrt{(x+3)^3}}$	23	$(\operatorname{arctg} x)^{\ln x}$
4	$x^{\cos x}$	14	$\dfrac{(x-2)^3}{\sqrt{(x-1)^5(x-3)^{11}}}$	24	$(\sin x)^{\ln x}$
5	$(\sin x)^{1/x}$	15	$\sqrt{\dfrac{x(x-1)}{x-2}}$	25	$\left(1+x^2\right)^{\arccos x}$
6	$x^{\operatorname{tg} x}$	16	$(\operatorname{tg} x)^{e^x}$	26	$\sqrt[4]{x^3\sqrt[3]{x^2(x+1)}}$
7	$(\operatorname{tg} x)^{\cos x}$	17	$(\ln\sin 3x)^x$	27	$\dfrac{\sqrt[4]{x^2+3x+1}}{\sqrt[3]{x^2+4}}$
8	$(\arcsin x)^{x^2}$	18	$(1+x^3)^{x^3}$	28	$\left(x^2+1\right)^{\sqrt{x}}$
9	$(1+x^2)^{x^2}$	19	$(\cos x)^{\sin x}$	29	$x^6\left(x^2+1\right)^{10}(x^3+1)$
10	$(\cos x)^x$	20	$x^{\sqrt{x}}$	30	$\dfrac{3}{2}\sqrt[3]{\dfrac{1+x}{1-x}}$

ЗАДАЧА 6. Вычислить производную $y'(x)$ функции, заданной параметрически.

№	$x(t), y(t)$	№	$x(t), y(t)$	№	$x(t), y(t)$
1	$\begin{cases} x=\dfrac{2\sin t}{1+3\cos t} \\ y=\dfrac{5\cos t}{1+3\cos t}\end{cases}$	11	$\begin{cases} x=\dfrac{1}{t^2-1} \\ y=\dfrac{t^2+1}{t+2}\end{cases}$	21	$\begin{cases} x=2t-t^3 \\ y=2t^2\end{cases}$
2	$\begin{cases} x=\ln\left(1+t^2\right) \\ y=t-\operatorname{arctg} t\end{cases}$	12	$\begin{cases} x=\dfrac{6t}{1+t^3} \\ y=\dfrac{6t^2}{1+t^3}\end{cases}$	22	$\begin{cases} x=\dfrac{\cos^3 t}{\sqrt{\cos 2t}} \\ y=\dfrac{\sin^3 t}{\sqrt{\cos 2t}}\end{cases}$

№	$x(t), y(t)$	№	$x(t), y(t)$	№	$x(t), y(t)$
3	$\begin{cases} x = e^{-t^2} \\ y = \operatorname{arctg}(2t+1) \end{cases}$	13	$\begin{cases} x = \sqrt{t} \\ y = \sqrt[3]{t} \end{cases}$	23	$\begin{cases} x = \dfrac{t^3+2}{t^2+1} \\ y = \dfrac{t^3}{t^2+1} \end{cases}$
4	$\begin{cases} x = 4\operatorname{tg}^2\left(\dfrac{t}{2}\right) \\ y = 2\sin t + 3\cos t \end{cases}$	14	$\begin{cases} x = e^t \\ y = \arcsin t \end{cases}$	24	$\begin{cases} x = t^2 e^{-t} \\ y = t^2 e^{-2t} \end{cases}$
5	$\begin{cases} x = \arcsin(t^2-1) \\ y = \arccos 2t \end{cases}$	15	$\begin{cases} x = 2\cos^2 t \\ y = 3\sin^2 t \end{cases}$	25	$\begin{cases} x = 2\left(t+\dfrac{1}{t}\right) \\ y = t+\dfrac{3}{t}+\dfrac{1}{t^2} \end{cases}$
6	$\begin{cases} x = 5(\cos t + t\sin t) \\ y = 5(\sin t - t\cos t) \end{cases}$	16	$\begin{cases} x = \ln t \\ y = \dfrac{1}{2}\left(t+\dfrac{1}{t}\right) \end{cases}$	26	$\begin{cases} x = \ln t \\ y = \sin^2 t \end{cases}$
7	$\begin{cases} x = \arccos\dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}} \\ y = \arcsin\dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}} \end{cases}$	17	$\begin{cases} x = \dfrac{6t}{1+t^2} \\ y = \dfrac{3\left(1-t^2\right)}{1+t^2} \end{cases}$	27	$\begin{cases} x = e^t\cos t \\ y = e^t\sin t \end{cases}$
8	$\begin{cases} x = \ln\operatorname{tg}\left(\dfrac{t}{2}\right)+\cos t \\ y = t\sin t + \cos t \end{cases}$	18	$\begin{cases} x = \sqrt{1+t^2} \\ y = \dfrac{t-1}{\sqrt{1+t^2}} \end{cases}$	28	$\begin{cases} x = \dfrac{1}{t+1} \\ y = \left(\dfrac{t}{t+1}\right)^2 \end{cases}$
9	$\begin{cases} x = t^2+2t \\ y = t^2 - \ln t^2 \end{cases}$	19	$\begin{cases} x = \arcsin t \\ y = \sqrt{1-t^2} \end{cases}$	29	$\begin{cases} x = \dfrac{1}{t+1} \\ y = \dfrac{t}{t+1} \end{cases}$
10	$\begin{cases} x = \dfrac{t^3}{t+1} \\ y = \dfrac{t^2}{t+1} \end{cases}$	20	$\begin{cases} x = 5\cos^3 t \\ y = 4\sin^3 t \end{cases}$	30	$\begin{cases} x = t+\ln\cos t \\ y = t-\ln\sin t \end{cases}$

ЗАДАЧА 7. Вычислить производную $y'(x)$ функции, заданной неявно уравнением $F(x,y)=0$.

№	$F(x,y)$	№	$F(x,y)$
1	$\ln x + e^{-y/x} + 5$	16	$x - \sqrt[3]{y^3+x} - 4$
2	$x^{2/3} + y^{2/3} - 10$	17	$y^3 - \dfrac{x-y}{x+y} - 6$
3	$y - \sqrt{4x - x^2 + 10y - 4} + 3$	18	$ye^{x-1} - e^y + 9$
4	$e^x - e^y + x - y - 6$	19	$y^2 - x - \ln\dfrac{y}{x} - 4$
5	$x - \sqrt[3]{2x^2y^2 + 5x + y - 5} + 9$	20	$x + y - 3\sqrt[3]{x-y} + 11$
6	$\dfrac{3}{\sqrt{xy}} - \sqrt{\dfrac{x}{y}} - \sqrt{\dfrac{y}{x}} - 8 = 0$	21	$y - \sqrt[3]{x + 10y - 6 + \dfrac{4y+5}{x}}$
7	$\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x} - \ln\sqrt{x^2+y^2} + 2$	22	$x - \sqrt{2y^3 - \dfrac{x^2}{y} + \dfrac{y}{x}} - 3$
8	$e^x - e^y - xy$	23	$x - \sqrt{1 + 2xy + y^2 - 8y^3} + 3$
9	$y - \sqrt{2x - x^2 - 5xy - y}$	24	$\dfrac{x}{y} - \dfrac{\sin x}{\sin y} + 3$
10	$2\cos^2(x+y) + xy - 9$	25	$\sqrt{x+y} - y\sqrt{x-y} - 7$
11	$3\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x} - \sqrt{x^2+y^2} + 5$	26	$\ln(x+y) - \dfrac{8}{\sqrt{x+y^2}}$
12	$\ln 5y + \dfrac{x}{y} + 7$	27	$\sin\left(y - x^2\right) - \ln\left(y^2 - x\right)$
13	$x - \operatorname{arctg}(x+y) + 1$	28	$e^x + e^y - 2^{xy} - 2$
14	$y - \sqrt[3]{\dfrac{2y-1}{x}} + 12$	29	$x^{y^2} + y^2\ln x - 4$
15	$e^x\sin y - e^{-y}\cos x$	30	$x^2\sin y + y^3\cos x - 2x$

ЗАДАЧА 8. Найти предел, используя правило Лопиталя.

1	$\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{e^{\ln x} - \ln(x+e-1)}{\operatorname{arctg} 2(x-1)}$	16	$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(2-\cos 2x)}{x^2}$
2	$\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\cos\left(\dfrac{\pi}{2}\cdot e^{x-1}\right)}{e^{\sin(1-x)}-1}$	17	$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{5^{\operatorname{tg} 3x}-1}{2^{\sin(x/2)}-1}$
3	$\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\ln\left(\sqrt{1+4x}-2\right)}{x-2}$	18	$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln\left(3+x^2\right)-\ln 3}{1-\cos 5x}$
4	$\lim\limits_{x\to \pi/4} \dfrac{\ln \operatorname{tg} x}{\pi/4 - x}$	19	$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1-\operatorname{tg} 8x}-1}{\ln(1+\sin x)}$
5	$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x}\ln\left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{8+x}}+\dfrac{1}{\sqrt{4+x}}\right)$	20	$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{3x^2}-e^{x^2}}{1-\cos x}$
6	$\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\ln\left(\sqrt[3]{2x+2}-1\right)}{\ln\left(\sqrt{x+1}-1\right)}$	21	$\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\operatorname{tg} \pi x}{4^x-4}$
7	$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1-\operatorname{arctg} 5x)}{\sin 3x}$	22	$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-e^{\sin x}}{1-2^{\operatorname{tg} x}}$
8	$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{\operatorname{tg} x}-1-x}{x^2}$	23	$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(3-2\cos x)}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x}-1}$
9	$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{x^2}-\cos x}{x^2}$	24	$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{2-\cos x}-1}{2^{\arcsin x}-1}$
10	$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{1/\cos x}-e^{\cos x}}{\ln \cos x}$	25	$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin^2(x/2)}{\ln\left(1+2x^2\right)}$
11	$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3^x-2^x}{\ln\left(\sqrt{9+x}-\sqrt{4+x}\right)}$	26	$\lim\limits_{x\to \pi/2} \dfrac{\ln \sin x}{\sin^2(\pi/2-x)}$
12	$\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{2^x-x^2}{2-x}$	27	$\lim\limits_{x\to \pi/4} \dfrac{\ln \operatorname{tg} x}{1-\operatorname{ctg} x}$
13	$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln\cos 2x}{\ln\cos 3x}$	28	$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln\left(1-\operatorname{tg}^2(x/5)\right)}{\sqrt{1+\sin^2 3x}-1}$
14	$\lim\limits_{x\to \pi/4} \dfrac{e^{\sin x}-e^{\cos x}}{\pi-4x}$	29	$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3^{3x}-3^{-x}}{e^{\operatorname{tg} x}-1}$
15	$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-e^{-\operatorname{tg} x}}{\sin 2x}$	30	$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{2x}-e^{-3x}}{\operatorname{tg} 6x}$

ЗАДАЧА 9. Найти предел, используя правило Лопиталя.

1	$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x^2}-\operatorname{ctg}^2 x\right)$	16	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\pi-2\operatorname{arctg}x}{e^{3/x}-1}$
2	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\pi/x}{\operatorname{ctg}(\pi x/2)}$	17	$\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\ln(x-3)}{e^x-e^3}$
3	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}}{\ln(1+x)}$	18	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{3x}-3x-1}{\sin^2 5x}$
4	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3}{x-\sin x}$	19	$\lim\limits_{x\to 0}(\cos 2x)^{3/x^2}$
5	$\lim\limits_{x\to\pi/2}\left(\dfrac{x}{\operatorname{ctg}x}-\dfrac{\pi}{2\cos x}\right)$	20	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2+2\cos x-2}{x^4}$
6	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(e^x-e^{-x})\sin x}{x^2}$	21	$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln\left(1+x^2\right)}{\ln(\pi/2-\operatorname{arctg}x)}$
7	$\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\sin^2 x\right)^{1/\operatorname{tg}^2 x}$	22	$\lim\limits_{x\to+\infty}(\ln 2x)^{1/\ln x}$
8	$\lim\limits_{x\to+0}(\ln(x+e))^{1/x}$	23	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+2x+2x^2-e^{2x}}{x^3}$
9	$\lim\limits_{x\to\pi/4}\dfrac{\sec^2 x-2\operatorname{tg}x}{1+\cos 4x}$	24	$\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\operatorname{tg}(\pi x/2)$
10	$\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{2-2\sqrt{x}}-\dfrac{1}{3-3\sqrt[3]{x}}\right)$	25	$\lim\limits_{x\to+\infty}(x+2^x)^{1/x}$
11	$\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{\ln(1+x)^{(1+x)}-x}{x^2}$	26	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^x+2^{-x}-2}{x^2}$
12	$\lim\limits_{x\to 1-0}(1-x)^{\cos(\pi x/2)}$	27	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1-2x}+x-1}{x^2}$
13	$\lim\limits_{x\to\pi/2-0}(\pi-2x)^{\cos x}$	28	$\lim\limits_{x\to 0}(x\operatorname{ctg}x)^{-1/x^2}$
14	$\lim\limits_{x\to 1}(\operatorname{tg}(\pi x/4))^{\operatorname{tg}(\pi x/2)}$	29	$\lim\limits_{x\to+0}(\operatorname{ctg}x)^{1/\ln x}$
15	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x^2+\sin 3x-3xe^x}{\operatorname{arctg}x-\sin x}$	30	$\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{\ln x}{1+2\ln\sin x}$

ЗАДАЧА 10. Функцию $y = f(x)$ разложить по формуле Тейлора в окрестности точки x_0 до $o((x-x_0)^n)$.

№	$f(x)$	x_0	n	№	$f(x)$	x_0	n
1	$\dfrac{2x+3}{4x-5}$	2	4	16	$\cos^2(2x+6)$	-4	5
2	$(x+2)\ln(3x-7)$	3	4	17	$(x+2)\sqrt{3x+4}$	4	4
3	$\sin^2(2x+1)$	-1	5	18	$(x-7)e^{4x-2}$	1	5
4	$(x-2)\cos(x-3)$	2	5	19	$\dfrac{3x+2}{x-6}$	5	4
5	$\sqrt[3]{3x+5}$	1	4	20	$(2x-9)\ln(4x+1)$	1	4
6	$(2x+5)e^{2x+3}$	-2	4	21	$\sin^2(3x-2)$	2	5
7	$\dfrac{3x-4}{x-5}$	2	4	22	$(3x+4)\cos(2x-1)$	3	5
8	$\left(x^2+x\right)\ln(2x+1)$	0	5	23	$\sqrt[3]{2x-5}$	16	4
9	$\sin(4x-3)$	1	5	24	$\left(2x^2+5\right)e^{3x-2}$	1	5
10	$\cos^2(x+2)$	-1	5	25	$\dfrac{x^2-4}{2x+1}$	-1	4
11	$\sqrt[4]{4x+12}$	1	4	26	$\left(x^2+7x\right)\ln(4x+3)$	1	4
12	$(x+2)e^{x^2+2x}$	-1	4	27	$(x+2)\sin(x+2)$	2	5
13	$\dfrac{x^2-4}{2x+1}$	2	4	28	$(2x+1)\cos(3x-5)$	2	5
14	$x\ln\sqrt[3]{5-2x}$	2	4	29	$\sqrt[4]{x+12}$	4	4
15	$(2x-3)\sin(x+3)$	-2	5	30	$(-x+4)e^{x+3}$	-2	5

ЗАДАЧА 11. Вычислить предел двумя способами:
а) используя разложение по формуле Тейлора;
б) с помощью правила Лопиталя.

1	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x+e^{-x}-2}{1-\cos x}$	16	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)+x^2/2-\sin x}{x^3}$
2	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2e^x-e^{-x}-3x-1}{x^2}$	17	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x-1-2x^2+e^{-2x}}{x^3}$
3	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{6\ln(1+x)-6x-2x^3}{e^{-x}+x-1}$	18	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{1+3x/2-\sqrt{1+3x}}$
4	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{1-x}-\cos x-x}{x^2}$	19	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3}{\ln(1+x)+e^{-x}-1}$
5	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)\ln(x+1)-x}{x^2}$	20	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-e^{-x}-3x/2}{x^2}$
6	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2+2\cos x-2}{x^4}$	21	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3}{\sin 2x+2\ln(1-x)+x^2}$
7	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-\cos x-2x}{x^2}$	22	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1-x^2}+\ln(1+2x)-1-2x}{x^2}$
8	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1-2x}+x-1}{1-\cos x}$	23	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x^2+\ln(1+2x)-2x}{x^3}$
9	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-1-2x-2x^2}{x^3}$	24	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{\sqrt{1+2x^2}-e^{-2x}-2x}$
10	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3}{x^2/2+\sin x+\ln(1-x)}$	25	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}-2x}{x^3}$
11	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+3x^2}-e^{-x}-x}{x^2}$	26	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{e^{-2x}+2\sin x-1}$
12	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2/2+x+\ln(1-x)}{2x^3}$	27	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3}{\ln(1-2x)+e^{2x}-1}$
13	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{e^x-1-x-x^2/2}$	28	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3}{e^{2x}-e^{-2x}-4x}$
14	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3}{\ln(1-2x)+2x+2x^2}$	29	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x^2}-\ln(1+x)+x-1}{x^2}$
15	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{\sqrt{1-2x^2}-e^x+x}$	30	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-\sin x-1-x^2/2}{x^3}$

ЗАДАЧА 12. Построить график функции $y = \dfrac{ax^3 + bx^2 + cx + d}{x^2 + px + q}$.

№	a	b	c	d	p	q	№	a	b	c	d	p	q
1	1	1	0	−1	0	−1	16	2	−1	−1	6	1	−6
2	1	2	0	−2	0	−1	17	−2	1	−1	−2	−1	−1
3	1	1	0	−4	0	−4	18	3	3	−3	−6	−1	−2
4	1	1	−3	2	−3	2	19	−3	−4	−4	24	1	−6
5	1	1	−1	−2	−1	−2	20	1	1	1	−2	1	−2
6	−1	0	0	0	2	1	21	−1	2	2	−4	1	−2
7	1	−2	0	0	−2	1	22	−1	−1	−3	−2	3	2
8	−1	0	0	0	2	1	23	2	−1	3	−2	−3	2
9	1	−1	0	0	2	1	24	2	1	−4	3	−4	3
10	1	3	3	1	−2	1	25	−2	−1	2	3	−2	−3
11	−1	2	0	−6	0	−3	26	−2	−4	−8	12	2	−3
12	−2	2	0	−6	0	−3	27	−2	−3	−12	−9	4	3
13	2	−1	0	2	0	−2	28	−2	−2	10	−12	−5	6
14	−3	2	0	−6	0	−3	29	3	4	−4	−24	−1	−6
15	3	−2	0	2	0	−1	30	1	3	15	18	5	6

ЗАДАЧА 13. Построить график функции $y(x)$:

№	$y(x)$	№	$y(x)$	№	$y(x)$	№	$y(x)$
1	$\sqrt[3]{x^2-1}$	2	$x\sqrt[3]{x+3}$	3	$\sqrt[3]{(x^2-1)^2}$	4	$x^2\sqrt[3]{x+1}$
5	$\sqrt[3]{(x^2-2)^4}$	6	$x\sqrt[5]{x+1}$	7	$\sqrt[3]{(x^2-1)^5}$	8	$x^2\sqrt[5]{x+2}$
9	$\sqrt[4]{(x^2-9)^3}$	10	$x^{1/2}\sqrt{x+1}$	11	$\sqrt[4]{(x^2-4)^3}$	12	$x^{1/2}\sqrt{(x+1)^3}$
13	$\sqrt[5]{(x^2-3)^4}$	14	$x\sqrt{x-1}$	15	$\sqrt[5]{(x^2-1)^3}$	16	$x^2\sqrt{x-2}$
17	$\sqrt[5]{(x^2-1)^2}$	18	$x\sqrt{1-x}$	19	$\sqrt[5]{(x^2-1)^6}$	20	$\sqrt[4]{x^2-1}$
21	$\sqrt[6]{(x^2-4)^7}$	22	$\sqrt[4]{x^3(x+1)}$	23	$\sqrt[6]{(x^2-9)^5}$	24	$\sqrt[4]{x(x-2)^2}$
25	$\sqrt[7]{(x^2-4)^6}$	26	$(x-1)\sqrt[3]{x^2}$	27	$\sqrt[7]{(x^2-9)^8}$	28	$\sqrt[3]{x^2-3x}$
29	$\sqrt[9]{(x^2-16)^5}$	30	$x(x^2-1)^{-1/3}$				

ЗАДАЧА 14. Построить график функции.

1	$y = (2x+3)e^{-2x-2}$	16	$y = e^x \cos x$
2	$y = \sqrt[3]{x^2}e^{-x}$	17	$y = \dfrac{e^{2x+2}}{2x+2}$
3	$y = xe^{-x^2}$	18	$y = \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$
4	$y = \sqrt{x^3}\ln x$	19	$y = (3-x)e^{x-2}$
5	$y = \dfrac{x}{\ln x}$	20	$y = \ln\dfrac{1+x}{1-x}$
6	$y = xe^{-x}$	21	$y = e^{1/x^2}$
7	$y = e^{1/x} - x$	22	$y = xe^{1/(2-x)}$
8	$y = x^2 - \ln\lvert x\rvert$	23	$y = (2x+5)e^{-2x-4}$
9	$y = e^{1/\left(x^2-4x+4\right)}$	24	$y = 2\ln\left(1-\dfrac{4}{x}\right)-3$
10	$y = (1+x)e^{1/x}$	25	$y = 4\ln\dfrac{x}{x+2}+1$
11	$y = e^{-x}\sin x$	26	$y = x\left(2-\ln x\right)^2$
12	$y = 3\ln\dfrac{x}{x-3}-1$	27	$y = x^3e^{-x}$
13	$y = \dfrac{e^{2-x}}{2-x}$	28	$y = \dfrac{\sqrt{x}}{\ln x}$
14	$y = 3-3\ln\dfrac{x}{x+4}$	29	$y = 2\ln\dfrac{x+3}{x}-3$
15	$y = xe^{1/(x-1)}$	30	$y = \dfrac{e^{x-3}}{2x+7}$

ЗАДАЧА 15. Построить линию, заданную уравнением $\rho = f(\varphi)$ в полярных координатах $(\rho \geq 0,\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi)$.

№	$f(\varphi)$	№	$f(\varphi)$	№	$f(\varphi)$
1	$\cos(3\varphi+\pi/4)$	11	$\sqrt{\cos(\pi+\varphi)}$	21	$4(1-\cos 4\varphi)$
2	$1+\cos\varphi$	12	$7(1+\sin\varphi)$	22	$2+\cos\varphi$
3	$2+\sin\varphi$	13	$4\cos 2\varphi$	23	$2\sin\varphi$
4	$4\,\mathrm{tg}(\varphi/2)$	14	$\sin(\varphi/2)$	24	$\cos(\varphi/2)$
5	$2\cos 3\varphi$	15	$2\sin 3\varphi$	25	$5(2-\cos\varphi)$
6	$3\sqrt{\cos 2\varphi}$	16	$3(2-\sin\varphi)$	26	$\sqrt{\sin(-2\varphi)}$
7	$1+\cos^2 2\varphi$	17	$2+\sin^2 2\varphi$	27	$2\,\mathrm{tg}\,\varphi$
8	$5(1-\cos 2\varphi)$	18	$1-\sin 2\varphi$	28	$3\cos^2 2\varphi$
9	$2(1+\sin 3\varphi)$	19	$\sqrt{4\cos\varphi}$	29	$3+2\cos\varphi$
10	$\sin^2 2\varphi$	20	$5(1+\cos 3\varphi)$	30	$4\sin^2 3\varphi$

ЗАДАЧИ 16,17. Вычислить приближенно указанные величины.

№	Задача16	Задача17	№	Задача16	Задача17
1	$\sqrt{10}$	$\log_6 37$	16	$\mathrm{ctg}\,46^\circ$	$\sqrt[4]{257}$
2	$\log_3 10$	$\mathrm{tg}\,44^\circ$	17	$\sqrt{99}$	$5^{2.1}$
3	$\mathrm{tg}\,46^\circ$	$\sqrt{37}$	18	$4^{1.8}$	$\mathrm{arcctg}\,0.9$
4	$\sqrt[3]{28}$	$3^{3.2}$	19	$\mathrm{arcctg}\,0.1$	$\sqrt[4]{255}$
5	$3^{2.1}$	$\mathrm{arctg}\,0.9$	20	$\sqrt[3]{63}$	$\sin 27^\circ$
6	$\mathrm{arctg}\,0.1$	$\sqrt{35}$	21	$\mathrm{ctg}\,47^\circ$	$\log_4 257$
7	$\sqrt[4]{82}$	$\sin 29^\circ$	22	$\log_5 124$	$\sqrt[4]{626}$
8	$\sin 31^\circ$	$\log_6 35$	23	$\sqrt[3]{126}$	$5^{1.9}$
9	$\log_3 8$	$\sqrt{50}$	24	$4^{3.1}$	$\sin 26^\circ$
10	$\sqrt{8}$	$3^{2.8}$	25	$\mathrm{ctg}\,44^\circ$	$\sqrt[4]{624}$
11	$3^{1.9}$	$\sin 28^\circ$	26	$\sqrt[3]{124}$	$5^{2.8}$
12	$\cos 61^\circ$	$\sqrt{48}$	27	$5^{3.2}$	$\log_4 255$
13	$\sqrt{17}$	$5^{2.9}$	28	$\log_6 217$	$\sqrt[4]{83}$
14	$3^{2.2}$	$\log_3 28$	29	$\sqrt[3]{29}$	$\log_5 626$
15	$\log_4 17$	$\sqrt{63}$	30	$\log_3 82$	$\cos 63^\circ$

ЗАДАЧА 18. Вычислить частные производные первого порядка.

№	$z=f(x,y)$	№	$z=f(x,y)$
1	$z=x^3+y^3+3x/y$	16	$z=\ln(1+x/y)$
2	$z=\sqrt{x^2-y^2}$	17	$z=\cos(y+\sin x)$
3	$z=\operatorname{arctg}\left(\dfrac{x+y}{1-xy}\right)$	18	$z=\ln\operatorname{tg}(y/x)$
4	$z=\sin(x+\cos y)$	19	$z=xy\sin(xy)$
5	$z=x^2\ln(x+y)$	20	$z=x^4\cos^2 y$
6	$z=e^{x/y}$	21	$z=e^{\sin(y/x)}$
7	$z=\ln\cos(y/x)$	22	$z=\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$
8	$z=\ln\operatorname{tg}(x-y)$	23	$z=x\cos(x+y)$
9	$z=e^{\left(x^3+y^2\right)^2}$	24	$z=e^x\cos y$
10	$z=x^3+4x^2y^2-y^4$	25	$z=x^3+2y^2-2y^3x^2$
11	$z=x\sin(2x+3y)$	26	$z=y^x$
12	$z=\cos\left(x^2\right)/y$	27	$z=\ln\operatorname{tg}(x/y)$
13	$z=\ln\left(x^2+y\right)$	28	$z=x^3\sin y+y^3\cos x$
14	$z=xy+y/x$	29	$z=\operatorname{tg}\left(y^2/x\right)$
15	$z=x^2\sin^4 y$	30	$z=y\ln\left(x^2-y^2\right)$

ЗАДАЧА 19. Вычислить смешанные производные второго порядка и проверить, что они равны.

№	$z=f(x,y)$	№	$z=f(x,y)$
1	$z=e^{xy}(x^2+y^2)$	16	$z=2x^2y+3xy^2+x^3$
2	$z=\arcsin\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$	17	$z=x^2/y^2-y/x$
3	$z=\left(x^2+y^2\right)\cdot e^{x+y}$	18	$z=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$
4	$z=x\ln(x^3y^2)$	19	$z=\sqrt{2xy+y^2}$
5	$z=\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$	20	$z=y\ln\left(x^2-y^2\right)$
6	$z=\operatorname{arctg}\left(\dfrac{y}{1+x^2}\right)$	21	$z=\operatorname{arctg}(y/x)+\operatorname{arcctg}(x/y)$
№	$z=f(x,y)$	№	$z=f(x,y)$
7	$z=\dfrac{xy}{x+y}$	22	$z=e^x(\cos y+x\sin y)$
8	$z=e^x(x\sin y+y^2)$	23	$z=x^y$
9	$z=\dfrac{x+y}{x-y}$	24	$z=x\ln(y/x)$
10	$z=\operatorname{arcctg}\left(x/y^2\right)$	25	$z=e^{x+y}(x\cos y+y\sin x)$
11	$z=\sin\left(x^2\right)/y$	26	$z=\ln\left(x^2+xy+y^2\right)$
12	$z=x\operatorname{arctg}\left(\dfrac{y}{y-x}\right)$	27	$z=\sin\left(x^2-y^3\right)$
13	$z=\operatorname{tg}\left(x^2/y\right)$	28	$z=e^{3x^2+2y^2-xy}$
14	$z=\operatorname{arctg}\left(\dfrac{x+y}{1-xy}\right)$	29	$z=xy+x/y$
15	$z=\ln\sqrt{x^2+y^2}$	30	$z=xy\sin\left(x-y^2\right)$

ЗАДАЧА 20. Найти и исследовать точки экстремума функции.

1	$u = 2x^2 + y^2 + z^2 - xy + 2z - 3x + 4y$
2	$u = x^2 + 3y^2 + z^2 - xz - 2x + 3y$
3	$u = 3xy + 5xz - 8yz - 9x^2 - 6y^2 - 11z^2$
4	$u = yz - 2xy - 4x^2 - 3y^2 - z^2 - 8x$
5	$u = x^2 + y^2 + 2z^2 + yz + 2z - 3y$
6	$u = 2x^2 + \frac{3}{2}y^2 + z^2 - xy + 2xz + yz - y + 2z$
7	$u = xz + yz - 2xy - 5x^2 - y^2 - 3z^2 + 6z$
8	$u = 2x^2 + y^2 + 3z^2 + xy + xz - 4x - 2y + z$
9	$u = x^2 + \frac{3}{2}y^2 + 2z^2 + xy + xz - 4x - 2y + z$
10	$u = \frac{1}{2}xy + xz - 2yz - x^2 - y^2 - 5z^2 - 2x + 4y$
11	$u = 2x^2 + y^2 + \frac{3}{2}z^2 - xz + 2xy + yz - 3y$
12	$u = 5x^2 + y^2 + 5z^2 + 2xy - xz - \frac{1}{2}yz - 10x$
13	$u = 5x^2 + y^2 + 5z^2 + 2xy - xz - yz - 4x + 2y$
14	$u = xy + xz - 2yz - 4x^2 - y^2 - 5z^2 - 2y$
15	$u = xy - 2x^2 - y^2 - z^2 - 2z + x - 4y$
16	$u = xz - x^2 - 3y^2 - z^2 + x - 6y + z$
17	$u = 2x^2 + y^2 + 3z^2 + 2xz - 4y + 2x$
18	$u = 2yz - 2xy - 3x^2 - 4y^2 - 5z^2 + 6x$
19	$u = x^2 + 5y^2 + z^2 + 2xy - xz - yz - 10y$
20	$u = x^2 + xy + 2y^2 + 4yz + 5z^2 - 4z$
21	$u = 2xz + 4yz - 2xy - 2x^2 - 5y^2 - 5z^2 - 4x$
22	$u = 2xy + 2xz - 5x^2 - 6y^2 - 4z^2 - 8z$
23	$u = 3x^2 + 4y^2 + 5z^2 + 2xy - 2yz - 8y$
24	$u = 4x^2 + 6y^2 + 5z^2 - 2xz - 2yz + 10z$
25	$u = 9x^2 + 6y^2 + 11z^2 - 3xy - 5xz + 8yz$
26	$u = x^2 + 17y^2 + 3z^2 + 2xy - xz - 7yz$
27	$u = xz + 7yz - 2xy - x^2 - 17y^2 - 3z^2$
28	$u = 3xy + 5xz - 8yz - 9x^2 - 6y^2 - 11z^2$
29	$u = 2x^2 + y^2 + 3z^2 + xy + xz - 4x - 2y + z$
30	$u = 5x^2 + y^2 + z^2 + 2xy - xz - \frac{1}{2}yz - 10x$

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ВОПРОСЫ К ЭКЗАМЕНУ ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ

1. Определение предела последовательности. Подпоследовательность, частичный предел.
2. Критерий Коши. Свойства сходящихся последовательностей. Теорема о пределе промежуточной последовательности.
3. Определение предела функции. Теорема о пределе промежуточной функции. Первый замечательный предел.
4. Бесконечно малые функции. Теорема о связи бесконечно малых и бесконечно больших функций.
5. Теорема о пределе произведения бесконечно малой и ограниченной функций.
6. Второй замечательный предел. Раскрытие неопределенностей 0^0, ∞^0, 1^∞.
7. Сравнение бесконечно малых. Эквивалентность бесконечно малых. Основные эквивалентности.
8. Теорема о разности эквивалентных бесконечно малых. Теорема о замене эквивалентности в пределе отношения.
9. Непрерывность функции в точке. Теорема о непрерывности арифметических действий, о непрерывности сложной функции.
10. Непрерывность функции на отрезке. Свойства функций, непрерывных на отрезке.
11. Точки разрыва и их классификация.
12. Производная, ее геометрический и механический смысл.
13. Теорема о связи непрерывности и дифференцируемости.
14. Арифметические действия с производными.
15. Таблица производных.
16. Производные сложной и обратной функций.

17. Дифференциал, его связь с производной, геометрический смысл, инвариантность.
18. Теорема Ролля, ее геометрический смысл.
19. Теорема Лагранжа, ее геометрический смысл. Теорема Коши.
20. Правило Лопиталя.
21. Многочлен Тейлора, формула Тейлора.
22. Остаточный член формулы Тейлора в формах Пеано и Лагранжа.
23. Локальный экстремум функции одного переменного. Необходимое и достаточное условия экстремума.
24. Геометрический смысл второй производной. Точки перегиба.
25. Асимптоты графика функции. Существование наклонной асимптоты.
26. Частные производные функции нескольких переменных. Теорема о равенстве смешанных производных.
27. Дифференцируемость функции нескольких переменных. Дифференциал.
28. Локальный экстремум функции нескольких переменных. Необходимое условие экстремума.

Вопросы к экзамену могут быть уточнены и дополнены лектором потока.